

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

ECOLE UNIVERSITAIRE D'INGENIEURS DE LILLE

LABORATOIRE DE MECANIQUE DE LILLE

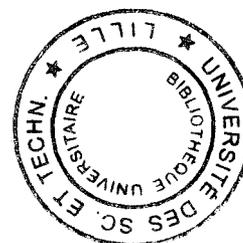
THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MECANIQUE

présentée par

Taoufik GHETREFF



***MODELISATION DU COMPORTEMENT ELASTO-
VISCOPLASTIQUE EN GRANDES
DEFORMATIONS***

Soutenue le 15 octobre 1999 devant le jury composé de

Président	M. G. DE SAXCE	Laboratoire de Mécanique de Lille
Rapporteurs	M. O. Debordes	Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille
	M. H. Stumpf	Ruhr-Universität Bochum (Allemagne)
Examineurs	M. J. B. Tritsch	Ecole Universitaire D'Ingénieurs de Lille
	M. D. Weichert	I.A.M., RWTH, Aachen (Allemagne)
	M. K. Woznica	Ecole Universitaire D'Ingénieurs de Lille

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE

1. Généralités	5
2. Historique	7
3. Motivation	10
4. Contenu du rapport	11

CHAPITRE 1

LES MILIEUX CONTINUS EN GRANDES TRANSFORMATIONS

1. Introduction	13
2. Cinématique des grandes transformations	14
2. 1. Tenseur gradient de déformation	14
2. 2. Tenseur des déformations	15
2. 3. Tenseur des contraintes	17
2. 4. Décomposition polaire, tenseur taux de déformation et taux de rotation	19
2. 4. 1. Décomposition polaire	19
2. 4. 2. Taux de déformation et taux de rotation	20
2. 5. Décomposition multiplicative de Lee	22
3. Formulation des lois de comportement	25
4. Objectivité des lois de comportement	30

4. 1. Dérivations objectives	33
4. 2. Exemples de dérivées objectives	33

CHAPITRE 2

EXEMPLE D'APPLICATION DANS LE CAS DE CISAILLEMENT SIMPLE (RIGIDE-PLASTIQUE)

1. Cinématique du cisaillement simple	37
2. Equations constitutives	39
2. 1. Solution relative à la dérivée de Jaumann	44
2. 2. Solution relative à la dérivée de Green-Naghdi	46
2. 3. Solution relative à la dérivée de Dafalias	48
3. Résultats comparatifs	50

CHAPITRE 3

APPROCHE DANS LE DOMAINE ELASTO-VISCOPLASTIQUE

1. Introduction	53
2. Cinématique des grandes transformations élasto-viscoplastiques	53
2. 1. Décomposition du gradient de déformation	54
2. 2. Description eulerienne	56
2. 3. Approximation du tenseur spin	60
* Petites déformations élastiques - grandes déformations viscoplastiques	61
* Grandes déformations (modèle rigide-viscoplastique)	62
3. Equations constitutives élasto-viscoplastiques	63
3. 1. Equations constitutives élastiques	63
3. 2. Relations constitutives viscoplastiques	65
3. 2. 1. Lois d'évolution de l'écrouissage	65

* Ecrouissage cinématique	65
* Ecrouissage isotrope	67
3. 2. 2. Contrainte visqueuse et surface d'écoulement	68
* Contrainte visqueuse.....	68
* Surface d'écoulement	68
3. 3. Opérateur tangentiel élasto-viscoplastique	71
4. Conclusion	75

CHAPITRE 4

EXEMPLE D'APPLICATION DANS LE CAS DE CISAILLEMENT SIMPLE (RIGIDE-VISCOPLASTIQUE)

1. Introduction	77
2. Application et résultats	78
2. 1. Cisaillement simple	78
2. 2. Algorithme de résolution	79
2. 3. Résultats	81
3. Comparaison du modèle présenté avec celui de Dafalias	83
3. 1. Modèle viscoplastique de Dafalias	83
3. 2. Comparaisons	84
4. Etude de la plasticité à partir du modèle viscoplastique	88
5. Discussion	90

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

REFERENCES

ANNEXE

INTRODUCTION GENERALE

1. Généralités

Dans le domaine industriel, il est nécessaire de faire des prévisions de plus en plus précises sur le comportement des pièces mécaniques sous diverses conditions de service. Il est intéressant de connaître l'état des contraintes et des déformations, que subissent ces pièces, après des chargements prolongés sous hautes températures, ainsi que des sollicitations dynamiques au-delà de la limite élastique des matériaux. Cela permet de déterminer la fiabilité des structures, leur durée de vie et assurer la sécurité. Dans la majorité des cas, il est nécessaire de prendre en compte les propriétés viscoplastiques des matériaux, ce qui nous conduit à une analyse inélastique des structures.

En général, les matériaux viscoplastiques sont définis comme étant des matériaux qui présentent des déformations permanentes après cessation des sollicitations, et ayant un comportement non linéaire dépendant de façon marquée de la vitesse de déformation inélastique [Lemaitre et Chaboche (1988)]. La notion de seuil de plasticité stricte disparaît, un écoulement peut se produire pour une contrainte inférieure à une contrainte appliquée antérieurement.

Le phénomène viscoplastique se rencontre de manière marquée dans les métaux et alliages opérant à de hautes températures (plus du tiers de la température de fusion), et subissant des sollicitations à des vitesses élevées. A part les métaux et alliages, les

théories viscoplastiques s'appliquent aussi aux résines ou aux polymères lorsqu'ils subissent des chargements importants, et encore aux sols, roches ou à la glace quand il s'agit d'étudier l'évolution mécanique sur des périodes de temps longues.

Pourquoi est-il nécessaire de prendre en compte les grandes déformations quand on élabore des modèles élastoplastiques (viscoplastiques)? Question incongrue, lorsque l'on pense aux processus industriels de mise en forme (emboutissage, laminage...) qui, de toute évidence, mettent en œuvre des déformations inélastiques considérables. A y regarder de plus près cependant, la question subsiste : en effet, pour les matériaux utilisés, souvent des métaux, les déformations élastiques sont toujours très petites. De deux choses l'une :

✓ ou bien les déformations inélastiques sont "contenues", c'est-à-dire, également petites (c'est la situation habituelle en calcul des structures). On peut alors utiliser une théorie élastoplastique (viscoplastique) en petites déformations;

✓ ou bien les déformations inélastiques sont grandes (c'est la situation habituelle en mise en forme). On peut alors négliger les déformations élastiques et utiliser une théorie rigide-plastique ou rigide-viscoplastique.

En abordant les grandes déformations, par rapport aux petites déformations, des difficultés se présentent, non seulement du point de vue cinématique mais aussi au niveau des lois de comportement. On aura l'occasion de voir cela dans la suite de ce travail.

2. Historique

L'idée directrice des investigations dans le domaine d'élastoplasticité (viscoplasticité) avec prise en compte des grandes déformations, du point de vue cinématique, est la décomposition du gradient de déformation en une partie élastique et une partie inélastique. Celle-ci, introduite par Bilby et al. (1957), Kröner (1960) et Lee et Liu (1967), n'est pas unique car les rotations élastiques et inélastiques ne peuvent pas être déterminées d'une manière unique. Par conséquent, des suppositions supplémentaires concernant ces rotations ont été rajoutées. Mandel (1971) - (1973) aborde ce problème en introduisant la notion du trièdre de vecteurs directeurs, qui définit l'orientation dans la configuration relâchée. Ce concept a été critiqué car, ce trièdre peut bien être défini pour un monocristal, alors qu'il ne l'est pas pour un polycristal, ou d'autres structures complexes [Dafalias (1987)].

La première décomposition unique du gradient de déformation, sans aucunes suppositions supplémentaires concernant les rotations élastique et inélastique, a été proposée par Nemat-Nasser (1990). Schieck et Stumpf (1993) et Stumpf et Schieck (1994) introduisent une décomposition alternative, écrite en fonction des tenseurs lagrangiens élastique et inélastique, et un tenseur de rotation défini unique.

En grandes déformations, pour écrire les lois de comportement, Truesdell et Noll (1965) insistent sur le respect du principe d'objectivité (indifférence matérielle). Celui-ci doit assurer l'indépendance des lois de comportement par rapport à l'observateur. La loi de comportement doit donc s'écrire en fonction de grandeurs objectives. Cependant, la dérivée temporelle d'une grandeur objective n'en est pas une. La solution consiste alors à introduire une dérivée matérielle (dérivée objective) pour éliminer les rotations parasites [Sidoroff (1981)]. Dans ce sens, plusieurs auteurs, afin de trouver des solutions aux équations constitutives, ont utilisé les dérivées objectives de Jaumann (1911), Truesdell (1955), Oldroyd (1950), Cotter-Rivelin (1955), Green-Naghdi (1965) et leurs versions modifiées :

Sowerby et Chu (1984), Reed et Atluri (1983), Truesdell (1955), Dines (1979) et Key (1984) ont obtenu les solutions dans le cas d'hypoélasticité. Le cas des matériaux rigide-plastiques a été traité, en tenant compte de l'écouissage isotrope, par Lee et al. (1983) et Nagtegaal et Jong (1982). Dafalias (1983), Reed et Atluri (1985) et Paulun et Pecherski (1985) l'ont étudié en introduisant l'écouissage cinématique. Tandis que les matériaux élastoplastiques avec écouissage isotrope et cinématique ont été examinés par Johnson et Bammann (1984), Atluri (1984) et Schieck et Stumpf (1995). Moss (1984) a étudié les matériaux élastique - parfaitement plastiques.

La dérivée de Jaumann a été longtemps utilisée dans les codes de calcul des structures. Toutefois, en analysant la déformation plastique pour le problème de cisaillement simple, avec la dérivée de Jaumann, Dines (1979) a observé des réponses en contraintes oscillatoires pour une évolution monotone des déformations, ceci étant physiquement inadmissible. Son observation a suscité des discussions dans les littératures concernant le choix approprié des dérivées objectives [Haupt (1985), Szabo et Balla (1989), Xia et Ellyin (1993), Zbib (1993)].

Pour éviter les réponses en contraintes oscillatoires dues à la dérivée de Jaumann, et en s'appuyant sur les travaux de Mandel (1971) - (1981) et de Kratochvil (1971), Dafalias (1983), Loret (1983) et Onat (1984) proposent une équation constitutive supplémentaire pour le spin inélastique afin d'obtenir un taux corotationnel (dérivée objective) approprié. Ils présentent une expression générale pour le spin inélastique, issue du théorème de représentation, avec des coefficients inconnus. Leurs résultats mènent [Van der Giessen (1991)] à ce que le spin inélastique s'annule pour les matériaux à comportement inélastique isotrope. Une expression simplifiée du spin inélastique, pour de petites déformations élastiques - grandes déformations plastiques, est proposée par Dafalias (1985a, b), puis étudiée par d'autres auteurs [Zbib et Aifantis (1988), Raniecki et Samanta (1989), Van der Giessen (1991), Paulun et Pecherski (1992)]. Contrairement à cela, Stumpf et Badur (1990) et Nemat-Nasser (1990) montrent que le spin inélastique est une fonction qui dépend des grandeurs

cinématiques, et ainsi il n'y a pas lieu de rajouter une équation constitutive supplémentaire pour le spin inélastique.

Simo (1988) présente un concept pour les grandes déformations élastoplastiques basé sur la décomposition multiplicative du gradient des déformation, et utilisant la dérivée objective de Lie. Ce modèle a été considéré et appliqué par Duszek-Perzyna et Perzyna (1993) et Le et Stumpf (1993).

Dans le contexte de petites déformations, les modèles viscoplastiques de Perzyna (1966), de Bodner-Partom (1975) et celui de Chaboche (1977) sont connus comme les plus simples à utiliser pour décrire les principales propriétés viscoplastiques des métaux. Pour ces modèles constitutifs, lors des processus lent (viscosité négligeable), l'approche tend asymptotiquement vers la théorie élastoplastique [Haupt et al. (1991)].

Dans les dernières années, on a observé un développement dans la description du comportement viscoplastique en grandes déformations. Ainsi, Rubin (1986) développe un modèle en grandes déformations à partir de l'approche de Bodner-Partom (1975) destinée aux petites déformations. Il utilise le tenseur de déformation de Green droit pour une formulation dans la configuration de référence. Celle dans la configuration actuelle est donnée par Nishiguchi et al. (1990). Leurs équations constitutives inélastiques sont obtenues par le biais d'une dérivée objective qui est une extension de la dérivée de Jaumann.

Sansour et Kollmann (1997) proposent un modèle élasto-viscoplastique basé sur le modèle de Bodner-Partom. Ils utilisent, comme mesure du taux de déformation, le tenseur droit de la vitesse de la partie inélastique du gradient des déformations. Ce dernier étant conjugué au tenseur de contraintes intrinsèques de Noll, dit aussi tenseur de contrainte de Mandel [Kollmann et Sansour (1997)].

En appliquant le modèle de Chaboche, Lührs et al. (1997) présentent un modèle élasto-viscoplastique en grandes déformations, avec écrouissage cinématique. Pour définir les équations constitutives, ils utilisent la dérivée objective d'Oldroyd.

Dafalias (1990) montre l'intérêt du spin inélastique en viscoplasticité en énonçant un modèle viscoplastique avec écrouissage cinématique. Il utilise, comme dans son approche élastoplastique, l'équation constitutive du spin inélastique pour définir le taux corotationnel. Ce modèle est appliqué au problème de cisaillement simple pour un matériau rigide-viscoplastique.

3. Motivation

De nombreuses études ont porté sur la viscoplasticité en petites déformations. Plusieurs modélisations mathématiques, ainsi que des simulations numériques sont actuellement maîtrisées. En revanche, dans le domaine de grandes déformations, beaucoup de problèmes restent à explorer :

- ✓ L'unicité de la décomposition du gradient de déformation et tous les résultats cinématiques qui en résultent.
- ✓ Le choix d'une dérivée objective appropriée.
- ✓ L'intérêt du spin inélastique pour définir un taux corotationnel.
- ✓ L'anisotropie inélastique due aux effets d'écrouissage.
- ✓ L'écriture des équations constitutives élasto-viscoplastiques pratiques à implémenter dans un code de calcul.

C'est pour apporter une contribution à ce domaine que nous allons présenter un modèle du comportement élasto-viscoplastique. Il est basé sur une décomposition unique du gradient de déformation proposée par Schieck et Stumpf (1993) dans leur approche en élastoplasticité. Pour définir la dérivée objective, on utilisera un spin qui peut être déterminé à partir des considérations cinématiques seulement. On tiendra compte des effets d'écrouissage.

4. Contenu du rapport

Le **premier chapitre** de ce rapport sera consacré à la théorie des grandes déformations. Nous passerons en revue l'étude cinématique des grandes transformations, en présentant différentes mesures de déformations et de contraintes. On exposera la décomposition multiplicative du gradient de déformation en une partie élastique et une partie inélastique, puis les résultats cinématiques qu'elle engendre. Le formalisme des lois de comportement élastoplastiques sera présenté. Ensuite, en rappelant le principe d'objectivité, on essaiera de discerner, parmi les grandeurs utilisées, celles qui sont objectives et celles qui ne le sont pas. A la fin de ce chapitre, on donnera quelques dérivées objectives utilisées dans les littératures.

Nous consacrerons le **deuxième chapitre** au problème de cisaillement simple en grandes déformations. On donnera les différentes grandeurs cinématiques dans ce cas, ainsi que les équations constitutives pour un comportement rigide-plastique en tenant compte des effets de l'écroutissement. On se ramènera à un système d'équations différentielles faisant intervenir une variable qui dépendra de la dérivée objective utilisée. Ensuite, nous comparerons les résultats issus de la résolution de ce système, et ceci en appliquant, respectivement, la dérivée de Jaumann, de Green-Naghdi et celle de Dafalias.

Dans le **troisième chapitre**, nous présenterons un modèle élasto-viscoplastique en grandes déformations, en s'inspirant de l'approche élastoplastique de Schieck et Stumpf (1995). On décrira la cinématique du mouvement, qui va nous conduire à exprimer les spins, élastique et inélastique, en fonction des considérations cinématiques seulement. Ainsi, on pourra déterminer le spin matériel afin de construire une dérivée objective. Avec celle-ci, on donnera les équations constitutives élasto-viscoplastiques, en utilisant le modèle viscoplastique de Chaboche, et en prenant en considération les effets de l'écroutissement. Notre modèle tiendra compte de la surface

d'écoulement dynamique. Finalement, pour formuler une loi incrémentale, on déterminera l'opérateur tangent élasto-viscoplastique.

Pour valider notre modèle, on l'applique dans le **quatrième chapitre** au problème de cisaillement simple d'un matériau rigide-viscoplastique. L'analyse sera faite pour différentes vitesses de déformation. Ensuite, on cherchera la solution du cas rigide-plastique à partir du cas rigide-viscoplastique. Les résultats ainsi obtenus seront comparés avec ceux issus de l'application du modèle de Dafalias. Enfin, nous finirons par une discussion sur le spin inélastique. On montrera que l'équation constitutive du spin inélastique utilisée par Dafalias n'est autre qu'une bonne approximation de l'expression cinématique de ce spin. De ce fait, il est nullement besoin de rajouter une équation constitutive supplémentaire.

Chapitre 1

LES MILIEUX CONTINUS EN GRANDES TRANSFORMATIONS

1. Introduction

L'intérêt qu'a suscité, ces dernières décennies, le domaine des grandes transformations des milieux continus s'explique par son implication croissante dans les problèmes industriels. En effet, dans plusieurs cas on ne peut plus négliger la différence entre l'état initial et l'état actuel. Cela implique qu'il faut aborder la cinématique de la déformation dans sa plus grande généralité. D'autre part, du point de vue purement théorique, les lois de comportement en déformations quelconques, jusqu'à présent, ne sont pas totalement élucidées et les travaux dans ce sens se poursuivent. Nombreux et divers sont les travaux qui traitent ce sujet. Toutefois, l'expérimentation, qui devrait être l'arbitre des modèles proposés, reste difficile à mettre en œuvre.

Dans ce contexte, on essayera dans ce chapitre de passer en revue la cinématique des grandes transformations, ainsi que le formalisme des lois de comportement faisant intervenir différentes dérivées objectives qui caractérisent la diversité des approches parues dans la littérature.

2. Cinématique des grandes transformations

Dans ce paragraphe, nous résumons les bases principales, et nécessaires pour notre étude, de la cinématique des grandes transformations. Le lecteur intéressé par plus de détails sur ce sujet est renvoyé aux références [Naghdi (1991)], [Rougée (1997)].

2.1. Tenseur gradient de déformation

Pour décrire la déformation d'un solide en grandes transformations, nous suivons le mouvement au cours du processus de chacune de ses particules dans un repère inertiel par la fonction

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t),$$

où \mathbf{x} est la position de la particule P à l'instant t , qui au début du processus se trouvait en \mathbf{X} (Fig. 1.1.)

Le tenseur gradient de déformation \mathbf{F} est défini par :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (1.2.1)$$

on a alors

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}. \quad (1.2.2)$$

Ce tenseur gradient de déformation \mathbf{F} représente le mouvement local du milieu continu. Il permet également de passer de la configuration initiale à la configuration déformée [Sidoroff (1981)].

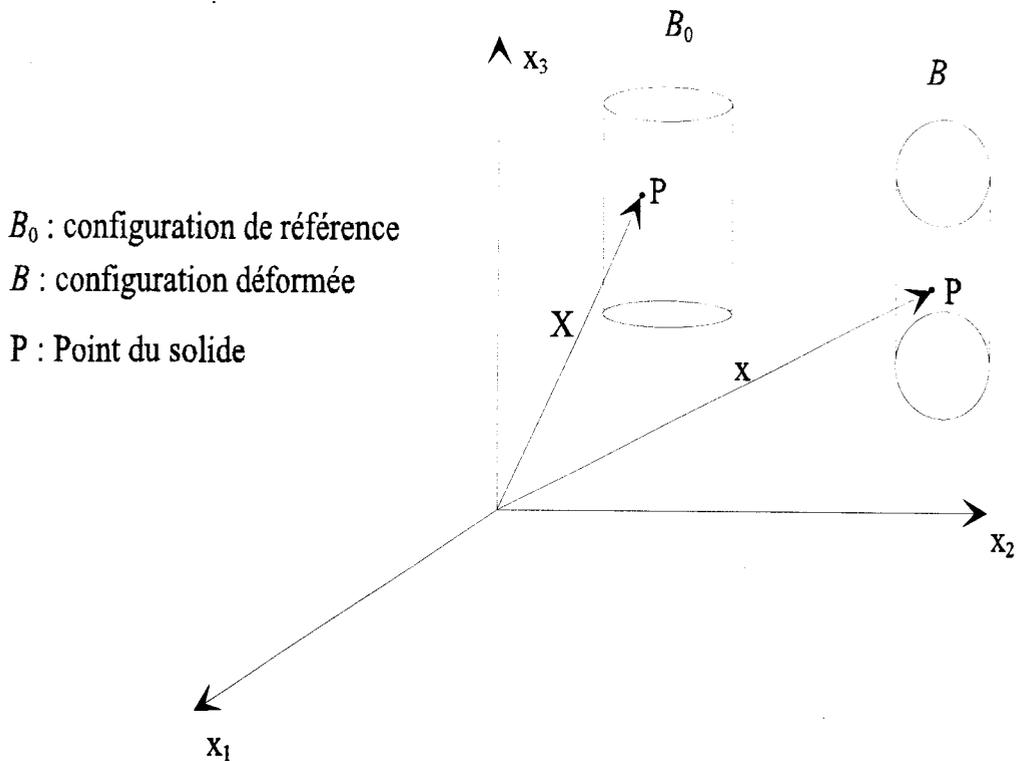


Fig. 1.1. Configuration de référence et déformée

2.2. Tenseur des déformations

Partons de la description du champ des déplacements

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \quad (1.2.3)$$

où \mathbf{X} , \mathbf{u} et \mathbf{x} sont respectivement le vecteur position initiale d'un point caractéristique du solide, le vecteur déplacement de ce point, et son vecteur position à l'instant t ; \mathbf{x} est une fonction analytique en \mathbf{X} et en t qui décrit le mouvement global.

Le tenseur des déformations quantifie les variations de longueur et d'angle évaluées par produit scalaire. Sachant deux vecteurs matériels $d\mathbf{X}$ et $\delta\mathbf{X}$ qui après déformation deviennent $d\mathbf{x}$ et $\delta\mathbf{x}$, une image des déformations, dl , peut être définie par

$$dl = d\mathbf{x} \delta\mathbf{x} - d\mathbf{X} \delta\mathbf{X}. \quad (1.2.4)$$

Ce scalaire, tenseur d'ordre zéro, ne dépend d'aucun repère particulier. Seule compte la configuration de référence par rapport à laquelle on mesure les déformations. En revanche, nous pouvons projeter cette expression dans deux repères particuliers, l'un étant lié à la configuration initiale et l'autre lié à la configuration courante. Pour cela, nous utiliserons le tenseur gradient des déformations qui permet de passer de l'un à l'autre par la relation (1.2.2). De ce fait :

$$d\mathbf{x} \delta\mathbf{x} = (\mathbf{F} d\mathbf{X}) (\mathbf{F} \delta\mathbf{X}) = d\mathbf{X} \mathbf{C} \delta\mathbf{X}, \quad (1.2.5)$$

avec $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ le tenseur de dilatation, dit aussi tenseur de Green. L'exposant "T" indique la transposition.

