N° d'ordre: 2568

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

Thèse
en vue d'obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LILLE I

Spécialité: Histoire des Sciences et des Techniques

présentée et soutenue publiquement

par

Ricardo ROMERO

le 22 octobre 1999

Titre:

La philosophie naturelle mécaniste de Joseph Boussinesq (1842 - 1929)

Directeur de thèse:

Bernard Pourprix,
Professeur à l'I.U.F.M. du Nord-Pas-de-Calais

Jury

Président: M. J. CELEYRETTE, Professeur à l'Université de Lille 3
Rapporteurs: Mme A. DAHAN, Directeur de recherche au C. N. R. S., Centre A. Koyré
Mme P. RADELET, Professeur à l'Université catholique de Louvain-la-Neuve
Examinateurs: M. P. BROUZENG, Professeur à l'Université de Paris 11
M. R. LOCQUENEUX, Professeur à l'Université de Lille 1
M. B. POURPRIX, Professeur à l'I.U.F.M. du Nord-Pas-de-Calais
M. M. ZERNER, Professeur émérite à l'Université de Nice-Sophia-Antipolis

SOMMAIRE

Remerciements

Le travail présenté dans cette thèse a été effectué sous la Direction de Monsieur le Professeur B. Pourprix. Depuis de nombreuses années j'ai eu l'occasion de bénéficier de sa vaste culture et de ses profondes qualités humaines sans lesquelles ce travail n'aurait pas abouti. Je lui exprime ma profonde gratitude.

Je suis très sensible à l'honneur que me font Madame A. Dahan, Directeur de recherche au C. N. R. S., et Madame P. Radelet, Professeur à l'Université catholique de Louvain-la-Neuve, en acceptant d'être rapporteurs de ce travail.

Je remercie Monsieur le Professeur J. Céleyrette de me faire l'honneur de présider ce jury.

Je remercie également, Monsieur P. Brouzeng, Professeur à l'Université de Paris 11, Monsieur B. Locqueneux, Professeur à l'Université de Lille 1, Monsieur M. Zerner, Professeur émérite à l'Université de Nice-Sophia-Antipolis, d'avoir accepté de juger mon travail.

Mes remerciements vont aussi à tous les chercheurs en Histoire des Sciences des Universités de Lille 1 et de Lille 3 qui ont manifesté leur intérêt pour ce travail.

PRESENTATION DE LA THESE

Joseph Valentin Boussinesq (J. Boussinesq dans ses écrits scientifiques) a laissé son empreinte dans la Science par ses travaux d'hydrodynamique et d'élasticité. Il est cité à six reprises dans le "Cours de Mécanique des milieux continus" de Mandel[1] et il figure dans de nombreux traités d'hydrodynamique actuels pour sa contribution à l'étude des mouvements de convection dans les fluides[2]. Toujours en hydrodynamique on lui doit une équation de l'"onde solitaire" dans les liquides[3]. Il est aussi le créateur, avec Rankine, de la théorie de l'élasticité des corps semi-fluides. Tous ces titres seraient suffisants pour susciter une étude de son œuvre, mais une telle étude relève toutefois de l'histoire de l'élasticité et de l'hydrodynamique. L'attention que Duhem porte à Boussinesq, attention parfois critique, laisse supposer que l'enjeu des travaux de Boussinesq va bien au-delà de l'établissement d'équations habilement construites[4]. Le texte de Boussinesq actuellement le plus étudié est sa "Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale"; il révèle des préoccupations philosophiques d'une grande ambition. Par ailleurs G. Bachelard a consacré à Boussinesq un chapitre de sa célèbre "Etude sur l'évolution d'un problème de physique: la propagation thermique dans les solides"[5]. Bachelard appelle "hypothèse

---

[1] J. Mandel, *Cours de Mécanique des milieux continus,* t. 1 et t. 2, Paris, Gauthier-Villars, 1966, rééd, Paris, Gabay, 1994, pp. 235, 304, 344, 404, 628, 819.

[2] L'"approximation de Boussinesq" consiste à égaler certains termes dans l'étude de l'instabilité qui se produit lorsqu'une masse fluide possède à sa base une température supérieure à celle de sa partie élevée. Voir E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, *Hydrodynamique physique*, Paris, InterEditions, Editions du CNRS, 1991, p. 426.

[3] De telles ondes se produisent à la suite d'un ébranlement unique dans un liquide. Boussinesq a particulièrement étudié les conditions dans lesquelles cette onde conserve sa forme en fonction de la profondeur à laquelle elle se déplace et de l'énergie qu'elle transporte (J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France (Recueil des savants étrangers de l'Académie des Sciences de Paris), 23, 1872, pp. 298 à 419. L'étude de Boussinesq est particulièrement longue; on en trouve un résumé dans l'ouvrage de Bouasse, "Houles, rides, seiches et marées" (H. Bouasse, *Houles , rides, seiches et marées*, Paris, Delagrave, 1924, pp. 276 à 301).

[4] Dans la "Théorie physique(...)", Duhem voit en Boussinesq "un des théoriciens qui honorent (son) époque", mais il le range dans la catégorie des scientifiques à l'esprit "ample mais faible" (P. Duhem, *La théorie physique, son objet, sa structure,* Paris, Chevalier et Rivière, 1906, Paris, Rivière, 1914, pp. 128 à 131). Par ailleurs, Duhem débute les lettres qu'il adresse à Boussinesq entre 1905 et 1913 par la formule " Monsieur et vénéré collègue", ce qui peut marquer l'admiration mais aussi simplement de respect dû à l'âge.

[5] G. Bachelard, *L'hypothèse de la nature dynamique de la chaleur dans les problèmes de propagation,* in *Etude sur l'évolution d'un problème de physique. La propagation thermique dans les solides*, 1928, Paris, Vrin, 1973, pp. 132 à 150.

de la nature dynamique de la chaleur" l'hypothèse suivant laquelle la chaleur consiste dans les mouvements désordonnés de molécules, et qui jouera un rôle de plus en plus important dans la physique de Boussinseq. Là, ce dernier utilise le concept d'énergie: il participe à cette tentative de reconstruction de la physique autour du concept d'énergie, que l'on peut voir se manifester autour de l'année 1870, période d'intense activité de Boussinesq.

Sa longévité scientifique, environ de 1867 à 1928, retient l'attention, mais bien plus encore les dates de sa naissance et de sa mort. Né en 1842, alors que Mayer écrit ses premiers articles sur la conservation del'énergie, il meurt après que les nouvelles mécaniques, tant quantiques que relativistes, aient obtenu droit de cité, au moins en partie. Boussinesq est donc un des rares physico-mathématiciens à avoir vécu trois des grandes reformulations de la physique: l'introduction de la conservation de l'énergie, l'apparition des relativités einsteiniennes, l'émergence des mécaniques quantiques. Il est néanmoins resté fidèle à la Mécanique classique de tradition française. Plus précisément, d'après Duhem, Boussinesq se place dans la tradition de la Mécanique de Poisson[6], ce qui est un peu réducteur. Etudier l'œuvre de Boussinesq présente l'intérêt de déterminer quelles pouvaient être les caractéristiques d'une de ces mécaniques issues à la fois de Newton et des physico-mathématiciens français du début du XIX° siècle et renouvelées par la prise en compte de la conservation de l'énergie. Boussinesq est parfois considéré comme un pur mathématicien; de son vivant même, ses réflexions théoriques sont occultées par l'œuvre de savants de plus grand renom tels que Verdet par exemple. C'est précisément la partie théorique de cette mécanique propre à Boussinesq qui nous a semblé intéressante. Dans ce domaine, il applique sa vision mécaniste et atomiste à la description du monde physique, cela le conduit à réécrire la mécanique théorique en y introduisant l' énergie.

Nous avions prévu, initialement, de borner notre étude à cette mécanique théorique que Boussinesq appelle sa "Mécanique générale". Il nous est apparu que l'on ne pouvait comprendre réellement cette "Mécanique générale" sans étudier aussi, au moins partiellement, sa mécanique appliquée à la matière, celle qu'il appelle sa "Mécanique physique". Cela nous a conduit à examiner certains aspects des théories de Boussinesq en élasticité, hydrodynamique, optique et thermodynamique. Les limites initialement fixées à notre travail ont donc été dépassées. C'est ce qui explique la longueur de ce travail et aussi, parfois, l'aridité de certains paragraphes. Encore avons-nous limité l'étude de la Mécanique physique de Boussinesq au strict nécessaire.

---

[6]P. Duhem, *L'évolution de la mécanique*, Paris, A. Joanin, 1903, rééd., Paris, Hermann, 1905, p. 80.

Dans l'étude de l'œuvre de Boussinesq il faut d'abord se demander quelles sont les raisons qui le poussent à tenter assez tôt (à trente ans) de reformuler la Mécanique théorique dite "Mécanique rationnelle". Ensuite il faut décrire cette mécanique théorique de Boussinesq, mécanique qu'il appelle sa Mécanique générale, montrer quels en sont les principes, quelle en est la cohérence mais aussi les incohérences. La Mécanique générale de Boussinesq doit avoir quelque rapports avec ses idées philosophiques, que nous appelons épistémologiques. Il faut donc, autant que faire se peut, montrer les relations qui peuvent exister entre pratique scientifique et idées épistémologiques. Et cela d'autant plus que Boussinesq fait partie de ces physiciens-philosophes si caractéristiques de la seconde moitié du XIX° siècle[7].

L'œuvre de Boussinesq se construit dans le cadre de la Physique mathématique ou de la Mécanique physique françaises classiques. Il convient donc de situer la place de Boussinesq dans cette tradition. Il faut aussi voir comment cette mécanique appliquée au réel - sa "Mécanique physique" - se rattache à sa Mécanique générale. Enfin, on doit aussi dégager certaines des méthodes que Boussinesq y utilise.

Nous avons divisé notre thèse en trois chapitres. Dans le premier nous mettons en évidence certains aspects de la mécanique théorique autour de l'année 1872 et même avant, puisque nous commençons par étudier des textes des années 1840 et 1850. Nous avons particulièrement recherché la manière dont les savants français pouvaient percevoir la conservation de l'énergie, essentiellement en mécanique et en thermodynamique, puisque ce sont là des domaines qui ont particulièrement intéressé Boussinesq sur le plan théorique. Nous avons repéré dans cette étude des difficultés que rencontre la Mécanique "rationnelle" de l'époque et que Boussinesq pense résoudre ou contourner. Dans ce premier chapitre il ne sera pas question de Boussinesq, puisqu'il s'agit de déterminer les problèmes que la Science de son époque lui pose.

Dans le second chapitre nous exposerons la "Mécanique générale" de Boussinesq, c'est-à-dire l'équivalent de la Mécanique "rationnelle" pour des mécaniciens plus traditionnels tels que Sturm ou Laurent. Nous mettons particulièrement en évidence l'originalité de sa conception de la force et de l'énergie. Il nous a semblé éclairant de commencer ce chapitre par une étude des conceptions épistémologiques de Boussinesq; ainsi on peut, par exemple, mieux saisir sa conception de l'atome.

Le troisième chapitre est consacré à certains aspects de la mécanique de Boussinesq appliquée au réel physique, ce qu'il appelle sa "Mécanique physique". L'œuvre de Boussinesq en Mécanique physique est très volumineuse. Nous avons recensé près de trois cent cinquante

---

[7]Voir L. Freuler, *Les tendances majeures de la philosophie autour de 1900*, in *Les savants et l'épistémologie vers la fin du XIX° siècle*, sous la direction de M. Panza et C. Pont, Paris, Librairie Blanchard, 1995, pp. 1 à 12.

articles dans les Annales de Poggendorff publiées jusqu'en 1936. Il est vrai que beaucoup de ces textes se répètent d'une revue à l'autre. Nous avons étudié en détail un certain nombre d'entre eux: ceux qui présentaient un contenu théorique en rapport avec nos préoccupations et particulièrement ceux auxquels Boussinesq fait allusion jusqu'à la fin de sa vie, comme par exemple sa "Théorie nouvelle des ondes lumineuses". Nous nous sommes attaché à décrire la manière dont Boussinesq, s'inspirant à la fois des méthodes de Poisson et de Fourier, trouve les formules fondamentales qui lui permettent ensuite de déduire les lois macroscopiques des phénomènes, mais nous nous sommes peu intéressé à cette déduction elle-même, puisque comme nous l'avons dit, son étude fait plutôt partie de l'histoire de certaines branches de la physique. Nous avons tenu toutefois à aborder les principaux domaines dans lesquels Boussinesq a travaillé: élasticité, optique, hydrodynamique, thermodynamique.

Plutôt que d'écrire une longue introduction nous avons fait précéder chaque chapitre d'une présentation qui fournit les informations nécessaires à la compréhension du texte. De même chacun des chapitres se termine par une conclusion dans laquelle nous résumons les résultats qui y sont obtenus. La conclusion finale rassemble et coordonne ces idées dégagées dans la thèse. Dans le corps du texte nous avons écrit en *italique* certains passages sur lesquels nous souhaitons attirer l'attention du lecteur. Les citations incluses dans le texte sont mises simplement entre guillemets sans typographie particulière.

Quelques informations biographiques[8] sont nécessaires pour comprendre certains paragraphes. Boussinesq est né à Saint-Etienne de Sagonis (Hérault) dans une famille de modestes cultivateurs. Il obtient un bacalauréat ès lettres et une licence de sciences mathématiques à Montepellier, mais il ne fréquente ni les Grandes Ecoles ni les Classes préparatoires. Il soutient avec succès, en 1867, une thèse sur la conductivité des solides, puis enseigne successivement dans les collèges d'Agde, du Vigan et ensuite de Gap. Dans cette période de sa vie Boussinesq est presque coupé du monde scientifique. Fort heureusement il entretient entre 1867 et 1885 une correspondance suivie avec A. Barré de Saint-Venant (Saint-Venant)[9]. Mais à part cette correspondance il semble vivre dans un grand isolement sur le plan intellectuel. Cet isolement nous semble expliquer le profond enracinement des conceptions scientifiques de Boussinesq dans celles de sa jeunesse. Il lui fallait une conviction extraordinaire en ses idées pour poursuivre ses travaux dans ces conditions. Il n'en envoie pas moins de nombreuses communications à l'Académie des Sciences. Cela lui vaut, en

---

[8]Deux courtes biographies peuvent être signalées: E. Picard, *La vie et l'œuvre de Joseph Boussinesq*, l'Institut, 28, 1933; C. Blaquière, *Vie et œuvre de Boussinesq*, Béziers, Imprimerie Jeanne d'Arc, 1930.

[9]Saint-Venant meurt en Janvier 1886, peu avant que Boussinesq n'entre à l'Académie des sciences.

1872, un poste à la Faculté des sciences de Lille, puis à celle de Paris en 1886. La même année il est admis à l'Académie des sciences.

C'est donc une carrière exemplaire, mais difficile, qu'a connue Boussinesq. Elle n'aurait sans doute pas été possible s'il n'avait été, dès sa jeunesse, convaincu de la justesse de son jugement et de la profonde vérité de la Physique mathématique classique.

Il nous reste à justifier le titre de notre thèse: "La philosophie naturelle mécaniste de Joseph Valentin Boussinesq". Le terme "mécaniste" rappelle que Boussinesq se rapproche de cette école de pensée qui veut décrire l'Univers en termes de matière, de figures et de mouvements, et cela bien qu'il s'en éloigne quand il affirme qu'il y a "plus dans l'univers que de la matière et du mouvement". Il n'en reste pas moins mécaniste en ce qu'il pense que tout l'univers doit se décrire à l'aide des lois de cette Science que l'on appelle la Mécanique.

Nous attribuons tout d'abord à l'expression "philosophie naturelle" le sens que lui donnent Thomson et Tait dans leur "Traité de philosophie naturelle". Pour eux cette expression

> "(...) désigne la recherche des lois du monde matériel, et la déduction de résultats qui ne sont pas directement observables."[10]

C'est là justement le but que se propose Boussinesq dans sa Mécanique physique. Le terme "philosophie naturelle" doit être aussi compris dans le sens plus large de réflexion sur l'Univers. En effet Boussinesq, en plus de ses travaux de physique pure mène une réflexion philosophique qui engage toute l'entreprise de connaissance de la Nature. En particulier il s'interroge sur la place de l'homme dans le monde physique. Il montre qu'avec les autres êtres vivants, l'homme obéit aux lois de la mécanique tout en conservant une certaine liberté, grande dans le cas de l'être humain. Et, ce qui est peut-être le plus important, il s'interroge sur
l'adéquation de l'esprit à la compréhension du monde matériel. La réponse à cette interrogation est pessimiste.

---

[10] W. Thomson and P. G. Tait, *Treatise on natural philosophy*, Oxford, 1867; vol. 1, part. 2, London, Cambridge University press, 1883; vol. 1, part. 1, London, Cambridge University press, 1896, p. V.

PREMIER CHAPITRE

Aspects de la Mécanique vers le milieu du XIX° siècle

I . Présentation du premier chapitre

En 1868 Boussinesq fait paraître sa "Théorie nouvelle des ondes lumineuses"[10]. Ce "jeune géomètre"- il n'a alors que vingt-six ans - retrouve les équations de propagation de la lumière par des voies totalement différentes de celles empruntées par ses contemporains.

En 1872 il publie, après une collaboration avec Saint-Venant, un "Essai sur la théorie des eaux courantes"[11], étude quasi exhaustive des mouvements de l'eau dans les canaux et rivières. C'est aussi en 1872 qu'est publié, dans les "Mémoires de l'Académie des sciences et des lettres de Montpellier", le mémoire de Boussinesq sur les principes fondamentaux de la mécanique. Cet ouvrage sera ensuite reproduit dans le "Journal de Mathématiques pures et appliquées"[12](Journal de Liouville). Toute sa vie durant, Boussinesq ne cessera de perfectionner sa "Théorie des ondes lumineuses". Celle-ci, jointe à ses travaux sur la propagation de la chaleur, deviendra la pierre angulaire de sa "Théorie analytique de la chaleur"[13]. La théorie de l'optique de Boussinesq est en quelque sorte le point culminant et ultime de la conception mécanique et atomique classique des phénomènes lumineux. Le traité sur la chaleur, quant à lui, est encore cité comme livre de référence en 1942[14].

Dès 1872, Boussinesq avait élaboré les principales idées sur la mécanique et la physique, idées qu'il développera dans des leçons introductives à son cours de la Sorbonne[15] et aussi dans certains écrits parfois qualifiés de philosophiques. Le trait dominant de sa pensée, comme nous le montrerons plus loin, est que la géométrie et l'analyse, convenablement guidées par l'intuition et l'expérience, permettent de décrire cette partie du réel accessible à la connaissance humaine. Issu de l'expérience, issu de l'évolution de la physique, mais aussi de considérations métaphysiques, le principe de conservation de l'énergie est l'un des piliers de la physique de Boussinesq. L'ensemble des lois qui s'en déduisent analytiquement constitue ce que Boussinesq appelle

---

[10] J. Boussinesq, *Théorie nouvelle des ondes lumineuses*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 13, 1868, pp. 313 à 369. Aussi, C. R. , 65, p. 235.

[11] J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Recueil des Savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris, 23, 1872, pp. 1 à 680, additions, même revue, 24, pp. 1 à 64. Aussi: C. R., 74, 1872, p. 1011.

[12] J. Boussinesq, *Recherches sur les principes généraux de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoires de l'Académie des sciences et des lettres de Montpellier, 1872, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, pp. 305 à 360.

[13] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, t. 1, Paris, Gauthier-Villars, 1901, t. 2, Paris, Gauthier-Villars, 1903.

[14] Ch. Fabry, *Propagation de la chaleur*, Paris, Armand Colin, 1942.

[15] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889.

la "Mécanique générale", dont l'ambition n'est pas sans rapport avec celle de la "Mécanique physique" de Poisson. Combinée à certains faits expérimentaux fondateurs, cette "Mécanique générale" donne accès à une "Mécanique physique", dans le style de la "Physique mathématique" de Fourier.

Avant de passer à une analyse détaillée de ces deux mécaniques, dans les chapitres 2 et 3, nous allons évoquer la mécanique et la physique des années 1860 - 1873, années pendant lesquelles, nous l'avons dit, se sont forgées les idées principales de la pensée de Boussinesq. Notre but n'est pas de peindre un tableau détaillé de la Science de cette époque, mais simplement de relever quelques traits qui expliquent et justifient l'entreprise de Boussinesq.

En premier lieu nous exposerons, dans le présent chapitre, certaines des difficultés auxquelles se heurte la mécanique dite "rationnelle" et qualifiée d'"analytique" dans les Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris (C.R.). Précisons simplement, pour l'instant, qu'issue de l'œuvre de Newton cette mécanique, entre les mains de Laplace, règne dans les cieux et, dans les vues de Lagrange, permet de résoudre tous les problèmes de cette science. En revanche, malgré les efforts de Navier, Poisson, Cauchy entre autres, elle regimbe devant la description des lois régissant les phénomènes naturels. Aussi les racines mêmes de cette mécanique, et en tout premier lieu la force, sont-elles soigneusement examinées, voire détruites par certains. Le profond mystère de la force s'exerçant à distance, tout particulièrement celui de la force de gravitation, trouve pour certains son explication dans la présence de l'éther. Nous examinerons donc aussi le rôle de cet élément important de la physique du XIX° siècle.

En second lieu nous nous pencherons sur le problème de l'énergie, qui sous ses diverses compréhensions et manifestations, envahit la physique de cette époque. Les physiciens et les mécaniciens utiliseront chacun à leur manière l'énergie. Il aurait donc été vain d'en tenter une définition ontologique. C'est à travers les diverses nuances qui l'irisent que nous essaierons d'en rendre compte. Ainsi nous tenterons de définir les expressions de "corrélation des forces", de "conservation de la force", de "conservation de l'énergie" par référence aux travaux des fondateurs reconnus de la théorie de l'énergie. Nous examinerons enfin plus particulièrement, mais uniquement dans leurs rapports avec la mécanique théorique, certaines versions françaises de la théorie de l'énergie, publiées sous le nom de "Théorie mécanique de la chaleur". L'importance particulière que les physiciens français accordent à la notion de travail mécanique permet d'évoquer l'œuvre de Clausius; c'est uniquement sous cet aspect que nous traiterons du second principe de la Thermodynamique, lequel a par ailleurs peu intéressé Boussinesq.

Ce n'est pas le manque de documents qu'il faut craindre en cette prolixe seconde moitié du XIX° siècle! Ont été consultés les Comptes Rendus de l'Académie des sciences depuis 1845 jusqu'en 1903, en nous attardant particulièrement aux rubriques "*Analyse*", "*Chaleur*", "*Machine*", "*Mécanique*", "*Mécanique analytique*", "*Physique*", "*Physique appliquée*", voire "*Cristallographie*". Mais notre attention s'est aussi portée sur les articles traitant de Physique et de Chimie où nous avons le plus souvent trouvé mention de l'énergie. Bien entendu nous avons également fait, entre les mêmes dates, des recherches dans les "Annales de Chimie et de Physique", le "Journal de Mathématiques pures et appliquées" de Liouville, le "Journal de l'École Polytechnique", le "Journal de physique appliquée" de d'Almeida, le journal "l'Institut". Nous n'avons pas oublié non plus des revues moins investies dans les plus hautes instances scientifiques officielles que celles que nous venons de citer, comme "Les Mondes" de l'abbé Moigno ou "La revue des cours scientifiques", revues qui fourmillent d'indications précieuses sur la Science de l'époque. En 1867, à l'occasion de l'Exposition universelle qui se tient alors à Paris, sont édités par le Ministère de l'Instruction Publique, des rapports sur les progrès des Lettres, des Sciences et des Arts. Nous disposons ainsi de documents précieux sur ce que d'éminents savants considèrent comme étant l'état de la Science. Il y sera souvent fait allusion. Ces rapports exposent la Science officielle telle qu'elle est enseignée au plus haut niveau, mais aussi telle qu'elle se construit dans les activités de recherche. Nous pouvons maintenant en venir à l'évocation de la situation de la mécanique d'alors.

II . La nécessité d'une nouvelle mécanique théorique

Dès les années 1850 se manifeste la nécessité d'une refonte de la mécanique théorique[16]. Les problèmes et les enjeux de cette réflexion sont mis en lumière par une série de mémoires et de communications parus en 1857 dans les "Comptes Rendus de l'Académie des sciences", et à travers lesquels s'affrontent les mécaniciens les plus éminents, et notamment Cauchy, Duhamel, Poncelet, Morin[17]. Ici s'opposent deux conceptions de la Mécanique, celle de Duhamel et Cauchy qui fait toute confiance aux démonstrations mathématiques, et celle de Poncelet et Morin qui souhaitent en outre prendre plus en compte les réalités

---

[16]Cette réflexion sur la mécanique est contemporaine d'une modification de l'enseignement en France, ainsi est-elle liée à une refonte de son enseignement. C'est ce que rappellent certains traités de mécanique: "On sait que, pendant la première moitié de ce siècle, l'enseignement universitaire, sauf quelques variations de détail, est resté tel que le premier consul l'établit en 1802. Cet enseignement avait pour base principale l'étude des langues mortes, et au second rang, relativement au temps qui y était consacré, l'étude des sciences. Le 9 Mars 1852, un décret, qui modifiait profondément les conditions de l'enseignement de l'Université, arrêtait en principe que les études auraient lieu sur un nouveau plan (c'est-à-dire en faisant une place plus importante aux sciences). " (G. Furiet, *Traité de mécanique* , Paris, Mallet-Bachelier, 1855, pp. I et II).

[17]L'ensemble des textes est paru dans: C. R., 44, 1857, pp. 3 à 5, pp. 80 à 91, pp. 102 à 107.

physiques. Suivant Cournot on peut désigner la première par "Mécanique philosophique" et la seconde par "Mécanique industrielle"[18].

Ce que nous souhaitons montrer ici, c'est un aperçu des diverses conceptions de la mécanique en France dans les années 1850 et 1860. Ce faisant, nous verrons apparaître la nécessité d'une mécanique prenant en compte les propriétés physiques réelles des corps.

II . 1 . Les tenants de la "Mécanique philosophique"

L'objet, ou plutôt le prétexte, de l'affrontement qui oppose les plus illustres professeurs de Mécanique de l'époque est le théorème de Lazare Carnot, dont une démonstration a été donnée par Sturm[19]. Duhamel émet

---

[18] A. Cournot, *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire*, t. 2, Paris, Hachette, 1861, pp. 134 et 135.

[19] Le théorème de Lazare Carnot est présenté ainsi dans le Cours de mécanique de l'Ecole Polytechnique de Sturm (1881), revu par Prouhet, mais professé par Sturm en 1867 :
"La somme des forces vives ne change pas par l'effet du choc quand les corps sont parfaitement élastiques: c'est ce que montre l'équation du n° 633. Mais lorsqu'ils sont mous, elle diminue et la différence est égale à la somme des forces vives dues aux vitesses acquises ou perdues par les deux corps." (Ch. Sturm, *Cours de Mécanique de l'Ecole Polytechnique*, revu et corrigé par E. Prouhet, 4° éd., suivie des notes et énoncés de problèmes, par M. de Saint-Germain, t. 2, Paris, Gauthier-Villars, 1881, pp. 231 et 232).
Sturm démontre ce théorème en supposant que les corps restent fixés l'un à l'autre après le choc; il s'agit donc d'un choc totalement mou. Si l'on appelle m et m' les masses des corps qui se choquent, V et V' leur vitesse avant le choc, u leur vitesse commune après ce choc, la force vive perdue est:

$$m \cdot V^2 + m' \cdot V'^2 - (m + m') \cdot u^2 = m. V^2 + m' \cdot V'^2 + (m + m') \cdot u^2 - 2(m + m') \cdot u^2$$

ce qui, par application de la conservation de la quantité de mouvement $(m.V+m'.V') = (m + m') \cdot u$ conduit à l'équation:

$$m \cdot V^2 + m' \cdot V'^2 - (m + m') \cdot u^2 = m \cdot (V - u)^2 + m' \cdot (V' - u)^2$$

qui représente bien le théorème annoncé. Sturm tente de montrer que l'on peut appliquer le théorème de Lazare Carnot à d'autres problèmes que celui des chocs inélastiques. Mais, selon A. de Saint-Germain qui complète le Cours de Sturm en 1881, "on n'a pas trouvé de rédaction suivie" du mémoire de ce dernier ("Sur quelques propositions de mécanique rationnelle") dans les papiers de Sturm, "mais seulement des parties détachées, couvertes de ratures". Sturm en a toutefois donné une analyse dans les Comptes Rendus de l'Académie des sciences (C. R., 13, p. 1046). A. de Saint-Germain dans une Note de ce Cours indique: "Le théorème de Carnot sur la perte de force vive qui a lieu dans un système dont certaines parties dénuées d'élasticité changent brusquement de vitesse en se choquant, a été étendu par quelques auteurs à tous les changements brusques de vitesse produits par des causes quelconques. La démonstration de Carnot n'étant pas fondée sur la considération des actions mutuelles développées entre molécules dans le choc, semblait se prêter à l'extension de ce principe. Mais, après un examen plus approfondi, plusieurs géomètres ont été conduits à juger cette démonstration de Carnot insuffisante, et à restreindre considérablement la généralité de ce alors une réclamation de priorité concernant cette démonstration. Le théorème de Carnot revêt un intérêt particulier. Il montre que lors d'un choc ou de la formation brusque de liaisons, le système de corps en présence éprouve une perte de force vive. Ce principe était d'usage général à l'époque. Il a été utilisé jusqu'en hydrodynamique par Borda pour expliquer l'écoulement dans un ajutage. La démonstration que donne Carnot de son théorème se fait dans le cadre de sa mécanique si particulière. Ce n'est pas le point qui nous intéressera ici. Le principal intérêt, pour nous, du mémoire de Duhamel et de la réplique de Cauchy, est de mettre en évidence les grandeurs fondamentales de leur mécanique. Citons d'abord ce que dit Duhamel:

> "Voici maintenant le passage qui se trouve à la page 6 du XIV° volume du *Journal de l'Ecole polytechnique,* et qui fixe nettement les conditions sous lesquelles a lieu le théorème.
> Je suppose un système de corps assujettis à des liaisons quelconques, et sollicités par des forces accélératrices. A un instant donné, il s'exerce entre eux des actions égales et contraires deux à deux, qui proviennent soit du choc de ces corps, soit d'explosions, soit de liaisons subitement établies entre eux, soit de toute autre cause; ces actions cessent au bout d'un temps très-court, et ont altéré de quantités finies les grandeurs et les directions des vitesses: il s'agit de trouver, s'il est possible, une équation où n'entrent pas les grandeurs des forces instantanées."[20]

Les forces instantanées sont censées produire des effets finis en des temps infiniment courts, ce qui est difficilement compatible avec la conception newtonienne de la force qui correspond à une dérivée[21]. Ces forces sont donc à bannir dans les résultats, si ce n'est dans les calculs.

---

théorème (...). S'il est certain que ce théorème ne peut pas s'appliquer à tous les changements très rapides de vitesse, quelles qu'en soient les causes, il ne doit pas cependant être limité exclusivement au cas du choc des corps non élastiques. Le présent Mémoire a pour objet principal de faire voir qu'il a lieu dans d'autres circonstances qu'il est utile de connaître", in Ch. Sturm, *Cours de mécanique de l'Ecole Polytechnique*, revu et corrigé par E. Prouhet, 4° éd., suivi des notes et énoncés de problèmes, par M. de Saint-Germain, t. 2, Paris, Gauthier-Villars, 1881, Note 1, citations, pp. 349 et 350. A. de Saint-Germain étend le théorème de Carnot à certains cas où il y a des changements de liaisons brusques entre points matériels, ce que l'on peut interpréter en disant que ces liaisons se créent et se défont instantanément. En 1857, la démonstration du théorème de Lazare Carnot n'est faite que dans le cas des chocs parfaitement inélastiques. La question de la disparition de la force vive, si elle ne pose pas de problème en mécanique dite "rationnelle", ne s'explique guère quand on a l'intuition que cette force vive a quelque chose à voir avec l'énergie actuelle des corps. Alors se pose le problème de la validité même des raisonnements de la mécanique dite "rationnelle". C'est ce qui explique les efforts de tous ces éminents mécaniciens pour démontrer ce théorème.

[20] B. Duhamel, *Observations faites par M. Duhamel au sujet d'un théorème de mécanique*, C. R., 44, 1857, p 3.

[21] A propos des forces instantanées on trouve dans l'"Exposé de la situation de la Mécanique appliquée" (1867) la remarque suivante: "Les théorèmes généraux et notamment le théorème de la quantité de mouvement, font voir qu'une force, si

Forces, liaisons: nous sommes dans un cadre proche de la mécanique analytique de Lagrange. Malgré la nature du problème, la force vive n'apparaît pas au premier plan.

Cauchy, quant à lui, fait plutôt allusion à une mécanique du point matériel et de la force:

> "(...) lorsque dans un système de points matériels, les vitesses varient sensiblement en grandeur et en direction, dans un très petit intervalle de temps (...)"[22]

Si Cauchy utilise la force, il s'oppose à la notion de forces instantanées:

> "(je crois) avec MM. Ampère et Poncelet que cette notion de forces instantanées doit être bannie de la mécanique rationnelle."[23]

Ce problème des forces instantanées est récurrent chez les mécaniciens de l'époque, qu'ils soient ingénieurs ou théoriciens. Par contre, la signification même de la disparition de la force vive ne semble pas préoccuper les théoriciens que nous venons de citer. S'ils admettent qu'il est impossible de créer de la force vive à partir de rien (*ex nihilo nihil*), celle-ci peut disparaître lors des chocs, comme semble le montrer le théorème de Carnot[24].

II . 2 . La recherche d'une mécanique plus proche des phénomènes physiques

---

grande qu'elle soit, ne peut produire d'effet sur un point matériel qu'à la condition d'agir sur ce point pendant un temps appréciable. Par là se trouve repoussée la notion de force instantanée, admise autrefois dans la mécanique" (Ch. Combes, Ed. Phillips et Ed. Collignon, *Exposé de la situation de la Mécanique appliquée*, Paris, Hachette, Imprimerie impériale, 1867, pp. 39 et 40). Une force instantanée agit instantanément; c'est par exemple ce qui se produirait si deux corps infiniment durs se choquaient. A l'instant t, date du choc, les deux corps ne subiraient d'abord pas de force mutuelle et au même instant t où a lieu le choc ils en subiraient une. Au même instant t, il n'y aurait pas de force appliquée et il y en aurait une. La force instantanée est donc une fiction qui, comme telle, ne doit pas figurer dans les résultats, mais être un simple intermédiaire dans les calculs.

[22] A. Cauchy, *Réponse de M. Augustin Cauchy aux dernières observations de M. Duhamel*, C. R., 44, 1857, p 80.

[23] ibid.

[24] A propos de la discussion que nous évoquons ici, Séguin dit ce qui suit: "(Poncelet) signale le danger d'admettre dans toute sa généralité le théorème de Carnot, dont il reconnaît tout au moins l'inutilité; théorème qui, on ne peut se le dissimuler, conduit directement à considérer comme possible l'annihilation de la force (vive), erreur équivalente à celle de la possibilité de la création du mouvement perpétuel" (M. Séguin, *Mémoire sur l'origine et la propagation de la force*, Cosmos, 13, 1858, pp. 472 et 473). On voit donc que certains mécaniciens admettent la disparition de la force vive. Nous avons assimilé la "force" de Séguin à la force vive, mais il est possible que ce soit là une interprétation trop étroite. Quoi qu'il en soit, Séguin englobe dans la conservation de la force, la conservation de la force vive.

Tout autre est l'approche de Poncelet, lequel va montrer la nécessité d'une mécanique plus soucieuse de la Physique. Son argumentation débute par une critique des fondements mêmes de la mécanique dite "rationnelle":

> "(...) j'avais fait remarquer que les théorèmes (...) se rapportaient au fond, à cette mécanique abstraite nommée exclusivement, mais improprement peut-être, *mécanique rationnelle*, et dans laquelle on introduit certaines hypothèses appartenant à la mécanique des corps durs, telle qu'on l'entendait autrefois (...) D'Alembert, Carnot lui-même et ses adeptes n'avaient jamais attribué à l'épithète corps durs, la signification absolue qu'on lui attache depuis un certain temps; autrement, des savants géomètres ou physiciens tels que MM. Petit, Navier, etc., n'auraient jamais osé faire une application directe du théorème sur la perte de force vive aux chocs ou changements brusques de mouvement des liquides (...)"[25]

Autrement dit, les raisonnement de la mécanique dite "rationnelle" ne sont pas applicables directement à la mécanique des phénomènes physiques réels. Ce sont ainsi deux conceptions de la mécanique qui s'affrontent: suivant l'une, la mécanique est une science purement rationnelle, déduite de "vérités nécessaires", ou tout au moins d'axiomes; suivant l'autre, la mécanique doit s'appuyer sur l'expérience[26]. Plus loin, Poncelet montre que la façon de traiter le choc suivant les principes de la "mécanique rationnelle" revenait, finalement, à éliminer le temps, la durée de l'action, et même diverses forces en les remplaçant par leurs représentants "médiats": la vitesse et l'accélération. En d'autres termes, le phénomène physique est occulté par son traitement mathématique. Poncelet explique ensuite qu'il estime avoir donné une représentation plus adéquate de ce qui se produit lors des changements brusques de vitesse. Sa démonstration est totalement différente de celle des autres théoriciens[27]. Il reproche

---

[25]J. Poncelet, *Observations générales sur la question relative aux chocs*, C.R., 44, 1857, p. 83.

[26]Voir à ce sujet l' article sur d'Alembert dans: R. Dugas, *Histoire de la mécanique*, 1° éd., Neuchatel, Editions du griffon, 1950, rééd, Paris, Jacques Gabay, 1996, pp. 234 à 235.

[27]La démonstration de Poncelet est notoirement différente de celles fournies par les théoriciens. Poncelet commence par considérer que, lors du choc, les forces de pression et d'inertie s'équilibrent. Mais, et c'est là qu'intervient la prise en compte de la durée du phénomène, il décrit, de façon qualitative, ce qui se produit tout au long du choc. Ensuite il interprète physiquement les variations de la force vive et affirme qu'"il est d'ailleurs évident que cette restitution de la force vive, perdue pendant l'acte du choc, n'aura lieu que pour les corps élastiques et en proportion de leur élasticité". Pour les corps entièrement dénués d'élasticité, le choc finit à l'instant de la plus grande compression, quand les vitesses normales sont devenues égales; or, à cet instant, la force vive perdue à la fois par les deux corps est, selon le théorème de Carnot, rigoureusement égale à la somme des forces vives dues aux

ensuite à Cauchy, en particulier, de ne pas avoir pris suffisamment en compte les conditions physiques du choc:

> "... où d'ailleurs , la chaleur, l' élasticité , la cohésion, l'électricité même, qui n'entrent nullement dans les équations ou formules, jouent un rôle nécessaire jusqu'ici fort mal apprécié et défini."[28]

Ceci signifie que, dans de telles questions, il faudra tenir compte des diverses transformations de ce que l'on appellera l'"énergie". Poncelet conclut ensuite que les énoncés de la mécanique rationnelle peuvent, s'ils ne sont pas appuyés sur quelque considération physique,

> "induire à de fausses interprétations et conséquences dans les applications."[29]

Cette insidieuse remarque est d'une importance capitale pour la Physique de cette époque (pour certains, le plus sûr moyen d'investigation de la matière est constitué par l'Analyse et ses applications à la "mécanique rationnelle"). Mais, à partir de ces critiques, il convient de proposer les grandes lignes d'une mécanique nouvelle, reliant la mécanique de Cauchy d'après 1827, à celle souhaitée par Poncelet:

> "... la mécanique fondée a priori sur la considération des points matériels soumis à de simples forces, mécanique dont je (*Poncelet*) ne crains pas ici de me déclarer un des adeptes et que M. Cauchy à spécialement adoptée dans son mémoire de 1829 et ses travaux antérieurs, me parait d'une portée plus étendue (*que celle de Duhamel, qui se rapproche de Lagrange*), d'une exposition plus rapide, moins entachée d'arbitraire, et, par cela même, devoir constituer les vrais fondements de la mécanique théorique ou pratique, c'est-à-dire à la fois plus démonstrative et expérimentale, pourvu que l'on ne se hâte pas trop d'y introduire comme l'a fait notre savant confrère (*Cauchy*) dans l'application particulière qui nous occupe, les hypothèses relatives aux effets des actions moléculaires encore inexpliquées ou mal définies: cette méthode se concilie parfaitement avec l'exposition rigoureuse des grands et invariables principes de la mécanique rationnelle; (*la mécanique ainsi constituée*) sera la plus importante de toutes, nommée *physique et expérimentale*, et qui est aujourd'hui même à créer ou à

---

vitesses perdues ou gagnées". Il applique ensuite ces considérations à divers cas, où il prend en compte l'élasticité des corps en présence. C'est donc à partir de considérations physiques et de la prise en compte directe de la force vive, que Poncelet étudie le choc. Voir: J. Poncelet, *Cours de mécanique appliquée aux machines*, Paris, Bachelier, 1874, pp. 445 à 462. Le passage est indiqué dans l'ouvrage cité comme étant extrait du "*Cours autographié de 1826*", Ecole d'Artillerie et de Génie de Metz, 1826, Note 1, p. 445.

[28] J. Poncelet, *Observations relatives aux chocs*, C. R., 44, 1857, p. 86.

[29] ibid.

parfaire pour une infinité de questions pratiques ou théoriques, mais dont les doctrines trop restreintes de la mécanique démonstrative ne devraient pas obscurcir l'intuition a priori, au risque d'en retarder les véritables solutions."[30]

Si nous avons cité longuement ce texte, c'est d'abord parce qu'on y trouve l'idée que désormais la "mécanique rationnelle" et l'Analyse doivent s'aider de l'expérience, idée que nous retrouverons lors de l'étude des théories mécaniques de la chaleur. Ensuite cette citation peut être considérée comme le programme d'une mécanique à venir plus près du réel, se rapprochant de la mécanique des machines et utilisant les notions de travail et de force vive.

Cette approche de la "mécanique du réel" par la force vive n'est pas la seule possible. Reech va tenter d'introduire directement l'élasticité dans les principes de base de sa mécanique[31]. Après une critique en règle d'une "prétendue science mécanique, qui n'est que de la géométrie ou de la cinématique, combinée avec l'idée de masse, et complétée par diverses hypothèses"[32], Reech développe sa propre conception de la mécanique. Ses démonstrations sont basées sur la considération d'un "fil d'épaisseur nulle ou négligeable (...) doué de la qualité de liaison des corps, et dépourvu de la qualité de matière ou de masse"[33]. Bien que, semble-t-il, très cohérente sur le plan logique, cette mécanique de "l'École du fil" n'a pas inspiré les physiciens de l'énergie, c'est pourquoi elle est simplement citée ici[34].

Apparemment le problème des forces instantanées est important à cette époque: ces forces entrent en jeu non seulement dans les chocs, mais aussi dans les actions entre organes d'une machine agissant à des vitesses différentes. Ce problème sera finalement résolu par Thomson et Tait en 1867 dans leur "Traité de philosophie naturelle".

Nous voyons donc que les débats entre divers physiciens faisaient espérer l'avènement d'une nouvelle mécanique. Celle-ci devrait prendre en compte les propriétés réelles des corps (flexibilité, élasticité), mais aussi bannir des concepts mal définis comme celui de force instantanée. S'interroger sur la force instantanée oblige à s'interroger sur la force elle-même, car en définitive, l'expression des forces peut être considérée comme une conséquence des lois de la mécanique. Comme le signale Lamé:

---

[30]ibid., p. 87.

[31]F. Reech, *Cours de Mécanique d'après la nature généralement élastique des corps*, Paris, Carillan-Goery et V. Dalmont, 1852.

[32]ibid., p. 1 à 21, il s'agit du titre de la première partie du cours.

[33]ibid., p. 44.

[34]Voir à ce sujet l'article sur d'Alembert dans: R. Dugas, *Histoire de la mécanique*, 1° éd., Neuchatel, Editions du griffon, 1950, rééd, Paris, Jacques Gabay, 1996, pp. 423 à 425.

> "Les diverses lois qui régissent les forces élastiques se déduisent rationnellement de théorèmes généraux de la mécanique."[35]

Ainsi la mise en cause de la force peut amener à s'interroger sur les principes fondamentaux de la Mécanique.

Il faudra donc que la mécanique dite "rationnelle" soit aussi établie sur des bases solides. Enfin, mais cela ne semble pas être une des premières préoccupations des Mécaniciens de l'époque, il faudra trouver dans cette mécanique une place pour l'énergie. La période comprise entre 1852 et 1880 va donner lieu à de multiples présentations de la mécanique. Sans méconnaître l'importance des rivalités de personnes, d'intérêt matériels, politiques ou simplement d'amour propre, nous pouvons affirmer que ces diverses présentations témoignent de la recherche d'une mécanique cohérente sur le plan logique, mais aussi respectueuse de la réalité matérielle[36].

Nous examinons maintenant certaines formulations de la mécanique dans la seconde moitié du XIX° siècle.

III . Diverses mécaniques classées d'après leur conception de la force

Précisons tout d'abord ce que l'on entendait à l'époque par mécanique. Nous adopterons la définition donnée par les auteurs de l'"Exposé de la situation de la Mécanique appliquée" (1867):

> "S'il est nécessaire de caractériser cet enseignement, nous dirons qu'il consiste à mettre en évidence les *théorèmes généraux* contenant les lois du mouvement des points et des systèmes (...) Ces théorèmes sont (...) celui de l'accroissement de la quantité de mouvement sous l'effet de la somme des impulsions des forces extérieures pendant une période de temps considérée (...), le second est le théorème des aires (...), le troisième est la conservation de la force vive."[37]

Ces théorèmes eux-mêmes sont, à l'époque, souvent établis à partir de la cinématique, de la statique et de la dynamique. Suivant l'importance qui est accordée à chacune de ces disciplines, on peut déterminer diverses "écoles de mécanique". Il nous semble que l'on peut

---

[35] G. Lamé, *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur*, Paris, Mallet-Bachelier, 1866, p. XI.

[36] Voir: Konstantinis Chatzis, *Mécanique rationnelle et mécanique des machines*, in *La formation polytechnicienne*, Paris, Ellipses, 1996, p. 96 à 107.

[37] J. Combes, Ed. Phillips et Ed Collignon, *Exposé sur la situation de la mécanique appliquée*, Paris, Hachette, Imprimerie impériale, 1867, p. 8.

différencier les diverses présentations de la mécanique en fonction de diverses conceptions de la force qui s'y manifestent, conjointement, comme nous l'avons dit, à des considérations sur la cinématique, la statique et la dynamique. Nous examinerons maintenant certaines de ces formulations de la mécanique de façon à montrer le chemin qui reste à parcourir pour arriver à une présentation cohérente d'une mécanique pouvant servir d'explication à une large partie des phénomènes naturels.

III . 1 . La question de la pertinence de l'utilisation de la force

La notion de force, sur laquelle se développent les calculs de la mécanique newtonienne, fait depuis longtemps l'objet de contestations (presque depuis sa formulation par Newton). Au-delà de la simple contestation de la force, c'est l'adéquation de la mécanique newtonienne à la description du réel qui peut être contestée. Si la force n'est qu'un artefact, il convient de dépasser cette notion, ou tout au moins de ne pas lui donner trop d'importance, si l'on veut pouvoir appliquer les idées de la mécanique céleste à la matière. La critique de la notion de force va donc bien au-delà de la querelle épistémologique, elle engage l'ensemble de la mécanique. Cette critique remonte, au moins dans la tradition française, à d'Alembert[38]. Lazare Carnot, par l'importance qu'il accorde à la force vive, est considéré par les auteurs de l'"Exposé de la situation de la mécanique appliquée", comme un des fondateurs de la physique "moderne" de 1867[39]. Carnot s'élève violemment contre cette notion même de force:

> "(une façon de présenter la mécanique) est presque généralement suivie comme la plus simple; mais elle a le désavantage d'être fondée sur la notion métaphysique et obscure qui est celle des forces. Car quelle idée nette peut présenter à l' esprit en pareille matière le nom de cause? Il y a tant d'espèces de causes! Et que peut-on entendre dans le langage précis des mathématiques par une force, c'est-à-dire par une cause double ou triple d'une autre ?"[40]

Cependant, Carnot ne pourra se dispenser de parler de force. La polysémie du mot "force", déjà présente dans les "Principia" de Newton, accrue avec Leibniz, se manifeste aussi chez Lazare Carnot[41]. Celui-ci distingue la force motrice, la force accélératrice, les forces de pression,

---

[38]Voir: R. Dugas, *Histoire de la mécanique*, 1° éd., Neuchatel, Editions du griffon, 1950, rééd., Paris, Jacques Gabay, 1996, pp. 292 à 295.

[39]J. Combes, Ed. Phillips et Ed Collignon, *Exposé sur la situation de la mécanique appliquée*, Paris, Hachette, Imprimerie impériale, 1867, p. 31.

[40] L. N. M. Carnot, *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement,* Paris, Deterville, 1803, pp XJ et XJI.

[41]J.-P. Séris, *Machine et communication*, Paris, Vrin, 1987, p. 354.

etc. Carnot développe une mécanique basée sur des définitions qui sont l'équivalent de ce que nous appelons des équations aux dimensions[42], et sur ce qu'il appelle des mouvements géométriques[43].

A travers le temps, Duhamel peut lui répondre en 1866:

> "La notion des forces est des plus simples et des plus incontestables; elle nous vient de l'expérience de tous les instants. Nous ne pouvons déranger un corps de la position qu'il occupe sans avoir le sentiment d'un effort (...) Il faut bien se garder de dire que la notion des forces ait rien d'hypothétique. Elle est aussi certaine que tout ce qui nous vient de l'expérience."[44]

Belanger, professeur à l'Ecole Polytechnique de 1851 à 1861, contourne le problème de la force en tant que cause, dans son enseignement de mécanique appliquée, en se reportant au vieux débat entre Leibniz et Descartes: on peut considérer que la force agit, soit à travers le temps, soit à travers l'espace. La force agissant sur une masse pendant un certain temps va produire une quantité de mouvement

$$F \cdot t = m \cdot v$$

Dans la terminologie de Belanger, le premier membre de l'égalité correspond à "l'impulsion de la force" qui "est égale à "l'impetus" ou "la quantité de mouvement du corps". Si elle agit dans l' espace, elle produit la demi-force vive

$$F \cdot s = (1/2) \cdot m \cdot v^2$$

ce qu'il exprime par:

> " le travail de la force est égal à la puissance vive du corps."[45]

C'est une clarification de la notion de force. Mais cela oblige à remplacer une définition de la force par deux définitions. Encore, à ces deux définitions, faudra-t-il en ajouter une troisième: celle de la force statique. Mais le problème des relations entre ces trois types de force resterait entier si Belanger n'avait des conceptions épistémologiques

---

[42] L. N. M. Carnot, *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement,* Paris, Deterville, 1803, p. 11.

[43] Il n'est pas dans notre intention de traiter ici de la mécanique de Carnot, mais remarquons que sa définition de la force par une équation aux dimension - $m.(e/t^2)$ - est en quelque sorte l'équivalent de la définition de la force par une dérivée. J-P. Séris interprète les "mouvements géométriques" de Carnot comme des mouvements virtuels finis ou infiniment petits.

[44] B. Duhamel, *Cours de mécanique*, t 1, p. 2. Cité dans: J.-P. Belanger, *Traité de dynamique des systèmes matériels,* Paris, Dunod, Gauthier-Villars, 1866, pp. VI et VII.

[45] ibid., pp. XV et XVI.

particulières. Pour lui, ce qui justifie les prémisses du raisonnement, c'est l'expérience. Donc la notion de force telle qu'il la conçoit est légitimée par l'accord avec l'expérience des résultats qu'elle produit[46].

Une façon d'éliminer le problème de la force est de constater qu'en réalité celle-ci n'est qu'un moyen commode de conduire les calculs, moyen qui disparaît lors des résultats. C'est l'opinion de Saint-Venant, opinion contredite par Moigno.

III . 2 . Les tenants de la "Mécanique industrielle"

Nous allons exposer ici un dialogue entre Saint-Venant et Moigno qui résume bien les ambiguïtés de l'utilisation de la force newtonienne. L'abbé Moigno se présente comme un disciple de Cauchy, dont il se propose de diffuser les idées. En tant que tel, c'est un ardent défenseur de l'idée newtonienne de force. Dans la préface de sa Statique, il donne la parole à Saint-Venant[47]. Celui-ci commente une réflexion d'Ampère selon laquelle "il sera à jamais impossible de faire une mécanique sans avoir recours aux forces envisagées et calculées comme telles"[48].

Pour Saint-Venant, la force n'est qu'un intermédiaire:

> "Il est permis de ne pas acquiescer à cette deuxième partie du jugement porté par l'illustre Académicien, et de ne point engager ainsi l'avenir le plus éloigné (...). L'objet (des sciences physico-mathématiques) n'est pas de déterminer et d'évaluer les *causes efficientes* inconnues des phénomènes, mais d'appliquer les lois qu'observent constamment ceux-ci dans leur succession. Dans les faits, quel que soit le problème de Mécanique terrestre ou céleste proposé, les forces n'entrent jamais ni dans les données, ni dans le résultat cherché, ni dans la solution. On les fait intervenir pour résoudre, et on les élimine ensuite afin de n'avoir finalement que du temps ou des distances ou des vitesses, comme en commençant."[49]

C'est là une position radicale, mais qui se justifie si l'on considère la mécanique appliquée, l'élasticité ou l'optique par exemple, et ceci même en suivant la méthode de Laplace ou de Cauchy. Pour Cauchy, travaillant en optique par exemple, ce qui importe c'est de trouver une loi presque exacte de la dispersion, et non pas la force agissant entre particules d'éther. Comme va le noter Moigno, cette position est beaucoup moins justifiée si l'on considère la mécanique céleste.

C'est de façon pathétique que Moigno défend ses idées. S'il adhère à l'opinion que la force ne peut être qu'un moyen d'explication, pour lui ce

---

46ibid., pp. 104 et 106.

47Abbé Moigno, *Leçons de mécanique analytique, Statique*, Paris, Gauthier-Villars, 1868, pp I à XL.

48ibid., p. XXV.

49ibid.

moyen est une nécessité de l'esprit humain. L'esprit exige que les accélérations, les vitesses soient des effets de certaines causes:

> "Je veux bien, je veux même plus que tout autre, que cette force ne soit qu'explicative, que tout se passe comme si les corps s'attiraient, sans que l'attraction soit réelle; je conçois même que l'on remplace cette force explicative par l'accélération qui est une réalité et une mesure véritable; mais je n'en maintiens pas moins qu'ici comme dans une foule d'autres exemples, la notion de force attractive est très naturelle, invincible même, qu'elle n'a absolument rien de contradictoire mathématiquement parlant, que sans elle, au contraire la mécanique ne serait plus intelligible."[50]

Pour Moigno, la simple description analytique n'est pas suffisante, il faut pouvoir établir un lien causal entre les propriétés des objets et leur mouvement. Ce n'est même pas une conception épistémologique, c'est une affaire de conviction profonde, une nécessité de l'intelligence. Contester l'idée même de la force, c'est contester la première loi de Newton, la loi de l'inertie, mise en doute parce qu'on peut la voir comme équivalente à la définition de la force telle qu'elle se présente dans les "Definitiones" [51]. La seconde loi - loi de la composition des forces - ou du moins sa démonstration est elle-même contestée, et Moigno est le premier à le reconnaître. A Saint-Venant, qui estime que le parallélogramme des forces ne saurait être qu'une vérité empirique, il répond:

> "Je suis d'une opinion diamétralement opposée; dans ma conviction intime, et dans la réalité des choses, le parallélogramme des forces est une vérité à la fois géométrique et métaphysique."[52]

Ici Moigno fait appel à une réalité en quelque sorte "essentielle" des choses, qui se manifesterait à nous par les forces et leurs propriétés. Dans cette manière de considérer les choses, la composition des forces se traduit par la composition analytique des "lignes". Saint-Venant, lui, ne considère que l'aspect sensible des phénomènes: la composition des forces ne sera que la conséquence de la composition des accélérations.

La position de Moigno est évidemment une position de défense désespérée face aux critiques de Saint-Venant. Le recours systématique à la conviction ne saurait, aux yeux de ce dernier, que déconsidérer un peu plus la mécanique de Cauchy vis-à-vis des nouvelles mécaniques

---

[50]ibid, p. XXVIII.

[51]Voir: G. Barthélémy, *Des forces accélératrices dans les Principia*, in *Les Principia de Newton, Questions et commentaires*, Revue d'Histoire des Sciences, 60, 1987, pp. 274 à 279.

[52] Abbé Moigno, *Leçons de mécanique analytique, Statique*, Paris, Gauthier-Villars, 1868, p. XXXII.

existantes ou à venir[53]. De plus l'utilisation de la force oblige à s'interroger sur la façon d'établir la loi de composition des forces. La difficulté est telle que Moigno en arrive à contester ses propres démonstrations de la loi du parallélogramme. C'est que, pour lui, cette loi est évidente:

> "Je crois pouvoir ajouter que s'il est difficile, pour ne pas dire impossible, de démontrer le parallélogramme des forces, c'est précisément parce qu'il est une vérité essentielle, un premier principe plus évident en lui-même que tout ce par quoi on voudrait l'établir."[54]

Autrement dit il s'agit, pour Moigno, d'une de ces vérités nécessaires qui fondent la mécanique en tant que Science purement rationnelle, ce qui témoigne de son attachement profond à l'"ancienne" mécanique. Les "jeunes géomètres" feront toujours référence à l'expérience, même si c'est de façon très allusive.

On peut donc constater que, bien au-delà d'une simple question de structuration, l'utilisation ou non de la notion de force engage l'ensemble de la mécanique. Utiliser la notion de force permet de construire une mécanique où l'explication causale sera essentielle. Ne pas utiliser la notion de force revient à remplacer la causalité par la description des conditions de réalisation des phénomènes, c'est-à-dire à établir uniquement des lois analytiques. La première option est la plus séduisante, mais elle peut se révéler désastreuse si la force n'est qu'une sorte de "phlogistique mécanique".

De cela, il suit que certain mécaniciens vont vouloir construire la mécanique indépendamment de la notion de force, et donc la fonder sur la cinématique.

---

[53] D'autres arguments en faveur de la mécanique de Cauchy sont aussi peu recevables de façon rationnelle: "Chose étrange! pendant que l'école allemande, notre rivale autrefois, notre maîtresse aujourd'hui, reste fidèle aux principes, à la manière, aux notations de Cauchy, en France chacun se fait une méthode et des procédés à lui, méthode hybride, mélange inconsidéré d'analyse et de géométrie; procédés indirects, sorte de petits tours de force imaginés dans chaque cas particuliers pour les besoins du moment, mais qui ne constituent pas un enseignement logique et complet, que rien ne grave dans l'esprit, et qui ne préparent pas à l'étude des œuvres des maîtres" (Abbé Moigno, *Leçons de mécanique analytique, Statique*, Paris, Gauthier-Villars, 1868, p. XXXIII).

[54] Il est malaisé de comprendre les démonstrations du parallélogramme des forces par divers auteurs, par exemple W. Thomson, si l'on ne considère pas les difficultés qu'elles suscitaient à l'époque. Moigno n'utilise pas moins de dix-huit pages pour sa démonstration. Il examine successivement le cas de forces colinéaires, puis de celles qui font un angle droit, puis un angle quelconque. Ces démonstrations ne se font pas avec toute la rigueur souhaitable, comme le dit Moigno lui-même. Voir: Abbé Moigno, *Leçons de mécanique analytique, Statique*, Paris, Gauthier-Villars, 1868, pp. 2 à 6.

III . 3 . Une mécanique basée sur la cinématique

Si l'on veut éliminer la notion de force, en tant que conception métaphysique, il est tentant de construire une mécanique basée uniquement sur des quantités objectivement mesurables, c'est-à-dire la distance et le temps. Telle sera l'ambitieuse entreprise de Boussinesq, entreprise que nous décrirons en détail dans les deux chapitres suivants. Une tentative de construction de la mécanique, à partir uniquement de la cinématique, a été faite par Saint-Venant, dans ses "*Principes de Mécanique fondés sur la cinématique* (1851)[55]. Son ouvrage débute par des notions de cinématique. On y trouve des compositions de mouvements traités au moyen d'une géométrie qui ressemble à une géométrie vectorielle. Saint-Venant est obligé d'utiliser le vocable de "force", mais pour lui la force n'est que le produit de la masse par l'accélération. Il fonde toutefois sa dynamique sur le fait que les actions entre points matériels ne dépendent que des distances qui les séparent. C'est pour lui la grande loi de la Nature. Nous aurons l'occasion de parler des conceptions de Saint-Venant sur la mécanique tout au long des deux chapitres suivants. Saint-Venant est peut-être le fondateur d'une Ecole de mécanique, où la force au sens causal du terme n'a que peu d'intérêt, et où une place importante est accordée à la conservation de la force vive. En 1888, dans le tome "Mécanique générale" de l'"Encyclopédie des travaux publics", A. Flamant, qui s'avoue disciple de Saint-Venant, et qui en plus va jusqu'à la démonstration de la conservation de l'énergie, complète l'œuvre de son maître[56]. Le cours est écrit en langage géométrique, c'est-à-dire que l'analyse y est peu utilisée. Sur un ouvrage de plus de quatre cents pages, ce ne sont pas moins de trois cent dix qui sont exclusivement consacrées à la cinématique. On y décrit les divers mouvements des points matériels et des systèmes de points matériels. La force est annoncée dans la préface comme étant le simple produit de la masse par l'accélération. De là, par extension de la notion de force vive et utilisation de la notion de potentiel, Flamant consacre une page à peine à la conservation de l'énergie. La déduction des principes généraux de la mécanique - variation de la quantité de mouvement, loi des aires, théorème des forces vives - devient possible moyennant une définition de la masse. Celle que donne Flamant est pour le moins vague et embarrassée. Après avoir défini le point matériel, il dit:

---

[55] A. de Saint-Venant, *Principes de Mécanique fondés sur la cinématique*, Paris, Bibliothèque de l'Institut de France, in 4° M 681 D, t. IV, n° 19, 1851, p. 1.
Autre édition: A. de Saint-Venant, *Principes de Mécanique fondés sur la cinématique*, Paris, Mallet-Bachelier, 1851.

[56] A. Flamant, *Mécanique générale*, in *Encyclopédie des travaux publics* , t. 32, Paris, Bernard Tignol, 1888.

> "Chaque corps, chaque point matériel a ainsi au point de vue du mouvement, une sorte d'équivalent *mécanique"*, coefficient numérique inversement proportionnel à la vitesse qui lui est imprimée dans des circonstances données."[57]

Les difficultés bien connues de la définition de la masse se reflètent dans cette formulation qui manque pour le moins de rigueur.

On peut toutefois se demander si cette présentation a connu une large diffusion. C'est de façon un peu désabusée que Flamant, en 1888, présente son ouvrage:

> "Dès 1852, M. de Saint-Venant avait publié ses "Principes de mécanique fondés sur la cinématique", ouvrage qui est sans doute la première tentative sérieuse faite dans cette voie. Le mot force n'y est employé que pour désigner une quantité parfaitement définie: le produit d'une masse par une accélération, et pour la commodité du langage (...). Ce nouveau mode d'exposition est d'ailleurs imposé, pour ainsi dire, par l'état actuel des doctrines philosophiques. Voici comment s'exprime à ce sujet M. G. Lechalas (...)
>
> "Elle se heurte (cette façon d'enseigner la Mécanique), dit-il, à une grosse difficulté résultant de l'habitude invétérée où nous sommes tous d'introduire les forces dans nos conceptions. En outre, les écrits inspirés par des idées que nous venons d'indiquer sont fort peu nombreux; d'une part, en effet, il ne s'agit pas là d'un procédé de calcul, qui permette de résoudre de nouveaux problèmes, mais seulement d'un mode d'exposition plus rationnel, plus favorable à la culture de l'esprit (...)"[58]

La construction de la Mécanique uniquement à partir de la cinématique est donc plus rationnelle que celle qui utilise la force. Toutefois elle ne peut se dispenser de faire appel à certaines hypothèses sur la constitution de la matière et les actions qui s'y produisent, comme le rappelle Saint-Venant:

> "Aujourd'hui les corps sont considérés comme des systèmes de points matériels maintenus à de petites distances par des forces attractives et répulsives, et les liaisons imaginées par les anciens géomètres ne sont plus pour nous que des résultantes de pareilles forces."[59]

La disparition éventuelle de la force de la mécanique semble donc s'accompagner d'un changement de la nature même de cette mécanique.

---

[57]ibid., p. 315.

[58]ibid., p. V.

[59]A. de Saint-Venant, *Mémoire sur les théorèmes de la Mécanique générale*, présenté à l'Académie des sciences le 14 Avril 1834, in *Encyclopédie des travaux publics* , t. 32, Paris, Bernard Tignol, 1888, p. IX.

D'une mécanique, science presque exclusivement rationnelle, on passe à une mécanique plus proche de la réalité physique.

III.4. Les nouvelles présentations de la mécanique faisant appel à la force newtonienne en tant que cause

Il est finalement difficile de se passer de la force dans son sens causal, c'est pourquoi dans certaines mécaniques, la force est clairement définie comme cause du changement du mouvement d'un corps. Les différences entre elles portent sur les rôles respectifs de la Cinématique, de la Statique et de la Dynamique. L'ordre d'exposé ancien est défendu par Sturm dans son traité de Mécanique de 1881, qui reprend le cours professé par ce mécanicien en 1867 à l'Ecole Polytechnique[60]. Sturm commence par étudier la Statique, sans avoir abordé la Cinématique, ce n'est qu'à la page 108 qu'il étudie la Dynamique. C'est finalement adopter la présentation de Lagrange:

> "Je le divise (l'Ouvrage) en deux parties: la Statique ou la Théorie de l' équilibre, et la Dynamique ou la Théorie du Mouvement; et dans chacune de ces parties, je traite séparément des corps solides et des fluides."[61]

Les équations de Lagrange et les équations canoniques sont abordées par Sturm, en note, mais elles ont été rédigées par A. de Saint-Germain en 1881 (p. 378). L'étude de la Cinématique comme préalable à celle de la Mécanique ne se fait pas sans mal. Pourtant cette présentation est celle que préconise Ampère[62] pour qui:

---

60 Ch. Sturm, *Cours de Mécanique de l'Ecole polytechnique*, revu et corrigé par E. Prouhet, notes et énoncés de problèmes de A. de Saint-Germain, 4° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1881. Sturm commence par étudier la Statique, sans avoir étudié la Cinématique, ce n'est qu'à la page 108 qu'il étudie la Dynamique.

61 J.-L. Lagrange, *Mécanique analytique*, 1° éd., Paris, Vve Dessaint, 1788, in J.-L. Lagrange, *Mécanique analytique*, 3° éd., revue et corrigée par M. J. Bertrand, préface à la première édition, Paris, Mallet-Bachelier, 1852, pp. I et II.

62 Voici l'ordre préconisé par Ampère, dans l'exposé de la mécanique:

"1° La cinématique, qui traite des mouvements indépendamment des forces, et inclut la démonstration du principe des "*vitesses virtuelles,* indépendamment des forces appliquées aux points matériels, détermination qu'il est infiniment plus facile de comprendre quand on la sépare ainsi de toute considération relative aux forces".

2° La statique qui traite des forces indépendamment des mouvements, et qui utilise le principe des vitesses virtuelles précédemment établi.

3° La dynamique qui s'occupe des relations entre les forces et les mouvements.

4° La mécanique moléculaire qui est la "théorie de l' équilibre et du mouvement des molécules."

Les deux premières sciences correspondent à la "Mécanique élémentaire", les deux dernières à la "Mécanique transcendentale". Voir: A.-M. Ampère, *Essai sur la philosophie des Sciences*, Paris, Bachelier, 1834, rééd., Bruxelles, Culture et civilisation, 1966, citations aux pages p.p. 50 à 57.

"(...) la cinématique doit renfermer tout ce qu'il y a à dire des différentes sortes de mouvements, indépendamment des forces qui peuvent le produire. Elle doit d'abord s'occuper de toutes les considérations relatives aux espaces parcourus dans les différents mouvements, aux temps employés pour les parcourir, à la détermination des vitesses d'après les diverses relations qui peuvent exister entre l'espace et le temps."[63]

Autrement dit la Cinématique peut être considérée comme une propédeutique à la Dynamique. Les raisons qui plaident en faveur d'une étude préalable de la Cinématique est qu'elle est plus simple que la Dynamique, c'est une géométrie à laquelle on a ajouté le temps, l'argument est donc plutôt d'ordre pédagogique. Mais commencer l'étude de la Mécanique par la Cinématique, revient à mettre en cause l'autonomie même de cette Science; c'est aussi bouleverser l'ordre habituel de son enseignement. Comme l'affirme Laurent dans son cours de l'Ecole Polytechnique de 1870:

"Depuis quelques années, l'enseignement de la Mécanique rationnelle s'est modifié. Les professeurs de l'Ecole Polytechnique et plusieurs professeurs de Faculté commencent la Cinématique avant d'aborder la Statique.

Un grand nombre de savants se sont montrés hostiles à cette manière de procéder; les arguments qu'ils mettent en avant me semblent faciles à détruire. La Statique, disent-ils, a été inventée près de deux mille ans avant la Cinématique, et avant le principe de Dynamique sur lequel est fondée la Statique dans le nouveau mode d'enseignement; la Statique est donc une science à part et tout à fait indépendante des considérations du mouvement sur lesquelles on veut l'asseoir aujourd'hui; enfin il y a beaucoup d'inconvénients à modifier brusquement un mode d'exposition adopté depuis de longues années.

A cela je répondrai que la Cinématique est une science ayant son existence indépendante de la Mécanique proprement dite, fondée sur la considération de la force, et cette science a été réellement créée en même temps que la Géométrie dont elle fait partie. On peut donc faire à part l'étude des figures géométriques, d'autant mieux que nous n'avons pas besoin de principes nouveaux pour entreprendre cette étude. Ensuite, en abordant la Statique, on pose immédiatement tous les principes dont on a besoin pour construire la Dynamique."[64]

Dans leur "Exposé de la situation de la mécanique appliquée" de 1867 les auteurs décrivent l'évolution que, selon eux, a subi l'enseignement de

[63]ibid., p. 51.

[64]H. Laurent, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. 1, Paris, Gauthier-Villars, 1870, pp. IX et X.

la mécanique. A l'ancien ordre, enseigner d'abord la Statique puis la Dynamique, se substitue l'ordre suivant:

> " Après avoir étudié la cinématique, le mouvement des figures considéré en lui-même, on passe à la dynamique, et l'on pose les principes de philosophie naturelle desquels elle se déduit toute entière par voie de raisonnement et de calcul. Ces principes ne sont pas des axiomes évidents a priori (...) ce ne sont pas non plus des lois physiques (...) ce sont des postulata (...) et ces postulata n'acquièrent une probabilité équivalente à la certitude qu'en vertu de l'accord complet que l'on ne cesse de constater entre les faits observés et les conséquences logiquement déduites. Le principe de l'inertie donne la notion de force; le principe de l'indépendance de l'effet des forces indique la loi de leur composition (...) La notion de masse s'introduit en comparant les effets d'une même force sur des points matériels différents (...) La règle du parallélogramme des forces est un corollaire immédiat de la composition des accélérations (...) La statique repose en dernière analyse sur les *postulata* qui servent de base à la dynamique."[65]

Une telle présentation de la mécanique est défendue par Belanger, ainsi qu'en témoignent ses affirmations dans la préface de son cours sur la mécanique des systèmes:

> "Il me reste à justifier une innovation fondamentale que dès 1838 j'ai adoptée dans l'enseignement de la Mécanique, et qui consiste à considérer la Statique comme un cas particulier de la Dynamique, dont toutes les questions peuvent, comme je le fais voir, être traitées complètement et directement, sans y faire intervenir la notion artificielle de l' équilibre."[66]

Cette manière d'aborder la Mécanique ne s'est pas répandue facilement, comme le signale Belanger lui-même:

> "Je ne dois pas dissimuler que cette marche non seulement n'est pas complètement suivie par mes anciens collègues ou successeurs, mais qu'elle a été l'objet d'une critique sévère de la part d'un savant académicien et ancien professeur de mécanique (Duhamel)."[67]

Cet ordre d'exposé sera vivement contesté pour des raisons historiques: la statique est apparue avant la dynamique. La statique apparaît aussi comme plus simple. Mais il est difficile de faire coïncider la force statique avec la définition essentiellement dynamique de la

---

[65] J. Combes, Ed. Phillips et Ed Collignon, *Exposé sur la situation de la mécanique appliquée*, Paris, Hachette, Imprimerie impériale, 1867, p. 16.

[66] J.-B. Belanger, *Traité de dynamique des systèmes matériels*, Paris, Dunod, Gauthier-Villars, 1866, p. XXVIII.

[67] ibid.

force newtonienne. En réalité le nœud de l'affaire est la conception même de ce que l'on doit considérer comme fondamental: l'équilibre ou le mouvement. Pour les tenants de la prééminence de la statique, c'est la considération de l'équilibre qui est primordiale:

> "De toute antiquité on a connu les lois de l'équilibre des machines simples (...) Ne résulte-t-il pas de cette seule remarque que l'équilibre est bien plus simple, bien plus élémentaire que le mouvement, et que l'idée de la force dans l'équilibre est bien plus nette, bien plus intuitive que l'idée de force dans le mouvement?"[68]

La référence à la définition de la force par Newton ainsi que l'intérêt croissant que l'on porte alors à la force vive, semblent plaider pour une mécanique basée sur la dynamique, et ceci malgré l'opinion d'autorités aussi reconnues que celle de Poisson. Toutefois les mécaniques débutant par la dynamique ne sont pas forcément contradictoires avec une vision statique du monde. Les trajectoires, par exemple, peuvent être vues comme une succession dans le temps d'états statiques. Pour qu'une conception dynamique de la mécanique puisse s'opposer à une vision statique, il faut que la quantité qui sert de base à la mécanique soit indissociable de la notion de mouvement. Deux quantités peuvent jouer ce rôle: le travail qui met en jeu le déplacement, et la force vive qui utilise la vitesse. Il semble donc que l'on puisse alors concevoir une Mécanique qui prendrait comme grandeur fondamentale la force vive elle-même. Ce serait alors une approche semblable à celle de Saint-Venant[69], mais qui ne s'interdirait pas d'avoir recours à la force comme cause du mouvement.

> "Si l'on voulait ne voir dans le repos qu'un cas particulier du mouvement, il fallait le traiter comme tel; et on le pouvait en établissant tout d'abord le théorème des forces vives pour un point et pour un système, sauf à prendre ensuite pour base de la statique ce théorème transformé en celui des vitesses virtuelles."[70]

Sans appliquer à la lettre ce "programme", les Mécaniciens qui s'occupent de machines vont porter une grande attention à la force vive. C'est particulièrement le cas de Poncelet, qui à la suite de Carnot fonde réellement sa mécanique sur des principes dynamiques (voir infra). Corrélativement à cette interprétation de la Mécanique, des auteurs se

---

[68] Abbé Moigno, *Leçons de mécanique analytique, Statique*, Paris, Gauthier-Villars, 1868, p. XV.

[69] A. de Saint-Venant, *Mémoire sur les théorèmes de la Mécanique générale*, présenté à l'Académie des sciences le 14 Avril 1834, in *Encyclopédie des travaux publics* , t. 32, Paris, Bernard Tignol, 1888, pp. IX à XXII.

[70] J. Combes, Ed. Phillips et Ed Collignon, *Exposé sur la situation de la mécanique appliquée*, Paris, Hachette, Imprimerie impériale, 1867, p. 19.

détachent de la méthode analytique de Lagrange, que ce dernier expose comme suit:

> "On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'analyse, verront avec plaisir la mécanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu ainsi le domaine."[71]

A côté de cette Mécanique savante qui culmine dans les travaux de Poisson, Jacobi et Hamilton, se développe une Mécanique moins abstraite, qui fait appel aux figures et à la géométrie, et dont nous verrons un exemple dans l'œuvre de Boussinesq. Cette Mécanique est aussi plus facile à enseigner car elle fait plus appel à l'image et à l'intuition. Parmi les pères de cette nouvelle Mécanique, on trouve Carnot, Poncelet, et bien sûr Saint-Venant, c'est-à-dire ceux qui mettent au premier plan la force vive, et dans une certaine mesure s'opposent à la conception de la force au sens causal du terme.

Un débat sur l'exposé de la mécanique occupe donc les savants du milieu du XIX° siècle. On voit d'un côté se ranger les tenants d'une mécanique savante qui s'accommode de la force en son sens causal et qui se fonde sur la Statique; et de l'autre des savants plus soucieux de pratique, plus soucieux de rapprocher la Mécanique du réel physique. Ce sont les deux Ecoles que nous avons déjà vu s'affronter dans la querelle sur les forces instantanées (voir § II . 2 . de ce chapitre).

Nous allons examiner maintenant la Mécanique de Poncelet comme représentative de cette Mécanique qui porte une grande attention à la force vive.

III . 5 . Les mécaniques fondées sur la considération du mouvement comme élément primordial

Dans l'"Exposé de la situation de la mécanique appliquée", on lit:

> "Le perfectionnement des méthodes d'enseignement de Carnot n'ont pas justifié tous ces scrupules, et la *force* est restée dans la mécanique comme une notion claire, simple, irréductible, révélée à chacun de nous par la conscience même de nos efforts musculaires."[72]

---

[71] J.-L. Lagrange, *Mécanique analytique*, 1° éd., Paris, Vve Dessaint, 1788, in J.-L. Lagrange, *Mécanique analytique*, 3° éd., revue et corrigée par M. J Bertrand, préface à la première édition, Paris, Mallet-Bachelier, 1852, pp. I et II.

[72] J. Combes, Ed. Phillips et Ed Collignon, *Exposé sur la situation de la mécanique appliquée*, Paris, Hachette, Imprimerie impériale, 1867, p. 31.

Autrement dit, quoi qu'il en soit de la force, elle est bien commode pour la construction de la mécanique. Parmi celles qui utilisent ce concept de force, il faut ranger la mécanique des machines de Poncelet. Toutefois cette Mécanique porte une attention particulière à la force vive et au travail. Ce qui importe pour ces ingénieurs, c'est effectivement le travail que peuvent fournir les machines, et la perte de force vive qui se produit dans le choc de leurs organes. Bien que fondée sur les mêmes principes que la mécanique dite "rationnelle", cette mécanique n'aura pas les mêmes intérêts, ce sera plus une mécanique de la force vive que de la force causale. Il faudra beaucoup de temps pour que les conceptions de cette mécanique s'imposent. Ecrits en 1825, les cours de Poncelet à l'École du Génie de Metz n'auront même pas les honneurs d'une publication dans les "Mémoires des savants étrangers". Un "Cours de Mécanique industrielle" sera publié en 1829; mais en 1858, Poncelet est déjà qualifié par Moigno de "réformateur de la mécanique".

Nous examinons maintenant ces mécaniques faisant une part importante au travail mécanique.

III . 5 . a . Les mécaniques du travail et de la force vive

L'intérêt suscité par la notion même de travail est attesté par l'usage fréquent qui est fait, à cette époque, de cette grandeur en Physique, et pas seulement en Mécanique. Si nous quittons donc le domaine de la Mécanique pure pour la Physique, le travail peut être utilisé comme une liaison entre les causes réelles ou supposées, les forces, et leurs effets, actions mécaniques, déformations, objectivement constatables, voire comme substituts à ces causes. Cette conception participe donc de ce passage d'une mécanique "rationnelle" vers une mécanique plus "physique". Un des représentants de cette mécanique est un chimiste "positiviste": Sainte-Claire Deville. Ainsi dit-il dans une conférence en 1868:

> "L'introduction de l'idée de travail dans la mécanique correspond à l'un des plus grands progrès de la Science moderne. Quelles que soient les causes qui produisent le mouvement dans la nature, nous pouvons toujours en comparer les effets en comparant entre eux les travaux effectués sous leur influence, et nous arrivons à cette idée générale de la transformation de ces causes et de l'équivalence de leurs effets exprimés en travail."[73]

Des physiciens comme Piaron de Mondésir vont jusqu'à vouloir résoudre tous les problèmes de Physique en considérant simplement le

[73] H. Sainte-Claire Deville, *Principes généraux de la chimie d'après la thermodynamique,* Revue des cours scientifiques, 6, 1868. p. 86.

travail. Citons aussi Clausius, qui une fois établie la formule mathématique du travail l'utilise avec la force vive comme base de ses travaux en Thermodynamique, et ainsi, s'affranchit rapidement de la référence à la force. Le travail, par son double aspect de quantité physique déjà bien définie et d'idée issue de la vie courante (que l'on pense à la "labouring force" des Anglo-saxons) se prête bien à l'enseignement d'une mécanique appliquée à la pratique. Voyons maintenant comment Poncelet, "le réformateur de la Mécanique" selon Moigno, construit sa Mécanique.

La force est définie dans un contexte de Mécanique pratique:

> "C'est ici le lieu de remarquer que nous n'entendrons désormais par le mot force que la pression, l'effort simple dont est capable un agent quelconque, dans une direction et un point déterminés, pression et effort qui sont toujours comparables et peuvent se mesurer par des poids, à l'aide d'instruments à ressorts, tels que le dynamomètre de Régnier, certains pesons du commerce, etc., qui ont été tarés ou vérifiés à l'avance, en y suspendant des poids étalons (...)"[74]

C'est ainsi que, sans évoquer explicitement la notion de cause, la force est définie. De la même manière la notion de travail est expliquée à partir d'exemples concrets. Après avoir dit que les mécaniciens, sous divers vocables, expriment le travail par le produit d'un poids par une distance, Poncelet poursuit:

> "En y réfléchissant un peu, on voit qu'exécuter un travail mécanique quelconque, c'est vaincre, d'une manière utile pour le besoin des arts, des résistances telles que la force d'adhésion des molécules des corps, la force du calorique et des ressorts, la force de la pesanteur, la résistance des fluides, les frottements et quelquefois l'inertie de la matière ."[75]

Le travail, dans l'esprit de Poncelet, doit intervenir dans tous les domaines de la Physique. C'est par analogie avec la chute d'un corps soumis à son poids que le théorème de la variation de la quantité de mouvement est établi; la force vive est ensuite introduite à partir du travail effectué par une force:

> "La force vive acquise par le corps est égale au double de la quantité de travail totale qui lui a été imprimée par cette force."[76]

Poncelet introduit ensuite les forces d'inertie à partir du principe de l'action et de la réaction. Mais il semble bien que cette force soit réelle

---

[74] J. Poncelet, *Cours de mécanique appliquée aux machines*, Paris, Bachelier, 1874, p. 3.
[75] ibid., p. 6.
[76] ibid., p. 13.

pour cet auteur, même si elle est particulière, puisqu'elle n'existe qu'en s'opposant à un mouvement. Ce serait une résistance opposée au mouvement, et non pas un artifice, comme dans la version actuelle du principe de d'Alembert:

> "Or il en résulte (du principe de l'action et de la réaction) que la force motrice ϕ, considérée ci-dessus, doit éprouver, de la part de la masse m, une réaction mesurée par -m . (dv/dt), qui lui fait équilibre et provient évidemment de la résistance opposée par l'inertie du corps à tout changement de mouvement; c'est pourquoi on nomme quelquefois cette résistance la force d'inertie relative à la variation de vitesse dv."[77]

La définition précédente lui permet d'écrire la formule qui, dans sa mécanique, jouera le rôle du principe de d'Alembert:

$$" \sum Q\, dq - \sum mv\, dv = 0$$

> qui exprime que la somme des travaux élémentaires développés, tant par les différentes forces qui produisent la modification du mouvement que par les forces d'inertie qui naissent de cette modification, est constamment égale à zéro."[78]

De là, par intégration, Poncelet déduit le principe de la force vive qu'il écrit:

$$\int_{qq'} Q \cdot dq = \int_{v'v} m \cdot v \cdot dv = (1/2) \sum (m \cdot v^2 - m \cdot v'^2)$$

En exprimant ensuite la variation de force vive au moyen du travail des forces qui agissent, mais aussi en tenant compte des déplacements des molécules du système mécanique, Poncelet écrit l'équation du mouvement des machines en utilisant le travail comme grandeur fondamentale. Il dit:

> "Si F représente la force motrice appliquée à la machine, R la résistance passive, Q la force "utile" produite par la machine, m la masse d'une molécule, l'équation du mouvement de la machine est:

$$\sum m.V.dv = \int F.df - \int R.dr - \int Q.dq \pm \int m.g.h$$

Ou, pour chaque élément de temps:

---

[77]ibid., pp. 13 et 14.
[78]ibid., p. 17.

$$\sum m.V^2 - m.V'^2 = 2\int F.df - \int R.dr - \int Q.dq \pm \int m.g.h$$ [79]

Cette équation n'est peut-être pas très appropriée à la Mécanique céleste mais elle se révélera d'un grand intérêt dans l' étude des phénomènes physiques. Elle est citée en exemple par Verdet dans les premières pages de sa "Théorie mécanique de la chaleur"[80].

La Mécanique de Poncelet est donc fondée sur la considération du travail. Le seul principe qu'elle semble emprunter à la Mécanique newtonienne est le principe de l'action et de la réaction. Les autres lois semblent déduites de l'expérience ou s'en déduire mathématiquement.

Les travaux de Poncelet mettent l'accent sur le travail et la force vive, ils entraînent un renouveau de la Mécanique.

III . 5 . b . L'intérêt des mécaniciens pour la force vive

Nous avons signalé au paragraphe II . 2 de ce chapitre la volonté de Poncelet, en 1857, de voir naître une Mécanique "physique et expérimentale" dans laquelle les principes intangibles de la Mécanique dite "rationnelle" se concilieraient avec les acquis de la Physique. C'est par l'intermédiaire de la considération de la force vive que cette liaison peut se faire. En effet, le théorème de la conservation ou de la variation de la force vive est un des théorèmes importants de la Mécanique analytique et il semble bien que la force vive ait quelque chose à voir avec l'énergie, du moins dans une perspective atomiste de la physique. Ainsi cette notion peut servir de passerelle entre la Mécanique savante de Cauchy et la Mécanique pratique de Poncelet et même avec une éventuelle physique de l'énergie. Ce n'est pas sans raisons que Moigno appelle Poncelet "le réformateur de la mécanique"; c'est que les conceptions de ce dernier ont fortement inspiré l'enseignement de la Mécanique. Dans l'éloge nécrologique qu'il en fait, Dumas s'exprime ainsi:

> "Il appartenait au Général Poncelet de doter la Faculté et l'enseignement public de ce cours de cinématique et de mécanique rationnelle, qui en matérialise les conclusions, qui en rend plus sensibles les démonstrations, et qui, rectifiant sans cesse par l'étude des faits les impressions théoriques si souvent erronées ou exagérées des élèves, prévient leurs égarements."[81]

L'influence de Poncelet se manifeste aussi par l'intérêt porté par les mécaniciens confirmés à la force vive, en Mécanique, mais aussi en

---

[79]ibid., pp. 21 et 22.

[80]E. Verdet, *Théorie mécanique de la chaleur*, t. 1, publié par MM. Prudhon et Violle, Paris, Masson, 1868, p. 2.

