

N° d'ordre : 2584

50376 -
1999 -
215

THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

Spécialité : ELECTRONIQUE

Par

KENMEI NGANGUEM II LOUIS BERTRAND



**« MISE EN ŒUVRE D'UNE METHODE D'ELEMENTS FINIS A ELEMENTS
D'ARÊTES EN DEUX ET TROIS DIMENSIONS. APPLICATIONS AUX LIGNES DE
TOPOLOGIES COMPLEXES POUR CIRCUITS INTEGRES MONOLITHIQUES
MICRO-ONDES ET AUX INTERCONNEXIONS SUR CIRCUIT SILICIUM »**

Soutenu le 14 octobre 1999 devant la commission d'examen :

Mr M. CHIVE	Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille	Président
Mr C. LEGRAND	Professeur à L'Université du Littoral côte d'Opale	Rapporteur
Mr P. PRIBETICH	Professeur à l'Université de Bourgogne	Rapporteur
Mr P. KENNIS	Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille	Directeur de Thèse
Mr D. DESCHACHT	Directeur de Recherches CNRS LIRM Montpellier	Examineur
Mr J.F. LEGIER	Maître de Conférences à l'Université des Sciences et Technologies de Lille	Examineur
Mr E. PALECZNY	Maître de Conférences à l'Université des Sciences et Technologies de Lille	Examineur

A la mémoire de mon père,

A mon fils Quentin,

Ce travail a été effectué au sein de l'Institut d'Electronique et de Micro-électronique du Nord (IEMN) dirigé par Monsieur le Professeur Georges SALMER.

Je désire avant tout remercier Monsieur le Professeur M. CHIVE, Directeur de l'Ecole Doctorale SPI, qui me fait l'honneur de présider la commission d'examen.

Je remercie également Monsieur C. LEGRAND, Professeur à l'Université du Littoral côte d'Opale, et Monsieur P. PRIBETICH, Professeur à l'Université de Bourgogne, pour l'honneur qu'ils me font de cautionner ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur D. DESCHACHT, Directeur de Recherches CNRS au Laboratoire d'Informatique de Robotique et de Micro-électronique de Montpellier, pour l'intérêt qu'il porte à ce travail en acceptant de participer à ce jury.

Monsieur P. KENNIS, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, a assuré la direction de ce travail. Je lui témoigne ma profonde reconnaissance pour la qualité de ses conseils et la rigueur scientifique dont il a su me faire profiter.

Monsieur J.F. LEGIER, Maître de Conférences à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, participe à ce jury. Je lui exprime mes sincères remerciements pour toute l'aide efficace qu'il m'a apportée dans la rédaction de ce manuscrit. Je reste également sensible à sa rigueur scientifique, et aussi aux conseils qu'il m'a prodigués au cours de ces années.

Monsieur E. PALE CZNY, Maître de Conférences à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, participe à ce jury. Je lui suis reconnaissant et lui exprime ma gratitude pour toutes les discussions fructueuses que nous avons eues.

J'adresse aux membres de l'équipe « Electromagnétisme des Circuits » anciens et nouveaux, ma reconnaissance pour le bon climat qu'ils ont su instaurer tout au long de ces années. Ils s'agit des Maîtres de Conférences : C. SEGUINOT, F. HURET, des Doctorants : L. KADRI, M. ARIF, P.A. FALL, S. ROBILLARD, M. HELAL, P. PANNIER, Y.

DELPLANQUE, et sans oublier J.F. CARPENTIER, C. DELABIE, D. MARTEL, A. ELGHAZI, et M. FRYZIEL.

Je remercie Monsieur J.P. DEHORTER pour la qualité et le soin qu'il a apporté à la reproduction de ce mémoire.

Sommaire

Introduction générale-----	1
Bibliographie de l'introduction -----	7

Chapitre I : Généralité sur la méthode des éléments finis

Introduction-----	10
I.1. Les étapes de la méthode-----	13
I.1.1. Description générale des équations différentielles	
avec valeurs aux limites-----	13
I.1.2. Mise sous forme intégrale des équations-----	14
I.1.2.1. La méthode des résidus pondérés-----	14
I.1.2.2. Mise en œuvre d'une fonctionnelle-----	15
I.1.3. Discrétisation des formes intégrales-----	17
I.1.3.1. Approximation des fonctions \mathbf{u} -----	17
I.1.3.2. La forme intégrale de Galerkin discrétisée-----	20
I.2. Formulation en éléments finis des équations de Maxwell-----	23
I.2.1. Equation de propagation-----	23
I.2.2. Présentation des différentes formulations existantes-----	27
I.2.2.1. Formulation basée sur l'équation transverse modifiée : ETM	27
I.2.2.2. Formulation basée sur les équations transverse et longitudinale :	
ETL-----	30
I.2.2.3. Formulation avec fonction de pénalité : ETLFP-----	33
I.2.2.4. Formulation basée sur les équations transverse et longitudinale	
avec contrainte de la divergence nulle : ETLD-----	34
I.2.2.5. Formulation basée sur l'équation transverse : FET-----	35
I.3 : Conclusion : Récapitulatif concernant les différentes formulations, les systèmes	
matriciels obtenus et quelques spécificités-----	36

Bibliographie du chapitre I-----	40
Chapitre II Présentation des éléments à vecteurs tangentiels	
Introduction-----	42
II.1. Position du problème-----	43
II.2. Formulation intégrale-----	45
II.3. Les conditions aux limites et de continuité-----	48
II.4. Discrétisation des formes intégrales et calcul sur une maille élémentaire-----	51
II.5. Construction des éléments de Lagrange, analyse nodale, espaces de référence et solutions Parasites-----	53
II.5.1. Construction des éléments de type Lagrange-----	53
II.5.2. Calcul des fonctions de Lagrange et espace de référence-----	57
II.5.3. Description des champs électriques par les éléments à variables nodales de Lagrange en régime statique et solutions parasites-----	64
II.6. Les éléments tangentiels ou éléments d'arêtes-----	67
II.6.1. Élément tangentiel d'ordre zéro-----	69
II.6.2. Élément tangentiel du premier ordre-----	72
II.6.2.1. Discrétisation des formes intégrales sur une maille élémentaire--	79
II.6.2.2. Assemblage des matrices élémentaires-----	80
II.7. Calcul des pertes métalliques par le biais de l'impédance de surface-----	89
II.8. Résolution numérique-----	92
II.8.1. Méthode d'Arnoldi-----	96
II.8.2. Méthode de la puissance itérée-----	99
II.9. Détermination de l'impédance caractéristique d'une ligne de transmission-----	101
II.10. Conclusion-----	104
Bibliographie du chapitre II-----	106

Chapitre III Validation et Applications

Introduction-----	110
III.1. Validation du code de calcul-----	113
III.1.1. Préambule-----	113
III.1.2. Condition d'obtention des solutions issues de notre code-----	119
III.1.3. Validation du code de calcul-----	123
III.1.3.1. Formulation avec impédance de surface : notre code de calcul, HFSS, les mesures-----	127
III.1.3.2. Formulation avec maillage dans les métallisations : comparaison avec les relevés expérimentaux -----	135
III.1.4. Remarques concernant la phase de validation-----	144
III.2. Etude de lignes de topologies particulières-----	147
III.2.1. La ligne coplanaire avec conducteur central en forme de « Té »-----	149
III.2.2. La ligne coplanaire à ruban suspendu-----	160
III.2.3. La ligne ultra compacte -----	167
III.3. Etude des interconnexions dans les circuits intégrés logiques réalisés sur silicium ---	177
III.3.1. Introduction-----	177
III.3.2. Analyse Electromagnétique des Interconnexions-----	180
III.3.2.1 Préambule :L'analyse traditionnelle -----	180
III.3.2.2. L'analyse électromagnétique : modèle d'étude pour les problèmes liés aux interconnexions -----	182
III.3.2.3. L'analyse électromagnétique : principe de l'Analyse Electromagnétique dans le domaine temporel -----	183

III.3.2.3.1. L'analyse électromagnétique : détermination des caractéristiques de propagation de la connexion électrique -----	184
III.3.2.3.2. L'analyse électromagnétique : forme du signal d'entrée et son expression dans le domaine fréquentiel -----	186
III.3.2.3.3. L'analyse électromagnétique : analyse fréquentielle du circuit incluant les charges à l'entrée et en sortie de la ligne d'interconnexion -----	191
III.3.2.3.4. L'analyse électromagnétique : détermination du signal en sortie de ligne dans le domaine temporel -----	196
III.3.2.3.5. L'analyse électromagnétique : calcul des caractéristiques temporelles, retard de propagation et temps de commutation-----	196
III.3.3. Quelques résultats issus de l'analyse électromagnétique des Interconnexions-----	197
III.3.3.1. Comparaison avec le modèle électrique distribué RC pour une interconnexion de section $0.18 \mu\text{m}^2$ -----	197
III.3.3.2. Modèle RC et Modèle RLC-----	201
III.3.4. Conclusion-----	209
Bibliographie chapitre III-----	212
Chapitre IV Eléments d'arêtes 3D	
Introduction-----	218

IV.1. L'équation d'onde-----	221
IV.2. La formulation intégrale-----	223
IV.3. Discrétisation de la forme intégrale par les éléments d'arêtes et prise en compte des conditions aux accès par la méthode des éléments transfinis-----	225
IV.3.1. Élément d'arête tétraédrique-----	225
IV.3.2. Prise en compte des conditions aux limites-----	231
IV.3.3. Discrétisation par éléments tétraédriques et système matriciel-----	235
IV.4. La phase de validation : un exemple de résultat-----	237
IV.4.1. La structure étudiée -----	237
IV.4.2. Un exemple de résultat-----	239
Bibliographie chapitre IV-----	243
Conclusion générale-----	245
Annexe I -----	250
Annexe II -----	253
Annexe III -----	255
Annexe IV -----	258
Bibliographie personnelle -----	261

INTRODUCTION GENERALE

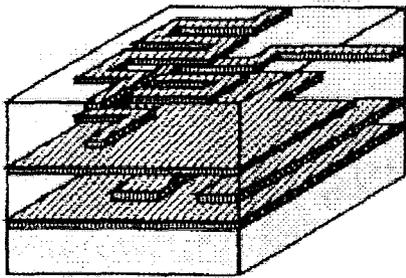


Figure 1-a : structure multiniveaux horizontale

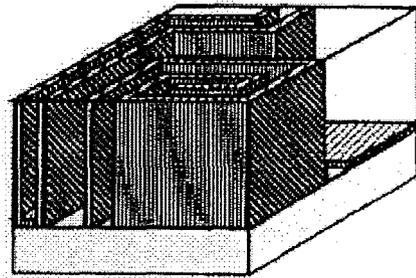
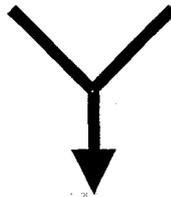
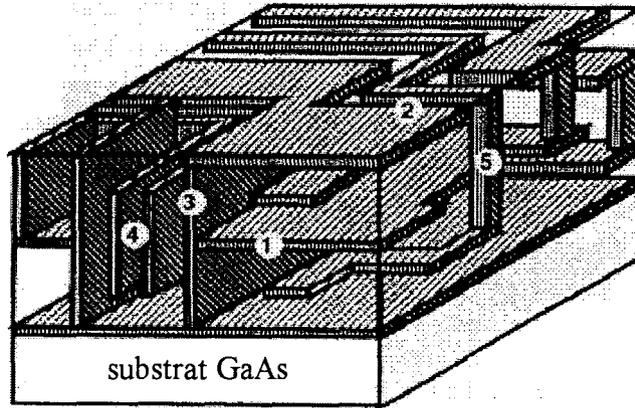


Figure 1-b : structure multiniveaux verticale



3 : blindage vertical
 4 : couplage entre lignes verticales
 5 : 'via' tubulaire



1 : blindage horizontal
 2 : couplage entre lignes horizontales

Figure 1-c : structure multiniveaux en 3 dimensions

Nous allons aborder le troisième millénaire avec de fantastiques perspectives de développement de l'électronique analogique mais surtout numérique, sur des porteuses microondes et certainement dans un futur très proche sur un support optique intégré où se côtoieront fonctions numériques, microondes et optiques. Mais est-il vraiment besoin de s'en convaincre ? Une simple lecture des travaux publiés lors du symposium « IEEE MTT » du mois de juin 1999, congrès annuel de référence dans le domaine de l'électronique des systèmes micro-ondes, met nettement en évidence ces évolutions.

Le besoin de communications de plus en plus rapides nécessite une incessante course vers l'accroissement des fréquences porteuses compte tenu de l'augmentation des débits d'information et de l'encombrement spectral que requièrent les messages à transmettre.

On parle pour les systèmes futurs de téraoctets par seconde alors que les débits d'information s'expriment encore en mégabits et en gigabits par seconde [1], [2]. Les systèmes de communication sans fil, les capteurs sans contact, les dispositifs de télémétrie, les radars de courte ou grande distance, anticollisions ou non, seront de plus en plus présents dans notre environnement, et beaucoup l'ont compris.

Cette avancée nécessaire et souhaitée ne peut se faire que si le concepteur de systèmes et par voie de conséquence de circuits électroniques microondes intégrés dispose de tous les outils pour mener à bien son projet, ou encore décide de les créer. Par outils, nous entendons le développement de processus technologiques innovants pour la confection de circuits intégrés, mais aussi la création de logiciels d'aide à la conception. Nous incluons dans cette plateforme logicielle les codes de calculs électromagnétiques basés sur des méthodes d'équations intégrales, de différences finies dans le domaine temporel, de méthode des lignes et

d'éléments finis pour ne parler que de ce qui nous préoccupe, ainsi que des logiciels experts pour le suivi et le contrôle de processus technologiques très pointus de fabrication.

Il est clair que les progrès réalisés, durant cette dernière décennie, dans le domaine de l'électronique haute et très haute fréquence, numérique ou non, sont en partie redevables aux maîtres des processus technologiques qui touchent à l'infiniment petit ainsi qu'à l'émergence puis au développement de nouvelles structures de guidage des ondes, de nouvelles techniques de connexion, d'interconnexion et de mise en boîtier (packaging) [3], [4], [5].

Ces progrès sont aussi liés, pour ceux qui sont en charge de concevoir des logiciels de conception linéaire microonde, à la très forte montée en puissance des moyens de calculs informatiques et à la baisse des coûts. A cela, n'omettons pas non plus de signaler une amélioration notable des techniques d'analyse numérique, et notamment celles de stockage et de résolution des systèmes matriciels de grande taille, systèmes auxquels nous aboutissons toujours en électromagnétisme.

Les besoins de l'électronique moderne sont confrontés à de nombreux défis dont l'un est la miniaturisation des fonctions. Derrière cette contrainte se profilent l'augmentation des fréquences de travail, la réduction des tensions d'alimentation pour une plus faible consommation, un accroissement du nombre des connexions à condition, bien sûr, d'en maîtriser la fabrication. La stratégie de miniaturisation des fonctions ne peut pas s'appuyer uniquement sur la réduction de la surface des composants. Il est nécessaire, comme l'illustrent les figures 1a et 1b, d'orienter la conception du circuit intégré microonde sur une approche multiniveaux donc planaires des fonctions passives (le plan horizontal) ; fonctions que l'on reliera dans une seconde étape (le plan vertical) par connexions électriques (un pilier ou un via hole) ou par couplage électromagnétique. Bien entendu, on pourra aussi isoler les fonctions entre elles pour éviter les phénomènes de diaphonie au moyen d'écrans métalliques.

L'ensemble des ces propos est illustré figure 1c. Cette technique, articulée sur la confection de métallisations plus hautes que larges, met aussi en œuvre une superposition de couches diélectriques élémentaires pour aboutir à des niveaux de 10 micromètres d'épaisseur chacun. Ceci a été publié pour la première fois en 1995 et a été élaboré dans les centres de recherche dépendant du ministère des télécommunications japonais pour les besoins des communications mobiles [6]. A ce stade de fabrication, les métallisations ne possèdent plus la forme rectangulaire classique. Comme l'illustre la figure2, les rubans métalliques sont en forme de U , et sont plus hauts que larges [7].

Cet exemple de structure de propagation, qui n'est pas académique il faut le souligner, rend inopérantes un grand nombre de méthodes mises au point en électromagnétisme, avec pour objectif de déterminer constantes de phase et d'atténuation, impédance caractéristique et cartes des champs. En effet, dans la plupart des cas, les structures de propagation sont modélisées à partir d'un empilement de couches diélectriques homogènes où les métallisations, en général parfaites, sont d'épaisseurs très faibles devant celles des autres couches ou tout simplement du substrat. D'un point de vue électromagnétique, la présence d'une métallisation est souvent introduite au moyen d'une relation locale liant la densité de courant dans le ruban au champ électrique, et ce, au moyen d'une impédance de surface. Dans ce cas, le ruban est considéré d'épaisseur nulle (la valeur finie de l'épaisseur, bien quelle soit faible, apparaissant implicitement dans la formulation analytique de l'expression de l'impédance de surface). On comprendra que ceci n'est plus possible dès lors que l'épaisseur de métallisation est du même ordre de grandeur que le substrat ou encore que la couche diélectrique qui la contient comme c'est le cas, aussi, pour les interconnexions dans les circuits VLSI. Signalons enfin que le volume occupé par les métallisations n'est plus négligeable en regard de celui dédié aux couches de polyimide ou de silice, et de surcroît que

la forme de ces métallisations se complexifie avec la miniaturisation croissante des circuits (forme en U, I, T, **Trapézoïdale**) [8]. Dans ce contexte, les caractéristiques des matériaux doivent être prises en compte par le biais de leurs conductivités et tangentes d'angle de pertes ainsi que leurs anisotropies. Nous venons implicitement de traduire le cahier des charges du logiciel de simulation électromagnétique qu'il nous faudra mettre au point, hormis bien évidemment notre volonté d'étudier les structures en volume, donc en **trois dimensions**, et non plus uniquement en **deux dimensions** au travers de la section droite d'un guide uniforme.

Ce travail s'inscrit dans une stratégie d'équipe dont l'objectif réside dans l'étude et le développement du plus grand nombre de méthodes et des codes de calcul correspondants pour la modélisation électromagnétique de structures complexes. Ensuite, compte tenu de l'expérience acquise, nous choisissons la méthode qui convient le mieux au problème à traiter. Parmi les méthodes mises en œuvre dans l'équipe électromagnétisme des circuits, citons celles bâties sur :

Le raccordement de modes [9]

Les différences finies dans le domaine temporel [10]

Les méthodes des lignes [11]

Les éléments finis dans une moindre mesure [12]

Et enfin les équations intégrales qui constituent une bonne part des travaux et thèses publiés récemment [13], [14].

Compte tenu de notre souhait de ne plus segmenter les circuits mais plutôt de les étudier dans leur globalité, nous voulons nous orienter vers une approche en trois dimensions du problème associée au cahier des charges cité précédemment. Ce type d'approche fait déjà l'objet d'études dans l'équipe électromagnétisme de l'IEMN ; études basées sur les équations intégrales. A ce stade, rappelons le titre de la thèse, très récente, de monsieur Lhoussain

KADRI : « Techniques d'Equations Intégrales Appliquées à la Modélisation Electromagnétique de Circuits Intégrés Microondes en Technologie Uniplanaire, en Bande W. » [14].

Pour notre part, nous choisissons d'appliquer les éléments finis bien qu'il y ait encore peu de temps, éléments finis rimaient avec solutions parasites. Pour les nombreux détracteurs des éléments finis à variables nodales, les résultats étaient tout simplement inexploitable. Il faut reconnaître qu'ils étaient assez proches de la réalité. Cette mauvaise image de marque s'appuyait en outre sur la réputation des éléments finis nodaux comme étant très gourmands en temps de calcul et taille mémoire. Cet état de fait a heureusement évolué. Grâce à l'avènement des éléments d'arêtes dans les années 90 [15], nous constatons un net regain d'intérêt pour les éléments finis d'autant qu'ils bénéficient des apports conjoints d'une baisse des coûts de l'informatique pour une puissance de calcul accrue et de l'inexistence des solutions parasites dont les moyens de suppression alimentèrent longtemps les débats scientifiques dans le cas des éléments nodaux.

Forts de ces améliorations, les travaux résumés dans ce mémoire s'intitulent: « **Mise en Œuvre d'une Méthode d'Eléments Finis à Eléments d'Arêtes en Deux et Trois Dimensions. Applications aux Lignes de Topologies Complexes pour Circuits Intégrés Monolithiques Microondes et aux Interconnexions sur Circuit Silicium** ».

Ainsi, dans un **premier chapitre**, nous rappelons les concepts et les étapes menant à la résolution d'un problème général basé sur la méthode des éléments finis. Nous présentons sommairement les différentes formulations par éléments finis utilisées en électromagnétisme, et répondons aux principales questions que se pose un utilisateur de cette méthode.

Dans une seconde étape, le **deuxième chapitre**, nous présentons en détail la façon dont sont construits les éléments d'arêtes en deux dimensions. Il s'agit d'une phase indispensable à la construction future des éléments d'arêtes en trois dimensions compte tenu de leurs complexités.

Le **troisième chapitre** est articulé sur trois axes. Le premier concerne la validation du code calcul mis au point en deux dimensions. Cette étape porte sur la comparaison avec des relevés expérimentaux de constantes de phase, d'atténuation et d'impédances caractéristiques pour des lignes microrubans, coplanaires et des lignes à membranes diélectriques de dimensions microniques. Des valeurs fournies par un logiciel commercial d'éléments finis « High Frequency Structure Simulator » distribué par la société Helwett Packard interviennent également dans cette validation. Dans le second volet, nous appliquons la méthode mise en œuvre à des structures de section droite plus complexe comme l'est celle d'une grille champignon, d'une ligne coplaire à ruban central suspendue ou encore d'une ligne ultracompacte. Pour toutes ces études, le caractère fini de la conductivité des métallisations est nécessairement pris en considération. Le dernier volet repose sur une étude des interconnexions sur circuit silicium menée en collaboration avec D. DESCHACHT de l'équipe du LIRM de Montpellier.

Ce travail trouve son aboutissement dans la mise en œuvre, dans un **quatrième chapitre**, des éléments d'arêtes en trois dimensions. Seuls les points différant de l'analyse en deux dimensions sont abordés pour ne pas alourdir ce manuscrit avec des calculs extrêmement fastidieux. Bien que nous soyons en phase de mise au point, un exemple de discontinuité en ligne microruban est proposé et comparé avec des travaux existants.

Enfin, une conclusion reprend les points essentiels de ces travaux.

BIBLIOGRAPHIE de l'INTRODUCTION

[1] **A.J. Seeds :**

« Photonic Technologies and subsystem for Terabit communications »

IEEE-Microwave Theory and Techniques International Symposium, Vol 2, pp 615-618,
Anaheim califonia, june 1999

[2] **J.E. Sitch :**

« Device Development for Terabit Systems »

IEEE-Microwave Theory and Techniques International Symposium, Vol 2, pp 619-622,
Anaheim califonia, june 1999

[3] **K.Goverdhanam, R.N. Simons, L.P.B. Katehi :**

« Novel Three Dimensional Vertical Interconnect Technology for Microwave and RF
Applications »

IEEE-Microwave Theory and Techniques International Symposium, Vol 2, pp 641-644,
Anaheim califonia, june1999

[4] **A. Jentzsch, W. Heinrich :**

« Optimisation of Flip Chip Interconnects for Millimeter wave Frequencies »

IEEE-Microwave Theory and Techniques International Symposium, Vol 2, pp 637-640,
Anaheim califonia, june 1999

[5] **K.Takahashi, S. Fujita, U. Sangawa, A. Ono, T. Urabe, S.Takeyama, H . Ogura, H.
Yabuki :**

« Optimisation of Flip Chip Interconnects for Millimeter wave Frequencies »

IEEE-Microwave Theory and Techniques International Symposium, Vol 1, pp 229-232,
Anaheim califonia, june 1999

[6] **K. Ondera, M. Hirano, H. Tokumitsa, I. Toyoda, K. Nishikawa, I. Toyoda, S. Aoyama, S. Sugitari, K Yamasaki :**

« Three Dimensional Passive Technology for Ultracompact MMICs »

IEEE-Microwave Theory and Techniques International Symposium, Vol 3, pp 229-232,
Orlando, Florida, june 1995

[7] **K. Ondera, M. Hirano, M. Tokumitsu, I. Toyoda, K. Nishikawa, T. Tokumitsu :**

« Fold U-shape Microwire Technology for Ultra-compact Three Dimensional MMICs »

IEEE-Transaction on Microwave Theory and Techniques, Vol 44, N°12, pp 2347-2353,
december1996

[8] **B. Kenmei, S. Robillart, E. Paleczny, J.F. Legier, P. Kennis :**

« Study of Lossy Metallization Shape Impact on Propagation Characteristics of Planar
Transmission Line »

URSI , lille, september 1996

[9] **E. Paleczny :**

« Modélisation des pertes métalliques par la méthode du raccordement de modes : Application
aux lignes planaires utilisées en technologie monolithique micro-onde »

Thèse de Doctorat de l'Université de Lille1, septembre 1992

[10] **V. Leclerc :**

« Contribution à l'étude des discontinuités coplanaires par la méthode des différences finies
dans le domaine temporel »

DEA, Université de Lille1, juillet 1994

[11] **Yves Delplanque :**

« Mise en œuvre et évaluation d'un outil basé sur la méthode des lignes pour l'étude de
discontinuités planaires »

Thèse de Doctorat de l'Université de Lille1, Décembre 1995

[12] **Didier Kinowski :**

« Etude comparative de l'approche dans le domaine spectral et d'une formulation par éléments finis pour la simulation de dispositifs micro-ondes et optroniques »

Thèse de Doctorat de l'Université de Lille1, décembre 1992

[13] **Philippe Pannier :**

« Optimisation de méthodes de formulations intégrales pour l'analyse électromagnétique, en régime forcé, de discontinuités entre lignes de propagation multimodale »

Thèse de Doctorat de l'Université de Lille1, septembre 1997

[14] **Lhoussain Kadri :**

« Techniques d'équations intégrales appliquées à la modélisation électromagnétique de circuits intégrés micro-ondes en technologie uniplanaire, en bande W »

Thèse de Doctorat de l'Université de Lille1, septembre 1999

[15] **J.F. Lee, D.K. Sun, Z.J. Cendes**

« Full Wave Analysis of Dielectric Waveguides Using Tangential Vector Finite Elements »

IEEE Trans on MTT, Vol 39, N°8, pp1263-1271, august 1991

CHAPITRE I

Comme nous l'avons signalé dans notre présentation générale, l'objectif de ce premier chapitre n'est pas d'effectuer une énumération exhaustive de tous les travaux parus sur la méthode des éléments finis. Nous désirons plutôt représenter la philosophie globale relative à cette technique dont le développement repose sur quatre étapes.

D'une manière générale, nous rappelons succinctement l'écriture des équations différentielles qui régissent la description du phénomène physique pour ensuite introduire la mise sous forme intégrale du problème. Cette rubrique majeure fait du reste intervenir la notion de fonctionnelle ou encore de résidus pondérés ou forme faible de Galerkin. Après avoir abordé ce point, la discrétisation des formes intégrales est entreprise par le truchement d'éléments finis qui ne sont autres que des triangles de discrétisation et leurs fonctions approchées; en l'occurrence les grandeurs physiques à calculer. Ce n'est qu'à l'issue de cette avant dernière étape que nous obtenons un système matriciel global dont la résolution, par des méthodes numériques appropriées, fournit les grandeurs qui nous intéressent. Ce pourra être, dans le cas général que venons d'introduire, une pression ou une contrainte mécanique, une température voire aussi un champ électrique ou magnétique. Pour ce qui nous concerne, cette méthode est appliquée à la résolution des équations de Maxwell.

Ainsi, dans une seconde rubrique nous présentons rapidement les différentes formulations qui sont à la base de la mise en œuvre des éléments finis[1]. Par formulations, nous entendons les différents arrangements des équations de Maxwell effectués pour aboutir à des expressions où trois composantes du champ électrique ou magnétique sont nécessaires à l'étude. Bien évidemment, nous aborderons aussi le cas des formulations dites E ou H où seules deux composantes du champ électrique ou magnétique sont sélectionnées. On parlera donc nécessairement d'équation(s) transversale et (ou) longitudinale en champ électrique (formulation E) ou en champ magnétique (formulation H).

Seules les formes différentielles, intégrales faibles et matricielles sont rappelées par souci de simplification. Ce chapitre trouve son aboutissement dans la réponse aux questions que se pose un utilisateur des éléments finis à éléments nodaux (le triangle de Lagrange en élément nodal) à propos des cinq formulations introduites dans ce chapitre. Ces questions, auxquelles nous apportons une réponse, concernent :

- La valeur propre recherchée (fréquence ou nombre d'onde)
- L'existence de solutions parasites
- Le nombre de degré de liberté ou encore de composante de champ à étudier
- La forme et les propriétés du système matriciel final dans le cas de matrices réelles uniquement
- La possibilité de traiter simultanément milieux diélectriques et magnétiques
- L'aptitude à prendre en compte des milieux à pertes
- La possibilité de modéliser les arêtes vives des conducteurs métalliques par exemple sans l'emploi de fonctions spéciales

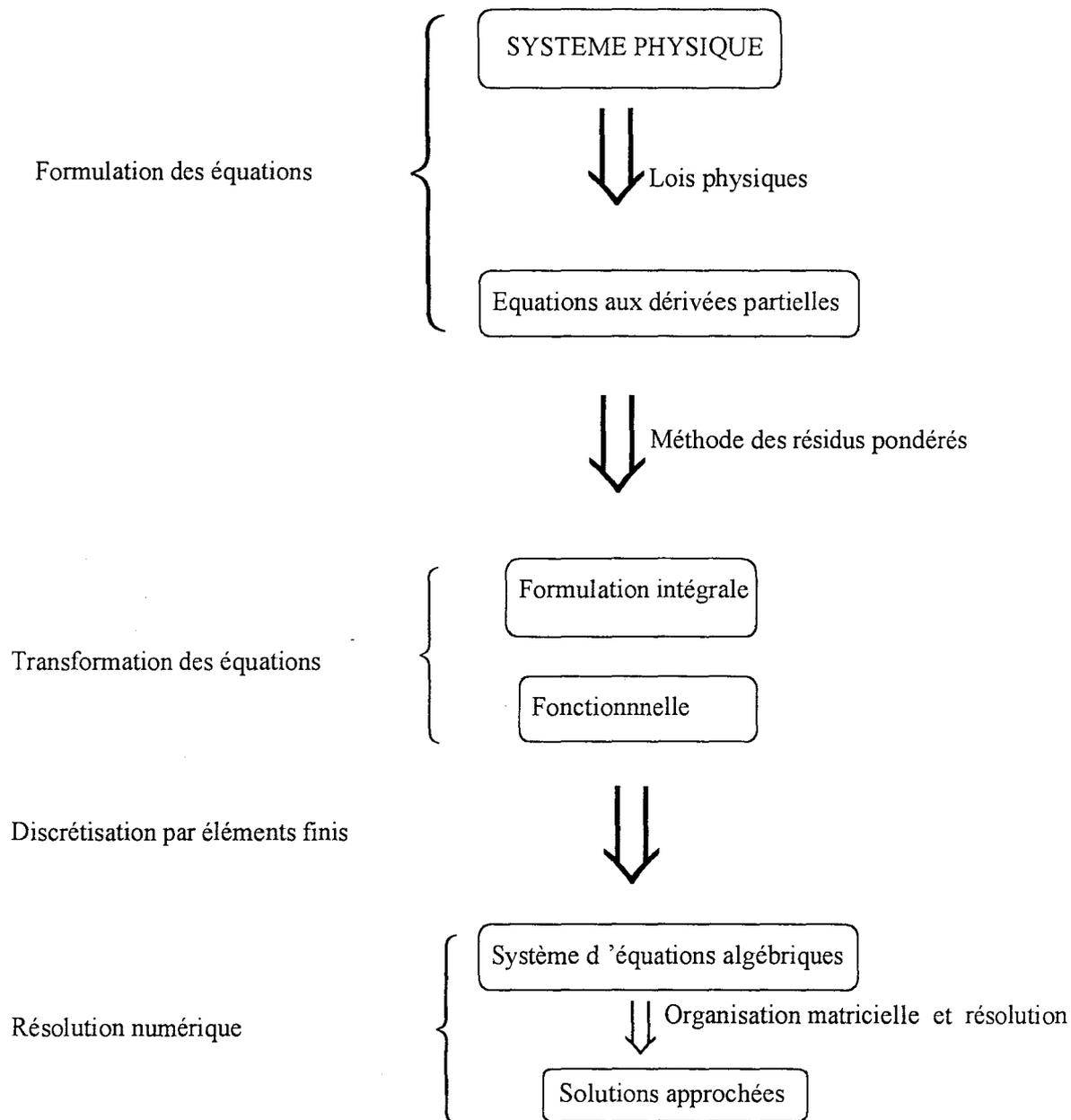


Figure I-1 : Synoptique de la méthode des éléments finis

I.1. Les étapes de la méthode

Quatre étapes majeures caractérisent la mise en œuvre de la méthode des éléments finis. Elles vont du choix des équations à résoudre pour aboutir à l'étape ultime ; celle de la résolution numérique d'un système algébrique. Deux stades intermédiaires essentiels à la mise sous forme intégrale ou variationnelle des équations et leur discrétisation s'insèrent dans cette chronologie. Nous présentons le synoptique global de la méthode figure I-1.

I.1.1 Description générale des équations différentielles avec valeurs aux limites

Sur un plan général, nous décrivons l'équation différentielle à résoudre par un opérateur linéaire qui, s'il est du second ordre, s'exprime de la manière suivante

$$\mathfrak{I}(u) = \left[\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right] u. \text{ Nous serons amenés, par la suite, à résoudre un problème de}$$

propagation avec conditions aux limites. Ainsi, considérons un système linéaire décrit par l'équation différentielle d'ordre m suivante :

$$\mathfrak{I}(u) + f = 0 \text{ dans le domaine } \Omega \text{ de la structure figure I-2 où :} \quad \text{Eq-I-1a}$$

$$u = u_s \text{ sur la frontière } \Gamma_u \text{ délimitant le domaine } \Omega \text{ (condition de Dirichlet)} \quad \text{Eq-I-1b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = g \text{ sur la frontière } \Gamma_g \text{ délimitant le domaine } \Omega \text{ (condition de Neuman)} \quad \text{Eq-I-1c}$$

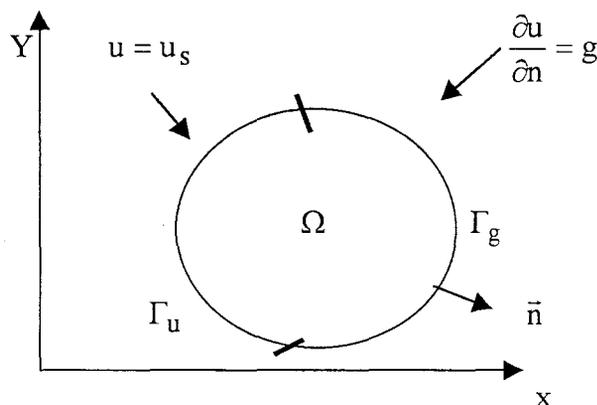


Figure I-2 : Conditions aux limites.

Pour résoudre l'équation Eq-I.1 par la méthode des éléments finis, il convient donc de l'exprimer sous forme intégrale, puis de la discrétiser .

I.1.2 Mise sous forme intégrale des équations

Deux procédés sont utilisés pour aboutir à une forme intégrale.

- ◆ Le premier est articulé sur la méthode des résidus pondérés qui permet la transformation d'une équation aux dérivées partielles en une formulation intégrale.

L'utilisation des intégrations par parties fournit des formulations intégrales faibles qui présentent les avantages suivants :

- Diminution des conditions de dérivabilité sur la fonction u .
- Apparition des conditions aux limites qui peuvent être prises en compte dans la forme faible au lieu d'être identiquement satisfaites par la fonction u .
- ◆ Le second procédé est lié à la notion de fonctionnelle. Il est souvent utilisé pour construire directement la formulation intégrale. Nous verrons par la suite qu'il peut être un cas particulier de la méthode des résidus pondérés.

Nous allons rappeler rapidement aux paragraphes I.1.2.1 et I.1.2.2 les spécificités de ces deux méthodes.

I.1.2.1 La méthode des résidus pondérés.

Considérons une structure dont le comportement est décrit par l'équation Eq-I.1, les variables inconnues u dépendant des coordonnées du plan (x, y) . Nous appelons résidu $\mathfrak{R}(u)$, la quantité $\mathfrak{R}(u) = \mathfrak{I}(u) + g$ qui s'annule quand u est solution de l'équation Eq-I.1. La méthode des résidus pondérés consiste à rechercher des fonctions u qui annulent la forme intégrale $W(u)$:

$$W(u) = \int_{\Omega} \psi(x, y) \mathfrak{R}(u) d\Omega = \int_{\Omega} \psi(x, y) [\mathfrak{I}(u) + g] d\Omega = 0 \quad \text{Eq-I.2}$$

pour toute fonction de pondération ψ .

Considérons E_ψ l'ensemble des fonctions de pondération et E_u l'ensemble des solutions de l'équation Eq-I.1 satisfaisant les conditions aux limites. Toute solution u qui vérifie l'équation Eq-I.1, vérifie également l'équation Eq-I.2 quel que soit le choix effectué sur la fonction E_ψ .

Par contre la solution de l'équation Eq-I.2 dépend du choix opéré sur E_ψ . Puisque l'ensemble des fonctions de pondération E_ψ constitue un ensemble fini, la solution u qui satisfait l'équation Eq-I.2 est une solution approchée de l'équation Eq-I.1.

Selon le choix que l'on effectue pour l'ensemble des fonctions de pondération E_ψ , on distingue :

- La méthode de collocation par point où la fonction de pondération est une distribution de Dirac $\psi_i = \delta(x_i, y_i)$.
- La méthode de collocation par sous-domaines où ψ est constante sur chaque sous-domaine.
- La méthode de Galerkin où les variations de la fonction u sont prises en compte $\psi = \delta u$.
- La méthode des moindres carrés faisant appel aux variations du résidu $\psi = \delta[\mathfrak{F}(u) + g]$.

I.1.2.2 Mise en œuvre d'une fonctionnelle.

Une fonctionnelle π est une fonction d'un ensemble de fonction et de leurs dérivées :

$$\pi = \pi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right) \quad \text{Eq-I.3}$$

Elle est utilisée pour construire directement une formulation intégrale. Pour ce faire, on utilise le principe de stationnarité selon lequel toute fonction u qui annule la première variation

$\delta\pi(u)$ est solution de l'équation Eq-I.1. Si nous considérons la formulation intégrale Eq-I.2, en choisissant $\psi = \delta u$ et en effectuant une intégration par partie, nous pouvons construire une fonctionnelle π telle que la solution u cherchée rende cette fonctionnelle stationnaire, à savoir :

$$\delta\pi(u) = W(u) = 0 \quad \text{avec} \quad u = u_s \quad \text{sur} \quad \Gamma_u$$

Considérons la forme intégrale Eq-I.4

$$W(u) = \int_{\Omega} \psi(x, y) [\mathfrak{L}(u) + g] d\Omega = \int_{\Omega} \psi(x, y) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \right] d\Omega \quad \text{Eq-I.4}$$

qui intégrée par parties fournit la forme de Galerkin dite faible Eq-I.5 :

$$W(u) = - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \psi g \right] d\Omega + \int_{\Gamma_g} \psi \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \psi \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \quad \text{Eq-I.5}$$

A ce stade, on voit apparaître des intégrales de contours dans lesquelles on peut prendre en compte la condition aux limites du type Neuman, $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur le contour Γ_g .

En considérant que sur le contour Γ_u , $u = u_s$ et $\psi = \delta u = 0$ l'équation Eq-I.5 devient :

$$W(u) = - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \psi g \right] d\Omega + \int_{\Gamma_g} \psi g d\Gamma \quad \text{Eq-I.6}$$

Si nous considérons la fonctionnelle Eq-I.7

$$\pi \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2ug \right] d\Omega + \int_{\Gamma_g} u g d\Gamma \quad \text{Eq-I.7}$$

on montre que

$$\delta\pi = - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \delta u g \right] d\Omega + \int_{\Gamma_g} \delta u g d\Gamma \equiv W(u) \quad \text{de l'équation Eq-I.6.}$$

Autrement dit, une fonctionnelle peut être construite en utilisant la forme faible de Galerkin.

Pour notre part, nous utiliserons la méthode des résidus pondérés de Galerkin pour la construction des formes faibles dans le cadre de la formulation variationnelle des lois de propagation des champs électromagnétiques.

I.1.3 Discrétisation des formes intégrales.

Nous avons remplacé la résolution de l'équation aux dérivées partielles Eq-I.1 par la recherche de fonctions u qui annulent la forme intégrale Eq-I.6. Afin de construire une solution approchée, nous découpons notre domaine Ω en sous-domaine Ω^e (figure I-2) dans lesquels nous effectuons des approximations de la fonction u . Ces sous-domaines sont appelés éléments.

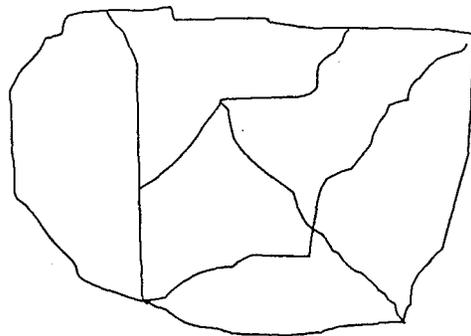


Figure I-3 : Division d'un domaine quelconque en sous-domaines quelconques.

I.1.3.1 Approximation des fonctions u

Cette approximation consiste en une interpolation des fonctions $u^e(x, y)$ définies en des lieux précis de chaque sous-domaine. Selon que ces lieux sont choisis comme des points géométriques ou des segments de droite, on parle d'éléments à variables nodales ou à vecteurs tangentiels.

- Les éléments à variables nodales[2].

L'approximation de la fonction $u^e(x, y)$ sur chaque sous-domaine Ω^e est effectuée en choisissant la forme géométrique de ces éléments et le degré d'interpolation nécessaire à cette

approximation. En ce qui concerne la forme des sous-domaines, ceux-ci peuvent être triangulaires ou quadrilatéraux figure I-4.

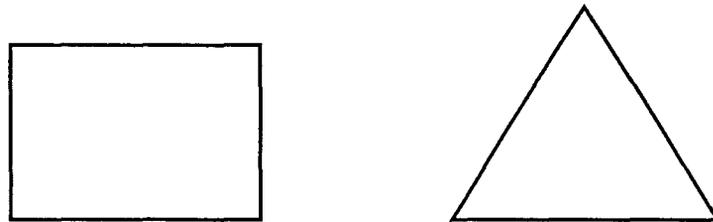
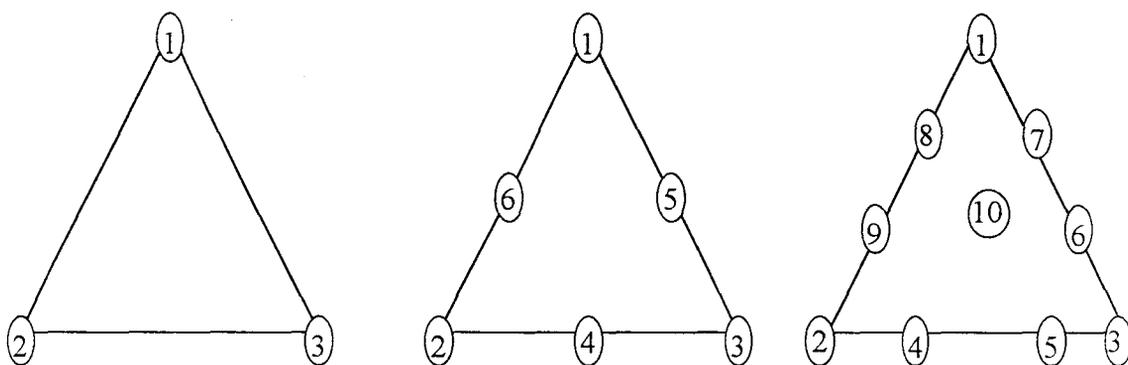


Figure I-4 : Nature géométrique des éléments.

Pour notre part, nous ne retenons que les éléments de forme triangulaire car ils permettent, entre autre, une meilleure description de la topologie des structures à étudier.

La construction de la fonction approchée sur chaque sous-domaine est alors effectuée en considérant des points particuliers de l'élément. Ces points sont appelés nœuds d'interpolation. Ces nœuds occupent des positions bien définies sur chaque élément. Ils sont pris aux sommets des triangles, aux milieux de ses arêtes et parfois même au barycentre de ceux-ci comme l'illustre la figure I-5.



A) trois nœuds d'interpolation B) six nœuds d'interpolation C) dix nœuds d'interpolation

Figure I-5

A chaque nœuds d'interpolation i , on affecte une variable u_i^e qui coïncide avec la valeur exacte de la fonction $u^e(x, y)$ en ce point. Ainsi, la fonction approchée s'écrit :

$$u^e(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y)u_i^e \quad \text{Eq-I.8}$$

où $N_i(x, y)$ est la fonction d'interpolation de Lagrange et n le nombre de nœuds d'interpolation.

Ce nombre n détermine le degré d'interpolation. Plus il est élevé, et meilleure est l'interpolation. Lorsque ce nombre vaut trois, il s'agit d'une approximation du premier ordre. En effet, les fonctions d'interpolation de Lagrange, dans ce cas, sont de degré un. Dans le cas où il vaut six, il s'agit d'une interpolation du second ordre. Les variables u_i^e sont appelées variables nodales car elles sont définies aux nœuds représentés par des points particuliers du triangle. Elles sont les inconnues du problème.

- Les éléments à vecteurs tangentiels[3]

Ils diffèrent fondamentalement de ce qui précède par le fait que les variables inconnues sont affectées aux arêtes plutôt qu'aux nœuds des triangles. Ils ne s'appliquent qu'aux fonctions vectorielles tels que les champs électromagnétiques. Les paramètres d'interpolation u_i^e de la fonction vectorielle $u^e(x, y)$ sont définies par les composantes de celle-ci tangentes à l'arête considérée. Si nous posons par convention que i est le numéro de l'arête opposée au sommet i de l'élément triangulaire, nous avons alors la représentation suivante :

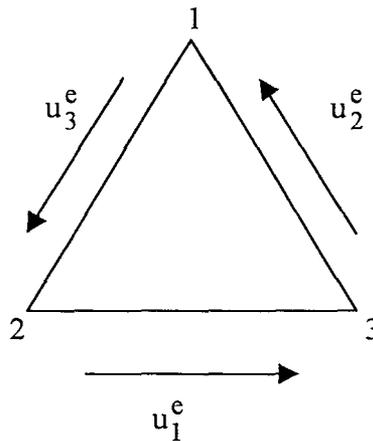


Figure I-6 :Représentation des variables tangentielles.

Dans ce cas l'expression de la fonction vectorielle approchée peut être du type :

$$u^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 \bar{\gamma}_i(x, y) u_i^e \quad \text{Eq-I.9}$$

où $\bar{\gamma}_i(x, y)$ est la fonction de base vectorielle.

Dans le chapitre suivant, nous traiterons dans le détail la construction de ce type d'élément.

I.1.3.2. La forme intégrale de Galerkin discrétisée.

Dès lors que la section droite de la structure est partitionnée en un ensemble fini d'éléments par triangulation, et que la fonction inconnue u est approchée sur chaque élément par $u^e(x, y)$, la forme intégrale de Galerkin Eq-I.2 peut être remplacée par une somme d'intégrales construites sur chaque élément Ω^e , ainsi :

$$W = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \delta u^e \left[\mathfrak{F}(u^e) + g \right] d\Omega^e \quad \text{Eq-I.10}$$

où n_{el} est le nombre total des éléments. u^e est la fonction approchée sur chaque élément et δu^e représente sa variation.

Considérons par exemple les éléments à variables nodales, où :

$$u^e(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) u_i^e = \langle N \rangle \{u_n\} \quad \text{Eq-I.11}$$

et

$$\delta u^e = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \delta u_i^e = \langle N \rangle \{\delta u_n\}$$

où $\delta u^e \in \{N_1 \delta u_1, N_2 \delta u_2, \dots, N_n \delta u_n\}$

Rappelons que, dans les expressions ci-dessus, N_i représente le polynôme d'interpolation de Lagrange, et u_i^e n'est autre que la valeur exacte de la variable au nœud i de l'élément triangulaire composé de n nœuds d'interpolation.

Cette nouvelle notation a pour but de simplifier l'écriture des équations. En effet, dans l'équation Eq-I.10 l'intégrale sur chaque élément est représentée par l'expression suivante :

$$W^e = \int_{\Omega^e} \delta u^e [\mathfrak{I}(u^e) + g] d\Omega^e \quad \text{Eq-I.12}$$

Le développement de cette intégrale, permet d'obtenir autant d'équations et d'inconnues qu'il y a de variables nodales sur chaque élément. Dans le cas présent, nous avons retenu l'hypothèse générale où le nombre de variable dans un élément est n . Par conséquent, les n équations sont :

$$W_1^e = \delta u_1 \left(\int_{\Omega^e} N_1 [\mathfrak{I}(\langle N \rangle) \{u_n\}] d\Omega^e + \int_{\Omega^e} N_1 g d\Omega^e \right)$$

$$W_2^e = \delta u_2 \left(\int_{\Omega^e} N_2 [\mathfrak{I}(\langle N \rangle) \{u_n\}] d\Omega^e + \int_{\Omega^e} N_2 g d\Omega^e \right)$$

.

.

.

$$W_n^e = \delta u_n \left(\int_{\Omega^e} N_n [\mathcal{I}(\langle N \rangle)] \{u_n\} d\Omega^e + \int_{\Omega^e} N_n g d\Omega^e \right)$$

Ces équations peuvent s'écrire sous forme condensée, de la manière suivante :

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle \int_{\Omega^e} \{N\} [\mathcal{I}(\langle N \rangle)] \{u_n\} d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \{N\} g d\Omega^e \quad \text{Eq-I.13}$$

Le système matriciel équivalent à cette forme intégrale discrétisée , est représenté par l'équation Eq-I.14 :

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle \left([k]^e \{u_n\} + \{f\}^e \right) \quad \text{Eq-I.14}$$

où $[k]^e$ est la matrice élémentaire

$\{f\}^e$ est un vecteur constant

$\{u_n\}$ et $\{\delta u_n\}$ sont respectivement le vecteur élémentaire des variables nodales et celui des variations des variables nodales.

D'après l'équation Eq-I.10, la matrice globale se construit par addition des formes élémentaires Eq-I.14 :

$$W = \sum_{e=1}^{nel} W^e = \sum_{e=1}^{nel} \langle \delta u_n \rangle \left([k]^e \{u_n\} + \{f\}^e \right) \quad \text{Eq-I.15}$$

Cette somme est organisée sous forme matricielle telle que :

$$W = \langle \delta U_n \rangle \left([K] \{U_n\} + \{F\} \right) \quad \text{Eq-I.16}$$

Où $[K]$ est la matrice globale

$\{F\}$ le vecteur constant global

$\{U_n\}$ et $\{\delta U_n\}$ sont respectivement le vecteur global des variables et celui de ses variations.

Le passage de l'équation Eq-I.15 à l'équation Eq-I.16 constitue l'assemblage des éléments ; il permet de construire les termes de la matrice $[K]$ à partir de ceux de la matrice élémentaire

$[k]^e$. Dans le même esprit, l'assemblage des vecteurs élémentaires $\{f\}^e$ aboutit au vecteur global $\{F\}$. Nous obtenons le système équivalent à l'équation Eq-I.1 en résolvant la quantité suivante:

$$[K]\{U_n\} + \{F\} = 0 \quad \text{ou encore} \quad [K]\{U_n\} = -\{F\} \quad \text{Eq-I.17}$$

puisque W doit être nulle quel que soit l'ensemble des variations élémentaires $\langle \delta U_n \rangle$ considérées sur chaque triangle.

La résolution de ce système nécessite l'utilisation de méthodes numériques. La connaissance des propriétés de ces matrices dicte le choix des algorithmes numériques à retenir. Dans les paragraphes qui suivent, nous ne nous attarderons plus sur le procédé permettant d'obtenir le système matriciel, mais plutôt sur les caractéristiques des systèmes.

I.2 Formulation en éléments finis des équations de Maxwell

Nous présentons rapidement, dans ce paragraphe, les principales formulations qui ont été proposées pour rechercher le spectre de modes guidés dans les structures de propagation. Nous avons montré, auparavant, que la résolution d'une équation différentielle par la méthode des éléments finis repose sur une formulation intégrale de celle-ci. Par conséquent, les formulations dont il est question, dans cette rubrique, ne diffèrent entre elles que par les formes intégrales des équations de Maxwell qui sont retenues pour résoudre le problème.

I.2.1. Equation de propagation

Le problème traité concerne celui de la propagation guidée d'une onde électromagnétique. Il convient de rappeler, et ce, même sommairement, les lois qui régissent un tel comportement physique. Ces lois sont décrites par les équations de Maxwell dont les expressions en régime harmonique, pour les milieux linéaires, en l'absence de charges, sont :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad \text{Eq-I.18}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r^*\vec{E} \quad \text{Eq-I.19}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad \text{Eq-I.20}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{Eq-I.21}$$

dans ces expressions, les signes $\vec{\nabla}$, \times , \cdot , représentent respectivement l'opérateur dérivée première, les produits vectoriels et scalaires.

\vec{D} et \vec{B} sont respectivement les inductions électriques et magnétiques qui, reliées aux champs électriques \vec{E} et magnétique \vec{H} , fournissent les lois linéaires suivantes :

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r^*\vec{E} \quad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

où ε et μ représentent la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique.

Suivant que le matériau est de nature diélectrique ou métallique nous utilisons :

$$\varepsilon_r^* = \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \right) \quad \text{où } \sigma \text{ est la conductivité de valeur finie du matériau métallique.}$$

Ou encore,

$$\varepsilon_r^* = \varepsilon_r(1 - j\text{tg}\delta) \quad \text{où } \text{tg}\delta \text{ n'est autre que la tangente de l'angle de perte du matériau diélectrique.}$$

Les contours délimitant le plan de section droite de notre guide imposent aux champs électromagnétiques des contraintes. Celles-ci sont répertoriées sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \times \vec{n} = 0 \\ \vec{H} \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur un mur électrique} \quad \text{Eq-I.22}$$

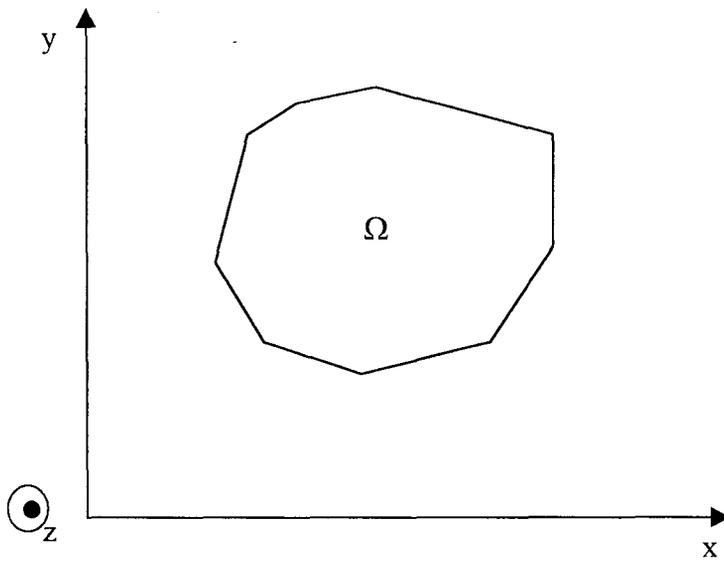


Figure I-7: Section droite d'un guide d'onde quelconque

$$\begin{cases} \vec{E} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{H} \times \vec{n} = 0 \end{cases} \quad \text{sur un mur magnétique} \quad \text{Eq-I.23}$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal au contour et dirigé vers l'extérieur.

Considérons un guide d'onde figure I-7 dont la section droite Ω est située dans le plan x-y d'un trièdre direct $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$; l'axe oz représente la direction de propagation. Nous admettons que les frontières avec le milieu extérieur peuvent s'apparenter soit à un mur électrique parfait, soit à un mur magnétique parfait ou encore une combinaison des deux. Les équations d'onde à résoudre se déclinent alors sous deux aspects différents suivant que l'on privilégie l'étude du champ électrique ou magnétique.

Ainsi, à partir des équations Eq-I.18 et Eq-I.19 nous obtenons deux formes possibles qui sont :

$$\vec{\nabla} \times \epsilon_r^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{H} - K_0^2 \mu_r \vec{H} = 0 \quad \text{Eq-I.24}$$

ou

$$\vec{\nabla} \times \mu_r^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{E} - K_0^2 \epsilon_r \vec{E} = 0 \quad \text{Eq-I.25}$$

où K_0 est le nombre d'onde en espace libre, $K_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$

Notons que dans l'expression Eq-I.25 et dans toutes celles qui suivront, nous omettrons l'astérisque sur le terme ϵ_r , et ce, par souci de simplification. Bien évidemment, le terme ϵ_r pourra être considéré complexe dans le cas le plus général.

Dans les développements concernant cette rubrique, nos commentaires porteront sur l'équation d'onde faisant intervenir le champ magnétique \vec{H} . Ce choix est délibéré dans la mesure où, au chapitre suivant, nous expliciterons en détail la résolution de l'équation d'onde relative au champ électrique.

Comme nous pouvons le constater, ces équations sont duales. Les résolutions sont identiques. Du point de vue pratique, on préfère toutefois utiliser plutôt l'une ou l'autre suivant que le matériau constituant la section droite du guide est magnétique ou diélectrique.

Par hypothèse, les champs magnétiques se propagent dans la direction oz . Ils possèdent alors une expression de la forme :

$$\vec{H}(x, y, z) = H(x, y)e^{-\gamma z}$$

où γ est la constante de propagation.

La décomposition du champ \vec{H} en deux composantes, dont l'une est transverse \vec{H}_t et l'autre est longitudinale H_z , permet l'obtention d'une forme transverse ainsi que d'une forme longitudinale de l'équation Eq-I.24. En effet, en posant :

$$\vec{H} = \vec{H}_t + zH_z \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} = \vec{\nabla}_t + z\frac{\partial}{\partial z}$$

l'équation Eq-I.24 devient :

$$\vec{\nabla}_t \times \epsilon_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{H}_t - \gamma \epsilon_r^{-1} \vec{\nabla}_t H_z - (\mu_r K_0^2 + \gamma^2 \epsilon_r^{-1}) \vec{H}_t = 0 \quad \text{Eq-I.26a}$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \epsilon_r^{-1} \vec{\nabla}_t H_z + \gamma \vec{\nabla}_t \cdot \epsilon_r^{-1} \vec{H}_t + \mu_r K_0^2 H_z = 0 \quad \text{Eq-I.26b}$$

Toutefois, il existe une alternative qui consiste à réduire ces deux équations en une seule, et ce, en utilisant la divergence du champ magnétique. En effet, l'équation $\text{Div} \vec{B} = 0$ s'écrit aussi sous la forme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla}_t \cdot \mu_r \vec{H}_t - \gamma \mu_r H_z = 0$$

On obtient une équation transversale modifiée faisant intervenir uniquement les composantes transverse du champ magnétique, en substituant l'expression de H_z issue de la divergence de \vec{B} dans celle Eq-I.26a.

$$\vec{\nabla}_t \times \epsilon_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{H}_t - \epsilon_r^{-1} \vec{\nabla}_t (\vec{\nabla}_t \cdot \vec{H}_t) - (\mu_r K_0^2 + \gamma^2 \epsilon_r^{-1}) \vec{H}_t = 0 \quad \text{Eq-I.27}$$

Les diverses équations Eq-I.26a, b et Eq-I.27 mises sous formes intégrales constitueront le point de départ des différentes formulations d'éléments finis mises en œuvre pour l'étude des modes guidés dans les structures de propagation.

I.2.2 Présentation des formulations existantes

Les différentes formulations proposées dans la littérature peuvent être obtenues par la méthode des résidus pondérés de Galerkin. Elle permet la transformation du problème avec conditions aux limites en un système algébrique d'équations linéaires. Sous sa forme faible, il est possible de prendre en compte des conditions aux limites de type Neumann à travers les intégrales de contours. Cette possibilité sera discutée chaque fois que cela sera nécessaire sur ces formulations.

I.2.2.1 Formulation basée sur l'équation transverse modifiée : ETM

Cette formulation intégrale faible est obtenue en transformant l'équation transverse modifiée Eq-I.27 par la méthode de Galerkin.

$$\int_{\Omega} \left[(\vec{\nabla}_t \times \vec{W}_t) \cdot \epsilon_r^{-1} (\vec{\nabla}_t \times \vec{H}_t) - (\mu_r K_0^2 + \gamma^2 \epsilon_r^{-1}) \vec{W}_t \cdot \vec{H}_t + (\vec{\nabla}_t \cdot \epsilon_r^{-1} \vec{W}_t) (\vec{\nabla}_t \cdot \vec{H}_t) \right] d\Omega - \int_{\Gamma} (\vec{n} \times \vec{W}_t) \cdot (\epsilon_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{H}_t) d\Gamma + \int_{\Gamma} (\vec{n} \cdot \vec{W}_t) \epsilon_r^{-1} (\vec{\nabla}_t \cdot \vec{H}_t) d\Gamma = 0 \quad \text{Eq-I.28}$$

Dans l'expression Eq-I.28 la fonction de pondération \vec{W}_t représente les variations du champ magnétique transverse \vec{H}_t . \vec{n} est un vecteur unitaire normal au contour Γ , et dirigé vers l'extérieur du domaine.

La fonction de pondération \vec{W}_t et le champ magnétique transverse \vec{H}_t sont continus à travers toute la section droite.

On notera que lorsque l'équation Eq-I.28 est résolue, des conditions supplémentaires apparaissent et viennent compléter l'ensemble de celles tangentielles et normales qui sont imposées au départ du fait de l'écriture spécifique du problème. Ces conditions

supplémentaires sont appelées conditions naturelles aux limites. Elles doivent être manipulées avec précaution, car le résultat obtenu peut aller à l'encontre du phénomène physique de la continuité des champs sur une interface séparant deux milieux différents. En effet, reportons nous à l'écriture Eq-I.28 de la formulation faible pour ne considérer que les intégrales de contours. La première fait apparaître le terme $\epsilon_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{H}_t$ qui est proportionnel au champ électrique E_z . Si nous omettons cette intégrale de contour, la continuité de E_z à l'interface entre les éléments est assurée. Cette continuité a bien entendu un sens physique.

La seconde intégrale de contour évoque le terme $\epsilon_r^{-1} \vec{\nabla}_t \cdot \vec{H}_t$ qui est égal à $\epsilon_r^{-1} \gamma H_z$. En omettant cette intégrale de contour, nous imposons de ce fait la continuité de $\epsilon_r^{-1} \gamma H_z$. Ceci est vrai dans l'air, mais ne l'est en aucune manière sur l'interface séparant des milieux diélectriques différents.

L'omission de l'une ou l'autre de ces intégrales assure donc la continuité décrite précédemment entre éléments.

Dans le même esprit, ces conditions naturelles aux limites traduisent aussi la présence de murs électriques ou magnétiques pour les derniers éléments délimitant le pourtour de la section droite du guide, ou encore pour les arêtes que l'on désire assimilées à un axe de symétrie pair ou impair.

Omettre les intégrales de contours contenant les termes $\epsilon_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{H}_t$ et $\epsilon_r^{-1} \vec{\nabla}_t \cdot \vec{H}_t$ revient à considérer respectivement un mur électrique ou un mur magnétique à la condition toutefois que les composantes transversales restantes soient forcées à zéro de façon adéquate.

Comme nous l'avons signalé auparavant, nous ne précisons plus le procédé permettant l'accès à une écriture discrétisée et par voie de conséquence matricielle du problème.

Après arrangement des différents termes, l'étude de l'équation Eq-I.28 se ramène à la résolution du système Eq-I.29 :

$$[A_{ETM}]\{h_t\} - K_0^2 [B_{ETM}]\{h_t\} - \gamma^2 [C_{ETM}]\{h_t\} = 0 \quad \text{Eq-I.29}$$

où $\{h_t\}$ représente le vecteur colonne contenant les inconnues associées au champ magnétique transverse, et où $[A_{ETM}]$, $[B_{ETM}]$, $[C_{ETM}]$ sont les matrices creuses regroupant tous les termes issus de la forme faible Eq-I.28 discrétisée.

Lorsqu'un problème de propagation sans perte est abordé, les matrices sont réelles et elles sont non symétriques par exemple, pour des guides d'ondes présentant une inhomogénéité de nature diélectrique au niveau de la section droite. Dans ce cas, c'est l'intégrale de contour le long de l'interface qui détruit la symétrie des matrices. Signalons que les matériaux diélectriques, au sens large, peuvent présenter des pertes. Dans cette situation, les matrices conservent leur caractère creux mais sont complexes.

Enfin, compte tenu de la formulation retenue et des contraintes imposées dès le départ sur la continuité des composantes normales et tangentielles du champ \vec{H}_t , les remarques suivantes s'imposent :

- Il ne semble pas judicieux d'utiliser la forme faible Eq-I.28 pour l'étude des conducteurs métalliques, de conductivité finie présentant des arêtes vives. En effet, la singularité du champ au coin n'est pas correctement approchée.
- L'étude d'inhomogénéité dans la section droite liée à la présence de matériaux magnétiques n'est pas envisageable. En effet, dans la forme faible Eq-I.28 n'apparaissent que des termes faisant intervenir le champ magnétique \vec{H}_t et sa variation \vec{W}_t sans que la perméabilité μ_t n'intervienne. On ne peut donc assurer par le biais des intégrales de contours la continuité normale de l'induction magnétique.

En ce qui concerne la résolution du problème, il est possible de fixer indifféremment le nombre d'onde K_0 , et par voie de conséquence la fréquence, pour déterminer la constante de propagation γ et vice versa. L'introduction de la condition de divergence dans l'équation différentielle permet, outre la réduction de cette équation sous une forme transverse uniquement, de ne pas être confrontés au problème des solutions parasites[4].

Pour conclure, cette formulation par éléments finis fût déjà utilisée dans une configuration nodale en 1974 par Williams et Cambrell [4], et concernait la détermination du spectre des modes du barreau diélectrique. Elle fût reprise par Lu et Fernandez en 1990 et 1991 et appliquée, entre autre, au guide image en boîtier. Le cas des matériaux de nature diélectrique présentant des pertes ainsi qu'une anisotropie fût pris en compte [5][6].

I.2.2.2 Formulation basée sur les équations transverse et longitudinale :

ETL

Elle repose sur les équations différentielles du second ordre Eq-I.26a et Eq-I.26b définies précédemment et est décrite par les formes intégrales faibles suivantes :

$$\int_{\Omega} \left[(\vec{\nabla}_t \times \vec{W}_t) \cdot \epsilon_r^{-1} (\vec{\nabla}_t \times \vec{H}_t) - (\mu_r K_0^2 + \gamma^2 \epsilon_r^{-1}) \vec{W}_t \cdot \vec{H}_t - \gamma \epsilon_r^{-1} \vec{W}_t \cdot \vec{\nabla}_t H_z \right] d\Omega - \int_{\Gamma} (\vec{n} \times \vec{W}_t) \cdot (\epsilon_r^{-1} \vec{\nabla}_t \times \vec{H}_t) d\Gamma = 0 \quad \text{Eq-I.30a}$$

$$\int_{\Omega} \left[(\vec{\nabla}_t W_z) \cdot \epsilon_r^{-1} (\vec{\nabla}_t H_z) + \gamma \vec{\nabla}_t W_z \cdot \epsilon_r^{-1} \vec{H}_t - \mu_r K_0^2 W_z H_z \right] d\Omega - \int_{\Gamma} W_z \epsilon_r^{-1} [\vec{\nabla}_t H_z + \gamma \vec{H}_t] \cdot \vec{n} d\Gamma = 0 \quad \text{Eq-I.30b}$$

La présence des termes $\vec{\nabla}_t \times \vec{H}_t$ et $\vec{\nabla}_t \times \vec{W}_t$ dans l'équation Eq-I.30a implique que le champ \vec{H}_t et sa variation \vec{W}_t sont tangentiellement continues. Dans le même esprit, de part

l'existence des gradients $\vec{\nabla}_t W_z$ et $\vec{\nabla}_t H_z$ dans les deux équations, le champ longitudinal H_z et sa variation W_z doivent être continus dans les éléments et aux frontières de ceux-ci.

En ce qui concerne les conditions naturelles aux frontières associées à chaque intégrale de contour, nous retrouvons la condition concernant la composante E_z du champ identique à celle décrite dans la formulation précédente. Elle est issue de l'équation Eq-I.30a.

Dans l'équation Eq-I.30b, l'intégrale de contour fait apparaître le terme :

$$\varepsilon_r^{-1} \left[\vec{\nabla}_t H_z + \gamma \vec{H}_t \right] \cdot \vec{n} = -j\omega \vec{E}_t \cdot (\vec{z} \times \vec{n}) = j\omega \vec{E}_t \cdot \vec{s} \quad \text{Eq-I.31}$$

où \vec{s} est le vecteur unitaire tangent à la frontière.

Si cette intégrale est omise, la composante $\vec{E}_t \cdot \vec{s}$ du champ électrique est alors continue à travers les frontières entre les éléments du modèle géométrique de la structure et nulle sur les frontières extérieures de type court-circuit électrique.

La forme générale du système matriciel est donnée par les équations Eq-I.32a et Eq-I.32b :

$$[A]\{h_t\} - K_0^2 [B]\{h_t\} - \gamma [C]\{h_z\} - \gamma^2 [D]\{h_t\} = 0 \quad \text{Eq-I.32a}$$

$$[E]\{h_z\} - K_0^2 [F]\{h_z\} + \gamma [C]^T \{h_t\} = 0 \quad \text{Eq-I.32b}$$

où nous retrouvons par la suite les expressions suivantes :

$$A(i, j) = \int_{\Omega} \left[(\vec{\nabla}_t \times \vec{W}_{ti}) \cdot \varepsilon_r^{-1} (\vec{\nabla}_t \times \vec{W}_{tj}) \right] d\Omega$$

$$B(i, j) = \int_{\Omega} \mu_r \vec{W}_{ti} \cdot \vec{W}_{tj} d\Omega$$

$$C(i, j) = \int_{\Omega} \varepsilon_r^{-1} \vec{W}_{ti} \cdot (\vec{\nabla}_t W_{zj}) d\Omega$$

$$D(i, j) = \int_{\Omega} \varepsilon_r^{-1} \vec{W}_{ti} \cdot \vec{W}_{tj} d\Omega$$

$$E(i, j) = \int_{\Omega} \left[(\vec{\nabla}_t W_{zi}) \cdot \varepsilon_r^{-1} (\vec{\nabla}_t W_{zj}) \right] d\Omega$$

$$F(i, j) = \int_{\Omega} \mu_r W_{zi} W_{zj} d\Omega$$

$[C]^T$ est la transposée de la matrice $[C]$ et $\{h_t\}$, $\{h_z\}$ sont les vecteurs colonnes contenant les inconnues du problème.

La résolution du système Eq-I.32 se démarque du précédent car nous n'avons plus, pour le nombre d'onde K_0 fixé, un problème aux valeurs propres standard du type (K_0^2, γ^2) mais $(K_0^2, \gamma, \gamma^2)$.

Pour l'étude des structures sans pertes, il est toujours possible, dans le contexte du système Eq-I.32, de fixer la constante de propagation en vue d'obtenir la valeur propre K_0 même s'il est plus judicieux de procéder inversement.

Pour des structures comportant des matériaux à pertes diélectriques ou métalliques, nous concevons qu'il est beaucoup plus fastidieux de trouver la valeur propre réelle K_0 , solution du problème, lorsque la constante de propagation, au demeurant complexe, est fixée.

Pour pallier cet inconvénient, nous effectuons le changement de variable suivant :

$$H'_z = \frac{H_z}{\gamma}$$

Dans ce cas, l'équation Eq-I.32 devient :

$$[A]\{h_t\} - K_0^2[B]\{h_t\} - \gamma^2([C]\{h'_z\} + [D]\{h_t\}) = 0 \quad \text{Eq-I.33a}$$

$$\gamma^2([E]\{h'_z\} - K_0^2[F]\{h'_z\} + [C]^T\{h_t\}) = 0 \quad \text{Eq-I.33b}$$

Puisque nous préférons fixer le nombre d'onde en vue d'obtenir la valeur propre complexe γ , nous écrivons le système matriciel Eq-I.33 sous forme suivante :

$$\begin{bmatrix} [A] - K_0^2[B] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_t \\ h'_z \end{Bmatrix} = \gamma^2 \begin{bmatrix} [D] & [C] \\ [C]^T & [E] - K_0^2[F] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_t \\ h'_z \end{Bmatrix} \quad \text{Eq-I.34}$$

Les matrices sont symétriques et creuses. Cette formulation standard a été très utilisée par le passé pour définir le spectre des modes hybrides se propageant dans les structures sans pertes[7][8]. Malheureusement, l'apparition des modes parasites constituait un sérieux handicap à son développement, tout au moins lorsqu'elle fait intervenir une interpolation nodale des champs.

La suite nous montrera qu'elle est très performante lorsque les éléments d'arêtes sont utilisés en lieu et place des éléments nodaux.

I.2.2.3 Formulation avec fonction de pénalité : ETLFP

L'originalité de cette formulation par rapport à celle qui précède réside dans le fait qu'elle intègre la condition de la divergence dans les formes intégrales. Plaçons nous dans la situation où $\mu_r = 1$, la condition de divergence est $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$. Cette contrainte est prise en compte dans la formulation en incorporant les termes suivants :

$$\frac{p}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} (\vec{\nabla}_t \cdot \vec{W}_t) (\vec{\nabla}_t \cdot \vec{H}_t) d\Omega \quad \text{dans l'équation transverse Eq-I.30a} \quad \text{Eq-I.35a}$$

$$\text{et } \frac{p}{\varepsilon_0} \gamma^2 \int_{\Omega} W_z H_z d\Omega \quad \text{dans l'équation longitudinale Eq-I.30b} \quad \text{Eq-I.35b}$$

p est une fonction de pénalité qui doit être spécifiée. Ainsi, les solutions sont contraintes à satisfaire la condition de la divergence nulle. Plus le paramètre de pénalité est grand plus la contrainte escomptée sur la divergence est meilleure. Ce procédé présente l'avantage de ne pas modifier la taille du système matriciel, sa symétrie et son caractère creux. Cependant, il n'élimine pas complètement les modes parasites. Nous nous contentons de les éloigner du spectre des valeurs propres recherchées.

