

Thèse 20000349

50376
1999
227

N° d'ordre :

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE I
U.F.R. DE MATHÉMATIQUE

THESE

Présentée à l'Université des Sciences et Technologies de Lille I

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LILLE I

Spécialité : Mécanique



Par

Isabelle DELVALLEE

**NOCIVITE D'UN DEFAUT SEMI-ELLIPTIQUE D'ORIENTATION COMPLEXE
DANS UNE COQUE CYLINDRIQUE FERMEE SOUMISE A UNE PRESSION INTERNE**

Soutenue le 20 septembre 1999 devant la commission d'examen

Membres du jury :

M ^{me} Inglebert	Professeur à l'ISMCM-CESTI
M ^r Nguyen-Dang	Professeur au LTAS - Liège
M ^r Gilles	Expert principal en Mécanique de la Rupture - Framatome
M ^r Mesmacques	Professeur à l'I.U.T. « A » de Lille I
M ^{elle} Robin	Professeur à l'Ecole des Mines de Douai
M ^r Hariri	Professeur à l'Ecole des Mines de Douai

AVANT-PROPOS

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur le Professeur S. Hariri et Mademoiselle le Professeur C. Robin qui m'ont accueillie au sein du laboratoire de calcul de structure de l'Ecole des Mines de Douai.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Madame G. Inglebert, Messieurs H. Nguyen-Dang, Ph. Gilles et G. Mesmacques qui ont bien voulu examiner ce travail et me faire l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Ph. Gilles pour ses précieux conseils et l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur F. Nunio de l'Ecole des Mines de Douai pour ses nombreux conseils dans le domaine de la modélisation numérique par éléments finis.

Pour la partie concernant l'étude sur la sensibilité du maillage, je remercie Monsieur Spérandio de Novatome qui m'a accueillie quelques mois au sein de son équipe. Je suis particulièrement reconnaissante envers Messieurs H. Deschanel et J.M. Thirry pour leurs conseils et leurs disponibilités.

Je tiens à remercier Messieurs Ph. Mourgue et M. Pignol de Systus International qui m'ont permis, avec énormément de gentillesse, d'appréhender le module de Mécanique de la Rupture du logiciel Systus.

Je remercie Monsieur Voltaire d'E.D.F.-D.E.R. pour l'intérêt qu'il a trouvé dans ce travail et pour le temps qu'il m'a accordé pour l'étude numérique de la charge limite.

Enfin, je désire exprimer ma reconnaissance à ma famille et à mes amis qui m'ont encouragée dans mon travail.

SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
 A - MECANIQUE DE LA RUPTURE	
A-I : INTRODUCTION.....	4
A-II : RUPTURE FRAGILE	5
A-II-1 : Modes de fissuration.....	5
A-II-2 : Critères de contraintes : Facteurs d'Intensité de contraintes (F.I.C.).....	5
A-II-3 : Critère énergétique : Taux de restitution d'énergie	9
A-II-4 : Rupture en mode mixte.....	11
A-II-4-1 : Critère de la contrainte tangentielle maximale.....	12
A-II-4-2 : Critère de la densité d'énergie de déformation minimale	13
A-II-5 : Domaine de validité du domaine élastique	18
A-III : CORRECTION DE ZONE PLASTIFIEE.....	19
A-III-1 : Plasticité confinée : Modèle d'Irwin.....	20
A-III-2 : Plasticité étendue : Modèle de Dugdale-Barenblatt.....	22
A-III-3 : Conclusions.....	23
A-IV : RUPTURE DUCTILE	23
A-IV-1 : Intégrale J	23
A-IV-2 : Champ HRR.....	27
A-IV-3 : Généralisation de l'intégrale J.....	28
A-V : REGLE R6 : DIAGRAMME $K_r - L_r$.....	30
 B - METHODES D'ESTIMATION SIMPLIFIEE DE J	
B-I : INTRODUCTION.....	34
B-II : ESTIMATION DE KUMAR ET SHIH : METHODE D'ESTIMATION DU FORMULAIRE E.P.R.I	35
B-II-1 : Intégrale J élastique.....	35

B-II-2 : Intégrale J plastique	36
B-II-3 : Inconvénients de la méthode	36
B-III : TRAVAUX DE AINSWORTH	37
B-IV : METHODE SIMPLIFIEE DE L'ANNEXE A16 DU RCC-MR : J_S OU J_{A16}	40
B-IV-1 : Calcul de J_e	41
B-IV-2 : Correction plastique	41
B-IV-2-1 : Calcul des contraintes équivalentes	42
B-IV-2-2 : Détermination de K_{1A16}	44
B-IV-2-3 : Détermination de K_{2A16}	45
B-V : METHODES SIMPLIFIEE J_{R6}.....	46
B-VI : SCHEMA DE SYNTHESE POUR UN CHARGEMENT AXISYMETRIQUE	49

C - DESCRIPTION DES CALCULS ELEMENTS FINIS

C-I : MODELE ELEMENTS FINIS	50
C-I-1 : Géométrie	50
C-I-2 : Matériau.....	50
C-I-3 : Chargement.....	51
C-I-4 : Domaine d'étude	52
C-II : CONTRAINTES NOMINALES DANS LA COQUE	54
C-III : ESTIMATIONS DES FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTES	54
C-IV : CALCUL DE L'INTEGRALE J	55
C-V : CALCUL DU C.T.O.D.....	58
C-VI : CONCLUSION.....	59

D - ETUDE DE LA SENSIBILITE DU MODELE

D-I : INTRODUCTION	60
D-II : ETUDE DE LA SENSIBILITE DU MAILLAGE EN FOND DE FISSURE	60
D-II-1 : Influence du nombre de cercles ou discrétisation radiale	60
D-II-2 : Influence du nombre d'éléments en fond de fissure ou de la discrétisation angulaire..	64
D-II-3 : Influence de la taille de la première maille en fond de fissure.....	65

D-III : INFLUENCE DE LA PRECISION DEMANDEE POUR LA CONVERGENCE DU CALCUL ITERATIF.....	69
D-III-1 : Influence de la précision sur le C.T.O.D.....	70
D-III-2 : Influence de la précision sur l'intégrale J.....	71
D-IV : INFLUENCE DU DOMAINE D'INTEGRATION SUR L'INTEGRALE J.....	73
D-V : SYNTHESE.....	75

E : FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTES POUR UNE FISSURE INCLINEE

E-I : INTRODUCTION	78
E-II : MODELES	78
E-III : GENERALITES	81
E-IV : RESULTATS POUR UNE COQUE DE RAPPORT $t/R=1/10$.....	82
E-IV-1 : Recalage par rapport aux fissures axiales et circonférentielles.....	82
E-IV-2 : Fissures inclinées	86
E-V : RESULTATS POUR UNE COQUE DE RAPPORT $t/R=1/100$	91
E-V-1 : Comparaison avec les résultats obtenus pour les plaques	91
E-V-2 : Fissures inclinées.....	94
E-VI : COMPARAISON KI REEL ET KI ESTIME.....	96
E-VII : CONCLUSION.....	99

F - PRESSION LIMITE - METHODE D'ESTIMATION SIMPLIFIEE DE J POUR UN DEFAUT INCLINE

F-I : INTRODUCTION.....	100
F-II : CONTRAINTES SINGULIERES AU VOISINAGE DE LA FISSURE.....	101
F-II-1 : Formulation du problème.....	101
F-II-2 : Coque cylindrique en présence d'une fissure inclinée.....	105
F-III : PRESSION LIMITE D'UNE COQUE CYLINDRIQUE EN PRESENCE D'UNE FISSURE TRAVERSANTE INCLINEE.....	115
F-IV : CHARGE LIMITE D'UN CYLINDRE EN PRESENCE D'UN DEFAUT DEBOUCHANT.....	123
F-V : APPLICATION DES METHODES D'ESTIMATION SIMPLIFIEE DE J AU CAS DE LA FISSURE INCLINEE	125
F-V-1 : Obtention des contrainte et déformation de référence.....	125

F-V-2 : Comparaison de l'intégrale J « simplifiée » avec l'intégrale J issue d'un calcul par la méthode des éléments finis.....	126
CONCLUSION	127
BIBLIOGRAPHIE	130
ANNEXE AE : Annexe relative au chapitre E	136
ANNEXE AF : Annexe relative au chapitre F	148

INTRODUCTION

De nombreuses coques cylindriques sont rencontrées dans l'industrie nucléaire, et plus généralement dans la manufacture des appareils à pression. Ces domaines d'activité sont contraints à des normes de sécurité strictes notamment lors de l'apparition de fissure. Le coût des arrêts d'exploitation étant généralement très élevé, des règles d'analyse de la nocivité des défauts, telles que la règle R6, ont été mises en place pour répondre très rapidement quant à la stabilité du défaut observé.

Pour un matériau élastique linéaire, la règle R6 prédit la rupture à l'aide de la caractéristique mécanique K_{IC} , ainsi que l'instabilité plastique à l'aide de la courbe $K_r - L_r$ qui fait intervenir le facteur d'intensité de contrainte en mode I et la charge limite de la structure. En mode mixte, on définit un facteur d'intensité de contraintes effectif afin d'appliquer les mêmes règles.

Peu de matériaux ont, en réalité, un comportement élastique dans les domaines d'activité qui nous intéressent. L'emploi d'aciers inoxydables austénitiques tels que l'acier 316L, y est fortement répandu. C'est pourquoi la prédiction de la rupture est définie, dans la règle R6, à l'aide d'un paramètre élasto-plastique de la mécanique de la rupture : l'intégrale J. L'amorçage est alors déterminé grâce à la caractéristique mécanique J_{IC} .

L'intégrale J est calculée de manière numérique par éléments finis ou par les méthodes d'estimation simplifiée existantes. L'application de ces méthodes est rendue possible par la connaissance de l'intégrale J élastique, des contraintes et déformation au voisinage du défaut qui sont fonction de la charge limite de la pièce endommagée.

Toutefois l'application de ces méthodes restent, aujourd'hui limitée aux cas de défauts d'orientation axiale ou circonférentielle.

On se propose d'étudier la nocivité d'un défaut incliné dans une coque cylindrique fermée sous pression interne, que ce soit pour un matériau élastique ou élastoplastique, à travers les facteurs d'intensité de contraintes ou l'intégrale J, bien qu'en théorie, cette intégrale soit définie pour une fissure qui se propage dans son plan.

Comme, on le montrera, le facteur d'intensité de contrainte relatif au mode d'ouverture est au minimum deux fois plus élevé que les facteurs d'intensité de contraintes dus aux modes de cisaillement. La prééminence du mode I justifie alors l'intérêt porté à l'intégrale J.

La charge limite du cylindre en présence d'une fissure traversante ou de surface sera déterminée afin de permettre l'étude de l'instabilité plastique par la courbe $K_r - L_r$ ou encore de permettre l'estimation simplifiée de l'intégrale J.

PLAN DE THESE

Chapitre A : Mécanique de la rupture

Les outils nécessaires à l'étude de la stabilité d'une fissure sont les paramètres de la mécanique de la rupture. Ils seront définis dans le domaine de rupture élastique et dans le domaine de rupture élasto-plastique. L'étendue de chaque domaine sera spécifiée.

Chapitre B : Méthodes d'estimation simplifiée de J

Le calcul numérique de l'intégrale J par éléments finis est à la fois difficile, long et coûteux. Dans les années 70, en Angleterre, le C.E.G.B. (Central Electric Generating Board) proposa une méthode d'estimation simplifiée de J qui donna naissance par la suite aux méthodes dites A16 et R6. Ces méthodes reposent sur la connaissance de l'intégrale J élastique et de la charge limite de la structure considérée.

Chapitre C : Description du modèle E.F

Les facteurs d'intensité de contraintes (F.I.C.) pour une fissure traversante étant connus analytiquement, on s'intéressera aux fissures de surfaces. La détermination des F.I.C. ou de l'intégrale J pour un défaut débouchant n'est possible que de manière numérique, par exemple, par la méthode des éléments finis. Une modélisation tridimensionnelle du problème est requise. Nous présenterons notre domaine d'étude ainsi que la méthode dite limite pour le calcul des F.I.C. et la méthode Gthêta pour le calcul de l'intégrale J.

Chapitre D : Sensibilité du modèle E.F.

Une validation du maillage effectué est nécessaire. Par conséquent, nous étudierons préalablement la sensibilité du modèle éléments finis vis-à-vis du maillage de la fissure, de la précision demandée pour le calcul non linéaire et de l'indépendance de J ou $G_{th\eta}$ par rapport au champ d'intégration.

Chapitre E : Intégrale J élastique

Dans un premier temps, les F.I.C. obtenus pour des fissures axiales et circonférentielles seront comparés avec ceux issus de la littérature. Nous présenterons, ensuite, sous forme de fonctions trigonométriques les facteurs de forme en modes I, II, III dépendant de l'angle d'inclinaison de la fissure, pour un défaut de géométrie donnée. Finalement, nous tenterons de conclure sur la validité d'une pratique industrielle qui consiste à remplacer le F.I.C. en mode d'ouverture d'une fissure inclinée par le F.I.C. de la fissure projetée sur l'axe de la coque.

Chapitre F : Pression limite - Extension des méthodes d'estimation simplifiée au cas d'une fissure inclinée

En 1965, Folias fournit la pression limite d'une coque cylindrique fissurée axialement par l'application du critère énergétique de Griffith qui emploie les contraintes singulières au voisinage du fond de fissure. De manière similaire, la pression limite de la coque cylindrique en présence d'une fissure traversante inclinée sera déterminée. La charge limite pour la coque contenant une fissure débouchante sera déduite de la charge limite de la même structure en présence d'une fissure traversante en utilisant formulaire d'A.G. Miller.

- A -

MECANIQUE DE LA RUPTURE

A-I : INTRODUCTION

« Dans les 30 dernières années, le nombre d'avions civils en République Fédérale Allemande a augmenté de 6 000 à 16 000, reflétant la prospérité des pays de l'ouest de l'Europe. Malgré cette augmentation, le nombre d'accidents ou d'incidents enregistrés chaque année, entre 500 et 600, est resté stable. Seuls 8% sont dus à des déficiences techniques dont 2% à la rupture de pièces métalliques... » commente G.A. Langre dans son article intitulé « La rupture de composants d'avions » publié en 1993 [ROS93]. Ces données confirment les avancées réalisées dans le domaine de la Mécanique de la Rupture.

Au début, la recherche dans ce domaine est liée aux industries de l'aérospatiale et de l'aéronautique, qui sont les premières à utiliser ses principes. La recherche nucléaire que ce soit le C.E.A. (Commissariat à l'Energie Atomique) pour la France, le C.E.G.B. (Central Electricity Generating Board) pour l'Angleterre, l'E.P.R.I. (Electric Power Research Institute) pour les Etats-Unis, est aussi pour beaucoup dans les progrès réalisés en mécanique de la rupture.

La mécanique de la rupture est divisée en plusieurs domaines relatifs au comportement du matériau de la structure fissurée :

- le domaine élastique ou fragile,
- le domaine élasto-plastique,
- le domaine plastique ou ductile.

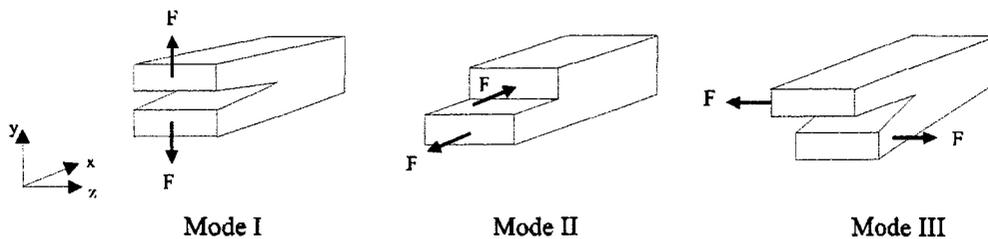
Nous étudierons succinctement chacun de ces domaines de manière à introduire les notions qui nous intéressent ([BUI78], [FRAN72], [BART80], [SAO97], [LEM85]).

L'analyse de la nocivité d'un système fissuré est généralement étudiée sur les bases d'une règle mise au point au C.E.G.B. : la règle R6, dont nous ferons une présentation.

A-II : RUPTURE FRAGILE

A-II-1 : Modes de fissuration

Les déplacements des lèvres de la fissure sont régis par trois modes de fissuration (fig. A1). Les modes I et II ouvrent la fissure dans son plan Oxz . Le mode III ouvre la fissure hors de son plan.



Mode I : mode d'ouverture

Modes II et III : modes de cisaillement

Fig. A1 : Modes de fissuration

Le mode I est considéré comme le mode le plus endommageant.

A-II-2 : Critère de contrainte : Facteurs d'Intensité de Contraintes (F.I.C.)

- Ce facteur s'obtient par considération des contraintes et déplacements au voisinage du front de fissure.

Historiquement, les facteurs d'intensité de contraintes K ont été déterminés à partir des solutions élastiques de problèmes plans qui reviennent à la recherche d'une fonction d'Airy biharmonique. Ces solutions ont été développées par Westergaard et Muskhelishvili.

Un développement limité des solutions au voisinage du fond de fissure (fig. A2) nous montre que le profil des contraintes dans cette zone est singulier en $\frac{1}{\sqrt{r}}$. En mode I, le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}(r, \theta)$ à proximité de la fissure s'écrit :

$$\bar{\sigma}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \bar{f}(\theta)$$

avec :

$$\bar{f}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} & 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \end{pmatrix}$$

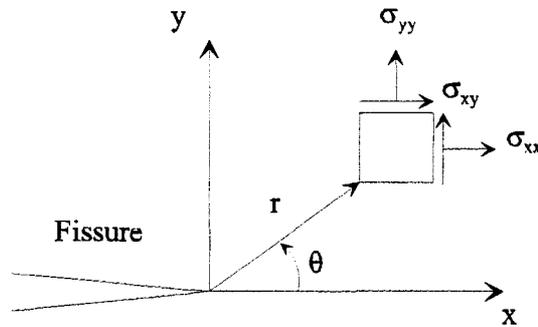


Fig. A2 : Contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure

- Dans le cas de structure de dimensions finies, on peut exprimer K_i ($i = I, II, III$ pour mode I, mode II, mode III) sous la forme générale suivante :

$$K_i = \sigma \sqrt{\pi a} * F_i \quad i = I, II, III$$

où F_i est le facteur de correction de contrainte ou facteur de forme tenant compte de la géométrie de la fissure ainsi que du type de sollicitations auxquelles la structure est soumise, σ est la contrainte appliquée et a la longueur de fissure ou la profondeur de la fissure.

Auteurs	Domaine d'étude			Facteur de forme	Méthode numérique
	a/c	a/t	t/R		
Kobayashi [KOB77]	0.2; 0.98	0 à 0.8	0.1; 0.25; 0.5	$F_I = K_I / \left[\sigma \sqrt{\pi a / Q} \left(\cos^2 \phi + \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \phi \right)^{1/4} \right]$	Eléments finis
Atluri [ATL77]	0.1; 0.2; 0.5	0.5; 0.8	0.25; 0.5; 1	$F_I = K_I / \left[\sigma \sqrt{\pi a / Q} \left(\sin^2 \phi + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \phi \right)^{1/4} \right]$	Eléments finis
Héliot [HEL79]	1/3	0.25; 0.5; 0.8	0.1	Idem Kobayashi	Eléments frontières
Mc Gowan [GOW79]	1/3	0.25; 0.5; 0.8	0.1	Idem Kobayashi	Eléments finis
Raju [RAJ80-82]	0.2 à 1	0.2; 0.5; 0.8	0.1; 0.25	$F_I = K_I / \left[p R / t \sqrt{\pi a / Q} \right]$	Eléments finis
Chen [CHE95]	0.25; 0.5; 1	0 à 0.8 pas 0.2	0.1 à 0.5 pas 0.1	$F_I = K_I / \left[p \sqrt{\pi a / Q} \right]$	Méthode des forces
Wang [WAN96]	0.05; 0.1	0.2; 0.5; 0.8	0.1	$F_I = K_I / \left[\sigma \sqrt{\pi a / Q} \right]$	Eléments finis

Tableau A1 : Facteur d'intensité de contrainte pour une fissure axiale dans une coque cylindrique

avec :

$$\sigma = \begin{cases} p \frac{2R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} & \text{pour une fissure interne} \\ p \frac{2R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} & \text{pour une fissure externe} \end{cases}$$

$$\text{et } Q = 1 + 1.464 \left(\frac{a}{c} \right)^{1.65}$$

R : rayon moyen de la coque
 R_i : le rayon interne de la coque
 R_e : le rayon externe de la coque

Remarque : $\sigma \approx \frac{pR}{t}$ dans le cas d'une coque mince

Le nombre de solutions analytiques étant très limité, les facteurs d'intensité de contraintes sont issus en général d'un calcul élastique par éléments finis ou éléments frontières (« Boundary elements method »). Des facteurs de forme, pour différentes géométries et divers chargements sont disponibles dans la littérature. On citera les recueils suivants :

- ◆ formulaire de Y. Murakami [MUR87],
- ◆ formulaire de l'E.P.R.I. [KUM81], [ZAH89-90-91],
- ◆ formulaire du C.E.A. [DRU95].

• Dans le cas d'une coque cylindrique contenant une fissure semi-elliptique, le ou les facteurs de forme F dépendent des dimensions de la fissure et du cylindre, c'est à dire des rapports a/c , a/t , t/R (R étant le rayon moyen de la coque), et de la position sur le front de fissure, par conséquent de l'angle ϕ (fig. A3).

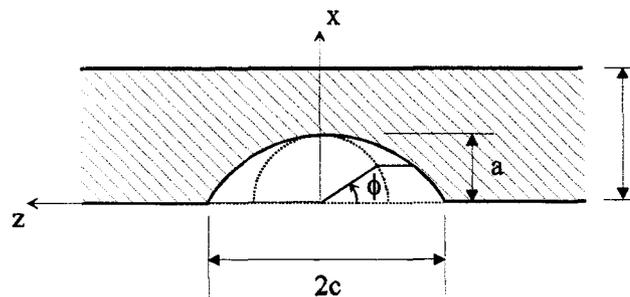


Fig. A3 : Angle de positionnement sur le front de fissure

Soit $\sigma_j(x)$ une distribution de contrainte de degré j sur les lèvres de la fissure. Pour chaque $\sigma_j(x)$, on détermine un F.I.C. et par conséquent un facteur de forme F_j . La superposition de ces résultats nous offre la possibilité d'obtenir le F.I.C. pour un chargement quelconque, par exemple un chargement thermique. La contrainte $\sigma(x)$ induite par ce chargement, sur les lèvres de la fissure, peut être approximée, après un développement limité, par un polynôme :

$$\sigma_j(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^j$$

$$\sigma(x) = \sum_j A_j \cdot \sigma_j(x)$$

où A_j est une constante.

Si on appelle F le facteur de forme correspondant à la contrainte $\sigma(x)$, on montre alors que F est obtenu en sommant les F_j :

$$F = \sum_j A_j \cdot F_j$$

Nombreux sont les auteurs à avoir utilisé cette méthode pour déterminer le F.I.C. d'une fissure axiale dans un cylindre sous pression interne (tableau A1), pour les dimensions suivantes :

- * $0.2 \leq a/c \leq 1$,
- * $0.2 \leq a/t \leq 0.8$,
- * $t/R \leq 0.1$.

• Les facteurs d'intensité de contraintes sont issus des contraintes ou déplacements en fond de fissure. Il existe d'autres approches qui sont basées sur le bilan énergétique tels que le taux de restitution d'énergie.

A-II-3 : Critère énergétique : Taux de restitution d'énergie

Griffith a abordé le problème de la rupture des corps fissurés d'un point de vue énergétique donnant ainsi naissance au taux de restitution d'énergie : G .

Griffith émet l'hypothèse que l'énergie totale du système reste constante pour une extension de fissure infinitésimale :

$$dU_{\text{sys}} = dU_{\text{déf.}} + dU_{\text{load}} + dU_{\text{surf.}} + dU_{\text{cin.}} = 0$$

où :

- dU_{sys} : Variation de l'énergie totale présente dans le corps fissuré,

- $dU_{\text{déf.}}$: Variation de l'énergie de déformation,
- dU_{load} : Variation du travail des forces extérieures,
- $dU_{\text{surf.}}$: Energie dissipée dans la séparation des lèvres de la fissure, qui est égale à $2\gamma ds$,
- $dU_{\text{cin.}}$: Variation de l'énergie cinétique.
- ds : surface de rupture unitaire

Si on néglige la variation de l'énergie cinétique, le bilan énergétique s'écrit alors :

$$dU_{\text{surf.}} = -d(U_{\text{déf.}} + U_{\text{load}}) = 2\gamma ds = Gds$$

G est égal à la variation de la somme de l'énergie élastique $U_{\text{déf.}}$ et du travail des forces extérieures U_{load} par unité de surface fissurée (ds) : c'est l'énergie absorbée par unité de surface fissurée.

$$G = -\frac{\partial}{\partial S} [U_{\text{déf.}} + U_{\text{load}}]$$

Si $G < 2\gamma$, il y a arrêt de la fissuration,

si $G = 2\gamma$, il y a propagation stable de la fissure,

si $G > 2\gamma$, il y a rupture brutale.

En contraintes planes et en déformations planes, on peut relier G_I , le taux de restitution d'énergie en mode I, à K_I :

En contraintes planes : $G_I = \frac{K_I^2}{E}$

En déformations planes : $G_I = \frac{K_I^2}{E}(1-\nu^2)$

En mode I, la rupture a lieu quand G_I atteint la valeur critique G_{IC} qui est une caractéristique du matériau au même titre que la ténacité K_{IC} .

Les mécanismes de rupture d'une structure sont généralement étudiés pour un chargement en mode d'ouverture. Cependant, en pratique, beaucoup de ruptures en service proviennent de fissures soumises à un chargement en mode mixte.

A-II-4 : Rupture en mode mixte

Un grand nombre de composants mécaniques chargés axialement présente des fissures d'orientation quelconque par rapport à l'axe du chargement, qui induisent un état de mode mixte du fait de leur orientation. Le cas de la coque cylindrique, sous pression interne et effet de fond, en présence d'une fissure inclinée par rapport à l'axe de la coque, en est un parfait exemple.

La fissure chargée en mode I se propage dans son plan. Une caractéristique de la fissure en mode mixte est qu'elle se propage de manière curvilinéaire. En d'autres termes, la fissure change sa direction de propagation quand elle est soumise à un mode mixte. Par conséquent les critères de rupture en mode d'ouverture K_{IC} et G_{IC} ne sont plus suffisants pour décrire la rupture en mode combiné. Dans le cas de mode mixte, on cherche à formuler un critère qui déterminera l'angle de la propagation débutante de la fissure par rapport au plan constitué par les lèvres de la fissure, et un critère d'initiation de la rupture.

En l'absence d'un concept largement accepté comme critère de propagation d'une fissure, nous nous limiterons à la présentation des plus utilisés en élasticité. Il s'agit du critère de contrainte circonférentielle maximale et du critère de la densité d'énergie de déformation minimale.

A-II-4-1 : Critère de la Contrainte Tangentielle Maximale (Maximum Tangential Stress criterion : MST criterion)

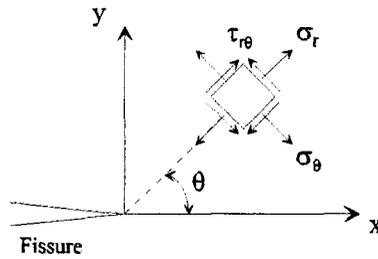


Fig. A4 : Contraintes dans un élément près du fond de fissure

Erdogan et Sih [ERD63] proposent la première théorie d’initiation de la rupture en mode mixte : la théorie de la contrainte tangentielle ou circonférentielle maximale. L’état de contrainte en fond de fissure est défini en coordonnée polaire (fig. A4).

Ce critère établit que :

- 1) l’extension de fissure commence à partir du front de fissure le long d’une direction radiale, $\theta = \theta_0$, suivant laquelle la contrainte circonférentielle σ_θ devient maximale, c’est à dire quand $\tau_{r\theta} = 0$
- 2) la rupture s’initie quand la contrainte circonférentielle σ_θ atteint une valeur critique σ_c , égale à la contrainte de rupture en tension uniaxiale. (fig. A4).

σ_c est une constante du matériau.

Si on utilise les expressions de Westergaard en coordonnées polaires pour décrire le champ de contraintes au voisinage de la fissure soumise à un chargement en mode I et II dans un problème plan, σ_θ et $\tau_{r\theta}$ s’écrivent :

$$\sigma_\theta = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

θ_0 est obtenu en résolvant l’équation suivante :

$$\tau_{r\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right) = 0$$

d'où l'angle d'extension de la fissure θ_0 :

$$\tan \frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8}$$

La rupture s'initie quand la contrainte circonférentielle atteint une valeur critique σ_c :

$$\sigma_\theta = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta_0}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\frac{3}{4} \sin \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta_0}{2} \right) = \sigma_c = \frac{K_{IC}}{\sqrt{2\pi r}}$$

Cette équation peut être utilisée pour définir un facteur d'intensité de contraintes équivalent K_{eq} pour un problème en mode mixte :

$$K_{eq} = K_I \cos^3 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \theta_0$$

La rupture s'initie quand K_{eq} atteint K_{IC} , caractéristique mécanique beaucoup répandue plus que K_{IIC} (valeur critique de K_{II}).

A-II-4-2 : Critère de la densité d'énergie de déformation minimale : Critère S

• En 1974, Sih [SIH74] formule le critère de la densité d'énergie de déformation minimale.

La rupture s'initie en fond de fissure dans une direction le long de laquelle le facteur de densité d'énergie de déformation S est minimum. Ce qui revient à dire que la fissure se propage le long d'un chemin où la résistance est minimale.

La rupture a lieu quand S atteint une valeur critique S_{cr} , caractéristique du matériau qui dépend de la géométrie de la fissure et du chargement.

Cette théorie est développée sur la base d'un facteur S de densité d'énergie de déformation pour un élément de volume à une distance r du point d'initiation de la rupture.

S est défini comme :

$$S = r \cdot \frac{dW}{dV}$$

où $\frac{dW}{dV}$ est la densité d'énergie de déformation par unité de volume et W est égale à :

$$W = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}$$

Quand la déformation est négligeable partout dans le solide, on peut se placer dans le domaine élastique de la rupture pour décrire le champ de contrainte et de déformation.

En mécanique linéaire élastique de la rupture, on peut écrire :

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) + \frac{1}{2\mu} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ sont les composantes du tenseur des contraintes, E le module d'Young, ν le coefficient de Poisson et $\mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$ le module de cisaillement.

L'introduction d'une région « rayonnante » (fig. A5) entourant le site de rupture provient du fait que l'on ne peut pas décrire en détail l'état de contraintes au voisinage immédiat de la discontinuité. En dehors de cette région, le champ de contrainte est parfaitement décrit par la solution obtenue en Mécanique des Milieux Continus. Donc la région rayonnante sert à séparer l'extérieur où le comportement du matériau possède un comportement connu et l'intérieur où les propriétés mécaniques du matériau sont inconnues.

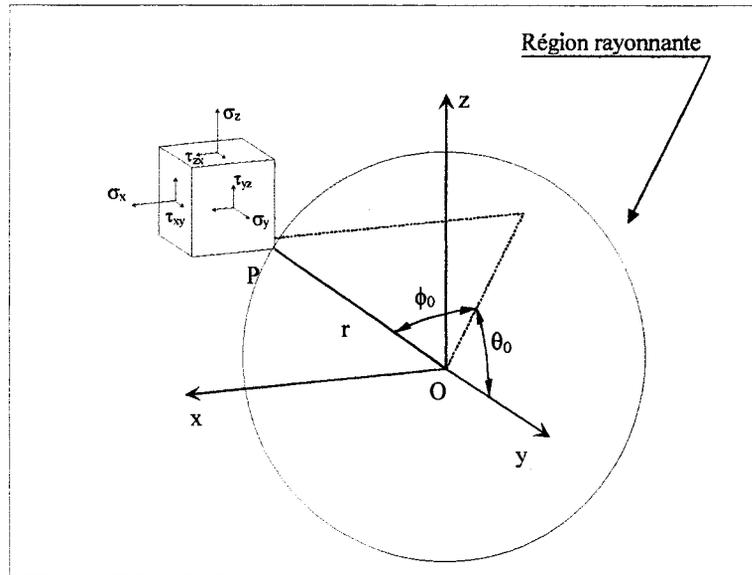


Fig.A5 : Région sphérique entourant le point O d'initiation de rupture
et élément de volume en dehors de la région sphérique ou rayonnante

Les hypothèses de cette théorie sur un corps tridimensionnel peuvent être établies comme suit :

- Hypothèse 1 (H1) : La direction selon laquelle la rupture s'initie est donnée par le point où S est minimum (S_{\min}),
- Hypothèse 2 (H2) : L'initiation de la rupture a lieu quand S_{\min} atteint une valeur critique S_{cr} .
- Hypothèse 3 (H3) : La longueur r de l'extension de fissure initiale est supposée proportionnelle à S_{\min} tel que S_{\min}/r reste constant le long du front de la nouvelle surface créée.

• *Dans le cas d'une fissure elliptique ou circulaire noyée et externe*, le champ de contrainte au voisinage de la fissure (fig. A6) a été calculé par Kassir et Sih [KAS75] dans un repère sphérique $(P_0, \bar{n}_0, \bar{b}_0, \bar{t}_0)$:

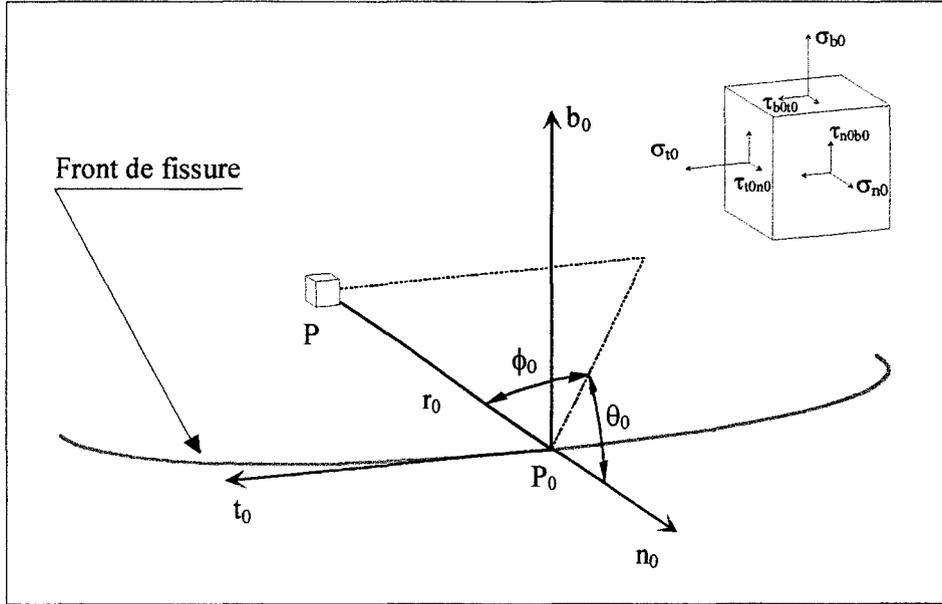


Fig.A6 : Champs de contraintes au voisinage de la fissure

$$\sigma_{n_0} = \frac{K_I}{\sqrt{2r_0 \cos \phi_0}} \cdot \cos \frac{\theta_0}{2} \cdot \left[1 - \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{3\theta_0}{2} \right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2r_0 \cos \phi_0}} \cdot \sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \left[2 + \cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{3\theta_0}{2} \right]$$

$$\sigma_{b_0} = \frac{K_I}{\sqrt{2r_0 \cos \phi_0}} \cdot \cos \frac{\theta_0}{2} \cdot \left[1 + \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{3\theta_0}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2r_0 \cos \phi_0}} \cdot \sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \cos \frac{\theta_0}{2} \cdot \cos \frac{3\theta_0}{2}$$

$$\sigma_{t_0} = 2\nu \cdot \left[\frac{K_I}{\sqrt{2r_0 \cos \phi_0}} \cdot \cos \frac{\theta_0}{2} - \frac{K_{II}}{\sqrt{2r_0 \cos \phi_0}} \cdot \sin \frac{\theta_0}{2} \right]$$

$$\tau_{n_0 b_0} = \frac{K_I}{\sqrt{2r_0 \cos \phi_0}} \cdot \sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \cos \frac{\theta_0}{2} \cdot \cos \frac{3\theta_0}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2r_0 \cos \phi_0}} \cdot \cos \frac{\theta_0}{2} \cdot \left[1 - \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{3\theta_0}{2} \right]$$

$$\tau_{n_0 t_0} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2r_0 \cos \phi_0}} \cdot \sin \frac{\theta_0}{2}$$

$$\tau_{b_0 t_0} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2r_0 \cos \phi_0}} \cdot \cos \frac{\theta_0}{2}$$

où K_I , K_{II} , K_{III} sont les facteurs d'intensité de contraintes.

Les contraintes dans l'élément dans le plan normal (\bar{n}_0, \bar{b}_0) à une distance $r = r_0 \cdot \cos \phi_0$ du point P_0 et à un angle θ_0 de \bar{n}_0 sont identiques à celles obtenues pour un problème 2D. Par conséquent l'expression de la densité d'énergie de déformation est :

$$\frac{dW}{dV} = \frac{S}{r_0 \cdot \cos \phi_0}$$

d'où
$$S(\theta) = \frac{1}{r} \cdot \frac{dW}{dV} = a_{11} \cdot K_I^2 + 2 a_{12} \cdot K_I K_{II} + a_{22} \cdot K_{II}^2 + a_{33} \cdot K_{III}^2$$

avec les coefficients a_{ij} :

$$16\mu \cdot a_{11} = (1 + \cos\theta) \cdot (\kappa - \cos\theta)$$

$$16\mu \cdot a_{12} = \sin\theta \cdot [2 \cdot \cos\theta \cdot (\kappa - 1)]$$

$$16\mu \cdot a_{22} = (\kappa + 1) \cdot (1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta) \cdot (3 \cos\theta - 1)$$

$$16\mu \cdot a_{33} = 4$$

Au voisinage du fond de fissure, on est en déformation plane donc $\kappa = 3 - 4\nu$.

Première hypothèse du critère S :

La propagation de la fissure se produit à chaque point du front de fissure, dans la direction qui présente la valeur minimale du facteur de densité d'énergie de déformation S_{\min} :

$$S_{\min} = \left(\frac{dW}{dV} \right)_{r_0} = \frac{S}{\cos \phi_0}$$

La valeur minimale est obtenue quand $\phi_0 = \phi_0^* = 0$.

Ce qui signifie que la fissure se propage toujours dans le plan normal au point du front de fissure (\bar{n}_0, \bar{b}_0) .

L'angle θ_0^* définissant l'angle de propagation de la fissure dans le plan (\bar{n}_0, \bar{b}_0) est obtenu en vérifiant les relations mathématiques suivantes :

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0$$

Ayant déterminé les angles $\phi_0^* = 0$ et θ_0^* qui donnent la direction de propagation de la fissure en chaque point du front, on peut calculer S_{\min} qui est égale à $S(\phi_0^*, \theta_0^*)$.

La seconde hypothèse du critère est que la propagation s'initie quand S_{\min} atteint S_{cr} , la valeur critique maximale qui est une constante du matériau.

La troisième hypothèse du critère établit que S_{\min}/r_0 doit rester constant le long du front de fissure. Cette condition permet une valeur de r_0 pour chaque point du front.

Le critère S , tout comme le Critère de Contrainte Tangentielle Maximale, est limité au domaine élastique de la rupture.

A-II-5 : Limite de validité du domaine élastique

les concepts précédents sont valables pour :

- un matériau isotrope ayant un comportement élastique,
- une taille de zone plastifiée en fond de fissure qui doit rester petite par rapport à la longueur de la fissure et aux dimensions de la structure.

A-III : CORRECTION DE ZONE PLASTIFIEE

Comme on a pu le voir avec les solutions apportées par Westergaard [A-II-2], le champ de contrainte en pointe de fissure est singulier. Il tend en théorie vers l'infini. Dans la pratique, cela signifie que l'on dépasse le seuil de plasticité en fond de fissure. En réalité, on a un écrêtage des contraintes en fond de fissure (fig. A7). Le domaine de validité de l'approche élastique est lié à la taille de la zone plastifiée créée (fig. A8).

Tant que la zone plastifiée est faible devant le ligament, le domaine élastique est toujours valide. C'est ce que l'on appelle la plasticité confinée. On peut prendre en compte cette plastification en effectuant une correction de la taille de la fissure dans le calcul de K_I . Pour cela, la taille initiale de la fissure est augmentée du rayon de la zone plastifiée.

Le phénomène de plasticité confinée se rencontre généralement dans le cas de structures fissurées soumises à des chargements faibles devant le seuil plastique. La zone plastifiée entourant la pointe de la fissure est petite par rapport aux dimensions de la structure de telle manière que l'on peut supposer que la structure conserve son comportement élastique.

Dans le cas où la taille de la zone plastifiée devient grande par rapport au ligament, les paramètres de la mécanique de la rupture de l'élasticité linéaire ne rendent plus compte de la nocivité d'un défaut. On parle alors de plasticité étendue.

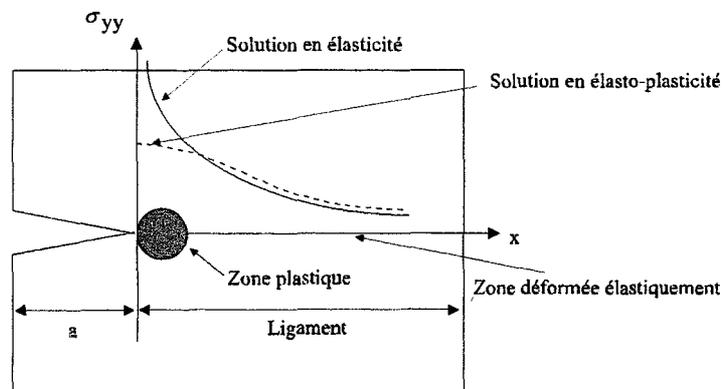


Fig.A7 : Ecrêtage des contraintes en pointe de fissure

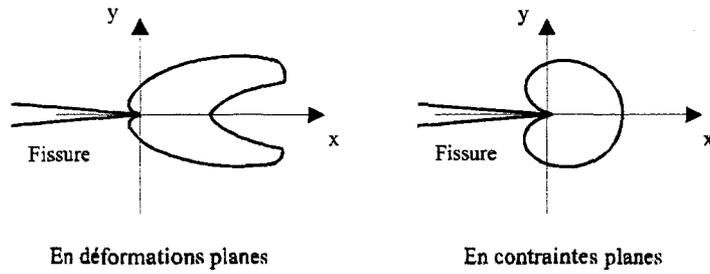


Fig.A8 : Zone plastifiée en mode I

A-III-1 : Plasticité confinée : Modèle d'Irwin

- Le modèle d'Irwin s'applique en contraintes planes dans le cas d'un matériau parfaitement plastique obéissant au critère de Tresca.

On considère plastifiée toute la zone où les contraintes sont supérieures ou égales à la limite d'élasticité σ_0 (fig. A9).

Reprenons la solution en contraintes planes calculée par Westergaard [A-II-2] et déterminons la taille de la zone plastifiée r_p :

$$\sigma_{yy}(\theta = 0) = \sigma_0 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_p}}$$

Soit :

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2$$

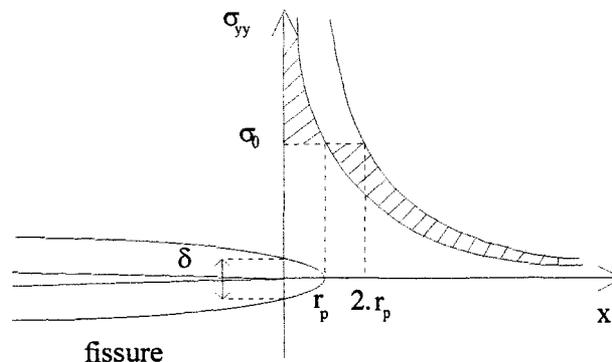


Fig. A9 : Calcul de la zone plastifiée par le modèle d'Irwin en contraintes planes

Dans un second temps, Irwin propose de tenir compte de l'écrêtage des contraintes pour $x \leq r_p$, afin de respecter l'équilibre des contraintes. Il faut pour cela translater la distribution de la contrainte élastique σ_{yy} d'une certaine quantité x de telle manière que les parties hachurées figure A9 soient égales. On montre que cette quantité est égale r_p . La fissure se comporte alors comme une fissure de longueur $(a+r_p)$.

Si on pose $\Phi = \frac{r_p}{a}$, on obtient :

$$\Phi = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2$$

où $\beta = 2$ en contraintes planes et $\beta = 6$ en déformations planes.

Compte tenu des approximations faites, ce modèle ne peut représenter parfaitement la forme de la zone plastifiée dans tout le plan ; néanmoins il conduit à une très bonne approximation dans tous les cas.

- Du fait de la plastification en fond de fissure, on observe un émoussement en pointe de fissure. En 1961, Wells propose de caractériser le comportement du voisinage d'une fissure aiguë par l'écartement des deux lèvres de la fissure.

Le profil de la fissure est émoussé par la plasticité : les lèvres s'écartent d'une quantité δ à leur extrémité (fig. A9).

$$\delta = 2 \cdot u_y \left(\theta = \frac{\pi}{2}, r = r_p \right)$$

En mode I et en contraintes planes, on montre que δ est fonction de K_I ou encore G_I :

$$\delta = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{K_I^2}{E\sigma_e} \approx \frac{K_I^2}{E\sigma_e} = \frac{G_I}{\sigma_e}$$

δ est appelé le C.T.O.D.: Crack Tip Opening Displacement.

Remarque :

On constate qu'il existe une relation linéaire entre le taux de restitution d'énergie et l'ouverture en fond de fissure. Cependant le CTOD possède un avantage certain sur G_I et K_I , il peut être calculé à la fois en plasticité confinée et en plasticité étendue.

De même que pour K_I , quand le CTOD atteint une valeur critique $CTOD_c$, il y a rupture instable.

A-III-2 : Plasticité étendue : Modèle de Dugdale-Barenblatt

- Ce modèle peut s'utiliser à la fois en plasticité confinée et en plasticité étendue.

L'expression de la taille de la zone plastifiée, proposée par Dugdale-Barenblatt, est la suivante :

$$r_p = a \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_0}\right)} - 1 \right)$$

où σ est la contrainte perpendiculaire à la fissure de longueur $2a$.

- On peut déterminer le C.T.O.D. relatif à ce modèle :

$$\delta = 8 \frac{\sigma_e a}{\pi E} \ln\left(1 / \cos \frac{\pi\sigma}{2\sigma_e}\right)$$

En développant sous forme de série δ et en ne conservant que le premier terme de cette série, pour $\sigma < \frac{3}{4}\sigma_e$, on retrouve la théorie d'Irwin, à savoir :

$$\delta = \frac{K_I^2}{E\sigma_e}$$

A-III-3 : Conclusions :

Tant que la taille de zone plastifiée reste petite par rapport aux dimensions de la pièce, la mécanique de la rupture fragile reste applicable moyennant une correction de la taille de la fissure. Expérimentalement, et en règle générale, on montre que la plasticité est confinée si :

$$(t - a) > 2,5 \cdot \left(\frac{K_{IC}}{r_p} \right)^2$$

où **(t-a)** est la longueur du ligament.

A-IV : RUPTURE DUCTILE**A-IV-1 : Intégrale J**

En 1956, Eshelby montre qu'il existe une famille d'intégrales de contour invariantes entourant un défaut dans une structure élastique soumise à un chargement. Cette famille d'intégrale, appelée intégrale J, est indépendante du contour choisi.