[81]J. B. Dumas, *Discours de M. Dumas*, C.R., 66, 1868, pp. 90 et 91.

Physique, c'est-à-dire dans l'étude des phénomènes du monde naturel. Cette nouvelle approche de la Mécanique est présentée dans l'"Exposé de la situation de la mécanique appliquée" de 1867 qui met au premier plan la conservation de la force vive:

> "Le plus important de ces théorèmes (fondamentaux de la mécanique) est celui des forces vives, et la manière générale dont on l'envisage aujourd'hui n'est pas l'un des moins grands progrès de la dynamique moderne."[82]

Mais il s'agit d'une conception nouvelle de la force vive: elle n'est plus maintenant considérée seulement comme une simple quantité mathématique, elle prend place dans la physique, celle de la chaleur par exemple. Les auteurs du rapport indiquent qu'"autrefois", dans les conceptions anciennes, on considérait que, pour que la force vive se conserve, il fallait que les forces agissantes soient indépendantes de la vitesse. Dans tous les autres cas, mouvements avec frottement, chocs non élastiques, on considérait qu'il n'y avait pas conservation de la force vive: elle disparaissait. En 1867, à côté des préoccupations de la mécanique dite "rationnelle", on est soucieux de se rapprocher des phénomènes naturels, et on prend en compte l'ensemble des phénomènes physiques; alors la perte de force vive n'est qu'apparente:

> "Au point de vue plus général, tout mouvement d'un système matériel est une suite non interrompue de transformations de demi-forces vives; et si l'on constate la disparition d'une partie de cette force vive d'un système, sans production correspondante de travail, on est certain que cette disparition n'est qu'apparente; la force vive supposée perdue, se trouve toute entière dans le mouvement vibratoire produit: c'est ainsi qu'on doit interpréter cette locution de force vive perdue, qu'on emploie dans les théorèmes relatifs au choc, et qui représente en réalité une vibration des molécules (...) les exceptions à ce grand principe (celui des force vives) ne pouvant être qu'apparentes demandent à être convenablement interprétées. La théorie mécanique de la chaleur est une conséquence de la théorie des forces vives."[83]

On est confondu devant la modernité, pour l'époque, de ces propos. L'interprétation de la perte de demi-force vive par mise en vibration des molécules fait l'objet d'une page d'explications dans le "Traité de philosophie naturelle" de Thomson et Tait. L'explication mécanique des théories de la chaleur met en lumière la compréhension par les physiciens de l'époque de certains mécanismes calorifiques. Mais on n'est pas moins étonné de ne pas souvent trouver trace, dans la plupart

---

[82] J. Combes, Ed. Phillips et Ed Collignon, *Exposé sur la situation de la mécanique appliquée*, Paris, Hachette, Imprimerie impériale, 1867, p. 34.
[83] ibid., p. 36.

des traités de mécanique pure, de la notion d'énergie. Dans les divers exposés que nous avons étudiés, c'est bien le principe de conservation des forces vives qui est évoqué. La question du potentiel et de l'énergie potentielle est rattachée à des cas particuliers comme l'attraction dans la Mécanique newtonienne. Cette question du potentiel est donc intéressante pour la compréhension de ce que pouvait être, à l'époque, la conservation de l'énergie. Nous l'évoquons maintenant.

IV . La question du potentiel

Les expressions mathématiques du potentiel, dans ses diverses significations, se retrouvent dans les cours de mécanique des années 1860. Certains physiciens se plairont à retrouver cette notion dans divers écrits. Bouty signale une fonction proche du potentiel, fonction qu'il appelle V, dans le supplément au cours de Jamin[84]. Il indique qu'elle se trouve dans la "Mécanique céleste" de Laplace, mais aussi dans un mémoire de Poisson de 1811.

Les travaux de Green ont été remis à l'honneur par Thomson dès les années 1840, ils sont bien connus en France autour de 1860, comme en témoigne Saint-Venant, entre autres, dans la Statique de Moigno:

> "La méthode du potentiel est appliquée avec succès par Green et Gauss, de 1828 à 1829, aux problèmes de la distribution de l'électricité statique et à ceux des phénomènes capillaires, Green l'employait sous une forme légèrement différente de celle de la Mécanique analytique de Lagrange, car ces illustres savants composent de prime abord (ce que Navier avait déjà fait ou à peu près) cette quantité qu'ils ont appelée *fonction potentielle* ou le *potentiel*."[85]

Saint-Venant semble vouloir trouver une "généalogie" française à la notion de potentiel. Il en perçoit donc toute l'importance, bien que lui même essaie de s'en passer en raison de conceptions qui lui sont propres et que nous développerons dans le troisième chapitre. Dans une longue note Saint-Venant montre les différents sens que l'on peut attacher en 1868 au potentiel ou même à l'énergie potentielle:

> "Cette fonction potentielle (...) est celle que Lagrange a représentée par:

$$\Pi = \int (Pdp + Qdq + \ldots) = \Sigma \int (Xdx + Ydy + Zdz + \ldots)$$

---

[84]M. Bouty, *Cours de physique de l'Ecole Polytechnique, supplément au tome premier*, in J. Jamin, *Cours de physique de l'Ecole Polytechnique*, t. 1, Paris, Gauthier-Villars, 1878, pp. 1* à 9*.

[85]A. de Saint-Venant, *Théorie générale de l'élasticité*, in abbé Moigno, *Leçons de mécanique analytique, Statique*, Paris, Gauthier-Villars, 1868, p. 712.

Elle a une signification philosophique qui explique son rôle important, car on peut la regarder (prise en signe contraire et augmentée d'une constante que la différentiation fait disparaître) comme représentant le pouvoir moteur que possède une force à partir de la situation actuelle du mobile sur lequel elle agit, c'est-à-dire le travail total qu'elle est capable de fournir jusqu'à une situation pour laquelle elle s'annule, travail qui dépend non seulement de son intensité moyenne, mais encore de l'étendue plus ou moins grande de son champ d'action, ou de l'espace que le mobile peut parcourir avant que cette force, variable avec la distance du centre d'action dont elle émane, cesse d'avoir une intensité sensible."[86]

En 1868 encore, Saint-Venant qui pourtant est au courant des travaux des physiciens anglais, germaniques et français, semble avoir une conception qui lui est propre du potentiel. Les notions de champ d'action et de pouvoir moteur nous renvoient à son mémoire de 1834, le "Mémoire sur les théorèmes de la Mécanique générale", que nous avons déjà cité (§ III . 3 . de ce chapitre). Le champ d'action correspond à la distance que pourrait effectivement parcourir, une force. La notion de pouvoir moteur est à rapprocher du potentiel. Elle est définie en 1834 comme:

> "l'intégrale du produit de l'intensité qu'elle possède à chaque instant par l'élément de la distance de ses deux points d'application, cet élément étant pris positivement quand la force est répulsive et négativement quand elle est attractive, et l'intégration étant étendue depuis sa valeur actuelle à cette distance jusqu'à celle pour laquelle la force est nulle."[87]

Saint-Venant appelle ce pouvoir moteur "capital dynamique latent" et la demi-force vive "capital dynamique patent". Il ne semble pas voir dans ces "capitaux dynamiques" une grande nouveauté: selon lui, Lagrange les désigne ordinairement par V et T et ils entrent "souvent dans les formules de la 2° partie de la mécanique analytique"[88].

Saint-Venant assimile, en 1868, sa propre notion de pouvoir moteur à diverses expressions que l'on peut rapprocher de l'énergie potentielle ou du potentiel:

> "Elle est la même que ce qu'Ampère appelait la force vive implicite (Annales de Chimie et de Physique, Avril 1835) et Jean Bernoulli la faculté d'agir (Œuvres, t. 3, p. 29), ou ce que sir W. Thomson appelle (Comptes Rendus, 28 Mai 1855, t XL, p. 1197) l'énergie potentielle qui,

---

[86]ibid., pp. 712 et 713.

[87]A. de Saint-Venant, *Mémoire sur les théorèmes de la Mécanique générale*, présenté à l'Académie des sciences le 14 Avril 1834, in *Encyclopédie des travaux publics* , 32, Paris, Bernard Tignol, 1888, p. XXX.

[88]ibid., p. XXXI.

ajoutée à l'énergie actuelle ou puissance vive (demi-force vive), forme l'énergie mécanique totale d'un système de corps; énergie dont les réservoirs partiels sont, par exemple, d'une part un poids élevé, un ressort tendu (Bernoulli), une quantité de combustible (Lagrange, dernier article de la Théorie des fonctions analytiques) et, de l'autre, une masse en mouvement.

On appelle quelquefois aussi ce potentiel fonction de force, parce que sa dérivée par rapport à une coordonnée quelconque donne la composante, dans son sens, de la force totale qui agit sur le point pour lequel on la considère. Aussi se confond-elle, lorsque les forces sont en raison inverse des carrés des distance r, avec le potentiel analytique V de Laplace, que l'on considère dans les théories des attractions, soit planétaires, soit électriques et qui, se composant d'une somme de masses divisées par les premières puissances des distances, satisfait à une équation différentielle $\Delta V = 0$.

(Laplace, Mécanique céleste, 2° partie, ou Clausius, Die Potenzial function)."[89]

Les différentes acceptions des termes potentiel et énergie potentielle sont bien mentionnées dans ce qui précède. Si Saint-Venant juge que cette notion est importante, elle n'est toutefois pas à la base de sa Mécanique, elle n'en est qu'une des nombreuses notions. La relation entre potentiel et énergie potentielle est assez vague; l'énergie n'apparaît pas, elle non plus, comme une grandeur fondamentale. Nous avons du mal à voir la relation qui peut exister entre toutes les notions qu'il rapproche de la notion de potentiel ou d'énergie potentielle. En d'autres termes, il semble que l'on ait besoin d'une théorie dans laquelle le potentiel et l'énergie potentielle soient clairement définis.

La difficulté de comprendre ce qu'est le potentiel réside en particulier dans sa signification physique même. Il semble, selon Crosbie Smith et Norton Wise, que ce soit W. Thomson qui ait, le premier, pressenti une signification physique du potentiel:

> "Alors qu'ils (Laplace, Poisson) avaient regardé cette fonction V comme un outil d'analyse sans signification physique, Thomson commence dans son article de 1841 à la considérer à travers les lunettes de Fourier comme un état physique tel que la température, dont le gradient non seulement donnait "la force", mais était la force."[90]

Clausius tente de clarifier la notion de potentiel dans son étude sur "la fonction potentielle et le potentiel". Cet ouvrage, qui ne sera publié en français qu'en 1870, est toutefois signalé, dès 1866, dans les Comptes

---

[89] A. de Saint-Venant, *Théorie générale de l'élasticité*, in abbé Moigno, *Leçons de mécanique analytique, Statique*, Paris, Gauthier-Villars, 1868, pp. 712 et 713.

[90] Crosbie Smith et Norton Wise, *Energy and Empire*, Cambridge, Cambridge University Press, 1989, p. 307.

Rendus de l'Académie des sciences[91]. Clausius informe ainsi les Académiciens de la parution de son livre:

> "(...) je me suis proposé de donner une exposition, aussi simple que possible, de la signification et des propriétés de la fonction que George Green a nommée la *fonction potentielle.* De plus, j'y discute une autre quantité, à savoir le *potentiel,* qui sert à exprimer le travail mécanique fait par des forces naturelles, et qui joue un si grand rôle dans la mécanique et la physique mathématique."[92]

Fabio Bevilacqua a indiqué les différences qui existaient entre les conceptions du potentiel chez Green et la "Spannkraft" de Helmholtz d'une part, et le *potentiel* de Clausius d'autre part[93]. Les premiers voient dans la "fonction potentielle" surtout une expression mathématique, le second considère le potentiel comme une variation de travail, donc comme quelque chose qui aurait à voir avec l'énergie. Étant donné l'importance particulière de Clausius pour la Physique française de l'époque, comme en témoignent ses fréquentes interventions dans les Comptes Rendus de l'Académie des sciences, et les références qui sont faites à cet auteur dans les ouvrages de Mécanique, nous donnons ici un bref exposé de son livre.

On peut y lire, concernant les forces:

> "(...) si l'on considère les forces qui se présentent dans la nature, on trouve qu'il existe souvent entre leurs composantes une relation particulière, qui consiste en ce qu'elles peuvent être représentées par trois coefficients différentiels d'une même et seule fonction des coordonnées."[94]

Dans ce cas on peut écrire:

$$X= dU/dx;\ Y=dU/dy;\ Z=dU/dz$$

Clausius appelle U "fonction de force", ce qui lui permettra de la différencier de la *fonction potentielle* et du *potentiel.*

Il est important de remarquer que Clausius ne dit pas que les forces qui dérivent d'un potentiel sont des forces centrales; il envisage donc

---

[91] R. Clausius, *De la fonction potentielle et du potentiel,* Paris, Gauthier-Villars, 1870.

[92] R. Clausius, *Communication du secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences,* C.R., 63, 1866, p.1147.

[93] F. Bevilaqua, *Helmholtz's ueber die Erhaltung der Kraft,* in *Hermann von Helmholtz and the foundations of nineteenth-century Science,* Berkeley, University of California press, 1993, pp. 293 à 351.

[94] R. Clausius, *De la fonction potentielle et du potentiel*, traduit par F. Folie, Paris, Gauthier-Villars, 1870, p. 2.

l'existence de forces autres que les forces centrales et qui dériveraient d'un potentiel. Toutefois ces dernières constituent le cas le plus important dans la nature:

> "Parmi tous les cas dans lesquels il existe une fonction de force, le plus important est celui dans lequel la force qui agit sur le point donné peut se décomposer en forces centrales, c'est-à-dire en forces attractives et répulsives, qui partent de points déterminés de l'espace et qui agissent également en tous sens autour de ceux-ci, de sorte que leur intensité ne dépend que de la distance."[95]

Clausius nomme "agent" la "quantité de qualité" dont il munit les points matériels pour expliquer leur interaction. Il définit alors la "fonction potentielle" comme suit:

> "Aux hypothèses que nous avons faites jusqu'à présent (forces centrales), ajoutons enfin les deux suivantes: 1° que l'agent qui se trouve au point p, qui subit l'action, est de même nature que celui qui l'exerce; et 2° que la quantité de cet agent n'est pas arbitraire, mais égale à l'unité: alors la fonction de force ainsi simplifiée sera ce que nous nommons *fonction potentielle*."[96]

C'est donc dans un cas bien particulier que Clausius définit sa fonction potentielle: celui des forces centrales. C'est restreindre considérablement la portée éventuelle de la notion de potentiel.

Il appelle V la *fonction potentielle*, qu'il exprime par:

$V = \Sigma\, q / r$, avec les notations habituelles.

Se plaçant alors dans le cas des forces centrales newtoniennes, donc en $1/r^2$, il démontre le théorème des forces vives, et définit la "quantité de potentiel" par la phrase:

> "l'accroissement de force vive d'un système pendant un certain temps est égal au travail que les forces qui agissent sur ce système ont effectué pendant le même temps." [97]

Toujours dans le cas des forces centrales en $1/r^2$, il définit "le potentiel", par :

$$W' = \Sigma\, q \,.\, q'/r'$$

---

[95]ibid., p. 7.
[96]ibid., p. 13.
[97]ibid., p 118.

On reconnaît ici un concept très voisin de notre énergie potentielle.
Finalement Clausius énonce ce qui correspondrait à la conservation de l'énergie mécanique:

> "Si l'on considère l'agent fixe et l'agent mobile comme formant un tout, et que l'on cherche le potentiel de ce tout sur lui-même, l'accroissement de ce potentiel représentera le travail de toutes les forces agissantes."[98]

Clausius distingue donc parfaitement la fonction mathématique potentielle, du potentiel ou plutôt de la quantité de potentiel que l'on pourrait rapprocher de l'énergie potentielle. Mais il se place délibérément dans le cas des forces centrales, ce qui réduit la portée de son ouvrage.

Diverses compréhensions de la notion de potentiel sont donc présentes dans la seconde moitié du XIX° siècle. La liaison entre les aspects mathématiques et les aspects énergétiques que peut revêtir cette fonction n'est pas encore bien précisée. A l'opposé de cette notion abstraite de potentiel qui se cherche une réalité physique, l'éther est, dans la seconde moitié du XIX° siècle, une nécessité du monde physique, un être physique, indispensable pour l'écriture des formules de la physique mathématique, en optique par exemple. Il faut donc l'évoquer dans le cadre de la Mécanique.

U . L'éther comme élément explicatif important de la physique du XIX° siècle

L'éther joue un rôle considérable dans la physique du XIX° siècle. Il conviendrait mieux d'écrire "les diverses sortes d'éther", tant ce mystérieux fluide a suscité d'images. Nous ne décrirons pas en détail la structure que les auteurs attribuent à cet éther, c'est seulement sa fonction qui sera évoquée. Son importance est vitale dans la théorie ondulatoire de la lumière; aussi la meilleure preuve de l'existence de l'éther est-elle fournie par l'Optique. Examinant la propagation des ondes lumineuses, Lamé est conduit à conclure:

> "Or, si la matière pondérable existe seule dans le système central (endroit d'où partent les ondes), elle est totalement incapable de produire l'effet dont il s'agit; puisque, si le milieu vibrant qui propage la lumière dans le cristal ne se compose que de particules pondérables, on est inévitablement conduit à cette conséquence que la molécule O (molécule qui produit l'ébranlement lumineux) doit exécuter des vibrations d'amplitude infinie dans toutes les directions à la fois. Il faut donc nécessairement que le système central, et par suite tout

---

[98]ibid.

l'espace biréfringent, contienne une autre espèce de matière, qui soit le véritable milieu en vibration sous l'influence de la lumière; tandis que la matière pondérable ne remplit qu'un rôle purement passif, en modifiant, par une sorte de résistance, les directions de propagation des ondes lumineuses dans les divers sens."[99]

L'éther explique aussi, pour d'autres physiciens, la force à distance et en particulier l'attraction universelle. Il permet de ne pas faire appel à la mystérieuse attraction universelle, tout en se référant à Newton lui-même. Ainsi F.-A.-E. et Em. Keller, dans leur article des Comptes Rendus de 1863, attribuent à Newton la citation suivante:

"Il est insoutenable que la matière inerte puisse exercer une action autrement que par contact; que la pesanteur soit une qualité innée, inhérente essentiellement aux corps, qui leur permette d'agir les uns sur les autres au loin à travers le vide, sans qu'un intermédiaire quelconque serve à la transmission de cette force, cela me parait d'une absurdité si énorme, qu'elle ne saurait à mon sens être admise par une personne capable de réflexion philosophique sérieuse."[100]

Les auteurs font ensuite le lien entre l'Optique et la gravitation universelle. Depuis Fresnel la propagation de la lumière est traitée dans le cadre des théories de l'élasticité; le milieu élastique est l'éther. On met ainsi en évidence une composante transversale de la vibration lumineuse, mais de façon indissociable, une vibration longitudinale que l'on ne peut détecter...et dont on ne sait que faire. F.-A.-E. et Em. Keller estiment, quant à eux, que cette composante longitudinale est responsable de l'attraction universelle. Ils supposent que l'éther est formé de particules peu denses et animées de mouvements dans tous les sens; il suit que:

"Si l'on suppose maintenant des chocs dans tous les sens, et deux particules plus denses que les autres, elles se feront mutuellement écran en absorbant une portion de la force impulsive dirigée de l'une à l'autre, et la force qui tend à les éloigner devenant ainsi plus faible que celle qui tend à les réunir, elles s'approchent l'une de l'autre, absolument comme si elles s'attiraient."[101]

Quelques années plus tard, en 1869, Leray explique la gravitation universelle en utilisant l'éther, et cette fois la formule de la gravitation

---

99 G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 1° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1852, 2° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1866, pp. 326 et 327.
100 F-A-E et Em. Keller, *Mémoire sur la cause de la pesanteur et des effets attribués à l'attraction universelle*, C. R., 56, 1863, pp. 530 à 533, p. 530.
101 ibid., p. 532.

est démontrée[102]. Les éditeurs des Comptes Rendus décident de publier cet article "bien que dépassant les limites réglementaires".

Cette théorie repose sur le principe suivant lequel l'éther est parcouru de courants qui s'affaiblissent en traversant les corps denses. Cette force vive perdue de l'éther explique le magnétisme, la chaleur et la lumière naturelle des astres. De là ils déduisent, mais sans donner les détails des calculs, que les forces qui s'exercent entre deux sphères ont pour intensité commune: $K^2. F.M.M'/D^2$, où K et F sont des constantes propres à cette théorie.

L'éther intervient aussi en électricité comme le montre Briot dans son ouvrage de thermodynamique[103]. Ainsi:

> "Si l'on adopte comme probable l'hypothèse d'un seul fluide, il est naturel de supposer que ce fluide n'est autre chose que l'éther, par les vibrations duquel on explique les phénomènes lumineux. Toutefois l'expérience apprend qu'il n'y a pas de phénomènes électriques dans le vide, c'est-à-dire en l'absence de toute matière pondérable. Il semble résulter de là que l'on doit appeler fluide électrique contenu dans un volume donné, non pas la quantité totale d'éther qu'il renferme, mais la somme des atmosphères d'éther qui entourent les molécules pondérables (n° 2)[104], c'est-à-dire l'excès de la quantité totale d'éther que contient le volume sur la quantité qu'il contiendrait sans la présence des molécules pondérables."[105]

Pour Briot, l'espace physique contient de l'éther; les phénomènes électriques sont dûs, dans l'hypothèse d'un seul fluide, au surplus d'éther qu'amène la présence de molécules pondérables[106]. A l'opposé on trouve une théorie où l'éther est lui-même décomposable en électricité. Pour Em. Martin, l'éther lui-même est constitué de deux sortes d'électricité: l'électricité négative ou électrile, et l'électricité positive ou éthérile. La décomposition et la recomposition de l'éther expliquent les phénomènes électriques[107]. L'éther participe donc bien de toute explication du monde physique. Il n'est pas étonnant que Lamé l'ait intégré dans son grand principe à partir duquel doit se développer, selon lui, toute la physique future. Le titre de son article paru dans les

---

[102] M. Leray, *Théorie nouvelle de la gravitation*, C.R., 59, 1869, pp. 215 à 621.

[103] Ch. Briot, *Théorie mécanique de la chaleur*, Paris, Gauthier-Villars, 1869.

[104] Voir: Ch. Briot, *Théorie mécanique de la chaleur*, Paris, Gauthier-Villars, 1869, p.2.Selon une conception proche de celle de Poisson, Briot suppose que les molécules de matière pondérable sont entourées d'une atmosphère d'éther. Celles de deux molécules voisines se repoussent et contrebalancent ainsi l'attraction gravifique des molécules pondérables.

[105] ibid., p. 254.

[106] Voir aussi: Jamin et E. Edlund, *Sur la nature de l' électricité*, Annales de Chimie et de Physique, 26, 4° série, p. 201.

[107] Em. Martin, *Recherches sur l'éther réel, comme l'un des grands principes de la nature physique*, C. R., 56, 1863, pp. 1211 à 1214.

Comptes Rendus de l'Académie des sciences en 1863 est significatif à cet égard:

> "Note sur la marche à suivre pour découvrir le principe, seul véritablement universel, de la nature physique."[108]

Lamé veut montrer qu'un principe universel de la nature physique sera découvert au moyen de la considération de l'éther et des seules lois de l'élasticité et de la chaleur lorsqu'elles sont appliquées aux corps solides homogènes[109]. Dans un premier temps il définit, à la manière de Fourier, le principe partiel qui désigne la classe de phénomènes étudiée:

> "(Il faut) observer et expérimenter les faits, dans toutes les circonstances réalisables; coordonner ces expériences et ces observations, de manière à les grouper sous un certain nombre de faits, en les faisant rentrer dans un certain nombre de lois; puis, le calcul aidant, diminuer successivement le nombre de ces lois, en les faisant rentrer les unes dans les autres, pour arriver finalement à une seule loi, qui sera le *principe partiel* de la classe de phénomènes étudiée."[110]

Ce principe partiel est lui-même perfectionné suivant une méthode qu'il a exposée dans son traité sur la chaleur: les conséquences du principe provisoire, en général déduites au moyen de séries de Taylor, sont confrontées à l'expérience[111]. Les résultats expérimentaux permettent de modifier le principe de départ pour le rendre plus conforme à l'expérience, et de recommencer la série des opérations pour se rapprocher de plus en plus des résultats de l'expérience. Mais les principes partiels de chaque classe de phénomènes sont, suivant Lamé, réductibles l'un à l'autre: ils se fondront finalement en un seul principe universel. Lamé montre qu'en définitive ce principe universel sera issu de ceux de l'élasticité et de la chaleur appliqués aux solides homogènes. Pour le prouver, il observe que l'on peut classer les connaissances physiques de l'époque en six catégories:

> "La capillarité, l'électricité statique, les actions magnétiques, la propagation de la chaleur, celle de la lumière, enfin l' élasticité des solides."[112]

---

[108] G. Lamé, *Note sur la marche à suivre pour découvrir le principe, seul véritablement universel, de la nature physique*, C. R., 56, 1863, pp. 983 à 989.

[109] ibid., p. 984.

[110] ibid., p. 983.

[111] G. Lamé, *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur*, Paris, Gauthier-Villars, 1861, pp. I à XX.

[112] G. Lamé, *Note sur la marche à suivre pour découvrir le principe, seul véritablement universel, de la nature physique*, C. R., 56, 1863, p. 985.

Pour lui, les trois premières sciences ne sont pas susceptibles d'une évolution dans un avenir proche. Pour la capillarité, c'est à cause des difficultés de l'Analyse; pour les deux autres, la découverte de leur principe partiel demande une explication de l'expérience d'Œrsted. La propagation de la lumière et la propagation de la chaleur relèvent du même principe partiel depuis que l'on a reconnu l'identité de la chaleur obscure et de la lumière, et il reste le principe de l'élasticité. Les seuls principes partiels d'où peut venir le principe général, sont donc bien ceux de la chaleur et de l'élasticité. Quant à l'éther:

> "La propagation de la lumière dans le vide et les espaces planétaires, jointe au phénomène des interférences, signale incontestablement l'existence d'un fluide éthéré; seconde espèce de matière infiniment plus étendue, plus uniforme et probablement plus active que la matière pondérable (...) la science future reconnaîtra dans l'*éther*, le véritable *roi* de la nature physique."[113]

Ce qui précède montre que l'éther joue un rôle unificateur fondamental dans la physique de l'époque. La considération de l'éther permet d'unifier la Physique sur le plan causal, elle permet d'expliquer les divers phénomènes en termes mécaniques. Elle l'unifie aussi sur le plan des lois: ce sont les mêmes lois qui régissent la chaleur obscure et la lumière lorsqu'on considère l'éther, il obéit lui-même aux mêmes lois d'élasticité qu'un solide homogène supposé uniquement formé de matière pondérable. Loin d'être une hypothèse de circonstance, l'éther s'impose par son caractère de nécessité, mais aussi d'universalité.

C'est vainement que l'on espère trouver dans le volume des "Rapports sur l'état de la Science et des Arts", consacré à la Thermodynamique et à la Mécanique, le mot énergie[114]. Et pourtant, les noms des "découvreurs" du principe de conservation de l'énergie - Mayer, Joule, Colding, Clausius, Thomson, Rankine, etc. - sont cités maintes fois. La Thermodynamique présentée rassemble le principe d'équivalence de la chaleur et du travail et le principe de Carnot. Elle se décrit à travers des "Théories mécaniques de la chaleur", différentes suivant les auteurs. On ne saurait se fier seulement à ce rapport. En effet, l'auteur devait présenter un panorama de la Science française, et donc ne pas faire une part trop grande aux découvertes des Savants Britanniques ou Germaniques. L'énergie est pourtant bien connue et bien utilisée en France vers 1870.

---

[113]ibid., p. 986.

[114]M. Bertin, *Rapport sur les progrès de la Thermodynamique en France*, Paris, Hachette, Imprimerie impériale, 1867.

VI. Divers aspects de la conservation de l'énergie au milieu du XIX° siècle

Par le terme énergie nous entendons non seulement l'énergie proprement dite, mais aussi des notions voisines comme par exemple la "force" au sens de Mayer. Ce que nous souhaitons rendre sensible ici, c'est qu'on ne peut expliquer par la méconnaissance de la conservation de l'énergie que celle-ci soit peu utilisée en France vers 1868, année où Boussinesq commence à produire des œuvres importantes. C'est plutôt parce que certaines thermodynamiques de l'époque pouvaient décrire la majorité des phénomènes calorifiques, optiques, électromagnétiques, électriques en utilisant simplement le principe d'équivalence de la chaleur et du travail, le théorème de Carnot et l'éther. Nous nous proposons de montrer que les auteurs considérés généralement comme les fondateurs de la théorie de l'énergie, Mayer, Joule, Grove, Helmholtz, Thomson, Rankine, Clausius, etc., sont connus en France en 1868. Mais essayons d'abord de préciser ce que l'on entend par conservation de l'énergie.

VI. 1. Les catégories de la description de l'énergie d'après l'historiographie

P. M. Harman présente ainsi le caractère unifiant du Principe de conservation de l'énergie[115]:

> "La formulation de la loi de conservation de l'énergie dans les années 1840 met en évidence l'unité de la Physique, en subsumant les phénomènes de chaleur, lumière, électricité et magnétisme dans le cadre de principes mécaniques."[116]

Kuhn, pour sa part, a traité de la genèse multiforme du principe de conservation de l'énergie[117]. Il affirme que les physiciens "pionniers" de ce principe en ont des visions différentes.

> "Même pour l'historien le plus familiarisé avec le concept de conservation de l'énergie, les précurseurs ne livrent pas la même

---

[115] P. M. Harman, *Energy, Force and Mater*, Cambridge University Press, 1° éd., 1982, re-ed., 1983 et 1985.

[116] ibid., p 3.

[117] T. S. Kuhn, *Un exemple de découverte simultanée: la conservation de l'énergie*, in *La tension essentielle*, *Tradition et changement dans les Sciences*, trad. M. Biezunski, P. Jacob, A. Lyotard-May, G. Voyat, Paris, Gallimard, 1990, pp. 111 à 156, 1° éd. en anglais, T. S. Kuhn, *The essential tension, Selected studies in scientific tradition and change*, 1977, University of Chicago press, 1° pub., T. S. Kuhn, *Energy conservation as an exemple of simultaneous discovery*, in *Critical Problems in the History of Science*, Marshall Clagett, dir. publ., Madison, University of Wisconsin Press, 1959, pp. 321 à 356.

chose. Ce n'est pas réellement la découverte simultanée de la conservation de l'énergie que nous lisons dans leur travaux. Nous y voyons plutôt l'émergence rapide et désordonnée d'éléments expérimentaux et conceptuels dont la théorie serait bientôt constituée."[118]

Pour lui, ce qui explique la simultanéité apparente de la découverte du principe de conservation de l'énergie, c'est l'existence de "facteurs déclenchants", qui conduisent chaque physicien à "sa" formulation du principe. Ces facteurs sont au nombre de trois:

- la disponibilité des processus de conversion,
- l'intérêt pour les machines,
- la "philosophie de la nature", et principalement la *Naturphilosophie* germanique[119].

La conversion mutuelle des diverses formes de l'énergie est une des composantes de la notion de conservation de l'énergie: pour retrouver la "trace" de l'énergie dans les transformations physiques, il faut admettre qu'elles peuvent se convertir l'une en l'autre. La mécanique des machines met particulièrement en avant l'aspect quantitatif de la conservation de l'énergie; les relations entre travail, force vive et chaleur sont des éléments essentiels de la théorie des machines à vapeur par exemple. On peut trouver quelque chose d'analogue à la "philosophie de la nature" mentionnée par Khun dans les conceptions philosophiques, et l'on pourrait ajouter religieuses, avancées par de grands savants, comme Thomson par exemple, pour justifier la conservation de l'énergie. Ces facteurs nécessaires à l'émergence de la conservation de l'énergie sont réunis en France dans la seconde moitié du XIX° siècle. La conversion des diverses formes d'énergie y est abondamment citée et commentée à cette époque. La mécanique a subi en France de très importantes transformations, sous l'influence, justement, des praticiens de la "Science des machines", tels que Poncelet par exemple. Quant aux conceptions philosophiques, ou plus précisément métaphysiques, on sait à quel point elles sont déterminantes dans toute œuvre scientifique; nous en verrons un exemple frappant dans le principe d'unité de Boussinesq, d'inspiration manifestement leibnizienne. L'historiographie, autant que l'histoire elle-même, permet de décrire la conservation de l'énergie, soit en termes de corrélation des forces, soit en termes d'équivalence des forces, puissances naturelles ou énergies, soit en termes de conservation de l'énergie.

VI . 2 . La corrélation des forces physiques selon Grove

---

118 ibid., p 111.
119 ibid., p 119.

Dans ses "Réflexions et annotations" placées à la fin de l'ouvrage de Grove "Sur la corrélation des forces physiques"[120], Séguin Aîné indique: "une foule de savants ont mis en relation les phénomènes de la chaleur, de la lumière, du magnétisme, de l' électricité, etc."[121]. Nous prendrons comme exemple de ces savants Grove lui-même, dont l'œuvre est diffusée en France au milieu du XIX° siècle. Comme le montre P. M. Heimann, aussi bien pour Grove que pour Joule, la conviction de la permanence de la force est ancrée dans des convictions philosophiques[122]. Ainsi les travaux expérimentaux de Joule, Faraday et Grove sont-ils sous-tendus par l'assurance de l'indestructibilité des puissances naturelles. Cette conviction se fonde sur un argument théologique classique: seul Dieu peut créer ou détruire les forces. De cette identité de vues philosophiques il ne faudrait pas conclure à une identité entre "corrélation des forces physiques" chez Grove et "équivalence des puissances naturelles" chez Joule.

Heimann met en évidence l'idée centrale de Grove selon laquelle:

> "Les divers agents impondérables, ou affections de la matière (...) chaleur, lumière, électricité, magnétisme, affinité chimique sont toujours corrélatifs, ou ont une dépendance réciproque (...) et peuvent, en tant que forces, être produits ou convertis l'un dans l' autre."[123]

Autrement dit, l'apparition ou la disparition d'une force a pour cause l'apparition ou la disparition d'une autre force. C'est la définition même de la corrélation. Le mot cause doit être entendu en son sens concret de relation entre faits. Pour Grove il n'y a pas de force initiale, toute force peut être convertie en une autre. Cette notion de corrélation des forces physiques reste au niveau qualitatif:

> "le grand problème qui reste à résoudre concernant la corrélation des forces physiques est l'établissement de leur équivalence, ou leur relation mesurable par rapport à une norme donnée."[124]

Conformément aux idées de Grove nous entendrons par *corrélation des forces physiques que*:

---

[120]M. Séguin Aîné, *Réflexions et annotations*, in W. R. Grove, *Corrélation des forces physiques*, trad. de l'abbé Moigno, Paris, A. Tramblay, Leiber et Commelin, 1856, pp. 266 à 329.

[121]ibid., p. 266.

[122]P. M. Heimann, *Conversion of forces and the conservation of energy*, Centaurus, 18, 1974, pp. 147 à 161.

[123]ibid., p. 155.

[124]ibid., p. 158.

Toute force peut être convertie en une autre, §et l'apparition ou la disparition d'une force physique s'accompagne de l'apparition ou la disparition d'une autre force physique.

VI . 3 . L'équivalence de la chaleur et du travail selon Joule et Mayer

La prise en compte de l'aspect quantitatif de la conversion des forces nous mène à la notion d'équivalence des "puissances naturelles", telle qu'on peut la déduire des idées de Joule. Celui-ci a voulu montrer la possibilité de convertir toutes les "puissance naturelles" en chaleur et réciproquement, et ceci à deux niveaux. Tout d'abord sur le plan qualitatif: alors que pour Grove apparition et disparition de force étaient conçues comme la manifestation d'une causalité concrète, il y a pour Joule, en 1853, l'idée que quelque chose, au cours de transformations diverses, peut finalement devenir de la chaleur:

> "le terme énergie (...) me semble admirablement adéquat pour désigner quelque chose qui, finalement, au moyen de transformations appropriées se manifeste sous la forme, disons de chaleur."[125]

Il y a comme la permanence ontologique de "quelque chose" lors des diverses transformations d'énergie. Ce n'est pas là une affirmation gratuite: on sait les convictions dynamiques et atomistes de Joule[126]. Ce qui se conserve doit avoir quelque rapport avec le mouvement, et peut-être avec la force vive[127].

A cette permanence ontologique s'ajoute une permanence quantitative. Une certaine quantité de force, disons de force chimique, produira toujours la même quantité de chaleur quelle que soit la chaîne des transformations qu'elle parcourt. Cette conservation d'une certaine quantité, est traduite de façon concrète, par la constance du coefficient d'équivalence de travail en chaleur. On peut transformer successivement une certaine quantité de travail en diverses formes d'énergie qui finalement peuvent, elles-mêmes, être transformées en chaleur: le rapport entre la quantité de travail de départ et la quantité de chaleur finale est constant. Ainsi, de même que l'on retrouve toujours la quantité de matière initiale, après une série de transformations chimiques, on retrouve la même quantité d'énergie après des transformations énergétiques.

---

[125] J. P. Joule, *Lettre à W. Thomson*, *Lettre J135*, Kelvin collection, Cambridge University Library, 3 Février 1853, cité par P. M. Heimann, in *Conversion of forces and the conservation of energy*, Centaurus, 18, 1973, p. 148.

[126] J. Forester, *Chemistry and the conservation of energy: the work of James Prescott Joule,* Studies in history and philosophy of science, 6, 1975, pp. 274 à 312.

[127] ibid., p. 294.

On peut trouver des similitudes de structure entre les conceptions de Mayer et de Joule concernant l'équivalence des "forces". Joule pensait que toutes les "puissances naturelles" étaient quantitativement et qualitativement réductibles les unes aux autres. Pour Mayer, les forces, mais peut-être faut-il dire la force, sont qualitativement et quantitativement convertibles les unes dans les autres. M. Mott-Smith[128] présente ainsi la position de Mayer:

> "(Mayer) étendait ses idées à la totalité du monde physique, en incluant le monde organique. Le travail mécanique, l'action chimique, la chaleur, la lumière, l'électricité et le magnétisme, sont des formes de force mutuellement convertibles et équivalentes; et la totalité de ces forces dans l'univers est inaltérable."[129]

La notion de force chez Mayer inclut d'abord la corrélation des forces au sens que nous avons donné plus haut à ce mot:

> "Comme cela est abondamment démontré (...) la propriété la plus essentielle des forces pour Mayer est leur caractère indestructible, la possibilité qu'elles ont d'être transformées ou de muter (Wandelbarkeit), et leur immatérialité." [130]

Mais aussi, cette notion inclut le fait que la quantité de force, quelle que soit la signification que l'on peut donner à ce mot, reste la même:

> "L'analogie entre les substances matérielles et les forces est alors (en 1845) complète, les deux sont rigoureusement invariables en quantité."[131]

Bien que, pour Mayer, les forces soient des entités quasi substantielles, alors que pour Joule les puissances naturelles se réfèrent au mouvement, il nous semble possible de rendre compte des deux conceptions de l'équivalence des forces par l'énoncé suivant:

L'équivalence des énergies, forces ou puissances naturelles est d'abord la possibilité de transformation d'une forme d'énergie en une autre, et ceci sur le plan phénoménologique. Et ensuite, une quantité d'"énergie" d'une certaine nature se transforme toujours en la même quantité d'"énergie" d'une autre nature, ce qui est attesté par l'existence d'un coefficient constant d'équivalence entre chaleur et travail. La mesure

---

[128] M. Mott-Smith, *The conservation of energy simply explained*, Dover Publications, New York, 1964.
[129] ibid., p 84.
[130] K. L. Caneva, *Robert Mayer and the conservation of energy*, Princeton New Jersey, Princeton University Press, 1993, p. 25.
[131] ibid., p. 26.

des quantités de toutes les formes d'énergie peut être exprimée en unités mécaniques.

VI . 4 . La conservation de l'énergie

Parmi les théoriciens de la conservation de l'énergie, Helmholtz occupe une place éminente. Son mémoire de 1847 est la première tentative de démonstration mathématique de la conservation de la force, c'est-à-dire de l'énergie[132]. La conservation de la force a lieu à chaque instant de l'évolution du système, et ceci de façon réversible: il y a, à tout instant, transformation de "force de tension" (Spannkraft) en force vive (ou inversement). L'évolution de la pensée de Helmholtz le conduira à assimiler la "force de tension" à l'énergie potentielle et la demi-force vive à l'énergie cinétique. La conservation de la force sert à Helmholtz pour l'interprétation de la quasi totalité des phénomènes physiques. F. Bevilacqua a analysé de façon détaillée ce Mémoire dans un article auquel on pourra se reporter[133].

Les travaux de Joule, comme nous l'avons dit, portent sur l'équivalence des diverses formes d'énergie. Dans une lettre adressée à Thomson Joule affirme que:

> "le terme énergie (...) semble admirablement adéquat pour désigner quelque chose qui, finalement, au moyen de transformations appropriées se manifeste sous la forme, disons de chaleur."[134]

Joule confond ici sa conception de l'équivalence des puissances naturelles avec la conception de l'énergie de Thomson. En réalité les deux visions sont très différentes. C'est à travers une chaîne de transformations, se terminant par une transformation en chaleur, que se manifeste la permanence de l'"énergie" pour Joule; la référence est surtout expérimentale. Au contraire, la définition de W. Thomson est une définition axiomatique. C'est comme caractéristique d'un système isolé que Thomson considère la constance de l'énergie. Précisément, l'énergie pour Thomson est la somme d'une énergie cinétique et d'une énergie potentielle. Une telle définition recouvre l'énergie telle que la

---

[132] H. von Helmholtz, *Ueber die Erhaltung der Kraft, Eine physikalische Abhandlung*, Berlin, G. Reimer, 1847. Aussi: H. von Helmholtz, *Mémoire sur la conservation de la force*, trad. L. Pérard, Paris, Masson, 1869, et, H. von Helmholtz, *The conservation of force: A physical memoir (1847)*, ed. Russell Kahl, Middletown (Connecticut), Wesleyan University press, 1971.

[133] F. Bevilaqua, *Helmholtz's ueber die Erhaltung der Kraft*, in *Hermann von Helmholtz and the foundations of nineteenth-century Science*, Berkeley, University of California press, 1993, pp 293 à 351.

[134] J. P. Joule, *Lettre à W. Thomson, lettre J135*, Kelvin collection, Cambridge University Library, 3 Février 1853, cité par P. M. Heimann, in *Conversion of forces and the conservation of energie*, Centaurus, 18, 1973, p. 148.

comprend le créateur de la "Science de l'énergétique"[135], c'est-à-dire Rankine, qui écrit:

> "Le principe de la conservation de l'énergie peut être ainsi posé: dans un système de corps, la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie actuelle des corps (du système) n'est jamais altérée par leur action mutuelle."[136]

Nous retiendrons ici la définition donnée par Helmholtz dans la traduction française de L. Pérard du mémoire de 1847. Cette formulation est restreinte dans ce mémoire aux forces centrales:

> "La somme des forces vives et des énergies potentielles est toujours constante."[137]

Conformément aux énoncés précédents, nous définirons la conservation de l'énergie comme suit:

L'énergie d'un système est une grandeur caractéristique de ce système, exprimable en unités de travail ou de chaleur, qui se compose d'énergie actuelle et d'énergie potentielle. Il y a conservation de l'énergie si cette grandeur est constante dans le temps.

Pour comprendre l'entreprise de Boussinesq, il nous faut maintenant nous interroger sur l'étendue des connaissances que les physiciens français avaient de l'énergie.

VII. L'information des savants français sur les théories de l'énergie

Nous n'étudierons ici que certains articles parus en France et ayant un rapport avec la conservation de l'énergie. On trouvera la totalité (sans doute) de ces articles dans la bibliographie très étendue que donne J. Violle dans la "Théorie mécanique de la chaleur" de Verdet, pas moins de 70 pages, et qui montre à quel point les savants de l'époque étaient bien informés des travaux de leurs collègues étrangers[138]. Il faut

---

[135] W. J. Macquorn Rankine, *Outlines of sciences of energetics*, Edinburgh Journal, 2° serie, 2, p. 100

[136] W. J. Macquorn Rankine, *On the conservation of energy*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 17, 4° serie, 1859, pp. 250 à 254. Aussi: W. J. Macquorn Rankine, *On the general law of transformation of energy*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical magazine and journal of science, 28, 4° serie, 1864, pp.107 à 117.

[137] H. Helmholtz, *Mémoire sur la conservation de la force*, trad. L. Pérard, Paris, Victor Masson, 1869, p. 74.

[138] J. Violle, *Bibliographie de la théorie mécanique de la chaleur et de ses applications*, in E. Verdet, *Théorie mécanique de la chaleur*, t. 2, publiée par MM. Prudhon et Violle, Paris, Victor Masson, 1872, pp. 267 à 337.

toutefois nuancer cette opinion. Cette bibliographie date de 1872, au moment où l'on estime en France que la théorie mécanique de la chaleur peut tout décrire, ce qui peut expliquer un intérêt rétrospectif pour cette théorie. Mais Verdet lui-même, par les traductions de textes de Thomson, Joule ou Clausius, avait dès 1852, dans les "Annales de Chimie et de Physique", fait connaître les principes des théories modernes de la chaleur[139]. Nous avons fait le choix de montrer que très tôt les savants français étaient informés des travaux de Mayer, Joule, Thomson, et Grove, et ceci à travers les prestigieux "Comptes Rendus de l' Académie des sciences". Ensuite, nous verrons que les idées des savants britanniques ou germaniques étaient familières à certains savants français, comme en témoignent divers articles de la revue de l'abbé Moigno, "Les Mondes", ou encore "La revue des cours scientifiques". C'est aussi dans les articles relatifs à diverses branches de la physique, et dans les manuels, que nous trouverons mention du sujet qui nous occupe: l'énergie.

VII . 1 . Un ensemble expérimental et explicatif complet conçu séparément par Joule et Séguin

Dans les écrits de Séguin, les travaux expérimentaux de Joule s'intègrent dans un système explicatif qui semble complet; les expériences de Joule sur les transformations de l'énergie sont expliquées par Séguin dans le cadre de la Physique newtonienne. Ainsi, à l'aide des travaux de ces deux physiciens, on aurait pu penser à l'époque être en possession d'une véritable théorie de l'énergie.

En 1847, Joule fait paraître, dans les Comptes Rendus de l'Académie des sciences, à la rubrique "Physique", un article qui débute ainsi[140]:

> "Dans les quatre dernières années j'ai fait diverses expériences dans le but de m'assurer que la chaleur était l'équivalent de la force mécanique."[141]

---

[139]W. Thomson, *Examen de la puissance motrice de la chaleur de S. Carnot, avec les résultats numériques déduits de l'expérience de M. Regnault sur la vapeur d'eau*, Extraits par M. Verdet, Annales de Chimie et de Physique, 35, 3° série, 1852, pp. 248 à 259.

W. Thomson, *Mémoire sur la théorie dynamique de la Chaleur*, Extrait par M. Verdet, Annales de Chimie et de Physique, 36, 3° série, 1852, pp. 118 à 126.

A. Colding, *Lettre aux rédacteurs du Philosophical Magazine sur l'histoire du principe de conservation de l'énergie*, traduit par M. Verdet, Annales de Chimie et de Physique, 1, 4° série, 1864, pp. 466 à 477.

[140]J. P. Joule, *Expériences sur l'identité entre le calorique et la force mécanique. Détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur dégagée pendant la friction du mercure*", C.R. , 25 , 1847, p. 309.

[141]ibid.

Joule y relate ses célèbres expériences sur la transformation du travail en chaleur par friction dans les liquides. Le liquide qu'il utilise alors est du mercure. Il avait réalisé des expériences du même type, avec de l'eau puis de l'huile de baleine, expériences qui avaient été exposées aux Physiciens britanniques et français, presque simultanément, dans le "Philosophical Magazine"[142] et dans les Comptes Rendus de l'Académie des sciences. Une première présentation de ces expériences, lors du congrès de Cambridge des physiciens britanniques de 1845, avait provoqué l'étonnement d'un savant aussi éminent que W. Thomson, ce qui montre que les travaux de Joule étaient alors loin d'être bien connus en Grande-Bretagne. Les physiciens français ont donc été informés des résultats de Joule presque en même temps que leurs homologues britanniques. Il convient de nuancer ce propos: Joule avait fait paraître un article sur un thème proche en 1843[143]. Ce texte ne sera publié en France qu'en 1852[144]. Mayer avait fait parvenir à l'Académie des sciences un mémoire sur le même sujet, mais en 1847 on n'en trouve toujours pas de trace dans les Comptes Rendus. Le sujet devait être neuf, puisque Séguin fait paraître dans le même numéro une note "à l'appui de l'opinion émise par M. Joule (...)"[145], article qui paraît dans la rubrique "Physique appliquée". Séguin rappelle les travaux de "son oncle Montgolfier", puis il indique avec une grande clarté les raisons qui le poussent à croire à l'identité des phénomènes caloriques et du mouvement:

> "Dans un ouvrage que j'ai publié en 1839, sur l'influence des chemins de fer, j'ai émis l'opinion, que la vapeur n'était que l'intermédiaire dont on se sert pour produire la force, et réciproquement; et qu'il devait exister entre le calorique et le mouvement une identité de nature, en sorte que ces deux phénomènes n'étaient que la manifestation, sous une forme différente, des effets d'une seule et même cause."[146]

Et plus loin:

---

[142] J. P. Joule, *On the mecanical equivalent of heat, as determined by the heat evolved by the friction of fluids,* The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, <u>31</u>, 3° serie, 1847, pp. 173 à 177.

[143] J. P. Joule, *On the calorific effects of magneto-electricity, and on the mechanical value of heat,* The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, <u>23</u>, 3° série, 1843, pp. 263, 347, 435.

[144] J. P. Joule, *Mémoire sur les effets calorifiques des courants électriques, et sur l'équivalent mécanique de la chaleur,* Annales de Chimie et de Physique, <u>34</u>, 3° serie, 1852, pp. 504 à 509.

[145] M. Séguin Aîné, *Note à l'appui de l'opinion émise par M.Joule, sur l'identité du mouvement et du calorique* , C. R. , <u>25</u>, 1847. pp 420 à 422 .

[146] ibid., p.420.

"Si l'on joint à ces faits, tous ceux, en bien plus grand nombre, où l'on voit le calorique se substituer au mouvement, tels que le choc, la compression, le frottement, le changement d'état ou de nature, on restera convaincu que les deux phénomènes, identiques en eux-mêmes, ne sont que des conséquences de la loi générale qui régit le mouvement de tous les corps; et que les phénomènes que nous désignons sous le nom de caloriques ne sont autre chose que les effets de la communication de mouvement des corps entre eux, lorsqu'ils sont réduits à un état de division qui ne nous permet pas d'en apprécier l'intensité ou les circonstances, comme nous pouvons le faire lorsque ces mêmes corps sont animés, en masse, d'une vitesse qui peut se mesurer par les effets sensibles qu'elle produit."[147]

Pour Séguin, l'équivalence du travail et de la chaleur mise en évidence par les expérience de Joule, n'est que la conséquence de l'identité de nature entre les phénomènes calorifiques et mécaniques. Il y a plus: ces deux phénomènes "ne sont que la conséquence d'une loi plus générale qui régit le mouvement de tous les corps". Cette loi, Séguin le dit à la fin de l'article, est la gravitation universelle:

"Dans le but de me rendre compte des faits qui, au premier abord, paraissent si peu devoir découler de la même source, et dont il serait si important de donner l'explication en montrant qu'ils viennent naturellement se ranger sous la loi de la gravitation universelle, j'ai entrepris un travail que je me propose de soumettre à l'Académie aussitôt qu'il me paraîtra assez avancé pour mériter de sa part une sérieuse attention."[148]

En effet, Séguin va construire une théorie explicative de l'ensemble des phénomènes physiques uniquement fondée sur la gravitation universelle. Son exposé donnera lieu, jusqu'en 1849, à divers articles dans les Comptes Rendus, et sera publié dans la revue "Cosmos" de l'abbé Moigno[149]. Cette théorie, complexe, reste dans le cadre de la physique newtonienne, mais une physique newtonienne où l'élément central n'est plus la force mais la force vive, et la gravitation universelle elle-même s'estompe pour mieux laisser voir cette force vive. Le contexte de la théorie est une mécanique newtonienne, en quelque sorte réécrite dans un cadre dynamique. Les fluides impondérables laplaciens, aussi bien que la cohésion des solides, sont expliqués par des mouvements de molécules ordinaires. C'est dans la rubrique "cristallographie" que ses articles sont publiés. Nous avons là un ensemble d'idées familières aux scientifiques de l'époque, et le cadre dynamique dans lequel elles sont exprimées les rend modernes; on

---

[147] ibid., p.421.

[148] ibid., p.422.

[149] M. Séguin Aîné, *Mémoire sur l'origine et la propagation de la force*, Cosmos, 13, 1858, pp. 465 à 528.

pouvait donc y voir une théorie de l'énergie admissible par les physiciens de l'époque.

Au contraire, le mémoire de Helmholtz de 1847, qui a la même ambition que celui de Séguin, utilise des concepts comme ceux de "tension" (Spannkraft), de "force" (Kraft), qui sont difficiles à comprendre, comme l'indique Verdet[150], savant très réputé qui jugera incompréhensible l'expression "conservation de la force"[151]. Toutefois, la théorie de Séguin avec sa description des mouvements des molécules pouvait, elle aussi, susciter de la méfiance; Verdet est très sceptique vis-à-vis des descriptions précises des mouvements moléculaires:

> "Nous admettrons donc l'identité des phénomènes thermiques et des phénomènes mécaniques: seulement nous nous astreindrons à ne pas particulariser trop tôt cette hypothèse, en cherchant quelle espèce de mouvement constitue la chaleur."[152]

Comme Helmholtz, Séguin tente, à travers son œuvre, de faire le lien entre la dynamique de Newton et celle de Leibniz. Même si ce sont les théories de Helmholtz, Rankine, Thomson et Tait qui, finalement, retiendront l'attention des physiciens, il y avait dans les travaux de Séguin, l'amorce d'une justification théorique du principe d'équivalence du travail et de la chaleur.

La conclusion que nous pouvons tirer de ce qui précède est que:

Les travaux de Joule trouvaient dans la théorie de Séguin une explication cohérente, bien que complexe, mais où les concepts utilisés étaient familiers aux physiciens contemporains. Ils justifiaient la théorie de l'équivalence de la chaleur et du travail, théorie qui même sur le plan expérimental n'était pas encore fermement établie. Par contraste les conceptions de Helmholtz pouvaient légitimement susciter la méfiance.

VII . 2 . Les travaux de Mayer comme référence de la physique française pour la conservation de la force

De nombreux savants français de la seconde moitié du XIX° siècle considèrent Mayer comme le découvreur du principe de l'équivalence de la chaleur et du travail. Ainsi en est-il de Verdet, mais aussi des rédacteurs du "Rapport sur les progrès de la Thermodynamique en France" qui le considèrent comme le véritable créateur de la "Théorie mécanique de la chaleur". Les articles de Mayer paraissent dans les Comptes Rendus, justement à l'occasion de la querelle de priorité entre lui et Joule. C'est à la rubrique "Physique" que l'on trouve les articles de

---

150 E. Verdet, *Théorie mécanique de la chaleur,* t. 1 , Paris, Victor Masson, 1868, p.8.

151 ibid., p. 2.

152 ibid., p. 3.

Mayer[153]. Nous avons déjà mentionné les différences d'opinion entre les deux hommes: Joule est un atomiste pour qui la chaleur est du mouvement, alors que Mayer se rattache, même si ce n'est que très indirectement, à la "*Naturphilosophie*"[154]. Pour Mayer, la chaleur est une force, et il veut créer une physique nouvelle qui soit la science de la force, de même que la chimie est la science de la matière[155]. Donnons quelques extraits de son article de 1848[156].

Il rappelle tout d'abord ce qu'il a déjà écrit sur le sujet :

> "Il est impossible que l'effet mécanique (ou la force vive) résultant de la dilatation du gaz soit produit par rien, car nil fit ex nihilo. La chaleur absorbée ne saurait se réduire en rien , car nil fit ad nihilum. Or je résume ces deux axiomes de logique, et je dis: la chaleur devient effet mécanique, etc."[157]

Après avoir ainsi fait état de l'antériorité de ses réflexions par rapport aux travaux de Joule, Mayer cite divers exemples[158]:

> "Les forces sont des choses indestructibles, transformables, impondérables (...)
>
> "Un poids élevé est une force (...)
>
> "Je préfère faire naître la chaleur du mouvement, que de supposer une cause sans effet et un effet sans cause; ainsi le chimiste, au lieu de laisser disparaître l'hydrogène et l'oxygène sans autres recherches, et de laisser naître l'eau de manière inexplicable, établit plutôt une relation entre H et O d'une part, et HO d'autre part."[159]

Et plus loin:

---

[153] J.-R. Mayer, *Sur la transformation de la force vive en chaleur, et réciproquement*, C.R., 27, 1848, pp. 386 à 387.

J.-R. Mayer, *Réclamation de priorité contre M. Joule, relativement à la loi de l'équivalence du calorique*, C. R., 27, 1849, pp. 534 et 535.

[154] En 1847, Mayer s'est considérablement semble-t-il éloigné des "*Naturphilosophen*". Après un exposé sur sa conception de la force, il dit: "Ainsi (ces forces) doivent et peuvent rendre compte des forces de la nature inanimée, et la force vitale, la force nerveuse, perdent encore leur assise, et les babillages des *Naturphilosophen* demeurent cloués au pilori dans leur pitoyable nudité". (Cité par K. L. Caneva, in *Robert Mayer and the conservation of energy*, Princeton New Jersey, Princeton University Press, 1993, p. 28).

[155] M. Mott-Smith, *The conservation of energy simply explained*, Dover Publications, New York, 1964 , p. 63.

[156] J. R. Mayer, *Sur la transformation de la force vive en chaleur, et réciproquement (Extrait d'une Lettre de M. Mayer)*, C. R., 27 , 1848, pp. 385 à 387.

[157] ibid., p. 385.

[158] ibid. p. 386.

[159] ibid.

"La locomotive avec son convoi est comparable à un appareil à distiller; la chaleur étant sous la chaudière se change en mouvement, et celle-là se montre de nouveau en chaleur aux axes des roues .

"En renversant les pôles d'une aiguille aimantée par le rapprochement d'un seul fort aimant (de telle sorte que le pôle boréal de l'aiguille fixée devienne austral, et vice versa), l'aiguille s'échauffe."[160]

La référence à l'indestructibilité des forces, que l'on peut mettre en parallèle avec l'indestructibilité de la matière en chimie, permet toutes les interprétations de la conservation de la force. Elle peut aussi bien s'accommoder d'une vision atomiste que d'un point de vue purement énergétique. La polémique entre Joule et Mayer se poursuivra, dans les pages des Comptes Rendus, jusqu'en 1849. Mais, comme le montrent les textes que nous avons étudiés, c'est à Mayer que les Français attribueront la paternité de la découverte de la convertibilité du travail en chaleur.

VII . 3 . Articles de savants étrangers sur la conservation de l'énergie parus dans les revues françaises

A la rubrique "Physique" des Comptes Rendus en 1855, on peut lire un article de W. Thomson. C'est le seul article consacré à la conservation de l'énergie publié dans les Comptes Rendus entre 1847 et 1872:

"L'énergie de mouvement peut être nommée énergie dynamique ou énergie actuelle. L'énergie d'un système matériel au repos, et qui peut lui permettre d'entrer en mouvement, se nomme énergie potentielle. L'auteur a fait comprendre l'emploi de ces termes et explique l'idée de réservoirs d'énergie, les conversions et les transformations d'énergie pour les divers exemples."[161]

La partie informative concernant la conservation de l'énergie, telle qu'elle est transcrite dans l'article, est limitée. Les exemples choisis par W. Thomson pour expliquer ce qu'est l'énergie, sont semblables à ceux qu'il utilisera dans son article de vulgarisation écrit avec Tait, "Energy" qui paraîtra dans "Good Words" en 1862[162]. Le reste de l'article est consacré à des questions sur la chaleur solaire et le destin de l'univers. Le principal intérêt de ce texte est de montrer que les physiciens français ont été rapidement informés des travaux de Joule et Rankine. En effet, c'est en 1853 que Rankine a utilisé pour la première fois les

---

160 ibid.

161 W. Thomson, *Sur les antécédents mécaniques du mouvement, de la chaleur et de la lumière*, C. R. , 40 , 1855, pp. 1197 à 2002.

162 W. Thomson and P. G. Tait, *Energy*, Good Words, 3, 1867, pp.601 à 607.

termes "énergie actuelle" et "énergie potentielle", et déjà, en 1855, ils figurent dans les Compte Rendus.

L'attention des éditeurs se tourne vers l'équivalence du travail et de la chaleur et vers les "Théories mécaniques de la chaleur". En particulier nous trouvons de nombreux articles de A. Dupré, dont nous citerons certains textes plus loin. Mais la théorie de l'équivalence de la chaleur et du travail n'est pas encore, en 1855, aussi assurée qu'il peut paraître, comme en témoigne la défense que Joule lui-même doit faire de l'équivalence de la chaleur et du travail. A la suite des travaux de Joule on voit apparaître une série d'articles sur la détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur. Jusqu'en 1868, outre l'article de Joule déjà cité, il y aura dix articles consacrés à ce sujet. Les raisons de cet intérêt sont données par Joule lui-même:

> " Dans un article de M Person, publié dans les Comptes Rendus le 11 décembre 1854, on a donné plusieurs valeurs de l'équivalent mécanique de la chaleur qui diffèrent tellement les unes des autres, qu'elles pourraient contribuer à jeter des doutes sur la rigueur des méthodes qu'on a employées pour y parvenir et sur la doctrine même à laquelle elles se rattachent. Cependant aucune théorie physique n'est appuyée sur des fondements plus solides, et ne permet une plus grande exactitude dans la détermination des coefficients numériques."[163]

C'est donc la crédibilité même de la théorie de l'équivalence de la chaleur et du travail qui est ici en jeu.

L'abondance des articles sur ce sujet montre, surtout si on sait le peu d'articles consacrés à l'énergie, que l'intérêt des physiciens français s'est porté sur la théorie de l'équivalence de la chaleur et du travail, et non sur celle de la conservation de l'énergie. Les théories de l'énergie étaient pourtant reconnues dans des publications aussi réputées que les Compte Rendus.

Ces idées sont aussi diffusées dans des revues de moindre renom que nous allons consulter maintenant.

VIII . Approche des travaux des savants étrangers publiés en France dans certaines revues françaises

VIII . 1 . Les physiciens britanniques

Nous avons déjà signalé que les travaux de Joule et de Thomson sont connus en France, et que ceux de Grove sont aussi diffusés par Séguin.

---

[163]J. P. Joule, *Note sur l'équivalent mécanique de la chaleur*, C. R. , 40 , 1855, p. 310.

Nous évoquerons donc seulement rapidement d'autres sources où ces physiciens figurent.

> "C'est donc avec le plus grand regret que je vous prie de m'excuser de faire la rédaction que vous m'avez proposée, d'un compte rendu du premier volume du traité de M. William Thomson et de M. Tait. A présent je suis tellement occupé, sans la moindre relâche, de mes propres travaux comme professeur, comme ingénieur, et comme auteur, qu'il me serait absolument impossible de rendre justice à l'ouvrage de mes illustres confrères. Je n'ai pas même encore eu le loisir d'en commencer la lecture continue."[164]

Telle est la réponse que Macquorn Rankine adresse à l'abbé Moigno, à la suite d'une demande de compte rendu sur le "Traité de philosophie naturelle" de Thomson et Tait[165]. A la séance du 3 février 1868 de l'Académie des sciences, W. Thomson avait annoncé la parution de ce que l'abbé Moigno appelle le "Traité de physique générale", et qui est en réalité le "Traité de philosophie naturelle" paru en 1867.

La renommée de W. Thomson (déjà Lord Kelvin) suffit à justifier cet intérêt. Ce traité est le premier ouvrage à destination de l'enseignement qui met l'énergie au premier plan. Mais il aborde aussi, et à un haut niveau, l'élasticité, et des questions ardues d'analyse telles que les harmoniques sphériques[166]. Il présente des connaissances élémentaires en matière d'énergie, mais aussi d'autres qui sont les plus avancées pour l'époque, comme par exemple une nouvelle compréhension du formalisme de Hamilton. Les savants français disposaient de toutes les possibilités de s'informer sur les idées de Thomson, il serait bien étonnant qu'ils ne l'aient point fait[167].

Grove fait paraître aussi un texte dans la même revue[168]. Dans cet article, à caractère philosophique, Grove se livre à une sorte de description de l'univers, au cours de laquelle il est amené à exposer ses conceptions sur la corrélation et la transformation des forces physiques.

---

[164] W. J. Macquorn Rankine, in Abbé Moigno, *Les Mondes*, 16, 1868, p 483.

[165] ibid., p. 260.

[166] Il est à noter que, dans sa conférence prononcée devant la Société géologique de Glasgow, et reproduite dans la Revue des Cours Scientifiques, c'est justement à propos d'harmoniques sphériques que Thomson cite son "Traité". Voir: Sir W.Thomson, *Le temps géologique - Influence des marées sur les mouvements célestes- Chaleur du soleil - Chaleur de la terre - Age de la terre,* Revue des cours scientifiques, 10, Paris, 1868.

[167] L'information des savants français sur la question de l'énergie était aussi complète que possible: il suffit de consulter la bibliographie que J. Violle donne des divers articles parus dans le monde sur la question (pas moins de 71 pages). Voir: J. Violle, *Bibliographie de la théorie mécanique de la chaleur et de ses applications,* in E. Verdet , *Théorie mécanique de la chaleur*, t. 2, Paris, Victor Masson, 1872, pp. 267 à 338.

[168] W. R. Grove, *Récents progrès de la Science - La continuité dans la nature*, Revue des cours scientifiques, 6, 1869, pp. 683 à 686.

VIII . 2 . L'approche de savants germaniques

De nombreux articles de Helmholtz sont parus dans la "Revue des cours scientifiques". Ils sont dans une certaine mesure synthétisés par les discours prononcés à Innsbrück en 1869 à l'occasion du congrès des naturalistes et des médecins allemands[169]. Citons un passage significatif qui nous éclaire sur les idées de Helmholtz à cette époque:

> "On est arrivé ainsi au principe de l'immuabilité de la matière, et à cette conséquence, que tout, dans la nature extérieure, se réduit à un changement de forme dans l'agrégat des éléments chimiques éternellement invariables, à des différences de composition, de distribution, de structure des corps que ces éléments constituent. De quelque manière qu'ils se présentent, ils restent essentiellement les mêmes. En d'autres termes, il n'y a de changement possible dans la nature, que dans la distribution et l'arrangement des divers éléments dans l'espace, ce qui revient à un mouvement. Et il s'en suit que, si tous les changements sont des mouvements, les forces, qui produisent ces changements, ne peuvent être que des *forces mécaniques*."[170]

Voici donc affirmée, face aux idées d'"énergétistes", comme Rankine par exemple, la position atomiste, dynamique et entièrement mécaniste de Helmholtz.

Plus loin, Helmholtz délaisse ce champ un peu spéculatif pour se rapprocher des positions de Joule:

> "Quand on passe en revue la série des forces naturelles, on s'aperçoit tout d'abord qu'il n'existe pas une seule force dont la puissance d'action s'étende à l'infini, mais que cette puissance est épuisée par son action même (...) Les phénomènes présentent ainsi une image variée de transformations successives se répétant dans des circonstances les plus diverses, grandes ou petites; partout on observe que chaque force naturelle en particulier s'épuise par son action même et est remplacée par d'autres forces."[171]

Et encore:

> "On peut dire en particulier que toute force naturelle peut être employée pour soulever un poids, et que par le poids qu'elle soulève, par la hauteur à laquelle il est soulevé, on peut la mesurer elle-même. On est ainsi conduit à exprimer la puissance d'action de toute force

---

[169]H. Helmholtz, *Revue générale du développement des sciences dans les temps modernes*, Revue des cours scientifiques, 6, 1870, pp. 92 à 95.

[170]ibid., p. 93.

[171]ibid.

naturelle par un poids soulevé, par conséquent, de la ramener à une mesure *mécanique.* C'est en quoi consiste le progrès le plus important qu'ait accompli la théorie mécanique de la chaleur."[172]

Nous voyons que, si Helmholtz fait allusion à la conservation de la force, il utilise surtout des exemples qui mettent en jeu l'équivalence des forces physiques. Son affirmation du caractère finalement mécanique de celles-ci est une position philosophique autant que scientifique. Cet article peut donc être vu aussi bien comme appuyant une conception restrictive de la conservation de l'énergie, c'est-à-dire réduite à l'équivalence des forces à la manière de Joule, qu'un article sur la conservation de la force elle-même.

A cette époque Mayer semble partager cette façon de voir, puisque succédant à Helmholtz à la même tribune, il commence ainsi son discours publié aussi en France:

> "Le sujet dont j'aurai l'honneur de vous entretenir brièvement touche, comme vous deviez vous y attendre, à la théorie mécanique de la chaleur. Mais comme après le discours de M. Helmholtz que vous venez d'entendre vous avez dû acquérir des notions générales sur ce sujet, je ne puis traiter ici les bases de la théorie mécanique de la chaleur ."[173]

C'est donc finalement vers des questions de cosmologie et de physiologie que Mayer va conduire son discours. Il propose sa théorie du maintien de la chaleur solaire par la chute des météorites, il tire ensuite argument de la conservation de la force, pour affirmer l'immortalité de l'âme. Ici Mayer ne défend pas avec beaucoup de vigueur la conservation de l'énergie, les applications de la simple équivalence des énergies (ou plus précisément des forces) semblant suffisantes pour interpréter les phénomènes physiques. La conversion des forces et leur conservation quantitative suffisent à construire la physique de la force.

VIII . 3 . Le second principe de la thermodynamique selon Clausius

Nous voudrions souligner l'intérêt particulier que les savants français portent à Clausius. Il est mis au rang de ceux qui ont, de façon significative, contribué au perfectionnement de la "Théorie mécanique de la chaleur". Ainsi J. Violle, en 1870, s'exprime comme suit:

> "Le principe de l'équivalence du travail et de la chaleur est dû à Mayer; Joule, de son côté, le formule à la même époque, et l'on peut

---

[172]ibid.

[173]J. R. Mayer, *Les conséquences et les inconséquences de la théorie mécanique de la chaleur*, Recueil des cours scientifiques, 6, 1870, pp. 124 à 126, p. 124.

> dire qu'une science nouvelle fut fondée. L'attention en effet se reporta aussitôt sur un principe énoncé vingt ans auparavant par Sadi Carnot, généralisé par Clausius, s'adjoignant au principe de Mayer pour constituer les bases de ce que l'on appelle la "Théorie mécanique de la chaleur" d'un nom un peu prématuré, mais que l'on aime après tout à conserver pour les promesses qu'il renferme."[174]

Ce n'est pourtant qu'en 1882 que paraîtront en France un certain nombre de mémoires de Clausius, rassemblés sous le titre de "Théorie mécanique de la chaleur". Mais les idées de Clausius étaient depuis longtemps connues en France, et même publiées dans les Comptes Rendus de l'Académie des sciences; elles inspireront des savants français, tels Moutier, Verdet, Briot ou Jamin pour leur présentation du second principe de la thermodynamique. Nous allons donc exposer rapidement les idées de Clausius.

En 1855, Elie de Beaumont signale la parution dans le Journal de Liouville, d'un mémoire de Clausius[175] sur le "second théorème principal de la Théorie mécanique de la chaleur". Clausius y présente un "ensemble complet sur ce sujet neuf et curieux"[176]. Les conceptions dynamiques de Clausius sont clairement affirmées. Ainsi il écrit:

> "Comme, d'après mes idées, la chaleur n'est autre chose qu'un mouvement, je n'ai pas douté que ce théorème *(celui du viriel)* ne correspondit à un théorème général de la Mécanique qui dérive des équations du mouvement, de même que le principe de l' équivalence de la chaleur n'est qu'un cas spécial du principe de l'équivalence de la force vive et du travail mécanique."[177]

Dans ce mémoire, Clausius fait la liaison entre le premier et le second principe (qu'il appelle théorèmes). Au premier paragraphe il mentionne les forces entre atomes: ce sera la seule fois dans cet article. Les rôles principaux sont dévolus à la chaleur et au travail, sans qu'il soit indiqué ce que Clausius entend par là. La seule propriété qui leur est attribuée est leur convertibilité mutuelle. Ici, les éléments fondamentaux ne sont ni la force (newtonienne) ni la force vive, ce sont le travail et la chaleur pris en tant que tels. Le raisonnement que mène Clausius peut s'accommoder de toute ontologie où la chaleur est équivalente au travail. Donnons maintenant les grandes lignes de la démonstration.

---

[174] J. Violle, *Sur l'équivalent mécanique de la chaleur*, Paris, Gauthier-Villars, 1870, p. 3.

[175] R. Clausius, *Sur une forme nouvelle du second théorème principal de la théorie mécanique de la chaleur*, traduit des Annales de Poggendorff, 63, par G. Michaelis, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 20, 1855, pp. 63 à 90.

[176] E. de Beaumont, *Correspondance* , C.R., 40, 1855, p. 1147.

[177] R. Clausius, *Sur une quantité analogue au potentiel et sur un théorème y relatif*, C. R., 70, 1870, pp. 1314 à 1319.

D'abord il présente le "théorème d'équivalence de la chaleur et du travail mécanique". Sa formulation est la suivante:

> "Le travail peut se transformer en chaleur, et réciproquement la chaleur en travail, de manière que la quantité de l'un soit toujours proportionnelle à l'autre."[178]

Il commente ensuite:

> "Les forces qui doivent être prises en considération sont de deux espèces: celles que les atomes des corps exercent les unes sur les autres et qui, par conséquent, ont leur existence dans la nature même du corps, et celles qui viennent d'influences étrangères, auxquelles le corps est soumis. D'après ces deux espèces de force à vaincre, j'ai distingué le travail produit par la chaleur en travail intérieur et travail extérieur qui sont soumis à des lois essentiellement différentes."[179]

Clausius utilise alors l'argument classique, analogue à l'impossibilité du mouvement perpétuel: au cours d'un cycle, les quantités de travaux intérieurs mis en jeu dans le cycle doivent se détruire mutuellement, sans quoi il pourrait y avoir génération de chaleur par exemple, sans consommation correspondante de travail.

Pour le travail extérieur, il en va autrement: pour de mêmes états finaux et initiaux, les travaux mis en jeu dépendent des transformations subies par le corps entre les deux états.

Si l'on fournit une quantité de chaleur Q à une masse de gaz, cette quantité sera transformée en travail intérieur et extérieur, respectivement U et W. Si A est la quantité de chaleur équivalente à l'unité de travail, on peut écrire:

$$Q = U + A \, . \, W$$

Sur un cycle $U = 0$, et alors:

$$Q = A \, . \, W$$

Cette proposition est, pour Clausius, le "premier théorème de la thermodynamique". On remarquera toutefois que rien n'impose au coefficient A d'être constant. La démonstration apparaît plus comme une définition, combien éclairante, du coefficient d'équivalence que comme une démonstration du premier principe. Le calcul de A à partir de lois générales reste à faire.

---

[178]R. Clausius, *Sur une forme nouvelle du second théorème principal de la théorie mécanique de la chaleur*, traduit des Annales de Poggendorff, 63, par G. Michaelis, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 20, 1855, p. 64.

[179]ibid.

Clausius démontre ensuite le second théorème de la thermodynamique. Celui-ci exprime, pour Clausius:

> "une relation entre deux espèces de transformations, savoir une transformation de chaleur en travail et translation de chaleur d'un corps plus chaud à un corps moins chaud."[180]

En plus du théorème d'équivalence, il n'utilisera que le principe suivant:

> "Il ne peut jamais passer de la chaleur d'un corps plus froid dans un corps plus chaud sans qu'il n'y corresponde quelque autre modification."[181]

L'idée de Clausius est de caractériser les transformations thermodynamiques par des fonctions des températures et des quantités de chaleur mises en jeu. Une transformation isotherme sera caractérisée par l'expression Q/T et une transformation se faisant entre deux températures T_1 et T_2 par l'expression $Q\ (\ 1/T_1\ -\ 1/T_2\ )$.

Nous donnons en note une idée du raisonnement de Clausius[182]. Cette démonstration est remarquable en ce sens qu'elle n'utilise que le raisonnement pur, et peu de développements mathématiques.

---

[180]ibid., p. 68.

[181]ibid., p. 69.

[182]Donnons une idée simplifiée de la démonstration de ce second théorème. Clausius suppose qu'une masse de gaz permanent décrit un cycle réversible en échangeant de la chaleur ou du travail avec trois corps K, K_1, K_2, lors de transformations adiabatiques et isothermes. La température, T_1, de K_1 est supérieure à celle, T_2 de K_2 et il y a transport d'une certaine quantité de chaleur, Q_1 de K_1 à K_2, qui donc ne demeure pas dans le gaz. Ce transport s'effectue grâce à la mise en jeu d'une quantité de travail W_1. Les conditions initiales et finales étant identiques, le gaz échange avec K, à la température T, une quantité de travail W, et pour la raison précédente, on a: $W_1 + W = 0$. Il appelle transformations équivalentes, des transformations qui mettent en jeu les mêmes quantités de chaleur. Dans le cas d'une transformation isotherme le travail mis en jeu est exprimé par la fonction $Q\ .\ f(T)$, Q étant la quantité de chaleur correspondante. Dans le cas d'une transformation non isotherme on aura pour le travail, $Q_1 .\ f(\ T_1,\ T_2\ )$, T_1 et T_2 étant les températures entre lesquelles s'effectue la transformation, Q_1 la quantité de chaleur mise en jeu. Si l'on considère le cycle précédemment mentionné et l'équation sur les travaux qui en résulte, on a, avec les conventions de signe appropriées:

$$- Q . f(T) + Q_1 . f(T_1, T_2) =0 \qquad (a)$$

Autrement dit, la quantité Q1 de chaleur qui entre dans le gaz, et qui en sort, fait que le système est traversé par une quantité de travail $Q\ .\ f(T)$.

On réalise un autre cycle avec les deux mêmes corps K1, K2 aux mêmes températures T_1, T_2, et mettant en jeu la même quantité de chaleur Q_1. Mais le corps

Finalement Clausius démontre la relation classique:

$$\int_{T1,T2} (Q/ T_i) \geq 0.$$

Cette formulation du second principe paraît obscure à certains. Aussi Athanase Dupré en donnera-t-il une interprétation plus concrète, basée sur la mécanique des machines.

Ainsi informés, les savants français ne pouvaient que tenter, eux aussi, d'utiliser les théories de l'énergie. Si au début du mémoire Clausius adopte une attitude atomiste, bien vite ce sont uniquement les

---

K est maintenant remplacé par un corps K' à la température T', et le cycle est décrit en sens inverse de tout à l'heure. On peut écrire:

$$- Q' . f(T') + Q_1 . f(T_1, T_2) = 0 \qquad \text{(b)}$$

Et donc:

$$- Q . f(T) + Q' . f(T') = 0 \qquad \text{(c)}$$

Nous allons supposer que K' est confondu avec K2 et K avec K1. La quantité de chaleur transformée en travail et traversant le gaz, l'équivalent de Q1 tout à l'heure, est (Q' - Q), la quantité de chaleur qui traverse le gaz, l'équivalent de Q_1, est Q'. On peut donc écrire:

$$(Q'- Q) . f(T') + Q . f(T, T') = 0 \qquad \text{(d)}$$

Par (c) et (d) il vient:

$$f(T, T') = f(T') - f(T)$$

Ce qui signifie que quel que soit le type de transformation utilisée on peut caractériser ces transformations par les quantités de chaleur mises en jeu, et des fonctions f(T) des températures auxquelles, ou entre lesquelles, elles s'effectuent. Dans le cas d'une transformation isotherme, la caractéristique de la transformation sera: Q . f (T). Clausius pose f(T) = 1/T. T, d'abord posée comme fonction arbitraire sera ensuite identifiée par Clausius à la température absolue. La caractéristique d'une transformation isotherme sera:

$$Q/ T$$

Et pour une transformation se faisant entre deux températures T_1 et T2:

$$Q (1/T_2 - 1/ T_1).$$

Puis, et ceci uniquement en appliquant le principe suivant lequel la chaleur ne peut passer spontanément d'un corps froid à un corps chaud, et en passant à l'expression différentielle, il montre:

$$\int_{T1T2} (Q/ T_i) \geq 0$$

transformations réciproques de chaleur en travail qui importent. Alors l'exposé de Clausius pouvait aussi bien s'accommoder d'une description phénoménologique que d'une vision atomiste de la nature.

On a signalé le peu d'écho que rencontre la théorie de la conservation de l'énergie en mécanique pure. C'est en Physique, au sens large du terme, que nous allons la rencontrer. Et c'est dans les propos d'un chimiste, Sainte-Claire Deville, qu'on en trouve l'un des exposés les plus clairs. Bien que s'affirmant comme ouvertement positiviste, il ne pourra éviter de faire usage des hypothétiques atomes. A l'opposé, des atomistes comme Verdet et Briot n'arrivent pas à lier directement atomes et énergie. L'énergie a donc du mal à s'intégrer, sur le plan philosophique, dans les champs nouveaux ou traditionnels de la physique. Nous allons le montrer en examinant certaines versions françaises de la conservation de l'énergie.

IX . Les conceptions de Sainte-Claire Deville et de Piaron de Mondésir

C'est dès 1868, donc moins d'un an après la parution du "Traité de philosophie naturelle", que Sainte-Claire Deville fait paraître un article où il est conduit à exposer les principes généraux de la conservation de l'énergie[183]. Il fait preuve d'une remarquable connaissance du sujet mais aussi il s'interroge sur l'intérêt et la nouveauté de la notion même de l'énergie.

Tout d'abord, l'auteur présente ses vues sur la science. Il s'agit d'une science qui en dernière instance doit renoncer aux hypothèses et aux abstractions. En chimie ces hypothèses et abstractions conduisent à un "mysticisme scientifique" dangereux :

> "Etablissons des analogies, constatons les ressemblances et les différences de tout ordre, faisons peu à peu le travail de classification qui sera longtemps, qui sera peut-être toujours incomplète; expérimentons constamment pour prouver la légitimité des principes (...) mais jamais ne nous fions un instant aux hypothèses, et surtout jamais ne donnons un corps et une réalité aux abstractions que nous impose la faiblesse de notre nature."[184]

> "L'hypothèse des atomes, l'abstraction de l'affinité, des forces de toute sorte que nous faisons présider à toutes les réactions des corps que nous étudions, sont de pures inventions de notre esprit, des noms que nous faisons substances, des mots auxquels nous prêtons une

---

[183] H. Sainte-Claire Deville, *Principes généraux de la chimie d'après la thermodynamique*, Revue des cours scientifiques, 6, 1868, pp. 82 à 89.
[184] ibid., p. 82.

réalité. Toutes ces hypothèses, toutes ces abstractions, ne sont heureusement pas indispensables."[185]

C'est donc une profession de foi positiviste. Sainte-Claire Deville choisit ensuite comme guide méthodologique les méthodes de la thermodynamique, dont on sait qu'elle se prête bien à un exposé à partir de principes déduits de l'expérience. Cela conduit l'auteur à exposer diverses expériences mettant en évidence l'équivalence des forces: les courants de Foucault, la pile, les machines thermiques. L'explication qu'il donne ensuite de l'équivalence des "forces physiques", conformément à ce qui précède, se fait autour de deux réalités physiques directement perceptibles à nos sens: le mouvement et la chaleur.

> "Toutes les fois que dans une machine ou partout ailleurs une certaine quantité de chaleur sera anéantie (je ne dis pas communiquée aux corps voisins, comme dans le refroidissement ordinaire), il se produira un travail dont la valeur en kilogrammètres sera 425 fois le nombre de calories détruit en apparence.
> Donc, dans la nature, aucun mouvement ne se détruit comme il ne s'en crée aucun. Mais, à chaque instant, le mouvement se transforme en chaleur, laquelle on peut transformer en électricité, et par suite en agent capable de produire ou de détruire toutes les combinaisons chimiques, la cause en général de tous les changements d'état de la matière."[186]

C'est là bien plus le principe de corrélation que celui d'équivalence qui est énoncé. Pour affirmer ce dernier, il faudra précisément faire intervenir le travail. C'est ce que fait Sainte-Claire Deville en présentant ensuite ce qu'il entend par force, force vive, travail, intensité, énergie. Comme on le voit souvent, la notion de force sera rapportée à l'expérience humaine. Comme on pouvait s'y attendre, la notion de cause est battue en brèche:

> "Il paraîtra étrange d'affirmer que, même en mécanique, toute notion de cause du mouvement, de la force est absolument inutile. En effet, tous les problèmes qui la concernent exigent seulement deux quantités mesurables par nos sens: l'accélération, qui est l'expression numérique du déplacement de la matière dans l'espace, et la masse, qui est la quantité de matière déplacée."[187]

Cette force d'ailleurs n'a que peu d'importance, ce qui est important c'est le mouvement, l'effet. Le travail est ensuite défini à partir du

---

[185]ibid.
[186]ibid., p. 83.
[187]ibid.

déplacement vertical d'un corps. C'est ici que Sainte-Claire Deville présente son principe d'équivalence:

"L'introduction de l'idée de travail dans la mécanique correspond à l'un des plus grands progrès de la Science moderne. Quelles que soient les causes qui produisent le mouvement dans la nature, nous pouvons toujours en comparer les effets en comparant entre eux les travaux effectués sous leur influence, et nous arrivons à cette idée générale de la transformation de ces causes et de l'équivalence de leurs effets exprimés en travail. Il faut bien remarquer que la notion de travail est absolument indépendante du temps pendant lequel il s'exécute. Quand on fait intervenir le temps on introduit alors l'idée de la vitesse, et par suite la force vive."[188]

Sainte-Claire Deville définit ensuite la force vive. Il veut appliquer cette notion à divers phénomènes physiques. Citons ce passage que nous commenterons ensuite:

"Aujourd'hui un grand nombre de phénomènes physiques, en particulier les phénomènes lumineux et calorifiques, s'expliquent par des vibrations qu'on suppose animer une substance impondérable à laquelle on a donné le nom d'éther. On est, en réalité, obligé de rapporter tous les phénomènes de lumière et de chaleur à un mouvement de l'éther, comme on rapporte les phénomènes du son à un mouvement de l'air parce que c'est le seul moyen aujourd'hui connu d'expliquer les interférences lumineuses et calorifiques (...)"[189]

Nous voyons ici poindre la préoccupation d'explication pour elle-même, non point encore dans le but de simplifier l'expression d'une théorie ou dans le but de la rendre plus utilisable, mais bien dans le seul but d'expliquer. Cette volonté d'explication se manifeste aussi par ailleurs:

"Le principe de la conservation des forces vives est à la base de la mécanique; le principe de la conservation, ou plutôt de sa transformation sans perte ni gain dans la nature, est à la base d'une science moderne, la Thermodynamique, dont les éléments nous seront indispensables pour bien comprendre les phénomènes calorifiques de la chimie."[190]

Sainte-Claire Deville expose ensuite l'idée d'énergie mécanique. Partant de l'expression différentielle de l'équation des forces vives:

---

[188]ibid., p. 85.
[189]ibid.
[190]ibid., p. 86.

$$d(mv^2) = 2 (Xdx + Ydy + Zdz),$$

il retrouve par intégration trois termes:

> "La somme des forces vives, une constante et un troisième terme F qui est le maximum du travail qui puisse être effectué quand le système soumis à des forces centrales passe sous leur influence de la position actuelle à une autre position quelconque."[191]

$$1/2(\sum mv^2) + F = cte$$

On reconnaît en F l'énergie potentielle, comme le dit d'ailleurs l'auteur. Toutefois il convient de noter qu'au terme énergie potentielle il substitue celui de "maximum du travail etc.".