L'équation matricielle est presque identique à l'équation Eq-I.32, à l'exception des termes additionnels provenant de la discrétisation de l'équation Eq-I.35. Il faut remarquer que la difficulté rencontrée dans la résolution matricielle de cette formulation subsiste lorsque la

valeur propre du système algébrique demeure le nombre d'onde, et ce, tout comme pour le système précédent.

Des travaux sur les éléments nodaux, entre autre, utilisant cette fonction de pénalité furent publiés par Rahman et Davies en 1984[9][10]. Leurs études concernaient les guides rectangulaires métalliques chargés et les guides diélectriques pour des applications dédiées au domaine optique.

I.2.2.4 Formulation basée sur les équations transverse et longitudinale avec contrainte de la divergence nulle :ETLD

Nous pouvons contraindre la divergence à être nulle en exprimant le champ H_z en fonction de \vec{H}_t à partir de l'équation $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla}_t \mu_r \cdot \vec{H}_t - \gamma \mu_r H_z = 0$. La mise sous forme intégrale par la méthode de Galerkin de celle-ci, nous conduit à :

$$\int_{\Omega} W_z \mu_r H_z d\Omega = \gamma^{-1} \int_{\Omega} W_z (\vec{\nabla}_t \cdot \mu_r \vec{H}_t) d\Omega \quad \text{Eq-I.36}$$

La discrétisation de cette intégrale nous donne :

$$[F]\{h_z\} = \gamma^{-1}[G]\{h_t\} \quad \text{Eq-I.37}$$

En substituant dans les équations Eq-I.32a et Eq-I.32b $\{h_z\}$ par $\gamma^{-1}[G][F]^{-1}\{h_t\}$, on obtient un système matriciel utilisant uniquement les composantes transverses $\{h_t\}$.

Nous obtenons en définitive :

$$[A]\{h_t\} - K_0^2[B]\{h_t\} - [C][J]\{h_t\} - \gamma^2[D]\{h_t\} = 0 \quad \text{Eq-I.38a}$$

$$[E][J]\{h_t\} - K_0^2[F][J]\{h_t\} + \gamma^2[C]^T\{h_t\} = 0 \quad \text{Eq-I.38b}$$

où $[J] = [F]^{-1}[G]$

Le nombre de degré de liberté se trouve réduit, car il ne reste plus dans cette équation que les variables relatives aux composantes transverses du champ. Cependant, nous détruisons

le format creux des matrices du système final. Si nous spécifions la constante de propagation pour déterminer le nombre d'onde, dans le cas des structures sans pertes, le système matriciel final n'est pas toujours symétrique. Cette caractéristique, importante pour la résolution d'un système, est obtenue en multipliant Eq-I.38a par la transposée de la matrice $[J]$ et en additionnant les équations Eq-I.38a et Eq-I.38b. Ce fût l'option choisie par K. Hayata et al [11]. Il est aussi possible de rechercher le constante de propagation en fixant le nombre d'onde ; ceci en utilisant uniquement l'équation Eq-I.38a . Hayata utilisât cette approche pour résoudre les problèmes à faibles pertes intégrant de surcroît l'anisotropie des couches considérées[12][13]. Cette formulation est similaire à celle basée sur l'équation transverse modifiée décrite précédemment, à la seule différence que la divergence nulle est contrainte numériquement.

I.2.2.5 Formulation basée sur l'équation transverse : FET

L'objectif consiste en la définition d'une équation algébrique dont les variables sont les composantes du champ transverse. Le point de départ de cette formulation s'appuie sur le système matriciel Eq-I.32. En effet, on exprime les variables $\{h_z\}$ en fonction de $\{h_t\}$ en utilisant l'équation Eq-I.32b. Il vient :

$$\{h_z\} = -\gamma \left([E] - K_0^2 [F] \right)^{-1} [C]^T \{h_t\} \quad \text{Eq-I.39}$$

En remplaçant $\{h_z\}$ dans l'équation Eq-I.32a, on obtient :

$$[A]\{h_t\} - K_0^2 [B]\{h_t\} - \gamma^2 [K]\{h_t\} = 0 \quad \text{Eq-I.40}$$

$$\text{où } [K] = \left[[C] \left([E] - K_0^2 [F] \right)^{-1} [C]^T - [D] \right]$$

Puisque le nombre de degré de liberté est réduit, la taille du système matriciel à résoudre l'est aussi. Cependant, le caractère creux de la matrice est moins prononcé. Cette formulation a fait l'objet d'une application concernant l'étude des structures de propagation composées de

matériaux anisotropes[14]. Elle admet des solutions identiques à celles provenant de la formulation basée sur les composantes transversales et longitudinales du champ(ETL).

I.3 : Conclusion : Récapitulatif concernant les différentes formulations, les systèmes matriciels obtenus et quelques spécificités

Rappelons que notre point de départ repose sur les relations issues des équations de Maxwell. Ces relations sont :

L'équation longitudinale :EL – L'équation transverse : ET – La divergence nulle : DN

L'utilisation conjointe des deux premières relations fournit, pour la forme de Galerkin correspondante et discrétisée, le système matriciel que l'on notera ETL par simplification (paragraphe I.2.2.2). Dans le même esprit, l'équation matricielle précédente peut être modifiée pour n'obtenir qu'une seule expression. Elle ne fait dans ce cas apparaître que des composantes transversales. Il s'agit du système matriciel que nous appellerons FET, car basé sur une formulation transverse des équations de départ EL et ET (paragraphe I.2.2.5). Dans les formulations FET et ETL, la condition de divergence nulle est ignorée. Il y a donc un risque sérieux d'apparition de solutions parasites.

Signalons aussi que dans les formes faibles de Galerkin discrétisées, l'équation de divergence nulle peut intervenir de différentes manières.

- Si elle est appliquée directement de façon analytique sur les équations différentielles, nous obtenons l'équation transverse modifiée et le système matriciel correspondant noté ETM (paragraphe I.2.2.1)
- Introduite par le biais d'une fonction de pénalité que l'on ajoute, sous forme intégrale faible, aux équations EL et ET de départ, ou encore numériquement au moyen de la forme

	Formulation			Propriétés des matrices		Applications		
	Valeur propre recherchée	Solutions parasites	Nb de composantes de champs	creuses	[M] [N]	Mag et diélec	pertes	Arêtes vives
ETL	γ	oui	3	oui	SID et singulière SID	oui	oui	non
FET	γ	oui	2	non	SID, SID	oui	oui	non
ETM	k_0 ou γ	non	2	oui	Non symétrique, SDP	non	oui	non
ETLFP	k_0	non	3	oui	SSDP, SDP	non	non	non
ETLD	k_0	non	2	non	SSDP, SDP	non	oui	non

Figure I-8 : Récapitulatif des propriétés de cinq formulations en éléments finis de type nodale.

intégrale faible relative à la condition de divergence, il correspond respectivement les systèmes matriciels ETLFP et ETLD (paragraphes I.2.2.3 et I.2.2.4).

En définitive, nous disposons de cinq méthodes différentes pour étudier un problème de propagation. Il est toujours possible de les présenter sous la forme d'un problème standard aux valeurs propres du type $[M]\{x\} = \lambda[N]\{x\}$. Ainsi, nous proposons dans le tableau figure I-8, un bilan non exhaustif mais répondant aux principales questions que se pose un utilisateur potentiel de méthodes d'éléments finis. Les propriétés et particularités de chaque méthode sont répertoriées suivant trois volets, et ce, dans le cas des éléments nodaux, donc pour les champs calculés uniquement aux nœuds.

Le premier volet concerne la **formulation** au sens large. Il répond, aux colonnes 2, 3, 4, aux questions suivantes :

- Quelle est la valeur propre recherchée ?
- Existe-t-il des solutions non physiques ?
- Quel est le nombre de composantes de champ intervenant dans le calcul ?

Le deuxième volet porte uniquement sur les **propriétés** des matrices $[M]$ et $[N]$ du système correspondant à un problème isotrope, sans pertes donc à matrice réelle.

- Le cas des matrices creuses est signalé colonne 5.
- Celui des matrices symétriques et définies positives (SD), symétriques et semi définies positives (SSDP) et symétriques indéfinies (SID) est précisé colonne 6.

Enfin, dans une troisième rubrique, l'étude des structures comportant simultanément des matériaux magnétiques et diélectriques est évoquée. La possibilité de traduire la présence de matériaux à pertes ainsi que les géométries de sous-domaine comportant des arêtes vives (conducteur métallique notamment) est précisée.

Compte tenu de notre préoccupation qui, rappelons-le, consiste en l'étude des structures de propagation planaires tant pour la conception de circuits intégrés micro-ondes que logiques, aucune des formulations dont nous venons d'énoncer brièvement les fondements et les propriétés ne nous satisfait. En effet, on comprendra aisément que l'on rejette les deux formulations nous fournissant, outre les solutions vraies, des solutions parasites. Quant à celles restantes, aucune n'autorise réellement à partir des champs définis aux nœuds des triangles de discrétisations (les éléments nodaux) l'étude des structures planaires à pertes métalliques issues de ruban de conductivité de valeur finie comportant nécessairement des arêtes vives. Nous n'évoquons même pas ici le caractère anisotrope des couches entrant dans la confection du circuit.

Pour mettre en œuvre une méthode d'éléments finis qui puisse répondre à nos besoins, notre point de départ reposera, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, sur la formulation ETL (donc trois composantes de champ) bâtis non plus sur les éléments nodaux, mais autour des éléments d'arêtes. Ceci présente l'avantage de ne plus être confrontés aux problèmes longtemps redoutés des solutions parasites.

BIBLIOGRAPHIE du CHAPITRE I

[1] **Bernice M. Dillon and Jon P. Webb :**

« A comparison of formulations for the vector finite element analysis of waveguides »

IEEE trans on MTT , vol 42, N° 2, pp 308-316, february 1994

[2] **Gouri Dhatt et Gilbert Touzot :**

« Une présentation de la méthode des éléments finis »

Collection université de compiègne, deuxième édition, Maloine S. A . Editeur, 1984

[3] **Din Sun, John Manges, Xingchao Yuan, Zoltan Cendes :**

« Spurious Modes in Finite-Element Methods »

IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 37, N° 5, pp 12-24, october 1995

[4] **C. G. Williams et G.K. Cambrell :**

« Numerical solution of surface waveguide modes using transverse field components »

IEEE trans on MTT, vol 37, pp 1708-1715, novembre 1989

[5] **F.A. Fernandez and Y.Lu :**

« Variational finite element analysis of dielectric waveguides with no spurious modes »

Electro Lett, vol 26, pp2125-2126

[6] **Y.Lu :**

« The finite element solution of inhomogeneous anisotropic and lossy dielectric »

Ph.D dissertation, University college, London, Oct 1991

[7] **J. Lee, D. Sun, Z.J. Cendes :**

« Full-wave analysis of dielectric waveguides using tangential vector finite elements »

IEEE trans on MTTT, vol 39, pp 1262-1271, août 1991

[8] **M. Mutsuhara, H. Yunoki, A. Maruta :**

« Analysis of open-type waveguides by the vector finite element method »

IEEE Microwave and Guided wave Letters, vol 1, pp 376-378, décembre 1991

[9] **B.M.A. Rahman et J.B. Davies :**

« Penalty fonction improvement of waveguide solutions by finite elements »

IEEE trans on MTTT, vol 32, pp 922-928, août 1984

[10] **B.M.A. Rahman et J.B. Davies :**

« Finite-element analysis of optical and microwave problems »

IEEE trans on MTT, vol 32, pp 20-28, janvier 1984

[11] **K. Hayata, M. Koshiha, M. Eguichi, M. Suzuki :**

« Vectorial finite element method without any spurious solutions for dielectric waveguiding problems using transverse field components »

IEEE trans on MTTT, vol 34, pp 1120-1124, novembre 1986

[12] **K. Hayata, K. Muira, M. Koshiha :**

« Full vectorial finite element formalism for lossy anisotropic waveguides »

IEEE trans on MTTT, vol 37, pp 875-883, Mai 1989

[13] **K. Hayata, K. Muira, M. Koshiha :**

« Finite element formulation for lossy waveguides »

IEEE trans on MTT, vol 36, pp 268-274, Février 1988

[14] **M. Koshiha, K. Inoue :**

« Simple and efficient finite element analysis of microwave and optical waveguides »

IEEE trans on MTT, vol 40, pp 371-375, Février 1992

CHAPITRE II

Nous présentons une formulation, par éléments finis à éléments d'arêtes, en deux dimensions. Cette formulation est basée sur la résolution des équations couplées transversale et longitudinale de l'équation d'onde. Nous utilisons les éléments tangentiels encore appelés les éléments d'arêtes pour mener à bien ces calculs.

Après avoir défini l'équation de base à résoudre et sa formulation intégrale, nous évoquons la prise en compte des conditions globales aux limites et de continuité.

La discrétisation des formes intégrales est ensuite entreprise et les développements analytiques effectués sur une maille élémentaire: un triangle de discrétisation.

Bien que nous étudions les éléments tangentiels, l'élément nodal de Lagrange (le triangle de Lagrange) est sommairement abordé ainsi que les fonctions d'approximation des champs suivant un polynôme du 1^{er} ou du 2nd degré. Ce développement n'est pas assuré dans le système cartésien mais dans un autre référentiel : le système de coordonnées barycentriques. Cette opération exécutée sur le triangle de base associé aux coordonnées barycentriques présente l'avantage d'aboutir à une formulation analytique très simple et donc à un calcul fiable et très précis de l'intégrale effectuée sur un triangle élémentaire. Ceci constitue la base sur laquelle reposent désormais nos développements concernant les éléments tangentiels d'ordre zéro et d'ordre un pour un triangle élémentaire.

Bien évidemment, nous effectuons ensuite une opération dite d'assemblage regroupant toutes les matrices élémentaires consécutives à la résolution de l'équation d'onde sur chaque triangle participant à la discrétisation de la section droite de la structure de propagation, et ce, en tenant compte des conditions locales aux limites et de continuité.

La notion d'impédance de surface et d'impédance caractéristique est développée.

Vient ensuite la description des méthodes numériques choisies pour l'étude des structures comportant des matériaux à pertes.

II.1. Position du problème

Considérons un guide d'onde infini suivant la direction de propagation oz figure II-1. Le plan de section droite forme un domaine Ω contenu dans le plan xoy et fermé par un contour Γ . Pour effectuer la recherche des modes guidés susceptibles de se propager dans la structure figure II-1, nous devons résoudre l'équation d'onde établie au chapitre I, à savoir :

$$\vec{\nabla} \times (\mu_r^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{E}) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = 0 \quad \text{Eq-II.1}$$

Compte tenu de l'investissement que réclame la mise au point d'un code de calcul basé sur la méthode des éléments finis, nous avons entrepris de traiter dès le départ des structures plus générales et ce, notamment pour ce qui concerne la nature des matériaux mis en jeu. En conséquence, l'équation d'onde établie pour le champ électrique \vec{E} en régime harmonique, est étendue aux structures contenant des matériaux anisotropes, ces matériaux pouvant présenter des pertes.

$$\vec{\nabla} \times \left([\mu_r^*]^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) - k_0^2 [\epsilon_r^*] \vec{E} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{Eq-II.2a}$$

$$\vec{E} \times \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad \text{Eq-II.2b}$$

$$\vec{n} \times \left([\mu_r^*]^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad \text{Eq-II.2c}$$

où $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ω est la pulsation, μ_0 et ϵ_0 sont respectivement la perméabilité magnétique et la permittivité diélectrique du vide, \vec{n} est la normale dirigée vers l'extérieur du contour considéré et Ω est la section droite du guide dans l'équation Eq-II.2a.

Les équations Eq-II.2b et 2c représentent les conditions aux limites imposées par des frontières ou des contours du type court-circuit électrique (CCE) sur Γ_1 et court-circuit magnétique (CCM) sur Γ_2 .

Nous exprimons les tenseurs de permittivité $[\epsilon_r^*]$ et de perméabilité $[\mu_r^*]$ relative sous la forme suivante :

$$[\mu_r^*] = \begin{bmatrix} \mu_{rxx}^* & \mu_{rxy}^* & 0 \\ \mu_{ryx}^* & \mu_{ryy}^* & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{rzz}^* \end{bmatrix} \quad [\epsilon_r^*] = \begin{bmatrix} \epsilon_{rxx}^* & \epsilon_{rxy}^* & 0 \\ \epsilon_{ryx}^* & \epsilon_{ryy}^* & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{rzz}^* \end{bmatrix}$$

Dans le cas présent, nous avons choisi des tenseurs biaxiaux[1][2][3]. Notons, en outre, que la perméabilité magnétique et la permittivité diélectrique relatives sont complexes. De cette façon, nous pouvons notamment prendre en compte :

- D'une part, la tangente de l'angle de perte du matériau diélectrique considéré.
- D'autre part, les phénomènes inhérents à la nature dissipative des matériaux métalliques de conductivité finie.

Comme nous l'avons signalé auparavant, les champs de l'onde électromagnétique se propagent suivant la direction oz du guide uniforme figure II-1. En conséquence, nous pouvons relier les expressions générales des champs à la constante de propagation γ tel que, pour le champ électrique :

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y)e^{-\gamma z} \quad \text{Eq-II.3}$$

où $\gamma = \alpha + j\beta$, α et β sont respectivement les constantes d'atténuation et de phase.

Nous décomposons l'opérateur différentiel nabla $\vec{\nabla}$ et la composante du champ électrique total sous la forme suivante :

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_t - \gamma \vec{z} \quad \text{et} \quad \vec{E}(x, y) = \vec{E}_t(x, y) + E_z(x, y) \vec{z}$$

$$\vec{\nabla}_t = \frac{\partial}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{y} \quad \text{et} \quad \vec{E}_t(x, y) = E_x(x, y) \vec{x} + E_y(x, y) \vec{y}$$

En conséquence, l'équation d'onde établie auparavant se décline sous la forme transverse, il s'agit de l'équation Eq-II.4a et longitudinale Eq-II.4b, auxquelles sont associées des conditions aux frontières du type CCE sur Γ_1 et CCM sur Γ_2 Eq-II.4c, 4d.

$$\bar{\nabla}_t \times \frac{1}{\mu_{rzz}^*} (\bar{\nabla}_t \times \bar{E}_t) - \gamma (\tilde{\mu}_r^* \bar{\nabla}_t E_z) - (\epsilon_r^* k_0^2 + \gamma^2 \tilde{\mu}_r^*) \bar{E}_t = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{Eq-II.4.a}$$

$$\bar{\nabla}_t \cdot (\tilde{\mu}_r^* \bar{\nabla}_t E_z) + \gamma \bar{\nabla}_t \cdot (\tilde{\mu}_r^* \bar{E}_t) + \epsilon_{rzz}^* k_0^2 E_z = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{Eq-II.4b}$$

$$\bar{E} \times \bar{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad \text{Eq-II.4c}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{\mu_{rzz}^*} \bar{\nabla}_t \times \bar{E}_t \right) \cdot \bar{z} = 0 \\ \bar{n} \cdot (\tilde{\mu}_r^* (\bar{\nabla}_t E_z + \gamma \bar{E}_t)) = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad \text{Eq-II.4d}$$

Notons que dans les équations Eq-II.4a à Eq-II.4d nous avons substitué au tenseur inverse

$[\mu_r^*]^{-1}$ classique un tenseur que l'on peut qualifier de perméabilité transverse inverse $[\tilde{\mu}_r^*]$ (Annexe I). Il est aussi appelé tenseur de pseudo-perméabilité[4] et s'écrit :

$$[\tilde{\mu}_r^*] = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{rxx}^* & \tilde{\mu}_{rxy}^* \\ \tilde{\mu}_{ryx}^* & \tilde{\mu}_{ryy}^* \end{bmatrix} \quad \tilde{\mu}_{rxx}^* = \frac{\mu_{rxx}^*}{\Delta}, \quad \tilde{\mu}_{rxy}^* = \frac{\mu_{rxy}^*}{\Delta}, \quad \tilde{\mu}_{ryx}^* = \frac{\mu_{ryx}^*}{\Delta}, \quad \tilde{\mu}_{ryy}^* = \frac{\mu_{ryy}^*}{\Delta}$$

$$\text{où } \Delta = \mu_{rxx}^* \cdot \mu_{ryy}^* - \mu_{rxy}^* \cdot \mu_{ryx}^*.$$

Avant d'aborder en détail la description du type d'élément triangulaire retenu pour la discrétisation et par delà la résolution du système d'équation, nous rappelons brièvement l'option choisie pour aboutir à une formulation intégrale de l'équation Eq-II.4.

II.2. Formulation intégrale

En appliquant la méthode des résidus pondérés de Galerkin aux expressions Eq-II.4a et Eq-II.4b, nous obtenons les formes intégrales suivantes :

- Pour la forme transverse :

$$F_t = \int_{\Omega} \bar{W}_t \cdot \left[\bar{\nabla}_t \times \frac{1}{\mu_{rzz}^*} \bar{\nabla}_t \times \bar{E}_t - \gamma \left([\tilde{\mu}_r^*] \bar{\nabla}_t E_z \right) - \left([\epsilon_r^*] k_0^2 + \gamma^2 [\tilde{\mu}_r^*] \right) \bar{E}_t \right] d\Omega = 0 \quad \text{Eq-II.5a}$$

- Pour la forme longitudinale :

$$F_z = \int_{\Omega} W_z \left[\bar{\nabla}_t \cdot \left([\tilde{\mu}_r^*] \bar{\nabla}_t E_z \right) + \gamma \bar{\nabla}_t \cdot \left([\tilde{\mu}_r^*] \bar{E}_t \right) + \epsilon_{rzz}^* E_z \right] d\Omega = 0 \quad \text{Eq-II.5b}$$

où $\bar{W} = \delta \bar{E} = \bar{W}_t + W_z \bar{z}$ représente la fonction de base ou de pondération.

Afin de pouvoir prendre en compte les conditions de continuité requises aux interfaces entre différents milieux physiques ainsi que celles existant sur un court-circuit magnétique, une intégration par parties doit être appliquée sur les intégrales Eq-II.5a et 5b. De ce fait, les identités de Green permettent d'obtenir les intégrales faibles suivantes :

$$F_t = \int_{\Omega} \left[(\bar{\nabla}_t \times \bar{E}_t) \cdot \frac{1}{\mu_{rzz}^*} (\bar{\nabla}_t \times \bar{W}_t) - k_0^2 ([\epsilon_r^*] \bar{E}_t) \cdot \bar{W}_t - \gamma^2 ([\tilde{\mu}_r^*] \bar{E}_t) \cdot \bar{W}_t - \gamma ([\tilde{\mu}_r^*] \bar{\nabla}_t E_z) \cdot \bar{W}_t \right] d\Omega \\ - \int_{\Gamma} (\bar{n} \times \bar{W}_t) \cdot \frac{1}{\mu_{rzz}^*} (\bar{\nabla}_t \times \bar{E}_t) d\Gamma = 0 \quad \text{Eq-II.6a}$$

$$F_z = \int_{\Omega} \left[(\bar{\nabla}_t W_z) \cdot ([\tilde{\mu}_r^*] \bar{\nabla}_t E_z) + \gamma \bar{\nabla}_t W_z \cdot ([\tilde{\mu}_r^*] \bar{E}_t) - k_0^2 \epsilon_{rzz}^* E_z W_z \right] d\Omega \\ - \int_{\Gamma} W_z \left[[\tilde{\mu}_r^*] (\bar{\nabla}_t E_z + \gamma \bar{E}_t) \right] \cdot \bar{n} d\Gamma = 0 \quad \text{Eq-II.6b}$$

En général, la résolution d'un problème de propagation s'effectue en fixant la fréquence dans le but de déterminer ensuite la constante de propagation γ . Si l'on procède de la même manière pour la résolution, a posteriori, des équations intégrales précédentes, nous aboutissons à un système matriciel aux valeurs propres dont l'expression n'est pas du type $Ax = \lambda Bx$. Pour obtenir un système de cette nature, donc plus aisé à résoudre, la transformation de variable $E_z = \gamma e_z$ est appliquée aux intégrales faibles précédentes. Nous obtenons en définitive les équations suivantes :

$$F_t = \int_{\Omega} \left[(\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) \cdot \frac{1}{\mu_{rzz}^*} (\vec{\nabla}_t \times \vec{W}_t) - k_0^2 (\epsilon_r^* \vec{E}_t) \cdot \vec{W}_t - \gamma^2 (\tilde{\mu}_r^* \vec{E}_t) \cdot \vec{W}_t - \gamma^2 (\tilde{\mu}_r^* \vec{\nabla}_t e_z) \cdot \vec{W}_t \right] d\Omega$$

$$- \int_{\Gamma} (\vec{n} \times \vec{W}_t) \cdot \frac{1}{\mu_{rzz}^*} (\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) d\Gamma = 0$$

Eq-II.7a

$$F_z = \gamma^2 \int_{\Omega} \left[(\vec{\nabla}_t w_z) \cdot (\tilde{\mu}_r^* \vec{\nabla}_t e_z) + \vec{\nabla}_t w_z \cdot (\tilde{\mu}_r^* \vec{E}_t) - k_0^2 \epsilon_{rzz}^* e_z w_z \right] d\Omega$$

$$- \gamma^2 \int_{\Gamma} w_z \left[\tilde{\mu}_r^* (\vec{\nabla}_t e_z + \vec{E}_t) \right] \cdot \vec{n} d\Gamma = 0$$

Eq-II.7b

Nous pouvons remarquer que les intégrales de contour font intervenir des termes qui possèdent une signification physique.

En effet,

$$\text{le terme } \frac{1}{\mu_{rzz}^*} (\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) \text{ est égal à } -j\omega\mu_0 H_z \vec{z} \quad \text{Eq-II.8a}$$

et

$$\text{l'expression } \gamma \left[\tilde{\mu}_r^* (\vec{\nabla}_t e_z + \vec{E}_t) \right] \cdot \vec{n} \quad \text{Eq-II.8b} \text{ vaut aussi } -j\omega\mu_0 \vec{H}_t \vec{z} \times \vec{n} \quad \text{où } \vec{H}_t \vec{z} \times \vec{n}$$

représente la composante transverse tangente au contour Γ . Dans la littérature, les relations Eq-II.8a et b sont appelées conditions naturelles aux limites. C'est au moyen de ces relations que sont prises, implicitement en compte, certaines conditions. A cet égard, nous distinguons trois cas selon que le contour Γ constitue la frontière délimitant la structure et le milieu extérieur ou alors l'interface séparant deux milieux :

Si le contour Γ de la structure de propagation est une frontière du type court-circuit magnétique, il en résulte que les composantes tangentielles du champ magnétique, sur ce contour, doivent s'annuler. Par conséquent, en omettant ces deux intégrales de contour, nous garantissons la condition $\vec{H} \times \vec{n} = \vec{0}$.

- Par contre, si le contour Γ décrit un court-circuit électrique, nous devons imposer la condition $\vec{E} \times \vec{n} = \vec{0}$. Par conséquent, les fonctions de pondération ou les fonctions de test vérifient $\vec{W}_t \times \vec{n} = \vec{0}$ et $w_z = 0$. Ceci annule nécessairement les intégrales de contour.
- Dans le même esprit, supposons maintenant que le contour Γ représente l'interface séparant deux milieux de permittivité et de perméabilité différentes, en omettant sur l'interface ces deux intégrales de contour, nous garantissons la condition $\vec{n} \times \vec{H}_1 = \vec{n} \times \vec{H}_2$.

En définitive, le traitement de l'équation d'onde Eq-II.2a et des conditions aux limites associées Eq-II.2b et 2c établies au début de ce chapitre, se résume à la résolution des équations intégrales faibles suivantes dans lesquelles les termes de contour ont disparu :

$$F_t = \int_{\Omega} \left[(\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) \cdot \frac{1}{\mu_{rzz}^*} (\vec{\nabla}_t \times \vec{W}_t) - k_0^2 (\epsilon_r^* \vec{E}_t) \cdot \vec{W}_t - \gamma^2 (\tilde{\mu}_r^* \vec{E}_t) \cdot \vec{W}_t - \gamma^2 (\tilde{\mu}_r^* \vec{\nabla}_t e_z) \cdot \vec{W}_t \right] d\Omega \quad \text{Eq-II.9a}$$

$$F_z = \gamma^2 \int_{\Omega} \left[(\vec{\nabla}_t w_z) \cdot (\tilde{\mu}_r^* \vec{\nabla}_t e_z) + \vec{\nabla}_t w_z \cdot (\tilde{\mu}_r^* \vec{E}_t) - k_0^2 \epsilon_{rzz}^* e_z w_z \right] d\Omega \quad \text{Eq-II.9b}$$

Nous insistons sur le fait qu'aucune autre condition n'est à imposer, hormis, bien entendu, celle $\vec{E} \times \vec{n} = \vec{0}$ devant traduire la présence d'une frontière du type court-circuit électrique.

II.3 Les conditions aux limites et de continuité

Nous décrivons, par la suite, de façon réaliste, notre problème de propagation si l'équation d'onde est résolue correctement. Dans ce cas, elle doit vérifier toutes les conditions aux limites et de continuité requises par les champs électromagnétiques. Bien que nous n'ayons pas encore abordé la résolution des formes intégrales précédentes, nous pouvons toutefois raisonner d'une manière globale. Puisque certaines conditions sont assurées implicitement alors que d'autres ne le sont pas ; un bilan s'impose :

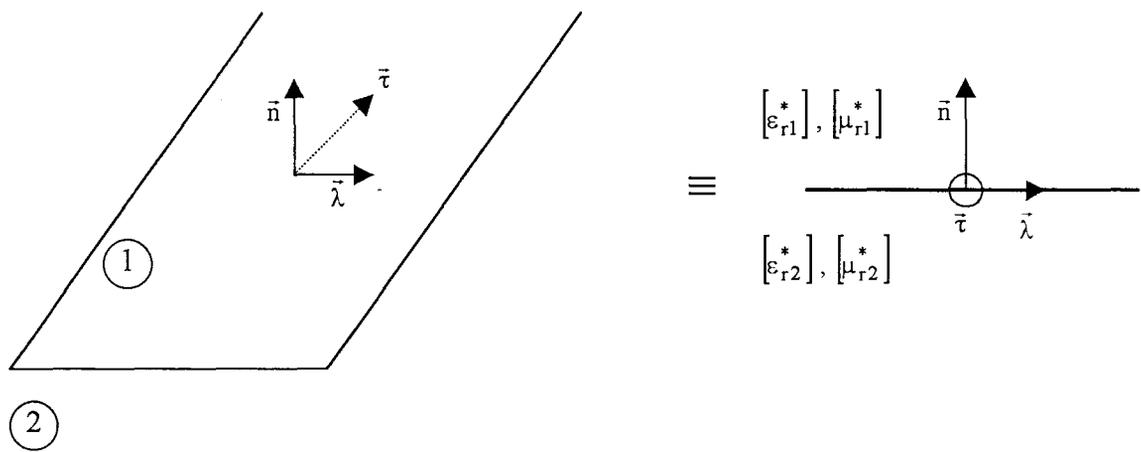


Figure II-2 : Interface séparant deux milieux différents.

Nous avons déjà mis en exergue que l'omission des intégrales de contour traduit toutes les contraintes relatives au comportement du champ magnétique tangent, tant sur une interface entre deux milieux, que sur un contour du type court-circuit magnétique. Il s'agit, en l'occurrence, des équations Eq-II10a et Eq-II10b

$$\vec{H}_1 \times \vec{n} = \vec{H}_2 \times \vec{n} \quad \text{Eq-II10a}$$

$$\vec{H} \times \vec{n} = 0 \quad \text{sur un CCM} \quad \text{Eq-II.10b}$$

Bien évidemment, toute résolution d'un problème de propagation comportant des interfaces diélectrique-diélectrique requiert, en supplément, la continuité des composantes tangentielles du champ électrique ainsi que leurs nullités sur un court-circuit électrique. Il faut donc imposer explicitement ces conditions, à savoir :

$$\vec{E}_1 \times \vec{n} = \vec{E}_2 \times \vec{n} \quad \text{Eq-II10.c}$$

$$\vec{E} \times \vec{n} = 0 \quad \text{sur un CCE} \quad \text{Eq-II.10d}$$

A ce stade de notre bilan, seules subsistent les conditions à satisfaire :

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{n} = \vec{D}_2 \cdot \vec{n} \quad \text{Eq-II.10e}$$

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{n} = \vec{B}_2 \cdot \vec{n} \quad \text{Eq-II.10f}$$

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur un CCE} \quad \vec{D} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur un CCM} \quad \text{Eq-II.10g}$$

Pour cela, considérons d'une manière générale, l'interface séparant deux milieux différents de caractéristiques $([\epsilon_1^*], [\mu_1^*])$ et $([\epsilon_2^*], [\mu_2^*])$ figure II-2. Cette interface est située dans le plan $\lambda O \tau$ d'un trièdre direct $\vec{\lambda} \vec{\tau} \vec{n}$ où \vec{n} est un vecteur normal à l'interface. Dans ce système de référence, nous pouvons écrire la relation Eq-II10f sous la forme :

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}_1) \cdot \vec{n} = \left(\frac{\partial E_\tau}{\partial \lambda} - \frac{\partial E_\lambda}{\partial \tau} \right)_1 \quad \text{et} \quad (\vec{\nabla} \times \vec{E}_2) \cdot \vec{n} = \left(\frac{\partial E_\tau}{\partial \lambda} - \frac{\partial E_\lambda}{\partial \tau} \right)_2$$

Nous voyons apparaître les dérivées des composantes tangentielles du champ électrique. Puisque ces composantes sont identiques à l'interface, il en résulte que leurs dérivées par rapport aux variables λ et τ sont continues et de ce fait, la relation $\vec{B}_1 \cdot \vec{n} = \vec{B}_2 \cdot \vec{n}$ se vérifie implicitement.

Nous procédons de façon similaire pour montrer que $\vec{D}_1 \cdot \vec{n} = \vec{D}_2 \cdot \vec{n}$ sachant que la condition $\vec{H}_1 \times \vec{n} = \vec{H}_2 \times \vec{n}$ est automatiquement assurée.

En définitive, des remarques précédentes, il découle que les relations Eq-III10g $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{D} \cdot \vec{n} = 0$ sont implicitement associées à $\vec{E} \times \vec{n} = 0$ et $\vec{H} \times \vec{n} = 0$ traduisant respectivement l'existence d'un contour du type court-circuit électrique CCE et magnétique CCM.

II.4. Discrétisation des formes intégrales et calcul sur une maille élémentaire

Cette discrétisation est le processus par lequel les formes intégrales établies auparavant sont mises sous forme d'équations algébriques. Elle constitue l'un des points clés de notre formulation par éléments finis et justifie l'utilisation d'un outil informatique pour résoudre numériquement le système matriciel issu de cette discrétisation. Cette opération nécessite plusieurs étapes :

1. La première consiste à décomposer le domaine Ω en n_{el} sous-domaines Ω^e .
2. La seconde concerne la forme géométrique de ces sous-domaines encore appelés éléments. Bien évidemment, dans le problème à deux dimensions qui est le nôtre, les sous-domaines s'identifient à des polygones. Le triangle est sans doute l'élément le plus répandu lors d'une analyse 2D. On imagine sans difficulté, que n'importe quel domaine

puisse être approximé par des polygones eux-mêmes subdivisés en un nombre finis de triangles.

3. La troisième requiert la définition du type d'approximation retenu pour la description des champs électriques sur ces éléments.
4. Enfin, les formes intégrales Eq-II.9 s'expriment à partir d'une somme d'intégrales évaluées sur chaque élément Ω^e :

$$F_t = \sum_{e=1}^{nel} F_t^e = 0 \quad \text{Eq-II.11a}$$

$$F_z = \sum_{e=1}^{nel} F_z^e = 0 \quad \text{Eq-II.11b}$$

F_t^e et F_z^e représentent les intégrales sur le domaine de l'élément triangulaire Ω^e .

Si la première et la seconde étape suscitent peu de commentaires, la troisième en revanche mérite que l'on s'y attarde. Dans la littérature, l'approximation utilisée pour approcher le champ électrique sur un élément triangulaire fût et reste encore celle de Lagrange. Les champs \vec{E} ou \vec{H} ne sont approximés qu'en des points particuliers du triangle, à savoir ces trois sommets pour le cas le plus simple. On parle alors d'analyse nodale. Cette démarche, et les résultats obtenus ont été abondamment commentés dans les ouvrages scientifiques. Il est clair que l'apparition de solutions non physiques dans le spectre des modes guidés [5] nous a incité à développer une autre méthode basée sur l'approximation des champs sur les arêtes du triangle. A ce niveau, il ne s'agit plus d'analyse nodale. Toutefois, avant d'aborder les calculs relatifs à ce type nouveau d'approximation, nous avons jugé utile de présenter succinctement les éléments de Lagrange, et ce, même si ce volet est abondamment commenté dans les ouvrages et revues scientifiques. L'objectif étant, ici, de

cerner les problèmes consécutifs à l'utilisation des éléments nodaux de Lagrange et d'apprécier la façon dont les éléments tangentiels apportent une amélioration.

II.5. Construction des éléments de Lagrange, analyse nodale, espace de référence et solutions parasites .

II.5.1. Construction des éléments de type Lagrange [6] [7]

La construction des fonctions approchées, pour ce qui concerne le champ électrique $E(x, y)$, s'appuie sur la notion de fonction d'interpolation. Ainsi, l'idée de départ repose sur le calcul d'une fonction d'approximation commune $u(x, y)$ permettant d'approcher les valeurs des composantes transverses et longitudinales du champ $E(x, y)$. Cette fonction $u(x, y)$ est obtenue par combinaison linéaire de n fonctions $p_i(x, y)$, elles-mêmes, linéairement indépendantes :

$$u(x, y) = p_1(x, y)a_1 + p_2(x, y)a_2 + \dots + p_n(x, y)a_n$$

Les fonctions $p_i(x, y)$ peuvent être des polynômes, des fonctions trigonométriques, voire même toute autre fonction. Pour notre part, nous retenons le développement à partir des polynômes. Quant aux a_i , ce sont les paramètres généraux de l'approximation. Ils n'ont aucun sens physique. Malgré tout, nous préférons que cette fonction approchée $u(x, y)$ possède des paramètres ayant une signification physique. En l'occurrence, nous désirons que ces paramètres prennent la valeur de cette fonction en des points particuliers appelés nœuds. Dans le cas qui nous préoccupe, la fonction $u(x, y)$ doit posséder les valeurs des composantes du champ électrique en ces points. Ces n nœuds doivent être régulièrement répartis sur le périmètre du triangle voire à l'intérieur du triangle lui-même. Par conséquent, on choisit comme ensemble de nœuds le treillis principal K d'ordre n du triangle présenté Figure II-3.

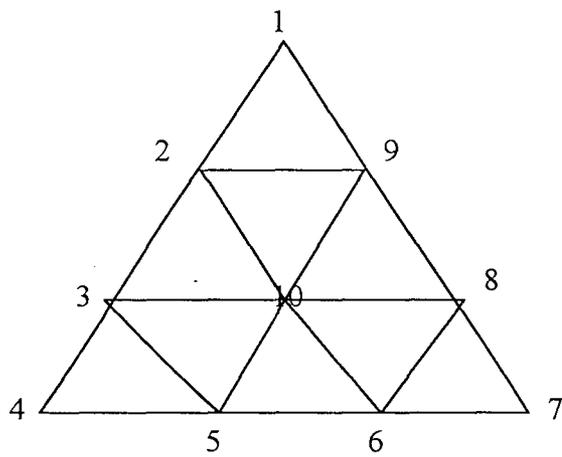


Figure II-3 : Nœuds d'interpolation d'un triangle dans le cas où $n=3$.

$$K = \left\{ (x, y) / \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} ; \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1; \lambda_i \in \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1 \right\} \right\} \quad \text{Eq-II.12.}$$

Ces nœuds sont appelés nœuds d'interpolation. Leur position est repérée dans le système de coordonnées cartésien par le couple des valeurs $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$.

Dans ces conditions, notre fonction $u(x, y)$ prend les valeurs particulières :

$$u(x_0, y_0) = u_0$$

$$u(x_1, y_1) = u_1$$

.

.

$$u(x_{n-1}, y_{n-1}) = u_{n-1}$$

Eq-II.13

De cette manière, la fonction approchée s'écrit :

$$u(x, y) = N_0(x, y)u_0 + N_1(x, y)u_1 + \dots + N_{n-1}(x, y)u_{n-1} \quad \text{Eq-II.14}$$

où $N_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ sont les fonctions d'interpolation

Ces fonctions d'interpolation doivent être égales au nombre n de nœuds choisis dans le triangle puisque les $N_i(x, y)$ doivent constituer une base complète de l'espace vectoriel des polynômes de degré n . Les développements futurs de nos calculs portent sur la forme quadratique de l'interpolation des champs. En conséquence, cela va constituer le point de départ de notre étude sommaire.

Nous présentons figure II-4, le domaine triangulaire à six nœuds constituant notre maille élémentaire. Tout le problème consiste désormais à expliciter les fonctions d'interpolation $N_i(x, y)$ pour $0 \leq i \leq 5$.

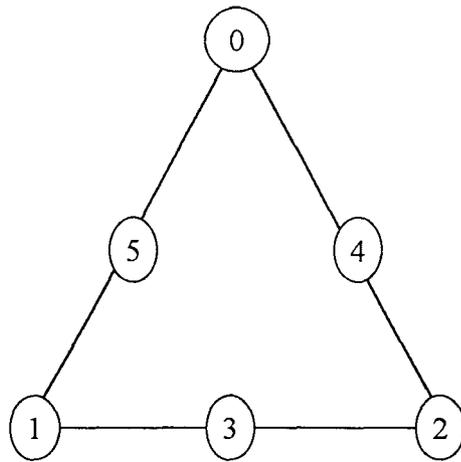


Figure II-4 : Elément triangulaire de type Lagrange d'ordre 2

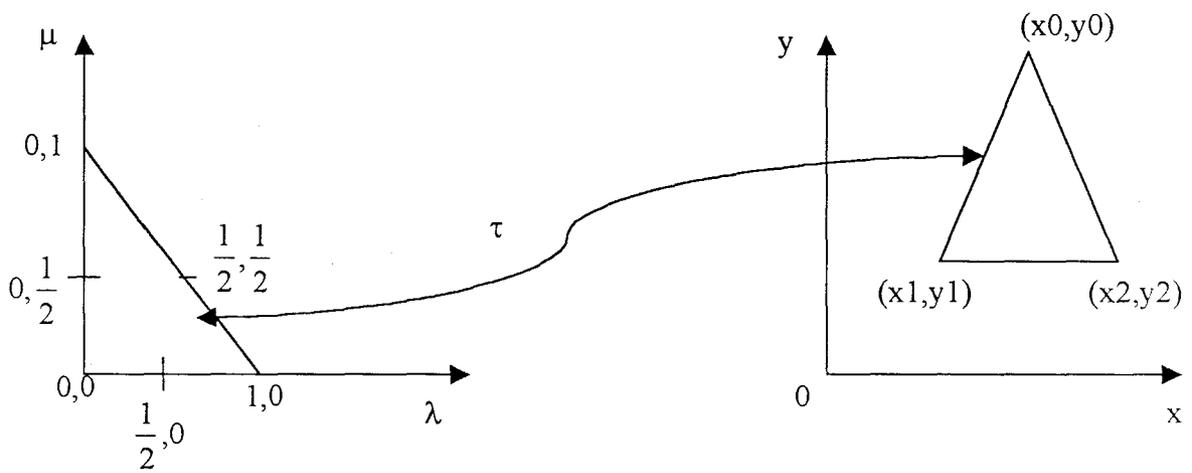


Figure II-5 : Transformation isoparamétrique

II.5.2 Calcul des fonctions de Lagrange et espace de référence.

La détermination de cette fonction s'avère dans bien des cas très complexe et fastidieuse, et ce, notamment pour le calcul des intégrales intervenant dans la forme faible Eq-II.9. Pour lever cette difficulté, la notion d'élément de référence est introduite. Le calcul analytique peut alors être envisagé en introduisant une transformation géométrique bijective τ qui a un point \tilde{P} de l'élément $\tilde{\Omega}^e$ appartenant à un espace de référence, fait correspondre un et un seul point P d'un élément Ω^e de l'espace réel, et inversement. Nous proposons un exemple de transformation isoparamétrique Figure II-5. Dans ces conditions, la fonction d'approximation s'exprime dans l'espace de référence, sous la forme.

$$u(\lambda, \mu) = \tilde{P}_0(\lambda, \mu)\tilde{a}_0 + \tilde{P}_1(\lambda, \mu)\tilde{a}_1 + \dots + \tilde{P}_5(\lambda, \mu)\tilde{a}_5 \quad \text{Eq-II.15}$$

Pour notre part, nous avons choisi un élément de type Lagrange. Dans ce cas, les fonctions $P_i(\lambda, \mu)$ sont construites à partir des monômes indépendants constituant une base complète de l'espace vectoriel des polynômes de degré deux. Le nombre de variables n est de ce fait relié à l'ordre m de l'approximation par la relation $n = (m+1)(m+2)/2$. On comprend alors aisément les raisons qui nous ont amené à sélectionner six nœuds pour l'élément quadratique de Lagrange. La base polynomiale complète se décline donc, dans l'espace de référence (λ, μ) sous la forme suivante :

$$\tilde{P}_0(\lambda, \mu) = 1 ; \tilde{P}_1(\lambda, \mu) = \lambda ; \tilde{P}_2(\lambda, \mu) = \mu ; \tilde{P}_3(\lambda, \mu) = \lambda^2 ; \tilde{P}_4(\lambda, \mu) = \lambda\mu ; \tilde{P}_5(\lambda, \mu) = \mu^2$$

Exprimons qu'en chaque nœud d'interpolation de coordonnées (λ_i, μ_i) à savoir : 1-0, 0-1, 0-0 pour les sommets et 0-1/2, 1/2-1/2, 1/2-0 pour les nœuds milieux, la fonction $u(\lambda, \mu)$ prend la valeur $u_i(\lambda_i, \mu_i)$. Nous obtenons le système Eq-II.16 suivant :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_5 \end{Bmatrix} = \{u_i\} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_0(\lambda_0, \mu_0) & \tilde{P}_1(\lambda_0, \mu_0) & \tilde{P}_2(\lambda_0, \mu_0) & \tilde{P}_3(\lambda_0, \mu_0) & \tilde{P}_4(\lambda_0, \mu_0) & \tilde{P}_5(\lambda_0, \mu_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{P}_0(\lambda_5, \mu_5) & \tilde{P}_1(\lambda_5, \mu_5) & \tilde{P}_2(\lambda_5, \mu_5) & \tilde{P}_3(\lambda_5, \mu_5) & \tilde{P}_4(\lambda_5, \mu_5) & \tilde{P}_5(\lambda_5, \mu_5) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_5 \end{Bmatrix}$$

Autrement dit nous avons :

$$\{u_i\} = [P]\{\tilde{a}_i\} \quad \text{Eq-II.17a}$$

$$\{\tilde{a}_i\} = [P]^{-1}\{u_i\} \quad \text{Eq-II.17b}$$

où

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad [P]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans l'élément de référence, d'après l'équation Eq-II.15

$$u(\lambda, \mu) = \left\langle 1 \quad \lambda \quad \mu \quad \lambda^2 \quad \lambda\mu \quad \mu^2 \right\rangle \{\tilde{a}_i\} \quad \text{Eq-II.18}$$

nous souhaitons exprimer $u(\lambda, \mu)$ sous la forme :

$$u(\lambda, \mu) = \left\langle N_0(\lambda, \mu) \quad N_1(\lambda, \mu) \quad \dots \quad N_5(\lambda, \mu) \right\rangle \{u_i\} \quad \text{Eq-II.19}$$

En reportant $\{\tilde{a}_i\}$ dans l'équation Eq-II.18, nous obtenons :

$$u(\lambda, \mu) = \left\langle 1 \quad \lambda \quad \mu \quad \lambda^2 \quad \lambda\mu \quad \mu^2 \right\rangle [P]^{-1}\{u_i\} \quad \text{Eq-II.20}$$

et en identifiant les expressions Eq-II.20 et Eq-II.18, nous en déduisons que :

$$\left\langle N_0(\lambda, \mu) \quad N_1(\lambda, \mu) \quad \dots \quad N_5(\lambda, \mu) \right\rangle = \left\langle 1 \quad \lambda \quad \mu \quad \lambda^2 \quad \lambda\mu \quad \mu^2 \right\rangle [P]^{-1} \quad \text{Eq-II.21}$$

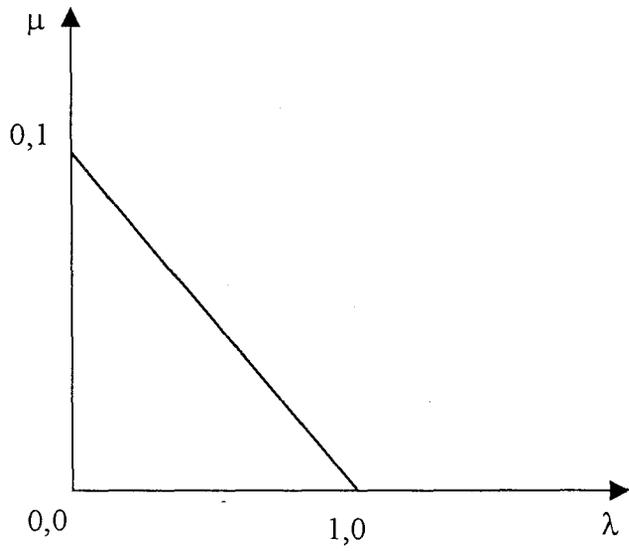


Figure II-6.a : Système de référence

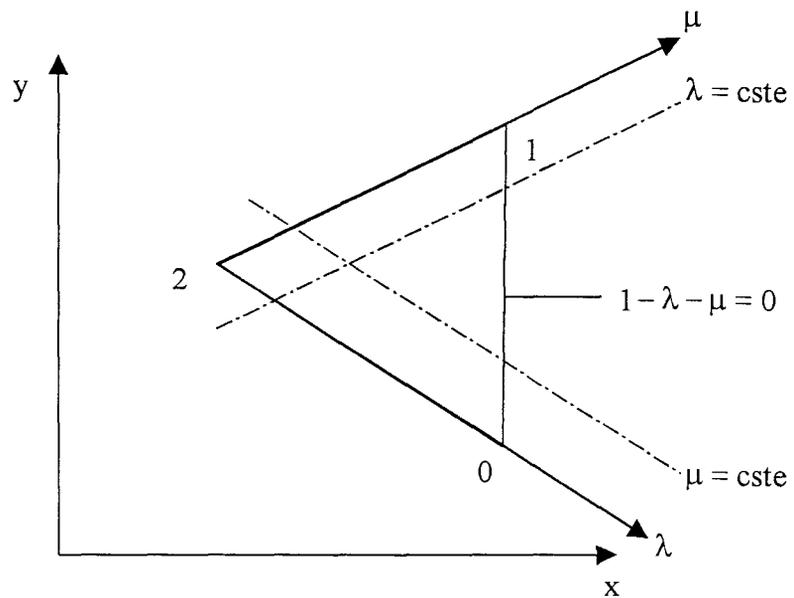


Figure II-6.b : Système de coordonnées locales

où encore :

$$\begin{aligned}
 N_0(\lambda, \mu) &= -\lambda(1-2\lambda) & N_1(\lambda, \mu) &= -\mu(1-2\mu) & N_2(\lambda, \mu) &= -\eta(1-2\eta) \quad \text{où } \eta = 1-\lambda-\mu \\
 N_3(\lambda, \mu) &= 4\mu\eta & N_4(\lambda, \mu) &= 4\lambda\eta & N_5(\lambda, \mu) &= 4\lambda\mu
 \end{aligned}
 \tag{Eq-II.22}$$

De la même manière, on parvient à établir les fonctions d'interpolation de Lagrange pour les éléments du premier ordre. Ces fonctions se déclinent donc, pour un élément à trois nœuds d'interpolation, sous la forme :

$$N_0(\lambda, \mu) = \lambda \quad N_1(\lambda, \mu) = \mu \quad N_2(\lambda, \mu) = \eta \quad \text{où } \eta = 1-\lambda-\mu
 \tag{Eq-II.23}$$

Les coordonnées (λ, μ) du système de référence dans lequel nous venons d'exprimer les fonctions d'interpolation du premier et du second ordre peuvent s'interpréter d'une autre façon. En effet, ces coordonnées s'apparentent également à celles d'un système de coordonnées locales. Ceci est illustré Figure II-6a et II-6b. Dans le système de référence Figure II-6a, on privilégie le repérage des nœuds via une transformation adaptée. Dans le système de coordonnées locales Figure II-6b, λ et μ traduisent l'existence de droites colinéaires aux arêtes des triangles.

Dans le même esprit, il existe un autre système local lié à chaque élément tout aussi intéressant. Il est connu dans la littérature sous le nom de système 'simplex' ou système de coordonnées barycentriques[6][7]. Un élément triangulaire issu de la discrétisation de la section droite ainsi que le système 'simplex' associé sont illustrés Figure II-7.

Ce système local fait intervenir les trois coordonnées ξ_0, ξ_1, ξ_2 . D'un point de vue analytique, ξ_0, ξ_1, ξ_2 sont reliées aux coordonnées cartésiennes (x_i, y_i) des sommets du triangle par la transformation suivante :

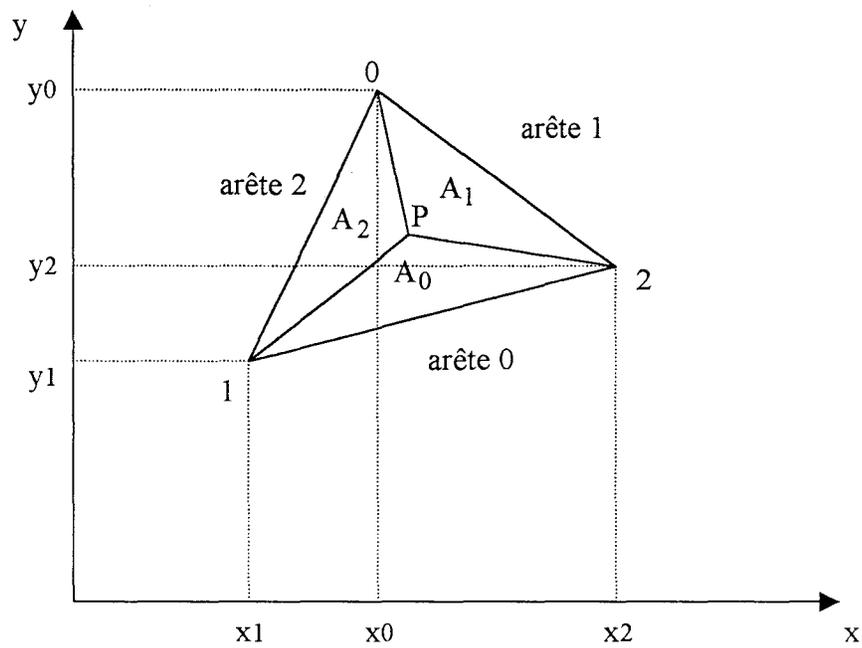
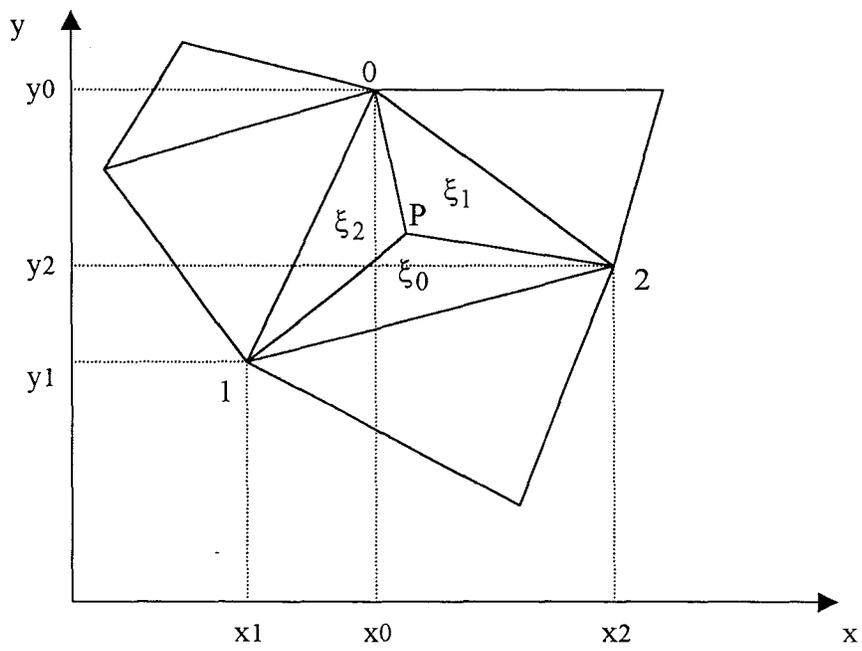


Figure II-7 : Système de coordonnées barycentriques

$$\begin{Bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad \text{Eq-II.24}$$

$$\text{avec } a_0 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad b_0 = y_1 - y_2 \quad c_0 = x_2 - x_1$$

$$a_1 = x_2 y_0 - x_0 y_2 \quad b_1 = y_2 - y_0 \quad c_1 = x_0 - x_2$$

$$a_2 = x_0 y_1 - x_1 y_0 \quad b_2 = y_0 - y_1 \quad c_2 = x_1 - x_0$$

où $A = \frac{1}{2}(b_1 c_2 - b_2 c_1)$ est la surface du triangle

ou encore, dans la mesure où il est possible d'inverser la matrice précédente :

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Eq-II.25}$$

L'expression matricielle Eq-II.24 s'écrit également sous une forme plus condensée tel que :

$$\xi_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad i = 0, 1, 2 \quad \text{Eq-II.26}$$

A ce stade, quelques remarques s'imposent.

- Les ξ_i sont des variables sans dimension. D'un point de vue concret, elles représentent les coordonnées barycentriques d'un point P de coordonnées x, y situé, dans le cas présent, dans l'élément Figure II-7. Ce point délimite trois triangles de surfaces A_0, A_1, A_2 . La somme de ces trois surfaces est, bien entendu, égale à la surface A de l'élément considéré.
- Une étude plus poussée montre en définitive que les coordonnées barycentriques s'écrivent aussi $\xi_i = \frac{A_i}{A}$. Il s'agit donc d'un quotient de deux surfaces, où A représente la surface totale du triangle. Quant à A_i , elle fait intervenir les arêtes du triangle (inscrit

dans l'élément triangulaire Figure II-7) repéré par les sommets j , k et le point intérieur P .

En conséquence, nous pouvons écrire : $\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 = 1$

□ Remarquons également que ce système s'apparente fortement à celui décrit Figure II-6b.

En effet, lorsque $\xi_0 = 0$, cela implique que la surface A_0 est nulle. Le point P de coordonnées barycentrique $\xi_0, \xi_1 + \xi_2 = 1$ est donc localisé sur l'arête 0 . Cette arête représente le coté opposé au sommet 0 du triangle.

□ En identifiant les coordonnées d'un point du système simplex avec celles du système local λ, μ définies précédemment, nous obtenons :

$$\xi_0 = \lambda \quad \xi_1 = \mu \quad \xi_2 = 1 - \lambda - \mu \quad \text{Eq-II.27}$$

Notons cependant, que le système simplex aurait pu être obtenu à partir de la transformation géométrique τ en développant de manière analytique cette transformation et en constatant que l'on obtient les mêmes relations que celles écrites sous la forme Eq-II.27.

Par analogie avec les équations Eq-II.22 et Eq-II.23, les fonctions d'interpolation de Lagrange adapté au système simplex se déclinent donc de la manière suivante :

Pour le second ordre,

$$N_0(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = -\xi_0(1 - 2\xi_0)$$

$$N_1(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = -\xi_1(1 - 2\xi_1)$$

$$N_2(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = -\xi_2(1 - 2\xi_2)$$

$$N_3(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = 4\xi_1\xi_2$$

$$N_4(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = 4\xi_0\xi_2$$

$$N_5(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = 4\xi_0\xi_1$$

pour le premier ordre,

$$N_0(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = \xi_0$$

$$N_1(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = \xi_1$$

$$N_2(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = \xi_2$$

II.5.3 Description des champs électriques par les éléments à variables nodales de Lagrange en régime statique et solutions parasites.

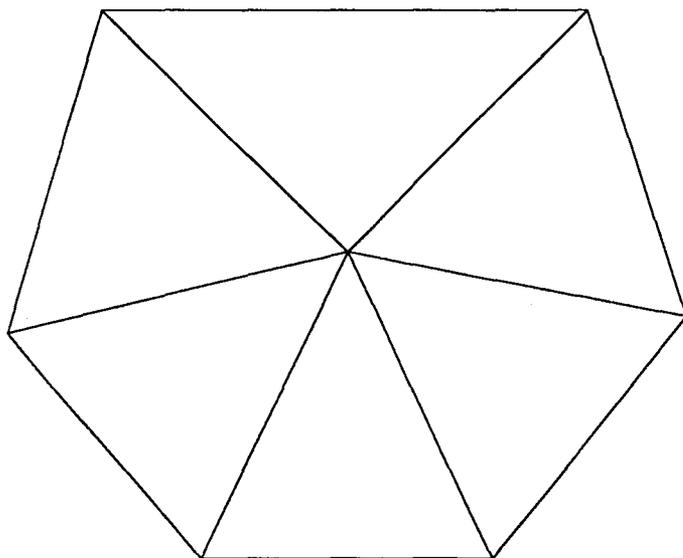
L'utilisation de ces éléments pour la discrétisation des formes intégrales décrites précédemment Eq-II.9 laisse apparaître lors de la résolution du système matriciel équivalent, des modes n'ayant aucune réalité physique[8][9][10]. Ils sont qualifiés de modes parasites. Dès lors, une attention particulière fût portée sur leur identification ainsi que sur leur suppression. Konrad[5] fût le premier à les identifier comme des solutions ne possédant pas une divergence nulle ($\vec{\nabla} \cdot [\epsilon_r^*] \vec{E} = 0$). Il préconisa donc de forcer la condition de divergence nulle dans les équations à résoudre. Plusieurs travaux corroborèrent cette idée[11][12]. Cependant, lorsque nous observons l'équation d'onde Eq-II.2a, nous constatons qu'en effectuant le calcul de sa divergence, nous obtenons :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times ([\mu_r^*]^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{E}) - k_0^2 [\epsilon_r^*] \vec{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_0^2 \vec{\nabla} \cdot ([\epsilon_r^*] \vec{E}) = 0 \quad \text{Eq-II.28}$$

Il est clair que les solutions de cette équation possèdent toutes une divergence nulle à l'exception de celles résultant du régime statique. Ceci a conduit naturellement à rechercher l'origine des solutions parasites à ce régime. Nous souhaitons vérifier, à présent, si les champs tels qu'ils ont été décrits sur les éléments de type Lagrange vérifient les relations découlant du régime statique, à savoir :

- Le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire V .
- Son rotationnel est identiquement nul.

Insistons sur le fait que toute grandeur approximée par les éléments de Lagrange du 1^{er} ordre est **continue à l'intérieur du domaine de l'élément (l'intérieur du triangle), y compris sur ses frontières**. Rappelons en outre, que les dérivées premières de ces grandeurs par rapports aux variables générales x, y, z ne sont pas continues. Par contre, les dérivées premières effectuées par rapport aux variables portant la direction des arêtes sont continues.



Maillage arbitraire

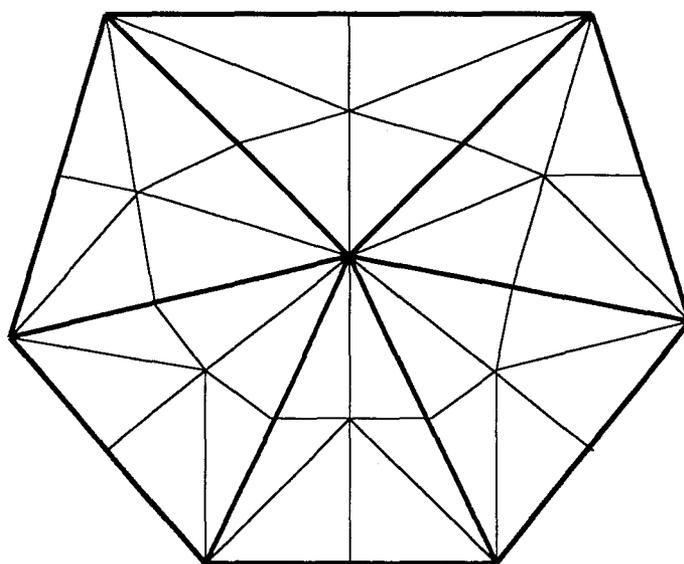


Figure II-8 : Subdivision de chaque triangle du maillage arbitraire en six autres.

On dit, d'ailleurs dans la littérature [13], que ces éléments sont de classe C^0 .

Ainsi, plaçons-nous dans la situation où les grandeurs sont les composantes du champ électrique approximées par des éléments de Lagrange du premier ordre.

Dans cette optique, est-il possible de trouver, en régime statique, une grandeur scalaire V sur cet élément de type Lagrange possédant un gradient ($\vec{E}_t = -\vec{\nabla}_t V$) continu sur les frontières de ces éléments ?

Dans la mesure où cette approximation du potentiel V existe, elle doit être nécessairement de forme quadratique puisque le champ E est du 1^{er} ordre. Elle doit aussi posséder des dérivées premières continues sur les frontières puisque les dérivées du potentiel représentent les champs électriques et que certaines conditions de continuité sur E sont à assurer. Ces éléments seraient donc de classe C^1 . Cependant, Cendes et Wong [14] ont montré qu'il n'existait pas de fonction par morceau, quadratique, définie sur ce type d'élément, tel que sa dérivée première soit continue sur les frontières. Tout de même, ils démontrèrent qu'en partant d'une décomposition arbitraire d'un domaine en plusieurs sous-domaines de type Lagrange, il fallait subdiviser chacun de ces sous-domaines en six autres sous-domaines identiques (Figure II-8), pour que le gradient de la grandeur scalaire soit continue sur les frontières. Ainsi, pour un tel maillage, les solutions en régime statique sont bien modélisées et la constante de propagation correspondant à la fréquence nulle est exactement zéro. Bien évidemment, si nous retenons un maillage arbitraire, l'approximation de la constante de propagation calculée à la fréquence nulle est représentée par des valeurs parasites, en général élevées, apparaissant dans tout le spectre des valeurs propres, vraies solutions du problème.

Les éléments à variables nodales appliqués à la discrétisation des formes intégrales Eq-II.9a, Eq-II.9b[15] nécessitent, entre autre solution, un maillage spécial si l'on désire éviter l'apparition de ces solutions parasites. L'emploi de ce maillage spécifique ne permet donc

plus une utilisation systématique des maillages professionnels et commerciaux issus des logiciels comme IDEAS, CATIA, ANSYS, ou encore MOSAIC.

En conséquence, pour pallier le problème des modes parasites et pour conserver la souplesse du logiciel de maillage que nous avons adopté, notre choix s'est porté sur la méthode des éléments d'arêtes. En effet, la raison pour laquelle les éléments nodaux de Lagrange laisse apparaître les solutions parasites est liée au fait que l'on ne puisse pas trouver un potentiel scalaire V dont dérive le champ électrique en régime statique.

Imaginons malgré tout, que le potentiel V soit approximé par les éléments nodaux de Lagrange, et souvenons-nous que les dérivées premières des seules composantes tangentielles sur les frontières du triangle sont continues. Dans ce cas, si l'on bâtit, à partir des éléments nodaux, une approximation ne faisant intervenir que les composantes nodales projetées sur les arêtes, les grandeurs sont continues ainsi que leurs dérivées. Nous venons de traduire sommairement la base sur laquelle repose les éléments finis à éléments d'arêtes.

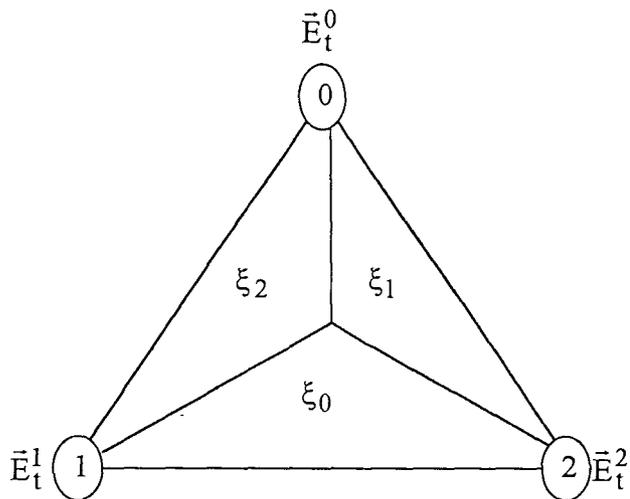
II.6. Les éléments tangentiels ou éléments d'arêtes

Dans les développements qui vont suivre, nous utiliserons, comme point de départ, les champs nodaux issus de l'élément de Lagrange. Ceci permet de mieux comprendre la raison pour laquelle nous avons jugé utile d'en rappeler brièvement les fondements.

Tout comme pour les éléments nodaux de Lagrange, les éléments d'arêtes sont d'ordre zéro, d'ordre un, voire d'ordre plus élevé. A ce jour, les travaux parus sur les éléments d'arêtes concernent les ordres zéro et un pour les développements des champs dans le triangle.

Nous proposons en préambule de débiter notre étude par l'ordre zéro, même si, nos préoccupations concernent essentiellement l'ordre un.

Comme nous le verrons dans les pages qui suivent, ordre zéro et ordre un diffèrent notablement, et ce, par l'ajout de composantes normales aux arêtes du triangle d'ordre un



Elément triangulaire de Lagrange du premier ordre

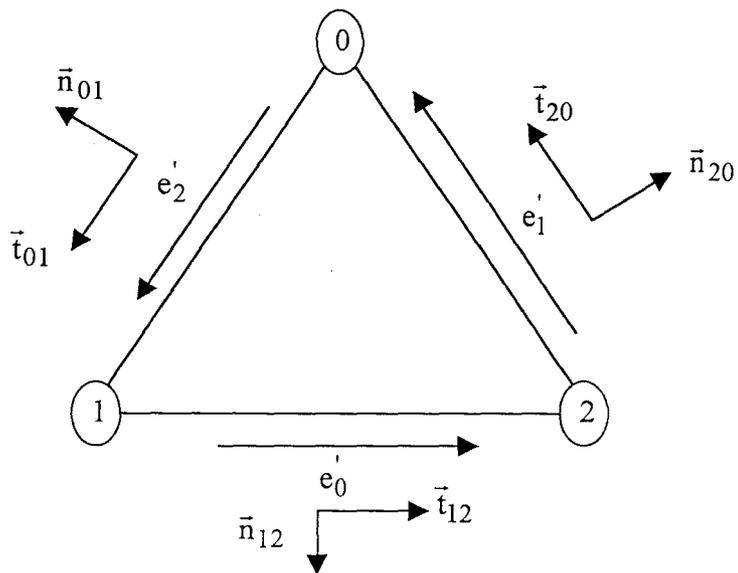


Figure II-9. a : Elément tangentiel d'ordre zéro

comparé à l'ordre zéro où seules des composantes tangentielles aux arêtes du triangle sont nécessaires.

II.6. 1. Élément tangentiel d'ordre zéro

Par définition, cet élément est construit en projetant sur les trois arêtes de l'élément de type Lagrange du premier ordre figure II-9a, les valeurs des champs nodaux transverses \vec{E}_t^i situés aux sommets **0**, **1**, **2** du triangle. Rappelons que l'approximation nodale du champ transverse, dans le triangle, est de la forme:

$$\vec{E}_{\text{transverse}}(x, y) = \sum_{i=0}^2 \xi_i \vec{E}_t^i = \vec{E}_t(x, y) \quad \text{Eq-II.29}$$

Nous souhaitons décrire une nouvelle approximation des champs dans laquelle les variables indépendantes e_i' sont plutôt affectées aux arêtes qu'aux nœuds du triangle. Puisque cette approximation est, dans un premier temps, à l'ordre zéro, nous devons veiller à ce que le champ soit approché par une constante sur chaque arête. Ceci se traduit par les variables e_i' , projections des champs nodaux \vec{E}_t^i sur les arêtes du triangle repérées par les vecteurs unitaires tangents aux arêtes \vec{t}_{01} , \vec{t}_{12} , \vec{t}_{20} . On observera que deux champs nodaux \vec{E}_t^i d'une même arête possèdent une projection identique sur celle-ci.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_t^0 \cdot \vec{t}_{01} = e_2' \\ \vec{E}_t^0 \cdot \vec{t}_{20} = e_1' \end{array} \right. \quad 2) \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_t^1 \cdot \vec{t}_{01} = e_2' \\ \vec{E}_t^1 \cdot \vec{t}_{12} = e_0' \end{array} \right. \quad 3) \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_t^2 \cdot \vec{t}_{20} = e_1' \\ \vec{E}_t^2 \cdot \vec{t}_{12} = e_0' \end{array} \right.$$

Nous pouvons également écrire le champ au nœud 0, \vec{E}_t^0 dans la base $(\vec{n}_{01}, \vec{n}_{20})$ sous la forme :

$$\vec{E}_t^0 = \alpha \vec{n}_{01} + \beta \vec{n}_{20} \quad \text{où } \vec{n}_{01} \text{ et } \vec{n}_{20} \text{ sont les normales aux arêtes } 01 \text{ et } 02$$

nous déduisons d'après la relation 1) que :

$$\alpha = \frac{e_1'}{\bar{n}_{20} \cdot \bar{t}_{01}} \quad \beta = \frac{e_2'}{\bar{n}_{01} \cdot \bar{t}_{20}}$$

or nous pouvons aussi écrire :

$$\begin{cases} \bar{n}_{20} \cdot \bar{t}_{01} = -\sin \theta_0 = \frac{-2A}{L_{01} L_{20}} \\ \bar{n}_{01} \cdot \bar{t}_{20} = \sin \theta_0 = \frac{2A}{L_{01} L_{20}} \end{cases}$$

où A représente l'aire totale de l'élément et L_{ij} la norme de l'arête ij

De ce fait, nous obtenons les relations suivantes:

$$\bar{E}_t^0 = -\frac{L_{20} L_{01}}{2A} \bar{n}_{01} e_1' + \frac{L_{01} L_{20}}{2A} \bar{n}_{20} e_2'$$

$$\bar{V}_t \xi_1 = -\frac{L_{20}}{2A} \bar{n}_{20} \quad \bar{V}_t \xi_2 = -\frac{L_{10}}{2A} \bar{n}_{10}$$

et par voie de conséquence,

$$\bar{E}_t^0 = L_{20} e_1' \bar{V}_t \xi_2 - L_{01} e_2' \bar{V}_t \xi_1 \quad \text{Eq-II.30}$$

Dans le même esprit, nous pouvons exprimer les champs transverses à partir de leurs composantes définies sur les arêtes du triangle au moyen des relations Eq-II.31 et 32. Ces relations sont, du reste, démontrées dans l'annexe II.

$$\bar{E}_t^1 = -L_{01} e_2' \bar{V}_t \xi_0 + L_{12} e_0' \bar{V}_t \xi_2 \quad \text{Eq-II.31}$$

$$\bar{E}_t^2 = -L_{12} e_0' \bar{V}_t \xi_1 + L_{20} e_1' \bar{V}_t \xi_0 \quad \text{Eq-II.32}$$

A ce stade, l'approximation basée sur les composantes tangentielles que nous souhaitons construire, est obtenue en reportant dans l'équation Eq-II.29 les expressions des champs nodaux $\bar{E}_t^0, \bar{E}_t^1, \bar{E}_t^2$ traduites respectivement par les équations Eq-II.30,31,32.