Pour caractériser les allongements, on a la relation (1.2.4) qui, en utilisant la formule (1.2.5), donne :

$$d\mathbf{x} \delta\mathbf{x} - d\mathbf{X} \delta\mathbf{X} = 2d\mathbf{X} \mathbf{E} \delta\mathbf{X}, \quad (1.2.6)$$

où le tenseur \mathbf{E} , dit tenseur de Green-Lagrange, est défini par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}). \quad (1.2.7)$$

$\mathbf{1}$ représente le tenseur identité d'ordre 2.

Les deux tenseurs \mathbf{C} et \mathbf{E} opèrent sur des grandeurs définies dans la configuration initiale; ce sont des tenseurs lagrangiens.

On peut, de la même manière, définir la déformation dans la configuration courante. On obtient alors comme pour la relation (1.2.6)

$$d\mathbf{x} \delta\mathbf{x} - d\mathbf{x} (\mathbf{B}^{-1}) \delta\mathbf{x} = d\mathbf{x} (2\mathbf{A}) \delta\mathbf{x}, \quad (1.2.8)$$

avec $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ qui vérifie $d\mathbf{X} \delta\mathbf{X} = d\mathbf{x} \mathbf{B}^{-1} \delta\mathbf{x}$.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1}). \quad (1.2.9)$$

\mathbf{B} est appelé tenseur de Cauchy; et \mathbf{A} le tenseur d'Euler-Almansi.

Les deux tenseurs \mathbf{B} et \mathbf{A} opèrent sur les grandeurs définies dans la configuration courante; ce sont des tenseurs eulériens.

La relation entre \mathbf{E} et \mathbf{A} qui définit les transports nécessaires au passage d'une configuration à une autre est donnée par :

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{A} \mathbf{F},$$

ou

$$(1.2.10)$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1}.$$

2.3. Tenseur des contraintes

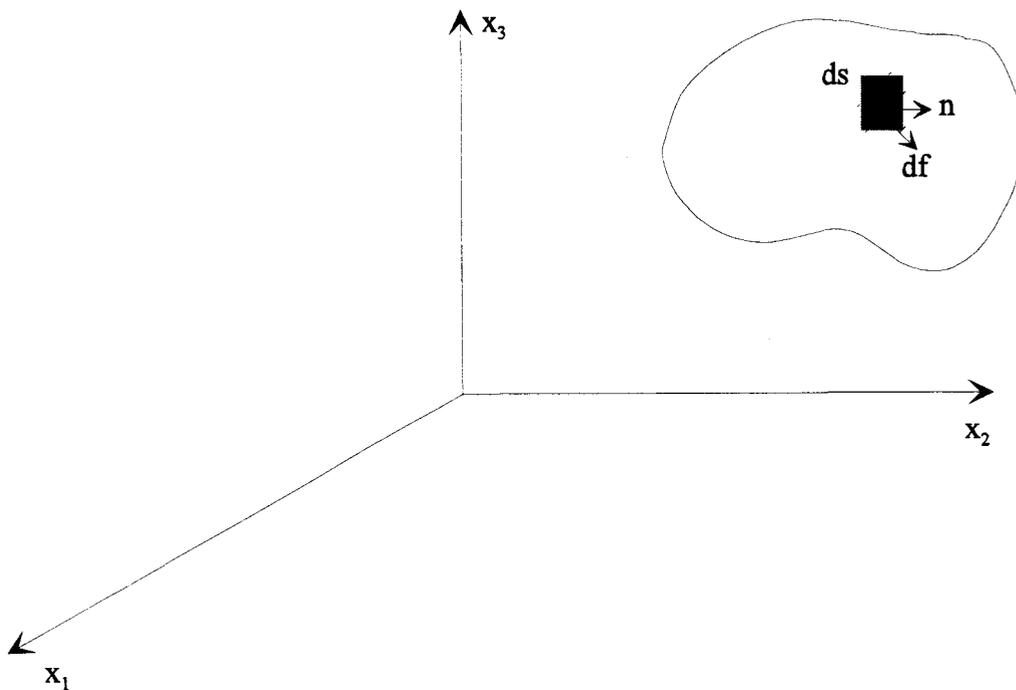


Fig. 1.2. Tenseur des contraintes.

Soit un élément de surface ds du solide, de normale unitaire \mathbf{n} dans la configuration déformée (Fig. 1.2.). On suppose que ds subit l'effort $d\mathbf{f}$, le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ est défini par la relation :

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds, \quad (1.2.11)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ est un tenseur symétrique eulerien. Il est maintenant possible de transporter ce tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ pour définir d'autres tenseurs des contraintes.

Si l'on choisit de caractériser l'élément de surface dans la configuration de référence par ds_0 , de normale unitaire \mathbf{n}_0 , on obtiendra :

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{n}_0 ds_0, \quad (1.2.12)$$

ce qui définit un nouveau tenseur des contraintes $\boldsymbol{\pi}$: le premier tenseur de Piola-Kirchhoff qui n'est ni lagrangien ni eulerien, et qui n'est pas symétrique. Pour supprimer ces inconvénients et obtenir un tenseur lagrangien et symétrique, on peut transporter $d\mathbf{f}$ dans la configuration de référence en écrivant :

$$d\mathbf{f}_0 = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{f} = \mathbf{S} \mathbf{n}_0 ds_0. \quad (1.2.13)$$

Le tenseur \mathbf{S} est le second tenseur de Piola-Kirchhoff ; il est symétrique.

La relation entre l'élément de surface dans la configuration de référence et dans la configuration courante se traduit par :

$$\mathbf{n} ds = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{n}_0 ds_0, \quad (1.2.14)$$

avec $J = \det \mathbf{F}$.

A partir des relations (1.2.11)-(1.2.14) on obtient aisément les formules permettant de relier ces tenseurs des contraintes :

$$\mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T. \quad (1.2.15)$$

Le tenseur $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma}$ est appelé tenseur des contraintes de Kirchhoff.

Pour illustrer la notion du produit contracté de deux tenseurs, regardons l'expression de la quantité intrinsèque que représente l'énergie interne locale des déformations W :

$$W = \mathbf{S} : \mathbf{E} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{A}, \quad (1.2.16)$$

où ":" symbolise le produit doublement contracté des deux tenseurs \mathbf{S} (respectivement $\boldsymbol{\tau}$) et \mathbf{E} (respectivement \mathbf{A}), le tenseur des contraintes et des déformations dans la configuration de référence et courante, respectivement. Le résultat doit être un scalaire intrinsèque.

2.4. Décomposition polaire, tenseur taux de déformation et taux de rotation

2.4.1. Décomposition polaire

Suivant le théorème de la décomposition polaire, le gradient de déformation \mathbf{F} peut être représenté par le produit d'un tenseur de rotation et d'élongation pure sous deux formes :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R}. \quad (1.2.17)$$

Ici, le tenseur de rotation \mathbf{R} est orthogonal et les tenseurs d'élongation droit \mathbf{U} et gauche \mathbf{V} sont symétriques, et définis positifs.

Ce théorème permet de séparer, dans \mathbf{F} , la déformation et la rotation (Fig. 1.3.). L'élongation \mathbf{U} est rattachée à la configuration de référence, tandis que \mathbf{V} est rattachée à la configuration actuelle.

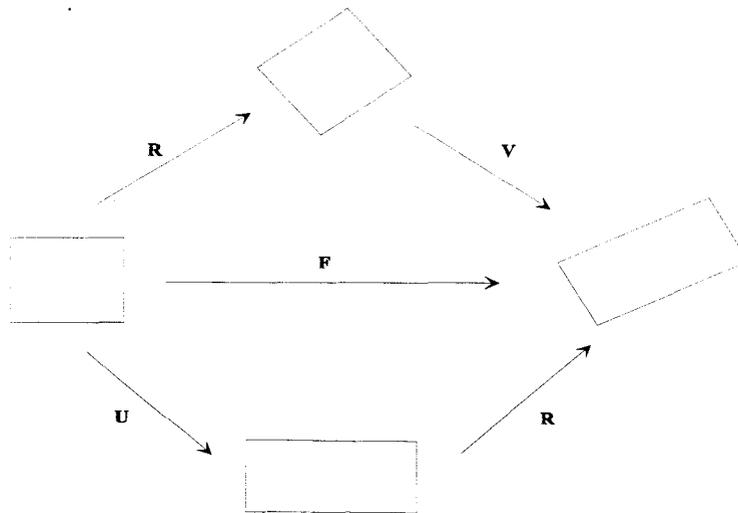


Fig. 1.3. Décomposition polaire.

Pour démontrer ce théorème, on écrit simplement :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2; \quad \mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2. \quad (1.2.18)$$

Les tenseurs \mathbf{U} et \mathbf{V} sont respectivement $\mathbf{C}^{\frac{1}{2}}$ et $\mathbf{B}^{\frac{1}{2}}$, en notant que $\mathbf{C}^{\frac{1}{2}}$ ayant les mêmes directions propres que \mathbf{C} , et pour valeurs propres les racines carrées des valeurs propres de \mathbf{C} . Pour obtenir \mathbf{U} , il faut donc diagonaliser \mathbf{C} et appliquer la racine carrée. Ceci est toujours possible puisque \mathbf{C} est symétrique et défini positif.

On construit de la même manière \mathbf{V} à partir de \mathbf{B} . Quant à \mathbf{R} , on l'obtient directement en écrivant, par exemple, $\mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1}$.

2.4.2. Taux de déformation et taux de rotation

La vitesse d'une particule d'un solide est donnée par :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}. \quad (1.2.19)$$

A partir de cette vitesse \mathbf{v} , on définit le tenseur gradient des vitesses des déformations

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}, \quad (1.2.20)$$

et si on pose $\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}}$, on peut écrire \mathbf{L} sous la forme suivante :

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}. \quad (1.2.21)$$

On rappelle que \mathbf{L} est un tenseur eulerien non symétrique, qui relie un vecteur $d\mathbf{x}$ à sa dérivée par rapport au temps $d\dot{\mathbf{x}}$ dans la configuration déformée :

$$d\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L} d\mathbf{x}. \quad (1.2.22)$$

En effet, on a la relation

$$d\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (1.2.23)$$

La partie symétrique de \mathbf{L} définit le tenseur du taux de déformation \mathbf{D} , quant à sa partie antisymétrique \mathbf{W} , elle représente le tenseur taux de rotation dit aussi spin total. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{D} + \mathbf{W}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{L}^s = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \\ \mathbf{W} &= \mathbf{L}^a = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T). \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

les exposants "s" et "a" désignent la partie symétrique et la partie antisymétrique, respectivement.

A partir des équations (1.2.22-24), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{d(\mathbf{dx} \delta \mathbf{x})}{dt} &= \dot{\mathbf{dx}} \delta \mathbf{x} + \mathbf{dx} \dot{\delta \mathbf{x}} \\
&= \mathbf{L} \mathbf{dx} \delta \mathbf{x} + \mathbf{dx} \mathbf{L} \delta \mathbf{x} \\
&= 2 \mathbf{dx} \mathbf{D} \delta \mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Par différentiation de la relation (1.2.6), on obtient aussi

$$\frac{d(\mathbf{dx} \delta \mathbf{x})}{dt} = 2 \mathbf{dX} \dot{\mathbf{E}} \delta \mathbf{X},$$

de sorte que le taux de déformation sera mesuré par $\dot{\mathbf{E}}$ dans la configuration de référence, et par \mathbf{D} dans la configuration courante, ces deux tenseurs étant "transportés" l'un vers l'autre par :

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F}. \quad (1.2.25)$$

2.5. Décomposition multiplicative de Lee

Comme en petites déformations, compte tenu du caractère élastoplastique (viscoplastique) des transformations, on cherche à décomposer la déformation totale en une partie élastique et une partie inélastique. Dans ce but, Bilby et al. (1957), Kröner (1960) et Lee (1969) ont introduit une décomposition multiplicative du gradient des déformations, appelée communément décomposition de Lee. Elle fait intervenir une configuration intermédiaire relâchée. Ce point de vue conduit à l'illustration de la figure (1.4.), avec

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (1.2.26)$$

soit,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^I. \quad (1.2.27)$$

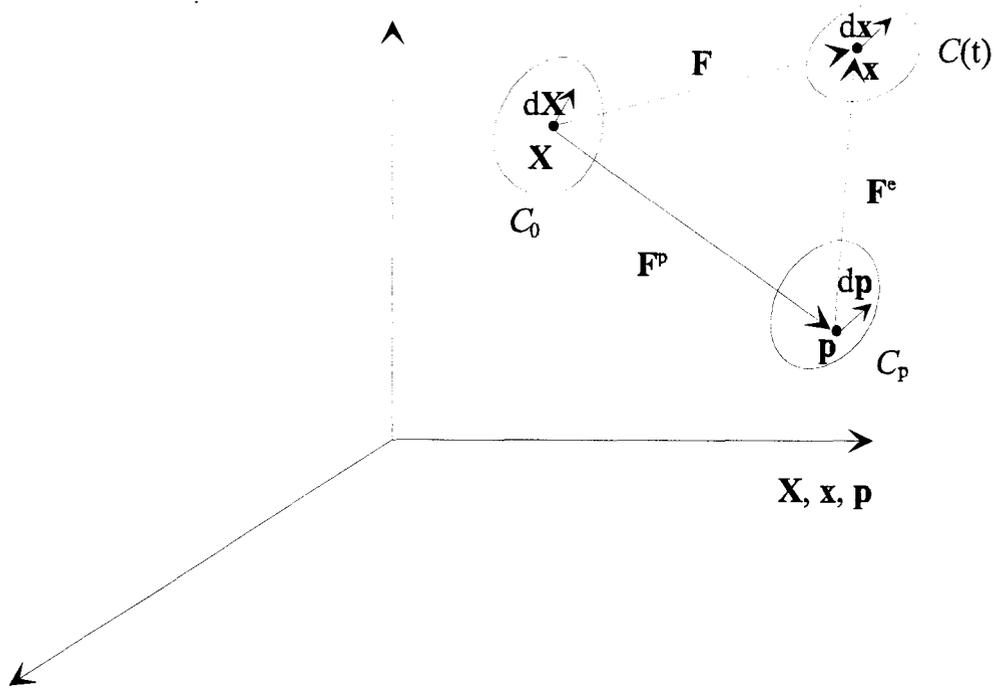


Fig. 1.4. Illustration de la décomposition multiplicative.

- \mathbf{x} : composantes dans la configuration déformée $C(t)$,
- \mathbf{p} : composantes dans la configuration relâchée C_p ,
- \mathbf{X} : composantes dans la configuration de référence C_0 ,
- \mathbf{F}^e : partie élastique du tenseur gradient des déformations représentant le passage de C_p à $C(t)$,
- \mathbf{F}^I : partie inélastique du tenseur gradient des déformations représentant le passage de C_0 à C_p .

Lorsque l'on applique une charge, la structure passe de la configuration C_0 à la configuration $C(t)$. La configuration relâchée C_p est introduite en supposant qu'après déchargement de la structure, on puisse libérer toutes les déformations élastiques par un découpage de celle-ci en morceaux infinitésimaux. Cette configuration est purement imaginaire, car elle est le résultat de la juxtaposition de morceaux déformés purement plastique, et dont l'assemblage est a priori discontinu, la dérivation partielle n'est plus

définie [Lee (1981)]. Elle est dite aussi configuration naturelle locale [Sidoroff (1981)]:

* naturelle, car elle est libre de contraintes, c'est la configuration obtenue par relâchement des contraintes,

* locale, parce qu'on ne peut la définir que localement au voisinage de chaque point. Il n'existe pas de configuration relâchée globale (existence de contraintes résiduelles). On parle en général du découpage du matériau en petits éléments que l'on relâche indépendamment.

L'analyse des déformations est exprimée, en général, en terme de gradient des déformations [relation (1.2.1)] pour la déformation totale élastoplastique (viscoplastique) dans la configuration $C(t)$. Le déchargement ayant lieu de $C(t)$ à C_p est considéré élastique et donc réversible. Les contraintes et les déformations élastiques étant nulles dans la configuration C_p [Lee (1981)], alors la déformation élastique dans la configuration $C(t)$ est donnée par le gradient des déformations élastique \mathbf{F}^e :

$$\mathbf{F}^e = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (1.2.28)$$

Vue que la contrainte est nulle en \mathbf{p} , la déformation est purement inélastique et constitue aussi la déformation inélastique en \mathbf{x} , sachant qu'il n'y a pas d'écoulement plastique de C_p à $C(t)$ à cause de la réversibilité. La déformation inélastique en \mathbf{p} et \mathbf{x} est alors exprimée par le gradient des déformations \mathbf{F}^I :

$$\mathbf{F}^I = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (1.2.29)$$

Dans la chronologie du processus de déformation, on observe une phase initiale purement élastique. Cette phase étant réversible, le retour à la configuration initiale est possible ; il est en effet obtenu par simple déchargement de la structure.

Les déformations inélastiques, qui apparaissent ensuite en certains points de la structure lorsque l'on poursuit le chargement, interdisent le retour à la configuration initiale. Cette chronologie est respectée par la décomposition de Lee.

D'après Lee (1981), “ F^e et F^I deviennent alors des fonctions ponctuelles des particules sans pour autant que cela rende la théorie plus complexe”. Elle a le mérite de mettre en évidence une décomposition du tenseur gradient des déformations qui permet la distinction entre une partie élastique et une partie inélastique. Cependant, l'inconvénient de cette décomposition réside dans le caractère local de la configuration relâchée (définie localement au voisinage de chaque point). On ne peut alors déterminer son orientation d'une manière unique, et par conséquent la décomposition du gradient des déformations sera exprimée à une rotation près du corps rigide.

3. Formulation des lois de comportement

Le débat sur le choix de la description cinématique des grandes déformations est loin d'être clos. La configuration relâchée n'est définie qu'à une rotation près du corps rigide. Toutefois, l'introduction de la configuration intermédiaire, qui coïncide avec la configuration relâchée en supposant que celle-ci soit invariante pour tout changement de référentiel, paraît mieux correspondre à la base physique de la déformation élastoplastique (viscoplastique) dans les réseaux cristallins [Lee (1969)]. La rotation du corps rigide est alors combinée avec le gradient des déformations inélastiques.

La substitution de la décomposition du gradient des déformations, relation (1.2.27), dans l'expression (1.2.21) du tenseur gradient des vitesses des déformations mène à

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{e-1} + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^I \mathbf{F}^{I-1} \mathbf{F}^{e-1}. \quad (1.3.1)$$

Comme on a souligné précédemment, la configuration relâchée est définie à une rotation près du corps rigide, ce qui engendre la non-unicité de la décomposition du gradient des déformations de Lee. Alors, pour des raisons pratiques, on considère le gradient des déformations élastiques \mathbf{F}^e , associé au déchargement, libre de rotation [Lubarda et Lee (1981)]. Cette hypothèse restrictive permet d'écrire

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{V}^e ; \mathbf{V}^e = \mathbf{V}^{eT}. \quad (1.3.2)$$

\mathbf{V}^e étant l'élongation élastique issue de la décomposition polaire.

L'équation (1.3.1) devient donc

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{V}}^e \mathbf{V}^{e-1} + \mathbf{V}^e \dot{\mathbf{F}}^I \mathbf{F}^{I-1} \mathbf{V}^{e-1}. \quad (1.3.3)$$

Les expressions du taux de déformation totale et du spin total sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D}^e + [\mathbf{V}^e (\mathbf{D}^I + \mathbf{W}^I) \mathbf{V}^{e-1}]^s \\ &= \mathbf{D}^e + [\mathbf{V}^e \mathbf{D}^I \mathbf{V}^{e-1}]^s + [\mathbf{V}^e \mathbf{W}^I \mathbf{V}^{e-1}]^s. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \mathbf{W}^e + [\mathbf{V}^e (\mathbf{D}^I + \mathbf{W}^I) \mathbf{V}^{e-1}]^a \\ &= \mathbf{W}^e + [\mathbf{V}^e \mathbf{D}^I \mathbf{V}^{e-1}]^a + [\mathbf{V}^e \mathbf{W}^I \mathbf{V}^{e-1}]^a. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Les exposants "s" et "a" désignent, respectivement, la partie symétrique et antisymétrique des quantités placées entre "crochets".

\mathbf{D}^e : la partie symétrique de $\dot{\mathbf{V}}^e \mathbf{V}^{e-1}$.

\mathbf{D}^I : la partie symétrique de $\dot{\mathbf{F}}^I \mathbf{F}^{I^{-1}}$.

\mathbf{W}^e : la partie antisymétrique de $\dot{\mathbf{V}}^e \mathbf{V}^{e^{-1}}$.

\mathbf{W}^I : la partie antisymétrique de $\dot{\mathbf{F}}^I \mathbf{F}^{I^{-1}}$.

L'équation (1.3.4) montre rigoureusement que :

$$\mathbf{D} \neq \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^I, \quad (1.3.6)$$

ce qui est en contradiction avec les courantes formulations élastoplastiques (viscoplastiques). Cependant, puisque pour les métaux, les déformations élastiques sont souvent petites, de l'ordre de 10^{-3} , $\mathbf{V}^e = \mathbf{1} + \delta$, où $\delta \approx 10^{-3}$, alors en négligeant δ par rapport à $\mathbf{1}$ dans les produits avec d'autres termes, l'équation (1.3.4) devient :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^I. \quad (1.3.7)$$

Fondamentalement, il n'y a pas de différence entre l'expression ci-dessus et celle de la vitesse de déformation totale dans le contexte des petites déformations plastiques. Cependant, l'hypothèse restrictive $\mathbf{F}^e = \mathbf{V}^e$, qui a permis l'écriture de cette égalité, viole le principe d'indifférence matérielle [Naghdi (1990)].

Pour une dérivée objective (respectant le principe d'indifférence matérielle qu'on détaillera dans le paragraphe suivant) donnée, on a la loi élastique linéarisée reliant le taux de déformation élastique, \mathbf{D}^e , et le taux de contraintes objectif choisi, $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$ ou $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e, \quad (1.3.8)$$

\mathbf{C}^e étant le module d'élasticité.

Dans le cas d'élasticité isotrope, on a:

$$\mathbf{C}^e = 2G \mathbf{I} + \left(K - \frac{2}{3}G\right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad (1.3.9)$$

où G et K sont, respectivement, les modules de cisaillement et de compression hydrostatique; \mathbf{I} et $\mathbf{1}$ sont les tenseurs unité du 4^{ème} et 2nd ordre, respectivement.

\mathbf{C}^e peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{C}^e = 2G \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

ν étant le coefficient de Poisson.

Considérons la fonction f , seuil d'écoulement donné par le critère d'écoulement, dépendant des variables d'états : la contrainte $\boldsymbol{\tau}$ et les variables internes.

On se place dans le cas d'écrouissage isotrope, l'équation de la surface d'écoulement est

$$f(\boldsymbol{\tau}, \kappa) = 0, \quad (1.3.10)$$

κ représente la variable interne associée à l'écrouissage isotrope.

On écrit la loi d'écoulement [Sidoroff (1981) ; Dafalias (1988)]

$$\mathbf{D}^I = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\boldsymbol{\tau}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \quad (1.3.11)$$

où $\dot{\lambda}$ ($\dot{\lambda} \geq 0$) correspond à l'indice de charge.

κ est liée à la déformation inélastique cumulée $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^I$ par

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^I = - \dot{\lambda} \frac{\partial f(\boldsymbol{\tau}, \kappa)}{\partial \kappa}. \quad (1.3.12)$$

Pour calculer $\dot{\lambda}$, on utilise la condition de consistance traduite par

$$\dot{f}(\boldsymbol{\tau}, \kappa) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = 0. \quad (1.3.13)$$

Les relations précédentes nous mènent à l'expression de l'indice de charge

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{C}^e : \mathbf{D}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{C}^e : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^I} : \frac{\partial f}{\partial \kappa}}, \quad (1.3.14)$$

où $\kappa = \kappa(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^I)$ est une donnée expérimentale.