Ce qui est remarquable, c'est que, ici, la conservation de l'énergie est mentionnée explicitement, alors que dans le "Traité de philosophie naturelle" de Thomson et Tait, si la notion de système conservatif est clairement affirmée, l'expression de la forme T+V = E n'apparait pas.

Les notions d'énergie actuelle et d'énergie potentielle, ici attribuées à Rankine, sont ensuite exposées dans le cadre de la Physique ou de la Chimie moléculaire. Mais pour lui, ce qui se dégage, c'est surtout l'utilité de la notion d'énergie potentielle, pour exprimer, soit les chaleurs latentes de changement d'état, soit même les "chaleurs de réaction"[192]. C'est ce qui fait son originalité.

Par contre Sainte-Claire Deville semble hésitant, sceptique, en ce qui concerne l'utilité du concept même d'énergie:

> "Quand on se sert, en mécanique, du mot énergie, ce mot représente toujours un travail ou une force vive que l'on peut caractériser assez facilement sans intervention d'une expression nouvelle."[193]

Autrement dit on pourrait, en utilisant le mot "travail", se passer de référence à l'énergie. Mais Sainte-Claire Deville se reprend ensuite:

---

[191] ibid.

[192] Nous donnons ici le paragraphe dont il est question pour montrer un nouvel exemple de décomposition de l'énergie interne à l'époque:
"L'énergie actuelle se décompose en:
1° L'énergie actuelle, qui est égale à la demi-somme des forces vives actuelles de tous les points du système.
2° L'énergie potentielle, qui est égale au maximum de travail que les forces agissant sur le système peuvent produire en partant de l' état actuel. Elle se compose de l'énergie potentielle des forces moléculaires qui nous sont totalement inconnues, et de l'énergie potentielle de la pression, que nous pouvons facilement calculer" (H. Sainte-Claire Deville, *Principes généraux de la chimie d'après la thermodynamique,* Revue des cours scientifiques, 6, 1868, p. 87).

[193] ibid.

> "En physique, et, par exemple, à propos des chaleurs latentes et de l'énergie potentielle, il faut avouer que l'expression correspond à un besoin bien clairement exprimé par l'exemple que je viens de citer."[194]

Le doute subsiste:

> "Cependant on peut se demander si l'introduction de ce nouveau mot est réellement indispensable."[195]

Outre la maîtrise du concept d'énergie que suppose un tel article, on y voit les divers problèmes de la physique de l'époque. Le positivisme s'applique parfaitement à la thermodynamique, mais même là, la physique demande une explication causale, donc peut-être un atomisme. Le concept de travail, paraît dans les applications pratiques, bien suffisant pour décrire les phénomènes. On discerne mal, alors, l'intérêt de la notion d'énergie elle-même.

Ceci est confirmé si l'on considère les travaux de Piaron de Mondésir pour qui tout problème de mécanique physique peut être résolu par la considération du travail. Il expose sa théorie dans un article présenté dans la rubrique mécanique par Sainte-Claire Deville dont nous venons d'apprécier les vastes connaissances en matière d'énergie[196].

Voici comment débute cet article:

> "Substituons, dans la définition du principe de d'Alembert, au mot force, que d'Alembert qualifie lui-même de terme obscur, le mot travail mécanique, et nous obtenons le principe qui a cours aujourd'hui et en vertu duquel le travail se transforme et ne s'anéantit pas."[197]

Le travail ici présenté ressemble fort à l'énergie. L'auteur définit ce qu'il appelle des magasins de travail:

> "J'appelle magasin de travail statique la quantité de travail qu'un corps soumis à la pesanteur possède par suite de sa chute possible sur un plan horizontal de comparaison, qu'il soit à l'état de repos ou à l'état de mouvement."[198]

---

[194]ibid.

[195]ibid.

[196]M. Piaron de Mondésir, *Nouvelle méthode pour la solution des problèmes de mécanique*, C. R., 69, 1869, pp. 1351 à 1356.

[196]ibid., p. 1351.

[197]ibid.

[198]ibid., p. 1352.

Ce magasin statique n'est pas sans rappeler l'énergie potentielle de pesanteur. Il définit ensuite les magasins dynamiques, élastiques, et calorifiques, que l'on peut rapprocher des énergies de même nom. Pour résoudre les problèmes de mécanique l'auteur recommande d'obtenir:

> "l'équation des magasins de travail, qui sera la traduction analytique du principe de la transformation du travail avec toute la généralité désirable." [199]

Ainsi, en suivant la tradition française, que l'on peut faire remonter à Coulomb ou à Coriolis, en intégrant les travaux de Clausius, il est possible de ne pas faire jouer un rôle important à l'énergie. L'équivalent de l'énergie pourra être appelé par exemple, la quantité de chaleur d'un gaz, comme c'est le cas pour Athanase Dupré, ou la quantité de travail, comme c'est le cas pour Moutier. La physique française va logiquement développer des "Théories mécaniques de la chaleur" où les éléments de base sont le travail et la chaleur.

Il faut souligner un aspect qui apparaît à travers l'œuvre peut-être trop singulière d'Athanase Dupré: la théorie utilisant seulement l'équivalent mécanique de la chaleur n'était pas elle-même absolument admise en 1864, et l'on contestait encore les résultats expérimentaux. Cela donne lieu à une sorte de "querelle des anciens et des modernes"[200].

X . Une controverse sur le principe même de l'équivalence de la chaleur et du travail

Dupré s'exprime comme suit au sujet du principe d'équivalence de la chaleur et du travail:

> "Beaucoup de travaux remarquables ont été déjà publiés sur le sujet traité dans ce Mémoire, les savants se sont partagés en groupes soutenant les idées anciennes ou acceptant plus ou moins complètement les principes nouveaux; de là des méthodes de calcul variées et par suite des résultats peu concordants. Il m'a paru nécessaire, pour avancer la fin de ce grand débat, de partir sans restriction aucune des idées presque généralement admises aujourd'hui, d'en déduire des conséquence nombreuses, sans les appuyer sur les formules trouvées par des calculateurs encore imbus des idées anciennes, qu'ils y ont laissé pénétrer, quelquefois même sans s'en apercevoir. Cette méthode, que plusieurs ont adoptée et que d'autres ont qualifiée d'illogique, me semble inattaquable si on ne perd point de vue qu'une hypothèse ne peut finir par passer à l'état de

---

[199]ibid.

[200]A. Dupré, *Sur la mécanique et ses transformations*, Annales de Chimie et de Physique, 1, 4° série, pp. 175 à 180. Aussi: C. R. , 50, 1860, pp. 588 à 591.

vérité certaine qu'autant que les conséquences auxquelles elle conduit se vérifient toutes et qu'on démontre ensuite que, réciproquement, l'exactitude des déductions entraîne celle du principe.

Je m'appuierai, sans les décrire en détail ni les discuter, ce qui a été très habilement fait à plusieurs reprises, sur les expériences fondamentales qui prouvent que toutes les fois que de la chaleur ou du travail mécanique se transforme l'un en l'autre, une calorie correspond à un nombre invariable E de kilogrammètres, quelles que soient les circonstances. Je sais ce qu'elles laissent à désirer; je connais les objections faites à la conclusion qui en a été tirée; mais, ainsi que je l'ai dit plus haut, je considère ce principe fondamental comme indispensable aux progrès de la mécanique théorique et je laisse à chacun le soin de le prendre comme bien établi par ces expériences ou comme une hypothèse qu'elles rendent au moins très-probable."[201]

Ce que Dupré évoque dans cet écrit c'est une controverse qu'il a eue avec Reech, et dont on trouve la trace dans les Comptes Rendus. Reech a d'abord produit une note qui se rapporte au second principe[202]. Dans un autre mémoire, il explique ce qu'il a voulu faire:

"Mon but a été de faire voir de quelles équations on aurait pu faire usage de tout temps sans connaître qu'une somme déterminée de chaleur équivaut à une somme déterminée de travail."[203]

Autrement dit, c'est à partir de considérations générales, appuyées sur quelques observations, qu'on peut retrouver les lois de la thermodynamique. En forçant un peu le trait, A. Dupré va lui répondre:

"Doit-on suivre l'exemple de quelques hommes illustres, au nom desquels je trouve Poisson, et chercher à découvrir des propriétés des corps par une savante analyse, ou bien faut-il se borner à croire cet instrument précieux bon pour déduire d'un principe certain les vérités qu'il contient implicitement, et aussi d'une hypothèse probable, des conséquences qui, vérifiées expérimentalement, serviront s'il y a lieu, à élever plus tard cette hypothèse au rang de proposition démontrée?(...) Lorsqu'une équation est démontrée indépendamment de toute observation, elle est incontestable, mais en même temps inféconde, à moins qu'on ne l'associe avec d'autres qui ne sont point dans le même cas; enfin elle est du domaine des Mathématiques pures (...)"[204]

---

[201]ibid., pp. 175 et 176.

[202]F. Reech, *Note sur un mémoire intitulé: Théorie des propriétés calorifiques et expansives des fluides élastiques*, C. R., 46, 1858, pp. 84 à 89 et pp. 505 à 509.

[203]F. Reech, *Note sur les propriétés calorifiques et expansives des gaz*, C. R., 57, 1863.

[204]A. Dupré, *Remarque à l'occasion d'une Note insérée dans le Compte rendu de la séance du 14 septembre 1863*, C. R., 57, 1863, pp. 589 et 590.

Bref, non seulement, en 1864, l'équivalence de la chaleur et du travail est contestée, mais encore il y a chez les créateurs des théories mécaniques de la chaleur des innovations méthodologiques par rapport à la tradition française, représentée par Poisson, et encore plus par Cauchy et son Ecole. Autrement dit ces théories mécaniques de la chaleur sont profondément novatrices.

Il n'en reste pas moins que le rêve de toute physique, c'est-à-dire la création d'une théorie unitaire, demeure. Et cela, même si l'époque veut une extrême prudence, et si la référence à l'expérience est obligatoire pour éviter les errements des anciens philosophes de la nature. Si l'on veut décrire l'ensemble des phénomènes physiques, il faudra sans doute, à côté des anciens concepts de chaleur et de travail, en utiliser un nouveau: celui d'énergie. C'est le sens que nous donnons aux tentatives de Verdet et de Briot qui utilisent des formulations explicitement atomistes. En ce sens ils se rapprochent de Boussinesq, et c'est pourquoi ce sont eux que nous allons étudier maintenant.

XI . Le rattachement par Verdet et Briot de la théorie mécanique de la chaleur à la mécanique du point matériel

XI . 1 . Le rattachement de la théorie mécanique de la chaleur à la Mécanique de Newton par Verdet

C'est dans son monumental ouvrage traitant de la théorie mécanique de la chaleur que l'on trouve l'exposé par Verdet de la conservation de l'énergie[205]. Cette œuvre comporte deux parties: une série de conférences qui ont un grand retentissement, et un manuel de très haut niveau où est exposée la totalité de la théorie. Les conférences ne font pas allusion à l'énergie, mais montrent par contre toute l'extension de la théorie mécanique de la chaleur de l'époque. La partie proprement scientifique (le manuel) reconstruit cette théorie. Tout d'abord, Verdet place le débat sur le terrain épistémologique: il affirme sa conception atomiste et se démarque de celui que l'on considère comme le fondateur de l'énergétique, Rankine. C'est ainsi qu'il écrit:

> "(...) Monsieur Rankine, abandonnant les suppositions ordinaires d'atomes et de forces par lesquelles on explique tous les phénomènes des Sciences physiques, a cherché à établir un système ne renfermant rien d'hypothétique, où l'on présente avec une généralité absolue les lois des phénomènes de la chaleur. A la considération ordinaire des forces, il substitue une nouvelle quantité, l' énergie, qui existe dans les corps en partie à l'état potentiel, et crée une nouvelle science qu'il

[205]E. Verdet, *Théorie mécanique de la chaleur*, t. 1, Paris, Victor Masson, 1868, t. 2, Paris, Victor Masson, 1872.

appelle l'*énergétique*[206], dont la mécanique rationnelle ne serait qu'un cas particulier."[207]

Pour Verdet, il ne convient pas de ramener les principes de la mécanique à d'autres principes plus abstraits (comme ceux de l'énergétique de Rankine):

"une telle méthode manquerait de clarté et, jusqu'à un certain point, de bonne foi, car ce sont ces principes de mécanique qui ont toujours guidé et guident encore aujourd'hui les inventeurs."[208]

Et il ajoute même:

"le vrai problème du physicien est de ramener les phénomènes à celui qui nous paraît le plus simple et le plus clair, le mouvement."[209]

Verdet se place dans le cadre de la nouvelle mécanique: celle qui se base sur le travail et la force vive. Voici tout d'abord comment, après une démonstration des plus succinctes (il indique que la démonstration est faite dans tous les traités de mécanique), il énonce le théorème des forces vives:

"La somme des quantités de travail des forces appliquées à un point matériel pendant un temps fini quelconque est égale à la moitié de l'accroissement de la force vive de ce point dans ce même intervalle."[210]

Il est tout de suite important de remarquer que la formulation de Verdet ne se limite pas à des forces dépendant d'un potentiel. Il s'agit là, dans le style de Clausius, d'une sorte de théorème sans grand rapport avec la conservation de l' énergie. De même, il va énoncer le "théorème fondamental de la mécanique pratique". Ce théorème correspond au théorème de Poncelet sur la force vive (§ V . 2 . a de ce chapitre) lorsqu'il est appliqué à des machines ayant atteint l'état de mouvement uniforme:

"Dans toute machine arrivée à l'état de mouvement uniforme ou périodiquement uniforme, la somme des travaux est nulle pendant la durée d'une période."[211]

---

[206] W. J. Macquorn Rankine, *Outlines of science of energetics*, Edinburgh journal, 2, 2° série, p. 100 (note de Verdet dans sa formulation originale).

[207] E. Verdet, *Théorie mécanique de la chaleur*, t. 1, Paris, Victor Masson, 1868, p. 2.

[208] ibid., p. 3.

[209] ibid.

[210] ibid. , p. 5.

[211] ibid. , p. 6.

Mais Verdet indique que ce théorème est essentiellement pratique, on peut y introduire telle force qui semblera utile:

> "En un mot, on introduira sans scrupule, dans les équations, des forces de toute nature, fonction de toutes les quantités qui peuvent modifier le mouvement de la machine."[212]

La Science telle que la considère Verdet ne saurait se contenter d'un tel utilitarisme. Il y faut des principes certains, ou tout au moins, bien éprouvés. Pour cela on ne saurait mieux faire que de s'en remettre à Newton. Verdet utilise les deux principes suivants qu'il attribue au grand fondateur de la mécanique moderne:

> "1° Si on isole deux points matériels que l'on suppose soustraits à l'influence du reste de la nature, l'action qu'ils exercent l'un sur l'autre se compose de deux forces égales et contraires, appliquées respectivement à chacun des points dans la direction de la droite qui les joint, et ne variant qu'avec leur distance.
>
> 2° Si au système de ces deux points on en ajoute un troisième, on pourra introduire ainsi de nouvelles actions; mais on n'en modifiera pas l'action réciproque des deux premiers."[213]

Et Verdet d'en déduire:

> "Ils montrent (ces principes) que les seules forces auxquelles on devra rapporter en dernier lieu l'explication de tous les phénomènes sont les actions réciproques de points matériels qui s'attirent ou se repoussent avec une intensité qui ne dépend que de leur distance et de leur masse."[214]

Autrement dit, les seules forces à considérer sont des forces centrales. La nécessité de ces forces centrales n'est pas comme chez Helmholtz le résultat d'une démonstration, mais résulte de l'appel à l'autorité de Newton. C'est une façon élégante d'échapper à l'épineux débat sur la nature réelle des forces. De là, suivant un calcul proche de celui du mémoire de 1847 de Helmholtz, Verdet en arrive à l'équation de variation de la force vive qu'il écrit:

$$\int f(xyz, x'y'z'\ldots) - \int f(x_o y_o z_o, x'_o y'_o z'_o\ldots) = 1/2\,(\Sigma mv^2 - \Sigma mvo^2)$$[215]

Verdet assimile les fonctions $f(xyz, x'y'z'\ldots)$ et $f(x_o y_o z_o, x'_o y'_o z'_o\ldots)$ à deux fonctions qui dépendent uniquement des coordonnées des points

---

[212] ibid.

[213] ibid, p. 7.

[214] ibid., p.7.

[215] ibid., p. 9.

considérés. Il donne la formulation suivante de la conservation de l'énergie:

> "Si dans un système quelconque de corps soumis à l'action de forces centrales, on ajoute à la demi-somme des forces vives le maximum de travail que peuvent produire les forces en partant de l'état présent du système, on a une quantité constante."[216]

On peut remarquer que cette formulation se fait uniquement avec des termes issus des mécaniques rationnelles classiques.

A nouveau il est frappant de constater que dans les explications purement atomistes de tous les phénomènes physiques, la notion d'énergie n'est qu'une simple commodité qui n'est pas indispensable dans un premier temps. D'ailleurs Verdet lui-même entend par "énergie", énergie mécanique, puisqu'un paragraphe est justement consacré à l'équivalence de l'énergie et de la chaleur[217]*. C'est bien plutôt la chaleur qui est mal définie, et comme en attente d'une réelle formulation mécanique.*

Verdet utilise ensuite la notion d'énergie, terme qu'il attribue à Rankine. C'est ainsi qu'il écrit cette équation[218]:

$$E = F + 1/2 \cdot \int m \cdot v^2$$

En suivant Rankine il divise l'énergie en énergie actuelle et énergie potentielle. Mais n'oublions pas que Verdet veut fonder une théorie mécanique de la chaleur expliquant l'ensemble de la Physique. C'est avec une grande prudence qu'il procède, même pour les phénomènes calorifiques:

> "Nous admettrons donc l'identité des phénomènes thermiques et mécaniques; seulement nous nous astreindrons à ne pas particulariser trop tôt notre hypothèse, en cherchant quelle espèce de mouvement est la chaleur."[219]

Malgré cette prudence Verdet va montrer que l'on peut décomposer la force vive des particules soumises à des mouvements perceptibles et imperceptibles en deux parties, en d'autres termes que l'on peut mettre en évidence l'agitation des particules. Il distingue le cas "(...) de mouvements irréguliers superposés à un mouvement qui varie de

---

[216]ibid., p, 10.

[217]E. Verdet, *Théorie mécanique de la chaleur*, t. 1, Paris, Victor Masson, 1868, p. 62.

[218]ibid., p. 10.

[219]ibid., p. 13.

manière continue", ce qui est le cas des gaz, et le cas "d'un mouvement vibratoire très rapide par rapport au reste du mouvement"[220], ce qui est le cas des solides.

Cette mise en évidence de l'énergie vibratoire dans l'énergie totale d'un système permet de fournir une base théorique mécaniste et atomiste à la théorie mécanique de la chaleur. On notera que rien n'est dit en ce qui concerne l'énergie potentielle des molécules. Pourtant Verdet sera obligé d'y faire allusion lorsqu'il établira à son tour l'équation fondamentale de la thermodynamique (premier principe), qu'il considère aussi comme l'équation fondamentale de la Physique:

> "(au cours d'une transformation quelconque) le corps éprouve d'abord une variation A de l'énergie actuelle provenant de l'accélération des mouvements vibratoires des molécules. L'énergie potentielle des forces moléculaires subit en même temps une modification P résultant du changement de volume du corps. Enfin l'énergie potentielle des forces extérieures éprouve une variation S. On a donc:
>
> $Q.E = A+P+S$ avec E équivalent mécanique de la calorie, ou encore
>
> $Q.E = U + S$ avec U énergie interne du système."[221]

Verdet utilisera ensuite l'énergie surtout sous la forme d'énergie interne des systèmes. Dans la partie consacrée à l'électricité l'énergie apparaîtra également, et même le potentiel et la fonction potentielle dans le style de Clausius. Mais tout cela reste assez épisodique par rapport à l'utilisation qui est faite du principe d'équivalence de la chaleur et du travail, et du second principe tel que l'a exposé Clausius.

La liaison rigoureuse de la mécanique classique et de la théorie mécanique de la chaleur, théorie totale de la Science, reste à faire. La réussite d'une telle liaison engage finalement toute l'entreprise d'explication causale du monde dans un cadre atomiste et mécaniste, si

---

[220] ibid., p. 17.

[221] Ce serait restreindre la portée des idées de Verdet et de Briot que de les limiter à la thermodynamique. Tout ce qui peut s'expliquer par des modèles atomistes et dynamiques peut entrer dans une théorie mécanique de la chaleur telle que la conçoivent les auteurs. Ainsi les phénomènes optiques sont conçus comme des mouvements d'un éther atomique. Leur interprétation se fait bien par l'étude des échanges de force vive. Or , et c'est Verdet lui-même qui met l'accent sur ce point, Melloni a montré l'identité de la lumière obscure et de la chaleur: l'optique peut donc bien entrer dans le cadre de la théorie mécanique de la chaleur. Briot fait l'hypothèse que l'électricité est constituée par des mouvements particuliers de l'éther, le magnétisme par l'intermédiaire des courants ampériens se rattache au même type d'explication. Verdet va jusqu'à considérer les machines életromagnétiques comme des machines thermiques. La théorie mécanique de la chaleur est donc une "théorie unitaire "de la physique selon Verdet et Briot.

l'on entend par là sa description en termes mathématiques, que ces mathématiques soient la géométrie ou l'analyse. L'échec de cette entreprise serait un argument en faveur de l'énergétique et du positivisme. Nous avons pu constater que Verdet n'a pas mené l'entreprise jusqu'au bout.

XI . 2 . L'explication de la théorie mécanique de la chaleur par une forme particulière d'action entre atomes

Briot est le successeur de Verdet à la Sorbonne et un de ses fervents admirateurs. Il présente son propre cours sur la Théorie mécanique de la chaleur[222] comme une extension de celui de Verdet. C'est aussi un partisan des méthodes de Cauchy. Comme ce dernier, c'est un virtuose de l'Analyse, et comme le Cauchy de la seconde période, il utilise le point matériel et la notion de force. Pour décrire la matière, il use d'un modèle semblable à celui de Poisson: des particules de matière pondérable qui s'attirent, ces particules étant entourées d'une atmosphère d'éther répulsive. Dans ces conditions Briot indique même quelle est l'action totale qui s'exerce entre deux particules[223]:

$$f = m \,.\, m' . (a/r^n) \,.\, (1-(r_0/r)^p)$$

Il énonce le théorème des forces vives pour un couple de points matériels, après avoir démontré divers théorèmes de la mécanique newtonienne, et il déduit de la relation fondamentale de la dynamique que:

> "La variation de la somme des forces vives de tous les points d'un système pendant un temps quelconque est égale à la somme des travaux des forces, tant intérieures qu'extérieures, qui agissent sur les différents points du système pendant le même temps."[224]

Il est remarquable qu'il ne donne pas de démonstration de ce théorème. Bien entendu cela lui évite de se prononcer sur la question des forces centrales. Mais il ne les utilise pas moins comme éléments de base lorsqu'il veut évaluer le travail des forces intérieures:

> "L'action mutuelle de deux molécules m et m' se compose de deux forces égales et opposées mm'ϕ(r) appliquées, l'une au premier point, l'autre au second, et dirigées suivant la droite qui les joint."[225]

---

[222]Ch. Briot, *Théorie mécanique de la chaleur*, Paris, Gauthier-Villars, 1869.
[223]ibid., p. 2.
Il est à noter que Briot n'utilise pas le mot force, mais le mot action. De plus, cette "action" n'est pas représentée par la lettre F, mais dans le style de Helmholtz par la lettre ϕ.
[224]ibid., p. 9.
[225]ibid., p. 11.

Il s'agit bien de forces centrales. La variation de force vive des points d'un système est démontrée égale au travail des forces intérieures, ce qui conduit à l'équation:

$$\sum (1/2)\ m\ .\ v^2 + \Pi = C$$

Ensuite Briot donne une formulation énergétique à cette formule, le terme $\sum (1/2)\ m\ .\ v^2$ étant l'énergie actuelle, et Π le terme d'énergie potentielle (d'après Rankine). Il semble donc que l'on se rapproche d'une réelle prise en compte de l'énergie potentielle interne dans l'énergie d'un système.

Briot va ensuite s'attaquer, comme l'a fait Verdet, à la combinaison de mouvements vibratoires et de mouvements d'ensemble dans les systèmes. Après avoir retrouvé la séparation des énergies actuelles de vibration et du mouvement d'ensemble, il tente de prendre en compte l'énergie potentielle. Le résultat est décevant, il est purement qualitatif:

> "La vibration change la valeur moyenne de l'énergie potentielle, sans que les positions moyennes des molécules soient changées, c'est-à-dire sans que l'état apparent du corps soit changé."[226]

Il démontre ensuite le premier et le second principes de la thermodynamique.

Pas plus que Verdet, Briot n'arrive à décrire mathématiquement le mouvement vibratoire des molécules. De plus il reste tributaire de la notion de force et même de force centrale. L'entreprise de Verdet reste donc à achever.
Les deux auteurs que nous venons d'étudier tentent de créer une théorie physique, plus qu'une Mécanique, faisant une large place à la conservation de l'énergie. On voit toutefois qu'ils achoppent sur la description des mouvements intimes des ultimes particules de matière. Là ils sont obligés de supposer une forme particulière pour les actions entre atomes.

On ne peut clore ce chapitre sur les rapports entre la Mécanique et la théorie de l'énergie sans évoquer le monumental "Traité de philosophie naturelle" de Thomson et Tait[227]. Bien qu'il n'ait jamais été traduit en français, il était connu en France, comme nous l'avons signalé au § VII .1

---

[226]ibid., p. 18.

[227]W. Thomson and P. G. Tait, *Treatise on natural philosophy*, Oxford, 1867; vol. 1, part. 2, London, Cambridge University press, 1883; vol. 1, part. 1, London, Cambridge University press, 1896.

de ce chapitre. Boussinesq en a connaissance autour de l'année 1880, où il l'étudie à l'instigation de Saint-Venant[228]. Il n'y a pas eu moins de sept éditions successives de cet ouvrage entre 1867 et le début du XX° siècle.
Nous allons maintenant l'étudier brièvement[229].

XII . Bref aperçu du "Traité de philosophie naturelle" de Thomson et Tait

Le "Traité de philosophie naturelle" est divisé en cinématique (§1 à 204) et en dynamique. La dynamique est la science des effets des forces; elle occupe le reste de l'ouvrage. Elle est traitée en deux parties: les préliminaires (§ 205 à 207) et la dynamique abstraite (§ 348 à 848), certaines réflexions sur la méthodologie scientifique s'intercalant entre ces deux passages. Dans les préliminaires les auteurs établissent les lois de la Mécanique, nous en parlerons ensuite. La dynamique abstraite est ainsi nommée car elle ne s'occupe pas de l'origine (électrique, magnétique, gravifique, etc.) des forces. Finalement elle se limite dans cet ouvrage à la statique, mais une statique qui englobe les questions de potentiel, et d'élasticité. Il ne faut pas voir là l'affirmation d'une quelconque doctrine. Simplement, Thomson et Tait avaient prévu d'écrire un ouvrage englobant l'ensemble de la Physique, et dans lequel l'énergie aurait été une notion majeure. On ne sait trop pourquoi, l'entreprise ne fut jamais menée à son terme. Venons-en à la conception de l'énergie de Thomson et Tait. Pour eux l'énergie est un composant de l'Univers au même titre que la matière:

"L'énergie est aussi réelle et aussi indestructible que la matière."[230]

A partir d'une telle affirmation on peut supposer que les auteurs vont faire une présentation originale de la Mécanique; en réalité ils se placent explicitement dans la tradition newtonienne. C'est pour eux une nécessité, car la présentation de la Mécanique par Newton est la meilleure qui soit:

---

[228] Voir: J. Boussinesq, *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 13, 4° série, 1885. A la page 33 Boussinesq signale que "MM. William Thomson et Tait avaient déjà, aux n^{os} 730 et 731 de leur beau Traité de philosophie naturelle, trouvé des expressions équivalentes (à celles qu'il a lui-même trouvées)".

[229] On trouvera une analyse plus détaillée du Traité de Thomson et Tait dans:
R. Roméro, *La traité de philosophie naturelle de Thomson et Tait*, Mémoire de D.E.A., Lille I, 1994.

[230] W. Thomson and P. G. Tait, *Treatise on natural philosophy*, Oxford, 1867; vol. 1, part. 2, London, Cambridge University press, 1883; vol. 1, part. 1, London, Cambridge University press, 1896, p. vi.

"Dans le second chapitre nous donnons les lois de Newton du mouvement dans ses propres termes, avec certains de ses commentaires. Toutes les tentatives qui ont été faites pour dépasser cet exposé ont échoué. Peut-être rien d'aussi simple et qui, en même temps, embrasse autant de choses n'a jamais été proposé comme système servant de base à une Science."[231]

Mais il y a plus: pour Thomson et Tait, Newton aurait déjà énoncé le principe de conservation de l'énergie dans la loi de l'action et de la réaction. Cette affirmation est maintes fois formulée, par exemple par Tait en 1863:

"(...) Newton a énoncé dans une forme complète, la conservation de l'énergie en Dynamique abstraite."[232]

Ce n'est pas tant la troisième loi de Newton qui est évoquée que le scolie terminal des "Principes ou lois du mouvement" de Newton:

"... si on estime l'action de l'agent par la force multipliée par la vitesse et qu'on estime de même la réaction du corps par la vitesse de chacune de ses parties multipliées par les forces qu'elles ont pour résister en vertu de leur cohésion, de leur attrition, de leur poids, de leur accélération, l'action et la réaction se trouveront égales entr'elles, dans les effets de toutes les machines."[233]

Ce que Thomson et Tait interprètent dans le Traité par:

"La base de la théorie abstraite de l'énergie est exposée par Newton d'une manière admirablement claire et concise dans la phrase du scolie déjà cité (§ 263), dans lequel il met en évidence son application à la mécanique. L'*actio agentis*, comme il le définit, qui est équivalent au produit de la composante de la force, par la vitesse du point sur lequel il agit, est simplement en anglais moderne la "vitesse" (rate) avec laquelle l'agent travaille." [234]

Ainsi toute action de l'agent se trouve transformée selon Thomson et Tait en chaleur, vitesse ou énergie potentielle[235]. De ce qui vient d'être

---

[231] ibid., p. vii.

[232] P. G. Tait, *On the conservation on energy*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 29, 4° serie, 1863, p. 251.

[233] I. Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, 1° éd. 1687, 3° éd. 1726, trad. Marquise du Chastelet, sous le titre *Principes mathématiques de philosophie naturelle*, Paris, 1756-1759, rééd. Blanchard, 1966.

[234] W. Thomson and P. G. Tait, *Treatise on natural philosophy*, Oxford, 1867; vol 1, part, 1, London, Cambridge University press, 1896, p. 250.

[235] Thomson et Tait s'expriment ainsi dans le Traité: "Regardant les propos de Newton avec cet éclairage, nous voyons qu'ils peuvent être logiquement traduits sous la forme suivante:

dit, il suit que ce que font Thomson et Tait dans ce Traité, c'est réécrire la Mécanique newtonienne en ayant "en vue le grand principe de la conservation de l' énergie"[236], mais ils n'écrivent certainement pas la Mécanique à partir de l'énergie elle-même. En particulier la force au sens causal y occupe une place importante, la même que dans les Principia de Newton. Ainsi disent-ils:

> "Une force est n'importe quelle cause qui tend à modifier l'état naturel de repos ou de mouvement uniforme des corps."[237]

Sur cette base strictement newtonienne, Thomson et Tait vont élaborer une physique où l'énergie, certes, tient une place importante, mais n'est pas la grandeur fondamentale de laquelle toutes les autres découlent. La présentation de l'énergie est faite sous forme axiomatique, l'ensemble donnant une signification physique à l'énergie en ce sens qu'il la ramène à la notion de travail.

C'est aux paragraphes 270, 271 et 272 que les axiomes de la théorie de l'énergie sont énoncés. Le premier axiome (§ 270) est simplement la loi de la conservation des forces vives appliquée à un système isolé:

> "Soit un système de corps, qu'ils soient au repos ou en mouvement, qui n'est pas influencé par des forces extérieures. La somme des énergies cinétiques de toutes ses parties est augmentée au cours d'un certain temps d'une quantité égale à la totalité du travail fait pendant ce temps par les forces mutuelles que nous pouvons imaginer agir entre ses points."[238]

Le paragraphe 271 définit un système conservatif:

> "Un système limité de corps est dit dynamiquement conservatif (...), si les forces mutuelles entre ses parties, produisent ou consomment la

---

Le travail fait sur un système quelconque de corps a son équivalent dans le travail fait contre les frottements, les forces moléculaires, ou la gravité, s'il n'y a pas d'accélération, mais s'il y a une accélération une partie du travail fait est utilisé pour vaincre la résistance à l'accélération, et l'énergie additionnelle ainsi développée est équivalente au travail ainsi dépensé. Ce qui est évident d'après le paragraphe 214.
Quand une partie du travail est fait contre les forces moléculaires, comme dans le cas de la tension d'un ressort; ou contre la gravité, comme lors de l'élévation d'un poids; la détente du ressort, la chute du poids, sont capables plus tard de restituer le travail dépensé à l'origine.
Mais du temps de Newton, et longtemps après, il était supposé que le travail était totalement perdu par friction; et cette affirmation se rencontre encore dans des traités récents faisant autorité." (W. Thomson and P. G. Tait, *Treatise on natural philosophy*, Oxford, 1867; vol. 1, part. 2, London, Cambridge University press, 1883; vol. 1, part. 1, London, Cambridge University press, 1896, § 268, p. 252).

[236]ibid., p. ii.

[237]ibid., p. 223.

[238]ibid., p. 251.

même quantité de travail pendant un mouvement quelconque, lorsqu'il passe d'une configuration à une autre."[239]

Cette définition étant posée, les auteurs indiquent les conditions que doit remplir un système pour être conservatif:

"La totalité de la théorie de l'énergie en sciences physiques est fondée sur la proposition suivante:
Si les forces entre parties d'un système matériel sont indépendantes de leurs vitesses, que ce soit la vitesse relative de ces parties ou la vitesse par rapport à de la matière extérieure au système, le système est conservatif."[240]

C'est, finalement, la condition bien connue pour laquelle il y a conservation des forces vives, qui est ici transposée à l'énergie.
L'énergie potentielle est elle-même définie comme suit (§ 273):

"L'énergie potentielle d'un système conservatif, dans la configuration où il se trouve dans un instant donné, est la quantité de travail effectué contre les forces intérieures requises pour l'amener d'une configuration préalablement choisie à la configuration à laquelle il se trouve."[241]

Le principe de d'Alembert a été retrouvé par Thomson et Tait comme conséquence du principe de l'action et de la réaction (§ 264), et le principe des vitesses virtuelles est une application de la conservation de l'énergie (§ 287). Alors la Mécanique de Thomson et Tait est construite. Elle est écrite dans le formalisme analytique de Lagrange-Hamilton auquel ils ont tenté de donner un contenu physique, au moyen notamment de la notion d'énergie.

C'est à une définition précise de l'énergie et des systèmes conservatifs que se livrent Thomson et Tait; ils restent malgré tout dans le cadre de la Mécanique newtonienne. Leur entreprise aboutit à faire entrer l'énergie dans le cadre de la Mécanique "rationnelle" classique. On ne peut dire qu'il fondent réellement leur Mécanique sur l'énergie même si celle-ci peut apparaître comme un élément important de l'ouvrage; les fondations en sont bien les définitions et les axiomes ou lois du mouvement de Newton. Thomson et Tait ne sont pas, comme ils le disent eux-mêmes dans cet ouvrage, des innovateurs mais des "restaurateurs"[242].

---

[239]ibid.
[240]ibid., p. 252.
[241]ibid., p. 253.
[242]ibid., p. II. Voici la phrase des auteurs: "We take the position of Restorers, and not Innovators."

XIII . Conclusion du chapitre

A partir de l'étude précédente nous pouvons dégager les problèmes qui peuvent avoir conduit Boussinesq à formuler sa propre Mécanique vers 1872.

Montrons d'abord que la mécanique "rationnelle" classique, admirable sur le plan de la logique, est inadaptée à la Physique si l'on n'y inclut pas la conservation de l'énergie. Cette mécanique, celle qui se fonde sur les axiomes de Newton, et s'exprime au moyen d'une savante Analyse, montre ses limites vers le milieu du XIX° siècle. Les phénomènes les plus élémentaires, tels que le choc par exemple, semblent rétifs à ses explications, la force vive peut disparaître de ses équations sans que l'on en retrouve la trace ailleurs. En soi, ces problèmes peuvent sembler mineurs: pour expliquer les chocs, il conviendra de ne plus considérer les forces instantanées mais les impulsions. C'est ce que font Thomson et Tait en plusieurs endroits de leur "Traité de philosophie naturelle". Alors les discontinuités dans les fonctions analytiques qu'introduisaient les forces instantanée disparaissent; la disparition de la force vive pourrait être, après tout, une loi de la Nature. Mais ce dernier point ne saurait être soutenu, la découverte de la conservation de l'énergie, énergie qui se manifeste si souvent sous forme de force vive, suggère que celle-ci doit *dans la nature* se conserver. Il serait toutefois hasardeux d'ériger cette conservation de la force vive en loi; ce serait admettre que la Physique ne peut être énoncée qu'en des termes mécanistes et vraisemblablement atomistes, ce que tout le monde n'est pas disposé à admettre. Il convient donc de faire une place à l'énergie elle-même, sans trop en définir la nature.

Faire entrer l'énergie dans la mécanique "rationnelle" devient une nécessité si l'on veut rendre compte effectivement des phénomènes naturels. Dans l'ensemble des possibilités qu'ouvre la déduction analytique aux spéculations de la mécanique, le principe de conservation de l'énergie délimite un domaine qui a toutes les chances de correspondre au réel physique[243]*. Pour assurer l'adéquation entre la*

[243] C'est un vrai problème que de rendre compte, à la fois, de la conservation de l'énergie et de l'apparence des phénomènes physiques. La nature ne semble présenter que des phénomènes qui ne conservent pas l'énergie: tout mouvement s'épuise, les êtres vivants vieillissent, le rendement des machines est toujours inférieur à un. Plus grave sans doute, la conservation de l'énergie impose apparemment la réversibilité des phénomènes naturels: s'il n'y a pas de perte d'énergie rien ne s'oppose, *a priori*, à ce qu'une réaction chimique se fasse dans les deux sens, et ainsi un être vieux pourrait rajeunir. Cette question de la réversibilité des phénomènes naturels préoccupe l'ensemble des physiciens. Thomson et Tait supposent que cette conservation absolue de l'énergie a lieu si l'on prend en compte l'ensemble des phénomènes qui se produisent. Ils écrivent:

Mécanique et la Physique, il faut faire figurer à côté des autres grandes lois de conservation, celle de la conservation de l'énergie.

Montrons maintenant que si l'on se place dans le cadre d'une physique atomiste, ce qui est le cas de Boussinesq[244], la définition de l'énergie par la mécanique habituelle présente des difficultés à cause de l'utilisation de la notion de force causale. Si l'on considère que la matière est formée d'atomes que l'on peut représenter par des points matériels, alors on peut identifier l'énergie cinétique de chaque atome à la demi-force vive, et rendre compte de l'énergie potentielle par un travail. Ainsi la notion d'énergie semble superflue, une simple commodité que l'on se donne, une fois que l'on a reconnu que le travail et la force vive ne peuvent ni se créer ni s'anéantir. La mécanique précédente, si on veut l'appliquer au réel, suppose que l' on connaisse la nature des forces qui s'exercent entre atomes, ou que l'on renonce, comme c'est le cas en thermodynamique, à fonder le raisonnement, effectivement, sur l'atome qui devient une image commode sans grand rapport avec la réalité. On ne parlera alors que de variations d'énergie potentielle, et donc de travail. La présentation est cohérente mais difficilement applicable à la mécanique céleste par exemple, qui est construite sur la notion de force de gravitation universelle. L'explication et même la description physique de la nature se fractionne en autant de théories qu'il y a de domaines de la physique. C'en est fini du rêve d'une grande explication unitaire et mécaniste de l'Univers. Pour échapper à cet écueil, on doit renoncer à fonder la mécanique sur la force, que ce soit de droit ou de fait.

L'abandon de la force en tant que moyen explicatif de la Physique s'impose pour les raisons de cohérence interne de cette science (comme nous l' avons vu dans ce chapitre aux paragraphes II . 1 et II . 2). Il faut aussi renoncer à utiliser la force si l'on veut préserver l'interprétation unitaire et atomiste de la nature.

Alors, la solution qui apparaît est de fonder la mécanique sur la conservation de l'énergie elle-même. Car l'énergie, entité multiforme,

---

"Dans la nature, la condition hypothétique du § 271 (systèmes conservatifs) est apparemment violée dans toutes les circonstances du mouvement (...). Mais c'est seulement lorsque les minuscules invisibles mouvements entre petites particules, peut-être les ultimes molécules de matière, qui constituent la lumière, la chaleur, le magnétisme, l'électricité, et les forces intermoléculaires de l'affinité chimique, sont prises en compte, en même temps que les mouvements palpables et les forces mesurables que nous connaissons par l'observation directe, que nous pourrons reconnaître le caractère universellement conservatif de toute action dynamique et percevoir l'existence du principe de réversibilité, y compris en ce qui semble devoir le violer." (W. Thomson and P. G. Tait, *Treatise on natural philosophy*, 1° éd., Oxford, 1687, vol 1, part, 1, London, Cambridge University press, 1896, § 275 et 278, pp. 253 à 255).

[244]La notion d'atome chez Boussinesq est complexe, et s'interprète dans le cadre de son épistémologie, comme on le verra au second chapitre.

intervient dans tous les domaines de la Physique comme le montre la "corrélation des forces physiques". Elle fait le lien, et de façon quantitative entre deux domaines, qui depuis Fourier, pouvaient sembler disjoints: les lois de la mécanique et celles de la Théorie de la chaleur. C'est ce qu'atteste la constance du coefficient d'équivalence de la chaleur et du travail. Puisque les diverses théories de l'énergie sont bien connues, sinon comprises, en France autour de l'année 1872, il semble que l'on puisse déduire de ce qui précède une nouvelle mécanique qui dépassera la "mécanique rationnelle"; mais cela suppose que l'on ait, de l'énergie potentielle, une idée aussi claire que celle que l'on peut avoir de l'énergie cinétique, ce qui est loin d'être le cas comme nous l'avons vu.

Boussinesq va construire une mécanique fondée sur la conservation de l'énergie, dont la force en tant que cause est exclue. Il donnera une interprétation du caractère impondérable de l'éther, élaborant ainsi une mécanique complète pour son époque. C'est ce que nous exposons dans les chapitres suivants.

DEUXIEME CHAPITRE

La Mécanique générale de Boussinesq

I . Les caractères distinctifs de la Mécanique générale de Boussinesq

I . 1 . Sources utilisées

Dans ce chapitre nous souhaitons décrire ce que Boussinesq appelle la " Mécanique générale", et qui est pour lui l'équivalent de ce que nombre de mécaniciens, comme Sturm par exemple, appellent la "Mécanique rationnelle". L'ambition de cette mécanique est de fournir une base solide, tant mathématique que philosophique à la Physique. Elle est fondée sur des conceptions épistémologiques constamment présentes, conceptions qui dureront toute la vie de Boussinesq[1].

Indiquons rapidement les sources que nous utiliserons ainsi que leur contenu. Boussinesq publie en 1928 un opuscule appelé "Epilogue", dernier tome de son Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences (de Paris)[2]. Annoncé en 1889 comme "Cours de Mécanique physique" par les éditeurs des "Leçons synthétiques de Mécanique générale"[3], il est finalement publié sous l'intitulé "Cours Physique mathématique"[4]. L'expression "Physique mathématique" a prévalu d'autant plus facilement que le cours de Boussinesq est pour l'essentiel sa théorie de la chaleur - extension des travaux de Fourier sur la propagation de la chaleur - complétée par ses travaux d'hydrodynamique, par un long développement de sa théorie de la

---

[1]Nous désignerons par le terme "épistémologie" l'ensemble des idées de Boussinesq qui se rapportent à la manière dont il conçoit la connaissance que l'homme peut avoir de la nature, et la manière dont celui-ci peut acquérir cette connaissance. Les idées proprement religieuses de Boussinesq ne seront qu'incidemment évoquées. Bien que catholique, il n'évoque Dieu, dans ses écrits scientifiques, que rarement, sauf dans ses toutes dernières œuvres.

[2]J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences,* t. 3, *Compléments aux théories de la chaleur, de la lumière, etc. Aperçus de Philosophie naturelle*, Paris, Gauthier-Villars, 1922.

[3]J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale,* Gauthier-Villars, 1889.

[4]Si nous nous reportons dans les années 1880, nous voyons que l'on attribue l'origine de la Physique mathématique à Poisson. Cette dénomination concerne surtout un "corps de doctrines" . Résal la présente comme suit:
"L'idée de constituer en corps de doctrines la physique mathématique est due à Poisson, qui comptait publier un traité complet sur ce sujet. Mais il n' a pu faire paraître que deux volumes de son ouvrage se rapportant respectivement à la capillarité (1831) et à la théorie de la chaleur. La physique mathématique, telle qu'on l'entend actuellement, doit, nous semble-t-il, être considérée comme ayant son point de départ dans la théorie de la capillarité de Laplace" (H. Résal, *Physique mathématique*, Paris, Gauthier-Villars, 1884, p.V).
Résal cite ensuite les branches de cette Physique mathématique avec leurs fondateurs: Fourier qui donne, avec sa théorie analytique de la chaleur, un appoint considérable à la Physique mathématique, Sadi Carnot qui fonde la thermodynamique, Fresnel qui crée la théorie actuelle de la lumière, Ampère qui crée l'électrodynamique, et enfin l'élasticité dont la paternité est attribuée à Navier.

lumière, et enfin par ses conceptions philosophiques[5]. L'"Epilogue" est en quelque sorte le testament philosophique de Boussinesq. C'est la réflexion d'un homme auquel le pouvoir sur l'époque échappe, mais qui garde ou feint de garder espoir. Au sujet des nouvelles théories physiques (relativité einsteinienne en particulier), il écrit:

> "On peut sérieusement espérer qu'il ne restera, dans quelques années, de ces tendances négatives ou révolutionnaires (de la science), qu'assez peu de chose chez les vrais *savants*."[6]

Dans les précédents tomes de ce Cours de Physique mathématique, il a pris soin de rassembler les bases de sa mécanique ainsi que les principes philosophiques auxquels il croit. Cela en rend précieux les tomes trois[7] et quatre[8] dans lesquels il nous livre ses ultimes réflexions sur la Science. Ainsi nous dit-il du tome III de son œuvre:

> "les trois dernières (parties) sont consacrées à la philosophie naturelle et peuvent être regardées comme le fruit de cinquante ans de méditation de l'auteur sur les principes de la Mécanique physique ou réelle, ces principes qui ont rendu possible depuis maintenant près de trois siècles, l'application de l'analyse infinitésimale à la représentation et au calcul des phénomènes du monde extérieur ou Univers visible."[9]

Quant au tome IV, c'est pour l' essentiel une réécriture de textes philosophiques, publiés entre 1878 et 1880, privés de leur appareil mathématique. Nous avons là, dans ces trois tomes, l'épistémologie ultime de Boussinesq. Ce qui frappe dès l' abord c'est, depuis 1872, une continuité de sa pensée dans ses écrits tant scientifiques que philosophiques. On trouve la première affirmation de ses réflexions sur la Science dès 1873, dans une addition à ses "Recherches sur les principes de la Mécanique (...)"[10]. Boussinesq y défend sa "Théorie des

---

[5] Voir à ce sujet: G. Israël, *L'histoire du principe du déterminisme et ses rencontres avec les mathématiques*, in A. Dahan Dalmedico, J. L. Chabert, K. Chemla, *Chaos et déterminisme*, Paris, Seuil, 1992, pp. 262 à 267.

[6] J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences, Epilogue*, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

[7] J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences*, t. 3, *Compléments aux théories de la chaleur, de la lumière, etc. Aperçus de Philosophie naturelle*, Paris, Gauthier-Villars, 1922.

[8] J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences*, t. 4, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale, Paris*, Gauthier-Villars, 1922.

[9] J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences*, t. 3, *Compléments aux théories de la chaleur, de la lumière, etc. Aperçus de Philosophie naturelle*, Paris, Gauthier-Villars, 1922, p. VI.

[10] J. Boussinesq, *Recherches sur les principes généraux de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et la théorie des gaz parfaits,* Mémoires de

ondes lumineuses"[11]. Cette défense a lieu plus sur le terrain de l'épistémologie que sur celui de la physique pure, mais aussi, cette contre-attaque se fait en montrant que sa conception de ce qu'il nommera ensuite sa "Mécanique physique" - Mécanique appliquée à la matière réelle - est aussi cohérente que celle de ses adversaires. Il n'y a pas encore de système bien établi. Ce qui ressort pourtant, et qui perdurera jusqu' à la mort du Savant, c'est que la structure ultime de la matière est alors, et pour longtemps, inconnaissable. Ce que l'on peut connaître, ce sont des lois mathématiques. Pour Boussinesq, la connaissance totale de la nature est, pour l'instant, inaccessible à l'homme. Les mathématiques de l'époque sont à la fois le moyen et la limite de cette connaissance. L'Analyse, entre autres, n'est pas encore aussi étendue que la Nature, mais ce n'est pas seulement elle, l'instrument, qui se dérobe - elle est susceptible de perfectionnements - c'est l'esprit de l'homme qui, peut-être provisoirement, manque à cette tâche de compréhension. Le physico-mathématicien, conscient de ces limites, peut toutefois songer à appliquer les mathématiques, même à des questions qui jusque-là relevaient de la philosophie: le vivant, l'humain.

Dès le début de sa carrière Boussinesq a manifesté un goût très vif pour la réflexion philosophique. Mais il nous eut été impossible d'inférer les idées philosophiques de Boussinesq de la simple lecture de ses traités et articles strictement scientifiques, tout imprégnés qu'ils soient de réflexions épistémologiques, s'il ne nous avait pas donné le secours de ses écrits dits "philosophiques". Ceux-ci, édités autour de l'année 1880, fixent l' épistémologie avouée de Boussinesq. Que l'on ne s'y trompe pas, il considère certains de ses écrits qualifiés de philosophiques comme scientifiques et s'irrite lorsqu' on prétend métaphysique celui qui semblerait mériter le plus ce qualificatif: sa "*Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale*"[12], écrit en 1878. Ainsi se défend-il:

> "le mémoire que j'ai publié (...) a trouvé un accueil bienveillant et même en général l' approbation la plus expresse chez les philosophes (...) Mais, d'autre part, si des savants éminents en ont, eux aussi, bien compris la pensée et ont ainsi jugé sa publication opportune, plusieurs l'ont écarté, sous la prévention qu'il y serait fait emploi de mathématiques en dehors de leur domaine légitime (...) je crois donc

---

l'Académie des sciences et des lettres de Montpellier, 1872, Journal de Mathématiques pures et appliquées (Journal de Liouville), 18, 1873, pp. 305 à 360.

[11] J. Boussinesq, *Théorie nouvelle des ondes lumineuses*, C.R. 65, 1867, p. 235; Journal de Mathématiques pures et appliquées, 13, 1868, pp. 313 à 339.

[12] J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale"*, Lille, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, pp. 1 à 141 et 248 à 251, aussi, Paris, Gauthier-Villars, 1879.

utile de montrer de nouveau qu'il n'est pas un travail de métaphysique, mais un travail de science, une simple étude physico-mathématique, sur une importante question de philosophie naturelle qui préoccupe, depuis deux siècles, un grand nombre d'esprits."[13]

Suivant la manière de Boussinesq, cette démonstration ne prendra guère plus de trente-huit pages, avec un éclaircissement final d'une page. Il nous a donc semblé nécessaire de commencer l' étude de la Mécanique de Boussinesq, par un exposé de son épistémologie. Nous espérons ainsi rendre compréhensibles, en particulier ses conceptions de l'atome ainsi que sa confiance inébranlable dans la Mécanique classique. Principalement on peut dire que Boussinesq postule l'existence d'un monde "géométrique idéal", dont une approximation est réalisée par les composants de l' Univers sensible.

Une source inestimable de connaissance de la pensée de Boussinesq est constituée par la volumineuse correspondance qu'il entretient avec Saint-Venant, entre 1867 et 1886[14]. On y voit Boussinesq parfois en opposition avec Saint-Venant, mais toujours soucieux de pousser sa propre carrière...avec l' aide de ce dernier. Ce sont des documents qui ne donnent pas toutes les informations souhaitables sur la connaissance qu'avait Boussinesq des auteurs étrangers, en particulier G. Green, ou Helmholtz. Il y a là une lacune difficile à combler. Un autre document, peu connu, est non moins précieux; il s'agit d'une correspondance d'une dizaine de feuillets dans lesquels Saint-Venant critique ses "Recherches sur les principes de la Mécanique" de 1872, et sur lesquels se trouvent aussi les réponses de Boussinesq. Ce document fournit une sorte de résumé des principales idées épistémologiques de Boussinesq en 1875[15].

---

[13]J. Boussinesq, *Compléments à un mémoire, publié en 1878, sur la conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale"*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences,* Lille, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, pp. 332 à 370.

[14]J. Boussinesq et alii, *Papiers de Joseph Boussinesq, membre de l'Académie des sciences (1842- 1929),* Paris, Bibliothèque de l'Institut, MS. 4221 à 4228.
Particulièrement:
J. Boussinesq, A. de Saint-Venant et alii, *Correspondance du comte de Saint-Venant (de 1834 à 1885)*, 615 lettres, Paris, Bibliothèque de l'Institut, MS. 4226 et 4227.
Aussi:
J. Boussinesq et alii, *Divers documents*, Paris, Bibliothèque de l'Institut, MS. 4228.

[15]A. de Saint-Venant, J. Boussinesq, *Objections qui pourraient être faites au Mémoire de Monsieur Boussinesq: Recherche sur les principes de la Mécanique etc.*, Paris, Archives de l'Académie des sciences, fonds Saint-Venant, carton 2, page 16 de la bibliographie générale, 30 Juin 1875.
Ce document est constitué de feuillets dont chacun est divisé verticalement en deux parties. Sur la partie gauche Saint-Venant formule des critiques sur le Mémoire de Boussinesq de 1872, sur la partie droite Boussinesq y répond. Ces feuillets se trouvent parmi des articles de Saint-Venant, dans le fonds Saint-

A l'aide de ces documents, il est possible de s'assurer que les idées philosophiques de Boussinesq sont remarquablement constantes, et cela, semble-t-il, depuis 1868 jusqu'à sa mort en 1929. Nous examinons maintenant les aspects de la pensée de Boussinesq relevant de la Science positive[16].

I . 2 . Aperçu de la Mécanique générale de Boussinesq

Les "Leçons synthétiques de Mécanique générale"[17] sont une synthèse des principes qui, selon Boussinesq, fondent la Mécanique. Il paraissent après une série de textes où l'on peut en trouver l' ébauche[18]. La

---

Venant, et ne sont pas inclus dans la correspondance déposée à la Bibliothèque de l'Institut de France.

[16]Boussinesq utilise, en particulier dans sa correspondance avec Saint-Venant, l'expression "Science positive". Il n' en donne pas de définition, sinon que, dans les feuillets de 1875, il propose comme équivalent une science susceptible "d'une discussion en règle". Nous pensons que par "Science positive" Boussinesq entend une Science basée sur des principes souvent induits de l'expérience, et construite à l'aide de déductions exprimées mathématiquement, et sans doute contrôlables par l'expérience. Cournot propose la définition suivante pour la Science positive:
"Si l'on y fait attention, l'on verra que, pour rendre compte exact de la dénomination sciences positives, dont on fait aujourd'hui un si fréquent usage, il faut entendre par là les sciences dont les résultats sont, comme ceux des mathématiques, susceptibles d'être contrôlés par l' expérience" (A. A. Cournot, *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'Algèbre et la Géométrie*, Paris, Alger, Hachette, 1847, p. 356).

[17]J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889.

[18]Ce sont par ordre chronologique:

J. Boussinesq, *Note 3, Où sont établies des relations générales et nouvelles entre l'énergie interne d'un corps, fluide ou solide, et ses pressions ou forces élastiques*, in *Théorie nouvelle des ondes liquides périodiques*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France (Mémoire des savants étrangers), 20, 1872, pp. 509 à 615, Note 3 aux pages 584 à 599.

J. Boussinesq, *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoires de l'Académie des sciences et des lettres de Montpellier, 1872, Journal de Mathématiques pures et appliquées (Journal de Liouville), 18, 1873, pp. 305 à 360.

J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, pp. 1 à 141 et 248 à 251, particulièrement pp. 35 et 45 à 48, aussi, Paris, Gauthier-Villars, 1879. Boussinesq signale (*Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences*, Compléments au tome 3, Paris, Gauthier-Villars, 1922, p. XXIII) qu'il existe une édition de 1878 de ce texte mais qu'elle a disparu dans l'incendie de l' Hôtel de Ville de Lille durant l'occupation allemande pendant la première guerre mondiale.

J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889.

J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences,* t. 1, Paris, Gauthier-Villars, 1901, pp. 25 à 31.

J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences,* t. 3, Paris, Gauthier-Villars, 1901, pp. 247 à 302.

définition que Boussinesq y donne de la Mécanique fournit déjà de nombreuses indications sur sa pensée:

> "L'esprit humain, en observant les phénomènes naturels, y reconnaît, à côté de beaucoup d'éléments confus qu'il ne parvient pas à débrouiller, un élément clair, susceptible par sa précision d'être l'objet de connaissances vraiment scientifiques. C'est l' élément géométrique, tenant à la localisation des objets dans l' espace et qui permet de se les représenter, de les dessiner ou de les construire de manière idéale."[19]

De là, il suit une définition de la Mécanique:

> "D'une manière générale, l' étude du mouvement, des changements de lieu éprouvés par les corps, se nomme la Mécanique."[20]

Cette définition est presque analogue à celle que donne Saint-Venant au début de ses "*Principes de Mécanique fondés sur la cinématique*":

> "La Mécanique traite du mouvement des corps ou du changement de place de leurs points."[21]

> "La Statique en est la partie relative au cas spécial où s'annule le mouvement, c'est-à-dire où persiste la situation et, par suite, la figure des corps. (...) Et, en opposition à la Statique, on appelle Dynamique l'étude propre du mouvement."[22]

Dynamique et statique ne sont pour Saint-Venant que deux aspects de la cinématique. Les similitudes entre la présentation de la mécanique par Saint-Venant et Boussinesq sont ainsi nombreuses. On peut se douter, ce qui est confirmé par la suite, que la force, au sens causal du terme, ne jouera qu'un rôle mineur dans la Mécanique de Boussinesq. Toutefois ce n'est pas exactement sur la cinématique que Boussinesq va fonder sa mécanique. Ce qui lui importe, c'est de décrire le réel. Il mettra donc au premier plan, des principes qui peuvent s'exprimer cinématiquement ou géométriquement (le principe de l'indépendance des mouvements simultanés; le principe de conservation de l'énergie vu comme équivalent de celui de l'isotropie de l'espace). Ces lois doivent être aussi des lois expérimentales. Comme pour Saint-Venant, il y a chez lui subordination de la statique à la dynamique.

---

[19] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 1.
[20] ibid., p. 2.
[21] A. de Saint-Venant, *Principes de Mécanique fondés sur la cinématique*, Paris, Bibliothèque de l' Institut de France, in 4° M 681 D, t. IV, n° 19, 1851, p. 1.
Autre édition: A. de Saint-Venant, *Principes de Mécanique fondés sur la cinématique*, Paris, Mallet- Bachelier, 1851.
[22] ibid., p. 2.

Nous allons décrire rapidement les composantes principales de cette mécanique et indiquer du même coup les différentes parties de ce chapitre.

La Mécanique de Boussinesq est fondée sur la Géométrie, qui est pour lui la science des figures que l'on peut concevoir dans l'espace.

Boussinesq se désigne lui-même, et désigne les autres physico-mathématiciens, par le nom de "géomètre". Dans ses "*Principes de mécanique etc.*", Saint-Venant montre bien ce que peut être une approche géométrique de la Mécanique. Il commence par définir les mouvements au moyen de segments orientés, indépendamment des circonstances physiques dans lesquelles le mouvement peut se produire; nous sommes alors dans le domaine de la cinématique où les figures géométriques jouent un grand rôle. La projection de ces mouvements sur un axe, jointe à l'application de la "convention relative aux signes", fournit des relations "arithmétiques". Ainsi géométriquement définies, vitesse et accélération donnent lieu à la cinématique. Saint-Venant ramène l'ensemble des lois de la Mécanique à une seule, celle de l'action entre points matériels uniquement fonction de leur distance. De là, par la considération des seuls mouvements, il construit, dit-il, sa Dynamique et sa Statique.

Boussinesq se rattache aussi à cette tradition "géométrique", et qui s'oppose à la mécanique usant des fonctions de Lagrange et faisant plus appel au calcul qu'à la déduction à partir de figures. Pour Boussinesq, l'utilisation de dérivées et intégrales à l'étude des projections sur des axes des figures de la géométrie, constitue son Analyse. Plus précisément, le raisonnement de Boussinesq s'appuie sur des figures, sur des considérations de symétrie, mais aussi il utilise constamment des techniques proprement analytiques, telles que la décomposition en série de Taylor. Cette méthode, à la fois géométrique et analytique, aussi utilisée par Saint-Venant et bon nombre de physico-mathématiciens, est diffusée auprès des ingénieurs par Flamant dans son "Encyclopédie des travaux publics"[23]. Malgré sa référence à la "fluxion", Boussinesq utilisera pourtant constamment, ce qu'il appelle la notation de Leibniz, c'est-à-dire la notation différentielle. Il n'en reste pas moins que cette Analyse n'est pour lui qu'une partie, la plus simple, de la géométrie:

> Si l' analyse pure, la théorie de la quantité (réelle) en général, est plus simple, plus uniforme dans ses procédés, que la géométrie ordinaire, cela est dû précisément à ce que cette quantité est exprimable par une ligne, et par suite à ce qu'elle n'a qu'une dimension ou ne varie que dans un sens et dans les sens opposés, à la place des trois

---

[23] A. Flamant, *Mécanique générale*, in *Encyclopédie des travaux publics* , 32, Paris, Bernard Tignol, 1888.

dimensions de l' étendue et de la multiplicité infinie des rapports qu'elles amènent."[24]

Cette Analyse est donc une sorte de "géométrie analytique" que l' on peut référer à Descartes, comme le fait Cournot[25], mais une "géométrie analytique" où le raisonnement sur les figures mêmes tiendrait une grande place. A l'opposé de cette méthode, on peut voir celle qu'utilise Laurent dans le second tome (1870) de son "Traité de Mécanique rationnelle"[26].

---

[24] J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences,* Lille, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 268.

[25] A. A. Cournot, *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'Algèbre et la Géométrie*, Paris, Alger, Hachette, 1847.

[26] A la manière de Thomson et Tait, Laurent commence par utiliser le principe de d'Alembert et celui des vitesses virtuelles, puis il déduit les formules de Lagrange, leur forme canonique, et enfin donne le principe de moindre action. Alors que Boussinesq résout en général les problèmes en débutant par la considération de figures géométriques, Laurent préconise la méthode suivante:

"Ainsi donc, en thèse générale, pour résoudre un problème de Dynamique, on commencera par écrire les équations différentielles du mouvement. Il y a cependant quelques cas d'exception à cette règle. Par exemple, si le système dont on étudie le mouvement était à liaisons complètes, une seule équation suffirait à déterminer le mouvement. Cette équation serait fournie par le principe des forces vives (en supposant bien entendu les liaisons indépendantes du temps). Quelquefois le principe des aires, joint à celui des force vives suffira à résoudre une question" (H. Laurent, *Traité de Mécanique rationnelle*, Paris, t. 2, Gauthier-Villars, 1870, p. 24).

Il n'est pas inutile de remarquer ici que Laurent précise que le principe des forces vives ne peut être utilisé seul que dans le cas des liaisons complètes (un seul degré de liberté). Fonder l'ensemble de la Mécanique sur la conservation de l'énergie exige que l' on suppose que tous les systèmes sont, lorsqu'on va au fond des choses, conservatifs, et que l'on peut en déduire la relation fondamentale de la dynamique (deuxième loi de Newton).

De même Cournot donne une idée de l'analyse utilisée par les géomètres, d'où les figures ont totalement disparu:

"Les géomètres entendent par analyse dans l' acception du terme la plus large et la plus usitée l' algèbre et toutes les branches du calcul des grandeurs, à l'aide de signes généraux qui ont fait disparaître toute trace de ce qu'il y avait de spécial et de particulier dans la nature de ces grandeurs: de manière qu'on ne retient même le plus souvent, parmi les propriétés des nombres, que celles qui peuvent s'étendre à des valeurs quelconques, entières ou fractionnaires, rationnelles ou incommensurables. (...) On devra appeler en conséquence, et l'on appelle effectivement géométrie analytique une méthode pour résoudre les problèmes de géométrie; pour démontrer certaines séries de propositions géométriques, en exprimant d'abord, à l' aide d'une synthèse préliminaire, les propriétés caractéristiques de l'objet que l'on considère: de façon que toutes les autres propriétés puissent s'en déduire par les seules forces du calcul, et qu'on puisse ensuite faire abstraction de l'objet considéré, pour s'appliquer entièrement à résoudre les difficultés de calcul s'il s'en présente. On appellera mécanique analytique une méthode pour traduire d'un seul coup en analyse les conditions d'équilibre ou de mouvement, tenant à la nature spéciale des grandeurs qui figurent en mécanique: de manière qu'après cette traduction préliminaire on n'ait plus qu'à appliquer les règles générales du calcul; et ainsi de suite", in A. A.

Dans ses "Leçons synthétiques de Mécanique générale" (1889), pour les besoins de son exposé, Boussinesq divise sa Mécanique en deux parties: la Mécanique générale et la Mécanique physique, les principes de la première servant de base à la seconde[27]:

"(...) les principes les plus essentiels de la Mécanique rationnelle, ou qui forment ce qu'on a quelquefois nommé la Mécanique générale, serviront aussi de base à la Mécanique physique. Mais, comme la manière de les y considérer et les conditions de leur emploi se trouvent assez différentes, il nous sera utile de consacrer d'abord quelques Leçons à en faire une revue d'ensemble."[28]

Nous adopterons cette division entre Mécanique générale et Mécanique physique. Celle-ci fera l'objet du troisième chapitre. Disons simplement pour l'instant que la Mécanique physique est une Science qui se veut adaptée, très précisément, à la description du réel physique, la Mécanique générale étant plutôt l' établissement des principes généraux de la Physique en général, Physique qui, pour Boussinesq, est réductible à la Mécanique.

Saint-Venant, dans l'exposé de sa Mécanique, fait intervenir un "grand principe physique", celui des actions entre points matériels uniquement fonction de la distance. C'est là se référer à la Nature pour construire la Mécanique. De même Boussinesq va devoir faire appel à des lois induites de l'observation. La "Mécanique générale" de Boussinesq n'est pas de ces théorie abstraites qui laissent à d'autres réflexions le soin d'investir le réel. Cette mécanique, la Mécanique générale, est une mécanique du réel, qui tire ses principes de la considération de l'expérience et des résultats obtenus par la Physique au cours des temps. La Mécanique de Boussinesq est une mécanique de l' atome, d'atomes agissant les uns sur les autres. En ce sens on peut voir cette "Mécanique générale" comme une actualisation de la Mécanique Physique de Poisson. Nous allons rappeler ici l'acte fondateur de cette théorie, il se trouve dans son mémoire de 1828 sur l' équilibre des corps élastiques:

Cournot, *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'Algèbre et la Géométrie*, Paris, Alger, Hachette, 1847, pp. 382 et 383. Cette conception de l'Analyse appliquée à la géométrie et à la mécanique s'oppose à celle de Boussinesq pour qui la figure reste l'objet de référence par excellence. On peut dire que souvent la démonstration analytique n'est là, pour Boussinesq, que pour confirmer ce que l'intuition avait montré.

[27]Aussi dans: J. Boussinesq, *Considérations sur le but la méthode et les principaux résultats de la Mécanique physique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences,* Lille, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, pp. 277 à 310.

[28] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p 4.

"(...) Lagrange est allé aussi loin que l'on puisse concevoir, lorsqu'il a remplacé les liens physiques des corps par des équations entre les coordonnées de leurs différents points: c'est là ce qui reste de la *mécanique analytique;* mais à côté de cette admirable conception, on pourrait maintenant élever la mécanique physique dont le principe unique serait de ramener tout aux actions moléculaires qui transmettent d'un point à un autre l' action des forces données et sont l'intermédiaire de l' équilibre. De cette manière, on n'aurait plus d'hypothèses spéciales à faire, lorsqu'on voudra appliquer les règles générales de la mécanique, à des questions particulières."[29]

La Mécanique générale de Boussinesq reprendra cette même ambition de construire la mécanique à partir des actions moléculaires, ou plutôt atomiques. Pour Boussinesq, en cela reflet de son temps, ce sera toutefois l'énergie qui rendra compte des actions entre atomes[30]. Sa conception de l'atome, pour autant qu'elle soit unique, ne trouve sa cohérence que si l'on envisage les rapports que, pour lui, entretiennent la réalité et la Géométrie. Quant à son expression, elle varie en fonction du lecteur auquel elle s'adresse: Saint-Venant dans des lettres, étudiant dans les "Leçons synthétiques", ou lecteur plus philosophe dans le troisième tome de son cours de Physique mathématique.

De là nous pourrons commencer à décrire cette Mécanique générale. Ce sont essentiellement dans les "Leçons synthétiques de Mécanique générale" (1889) et dans les "Recherches sur les principes de la Mécanique etc." (1872) que nous en trouverons une description précise. Elle repose sur deux principes: celui de l'indépendance des mouvements simultanés, et celui de la conservation de l'énergie. Le premier, que Boussinesq attribue à Galilée, revient à ce que l'on a appelé depuis, le principe de la relativité galiléenne. Le second, celui de la conservation de l'énergie, est pour Boussinesq, du moins dans le mémoire de 1872, une loi expérimentale. Toutefois, dans les "Leçons synthétiques etc." de 1889, il apparaît plutôt comme une conséquence de l'isotropie de l'espace. La Mécanique générale est fondée sur ces deux principes exprimables par des grandeurs géométriques, auxquelles on ajoute le temps. Boussinesq ne s'explique guère sur le choix de ses principes fondateurs. Nous évoquerons dans ce chapitre plusieurs hypothèses pouvant justifier ce choix.

La formulation de ces principes de base est presque la même dans les divers textes que l'on peut consulter. Les commentaires qui les accompagnent varient. Expliquer en détail les raisons de ces variations suppose une étude approfondie de certains aspects de la Mécanique

---

[29] S. D. Poisson, *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*, Annales de Chimie et de Physique, 37, 1828, p. 341.

[30] D'autres similitudes existent entre les mécaniques de Poisson et de Boussinesq, en particulier la volonté de prendre en compte les propriétés réelles des corps, telles que leur élasticité. Nous traiterons plus en détail ce point dans le troisième chapitre.

physique de Boussinesq, ce qui sera fait seulement dans le troisième chapitre. Nous indiquerons donc brièvement dans le présent chapitre les résultats auxquels nous pensons être parvenus. La question sur laquelle l'opinion de Boussinesq varie est celle d'actions moléculaires particulières qu'il appelle "actions de présence". C'est une question qui se pose surtout dans la théorie de l' élasticité. Cette théorie constitue la majeure partie de la Mécanique physique de Boussinesq, en fait toute sa Mécanique physique sauf sa Thermodynamique. On ne peut donc traiter des actions de présence que dans le cadre de la Mécanique physique. Tenter une étude chronologique aurait conduit à disperser l'étude des principes de la Mécanique physique sur l'ensemble de notre travail. Nous n'avons donc pu mieux faire que d'anticiper une fois (note 331) dans ce second chapitre sur les résultats du troisième.

Ce que nous souhaitons montrer dans ce chapitre, c'est que Boussinesq arrive à dépasser les problèmes que nous avons vu se poser aux mécaniciens qui l'ont précédé: l'usage et la définition de la force et de l'énergie potentielle. S'il parvient à dépasser ces difficultés, c'est par l'utilisation d'une épistémologie particulièrement cohérente. Cette épistémologie lui donne l'assurance nécessaire pour pousser à l' extrême ses travaux de Physique mathématique. Ainsi pense-t-il résoudre mathématiquement le problème de la liberté humaine et du déterminisme, ceci avec les même concepts que ceux qu'il utilise pour décrire finement, par exemple ... la forme d'une goutte d'eau lors de sa chute. Le texte de Boussinesq sur la conciliation du déterminisme et de la liberté humaine est sans doute celui qui est le plus connu. G. Israël[31] en a signalé la portée et les limites, et M. Zerner l'origine et la réception par la communauté savante de l' époque[32]. Nous n'évoquerons ce texte que dans le cadre de la physique; en effet on y trouve une des rares allusions, sinon la seule, de Boussinesq au second principe de la Thermodynamique.

La Mécanique générale de Boussinesq est fermement adossée à une épistémologie qui, pour partie, est une théorie de la géométrie. On ne peut pas dire que la Mécanique générale soit rigoureusement déduite de cette épistémologie: d'autres composantes interviennent, comme par exemple les apports de la Mécanique physique. Toutefois, les réflexions de Boussinesq sur le raisonnement géométrique, la validité de celui-ci, les rapports entre la géométrie et la réalité physique, sous-tendent en quelque sorte l' exposé de la Mécanique générale. Il nous a semblé utile d'exposer d'abord ces conceptions épistémologiques, pour pouvoir souligner ensuite leur intervention dans l'exposé de la Mécanique

---

[31] G. Israël, *L'histoire du principe du déterminisme et ses rencontres avec les mathématiques*, in A. Dahan-Dalmedico, J. L. Chabert, K. Chemla, *Chaos et déterminisme*, Paris, Seuil, 1992, pp. 262 à 267.

[32] M. Zerner, *Origine et réception des articles de Boussinesq sur le déterminisme*, in *Contra los tiranos de la rutina*, Madrid, Ediciones de la comunidad de Madrid, 1992, pp. 206 à 213.

générale. Nous pensons ainsi pouvoir éclairer certains aspects de sa mécanique, et notamment ses conceptions de l'atome, de l'énergie, et de la force. La partie plus scientifique de la Mécanique générale est remarquable par la cohérence, presque parfaite, de l' enchaînement de ses idées; c'est cet aspect que nous mettons en évidence.

Les paragraphes dont la numérotation commence par II traiteront plus particulièrement de l'aspect épistémologique de la pensée de Boussinesq; ceux commençant par III seront plutôt consacrés à la Mécanique générale elle-même.

Très tôt, Boussinesq affirme certaines de ses convictions épistémologiques. Déjà dans une lettre à Saint-Venant du 14 Juillet 1868, il expose, à propos des atomes, la distinction qu'il fait entre ce que conçoit notre esprit, les abstractions géométriques et la réalité physique. Ce n'est pourtant qu'en 1879 et en 1880 qu'il va les réunir dans un ensemble qu'il reproduira presque sans modification dans le tome 3 de son Cours de Physique mathématique (1921). Précisons le cadre dans lequel sont écrites ses réflexions sur la philosophie des sciences.

II . Les aspects épistémologiques de l'œuvre de Boussinesq

II . 1 . La mise en question de la Mécanique classique par les géométries non euclidiennes

Boussinesq publie en 1880, à la suite de sa monumentale "Conciliation du déterminisme mécanique (...) et de la liberté morale", une "Etude sur divers points de la philosophie des sciences"[33]. Il est probable que cette publication a été provoquée par la parution, en 1879, d'un essai du géomètre belge de Tilly sur les principes de la géométrie et de la mécanique[34]. Boussinesq cite effectivement cet essai dès les premières lignes de son "Etude sur divers points de la philosophie des sciences" et le qualifie de remarquable. Par bien des aspects - par exemple sa conception des mouvements relatifs et absolus - de Tilly se rapproche de Boussinesq, mais il s'oppose à lui sur la question des géométries non euclidiennes et sur la conception de la Mécanique elle-même. Des extraits de l'article du géomètre de Tilly nous ont paru propres à faire ressortir la pensée de Boussinesq. Nous exposons quelques idées du premier, connu comme un savant qui accepte les géométries non euclidiennes.

M. Panza décrit ainsi les conceptions de ce mathématicien:

---

[33] J. Boussinesq, *Du rôle et de la légitimité de l'intuition géométrique,* in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences,* Mémoires de la société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, pp. 255 à 380.

[34] de Tilly, *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique,* Bordeaux, Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 3, 2° série, 1879.

"Le but de ce dernier (de Tilly) est d'abord celui d'établir un système d'axiomes qui exprime les conditions nécessaires et suffisantes d'un "système quelconque de géométrie". La clôture déductive de ces axiomes constituerait une sorte de géométrie minimale (et donc générale): aucune théorie ne pourrait être qualifiée de "géométrie" qu' à la condition d'être équivalente à ce système, ou d'être une extension cohérente de celui-ci, résultat de l'introduction de nouveaux axiomes.

La question qui est ainsi posée est celle des conditions de possibilité d'une géométrie. Et cette question, qui est ici formulée en termes strictement "mathématiques", trouve sa réponse dans l' exhibition d'un seul axiome (dit "axiome principal") dont la clôture déductive constitue la plus générale des géométries, comprenant comme seuls cas particuliers, les géométries d'Euclide, de Lobatchevsky et de Riemann."[35]

Ainsi de Tilly fait de la géométrie euclidienne une géométrie parmi d'autres, mais ceci sur le plan de la logique. Si l'on passe maintenant à l'application de la géométrie à la Mécanique, il en est autrement:

"Les études précédentes nous ont montré que le système de géométrie correspondant à la réalité physique, s'il existe rigoureusement, ne peut être que l'un des trois systèmes d'Euclide, de Riemann ou de Gauss."[36]

Il s'agit maintenant de savoir laquelle de ces trois théories doit être effectivement utilisée pour décrire la réalité physique:

"Sortant des abstractions, et rentrant dans la réalité physique, l'expérience nous montre d'abord qu'il existe une géométrie, applicable partout et toujours, c'est-à-dire que toutes les mesures directement prises vérifient l'une des géométries qui sont

---

[35] M. Panza, *L'intuition et l' évidence. La philosophie kantienne et les géométries non euclidiennes; relecture et discussion*, in *Les savants et l' épistémologie vers la fin du XIX° siècle*, sous la direction de M. Panza et J. C. Pont , Paris, Blanchard, 1995, pp. 39 à 77, extrait à la page 58.

[36] de Tilly, *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique*, Bordeaux, Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 3, 2° série, 1879, p. 161.

M. Panza, ainsi que Boussinesq, ne parlent pas de la géométrie de Gauss mais de celle de Lobatchevsky. Mais de Tilly classe les géométries en fonction des axiomes qu'elles contiennent. Il considère trois axiomes fondamentaux. 1° Premier axiome ou axiome principal: la distance comme notion première et irréductible (p. 18). 2° Deuxième axiome ou premier axiome secondaire (de simplification): augmentation indéfinie de la distance de deux points; la distance de deux points de l'espace n'a pas de limite supérieure et peut augmenter indéfiniment (p. 24). 3° Troisième axiome ou second axiome secondaire (de simplification): parallèle unique; par un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite (p. 71). A partir de ces trois axiomes, il classe les diverses géométries: Riemann (axiome 1), Gauss (axiomes 1 et 2) , Euclide (axiomes 1, 2, et 3).

théoriquement possibles. Elles les vérifient même toutes les trois, dans les limites de nos moyens de mesure, c'est-à-dire qu'elles s'adaptent sans restriction aux formules de la géométrie euclidienne (...)"[37]

Une façon de savoir quelle est la géométrie qui s'applique à la nature est de déterminer quelle est la somme des angles d'un triangle, que celui-ci soit grand ou petit:

"Or, dans les plus grands triangles on n'a jamais trouvé la moindre différence entre leur somme et deux angles droits; d'où l'on doit conclure que si rigoureusement parlant, la géométrie était celle de Gauss ou celle de Riemann, du moins le paramètre A ou D (paramètres caractéristiques de chacune de ces géométries) serait tellement grand, que les résultats pratiques coïncideraient exactement avec ceux que l'on tirerait de la géométrie d'Euclide. Cette dernière peut d'ailleurs être aussi la seule vraie; donc elle suffit, dans tous les cas, à tous les besoins, et étant beaucoup plus simple que les autres, elle doit logiquement être adoptée.

C'est pourquoi nous écarterons, d'une manière définitive, à partir de ce moment, les autres systèmes, bien qu'il soit évidemment possible d'en poursuivre l' exposition dans la Mécanique".[38]

Pour de Tilly, trois géométries sont applicables au réel, mais la géométrie euclidienne est simple et finalement suffisante pour décrire le réel. Cette dernière géométrie n'a pas un caractère de nécessité ou de vérité, elle se distingue surtout par sa commodité. Il y a donc une dissociation entre la géométrie et le réel; et si nous considérons l'application que l'on fait de l'analyse à la géométrie, et donc à la mécanique, les déductions mathématiques deviennent contingentes.

Mais il y a plus. De Tilly, dans une note de bas de page, va critiquer très précisément le type de Mécanique que Boussinesq a exposé dans son mémoire de 1872 sur les principes de la Mécanique. Boussinesq, en particulier, rejette la notion causale de force, notion que de Tilly défend ainsi:

"Plusieurs géomètres rejettent cette conception de la force comme une grandeur *a priori*. Pour eux, la force n'est que le produit de la masse par une accélération géométrique, de même que la vitesse, la force vive, la quantité de mouvement, sont définies aujourd'hui par de simples produits ou quotients."[39]

---

[37]ibid., p. 162.
[38]ibid., p. 163.
[39]ibid., p. 170.

Boussinesq considère la force comme "le produit de certains coefficients constants appelés *masses,* par des accélérations"[40]. Telle est aussi la conception de Saint-Venant; de Tilly poursuit:

> "Mais nous ne croyons pas pouvoir nous rallier à cette idée pour les raisons suivantes:
>
> 1° Elle n' explique pas ce que l'on entend par des forces se faisant équilibre, et ne produisant actuellement aucune accélération."[41]

Boussinesq traitera explicitement de ce problème dans ses "Leçons synthétiques de Mécanique générale". De plus, pour lui, le problème des forces se faisant équilibre ne se pose pas, les forces n'étant qu'une façon commode de traiter mathématiquement les problèmes, ce qui importe c'est la nature du mouvement. Dans le cas de forces se faisant équilibre, le mouvement est uniforme. Et de Tilly de poursuivre:

> " 2° Quand on rejette l'idée de force, on est obligé d'introduire une idée spéciale pour définir la masse, et la notion de masse ne nous paraît pas beaucoup plus simple que celle de force."[42]

La remarque est ici pertinente, le coefficient appelé masse par Boussinesq en 1880 n'est pas précisément défini, il le sera dans ses "Leçons synthétiques de Mécanique générale" publiées en 1889. De Tilly continue:

> "3° Nous ne voyons pas clairement comment on remplace, dans ce système, les actions moléculaires et la gravitation universelle."[43]

Boussinesq a pourtant traité le problème dans ses "Recherches (...) " de 1872, et plus généralement dans tous ses travaux de Mécanique physique. De Tilly ajoute:

> "4° Enfin, sans la notion première de force, nous ne voyons plus le moyen de définir le mouvement absolu et l'immobilité, même en rotation, et sans ces dernières définitions les explications données des expériences relatives au mouvement diurne du globe nous paraissent manquer de base."[44]

---

[40] J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, p. 124.

[41] ibid.

[42] ibid.

[43] ibid.

[44] ibid.

Boussinesq donne une réponse à cette question, mais dans le cadre de son épistémologie propre, dans son mémoire sur la légitimité de l'intuition géométrique. Il faut bien le reconnaître, c'est plus une réponse de principe qu'une réponse du domaine de la science positive[45].

L'apparition des géométries non euclidiennes remet en cause l'unicité de la description géométrique du réel; la science emblématique de la Mécanique classique, l'Astronomie, serait touchée. Par contre-coup, c'est évidemment contester la Physique mathématique, en particulier celle de Boussinesq, pour qui la géométrie, et donc l'analyse, sont autant un moyen d'exploration du réel que de description du réel[46]. S'il n'y a pas, en droit, une seule géométrie applicable à la nature, alors toutes les déductions mathématiques deviennent contingentes. La Mécanique, qui fait usage de la géométrie, devient elle-même contingente, il y a place pour diverses mécaniques. Les conclusions que l'on tire de la Mécanique sont elles aussi constamment révisables; toute science rationnelle devient impossible.

Boussinesq va montrer qu'il est insensé de croire qu'une autre géométrie que la géométrie euclidienne puisse s'appliquer à la nature. Aux raisonnements abstraits des géométries non euclidiennes, il opposera l'intuition géométrique, le sens des figures et du raisonnement géométriques profondément ancré dans l' esprit humain. En outre, de Tilly condamne certaines conceptions sur la Mécanique elle-même, conceptions que Boussinesq a fait siennes et qu'il a, en partie, exposées en 1872, et aussi en 1878, dans la "Conciliation du véritable déterminisme (...)". Aussi va-t-il répondre promptement sur le point des géométries non euclidiennes puisqu'il a déjà, en 1880, forgé sa Mécanique générale, qui récuse les idées du géomètre belge sur ce point.
Rappelons encore une fois, que nous sommes convaincus que pour l'essentiel, comme Boussinesq le dit à de Saint-Venant en 1875, les idées épistémologiques du premier étaient déjà presque fixées en 1869. Sous l'influence des nouvelles conceptions scientifiques, telles que la théorie cinétique des gaz ou la relativité, il sera conduit à préciser ses convictions scientifiques, mais pas à modifier ses conceptions philosophiques, comme en témoigne la reprise, en 1922, d'articles publiés en 1880. Cela nous autorise à choisir, dans l'œuvre de Boussinesq publiée entre 1872 et sa mort, les citations qui nous

---

[45]J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 1880, 8, 4° série, pp. 255 à 276.

[46]"Nous sommes convaincus dans la pratique que nos conceptions abstraites des grandeurs et des figures peuvent exprimer les faits naturels avec une exactitude très supérieure à celle que comportent les meilleures observations (...)", in J. Boussinesq, *Du rôle et de la légitimité de l'intuition géométrique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 260.

semblent les plus adéquates. Nous signalerons, le cas échéant, les modification survenues dans la pensée de l'auteur.