En 1968, Rice [RIC68-72] fait observer que l'intégrale J reste indépendante du contour si le contour n'entoure plus que la pointe de la fissure (fig. A10). Sa formulation est la suivante :

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - \bar{t} \frac{d\bar{u}}{dx} d\Gamma \right)$$

- Γ : chemin dans le plan autour de l'extrémité de l'entaille
- W : densité d'énergie de déformation : $W = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$
- \bar{t} : vecteur contrainte : $\bar{t} = \sigma_{ij} n_j$
- \bar{u} : vecteur déplacement en un point du contour

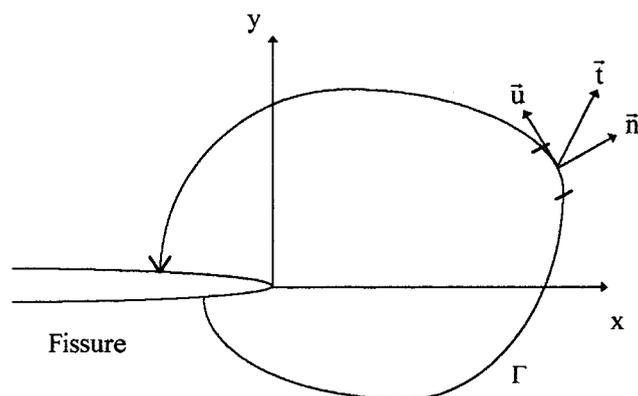


Fig. A10 : Intégrale de contour

J est un paramètre caractéristique de la pointe de la fissure tout comme le facteur d'intensité de contrainte. J est indépendante du chemin suivi et de la géométrie de l'éprouvette.

Elle correspond à la variation d'énergie potentielle lors d'une avancée de fissure :

$$J = - \frac{\partial P}{\partial a}$$

On l'appelle encore « force fissurante » ou « force d'extension de fissure » : c'est la force nécessaire pour faire avancer la fissure d'une unité de longueur.

Dans le domaine élastique linéaire, l'intégrale J est égale à G :

$$J_e = G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E^*} + \frac{(1 + \nu)K_{III}^2}{E}$$

avec :

$$E^* = E \quad \text{en contraintes planes}$$

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \text{en déformations planes}$$

En élasticité non linéaire, le calcul de J est possible si les contraintes dérivent d'un potentiel et si le chargement est monotone croissant.

• « D'après des études analytiques et expérimentales, l'intégrale J est le paramètre de la mécanique de la rupture élasto-plastique le plus sûr pour caractériser l'initiation de la propagation, la propagation stable et l'instabilité ultérieure de fissure des matériaux ductiles » rappellent Rahman et Brust [RAH97].

• En élasticité linéaire, Ishikawa et al. [ISH79] et Bui [BUI82] montrent que l'intégrale J peut être découpée en une partie symétrie J_I et une partie anti-symétrique J_{II} . J_I est la force fissurante en mode I pur, J_{II} la force fissurante en mode II pur.

On peut étendre le concept à un chargement comprenant les 3 modes de ruine : I, II, III :

$$J = J_I + J_{II} + J_{III}$$

En élasticité, on a :

$$J_i = \frac{K_i}{E^*} \quad i = I, II$$
$$J_{III} = \frac{K_{III}}{E} (1 + \nu)$$

avec : $E^* = E$ en contraintes planes et $E^* = E / (1 - \nu^2)$ en déformations planes.

Ishikawa [ISH79] fait remarquer qu'il est envisageable d'appliquer le découplage de l'intégrale J au domaine non linéaire. D'ailleurs, expérimentalement, le concept fut largement utilisé dans le domaine élasto-plastique et ductile [HOS87], [BAN91], [TOH92], [JEO93], [DIE92], [RAH97].

Jeon [JEO93] détermine expérimentalement l'intégrale J pour la rupture en mode mixte I et II de l'acier inoxydable austénitique 316L. Dans le cas de mode I nettement prédominant, il montre que l'amorçage de la rupture est prédit correctement par la ténacité à la rupture J_{IC} (fig. A11). La courbe de rupture des options 1 et 2 de la règle R6 (§ A-V) est conservative quel que soit le mode de rupture (fig. A12). Par contre, l'option 3 (§ A-V) ne l'est pas notamment pour les cas proches du mode I (fig. A12). Jeon précise que ce non-conservatisme apparent est très certainement lié à une mauvaise détermination de l'amorçage.

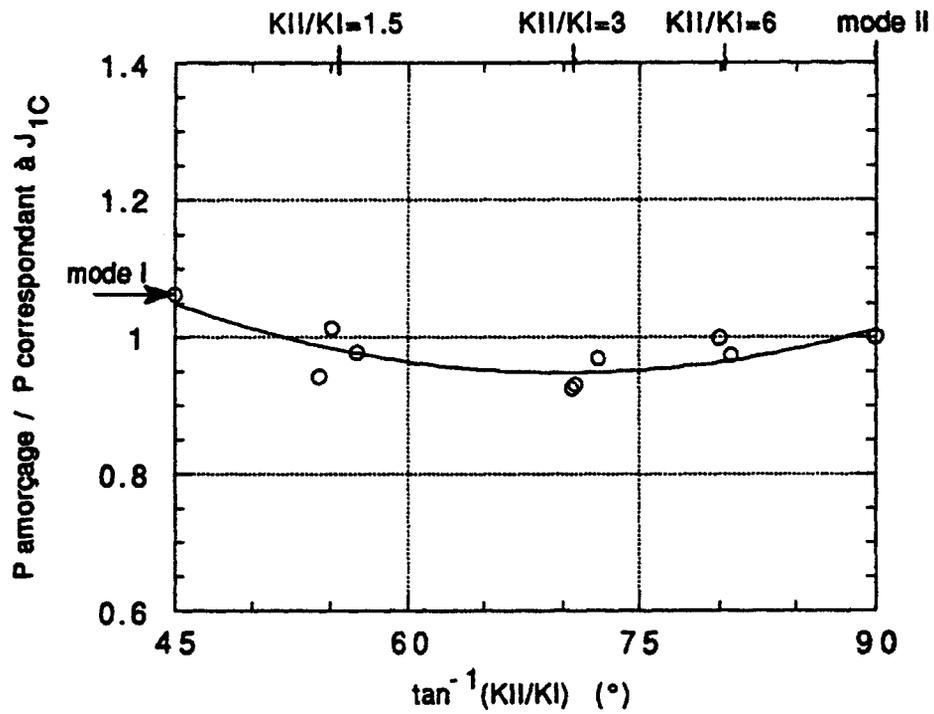


Fig. A11 : Influence de la mixité sur l'amorçage [JEO93]

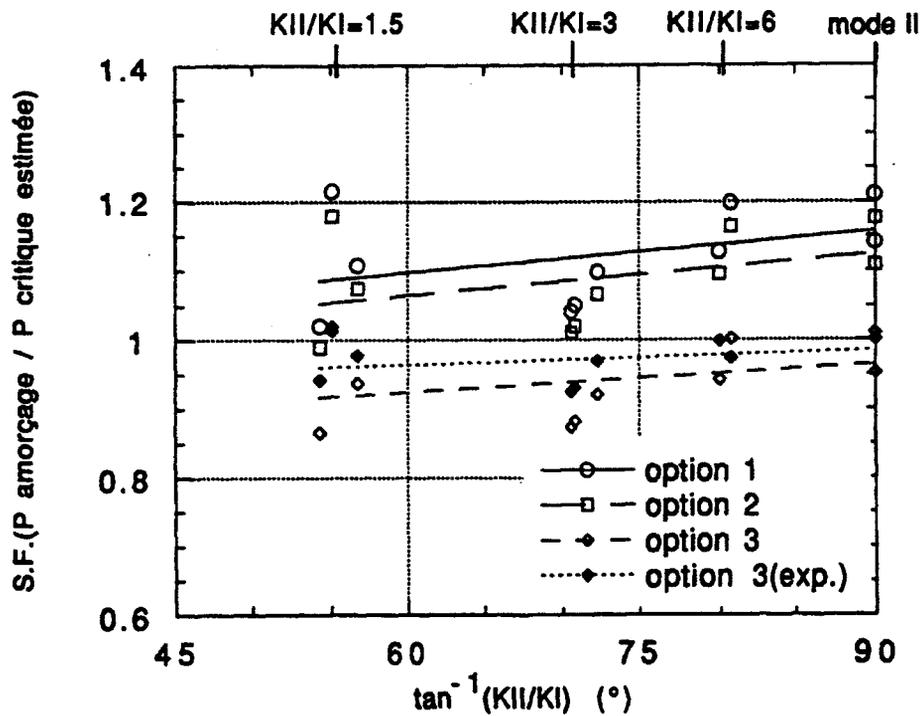


Fig. A12 : Etude du conservatisme des 3 options de la règle R6 [JEO93]

A-IV-2 : Champ HRR

Dans le cas d'un matériau pouvant être modélisé par une loi de type Ramberg-Osgood :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n$$

où α et n sont des constantes du matériau, σ_0 sa limite d'élasticité et $\varepsilon_0 = \sigma_0 / E$, on peut définir le champ de contrainte élasto-plastique au voisinage de la fissure. Hutchinson, Rosengren, Rice (H.R.R.) [HUT68], [RIC68], montrent que ce champ de contrainte est approché par la solution asymptotique suivante :

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left(\frac{EJ}{\alpha \sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot \tilde{\sigma}_{ij}(n, \theta)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \left(\frac{EJ}{\alpha \sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot \tilde{\varepsilon}_{ij}(n, \theta)$$

avec $\tilde{\sigma}_{ij}(n, \theta)$ et $\tilde{\varepsilon}_{ij}(n, \theta)$ des fonctions de n et θ , I_n intégrale fonction de n tabulée.

Cette solution est valable en élasticité non linéaire et le reste pour les matériaux ductiles si le chargement est monotone croissant.

A une certaine distance c de la pointe de la fissure, les contraintes sont proportionnelles au chargement appliqué P :

$$\frac{\sigma}{\tilde{\sigma}(n, \theta)} = \frac{P}{P_0}$$

Avec P_0 une valeur particulière de P arbitrairement choisie.

Kumar et Shih proposent alors dans les formulaires EPRI [KUM81],[KUM84],[KUM88] une nouvelle formulation de la solution H.R.R. :

$$J = \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 c h_1 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{n+1}$$

où h_1 est le coefficient qui remplace I_n . Il dépend du coefficient d'écroutissage et de la géométrie de la fissure.

L'intégrale J a été définie pour un chargement en mode d'ouverture. Plusieurs auteurs ont proposé une généralisation de l'intégrale J pour des modes combinés.

A-IV-3 : Généralisation de l'intégrale J

• Hellen et Blackburn [HEL75] proposent un critère basé sur des intégrales de contour pour étudier la propagation d'une fissure sous chargement de mode mixte et définissent un vecteur J^* :

$$J^* = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}$$

avec :
$$J_i = \int_{\Gamma} \left(W n_i - T_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) d\Gamma \quad i=1, 2, 3 \text{ en 3D et } i=1, 2 \text{ en 2D}$$

W est la densité d'énergie de déformation, n_i est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur normal au contour d'intégration, u_k le déplacement, T_k la $k^{\text{ème}}$ composante du vecteur contrainte et $d\Gamma$ un élément d'arc sur le contour d'intégration.

La rupture a lieu quand J^* atteint une valeur critique J_c^* .

En élasticité linéaire, on montre que :

$$J_1 = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E^*} + (1 + \nu) \frac{K_{III}^2}{E}$$

$$J_2 = -\frac{2}{E^*} K_I K_{II}$$

$$J_3 = (1 + \nu) \frac{K_{III}^2}{E}$$

Les prédictions basées sur le critère J^* sont satisfaites dans le cas où le mode I est dominant comme le soulignent Dai et Zheng [DAI87].

• L'intégrale \hat{J} , indépendante du contour, proposée par Kishimoto [KIS80], est une extension de l'intégrale J de Rice [RIC68].

Cette intégrale conserve la particularité d'être indépendante du contour choisi. Elle représente le taux de flux d'énergie durant l'extension d'une fissure.

Pour un problème tridimensionnel, elle se décompose en fonction des \hat{J}_k :

$$\hat{J} = \cos \theta_0 \hat{J}_1 + \cos \varphi_0 \hat{J}_2 + \cos \psi_0 \hat{J}_3$$

où :

$$\hat{J}_k = \int_{\Gamma} \left(W_e n_k - T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) d\Gamma + \iint_A \left[\sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial X_k} + \frac{\partial W_e}{\partial X_1} p_1 p_k - \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\sigma_{ij} p_j \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) p_1 \right] dA$$

où W_e est la partie élastique de la densité d'énergie de déformation, p un vecteur normal à la surface de l'élément de plaque, p_j ses j composants, A surface perpendiculaire aux lèvres de la fissure. Les angles de propagation θ_0 , ψ_0 , φ_0 sont définis figure A13.

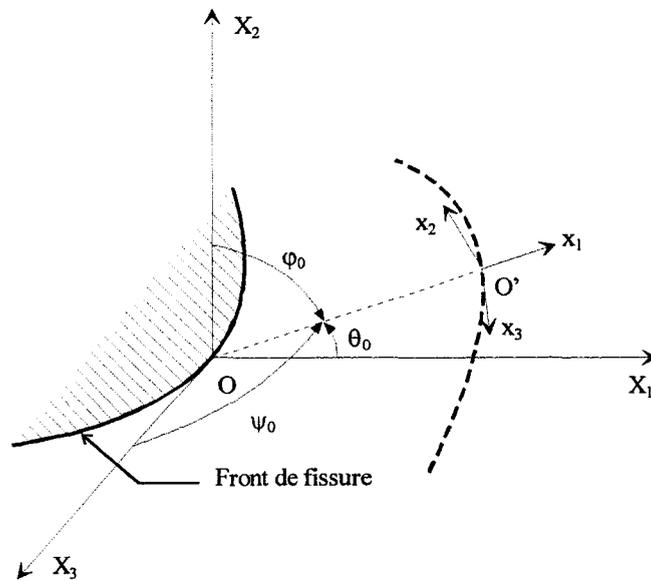


Fig. A13 : Angles de propagation de la fissure

\hat{J}_1 est égale à l'intégrale J de Rice.

La rupture a lieu quand \hat{J} atteint une valeur critique \hat{J}_c .

A-V : REGLE R6 : DIAGRAMME $K_r - L_r$

La règle R6 [MIL88], [AIN96] propose de vérifier l'intégrité d'une structure du point de vue de la rupture et de l'instabilité plastique. Cette vérification est réalisée à l'aide du diagramme $K_r - L_r$: « Diagramme de traitement de rupture » (Failure Assessment Diagramm : F.A.D.) (fig. A14). Le paramètre K_r est défini comme le rapport du facteur d'intensité de contraintes ou de l'intégrale J sur la ténacité du matériau K_{IC} ou J_{IC} selon le comportement du matériau étudié. Le paramètre L_r est défini comme le rapport de la charge appliquée sur la charge limite de la structure. Il représente le niveau de plasticité dans la structure.

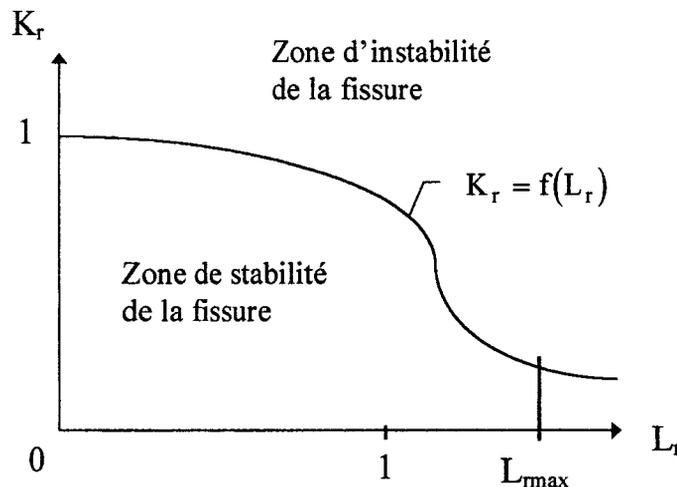


Fig. A14 : Diagramme $K_r - L_r$

La règle R6 préconise que les paramètres K_r et L_r doivent rester, respectivement, inférieurs ou égaux à 1 et L_{rmax} pour l'intégrité de la structure. La fissure est stable tant que K_r est inférieur ou égal à $f(L_r)$:

$$\text{Stabilité de la fissure} \Leftrightarrow K_r \leq f(L_r)$$

• En Plasticité confinée

On définit les paramètres K_r et L_r comme suit :

$$K_r = \frac{K_{ep}}{K_{IC}},$$

$$L_r = \frac{P}{P_L}.$$

K_{ep} est le facteur d'intensité de contraintes corrigé pour une fissure de longueur $a+r_p$ où r_p est le rayon de la zone plastifiée. P est la charge appliquée et P_L la charge limite de la structure.

• En Plasticité étendue

Les paramètres K_r et L_r sont reformulés de la manière suivante :

$$K_r = \frac{J}{J_{IC}},$$

$$L_r = \frac{P}{P_L} = \frac{\sigma_{réf}}{\sigma_0}.$$

K_r correspond au rapport de J sur J_{IC} . $\sigma_{réf}$, la contrainte de référence, représente la contrainte dans la section fissurée et σ_0 la limite élastique.

La règle R6 fournit 3 options pour définir la fonction $K_r=f(L_r)$.

Option 1 :

$$f_1(L_r) = \left(1 - 0.14 L_r^2\right) \left(0.3 + 0.7 \exp(-0.65 L_r^6)\right)$$

Cette courbe a été décrite de manière empirique à la suite de lissage de courbes contrainte - déformation. Elle fournit une borne inférieure qui peut être utilisée quand seules la limite élastique et la charge ultime du matériau sont connues. Cette option doit être employée avec précaution quand le matériau possède une capacité à l'allongement importante.

Option 2 :

$$f_2(L_r) = \left(\frac{E\varepsilon_{réf}}{L_r\sigma_0} + \frac{L_r^3\sigma_0}{2E\varepsilon_{réf}} \right)^{-1/2}$$

où $\varepsilon_{réf}$ est la valeur correspondante à $\sigma_{réf}$ sur la courbe d'écrouissage du matériau.

Cette fonction est issue des travaux de Ainsworth [AIN84]. Elle prend en compte la loi de comportement réelle du matériau contrairement à celle provenant de l'option 1. L'approximation fournie par la fonction $f_2(L_r)$ va dans le sens de la surestimation de J.

Option 3 :

Le F.A.D. est obtenu par l'équation suivante :

$$K_r = f_3(L_r) = \sqrt{\frac{J_e}{J}}$$

J_e et J sont issus respectivement d'un calcul élastique et élasto-plastique pour le même chargement. J peut être également défini à partir des méthodes d'estimation simplifiée qui seront présentées au chapitre B ou par l'expérience.

$f_3(L_r)$ est, comparativement aux options 1 et 2, la fonction qui se rapproche le plus de la réalité. Elle est utilisée chaque fois que la détermination de l'intégrale J est possible.

Très souvent, J est obtenu par le calcul numérique par éléments finis à travers la méthode Gthêta établie par Destuyder [DES81-83].

Cependant, la création du modèle numérique ainsi que les temps de calculs sont longs et fastidieux. Divers organismes de recherches ont alors proposé d'établir des méthodes d'estimations simplifiées de J .

- B -

METHODES D'ESTIMATION SIMPLIFIEE DE J

B-I : INTRODUCTION

Quand la plastification en fond de fissure est importante, la stabilité du défaut est étudiée grâce à la force fissurante J . Cependant le calcul de l'intégrale J est très fastidieux étant donné la complexité des calculs non-linéaires par éléments finis. Des méthodes d'estimation simplifiée de J ont alors été mises en oeuvre.

Historiquement, c'est la recherche nucléaire anglaise, le CEGB (Central Electricity Generating Board), qui est à l'origine des méthodes simplifiées à travers les travaux, relativement récents, de Ainsworth. Le but de ces méthodes est d'obtenir un formulaire donnant J pour un ensemble de configurations, tout comme il existe un formulaire donnant K_I .

Ces méthodes consistent à approximer l'intégrale J plastique à partir d'un calcul élastique de J par éléments finis et d'un facteur correctif prenant en compte la plastification en fond de fissure. On supposera que l'intégrale J se décompose sous la forme d'une partie élastique J_e et d'une partie plastique J_p :

$$J = J_e + J_p \quad (B1)$$

Nous présenterons les méthodes simplifiées d'utilisation courante dans l'industrie nucléaire, pour le calcul du paramètre J , à savoir :

- la méthode E.P.R.I.,
- la méthode J_s ou A16,
- la méthode R6.

Nous énoncerons parallèlement les hypothèses simplificatrices et le domaine de validité relatifs à chacune de ces méthodes.

B-II : ESTIMATION DE KUMAR ET SHIH : METHODE D'ESTIMATION DU FORMULAIRE E.P.R.I. [KUM81],[KUM84],[KUM88]

B-II-1 : Intégrale J élastique

L'intégrale J élastique se calcule à partir des résultats connus et référencés (Zahoor [ZAH89]-[ZAH90]-[ZAH91]...) de K_I et en effectuant une correction sur la longueur de fissure pour tenir compte la zone plastifiée lorsque celle-ci est faible [§. B-III].

On a :

$$J_e = \frac{K_I^2(a_e)}{E^*} \quad (B2)$$

avec : $E^* = E$ en contraintes planes et $E^* = E/(1 - \nu^2)$ en déformations planes

où a_e correspond à la longueur de fissure corrigée par la méthode d'Irwin :

$$a_e = a + \phi \cdot r_y$$

$$r_y = \frac{1}{\beta\pi} \frac{n-1}{n+1} \left[\frac{K_I(a)}{\sigma_0} \right]^2 \quad (B3-a-b)$$

avec :

- n : coefficient d'érouissage du matériau,

$$- \phi = \frac{1}{1 + (P/P_L)^2},$$

- $\beta = 2$ en contraintes planes et $\beta = 6$ en déformations planes,

- P est la charge appliquée ,

- P_L la charge limite de la structure considérée.

B-II-2 : Intégrale J plastique

La loi de comportement des matériaux considérés est modélisée par la famille de matériaux de type Ramberg-Osgood :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (B4)$$

avec :

- σ_0 : la limite d'élasticité conventionnelle,
- E : le module d'Young,
- $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$,
- n : le coefficient d'écrouissage,
- α : un coefficient de la loi de comportement.

• Pour un matériau de type Ramberg-Osgood, on définit *l'intégrale J plastique* comme suit :

$$J_p = \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 \tilde{c} h_1 \left(\frac{a}{t}, n \right) \left(\frac{P}{P_0} \right)^{n+1} \quad (B5)$$

h_1 dépend de la géométrie de la fissure, du matériau considéré ; elle est tabulée à partir de calculs éléments finis. P est la charge appliquée à la structure, P_0 un chargement caractéristique, et \tilde{c} une dimension caractéristique telle que le ligament. a correspond à la longueur de la fissure, t à l'épaisseur de la structure fissurée.

B-II-3 : Inconvénients de la méthode

Il n'existe pas de loi de Ramberg-Osgood permettant d'épouser la totalité de la loi de comportement d'un matériau. Pour chaque couple (α, n) , l'ajustement est effectué pour une zone limitée de la courbe (fig. B1). Ce qui est la source d'erreurs parfois non négligeables entre les résultats éléments finis et les estimations de J fournies par le formulaire E.P.R.I.

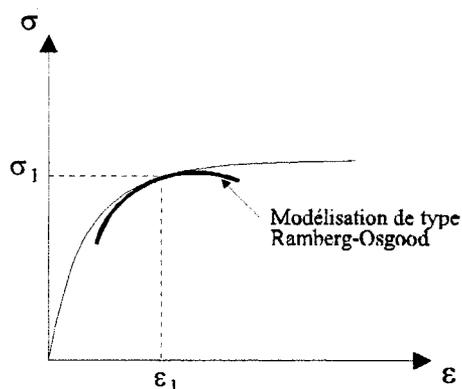


Fig. B1 : Comparaison loi de comportement réelle du matériau et sa modélisation par la loi de Ramberg-Osgood

La tabulation des résultats éléments finis de l'E.P.R.I. est restrictive puisqu'elle ne permet pas d'étudier une loi de comportement réelle.

Le formulaire E.P.R.I. présente également le gros désavantage de ne donner que des valeurs discrètes de dimensions de fissure ou n . Dans certains cas des interpolations linéaires et des extrapolations linéaires peuvent donner des résultats non conformes à la formulation retenue.

B-III : TRAVAUX DE AINSWORTH

Afin de limiter les erreurs liées à la modélisation de la loi de comportement par une loi de type Ramberg Osgood, Ainsworth [AIN84] propose une méthode d'estimation basée sur la loi de comportement réelle du matériau en introduisant la notion de contrainte de référence, pour un chargement uniaxial :

$$\sigma_{\text{réf}} = \frac{P}{P_0} \sigma_0 \quad (B6)$$

- L'estimation simplifiée proposée par Kumar et Shih (B5) peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$J_p = \tilde{c} h_1 \alpha \sigma_0 \varepsilon_0 \left(\frac{\sigma_{réf}}{\sigma_0} \right)^{n+1} \quad (B7)$$

$$J_p = \tilde{c} h_1 \alpha \left(\frac{\sigma_{réf}}{\sigma_0} \right)^n \sigma_0 \varepsilon_0 \frac{\sigma_{réf}}{\sigma_0} \quad (B8)$$

$$\text{avec} \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (B9)$$

$$J_p = \tilde{c} h_1 \left(\frac{\varepsilon_{réf}}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_{réf}}{\sigma_0} \right) \varepsilon_0 \sigma_{réf} \quad (B10)$$

$$J_p = \tilde{c} h_1 \left(\varepsilon_{réf} - \sigma_{réf} \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \right) \sigma_{réf} \quad (B11)$$

où $\varepsilon_{réf}$ est la déformation de référence correspondant à la contrainte de référence $\sigma_{réf}$ sur la loi de comportement réelle du matériau.

- Cependant, le problème reste entier tant que h_1 dépend de n .

D'après l'équation (B5) et à partir de calculs éléments finis, on montre que h_1 est également fonction de P_0 . Ainsworth propose alors de chercher la charge particulière P_0 telle que $h_1(n, P_0)$ soit indépendant de n .

Illustrons, sur la figure B2, la dépendance de h_1 avec P_0 dans le cas d'une éprouvette C.T. On peut voir qu'en faisant le choix judicieux de $P_0 = 0.136 Bw\sigma_0$, h_1 est constant quel que soit n .

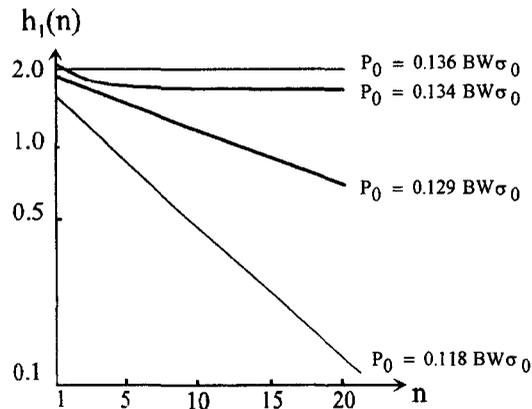


Fig. B2 : Variation de h_1 avec n

Cette charge particulière P_0 est, pour un grand nombre de géométries et de chargements, légèrement supérieure à la charge limite de la structure fissurée P_L .

De plus si l'on prend $P_0=P_L$, alors à quelques exceptions près :

$$h_1(1, P_L) \geq h_1(n, P_L) \quad (B12)$$

En considérant $h_1(n, P_L)$ égal à $h_1(1, P_L)$, on surestime J_p . On se placera dans ce cas.

On a alors :

$$J_p = \tilde{c} h_1(1, P_L) \left(\varepsilon_{\text{réf}} - \sigma_{\text{réf}} \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \right) \sigma_{\text{réf}} \quad (B13)$$

$\left(\varepsilon_{\text{réf}} - \sigma_{\text{réf}} \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \right)$ représente la déformation de référence plastique.

• Il nous reste donc à évaluer $h_1(1, P_L)$.

Ainsworth rappelle que les coefficients (n, α) de la loi de Ramberg-Osgood modélisant la loi de comportement d'un matériau élastique sont égaux à 1. On en déduit :

$$J_e = \frac{K_I}{E^*} = J_p (n=1) = \varepsilon_0 \sigma_0 \tilde{c} h_1(1, P_L) \left(\frac{\sigma_{\text{réf}}}{\sigma_0} \right)^2 \quad (B14)$$

On tire $h_1(n=1)$ de la valeur élastique de l'intégrale J.

$$\boxed{h_1(1, P_L) = \frac{J_e}{\tilde{c} \varepsilon_0 \sigma_0} \left(\frac{\sigma_{\text{réf}}}{\sigma_0} \right)^{-2}} \quad (B15)$$

On peut à présent calculer un J simplifié indépendant des coefficients de la loi de Ramberg-Osgood.

- Pour la correction de zone plastifiée confinée, Ainsworth propose une intégrale J élastique corrigée \bar{J}_e comme suit :

$$\bar{J}_e = J_e(1 + \phi) \quad (B16)$$

ϕ correspond à la zone plastique en fond de fissure. Ainsworth surestime ϕ par l'expression suivante :

$$\phi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_{\text{réf}}^2}{\sigma_{\text{réf}}^2 + \sigma_0^2} \quad (B17)$$

- L'estimation complète de J s'écrit :

$$J_s = J_e \left(\frac{E\varepsilon_{\text{réf}}}{\sigma_{\text{réf}}} + \phi \right) \quad (B18)$$

La loi de Ramberg-Osgood n'intervient donc plus dans l'estimation de J. La démarche de Ainsworth a consisté à réaliser des approximations en allant dans le sens de la surestimation.

Connaissant la loi de comportement réelle d'un matériau et à partir d'un calcul élastique, on peut déduire J_s .

B-IV : METHODE SIMPLIFIEE DE L'ANNEXE A16 DU RCC-MR : J_s OU J_{A16}

Les ingénieurs du C.E.A. ont développé une méthode d'estimation simplifiée de J : J_{A16}, basée sur les travaux de Ainsworth.

Ils proposent de calculer l'intégrale J plastique par le biais de l'intégrale J élastique corrigée par un facteur prenant en compte la plasticité K_{A16} :

$$J_p = K_{A16} * J_e \quad (B19)$$

L'annexe A16 de la Règle de Conception et de Construction des matériels mécaniques des îlots nucléaires (RCC-MR) [DRU95] [MOU93] présente cette méthode.

B-IV-1 : Calcul de J_e

Le calcul de J_e peut se faire de manière numérique ou à partir des nombreuses références bibliographiques telles que l'annexe A16 du RCC-MR, les formulaires E.P.R.I.

$$J_e = \frac{K_I^2}{E^*} \quad (B20)$$

avec : $E^* = E$ en contraintes planes, $E^* = E/(1 - \nu^2)$ en déformations planes

B-IV-2 : Correction plastique

Le facteur K_{A16} est un coefficient correcteur qui quantifie le niveau de plastification au voisinage de la fissure. Il est fonction des contraintes et déformations dites de « références » qui sont déduites des contraintes équivalentes dans la section du défaut.

Cette correction s'effectue en deux temps avec la détermination de deux coefficients K_{1A16} et K_{2A16} , qui expriment respectivement le niveau de contrainte nominale réelle et le niveau de contrainte réelle dans la section du défaut

K_{A16} est égal au produit de K_{1A16} et K_{2A16} :

$$K_{A16} = K_{1A16} * K_{2A16} \quad (B21)$$

Le chargement est décomposé en chargement primaire P (la plupart des chargements mécaniques), et en chargement secondaire Q, (les chargements thermiques par exemple) [PEL92A-B].

B-IV-2-1 : Calcul des contraintes équivalentes

• En l'absence de flexion globale, et pour des chargements axisymétriques, les contraintes équivalentes sont calculées à partir d'un critère de plasticité développé pour les plaques [ILI56]. Il prend en compte :

- les contraintes axiales de membrane σ_{1m}
- les contraintes axiales de flexion σ_{1b}
- les contraintes circonférentielles de membrane σ_{2m}
- les contraintes circonférentielles de flexion σ_{2b}

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\sigma_{1m}^2 + \sigma_{2m}^2 - \sigma_{1m} \cdot \sigma_{2m}\right) + \frac{2}{3\sqrt{3}} \left| \sigma_{1m}\sigma_{1b} + \sigma_{2m}\sigma_{2b} - 0,5 \cdot (\sigma_{1m}\sigma_{2b} + \sigma_{2m}\sigma_{1b}) \right| + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\sigma_{1b}^2 + \sigma_{2b}^2 - \sigma_{1b} \cdot \sigma_{2b}\right)} \quad (B22)$$

En membrane, ce critère est équivalent au critère de Von Mises.

• Au voisinage d'un défaut axial dans un cylindre sous pression interne p , on définit les contraintes de membrane et flexion comme suit (tableau B1) :

	Contrainte de membrane	Contrainte de Flexion
Contrainte normale aux lèvres du défaut	$\sigma_{1m} = \frac{PR}{t} \times \frac{1}{P_L}$	$\sigma_{1b} = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{t}\right)^2}$
Contrainte tangente aux lèvres du défaut	$\sigma_{2m} = \frac{PR_i^2}{\left(R_e^2 - R_i^2\right)}$	$\sigma_{2b} = 0$

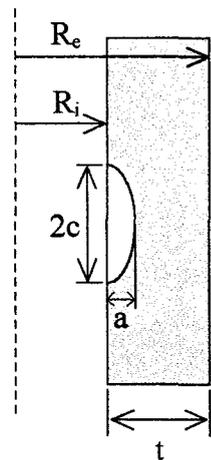


Tableau B1 : Contraintes au voisinage d'un défaut axial dans une coque cylindrique sous pression interne

P_L est la pression limite adimensionnée du cylindre fissuré, R le rayon moyen du cylindre.

Pour obtenir les contraintes réelles au voisinage du défaut, on retient l'hypothèse que seule la contrainte normale aux lèvres du défaut est modifiée par la présence du défaut. La contrainte normale de membrane réelle est obtenue en procédant au rapport de la contrainte nominale normale à la fissure sur la charge limite adimensionnée de la structure fissurée.

La contrainte normale de flexion est modifiée en tenant compte du fait que la section résistant à la flexion est diminuée de la profondeur a de la fissure.

La pression limite d'un cylindre contenant une fissure longitudinale traversante [MILL88] a été obtenue par diverses théories telles que l'analyse limite [SAL83] ou la théorie de Griffith [GRI24]. J. Desquines [DES96] propose, à la suite d'une étude basée sur l'analyse limite, la pression limite d'une coque cylindrique en présence d'un défaut de surface axiale suivante :

$$P_L = \left(1 - \frac{a}{t}\right) + \frac{a}{t} \frac{1}{1 + \frac{c^2}{Ra}} \quad (B23)$$

Cette pression limite P_L est adimensionnée avec $(pR/t\sigma_0)$.

- Pour un défaut circonférentiel de surface dans un cylindre sous pression interne p , les contraintes dans la section fissurée sont définies tableau B2. On remarque que cette fois la contrainte normale réelle est calculée grâce aux théories de la résistance des matériaux comme *le rapport* de la force agissant sur la section fissurée *sur* la surface fissurée.

Toutefois, on trouve également une formulation de la contrainte équivalente dans la section fissurée déterminée à partir de l'analyse limite [DES96].

	Contrainte de membrane	Contrainte de Flexion
Contrainte normale aux lèvres du défaut	$\sigma_{1m} = \frac{P \left(R_i^2 + \frac{1}{2} ac \right)}{\left(R_e^2 - R_i^2 \right) - \frac{1}{2} ac}$	$\sigma_{1b} = 0$
Contrainte tangente aux lèvres du défaut	$\sigma_{2m} = \frac{PR}{t}$	$\sigma_{2b} = \frac{p}{2}$

Tableau B2 : Contraintes au voisinage d'un défaut circonférentielle dans une coque cylindrique sous pression interne

Les notations utilisées dans le tableau B2 sont les mêmes que pour le cas de la fissure axiale (tableau B1).

B-IV-2-2 : Détermination de K_{1A16}

Le coefficient K_{1A16} corrige le fait que la contrainte nominale σ_{no} n'est pas la contrainte nominale réelle σ_{nor} à laquelle est soumise la structure. Il s'exprime comme le rapport au carré de la contrainte nominale réelle sur la contrainte nominale, étant donné la relation liant J_e avec le carré du chargement.

$$K_{1A16} = \left(\frac{\sigma_{nor}}{\sigma_{no}} \right)^2 \tag{B24}$$

Connaissant les contraintes nominales équivalentes primaires $\sigma_{no}(P)_{eq}$ et les contraintes nominales équivalentes primaires et secondaires $\sigma_{no}(P+Q)_{eq}$, la contrainte nominale réelle σ_{nor} est déterminée sur la loi de comportement réelle du matériau (fig. B3).

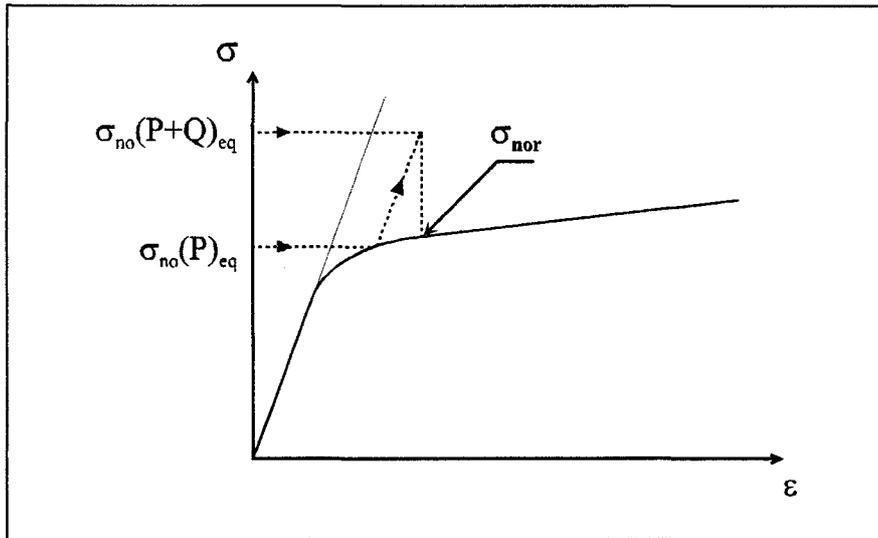


Fig. B3 : Détermination de la contrainte nominale réelle à partir des contraintes nominales équivalentes

Dans le cas d'un chargement mécanique seul, K_{1A16} est égal à 1.

B-IV-2-3 : Détermination de K_{2A16}

De même dans la section du défaut, les déformations élastiques ne représentent pas les déformations réelles. Le coefficient K_{2A16} prend en compte ce problème. Il est calculé en fonction des contrainte et déformation de référence déterminées sur la loi de traction du matériau à partir des contraintes équivalentes dans la section du défaut.

$$K_{2A16} = \Psi_{A16} + \frac{\varepsilon_{\text{réf}}}{\sigma_{\text{réf}}/E} \quad (B25)$$

où Ψ_{A16} est la correction de la zone plastifiée :

$$\Psi_{A16} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\text{réf}}^2}{\sigma_{\text{réf}}^2 + \sigma_0^2} \quad (B26)$$

La difficulté de cette méthode revient à déterminer les contraintes élastiques auxquelles est soumise la structure dans la partie nominale et dans la section du défaut.

Connaissant, les contraintes équivalentes dans la section du défaut $\sigma_{\text{déf}}(P)_{\text{eq}}$, $\sigma_{\text{déf}}(P+Q)_{\text{eq}}$, on détermine les contrainte et déformation de références sur la loi de comportement du matériau (fig. B4).

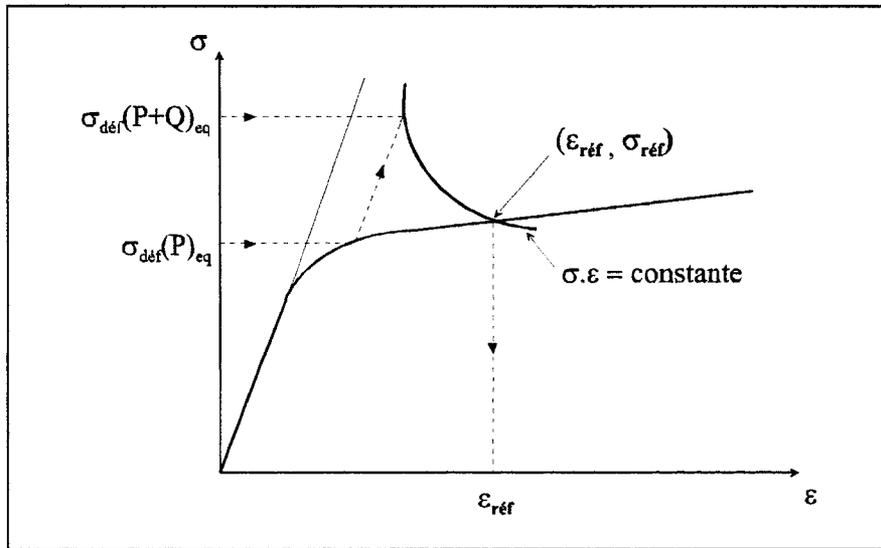


Fig. B4 : Détermination des contrainte et déformation de référence à partir des contraintes équivalentes dans la section du défaut

B-V : METHODE SIMPLIFIEE J_{R6}

La règle R6 [MIL88], [PAP97] propose une formulation de la correction plastique différente de celle définie par l'annexe A16.

$$J_{R6} = \frac{J_e}{(k_r - \rho)^2}$$

(B27)

Afin de comparer les méthodes, nous appliquons les relations de contrainte élastique et de contrainte équivalente utilisées dans la méthode J_{A16} . On peut retenir également le critère de résistance (B22) énoncé au paragraphe précédent pour le calcul de la contrainte équivalente.

• **Dans le cas de chargements mécaniques seuls**, les deux méthodes A16 et R6 diffèrent par la correction de la zone plastique qui est plus faible pour la règle R6.

On pose :

$$L_r = \frac{\sigma_{réf}}{\sigma_0}, \quad (B28)$$

$$\Psi_{R6} = \frac{L_r^3 \sigma_0}{2E\varepsilon_{réf}}, \quad (B29)$$

où Ψ_{R6} est la correction de la zone plastique.

k_r s'écrit alors :

$$k_r = \left(\Psi_{R6} + \frac{\varepsilon_{réf}}{L_r \cdot \sigma_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (B30)$$

$\sigma_{réf}$ et $\varepsilon_{réf}$ sont déterminés de la même façon que pour J_{A16} :

- calcul de la contrainte équivalente primaire dans la zone du défaut, qui est égale à $\sigma_{réf}$,
- obtention de $\varepsilon_{réf}$ correspondant à $\sigma_{réf}$ sur la loi de traction du matériau.

• **Dans le cas de chargements mécaniques et thermiques combinés**, on introduit un coefficient ρ fonction de L_r et des facteurs d'intensité de contrainte primaire K_I^P et secondaire K_I^S , c'est à dire respectivement de la contrainte primaire équivalente dans le ligament $\sigma_{déf}(P)_{eq}$, de la contrainte primaire nominale équivalente $\sigma_{no}(P)_{eq}$ et de la contrainte secondaire nominale équivalente $\sigma_{no}(Q)_{eq}$.

On détermine tout d'abord ρ_1 à partir de x :

$$x = \frac{K_I^S}{K_I^P} \times L_r : \tag{B31}$$

$$\begin{aligned} x < 0 & \quad \rho_1 = 0 \\ 0 < x \leq 5,2 & \quad \rho_1 = 0,1 x^{0,714} - 0,007 x^2 + 0,00003 x^5 \\ 5,2 < x & \quad \rho_1 = 0,25 \end{aligned} \tag{B32-a-b-c}$$

Ensuite, on évalue ρ en fonction de ρ_1 suivant les valeurs de L_r :

$$\begin{aligned} L_r \leq 0,8 & \quad \rho = \rho_1 \\ 0,8 < L_r \leq 1,05 & \quad \rho = 4\rho_1(1,05 - L_r) \\ 1,05 < L_r & \quad \rho = 0 \end{aligned} \tag{B33-a-b-c}$$

Le schéma de principe est fourni figure B5.

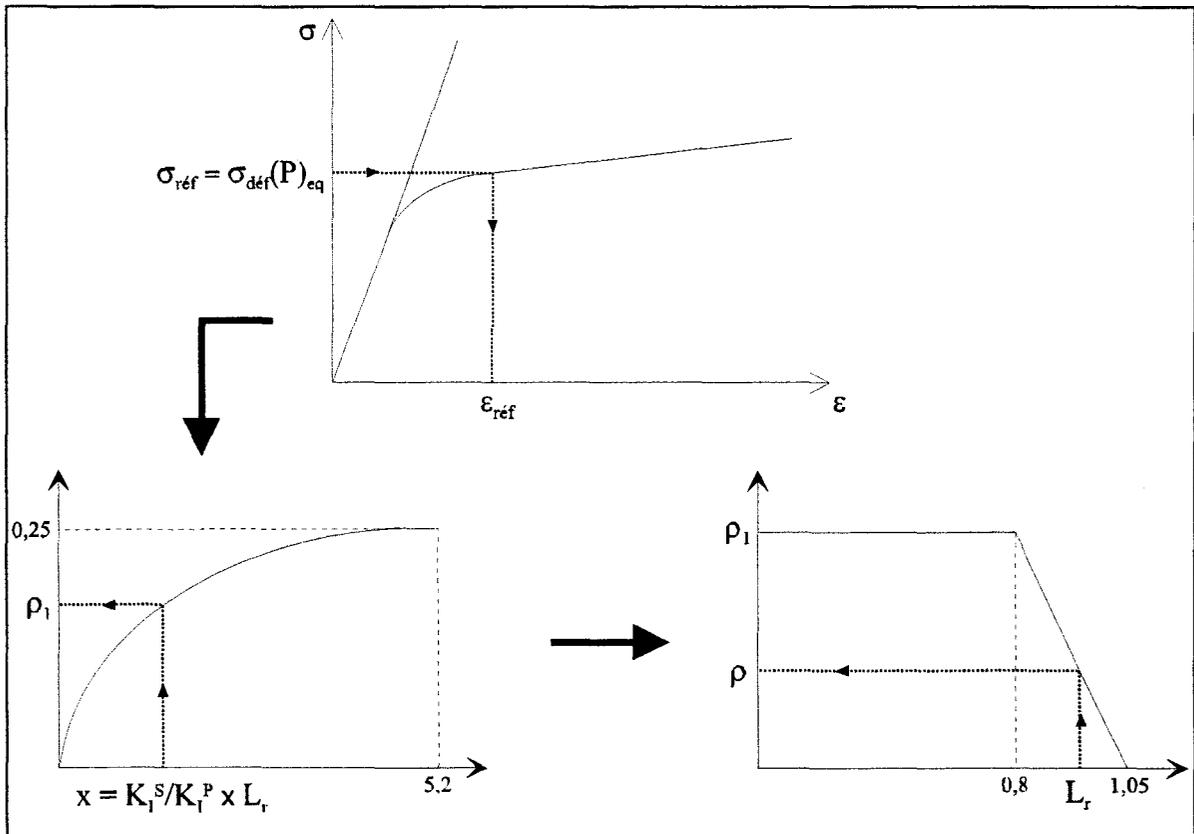


Fig. B5 : Principe de la méthode R6

- C -

***DESCRIPTION
DES CALCULS ELEMENTS FINIS***

C-I : MODELE ELEMENTS FINIS

C-I-1 : Géométrie

On réalise la modélisation d'un cylindre de longueur $2L$, suffisamment importante pour que les conditions limites ne créent pas de perturbation au niveau de la fissure:

$$L \geq 4\sqrt{Rt}$$

où R est le rayon moyen et t l'épaisseur de la coque.