D'après la relation (1.3.8), on peut écrire

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C}^e : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^I). \quad (1.3.15)$$

En substituant les relations précédentes dans (1.3.15), on obtient la relation liant le taux de contraintes au taux de déformation :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C}^{el} : \mathbf{D}, \quad (1.3.16)$$

avec

$$\mathbf{C}^{el} = \mathbf{C}^e - \frac{(\mathbf{C}^e : \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\tau}}) \otimes (\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{C}^e)}{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{C}^e : \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^I} : \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \kappa}}. \quad (1.3.17)$$

Cette écriture de loi de comportement présente l'avantage d'esquiver la décomposition en déformation élastique et inélastique. Cependant, il reste le choix de dérivées objective, parmi la multitude proposée dans la littérature, qui est difficile et demande une justification physique.

4. Objectivité des lois de comportement

Lorsque, en grandes déformations, on postule une loi de comportement, la première chose à faire est de vérifier qu'elle est objective, c'est-à-dire, invariante dans tout changement de référentiel. Elle devra donc s'exprimer comme une relation entre des quantités elles-mêmes objectives. Il faut donc discerner, parmi les tenseurs qui ont été introduits, ceux qui sont objectifs et ceux qui ne le sont pas; seuls les premiers pourront intervenir dans une loi de comportement.

Soit un solide dont le mouvement est décrit dans deux référentiels distincts par \mathbf{x} et \mathbf{x}^* , respectivement. A chaque instant, un changement de référentiel sera traduit par

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}, \quad (1.4.1)$$

où $\mathbf{c}(t)$ représente une translation, et $\mathbf{Q}(t)$ un tenseur orthogonal de rotation tel que $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{1}$.

Considérer qu'une quantité est objective, c'est dire qu'elle ne dépend pas du choix de l'observateur, par exemple la distance, l'angle, la force ... Par contre, parmi les grandeurs non-objectives on peut citer la position d'un point, sa vitesse ...

En ce qui concerne le tenseur gradient des déformations \mathbf{F} , les relations (1.2.1) et (1.4.1) nous permettent d'écrire sa loi de transformation

$$\mathbf{F}^* = \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (1.4.2)$$

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q} \mathbf{F}. \quad (1.4.3)$$

On en tire directement les lois de transformation des différents tenseurs introduits précédemment ; par exemple :

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{F}^{*T} \mathbf{F}^* = \mathbf{F}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{C}, \quad (1.4.4)$$

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{F}^* \mathbf{F}^T = \mathbf{Q} \mathbf{F} \mathbf{F}^T \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{Q}^T, \quad (1.4.5)$$

et ainsi de suite. Finalement on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^* &= \mathbf{C}; & \mathbf{B}^* &= \mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{Q}^T; \\ \mathbf{E}^* &= \mathbf{E}; & \mathbf{A}^* &= \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T; \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U}; \quad \mathbf{V}^* = \mathbf{Q} \mathbf{V} \mathbf{Q}^T; \quad \mathbf{R}^* = \mathbf{Q} \mathbf{R}.$$

Les tenseurs \mathbf{C} , \mathbf{E} et \mathbf{U} sont invariants par rapport au changement de référentiel. Ce sont des tenseurs dans la configuration de référence, qui ne sont pas affectés par le changement de repère.

Les tenseurs \mathbf{B} , \mathbf{A} et \mathbf{V} se transforment comme des tenseurs dans la configuration courante, ce sont des tenseurs "objectifs".

Le même calcul peut se faire pour les tenseurs cinématiques. En particulier, la loi de transformation pour le tenseur gradient des vitesses \mathbf{L} est :

$$\mathbf{L}^* = \dot{\mathbf{F}}^* \mathbf{F}^{*-1} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{Q}^T, \quad (1.4.7)$$

d'où

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{Q} \mathbf{L} \mathbf{Q}^T + \boldsymbol{\Omega}. \quad (1.4.8)$$

$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T$ étant le tenseur antisymétrique qui décrit la vitesse de rotation relative des deux référentiels. On en tire directement la loi de transformation des tenseurs taux de déformation \mathbf{D} et spin total \mathbf{W} :

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T, \quad (1.4.9)$$

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{Q} \mathbf{W} \mathbf{Q}^T + \boldsymbol{\Omega}. \quad (1.4.10)$$

Le tenseur taux de déformation \mathbf{D} est objectif, tandis que le tenseur spin total ne l'est pas. Une loi de comportement pourra donc faire intervenir \mathbf{D} mais pas \mathbf{W} .

D'après les relations entre les différents tenseurs des contraintes données dans (1.2.15), on peut avoir les transformations suivantes pour les tenseurs des contraintes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^* &= \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}^T ; & \boldsymbol{\pi}^* &= \mathbf{Q} \boldsymbol{\pi} ; \\ \boldsymbol{\tau}^* &= \mathbf{Q} \boldsymbol{\tau} \mathbf{Q}^T ; & \mathbf{S}^* &= \mathbf{S}. \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

4.1. Dérivations objectives

Soit \mathbf{M} un tenseur objectif, c'est-à-dire qui se transforme dans la configuration actuelle tel que :

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{Q} \mathbf{M} \mathbf{Q}^T. \quad (1.4.12)$$

Un calcul direct donne la loi de transformation de sa dérivée par rapport au temps :

$$\dot{\mathbf{M}}^* = \mathbf{Q} \dot{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^T + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{M}^* - \mathbf{M}^* \boldsymbol{\Omega}.$$

Ainsi la dérivée temporelle d'un tenseur objectif n'en est pas un. Une autre difficulté surgit si l'on considère un matériau soumis à un état de contraintes constant sous déformation constante. Par suite de la rotation du matériau, la dérivée temporelle du tenseur des contraintes ne sera pas nulle, mais cette dérivée non nulle ne correspondra qu'à une variation factice résultant du mouvement de l'observateur par rapport au matériau. Ainsi si une loi de comportement doit faire intervenir une vitesse des contraintes, son écriture en grandes déformations posera un problème : on ne peut pas utiliser la dérivée temporelle.

La solution consiste à utiliser une dérivée objective. Pour construire celle-ci, il faut éliminer les rotations parasites en dérivant le tenseur \mathbf{M} dans un repère lié à la matière.

4.2. Exemples de dérivées objectives

Plusieurs dérivées objectives ont été proposées dont on citera quelques unes dans le tableau 1.

Tableau 1

Truesdell	$\overset{\nabla}{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{M}} - \mathbf{L} \mathbf{M} - \mathbf{M} \mathbf{L}^T + \mathbf{M} \operatorname{tr}(\mathbf{D})$
Jaumann	$\overset{\nabla}{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{M}} - \mathbf{W} \mathbf{M} + \mathbf{M} \mathbf{W}$
Green-Naghdi	$\overset{\nabla}{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{M}} - \boldsymbol{\Omega}_{\text{GN}} \mathbf{M} + \mathbf{M} \boldsymbol{\Omega}_{\text{GN}}$
Dafalias	$\overset{\nabla}{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{M}} - \boldsymbol{\Omega}_{\text{D}} \mathbf{M} + \mathbf{M} \boldsymbol{\Omega}_{\text{D}}$
Lee	$\overset{\nabla}{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{M}} - \boldsymbol{\Omega}_{\text{L}} \mathbf{M} + \mathbf{M} \boldsymbol{\Omega}_{\text{L}}$
Paulun-Pecherski	$\overset{\nabla}{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{M}} - \boldsymbol{\Omega}_{\text{pp}} \mathbf{M} + \mathbf{M} \boldsymbol{\Omega}_{\text{pp}}$
Durban-Baruch	$\overset{\nabla}{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{M}} - \left(\frac{1}{2} \mathbf{D} + \mathbf{W}\right) \mathbf{M} + \mathbf{M} \left(\mathbf{W} - \frac{1}{2} \mathbf{D}\right) + \mathbf{M} \operatorname{tr}(\mathbf{D})$
Sowerby-Chu	$\overset{\nabla}{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{M}} - \boldsymbol{\Omega}_{\text{SC}} \mathbf{M} + \mathbf{M} \boldsymbol{\Omega}_{\text{SC}}$
Schieck-Stumpf	$\overset{\nabla}{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{M}} - \boldsymbol{\Omega}_{\text{SS}} \mathbf{M} + \mathbf{M} \boldsymbol{\Omega}_{\text{SS}}$

Toutes ces dérivées sont objectives ; elles s'annulent pour un tenseur matériellement constant, et elles coïncident si \mathbf{D} est nul, c'est-à-dire pour un mouvement du corps rigide.

Les expressions des différents spins formulés dans le tableau ci-dessus sont données dans le tableau 2.

Tableau 2

$\Omega_{GN} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$	\mathbf{R} : tenseur orthogonal issu de la décomposition polaire.
$\Omega_D = \mathbf{W} + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{D} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{D})$	ρ : coefficient dépendant des variables d'écroutissage, supposé constant dans le cas de cisaillement simple. $\boldsymbol{\alpha}$: contrainte interne associée à l'écroutissage cinématique (backstress).
$\Omega_L = \mathbf{W} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{D} + \mathbf{D} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$	\mathbf{n} : vecteur principal associé à la valeur principale maximale de $\boldsymbol{\alpha}$.
$\Omega_{pp} = \mathbf{W} + \frac{\delta (\mathbf{D} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{D})}{\left\{ \text{tr} [(\mathbf{D} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{D})^2] \right\}^{\frac{1}{2}}}$	$\delta = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\xi}{3 \varepsilon^2 (1 + 3 \varepsilon^2)}$; $\xi = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{tr}(\mathbf{D}^2)$; $\varepsilon = \int_0^t \xi \, dx$.
$\Omega_{SC} = \dot{\mathbf{R}}_E \mathbf{R}_E^T$	\mathbf{R}_E : transformation diagonale du tenseur d'élongation \mathbf{V} , $\mathbf{V} = \mathbf{R}_E \boldsymbol{\lambda} \mathbf{R}_E^T$. $\boldsymbol{\lambda}$: tenseur diagonal contenant les valeurs propres de \mathbf{V} .
$\Omega_{SS} = \mathbf{W} - (\mathbf{W}^e + \mathbf{W}^p)$	\mathbf{W}^e : partie élastique du spin total. \mathbf{W}^p : partie plastique du spin total.

Le tenseur spin total \mathbf{W} a été fréquemment utilisé pour définir le taux corotationnel, ce qui correspond à la dérivée de Jaumann. Cependant, Lee et al. (1983) ainsi que Dafalias (1983) ont montré que l'adoption de la dérivée de Jaumann conduisait à des oscillations, difficiles à expliquer physiquement, des contraintes pour un accroissement monotone de déformation de cisaillement. Une analyse plus détaillée sur les insuffisances de la dérivée de Jaumann a été effectuée par Molenkamp (1986).

Une étude comparative sur les dérivées objectives [Szabo et Balla (1989)] a révélé une similarité entre la dérivée de Durban-Baruch et de Jaumann d'une part, et entre celle de Green-Naghdi et Sowerby-Chu de l'autre. L'utilisation des dérivées objectives de Green-Naghdi et de Sowerby-Chu conduisent à des réponses de

contraintes qui croient d'une manière monotone avec la déformation. Néanmoins, on n'a pas de relation entre le spin relatif à ces dérivées objectives et l'état actuel des contraintes (pour une surface d'écoulement donnée).

Quant à la dérivée de Lee, elle relève des discontinuités du spin avec lequel est écrite, et par conséquent des discontinuités du taux de contraintes [Dafalias (1983)].

En utilisant les dérivées objectives de Dafalias et de Paulun-Pecherski, on parvient, comme pour les dérivées de Lee, de Green-Naghdi et de Sowerby-Chu, à éliminer les oscillations de contraintes. Toutefois, elles font intervenir une équation constitutive supplémentaire pour le spin inélastique.

Alternativement, l'utilisation de la dérivée de Schieck-Stumpf conduit à des résultats satisfaisantes, et seulement en se basant sur des considération cinématique pour calculer le spin inélastique. Il n'est nul besoin de rajouter une équation constitutive supplémentaire pour celui-ci. C'est pour cette raison qu'on s'est intéressé à cette approche pour l'appliquer dans une solution viscoplastique (chapitre 3).

Chapitre 2

EXEMPLE D'APPLICATION DANS LE CAS DE CISAILLEMENT SIMPLE (RIGIDE-PLASTIQUE)

1. Cinématique du cisaillement simple

Les problèmes en grandes déformations, que ce soit en hypoélasticité ou dans le cas rigide-plastique, ont vu le plus souvent leurs applications dans le cas du cisaillement simple qui permet d'observer des changements de longueur et de rotation, et par conséquent met en évidence le rôle du spin. La géométrie du cisaillement simple est schématisée par la figure (2.1.)

Pour le cisaillement simple suivant la direction x_1 , le mouvement est décrit par :

$$\begin{aligned}x_1 &= X_1 + \gamma X_2 , \\x_2 &= X_2 , \\x_3 &= X_3 .\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

x_i et X_i , $i = 1, 2, 3$, sont les coordonnées cartésiennes dans la configuration courante (à l'instant t) et de la position initiale du point du matériau, respectivement.

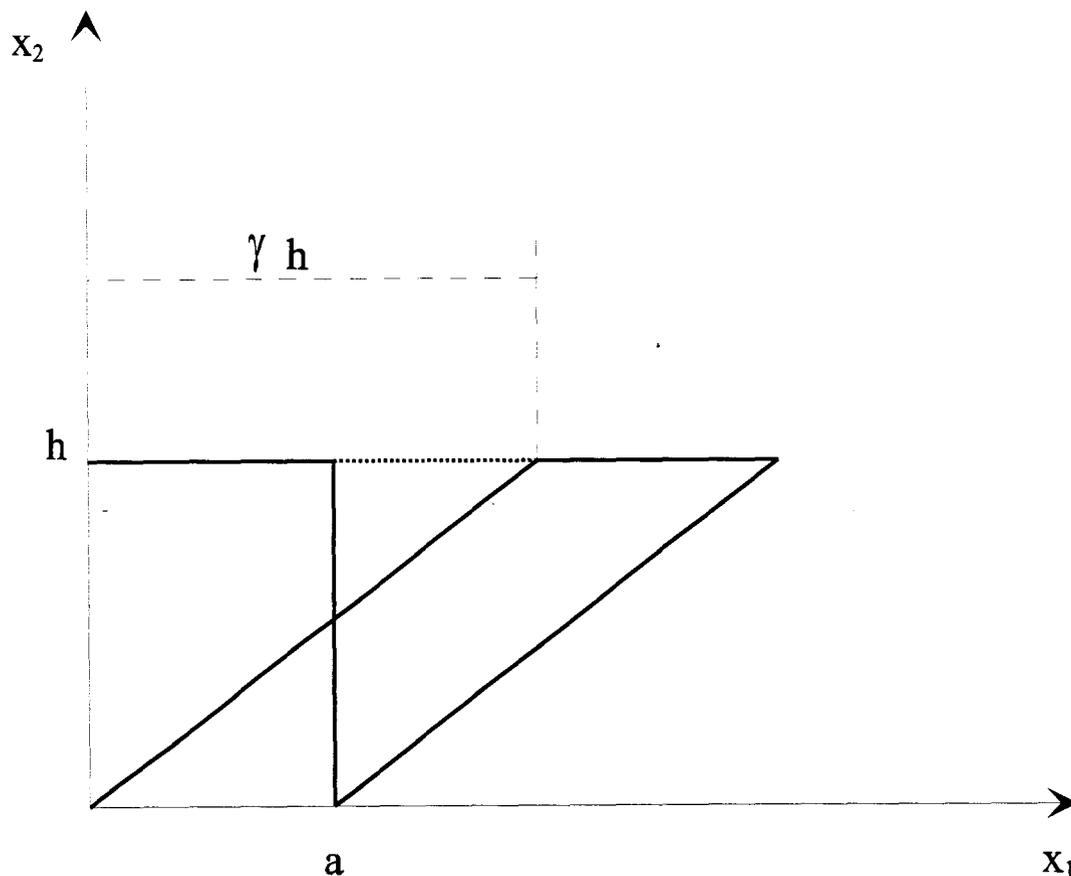


Fig. 2.1. Schématisation du cisaillement simple.

Les relations (2.1.1) permettent d'écrire les expressions du gradient des déformations (1.2.1), du gradient des vitesses (1.2.21), du taux de déformations (1.2.24)₂ et du spin total (1.2.24)₃ sous la forme

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.1.2)_1$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ -\dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.1.2)_2$$

Les tenseurs d'élongation et de rotation issus de la décomposition polaire \mathbf{U} , \mathbf{V} et \mathbf{R} dérivent de la relation (1.2.17) sous la forme $\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, $\mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$ et $\mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1}$, ainsi dans le cas de cisaillement simple, ils s'écrivent tels que

$$\mathbf{U} = \left(1 + \frac{\gamma^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & \frac{\gamma^2}{2} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 + \frac{\gamma^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad (2.1.3)$$

$$\mathbf{V} = \left(1 + \frac{\gamma^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \frac{\gamma^2}{2} + 1 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 + \frac{\gamma^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad (2.1.4)$$

$$\mathbf{R} = \left(1 + \frac{\gamma^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ -\frac{\gamma}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 + \frac{\gamma^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \quad (2.1.5)$$

2. Equations constitutives

On établira les équations constitutives en vue de faire une comparaison entre les résultats obtenus en appliquant des approches utilisant différentes dérivées objectives.

Nous traiterons le cas des matériaux rigide-plastiques avec écrouissage isotrope et cinématique. La surface d'écoulement est donnée selon le critère de von Mises par :

$$f = \frac{3}{2} (\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}) : (\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}) - \tau_y^2 = 0, \quad (2.2.1)$$

où $\boldsymbol{\tau}'$ représente le déviateur du tenseur des contraintes de Kirchhoff, $\boldsymbol{\alpha}$ le tenseur des contraintes internes associées à l'écrouissage cinématique et τ_y correspond à la contrainte d'écoulement.

L'écrouissage isotrope sera décrit par :

$$\frac{d\tau_y}{d\bar{\varepsilon}^p} = h_i, \quad (2.2.2)$$

avec $\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \left[\frac{2}{3} \mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p \right]^{\frac{1}{2}}$, et h_i étant le module d'écrouissage isotrope.

La normale unitaire à la surface représentée par $f = 0$ est

$$\mathbf{n} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha})}{\tau_y}. \quad (2.2.3)$$

D'après la relation (2.2.1) \mathbf{n} vérifie bien $\mathbf{n} : \mathbf{n} = 1$.

L'équation d'évolution de la contrainte interne associée à l'écrouissage cinématique est celle de Prager-Ziegler :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{2}{3} h_\alpha \mathbf{D}^p. \quad (2.2.4)$$

h_α est un paramètre constant associé à l'écrouissage cinématique, qui correspond au module plastique en tension-compression uniaxiale.

Dans le cas du matériau rigide-plastique, le taux de déformation élastique est par définition nul, donc $\mathbf{D} = \mathbf{D}^p$. La loi d'écoulement est de la forme :

$$\mathbf{D}^p = \langle \lambda \rangle \mathbf{n}, \quad (2.2.5)$$

où les crochets de Macauley sont définis par

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{2} (|\mathbf{x}| + \mathbf{x}).$$

La condition de consistance $\dot{f} = 0$, traduite par la relation (1.3.13), nous donne :

$$\dot{f} = 3 (\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}) : (\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}'} - \overset{\nabla}{\boldsymbol{\alpha}}) = 0. \quad (2.2.6)$$

En utilisant les relations (2.2.3) et (2.2.4), et en développant l'expression (2.2.6) on a :

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}) : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}'} &= (\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}) : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\alpha}} \\ \mathbf{n} : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}'} &= \mathbf{n} : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{2}{3} h_\alpha \mathbf{n} : \mathbf{D}^p = \frac{2}{3} h_\alpha \langle \lambda \rangle \mathbf{n} : \mathbf{n} \\ &= \frac{2}{3} h_\alpha \langle \lambda \rangle. \end{aligned}$$

D'où

$$\langle \lambda \rangle = \frac{3}{2 h_\alpha} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}'} : \mathbf{n}. \quad (2.2.7)$$

Alors la loi d'écoulement donnée par l'équation (2.2.5) devient

$$\mathbf{D}^p = \frac{3}{2 h_\alpha} (\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}'} : \mathbf{n}) \mathbf{n}. \quad (2.2.8)$$

Si l'on considère les suppositions simplificatrices : $\tau_{33} = 0$ et que la valeur initiale du tenseur de contraintes internes associées à l'écoulement cinématique est nulle, traduit par [Lee et al. (1983) ; Dafalias (1985)]

$$\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0 ; \alpha_{11} + \alpha_{22} = 0,$$

et sachant que

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^p = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.2.9)$$

En identifiant la relation (2.2.9) à (2.2.5) en tenant compte de (2.2.3), on trouve

$$\tau'_{11} = \tau_{11} = \alpha_{11} = -\tau'_{22} = -\tau_{22} = -\alpha_{22}, \quad (2.2.10)$$

$$\tau_{13} = \tau_{23} = 0.$$

L'équation de la surface d'écoulement (2.2.1) devient ainsi

$$f = \frac{3}{2} [2 (\tau_{12} - \alpha_{12})^2] - \tau_y^2, \quad (2.2.11)$$

ce qui conduit à

$$\tau_{12} = \alpha_{12} \pm \frac{\tau_y}{\sqrt{3}}. \quad (2.2.12)$$

En résumé on aura

$$\begin{aligned}\tau_{11} = \tau'_{11} = \alpha_{11} = -\tau_{22} = -\tau'_{22} = -\alpha_{22}, \\ \tau_{12} = \alpha_{12} \pm \frac{\tau_y}{\sqrt{3}}.\end{aligned}\tag{2.2.13}$$

Le $\pm \frac{\tau_y}{\sqrt{3}}$, pour τ_{12} , correspond à $\dot{\gamma} > 0$ et $\dot{\gamma} < 0$, respectivement. Ces relations vérifient bien le critère d'écoulement exprimé par l'équation (2.2.1).