II . 2 . La défense de la géométrie euclidienne par Boussinesq

Dans le recueil de textes déjà cités, édités en 1880, Boussinesq semble répondre à l'Essai de de Tilly publié en 1879[47]. Jusqu'à la fin de sa vie Boussinesq s'opposera, et de façon violente, aux géométries non euclidiennes. Ainsi en 1922, il affirme "l'impossibilité d'utiliser les géométries non euclidiennes dans les sciences naturelles"; pour lui, mettre en doute l'"intuition euclidienne"[48]:

> "(...) équivaudrait, si l'on voulait raisonner de même dans l'ordre du réel, à supprimer presque tout ce qu'il y a de précis en physique et en histoire naturelle. Car on ne voit pas quelle règle formulable pourrait être opposée aux pires fantaisies, aux rêves les plus arbitraires, d'une imagination malade et incohérente, le jour où l' on accepterait en *géométrie réelle* les triangles (...) avec leur somme différent de deux droits (...)
> Il n'y aurait donc plus aucun moyen de distinguer, dans la figure des choses, la vérité de l'illusion, ni une philosophie correcte d'une sophistique malheureusement devenue, depuis quelques années, séduisante auprès des jeunes géomètres par la riche coloration de ses nuages, mais certainement décevante par l'impossibilité d'y rien construire de précis, d'y rien dessiner nettement, à moins de conventions compliquées et tout artificielles."[49]

Dans l'ouvrage d'où est extrait ce cri désespéré, Boussinesq fait paraître un texte où il défend, de façon plus argumentée, la primauté de la géométrie euclidienne[50]. Cet écrit, "Du rôle et de la légitimité de l'intuition géométrique", est une reprise *in extenso* de celui publié sous le même titre dans l' "Etude sur divers points de la philosophie des sciences" de 1880[51]. Boussinesq y donne les raisons de sa foi dans la géométrie euclidienne et donc dans la mécanique classique.

---

[47] J. Boussinesq, *Addition à une étude concernant divers points de philosophie des sciences: Sur l'impossibilité d'arriver aux notions géométriques par une simple condensation d'un grand nombre de résultats de l' expérience*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts, 8, 4° série, 1880, p. 371.

[48] J. Boussinesq, *Cours de physique mathématique, compléments au tome 3*, Paris, Gauthier-Villars, 1922, p. 96.

[49] ibid. Il y a dans les textes de Boussinesq d'autres diatribes contre les jeunes "géomètres" qu'il accuse surtout de rechercher plus l'originalité que la vérité.

[50] J. Boussinesq, *Cours de physique mathématique, compléments au tome 3*, Paris, Gauthier-Villars, 1922, p. 111 à 129.

[51] J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de de l'agriculture et des arts de Lille, 1880, 8, 4° série, pp. 255 à 276.

L'enjeu de la défense de la géométrie euclidienne est d'une importance fondamentale dans la sauvegarde de la mécanique classique. Il s'agit de rendre intangibles les bases de la géométrie et donc de l'analyse, mais aussi, comme nous allons le voir, de sauver le principe de "similitude", garant de l' universalité - au sens d'"universalité" de la gravitation universelle - de la mécanique classique. Selon la compréhension de Boussinesq, les géométries non euclidiennes affirment que même dans la réalité il se peut, par exemple, que la somme des angles d'un triangle soit supérieure ou inférieure à deux droits, ce qui, pour le moins, met en cause l'universalité de la géométrie euclidienne:

> "En d'autres termes, la géométrie euclidienne est, à leur sens une première approximation, applicable en toute rigueur aux figures infiniment petites et , avec une exactitude suffisante, aux figures finies dont les dimensions ne dépassent pas certaines limites, qu'il appartient à l' expérience (jointe à la théorie) de fixer. En dehors de ces limites, la même géométrie usuelle peut au contraire, d'après eux, tomber complètement en défaut, ou conduit aux erreurs les plus grossières pour des figures assez grandes."[52]

Selon lui, c'est alors manquer au principe de similitude, en vertu duquel les figures semblables, quelles que soient leurs dimensions, gardent les mêmes propriétés, comme cela est, dans la mesure du raisonnable, vérifié par l' expérience. Indiquons d'abord ce qu'est ce principe de similitude, principe qui est à la base, non seulement de la géométrie, telle que la pratique Boussinesq, mais encore de la mécanique.

Le principe de similitude se rencontre dans certains ouvrages traitant de l'analyse au sens de Descartes (géométrie analytique) ou dans les ouvrages de mécanique rationnelle comme celui de Laurent[53]. Il est rapproché par Lecointe, astronome belge, du principe d'*homogénéité*, propriété caractéristique des équations traduisant analytiquement les idées géométriques, physiques ou mécaniques[54]. Si les relations analytiques, qui traduisent des lois générales sont homogènes (même unité et même degré pour chaque terme), elles doivent conserver la même forme logique à n'importe quelle échelle. En effet ce changement d'échelle revient à changer d'unité, c'est-à-dire à multiplier chaque terme par un même facteur qui s'élimine du fait de l'homogénéité des équations. De même les propriétés des figures géométriques, traduites par des relations analytiques générales, doivent être valables à n'importe quelle échelle. C'est ce qu'exprime Lecointe:

---

[52]ibid., p. 262.

[53]H. Laurent, *Traité de mécanique rationnelle*, t. 2, Paris, Gauthier-Villars, 1870, pp. 322 à 326.

[54]L. Lecointe, *Analyse de Descartes*, Namur, Adolphe Wesmael, 1865, pp. 1 à 3.

> " (...) une figure géométrique construite à une certaine échelle, peut être traduite à une échelle différente sans cesser de posséder les mêmes propriétés principales; c'est-à-dire celles indépendantes de sa grandeur et ne concernant que sa forme logique. Or, une variation d'échelle correspond évidemment à un changement d'unité, donc *la loi d'homogénéité est traduite synthétiquement par celle de similitude.*"[55]

La nécessaire homogénéité des équations qui traduisent, soit les figures, soit les lois de la nature, nous assure qu'elles conservent la même forme logique quelle que soit l' échelle à laquelle on les considère. Sans le principe d'homogénéité, et donc de similitude, la mécanique théorique est elle-même en danger: depuis Newton, il fonde cette Science. Ainsi, dans l' "Exposé sur les progrès de la Mécanique appliquée", rapport maintes fois cité au premier chapitre, les auteurs écrivent:

> "On le trouve (le principe de similitude) pour la première fois énoncé par Newton. C'est la conséquence immédiate de l'homogénéité des formules de la dynamique, dans lesquelles nous l'avons fait remarquer, entrent des quantités de diverses natures (...) Le principe de Newton était presque oublié lorsqu'en 1848 M. J. Bertrand en à donné une démonstration."[56]

Bertrand aurait prouvé que les relations de la dynamique doivent être homogènes. Il en résulte que les figures géométriques doivent rester semblables à elles-mêmes quelle que soit l'échelle où on les représente. Donc les géométries non euclidiennes ne mettent pas seulement en danger la quiétude des Mathématiques, mais encore elles sapent l'édifice de la Physique mathématique et ainsi toute connaissance positive.

C'est ce principe de similitude que Boussinesq va s'efforcer de sauver. Ce n'est certes pas l'expérience qui va pouvoir trancher, nous l'avons vu

---

[55]ibid., p. 6.

[56]A. Combes et alii, *Rapport sur les progrès de la mécanique appliquée*, Paris, Hachette, 1867, p. 45. Le passage vaut d'être cité dans son entier: " On le trouve (le principe de similitude) pour la première fois énoncé par Newton. C'est la conséquence immédiate de l'homogénéité des formules de la dynamique, dans lesquelles nous l'avons fait remarquer, entrent des quantités de diverses natures. Si l'on considère deux systèmes mobiles semblables au point de vue géométrique, il faudra, pour que la similitude existe et se maintienne pendant le mouvement que les masses des points homologues soient entre elles dans un rapport constant et que le carré des temps au bout desquels on compare les positions des deux systèmes pour reconnaître les similitudes soit égal au produit des rapports de similitude des forces par l'inverse du rapport des masses. Le principe de Newton était presque oublié lorsqu'en 1848 M. J. Bertrand en a donné une démonstration." Dans le cas de deux corps de masses m et m' tombant d'une même hauteur h, le rapport des carrés des temps et 1, le rapport des forces est m/m', et donc son produit par l'inverse du rapport des masses est aussi 1.

plus haut. Pour Boussinesq, si les raisonnements des géomètres "aneuclidiens" (expression de Boussinesq) sont vicieux, c'est qu'il ne font pas suffisamment confiance à une qualité intrinsèque de l'homme: son sens géométrique, ou intuition géométrique, ou encore évidence géométrique, que nous décrirons plus précisément bientôt. Si les géomètres non euclidiens obtiennent des résultats aussi surprenants, c'est justement parce qu'ils ne partent pas du principe de similitude comme donnée immédiate de l'intuition.

> "Ils font au contraire, abstraction de l'idée de similitude jugée par eux moins fondamentale ou moins indispensable, c'est-à-dire qu'ils conviennent de ne pas recourir à l'intuition, en tant qu'elle nous assure que toute figure peut être reproduite à une échelle de grandeur quelconque sans qu'aucun angle soit altéré (...)"[57]

Pour Boussinesq le principe de similitude est donc fondamental, et il est une donnée immédiate de l'intuition. Ce n'est pas précisément le principe de similitude que Boussinesq va défendre, c'est le rôle fondamental de l'intuition géométrique, et la confiance que l'on peut lui accorder.

Pour appuyer ses affirmations, Boussinesq va reconstruire l' univers dans lequel raisonne le physico-mathématicien. Nous allons montrer que pour cela il va distinguer un monde idéal, purement géométrique, dont l'intuition géométrique nous fournira une connaissance presque totalement précise, et le monde de la réalité physique qui ne nous sera qu'imparfaitement connu. Nous avons accès au monde physique par nos sens, ce que Boussinesq appelle notre nature sensible. L'esprit, caractéristique de l' être humain, essaie d'appliquer sa connaissance de l'un et l'autre mondes, à la réalité physique. Pour cela il utilise l'intuition pour le monde géométrique, et pour la réalité physique, sa nature sensible; il en résulte des incompatibilités entre les deux visions, ce qui rend problématique le développement de la Physique.

II . 3 . L'existence d'un monde géométrique idéal

Reportons-nous au mémoire écrit par de Tilly et déjà cité[58]. Tout au début de cet "Essai (...)", l'auteur mentionne les "*notions premières*" de sa géométrie, la *surface*, la *ligne*, le *point* , et ses axiomes fondamentaux: *la continuité de la distance entre deux points*, et *l'identité de la distance de*

---

[57] J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique*, in *Etude sur divers points de philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 1880, 8, 4° série, p. 256.

[58] de Tilly, *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique*, Bordeaux, Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 3, 2° série, 1879.

deux points homologues dans deux systèmes identiques. Pour de Tilly, ces notions sont induites de l' expérience:

> "Outre les notions premières que nous venons de rappeler, la géométrie emprunte à l'*expérience* un certain nombre de données qu'on appelle *axiomes.*
> Il est bien entendu que le résultat de l' expérience est idéalisé par notre esprit, pour constituer alors un axiome ou une hypothèse ou un point de départ absolu d'une science qui sera toujours logiquement exacte mais qui pourra ne pas correspondre aux faits et s' en écarter de plus en plus, s'il se trouve que le point de départ lui-même n'est pas rigoureusement vrai."[59]

Même si les axiomes ont une origine expérimentale, ils sont par la suite idéalisés et comme détachés de la réalité. C'est annoncer la dissociation de la géométrie, de l' analyse, et de la réalité. En même temps, c'est aller vers un certain empirisme que d'accorder l'origine de nos idées mathématiques à l'expérience. De quelque façon Boussinesq doit donner raison à de Tilly pour l'origine empirique des idées géométriques, mais il prend de suite ses distances:

> "Tout le monde admet que le sens idéal de l'espace et des figures n'a pu se développer en nous qu'à la suite des observations qui ont éveillé notre activité intellectuelle (...) Mais il y a infiniment loin des résultats incomplets et grossiers de l'expérience aux données de l'intuition géométrique une fois exercée, données qui se présentent à nous comme des créations de l' esprit, avec des caractères de simplicité, de précision, de généralité, que la nature physique ne comporte guère et que, certainement, nous n'y avons pas vu."[60]

Examinant la façon dont a pu se constituer l'idée géométrique de cercle, Boussinesq en arrive à la conclusion suivante:

> "Ainsi l'idée de cercle devrait déjà se trouver implicitement dans l'intelligence, comme idée inspiratrice, pour qu'elle put se dégager, par une espèce d'association ou de fusion naturelle, de résultats approchés, en grand nombre, que l'observation aurait fait connaître (...) Au moment où il acquérait de la sorte, explicitement, la notion du cercle, l'esprit ne ferait, en réalité que reconnaître et reprendre son bien."[61]

---

[59]ibid., p. 2.

[60]J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique*, in *Etude sur divers points de philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 1880, 8, 4° série, p. 258.

[61]J. Boussinesq, *Addition à une étude concernant divers points de la philosophie des sciences ; sur l'impossibilité d'arriver aux notions de géométrie par une simple condensation d'un grand nombre de résultats de l'expérience*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, pp. 371 à 378.

D'autres idées, comme celles de limite d'une série ou d'infini, ne pourraient tout simplement pas être induites de l'expérience. Il n'y a donc que peu de rapport entre les idées géométriques et l' expérience, on peut dire que l'expérience ou l'observation révèlent des idées déjà présentes dans l'esprit humain:

> "En résumé, c'est dans la sphère propre à l' esprit et bien au-delà des résultats de l'observation, non dans ces résultats eux-mêmes, qu'il faut chercher la véritable source des idées géométriques."[62]

Ces idées géométriques constituent finalement un monde idéal qui a ses régles propres:

> "Le monde idéal a son autonomie, ses lois distinctes, comme le monde physique."[63]

Suivant les textes, Boussinesq appellera cet univers géométrique, monde des figures , monde idéal, monde géométrique. Un tel monde est bien un monde autonome du monde physique.

> "Donc les constructions idéales que nous édifions et contemplons au moyen de notre sens intérieur de l'étendue et des formes ne sont pas le produit de l'observation externe; elles constituent un ordre de choses spécial, autonome, bien distinct de celui avec lequel nous met en rapport notre nature sensible."[64]

Rappelons ce que Boussinesq entend par "nature sensible", nous retrouverons à de nombreuses reprises la différence entre notre nature sensible et notre esprit. Notre "nature sensible" amène à notre conscience des données que nos organes des sens nous font percevoir, et ainsi, de façon imparfaite, nous révèle certains aspects de la réalité matérielle. Cette "nature sensible" est en quelque sorte l'interface entre notre conscience et la réalité matérielle. L'esprit, quant à lui, prend en compte à la fois les données des sens et celles de l'intuition, et il émet des jugements en fonction de ces données.

Il semble que, d'après la citation précédente, on puisse faire l'assimilation entre le monde des idées et finalement notre subjectivité. Il n'en est rien. Boussinesq insiste sur l'existence d'une différence objective, et donc indépendante de notre esprit, ailleurs que dans notre esprit, entre celui-ci et le monde des idées géométriques:

---

[62]ibid., p. 377.
[63]ibid.
[64]ibid.

"(...) la distinction que nous concevons entre l' ordre géométrique pur et la partie de l' ordre physique qui lui ressemble, ou qui concerne les formes et les grandeurs, doit exister ailleurs que dans notre esprit, c'est-à-dire être vraie de façon absolue si comme il paraît, le second est une représentation approchée du premier."[65]

A la fin de sa vie, Boussinesq affirmera à nouveau cette autonomie du monde géométrique, réalité distincte du monde physique.

"Le monde géométrique n' a sa réalité propre que bien plus haut ou bien plus profondément, dans un ordre de choses différent de celui où nous plongent nos sens et que nous regardons comme le nôtre, savoir un monde de choses éternelles où s'unifient, se confondent, *réalité* et *vérité*, *acte* et *puissance* , ce qui *existe* et ce qui *est*."[66]

Monde intellectuel, peut-être, mais certainement pas monde subjectif; cette idée est déjà affirmée en 1880:

"(Il est insuffisant de se borner) à présenter le monde intellectuel comme un ordre de choses subjectif, comme un domaine tout abstrait de l' esprit humain, sans y voir les caractères de nécessité et de généralité qui en font aux yeux de la raison s'appuyant sur le sens commun, un ensemble de vérités absolues, éternellement subsistantes(...)"[67]

Et encore, en 1880:

"Aussi a-t-on toujours admis, dans la science, qu'elles (les figures et les lois du monde géométrique) constituent un ordre de choses supérieur, dont la manière d'être, il est vrai, nous échappe."[68]

Boussinesq indique très précisément ce qui lui semble fondamental dans ce monde: l'élément à partir duquel se construit ce monde, et sa structure:

---

[65] J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique,* in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 1880, 8, 4° série, p. 272.

[66] J. Boussinesq, *Cours de physique mathématique de la Faculté des sciences*, t. 3, 1921, 395.

[67] J. Boussinesq, *Addition à une étude concernant divers points de la philosophie des sciences ; sur l'impossibilité d'arriver aux notions de géométrie par une simple condensation d'un grand nombre de résultats de l' expérience*, in *Etude sur divers points de la philosophie de la science*, Mémoires de la société des sciences d'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 378.

[68] J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique,* in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 1880, 8, 4° série, p. 259.

"(...) le point sans étendue, et (il y) règne la continuité par divisibilité à l'infini, par ce premier et ce dernier état, incompréhensible de la grandeur, qu'est l'infiniment petit, c'est-à-dire le *rien* considéré comme début ou fin de l'être, et que Pascal jugeait la notion propre du géomètre, incommunicable à celui qui ne l'est pas."[69]

L'élément fondamental du monde géométrique est le point, à partir duquel on peut construire "simplement" des lignes, des surfaces, des volumes[70].
Une des caractéristiques les plus fondamentales de ce monde est la divisibilité infinie, possibilité de "découper" à l'infini les êtres de ce monde. Mais notre esprit ne peut concilier cette propriété avec l'indivisibilité du point sans dimensions. Aussi, dans l'infiniment petit, notre esprit ne peut concevoir ce rien, ce zéro, à partir duquel commence la quantité et où elle finit. Il y a donc des obscurités dans le monde géométrique. Il nous paraît toutefois intuitivement clair, par une sorte d'évidence qui ne se laisse pas analyser. C'est pourquoi Boussinesq le qualifiera parfois de clair, mais y décèlera des mystères.

On peut donc conclure que Boussinesq affirme l'existence d'un monde autonome, celui des idées géométriques, monde idéal, monde ayant des lois propres et universelles. La localisation de ce monde - Boussinesq n'est pas très disert à ce sujet - est peut-être dans notre esprit, mais alors il est dans l' esprit de tous les hommes et non pas dans la subjectivité de chacun. L'existence de ce monde géométrique idéal met en cause les géométries non euclidiennes: l'existence de ce monde fait qu'il existe des êtres géométriques qui ont une réalité indépendante du système axiomatique que l'on utilise. Les géométries non euclidiennes ne sont alors, selon Boussinesq, que des spéculations sans rapport avec une quelconque réalité.

On doit maintenant se demander quelle assurance nous avons de l'existence de ce monde géométrique, par quels moyens nous pouvons le connaître, et quel est le degré de certitude que nous fournit cette connaissance. Nous devrons aussi nous demander quels sont les rapports que ce monde géométrique entretient avec le monde physique. C'est dans toutes ces questions qu'intervient l'intuition géométrique.

---

[69] J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences*, t. 3, Paris, Gauthier-Villars, 1921, p. 394.
[70] ibid., p. 407.

II . 4 . L'intuition géométrique comme justification du principe de similitude

L'existence d'un monde géométrique autonome, ayant ses lois propres, indique que toutes les géométries, même répondant aux critères fixés par de Tilly, ne se valent pas. Il n'y a qu'une seule géométrie, celle du monde géométrique idéal. Ce monde nous est révélé par l'intuition géométrique, c'est la confiance que nous avons en cette intuition géométrique qui nous assure de l'existence de ce monde. Boussinesq va donc d'abord justifier l'utilisation de cette intuition géométrique.

II . 4 . 1 . La légitimité de l'intuition géométrique

Dans son article "Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique" (1880), Boussinesq montre que c'est surtout cette intuition qui s'oppose aux géométries non euclidiennes:

> " Ces idées nouvelles (les géométries non euclidiennes), que d'intéressantes recherches philosophico-mathématiques de M. Hoüel, en France, et M. de Tilly en Belgique, ont répandues parmi nous, sont visiblement démenties, en ce qui les distingue de la géométrie euclidienne, par l'intuition géométrique telle qu'elle existe dans tous les hommes."[71]

On cherche alors dans l'œuvre de Boussinesq une sorte de définition de cette intuition géométrique. Ce qui s'en rapproche le plus se trouve dans un texte de 1908; on y lit:

> "Nulle part ailleurs (que dans la géométrie) l'évidence n'atteint un tel degré (...) La raison en est dans *l'intuition géométrique,* cette faculté de construction idéale des figures dans l'espace, avec une précision illimitée, dont sont pourvues toutes les races humaines et qui se trouve être pleinement concordante dans tous les cerveaux. Rationnelle dans sa méthode, qui n'exige la présence actuelle d'aucun corps extérieur, ni d'aucun autre instrument que l'organe de la pensée, et par ses objets, qui sont les formes de l'espace pur, elle équivaut cependant à la vue, la plus parfaite de nos facultés expérimentales, pour la vivacité, la force, la netteté de ses aperçus; et elle la surpasse infiniment par leur finesse."[72]

---

[71] J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 1880, 8, 4° série, pp. 255 et 256.

[72] J. Boussinesq, *Complément aux considérations du n° 43 sur les lois d'économie et de simplicité: importance de ces lois en tant que principes directeurs de l' esprit*, in *Théorie approchée de l' écoulement de l'eau sur un déversoir en mince paroi et sans contraction latérale*, Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, 50, 1908,

Ce que décrit ici Boussinesq c'est sa propre activité de géomètre, celle d'un mathématicien développant au plus haut point la faculté de visualiser les figures, de les faire bouger, d'animer par des images les démonstrations. C'est une intériorisation de la vision et de la manipulation d'objets. Il dit d'ailleurs:

> "Le cerveau pensant tout entier paraît n'être à quelques égards, qu'une extension du système visuel, qui est par excellence l'organe de la représentation des figures."[73]

C'est donc une définition que l'on pourrait juger uniquement valable pour Boussinesq lui-même. Aussi signale-t-il, dès 1880, pour les réfuter ensuite, les réserves de certains mathématiciens concernant la généralité de l'intuition géométrique:

> "Et c'est ainsi qu'ils se décident à mettre en suspicion l'*intuition* ou *évidence* géométrique, la qualifiant de chose mal définie, la regardant comme une transformation ou un simple produit capitalisé de l'expérience sensible, comme une *expérience dans laquelle la mémoire remplace l' activité physique*: ce qui en ferait, tout au plus, une sorte de souvenir généralisé de perceptions tactiles et visuelles."[74]

L'accusation précédente demanderait une définition précise de l'intuition géométrique, c'est ce que ne peut produire Boussinesq:

> "Sans doute le sens géométrique ne s'est jamais laissé analyser dans son mode de procéder et dans tous les résultats qu'il fournit ou peu fournir: à cet égard, rien de plus vrai que de dire qu'il n' a pas été *défini*. La lumière qu'il répand est pour nous une sorte de mystère, tant en elle-même que dans sa source."[75]

Il ne faut donc pas chercher une définition précise de l'intuition, géométrique. Cette intuition est une sorte de faculté spéciale, équivalant intellectuel des sens physiques, que Boussinesq découvre sans doute par introspection, et qu'il attribue à tous les êtres humains.

La justification de cette intuition, que Boussinesq pense opposer aux méthodes axiomatiques, se trouve ailleurs. Elle est de trois ordres.

---

pp. 101 à 134; aussi partiellement, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences*, t. 3, Paris, Gauthier-Villars, 1921, p. 390.

[73] J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 267.

[74] ibid., p. 257.

[75] ibid., p. 264.

Tout d'abord Boussinesq montre que cette intuition n'est pas le produit d'expériences condensées. En cela il reprend ce qu'il a dit du monde géométrique idéal. D'ailleurs la justification de l'indépendance de l'intuition géométrique par rapport à l'expérience vient surtout de ce que l'intuition découvre dans le monde idéal des formes qui n'existent pas dans la nature:

> "On arguë de ce que, dans l'enfance, l'intuition géométrique s'éveille, comme toutes nos facultés, à l'occasion de faits matériels perçus au dehors, pour conclure qu'elle doit son contenu soit à notre propre observation, soit à celle de nos ancêtres, par une lente et sourde condensation, bien mystérieuse, des résultats acquis dans ce que l'on pourrait appeler la mémoire de la race. Mais ces résultats effectivement observés ont toujours été bien grossiers et bien partiels comparativement à l'idéale perfection et à l'infinie variété de formes que perçoit l'intuition du géomètre (surtout avec l'aide de l' Analyse) et dont beaucoup n'ont jamais été offertes aux regards de la nature physique."[76]

La seconde raison de la confiance de Boussinesq en l'intuition géométrique est fondée sur l'histoire même des sciences :

> "Ce qui prouve qu'elle est très voisine de la perfection et qu'il ne lui est plus possible en quelque sorte d'en approcher, c'est quelle n' a pas varié d'une manière appréciable depuis les premières origines des sciences (...) Donc elle avait déjà (depuis Thales de Millet) comme atteint sa limite extrême dès le début du développement historique des sciences à supposer qu'elle ait eu jamais à progresser et que la perfection en quelque sorte absolue ne fasse pas essentiellement partie de notre nature intellectuelle. Et c'est ce qui explique pourquoi la faculté dont il s'agit a offert cette garantie singulière de véracité, de se montrer absolument pareille chez tous les hommes connus, à quelque époque et à quelque société qu'il appartinsent."[77]

Ici, ce qui montre que l'intuition géométrique est un mode de raisonnement fiable, c'est que depuis l'origine de l'homme, on n'en a pas trouvé de meilleur. C'est donc un appel à la tradition. Mais surtout, aspect plus moderne, une sorte de sélection dans les modes de

---

[76] J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences*, t. 3, Paris, Gauthier-Villars, 1921, p. 392.

[77] J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Bulletin de la Société des sciences de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 261, aussi partiellement, Cours de Physique mathématique, t. 3, Paris, Gauthier-Villars, 1921, p. 391, et *Complément aux considérations du n° 43 sur les lois d'économie et de simplicité: importance de ces lois en tant que principes directeurs de l' esprit*, in *Théorie approchée de l'écoulement de l'eau sur un déversoir en mince paroi et sans contraction latérale*, Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, 50, 1908, p. 108.

raisonnement s'est faite, qui n'a laissé subsister que l'intuition géométrique comme mode valide de raisonnement. C'est aussi l'argument d'universalité, à la fois dans l'espace (toutes les sociétés), dans le temps (depuis les origines de la science), et pour tous les êtres pensants, tous les hommes. Un autre argument en faveur de l'intuition géométrique s'ajoute à celui d'universalité, c'est celui de nécessité: il est impossible de raisonner sans l' aide de l'intuition, comme nous allons le voir maintenant.

Boussinesq commence par s'intéresser au raisonnement *en géométrie.* Le sens géométrique maintient le sens des mots, comme il l'explique dans son article "Du rôle et de la légitimité de l'intuition géométrique" (1880):

> "Que resterait-il, en effet, surtout du raisonnement pur, c'est-à-dire des modes de groupement et de succession des idées si multiples sans la vue idéale de l' espace et des figures, qui conservent à ces idées leur vie et aux mots leur sens? Rien évidemment, pas même des cases vides."[78]

C'est donc par référence aux figures dessinées dans le monde géométrique idéal par l'intuition, que les mots qui désignent ces images, images qui sont les objets propres à la géométrie, gardent leur sens. C'est donc l'image qui contient en elle-même tout le sens que recèlent les objets de la géométrie. Que la figure géométrique disparaisse, et la notion s'évanouit; il ne reste pas même la place que pourrait occuper un symbole mathématique dans une équation. On constate donc que l'on est très loin des logiques formelles où ce qui importe surtout, c'est l'ensemble des cases où prennent place les mots, c'est-à-dire la forme même de la proposition logique. Ainsi poursuit Boussinesq:

> "Le flambeau de l'intuition une fois éteint, les notions qu'il éclaire et qui ne subsistent que par lui s'évanouiraient aussitôt."[79]

Les idées de la géométrie n'existent que dans la mesure où notre sens géométrique peut les dessiner à partir des éléments du monde idéal.

Mais cette intuition n'est pas uniquement pure contemplation de figures. Comme nous l' avons indiqué plus haut, il nous semble que par "intuition géométrique" Boussinesq désigne sa propre activité mentale de géomètre. Pour produire des raisonnements, un tel géomètre doit faire bouger intellectuellement les figures, faire des "expériences de pensée" avec les figures du monde géométrique. Il faut ajouter à cette contemplation des figures, la possibilité de les examiner de points de vues différents dans différentes associations:

---

[78]ibid., p. 265.
[79]ibid., p. 265.

"Certains géomètres opposent quelquefois le raisonnement à l'intuition pure ou immédiate. Mais c'est simplement l'intuition à l'état statique, ou se bornant au premier objet qui se présente à elle, tandis qu'ils appellent raisonnement, l'intuition à l' état dynamique, l'intuition se déplaçant avec continuité, soit pour passer d'un horizon à d'autres voisins, soit pour explorer dans chacun les détails qui échappent au premier coup d'œil."[80]

Ainsi, par ses déplacements, l'intuition explore par de multiples voies, les figures, leurs associations, leurs déformations, leurs propriétés. C'est ce qui constitue pour Boussinesq le raisonnement géométrique:

"Le rôle du raisonnement en géométrie se borne, en quelque sorte, à classer les mille voies qui se croisent dans le monde de l'intuition, et à les fixer par le langage afin de permettre de les retrouver au besoin."[81]

Le raisonnement géométrique ne serait donc qu'une description du monde de l'intuition. Mais cette description de ce qui est possible dans le monde de l'intuition assure aussi que les relations entre figures que nous voyons dans ce monde sont vraies. En effet ce monde de l'intuition est le monde géométrique idéal, et comme nous l'avons vu ci-dessus, le monde géométrique est :

" un monde de choses éternelles où s'unifient, se confondent, *réalité* et *vérité, acte* et *puissance,* ce qui *existe* et ce qui *est.*"[82]

Donc les relations que l'intuition géométrique nous fait découvrir dans le monde géométrique idéal sont vraies, puisque ce qui existe dans ce monde, par exemple les relations entre figures, sont bien ce qu'elles paraissent être. De même que nous sommes assurés que certaines propriétés de ce qui nous entoure dans le monde physique sont vraies (par exemple, l'impénétrabilité relative des solides est vraie, comme nous nous en apercevons en heurtant un mur), de même les relations et les propriétés des figures que nous observons dans le monde géométrique idéal sont vraies. De plus l'acte et la puissance y sont aussi confondus et donc, ce qui nous apparaît de ce monde, réunit la totalité du monde géométrique, tout y est apparent, rien n'est dissimulé; en puissance. Ce que nous percevons de ce monde, ce qui existe dans ce monde, est aussi réellement. C'est bien la réalité, ce n'est pas une chimère ou un aspect d'un être.

---

[80]ibid., p. 266.

[81]ibid., p. 265.

[82]J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique,* in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 272.

Le raisonnement géométrique imprègne aussi l'analyse, sorte de réduction de la géométrie dans l' espace à une arithmétique ou algèbre imaginées sur une ligne; citons à nouveau cette présentation de l'analyse:

> "Si l'analyse pure, la théorie de la quantité (réelle) en général, est plus simple, plus uniforme dans ses procédés, que la géométrie ordinaire, cela est dû précisément à ce que cette quantité est exprimable par une ligne, et par suite à ce qu'elle n'a qu'une dimension ou ne varie que dans un sens et dans les sens opposés, à la place des trois dimensions, de l'étendue et de la multiplicité infinie des rapports qu'elles amènent."[83]

Plus généralement, sans l'intuition géométrique, sans les sens de l'espace que nous avons, sans les figures que notre intuition y dessine, il est impossible de comprendre ou même simplement d'utiliser les branches les plus abstraites des mathématiques:

> "Il semble que, si on nous ôtait le sens de l' espace et des figures, nous n'entendrions plus même la branche de l'analyse qui paraît, en quelque sorte, la moins géométrique, je veux dire, celle où l'on opère sur de purs symboles algébriques, que l'on combine d'après certaines lois sans leur attribuer aucune signification de quantité continue ou de nombre. En effet les mots arrangement, disposition, substitution, permutation, etc., dont il faut bien se servir pour exprimer les manières d'être relatives d'éléments diversement rapprochés et ordonnés, supposent les idées d'étendue, de groupement dans l'espace; et ils deviendraient inintelligibles si ces idées venaient à disparaître."[84]

Ce n'est que dans la mesure où l'on peut ramener une idée à une image qu'on peut l'utiliser:

> "Nous condensons et précisons toutes nos idées par des formes, des constructions idéales, sans lesquelles nous ne parviendrions pas à les fixer, à les voir nettement; et on dirait que c'est précisément, dans la mesure où leur assimilation à des images réussit, que nous pouvons en faire l' objet de connaissances positives."[85]

Ainsi, pour connaître la vérité, c'est-à-dire pour décrire le monde géométrique, l'intuition géométrique est indispensable, c'est même le seul moyen que nous ayons pour accéder au monde idéal des

---

[83]ibid., p. 268.
[84]ibid., p. 268.
[85]ibid., p. 267.

mathématiques. On ne peut raisonner, selon Boussinesq, qu'en manipulant les images. De même que la cinématique, ou la dynamique des objets matériels, sont l' essence de la mécanique, la contemplation des figures géométriques idéales, par l'intuition statique ou dynamique, est l'essence du raisonnement mathématique.

Le monde idéal des figures géométriques possède sa réalité propre, réalité qui est aussi la vérité du monde mathématique. Le monde géométrique idéal nous est révélé par l'intuition géométrique qui y crée, à partir du point matériel, des figures et des agencements de figures qui sont les mots et les raisonnements de la géométrie. L'existence et l' efficacité de l'intuition géométrique, et par là du monde géométrique, nous sont assurées sous le triple aspect de l'indépendance de la première par rapport au monde physique et au monde subjectif, de son universalité dans l'espace, le temps et la multiplicité des intellects, enfin par son caractère de nécessité dans le raisonnement géométrique.

II . 4 . 2 . Le principe de similitude comme base de la géométrie euclidienne

Le rôle de l'intuition géométrique n'est pas uniquement de visualiser le monde géométrique, il révèle aussi des propositions ou des idées qui sont indémontrables, qui sont vraies en soi:

> "On s'aperçoit même, en suivant attentivement les démonstrations des théorèmes les plus simples (...), que le rôle du sens géométrique ne s'y borne pas à maintenir aux mots leur signification et à contrôler l'exactitude des propositions principales. Il y a du moins, dans l'enchaînement de celles-ci, plus que des syllogismes, plus que de la déduction pure. A côté de ce qui est dit explicitement, il y a un recours direct à l'intuition prise en bloc, ou instinctive, et celle-ci peut seule compléter ce qui manquerait au raisonnement pur."[86]

Il y a donc, à côté du raisonnement avoué, le syllogisme, traduction de l'un des chemins suivis pas l'intuition dans le monde géométrique, des propositions que l'intuition nous fait découvrir comme par illumination. Boussinesq cite comme exemples l'égalité des angles droits, l'égalité des triangles[87]. On trouve un exemple de telles démonstrations dans l'ouvrage à partir duquel de Tilly construit, dit-il, sa "géométrie élémentaire": le "Traité de géométrie élémentaire" de Rouché et Comberousse[88]. On y trouve effectivement des "démonstrations" sur les

---

[86]ibid., p. 266.

[87]ibid., p. 266.

[88]E. Rouché et Ch. de Comberousse, *Traité de Géométrie élémentaire*, première partie, Géométrie plane, Paris, Gauthier-Villars, 1873. Voir les pages 5 à 17.

perpendiculaires, les angles droits. Ces démonstrations font appel à des déplacements de figures, une véritable cinématique des figures géométriques, la même que celle que décrit Boussinesq. Il y a un moment où le raisonnement s'arrête devant l'évidence. Pour Boussinesq une telle évidence ramène à une donnée immédiate de l'intuition géométrique. De même l'axiome d' Euclide ne peut être ramené à d'autres plus simples. Certes, en jouant mentalement avec des figures, on peut essayer de construire des droites qui, passant par un même point, seraient parallèles à une autre; mais dans le monde idéal la construction échoue, elle n'est donc pas possible. La seule qui le soit est celle d'une seule parallèle passant par un point. Donc seule cette proposition est vraie. Et on ne peut justifier cette vérité qu'en disant "c'est ainsi". C'est ce que, à notre sens, Boussinesq entend par "recours direct à l'intuition prise en bloc, ou instinctive".

Ce que signale surtout Boussinesq dans la citation faite plus haut, c'est que ce recours à l'intuition prise en bloc est indispensable, ce qui est un autre aspect de l' argument de nécessité exposé plus haut.

De là, il suit la nécessaire disqualification des géométries non euclidiennes. Elles ne peuvent se dispenser de faire appel à l'intuition géométrique:

> "C'est précisément parce que les démonstrations les plus essentielles de la géométrie semblent rester indémontrées, tant qu'on ne fait pas appel à l'intuition simple, prise dans son intégrité naturelle, qu'un doute légitime plane, à mon avis, sur les conclusions propres à la géométrie non-euclidienne considérée sur le plan logique."[89]

Pour Boussinesq le recours à l'intuition prise en bloc, l'intuition simple, est indispensable à la géométrie. Il va affirmer tout uniment que les géométries non euclidiennes font elles-mêmes appel à l'intuition géométrique; alors il se peut qu'à l'insu même du géomètre non euclidien, vienne se glisser dans ses raisonnements justement le postulat d'Euclide.

> "Et sera-t-il bien certain que les propositions auxquelles il parviendra en soient complètement indépendantes (de l' axiome d'Euclide) alors qu'il ne sait au juste ce qu'il y a mis? Pour être exact il devrait se borner à regarder ces propositions comme n'ayant aucun rapport explicite avec les vérités dont il s'agit, c'est-à-dire concernant les parallèles entendues à la manière euclidienne."[90]

---

[89] J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique,* in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 266.
[90] ibid., p. 268.

C'est uniquement dans leur formulation explicite que les géométries non euclidiennes peuvent sembler indépendantes du postulat d' Euclide, il se peut que réellement elles en dépendent. Une autre façon de s'assurer de la validité de ces géométries serait de découvrir quelque principe, indiqué par l'intuition géométrique, et qui les fonderait. Boussinesq examine ce point en 1908:

> "(...) le besoin de raisonner sur tout et peut-être aussi de trouver du nouveau, a été assez impérieux chez un certain nombre de géomètres, pour leur faire préférer l'allure logique, lourde toujours et aveugle quand l'intuition ne l' éclaire pas, à l'intuition elle-même prise dans son intégrité naturelle, qu'ils ont essayé de mutiler en feignant de lui enlever certaines de ses vues, notamment celle du postulatum d'Euclide ou des figures semblables. Ils ont jugé pouvoir étudier ainsi les conséquences logiques de ses autres vues, ou des intuitions qu'ils lui laissaient, et découvrir ce que deviendrait la Géométrie dans cette hypothèse. Le procédé est, à certains égards légitime; et il le serait certainement, si la démonstration des théorèmes les plus élémentaires de la Géométrie même non euclidienne, c'est-à-dire ainsi appauvrie, ne faisaient pas un appel, plus ou moins inconscient, à l'intuition naturelle encore inanalysée, et non à une intuition aneuclidienne qui ne paraît exister chez aucun être vivant."[91]

Boussinesq affirme ici ce qu'il soupçonnait en 1880: toutes les géométries, même non euclidiennes, font appel à l'intuition géométrique. Cette intuition est l'intuition naturelle, celle qui est naturelle pour l'esprit humain, elle n'a pas encore été totalement explorée. Pour leurs axiomes, les géométries non euclidiennes sont obligées d'utiliser l'intuition, l'intuition naturelle, or nulle part on ne trouve trace de ces intuitions non euclidiennes. D'une part les géométries non euclidiennes sont obligées d'utiliser l'intuition, et d'autre part il n'existe pas d'intuition "aneuclidiennes". Ces géométries sont donc incohérentes dans leur structure même.

Pour Boussinesq, principe de similitude et postulat d'Euclide sont équivalents. Si à une certaine échelle, il n'est pas possible de construire plus d'une parallèle à une droite donnée passant par un point donné, le principe de similitude assure qu'il en est de même quelle que soit l'échelle choisie. En outre le postulat de similitude, plus général que celui des parallèles, sera préférable. Pour affirmer le rôle indispensable de ces postulats, Boussinesq affirme que jamais on n'a pu les décomposer; ils sont donc premiers, et donc bien une des bases de la géométrie.

---

[91] J. Boussinesq, *Théorie approchée de l'écoulement de l'eau sur un déversoir en mince paroi et sans contraction latérale*, Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, 50, 1908, p. 108.

"Les efforts infructueux faits depuis si longtemps et, on peut le dire, par tous les géomètres, pour se passer du postulatum d'Euclide[92], prouvent expérimentalement que cette notion de la similitude est une donnée première, irréductible, de l'intuition géométrique, et qu'il faut, par conséquent, l' accepter sans démonstration, c'est-à-dire l' admettre, du moins pour une figure (par exemple pouvons-nous dire celle d'une parallèle à une droite et une seule passant par un point) la possibilité d'être reproduite à toute échelle de grandeur sans altération de ses angles."[93]

L'argument peut sembler léger, être une simple défense de la tradition; c'est pourtant un argument du même type que celui qui fonde l'impossibilité du mouvement perpétuel sur lequel pour une bonne part est fondé au milieu du XIX° siècle le principe de conservation de l'énergie.

Définitivement les géométries non euclidiennes sont jugées incohérentes par Boussinesq; définitivement aussi, pour lui, il est impossible de se passer du principe de similitude. Par là les mécaniques qui s'expriment au moyen d'autres géométries que l'euclidienne sont fallacieuses, ou pour le moins suspectes d'être de simples rêveries.

II . 5 . Les difficultés rencontrées par l'intuition géométrique et par l'application de la géométrie au réel physique

L'intuition géométrique, faculté de dessiner des figures et de les contempler, nous fournit donc des données précises sur le monde géométrique idéal. Elle est toutefois astreinte à utiliser l'esprit humain pour se manifester. Alors il se produit des sortes de conflits entre l'intuition et d'autres facultés ou d'autres modes de raisonnements, qui sont aussi des composantes irréductibles de notre faculté de comprendre. Le problème se pose particulièrement pour des idées (faut-il dire des êtres?) fondamentales de la Mécanique: l'espace et le temps. Boussinesq en vient à parler des "mystères de l'espace et du temps"[94]. Les difficulté de l' esprit humain empirent si l'on veut comprendre ou simplement décrire la réalité physique. Alors, il faut savoir dans quelle mesure, la seule façon que nous ayons de raisonner avec sûreté, la

---

[92]Dans une lettre de Saint-Venant à Boussinesq, le premier félicite le jeune Boussinesq d'avoir renoncé à démontrer le postulat d'Euclide. C'est donc qu'il faut compter Boussinesq au nombre de ces géomètres qui ont fait cette tentative.

[93]J. Boussinesq, *Théorie approchée de l' écoulement de l'eau sur un déversoir en mince paroi et sans contraction latérale*, Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, 50, 1908, p. 108.

[94]J. Boussinesq, *Mystères de l'espace et du temps*, in *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences*, t. 3, Paris, Gauthier-Villars, 1921, pp. 409 et 410.

géométrie traduite en analyse, peut être appliquée à la nature. Il faut identifier la ou les particules élémentaires, et en trouver un représentant adéquat dans le monde géométrique idéal. La difficulté est encore accrue si l'on veut rendre compte effectivement de la complexité de la nature physique: il faut alors prendre en compte les myriades de particules élémentaires, leurs interactions, leurs mouvements. C'est justement l'objet de la Mécanique physique; nous examinerons ces difficultés, et les solutions qu'en donne Boussinesq, dans le chapitre suivant. Pour l'instant nous étudions les problèmes de compréhension que pose l'application, au sens mathématique du terme, du monde géométrique au monde physique.

II . 5 . 1 . L' espace et le temps

On sait que Newton pense avoir démontré, ou au moins postulé, l'existence d'un espace absolu. Dans la seconde moitié du XIX° siècle, la notion d'espace absolu est fortement battue en brèche; Thomson et Tait, bien que continuateurs de l'œuvre de Newton, ne croient pas à sa réalité. L'existence de l'espace absolu semble conditionner la possibilité de fonder la Mécanique sur des lois absolues. Comment en effet définir l'accélération, puis la force, sans avoir un espace de référence absolu? Le problème d'un tel espace est donc lié au problème de la force, de la masse et, par là même, à celui de l'énergie. Les difficultés de la conception de l' espace absolu sont évoquées par de Tilly dans l' article cité plus haut. Il commence par reproduire l'opinion de Duhamel qui n'admet pas l'espace absolu[95]:

> "Pour nous le repos absolu est, non plus une chose impossible à reconnaître, mais tout simplement un non sens, car ce serait la coïncidence avec les mêmes points immobiles de l' espace, auxquels nous n' accordons aucune existence, et dont la fixité prétendue est une chimère, dont la simple notion ne pourrait s'acquérir ni par l' esprit ni par les sens (...)
>
> Abandonnons donc cette fausse notion, dont l'inutilité est d'ailleurs évidente, car tous les principes que l' on établirait en l' admettant ne pourraient jamais être fondés que sur des observations et des expériences relatives."[96]

---

[95]de Tilly, *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique,* Bordeaux, Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 3, 2° série, 1879, p. 168.

[96]B. Duhamel, *Des méthodes dans les sciences du raisonnement*, t. 4, p. 244, cité par de Tilly, in de Tilly, *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique,* Bordeaux, Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 3, 2° série, 1879, pp. 168 et 169.

Pour de Tilly, il est possible de définir des axes *immatériels*, invariables, immobiles en rotation, par rapport auxquels on rapporterait tous les mouvements, donc une approximation de l' espace absolu; ainsi une sorte d'espace absolu cesse d'être un non sens. Pour cela, il part du principe de l' inertie qu'il lie fortement à la notion de force:

> "L'axiome de l'inertie est intimement lié à la notion de force et les deux idées sont présentées simultanément par les meilleurs auteurs.
> Tous étant à peu près d'accord sur leur énoncé, nous prendrons celui-ci dans la Mécanique de M. Gilbert. " Un point matériel est incapable de modifier par lui-même la vitesse dont il est animé et il a besoin pour cela de l'action d'une cause extérieure à lui (...) Cette cause (...), nous l'appelons *force*."[97]

Pour de Tilly, qu'un point ne puisse agir sur lui-même revient au principe de l'égalité de l' action et de la réaction. En effet, dans tout point matériel, l'existence d'une force intérieure entraînerait, par application du principe de l' action et de la réaction, l'existence d'une autre force opposée, et donc l' action de ces deux forces se compense. La seconde partie de la définition du principe de l'inertie, l'action d'une force extérieure, se ramène à la définition du mouvement uniforme d'un système, et pose donc la question de la définition d'un espace auquel on peut rapporter ce mouvement.

La solution à cette question consiste à considérer de façon purement intellectuelle un système de points libres, système auquel de Tilly accorde les propriétés suivantes:

> "Nous concevons que les forces s'exercent sur tel ou tel point matériel, indépendamment des mouvements que ces forces déterminent par rapport à tel ou tel système de comparaison."[98]

C'est donc affirmer que la force à un caractère de réalité indépendamment des observations que l'on peut faire sur les mouvements des corps. C'est sur la même idée qu'est basée la considération suivante:

> "Nous concevons aussi qu'un point soit libre, c'est-à-dire débarrassé de l' action de toute force."[99]

A nouveau la force est considérée comme une entité première de la mécanique. Puis de Tilly conçoit un système de points libres. La vitesse

---

[97] de Tilly, *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique*, Bordeaux, Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux,3, 2° série, 1879, p. 166 .

[98] ibid., p. 166.

[99] ibid., p. 172.

d'un de ces points étant arbitrairement donnée, il définit géométriquement un trièdre de référence par rapport auquel les vitesses relatives des autres points par rapport a celle du point précédent sont constantes. Vis-à-vis d'un tel trièdre abstrait, les lois de la mécanique sont vraies. Si ce trièdre ne permet pas de définir le repos absolu et le mouvement absolu, il permet de déterminer des rotations absolues.

> "C'est par rapport à ce système que tout point matériel libre décrit une ligne droite d'un mouvement uniforme, et c'est par rapport à lui que nous évaluons les rotations absolues."[100]

Tout système réel dans lequel les mêmes lois de la mécanique sont presque vérifiées, sera une approximation du trièdre abstrait de référence. Ce trièdre n'existe pas. Toutefois on peut mathématiquement le concevoir: c'est un trièdre dans lequel les lois de la mécanique, en particulier le principe de l' action et de la réaction, et le déplacement en ligne droite des points matériels libres, sont presque réalisées. On en déduit que de deux systèmes d'axes, celui dans lequel les lois de la mécanique seront mieux réalisées sera celui qui se rapprochera le plus d'un système sans rotation et en translation uniforme. On peut donc juger de la plus ou moins grande immobilité des repères.

Le trièdre de référence proposé par de Tilly est finalement un trièdre dans lequel sont vérifiées les lois de la mécanique. Toute l'argumentation repose sur ce que l'on admet presque a priori ces lois. Pour de Tilly la notion d'espace presque absolu est donc liée à la considération de forces prises comme entités fondamentales de la mécanique.

Boussinesq, quant à lui, reprend l'idée d'un espace absolu abstrait, mais il ne va pas soumettre son existence à celle d'hypothétiques forces, l'espace absolu sera réellement premier. C'est par rapport à cet espace absolu, et en vertu de certains principes de sélection des lois physiques, que les vraies lois de la mécanique seront mises au jour. Selon Boussinesq, le raisonnement mathématique est essentiellement géométrique, il utilise de nombreuses figures, et se déroule pour sa plus grande partie dans le monde géométrique idéal. Il faut donc un espace dans lequel on puisse dessiner ces figures; c'est ce que nous dit l'intuition géométrique:

> "Certains géomètres acceptent sans restriction cette faculté (l'intuition géométrique) en tout ce qui concerne les figures tracées dans l' espace, mais ils la suspectent et même la rejettent dans sa

---

[100]ibid., p. 172.

donnée la plus fondamentale, sans laquelle les figures ne pourraient se concevoir, je veux dire dans ce qu'elle nous apprend touchant l' espace même."[101]

Or, pour Boussinesq, l'intuition géométrique nous montre bien un espace absolu, c'est ce qu'il dit clairement plus bas:

" La difficulté que leur offre (aux géomètres mentionnés plus haut) la notion d'un espace absolu, tel que l'intuition le montre (...)"[102]

C'est donc bien un espace absolu que Boussinesq attribue à l'espace du monde géométrique. Mais de tels géomètres négligent justement le fait que les figures géométriques se dessinent dans un monde idéal et non dans le monde physique. Il n'est donc pas étonnant que l'on ne puisse poser aucun "jalon" physique dans cet espace:

"Car le manque de repères dans l'étendue pure tient justement à la nature hyperphysique de cette étendue ou à ce que ses parties ne tombent pas sous les sens."[103]

Il faut donc chercher ailleurs que dans le monde physique une définition de l'espace absolu. Boussinesq rappelle la définition qu'en donne Leibniz, l'espace est l'ordre des coexistences. Cette définition ne satisfait pas Boussinesq: logiquement, pour lui, l'intuition nous montre l'espace comme nécessairement antérieur aux figures que l'on peut y tracer. Il préexiste à toutes les figures, et de plus il existe des coexistences, celle des sentiments par exemple, qui ne sont pas dans l'espace mais dans la conscience. La simple définition de coexistences ne définit pas l' espace qui, suivant le commentaire de Boussinesq, n'est qu'un type de coexistences parmi d'autres. Pour trouver entre toutes les coexistences, celles qui correspondent justement à l'espace, il faut avoir déjà la notion d'espace[104]. Et Boussinesq conclut:

" Ainsi nous nous retrouvons au point de départ, et la notion d'espace est bien irréductible."[105]

C'est donc le caractère nécessairement antérieur à l'existence de toute figure qui prouve l' existence de cet espace absolu.

---

[101] J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique,* in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 269.

[102] ibid., p. 271.

[103] ibid., p. 270.

[104] ibid., p. 272.

[105] ibid., p. 172.

"Le sens géométrique nous montre, en effet, l' espace comme quelque chose d'infini, d'immuable, d'antérieur (logiquement) à toutes les figures que l'imagination y voit dessinées comme à tous les corps qui en occupent des portions et qui s'y meuvent."[106]

La phrase précédente est ambiguë. Elle décrit un espace conçu comme quelque chose de logiquement nécessaire, donc de purement abstrait, mais où on trouve dessinés des corps nécessairement matériels. Finalement cette conception n'est pas très différente de celle exposée par de Tilly; pour lui aussi, l'espace presque absolu était une abstraction mathématique, mais finalement il peut être utilisé en mécanique. L'idée de Boussinesq est que cet espace absolu est une donnée de bon sens:

"A quoi bon, d'ailleurs, chercher à la définir (la notion d'espace), alors que tout le monde admet en pratique qu'elle est ce qu'il y a de plus clair, ou alors que toute science atteint son maximum de netteté dès qu'elle s'y ramène, dès qu'elle prend la forme géométrique."[107]

C'est donc la conscience qui nous indique qu'il existe un espace absolu, celui-ci est logiquement nécessaire, c'est donc aussi l'argument de nécessité qui est à nouveau invoqué. Comme de Tilly, Boussinesq considère les rapports entre les lois vraies de la mécanique et l'espace absolu. Pour de Tilly ces lois de la mécanique permettaient de construire un trièdre de référence, approximation du repère de l'espace absolu. Pour Boussinesq, inversant ce raisonnement, la détermination des vraies lois de la mécanique ne peut se faire que par rapport à l'espace absolu: encore une fois, il est nécessaire que l' espace absolu soit antérieur à toute géométrie ou mécanique. La difficulté sera justement de déterminer quelles sont les vraies lois de la mécanique, ces lois que de Tilly supposait connues. Là, Boussinesq fera intervenir un principe que nous étudierons plus bas: le principe de simplicité. Ce sont les lois les plus "simples" qui seront les vraies lois de la mécanique. Il convient de se représenter l'espace absolu uniquement d'après les données de l'intuition géométrique. Mais cet espace absolu n'est pas l'espace réel. Un peu comme pour de Tilly, les trièdres de référence que l'on peut construire sur la Terre ne sont que des approximations du trièdre de référence "absolu"; l'espace physique n'est qu'une approximation de l'espace absolu:

" Il est, d'ailleurs, bien entendu que cette adhésion ne doit pas nous empêcher de soupçonner et même d'admettre l'existence de différences

[106]ibid., p. 269.
[107]ibid., p. 273.

très petites entre l'espace idéal ainsi conçu et l' espace réel où sont les corps, quoique nous ne puissions fixer ces différences."[108]

L'espace, l'espace absolu, présente donc des obscurités pour notre esprit. Il en est de même pour l'autre grandeur fondamentale de la physique: le temps.

"Le temps, dont la notion, autre donnée première s'adjoint, en Mécanique ou dès la Cinématique pure, à celle de l'espace, apporte un nouveau mystère avec son écoulement uniforme, irrésistible, qui en fait la variable indépendante par excellence (...)"[109]

L'image que le monde géométrique idéal nous donne du temps, dit par ailleurs Boussinesq, est celle d'un déplacement le long d'une droite. Il présente l'obscurité qui s'attache à la droite elle-même, celle signalée plus haut de la divisibilité infinie. Mais en plus il s'écoule dans un seul sens, ce qui est proprement incompréhensible, car le point qui sur la droite représente l'instant peut se mouvoir sur celle-ci dans deux sens.

Le temps d'ailleurs n'est pas pour Boussinesq une grandeur géométrique proprement dite; Boussinesq la qualifie *d'extra-géométrique*[110]. Mais le temps ne nous est accessible que par l'intuition, en ce sens il se rapproche des grandeurs de la géométrie pure. Par simplification et pour intégrer la cinématique dans le monde des idées géométriques de Boussinesq, nous l'inclurons dans son monde géométrique ainsi que le temps absolu. Nous signalerons, lorsque cela sera nécessaire, cette "adjonction" au monde géométrique pur.

Les êtres fondamentaux de la cinématique, qui sont aussi ceux de la mécanique, ne nous apparaissent pas avec une clarté absolue. Pourtant il nous sont évidents, par une sorte de connaissance due à l'intuition immédiate.

II . 5 . 2 . Les inadaptations de notre esprit tant dans le domaine abstrait que dans le domaine de la réalité physique

Il convient maintenant, si nous voulons aller plus loin dans la description du réel, de chercher ce qui peut nous empêcher d'adhérer totalement à ces idées d'espace et de temps que nous révèle avec une

[108]ibid., p. 272.

[109]J. Boussinesq, *Cours de physique mathématique de la Faculté des sciences*, t. 3, Paris, Gauthier-Villars, 1921, p. 410.

[110]J. Boussinesq, *Cours de calcul infinitésimal*, t. 1, *Calcul différentiel*, Fascicule 1, *Partie élémentaire*, Paris, Gauthier-Villars, 1887, p. 22.

précision absolue notre faculté d'intuition idéale[111] et pourquoi nous n'acceptons pas d'emblée cette donnée que l'intuition géométrique nous présente clairement, avec netteté: l'espace absolu[112]. C'est que notre esprit n'est pas pure intuition géométrique; notre nature sensible nous a habitués à juger les choses suivant des catégories qui n'ont pas lieu dans le monde géométrique idéal.

> "Il y a dans notre esprit une certaine tendance, qui nous porte à rattacher tout ce qui est concevable à l'une des catégories de la substance et du mode (créées de bonne heure d'après les données ou sous la prédominance des sens externes) et qui voudrait nous faire regarder cet espace sans limites, emplacement de toutes les figures et de tous les corps possibles, soit comme un être véritable, une sorte de matière, soit comme un attribut d'un être réel."[113]

L'esprit humain n'utilise donc pas uniquement l'intuition géométrique, il doit aussi tenir compte des habitudes de pensée créées au contact du monde physique. Dans ce monde, il est sans doute opportun de juger la réalité en la considérant comme formée d'objets, les *"substances"* de Boussinesq, objets qui peuvent revêtir diverses apparences, les *"modes"* de ces *"substances"*. L'espace absolu ne se laisse pas saisir dans ces catégories. D'une part, il ne peut être un "objet" réel, car alors il serait perçu par notre nature sensible comme une réalité que l'on pourrait détecter au moyen d'expériences. Or de tels procédés empiriques ont constamment échoué; c'est donc ici notre nature sensible qui est en défaut. D'autre part, l'intuition géométrique nous montre l'espace absolu antérieur à tout objet, il ne peut être le *"mode"* d'un objet[114]. Selon le mot de Boussinesq, une partie de notre esprit ne peut se défendre d'essayer de décrire l'espace idéal suivant les catégories de la *substance* et du *mode*; or l'espace absolu ne se laisse pas saisir dans ces catégories. Cette faculté, ou plutôt cette infirmité, d'une partie de notre esprit de ne pouvoir juger que suivant certaines catégories, est appelée par Boussinesq notre *sens pratique*[115], et il l'oppose parfois à l'intelligence[116] qui serait l' activité de notre intuition géométrique. Malgré la netteté de notre intuition de l'espace absolu, celui-ci ne nous en paraît pas moins mystérieux, tout comme le temps, puisqu'il ne peut être rangé dans nos catégories habituelles de jugement: Boussinesq

---

[111] J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale,* Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, p. 328.

[112] ibid., p. 138.

[113] J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique,* in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 269.

[114] ibid., p. 269.

[115] ibid., p. 272.

[116] ibid., p. 273.

intitule le dernier chapitre du tome trois de son Cours de physique mathématique, les "Mystères de l' espace et du temps"[117]. A la fois clairement perçu et obscurément senti, l'espace absolu, comme d'autres données du monde idéal, ne parviennent à s'imposer à nous qu'à travers des brumes. C'est ce que Boussinesq nous fait percevoir par la description imagée suivante:

> "La difficulté que leur (à certains géomètres) offre la notion d'espace absolu tel que l'intuition nous la montre, s'explique donc, pour ainsi dire, par une sorte de réaction, qui se produit entre les régions obscures de l' esprit, d'où émergent vaguement les idées de substance et de mode, et la région claire qui ne connait pas ces idées: l'ombre ou le voile qui couvre les premières régions ferait effort pour s'étendre aussi sur la dernière, comme si ce n'était pas sans fluctuations, sans quelques défaillances, que la région claire parvient à se dégager au milieu des autres."[118]

Il n'y a pas d'inaptitude de notre esprit à contempler l'espace absolu: l'intuition géométrique y suffit. Mais à cause de l'habitude de notre intellect à juger les choses suivant le mode et la substance, l'esprit n'accepte pas, dans ce cas, les données de l'intuition géométrique: elles lui répugnent, l'esprit n' a donc pas ce sentiment de plénitude qui caractérise l'évidence géométrique. Cette gêne fait que la notion d'espace absolu n'est pas partagée par tous les géomètres[119]. Il y a donc dans le monde géométrique des réalités - l'espace absolu en est une - que notre esprit ne peut concevoir clairement; la clarté avec laquelle nous apparaît le monde géométrique n'est pas totale.

D'autres obscurités apparaissent, et pour des raisons semblables, si l'on considère la matière, domaine d'étude propre du physico-mathématicien qui doit traduire ses sensations en connaissances positives. Or Boussinesq nous informe du mécanisme qui préside à cette transposition:

> "Nous condensons et précisons toutes nos idées par des formes, des constructions idéales, sans lesquelles nous ne parviendrions pas à les fixer, à les voir nettement; et on dirait que c'est précisément dans la mesure où leur assimilation à des images réussit que nous pouvons en faire l'objet de connaissances positives."[120]

---

[117] J. Boussinesq, *Mystères de l'espace et du temps*, in *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences*, t. 3, Paris, Gauthier-Villars, 1921, pp. 409 et 410.

[118] J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880,p. 271.

[119] ibid., p. 269.

[120] ibid., p. 267.

Pour que nous puissions faire de nos sensations des connaissances positives, il faut qu'il se produise une certaine résonance entre la réalité physique et les images, les êtres du monde géométrique idéal. C'est, entre autres, le problème de la structure profonde de la matière qui est ainsi posé. L'un des problèmes les plus importants auxquels se heurtent les physico-mathématiciens, est celui de la continuité ou discontinuité de la matière. L'analyse est obligée de supposer la continuité des fonctions, et calcule parfois - nous le verrons lors de l'étude de l' élasticité - comme si la matière était continue. C'est l' application stricte de la continuité du monde géométrique idéal (voir supra, § II . 3) au monde physique. D'autre part les atomistes supposent la matière divisée en particules insécables. Pour essayer de trancher et donc d'examiner si la continuité qui règne dans le monde géométrique idéal a aussi lieu dans la matière, Boussinesq examine la possibilité de concevoir les atomes (1879). Rappelons que pour lui la continuité du monde géométrique se traduit par la divisibilité à l'infini de l' espace, ce qu'il définit par:

> "(...) la continuité, cette propriété que présente la quantité de pouvoir passer d'un état de grandeur à un autre état par des accroissements plus petits que tout nombre déterminé quel qu'il soit."[121]

Revenons à la question des atomes:

> "Si l'on suppose que l'espace où sont les corps ne diffère aucunement de celui que nous concevons, ou sur lequel nous raisonnons en géométrie, et qu'il se trouve par suite, comme ce dernier, indéfiniment subdivisible, il arrivera nécessairement l'une des deux choses suivantes. 1° Ou bien le corps ne sera pas composé à l'infini de parties; et alors ses derniers éléments appelés atomes, en nombre limité, seront de simples points sans étendue, maintenus à distance les uns des autres, de manière à donner au corps un certain volume apparent sans volume réel. 2° Ou bien, les plus petites fractions de matière seront elles-mêmes infiniment divisibles (...)"[122]

Boussinesq examine une autre possibilité pour l'atome, celle d'être la limite d'un assemblage de vides et de pleins juxtaposés, mais cela n'apporte rien à notre propos, bien que l'on puisse souligner la résonance leibnizienne de cette conception.

---

121 J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale"*, Mémoires de la Société des sciences, des lettres et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, p. 152.

122 J. Boussinesq, *Sur la difficulté que présentent, dans leurs rapport avec notre idée de l' étendue, les diverses opinions possibles touchant les atomes*, in J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale"*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, pp. 313 à 316.

Mais le sens pratique, cette faculté de juger les choses matérielles qui s'est formée à l'aide de notre nature sensible, répugne également à accepter ces deux conceptions:

> "Or le sens pratique repousse la première hypothèse (celle des atomes inétendus) parce qu'elle fait, du point géométrique qui, pour lui, n'est qu'une abstraction, et une abstraction irréalisable ou du moins dépourvue de toute probabilité, la seule réalité de la matière existante."[123]

Mais la divisibilité à l'infini ne satisfait guère plus, car le sens pratique répugne également à la divisibilité infinie.

> "D'autre part, il n'est guère plus satisfait de la seconde, à cause de la divisibilité à l'infini qu'elle implique (...) "[124]

Finalement, comme le dit Boussinesq, le sens pratique répugne à la fois, pour les ultimes particules de matière, à la continuité telle que nous la concevons dans le monde géométrique idéal, et à l'indivisibilité que notre nature sensible ne nous signale nulle part. Pourtant Boussinesq dira que le sens pratique admet la continuité dans la matière sans pour cela que cette continuité soit la continuité par divisibilité infinie, laquelle est inconcevable par l'esprit humain.

> "Il ne me semble pas impossible qu'il existe dans la nature, quoique ce soit peut-être tout-à-fait hors de portée de notre esprit, une certaine continuité n'entraînant pas la divisibilité indéfinie. Car le sens pratique accorde la continuité dans les mêmes choses dont il repousse la divisibilité à l'infini."[125]

La raison en est toujours la même:

> "Ces difficultés, sans issue apparente, me semblent ne comporter qu'une solution, consistant à admettre que même dans les catégories de la forme et de la quantité, la nature se dérobe en partie à tous les efforts de notre faculté de représentation, ou que le fond des choses nous

---

[123]ibid., p. 314.

[124]ibid., p. 314.

[125]J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 272. Cette référence à la continuité est présente aussi dans la "Conciliation (...)", p. 314 : "et il la rejette (l'esprit pratique) surtout sous sa dernière forme, dans laquelle les plus petites parties imaginables de matière sont privées tout à la fois des deux attributs de continuité et d'indivisibilité, que le bon sens à tort ou à raison leur concède (aux ultimes particules de matière)".

échappe, par suite d'un défaut d'adaptation très léger, mais peut-être irrémédiable, de notre esprit."[126]

Ce sont donc cette fois les catégories de la forme et de la quantité, catégories géométriques ou physiques, qui sont inadaptées, qui échouent, tout comme dans le domaine de l'espace absolu et du temps avaient échoué les catégories de la *"substance"* et du *"mode"*.

La conséquence est qu'il est difficile d'appliquer la continuité du monde idéal au monde physique. D'ailleurs cette inaptitude de notre esprit à faire coïncider nos conceptions géométriques avec le monde physique est générale:

> "Et c'est ainsi que remplissant l'univers physique de nos conceptions, nous transportons, presque sans nous en douter, dans un monde concret qui nous dépasse, les notions simples du monde géométrique perçu en toute clarté par la raison."[127]

Boussinesq a donc mis en évidence que l'espace et l'infiniment petit de la matière nous étaient incompréhensibles, car notre esprit ne peut les concevoir d'après les catégories habituelles de la pensée. Il est difficile de savoir s'il s'agit ici d'une remarquable intuition de notre auteur qui distingue les difficultés essentielles de la physique de la fin du XIX° siècle, ou si ses opinions sont simplement le reflet des préoccupations de tous les physiciens d'alors. Boussinesq s'accommode assez bien des problèmes inhérents à la conception de l' espace: son domaine d'étude n'est pas l' Astronomie, il ne s'intéresse guère à l'électrodynamique, de plus sa théorie mécanique de la lumière est particulièrement cohérente. Il élude donc les domaines où sa conception de l'espace pourrait lui créer des difficultés. Il n'en est pas de même des problèmes posés par l'infiniment petit. Comment en effet faire coïncider la notion, fondamentale pour lui, de dérivée ou de différentielle, avec les réalités matérielles? Au niveau de l'infiniment petit la continuité de la matière, ou simplement des fonctions qui décrivent ses propriétés, n'est pas clairement perçue par l'esprit; Boussinesq parle à plusieurs reprises des "mystères de la continuité physique". Dans ce monde comment définir la dérivée? C'est un point que nous examinerons plus tard, et dont d'ailleurs il tire avantage pour sa théorie du déterminisme. Il n'en reste pas moins qu'il y a, pour lui, une inadaptation fondamentale de l'esprit humain - considéré avec son intuition géométrique et ses préférences et répugnances - à la compréhension de la nature.

Ainsi il dit:

---

[126]ibid., p. 172.

[127]J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale,* Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, p. 328.

> "Il faut bien qu'il y ait, dans cette question du passage de l'abstrait au concret, quelque irréductibilité ou, pour ainsi dire, quelque incommensurabilité de l'une à l'autre espèce, subjective ou objective, pour que les problèmes de la divisibilité indéfinie des corps, de l'étendue ou de l'inétendue des atomes, etc. soulèvent comme on sait, dans toutes les hypothèses, d'inextricables difficultés, ou encore, pour que le sens pratique répugne à accepter dans leur rigueur les données fondamentales du sens géométrique, notamment celle qui domine peut-être toutes les autres et qui consiste dans notre manière de concevoir la continuité par la divisibilité infinie."[128]

L'inadaptation de notre esprit à concevoir la continuité et donc l'infiniment petit, tient peut-être à la constitution de l'univers lui-même:

> "On ne voit aucune impossibilité à ce que les mystères de la continuité physique (...) tiennent à l'élément contingent ou libre de l'Univers, à ce qui aurait pu être tout autre qu'il n'est et qui se trouvait par conséquent impossible à déduire d'aucun principe de raison. Dans cette hypothèse, il n'y a, ce semble, aucun espoir à garder de les éclaircir jamais ici bas.
>
> Car notre connaissance rationnelle, seule susceptible, parfois, d'atteindre à la précision illimitée, ou presque illimitée, paraissant indispensable pour saisir ainsi les infiniment petits de la Nature et les vraies différentielles des phénomènes, n'a comme domaine, comme champ d'exploration, que le nécessaire, ou plutôt, une partie du nécessaire, savoir certaines idées, avec quelques-unes de leurs connexions. Et quant à notre connaissance empirique, seule en rapport avec les faits contingents, elle est visiblement trop restreinte, surtout trop confuse, pour suffire jamais à pareille tâche."[129]

Selon Boussinesq, pour notre esprit, toutes les vérités que celui-ci découvre, par exploration du monde géométrique et observation du réel, sont nécessaires, elles ne peuvent être autres: on en a un exemple avec l'impossibilité des géométries non euclidiennes. Mais il est possible que notre univers ne soit pas réductible à la partie du monde géométrique idéal qui nous est accessible, et dans lequel règnent les caractères qui nous apparaissent comme nécessaires. Il peut présenter une partie contingente, non nécessaire, que notre faculté de raisonnement, qui ne connait que le nécessaire, ne peut découvrir. Peut-être aussi le monde physique, produit des volontés libres du

---

[128]ibid., p. 152.

[129]J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences*, t. 3, 1921, p. 405. Voir aussi: J. Boussinesq, *Compléments aux considérations du n° 43 sur les lois d'économie et de simplicité: importance de ces lois en tant que principes directeurs de l'esprit*, in *Théorie approchée de l'écoulement de l'eau sur un déversoir en mince paroi et sans contraction latérale*, Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, 50, 1908, p. 134.

Créateur, n'a-t-il pas certains caractères qui ne sont que de Dieu. C'est à notre sens ce que dit la phrase suivante:

> "Mais aussi, les mystères dont il s'agit seraient, dans l' hypothèse énoncée, le secret des volontés *libres* du Créateur, naturellement plus impénétrables encore à nos esprits bornés que son essence propre et nécessaire. Celle-ci comprend, au jugement de la *perennis Philosophiœ*, l'attribut de la Toute puissance, dont la grandeur et la divisibilité indéfinie de la quantité du géomètre sont en quelque sorte dans l'ordre mathématique, où elles représentent tout le possible; et voilà pourquoi elles portent la marque de l'infini. Mais notre Univers, œuvre de cette toute puissance au dehors, c'est-à-dire œuvre conçue comme non nécessaire, n'est nullement tenu d'égaler et d'épuiser la cause, ni, par conséquent de porter, du moins dans son sens rigoureux les marques de l'infinité. Et ce n'est, dès lors que jusqu'à un degré de précision inconnu, qu'il comporte l'application de notions mathématiques idéales."[130]

Dans notre univers, la divisibilité indéfinie, propre au monde géométrique idéal, manifestation de la toute puissance divine, pourrait n'être réalisée que de façon approximative, tout en conservant la continuité des choses[131]. Une juxtaposition de points sans dimension formant une suite continue n'est pas non plus une image satisfaisante de la continuité, car, outre qu'elle est repoussée par le sens pratique, elle conduirait à considérer dans la moindre particule de matière une infinité de points sans dimension. Alors cette matière serait pourvue d'une qualité d'infinitude qui contient elle-même tous les possibles et donc serait Dieu. Boussinesq renonce à résoudre le problème de la continuité. Là comme ailleurs, il faut considérer le monde géométrique comme une certaine approximation du réel:

> "Mieux vaut d'ailleurs laisser subsister quelques contradictions apparentes, jusqu'au jour où l'on parvient enfin à trouver le point de vue d'où tout s'accorde naturellement."[132]

---

[130]ibid., p. 405.

[131]Rappelons ce que nous avons déjà cité dans le texte. Boussinesq indique la possibilité d'une continuité qui ne soit pas la continuité par divisibilité infinie:
"Il ne me semble pas impossible qu'il existe dans la nature, quoique ce soit peut-être tout à fait hors de portée de notre esprit, une certaine continuité n'entraînant pas la divisibilité indéfinie. Car le sens pratique admet parfaitement la continuité dans les mêmes choses dont il repousse la divisibilité à l'infini" (J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, note p. 272).

[132]ibid., p. 272.

Cette opinion un peu pessimiste laisse planer un doute sur la possibilité de décrire la nature. Or on peut le faire au moins partiellement. Nous allons maintenant indiquer par quels moyens.

II . 6 . La description du réel physique et le principe de simplicité

Dès 1873, dans la défense qu'il fait de sa "Théorie nouvelle des ondes lumineuses", Boussinesq exprime les limites qu'il voit à une connaissance qui se voudrait objective:

> "On peut regretter sans doute que toutes ces belles lois (celles que le physico-mathématicien découvre) au lieu de nous révéler en détail les mystères du monde des atomes, ou infiniment petits de la nature, sur lequel elles semblaient devoir nous éclairer, ne soient que la traduction, sous mille formes différentes, de quelques faits simples, qu'un premier coup d'œil jeté sur le monde rend en quelque sorte évidents, et qui ne concernent que l' action totale de particules matérielles dont chacune contient un nombre immense de molécules."[133]

L'activité du physico-mathématicien se ramène donc à induire à partir d'observations banales, les lois macroscopiques de la nature. Il est heureux qu'il en soit ainsi:

> "S'il nous était donné, au contraire, de voir les détails, nous serions tentés peut-être, à cause des bornes actuelles de notre esprit, de ne trouver que désordre et incohérence dans le monde des infiniment petits (...)"[134]

Fort heureusement, la nature fournit des points d'ancrage à notre intuition géométrique. Ainsi Boussinesq dit en 1879:

> "Tous les phénomènes, physiques ou physiologiques, qui ont pour théâtre l' étendue et qui se développent dans le temps, comportent, à certains égards, une représentation géométrique."[135]

---

[133] J. Boussinesq, *Note complémentaire au mémoire précédent, Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résultent des idées exposées au § VI*, in *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits,* Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, pp. 361 à 390, p. 369.

[134] ibid., p. 369.

[135] J. Boussinesq, *Le calcul n'atteint, dans l'explication des phénomènes, que l'élément géométrique, et ses résultats doivent même être interprétés avec circonspection*, in J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, pp. 1 à 141 et 248 à 251, p. 42.

Ils ont aussi un côté obscur:

> "Ils ont, sans doute, un fond caché, en général inaccessible à nos moyens de connaître, qui se bornent à nous faire pressentir son existence, parfois cependant entrevu par le sens intime, lorsqu'il est question de certains faits produits dans nos organes."[136]

Mais les phénomènes ont aussi un côté clair, et donc géométrique pour Boussinesq, aspect qui est objet de la Science positive:

> "C'est de ce côté clair, susceptible d' être figuré, que le géomètre s'occupe; et le physicien même lui attribue une importance capitale, car il n'en trouve pas d'autre qui puisse devenir l'objet d'une étude précise quantitative."[137]

C'est justement cette forme géométrique que présentent les phénomènes naturels qui constituent le trait d'union entre le monde géométrique idéal et le monde physique. Ainsi le géomètre va pouvoir faire correspondre aux formes géométriques apparentes du monde physique les formes idéales du monde géométrique. Cette idée est encore précisée en 1921 par Boussinesq:

> "Or nos perceptions des choses physiques nous portent à croire un tel monde (le monde géométrique idéal) essentiellement différent de celui que nous révèlent les sens: il nous apparaît comme une collection de modèles dont peuvent seulement s'approcher les réalités extérieures (...). Aussi peut-on qualifier, tout à la fois, de profondément réel et, cependant, de profondément idéal, celui de ces modèles qui se trouve le mieux choisi, pour exprimer un phénomène avec le maximum de simplicité et sans écarts excédant l'erreur d'expérience."[138]

La "représentation géométrique des phénomènes" est devenue le "modèle" puisé dans le monde géométrique idéal, et qui représente dans ce monde idéal, le monde physique[139]. Il importe de remarquer que ce

---

[136]ibid.

[137]ibid., p. 43.

[138]J. Boussinesq, *Cours de physique mathématique de la Faculté des sciences*, t. 3, Gauthier-Villars, 1921, p. 394.

[139]Il nous semble que Boussinesq utilise ici le terme "modèle" dans son sens moderne, c'est-à-dire de vision partiale et partielle de l'objet ou du phénomène physique. Le modèle représente alors l'objet ou le phénomène physique dans le monde idéal, et ceci dans les deux sens du terme; il figure le phénomène à l'aide du "vocabulaire" du monde idéal, et il en tient lieu (comme un ambassadeur) dans le monde idéal. Mais, différence, et de taille, avec l'activité de modélisation conçue dans son acception actuelle, celle-ci est délibérée et orientée vers un but, alors que pour Boussinesq le modèle provient d'une sorte de correspondance constitutive entre le monde physique et le monde géométrique idéal.

modèle participe de deux ordres de réalité, d'une part celui qui est du domaine de ce qui est seulement perceptible par l'humain, l'ordre géométrique idéal, et d'autre part celui qui est perçu par nos sens ou un appareil de mesure, le monde physique. Un objet n'existe donc réellement que s'il peut être perçu dans chacun de ces ordres. La Science de Boussinesq sera donc une science qui suppose un sujet connaissant, elle ne prétend pas à une vérité purement objective. C'est aussi ce que nous verrons dans le cadre de la Mécanique physique. Le modèle choisi dans le monde géométrique pour représenter un objet physique est alors une certaine approximation du monde physique. Toutefois, il se trouve que le modèle ou la représentation géométrique du phénomène en est une très bonne approximation. C'est ce qui est affirmé dès 1879:

> "L'accord entre des observations les plus précises avec les conséquences de cette multiple assimilation prouve que les idées ainsi mises en œuvre s'appliquent aux réalités avec une exactitude suffisante, et que sous ce rapport du moins l' adaptation de nos esprits laisse peu à désirer."[140]

Cette confiance dans les données de l'intuition géométrique et l'expérience est une des caractéristiques de la pensée de Boussinesq. Cette confiance subsiste même dans les domaines où elle pourrait vaciller; c'est le cas de sa conception de l'atome, jusqu'en 1921 au moins. Le géomètre est donc amené à travestir la réalité pour la soumettre à l'analyse:

> "Même quand il s'agit des choses les plus à notre portée, je veux dire des formes qui se dessinent et des grandeurs qui se laissent exprimer par des nombres, l'imperfection de notre nature nous oblige très probablement à altérer un peu les vraies notions des objets extérieurs, dans une mesure qui nous échappe."[141]

Il ne faut pas voir dans cette attitude une volonté de modélisation délibérée; c'est presque inconsciemment que cette altération se fait:

> "Cette transition du concret à l'abstrait est si naturelle qu'elle reste presque toujours inaperçue. Par exemple, nous n'hésitons pas à dire égales deux quantités réelles (distances, volumes, poids, temps, etc.)

---

[140] J. Boussinesq, *Le calcul n'atteint, dans l'explication des phénomènes, que l'élément géométrique, et ses résultats doivent même être interprétés avec circonspection*, in J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, p. 43.

[141] J. Boussinesq, *Sur le passage de l'abstrait au concret, dans les applications de l'analyse des mathématiciens aux réalités physiques*, in J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l' existence de la vie et de la liberté morale*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, p. 328 à 331, p. 328.

entre lesquelles les sens ne nous montrent aucune différence marquée, quoique la réflexion nous apprenne qu'il est presque impossible que des quantités pareilles ne diffèrent pas véritablement quelque peu l'une de l'autre."[142]

Pour Boussinesq donc, la réalité ultime des choses n'est pas accessible à l'esprit humain, et cela, peut-être pour toujours. Mais les réalités physiques sont partiellement, approximativement, susceptibles d'être représentées géométriquement ou au moins analytiquement. Le rôle du physico-mathématicien est alors d'établir des correspondances entre le monde géométrique idéal et la réalité physique. C'est presque à l'insu du géomètre que cette correspondance se fait, par une sorte de résonance que nous avons déjà signalée.

Ainsi livré à lui-même, le géomètre aurait beaucoup de peine à distinguer dans la multiplicité des images que lui communique sa nature sensible, dans l' extraordinaire enchevêtrement des phénomènes physiques, quelque forme, quelque loi, qu'il puisse rapporter au monde géométrique idéal. Heureusement, il est aidé par un principe, le principe de simplicité, parfois aussi appelé bon sens, et par l'harmonie, mystérieuse, qui semble exister entre nos facultés de compréhension et la réalité physique. Voici comment Boussinesq expose ce principe et cette harmonie.

II . 7 . Les principes unificateurs de l'univers

Le principe de simplicité s'impose peu à peu comme un élément explicatif essentiel dans l' épistémologie de Boussinesq. En étudiant la notion d'espace, il en vient à essayer de déterminer ce qui distingue un mouvement réel, mais décrit par rapport à l' espace absolu, du même mouvement exprimé en référence à l'espace physique; ce sera l'occasion d'utiliser la notion de simplicité (1880). Le principe de simplicité deviendra la justification essentielle de la Mécanique de Boussinesq vers la fin de sa vie (1921 et 1922).

La notion de "simple" apparaît dès 1873 dans la justification que notre auteur fait de sa "Théorie nouvelle des ondes lumineuses". Défendant ses hypothèses fondamentales dans le domaine de l'Optique, il s'exprime ainsi:

"Quoi qu'il en soit, et pour revenir à notre sujet particulier, la théorie de la lumière n'est pas plus tenue que les autres parties de la mécanique de déduire dès à présent, d'actions d'atome à atome simple fonction des distances, toutes les formules dont elle a besoin, et

[142] J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, p. 328.

notamment les expressions, relatives à la réaction de la matière pondérable sur l'éther, que des considérations simples et naturelles lui indiquent comme les plus vraisemblables."[143]

Une fois de plus, les raisons ultimes des choses ne nous sont pas connues; dans ce texte, il s'agit sans doute d'un état provisoire de la connaissance. Pour raisonner, malgré tout, sur la nature, le physicien peut utiliser des considérations simples et naturelles, c'est-à-dire finalement, qui satisfassent son intellect. En 1873, et jusqu'en 1908, Boussinesq ne formulera pas ce qu'il entend par simple ou simplicité; nous préciserons ces termes lorsque nous évoquerons cette époque. Nous supposons pour l'instant, avec Boussinesq, qu'il existe une intuition de la simplicité.

C'est à propos de la détermination des mouvements par rapport à l'espace absolu (1880) que Boussinesq va clairement invoquer le principe de simplicité. Il nous semble que, ici encore, Boussinesq s'inspire du mémoire publié par de Tilly en 1879, et dans lequel ce dernier précise la notion de mouvement et de force absolus. Rappelons que de Tilly avait conçu un trièdre par rapport auquel on pouvait détecter les rotations absolues, une sorte d' approximation de l' espace absolu:

> "Rien n'empêche maintenant de considérer, parmi ces systèmes, celui qui a pour translation uniforme la translation moyenne des étoiles fixes; c'est à ce système, dont la position dans l'espace est ainsi déterminée à chaque instant, qu'il faut rapporter les mouvements absolus, les directions et les forces absolues (...)"[144]

Pour de Tilly, les forces absolues, les vraies forces, sont celles qui sont définies par rapport à l'espace absolu, elles ne bénéficient pas d'une définition particulière, c'est par référence à l' espace absolu qu'on peut les calculer. Boussinesq ne pose pas le problème de la force, puisque pour lui, nous le verrons, ce n'est qu'une notion très secondaire; c'est le problème même des mouvements absolus qu'il va résoudre:

> "Des considérations rationnelles, sans lesquelles nulle science n'existerait, permettent d'ailleurs d'arriver aux vraies lois générales

---

[143] J. Boussinesq, *Note complémentaire au Mémoire précédent, Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résulte des idées exposées au § VI*, in *Recherches sur les principes généraux de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et la théorie des gaz parfaits*, Mémoires de l'Académie des sciences et des lettres de Montpellier, 1872, Journal de Mathématiques pures et appliquées (Journal de Liouville), 18, 1873, pp. 370.

[144] de Tilly, *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique*, Bordeaux, Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 3, 2° série, 1879, p. 173.

des mouvements absolus, malgré l'impossibilité d'observer de pareils mouvements."[145]

L'espace absolu de Boussinesq n'étant pas un espace physique, il ne peut y rapporter des mouvements absolus qui, en tant que mouvements, devraient être perceptibles; ce sont donc des considérations logiques, rationnelles comme dit Boussinesq, qui vont guider le géomètre. Ces considérations rationnelles se ramènent, finalement, à la mise en œuvre du principe de simplicité.