Les divers modèles sont créés en 3D sous le code de calcul SYSTUS+ [SYS98] par programmation. Ils sont constitués d'éléments quadratiques hexaédriques et tétraédriques. Les éléments hexaédriques sont dits éléments singuliers avec les noeuds secondaires déplacés au quart. Ils sont présents sur le front de fissure.

La présentation des modèles sera complétée au chapitre suivant (§ E-II).

L'utilisation des éléments singuliers n'est pas nécessaire pour le calcul de J mais l'est pour le calcul du facteur d'intensité de contraintes par une méthode limite (§ C-III).

C-I-2 : Matériau

Les appareils à pression sont généralement conçus en acier inoxydable austénitique. Le choix du matériau s'est arrêté sur l'acier 316 L couramment utilisé, notamment dans l'industrie nucléaire.

Ses caractéristiques mécaniques moyennes, à température ambiante, sont répertoriées dans le tableau C1.

Module d'Young E	200000 MPa
Coefficient de poisson ν	0.3
Limite d'élasticité σ_0	284 MPa

Tableau C1 : Caractéristiques mécaniques à température ambiante de l'acier 316L utilisé

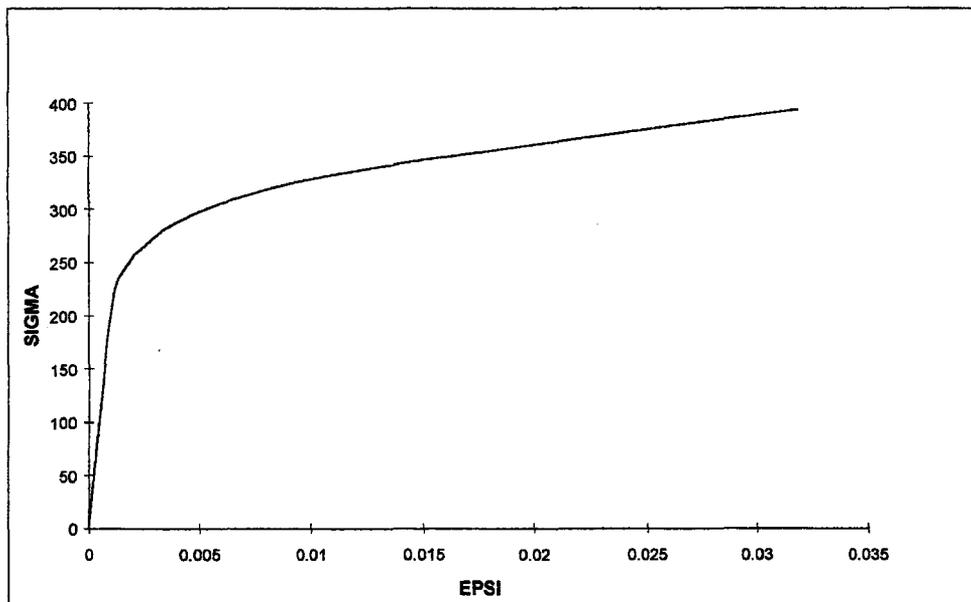


Fig. C1 : Loi de comportement du matériau 316L étudié

Le comportement du matériau (Fig. C1) est interpolé linéairement entre chaque valeur discrète constituant la courbe pour les calculs numériques dans le domaine élasto-plastique.

C-I-3 : Chargement

Le cylindre est soumis à une pression interne ainsi qu'à l'effet de fond induit par cette pression. La pression sur les lèvres de la fissure n'est pas prise en compte car elle est négligeable devant les contraintes circonférentielle et axiale.

Le chargement est monotone croissant dans le temps, jusqu'à une charge maximale p_{\max} :

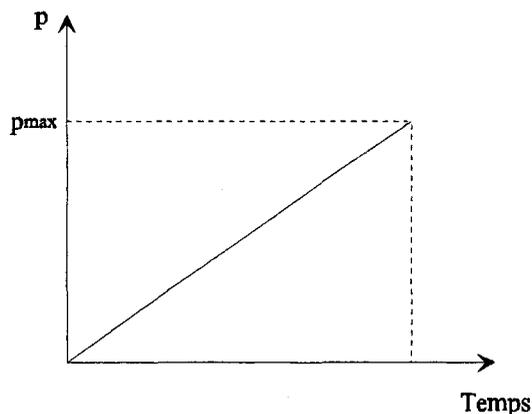


Fig. C2 : Chargement monotone croissant

C-I-4 :Domaine d'étude

Notre étude porte sur la présence de fissure semi-elliptique inclinée (fig. C3) dans une coque cylindrique sous pression interne en fonction des rapports suivants :

- rapport d'épaisseur sur le rayon de la coque : t/R
- rapport de la profondeur de la fissure sur demi-longueur de la fissure : a/c
- rapport de la profondeur de la fissure sur l'épaisseur de la coque : a/t

L'analyse comprend deux dimensions de coque:

$$t/R=0.1 \text{ et } t/R=0.01,$$

trois rapports de fissures semi-elliptiques :

$$a/c=0.2, 0.5, 1,$$

et trois rapports de profondeur de fissure sur épaisseur de la coque :

$$a/t=0.2, 0.5, 0.8.$$

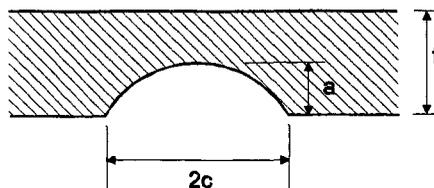


Fig. C3 : Fissure semi-elliptique

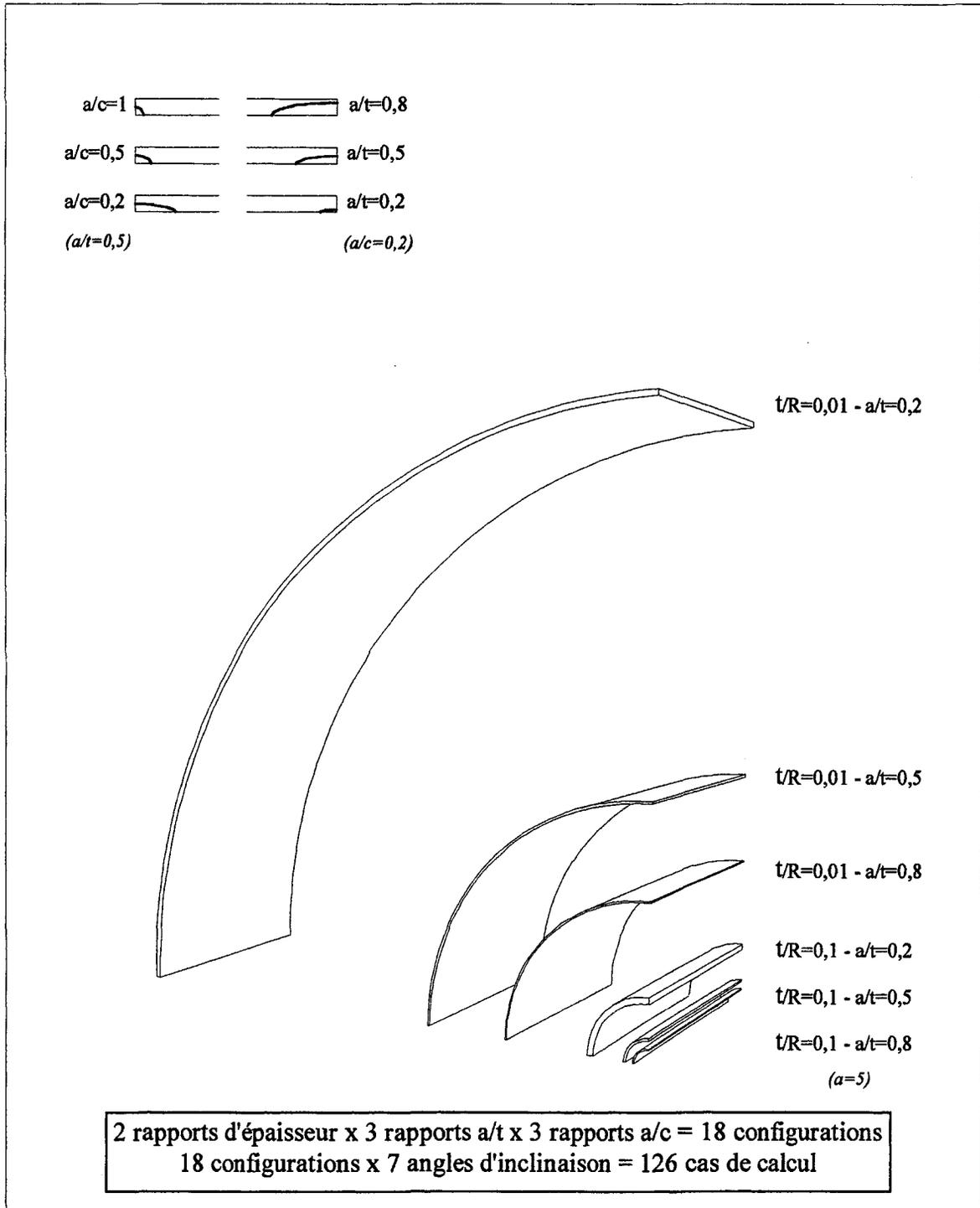


Fig. C4 : Domaine couvert par les calculs élastiques

Cette étude couvre un domaine suffisamment large (fig. C4) et permet un recalage par rapport à la littérature dans le cas d'une coque de rapport $t/R=0.1$ pour une fissure longitudinale et circonférentielle.

C-II : CONTRAINTES NOMINALES DANS LA COQUE

Les calculs sont réalisés dans le cadre des coques minces avec des rapports d'épaisseur sur le rayon moyen inférieur ou égal au dixième.

Dans la théorie des coques minces, la contrainte radiale est considéré comme négligeable par rapport aux contrainte axiale σ_{zz} et circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$.

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{pR}{t}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{pR_i^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

La contrainte axiale est due à l'effet de fond.

C-III : ESTIMATIONS DES FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTES [SYS-V2.0]

Les estimations des facteurs d'intensité de contraintes sont effectués à partir des relations suivantes :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{4(1-\nu)} \cdot [u_y] \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{r}} = \lim_{r \rightarrow 0} f_1$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{4(1-\nu)} \cdot [u_x] \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{r}} = \lim_{r \rightarrow 0} f_2$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{4} \cdot [u_z] \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{r}} = \lim_{r \rightarrow 0} f_3$$

Les valeurs de $[u_x]$, $[u_y]$, $[u_z]$ sont connues pour chaque couple de noeuds (n_2, n'_2) , (n_3, n'_3) ...des lèvres de la discrétisation (fig. C5).

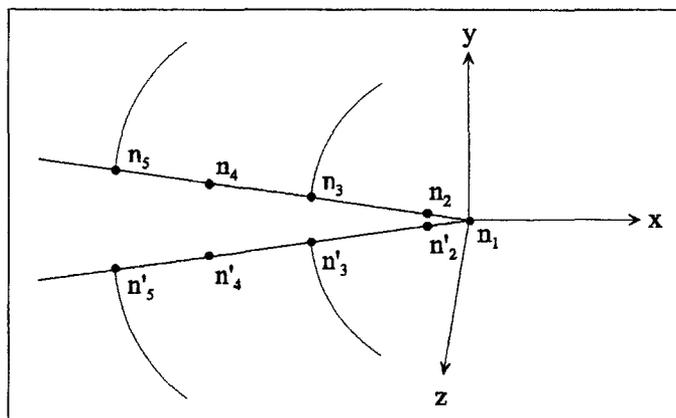
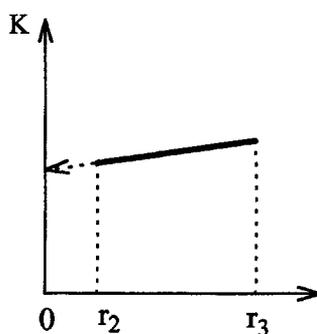


Fig. C5 : Discrétisation des lèvres de la fissure

On extrapole les valeurs f_1 , f_2 , f_3 pour $r=0$ à partir des valeurs calculées pour les noeuds de la première rangée de mailles (fig. C6). Connaissant f_1 , f_2 , f_3 pour la distance r_2 (distance moyenne des noeuds n_2 , n'_2 à la pointe n_1) et pour la distance r_3 (distance moyenne des noeuds n_3 , n'_3 à la pointe n_1), une extrapolation linéaire conduit aux valeurs cherchées de K_I , K_{II} , K_{III} pour $r=0$.

Cette méthode de calcul est une méthode dite "limite".

Fig. C6 : Extrapolation linéaire de K en $r=0$

C-IV : CALCUL DE L'INTEGRALE J [SYS-V2.0]

Le calcul numérique de l'intégrale J se fait par le biais de la méthode THETA, technique introduite dans les années 80, qui permet de calculer, de manière générale, la dérivée d'une grandeur par rapport au domaine où elle est définie.

Ph. Destuyder [DEST81-83] a adapté son utilisation aux domaines singuliers et, en l'occurrence aux fissures dans les structures 2D soumises à des chargements élémentaires et pour des matériaux élastiques linéaires. P. Mialon [MIA88] généralisa cette approche aux structures 3D, à tous types de sollicitations et en élasticité non linéaire. Ses travaux furent la base des développements pour l'intégration de la méthode dans SYSTUS [MOU96A-B].

Le champ Thêta θ représente par définition la cinématique virtuelle du front de fissure.

Il vérifie les hypothèses suivantes :

- θ est parallèle au plan de la fissure,
- le support de Thêta est limité au voisinage de la fissure et n'affecte que le front de fissure.

Le champ thêta est un champ de déplacement parallèle au plan de la fissure, normal au front de fissure, appartenant à la structure fissurée et suffisamment régulier.

Si l'indépendance du champ Thêta est vérifié d'un point de vue théorique, dans le cadre d'une discrétisation par éléments finis, cette propriété s'avère inexacte. Cela provient du fait que les phénomènes modélisés en pointe de fissure sont singuliers. L'évaluation des contraintes, surtout dans la première couche de maille n'est pas rigoureuse.

Si l'on définit un domaine à l'intérieur duquel θ est constant, la contribution des termes "erronés" est éliminée. On obtient ainsi l'indépendance de J par rapport au champ θ .

Définir un champ θ revient à définir un domaine extérieur et un domaine intérieur (fig. C7).

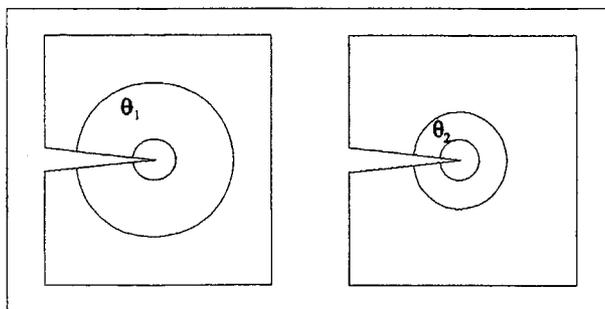


Fig. C7 : Définition de deux champs thêta toriques

Par expérience, on prendra le domaine intérieur égal à une couche de maille.

La stabilité du J vis-à-vis du champ θ sera vérifiée pour chaque calcul au travers de 3 domaines d'intégration (tableau C2).

	Domaine intérieur Nb couches de mailles	Domaine extérieur Nb couches de mailles
Champ 1	1	2
Champ 2	1	3
Champ 3	1	4

Tableau C2 : Domaines d'intégration

En 3D, dans SYSTUS les domaines d'intégrations sont des tores dont la ligne de propagation est le front de fissure.

Les domaines de validité de la méthode G θ implantée dans SYSTUS sont les suivants :

- Etudes :

- bidimensionnelles,
- axisymétriques,
- tridimensionnelles.

- Matériaux :

- élastique linéaire,
- élastique non linéaire,
- élasto-plastique si le chargement est monotone croissant, si on se place dans des conditions de chargements radiaux.

- Chargements :

- Mécanique,
- Thermique si les caractéristiques du matériau sont indépendantes de la température,
- Pression sur les lèvres de la fissure constante ou variable dans l'espace,
- Forces de volume (accélération, forces centrifuges...).

- Calculs numériques :

- Petits déplacements,
- Grands déplacements quand la fissure se déforme peu.

C-V : CALCUL DU C.T.O.D.

Le C.T.O.D. se définit comme l'ouverture de la fissure à l'intersection de la fissure avec la droite à 45°, qui représente la ligne de cisaillement maximal (fig. C8).

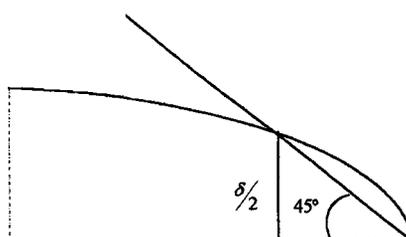


Fig. C8 : Définition du C.T.O.D.

Le C.T.O.D. est calculé comme le double du déplacement normal à la lèvres de la fissure, au noeud au quart en amont de la fissure (fig. C9).

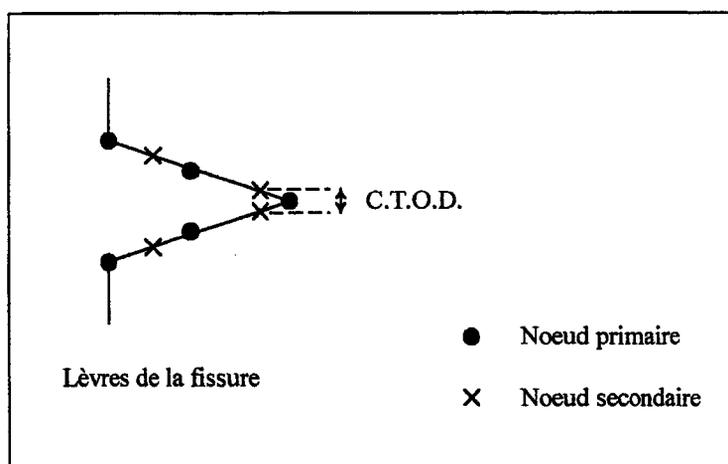


Fig. C9 : Définition du C.T.O.D.

C-VI : CONCLUSION

Une présentation du modèle éléments finis et un rappel des contraintes nominales présentes dans une coque cylindrique fermée sous pression interne ont été exposés.

Les outils nécessaires au calcul des paramètres de la Mécanique de la Rupture tels que les facteurs d'intensité de contraintes K , l'intégrale J et le « Crack Tip Opening Displacement » (C.T.O.D.) ont été mis en place.

Toutefois avant de procéder à un quelconque calcul, une difficulté reste à aborder : le maillage de la structure fissurée.

Comment mailler la fissure de façon à ne pas introduire de disparité dans le calcul des paramètres K , J ? Ce problème fait l'objet du chapitre suivant.

- D -

ETUDE DE LA SENSIBILITE DU MODELE

D-I : INTRODUCTION

Le calcul de paramètres de la Mécanique de la Rupture par éléments finis nécessite un maillage particulier de la fissure. On préconise l'emploi de cercles concentriques en fond de fissure, chaque cercle contenant un nombre d'éléments (triangulaires en 2D ou tétraédrique en 3D) adéquat. L'influence de ces deux paramètres est testée sur des structures bidimensionnelles, à partir des travaux de Menando [MEN95]. Ces résultats sont, par la suite, extrapolés aux cas tridimensionnels pour aborder l'étude de l'influence de la taille de la première maille en fond de fissure, l'influence de la précision du calcul ainsi que l'influence du domaine d'intégration sur l'intégrale J obtenue par la méthode Gthêta [DES81-83] [MIA88].

Une synthèse et un récapitulatif sont présentés à la fin de ce chapitre.

D-II : ETUDE DE LA SENSIBILITE DU MAILLAGE EN FOND DE FISSURE

Le choix du nombre de cercles concentriques et de la discrétisation angulaire en fond de fissure a été guidé par les travaux de Menando et al. [MEN95] sur des modèles bidimensionnels. Nous avons complété ces travaux par l'étude de l'influence de la taille de la première maille en fond de fissure sur un modèle tridimensionnel.

D-II-1 : Influence du nombre de cercles ou discrétisation radiale

Le premier paramètre étudié est le nombre de cercles en fond de fissure (fig. D5). Pour cette étude, le nombre d'éléments en fond de fissure est pris égal à 8 pour 180°. On montrera au paragraphe suivant que cette valeur est un optimum.

Le problème modélisé est une fissure latérale dans un corps semi-infini soumis à un effort normal à la fissure (fig. D1). Le facteur d'intensité de contrainte de cette fissure est calculé pour différents maillages sur le logiciel éléments finis (E.F.) MARC [MAR88]. Les facteurs d'intensité de contraintes obtenus ($K_{I(E.F.)}$) sont comparés aux résultats analytiques ($K_{I(Analytique)}$) ce qui permet de contrôler la validité du maillage.

Le maillage (figures D2 à D5) se compose de quadrilatères isoparamétriques paraboliques et d'éléments singuliers en fond de fissure avec les noeuds secondaires au quart.

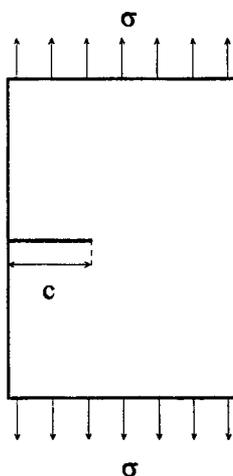


Fig. D1 : Corps semi-infini fissuré latéralement

Nb cercles	$\frac{K_I (E.F.)}{K_I (Analytique)}$
1	0.96530
2	0.97944
3	0.98526
4	0.99437
5	0.99320
6	0.99362
7	0.99461
8	0.99370
9	0.99379
10	0.99378

Tableau D1 : Influence du nombre de cercles en fond de fissure pour $l/c=0,4$ et $r/l=0,5$

Soient c la longueur de la fissure (fig. D1), l la dimension caractéristique de la singularité (fig. D2), r le rayon du dernier cercle inscrit (fig. D5).

Pour les rapports $l/c=0,4$ et $r/l=0,5$, le tableau D1 nous donne une différence de plus ou moins 1 % à partir de 3 cercles concentriques. La différence la plus faible est obtenue pour 4 cercles en fond de fissure.

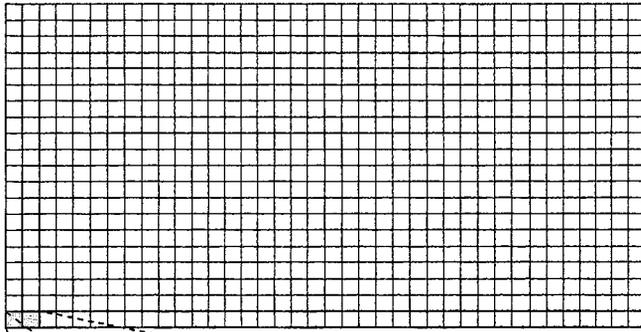


Fig. D2 : Maillage quadratique constitué de quadrangles et d'éléments singuliers

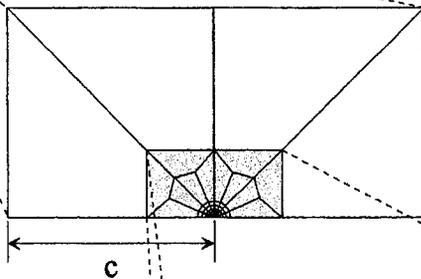


Fig. D3 : Agrandissement au voisinage de la fissure

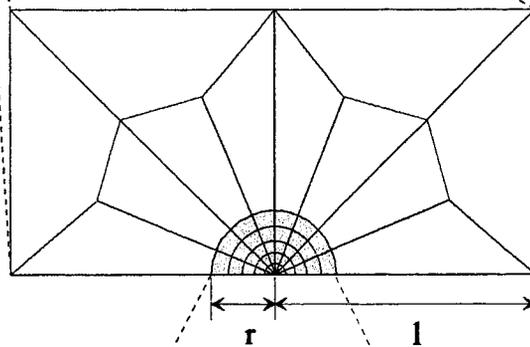


Fig. D4 : Singularité

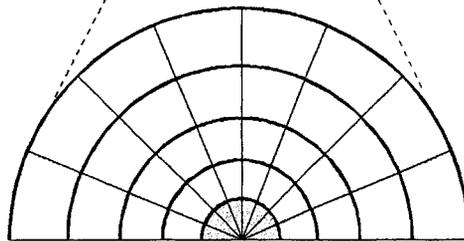


Fig. D5 : Cercles concentriques en fond de fissure

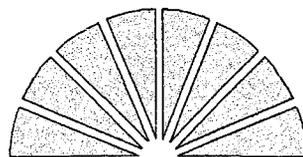


Fig. D6 : Eléments en fond de fissure
Eléments singuliers

Le bon compromis entre la précision obtenue sur le résultat et la taille du maillage (et par conséquent le temps de calcul) est de considérer 3 à 4 cercles en fond de fissure.

Les paramètres l/c et r/l (tableaux D2 et D3) ont peu d'influence sur le résultat si l'on s'appuie sur un découpage radial supérieur ou égal à 3. L'erreur reste inférieure à 1 % dans tous les cas étudiés. Plus l/c croît, plus la différence entre $K_{I(E.F.)}$ et $K_{I(Analytique)}$ est faible. Par contre, quand r/l croît, $K_{I(E.F.)}$ s'éloigne lentement de $K_{I(Analytique)}$.

l/c	$\frac{K_{I(E.F.)}}{K_{I(Analytique)}}$
0.22	1.00219
0.24	0.99993
0.26	0.99825
0.28	0.99696
0.30	0.99598
0.32	0.99522
0.34	0.99464
0.36	0.99422
0.40	0.99361

Tableau D2 : Influence de l/c pour 5 cercles et $r/l=0,5$

r/l	$\frac{K_{I(E.F.)}}{K_{I(Analytique)}}$
0.300	0.99443
0.325	0.99400
0.350	0.99371
0.375	0.99351
0.400	0.99339
0.425	0.99332
0.450	0.99327
0.500	0.99320
0.675	0.99306

Tableau D3 : Influence de r/l pour 5 cercles et $l/c=0,4$

En conclusion, on assure la validité du calcul pour :

<p>Nombre de cercles ≥ 3</p> <p>$0.22 \leq l/c \leq 0.4$</p> <p>$0.3 \leq r/l \leq 0.675$</p>

D-II-2 : Influence du nombre d'éléments en fond de fissure ou de la discrétisation angulaire.

L'influence du nombre d'éléments en fond de fissure (fig. D6) a été testé sur deux types de modèles :

- corps semi-infini fissuré latéralement (fig. D1)
- bande contenant une fissure traversante en son centre (fig. D7)

Les modèles ont été dimensionnés d'après les conclusions tirées au paragraphe précédent.

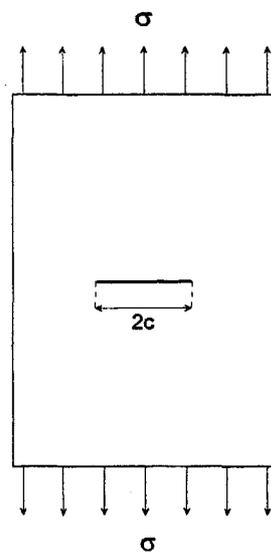


Fig. D7 : Bande fissurée en son centre soumise à une contrainte normale

Le nombre de cercles en fond de fissure est de 5. On fait varier le nombre d'éléments en fond de fissure de 6 à 10.

Nb d'éléments	Modèle	$\frac{K_I(E.F.)}{K_I(Analytique)}$
6	Fissure centrale	0.99978
8		0.99481
10		0.99501
6	Fissure latérale	1.00584
8		0.99988

Tableau D4 : Influence du nombre d'éléments en fond de fissure

Pour un nombre d'éléments supérieur ou égal à 6 (tableau D4), on observe une erreur inférieure à 1 % quel que soit le problème étudié. L'optimum est obtenu pour 6 éléments dans le cas de la fissure centrale et pour 8 éléments dans le cas de la fissure latérale.

Par conséquent, il apparaît raisonnable de prendre par défaut 6 éléments en fond de fissure.

Afin de compléter ces travaux et d'extrapoler les résultats obtenus pour une structure bidimensionnelle à une structure tridimensionnelle, nous avons étudié l'influence de la taille de la première maille en fond de fissure sur un modèle tridimensionnel.

D-II-3 : Influence de la taille de la première maille en fond de fissure

Trois modélisations d'un cylindre fissuré [voir « Description des calculs éléments finis »], présentant une taille de maille différente en fond de fissure (tableau D5), ont été réalisés en 3D sous SYSTUS [SYS98] à l'aide des modules de la Mécanique de la Rupture SYSCOUE [PIG97] et le BLOC FISSURE [MOU97]. Les modèles sont élaborés selon les règles de maillage énoncées précédemment, à savoir :

- 3 cercles en fond de fissure
- 6 éléments en fond de fissure pour 180°
- éléments quadratiques hexaédriques partout sauf sur le front de fissure
- éléments tétraédriques singuliers sur le front de fissure (noeuds secondaires au quart dans le plan perpendiculaire aux lèvres de la fissure)

Le rapport t/R épaisseur sur le rayon moyen de la coque cylindrique est de 0,1. La fissure semi-elliptique possède une profondeur a de 1 mm et une demi-longueur c de 2 mm (fig. D9).

La profondeur de la fissure par rapport à l'épaisseur de la coque a/t est de 0,2.

Le maillage de la fissure est basé sur une discrétisation spatiale tori-elliptique.

Modèle	Taille de la première maille en fond de fissure
1	$a/100$
2	$a/20$
3	$a/10$

Tableau D5 : Taille de la première maille en fond de fissure pour les différents modèles

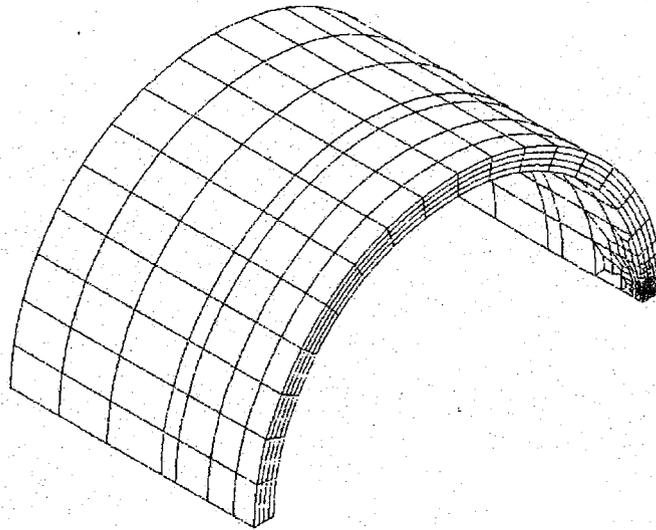


Fig. D8 : Maillage d'un quart de cylindre

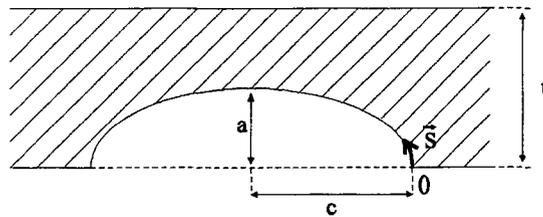


Fig. D9 : Fissure semi-elliptique

où s correspond à l'abscisse curviligne.

On étudie l'influence de la première maille en fond de fissure sur deux paramètres de la mécanique de la rupture :

- le facteur d'intensité de contraintes,
- l'intégrale J .

Taille de maille	$K_I / K_{I(max)}$ Point le plus profond	$K_I / K_{I(max)}$ Point de surface
$a/10$	0.991	0.998
$a/20$	0.993	0.997
$a/100$	1	1

Tableau D6 : Influence de la taille de la première maille en fond de fissure sur K_I

Soit $K_{I (Max)}$ la valeur maximale de K_I entre les trois facteurs calculés pour les différents maillages. Pour chaque taille de maille, nous effectuons le rapport de K_I sur $K_{I (Max)}$ au point le plus profond et au point de surface (tableau D6).

On note une différence inférieure à 1% entre les valeurs obtenues pour les 3 tailles de mailles que ce soit au point de surface ou au point le plus profond (tableau D6).

La taille de maille en fond de fissure n'a pas d'influence sur le facteur d'intensité de contraintes si elle est comprise entre $a/10$ et $a/100$.

Observons maintenant l'influence de ce paramètre sur l'intégrale J.

Au point le plus profond (fig. D10), pour un domaine d'intégration constitué de quatre couches de mailles concentriques, quelle que soit la taille de maille en fond de fissure, on n'observe sensiblement aucune différence sur la valeur numérique de J. Il en est de même pour tous les points du front de fissure à l'exception du point de surface.

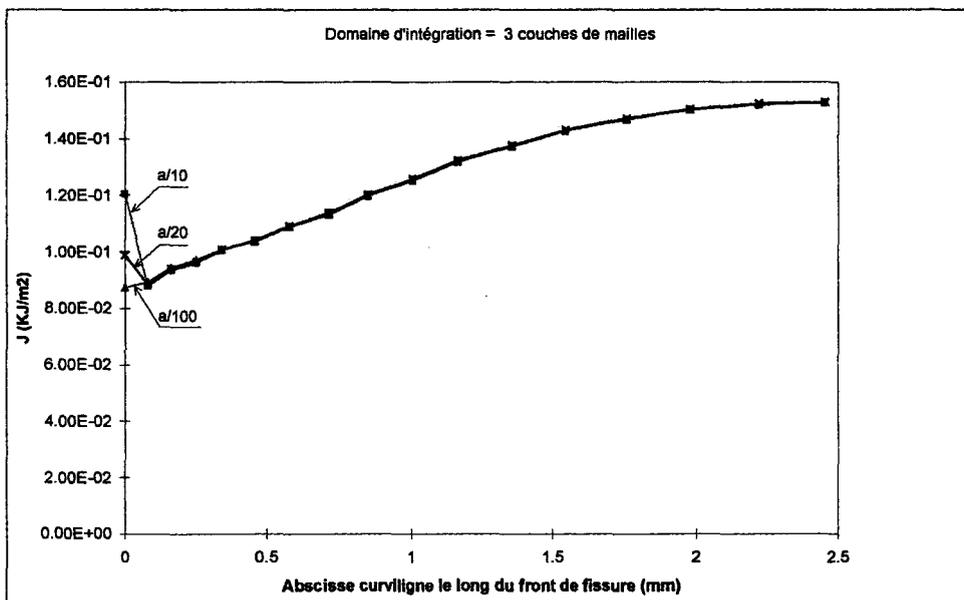


Fig. D10 : Influence de la taille de maille sur J à une pression de 25 MPa

Sur les figures D10 à D13, on peut constater que plus la taille de maille en fond de fissure est petite, plus J est stable au point de surface.

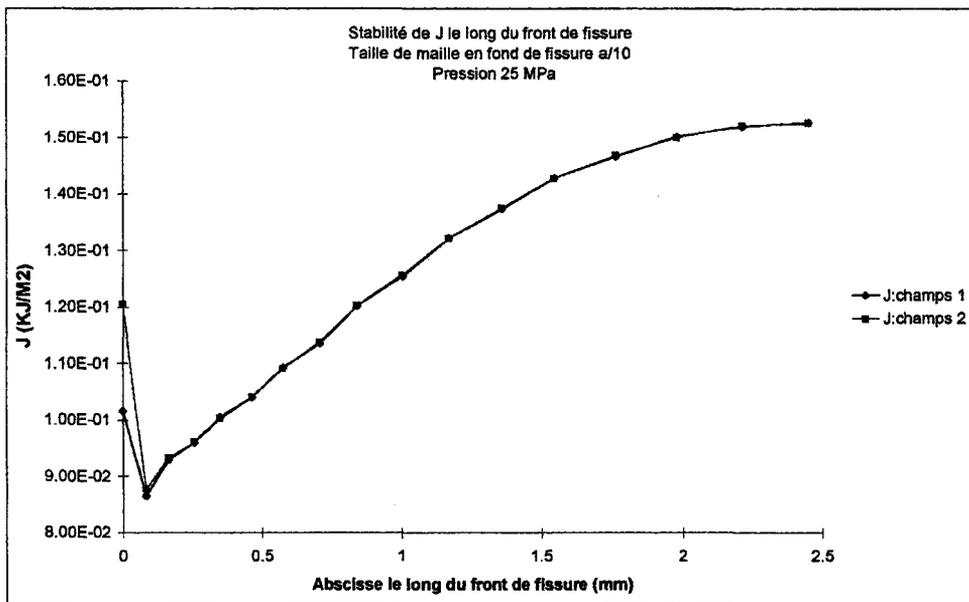


Fig. D11 : Stabilité de J le long du front de fissure pour une taille de maille de a/10

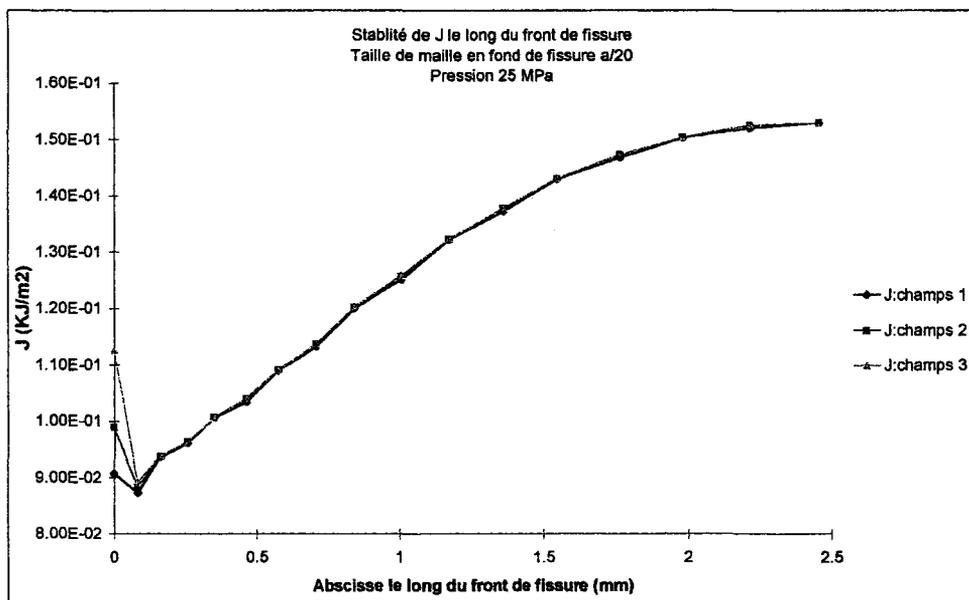


Fig. D12 : Stabilité de J le long du front de fissure pour une taille de maille de a/20

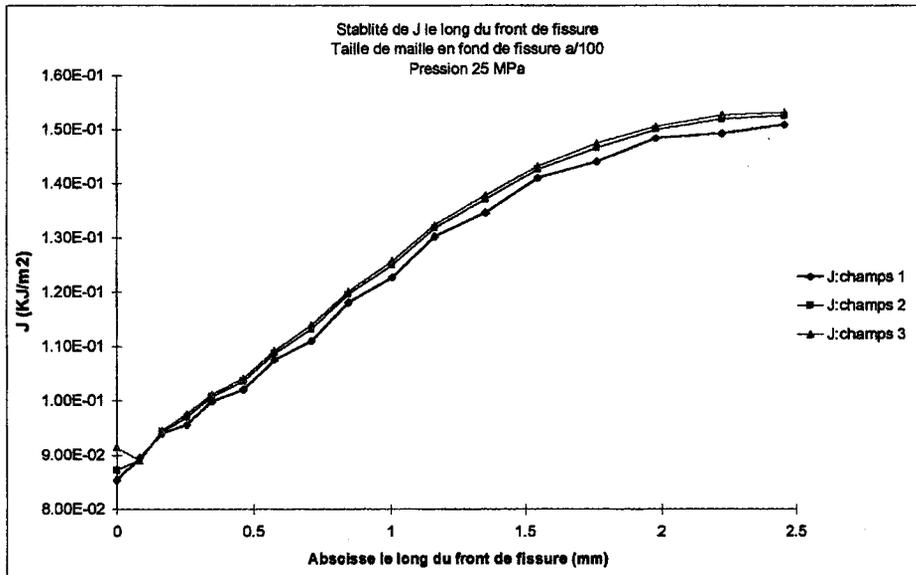


Fig. D13 : Stabilité de J le long du front de fissure pour une taille de maille de a/100

Pour une taille de maille comprise entre a/10 et a/100 et pour un domaine d'intégration suffisamment grand, la taille de la maille en fond de fissure n'a pas d'influence sur le calcul de J sauf au point de surface.

La perturbation observée en surface est inhérente au modèle d'un quart de cylindre qui introduit des conditions limites en déplacement sur le front de fissure. Pour une modélisation entière de la structure fissurée (donc sans conditions limites en déplacement sur le front de fissure), l'intégrale J est stable au point de surface quelle que soit la taille de maille.

D-III : INFLUENCE DE LA PRECISION DEMANDEE POUR LA CONVERGENCE DU CALCUL ITERATIF

Lors de l'évaluation par la méthode des éléments finis des paramètres de la Mécanique de la rupture, il est préférable d'obtenir la convergence des calculs non linéaires en déplacements.

Les précisions en force et en énergie sont alors prises suffisamment faibles pour assurer cette condition :

Précision en force : 10^{-3}

Précision en énergie : 10^{-20}

Pour réaliser cette étude, nous avons fait varier la précision en déplacement :

Précision en déplacement : 10^{-4} , 10^{-6} , 10^{-10}

Nous avons étudié l'influence de la précision sur deux paramètres :

- le C.T.O.D.
- l'intégrale J

D-III-1 : Influence de la précision sur le C.T.O.D.

La figure D14 représente le C.T.O.D. en fonction de la pression.

D'un point de vue analytique, en élasticité linéaire, les déplacements varient linéairement en fonction de la pression :

$$\delta = 2u_y\left(\theta = \frac{\pi}{2}, r = r_p\right) = 2 \cdot K_I \sqrt{\frac{r_p}{2\pi}} \cdot g\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\delta = \frac{pR}{2t} \sqrt{\pi a} \cdot f(a, c, t, R) \cdot \sqrt{\frac{r_p}{2\pi}} \cdot g\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$$

Pour une précision demandée très importante, de 10^{-10} , la courbe obtenue est bien une droite : la précision demandée est correcte.

Si on diminue la précision en déplacement à 10^{-6} , on n'observe plus, en toute rigueur, la linéarité du C.T.O.D. avec la pression. Les résultats sont toutefois assez proches de ceux obtenus pour une précision en déplacement 10^{-10} , avec une différence moyenne de 4 %.

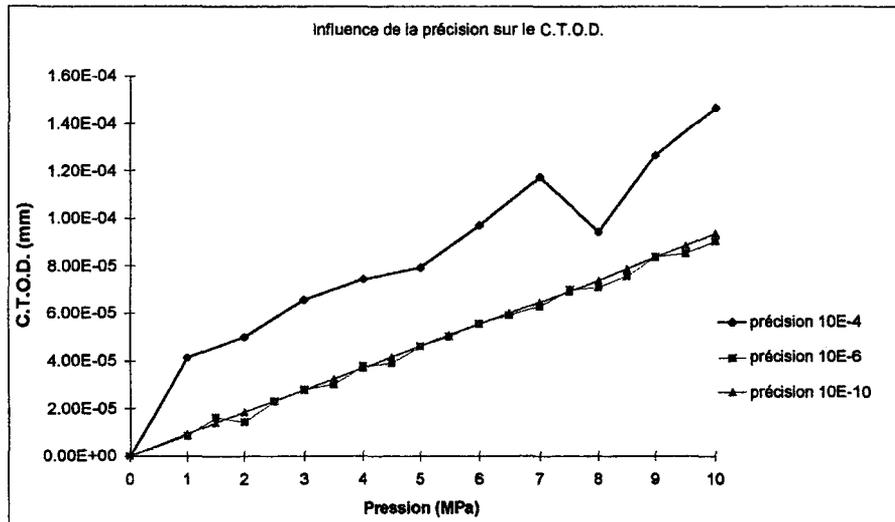


Fig. D14 : Influence de la précision sur le C.T.O.D.

Pour une précision de 10^{-4} , la relation entre la pression et le C.T.O.D. n'est plus linéaire. Les résultats sont 2 à 4 fois plus élevés. La différence entre les résultats obtenus pour les différentes précisions diminue avec l'augmentation du chargement.

D-III-2 : Influence de la précision sur l'intégrale J

L'évolution de J en fonction de la pression, en un point donné du front de fissure, est une fonction de la pression de type parabolique, en plasticité confinée. Les figures D15 et D16 présentent bien ce phénomène pour des précisions de 10^{-6} et 10^{-10} .

Pour une précision de 10^{-4} , la courbe présente des décroissances : la précision demandée n'est donc pas suffisante. Dans ce cas, les résultats sont surestimés.

La figure D17 représente l'évolution de J le long du front de fissure.

Lorsque la précision est trop faible, on observe des fluctuations entre noeuds primaires et noeuds secondaires du front de fissure.

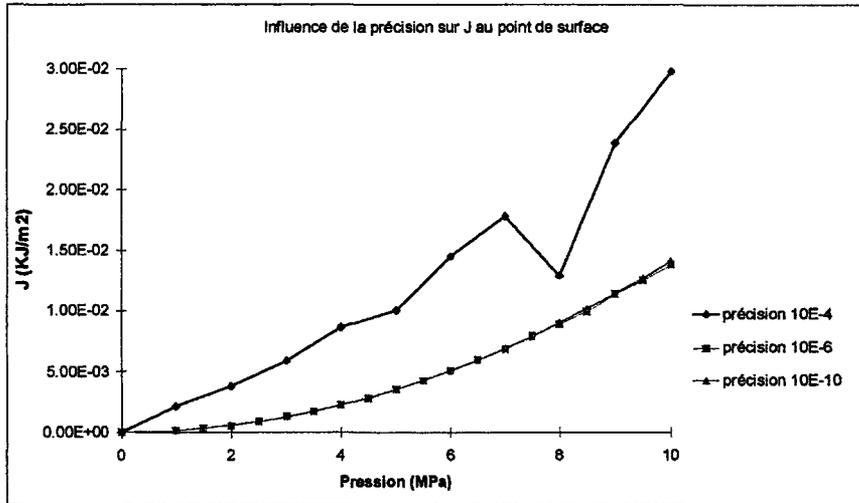


Fig. D15 : Influence de la précision sur J au point de surface.

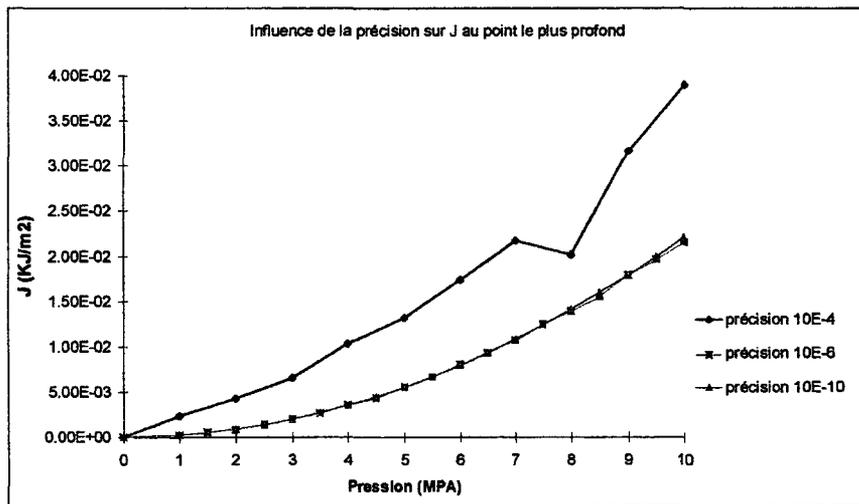


Fig. D16 : Influence de la précision sur J au point le plus profond.