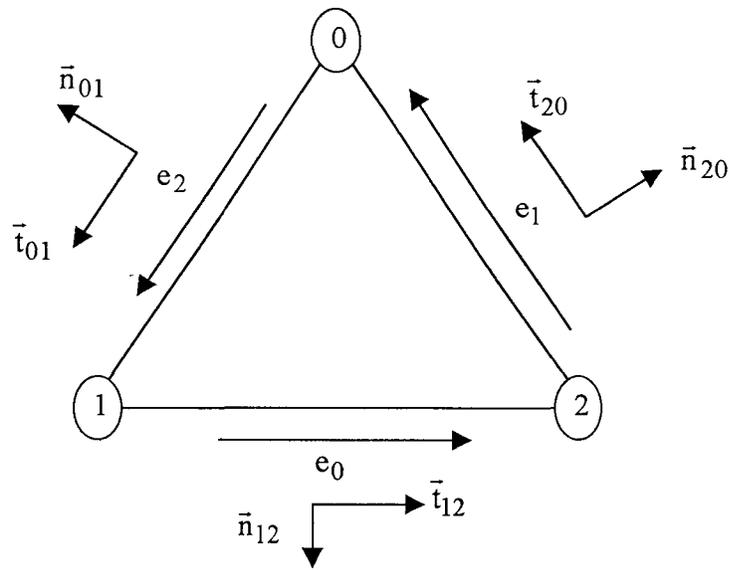


Figure II-9.b : Élément tangentiel d'ordre zéro

Nous obtenons :

$$\vec{E}_t(x, y) = [\xi_1 \bar{\nabla}_t \xi_2 - \xi_2 \bar{\nabla}_t \xi_1] L_{12} e'_0 + [\xi_2 \bar{\nabla}_t \xi_0 - \xi_0 \bar{\nabla}_t \xi_2] L_{20} e'_1 + [\xi_0 \bar{\nabla}_t \xi_1 - \xi_1 \bar{\nabla}_t \xi_0] L_{01} e'_2$$

Eq-II.33

En posant

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_0(x, y) &= \xi_1 \bar{\nabla}_t \xi_2 - \xi_2 \bar{\nabla}_t \xi_1 ; & \vec{\gamma}_1(x, y) &= \xi_2 \bar{\nabla}_t \xi_0 - \xi_0 \bar{\nabla}_t \xi_2 ; \\ \vec{\gamma}_2(x, y) &= \xi_0 \bar{\nabla}_t \xi_1 - \xi_1 \bar{\nabla}_t \xi_0 \\ e_0 &= L_{12} e'_0 ; & e_1 &= L_{20} e'_1 ; & e_2 &= L_{01} e'_2 \end{aligned}$$

Nous aboutissons, en définitive, à l'expression approchée du champ sur cet élément triangulaire figure II-9b qui s'exprime sous la forme :

$$\vec{E}_t(x, y) = \sum_{i=0}^2 \vec{\gamma}_i(x, y) e_i$$

Eq-II.34

Où $\vec{\gamma}_i(x, y)$ est appelé fonction vectorielle de base et e_i est le produit de la composante tangentielle du champ sur l'arête considérée par sa longueur.

Cet élément associé à la formulation intégrale décrite précédemment a été utilisé dans quelques travaux parus depuis 1996 avec succès[16][17].

Toutefois, dès que l'on désire accélérer la convergence de la méthode, il est préférable d'utiliser ce type d'élément à un ordre plus élevé. Pour cette raison, le paragraphe suivant présente la construction de l'élément tangentiel du premier ordre, qui rappelons-le, constitue l'ossature de ce mémoire de thèse.

II.6.2 Élément tangentiel du premier ordre

La construction de cet élément est, dans son ensemble, identique à celle qui précède. Nous souhaitons que le champ sur chaque arête du triangle soit approché par une fonction linéaire.

Par définition, et afin d'éviter l'apparition des solutions parasites, la composante transverse du champ électrique $\vec{E}_t = E_x \vec{x} + E_y \vec{y}$ sur cet élément doit être interpolée de manière à ce que $\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t \cdot \vec{z}$ soit un polynôme du premier degré [18].

Pour expliciter tout ceci, considérons le triangle figure II-10 où nous avons défini les vecteurs unitaires tangentiels et normaux aux arêtes comme suit :

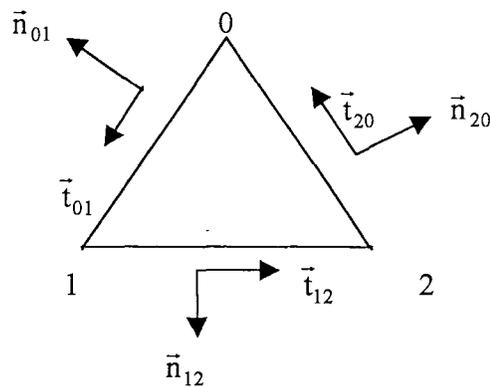


Figure II-10 : Définition des vecteurs unitaires tangents et normaux aux arêtes

Par analogie avec l'ordre zéro, l'obtention de l'élément tangentiel du premier ordre repose sur la projection des valeurs de champ situées sur les nœuds d'interpolation de l'élément de type Lagrange, mais du second ordre (figure II-11)

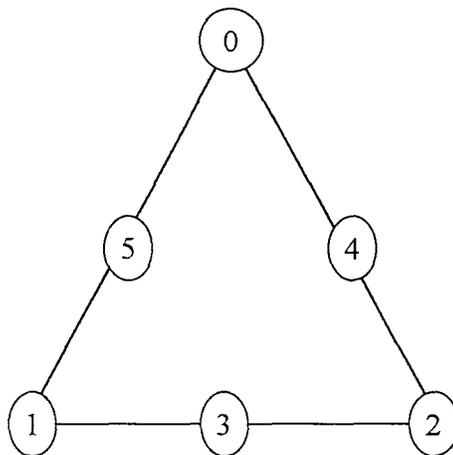


Figure II-11 : Nœuds d'interpolation de Lagrange d'ordre deux.

Ainsi, l'expression du champ transverse dans cet élément s'écrit :

$$\bar{E}_t = \sum_{i=0}^5 N_i(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \bar{E}_t^i \quad \text{Eq-II.35}$$

où $N_i(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ est le polynôme de Lagrange du second degré au nœud i . \bar{E}_t^i est la variable nodale du champ au nœud i . C'est la valeur du champ à ce nœud.

Le but poursuivi consiste à remplacer les variables nodales \bar{E}_t^i par des variables tangentielles

e_{ij}^k définies de la manière suivante :

$$\bar{E}_t^0 \cdot \bar{t}_{01} = e_{01}^0 \quad \bar{E}_t^1 \cdot \bar{t}_{12} = e_{12}^0 \quad \bar{E}_t^2 \cdot \bar{t}_{20} = e_{20}^0$$

$$\bar{E}_t^0 \cdot \bar{t}_{20} = e_{20}^1 \quad \bar{E}_t^1 \cdot \bar{t}_{01} = e_{01}^1 \quad \bar{E}_t^2 \cdot \bar{t}_{12} = e_{12}^1$$

où les indices i, j sont les numéros des nœuds définissant l'arête mais l'exposant ne prend logiquement que les valeurs 0, 1 sur chaque arête.

Ces variables tangentielles sont les projections des champs issus des nœuds du triangle sur les arêtes de celui-ci. Ces nouvelles variables indépendantes sont représentées sur la figure II-12.

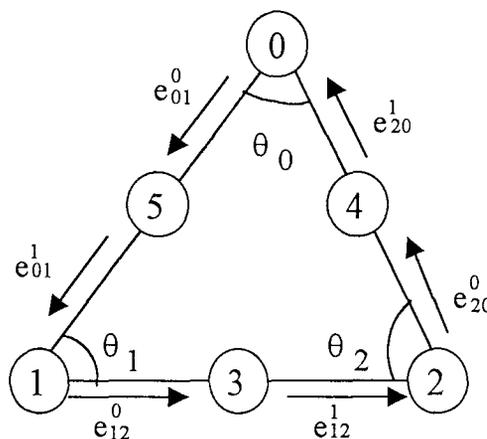


Figure II-12 : Description des variables tangentielles pour le triangle d'ordre 1.

Les variables nodales du champ aux nœuds 3,4,5 situés aux milieux des arêtes sont la moyenne de celles situées aux sommets du triangle. Nous avons :

$$\bar{\bar{E}}_t^3 = \frac{\bar{\bar{E}}_t^1 + \bar{\bar{E}}_t^2}{2}$$

$$\bar{\bar{E}}_t^4 = \frac{\bar{E}_t^0 + \bar{E}_t^2}{2}$$

$$\bar{\bar{E}}_t^5 = \frac{\bar{\bar{E}}_t^0 + \bar{\bar{E}}_t^1}{2}$$

Les champs $\bar{\bar{E}}_t^i$ sont alors déduits des relations précédentes et s'expriment en fonction des variables e_{ij}^k sous la forme :

$$\bar{\bar{E}}_t^0 = \frac{e_{01}^0}{\bar{n}_{20} \cdot \bar{t}_{01}} \bar{n}_{20} + \frac{e_{20}^1}{\bar{n}_{01} \cdot \bar{t}_{20}} \bar{n}_{01}$$

$$\bar{\bar{E}}_t^1 = \frac{e_{12}^0}{\bar{n}_{01} \cdot \bar{t}_{12}} \bar{n}_{01} + \frac{e_{01}^1}{\bar{n}_{12} \cdot \bar{t}_{01}} \bar{n}_{12}$$

$$\bar{\bar{E}}_t^2 = \frac{e_{20}^0}{\bar{n}_{12} \cdot \bar{t}_{20}} \bar{n}_{12} + \frac{e_{12}^1}{\bar{n}_{20} \cdot \bar{t}_{12}} \bar{n}_{20}$$

A cet égard, considérons le triplet (i, j, k) représentant les trois sommets du triangle figure II-12. En effectuant toutes les permutations circulaires de ce triplet, nous observons que :

$$\bar{n}_{ij} \cdot \bar{t}_{jk} = -\sin \theta_j \text{ et } \bar{n}_{ij} \cdot \bar{t}_{ki} = \sin \theta_i \quad \text{Annexe III}$$

où θ_i représente l'angle au sommet ou au nœud i du triangle.

Ainsi, les variables nodales $\bar{\bar{E}}_t^i$ se simplifient et s'écrivent sous la forme suivante :

$$\bar{\bar{E}}_t^0 = \frac{1}{\sin \theta_0} \left[e_{20}^1 \bar{n}_{01} - e_{01}^0 \bar{n}_{20} \right]$$

$$\bar{\bar{E}}_t^1 = \frac{1}{\sin \theta_1} \left[e_{01}^1 \bar{n}_{12} - e_{12}^0 \bar{n}_{01} \right]$$

$$\bar{E}_t^2 = \frac{1}{\sin \theta_2} \left[e_{12}^1 \bar{n}_{20} - e_{20}^0 \bar{n}_{12} \right]$$

En reportant dans l'équation Eq-II.35 les expressions des champs \bar{E}_t^i ainsi obtenues, nous obtenons l'expression Eq-II.36:

$$\bar{E}_t = \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i}{\sin \theta_0} \left[e_{ki}^1 \bar{n}_{ij} - e_{ij}^0 \bar{n}_{ki} \right] \quad \text{Eq-II.36}$$

Le but poursuivi consiste à l'établissement d'une approximation du champ transverse dont le $\bar{V}_t \times \bar{E}_t$ est un polynôme du premier degré[19]. Le calcul de ce terme nous conduit au résultat suivant :

$$\bar{V}_t \times \bar{E}_t = \sum_{i=0}^2 \frac{1}{\sin \theta_i} \left[e_{ki}^1 \nabla_t \xi_i \times \bar{n}_{ij} - e_{ij}^0 \nabla_t \xi_i \times \bar{n}_{ki} \right]$$

En nous aidant des relations :

$$\bar{V}_t \xi_i = -\frac{L_{jk}}{2A} \bar{n}_{jk} \quad \text{Annexe III}$$

$$\bar{n}_{ij} \times \bar{n}_{jk} = \sin \theta_j \bar{z}$$

$$\bar{n}_{ij} \times \bar{n}_{ki} = -\sin \theta_i \bar{z}$$

nous écrivons l'expression du rotationnel sous la forme contractée tel que:

$$\bar{V}_t \times \bar{E}_t = \sum_{i=0}^2 \frac{L_{jk}}{2A} \left[e_{ki}^1 + e_{ij}^0 \right] \bar{z} \quad \text{Eq-II.37}$$

Comme nous pouvons le constater, la formulation Eq-II.37 du rotationnel du champ transverse ne fait intervenir que des termes constants. Ceci est contraire à l'hypothèse de départ[18] établie au début du paragraphe II5.2. qui stipule que le rotationnel est du premier ordre. Des variables supplémentaires doivent donc être introduites dans cet élément[15]. Ces fonctions vectorielles de base ne contribuent, en aucune manière, à la description des composantes tangentiels le long des arêtes de l'élément. Ainsi, nous retenons deux

composantes dénommées composantes faciales f_0 et f_1 Figure II-13 situées sur la face du triangle et normale à deux des trois arêtes de celui-ci. Ceci est défini figure II-13. C'est à ce stade que nous constatons une différence notable entre ordre zéro et ordre un. Ces deux variables faciales suffisent, à elles seules, à assurer le caractère complet de la base dans laquelle le problème est décrit. En effet, notre développement des champs repose sur une association de fonctions de base linéairement indépendantes. Bien évidemment, il n'y a pas de critère établi pour ce qui concerne le choix de l'arête sur laquelle ces nouvelles variables sont définies.

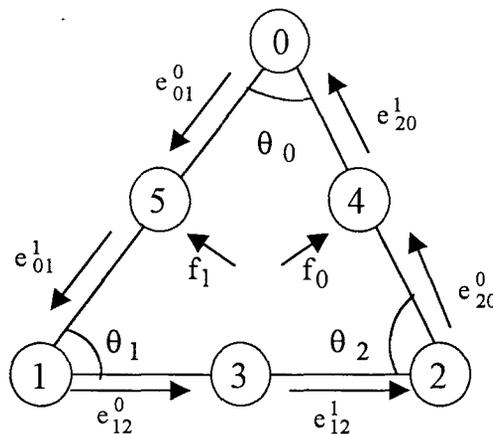


Figure II-13 : Adjonction des variables faciales f_0 et f_1

Dans le contexte de la figure II-13, Les expressions définies précédemment des champs

\bar{E}_t^4 et \bar{E}_t^5 aux nœuds 4 et 5, se trouvent modifiées. Par conséquent, nous obtenons :

$$\bar{E}_t^4 = \frac{\bar{E}_t^0 + \bar{E}_t^2}{2} + f_0 \bar{n}_{20}$$

$$\bar{E}_t^5 = \frac{\bar{E}_t^0 + \bar{E}_t^1}{2} + f_1 \bar{n}_{01}$$

De ce fait, l'équation Eq-II.36 se transforme en :

$$\bar{E}_t = \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i}{\sin \theta_i} \left[e_{ki}^1 \bar{n}_{ij} - e_{ij}^0 \bar{n}_{ki} \right] + f_0 \bar{n}_{20} (4\xi_0 \xi_2) + f_1 \bar{n}_{01} (4\xi_0 \xi_1) \quad \text{Eq-II.38}$$

De la même façon, nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t &= \sum_{i=0}^2 \frac{L_{jk}}{2A} [e_{ki}^1 + e_{ij}^0] \vec{z} + \frac{2}{A} f_0 (L_{01} \sin \theta_0 \xi_0 - L_{12} \sin \theta_2 \xi_2) \vec{z} \\ &+ \frac{2}{A} f_1 (L_{12} \sin \theta_1 \xi_1 - L_{20} \sin \theta_0 \xi_0) \vec{z} \end{aligned} \quad \text{Eq-II.39}$$

A ce stade de notre développement, nous remarquons que l'expression Eq-II.38 du champ transverse est du second ordre en ξ . Quant à celle du rotationnel du champ transverse, elle est du premier ordre. On notera que l'on retrouve dans cette expression le terme constant obtenu au départ, sans l'adjonction des variables faciales. Le rotationnel du champ transverse ainsi défini, garantit que la solution non triviale de l'équation $\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t = 0$ est $\vec{E}_t = -\vec{\nabla}_t V$. Les solutions résultant du régime statique sont donc correctement modélisées et aucune solution parasite ne peut apparaître.

Dans les structures à étudier, un certain nombre de modes possèdent une composante longitudinale E_z . De l'expression $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t + ([\vec{\mu}_t](\vec{\nabla}_t E_z + \gamma \vec{E}_t)) \times \vec{z}$ l'utilisation des polynômes de Lagrange du second ordre pour décrire ce champ E_z découle naturellement. En effet, il faut que $\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t$ et $\vec{\nabla}_t E_z$ soient du même ordre [18], en l'occurrence le 1^{er} ordre puisque E_t et E_z sont d'ordre 2. Nous posons par conséquent :

$$E_z = \sum_{i=0}^5 N_i(\xi) E_z^i \quad \text{Eq-II.40}$$

où

$$\begin{aligned} N_0 &= \xi_0 (2\xi_0 - 1) & N_1 &= \xi_1 (2\xi_1 - 1) & N_2 &= \xi_2 (2\xi_2 - 1) \\ N_3 &= 4\xi_1 \xi_2 & N_4 &= 4\xi_0 \xi_2 & N_5 &= 4\xi_0 \xi_1 \end{aligned}$$

sont les polynômes d'interpolation de Lagrange du 2nd degré définis au paragraphe II.5.2

Conformément au principe de la méthode des éléments finis, l'approximation des champs sur chaque triangle issu de la modélisation géométrique de la structure permet de transformer la formulation intégrale en un système algébrique d'équations linéaires. Dans le paragraphe qui suit, nous présentons ce système établi sur une maille élémentaire.

II.6.2.1 Discrétisation des formes intégrales sur une maille élémentaire

Considérons la description des vecteurs tangentiels de l'élément triangulaire de la figure II-13. Tout élément Ω^e du maillage de la structure faisant l'objet de notre étude, possède la même configuration de vecteurs que celle de l'élément de la figure II-13. Il nous apparaît donc judicieux de présenter la discrétisation des formes intégrales Eq-II.9a et b à partir de cet élément avant de l'étendre sur l'ensemble de tous ceux constituant la section droite de la ligne de propagation. Ainsi, en substituant dans ces équations intégrales les expressions du champ électrique \bar{E}_t^* et e_z^* obtenues respectivement à partir des équations Eq-II.38 et Eq-II.40, nous obtenons le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} A_{tt}^e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{E}_t^* \\ e_z^* \end{Bmatrix} = \gamma^2 \begin{bmatrix} B_{tt}^e & C_{zt}^e \\ C_{tz}^e & D_{zz}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{E}_t^* \\ e_z^* \end{Bmatrix} \quad \text{Eq-II.41}$$

où

$$\bar{E}_t^* = \begin{Bmatrix} e_{01}^0 \\ e_{01}^1 \\ e_{12}^0 \\ e_{12}^1 \\ e_{20}^0 \\ e_{20}^1 \\ f_0 \\ f_1 \end{Bmatrix}, \quad \text{et} \quad e_z^* = \begin{Bmatrix} e_z^{*0} \\ e_z^{*1} \\ e_z^{*2} \\ e_z^{*3} \\ e_z^{*4} \\ e_z^{*5} \end{Bmatrix}$$

La numérotation de ces variables ainsi que de leur fonction de base sont décrites dans le tableau II-1. Dans ce tableau, chaque ligne représente une variable du champ, son numéro et celui de sa fonction de base.

Cette convention nous permet d'expliciter les termes du système Eq-II.41:

$$A_{tt}^e(i, j) = \int_{\Omega^e} \left[(\vec{\nabla}_t \times \vec{\psi}_i) \cdot \frac{1}{\mu_{rzz}^*} (\vec{\nabla}_t \times \vec{\psi}_j) - k_0^2 ([\varepsilon_r^*] \vec{\psi}_i) \cdot \vec{\psi}_j \right] d\Omega \quad i, j \in \{1, \dots, 8\}$$

$$B_{tt}^e(i, j) = \int_{\Omega^e} ([\tilde{\mu}_r^*] \vec{\psi}_i) \cdot \vec{\psi}_j d\Omega \quad i, j \in \{1, \dots, 8\}$$

$$C_{zt}^e(i, j) = \int_{\Omega^e} ([\tilde{\mu}_r^*] \vec{\nabla}_t \varphi_i) \cdot \vec{\psi}_j d\Omega \quad i \in \{9, \dots, 14\} \quad j \in \{1, \dots, 8\}$$

$$C_{tz}^e(i, j) = \int_{\Omega^e} ([\tilde{\mu}_r^*] \vec{\psi}_i) \cdot \vec{\nabla}_t \varphi_j d\Omega \quad i \in \{1, \dots, 8\} \quad j \in \{9, \dots, 14\}$$

$$D_{zz}^e(i, j) = \int_{\Omega^e} [(\vec{\nabla}_t \varphi_i) \cdot ([\tilde{\mu}_r^*] \vec{\nabla}_t \varphi_j) - k_0^2 \omega \varepsilon_{rzz}^* \varphi_i \varphi_j] d\Omega \quad i \in \{9, \dots, 14\} \quad j \in \{9, \dots, 14\}$$

Ces intégrales sont calculées de manière **analytique** en observant que :

$$\int_{\Omega^e} \xi_0^i \xi_1^j \xi_2^k d\Omega = \frac{i! j! k! 2! A}{(i + j + k + 2)!} . \text{ On comprend donc, à ce niveau, tout l'intérêt de ramener les}$$

calculs à la maille de référence et au système barycentrique.

Comme nous l'avons signalé, le système matriciel Eq-II.41 est défini sur l'élément triangulaire de la figure II-13. Cependant, pour l'étude d'une structure un grand nombre d'éléments discrétise son plan de section droite. C'est pourquoi, les équations Eq-II.10a et b doivent être remplacées par une sommation des matrices élémentaires de type Eq-II.41 ; il s'agit de l'opération d'assemblage.

II.6.2.2 Assemblage des matrices élémentaires.

Par matrices élémentaires, nous entendons les matrices obtenues sur chaque élément du maillage de la structure. Elles sont rigoureusement identiques à celle établie au paragraphe précédent. Cependant, elles diffèrent les unes des autres uniquement par les caractéristiques

POUR LE TRIANGLE DE BASE de le figure II-13

Variables du champ	numérotation	Fonctions de base
e_{01}^0	1	$\bar{\psi}_1 = -\frac{\xi_0}{\sin \theta_0} \bar{n}_{20}$
e_{01}^1	2	$\bar{\psi}_2 = \frac{\xi_1}{\sin \theta_1} \bar{n}_{12}$
e_{12}^0	3	$\bar{\psi}_3 = -\frac{\xi_1}{\sin \theta_1} \bar{n}_{01}$
e_{12}^1	4	$\bar{\psi}_4 = \frac{\xi_2}{\sin \theta_2} \bar{n}_{20}$
e_{20}^0	5	$\bar{\psi}_5 = -\frac{\xi_2}{\sin \theta_2} \bar{n}_{12}$
e_{20}^1	6	$\bar{\psi}_6 = \frac{\xi_0}{\sin \theta_0} \bar{n}_{01}$
f_0	7	$\bar{\psi}_7 = 4\xi_0\xi_2\bar{n}_{20}$
f_1	8	$\bar{\psi}_8 = 4\xi_0\xi_1\bar{n}_{01}$
e_z^{*0}	9	$\varphi_9 = \xi_0(2\xi_0 - 1)$
e_z^{*1}	10	$\varphi_{10} = \xi_1(2\xi_1 - 1)$
e_z^{*2}	11	$\varphi_{11} = \xi_2(2\xi_2 - 1)$
e_z^{*3}	12	$\varphi_{12} = 4\xi_1\xi_2$
e_z^{*4}	13	$\varphi_{13} = 4\xi_0\xi_2$
e_z^{*5}	14	$\varphi_{14} = 4\xi_0\xi_1$

Tableau II-1 : Numérotation des variables inconnues et définition de leur fonction de base

géométriques de leur triangle ainsi que la nature physique des matériaux dans lesquels baignent ces éléments.

Il est donc astucieux à chaque fois que nous désirons construire une matrice relative à un triangle du modèle géométrique de la structure, de se reporter sur celle établie précédemment. Pour ce faire, nous avons privilégié un sens de numérotation du triangle à partir duquel l'affectation des variables du champ électrique est **unique**. Dans le cas de l'élément figure II-13, nous avons considéré le repérage de son triangle par les numéros de ses trois sommets suivant le sens trigonométrique, c'est-à-dire (0, 1, 2). Il convient par la suite d'identifier les numéros des sommets de chaque triangle constituant la description géométrique de la structure par rapport à ceux du triangle figure II-13 pour permettre le repérage des variables et leurs affectations sans aucune ambiguïté.

Bien que le calcul de ses matrices soit une étape importante, l'objectif principal de cette rubrique demeure la mise sous forme matricielle des équations Eq-II.10.a et b. Il consiste à remplacer la somme des intégrales sur les sous-domaines Ω^e par la somme des matrices élémentaires relatives à ces sous-domaines. Nous parlons donc à cet égard, d'opération d'assemblage. Pour illustrer sa mise en pratique, considérons le cas le plus simple d'un domaine Ω subdivisé en deux sous-domaines Ω^1 et Ω^2 . Remémorons-nous que, chaque sous-domaine sélectionné séparément comporte :

- **Six variables** affectées aux composantes **tangentiels** aux arêtes du triangle.
- **Deux variables** attribuées aux composantes **faciales** normales aux arêtes.
- Et enfin, **une variable longitudinale** associée à chacun des **six nœuds** du triangle, soit un total de **six variables longitudinales**.

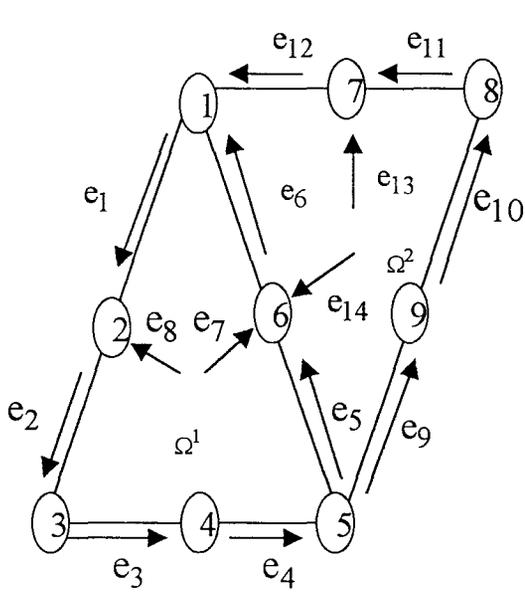


Figure II4a: Les composantes transverses

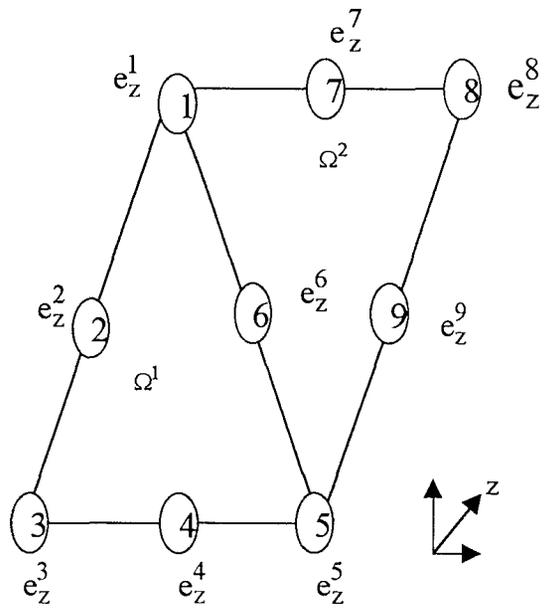


Figure II4b : Les composantes longitudinales

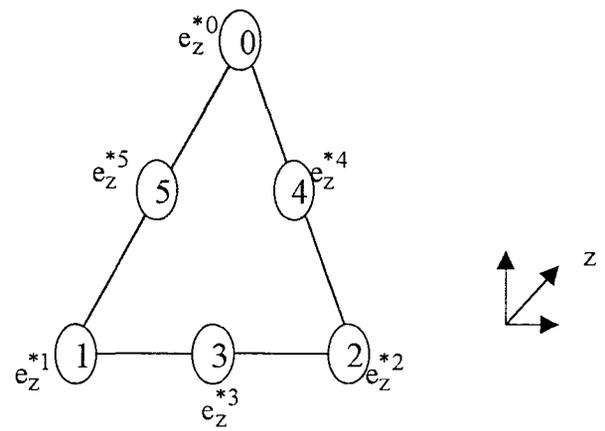
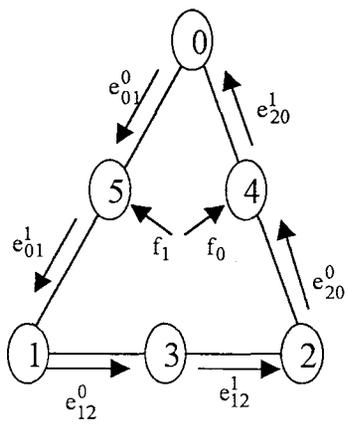


Figure II.14c : Triangle de base

Nous retrouvons à ce niveau les quatorze composantes citées précédemment au paragraphe II.5.2.1. Signalons en outre que, les deux variables faciales sont des entités propres à chaque triangle. Elles ne peuvent être, en aucun cas, mises en commun avec les triangles environnants. Partant de ce constat, les deux sous-domaines pris séparément mettent en jeu, vingt huit variables différentes.

Effectuons maintenant l'association des deux sous-domaines comme l'indique les figures II-14a (du point de vue des variables transverses) et II-14b (pour le point de vue des composantes longitudinales) ; ces deux figures étant identiques. A ce stade, il est nécessaire de rappeler brièvement les points suivants :

- La numérotation des nœuds et des variables des deux sous-domaines est absolument quelconque.
- Du fait de l'association, une arête et par conséquent trois nœuds sont communs aux deux triangles.

Dans ces conditions, cinq variables sont identiques, à savoir :

- Trois variables nodales, les champs longitudinaux aux nœuds 1,6,5.
- Deux variables tangentiels à l'arête passant par les nœuds 1-6 et 6-5.

En conséquence, pour la configuration adoptée figure II-14a-14b, seules subsistent vingt trois variables indépendantes ($2 \times 14 - 5$) ; quatorze sont transverses $e^1 \dots e^{14}$ et neuf sont longitudinales $e_z^1 \dots e_z^9$. Ces variables et la numérotation, a priori, sont répertoriées dans le tableau II-2, et ce, dans les colonnes trois, quatre et six, sept. Quant aux colonnes un et deux, ces dernières répertorient l'ensemble des variables et leurs numéros d'affectation spécifiques au triangle de base défini figure II-14c. Bien évidemment, comme il s'agit de l'élément de base, la numérotation s'échelonne de un à quatorze.

Variables tangentes et longitudinales	K Numérotation	Variables globales	I Numérotation	Numéro d'affectation	Variables globales	I Numérotation	Numéro d'affectation
e_{01}^0	1	e_1	1	Loc(1)=1	$-e_6$	6	Loc(6)=6
e_{01}^1	2	e_2	2	Loc(2)=2	$-e_5$	5	Loc(5)=5
e_{12}^0	3	e_3	3	Loc(3)=3	e_9	9	Loc(9)=3
e_{12}^1	4	e_4	4	Loc(4)=4	e_{10}	10	Loc(10)=4
e_{20}^0	5	e_5	5	Loc(5)=5	e_{11}	11	Loc(11)=5
e_{20}^1	6	e_6	6	Loc(6)=6	e_{12}	12	Loc(12)=6
f_0	7	e_7	7	Loc(7)=7	e_{13}	13	Loc(13)=7
f_1	8	e_8	8	Loc(8)=8	e_{14}	14	Loc(14)=8
e_z^{*0}	9	e_z^1	15	Loc(15)=9	e_z^1	15	Loc(15)=9
e_z^{*1}	10	e_z^3	16	Loc(16)=10	e_z^5	17	Loc(17)=10
e_z^{*2}	11	e_z^5	17	Loc(17)=11	e_z^8	21	Loc(21)=11
e_z^{*3}	12	e_z^4	18	Loc(18)=12	e_z^9	22	Loc(22)=12
e_z^{*4}	13	e_z^6	19	Loc(19)=13	e_z^7	23	Loc(23)=13
e_z^{*5}	14	e_z^2	20	Loc(20)=14	e_z^6	19	Loc(19)=14
Triangle de base Sommets : sens 0.1.2		Le sous-domaine Ω^1 Sommets : sens 1.3.5			Le sous-domaine Ω^2 Sommets : sens 1.5.8		

Tableau II-2 : Allocation d'un numéro i d'une variable globale à son homologue d'indice k du triangle de base tel que $Loc(i)=k$.

Nous abordons maintenant, la phase cruciale de notre opération d'assemblage. Pour comprendre la signification de l'écriture de $\text{Loc}(i)=k$ dans les colonnes cinq et huit de notre tableau, il nous faut préciser la démarche adoptée. Dans un premier temps, il importe de rappeler que chaque triangle est repéré par ses trois sommets, en l'occurrence (1,3,5) et (1,5,8) respectivement pour les sous-domaines Ω^1 et Ω^2 , et (0,1,2) pour le triangle de base. Cette numérotation doit toujours s'effectuer dans le même sens de rotation. Nous avons choisi le sens trigonométrique.

Notre but consiste, désormais, à passer d'une numérotation globale, très gourmande en taille mémoire, à une numérotation faisant toujours intervenir le triangle de base. Ce triangle parcouru dans le sens trigonométrique est décrit figure II-14c. Ses variables, rappelons le, et leur numérotation sont déclinées dans le tableau II-2 aux colonnes un et deux.

A ce stade, la variable $\text{Loc}(i)=k$ est introduite pour allouer à un numéro d'indice i d'une variable globale sur un triangle quelconque, celui de son homologue d'indice k dans le triangle de base figure II-14c. Cette allocation présente l'intérêt de toujours conserver pour l'élément triangulaire quelconque, des matrices d'ordre 14×14 .

A présent, établissons les matrices élémentaires relatives aux triangles Ω^1 et Ω^2 .

Pour l'élément Ω^1 , le système matriciel équivalent est :

$$\begin{bmatrix} A_{tt}^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_t^1 \\ e_z^1 \end{Bmatrix} = \gamma^2 \begin{bmatrix} B_{tt}^1 & C_{zt}^1 \\ C_{tz}^1 & D_{zz}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_t^1 \\ e_z^1 \end{Bmatrix} \quad \text{Eq-II.42}$$

$\begin{Bmatrix} E_t^1 \\ e_z^1 \end{Bmatrix}$ sont les variables du champ électrique affectées spécifiquement au sous-domaine Ω^1

Les termes des matrices sont résumés de la manière suivante :

$$A_{tt}^1(i, j) = A_{tt}^e(\text{Loc}(i), \text{Loc}(j)) \quad B_{tt}^1(i, j) = B_{tt}^e(\text{Loc}(i), \text{Loc}(j)) \quad C_{zt}^1(i, j) = C_{zt}^e(\text{Loc}(i), \text{Loc}(j))$$

$C_{tz}^1(i, j) = C_{tz}^e(\text{Loc}(i), \text{Loc}(j))$ $D_{zz}^1(i, j) = D_{zz}^e(\text{Loc}(i), \text{Loc}(j))$ avec i, j les numéros des variables globales de l'élément considéré.

Pour l'élément Ω^2 , le système matriciel équivalent est :

$$\begin{bmatrix} A_{tt}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_t^2 \\ e_z^2 \end{Bmatrix} = \gamma^2 \begin{bmatrix} B_{tt}^2 & C_{zt}^2 \\ C_{tz}^2 & D_{zz}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_t^2 \\ e_z^2 \end{Bmatrix} \quad \text{Eq-II.43}$$

Où $\begin{Bmatrix} E_t^2 \\ e_z^2 \end{Bmatrix}$ sont les variables du champ électrique définies au tableau II-2.

Les termes des matrices sont résumés de la manière suivante :

$$A_{tt}^2(i, j) = A_{tt}^e(\text{Loc}(i), \text{Loc}(j)) \quad B_{tt}^2(i, j) = B_{tt}^e(\text{Loc}(i), \text{Loc}(j)) \quad C_{zt}^2(i, j) = C_{zt}^e(\text{Loc}(i), \text{Loc}(j))$$

$C_{tz}^2(i, j) = C_{tz}^e(\text{Loc}(i), \text{Loc}(j))$ $D_{zz}^2(i, j) = D_{zz}^e(\text{Loc}(i), \text{Loc}(j))$ avec i, j les numéros des variables globales de l'élément considéré.

Pour effectuer l'assemblage des deux systèmes matriciels Eq-II.42 et 43, nous devons d'abord les étendre à l'ensemble de toutes les variables inconnues du maillage. Ceci est appelé : opération d'expansion des systèmes matriciels.

Le système Eq-II.42 doit être écrit pour les vingt trois variables. Nous avons donc :

$$\begin{bmatrix} A_{tt}^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{E}_t \\ e_z \end{Bmatrix} = \gamma^2 \begin{bmatrix} B_{tt}^1 & C_{tz}^1 \\ C_{zt}^1 & D_{zz}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{E}_t \\ e_z \end{Bmatrix} \quad \text{Eq-II.44}$$

Où $E_t = \begin{Bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{14} \end{Bmatrix}$ c'est-à-dire, toutes les variables transverses

Et $e_z = \begin{Bmatrix} e_z^1 \\ \vdots \\ e_z^9 \end{Bmatrix}$ c'est-à-dire, toutes les variables longitudinales.

Autrement dit, la matrice A_{tt}^1 est d'ordre 14x14 au lieu d'être 8x8 comme A_{tt}^1 . La raison est que les termes de la matrice A_{tt}^1 correspondant aux numéros des variables attribuées à l'élément Ω^2 sont tous mis à zéro. Dans le même ordre d'idée, l'opération d'expansion des autres matrices du système se résume par les transformations des matrices suivantes:

- B_{tt}^1 d'ordre 8x8 en B_{tt}^1 d'ordre 14x14
- C_{tz}^1 d'ordre 8x6 en C_{tz}^1 d'ordre 14x9
- C_{zt}^1 d'ordre 6x8 en C_{zt}^1 d'ordre 9x14
- D_{zz}^1 d'ordre 6x6 en D_{zz}^1 d'ordre 9x9.

Cette expansion effectuée sur le système matriciel de l'élément Ω^2 abouti à :

$$\begin{bmatrix} A_{tt}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{E}_t \\ e_z \end{Bmatrix} = \gamma^2 \begin{bmatrix} B_{tt}^2 & C_{tz}^2 \\ C_{zt}^2 & D_{zz}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{E}_t \\ e_z \end{Bmatrix} \quad \text{Eq-II.45}$$

A ce stade, ayant écrit les deux systèmes matriciels par rapport à toutes les variables inconnues, il convient donc d'en effectuer la somme. Nous pouvons constater tout logiquement que seuls les termes des matrices des systèmes Eq-II.44 et 45 dont le numéro de ligne et de colonne sont identiques, s'additionnent. Ceci se traduit, tout simplement, par la sommation des termes des matrices correspondant au numéro, des variables, commun aux deux éléments. Nous obtenons en définitive :

$$\begin{bmatrix}
 \cdot & 0 \\
 \cdot & A_{tt}^1(5,5) + A_{tt}^2(5,5) & A_{tt}^1(5,6) + A_{tt}^2(5,6) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
 \cdot & A_{tt}^1(6,5) + A_{tt}^2(6,5) & A_{tt}^1(6,6) + A_{tt}^2(6,6) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
 \cdot & 0 \\
 \cdot & 0 \\
 \cdot & 0 \\
 \cdot & 0 \\
 \cdot & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 e_1 \\
 \cdot \\
 e_{14} \\
 e_z^1 \\
 \cdot \\
 e_z^9
 \end{Bmatrix} =$$

$$\gamma^2
 \begin{bmatrix}
 \cdot & \cdot \\
 B_{tt}^1(5,5) + B_{tt}^2(5,5) & B_{tt}^1(5,6) + B_{tt}^2(5,6) & \cdot & C_{tz}^1(5,15) - C_{tz}^2(5,15) & \cdot & C_{tz}^1(5,17) - C_{tz}^2(5,17) & \cdot & C_{tz}^1(5,19) - C_{tz}^2(5,19) & \cdot & \cdot \\
 B_{tt}^1(6,5) + B_{tt}^2(6,5) & B_{tt}^1(6,6) + B_{tt}^2(6,6) & \cdot & C_{tz}^1(6,15) - C_{tz}^2(6,15) & \cdot & C_{tz}^1(6,17) - C_{tz}^2(6,17) & \cdot & C_{tz}^1(6,19) - C_{tz}^2(6,19) & \cdot & \cdot \\
 C_{zt}^1(15,5) - C_{zt}^2(15,5) & C_{zt}^1(15,6) - C_{zt}^2(15,6) & \cdot & D_{zz}^1(15,15) + D_{zz}^2(15,15) & \cdot & D_{zz}^1(15,17) + D_{zz}^2(15,17) & \cdot & D_{zz}^1(15,19) + D_{zz}^2(15,19) & \cdot & \cdot \\
 C_{zt}^1(17,5) - C_{zt}^2(17,5) & C_{zt}^1(17,6) - C_{zt}^2(17,6) & \cdot & D_{zz}^1(17,15) + D_{zz}^2(17,15) & \cdot & D_{zz}^1(17,17) + D_{zz}^2(17,17) & \cdot & D_{zz}^1(17,19) + D_{zz}^2(17,19) & \cdot & \cdot \\
 C_{tz}^1(19,5) - C_{tz}^2(19,5) & C_{tz}^1(19,6) - C_{tz}^2(19,6) & \cdot & D_{zz}^1(19,15) + D_{zz}^2(19,15) & \cdot & D_{zz}^1(19,17) + D_{zz}^2(19,17) & \cdot & D_{zz}^1(19,19) + D_{zz}^2(19,19) & \cdot & \cdot
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 e_1 \\
 \cdot \\
 e_{14} \\
 e_z^1 \\
 \cdot \\
 e_z^9
 \end{Bmatrix}$$

Ce système matriciel ne comporte pas tous ses termes. En effet, nous n'avons représenté que ceux sur lesquels une addition ou une soustraction est nécessaire. Les pointillés remplacent les termes provenant des opérations d'expansion. Ils peuvent être nuls.

Pour résoudre cette équation, nous devons nous assurer que les conditions aux limites de la structure ont été prises en compte. Lorsque nous souhaitons, par exemple, imposer les conditions d'un court-circuit électrique, certaines variables du champ électrique sont nulles. Par conséquent, nous supprimons dans les matrices globales les lignes et les colonnes correspondant aux numéros de ces variables.

Avant d'aborder le type de méthode numérique choisie pour la résolution du système, nous désirons établir la manière dont peut être traité le problème des pertes métalliques, notamment pour l'étude future des lignes de transmission planaires.

II.7 Calcul des pertes métalliques par le biais de l'impédance de surface

Nous avons vu précédemment que chaque domaine de la structure étudiée pouvait être décomposé en éléments triangulaires. A priori, rien ne nous interdit d'en faire de même pour les rubans conducteurs constituant les lignes de propagation. Il suffit, à ce titre, de considérer

le conducteur comme un milieu diélectrique de perméabilité relative $\mu_r = 1$ et de permittivité relative complexe $\epsilon_r^* = (1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0})$. La variable σ n'est autre que la conductivité finie du matériau conducteur. Nous présentons dans le chapitre suivant nos résultats lorsque nous maillons dans les rubans conducteurs. Le fait de mailler dans ces rubans conducteurs entraîne, sans aucun doute, un accroissement de la taille du système matriciel à résoudre et par conséquent une augmentation du temps de résolution, et ce, par rapport au cas où le conducteur est parfait ou bien remplacé par une impédance de surface.

Dans ce paragraphe, nous ne discutons pas de l'opportunité du choix du concept d'impédance de surface pour la description d'un conducteur métallique dont la conductivité est de valeur finie[20]. Nous n'abordons pas, non plus, les calculs relatifs aux différentes expressions possibles pour cette impédance. Ce dernier point a d'ailleurs été abondamment étudié dans l'équipe électromagnétisme, par le biais des thèses de Didier Kinowski [21] et Christophe Delabie [22]. Notre objectif consiste simplement à montrer la façon dont est introduite cette impédance de surface, dans les équations définies auparavant. A notre connaissance, peu de travaux intègre cette notion d'impédance de surface dans le cadre des éléments finis à éléments d'arêtes.

Considérons une interface décrite par une impédance Z_s . La relation qui lie les champs électromagnétiques et cette impédance est définie par l'expression Eq-II46, à savoir :

$$\vec{E} \times \vec{n} = Z_s \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{H}) \quad [23] \quad \text{Eq-II.46}$$

L'implantation de cette formulation dans les équations intégrales Eq-II.9a et b s'effectue en ajoutant les intégrales de contour relatives aux triangles dont une des arêtes Γ est située sur la frontière définie comme étant celle d'un conducteur imparfait caractérisé par une impédance dite de surface et notée Z_s .

Ces deux intégrales de contour sont :

$$\int_{\Gamma} (\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) \cdot \frac{1}{\mu_{rzz}^*} (\vec{n} \times \vec{W}_t) d\Gamma \quad \text{Eq-II.47a}$$

$$\int_{\Gamma} \left[\left([\tilde{\mu}_r^*] \vec{\nabla}_t e_z + \vec{E}_t \right) \cdot \vec{n} \right] w_z d\Gamma \quad \text{Eq-II.47b}$$

A ce stade, l'objectif consiste à remplacer $\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t$ et $\left[\left([\tilde{\mu}_r^*] \vec{\nabla}_t e_z + \vec{E}_t \right) \cdot \vec{n} \right]$ par leur expression tirée de l'équation Eq-II.46.

Pour y parvenir, nous exprimons le champ magnétique \vec{H} en fonction du champ électrique \vec{E} et décomposons l'équation Eq-II.46 en deux expressions, l'une transversale et l'autre longitudinale.

Par conséquent, nous avons :

$$\vec{H} = \frac{[\mu_r^*]^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{E}}{-j\omega\mu_0} \quad \left[\mu_r^* \right]^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{\mu_{rzz}^*} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t + \left([\tilde{\mu}_r^*] \left[\vec{\nabla}_t e_z + \gamma \vec{E}_t \right] \right) \times \vec{z}$$

Ce qui nous permet d'écrire,

$$\vec{n} \times \vec{H} = \vec{n} \times \frac{1}{\mu_{rzz}^*} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t - \left(\left[\tilde{\mu}_r^* \right] \left(\vec{\nabla}_t e_z + \gamma \vec{E}_t \right) \cdot \vec{n} \right) \vec{z}$$

En définitive, nous obtenons :

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{H}) = \frac{\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t}{j\omega\mu_0 \mu_{rzz}^*} + \frac{\left[\tilde{\mu}_r^* \right] \left(\vec{\nabla}_t e_z + \gamma \vec{E}_t \right) \cdot \vec{n}}{j\omega\mu_0} (\vec{n} \times \vec{z})$$

Puisque $\vec{E} \times \vec{n} = \vec{E}_t \times \vec{n} + E_z (\vec{z} \times \vec{n}) = Z_s \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{H})$, nous en déduisons les relations suivantes :

$$\frac{1}{\mu_{rzz}^*} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t = -\frac{j\omega\mu_0}{Z_s} \vec{n} \times \vec{E}_t$$

$$\left[\tilde{\mu}_r^* \right] \left(\vec{\nabla}_t e_z + \vec{E}_t \right) \cdot \vec{n} = -\frac{j\omega\mu_0}{Z_s} e_z$$

En les reportant dans les intégrales Eq-II.47a et b, nous aboutissons à :

$$\int_{\Gamma} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t \frac{1}{\mu_{rzz}^*} \cdot \vec{n} \times \vec{W}_t \, d\Gamma = -\frac{j\omega\mu_0}{Z_s} \int_{\Gamma} (\vec{n} \times \vec{E}_t) \cdot (\vec{n} \times \vec{W}_t) \, d\Gamma \quad \text{Eq-II.48a}$$

$$\int_{\Gamma} \left(\left[\vec{\mu}_r^* \right] \left[\vec{\nabla}_t e_z + \vec{E}_t \right] \cdot \vec{n} \right) w_z \, d\Gamma = -\frac{j\omega\mu_0}{Z_s} \int_{\Gamma} e_z w_z \, d\Gamma \quad \text{Eq-II.48b}$$

La discrétisation de ces intégrales de contour vient modifier en partie le système matriciel à résoudre. En effet, pour prendre en compte la nature métallique ou supraconductrice d'un matériau par le biais d'une impédance de surface, il suffit de remplacer :

$$\square \quad A_{tt}^e(i, j) \quad \text{par} \quad A_{tt}^e(i, j) + \frac{j\omega\mu_0}{Z_s} \int_{\Gamma^e} (\vec{n} \times \vec{\psi}_i) \cdot (\vec{n} \times \vec{\psi}_j) \, d\Gamma$$

$$\square \quad D_{zz}^e(i, j) \quad \text{par} \quad D_{zz}^e(i, j) + \frac{j\omega\mu_0}{Z_s} \int_{\Gamma^e} \varphi_i \varphi_j \, d\Gamma$$

Le calcul de ces intégrales de contour se fait de manière analytique en observant que tout point d'une arête d'un triangle située sur un conducteur, possède une des trois coordonnées barycentriques nulle tandis que la somme des deux autres vaut l'unité. Par conséquent, l'expression générale de l'intégrale de contour se met sous la forme

$$\int_{\Gamma^e} f(\xi_i, \xi_j) \, d\Gamma. \quad \text{Dans l'annexe IV, nous montrons que } \int_{\Gamma^e} f(\xi_i, \xi_j) \, d\Gamma = L_{ij} \int_0^1 f(\xi_i, 1 - \xi_i) \, d\xi_i \quad \text{où}$$

L_{ij} est la longueur de l'arête considérée.

II.8 Résolution numérique

Le système matriciel à résoudre correspond à celui d'un problème aux valeurs propres. Le but de notre travail consiste à choisir dans la palette des méthodes numériques disponibles celle qui correspond le mieux à notre problème. Ceci suppose que soit clairement spécifier les propriétés des matrices globales (Eq-II.49) issues de l'opération d'assemblage, à savoir :

$$\begin{bmatrix} A_{tt}^g & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{E}_T \\ e_z \end{Bmatrix} = \gamma^2 \begin{bmatrix} B_{tt}^g & C_{zt}^g \\ C_{tz}^g & D_{zz}^g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{E}_t \\ e_z \end{Bmatrix} \quad \text{Eq-II.49}$$

Les propriétés de ce système dépendent de la nature des matériaux qui constituent le support de propagation. Dans le cas des structures sans pertes, les matrices de ce système sont réelles et symétriques. Par contre lorsqu'il existe des pertes, elles demeurent symétriques mais à coefficients complexes. Bien évidemment, ces systèmes contiennent beaucoup de termes nuls qu'il sera judicieux de ne pas stocker.

Signalons, en outre, que, nos préoccupations concernent essentiellement le mode fondamental et parfois, quelques-uns un des modes supérieurs. En conséquence, nos algorithmes de recherche des valeurs propres devront être capables de ne calculer que les modes souhaités et notamment le mode possédant la plus grande constante de phase à fréquence fixée, à savoir le mode fondamental. Dans cette optique, nous avons retenu trois méthodes répondant à ces contraintes.

Il s'agit :

- de la méthode de Lanczos[18]
- de la méthode d'Arnoldi[24]
- De la méthode de la puissance itérée. [16]

Toutes ces méthodes numériques permettent de calculer la valeur propre dont le module est le plus important ainsi que le vecteur propre associé.

Avant d'aborder la description sommaire de ces trois méthodes, il nous semble important de préciser les points suivants.

Du point de vue de la recherche du mode fondamental, la résolution du système Eq-II.49, qui sous forme contractée s'exprime comme $Ax = \gamma^2 Bx$, ne nous garantit pas que la plus importante valeur de γ^2 soit celle correspondant au mode fondamental.

Dans le but de rechercher la valeur propre de plus grand module correspondant au mode fondamental, nous effectuons une transformation au niveau du système Eq-II.49. En effet, nous soustrayons membre à membre au système Eq-II.49, le système suivant :

$$\theta^2 \begin{bmatrix} B_{tt}^g & C_{zt}^g \\ C_{tz}^g & D_{zz}^g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{E}_t \\ e_z \end{Bmatrix} = \theta^2 \begin{bmatrix} B_{tt}^g & C_{zt}^g \\ C_{tz}^g & D_{zz}^g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_t \\ e_z \end{Bmatrix}$$

pour obtenir finalement l'expression matricielle Eq-II.50.

$$\begin{bmatrix} B_{tt}^g & C_{zt}^g \\ C_{tz}^g & D_{zz}^g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{E}_t \\ e_z \end{Bmatrix} = \frac{\theta^2}{\gamma^2 - \theta^2} \begin{bmatrix} A_{tt}^g - B_{tt}^g & -C_{zt}^g \\ -C_{tz}^g & -D_{zz}^g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_t \\ e_z \end{Bmatrix} \quad \text{Eq-II.50}$$

Cette dernière s'exprime d'ailleurs sous forme contractée comme $A'x = \lambda B'x$, où

$$\lambda = \frac{\theta^2}{\gamma^2 - \theta^2}.$$

La transformation que nous avons opérée nous permet, entre autre, de substituer à la valeur propre γ^2 du problème Eq-II.49, celle λ sur laquelle nous pouvons exercer un contrôle. En effet, dans l'évolution du diagramme de dispersion $\omega = f(\gamma)$, le mode fondamental possède la constante de phase la plus importante. D'autre part, pour des fréquences élevées, la loi d'évolution pour ce mode tend vers celle d'une onde plane dont l'énergie est, pour une grande part, confinée dans le milieu de perméabilité magnétique et de permittivité diélectrique les plus importantes. Cette valeur asymptotique a , du reste, pour équation, l'expression :

$$\theta^2 = k_0^2 \varepsilon_{r \max} \mu_{r \max}$$

où k_0 représente le nombre d'onde dans l'air $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ et $\varepsilon_{r \max} \mu_{r \max}$ sont, parmi les milieux qui constituent la section droite du guide, ceux de perméabilité et de permittivité les plus élevées.

De ce fait, si l'on initialise le problème en imposant, à fréquence fixe, la valeur de θ définie précédemment, nous sommes désormais assurés que la valeur propre γ déduite par notre

algorithme est bien la plus importante en module puisque $\lambda = \frac{\theta^2}{\gamma^2 - \theta^2}$ très grand $\rightarrow \gamma^2 \approx \theta^2$

Outre l'intérêt d'obtenir, sans ambiguïté, l'évolution du mode fondamental, cette transformation possède l'avantage de rendre la procédure de recherche de la solution, systématique. En effet, la variable θ est alors considérée comme une variable d'initialisation. Elle est définie, pour le mode fondamental comme nous l'avons vu, à partir des caractéristiques physiques des milieux constituant la section droite du guide. Rappelons que les algorithmes de résolution matricielle que nous allons décrire succinctement sont dédiés à la recherche d'un certain nombre de valeurs propres. Si l'on désire obtenir un mode de propagation correspondant à une valeur propre différente du mode fondamental, nous utiliserons d'une part, les propriétés de symétrie, et d'autre part, la notion de vecteur propre orthogonal. Ce dernier point sera d'ailleurs développé par la suite.

Les contours de notre problème étant ainsi cernés, nous décrivons sommairement la philosophie des différents algorithmes des méthodes numériques mises en œuvre dans le cadre de ce travail. Auparavant, notons que le champ d'application de la méthode de Lanczos est restreint aux matrices hermitiennes et par conséquent aux structures sans pertes. L'objet de notre travail est de calculer, entre autre, les pertes dans les lignes de transmission. Nous avons donc retenu la méthode d'arnoldi et celle de la puissance itérée car elles sont une extension de la méthode de Lanczos aux cas des matrices quelconques. Pour des raisons de simplification, nous écrivons le système matriciel à résoudre Eq-II.50, sous la forme :

$$[M]\{x\} = \lambda[N]\{x\} \quad \text{Eq-II.51}$$

$$\text{où } [M] = \begin{bmatrix} B_{tt}^g & C_{zt}^g \\ C_{tz}^g & D_{zz}^g \end{bmatrix} \quad [N] = \begin{bmatrix} A_{tt}^g - B_{tt}^g & -C_{zt}^g \\ \theta^2 & -D_{zz}^g \\ -C_{tz}^g & -D_{zz}^g \end{bmatrix} \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} \bar{E}_t \\ e_z \end{Bmatrix} \quad \lambda = \frac{\theta^2}{\gamma^2 - \theta^2}$$

Signalons que les matrices $[M]$ et $[N]$ sont creuses.

II.8.1. Méthode d'Arnoldi [24]

Le but est de résoudre le système aux valeurs propres Eq-II.52 :

$$[A]\{x\} = \lambda\{x\} \quad \text{Eq-II.52}$$

où $[A] = [M][N]^{-1}$ est une matrice d'ordre $n \times n$.

Le principe de la méthode consiste à remplacer la résolution de ce système par celle du système Eq-II.53 :

$$[H]\{y\} = \lambda\{y\} \quad \text{Eq-II.53}$$

où $[H]$ est la matrice d'Hessenberg supérieur d'ordre $p \times p$ avec $p < n$.

Cette matrice $[H]$ est obtenue en écrivant la matrice $[A]$ dans une base orthonormée $(v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_p)$ de l'espace de Krylov engendré par la suite d'un vecteur $q_1 \neq 0$ définie par $K = (q_1 \ Aq_1 \ A^2q_1 \ \dots \ A^p q_1)$. Cette matrice possède les mêmes valeurs propres que la matrice d'origine $[A]$. Par contre, ses vecteurs propres sont reliés à ceux du problème Eq-II.51 par la relation :

$$\{x\} = [Q]\{y\} \quad \text{Eq-II.54}$$

La matrice $[Q]$ est d'ordre $n \times p$ dont chaque colonne représente les composantes du vecteur v_j .

Dans ce contexte, les matrices $[H]$ et $[Q]$ sont respectivement de la forme :

$$[H] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \dots & h_{1p} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \dots & h_{2p} \\ 0 & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & . & \dots & h_{4p} \\ 0 & 0 & 0 & h_{p,p-1} & h_{p,p} \end{bmatrix} \quad [Q] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \dots & v_{p-1,1} & v_{p,1} \\ v_{12} & v_{22} & \dots & v_{p-1,2} & v_{p,2} \\ v_{13} & v_{23} & \dots & v_{p-1,3} & v_{p,3} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ v_{1n} & v_{2n} & \dots & v_{p-1,n} & v_{p,n} \end{bmatrix}$$

A ce stade, pour résoudre le problème $[A]\{x\} = \lambda\{x\}$, il convient de construire ces deux matrices et de déterminer les valeurs et vecteurs propres de l'équation $[H]\{y\} = \lambda\{y\}$. Les valeurs propres de ces deux systèmes étant identiques, il suffit d'appliquer la relation $\{x\} = [Q]\{y\}$ pour obtenir les vecteurs propres recherchés.

La chronologie que nous présentons ici décrit très succinctement la façon dont sont construites ces matrices.

□ **Initialisation** : Nous choisissons le vecteur initial $q_1 \neq 0$ de l'espace de Krylov de telle manière qu'il ne soit pas orthogonal à l'un des vecteurs propres que nous recherchons. Si tel est le cas, la valeur propre correspondante ne pourra pas être déterminée.

□ **Normalisation** : Nous déterminons et normalisons le vecteur $v_1 = \frac{q_1}{\|q_1\|}$

□ **Calcul** : $h_{11} = v_1^* A v_1$ et $y_{j+1} = A v_j - \sum_{i=1}^j h_{ij} v_i$; $h_{j+1,j} = \|x_{j+1}\|$; $v_{j+1} = \frac{x_{j+1}}{h_{j+1,j}}$

□ Pour $i \leq j+1$ nous calculons $h_{i,j+1} = v_i^* A v_{j+1}$

La matrice $[H]$ étant construite, nous déterminons par la méthode du QR adaptée à la résolution des matrices d'Hessenberg, les valeurs et vecteurs propres associés. Le couple de ces éléments propres dont la valeur propre est la plus élevée correspond à (λ_1, y_1) permet

d'effectuer le test du résidu $h_{j+1,j}\|y_1\|$. Si ce résidu est supérieur à une tolérance ε que nous fixons au départ, alors l'indice j est incrémenté d'une unité et les opérations reprennent à partir de l'étape trois.

Nous pouvons remarquer que le problème $[H]\{y\} = \lambda\{y\}$ ne fournit que p valeurs propres, alors que celui de l'équation $[A]\{x\} = \lambda\{x\}$ en possède n . Par conséquent, elles sont les p plus grandes valeurs propres du problème d'origine Eq-II.52. Nous avons noté que seule la valeur propre de plus grand module est déterminée avec une très bonne précision.

En orthogonalisant par le processus de Gram-Schmidt[25] le vecteur initial q_1 par rapport aux vecteurs propres déjà déterminés, nous accédons aux autres couples (λ, \bar{E}) d'éléments propres.

Pour notre part, nous avons constaté que le cumul des erreurs d'arrondi provoque des défaillances sur l'orthogonalité des vecteurs. Cette perte d'orthogonalité ne nous permet plus d'occulter les valeurs propres déjà calculées, et notamment celle correspondant au mode fondamental lorsque nous désirons obtenir les évolutions $\omega = f(\gamma)$ des modes supérieurs. Il faut donc, entre autre, disposer de plus de précision numérique pour garantir le succès de la procédure d'orthogonalisation. Enfin rappelons que les matrices $[M]$ et $[N]$ du problème de départ sont creuses, les procédures d'inversion et de multiplication classiques nécessaires à l'obtention de la matrice $[A] = [M][N]^{-1}$, suppriment le caractère creux de cette matrice. Ce constat implique un accroissement de la taille mémoire requise pour le stockage des éléments de $[A]$.

Nous avons donc porté une attention particulière sur le produit des matrices $[M][N]^{-1}$. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

II.8.2 La méthode de la puissance itérée [16]

Notre but consiste à résoudre directement le système Eq-II.51 en conservant le format creux de toutes les matrices. Par conséquent, l'algorithme que nous présentons ci-dessous est basé sur la méthode de la puissance itérée. Il est conçu de manière à minimiser :

- Le temps de calcul CPU
- Et la capacité de stockage.



Avant d'aborder sommairement les différentes phases débouchant sur sa mise en œuvre, nous insistons sur le fait que cette méthode ne permet que le calcul de la valeur propre λ de plus

grand module ainsi que son vecteur propre associé. Pour ne pas alourdir ce mémoire par l'exposé des considérations mathématiques fastidieuses, nous nous contentons d'une description brève des étapes suivantes :

- **Initialisation**: cette phase est identique à celle de la méthode d'Arnoldi. Nous choisissons un vecteur $u_0 \neq 0$ non orthogonal au vecteur propre cherché et initialisons l'indice d'itération $k = 0$
- **Incrément**: nous incrémentons d'une unité l'indice d'itération $k = k + 1$.
- **Calcul du vecteur** $v_{k-1} = [M]u_{k-1}$: La multiplication de la matrice $[M]$ par le vecteur u_{k-1} est effectuée de façon à conserver le format creux.
- **Résolution** du système linéaire $[M]u_k = v_{k-1}$. Dans le souci de préserver le format creux de la matrice, nous avons fait usage d'une procédure numérique disponible dans la bibliothèque IMSL et dédiée à ce type de problème.
- **Calcul du vecteur** $v_k = [N]u_k$

- **Estimation** de la plus grande valeur propre: $\lambda_k = \frac{u_k^* v_k}{u_k^* v_{k-1}}$ où le symbole * désigne le complexe conjugué.
- **Normalisation** du vecteur propre associé: $u_k = \frac{u_k}{\sqrt{u_k^* v_{k-1}}}$
- **Calcul de la norme** du résidu $\|R\|^k = \|[M]u_k - \lambda_k [N]u_k\|$. Plus cette norme tend vers zéro, plus le couple d'élément propre converge vers celui dont la valeur propre est la plus grande en module. Il ne peut jamais s'annuler. Nous lui imposons une valeur arbitraire ε proche de zéro. Si le résidu est supérieur à cette valeur, nous reprenons les opérations à partir de l'étape deux. Sinon, nous stoppons les calculs et la solution de notre problème correspond alors au couple d'élément propre (λ_k, u_k) .

Bien évidemment, la détermination des autres éléments propres correspondant aux modes supérieurs de la ligne peut être entreprise en choisissant le vecteur initial u_0 orthogonal aux autres vecteurs propres connus. Ainsi, si u_1, u_2, \dots, u_m représentent les m premiers modes de la structure, pour déterminer le $m+1$ mode nous initialisons de la manière suivante le vecteur $u_0 = u_0 - [u_0^* [N] u_1]^* u_1 - [u_0^* [N] u_2]^* u_2 - \dots - [u_0^* [N] u_m]^* u_m$. Cette technique est très sensible aux erreurs d'arrondi comme nous l'avons déjà signalé. Il peut en résulter une perte d'orthogonalité et le risque de converger vers la plus grande valeur propre déjà calculée. Pour surmonter cette difficulté, nous pouvons constater que la valeur propre la plus grande en module est proche de la valeur θ que nous avons introduite dans le système. Par conséquent, il suffit d'avoir une information sur l'amplitude de la valeur propre du mode recherché et de l'attribuer à θ . De cette façon, nous pouvons accéder assez aisément à tous les modes du guide pour peu que nous ayons des solutions même approchées du couple de valeurs propres.

II.9. Détermination de l'impédance caractéristique d'une ligne de transmission

La méthode des éléments d'arêtes, que nous venons de décrire, trouve son aboutissement dans l'exposé sommaire de cette rubrique. En effet, l'impédance d'une ligne et plus particulièrement l'impédance caractéristique pour les lignes planaires usuelles propageant un mode hybride à fréquence de coupure nulle à savoir le mode quasi-TEM, n'est accessible que si le système aux valeurs propres Eq-II.51 est résolu. Cela signifie que nous sommes en possession d'une valeur propre et de son vecteur propre associé. Nous sommes donc, à ce stade, en mesure de fournir la cartographie des champs se propageant dans la structure étudiée. Par voie de conséquence, nous sommes aussi capable de calculer la valeur de l'impédance pour le mode considéré.

Notre objectif n'est pas de convaincre de l'utilité de cette grandeur, ni même de discuter du fondement des définitions qui suivent. Il est clair que la notion d'impédance caractéristique est majeure. Elle l'est d'autant plus lorsque nous connectons, entre eux, composants actifs, passifs, et guides planaires de propagation[26], et ce, sur plusieurs niveaux de métallisation, ce qui constitue l'étape ultime dans l'élaboration en trois dimensions d'un problème. En conséquence, nous rappelons les trois définitions communément admises pour le calcul de l'impédance caractéristique d'une ligne de transmission[26].

□ Définition en tension $Z_c = \frac{\|V\|^2}{2P}$

□ Définition en courant $Z_c = \frac{2P}{\|I\|^2}$

□ Définition en tension-courant $Z_c = \frac{V}{I}$

Dans les définitions précédentes, P est la puissance guidée à travers la section droite de la ligne, V est la valeur de la circulation du champ électrique le long d'un chemin d'intégration (grandeur homogène à une différence de potentiel), et I est le courant sur un conducteur ou une fraction de celui-ci.

La puissance P est obtenue par intégration du vecteur de Pointing à travers la section droite

$$\Omega \text{ de la ligne et s'écrit : } P = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{E} \times \vec{H}^* d\Omega$$

La tension le long d'un chemin Γ a pour expression : $V = - \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\Gamma}$

Le courant, dans la plus part des cas que nous aurons à étudier, se résume pour l'essentiel au courant longitudinal I_z . Pour cette raison, il se décline, dans le cas d'un conducteur de section Ω_c , sous la forme : $I_z = \int_{\Omega_c} \sigma E_z d\Omega_c$ [27].

Comme nous l'avons mentionné, la résolution du système algébrique Eq-II.50, nous permet d'accéder à la cartographie du champ électrique dans la structure et par conséquent, aux valeurs des grandeurs mentionnées ci-dessus.

Compte tenu du fait que nous avons décomposé le domaine de la structure par des éléments triangulaires, le calcul des trois grandeurs P , V , I est effectué à partir des sommations suivantes :

□ **Pour le calcul de la puissance** : $P = \sum_{i=1}^{N_{el}} P_i$ où N_{el} est le nombre de triangles représentant

la modélisation géométrique de la structure, $P_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \vec{E}_i \times \vec{H}_i^* d\Omega_i$ est la puissance guidée

à travers la section de chacun des triangles.

$$P_i = \int_{\Omega_i} (E_x \frac{[\tilde{\mu}_{rxx}^* [(\vec{\nabla}_t E_z)_x + \gamma E_x] + \tilde{\mu}_{rxy}^* [(\vec{\nabla}_t E_z)_y + \gamma E_y]]}{-j\omega\mu_0} + E_y \frac{[-\tilde{\mu}_{ryy}^* [(\vec{\nabla}_t E_z)_y + \gamma E_y] + \tilde{\mu}_{ryx}^* [(\vec{\nabla}_t E_z)_x + \gamma E_x]]}{-j\omega\mu_0}) d\Omega_i$$

- **Pour le calcul de la différence de potentiel** : $V = \sum_{i=1}^{N_a} V_i$ où N_a est le nombre d'arêtes des

triangles situées sur le contour d'intégration Γ et V_i est la circulation du champ électrique

le long de l'arête Γ_i du triangle qui coïncide avec le contour d'intégration. Ainsi,

considérons que chaque triangle est représenté par les numéros de ses trois sommets i, j, k .

Si par exemple, l'arête reliée aux sommets i, j est confondue avec le chemin d'intégration,

alors nous aboutissons aisément à la formule suivante $V_i = \frac{L_{ij}}{2} (e_{ij}^0 + e_{ij}^1)$ où L_{ij} et e_{ij}^m

sont respectivement la longueur et les variables tangentielle associées à l'arête.

- **Pour le calcul du courant** : $I_z = \sum_{i=1}^{N_c} I_z^i$ où N_c est le nombre de triangles discrétisant le

ruban conducteur et $I_z^i = \int_{\Omega_c^i} \sigma E_z d\Omega_c^i$ avec Ω_c^i un triangle i du ruban métallique. Il est

facile de montrer que $I_z^i = \frac{\sigma A_i}{3} (E_z^4 + E_z^5 + E_z^6)$ où A_i est l'aire du triangle Ω_c^i et E_z^i les

valeurs des champs nodaux situés aux milieux des trois arêtes du triangle.

Nous pouvons constater que le choix du chemin d'intégration Γ et du conducteur de la ligne de propagation dans lequel nous déterminons le courant électrique, offre une infinité de définition possible de l'impédance caractéristique.

En conséquence, le critère de sélection repose sur les trois considérations suivantes :

1. Le choix de l'une des trois définitions doit être conditionné par les grandeurs manipulées lors de l'adjonction de composants actifs, passifs : courant, tension ou les deux.
2. Dans le cas où nous désirons calculer la tension, le chemin d'intégration doit coïncider avec la position moyenne du composant monté sur le conducteur métallique.
3. Dans le cas où nous souhaitons évaluer le courant, le conducteur retenu est l'un de ceux sur lequel est connecté le composant.

La définition de l'impédance caractéristique d'une ligne est intimement liée aux composants auxquels elle est associée pour constituer une fonction de l'électronique. Puisque notre objectif n'est pas, dans l'immédiat, d'étudier la connexion de ces composants sur la ligne, mais plutôt la ligne elle-même, nous avons retenu les critères suivants pour la définition de cette impédance :

1. Dans les lignes de type microruban et coplanaire, le courant est déterminé dans le ruban central.
2. Pour ce même type de structures, le chemin d'intégration coïncide avec l'endroit où le champ électrique est maximal.

II.10. Conclusion

Nous venons de décrire la manière dont l'équation d'onde régissant le phénomène de propagation dans les structures de transmission peut être résolue par la méthode des éléments finis. Cette résolution permet, d'une part d'accéder aux caractéristiques de propagation que sont la constante de phase et d'atténuation, et d'autre part, de déterminer la valeur de l'impédance caractéristique d'une ligne en présence de matériaux à pertes.

La mise sous forme intégrale faible de l'équation d'onde par la méthode de Galerkin, nous a conduit aussi, à proposer la détermination des pertes métalliques par le biais du formalisme

de l'impédance de surface.

Le système matriciel obtenu après discrétisation à partir d'éléments triangulaires est résolu de façon efficace par le choix de l'algorithme de la puissance itérée. Cette option de résolution numérique présente l'avantage de conserver le format creux des matrices et de ne calculer que les valeurs propres des modes souhaités.

Dans le chapitre suivant, nous proposons la validation du code de calcul mis en œuvre à partir des développements mathématiques que nous venons de décrire. Nous effectuons une extension aux structures de propagation caractérisées soit par le caractère innovant de leur section droite comme pour les lignes ultracompactes, soit par leur aspect plus complexes comme pour les interconnexions entre portes élémentaires pour les circuits VLSI.