D'une manière générale, on formule les dérivées objectives d'un tenseur sous la forme

$$\overset{\nabla}{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{M}} + \mathbf{M} \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{M},\tag{2.2.14}$$

où $\boldsymbol{\Omega}$ est le tenseur spin, antisymétrique, relatif à la dérivée objective. Il est représenté par

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en appliquant cela à $\boldsymbol{\alpha}$, on obtient

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\alpha},\tag{2.2.15}$$

soit

$$\overset{\nabla}{\alpha}_{11} = \dot{\alpha}_{11} - 2 \omega \alpha_{12},\tag{2.2.16}$$

$$\overset{\nabla}{\alpha}_{12} = \dot{\alpha}_{12} + 2 \omega \alpha_{11}.$$

Une identification avec l'équation (2.2.4) nous mène à

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{11} - 2\omega\alpha_{12} &= 0, \\ \dot{\alpha}_{12} + 2\omega\alpha_{11} &= \frac{h_\alpha}{3}\dot{\gamma},\end{aligned}\tag{2.2.17}$$

d'où le système d'équations à intégrer

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_{11}}{d\gamma} &= \frac{2\omega}{\dot{\gamma}}\alpha_{12}, \\ \frac{d\alpha_{12}}{d\gamma} &= \frac{h_\alpha}{3} - \frac{2\omega}{\dot{\gamma}}\alpha_{11}.\end{aligned}\tag{2.2.18}$$

2.1. Solution relative à la dérivée de Jaumann

La dérivée objective de Jaumann utilise le spin total \mathbf{W} . De ce fait, avec $\omega = \frac{\dot{\gamma}}{2}$,

le système d'équations (2.2.18) devient

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_{11}}{d\gamma} &= \alpha_{12}, \\ \frac{d\alpha_{12}}{d\gamma} &= \frac{h_\alpha}{3} - \alpha_{11}.\end{aligned}\tag{2.2.19}$$

En dérivant l'équation (2.2.19)₁ on obtient

$$\frac{d^2\alpha_{11}}{d\gamma^2} = \frac{d\alpha_{12}}{d\gamma},\tag{2.2.20}$$

puis en substituant celle-ci dans (2.2.19)₂ on arrive à

$$\frac{d^2 \alpha_{11}}{d\gamma^2} + \alpha_{11} = \frac{h_\alpha}{3}. \quad (2.2.21)$$

De la même manière, en dérivant (2.2.19)₂ et en la substituant dans (2.2.19)₁ on trouve

$$\frac{d^2 \alpha_{12}}{d\gamma^2} + \alpha_{12} = 0. \quad (2.2.22)$$

Avec les conditions initiales

$$\alpha_{11}(0) = \frac{d\alpha_{11}(0)}{d\gamma} = 0,$$

les solutions du système d'équations (2.2.19) sont alors

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{3} h_\alpha (1 - \cos\gamma), \\ \alpha_{12} &= \frac{1}{3} h_\alpha \sin\gamma. \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

A partir des relations données dans l'équation (2.2.13), on peut déduire les réponses des contraintes sous la forme

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \frac{1}{3} h_\alpha (1 - \cos\gamma), \\ \tau_{12} &= \frac{1}{3} h_\alpha \sin\gamma \pm \frac{\tau_y}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

D'après ces équations (voir Fig. 2.2. et Fig. 2.3.), on voit l'aspect oscillatoire des réponses des contraintes dont on a parlé précédemment. Ces oscillations n'ont pas

d'explication physique, d'où l'inconvénient de l'utilisation du spin total dans les dérivées objectives.

2.2. Solution relative à la dérivée de Green-Naghdi

En utilisant le spin lagrangien $\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$ pour la dérivée objective proposée par Green-Naghdi, le spin ω défini dans le système d'équations (2.2.16) est obtenu grâce à l'expression de \mathbf{R} dans (2.1.5)

$$\omega = \frac{2\dot{\gamma}}{\gamma^2 + 4}. \quad (2.2.25)$$

Ainsi le système d'équations (2.2.18) s'écrira, dans ce cas, sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d \alpha_{11}}{d \gamma} &= \frac{4}{\gamma^2 + 4} \alpha_{12}, \\ \frac{d \alpha_{12}}{d \gamma} &= \frac{h_\alpha}{3} - \frac{4}{\gamma^2 + 4} \alpha_{11}. \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

De la même manière et avec les mêmes conditions initiales que le cas précédent, c'est à dire en dérivant (2.2.26)₁ et en substituant dedans (2.2.26)₂, on arrive à

$$\frac{d^2 \alpha_{11}}{d \gamma^2} + \frac{2 \gamma}{\gamma^2 + 4} \frac{d \alpha_{11}}{d \gamma} + \frac{16}{(\gamma^2 + 4)^2} \alpha_{11} = \frac{4}{\gamma^2 + 4} \frac{h_\alpha}{3}. \quad (2.2.27)$$

Idem, pour obtenir l'équation différentielle en α_{12} , on dérive (2.2.26)₂ et on substitue dedans (2.2.26)₁ afin de trouver

$$\frac{d^2 \alpha_{12}}{d \gamma^2} + \frac{2 \gamma}{\gamma^2 + 4} \frac{d \alpha_{12}}{d \gamma} + \frac{16}{(\gamma^2 + 4)^2} \alpha_{12} = \frac{2 \gamma}{\gamma^2 + 4} \frac{h_\alpha}{3}. \quad (2.2.28)$$

On introduit le changement de variable $\Phi = \text{tg}^{-1} \frac{\gamma}{2}$. En observant que

$\frac{d}{d\gamma} = [2(1 + \text{tg}^2\Phi)]^{-1} \frac{d}{d\Phi}$, les équations (2.2.27) et (2.2.28) se réduisent à

$$\frac{d^2 \alpha_{11}}{d\Phi^2} + 4 \alpha_{11} = \frac{4}{3} h_\alpha (1 + \text{tg}^2\Phi), \quad (2.2.29)$$

$$\frac{d^2 \alpha_{12}}{d\Phi^2} + 4 \alpha_{12} = \frac{4}{3} h_\alpha \text{tg}\Phi (1 + \text{tg}^2\Phi). \quad (2.2.30)$$

La solution générale des équations homogènes est de la forme $c_1 \cos 2\Phi + c_2 \sin 2\Phi$, plus une solution particulière pour chacune des équations (2.2.29) et (2.2.30) obtenue en variant la constante. Les constantes c_1 et c_2 sont retrouvées à partir des conditions initiales. Ainsi on trouve :

$$\alpha_{11} = \frac{1}{3} h_\alpha [4 \cos 2\Phi \text{Ln}(\cos\Phi) - 2 \sin 2\Phi (\text{tg}\Phi - 2\Phi)], \quad (2.2.31)$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{3} h_\alpha [2 \sin^2\Phi \text{tg}\Phi + 4 \Phi \cos 2\Phi - (1 + 4\text{Ln}(\cos\Phi)) \sin 2\Phi]. \quad (2.2.32)$$

Des relations (2.2.13) on tire les réponses des contraintes

$$\tau_{11} = \frac{1}{3} h_\alpha [4 \cos 2\Phi \text{Ln}(\cos\Phi) - 2 \sin 2\Phi (\text{tg}\Phi - 2\Phi)], \quad (2.2.33)$$

$$\tau_{12} = \frac{1}{3} h_\alpha [2 \sin^2\Phi \text{tg}\Phi + 4 \Phi \cos 2\Phi - (1 + 4\text{Ln}(\cos\Phi)) \sin 2\Phi] \pm \frac{\tau_y}{\sqrt{3}}. \quad (2.2.34)$$

Finalement ces réponses, en fonction de la déformation de cisaillement γ , s'écrivent sous la forme suivante :

$$\tau_{11} = \frac{h_\alpha}{3} \frac{1}{\gamma^2 + 4} \left[4\gamma \left(4\text{tg}^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \gamma \right) - 4(\gamma^2 - 4) \text{Ln} \left(\frac{2}{(\gamma^2 + 4)^{\frac{1}{2}}} \right) \right], \quad (2.2.35)$$

$$\tau_{12} = \frac{h_\alpha}{3} \frac{1}{\gamma^2 + 4} \left[\gamma^3 - 4(\gamma^2 - 4) \text{tg}^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right) - 4\gamma \left\{ 1 + 4\text{Ln} \left(\frac{2}{(\gamma^2 + 4)^{\frac{1}{2}}} \right) \right\} \right] \pm \frac{\tau_y}{\sqrt{3}}.$$

D'après ces équations, on voit que la réponse des contraintes, dans ce cas, croit d'une manière monotone avec γ (voir Fig. 2.2. et Fig. 2.3.). On évite donc les réponses oscillatoires obtenues en utilisant la dérivée de Jaumann.

2.3. Solution relative à la dérivée de Dafalias

En négligeant la partie élastique du spin total \mathbf{W}^e devant sa partie plastique \mathbf{W}^p , comme pour \mathbf{D}^e par rapport à \mathbf{D}^p , la dérivée objective de Dafalias utilise le spin suivant [Dafalias (1985b)] :

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{W} - \mathbf{W}^p, \quad (2.2.36)$$

où \mathbf{W}^p est donné, en se basant sur le travail Wang (1970), par

$$\mathbf{W}^p = \frac{\rho}{2} (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{D}^p - \mathbf{D}^p \boldsymbol{\alpha}), \quad (2.2.37)$$

avec ρ une constante définie positive et qui a la dimension de (contrainte)⁻¹. Si $\rho = 0$, on retombe sur la dérivée de Jaumann.

D'après (2.2.10)₁, on obtient la partie à droite de l'équation (2.2.37) sous la forme

$$\boldsymbol{\alpha} \mathbf{D}^p - \mathbf{D}^p \boldsymbol{\alpha} = \dot{\gamma} \alpha_{11} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.2.38)$$

Ainsi, à partir des équations (2.2.36)-(2.2.38), on retrouve

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = \frac{\dot{\gamma}}{2} - \frac{\rho}{2} \dot{\gamma} \alpha_{11} = \frac{\dot{\gamma}}{2} (1 - \rho \alpha_{11}). \quad (2.2.39)$$

De ce fait, le système d'équations (2.2.18) s'écrit

$$\frac{d \alpha_{11}}{d \gamma} = (1 - \rho \alpha_{11}) \alpha_{12}, \quad (2.2.40)$$

$$\frac{d \alpha_{12}}{d \gamma} = \frac{h_\alpha}{3} - (1 - \rho \alpha_{11}) \alpha_{11}. \quad (2.2.41)$$

Le système d'équations donné par les relations (2.2.40) et (2.2.41) est résolu par le biais de la méthode de Runge-Kutta, pour différentes valeurs de ρ . Les réponses en contraintes sont données dans les figures 2.2. et 2.3.

3. Résultats comparatifs

Les figures 2.2. et 2.3. présentent, respectivement, le diagramme de la contrainte normale τ_{11} et de la contrainte de cisaillement τ_{12} , en fonction de la déformation de cisaillement, en utilisant la dérivée objective de Jaumann, de Green-Naghdi, et celle de Dafalias pour $\rho = 0.3$, $\rho = 0.5$ et $\rho = 1$. Le paramètre h_α est pris égale à $\frac{3}{2}$.

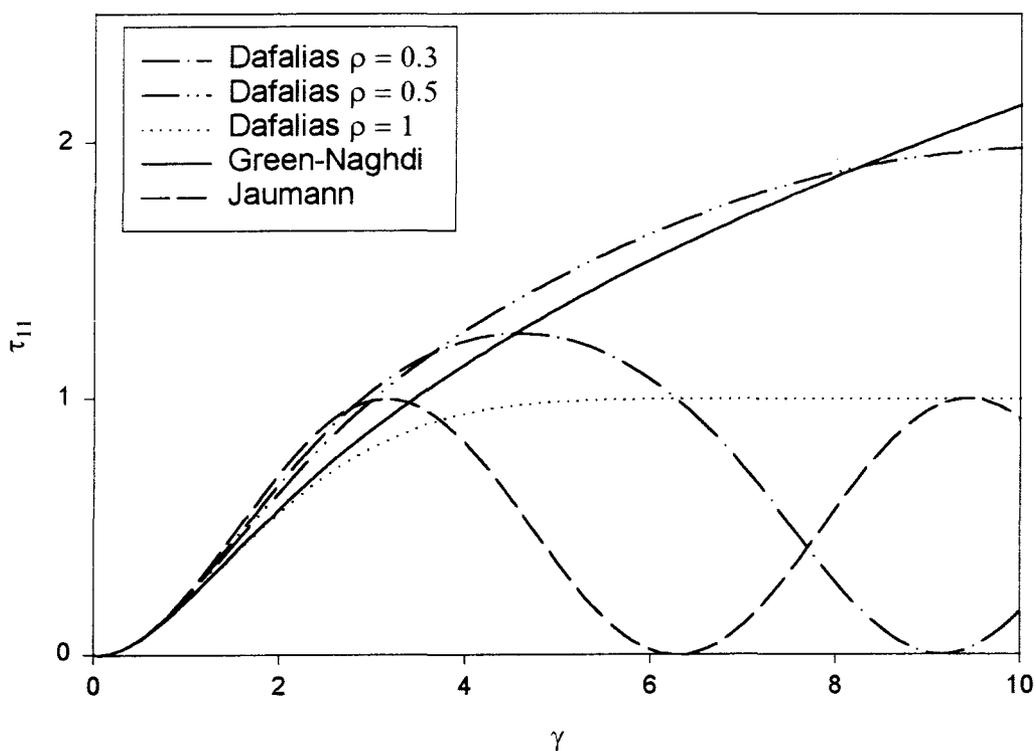


Fig. 2.2. Contrainte normale τ_{11}

Comparaison des solutions relatives à la dérivée de Jaumann, Green-Naghdi et de Dafalias ($\rho = 0.3; 0.5; 1$)

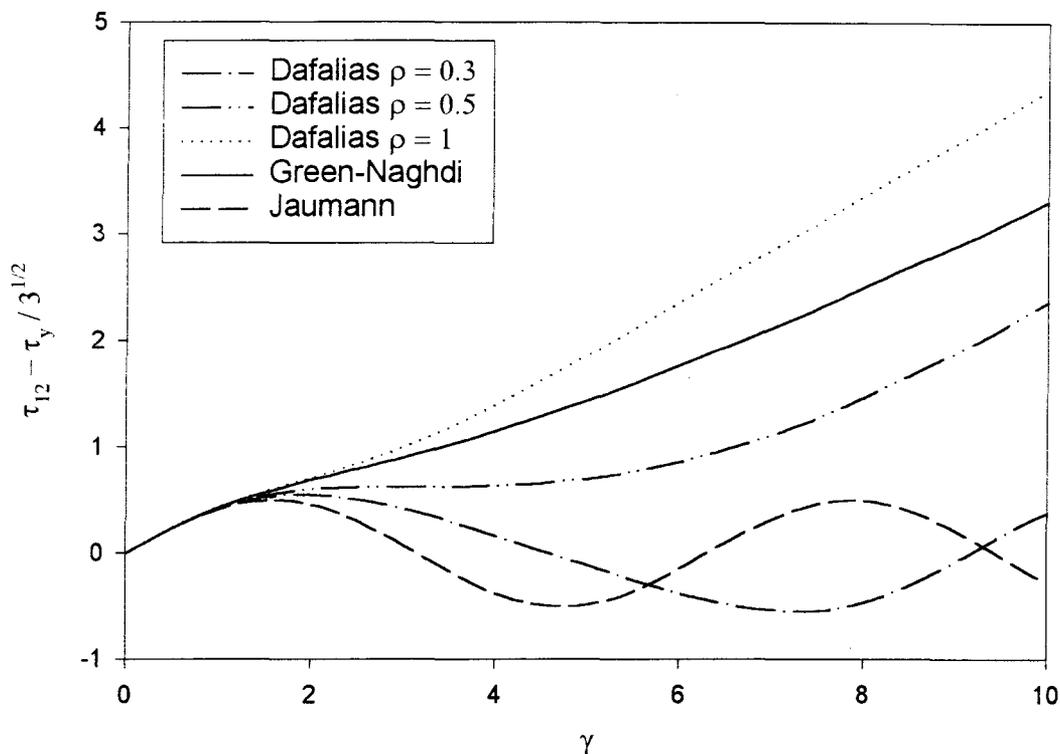


Fig. 2.3. Contrainte de cisaillement τ_{12}

Comparaison des solutions relatives à la dérivée de Jaumann, Green-Naghdi et de Dafalias ($\rho = 0.3; 0.5; 1$)

Dans les figures ci-dessus, on remarque qu'on n'a plus de réponses oscillatoires quand on adopte la dérivée de Green-Naghdi ou celle de Dafalias pour $\rho = 1$. Ces réponses croissent d'une manière monotone avec la déformation de cisaillement. Tandis que pour $\rho = 0.3$ et $\rho = 0.5$, on retrouve des oscillations comparables à celles obtenues en utilisant la dérivée de Jaumann. Ceci a été tout à fait prévisible car, d'après l'expression du spin plastique (2.2.37), en tendant ρ vers 0, on retombe sur la dérivée de Jaumann.

L'adoption d'autres dérivées objectives, citées dans le premier chapitre tel que celle de Lee et al. (1983), Paulun et Pecherski (1985) pour le cas rigide-plastique et

Durban et Baruch (1977), Sowerby et Chu (1984) pour le cas hypoélastique, permet de remédier aussi aux anomalies dues à l'utilisation de la dérivée de Jaumann en supprimant les oscillations. Cependant, ces approches nécessitent de développer l'analyse de la décomposition du gradient des déformation [Schieck et Stumpf (1995)]. Dans ce sens et pour combler ces lacunes, Schieck et Stumpf (1993) ont proposé, dans leur approche élastoplastique, une nouvelle décomposition du gradient des déformations. A partir de celle-ci est définie une dérivée objective, impliquant un spin déterminé en fonction des considérations cinématiques. C'est à partir de cette approche qu'on développera un modèle viscoplastique en grandes déformations dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

APPROCHE DANS LE DOMAINE ELASTO-VISCOPLASTIQUE

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter un modèle du comportement élasto-viscoplastique en grandes déformations, inspiré du modèle de Schieck et Stumpf (1993) pour l'élastoplasticité. On décrira la cinématique du mouvement, qui va nous conduire à exprimer le spin élastique et le spin inélastique en fonction des grandeurs cinématiques. Avec ces expressions, on pourra déterminer le spin matériel, celui-ci nous permettra de définir un taux corotationnel (dérivée objective), à partir des considérations cinématiques, adéquat afin de formuler les équations constitutives.

2. Cinématique des grandes transformations élasto-viscoplastiques

La cinématique des grandes transformations est basée sur la décomposition multiplicative du gradient de déformation \mathbf{F} , en une partie élastique \mathbf{F}^e et une partie inélastique \mathbf{F}^I . Cette décomposition s'appuie sur l'introduction d'une configuration

intermédiaire relâchée, qui reste invariante pour tout changement de référentiel [voir chapitre 1]. La configuration relâchée n'est pas unique, car toute rotation arbitraire la laisse non contrainte, il existe donc une infinité de configurations relâchées définies à une rotation près. D'où la non-unicité de cette décomposition. Pour remédier à cela, dans ce qui suit nous allons utiliser la décomposition unique du gradient de déformation de Schieck et Stumpf (1993) pour décrire la cinématique du mouvement. On établira l'expression du spin relatif à la dérivée objective en fonction du spin total, élastique et inélastique, qui eux sont fonction des grandeurs cinématiques.

2. 1. Décomposition du gradient de déformation

Pour définir la décomposition unique du gradient de déformation, on applique le théorème de la décomposition polaire, décrit par la relation (1.2.17), à la partie élastique et la partie inélastique, issues de l'équation (1.2.27), respectivement

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e, \quad (3.2.1)$$

$$\mathbf{F}^I = \mathbf{R}^I \mathbf{U}^I. \quad (3.2.2)$$

Les tenseurs d'élongation élastique \mathbf{U}^e et inélastique \mathbf{U}^I sont symétriques et définis positifs. L'élongation totale \mathbf{U} et l'élongation inélastique \mathbf{U}^I sont rattachées à la configuration initiale, non déformée B_0 , tandis que l'élongation élastique \mathbf{U}^e est rattachée à la configuration transformée B^I (voir Fig. 3.1.).

On introduit le tenseur d'élongation élastique subissant une rotation inverse (back-rotated stretch) $\tilde{\mathbf{U}}^e$ défini par [Schieck et Stumpf (1993)]

$$\tilde{\mathbf{U}}^e = \mathbf{R}^{I^T} \mathbf{U}^e \mathbf{R}^I. \quad (3.2.3)$$

Celui-ci transforme la configuration inélastique étirée B_0^I en une configuration élasto-inélastique étirée B_0^{eI} (fig. 3.1.).

De même, on définit le tenseur de rotation orthogonale \mathbf{Q} , composé d'une rotation élastique \mathbf{R}^e et une rotation inélastique \mathbf{R}^I

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^e \mathbf{R}^I. \tag{3.2.4}$$

Avec les équations (3.2.1)-(3.2.4) et (1.2.27), on obtient la décomposition unique du gradient de déformation sous la forme

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{U}}^e \mathbf{U}^I. \tag{3.2.5}$$

Son unicité est expliquée par le caractère unique des grandeurs issues de la décomposition polaire.

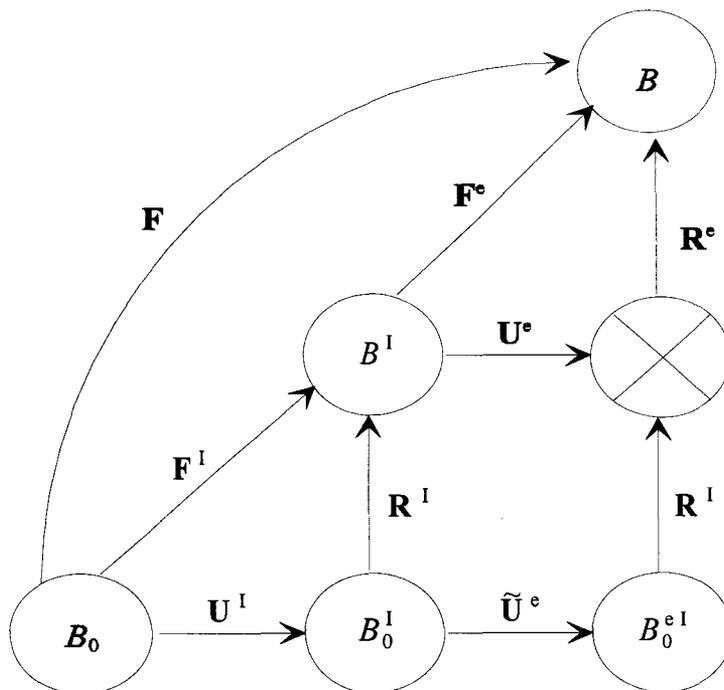


Fig. 3.1. Schématisation de la décomposition unique du gradient de déformation.

A partir de (3.2.5), on écrit la décomposition du tenseur d'élongation totale \mathbf{U}

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}\mathbf{F}^T} = \sqrt{\mathbf{U}^I \tilde{\mathbf{U}}^{e^I} \mathbf{U}^I}. \quad (3.2.6)$$

Cette décomposition peut être résumée géométriquement par le fait que la configuration non déformée B_0 est étirée inélastiquement par \mathbf{U}^I vers B_0^I , puis étirée élastiquement par $\tilde{\mathbf{U}}^{e^I}$ vers $B_0^{e^I}$, et enfin elle subit une rotation pure \mathbf{Q} vers la configuration finale.