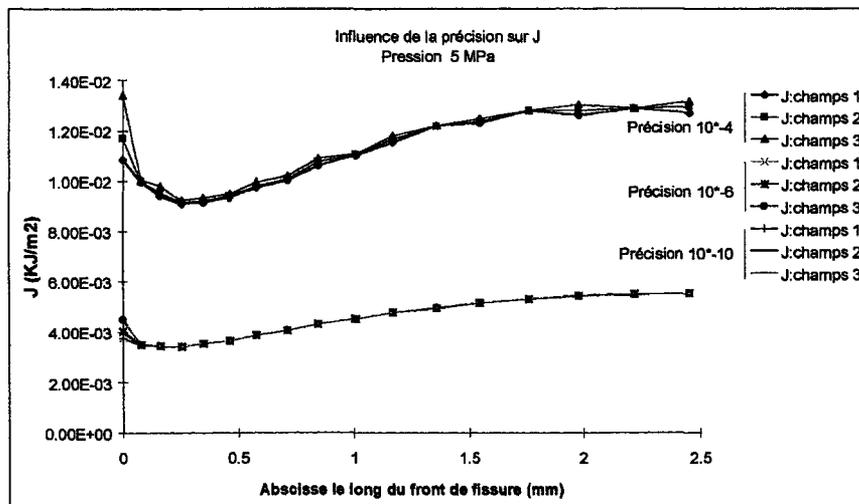


Fig. D17 : Influence de la précision sur J à une pression de 5 MPa.

Plus la précision demandée est grande, plus le temps de calcul est long et donc pénalisant. Au vu des résultats, on peut se contenter de prendre une précision en déplacement de l'ordre du centième du déplacement d'un point du front de fissure. Ce critère apparaît suffisant pour le calcul du C.T.O.D., et pour la stabilité de l'intégrale J.

D-IV : INFLUENCE DU DOMAINE D'INTEGRATION SUR L'INTEGRALE J

L'étude repose sur une modélisation tridimensionnelle d'un cylindre fermé fissuré axialement sous pression interne et effet de fond, sans pression sur les lèvres de la fissure.

Les figures D19 à D21 montrent une bonne stabilité de J quels que soient le chargement et le point du front de fissure considéré. La taille de la zone plastique n'a donc aucune interaction sur la stabilité de J.

Pour un champ Thêta comprenant un domaine intérieur égal à une couche de maille et un domaine extérieur égal à 4 couches de mailles, le calcul de J est stable.

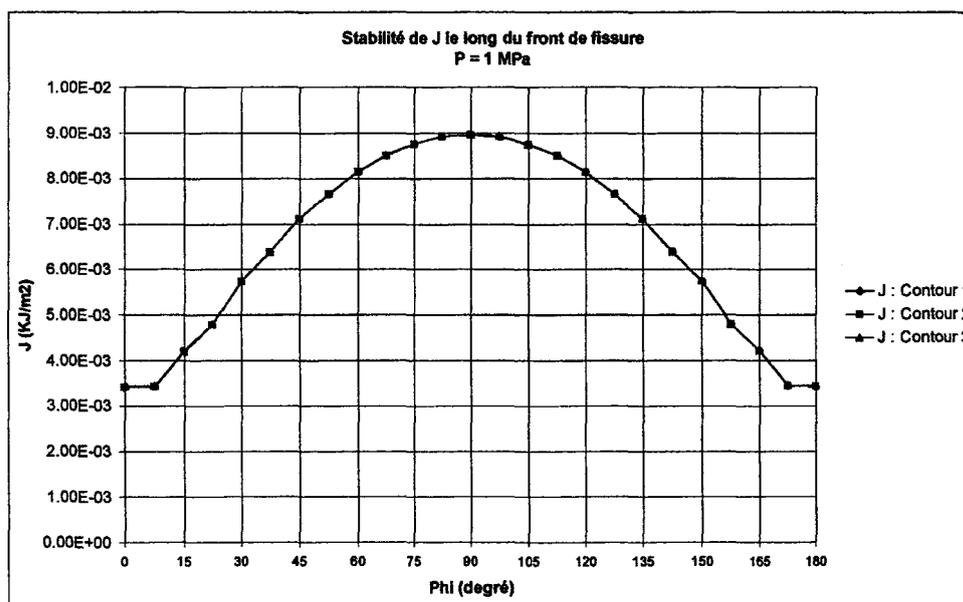


Fig. D19 : Stabilité de J le long du front de fissure

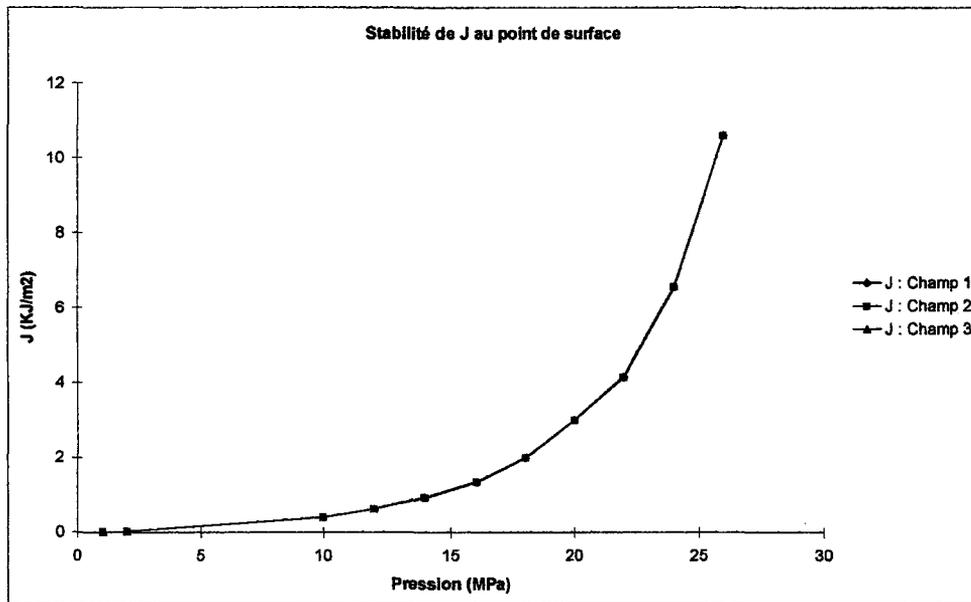


Fig. D20 : Stabilité de J au point de surface

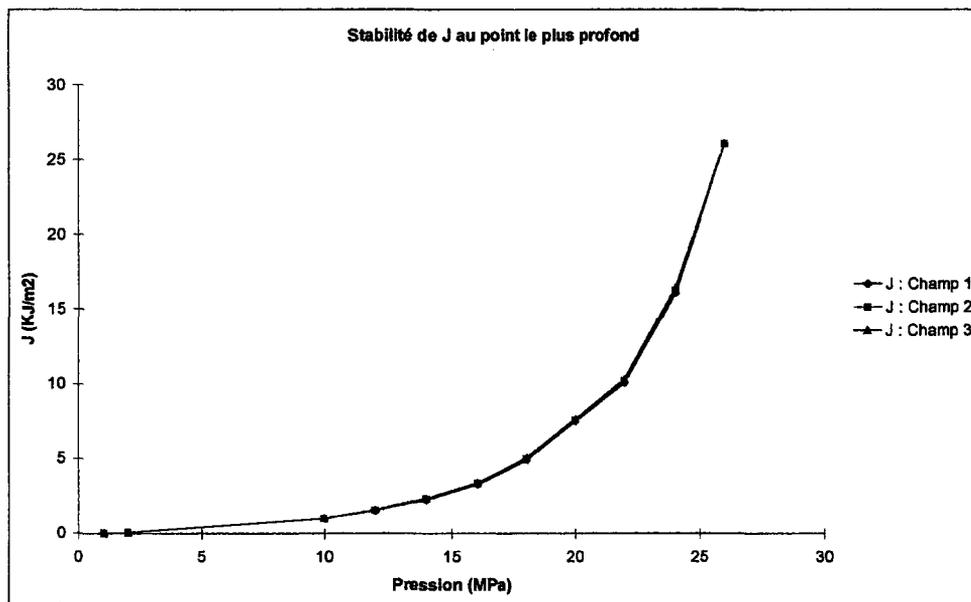


Fig. D21 : Stabilité de J au point le plus profond

D-V : SYNTHESE

La topologie de maillage en fond de fissure est maintenant bien définie. Le nombre de cercles en fond de fissure doit être supérieur ou égal à 3. Les dimensions de la singularité I sont définies à partir de la demi-longueur de la fissure c . On montre que pour l/c compris entre 0,22 et 0,40, l'erreur commise sur le facteur d'intensité de contraintes est inférieure à 1%.

Le rayon du dernier cercle centré sur le fond de fissure est établi par rapport à la dimension caractéristique de la singularité I . Les résultats sont très stables pour r/l appartenant à l'intervalle $[0,3 ; 0,675]$.

L'utilisation de six ou huit éléments en fond de fissure permet de fournir les résultats les plus proches de la valeur analytique.

Sur une modélisation tridimensionnelle (répondant aux critères de maillage énoncés ci-dessus) d'un cylindre contenant une fissure semi-elliptique, on observe l'influence de la taille de la première maille en fond de fissure dimensionnée par rapport à la profondeur de la fissure a . Aucune différence notable n'est relevée sur les résultats pour une de taille de maille incluse dans le domaine $[a/100 ; a/10]$.

Le maillage type développé en fond de fissure (fig. D22), suite à ces considérations, est le suivant :

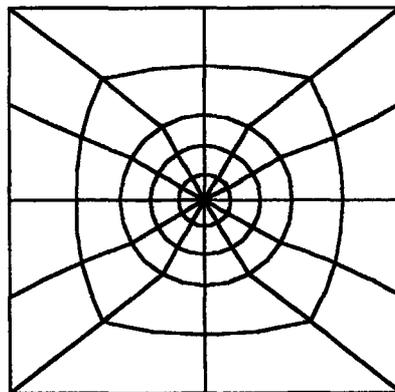


Fig. D22 : Singularité en fond de fissure

Deux paramètres relatifs à la résolution numérique ont été mis à l'étude :

- la précision en déplacement demandée sur les résultats issus du calcul itératif,
- le domaine d'intégration de l'intégrale J.

Le calcul des paramètres de la Mécanique de la rupture requiert une convergence des calculs itératifs en déplacements. Il est montré que pour une précision en déplacement demandée inférieure au centième des déplacements en fond de fissure, les résultats obtenus pour le C.T.O.D. et l'intégrale J sont cohérents. Au fur et à mesure de l'augmentation du chargement appliqué à la structure lors du calcul non linéaire, on peut réajuster la précision demandée. Ce critère sur la convergence du calcul est fondamental pour la validité des résultats.

Une fois la convergence du calcul obtenue avec une précision suffisante, il nous faut vérifier la stabilité de J par rapport à son domaine d'intégration encore appelé champ Θ .

On examine l'indépendance théorique de J au travers de trois domaines d'intégration constitués d'un domaine intérieur égal à une couche de mailles et d'un domaine extérieur égal respectivement à 2, 3, 4 couches de mailles. Cette étude confirme cette propriété. J ne dépend pas du domaine d'intégration, pour un champ Θ comprenant un domaine intérieur égal à une couche de mailles et un domaine extérieur appartenant à la structure fissurée.

La modélisation complète d'un cylindre contenant une fissure inclinée nécessite un nombre de noeuds et de mailles important (environ 18000 noeuds et 5000 mailles). Dans un souci de gain de temps, on prendra un nombre de cercles égal à 3, un nombre d'éléments égal à 6, une précision en déplacement égal à 10^{-7} pour les premiers pas de temps.

Récapitulons brièvement :

Maillage en fond de fissure :

Nombre de cercles = 3

$$0.22 \leq l/c \leq 0.4$$

$$0.3 \leq r/l \leq 0.675$$

Nb d'éléments en fond de fissure = 6

$$a/100 \leq \text{taille de la première maille} \leq a/10$$

Paramètres de calcul :

- Précision en déplacement = 10^{-7}
- Champ θ : - domaine intérieur : 1 couche de mailles
- domaine extérieur : 2 à 4 couches de mailles

- E -

FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTES

POUR UNE FISSURE INCLINEE

E-I : INTRODUCTION

L'estimation de l'intégrale J dans le domaine élasto-plastique s'obtient en procédant au produit de l'intégrale J élastique et d'un facteur correctif prenant en compte la plasticité. Pour y parvenir, il nous faut, dans un premier temps, déterminer l'intégrale J dans le domaine élastique pour une fissure inclinée dans une coque cylindrique.

Cette étude relève de calculs éléments finis sur des modèles tridimensionnels dont nous ferons une description détaillée.

Nous traiterons séparément les résultats obtenus pour les coques de rapport $t/R=0,1$ et $t/R=0,01$.

Lors de la présence de défauts inclinés dans une coque, une pratique industrielle courante est d'approximer l'intégrale J élastique de cette fissure par celle obtenue pour la fissure projetée sur l'axe de la coque. Nous étudierons dans quelle mesure cette approximation est proche de la réalité.

E-II : MODELES

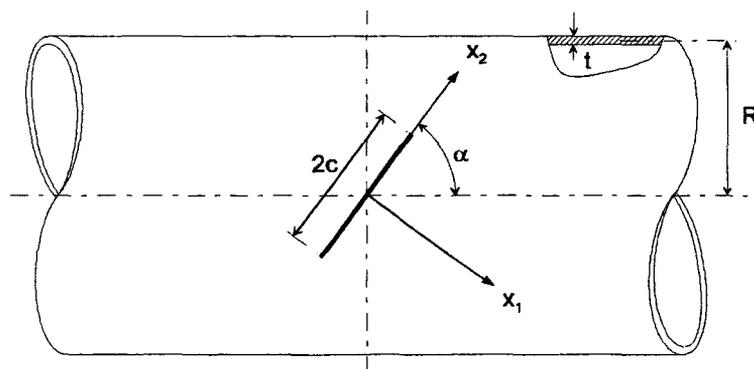


Fig. E1 : Angle d'inclinaison α de la fissure par rapport à l'axe de la coque.

Les notations utilisées sont rappelées sur la figure E1.

Cette étude numérique a été réalisée sur des modèles « complets » en raison de l'absence de symétrie de la structure.

Les maillages ont été conçus par programmation en 6 étapes :

- *Première étape* : Maillage du fond de fissure : la singularité (fig. E2),
- *Deuxième étape* : Propagation de la singularité le long d'une demi-ellipse :
obtention du bloc fissuré (fig. E3) ,
- *Troisième étape* : Insertion du bloc fissuré dans une plaque aux dimensions fixées
en fonction de celles du cylindre désiré (fig. E4),
- *Quatrième étape* : Inclinaison d'un angle α d'un groupe de mailles englobant le bloc
fissuré (fig. E5),
- *Cinquième étape* : Enroulement de la plaque (fig. E6) :
Obtention du cylindre contenant une fissure inclinée par rapport à
l'axe de la coque,
- *Sixième étape* : On ramène les noeuds des lèvres de la fissure dans un plan Ox_2x_3 .
En effet le calcul de l'intégrale J n'est possible que pour des fissures
planes et en faisant l'hypothèse que la fissure se propage dans son
plan pour une unité de longueur.

L'influence de l'orientation de la fissure est testée sur la coque de rapport $t/R=1/100$ et $t/R=1/10$. Dans ce but, on fait varier l'orientation de la fissure de 0° à 90° par pas de 15° par rapport à l'axe de la coque.

A travers l'étude de défauts axiaux et circonférentiels dans une coque de rapport $t/R=1/100$, on montrera que le problème revient à celui d'une plaque fissurée.

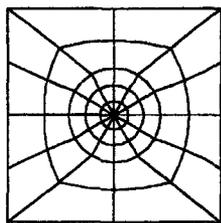


Fig. E2 : Singularité

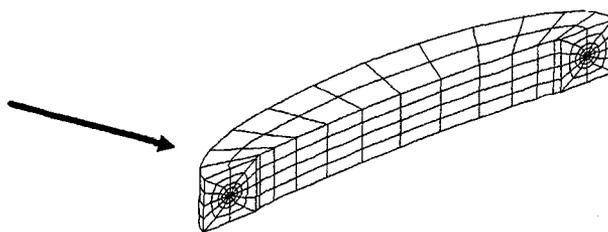


Fig. E3 : Bloc fissuré

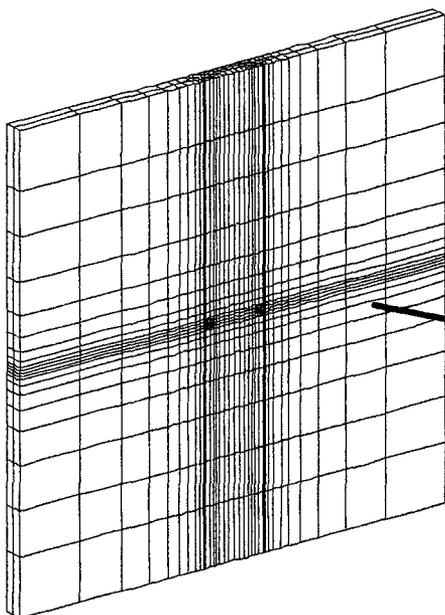


Fig. D4 : Insertion du bloc fissuré dans une plaque

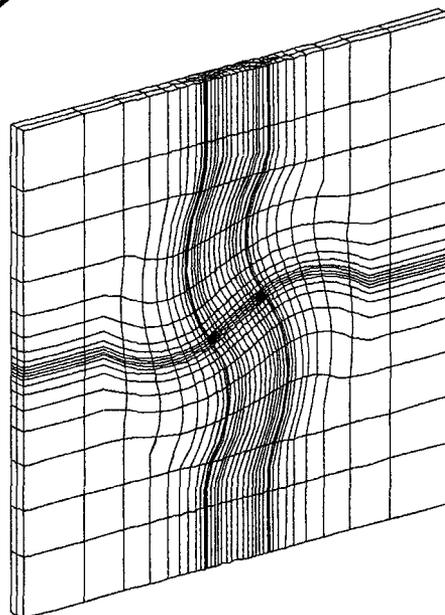


Fig. D5 : Inclinaison d'un groupe de mailles contenant le bloc fissuré

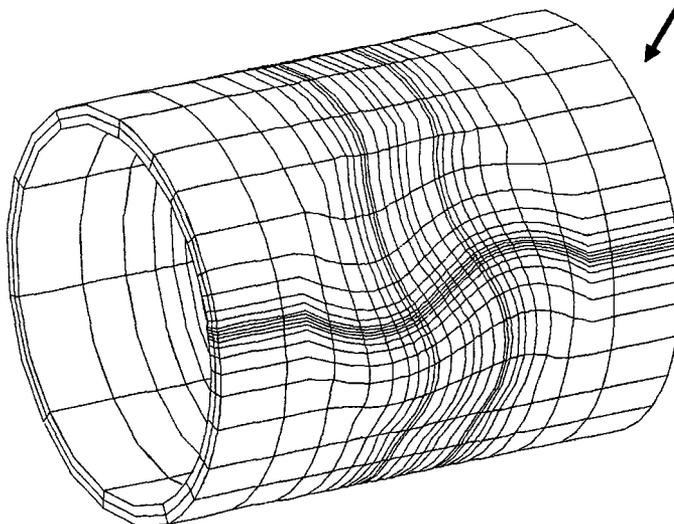


Fig. D6 : Enroulement de la plaque : Obtention du cylindre contenant la fissure inclinée

E-III : GENERALITES

L'intégrale J élastique, notée J_e , est accessible directement par la méthode Gthêta, ou à partir des facteurs d'intensité de contraintes obtenus numériquement par une méthode limite.

$$J_e = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E} \cdot (1 - \nu^2) + \frac{K_{III}^2}{E} \cdot (1 + \nu)$$

On propose de formuler les facteurs de forme F_i à partir de la relation suivante proposée par Raju et Newman [RAJ80] :

$$F_i = \frac{|K_i|}{\frac{pR}{t} \cdot \sqrt{\pi a/Q}} \quad i = I, II, III$$

avec :

$$Q = 1 + 1.464 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^{1,65}$$

$$K_I > 0 \quad \forall \phi, \forall \alpha$$

$$K_{II} \begin{cases} \geq 0 & \left\{ \begin{array}{l} 0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ \text{ et } 0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ \\ 90^\circ \leq \phi \leq 180^\circ \text{ et } 60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \end{array} \right. \\ \leq 0 & \left\{ \begin{array}{l} 0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ \text{ et } 60^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ \\ 90^\circ \leq \phi \leq 180^\circ \text{ et } 60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \end{array} \right. \end{cases}$$

$$K_{III} \begin{cases} > 0 & \forall \phi, 0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ \\ < 0 & \forall \phi, 60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \end{cases}$$

Le lissage des F_i en fonction du paramètre α est obtenu sous la forme d'une fonction trigonométrique :

$$F_i = a_i + b_i \cos (c_i \cdot \alpha + d_i) \quad i = I, II, III$$

E-IV : RESULTATS POUR UNE COQUE DE RAPPORT $t/R = 1/10$.**E-IV-1 : Recalage par rapport aux fissures axiales et circonférentielles**

L'absence de littérature sur les fissures débouchantes d'orientation complexe ne nous permet pas de comparer nos résultats dans ces configurations.

Cependant, les fissures axiales et circonférentielles font l'objet de nombreux calculs éléments finis (E.F.), notamment au Commissariat à l'Energie Atomique (C.E.A.) sur le logiciel CASTEM 2000. Ces calculs sont réalisés sur des modèles pour lesquels la symétrie du problème est considérée. Les résultats sont référencés dans l'annexe A16 du RCC-MR [DRU95].

Une étude comparative sur des coques de rapport t/R de 0,1 est menée. On introduit pour cela le paramètre Diff % et un facteur de forme $i0$:

$$\text{Diff}\% = \left| \frac{i0_{\text{E.F.}} - i0_{\text{C.E.A.}}}{i0_{\text{E.F.}} + i0_{\text{C.E.A.}}} \times 200 \right|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i0 = \frac{K_I}{\frac{pR_i}{t} \sqrt{\pi a}} \quad \text{pour une fissure axiale} \\ i0 = \frac{K_I}{\frac{pR_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \sqrt{\pi a}} \quad \text{pour une fissure circonférentielle} \end{array} \right.$$

Les tableaux E1 et E2 montrent une faible différence entre les résultats obtenus et ceux du C.E.A pour une fissure axiale. Au point le plus profond (tableau E1), l'écart est en moyenne inférieur à 3%, avec un écart minimal de 1,43 % et un écart maximal de 4,32 %.

	a/t	i0 E.F.	i0 C.E.A.	Diff %
a/c=0.2	0.2	1.0459	1.061	1.43
	0.5	1.4033	1.358	3.28
	0.8	1.8496	1.781	3.77
a/c=0.5	0.2	0.8531	0.8366	1.95
	0.5	0.9611	0.9280	3.50
	0.8	1.0839	1.0380	4.32
a/c=1	0.2	0.6368	0.6460	1.90
	0.5	0.6519	0.6680	2.44
	0.8	0.6818	0.6940	1.77

Tableau E1: Exemple de différences entre les résultats obtenus et ceux du C.E.A pour une fissure axiale au point le plus profond et pour $t/R=0.1$.

Au point de surface (tableau E2, figure E7), la différence moyenne est de 3%, avec un minimum de 0,46% et un maximum de 6,43%.

	a/t	i0 E.F.	i0 C.E.A.	Diff %
a/c=0.2	0.2	0.5950	0.5780	2.90
	0.5	0.7803	0.7530	3.56
	0.8	1.1626	1.1220	3.55
a/c=0.5	0.2	0.6729	0.6920	2.80
	0.5	0.8084	0.8006	0.97
	0.8	0.9692	0.9920	2.32
a/c=1	0.2	0.7442	0.7260	2.47
	0.5	0.8050	0.7760	3.69
	0.8	0.9150	0.8580	6.43

Tableau E2: Exemple de différences entre les résultats obtenus et ceux du C.E.A pour une fissure axiale au point de surface et pour $t/R=0.1$.

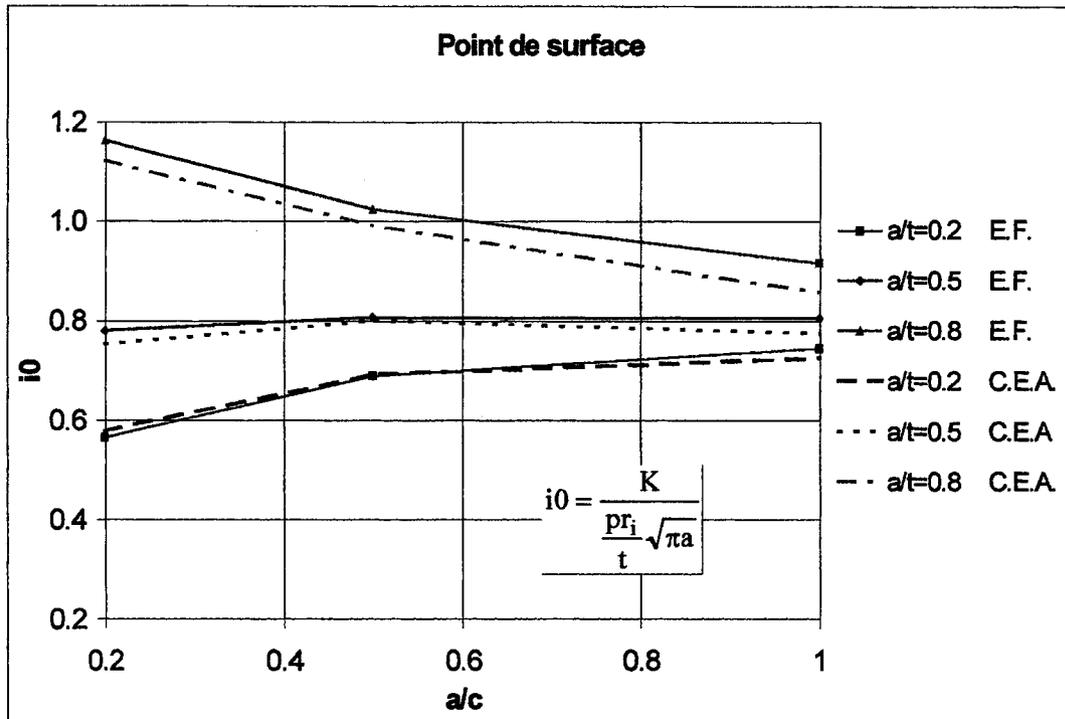


Fig. E7 : Fissure axiale $t/R=0.1$, point de surface

Il en est de même pour les fissures circonférentielles où on note une différence moyenne de l'ordre de 1% au point le plus profond (tableau E3 et figure E8). La valeur la plus élevée est de 1,53%, la plus faible de 0,03%.

	a/t	i0 E.F.	i0 C.E.A.	Diff %
a/c=0.2	0.2	1.0617	1.0773	1.46
	0.5	1.3396	1.3193	1.53
	0.8	1.6144	1.6045	0.62
a/c=0.5	0.2	0.8933	0.8930	0.03
	0.5	0.9719	0.9740	0.22
	0.8	1.0669	1.0610	0.55
a/c=1	0.2	0.6652	0.6610	0.63
	0.5	0.6854	0.6845	0.13
	0.8	0.7159	0.7120	0.55

Tableau E3 : Exemple de différences entre les résultats obtenus et ceux du C.E.A pour une fissure circonférentielle au point le plus profond et pour $t/R=0.1$.

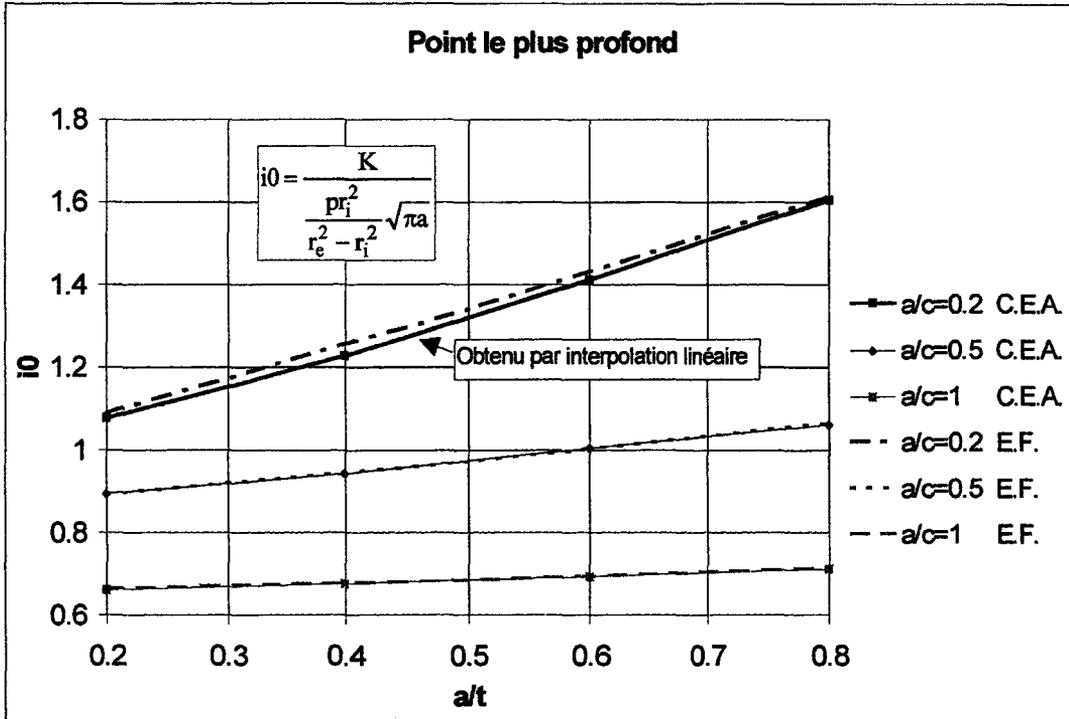
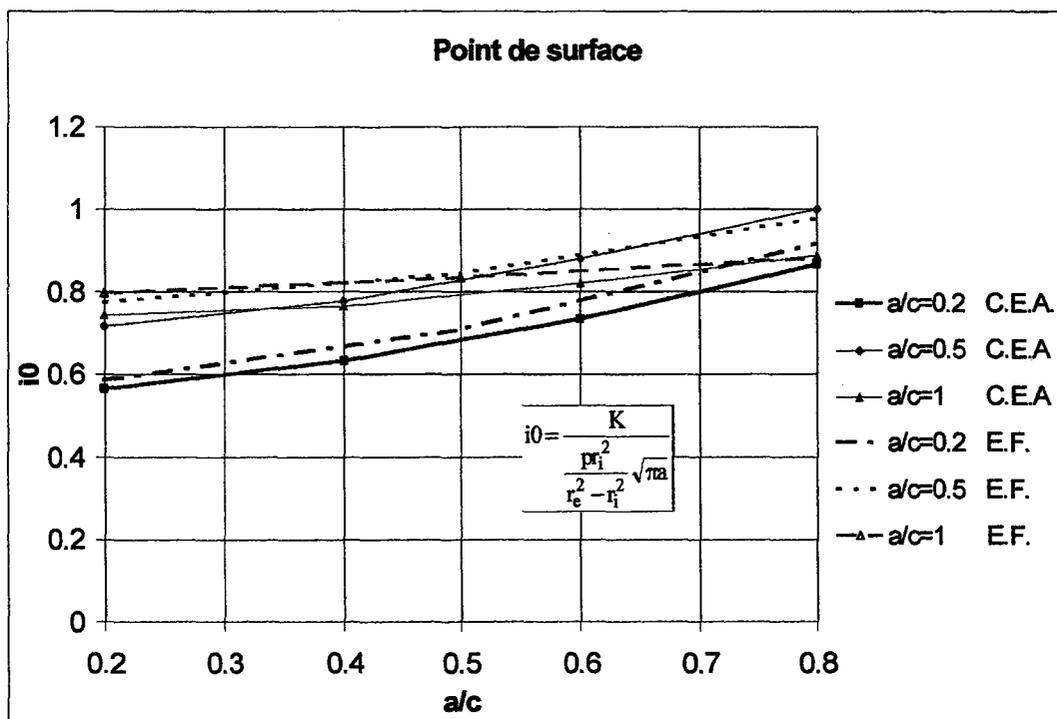


Fig. E8 : Fissure circonférentielle t/R=0.1

	a/t	i0 E.F.	i0 C.E.A.	Diff %
a/c=0.2	0.2	0.5858	0.5653	3.38
	0.5	0.7087	0.6821	3.82
	0.8	0.9173	0.8655	5.81
a/c=0.5	0.2	0.7753	0.7160	7.95
	0.5	0.8452	0.8285	2.00
	0.8	0.9779	1.0010	2.33
a/c=1	0.2	0.7976	0.742	7.22
	0.5	0.8348	0.7930	5.13
	0.8	0.8824	0.888	0.63

Tableau E4 : Différences entre les résultats obtenus et ceux du C.E.A pour une fissure circonférentielle au point de surface et pour t/R=0.1.

Au point de surface, les résultats diffèrent en moyenne de 4% pour les fissures circonférentielles (tableau E4, figure E9).

Fig. E9 : Fissure circumférentielle $t/R=0.1$

Les faibles écarts notés entre les résultats obtenus et ceux issus de la littérature sont inhérents au calcul par éléments finis. Par conséquent, on a une bonne cohérence des résultats obtenus.

E-IV-2 : Fissures inclinées

Intéressons nous maintenant aux fissures inclinées.

Les coefficients a_i , b_i , c_i , d_i obtenus à l'issue du lissage des fonctions de forme F_i pour une coque de rapport $t/R=0,1$ au point de surface et au point le plus profond de la fissure sont inventoriés dans les tableaux AE1 à AE5 (Annexe AE).

L'évolution des facteurs de forme le long du front de fissure est représentée graphiquement sur les figures ci-dessous pour une fissure semi-elliptique (fig. E10) et pour une fissure semi-elliptique particulière à savoir la fissure circulaire (fig. E11).

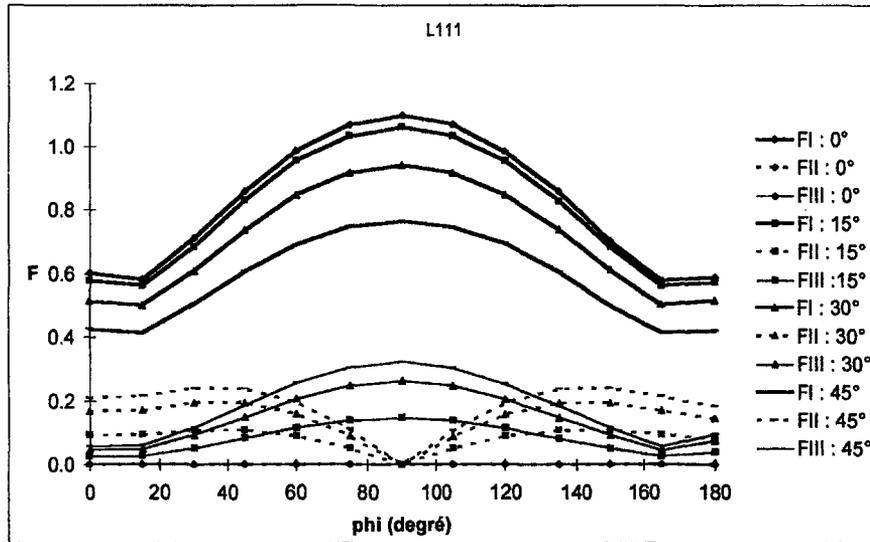


Fig. E10 : Cas où $t/R=0.1$, $a/c=0.2$, $a/t=0.2$

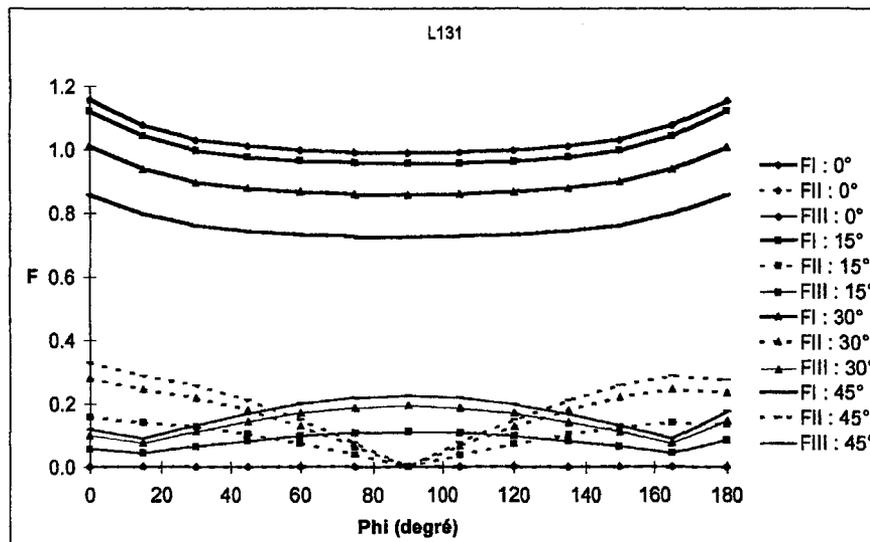


Fig. E11 : Cas où $t/R=0.1$, $a/c=1$, $a/t=0.2$

Conformément à la bibliographie, on trouve, pour une fissure semi-elliptique, le maximum de F_I au point le plus profond et le minimum au point de surface et inversement pour la fissure circulaire. L'évolution de F_I et F_{III} est identique sauf pour le cas particulier où a/c est égal à 1.

L'amplitude des F_I est nettement supérieure à celle des F_{II} et F_{III} à fissure identique. L'amplitude des F_{II} et F_{III} est sensiblement la même pour une fissure donnée (fig. E10-E11).

Le rapport de $K_{I \max}$ sur $K_{II \max}$ est supérieur ou égal à 2,60. Quant au rapport de $K_{I \max}$ sur $K_{III \max}$, il est supérieur ou égal à 2,37. Plus la fissure est profonde, plus le mode I est

important face aux modes II et III. Naturellement, le cisaillement est maximal pour la fissure à 45° (tableau AE11).

On peut constater sur les figures E10 et E11 que F_{II} est nul au point le plus profond de la fissure.

Ces observations concordent avec la théorie. En effet, la contrainte de membrane normale aux lèvres de la fissure σ_{1m} est plus élevée que la contrainte de membrane de cisaillement sur les lèvres de la fissure σ_{12m} .

$$\sigma_{1m} = \frac{pR}{2t} (2 \cdot \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

$$\sigma_{12m} = -\frac{pR}{2t} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$$

Ces contraintes ont été calculées avec les hypothèses relatives aux coques minces.

$F_I(\alpha)$ est antisymétrique par rapport à l'axe $\alpha=45^\circ$ (figures E12-E13). $F_{II}(\alpha)$ et $F_{III}(\alpha)$ sont symétriques par rapport à l'axe $\alpha=45^\circ$ (figures E14 à E16). Ces remarques sont valables quel que soit le point du front de fissure considéré.

Les résultats obtenus par Yahsi [YAH81] pour une fissure traversante, dans une coque cylindrique fermée sous pression interne, confirment ces propriétés.

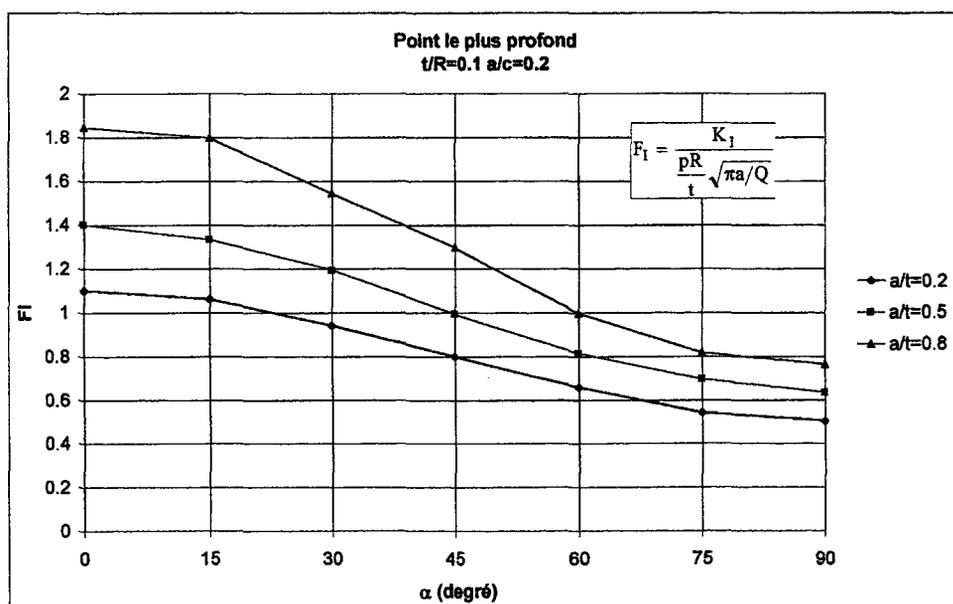


Fig. E12 : $F_I(\alpha)$ pour une fissure de rapport $a/c=0.2$ au point le plus profond

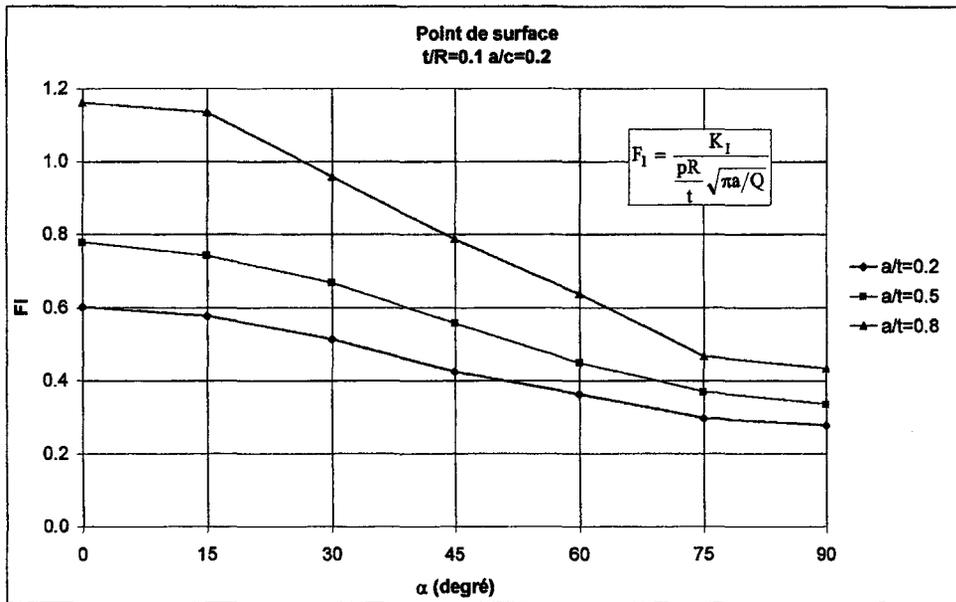


Fig. E13 : $F_I(\alpha)$ pour une fissure de rapport $a/c=0.2$ au point de surface

Quel que soit le point considéré, F_I croît avec a/t (fig. E12-E13). Par contre, F_{II} décroît avec a/t (fig. E14).

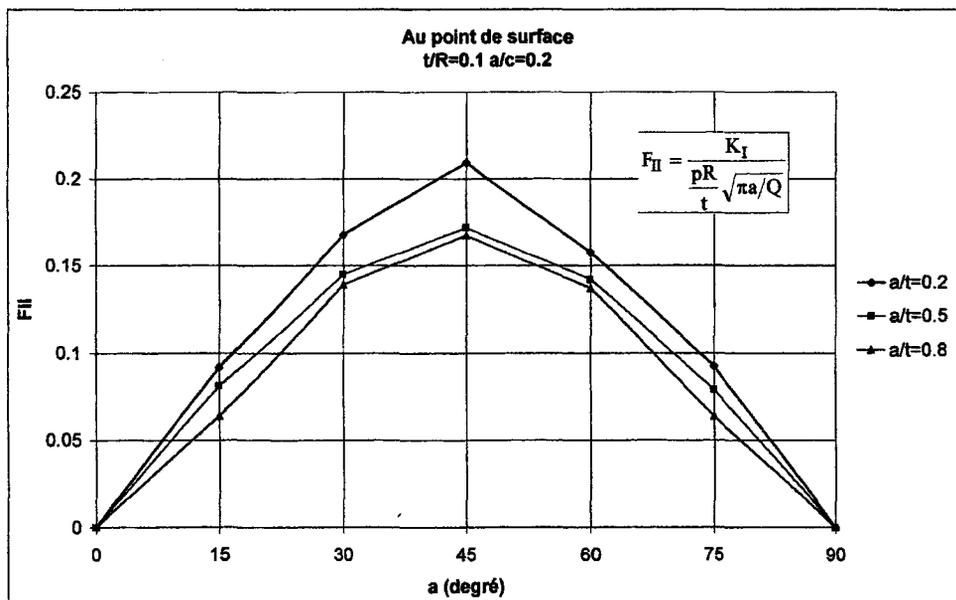


Fig. E14 : $F_{II}(\alpha)$ au point de surface pour $a/c=0.2$

F_{III} diminue quand a/t croit au point de surface (fig. E15). Cette tendance n'est pas observée au point le plus profond (fig. E16) où F_{III} s'amplifie quand a/t augmente.