"Les équations différentielles de la dynamique ne reçoivent, comme on sait, le maximum de simplicité dont elles sont susceptibles, qu'autant qu'on y rapporte les mouvements à certains axes de coordonnées, x, y, z (...). Or dès que l'on admet un espace absolu, les vrais mouvements sont les mouvements rapportés à cet espace; et ce sont ceux-là, non des mouvements relatifs, qui sont régis par les lois générales ou les équations différentielles les moins complexes obtenues: car le bon sens dit qu'en combinant plusieurs choses on les complique (si ce n'est dans des cas improbables, et d'ailleurs *particuliers*), et que par suite, les mouvements absolus doivent obéir à des lois générales aussi simples ou plus simples que les mouvements résultant de leur composition."[146]

L'existence d'un espace absolu permet de garantir qu'il sera possible de définir des mouvements absolus, mouvements qui sont régis par les vraies lois de la nature, et qui se trouvent aussi être les plus simples. L'espace absolu est alors nécessaire, logiquement nécessaire, pour que l'on puisse garantir qu'il existe des mouvements spéciaux, dits absolus. Mais il n'est pas utile de saisir physiquement l'espace absolu; les mouvements absolus seront ceux que notre intellect, guidé par le bon sens, jugera les plus simples. Le problème des mouvements absolus et des lois générales de la mécanique est donc ici résolu; mais il reste à Boussinesq à nous dire ce qu'est ce principe de simplicité.

On trouve une exposition de ce qu'est le principe de simplicité, pour Boussinesq, dans une volumineuse annexe à un mémoire d'hydrodynamique de 1908[147]. Les considérations qui y sont développées seront à nouveau exposées en 1921 dans le tome 3 du

---

[145] J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 274.

[146] ibid., p. 274.

[147] J. Boussinesq, *Compléments aux considérations du n° 43 sur les lois d'économie et de simplicité: importance de ces lois en tant que principes directeurs de l' esprit*, in *Théorie approchée de l' écoulement de l'eau sur un déversoir en mince paroi et sans contraction latérale*, Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, 50, 1908, pp. 102 à 134.

Cours de physique mathématique[148]. Dans ces textes, le but que se propose notre auteur est manifestement de sauver la mécanique classique devant les problèmes créés par l'électromagnétisme[149]. Le principe invoqué par Boussinesq est le principe de simplicité, utilisé, contrôlé dans le domaine pratique par le bon sens, parfois appelé sens commun. Ni pour le principe de simplicité, ni pour le sens commun, Boussinesq ne donne de définition précise. Ainsi dit-il du bon sens en 1879:

> "Toutefois, le bon sens, faculté d'apprécier un peu vague et presque instinctive (...)"[150]

Dans le même texte, on peut trouver une sorte de genèse du sens commun, que l'on peut rapprocher du bon sens:

> "Est-ce à dire que le mécanicien doive s'abstenir désormais de se représenter, comme il l'a fait jusqu'ici, les produits algébriques de masses et d'accélérations par des *cordes*, ou d'autres liens matériels, attachés à ces masses et qu'une main invisible tirerait plus ou moins fort dans le même sens que les accélérations? Nullement: cette image est légitime, puisque de pareils liens matériels, ainsi tirés, produiraient précisément les accélérations qu'on a en vue; et elle présente l'avantage, immense à certains égards, de traduire la question géométrique dans la langue si riche du sentiment, des connaissances vagues apprises peu à peu par l' expérience des choses, mais trop complexes pour pouvoir être débrouillées. Elle permet donc au géomètre d'utiliser, dans les questions difficiles où la claire vision lui fait défaut, un fonds inépuisable de demi-lueurs, devenues instinctives ou passées dans le domaine du sens commun; et il lui suffit d'en

---

[148] J. Boussinesq, *Sur la loi de simplicité comme principe directeur de l'esprit dans l' édification des sciences*, in *Cours de physique mathématique*, t. 3, Paris, Gauthier-Villars, 1921, pp. 368 à 417.

[149] Il est à noter que les premières mécaniques quantiques (non relativistes) ne posent pas à Boussinesq des problèmes aussi fondamentaux. Partant de ce que nous ne percevons les sensations qu'à partir d'un certain seuil, il admet la possibilité d'existence de quanta qui sont plutôt des quanta de perception. Il est difficile d'aller, pour l'instant, plus loin dans la conception des mécaniques quantiques par Boussinesq, le petit texte (cité en référence à la fin de cette note) étant confus; Boussinesq semble essayer de résoudre le problème de la dualité onde-corpuscule, par la considération d'une "matière virtuelle". Il est certain qu'une partie de la pensée de Boussinesq - l'impossibilité de connaître les réalités ultimes de la matière, l'importance de l'énergie en tant que grandeur fondamentale de la Physique - peut s'accorder assez bien avec certains principes de la mécanique quantique tels que les inégalités d'Heisenberg ou le rôle éminent de l'énergie. Voir: J. Boussinesq, *Du seuil de sensation; tentative d'explication de certains quanta, par la nécessité où est l' excitation d'excéder un certain seuil (juin 1921)*, in *Cours de physique mathématique, Compléments au tome 3*, 1922, pp. 106 et 107.

[150] J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme avec l'existence de la vie et de la liberté morale*, Mémoires de la société de sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, pp. 43.

retraduire ensuite les données dans la langue de la mécanique positive, pour les dépouiller de leurs éléments purement subjectifs."[151]

Des images, cette fois issues des données de notre nature sensible, se présentent donc, et condensent des figures géométriques trop étroitement imbriquées pour pouvoir être débrouillées. Il en naît des sentiments, des convictions (les demi-lueurs) plus que des connaissances, qui toutefois nous guident, parfois, sur les voies de la géométrisation de la mécanique. Le sens commun, d'une grande importance, on le voit, pour la mathématisation de la mécanique, est encore plus mal défini que l'intuition géométrique puisqu'il ne possède pas le caractère d'universalité de cette dernière, comme le montre l'existence de géomètres non euclidiens. La Science positive doit donc, pour traduire ces sentiments dans le langage géométrique, faire fond sur un principe: celui de simplicité. En 1908, Boussinesq dira aussi le caractère mal défini du principe de simplicité, il finira par en appeler à une sorte de foi dans les conquêtes passées de la Science:

> "Et l'on voit, par le caractère forcément hypothétique de ce principe de simplicité, principe en outre non quantitatif mais appréciable par le sentiment seul, que son application demande une grande délicatesse de jugement, un certain esprit de docilité et de foi, se contentant du degré moyen de lumière strictement suffisant pour appeler la conviction sans la contraindre; enfin, que le savant a tout lieu d'être modeste, humble même, dans son triomphe si péniblement obtenu."[152]

Pour exposer le principe de simplicité au sens de Boussinesq, force nous est d'énumérer avec lui les exemples qui fondent la confiance qu'il y met; et tout d'abord il y a la référence à la science qui lui semble la plus achevée: l'Astronomie. Ainsi il aurait été impossible aux Anciens d'élaborer une astronomie tant soit peu cohérente sans l' appui d'hypothèses simplificatrices; aussi ont-ils eu l'idée d'imposer aux astres des mouvements circulaires et uniformes centrés sur la Terre. Sans le secours de ces hypothèses, l'imprécision de leurs mesures ne leur permettant pas de déterminer les rayons vecteurs des planètes, il leur aurait été impossible de construire une science cohérente.

> "Mais, heureusement, les trois conditions qu'ils s'imposaient, de faire mouvoir les planètes circulairement et uniformément autour de la Terre, limitaient cette énorme indétermination et leur permit

---

[151] ibid., p. 247. Voir aussi: J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale*, Gauthier-Villars, 1889, p. 90.

[152] J. Boussinesq, *Compléments aux considérations du n° 43 sur les lois d'économie et de simplicité: importance de ces lois en tant que principes directeurs de l' esprit*, in *Théorie approchée de l' écoulement de l'eau sur un déversoir en mince paroi et sans contraction latérale*, Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, 50, 1908, p. 118.

d'esquisser, pour toute époque, une figure approximative de l' univers visible par rapport aux habitants du globe terrestre, figure remarquablement belle et saisissante à raison même de sa simplicité."[153]

De nos jours même, l' Astronomie ne saurait se passer du principe de simplicité: la fermeture des orbites des planètes, la périodicité de leur révolution autour du soleil ne sont que des simplifications que l'observation, limitée dans le temps, est impuissante à justifier, et donc Boussinesq conclut:

"En résumé, la moins imparfaite des Mathématiques appliquées, l'Astronomie, n'a pas pu encore, malgré la très longue durée, plus de vingt fois séculaire, qu'a demandé son édification, se passer d'hypothèses, très simples sans doute, mais nullement évidentes, ni même démontrées en toute rigueur par l'accord de leurs conséquences (véritables) avec les faits."[154]

Le principe de simplicité est lui-même à la base de la constitution du monde géométrique idéal. Ainsi son rôle est inscrit dans la nature même des êtres qui le constituent. On peut dire qu'ils sont tous engendrés à partir du plus simple d'entre eux, le point sans dimension:

" L'élément le plus fondamental est le point (...); puis viennent les lignes, séries continues de points sans largeur ni épaisseur; les surfaces, séries ou juxtaposition, sans épaisseur, de lignes (...)" [155]

Dans le domaine pratique, pour nous assurer que les diverses sensations qui nous semblent émaner d'un même objet en proviennent bien, le sens pratique, "cette faculté d'apprécier", n'a d'autre recours que le principe de simplicité. C'est lui qui permet d'affirmer que de telles sensations proviennent d'un même objet et non pas de plusieurs qui occuperaient successivement la même place[156].

Peu à peu donc, le principe de simplicité devient avec l'intuition géométrique la véritable base philosophique de la physique de Boussinesq. L' affirmation de ce principe est progressive. C'est, en 1873,

---

[153]J. Boussinesq, *Cours de physique mathématique de la Faculté des sciences*, Paris, Gauthier-Villars, t. 3, 1921, p. 373 et 374. La même idée se trouve déjà développée dans le texte précédemment cité: J. Boussinesq, *Compléments aux considérations du n° 43 sur les lois d'économie et de simplicité: importance de ces lois en tant que principes directeurs de l' esprit*, in *Théorie approchée de l' écoulement de l'eau sur un déversoir en mince paroi et sans contraction latérale*, Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, <u>50</u>, 1908, pp. 102 à 134.

[154]J. Boussinesq, *Cours de physique mathématique de la Faculté des sciences*, Paris, Gauthier-Villars, t. 3, 1921, p. 375.

[155]ibid., p. 407.

[156]ibid., p. 389.

l'efficacité même des hypothèses qu'il utilise, qui les justifient à ses yeux. En 1880, avec le problème des mouvements relatifs et absolus, l'argument de simplicité apparaît. Mais c'est en 1908, comme argument désespéré de défense de la Mécanique classique, qu'il prend toute son importance. Evidemment, l'appréciation de la simplicité est tout à fait subjective, on s'en convaincra dans le troisième chapitre lors de l'étude de la Mécanique physique. La simplicité est, pour Boussinesq, comme pour tous les autres scientifiques de tous les temps, ce qui correspond à leur manière de penser, qu'ils l'appellent simplicité ou "beauté des équations". On peut, d'après l'exemple du monde géométrique idéal, supposer qu'une figure est plus simple qu'une autre si la seconde peut être construite par la composition de la première.

Par certains côtés le principe de simplicité finit, dans la pensée de Boussinesq, par rejoindre le "principe d'économie", et ainsi, celui de "moindre effort", proches du principe physique de la "moindre action"[157], qu'il distingue d'ailleurs du principe mécanique de moindre

[157] Ici Boussinesq fait se rejoindre deux ordres de réalité: notre activité intellectuelle et les principes de la Mécanique. Il examine le principe de la moindre action dès 1879 dans la "Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté humaine". A côté de certains autres principes que nous évoquerons plus tard: "Il y a peut-être à côté la loi d'économie, de la moindre action, consistant en ce que les causes extérieures propres à amener des changements dans un système y opèrent le plus grand effet possible, ou déterminent le déploiement de toutes les forces intérieures, de toutes les forces disponibles qui s'y trouvaient à l'état latent." (J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté humaine*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, pp. 138 et 139).
Dans l'"Etude sur divers points de la philosophie des sciences" (1880), Boussinesq énonce divers domaines où il reconnaît le "principe de la moindre action": chimie, hydrodynamique, plastico-dynamique, mécanique. Mais il considère que ce "principe de la moindre action" est différent du principe mécanique de moindre action:
"Il n'est pas, d'ailleurs, très facile de reconnaître les rapports que ce principe pratique de la moindre action doit avoir, en général, avec le théorème de mécanique rationnelle connu sous le même nom. Celui-ci, en effet, n'est démontré que pour les systèmes matériels purement fictifs." (J. Boussinesq, *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Revue philosophique, Mémoires de la société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 326).
Le "principe de la moindre action" de Boussinesq est donc un principe pratique par lequel une grandeur caractéristique du problème traité est minimum; c'est le cas du temps dans le principe de Fermat tel que Boussinesq l'expose dans le même texte: "(...) si l'on considère toutes les ondes, d'une période déterminée, qui partent d'un centre lumineux et qui se rendent par des voies diverses à un point donné quelconque, les seules qui subsistent en arrivant à ce point, c'est-à-dire qui se trouvent pas entièrement neutralisées par d'autres, sont conformément aux opinions de Fermat et de Leibniz, celles qui emploient le moins de temps à faire le trajet ou qui suivent, en quelque sorte, la voie de moindre résistance."
Dans le second tome de son Cours de Physique mathématique (1903) Boussinesq démontre, à partir des lois de la réflexion et de la réfraction, le principe de Fermat. Il s'étonne que nous n'ayons pas une connaissance immédiate de ce principe et

action: le raisonnement qui nous paraît le plus simple est celui qui nous demande le moindre effort.

> "On est fortement porté à penser que le principe de simplicité suffit au bon sens, dans bien des cas essentiels, pour exclure toute possibilité sérieuse d'erreur et produire en nous le sentiment de la certitude. Ce principe se confond alors avec celui même d'économie ou de moindre effort, en tant que nous appliquerions ce dernier à nous-même, à notre propre action, puisqu'il faut d'autant moins de peine à notre esprit pour saisir et retenir les faits ou les idées, que nous les concevons plus simples."[158]

Mais il faut aller plus loin dans la pensée de Boussinesq pour comprendre la confiance qu'il a dans l'efficience de l'intuition géométrique et du principe de simplicité pour la description du réel physique. Il y a pour lui une certaine harmonie supposée entre l'ordre géométrique idéal et l'ordre physique[159]. La mention de cette harmonie intervient dès les textes de 1879, et il y a comme une gradation dans les arguments qu'il emploie successivement. D'abord cette harmonie proviendrait d'une adaptation de l'être humain à son milieu:

> "Heureusement, grâce à l' harmonie des divers ordres de choses, ou, si l'on veut, au degré déjà très haut de notre adaptation au milieu qui nous voit naître, les faits justifient cette croyance à l'intelligibilité de la nature: ils montrent que l'univers physique a des lois, surtout des lois quantitatives, et que ces lois sont traduisibles mathématiquement."[160]

---

voit là une imperfection de l'intuition humaine. Voir: J. Boussinesq, *Cours de physique mathématique de la Faculté des sciences*, t. 2, Paris, Gauthier-Villars, 1903, p. 258.

158 J. Boussinesq, *Compléments aux considérations du n° 43 sur les lois d'économie et de simplicité: importance de ces lois en tant que principes directeurs de l' esprit*, in *Théorie approchée de l' écoulement de l'eau sur un déversoir en mince paroi et sans contraction latérale*, Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, 50, 1908, p. 106.

159 On peut penser que les textes que nous allons citer, tous postérieurs à 1878, révèlent une attitude défensive de Boussinesq. Néanmoins, la foi chrétienne de Boussinesq et la dernière citation montrent que cette affirmation de l'harmonie réfère bien au Dieu de Boussinesq, et peut être considérée comme l'expression de sa pensée. On peut également soupçonner que l'affirmation des idées philosophiques de Boussinesq, surtout à partir de 1889, se produit au moment où, étant parvenu à la position universitaire qu'il ambitionnait depuis toujours, Boussinesq peut ne plus taire ses véritables convictions.

160 J. Boussinesq, *Sur le passage de l' abstrait au concret dans les applications de l'analyse des mathématiciens aux réalités physiques*, in J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l' existence de la vie et de la liberté morale*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, p. 323.

Ce peut être là seulement une façon de résoudre le mystère que représente la possibilité de géométriser le réel. Cette possibilité est peut-être due à la constitution même de l'homme:

> "Et s'ils s'appellent l'un l'autre (les ordres géométrique et physique), si l'harmonie régne entre eux, jusqu'à un haut degré d'approximation qui d'ailleurs nous échappe, c'est assurément parce que dès l'origine les hommes ont été doués d'un sens droit."[161]

Mais la référence à un point de vue supra-humain apparaît aussi dès l'année 1880:

> "Mais, pour aller plus loin, c'est-à-dire, pour s'élever jusqu'au point de vue d'où le monde des idées pures serait jugé avoir autant de réalité objective que le monde physique, et où s'expliqueraient, dans leur sens supérieur ou complet, l'harmonie que présente en particulier chacun des deux mondes, celle qui ressort de leur rapprochement, et les lacunes ou imperfections possibles que ces harmonies comportent soit en elles-mêmes, soit seulement par rapport à nous, il faudrait franchir toutes les lumières de la science et faire appel aux mystérieuses lueurs du sentiment."[162]

Ces lueurs du sentiment se trouvent déjà évoquées en 1875 dans la correspondance de Saint-Venant et de Boussinesq. On voit donc ici apparaître la référence à quelque chose qui transcende à la fois l'ordre géométrique et l'ordre physique. On songe bien entendu au Dieu parfait de Leibniz. Finalement c'est peut-être entre les lignes qu'il faut lire que l'harmonie des divers ordres de l'univers provient de Dieu:

> "Le principe, plus général peut-être, de simplicité ou d'unité combiné avec les deux idées de l'immuabilité de Dieu et d'une certaine ressemblance avec Lui qu'il a imprimée à son Œuvre, a conduit Descartes à sa loi de la conservation du mouvement, inexacte il est vrai, mais de laquelle deux rectifications différentes dues, l'une à Huygens (...), l'autre à Leibniz, ont tiré les deux principes les plus féconds de la mécanique, savoir, celui de la conservation algébrique

---

[161] J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 272. Aussi partiellement: J. Boussinesq, in *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences*, Paris, Gauthier-Villars, t. 3, 1921, p. 390.

[162] J. Boussinesq, *Sur l'impossibilité d'arriver aux notions géométriques par une simple condensation d'un grand nombre de résultats de l' expérience*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, 378.

des quantités de mouvement orientées et celui des forces vives ou de l' énergie."[163]

Il est difficile de savoir si Boussinesq partage les idées de Descartes sur la ressemblance entre Dieu et sa Création, mais il faut dire que les divers textes le suggèrent fortement. Peut-être préfère-t-il ne pas résoudre la question: Boussinesq est un de ces chrétiens libéraux honnis par Saint-Venant et que ce dernier n'est pas loin d'accuser d'athéisme.

Il est des indices plus discrets que le Physicien se doit de ne pas négliger, ce sont ces sortes d'impressions, de sentiments que nous avons déjà mentionnées; Boussinesq appelle ces indices les "demi-lueurs", sortes de perceptions ou d'idées confuses. Parmi ces idées confuses certaines constituent le sens commun, le bons sens, mais d'autres peuvent relever d'une intuition physique, sorte de position d'attente, qui permet au géomètre d'avancer dans la Science positive, même si tout n'est pas parfaitement clair. Par exemple, le physico-mathématicien a tendance à considérer qu'il n'y a dans nature que de la matière et du mouvement. Boussinesq l' écrit en 1879:

> "Aussi dit-on souvent que les sciences positives tendent à ne montrer dans l'univers que de la matière et du mouvement: maxime vraie en ce sens seulement, que le monde visible n'offre de clair, aux yeux du savant, que les formes et les changements qu'elles éprouvent d'un instant à l' autre, ce qui peut se mesurer et se dessiner, au moins en imagination."[164]

Pourtant Boussinesq, de façon assez confuse, en 1879, semble croire qu'il existe dans la nature autre chose que de la matière et du mouvement. Il s'en ouvre à Saint-Venant dans les feuillets de commentaires du Mémoire de 1872 que nous avons déjà mentionnés[165]. Evoquant l'aspect géométrique des réalités physiques auquel Saint-Venant veut réduire l' ensemble de la Physique, Boussinesq en vient à l'affirmation suivante:

> "Eh bien oui, soit (Boussinesq écrit plus haut que seules les grandeurs géométriques peuvent être l'objet de la Science positive) quoique je croie qu'il y a plus que cela et que les demi-lueurs du sens, sans nous donner des connaissances nettes, nous mettent en

---

[163] J. Boussinesq, *Cours de physique mathématique de la Faculté des sciences*, Paris, Gauthier-Villars, t. 3, 1921, p. 370.

[164] J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, p.42.

[165] A. de Saint-Venant, J. Boussinesq, *Objections qui pourraient être faites au Mémoire de Monsieur Boussinesq*, Paris, Archives de l'Académie des sciences, fonds Saint-Venant, carton 2, 1875.

rapport avec la réalité profonde bien plus que la claire vision, qui ne perçoit que ce qui est géométrique et quantitatif."[166]

Ces demi-lueurs, qui nous donnent accès à un monde où la Science positive est impuissante, doivent toutefois être prises en compte, et finalement peuvent, comme nous le montrerons dans le troisième chapitre, être l'indice d'importants phénomènes assimilables par la Science positive.

II . 8 . Les problèmes soulevés par l'utilisation de l'analyse

Participant du monde géométrique idéal, et appliquée au monde géométrique, la pensée mathématique de Boussinesq est empreinte à la fois de son épistémologie et de sa conception du monde physique. Nous pouvons donc l' évoquer dans le cadre de ses conceptions philosophiques ou la placer dans l' étude même de sa Mécanique . Nous en évoquerons ici certains aspects, mais uniquement sous l' angle des relations entre les mathématiques et le monde physique. Certains des procédés mathématiques que Boussinesq utilise en Mécanique seront mentionnés dans le troisième chapitre[167].

Nous venons de voir la pensée physique de Boussinesq s'exprimer à l'aide de figures géométriques. Un outil mathématique dérivé de cette description sera une géométrie analytique, où Boussinesq raisonne à l'aide de figures, mais utilise aussi des fonctions mathématiques pour décrire les interactions entre les composants du monde physique

---

[166]ibid.

[167]Voici, à propos de l'œuvre mathématique de Boussinesq, ce qu'écrit Em. Picard dans l'éloge posthume de Boussinesq: "Boussinesq s'intéressait peu aux mathématiques elles-mêmes. Je me rappelle l'avoir entendu soutenir que les mathématiciens n'ont pas leur place dans les Sociétés savantes scientifiques. Il estimait qu'ils devaient trouver asile dans quelque section de philosophie ou de logique d'une académie des sciences morales ou politiques. Notre confrère aurait pu aussi envoyer les mathématiciens dans une Académie des Beaux-Arts, car le géomètre n'est pas seulement un logicien, il est aussi un artiste, et le mot élégance revient souvent sur ses lèvres. En émettant cette boutade, Boussinesq pensait évidemment à certains travaux de philosophie mathématique qu'il jugeait sans bienveillance et regardait comme des débauches de logique (...)Il n'y a pas lieu non plus de s'étonner que, soucieux avant tout des applications de l'analyse aux choses concrètes, il ait donné parfois, fût-ce aux dépens d'une rigueur qu'il jugeait excessive, la prédominance aux considérations intuitives sur des raisonnements trop subtils", in Em. Picard, *La vie et l'œuvre de J. Boussinesq*, l'Institut, 28, 1933, pp. 29 et 30.
A l'appui de l'opinion de Picard on peut citer le titre complet du cours de mathématiques publié par Boussinesq: "Cours d'Analyse infinitésimale, à l'usage des personnes qui étudient cette science en vue de ses applications mécaniques et physiques". C'est donc dans un but pratique qu'est édité cet ouvrage. On trouvera de précieuses indications sur l'œuvre mathématique de Boussinesq dans: M. Zerner, *La transformation des traités français d'analyse (1870 - 1914),* Université de Nice-Sophia-Antipolis, Prépublication n° 389, juin 1994.

matériel et les variations de grandeurs géométriques. Une technique mathématique utilisée à l'époque est celle de la décomposition des fonctions en série de Taylor, aussi appelée formule de Taylor, ce qui donne une grande importance à la notion de dérivée d'une fonction. L'utilisation de la dérivée pose pour Boussinesq plusieurs problèmes: celui de la signification de cette dérivée dans le monde géométrique idéal, celui de son existence, celui de son utilisation dans le monde physique alors que l'on ne peut en connaître la structure microscopique. Ce sont ces aspects de l' œuvre de Boussinesq que nous examinons maintenant.

II . 8 . 1 . L'unité et la continuité de l'univers

Nous avons vu les problèmes que pose la conception de la continuité dans l'infiniment petit. Or les fonctions utilisées en physique sont des fonctions continues. Pour Boussinesq, la continuité des fonctions de la nature est surtout une affaire de conviction. Il définit ainsi l'*Analyse infinitésimale*, dans son Cours de Calcul infinitésimal:

> "Le but de cette Science est précisément l'étude des fonctions continues à variations graduelles (...). On comprendra l'importance d'une pareille étude, en observant que, dans l'univers, tout se transforme par d'insensibles nuances, par de continuels et inappréciables changements, et que ces changements eux-mêmes renouvelés d'instant en instant, se modifient peu à peu; que tout, en un mot, varie avec continuité et graduellement. Car la nature ne fait pas de sauts (natura non facit saltus) comme dit une maxime probablement bien ancienne, mais dont personne n'a mieux fait ressortir tous les sens que Leibnitz, le principal fondateur, au XVII° siècle, de l'Analyse infinitésimale."[168]

On peut mettre cette maxime, *natura non facit saltus*, en regard d'autres principes généraux de la Nature: les principes de simplicité, de continuité et de variété. Tout ces principes ont une résonance leibnizienne. Dans sa forme initiale, le texte que nous allons citer date de 1880[169], il est repris sous une forme presque identique en 1922[170] . Boussinesq commence par assimiler le principe de simplicité au principe d'unité:

> " (...) les principes de simplicité et d'unité, qui reviennent presque au même; car les choses les moins complexes sont aussi, dans chaque

[168] J. Boussinesq, *Cours d'Analyse infinitésimale*, t. 1, *Calcul différentiel, fascicule I, partie élémentaire*, Paris, Gauthier-Villars, 1887, p. 62.

[169] J. Boussinesq, *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l' agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, pp. 134 et 135.

[170] J. Boussinesq, *Cours de physique mathématique, Compléments au tome III*, Paris, Gauthier-Villars, 1922, pp. 92 et 93.

espèce, les moins nombreuses, ou se rapprochent tout à la fois de l'unité et de la simplicité."[171]

Il y a donc analogie, et non identité, entre le principe de simplicité et le principe d'unité, qui suppose certaines caractéristiques communes à tous les êtres de la nature. Mais ce principe d'unité ne peut imposer l'uniformité de la nature, car une autre loi intervient: celle de variété ou de diversité. Ainsi:

> "Il y a, par exemple, la loi fondamentale qui veut que la variété, une variété inépuisable, dans l'unité, et qui se manifeste, avec plus d'évidence peut-être que les autres lois, en tous les points de l'espace, à tous les instants de la durée, aussi bien que dans toutes les directions de la pensée et dans toutes les régions de l'âme humaine."[172]

Les lois de l'unité et de la simplicité seules ne pourraient rendre compte de la diversité de la Nature: dans chacune de ses manifestations la nature, si elle obéissait à ces deux seuls principes, choisirait toujours les solutions les plus simples. Or il semble bien que le réel soit constitué par un foisonnement d'êtres différents et que la nature tende, dans la mesure du possible, à réaliser l'ensemble des possibles. Il faut, pour que la diversité puisse coexister avec l'unité, et que l'unité permette la diversité, une autre loi qui permette la liaison entre elles. C'est le principe de continuité:

> "(...) la loi de continuité a pour but d'après son essence même, d'harmoniser, d'unifier autant que possible, sans les dénaturer, des objets de provenances diverses modifiées par des circonstances quelconques imposées, au lieu d'avoir à choisir uniquement, parmi tous les objets possibles d'une même espèce, les plus simples, comme on ferait en appliquant sans restriction le principe d'unité."[173]

Ainsi la continuité, prise dans un sens général, est nécessaire pour rendre intelligible le monde. Elle justifie l'unité supposée entre, par exemple, la simplicité des lois de la nature, et la complexité du vivant. Cette continuité étant posée, voyons comment Boussinesq l'envisage au point de vue des mathématiques.

Déjà en 1873, Boussinesq évoque la "grande loi de continuité des fonctions"[174], expression qu'il reprendra mot pour mot en 1880. Cette

---

[171]ibid., p. 92.

[172]ibid., p. 92.

[173]ibid., pp. 92 et 93.

[174]J. Boussinesq, *Note complémentaire au Mémoire précédent, Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résulte des idées exposées au § VI* , Journal de mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, p. 369. Aussi: J. Boussinesq, *Considérations sur le but, la méthode et les principaux résultats de la mécanique physique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la

conviction de la continuité doit s'accompagner, pour que les fonctions de la physique soient "maniables", de leur constante dérivabilité. Or la mise en évidence de fonctions continues n'ayant pas de dérivées oblige Boussinesq à préciser sa conception de la continuité[175]: il précise que les fonctions qui décrivent la nature sont non seulement continues mais, en plus, graduellement variables, termes que nous étudions plus loin[176].

Nous allons suivre l'exposé sur la continuité que Boussinesq donne dans son Cours d'analyse infinitésimale; cet exposé conduit à la définition de la dérivée, puis de la différentielle.

La propriété générale que Boussinesq attribue aux fonctions de la physique est non seulement la continuité, mais surtout la continuité relative:

> " Une propriété générale et naturelle des choses dont la grandeur varie est leur *continuité* ou, plus explicitement, leur *continuité relative* (c'est-à-dire proportionnée à leur grandeur elle-même)." [177]

Boussinesq explicite cette conception de la continuité relative; elle inclut la continuité proprement dite, ou continuité absolue, et la variation graduelle des fonctions. La continuité absolue est la continuité au sens habituel du terme: la variation de la fonction est aussi petite que l'on veut pour une variation appropriée de la variable. La continuité

Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, pp. 277 à 310.

[175] Boussinesq écrit ce qui suit: "On me permettra d'exposer ici, avec quelques détails, des considérations qui démontrent que toute fonction continue étudiée exclusivement du point de vue de la représentation des phénomènes peut être supposée avoir une dérivée également continue. Il n'est peut-être pas inutile d'insister sur ce point depuis que les géomètres ont appris à former des fonctions continues dépourvues de dérivée, et ont ainsi montré que les règles classiques du calcul infinitésimal ne concernent qu'une classe particulière de fonctions continues", in J. Boussinesq, *Note III (se rapportant à la page 45), Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale,* Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, p. 151.

[176] Em. Picard décrit ainsi l'étonnement de Boussinesq en apprenant l' existence de fonctions continues non dérivables: "Il fut certainement très étonné quand il apprit vers 1875 qu'il existait des fonctions continues n'ayant pas de dérivées, l'idée de dérivées se rattachant pour beaucoup à la notion intuitive de vitesse dans un mouvement (...). Il en conclut, ce qui est très contestable, qu'il n'y a pas d'inconvénients à supposer que dans les problèmes de physique mathématique, les fonctions envisagées ont des dérivées de tout ordre; il invoque à cet effet le principe de continuité relative dans les quantités physiques, qui est singulièrement obscur. Il disait très sérieusement, je crois: "les fonctions ont tout intérêt à avoir une dérivée". Il voulait dire sans doute qu'elles sont plus maniables." (Em. Picard, *La vie et l' œuvre de Joseph Boussinesq*, l'Institut, 28, 1933, p. 32).

[177] J. Boussinesq, *Cours d'Analyse infinitésimale*, t. 1, *Calcul différentiel, fascicule I, partie élémentaire*, Paris, Gauthier-Villars, 1887, p. 29.

relative revient à ne plus considérer la variation de la fonction en valeur absolue, mais en valeur relative. Ainsi on ne considérera pas seulement f(x + Δx) - f(x), mais [f(x + Δx) - f(x)] / f(x); une fonction, présentant par exemple en x une tangente presque verticale, pourra avoir une variation f(x + Δx) - f(x) qui ne soit pas très petite, alors que la valeur de [f(x + Δx) - f(x)] / f(x) le sera.

La continuité relative inclut la continuité absolue. Selon Boussinesq, les fonctions utilisées en Physique sont pourvues de ces deux continuités, sauf en certains points: aux points où, explicitement, elles sont discontinues, c'est la seconde continuité qui est en défaut, et au points où elles présentent une brusque variation, c'est-à-dire un point de rebroussement, c'est la continuité relative qui manque[178]. Boussinesq montre que les fonctions munies de la continuité relative ont des dérivées. Plus exactement, dans le "Cours d'analyse infinitésimale" (1887), *c'est la notion même de dérivée qui sera déduite de celle de fonctions possédant la continuité relative*, encore appelées *fonctions graduellement variables*. Boussinesq, en quelque sorte, ne fait que préciser cette dernière notion:

> "(...)les fonctions dont il s'agit varient graduellement, c'est-à-dire presque uniformément pour des accroissements très faibles de la variable, ou par degrés successifs d'autant moins inégaux (comparés chacun au suivant) qu'on les prend plus petits."[179]

La suite nous semble montrer que ce que veut dire par là Boussinesq, c'est que les courbes représentatives de telles fonctions possèdent une tangente en chacun de leurs points. Alors, si l'on substitue la tangente à la courbe, les accroissements de la fonction pour de très petits accroissements, donc presque égaux, de la variable, sont égaux. C'est ce qu'il précise ensuite:

> "En d'autres termes, si l'on donne à la variable x un nombre quelconque n , d'accroissements successifs égaux h, ne formant qu'un certain total H = $n.h$ assez faible, deux consécutifs des accroissements partiels correspondants k (positifs ou négatifs) de la fonction $y = f(x)$, auront entre eux un rapport presque égal à l'unité à mesure que n grandira ou que h y deviendra de plus en plus faible."[180]

Boussinesq explique ensuite pourquoi il en est ainsi. La fonction k= f(x + h) - f(x) qui traduit la variation de f(x) pour un accroissement h de la variable est elle-même une fonction de x, qui possède la continuité

[178]ibid., p. 29.
[179]ibid., p. 29.
[180]ibid., p. 29.

relative, ou propriété de variation graduelle. Si l'on considère k dans l'intervalle où f(x) présente cette continuité relative:

> "(...) le principe de continuité *relative* des choses, supposé la régir, l'astreint à ne changer que d'une fraction insensible de sa valeur dans toute fraction insensible aussi de cet intervalle (celui dans lequel f(x) possède la continuité relative)."[181]

Pour une fonction possédant la continuité relative ou la propriété de graduelle variation, deux petits accroissements égaux successifs de la variable produiront des accroissements *relatifs*, presque égaux, et si ces accroissements relatifs sont petits, on pourra les supposer égaux, ce qui revient à confondre dans un petit intervalle autour de x, la courbe et sa tangente. Il faut évidemment, pour avoir cette propriété, que la fonction soit continue au sens habituel du terme. Il faut aussi qu'au point considéré, elle soit graduellement variable, c'est-à-dire qu'elle ne présente pas de point de rebroussement. En effet si tel était le cas, avant ce point d'abscisse x la courbe pourrait, par exemple, être presque horizontale pour, après le point, devenir presque verticale, alors k subirait une brusque variation autour de x, et ne varierait donc pas graduellement.

Boussinesq suppose ensuite que l'on divise un accroissement (positif ou négatif) Δx, en m valeurs petites h, de façon que l'on puisse exprimer Δx en utilisant h comme unité. On a $\Delta x = m \cdot h$, et si k est l'accroissement correspondant de f(x), soit: $k = f(x + h) - f(x)$, l'accroissement Δy correspondant à Δx sera $\Delta y = m \cdot k$, d'après ce qui a été dit plus haut sur les accroissements successifs de la fonction dus à des accroissements égaux de la variable. D'où $\Delta y / \Delta x$ sera égal à k/h , rapport qui, pour une certaine valeur suffisamment petite de h, ne varie plus; on peut en effet substituer à h une valeur h/p, alors et pour les mêmes raisons que plus haut, l' accroissement correspondant de f(x) sera k/p, et le rapport des Δy et Δx correspondants sera toujours k/h.

Boussinesq donne ensuite une ultime définition de la graduelle variation, définition qui introduit la dérivée:

> "Ainsi la propriété de graduelle variation revient à dire que des accroissements suffisamment petits Δy de la fonction sont sensiblement proportionnels à ceux Δx de la variable, ou que le rapport $\Delta x / \Delta y$ de pareils accroissements simultanés ne varie plus d'une manière appréciable, si petit qu' y devienne Δx.

---

[181] ibid., p. 29.

Autrement dit le rapport $\Delta y / \Delta x = [f(x + \Delta x) - f(x)] / \Delta x$ de l'accroissement de la fonction à celui de la variable, tend vers une limite déterminée quand ce dernier s'évanouit."[182]

Boussinesq indique ensuite que cette expression est la dérivée de la fonction. Dans le paragraphe de la "Conciliation du véritable déterminisme (...)" consacré au même sujet, Boussinesq indique aussi en fin de démonstration que la limite de la fonction $[f(x +h) - f(x)] / h$ "est dite la fonction dérivée de la fonction f(x)".

Dans la présentation de la continuité relative que fait Boussinesq, celle-ci apparaît comme une propriété supposée des fonctions utilisées en la Physique. La définition de ce type de continuité équivaut pour ces fonctions à avoir une dérivée. C'est donc a priori que les fonctions de la Physique ont une dérivée.

Il se peut que certaines fonctions ne présentent pas la continuité relative; alors Boussinesq indique comment les remplacer par des fonctions aussi proches que l'on veut de la précédente, et qui soient continues et dérivables.[183]La question mathématique elle-même est, selon Boussinesq, de peu d'importance, car nous sommes assurés par notre sentiment de cette continuité relative même. Evoquant le cas des actions des atomes, actions qui s'exercent entre points séparés, Boussinesq s'exprime ainsi:

" Or dans ce cas, le sentiment que nous avons de la continuité des choses suffit à nous assurer que tout ce qui concerne les relations mutuelles des atomes varie graduellement en fonction de leur état, notamment en fonction de leurs situations relatives, et que cette graduelle variation a lieu, tant pour les fonctions finies que pour leurs différences partielles successives, corrélatives à de petits accroissements constants des coordonnées d'un point ou d'autres définissant son état: il y a partout continuité relative, pourvu du moins qu'on excepte les cas extrêmes, semblant même parfois irréalisables comme serait celui où la distance de deux atomes s'annulerait.

(...) les problèmes de physique mathématique, où il s'introduit, à côté du temps t, trois nouvelles variables indépendantes x, y, z, parce que les points matériels y sont assez rapprochés pour que toute étendue perceptible en contienne un nombre immense, et pour qu'il se produise par suite, en chaque endroit (x, y, z,), un état physique moyen assimilable pour tous les corps à une fonction continue des coordonnées x, y, z, le sentiment de la continuité, dont j'ai parlé, nous assure de la graduelle variation non seulement de cet état, mais aussi

---

[182]ibid., p. 30.

[183]J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale,* Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, pp. 156 à 158.

de ses petites différences successives dès que le phénomène a commencé à se régler (...). Sous le bénéfice de ces réserves, la continuité relative semble donc partout garantie, et l' existence de dérivées partielles de tous les ordres en t, x, y, z, pleinement admissible."[184]

Quelle que soit la valeur des démonstrations mathématiques, valeur sur laquelle Em. Picard s'interroge, la véritable raison qu'a Boussinesq de postuler la continuité est qu'il faut bien qu'il en soit ainsi pour que l'on puisse appliquer l'analyse au réel. La même raison le pousse à distinguer le contact géométrique des particules, du contact physique. Dans le premier type de contact, contact géométrique, les parcelles de matière, de forme parfaitement déterminée, se heurtent en changeant de façon brusque et donc discontinue de vitesse. Dans le second, contact physique, selon Boussinesq, des forces entourant la particule empêchent qu'elles n'entrent brusquement en contact avec une autre: la continuité de la vitesse est préservée et donc l'analyse peut s'appliquer en toute rigueur. C'est ce dernier type de contact que Boussinesq suppose[185]*. Ce sera donc la confiance en l'intelligibilité du monde qui permettra à Boussinesq d'être assuré de la continuité des fonctions de la physique*[186]*.*

Boussinesq donne en diverses occasions des définitions de la dérivée et de la différentielle dans une acception qui peut particulièrement intéresser le physicien. Ce sont ces définitions que nous examinons maintenant.

II . 8 . 2 . La dérivée comme expression du pouvoir d'évolution d'un système

Boussinesq donne à plus de vingt ans de distance (1879 et 1922) la même définition de la dérivée. Cette définition est reliée aux phénomènes physiques qu'elle peut décrire[187].

---

[184]ibid., p. 161.

[185]J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale*, 1889, p. 13.

[186]A propos de la discontinuité éventuelle des vitesses Boussinesq s'exprime ainsi: "Or une telle discontinuité de ces deux vitesses ou de l'une d'elles est contraire au grand principe de graduelle variation de toutes choses. De plus elle serait bien regrettable; car elle empêcherait l'application de l'analyse infinitésimale au problème du choc et rendrait vraisemblablement impossible la théorie de ce phénomène si fréquent, conséquence qui accroît encore son improbabilité", in J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale*, 1889, p. 13.

[187]J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale,* Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, pp. 35 et 36. Aussi, *Cours de physique mathématique de la Faculté des sciences de Paris, Compléments au tome III*, 1922, pp. 1 et 2.

"Les savants s'accordent pour admettre que les lois physiques et chimiques sont réductibles, en dernière analyse, à des équations différentielles, reliant les unes aux autres les transformations successives de la matière, ou déterminant la dérivée, par rapport au temps, de chacune des quantités qui définissent l'état d'un système de corps en fonction des valeurs actuelles de ces quantités."[188]

Boussinesq éprouvera le besoin de justifier cette utilisation des équations différentielles plutôt que celle des équations aux dérivées partielles caractéristiques de la physique de la matière considérée comme continue[189]. Pour Boussinesq, en droit, ce sont bien des équations différentielles qui régissent la nature; on peut substituer aux équations aux dérivées partielles une triple infinité d'équations différentielles. En toute rigueur, pour lui, il n' y a qu'une seule variable indépendante: le temps. Les autres variables dites indépendantes, x, y, z, sont elles-mêmes des fonctions du temps. Ce sont donc les équations différentielles qui régiront les phénomènes physiques. Boussinesq tient ensuite à montrer la différence qui existe entre la dérivée et le simple rapport d'accroissement de la fonction à l' accroissement de la variable.

"En d'autres termes, ce que les lois physico-chimiques permettent de déduire immédiatement de l'état actuel, ce n'est pas précisément l'accroissement très petit qu'éprouvera, pendant un instant aussi très petit, chaque quantité concourant à définir l'état du système, c'est la limite vers laquelle tend le rapport des accroissements considérés au temps employé pour l'acquérir, lorsqu'on fait décroître jusqu'à zéro les deux termes du rapport. Le quotient limite ainsi défini, appelé dérivée (ou fluxion) de la quantité, mesure en quelque sorte la pente de celle-ci, sa rapidité actuelle de variation: il saisit comme à sa source et il évalue ce qu'un naturaliste appellerait le pouvoir d'évolution de la quantité."[190]

La confusion peut en effet exister, car sa définition de la dérivée, que nous avons vue au paragraphe précédent, est une définition géométrique, la limite du rapport de Δy et de Δx. Un tel rapport de quantités réelles finies ne peut traduire la réalité infinitésimale. Pour Boussinesq, ce qui se passe au niveau de l'infiniment petit est inconcevable pour l'esprit humain, nous l'avons vu. C'est sous un double aspect que l'infiniment petit nous échappe; d'abord sur le plan de la réalité matérielle: l'atome matériel est inconcevable par l'esprit humain;

---

[188]ibid., p. 34.
[189]Voir J. Boussinesq, *Eclaircissement relatif au numéro 1 (p. 35), Du rôle des équations aux dérivées partielles en physique mathématique*, in J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique (...)*, 1879, p. 248.
[190]ibid., p. 36.

ensuite sur le plan géométrique: la continuité par divisibilité infinie est elle-même inaccessible à l'homme. Mais cette double indétermination de l'infiniment petit entraîne que nature et univers géométrique se répondent l'un l'autre. A l'indétermination de l'atome dans le monde matériel répondra le mystère de la continuité par divisibilité infinie dans le monde géométrique, ce qui fait que certaines particularités du monde géométrique se retrouvent aussi dans le monde physique. Telle n'est pas l'opinion de tous les mathématiciens. Ainsi, pour de Tilly, les points singuliers des équations différentielles[191] existent bien en cinématique pure, là où les points matériels n'ont pas de masse, mais n'existent pas dans le monde physique[192]. Il n'en va pas de même pour Boussinesq pour qui les points singuliers ayant lieu effectivement dans la nature sont des éléments essentiels de sa théorie du déterminisme.

Pour Boussinesq, la dérivée, limite d'un rapport de quantités réelles, traduit par la difficulté même que nous avons à la comprendre, le caractère inconnaissable de l'infiniment petit. Il peut y avoir alors adéquation entre la dérivée et le pouvoir d'évolution du système, ce qui d'ailleurs est confirmé par le bon sens:

> "En disant que la dérivée de l'état actuel est une fonction déterminée de l'état actuel lui-même, la science donne une forme précise à cette vérité de bon sens, que le présent est gros de l'avenir, ou qu'il y a une relation étroite entre ce qui est et ce qui sera."[193]

Cette conception de la dérivée, à la fois en rapport avec le monde matériel et avec le monde géométrique, trouve sa formulation la plus adéquate dans la différentielle, que Boussinesq qualifie de leibnizienne:

> "Dans la pratique de l'analyse infinitésimale, le géomètre appelle infiniment petites, par extensions, des quantités qu'il se représente comme très petites, qui, par conséquent, sont actuellement finies, mais qu'il introduit dans les calculs avec l'intention expresse de les faire décroître indéfiniment et de ne chercher que les limites vers lesquelles tendent les résultats des calculs."[194]

---

[191] En ces points singuliers, plusieurs solutions intégrales de l'équation différentielle ont la même tangente; il y a ce que Boussinesq appelle une bifurcation.

[192] de Tilly, *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique*, p. 165.

[193] J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la liberté morale et de la vie*, Mémoires de l'Académie des sciences, de l'Agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, p. 36.

[194] J. Boussinesq, *Sur la notion de différentielle*, in J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale,* Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, p. 312.

Il ne faut donc pas se laisser abuser par le signe qui exprime la dérivée ou la différentielle. Lorsqu'il écrit un tel signe, le physico-mathématicien sait bien qu'il ne désigne pas des quantités actuelles, bien précises, mesurables à un instant précis. Il s'agit d'un symbole qu'il faudra remplacer par la limite du rapport considéré. Mais cette substitution ne peut se faire de façon rationnelle:

> "C'est l'élan de l'esprit au-delà de ce que montre l'observation (...) qui seul peut nous faire connaître (...) les limites de quantités indéfiniment décroissantes ou d'étendues dont certaines dimensions diminuent vers zéro."[195]

Il ne peut y avoir que cette sorte de "vitesse acquise", l'élan, par l'esprit dans la contemplation de quantités qui deviennent simultanément de plus en plus petites, pour pouvoir nous rendre sensible la limite d'un rapport : tout procédé rationnel échouerait par l'inadaptation même de notre esprit à la compréhension de l'infiniment petit, tant dans l'ordre géométrique idéal que physique. C'est donc la base même du calcul différentiel. Il faut qu'en écrivant des différentielles nous ayons l'intention, dans les calculs, de faire tendre vers sa limite le rapport de la fonction à la variable :

> "*Cette intention est la seule chose qui distingue la différentielle d'une différence finie très petite.* Aussi l'idée qu'a eue Leibniz de l'inscrire explicitement dans les formules, par l'emploi du signe spécial d, (...) peut-être regardée comme l'idée mère de l'analyse infinitésimale."[196]

Dans les points que nous venons d'examiner, continuité, dérivabilité des fonctions et signification de la dérivée, nous voyons que les mathématiques utilisées par Boussinesq sont sous la dépendance étroite de sa conception de la nature. La continuité relative et la dérivée qui en découle sont les conséquences de l'idée qu'il se fait de la façon dont on doit décrire la nature, et non pas de l'utilisation d'un outil mathématique prospectif . La continuité dérive de l'observation banale que la nature ne fait pas de sauts, la dérivée est la traduction de la dépendance du futur par rapport au passé. Avec un tel pragmatisme, on s'étonne que Boussinesq n'ait pu, au moins se rapprocher des mathématiques non euclidiennes. Toutefois, bien plus que l'attachement à une mathématique spéciale, la géométrie euclidienne, c'est pour Boussinesq l'impossibilité de penser en dehors de l'univers visualisable de cette géométrie qui le fait reculer devant les nouvelles mathématiques ou physiques.

---

[195]ibid., p. 312.
[196]ibid., p. 313.

II . 9 . Conclusion sur les aspects épistémologiques de l'œuvre de Boussinesq

Si nous revenons à notre point de départ, l'article écrit par de Tilly, nous constatons que Boussinesq a bien réduit l'importance des géométries non-euclidiennes. Ce sont finalement des raisonnements purs, purs jeux de l'esprit, sans aucun rapport avec le monde physique et encore moins avec le monde tout aussi réel des idées géométriques.

Ce faisant, il a fixé définitivement ses conceptions épistémologiques qui balbutiaient dans le Mémoire de 1872 et justifiaient ses conceptions de la Mécanique physique. Dans l'Epilogue de son cours de Physique mathématique (1928), Boussinesq fournira d'autres indications sur son épistémologie. Il y fait référence à un Dieu, c'est peut-être ce qui justifie la confiance en une harmonie universelle. Mais peut-être aussi les considérations de l'Epilogue ne sont-elles que l' expression des craintes et des regrets d'un homme à la veille de sa mort (1929). Nous résumons les conceptions que nous avons dégagées dans cette section et que nous rappelons pour finir.

Le monde géométrique idéal est le domaine des êtres à partir desquels se fait le raisonnement, points, lignes, et peut-être espace absolu. Le temps, être extra-géométrique, est représenté dans ce monde par le mouvement d'un point sur une ligne. Ces objets sont perçus nettement par l'intuition géométrique, ils sont perçus dans leur totalité, en bloc. Il existe une réalité matérielle ou physique que nous percevons imparfaitement au moyen de notre "nature sensible". Notre esprit possède une forme géométrique qui le rend sensible à l''intuition géométrique, laquelle lui révèle le monde géométrique. Il possède aussi une nature plus en rapport avec le concret, nature qui le fait penser en fonction du sens pratique ou du sens commun. Ce sens commun juge suivant les catégories de la substance et du mode, de la forme, de la quantité. Il y a souvent conflit entre ces deux modes de jugement. La seule façon que nous ayons de raisonner clairement est la géométrie. Dans l'activité de description du monde physique, le physicien utilisera une géométrie simplifiée: l'Analyse. Pour pouvoir utiliser cette mathématique, Boussinesq suppose, plutôt qu'il ne prouve, la continuité des fonctions qui traduisent les grandeurs physiques. Ces grandeurs sont dérivables.

III . L'atome, la force et l'énergie dans l'œuvre de Boussinesq

Boussinesq est parfaitement conscient de la difficulté qu'il y a à décrire la nature en termes d'atomes, comme nous l'avons vu au paragraphe II . 5 . 2. Pour lui le sens commun repousse toutes les images que l'esprit peut s'en former: il repousse l'atome ponctuel comme étant une pure abstraction, il repousse aussi l'atome formé de matière infiniment divisible, bien que par ailleurs le bons sens lui fasse supposer la matière continue. L'atome semble donc une entité qui ne peut être clairement conçue par l'esprit. Boussinesq se sépare malgré tout d'un savant aussi réputé que W. Thomson, pour qui l'existence de "morceaux de matière infiniment petits et rigides" est "une affirmation monstrueuse" et qui voit dans les tourbillons dont pourraient être animés les fluides parfaits le modèle de l'atome. Thomson envisage ainsi, à une certaine époque de sa vie, autour de 1867, la vision d'une structure continue de la matière[197]. Ce caractère inconcevable de l'atome illustre parfaitement ce que nous avons vu de l'épistémologie de Boussinesq: la réalité de la matière ne nous apparait pas clairement, mais pour raisonner sur elle, nous devons choisir dans le monde géométrique idéal un représentant, un modèle[198] comme Boussinesq le dit lui-même, de l'atome. La difficulté de la conception de l'atome par Boussinesq consiste donc en ce qu'il doit faire correspondre à la réalité inconnaissable de l'atome une figure "évidente" du monde géométrique idéal.

Dans ses démonstrations mathématiques Boussinesq utilise le point matériel pour représenter l'atome. Nous essayerons de savoir dans ce paragraphe si pour Boussinesq l'atome réel *est lui aussi ponctuel comme le pense Saint-Venant.*

Dès 1868, dans ses lettres à Saint-Venant, Boussinesq décrira l'atome suivant le diptyque de la réalité de l'univers de la mécanique: réalité matérielle et réalité mathématique. C'est comme une application de la division, présentée plus haut, de cet univers en monde physique et monde géométrique. La description de l'atome ainsi commencée se poursuivra en enrichissant l'atome ou la molécule de propriétés telles que la "présence atténuée " du point matériel à une certaine distance de celui-ci, pour expliquer l'attraction instantanée newtonienne, ou de la différence entre action chimique et action physique pour décrire les propriétés de l'éther. Ce n'est pas par l'interprétation des produits d'un appareillage expérimental compliqué que s'enrichit cette vision, c'est auprès de "quelques faits simples, qu'un coup d'œil rend en quelque sorte évidents", que le physicien s'informe. Boussinesq conçoit son atome en continuité mais aussi en opposition avec l'"atome physique", atome réel et ponctuel, peut-être centre de forces, tel qu'il le voit dans les travaux de Boscovich, Ampère, Cauchy, mais surtout Saint-Venant. A

---

[197]W. Thomson (Lord Kelvin), *On Vortex atoms,* The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 24, 4° série, 1867, p. 15.

[198]Rappelons ce que dit à ce sujet Boussinesq: "Or nos perceptions des choses physiques nous portent à croire un tel monde (le monde géométrique idéal) essentiellement différent de celui que nous révèlent nos sens: il nous apparaît comme une collection de modèles dont peuvent seulement approcher les réalités extérieures", in J. Boussinesq, *Cours de physique mathématique de la Faculté des sciences*, t. 3, Paris, Gauthier-Villars, 1921, p. 394.

partir de 1868, ce dernier et Boussinesq échangent des lettres où ils confrontent, entre autres, leurs opinions sur les atomes. Celles de Boussinesq, qui s'affirmeront très tôt, ne varieront presque plus jusqu'à la fin de sa vie, comme le montre l' étude de la correspondance elle-même, mais aussi celle de son œuvre publiée.

Tracer un panorama de la question de l'atome autour de l'année 1868, pour éclairer l'œuvre de Boussinesq, ne nous a semblé ni pertinent ni possible dans le cadre de ce travail. A cette époque, presque isolé à Gap, où dit-il, il ne reçoit pas les Comptes rendus (de l'Académie des sciences), il est bien dépendant de Saint-Venant dont il commente et apprécie les idées. C'est cette référence, les idées de Saint-Venant, que nous allons d'abord exposer pour rendre compte du contexte d'apparition de celles de Boussinesq. Puis nous utiliserons la correspondance entre les deux hommes, pour préciser les conceptions de Boussinesq. Enfin nous indiquerons le mode d'activité mécanique de l'atome, ce qui nous conduira dans le paragraphe suivant à traiter de l'énergie.

III . 1 . L'atome de Saint-Venant et celui de Berthelot

La représentation de l'atome de Boussinesq est, *dans son utilisation mathématique* en mécanique, proche de celle qu'en a Saint-Venant en 1844. Pour préciser cette dernière nous utiliserons un texte extrait du journal l'Institut[199], qui reprend les idées exposées dans un Mémoire de la même année[200], ainsi qu'un autre intitulé "Sur la constitution atomique des corps"[201] (1876). Saint-Venant y expose, avec vivacité, sa conception de l' atome lors d'une controverse qui l'oppose à Berthelot. L'atome ponctuel du premier est une conception géométrique pouvant presque, s'il n'était pourvu d'une masse[202], prendre place dans le monde géométrique idéal de Boussinesq. Les arguments du second justifient le scepticisme que l'on peut nourrir au sujet de l'atome ponctuel, ou même, la possibilité de décrire précisément l'atome. Les deux opinions illustrent parfaitement les prémisses du dilemme devant lequel se trouve Boussinesq, et qui est encore une fois d'appliquer le monde géométrique idéal, clairement perçu, au monde physique inconnaissable. En outre nous allons voir deux conceptions de la

---

199 Société Philomatique de Paris, *Extraits inédits de procès verbaux, séance du 20 Janvier 1844*, Paris, L'Institut, 528, 1844, p. 48.

200 A. Barré de Saint-Venant, *Mémoire sur la question de savoir s'il existe des masses continues, et sur la nature probable des dernières particules des corps*, Paris, Catillan-Gœury et Victor Dalmont, 1844, référence due aux auteurs de l'article précédemment cité.

201 A. Barré de Saint-Venant, *Sur la constitution atomique des corps*, C.R., 82, 1876, p. 1223 à 1226.

202 On peut sans doute dire que l'atome ponctuel prend même totalement place dans le monde géométrique de Boussinesq, puisque celui-ci définit la masse à partir de propriétés de l'espace.

Physique qui s'opposent: l'une, celle de Saint-Venant, où dans le domaine de la conception de l'atome, la raison, la géométrie domine; l'autre, celle de Berthelot, où la sanction de l'expérience est prépondérante[203].

Voyons, d'abord synthétiquement, l'opinion de Saint-Venant. Selon les rédacteurs de l'article de "L'Institut", rendant compte du "Mémoire sur la question de savoir s'il existe des masses continues" (1844), Saint-Venant affirme que:

> "MM. Poisson et Cauchy ont prouvé analytiquement, en 1827 et 1828, que si tous les corps étaient composés de parties contiguës et en nombre infini, de manière que les pressions dans leur intérieur puissent être exprimées par des intégrales, ces pressions seraient constamment normales aux faces où elles s'exercent, comme dans un fluide au repos (...)
> L'auteur en conclut qu'il n'existe pas, dans la nature, de masse continue grande ou petite, et qu'il convient de ne regarder les dernières particules des corps que comme des points sans étendue, non contigus, centres de forces attractives et répulsives. C'est le système de Boscovich."[204]

D'après Poisson et Cauchy, les masses continues ne sauraient avoir de composante tangentielle à leur pression; il s'en suit qu'elles ne résistent pas aux déformations transversales, elles sont molles. Explicitement, pour de Saint-Venant, les atomes sont sans étendue et aussi centres de forces attractives et répulsives[205].

En 1876, de Saint-Venant, face à Berthelot, défend sa conception de l'atome. L'occasion du débat est fournie par une phrase que Saint-Venant relève dans un article de Berthelot:

---

[203]Dans ce domaine Saint-Venant se montre très rationaliste, mais on peut rappeler que sa Mécanique se fonde sur une loi qu'il présente parfois comme expérimentale: l'action entre deux atomes dépend exclusivement de leur distance mutuelle.

[204]Société Philomatique de Paris, *Extraits inédits de procès verbaux*, séance du 20 janvier 1844, Paris, L'Institut, 528, 1844, p. 48.

[205]En 1878 Saint-Venant publie un Mémoire intitulé "De la constitution des atomes" où il complète celui de 1844. Sa conception de l'atome, dérivée de celle de Boscovich, y est donnée page 33. Il examine le cas d'une matière continue formée de points matériels contigus en nombre infini. Dans une telle matière, une déformation remplace un point matériel par un autre identique, la matière est identique à elle-même après et avant le changement (le nombre de points est infini), et donc on peut passer sans résistance d'un état à l'autre puisqu'ils sont identiques. N'offrant pas de résistance aux déformations, la pression n'y aurait pas de composante tangentielle. Dans la matière discontinue, les distances entre atomes variant, les actions attractives et répulsives qui s'exercent entre eux varient elles aussi, et assurent la cohésion de la matière. Voir: A. de Saint-Venant, *De la constitution des atomes*, Bruxelles, F. Hayez, 1878.

"La notion même d'un atome invisible, et cependant étendu et continu, *aussi bien que celle d'un atome doué de masse et cependant réduit à un point matériel*, me semble contradictoire en soi."[206]

La critique énoncée dans la première partie n'est pas neuve et peut être référée à Descartes. Saint-Venant est d'accord avec cette conception, mais il s'oppose à ce qu'on puisse refuser la masse à un point privé de dimensions:

"Il n'y a, en effet, rien de contradictoire à supposer qu'un atome inétendu se meuve avec différentes vitesses sous l'action de forces attractives et répulsives, émanant d'autres atomes également sans dimensions; qu'il exerce, sur ceux-ci, des réactions (...); en un mot, à douer ces points matériels de mobilité, de masses propres, d'inertie et d'actions, tout comme on les attribue aux atomes crus étendus, figurés et insécables, que nous ont légués les philosophes grecs."[207]

C'est supposer que la dynamique du point matériel est applicable à la réalité matérielle. Pour cela, Saint-Venant est obligé de supposer ses points matériels doués de qualités qu'il ne justifie pas. Il éloigne donc la possibilité de faire de la mécanique une pure cinématique. Sa mécanique n'est pas une cinématique, mais s'appuie seulement en partie sur la cinématique.

Saint-Venant justifie sa démarche sur le plan philosophique. Le fait d'être privée de dimension n'implique pas pour une entité de ne pas être matérielle:

"Il n'y a aucun lien logique nécessaire entre l'idée d'existence, même matérielle, et l'idée d'étendue. Un être inétendu ne sera pas, d'après cela seul, un esprit; ce sera un élément corporel si, obéissant insciemment à des lois dynamiques, il occupe à chaque instant une position déterminée dans l' espace, soit absolu soit relatif, par rapport à d'autres éléments également localisés dans des points."[208]

C'est la description d'une matière entièrement géométrisable: tout ce que l'on pourra y déceler sera de la matière et du mouvement. Ici, nous avons comme l'image de l' univers géométrique de Boussinesq, univers dans lequel les positions des points sont parfaitement déterminées, et dans lequel les relations entre points se règlent sur leurs distances respectives. Ainsi la dynamique est-elle une conséquence de la géométrie.

---

[206] M. Berthelot, cité par Saint-Venant, in A. de Saint-Venant, *Sur la constitution atomique des corps,* C.R., 82, 1876, p. 1223.
[207] ibid., p. 1224.
[208] ibid., p. 1224.

Ce qui justifie les conceptions de Saint-Venant, c'est la raison, la géométrie, dirait plutôt Boussinesq. Ainsi Saint-Venant affirme le primat de la raison sur toute autre considération:

> "Vainement l'imagination humaine, sous l'empire variable des sens, réclamera contre ces êtres sans étendue, comme elle a réclamé si longtemps contre les antipodes, le mouvement de la Terre, la pesanteur de l'air, etc. Que seulement la raison, qui doit être la maîtresse, combatte quelque peu les répugnances instinctives de cette capricieuse servante, et bientôt elle s'apprivoisera, s'accoutumera à la considération de ces sortes d'éléments, sans l'admission explicite desquels la Physique atomique, j'en suis convaincu, ne sera jamais nettement constituée."[209]

La confiance de Saint-Venant en la raison est comme une autre facette de la confiance de Boussinesq en l'intuition géométrique; et peut-être pour les deux physiciens est-ce la même chose. Si l'on enlevait les qualités que Saint-Venant attribue à l' atome, celui-ci pourrait trouver place dans le monde géométrique idéal de Boussinesq. Ces qualités ne seront d'ailleurs pas nécessaires à Boussinesq qui les déduit toutes de l'énergie.

Mais Boussinesq doit être sensible à d'autres manières de voir l'atome que celle de Saint-Venant, par exemple le caractère inconnaissable de la structure ultime de la matière, dans l'état des connaissances d'alors, qui est bien mis en évidence par Berthelot.

Berthelot incarne à l'opposé une conception de la Physique où la géométrie, plutôt que la raison, doit au moins un peu céder à l'expérience. Immédiatement après l'article de Saint-Venant dans le même cahier des Comptes Rendus vient cet article de Berthelot sur la même question[210]. Bien que le nom de Saint-Venant n'y soit pas cité, cela ressemble fort à une réponse.

Berthelot contredit les idées de Saint-Venant en énumérant des expériences choisies aussi bien dans le domaine de la Physique que de la Chimie, opposant ainsi la variété de l'expérience au monolithisme du raisonnement, expériences qui lui semblent infirmer l'hypothèse des atomes ponctiformes. Il rapporte tout d'abord la conclusion des travaux de Kundt et Warburg sur la vitesse du son dans le gaz mercuriel:

> "La molécule du gaz mercuriel se comporte sensiblement au point de vue de ses propriétés mécaniques et thermiques, comme un point

---

[209]ibid., p. 1224.

[210]M. Berthelot, *Nouvelles remarques sur l'existence réelle d'une matière formée d'atomes isolés, comparables à des point matériels*, Paris, C.R., 68, 1876, p. 1226 à 1231.

matériel. Telle est la conclusion énoncée par MM. Kundt et Warburg (Annales de Poggendorf, 67, p. 356)."[211]

Ainsi Berthelot se donne d'abord les gants de ne pas contester les résultats qui sont garantis, dit-il, mais "jusqu'à discussion plus approfondie par l'"exactitude" de ces savants expérimentateurs"[212]. Il n'incrimine même pas les déductions des expérimentateurs. Ce sont les théories qui permettent les déductions qui sont en cause. Après avoir montré que les formules utilisées, extraites de la "Théorie mécanique de la chaleur" de Clausius, ne sont pas absolument certaines, il tire la conclusion:

> "Il existe bien des faits dans la Science qui montrent avec quelles réserves il convient de procéder dans l' application des théories thermodynamiques de la chaleur spécifique des gaz et des vapeurs."[213]

Puis il cite des exemples confirmant cette opinion et reprend:

> "Ces faits, je le répète, montrent que la connaissance de la physique des gaz est encore trop peu avancée pour permettre d'y appliquer une théorie mathématique générale (...). Au lieu de conclure que le gaz mercuriel est formé, soit de points matériels, soit d'atomes étendus, continus et cependant indivisibles, peut-être vaudrait-il mieux poursuivre l'examen expérimental des faits que je viens de rappeler, et dont la théorie actuelle ne rend pas compte: cet examen conduira sans doute à une conception plus compréhensive de l'action de la chaleur dans les gaz." [214]

Il faut donc, selon Berthelot, arrêter de raisonner et poursuivre les expériences, il viendra bien un jour d'autres théories plus satisfaisantes. Pour en terminer, Berthelot s'adresse - peut-être - ensuite directement à Saint-Venant pour qui tous les atomes sont identiques:

> "Il y a plus: la conception d'une matière unique et fondamentale, dont les états d' agrégation multiples constitueraient les corps simples que nous connaissons, avec leurs propriétés spécifiques, conception à laquelle se rallient d'excellents esprits, semble impliquer que les masses atomiques de nos éléments, celle du mercure en particulier, dont le poids (100 à 200) est si élevé, sont fort éloignés de l'état d'atomes véritables."[215]

---

[211] ibid., p. 1226.
[212] ibid., p. 1227.
[213] ibid., p. 1228.
[214] ibid., p. 1229.
[215] ibid., p. 1231.

Parmi les "excellents esprits", il faut sans doute compter de Saint-Venant; mais celui-ci ne s'opposerait sans doute pas à ce que les atomes de mercure soient d'un poids moléculaire élevé: ils pourraient être constitués de points matériels, pourvu que ceux-ci ne soient pas contigus. Mais il y a contradiction avec les expériences mentionnées au début; pour Berthelot, la véritable constitution des atomes n'est pas encore connue.

Nous voyons donc que c'est pour des raisons tirées de la Science positive, dont les résultats expérimentaux et théoriques sont contradictoires, que Berthelot ne se prononce pas sur la structure de l'atome. Rappelons que pour Boussinesq ce sont finalement des raisons dues à la forme même de l'esprit humain qui sont en cause.

III . 2 . La double conception de l'atome de Boussinesq

La correspondance de Boussinesq et de Saint-Venant au cours des années 1868 à 1870 montre les hésitations du premier à rejoindre la position absolue du second. Boussinesq n'utilise que rarement l'argument empirique, il se place d'emblée dans le domaine de l'épistémologie. Et cette épistémologie est, de manière frappante, celle que nous avons dégagée à partir d'écrits postérieurs à 1868. La distinction entre univers géométrique et monde physique, le rôle de l'esprit, la conception des atomes, y figurent, parfois dans les mêmes termes. Ainsi se trouve ici justifiée l'opinion que nous avons émise de la permanence globale des idées épistémologiques de Boussinesq. La conception de l'atome que nous allons maintenant dégager perdurera de façon à peine modifiée jusqu'à la fin de sa vie.

Reportons-nous donc à l'époque (1868) où Boussinesq vient de publier son mémoire intitulé "Théorie nouvelle des ondes lumineuses", mémoire accueilli avec enthousiasme par de Saint-Venant.

Dans une lettre du 14 Juillet 1868[216], Boussinesq commente l'opinion de Saint-Venant sur les atomes:

> "(les idées de Saint-Venant) se rapprochent de celles de Boscovich et développées, je crois, par Ampère et Cauchy, consistant à considérer les atomes comme des points matériels sans étendue, simples centres d'action. Cette conception me parait d'une extrême netteté ou pour mieux dire la seule bien nette. Cependant j'ai des doutes au sujet de sa réalité."[217]

---

[216] J. Boussinesq, A. de Saint-Venant et alii, *Correspondance du comte de Saint-Venant (de 1834 à 1885)*, 615 lettres, Paris, Bibliothèque de l'Institut, MS. 4226 et MS. 4227, liasses n° VI et VII.

[217] J. Boussinesq, *Lettre à Saint-Venant*, 14 Juillet 1868.

Nous retrouvons cette phrase, presque mot pour mot, dans les "Leçons synthétiques de Mécanique générale" (1889)[218] et dans le tome trois du Cours de Physique mathématique (1921)[219]. On y voit déjà affirmée la distinction entre objets mathématiques clairement, nettement définis, les points sans dimension, et leur réalité physique. Cette idée est développée dans la suite de la lettre dans des termes avec lesquels l'exposé de l'épistémologie de Boussinesq nous a familiarisés:

> "La manière dont notre esprit arrive, par voie de généralisation et en s'appuyant sur les données de l' expérience, à l'idée d'infiniment petit, à la conception de point, de ligne ou de surface, de la quantité abstraite croissant par degré insensibles, et autres conceptions absolues des mathématiques, ne paraît nous donner qu'un monde idéal, expression en quelque sorte adéquate de la toute puissance divine, et par conséquent imparfaitement présentée par les êtres qui composent le monde créé et fini."[220]

Ici apparaît donc le monde idéal, que nous avons vu réalisé en monde géométrique. Les conceptions de l'espace absolu, l'espace du monde géométrique, et du temps sont vues par Boussinesq comme elles le seront toujours, comme des mystères.

> "Je ne suis pas sûr que l'étendue et le temps, tels que nous les concevons, c'est-à-dire l'étendue géométrique, soient identiques à l'étendue et au temps que l'observation nous montre réalisés dans les corps et les existences successives. La seule chose que je tienne pour certain, c'est que l' étendue et le temps géométriques, diffèrent assez peu de l'étendue et du temps réels, pour que leur différence soit de l'ordre des choses qui nous échappent par leur petitesse."[221]

Ici est soulignée la distance entre le monde géométrique, expression de la puissance divine, et l'Univers matériel, qui ne le réalise qu'approximativement. L'idée est la même que celle que Boussinesq développera en 1908 et 1921 à propos de la continuité. Appliquée à l'atome, l'épistémologie de Boussinesq ne peut conduire qu'au scepticisme vis-à-vis de l'idée d'atome ponctuel de Saint-Venant. Le point matériel, abstraction du monde géométrique, ne peut être représenté qu'approximativement par le point sans dimensions. Ainsi, dans la suite de la lettre, Boussinesq se montre absolument hérétique quant aux convictions de Saint-Venant.

---

218 J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 5.

219 J. Boussinesq, *Cours de physique mathématique de la Faculté des sciences*, t. 3, Paris, Gauthier-Villars, 1921, p. 296.

220 J. Boussinesq, *Lettre à Saint-Venant*, 14 Juillet 1868.

221 ibid.

"Cette incertitude au sujet de la constitution des choses dont notre raison n'a peut-être qu'une idée un peu altérée, me paraît une objection très forte, contre tout système trop précis, tel celui du Père Boscovich, plus précis peut-être que ne le comporte notre nature intellectuelle, et faisant par là craindre qu'on voit transformé, simplifié, le problème en l'idéalisant."[222]

Pour Boussinesq, le fait que les atomes soient ponctuels n'est pas assuré, il y a même contre cela des objections très fortes. On peut donc dire que dès l'année 1868, Boussinesq n'adhère pas à la théorie des atomes ponctuels et va même plus loin, mais avec prudence:

"Ces réserves ne font pas du reste que je repousse ce système. Mais jusqu'à présent, je me contente de considérer les particules de matière comme divisibles en molécules de dimensions très petites par rapport aux rayons d'activité des actions moléculaires sans préciser davantage."[223]

Ici Boussinesq donne au minimum une vision qui est simplement opératoire, de la molécule de matière, vision qui, comme le notera Saint-Venant, peut s'accommoder d'une certaine continuité de la matière dans les molécules mêmes. En tout cas il n'adhère pas à l'opinion de Saint-Venant suivant laquelle, les atomes sont *nécessairement* ponctuels. La divergence d'opinion doit être très sensible, car dans la lettre du 29 Octobre 1869, Saint-Venant en fait le reproche à Boussinesq sur un ton presque menaçant:

"Vous voyez que je ne considère pas un point matériel comme un élément de portion de matière continue, de dimensions supposées abstraitement très petites. Le point matériel, c'est l'atome lui-même.

Mais je pense que depuis l'époque où vous avez écrit cet essai, vos idées ont changé à cet égard, et que vous êtes maintenant partisan de l'inétendue des dernières particules."[224]

On ne saurait être plus clair, et dire plus uniment que Boussinesq a semblé, au moins, succomber à la tentation d'adhérer à l'idée de continuité de la matière. Boussinesq va s'en défendre, mais uniquement dans le contexte de son épistémologie telle que nous l'avons décrite. Malgré la redondance du propos, cela nous semblerait trahir l'esprit de

[222]ibid.
[223]ibid.
[224]A. de Saint-Venant, *Lettre à Boussinesq*, 29 Octobre 1869. L'essai en question est un mémoire sur la philosophie des mathématiques, qui ne figure ni dans les Archives de l'Académie des sciences ni à la Bibliothèque de l'Institut. On apprend par une lettre du 29 Octobre 1869 que Boussinesq a tenté de démontrer le postulat d'Euclide.

la correspondance étudiée si nous ne citions largement la lettre suivante de Boussinesq à Saint-Venant du 31 Octobre 1869:

> " Je trouve que l'idée du Père Boscovich qui est aussi celle d'Ampère et de Cauchy (dans les "Sept Leçons de Physique générale" dont j'ai un exemplaire) et la vôtre (dans une des belles notes sur les leçons de Navier, et dans votre mémoire très intéressant sur les masses continues) est la seule qui soit nette, elle permet d'appliquer avec rigueur l'analyse abstraite."[225]

C'est donc bien le caractère d'utilité, de possibilité d'être mathématisé, que Boussinesq retient dans l'aspect ponctuel de l'atome de Saint-Venant, et non pas une quelconque réalité. Et Boussinesq d'indiquer un argument théologique qui vient à l'appui des dires de Saint-Venant:

> "Rien de plus facile à concevoir pour le géomètre qu'un corps formé d'un nombre fini de points matériels, simples centres d'action, rien au contraire de plus indéfinissable que cette conception des empiristes, qui par effroi, s' arrêtent à de tous petits corps pour atomes, et refusent de regarder au-delà. Quant au système de Kant (et je crois de Descartes et de Leibnitz) qui veut qu'un corps soit composé de points mathématiques, sans doute, mais non en nombre fini, et qui admet la continuité de la matière, il n'a pas la netteté du premier et oblige à rejeter cette sorte de principe assez répandu de nos jours, que ce qui est infini sous quelque rapport l' est sous tous les autres et est Dieu."[226]

Boussinesq rejette ici l'idée d'une matière continue formée d'atomes ponctuels, c'est toujours l'argument que nous avons développé au paragraphe II . 5 . de ce chapitre. Mais ensuite il montre à nouveau son scepticisme quant à la réalité de ces atomes ponctuels[227]:

> "Cependant je n'ose trop décider en faveur du premier système parce que je crains, en voulant voir trop clair dans cette question, qu'aux vrais corps et aux vrais espaces on ne substitue des corps et des espaces idéaux (corps et espaces géométriques, c'est-à-dire divisibles à l'infini, comportant des figures parfaites, des points sans dimension, etc.)"[228]

Boussinesq affirme à nouveau l'impossibilité pour l'esprit humain de concevoir le temps et l'espace réels. Il en résulte que l'on ne peut admettre comme vraie, absolument, l'idée d'un atome ponctuel. Il est

---

[225]J. Boussinesq, *Lettre à Saint-Venant*, 31 Octobre 1869.
[226]ibid.
[227]Incidemment, on peut constater que la technique d'argumentation de Boussinesq, donner d'abord raison à l'adversaire, puis contester ses arguments, lui a été recommandée par Saint-Venant lui-même dans une de ses lettres.
[228]J. Boussinesq, *Lettre à Saint-Venant*, 31 Octobre 1869.

même fort probable que l'atome *réel* ne l'est pas. Car une telle concordance entre esprit et matière serait bien étonnante et supposerait en l'homme une omniscience quasi divine.

La conception qu'a de l'atome Boussinesq est exposée dans ses écrits postérieurs à 1870, et ceci de façon parfaitement concordante avec la correspondance que nous venons de citer (1868-1869). Prenons comme référence la présentation de l'atome dans les "Leçons synthétiques de Mécanique générale", présentation reprise dans le début de la "Théorie analytique de la chaleur", et aussi dans ses grandes lignes dans le tome 3 du cours de Physique mathématique[229]. La nécessité d'adopter le point matériel comme représentation géométrique de l'atome est exposée dès le début des "Leçons synthétiques (...)". Boussinesq signale d'abord que le géomètre doit se représenter les objets dont il s'occupe:

> Or il ne parvient à la netteté désirable, dans cette construction idéale des phénomènes et dans leur expression analytique, qu'en regardant chaque corps comme un ensemble d'atomes sans étendue ni dimensions, dits points matériels, dont il voit chacun occuper à tout instant, dans l'espace, une situation déterminée; et il définit quantitativement cette situation elle-même, au moyen de ses trois coordonnées x, y, z par rapport à un système d'axes rectangulaires fixes."[230]

C'est non seulement parce que les atomes réels doivent être représentés par des éléments du monde géométrique idéal, mais aussi parce qu'ils doivent, pour les nécessités de la géométrie, être parfaitement localisés dans l'espace, qu'il faut les représenter par des points sans dimension.

---

[229]Citons ici cette réflexion, en quelque sorte finale, de Boussinesq sur la structure de l'atome. "Nous avons raisonné ci-dessus, il est vrai, dans l'hypothèse du P. Boscovich, acceptée par Ampère, Cauchy, Barré de Saint-Venant, etc., où les atomes, éléments matériels des géomètres mécaniciens ou physiciens, seraient, en toute rigueur, des points sans étendue, de simples centres d'actions attractives ou répulsives, maintenus à distance par ces actions mêmes et ainsi susceptibles, quoique individuellement inétendus, de former des agrégats étendus de corps. (...)

Ainsi les éminents géomètres mécaniciens et physiciens nommés ci-dessus l'ont-ils acceptée comme réelle, comme parfaitement conforme à la véritable structure de la matière.

N'allons pas jusque là; car ce serait supposer, au moins dans le domaine de la localisation et des figures, un accord absolu, auquel nous ne sommes pas habitués ailleurs, entre nous et le dehors, ou du moins, entre le monde idéal, nécessaire, de la géométrie pure et le monde physique, contingent, vaguement perçu par nos sens quoique avec une grande vivacité" (J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences* , t. 3, 1921, pp. 296 et 297).

Boussinesq fait ensuite référence à ses "Leçons synthétiques de Mécanique générale" (1889).

[230]J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 5.

Boussinesq montre ensuite que sans cette localisation par idéalisation de l'atome il est impossible de définir la distance entre atomes, et donc d'appliquer la géométrie à l'étude du monde physique. C'est aussi une nécessité de l'esprit humain:

> "C'est, on le voit, une nécessité logique inhérente à l'esprit humain, qui nous fait idéaliser de la sorte les éléments matériels."[231]

Ce que Boussinesq a déjà exprimé en 1879 sous une autre forme:

> "Le mathématicien est d'ailleurs obligé d'imposer au côté géométrique des choses la forme de son esprit, c'est-à-dire d'assimiler les atomes à de simples points, mus dans un espace à trois dimensions, continu et infiniment divisible, pendant que s'écoule un temps également continu et divisible à l'infini."[232]

Mais Boussinesq montre ensuite qu'il ne s'agit là que d'une hypothèse, d'ailleurs improbable, mais la meilleure que les physiciens aient trouvée:

> "Aussi plusieurs géomètres, le P. Boscovich, Ampère , Cauchy, de Saint-Venant, etc., ont-ils regardé cette conception des atomes (les atomes ponctuels) comme réelle, comme parfaitement conforme à la véritable structure de la matière. Sans aller jusque là, (car ce serait supposer un accord bien extraordinaire, bien parfait, entre le monde idéal *atteint* par l'esprit du géomètre et le monde physique perçu par nos sens), nous remarquerons que les procédés d'observation, aux moments de leurs plus grands progrès, n'ont jamais reconnu d'erreur dans les conséquences résultant de l'application de nos idées géométriques aux choses (...) et que les désaccords possibles ou même probables entre les points matériels et les véritables éléments de la matière, se trouvent relégués dans une sphère, celle des infiniment petits de la nature, inaccessible à nos intelligences et destinée à le rester toujours."[233]

Boussinesq ne possède donc pas une conception ontologique précise de l'atome. Sa manière de considérer l'atome est donnée, déjà en 1872, dans ses "Recherches sur les principes de la Mécanique (...)":

> "Je considérerai un système fini de corps, assez éloigné de tout autre système pour qu'on puisse l' en supposer indépendant, et je

---

[231]ibid., p. 5.

[232]J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, p. 43.

[233]ibid., p; 43.

concevrai qu'on l'ait divisé en éléments assez petits pour que chacun d'eux ne subisse jamais de décomposition dans aucun phénomène connu. J'assimilerai ces éléments ou atomes à des points matériels."[234]

La conception de l'atome de Boussinesq est sous la dépendance étroite, ou à la racine, de son épistémologie et des réflexions sur la continuité qui en découlent. Pour Boussinesq le point matériel n'est qu'une représentation approchée de l'atome réel, lequel est inconnaissable. De plus nous avons vu que la possibilité d'atomes ponctuels, et donc indivisibles, est repoussée par le sens commun comme étant une pure abstraction. Le sens commun accorde la continuité à la matière, sans doute par référence à la matière macroscopique, mais il ne peut lui accorder la divisibilité infinie. Une solution au problème de la continuité résiderait dans la juxtaposition de points matériels qui seraient des atomes ponctuels. La continuité ainsi conçue n'est pas la continuité elle-même, c'est la représentation à partir de laquelle l'esprit s'élance pour accorder la continuité à la matière. Le point matériel n'est donc pas la réalité ultime de la matière. On peut résumer la conception de l'atome de Boussinesq comme suit: l'atome lui-même, petite particule ultime de matière, est inconnaissable, il faut se contenter de se représenter cette particule comme un petit morceau de matière; par ailleurs, la nécessaire adéquation entre le monde physique et le monde géométrique idéal oblige le géomètre à représenter, dans ses calculs, l'atome par un point sans dimension.

En fin de paragraphe, peut-être est-il permis d'avancer une hypothèse sur la représentation que Boussinesq se fait des molécules. Dans sa lettre à Saint-Venant du 14 juillet 1868, que nous avons citée au début de ce paragraphe, Boussinesq écrit qu'il considère les molécules comme de petites portions de matière. L'étude de sa Mécanique physique montre que ses molécules sont espacées, mais d'une distance inférieure au rayon d'activité moléculaire. D'autre part le sens commun suggère la continuité de la matière (Conciliation (...)", p. 369, et " Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique", p. 273). La solution qui s'impose est que la molécule de Boussinesq est une parcelle de matière continue. Mais le type de continuité effectivement réalisé dans la nature est inconcevable par l'esprit humain.

III . 3 . Les actions entre atomes dans la Mécanique de Boussinesq

---

[234] J. Boussinesq, *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, présenté à l'Académie des sciences et lettres de Montpellier le 8 juillet 1872; aussi, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, pp. 305 à 361.

Nous avons vu au cours du premier chapitre la mise en cause de la force au sens causal du terme par presque tous les physiciens de la seconde moitié du XIX° siècle. Parallèlement l'énergie semble s'imposer comme une grandeur susceptible d'entrer dans la description de tous les phénomènes. On peut donc songer à renoncer à la mécanique basée sur la force (en son sens causal), et à remplacer la force par l'énergie qui apparaît comme une caractéristique de chaque corps de l'Univers. Le nœud du problème réside dans l'utilisation de la notion de force: si la force est à la racine de la notion d'énergie, alors cette dernière n'est qu'une notion dérivée d'autres principes mécaniques, et finalement de peu d'importance; dans ce cas la conservation de l'énergie n'est qu'un théorème, une commodité que l'on se donne dans les démonstrations. Si au contraire c'est l'énergie qui est au premier plan, il faut en donner une définition ou au moins une image. De là, il faudra redéfinir la force qui, comme nous l'avons montré dans le premier chapitre, se révèle indispensable ou au moins bien commode pour l' écriture de la mécanique. Difficulté supplémentaire, il faut en plus appliquer cette mécanique fondée sur la conservation de l'énergie à l'Astronomie, et donc, dans une certaine mesure, "redécouvrir" la loi de la gravitation universelle, mais aussi, grand rêve, l'appliquer à la Physique moléculaire.

L'une des originalités de l'œuvre de Boussinesq réside dans la déduction des lois générales de la Mécanique à partir de la conservation de l'énergie. Boussinesq pense avoir résolu ce problème dès 1872, dans ses fameuses "Recherches sur les principes de la mécanique (...)", et sans doute quelques mois avant la publication de ce mémoire, dans la Note 3 de sa "Théorie nouvelle des ondes liquides périodiques" (1872). La formulation qu'il utilise dans les "Recherches sur les principes de la mécanique (...)" sera la référence pour tous ses travaux jusqu'en 1922 au moins. Lors de cette rédaction, il entretient toujours une correspondance suivie avec Saint-Venant, qui est plus que sceptique quant à l'utilité même de ces réflexions[235].