2. 2. Description eulerienne

De plus des grandeurs lagrangiennes $\tilde{\mathbf{U}}^{e^I}$ et \mathbf{U}^I , on introduit les élongations euleriennes \mathbf{V}^e et \mathbf{V}^I en utilisant l'image directe (Push-forward), par \mathbf{Q} , de $\tilde{\mathbf{U}}^{e^I}$ et \mathbf{U}^I :

$$\mathbf{V}^e = \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{U}}^{e^I} \mathbf{Q}^T, \quad (3.2.7)$$

$$\mathbf{V}^I = \mathbf{Q} \mathbf{U}^I \mathbf{Q}^T. \quad (3.2.8)$$

Ainsi la décomposition du gradient de déformation (3.2.5) peut s'écrire en grandeurs euleriennes sous la forme

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}^e \mathbf{V}^I \mathbf{Q}, \quad (3.2.9)$$

et la décomposition du tenseur eulerien d'élongation totale en une partie élastique et une partie inélastique s'écrit

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{V}^e \mathbf{V}^I \mathbf{V}^I \mathbf{V}^e}. \quad (3.2.10)$$

On introduit le taux corotationnel défini par

$$\overset{\nabla}{(\dots)} = \mathbf{Q} (\dot{\dots}) \mathbf{Q}^T = (\dot{\dots}) - \boldsymbol{\Omega} (\dots) + (\dots) \boldsymbol{\Omega}, \quad (3.2.11)$$

où le spin $\boldsymbol{\Omega}$ relatif à la dérivée objective est

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^{-1}. \quad (3.2.12)$$

Par conséquent, les dérivées objectives du tenseur d'élongation élastique \mathbf{V}^e et inélastique \mathbf{V}^I sont, respectivement

$$\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^e = \mathbf{Q} \dot{\hat{\mathbf{U}}}^e \mathbf{Q}^T = \dot{\mathbf{V}}^e - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{V}^e + \mathbf{V}^e \boldsymbol{\Omega}, \quad (3.2.13)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I = \mathbf{Q} \dot{\mathbf{U}}^I \mathbf{Q}^T = \dot{\mathbf{V}}^I - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{V}^I + \mathbf{V}^I \boldsymbol{\Omega}. \quad (3.2.14)$$

En dérivant l'équation (3.2.9) et en utilisant (3.2.12)-(3.2.14), le gradient des vitesses de déformation, donné par la relation (1.2.21), s'exprime sous la forme

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \boldsymbol{\Omega} + \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^e \mathbf{V}^{e-1} + \mathbf{V}^e \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I \mathbf{V}^{I-1} \mathbf{V}^{e-1}. \quad (3.2.15)$$

Considérons la partie symétrique et la partie antisymétrique du gradient des vitesses \mathbf{L} , et séparons leurs contributions élastique et inélastique, on peut en tirer les taux de déformation totale, élastique et inélastique, respectivement \mathbf{D} , \mathbf{D}^e et \mathbf{D}^I

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^I, \quad (3.2.16)$$

avec

$$\mathbf{D}^e = \frac{1}{2}(\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^e \mathbf{V}^{e-1} + \mathbf{V}^{e-1} \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^e), \quad (3.2.17)$$

$$\mathbf{D}^I = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^e \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I \mathbf{V}^{I-1} \mathbf{V}^{e-1} + \mathbf{V}^{e-1} \mathbf{V}^{I-1} \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I \mathbf{V}^e), \quad (3.2.18)$$

et les spins total, élastique et inélastique, respectivement \mathbf{W} , \mathbf{W}^e et \mathbf{W}^I

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = \mathbf{\Omega} + \mathbf{W}^e + \mathbf{W}^I, \quad (3.2.19)$$

avec

$$\mathbf{W}^e = \frac{1}{2}(\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^e \mathbf{V}^{e-1} - \mathbf{V}^{e-1} \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^e), \quad (3.2.20)$$

$$\mathbf{W}^I = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^e \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I \mathbf{V}^{I-1} \mathbf{V}^{e-1} - \mathbf{V}^{e-1} \mathbf{V}^{I-1} \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I \mathbf{V}^e). \quad (3.2.21)$$

Ainsi le spin relatif à la dérivée objective $\mathbf{\Omega}$ s'obtient à partir de (3.2.19)

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{W} - \mathbf{W}^e - \mathbf{W}^I. \quad (3.2.22)$$

La question qui se pose maintenant est : Comment déterminer le spin élastique \mathbf{W}^e et le spin inélastique \mathbf{W}^I , pour calculer le spin $\mathbf{\Omega}$ relatif à la dérivée objective en fonction des considérations cinématiques ?

Pour cela, on résout l'équation (3.2.17) afin d'obtenir le taux d'élongation élastique $\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^e$ en fonction du taux de déformation élastique \mathbf{D}^e et du tenseur d'élongation élastique \mathbf{V}^e . Ensuite, on injecte l'expression de $\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^e$ dans l'équation (3.2.20) pour avoir l'expression du spin élastique \mathbf{W}^e en fonction du taux de déformation élastique et du tenseur d'élongation élastique.

Pour déterminer le spin inélastique \mathbf{W}^I , on procède de la même manière, on résout l'équation (3.2.18) pour obtenir le taux d'élongation inélastique $\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I$ en fonction du taux de déformation inélastique \mathbf{D}^I et du tenseur d'élongation élastique et inélastique \mathbf{V}^e et \mathbf{V}^I , respectivement. Puis, on l'injecte dans l'équation (3.2.21) pour arriver à l'expression du spin inélastique en fonction du taux de déformation inélastique, du tenseur d'élongation élastique et du tenseur d'élongation inélastique.

Les calculs étant faits, on obtient les composantes cartésiennes du spin élastique dans le cas plan sous la forme

$$\begin{aligned} W_{11}^e &= -W_{22}^e = \frac{D_{21}^e V_{12}^e - D_{12}^e V_{21}^e}{V_{11}^e + V_{22}^e}, \\ W_{12}^e &= \frac{D_{12}^e (V_{11}^e - V_{22}^e) + V_{12}^e (D_{22}^e - D_{11}^e)}{V_{11}^e + V_{22}^e}, \\ W_{21}^e &= \frac{D_{21}^e (V_{22}^e - V_{11}^e) + V_{21}^e (D_{11}^e - D_{22}^e)}{V_{11}^e + V_{22}^e}. \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Le spin élastique existe, car le dénominateur ne peut pas être nul (voir annexe).

Le caractère symétrique du tenseur d'élongation élastique \mathbf{V}^e et du taux de déformation élastique \mathbf{D}^e ($D_{12}^e = D_{21}^e$ et $V_{12}^e = V_{21}^e$), nous permet de réduire le système d'équation (3.2.23) à

$$W_{11}^e = W_{22}^e = 0, \quad (3.2.24)$$

$$W_{12}^e = -W_{21}^e = \frac{D_{12}^e (V_{11}^e - V_{22}^e) + V_{12}^e (D_{22}^e - D_{11}^e)}{V_{11}^e + V_{22}^e}. \quad (3.2.25)$$

Idem pour les composantes cartésiennes du spin inélastique \mathbf{W}^I

$$W_{11}^I = W_{22}^I = 0, \quad (3.2.26)$$

$$W_{12}^I = -W_{21}^I = \frac{A(D_{22}^I - D_{11}^I) + B D_{12}^I}{C}, \quad (3.2.27)$$

avec

$$A = V_{11}^e V_{12}^e V_{11}^I + V_{11}^e V_{22}^e V_{12}^I + V_{12}^e V_{22}^e V_{22}^I + V_{12}^{e^2} V_{12}^I,$$

$$B = V_{22}^{e^2} V_{22}^I - V_{11}^{e^2} V_{11}^I + V_{12}^{e^2} (V_{11}^I - V_{22}^I) + 2V_{12}^e (V_{22}^e - V_{11}^e) V_{12}^I,$$

$$C = V_{11}^{e^2} V_{11}^I + V_{12}^{e^2} (V_{11}^I + V_{22}^I) + V_{22}^{e^2} V_{22}^I + 2V_{12}^e (V_{11}^e + V_{22}^e) V_{12}^I.$$

Les expressions ci-dessus montrent que le spin élastique \mathbf{W}^e est fonction, uniquement, du taux de déformation élastique \mathbf{D}^e et du tenseur d'élongation élastique \mathbf{V}^e ; tandis que le spin inélastique \mathbf{W}^I est fonction du taux de déformation inélastique \mathbf{D}^I , du tenseur d'élongation inélastique \mathbf{V}^I , et du tenseur d'élongation élastique \mathbf{V}^e . Ceci nous permet alors de déterminer le spin élastique et le spin inélastique, puis de déduire de (3.2.22) le spin $\mathbf{\Omega}$ relatif à la dérivée objective à partir des considérations cinématiques seulement. On peut constater aussi, d'après la relation (3.2.27), que le spin inélastique \mathbf{W}^I ne s'annule que si \mathbf{V}^e , \mathbf{V}^I et \mathbf{D}^I sont coaxiaux. Dans le cas de petites déformations élastiques, on peut négliger \mathbf{V}^e , le spin inélastique ne s'annule que si \mathbf{V}^I et \mathbf{D}^I sont coaxiaux, ce qui n'est généralement pas le cas.

2. 3. Approximation du tenseur spin

En transformations finies, pour simplifier l'analyse, on peut considérer plusieurs approximations du comportement élasto-viscoplastique, par exemple pour les métaux,

supposer des petites déformations élastiques et des grandes déformations viscoplastiques, ou négliger les déformations élastiques en se limitant seulement aux déformation viscoplastiques. Il serait alors intéressant d'étudier les expressions cinématiques obtenues précédemment dans ces deux cas.

*** Petites déformations élastiques - grandes déformations viscoplastiques**

On peut définir les petites déformations élastiques par

$$\mathbf{V}^e = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (3.2.28)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{0}(\theta^2), \quad \theta^2 \ll 1,$$

où $\mathbf{0}(\theta^2)$ représente un tenseur dont les valeurs propres sont de l'ordre de θ^2 .

On suppose que la vitesse est petite et du même ordre

$$\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^e = \mathbf{0}(\theta^2). \quad (3.2.29)$$

Ainsi, l'expression (3.2.20) devient

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^e &= \frac{1}{2} \left[\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^e (\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}^e + \mathbf{0}(\theta^3)) - (\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}^e + \mathbf{0}(\theta^3)) \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^e \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\varepsilon}^e \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^e - \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e \right] + \mathbf{0}(\theta^3 \left\| \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^e \right\|) \approx \mathbf{0}(\theta^4) \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

Pour les grandes déformations viscoplastiques, on définit

$$\mathbf{V}^I = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^I, \quad (3.2.31)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = \mathbf{0}(1),$$

où $\mathbf{0}(1)$ représente un tenseur dont les valeurs propres sont de l'ordre de 1.

On suppose que la vitesse est grande

$$\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I = \mathbf{0}(1). \quad (3.2.32)$$

En négligeant les termes en θ d'ordre élevé, l'équation (3.2.21) s'écrit

$$\mathbf{W}^I = \frac{1}{2} (\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I \mathbf{V}^{I-1} - \mathbf{V}^{I-1} \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I) (\mathbf{1} + \mathbf{0}(\theta^2)). \quad (3.2.33)$$

D'après les expressions (3.2.30) et (3.2.33), le spin $\mathbf{\Omega}$ relatif à la dérivée objective, donné par (3.2.22), se réduit à

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{W} - \mathbf{W}^I, \quad (3.2.34)$$

avec \mathbf{W}^I donné par (3.2.33).

* Grandes déformations (modèle rigide-viscoplastique)

Dans ce cas, le spin $\mathbf{\Omega}$ s'écrit de la même manière que (3.2.34)

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{W} - \mathbf{W}^I,$$

avec le spin inélastique \mathbf{W}^I donné par

$$\mathbf{W}^I = \frac{1}{2} \left(\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I \mathbf{V}^{I-1} - \mathbf{V}^{I-1} \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I \right). \quad (3.2.35)$$

Dans certaines travaux [Van der Giessen (1991)], on suppose que le spin inélastique est nul quand on n'a pas d'écoulement cinématique. Pourtant à la vue des

équations (3.2.33) ou (3.2.35), le spin inélastique ne s'annule que si l'élongation inélastique \mathbf{V}^I et sa vitesse $\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I$ sont coaxiaux, ce qui n'est généralement pas le cas, même en l'absence de l'érouissage.

3. Equations constitutives élasto-viscoplastiques

On considère que l'état actuel du matériau peut être défini par la donnée des variables observables (déformation), et des variables cachées, qu'on appelle variables d'érouissage qui décrivent l'influence de l'histoire. Elles sont représentées par une variable à valeur scalaire pour l'érouissage isotrope, et une variable à valeur tensorielle pour l'érouissage cinématique.

Nous nous proposons de formuler dans ce paragraphe les équations constitutives élasto-viscoplastiques, en utilisant la dérivée objective présentée précédemment. Le comportement érouis du matériau est décrit par l'érouissage cinématique et isotrope. On supposera que le comportement élastique du matériau est isotrope.

3. 1. Equations constitutives élastiques

Des études de laboratoire effectuées sur des métaux et des caoutchoucs [Anand (1979) et (1986)] montrent que le potentiel élastique peut être représenté par une fonction quadratique du tenseur de Hencky (tenseur de déformation logarithmique), ce qui correspond à

$$W = \frac{1}{2} \text{Ln } \mathbf{V}^e : \mathbf{C}^e : \text{Ln } \mathbf{V}^e, \quad (3.3.1)$$

où \mathbf{C}^e est le tenseur d'élasticité, constant d'ordre 4, dans la théorie linéaire, déterminé en fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν .

Le concept "contraintes conjuguées aux déformations" a été introduit par Hill (1968) comme étant un outil avec lequel on explore, dans la mécanique des solides, les égalités constitutives.

Une contrainte A et une déformation B sont dites conjuguées si et seulement si $A : \dot{B}$ exprime la puissance par unité de volume.

Dans ce sens, il a été prouvé dans Hoger (1987) et Heidschke (1995), pour un comportement élastique isotrope, que le tenseur de contrainte de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$ est conjugué, dans le sens de Hill, au tenseur logarithmique d'élongation élastique $\text{Ln } \mathbf{V}^e$. Ainsi, de l'équation (3.3.1) on obtient

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial W}{\partial \text{Ln } \mathbf{V}^e} = \mathbf{C}^e : \text{Ln } \mathbf{V}^e. \quad (3.3.2)$$

D'après (3.3.2), la dérivée matérielle, objective, de la contrainte est

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{C}^e : (\text{Ln } \mathbf{V}^e)^\nabla, \quad (3.3.3)$$

avec

$$(\text{Ln } \mathbf{V}^e)^\nabla = (\text{Ln } \mathbf{V}^e)^\bullet - \boldsymbol{\Omega} (\text{Ln } \mathbf{V}^e) + (\text{Ln } \mathbf{V}^e) \boldsymbol{\Omega}. \quad (3.3.4)$$

Hoger (1986) a démontré qu'on peut écrire

$$(\text{Ln } \mathbf{V}^e)^\nabla = \mathbf{D}^e, \quad (3.3.5)$$

à condition (nécessaire et suffisante) que

$$\mathbf{D}^e \mathbf{V}^e = \mathbf{V}^e \mathbf{D}^e. \quad (3.3.6)$$

Or la relation (3.2.17) permet de vérifier la condition (3.3.6), d'où (3.3.3) devient

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e. \quad (3.3.7)$$

Finalement, la réponse élastique se traduira par

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^e : \text{Ln } \mathbf{V}^e, \quad (3.3.8)$$

et sa loi d'évolution

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e. \quad (3.3.9)$$

Si on prend en considération la température, l'équation (3.3.9) s'écrira en introduisant la température ϑ et le tenseur de dilatation thermique \mathbf{T}

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C}^e : [\mathbf{D}^e - \mathbf{T} \dot{\vartheta}]. \quad (3.3.10)$$

3. 2. Relations constitutives viscoplastiques

3. 2. 1. Lois d'évolution de l'écrouissage

* Ecrouissage cinématique

L'écoulement inélastique (viscoplastique) induit l'apparition des réseaux de dislocations. La distribution non-homogène des dislocations dans des cristaux provoque l'augmentation des contraintes internes qui se développent quand le matériau est soumis à des contraintes extérieures. La contrainte interne répartie dans tout le

volume du matériau est définie par une variable tensorielle associée à l'érouissage cinématique. Dans l'espace des contraintes, l'érouissage cinématique correspond à une translation du domaine d'élasticité. Cette translation est décrite par une variable tensorielle qui définit le centre actuel du domaine élastique, et qui peut donc s'identifier à une mesure des micro-contraintes internes dues à l'inhomogénéité des déformations inélastiques et à l'interaction entre les grains de la structure [Woznica (1998)]

Pour décrire l'érouissage cinématique, la loi linéaire de Prager a été souvent utilisée. Sa linéarité présente l'avantage de rendre les algorithmes de calcul numérique plus stables. Par contre, si dans le cas de chargement cyclique l'effet de Bauschinger est qualitativement représenté, les effets de relaxation ne seront pas décrits [Lemaitre et Chaboche (1988)]. De plus, elle ne permet pas de modéliser l'effet de saturation observé expérimentalement. Pour palier à ce problème, Weichert et Gross-Weege (1988) proposent un modèle linéaire limité. Il est basé sur une condition d'écoulement à deux surfaces, correspondant à une surface d'écoulement et une surface de charge limitant le mouvement de la surface d'écoulement dû à l'érouissage.

Dans notre cas, pour éviter les inconvénients de la loi de Prager et pour décrire les effets de restauration, nous utiliserons le modèle non linéaire d'Armstrong-Frederick (1966). Celui-ci permet, d'une manière plus précise, de décrire le comportement des matériaux soumis à des chargements cycliques. Il s'écrit

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\alpha}} = \zeta \mathbf{D}^I - c_r |\mathbf{D}^I| \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.3.11)$$

où $\boldsymbol{\alpha}$ est le tenseur de contraintes internes associées à l'érouissage cinématique, ζ est un paramètre d'érouissage cinématique, et c_r un paramètre du matériau qui contrôle le taux de convergence du modèle vers le cycle stabilisé.

Ce modèle, par rapport à celui de Prager, fait apparaître un terme de rappel dans l'équation (3.3.11), en l'occurrence le terme en c_r .

La relation contrainte interne - déformation inélastique n'étant plus univoque, puisqu'elle dépend de la vitesse de déformation inélastique ($|\mathbf{D}^I| = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}^I : \mathbf{D}^I}$).

Ce terme de rappel dans l'équation (3.3.11) correspond à l'effet de restauration dynamique.

* Ecrouissage isotrope

Dans l'espace des contraintes, l'écrouissage isotrope mesure la variation de la taille du domaine élastique. Cette variation est décrite par une contrainte interne τ_y de nature scalaire, qui représente la contrainte d'écoulement.

L'écrouissage isotrope sera modélisé par une équation similaire à (3.3.11), qui correspond à un comportement asymptotique stable, nécessaire à une stabilisation cyclique [Chaboche et Rousselier (1983)].

$$\dot{\tau}_y = (h_i - C_r \tau_y) |\mathbf{D}^I|, \quad (3.3.12)$$

où h_i désigne le paramètre d'écrouissage isotrope ; le paramètre C_r conditionne la rapidité de convergence du modèle vers le cycle stabilisé.

Il apparaît, comme dans l'équation décrivant l'écrouissage cinématique, un terme de rappel, en l'occurrence celui en C_r qui traduit l'effet d'adoucissement ($C_r < 0$) et de durcissement ($C_r > 0$).

3. 2. 2. Contrainte visqueuse et surface d'écoulement

* Contrainte visqueuse

Nous utiliserons la notion de fonction de la contrainte visqueuse (overstress) Φ [Chaboche (1989)], souvent introduite pour formuler les lois de comportement viscoplastiques sous la forme

$$\mathbf{D}^I = \Phi \mathbf{N}^I, \quad (3.3.13)$$

où \mathbf{N}^I représente la direction du taux de déformation inélastique \mathbf{D}^I .

Depuis le travail de Perzyna (1963), plusieurs formes de cette fonction, clé dans la théorie viscoplastique, ont été proposées [Chaboche et Rousselier (1983) ; Krempl (1987) ; Nishiguchi et al. (1990)].

La fonction de la contrainte visqueuse, positive à valeur scalaire, est généralement définie comme étant la distance, dans l'espace des contraintes, entre le point de la contrainte actuelle, et celui de la contrainte d'équilibre, souvent localisé par la surface d'écoulement statique [Bruhns et Pitzer (1991) ; Chaboche (1989) ; Dafalias (1988)].

* Surface d'écoulement

Pour une forme donnée de la fonction de contrainte visqueuse, l'expression de l'équation d'écoulement dynamique peut être obtenue à partir de

$$\Phi = \frac{|\mathbf{D}^I|}{|\mathbf{N}^I|}, \quad (3.3.14)$$

où la norme de \mathbf{D}^I et celle de \mathbf{N}^I sont données, respectivement, par

$$|\mathbf{D}^I| = \left[\frac{2}{3} \mathbf{D}^I : \mathbf{D}^I \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.15)$$

$$|\mathbf{N}^I| = \left[\frac{2}{3} \mathbf{N}^I : \mathbf{N}^I \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.16)$$

Dans le cas du modèle de Chaboche (1989), la fonction Φ s'écrit

$$\Phi = \eta \left\langle \frac{J(\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}) - \tau_y}{K} \right\rangle^n, \quad (3.3.17)$$

et la direction \mathbf{N}^I est

$$\mathbf{N}^I = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}}{J(\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha})}, \quad (3.3.18)$$

où

τ_y représente la contrainte d'écoulement associée à l'écrouissage isotrope ;

$\boldsymbol{\alpha}$ désigne la contrainte interne associée à l'écrouissage cinématique ;

K est un coefficient de résistance du matériau ;

n est un paramètre viscoplastique du matériau ;

η est un coefficient de dimensionnement, $\eta = 1 \text{ s}^{-1}$;

J décrit le second invariant tel que

$$J(\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}) = \left[\frac{3}{2} (\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}) : (\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.19)$$

Etant donné la fonction de contrainte visqueuse Φ et la direction de l'écoulement \mathbf{N}^I , l'équation (3.3.14), représentant l'équation de la surface d'écoulement dynamique, devient

$$\left[\frac{3}{2} (\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}) : (\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}) \right]^{\frac{1}{2}} = \tau_y + K \left(\frac{1}{\eta} |\mathbf{D}^I| \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (3.3.20)$$

Ainsi la condition d'écoulement peut être traduite par

$$F = \left[(\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}) : (\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}) \right]^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\tau_y + K \left(\frac{1}{\eta} |\mathbf{D}^I| \right)^{\frac{1}{n}} \right] \begin{cases} = 0 & \text{écoulement,} \\ < 0 & \text{pas d'écoulement.} \end{cases} \quad (3.3.21)$$

En composantes cartésiennes pour un tenseur de contraintes plan, la fonction F s'écrit sous la forme

$$F = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \left[(\tau_{11} - \alpha_{11})^2 + (\tau_{22} - \alpha_{22})^2 - (\tau_{11} - \alpha_{11})(\tau_{22} - \alpha_{22}) - (\tau_{11} + \tau_{22} - 2\alpha_{11} - 2\alpha_{22})(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + 3(\tau_{12} - \alpha_{12})^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \left[\tau_y + K \left(\frac{1}{\eta} |\mathbf{D}^I| \right)^{\frac{1}{n}} \right] \right\}. \quad (3.3.22)$$

Les expressions (3.3.21) et (3.3.22) traduisent l'équation de la surface d'écoulement dynamique en viscoplasticité. Celle-ci fait apparaître explicitement la

vitesse de déformation inélastique via le terme $K \left(\frac{1}{\eta} |\mathbf{D}^I| \right)^{\frac{1}{n}}$.

3. 3. Opérateur tangentiel élasto-viscoplastique

L'opérateur tangentiel élasto-viscoplastique est introduit afin d'obtenir une formulation incrémentale du taux de contraintes en fonction du taux de déformation. D'une manière générale et en plus du critère d'écoulement, on peut écrire une loi de comportement d'un matériau élasto-viscoplastique sous la forme

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C}^{\text{evp}} : \mathbf{D}.$$

\mathbf{C}^{evp} est le tenseur d'ordre 4 qui désigne l'opérateur tangentiel élasto-viscoplastique.

Cette formulation incrémentale de la loi de comportement permet d'écrire d'une manière concise la relation entre le taux de déformation et le taux de contraintes. Elle exprime directement la loi élasto-viscoplastique en grandes déformations.

La loi élasto-viscoplastique s'obtient en formulant, à partir de la condition de consistance, l'expression de la fonction de contrainte visqueuse Φ qui se substitue à l'indice de charge dans la plasticité générale.