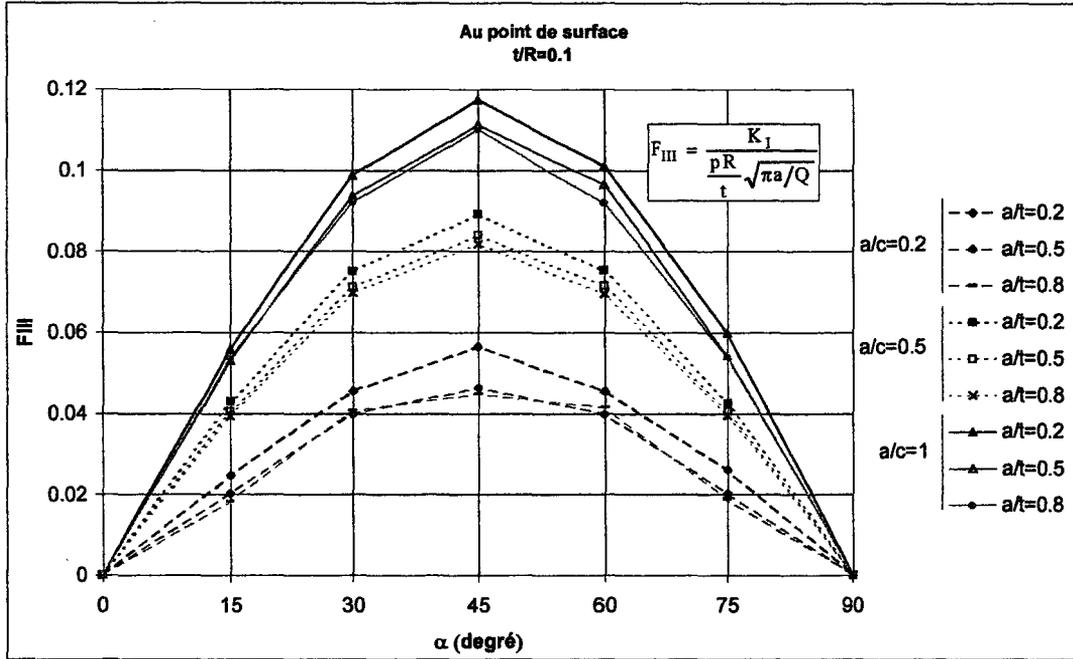


Fig. E15 : $F_{III}(\alpha)$ au point de surface

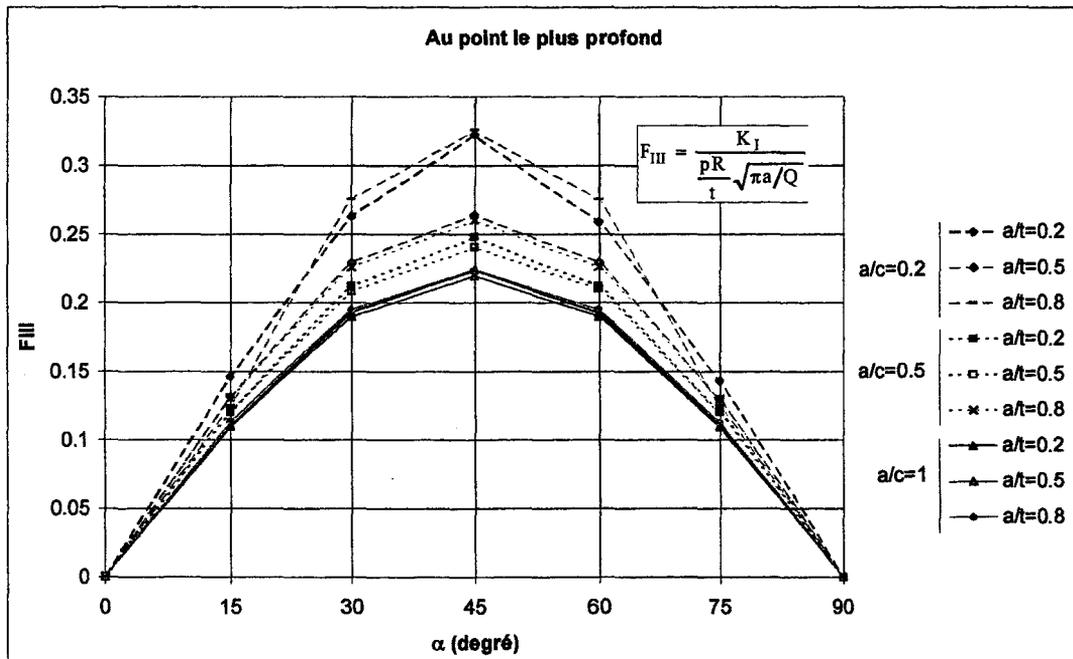


Fig. E16 : $F_{III}(\alpha)$ au point le plus profond

E-V : RESULTATS POUR UNE COQUE DE RAPPORT $t/R=1/100$.**E-V-1 : Comparaison avec les résultats obtenus pour les plaques**

Dans l'industrie, de nombreux appareils à pression sont constitués de coque de rapport t/R de l'ordre du centième, voir inférieur.

D'un point de vue analytique, quand le rayon de la coque tend vers l'infini, on montre que le problème est équivalent à celui d'une plaque. Néanmoins, il est difficile de quantifier « l'infini ». Quand R est égal à cent fois l'épaisseur de la coque, peut-on considérer qu'il est infiniment grand ?

Afin de répondre à cette question, procédons à une comparaison des résultats obtenus pour une coque de dimension $t/R = 1/100$ et ceux d'une plaque [RAJ77], [DRU95].

On utilisera les mêmes notations qu'au paragraphe précédent.

	a/t	F E.F.	F Plaque Raju et A16	Diff %
$a/c=0.2$	0.2	1.1966	1.1400	4.84
	0.5	1.5648	1.5005	4.19
	0.8	1.7680	1.851	4.58
$a/c=0.5$	0.2	1.1152	1.1140	0.11
	0.5	1.2186	1.2465	2.26
	0.8	1.3499	1.4020	3.78
$a/c=1$	0.2	1.0884	1.0360	4.93
	0.5	1.1022	1.0845	1.62
	0.8	1.1003	1.1120	1.06

**Tableau E5 : Comparaison des F de la plaque et de la coque $t/R=0.01$
pour Fissure axiale, au point le plus profond**

Pour une fissure axiale (tableaux E5-E6), une différence moyenne de l'ordre de 3 % est observée que ce soit au point de surface ou au point le plus profond.

Au point le plus profond, l'écart minimal et maximal sont respectivement de 0,11% et 4,93%.

Au point de surface, ils sont de 0,53% et 6,55%.

	a/t	F E.F.	F Plaque Raju et A16	Diff %
a/c=0.2	0.2	0.6161	0.6080	1.32
	0.5	0.8231	0.8115	1.42
	0.8	1.1364	1.1900	4.60
a/c=0.5	0.2	0.8979	0.8440	6.19
	0.5	1.0584	1.0510	0.70
	0.8	1.3050	1.3120	0.53
a/c=1	0.2	1.2450	1.1660	6.55
	0.5	1.3180	1.2920	1.99
	0.8	1.4316	1.4640	2.24

Tableau E6 : Comparaison des F de la plaque et de la coque t/R=0.01 pour Fissure axiale, au point de surface

En ce qui concerne les fissures circonférentielles (tableaux E7-E8), l'écart détecté est en moyenne de 2% quel que soit le point considéré.

Au point le plus profond, l'écart minimal et maximal sont respectivement de 0,31% et 3,43%.

Au point de surface, ils sont de 0,2% et 4,04%.

	a/t	i0 E.F.	i0 Plaque Raju et A16	Diff %
a/c=0.2	0.2	1.1187	1.0855	3.01
	0.5	1.4561	1.4288	1.89
	0.8	1.7497	1.7626	0.73
a/c=0.5	0.2	0.8889	0.9199	3.43
	0.5	1.0059	1.0293	2.30
	0.8	1.1460	1.1577	1.01
a/c=1	0.2	0.6771	0.6600	2.56
	0.5	0.6887	0.6909	0.31
	0.8	0.6944	0.7084	1.99

Tableau E7 : Comparaison des i_0 de la plaque et de la coque $t/R=0.01$ pour Fissure circonférentielle, au point le plus profond

	a/t	i0 E.F.	i0 Plaque Raju et A16	Diff %
a/c=0.2	0.2	0.6029	0.5790	4.04
	0.5	0.7750	0.7727	0.30
	0.8	1.1508	1.1331	1.55
a/c=0.5	0.2	0.7113	0.6970	2.03
	0.5	0.8700	0.8679	0.24
	0.8	1.0671	1.0834	1.52
a/c=1	0.2	0.7639	0.7428	2.80
	0.5	0.8170	0.8231	0.74
	0.8	0.9100	0.9327	2.46

Tableau E8 : Comparaison des i_0 de la plaque et de la coque $t/R=0.01$ pour Fissure circonférentielle, au point de surface

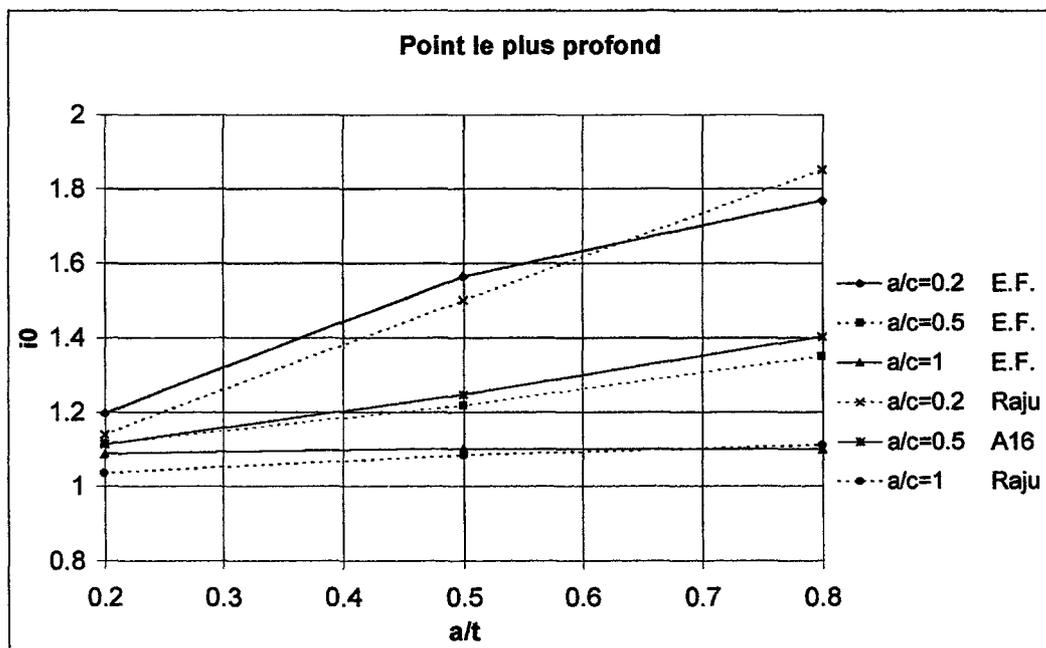


Fig. E17 : Résultats E.F. pour une coque de rapport $t/R=0.01$ et une plaque (défaut axial)

Pour les coques de rapport t/R inférieur ou égal à $1/100$, contenant des fissures de rapport c/a compris entre 1 et 5, la comparaison avec les plaques fournit une différence de 3% (figure E17).

Pour a/c compris entre 0.2 et 1, on peut considérer qu'à partir de t/R inférieur ou égal à $1/100$, le problème est équivalent au cas d'une plaque. Et par conséquent, les intégrales J élastiques ou facteurs d'intensité de contraintes sont ceux obtenus pour une plaque fissurée en présence du même type de défaut.

E-V-2 : Fissures inclinées

Les tableaux AE6 à AE10 (Annexe AE) fournissent les coefficients des facteurs de forme en mode I, II, III.

F_I , F_{II} , F_{III} conservent les mêmes propriétés que pour les coques de rapport $t/R=0,1$:

- F_I antisymétrie par rapport à l'axe $\alpha=45^\circ$ (fig. E18)
- F_{II} , F_{III} symétrique par rapport à l'axe $\alpha=45^\circ$ (figures E19 et E20)

Le mode I est prédominant par rapport au mode II et III. Il est au minimum 2,5 fois plus élevé que le mode II et III, pour les fissures à 45° (tableau AE12).

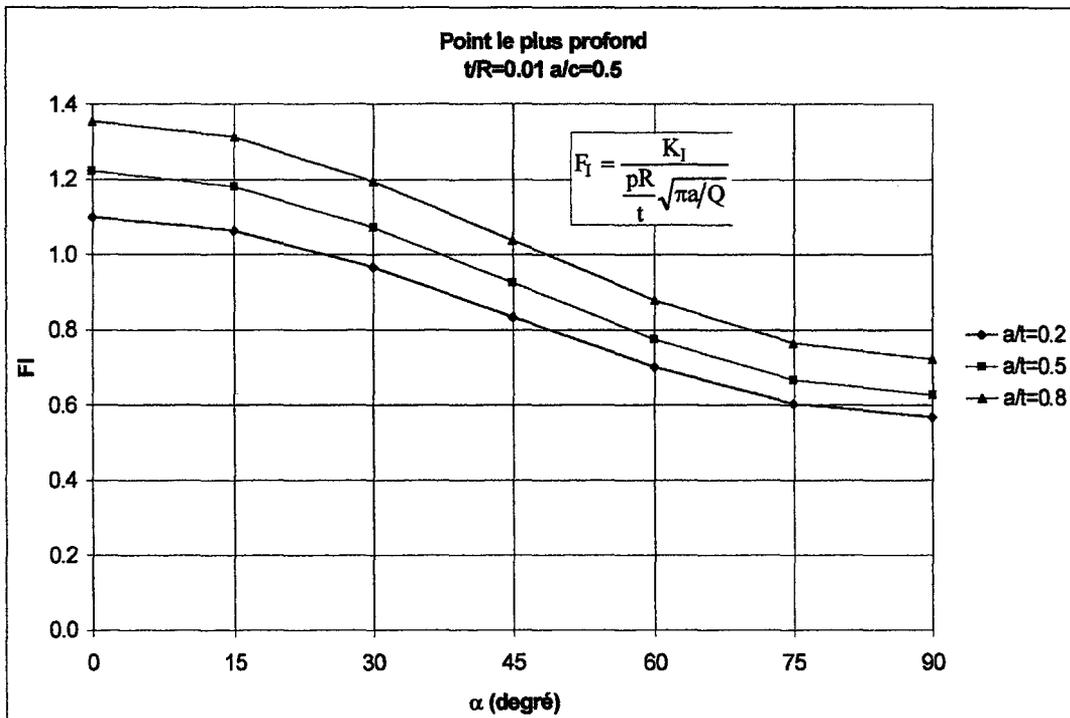


Fig. E18 : $F_I(\alpha)$ au point le plus profond

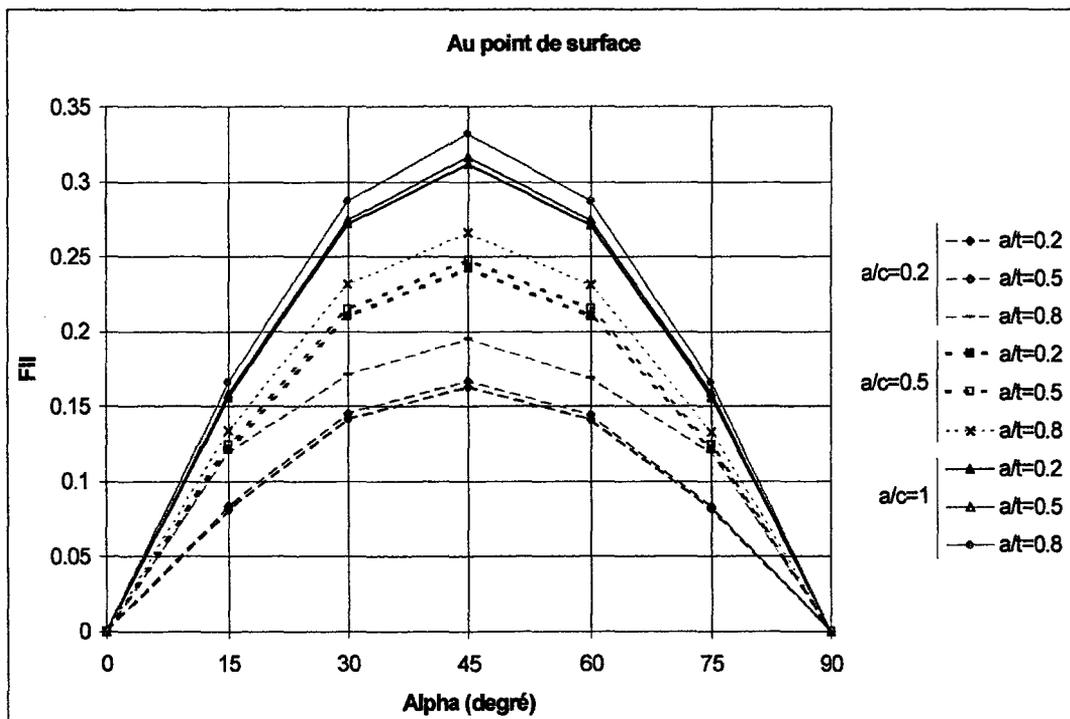


Fig. E19 : $F_{II}(\alpha)$ au point de surface

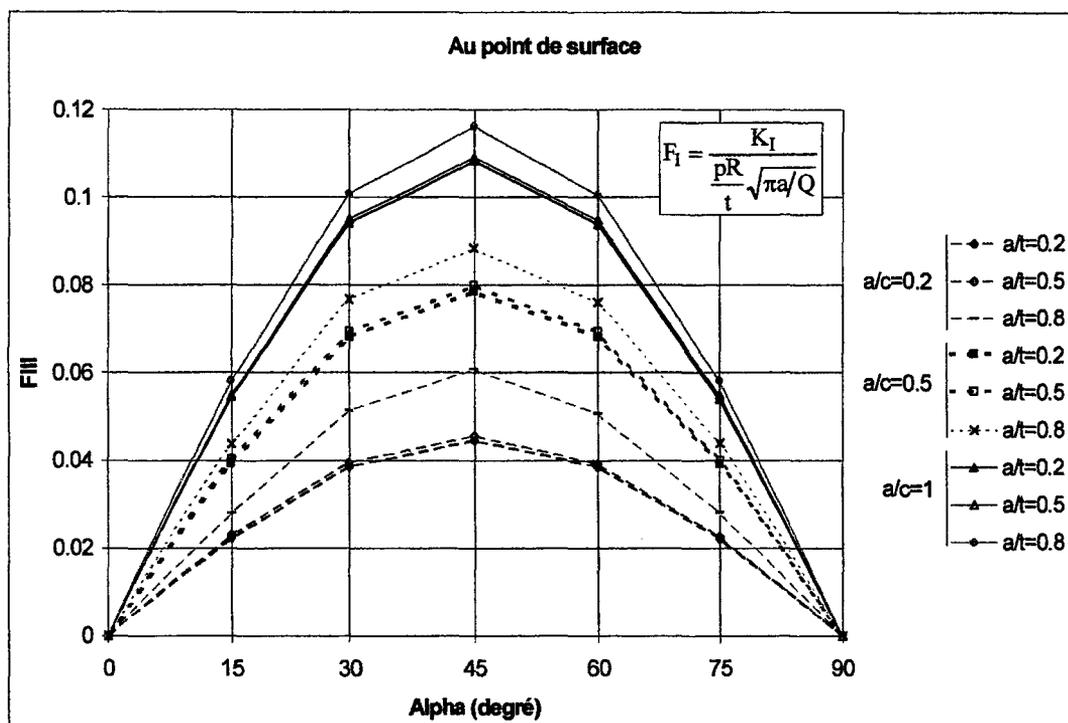


Fig. E20 : $F_{III}(\alpha)$ au point de surface

Nous avons établi les facteurs d'intensité de contraintes en mode I, II, III pour des coques cylindriques dont l'épaisseur est équivalente au dixième et au centième du rayon moyen.

E-VI : COMPARAISON K_I REEL ET K_I ESTIME

Une pratique industrielle courante lors de l'existence de fissure inclinée est de procéder à une estimation de la nocivité du défaut en mode I en approximant la fissure inclinée par sa projection sur l'axe de la coque. La projection fournit une fissure équivalente de longueur $2c'$ avec c' :

$$c' = c \cdot \cos \alpha$$

où c est la demi-longueur de la fissure inclinée, et α l'angle d'inclinaison de la fissure par rapport à l'axe de la coque.

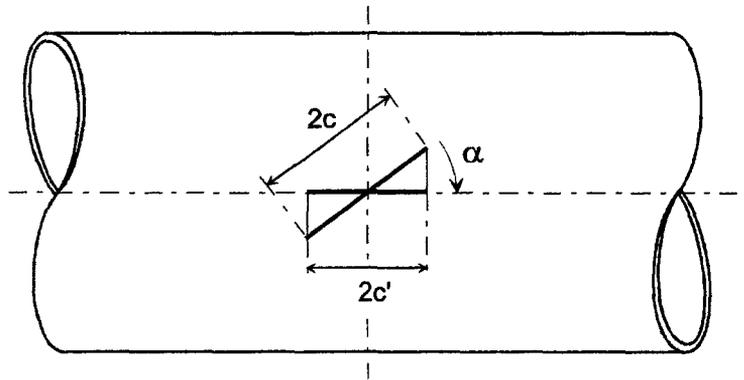


Fig. E21 : Projection de la fissure inclinée sur l'axe de la coque

Soient :

- la valeur réelle du facteur d'intensité de contraintes en mode I de la fissure orientée :

$$K_I(\alpha) = F_I(\alpha) \cdot \frac{pR}{t} \cdot \sqrt{\frac{\pi a}{Q}}$$

- la valeur estimée du facteur d'intensité de contraintes en mode I de la fissure inclinée :

$$K_{I \text{ est.}} = F_I(0) \cdot \frac{pR}{t} \cdot \sqrt{\frac{\pi a}{Q'}}$$

où $Q' = 1 + 1.464 \cdot \left(\frac{a}{c \cdot \cos \alpha} \right)$

On en déduit :

$$\frac{K_{I \text{ réel}}}{K_{I \text{ est.}}} = \frac{K_I(\alpha)}{K_{I \text{ est.}}} = \frac{F_I(\alpha)}{F_I(0)} \cdot \frac{\sqrt{Q'}}{\sqrt{Q}}$$

On appelle Diff2% la différence en pourcentage entre la valeur réelle et la valeur estimée du facteur d'intensité de contrainte (F.I.C.) en mode I :

$$\text{Diff2\%} = - \left(\frac{K_{I \text{ réel}}}{K_{I \text{ est.}}} - 1 \right) \times 100$$

Les tableaux E9 et E10 fournissent les différences entre les valeurs réelles et estimées du F.I.C. pour les deux formats de coque étudiés.

		Point le plus profond			
		α (degré)	a/c=0.2	a/c=0.5	a/c=1
a/t=0.2	15		4	3	2
	30		13	11	6
	45		28	21	11
a/t=0.5	15		5	3	2
	30		14	9	6
	45		27	18	11
a/t=0.8	15		3	3	2
	30		15	10	8
	45		30	20	12

Tableau E9 : Diff2% pour une coque de rapport $t/R=0.1$

		Point le plus profond			
		α (degré)	a/c=0.2	a/c=0.5	a/c=1
a/t=0.2	15		3	6	2
	30		12	12	4
	45		22	15	5
a/t=0.5	15		5	6	2
	30		14	12	4
	45		22	18	6
a/t=0.8	15		7	6	1
	30		13	11	4
	45		24	17	5

Tableau E10 : Diff2% pour une coque de rapport $t/R=0.01$

Le F.I.C. estimé est surestimant quelles que soient la taille de la fissure et la dimension de la coque cylindrique. Pour une fissure dont l'inclinaison reste inférieure à 30°, il reste relativement proche de la valeur réelle avec une différence maximale de 14%.

Plus la fissure est grande, plus l'erreur commise est importante. La dimension de la coque ne semble pas avoir d'interaction sur la valeur estimée du F.I.C.

Cette méthode permet d'accéder à une valeur surestimante du F.I.C. en mode I d'une fissure inclinée par le biais de résultats issus de la littérature. Elle permet de s'abstenir d'un calcul éléments finis, qui impliquerait la réalisation d'un modèle compliqué.

Néanmoins, les F.I.C. en mode II et III restent des inconnues du problème avec cette méthode d'estimation.



E-VII : CONCLUSION

Jusqu'à présent, lors de l'apparition d'une fissure inclinée, une pratique courante consistait en une approximation du F.I.C. en mode I de la fissure par le F.I.C. de la fissure projetée sur l'axe de la coque.

A partir de calcul éléments finis sur des modèles tridimensionnels, nous avons déterminé les F.I.C. en modes I, II et III pour :

- une coque cylindrique de rapport : $t/R=0.1$ et $t/R=0.01$,
- une profondeur sur demi-longueur de fissure semi-elliptique : $0.2 \leq a/c \leq 1$,
- une profondeur de fissure par rapport à l'épaisseur de la coque : $0.2 \leq a/t \leq 0.8$,
- quelle que soit l'orientation de la fissure par rapport à l'axe de la coque.

On accède par conséquent à l'intégrale J élastique qui est une fonction de K_I , K_{II} , K_{III} .

Cette étude fait ressortir un résultat important : K_I est nettement prédominant relativement à K_{II} et K_{III} :

$$\frac{K_{II \max}}{K_{I \max}} < 0,4 \qquad \frac{K_{III \max}}{K_{I \max}} < 0,4$$

- F -

PRESSION LIMITE

-

METHODES

D'ESTIMATION SIMPLIFIEE DE J

POUR UN DEFAUT INCLINE

F-I : INTRODUCTION

Que ce soit pour le tracé des courbes $K_r - L_r$ ou pour le calcul de l'intégrale J simplifiée, la charge limite est une donnée indispensable.

La charge limite d'une structure fissurée est inférieure à celle de la même structure saine. Si la fissure n'est pas trop grande et située loin des bords et des discontinuités telles que les piquages, alors on peut considérer que la charge limite obtenue localement au voisinage du défaut est la charge limite de la structure complète. Si la fissure est grande, la charge ultime obtenue localement est inférieure à celle de la structure. Dans ce cas, on surestime J .

En règle générale, son calcul se fait par le biais de l'analyse limite. Cependant, pour une pièce fissurée, il est possible d'y accéder par le critère énergétique de Griffith.

L'étude qui suit est inspirée des travaux de Folias [FOL65a] sur une coque sphérique soumise à une pression interne en présence d'une fissure finie. Après avoir déterminé les contraintes singulières au voisinage de la fissure, Folias obtient la pression limite de la sphère à partir du critère énergétique de Griffith. De manière identique, nous procéderons au calcul de la pression limite du cylindre en présence d'une fissure inclinée (fig. F1). Les contraintes au voisinage de la fissure inclinée ont été déterminées par Yahsi et Erdogan [YAH81/83/85].

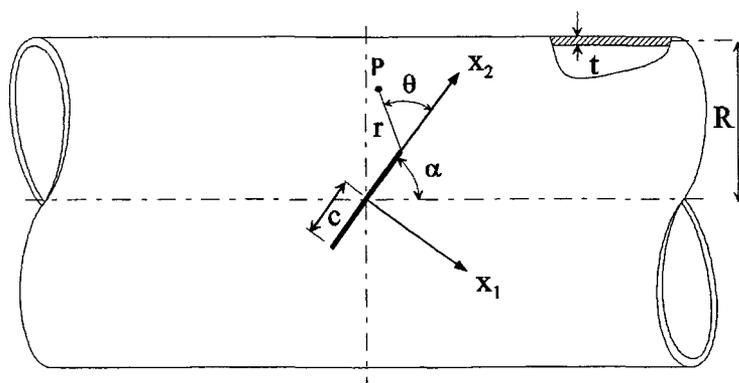


Fig. F1 : Cylindre fissuré

F-II : CONTRAINTES SINGULIERES AU VOISINAGE DE LA FISSURE

F-II-1 : Formulation du problème

On considère un élément d'une coque cylindrique peu profonde. On appelle « coque peu profonde » une coque dont le ratio du rayon de courbure \bar{R} sur le rayon de base \bar{R}_1 est petit devant 1 (fig. F2).

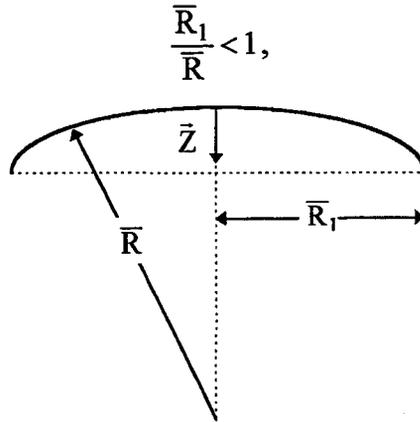


Fig. F2 : Coque peu profonde

Les équations d'équilibre des coques peu profondes s'écrivent :

$$\begin{cases} N_{ij,j} = 0 \\ Q_{i,j} + (Z, i N_{ij})_{,j} + q(X_1, X_2) = 0 \quad (i,j=1,2) \\ M_{ij,j} - Q_i = 0 \end{cases} \quad (F1-a-b-c)$$

où N_{ij} , M_{ij} , et Q_i sont, respectivement, les efforts normaux, moments et cisaillements transverses.

Les composantes des déformations sont données par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [U_{i,j} + U_{j,i} + Z_{,i} W_{,j} + Z_{,j} W_{,i}] \quad (i,j=1,2) \quad (F2)$$

où U_1 , U_2 et W sont, respectivement, les composantes du déplacement suivant X_1 , X_2 et X_3 . $Z=Z(X_1, X_2)$ est l'équation de la surface moyenne.

Les relations contrainte-déformation peuvent s'écrire en fonction des efforts normaux :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{tE} (N_{11} - \nu N_{22}) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{tE} (N_{22} - \nu N_{11}) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1+\nu}{tE} N_{12}\end{aligned}\tag{F3-a-b-c}$$

où ν est le coefficient de Poisson, E le module d'Young.

Soient β_1 et β_2 les angles de rotation de la normale à la surface de la coque. On peut exprimer les déformations dues au cisaillement transverse comme suit :

$$\theta_i = W_{,i} + \beta_i \quad (i,j=1,2)\tag{F4}$$

Si on émet l'hypothèse que la relation contrainte-déformation de cisaillement est linéaire, on peut écrire :

$$\theta_i = Q_i / tB \quad (i,j=1,2)\tag{F5}$$

où B est le module de cisaillement transverse.

Les résultantes des moments sont reliées aux composantes des angles de rotation de la normale à la surface moyenne :

$$\begin{cases} M_{11} = D(\beta_{1,1} + \nu\beta_{2,2}) \\ M_{22} = D(\nu\beta_{1,1} + \beta_{2,2}) \\ M_{12} = \frac{D(1-\nu)}{2}(\beta_{1,2} + \beta_{2,1}) \end{cases}\tag{F6-a-b-c}$$

$$\text{avec } D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

On montre qu'il existe une fonction de contrainte $F(X_1, X_2)$ qui satisfait (F1-a) :

$$\begin{cases} N_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial X_2^2} \\ N_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial X_1^2} \\ N_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial X_1 \partial X_2} \end{cases} \quad (F7-a-b-c)$$

Les équations (F1-b), (F2) et (F1-c) peuvent alors être réduites à :

$$\begin{cases} \nabla^2 \nabla^2 F + tE \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial X_1^2} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} - 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial X_1 \partial X_2} \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial X_2^2} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \right) W = 0 \\ DV^2 \nabla^2 W - \left(1 - \frac{D}{Bt} \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial X_1^2} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} - 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial X_1 \partial X_2} \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial X_2^2} \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \right) F = \left(1 - \frac{D}{Bt} \nabla^2 \right) q \\ \beta_1 + \frac{\partial W}{\partial X_1} = \frac{D}{Bt} \left[\nabla^2 \beta_1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial}{\partial X_2} \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial X_1} - \frac{\partial \beta_1}{\partial X_2} \right) \right] \\ \beta_2 + \frac{\partial W}{\partial X_2} = \frac{D}{Bt} \left[\nabla^2 \beta_2 + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial X_2} - \frac{\partial \beta_2}{\partial X_1} \right) \right] \end{cases} \quad (F8-a-b-c-d)$$

où q est le chargement surfacique.

Dans le cas d'une coque cylindrique, on a :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X_1^2} = -\frac{1}{R_1} = -\frac{\sin^2 \alpha}{R} \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial X_2^2} = -\frac{1}{R_2} = -\frac{\cos^2 \alpha}{R} \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial X_1 \partial X_2} = -\frac{1}{R_{12}} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{R}$$

GRANDEURS ADIMENSIONNEES

$$x = \frac{X_1}{c} \quad y = \frac{X_2}{c} \quad z = \frac{X_3}{c}$$

$$u = \frac{U_1}{c} \quad v = \frac{U_2}{c} \quad w = \frac{W}{c}$$

$$\beta_x = \beta_1 \quad \beta_y = \beta_2$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_{11}}{E} \quad \sigma_{yy} = \frac{\sigma_{22}}{E} \quad \sigma_{xy} = \frac{\sigma_{12}}{E} \quad \sigma_{xz} = \frac{\sigma_{13}}{B} \quad \sigma_{yz} = \frac{\sigma_{23}}{B}$$

$$\phi = \frac{F}{c^2 h E}$$

$$N_{xx} = \frac{N_{11}}{Et} \quad N_{yy} = \frac{N_{22}}{Et} \quad N_{xy} = \frac{N_{12}}{Et}$$

$$M_{xx} = \frac{M_{11}}{Et^2} \quad M_{yy} = \frac{M_{22}}{Et^2} \quad M_{xy} = \frac{M_{12}}{Et^2}$$

$$V_x = \frac{V_1}{Bt} \quad V_y = \frac{V_2}{Bt}$$

$$\lambda_1^4 = 12(1-\nu^2) \frac{c^4}{t^2 R_1^2} \quad \lambda_2^4 = 12(1-\nu^2) \frac{c^4}{t^2 R_2^2} \quad \lambda_{12}^4 = 12(1-\nu^2) \frac{c^4}{t^2 R_{12}^2}$$

$$\lambda^4 = 12(1-\nu^2) \frac{c^2}{t^2}$$

$$\kappa = \frac{E}{B\lambda^4} \quad B = \frac{5E}{12(1+\nu)} \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Tableau F1 : Variables adimensionnées

Si on introduit des variables adimensionnées (tableau F1), les équations (F8-a-b-c-d) donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^4 \phi - \frac{1}{\lambda^2} \left(\lambda_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2\lambda_{12}^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w = 0 \\ \nabla^4 w + \lambda^2 (1 - \kappa \nabla^2) \left(\lambda_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2\lambda_{12}^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi = \lambda^4 (1 - \kappa \nabla^2) \frac{c}{t} q \\ (1 - \kappa \nabla^2) \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = \kappa \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial x} - \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \right) \\ (1 - \kappa \nabla^2) \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = \kappa \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (F9-a-b-c-d)$$

où c est la demi-longueur de fissure, t l'épaisseur du cylindre.

Si on définit de nouvelles fonctions ψ et Ω :

$$\Omega(x, y) = \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \quad (F10)$$

$$\psi(x, y) = \kappa \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) - w \quad (F11)$$

Les équations (F9-c-d) s'écrivent alors :

$$\kappa \nabla^2 \psi - \psi - w = 0 \quad (F12)$$

$$\kappa \frac{1 - \nu}{2} \nabla^2 \Omega - \Omega = 0 \quad (F13)$$

F-II-2 : Coque cylindrique en présence d'une fissure inclinée

La solution pour une coque fissurée peut être obtenue par superposition des solutions (fig. F3) de la coque non-fissurée et de la solution dite de « perturbation » de la coque fissurée. La solution de perturbation est obtenue à partir du problème de la coque fissurée pour laquelle les seuls chargements appliqués se trouvent sur les lèvres de la fissure. Les efforts et moments appliqués sur la fissure sont égaux en amplitude mais de signe opposé à ceux présents dans la coque non-fissurée à l'emplacement de la fissure.

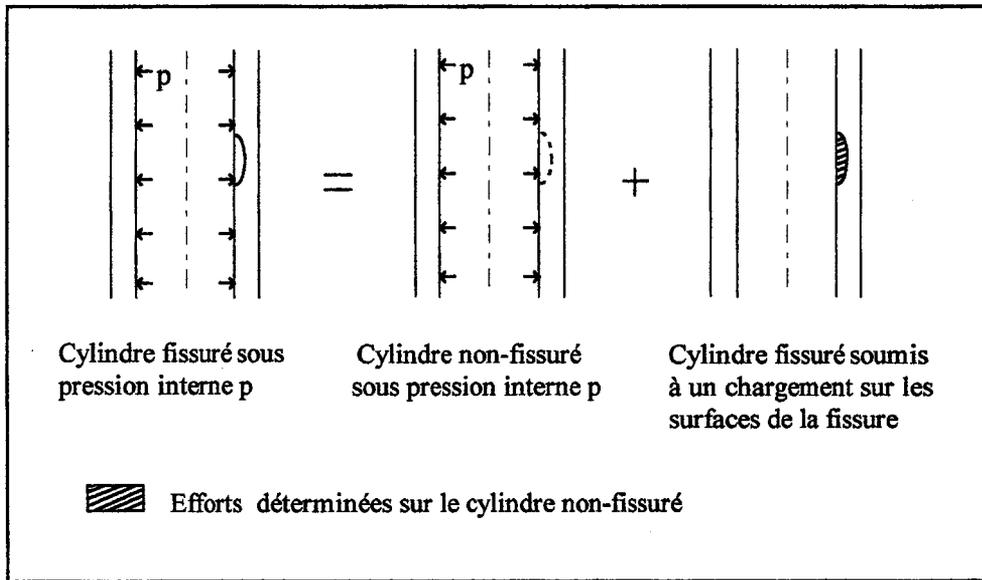


Fig. F3 : Principe de superposition

On considère le problème de perturbation, par conséquent le seul chargement existant est localisé sur les lèvres de la fissure et est égal aux efforts qui se trouvent à l'emplacement virtuel de la fissure dans la coque non fissurée.

Pour une coque cylindrique avec une fissure inclinée, les équations d'équilibre (F9-a-b-c-d) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \nabla^4 \phi - \frac{1}{\lambda^2} \left(\lambda_1^2 \frac{\partial}{\partial y^2} - 2\lambda_{12}^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \lambda_2^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) w = 0 \\
 \nabla^4 w + \lambda^2 (1 - \kappa \nabla^2) \cdot \left(\lambda_1^2 \frac{\partial}{\partial y^2} - 2\lambda_{12}^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \lambda_2^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \phi = 0 \\
 \kappa \nabla^2 \psi - \psi - w = 0 \\
 \kappa \left(\frac{1 - \nu}{2} \right) \nabla^2 \Omega - \Omega = 0
 \end{array} \right. \quad (F14-a-b-c-d)$$

Les équations différentielles (F14-a-b-c-d) sont résolues à l'aide de transformées de Fourier.

En éliminant ϕ entre (F14-a) et (F14-b), on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \nabla^4 \nabla^4 w + (1 - \kappa \nabla^2) \left[\lambda_1^2 \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \lambda_2^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 4\lambda_{12}^2 \cdot \left(\lambda_1^2 \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \lambda_2^2 \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} \right) + \right. \\ \left. + (4\lambda_{12}^4 + 2\lambda_1^2 \lambda_2^2) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \cdot w = 0 \end{aligned} \quad (F15)$$

La solution de l'équation (F15) se met sous la forme :

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \zeta) e^{-i\zeta y} d\zeta \quad (F16)$$

$$f(x, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) e^{i\zeta y} d\zeta \quad (F17)$$

La substitution de (F16) et (F17) dans (F15) fournit une équation différentielle d'ordre 8 de f :

$$\begin{aligned} f^{\text{VIII}} - (4\zeta^2 + \kappa\lambda_2^4) f^{\text{VI}} - 4\kappa\zeta \lambda_{12}^2 \lambda_2^2 i f^{\text{V}} \\ + [6\zeta^4 + \kappa\zeta^2 (2\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^4 + 4\lambda_{12}^4)] f^{\text{IV}} \\ + 4\zeta \lambda_{12}^2 i [\lambda_2^2 + \kappa\zeta^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)] f^{\text{III}} \\ - [4\zeta^4 + \kappa\zeta^2 (\lambda_1^4 + 4\lambda_{12}^4 + 2\lambda_1^2 \lambda_2^2) + 4\lambda_{12}^4 + 2\lambda_1^2 \lambda_2^2] f^{\text{II}} \\ - 4\lambda_1^2 \lambda_{12}^2 \zeta^3 i (\kappa\zeta^2 + 1) f^{\text{I}} + \zeta^4 (\zeta^4 + \kappa\lambda_1^4 \zeta^2 + \lambda_1^4) f = 0 \end{aligned} \quad (F18)$$

On cherche une solution de l'équation (F18) de la forme $f = R(\zeta) \cdot e^{m\zeta}$. En remplaçant cette solution dans (F18), on obtient l'équation caractéristique du problème :

$$\begin{aligned} m^8 - (4\zeta^2 + \kappa\lambda_2^4) m^6 - 4\kappa\zeta \lambda_{12}^2 \lambda_2^2 i m^5 \\ + [6\zeta^4 + \kappa\zeta^2 (2\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^4 + 4\lambda_{12}^4)] m^4 \\ + 4\zeta \lambda_{12}^2 i [\lambda_2^2 + \kappa\zeta^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)] m^3 \\ - [4\zeta^4 + \kappa\zeta^2 (\lambda_1^4 + 4\lambda_{12}^4 + 2\lambda_1^2 \lambda_2^2) + 4\lambda_{12}^4 + 2\lambda_1^2 \lambda_2^2] m^2 \\ - 4\lambda_1^2 \lambda_{12}^2 \zeta^3 i (\kappa\zeta^2 + 1) m + \zeta^4 (\zeta^4 + \kappa\lambda_1^4 \zeta^2 + \lambda_1^4) = 0 \end{aligned} \quad (F19)$$

L'équation obtenue étant d'ordre 8, elle possède 8 racines telles que :

$$\Re(m_j) < 0 \text{ et } m_{j+4} = -m_j \text{ avec } j = 1..4$$

On peut alors exprimer la solution de $f(x, \zeta)$ comme :

$$f(x, \zeta) = \begin{cases} \sum_{j=1}^4 R_j(\zeta) \cdot e^{m_j x} & x > 0 \\ \sum_{j=5}^8 R_j(\zeta) \cdot e^{m_j x} & x < 0 \end{cases} \quad (F20)$$

De même, on pose :

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, \zeta) \cdot e^{-iy\zeta} d\zeta \quad (F21)$$

Des équations (F14-a) et (F20), on tire $g(x, \zeta)$:

$$g(x, \zeta) = \begin{cases} \sum_{j=1}^4 R_j(\zeta) \cdot K_j \cdot e^{m_j x} & x > 0 \\ \sum_{j=5}^8 R_j(\zeta) \cdot K_j \cdot e^{m_j x} & x < 0 \end{cases} \quad (F22)$$

où
$$K_j = \frac{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \cdot \zeta^2 + \lambda_2^2 \cdot P_j + 2\lambda_{12}^2 \cdot \zeta \cdot i \cdot m_j}{\lambda^2 P_j^2}, \quad P_j = m_j^2 - \zeta^2.$$

De manière identique, on fait l'hypothèse que :

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, \zeta) \cdot e^{-iy\zeta} d\zeta \quad (F23)$$

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x, \zeta) \cdot e^{-iy\zeta} d\zeta \quad (F24)$$

A l'aide des équations (F14-c) et (F14-d), on montre que :

$$h(x, \zeta) = \begin{cases} A_1(\zeta) \cdot e^{r_1 x} & x > 0 \\ A_2(\zeta) \cdot e^{r_2 x} & x < 0 \end{cases} \quad (F25)$$

avec :

$$r_1 = -r_2 = -\left[\zeta^2 + \frac{2}{\kappa(1-\nu)} \right]^{1/2} \quad (F26)$$

$$\theta(x, \zeta) = \begin{cases} \sum_{j=1}^4 \frac{R_j(\zeta)}{\kappa P_j - 1} \cdot e^{m_j x} & x > 0 \\ \sum_{j=5}^8 \frac{R_j(\zeta)}{\kappa P_j - 1} \cdot e^{m_j x} & x < 0 \end{cases} \quad (F27)$$

Par conséquent, le problème se réduit à la détermination des fonctions $R_j(\zeta)$ ($j=1..8$) et $A_j(\zeta)$ ($j=1,2$) à partir des conditions aux limites.

Comme, on l'a précisé précédemment, le seul chargement présent pour le problème de « perturbation » est situé sur les lèvres de la fissure. On établit donc les conditions aux limites du problème :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} N_{xx} - \lim_{x \rightarrow 0^-} N_{xx} = 0 \quad -\infty < y < +\infty \quad (F28)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} M_{xx} - \lim_{x \rightarrow 0^-} M_{xx} = 0 \quad -\infty < y < +\infty \quad (F29)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} N_{xy} - \lim_{x \rightarrow 0^-} N_{xy} = 0 \quad -\infty < y < +\infty \quad (F30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} M_{xy} - \lim_{x \rightarrow 0^-} M_{xy} = 0 \quad -\infty < y < +\infty \quad (F31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} Q_x - \lim_{x \rightarrow 0^-} Q_x = 0 \quad -\infty < y < +\infty \quad (F32)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} N_{xx} + \lim_{x \rightarrow 0^-} N_{xx} = 2F_1(y) \quad |y| < 1 \quad (F33)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u - \lim_{x \rightarrow 0^-} u = 0 \quad |y| > 1 \quad (F34)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} M_{xx} + \lim_{x \rightarrow 0^-} M_{xx} = 2F_2(y) \quad |y| < 1 \quad (F35)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \beta_x - \lim_{x \rightarrow 0^-} \beta_x = 0 \quad |y| > 1 \quad (F36)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} N_{xy} + \lim_{x \rightarrow 0^-} N_{xy} = 2F_3(y) \quad |y| < 1 \quad (F37)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} v - \lim_{x \rightarrow 0^-} v = 0 \quad |y| > 1 \quad (F38)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} M_{xy} + \lim_{x \rightarrow 0^-} M_{xy} = 2F_4(y) \quad |y| < 1 \quad (F39)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \beta_y - \lim_{x \rightarrow 0^-} \beta_y = 0 \quad |y| > 1 \quad (F40)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} Q_x + \lim_{x \rightarrow 0^-} Q_x = 2F_5(y) \quad |y| < 1 \quad (F41)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} w - \lim_{x \rightarrow 0^-} w = 0 \quad |y| > 1 \quad (F42)$$

où F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 sont des fonctions connues représentant le chargement sur les lèvres de la fissure, u, v, w les déplacements adimensionnés.

La résolution du système d'équation est obtenue après discrétisation numérique des équations.

• Dans la règle R6 ou l'annexe A16, on considère que seule la contrainte normale aux lèvres est modifiée par la présence de la fissure. Par conséquent, le seul chargement pris en compte est une contrainte normale σ_m aux lèvres de la fissure, la contrainte de cisaillement étant alors supposée identique à celle présente dans le cylindre fermé sous pression interne non fissuré. Dans ce cas, F_2, F_3, F_4, F_5 sont nuls et F_1 est égal à :

$$F_1 = -\frac{\sigma_m}{E} = -\bar{\sigma}_e,$$

• La résolution des équations d'équilibre a fait l'objet des travaux de Yahsi [YAH81]. Il accède dans un premier temps aux efforts puis aux contraintes au voisinage du fond de fissure comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{h_1 + zh_2}{4\sqrt{2r}} \left[\frac{5}{4} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{5\theta}{2} \right] - \frac{h_3 + zh_4}{4\sqrt{2r}} \left[-\frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{5\theta}{2} \right] \\ \sigma_{yy} &= -\frac{h_1 + zh_2}{4\sqrt{2r}} \left[\frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{5\theta}{2} \right] - \frac{h_3 + zh_4}{4\sqrt{2r}} \left[-\frac{7}{4} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{5\theta}{2} \right] \quad (F43-a-b-c) \\ \tau_{xy} &= -\frac{h_1 + zh_2}{4\sqrt{2r}} \left[-\frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{5\theta}{2} \right] - \frac{h_3 + zh_4}{4\sqrt{2r}} \left[\frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{5\theta}{2} \right] \end{aligned}$$

où h_1, h_2, h_3, h_4 sont des fonctions des fonction du paramètre λ ou du paramètre ρ :

$$\rho = \frac{c}{\sqrt{Rt}}$$

Dans la pratique, on reste dans le domaine des coques peu profondes si on considère des longueurs de fissure inférieures au dixième du périmètre de la coque et si le rapport du rayon sur l'épaisseur de la coque est strictement inférieur à 1000, soit ρ compris entre 0 et 6. On remarque que dans la majorité des cas, ρ appartient à l'intervalle [0,2].

On exprime les h_i ($i=1$ à 4) comme :

$$\begin{cases} h_1 = -4k_{mm}\bar{\sigma}_e \\ h_2 = -4k_{bm}\bar{\sigma}_e \frac{2c}{t} \\ h_3 = -4k_{sm}\bar{\sigma}_e \\ h_4 = -4k_{tm}\bar{\sigma}_e \frac{2c}{t} \end{cases} \quad (F44-a-b-c-d)$$

Les figures F4 à F7 montrent l'évolution des coefficients k_{mm} , k_{bm} , k_{sm} , k_{tm} .