BIBLIOGRAPHIE du CHAPITRE II

[1] **Guanghua Peng and Jin-Fa Lee :**

« Analysis of biaxially anisotropic waveguides using tangential vector finite elements »

Microwave and optical technologie letters, vol 9, N°3, pp 156-162, june 1995

[2] **G. Mazé-Merceur, S. Tedjini, and J. L. Bonnefoy :**

« Analysis of a CPW on electric and magnetic biaxial substrate »

IEEE trans on MTT, vol 41, pp 457-461, March 1993

[3] **Y. Chen and B. Beker :**

« Dispersion characterisation of open and shielded microstrip lines under a combined principal axes rotation of electrically and magnetically anisotropic substrates »

IEEE trans on MTT, vol 41, pp 673-679, April 1993

[4] **Anastasis C. Polycarpou, Micheal R. Lyons, Constantine A. Balanis :**

« A two-Dimensional finite element formulation of perfect matched layer »

IEEE Microwave and Guide wave Letters, vol 6, N° 9, September 1996

[5] **A. Konrad :**

« Vector variational formulation of electromagnetic fields in anisotropic media »

IEEE trans on MTT, vol 24, pp 553-559, september 1976

[6] **Gouri Dhatt, Gilbert Touzot :**

« Une présentation de la méthode des éléments finis »

Collection Université de Compiègne, Deuxième Edition

[7] **P. P. Silvester, R. L. Ferrari :**

« Finite Elements for Electrical Engineers »

Cambridge U. K. : Cambridge University Press, 1983

[8] **M. Hano :**

« Finite-Element analysis of dielectric-loaded waveguides »

IEEE trans on MTT, vol 32, pp 1275-1279, october 1984

[9] **J. R. Winkler and J. B. Davies :**

« Elimination of spurious modes in finite element analysis »

Journal of Computational Physics, vol 56, pp 1-14, 1984

[10] **B. M. A. Rahman and J. B. Davies**

« Finite-Element analysis of optical and microwave problems »

IEEE trans on MTT, vol 32, pp 20-28, january 1984

[11] **A. J. Kobelansky and J. P. Webb :**

« Eliminating spurious modes in finite Element waveguides problems by using divergence-free fields »

Elect. Lett., vol 22, pp 569-570, 1986

[12] **K. Paulsen and D. Lynch :**

« Elimination of vector parasites in finite Element Maxwell solutions »

IEEE trans on MTT, vol 39, March 1991

[13] **Jean-Claude Nedelec :**

« Notions sur les techniques d'éléments finis »

Mathématiques & Applications, Edition Ellipses, 1991

[14] **Z. J. Cendes and S. H. Wong :**

« C1 Quadratic Interpolation over Arbitrary Point sets »

IEEE Computer Graphics and Applications, pp8-15, November 1987

[15] **Din Sun, John Manges, Xingchao Yuan, Zoltan Cendes :**

« Spurious Modes in finite-Element Methods »

IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol 37, N° 5, pp 12-24, october 1995

[16] **Anatasis C. Polycarpou, Micheal R. Lyons, Constantine A. Balanis :**

« Finite Element Analysis of MMIC waveguide structures with Anisotropic substrates »

IEEE trans on MTT, vol 44, N° 10, pp 1650-1662, 10 october 1996

[17] **A. Bossavit and I. Mayergoyz :**

« Edge-elements for scattering problems »

IEEE trans on Mag, vol 25, pp 2816-2821, november 1989

[18] **Jin-Fa Lee, Zoltan J. Cendes :**

« Full-wave analysis of dielectric waveguides using tangential vector finite elements »

IEEE tran on MTT, vol 39, N° 8, pp 1263-1271, August 1991

[19] **Z. J. Cendes :**

« Vector Finite Elements for Electromagnetic field computation »

IEEE trans on Mag, vol 27, N° 5, pp 3953-3966, september 1991

[20] **R. E. Collin :**

« Field theory of guided wave »

Mc Graw-Hill, New-York, 1960

[21] **Didier Kinowski :**

« Etude comparative de l'approche dans le domaine spectral et d'une formulation par éléments finis pour la simulation de dispositifs microondes et optroniques »

Thèse de Doctorat de l'Université de Lille, décembre 1992

[22] **Christophe Delabie :**

« Elaboration d'un simulateur de dispositifs planaires microondes. Application à la caractérisation de matériaux supraconducteurs »

Thèse de Doctorat de l'Université de Lille, 23 septembre 1994

[23] **Jian-She Wang and Nathan Ida :**

« Eigenvalue analysis electromagnetic cavities using divergence finite elements »

IEEE trans on Mag, vol 37, N° 5, September 1991

[24] **Jacek Mielewski and Michal Mrozowski :**

« Application of the Arnoldi method in FEM analysis of waveguides »

IEEE Microwave and Guided wave Letters, vol 8, N° 1, pp 7-9, january 1998

[25] **P. Lascaux R. Théodor :**

« Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur »

Masson, tome1 et tome 2, deuxième Edition, 1993

[26] **Michel Aubourg :**

« Méthode des éléments finis appliquée à des problèmes de propagation d'ondes électromagnétiques guidées »

Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Limoges, 9 Juillet 1985

[27] **R. Faraji-Dana, Y. L. Chow :**

« Edge condition of the field and A.C. resistance of a rectangular strip conductor »

IEEE Proceeding, vol 137, N° 2, pp 133-139, April 1990

CHAPITRE III

Si l'on se réfère aux travaux parus ces dernières années, un grand nombre de validation des codes éléments finis porte sur la comparaison entre les résultats issus de ces codes et ceux obtenus de manière analytique sur un guide rectangulaire métallique vide. Bien entendu, cette validation trouve son aboutissement lorsque le guide est chargé par une, voire même, plusieurs couches de permittivité diélectriques différentes[1]. Signalons, encore, que la permittivité des matériaux mise en jeu est exprimée sous forme tensorielle[2][3].

On peut comprendre une telle démarche dans la mesure où, dans un premier temps, il est préférable de comparer le code mis en œuvre dans le cadre d'une structure de propagation simple comme l'est le guide rectangulaire métallique.

Il est clair que nous avons opéré de la même manière, tant pour le guide rectangulaire vide que pour celui chargé de couches de matériaux diélectrique à pertes et anisotropes. Toutefois, ces résultats que l'on peut qualifier de très classiques désormais, voire trop classiques ne sont pas présentés dans le cadre de ce mémoire. Nous voulons montrer les potentialités de notre outil numérique face à la détermination des paramètres électromagnétiques de guides moins conventionnels que le classique guide rectangulaire métallique vide ou non, ou encore le guide métallique à nervure.

Pour cette raison, nous choisissons de confronter les résultats de nos prédictions pour les lignes planaires, et ce, pour le mode fondamental. Ces lignes confectionnées par la micro-électronique hybride ou monolithique peuvent être classifiées suivant deux dénominations.

- La première concerne les lignes planaires traditionnelles. Il s'agit de la ligne microruban et de la ligne coplanaire.

- La seconde porte sur la version miniaturisée de la ligne coplanaire ou microruban suspendue. Cette version est connue dans la littérature sous le nom de « microshield line » ou ligne à membrane. Ce choix sera justifié par la suite.

Nous essaierons, tant que faire ce peut, de comparer nos résultats à d'autres, de façon à conserver un caractère objectif à ce travail.

En conséquence, les grandeurs électromagnétiques telles que la constante de phase, la constante d'atténuation, l'impédance caractéristique sont comparées :

- D'une part à des relevés expérimentaux, qui, dans la majeure partie des cas ont été réalisés par l'équipe électromagnétisme, voire en collaboration avec d'autres équipes.
- Et d'autre part, aux résultats fournis par un logiciel commercial d'éléments finis à savoir High Frequency Structure Simulator (HFSS) distribué par Hewlett Packard.

A ce stade, notre volonté, n'est pas, nous tenons à le préciser, de dénigrer le code commercial HFSS. Nous désirons tout simplement définir, lorsque cela est possible, des limites d'utilisation tant pour notre code de calcul que pour le logiciel commercial considéré.

Cette phase de validation effectuée, nous pouvons nous attaquer à des lignes dont la topologie est moins conventionnelle. En effet, les performances requises dans la mise en œuvre des circuits complexes fonctionnant aux fréquences de plus en plus élevées font appel à un besoin de miniaturisation, et à des concepts ou des processus technologiques de plus en plus pointus[4][5]. Pour répondre aux besoins de performances, il faut concevoir des structures de propagation présentant le moins de dispersion et de pertes métalliques pour le mode fondamental quasi transverse électromagnétique, tout en conservant l'impédance de la ligne la plus constante possible, et ce, sur la plus large bande monomode. C'est pourquoi nous calculerons les grandeurs électromagnétiques de quelques lignes de topologies nouvelles[5][6][7].

Nous terminons ce chapitre par l'étude des interconnexions. Bien évidemment, leurs topologies sont très variables et même très complexes. Pour notre part, nous nous intéressons aux rubans métalliques de section rectangulaire déposés sur un substrat, à pertes, de silicium. Bien évidemment, ce ruban possède des dimensions transverses qui ne sont plus négligeables devant l'épaisseur des couches de natures différentes mises en jeu. L'objectif est de définir le comportement de ces lignes dans un environnement du type circuit intégré multicouches réalisé sur silicium.

Signalons enfin, que notre code à éléments d'arêtes a été mis au point, pour prendre en compte la nature dissipative, au sens large des matériaux. Pour cette raison, les couches diélectriques mises en jeu sont caractérisées par leur permittivité diélectrique mais aussi par la tangente de l'angle de perte. La nature métallique ou supraconductrice d'un ruban ou d'un plan de masse est prise en compte par la conductivité σ du matériau. Dans le cas du modèle à deux fluides, pour les supraconducteurs, cette conductivité est complexe.

Comme nous l'avons précisé au début de ce chapitre, nous pouvons, sans difficulté, étudier des matériaux anisotropes tant pour la permittivité diélectrique que pour la perméabilité magnétique.

III.1 Validation du code de calcul

III.1.1 Préambule

Avant d'aborder la phase de validation, il nous semble important de spécifier les conditions dans lesquelles l'ensemble des comparaisons a été effectué. Que ce soit avec des relevés expérimentaux, avec notre code de calcul à éléments d'arêtes ou encore avec un logiciel commercial, nous décrivons brièvement les moyens mis en œuvre.

- **Le code de calcul, le mailleur, et son environnement.**

Notre code de calcul est établi en fortran 77. Il est testé sur une station de travail HP 9000 série 735, distribuée par la société Helwett Packard et fonctionne sous Unix version 8. Elle comporte à ce jour 256 Mega-octets de mémoire vive. Le volet matriciel du problème est traité par l'établissement de sous programmes spécifiques, mis au point pour les besoins de ce mémoire. Nous faisons appel, aussi, à la bibliothèque mathématique connue sous le nom : IMSL, et ce, dans sa version 2.0, pour le conditionnement des matrices. Ce code de calcul ne saurait donner pleine satisfaction si nous ne disposions pas d'un mailleur performant. Comme nous l'avons signalé dans les chapitres précédents, le maillage est une opération délicate qui doit être effectué avec soin. Pour les tous premiers tests, nous avons utilisé le mailleur conçu par l'équipe électromagnétisme en langage C. Les exigences requises pour l'étude des structures de forme complexe nous ont rapidement incités à rechercher un mailleur professionnel. Nous avons donc choisi un mailleur à deux dimensions(2D) dénommé MOSAIC. Ce dernier est distribué par la société FRAMASOFT +CSI, émanation du groupe FRAMATOME. Bien évidemment, il nous a fallu concevoir, en plus du code éléments finis, une passerelle informatique pour adapter la topologie de nos structures aux exigences du mailleur.

Ces exigences sont :

le dessin de la structure et son quadrillage,

le contrôle a posteriori de la forme des triangles (angle au sommet, arêtes communes, etc...),
mais surtout la récupération d'un fichier répertoriant toutes les coordonnées des triangles.

Cette dernière étape est bien évidemment la plus importante.

▪ **Le logiciel High Frequency Structure Simulator**

Ce logiciel est implanté au laboratoire sur des stations de travail HP comportant en moyenne 128 Mega-octets de mémoire vive. La version utilisée pour la comparaison avec notre code de calcul est notée sous la référence 3.0 et 4.0. Notre objectif n'est pas, à ce stade, d'expliquer dans le détail le mode de fonctionnement de ce logiciel commercial.

Toutefois, quelques aspects méritent d'être soulignés. Ce code à éléments finis comporte un mailleur adaptatif et caractérise des structures de propagation en trois dimensions. Le point de départ consiste à effectuer le dessin du volume de la structure. La recherche d'une solution s'effectue par l'établissement d'un premier maillage que nous qualifions de grossier. Le logiciel modifie, par la suite, le maillage initial de façon à affiner les zones où les gradients de champs sont jugés importants. La dynamique est d'ailleurs fixée par l'utilisateur sous la forme d'une fonction « erreur ». Du point de vue électromagnétique, les grandeurs fournies par HFSS sont des paramètres $[S]$, et les caractéristiques de propagation α, β, Γ . Du point de vue matériau, la nature diélectrique ou métallique d'une couche n'est envisageable que dans des contextes bien précis.

Pour ce qui concerne la prise en compte d'un ruban métallique de conductivité σ de valeur finie, elle ne se fait que par le biais d'une impédance de surface. Cette impédance Z_s

déclinée sous la forme $Z_s = \frac{1+j}{\delta\sigma}$ représente le cas, connu, où l'épaisseur du ruban est au

moins supérieure à trois fois l'épaisseur de peau δ à la fréquence de travail. Ce point sera discuté par la suite.

Quant aux couches diélectriques, nous avons rencontré des problèmes lorsque la tangente de l'angle de pertes $\text{tg}\delta$ avoisine 10^{+6} . La valeur 10^{+6} peut être atteinte très rapidement si l'on considère par exemple un métal dont la permittivité complexe est décrite par la relation

« $1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r}$ » où $\text{tg}\delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r}$ est la tangente de l'angle de pertes.

▪ Le système et le principe de mesure

La mesure des paramètres électromagnétiques des lignes est effectuée à partir du relevé des paramètres [S], et ce, au moyen de l'analyseur de réseau HP8510 distribué par la société Helwett Packard. Cet analyseur est connecté à une station de mesure sous pointe du type « cascade microtech » et couvre les bandes de fréquence comprises entre 1GHz et 110 GHz.

Quant au principe de mesure, il a été développé dans l'équipe électromagnétisme par E.Palczny et J.F. Legier, [8] et utilisée par la suite par d'autres équipes du laboratoire[9]. Bien que la méthode soit connue, nous en rappelons brièvement la philosophie.

La détermination de la constante de propagation du mode fondamental et par voie de conséquence de l'atténuation est basée sur la mesure des paramètres [S] de deux quadripôles possédant des topologies identiques, et ne différent entre eux que d'un incrément de longueur de ligne ΔL . Cette ligne de longueur ΔL est, du reste, la ligne dont on désire connaître les caractéristiques électromagnétiques. Nous présentons figure III-1, la chronologie et les développements analytiques de base permettant d'accéder à la détermination du couple $\alpha, \beta = f(\omega)$ à partir des paramètres [S] mesurés pour la ligne 1 et 2. Dans l'exemple choisi, le

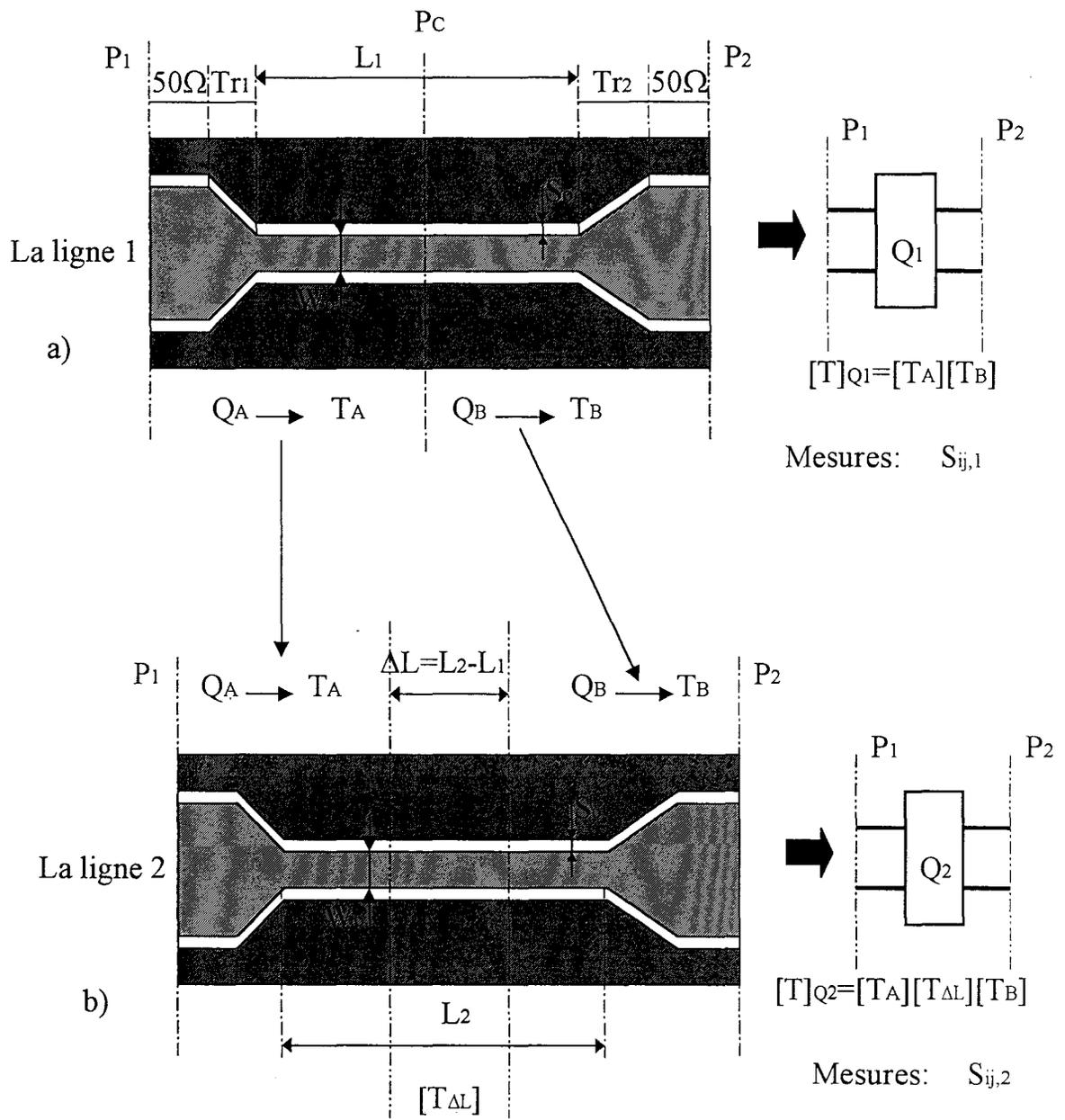


Figure III-1 : Principe de mesure des caractéristiques de propagation des lignes planaires.

support de propagation est une ligne coplanaire.

- **Le point de vue technologique et la topologie**

La ligne coplanaire notée ligne 1 figure III-1.a est constituée :

- D'un tronçon de ligne 50Ω
- D'une transition Tr1 entre la ligne d'accès 50Ω et la ligne d'étude caractérisée par le couple de valeur W_0, S_0 .
- D'une ligne coplanaire de dimensions W_0, S_0 et de longueur L_1 : la ligne à caractériser.
- D'une seconde transition Tr2, qui peut être identique ou différente de la transition Tr1.
- Et enfin, d'un tronçon de ligne 50Ω .

Signalons que la ligne 2 figure III-1.b, ne doit se différencier de la ligne figure III-1.a que par sa longueur utile L_2 plus petite ou plus importante que celle L_1 de la ligne 1.

Du point de vue analytique, les développements mathématiques sont basés sur l'emploi de la matrice de transfert $[T]$ d'un quadripôle. Celle-ci relie entre elles les amplitudes et les phases des ondes incidentes et réfléchies à l'entrée du quadripôle en fonction de celles incidentes et réfléchies à la sortie du quadripôle. Cette matrice de transfert s'exprime, en fonction des paramètres $[S]$, de la manière suivante :

$$[T] = \frac{1}{S_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -S_{22} \\ S_{11} & -\Delta S \end{bmatrix} \quad \text{Eq-III.1}$$

où ΔS est le déterminant de la matrice $[S]$ à savoir $S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}$.

- **Le point de vue analytique**

Par souci de simplification, le quadripôle Q_1 est décomposé en deux quadripôles élémentaires Q_A et Q_B Figure III-1.a. Les matrices de transfert $[T_A]$ et $[T_B]$ sont alors définies dans les plans P_1, P_C et P_2, P_C . Nous rappelons que les plans P_1 et P_2 sont ceux dans lesquels nous effectuerons ultérieurement les relevés des paramètres $[S]$. Le plan P_C est fictif et peut

être localisé, a priori, en tout point de la ligne de longueur L_1 . De part les propriétés spécifiques de la matrice de transfert $[T]$, nous exprimons celle du quadripôle Q_1 par la relation suivante :

$$[T]_{Q1}=[T_A][T_B] \quad \text{Eq-III-2}$$

Comme nous l'avons signalé précédemment, le second quadripôle Q_2 est pratiquement la réplique du premier. La ligne coplanaire possède ici une longueur utile L_2 plus importante figure III-1.b. Le quadripôle Q_2 est reconstitué en chaînant le quadripôle Q_A le tronçon de la ligne coplanaire de longueur $\Delta L=L_2-L_1$, puis le quadripôle Q_B . Ceci se traduit par la relation :

$$[T]_{Q2}=[T_A][T_{\Delta L}][T_B] \quad \text{Eq-III-3}$$

La suite de cette étude ne repose que sur des développements mathématiques fastidieux. Nous nous contentons donc de donner le fil conducteur permettant d'aboutir à la relation que nous utiliserons pour le dépouillement des résultats de mesures.

A partir des deux formulations définies précédemment à savoir :

$$[T]_{Q1}=[T_A][T_B]$$

et

$$[T]_{Q2}=[T_A][T_{\Delta L}][T_B]$$

on montre que l'égalité suivante est aussi vérifiée :

$$[T]_{Q1}[T]_{Q2}^{-1} = [T_A][T_{\Delta L}][T_A]^{-1} \quad \text{Eq-III-4}$$

Cela implique que la somme des termes de la diagonale principale des matrices $[T_{\Delta L}]$ et $[T]_{Q2}[T]_{Q1}^{-1}$, ou encore que leurs traces sont égales.

- **La formulation finale**

Sachant que la trace de la matrice de transfert $[T_{\Delta L}]$ d'un tronçon de ligne d'impédance quelconque et de longueur ΔL est égale à $2\cosh\Delta L$, nous obtenons finalement la formulation

$$2\cosh\gamma\Delta L = \frac{S_{12,1}^2 + S_{12,2}^2 + S_{11,1}S_{22,2} + S_{11,2}S_{22,1} - S_{11,1}S_{22,1} - S_{11,2}S_{22,2}}{S_{12,1}S_{12,2}} \quad \text{Eq-III-5}$$

Dans cette expression, $\gamma = \alpha + j\beta$ représente la constante de propagation complexe. Ainsi, la mesure des paramètres $S_{ij,1}$ et $S_{ij,2}$ des deux quadripôles aboutit à la détermination de la constante de phase du tronçon de ligne de longueur $\Delta L=L_2-L_1$, mais aussi de l'atténuation ; grandeur qui nous intéresse particulièrement.

Signalons enfin que cette technique a été utilisée pour caractériser aussi les lignes microruban. Dans ce cas, les cellules d'excitation sont conçues en structures microruban avec connecteur 'K' [8]. Pour les structures comportant trois rubans planaires à savoir, la ligne coplanaire, la ligne coplanaire avec métallisation centrale en 'T'(la grille champignon), la ligne sur membrane diélectrique, l'excitation et la mesure des paramètres sont effectués sous pointes.

III.1.2 Condition d'obtention des solutions issues de notre code

Après avoir précisé notre environnement de travail tant pour la phase de mesure que celle logicielle, il nous semble important de décrire notre philosophie concernant la recherche des solutions numériques. Bien évidemment, tout le problème réside dans la convergence numérique des solutions et dans la fiabilité des résultats obtenus. Pour ce qui concerne la méthode des éléments finis, le nombre de paramètres à prendre en compte pour l'étude de la convergence est minime. En effet, on peut jouer soit sur le degré d'interpolation d'un élément, soit sur le nombre d'éléments lui-même.

A ce stade, il faut garder à l'esprit que pour un triangle à 3, 6 et 9 nœuds d'interpolation, il correspond successivement 6, 20 et 33 variables à déterminer pour les éléments d'arêtes. Nous constatons donc que, à taille mémoire fixe, le nombre de triangles est d'autant plus réduit que le degré des polynômes d'interpolation croît.

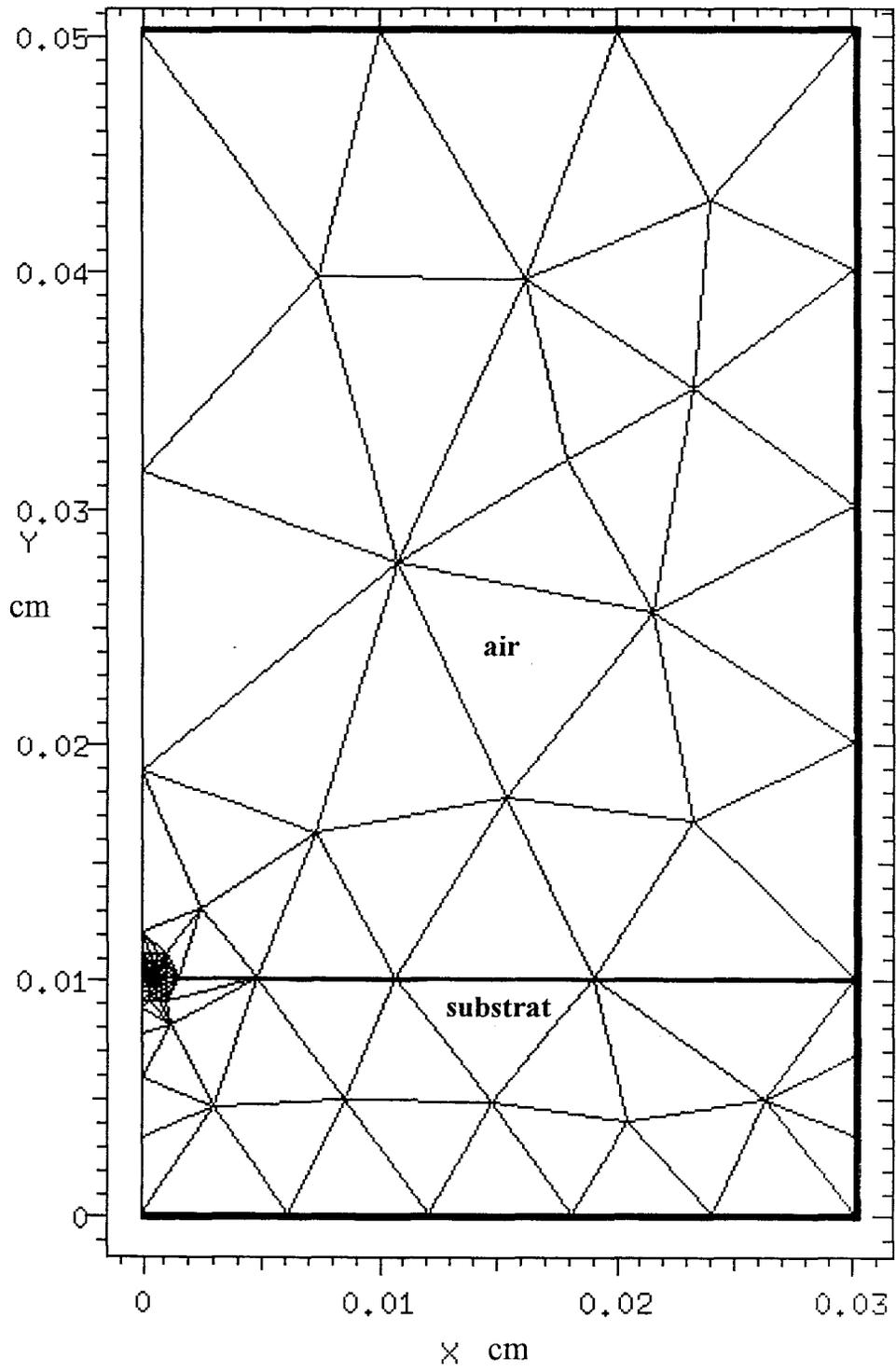


Figure III-2a : Demi-structure microruban

Dès le départ nous avons fait le choix dans ce mémoire, d'un élément comportant 6 nœuds d'interpolation. Le seul paramètre à prendre en compte n'est donc plus que le nombre de triangles pour discrétiser la section droite de la structure de propagation.

Notre volonté de calculer l'atténuation linéique consécutive à la nature dissipative des métallisations nous amène à étudier la convergence d'une solution complexe. Il est clair que la convergence de la constante de propagation complexe γ n'est effective que si et seulement si la convergence de la partie réelle et imaginaire est assurée.

Ainsi, après avoir effectué plusieurs types de maillage, les toutes premières conclusions auxquelles nous aboutissons se résument de la manière suivante, et ce, pour le mode fondamental des lignes à rubans métalliques :

- La convergence de la constante de phase β n'entraîne pas nécessairement celle de l'atténuation α .
- Par contre l'obtention d'une solution fiable pour la partie réelle α de la constante de propagation $\gamma = \alpha + j\beta$ nous fournit toujours une valeur fiable de la constante de phase β et, par voie de conséquence, de la permittivité relative effective ϵ_{reff} .

En conclusion, les règles de convergence de la solution complexe $\gamma = \alpha + j\beta$ sont imposées par celles relatives à la constante d'atténuation α , grandeur la plus sensible.

A titre d'exemple pour la ligne microruban, nous avons utilisé les potentialités du mailleur de 'MOSAIC' pour subdiviser le demi-plan de section droite figure III-2.a en sous-domaines. Bien évidemment, compte tenu de la faible dimension du ruban métallique, seuls les domaines de surface importante peuvent être représentés. Un zoom des régions situées dans le ruban et au voisinage des arêtes délimitant le pourtour des rubans montre que nous avons ajouté des sous - domaines de très petite superficie,

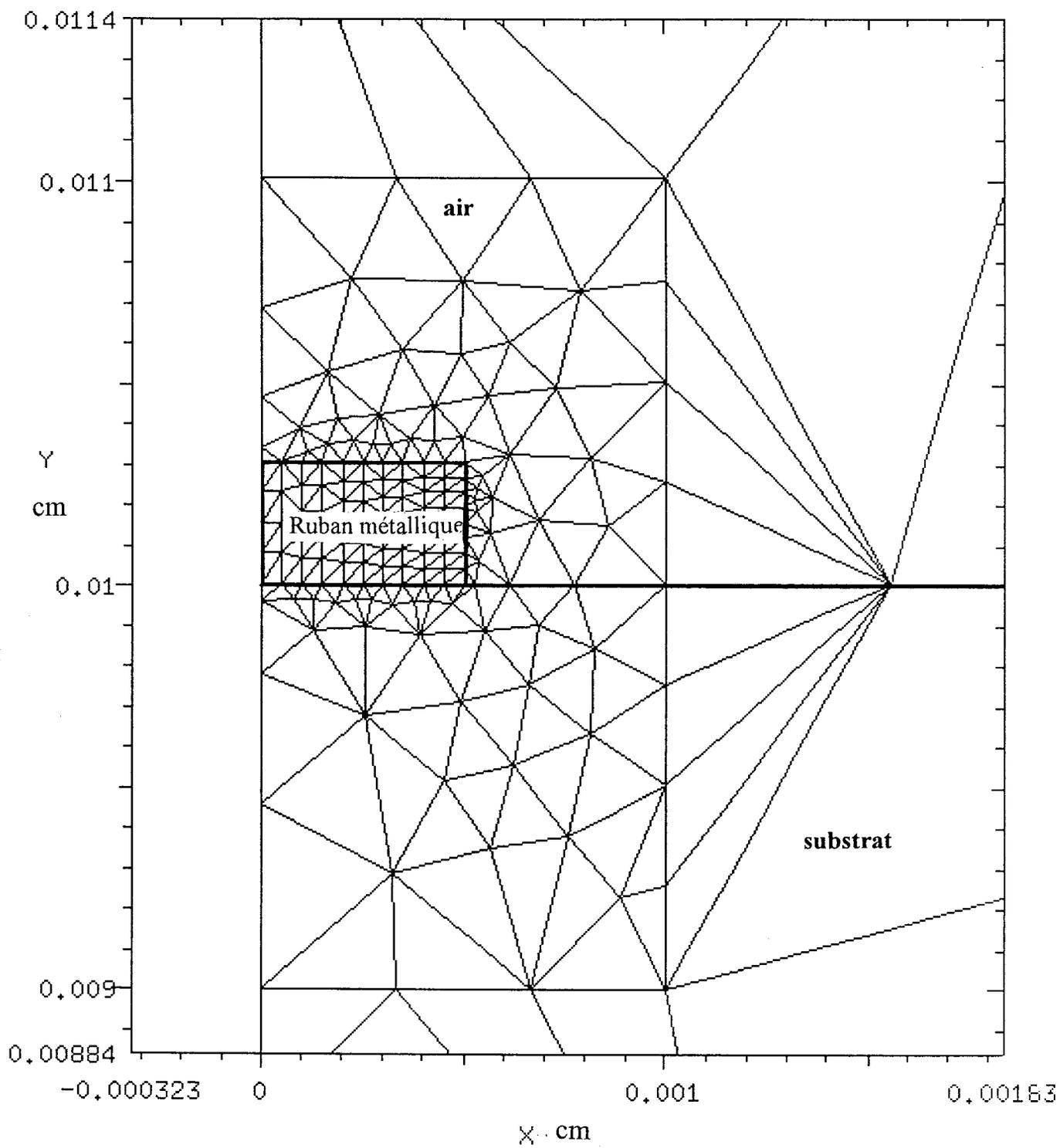


Figure III-2b : Demi-structure microruban : zoom des régions situées autour du ruban métallique

- Pour, d'une part, prendre en compte les effets de pointes qui apparaissent au coin des métallisations [10][11]
- Et, d'autre part, traduire le mieux possible la pénétration des champs dans le ruban, et par voie de conséquence, décrire le mécanisme des pertes lié à la conductivité σ de valeur finie des dépôts métalliques. Ce point sera discuté dans le paragraphe suivant.

Les différents types de maillage que nous avons effectués s'articulent essentiellement sur ces deux dernières contraintes. Signalons, en outre, que compte tenu de notre expérience, nous avons également opté pour un pas de discrétisation variable. Ainsi, la dimension des triangles croît lorsque l'intensité du champ diminue. Ceci est illustré figure III-2.b où nous avons représenté un exemple de maillage obtenu grâce aux moyens du mailleur de 'MOSAIC'.

III.1.3 Validation du code de calcul

La validation de notre code de calcul s'articule sur deux axes.

- Le premier concerne la formulation utilisée pour traduire la notion d'impédance de surface, et par voie de conséquence, la nature dissipative des dépôts métalliques. Aucun maillage n'est, à ce stade, effectué dans les rubans de conductivité de valeur finie.
- Le second axe porte sur la mise en œuvre d'un maillage dans la métallisation ; le concept d'impédance de surface n'est, bien entendu, plus utilisé.

Comme nous l'avons signalé auparavant, cette validation concerne l'évolution fréquentielle des paramètres électromagnétiques de trois lignes planaires. Celles-ci sont représentées figure III-3. Nous reconnaissons respectivement la ligne microruban, la ligne coplanaire ainsi que la ligne sur membrane ou 'microshield line'. Ces lignes ont été toutes réalisées au laboratoire soit par les membres de l'équipe « Electromagnétisme des circuits » ou encore en collaboration avec les équipes travaillant dans les domaines optique, millimétrique et

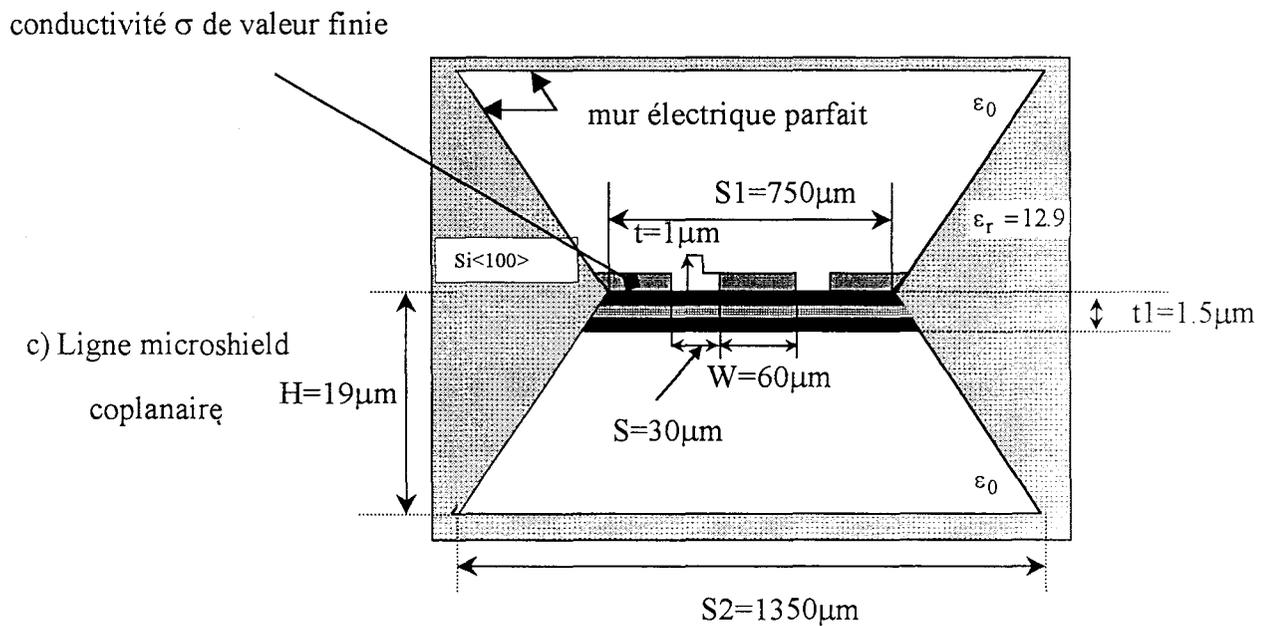
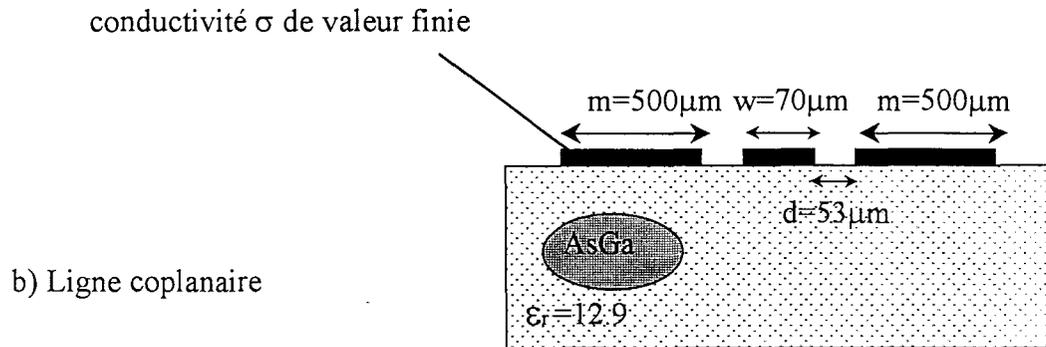
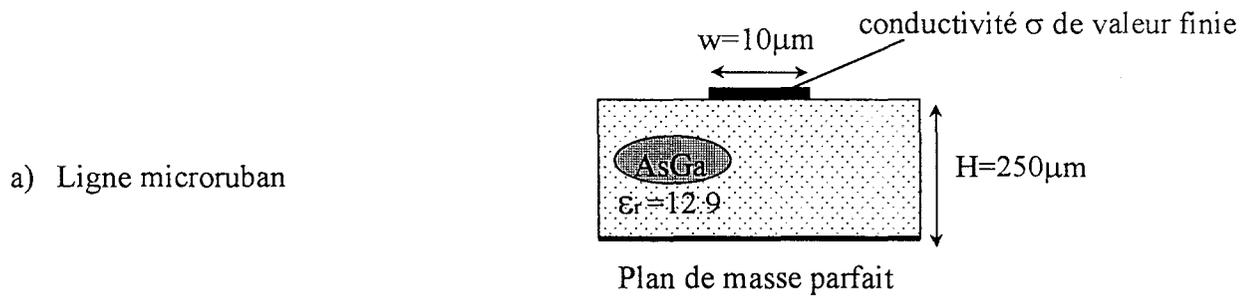


Figure III-3: Topologies des lignes utilisées pour la validation de notre code de calcul

Figure III-4: Evolution fréquentielle de la permittivité relative effective de la ligne microruban.

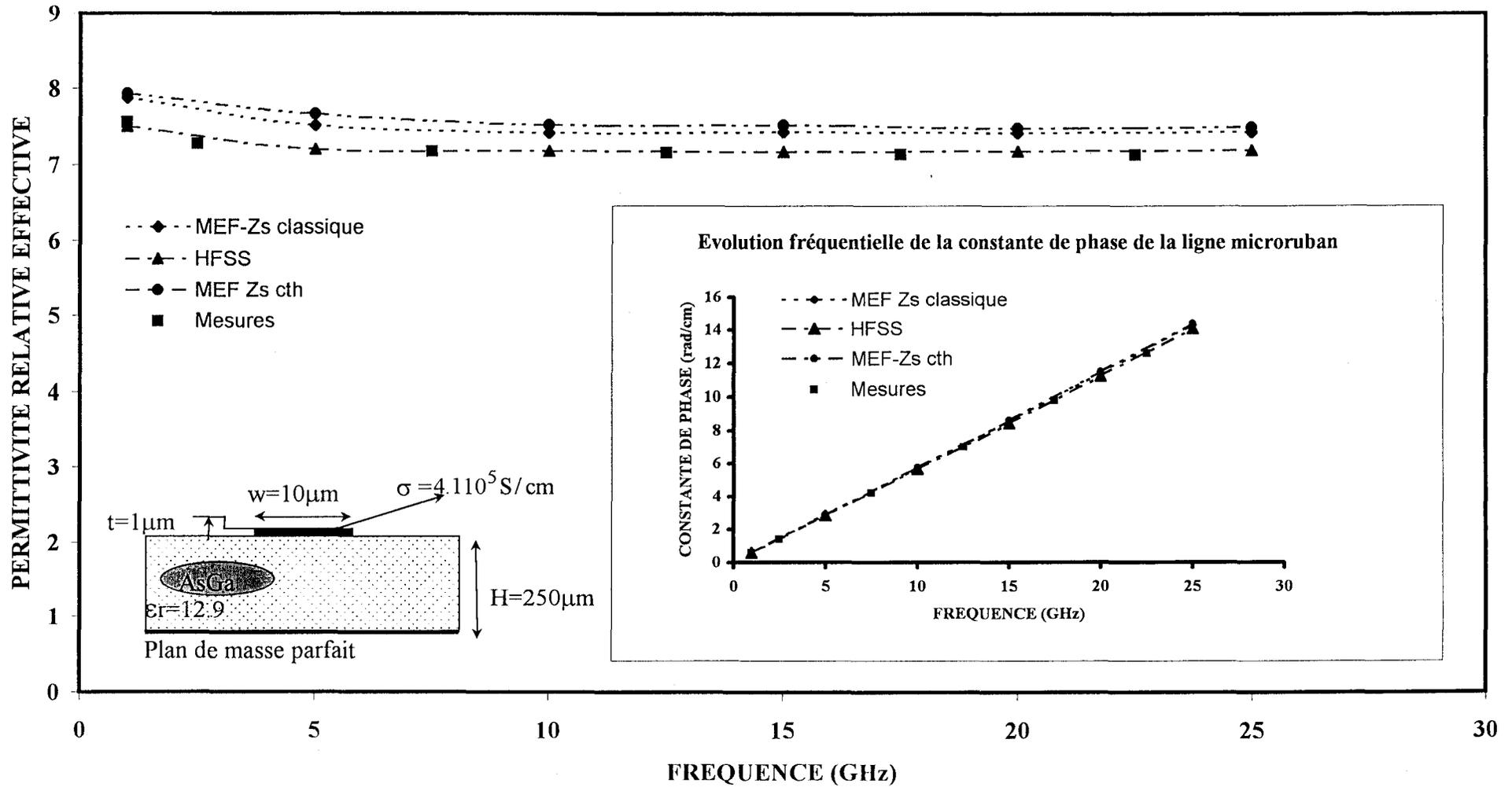
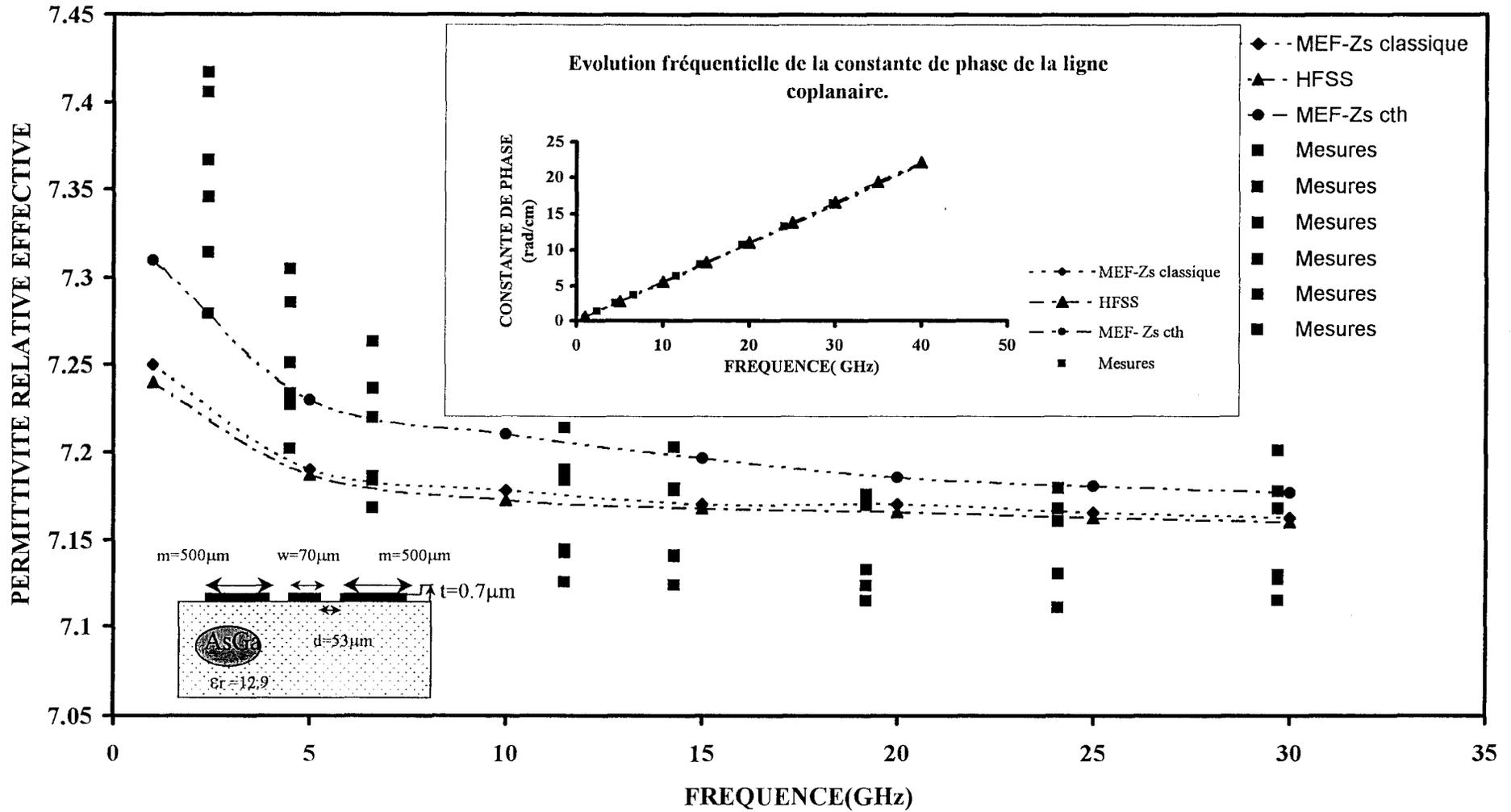


Figure III-5: Evolution fréquentielle de la permittivité relative effective de la ligne coplanaire.



submillimétrique. Il s'agit des équipes optoélectronique et composants quantiques dirigées respectivement par D. Decoster et D. Lippens.

Les topologies des sections droites de ces supports de propagation montrent, outre les dimensions microniques de ces lignes, que l'épaisseur des dépôts métalliques n'excèdent pas le micromètre. Bien évidemment, la structure qui requiert le plus d'opérations technologiques est la microligne conçue dans sa version coplanaire[12], pour ce qui nous concerne figure III-3.c.

La conception d'une telle ligne est basée sur la réalisation d'une membrane en polyimide ou en nitrure de silicium sur laquelle sont déposées les métallisations. L'ensemble membrane et rubans métalliques possèdent une épaisseur totale n'excédant pas les deux ou trois micromètres. Cette ligne est fermée dans un boîtier de forme trapézoïdale, et ce, à cause de l'attaque chimique [13]. Elles furent, pour la première fois, réalisées au laboratoire par l'équipe dirigée par D. Lippens en 1995[7] [9].

III.1.3.1 Formulation avec impédance de surface : notre code de calcul, HFSS, les mesures.

Les figures III-4 et III-5 illustrent les évolutions de la constante de phase et de la permittivité relative effective associée, dans la bande des fréquences comprise entre 1 et 30 GHz, et ce, pour les lignes microruban et coplanaire. Les épaisseurs des rubans sont respectivement égales à $1\mu\text{m}$ et $0.7\mu\text{m}$. L'observation, même sommaire, des évolutions montre immédiatement le bon accord entre les différentes formulations et les relevés expérimentaux. On notera toutefois que la présentation des résultats par le biais de la permittivité relative effective a tendance à exalter les écarts 'théorie-expérience', et ce, même lorsque ceux-ci sont faibles. Signalons que seul 5% caractérise le désaccord pour les écarts les plus importants en basse fréquence dans le cas de la ligne coplanaire.

Une observation plus minutieuse des figures III-4, III-5 doit être effectuée. En effet, notre code de calcul à éléments d'arêtes « MEF » exploite deux formulations différentes de l'impédance de surface.

- La première est classique. Elle correspond à celle implantée dans la version du logiciel HFSS que nous avons utilisée. Il s'agit de la relation connue sous la forme $Z_s = \frac{1+j}{\sigma\delta}$.

Elle correspond dans notre légende à l'expression 'MEF-Zs classique'. Ce cas est illustré figure III-6 [10][14]. Une onde plane illumine une interface air-métal infinie dans les directions ox et oz.

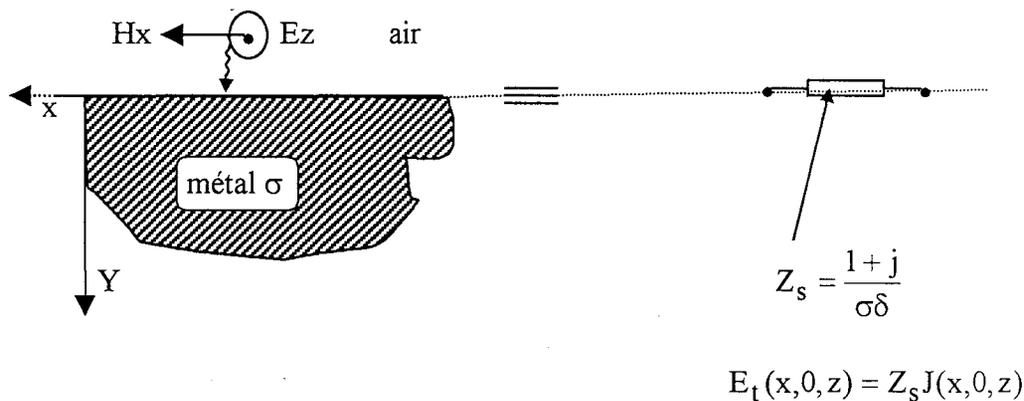


Figure III-6 : Interface air-métal et notion d'impédance de surface classique.

Sur l'interface air-métal, donc à l'ordonnée $y=0$, le champ électrique tangent E_t est relié à la densité de courant par un coefficient de proportionnalité que l'on appelle impédance de surface. Dans le cas où l'interface métallique est infinie dans une direction, à savoir celle oy correspondant au sens de propagation de l'onde TEM pour

la figure III-6, les champs décroissent au rythme de $e^{-\frac{y}{\delta}}$. La grandeur $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$

est, bien entendu, l'épaisseur de peau. Cette formulation d'impédance n'est valable que si les rubans métalliques de la ligne étudiée sont d'épaisseur supérieure à trois fois l'épaisseur de peau δ , à la fréquence de travail. Cette valeur est communément admise

par la communauté scientifique. Faut-il rappeler que pour une pénétration de l'onde de quatre fois l'épaisseur de peau, l'amplitude des champs vaut déjà le centième de celle définie sur l'interface air-métal en $y=0$. Cette rubrique concerne donc les rubans épais. Encore faut-il préciser la fréquence de travail.

- Dans notre esprit, le domaine de validité de 'Zs classique' correspond à des dépôts métalliques dont l'épaisseur est comprise entre trois à quatre fois l'épaisseur de peau et l'infini a priori. L'impédance de surface classique ne fait donc pas, explicitement intervenir l'épaisseur de la métallisation.

Pour pallier cet inconvénient, considérons figure III-7, une lame métallique d'épaisseur finie et de conductivité σ [15]. Cette lame est, en l'occurrence, infinie suivant les directions oz et ox , et baigne dans un milieu de permittivité ϵ_0 et de perméabilité μ_0 .

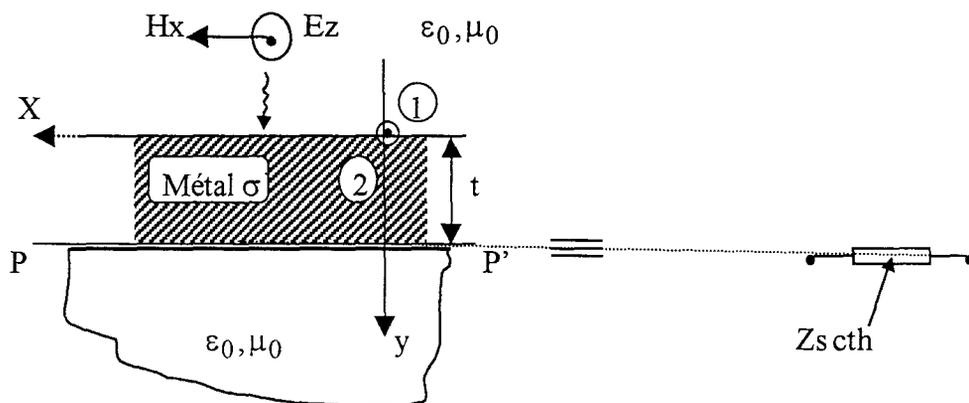
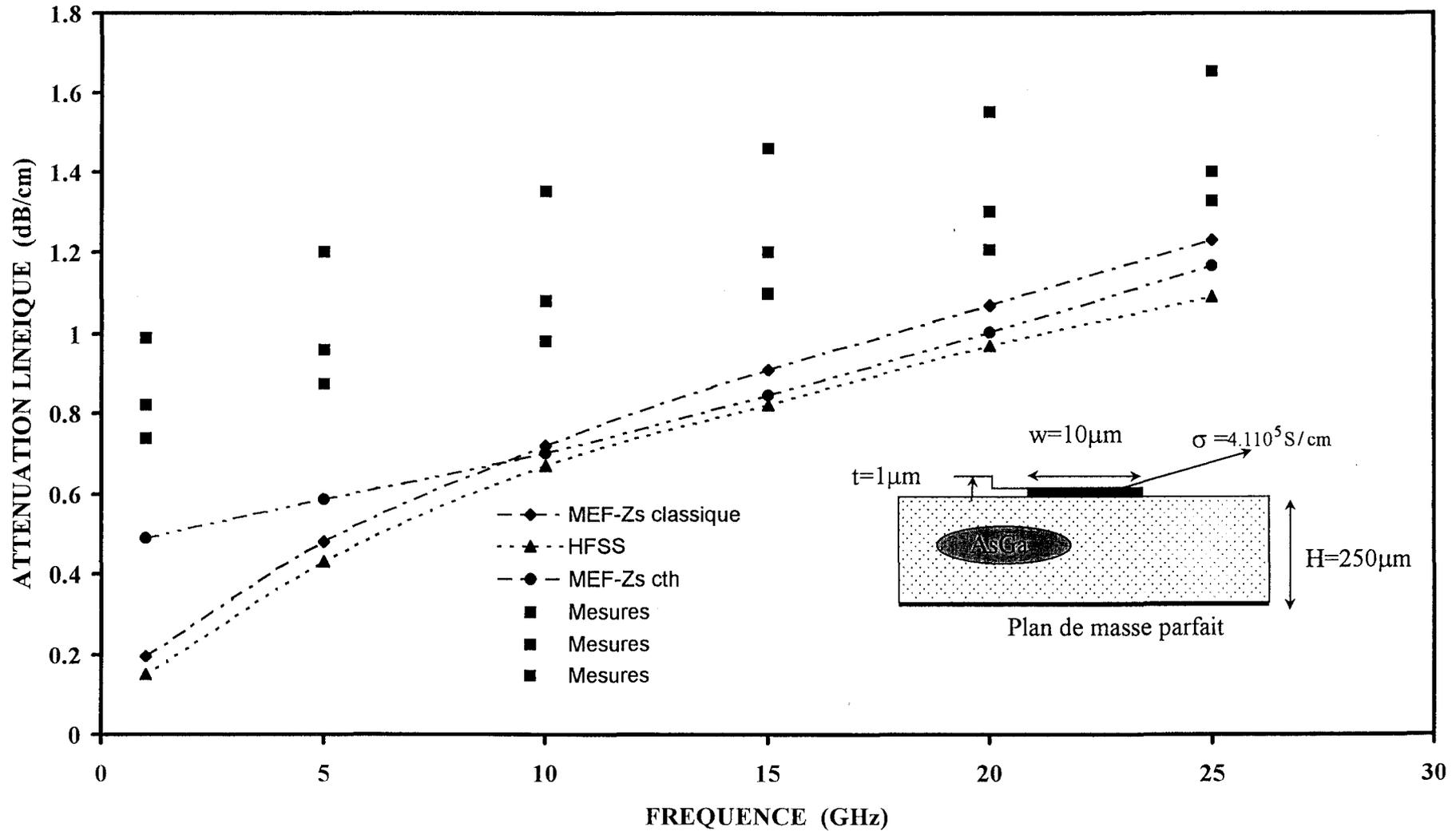


Figure III-7 : Impédance de surface pour une lame métallique d'épaisseur finie.

Supposons qu'une onde plane arrive sur la surface de séparation air-métal avec un angle d'incidence nul. A partir de la théorie des lignes de transmission, nous pouvons définir puis calculer une impédance ramenée par les milieux 1 et 2 dans le plan PP' en

Figure III-8: Evolution fréquentielle de l'atténuation linéique de la ligne microruban.

130



$y = -t$. Cette impédance s'écrit dans notre légende figure III-4, III-5 $Z_s \text{ cth}$ et possède l'expression suivante :

$$Z(y = -t) = Z_s \text{ cth} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma}} \text{cth}(\sqrt{j\omega\mu_0\sigma} t) \quad \text{Eq-III.6}$$

Bien entendu, cette notion d'impédance de surface, tout comme la précédente, demande à être affinée afin de prendre en compte les dimensions transverses des rubans. Mais n'oublions pas que seul le cas d'une illumination par une onde TEM a été étudié. L'approximation la plus importante réside probablement à ce niveau. Ceci constitue un vaste débat. Notre objectif n'est pas, à ce stade, de discuter ce point en détail, mais plutôt de proposer cette formulation. Il est clair que nous sommes conscients du caractère approché de cette expression. Signalons enfin qu'elle a été utilisée à maintes reprises dans les travaux de l'équipe « Electromagnétisme des circuits », notamment pour les films minces supraconducteurs [16][17].

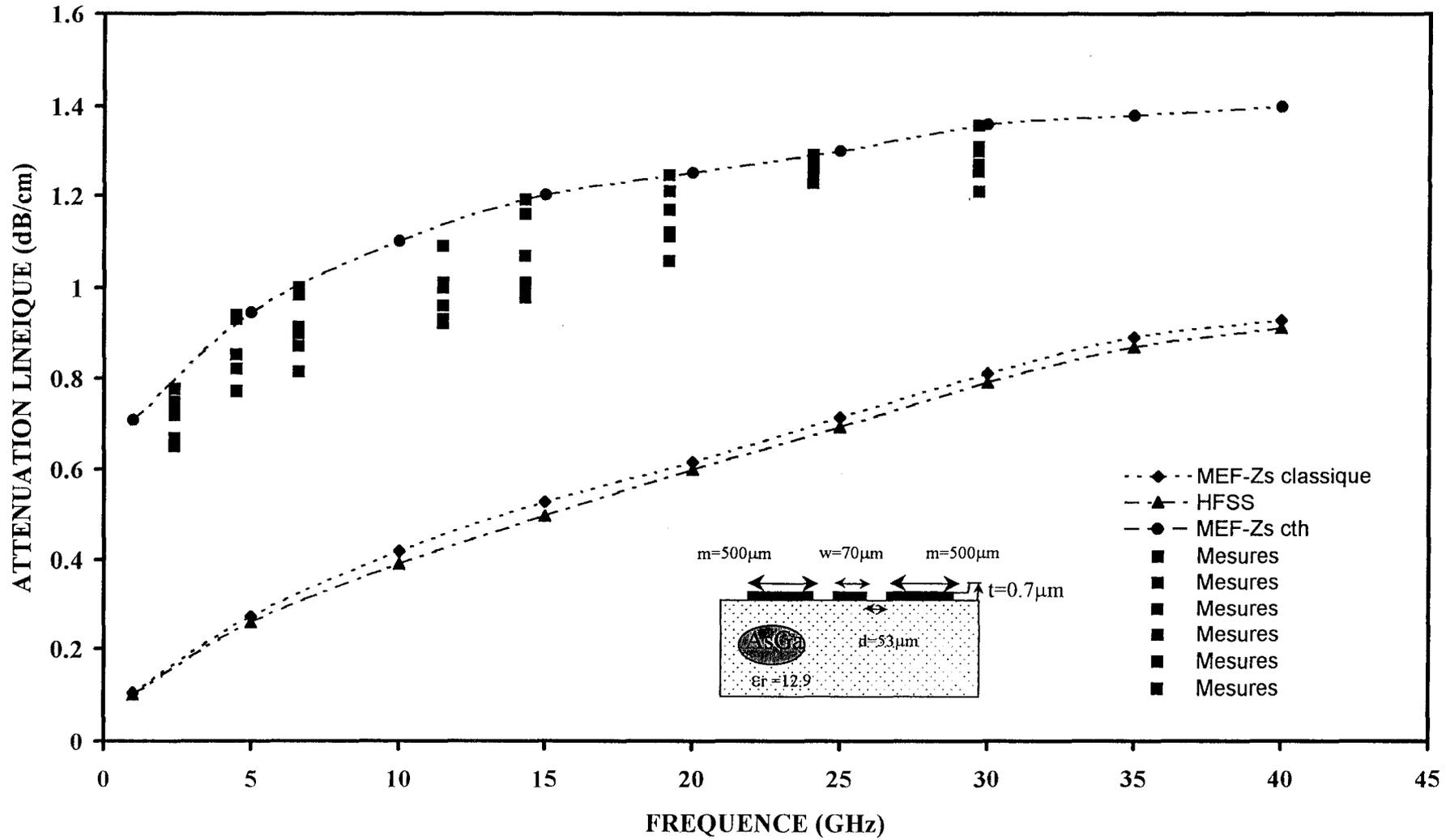
Intéressons nous à présent aux figures illustrant les évolutions de l'atténuation linéique pour la ligne microruban figure III-8 et coplanaire figure III-9, et ce, respectivement pour des dépôts métalliques d'épaisseur $1\mu\text{m}$ et $0.7\mu\text{m}$.

Pour la ligne microruban figure III-8, quatre remarques s'imposent.

Trois valeurs d'atténuation caractérisent chaque point de fréquence noté « mesures ». Ces valeurs sont représentatives de la reproductibilité des mesures. Les paramètres pris en compte dans les essais sont : le montage et le démontage des câbles en connectique de type 'K' et des cellules d'excitation des lignes, la soudure des fils d'or assurant la liaison électrique, le tout en conservant le même couple de lignes. Ainsi, la reproductibilité des mesures induit une erreur relative de l'ordre de 10 à 20%.

De façon globale, comparé aux relevés expérimentaux il est clair qu'aucune simulation numérique « MEF » ne prédit l'atténuation de façon satisfaisante.

Figure III-9: Evolution fréquentielle de l'atténuation linéique de la ligne coplanaire.



Notre code de calcul et le logiciel HFSS fournissent, en tout point de fréquence, des évolutions très semblables. Ceci ne doit pas nous surprendre puisque les deux codes de calcul font appel à la même formulation d'impédance de surface à savoir $Z_s \text{classique} = \frac{1+j}{\sigma\delta}$. Bien évidemment, cela signifie aussi que nous avons maillé correctement le plan de section droite à l'aide de 'MOSAIC' pour ce qui concerne notre code de calcul à éléments d'arêtes. Enfin, notons qu'en basse fréquence (1GHz) un écart relatif 'théorie - expérience' de 400% peut être observé.

Une réduction sensible de cet écart aux basses fréquences est assurée en substituant à l'expression $Z_s \text{classique}$ dans notre code de calcul celle $Z_s \text{cth}$ prenant en compte l'épaisseur du ruban. L'amélioration apportée n'est certes pas encore significative mais on remarquera toutefois que les lois d'évolution des pertes sont identiques à un facteur près puisque les deux évolutions sont parallèles. Le mécanisme des pertes semble donc, a priori, mieux appréhender.

En définitive, il n'est pas surprenant que le logiciel HFSS et notre code de calcul « MEF » utilisant la même formulation pour Z_s fournissent une médiocre appréciation de l'atténuation. En effet, le concept d'impédance de surface, faisant appel à la formulation classique, n'a de sens que si les rubans possèdent, à la fréquence de travail, une épaisseur au moins égale à trois épaisseurs de peau δ . Pour mémoire, cette épaisseur vaut environ 0.8micromètre pour de l'or à 10GHz.

Quant aux pertes de la ligne coplanaire figure III-9, nos conclusions, comparativement à la ligne microruban, ne diffèrent que sur un point.

Pour conserver une présentation analogue à celle de la figure III-8, nous avons tout d'abord sélectionné six relevés d'atténuation par point de fréquence. Cela concerne les points notés « mesures ». Au cours de nos essais, seule la pose et dépose des « pointes cascades » a pu être

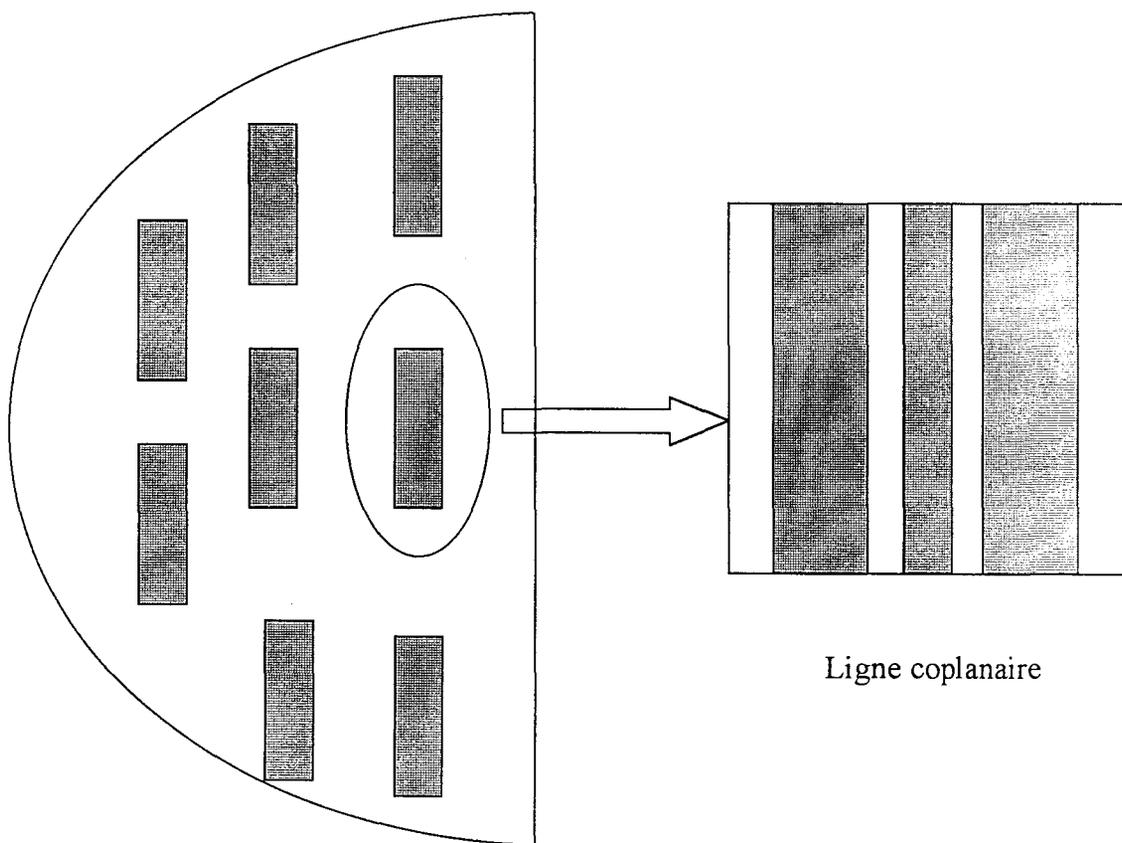


Figure III-10: Le demi substrat ASGa sur lequel sont réalisées les huit lignes coplanaires

effectuée en lieu et place des montages et démontages de connectique 'K' dans le cas de la ligne microruban. Cette opération n'a aucune incidence sur la détermination de l'atténuation consécutive à la nature dissipative des métallisations tant que l'on se confine à l'étude de deux lignes. La reproductibilité liée à la connectique par contact des pointes est donc, en tout point, remarquable. De ce fait, la reproductibilité des mesures ne concerne plus la connectique, mais bien la qualité du processus technologique mis en œuvre pour la réalisation des huit lignes de longueurs différentes sur un demi substrat d'arséniure de gallium figure III-10. Dans ce cas interviennent les dimensions transversales et l'homogénéité des dépôts métalliques dans la reproductibilité des résultats.

Nos constatations concernant le logiciel HFSS et notre code de calcul « MEF » sont similaires à celles effectuées sur la ligne microruban. L'expression de l'impédance de surface 'Zsclassique' décrit, ici, encore moins bien le phénomène des pertes métalliques. Souvenons-nous que l'épaisseur du ruban vaut $0.7\mu\text{m}$ alors que l'épaisseur de peau est égale à $0.8\mu\text{m}$ à 10GHz. Les écarts « théorie – expérience » avoisinent les 400% en basse fréquence pour atteindre 80% à 30GHz.

Par contre, il faut noter la bonne prédiction de l'atténuation grâce à notre seconde formulation 'Zs cth' de l'impédance de surface. Ce point très important sera discuté à la fin de ce paragraphe.

III.1.3.2. Formulation avec maillage dans les métallisations : comparaison avec les relevés expérimentaux.

Outre la possibilité d'introduire plusieurs formulations pour l'impédance de surface, notre atout majeur réside dans l'établissement d'un maillage dans la totalité de la section droite, métallisation comprise. Cette opération est effectuée sur les lignes microruban et coplanaire étudiées auparavant. Par ailleurs, nous avons voulu étoffer notre validation en analysant le cas

Figure III-11.a : Evolution fréquentielle de la permittivité relative effective de la ligne microruban

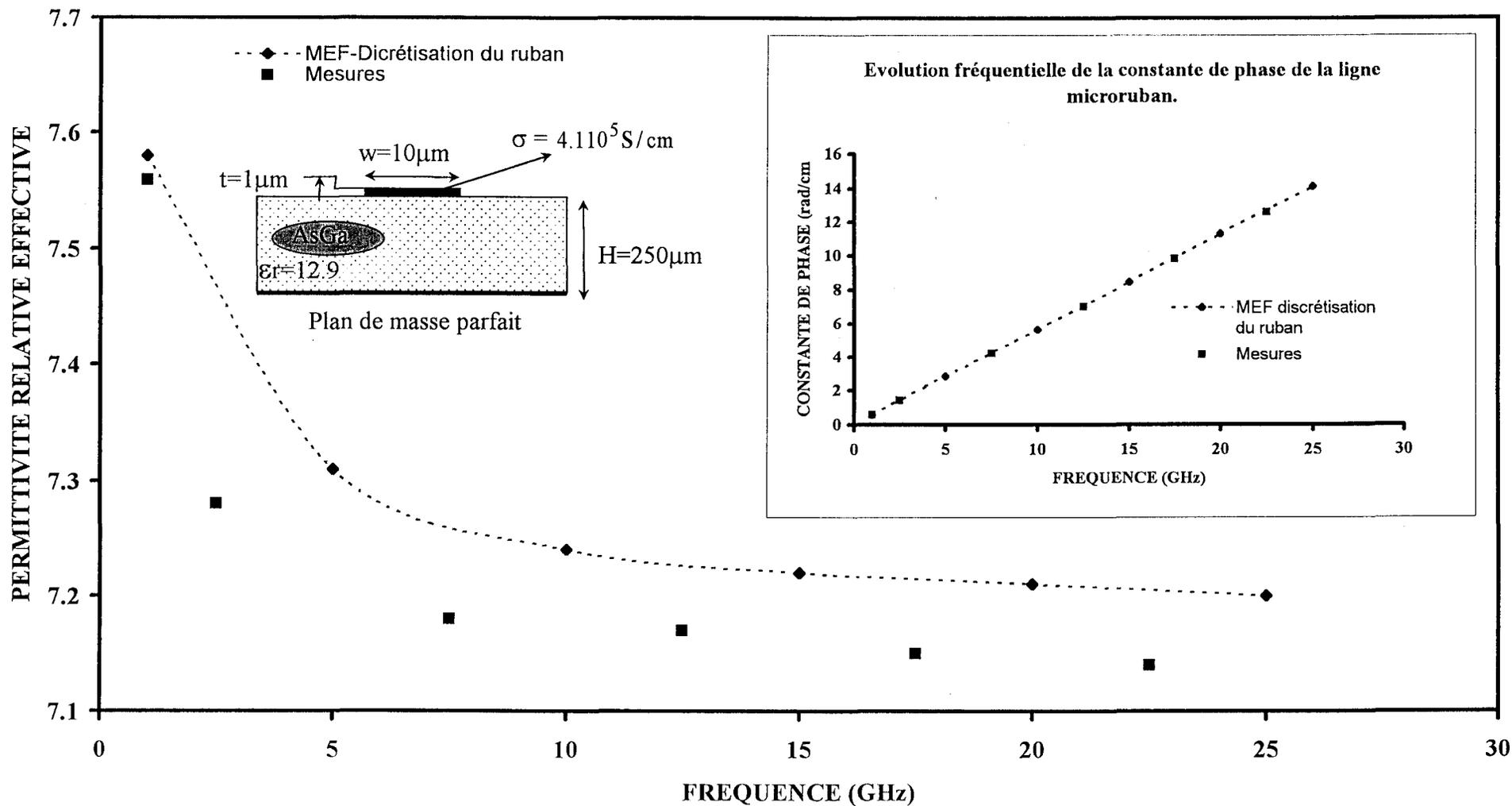


Figure III-11.b: Evolution fréquentielle de la permittivité relative effective de la ligne coplanaire.