---

[235] On peut même penser que Saint-Venant était opposé à la diffusion de ce mémoire. Le différent porte sur la conception de certaines forces agissant à courte distance, mais aussi sur l'interprétation des coefficients λ et μ de Lamé (nous développons longuement ce point dans le paragraphe II du troisième chapitre de notre thèse). Saint-Venant se réfère à un mémoire que Boussinesq lui a fait parvenir, sans doute une esquisse de son mémoire de 1872, et s'exprime ainsi (*Lettre du 15 juin 1870 de Saint-Venant à Boussinesq*):

"Serions-nous pour toute la notice, cher Monsieur, en désaccord complet sur ce point important (celui portant sur les coefficients λ et μ), bâtiriez-vous une théorie thermodynamique sur de pareilles prémisses(...) Si vous persistez à publier votre travail sur les principes de la mécanique quoiqu'il en rectifie le point de vue en semblant réduire ces principes aux forces newtoniennes au carré de la distance, et ne conclure aux autres que par analogie, ce, quoiqu'il ne donne presque rien de nouveau si ce n'est vos vues hasardeuses, je crois qu'il faut alors le publier en une petite brochure, sans l'insérer dans aucun recueil, où d'ailleurs je crois bien qu'on ne l'admettrait pas excepté le § VII (c'est un paragraphe sur la

Nous commencerons par exposer les conceptions de Boussinesq concernant la force, et en particulier la réfutation de celle-ci en tant que cause. Mais ce dernier aspect de la force peut guider le géomètre dans les problèmes compliqués; nous retrouvons ici la rencontre du monde géométrique idéal et du monde physique complexe, d'où émergent des demi-lueurs.

Nous exposerons ensuite la conception de Boussinesq sur la conservation de l'énergie, véritable socle de sa Mécanique générale. C'est une conservation que Boussinesq considère comme une loi expérimentale, mais qu'à partir d'intuitions il démontre géométriquement; là encore le monde géométrique idéal permet d'expliquer le monde physique révélé par notre nature sensible.

Puis, nous montrerons comment Boussinesq adjoint le principe d'indépendance des mouvements à celui de la conservation de l'énergie pour en déduire les lois générales de la Mécanique, et même les lois de la nature entière. C'est encore une fois l'intervention de la géométrie, plus précisément de la cinématique, et donc du monde géométrique idéal, dans la Mécanique.

III . 3 . 1 . La condamnation de la force en tant que cause par Boussinesq

Pour nier la pertinence de la notion causale de la force, Boussinesq reprend les arguments développés par Carnot et surtout Saint-Venant. L'accord avec Saint-Venant est clairement reconnu:

> "(...) je ne peux m'empêcher de vous dire combien j'ai été heureux de trouver (vers la fin de votre du Buat) une façon de voir sur les forces en mécanique, entièrement conforme à celle que je me suis formée après de longs tourments d'esprit, provenant de ce que je mêlais des notions métaphysiques à ce qui était clair et géométrique."[236]

Voici donc à nouveau les idées claires et géométriques, que Boussinesq ne va pas manquer d' opposer aux actions entre atomes eux-

---

démonstration du premier principe de la thermodynamique), ce qu'au reste je ne vous conseille pas, car ce sont des publications de doctrine qu'il faut généralement ajourner. Elles ne peuvent que nuire si on a tort, et elles nuisent encore plus si l'on a raison. Il est bon de ne le faire que quand on est arrivé à un but personnel ou quand on y a renoncé, et vous aurez tort même dans le seul intérêt de la Science, ce serait vous laisser dans un isolement fâcheux."

Ce n'est qu'après l'échec, en 1872, de sa candidature à l'Académie des sciences que Boussinesq, peut-être par défi, rédigera définitivement ce mémoire, en donnera connaissance à l'Académie des sciences et des lettres de Montpellier, puis le fera insérer, en 1873, dans le "Journal de Mathématiques pures et appliquées" (Journal de Liouville).

[236] J. Boussinesq, *Lettre de Boussinesq à Saint-Venant, du 21 Juillet 1868.*

mêmes qui, faisant partie du monde matériel, nous sont inconnues. Voici la suite de la lettre:

> "Sans nier l'existence de véritables actions dont l'essence (mot barré "existence") nous est d'ailleurs inconnue, il me paraît que le mot force n'exprime jamais en mécanique autre chose que le produit de l'accélération d'un point matériel par un coefficient positif appelé masse."[237]

C'est ici la reprise de la critique habituelle de la force. Il existe donc bien des actions entre atomes, mais nous sommes dans le monde physique, ces actions sont destinées à nous rester en grande partie inconnues; sauf à recourir à de futurs progrès de l'analyse. La critique précédente est reprise dans les "Recherches sur les principes de la Mécanique (...)" de 1872, presque dans les mêmes termes que dans la lettre juste citée. Ce mémoire, il est vrai, s'adresse à des physiciens: la critique de la notion de force est suffisamment connue pour qu'elle n'y soit pas développée. Tout autre est la destination du mémoire sur la "Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté humaine" (1879). Là, l'œuvre est aussi destinée à des philosophes qu'il s'agit de convaincre, car cette critique est le nœud de l'argumentation de Boussinesq[238]. L'occasion en est fournie par la

---

[237]ibid.

[238]Disons deux mots de cette "conciliation" déjà étudiée par G. Israël, M. Zerner, M. A. B. Deakin (références en fin de note). Boussinesq considère certaines équations différentielles qui présentent des solutions singulières (c'est-à-dire qu'à certains points ayant une tangente horizontale, plusieurs solutions intégrales sont possibles) et ont la même dérivée, nulle, dérivée qui pour Boussinesq représente la façon dont un système mécanique évolue. Si par exemple l'équation différentielle en question représente la trajectoire d'un atome, quand celui-ci arrive au point singulier, que Boussinesq appelle bifurcation, il "a le choix" entre plusieurs trajectoires ultérieures. Mécaniquement cela signifie qu'en ce point il peut emprunter l'une ou l'autre des trajectoires, ou passer de l'une à l'autre sans apport d'énergie, ou de force. L'atome a en quelque sorte la liberté de choix entre les trajectoires, ce qui est en contradiction avec le déterminisme laplacien. Alors Boussinesq suppose qu'il existe un principe directeur, volonté humaine, voire quelque chose qui joue le même rôle que le second principe de la thermodynamique, ou une sorte d'action vitale, qui oriente d'une certaine façon l'évolution du mouvement de l'atome. C'est en ces points singuliers que, sans apport d'énergie, le "principe directeur" peut agir, et manifester l'élan vital ou la liberté de l'homme. Il me semble que les auteurs cités plus haut (sauf peut-être Deakin) ne se sont pas intéressés réellement à ce ou ces principes directeurs, que Boussinesq appelle aussi parfois "pouvoirs directeurs", pouvoirs qui semblent plus particulièrement dénommer la vie et la volonté. Peut-être faut-il voir dans ce principe directeur une structure particulière du système mécanique dissimulée par sa complexité. Peut-être faut-il y voir, dans certains cas, un système de rétroaction ou de réflexe comme le suggère l'étude par Boussinesq des "mouvements de la bicyclette mue par son cavalier", parfaite métaphore du système matériel et du pouvoir directeur. Les documents, sauf à étudier d'éventuelles correspondances de Boussinesq avec d'autres savants que Saint-Venant, me semblent faire défaut.

critique d'une œuvre de Poisson qui reconnait, dans un mémoire sur les solutions singulières des équations différentielles, le *paradoxe* qu'elles représentent[239]. Les équations différentielles fournissent en général des solutions bien précises et uniques pour l'évolution d'un système à partir de conditions initiales données. C'est la base même du déterminisme laplacien. Par exemple, en fonction du temps, la trajectoire unique d'un point est déterminée. Pourtant, parfois, et pour certaines conditions initiales du mouvement, il apparaît des bifurcations, c'est-à-dire qu'au même point plusieurs " chemins" se présentent, le mobile ayant alors une vitesse nulle et une accélération nulle quelle que soit la solution intégrale choisie. C'est un paradoxe, au moins philosophique, car alors le déterminisme mécanique n'est plus respecté. A partir de cette situation le point mobile peut "choisir" plusieurs chemins. Poisson traite l'exemple de la fonction $d^2x/dt^2 = x^n$, pour laquelle en $x=0$ la vitesse et l'accélération s'annulent quelle que soit la solution intégrale choisie. Il suppose alors, en vertu d'une certaine "*paresse* des corps", que le point reste immobile. Or il n'y a aucune raison pour cela. Boussinesq récuse cette affirmation; pour lui, l'immobilité n'est pas un état privilégié dans la nature. Et c'est la notion même de force newtonienne, dans son interprétation causale, qui va être attaquée. C'est à partir d'une conception, peut-être naïve, de la causalité que Boussinesq va mener son raisonnement. Selon lui, les mécaniciens tels Poisson supposent que la cause précède l'effet d'un intervalle de temps, infiniment petit à la limite, mais précède tout de même l' effet.

> "On attribue au mot force un sens métaphysique de cause, distinct de son sens géométrique précis; et l'on exige par suite qu'il y ait antériorité, tout au moins logique, ou si l'on aime mieux, infiniment petite de la force par rapport à l' accélération qu'elle est censée produire." [240]

Références:
M. A. B. Deakin, *Nineteenth century anticipations of modern theory of dynamical systems*, Archives of history of sciences, 39, 1988, pp. 187 à 193.
G. Israël, *L'histoire du principe du déterminisme et ses rencontres avec les mathématiques*, in A. Dahan-Dalmedico, J. L. Chabert, K. Chemla, *Chaos et Déterminisme*, Paris, Seuil, 1992, pp. 262 à 267.
M. Zerner, *Origine et réception des articles de Boussinesq sur le déterminisme*, in *Contra los tiranos de la rutina*, Madrid, Ediciones de la comunidad de Madrid, 1992, pp. 206 à 213.

[239] S. D. Poisson, *Sur les solutions singulières des équations différentielles*, Journal de l'Ecole Polytechnique, 1806, 4, cahier 13, 1806, p. 63 à 106.

[240] J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale*, Mémoires de la Société de sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 1879, p. 124.

Or, d'après les conceptions de Boussinesq, et finalement de toute la mécanique classique, nous verrons que la variation de l'état dynamique d'un système (évolution de la vitesse de ses points) se règle d'après son état statique (position instantanée de ses points). Pour qu'une force (cause), antérieure donc à l'instant t, et ailleurs qu'au lieu M(r) où elle va produire son effet, produise cet effet en t et M (r), il faudrait qu'elle "sache" ce qu'elle sera en t et M(r) alors qu'elle n'"est" qu'à l'instant $t-\Delta t$ et au lieu $M(r-\Delta r)$, puisque c'est sa valeur en t et M(r) qui va régler l'évolution du système. Le système devrait donc être doué de prescience. Boussinesq récuse cette idée d'une propriété téléologique de la force.

Et il va maintenant, dans le style de Carnot, lui aussi, s'élever contre l'utilisation de la force:

> "Or, pour avoir quelque raison d'adopter cette manière de voir, dans le cas où l' antériorité qu'elle implique de la force à l' accélération influe sur les résultats, (...) il faudrait d'abord savoir si les forces des mécaniciens sont autre chose que de simples conceptions géométriques, il faudrait savoir si l'on peut les assimiler aux puissances inconnues du monde matériel, pour ce seul fait, qu'égalant des fonctions déterminées des distances moléculaires, elles ne peuvent manquer d'être corrélativement, dans nos organes, proportionnelles aux allongements ou raccourcissements des fibres qui nous procurent les sensations de traction, de compression, d'effort, etc., ou qui, du moins correspondent à ces sensations. Tant qu'une assimilation pareille sera absolument arbitraire, il y aura lieu de s'en tenir à ce principe clair, déduit de tous les faits constatés, que les lois physico-chimiques concernent directement des situations de vitesses, etc., bref des réalités géométriques, accessibles à nos sens ou tout au moins à notre esprit, non des entités métaphysiques appelées forces; et qu'elles sont exprimées, d'une manière adéquate à notre point de vue, c'est-à-dire avec la plus grande rigueur à laquelle nous puissions prétendre, par les équations différentielles du mouvement."[241]

Ici est donc à nouveau affirmé que la Physique ne peut pour l'instant prétendre, si elle recherche la plus grande rigueur, que produire des équations phénoménologiques traduisant les mouvements de la matière. La force disparaît devant les relations de la matière avec le mouvement, car les trajectoires sont les seules à entrer dans le cadre de la géométrie.

On peut remarquer que cette critique de la notion de force causale a pour but de préserver la possibilité pour un système physique de "choisir" une branche particulière de la bifurcation. Nous avons vu que Poisson s'oppose à cette conception. Cette opinion est également

[241]ibid., p. 125.

partagée par de Tilly. Boussinesq, lui, transpose ce qu'il "voit" dans le monde géométrique idéal, à la matière: s'il y a des solutions singulières dans le monde géométrique, il peut y en avoir dans le monde physique. La probabilité de cette existence est accrue par le fait que le sens pratique ne saurait nier la liberté humaine, qui en outre semble postulée par la religion chrétienne. Si les géomètres ont des opinions différentes sur ces bifurcations, c'est que tout se joue dans le monde matériel au niveau de l'infiniment petit que l'esprit humain ne peut concevoir. L'erreur des contradicteurs de Boussinesq vient, selon lui, de ce qu'ils transportent la question "dans la sphère, inaccessible à notre intelligence, où s'effectuent les plus petits accroissements réels du temps et des choses"[242]. *Ce n'est donc pas seulement avec les arguments de Saint-Venant que Boussinesq récuse la force, c'est aussi en raison de ses propres conceptions épistémologiques.*

Une autre conception, celle des demi-lueurs, intervient aussi dans la conception de la force chez Boussinesq. Nous avons signalé à quel point, malgré l'assentiment quasi unanime des physiciens aux arguments de Carnot et de Saint-Venant, les praticiens de la Mécanique restent attachés à l'utilisation de la force. Il y a bien entendu là, si nous suivons Boussinesq, quelque relation avec le fond obscur de connaissances que nous livre notre nature sensible. C'est une idée que soutiendra Boussinesq jusqu'à ses derniers écrits, et cette idée est tellement importante qu'un chapitre des "Leçons synthétiques (...)" est consacré aux "Raisons psychologiques et physiologiques des dénominations de forces, actions, tensions, etc., employées en Mécanique". C'est l'opinion habituelle que l'idée de force nous vient de la conscience de l'effort que nous fournissons pour tirer, pousser, retenir un objet, ce que Boussinesq exprime ainsi:

> "Enfin, comme notre tempérament intellectuel nous porte à spiritualiser le monde physique, à personnifier à notre image les mystérieux agents totalement inconnus, auxquels un invincible instinct nous fait attribuer les changements que nous observons, rien ne nous sera plus naturel que d'en voir l'idée, partout où surviendra une accélération positive ou négative de mouvement, une personne invisible, une force en un mot, pousser ou retenir le point matériel qui en sera l'objet (...)"[243]

Cette personnification ne doit pas être prise à la légère, elle traduit les données de notre nature sensible de façon précise:

---

[242] J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale.* Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 1879, p. 126.

[243] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, p. 89.

"Mais une fois ce discernement fait, il n'y a pas d'inconvénient à laisser dans certains cas, toute sa portée à l'image en question, qui est légitime par cela seul que des liens tirés en effet comme elle indique produiraient les accélérations observées. En personnifiant la nature d'une manière qui nous est instinctive, elle traduit les problèmes mécaniques dans la langue du sentiment, que nous comprenons (d'une certaine manière) même sans y réfléchir, et qui réveille en nous la foule de ces notions vagues, il est vrai, mais précieuses, dites justement *vérités de sentiment,* notions acquises peut-être par l'expérience des choses mais trop nombreuses ou trop complexes pour que nous ayons pu les débrouiller."[244]

Et Boussinesq ajoute:

"L'emploi de forces, considérées à la fois dans leur sens géométrique précis et dans leur sens psychologique relativement obscur, (...) nous permettra d'utiliser ce fonds inépuisable de demi-lueurs d'où ont peu à peu émergé les connaissances claires, et qui semblent être la source même des inspirations conduisant aux découvertes."[245]

Par ce qui précède on voit que, comme la conception de l'atome, la négation de la force causale s'intègre dans l'épistémologie de Boussinesq. Cette négation vient autant de ce qu'elle est rendue inutile parce que le monde géométrique coïncide partiellement avec le monde physique et doit de toutes façons suffire à sa description, que des arguments empruntés à Saint-Venant et Carnot. Le mot "force" avec ses résonances psychologiques est porteur de demi-lueurs qui promettent des découvertes, ce qui se révélera vrai dans le cas de certaines actions particulières que nous étudierons au troisième chapitre.

Le mot force continuera d'être utilisé par Boussinesq, comme dans les écrits de Carnot d'ailleurs, et en accord avec ce qui précède, il aura plusieurs significations. L'une, claire et analytique, lui attribuera le sens de produit de la masse par l'accélération, la masse étant elle-même définie par des considérations analytiques. L'autre en fera une grandeur dérivée d'une entité plus fondamentale, l'énergie, et traitera des mystères de la matière. C'est à l'énergie qu'il incombera de rendre compte des mystères de la matière, de nous dévoiler les actions de ses atomes.

III . 3 . 2 . La conservation de l'énergie comme principe fondamental de la Mécanique de Boussinesq

---

[244] ibid., p. 90.
[245] ibid.

Le principe de conservation de l'énergie n'est que le second principe sur lequel Boussinesq fonde sa Mécanique. Le premier est celui de l'indépendance des mouvements simultanés, principe de cinématique que l'on peut voir comme une formulation possible du principe de relativité galiléenne. Nous exposons d'abord le principe de conservation de l'énergie, car c'est réellement à partir de lui que Boussinesq donne sa conception des actions entre atomes; le premier, celui de l'indépendance des mouvements simultanés, intervient surtout dans l'établissement mathématique de l'expression de ces actions.

Le principe de conservation de l'énergie a été formulé de diverses façons par Boussinesq, mais il lui a toujours accordé une grande place. Né en 1842, alors que Mayer écrit ses premiers articles sur la conservation de l''énergie, Boussinesq atteint la plénitude de sa capacité créatrice dans les années 1868 à 1872, alors que le principe de conservation de l'énergie semble établi pour beaucoup de savants[246]. Ce principe apparaît alors comme nouveau, Boussinesq s'en empare pour essayer de refonder la Mécanique sans utiliser la notion causale de force. C'est qu'en France même, la notion de force centrale comme explication finale des phénomènes est contestée. Lamé dans ses "Leçons sur la théorie de l'élasticité des corps solides" propose une théorie applicable à tous les types de forces, et refuse d'admettre que les forces centrales soient les seules possibles; nous étudierons cet aspect de ce que l'on pourrait appeler la question des forces centrales dans le troisième chapitre[247]. Le mémoire de George Green sur " Les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière" (1839)[248] met aussi en cause les explications par les forces centrales; ce mémoire est bien connu en France autour de l'année 1863 au moins, comme en témoigne l'utilisation qui en est faite par Saint-Venant[249]. Boussinesq n'ignore sans doute pas le débat sur les forces centrales qui se déroule entre Helmholtz, Weber, Maxwell et d'autres, mais il est difficile de dire à quel moment il en a connaissance. La correspondance qu'il entretient alors avec Saint-Venant ne fournit sur ce point que des indications difficiles à interpréter. Saint-Venant est un défenseur acharné des forces centrales, et Boussinesq, qui espère beaucoup en son appui pour l'avenir de sa carrière, a sans doute évité cet épineux sujet.

---

[246]Rappelons que la première édition du "*Traité de philosophie naturelle*" de Thomson et Tait date de 1867.

[247]G. Lamé, *Leçons sur la théorie de l'élasticité des corps solides*, 2° éd., 1866, p. 37.

[248]G. Green, *On the laws of reflexion and refraction of light*, Transactions of the Cambridge Society, 7, 1839, p. 5.

[249]Voir par exemple: A. de Saint-Venant, *Sur la distribution de l'élasticité autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque; particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope*, C. R., 8, 1863, pp. 257 à 280. D'autres écrits de Saint-Venant émettant les mêmes critiques seront étudiés au troisième chapitre.

Après ce bref préambule nous nous bornerons à indiquer les diverses formulations de la conservation de l'énergie par Boussinesq.

La Mécanique de Boussinesq découle de sa conception du principe de conservation de l' énergie. Dans les "Recherches sur les principes de la Mécanique" de 1872, comme dans les "Leçons synthétiques" de 1889, l'énergie est le socle; l'expression des actions entre atomes est déduite de l'énergie. Cette expression, qui n'a aucune connotation causale, est utilisée pour démontrer les théorèmes fondamentaux de la mécanique: loi de la quantité de mouvement, loi des aires. Nous étudierons cette construction de la Mécanique dans le paragraphe III . 4.

Une première mention de l'énergie se trouve dans une lettre de Boussinesq à Saint-Venant du 23 Juin 1869.

> "Ce que je dis dans mon esquisse sur les fluides incompressibles est tout à supprimer. J'y parle simplement du principe de conservation de l'énergie qui (dit que) dans toutes les transformations que nous offre le monde, il n'y a jamais destruction d'un mode, sans production équivalente d'un autre mode équivalent et réciproquement. J'y dis qu'une manière palpable de se figurer cette conservation est se représenter l'énergie comme indestructible, comme un fluide subtil qui ne pourrait quitter un corps sans se loger dans un autre, et sans lui communiquer ainsi le mode perdu par le premier ou un autre équivalent. Mais je trouve que cette conception n'est pas nécessaire et qu'elle peut égarer l'esprit, en paraissant multiplier inutilement les substances. Elle paraît cependant être quelquefois utile comme faisant image et de fait elle s'est présentée la première en physique."

Cette partie de la lettre semble faire allusion aux fluides impondérables. Ils sont multiples: fluide calorique, fluide électrique, fluide magnétique. Le calorique par exemple remplit très bien le rôle que décrit Boussinesq: il ne peut quitter un corps chaud, façon d'être, mode de ce corps, qu'en passant à un corps plus froid qu'il réchauffe. Il nous semble que Boussinesq a envisagé l'existence de tels fluides. Plus importante est la suite de la lettre où se manifeste la persistance des idées épistémologiques de Boussinesq:

> "Je crois avec vous, et j'ai toujours cru, que l'idée de l'unité de la loi, est une idée primordiale de la raison, et même son inspiratrice, car la science n'est autre chose que l'unité de la loi, vue sous la multiplicité des cas auxquelles elle s'applique. Je crois aussi avec vous que la vue des phénomènes, ou cette idée, lui sert de point d'appui et comme de miroir pour se montrer, car il y a de l'unité à la fois dans notre esprit et, hors de lui, dans tous les êtres: l'esprit ne (le ?) (se ?) voit pas d'abord, il est tourné vers le dehors; le besoin d'unité qu'il porte en lui, sans le savoir, mais qui lui est naturel, le pousse à voir au dehors l'unité cachée sous la variété qui seule se montre. Il voit donc cette unité, à la fois parce qu'elle est la force qu'il porte en lui et qui le pousse, et parce

qu'elle se trouve dans les êtres. Une fois l'unité vue du dehors l'intelligence reconnaît qu'elle n'a pu l'y chercher que parce qu'il la désirait et portait le genre et le type en elle: elle n'apparaît donc l'unité elle-même qu'après l'avoir vue dans le monde comme dans un miroir nécessaire (même lettre que plus haut)."[250]

Boussinesq établit donc ici une relation entre loi et unité. Cette loi révèle l'unité sous le multiple, et unifie les phénomènes. De plus cette unité serait portée par l'homme lui-même; c'est sans doute là la reconnaissance de cette harmonie entre l'Homme et l'Univers. Rappelons que nous avons mentionné, au paragraphe II . 6 de ce chapitre, que cette vertu unificatrice de la loi physique peut être attribuée au principe de simplicité. La similitude de la lettre citée plus haut avec un texte de 1921, que nous avons déjà cité, sur le principe de simplicité, est frappante; Boussinesq, dans son "Aperçu général" sur le principe de simplicité, dit en effet:

> "La loi relie donc entre eux ces éléments (observés) divers et révèle leurs rapports cachés: elle met de l'ordre dans la confusion, de l'unité dans leur variété infinie; simplification la plus caractéristique que comporte leur connaissance."[251]

On peut voir, d'après ce texte comme d'après la lettre, que la loi permet de découvrir les rapports cachés entre les choses. Le texte de 1921 ajoute en plus que la loi apporte un élément de simplification dans la connaissance: l'utilisation des lois physiques revient à une application du principe de simplicité. Et c'est justement à propos de la conservation de l'énergie que Boussinesq mentionne, encore une fois, l'équivalence entre simplicité et unité. Rappelons ce texte:

> "Le principe, plus général peut-être, de <u>simplicité ou d'unité</u> (la mise en évidence est de nous), combiné avec les deux idées de l'immutabilité de Dieu et d'une certaine ressemblance avec Lui qu'il a imprimée à son Œuvre, a conduit Descartes à sa loi de conservation du mouvement, inexacte, il est vrai, mais à laquelle deux rectifications différentes dues, l'une à Huygens (...) l'autre à Leibnitz, ont tiré les deux principes les plus féconds de la Mécanique, savoir celui de la conservation algébrique des quantités de mouvement orientées et celui des forces vives ou de l'énergie."[252]

L'unité de la nature se manifeste par l'existence de principes universels. Ces principes, et au premier chef celui de l'énergie, sont des

---

[250] J. Boussinesq, *Lettre à Saint-Venant du 23 Juin 1869.*

[251] J. Boussinesq, *Cours de physique mathématique de la Faculté des sciences*, Paris, Gauthier-Villars, t. 3, 1921, p. 368.

[252] ibid., p. 371

principes de conservation, dont l'idée nous est peut-être donnée par l'idée de Dieu.

Boussinesq ne mentionne que rarement des arguments expérimentaux à l'appui de la loi de conservation de l'énergie, même s'il ne les ignore pas. Ce sont donc aussi des considérations épistémologiques - le caractère unificateur de la loi physique, l'harmonie entre l'esprit de l'Homme et l'Univers - qui auraient conduit Boussinesq au principe de conservation de l'énergie. Le principe unificateur, celui de l'unité, est assimilé plus tard, et peut-être dès 1869, au principe de simplicité. Boussinesq aurait donc jugé le principe de conservation de l'énergie plus simple que la prise en compte de fluides impondérables, ce qui l'aurait déterminé à l'adopter.

C'est peut-être cet aspect des convictions épistémologiques de Boussinesq qui explique qu'il ait adhéré avec tant de vigueur à la théorie de l'énergie. Il faut remarquer que l'idée de la prédominance de l'énergie sur la force comme concept fondateur de la mécanique ne s'impose pas sans réticence aux grands physiciens, et au premier chef à Saint-Venant, qui en fait part à Boussinesq dans une lettre datée du 27 juin 1874:

> "(...) que je vous dise enfin que je n'ai pas l'intention aujourd'hui de combattre l'admission du principe de conservation de l' énergie ou de sa considération mise en tête de la mécanique comme donnée de l'expérience, opinion dont on déduit toute science, quoique je doute toujours un peu que ce soit la donnée primordiale de préférence aux accélérations réciproques dans la ligne de jonction des points matériels et de leur composition géométrique entre elles[253]. L'énergie potentielle est un produit de masse, d'accélération et d'espace parcouru ou pouvant l' être, et l' énergie actuelle (Thomson) un produit de masse par un demi-carré de la vitesse. Est-il bien naturel d'admettre a priori la loi de ce produit (de trois facteurs, biffé par Saint-Venant)?
>
> Enfin, soit, je ne m'y oppose point: tant mieux si cela simplifie dans des mémoires tels que le vôtre, ce qu'on peut présenter pour les théories de la lumière et de la chaleur (...) et je pense que cela (...)

---

[253]L'allusion à la mécanique newtonienne comme base de l'ensemble de la mécanique est ici patente. La mention de l'accélération relative dans la ligne de jonction des points matériels, est une allusion à la troisième loi de Newton dans son interprétation cinématique. La composition géométrique des accélérations est une allusion à la seconde loi. Nous avons vu au paragraphe XIII du chapitre précédent que Thomson et Tait dans leur "Traité de philosophie naturelle" trouvent dans le scolie attenant à la troisième loi de Newton l'origine de la conservation de l'énergie.

(illisible) simplifie enfin dans un cours élémentaire destiné à être compris des commençants."[254]

C'est ravaler l'utilisation de la loi de conservation de l' énergie au niveau du procédé didactique. Finalement, pour Saint-Venant comme pour beaucoup de savants, la conservation de l'énergie est la conservation des forces vives. Ainsi, encore en 1877, parmi les grandes lois de la mécanique, Saint-Venant cite celle de la conservation de l'énergie, mais en la réduisant presque à une variante "littéraire" de la conservation de la force vive:

> "(il y a aussi la loi) de conservation de l'énergie, tant potentielle qu'actuelle ou cinétique; loi dont l'énoncé revient à une expression, nouvelle et plus déterminée, du principe dit des forces vives."[255]

Boussinesq, lui, fera la liaison entre les anciennes mécaniques, où se trouve la conservation de la force vive, et certaines fonctions qui se rapprochent de la notion de potentiel (voir premier chapitre), la fonction de Green qui se rapproche aussi du potentiel, et la théorie de la conservation de l'énergie.

III . 3 . 3 . Formulations mathématiques de la conservation de l'énergie par Boussinesq

Il y a une évolution entre la manière dont Boussinesq présente la conservation de l'énergie dans le mémoire de 1872 et celle qu'il utilise en 1889 dans les "Leçons synthétiques". La première, qui se veut toute mathématique, sera vivement critiquée par Saint-Venant; la seconde reviendra presque à poser la conservation de l'énergie *a priori*, en référence à la "querelle des forces vives" entre Descartes et Leibniz, et comme loi expérimentale. Il est remarquable que dans les deux cas le travail ne soit défini que comme conséquence de la variation de l'énergie potentielle, et non pas comme élément fondateur de la compréhension de la conservation de l'énergie. Cela dispense Boussinesq de faire appel à la force, comme élément important de sa mécanique[256]. De cette façon il se démarque des mécaniciens qui l'ont précédé, et produit ainsi une théorie réellement fondée sur l'énergie, réellement cohérente. Cette théorie n'est pas subordonnée à l'existence de forces centrales, comme c'est le cas pour Helmholtz dans son mémoire de

---

[254] Le mémoire mentionné est celui de 1872 dans lequel Boussinesq, nous le voyons, est en avance sur les physiciens de son époque.

[255] A. de Saint-Venant, *Accord des lois de la Mécanique avec la liberté de l'homme dans l'action sur la matière*, C. R., 84, 1879, p.4.

[256] L'exposé de Briot dans sa "Théorie mécanique de la chaleur" de 1869 est proche de celui de Boussinesq, à cette différence capitale près que Boussinesq commence par poser l' énergie et non la force.

1847[257], ou de forces non définies comme chez Thomson et Tait[258]. Comme pour ces deux derniers auteurs, la loi de l'énergie est pour Boussinesq une loi fondamentale, mais elle n'est pas découverte à partir de la mécanique newtonienne, même si elle retrouve les résultats de celle-ci.

III . 3 . 3 . a . La présentation sommaire de l'énergie dans la "Note trois" de la "Théorie des ondes liquides périodiques" (1872)

Un rapide exposé de la théorie de l'énergie de Boussinesq se trouve dans la Note 3 de son mémoire sur la "Théorie des ondes liquides périodiques" (1872)[259], mémoire que nous étudierons partiellement au troisième chapitre. Dans cette note Boussinesq commence par mettre en évidence la nouveauté de la conservation de l'énergie:

> "Il ne sera peut-être pas inutile de rappeler ici brièvement la notion d'énergie interne par unité de volume d'un corps, et d'étendre même cette notion au cas (nullement improbable, bien que négligé jusqu'à ce jour) où l'action de deux atomes très voisins dépendrait, non seulement de leur nature et de leur distance, respective à ces deux atomes et entre eux, des autres atomes qui pourraient se trouver tout près des premiers."[260]

Nous avons déjà signalé que Lamé, dont Boussinesq était un bon connaisseur, comme le montre sa Mécanique physique, admettait d'autres actions entre atomes que les actions centrales ("dépendant uniquement de leur nature et de leur distance"). C'est se détacher de toute la mécanique d'inspiration newtonienne, mais aussi mettre en cause le principe même de la composition des forces que l'on voit souvent comme une conséquence de la seconde loi de Newton, aussi appelée relation fondamentale de la dynamique. C'est ce qu'exprime Saint-Venant lorsqu'il étudie le "potentiel des forces" (expression de Saint-Venant) de G. Green, fonction qui ne dépend pas exclusivement, pour deux atomes pris parmi d'autres, de la seule distance de ces derniers :

---

[257] H. von Helmholtz, *Ueber die Erhaltung der Kraft, Eine physikalische Abhandlung*, Berlin, G. Reimer, 1847; aussi, *Mémoire sur la conservation de la force*, trad. L. Pérard, Paris, Masson, 1869; aussi, *The conservation of force: A physical memoir (1847)*, ed. Russell Kahl, Middletown (Connecticut), Wesleyan University press, 1971.

[258] W. Thomson and P. G. Tait, *Treatise on natural philosophy*, Oxford, 1867; vol. 1, part. 2, London, Cambridge University press, 1883; vol. 1, part. 1, London, Cambridge University press, 1896.

[259] J. Boussinesq, *Théorie liquide des ondes périodiques*, Mémoires présentés par divers savants à l' Académie des sciences de l'Institut de France (mémoires des savants étrangers), 20, pp. 509 à 616.

[260] ibid., p. 585.

" La supposition dont nous parlons (celle du "potentiel des forces" de Green), entraîne celle que l'intensité de chaque action entre deux particules très proches soit généralement fonction non seulement de leur distance mutuelle propre, mais encore, à un certain degré, de leurs distances aux particules environnantes, et même des distances de celles-ci entre elles."[261]

Nous sommes donc bien là dans le cadre des forces évoquées par Boussinesq, et aussi Lamé. Selon Saint-Venant les conséquences sont graves pour toute la mécanique:

"On remarquera qu'elle entraîne aussi que la force totale sollicitant une particule n'est pas exactement la résultante géométrique, composée par la règle du parallélogramme ou du polygone que l'on connait, de toutes les forces avec lesquelles la solliciteraient séparément les autres particules si chacune existait seule avec elle, comme on l'a cru jusqu'à nos jours (...)"[262]

Effectivement, si les particules voisines d'une paire d'atomes ont une influence sur leur interaction, celle-ci sera différente de celle qui s'exercerait sur cette même paire idéalement isolée. Alors, il n'y a aucune raison pour que la somme géométrique des actions dues à des paires isolées soit la même que celle qui a lieu lorsqu'elles sont entourées d'atomes qui influencent ces mêmes actions.

Si nous revenons maintenant à Boussinesq, nous pouvons souligner une première fois la cohérence de sa pensée. Nous avons vu que, dès 1869, il n'accordait pas une grande importance à la notion de force causale. Dans la mécanique telle qu'il l'expose dans la "Note III" de sa "Théorie des ondes liquides périodiques" de 1872, la force reste absolument indéterminée; elle n'a qu'une importance secondaire.

Laissons pour la suite le passage où il est question de l'action entre points matériels, partie complexe de la Mécanique de Boussinesq, sur laquelle nous reviendrons. Voici finalement comment est présentée la conservation de l' énergie. Boussinesq commence par déduire les actions entre atomes d'une certaine "fonction Ψ de toutes les distances mutuelles des points considérés", ce qui est, peut-être, se rapprocher de Green[263]. D'autres références apparaissent:

---

261 A. de Saint-Venant, *De la constitution des atomes*, Bruxelles, F. Hayez, 1878, p. 17.

262 ibid., p. 17.

263 Boussinesq ne connaissait peut-être pas directement les mémoires de Green, mais ceux-ci sont mentionnés et critiqués par Saint-Venant dans la dernière

"Quant à la fonction Ψ, si l'on détermine la constante qui entre dans son expression, de manière que la plus petite de toutes les valeurs de la fonction qu'on puisse avoir à considérer soit nulle, cette fonction devient ce que M. Macquorn Rankine appelle énergie potentielle du système. Le principe précédent revient à celui des forces vives, consistant en ce que la somme de l'énergie potentielle d'un système indépendant de tout autre et de sa demi-force vive ou énergie actuelle est constante dans tous les états successifs par lesquels ce système peut passer."[264]

La référence à Rankine ne prouve toutefois pas que Boussinesq ait effectivement lu Rankine, il a pu s'inspirer de la "Théorie mécanique de la chaleur" de Briot, où Rankine est mentionné[265].

La différence entre la présentation de la conservation de l'énergie par Briot et Boussinesq est sensible, bien que les deux formulations ne soient séparées que de trois ans. Briot (voir le paragraphe XI . 2 du premier chapitre de notre thèse) part de la considération des forces, alors que c'est a priori *sans justification aucune, si ce n'est l'opinion, supposée commune par Boussinesq, qu'il postule l'existence d'une fonction de point Ψ. Ici, l'énergie potentielle, fonction des distances entre atomes, est une grandeur fondamentale, et non pas dérivée de la force et de la distance. La présentation de Boussinesq diffère de la démonstration du "principe des forces vives", car ce dernier n'est que la conséquence des lois de la mécanique newtonienne, lorsque les forces ne dépendent pas du temps ni des vitesses des points du système. Dans ce cas l'énergie potentielle apparaît comme le résultat d'un calcul dans une mécanique où la grandeur explicative fondamentale est la force. Pour Boussinesq, la grandeur de base est la fonction Ψ. La signification physique de la fonction Ψ reste encore vague, on ne sait s'il s'agit d'une fonction descriptive d'un système donné, ou bien la propre force vive des atomes, accumulée de quelque façon par le système. Quoi qu'il en soit, la présentation de Boussinesq, peut-être au moyen d'une synthèse entre la manière de Green et celle de Briot, s'éloigne considérablement de la présentation habituelle des forces vives.*

III . 3 . 3 . b . La présentation de l' énergie dans les "Recherches sur les principes de la Mécanique" (1872)

---

partie de la "Statique" de Moigno (1868), que Boussinesq ne pouvait manquer de connaître.

264 J. Boussinesq, *Théorie nouvelle des ondes liquides périodiques*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France (Mémoire des savants étrangers), 20, 1872, p. 585.

265 Ch. Briot, *Théorie mécanique de la chaleur*, Paris, Gauthier-Villars, 1869, p. 15.

En 1872, la même année que paraît le texte précédent, Boussinesq fait connaître son mémoire intitulé "Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits"[266]. Cet ouvrage développe la conception de la Mécanique esquissée dans la "Théorie des ondes liquides périodiques". La différence que nous mettrons en évidence ici est qu'il sépare, dans le corps du texte, la conservation des forces vives de la conservation de l'énergie. Nous donnerons les raisons de cette séparation. Toutefois, dans l'introduction, que nous citons, les deux principes sont encore très proches.

Avant d'étudier la conservation de l'énergie dans le mémoire, il n'est pas inutile de rappeler que là aussi (ou déjà), l'atome possède un double statut: celui de petite entité matérielle très vaguement définie, et celui de point matériel support de la représentation mathématique.

> "Je considérerai un système fini de corps, assez éloigné de tout autre système pour qu'on puisse l'en supposer indépendant, et je concevrai qu'on l'ait divisé en éléments matériels assez petits pour que chacun d'eux ne subisse jamais de décomposition dans aucun phénomène connu. J'assimilerai ces éléments, ou *atomes*, à des points matériels; ce qui revient à supposer leurs dimensions très petites par rapport aux distances auxquelles ils paraissent agir les uns sur les autres."[267]

La distinction est analogue à celle établie dans la lettre du 14 Juillet 1868 à Saint-Venant où il évoquait déjà la distinction entre monde géométrique idéal et monde physique. On peut donc aussi interpréter la conservation de l'énergie et de la force vive dans ce cadre. Voyons maintenant l'introduction du mémoire:

> "Après avoir rappelé les notions de point matériel, de vitesse, d'accélération et avoir montré que dans un système indépendant de tout autre les accélérations doivent varier seulement avec les positions relatives actuelles des diverses parties, je pose comme *postulatum* fondamental de la Mécanique la grande loi expérimentale de la conservation des forces vives ou de l'énergie.
> De ce principe se déduisent immédiatement les équations générales de la Dynamique réelle, équations dans lesquelles les forces ne paraissent que comme des produits de masse par une accélération, sans qu' on ait à s'occuper des rapports métaphysiques qu'elles peuvent avoir avec les puissances inconnues qui meuvent la matière, ou encore avec les phénomènes intérieurs appelés *sensations de traction,*

---

[266] J. Boussinesq, *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoire présenté à l'Académie des sciences et des lettres de Montpellier, le 8 Juillet 1872, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, pp. 305 à 360.

[267] J. Boussinesq, *Lettre à Saint-Venant*, 14 Juillet 1868.

de compression, d'effort, etc., qui résultent en nous de déplacements moléculaires, volontaires ou non, opérés dans nos organes."[268]

On notera tout de suite que Boussinesq fonde une Dynamique réelle, c'est-à-dire finalement une Mécanique applicable quelles que soient les actions en cause, gravifique, électrique, ou magnétique, et à laquelle il ne sera pas nécessaire d'ajouter des hypothèses spéciales sur ces actions. Elle se différentie de la dynamique de Thomson et Tait qui, explicitement, séparent leur Dynamique de la Mécanique, et l'appellent Dynamique abstraite. Il faudra donc, dans ce dernier cas, faire intervenir la nature des forces pour transformer cette Dynamique abstraite en Mécanique. Thomson et Tait fondent leur Mécanique dans le cadre de la Mécanique newtonienne. Finalement, leur Dynamique abstraite est une "mise à jour" de la Mécanique de Newton, où la conservation de l'énergie joue maintenant un rôle important. Nous voyons, encore ici, que Boussinesq se place dans le cadre de la Mécanique de Poisson lequel veut, d'emblée, créer une mécanique applicable à la matière réelle. Notons aussi que Boussinesq s'interdit toute référence à la force dans son sens causal. La conservation de la force vive ou de l'énergie est considérée comme une loi expérimentale et un *postulatum*. Ce n'est donc pas un théorème qui peut être déduit d'autres lois ou définitions[269].

Le principe de conservation de la force vive ou de de l'énergie est donc à la base de la mécanique de Boussinesq, la fonde réellement. Il est en accord avec la réalité puisqu'induit expérimentalement. C'est un des deux "postulata" expérimentaux à partir desquels toute la Mécanique peut être déduite.

Boussinesq en vient maintenant à "démontrer" son *principe des forces vives:*

"Quelle que soit la cause inconnue qui meut la matière, l'observation attentive des faits nous porte à regarder l'énergie ou l'activité déployée dans un mouvement comme proportionnelle 1° à la vitesse avec laquelle il s'effectue; 2° à la grandeur totale du déplacement opéré; 3° enfin à un coefficient appelé masse, dépendant

---

[268] J. Boussinesq, *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoire présenté à l' Académie des sciences et des lettres de Montpellier, le 8 Juillet 1872, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, pp. 305 à 360.

[269] En opposition on peut citer Delaunay qui, en 1857, établit le théorème des forces vives pour un point matériel par intégration de l' équation m . (dv/dt) = F. Voir Ch. Delaunay, *Traité de mécanique rationnelle*, 2° éd., Paris, Langlois et Leclercq, Victor Masson, 1857, p. 151.

de la nature du point qui est mû, et constant pour chaque point en vertu du grand principe de la conservation de la matière."[270]

Les termes "énergie" et "activité déployée" sont peu explicites. Ce qui semble important, c'est qu'il s'agit de quelque chose qui est déployé, quelque chose qui était caché et qui se manifeste; ce sera à la base de la démonstration du principe des forces vives. Si l'on excepte la masse, qui peut être déduite d'un principe, peut-être expérimental, celui de la conservation de la matière, les deux grandeurs utilisées sont des grandeurs cinématiques, le temps et la distance. On peut dire que la suite de la démonstration va se dérouler presque entièrement dans le monde géométrique idéal; presque, car le temps ne fait pas partie de ce monde. Le recours à l'"observation attentive des faits" pour justifier les diverses proportionnalités, n'est pas expliqué.

La démonstration qui suit, peut conduire à une interprétation particulière de l'énergie cinétique par Boussinesq, c'est pourquoi nous la donnons pas à pas:

> "Par conséquent, lorsqu'un point de masse m parcourt avec la vitesse V, durant un instant dt, un chemin ds = V.dt, l'activité déployée dans ce mouvement est proportionnelle à m. V. ds = m.V^2.dt et peut être considérée comme ayant pour mesure (1/2).m.V^2.dt, ou rapportée à l'unité de temps (1/2).m.V^2. En étendant le signe sommation Σ à tous les points du système, l'activité totale qui y sera déployée à l'époque t par unité de temps vaudra d'après cela la quantité (1/2).Σm.V^2, que l'on appelle puissance vive du système."[271]

Dans cette partie de son texte, Boussinesq a surtout voulu établir la formule de l' énergie cinétique à partir de grandeurs purement cinématiques. L'utilisation des éléments différentiels se justifie puisque la vitesse est définie en un lieu et en un instant précis. Le terme de "puissance vive" peut surprendre; toutefois on ne peut qu'y voir l'analogue de la puissance mécanique[272]. L'activité déployée peut être mise en parallèle avec le travail susceptible d'être fourni par un système. L'activité déployée par unité de temps peut être comparée à la puissance, l'activité totale déployée à l'époque t par unité de temps est la puissance instantanée, la puissance vive à un instant donné.

---

270 J. Boussinesq, *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoire présenté à l' Académie des sciences et des lettres de Montpellier, le 8 Juillet 1872, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, p. 313.

271 ibid., p. 314.

272 Le terme "puissance vive" est dû à Belanger. Voir J.-B. Belanger, *Traité de la dynamique des systèmes matériels*, Paris, Dunod, 1866, p. XVIII.

Nous pensons pouvoir poursuivre l'analogie avec la suite de la démonstration de Boussinesq:

> "Or l'expérience conduit à admettre qu'un système indépendant de tout autre tient de sa nature le pouvoir de développer par unité de temps une certaine activité, qui ne varie qu'avec les rapports mutuels des points dont il est formé, c'est-à-dire qui est une fonction déterminée $-\Psi$ de leurs distances mutuelles $r_{1,2}$, $r_{1,3}$ (...)"[273]

La puissance vive du système est donc une fonction des distances des points du système. Boussinesq ne la conçoit pas à partir du travail. C'est réellement quelque chose qui caractérise l'état du système pour une situation donnée de ses points. Mais Boussinesq ne dit pas que cette fonction ne dépend que de la position des points du système. Le système étant isolé son évolution ne dépendra que de ses conditions initiales; il dépendra des positions initiales de ses points, et aussi de leurs vitesses initiales. Boussinesq en tient compte au moyen d'une constante additive. Il écrit donc:

$$(1/2) \cdot \Sigma m \cdot V^2 = - \Psi (r_{1,2}, \ldots, r_{i,j}, \ldots) + C$$

Il ajoute:

> "Elle est l'expression analytique de ce qu'on appelle le principe de la conservation des forces vives, principe d'après lequel la force vive, $\Sigma m \cdot V^2$, d'un système indépendant de tout autre, est impérissable ou se retrouve la même chaque fois que les parties du système reprennent les mêmes positions relatives."[274]

L'affirmation ne semble pas nouvelle, toutefois elle signifie aussi que la puissance vive du système, sa capacité à fournir à un instant donné une activité, ne dépend que de Ψ et des conditions initiales.

La démonstration qui précède peut être vue comme une façon élégante de contourner la notion de travail, et donc de force. On peut aussi voir cette démonstration comme produisant une définition de l'énergie actuelle autre que la définition habituelle, et introduisant une signification précise de la fonction Ψ. Si nous acceptons l'interprétation proposée plus haut de la puissance vive, il y a identité entre les deux membres de l'égalité $(1/2) \cdot \Sigma m \cdot V^2 = - \Psi(r_{1,2},\ldots,r_{i,j},\ldots) + C$; ils représentent

---

[273] J. Boussinesq, *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoire présenté à l' Académie des sciences et des lettres de Montpellier, le 8 Juillet 1872, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, p. 314.
[274] ibid., p. 314.

la même chose, l'aptitude à un instant donné et pour une configuration donnée à fournir de l'activité, à déployer de l'activité. La signification du second membre perd de son intérêt, ainsi que sa forme mathématique, car tout est dit, tout est résumé du point de vue de la puissance vive dans le premier.

La fonction - $\Psi(r_{1,2},\ldots,r_{i,j},\ldots) + C$*; n'est alors qu'une fonction descriptive du système, de son état, où interviennent non seulement les distances relatives, dans la fonction* $\Psi(r_{1,2},\ldots,r_{i,j},\ldots)$*, mais aussi les vitesses de ses points, par l'intervention de la constante C, et bien sûr la nature des atomes. En effet C définit l'état initial du système et donc les vitesses initiales de ses points; comme il est isolé, à partir de cet état, les vitesses de chaque point vont être parfaitement déterminées, du moins s'il ne s'agit pas d'un organisme vivant*[275]*. Les vitesses à chaque instant sont donc déterminées une fois que l'on connaît les vitesses et les positions initiales des points.*

La fonction $\Psi(r_{1,2},\ldots,r_{i,j},\ldots) + C$ *décrit donc l'état cinématique du système, sous l'angle de la puissance vive qu'il met en jeu. Cette puissance vive est la caractéristique de l'aptitude du système à fournir de la force au sens leibnizien du terme. Elle apparaît comme l'équivalent, sur le plan de la structure de la théorie, de la force au sens newtonien du terme dans la deuxième loi de Newton. Elle n'est ni plus ni moins mystérieuse que la deuxième loi de Newton.*

L'équation précédente se présente comme une loi de la mécanique, elle est donc décrite en même temps que les autres lois fondamentales, et qui sont aussi des lois de conservation: la conservation de la quantité de mouvement, la loi des aires (conservation du moment cinétique).

On s'attend à ce qu'après cette démonstration du principe des forces vives, Boussinesq donne des justifications pour passer à la conservation de l'énergie. Or la seule modification qu'il apporte à l'équation précédente est de spécifier la constante C pour que Ψ soit positive ou nulle. Dans ces conditions:

> "On voit que la demi-force vive atteint sa valeur la plus considérable pour $\Psi = 0$, et qu'elle est alors égale à la constante du second membre. Celle-ci mesure donc le plus grand déploiement d'activité dont le système soit capable: c'est pourquoi elle a reçu le nom d'énergie totale du système."[276]

L'énergie totale d'un système, par la définition précédente, devient une quantité propre à un système donné. L'énergie se distingue alors de

---

[275]Dans le cas d'un organisme vivant une certaine indétermination se produit du fait qu'en certains points et à certains moments il y a, pour la fonction qui décrit l'évolution du système, des points singuliers.

[276]ibid., p. 320.

la puissance vive, au sens donné plus haut, comme la puissance mécanique se distingue de l'énergie disponible dans un générateur. La conservation de l'énergie revient alors à ce que la quantité d'activité que peut déployer un système est limitée par la constante C, qui justement mesure cette quantité. C'est une loi de la nature, qui pourrait être tout autre, elle n'a pas de justification dans le monde géométrique.

La fonction Ψ, dans l'expression de la loi de conservation de l'énergie, est ajoutée à la demi-force vive, cette somme étant égalée à une énergie:

$$(1/2).\Sigma m.V^2 + \Psi\ (r_{1,2},\ldots,r_{i,j},\ldots) = C$$

Le second membre de cette équation est une énergie, les deux termes du premier membre le sont aussi. Ainsi:

> "(l'énergie totale) est à chaque instant la somme de la demi-force vive, appelée aussi énergie actuelle, et de la valeur correspondante de Ψ, dite énergie potentielle."[277]

La fonction Ψ de la loi de conservation de la force vive est une fonction descriptive de l'état statique du système, tout comme la position relative de deux points. Dans la conservation de l'énergie, la fonction Ψ acquiert une nouvelle signification: de fonction descriptive elle devient quantité d'énergie, mais d'énergie non déployée, c'est-à-dire d'énergie potentielle. Le double sens de la fonction Ψ, celui de "fonction potentielle" et de "potentiel", est clairement dégagé dans une même théorie de la Mécanique.

La référence à l'"activité déployée", où même à l'énergie, ne pouvait satisfaire tous les physiciens, et en particulier Saint-Venant, qui trouve à redire sur des points importants. Dans les feuillets, déjà mentionnés, de 1875, déposés aux Archives de l'Académie des sciences, il critique ainsi Boussinesq:

> "Le début (du mémoire) me semble faible: Qu'est ce que l'activité déployée? Qu'est-ce que l'énergie? C'est un mot qui aurait besoin d'une définition mathématique.
>
> Les faits observés ne nous apprennent rien sur l'énergie, ni sur l'activité, ni sur la force, ils ne nous montrent que des distances qui varient avec le temps."[278]

---

[277]ibid., p. 320.

[278]A. de Saint-Venant, J. Boussinesq, *Objections qui pourraient être faites au Mémoire de Monsieur Boussinesq: Recherche sur les principes de la Mécanique etc.*, Paris, Archives de l'Académie des sciences, fonds Saint-Venant, carton 2, page 16 de la bibliographie générale, 30 Juin 1875.

Et plus loin:

> "Qu'appelez-vous système? Je n'en connais d'autre que l'univers entier. La fonction dont la dérivée donne la loi de force entre deux molécules m et m' doit comprendre toutes les distances mutuelles, même des molécules de Sirius et Arcturus."[279]

En d'autres termes Boussinesq utilise des termes peu précis, ou n'ayant aucun rapport avec la réalité; et de plus, il n'a même pas défini correctement le système mécanique sur lequel il travaille. Ces critiques ne le découragent pas, il continue à attribuer à l'énergie un rôle primordial en Mécanique. Mais nous allons voir la définition de l'énergie devenir de plus en plus "philosophique". La justification du principe de conservation de l'énergie se fera de plus en plus dans le monde géométrique idéal. La présentation de la Mécanique par Boussinesq se stabilise, dans ses grandes lignes, à partir de la publication des "Leçons synthétiques de Mécanique générale".

III . 3 . 3 . c . L'énergie dans les "Leçons synthétiques de Mécanique générale " (1889)

L'importance que l'énergie a prise dans la pensée de Boussinesq est attestée par un paragraphe, repris en 1922[280], de la "Conciliation du véritable déterminisme (...) ", écrit en 1879, intitulé "Prééminence de la notion d'énergie, en tant qu'elle aurait, hors de nous, un objet plus réel, plus subsistant, que la force des mécaniciens"[281]. Boussinesq s'exprime ainsi:

> "S'il fallait accorder une réalité spéciale, ou comme une existence distincte, à quelque élément de la mécanique, on devrait de beaucoup préférer aux forces, pour en faire une sorte d'*âme* de la matière non organisée, l'énergie, actuelle ou potentielle, cette chose impérissable dont la transformation et l'échange entre les corps mesurent la valeur dynamique des phénomènes."[282]

La prééminence de l'énergie sur la force est à nouveau énoncée. Ici, ce qui est important, c'est que l'énergie acquiert une existence distincte, une existence autonome. On peut se demander par rapport à quoi cette autonomie existe: ce ne saurait être que par rapport à la matière.

---

[279]ibid.

[280]J. Boussinesq, *Compléments au tome III, Cours de physique mathématique de la Faculté des sciences* , Paris, Gauthier-Villars, 1922, p. 168.

[281]J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, 1879, pp. 243 et 244.

[282]ibid.

L'énergie aurait donc une existence propre vis-à-vis de la matière, tout comme l'âme a une autonomie par rapport au corps. Boussinesq néanmoins est prudent, il utilise le conditionnel. Il n'en reste pas moins que l'analogie de l'énergie avec l'âme est fort suggestive; tout comme l'âme l'énergie est impérissable; tout comme l'âme qui dirige le corps au moyen de la volonté et en tenant compte de ce qui est extérieur à l'être humain, l'énergie suit des "pentes" qui règlent l'évolution des systèmes. Dans la mécanique habituelle ces pentes sont appelées forces, mais pour Boussinesq, elles n'ont aucune réalité propre, autonome. Ainsi:

> "Les forces exercées du dehors sur un système sont les dérivées, par rapport aux déplacements de même sens des points du système, de l'énergie extérieure qui y pénètre. Il leur reste donc le rôle fort important qui consiste à régler les échanges d'énergie de certains déplacements effectués: mais ce rôle ne doit pas plus leur faire accorder une sorte d'existence substantielle qu'on n'en accorde à la pente qui règle la vitesse d'un cours d'eau."[283]

En 1879 Boussinesq suggère l'autonomie de l'énergie. Dans une certaine mesure il la détache du système matériel dans lequel elle se manifeste. L'énergie est pourvue d'une "réalité spéciale".

On note une différence sensible entre la présentation de l'énergie par Boussinesq dans les "Recherches (...)" de 1872 et dans "Les leçons synthétiques (...)" de 1889. Dans ces deux textes, les deux principes utilisés sont toujours celui de l'indépendance des mouvements simultanés et celui de la conservation des forces vives ou de l'énergie. Mais, dans les "Leçons synthétiques (...)", la conservation de la force vive ou de l'énergie est exprimée au moyen de la géométrie pure; la masse elle-même est déduite de considérations géométriques, alors qu'en 1872 elle résultait d'une loi expérimentale. Il ne faut pas exagérer ces différences; il s'agit surtout pour Boussinesq, en 1889, de rendre plus rigoureuses les démonstrations de 1872. Voici l'exposé de 1889 du principe de conservation de l'énergie:

> " Un second principe non moins important, suggéré sans doute par le fait que dans l'Univers le mouvement se communique d'un corps à l'autre sans disparaître jamais définitivement, a été entrevu par Descartes puis dégagé par Leibnitz; celui d'une certaine conservation du mouvement, supposé évalué séparément chez les divers points matériels du système d'après une règle invariable simple, puis réunis pour tous en une somme unique, sans y tenir compte des différences de direction."[284]

---

[283]ibid., p. 241.
[284]ibid., p. 18.

C'est le rappel du but commun de Leibniz et de Descartes: chercher la caractéristique de la conservation du mouvement dans notre univers. Dans l'univers tel que nous le percevons, le mouvement semble ne pas se perdre. S'il semble disparaître d'un objet, c'est qu'en réalité, il a été communiqué à quelque autre objet. Afin de traduire cette règle, finalement propre à notre univers, il faut trouver une formule, un être mathématique, qui caractérise ce mouvement pour un point matériel, et qui, "additionné" pour un ensemble de ces points, traduira cette conservation du mouvement. Mais ce n'est pas tout, il faut que cette conservation se fasse sans y tenir compte des différentes directions.

Ceci posé, Boussinesq utilise la quantité de mouvement au sens de Descartes (m.V), mais uniquement pour définir la masse relative de deux points matériels. A cette fin, il montre tout d'abord, que cette caractéristique de mouvement est proportionnelle à la quantité de matière, ici assimilée au nombre d'atomes d'un système. Pour cela, il affirme que la caractéristique de mouvement de plusieurs points identiques animés de la même vitesse est proportionnelle à celle d'un seul, donc, dit Boussinesq, à la quantité de matière, et nous ajoutons, au nombre d'atomes. Puis, pour deux points différents animés d'une même vitesse, le rapport des caractéristiques de mouvement équivaudra à un nombre appelé masse, et nous indiquons, masse relative de l'un par rapport à l'autre. Pour Boussinesq, la constance de la masse d'un atome est la conséquence de la conservation de la matière, ce qui s'explique si l'on se rapporte au même argument indiqué dans les "Recherches sur les principes de la mécanique (...)" de 1872:

> 3° enfin à un coefficient appelé masse, dépendant de la nature du point qui est mû, et constant pour chaque point en vertu du grand principe de la conservation de la matière."[285]

Effectivement la constance de la masse de chaque atome assure, si le nombre total d'atomes est constant dans l'univers, la conservation de la matière. Mais dans la démonstration qui précède, c'est seulement la conservation de la masse relative par rapport à un point qui est évoquée. Pour que la conservation de la matière soit assurée, il faut que la masse d'un point au moins puisse être considérée comme constante. C'est à cette démonstration que se livre Boussinesq dans une note relative au même passage. Nous l'examinerons tout à l'heure. Pour l'instant supposons la constance de la masse assurée; cette masse fait partie de la caractéristique du mouvement. On doit maintenant faire intervenir la vitesse dans cette caractéristique:

---

[285] J. Boussinesq, *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoire présenté à l' Académie des sciences et des lettres de Montpellier, le 8 Juillet 1872, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, p, 313.

"Mais, l'autre facteur, qui dépend évidemment de la vitesse V, ou qui égale une certaine fonction simple de V , sera-t-il proportionnel à V comme l'avait pensé Descartes, qui fut ainsi conduit à appeler le produit mV la quantité de mouvement du point?

Ne sera-t-il pas plutôt, comme une Science plus avancée le fit voir à Leibnitz, proportionnel au carré V^2 de la vitesse?"[286]

La réponse de Boussinesq à la question précédente est positive, évidemment:

"En effet dans la décomposition si naturelle du mouvement suivant les trois directions perpendiculaires, ce carré V^2 égale justement, d'après une remarque aussi simple que profonde de Leibniz lui-même, la somme des trois carrés analogues des vitesses composantes du point, et se montre ainsi apte à donner des produits, tels que mV^2 s'agrégeant dans tout un système par simple addition arithmétique malgré les différences de direction, puisque chaque terme mV^2 est déjà lui-même une somme de parties mu^2, mv^2, mw^2, non moins diverses ou pour ainsi dire non moins hétérogènes quant à la direction des vitesses qui y figurent(...) L'expression qu'il s'agit de former est bien $\sum mV^2$ (...)"[287]

Autrement dit, pour Boussinesq, l'argument décisif est que, si pour chaque point matériel, on décompose sa caractéristique de mouvement en mu^2, mv^2, mv^2, pour la caractéristique de mouvement du système total on pourra obtenir une décomposition du même type et elle sera la somme de quantités analogues à *mu2, mv2, mw2* de chaque point. Ainsi la caractéristique de mouvement sera, pour tout le système, ΣmV^2.

Dans ce qui précède Boussinesq n'a fait que justifier l'additivité des forces vives selon Leibniz, dans le cas d'un système formé d'atomes, mais il n'a pas justifié la forme en mV^2 elle-même.

Cette justification se fait dans une note intitulée: "Caractère distinctif de la force vive, ou de la puissance vive qui est sa moitié."[288]

Boussinesq part de ce que la caractéristique du mouvement doit être une fonction de la vitesse V. Soit:

$$f(V) = f(u) + f(v) + f(w)$$

On remarque déjà que cette relation implique l'isotropie de l'espace, car c'est la même fonction f qui est affectée à la vitesse proprement dite

---

[286] J. Boussinesq, *Leçon synthétiques de mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 20.

[287] ibid., p. 19.

[288] ibid., p. 19.

et à ses composantes. La relation supposée n'a d'autre justification que la simplicité.

Boussinesq différentie, combine avec l'expression du carré de la vitesse en fonction de ses composantes ($V^2 = u^2 + v^2 + w^2$) et exprime finalement le produit scalaire (expression actuelle) de la vitesse par sa différentielle dV qu'il présente sous la forme:

$$dV = (u/V).du + (v/V).dv + (w/V).dw$$

Suivant un procédé de calcul qui lui est familier, il met cette équation sous la forme:

$$0= \left[(1/u).(df(u)/du) - (1/V).(df(V)/dV)\right] . u . du + \text{la somme}$$

des deux termes correspondants en v et w.

Boussinesq formule alors son hypothèse de base: la fonction f doit être indépendante des composantes, hypothèse que nous avons vu être implicite dès le début. Mais ici, elle est également fondamentale pour la suite du calcul. Pour que le second membre de cette équation soit nul pour toute valeur de u, v, w, il faut que chaque expression entre crochets soit nulle, donc que les deux termes entre crochets soient égaux. D'où, après calculs, l'expression suivante:

$$(1/u).(df(u)/du) = (1/v).(df(v)/dv) = (1/w).(df(w)/dw) = (1/V).(df(V)/dV)$$

Comme u, v et w sont arbitraires les quatre expressions doivent être égales à une constante. Il s'ensuit:

$$(1/V).(df(V))/dV = m$$

m est la masse du point considéré.

La constance de la masse d'un point matériel est ainsi démontrée par des considérations géométriques. L'existence d'une masse, ou au moins sa constance, provient de l'isotropie de l'espace.

Boussinesq obtient ensuite par intégration l'expression de la puissance vive ou demi-force vive:

$$f(V) = m \cdot V^2/2 + C$$

Pour un point matériel, on peut voir alors que l'expression de la puissance vive est déduite cette fois du fait même qu'elle se conserve, *c'est la conservation même de cette quantité qui lui donne sa forme mathématique. Cette propriété de conservation est la conséquence de l'isotropie de l'espace, qui elle-même entraîne la constance de la masse d'un point matériel. De façon autonome, la constance de la demi-force vive est une conséquence de l'isotropie de l'espace. On peut même dire qu'il s'agit de l'espace absolu de Boussinesq, puisque pour que cet espace soit absolument isotrope, il faut que suivant l'expression que Boussinesq emploie pour l'espace absolu, celui-ci n'ait pas de jalons. Le raisonnement se fait donc dans le monde géométrique idéal. La démonstration de la conservation de la puissance vive pour les systèmes matériels fait intervenir comme principe supplémentaire celui de la constance de la quantité de matière, ce qui est une conséquence du nombre fini d'atomes contenus dans un système, et de la permanence de leur identité. Cette loi est la conséquence de notre univers, tel qu'il est.*

Boussinesq cherche ensuite à attribuer une signification à l'énergie potentielle. Il se demande en quoi la puissance vive ou l'énergie actuelle, grandeurs que Boussinesq assimile cette fois l'une à l'autre, se conserve, s'accroît ou décroît:

> "Mais ces accroissements ou ces décroissements doivent plutôt être appelés des développements ou des dissimulations, que des créations ou des anéantissements, puisque les quantités de puissance vive produite ou détruite qu'ils représentent disparaîtraient ou reparaîtraient par des changements inverses de figure."[289]

Finalement, c'est une version imagée de la conservation de l'énergie que propose Boussinesq. Ce qui est apparent, c'est l'énergie actuelle, que ce soit sous forme d'énergie calorifique, électrique, etc.; elle semble disparaître ou apparaître mais en réalité elle n'est que dissimulée dans le système. Dans l'interprétation atomiste de la nature l'énergie actuelle est de l'énergie cinétique. Il y a alors identité entre cette énergie et la demi-force vive; ce qui se dissimule, c'est de la force vive. C'est dans ce sens que Boussinesq peut assimiler force vive et énergie, et parler du "Principe de la conservation des forces vives ou de l'énergie"[290].

> "On peut donc concevoir qu'une certaine provision, un certain capital de puissance vive, variable avec la configuration du système, s'y trouve par le fait même que ce système existe, emmagasiné sous une forme invisible et, lors des changements de configuration, accroît de ses pertes ou diminue de ses gains l'énergie actuelle primitivement communiquée au système en quantité arbitraire, suivant les vitesses plus ou moins grandes imprimées initialement à ses divers points."[291]

---

[289]ibid., p. 21.
[290]ibid., pp. 21 et 22.
[291]ibid., p. 21.

L'énergie potentielle devient alors une provision de puissance vive, alors que l'on aurait pu s'attendre à une provision d'énergie actuelle, ce qui s'explique, comme nous l'avons dit plus haut, par les conceptions atomistes de Boussinesq. Il s'agit, en tous les cas, de quelque chose qui est emmagasiné:

> "On appelle énergie potentielle cette provision actuellement latente de puissance vive, qui dépend de la figure formée par les divers points du système ou qui est par conséquent une certaine fonction $\Psi(r, r', r'',\ldots)$ de leurs distances mutuelles (...)"[292]

Il y a donc un double aspect dans l'énergie potentielle: c'est d'une part une provision de puissance vive, dont le réceptacle est le système, et d'autre part la fonction $\Psi(r, r', r'',\ldots)$ elle-même, qui conserve ainsi l'aspect abstrait des deux premières présentations de la conservation de l'énergie. L'énergie potentielle acquiert donc deux significations relativement claires, accumulation de quelque chose, ou fonction descriptive du système.

Boussinesq exprime alors le principe de la conservation de la force ou de l'énergie sous la forme:

$$(1/2).\Sigma m.V^2 + \Psi(r_{1,2},\ldots,r_{i,j},\ldots) = C$$

III . 3 . 4 . Conclusion du paragraphe sur l'énergie

Nous allons reprendre les différents résultats obtenus par Boussinesq pour montrer comment s'organise sa conception de l'énergie. Examinons d'abord son interprétation de la conservation de la force vive. On doit pour cela repartir de l'espace absolu; il n'a "ni bornes ni jalons", en particulier il est isotrope. De là il suit que c'est la quantité $(1/2).\ m\ .V^2$ qui se conserve et non m.V. La constance de la masse d'un point matériel est aussi la conséquence de cette isotropie. On peut en déduire, à cause de l'harmonie entre l'univers matériel et l'univers géométrique idéal, la constance de la masse des atomes. La définition de la vitesse suppose que l'on ait une image opératoire du temps. Celui-ci est représenté dans le monde géométrique par le mouvement, dans un seul sens, d'un point sur une droite. Ainsi, l'ensemble des grandeurs nécessaires à la mise en évidence de la conservation de la force vive sont réductibles à des éléments du monde géométrique idéal.

---

[292]ibid., p. 21.

La conservation de la force vive pour un point matériel peut s'exprimer tout entière au moyen de la considération d'éléments du monde géométrique idéal. Il ne faut ajouter au monde géométrique pur que le temps.

Notre univers n'est que l'un de ceux qui peuvent être construits dans le monde géométrique idéal, même si on se limite à la géométrie euclidienne. Dans cet univers la matière se conserve, ce qui, joint à la constance de la masse des atomes, prouve que leur nombre dans l'univers est limité, conséquence conforme à l'idée suivant laquelle l'infinité n'appartient qu'à Dieu. A côté des lois habituelles de la mécanique, conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique, il y a celle de la conservation de la force vive. Elle signifie que la puissance vive d'un système ne dépend que de la géométrie du système et de la nature de ses atomes. Ces deux termes sont, ensemble, représentés par une fonction Ψ, dont la signification physique se limite à cet aspect descriptif du système.

Clairement, l'équation de conservation des forces vives est une équation cinématique. En ce sens, elle complète les autres lois de conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique, que l'on peut interpréter comme des lois cinématiques.

Voyons maintenant l'apparition de l'énergie. Si l'on considère un système, l'expérience montre que la quantité d'énergie s'y conserve. Dans la vision atomiste et dynamique de l'Univers qu'a Boussinesq, une partie de l'énergie d'un système est constituée par la force vive de ses atomes. L'autre partie est représentée par la fonction Ψ, dont la signification est maintenant d'être de l'énergie non apparente, de l'"énergie potentielle".

Les interprétations que l'on donnait de la fonction potentielle et du potentiel sont maintenant réunies dans une même théorie mécanique. La fonction Ψ dans son acception de fonction potentielle est une grandeur à caractère essentiellement géométrique; dans son acception de potentiel ou d'énergie potentielle, elle est liée à une grandeur physique: l'énergie. Le travail, également grandeur physique dont on connait les relations avec la mécanique des machines, sera lui-même déduit de l'énergie.

L'interprétation de la conservation de l'énergie par Boussinesq est entièrement conforme à son épistémologie. La conservation de l'énergie est une loi de la nature physique, elle a son modèle (au sens où le point matériel est le modèle de l'atome) dans la loi de la conservation de la force vive. Cette dernière peut être déduite de considérations géométriques et du fait que le nombre d'atomes de l'Univers ne saurait être infini; ainsi on est assuré de sa validité. La conservation de *l'énergie, équivalent physique de la loi idéale précédente, doit être également vraie. Alors il n'est pas besoin de beaucoup d'expériences pour la prouver, ce qui explique l'étroitesse de la base expérimentale de la théorie de l'énergie de Boussinesq.*

Souhaitant rompre avec la Mécanique fondée sur la force au sens causal, Boussinesq va faire de l'énergie potentielle un concept fondamental. Il en dérive la notion de travail et la fait intervenir constamment dans l'explication des phénomènes hydrauliques, lumineux, thermique, etc. La rupture ne saurait être totale, Boussinesq ne peut employer pour écrire sa Mécanique une autre "syntaxe" que celle de la Mécanique newtonienne, et les forces, même si elles n'ont plus leur signification newtonienne, devront y être présentes. L'expression mathématique de la force revêt une importance particulière, et nous allons montrer que sous une apparence mathématique très simple, elle recèle bien des difficultés.

III . 4 . Le développement de la Mécanique générale de Boussinesq

Boussinesq a donc établi la relation de la conservation des forces vives, puis de l' énergie, sans avoir recours à la notion de force causale. Il lui reste, à partir de cette relation de la conservation de l'énergie, à retrouver les lois du mouvement des points matériels et des corps étendus. Il faut bien dire que si la conservation de la force vive peut être considérée comme démontrée, la conservation de l'énergie est presque posée a priori; c'est pour lui une loi expérimentale qu'il a traduite en langage mathématique par l'équation suivante:

$$(1/2).\Sigma_i m_i . V_i^2 + \Psi(r_{1,2},\ldots,r_{i,j},\ldots) = C$$

Or il maintenant bien connu des mécaniciens qu'une telle équation n'est propre à fournir simplement les équations du mouvement que dans le cas où le système est conservatif et qu'il ne possède qu'un seul degré de liberté, comme on peut le voir dans les traités modernes de mécanique.[293] Le principe de la conservation de l'énergie est insuffisant, à lui seul, pour déduire toutes les lois du mouvement; il faut donc lui en adjoindre un second. Boussinesq choisira, nous l'avons dit, celui de l'indépendance des mouvements simultanés.

La tentative de Boussinesq d'inclure le principe de conservation de l'énergie dans la mécanique rejoint celle d'autres physico-mathématiciens de son époque, qui eux aussi, cherchent à créer une Mécanique faisant une place première à la force vive ou à l'énergie. L'exemple le plus connu de cette attention portée à l'énergie est sans

---

[293]Voir par exemple: J. C. Nihoul, *Cours moderne de mécanique rationnelle*, Paris, Albin Michel, 1968, pp. 107 à 114.

doute le "Traité de philosophie naturelle" de Thomson et Tait (1867)[294] que nous évoquons maintenant. Ce "Traité" se propose, entre autres, de faire entrer l'énergie dans le cadre de la Physique newtonienne; d'autres physiciens, comme Athanase Dupré, sont plus préoccupés d'applications de la Mécanique à la matière[295]. Ces préoccupations rejoignent celles de Boussinesq, nous les évoquons rapidement.

III . 4 . 1 . Deux tentatives d'application de la théorie de l'énergie à la Mécanique théorique et à la Mécanique moléculaire (1872)

Nous avons déjà signalé au premier chapitre (§ XII) que le but de Thomson et Tait dans leur "Traité de philosophie naturelle" est de réécrire la mécanique newtonienne en y faisant figurer explicitement le principe de conservation de l'énergie. C'est aussi à une réécriture de la Mécanique de leur temps qu'ils se livrent:

> "Le but que nous avons constamment en vue est le grand principe de Conservation de l'Energie. Conformément aux résultats expérimentaux modernes, spécialement ceux de Joule, l'Energie est aussi réelle et aussi indestructible que la matière. Il est agréable de constater que Newton a anticipé, autant que le lui permettait l'état de la science expérimentale de son époque, cette splendide généralisation (...). Nous nous considérons comme des Restaurateurs, non comme des Innovateurs."[296]

L'énergie joue un rôle important en Mécanique pour Thomson et Tait. Ainsi on peut lire dans le "Traité (...)":

> " Ce principe (de la conservation de l' énergie) peut être regardé comme comprenant la totalité de la dynamique abstraite."[297]

La "Traité de philosophie naturelle" est un bon exemple de reconstruction de la Mécanique dite "rationnelle" où l'énergie occupe une place éminente. Par le biais de l'utilisation de l'énergie les équations de la Mécanique dite "rationnelle" acquièrent une signification concrète.

Donnons les grandes lignes de l'introduction de l'énergie dans ce traité. Les deux auteurs écossais utilisent pour trouver la loi de conservation des forces vives, les procédés utilisés en mécanique rationnelle à l'époque: application du principe de d'Alembert, puis de celui des

---

294 W. Thomson and P. G. Tait, *Treatise on natural philosophy*, Oxford, 1867; vol. 1, part. 2, London, Cambridge University press, 1883; vol. 1, part. 1, London, Cambridge University press, 1896.

295 A. Dupré, *Théorie mécanique de la chaleur*, Paris, Gauthier-Villars, 1869.

296 W. Thomson and P. G. Tait, *Treatise on natural philosophy*, Oxford, 1867; vol. 1, part. 2, London, Cambridge University press, 1883; vol. 1, part. 1, London, Cambridge University press, 1896, p. VI.

297 ibid., § 288, p. 264.

déplacements virtuels[298]. Le principe de d'Alembert est vu par Thomson et Tait comme une conséquence de la troisième loi de Newton (égalité de l'action et de la réaction):

> "Newton dans le passage qui vient d'être cité met en évidence que les forces de résistance contre l'accélération sont prises en compte comme des réactions égales et opposées aux actions par lesquelles l'accélération a été produite (...).
>
> C'est le fameux principe posé explicitement pour la première fois par D'Alembert en 1743, très souvent utilisé et encore connu sous ce nom."[299]

Cette loi de Newton intervient, dans les Principia comme dans le "Traité (...)", après la définition de la force, et donc utilise bien, au départ, la force. De même le principe des vitesses virtuelles est aussi fondé sur la considération des forces:

> "Un système matériel, dont les mouvements relatifs ne sont pas gênés par des frottements, est en équilibre si et seulement si le travail fait par les forces extérieures est égal à l' énergie potentielle gagnée lors d'un déplacement infiniment petit à partir de cette configuration. Ceci est le célèbre principe des vitesses virtuelles sur lequel Lagrange base sa Mécanique générale."[300]

C'est cette fois un principe qui utilise le travail et donc, dans les vues de Thomson et Tait, la force. Voici comment ils procèdent. C'est au paragraphe 293 que commence l'étude des mouvements d'un système de points matériels soumis à des forces. Ils appliquent le principe des vitesses virtuelles et le principe de d'Alembert pour un point matériel et ensuite, ils étendent par sommation (et non intégration) ce résultat à l'ensemble des points du système. Soit en notations modernes:

$$\Sigma i\ (F_i - m_i.d^2R_i/\ dt^2)\ .\ \delta R_i = 0$$

où δR est une variation infinitésimale arbitraire du vecteur position R.

Les auteurs isolent alors dans le premier membre le travail effectué par les forces réelles, ils mettent ainsi en évidence le travail de ces forces:

$$\Sigma_i F_i\ .\ \delta R = \Sigma_i m_i\ .\ (d^2 R_i/\ dt^2\ )\ .\ \delta R_i\ .$$

---

[298]Voir: Ch. Sturm, *Cours de Mécanique de l'Ecole polytechnique*, Paris, 1° éd., 1867, 3° éd., 1881 , t. 2, pp. 212 à 215.

[299]W. Thomson and P. G. Tait, *Treatise on natural philosophy*, Oxford, 1867; vol. 1, part. 2, London, Cambridge University press, 1883; vol. 1, part. 1, London, Cambridge University press, 1896, § 264, p. 248.

[300]ibid, § 289, p. 269.

Ce travail est assimilé à une variation d'énergie potentielle:

$$\delta V = - \Sigma i F_i . \delta R_i$$ [301]

où V est l'énergie potentielle.

Enfin ils déduisent de cette équation l'expression de l'énergie cinétique qu'ils écrivent sous la forme suivante:

$$T = E - V.$$

On attend, bien entendu, que cette équation devienne T + V = E = Cte. Il n' en est rien, l'équation garde cette forme. Ils parviennent ensuite, à l'aide de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, à établir une forme de l'équation de l'énergie qui permet de calculer la variation instantanée de l'énergie cinétique lorsque les points du système sont soumis à des liaisons spécifiées, soit:

$$dT/dt = \Sigma i F_i . R'_i$$

Thomson et Tait dans le "Traité (...)" ne fondent pas leur Dynamique abstraite sur le principe de conservation de l'énergie. Leur but, dans l'établissement des lois du mouvement, est de préciser quelle est la place dans ces équations, de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique, et aussi d'arriver à la loi de variation de la quantité de mouvement.

Le "Traité de philosophie naturelle", ouvrage de près de mille pages, a connu sept éditions successives, et a eu une grande importance pour la Science du XIX° siècle. Maxwell, par exemple, s'en inspire pour l'exposé de son électromagnétisme[302]. A l'opposé de cette approche presque purement théorique, d'une importance sans commune mesure avec l'ouvrage de Thomson et Tait, on trouve les travaux d'Athanase Dupré qui, lui, place au premier plan l'expérience:

> "M. Dupré s'est placé tout de suite au nombre de ceux qui croient l'expérience seule capable de donner une base solide à la science nouvelle (la théorie mécanique de la chaleur), mais qui admettent l'impossibilité d'attribuer au hasard les vérifications nombreuses et variées du principe de l'équivalence du travail et des forces vives moléculaires déjà obtenues."[303]

---

[301]ibid., équation 3, p. 269.

[302]Voir: D. F. Moyer, *Energy, dynamics, hidden machinery, Rankine, Thomson and Tait, Maxwell*, Studies in history and philosophy of sciences, 8, 1977, p. 251 à 268.

[303]Ch. Combes, Ed. Phillips et Ed. Collignon, *Exposé de la situation de la mécanique appliquée*, Paris, Hachette, 1867, p. 58.

Dupré ne considère pas la question de la réalité de la force comme une question importante: c'est une affaire de conviction. Pour lui, la force est réelle, mais il ne demande pas à ses lecteurs de partager son opinion.[304] Il établit d'abord les théorèmes fondamentaux de la mécanique, essentiellement le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, le principe des vitesses virtuelles, le théorème de la quantité de mouvement, qui entraîne si l'on considère la notion de moment, celui de la conservation des aires. C'est en Mécanique appliquée à la Physique qu'il fait abondamment usage des notions de travail et de force vive. Il ne se fonde pas sur la conservation de la force vive ni de l'énergie, c'est l'équivalence de la force vive et du travail qui est invoquée. Ses références ne sont pas Helmholtz, Thomson et Tait ou Rankine, mais Montgolfier, Séguin, Mayer et Joule. Malgré cette différence de conception avec Boussinesq, qui lui, emploie explicitement la conservation de l'énergie ou de la force vive, ce dernier et Dupré poursuivent ce que l'on pourrait appeler le même "programme de recherches" dans l'application de la Mécanique générale, pour employer la dénomination de Boussinesq, à l' étude de la matière. Dupré se fonde sur l'évaluation du travail nécessaire à la séparation ou à la réunion de volumes des divers corps. Cela l'amène à étudier la formation de lames minces et à prouver l'existence de la tension superficielle. Son interprétation est que:

> "l'expression générale de la gravitation universelle se compose de trois parties, dont une seule est appréciable aux grandes distances, c'est le terme astronomique. Une seconde partie, le terme physique, devient négligeable dès que la distance surpasse une quantité extrêmement petite (1/200000 de millimètre par exemple) et encore assez mal déterminée (...). Enfin une troisième partie, le terme chimique, prédomine à son tour à des distances moindres encore, ce qui rend possible la combinaison de deux éléments qui se repoussent aux distances auxquelles le terme physique est seul sensible."[305]

Ce sont là les trois termes que Boussinesq va mettre en évidence dans sa décomposition de la forme générale de l'énergie potentielle. Il en déduira finalement une grande partie de sa mécanique de la matière, sa Mécanique physique.

On peut constater sur ces deux exemples que la volonté d'appliquer la nouvelle théorie de l'énergie tant à la Mécanique rationnelle qu'à l'étude de la matière proprement dite n'est pas une idée originale de Boussinesq. Ce qui est remarquable, et que nous allons montrer, c'est la cohérence de la Mécanique qu'il conçoit.

---

[304] A. Dupré, *Théorie mécanique de la chaleur*, Paris, Gauthier-Villars, 1869, pp. VI et VII.

[305] ibid., p. 59.

Mais tout d'abord, Boussinesq doit définir la force, non pas pour l'utiliser comme élément de base dans les calculs, mais parce que ce sont les actions des corps matériels qui impressionnent notre nature sensible, et ainsi nous informent sur eux. Il convient donc de leur trouver dans le "monde géométrique" une représentation analytique à partir de ce qu'il appelle l'"âme de la nature", i.e. l'énergie. Le progrès qu'il a accompli dans le traitement de ces questions est de prendre un point de vue totalement énergétique: la grandeur qui est caractéristique des actions entre particules est l'énergie, et les résultats des calculs portent bien sur l'énergie.

III . 4 . 2 . L'expression analytique de la force dans l'œuvre de Boussinesq

La conservation de la force vive ou de l'énergie est représentée par:

$$(1/2).\Sigma_i m_i . V_i^2 = -\Psi(r_{1,2},\ldots,r_{i,j},\ldots) + C \qquad (1)$$

C'est une égalité qui se trouve réalisée à chaque instant et pour la configuration du système de points matériels à cet instant. Les lois de la mécanique permettent justement de prévoir l'évolution de tels systèmes. On doit remarquer que la formule précédente relie la caractéristique dynamique du système, sa puissance vive $(1/2).\Sigma_i m_i . V_i^2$, et sa caractéristique géométrique, représentée par la fonction $-\Psi(r_{1,2},\ldots,r_{i,j},\ldots) + C$. Cette caractéristique géométrique est saisie à un instant précis; à cette limite les points du système matériel peuvent être considérés comme immobiles, une telle caractéristique peut donc être dite statique. La loi qu'il est envisageable de déduire de l'équation de la conservation de l'énergie est donc celle qui relie la variation de la caractéristique statique à celle de la caractéristique dynamique. Pour Boussinesq, l'évolution d'une quantité est caractérisée par sa dérivée à l'instant considéré. Prise à un instant précis elle représente le pouvoir d'évolution de cette quantité. De l'équation (1) on peut donc déduire l'équation qui relie entre elles les évolutions géométrique (statique) et dynamiques du système, c'est-à-dire:

$$d/dt\ [(1/2).\Sigma_i m_i . V_i^2] = d/dt\ [-\Psi(r_{1,2},\ldots,r_{i,j},\ldots)]$$

Le travail de Boussinesq va consister à rendre plus maniable cette expression, et à retrouver les résultats de la Mécanique newtonienne ainsi "épurée" de la notion métaphysique de force. Cette mécanique ne sera pas celle de Newton: elle ne sera pas fondée sur les définitions et les lois des "Principia", elle sera fondée sur la loi expérimentale, mais aussi rationnelle, de la conservation de l'énergie. Cette déduction reste, dans son essence, la même depuis 1872 jusqu'à la mort de Boussinesq. Ce qui varie, c'est essentiellement le principe qui, ajouté à l'équation (1), en permet effectivement la dérivation. Nous allons examiner maintenant cette dérivation.