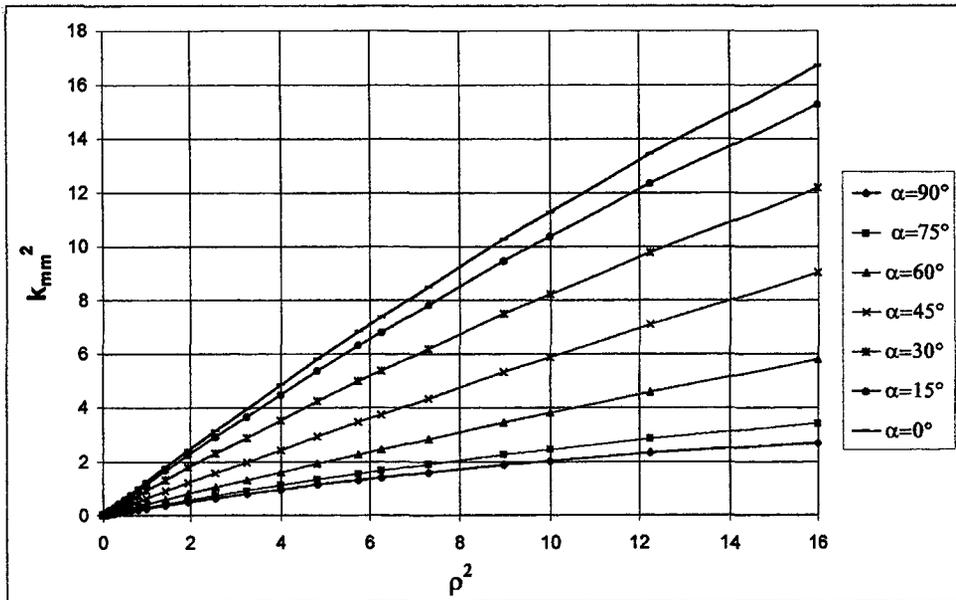


Fig. F4 : Evolution de k_{mm}^2 en fonction de ρ^2

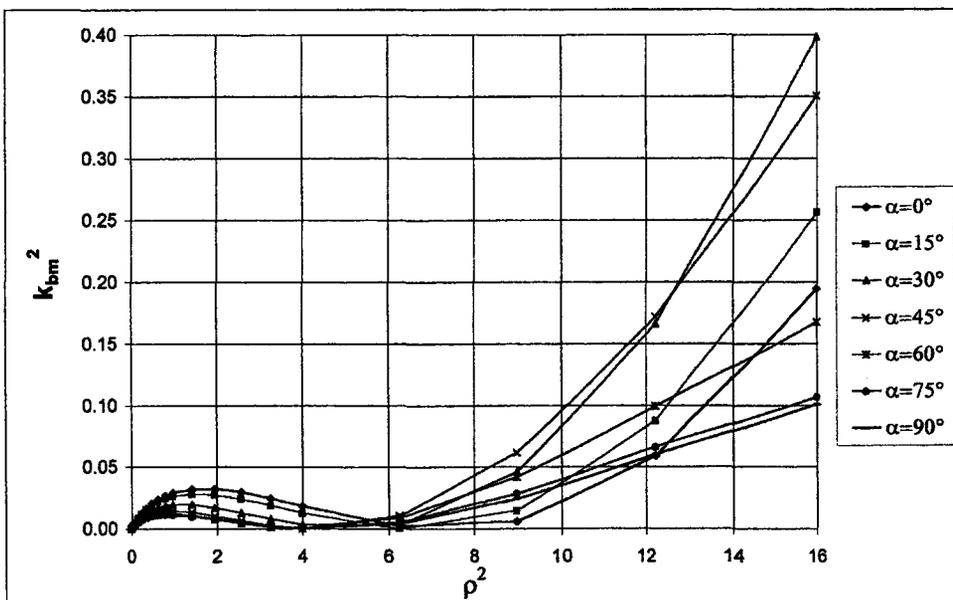


Fig. F5 : Evolution de k_{bm}^2 en fonction de ρ^2

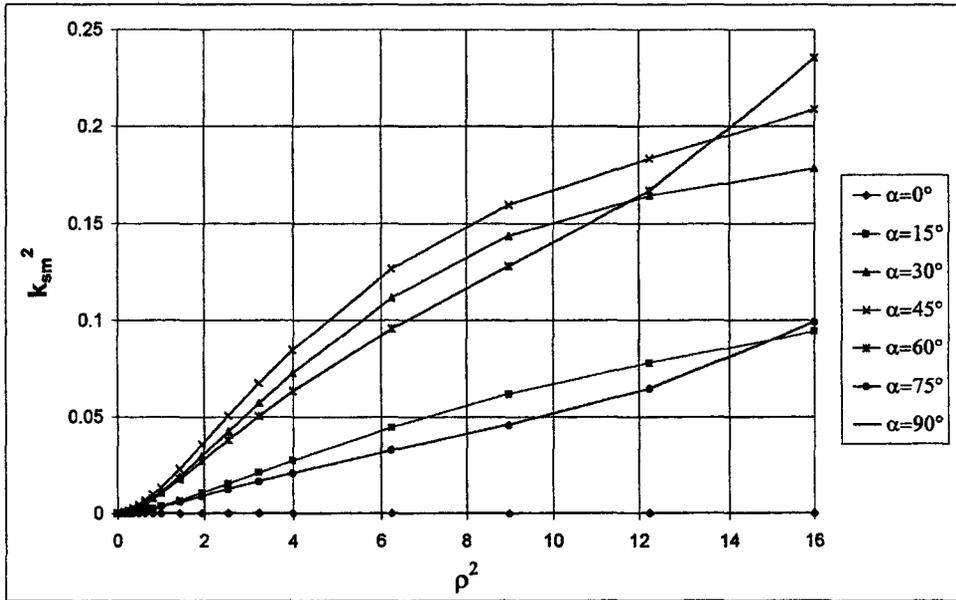


Fig. F6 : Evolution de k_{sm}^2 en fonction de ρ^2

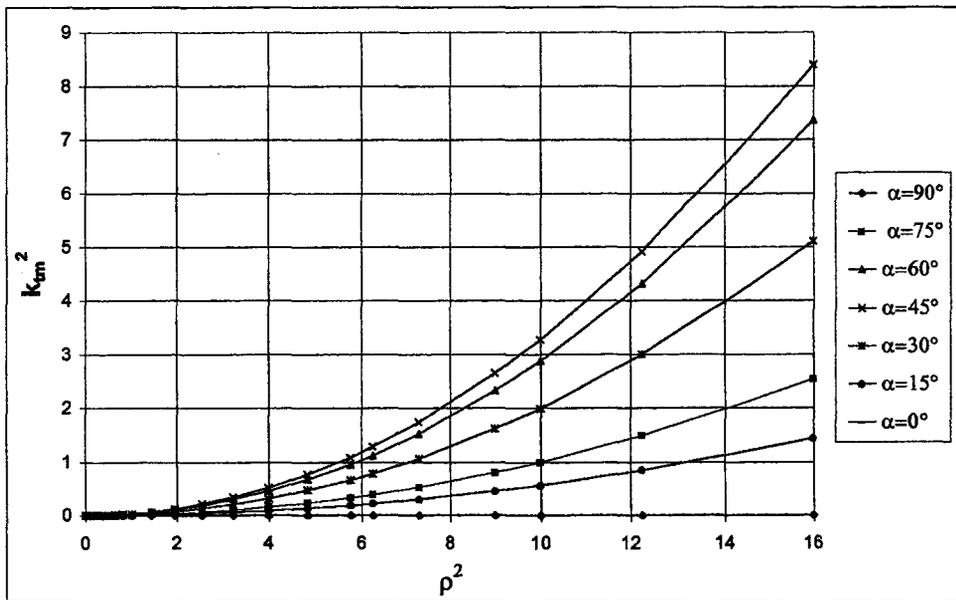


Fig. F7 : Evolution de k_{tm}^2 en fonction de ρ^2

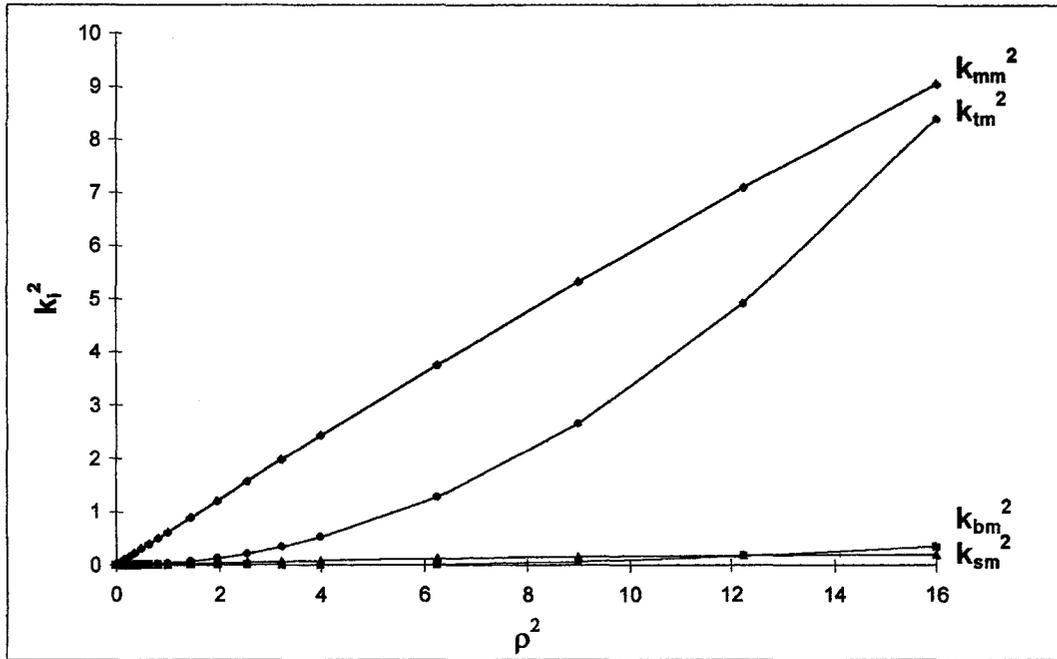


Fig. F8 : Comparaison de l'amplitude des k_i^2 ($i = mm, bm, sm, tm$) pour $\alpha=45^\circ$

Sur la figure F8, on peut voir que k_{bm} et k_{sm} sont négligeables comparativement à k_{mm} et k_{tm} . Ils sont constants par rapport au coefficient de Poisson (fig. F9)

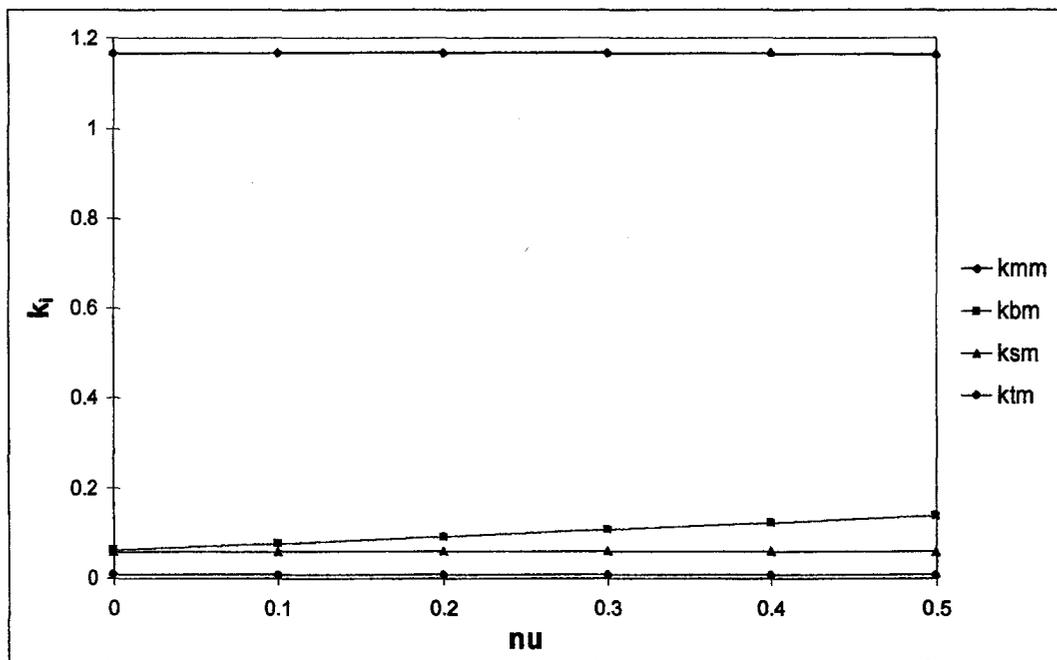


Fig. F9 : Evolution des k_i en fonction du coefficient de Poisson pour une fissure inclinée à 45° , $a/t=2$ et $t/R=1/10$

F-III : PRESSION LIMITE D'UNE COQUE CYLINDRIQUE EN PRESENCE D'UNE FISSURE TRAVERSANTE INCLINEE

Folias [FOL65-a-b] détermina la pression limite pour un cylindre fissuré axialement et une sphère en présence d'une fissure finie à l'aide du critère énergétique de Griffith.

Miller [MIL88] et Goodall [GOO84] comparèrent ces résultats théoriques avec les valeurs expérimentales. Ils conclurent à une très bonne concordance des résultats, bien meilleure que pour les pressions limites obtenues par Kitching [KIT81-82] ou Desquines [DES96] par le biais de l'analyse limite.

La méthode utilisée par Folias ayant prouvé sa validité, nous l'exploiterons pour le calcul de la charge limite de la coque cylindrique en présence d'une fissure traversante inclinée.

Le critère de Griffith est basé sur les contraintes singulières au voisinage du fond de fissure et repose sur l'hypothèse que l'énergie totale du système fissuré soumis à un chargement reste constante quand la fissure s'étend de manière infinitésimale. La rupture a lieu quand la fissure devient instable c'est à dire quand la fissure continue à croître sans qu'il y ait augmentation de l'énergie du système U_{sys} (fig. F10) :

$$\frac{\partial U_{sys}}{\partial c} = 0 \tag{F45}$$

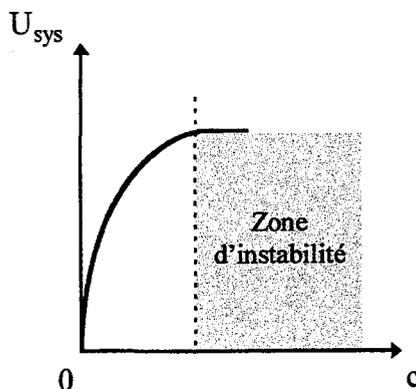


Fig. F10 : Zone d'instabilité

- L'énergie du système peut être décomposée en l'énergie due au chargement U_{load} , l'énergie de déformation $U_{def.}$, l'énergie de surface $U_{surf.}$:

$$U_{sys} = U_{load} + U_{def.} + U_{surf.} \quad (F46)$$

On suppose l'énergie cinétique négligeable

- Les contraintes appliquées sont constantes et leurs points d'application ne bougent pas quand la fissure se propage. On a donc:

$$U_{load} = U_0 \quad (F47)$$

où U_0 est une énergie constante de référence.

- Dans le cas d'un problème plan, l'énergie de déformation élastique s'écrit :

$$U_{def.} = \frac{1}{8\mu} \left[\frac{k+1}{4} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 - 2(\sigma_{xx} \cdot \sigma_{yy} - \tau_{xy}^2) \right] \quad (F48)$$

où $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ car on se considère en contraintes planes dans le cas des coques et μ le module de cisaillement.

L'énergie de déformation se met aussi sous la forme :

$$U_{def.} = \frac{1}{8\mu} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (2\tau_{xy})^2 \right] \quad (F49)$$

- Déterminons maintenant l'énergie de surface :

$$U_{surf.} = \gamma(2S + Pt + 4ct) \quad (F50)$$

où γ est l'énergie de surface par unité d'aire, S les surfaces internes et externes de la coques, P le périmètre de la coque, t l'épaisseur de la coque, c la demi-longueur de fissure.

• Des équations (F46), (F49), (F50), on déduit l'énergie du système :

$$U_{\text{sys}} = U'_0 + 4\gamma ct - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{8\mu} \int_{Z_1}^{Z_2} \int_{\varepsilon-\pi}^{\pi} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (2\tau_{xy})^2 \right] R^* dR^* dZ d\theta$$

(F51)

avec : $U'_0 = U_0 + \gamma(2S + Pt),$

$$r = R^*/c,$$

$$Z_1 = Z_0 - h^*/2 \quad \text{et} \quad Z_2 = Z_0 + h^*/2.$$

A, Z₀, Z₁, Z₂, h* sont définis sur la figure F11. δ est la hauteur du segment de coque.

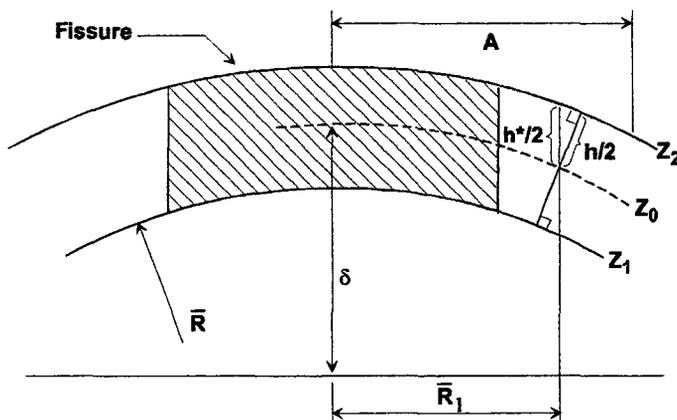


Fig. F11 : Segment de coque considéré

Localement, le segment de coque est presque plat. On peut par conséquent approximer Z₁ et Z₂ par -h/2 et h/2 sans trop d'erreur.

On remplace dans (F51) les contraintes par leurs expressions (F43-a-b-c) et h₁, h₂, h₃, h₄ par (F44-a-b-c-d). Il résulte après une première intégration par rapport à θ :

$$U_{\text{sys}} = U'_0 + 4\gamma ct - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi c}{8\mu} \int_{-t/2}^{t/2} \int_{\varepsilon}^A \left[\left(2 \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(k_{mm} + \frac{2}{t} k_{bm} Z \right)^2 + \left(2 \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{5}{2} \right) \cdot \left(k_{sm} + \frac{2}{t} k_{tm} Z \right)^2 \right] dR^* dZ$$

En intégrant par rapport à Z puis par rapport à R*, on obtient :

$$U_{\text{sys}} = U'_0 + 4\gamma ct - \frac{\pi c}{8\mu} \left\{ 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \bar{\sigma}_e^2 \cdot t \left(k_{\text{mm}}^2 + k_{\text{sm}}^2 + \frac{k_{\text{bm}}^2 + k_{\text{tm}}^2}{3} \right) \right. \\ \left. \bar{\sigma}_e^2 \cdot t \left(\frac{k_{\text{mm}}^2 + 5k_{\text{sm}}^2}{2} + \frac{k_{\text{bm}}^2 + 5k_{\text{tm}}^2}{3} \right) \right\} \cdot A \quad (F53)$$

k_{bm}^2 , k_{sm}^2 sont négligeables par rapport à k_{mm}^2 , k_{tm}^2 comme le montre la figure F7. Par conséquent, l'énergie du système est donnée par :

$$U_{\text{sys}} = U'_0 + 4\gamma ct - \frac{\pi c}{8\mu} \cdot \bar{\sigma}_e^2 \cdot t \cdot \left(\frac{5-3\nu}{2(1+\nu)} \cdot k_{\text{mm}}^2 \frac{9-\nu}{6(1+\nu)} \cdot k_{\text{tm}}^2 \right) \cdot A \quad (F54)$$

• Une inconnue reste présente dans l'estimation de l'énergie du système (F54) : la zone d'influence A du défaut.

Localement au voisinage de la fissure, on émet l'hypothèse que la coque est relativement plate ce qui permet d'approximer A. L'énergie du système, quand le paramètre ρ tend vers zéro (cas de la plaque) et quand le système est soumis à une tension biaxiale $\bar{\sigma}_e$, doit être égale à l'énergie d'une plaque, sous les mêmes conditions de chargement.

De l'équation (F54), on tire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\rho \rightarrow 0} k_{\text{mm}} = 1 \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} k_{\text{tm}} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow U_{\text{sys}} = U'_0 + 4\gamma ct - \frac{\pi c}{8\mu} \cdot \bar{\sigma}_e^2 \cdot t \cdot \frac{5-3\nu}{2(1+\nu)} \cdot A \quad (F55)$$

L'énergie d'une plaque sous tension biaxiale $\bar{\sigma}_e$ a été définie par Swedlow [SWE63] :

$$U_{\text{sys}}^{\text{plaque}} = U'_0 + 4\gamma ct - \frac{\pi c^2}{8\mu} \cdot t \cdot \frac{4\nu}{1+\nu} \cdot \bar{\sigma}_e^2 \quad (F56)$$

On égale (F55) et (F56) ce qui nous donne A :

$$A = \frac{8\nu c}{5-3\nu} \quad (F57)$$

• On remplace (F57) dans (F54) d'où :

$$U_{\text{sys}} = U'_0 + 4\gamma ct - \frac{\pi c}{8\mu} \cdot \bar{\sigma}_e^2 \cdot t \cdot \left\{ \frac{5-3\nu}{2(1+\nu)} k_{\text{mm}}^2 + \frac{9+\nu}{6(1+\nu)} k_{\text{tm}}^2 \right\} \cdot \frac{8\nu c}{5-3\nu} \quad (F58)$$

• Appliquons maintenant le critère de Griffith afin de déterminer la charge limite de la coque fissurée.

$$\frac{\partial U_{\text{sys}}}{\partial c} = 4\gamma t - \frac{\pi c}{4G} \cdot \bar{\sigma}_e^2 \cdot t \cdot \left\{ \frac{5-3\nu}{2(1+\nu)} k_{\text{mm}}^2 + \frac{9+\nu}{6(1+\nu)} k_{\text{mm}}^2 \right\} \cdot \frac{8\nu}{5-3\nu} = 0 \quad (F59)$$

Après quelques développements, on obtient la pression limite :

$$\frac{\bar{\sigma}_e^2}{\sigma_{\text{cr}}^2} = \frac{1}{\frac{5-3\nu}{2(1+\nu)} k_{\text{mm}}^2 + \frac{9+\nu}{6(1+\nu)} k_{\text{tm}}^2} \quad (F60)$$

où σ_{cr} est la contrainte critique définie par Griffith :

$$\sigma_{\text{cr}} = \sqrt{\frac{16\mu\gamma}{\pi c}} \quad (F61)$$

Dans le cas d'un matériau élastique parfaitement plastique, σ_{cr} est égale à la limite élastique σ_0 du matériau considéré.

Les appareils à pression sont constitués de matériau supposé homogène et isotrope. Pour ce type de matériau, le coefficient de Poisson est compris entre 0,27 et 1/3 .

La sûreté de tels appareils doit être maximale, c'est pourquoi on sous-estimera la charge limite de la coque en se plaçant dans le cas où le coefficient de Poisson est égal à 1/3 ce qui induira une surestimation de l'intégrale J obtenue par les méthodes simplifiées.

Sous les hypothèses citées ci-dessus, on obtient alors la pression limite P_L adimensionnée d'après (F60) et (F61) :

$$P_L = \frac{\bar{\sigma}_e}{\sigma_0} = \frac{1}{\sqrt{k_{mm}^2 + \frac{7}{6}k_{tm}^2}} \quad (F62)$$

avec : $\bar{\sigma}_e = \frac{pR}{2t} (2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$

• k_{mm}^2 et k_{tm}^2 sont lissés en fonction du paramètre ρ de la manière suivante :

$$k_{mm}^2 = 1 + e_1 \cdot \rho^2 + e_2 \cdot \rho^4$$

$$k_{tm}^2 = e_3 \cdot \rho^4 \quad (F63-a-b)$$

où a, b, d sont des fonctions de α déclarées dans le tableau F1 :

α	e_1	e_2	e_3
0°	0.2612	- 0.0058	0
15°	0.2996	- 0.0053	0.0099
30°	0.4114	- 0.0031	0.0287
45°	0.6235	- 0.0036	0.0327
60°	0.9255	- 0.0103	0.0199
75°	1.1755	-0.01373	0.0056
90°	1.2683	-0.0139	0

Tableau F1 : Constantes issues du lissage de k_{mm}^2 et k_{tm}^2

- On en déduit l'expression finale de la charge limite pour un cylindre en présence d'une fissure inclinée d'un angle α par rapport à l'axe de la coque :

$$P_L = \frac{1}{\sqrt{1 + f_1(\alpha) \cdot \rho^2 + f_2(\alpha) \cdot \rho^4}} \quad (F64)$$

avec :

$$\begin{cases} f_1(\alpha) = 0,773 + 0,517 \cdot \cos(2,042 \cdot \alpha + 0,208) \\ f_2(\alpha) = 0,011 + 0,022 \cdot \cos(3,719 \cdot \alpha - 2,500) \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq \rho \leq 4$$

Les fonctions $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ sont obtenues à la suite d'une interpolation trigonométrique.

- Dans le cas d'une fissure axiale, Folias [FOL65-b] détermina l'expression de la charge limite en première approximation comme suit :

$$P_L = \frac{1}{\sqrt{1 + 1,61 \cdot \rho^2}} \quad (F65)$$

Plus récemment, dans une version révisée [FOL75], il proposa une charge limite un peu plus élevée que lors de sa première évaluation, à savoir :

$$P_L = \frac{1}{\sqrt{1 + 1,05 \cdot \rho^2}} \quad (F66)$$

En ce qui nous concerne, pour un défaut longitudinal ($\alpha=0$), l'expression (F64) prend la forme suivante :

$$P_L = \frac{1}{\sqrt{1 + 1,2788 \cdot \rho^2 - 0,0066 \cdot \rho^4}} \quad (F67)$$

Comme le montre la figure F12, l'expression (F67) est comprise entre la relation (F65) et (F66). La charge limite que nous proposons est légèrement inférieure à la dernière version proposée par Folias.

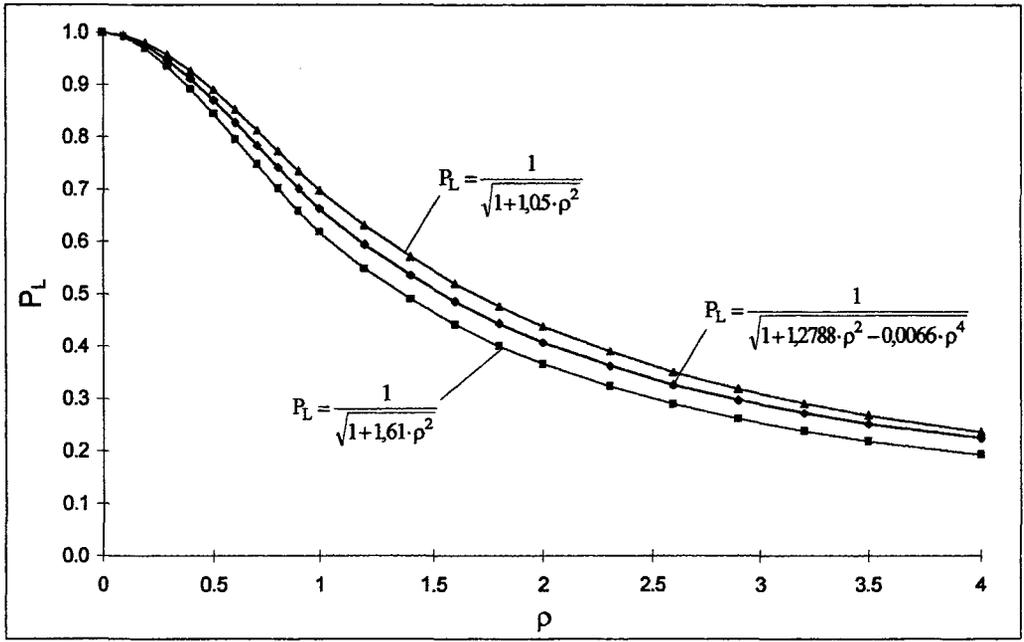


Fig. F12 : Comparaison des différentes expressions de la charge limite pour une fissure axiale

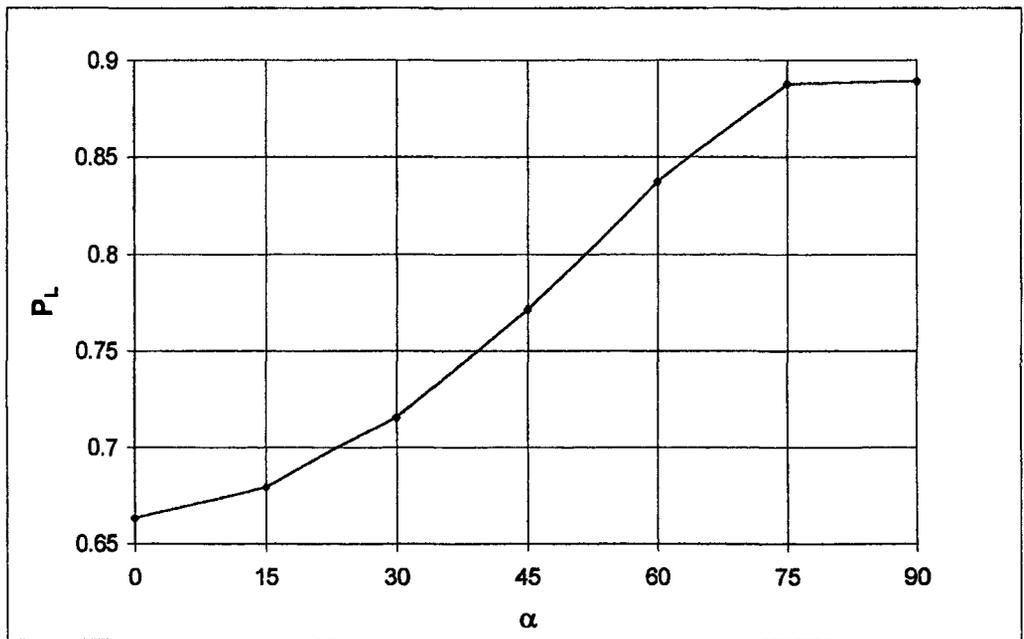


Fig. F13 : Evolution de la pression limite en fonction de α pour $\rho=1$

La charge limite est minimale pour une fissure longitudinale ($\alpha = 0^\circ$) et maximale pour une fissure circonférentielle ($\alpha = 90^\circ$). Pour une même valeur du paramètre ρ , la charge limite augmente progressivement avec l'angle α (fig. F13). Ce qui semble tout à fait cohérent avec la diminution d'amplitude de la contrainte appliquée sur les lèvres de la fissure quand la fissure s'incline.

F-IV : CHARGE LIMITE D'UN CYLINDRE EN PRESENCE D'UN DEFAUT DEBOUCHANT

- Le formulaire de A.G. Miller [MIL88] présente la charge limite d'un cylindre en présence d'un défaut axial débouchant.

Connaissant la charge limite P_L^{t-a} d'un tube d'épaisseur (t-a) non fissuré, et la charge limite $P_L^a(0)$ d'un tube contenant une fissure traversante d'épaisseur (a), on peut calculer la charge limite de la structure en présence d'un défaut de surface (fig. F14) comme suit :

$$P_L^t = \left(1 - \frac{a}{t}\right) \cdot P_L^{t-a} + \left(\frac{a}{t}\right) \cdot P_L^a(0) \tag{F69}$$

Cette relation (F69) n'est valable que pour des défauts peu profonds.

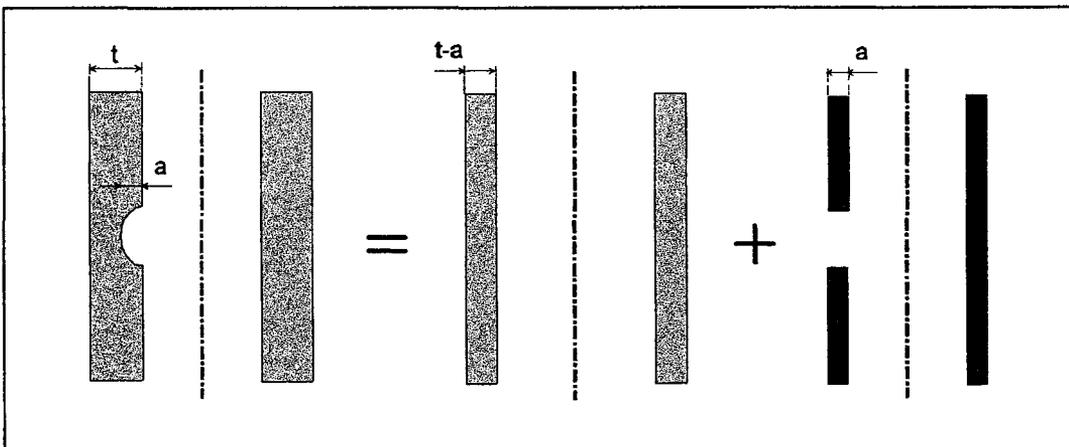


Fig. F14 : Décomposition de la charge limite d'un cylindre fissuré axialement

• Etendons le concept au cas d'une fissure inclinée.

On notera en minuscule les valeurs dimensionnées de la charge limite :

$$p_L^{t-a} = \frac{t\sigma_0}{R} \quad (F70)$$

$$p_L^a = \frac{t\sigma_0}{R} \cdot \frac{2}{(2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + f_1(\alpha) \cdot \rho^2 + f_2(\alpha) \cdot \rho^4}} \quad (F71)$$

Introduisons (F70) et (F71) dans l'équation (F69) :

$$p_L^t = \left(1 - \frac{a}{t}\right) \cdot \frac{t\sigma_0}{R} + \left(\frac{a}{t}\right) \cdot \frac{t\sigma_0}{R} \cdot \frac{2}{(2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + f_1(\alpha) \cdot \rho^2 + f_2(\alpha) \cdot \rho^4}} \quad (F72)$$

Soit :

$$p_L^t = \frac{t\sigma_0}{R} \cdot \frac{2}{(2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} \left[\left(1 - \frac{a}{t}\right) \cdot \frac{(2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{2} + \left(\frac{a}{t}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + f_1(\alpha) \cdot \rho^2 + f_2(\alpha) \cdot \rho^4}} \right] \quad (F73)$$

De manière adimensionnée :

$$P_L^t = \frac{p_L^t R}{t\sigma_0} \cdot \frac{(2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{2} \quad (F74)$$

$$P_L^t = \left[\left(1 - \frac{a}{t}\right) \cdot \frac{(2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{2} + \left(\frac{a}{t}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + f_1(\alpha) \cdot \rho^2 + f_2(\alpha) \cdot \rho^4}} \right] \quad (F75)$$

La fonction p_L^t (F72) est une fonction croissante de α . Plus la fissure s'incline par rapport à l'axe de la coque, plus la pression limite de la coque augmente.

F-V : APPLICATION DES METHODES D'ESTIMATION SIMPLIFIEE DE J AU CAS DE LA FISSURE INCLINEE

F-V-1 : Obtention des contrainte et déformation de référence

L'estimation simplifiée de l'intégrale J plastique est liée à la connaissance d'un facteur correctif qui prend en compte la plastification en fond de fissure. Ce facteur est fonction de la contrainte de référence et de la déformation de référence.

Pour le calcul de la contrainte de référence, selon la procédure utilisée dans l'annexe A16 [DRU95], on fait l'hypothèse que seule la contrainte normale aux lèvres de la fissure est modifiée par la présence du défaut. La contrainte de référence est obtenue en plaçant les contraintes au voisinage de la fissure dans un critère de plasticité de type plaque [ILI56].

D'après les hypothèses relatives aux parois minces, les contraintes dans l'épaisseur sont négligeables par rapport aux autres contraintes dans la coque. Par conséquent, on définit la contrainte de référence comme suit :

$$\sigma_{\text{réf}}^2 = \left(\sigma_{1m}^2 + \sigma_{2m}^2 - \sigma_{1m} \cdot \sigma_{2m} + 3 \cdot \sigma_{12b}^2 \right) + \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \left| \sigma_{1m} \cdot \sigma_{1b} + \sigma_{2m} \cdot \sigma_{2b} - 0,5 \cdot (\sigma_{1m} \cdot \sigma_{2b} + \sigma_{2m} \cdot \sigma_{1b}) + 3 \sigma_{12m} \cdot \sigma_{12b} \right| + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \cdot \left(\sigma_{1b}^2 + \sigma_{2b}^2 - \sigma_{1b} \cdot \sigma_{2b} + 3 \sigma_{12b}^2 \right)$$

(F76)

où :

$$\begin{aligned} \sigma_{1m} &= \frac{pR}{2t} \cdot (2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) / P_L^t & \sigma_{1b} &= \frac{p}{2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\left(1 - \frac{a}{t}\right)^2} \\ \sigma_{2m} &= \frac{pR}{2t} \cdot (\cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha) & \sigma_{2b} &= \frac{p}{2} \cdot \sin^2 \alpha \\ \sigma_{12m} &= \frac{pR}{2t} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha & \sigma_{12b} &= \frac{p}{2} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

Les contraintes sont exprimées dans le repère lié à la fissure (O, $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$). Les contraintes indicées m et b sont, respectivement, les contraintes de membrane et de flexion.

Une fois la contrainte de référence connue, on accède à la déformation de référence sur la courbe d'érouissage du matériau. Et par conséquent, on peut calculer les facteurs prenant en compte la plasticité K_{A16} et K_{R6} .

F-V-2 : Comparaison de l'intégrale J « simplifiée » avec l'intégrale J issue d'un calcul par la méthode des éléments finis

On désire comparer l'intégrale J obtenue par les méthodes d'estimation simplifiée A16 et R6 (J_{A16} et J_{R6}) à celle issue d'un calcul non linéaire par éléments finis ($J_{E.F.}$).

Les modèles éléments finis sont conçus suivant la méthodologie énoncée au paragraphe E-II (p. 78 à 80). Leurs dimensions sont présentées tableau F2.

Modèle	a (mm)	c (mm)	t (mm)	R (mm)	L (mm)	α (°)
M111	10	50	40	400	500	0°, 45°
M112	10	50	20	200	255	0° à 60° pas 15°

Tableau F2 : Dimensions des modèles

L'indépendance de $J_{E.F.}$ par rapport au champ d'intégration est vérifiée sur 3 contours nommés champ 1, 2 et 3 définis au chapitre C (p. 56, 57) (annexe AF, fig. AF1, AF3, AF5, AF7, AF9, AF11, AF13).

Les résultats obtenus (annexe AF, tableaux AF1 à AF7) montrent que les méthodes d'estimation simplifiée de J sont surestimantes que ce soit à l'aide du coefficient K_{A16} ou du coefficient K_{R6} (annexe AF, fig. AF2, AF4, AF6, AF8, AF10, AF12, AF14). Elles présentent un excès de conservatisme (fig. AF2, AF4, AF6) qui est très probablement dû à l'approximation faite pour l'obtention de la pression limite de la structure en présence d'un défaut de surface (relation (F69)) et au fait que le défaut atteint déjà la moitié de l'épaisseur de la coque. Or, on le rappelle, la relation (F69) est limitée aux fissures peu profondes. Dans le cas d'une fissure de profondeur 4 fois plus faible que l'épaisseur du tube, les intégrales J_{A16} et J_{R6} ne sont pas trop surestimantes (fig. AF12).

Des calculs supplémentaires seraient nécessaires pour présumer du conservatisme systématique de ces méthodes.

CONCLUSION

CONCLUSION

Afin de permettre l'étude de l'intégrité d'une coque cylindrique fermée sous pression interne en présence d'une fissure inclinée par rapport à l'axe de la coque, nous avons déterminé plusieurs paramètres tels que les facteurs d'intensité de contraintes, l'intégrale J et la pression limite de la structure.

Dans le domaine élastique, la stabilité d'un défaut est étudié à l'aide des F.I.C. .

Des modélisations tridimensionnelles par éléments finis de cylindre entier, étant donné l'absence de symétrie, ont été réalisées par programmation sur le code de calcul SYSTUS. Préalablement à leurs exploitations, une étude de sensibilité des modèles relativement aux paramètres de maillage et de calcul a été menée. Les rapports dimensionnels de la coque (t/R) et du défaut (a/c , a/t) couvrent une grande partie du domaine des coques minces.

Les facteurs de forme sont fournis sous forme de fonctions trigonométriques de l'angle d'inclinaison. Ils diminuent à la fois avec l'inclinaison de la fissure et l'augmentation du diamètre de la coque, conformément à la littérature. On constate que le mode I est nettement prédominant par rapport aux modes II et III : il est au minimum 2,5 fois plus élevé que les modes II et III.

Une comparaison du K_I réel et du K_I estimé (obtenu pour la fissure projetée sur l'axe du cylindre) montre que, pour un défaut dont l'inclinaison est inférieure ou égale à 30° , l'estimation est relativement proche de la réalité avec une différence maximale de 14%. Cependant cette différence augmente avec la taille, la profondeur et l'inclinaison du défaut.

Le paramètre L_r , nécessaire au tracé des courbes $K_r - L_r$ (courbes statuant sur l'intégrité d'une structure par rapport à la rupture et à l'écoulement plastique) et l'estimation simplifiée de J sont des fonctions de la pression limite du système fissuré. A partir des contraintes singulières au voisinage du fond de fissure et du critère énergétique de Griffith, nous avons déterminé la pression limite pour une coque cylindrique contenant un défaut traversant incliné. La pression limite du tube en présence d'un défaut de surface est obtenue par approximation au prorata de

la pression limite d'une coque non-fissurée et de la pression limite d'une coque contenant une fissure traversante. Cette approximation est valable pour les défauts peu profonds.

Etant donné la prééminence du mode I, l'intégrale J reste un paramètre de la mécanique de la rupture élasto-plastique intéressant.

L'intégrale J issue des méthodes d'estimation simplifiée, que nous avons adaptée au cas des fissures inclinées, est surestimante d'après sa comparaison avec l'intégrale J calculée par éléments finis. Cependant, pour conclure sur le conservatisme des méthodes d'estimation simplifiée, il serait nécessaire de procéder à d'autres études comparatives.

Dans les tuyaux ou les coudes soumis à un moment de torsion, l'orientation préférentielle pour l'initiation et la propagation de fissure se fait le long d'une hélice plutôt que suivant l'axe principal de courbure. Il serait par conséquent intéressant de caractériser la nocivité du défaut sous ce type de chargement. Pour envisager les cas de chargements les plus courants, on peut également étudier l'influence d'un chargement de flexion globale et d'un chargement thermique. Beaucoup de composants (les étuves, les réacteurs chimiques, les échangeurs, les composants nucléaires du réseau secondaire) subissent des variations de températures importantes induisant des modifications du comportement du matériau du domaine fragile au domaine ductile et inversement.

Pour caractériser la rupture ductile, nous nous sommes limités au calcul de l'intégrale J. Toutefois, des critères « intégrales » plus généraux tels que l'intégrale J^* proposée par Kishimoto ou l'intégrale T^* peuvent être plus proches de la réalité notamment dans le cas de mode mixte important. Par conséquent, cette étude pourrait être complétée par la détermination de J^* ou T^* .

Une tentative de comparaison de la pression limite obtenue analytiquement avec celle obtenue par l'intermédiaire d'un module d'analyse limite intégré à un logiciel éléments finis a été effectuée sur le Code_Aster au département M.N.M. d'E.D.F. DER. Cependant, l'absence de symétrie due à la présence du défaut incliné induisant des modèles tridimensionnels de tailles considérables (environ 18000 noeuds, une taille raisonnable étant de 6000 noeuds) rend les temps de calcul et les coûts rédhibitoires, problème que l'on constate également sur d'autres

codes de calculs. Néanmoins, cette expérience a introduit la nécessité d'optimiser ce module. Dans un avenir proche, cette étude comparative sera certainement rendue possible. Elle pourrait alors se dérouler en deux temps :

- étude de fissures traversantes inclinées,
- sur le cas de fissures de surface, tenter d'améliorer la relation (F69) présente dans le formulaire A.G. Miller [MIL88], qui est valable pour les défauts peu profonds.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [AIN84] : Ainsworth R.A., « The assessment of defects in structures of strain hardening material »
Engineering Fracture Mechanics, Vol. 19, N° 4, 1984, pp : 633-642
- [AIN96] : Ainsworth R.A., « Failure assessment diagrams for use in R6 assessments for austenitic components »
International Journal of Pressure Vessel and Piping, Vol. 65, 1996, pp : 303-309.
- [ATL77] : Atluti S.N., Kathiresan K., « Outer and inner surface flaws in thick-walled pressure vessels »
Trans. of the 4th Int. Conf. On Structure Mechanics and Reactor Technology, San Francisco, 1977.
- [BAN91] : Banks-Sills L., Sherman D., « JII fracture testing of a plastically deforming material »
International Journal of Fracture, Vol. 50, 1991, pp : 15-26.
- [BAR80] : Barthélémy B., « Notions pratiques de mécanique de la rupture »
Editions Eyrolles, 1980.
- [BUI78] : Bui H.D., « Mécanique de la rupture fragile »
Editions Masson, 1978.
- [BUI82] : Bui H.D., « Associated path independant J-integral for separating mixed modes »
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 31, N° 6, 1983, pp : 439-448.
- [CHE95] : Chen D.H., Nisitani H., Mori K., « Stress Intensity factors for an internal semi-elliptical surface crack in cylindrical pressure vessels »
Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 117, 1995, pp : 213-221.
- [DAI87] : Dai Y., Zheng G.H., « On fatigue crack growth under mixed mode cyclic loading »
Proc of the 3rd Int. Conf. on Numerical Methods in Fracture, San Antonio, 1987, pp : 659-676.

- [DES96] : Desquines J., « Analyse limite et estimation simplifiée de l'intégrale J pour des tuyaux droits fissurés »
Thèse de Doctorat, ED82-197, Ecole Centrale de Nantes, 1996
- [DEST81] : Destuynder Ph., Djaou M., « Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile »
Math. Methods in Applied Sciences, 3, 1981, pp : 70-87.
- [DEST83] : Destuynder Ph., Djaou M., Lescure S., « Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique »
Journal de la Mécanique Théorique et Appliquée, N° 1, 1983, pp : 113-135.
- [DIE92] : Diekmann P., Pawliska P., Richard H.A., « Elastic-plastic crack analysis under mixed mode loading conditions »
International Journal of Fracture, Vol. 57, 1992, pp : 249-252.
- [DRU95] : Drubay B., « A16 : Guide pour l'analyse de la nocivité des défauts et la fuite avant rupture » Troisième version préliminaire
C.E.A., Décembre 1995.
- [FOL65-a] : Folias E.S., « A finite line in a pressurized spherical shell »
International Journal of Fracture Mechanics, Vol. 1, N° 1, 1965, pp : 245-262.
- [FOL65-b] : Folias E.S., « An axial crack in a pressurized cylindrical shell »
International Journal of Fracture Mechanics, 1965, pp : 104-113.
- [FOL75] : Folias E.S., « On the fracture of nuclear reactor tubes »
S.M.I.R.T. III, London, 1975, paper C4/5.
- [FRAN72] : François D., Joly L., « Rupture des métaux »
Edition Masson, 1972.
- [GOO84] : Goodall I.W., « Some observation on fracture mechanics assessment of pressure vessels components »
3rd Int. Conf. on Numerical Methods in Fracture, Swansea, 1984, pp : 275-322
- [GOW79] : Mc Gowan J.J., Raymund M., « Stress Intensity Factor solutions for an internal longitudinal semi-elliptical surface flaw in a cylinder under arbitrary loadings »
Fracture Mechanics, ASTM STP 677, 1979.
- [GRI24] : Griffith A.A., « The theory of rupture »
Proc. of the 1st Int. Congress of Applied Mechanics, Delft, 1924, pp : 55-63.
- [HAR77] : Hartranft R.J., Sih G.C., « Stress singularity for a crack with an arbitrarily curved front »
Engineering Fracture Mechanics, Vol. 9, 1977, pp : 705-718.