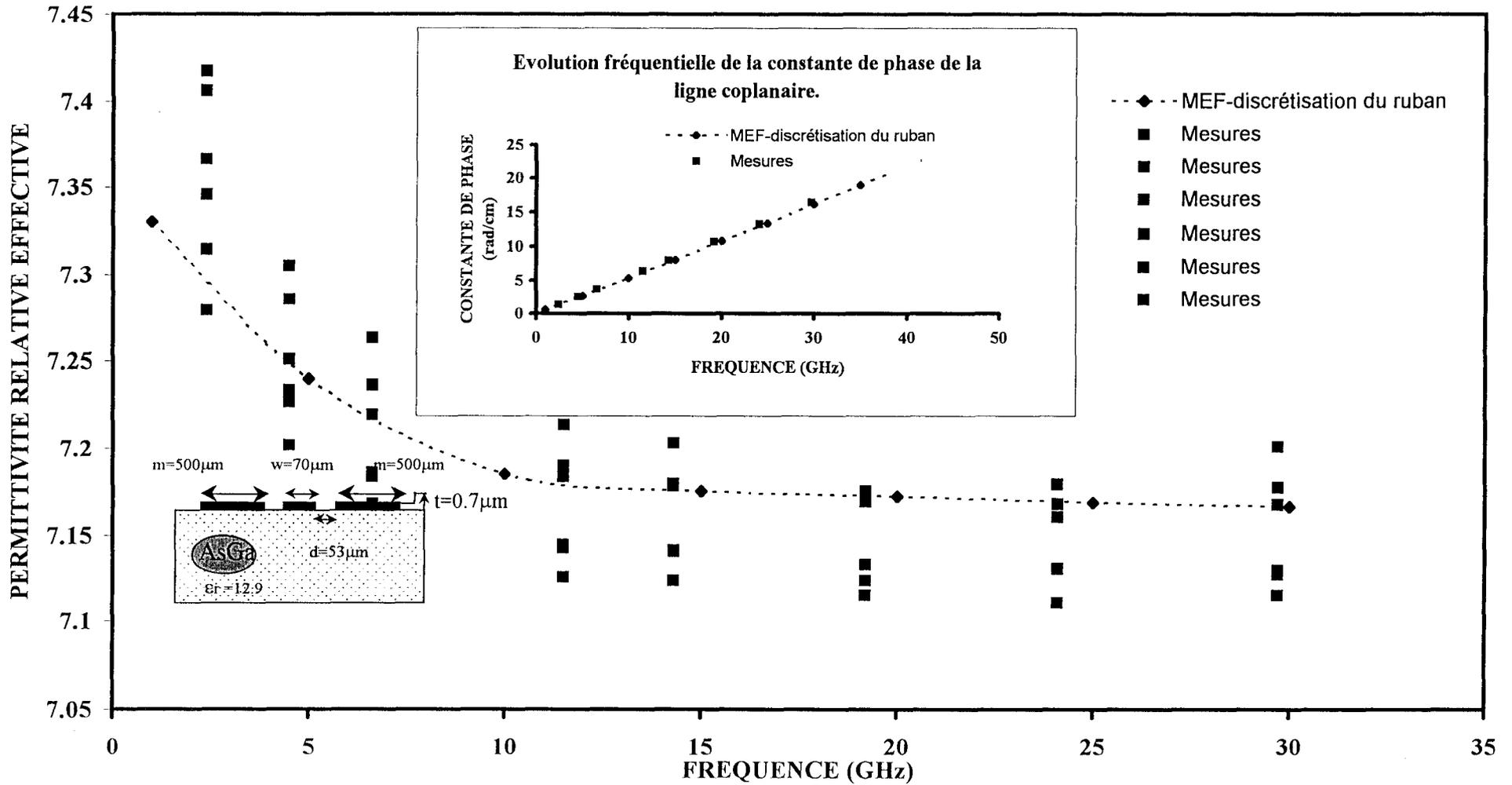


Figure III-12.a : Evolution fréquentielle de l'atténuation linéique de la ligne microruban.

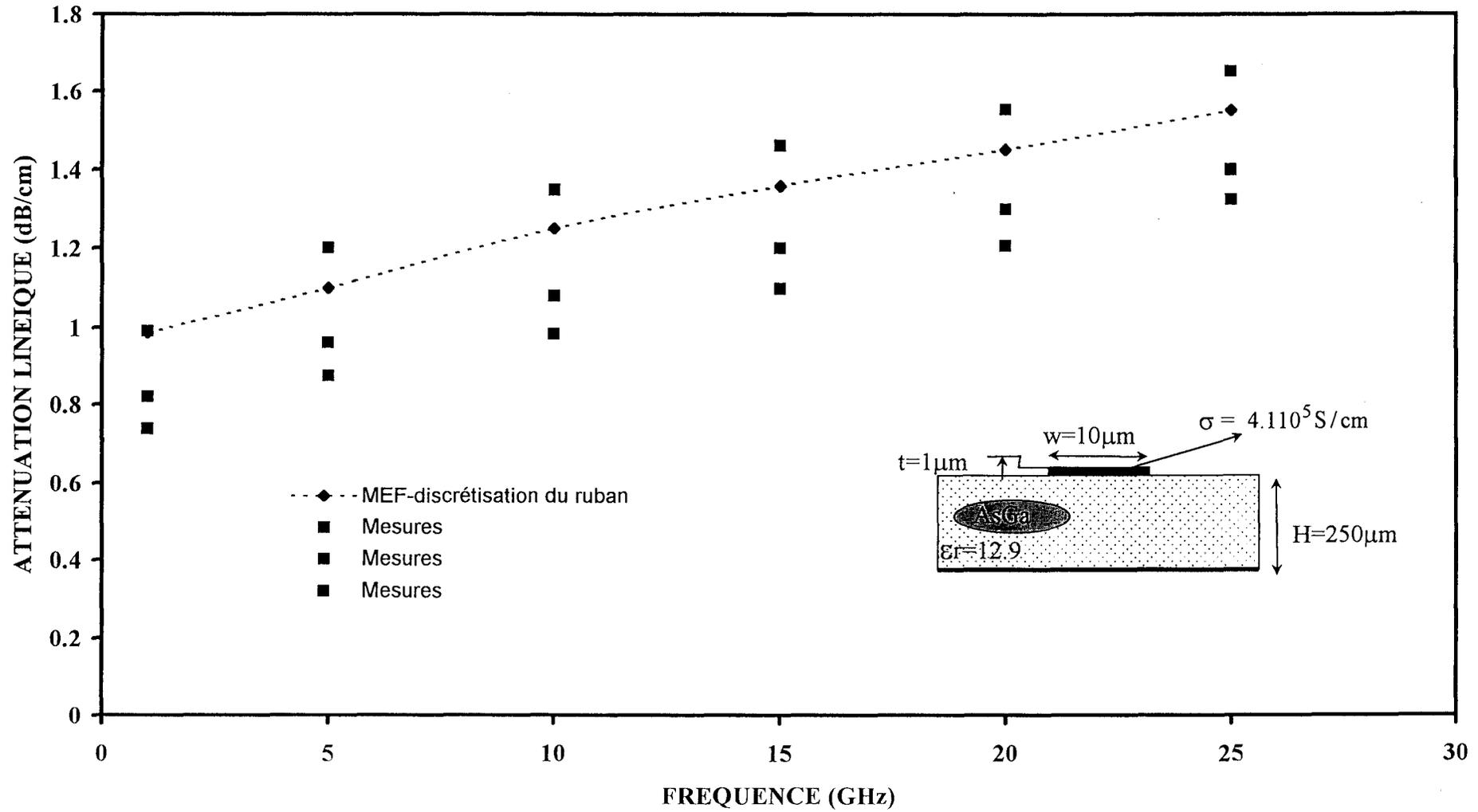
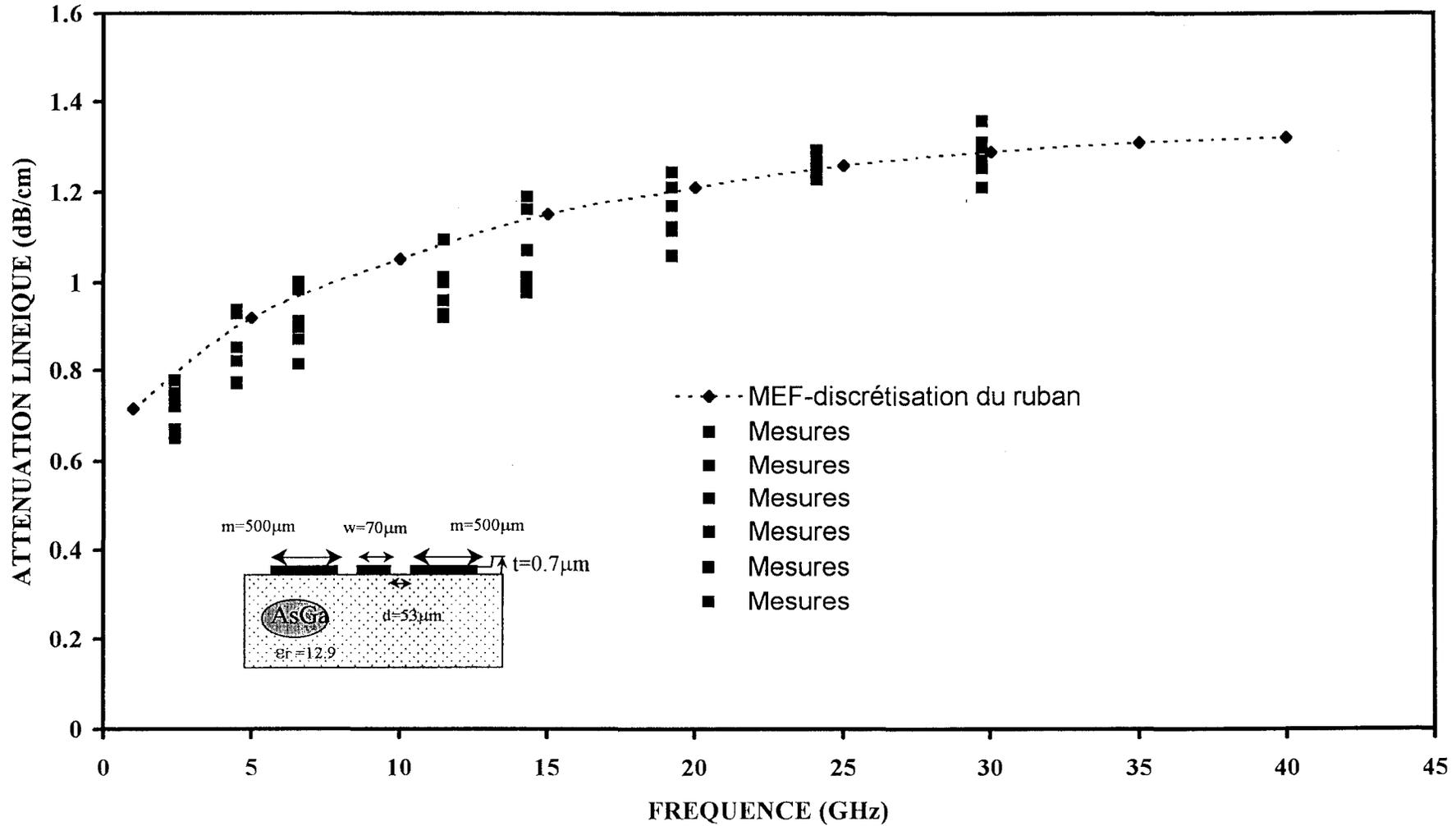


Figure III-12.b : Evolution fréquentielle de l'atténuation linéique de la ligne coplanaire



de la microligne dans sa version coplanaire déposée sur membrane diélectrique. Les constantes de propagation des deux premières structures sont présentées figure III-11.a, b, et figure II-12.a, b, par le biais respectivement de leur permittivité effective et constante d'atténuation. Le mode de représentation des évolutions de la constante de propagation est calqué sur les relevés précédents, notamment pour ce qui concerne la reproductibilité des mesures.

A ce niveau de notre étude, peu de commentaires s'imposent. Les comparaisons « théorie-expérience » figures III-11 et 12 traduisent, selon notre opinion, très bien la situation. Il est indéniable, mais était-il besoin de le souligner, que l'opération de maillage dans le ou les ruban(s) métallique(s) fournit une meilleure prédiction de la constante de propagation complexe, mais surtout de la partie réelle et donc de l'atténuation consécutive aux pertes métalliques. Ces propos se trouvent confortés par l'étude menée sur la microligne coplanaire déposée sur une membrane diélectrique. Nous avons choisi cette structure car elle regroupe, à elle seule, toutes les difficultés auxquelles est confronté le concepteur de système fonctionnant dans le domaine des ondes millimétriques et submillimétriques. En effet, ne serait-ce que pour dimensionner un quadripôle d'adaptation ou des résonateurs quart d'onde ou demi-onde dans le cas de structure de filtrage, il est nécessaire de connaître avec le maximum de précision l'évolution fréquentielle de la permittivité effective ainsi que l'impédance caractéristique de la ligne. A notre connaissance, il existe peu de moyens pour définir les caractéristiques citées précédemment, si ce n'est une discrétisation du plan de section droite, notamment par les éléments finis. En effet, ce plan de section droite est trapézoïdal, il ne s'intègre donc pas dans le système de coordonnées cartésiennes. Les solutions ne peuvent, de ce fait, plus être traduites simplement par les fonctions propres solutions de l'équation différentielle du 2nd ordre issues des équations de Maxwell.

Figure III-13.a : Evolution fréquentielle de la permittivité relative effective de la ligne coplanaire "microshield"

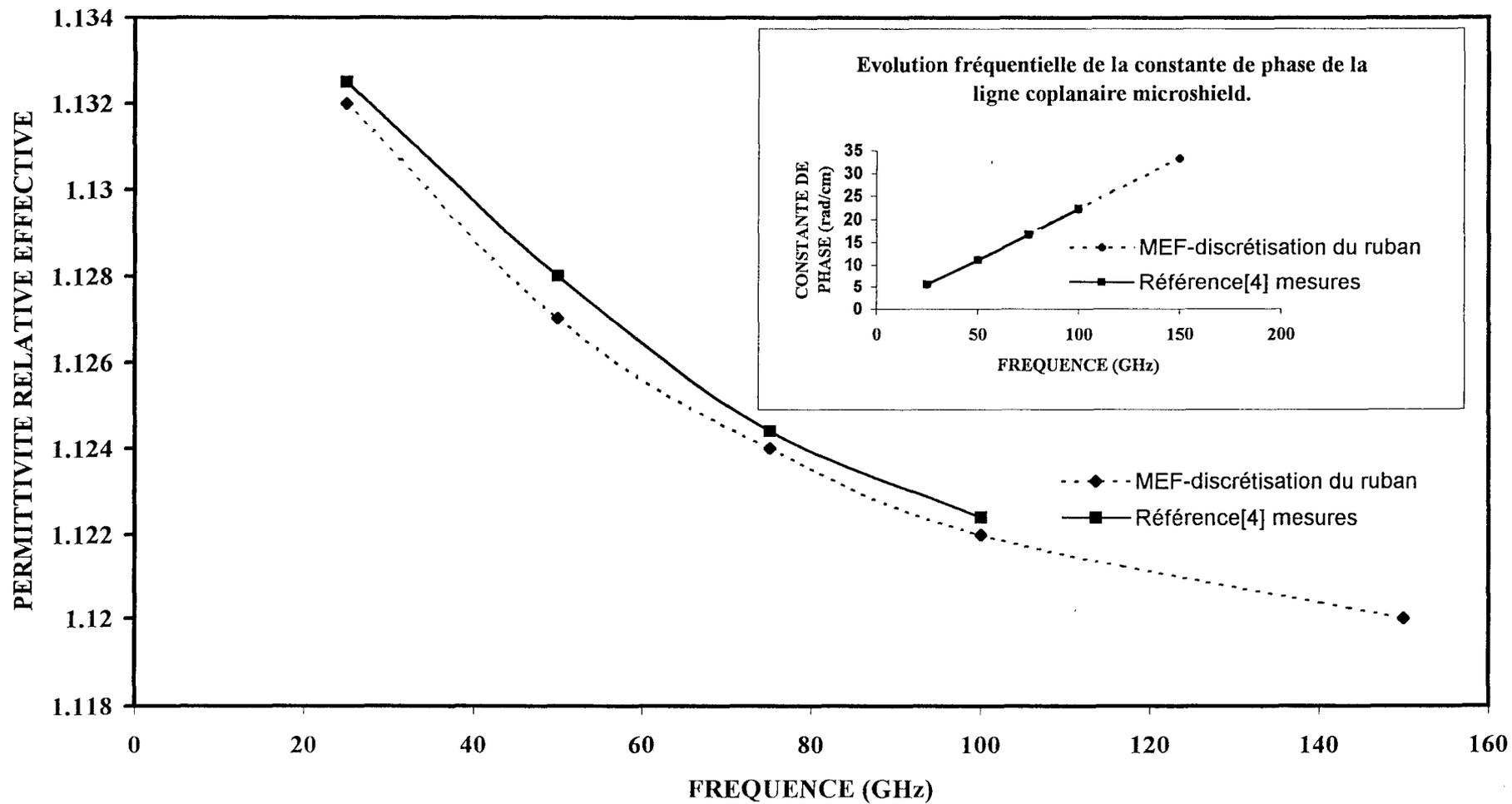


Figure III-13.b : Evolution fréquentielle de l'atténuation linéique de la ligne coplanaire "microshield"

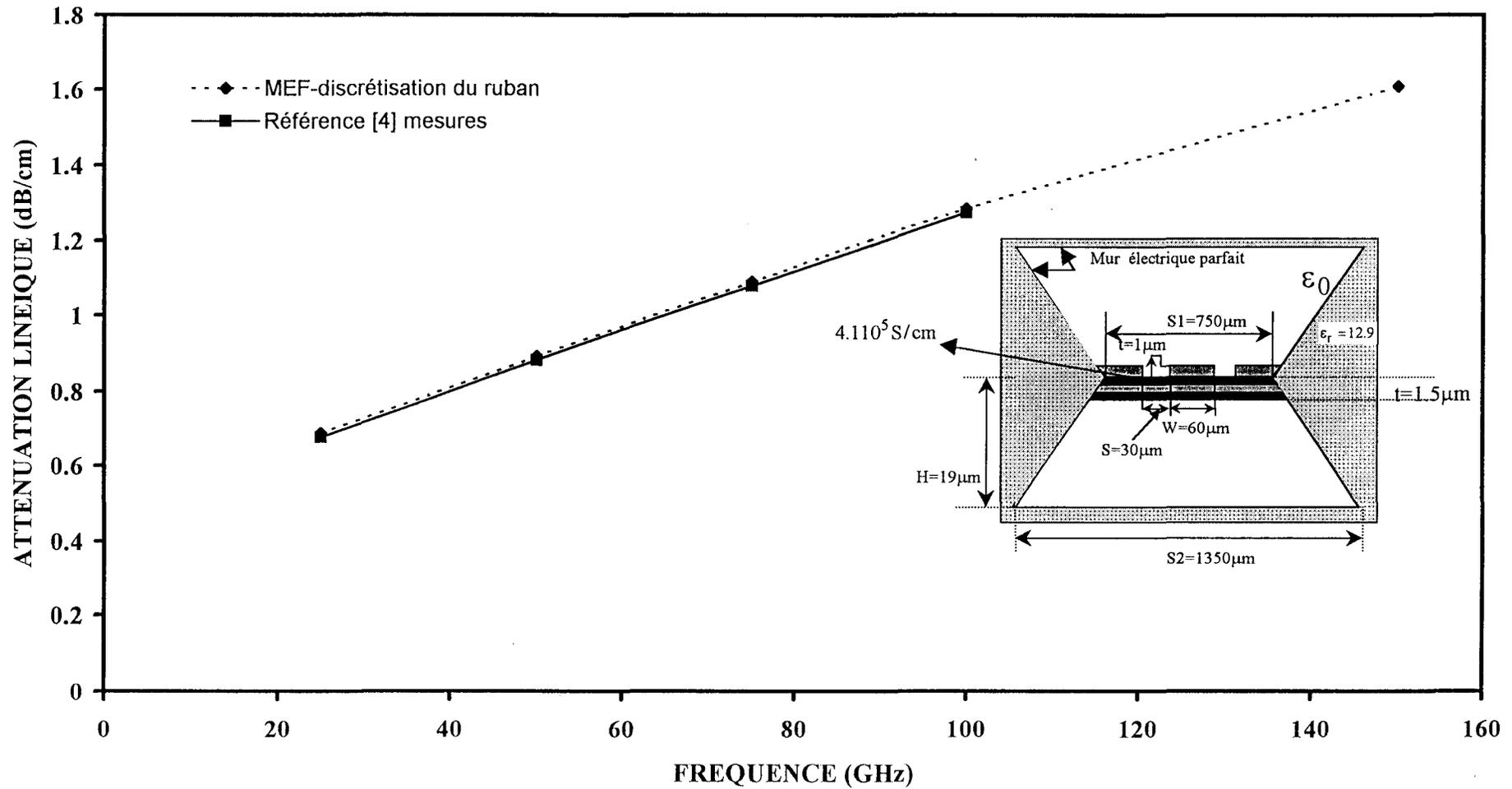
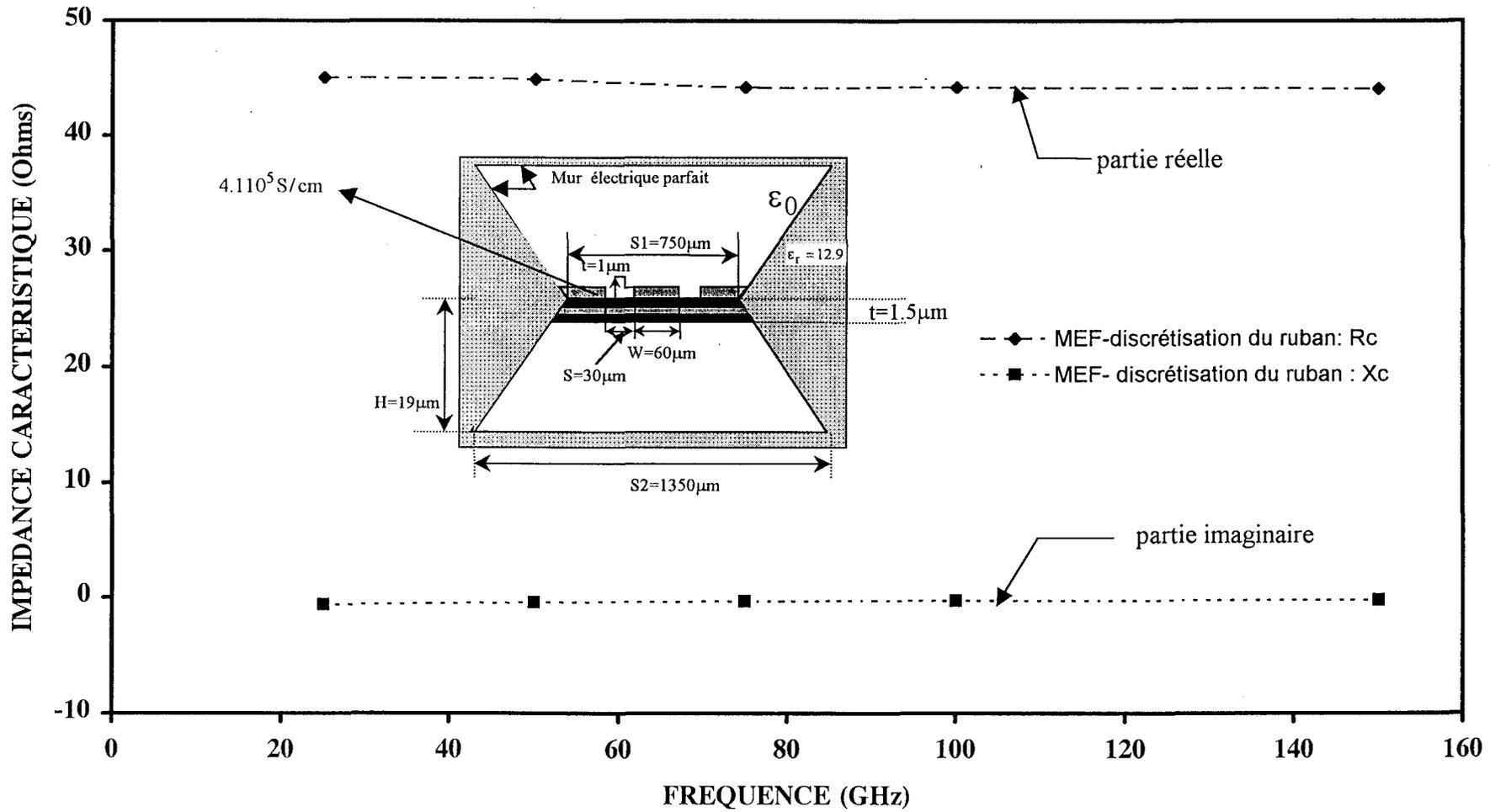


Figure III-13.c : Evolution fréquentielle de l'impédance caractéristique de la ligne coplanaire "microshield"



Il est clair qu'une étude rigoureuse comme l'est celle du guide rectangulaire métallique, par exemple, n'est pas envisageable. Pour cette raison, très peu de travaux théoriques ont porté, à ce jour, sur ce type de structures. Signalons enfin qu'elles ont été étudiées dès 1990 par l'équipe de L.P. B. Katehi et ce dans le cadre d'activités contractuelles liant entre eux des partenaires comme la NASA, et l'armée américaine. Ceci n'est pas surprenant puisque ces lignes représentent probablement l'avant-garde de ce que seront les guides d'ondes et les systèmes futurs. De part ses dimensions transverses, les lignes déposées sur membrane possèdent quelques atouts majeurs. Un exemple de résultats est présenté figure III-13.a, b, c, où, grâce à notre code de calcul nous avons pu mettre en évidence les points suivants :

- Une très bonne concordance avec les relevés expérimentaux[4]
- Une faible dispersion fréquentielle.
- Une permittivité relative effective proche de l'unité donc une vitesse de groupe proche de celle de la lumière.
- Une bande monomode supérieure à 120GHz puisque nous n'avons pas détecté de fréquence de coupure jusqu'à cette valeur.
- Et enfin, une impédance caractéristique quasiment constante et égale à 46Ω sur toute la bande monomode.

Signalons que notre code de calcul doit fonctionner dans un cadre très contraignant. En effet, la plus grande dimension vaut $1350\mu\text{m}$, alors que la plus faible consiste en une couche dont l'épaisseur vaut $0.5\mu\text{m}$ soit approximativement $1/3000$ de la plus grande dimension.

III-1.4 Remarques concernant la phase de validation

Nous allons conclure cette phase de validation en énumérant quelques points basés sur l'expérience acquise au cours de ce travail.

Pour ne pas nuire à la lisibilité de ce mémoire, nous n'avons sélectionné que les évolutions les plus représentatives. Un grand nombre de lignes coplanaires et microrubans ont été étudiées et réalisées sur substrat d'Arséniure de gallium. Tant que cela a été possible, nous avons utilisé le logiciel HFSS pour effectuer les comparaisons avec les résultats issus de notre code de calcul et les relevés expérimentaux. De tout ceci, il découle les remarques suivantes :

- Le logiciel HFSS ne nous a pas permis d'étudier toutes les structures. C'est notamment le cas pour la microligne coplanaire où nous n'avons pas décelé la raison pour laquelle un résultat fiable n'a pu être obtenu. Nous sommes encore aujourd'hui dans l'expectative.
- Les mesures que nous avons effectuées pour chaque couple de ligne, nous permettent d'obtenir un résultat très fiable sur la constante de propagation. La mesure de l'impédance caractéristique est quant à elle beaucoup plus délicate. Elle est basée sur le relevé d'un coefficient de réflexion et donc peu précise si la ligne d'étude comporte de multiples discontinuités, ce qui est notre cas. Nous n'avons donc, à ce niveau, pas de valeurs d'impédance fiables à proposer.
- Comme nous avons pu l'apprécier, notre code de calcul a toujours fourni des résultats conformes à la réalité, et ce, même dans les cas les plus extrêmes que sont les microlignes sur membrane diélectrique. Toutefois, l'obtention des résultats fiables requiert impérativement de mailler dans les rubans métalliques et par conséquent d'augmenter la taille mémoire. Par souci de clarté, nous avons volontairement occulté la procédure concernant le processus de maillage dans les métallisations.

Les critères qui nous ont guidés ont été énoncés au début de ce chapitre. Nous les rappelons brièvement. Dans le sens de l'épaisseur, la plus grande dimension pour un triangle ne doit pas excéder l'épaisseur de peau « δ » à la fréquence de travail.

Dans le sens de la largeur du ruban, il faut veiller à concentrer un grand nombre de triangles au voisinage du coin pour prendre en compte l'effet Meixner qui n'est autre que l'effet de pointes[10]. Ainsi, au niveau des arêtes vives qui délimitent le coin du ruban, le premier triangle possédera des dimensions $\delta \times \delta$ voire même inférieures. A ce stade, nous avons encore deux possibilités qui dépendent du mailleur. En effet, on peut opter pour un maillage régulier ou, ce qui est notre cas, à pas variable. Le maillage à pas variable intervient essentiellement dans le sens de la largeur, et ce, de manière progressive pour éviter que les triangles aient des angles trop obtus ou aigus. Il y a donc, à ce stade, des règles à respecter, le cas idéal étant le triangle équilatéral. Cette opération n'est réussie que si le découpage de la section droite du ruban métallique est effectué correctement. L'emploi du pas variable dans la procédure de maillage nous a permis de trouver un compromis raisonnable entre fiabilité du résultat obtenu et une taille mémoire acceptable. Ainsi, les quelques observations suivantes résument parfaitement la situation :

- Mailler dans le ruban implique que la taille mémoire a , en général, doublé par rapport au cas où seul l'impédance de surface est prise en compte.
- Le temps de calcul moyen dédié à chaque point de fréquence est de l'ordre d'une heure. Il concerne la résolution et le stockage des termes non nuls d'un système matriciel comportant en moyenne 2000 à 2500 inconnues. Rappelons que ces inconnues affectées à chaque triangle de discrétisation, pris séparément, sont au nombre de 14.
- Il est possible de supprimer le maillage dans les plans de masse de la ligne coplanaire. Dans ce cas, leur nature dissipative est introduite au moyen de l'impédance de surface Z_s cth. Bien entendu, nous avons mailler dans le ruban central.

- Même si elle est approchée, la formulation d'impédance de surface notée Z_s est plus appropriée, car fonction de l'épaisseur du dépôt métallique. Signalons en outre que son efficacité a été démontrée lors des travaux antérieurs. Cette notion essentiellement couplée avec l'approche dans le domaine spectral fut appliquée dans l'équipe Electromagnétisme pour les lignes métalliques et supraconductrices par D. Kinowski [15] et C. Delabie [18]. Il faut rappeler que plus la métallisation est fine et le ruban large, meilleure est la prédiction des pertes. Notons que ceci cadre parfaitement avec les dimensions des plans de masse coplanaire puisque la section de cette métallisation est de $500\mu\text{m} \times 0.7\mu\text{m}$. la notion de guide plan métallique infini dans une direction peut être considérée sans peine puisque la largeur du ruban vaut 700 fois son épaisseur. A notre connaissance, cette expression d'impédance n'a jamais été utilisée dans une formulation par éléments finis. Elle est fiable et permet en outre de réduire conjointement taille mémoire et temps de calcul.

III.2 Etude de lignes de topologies particulières

Même si notre code calcul fournit des prédictions fiables des paramètres électromagnétiques, il nous reste toutefois à tester les potentialités et les capacités de notre logiciel à prédire les caractéristiques de structures de propagation de forme plus complexes. Comme nous l'avons déjà signalé, compacité, miniaturisation, faible dispersion et pertes minimales, impédance constante sont les critères sur lesquels repose la conception des circuits nouveaux. Ce cahier des charges très ambitieux ne peut être atteint en partie que si l'on fait appel au caractère innovant d'une structure de propagation. Ceci est en général toujours lié au progrès réalisé dans la maîtrise soit d'une technique nouvelle de transformation des signaux soit d'un nouveau processus technologique.

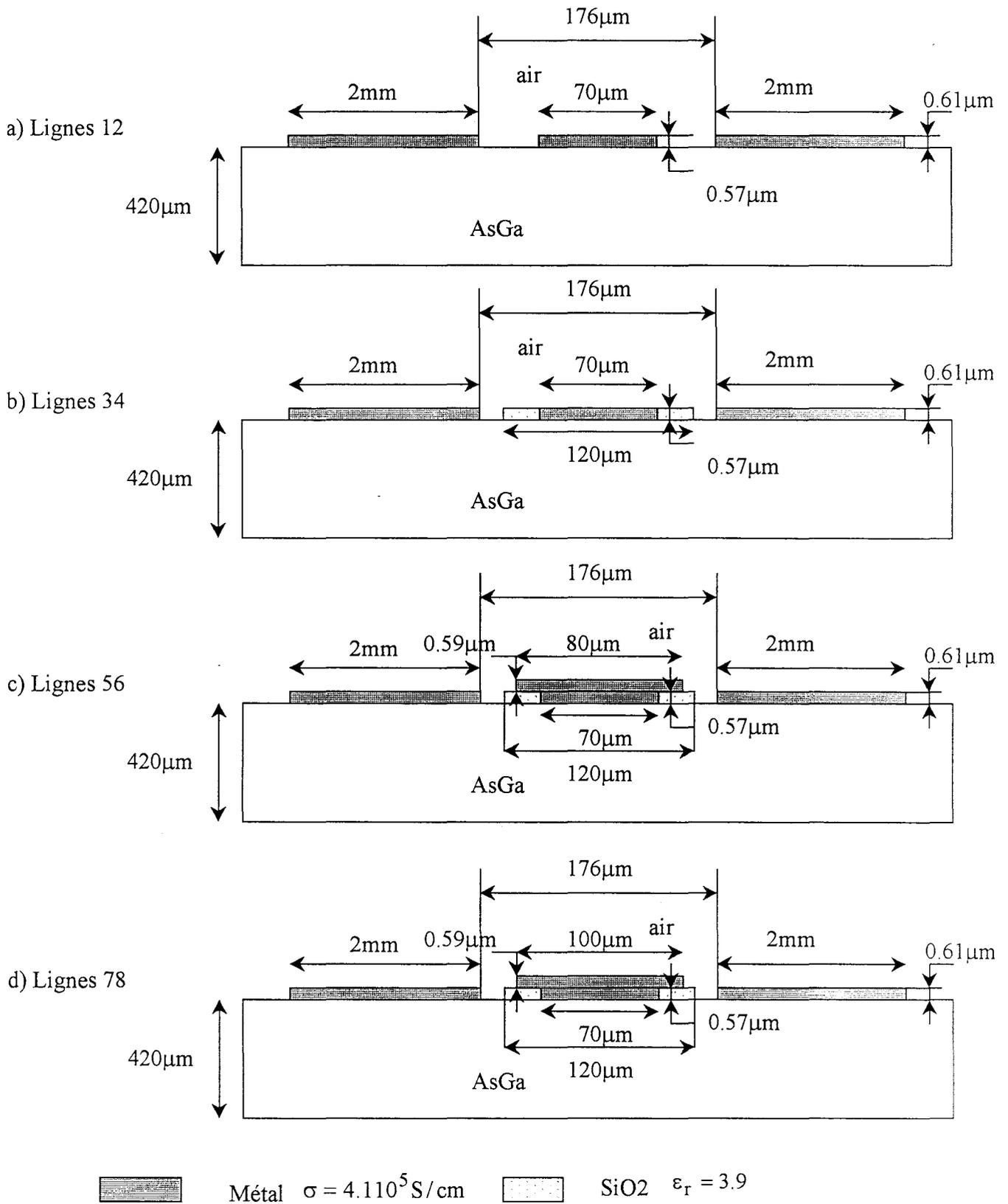


Figure III-14: Les versions coplanaires classiques a, b et avec conducteur central en « Te » c, d

Avant d'aborder l'étude de la ligne coplanaire à ruban central suspendu que l'on peut assimiler à un pont à air et des lignes dites ultra compactes, nous désirons effectuer un dernier test. Une étude de sensibilité est entreprise pour juger de l'efficacité du code de calcul mis au point, et de ses capacités à traduire l'effet lié à des faibles variations des paramètres qu'il s'agisse des dimensions géométriques ou des paramètres physiques.

III.2.1 La ligne coplanaire avec conducteur central en forme de « Te »

Nous pourrions, pour répondre à cette étude de sensibilité, nous contenter de faire simplement évoluer quelques paramètres des lignes classiques étudiées auparavant, telles les dimensions des lignes, les épaisseurs des couches, la permittivité des matériaux. Nous avons préféré intégrer ces variations au travers de l'étude de la ligne coplanaire dont le conducteur central possède une métallisation en forme de champignon comme l'est celle du transistor à effet de champ. Nous présentons figure III-14 les différentes structures qui ont été réalisées avec nos collègues de l'équipe dirigée par D. Decoster, et ce, par couple de longueurs différentes pour permettre d'effectuer les mesures des paramètres électromagnétiques. Trois étapes interviennent dans la mise en œuvre d'une telle ligne. Elles sont répertoriées dans l'ordre chronologique a, b, c. Ainsi, dans un premier temps nous réalisons une ligne coplanaire classique figure III-14.a. Dans une seconde phase, nous effectuons un dépôt de silice(SiO_2) figure III-14.b pour éviter l'affaissement, dans une troisième étape, de la couche supplémentaire déposée pour la confection de la métallisation en « Te » figure III-14.c ou d. Rappelons, au préalable, que les dimensions transverses de la ligne figure III-14.a ont été calculées pour qu'elle possède une impédance caractéristique de 50Ω . L'épaisseur des couches tant métalliques que de silice est d'environ $0.6\mu\text{m}$. L'ensemble des dimensions a été contrôlé ainsi que les diverses épaisseurs des matériaux mis en jeu.

Figure III-15: Evolution fréquentielle de la permittivité relative effective mesurée pour différentes topologies de la ligne coplanaire

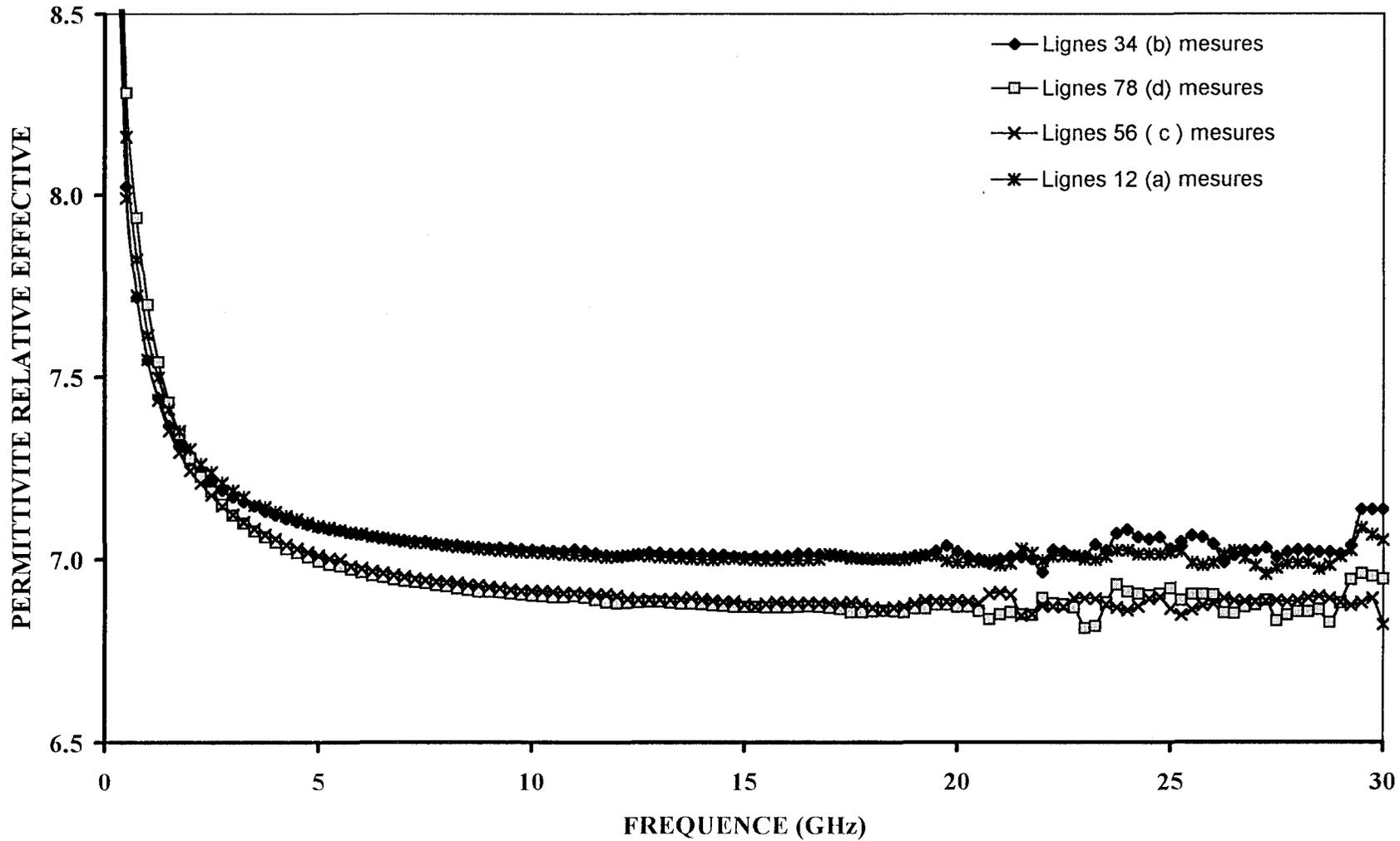


Figure III-16: Evolution fréquentielle de l'atténuation linéique mesurée pour différentes topologies de la ligne coplanaire

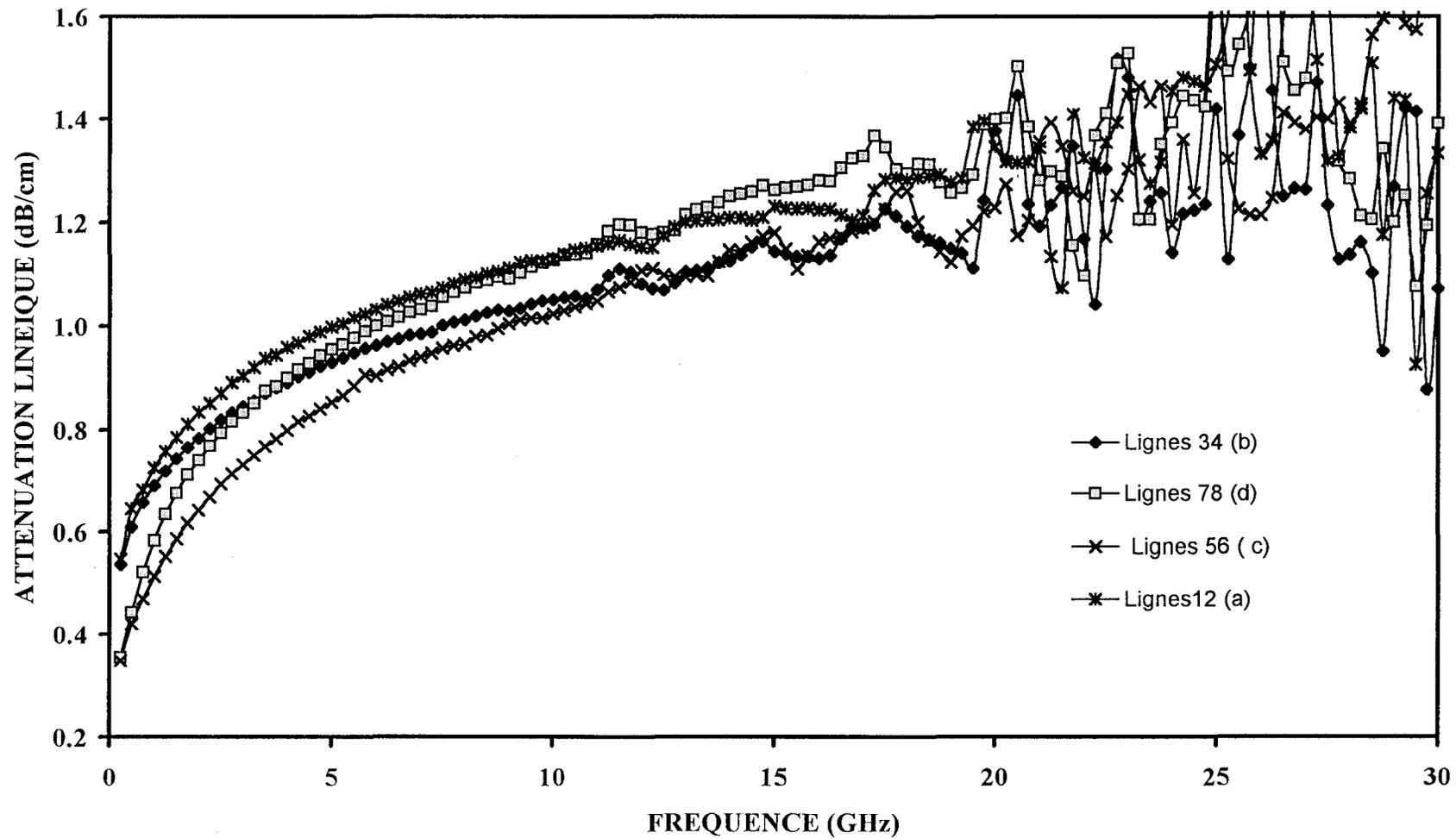
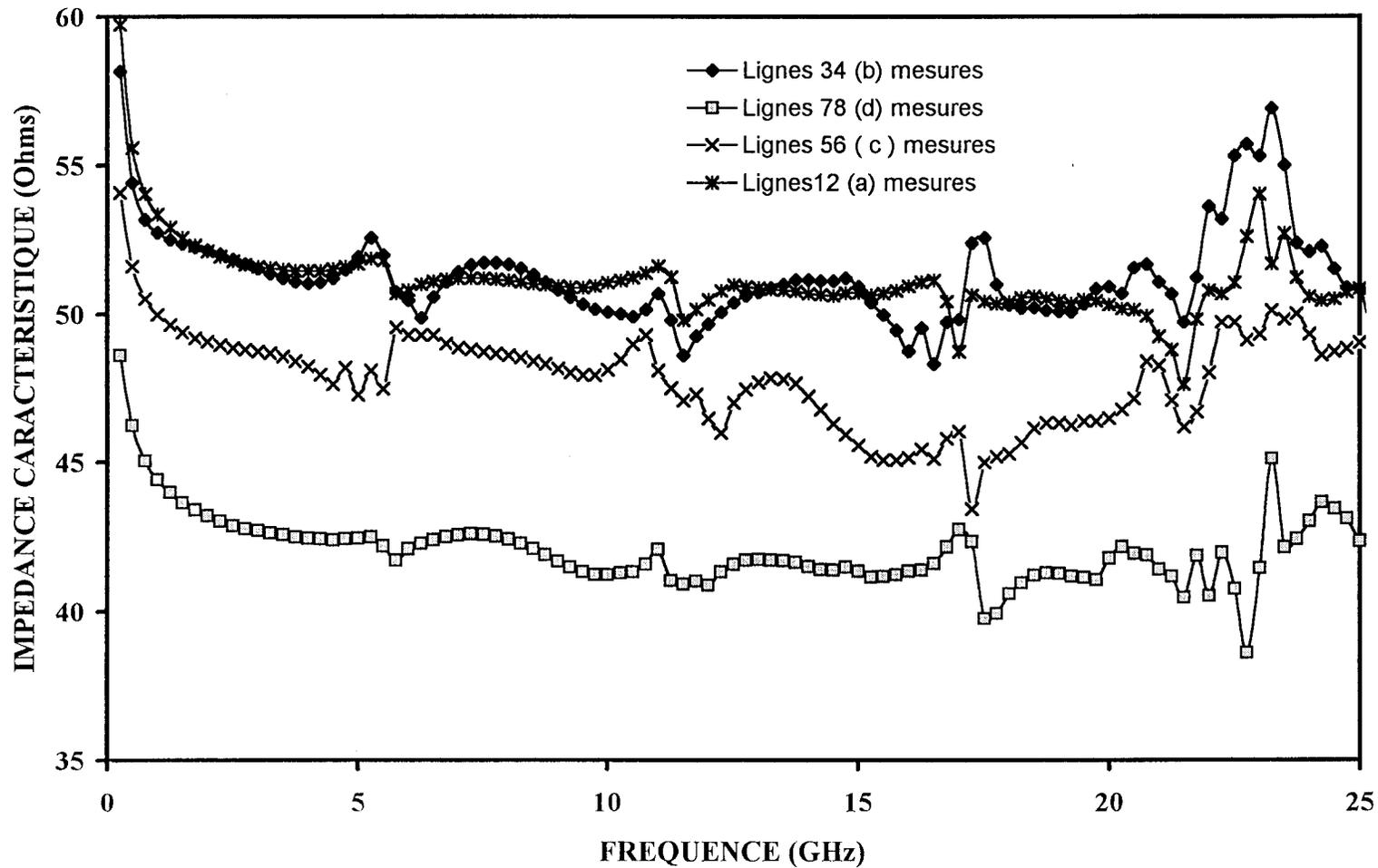


Figure III-17: Evolution fréquentielle de l'impédance caractéristique de différentes topologies de la ligne coplanaire



Comme nous l'avons précisé, un jeu de deux lignes a été réalisé pour chaque version a, b, c. Nous disposons ainsi d'une ligne coplanaire classique, d'une ligne coplanaire dont la fente est partiellement remplie de silice, et enfin d'une structure avec ruban central en forme de «Te». A ce titre, deux versions de métallisation en « Te » possédant à la base une largeur de $70\mu\text{m}$, ont été conçues où seule la largeur du chapeau évolue de $80\mu\text{m}$ à $100\mu\text{m}$.

Afin d'avoir un point de vue global, nous présentons dès à présent figure III-15,16 la permittivité relative effective et l'atténuation mesurées pour les lignes réalisées dans leur version a, b, c, d. Il s'agit des couples de lignes notées 12(a), 34(b), 56(c) et 78(d) dans notre nomenclature. Il est clair que la permittivité relative effective n'évolue que lorsqu'il y a une modification de la section droite du ruban métallique. On notera, compte tenu de l'échelle choisie que l'ajout de silice pour la version simple ne produit qu'une très faible variation de permittivité relative effective. Dans le même esprit, l'augmentation de la largeur du chapeau de la métallisation ($80\mu\text{m}$ à $100\mu\text{m}$) pour les versions c et d de la ligne coplanaire en « Te » provoque une très faible évolution de la constante de phase et donc de la permittivité relative associée.

L'atténuation semble, quant à elle, plus sensible à l'ajout tant de la couche de silice dans la version coplanaire classique que de la métallisation supplémentaire pour la structure en « Te ». Il faut noter que les variations sont faibles sauf pour l'impédance caractéristique des lignes figure III-17.

Comme nous l'avons signalé, dans leurs versions de base, les lignes notées 12 et 34 possèdent une impédance voisine de 50Ω , pour passer de 48 à 42Ω pour les versions en coplanaire en « Te »(Lignes 56 et 78) figure III-17.

Figure III-18: Evolution fréquentielle de la permittivité relative effective de la ligne coplanaire classique avec couche de silice et sans couche de silice: Comparaison simulation-mesures

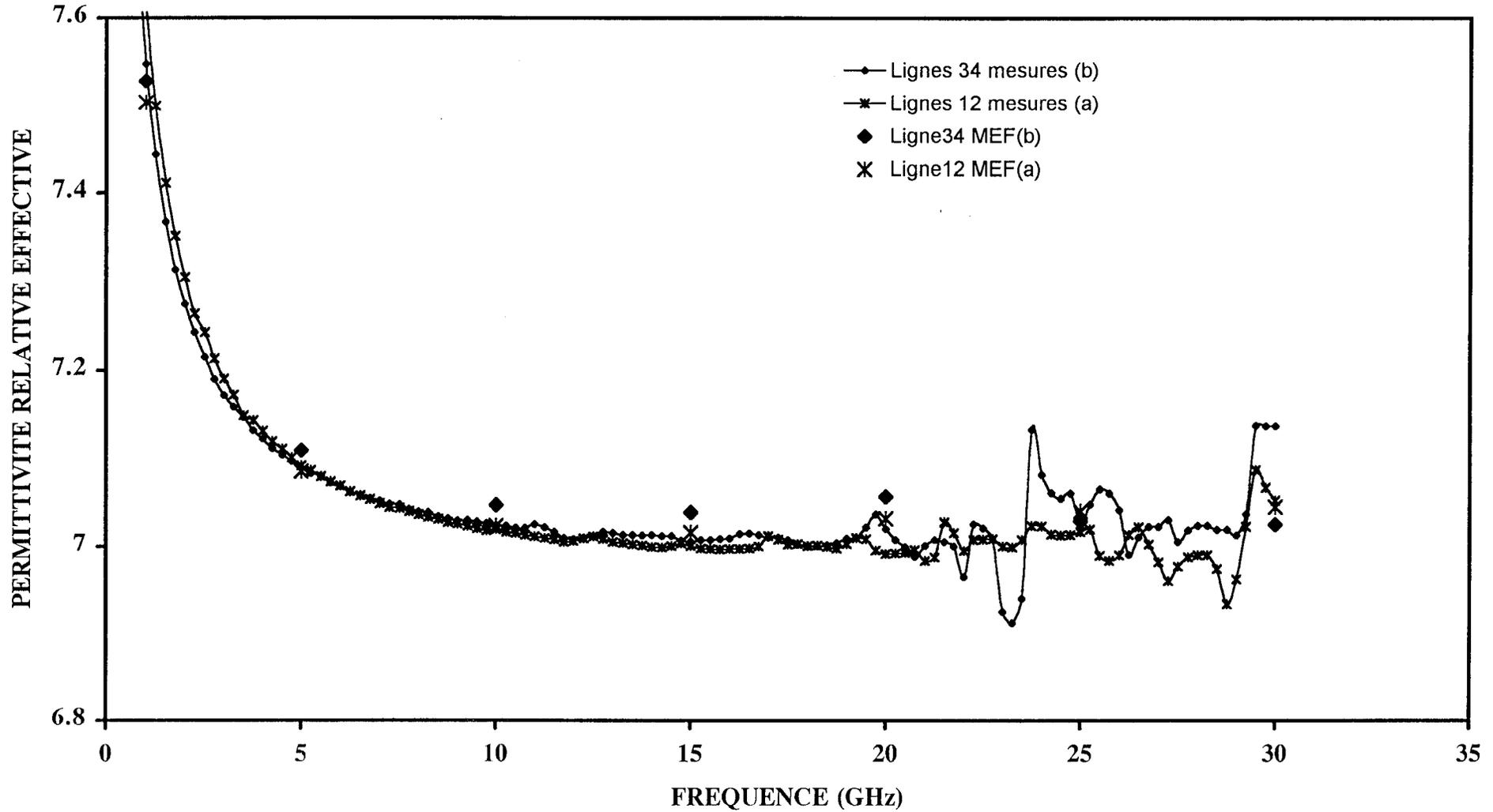


Figure III-19: Evolution fréquentielle de la permittivité relative effective de la ligne coplanaire avec le ruban central en "Te": Comparaison simulation-mesures

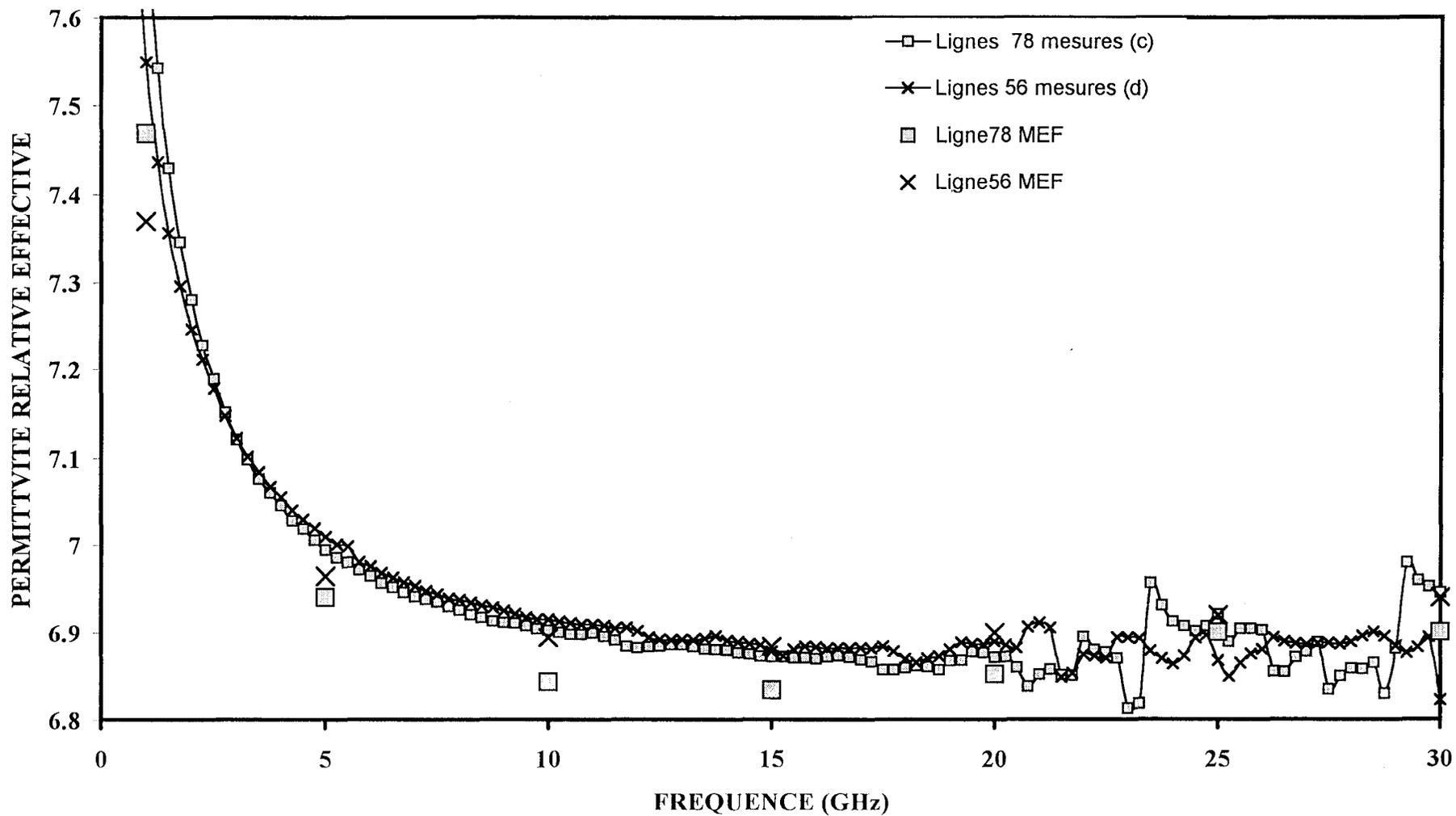


Figure III-20: Evolution fréquentielle de l'atténuation linéique de la ligne coplanaire classique avec couche de silice et sans couche de silice: Comparaison simulation-mesures

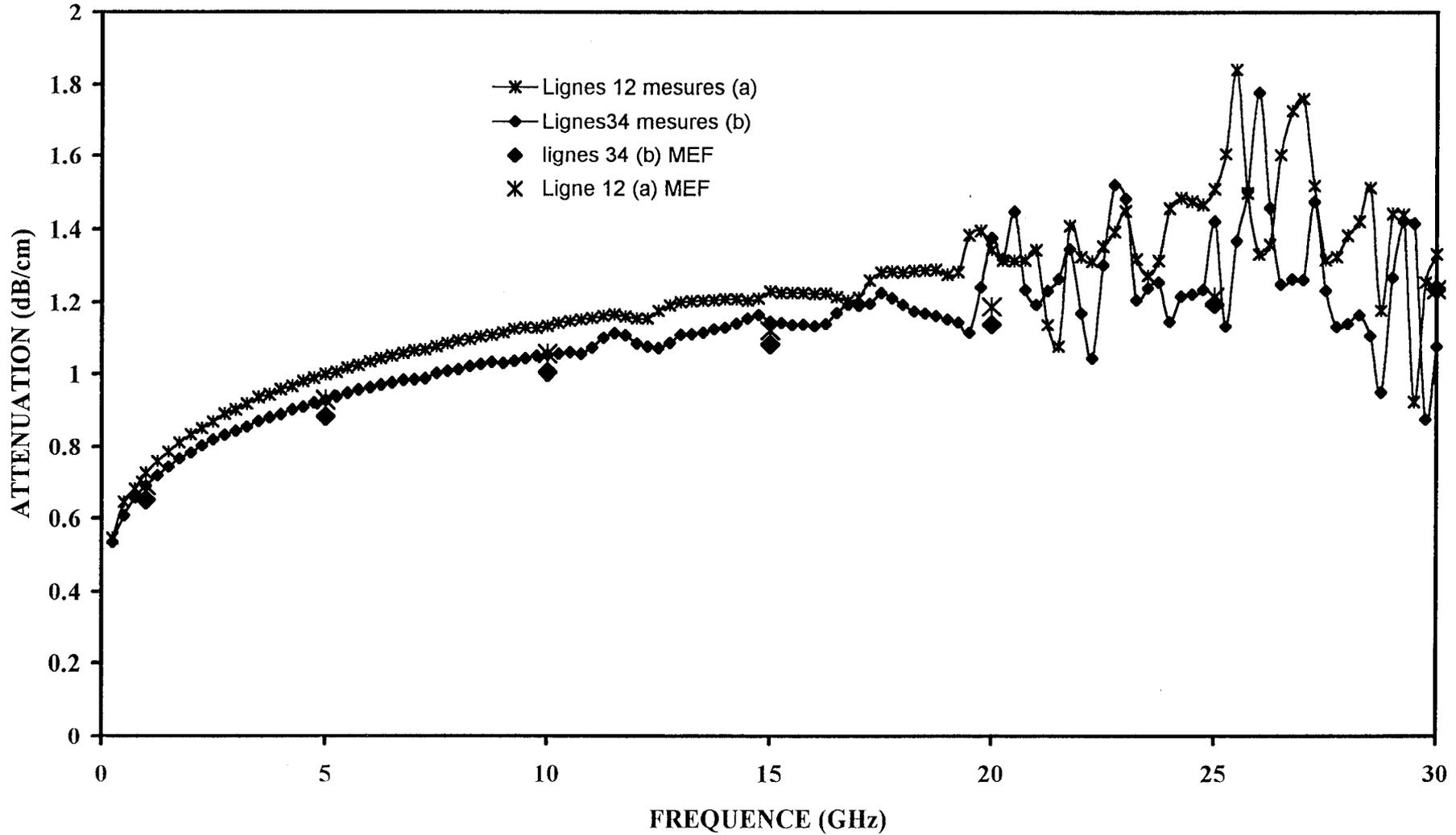
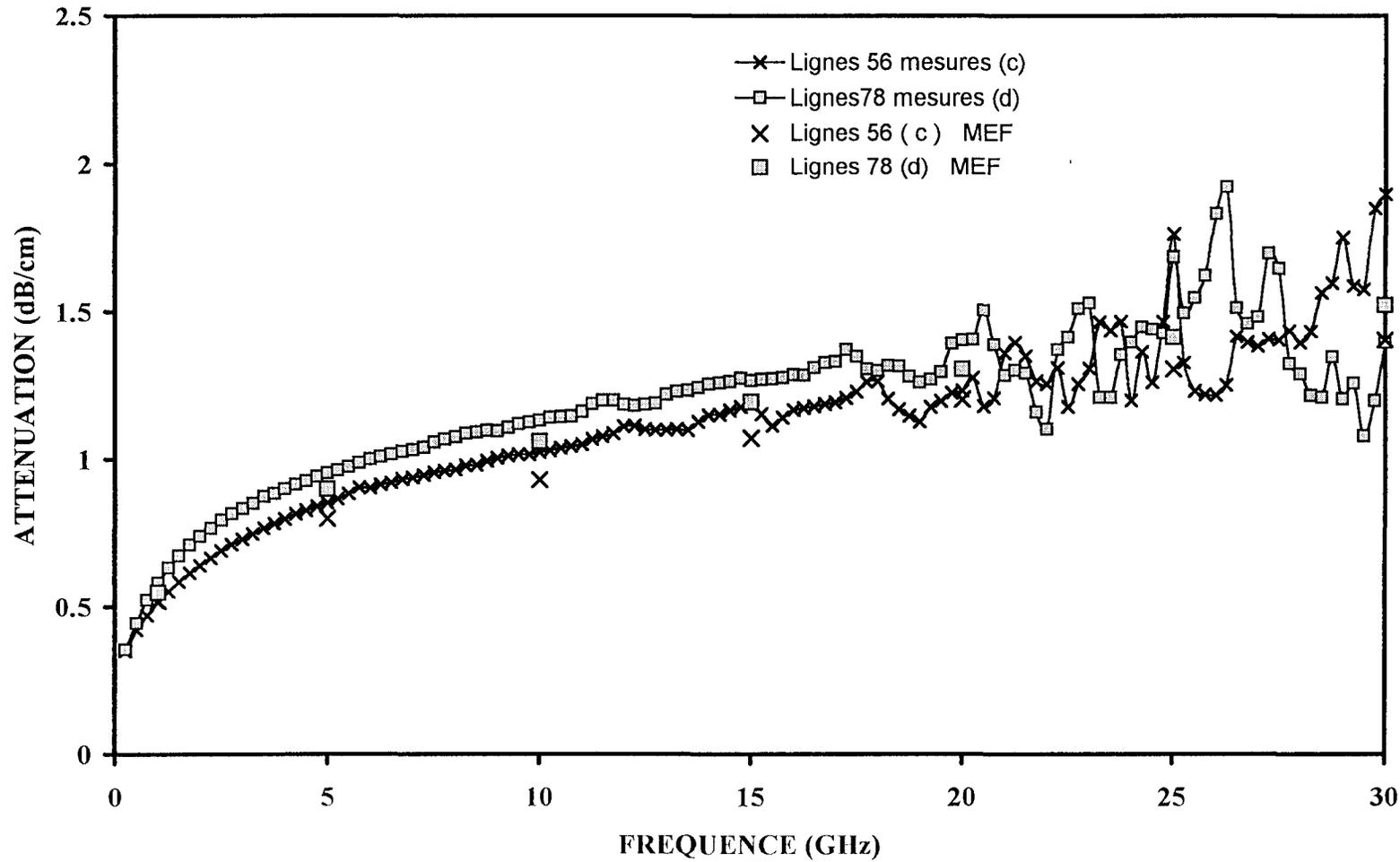


Figure III-21: Evolution fréquentielle de l'atténuation linéique de la ligne coplanaire avec le ruban central en "Te" : Comparaison simulation-mesures



Cet ensemble d'évolutions met parfaitement en évidence le bien fondé de nos interrogations quant aux aptitudes de notre code de calcul pour traduire d'aussi faibles variations de permittivité relative effective et d'atténuation. Le cas de l'impédance nous amène à poser d'autres questions.

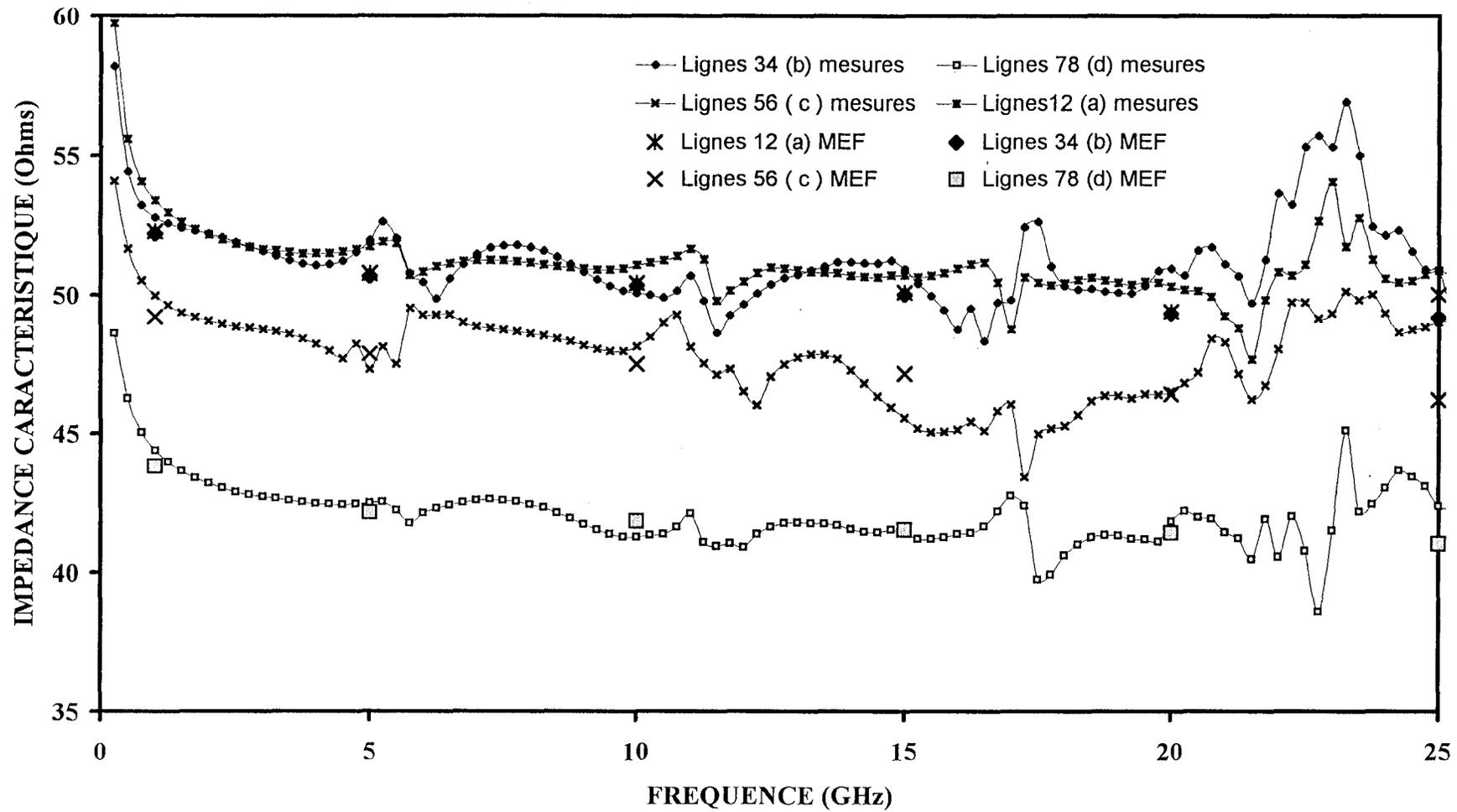
Par souci de clarté et donc de présentation des résultats, nous décomposons nos commentaires suivant deux volets.

- Le premier concerne les relevés « théorie – expérience » pour la constante de propagation complexe des lignes de test réalisées dans leur version coplanaire classique avec les fentes remplies d'air (lignes 12 (a)) ou partiellement de silice (lignes 34 (b))
- Le second volet porte sur les structures conçues dans leur version conducteur central en « Te ». Ce sont les couples de lignes notées 56 (c) et 78 (d) dans notre nomenclature.

Au vu des évolutions reportées figures III-18, 19, 20, 21, les valeurs de permittivité relative effective et d'atténuation tant théoriques que pratiques ne diffèrent que de quelques pourcents. Mais, il faut noter que le sens des variations lié à l'étude des lignes coplanaires avec fentes remplies d'air (lignes 12 (a)) puis de silice (lignes 34 (b)) et métallisation en « Te » avec chapeau de largeur $80\mu\text{m}$ puis $100\mu\text{m}$, est le même tant pour les évolutions théoriques de permittivité effective et de l'atténuation que pour ces mêmes évolutions, mais mesurées. Cela signifie que notre code de calcul est capable de réagir à une très faible modification de la nature d'un sous-domaine qu'il soit diélectrique ou métallique. Notons que les sous-domaines, dont il est question ici, ont une superficie de $25\mu\text{m} \times 0.6\mu\text{m}$ pour celui rempli de silice et $10\mu\text{m} \times 0.6\mu\text{m}$ pour le domaine métallique. Cela correspond respectivement à environ $1/200000$ et $1/500000$ de la surface totale de la section droite.

Nous n'avons pas, jusqu'à présent, eu la possibilité d'effectuer la détermination de l'impédance caractéristique par le biais de la mesure des paramètres [S]. Des travaux récents

Figure III-22: Evolution fréquentielle de l'impédance caractéristique de la ligne coplanaire pour différentes topologies retenues: Comparaison simulation-mesures



effectués dans l'équipe électromagnétisme et publiés par C. Séguinot [19][20] nous permettent de présenter les tous premiers résultats sur les lignes coplanaires dans les versions a, b, c, d figure III-22. Malgré quelques fluctuations liées aux imprécisions de mesures en fin de bande de fréquences, notre code de calcul, en comparaison avec les relevés expérimentaux, fournit toujours une bonne prédiction de l'impédance caractéristique, l'écart moyen « théorie-expérience » n'excédant pas 2%. Cette dernière remarque est importante dans la mesure où nous n'avions pas, à ce stade de notre manuscrit, des repères précis pour ce qui concerne les valeurs d'impédance calculées(MEF) et mesurées.