On considère l'équation de la surface d'écoulement viscoplastique $F(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}, \tau_y)$ donnée par la relation (3.3.21), la condition de consistance $dF = 0$ s'écrit alors

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \overset{\nabla}{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial F}{\partial \tau_y} \dot{\tau}_y = 0. \quad (3.3.23)$$

Avec les lois d'écrouissage données par (3.3.11) et (3.3.12), la condition de consistance (3.3.23) peut s'écrire sous la forme

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{C}^e : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^I) + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : (\zeta \mathbf{D}^I - c_r |\mathbf{D}^I| \boldsymbol{\alpha}) + \frac{\partial F}{\partial \tau_y} (h_i - C_r \tau_y) |\mathbf{D}^I| = 0. \quad (3.3.24)$$

Etant donné

$$\mathbf{D}^I = \Phi \mathbf{N}^I = \Phi \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \quad (3.3.25)$$

la condition de consistance se traduit finalement par

$$d\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{C}^e : \left(\mathbf{D} - \Phi \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \left(\zeta \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}} - \mathbf{c}_r \boldsymbol{\alpha} \right) \Phi + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau_y} (h_i - C_r \tau_y) \Phi = 0. \quad (3.3.26)$$

D'après l'équation de la surface d'écoulement (3.3.21), on a

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = -1,$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau_y} = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

D'où on peut formuler l'expression de la fonction Φ , à partir de l'équation (3.3.26), sous la forme

$$\Phi = \frac{\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{C}^e : \mathbf{D}}{\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{C}^e : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \mathbf{c}_r \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \boldsymbol{\alpha} + C_r \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau_y} \tau_y + \zeta + \sqrt{\frac{2}{3}} h_i}. \quad (3.3.27)$$

On introduit maintenant la relation ci-dessus de Φ dans la réponse élastique donnée par

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e = \mathbf{C}^e : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^I) = \mathbf{C}^e : \left(\mathbf{D} - \Phi \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right). \quad (3.3.28)$$

Il en découle

$$\overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C}^{evp} : \mathbf{D}, \quad (3.3.29)$$

qui décrit la loi de comportement, incrémentale, élasto-viscoplastique, où l'opérateur tangentiel élasto-viscoplastique est

$$\mathbf{C}^{evp} = \mathbf{C}^e - \frac{(\mathbf{C}^e : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}}) \otimes (\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{C}^e)}{\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{C}^e : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}} + c_r \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \boldsymbol{\alpha} + C_r \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau_y} \tau_y + \zeta + \sqrt{\frac{2}{3}} h_i}. \quad (3.3.30)$$

On peut transformer l'expression (3.3.30) en utilisant le paramètre d'érouissage mixte β qui décrit aussi bien l'érouissage cinématique que l'érouissage isotrope [Skrzypek (1993)] $0 < \beta < 1$, tel que

$$\zeta = (1 - \beta) h_{tot}, \quad (3.3.31)$$

et

$$h_i = \sqrt{\frac{3}{2}} \beta h_{tot}, \quad (3.3.32)$$

avec

$$h_{tot} = \frac{2}{3} \frac{E E_T}{E - E_T}, \quad (3.3.33)$$

où E et E_T sont le module d'Young et le module d'érouissage cinématique, respectivement.

Ainsi, l'opérateur tangentiel élasto-viscoplastique donné par (3.3.30) se réduit à

$$\mathbf{C}^{\text{evp}} = \mathbf{C}^e - \frac{(\mathbf{C}^e : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}}) \otimes (\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{C}^e)}{\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{C}^e : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}} + c_r \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \boldsymbol{\alpha} + C_r \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau_y} \tau_y + h_{\text{tot}}}. \quad (3.3.34)$$

L'équation de la surface d'écoulement viscoplastique (3.3.21) nous permet d'écrire

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau_y} = - \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad (3.3.35)_1$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{(\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}) : (\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha})}}, \quad (3.3.35)_2$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = - \frac{\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{(\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}) : (\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha})}}. \quad (3.3.35)_3$$

Soit, en tenant compte de la relation (3.3.22), les composantes cartésiennes des formules (3.3.35) pour un état plan de contraintes

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau_{11}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\tau_{11} - \frac{3}{2} \alpha_{11} - \frac{1}{2} \tau_{22}}{\sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{F} + \tau_y + \mathbf{K} |\mathbf{D}^I|^{\frac{1}{n}}}}, \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau_{22}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\tau_{22} - \frac{3}{2} \alpha_{22} - \frac{1}{2} \tau_{11}}{\sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{F} + \tau_y + \mathbf{K} |\mathbf{D}^I|^{\frac{1}{n}}}}, \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau_{12}} = \sqrt{6} \frac{\tau_{12} - \alpha_{12}}{\sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{F} + \tau_y + \mathbf{K} |\mathbf{D}^I|^{\frac{1}{n}}}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau_{21}}. \end{cases} \quad (3.3.36)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha_{11}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2\alpha_{11} + \alpha_{22} - \tau_{11}}{\sqrt{\frac{3}{2}} F + \tau_y + K|\mathbf{D}^I|^{\frac{1}{n}}}, \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha_{22}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2\alpha_{22} + \alpha_{11} - \tau_{22}}{\sqrt{\frac{3}{2}} F + \tau_y + K|\mathbf{D}^I|^{\frac{1}{n}}}, \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha_{12}} = -\sqrt{6} \frac{\tau_{12} - \alpha_{12}}{\sqrt{\frac{3}{2}} F + \tau_y + K|\mathbf{D}^I|^{\frac{1}{n}}} = \frac{\partial F}{\partial \alpha_{21}}. \end{cases} \quad (3.3.37)$$

4. Conclusion

On a présenté un modèle élasto-viscoplastique, en se basant cinématiquement sur la décomposition unique du gradient des déformations de Schieck et Stumpf (1993) et Stumpf et Schieck (1994). Cette décomposition nous a conduit, en écrivant les principaux résultats de la cinématique, à formuler le spin élastique et le spin inélastique en fonction des tenseurs d'élongation et taux de déformation. Par conséquent, on a pu construire une dérivée objective avec un spin qui est déterminé à partir des considérations cinématiques seulement, et il n'y a donc pas de raison de faire appel à une équation constitutive supplémentaire pour le spin inélastique.

L'étude cinématique nous a permis de montrer que le spin inélastique ne s'annule que si l'élongation inélastique et sa vitesse sont coaxiales, ce qui n'est généralement pas le cas, même en l'absence de l'écroutissage cinématique.

Avec la dérivée objective définie cinématiquement, on a présenté les équations constitutives élasto-viscoplastiques, pour un comportement élastique isotrope, en tenant compte de l'écroutissage cinématique et isotrope. Enfin, pour formuler une loi

incrémentale élasto-viscoplastique, on a déterminé l'opérateur tangentiel élasto-viscoplastique.

Notre modèle tient compte de la surface d'écoulement, dans laquelle apparaît explicitement la dépendance par rapport à la vitesse de déformation.

Dans le chapitre suivant nous allons présenter la solution du problème de cisaillement simple avec la méthode décrite ci-dessus. Par la suite, on pourra comparer nos résultats avec ceux de Dafalias.

Chapitre 4

EXEMPLE D'APPLICATION DANS LE CAS DE CISAILLEMENT SIMPLE (RIGIDE-VISCOPLASTIQUE)

1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter une application du modèle élasto-viscoplastique, en grandes déformations, établi dans le chapitre précédent. Dans ce sens, nous analyserons numériquement le problème de cisaillement simple, pour un matériau rigide-viscoplastique, en tenant compte des effets d'écroutissage, pour différentes vitesses de déformations. On supposera l'isotropie du matériau au cours des déformations.

Par la suite, le modèle viscoplastique va nous servir pour décrire le comportement rigide-plastique en tenant compte des effets de restauration.

Les résultats obtenus par l'application de notre modèle, que ce soit dans le cas rigide-plastique ou rigide-viscoplastique, seront comparés avec ceux de Dafalias, tout en rappelant brièvement son modèle.

2. Applications et résultats

2. 1. Cisaillement simple

On cherche à résoudre le problème plan de cisaillement simple en grandes déformations, dont la géométrie et les principaux résultats ont été présentés dans le chapitre 2.

Le mouvement sera décrit par

$$\begin{aligned}x_1 &= X_1 + \gamma X_2, \\x_2 &= X_2,\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

x_i et X_i , $i = 1, 2$, sont les coordonnées cartésiennes dans la configuration courante (à l'instant t) et de la position initiale du point du matériau, respectivement.

Ainsi les composantes non nulles du gradient des vitesses sont

$$D_{12} = D_{21} = \frac{\dot{\gamma}}{2},\tag{4.2.2}$$

$$W_{12} = -W_{21} = \frac{\dot{\gamma}}{2},\tag{4.2.3}$$

avec γ désignant la déformation de cisaillement.

2. 2. Algorithme de résolution

Connaissant le taux de déformation total \mathbf{D} , la résolution incrémentale des grandeurs cinématiques peut être résumée par

$$\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^e = \text{Solution du système d'équations linéaire } \left[\mathbf{D}^e = \left(\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^e \mathbf{V}^{e-1} \right)_{\text{sym}} \right],$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I = \text{Solution du système d'équations linéaire } \left[\mathbf{D}^I = \left(\mathbf{V}^e \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I \mathbf{V}^{I-1} \mathbf{V}^{e-1} \right)_{\text{sym}} \right],$$

$$\mathbf{W}^e = \left(\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^e \mathbf{V}^{e-1} \right)_{\text{antisym}}, \quad \mathbf{W}^I = \left(\mathbf{V}^e \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I \mathbf{V}^{I-1} \mathbf{V}^{e-1} \right)_{\text{antisym}}$$

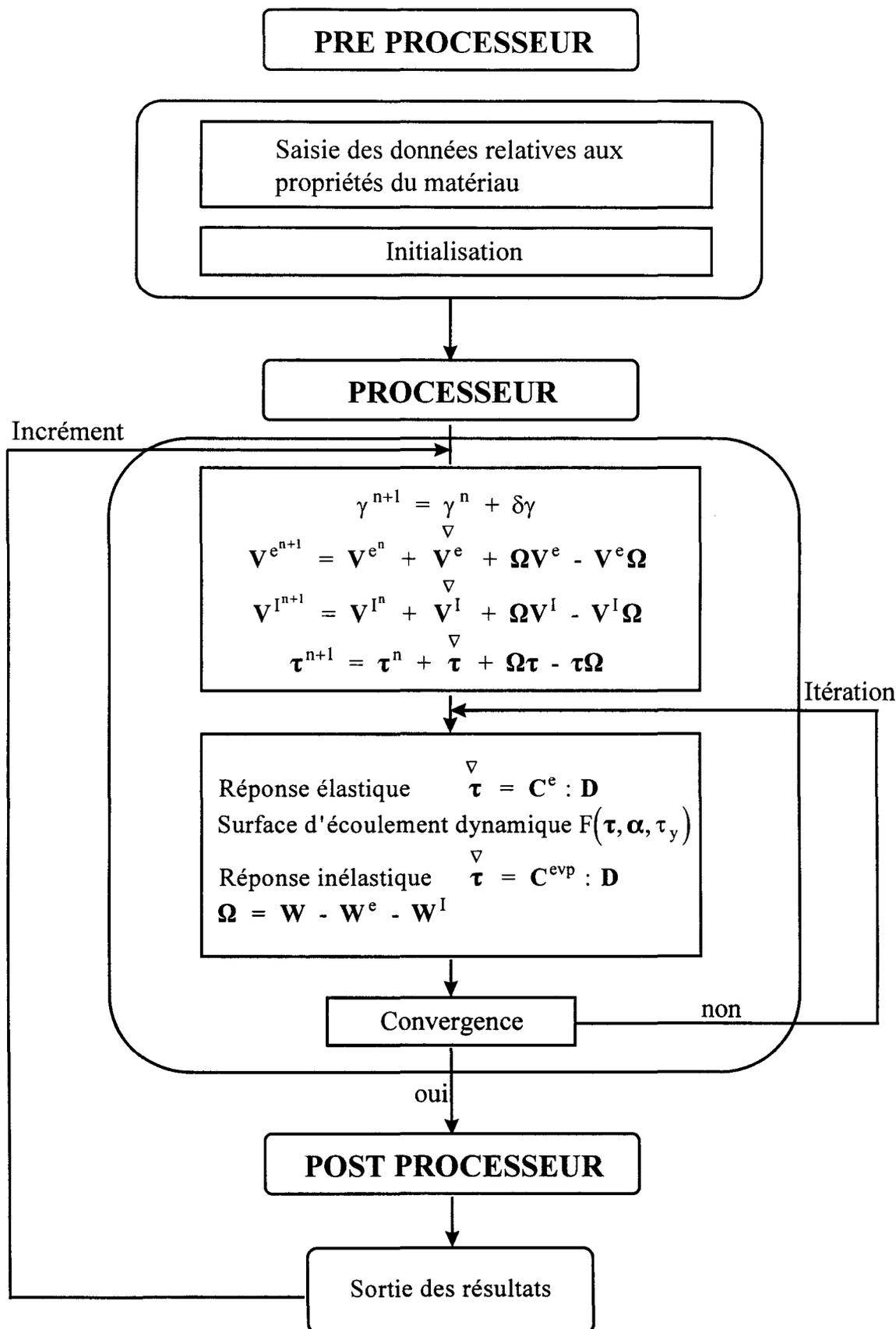
$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{W} - \mathbf{W}^e - \mathbf{W}^I$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^e = \dot{\mathbf{V}}^e - \mathbf{\Omega} \mathbf{V}^e + \mathbf{V}^e \mathbf{\Omega} \Rightarrow \dot{\mathbf{V}}^e \Rightarrow \mathbf{V}^e(t + \delta t) = \mathbf{V}^e(t) + \dot{\mathbf{V}}^e \delta t$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I = \dot{\mathbf{V}}^I - \mathbf{\Omega} \mathbf{V}^I + \mathbf{V}^I \mathbf{\Omega} \Rightarrow \dot{\mathbf{V}}^I \Rightarrow \mathbf{V}^I(t + \delta t) = \mathbf{V}^I(t) + \dot{\mathbf{V}}^I \delta t$$

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{\Omega} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{\Omega} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\tau}} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}(t + \delta t) = \boldsymbol{\tau}(t) + \dot{\boldsymbol{\tau}} \delta t$$

Le modèle présenté dans le chapitre précédent va nous servir pour résoudre numériquement le problème plan de cisaillement simple, pour un matériau rigide-viscoplastique. Nous donnerons ci-dessous le schéma de l'algorithme de résolution.



2. 3. Résultats

Les calculs ont été faits pour deux vitesses de déformation $\dot{\gamma}_1 = 0.007\sqrt{3} \text{ s}^{-1}$ et $\dot{\gamma}_2 = 0.5\sqrt{3} \text{ s}^{-1}$. Les valeurs des paramètres utilisés sont [Dafalias (1990) ; Schieck et Stumpf (1995)]

$E = 1000 \text{ Mpa}$; $\nu = 0.3$; $E_T = 1.5 \text{ Mpa}$; $\beta = 0$; $c_r = C_r = \sqrt{3}$; $n = 5$;
 $\eta = 1 \text{ s}^{-1}$; $K = 1 \text{ Mpa}$.

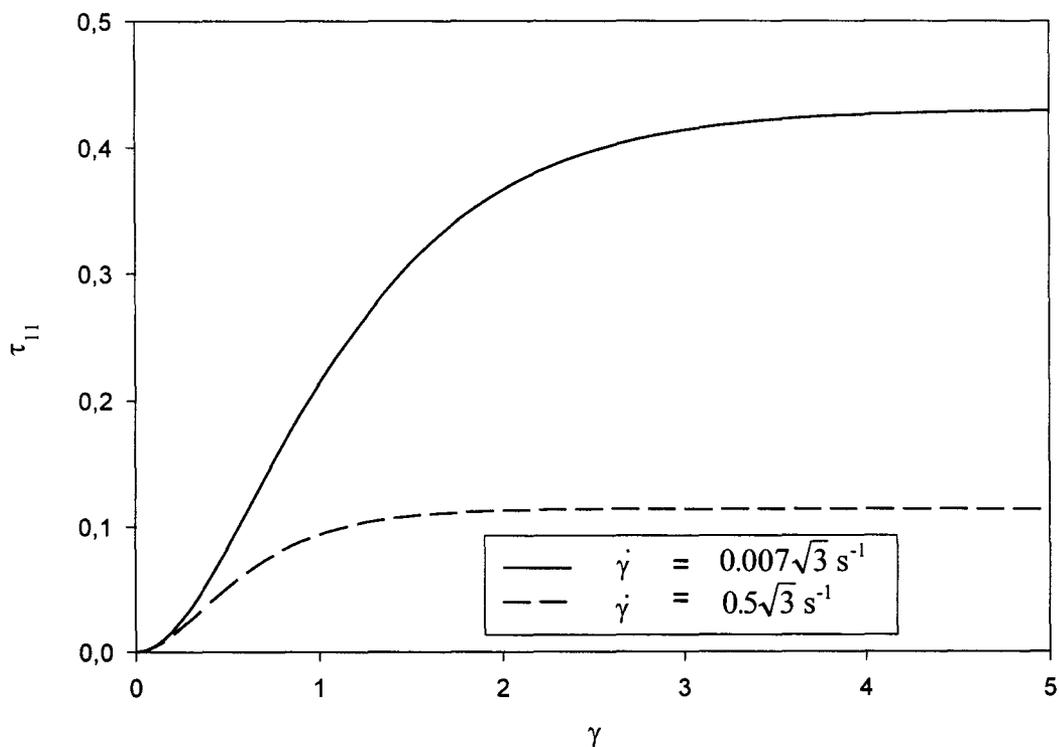


Fig. 4.1. Contrainte normale τ_{11} pour deux vitesses de déformation ($0.007\sqrt{3} \text{ s}^{-1}$ et $0.5\sqrt{3} \text{ s}^{-1}$).

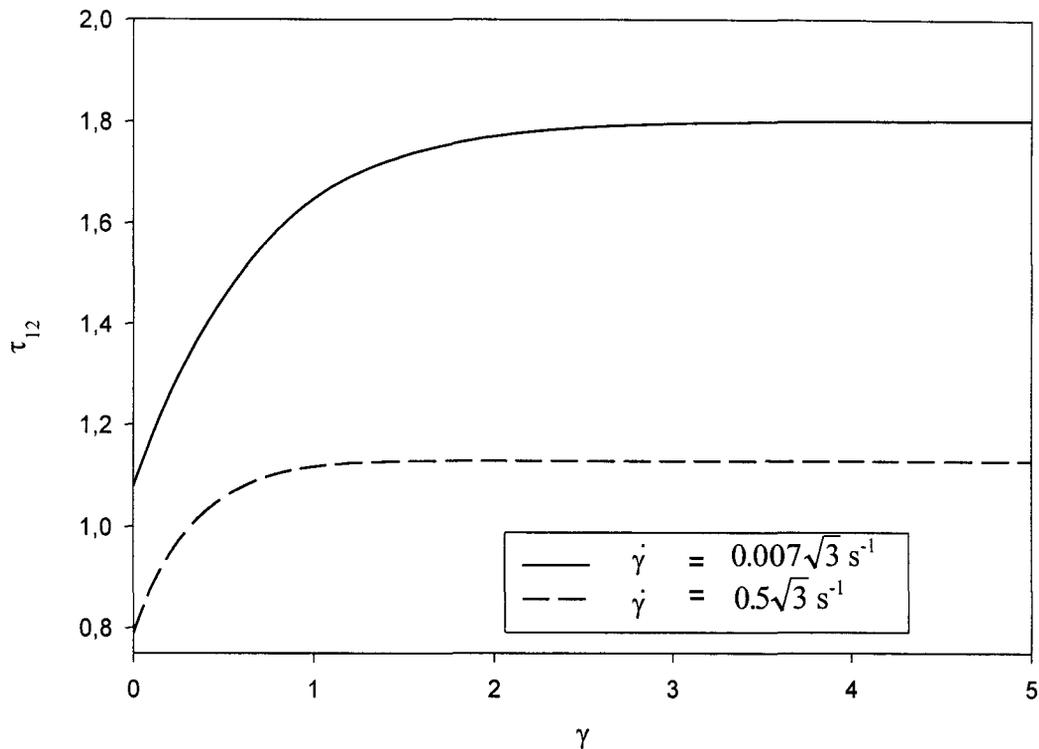


Fig. 4.2. Contrainte de cisaillement τ_{12} pour deux vitesses de déformation ($0.007\sqrt{3} \text{ s}^{-1}$ et $0.5\sqrt{3} \text{ s}^{-1}$).

Sur la figure 4.1. et la figure 4.2., on présente, pour $\dot{\gamma}_1$ et $\dot{\gamma}_2$, la contrainte normale et la contrainte de cisaillement, respectivement. Elles évoluent d'une manière monotone par rapport à la déformation.

Dans chaque cas, la réponse en contrainte n'est plus unique comme en plasticité, elle dépend de la vitesse de déformation. Pour une même déformation, la contrainte avec une grande vitesse de déformation est plus élevée que celle avec une faible vitesse de déformation.

3. Comparaisons du modèle présenté avec celui de Dafalias

3. 1. Modèle viscoplastique de Dafalias

L'approche viscoplastique de Dafalias repose sur une loi constitutive supplémentaire pour le spin inélastique, afin de construire un taux corotationnel. Celle-ci est issue du théorème de représentation de Wang (1970). Cette loi constitutive utilisée fait intervenir un coefficient supplémentaire ρ , qui a la dimension de (contrainte)⁻¹.

Elle s'écrit sous la forme

$$\mathbf{W}^I = \frac{1}{2} \rho (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{D}^I - \mathbf{D}^I \boldsymbol{\alpha}). \quad (4.3.1)$$

En plus de l'équation constitutive du spin inélastique, le modèle de Dafalias (1990) est décrit par la loi constitutive d'évolution de la contrainte interne associée à l'écoulement cinématique

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\Omega}_D \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\Omega}_D = \frac{2}{3} h_\alpha \mathbf{D}^I - c_r |\mathbf{D}^I| \boldsymbol{\alpha}, \quad (4.3.2)$$

où le spin $\boldsymbol{\Omega}_D$ relatif à la dérivée objective est

$$\boldsymbol{\Omega}_D = \mathbf{W} - \mathbf{W}^I, \quad (4.3.3)$$

et h_α un paramètre d'écoulement du matériau.

L'équation de la surface d'écoulement viscoplastique est

$$\left[\frac{3}{2} (\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}) : (\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\alpha}) \right]^{\frac{1}{2}} = \tau_y + K \left(\frac{1}{\eta} |\mathbf{D}^I| \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (4.3.4)$$

Les équations (4.3.1) - (4.3.4) appliquées dans le cas de cisaillement simple, pour un matériau rigide-viscoplastique, conduisent au système d'équations suivant

$$\frac{d \alpha_{11}}{d \gamma} = (1 - \rho \alpha_{11}) \alpha_{12} - \frac{1}{\sqrt{3}} c_r \alpha_{11}, \quad (4.3.5)_1$$

$$\frac{d \alpha_{12}}{d \gamma} = \frac{h_\alpha}{3} - (1 - \rho \alpha_{11}) \alpha_{11} - \frac{1}{\sqrt{3}} c_r \alpha_{12}, \quad (4.3.5)_2$$

avec

$$\tau_{11} = \alpha_{11} = -\tau_{22} = -\alpha_{22}, \quad (4.3.6)_1$$

$$\tau_{12} = \alpha_{12} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\tau_y + K \left(\frac{\dot{\gamma}}{\eta \sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{n}} \right]. \quad (4.3.6)_2$$

3. 2. Comparaisons

La solution du modèle de Dafalias est obtenue par l'intégration du système d'équations (4.3.5), en utilisant la méthode de Runge-Kutta, pour différentes valeurs de ρ . Les calculs ont été faits pour les mêmes vitesses de déformation $\dot{\gamma}_1$ et $\dot{\gamma}_2$, comme au § 2. 3. 2. du chapitre 4.