- [HEL75] : Hellen T.K., Blackburn W.S., « The calculation of stress intensity factors for combined tensile and shear loading »
International journal of fracture, Vol. 11, 1975, pp : 605-617.
- [HEL79] : Heliot J., Labbens R.C., Pellissier-Tanon A., « Semi-elliptical cracks in a cylinder subjected to stress gradients »
Fracture Mechanics, ASTM STP 677, 1979, pp : 365-380.
- [HOS87] : Hoshide T., Socie D.F., « Mechanics of mixed mode small fatigue crack growth »
Engineering Fracture Mechanics, Vol. 26, N° 6, 1987, pp : 841-850.
- [HUT68] : Hutchinson J.W., « Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material »
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1968, pp : 13-31.
- [ILI56] : Iliouchine A.A., « Plasticité - Déformations élastico-plastiques »
Editions Eyrolles, 1956.
- [ISH79] : Ishikawa H., Kitagawa H., Okamura H., « J Integral of a mixed mode crack and its applications »
ICM3, Cambridge, Vol. 3, 1979, pp : 447-455.
- [JEO93] : Jeon K., « Rupture en mode mixte I+II de l'acier inoxydable austénitique 316L »
Rapport CEA-R-5646, ISSN 0429-3460, 1993.
- [KAS66] : Kassir M.K., Sih, G.C., « Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loading »
Journal of Applied Mechanics, Vol. 33, 1966, pp : 601-611.
- [KAS75] : Kassir M.K., Sih G.C., « Three-dimensional crack problems, Mechanics of Fracture 2 »
edited by G.C. Sih, Noordhoff International Publishing, Leyden, (1975)
- [KIS80] : Kishimoto K., Aoki S., Sakata M., « On path indépendant integral \hat{J} »
Engineering Fracture Mechanics, Vol. 13, 1980, pp : 841-850.
- [KIT81] : Kitching R., Zarrabi K., « Lower bound to limit pressure for cylindrical shell with part through slot »
International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 23, 1981, pp : 31-48
- [KIT82] : Kitching R., Zarrabi K., « Limit and burst pressures for cylindrical shells with part-through slots »
International Journal of Pressure Vessel and Piping, Vol. 10, 1982, pp : 235-270.

- [KOB77] : Kobayashi A.S., Polvanich N., Emery A.F, Love W.J., « Inner and outer cracks in internally pressurized cylinders »
Journal of Pressure Vessel Technology, 1977, pp : 83-89.
- [KUM81] : Kumar V., German M.D., Shih C.F., « An engineering approach of elastic plastic fracture mechanics »
NP-1931, Research Project 1237-1, E.P.R.I., 1981.
- [KUM84] : Kumar V., German M.D., Shih C.F., « Advances in elastic plastic analysis »
NP-3607, Research Project 1237-1, E.P.R.I., 1984.
- [KUM88] : Kumar V., German M.D., « Elastic plastic fracture analysis of through-wall and surface flaws in cylinders »
NP-5596, Research Project 1237-5, E.P.R.I., 1988.
- [LEM85] : Lemaitre J., Chaboche J.L., « Mécanique des matériaux solides »
Editions Dunod, Vol.1 & 2, 1985.
- [MAR88] : « MARC : a general purpose finite elements program »
Marc Software International, Revision K3, 1988.
- [MEN95] : Menandro F., Moyer E.T., Liebowitz J.R. & H., « A methodology for crack tip mesh design »
Engineering Fracture Mechanics, Vol. 50, N° 5/6, 1995, pp : 713-726.
- [MIA88] : Mialon P., « Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode Thêta »
Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches - Série C, EDF, 1988.
- [MIL88] : Milne I., Ainsworth R.A., Dowling A.R., Stewart A.T., « Background to and validation of C.E.G.B. report R/H/R6 - Revision 3 »
International Journal of Pressure Vessel and Piping, Vol. 32, 1988, pp : 105-196.
- [MILL88] : Miller A.G., « Review of limit loads of structures containing defects »
International Journal of Pressure Vessel and Piping, Vol. 32, 1988, pp : 197-327.
- [MOU93] : Moulin D., Dubray B., Nedelec M., « Méthode pratique de calcul de J dans l'annexe A16 du RCC-MR : Méthode J_s »
Revue Française de Mécanique, N° 1993-1, 1993, pp : 55-66
- [MOU96A] : Mourgue Ph., « Calcul de G par la méthode Thêta, Numérisation dans SYSTUS »
FRAMASOFT+CSI, Mars 1996.
- [MOU96B] : Mourgue Ph., « Dossier de qualification du calcul de G par la méthode THETHA. »
FRAMASOFT+CSI, Avril 1996.

- [MOU97] : Mourgue Ph., « Note d'utilisation de l'outil BLOC FISSURE »
FRAMASOFT, 16 octobre 1997.
- [MUR87] : Murakami Y., « Stress intensity factors handbook »
Edition Pergamon Press, Vol. 1 & 2, 1987.
- [PAP97] : Papin M.H., Michel B., Drubay B., « Calcul simplifié de J sous un chargement
mécanique et thermique dans un tuyau droit fissuré »
Revue Française de Mécanique, N° 1997-3, 1997, pp : 220-226
- [PEL92] : Pellissier-Tanon A., Ensel C., Guichard D., Coustillas F., Churrier-Bosseneq
H., « Stress Classification in industrial fracture mechanics analysis »
Proc. of the 7th Int. Conf. on Pressure Vessels Technology, Düsseldorf, 1992.
- [PIG97] : Pignol M., SYSCOUE Version V1.0, « Notice de mise en service et
d'utilisation »
FRAMASOFT+CSI, 30 juin 1997.
- [RAH97] : Rahman S., Brust F.W., « Approximate methods for predicting J-integral of a
circumferentially surface-cracked pipe subject to bending »
International journal of fracture, Vol. 85, 1997, pp : 111-130.
- [RAJ77] : Raju I.S., Newman J.C., « Improved stress intensity factors for semi-elliptical
surface cracks in finite thickness plates - NASA-TM-X-72825 »
Trans. of the 4th Int. Conf. On Structure Mechanics and Reactor Technology, San Fransisco, 1977.
- [RAJ80] : Newman J.C., Raju I.S., « Stress Intensity Factors for internal surface cracks in
cylindrical pressure vessels »
Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 102, Novembre 1980, pp : 342-346.
- [RAJ82] : Raju I.S., Newman J.C., « Stress Intensity Factors for internal and external
surface cracks in cylindrical vessels »
Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 104, Novembre 1982, pp : 293-298.
- [RIC68] : Rice J.R., « A path independant integral and the approximate analysis of strain
concentration by notches and cracks »
Journal of Applied Mechanics, 1968, pp : 379-386.
- [RIC72] : Rice J.R., Levy N., « The part-through surface crack in an elastic plate »
Journal of Applied Mechanics, Mars 1972, pp : 185-194.
- [ROS93] : Rossmann H.P., Miller R.J., « Mixed mode fatigue and fracture »
ESIS 14, Mechanical engineering Publications, London, 1993, pp : 23-30.
- [SAL83] : Salençon J., « Calcul à la rupture et analyse limite »
Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1983.

- [SAO97] : Saouma V.E., « Lecture notes in Fracture Mechanics - CVEN-6831 (Draft) »
University of Colorado - Boulder, 1997.
- [SIH74] : Sih G.C., Cha B.C.K., « A fracture criterion for three-dimensional crack problems »
Engineering Fracture Mechanics, Vol. 6, 1974, pp : 699-723.
- [SWE63] : Sweldow J.L., « On Griffith's theory of fracture »
GALCIT SM 68-3, California Institute of Technology, March 1963.
- [SYS98] : « Logiciel éléments finis SYSTUS+ »
Framasoft+CSI, Version 2.0, 1998.
- [TOH92] : Tohgo K., Ishii H., « Elastic-plastic fracture toughness test under mixed mode I-II loading »
Engineering Fracture Mechanics, Vol. 41, N° 4, 1992, pp : 529-540.
- [WAN96] : Wang X., Lambert S.B., « Stress Intensity Factors and weight functions for longitudinal semi-elliptical surface cracks in thin pipes »
International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 65, 1996, pp : 75-87.
- [YAH81] : Yahsi O.S., « Effect of transverse shear and material orthotropy in a cylindrical shell containing an arbitrarily oriented crack »
Ph. D, Lehigh University, 1981.
- [YAH83] : Yahsi O.S., Erdogan F., « A cylindrical shell with an arbitrarily oriented crack »
International Journal Solids Structures, Vol. 19, N° 11, 1983, pp : 955-972.
- [YAH85] : Yahsi O.S., Erdogan F., « A pressurized cylindrical shell with a fixed end which contains an axial part-through or through crack »
International Journal of Fracture, Vol. 28, 1985, pp : 161-187.
- [ZAH89] : Zahoor A., « Ductile fracture handbook - Volume 1 - Circumferential throughwall cracks »
NP-6301-D, Research Project 1757-69, E.P.R.I., 1989.
- [ZAH90] : Zahoor A., « Ductile fracture handbook - Volume 2 »
NP-6301-D, Research Project 1757-69, E.P.R.I., 1990.
- [ZAH91] : Zahoor A., « Ductile fracture handbook - Volume 3 »
NP-6301-D, Research Project 1757-69, E.P.R.I., 1991.

ANNEXE AE

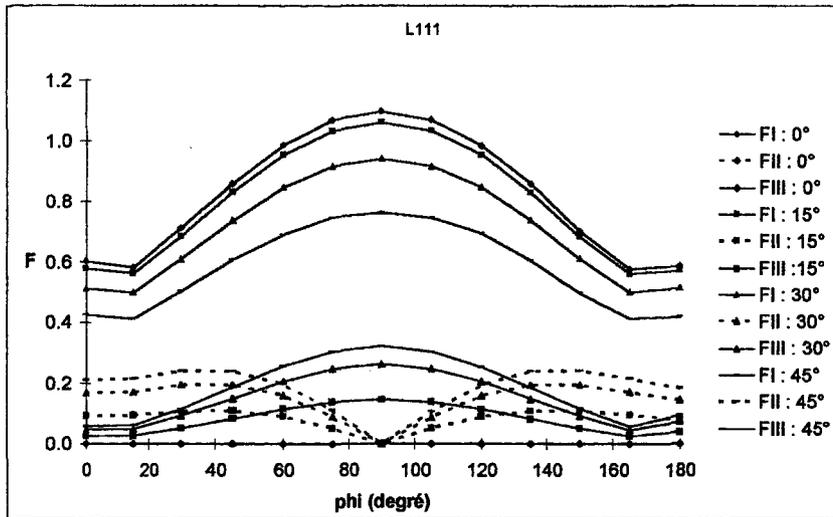


Fig. AE1 : Cas où $t/R=0.1$, $a/c=0.2$, $a/t=0.2$

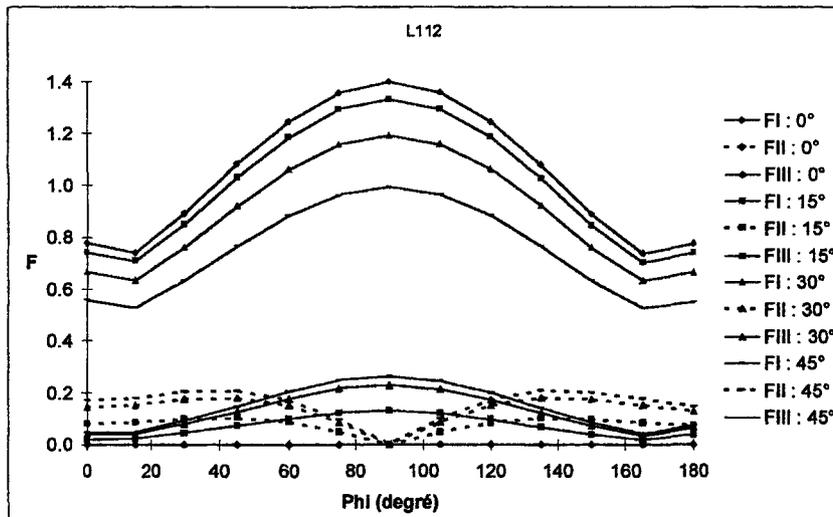


Fig. AE2 : Cas où $t/R=0.1$, $a/c=0.2$, $a/t=0.5$

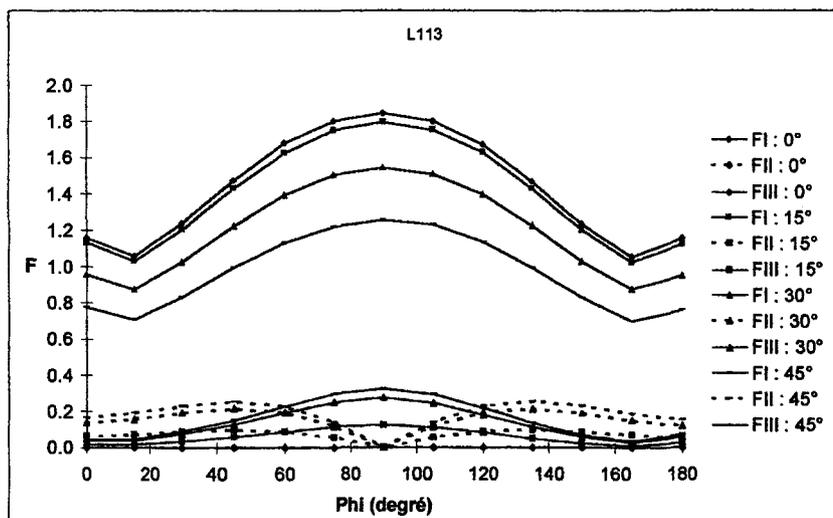


Fig. AE3 : Cas où $t/R=0.1$, $a/c=0.2$, $a/t=0.8$

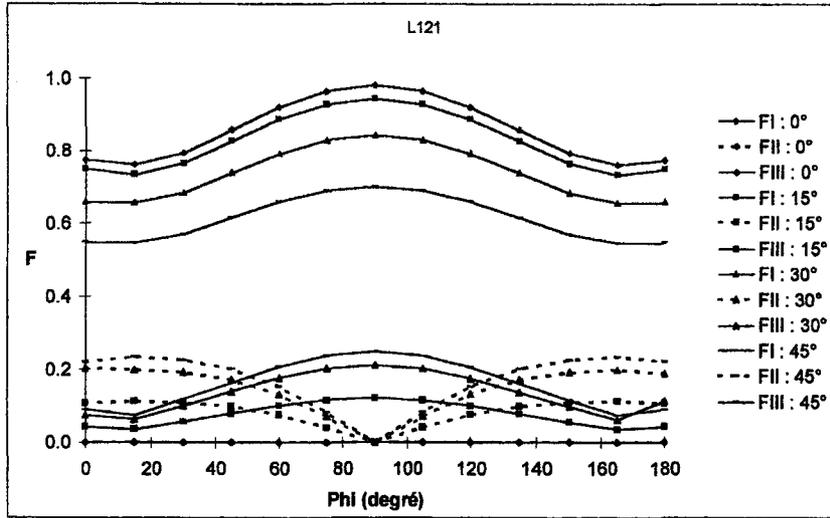


Fig. AE4 : Cas où $t/R=0.1$, $a/c=0.5$, $a/t=0.2$

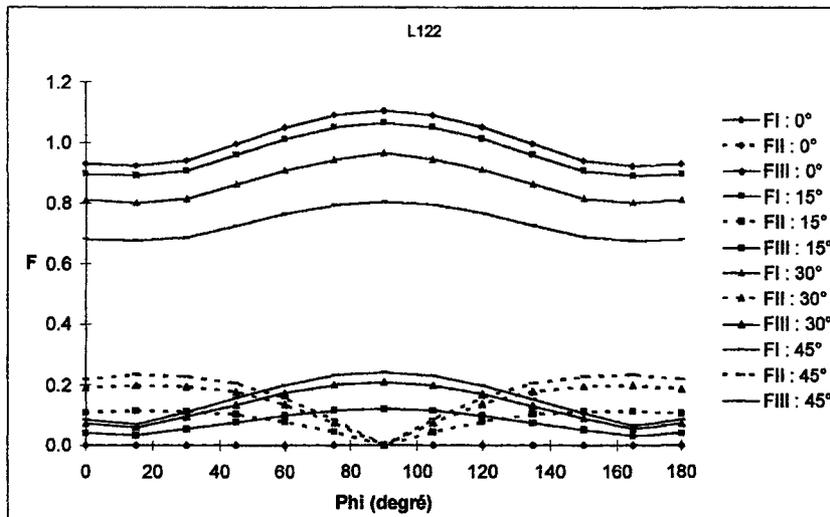


Fig. AE5 : Cas où $t/R=0.1$, $a/c=0.5$, $a/t=0.5$

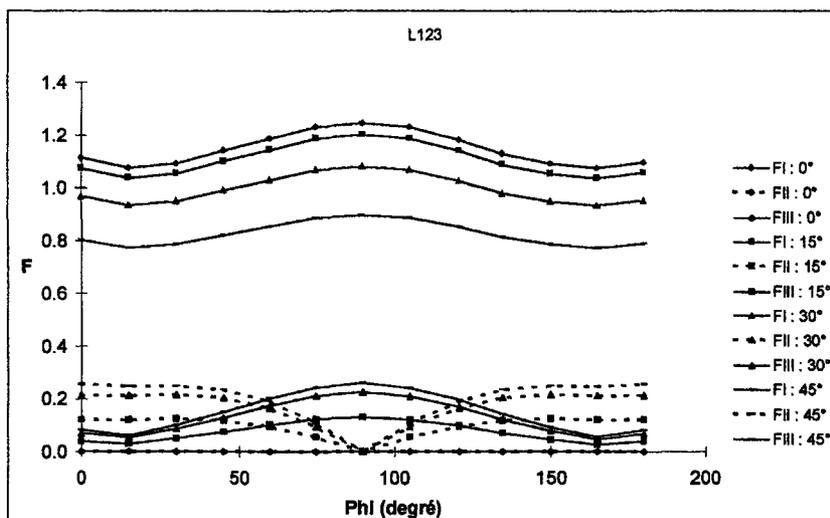


Fig. AE6 : Cas où $t/R=0.1$, $a/c=0.5$, $a/t=0.8$

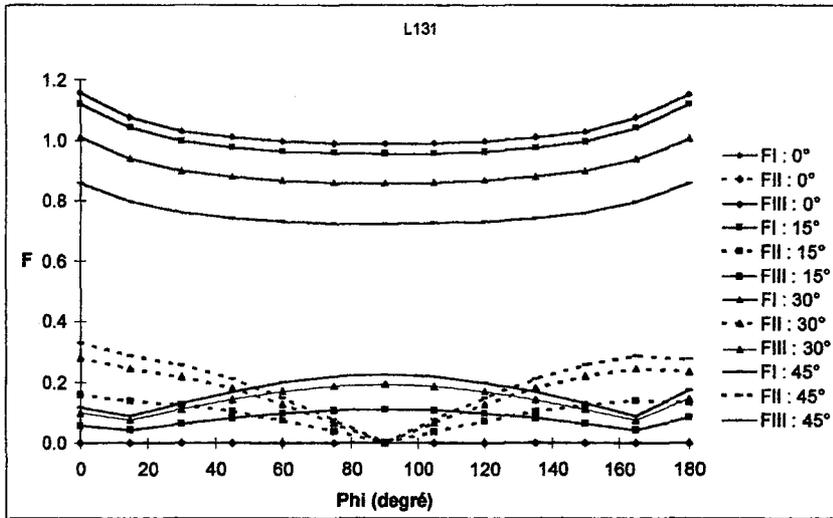


Fig. AE7 : Cas où $t/R=0.1$, $a/c=1$, $a/t=0.2$

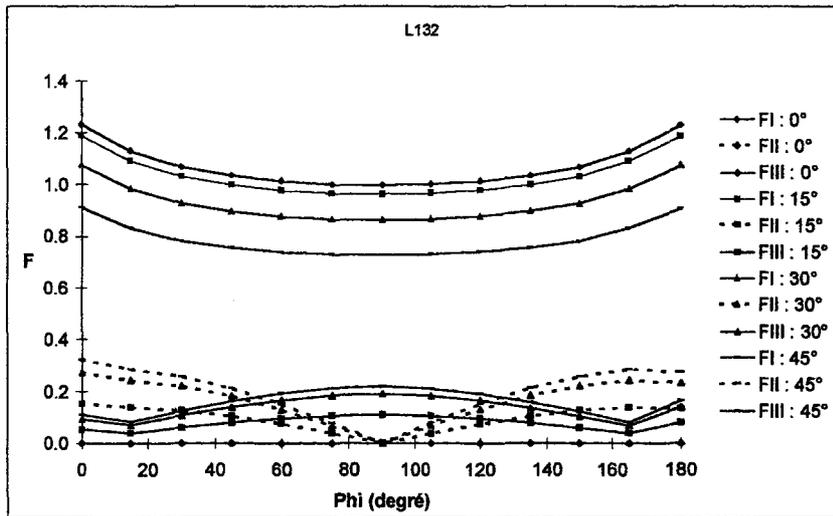


Fig. AE8 : Cas où $t/R=0.1$, $a/c=1$, $a/t=0.5$

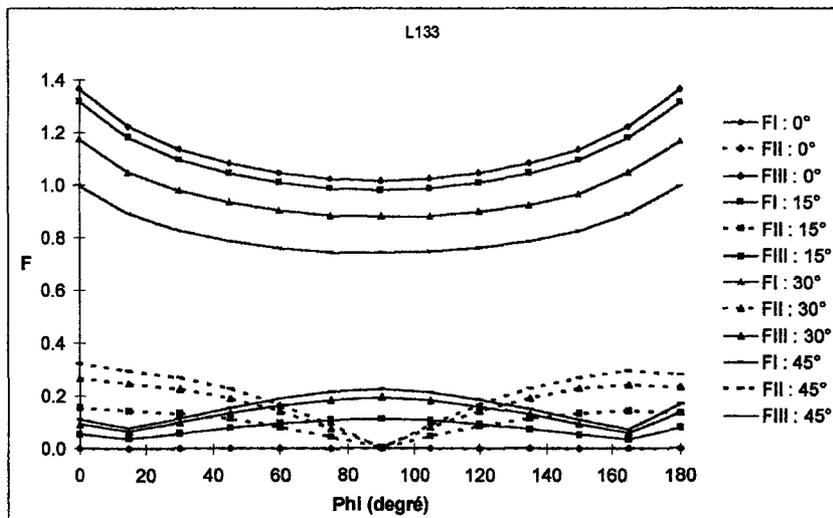


Fig. AE9 : Cas où $t/R=0.1$, $a/c=1$, $a/t=0.8$

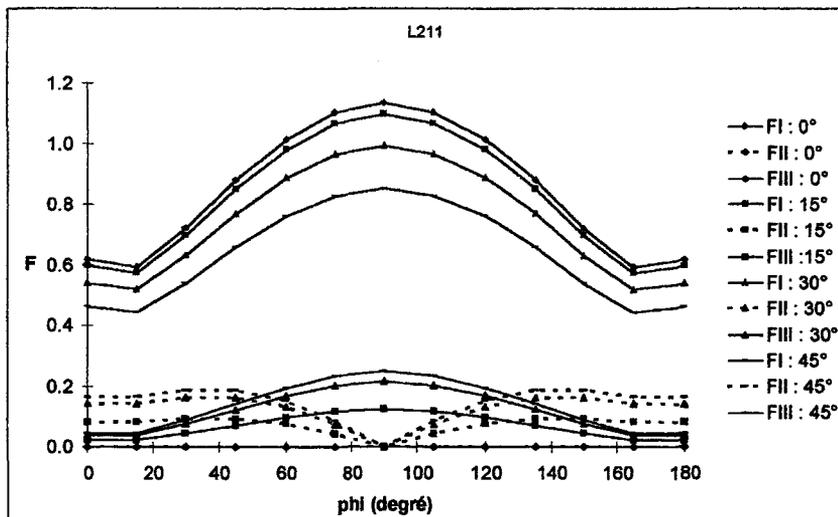


Fig. AE10 : Cas où $t/R=0.01$, $a/c=0.2$, $a/t=0.2$

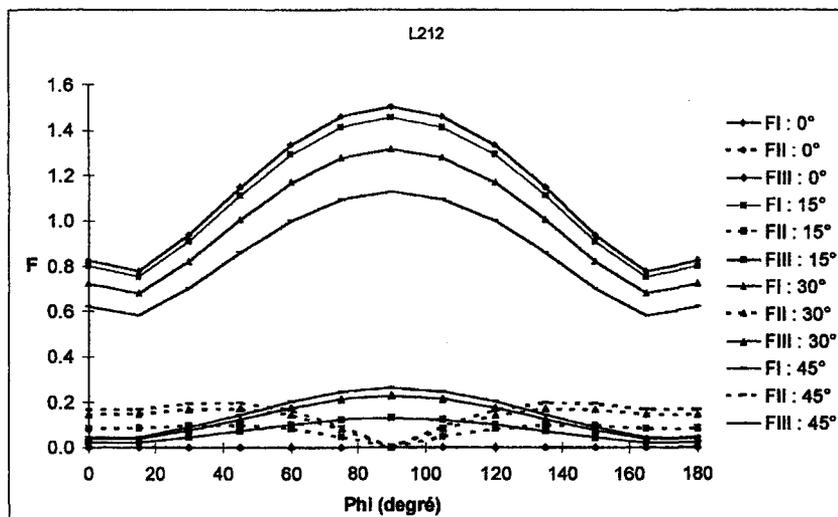


Fig. AE11 : Cas où $t/R=0.01$, $a/c=0.2$, $a/t=0.5$

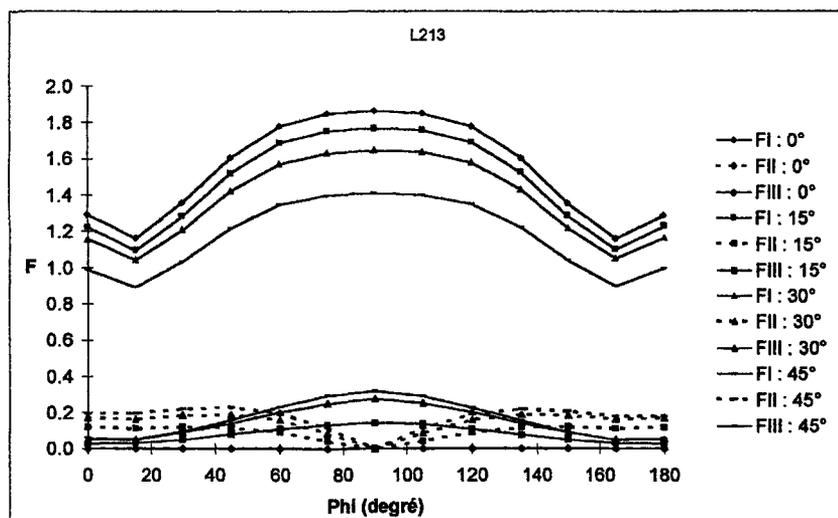


Fig. AE12 : Cas où $t/R=0.01$, $a/c=0.2$, $a/t=0.8$

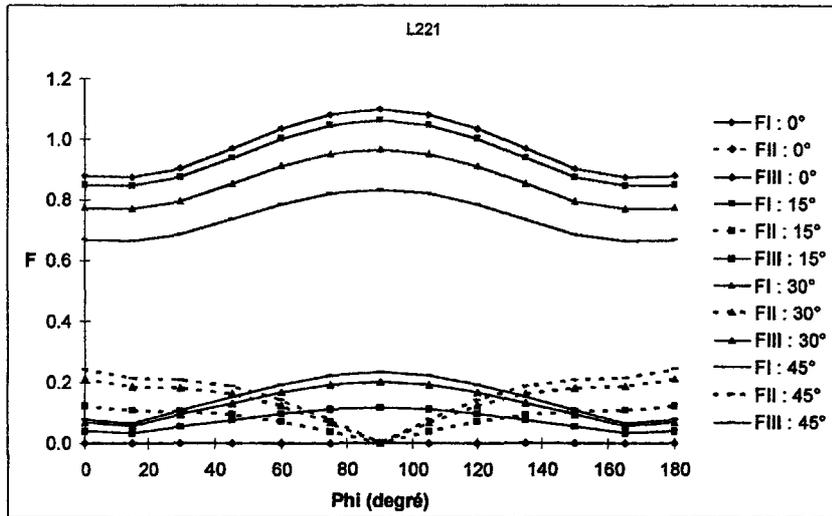


Fig. AE13 : Cas où $t/R=0.01$, $a/c=0.5$, $a/t=0.2$

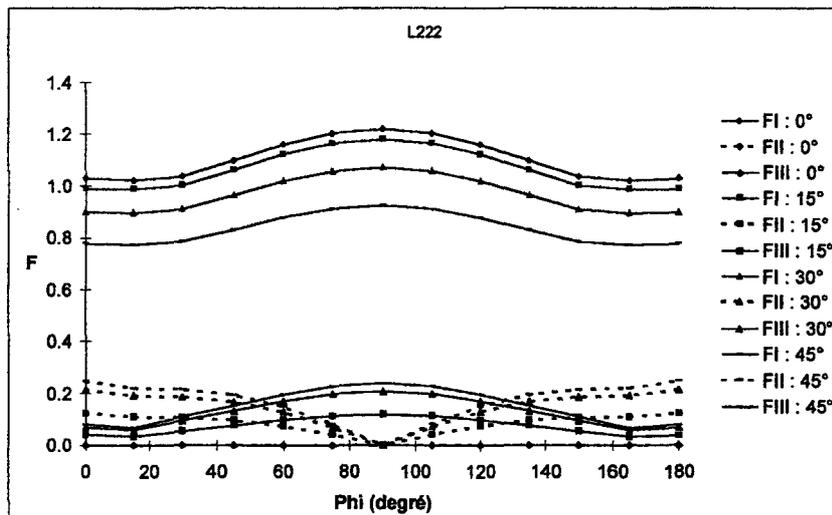


Fig. AE14 : Cas où $t/R=0.01$, $a/c=0.5$, $a/t=0.5$

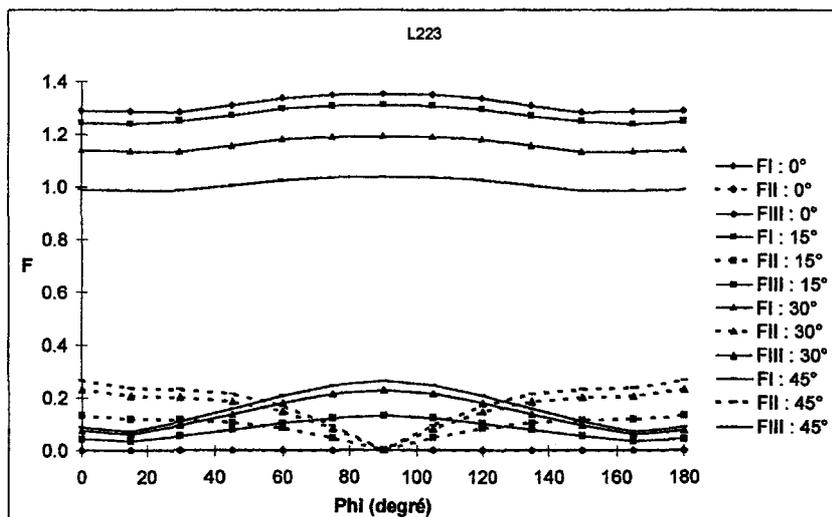


Fig. AE15 : Cas où $t/R=0.01$, $a/c=0.5$, $a/t=0.8$

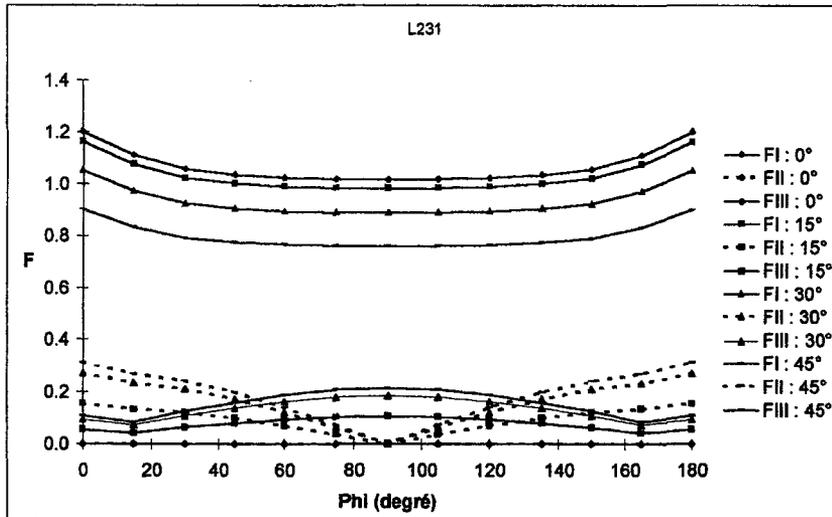


Fig. AE16 : Cas où $t/R=0.01$, $a/c=1$, $a/t=0.2$

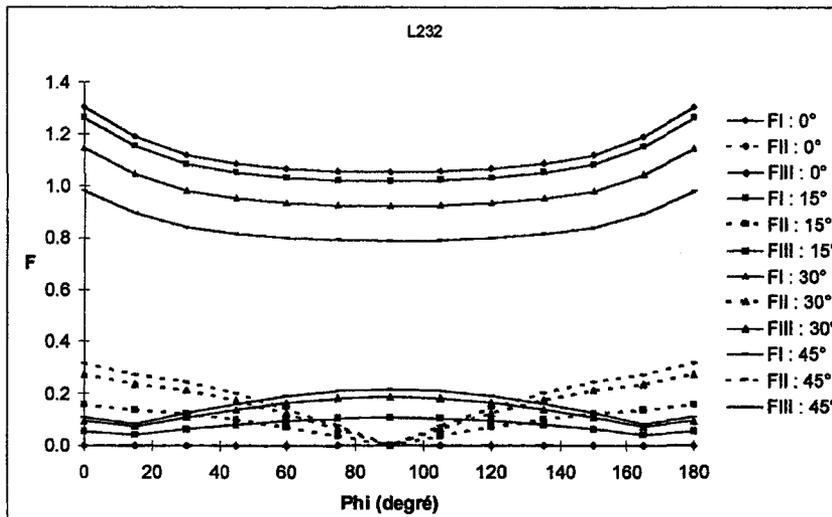


Fig. AE17 : Cas où $t/R=0.01$, $a/c=1$, $a/t=0.5$

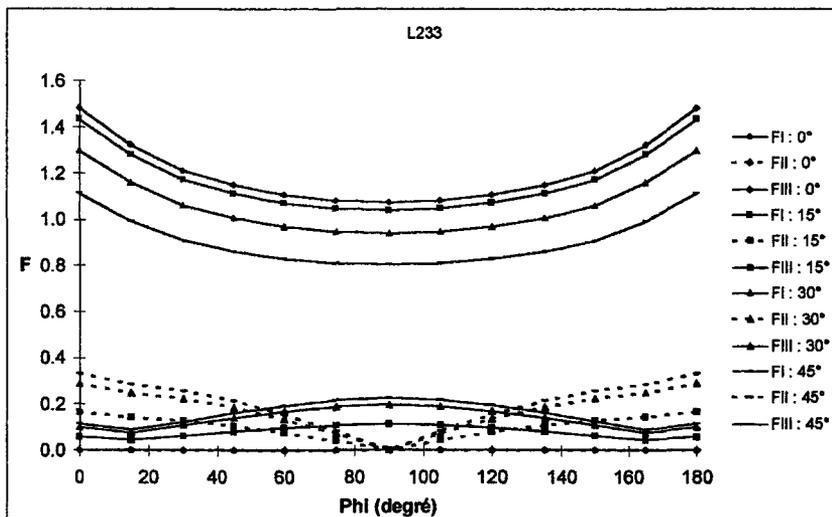


Fig. AE18 : Cas où $t/R=0.01$, $a/c=1$, $a/t=0.8$

	a/t	a _I	b _I	c _I	d _I
	0,2	0.441623	0.163447	1.896584	0.133361
a/c=0,2	0,5	0.556713	0.221143	1.921346	0.054095
	0,8	0.800077	0.368001	1.952804	0.050367
	0,2	0.607152	0.179557	1.946639	0.260023
a/c=0,5	0,5	0.698806	0.230656	2.096463	-0.012379
	0,8	0.822077	0.292421	2.151557	-0.061160
	0,2	0.863402	0.295596	1.957576	0.032050
a/c=1	0,5	0.912903	0.320487	1.949732	0.31449
	0,8	0.997745	0.372602	1.911440	0.64432

Tableau AE1 : Facteur de forme F_I au point de surface, t/R=0.1

	a/t	a _I	b _I	c _I	d _I
	0,2	0.802144	0.298981	1.937517	0.054328
a/c=0,2	0,5	1.022207	0.382326	1.914399	0.128455
	0,8	1.307831	0.543611	2.087654	-0.022631
	0,2	0.728956	0.251638	2.129696	-0.023233
a/c=0,5	0,5	0.817937	0.286830	2.043569	-0.024477
	0,8	0.909343	0.332394	2.170356	-0.102422
	0,2	0.732086	0.259223	1.974264	0.035073
a/c=1	0,5	0.743288	0.256843	1.950696	0.067753
	0,8	0.763366	0.255734	1.938498	0.075541

Tableau AE2 : Facteur de forme F_I au point le plus profond, t/R=0.1

	a/t	a _{II}	b _{II}	c _{II}	d _{II}
	0,2	0.072078	0.129155	2.746555	-2.145669
a/c=0,2	0,5	0.045707	0.124622	2.476732	-1.938800
	0,8	0.077103	0.091675	3.274775	-2.567529
	0,2	-0.544326	0.765954	1.003963	-0.788630
a/c=0,5	0,5	-0.521726	0.735551	1.002832	-0.787662
	0,8	-0.596081	0.839634	1.004053	-0.788614
	0,2	0.058728	0.268623	2.279917	-1.790647
a/c=1	0,5	0.062359	0.257291	2.310912	-1.814990
	0,8	0.084024	0.230833	2.470465	-1.925022

Tableau AE3 : Facteur de forme F_{II} au point de surface, t/R=0.1

	a/t	a _{III}	b _{III}	c _{III}	d _{III}
	0,2	-0.129158	0.181685	1.005567	-0.791947
a/c=0,2	0,5	0.000328	0.045239	2.034727	-1.597804
	0,8	-0.110292	0.154397	1.008386	-0.793778
	0,2	0.012545	0.075579	2.212367	-1.737316
a/c=0,5	0,5	-0.198109	0.279086	1.003757	-0.788627
	0,8	-0.193269	0.272256	1.003766	-0.788463
	0,2	-0.276953	0.390526	1.002998	-0.791769
a/c=1	0,5	-0.263144	0.370713	1.003691	-0.790476
	0,8	-0.257163	0.362591	1.003168	-0.788222

Tableau AE4 : Facteur de forme F_{III} au point de surface, t/R=0.1

	a/t	a _{III}	b _{III}	c _{III}	d _{III}
	0,2	0.104658	0.210776	2.658187	-2.081392
a/c=0,2	0,5	0.016281	0.248620	2.081526	-1.633598
	0,8	0.149889	0.182056	3.237814	-2.543493
	0,2	0.030484	0.216557	2.179473	-1.711758
a/c=0,5	0,5	-0.575010	0.810764	1.002752	-0.787778
	0,8	-0.000424	0.261216	1.997899	-1.568335
	0,2	-0.532081	0.750004	1.003122	-0.787889
a/c=1	0,5	0.000853	0.218434	2.005299	-1.574775
	0,8	-0.002388	0.227073	1.985374	-1.558920

Tableau AE5 : Facteur de forme F_{III} au point le plus profond, t/R=0.1

	a/t	a _I	b _I	c _I	d _I
	0,2	0.463671	0.154352	1.985047	0.008510
a/c=0,2	0,5	0.619130	0.206469	1.993669	0.000139
	0,8	0.979928	0.303958	2.008330	-0.029537
	0,2	0.679591	0.197557	2.123268	-0.070753
a/c=0,5	0,5	0.778642	0.250474	1.941182	0.048061
	0,8	0.994602	0.294239	1.990308	0.019637
	0,2	0.901966	0.300174	1.990771	0.003218
a/c=1	0,5	0.980494	0.325003	1.999595	-0.006313
	0,8	1.113367	0.369854	1.984328	0.009649

Tableau AE6 : Facteur de forme F_I au point de surface , t/R=0.01

	a/t	a _I	b _I	c _I	d _I
	0,2	0.852003	0.284019	1.984851	0.008676
a/c=0,2	0,5	1.127740	0.376400	1.988285	0.006267
	0,8	1.403775	0.451401	1.985442	0.010848
	0,2	0.834094	0.266319	1.984659	0.007864
a/c=0,5	0,5	0.924266	0.297087	1.986625	0.008708
	0,8	1.037864	0.316538	1.976546	0.016807
	0,2	0.762791	0.254071	1.993232	0.002115
a/c=1	0,5	0.790626	0.263259	1.991445	0.004431
	0,8	0.804237	0.269110	1.992500	-0.001878

Tableau AE7 : Facteur de forme F_I au point le plus profond, t/R=0.01

	a/t	a _{II}	b _{II}	c _{II}	d _{II}
	0,2	-0.388769	0.548224	1.002673	-0.787661
a/c=0,2	0,5	0.000593	0.166441	2.004861	-1.573883
	0,8	-0.468734	0.666556	0.995863	-0.781215
	0,2	-0.578301	0.815584	1.002707	-0.787549
a/c=0,5	0,5	-0.002137	0.250997	1.989331	-1.561592
	0,8	-0.003132	0.270473	1.985193	-1.557410
	0,2	-0.001986	0.315572	1.992610	-1.564189
a/c=1	0,5	-0.757281	1.068167	1.0029011	-0.787533
	0,8	-0.793392	1.119013	1.002991	-0.787448

Tableau AE8 : Facteur de forme F_{II} au point de surface, t/R=0.01

	a/t	a _{III}	b _{III}	c _{III}	d _{III}
	0,2	-0.000001	0.044486	1.999670	-1.570055
a/c=0,2	0,5	-0.000023	0.045538	1.999105	-1.567372
	0,8	0.006375	0.053219	2.146841	-1.684392
	0,2	0.000316	0.078291	2.005557	-1.575161
a/c=0,5	0,5	-0.001235	0.081412	1.979948	-1.553469
	0,8	0.000176	0.088306	2.003835	-1.572355
	0,2	-0.001140	0.109807	1.986750	-1.558271
a/c=1	0,5	-0.001569	0.111180	1.981562	-1.555189
	0,8	-0.277794	0.391817	1.002970	-0.787384

Tableau AE9 : Facteur de forme F_{III} au point de surface, t/R=0.01

	a/t	a _{III}	b _{III}	c _{III}	d _{III}
	0,2	-0.000090	0.248155	1.999548	-1.570368
a/c=0,2	0,5	-0.626289	0.883210	1.002647	-0.787632
	0,8	0.103227	0.218773	2.628888	-2.060278
	0,2	-0.553957	0.781258	1.002593	-0.787573
a/c=0,5	0,5	-0.001793	0.241418	1.990823	-1.562799
	0,8	-0.630285	0.888975	1.002959	-0.787410
	0,2	-0.510150	0.719525	1.002978	-0.787442
a/c=1	0,5	-0.001755	0.218450	1.989980	-1.562137
	0,8	-0.002244	0.231064	1.987680	-1.559895

Tableau AE10 : Facteur de forme F_{III} au point le plus profond, t/R=0.01

		α	$K_{I \max} / K_{II \max}$	$K_{I \max} / K_{III \max}$
a/c=0.2	a/t=0.2	15	9.76	7.26
		30	4.82	3.58
		45	3.19	2.37
	a/t=0.5	15	12.89	10.15
		30	6.61	5.2
		45	4.80	3.87
	a/t=0.8	15	18.06	14.40
		30	7.15	5.61
		45	4.91	3.87
a/c=0.5	a/t=0.2	15	8.38	7.80
		30	4.40	3.99
		45	3.00	2.84
	a/t=0.5	15	9.32	8.87
		30	4.88	4.63
		45	3.45	3.34
	a/t=0.8	15	9.65	9.19
		30	5.01	4.79
		45	3.51	3.45
a/c=1	a/t=0.2	15	7.07	10.17
		30	3.96	5.74
		45	2.60	3.83
	a/t=0.5	15	7.72	10.85
		30	3.95	5.66
		45	2.83	4.15
	a/t=0.8	15	8.50	11.63
		30	4.40	6.04
		45	3.09	4.45

Tableau AE11 : Amplitude des modes II et III par rapport au mode I, coque de rapport $t/R=0.1$

		α	$K_{I \max} / K_{II \max}$	$K_{I \max} / K_{III \max}$
a/c=0.2	a/t=0.2	15	11.84	8.87
		30	6.14	4.62
		45	5.22	3.44
	a/t=0.5	15	14.68	11.10
		30	7.66	5.79
		45	5.69	4.29
	a/t=0.8	15	14.73	12.35
		30	8.70	5.95
		45	6.11	4.44
a/c=0.5	a/t=0.2	15	8.79	9.17
		30	4.60	4.81
		45	3.44	3.59
	a/t=0.5	15	9.51	9.89
		30	4.99	5.18
		45	3.72	3.87
	a/t=0.8	15	9.81	9.95
		30	5.15	5.01
		45	3.90	3.91
a/c=1	a/t=0.2	15	7.46	10.91
		30	3.87	5.69
		45	2.89	4.23
	a/t=0.5	15	7.99	11.69
		30	4.17	6.12
		45	3.10	4.54
	a/t=0.8	15	8.65	12.56
		30	4.52	6.55
		45	3.35	4.88

Tableau AE12 : Amplitude des modes II et III par rapport au mode I, coque de rapport $t/R=0.01$

ANNEXE AF

Pression MPa	$pR/t\sigma_0$	Jp : Champ 1 KJ/m ²	Jp : Champ 2 KJ/m ²	Jp : Champ 3 KJ/m ²	J _{A16} KJ/m ²	J _{R6} KJ/m ²
1	0.04	2.54E-02	2.54E-02	2.54E-02	2.54E-02	2.54E-02
2	0.07	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
4	0.14	0.41	0.41	0.41	0.41	0.41
6	0.21	0.92	0.92	0.92	0.94	0.94
8	0.28	1.65	1.66	1.66	1.70	1.71
10	0.35	2.62	2.62	2.63	2.71	2.73
12	0.42	3.84	3.86	3.86	3.99	4.07
14	0.49	5.37	5.41	5.43	5.56	5.73
16	0.56	7.29	7.37	7.40	7.43	7.79
18	0.63	9.77	9.89	9.96	10.05	10.63
20	0.70	13.19	13.36	13.47	13.20	14.10
22	0.77	18.25	18.50	18.68	20.68	21.19
24	0.85	26.13	26.46	26.77	34.59	34.21
25	0.88	31.96	32.37	32.71	43.86	43.01
26	0.92	39.90	40.37	40.79	57.85	56.34
27	0.95	51.34	51.85	52.36	76.39	74.19
28	0.99	66.48	66.97	67.53	100.69	97.76
30	1.06	109.50	109.70	110.20	175.52	171.02
31	1.09	140.40	140.10	140.40	227.63	222.34

Tableau AF1 : Modèle M112, fissure axiale

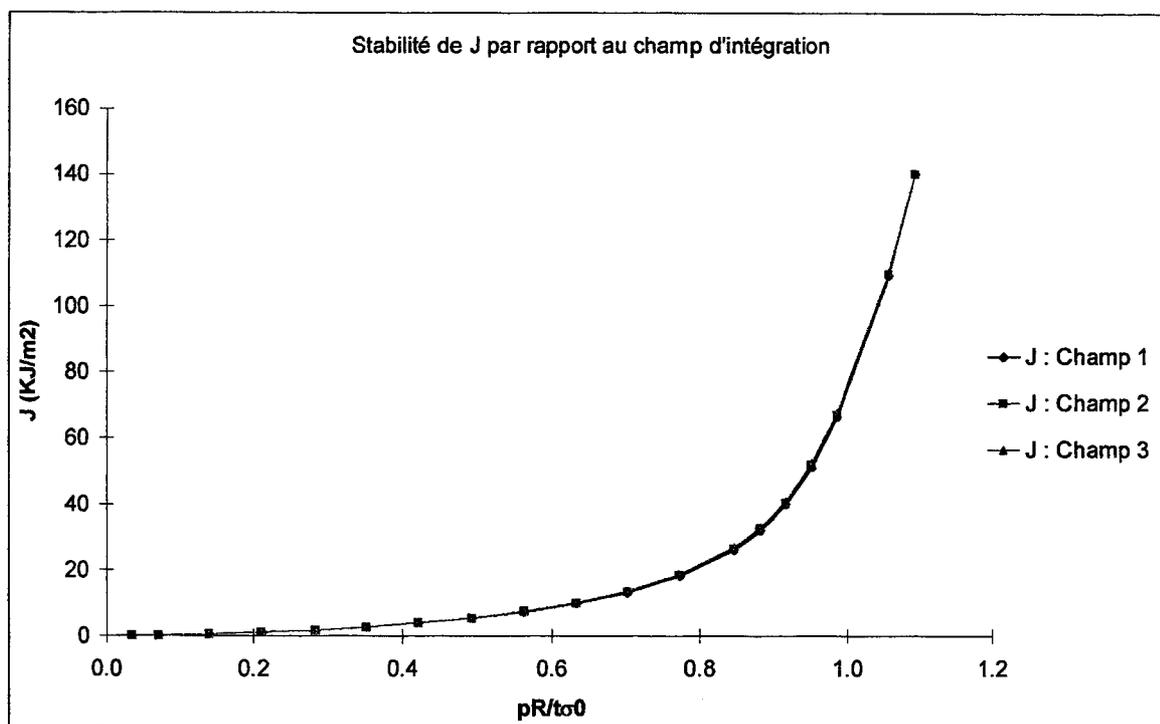


Fig. AF1 : Modèle M112, fissure axiale - Stabilité de J par rapport au champ d'intégration

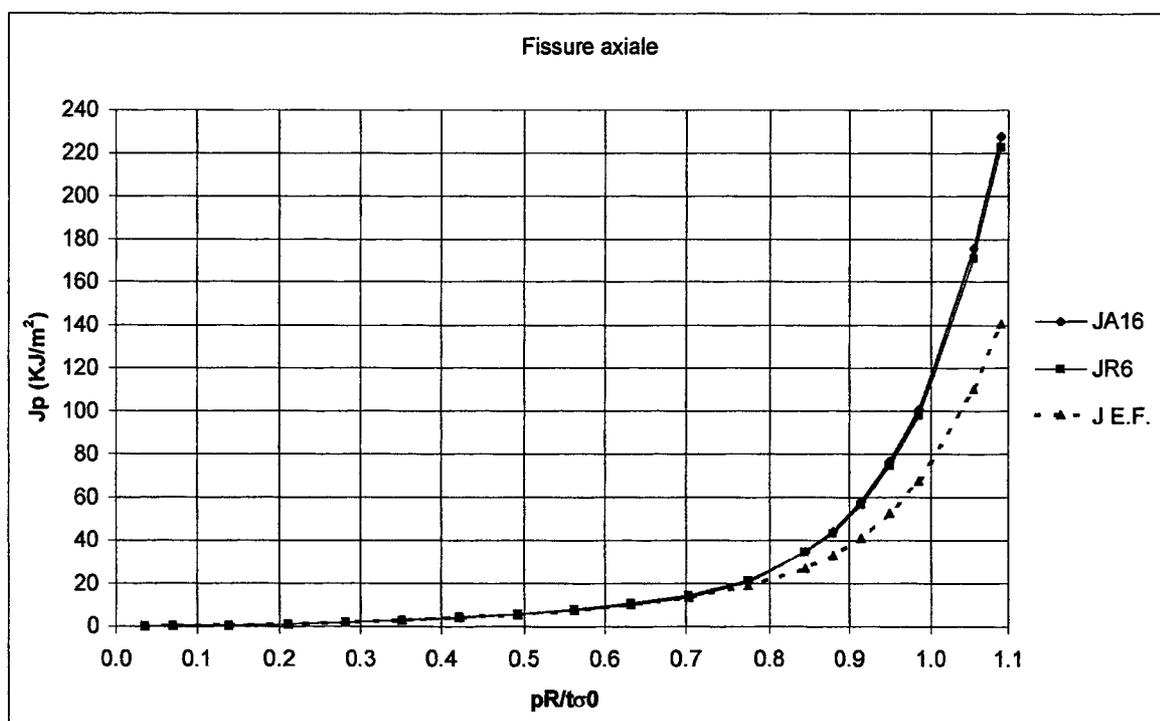


Fig. AF2 : Modèle M112, fissure axiale - Comparaison des résultats obtenus par les méthodes simplifiées avec les résultats éléments finis.