Ces résultats relatifs à la ligne coplanaire classique et à celle avec métallisation centrale en forme de « Te » nous autorisent à conclure définitivement quant au bon comportement de notre code de calcul.

La détermination théorique de l'impédance correspond au stade ultime de notre problème. En effet, l'obtention de cette valeur repose sur le calcul de la puissance dans le plan de section droite, de la différence de potentiel entre conducteurs, voire du courant dans le(s) ruban(s). Ce calcul ne peut être effectué de façon fiable que si valeurs propres, vecteurs propres et champs associés sont définis avec précision. Les très bons résultats obtenus lors des comparaisons entre relevés théoriques et expérimentaux montrent que nous maîtrisons au mieux, de façon numérique, les différents calculs de flux et de circulations des champs électromagnétiques.

Estimant que notre code de calcul est suffisamment fiable, nous proposons d'étudier deux versions particulières de support de propagation. Il s'agit :

- De la ligne coplanaire à ruban central suspendu
- De la ligne dite ultra compacte

III.2.2 La ligne coplanaire à ruban suspendu

Nous présentons la section droite de cette structure figure III-23.a. Cette version est

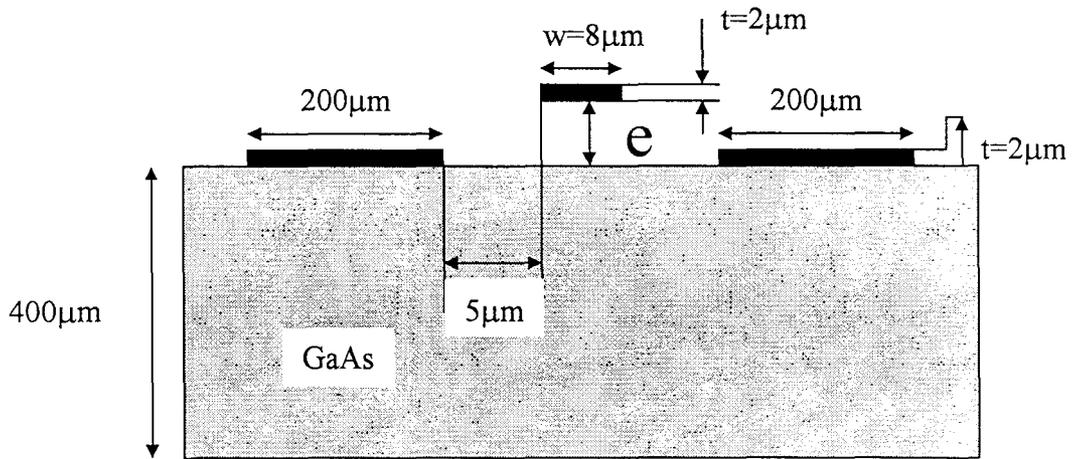


Figure III-23.a : Ligne coplanaire avec élévation du ruban central

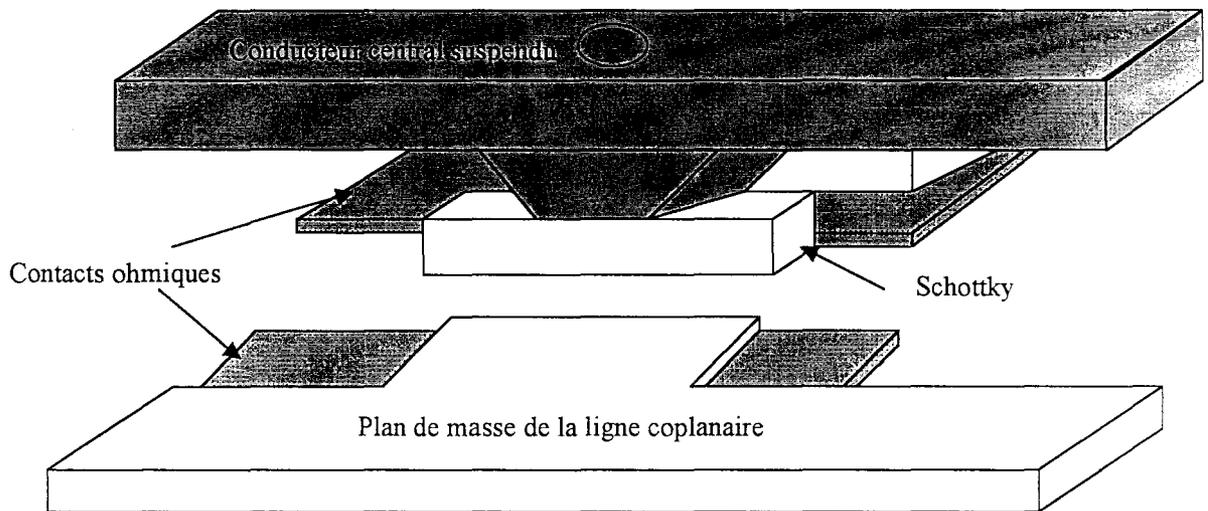


Figure III-23.b : Vue en perspective du ruban central, suspendu, en contact avec la diode.

proposée sous sa forme académique puisqu'en toute rigueur le ruban central repose sur une couche de polyimide ou de silice ou encore se sustente par l'intermédiaire de piliers diélectriques. Dans ce dernier cas, la technique mise en œuvre s'apparente à celle des ponts à air, les piliers étant espacés, a priori, de façon régulière dans la direction de propagation.

Ce type de structure fut utilisée pour la première fois en 1994 dans la conception d'une ligne de propagation non linéaire en vue de produire des impulsions brèves figure III-23.b. Aux piliers diélectriques sont alors substituées des diodes varactors ou Schottky, le système complet possédant une fréquence de coupure supérieure à 700GHz [6]. Aucun argument ne fut avancé sur les causes du mauvais fonctionnement d'un dispositif analogue mais réalisé en structure coplanaire classique, donc à ruban non suspendu, ni sur les moyens de calcul mis en œuvre pour déterminer les caractéristiques électromagnétiques des lignes qu'elles soient suspendues ou non. Toutefois, il fut rappelé que, de façon globale, la fréquence de coupure était d'autant plus importante que les capacités conjointes de la diode et de la ligne étaient faibles, ce qui se comprend aisément. Cela signifie, entre autre, que la ligne non chargée par les diodes possède une impédance élevée.

Partant de ce constat, il nous a paru intéressant de clarifier les points que nous venons d'évoquer brièvement. Ainsi nous avons entrepris d'étudier le support de propagation sans diodes. Il s'agit dans le cas présent de s'inspirer des travaux menés par U. Bhattacharya [6]. Une ligne à ruban central suspendu de largeur $8\mu\text{m}$ dont les bords sont espacés de $5\mu\text{m}$ du plan de masse de largeur $200\mu\text{m}$ est déposé sur un substrat d'arséniure de gallium de $400\mu\text{m}$ d'épaisseur. Signalons enfin que l'épaisseur des métallisations est de $2\mu\text{m}$ tout comme celle des plans de masse. La conductivité des dépôts d'or vaut 4.110^5S/cm dans le cas présent.

Nous avons maillé dans le ruban suspendu et utilisé la formulation d'impédance Z_s cth pour la description du caractère dissipatif des plans de masse latéraux.

Figure III-24 : Evolution fréquentielle de la permittivité relative effective de la ligne coplanaire pour différentes valeurs e de la hauteur d'élévation du ruban central

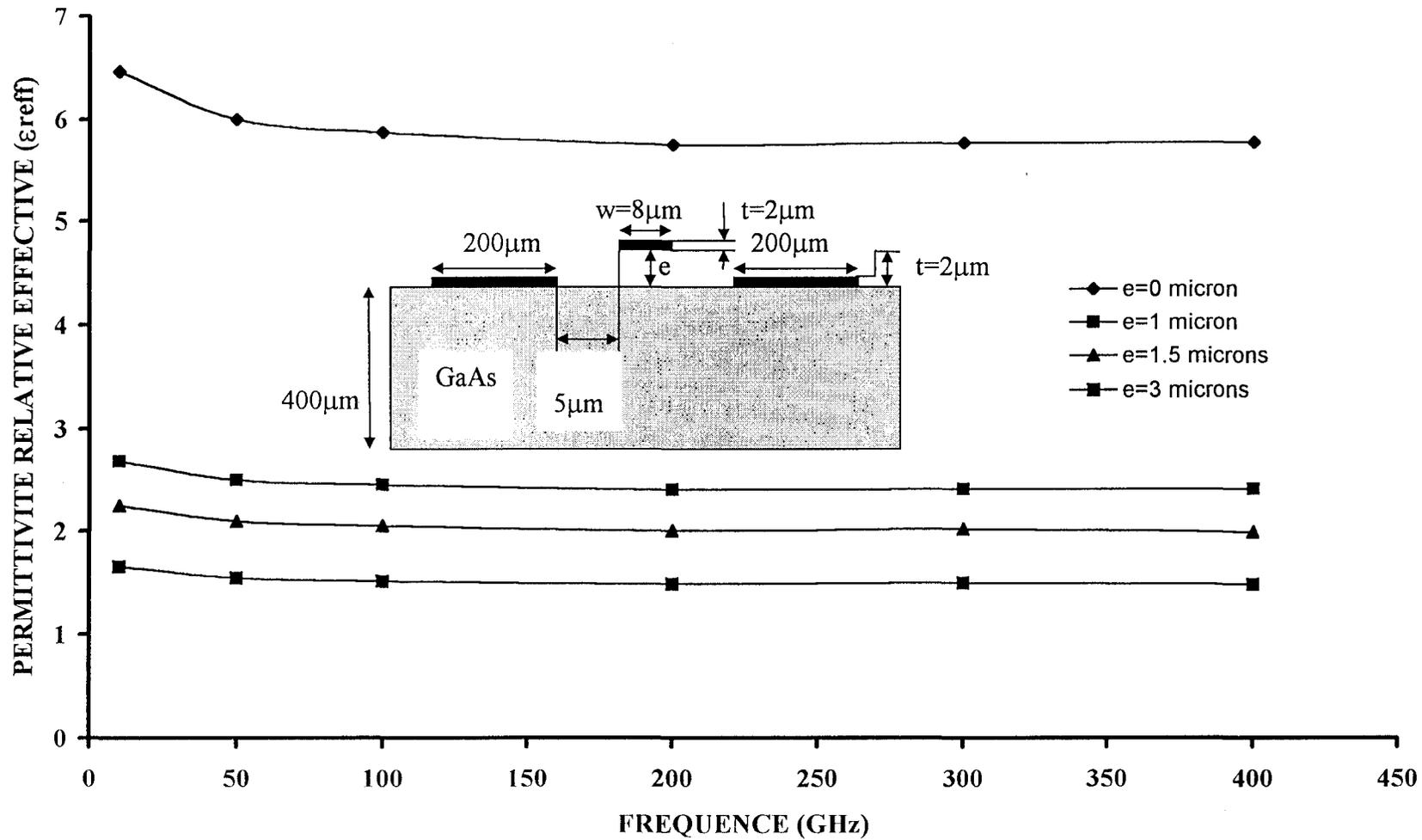


Figure III-25 : Evolution fréquentielle de l'atténuation linéique de la ligne coplanaire pour différentes valeurs e de la hauteur d'élévation du ruban central

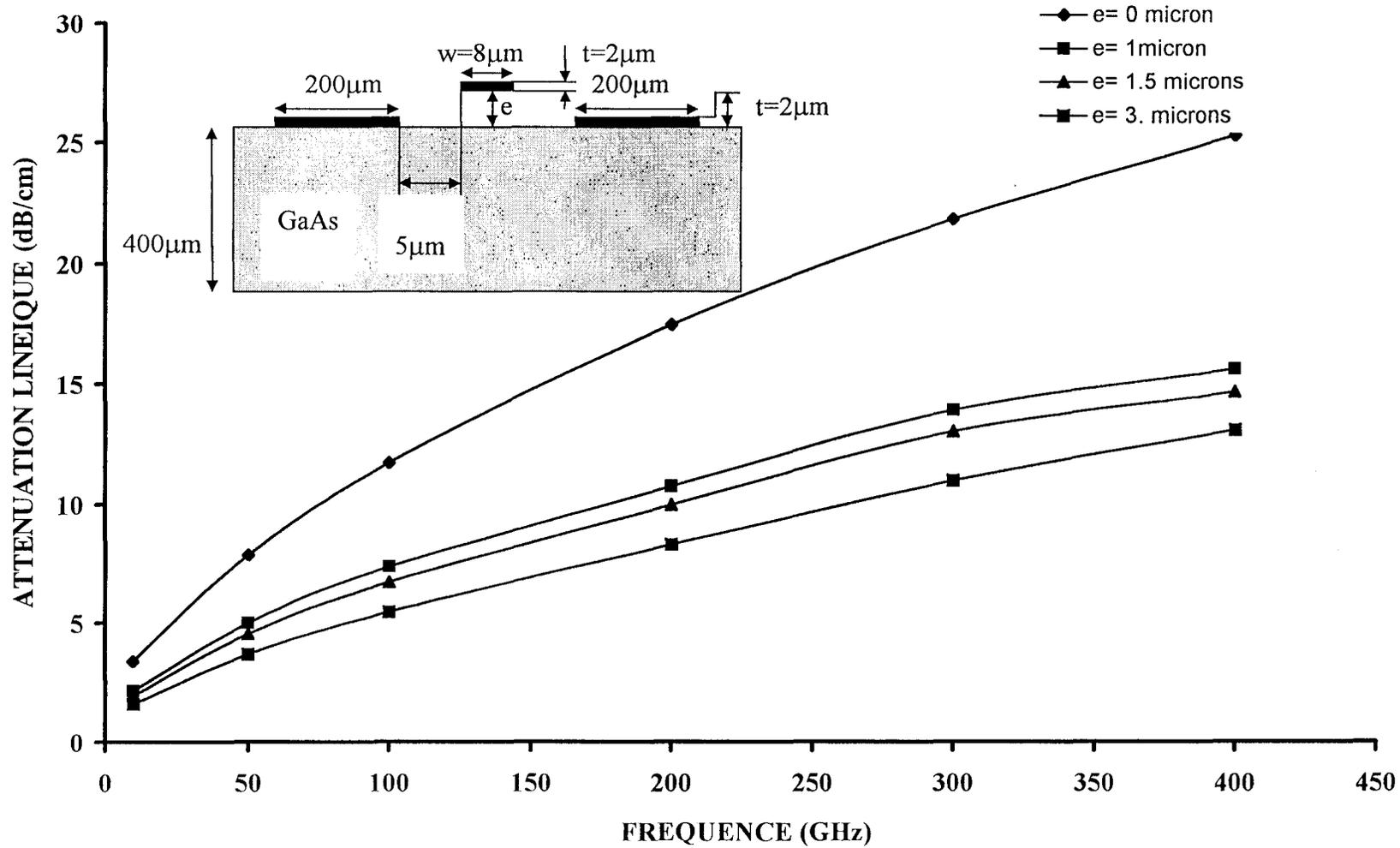
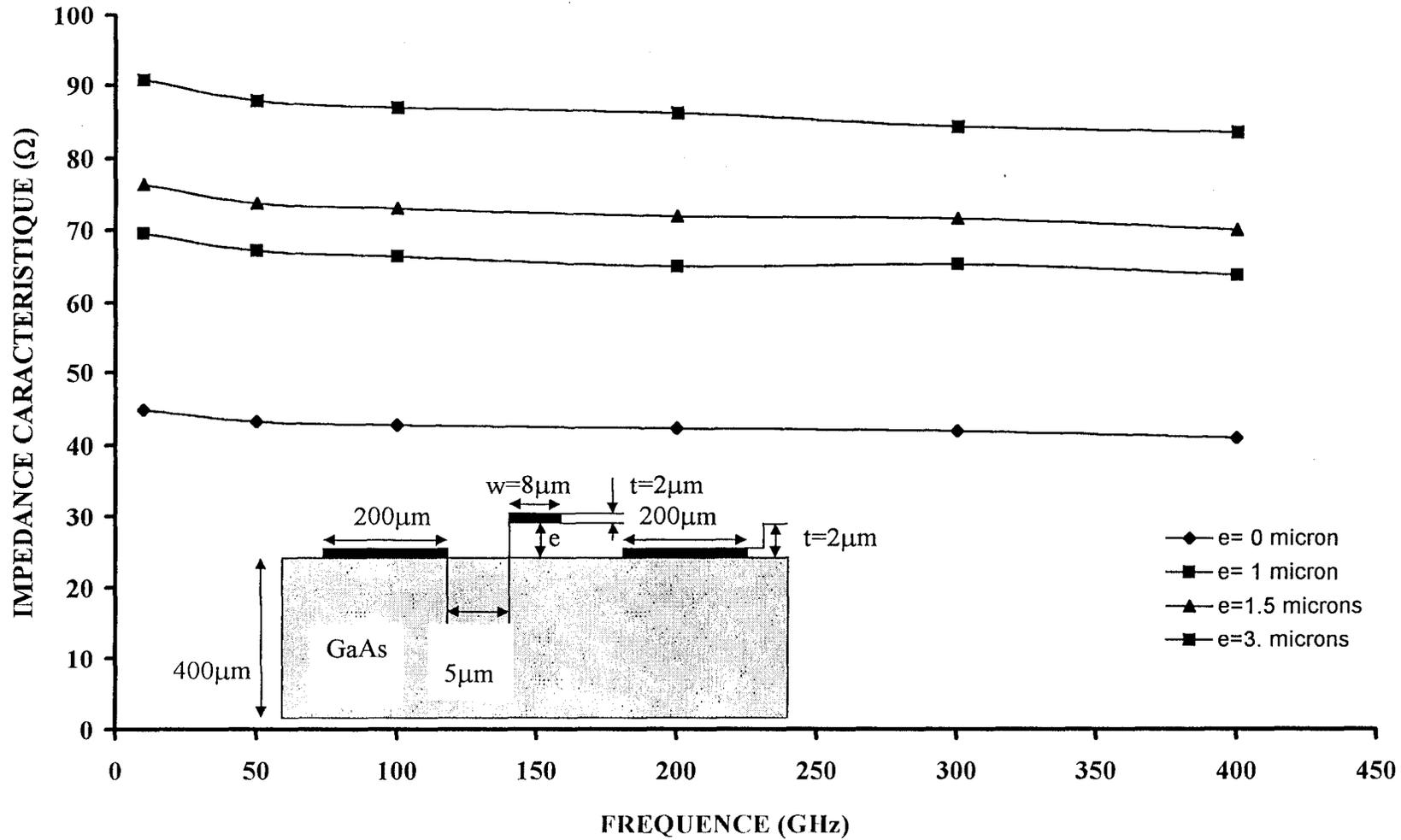


Figure III-26 : Evolution fréquentielle de l'impédance caractéristique de la ligne coplanaire pour différentes valeurs e d'élévation du ruban central



Ainsi, nous présentons aux figures III-24, 25 26 les évolutions fréquentielles théoriques (MEF) de la permittivité effective, de l'atténuation consécutives aux pertes métalliques ainsi que le comportement de l'impédance caractéristique. Plusieurs hauteurs « e » du ruban central suspendu ont été choisies pour illustrer les propos qui suivent.

Comme nous pouvons le constater, le passage de la ligne coplanaire classique ($\epsilon=0$) à la ligne à ruban suspendu implique que la permittivité effective et l'atténuation diminue alors que l'impédance caractéristique croît.

Pour être plus précis encore lorsque le ruban subit une élévation de $3\mu\text{m}$,

- L'impédance a pratiquement doublé et par conséquent la capacité de ligne est réduite d'un facteur quatre environ,
- Les pertes sont divisées par un facteur deux,
- La permittivité effective est, au mieux, quatre fois plus faible ; la vitesse de groupe est donc deux fois plus importante.

Toutes ces remarques permettent désormais de mieux assimiler les propos de U. Bhattacharya, S. T. Allen et M. J. Rodwell relatifs à la conception de leur dispositif non linéaire nécessitant pertes faibles et impédance élevée. En dehors du fonctionnement de ce dispositif de génération d'impulsion brève qui ne constitue pas notre priorité, quelques remarques d'ordre générales s'imposent. Ces remarques reposent sur la comparaison avec la ligne coplanaire à ruban non suspendu.

Des travaux ont montré que les lignes coplanaires classiques d'impédance supérieure à 70Ω voire 80Ω présentaient de fortes pertes[21]. Ceci s'explique car le quotient des largeurs de la fente sur le ruban central est faible. En d'autres termes, le plan de masse latéral est très proche du ruban central. Ceci implique par conséquent l'existence d'effets de pointe

importants pour les courants au coin des rubans et provoque donc un accroissement des pertes. Ces inconvénients disparaissent lorsque le ruban central est suspendu.

Ce point est capital notamment pour la conception de filtres ou de lignes couplées nécessitant la réalisation de très fortes impédances, le tout à faibles pertes.

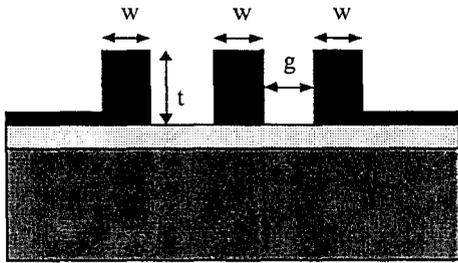
Nos constatations rejoignent à ce titre une publication parue en 1998, donc récente, et traitant de ce type de ligne [22].

Signalons en outre que la ligne à ruban suspendu est monomode jusqu'à 500GHz alors que la même ligne dans sa version non suspendue possède un mode supérieur dont la fréquence d'apparition est voisine de 100GHz [23]. En résumé, une faible dispersion fréquentielle sur une bande monomode importante, le tout à impédance quasiment constante caractérise ce type de ligne.

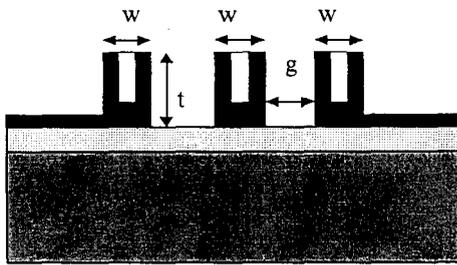
Il est clair que les avantages de cette structure sont indéniables notamment dans la bande millimétrique, et ce, d'autant plus que le processus technologique est maîtrisé puisqu'il s'apparente à celui utilisé dans la fabrication des ponts à air. Toutefois, malgré ces atouts, il ne semble pas que cette structure rencontre un succès important, puisque nous n'avons dénombré sur le sujet que quatre publications écrites depuis 1995. Nos constatations sont de la même nature pour ce qui concerne l'étude suivante relative aux lignes ultra compactes. Nous n'avons, pour notre part, trouvé qu'une publication depuis 1996 sur le thème des lignes ultra compactes pour circuit intégré micro-ondes. Malgré le peu d'information recueillies sur ce type de structure, nous avons été attiré par son caractère innovant [24].

III.2.3 La ligne ultra compacte

Notre objectif n'est pas, à ce stade, de mener une étude exhaustive de cette ligne. Nous désirons seulement attiré l'attention sur ce que seront les topologies des circuits futurs dits « ultra compacts » [5] et sur quelques performances typiques. Nous rappelons, pour mémoire,



Coplanaire en « I »



 **Substrat AsGa**
 **Polyimide**

Coplanaire en « U »

Figure III-27 : Lignes coplanaires « ultra compact » avec métallisation en « I » et en « U »

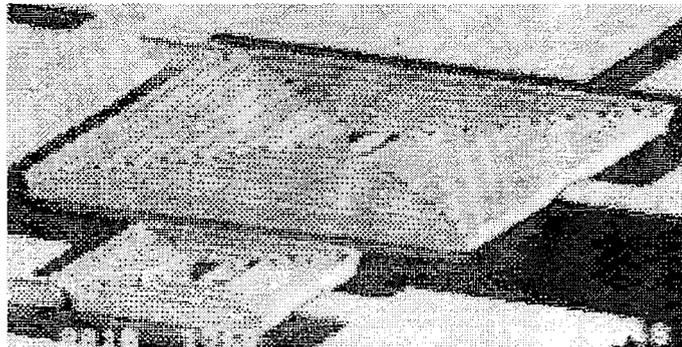


Figure III-28 : Photographie au microscope électronique d'une inductance spirale réalisée avec des métallisations en « U » [5]

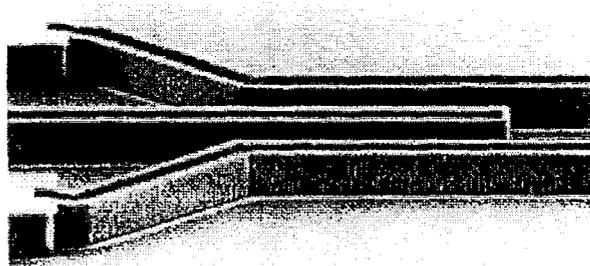


Figure III-29 : Photographie d'une jonction 180° avec métallisation en « U » [5]

un exemple coplanaire des lignes « ultra compact » figure III-27. Elles se distinguent des structures traditionnelles par la forme de leurs métallisations qui sont en « U » ou en « I » et dont les hauteurs sont plus importantes que les largeurs. Bien évidemment, ce type de technologie se décline aussi sous une version à un conducteur dans le cas de la conception de self spirale figure III-28 voire deux et trois conducteurs pour la réalisation de jonction 180° figure III-29 fonctionnant dans la bande des fréquences comprises entre 5 et 40 GHz.

Comme nous pouvons le constater, ces structures ne sont plus conventionnelles. Leur caractère innovant repose sur une modification de la forme des conducteurs en vue d'obtenir des caractéristiques électromagnétiques équivalentes voire meilleures tout en réduisant la taille du circuit. Bien évidemment, il n'est plus question ici de négliger l'épaisseur de la métallisation, ni même de la considérer comme parfaite.

Cette tendance à complexifier la section droite du circuit élimine dans le même temps un certain nombre de techniques numériques classiques utilisées pour la détermination des caractéristiques électromagnétiques. La méthode des éléments finis est donc, mais était-il besoin de le souligner, tout particulièrement adaptée à la description de ce type de circuit. Le choix des lignes ultra compactes en est un bon exemple.

Plutôt que d'axer notre étude sur les caractéristiques électromagnétiques d'une ligne, nous avons préféré utiliser notre code de calcul pour mettre en évidence le gain de surface obtenu par rapport à la technologie traditionnelle.

Considérons dans un premier temps un support AsGa sur lequel est déposée une couche de polyimide de faible épaisseur. Par la suite, un dépôt d'or est effectué en vue de confectionner une métallisation soit classique, soit en forme de « U » ou de « I ». Ainsi, nous nous proposons de rechercher les dimensions des lignes qui fournissent, pour une même impédance caractéristique de 50Ω , des pertes équivalentes dans le cas des métallisations en « U » et

classique. Cela revient donc à considérer deux processus technologiques différents appliqués conjointement au cas d'une ligne coplanaire et microruban. L'ensemble de nos résultats est répertorié dans le tableau figure III-30.

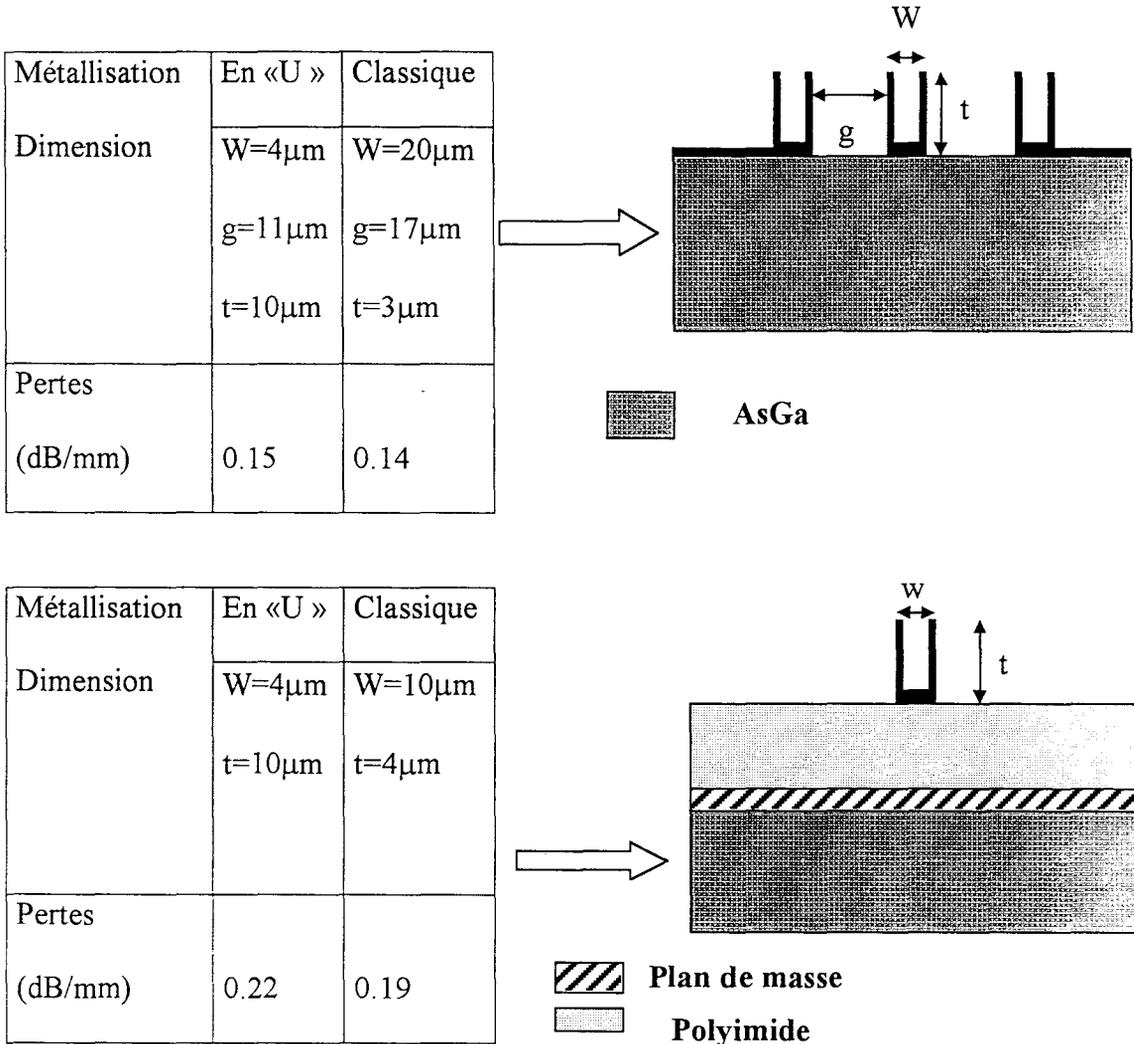
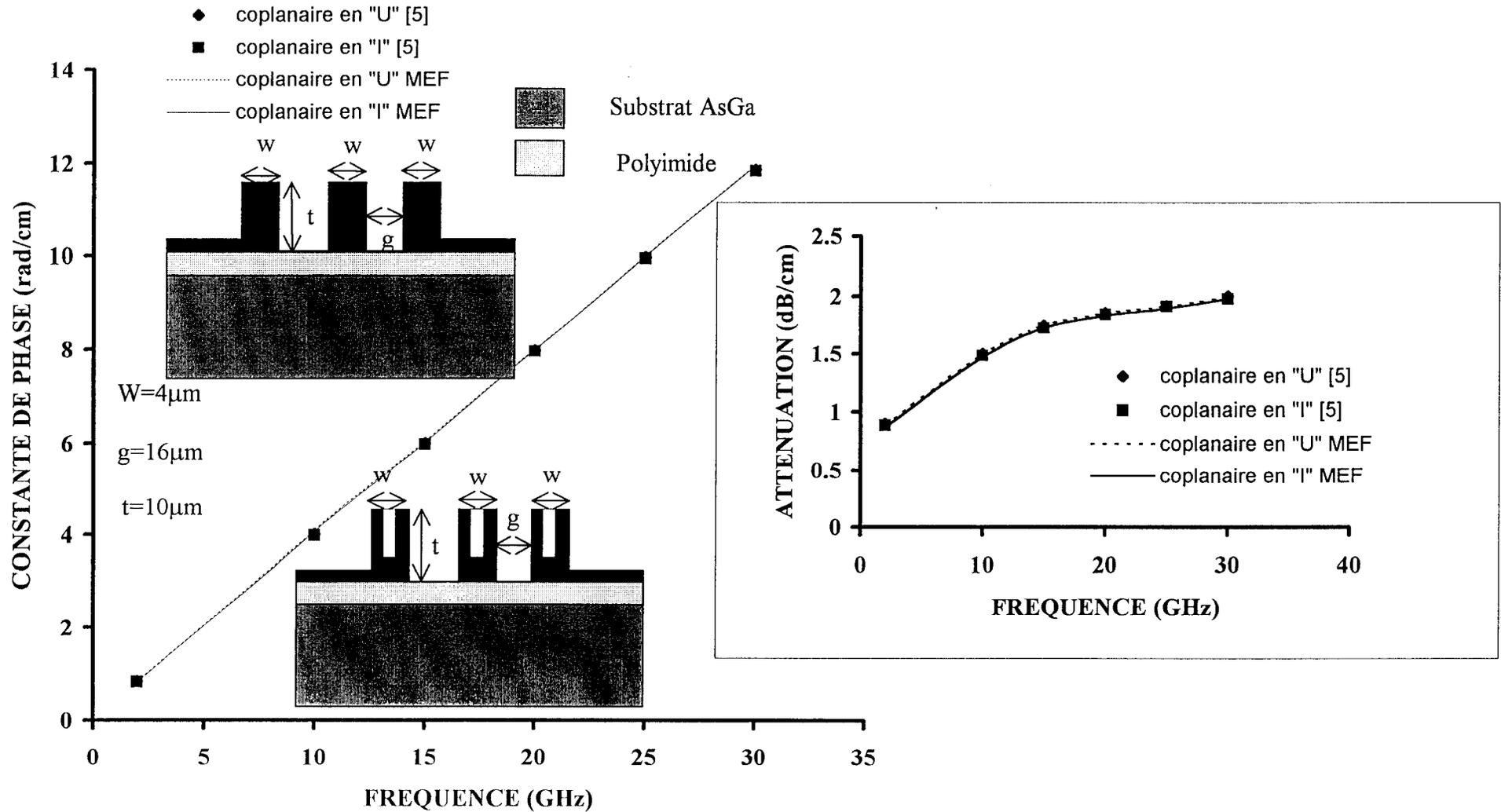


Figure III-30 : Mise en évidence des réductions des dimensions des lignes ultra compactes par rapport aux lignes classiques, et ce, pour une même impédance caractéristique (50Ω)

Pour permettre la comparaison et mettre en valeur le gain d'espace, nous avons toujours effectué nos calculs sur la base de lignes dont l'impédance caractéristique vaut 50Ω .

Figure III-31: Evolution fréquentielle de la constante de phase et d'atténuation des lignes coplanaires ultra compactes

171



et ce, à la fréquence 10GHz. Ce n'est qu'à cette condition que l'on peut confronter effectivement les résultats entre eux. Au vu des dimensions déterminées au moyen de notre code de calcul dans les tableaux figure III-30, une ligne coplanaire réalisée dans sa version traditionnelle requiert un dimensionnement minimum de $94\mu\text{m}$ ($3W+2g$) alors que seul $34\mu\text{m}$ suffisent pour la ligne avec métallisation en « U ». On notera que les pertes sont pratiquement identiques dans les deux cas de figure. Cela aboutit donc à une réduction d'un facteur trois des dimensions alors qu'un facteur deux au moins caractérise le gain en dimensions pour la ligne microruban avec conducteur en « U ».

Dans l'exemple proposé, seul le cas des métallisations en « U » est abordé. En effet, comme le prouve les relevés expérimentaux effectués sur ce type de ligne en « U » et en « I », les évolutions figure III-31 de la constante de phase et d'atténuation sont quasiment confondues [5]. Il en est de même pour nos résultats théoriques (MEF). Paradoxalement, la version avec métallisation en « U », bien qu'a priori plus complexe, est celle retenue pour la confection des circuits car mieux adaptée au process technologique de fabrication de l'ensemble du circuit intégré, transistors compris. Pour donner un dernier et bref aperçu des potentialités de ce type de technologie, nous proposons l'étude d'une structure comportant deux conducteurs puisque le cas des lignes à un et trois conducteurs a été étudié auparavant. En fait, il s'agit de la version miniaturisée des lignes microrubans couplées classiques. Notre objectif, puisqu'il s'agit d'un coupleur, consiste à déterminer les évolutions des impédances caractéristiques en mode pair et impair en vue d'obtenir le coefficient de couplage désiré. Compte tenu des propriétés de symétrie que présente la structure figure III-32, l'étude se ramène au calcul des caractéristiques électromagnétiques d'une ligne. Dans ce cas, l'axe où le plan de symétrie s'apparente successivement à un court circuit électrique parfait CCE (pour le mode impair) et à un circuit ouvert parfait CCM (pour le mode pair). Les impédances

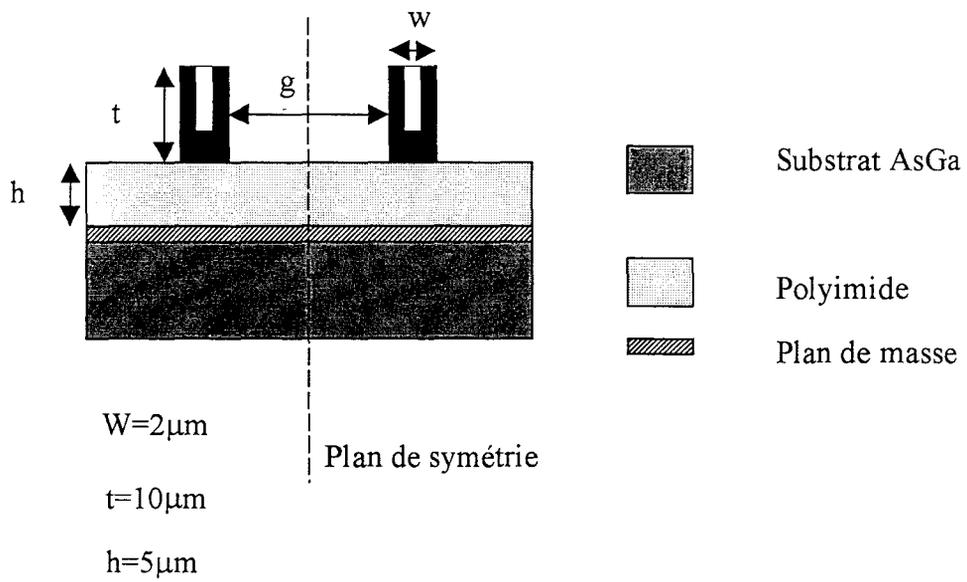
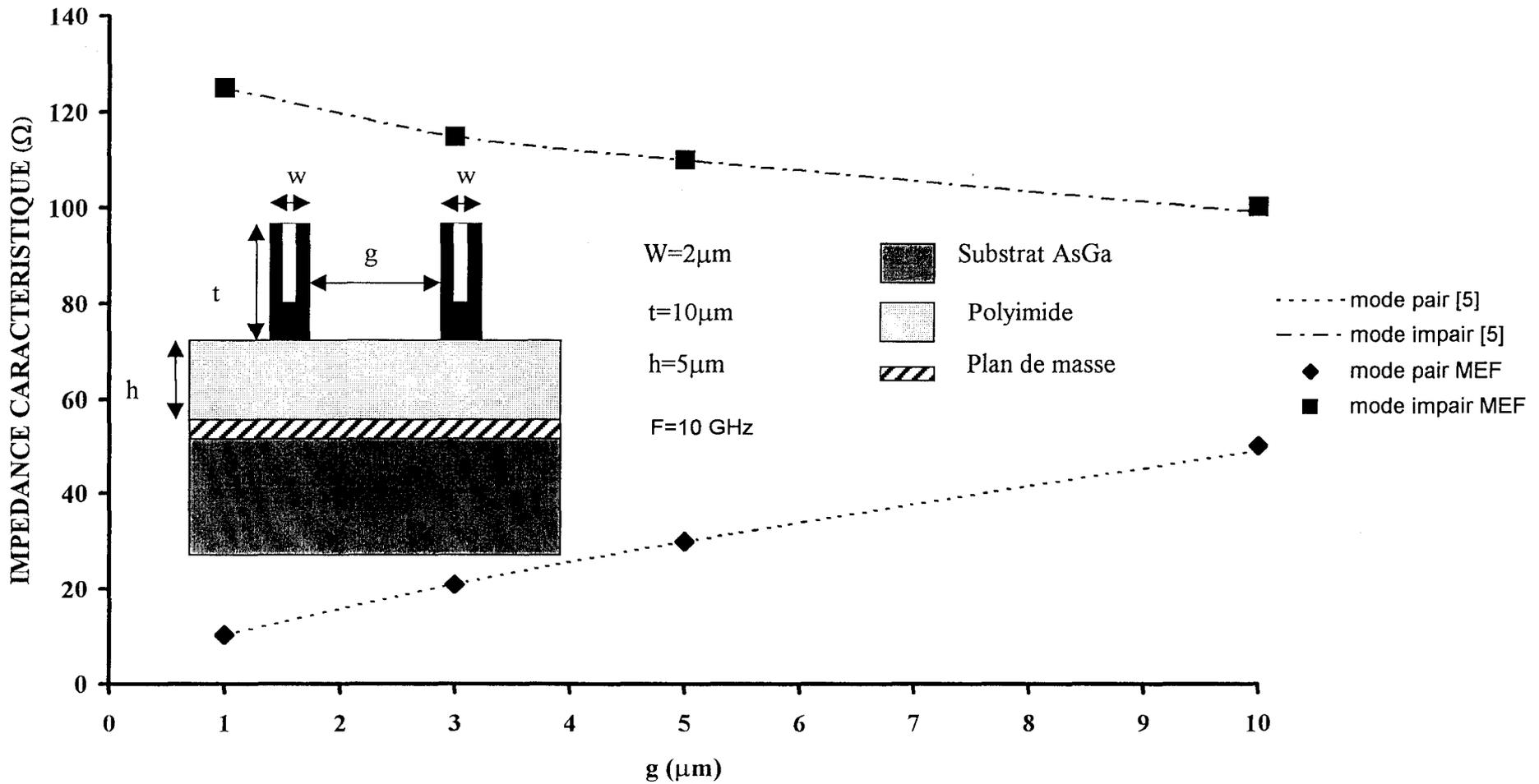


Figure III-32 : Plan de section droite d'un coupleur conçu à partir de lignes ultra compactes.

Figure III-33: Impédances caractéristiques du mode pair et impair de deux lignes microrubans couplées avec métallisation en "U", et ce, en fonction de la distance g de couplage



déterminées en présence d'un CCE ou d'un CCM parfait sont dénommées respectivement Z_o et β . Leurs évolutions sont calculées à la fréquence 10GHz et présentées en fonction de la distance « g » séparant les métallisations figure III-33. Pour que le coupleur soit adapté, il faut que la relation $Z_e Z_o = Z_c^2$ soit vérifiée. L'impédance caractéristique Z_c vaut 50Ω . Ainsi, pour une distance $g=2.5\mu\text{m}$, le coupleur est du type -3dB adapté à 50Ω . Lorsqu'il est réalisé dans une version dite à méandre, un gain de dimension de l'ordre d'un facteur 10 est obtenu par rapport à la version traditionnelle[5]. Nos investigations s'arrêtent à ce niveau. Comme nous l'avons signalé, cette étude ne se veut pas exhaustive. Toutefois, quelques commentaires s'imposent en guise de bilan.

- Aucune défaillance de notre code de calcul n'a été constatée pour la description de ces lignes. Les résultats fournis sont conformes aux relevés expérimentaux lorsqu'ils existent.
- Les structures mises en œuvre, qu'elles soient à un, deux, voire trois conducteurs présentent des pertes comparables aux circuits traditionnels.
- Un gain d'espace important est obtenu dans l'occupation de chaque couche de polyimide. Ceci est un point majeur.

Nous n'avons abordé qu'une faible part des dispositifs passifs réalisables. Cette technologie est prometteuse car elle permet d'envisager la conception d'un système complet fonctionnant à des fréquences allant jusqu'à 40GHz. Ceci touche alors les domaines des télécommunications sans fils courtes distances pour des applications nécessitant des forts débits d'informations, le tout confectionné sur ou dans un seul circuit. Il est clair que ce circuit est réalisé en utilisant l'empilement de couche (la troisième dimension) . La maîtrise de la technologie de fabrication des métallisations en « U » et en « I » de $10\mu\text{m}$ de hauteur voire plus permet de résoudre en partie les problèmes liés aux interconnexions entre fonctions

réalisées sur un même niveau voire sur des niveaux différents, ainsi que ceux provenant de la diaphonie entre lignes. Pour notre part, nous nous proposons d'étudier les interconnexions dans la problématique de la montée en fréquence pour les circuits intégrés logiques conçus sur silicium.

III.3 Etudes des interconnexions dans les circuits intégrés logiques réalisés sur silicium

III.3.1 Introduction

Le souci de réaliser des circuits logiques de plus en plus rapides et complexes, conduit à la réduction des dimensions des composants, et permet dans le même temps une augmentation de leur densité d'intégration.

Grâce aux progrès technologiques, nous atteignons aujourd'hui des dimensions jusqu'alors inégalées ; elles sont submicroniques. Les transistors MOS des années 70 permettaient de réaliser des circuits intégrés de quelques dizaines de milliers de transistors avec des technologies supérieures à $10\mu\text{m}$. A ce jour, plusieurs millions de transistors peuvent être implantés avec les technologies inférieures à $0.5\mu\text{m}$ [25].

Il est clair que les avantages liés à la réduction des dimensions des transistors sont, bien évidemment, l'amélioration des performances en terme de retard apporté par chaque porte et la réduction de la puissance dissipée[25]. A ce titre, les fréquences de fonctionnement des microprocesseurs et des mémoires sont aujourd'hui supérieures à 100MHz alors même qu'elles ne dépassaient pas le mégahertz dans les premières technologies [26]. Les tensions d'alimentation sont passées successivement de 12 volts, 5volts pour se standardiser à 3.3volts.

Dans le même temps, l'on ne peut pas envisager de diminuer les dimensions des transistors sans effectuer une réduction des dimensions des lignes de connexion. En effet, cette réduction est nécessaire pour offrir les meilleurs conditions de routage du circuit[27].

Dans ce contexte, apparaissent de nouveaux problèmes liés aux interconnexions dans les technologies qui ne cessent d'évoluer. Ces problèmes se situent pour la plupart tant au niveau temporel que sur la dégradation des signaux dans les circuits CMOS.

- **Sur le plan temporel**, le retard d'une fonction n'est plus uniquement lié aux transistors qui la constituent, mais également aux lignes de connexion reliant les blocs du circuit entre eux. Désormais, l'on doit prendre en compte dans ce retard celui de la porte sans ligne auquel se greffe celui introduit par la ligne. Comme l'ont démontré des travaux, il n'est pas réaliste de retrancher, du retard de la porte avec ligne, celui de la porte sans ligne pour obtenir le retard introduit par la ligne d'interconnexion[28]. Si l'on procède de cette manière, on aboutit très rapidement à des incohérences quand la taille du buffer d'entrée est grande, ce qui conduit à des retards parfois négatifs n'ayant aucun sens. Ceci s'explique par le fait que le retard d'une porte logique dépend des dimensions des transistors qui la constituent, mais aussi et peut être surtout de la charge de sortie. Omettre la prise en compte des effets d'interconnexion sur cette charge de sortie conduit tout naturellement à des résultats surprenants voire aberrants. En effet, le retard d'une porte est égale au produit de la résistance R_{tr} du transistor en commutation par la capacité C_{porte} de la charge. Dennard[29] a établi, à partir de cette définition, une loi qui fournit une bonne appréciation du gain en performance lié à la réduction des dimensions des portes. Selon cette idée, si les dimensions des transistors sont réduites d'un facteur $S > 1$, la capacité de charge est réduite par le même facteur tandis que la résistance R_{tr} reste constante. En conséquence, le retard et la surface de la porte sont respectivement réduits par les facteurs S et S^2 . Autrement dit, le retard des portes diminue lorsque la longueur des transistors diminue[29].

Par ailleurs, la complexité importante des circuits due au nombre croissant des transistors suivant un facteur 2 à chaque nouvelle technologie[30], a conduit à l'augmentation du nombre d'interconnexions et par conséquent à l'accroissement de la longueur totale des connexions électriques. Pour s'en convaincre, la longueur totale d'interconnexions

estimée à 380m pour une puce dans la technologie $0.35\mu\text{m}$, atteindrait plus de 10km pour une puce dans la technologie $0.07\mu\text{m}$. [31].

En considérant, d'une part l'augmentation de la longueur des connexions d'une technologie à l'autre par le facteur S_c , et d'autre part la réduction d'un facteur S des dimensions transversales des lignes métalliques d'interconnexion, nous aboutissons pour toute nouvelle technologie à une modification du retard d'interconnexion par le facteur SS_c^2 . Dans cette formulation approchée du problème, l'hypothèse faite sur la réduction des épaisseurs et de la largeur des lignes suivant un même rapport n'est pas réaliste. En effet, les épaisseurs des lignes métalliques restent sensiblement constantes d'une technologie à l'autre. En conséquence, une analyse plus fine des effets liés à ces dimensions doit être entreprise. Des études ont d'ailleurs montrer que le retard d'interconnexion semble décroître moins rapidement que celui de la porte active. Une division par deux de la longueur du canal du transistor permet de réduire d'un rapport quatre le retard de la porte active tandis que le retard lié aux interconnexions serait seulement réduit de moitié [28].

- **Au niveau des signaux d'attaque des portes**, la présence de lignes d'interconnexion apporte une dégradation sur le signal source. Ainsi, la détermination du retard d'une structure à un échelon parfait de tension n'est plus suffisante pour caractériser les performances des circuits. Il est donc indispensable d'étudier l'influence des pentes d'attaque des signaux sur la caractérisation précise des retards occasionnés en différents points du circuit. Il faut donc caractériser, en plus, les dégradations liées aux lignes d'interconnexion afin de déterminer les pentes des signaux en entrée et en sortie de la ligne. L'interconnexion est notamment à l'origine de la forme exponentielle et non plus linéaire du signal lors de son transit au travers de la ligne.

Compte tenu, des technologies actuelles, le modèle distribué RC est très largement répandu[32] et semble décrire correctement voire parfaitement la connexion électrique. A ce stade, rappelons que la forme d'onde du signal d'attaque n'est pas traité, or il est établi que cette forme a une influence sur le temps de retard[33]. La réponse du modèle, à un échelon classique, n'est donc plus assez précise ni même appropriée pour modéliser les temps de retard internes au circuit intégré. Signalons, qu'à notre connaissance, il n'existe pas de travaux montrant l'influence de la réponse du retard d'interconnexion à un signal d'entrée réel du driver à l'interconnexion. Il est donc nécessaire de développer des modèles précis d'interconnexion incluant à la fois le driver et l'influence des connexions électriques. Notre contribution s'insère dans le cadre d'une étroite collaboration entre les membres de l'équipe électromagnétisme des circuits de l'IEMN et ceux de l'équipe du LIRMM (Laboratoire d'informatique de Robotique et de Microélectronique de Montpellier) et notamment messieurs D. Deschacht et G. Servel.

Cette contribution concerne la mise en œuvre d'une analyse électromagnétique des interconnexions avec la prise en compte de la forme réelle des signaux d'attaque. Ces formes réelles, comme nous l'avons signalé, nous sont fournies par D. Deschacht notamment. L'objectif consiste, à partir de l'analyse électromagnétique servant de référence, à définir le domaine de validité du modèle électrique RC mise en œuvre au LIRMM et à proposer une version RLC aux concepteurs de circuits VLSI pour la modélisation des interconnexions, voire RLCG par la suite.

III.3.2 : Analyse Electromagnétique des Interconnexions

III.3.2.1 Préambule : L'analyse traditionnelle

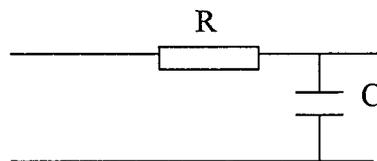
Comme nous l'avons signalé auparavant, le modèle RC est très largement répandu dans la littérature[34][35] pour étudier les problèmes liés aux interconnexions dans les circuits

VLSI. La règle utilisée pour simuler le comportement des lignes d'interconnexion repose sur la mise en cascade d'un nombre « n » fini de quadripôles RC élémentaires. A ce stade, l'on doit veiller à ce que le temps de propagation sur chacun des quadripôles soit très inférieur au temps de montée du signal. En considérant la longueur « L » de la ligne, « V » la vitesse de propagation et « n » le nombre de cellules élémentaires dans la distribution, on doit vérifier, pour un temps de montée T du signal, la relation suivante :

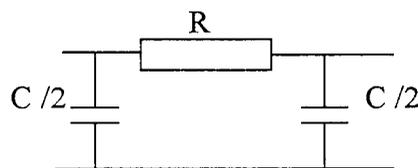
$$\frac{L}{V} \frac{1}{n} \ll T \quad \text{Eq-III.7}$$

Rappelons que cette relation ne tient pas compte des conditions d'attaque et de charge de la ligne. Or ces conditions ont une influence sur le comportement global du signal [35]. Omettre ces conditions peut fausser la modélisation. Une étude plus détaillée a été effectuée par T. Sakurai [34] à partir des trois modèles élémentaires suivants :

- Modèle en L



- Modèle en π



- Modèle en T

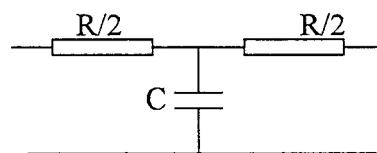


Figure III.34 :Schémas électriques RC utilisés pour la modélisation des lignes d'interconnexion.

Ces études ont montré que les modèles en T et en π donnaient des résultats rigoureusement identiques, et ce, quel que soit le nombre de cellules considérées. D'autres résultats obtenus au LIRMM par E. Vanier [27] ont mis en évidence que le modèle en L et en π fournissaient des valeurs asymptotiques identiques lorsque le nombre de cellules est important. En revanche, pour un nombre de cellules relativement faible, le modèle en L présente de fortes variations comparé à celui en π . Par conséquent, le modèle en π est retenu pour la modélisation des lignes d'interconnexion.

L'analyse électromagnétique dont il est question dans ce mémoire diffère des modèles distribués décrits précédemment en ce sens qu'elle prend en compte de manière globale tous les effets parasites liés aux interconnexions. Elle nous permettra, ainsi, de déterminer un modèle équivalent qui incorpore les effets inductifs, mais aussi de définir le domaine de validité du modèle distribué RC.

Signalons que cette notion de modèle est essentielle pour les concepteurs de circuits VLSI qui ne disposent pas de code de calcul comme celui mis au point dans ce mémoire. Rappelons aussi, qu'une étude temporelle par le biais de logiciel comme SPICE requiert, en outre, un schéma équivalent distribué du type self, capacité, résistance voire conductance.

Les paragraphes qui suivent présentent les démarches liées à l'analyse électromagnétique tout en fournissant quelques résultats typiques.

III.3.2.2 : L'analyse électromagnétique : modèle d'étude pour les problèmes liés aux interconnexions

L'analyse électromagnétique du circuit à effectuer est représenté figure III.35. Ce modèle est retenu afin de prendre en compte l'interaction qui existe entre la ligne d'interconnexion et les portes.

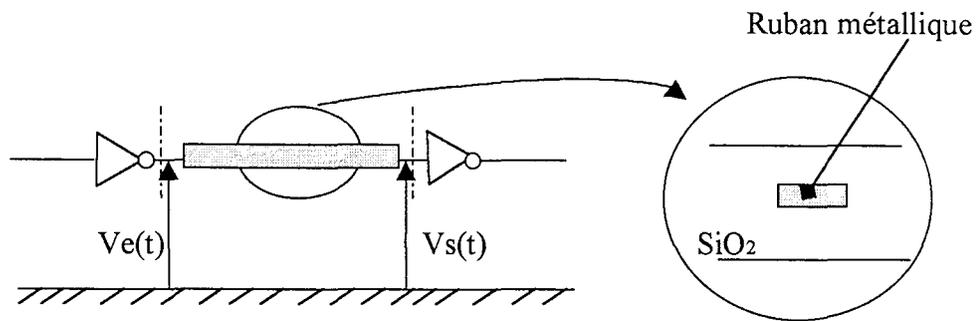


Figure III-35 : Modèle utilisé pour l'analyse électromagnétique.

La ligne d'interconnexion possède des dimensions spécifiques à la technologie $0.25\mu\text{m}$ caractérisée par une épaisseur de métallisation t supérieure à la largeur w du ruban. Un exemple typique est fourni, à la page suivante figure III-37. L'analyse d'un tel circuit tient compte de l'environnement dans lequel se trouvent les lignes d'interconnexion à savoir les impédances de charge en entrée et en sortie.

III.3.2.3 : L'analyse électromagnétique : principe de l'Analyse Electromagnétique dans le domaine temporel

Cinq étapes caractérisent cette analyse illustrée par le synoptique figure III-36. Ces étapes sont :

1. La détermination des caractéristiques de propagation de la ligne d'interconnexion
2. La forme du signal d'attaque $V_e(t)$ et son expression dans le domaine fréquentiel
3. L'analyse fréquentielle du circuit incluant les charges en entrée et en sortie de la ligne d'interconnexion
4. La détermination du signal en sortie de la ligne dans le domaine temporel
5. Et enfin, le calcul des caractéristiques temporelles comme le retard de propagation et le temps de commutation

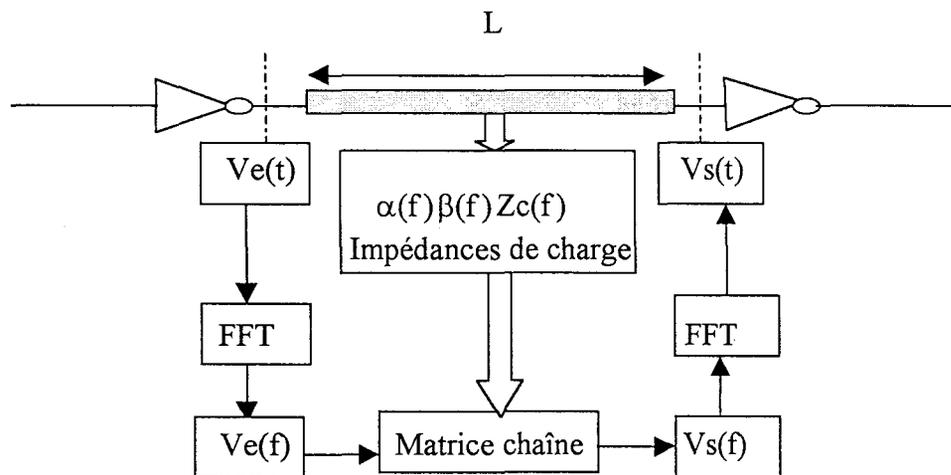


Figure III-36 : Synoptique de l'analyse électromagnétique.

Chacune des étapes de cette analyse est décrite sommairement aux paragraphes suivants.

III.3.2.3.1. L'analyse électromagnétique : détermination des caractéristiques de propagation de la connexion électrique

Il s'agit de calculer les caractéristiques de propagation de la ligne d'interconnexion. Cette étape a pour objectif de définir la matrice de chaîne correspondant à une longueur L quelconque pour cette ligne. Nous avons retenu, pour illustrer notre démarche, la topologie suivante pour la section droite de la ligne d'interconnexion en technologie VLSI figure III-37.

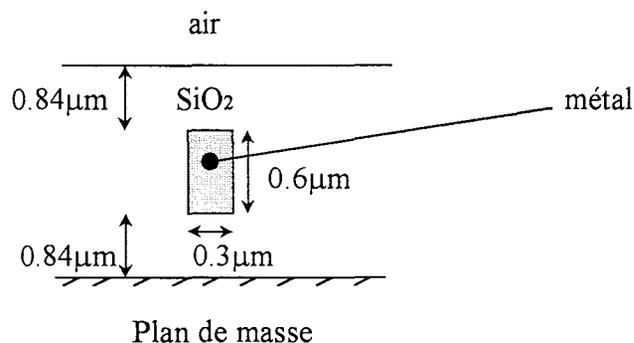


Figure III-37 : Section droite de ligne d'interconnexion.

Nous constatons que les dimensions transverses du ruban métallique sont du même ordre de grandeur que celles de la couche d'oxyde de silicium dans laquelle il est noyé. Notons que, l'épaisseur de métallisation est supérieure à la largeur. Cette topologie n'est pas

Constante de propagation (Technologie 0.25 μ m)

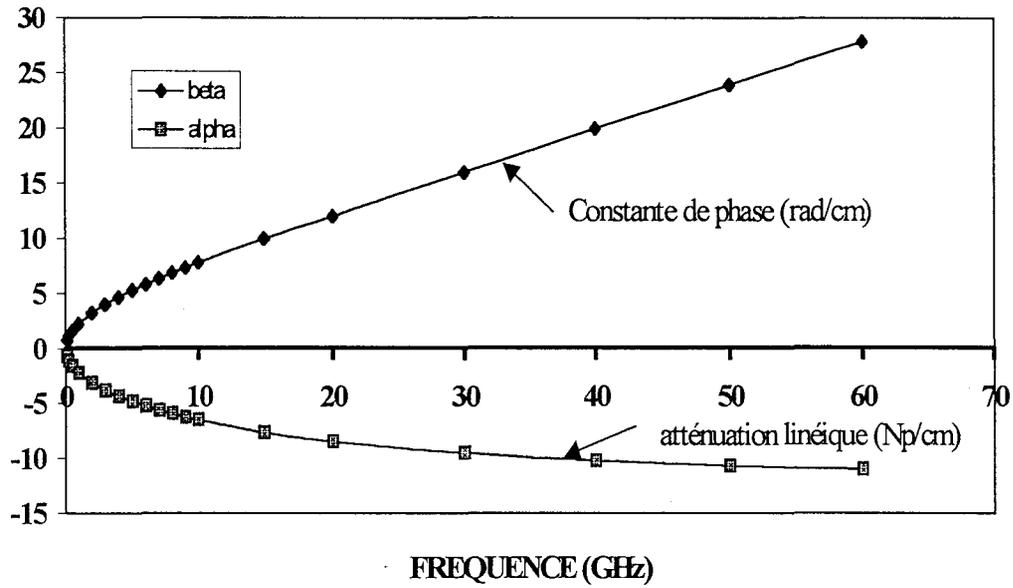


Figure III-38.a : Evolution fréquentielle de la constante de propagation de ligne Figure III-37.

Impédance caractéristique (Ohms) (Technologie 0.25 μ m)

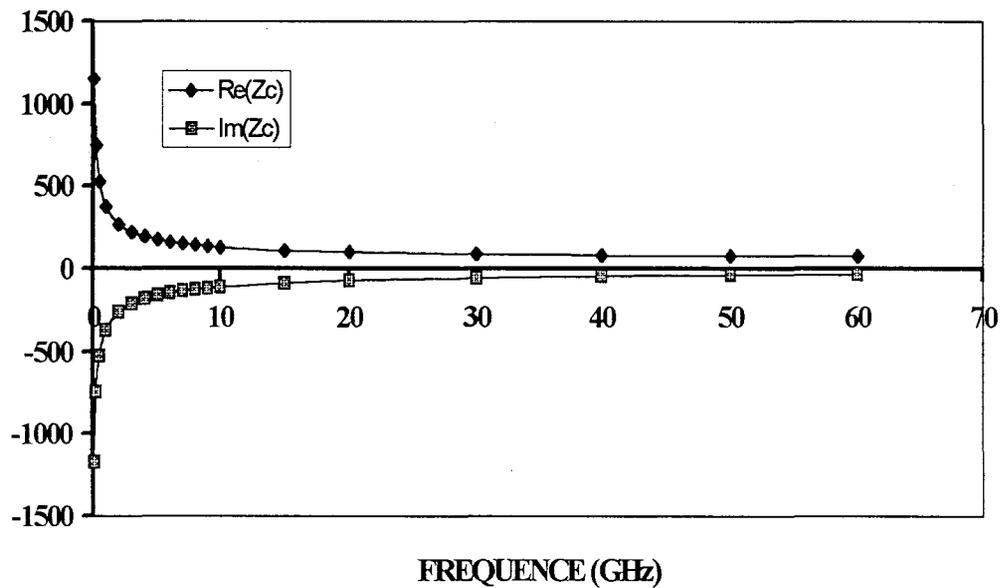


Figure III-38.b : Evolution fréquentielle de l'impédance caractéristique de ligne Figure III-37.

courante, tout du moins, si nous la comparons à celle des lignes de transmission utilisées dans les circuits micro-ondes classiques. Cet état de fait élimine toutes les méthodes numériques dans lesquelles les métallisations sont considérées infiniment minces, même si la notion d'impédance de surface permet de traduire plus ou moins bien la nature dissipative du matériau métallique. Le cas des interconnexions, où couches d'oxyde et section droite du ruban sont du même ordre de grandeur, est le plus contraignant. En effet, même la version du logiciel HFSS dont nous disposons n'est pas en mesure de prédire les caractéristiques électromagnétiques de la ligne. Ceci justifie, s'il en ait besoin, l'emploi de notre code de calcul et met en évidence notre contribution dans l'analyse des interconnexions.

Comme nous le constatons sur la figure III-38.a, la constante de propagation montre que l'on ne peut pas identifier le mode se propageant dans la structure figure III-37 comme étant purement TEM. Il s'agit, dans ce cas, d'un comportement d'ondes lentes aux basses fréquences. Ce phénomène peut être attribué à l'existence des fortes pertes métalliques comme l'indique, aussi, la partie imaginaire de l'impédance de la ligne figure III-38.b.

Cette rubrique succincte nous a permis de caractériser du point de vue électromagnétique, la ligne d'interconnexion. Nous abordons à présent l'aspect relatif à la nature du signal d'entrée de la ligne d'interconnexion.

III.3.2.3.2 L'analyse électromagnétique : forme du signal d'entrée et son expression dans le domaine fréquentiel

Il est toujours possible de déterminer le retard d'une porte logique à un échelon de tension en présence d'interconnexions longues. Cependant cette approche ne rend pas compte des performances réelles des circuits. En effet, les portes logiques qui attaquent les lignes d'interconnexion sont noyées au milieu d'autres portes logiques. Comme nous l'illustrons sur

la figure III-39, la réponse de l'étage d'attaque à un échelon de tension est un signal dont le temps de montée s'est dégradé.

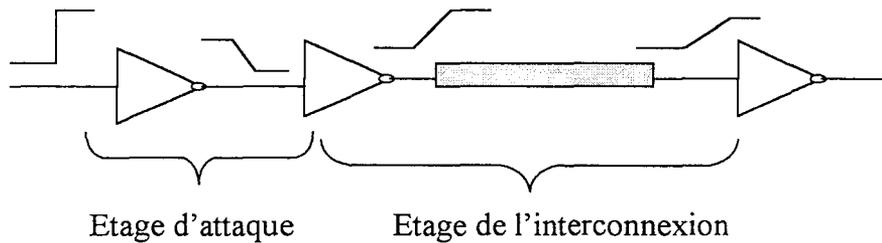


Figure III-39 : Influence de l'étage d'attaque sur la forme du signal à l'entrée de la ligne.

Il est donc nécessaire de déterminer les pentes des signaux en réponse à un échelon pour l'étage d'attaque, puis les pentes en entrée et sortie de ligne pour l'étage d'interconnexion. Signalons qu'une modification de la pente du signal à l'entrée de la porte de l'étage d'interconnexion est obtenu en faisant varier les dimensions des transistors constituant l'étage d'attaque. Il s'agira par la suite des grandeurs variables notées W_n et W_p [27].

Nous savons, par ailleurs, que la forme réelle des signaux en entrée de ligne ont une influence sur les caractéristiques temporelles des lignes d'interconnexion. Dans ce cas, il est intéressant de considérer le signal réel obtenu directement du buffer afin d'étudier son influence sur le retard lié à la ligne d'interconnexion. Cette possibilité est envisagée et peut être considérée comme une démarche originale[36] au vu des études antérieures. Grâce aux travaux menés au LIRMM de Montpellier, une simulation conduite sous la direction de D. Deschacht, permet d'extraire le signal réel à l'entrée de la ligne avec toutes les spécifications issues du fondeur. Ceci permet de prendre en compte l'interaction complexe entre la grille CMOS et la ligne d'interconnexion. Il est important de remarquer que ce signal récupéré en sortie du buffer n'est pas linéaire mais présente une forme qui s'apparente à l'exponentielle classique. Il est donc intéressant d'analyser l'influence de cette forme de signal sur les caractéristiques temporelles du circuit.

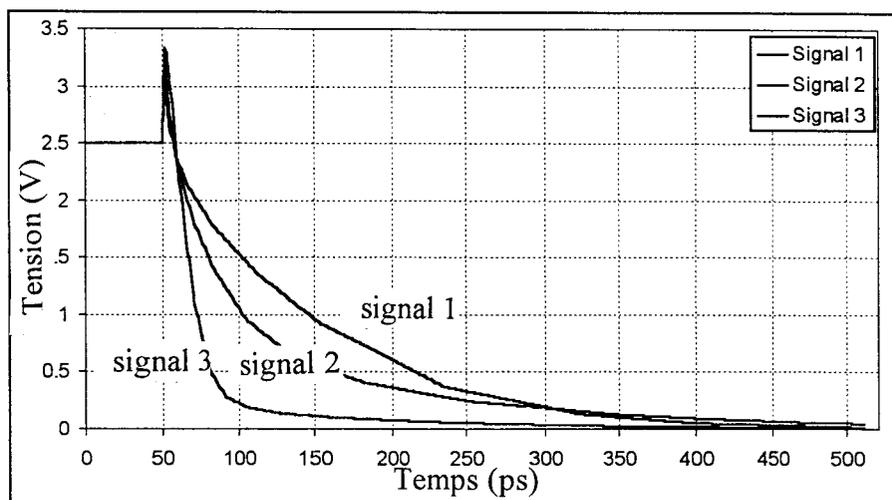


Figure III-40: Représentation temporel des signaux réels d'entrée.

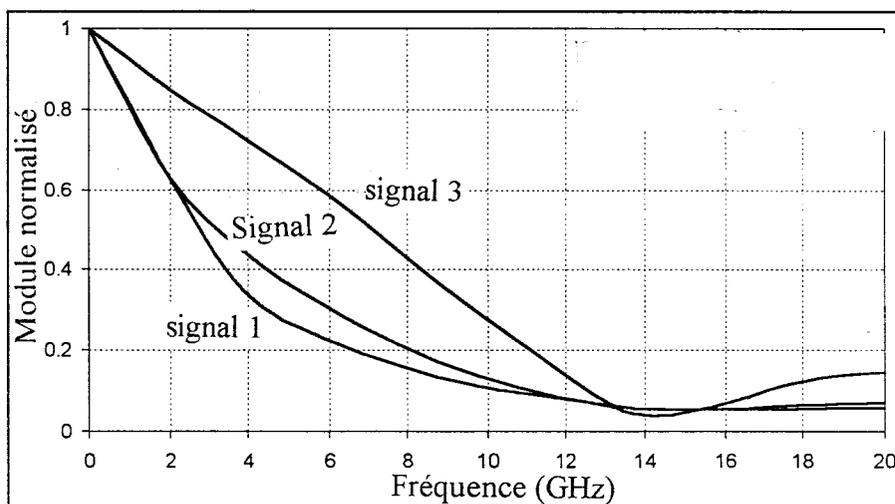


Figure III-41: Représentation des signaux d'entrée dans le domaine fréquentiel.

Quelle que soit l'allure du signal injecté au niveau de cette connexion, il est nécessaire de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel pour effectuer l'analyse électromagnétique. L'utilisation de la transformée rapide de Fourier permet d'y parvenir, moyennant quelques précautions pour minimiser l'erreur due à cette transformation.

Il est clair que le spectre du signal peut, compte tenu des temps de montée très bref, être très riche. Cela nécessite par conséquent la détermination des paramètres électromagnétiques de la ligne d'interconnexion sur une très large plage de fréquences dans le diagramme de dispersion. Toutefois, des composantes spectrales du signal possèdent une contribution négligeable comparées à d'autres. Cela implique qu'une troncature du spectre est envisageable dès lors que l'on estime le signal correctement reconstitué par transformée inverse. En définitive, tout le problème consiste à déterminer une fréquence maximale qui s'apparente à la fréquence de coupure d'un filtre passe-bas. Cette phase préliminaire est cruciale car, comme nous l'avons compris, limiter l'encombrement spectral réduit dans le même temps la plage d'étude dans le diagramme $\omega = f(\beta)$. Ceci est souhaitable, voire indispensable, compte tenu du temps de calcul requis pour l'obtention d'un couple ω_i, β_i . A titre d'exemple nous avons reporté figure III-40 des formes réelles de signaux d'attaque de lignes d'interconnexion. Celles-ci nous été fournies par l'équipe du LIRMM et correspondent à des dimensionnement de buffer variable[37][38]. Notons à ce propos, que les temps de commutations définis lors de transition pour l'amplitude de 0.2 à 0.8 fois la tension d'alimentation sont, eux aussi, variables grâce au dimensionnement des buffers. Le calcul de la transformée de Fourier des signaux représentés figure III-40 dans le domaine temporel, nous permet de reproduire figure III-41 leurs évolutions dans le domaine fréquentiel. La valeur des composantes est normalisée pour permettre une comparaison des spectres des différents signaux.