III.4.2.a. L'expression mathématique de la force dans les "Recherches sur les principes de la Mécanique" (1872)

> "Outre le mémoire sur "les eaux courantes" auquel il faut que je travaille, je dois présenter le 8 Juillet à l'Académie des sciences et Belles Lettres de Montpellier un mémoire de mécanique simplement pour prendre date, ces opinions sur l'action moléculaire que vous trouvez aventurées, ainsi qu'une théorie des gaz qui en résulte et qui rend très simplement compte des lois de Mariotte et de Gay-Lussac (...). Je n'ai pas encore rédigé la plupart de ces résultats, trouvés cependant depuis plusieurs années."[306]

Ce passage est extrait d'une lettre adressée par Boussinesq à Saint-Venant. Elle est datée du 11 juin 1872. C'est donc en moins d'un mois que les "Recherches sur les principes de la mécanique (...)" ont été mises en forme de façon définitive. Après son cuisant échec à la porte de l'Institut, Boussinesq veut montrer que malgré son âge encore jeune - il n'a que trente ans - il possède des solutions aux grands problèmes de la Physique de son époque[307]. La rapidité de l'écriture explique sans doute que certains développements mathématiques ne soient qu'ébauchés. Il

---

[306] J. Boussinesq, *Lettre à Saint-Venant*, 11 Juin 1872

[307] Boussinesq avait caressé l'espoir d'être, malgré son jeune âge et son peu de titres universitaires, admis à l'Institut, en section de Géométrie. La déconvenue sera cruelle. Boussinesq ne recueillera qu'une voix, celle de Guiseux. Les espoirs et l'échec final du jeune physicien font l'objet d'une partie de la correspondance qu'il entretient avec Saint-Venant entre le 11 Février 1872 et le 11 Juin de la même année. Seule une étude approfondie, croisée avec d'autres sources, pourrait précisément dire si Boussinesq et Saint-Venant se sont bercés d'illusions, le premier, en effet, n'était pas un géomètre théoricien de premier ordre. Peut-être Saint-Venant n'a-t-il appuyé que mollement la candidature de Boussinesq, une phrase de Saint-Venant est assez ambiguë:
"Si j'avais su cela, cher Monsieur et ami, vous auriez eu deux voix; mais je ne pouvais prévoir un pareil succès de la section attaquée, mon devoir était évidemment tout tracé" (A. de Saint-Venant, *Lettre à Boussinesq*, 20 Mars 1872).

L' échec donne à Boussinesq l'audace de braver les opinions de Saint-Venant et de produire le mémoire qui nous occupe, mémoire dans lequel on trouve ses principales et presque définitives idées relatives à la mécanique générale. Il paraîtra l'année suivante dans le "Journal de Mathématique pures et appliquées" de Liouville, revue où, d'après Boussinesq, on peut faire publier des textes concernant la Science "en train de se faire" (le mot est de Boussinesq). Mais les discussions entre Boussinesq et Saint-Venant, sur le Mémoire et particulièrement sur la question des forces, se poursuivront jusqu'en 1875, date à laquelle la grande affaire sera pour tous deux la réflexion sur "la conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté humaine".

faut se reporter à plusieurs passages de ce mémoire si l'on veut saisir les implications de la notion de force. Ces conceptions seront reprises dans les "Leçons synthétiques de Mécanique générale" (1889) de manière plus étendue. C'est encore une fois de façon très rapide que Boussinesq procède à la définition de l'action entre atomes et de la force motrice dans le mémoire de 1872. Indiquons rapidement les grandes lignes de la démonstration. Dans une rapide introduction, il affirme que les accélérations ne dépendent que de la position des diverses parties du système[308]. Il pose, comme nous l'avons déjà dit, "comme *postulatum* fondamental de la mécanique la grande loi expérimentale de la conservation des forces vives ou de l' énergie"[309]. Puis il procède à la dérivation de la formule (1) et en déduit l'expression des actions qui s'exercent entre atomes.

Les calculs ne sont qu'esquissés. Il part de l'équation (1) des forces vives modifiée. Il indique, sans produire les calculs détaillés, qu'il remplace dans cette équation la vitesse par son expression en fonction des coordonnées, et appelle $\cos\alpha_{p,q}$, $\cos\beta_{p,q}$, $\cos\gamma_{p,q}$, les cosinus directeurs du segment $r_{p,q}$ séparant deux points p et q. De là, il observe que si l'on choisit arbitrairement le temps initial et si l'on tient compte de ce que les accélérations ne dépendent pas des vitesses, on peut dériver l'équation (1), et déduire les équations du mouvement d'un point matériel soumis uniquement à l'action des autres points matériels. On trouve ainsi pour un point matériel trois équations relatives aux coordonnées x_p, y_p, z_p de ce point[310]. Soit:

$$
\begin{aligned}
m_p \cdot (d^2 xp/dt^2) &= \textstyle\sum_q (d\Psi/dr_{p,q}) \cos \alpha_{p,q} \\
m_p \cdot (d^2 yp/dt^2) &= \textstyle\sum_q (d\Psi/dr_{p,q}) \cos \beta_{p,q} \qquad (2) \\
m_p \cdot (d^2 zp/dt^2) &= \textstyle\sum_q (d\Psi/dr_{p,q}) \cos \gamma_{p,q}
\end{aligned}
$$

où mp est la masse du point considéré, $r_{p,q}$ la distance qui sépare le point p des points q agissant sur lui, et $\cos x_{p,q}$ les divers cosinus de la droite pq avec les axes de coordonnées, la sommation étant étendue à tous les points q différents de p.

Boussinesq appelle "force motrice" la droite dont les premiers membres des équations précédentes sont les projections sur les axes. La droite qui joint le point p à un point q et a pour valeur $d\Psi/drp,q$ est aussi

---

[308]J. Boussinesq, *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoire présenté à l'Académie des sciences et des lettres de Montpellier, le 8 Juillet 1872, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, p. 306.

[309]ibid., p. 306.

[310]ibid., p. 315.

une force, mais reçoit le nom particulier d' "action entre les points p et q". La résultante de ces actions est alors définie à partir de la somme de leurs projections sur les axes de coordonnées. Chaque $d\Psi/dr_{p,q}$ est appelée "action entre points". La réaction de q sur p est dirigée aussi suivant p q et a pour expression $d\Psi/dr_{q,p}$. C'est une grandeur qui, telle la dérivée leibnizienne, se définit en un point précis et à un instant précis.

La démonstration ne contient pas plus de développements mathématiques que nous venons d'en donner.

Pour comprendre ce que veut dire Boussinesq, on peut se reporter à sa démonstration des "Leçons synthétiques (...)" de 1889; et aussi se reporter à ses mémoires de Mécanique physique déjà écrits. En 1872, il a utilisé cette indépendance de certaines grandeurs mécaniques par rapport aux vitesses dans le cas de la relation qu'il établit entre la variation de l'énergie interne d'un solide et les contraintes qui produisent cette variation (voir chapitre 3, § IV . 3 . 2 . b .)[311]. On peut donc ainsi reconstituer le raisonnement de Boussinesq de 1872, en s'inspirant de celui des "Leçons synthétiques (...)" de 1889. Nous écrirons en `caractères courrier ce qui relève de nos suppositions` et dans les caractères habituels ce qui est de Boussinesq ou les commentaires qui s'y réfèrent.

`Si nous utilisons, pour simplifier, les notations` $Vp=d(Rp)/dt$ `où Vp est la vitesse du point p, et` $\Psi(r_{p,q})=\Psi(r_{1,2},\ldots,r_{i,j},\ldots)$, `l'expression (1) devient alors:`

$$(1/2)\bullet\Sigma_p m_p \bullet [d\,Rp/\,dt]^2 = -\Psi(r_{p,q}) + C$$

`Soit, en dérivant par rapport au temps:`

$$\Sigma_p m_p \bullet [d^2R_p/dt^2].[dR_p/dt] = -\Sigma_p\Sigma_q[d\Psi(r_{p,q})/d(r_{p,q})].[d(r_{p,q})/dt] \quad (3)$$

Ici, on se trouve devant l'impossibilité d'aller plus loin sans hypothèse supplémentaire. L'hypothèse que choisit Boussinesq est d'affirmer l'indépendance *par rapport aux vitesses* des accélérations dans tout

---

[311]Voir: J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des ondes liquides périodiques, Note 3, où sont établies des relations générales et nouvelles (...)*, 1872, pp. 584 à 599. Dans ce texte Boussinesq établit une relation entre la variation de l'énergie interne d'un solide et les contraintes qui produisent cette variation; il aboutit à une expression de la forme:

$$\Sigma i\ (\ A(n)\ .\ f(ri)\ -\ B(m)\ .\ f\ (ri)\ )\ =\ 0$$

où A et B sont des fonctions complexes de l'énergie interne et des coordonnées et f(ri) l'analogue d'une vitesse. Cette équation doit être nulle quelle que soit la valeur de f(ri); il s'ensuit que pour les diverses valeurs de n et m on doit avoir:

$$A\ (n) = B\ (n)$$

système mécanique. Il commence par donner sa propre définition de la loi physique: c'est une simple affirmation du principe du déterminisme mécanique[312]. Il poursuit:

> "Il suit de là que les accélérations d^2x/dt^2, d^2y/dt^2, d^2z/dt^2 doivent être pour chaque point et à toute époque, des fonctions parfaitement déterminées de l'état du système à cette époque, c'est-à-dire des coordonnées et peut-être des vitesses. Toutefois je dis que ces fonctions ne doivent pas dépendre des vitesses."[313]

C'est donc un argument cinématique qui est évoqué ici; mais il doit être justifié:

> "En effet il est d'abord naturel d'admettre que l'une quelconque d'entre elles ne peut tout au plus contenir que la vitesse du point dont elle exprime une accélération; car durant l'instant *dt*, les vitesses des autres points ne modifient pas sensiblement les positions, ni par suite leur manière d'être et d'agir, par rapport à celui que l'on considère."[314]

Manifestement Boussinesq est ici embarrassé; dire que dans un instant *dt* les point matériels ne changent pas sensiblement leur position revient finalement à supposer la vitesse des atomes très faible, ce que rien n'autorise à faire. En réalité, ce qu'affirme Boussinesq, c'est que la "manière d'agir" sur un point particulier ne dépend pas des déplacements infinitésimaux des autres points, et donc ne dépend pas de leur vitesse.

Ainsi conçue, l'indépendance des accélérations d'un point par rapport aux vitesses des autres points est une simple question de bon sens: un déplacement infinitésimal ne saurait modifier les actions entre atomes. Mais on ne peut pas ne pas remarquer que Boussinesq reprend un résultat classique de la Mécanique rationnelle: la force vive d'un système se conserve lorsque les forces qui agissent ne dépendent pas de la vitesse des points du système. Mais c'est une explication cinématique du principe de conservation de la force vive que Boussinesq propose.

Il reste à justifier que l'accélération du point considéré ne dépend pas de sa propre vitesse. Pour cela l'auteur suppose que les autres points

---

[312] J. Boussinesq, *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoire présenté à l' Académie des sciences et des lettres de Montpellier, le 8 Juillet 1872, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873. p. 312.

[313] ibid., p. 313.

[314] ibid., p. 313.

sont animés de vitesses égales à celle du point considéré. D'après ce qui précède, cela ne modifie pas son accélération, et:

"L'expérience apprend que, dans ce cas, leurs déplacements par rapport à un système d'axes coordonnés parallèles aux axes fixes, mais constamment animés de ce même mouvement de translation, seront les mêmes que ceux qui auraient lieu par rapport à des axes fixes, si tous les points étaient actuellement sans vitesse. Donc les accélérations suivant les axes fixes à l'époque t, évidemment égales à celles qui seraient produites dans ce dernier mouvement, ne dépendent que des positions actuelles des points par rapport à ces axes, et les uns par rapport aux autres."[315]

C'est donc une version du principe de relativité galiléenne qui est ici invoquée. On peut toutefois constater que l'utilisation de ce principe est subordonné à l'indépendance de l'accélération d'un point par rapport aux déplacements infinitésimaux des autres.

Muni de ce principe d'indépendance, on peut alors poursuivre les calculs, ce que l'auteur indique de la façon suivante:

"quelles que soient les coordonnées actuelles des divers points, on peut se donner arbitrairement les composantes actuelles des vitesses, dont les accélérations ne dépendent pas (...)"[316]

Revenons à l' équation à simplifier:

$$\Sigma_p m_p \bullet [d^2R_p/dt^2].[dR_p/dt]=-\Sigma_p\Sigma_q[d\Psi(r_{p,q})/d(r_{p,q})].[d(rp,q)/dt] \quad (3)$$

Mais rp,q = Rq - Rp et donc dr(p,q) = dRq/dt - dRp/dt. Or d'après Boussinesq (voir plus haut) la position de l'atome q n'est pas sensiblement modifiée pendant un court instant *dt*. Alors on doit poser dRq/dt = 0, et dRp/dt ≠0, puisque l'atome p est soumis à une accélération. Alors dr(p,q)/dt = - dRp/dt. En substituant dans (3), on obtient:

$$\Sigma_p m_p \bullet [d^2(R_p)/dt^2].[d(R_p)/dt] =\Sigma_p\Sigma_q[d\Psi (r_{p,q})/d(r_{p,q})].[dR_p/dt]$$

En rassemblant dans le premier membre l'ensemble de l'équation, il vient:

$$\Sigma_p m_p \bullet [d^2(R_p)/dt^2].[d(R_p)/dt]-\Sigma_p\Sigma_q[d\Psi(r_{p,q})/d(r_{p,q})].[dR_p/dt]=0$$

ou

[315]ibid., p. 313.
[316]ibid., p. 313.

$$\Sigma_p\{m_p \bullet [d^2(R_p)/dt^2] - \Sigma_q[d\Psi(r_{p,q})/d(r_{p,q})] \cdot [dR_p/dt]\} = 0 \quad (4)$$

Cette égalité doit être vérifiée quelle que soit la vitesse de p puisque l'action des autres atomes sur p ne dépend pas de la vitesse de celui-ci.Cette égalité aura toujours lieu si:

$$m_p \bullet [d^2(R_p)/dt^2] - \Sigma_q[d\Psi(r_{p,q})/d(r_{p,q})] = 0$$

Ou encore:

$$m_p \bullet [d^2(R_p)/dt^2] = \Sigma_q[dY(r_{p,q})/d(r_{p,q})]$$

ce qui, projeté sur les axes, donne bien les équations (2) déjà indiquées ci-dessus.

Bien que mentionnée de façon discrète par Boussinesq, l'indépendance par rapport à la vitesse des actions entre atomes, joue un rôle essentiel dans le calcul de l'expression des forces. C'est un véritable principe auxiliaire sans lequel la déduction de la force à partir de l'énergie ne serait pas possible. C'est un principe cinématique, et jamais Boussinesq ne l'utilise explicitement pour justifier la conservation de la force vive. Dans les "Recherches sur les principes de la mécanique (...)," Boussinesq ne donne pas de nom particulier à cette loi d'indépendance par rapport à la vitesse, alors qu'il l'appellera plus tard "Principe de l'indépendance des mouvements simultanés."

L'importance de ce principe est encore affirmée lors de la même déduction de la force à partir de l'énergie dans les "Leçons synthétiques de Mécanique générale" (1889).

III . 4 . 2 . b . Le principe de l'indépendance des mouvements simultanés et la seconde déduction de la force (1889)

Dans les "Leçons synthétiques de Mécanique générale"[317] Boussinesq n'affirme plus qu'il "pose comme *postulatum* fondamental de la Mécanique, la grande loi de la conservation des forces vives ou de l'énergie". Son premier principe est celui de l'indépendance des accélérations par rapport aux vitesses. Pour l'exprimer il a défini ce qu'il appelle l'état statique du système, c'est-à-dire l'ensemble des coordonnées de ses points M:

[317] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de mécanique générale,* Paris, Gauthier-Villars, 1889.

"C'est cet état que les points M eux-mêmes, supposés donnés dans l'espace, définissent *géométriquement.*"[318]

L'état dynamique est défini comme l'ensemble formé par les vitesses de chacun des points du système:

"On appelle état dynamique du système cet état actuel de mouvement, exprimé par les vitesses géométriques V = ds/dt (...)"[319]

Ainsi peut-il exprimer sa "Première loi ou premier principe: c'est d'après l'état statique que se règle la rapidité de variation de l'état dynamique"[320]. Boussinesq va commencer par exposer brièvement ce premier principe, en moins d'une page; mais il utilisera près de six pages pour le justifier. Voici sa formulation:

"Le premier (principe), connu, dans un cas particulier qu'a signalé Galilée, sous le nom de *Principe de l'indépendance des mouvements simultanés,* consiste en ce que, le système matériel considéré étant supposé très éloigné de tout autre ou seul dans l'espace, la rapidité avec laquelle change d'instant en instant son état dynamique, dépend, d'une manière déterminée, de son état statique seul. Autrement dit, les accélérations $d^2(x,y,z)/dt^2$ de ses divers points égalent certaines fonctions, déterminées dans chaque cas par les lois physiques des coordonnées actuelles x,y,z de tous."[321]

Ce qui veut dire que l'accélération de chaque point ne dépend que de la position des autres points. On trouve mention de ce principe d'indépendance des mouvements simultanés dans divers ouvrages de Mécanique, par exemple celui de Furiet (1855), où il est étudié sous la rubrique "Indépendance des mouvements simultanés constatés par l'observation"[322]. Dans cette formulation, qui figure dans les programmes des lycées de 1852, Delaunay en 1857 décèle une confusion; on confondrait sous ce titre le principe de composition des mouvements, principe de cinématique, et celui d'indépendance de l'effet d'une force sur un mobile par rapport à la vitesse qu'il a précédemment acquise[323].

---

[318]ibid., p. 7.

[319]ibid., p. 8.

[320]ibid., titre du paragraphe 10, p. 11.

[321]ibid., p. 12.

[322]J. Furiet, *Cours de Mécanique,* Paris, Gauthier-Villars, 1855, p. 39.

[323]"L'erreur commise par les auteurs du programme officiel ne peut être attribuée qu'à une étrange confusion d'idées. On aura placé dans la partie purement géométrique, ce qui doit se dire plus tard à l'occasion du mode d'action des forces pour produire le mouvement. Alors, en effet, on doit emprunter à l'expérience les notion relatives à l'indépendance de l'effet d'une force et du mouvement antérieurement acquis par le corps sur lequel elle agit, et aussi l'indépendance des effets des forces qui agissent simultanément sur le même

Le principe que Galilée a signalé dans un cas particulier correspond sans doute au fait que les déplacements relatifs des points sont les mêmes pour des repères en translation l'un par rapport à l'autre: c'est semble-t-il ce que l'on appelle maintenant le principe de relativité galiléenne. L'indépendance des accélérations par rapport aux vitesses est reprise comme plus haut. La nouveauté de l'exposé de ce principe par rapport à celui du mémoire réside dans l'abondance des justifications de cette indépendance. En particulier les forces de frottement, tant fluide que solide, semblent dépendre de la vitesse, mais selon Boussinesq ce n'est là qu'une apparence:

> "Mais un peu d'attention montre de suite que ce à quoi tient l'accélération négative du corps considéré est l'intimité plus grande, à son avant qu'à son arrière, de son contact physique avec le fluide qui le gêne dans son mouvement. Donc l'accélération considérée se règle bien uniquement d'après des rapprochements entre particules, ou d'après les situations relatives des points matériels du système."[324]

Boussinesq reprend le même type d'argument pour les frottements solides. Les raisons de cette insistance sont sans doute fournies par le paragraphe qui suit immédiatement ces justifications; il s'intitule: "Troisièmement, enfin, (extension) à certains phénomènes, mal connus, électriques ou autres"[325]. Dans ce paragraphe Boussinesq affirme que son premier principe doit s'appliquer à l'électrodynamique; c'est ce que la controverse entre Helmholtz et Weber, sur les forces conservatives, rend plus que problématique, nous évoquerons brièvement ce point plus loin.

Dans les "Leçons synthétiques de Mécanique générale" (1889) Boussinesq explicite sa formulation définitive de la force motrice et des actions entre atomes[326]. C'est sans doute l'influence de Saint-Venant qui a produit cette modification. Ne reproche-t-il pas à Boussinesq son manque de clarté? Saint-Venant, en 1881, dans les commentaires à l'œuvre de Clebsch, reprend le calcul de Boussinesq, et lui donne toute sa limpidité[327]. Reproduisons très rapidement ici la démonstration de

---

corps", in Ch. Delaunay, Traité de Mécanique, Paris, Anglois et Leclecrq, Victor Masson, 1857, p. 37.

[324]J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 14.

[325]ibid., p. 16.

[326]ibid., pp. 23 et 24.

[327]Saint-Venant attribue la paternité du calcul à Boussinesq:
"C'est dans un Mémoire sur les principes de la mécanique, lu en 1872 par M. Boussinesq, à l'Académie de Montpellier, et imprimé la même année à Paris au Journal de Mathématiques de M. Liouville, que j'ai puisé cette remarquable déduction des équations (d) (c'est-à-dire les équations définissant les forces) relatives à chaque point de celles (b) (en fait la seule équation des forces vives) relative à tous." (A. de Saint-Venant, in A. Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps*

1889 de Boussinesq. Il part à nouveau de l' équation de la conservation de l'énergie:

$$(1/2).\Sigma_i m.V^2 + \Psi(r_{1,2},\ldots,r_{i,j},\ldots) = C$$

qu'il différentie par rapport au temps

$$\Sigma_p \left(m_p \, . \, (d^2 R_p)/ dt^2 + d\Psi/dR_p \right). (dR_p/dt) = 0 \quad (5)$$

La nouveauté par rapport à la démonstration de 1872 est que Boussinesq indique qu'il différentie directement par rapport aux coordonnées des points matériels. Il ne considère pas explicitement les distances entre atomes, qui seules interviennent dans les actions mécaniques. Et il affirme, ce qui est son principe de base, que les actions entre atomes ne dépendent que de la position des points et non de leur vitesse.

> "Il faut d'ailleurs s'y représenter les accélérations $d^2(x,y,z)/dt^2$ remplacées par leurs valeurs, qui, d'après le premier principe, dépendent uniquement de l' état statique du système, c'est-à-dire des coordonnées x,y,z de ses divers points, comme les dérivées mêmes de Ψ en x_p, y_p, z_p."[328]

Cela lui permet de décomposer l'équation (5) en autant d'égalités partielles qu'il y a de points matériels dans le système, ce qu'il écrit:

$$m_p \, . \, (d^2 R_p)/dt^2 = - d\Psi/dR_p$$

ce qui, par une transformation analogue à celle qui a été évoquée plus haut, revient à l'équation qui donne la force motrice agissant sur un point en fonction de la position des autres points, équation qu'il écrit finalement:

$$m_p \, . \, (d^2 R_p)/dt^2 = \Sigma_q \, d\Psi/dr_{p,q} \, (a_{p,q}, b_{p,q}, c_{p,q})$$

où $a_{p,q}$, $b_{p,q}$, $c_{p,q}$ sont les cosinus directeurs de $r_{p,q}$.

La différence entre les déductions de la force de 1872 et de 1889 réside essentiellement dans l'affirmation de plus en plus déterminée de

---

solides, trad. A. de Saint-Venant et Flamant, avec des Notes étendues de M. de Saint-Venant, Paris, Dunod, 1881, p. 69).

[328] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de mécanique générale,* Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 24.

l'indépendance de l'accélération par rapport aux vitesses des points matériels du système. La raison de cette insistance nous semble être que si l'on ne postule pas cette indépendance, il est impossible de déduire la mécanique générale de la conservation de l'énergie. Or si l'on veut bâtir une telle mécanique générale, il faut relier l'aspect cinématique des phénomènes mécaniques à quelque grande loi de la nature qui détermine, parmi l'infinité des mondes géométriques possibles, celui qui correspond à notre univers. Les deux principes choisis par Boussinesq remplissent bien ce rôle: il possèdent tous les deux une expression cinématique, et sont d'après Boussinesq des lois expérimentales, qui donc traduisent la réalité de ce monde. Il n'y a pas, pour lui, de raison sérieuse de les contester: le principe d'indépendance des mouvements simultanés qui est finalement attesté par trois siècles de physique, prend ses racines là même où naît, suivant l'opinion commune, la Physique moderne, i.e. dans l'œuvre de Galilée. Le principe de conservation de l'énergie, principe nouveau, possède une base expérimentale sûre.

La formulation traditionnelle du principe des forces vives fait appel au travail, qui est un élément important dans toute la théorie mécanique de l'énergie, puisque les échanges, les variations d'énergie, se font au moyen du travail. C'est donc un élément que Boussinesq se doit de retrouver à partir de sa fonction fondamentale Ψ. Il le fait de manière particulièrement rapide dans la Note 3 de sa "Théorie des ondes liquides périodiques" de 1872:

> "D'après la définition même de l'énergie potentielle interne, sa variation durant un instant *dt*, changée de signe, représente le travail total, durant les mêmes instants, des actions réciproques, exercées à de très petites distances, des molécules des corps."[329]

Si l'on définit deux états A et B d'un système, que l'on intègre la force motrice à laquelle est soumis chaque atome par son déplacement, on obtient bien l'expression traditionnelle du travail; la même intégration sur le second membre des équations (2) donne la variation de l'énergie potentielle, interne dans ce cas. La force ici n'est utilisée, conformément aux idées de Boussinesq, que comme intermédiaire dans les calculs et elle disparait à la fin de ceux-ci.

La grandeur fondamentale est donc bien la fonction Ψ, cette fonction sur laquelle Boussinesq fonde toute sa mécanique, et dont la caractéristique est de dépendre de l'ensemble des atomes du système. Dans cette construction de la Mécanique, la force ne joue qu'un rôle

---

[329] J. Boussinesq, *Théorie des ondes liquides périodiques*, Mémoires présentés par divers savants à l' Académie des sciences de l'Institut de France (mémoires des savants étrangers), 20, 1872, p. 586.

secondaire, nous allons toutefois l'examiner de façon à montrer son originalité, mais aussi ses limites.

III . 4 . 3 . Remarques sur la notion de force selon Boussinesq

La conception de la force chez Boussinesq présente des aspects novateurs, mais aussi des aspects plus archaïques. Nous commençons par exposer les aspects novateurs.

III . 4 . 3 . a . Aspects novateurs de la notion de force selon Boussinesq

> "Cette dérivée (celle qui donne l'action entre deux atomes) doit en général dépendre non seulement des deux points considérés, comme le voudrait l'opinion très répandue basée sur le désir de trouver simples les lois naturelles, mais encore des distances des points matériels voisins s'il en existe. En d'autres termes, rien ne prouve que l'action de deux points ne puisse être influencée par la présence d'un certain nombre d'autres, et que l'on ne doive pas admettre comme possible, en Mécanique moléculaire, des actions et réactions de présence."[330]

L'idée de prendre en compte tous les atomes pour définir l'action mutuelle de deux d'entre eux est la seule qui soit compatible avec la définition de la fonction Ψ de Boussinesq. En effet cette fonction est indéterminée, elle a comme seule caractéristique de dépendre de la distance mutuelle des atomes.

Il n'y a donc aucune raison de supposer que sa dérivée, justement l'action entre deux atomes, puisse brusquement, n'être fonction que de la distance qui les sépare. L'écriture synthétique $m_p \cdot (d^2 R_p)/dt^2 = \Sigma_q \, d\Psi/dr_{p,q} \, (a_{p,q}, b_{p,q}, c_{p,q})$, *masque justement que la fonction* Ψ *devrait s'écrire* $\Psi\,(r_{p1,q1}, r_{p2,q2}, \ldots, r_{pn,qn})$; *sa dérivée dépend donc de la position de tous les points. C'est là un point très nouveau par rapport à la Mécanique fondée sur les forces centrales, comme celle de Saint-Venant, de Verdet et même de Helmholtz jusque vers 1880. Pour ces physiciens, l'action entre deux points ne saurait dépendre que de leur distance mutuelle, et non pas des distances aux autres points qui*

---

330 J. Boussinesq, *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoire présenté à l' Académie des sciences et des lettres de Montpellier, le 8 Juillet 1872, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873. p. 306.

330 ibid., p. 306.

les entourent. Nous étudions cet aspect de la Mécanique générale de Boussinesq en détail dans le paragraphe II du troisième chapitre[331].

---

[331]C'est ici le lieu de faire état de l'évolution de la pensée de Boussinesq entre 1872 et la date de sa mort. L'idée d'actions de présence, c'est-à-dire finalement d'actions entre atomes, "délocalisées" à l'ensemble du système, est particulièrement novatrice; que l'on songe seulement à la délocalisation des actions dans les liaisons des molécules chimiques. C'est d'ailleurs, entre autres, un argument emprunté à la Chimie que Boussinesq oppose au scepticisme de Saint-Venant concernant ces actions de présence:
"Croyez-vous qu'un chimiste admette aisément que l'action d'une molécule d'eau sur une autre molécule d'eau soit la simple somme algébrique des actions des atomes d'oxygène et des atomes d'hydrogène de la première sur ceux de la seconde, ces actions étant calculées comme si chaque couple de deux atomes existait seul (...)", in J. Boussinesq et A. de Saint-Venant, *Objections qui pourraient être faites au Mémoire de Monsieur Boussinesq*, Paris, Archives de l'Académie des sciences, fonds Saint-Venant, carton 2, 1875.
L'affirmation des actions de présence dure donc au moins jusqu'en 1875. Mais en 1889, dans les "Leçons synthétiques de Mécanique générale", l'hypothèse des actions centrales semble retrouver quelque crédibilité aux yeux de Boussinesq. Ainsi il intitule un des paragraphes de cet ouvrage "Hypothèses plausibles sur les actions moléculaires ou exercées aux distances imperceptibles". Parmi ces hypothèses plausibles on trouve que "(...) l'action réciproque de deux points ne dépend, pas plus aux petites distances qu'aux grandes, des droites de jonction autres que la leur". C'est donc en revenir aux actions centrales. Mais ce n'est qu'une hypothèse, et encore "une hypothèse simple" (les citations sont dans :J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889, pp. 41 et 42).
En 1910, Boussinesq affirme que, "bien que ce ne soit pas la seule hypothèse possible, on admet maintenant que la fonction Ψ peut être obtenue en considérant l'action des molécules prises par couples". C'est en revenir aux forces centrales et finalement donner raison à Saint-Venant. Plus loin, dans le même texte, Boussinesq considère comme compliquée toute autre hypothèse que celle que nous avons appelée "des actions centrales". On est donc conduit à conclure qu'à la fin de sa vie Boussinesq a renoncé à ses actions de présence (la citation est dans: J. Boussinesq, *Sur les principes de la mécanique et sur leur applicabilité à des phénomènes qui semblent mettre en défaut certains d'entre eux*, C. R., 150, 1910, pp. 1639 à 1643).

Il faut redire ici que la présentation de la Mécanique par Boussinesq reste la même entre 1872 et sa mort. Si l'on veut expliquer l'évolution de sa pensée, plusieurs hypothèses se présentent. Tout d'abord, il faut bien constater que ces actions de présence apparaissent surtout dans son explication de la solidité et de la fluidité. Or, justement, comme nous le montrons au paragraphe II du troisième chapitre, en 1889, lorsqu'il écrit les "Leçons synthétiques (...)", Boussinesq a trouvé une interprétation de la fluidité qui ne fait plus intervenir les actions, du type des forces à distance, entre molécules. C'est par la considération même du mouvement qu'il y parvient; et c'est alors qu'il commence à abandonner ses actions de présence. En 1910, il a écrit sa "Théorie analytique de la chaleur (...)", qui est une théorie dynamique (fondée sur le mouvement), et alors il renonce absolument à ses actions de présence. On peut émettre l'hypothèse que ces actions de présence sont finalement remplacées par une vision dynamique de la nature. Dire qu'il renonce aux actions de présence est sans doute exagéré, il vaut mieux dire qu'il en trouve une explication simple dans les actions, telles le choc, entre les molécules. Finalement, ces chocs sont bien des actions de présence des molécules.
Une autre explication de l'évolution de la pensée de Boussinesq peut être que, les actions de présence ne trouvant finalement pas grande application dans la

La restriction qu'apporte Boussinesq de limiter les actions et réactions de présence aux atomes voisins de ceux considérés, tient à sa volonté de retrouver la loi de la gravitation universelle. En effet, dans les forces s'exerçant à distance perceptible, il semble bien que l'action entre atomes ne dépende que de la distance qui les sépare. Si nous examinons maintenant les égalités qui donnent les forces motrices, nous voyons que la direction de l'action dépend de Ψ et ne saurait être prévue *a priori*. En effet, du système des équations (2), il est impossible d'inférer quoi que ce soit sur la direction de la force motrice qui agit sur deux points, si l'on ne connait pas la fonction Ψ. Il peut se trouver, par exemple, que les expressions a et b de (2) soient nulles, alors la force motrice serait dirigée suivant l' axe des z. L'hypothèse n'est nullement inconcevable, quand on sait que la fonction Ψ est, selon Boussinesq, inconnue dans bien des cas.

> "Mais la fonction des forces elle-même n'a encore été déterminée que d'une manière approximative et partielle, et seulement pour des mouvements d'une nature particulière. Les principaux sont: 1° les mouvements des corps célestes et généralement ceux où n'intervient que la *pesanteur,* c'est-à-dire l'action mutuelle de points situés au-delà des très petites distances auxquelles s'exercent les forces dites vulgairement *actions de contact;* 2° les mouvements perceptibles des solides peu déformés et des fluides; 3° la plupart des phénomènes relatifs aux gaz permanents."[332]

Un autre aspect de la conception de Boussinesq doit encore être signalé: c'est l'identité entre force ou action utilisée en statique et force ou action utilisée en dynamique. Le premier membre de cette équation, la force motrice, met en évidence l'aspect dynamique de la force; le second est défini en un point, sans référence au temps. Cette dérivée du potentiel est donc bien un élément de la statique. C'est d'ailleurs la conception de Thomson et Tait qui, dans leur "Traité de philosophie naturelle" (1867), incluent dans la statique les questions relatives au potentiel. En France, tel est aussi le cas de Sturm qui, en 1867, étudie les divers potentiels mécaniques dans le cadre de sa statique. Boussinesq résout l'épineuse question de la relation entre la force produit de la masse par l'accélération, constatable et mesurable par le changement du

---

Physique, Boussinesq a préféré, conformément à son principe de simplicité, revenir à l'hypothèse des actions centrales. Il aurait ainsi sacrifié la cohérence de sa pensée à sa simplicité. Il est possible enfin que l'évolution de la physique atomique l'ait conduit à revenir aux actions centrales.

[332] J. Boussinesq, *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale",* Paris, Gauthier-Villars, 1879; aussi, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 1879, pp. 1 à 141 et 248 à 251, citation aux pages 74 et 75.

mouvement, répondant donc à la définition de Newton, et la force supposée s'exercer entre corps immobiles l'un par rapport à l'autre (force statique). L'irréductibilité de l'une des formes à l'autre était un argument de poids à l' encontre de l'utilisation de l'idée de force en Mécanique. Cette hétérogénéité dans un même concept est un obstacle tellement important que dans les mêmes années 1870, quelqu'un comme W. Thomson proposera de relier les deux aspects de ces actions par un simple coefficient; ce qui est plus un expédiant qu'une solution[333]. Boussinesq contourne cet obstacle. En effet, sa force motrice, nous l'avons dit, se rapproche de l'expression de la force dans la dynamique newtonienne. L'action entre les atomes, représentée par les seconds membres des équations (2), n'agit qu'entre atomes considérés comme *immobiles* et figurés par des points, puisqu'elle ne dépend que de leurs positions instantanées: c'est donc bien une force statique[334]. Les simples égalités écrites par Boussinesq lèvent ainsi le problème de la relation entre statique et dynamique.

Mais il y a encore davantage. Dans les débats que nous avons relatés brièvement concernant la priorité de la Dynamique sur la Statique ou inversement, l'une des Ecoles voulait absolument subordonner l'autre à ses vues, et de là investir l'ensemble de la Science. L'entreprise était difficile pour les uns comme pour les autres: la force, dans son expression newtonienne, fait appel à l'accélération, donc au mouvement, et la force statique suppose l'immobilité. Si l'on veut commencer par la Statique, on est obligé de recourir, comme le fait Lagrange, aux déplacements virtuels, ce qui est une façon d'introduire au mouvement. Si l'on veut débuter par la Dynamique, on doit supposer que la composition des forces, établie par Newton par des considérations de mouvement, s'applique aussi lorsque les systèmes sont immobiles. Malgré les apparences, les deux membres de l' équation par lesquels Boussinesq définit les forces, sont des termes relevant de la Dynamique. C'est patent pour le premier, $m_p \cdot (d^2 zp/ dt^2)$, qui contient explicitement le temps. Le second, $(d\Psi/dr_{p,q})\cos\gamma_{p,q}$, décrivant les forces comme déduites du potentiel, est aussi un terme dynamique, puisque la fonction Ψ représente la force vive dissimulée, donc le mouvement: il y a donc homogénéité sur le plan de la conception de la Mécanique. Ainsi la liaison entre force statique et force dynamique est-elle faite. En réalité, si on se souvient que l'énergie potentielle est de la force vive dissimulée, ces deux conceptions de la force ont une origine dynamique.

---

[333]Crosbie Smith and Norton Wise, *Energy and Empire* , Cambridge University Press, Cambridge, 1989, pp. 388 à 390.

[334]Que Boussinesq fasse appel au potentiel pour définir les actions est une preuve supplémentaire de cette relation qu'il établit entre Statique et Dynamique: dans les traités de Mécanique, par exemple ceux de Sturm ou de Thomson et Tait, la force newtonienne relève de la Dynamique, alors que ce qui traite du potentiel relève de la Statique. La liaison entre les deux types de forces n'est pas logiquement justifiée.

L'action entre atomes ainsi conçue ne tombe pas sous la critique de Saint-Venant selon laquelle elle ne suivrait pas la loi de composition géométrique des forces (voir paragraphe III . 3. du présent chapitre). D'après la définition même de l'action entre atomes, celle-ci dépend de la fonction Ψ qui est une fonction de la distance de tous les atomes; la force alors doit être différente lorsque les paires d'atomes sont isolées et lorsqu'elles sont incluses dans un système matériel. Il ne faut donc pas composer les forces agissant entre paires isolées pour obtenir la résultante des actions entre atomes inclus dans un système; il faut ajouter les actions entre paires faisant partie du même système matériel que celui où l'on évalue cette dernière. La définition de la résultante de Boussinesq est donc cohérente sur ce plan. Au reste cette définition est aussi valable dans le cas des forces centrales, et donc indépendantes de leur environnement moléculaire; alors la déduction de Boussinesq reste valable, que ces forces soient en réalité centrales ou non.

L'expression de la force de Boussinesq est une avancée par rapport aux forces centrales, la grandeur et la direction de ces forces motrices dépendent du système dans son ensemble. Cette conception se rapproche ainsi de celle de Lamé qui, dans sa rénovation de la théorie de l'élasticité,[335] *s'oppose à l'idée que les seules forces qui s'exercent dans la nature sont centrales (voir troisième chapitre, paragraphe II). De plus Boussinesq établit l'égalité des actions statiques entre atomes et des forces motrices forcément dynamiques. Boussinesq est donc, en 1872, dans le camp des novateurs: il utilise la conservation de l' énergie, ce qui est encore assez nouveau; de plus, il propose une mécanique où les forces centrales n'auraient pas un rôle majeur, et il fonde sa mécanique sur la dynamique et non pas la statique, ce qui est en rupture avec une des présentations traditionnelles .*

Cette présentation de la Mécanique, toute appuyée sur la fonction Ψ, n'est pourtant pas exempte de défauts. C'est ce que fait remarquer Saint-Venant dans la critique qu'il fait du mémoire de Green, déjà cité, sur la propagation de la lumière dans les milieux transparents.

III . 4 . 3 . b . Critique implicite par Saint-Venant de la fonction Ψ de Boussinesq

Saint-Venant critique Green à plusieurs reprises dans un appendice aux œuvres de Clebsch, dans les dernières pages de la "Statique" de l'abbé Moigno (1868) et dans le "Mémoire sur la constitution des atomes" (1881).

---

[335] G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 2° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1866, pp. 32 à 38.

Ces critiques valent aussi pour Boussinesq qui, par sa conception de la fonction Ψ posée sans considération sur la forme mathématique des actions entre atomes, se rapproche beaucoup de Green.

La discussion de ces conceptions sera l'objet d'une vive dispute entre Saint-Venant et Boussinesq. Cette querelle, qui durera au moins jusqu'en 1875, montre, semble-t-il, la difficulté que les adversaires les plus résolus de la force dans son acception métaphysique - adversaires au premier rang desquels il faut compter Saint-Venant - ont à concevoir une énergie dans laquelle s'estompe la force et qui acquiert une réalité indépendante[336]. Voyons maintenant rapidement le mémoire de Green de 1838[337].

Green rappelle que Cauchy, dans sa Théorie de la lumière, suppose que les forces agissant entre les molécules peuvent être considérées comme dirigées suivant la droite qui les joint. Il poursuit:

> "Si, toutefois, tel n'est pas le cas, nous somme totalement ignorants du mode d'action des éléments de l'éther lumineux sur chaque autre élément et il semble nécessaire d'utiliser un principe plus général comme base de nos raisonnements, plutôt que de prendre en compte un certain mode d'action, qui, après tout, peut être totalement différent de celui utilisé par la nature; plus précisément, ce principe inclut lui-même, comme cas particulier, celui utilisé par M. Cauchy et d'autres, et aussi conduit à des calculs plus simples. Ce principe est le suivant: quelle que soit la direction des force exercées par les éléments d'un système matériel, leur produit par les éléments de déplacement dans leur propre direction pour une fraction de masse donnée sera toujours une différentielle exacte d'une certaine fonction Φ donnée."[338]

Ce n'est évidemment pas la différentielle de l'énergie potentielle qu'évoque Green, c'est une simple fonction mathématique. Il n'en reste pas moins que, comme celle de Boussinesq, la méthode de Green laisse donc la possibilité d'envisager tous les types de forces, compatibles avec l'existence de cette différentielle. Dans la suite de son mémoire, Green étudie la propagation de la lumière dans un milieu isotrope, et effectivement examine la différentielle de cette fonction dans un petit

---

[336]Semble témoigner de cette difficulté la lettre de Saint-Venant à Boussinesq du 4 Mars 1872: "J'ai, ces jours-ci, autant que je pouvais en avoir le temps et la force, étudié dans Briot, Résal et Combes, la théorie dynamique de la chaleur, ce qui n'est pas facile. Je compte ensuite vous demander d'en causer avec moi". Briot, Résal, Combes, maîtrisent bien, sans doute bien mieux que Saint-Venant, la "Théorie mécanique de la chaleur" où l'énergie, sous ses diverses acceptions, tient une grande place.

[337]G. Green, *On the laws of reflexion and refraction of light*, Transactions of Cambridge philosophical society, 1838, pp. 244 à 302 .

[338]ibid., p. 245.

volume de matière. En combinant le principe de d'Alembert et celui des forces vives, il forme l'équation indéfinie réglant les déplacements (u,v,w) d'un point de coordonnées (x,y,z):

$$\Sigma\Delta m \left((d^2u/dt^2).\delta u + (d^2v/dt^2).\delta v + (d^2w/dt^2).\delta w\right) = \Sigma\Delta v.d\Phi....$$

Le premier membre de cette équation correspond aux forces d'inertie, le second aux actions entre molécules. Il n'y est pas question de force vive. On peut toutefois remarquer que la forme de cette équation rappelle la forme de celles qui donnent les forces motrices dans la théorie de Boussinesq. De façon plus précise elle correspondrait à sa conception du travail.

Pour Green la fonction dΦ doit être une différentielle totale, sans quoi:

> "(...) le mouvement perpétuel devient possible, et nous avons quelque raison de croire que les forces dans la nature sont disposées de façon à la rendre naturellement impossible."[339]

Le facteur Δv représente un petit élément de volume, ce qui confirme que la fonction dΦ est considérée comme relative à cet élément de volume. Ceci, joint aux considérations précédentes, montre que Green ne prend en compte que les actions des molécules dans un volume donné. Il considère ensuite un élément de volume parallélépipédique, et, là encore, uniquement les molécules de ce volume. C'est aussi ce que fera Boussinesq d'une façon générale pour déterminer l'énergie interne des corps, dans ses "Recherches sur les principes de la mécanique (...)" (1872), mais aussi dans sa "Théorie analytique de la chaleur (...)" (1901). L'analogie, peut-être fortuite, entre les travaux de Boussinesq et Green nous semble assez établie. Donnons tout de suite les critiques de Saint-Venant, en 1878 il est vrai, mais conséquences qu'il a déjà tirées dans une annexe aux œuvres de Navier de 1864, elles peuvent aussi bien s'appliquer à l'œuvre de Boussinesq. C'est dans son mémoire sur "La constitution des atomes" (1878) que Saint-Venant détaille le plus nettement ses arguments[340]. Sa critique ne porte pas sur la direction de la force, mais sur le fait que son intensité ne puisse être uniquement une fonction de leur distance, ce qu'il exprime par:

> "La supposition dont nous parlons entraîne celle que l' intensité de chaque action entre deux particules très proches soit généralement fonction non-seulement de leur distance mutuelle propre, mais

---

[339]ibid., p. 248.

[340]A. de Saint-Venant, *De la constitution des atomes*, Bruxelles, F. Hayez, 1878, (Communiqué par les Archives de l'Académie des sciences de Paris).

encore, à un certain degré, de leurs distances aux particules environnantes, et même des distances de celles-ci entre elles."[341]

Ce que va critiquer ici Saint-Venant, c'est une conception proche des actions de présence de Boussinesq. Rappelons en effet que Boussinesq suppose explicitement en 1872 que l'action entre deux molécules dépend de la présence de celles qui les entourent. Saint-Venant s'oppose à ce que la fonction Φ soit une fonction indéterminée de la distance de tous les atomes. Dans ce cas la distance de deux atomes m et n aurait une influence sur l'action de deux autres p et q sans que le facteur déterminant soit la distance de m ou n à p ou q[342]. Saint-Venant ajoute:

> "On remarquera qu'elle entraîne aussi (cette hypothèse) que la force totale sollicitant une particule n'est pas exactement la résultante géométrique composée suivant la règle du parallélogramme (...) cette règle ne serait vraie que pour des actions à des distances perceptibles (...) les actions à des distances imperceptibles qui produisent l' élasticité, la capillarité, les chocs, les pressions et les vibrations; et ces dernières se soustrairaient à la règle statique dont nous parlons."[343]

Il convient donc pour Saint-Venant de sauver la tradition newtonienne[344], et de montrer que seul ce type de force peut rendre compte de l'équation de Green et aussi de celle de Boussinesq, et se

---

[341]ibid., p. 17.

[342]Ce point mérite peut-être une explication. Raisonnons d'abord dans le cas des forces centrales. Soient deux atomes p et q isolés dans l'espace. Ils sont soumis chacun à une force X qui est leur interaction. Si maintenant ils sont inclus dans un système matériel, la force X' qui s'exerce sur chacun d'eux sera différente de X à cause de l'action des autres atomes. Si deux points du système, m et n, modifient leur position relative, ils modifient aussi leur position par rapport à p et q. La force X' va donc changer, mais l'interaction entre p et q, dans l'hypothèse des forces centrales, sera toujours égale à X, la même que si p et q étaient isolés. Dans le cas de la fonction Φ totalement indéterminée, on obtient l'interaction entre les atomes p et q en calculant $d\Phi/drpq$. Or Φ peut dépendre des distances de m et n à p et q, mais aussi simplement de la distance de m à n sans considération des autres distances. Alors l'interaction entre p et q, $d\Phi/drpq$, est elle-même affectée par la distance de m à n seule, en plus des distances de m et n à p et q.

[343]A. de Saint-Venant, *De la constitution des atomes*, Bruxelles, F. Hayez, 1878, (Communiqué par les Archives de l'Académie des sciences de Paris), p. 17.

[344]Le sujet de ce travail n'étant pas Saint-Venant, bien qu'il y figure de façon constante, comme inspirateur, adversaire, protecteur, censeur de Boussinesq, nous ne nous appesantirons pas plus sur ses conceptions concernant la nature intime de la matière. Ces conceptions sont, dans un style d'une limpidité admirable, exposées à l'occasion du mémoire sur la constitution des atomes. Saint-Venant attribue à Boscovich l'idée de développer les idées de Newton concernant la matière. Le "célèbre jésuite", inspiré par Leibniz, aurait ainsi conçu l'idée d'atomes ponctuels, et donc indécomposables, qui sont aussi des centres de forces. Ces forces ne dépendent que de la distance entre points matériels, mais peuvent changer de sens et empêcher ainsi que la matière ne s'écroule sur elle-même sous l'effet de la gravitation universelle.

trouver en accord avec la réalité physique[345]. La sommation effectuée par Green et par Boussinesq pour construire respectivement les fonctions Φ et Ψ, dépend de la distance entre toutes les molécules du système, en particulier elle contient la distance qui sépare deux molécules m et m' (dmm') proches, par exemple d'une molécule mp, aussi bien que celle qui sépare deux molécules, me et m'e qui en sont éloignées (dmedme'). Si l'on dérive la fonction pour obtenir l'action qui s'exerce sur une molécule, cette dérivée, $-d\Psi/dR_p = m_p.(d^2R_p)/dt^2$, contient aussi bien les distances du type dmm' que celles du type dmeme'. Et donc l'action sur mp dépend aussi bien des molécules qui sont proches d'elle que de celles qui se trouvent sur une étoile lointaine, ce qui est contraire au bons sens. Il convient donc de particulariser davantage la fonction Ψ, ce que Saint-Venant fait en écrivant Ψ sous forme d'une fonction dépendant uniquement des distances de mp aux autres molécules, conformément à sa conception des forces centrales. Considérant l'action de deux molécules m et m', il trouve des accents inattendus pour le dire:

> "(...) j'affirme hardiment, et tout le monde, j'en suis convaincu, pensera comme moi, qu'il faudra absolument adopter la forme ou la particularisation indiquée ci-dessus."[346]

Et il pose l'équation suivante:

$$\Psi\ (r, r', r'',.....) = f(r) + f\ (r') + f(r'') + ...\text{"} \quad (6)$$

Autrement dit, la seule forme qui convienne pour la fonction Ψ est celle qui ne fait dépendre l' action entre deux points que de la distance qui les sépare. Ces actions entre couples d'atomes sont indépendantes les unes des autres; la seule façon de rendre compte de cette indépendance est de représenter chacune d'elle par une fonction f(r) de la distance ente atomes et d'en faire la somme. On obtient ainsi la forme (6) pour la fonction Ψ. Et Saint-Venant conclut:

> "Or cette forme ne se borne pas à atténuer, elle annule complètement ces influences exotiques auxquelles, naguère, on ne pensait seulement pas. Elle annule en même temps, forcément et tout aussi bien, les influences de molécules très proches de m et m' sur la manière d'agir mutuelle de m et de m', tout en laissant à ces autres molécules leurs actions propres (ce qui est bien différent) dans le système dont elles font partie."[347]

---

[345] A. de Saint-Venant, in A. Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, trad. A. de Saint-Venant et Flamant, avec des Notes étendues de M. de Saint-Venant, Paris, Dunod, 1881, p. 72.

[346] ibid., p. 72.

[347] ibid., p. 72.

L'esprit de Green est paradoxalement convoqué ensuite pour appuyer cette opinion:

> "Et je suis convaincu que Green lui-même y croyait (à cette décomposition) sans s'en rendre compte. Je ne peux, en effet, interpréter d'une autre manière cet instinct de physicien et de géomètre, ce sentiment que les forces de l'univers, sont disposées de manière à faire du mouvement perpétuel, une naturelle impossibilité."[348]

En d'autres termes, pour Saint-Venant, l'impossibilité du mouvement perpétuel, et donc la conservation des forces vives, est liée indissolublement aux forces centrales en tant que seul mode d'action intermoléculaire.

Passons maintenant aux critiques que l'on peut faire de la déduction de la force elle-même par Boussinesq.

III . 4 . 3 . C . Aspects plus traditionnels de la conception de la force selon Boussinesq

A côté de cet aspect novateur de la Mécanique de Boussinesq, il faut bien reconnaître que son attachement à l'indépendance des actions par rapport à la vitesse le met à l'écart de certains développements futurs de la Mécanique. On peut rappeler ici brièvement le débat concernant le caractère conservatif des forces non centrales. Les controverses sur la nature des forces qui se sont élevées à la suite de la parution du mémoire de Helmholtz de 1847 sont bien connues de l'historiographie. La conception de l'énergie exposée par Helmholtz en 1847[349] est enchaînée à celle des forces centrales newtoniennes[350]. Mais dès 1846, dans sa théorie électrodynamique, Weber a montré que les forces entre les particules électriques en mouvement dépendent de leurs vitesses et de leurs accélérations relatives. Helmholtz affirmera que de telles forces ne conservent pas l' énergie. Finalement, en 1873 Maxwell réfutera cette opinion après qu'Helmholtz y ait lui-même renoncé. Mais ce dernier cherchera à montrer que des forces dépendant de la vitesse

---

[348]ibid., p. 72.

[349]H. von Helmholtz, *Ueber die Erhaltung der Kraft, Eine physkalische Abhandlung*, Berlin, G. Reimer, 1847; aussi, *Mémoire sur la conservation de la force*, trad. L. Pérard, Paris, Masson, 1869; aussi, *The conservation of force: A physical memoir (1847)*, ed. Russell Kahl, Middletown (Connecticut),Wesleyan University press, 1971.

[350]F. Bevilaqua, *Helmholtz's Ueber die Erhaltung der Kraft*, in *Hermann von Helmholtz and the foundations of nineteenth-century Science*, Berkeley, University of California press, 1993, pp 293-351.

et de l'accélération sont en contradiction avec quelque fait expérimental. A cela,Weber répondra en démontrant lui-même que dans de tels cas l'énergie se conserve; mais alors, il est difficile de séparer l'énergie cinétique de l'énergie potentielle, ce que ne manquera pas de relever Helmholtz. Il semble apparaître alors que baser le principe de conservation de l'énergie sur un type de force particulier revient à rendre contestable ce principe[351]. Et même au-delà, comme le signale Helmholtz en 1881 dans une addition (appendice 2) à son mémoire de 1847, l'abandon des forces centrales doit entraîner la mise en cause des principes fondamentaux de la mécanique newtonienne, même si celle-ci englobe la conservation de l'énergie. Et c'est aussi tout espoir d'explication scientifique qui doit être abandonné.

> "Les recherches faites dans cette direction (la dépendance de la force vis-à-vis des accélérations et des vitesses) de nos jours, se sont continuellement opposées aux principes mécaniques de l'égalité de l'action et de la réaction et de la conservation de l' énergie, principes qui ont été établis de façon incontestable par nos premières expériences. Si pour l'électricité contenue dans les conducteurs électriques, seul existe l'équilibre instable, l'unicité des solutions aux problèmes électriques doit être abandonnée (...) et il me semble que cela détruit tout espoir d'une solution complète pour les problèmes scientifiques."[352]

Les échos de ces grandes discussions s'entendent bien sûr en France, comme en fait foi la correspondance de Saint-Venant et Boussinesq:

> "Quels sont, à votre connaissance, demande Saint-Venant à Boussinesq le 19 Décembre 1874, les ouvrages autres que le petit in-12 "Esquisse historique de la théorie mécanique de la chaleur" de Tait, où l'on parle d' entropie? (...) Avez-vous remarqué, p. 80, la citation qu'il fait d'un traité admirable d'Helmholtz pour qui la matière est constituée par des particules dernières exerçant entre elles des forces dépendant seulement de la distance?"[353]

Plus tard, on trouve dans une lettre du 21 janvier 1875 une allusion aux débats sur les forces centrales:

> "Dans l' article d'Octobre 1872 de d'Almeida, qui me paraît être clair, il est dit que tout système de points libres soumis à l'action de la force

---

[351]Th. Archibald, *Energie and the mathematization of electrodynamics in Germany, 1845-1875,* Archives internationales d'histoire des sciences,39, Décembre 1989, pp 276 à 308.

[352]H. von Helmholtz, Addition de 1881 au mémoire de Helmholtz de 1847, *The conservation of force: A physical memoir (1847),* ed. Russell Kahl, Middletown (Connecticut), Wesleyan University press, 1971, p. 51.

[353]A. de Saint-Venant, *Lettre à Boussinesq du 19 Décembre 1874.*

> dont les composantes suivant les trois axes de coordonnées sont les dérivées par rapport aux coordonnées de chaque point d'une fonction ($-\Psi$) est un système conservatif (...) Cela réfute sans doute ce que prétend Helmholtz, que la conservation de l'énergie ou l'impossibilité du mouvement perpétuel avec travail opérant prouve que chaque action entre deux molécules n'est fonction que de la distance, mais je ne vois pas ce que cela apporte de plus."[354]

Boussinesq s'oppose bien entendu à l'idée d'actions dépendant de la vitesse. Nous avons vu que c'est la pierre angulaire de sa conception de la Mécanique, mais il ne va pas adhérer pour autant à l'idée de force centrale uniquement fonction de la distance, au moins jusqu'en 1875 (voir chapitre 3, paragraphe 2). Dans les "Leçons synthétiques (...) ", en 1889, Boussinesq présente ainsi son point de vue sur les théories "modernes" de l'électromagnétisme. S'exprimant au sujet de la validité de son premier principe (indépendance des actions par rapport aux vitesses), il écrit:

> "Les exemples précédents (concernant cette indépendance) suffisent pour montrer que, lorsqu'on rencontrera, dans les parties de la Science encore obscures et dont l'idée mère manque, comme l'Electrodynamique par exemple, les formules, au moins provisoires, d'accélérations paraissant échapper à cette loi fondamentale (celle de l'indépendance des forces par rapport à la vitesse) il faudra non pas conclure à son défaut de généralité, mais attendre, des progrès ultérieurs de la Science, l'explication de désaccords purement apparents sans doute."[355]

L'observation de prétendues actions dépendant des vitesses ne serait due qu'à des expériences mal réalisées ou mal interprétées. Mais si tel n'est pas le cas, on peut toujours supposer que cette dépendance supposée par rapport à la vitesse s'explique, comme dans le cas des frottements, par le fait que la véritable loi des actions, la dépendance exclusive par rapport aux distances des particules, est masquée par l'établissement d'un régime permanent qui, lui, dépend de la vitesse des particules:

> "Et si les formules en question sont réellement fondées sur l'expérience, on aura tout lieu d'espérer découvrir à la suite de quelles éliminations elles ont pris leur forme paradoxale."[356]

---

[354] A. de Saint-Venant, *Lettre à Boussinesq du 21 janvier 1875*, Paris, Bibliothèque de l'Institut de France.

[355] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 16; repris dans: J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences de Paris*, t. 3, Paris, Gauthier-Villars, pp. 236 et 237.

[356] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 16.

L'auteur conclut dans un style qui rappelle le passage de Helmholtz que nous avons cité plus haut, qu'il ne faut abandonner son premier principe, qu'avec de bonnes raisons. D'ailleurs, s'opposer à son premier principe, c'est finalement aller contre toute son épistémologie. On sait que Boussinesq croit à l'existence nécessaire d'un espace absolu et d'un temps absolu, et donc d'un mouvement absolu. Ce sont ces mouvements absolus qui sont régis par les lois générales de la nature. La difficulté que nous avons à déterminer les vraies lois de la nature tient à ce que nous ne percevons que les mouvements relatifs. Mais heureusement:

> "Des considérations rationnelles, sans lesquelles nulle science n'existerait, permettent d'ailleurs d'arriver aux vraies lois générales des mouvements absolus malgré l'impossibilité d'observer de pareils mouvements."[357]

Et c'est bien entendu le principe de simplicité qui nous servira de guide dans la recherche de ces mouvements:

> "Il y a, en d'autres termes, une manière d'expliquer les mouvements relatifs observés, qui est la plus simple possible, qui notamment, ne fait pas dépendre les accélérations des vitesses, et cette manière peut se déduire de l' application du calcul aux données mêmes de l'observation."[358]

Ici Boussinesq donne la vraie raison qu'il a, dans les calculs, de supposer que les actions entre atomes ne dépendent pas de la vitesse: c'est qu'ainsi on explique le plus simplement possible les mouvements observés. Vraie raison ou simplement position défensive, il est impossible de le dire avec certitude.

La conception de Boussinesq concernant l'indépendance de la force par rapport aux vitesses peut sembler rétrograde. En réalité elle est adaptée au domaine qu'il étudie et où l'énergie tient une place fondamentale. Sa mécanique ainsi conçue apparaît comme un ensemble particulièrement adapté à l'étude des phénomènes habituels de la physique, si l'on en exclut l'électrodynamique. C'est même une philosophie naturelle cohérente, puisqu'elle inclut à la fois des conceptions sur la façon d'appréhender le monde dans son ensemble, et une description des plus fines de la réalité.

---

[357] J. Boussinesq, *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 1880, <u>8</u>, p. 274.
[358] ibid., p. 274.

Un autre aspect de la mécanique de Boussinesq est contestable: c'est son interprétation du principe de l'action et de la réaction.

Thomson et Tait tentent de montrer que le principe de conservation de l' énergie est inclus dans celui de l'action et de la réaction, la loi III de Newton[359]. C'est que dans leur interprétation ce principe ne se limite nullement à de discutables forces; c'est l'" *agentis actio*" qui est nommé; ce peut être n'importe quel type d'agent moteur, force, quantité de mouvement ou autre, qui est ainsi désigné. C'est donc un principe indépendant de la définition de la force, même si pour l'utiliser Thomson et Tait recourent à cette dernière. Il semble bien que ce soit là le principe dont la mécanique classique ne peut se passer. Aussi attend-on que Boussinesq, qui s'est montré particulièrement cohérent dans la construction de sa mécanique, en propose une interprétation inattaquable et déduite de la conservation de l'énergie. Il faut de suite dire que l'on est déçu. L'application du principe de l'action et de la réaction entre points matériels suppose d'abord que l'action et la réaction qui s'exercent entre eux soit dirigée suivant la droite qui les joint, si cette action et cette réaction sont des grandeurs physiques ayant une direction, sans cela on ne peut parler d'action opposée à la réaction. Voici comment Boussinesq présente ce point dans les "Recherches sur les principes de la Mécanique (...)" de 1872:

> "Je suis conduit à admettre que l'action d'un point sur un autre est dirigée suivant leur droite de jonction, égale et contraire à la réaction du second sur le premier, et a pour valeur la dérivée, par rapport à leur distance, d'une certaine fonction de toutes les distances mutuelles des points du système."[360]

Et, plus loin, l'action entre deux atomes est définie comme suit:

> "La force motrice d'un point quelconque du système est la résultante d'actions partielles, dont chacune, exercée sur ce point par l'un des autres, est dirigée suivant la droite qui joint ces deux points, égale et contraire à la réaction du premier sur le second, et a pour expression la dérivée par rapport à leur distance, d'une même fonction Ψ des distances actuelles de tous les points du système."[361]

La suite du mémoire ne fait guère apparaître pourquoi la ligne d'action entre deux atomes ponctuels devrait être dirigée suivant la

---

[359]W. Thomson and P. G. Tait, *Treatise on natural philosophy*, Oxford, 1867; vol. 1, part. 2, London, Cambridge University press, 1883; vol. 1, part. 1, London, Cambridge University press, 1896, p. 247.

[360]J. Boussinesq, *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoire présenté à l' Académie des sciences et des lettres de Montpellier, le 8 Juillet 1872, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, p. 306.

[361]ibid., p. 315.

droite qui les joint, cette idée est même en contradiction avec le reste du mémoire. Si les actions entre points dépendent de Ψ, et donc de l'ensemble des points du système, la symétrie ou l'asymétrie de celui-ci devrait influer sur la direction de leur action. Comme nous le verrons au chapitre 3, c'est une méthode constante de Boussinesq que d'envisager l'influence des caractères de symétrie des corps qu'il étudie pour déterminer l'intensité des actions entre atomes ou molécules; alors on ne saisit pas pourquoi la direction ne serait pas affectée. Il n'y a donc pas ici de raison explicite pour supposer que cette action entre deux atomes soit dirigée suivant la droite qui les joint. De même, on ne comprend pas pourquoi les modules de ces deux forces devraient être égaux. Il n'y a pas en effet une dérivée commune de Ψ par rapport à la distance au point p et au q, mais bien deux. En effet, la fonction Ψ ne saurait avoir la même valeur en p et en q; elle dépend de la position des autres atomes par rapport à p ou q, et donc, on doit avoir $\Psi p \neq \Psi q$. Il est vrai que la distance entre p et q est petite et l'on peut alors supposer $\Psi p = \Psi q$, mais ce n'est là qu'une approximation que Boussinesq ne signale pas. La distance des autres atomes à p et q étant différente, leur dérivée par rapport à la distance qui les sépare sera différente. On voit donc que, dans les "Recherches sur les principes de la Mécanique (...)" de 1872, le principe de l'action et de la réaction n'est pas rigoureusement justifié. Il ne l'est pas plus dans les "Leçons synthétiques de Mécanique générale" (1889):

> "Et appelons (...) 2° *action* de Mp sur Mq, force évidemment égale et contraire à l' action $d\Psi/drqp$, de Mq sur Mp; 3° action mutuelle du couple de points Mp, Mq, l'ensemble de ces deux forces égales et contraires, dont l'une, la première considérée, s'appellera simplement l' action et l'autre, la réaction."[362]

Les mêmes objections que plus haut demeurent; la justification du principe de l' action et de la réaction ne se trouve pas non plus, de façon explicite, dans les "Leçons synthétiques(...)". Plusieurs hypothèses peuvent justifier cette mise en avant du principe de l'action et de la réaction. La plus simple est que Boussinesq, avec ce principe, se trouve armé pour reconstruire toute la Mécanique, c'est-à-dire réécrire toute la Mécanique newtonienne à partir de l'énergie. Il a retrouvé avec les équations (2) quelque chose d'analogue, sur le plan fonctionnel, à la seconde loi de Newton. La première, celle de l'inertie, n'est que l'expression d'un cas particulier: celui où les seconds membres des trois équations (2) sont nuls. Seule reste à démontrer la troisième, celle de l'action et de la réaction, que Boussinesq ne saurait déduire de considérations générales; en effet la fonction Ψ est particulière à chaque

---

[362] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de mécanique générale,* Paris, Gauthier-Villars, 1889, p, 25.

système de points matériels étudié, les actions entre ceux-ci peuvent différer du tout au tout d'un système à l'autre. Mais alors la seule loi certaine qui reste est celle de la conservation de l'énergie. C'est donc sur les lois propres à l'énergie elle-même, bien plus que sur les lois de la Mécanique du point matériel isolé, qu'il faudra compter pour traiter des questions de Mécanique de la matière, c'est-à-dire de Mécanique physique.

III . 4 . 3 . d . Nécessité d'admettre le principe de l'action et de la réaction en Mécanique physique

Boussinesq utilise peu le principe de l'action et de la réaction; pour ses travaux de Mécanique Physique, il utilise des théorèmes proprement énergétiques, ceux de la neutralisation des travaux moléculaires à travers une surface et de la quasi neutralisation des mêmes travaux dans un volume infinitésimal (voir chapitre 3, § VI . 5 . 2 . a). L'application du principe de l' action et de la réaction réside dans la caractérisation partielle de l'action entre atomes par la droite qui les joint, l'autre caractérisation étant son intensité. C'est cette possibilité de caractériser les actions entre atomes par la droite qui les joint qui permet d'appliquer la géométrie à la Mécanique physique. En effet c'est déjà en vue d'une telle application que Boussinesq utilise des atomes ponctuels:

> "Ce qui oblige à arriver ainsi jusqu'à des éléments sans étendue, jusqu'à des *points*, c'est que justement, les points sont les seuls êtres géométriques dont la situation soit précise, ou puisse s'exprimer nettement au moyen de trois *quantités simples*, de trois longueurs x, y, z. Autrement dit la distance, qui est par excellence, dans les phénomènes, la chose mesurable, n'a de sens que lorsqu'elle relie deux points."[363]

Nous avons montré que la possibilité d'appliquer la géométrie au réel physique est la condition de compréhension de celui-ci. Dans la géométrisation de la nature à laquelle se livre Boussinesq, l'atome, élément fondamental du monde physique, ne saurait être représenté que par le point matériel, élément fondamental du monde géométrique idéal. Et il semble qu'alors la seule relation géométrique qui puisse exister entre ces atomes est justement leur distance, comme la seule relation qui peut exister entre deux points est la longueur du segment qui les relie. Laisser complètement indéterminée la direction de l'action entre atomes, revient à renoncer à appliquer la géométrie à la Physique moléculaire tant que l'on ne connait pas de façon précise la fonction Ψ pour chaque système. Cette "liaison" géométrique entre atomes réalisée

---

[363]ibid., p. 13.

par la direction de l'action permet ainsi de faire le lien entre phénomènes moléculaires et description géométrique. En effet, lorsque Boussinesq étudie les déformations d'un solide, il utilise, comme Lamé par exemple, mais aussi Cauchy en 1823, un volume parallélépipédique par exemple[364]. Ce volume est, dans le cas des deux derniers auteurs que nous venons de citer, une pure abstraction géométrique, un découpage abstrait de la matière. Les pressions qui interviennent alors sont des résultantes d'actions moléculaires, et non pas les actions moléculaires elles-mêmes. C'est une description que l'on pourrait qualifier, dans le cas de Lamé, de semi-macroscopique, puisqu'elle applique la résultante d'un très grand nombre d'actions microscopiques à un volume infinitésimal. En ce sens la liaison entre atomes ou molécules figurées par des points matériels et grandeurs macroscopiques, allongements par exemple, n'est pas réalisée. Le parallélépipède qu'utilise Boussinesq est, lui, construit à partir de ses sommets, sommets qui sont les atomes qui interagissent. Les arètes de ces parallélépipèdes sont justement les droites suivant lesquelles agissent ces actions atomiques. Les théorèmes de la géométrie s'appliquent alors aussi bien aux figures elles-mêmes qu'aux actions entre atomes. On peut faire, par exemple, des projections de "forces" comme l'on fait des projections de segments. Il y a alors adéquation entre le monde géométrique et le monde physique matériel, vu dans son aspect le plus intime, l'aspect moléculaire.

Boussinesq retrouve donc les trois axiomes fondamentaux des "Principia". La forme qu'il leur donne est adaptée à une formulation basée sur la conservation de l'énergie, et donc, sur la considération du monde physique réel. Le principe de l'action et de la réaction (loi III de Newton) n'est pas rigoureusement déduit de la conservation de l'énergie mais, comme la représentation de l'atome par un point matériel, il peut résulter de la nécessité d'appliquer la géométrie à la description géométrique des phénomènes moléculaires eux-mêmes.

III . 4 . 4 . La réécriture de la Mécanique "rationnelle" par Boussinesq

Pour bâtir une mécanique générale qui soit l'équivalent de la Mécanique rationnelle, Boussinesq doit retrouver les deux théorèmes fondamentaux de la Mécanique newtonienne: celui de la conservation de la quantité de mouvement et celui des aires. Il divise sa mécanique générale en deux parties, celle relative aux systèmes isolés et celle relative aux systèmes dits partiels, c'est-à-dire non isolés. Le principal intérêt de cette seconde étude est de permettre le passage de la

---

364Voir: A. Dahan-Dalmedico, *Mathématisations, Augustin-Louis Cauchy et l'Ecole française*, Argenteuil, Editions du Choix, Paris, A. Blanchard, 1992, pp. 237 et 238.

Dynamique à la Statique. Nous suivrons ici l'exposé des "Leçons synthétiques de Mécanique générale" qui est plus explicite que celui du Mémoire de 1872.

Boussinesq commence par rappeler le but qu'il se propose d'atteindre; c'est bien la description de la matière dans toute sa réalité[365]. Mais la mise en équation des problèmes de Mécanique n'est possible que par l'utilisation de théorèmes généraux: celui de la conservation de la quantité de mouvement et celui du moment cinétique. Pour les démontrer, l'auteur part de la définition de l'action entre atomes:

> "Afin d'y arriver simplement (à la démonstration des théorèmes précédents) appelons, pour abréger, X, Y, Z les trois composantes, suivant les axes, de l' action $d\Psi/dr$ d'un point M' sur un autre M, action que nous désignerons aussi par F, tandis que r exprimera la distance de ces deux points."[366]

C'est donc a partir de l'action entre points matériels ou atomes[367] *que la force, au sens de la Mécanique newtonienne, est définie. Dans cette expression, ce qui importe, c'est la fonction Ψ ou énergie potentielle du système; c'est elle qui est réellement à la base de la Mécanique générale de Boussinesq. Nous voyons par là que cette Mécanique n'est pas une Dynamique abstraite, c'est une Mécanique du réel. Si la nature des forces, électrique, chimique, mécanique, n'est pas définie, c'est que toutes ont une propriété commune: elles conservent l'énergie. De cette propriété on peut déduire la seule chose qui importe réellement: les mouvements des particules de matière. Cette conception de la force suppose l'unicité de la nature de l' énergie, comme nous l'avons dit plus haut.*

La démonstration des théorèmes fondamentaux est alors rapide dans le cas des systèmes isolés: celui de la conservation de la quantité de mouvement résulte, outre des équations (2), de l'égalité de l'action et de

---

[365] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de mécanique générale,* Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 51.

[366] ibid., p. 52.

[367] La notion d'atome étant multiforme pour Boussinesq, il n'est pas inutile de rappeler que, pour lui, l'atome est une construction du géomètre qui idéalise ainsi le monde physique. Il distingue cet atome, fruit d'une idéalisation, d'un éventuel atome physiquement réel et de toutes façons inconnaissable. Au cours de cette idéalisation, l' atome devient, ou plutôt s'identifie, au point matériel. Ce dernier est un point sans dimension, car ainsi seulement il trouve une résonance, une image, dans le monde géométrique. C'est un point matériel, car pourvu de masse. Il témoigne de l'isotropie de l'espace sensible connu expérimentalement, et donc s'inscrit dans le monde physique. Ces atomes agissent entre eux, mais on ne sait rien de ces "puissances physiques qui meuvent la matière". Voir "Recherches (...)", p. 306, et "Leçons synthétiques", pp. 5 et 6.

la réaction, considérée en tenant compte du module des forces. La somme des actions qui s'exercent sur un point matériel étant nulle, des équations (2) on tire, en appelant R le vecteur position d'un point P:

$m_p \cdot d^2R_p/dt^2 = \Sigma F = 0$; et bien entendu $\Sigma_p\ (m_p \cdot dR_p/dt) = 0$, c'est-à-dire la conservation de la quantité de mouvement. C'est aussi ce principe qui est utilisé pour la démonstration de la conservation du moment cinétique, que Boussinesq appelle moment de la quantité de mouvement.

Toujours d'après le principe de l'action et de la réaction on peut dire que l'action Fpq entre deux points M (x, y, z) et M' (x', y', z') est colinéaire à la droite qui les joint, ce qui peut s'écrire:

$[X /(x -x')] = [Z / (y - y')]$ ou $[X(z - z') = Y (y- y')]$ et les expressions correspondantes pour les autres composantes. X, Y, Z désignent les composantes de l'action Fpq.

On peut alors former l'expression correspondant, de nos jours, au produit vectoriel de la force F par la distance qui sépare les deux points. Etendues à tout le système, de telles expressions fournissent la conservation du moment cinétique d'un système isolé.

Les démonstrations précédentes mettent en évidence l'importance du principe de l'action et de la réaction dans la déduction des lois de la mécanique. Que ce principe ne puisse être déduit directement de la conservation de l'énergie lui confère de fait, même si Boussinesq ne le dit pas, le statut d'un troisième axiome de sa Mécanique.

Un des intérêts de ce passage des "Leçons synthétiques de Mécanique générale" est que l'on voit Boussinesq utiliser de façon géométrique les idées de l'algèbre vectorielle. Ainsi il rattache la notion de moment à celle d'aire construite sur les deux vecteurs de ce que nous appelons un produit vectoriel, ce qui lui permet de démontrer le principe des aires.

Boussinesq démontre ensuite les théorèmes de variation du moment cinétique et de la quantité de mouvement dans le cas des systèmes partiels, c'est-à-dire non isolés. La démonstration repose surtout sur la distinction entre forces intérieures et forces extérieures. Le passage le plus intéressant est celui où Boussinesq évoque la statique. Pour lui, la statique n'est qu'un cas particulier, banal, de la dynamique:

> "La statique en est (de la Mécanique) la partie relative au cas spécial où s'annule le mouvement, c'est-à-dire où persistent la situation et par suite la figure des corps."[368]

---

[368] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 2.

On peut toutefois déceler dans ce passage à la statique une notion particulière, celle de système statiquement équivalent, dans laquelle on peut peut-être voir une formulation "physique" de la notion de torseur. Après avoir rappelé que les trois équations qui décrivent la variation de la quantité de mouvement et celles qui décrivent la variation du moment cinétique jouent un rôle important, l'auteur poursuit:

> "Contentons-nous ici d'observer, au sujet de ce problème du mouvement d'ensemble d'un solide, que les forces extérieures y figureront uniquement par les six composantes suivant les axes de coordonnées et de leurs moments relatifs aux mêmes axes.
>
> Donc, quand deux systèmes de forces donneront à ces six sommes les mêmes valeurs, ils seront *statiquement équivalents,* c'est-à-dire équivalents au point de vue de la *Statique* classique qui a été édifiée jusqu'à ce jour dans la supposition d'une rigidité parfaite des corps, ou sans y tenir compte des déformations qu'ils subissent."[369]

Boussinesq va montrer ensuite que tous ces systèmes sont équivalents à un "vecteur glissant" unique. Pour cela il en appelle au fait le plus simple de la mécanique: l'annulation mutuelle des effets de deux forces opposées s'exerçant le long d'une même droite. C'est donc bien la représentation d'une force par un vecteur glissant qui est utilisée ici, et non pas celle qui était utilisée jusqu'alors d'un vecteur attaché à un point. Si une telle force (vecteur glissant) a pour moment la somme des moments des forces appliquées au solide et comme résultante la résultante de ces forces, elle sera dite "résultante ou résultante statique".

Cette notion de résultante statique, que l'on peut peut-être voir comme une approximation de la notion de "coordonnées vectorielles" d'un vecteur glissant, n'est pas une invention de Boussinesq. On la trouve, en 1888, chez un autre mécanicien, Flamant, qui fait aussi partie de la mouvance de Saint-Venant. Mais ce passage montre que Boussinesq est bien au fait des nouveaux courants de la Mécanique[370].

III . 4 . 5 . La séparation de l'énergie potentielle interne dépendant des distances perceptibles de celle dépendant des distances imperceptibles

Boussinesq poursuit l'œuvre de Poisson qui consiste à déduire toute la mécanique des actions moléculaires. Il est manifeste toutefois que les actions moléculaires présentent des particularités apparentes différentes lorsqu'elles s'exercent à des distances imperceptibles et

---

[369] ibid., p. 69.

[370] A. Flamant, *mécanique générale*, in *Encyclopédie des Travaux publics*, Paris, Bernard Tignol, *§ 224, Forces statiquement équivalentes*, pp. 416 à 421.

lorsqu'elles s'exercent à des distances perceptibles. Dans le second cas les actions semblent effectivement ne dépendre que de la distance qui sépare les atomes. On est alors dans l'hypothèse des forces centrales. Si l'on considère les distances imperceptibles, alors les "forces" qui s'exercent entre particules sont difficiles à connaître, soit à cause de leur nature même, soit à cause de la confusion des mouvements qui agitent les atomes et les molécules. Boussinesq va séparer ces deux aspects de la description de la nature, et cette séparation se traduira par une décomposition en deux parties de la fonction Ψ, mais aussi par une conception radicalement différente de la mécanique dans les deux cas. Nous examinons ce point maintenant.

III . 4 . 5 . a . La décomposition de l'énergie potentielle en deux termes et la justification de la loi de la gravitation universelle

La décomposition par Boussinesq de l'énergie potentielle en deux termes, énergie due aux actions de molécules proches et énergie due aux actions à longue distance de ces molécules, se rapproche de la conception de Laplace des forces s'exerçant à distances perceptibles et des forces s'exerçant à distances imperceptibles.

> "Au moyen de ces suppositions, les phénomènes de l'expansion de la chaleur et des vibrations des gaz sont ramenés à des forces attractives et répulsives qui ne sont sensibles qu'à des distances imperceptibles. Dans ma théorie de l'action capillaire, j'ai ramené à de semblables forces les effets de la capillarité. Tous les phénomènes terrestres dépendent de ce genre de force comme tous les phénomènes célestes dépendent de la gravitation universelle. Leur considération me paraît devoir être maintenant le principal objet de la philosophie naturelle."[371]

C'est donc bien ici la séparation des phénomènes naturels en deux types: ceux qui sont explicables par des actions à "court rayon d'action" et ceux qui dépendent des actions à "longue distance". Peut-être pour Laplace, toutes ces actions, y compris la gravitation universelle, peuvent-elles être ramenées à un même type de force, comme pour Boussinesq toutes les actions de la nature peuvent être déduites de la conservation de l'énergie. Ainsi Laplace affirme:

---

[371] Laplace, Livre douze de la *Mécanique céleste*, Introduction, in Œuvres complètes de Laplace, t. V, p. 104 et 109.

"En général, toutes les forces attractives et répulsives de la nature se réduisent, en dernière analyse, à des forces semblables agissant de molécule à molécule."[372]

Tous les historiens ne sont pas d'accord pour voir dans ce qu'ils appellent parfois le "programme de Laplace" une importance primordiale de la force[373]. Quoi qu'il en soit on peut distinguer, au moins formellement, sinon ontologiquement, deux types de forces, l'une s'exerçant à des distances perceptibles, la gravitation universelle, et les autres s'exerçant à des distances imperceptibles. La fonction représentant la force reste toutefois indéterminée. Par la suite, pour d'autres, comme Green, la considération *a priori* du potentiel pouvait être une façon de contourner l'indétermination des actions entre molécules. Il n'en reste pas moins que le calcul du potentiel suppose, pour des physiciens comme Verdet, Sturm, Briot, la connaissance de la fonction des forces, ou bien de quelque loi qui puisse y suppléer. La solution de Boussinesq est dans sa conception de la conservation de l'énergie qui, posée en quelque sorte *a priori*, n'a pas besoin de justification, pas même l'impossibilité du mouvement perpétuel. La connaissance des actions entre molécules n'est pas nécessaire. Boussinesq décompose l'énergie potentielle en énergie des actions à des distances imperceptibles et celles s'exerçant à des distances perceptibles. Cette décomposition est l'objet de deux démonstrations, celle des "Recherches (...)" (1872) et celle des "Leçons synthétiques" (1889) . La première est cursive, comme toujours dans le mémoire de 1872, elle présente l'intérêt de mettre rapidement en évidence la répartition de l'énergie en volumes, analogues à des volumes de matière. La seconde décomposition, celle des "Leçons synthétiques (...)", présente l'intérêt de donner un statut rationnel à l'éther au même titre qu'à la matière pondérable.

III . 4 . 5 . b . La décomposition de la fonction Ψ dans les "Recherches sur les principes de la Mécanique" (1872)

La première décomposition de la fonction Ψ se fait en moins de trois pages[374]. Elle est basée, semble-t-il, sur une analogie avec la

---

[372] P. S. Laplace, *Mémoire sur les mouvements de la lumière dans les milieux diaphanes*, Mémoires de l'Académie des sciences, 1° série, 10, 1810, in Œuvres complètes de Laplace, t. 12, pp. 286 à 298.

[373] Voir: A. Dahan-Dalmedico, *Mathématisations, Augustin-Louis Cauchy et l' Ecole française*, Argenteuil, Editions du Choix, Paris, A. Blanchard, 1992, note de la page 76.

[374] J. Boussinesq, *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoire présenté à l' Académie des sciences et des lettres de Montpellier, le 8 Juillet 1872, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, pp. 317 à 319.

propagation de la lumière. De même que l'action de la lumière issue d'un point se répartit uniformément sur une sphère, l'action d'un point matériel sur un autre se répartit aussi, aux grandes distances, sur une sphère, et donc l'action initiale est en quelque sorte "divisée" par la surface de la sphère, ou par le carré de son rayon. Les accélérations, dont on sait qu'elles ne dépendent pas des vitesses, sont donc des fonctions continues de $1/r^2{}_{mp}$, où r_{mp} est la distance des deux points m et p en interaction. Par utilisation de la "série de Mac-Laurin", on peut développer *la* fonction qui donne les accélérations en termes dépendant de $1/r^2{}_{mp}$ et ne compter que des termes du premier ordre, puisque la distance rmp est supposée grande et donc $1/r^2{}_{mp}$ petit.

Par cette décomposition, la fonction qui donne les diverses accélérations est ramenée à une forme linéaire des $1/r^2{}_{mp}$. Boussinesq retrouve ainsi le cas des forces centrales, qui apparaissent donc comme un cas particulier de celles qui peuvent être déduites des équations (2).

Ce qu'il exprime comme suit:

> "Lorsqu'un point est situé à des distances sensibles des autres points avec lesquels il se trouve en rapport, ses accélérations, suivant les axes rectangulaires fixes, sont respectivement, à chaque époque, les sommes de celles qu'il aurait s'il était séparément en rapport avec chacun des autres points. De plus, ces accélérations partielles doivent être en raison inverse du carré de la distance correspondante."[375]

Si, avec ce qui précède, on considère les lois qui traduisent les mouvements célestes, on est conduit directement à la loi de la gravitation universelle. Dans ce cas les accélérations des mouvements célestes ou terrestres traduisent des actions attractives, sans quoi l'univers se serait dispersé, et de même ces actions ne doivent pas dépendre de la nature chimique des corps, alors:

> "La dérivée de la fonction des forces Ψ par rapport à toute distance perceptible de deux points du système se réduit par conséquent à un facteur positif constant, multiplié par le produit des masses de ces deux points et divisé par le carré de la distance, ce qui revient à dire que la fonction Ψ se décompose en deux parties, dont l'une est égale, à part ce même facteur constant changé de signe, à la somme des termes qu'on obtient en divisant, par chacune des distances perceptibles de deux points du système, le produit de leur masses, et dont la seconde, de forme plus compliquée, ne contient que les distances imperceptibles aux autres points du système."[376]

---

[375]ibid., p. 317.
[376]ibid., p. 319.

Boussinesq a donc retrouvé la loi de la gravitation universelle, à partir de sa conception de la fonction Ψ. Il sauvegarde ainsi les résultats intangibles de la Mécanique céleste, et préserve la possibilité d'envisager n'importe quel type de force pour expliquer les phénomènes moléculaires aux courtes distances.

Plus loin Boussinesq conclut ainsi sa décomposition de Ψ:

> "D'après les considérations qui terminent le paragraphe précédent, l'énergie potentielle se compose de deux parties distinctes, dont la première peut être appelée énergie potentielle des attractions newtoniennes et ne dépend que des distances finies des points du système, tandis que la seconde contient seulement les distances imperceptibles des mêmes points. Cette seconde partie, que je désignerai par Φ, est appelée énergie potentielle interne."[377]

Le point de vue précédent permet d'introduire la notion d'énergie potentielle interne de façon précise. Plus important encore, cette énergie potentielle interne prend place dans le cadre d'une explication mécaniste et atomiste pure. Les phénomènes calorifiques, par exemple, n'ont pas alors à recevoir une place particulière dans le cadre de la physique, ils prennent place dans la Mécanique.

Dans les "Leçons synthétiques (...)", Boussinesq exprimera par une formule la dépendance entre les deux types d'énergie potentielle:

$$\Psi = \Phi - \Sigma_{p,q} k.m_p.m_q/R_{pq}$$

m et m' sont les masses des points du système, Rpq leur distance, le signe moins provenant de l' intégration de $1/R^2_{pq}$.

III.4.5.C. La décomposition de la fonction Ψ dans les "Leçons synthétiques de Mécanique générale" (1889)

Boussinesq, dans ses "Leçons synthétiques" (1889), s'en tient à des observations banales pour effectuer la décomposition de la fonction Ψ[378]. Il constate que les phénomènes qui mettent en jeu les distances imperceptibles entre molécules (chocs, explosions, etc.) amènent des dégagements de force vive incomparablement plus élevés que ceux mis en jeu par la pesanteur: c'est une observation commune. La preuve en est, par exemple, qu'un corps tombant d'une hauteur importante, donc

---

[377] ibid., p. 321.