Pression MPa	$pR/t\sigma_0$	Jp : Champ 1 KJ/m ²	Jp : Champ 2 KJ/m ²	Jp : Champ 3 KJ/m ²	J _{A16} KJ/m ²	J _{R6} KJ/m ²
1	0.04	2.37E-02	2.37E-02	2.37E-02	2.37E-02	2.37E-02
2	0.07	0.10	0.09	0.09	0.09	0.09
4	0.14	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38
6	0.21	0.86	0.86	0.86	0.88	0.88
8	0.28	1.54	1.55	1.55	1.58	1.59
10	0.35	2.44	2.45	2.45	2.53	2.55
12	0.42	3.58	3.60	3.56	3.72	3.79
14	0.49	5.00	5.03	5.04	5.17	5.33
16	0.56	6.77	6.84	6.87	6.92	7.25
18	0.63	9.05	9.15	9.21	9.29	9.83
20	0.70	12.17	12.33	12.42	12.23	13.05
22	0.77	16.77	16.78	17.16	18.56	19.13
24	0.85	23.92	24.25	24.50	30.72	30.49
25	0.88	29.19	29.57	29.88	39.38	38.68
26	0.92	36.41	36.86	37.23	50.73	49.50
27	0.95	46.82	47.31	47.77	67.22	65.32
28	0.99	60.66	61.16	61.69	88.20	85.62
30	1.06	100.50	100.90	101.30	153.29	149.25
31	1.09	129.20	129.50	129.40	199.25	194.46

Tableau AF2 : Modèle M112, fissure à 15°

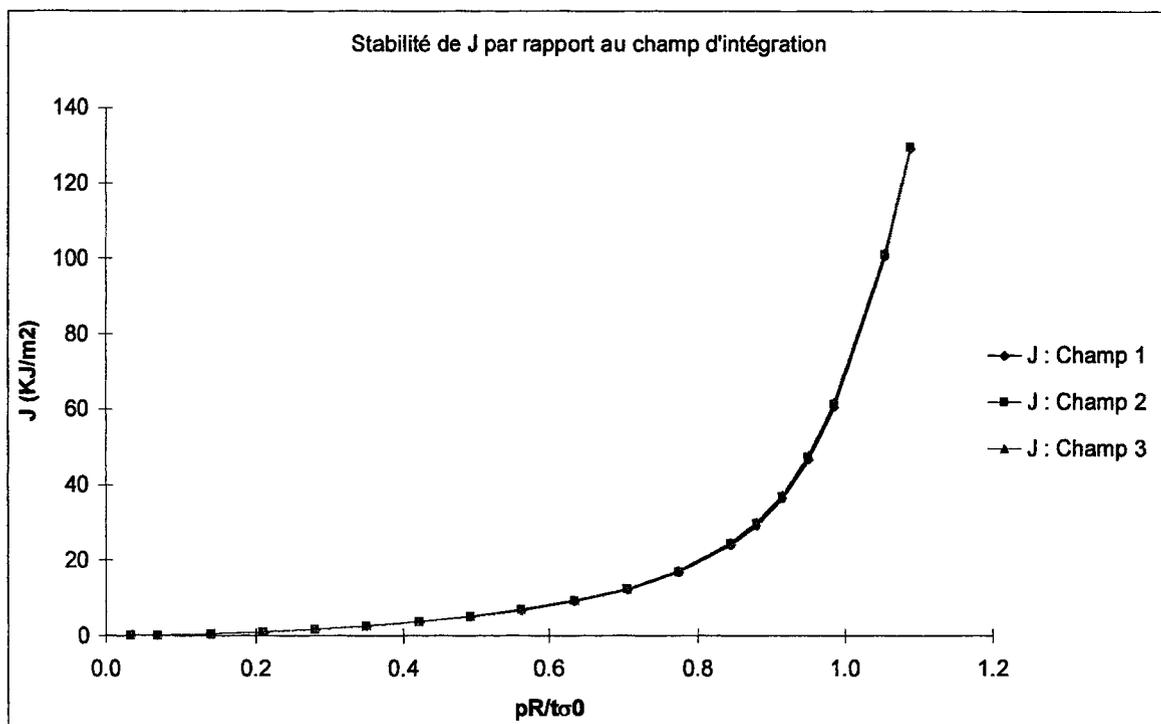


Fig. AF3 : Modèle M112, fissure à 15° - Stabilité de J par rapport au champ d'intégration

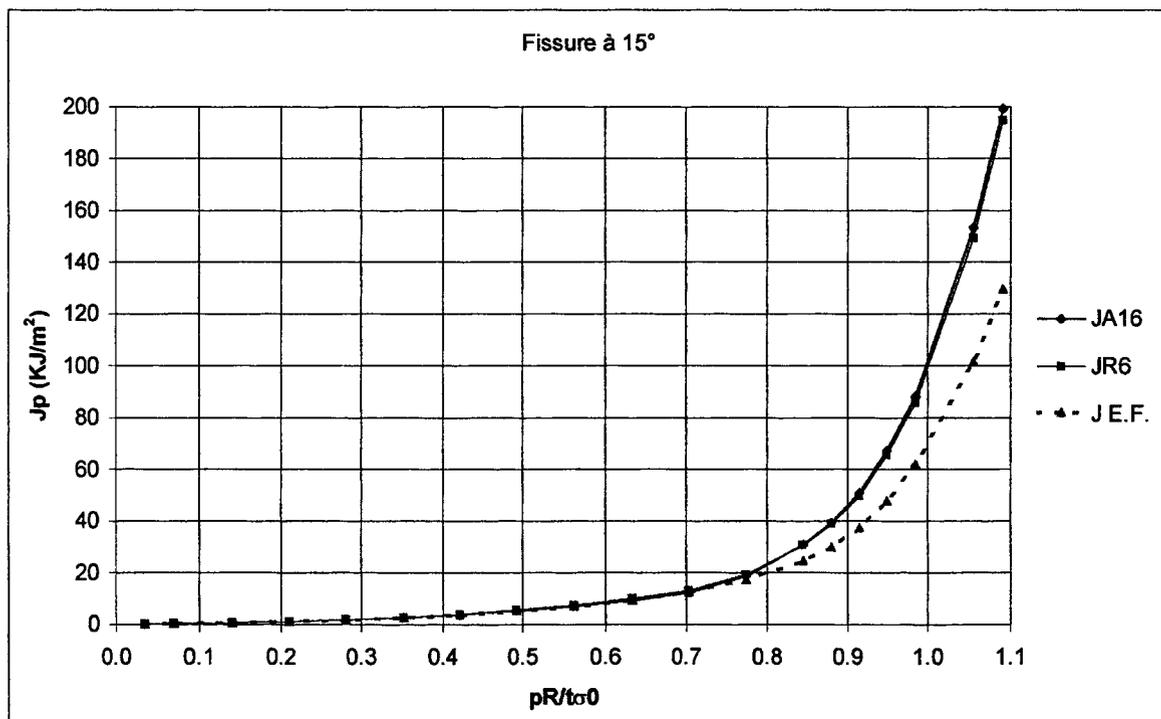


Fig. AF4 : Modèle M112, fissure à 15° - Comparaison des résultats obtenus par les méthodes simplifiées avec les résultats éléments finis.

Pression MPa	$pR/t\sigma_0$	Jp : Champ 1 KJ/m ²	Jp : Champ 2 KJ/m ²	Jp : Champ 3 KJ/m ²	J _{A16} KJ/m ²	J _{R6} KJ/m ²
1	0.04	1.94E-02	1.94E-02	1.94E-02	1.94E-02	1.94E-02
2	0.07	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
4	0.14	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31
6	0.21	0.70	0.70	0.70	0.71	0.72
8	0.28	1.26	1.26	1.26	1.29	1.30
10	0.35	1.99	1.99	1.99	2.06	2.08
12	0.42	2.91	2.92	2.92	3.03	3.08
14	0.49	4.04	4.06	4.07	4.22	4.34
16	0.56	5.44	5.49	5.50	5.64	5.88
18	0.63	7.21	7.28	7.32	7.50	7.92
20	0.70	9.60	9.71	9.78	9.82	10.47
22	0.77	13.04	13.20	13.31	13.68	14.36
24	0.85	18.29	18.54	18.72	22.07	22.19
25	0.88	22.17	22.47	22.70	29.38	29.00
26	0.92	27.53	27.89	28.17	36.42	35.71
27	0.95	35.20	35.63	35.98	47.59	46.36
28	0.99	45.61	46.10	46.53	62.15	60.36
30	1.06	76.26	76.67	77.16	104.92	101.97
31	1.09	97.73	98.03	98.53	138.09	134.49
31.5	1.11	110.30	110.40	110.90	157.18	153.27

Tableau AF3 : Modèle M112, fissure à 30°

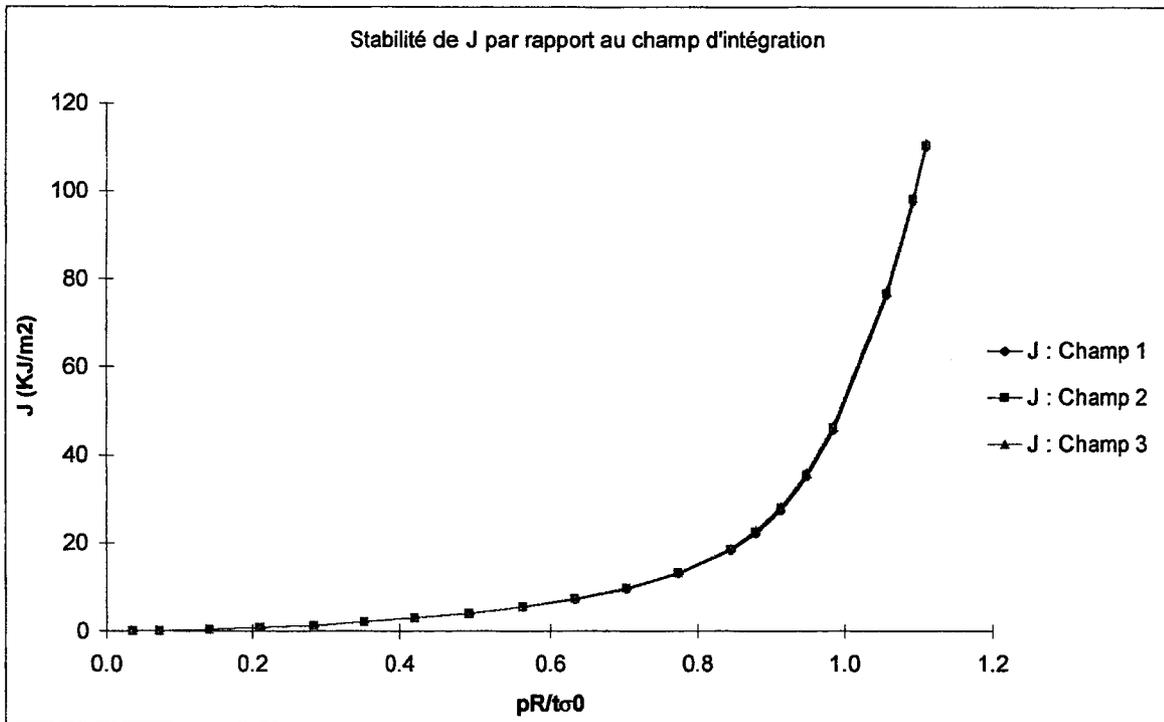


Fig. AF5 : Modèle M112, fissure à 30° - Stabilité de J par rapport au champ d'intégration

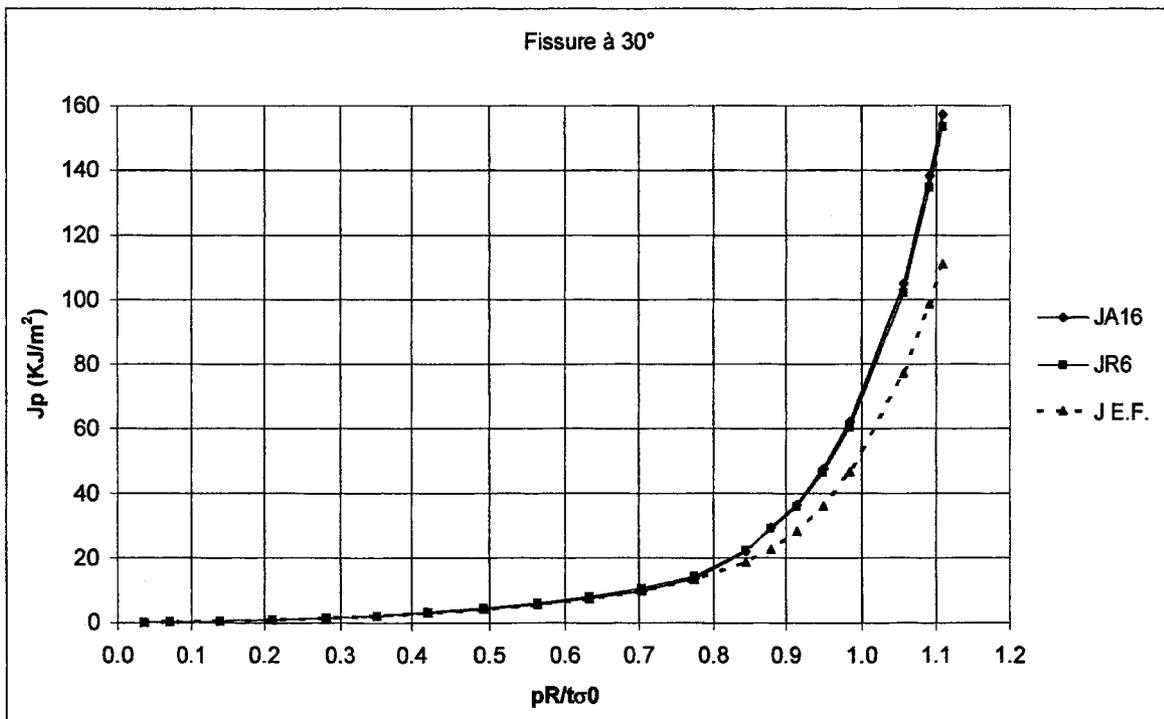


Fig. AF6 : Modèle M112, fissure à 30° - Comparaison des résultats obtenus par les méthodes simplifiées avec les résultats éléments finis.

Pression MPa	pR/tσ0	Jp : Champ 1 KJ/m ²	Jp : Champ 2 KJ/m ²	Jp : Champ 3 KJ/m ²	J _{A16} KJ/m ²	J _{R6} KJ/m ²
1	0.04	1.40E-02	1.40E-02	1.40E-02	1.40E-02	1.40E-02
2	0.07	0.056	0.056	0.056	0.056	0.056
4	0.14	0.224	0.224	0.224	0.227	0.227
6	0.21	0.507	0.507	0.507	0.515	0.516
8	0.28	0.906	0.906	0.906	0.929	0.932
10	0.35	1.427	1.428	1.428	1.481	1.491
12	0.42	2.078	2.081	2.082	2.174	2.204
14	0.49	2.869	2.878	2.882	3.020	3.091
16	0.56	3.826	3.847	3.854	4.031	4.179
18	0.63	4.999	5.040	5.056	5.252	5.524
20	0.70	6.540	6.607	6.639	6.880	7.296
22	0.77	8.685	8.784	8.839	8.898	9.489
24	0.85	11.800	11.950	12.040	13.388	13.745
25	0.88	14.080	14.260	14.380	16.553	16.719
26	0.92	17.260	17.500	17.660	21.426	21.258
27	0.95	21.950	22.230	22.430	26.938	26.471
28	0.99	28.440	28.780	29.020	34.010	33.202
30	1.06	46.900	47.290	47.610	56.625	54.972
31	1.09	59.560	59.930	60.260	72.914	70.812
32	1.13	75.420	75.740	76.070	92.988	90.434
33	1.16	96.610	96.820	97.120	121.195	118.139
34	1.20	124.100	124.000	124.100	147.613	144.135

Tableau AF4 : Modèle M112, fissure à 45°

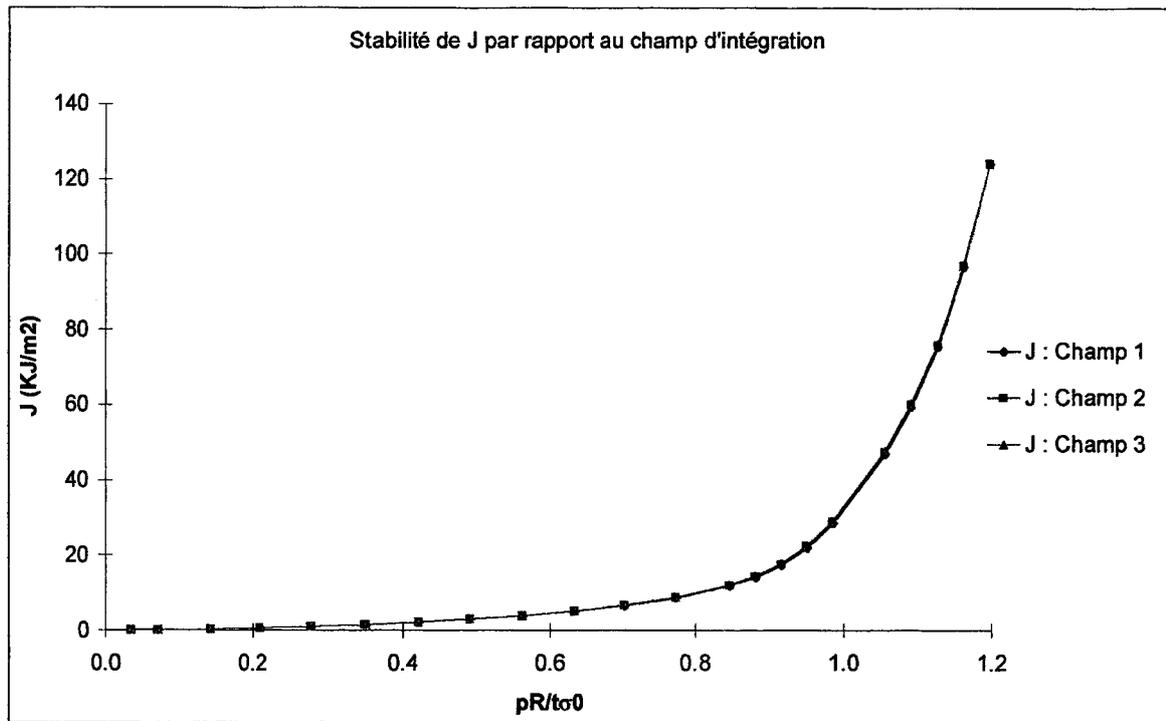


Fig. AF7 : Modèle M112, fissure à 45° - Stabilité de J par rapport au champ d'intégration

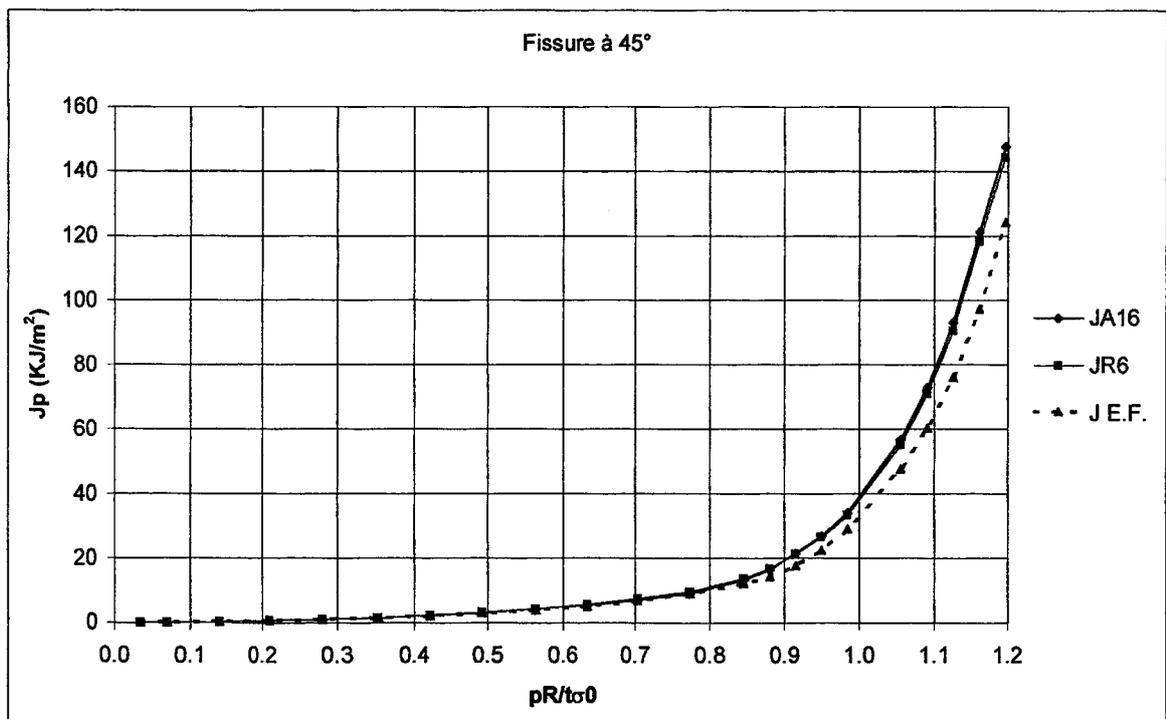


Fig. AF8 : Modèle M112, fissure à 45° - Comparaison des résultats obtenus par les méthodes simplifiées avec les résultats éléments finis.

Pression MPa	$pR/t\sigma_0$	Jp : Champ 1 KJ/m ²	Jp : Champ 2 KJ/m ²	Jp : Champ 3 KJ/m ²	J _{A16} KJ/m ²	J _{R6} KJ/m ²
1	0.04	9.27E-03	9.27E-03	9.27E-03	9.27E-03	9.27E-03
4	0.14	0.149	0.148	0.148	0.150	0.150
8	0.28	0.597	0.597	0.597	0.613	0.614
10	0.35	0.938	0.938	0.938	0.975	0.980
12	0.42	1.360	1.361	1.361	1.429	1.445
14	0.49	1.868	1.870	1.871	1.982	2.019
16	0.56	2.469	2.476	2.478	2.642	2.721
18	0.63	3.180	3.194	3.199	3.409	3.559
20	0.70	4.077	4.105	4.115	4.401	4.642
22	0.77	5.258	5.304	5.325	5.621	5.976
24	0.85	6.873	6.941	6.977	7.295	7.739
26	0.92	9.530	9.627	9.683	11.023	11.227
28	0.99	15.100	15.240	15.340	17.232	17.039
30	1.06	24.160	24.330	24.430	26.532	25.883
31	1.09	30.440	30.610	30.710	33.918	32.966
32	1.13	37.820	38.040	38.150	42.959	41.704
33	1.16	48.020	48.210	48.330	54.441	52.870
34	1.20	61.080	61.260	61.340	68.334	66.446
35	1.23	77.090	77.180	77.250	87.850	85.606
36	1.27	97.190	97.150	97.160	109.538	106.961

Tableau AF5 : Modèle M112, fissure à 60°

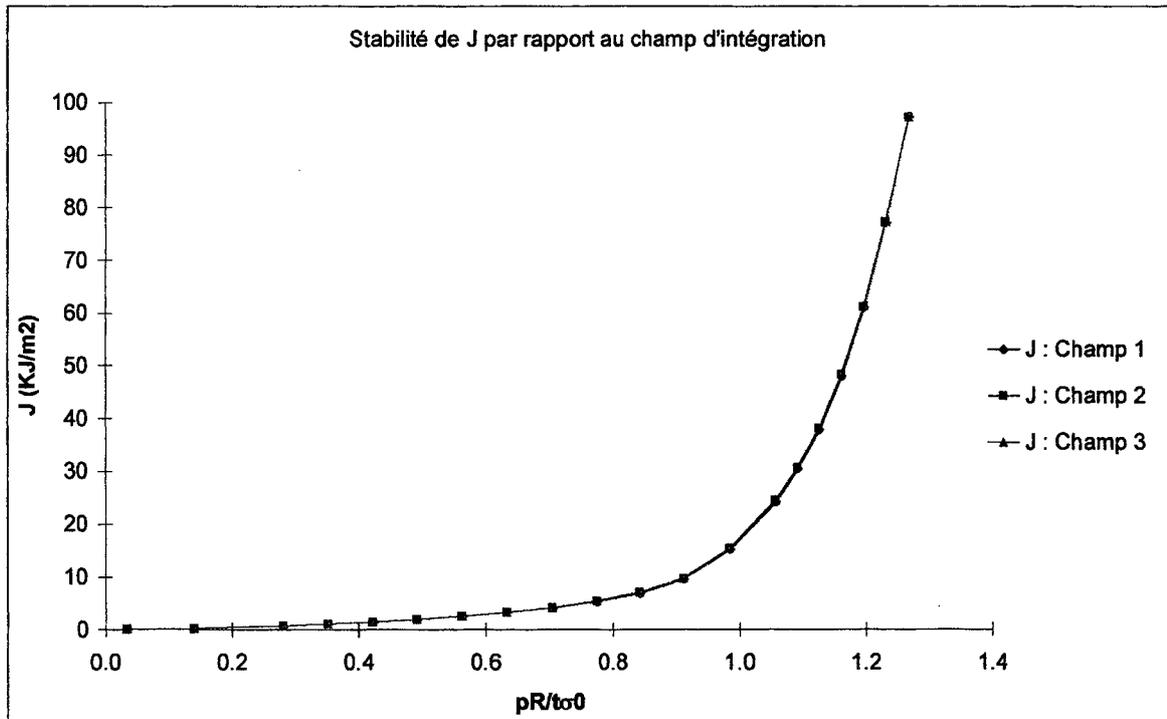


Fig. AF9 : Modèle M112, fissure à 60° - Stabilité de J par rapport au champ d'intégration

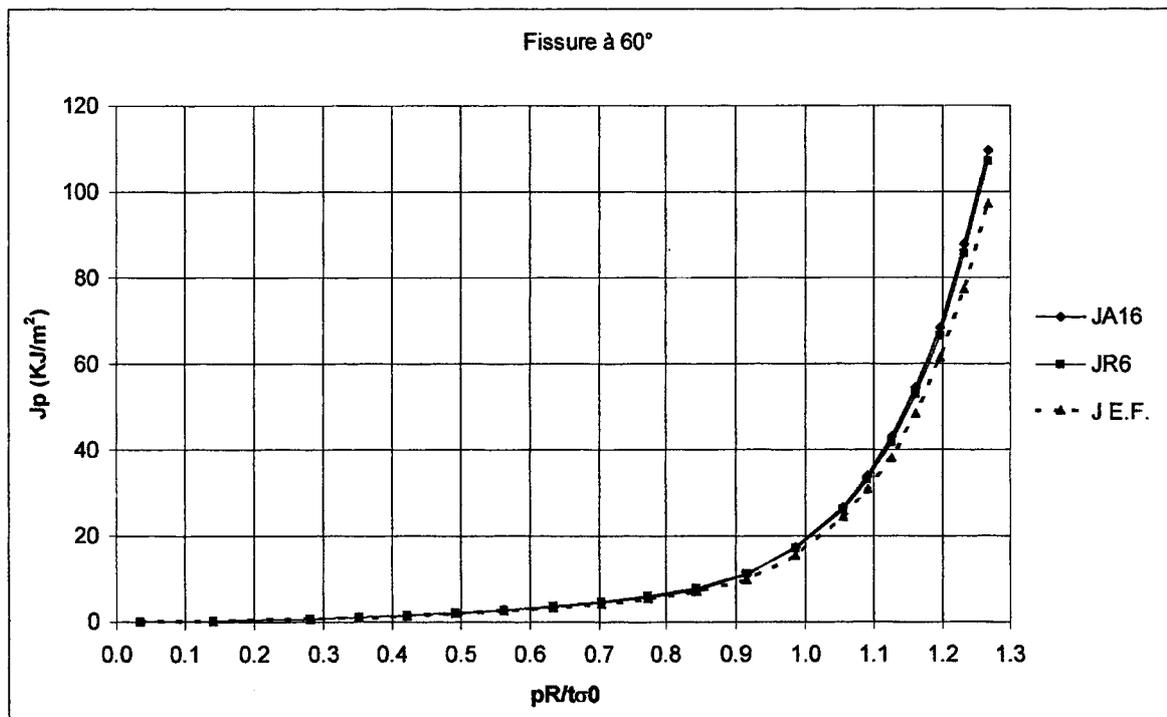


Fig. AF10 : Modèle M112, fissure à 60° - Comparaison des résultats obtenus par les méthodes simplifiées avec les résultats éléments finis.

Pression MPa	$pR/t\sigma_0$	Jp : Champ 1 KJ/m ²	Jp : Champ 2 KJ/m ²	Jp : Champ 3 KJ/m ²	J _{A16} KJ/m ²	J _{R6} KJ/m ²
1	0.04	1.66E-02	1.66E-02	1.66E-02	1.66E-02	1.66E-02
2	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07
4	0.14	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27
6	0.21	0.60	0.60	0.60	0.61	0.61
8	0.28	1.07	1.07	1.07	1.10	1.10
10	0.35	1.68	1.68	1.68	1.75	1.76
12	0.42	2.44	2.44	2.45	2.56	2.59
14	0.49	3.35	3.37	3.37	3.55	3.62
16	0.56	4.44	4.47	4.48	4.73	4.88
18	0.63	5.74	5.80	5.82	6.12	6.39
20	0.70	7.42	7.51	7.55	7.92	8.36
22	0.77	9.61	9.73	9.81	10.08	10.74
24	0.85	12.79	12.96	13.07	13.24	14.02
26	0.92	18.18	18.40	18.57	20.26	20.57
28	0.99	29.26	29.59	29.86	32.04	31.60
30	1.06	47.37	47.84	48.25	50.06	48.76
31	1.09	59.88	60.35	60.83	63.82	62.00

Tableau AF6 : Modèle M111, fissure axiale

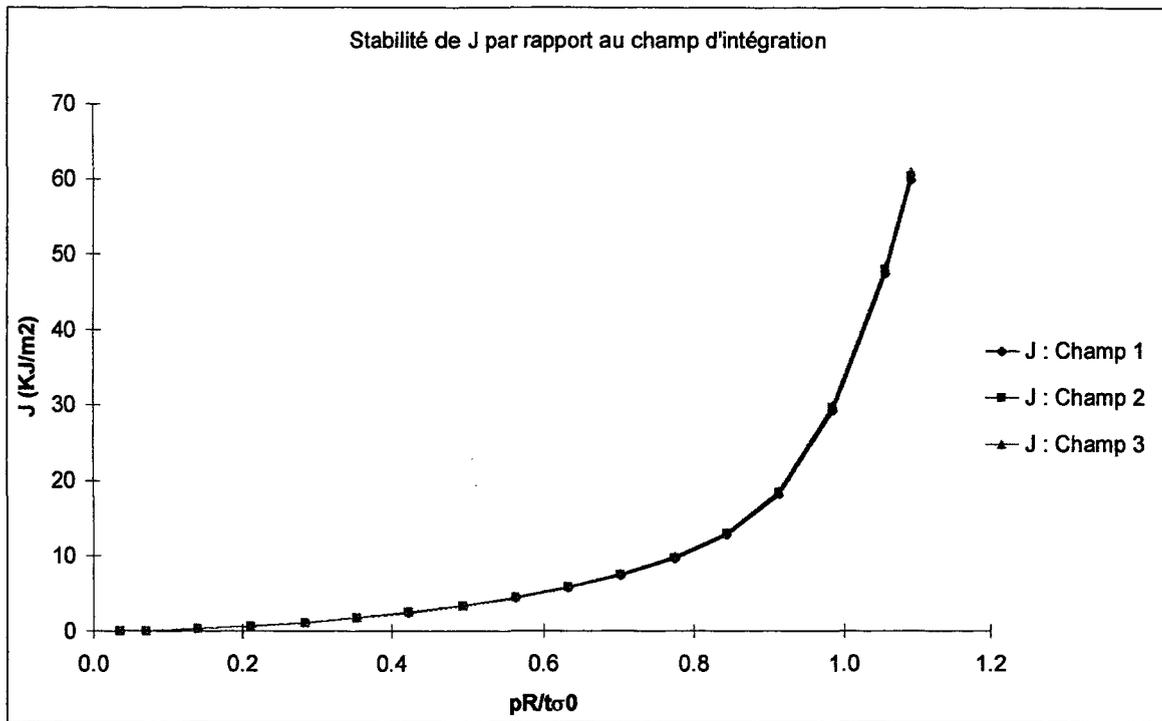


Fig. AF11 : Modèle M111, fissure axiale - Stabilité de J par rapport au champ d'intégration

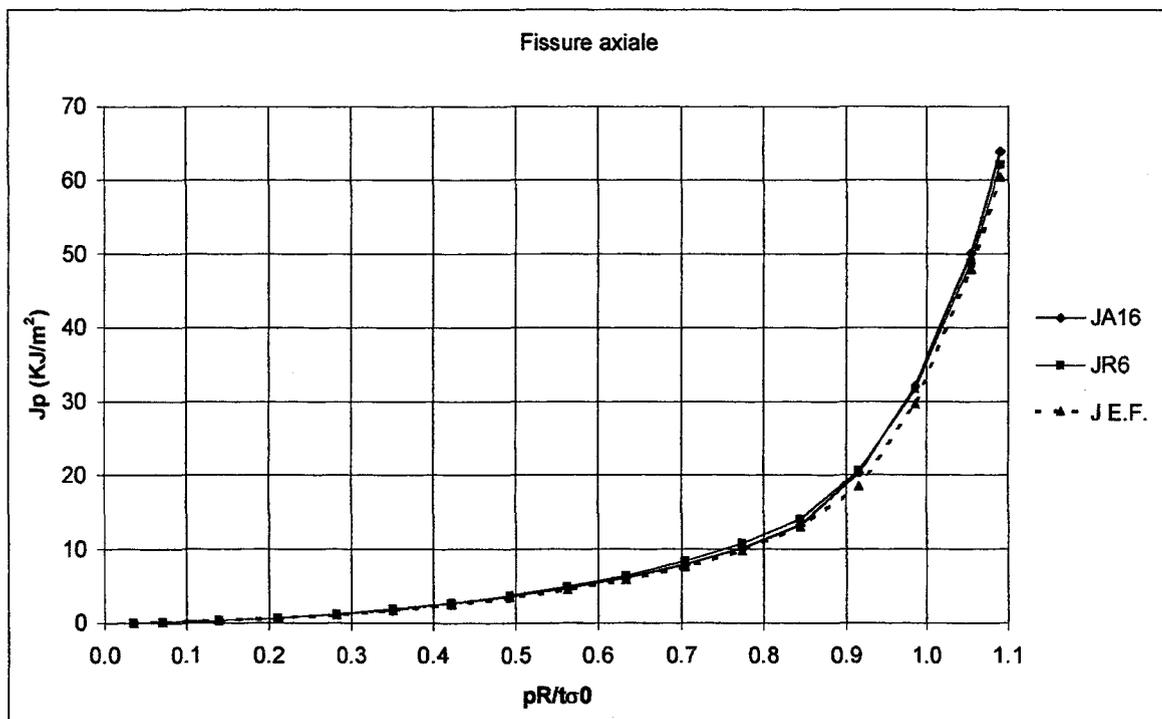


Fig. AF12 : Modèle M111, fissure axiale - Comparaison des résultats obtenus par les méthodes simplifiées avec les résultats éléments finis.

Pression MPa	$pR/t\sigma_0$	Jp : Champ 1 KJ/m ²	Jp : Champ 2 KJ/m ²	Jp : Champ 3 KJ/m ²	J _{A16} KJ/m ²	J _{R6} KJ/m ²
1	0.04	1.00E-02	1.00E-02	1.00E-02	1.00E-02	1.00E-02
2	0.07	0.040	0.040	0.040	0.040	0.040
4	0.14	0.160	0.160	0.160	0.162	0.162
6	0.21	0.362	0.362	0.362	0.368	0.368
8	0.28	0.646	0.646	0.646	0.664	0.666
10	0.35	1.014	1.014	1.014	1.055	1.062
12	0.42	1.468	1.469	1.470	1.549	1.568
14	0.49	2.014	2.017	2.018	2.152	2.198
16	0.56	2.655	2.664	2.667	2.865	2.962
18	0.63	3.409	3.427	3.433	3.700	3.885
20	0.70	4.346	4.380	4.393	4.844	5.126
22	0.77	5.506	5.559	5.584	6.233	6.640
24	0.85	7.138	7.214	7.258	8.779	9.136
26	0.92	9.695	9.799	9.863	13.585	13.629
28	0.99	15.020	15.170	15.270	21.508	21.098
30	1.06	23.860	24.070	24.220	35.353	34.348
31	1.09	30.010	30.230	30.380	45.050	43.733

Tableau AF7 : Modèle M111, fissure à 45°

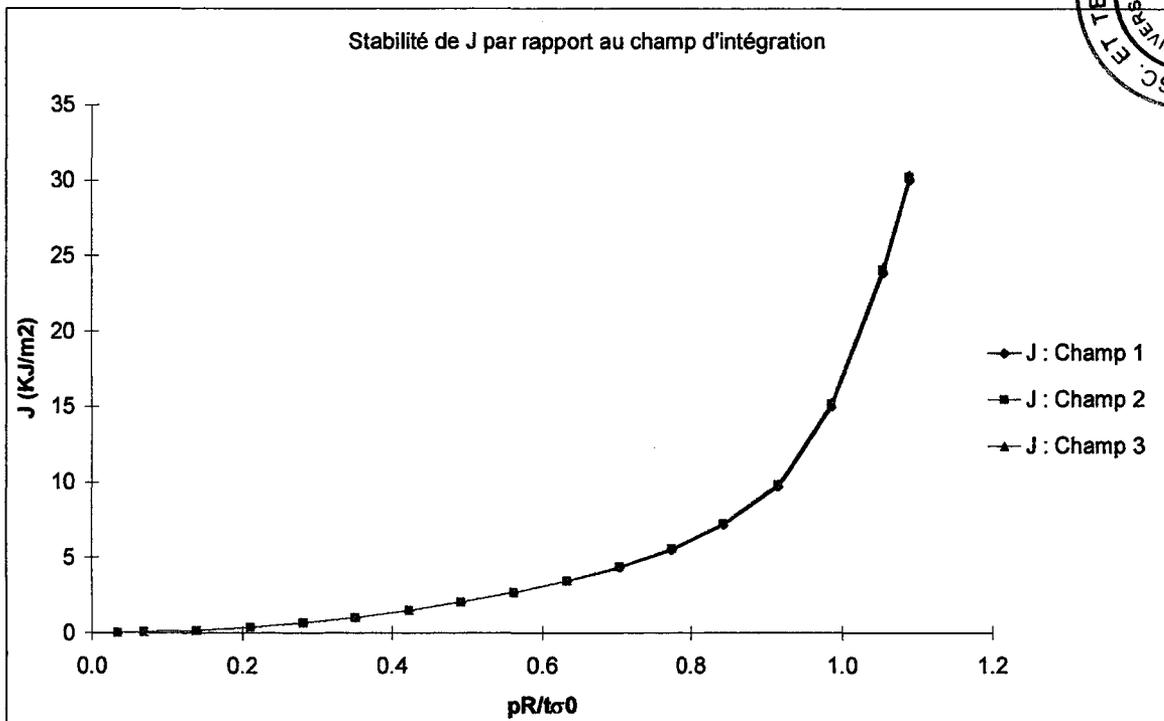


Fig. AF13 : Modèle M111, fissure à 45° - Stabilité de J par rapport au champ d'intégration

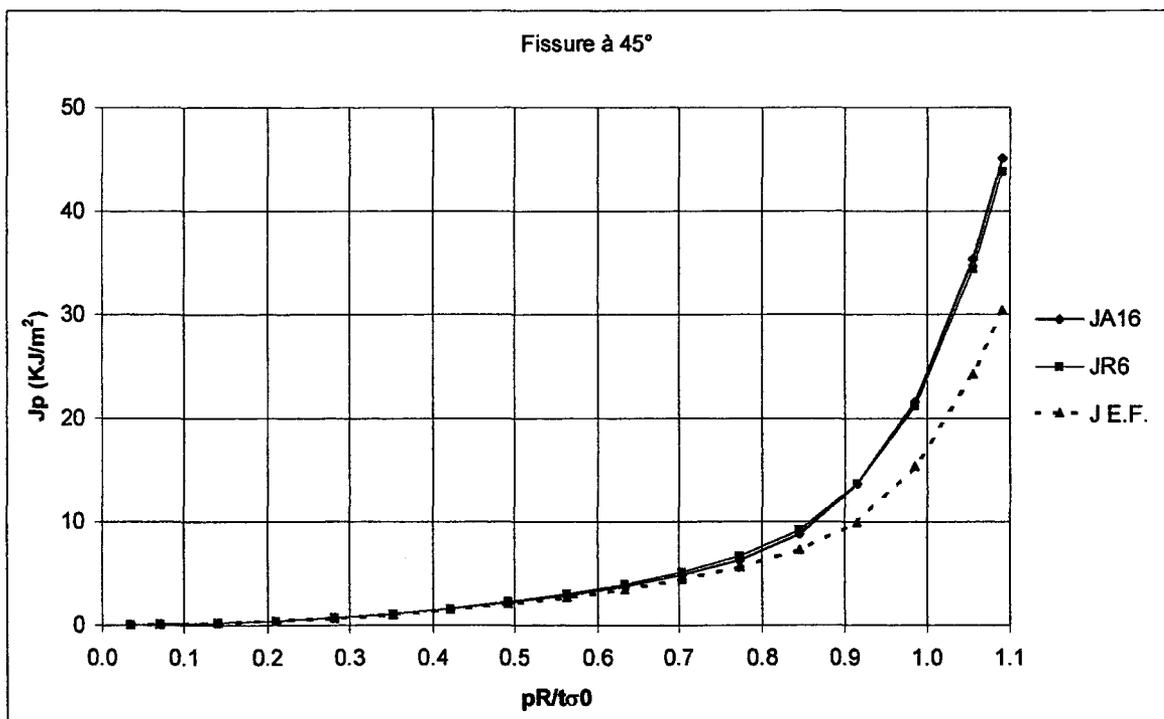


Fig. AF14 : Modèle M111, fissure à 45° - Comparaison des résultats obtenus par les méthodes simplifiées avec les résultats éléments finis.