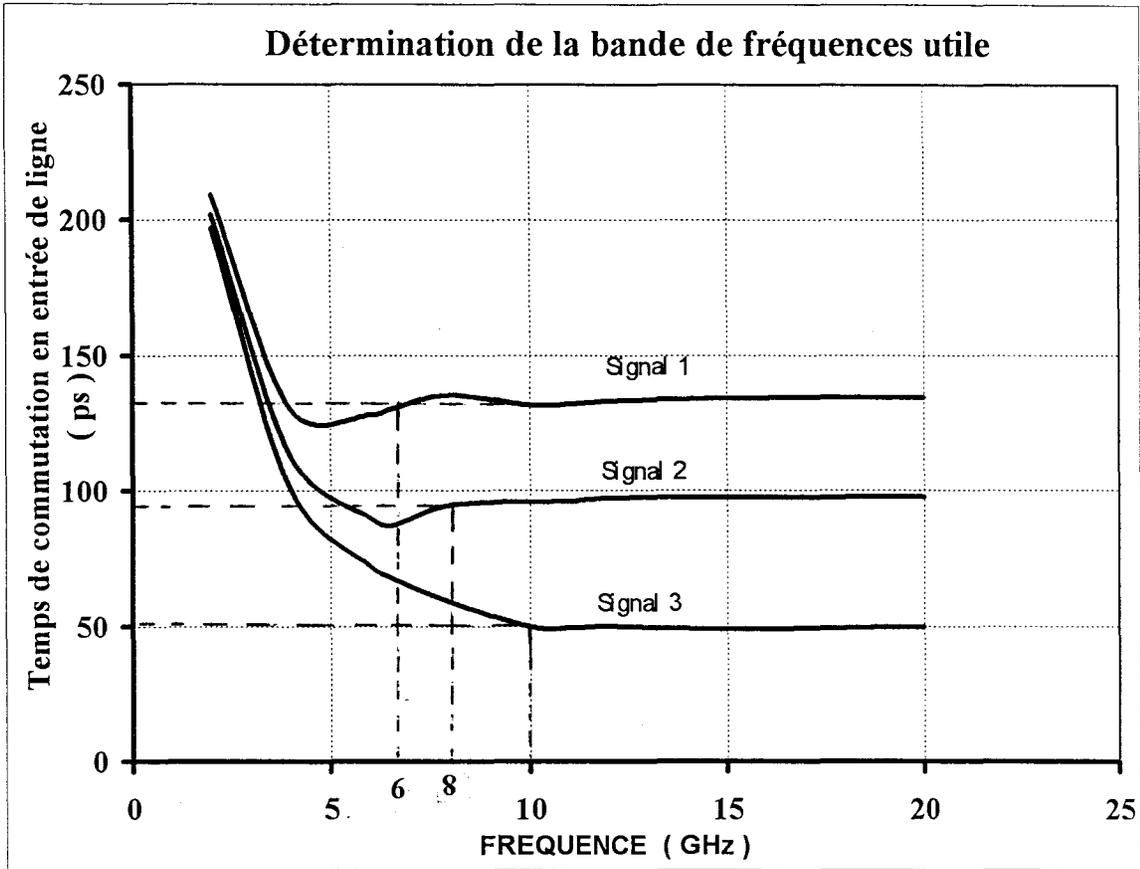


Figure III-42 : Variation du temps de commutation en fonction de la fréquence retenue.

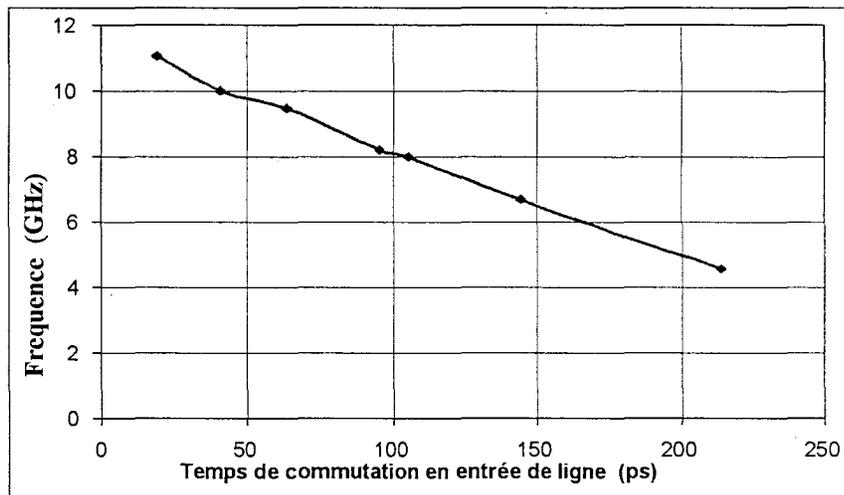


Figure III-43: Variation de la bande utile en fonction du temps de commutation en entrée de ligne.

Il est bien évident que l'encombrement spectral croît lorsque le temps de montée diminue. Tout le problème consiste désormais à définir la fréquence maximale à partir de laquelle nous allons tronquer les spectres de ces trois signaux. On pourrait opter pour une définition énergétique spécifiant, par exemple, la fréquence du dernier harmonique permettant de reconstituer 99% de la puissance du signal. Pour l'étude des interconnexions, le temps de commutation du signal est un paramètre majeur. En conséquence, la fréquence de troncature est estimée à partir de l'évolution du temps de commutation reconstituée par transformée inverse en fonction de la fréquence figure III-42. Les valeurs minimales de fréquences à partir desquelles nous obtenons un temps de commutation pratiquement stabilisé sont respectivement 6, 8, et 10GHz. Ces valeurs affectées aux spectres calculés figure III-41 montrent que l'amplitude normalisée avoisine la valeur 0.2 dans les trois cas de figure[38].

En traçant la variation de cette bande de fréquences utile en fonction du temps de commutation à l'entrée de la ligne, on observe une variation quasi linéaire de l'évolution figure III-43. Cette bande utile est déterminée, souvenons nous, par la fréquence pour laquelle le module normalisé du spectre vaut 0.2. Par souci de clarté, le temps de commutation en entrée de la ligne s'écrit TCE . Ainsi, la droite figure III-43 admet pour expression approchée :

$$F(\text{GHz}) = -3.33 \cdot 10^9 \text{ TCE} + 11.51 \cdot 10^9 \quad \text{Eq-III.8}$$

III.3.2.3.3 L'analyse électromagnétique : analyse fréquentielle du circuit incluant les charges à l'entrée et en sortie de la ligne d'interconnexion

Cette analyse repose sur le calcul du signal en sortie de ligne pour un signal d'entrée de forme quelconque. Nous retiendrons, pour le besoin de cette analyse, un signal d'entrée de forme exponentielle, car il correspond à la forme réelle du signal issu du buffer.

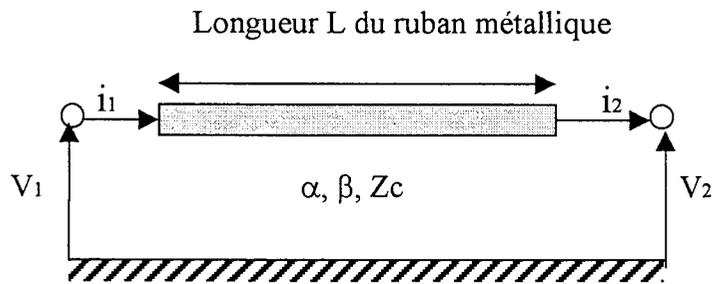


Figure III-44.a : Quadripôle « ligne d'interconnexion »

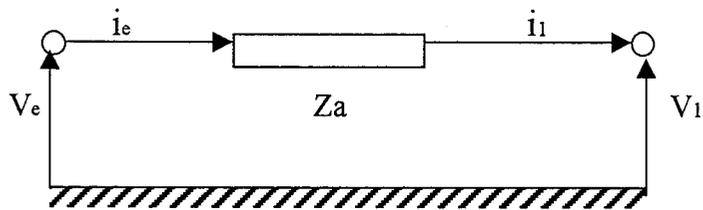


Figure III-44.b : Quadripôle « impédance en entrée de ligne »

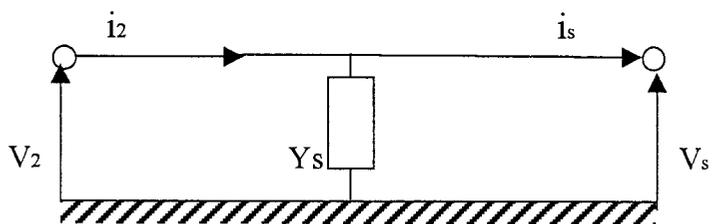


Figure III-44.c : Quadripôle « impédance en sortie de ligne »

L'étape précédente de notre analyse électromagnétique, a montré l'intérêt de limiter la bande de fréquence dans laquelle le signal d'attaque est correctement représenté. En conséquence, le spectre du signal de sortie doit être exprimé dans cette même bande utile.

A présent, calculons l'expression littérale liant le signal en sortie de ligne lorsque celle-ci est chargée en entrée et en sortie par des impédances liées aux portes logiques. Pour cela, la ligne d'interconnexion est décrite par sa matrice de chaîne. Il en est de même pour les charges en entrée et en sortie. Sur la figure III-44.a, la ligne d'interconnexion est caractérisée par ses paramètres électromagnétiques $\alpha(f)$, $\beta(f)$ et $Z_c(f)$. La matrice de chaîne pour cette ligne s'écrit :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma.L) & Z_c \sinh(\gamma.L) \\ \frac{\sinh(\gamma.L)}{Z_c} & \cosh(\gamma.L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \gamma = \alpha + j\beta \quad \text{Eq-III-9}$$

Nous représentons également aux figures III-44.b et III-44.c les quadripôles affectés à la description des impédances d'entrée et de sortie de la ligne, dans le cadre du formalisme de la matrice chaîne. Les matrices de chaîne des quadripôles pour les impédances en entrée et en sortie de ligne sont respectivement Eq-III-10 et Eq-III-11 :

$$\begin{bmatrix} V_e \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq-III-10}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ i_s \end{bmatrix} \quad \text{Eq-III-11}$$

La mise en cascade de ces trois quadripôles permet de déterminer la tension en sortie de ligne en fonction de celle appliquée en entrée. Nous obtenons après calcul :

$$V_s = \frac{V_e}{\cosh(\gamma.L) + Z_a \frac{\sinh(\gamma.L)}{Z_c} + Y_s(Z_c \sinh(\gamma.L) + Z_c \cosh(\gamma.L))} \quad \text{Eq-III-12}$$

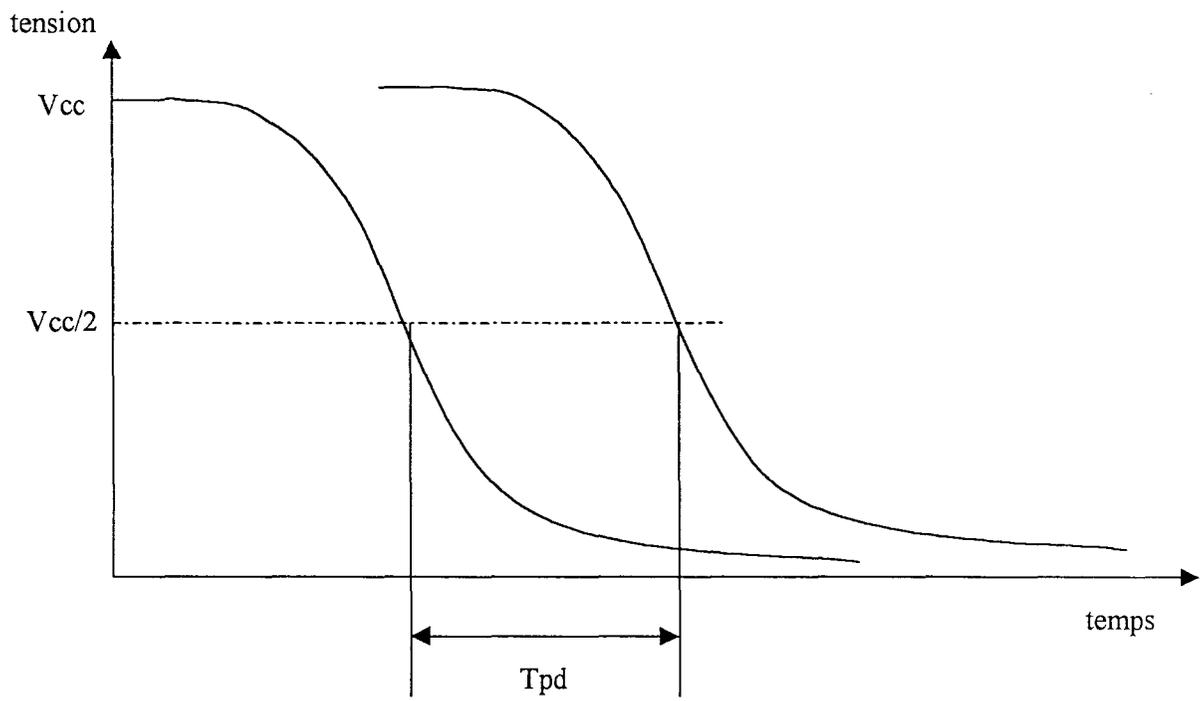


Figure III-45.a : Définition du temps de propagation pour les signaux à front descendant T_{pd}

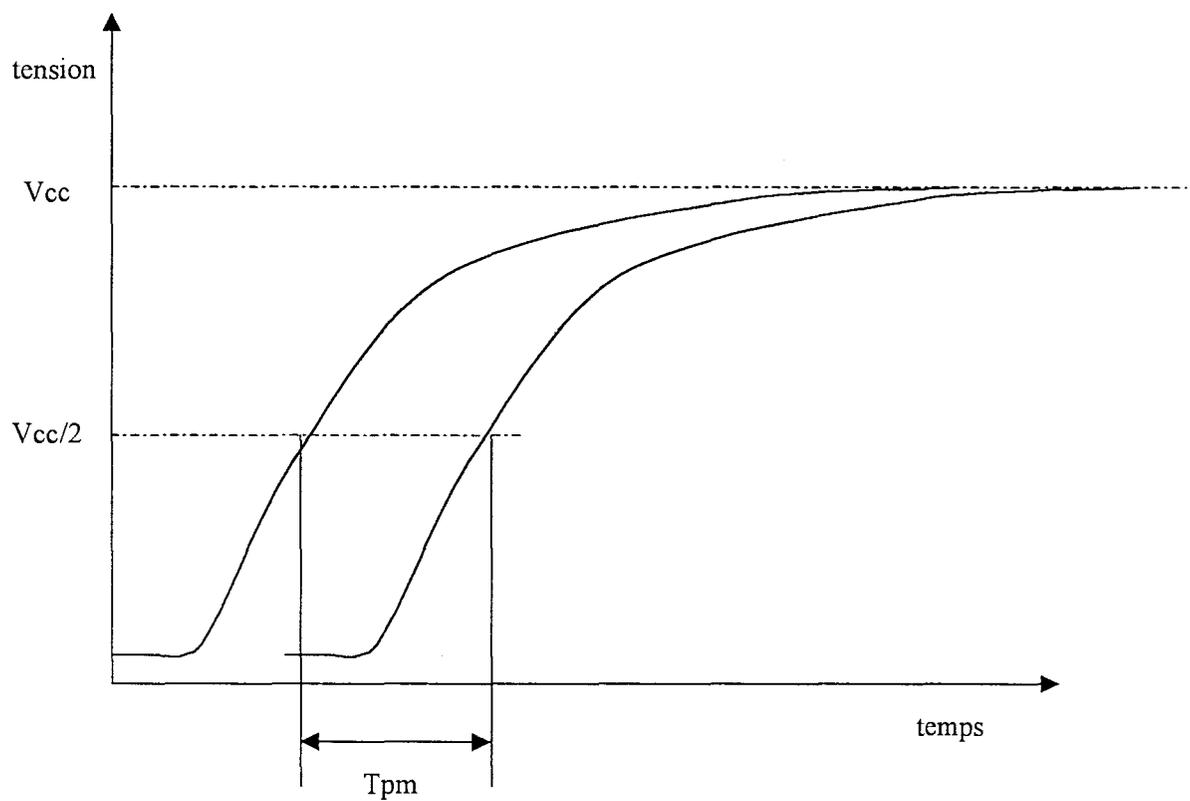


Figure III-45.b : Définition du temps de propagation pour les signaux à front montant T_{pm}

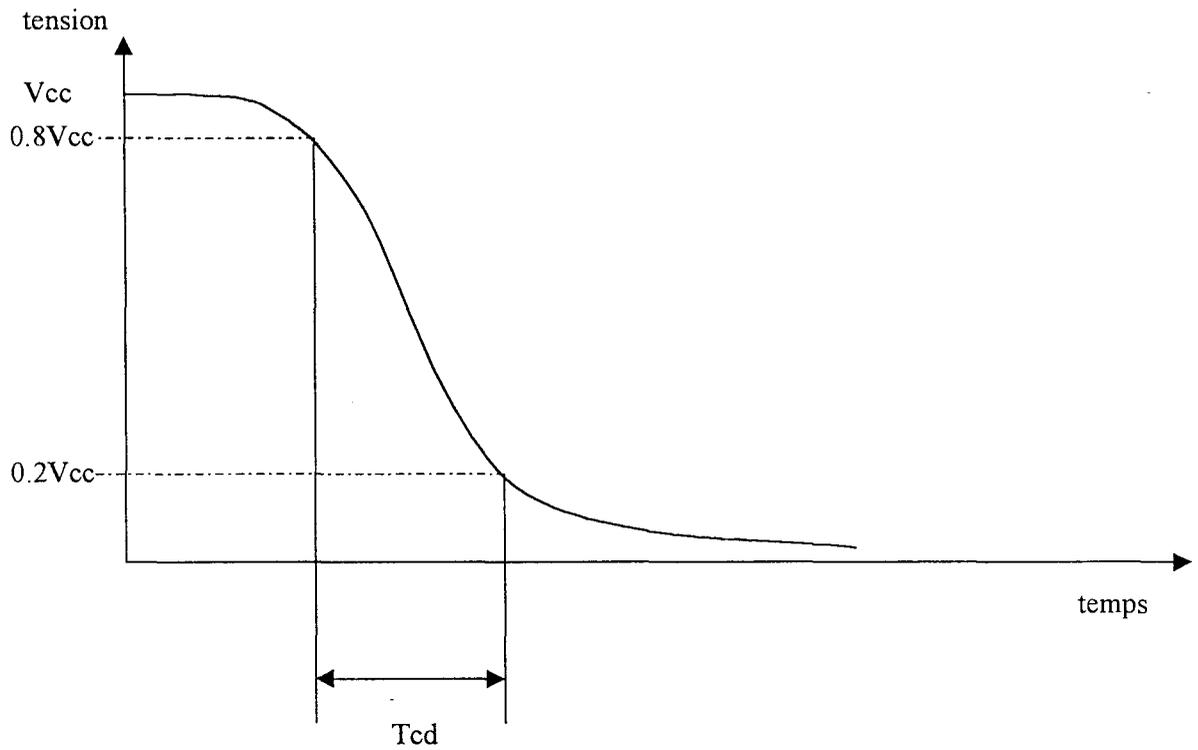


Figure III-46.a : Définition du temps de commutation pour les signaux à front descendant T_{cd}

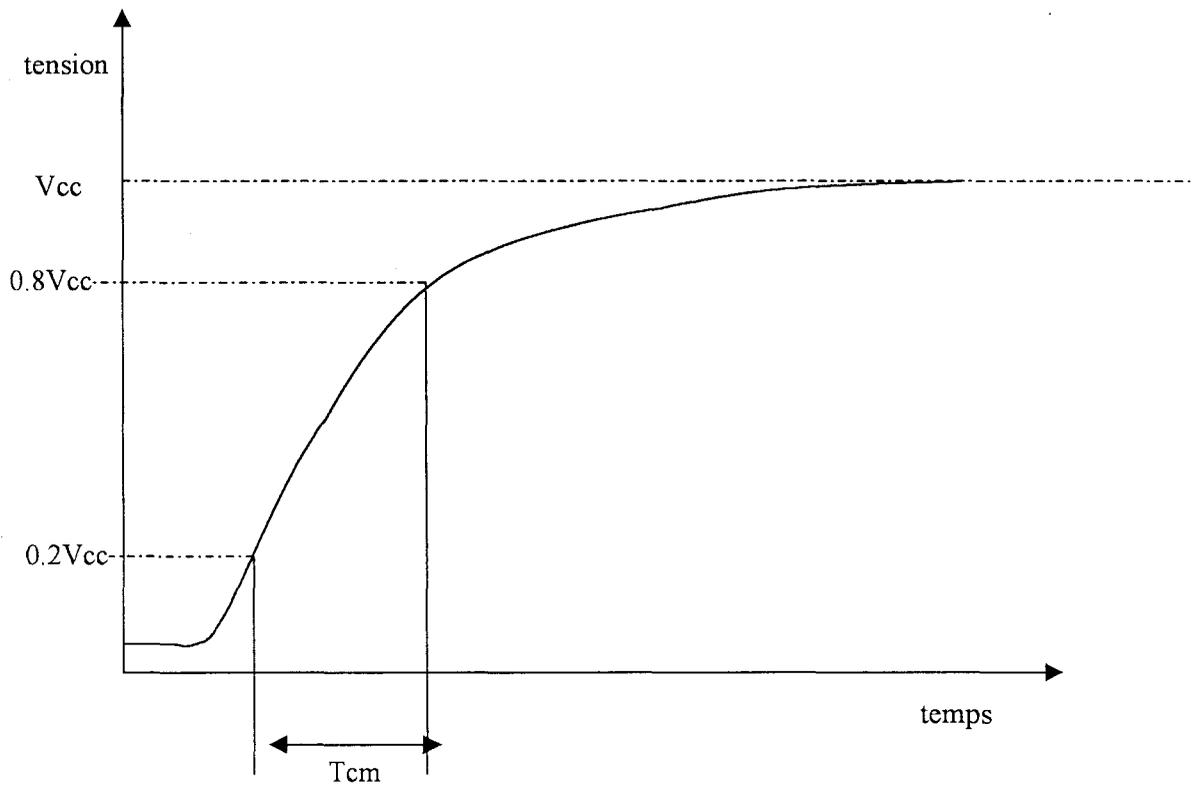


Figure III-46.b : Définition du temps de commutation pour des signaux à front montant T_{cm}

Cette expression nous permet d'accéder au signal en sortie de ligne dans le domaine fréquentiel. Puisqu'il s'agit d'effectuer une analyse temporelle, ce signal doit être converti dans le domaine temporel. Le paragraphe qui suit décrit la procédure utilisée.

III.3.2.3.4 L'analyse électromagnétique : détermination du signal en sortie de ligne dans le domaine temporel

Nous appliquons la transformée inverse de Fourier au signal de sortie $V_s(f)$ pour obtenir la réponse de ligne d'interconnexion dans le domaine temporel.

L'ultime étape de cette analyse électromagnétique, concerne l'évaluation des caractéristiques temporelles du circuit et l'influence de l'interconnexion sur ces caractéristiques.

III.3.2.3.5 L'analyse électromagnétique : calcul des caractéristiques temporelles, retard de propagation et temps de commutation

Ces paramètres sont importants. Ils permettent d'évaluer les performances des circuits logiques VLSI. On distingue :

- **Le retard de propagation** de la ligne. Ce dernier est défini tant pour des signaux à front montant qu'à front descendant. Il s'agit respectivement des grandeurs T_{pm} et T_{pd} . Ce retard se définit comme le temps de passage à mi-tension d'alimentation en sortie de ligne auquel on retranche le temps de passage à mi-tension en entrée de ligne figure III-45.
- **Le temps de commutation** en sortie de ligne pour des signaux à front montant et descendant respectivement T_{cm} et T_{cd} . Ce temps de commutation correspond au passage, pour le signal, de 0.8 à 0.2 fois la tension d'alimentation V_{cc} figure III-46.

III.3.3 Quelques résultats issus de l'analyse électromagnétique des interconnexions

III.3.3.1 Comparaison avec le modèle électrique distribué RC pour une interconnexion de section $0.18\mu\text{m}^2$

Rappelons que, jusqu'à présent, il est vérifié et prouvé que le modèle RC distribué permet d'analyser les caractéristiques temporelles des interconnexions traditionnelles. Dans un premier temps, nous confrontons les résultats de l'analyse électromagnétique éléments finis (EM) avec ceux provenant du logiciel de simulation électrique Eldo; simulation électrique effectuée au LIRMM. Nous comparons d'une part le retard introduit par la ligne d'interconnexion en présence de signaux réels dans les circuits VLSI, et d'autre part, le temps de commutation. Cette comparaison est, bien entendu, effectuée pour les deux modélisations. La dégradation du signal en sortie d'interconnexion clôt cette étude. Notons que cette dégradation est traduite par la variation du temps de commutation en sortie par rapport à celui en entrée de l'interconnexion.

Nous retenons pour les besoins de cette étude, l'interconnexion définie figure III-37 où nous considérons un ruban métallique d'aluminium de section $0.18\mu\text{m}^2$ soit $0.6\mu\text{m}\times 0.3\mu\text{m}$. Dans un premier temps, par souci de clarté, nous choisissons de présenter les résultats obtenus conjointement par D. Deschacht et G. Servel (LIRMM) et l'équipe électromagnétisme sans les commenter. Nous indiquons dans la colonne « erreur » des tableaux de valeurs, l'écart relatif exprimé en pourcentage entre les deux analyses. Nos remarques conclurons ensuite cette première partie.

- Le retard de propagation

Nous avons déterminé le retard introduit par une interconnexion de longueur 5mm pour une transition montante T_{pm} et descendante T_{pd} d'un signal réel appliqué en entrée de ligne,

Taille de la porte	Tpm (ps) (eldo)	Tpm (ps) (EM)	erreur (%)	Tpd (ps) (eldo)	Tpd (ps) (EM)	erreur (%)
Wn=5μm Wp=10μm	229.5	223	2.9	238	232	2.6
Wn=7.5μm Wp=15μm	213	208.9	2.0	224.8	218	3.1
Wn=10μm Wp=20μm	199.8	198	0.9	213.7	212	0.8
Wn=15μm Wp=30μm	189	184	2.7	194.5	194.4	0.1
Wn=20μm Wp=40μm	179	169.5	5.6	183.9	187	-1.7

Figure III-47 : Comparaison des temps de propagation pour différentes dimensions du buffer

Taille de la porte	Tcd (ps) (eldo)	Tcd (ps) (EM)	erreur (%)	Tcm (ps) (eldo)	Tcm (ps) (EM)	erreur (%)
Wn=5μm Wp=10μm	416	410.9	1.2	473	463	2.2
Wn=7.5μm Wp=15μm	341	336	1.5	385	375	2.7
Wn=10μm Wp=20μm	309.6	304	1.8	343	333	3.0
Wn=15μm Wp=30μm	281.5	279.2	0.8	304	304.1	0.0
Wn=20μm Wp=40μm	270	265	1.9	287.5	279	3.0

Figure III-48 : Comparaison des temps de commutation pour différentes dimensions du buffer

Longueur de la ligne	Tpm (ps) (eldo)	Tpm (ps) (EM)	erreur (%)	Tpd (ps) (eldo)	tpd (ps) (EM)	erreur (%)
L=5mm	183.9	179	2.7	189	187	1.1
L=10mm	665	682	-2.5	686	705.5	-2.8
L=15mm	1483	1486	-0.2	1452	1428	1.7

Figure III-49 : Retard de propagation pour différentes longueurs de la ligne

Longueur de la ligne	Tcd(ps) (eldo)	Tcd(ps) (EM)	erreur (%)	Tcm (ps) (eldo)	Tcm(ps) (EM)	erreur (%)
L=5mm	270	265	1.9	287.5	279	3.0
L=10mm	988	1031	-4.2	1022	1079	-5.3
L=15mm	2169	2203	-1.5	2228	2102	6.0

Figure III-50 : Temps de commutation pour différentes longueurs de la ligne

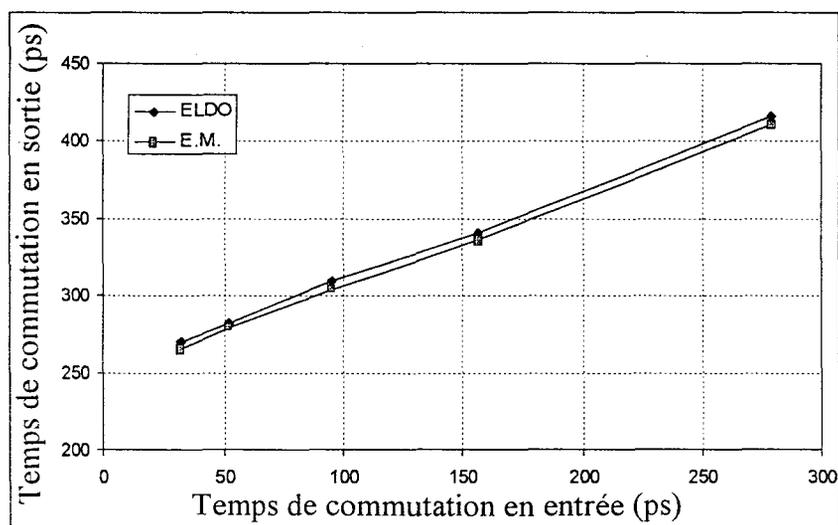


Figure III-51 : Comparaison entre simulation EM et modèle RC(LIRMM) sur la dégradation du signal

la ligne étant fermée sur une capacité d'entrée d'une porte logique. Ces résultats sont donnés dans le tableau figure III-47[38]. Dans la première colonne de ce tableau sont répertoriées les dimensions du buffer d'attaque. Elles correspondent aux tailles des transistors dont un modèle est fourni par le fondeur et utilisé au LIRMM. Pour le néophyte, il faut savoir que ces valeurs ont une incidence sur les conditions de charge et le temps de commutation en entrée de la ligne. Faire varier la taille de la porte revient à modifier charge et pentes des signaux d'attaque. Typiquement, le temps de commutation en entrée varie de 30 à 270 ps pour la transition descendante.

- Les temps de commutation en sortie

Pour différentes conditions d'attaque et par conséquent, du temps en entrée, nous avons reporté figure III-48 les temps de commutation en sortie résultant de l'étude électrique(Eldo) et électromagnétique (EM), et ce, pour une ligne de longueur 5mm.

- Cas de lignes de longueur différentes

Dans le même esprit, les tableaux figures III-49 et 50 répertorient l'ensemble des valeurs des retards de propagation et temps de commutation pour une même charge, mais pour trois lignes de longueur différentes.

- Dégradation du signal de sortie

Enfin, la figure III-51 retrace la dégradation du signal de sortie à l'issue de la propagation d'une impulsion au travers d'une ligne de longueur 5mm.

Nos conclusions sur ces relevés s'articulent sur deux axes.

Le premier concerne tout d'abord le temps calcul requis pour obtenir en sortie de ligne, une réponse à une excitation en entrée. Il est, pour l'analyse électromagnétique, de l'ordre de grandeur du temps de calcul nécessaire à la détermination de tous les paramètres

électromagnétiques par notre code de calcul éléments finis, et ce, dans la bande de fréquences utile. Ce temps est, pour chaque point de fréquence, de l'ordre de la demi-heure.

Le deuxième point concerne le bon accord entre les deux approches. A ce stade plusieurs interprétations sont possibles.

Il nous fallait un point de repère pour valider notre démarche. Nous pouvons dire que cette validation est effectuée même si un modèle est utilisé pour comparer l'analyse électromagnétique. Rappelons, malgré tout, que le modèle électrique Π RC a montré son efficacité et qu'il n'est pas contesté pour l'interconnexion de section $0.18\mu\text{m}^2$ étudiée dans ce mémoire. L'analyse électromagnétique est une analyse exacte. Le seul caractère approché de l'étude réside dans la troncature du spectre du signal, bien que nous nous soyons donné une marge de sécurité.

III.3.3.2 Modèle RC et Modèle RLC

Nous venons de constater, dans les tableaux présentés figures III-47, 48, que l'erreur liée à la prédiction des temps de propagation et de commutation par l'analyse électrique (Eldo) et électromagnétique (EM) est faible. Remarquons toutefois que le désaccord semble croître, même s'il est faible, lorsque la taille du buffer augmente, ou encore, lorsque le temps de commutation appliqué à l'entrée de l'interconnexion diminue. Il est clair que cette tendance demande à être confirmée. On notera toutefois que dans la cinquième version de dimensions de porte ($W_n=20\mu\text{m}$, $W_p=40\mu\text{m}$ tableau figure III-47, 48), les écarts 5,6%, 1,7%, 2%, et 3% sont les plus importants. Ils correspondent à des signaux d'entrée possédant les plus faibles temps de commutation, et par conséquent l'encombrement spectral le plus conséquent.

La question que l'on doit se poser, à ce niveau, concerne l'opportunité d'introduire ou non une composante selfique au niveau du schéma distribué électrique RC. La réponse

est a priori négative puisque l'analyse approchée (π RC) et l'analyse électromagnétique (EM) concordent. Seule une étude plus approfondie nous apportera quelques éclaircissements.

Compte tenu de la nature rigoureuse de l'analyse électromagnétique, nous pouvons escompter qu'elle nous fournisse précisément les trois composantes RLC du schéma distribué de l'interconnexion. Insistons sur le fait que notre analyse électromagnétique n'utilise pas ces éléments. Le calcul est direct. Néanmoins, la connaissance de ces valeurs peut être fortement utile dans la mesure où on utilise un logiciel comme SPICE pour déterminer la réponse dans le domaine temporel d'un signal d'entrée. Pour notre part, seule l'inductance nous intéresse dans un premier temps, les valeurs de R et C du schéma électrique étant déterminés par les chercheurs du LIRMM.

Ainsi, par analogie avec les lignes de transmission, nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + jL\omega)jC\omega} \quad Z_c = \sqrt{\frac{R + jL\omega}{jC\omega}} \quad \text{Eq-III.13}$$

Dans ces relations, la constante de propagation complexe γ et l'impédance caractéristique Z_c sont déterminées par notre code de calcul éléments finis à éléments d'arêtes. Quant aux termes $R+jL\omega$ et $1/jC\omega$, ils représentent respectivement les composantes série et parallèle du schéma de type ligne de transmission figure III-52.

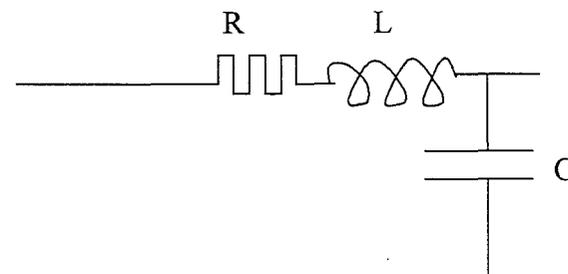


Figure III-52 : Schéma type ligne de transmission

Pour l'interconnexion de section $0.18\mu\text{m}^2$ étudiée dans ce mémoire, nous déterminons une valeur d'inductance linéique de 4.8nH/cm . Cette valeur est constante dans toute la bande de fréquences étudiées qui s'étend jusqu'à 30GHz .

Effectuons par exemple le calcul de l'impédance de cette inductance à la fréquence 10GHz . Une valeur voisine de 300Ω est obtenue. Cette valeur comparée à celle de la résistance $R=1680\Omega$ du schéma électrique RC calculée par l'équipe du LIRMM n'est pas encore significative pour fausser les résultats de la simulation électrique RC, bien qu'elle représente le $1/5$ de la valeur de la résistance.

Notons que l'impédance de la self a été calculée à 10GHz . Cette fréquence n'a pas été choisie au hasard. Elle correspond à la fréquence de troncature du spectre permettant la reconstitution par transformée inverse d'un signal dont le temps de commutation est de l'ordre de 50ps en entrée de la ligne. Il s'agit par exemple du signal 3 figure III-42. Nous rappelons, qu'à cette fréquence la contribution dans le spectre figure III-41 est de l'ordre de $0,2$. Ainsi, on comprend mieux la raison pour laquelle l'analyse électromagnétique et l'analyse électrique « RC » fournissent des résultats similaires. L'influence de l'inductance de l'interconnexion n'est pas encore suffisante tant par sa valeur intrinsèque de 300Ω que par la fréquence de 10GHz choisie pour effectuer les calculs, fréquence correspondant à la contribution minimale ($0,2$ sur le module normalisé) mais nécessaire dans le spectre de reconstitution du temps de commutation de l'impulsion.

A ce niveau de notre étude, il semble que deux voies distinctes peuvent être empruntées.

- La première consiste à poursuivre les travaux conjoints des équipes du LIRMM et de l'IEMN sur la technologie $0.25\mu\text{m}$ tout en se cantonnant aux lignes de section $0.18\mu\text{m}^2$.

Dans ce cas, pour que l'inductance de la ligne ait une influence significative, il est

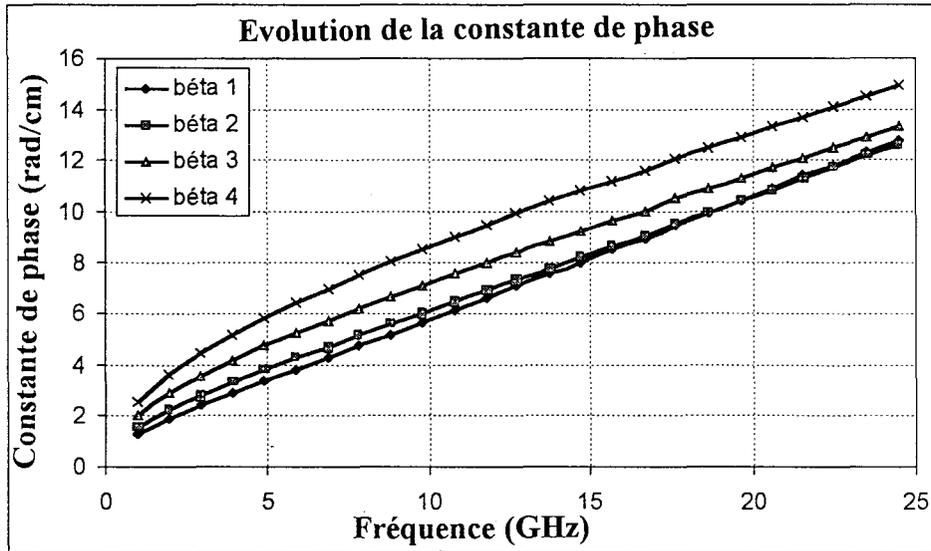


Figure III-54.a : Constante de phase des lignes d'interconnexion en technologie 0.25 μ m

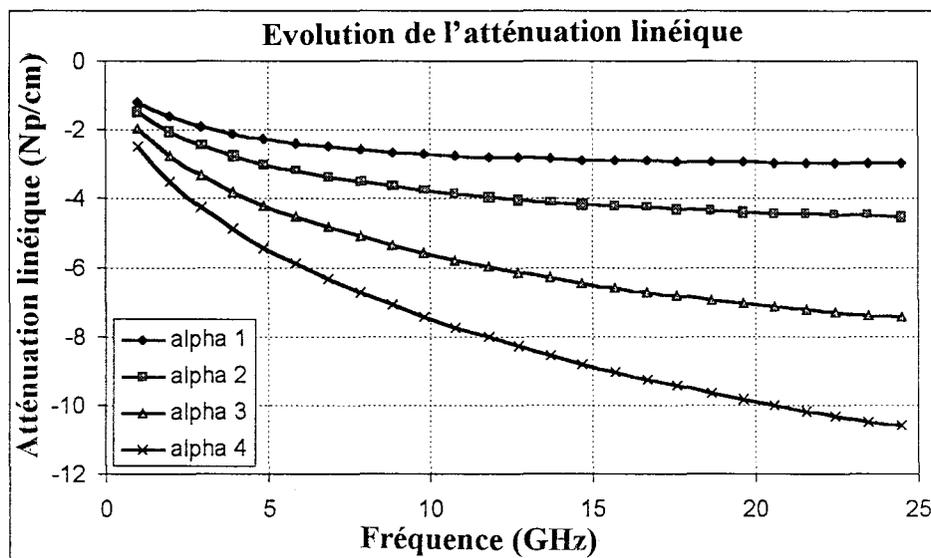


Figure III-54.b : Atténuation linéique des lignes d'interconnexion en technologie 0.25 μ m

nécessaire d'accroître la fréquence maximale d'étude. Typiquement, l'impédance de l'inductance est égale à la résistance du modèle RC pour une fréquence de l'ordre de 55GHz. Cela implique aussi que le temps de commutation soit très bref. Il peut être de ce fait incompatible avec la technologie 0.25µm.

- La seconde voie, plus intéressante à notre sens, concerne toujours la technologie 0.25µm, mais pour des niveaux de métallisation différents. La figure III-53 ci dessous répertorie les dimensions des rubans relatifs à ses divers niveaux.

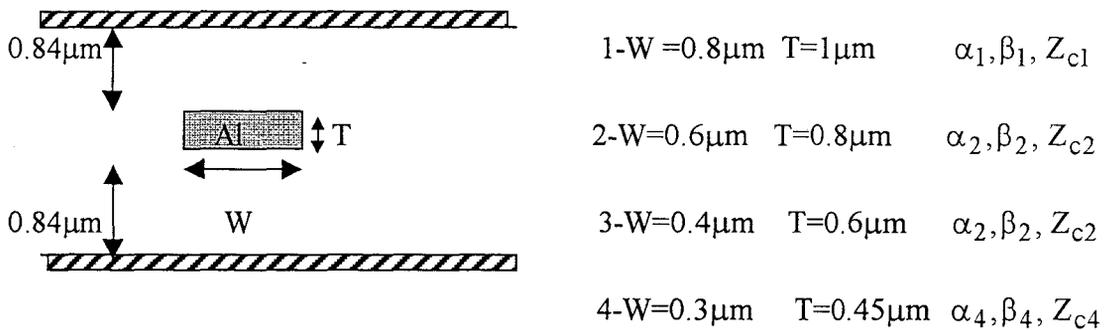


Figure III-53 : Géométrie de différents niveaux de métallisation de la technologie 0.25µm

Comme on peut le remarquer, les sections des métallisations évoluent de $0.8\mu\text{m}^2$ à $0.135\mu\text{m}^2$. Du point de vue physique, nous espérons déceler l'influence de l'inductance de la ligne pour des sections de rubans plus importantes. En effet, les pertes liées à la nature dissipative de la connexion doivent être plus faibles comme le prédit, du reste, les évolutions théoriques figure III-54 obtenues par éléments finis de la constante de propagation $\gamma = \alpha + j\beta$ des lignes 1-2-3-4 figure III-53. La résistance du modèle électrique RC va donc décroître lorsque la section des interconnexions augmentera, et ce bien entendu, à valeur de conductivité constante.

Taille de la porte	Tpd (ps) (eldo)	Tpd (ps) (EM)	Erreur (%)	Tcd (ps) (eldo)	Tcd (ps) (EM)	Erreur (%)
Wn=10μm Wp=20μm	68.13	63.9	6.6	226	216.8	4.2
Wn=15μm Wp=30μm	70.39	66	6.7	170	151.5	12.2
Wn=20μm Wp=40μm	68.82	67.6	1.8	135.2	119.1	13.5
Wn=25μm Wp=50μm	65.9	66.8	-1.3	120.5	101.8	18.4
Wn=30μm Wp=60μm	66.77	66	1.2	112	90.2	24.2

Figure III-55 : Comparaison des temps de propagation Tpd et de commutation Tcd pour différents dimensionnements du buffer pour la transition descendante, et ce, pour une connexion de section $0.8 \mu\text{m}^2$.

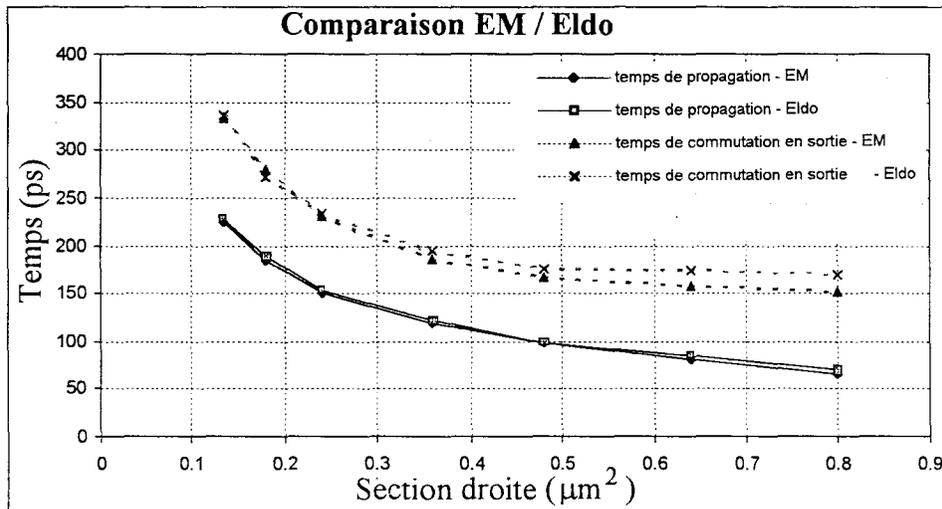


Figure III-56 : Comparaison entre analyse électrique (Eldo-LIRMM) et électromagnétique (EM-IEMN) des performances temporelles en fonction de la section de la ligne

Afin de justifier la nécessité de définir un modèle incorporant l'effet inductif, nous devons définir un ou des critères à partir desquels nous considérons qu'un désaccord entre les analyses π « RC » électrique et électromagnétique n'est plus acceptable. Ceci ne peut être effectué que si la comparaison des performances conjointes de chaque logiciel (Eldo et EM) est effectuée. Bien évidemment, cette confrontation des résultats concerne tous les niveaux de métallisation, et ce, pour le plus grand nombre de condition de charge et, par voie de conséquence, de temps de commutation. Cette étude très lourde est effectuée au LIRMM par D. Deschacht et G. Servel. Pour notre part, et dans le but d'alimenter de futures discussions, nous nous contentons de reprendre des résultats déjà dépouillés[38].

Ainsi, le tableau figure III-55 retrace le comportement du retard de propagation et du temps de commutation pour une connexion de section $0.8 \mu\text{m}^2$ en aluminium et de longueur 5mm, et ce, pour différentes tailles du buffer donc pour des temps de commutation variables. Au vu des résultats issus des analyses « Eldo » et « EM », force est de constater que les conditions de charge variables ont une incidence raisonnable voire faible sur l'écart relatif lié aux deux analyses pour le temps de propagation. En revanche, le désaccord entre l'analyse électrique π RC et électromagnétique sur la prédiction du temps de commutation est important. Ce désaccord croît lorsque le temps de commutation diminue. Il atteint une valeur maximale de 25% dans notre tableau.

Dans le même esprit, temps de propagation et temps de commutation ont été reportés pour sept sections différentes d'interconnexion en aluminium, et ce, pour la configuration suivante de buffer : $W_n=15\mu\text{m}$ $W_p=30\mu\text{m}$, figure III-56. Comme on peut le constater, le retard de propagation semble peu affecté, en revanche, il faut noter un désaccord d'environ 12% pour le temps de commutation en sortie (sur le front descendant) pour l'interconnexion de

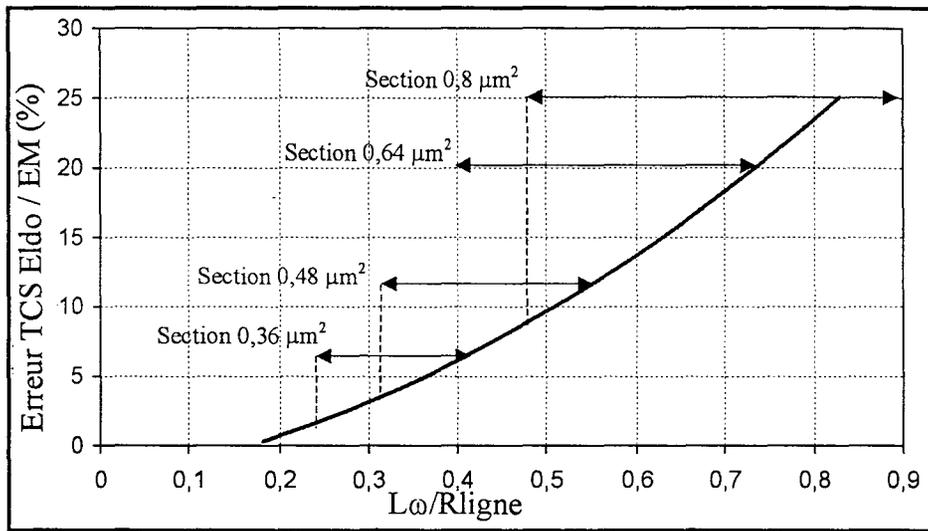


Figure III-57 : Plage du désaccord en fonction de la section pour des lignes en aluminium

section $0.8 \mu\text{m}^2$. Ce résultat est, du reste, déjà reporté à la troisième ligne du tableau figure III-55.

III.3.4 Conclusion

Pour conclure, la figure III-57 regroupe les plages d'erreur consécutive à la détermination du temps de commutation en sortie (TCS) d'interconnexion pour le modèle électrique π RC en fonction de l'importance de l'inductance par le biais du quotient $L\omega/R$.

- La valeur relative du désaccord obtenu en comparant conjointement le temps de commutation en sortie de ligne ($L=5\text{mm}$) pour l'analyse électrique et électromagnétique est reportée en ordonnée.
- En abscisse apparaît le quotient $L\omega/R$. L'inductance L est commune à toutes les sections d'interconnexions et vaut en moyenne 5nH/cm . Elle est déterminée grâce à notre code de calcul éléments finis. La pulsation ω correspond à la valeur minimale permettant la reconstitution correcte du temps de commutation du signal appliquée à l'entrée de l'interconnexion. Cette valeur de pulsation est variable en fonction des dimensions du buffer ou de l'étage d'attaque comme nous l'avons maintes fois signalé.

Faire varier ces dimensions permet de faire évoluer le terme $L\omega$ et par voie de conséquent le quotient $L\omega/R$. Ce quotient évolue pour chaque section de ligne ainsi que le pourcentage d'erreur correspondant. Ce graphe regroupe, à lui seul, toute l'étude relative aux interconnexions de longueur 5mm réalisés en aluminium. L'interprétation des résultats rejoint nos propos de début de paragraphe.

Si l'on accepte un désaccord maximal de 25% sur le temps de commutation et environ 3% sur le retard de propagation, alors le modèle RC convient pour la description du comportement de l'interconnexion de section $0.8 \mu\text{m}^2$ de la technologie $0.25 \mu\text{m}$. Ceci est

d'ailleurs couramment admis [38]. Par extrapolation, imaginons que la métallisation de section $0.8 \mu\text{m}^2$ soit confectionnée en cuivre dont la conductivité est le double environ de celle de l'aluminium. La résistance du schéma électrique π RC est réduite d'un facteur deux et en conséquence le quotient $L\omega/R$ a doublé. Le pourcentage d'erreur sur le temps de commutation sera bien supérieure au 25% admissible. Le schéma distribué électrique π RC ne peut donc plus être utilisé pour modéliser l'interconnexion de type cuivre. Dans le même esprit, si l'on considère la nature dissipative du substrat, alors qu'il était sans pertes jusqu'à présent, le schéma de l'interconnexion s'en trouve modifié. En effet, il est fort probable qu'une modélisation du type RLCG distribuée soit requise pour traduire les phénomènes. La conductance G représente ici le caractère très faiblement dissipatif du substrat[39].

Les quelques pages de ce manuscrit afférentes aux interconnexions ne peuvent, en aucune manière, traduire l'intégralité des résultats obtenus conjointement par l'équipe de recherche du LIRMM et l'équipe électromagnétisme des circuits de l'IEMN. Notre seul but a consisté à montrer la façon dont, d'une part notre code de calcul intervient dans la définition du modèle RLC d'une interconnexion, et d'autre part, dans la détermination sur le plan temporel des retards de propagation ou de commutation lorsque des signaux réels sont injectés en entrée de ligne.

Il est clair que ce bref aperçu a mis en évidence les limites du modèle traditionnel RC au profit d'un modèle RLC voire RLCG. Le modèle RLC sera d'autant plus présent dans les modélisations que les pertes séries de l'interconnexion seront réduites et la montée en fréquence importante. Ceci montre l'ampleur de la tâche à accomplir sans compter que l'on peut aussi se pencher sur l'étude de deux lignes très proches donc couplées volontairement ou non. Signalons pour terminer, que nous avons peu évoqué le problème des longueurs

d'interconnexions comme du reste l'influence d'un plan de masse non parfait (lignes d'un niveau supérieur ou inférieur) sur les caractéristiques électromagnétiques d'une interconnexion.

Ce manuscrit trouve son aboutissement dans une quatrième partie qui est un peu plus que prospective. Elle a trait à la mise en œuvre d'un code de calcul éléments finis élaboré en trois dimensions.

BIBLIOGRAPHIE du CHAPITRE III

[1] **Bernice M. Dillon and Jon P. Webb :**

« A comparison of formulations for the vector finite element analysis of waveguides »

IEEE trans on MTT, vol 42, N° 2, pp 308-316, February 1994

[2] **Luis Nuño, Juan V. Balbastre, Héctor Castaña :**

«Analysis of General Lossy Inhomogeneous and Anisotropic waveguides by the finite element method (FEM) Using Edge Elements»

IEEE trans on MTT, vol 45, N° 3, pp 446-449, March 1997

[3] **Luis Valor and Juan Zapata :**

« Efficient finite element analysis of waveguides with lossy inhomogeneous anisotropic materials characterized by arbitrary permittivity and permeability tensors »

IEEE trans on MTT, vol 43, N° 10, pp 2452-2459, october 1995

[4] **L.P. B. Katehi :**

« Novel Transmission lines for submillimeter-wave region »

Proceeding of the IEEE, vol 80, N° 11, November 1992.

[5] **Kiyomitsu Onodera, Makoto Hirano, Masami Tokumitsu, Ichihiko Toyoda, Kenjiro Nishikawa and Tsuneo Tokumitsu :**

« Folded U-Shaped Microwire Technology for Ultra-Compact Three-Dimensional MMIC's »

IEEE Trans on MTT, vol 44, N° 12, pp 2347-2353, december 1996

[6] **U. Bhattacharya, S. T. Allen and M. J. W. Rodwell :**

« DC-725 GHz Sampling Circuits and Subpicosecond Nonlinear Transmission Lines Using Elevated Coplanar Waveguide »

IEEE Microwave and Guide Wave Letters, vol 5, N° 2, pp 50-52, February 1995

[7] **Patrice Salzenstein :**

« Technologie des composants à hétérostructures pour les têtes de réception par satellite aux longueurs d'ondes millimétriques »

Thèse de Doctorat de l'Université de Lille, 21 novembre 1996

[8] **E. Paleczny :**

« Modélisation des pertes métalliques par la méthode du raccordement des modes : Application aux lignes planaires utilisées en technologie monolithique micro-onde »

Thèse de Doctorat de l'Université de Lille1, septembre 1992

[9] **P. Salzenstein, O. Dupuis, M. Helal, E. Lheurette, O. Vanbésien, P. Mounaix and D. lippens :**

« Coplanar waveguides on dielectric membranes micromachined on a GaAs substrate »

Electronic Letters, vol 32, N° 9, pp 821-822, 25th april 1996

[10] **R. E. Collin :**

« Field theory of guided waves »

Mc Graw-Hill, New-York, 1960

[11] **R. Faraji-Dana, Y. L. Chow :**

« The current distribution and ac resistance of a microstrip structure »

IEEE trans on MTT, vol 38, N° 9, september 1990

[12] **N. I. Dib, W. P. Harokopus, L. P. B. Katehi, C. C ; Ling and G. M. Rebeiz :**

« Study of novel planar transmission lines »

IEEE MTT-S International Symposium Digest 1991.

[13] **Olivier Dupuis :**

« Fabrication et caractérisation de lignes coplanaires sur membranes diélectriques »

DEA Université de Lille, juillet 1995

[14] **D. Nghem, J. T. Williams and D. R. Jackson :**

« A general analysis of propagation along multiple-layer superconducting stripline and microstrip lines »

IEEE trans on MTT, vol 39, N° 9, pp 1553-1565, september 1991

[15] **Didier Kinowski :**

« Etude comparative de l'approche dans le domaine spectral et d'une formulation par éléments finis pour la simulation de dispositifs microondes et optroniques. »

Thèse de Doctorat de l'Université de Lille, 18 décembre 1992

[16] **C. Delabie, Y. Delplanque, P. Pribetich, P. Kennis :**

« Equivalent surface impedance of superconducting and regular strip for moment method analysis of planar circuits »

24th Europ. Microw. Conf. Cannes, 5-6 septembre 1994

[17] **C. Delabie, F. Mehri, D. Chanvel, J. C. Carru, Y. Crosnier, P. Kennis :**

« Impédance de surface équivalente de films supraconducteurs. Application à la caractérisation »

3^{ème} Journée de caractérisation Microondes et Matériaux Brest, 19-23, octobre 1994

[18] **Christophe Delabie :**

« Elaboration d'un simulateur de dispositifs planaires microondes. Application à la caractérisation de matériaux supraconducteurs »

Thèse de Doctorat de l'Université de Lille, 23 septembre 1994

[19] **C. Seguinot, P. Kennis, J. F. Legier, F. Huret, E. Paleczny, L. Hayden :**

« Multimode TRL, a new concept in microwave measurements theory and experimental verification »

IEEE trans on MTT, vol 46, N° 5, pp 536-542, May 1998

[20]] **C. Seguinot, F. Huret, E. Paleczny, J. F. Legier, P. Kennis:**

« A simple reciprocity normalization procedure for the derivation of scattering parameters using electromagnetique simulators »

MOLT, vol 21, N° 1, pp 69-72, Avril 1999

[21] **F. Schnieder, R. Doerner and W. Heinrich :**

« High-Impedance Coplanar Waveguides with Low Attenuation »

IEEE Microwave and Guided Wave Letters, vol 6, N° 3, pp 117-119, March 1996

[22] **Anna Reichelt and Ingo Wolff :**

« Newcoplanar-Like Transmission Lines for Application in Monolithic Integrated Millimeter-wave and submillimeter-wave circuits »

IEEE MTT-S Digest, pp 99-102, 1998

[23] **S. Hofschen and I. Wolff :**

« Simulation of an Elevated Coplanar waveguide using 2-D FDTD »

IEEE Microwave and Guided Wave Letters, vol 6, N° 1, pp 28-30, january 1996

[24] **L.B. Kenmei, L. Kadri, F. Huret, E. Paleczny, J. F. Legier P. Kennis :**

« Ligne coplanaire suspendue : Un nouveau support de propagation pour les applications en gamme millimétrique et submillimétrique »

Journée Nationale Micro-onde, Arcachon France, Mai 1999

[25] **S. M. Sze :**

« Physics of semiconductor devices »

2nd Edition, pp 431-510, 1981

[26] **M. T. Borh :**

« MOS Transistor Scaling and Performance Trends »

Semiconductor International Journal, pp 75-79, june 1995

[27] **Eric Vanier :**

« Caractérisation et optimisation temporelle des interconnexions dans les circuits sub-microniques CMOS »

Thèse de Doctorat de l'université de Montpellier, 1998

[28] **C. Dabrin :**

« Evaluation et optimisation temporelle des interconnexions dans les circuits CMOS »

Thèse de Doctorat de l'Université de Montpellier, avril 1995

[29] **M. T. Borh :**

« Interconnexion Scaling. The real limiter to high performance ULSI »

International Electron Devices Meeting, pp 241-244, december 1995, Washington, USA

[30] **J. Cong et al. :**

« International Design for Deep submicron IC's »

IEEE International conference on computer Aided Design, pp 478-485, november 1997, San Jose, USA

[31] **Semi-conductor Industry Association :**

« The national Technology Roadmap for semi-conductors. Technology Needs » 1997

[32] **Vasant B. Rao :**

« Delay Analysis of the Distributed RC line »

Design Automation Conference, pp 370-375, San Francisco, June 1995

[33] **A. B. Kahngf, K. Masuko and S. Muddu :**

« Analytical Delay models for VLSI Interconnects Under Ramp Input »

International Conference on Computer Aided Design, pp 30-36, november 1996

[34] **T. Sukurai :**

« Approximation of wiring Delay in MOSFET LSI »

IEEE Journal of Solid Stated Circuit, Vol sc-18, N° 4, pp 418-426, august 1983

[35] **S. Delmas et E. Sicard :**

« Sampling Techniques applied to the Characterization of Signal Propagation in Sub-micron Technology »

IEEE Workshop on Signal Propagation on Interconnect, pp 18-23, Mai 1997, Travemünde, Allemagne

[36] **L. B. Kenmei N., F. Huret, E. Paleczny, P. Kennis, G. Servel, D. Deschacht :**

« Input shape influence over interconnect performances »

3rd IEEE Workshop on Signal Propagation on Interconnects, May 19-21, 1999, Titisee-Neustadt, Germany

[37] **L. B. Kenmei , F. Huret, E. Paleczny, P. Kennis, G. Servel, D. Deschacht :**

« Inductance effect for interconnection timing analysis in submicronic circuits »

6th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, September 5-8, 1999, Pafos, CYPRUS

[38] **D. Deschacht :**

« Limites entre modèles RC et RLC par simulations dans les domaines temporel et fréquentiel »

Rapport interne sur l'étude des interconnexions sur circuits VLSI. 1999

[39] **G. Servel, D. Deschacht, F. Huret, L. B. Kenmei, E. Paleczny, P. Kennis :**

« Simulation of Electromagnetic Wave Propagation on VLSI Interconnects »

Design of Circuits and Integrated Systems, DCIS'99, November 16-19, Palma de Mallorca, Spain

CHAPITRE IV

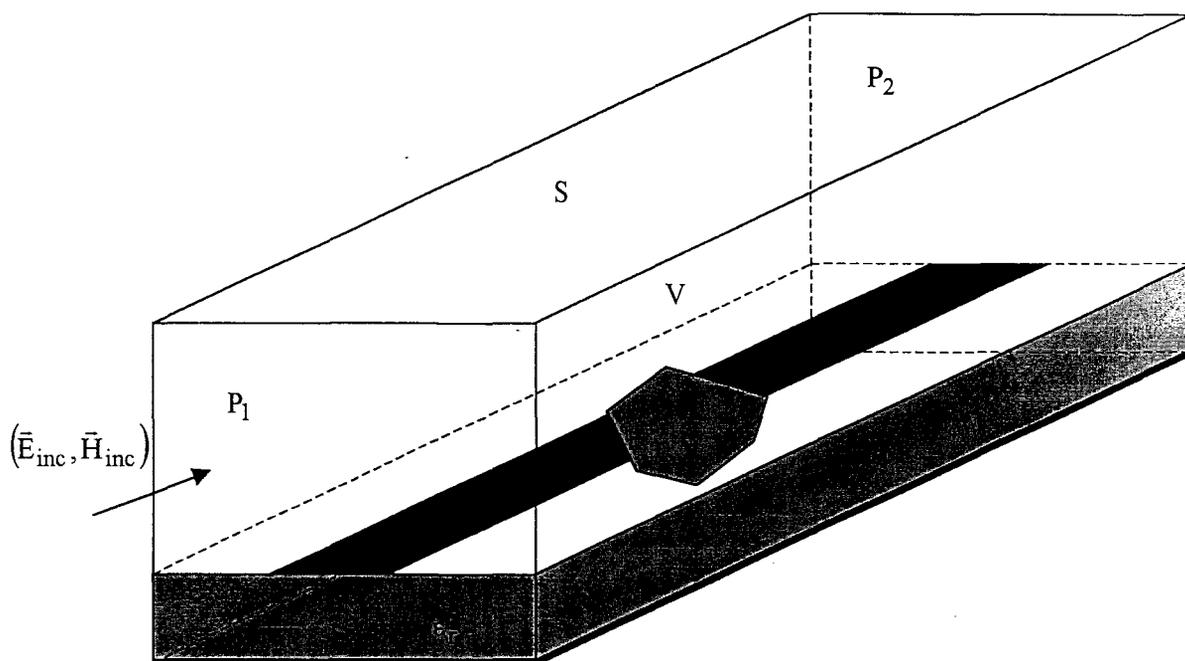


Figure IV-1: Structure représentative d'une discontinuité microruban

Considérons la structure figure IV-1 représentative d'une discontinuité couramment rencontrée lors de la réalisation des circuits micro-ondes. Il est clair que ce type de topologie requiert une étude en trois dimensions plutôt qu'une caractérisation de la section droite.

A ce stade, plusieurs voies peuvent être empruntées suivant que l'on choisisse les méthodes des équations intégrales, des différences finies dans le domaine temporel, ou encore celle des éléments finis. Curieusement, lorsque l'étude porte sur des structures en trois dimensions (3D), la constante de propagation ainsi que l'impédance nous intéressent beaucoup moins. Ceci se comprend aisément puisque l'on a accès au volume de la structure que par l'intermédiaire d'une entrée (ou de plusieurs) ainsi que d'une sortie dans le cas le plus simple. Le volume peut représenter, entre autre, deux lignes planaires de topologies différentes connectées entre elles par un pont à air. On comprend dès lors que la constante de propagation n'est pas identique dans le fil (le pont à air) et dans les lignes planaires, de même que les impédances. A ce niveau, les concepteurs de circuits sont plutôt intéressés par une relation ou par des grandeurs physiques mesurables liant l'entrée de notre volume à sa sortie. Ainsi, nous allons privilégier la détermination des paramètres de la matrice scattering [S] du volume considéré au travers des ports d'entrées et de sortie.

Bien évidemment, une énumération des méthodes mises en œuvre et nécessaires à l'étude de structure figure IV-1 n'est pas l'objectif que nous nous assignons. Aussi, rappelons-nous qu'il existe une palette de méthodes aussi bien numériques que basées sur des modèles analytiques simplifiés pour traiter le problème. Chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients dont l'utilisateur doit savoir tirer profit suivant la nature du problème à traiter[1].

En ce qui nous concerne, nous avons retenu l'analyse en trois dimensions des discontinuités par la méthode des éléments finis à éléments d'arêtes (MEF) , et ce, à double titre. D'une part, elle s'inscrit dans la continuité de la méthode 2D élaborée dans ce manuscrit, et d'autre part elle présente un caractère séduisant au vu de la large variété des discontinuités que l'on peut traiter[2][3][4].

A ce stade final de notre manuscrit, nous ne développons pas tous les calculs relatifs à l'étude 3D comme nous l'avons fait pour les éléments finis en deux dimensions. Partant de cette contrainte, nous évoquerons malgré tout succinctement les points qui différencient fondamentalement les deux méthodes, mais dans le principe, et en fournissant les résultats finaux de nos calculs.

Ce dernier chapitre est plus qu'une étude prospective puisque nous avons effectué l'intégralité des développements analytiques et calculs relatifs à la méthode des éléments finis à éléments d'arêtes 3D et élaboré le code de calcul correspondant. Tout comme pour les éléments finis 2D, une passerelle informatique a été conçue, mise au point, et testée pour assurer le lien entre notre code de calcul et le logiciel de maillage 3D professionnel SYSTUS+ de la société FRAMASOFT+CSI.

Compte tenu de l'ampleur du travail que requiert la mise au point d'un tel code de calcul, nous en sommes, au moment de la rédaction de ce manuscrit de thèse, à la phase de recherche des « bug ». Cette opération est maintenant suffisamment bien avancée pour que nous puissions proposer un premier résultat fiable.

IV.1 : L'équation d'onde

Résolvons dans le domaine de la structure, les équations de Maxwell puisque les phénomènes mis en jeu sont ceux de l'électromagnétisme. A partir ces équations, on peut montrer que le champ électrique \vec{E} vérifie l'équation d'onde Eq-IV.1.

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_r} \vec{\nabla} \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = 0 \quad \text{Eq-IV.1}$$

Cette équation décrit les phénomènes de propagation d'ondes électromagnétiques que nous observons dans les lignes de transmission. Elle est identique à celle que nous avons établie pour l'analyse 2D. Par contre, quelques nuances méritent d'être soulignées.

- Lors de l'analyse 2D, nous avons privilégié un axe de propagation, en l'occurrence l'axe oz. Ceci nous a permis de traduire la dépendance spatiale du champ électrique $\vec{E}(x, y, z)$ par la relation $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) e^{-\gamma z}$ où γ est la constante de propagation, inconnue de notre problème. Nous avons ainsi remplacé l'opérateur $\vec{\nabla}$ par $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_t - \vec{z}\gamma$.
- Dans l'analyse 3D dont il est question dans ce chapitre, notre but n'est pas de déterminer la ou les constante(s) de propagation suivant l'une des trois directions de l'espace comme nous l'avons évoqué. En conséquence, le champ électrique $\vec{E}(x, y, z)$ ne possède aucune dépendance fixée, a priori, suivant les trois axes de coordonnées cartésiennes. Nous posons donc :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{y} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{z}$$

Rappelons que notre objectif consiste en la détermination des champs électromagnétiques dans la structure figure IV-1 en vue d'en extraire les paramètres S_{ij} . Cette structure est, bien évidemment, isolée du milieu extérieur par des surfaces de contour S qui

doivent être prises en compte. Nous sommes donc en présence d'un problème avec conditions aux limites Eq-IV.2.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_r} \vec{\nabla} \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = 0 & \text{dans le volume } V \text{ de la structure} \\ \vec{n} \times \vec{E} = 0 & \text{sur les surfaces de contour de type CCE} \\ \vec{n} \times \left[\frac{1}{\mu_r} \vec{\nabla} \times \vec{E} \right] = 0 & \text{sur les surfaces de contour de type CCM} \end{array} \right. \quad \text{Eq-IV.2}$$

Remarquons qu'aucune condition n'a été spécifiée pour traduire la présence des accès P_1 et P_2 , représentant respectivement les ports d'entrée et de sortie. Le traitement électromagnétique d'une telle discontinuité requiert trois étapes.

- La première consiste à déterminer la distribution du champ électromagnétique du mode fondamental de la section droite d'une ligne d'accès correspondant dans notre cas au port P_1 . Cette séquence est résolue par le code de calcul éléments finis 2D que nous avons mis en œuvre et validé au chapitre III.
- La connaissance de cette distribution, nous permet par la suite de retenir les champs du mode fondamental pour exciter la structure. Ceci constitue la seconde étape.
- Enfin, les paramètres S_{ij} sont calculés à partir des champs électromagnétiques obtenus en résolvant l'équation Eq-IV.2.

Nous venons donc de voir qu'il est nécessaire d'appliquer aux plans terminaux P_1 et P_2 de la structure, des conditions particulières. Celles-ci doivent traduire à la fois l'excitation de la structure et la diffraction des champs par la discontinuité au port P_1 . Lorsqu'il s'agit de l'accès P_2 (en l'occurrence la sortie), seuls les champs diffractés susceptibles d'atteindre ce

port doivent être pris en compte. Ces conditions particulières ne sont nullement traduites dans l'équation Eq-IV.2.

Dans le paragraphe qui va suivre, nous montrerons la manière dont ces conditions sont introduites dans la formulation intégrale. Formulation qui, bien entendu, constitue une étape essentielle à la mise en œuvre de la méthode des éléments finis à élément d'arête.

IV.2 : La formulation intégrale

Nous ne souhaitons pas revenir sur l'opportunité d'utiliser ou non une fonctionnelle pour décrire les équations intégrales de notre problème. Celle-ci a été déjà évoquée au chapitre I. En conséquence, en appliquant systématiquement la méthode de Galerkin à l'équation Eq-IV.1, et ce, sous sa forme faible nous obtenons la forme intégrale Eq-IV.3, à savoir :

$$\iiint_V (\bar{\nabla} \times \bar{E}) \cdot \frac{1}{\mu_r} (\bar{\nabla} \times \bar{W}) dV - k_0^2 \epsilon_r \iiint_V \bar{E} \cdot \bar{W} dV + \iint_S \frac{1}{\mu_r} (\bar{n} \times \bar{\nabla} \times \bar{E}) \cdot \bar{W} dS = 0 \quad \text{Eq-IV.3}$$

\bar{W} est la fonction vectorielle de pondération représentant les variations $\delta \bar{E}$ du champ électrique et \bar{n} est le vecteur unitaire normal à la surface S et dirigé vers l'extérieur.

Tout comme pour l'analyse 2D, une intégrale de contour apparaît dans l'équation Eq-IV.3. Des conditions aux limites peuvent être traduites au niveau de cette intégrale notamment celles relatives aux accès P_1 et P_2 . Dans la littérature, ces conditions sont traduites à l'aide de parois absorbantes [5]. Ces conditions dites locales doivent être placées suffisamment loin de la discontinuité pour permettre une étude précise. Cependant, elles augmentent le volume d'étude et le nombre d'inconnues. D'autres conditions qualifiées de globales, telle que la technique de la FEM-BEM[6](Boundary Element Method), sont aussi utilisées. En associant ainsi à la méthode d'éléments finis, une équation intégrale pour traduire les accès ouverts de la structure, le système à résoudre est en partie pleine. Ceci représente un handicap du point

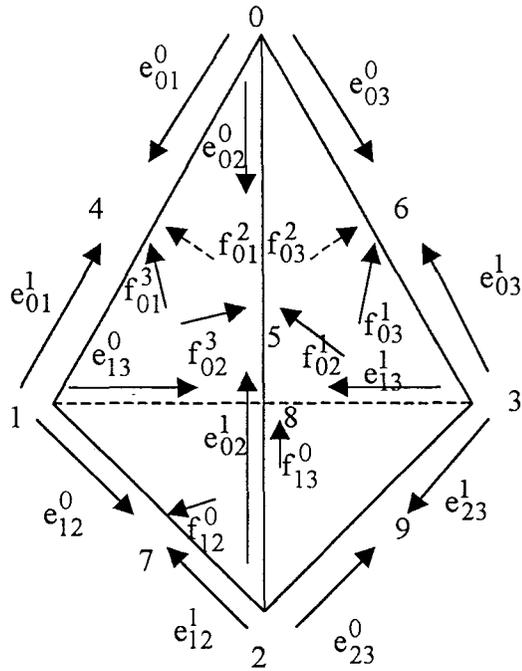


Figure IV-2 :Description des variables tangentielle et faciales sur un tétraèdre

de vue numérique. Pour notre part, une technique mise au point par Z. J. Cendes et connue sous le nom d'éléments transfinis a retenu notre attention[7]. A partir de la connaissance de différents modes susceptibles de se propager dans la ligne de transmission dont la section droite est soit le port P_1 soit le port P_2 , nous appliquons les valeurs de leurs champs électriques comme conditions aux limites. Rappelons que ces modes sont obtenus par le code de calcul élément finis 2D étudié et validé dans ce mémoire.

Dans les développements qui suivent nous montrons la façon dont nous excitons la structure et traduisons la présence des champs des modes diffractés qui parviennent aux accès P_1 et P_2 .

IV.3. : Discrétisation de la forme intégrale par les éléments d'arêtes et prise en compte des conditions aux accès par la méthode des éléments transfinis

IV.3.1 Elément d'arête tétraédrique

Par analogie avec l'analyse 2D, le système matriciel final décrivant notre problème est obtenu en effectuant le découpage, non plus d'une surface, mais du volume de la structure, et ce, par des éléments d'arêtes tétraédriques. Nous ne souhaitons pas revenir sur le développement mathématique fastidieux qui permet d'obtenir la description du champ électrique sur chacun des tétraèdres. Celui-ci est largement commenté dans les revues scientifiques[8][9]. Nous nous contentons ici de rappeler la description géométrique de l'élément tétraédrique ainsi que la fonction approchée du champ sur cet élément.

Pour un élément tétraédrique du 1^{er} ordre, puisque tel est celui retenu dans ce mémoire, les variables indépendantes e_{ij}^k permettant d'effectuer l'approximation de la fonction du champ électrique sur le tétraèdre, sont affectées aux arêtes ij du tétraèdre figure IV-2. Elles sont au nombre de 12.