Les valeurs des paramètres utilisés sont [Dafalias (1990)]

$$h_\alpha = 3 \text{ Mpa} ; K = 1 \text{ Mpa} ; n = 5 ; c_r = \sqrt{3} ; \eta = 1 \text{ s}^{-1}.$$

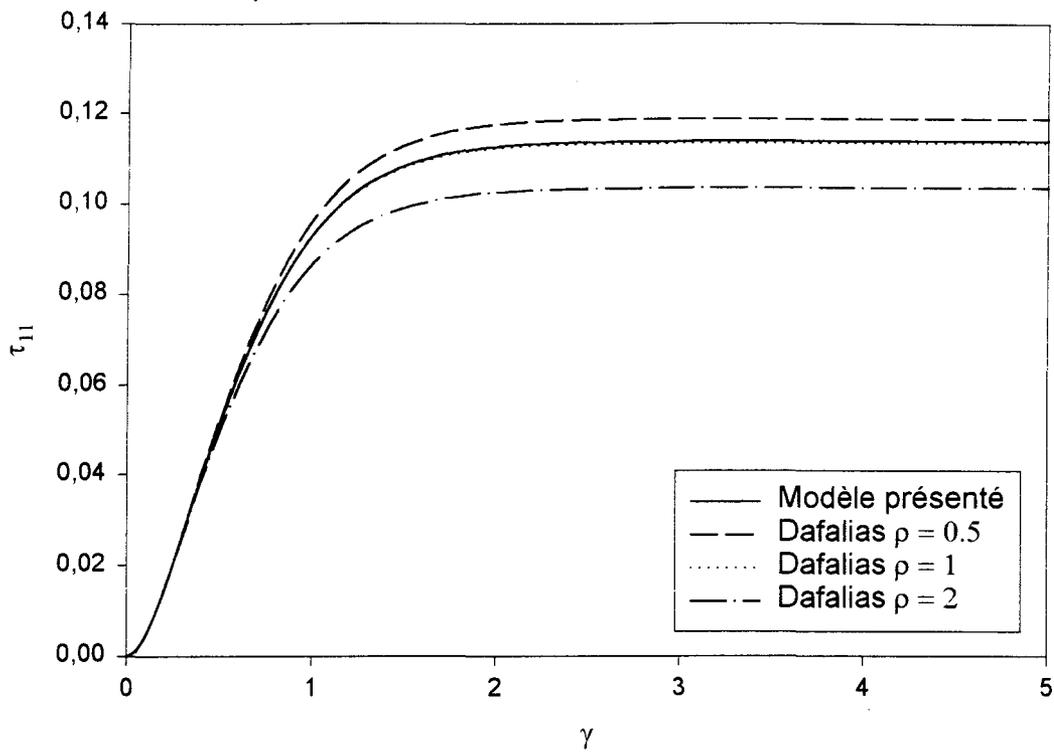


Fig. 4.3. Contrainte normale τ_{11} ($\dot{\gamma} = 0.007\sqrt{3} \text{ s}^{-1}$) :
 Comparaison de notre modèle avec celui de Dafalias

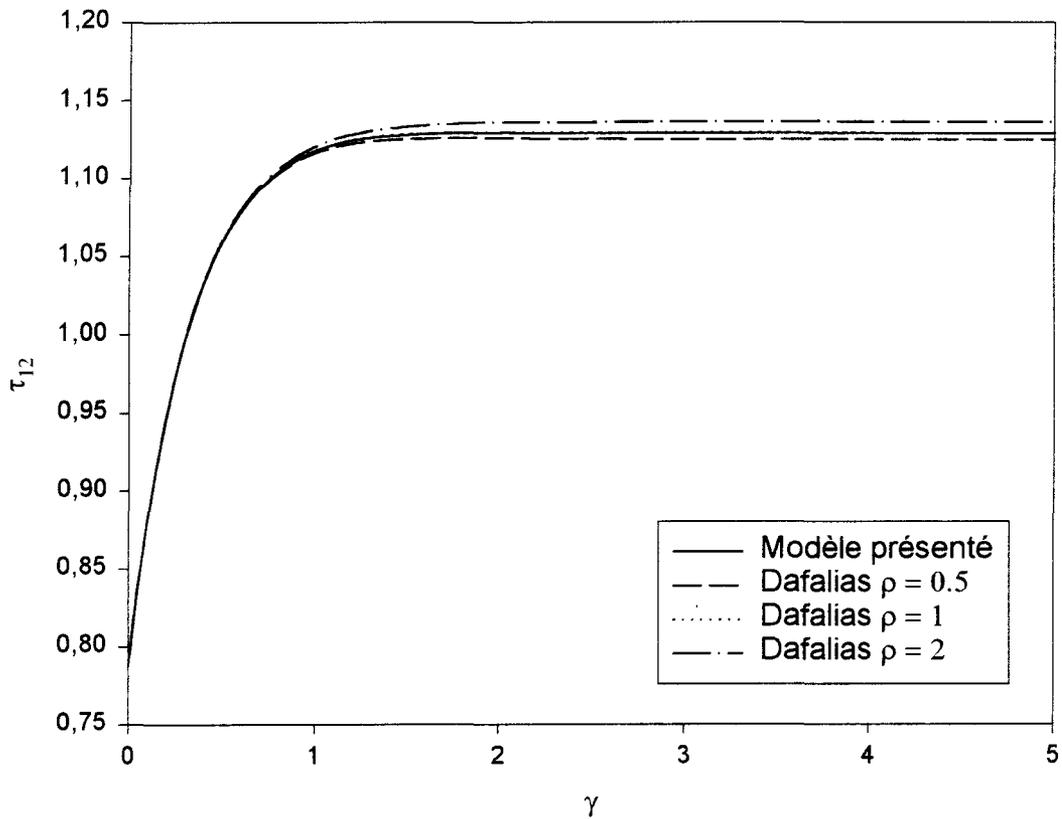


Fig. 4.4. Contrainte de cisaillement τ_{12} ($\dot{\gamma} = 0.007\sqrt{3} \text{ s}^{-1}$) :
 comparaison de notre modèle avec celui de Dafalias

Les figures 4.3. et 4.4. présentent, respectivement, la réponse de la contrainte normale τ_{11} et de la contrainte de cisaillement τ_{12} , pour une vitesse de déformation $\dot{\gamma} = 0.007\sqrt{3} \text{ s}^{-1}$. Les figures 4.5. et 4.6. décrivent la réponse en contraintes pour une vitesse de déformation $\dot{\gamma} = 0.5 \sqrt{3} \text{ s}^{-1}$.

Sur ces figures, nous comparons les résultats (réponse en contrainte normale et de cisaillement) obtenus par notre modèle viscoplastique, dont le spin est obtenu à partir des considérations cinématiques, avec ceux de Dafalias (1990) pour différentes valeurs de ρ (0.5; 1; 2).

Pour la petite vitesse de déformation ($\dot{\gamma} = 0.007\sqrt{3} \text{ s}^{-1}$), on remarque que le modèle de Dafalias, pour $\rho = 1$, présente des résultats (réponses en contraintes) quasi identiques que les nôtres. En revanche, on observe des différences importantes pour les autres valeurs de ρ (0.5; 2).

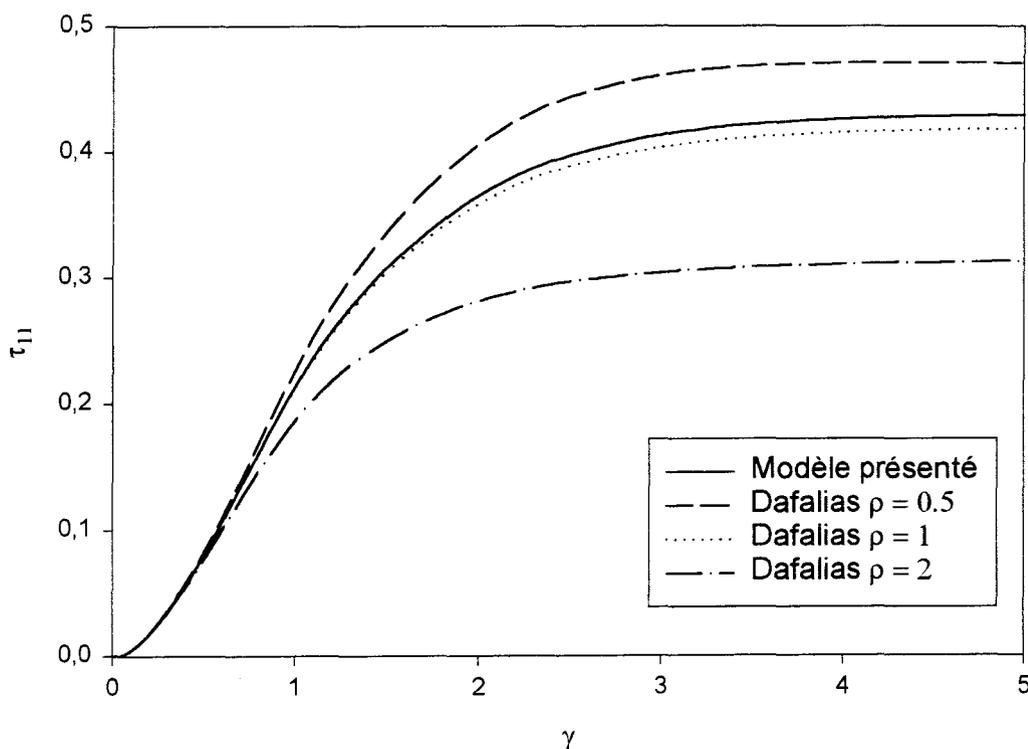


Fig. 4.5. Contrainte normale τ_{11} (pour $\dot{\gamma} = 0.5 \sqrt{3} \text{ s}^{-1}$) :
 Comparaison de notre modèle avec celui de Dafalias.

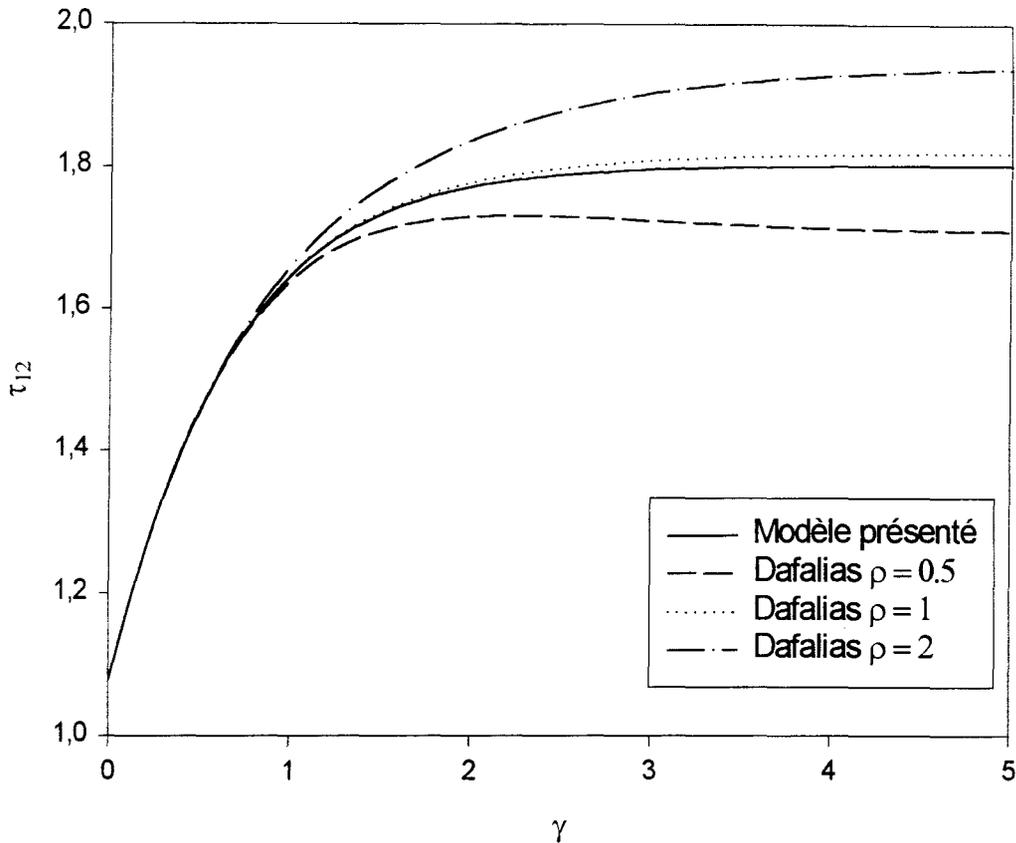


Fig. 4.6. Contrainte de cisaillement τ_{12} ($\dot{\gamma} = 0.5 \sqrt{3} \text{ s}^{-1}$) :
 Comparaison de notre modèle avec celui de Dafalias.

On constate, pour la grande vitesse de déformation ($\dot{\gamma} = 0.5 \sqrt{3} \text{ s}^{-1}$), qu'il y a une dépendance importante du modèle de Dafalias par rapport à ρ . Dans le cas $\rho = 1$, la réponse selon l'approche de Dafalias se rapproche de celle du modèle présenté. Des différences restent observables pour $\rho = 0.5$ et $\rho = 2$. De plus la réponse de la contrainte de cisaillement τ_{12} , pour $\rho = 0.5$, présente une oscillation en $\gamma \approx 2.25$ qui comme cela a été mentionné précédemment n'a pas de sens physique, puisque la réponse en contrainte doit suivre l'évolution monotone de la déformation imposée.

4. Etude de la plasticité à partir du modèle viscoplastique

Dans ce paragraphe, nous allons décrire le comportement plastique à partir de l'approche viscoplastique. On tendra notre application au comportement rigide-plastique, avec la prise en compte des effets de restauration dynamique.

Pour rendre le matériau insensible au changement de vitesse de déformation, il suffit de modifier les paramètres viscoplastiques, en l'occurrence, d'augmenter la valeur de n ($n = 10$), et diminuer celle de K ($K = 0.01$ Mpa).

Les résultats obtenus sont décrits dans les figures 4.7. et 4.8., ils sont comparés avec ceux de Dafalias et Aifantis (1990), pour plusieurs valeurs de ρ (0; 0.3; 0.5; 1; 2).

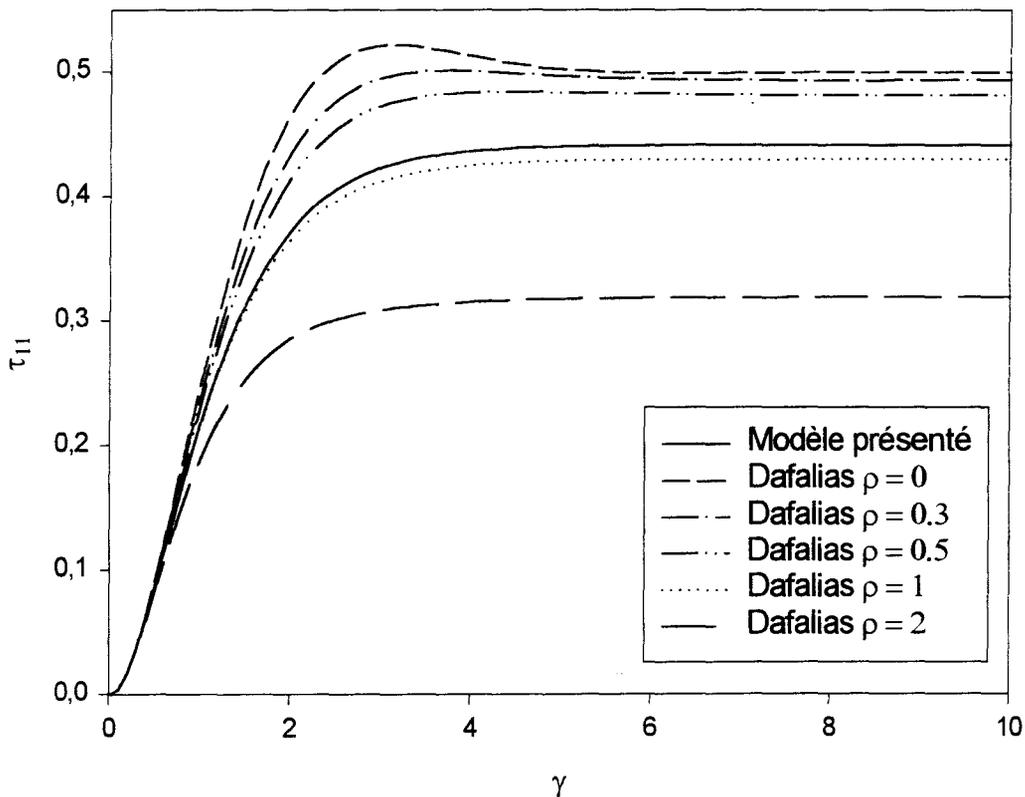


Fig. 4.7. Contrainte normale τ_{11} : Comparaison de notre modèle avec celui de Dafalias dans le cas rigide-plastique en tenant compte des effets de restauration

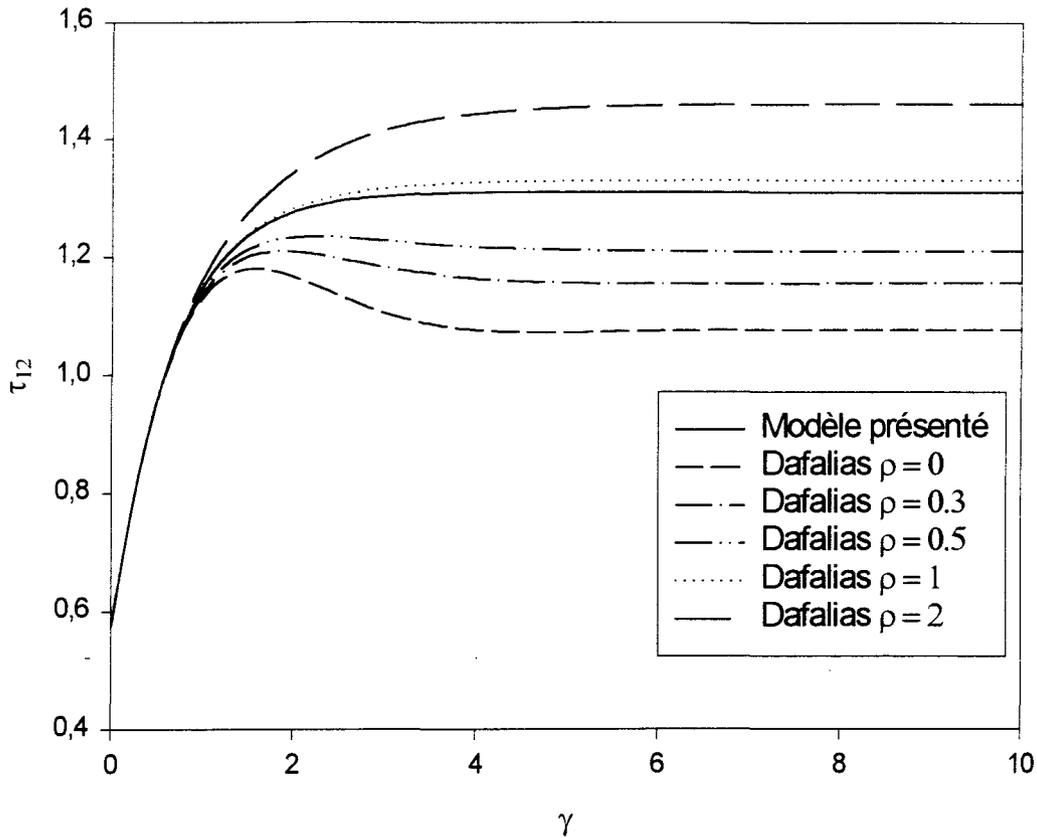


Fig. 4.8. *Contrainte de cisaillement τ_{12} : Comparaison de notre modèle avec celui de Dafalias dans le cas rigide-plastique en tenant compte des effets de restauration*

On constate, comme dans le cas rigide-viscoplastique, que c'est la réponse selon l'approche de Dafalias pour, $\rho = 1$, qui se rapproche le plus de la notre, tandis que des différences importantes persistent pour les autres valeurs de ρ (0 ; 0.3 ; 0.5 ; 2). En particulier, pour $\rho = 0.3$ et $\rho = 0.5$ la réponse de Dafalias présente une oscillation. Pour $\rho = 0$, l'oscillation s'explique par le fait que la dérivée objective de Dafalias se réduit, dans ce cas, à celle de Jaumann dont l'oscillation a été déjà observée par Dines (1979).

5. Discussion

Les résultats obtenus dans les paragraphes précédents, que ce soit pour le cas rigide-viscoplastique ou rigide-plastique, nous ont montré que les réponses en contraintes, selon l'approche de Dafalias pour des valeurs de ρ autres que 1, présentent des différences importantes par rapport à celles issues de notre modèle. En revanche, pour $\rho = 1$, ses résultats se rapprochent des nôtres, et ils sont quasi identiques en viscoplasticité pour des petites vitesses de déformation. On va tenter dans ce paragraphe de trouver une explication à cela.

Rappelons que l'approche de Dafalias est basée sur une loi constitutive supplémentaire pour le spin inélastique, issue du théorème de représentation [Wang (1970)], et qui s'écrit

$$\mathbf{W}^I = \frac{1}{2} \rho (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{D}^I - \mathbf{D}^I \boldsymbol{\alpha}). \quad (4.5.1)$$

Cette équation fait intervenir un coefficient supplémentaire inconnu ρ , qui a la dimension de l'inverse d'une contrainte, et auquel sont attribuées des valeurs constantes dans l'approche de Dafalias [Dafalias (1985 a, b), Dafalias (1990), Dafalias (1992)], sans donner un choix exact de la valeur de ce coefficient.

Dans notre cas, le taux corotationnel est défini à partir des considérations cinématiques, sans faire appel à une équation constitutive supplémentaire pour le spin inélastique

$$\mathbf{W}^I = \frac{1}{2} (\mathbf{V}^e \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I \mathbf{V}^{I^{-1}} \mathbf{V}^{e^{-1}} - \mathbf{V}^{e^{-1}} \mathbf{V}^{I^{-1}} \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I \mathbf{V}^e). \quad (4.5.2)$$

On a vu dans le chapitre 3 (paragraphe 2.3.) que cette expression se réduit dans le cas rigide-viscoplastique à

$$\mathbf{W}^I = \frac{1}{2} \left(\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I \mathbf{V}^{I^{-1}} - \mathbf{V}^{I^{-1}} \overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I \right). \quad (4.5.3)$$

Dans ce cas, le taux corotationnel du tenseur d'élongation inélastique $\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I$ peut être supposé avec une approximation

$$\overset{\nabla}{\mathbf{V}}^I \approx \mathbf{D}^I. \quad (4.5.4)$$

En utilisant la forme hyperplastique de la contrainte interne associée à l'écroutissage cinématique [Schieck et Stumpf (1995)]

$$\boldsymbol{\alpha} = \zeta \text{Ln } \mathbf{V}^I, \quad (4.5.5)$$

une approximation au premier ordre de (4.5.5) nous donne

$$\boldsymbol{\alpha} \approx \zeta (\mathbf{1} - \mathbf{V}^{I^{-1}}). \quad (4.5.6)$$

L'introduction des relations (4.5.4) et (4.5.6) dans l'expression du spin inélastique (4.5.3) nous donne, au premier ordre

$$\mathbf{W}^I \approx \frac{1}{2\zeta} (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{D}^I - \mathbf{D}^I \boldsymbol{\alpha}). \quad (4.5.7)$$

Or dans les calculs, que ce soit pour notre approche ou celle de Dafalias, le paramètre d'écroutissage est

$$\zeta = \frac{2}{3} h_\alpha = 1. \quad (4.5.8)$$

Finalement, l'équation (4.5.7) devient

$$\mathbf{W}^I \approx \frac{1}{2} (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{D}^I - \mathbf{D}^I \boldsymbol{\alpha}). \quad (4.5.9)$$

La comparaison de (4.5.1) et (4.5.9) nous montre que l'équation constitutive du spin inélastique de Dafalias (4.5.1) est une bonne approximation de l'expression cinématique exact (4.5.2), dans le cas d'un matériau rigide-viscoplastique avec écrouissage cinématique, pourvu que le coefficient ρ soit choisi égale à 1. Ceci a été observé dans les figures 4. 3 - 4. 8.

CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES

Dans ce travail, nous avons proposé une nouvelle approche dans le domaine élasto-viscoplastique en grandes déformations géométriques.

Comme nous avons indiqué précédemment, les problèmes en grandes déformations sont souvent étudiés en se basant cinématiquement sur la décomposition multiplicative du gradient de déformation, introduite par Bilby et al. (1957). Nous avons considéré la décomposition unique du gradient de déformation, proposée dans l'approche élastoplastique de Schieck et Stumpf (1993). Celle-ci nous a permis d'écrire la cinématique du comportement élasto-viscoplastique en grandes transformations. On a pu exprimer le spin élastique et le spin inélastique en fonction des grandeurs cinématiques. Cela a permis de construire un taux corotationnel (dérivée objective) adéquat, avec un spin matériel déterminé à partir des considérations cinématiques seulement, et sans faire appel à une équation constitutive supplémentaire.

Par le biais de la nouvelle dérivée objective, on a pu écrire les équations constitutives élasto-viscoplastiques pour un matériau élastiquement isotrope. Les effets d'écroutissement ont été pris en compte par la loi non linéaire du modèle d'Armstrong-Frederick (1966) pour l'écroutissement cinématique. L'écroutissement isotrope a été introduit par une équation similaire. Notre modèle tient compte de la surface d'écoulement dynamique qui dépend explicitement de la vitesse de déformation. Pour formuler une

loi incrémentale, on a déterminé l'opérateur tangentiel élasto-viscoplastique en introduisant le paramètre d'érouissage mixte.

Nous avons appliqué cette méthode à l'analyse numérique du problème de cisaillement simple. L'étude a été faite pour un matériau rigide-viscoplastique, en tenant compte des effets d'érouissage, et ceci pour deux vitesses de déformation. Pour des raisons de commodité, nous avons supposé que le matériau est isotrope. Les résultats obtenus (contrainte - déformation) confirment l'évolution monotone de la contrainte en fonction de la déformation. La réponse en contrainte n'est plus unique, comme en plasticité, vu qu'elle dépend de la vitesse de déformation. Pour une même déformation, la contrainte maximale pour la faible vitesse de déformation est inférieure à celle obtenue avec une vitesse de déformation plus élevée.

Pour valider notre modèle, nous avons comparés nos résultats avec ceux obtenus par le modèle viscoplastique de Dafalias. Celui-ci utilise une équation constitutive supplémentaire du spin inélastique, à travers la dérivée objective, pour décrire les lois de comportement. Son équation constitutive fait apparaître un paramètre inconnu ρ , auquel il attribue des valeurs constantes, et qui dépend à priori des variables d'état. Pour $\rho = 1$, on a constaté une ressemblance des résultats de Dafalias avec les nôtres. Les courbes sont quasi identiques dans le cas de la faible vitesse de déformation, et on note une petite différence pour le vitesse de déformation élevée. En revanche, des différences importantes sont observées pour les autres valeurs de ρ . Ceci a été confirmé en prouvant théoriquement que l'équation constitutive du spin inélastique de Dafalias est une bonne approximation du spin utilisé dans notre approche, pourvu que le coefficient ρ soit choisi égale à 1.

De plus, on a pu remarquer que le spin inélastique ne s'annule que si les tenseurs inélastiques d'élongation et de taux de déformation sont coaxiaux, ce qui n'est généralement pas le cas même en l'absence de l'érouissage. Ce qui corrige les

suppositions faites dans la littérature qui annulent le spin inélastique en l'absence de l'écroutissage [Van der Giessen (1991)].

A partir de la solution viscoplastique nous avons décrit le comportement rigide-plastique, en tenant compte des effets de restauration. Pour cela nous avons modifié les valeurs des paramètres viscoplastiques. Ainsi, les résultats obtenus nous ont permis de faire une comparaison avec ceux de Dafalias [Dafalias et Aifantis (1990)] pour différentes valeurs de ρ . On a pu observer les mêmes différences que dans le cas rigide-viscoplastique, qui ont été expliquées théoriquement, c'est-à-dire, que seul le cas $\rho = 1$ présente une réponse rapprochée de la notre. Pour des valeurs de ρ tendant vers 0, l'application du modèle de Dafalias conduit à des réponses oscillatoires qui n'ont pas de sens physique.

L'originalité de cette étude réside dans le fait qu'elle est attachée aux aspects physiques. En effet, en partant d'une décomposition unique du gradient des déformations, on se base sur les données cinématiques, à travers la détermination du spin inélastique, pour définir la dérivée objective. On n'a pas besoin de rajouter une équation constitutive, ni d'introduire des paramètres supplémentaires et chercher à quoi ils correspondent.

Cependant, cette approche théorique nécessite une validation expérimentale, car il n'y a que l'expérience qui puisse être l'arbitre dans un domaine où on a une latitude dans le choix des modèles. Le problème d'identification des paramètres reste à explorer. On pourrait essayer d'appliquer cette méthode pour des problèmes plus complexes, et utiliser d'autres lois viscoplastiques (loi de Perzyna par exemple). Aussi l'implémentation de cette méthode dans un code de calcul de structures serait souhaitable.

REFERENCES

ANAND, L. (1979). "On H. Hencky's approximate strain-energy function for moderate deformations" *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* **76**, 78-82.

ANAND, L. (1986). "Moderate deformations in extension-torsion of incompressible isotropic elastic materials" *J. Mech. Phys. Solids* **34**, 293-304.

ARMSTRONG, P. J. & FREDERICK, C. O. (1966). "A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect" C. E. G. B. report RD/B/N731.

ATLURI, S. N. (1984). "On constitutive relations at finite strain: hypo-elasticity and elasto-plasticity with isotropic or kinematic hardening" *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **43**, 137-171.

BILBY, B. A., GARDNER, L. R. T. & STROH, A. N. (1957). "Continuous distributions of dislocations and the theory of plasticity" In *Extrait des actes du IX^e congrès international de mécanique appliquée* **43**, 137-171.

BODNER, S. R. & PARTOM, Y. (1975). "Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain-hardening materials" *ASME, J. Appl. Mech.* **42**, 385-389.

BRUHNS, O. T. & PITZER, M. (1991). "Some remarks on integration procedures for a viscoplastic constitutive law" *Int. J. Plasticity.* **7**, 235-254.

CHABOCHE, J. L. (1977). "Viscoplastic constitutive equations for the description of cyclic and anisotropic behavior of metals" *Bull. Acad. Polonaise Sci. Serie des sciences techniques*, **XXV** 33-42.

- CHABOCHE, J. L. (1989). "Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity" *Int. J. Plasticity*. **5**, 247-302.
- CHABOCHE, J. L. & ROUSSELIER, G. (1983). "On the plastic and viscoplastic constitutive equations Part I & II" *ASME J. Pressure Vessel Tech.* **105**, 153-164.
- COTTER, B. A. & RIVELIN, R. S. (1955). "Tensors associated with time-dependent stress" *Q. Appl. Math.* **35**, 177.
- DAFALIAS, Y. F. (1983). "Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformation" *J. Appl. Mech.* **50**, 561-565.
- DAFALIAS, Y. F. (1985a). "A missing link in the macroscopic constitutive formulation of large plastic deformations" *Plasticity today: Modeling, Methods and Applications* (Edited by A. Sawczuk and G. Bianchi). 135-151. Elsevier Appl. Sci. Publ., London, New York.
- DAFALIAS, Y. F. (1985b). "The plastic spin" *J. Appl. Mech.* **52**, 865 - 871.
- DAFALIAS, Y. F. (1987). "Issues on the constitutive formulation at large elastoplastic deformations Part 1: Kinematics" *Acta Mechanica*. **69**, 119-138.
- DAFALIAS, Y. F. (1988). "Issues on the constitutive formulation at large elastoplastic deformations Part 2: Kinetics" *Acta Mechanica*. **73**, 121-146.
- DAFALIAS, Y. F. (1990). "The plastic spin in viscoplasticity" *Int. J. Structures* **26**(2), 149-163.
- DAFALIAS, Y. F. (1992). "On constitutive spins at large inelastic deformations" *Finite Inelastic Deformations - Theory and Applications*. IUTAM Symposium Hannover, Germany, 1991. Eds. D. Besdo and E. Stein. Springer-Verlag, Berlin (1992), 27-36.
- DAFALIAS, Y. F. & AIFANTIS, E. C. (1990). "On the microscopic origin of the plastic spin" *Acta Mechanica*, **82**, 31-48.

- DINES, K.** (1979). "On the analysis of rotation and stress rate in deforming body" *Acta Mechanica* **32**, 217-232.
- DURBAN, D. & BARUCH, M.** (1977). "Natural stress rate" *Q. Appl. Math.* **35**, 55.
- DUSZEK-PERZYNA, M. K. & PERZYNA, P.** (1993). "Adiabatic shear band localization in elastic-plastic single crystals" *Int. J. Solids Structures* **30**(1), 61-89.
- GREEN, A. E. & NAGHDI, P. M.** (1965). "A general theory of an elastic-plastic continuum" *Arch. Rat. Mech. Anal.* **18**, 251-281.
- HAUPT, P.** (1985). "On the concept of an intermediate configuration and its application to a representation of viscoelastic-plastic material behavior" *Int. J. Plasticity* **1**, 303-316.
- HAUPT, P., KAMLAH, M. & TSAKMAKIS, CH.** (1991). "On the thermodynamics of rate-independent plasticity as an asymptotic limit of viscoplasticity for slow processes" IUTAM Symposium Hannover, Germany, 1991. Eds. D. Besdo and E. Stein. Springer-Verlag, Berlin (1992).
- HILL, R.** (1968). "On constitutive inequalities for simple materials" *J. Mech. Phys. Solids* **16**, 229-242.
- HEIDUSCHKE, K.** (1995). "The logarithmic strain space description" *Int. J. Solids Structures* **32**, 1047-1062.
- HOGER, A.** (1986). "The material time derivative of logarithmic strain" *Int. J. Solids Structures* **22**, 1019-1032.
- HOGER, A.** (1987). "The stress conjugate to logarithmic strain" *Int. J. Solids Structures* **23**(12), 1645-1656.
- JAUMANN, G.** (1911). "Geschlossenes System Physikalischer und Differentialgesetze" *Sitz. der. Akad. Wiss. Wien* **120**, 385.

- JOHNSON, G. C. & BAMMANN, D. J. (1984). "A discussion of stress rates in finite deformation problems" *Int. J. Solids Structures* **20**, 725.
- KEY, S. W. (1984). "On an implementation of finite strain plasticity in transient dynamic large-deformation calculation" In *Theoretical Foundation for Large-scale Computations for Non-linear Material Behavior* (Edited by Nemat-Nasser, R. J. Asaro and G. A. Hegemier, 99-108, Martinus Nijhoff, Dordrecht.
- KOLLMANN, F. G. . & SANSOUR, C (1997). "Viscoplastic shells, theory and numerical analysis" *Arch. Mech.* **49**, 477-511.
- KRATOCHVIL, J. (1971). "Finite strain theory of crystalline elastic-inelastic materials" *J. Appl. Phys.* **42**, 1104-1108.
- KREMPL, E. (1987). "Models of viscoplasticity, some comments on equilibrium (back) stress and drag stress" *Acta Mechanica.*, **69**, 25-42.
- KRÖNER, E. (1960). "Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen" *Arch. Rat. Mech. Anal.* **4**, 273-334.
- KURODA, M. (1997). "Interpretation of the behavior of metals under large plastic shear deformations : A macroscopic approach" *Int. J. Plasticity*, **13**(4), 359-383.
- LE, K. CH. & STUMPF, H. (1993). "Constitutive equations for elastoplastic bodies at finite strain : Thermodynamic implementation" *Acta Mechanica.*, **100**, 155-170.
- LE, K. CH. & STUMPF, H. (1994). "Finite elastoplasticity with microstructure" *Mitteilungen Institut für Mechanik* **92**, Ruhr-Universität Bochum.
- LEE, E. H. (1969). "Elasto-plastic deformation at finite strains" *J. Appl. Mech.* **36**, 1-6.
- LEE, E. H. (1981). "Some comments on elastic-plastic analysis" *Int. J. Solids Structures* **17**, 859-872.

- LEE, E. H. & LIU, D. T. (1967). "Finite strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis" *J. Appl. Phys.* **38**, 19-27.
- LEE, E. H., MALLET, R. & WERTHEIMER, T. H. (1983). "Stress analysis for anisotropic hardening in finite-deformation plasticity" *J. Appl. Mech.* **50**, 554.
- LEMAITRE, J. & CHABOCHE, J. L. (1988). "Mécanique des matériaux solides" Ed. Dunod, Paris.
- LORET, B. (1983). "On the effect of plastic rotation in the finite deformation of anisotropic elastoplastic materials" *Mechanics of Materials* **2**, 287-304.
- LUBARDA, V. A. & LEE, E. H. (1981). "A correct definition of elastic and plastic deformation and its computational significance" *J. Appl. Mech.* **48**, 35-40.
- LÜHRS, G., HARTMANN, S. & HAUPT, P. (1997). "On the numerical treatment of finite deformations in elastoviscoplasticity" *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **144**, 1-21.
- MANDEL, J. (1971). "Plasticité classique et viscoplasticité" CISM Lecture Notes Vol. 97, Udine. Springer, Wien.
- MANDEL, J. (1973). "Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques" *Int. J. Solids Structures* **9**, 725.
- MANDEL, J. (1981). "Sur la définition de la vitesse de déformation élastique et sa relation avec la vitesse de contrainte" *Int. J. Solids Structures* **17**, 873-878.
- MOLENKAMP, F. (1986). "Limits to the Jaumann stress rate" *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* **10**, 151-176.
- MOSS, W. C. (1984). "On instabilities in large deformation simple shear loading" *Comp. Meth. Appl. Engng.* **46**, 329.

- NAGHDI, P. M. (1990). "A critical review of the state of finite plasticity" *J. Appl. Math. Phys.* **41**, 315-394.
- NAGTEGAAL, J. C. & DE JONG, J. E. (1982). "Some aspects of nonisotropic work hardening in finite plasticity" In *Proc. Workshop on Plasticity of Metals at Finite Strain*, 65-106. Div. Appl. Mech., Stanford University.
- NEMAT-NASSER, S. (1990). "Certain basic issues in finite-deformation continuum plasticity" *Meccanica*. **25/4**, 223-229.
- NISHIGUCHI, I., SHAM, T. L. & KREMPL, E. (1990). "A finite deformation theory of viscoplasticity based on overstress: Part I & II" *ASME, J. Appl. Mech.* **57**, 548-561.
- OLDROYD, J. G. (1950). "On the formulation of rheological equations of state" *Proc. R. Soc. Lond.* **A200**, 523.
- ONAT, E. T. (1984). "Shear flow of kinematically hardening rigid-plastic materials" In *Mechanics of Material Behavior*, (Edited by G. J. Dvorak and R. T. Shield), 311-324, Elsevier, Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo.
- PAULUN, J. E. & PECHERSKI, R. B. (1985). "Study of corotational rates for kinematic hardening in finite deformation plasticity" *Arch. Mech.* **37(6)**, 661-677.
- PAULUN, J. E. & PECHERSKI, R. B. (1992). "On the relation of the plastic spin" *Arch. Appl. Mech.* **62**, 376-385.
- PERZYNA, P. (1963). "The constitutive equations for rate sensitive plastic materials" *Quart. Appl. Math.* **20**, 321-382.
- PERZYNA, P. (1966). "Fundamental problems in viscoplasticity" In: G. Kuerti, Publ.: *Advances in Applied Mechanics*, 9 (New York), 243-377.

- RANIECKI, B & SAMANTA, S. K.** (1989). "The thermodynamic model of rigid-plastic solids with Kinematic hardening, plastic spin and orientation variables" *Arch. Mech.* **41**, 747-758.
- REED, K. W. & ATLURI, S. N.** (1983). "Analysis of large quasistatic deformations of inelastic bodies by a new hybrid-stress finite element algorithm" *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* **39**, 245.
- REED, K. W. & ATLURI, S. N.** (1985). "Constitutive modeling and computational implementation for finite strain plasticity" *Int. J. Plasticity* **1**, 63.
- ROUGEE, P.** (1997). "Mécanique des grandes transformations" *Ed. Springer-Verlag Berlin heidelberg.*
- RUBIN, M. B.** (1986). "An inelastic-viscoplastic model for large deformation" *Int. J. Eng. Sci.* **24**, 1083-1095.
- SANSOUR, C. & KOLLMANN, F. G.** (1997). "On theory and numerics of large viscoplastic deformation" *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **146**, 351-369.
- SCHIECK, B. & STUMPF, H.** (1993). "Deformation analysis for finite elastic-plastic strains in a Lagrangean-type description" *Int. J. Solids structures* **30**(19), 2639-2660.
- SCHIECK, B. & STUMPF, H.** (1995). "The appropriate corotational rate, exact formula for the plastic spin and constitutive model for finite elastoplasticity" *Int. J. Solids structures* **32**(24), 3643-3667.
- SIDOROFF, F.** (1981). "Formulations élastoplastiques en grandes déformations" Rapport G. R. E. C. O. n° 29.
- SIMO, J. C.** (1988). "A Framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and multiplicative decomposition: Part I, Continuum formulation" *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **66**, 199-219.

- SKRZYPEK, J. J. (1993). "Plasticity and creep theory, Examples and Problems" English edition. Editor Richard B. Hetmarsk. New York. *J. Solids structures* **30**(19), 2639-2660.
- SOWERBY, R. & CHU, E. (1984). "Rotations, stress rates and strain measures in homogeneous deformation processes" *Int. J. Solids structures* **20**, 1037-1048.
- STUMPF, H & BADUR, J. (1990). "On missing links of rate-independent elasto-plasticity at finite strains" *Mech. Res. Comm.* **17**, 353-364.
- STUMPF, H. & SCHIECK, B. (1994). "Theory and analysis of shells undergoing finite elastic-plastic strains and rotations" *Acta Mechanica* **106**, 1-21.
- SZABO, L. & BALLA, M. (1989). "Comparison of some stress rates" *Int. J. Solids structures* **25**, 279-297.
- TRUESDELL, C. (1955). "The simplest rate theory of pure elasticity" *Commun. Pure Appl. Math.* **8**, 123.
- TRUESDELL, C. & NOLL, W. (1965). "The non-linear field theories of mechanics" *Springer, Berlin, Heidelberg*. 41-42.
- VAN DER GIESSEN, E. (1989). "Continuum models of large deformation plasticity, Part 1: Large deformation plasticity and the concept of a natural reference state" *Eur. J. Mech., A/Solids* **8**, 15-34.
- VAN DER GIESSEN, E. (1989). "Continuum models of large deformation plasticity, Part 2: A Kinematic hardening model and the concept of a plastically induced orientational structure" *Eur. J. Mech., A/Solids* **8**, 89-108.
- VAN DER GIESSEN, E. (1991). "Micromechanical and thermodynamic aspects of the plastic spin" *Int. J. Plasticity.* **7**, 365-386.

WANG, C. C. (1970). "A new representation theorem for isotropic functions : An answer to Professor G. F. Smith's criticism of my paper on representations for isotropic functions" *Arch. Rat. Mech. Anal.* **36**, 198 - 223.

WEICHERT, D. & GROSS-WEEGE, J. (1988). "The numerical assessment of elastic-plastic sheets under variable mechanical and thermal loads using a simplified two-surface yield condition" *Int. J. Mech. Sci.* **30**, 757-767.

WOZNICA, K. (1998). " Dynamique de structures élasto-viscoplastiques" *Cahiers de Mécanique*. EUDIL Lille.

XIA, Z. & ELLYIN, F. (1993). "A stress rate measure for finite elastic plastic deformations" *Acta Mechanica.* **98**, 1-14.

ZBIB, M. (1993). "On the mechanics of large inelastic deformations: Kinematics and constitutive modeling" *Acta Mechanica* **96**, 119-138.

ZBIB, M. & AIFANTIS, E. C. (1988). "On the concept of relative and plastic spin and its applications to large deformation theories Part I and Part II" *Acta Mechanica*, **75**, 15-56.

ANNEXE

Nous voulons montrer que $V_{11}^e + V_{22}^e$ est non nul

On a

$$\mathbf{V}^e = \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{U}}^e \mathbf{Q}^T \Rightarrow \det \mathbf{V}^e = (\det \tilde{\mathbf{U}}^e) (\det \mathbf{Q})^2 \quad (\text{A1})$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^e = \mathbf{R}^{I^T} \mathbf{U}^e \mathbf{R}^I \Rightarrow \det \tilde{\mathbf{U}}^e = (\det \mathbf{U}^e) (\det \mathbf{R}^I)^2 \quad (\text{A2})$$

Or

$$\begin{array}{ccc}
 \det \mathbf{F}^e > 0 & \xrightarrow[\mathbf{R}^e \text{ orthogonal}]{\mathbf{F}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e} & \det \mathbf{U}^e > 0 \\
 & & \downarrow (\text{A1}) \\
 & & \det \tilde{\mathbf{U}}^e > 0 \\
 & & \downarrow (\text{A2}) \\
 & & \det \mathbf{V}^e > 0
 \end{array}$$

Alors

$$V_{11}^e V_{22}^e - V_{12}^{e^2} > 0 \quad (\text{A3})$$

On veut montrer que $V_{11}^e + V_{22}^e \neq 0$, procédons par absurde :

On suppose que $V_{11}^e + V_{22}^e = 0$, on multiplie par V_{11}^e puis on retranche $V_{12}^{e^2}$ de part et d'autre de l'égalité, on trouve

$$V_{11}^{e^2} + V_{11}^e V_{22}^e - V_{12}^{e^2} = -V_{12}^{e^2}$$

On peut l'écrire sous la forme

$$\underbrace{(V_{11}^{e^2} + V_{12}^{e^2})}_{>0} + \underbrace{(V_{11}^e V_{22}^e - V_{12}^{e^2})}_{>0} = 0$$

(A3)

ce qui est absurde.

Donc

$$V_{11}^e + V_{22}^e \neq 0$$



MODELISATION OF THE ELASTO-VISCOPLASTIC BEHAVIOUR AT LARGE DEFORMATIONS

ABSTRACT

In this work, we have proposed a new approach for elastic-viscoplastic behaviour at large deformations.

The basic kinematic assumption of our method is the unique decomposition of the deformation gradient introduced by Schieck and Stumpf, which allowed us to write the elastic and the inelastic spin as a function of the elastic and inelastic strain rate. Therefore, for the corotational rate, we can deduce the substructure spin by kinematical considerations only, and there is no need any additional assumption for the inelastic spin.

With this corotational rate, and using the viscoplastic model of Chaboche, we formulate the constitutive equations for elastic-viscoplastic material undergoing isotropic and kinematic hardening. Our approach contains the dynamic yield surface which depend on the strain rate explicitly. Then we determine the elastic-viscoplastic tangential operator to find a relation between the stress rate and the strain rate.

This theory is applied to analyse numerically the simple shear problem for rigid-viscoplastique material. Next, we describe the rigid-plastic behaviour with recovery effect from a viscoplastic solution. The results for rigid-viscoplastic as well as for rigid-plastic are compared with those of Dafalias who use supplementary constitutive assumption for the inelastic spin. The difference or the similarity observed in this comparison was proved theoretically.

KEY WORDS : Elasto-viscoplasticity - Large deformations - Deformation Gradient - Inelastic spin - Hardening - Yield surface - Simple shear.