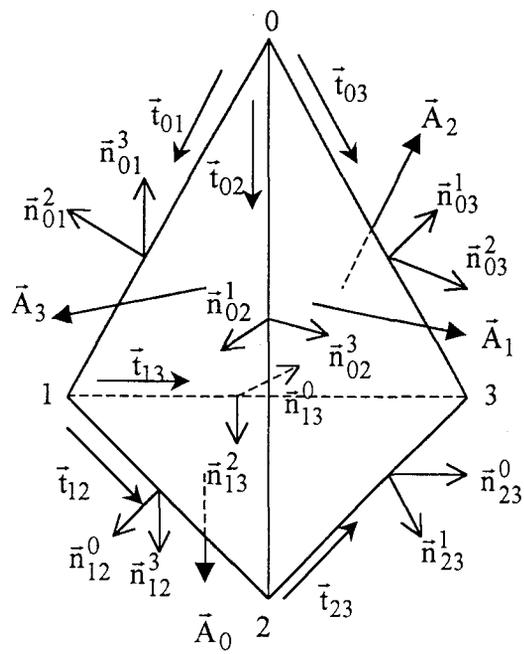
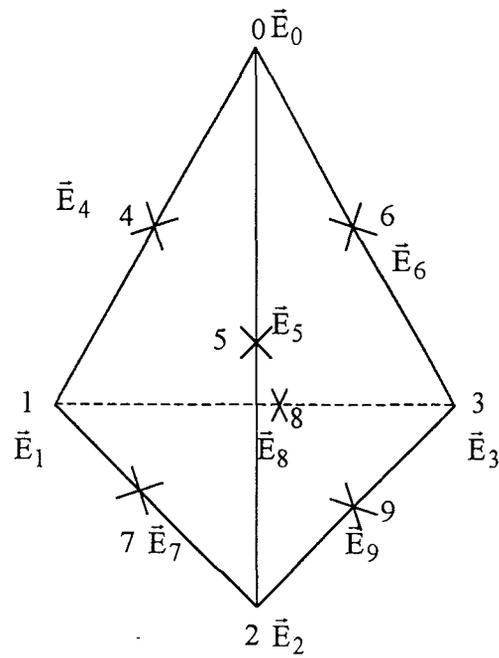


Figure IV-3 : Variables nodales sur l'élément tétraédrique et définition des vecteurs unitaires

Remarquons que deux variables faciales f_{ij}^k sont affectées à chacune des quatre faces du tétraèdre, et ce, au niveau de deux des trois arêtes de la face k en question, soit 8 variables.

La construction de ces variables tangentielles résulte de la projection sur chaque arête ij du tétraèdre des champs nodaux situé aux sommets du segment ij. Quant aux variables faciales, elles sont obtenues par projection du champ nodal situé au milieu de l'arête ij en question suivant la normale à cette arête.

Comme pour l'élément triangulaire 2D, l'approximation nodale de type Lagrange sur le tétraèdre figure IV-3 constitue le point de départ. Celle-ci s'écrit :

$$\bar{E}(x, y, z) = \sum_{i=0}^9 \bar{E}_i N_i(x, y, z) \tag{Eq-IV.4}$$

où $N_i(x, y, z)$ est la fonction d'interpolation de Lagrange du 2nd ordre et \bar{E}_i est le champ associé au nœud i du tétraèdre

L'approximation pour l'élément d'arête s'obtient ainsi en effectuant les projections des variables nodales \bar{E}_i suivant les relations Eq-IV.5.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_0 \cdot \bar{t}_{01} = e_{01}^0 \\ \bar{E}_0 \cdot \bar{t}_{02} = e_{02}^0 \\ \bar{E}_0 \cdot \bar{t}_{03} = e_{03}^0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_1 \cdot \bar{t}_{01} = -e_{01}^1 \\ \bar{E}_1 \cdot \bar{t}_{12} = e_{12}^0 \\ \bar{E}_1 \cdot \bar{t}_{13} = e_{13}^0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_2 \cdot \bar{t}_{02} = -e_{02}^1 \\ \bar{E}_2 \cdot \bar{t}_{12} = -e_{12}^1 \\ \bar{E}_2 \cdot \bar{t}_{23} = e_{23}^0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_3 \cdot \bar{t}_{03} = -e_{03}^1 \\ \bar{E}_3 \cdot \bar{t}_{13} = -e_{13}^1 \\ \bar{E}_3 \cdot \bar{t}_{23} = -e_{23}^1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_4 \cdot \bar{t}_{01} = \frac{e_{01}^0 - e_{01}^1}{2} \\ \bar{E}_4 \cdot \bar{n}_{01}^3 = f_{01}^3 \\ \bar{E}_4 \cdot \bar{n}_{01}^2 = f_{01}^2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_5 \cdot \bar{t}_{02} = \frac{e_{02}^0 - e_{02}^1}{2} \\ \bar{E}_5 \cdot \bar{n}_{02}^1 = f_{02}^1 \\ \bar{E}_5 \cdot \bar{n}_{02}^3 = f_{02}^3 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_6 \cdot \bar{t}_{03} = \frac{e_{03}^0 - e_{03}^1}{2} \\ \bar{E}_6 \cdot \bar{n}_{03}^1 = f_{03}^1 \\ \bar{E}_6 \cdot \bar{n}_{03}^2 = f_{03}^2 \end{array} \right. \tag{Eq-IV.5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_7 \cdot \vec{t}_{12} = \frac{e_{12}^0 - e_{12}^1}{2} \\ \vec{E}_7 \cdot \vec{n}_{12}^0 = f_{12}^0 \\ \vec{E}_7 \cdot \vec{n}_{12}^3 = e_{7n} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_8 \cdot \vec{t}_{13} = \frac{e_{13}^0 - e_{13}^1}{2} \\ \vec{E}_8 \cdot \vec{n}_{13}^0 = f_{13}^0 \\ \vec{E}_8 \cdot \vec{n}_{13}^2 = e_{8n} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_9 = \frac{\vec{E}_2 + \vec{E}_3}{2} \end{array} \right.$$

où
$$e_{7n} = \frac{\vec{E}_1 + \vec{E}_2}{2} \cdot \vec{n}_{12}^3 \quad e_{8n} = \frac{\vec{E}_1 + \vec{E}_3}{2} \cdot \vec{n}_{13}^2$$

Notons que \vec{t}_{ij} est le vecteur unitaire tangent à l'arête ij , \vec{n}_{ij}^k est le vecteur unitaire normal à l'arête ij , et appartenant au plan de la face k . La variable e_{ij}^m est, quant à elle, tangente à l'arête ij pour m prenant la valeur 0 ou 1 et f_{ij}^k est la variable faciale appartenant au plan de la face k et situé au milieu de l'arête ij . Elle est dirigée suivant la normale \vec{n}_{ij}^k .

Rappelons que la face de numéro k , est le triangle opposé au sommet k du tétraèdre.

Au vu de ces relations, une remarque s'impose. Les champs à chaque nœud du tétraèdre possèdent trois variables dans trois directions privilégiées de l'espace à l'exception des nœuds 7, 8 et 9. Pour ce qui concerne le nœud 9, nous avons considéré une moyenne quadratique des champs relatifs aux nœuds 1 et 3. Ceci permet ainsi de mieux représenter le champ au nœud 9. Par contre, au nœud 7, lorsque nous considérons la face 3, il n'existe pas de variable faciale. Or le champ à cet endroit n'est pas nécessairement tangent à l'arête 1-2. Par conséquent, nous avons complété l'approximation du champ, à ce nœud, par une composante faciale e_{7n} qui n'est autre que la projection sur la normale \vec{n}_{12}^3 de la moyenne quadratique des champs aux nœuds 1 et 2. La même démarche a été entreprise pour le nœud 8, et ce, sur la face 2 du tétraèdre.

Afin de déterminer l'expression du champ approché sur le tétraèdre constituant la maille élémentaire de la modélisation géométrique de la structure, il est nécessaire de reporter dans relation Eq-IV.4 les expressions des champs nodaux \bar{E}_i en fonction des variables indépendantes e_{ij}^m et f_{ij}^k obtenues à partir des relations Eq-IV.5.

Compte tenu de la lourdeur de cette expression, nous nous contentons de ne donner ici que les expressions littérales des champs nodaux en fonction des variables de l'approximation.

$$\bar{E}_0 = -\frac{1}{6V} \left[L_{01}|A_1|\bar{A}_1 e_{01}^0 + L_{02}|A_2|\bar{A}_2 e_{02}^0 + L_{03}|A_3|\bar{A}_3 e_{03}^0 \right] \quad \text{Eq-IV.6a}$$

$$\bar{E}_1 = -\frac{1}{6V} \left[L_{01}|A_0|\bar{A}_0 e_{01}^1 + L_{12}|A_2|\bar{A}_2 e_{12}^0 + L_{13}|A_3|\bar{A}_3 e_{13}^0 \right] \quad \text{Eq-IV.6b}$$

$$\bar{E}_2 = -\frac{1}{6V} \left[L_{02}|A_0|\bar{A}_0 e_{02}^1 + L_{12}|A_1|\bar{A}_1 e_{12}^1 + L_{23}|A_3|\bar{A}_3 e_{23}^0 \right] \quad \text{Eq-IV.6c}$$

$$\bar{E}_3 = -\frac{1}{6V} \left[L_{03}|A_0|\bar{A}_0 e_{03}^1 + L_{13}|A_1|\bar{A}_1 e_{13}^1 + L_{23}|A_2|\bar{A}_2 e_{23}^1 \right] \quad \text{Eq-IV.6d}$$

$$\bar{E}_4 = \frac{e_{01}^0 - e_{01}^1}{2} \bar{t}_{01} + \frac{f_{01}^2}{|\bar{A}_2 \times \bar{A}_3|} \bar{A}_3 + \frac{f_{01}^3}{|\bar{A}_2 \times \bar{A}_3|} \bar{A}_2 \quad \text{Eq-IV.6e}$$

$$\bar{E}_5 = \frac{e_{02}^0 - e_{02}^1}{2} \bar{t}_{02} + \frac{f_{02}^1}{|\bar{A}_1 \times \bar{A}_3|} \bar{A}_3 + \frac{f_{02}^3}{|\bar{A}_1 \times \bar{A}_3|} \bar{A}_1 \quad \text{Eq-IV.6f}$$

$$\bar{E}_6 = \frac{e_{03}^0 - e_{03}^1}{2} \bar{t}_{03} + \frac{f_{03}^1}{|\bar{A}_1 \times \bar{A}_2|} \bar{A}_2 + \frac{f_{03}^2}{|\bar{A}_1 \times \bar{A}_2|} \bar{A}_1 \quad \text{Eq-IV.6g}$$

$$\bar{E}_7 = \frac{e_{12}^0 - e_{12}^1}{2} \bar{t}_{12} + \frac{f_{12}^0}{|\bar{A}_0 \times \bar{A}_3|} \bar{A}_3 + \frac{e_{7n}}{|\bar{A}_0 \times \bar{A}_3|} \bar{A}_0 \quad \text{Eq-IV.6h}$$

$$\bar{E}_8 = \frac{e_{13}^0 - e_{13}^1}{2} \bar{t}_{13} + \frac{f_{13}^0}{|\bar{A}_0 \times \bar{A}_2|} \bar{A}_2 + \frac{e_{8n}}{|\bar{A}_0 \times \bar{A}_2|} \bar{A}_0 \quad \text{Eq-IV.6}$$

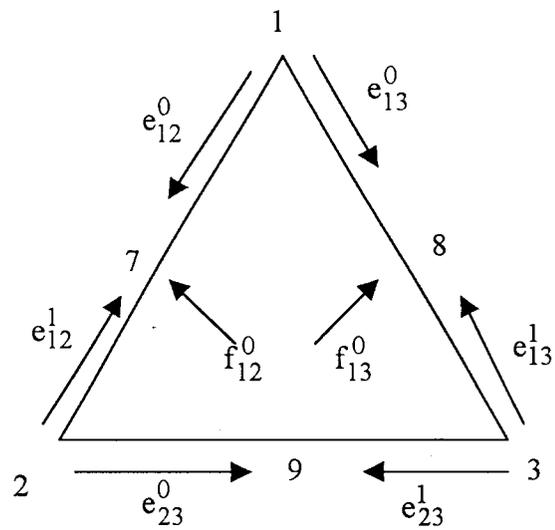


Figure IV-4 : Variables tangentielle et faciales de la face 0 du tétraèdre figure IV-2

où
$$e_{7n} = \frac{L_{12}}{2|A_3|} [L_{01}e_{01}^1 + L_{02}e_{02}^1] + \frac{L_{12}}{2|A_3|} [L_{01}\bar{t}_{12} \cdot \bar{t}_{01}e_{12}^0 - L_{02}\bar{t}_{12} \cdot \bar{t}_{02}e_{12}^1] \quad \text{et Eq-IV.6j}$$

$$e_{8n} = \frac{L_{13}}{2|A_2|} [L_{01}e_{01}^1 + L_{03}e_{03}^1] + \frac{L_{13}}{2|A_2|} [L_{01}\bar{t}_{13} \cdot \bar{t}_{01}e_{13}^0 - L_{03}\bar{t}_{13} \cdot \bar{t}_{03}e_{13}^1] \quad \text{Eq-IV.6k}$$

Dans les expressions ci-dessus, V est le volume du tétraèdre, \bar{A}_i est le vecteur unitaire normal à la face i , face opposée au sommet i , $|A_i|$ est le double de l'aire de la face i , et L_{ij} la longueur de l'arête ij .

Signalons que $|\bar{A}_i \times \bar{A}_j| = \frac{6V}{|A_i||A_j|} L_{km} \bar{t}_{km}$ lorsque nous considérons les numéros i, j, k, m

comme ceux des sommets du tétraèdre.

IV.3.2 Prise en compte des conditions aux limites

Nous constatons que dans la description d'un élément d'arête tétraédrique, chaque face triangulaire ($ij k$) figure IV-4 possède une approximation similaire voire identique à celle de l'analyse 2D. Nous utiliserons cette remarque pour prendre en compte l'excitation de la structure et les champs diffractés qui parviennent aux accès. Pour cela, rappelons que l'on souhaite résoudre l'équation intégrale Eq-IV.3, à savoir :

$$\iiint_V (\bar{\nabla} \times \bar{E}) \cdot \frac{1}{\mu_r} (\bar{\nabla} \times \bar{W}) dV - k_0^2 \epsilon_r \iiint_V \bar{E} \cdot \bar{W} dV + \iint_S \frac{1}{\mu_r} (\bar{n} \times \bar{\nabla} \times \bar{E}) \cdot \bar{W} dS = 0$$

lorsque le champ électrique est approché sur chaque tétraèdre décrit précédemment par la relation condensée de la forme Eq-IV.7.

$$\bar{E} = \sum_{i=1}^{20} \bar{\omega}_i e_i \quad \text{Eq-IV.7}$$

e_i représentent les variables indépendants e_{ij}^m et f_{ij}^k , $\bar{\omega}_i$ sont quant à elles des fonctions vectorielles de pondération pour l'élément d'arête.

La forme intégrale comporte deux parties. L'une est relative au volume entier de la structure et l'autre fait appel aux surfaces formant les contours de la structure, accès compris. La discrétisation de la partie volumique de l'intégrale est réalisée en découpant le volume V de la structure en éléments tétraédriques auxquels l'on associe l'approximation du champ électrique de l'équation Eq-IV.7. Celle relative aux surfaces de contour est obtenue en considérant les faces des tétraèdres en contact avec ces surfaces. Dans ce dernier cas, n'interviennent que les variables affectées aux triangles constituant ces faces. Nous utilisons cette propriété pour traduire les conditions aux limites de la structure, objet de notre étude. A ce titre, considérons deux cas.

- Nous pouvons, en premier lieu, distinguer les surfaces servant de boîtier métallique à la structure comme l'on a coutume de l'observer dans la littérature très abondante en la matière. L'application de ces conditions sont, rappelons-le, de type CCE ou CCM. L'existence de ces conditions annulent l'intégrale de surface. Signalons en outre que ces surfaces peuvent être traduites par des milieux absorbants comme la PML mise au point par Berenger[10]. Dans ce cas, nous traitons une structure ouverte.
- Le deuxième cas à considérer concerne la discrétisation de l'intégrale de contour relative à la surface représentant les accès de notre structure. C'est à ce niveau qu'intervient en partie la méthode des éléments transfinis. Afin de mieux comprendre les conditions que nous voulons appliquer à ces ports d'entrée ou de sortie, nous traitons séparément le cas de chaque accès.
 - Pour ce qui concerne le port P_1 ou encore l'accès qui recueille l'énergie de l'onde incidente, nous supposons pour simplifier le problème, que seul le champ diffracté à cet accès est celui du mode fondamental. Il s'agit de l'onde réfléchie. Ceci peut se comprendre aisément si l'on a pris la précaution de s'éloigner suffisamment de toute

discontinuité présente au niveau de l'accès pour que les modes supérieurs éventuellement excités n'aient aucune influence. En conséquence nous pouvons écrire que le champ au port P_1 résulte de la superposition du champ incident et réfléchi.

Il vient :

$$\vec{E} = \vec{E}^{\text{inc}} + a_{11}\vec{E}_{11} \quad \text{Eq-IV.8}$$

où \vec{E}^{inc} est le champ incident du mode fondamental, \vec{E}_{11} est le champ réfléchi. Ces champs sont les données du problème puisqu'ils sont obtenus à partir de notre code de calcul 2D. Quant au terme a_{11} , il représente une fraction du champ \vec{E}_{11} déterminé par l'analyse 2D. Cette fraction du champ est une inconnue de notre problème.

- Le port P_2 correspond à la sortie de la structure où l'on souhaite transmettre ou encore récupérer tout ou une partie de l'énergie incidente. Pour les mêmes raisons que celles évoquées pour le port P_1 , nous admettons que les champs électromagnétiques de l'onde qui parviennent à cet accès sont ceux du mode fondamental de celui-ci. Par conséquent, nous posons :

$$\vec{E} = a_{21}\vec{E}_{21} \quad \text{Eq-IV.9}$$

où a_{21} est une fraction du champ électrique \vec{E}_{21} du mode fondamental déterminé par notre code de calcul 2D pour la section droite correspondant à l'accès P_2 . Il s'agit également d'une inconnue.

A ce stade, notre problème consiste désormais à résoudre l'équation intégrale Eq-IV.3 auxquelles sont associées des conditions aux limites Eq-IV.10 :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \iiint_V (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \frac{1}{\mu_r} (\vec{\nabla} \times \vec{W}) dV - k_0^2 \epsilon_r \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{W} dV + \sum_{i=1}^2 \iint_{S_{P_i}} \frac{1}{\mu_r} (\vec{n} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{W} dS_{P_i} = 0 \\
 \vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad \text{sur une surface } S \text{ de type CCE} \\
 \vec{E} = \vec{E}^{inc} + a_{11} \vec{E}_{11} \quad \text{sur l'entrée } P_1 \text{ de la structure} \\
 \vec{E} = a_{21} \vec{E}_{21} \quad \text{sur la sortie } P_2 \text{ de la structure}
 \end{array} \right. \quad \text{Eq-IV.10}$$

où S_{P_i} est la surface relative au P_i de la structure.

Au vu de ce qui précède, deux remarques s'imposent. Tout d'abord, signalons que l'on peut traiter de manière générale ce problème en considérant l'existence aux accès de la structure de plusieurs modes diffractés. Dans ce cas, il suffit d'exprimer les champs électriques aux ports P_1 et P_2 par les relations suivantes :

Au port P_1 :

$$\vec{E} = \vec{E}^{inc} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} \vec{E}_{1n} \quad \text{Eq-IV.11}$$

Au port P_2 :

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \vec{E}_{2n} \quad \text{Eq-IV.12}$$

où a_{mn} sont les n coefficients modaux à déterminer et \vec{E}_{mn} les champs des n modes susceptibles de se propager au port P_m . Ces derniers sont déterminés par le code de calcul 2D.

Enfin, le calcul de l'intégrale relative aux accès de la structure, peut être effectué de façon analytique. Pour cela, nous normalisons les champs électriques \vec{E}_{mn} pour qu'ils fournissent une puissance d'un demi Watt, à savoir :

$$\iint_{S_{P_i}} \vec{E}_{mn} \times \vec{H}_{mn}^* d\vec{S}_{P_i} = \begin{cases} 1 & \text{pour un mode propagé} \\ j & \text{pour un mode évanescent} \end{cases} \quad \text{Eq-IV.13}$$

pour une structure sans pertes.

L'on démontre, par la suite, que pour les champs \vec{E} et \vec{W} d'un même mode, l'on a :

$$\iint_{S_{P_i}} \frac{1}{\mu_r} (\vec{n} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{W} dS_{P_i} = \iint_{S_{P_i}} \frac{1}{\mu_r} \vec{W} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}_{P_i} = \begin{cases} jk \frac{\mu_0}{\epsilon_0} & \text{mode propagé} \\ k \frac{\mu_0}{\epsilon_0} & \text{mode évanescent} \end{cases} \quad \text{Eq-IV.14}$$

Dans l'hypothèse de l'orthogonalité entre les modes, on peut envisager le cas général où apparaissent, aux accès, des modes supérieures. En effet, le calcul analytique de cette intégrale pour les champs \vec{E} et \vec{W} de modes différents vaut zéro.

IV.3.3 Discrétisation par éléments d'arêtes tétraédriques et système matriciel

Nous avons cerné dans les rubriques précédentes, tous les problèmes relatifs à la forme intégrale à résoudre ainsi que les conditions aux limites qu'il est nécessaire de satisfaire. Dans cette rubrique, nous montrons le procédé utilisé pour transformer cette intégrale sous la forme d'un système matriciel qui puisse être résolu par des méthodes numériques.

Nous avons présenté dans le chapitre I, la façon dont le système algébrique peut être obtenu en utilisant la méthode de Galerkin associée à la discrétisation 2D de la section droite. Nous ne rappelons ici que la spécificité de l'analyse 3D. Pour cela, rappelons que le champ électrique approché sur chaque tétraèdre, possède une expression de la forme :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{20} \vec{\omega}_i e_i$$

et vaut aux accès :

$$\text{Port } P_1 : \quad \vec{E} = \vec{E}^{\text{inc}} + a_{11} \vec{E}_{11}$$

Port P_2 :
$$\vec{E} = a_{21} \vec{E}_{21}$$

pour le cas le plus simple.

Conformément au principe de la méthode de Galerkin, les termes e_i , a_{11} et a_{22} étant les variables inconnues de notre problème et $\vec{\omega}_i$ les fonctions de pondération, nous obtenons :

$$\vec{W} = \langle \vec{\omega}_1 \delta e_1 \ \vec{\omega}_2 \delta e_2 \ \dots \ \vec{\omega}_{20} \delta e_{20} \rangle^T \tag{Eq-IV.15}$$

Ce vecteur vaut aux accès :

Port P_1 :
$$\vec{W} = \vec{E}_{11} \delta a_{11} = \delta a_{11} \sum_{i=1}^8 \vec{\omega}_i e_i \tag{Eq-IV.16a}$$

Port P_2 :
$$\vec{W} = \vec{E}_{21} \delta a_{21} = \delta a_{21} \sum_{i=1}^8 \vec{\omega}_i e_i \tag{Eq-IV.16b}$$

Où les variables e_i sont des données du problème déterminées par le code de calcul 2D sur la face du tétraèdre située sur les accès P_1 et P_2 .

Tout calcul fait, le système matriciel est celui d'un problème déterministe. Il s'écrit sous la forme :

$$[A]\{x\} = \{b\} \tag{Eq-IV.17}$$

où $\{x\} = \begin{Bmatrix} e_i^v \\ a_{11} \\ a_{21} \end{Bmatrix}$ et les e_i^v sont les variables inconnues e_i qui appartiennent au volume de la

structure et non aux limites, puisque les valeurs de ces dernières sont connues.

$$[A] = \begin{bmatrix} [M_{vv}] & [M_{vP_1}] & [M_{vP_2}] \\ [P_1]^T [M_{P_1v}] & [P_1]^T [M_{P_1P_1}] [P_1] + N_{P_1P_1} & [P_1]^T [M_{P_1P_2}] [P_2] \\ [P_2]^T [M_{P_2v}] & [P_2]^T [M_{P_2P_1}] [P_1] + N_{P_2P_2} & [P_2]^T [M_{P_2P_2}] [P_2] \end{bmatrix}$$

Les termes de la matrice $[A]$ sont obtenus en effectuant l'intégration analytique suivante :

$$M(i, j) = \iiint_V \left[(\vec{\nabla} \times \vec{\omega}_i) \cdot \frac{1}{\mu_r} (\vec{\nabla} \times \vec{\omega}_j) - k_0^2 \vec{\omega}_i \cdot \vec{\omega}_j \right] dV \quad \text{Eq-IV.18}$$

L'on observera que $\iiint_V \xi_0^i \xi_1^j \xi_2^k \xi_3^l dV = \frac{i!j!k!l!3!V}{(i+j+k+l+3)!}$ où les ξ_i sont les coordonnées barycentriques repérant un point du tétraèdre.

Il est aussi à signaler que les indices v, P_1 et P_2 des sous matrices $[M_{ij}]$ de $[A]$ traduisent le fait que le numéro des variables i ou j sont selon les cas ceux du volume V , ou des accès P_1 et P_2 . Les matrices $[P_1]$ et $[P_2]$ sont respectivement celles des valeurs de champs aux accès P_1 et P_2 . Quant aux sous matrices $[N_{P_1P_1}]$ et $[N_{P_2P_2}]$, elles sont relatives aux intégrales de contour sur les accès. Le vecteur colonne $\{b\}$ correspond à ce que nous qualifions de matrice source.

L'obtention des paramètres S_{ij} de la discontinuité se fait ainsi grâce aux champs électriques et coefficients a_{11} et a_{21} provenant du système Eq-IV.17.

IV.4 : La phase de validation : un exemple de résultat

A ce stade de notre manuscrit, nous ne revenons plus sur les moyens informatiques dont nous disposons. Ils ont été décrits au début du troisième chapitre.

Dans l'exemple proposé nous comparons les valeurs fournies par notre code de calcul à celles publiées par deux auteurs différents. L'un fait appel à la méthode des éléments finis[11], l'autre utilise les différences finies dans le domaine temporel FDTD[12].

IV.4.1 : La structure étudiée

Cette phase de validation aurait pu s'opérer également en étudiant une structure simple ; un guide rectangulaire métallique par exemple. Bien que nous ayons débuté nos essais par ce type de guide en trois dimensions, nous avons cherché, dans un premier temps,

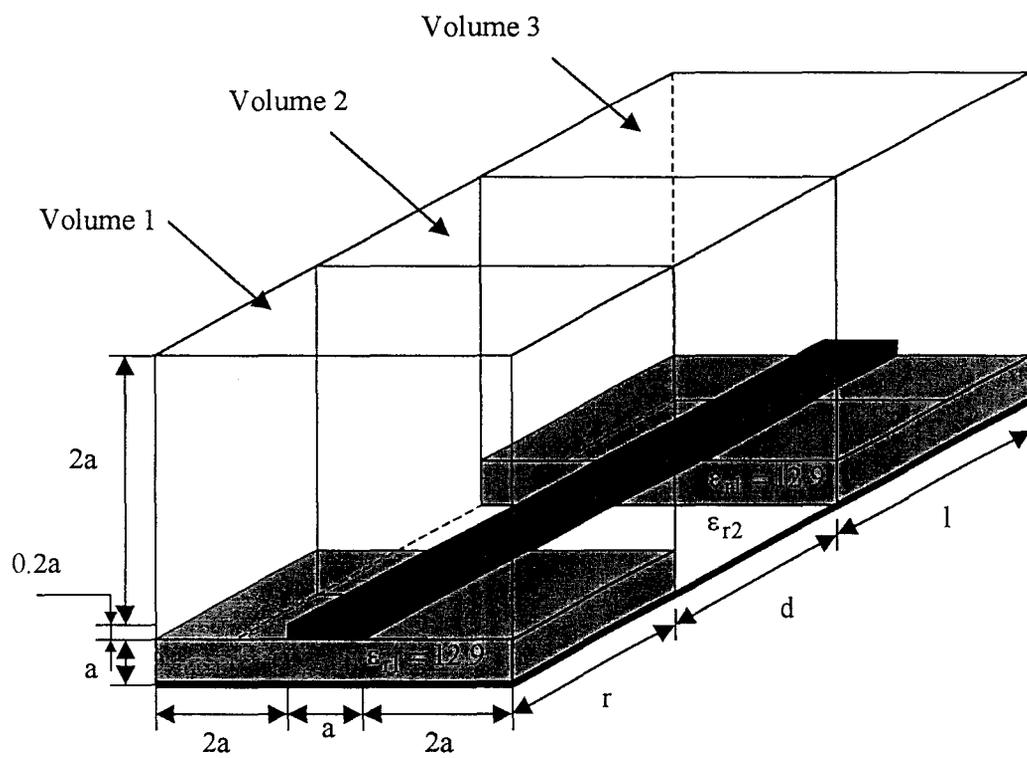


Figure IV-5 : Jonction du type pont diélectrique entre deux lignes microrubans: $a=100\mu\text{m}$ [11]

une structure dont la complexité est moyenne et qui présente un intérêt pratique comme la connexion entre deux lignes planaires. Pour permettre une comparaison avec des résultats déjà publiés, nous nous proposons d'étudier les performances d'une jonction (le volume 2) réalisée entre deux lignes microrubans en boîtier (volume 1 et 3) figure IV-5. On peut qualifier cette jonction ou connexion de pont à air lorsque la permittivité relative ϵ_{r2} (volume 2) vaut l'unité. Dans le cas général, il s'agit d'un pont enrobé dans un matériau diélectrique.

Cette jonction possédant une longueur $d=317\mu\text{m}$ est du type 'stripline' comme on peut le constater. Elle est réalisée à partir de matériaux diélectriques dont la permittivité relative vaut respectivement 1, 2.32, 3.78 et 9.8. Ces trois valeurs, outre celle de l'air, s'apparentent aux caractéristiques des substrats commercialisés. Le second matériaux ($\epsilon_{r2} = 2.32$) est conçu sur une base de Téflon. Le troisième représente le quartz bien connu. Il s'agit d'une céramique d'alumine pour la quatrième valeur de permittivité ($\epsilon_{r2} = 9.8$).

Les lignes d'excitation de longueur 1mm et de largeur $100\mu\text{m}$ sont déposées sur un substrat AsGa de permittivité relative 12.9 sans perte et d'épaisseur $100\mu\text{m}$. Dans cet exemple, la métallisation constituant le ruban est parfaite et possède une épaisseur de $20\mu\text{m}$. La structure est enfermée dans un boîtier dont les parois métalliques constituent un guide rectangulaire de dimensions transversales $500\mu\text{m} \times 300\mu\text{m}$.

IV.4.2 : Un exemple de résultat

Pour permettre une comparaison dans des conditions optimales, nous avons repris les graphes publiés par R. Mittra pour y reporter les valeurs théoriques (*) MEF fournies par notre code de calcul à élément d'arêtes en trois dimensions.

Figure IV-6 : Evolution, en fonction de la fréquence normalisée, de la constante de phase normalisée pour la ligne d'accès de la jonction

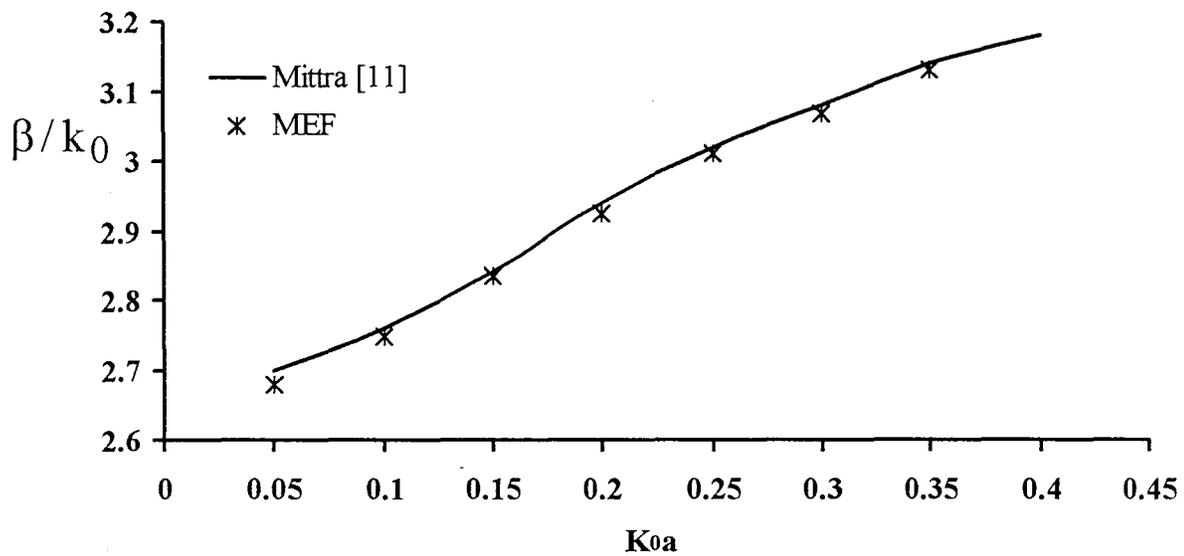
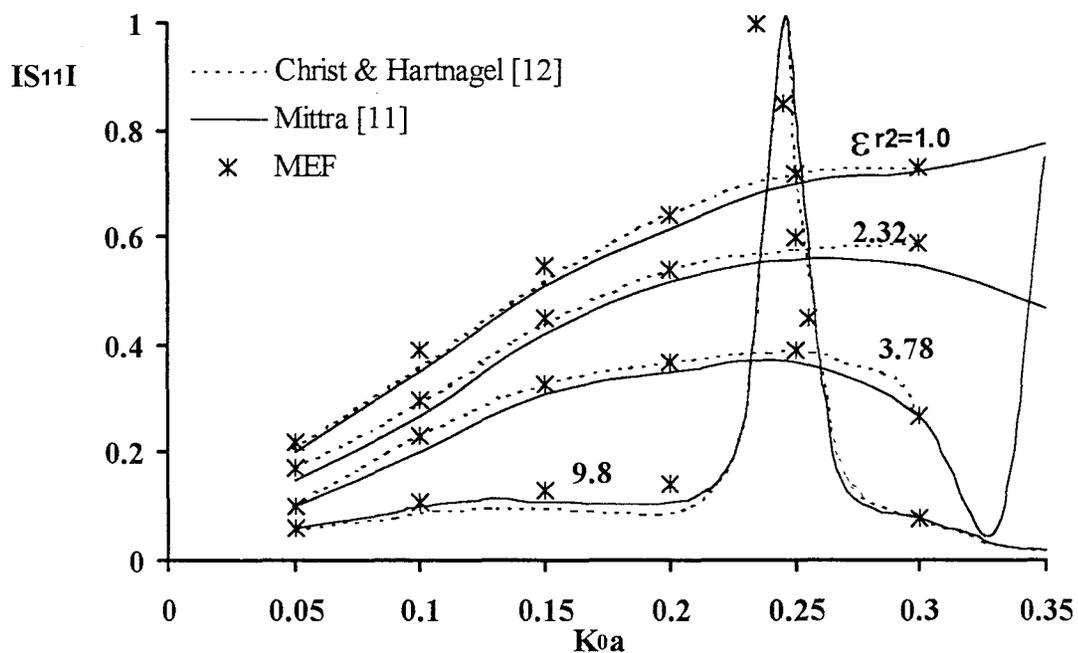


Figure IV-7 : Evolution en fonction de la fréquence normalisée du module du coefficient de réflexion du pont diélectrique, et ce, pour différentes valeurs de permittivité



Avant d'étudier les performances de cette transition, nous avons comparé tout d'abord les évolutions, pour le mode fondamental quasi-TEM, de la permittivité effective des lignes d'accès aux travaux de R. Mittra[11]. Ces évolutions sont reportées figure IV-6 en fonction de la fréquence normalisée k_0a . Signalons que pour la plage k_0a choisie par l'auteur et comprise entre 0.05 et 3.5, il correspond des fréquences s'échelonnant de 25GHz à 166 GHz. La concordance entre nos résultats et ceux publiés ne doit pas surprendre puisque notre logiciel éléments finis 2D a fourni ces valeurs, ainsi du reste que la carte des champs dont nous avons besoin pour l'excitation de la structure par le mode fondamental.

Notre phase de validation débute par la comparaison figure IV-7 de l'évolution du module de coefficient de réflexion en fonction de la fréquence normalisée k_0a pour notre code de calcul et les travaux publiés [11][12].

Comme nous l'avons déjà signalé, ceci est le premier test que nous effectuons réellement si l'on occulte celui relatif à un guide rectangulaire métallique vide, qui n'est à notre sens pas vraiment représentatif.

Deux commentaires peuvent être effectués. L'un porte sur l'aspect quantitatif et l'autre sur l'aspect qualitatif. Du point de vue du comportement micro-onde de cette jonction, on remarquera qu'une résonance apparaît pour la valeur normalisée $k_0a = 0.242$ ($\epsilon_{r2} = 9.8$). Il s'agit dans ce cas d'un comportement du type réjecteur alors que pour les autres matériaux, le fonctionnement est plutôt du type passe-bande. On notera que la structure globale, réalisée avec un pont diélectrique conçu sur alumine, présente un coefficient de réflexion faible dans la plage des valeurs normalisées de k_0a comprise entre 0.05 et 0.2 soit pour une bande de fréquence équivalente s'étalant de 24GHz à 100GHz.

D'un point de vue qualitatif, les valeurs que prédit notre code de calcul épousent quasiment celles publiées si ce n'est un décalage de la fréquence de réjection pour le cas de figure $\varepsilon_{r2} = 9.8$. A ce stade de notre travail, nous ne pouvons pas conclure définitivement. En effet, il faut admettre en toute honnêteté que quelques erreurs peuvent subsister compte tenu de la taille du programme principal dont le contenu en ligne de code de calcul tient sur environ 100 pages au format A4.

Compte tenu de l'expérience que nous avons acquise, nous demeurons à ce jour prudent. Il est clair que ces travaux demandent à être poursuivis. Une vérification systématique sur d'autres structures est absolument nécessaire. Nous envisageons d'étudier des discontinuités simples en structures coplanaires et de les associer en vue de réaliser des filtres[13] avant de procéder à l'étude de structures plus complexes.

BIBLIOGRAPHIE du CHAPITRE IV

[1] **Lhoussain Kadri :**

« Techniques d'équations intégrales appliquées à la modélisation électromagnétique de circuits intégrés micro-ondes en technologie uniplanaire, en bande W »

Thèse de doctorat de l'Université de Lille I, 27 septembre 1999

[2] **Karine Guillouard, Man-Fai Wong, Victor Fouad Hanna, Jacques Citerne :**

« A New Global Finite Element Analysis of Microwave Circuits Including Lumped Elements »

IEEE trans on MTT, vol 44, N° 12, pp 2587-2590, Décembre 1996

[3] **A. Chatterjee, J.M Jin, J.L. Volakis :**

« Edge-Based Finite Elements and Vector ABC's Applied to 3-D Scattering »

IEEE trans on Antennas and Propagation, vol 41, N° 2, pp 221-226, Février 1993

[4] **J.M. Jin, J.L. Volakis :**

« A finite element-boundary integral formulation for scattering by three-dimensional cavity-backed apertures »

IEEE trans on MTT, vol 42, N° 8, pp 1561-1566, August 1994

[5] **J.P. Webb :**

« Absorbing boundary conditions for the finite element analysis of planar devices »

IEEE trans on MTT, vol 38, pp 1328-1332, 1990

[6] **K. Hirayama, M. Koshiba :**

« Analysis of discontinuities in asymmetric dielectric slab waveguide by combination of finite and boundary elements »

IEEE trans on MTT, vol 40, pp 686-691, 1992

[7] **Z.J. Cendes :**

« The transfinite element method for modeling MMIC Devices »

IEEE trans on MTT, vol 36, N° 12, pp 1639-1649, décembre 1988

[8] **J.Scott Savage, Andrew F. Peterson :**

« High-order Vector Finite Elements for Tetrahedral cells »

IEEE trans on MTT, vol 44, N° 6, pp 874-879, juin 1996

[9] **J. F. Lee, D. K. Sun, Z. J. Cendes :**

« Tangential Vector finite Elements for Electromagnetic field computation »

IEEE trans on Magnetic, vol 27, N° 5, pp 4032-4035, septembre 1991

[10] **J. P. Berenger :**

« A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves »

Journal of computational physics, vol 114, pp 185-200, 1994

[11] **J. Wang, R. Mittra :**

« Finite element analysis of MMIC structures and electronic packages using absorbing boundary conditions »

IEEE trans on MTT, vol 42, N° 3, pp 441-449, march 1994

[12] **A. Christ, H.L. Hartnagel :**

« Three dimensional finite difference method for the analysis of microwave device embedding »

IEEE trans on MTT, vol 35, pp 688-696, August 1987

[13] **K. Hettak, N. Dib, Abdul-Fattah Sheta, S. Toutain :**

« A class of Novel uniplanar series resonators and their implementation in original applications »

IEEE trans on MTT, vol 46, N° 9, pp 1270-1275, septembre 1998

CONCLUSION GENERALE

Le savoir-faire de l'équipe électromagnétisme repose sur la mise en œuvre de codes de calcul et sur leurs validations pour la modélisation électromagnétique des circuits microondes complexes.

Les travaux qui m'ont été confiés, sur les éléments finis à éléments d'arêtes, s'inscrivent dans cette démarche.

Ainsi, nous allons, au terme de ce manuscrit, rappeler les points essentiels se dégageant de nos travaux.

Nous n'avons pas voulu effectuer une bibliographie exhaustive concernant la méthode des éléments finis car il nous a paru plus judicieux de rappeler les formulations en champs électriques ou par dualité en champs magnétiques, qui sont à la base du calcul par éléments finis. A ce stade, il faut distinguer les formulations issues des divers arrangements des équations de Maxwell, de la méthode des éléments finis, en elle-même, utilisée pour résoudre un problème de propagation. Il s'agit de la mise sous forme intégrale faible du problème suivi par la détermination du système algébrique émanant de l'opération de discrétisation par éléments finis triangulaires. Rappelons que ce chapitre, dédié aux éléments nodaux, nous a permis de mettre en avant les spécificités, mais surtout les carences des cinq formulations E ou H couramment employées et construites autour des éléments nodaux de Lagrange. A l'issue de cette étude sommaire, nous pouvons nous rendre compte qu'il n'est malheureusement pas possible d'étudier des structures de propagation présentant simultanément des pertes (notamment métalliques liées à l'imperfection des conducteurs comportant de surcroît des arêtes vives) et une anisotropie sans que le spectre de modes soit encombré par la présence de nombreuses solutions parasites. Partant de ce constat, nous nous sommes donc orientés, grâce à quelques travaux publiés dans les années 90, vers les éléments

finis à éléments d'arêtes. Ceci constitue la base sur laquelle s'appuie le second chapitre de ce manuscrit.

Nous avons développé les éléments d'arêtes en deux dimensions à partir des équations transverses et longitudinales en champ électrique. Avant d'aborder dans le détail l'élaboration de cet élément, nous avons explicité la construction des polynômes d'interpolation d'ordre zéro, un et deux de l'élément nodal de Lagrange, et ce, dans un autre référentiel : le système de coordonnées barycentriques. Cette phase intermédiaire est indispensable à la bonne compréhension, par la suite, des développements analytiques concernant les éléments d'arêtes puisque nous effectuons dans un premier temps la projection des grandeurs connues aux nœuds (les éléments nodaux) sur les arêtes des triangles. La technique d'assemblage des matrices élémentaires associées à chaque triangle de discrétisation de la section droite est ensuite développée ainsi que la procédure de résolution numérique du système matriciel final. Rappelons enfin, que la notion d'impédance de surface est introduite et explicitée en vue de décrire le problème des structures comportant des rubans métalliques de conductivité de valeur finie.

Le troisième chapitre porte, dans un premier temps, sur la validation du code de calcul reposant sur les développements mathématiques introduits au second chapitre. Cette phase de validation s'appuie sur une comparaison systématique entre les caractéristiques électromagnétiques théoriques et expérimentales déterminées sur des structures microrubans, coplanaires et à membrane diélectrique de dimensions microniques (α , β , et Z_c quand cela est possible), sans oublier la confrontation avec les résultats issus du logiciel commercial d'éléments finis HFSS. Tous les résultats présentés dans ce mémoire ont permis de montrer que la bonne prédiction des pertes métalliques liées à la valeur finie de la conductivité des

matériaux est tributaire d'un maillage dans les rubans métalliques. Bien qu'un accroissement de la taille mémoire requise soit consécutif à cette opération, seul le maillage dans les rubans garantit la prédiction fiable des pertes. Rappelons que la procédure de maillage dans les rubans n'est pas réalisable avec la version du logiciel HFSS dont nous disposons à ce jour. Cette étape de validation de notre code de calcul élaboré en deux dimensions trouve son aboutissement dans l'étude de la ligne coplanaire avec conducteur central en forme de Té où nous avons maillé toute la section droite. En effet, de part les modifications que nous avons apportées, d'un point de vue technologique, sur la version coplanaire de base, nous avons pu juger de l'aptitude de notre code de calcul à traduire la présence d'une très faible quantité soit de métal ou soit d'un matériau diélectrique. Cette étape ultime a confirmé, dans la réalisation d'une métallisation en Té, que nous maîtrisons au mieux le volet numérique du problème concret auquel nous sommes confrontées puisque notre code de calcul est capable de traduire les modifications qu'entraîne un ajout ou la suppression d'un domaine (un matériau métallique ou diélectrique) représentant le $1/500000$ de la superficie totale de la section droite de la structure de propagation. A ce stade, aucune défaillance ni anomalie particulière n'ont été constatées au niveau de notre code de calcul. Signalons en outre qu'aucune solution parasite n'est apparue au cours de nos divers essais. Dans un second volet, ligne coplanaire à ruban suspendue et ligne ultracompacte ont été maillées intégralement (métallisations comprises) et étudiées pour mettre en avant les potentialités de notre code de calcul. Il faut signaler que le cas des lignes ultracompactes, où métallisations de forme complexe et hauteur du ruban deux à trois fois plus importante que la largeur, est édifiant, et rend caduque un bon nombre de méthodes pour une prédiction fiable des caractéristiques électromagnétiques de ce genre de structures très innovantes. Pour notre part, nous n'avons pu comparer nos évolutions théoriques qu'à quelques relevés expérimentaux, voire théoriques, le dépôt de brevets ne facilitant pas la diffusion des résultats. Enfin, dans une troisième partie nous abordons l'étude

des interconnexions pour circuits VLSI. Ces travaux, menés en étroite collaboration avec les chercheurs du LIRM, concernent la mise en œuvre d'une analyse électromagnétique des interconnexions avec la prise en compte de la forme réelle des signaux d'attaque fournis par D. DESCHACHT. Notre objectif a consisté à définir les limites du modèle RC utilisé pour traduire la connexion entre portes logiques d'un même niveau par comparaison avec une analyse électromagnétique globale reposant sur l'élaboration de la matrice de chaîne de l'ensemble connexion et impédance des portes (la connexion étant caractérisée par les éléments d'arêtes). A l'issue des travaux menés conjointement avec D. DESCHACHT sur ces interconnexions, la conclusion à laquelle nous aboutissons montre que le modèle simple RC perdra toute son efficacité avec la montée en fréquence et l'apparition de métallisations à base de cuivre. Il faut dorénavant mettre en œuvre un modèle RLC de l'interconnexion.

Enfin dans un quatrième chapitre, nous abordons brièvement la description de la méthode des éléments finis en trois dimensions à partir d'éléments tétraédriques. Cette étape a nécessité, en réalité, un travail considérable tant d'un point de vue analytique que numérique. Ainsi, pour ne pas alourdir cette présentation, seule la prise en compte des conditions aux limites sur les accès d'entrée et de sortie est discutée et abordée au moyen des éléments transfinis. Comme nous l'avons signalé, le code de calcul que nous avons construit subit encore des tests puisque nous en sommes à la phase de recherche des «bug». Malgré cela, nous avons proposé un exemple de discontinuité entre deux lignes planaires dont la connexion est assurée par le biais d'un pont diélectrique au sens large du terme. Les tous premiers résultats que nous obtenons sont encourageants. Nous en sommes toutefois qu'au début de notre validation. La poursuite de ces travaux de vérification est par conséquent indispensable.

Pour conclure, nous avons réalisé, testé, et validé un logiciel d'éléments finis conçus à partir des éléments d'arêtes, et ce dans un premier temps, en deux dimensions. Ce code de calcul 2D est suffisamment mature pour assurer la prédiction, avec une bonne précision, des caractéristiques électromagnétiques de structures dont la section droite est très complexe. Il offre la possibilité d'exécuter un maillage dans les rubans métalliques d'une ligne de propagation, ou encore d'utiliser la notion d'impédance de surface que nous avons étendue grâce à l'implantation d'une nouvelle relation notée Z_{scth} plus performante. A notre connaissance, cette formulation qui fournit de bien meilleurs résultats sur la prédiction des pertes n'a jamais été utilisée dans une version commerciale de logiciels basés sur les éléments finis.

Pour ne pas nuire à la lisibilité de ce manuscrit, nous avons volontairement occulté tous nos travaux concernant le volet anisotrope du problème. Dans le même esprit, nous n'avons pas mentionné nos études relatives aux structures supraconductrices qui, par le biais de la notion d'impédance de surface et du modèle à deux fluides, fournit d'excellents résultats malgré la dynamique considérable des grandeurs mises en jeu.

Tout ceci nous a permis d'aborder la mise en œuvre d'un code de calcul d'éléments finis à éléments d'arêtes en trois dimensions basé sur une discrétisation du volume à étudier par des tétraèdres. Même si nous en sommes encore à la phase de test, nous pensons que dans un avenir proche il faudra envisager la mise en œuvre de codes de calcul mixtes articulés sur l'interaction entre plusieurs méthodes pour minimiser les temps de calcul et permettre une meilleure approche du problème global.

ANNEXES

Le but est de remplacer la relation $\left[\mu_r^*\right]^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{E}$ par une expression équivalente qui permet de simplifier l'écriture de la forme intégrale de l'équation d'onde.

Où $\left[\mu_r^*\right]^{-1}$ est l'inverse du tenseur de perméabilité relative $\left[\mu_r^*\right]$. Il correspond de manière symbolique à une inversion de matrice 3x3.

$$\text{Soit } \left[\mu_r^*\right] = \begin{bmatrix} \mu_{rxx}^* & \mu_{rxy}^* & 0 \\ \mu_{ryx}^* & \mu_{ryy}^* & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{rzz}^* \end{bmatrix} \quad \left[\mu_r^*\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_{rxx}^{*inv} & \mu_{rxy}^{*inv} & 0 \\ \mu_{ryx}^{*inv} & \mu_{ryy}^{*inv} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{rzz}^{*inv} \end{bmatrix}$$

Avec

$$\mu_{rxx}^{*inv} = \frac{\mu_{ryy}^*}{\mu_{rxx}^* \mu_{ryy}^* - \mu_{rxy}^* \mu_{ryx}^*} \quad \mu_{rxy}^{*inv} = \frac{\mu_{rxy}^*}{\mu_{rxx}^* \mu_{ryy}^* - \mu_{rxy}^* \mu_{ryx}^*}$$

$$\mu_{ryy}^{*inv} = \frac{\mu_{rxx}^*}{\mu_{rxx}^* \mu_{ryy}^* - \mu_{rxy}^* \mu_{ryx}^*} \quad \mu_{ryx}^{*inv} = \frac{\mu_{ryx}^*}{\mu_{rxx}^* \mu_{ryy}^* - \mu_{rxy}^* \mu_{ryx}^*}$$

$$\mu_{rzz}^{*inv} = \frac{1}{\mu_{rzz}^*}$$

Pour cela, nous décomposons le champ électrique \vec{E} et l'opérateur $\vec{\nabla}$ en deux composantes, l'une transversale et l'autre longitudinale.

$$\text{Il vient : } \vec{E} = \vec{E}_t + E_z \vec{z} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} = \vec{\nabla}_t - \gamma \vec{z}$$

Dans ce contexte,

$$\left[\mu_r^*\right]^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{\mu_{rzz}^*} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t + \begin{bmatrix} \mu_{rxx}^{*inv} & \mu_{rxy}^{*inv} \\ \mu_{ryx}^{*inv} & \mu_{ryy}^{*inv} \end{bmatrix} \left[(\vec{\nabla}_t E_z + \gamma \vec{E}_t) \times \vec{z} \right] \quad (1)$$

Nous introduisons la pseudo-perméabilité relative $\left[\tilde{\mu}_r^*\right]$ telle que :

$$\begin{bmatrix} \mu_{rxx}^{*inv} & \mu_{rxy}^{*inv} \\ \mu_{ryx}^{*inv} & \mu_{ryy}^{*inv} \end{bmatrix} \left((\bar{\nabla}_t E_z + \gamma \bar{E}_t) \times \bar{z} \right) = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{rxx}^* & \tilde{\mu}_{rxy}^* \\ \tilde{\mu}_{ryx}^* & \tilde{\mu}_{ryy}^* \end{bmatrix} \left(\bar{\nabla}_t E_z + \gamma \bar{E} \right) \times \bar{z} \quad (2)$$

Calcul $\left[\tilde{\mu}_r^* \right]$

Pour y parvenir, nous devons développer le membre de droite et de gauche de l'expression

(2). En posant $\bar{\nabla}_t = \frac{\partial}{\partial x} \bar{x} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{y}$ et $\bar{E}_t = E_x \bar{x} + E_y \bar{y}$, il vient :

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_t E_z + \gamma \bar{E}_t &= \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x \right] \bar{x} + \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y \right] \bar{y} \\ (\bar{\nabla}_t E_z + \gamma \bar{E}_t) \times \bar{z} &= \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y \right] \bar{x} - \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x \right] \bar{y} \end{aligned}$$

et par conséquent, le membre de gauche de la relation (2), dans le plan xoy, se met sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mu_{rxx}^{*inv} & \mu_{rxy}^{*inv} \\ \mu_{ryx}^{*inv} & \mu_{ryy}^{*inv} \end{bmatrix} \left[(\bar{\nabla}_t E_z + \gamma \bar{E}_t) \times \bar{z} \right] = \begin{cases} \mu_{rxx}^{*inv} \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y \right] - \mu_{rxy}^{*inv} \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x \right] \\ \mu_{ryx}^{*inv} \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y \right] - \mu_{ryy}^{*inv} \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x \right] \end{cases} \quad (3)$$

Le calcul du second membre de l'équation (2), nous conduit, tout d'abord, à :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{rxx}^* & \tilde{\mu}_{rxy}^* \\ \tilde{\mu}_{ryx}^* & \tilde{\mu}_{ryy}^* \end{bmatrix} \left[\bar{\nabla}_t E_z + \gamma \bar{E}_t \right] = \begin{cases} \tilde{\mu}_{rxx}^* \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x \right] + \tilde{\mu}_{rxy}^* \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y \right] \\ \tilde{\mu}_{ryx}^* \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x \right] + \tilde{\mu}_{ryy}^* \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y \right] \end{cases}$$

et finalement, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{rxx}^* & \tilde{\mu}_{rxy}^* \\ \tilde{\mu}_{ryx}^* & \tilde{\mu}_{ryy}^* \end{bmatrix} \left[(\bar{\nabla}_t E_z + \gamma \bar{E}_t) \times \bar{z} \right] = \begin{cases} \tilde{\mu}_{ryx}^* \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x \right] + \tilde{\mu}_{ryy}^* \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y \right] \\ -\tilde{\mu}_{rxx}^* \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x \right] - \tilde{\mu}_{rxy}^* \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y \right] \end{cases} \quad (4)$$

En identifiant les relations (3) et (4), la pseudo-perméabilité $\left[\tilde{\mu}_r^* \right] = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{rxx}^* & \tilde{\mu}_{rxy}^* \\ \tilde{\mu}_{ryx}^* & \tilde{\mu}_{ryy}^* \end{bmatrix}$ s'exprime

en fonction du tenseur inverse de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{rxx}^* &= \mu_{ryy}^{*inv} & \tilde{\mu}_{rxy}^* &= -\mu_{ryx}^{*inv} \\ \tilde{\mu}_{ryy}^* &= \mu_{rxx}^{*inv} & \tilde{\mu}_{ryx}^* &= -\mu_{rxy}^{*inv} \end{aligned}$$

D'après tout ce qui précède, nous pouvons, dorénavant, remplacer la relation (1) par :

$$\left[\mu_r^* \right]^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{\mu_{rzz}^*} \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t + \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{rxx}^* & \tilde{\mu}_{rxy}^* \\ \tilde{\mu}_{ryx}^* & \tilde{\mu}_{ryy}^* \end{bmatrix} (\vec{\nabla}_t E_z + \gamma \vec{E}_t) \times \vec{z}$$

Annexe II Calcul des variables nodales en fonction des variables tangentielles

Nous considérons ici, les projections e'_i des champs \bar{E}_i^1 situés aux nœuds d'un triangle sur ses arêtes. Nous les traduisons, pour les nœuds 1 et 2 du triangle, par les relations suivantes :

$$2) \left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_t^1 \cdot \bar{t}_{01} = e'_2 \\ \bar{E}_t^1 \cdot \bar{t}_{12} = e'_0 \end{array} \right. \quad 3) \left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_t^2 \cdot \bar{t}_{20} = e'_1 \\ \bar{E}_t^2 \cdot \bar{t}_{12} = e'_0 \end{array} \right.$$

Ecrivons, à présent, le champ au nœud 1 \bar{E}_t^1 dans la base $(\bar{n}_{12}, \bar{n}_{01})$:

$$\bar{E}_t^1 = \alpha \bar{n}_{12} + \beta \bar{n}_{01}$$

d'après 2), nous en déduisons les expressions suivantes de α et β :

$$\alpha = \frac{e'_2}{\bar{n}_{12} \cdot \bar{t}_{01}} \quad \beta = \frac{e'_0}{\bar{n}_{01} \cdot \bar{t}_{12}}$$

il va sans dire que nous avons :

$$\bar{E}_t^1 = \frac{e'_2}{\bar{n}_{12} \cdot \bar{t}_{01}} \bar{n}_{12} + \frac{e'_0}{\bar{n}_{01} \cdot \bar{t}_{12}} \bar{n}_{01}$$

$$\text{Puisque } \left\{ \begin{array}{l} \bar{n}_{12} \cdot \bar{t}_{01} = \sin \theta_1 = \frac{2A}{L_{01} \cdot L_{20}} \\ \bar{n}_{01} \cdot \bar{t}_{12} = -\sin \theta_1 = -\frac{2A}{L_{01} \cdot L_{20}} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla}_t \xi_0 = -\frac{L_{12}}{2A} \bar{n}_{12} \\ \bar{\nabla}_t \xi_2 = -\frac{L_{01}}{2A} \bar{n}_{01} \end{array} \right.$$

Il vient que :

$$\bar{E}_t^1 = -L_{01} e'_2 \bar{\nabla}_t \xi_0 + L_{12} e'_0 \bar{\nabla}_t \xi_2$$

En procédant de la même manière à l'écriture du champ au nœud 2 (\bar{E}_t^2) dans la base $(\bar{n}_{20}, \bar{n}_{12})$, nous avons :

$$\bar{E}_t^2 = \alpha \bar{n}_{20} + \beta \bar{n}_{12}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{e_0'}{\vec{n}_{20} \cdot \vec{t}_{12}} \\ \beta = \frac{e_1'}{\vec{n}_{12} \cdot \vec{t}_{20}} \end{array} \right. \quad \text{d'après 3)}$$

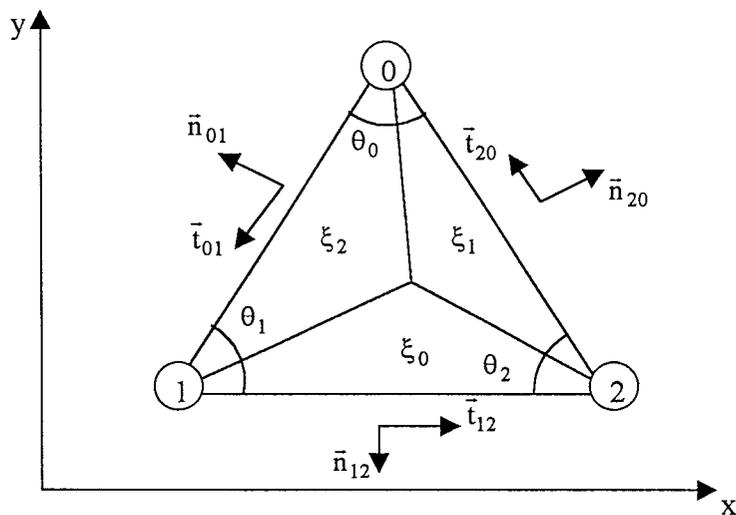
Du fait que nous ayons les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_{12} \cdot \vec{t}_{20} = -\sin \theta_2 = -\frac{2A}{L_{12} \cdot L_{20}} \\ \vec{n}_{20} \cdot \vec{t}_{12} = \sin \theta_2 = \frac{2A}{L_{12} \cdot L_{20}} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}_t \xi_0 = -\frac{L_{12}}{2A} \vec{n}_{12} \\ \vec{\nabla}_t \xi_1 = -\frac{L_{20}}{2A} \vec{n}_{20} \end{array} \right.$$

nous conduit à l'expression ci-dessous :

$$\vec{E}_t^2 = -L_{12} e_0' \vec{\nabla}_t \xi_1 + L_{20} e_1' \vec{\nabla}_t \xi_0$$

Considérons le triangle de la figure ci-dessous :



Les coordonnées barycentriques ξ_0, ξ_1, ξ_2 qui permettent de repérer un point du triangle, admettent pour expression, rappelons le :

$$\xi_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \tag{1}$$

où

$$\begin{aligned}
 a_0 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 & a_1 &= x_2 y_0 - x_0 y_2 & a_2 &= x_0 y_1 - x_1 y_0 \\
 b_0 &= y_1 - y_2 & b_1 &= y_2 - y_0 & b_2 &= y_0 - y_1 \\
 c_0 &= x_2 - x_1 & c_1 &= x_0 - x_2 & c_2 &= x_1 - x_0
 \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{2} (b_0 c_2 - c_0 b_2) = \frac{1}{2} (b_1 c_2 - c_1 b_2) = \frac{1}{2} (b_0 c_1 - c_0 b_1) \text{ est l'aire du triangle.}$$

Afin de déterminer le $\bar{\nabla}_t \xi_i$ pour i variant de 0 à 2, nous exprimons le rotationnel transverse en coordonnées cartésiennes :

$$\bar{\nabla}_t = \frac{\partial}{\partial x} \bar{x} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{y}$$

De ce fait, $\bar{\nabla}_t \xi_i = \frac{1}{2A} \left[\left[\frac{\partial}{\partial x} (a_i + b_i x + c_i y) \right] \bar{x} + \left[\frac{\partial}{\partial y} (a_i + b_i x + c_i y) \right] \bar{y} \right]$

C'est-à-dire :

$$\bar{V}_t \xi_i = \frac{1}{2A} (b_i \bar{x} + c_i \bar{y}) \quad (2)$$

A ce stade quelques précisions utiles concernant les vecteurs unitaires tangents et normaux aux arêtes du triangle s'imposent.

Soient L_{ij} , \bar{t}_{ij} et \bar{n}_{ij} respectivement la longueur, les vecteurs unitaires tangent et normal à l'arête du triangle définie par les sommets i et j . Il est aisé de vérifier qu'ils ont pour expression :

$$\begin{aligned} \bar{t}_{01} &= \frac{c_2 \bar{x} - b_2 \bar{y}}{L_{01}} & \bar{n}_{01} &= \frac{-c_2 \bar{x} - b_2 \bar{y}}{L_{01}} \\ \bar{t}_{12} &= \frac{c_0 \bar{x} - b_0 \bar{y}}{L_{01}} & \bar{n}_{12} &= \frac{-c_0 \bar{x} - b_0 \bar{y}}{L_{01}} \\ \bar{t}_{20} &= \frac{c_1 \bar{x} - b_1 \bar{y}}{L_{01}} & \bar{n}_{20} &= \frac{-c_1 \bar{x} - b_1 \bar{y}}{L_{01}} \end{aligned}$$

Par ailleurs, si nous considérons que les indices i , j et k sont les numéros des trois sommets du triangle et cyclique modulo 3, nous pouvons écrire sous forme condensée ces vecteurs unitaires tels que :

$$\bar{t}_{ij} = \frac{c_k \bar{x} + b_k \bar{y}}{L_{ij}} \quad \text{et} \quad \bar{n}_{ij} = -\frac{c_k \bar{x} + b_k \bar{y}}{L_{ij}} \quad (3)$$

Ainsi, en comparant les équations (2) et (3), nous obtenons :

$$\bar{V}_t \xi_i = -\frac{L_{jk}}{2A} \bar{n}_{jk} \quad (4)$$

Pour le calcul des produits vectoriels des vecteurs unitaires normaux aux arêtes du triangle, nous effectuons les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{n}_{ij} \times \bar{n}_{jk} &= \frac{1}{L_{ij} L_{jk}} (b_k \bar{x} + c_k \bar{y}) \times (b_i \bar{x} + c_i \bar{y}) = \frac{1}{L_{ij} L_{jk}} (b_k c_i - c_k b_i) \bar{z} \\ \bar{n}_{ij} \times \bar{n}_{ki} &= \frac{1}{L_{ij} L_{jk}} (b_k \bar{x} + c_k \bar{y}) \times (b_j \bar{x} + c_j \bar{y}) = \frac{1}{L_{ij} L_{jk}} (b_k c_j - c_k b_j) \bar{z} \end{aligned}$$

Nous remarquons, par exemple, que lorsque $(i, j, k) = (0, 1, 2)$ nous avons $b_k c_i - c_k b_i = 2A$ et $b_k c_j - c_k b_j = -2A$. En conséquence,

$$\vec{n}_{ij} \times \vec{n}_{jk} = \frac{2A}{L_{ij}L_{jk}} \vec{z} \quad \text{et} \quad \vec{n}_{ij} \times \vec{n}_{ki} = -\frac{2A}{L_{ij}L_{ki}} \vec{z}$$

On observera très aisément que $\sin \theta_j = \frac{2A}{L_{ij}L_{jk}}$ et $\sin \theta_i = \frac{2A}{L_{ij}L_{ki}}$ où θ_i et θ_j sont

respectivement les angles aux sommets des nœuds i et j .

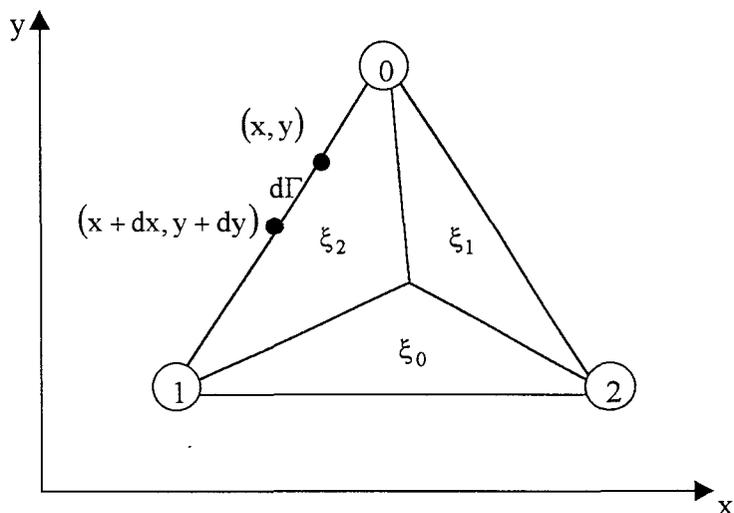
En définitive, nous avons :

$$\vec{n}_{ij} \times \vec{n}_{jk} = \sin \theta_j \vec{z} \quad \text{et} \quad \vec{n}_{ij} \times \vec{n}_{ki} = -\sin \theta_i \vec{z}$$

Annexe IV Calcul analytique de l'intégrale de contour sur une arête du triangle

Le but est de déterminer l'intégrale $\int_{\Gamma} f(\xi_i, \xi_j) d\Gamma$ sur l'arête Γ d'un triangle.

Considérons un triangle définie par ses coordonnées barycentriques de la figure ci-dessous :



Dans ce système de coordonnées, chaque arête du triangle peut être repéré en annulant l'une des trois coordonnées barycentriques. Par exemple, dans le cas de l'arête décrite par les sommets 0 et 1, tout point situé sur cette arête possède les coordonnées barycentriques suivantes : $\xi_2 = 0$ et $\xi_0 + \xi_1 = 1$.

Sur cette arête, si nous considérons un point (x, y) et un déplacement infinitésimal $(x + dx, y + dy)$ la longueur infinitésimal entre ces deux points est :

$$d\Gamma = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Rappelons, toutefois, l'expression analytique des coordonnées barycentriques d'un élément triangulaire :

$$\xi_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y)$$

où

$$a_0 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad a_1 = x_2 y_0 - x_0 y_2 \quad a_2 = x_0 y_1 - x_1 y_0$$

$$b_0 = y_1 - y_2 \quad b_1 = y_2 - y_0 \quad b_2 = y_0 - y_1$$

$$c_0 = x_2 - x_1 \quad c_1 = x_0 - x_2 \quad c_2 = x_1 - x_0$$

$$A = \frac{1}{2}(b_0c_2 + c_0b_2) = \frac{1}{2}(b_1c_2 - c_1b_2) = \frac{1}{2}(b_0c_1 - c_0b_1) \text{ est l'aire du triangle.}$$

Les couples de valeur (x_i, y_i) sont les coordonnées cartésiennes des sommets i du triangle.

Puisque sur l'arête définie par les sommets 0 et 1, nous avons $\xi_2 = 0$ et par conséquent nous obtenons l'équation de la droite suivante :

$$y = -\frac{b_2}{c_2}x - \frac{a_2}{c_2}$$

De ce fait, $dy = -\frac{b_2}{c_2}dx$

En conséquence, $d\Gamma = \sqrt{dx^2 \left(1 + \frac{b_2^2}{c_2^2}\right)} = \frac{dx}{c} \sqrt{b_2^2 + c_2^2}$

Si nous remplaçons dans l'expression de ξ_0 l'ordonnée y par sa valeur $-\frac{b_2}{c_2}x - \frac{a_2}{c_2}$, nous

obtenons :

$$\xi_0 = \frac{1}{2A} \left(a_0 + b_0x - \frac{c_0}{c_2} b_2x - \frac{a_2}{c_2} c_0 \right)$$

Par conséquent, en différentiant les deux membres de cette équation, nous aboutissons à :

$$2A d\xi_0 = \frac{b_0c_2 - c_0b_2}{c_2} dx$$

En remarquant que $2A = b_0c_2 - c_0b_2$

Nous obtenons :

$$dx = c_2 d\xi_0 \quad \text{et} \quad d\Gamma = \sqrt{b_2^2 + c_2^2} d\xi_0$$

En plus, nous constatons que la longueur L_{01} de l'arête définie par les sommets 0 et 1 vaut

$L_{01} = \sqrt{b_2^2 + c_2^2}$ et que sur cette même arête la relation $\xi_0 + \xi_1 = 1$ entraîne $\xi_1 = 1 - \xi_0$, ce

qui nous permet d'en déduire que :

d'après la définition des coordonnées barycentrique, ξ_0 ne peut varier que de 0 à 1 et de ce

fait, le calcul de l'intégrale sur l'arête considérée est :

$$\int_{\Gamma} f(\xi_0, \xi_1) d\Gamma = L_{01} \int_0^1 f(\xi_0, 1 - \xi_0) d\xi_0$$

D'une manière générale, quelque soit l'arête définie par les sommets i et j considérés dans le triangle, nous avons :

$$\int_{\Gamma} f(\xi_i, \xi_j) d\Gamma = L_{ij} \int_0^1 f(\xi_i, 1 - \xi_i) d\xi_i$$

où L_{ij} est la longueur de la arête définie par les sommets i et j.

Sous cette forme, cette intégrale peut facilement être calculée de manière analytique.

BIBLIOGRAPHIE PERSONNELLE

Publication dans les colloques internationaux et nationaux

[1] **B. Kenmei**, S. Robillard, E. Paleczny, J.F Legier, P. Kennis :

« Study of Lossy Metallization Shape Impact on Propagation Characteristics of Planar Transmission Line »

URSI, Lille, septembre 1996

[2] P. Pannier, **L. B. Kenmei**, F. Huret, P. Kennis :

« Modélisation de terminaisons adaptées numériques à l'aide de fonctions de base définies sur un support triangulaire »

Dixième Journées Nationales Microondes, ST MALO, mai 1997

[3] P. Pannier, L. Kadri, **L.B. Kenmei**, F. Huret, P. Kennis :

« An extension of the NML simulation to the 3D spectral domain analysis using triangular subdomain functions »

27th European Microwave Conference, JERUSALEM, ISRAEL. Septembre 8-12, 1997

[4] L. Kadri, P. Pannier, F. Huret, **L.B. Kenmei**, P. Kennis :

« Scattering parameters and mode conversion in asymmetric CPW-microstrip overlap transitions »

27th European Microwave Conference, JERUSALEM, ISRAEL. Septembre 8-12, 1997

[5] **L.B. Kenmei**, F. Huret, E. Paleczny, P. Kennis :

« Modélisation de la propagation dans les interconnexions : Comparaison entre une modélisation de type réseau RC et une modélisation électromagnétique »

Journée GAPS, Toulouse, avril 1998

[6] **L. B. Kenmei**, E. Paleczny, F. Huret, P. Kennis :

« Analyse électromagnétique d'interconnexions en technologie Silicium »

Journée GAPS, Toulouse, avril 1998

[7] **L. B. Kenmei**, L. Kadri, F. Huret, E. Paleczny, J.F. Legier, P. Kennis :

« Ligne coplanaire suspendue : un support de propagation pour des applications en gammes millimétrique et submillimétrique »

Onzième Journée Nationales Microondes, ARCACHON, mai 1999

[8] **L. B. Kenmei**, F. Huret, E. Paleczny, P. Kennis, G. Serval, D. Deschacht :

« Input shape influence over interconnect performances »

3rd IEEE Workshop on Signal Propagation on Interconnects, Titisee-Neustadt, Germany, may 1999

[9] **L.B. Kenmei**, F. Huret, E. Paleczny, P. Kennis, G. Serval, D. Deschacht :

« Inductance effect for interconnection timing analysis in submicronic circuits »

6th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems September 1999, Pafos CYPRUS

[10] G. Serval, D. Deschacht, F. Huret, **L.B. Kenmei**, E. Paleczny, P. Kennis :

« Simulation of Electromagnetic Wave Propagation on VLSI Interconnects »

Design of Circuits and Integrated System, DCIS'99, Novembre 16-19, Palma de Mallorca, Spain