[378] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de mécanique générale,* Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 27.

soumis à la seule pesanteur, est rapidement arrêté par le sol, phénomène qui ne met en jeu que des actions entre molécules agissant à distance imperceptible. Les variations de Ψ par rapport aux distances imperceptibles r, seront donc incomparablement plus grandes que ses variations par rapport aux grandes distances R. Ce qui fait que l'on peut supposer que pour des distances très petites, Ψ se réduit à la valeur qu'elle a si l'on considère seulement les distances imperceptibles r. La fonction (Ψ – Φ) pourra donc être décomposée en une série de Taylor, suivant des fonctions de R, fonctions qui devront être d'autant plus petites que R sera grand. La plus simple sera B/R. Et en se limitant au premier ordre, mais en tenant compte de l'ensemble des points du système, on pourra écrire:

$$\Psi = \Phi - \Sigma_i \ (B/R_i)$$

Comme il a été vu plus haut, le second terme du second membre correspond aux forces dues à la gravitation universelle, et s'expriment par B/R_i^2; elles sont attractives, ce qui impose, dans le système de Boussinesq, que B soit positif.

Boussinesq fait alors une remarque d'importance capitale: rien ne s'oppose à ce que le coefficient B soit nul. Alors les "molécules" d'une telle matière n'exercent pas de forces à grandes distances entre elles. Elles n'ont pas de "poids" mais peuvent posséder une masse. C'est une matière impondérable, elle ne peut exercer d'action à longue distance sur la matière pondérable, cette action se réduit à une sorte de "frottement" dû aux actions à distance imperceptible. Aux vitesses faibles, ces forces sont insignifiantes, et la substance impondérable ne s'oppose pas au passage des amas de matière pondérable.

La matière impondérable ainsi décrite est bien entendu l'éther. Boussinesq donne finalement à l'éther le même statut mathématique qu'à la matière pondérable. Il le fait entrer de plein droit dans la Physique mathématique, plus précisément dans sa Mécanique physique. Si l'on prend en considération la matière pondérable sur la foi des indications de la balance, on est tout autant fondé à croire en l'éther par la considération des phénomènes lumineux. Boussinesq utilisera par la suite l'éther pour rendre compte de certains phénomènes relativistes.

Cette décomposition présente toutefois des difficultés: elle suppose que pour une même particule, les actions peuvent être de nature différente suivant la distance, perceptible ou imperceptible, que l'on considère. Boussinesq est obligé de préciser au moins comment varie cette action pour un même point. C'est là encore simplement par la considération de faits banals qu'il y parvient.

III . 4 . 5 . d . Les divers types d' action suivant les distances entre atomes

Nous résumons rapidement ici ce qu'écrit Boussinesq dans les "Leçons synthétiques (...)"[379].

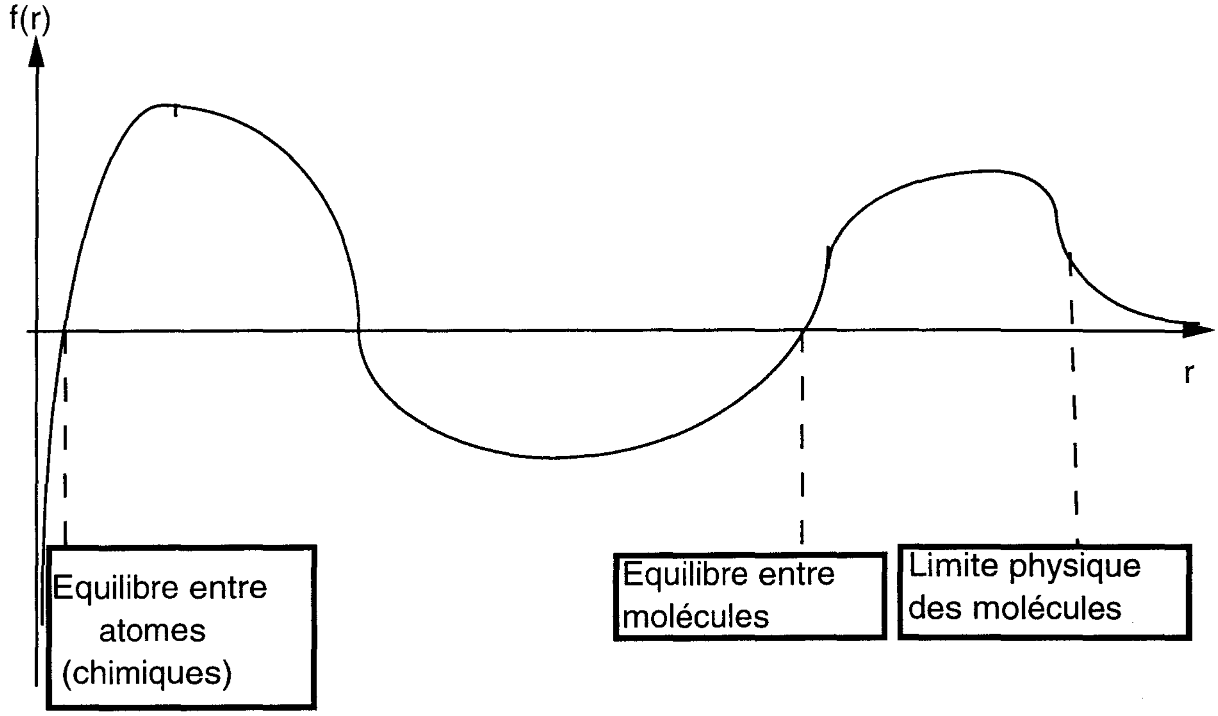
Selon lui, les atomes se groupent en molécules, qui elles-mêmes s'associent en "molécules" plus grandes, ces "molécules intégrantes" que peuvent être les cristaux par exemple.

A l'usage de ses étudiants, en 1889, dans les "Leçons synthétiques (...)", il donne sa conception des actions s'exerçant à distances imperceptibles. Cet exposé est important pour comprendre la conception des interactions de la matière pondérable et de l'éther. Boussinesq détermine les variations que subissent les actions entre deux atomes en fonction de la distance qui les sépare. Cette force sera tantôt attractive, tantôt répulsive en fonction de la distance qui sépare les particules. Aucune justification causale n'est donnée. On pourrait dire que, pour Boussinesq, la fonction qui traduit ces actions doit avoir cette forme car cette forme exprime ce qui se passe dans la nature. Et donc:

- du fait de l'impénétrabilité des atomes, il vient qu'aux plus faibles distances, l'action existant entre deux atomes est répulsive;
- pour compenser cette action, il faut qu'aux distances légèrement supérieures, cette force devienne attractive pour que les atomes puissent rester unis et former les molécules;
- pour des distances de l'ordre des grandeurs intermoléculaires, l'action devient répulsive, de façon à ce que les molécules puissent rester séparées;
- à des distances légèrement plus grandes que les précédentes, l'action devient à nouveau attractive de façon à assurer la cohésion du corps;
- enfin on entre dans le domaine des forces newtoniennes.

En comptant négativement les forces répulsives, on obtient la courbe suivante (non donnée par Boussinesq):

[379]ibid., pp. 42 et 43.



Ce qu'il importe de voir, c'est que, pour Boussinesq, cette courbe représente la force exercée par un atome situé à la distance r sur celui situé à l'origine des axes.

Nous avons déjà signalé que cette séparation entre divers types d'action correspond à la décomposition que Dupré donne de l'attraction universelle (§ III . 4 . 1). C'est en quelque sorte la conception de la force inter-atomique que Saint-Venant attribue à Boscovich[380].

Ce qu'il importe de prendre en compte ici, c'est la différence entre actions moléculaires et actions atomiques. Les actions moléculaires s'exercent à des distances plus importantes que celles auxquelles s'exercent les actions atomiques. Les actions atomiques sont plus énergiques que les actions moléculaires, comme en témoigne la vivacité de certaines réactions chimiques. Ainsi un corps qui ne serait constitué que d'atomes, et non pas de molécules, exercerait des actions importantes aux faibles distances sur les corps avec lesquels il est en contact très proche, mais n'exercerait pas d'action sur ceux qui sont situés à des distances plus éloignées.

C'est par exemple le cas de l'éther que nous étudions maintenant.

III . 4 . 5 . e . L'éther selon Boussinesq

Nous avons signalé dans le premier chapitre l'importance particulière de l'éther en Mécanique dans la seconde moitié du XIX° siècle. Il est

[380]A. de Saint-Venant, *De la constitution des atomes*, Bruxelles, F. Hayez, 1878, p. 2.

donc aussi important dans l'œuvre de Boussinesq. C'est en Optique, dans l'étude de la propagation de la lumière dans les milieux transparents, qu'il a une importance déterminante; là il faut un milieu de structure atomique pour donner des points d'appui aux forces qui transportent les vibrations lumineuses. G. Bachelard a étudié le rôle de l'éther dans ce domaine et sous l'angle de la théorie de la chaleur de Boussinesq[381], nous y revenons nous-mêmes dans le paragraphe VI du troisième chapitre. Jusqu'à la fin de sa vie Boussinesq défendra l'idée d'un éther formé de points matériels, et cherchera dans la matière pondérable des analogues de l' éther lumineux[382]. Suivant les époques il met en avant divers aspects de sa conception de l'éther, nous les étudions maintenant.

Dans les "Recherches sur les principes de la Mécanique (...)"[383], Boussinesq décrit de façon très claire comment il conçoit l'éther. Il rappelle tout d'abord que seul l'éther permet d'expliquer la propagation des vibrations lumineuses dans les espaces "intra-stellaires". Cette matière pénètre dans tous les corps pondérables, elle n'oppose pas de résistance au passage des grandes masses, elle est donc molle, mais elle peut transporter des vibrations très rapides, elle possède donc un coefficient d'élasticité[384] élevé, toutes propriétés qu'un même corps ne possède pas ensemble habituellement. Boussinesq en tire une conséquence: comme la vitesse de propagation des ondes dans l'éther est grande, la densité de l' éther doit être faible[385]. Mais il y a plus:

> "L'observation des phénomènes lumineux dans les corps en mouvement tend à prouver que l'éther, malgré sa faible masse relative, n'est pas retenu ni même mû sensiblement par les molécules pondérables qui le traversent, mais se comporte plutôt à l' égard de ces corps, comme un liquide au repos à travers lequel passeraient des filets à maille très large. Cette circonstance est évidemment inexplicable si l'on n'admet pas: 1° que la distance des molécules pondérables voisines est très grande par rapport à leurs dimensions; 2° que le rayon d'activité des actions moléculaires de l'éther et celui des actions réciproques de l' éther et de la matière pondérable sont au plus

[381] G. Bachelard, *Etude sur l'évolution d'un problème de physique, La propagation thermique dans les solides*, 1928, Paris,Vrin, 1973, pp. 134 à 142.

[382] J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences de Paris*, compléments au tome 3, Paris, Gauthier-Villars, 1922, p. VII.

[383] J.Boussinesq, *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoire présenté à l' Académie des sciences et des lettres de Montpellier, le 8 Juillet 1872, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, pp. 333 à 342.

[384] Par ce terme Boussinesq désigne ce que nous appelons "module d'Young", E, qui intervient dans l' expression de la vitesse de propagation des ondes dans les solides élastiques : $V=(E/\rho)^{1/2}$, ρ étant la masse volumique.

[385] J.Boussinesq, *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoire présenté à l' Académie des sciences et des lettres de Montpellier, le 8 Juillet 1872, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, p. 333.

comparables aux dimensions d'une molécule pondérable et ne s'étendent, par suite, tout autour de l'une quelconque de celles-ci."[386]

Les propriétés paradoxales de l'éther sont explicables si l'on fait la distinction entre actions atomiques et actions moléculaires. Les actions atomiques sont très énergiques mais ne s'exercent que sur de petites distances, alors que les actions moléculaires, plus faibles, s'exercent à des distances plus grandes. Selon Boussinesq, l'éther en est presque dépourvu; il le suppose uniquement formé d'atomes (et non pas de molécules), atomes nombreux mais de dimensions infinitésimales par rapport aux distances qui séparent les molécules de matière pondérable. Ainsi ces atomes d'éther, très proches les uns des autres et unis fortement par des actions atomiques, ne sont déplacés que sur de petites distances par les courtes vibrations lumineuses. Les actions atomiques agissent alors, et le mouvement lumineux est transmis d'un atome d'éther à un autre atome d'éther très proche. Ceux qui sont proches des molécules pondérables peuvent leur communiquer ces mouvements lumineux. Sur des distances, plus grandes, les atomes d'éther sont toujours fortement associés a ceux qui leur sont proches, mais les petites déformations qui existent entre ceux qui sont contigus s'additionnent, et finissent par permettre de grands déplacements internes de l'éther. Comme on n'y trouve pas de forces à longue portée pour le rigidifier, il est mou lorsqu'on l'observe sur de grandes quantités. Les molécules de matière pondérable sont séparées par des distances grandes par rapport aux espaces inter-atomiques, la chaîne des atomes d'éther qui relie deux d'entre elles est donc une sorte de fil très mou qui ne saurait modifier leur mouvement relatif. Ce fil s'accroche sur les molécules pondérables, mais cette action ne dure que le temps, pour ces dernières, de franchir des distances infiniment petites, et donc est finalement négligeable pour de grands déplacements.

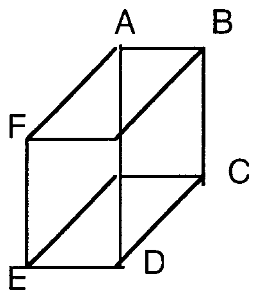
Cette description résout la difficulté, maintes fois présentée, d'associer, en un même corps, une grande rigidité à une infinie mollesse. Boussinesq démontre l'une des propriétés de l'éther: sa faible densité. Il démontre que cette densité est faible dans une lettre à Saint-Venant, et cela au moyen d'arguments énergétiques. En 1876, il critique un ouvrage de Kretz, "Matière et éther", dans lequel ce dernier démontre la faible résistance que l'éther oppose aux mouvements des corps pondérables:

> "Que Monsieur Kretz s'est donné bien de la peine pour résoudre une difficulté qui n'existe pas! Il n'a pas vu que l'impossibilité de constater la résistance opposée par l'éther aux corps qui le traversent tient uniquement à ce que la densité de ce milieu est un infiniment petit en comparaison de celle d'un corps (pondérable). Il était bien facile de le reconnaître.

---

[386]ibid., p. 334.

Démonstration:



La face BCD est perméable aux radiations obscures, les autres sont totalement imperméables. Le parallélépipède est plein d'un liquide au zéro absolu. BCD est tout d'un coup exposé au soleil ou mieux à une source de chaleur exclusivement lumineuse. Aussitôt le corps absorbera cette chaleur qu'il transformera en chaleur obscure, et celle-ci ne pourra plus s'échapper du vase. Eh bien, dans ces conditions, il faudra un temps notable (barré) fixe, une heure par exemple, pour que toute la masse ABCDEF soit mise en équilibre avec la source S ou plutôt avec l'éther compris entre S et BCD (...). Au bout d'une heure, alors que l'amplitude des vibrations calorifiques sera supposée égale à celle des vibrations de l'éther du corps ou que le carré de la vitesse vibratoire moyenne sera la même pour le corps que pour l'éther, le corps aura absorbé toute l'énergie qui était primitivement contenue dans une colonne d'éther ayant pour base BCD, pour hauteur ou longueur le trajet parcouru par la lumière en une heure soit 300000 . 60 . 60 ou un milliard de kilomètres ou 10 milliards de décimètres, à ce moment les demi-forces vives de l'éther et du corps sont à volume égal dans le rapport de leur densité, en supposant les demi-forces vives proportionnelles aux énergies totales. On voit que la densité de l'éther ne sera, dans nos hypothèses très plausibles, que la fraction 1/10000 milliards de celle du corps."[387]

On peut résumer l'argument comme suit: la matière pondérable contient, entre ses molécules, de l'éther qui absorbe l'énergie lumineuse et en transmet une partie aux molécules pondérables. A l'équilibre thermique, l'éther du corps, celui qui lui est extérieur, et les molécules pondérables vibrent à la même fréquence. L'énergie absorbée dans le parallélépipède est celle qui a transité en une heure entre la source et la face BCD. Elle est répartie entre l'éther inclus dans le liquide contenu dans le parallélépipède et la matière pondérable de celui-ci (voir chapitre III, § III) dans un rapport qui est celui de leur densité, soit 1/10000 milliards; il s'ensuit que l'éther a une densité très faible par rapport à la matière pondérable. Jusqu'à la fin de sa vie Boussinesq cherchera à mettre en équation le mouvement de l'éther. C'est en particulier l'objet de ses notes finales du second tome de sa "Théorie

---

[387] J. Boussinesq, *Lettre à Saint-Venant*, 27 juillet 1876.

analytique de la chaleur (...)"[388] où il expose et développe ses conceptions sur la théorie mécanique de la lumière. Son talent résout presque tous les problèmes de l'optique. Toutefois, nous verrons que son interprétation de l'expérience de Michelson est presque un aveu d'impuissance. En 1901, Boussinesq va encore préciser cette structure de l'éther en particules disséminées:

> "Il faut (pour comprendre le comportement de l'éther) une matière infiniment moins dense, en quelque sorte, que ces molécules (de matière pondérable) ou ayant ses atomes incomparablement plus clairsemés, pour que l'accroissement des intervalles inter-atomiques y affaiblissent les répulsions chimiques au point d'y rendre celles-ci insuffisantes à la neutralisation des attractions chimiques, à travers chaque élément plan, et susceptibles d'accepter pour cette neutralisation le concours entier de répulsions physiques sans entraîner l'explosion du système. Et alors on n'a plus un corps à molécules, mais cette poussière atomique, éparse dans l'étendue et sans limites précises qu'est l'éther."[389]

Si la cohésion de l'éther était simplement assurée par l'équilibre des actions attractives et répulsives des forces atomiques, une simple compression mettrait en jeu les immenses forces répulsives et l'éther exploserait. Il faut donc que sa cohésion soit assurée par des forces de type moléculaire. Mais comme le montrent les raisonnements du type de celui qui est donné dans la lettre à Saint-Venant citée plus haut, les particules d'éther sont à la fois trop nombreuses et trop petites pour que l'on puisse concevoir qu'elles sont associées en molécules. Les actions moléculaires responsables de la cohésion de l'éther sont dues à tout l'éther, pris dans son ensemble, et ainsi considéré comme une seule grande molécule. Qualitativement, Boussinesq résout le problème de la non propagation, par l'éther, d'une vibration longitudinale. Nous verrons (chapitre III, § III) que la propagation d'une vibration longitudinale à partir d'un centre d'ébranlement lumineux dans un milieu élastique se fait au moyen d'ondes transversales et d'ondes longitudinales. Or les physiciens de l'époque n'arrivent pas à détecter ces dernières. Boussinesq, à partir de sa distinction entre actions atomiques et actions moléculaires, parvient à expliquer pourquoi. Selon lui la propagation des ondes longitudinales dans la matière pondérable est rendue possible par le rapprochement de couches parallèles du corps considéré et l'action des forces moléculaires qui tendent à les ramener à leur état naturel. La

---

[388] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la chaleur*, t. 2, Paris, Gauthier-Villars, 1903, pp. 200 à 625.

[389] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la chaleur*, t. 1, Paris, Gauthier-Villars, 1901, p. 38.

propagation de telles ondes se fait avec variation de la distance des molécules et du volume du corps, d'où le nom *d'élasticité de volume* que Boussinesq donne à cette résistance aux mouvements longitudinaux[390]. Les vibrations transversales, elles, ne modifient pas les distances entre molécules, mais simplement les directions de celles-ci. Elles affectent la forme du corps, et la résistance ainsi développée porte le nom *d'élasticité de forme*[391]. Puisqu'il n'y a pas de forces répulsives qui s'exercent entre les atomes d'éther, les distances inter-atomiques étant trop importantes pour que l'on puisse faire intervenir les forces répulsives inter-atomiques, celui-ci n'est pourvu que de l' élasticité de forme et non pas de l'élasticité de volume, ainsi il ne peut transmettre les vibrations longitudinales.

De telles explications peuvent faire figure d'explications *ad hoc* si l'on ne peut trouver d'autre exemple d'un comportement aussi particulier que celui de l'éther dans la nature. Aussi jusqu'en 1923 montre-t-il que certains corps se comportent comme l'éther. C'est le cas de la laine. Après avoir rappelé les propriétés de l'éther Boussinesq trouve un analogue à celui-ci :

> " Ce sera, par exemple, un amas de laine non pressée, composée de nombreux filaments plus ou moins courts, s'entrecroisant dans tous les sens. Chaque couche d'un tel amas résiste notablement au glissement, sur elle, des couches voisines parallèles, dont elle entraîne toujours quelque filament enchevêtré à son intérieur et presque moins facile à l'en dégager qu'à le rompre. Au contraire, de médiocres rapprochements ou écartements des couches, n'étendent que modérément les fibres et les faisant surtout fléchir, n'y produiront que des résistances insignifiantes, vu la petitesse de densité admise de la laine."[392]

Une telle matière n'oppose donc pas de résistance aux déplacements longitudinaux, ne possède pas, ou peu, d'élasticité de volume, par contre elle oppose une résistance aux déplacements latéraux, elle possède l'élasticité de forme et pourrait donc transmettre les vibrations transversales.

Comme pour le développement de sa mécanique générale, Boussinesq manifeste dans le cas de l'éther une grande cohérence de pensée. Tous les arguments que l'on pourrait lui opposer s'effondrent. Que l'éther soit impondérable, au sens étymologique, n'est pas plus étrange que la matière habituelle le soit. Seul le signe du coefficient B change. Qu'il soit constitué d'une myriade d'atomes nous est prouvé par la propagation

---

[390]ibid., p. 39.
[391]ibid., p. 43.
[392]J. Boussinesq, *Cours de physique mathématique de la Faculté des sciences, Compléments au tome III*, Paris, Gauthier-Villars, p. IX et X.

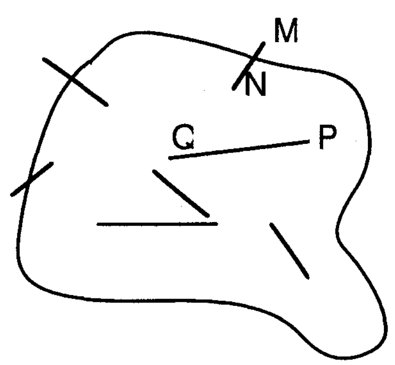
même de la lumière. Le paradoxe d'une infinie mollesse associée à la possibilité de transporter des vibrations transversales ne résiste pas à un peu de réflexion. Ce qui peut provoquer la méfiance vis-à-vis de cette conception, c'est l'accumulation des qualités successives dont il faut parer l' éther, pour lui faire remplir son rôle.

Nous venons de terminer l'évocation de l'utilisation que fait Boussinesq des actions entre particules de matière. Ces développements de la mécanique générale sont nécessaires à sa cohérence; son but est bien d'expliquer l'ensemble des phénomènes naturels. Dans son domaine de prédilection, la Mécanique physique, Boussinesq fait plutôt usage d'une autre propriété de l'énergie, particulièrement de l'énergie potentielle: celle de pouvoir être associée à un volume donné de matière.

III . 4 . 6 . Le confinement de l'énergie dans un volume limité

L'explication que nous donnons maintenant est celle des "Recherches sur les principes de la mécanique (...)" de 1872. Les démonstrations ultérieures, particulièrement celles qui ont trait à la Théorie mécanique de la chaleur, trouvent leur place, quand c'est nécessaire, dans le chapitre trois de notre thèse.

L'ensemble de ces démonstrations repose sur la méthode suivante. Boussinesq isole un volume au sein du corps dont il veut étudier l'énergie potentielle, puis il joint deux à deux, dans ce volume, les points matériels situés à des distances imperceptibles: ce sont ceux dont l'interaction produit l'énergie potentielle interne. Il faut se souvenir que l' énergie potentielle de pesanteur a été traitée à part.



Supposons qu'il se produise une variation d'énergie potentielle, alors la variation d'énergie potentielle produite par l'ensemble des actions sur des points reliés par des droites de type MN qui traversent la surface, sera bien plus faible que celle produite par l'ensemble des actions du type PQ intérieures au volume, car les droites MN sont moins nombreuses que les droites PQ. C'est ainsi que l'on peut interpréter le paragraphe suivant de Boussinesq:

" Il est évident que si, de toutes les droites qui joignent deux à deux les points d'un système, on fait au hasard deux groupes dont l'un contienne incomparablement plus de ces droites que l'autre, la somme des différentielles partielles par rapport à toutes les droites de ce dernier groupe, de l'énergie potentielle interne du système, sera négligeable devant la somme des différentielles partielles de cette énergie par rapport aux droites du premier, et par conséquent pourra n'être pas comptée dans la différentielle totale de la même énergie.

De ce principe résultent deux conséquences importantes: 1° les travaux des forces réciproques appliquées aux extrémités de toutes les droites de longueur insensible qui traversent une surface quelconque ont une somme totale négligeable; et par suite, le travail des actions exercées d'un côté de la surface est constamment égal et contraire à celui des forces appliquées au côté opposé; 2° si l'on divise un corps en parties perceptibles, mais d'ailleurs petites ou grandes , on pourra, durant un instant dt, négliger le travail total des actions exercées à travers les surfaces de séparation des diverses parties (...)"[393]

On ne pouvait pas déduire ce qui précède du principe de l'action et de la réaction, car les actions dont parle Boussinesq ne sont pas les actions d'une seule particule sur une autre, ce sont les actions de l'ensemble des particules qui agissent sur l'une d'entre elles, M par exemple, qui sont prises en compte. Le raisonnement de Boussinesq a pour but de localiser ces actions dans l'espace et de substituer au calcul sur les forces elles-mêmes un calcul sur les volumes où elle s'exercent. On néglige les actions qui s'exercent à travers la surface de séparation des volumes, et l'on ne prend en compte que celles qui agissent en leur intérieur. L'additivité des différentielles des énergies potentielles devient aussi simple que l'additivité des volumes. On peut intégrer alors cette différentielle sur un volume quelconque, puisque la fonction qui traduit l' énergie potentielle interne ne saurait varier qu'avec continuité, et l'on obtient comme expression pour celle-ci:

$$\Phi = \int_{\omega} \Phi_1 \, d\omega \text{ (à une constante additive près)}$$

où Φ est l'énergie potentielle interne contenue dans le volume ω et Φ_1 l'énergie interne potentielle contenue dans le volume unité.

L'interprétation précédente de l'énergie interne se révélera particulièrement efficace dans l'étude de l'énergie calorifique. Dans ce

---

393 J.Boussinesq, *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoire présenté à l' Académie des sciences et des lettres de Montpellier, le 8 Juillet 1872, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, pp. 321.

cas la nature des forces agissant entre molécules n'a pas d'importance, seul compte l'aspect énergétique du phénomène. Boussinesq assigne à chaque volume de matière une certaine énergie, qui est finalement la seule quantité qui lui importe. Alors l' énergie acquiert l'une des propriétés de la matière qui est l' étendue. On peut dans une certaine mesure la traiter comme une matière, même si l'on sait que ce n'en est pas une. Nous développons ce point dans le paragraphe VI du chapitre 3.

III . 4 . 7 . Boussinesq et la nouvelle Mécanique

Dans ce paragraphe nous souhaitons montrer que Boussinesq est relativement bien informé de l'existence de ce que l'on pourrait appeler les nouvelles physiques, Relativité einsteinienne et Mécanique quantique. Il ne s'élève pas contre les Mécaniques quantiques de son époque, c'est bien plus aux conséquences de la Relativité qu'il s'en prend. Nous voyons maintenant quels sont les arguments qu'il oppose à cette nouvelle mécanique. L'un des points sur lesquels achoppe la Mécanique classique est l'électrodynamique des corps en mouvement, pour reprendre le titre d'un mémoire célèbre. Le problème du calcul de la vitesse de la lumière par rapport à un repère donné, englobe celui de la propagation de la lumière dans les corps transparents en mouvement, que Boussinesq pense avoir résolu. Voici comment Fizeau expose les vues de Fresnel sur la question:

> "(...) une troisième supposition (a été émise) qui participe de l'une et de l'autre, une portion seulement de l'éther serait libre, l'autre portion serait fixée aux molécules du corps et partagerait seule ses mouvements.
>
> Cette dernière hypothèse, que l'on doit à Fresnel, a été conçue dans le but de satisfaire à la fois au phénomène de l'aberration, et à une expérience célèbre de M. Arago, par laquelle il avait démontré que le mouvement de la Terre est sans influence sur la valeur de la réfraction que la lumière des étoiles subit dans un prisme. Ces deux phénomènes s'expliquaient avec une admirable précision; mais (...) il est certain que l'hypothèse de Fresnel n'est pas regardée comme une vérité démontrée, et que les rapports de l'éther avec la matière pondérable sont encore considérés comme incertains et très obscurs."[394]

Les expériences de Fizeau de 1859, relatées dans l'article mentionné à la note précédente, semblent indiquer que l'hypothèse de Fresnel est vérifiée. Pour l'eau entraînée avec une vitesse u, si v est la vitesse de la lumière dans le vide et v' la vitesse de la lumière dans l' eau au repos,

---

[394] H. Fizeau, *Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux, et sur une expérience qui paraît démontrer que le mouvement des corps change la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans leur intérieur,* Annales de chimie et de physique, 1859, 3° série, 57, pp. 385 à 404, citation à la page 386.

Vm la vitesse de la lumière dans l'eau en mouvement sera, selon Fizeau, qui reprend les calculs de Fresnel:

$$Vm = v' \pm u \,.\, (v^2 - v'^2) / v^2 \qquad (7)$$

Boussinesq interprétera cette expression en 1903, en disant que l'éther semble être entraîné par la matière pondérable avec une vitesse égale à ($1 - 1/N^2$), où N est l'indice du corps au repos.

Toutefois Fizeau conclut ainsi:

> "Le succès de cette expérience me semble devoir entraîner l'adoption de l'hypothèse de Fresnel, ou du moins de la loi qu'il a trouvée (...) Peut-être la conception de Fresnel paraîtra si extraordinaire et sous quelques rapports si difficile à admettre, que l'on exigera d'autres preuves encore et un examen approfondi de la part des géomètres, avant de l' adopter comme l'expression de la réalité des choses."[395]

Le caractère paradoxal des hypothèses de Fresnel est bien décrit par Boussinesq lui-même:

> "Mais, quoique l'éther paraisse rester ainsi immobile dans l'espace, les ondes qui s'y propagent à travers un corps en mouvement, c'est-à-dire aux endroits où se trouve une matière pondérable se déplaçant d'ensemble avec une grande vitesse donnée V, semblent être entraînées par cette matière (...)"[396]

Boussinesq a écrit en 1868 une "Théorie nouvelle des ondes lumineuses"[397] dont le grand mérite est de reposer sur l'hypothèse la plus simple qui soit: l'éther a les mêmes caractéristiques lorsqu'il est libre, dans le vide, et lorsqu'il est engagé dans un corps. Les interactions de la matière et de l'éther sont prises en compte par l'action dynamique, due au mouvement, de la matière pondérable sur l'éther qui est le milieu où se propagent les vibrations lumineuses (voir chapitre 3, § III). Boussinesq traitera la question de la propagation des ondes dans les milieux en mouvement jusqu'en 1921[398]. Le principe de calcul est

---

[395]ibid., p. 404.

[396]J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences* , Paris, t. 2, Gauthier-Villars, p. 396.

[397]J. Boussinesq, *Théorie nouvelle des ondes lumineuses*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 1868, 13, pp. 313 à 371.

[398]J. Boussinesq, *§ III ,Ondes lumineuses dans les corps en mouvement*, in *Addition à un mémoire intitulé: Théorie nouvelle des ondes lumineuses*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 13, 1868, pp. 433 à 438.Voir aussi: J. Boussinesq, *Sur le calcul des phénomènes lumineux produits à l'intérieur des milieux*

toujours le même que dans le cas de l'immobilité relative du corps et de l'éther; mais à l'action que la matière pondérable exerce sur l'éther dans son mouvement vibratoire, il faut ajouter une action que la première exerce sur le second dans son mouvement de translation de cette même matière. Les divers résultats obtenus sont corrigés d'un article sur l'autre en fonction des nouvelles expériences qui sont faites ou des imperfections que l'auteur décèle dans les précédents. Ainsi en 1868 il retrouve l'équation (7); le calcul est effectué en supposant l'observateur absolument fixe. En 1872 il modifie ce résultat à la suite d'expériences plus précises de Mascart et est ainsi amené à modifier la formule de Fresnel. En 1903, il donne une formulation que l'on pourrait croire définitive de la question:

> "Donc, par rapport à des axes mobiles animés d'une translation égale à la fraction 1- $(1/N^2)$ de la translation même du corps, les ondes se propagent comme si les corps étaient fixes. C'est bien dire que, conformément à l'intuition de Fresnel confirmée par Fizeau, les ondes lumineuses sont entraînées par les corps avec une vitesse égale à la fraction 1- $(1/N^2)$ de la sienne."[399]

Il semble que Boussinesq puisse se trouver satisfait de ce résultat. Toutefois, ainsi qu'il l'explique en 1921, son calcul n'est valable que pour des valeurs faibles de l'aberration V/ω, rapport de la vitesse de translation du corps pondérable considéré et de la célérité de la lumière ω dans le vide. Il tente donc de tenir compte de ce rapport lorsqu'il n'est pas très petit. Sa conclusion est (1903):

> "Ainsi la translation du corps raccourcit un peu les ondes d'une période donnée et altère, par conséquent, leur figure."[400]

Une expérience faite avec des vitesses de translation grandes, un peu comme l'expérience de Michelson (1887), pourrait trancher la question. Poursuivant la phrase précédemment citée, il dit:

> "Si nos équations continuaient à s'appliquer quand même, la vitesse excéderait l'unité (*célérité* de la vitesse dans le vide), les ondes cesseraient de se propager uniformément et le phénomène même subirait une transformation totale, lorsque le carré $V^2{}_x$ de la

---

transparents qu'anime une translation rapide, dans le cas où l'observateur participe lui-même à cette translation, C. R., 76, 1873, p. 1293.

[399] J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences*, Paris, Gauthier-Villars, t. 2, p. 399.

[400] ibid., p. 564.

composante atteindrait puis dépasserait (un certain nombre); ce qui rendrait imaginaire la célérité, ou vitesse de propagation."[401]

Une vitesse supérieure à celle de la lumière ne peut l'étonner, car il estime qu'elle a été constatée par H. Becquerel[402]. En 1921, lorsque Boussinesq écrit ses derniers textes théoriques, on peut penser qu'il va opposer sa théorie mécanique de la lumière à la relativité telle que la conçoit Einstein, théorie qui défie le bon sens. Or, avant de critiquer vivement les conséquences de cette théorie, Boussinesq montre que ses calculs ne peuvent s'appliquer aux vitesses où se fait l'expérience de Michelson, justement parce que la décomposition des réactions de l'éther en une force due au mouvement vibratoire et une autre due au mouvement de translation, n'a que peu de chance de traduire la réalité pour des vitesses élevées.

"Il n'y a donc aucune probabilité sérieuse pour que les lois déduites de nos formules simples subsistent, dès qu'on tient compte du carré de l' aberration V/ω, comme il est fait dans l' étude, dès lors purement théorique, des pages 564 à 577. Les accourcissements d'ondes proportionnels au carré de l'aberration, et les autres déformations, également en V^2, qui y résultent des calculs n'ont donc aucune raison d'être réalisés physiquement; car nos équations sont loin d'avoir été établies pour un aussi haut degré, à peine imaginable, d'approximation relative, qui, dans le cas d'un observateur terrestre, atteindrait la fraction $(0{,}0001)^2$, c'est-à-dire le cent-millionième, des résultats."[403]

La justification que Boussinesq donne de sa théorie est qu'elle est valable dans les limites de la précision de l'expérience de Fizeau, et uniquement dans ce cadre-là.

Boussinesq renonce, en 1921, à trouver une solution précise, mathématique, au problème de la propagation de la lumière dans les milieux matériels en mouvement. Cela ne peut qu'étonner de la part d'un physicien aussi plein de ressources; mais peut-être la lassitude se fait-elle sentir avec l' âge...

Il examine ensuite les conséquences de l'expérience de Michelson:

"Bien des physiciens admettent cependant que d'assez récentes expériences dues au savant professeur Michelson de Chicago, ont présenté ce degré d'approximation (cent-millionième de la grandeur mesurée). Elles n'ont d'ailleurs révélé, dans la limite de

---

[401]ibid., pp. 564 à 565.

[402]ibid., pp. 449.

[403]J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences*, t. 3, p. 92.

leur approximation effective, aucune altération appréciable de la forme et de la vitesse des ondes qui puisse être attribuée à la translation V. Aussi ont-ils conclu que toutes les observations, faites à la surface de la Terre, étaient impuissantes à nous renseigner sur le déplacement de notre planète dans l'espace, où ils supposent cependant avec Fresnel, Fizeau, etc., et moi-même), l'éther sensiblement fixe."[404]

Boussinesq trouve alors, dans les conséquences de la relativité d'Einstein des affirmations qui heurtent ses convictions épistémologiques:

"Aussi les physiciens dont je parle ont-ils été conduits aux négations les plus extraordinaires, celle, par exemple, d'un temps unique pour tout l'univers, d'un temps où se placent, soit comme simultanés, soit comme successifs, mais d'une manière déterminée et absolue, tous les événements: idée première, indispensable à une vision nette des faits, à la construction idéale des phénomènes, et la plus claire de toutes pour l'esprit, sauf la pure intuition des figures géométriques qui a peut-être, étant plus simple, un degré un peu supérieur de netteté."[405]

Il faut toutefois dire pourquoi les nouvelles théories ne sont pas acceptables. C'est que, comme la sienne propre, elles ne sont pas adaptées au degré de précision requis pour rendre compte du déplacement de la Terre dans l'éther:

"Toutes ces conséquences paradoxales, pour ne pas dire absurdes, disparaissent en observant que les formules qui y conduisent ne sont nullement justifiées, en tant qu'applicables à un si haut degré d'approximation, et qu'elles y tombent en défaut."[406]

Pas plus que les siennes, les formules données par la nouvelle mécanique n'ont le degré de précision nécessaire pour rendre compte d'expériences aussi délicates que celle de Michelson. Allégation que l'on ne peut réfuter, dans la vision de la Mécanique de Boussinesq, puisqu'il est probable que les nouvelles formules font aussi usage de la notion de vitesse, donc de dérivée, et que là se situe ce qui est incompréhensible pour l'esprit humain: le continu, l'infiniment petit.

Selon Boussinesq on peut dire que, si les nouvelles théories semblent en accord avec certains faits, c'est que finalement l' imprécision de leurs formules concorde avec la précision de l'expérience; exactement comme le degré d'approximation de ses propres formules correspond à la précision de l'expérience de Fizeau. De plus nous avons indiqué que, pour

---

[404] ibid., p. 92.
[405] ibid., p. 93.
[406] ibid., p. 93.

Boussinesq, H. Becquerel a mis en évidence des vitesses supérieures à celle de la lumière. Il nous semble toutefois que les réticences les plus importantes sont d'ordre philosophique ou épistémologique. Ce que Boussinesq reproche à la nouvelle théorie, c'est de heurter de front sa théorie de l'intuition, d'aller contre le bons sens. Ici nous ne sommes plus dans le domaine de la Science positive, nous sommes dans le domaine du sentiment, de la conviction personnelle.

Boussinesq va tenter de s'opposer aux racines mêmes de la théorie de la relativité d'Einstein, le fait qu'il n'y a pas d'action instantanée à distance. Boussinesq, lui, affirme qu'en particulier les actions de pesanteur doivent se manifester instantanément à n'importe quelle distance. L'article initial est publié en 1912 et repris intégralement dans le cours de Physique mathématique en 1921[407]. Comme nous l'avons dit au paragraphe II . 1 . 8 ., selon Boussinesq, pour que la nécessaire continuité des fonctions physiques soit respectée lors du choc, il ne faut pas supposer une frontière sans épaisseur entre les particules qui se choquent. Il faut supposer que l'action que deux objets exercent l'un sur l'autre ne varie pas de façon brusque mais de manière progressive. De là on peut induire que l'action d'un point matériel sur un autre, diminue d'abord brutalement en fonction de la distance, puis continue à décroître à l'infini de façon asymptotique. Sans donner de raison physique, simplement dans un but descriptif, Boussinesq distingue l'"existence pleine", ou simplement *existence*, d'un atome, sa situation géométrique définie par le point matériel qui le représente, de son "existence infiniment atténuée", ou simple *présence*, en quelque sorte la portion d'espace dans laquelle se manifeste son action.

Evidemment il ne s'agit là que d'une description, et de plus, d'une description qui n'est pertinente que pour le phénomène qu'elle est en train de décrire; elle vaut plus par le style du texte que par sa portée scientifique:

> "Car, de même que le point existe pleinement, dans sa situation, dès qu'il l'occupe, de même aussi il possède à toutes les distances de sa situation, et sans délai ou, pour mieux dire, depuis un temps indéfini, l'existence partielle, infiniment atténuée, que nous y appelons sa présence. Cette présence le suit partout où il va, à la manière de

---

[407] J. Boussinesq, *Comment peut s'expliquer l' exercice instantané de la pesanteur et des actions moléculaires, a toutes les distances où se produisent ces forces*, C. R., 154, 1912, pp. 737 à 742.

J. Boussinesq, *Comment peut s'expliquer l' exercice instantané de la pesanteur et des actions moléculaires, à toutes les distances où se produisent ces forces*, in *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences de Paris*, Paris, Gauthier-Villars, 1921, pp. 293 à 298.

sphères idéales concentriques qui lui seraient liées et constitueraient, en quelque sorte, son domaine ou comme son propre espace."[408]

Peut-être est-ce là l'idée que se fait Boussinesq d'un champ physique, dans ce cas le champ de pesanteur.

Les spéculations de notre auteur semblent revêtir suffisamment de généralité pour que les responsables des Comptes rendus de l'Académie des sciences éditent, en 1910, trois articles dans lesquels il résume sa conception de la Mécanique, mais sous la rubrique "Philosophie naturelle" et non "Mécanique"[409]. Celui qui nous intéresse ici concerne toujours la relativité, et propose une explication "classique" de la variation de masse des corps en mouvement rapide. Boussinesq reprend dans les deux premiers articles ce qu'il a montré en 1903, concernant les rapides mouvements vibratoires dans un fluide: l'effet de frottement du liquide peut être pris en compte mathématiquement comme un accroissement fictif de la masse du corps qui s'y meut. Cet accroissement est dû à un entraînement du fluide par le corps en mouvement. Le même phénomène se produit lorsqu'un corps se déplace dans l'éther:

> "En particulier, l'entraînement de l' éther libre par un corps qui s'y meut doit, ce semble, équivaloir à la communication des fractions déterminées des accélérations de celui-ci, à des volumes d'éther d'autant plus grands que la vitesse du corps est plus grande elle-même. Or cela revient à dire que la résistance de l' éther produirait, sur le mobile, l' effet d'une surcharge d'inertie, ou d'une masse supplémentaire qui lui semblerait incorporée, croissante avec sa propre vitesse."[410]

Une seconde cause de l'alourdissement apparent résulte de la conception de l'éther que nous avons évoquée au paragraphe précédent. Celui-ci est formé d'atomes situés à des distances supérieures à celles où s'exercent les répulsions atomiques. Lorsqu'une particule d'un rayon cathodique traverse l'éther à grande vitesse, elle comprime l'éther à son avant et alors les répulsions chimiques pourront s'exercer entre les

---

[408] J. Boussinesq, *Comment peut s'expliquer l'exercice instantané de la pesanteur et des actions moléculaires, à toutes les distances où se produisent ces forces*, C. R., 1912, 154, p. 740.

[409] J. Boussinesq, *Sur les principes de la mécanique et sur leur applicabilité à des phénomènes qui semblent mettre en défaut certains d'entre eux*, C. R., 150, 1910, pp. 1639 à 1643.

J. Boussinesq, *Sur la conservation des masses vraies, dans divers phénomènes, principalement lumineux, où apparaissent des masses fictives variables, C. R.*, 150, 1910, , pp. 1721 à 1725.

J. Boussinesq, *Sur l'applicabilité probable, aux rayons ou courants cathodiques, du principe de constance de la masse*, C. R., 151, 1910, pp. 5 à 10.

[410] ibid., p. 7.

particules qui forment le courant cathodique et les atomes d'éther[411]. Alors:

> "(...) paraîtra s'accroître la masse du courant, conformément aux faits constatés, qui ont porté tant de jeunes géomètres et physiciens à mettre en doute la généralité du principe de la constance de la masse."[412]

Mais plus significatif que ce qui précède est sans doute la note de bas de page par laquelle Boussinesq juge lui-même l'explication qu'il donne:

> "Mais que de complications semble pouvoir produire la condensation de l'éther, avec l'instabilité, et la tendance au morcellement en molécules très espacées, que doit y amener aussitôt, comme on a pu l'entrevoir ci-dessus, l'entrée en scène des répulsions chimique! Peut-être les théories électromagnétiques trouvent-elles place dans les phénomènes en résultant."[413]

La première intervention remarquée de Boussinesq dans le domaine de la Physique était sa "Théorie nouvelle des ondes lumineuses" (1868). Son grand mérite était la simplicité avec laquelle il retrouvait les résultats expérimentaux. En 1910, dans le texte que nous venons de citer, il ne semble pas pouvoir renouveler le même exploit qu'en 1868. Boussinesq recule devant la complexité qu'il pressent dans l'application de la Mécanique classique aux nouvelles découvertes expérimentales. Il semble que, comme nous l'avons déjà mentionné, il espère en la mise à jour de l'"idée mère" de l' électromagnétisme. Mais de toutes manières, Boussinesq ne pourra pas adhérer à la nouvelle physique; ce qui s'y oppose, ce sont ses conceptions épistémologiques.

Il ne faudrait pas tirer de ce qui précède l'image d'un Boussinesq devenu totalement étranger à la vie scientifique de son époque. Outre qu'il faudra du temps pour que les nouvelles physiques aient droit de cité en France, Boussinesq continue à avoir une activité scientifique importante, en particulier en hydrodynamique; on le consulte fréquemment. Lord Kelvin (W. Thomson) lui décerne des félicitations pour son explication "dynamique" de la polarisation, même si c'est pour en réclamer la priorité. Le domaine dont s'occupe Boussinesq n'est que peu affecté par les nouvelles physiques, il n'y a donc pas de raison pour qu'il renonce à ses convictions épistémologiques, et notamment le recours à la simplicité et à l'intuition, qui lui valent tant de succès scientifiques.

IV . Conclusion de la Mécanique générale

---

[411] ibid., p. 9.
[412] ibid., p. 10.
[413] ibid.

Nous montrons ici que l'on peut caractériser la Mécanique de Boussinesq suivant trois points de vue: tout d'abord sous celui de sa propre cohérence interne, puis par rapport aux axiomes de la mécanique de Newton, et enfin au regard du projet de Mécanique physique de Poisson.

IV . 1 . La cohérence propre de la Mécanique générale de Boussinesq

Boussinesq rejoint Saint-Venant, dès 1868, dans l'opposition à une Mécanique où la force, au sens causal du terme, jouerait un rôle prépondérant. Et effectivement sa Mécanique générale relégue bien cette force à une place secondaire. Il n'en fait pas mention dans ses principes; elle en est absente, tout au moins explicitement. Les interactions entre atomes sont exprimées au moyen de l'énergie, et non pas au moyen des forces. Celles-ci n'interviennent ni dans les principes ni dans les résultats. C'est donc bien les mettre au rang de simples procédés de calcul, conformément à l'intention rappelée plus haut.

La cohérence de la Mécanique générale de Boussinesq se manifeste aussi quand on examine les axiomes qui la fondent: celui de la conservation de la "force vive ou de l'énergie", celui de l'indépendance des mouvements simultanés, auxquels il faut bien ajouter celui de l'action et de la réaction. Ils ne sauraient être contradictoires, car toute la mécanique rationnelle montre que si les "forces" sont indépendantes des vitesses, alors l'énergie se conserve. On peut les soupçonner d'être surabondants: en effet, si les actions entre atomes sont indépendantes des vitesses, alors la force vive se conserve. Ainsi l'axiome de conservation de la force vive ferait double emploi avec celui de l'indépendance des mouvements simultanés. En réalité l'axiome de la conservation de l'énergie joue un double rôle: il affirme la conservation de l'énergie, mais aussi il définit cette énergie, comme la somme de la puissance vive et de l'énergie potentielle. On peut même dire que cet axiome est surtout une définition de l'énergie: c'est ce qui se conserverait si le système était isolé. L'axiome d'indépendance des mouvements simultanés, lui, indique comment varie la vitesse de chaque atome, et donc comment varie éventuellement l'énergie lorsqu'un corps n'est plus isolé. Les deux axiomes sont donc nécessaires si l'on veut étudier les mouvements des systèmes d'atomes.

Le second principe dans la formulation de 1889, la conservation de l'énergie, définit l'énergie en indiquant les conditions dans lesquelles celle-ci reste identique à elle-même. Ce principe permet réellement d'utiliser l'idée de conservation de l'énergie et de calculer éventuellement ses variations, dans le cas d'un système partiel par exemple. Si l'on veut utiliser un vocabulaire emprunté à la théorie de l'élasticité, on peut dire que l'axiome de la conservation de l'énergie décrit, du point de vue de l'énergie, l'"état naturel" du système considéré. Le principe de l'indépendance des mouvements indique, quant à lui, ce qui se passe lorsqu'on impose des contraintes au système. Nous avons montré que le principe de l'action et de la réaction est imposé a priori et qu'il est donc indépendant des deux autres.

On peut donc dire que les trois principes qu'utilise Boussinesq ne sont pas contradictoires, et qu'en plus ils sont complémentaires.

IV . 2 . Le rapport des axiomes de Boussinesq avec ceux de Newton

Ces trois axiomes sont suffisants pour la construction d'une mécanique. On peut le montrer par comparaison avec la Mécanique newtonienne[414]. Le premier axiome de la mécanique newtonienne[415], celui de l'inertie, est finalement un principe de conservation du mouvement. Il affirme que le mouvement peut se conserver[416], que celui-ci soit représenté par m.V ou par m. V^2. Il joue le rôle d'un principe de conservation. Ce n'est évidemment pas le principe de conservation de l'énergie cinétique ou de la quantité de mouvement, mais on peut le considérer comme le principe régissant la conservation de quelque chose qui est l'état dynamique d'un corps isolé. Il est possible de lui faire correspondre, sur le plan fonctionnel, le principe de conservation de la force vive de Boussinesq.

La seconde loi de Newton, celle dans laquelle on a voulu voir parfois l'expression de la relation fondamentale de la dynamique, indique comment l'état dynamique, dont la première loi affirmait la conservation, se modifie[417]. M. Blay montre que cette loi traduit bien le changement du mouvement[418]. La seconde loi de Newton est donc une loi qui permet de prévoir les variations de l'état dynamique d'un système mécanique. On peut lui faire correspondre le principe d'indépendance des mouvements simultanés, qui lui aussi prévoit comment varie l' état dynamique d'un ensemble d'atomes.

---

[414]I. Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, Londres, 1687, 3° éd., 1726.

[415]I. Newton, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, trad. franç. de Gabrielle-Emilie de Breteuil, marquise du Chastelet, Paris, 1756-1759; rééd. Blanchard, 1966; F. Gabay, 1989.

[416] Première loi - Tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme à moins que des forces imprimées ne le contraignent à changer d'état.
ibid., Blanchard, p. 17.

[417] Deuxième loi - Le changement du mouvement est proportionnel à la force motrice imprimée et se fait suivant la droite par laquelle cette force est imprimée.
ibid., Blanchard, p. 17.

[418]M. Blay, *Les "Principia" de Newton*, Paris, P.U.F.,1995.

La troisième loi de Newton, celle de l'action et de la réaction[419], peut être considérée comme la loi qui régit la manière dont les systèmes mécaniques transmettent leurs actions les uns aux autres. Elle est indispensable si l'on veut passer de la Mécanique des systèmes isolés à celle des systèmes en interaction. On retrouve cette troisième loi dans la mécanique de Boussinesq, même si ce n'est que de façon implicite.

Les trois axiomes de Boussinesq jouent un rôle équivalent aux trois lois de Newton, sur le plan de la structure de la Mécanique. Le système axiomatique de Boussinesq est l'homologue de celui de Newton.

IV . 3 . Le rapport de la Mécanique physique de Boussinesq avec le projet de Mécanique physique de Poisson

Il nous reste à examiner la Mécanique de Boussinesq par rapport au projet de Poisson de bâtir une Science uniquement fondée sur les actions moléculaires. Le principe de conservation de l'énergie est distinct du principe de conservation de la force vive. Il introduit la notion de quantité d'énergie limitée contenue dans un système. En ce sens l'énergie, et non la force vive, traduit bien les actions entre atomes. On peut donc dire que le projet de Poisson est réalisé. S'il était possible de construire toute la mécanique sur le seul principe de conservation de l'énergie, on pourrait effectivement dire que toute la mécanique est uniquement fondée sur la considération des actions de molécule à molécule, mais il faut ajouter une autre loi expérimentale: celle de l'indépendance des mouvements simultanés.

La Mécanique de Boussinesq va plus loin que le simple projet de Poisson. Elle établit des méthodes de calcul différentes pour les actions à longue distance et celles à courte distance. La Mécanique des actions à longue distance de Boussinesq est finalement la Mécanique newtonienne; son originalité est de la faire entrer dans le cadre de la Mécanique moléculaire. La forme en $1/r^2$ des actions à longue distance est bien la forme des actions moléculaires lorsque r est grand par rapport à ces distances. Là, les méthodes habituelles de la Mécanique, composition des forces, utilisation des principes de d'Alembert et des vitesses virtuelles suffisent, l'application de la Géométrie y est évidente. Dans le cas des actions s'exerçant à distances imperceptibles, la simple considération des actions entre atomes perd toute pertinence, que ce soit à cause des "actions de présence" comme Boussinesq le suppose jusqu'en 1889 au moins, ou à cause de la confusion des mouvements moléculaires. Dans ce cas une mécanique propre aux petites distances intermoléculaires doit être construite. Elle doit être fondée sur les trois

---

419 Troisième loi - L'action est toujours égale à la réaction; c'est-à-dire que les actions mutuelles de deux corps sont toujours égales et dirigées en sens contraire.
I. Newton, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, trad. franç. de Gabrielle-Emilie de Breteuil, marquise du Chastelet, Paris, 1756-1759; rééd. Blanchard, 1966; F. Gabay, 1989, p. 18.

mêmes axiomes, mais elle doit avoir des méthodes particulières. La méthode qu'utilisera Boussinesq est celle qui consiste à confiner l'énergie dans un volume donné. Ce qui importe alors, ce n'est pas l'action individuelle de chaque molécule, ce n'est pas sa cinématique propre; ce qui importe, c'est l' effet produit par l'ensemble des molécules. En d'autre termes, ce qui importe, c'est la façon dont l'énergie est répartie dans le système. C'est là une méthode originale que Boussinesq utilisera dans sa Mécanique physique. On en voit les premières applications dans l'essai sur la "Théorie des ondes liquides périodiques" (1872), elle donnera toute son efficacité dans le cadre de la "Théorie mécanique de la chaleur" (1901 - 1903).

Pour Boussinesq, la Mécanique se réduit bien, selon le vœu de Poisson, à une considération des actions moléculaires. L'apport de Boussinesq est de décrire ces actions moléculaires dans le cadre de la conservation de l'énergie. Cette conception unifie l'ensemble du champ d'application de la Mécanique; elle s'applique aussi bien à la Mécanique céleste qu'à la Mécanique moléculaire proprement dite. La seule différence qui subsiste est celle de la méthode que requiert la mécanique des actions à longue distance et celle utilisable pour les actions à courte distance, cette dernière relevant parfois d'une physique particulière, celle de l'énergie.

U . Conclusion de ce chapitre: place et limites de la Mécanique générale de Boussinesq dans la Mécanique classique

U . 1 . Le problème de l'adéquation de la physique atomiste à la description du réel

La Mécanique générale de Boussinesq témoigne de la persistance d'une tradition française de la Physique mathématique, tradition que l'on peut référer à Laplace et Poisson. Elle montre l'efficacité de la déduction des lois à partir d'atomes représentés par des points matériels. Cette vision atomiste est contestée au moment même où Boussinesq intervient dans le monde scientifique. Le passage suivant d'un texte de Cournot, publié en 1872, est particulièrement éclairant:

> "L'antiquité grecque reprochait aux atomistes à qui elle avait affaire leur ignorance de la géométrie. Aux atomistes des temps modernes, même quand ils se nomment Gassendi, Descartes, Newton ou Laplace, la physique renouvelée oppose l'insuffisance de leur géométrie, c'est-à-dire de leur mécanique rationnelle, si transcendante qu'elle soit et quelque admirables explications qu'elle ait fournies dans la catégorie des phénomènes astronomiques. Avec de la philosophie on aurait pu prévoir ce retour de fortune: car il n'est pas philosophiquement admissible que l'esprit humain soit outillé pour avoir le dernier mot

des choses, comme il l'aurait été, si les atomes, qui lui sont si commodes, jouissaient d'une existence effective et substantielle."[420]

Et Cournot ajoute:

> "La science moderne ne pourrait pas plus s'accommoder de la foi aux *monades* que de la foi aux atomes: le dynamisme moderne, le dynamisme scientifique n'est et ne saurait être que la négation de l'atomisme, à titre de vérité absolue et d'explication universelle."[421]

Deux critiques sont ainsi formulées par Cournot à l'encontre de la Physique mathématique: l'utilisation des atomes mais aussi son inadaptation à la description de la matière.

Il semble que Boussinesq se soit donné pour tâche de répondre aux critiques de Cournot. En distinguant le point matériel, élément du monde géométrique idéal, et l'atome réel, il sépare le domaine de l'esprit et celui de la matière. Que l'esprit puisse comprendre la réalité physique, relève d'une "harmonie" entre l'homme et la nature, harmonie mystérieuse mais qui peut être acceptable pour un croyant comme Boussinesq. Quoi qu'on puisse en penser, la Physique mathématique classique ne se préoccupe pas uniquement d'Astronomie, mais aussi, et exclusivement pour Boussinesq, de la matière, et de la matière macroscopiquement continue ou pulvérulente. Dans la seconde moitié du XIX° siècle, c'est même de ce côté que se portent les plus remarquables efforts des physiciens. L'une des difficultés réside justement dans ce passage du point matériel au continu macroscopique. Le point matériel est garant de la possibilité de décrire géométriquement le réel. L'observation et l'expérience donnent des indications sur la façon d'appliquer cette géométrie à la nature. Il n'en reste pas moins que ce passage du discontinu au continu est une difficulté importante, que Boussinesq lui-même renonce à résoudre. Nous touchons ici une des limites de la Mécanique de Boussinesq. On peut en voir l'aveu dans sa critique du mémoire de Saint-Venant sur les atomes[422], mais il l'affirme déjà de façon confuse (il le reconnaît lui-même en fin de lettre) dans une lettre:

> "J'admets avec vous qu'une matière continue ne pourrait être que fluide (sans frottement aucun): il me semble même qu'elle ne pourrait être qu'une sorte d'atmosphère s'étendant à l'infini, quoique ce dernier point ne me paraît pas facile à démontrer avec les lois d'actions que j'admets (les actions de présence) et qu'aux endroits où la densité sera rapidement variable, ces lois introduisent non seulement cette densité

---

420 M. Cournot, *Considérations sur la marche des idées dans les temps modernes*, t.1, Paris, Hachette, 1872, pp. 350 à 351.

421 ibid.

422 J. Boussinesq, *Lettre à Saint-Venant du 24 juillet 1874.*

aux points considérés, mais encore dans les dérivées le long de la normale aux surfaces d'égale densité. Il faut même ajouter que la matière continue peut cesser d'être fluide en de tels endroits et comporter une tension superficielle exercée à travers des éléments plans normaux aux surfaces d'égale densité quoique les, éléments plans parallèles à ces surfaces y éprouvent une vraie pression.

Mais j'admets entièrement, même quand on fait dépendre l'action moléculaire de la densité, qu'une matière continue serait un fluide parfait (suivant l'expression en usage) en tous les points où la densité ne varierait qu'extrêmement peu dans une étendue comparable aux rayons d'action moléculaire."[423]

Il y a chez Boussinesq cette impossibilité à concevoir clairement tout ce qui est de l' ordre de l'infiniment petit, il ne trouve pas l'image adéquate qui le lui rendrait intelligible. C'est ce qu'il avoue clairement:

> "Mes élèves qui commencent à étudier la géométrie conçoivent très clairement les notions de surface, de ligne, de point, ainsi que la série continue des quantités, tandis que moi-même, à force de vouloir voir clairement les limites des choses réelles, limites qui nous apparaissant comme un terme extrême de la réalité, comme un terme que l'esprit ne saurait atteindre, du moins à ce qu'il nous semble, parce qu'il l'épuise tout entier, eh bien je finissais par voir ces notions trembler et en quelque sorte s'évanouir. La raison est sans doute que ce sont des notions irréductibles absolument simples, pour l'instrument analytique que possède notre intelligence, et qu'il faut voir d'un coup synthétiquement."[424]

Mais finalement cet obstacle du passage du continu au discontinu est de peu d'importance là même où le problème se pose, c'est-à-dire dans la matière condensée. Là Boussinesq, comme nous le verrons dans le troisième chapitre, remplace parfois les considérations sur la matière, sur les atomes mêmes, par des calculs sur l'énergie. Or cette énergie, et particulièrement l'énergie potentielle interne, est délocalisée dans l'espace qui contient les atomes, si l'on ne pousse pas la division des volumes trop loin. Ainsi le continu de l'énergie remplace-t-il le discontinu de la matière; le problème du passage du continu au discontinu est donc ainsi presque résolu.

U . 2 . L'irréversibilité des phénomènes naturels

La Mécanique de Boussinesq prétend résoudre tous les problèmes physiques, au moins en principe. Parmi ceux-ci est un problème que Boussinesq n'aborde, à notre connaissance, que rarement, c'est celui de

---

[423]ibid.

[424]J. Boussinesq, *Lettre à Saint-Venant du 4 juillet 1874.*

l'irréversibilité de la plupart des phénomènes physiques. Si l'on s'en tient à la simple conservation de l'énergie, les phénomènes naturels devraient être réversibles. Or tel n'est pas le cas. Brunhes montre les immenses difficultés qu'il y a à concilier la conservation de l' énergie et l'irréversibilité des phénomènes[425]. Il nous faut évoquer rapidement ce point pour montrer que Boussinesq pense pouvoir proposer des ébauches de solution pour l'ensemble de la physique. Nous avons rapidement évoqué la théorie de la liberté morale de Boussinesq: à certains moments de son évolution, un système "a le choix" entre plusieurs évolutions, et cela tout en conservant la même énergie. Boussinesq évoque déjà ce problème dans la "Conciliation du véritable déterminisme mécanique (...)", mais aussi, et presque dans les mêmes termes, dans l'avant dernier volume de son cours de Physique mathématique (1922)[426]. Il cite un opuscule de Philippe Breton qui évoque la possibilité d'une réversion des mouvements des atomes dans la nature[427]. Par "réversion" l'auteur entend que les sens des vitesses de tous les atomes d'un système matériel supposé isolé, un fruit pourri par exemple, s'inverseraient. Alors, selon P. Breton, le système tout entier "remonterait" le temps et le fruit, par exemple, redeviendrait vert. Rien ne s'oppose, dans la simple conservation de l'énergie, à un tel phénomène, si l'on suppose que tous les atomes et toute l'énergie qui a été en contact avec le système ont été conservés. Boussinesq ne s'oppose pas à ce que le principe de conservation de l'énergie permette une telle réversion. Pour lui l'énergie se dissipe, se morcelle, se dissimule, mais ne change pas de nature, elle est toujours de la force vive plus ou moins dissimulée. Mais les êtres vivants se caractérisent par le fait que leur évolution comporte des bifurcations et qu'un principe directeur pourrait empêcher de " remonter" ces bifurcations:

> "Au contraire, dans les systèmes où des intégrales singulières, lieux de bifurcation, font place à un principe directeur, il est évident que la réversion cesse d'être nécessaire. Rien n'empêche même de supposer qu'elle devient impossible; car les lois supérieures auxquelles le principe directeur obéit dans les organismes pourraient bien interdire absolument les mouvements inverses d'un autre qu'elles permettraient. Il n'y a donc pas lieu d'admettre, comme théoriquement possible, la réversion depuis une poire pourrie jusqu'au bourgeon à fruit du poirier, ou depuis le cadavre jusqu'à l'œuf (...)"[428]

---

[425]B. Brunhes, *La dégradation de l' énergie*, 1° éd., Paris, Flammarion, 1909 rééd., Paris, Flammarion, 1991.

[426]J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique, Compléments au tome III*, Paris, Gauthier-Villars, 1922, pp. 51 à 52.

[427]P. Breton, *La réversion ou le monde à l'envers*, Paris, à la librairie du journal Les Mondes, 18 rue du Dragon, 1876.

[428]J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique, Compléments au tome III*, Paris, Gauthier-Villars, 1922, p. 52.

Boussinesq n'évoque donc les phénomènes irréversibles que dans le cas des êtres vivants, et pour tout dire sur un plan purement théorique. Il ne se demande pas par exemple s'il pourrait se faire qu'un cours d'eau remonte à sa source, le bon sens peut-être lui montre que c'est impossible.

La Mécanique générale de Boussinesq préserve donc la possibilité d'une description atomiste cohérente de l'univers. La conservation de l'énergie devient une loi de conservation fondamentale prouvée expérimentalement. Sur cette base mécaniste et atomiste il est possible d'expliquer tous les phénomènes de la Nature. Cette explication suppose une certaine vision philosophique du monde, par exemple l'existence d'une adéquation de la Pensée humaine et de la Nature. Ces présupposés philosophiques font intégralement partie de la Mécanique de Boussinesq, ils la justifient et la rendent possible.

TROISIEME CHAPITRE

Eléments de la Mécanique physique de Boussinesq

I . Objet du troisième chapitre

I . 1 . Aspects généraux de la mécanique physique de Boussinesq

Les travaux pour lesquels Boussinesq a obtenu la reconnaissance des savants de son époque se rapportent à la mathématisation des phénomènes physiques; il appelle cette physique, qui pour lui est une mécanique, sa mécanique physique. C'est seulement cette partie de l'œuvre de Boussinesq que Saint-Venant considère dans le discours qu'il prononce, en 1886, devant la section de mécanique de l'Académie des sciences pour appuyer la candidature du premier[1]. Les "Recherches sur les principes de la mécanique (...)" de 1872 ne sont pas portées au crédit de Boussinesq. Ce sont donc ses travaux d'optique, d'élasticité, d'hydrodynamique qui lui font alors honneur. E. Picard, dans son apologie posthume, met plutôt en évidence les aspects que nous avons qualifiés d'épistémologiques dans le deuxième chapitre[2]. Il tient pour essentielle la partie de l'œuvre de Boussinesq d'avant les années 1890. C'est que les principes et les méthodes générales de cet auteur s'étaient déjà fixées à cette date. Il donne comme autre œuvre majeure de Boussinesq les deux premiers tomes de son "Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences" de Paris, c'est-à-dire sa "Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la Théorie mécanique de la lumière", publiés en 1901 et 1903[3]. Ce n'est pas que Boussinesq ait cessé de produire des articles entre ces deux dates et même après. Au contraire, il perfectionne sa théorie de l'optique, de l'équilibre des masses pulvérulentes et traite de nombreux problèmes de propagation des ondes en hydrodynamique et en élasticité, mais il semble qu'avec de légères retouches, il soit resté fidèle à ses conceptions philosophiques, épistémologiques et scientifiques déjà établies entre les années 1870 et 1890. C'est donc cette période que nous étudierons particulièrement, avec la notable exception de la "Théorie analytique de la chaleur (...)" (1901-1903).

Nous ne décrirons pas l'ensemble de la mécanique physique de Boussinesq. Seule nous intéressera la partie de cette mécanique où l'on peut voir les conséquences des conceptions théoriques évoquées dans le chapitre précédent. Un autre aspect de la mécanique physique serait à

---

[1] A. de Saint-Venant, *La vie et les travaux de M. Boussinesq,* Bulletin Scientifique du département du Nord, 2, Février 1886, pp. 103 à 110, 3, Mars 1886, pp. 143 à 155.

[2] Em. Picard, *La vie et l'œuvre de Joseph Boussinesq*, L'Institut, 28, 1933.

[3] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la théorie mécanique de la lumière*, t. 1, Paris, Gauthier-Villars, 1901, t. 2, Paris, Gauthier-Villars, 1903.

décrire: celui qui se manifeste dans l'"Application des potentiels à l'étude de l' équilibre et du mouvement des solides élastiques"[4]. Là, Boussinesq se montre peu soucieux d'explications épistémologiques. Il est préoccupé de résoudre simplement des problèmes dont Lamé ou Clapeyron n'ont donné que des solutions complexes. Les découvertes de Boussinesq consistent surtout en fonctions mathématiques - comme son potentiel logarithmique - posées presque a priori. L'étude de cet aspect de l'œuvre de Boussinesq relève plutôt d'une Histoire des théories de l'élasticité, et a d'ailleurs déjà été faite sous ce point de vue par Todhunter[5]. Nous ne reprendrons pas cette étude.

L'aspect de la mécanique physique de Boussinesq que nous décrivons et sa mécanique générale sont profondément imbriquées l'une dans l'autre. On peut suivre tout au long d'articles de mécanique physique l'utilisation des principes qu'il rassemble dans les "Leçons synthétiques de mécanique générale"[6], principes qui servent de base à sa mécanique générale. Les deux principes fondateurs de cette mécanique générale, la prééminence de l'énergie et la dépendance exclusive des accélérations avec l'état statique du système, peuvent d'ailleurs être vues comme des rationalisations *a posteriori* des techniques appliquées par Boussinesq en mécanique physique. Par ailleurs, les idées épistémologiques de Boussinesq concernant la force, l'atome, les lois d'unité et de simplicité, apparaissent très tôt dans la correspondance de Boussinesq et de Saint-Venant; il est donc difficile de dire si ces idées ont précédé leurs applications en mécanique physique ou en sont issues. Dans le présent travail, nous nous sommes donné pour but de montrer la cohérence de la pensée de Boussinesq, cohérence qui se manifeste tant en mécanique générale qu'en mécanique physique dans les "Leçons synthétiques (...)", et les divers articles de mécanique physique. C'est donc cet aspect, l'aspect intellectuellement presque inattaquable de l'œuvre de Boussinesq, que nous continuerons à mettre en évidence ici, comme nous l'avons fait pour la mécanique générale dans le chapitre précédent. Cela nous a conduit à traiter de la mécanique générale d'abord, et ensuite de la mécanique physique, suivant ainsi l'exposé de Boussinesq dans son "Cours de mécanique Physique de la Faculté des sciences" de Paris. Il aurait aussi été possible d'occulter la mécanique générale, comme le fait

---

[4] J. Boussinesq, *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, Mémoires de la société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 13, 4° série, 1885.

[5] I. Todhunter, *A history of theory of elasticity and of the strength of materials*, 1°éd., Cambridge, Cambridge university press, vol. 1, 1886, vol 2., part 1 & part 2, 1893, New York, Dover, vol. 1, vol. 2, part. 1 et part. 2, 1960. Voir particulièrement, concernant Boussinesq: vol. 2, part. 2, pp. 235 à 311.

[6] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889.

Saint-Venant dans l'article précédemment cité, ou de dissocier totalement les deux, comme le fait E. Picard.

Les débats scientifiques auxquels Boussinesq a pris part, le caractère novateur de sa pensée et de ses méthodes l'ont souvent mis dans l'obligation de justifier les procédés qu'il utilise; nous possédons ainsi des textes dans lesquels il affirme la valeur de sa démarche. Le premier de ces textes paraît assez tôt; c'est une justification des hypothèses qu'il utilise dans sa "Théorie nouvelle des ondes lumineuses" de 1868[7]. Nous le citerons lors de l'étude de l'optique de Boussinesq. Le second de ces textes est inclus dans un recueil de textes philosophiques de Boussinesq de 1880, "Étude sur divers points de la philosophie des sciences". Dans ce texte, "Considérations sur le but, la méthode et les principaux résultats de la mécanique physique"[8], Boussinesq expose ses idées sur la mécanique physique, en quelque sorte, l'aspect épistémologique de cette science. Contrairement aux textes sur l'intuition géométrique, et à ceux de son "Étude sur divers points de la philosophie des sciences" qu'il reprendra dans son cours de Physique mathématique[9], les "Considérations (...)" ne reparaîtront pas. C'est, nous semble-t-il, que ce texte est un texte de circonstance. En 1880, Boussinesq, Professeur à la Faculté des sciences de Lille, ambitionne un poste à la Faculté des sciences de Paris, poste qui lui ouvrirait les portes de l'Académie. Déjà en 1876, il avait demandé le dédoublement, à son profit, de la chaire de mécanique physique, mais sa demande n'avait pas été suivie d'effet[10]. Aussi, avec ses "Considérations (...)", essaye-t-il à nouveau de mettre en avant ses compétences, et particulièrement celles en

---

[7] J. Boussinesq, *Note complémentaire au Mémoire précédent-Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résultent des idées exposées au § VI*, in *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, pp.361 à 383.

[8] J. Boussinesq, *Considérations sur le but, la méthode et les principaux résultats de la mécanique physique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, pp. 277 à 310.

[9] J Boussinesq, *Cours de Physique mathématique de la faculté des Sciences*, t. 3, *Compléments aux théories de la chaleur, de la lumière, etc. aperçus de philosophie naturelle*, Paris, Gauthier-Villars, 1921, *Compléments au tome 3, Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale*, Paris, Gauthier-Villars, 1922.

[10] Selon ce que l'on peut comprendre à partir de la correspondance entre Boussinesq et Saint-Venant, pour être admis comme membre de plein droit à l'Académie des sciences, il fallait résider à Paris. Ainsi, Saint-Venant s'étant enquis de la possibilité pour Boussinesq d'entrer à l'Académie des sciences, s'attire cette réponse: "Monsieur Boussinesq est digne, mais le porter sur la liste de présentation serait aussi difficile que de faire de $(-1)^{1/2}$ une quantité réelle. En effet il a une position en Province et un Académicien doit résider à Paris." Et Saint-Venant ajoute: "Poncelet s'est trouvé dans votre cas." (A. de Saint-Venant, *Lettre à Boussinesq*, 23 Juin 1873).

hydrodynamique[11]. Ainsi s'explique la place primordiale que Boussinesq donne à ce domaine de la Physique mathématique:

> "Osons le dire: l'hydrodynamique, comprise de cette manière est une Science aussi étendue, plus variée et non moins utile que la mécanique céleste, quoique son objet ne frappe pas au même degré, par sa grandeur, notre imagination. Elle a d'ailleurs, sur la mécanique céleste, l' avantage d'être encore neuve dans un grand nombre de ses chapitres et d'offrir ainsi un champ des plus vastes aux recherches originales."[12]

Il ajoute en note, ce qui est significatif:

> "Et, cependant, aucune chaire, aucun cours, même accessoire, ne lui est consacrée dans aucun de nos principaux établissements d'enseignement supérieur!"[13]

Boussinesq livre donc dans ce texte ce qu'il croit devoir présenter de sa mécanique physique. Il met souvent l'accent sur les rapports entre la mécanique physique et l'expérience, ainsi que sur l'aspect utilitaire des lois que cette mécanique découvre. Peut-être, après la débâcle de 1871, pense-t-il se concilier les Autorités académiques ou politiques, alors plus soucieuses d'applications pratiques que de spéculations théoriques. Mais l'aspect purement philosophique de sa pensée n'est pas absent, nous le signalerons. Une autre présentation, plus courte, moins dogmatique, mais aussi parfois, dans son imprécision, plus proche de la pratique réelle de Boussinesq, telle que nous la dégageons dans ce chapitre, est donnée dans le début des "Leçons synthétiques (...)". Il est vrai qu'alors (1889) Boussinesq est titulaire de la chaire de mécanique physique et expérimentale à la Faculté des sciences de Paris, et aussi académicien; il n'a plus à justifier la pertinence de ses travaux[14]. Nous utiliserons des extraits des trois textes, pour exposer les grandes lignes de ce que Boussinesq entend par mécanique physique .

---

[11] Parmi les travaux de Boussinesq qui ont alors connu quelque succès, et qui d'ailleurs passeront à la postérité, il y a son "*Essai sur la théorie des eaux courantes*"(1872), mémoire sur l'écoulement de l'eau dans les canaux et les rivières, ainsi que son "*Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents, comparé à celui de massifs solides, et sur les poussées des terres sans cohésion* "(1876), où Boussinesq complète les travaux de Rankine sur la mécanique des masses semi-fluides.

[12] J. Boussinesq, *Considérations sur le but, la méthode et les principaux résultats de la mécanique physique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 306.

[13] ibid., note 2.

[14] Boussinesq est élu à l'Académie le 18 Janvier 1886. Il a été chargé de cours à la Faculté des sciences de Paris "peu de mois avant", mais ne devient titulaire de la chaire qu'en Août 1886.

> "Pourquoi a-t-on été amené à diviser la Mécanique en Mécanique rationnelle et en Mécanique physique? A quoi répond cette distinction?"[15]

Telle est la question que pose Boussinesq dans les premières pages de ses ""Leçons synthétiques (...)". Il répond alors en constatant que la mécanique rationnelle ne s'occupe que de corps, en quelque sorte abstraits: les corps parfaitement rigides et les corps parfaitement fluides. Il est donc nécessaire de fonder une mécanique plus proche de la réalité. C'est là, reprendre la critique de Poncelet que nous avons déjà signalée au premier chapitre[16], mais c'est également se rapprocher de Poisson lorsqu'il se propose de créer, justement, une mécanique physique:

> "Ajoutons qu'il serait à désirer que les géomètres reprissent sous ce point de vue physique et conforme à la nature les principales questions de la mécanique."[17]

Plus loin, dans le même texte, Poisson montre que dans des questions, même simples, de mécanique il est impossible de ne pas tenir compte de l'élasticité des corps[18]. Mais également, dans un passage célèbre, il se propose de reconstruire la mécanique à partir des actions moléculaires mêmes:

> " Lagrange est allé aussi loin qu'on puisse le concevoir, lorsqu'il a remplacé les liens physiques des corps par des équations entre les coordonnées de leurs différents points; c'est là ce qui constitue la *mécanique analytique*; mais à côté de cette admirable conception, on pourrait maintenant élever la *mécanique physique*, dont le principe unique serait de ramener tout aux actions moléculaires qui

---

[15]J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889. p. 2.

[16]Rappelons-en quelques lignes: "J'avais fait remarquer que les théorèmes (...) se rapportaient au fond, à cette mécanique abstraite nommée exclusivement, mais improprement peut-être, mécanique rationnelle, et dans laquelle on introduit certaines hypothèses appartenant à la mécanique des corps durs, tels qu'on l' entendait autrefois." (J. V. Poncelet, *Observations générales sur la question relative aux chocs*, C. R., 44, 1857, p. 83).

[17]S. D. Poisson, *Mémoire sur l' équilibre et le mouvement des corps élastiques*, Annales de Chimie et de Physique, 37, 1828, p. 341.

[18]"Cependant il serait absurde qu'en réalité la charge de chaque pied (d'une table) pût avoir plusieurs valeurs; et, en effet, l'indétermination disparaît lorsque l'on tient compte du degré d'élasticité propre à la matière de la table, et de la flexion qu'elle éprouve, quelque considérable qu'on la suppose", S. D. Poisson, *Mémoire sur l' équilibre et le mouvement des corps élastiques*, Annales de Chimie et de Physique, 37, 1828, p. 3345.

transmettent d'un point à un autre l'action des forces données, et sont les intermédiaires de leur équilibre."[19]

Nous avons vu au chapitre précédent comment Boussinesq prend en compte, par l'intermédiaire de l'énergie, les actions entre atomes. Nous verrons dans ce chapitre comment l'utilisation de l'énergie est également particulièrement pertinente lorsque l'on veut ne pas faire dépendre les démonstrations de considérations sur l'équilibre des molécules. C'est ce qui permettra à Boussinesq de développer sa "Théorie analytique de la chaleur (...)", qualifiée par G. Bachelard de "dynamique", ou encore de découvrir certaines formules d'élasticité en mettant à l'écart les phénomènes thermiques. Bref, particulièrement en mécanique physique, une expression "énergétique" des lois physiques se révélera extrêmement bien adaptée à une vision dynamique de la matière.

Les conséquences de cette théorie de l'énergie se développent au moyen d'atomes représentés par des points matériels. Cette représentation, un pis-aller, est rendue nécessaire par les limitations propres de notre esprit, qui ne saurait avoir d'autres idées claires que celles qui s'enracinent dans le monde géométrique idéal. En mécanique physique, mécanique qui veut prendre en compte la réalité physique, la considération de l'*atome isolé* représenté par un point matériel est de peu d'intérêt, ce sont les propriétés d'ensemble des atomes qui seront à considérer. L'énergie en tant que grandeur physique sera bien adaptée à cette description globale de la matière. Il faut toutefois trouver une image dans le monde géométrique qui rende compte de cette vision totale. D'ailleurs, et c'est ce point qui est particulièrement mis en lumière par Boussinesq, aussi bien dans les "Considérations sur (...) la mécanique physique" que dans les "Leçons synthétiques de mécanique générale", il est humainement impossible de prendre en compte de façon précise la totalité de la réalité:

> "Les moindres faits observables contiennent tant de complications, il y a peut-être aussi une disproportion si radicale entre leurs petits détails et notre intelligence, qu'il nous faut renoncer à saisir les choses absolument telles qu'elles sont. "[20]

Dans la suite de ce texte Boussinesq réaffirme que l' esprit humain ne saisit que l' aspect géométrique des choses, ainsi:

---

[19]ibid., p. 341.

[20]J. Boussinesq, *Considérations sur le but, la méthode et les principaux résultats de la mécanique physique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 284.

"Notre esprit se représente (les choses réelles) et leur substitue, presque sans s'en douter, des objets abstraits, qui en diffèrent fort peu, et dont les notions sont plus simples, c'est-à-dire plus intelligibles ou mieux adaptées à sa forme propre."[21]

Encore faut-il trouver quelque chose dans la nature qui représente le foisonnement des atomes réels: ce sera la moyenne. Cette moyenne présente deux aspects, d'abord celui de "moyenne mécanique", le centre de gravité des molécules, qui représente l'ensemble des atomes qui forment des molécules:

"(Le géomètre) suppose donc réduits à leur centre de gravité les groupes matériels complexes, propres à l' état solide ou caractéristiques des structures fibreuses, cristallines."[22]

Le deuxième aspect de la moyenne est celui de "moyenne dynamique". L'"état moyen" résume l'état de l'ensemble des molécules.

"Le nombre immense des molécules comprises dans les plus petites portions perceptibles de matière permet à ces fragments, en quelque sorte élémentaires pour nous, d'affecter à chaque instant un état moyen, où se trouvent masquées, par une espèce de neutralisation mutuelle, les irrégularités complexes, peut-être inextricables, que présenteraient les détails des phénomènes."[23]

C'est donc la détermination de cet état moyen, à partir des centres de gravité des molécules, qui est l'objet de la mécanique physique. Bien entendu Boussinesq signale la pertinence de cette approche en hydrodynamique; c'est là que cette méthode des moyennes s'est révélée la plus efficace, c'est là qu'il a obtenu un succès majeur. Néanmoins, si l'on met de côté les théorèmes tels que celui de la conservation de la quantité de mouvement ou du moment cinétique, que l'on peut transposer aisément des systèmes de quelques molécules à un nombre quelconque de celles-ci, la cinématique (les équations différentielles du mouvement de chaque particule) reste inconnue et l'établissement des moyennes est impossible. Pour surmonter cette difficulté, Boussinesq quitte la méthode de Poisson pour se rapprocher de celle de Fourier. C'est ainsi qu'il déclare:

"L'étude des principales espèces des corps, fluides, solides, plastiques, pulvérulents, ou des classes de mouvements qui présentent le plus d'intérêt, devient possible au moyen de tout autant de principes simples, directement empruntés à l' expérience, et qui, pour chaque cas,

[21] ibid., p. 284.
[22] ibid., p. 279.
[23] ibid., pp. 278 et 279.

nous tiennent lieu de la connaissance détaillée des circonstances multiples dont nos sens ne nous révèlent que l'effet général."[24]

Ceci rappelle la célèbre phrase de Fourier à propos de sa "Théorie analytique de la chaleur":

> "Les principes de cette théorie sont déduits, comme ceux de la mécanique rationnelle, d'un très petit nombre de faits primordiaux, dont les géomètres ne considèrent point la cause, mais qu'ils admettent comme résultant des observations communes et confirmés par toutes les expériences."[25]

Cette référence de Fourier à des faits primordiaux fondateurs de sa théorie de la chaleur est étendue par Boussinesq à l'ensemble de la mécanique physique. Dans la suite du chapitre nous indiquerons ces faits fondateurs, quand Boussinesq les utilise[26]. Auparavant, il faut se demander si Boussinesq adhère totalement aux propos de Fourier que nous venons de citer, propos dans lesquels on a pu voir une sorte de manifestation du positivisme[27].

Si nous nous reportons maintenant au passage des "Leçons synthétiques (....)" qui expose la même idée, nous retrouvons une formulation légèrement différente:

> "Le but spécial de la mécanique physique lui impose donc l'obligation de moins s'abandonner à la tendance spéculative, et de se tenir plus près des faits d'observation, que ne le fait la mécanique rationnelle. Elle devra, par conséquent, recourir un peu moins rarement à l 'expérience. Mais ce ne sera que pour établir quelques principes très simples, presque évidents au premier coup d'œil attentif jeté sur les choses."[28]

---

[24]ibid., p. 280.

[25]J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, Firmin Didot, 1822, J. Gabay, 1988, p. xj.

[26]Dès maintenant, indiquons l'idée des principes fondateurs de l'hydrodynamique, de l'élasticité et de la théorie de la chaleur. Celui de l'hydrodynamique consiste à supposer que, dans les liquides en mouvement, à la pression hydrostatique s'ajoute une force due au mouvement des molécules. En élasticité, on suppose que les contraintes peuvent se calculer au moyen de six déformations (trois dilatations et trois glissements). Pour la théorie de la chaleur, on suppose que le flux calorifique est proportionnel à la variation de température. Résumé à partir de: J. Boussinesq, *Considérations sur le but, la méthode et les principaux résultats de la mécanique physique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, pp. 280 à 284.

[27]G. Bachelard, *A. Comte et J. Fourier*, in *Etude sur l'évolution d'un problème de physique*, Paris, Alcan, 1° éd, 1927, Paris, Vrin, 1973 , pp. 55 à 72.

[28]J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 4.

C'est le mot " établir" qui nous semble marquer la différence entre les deux textes. S'agit-il d'établir ces faits directement par des observations ou s'agit-il d'établir de façon mathématique des résultats constatés par l'expérience, et de leur conférer une certaine rationalité? Dans le premier cas, ces faits fondateurs sont bien révélés par l'expérience et il n'y a pas lieu de remonter plus haut; ce sont les véritables prémisses du raisonnement. Dans le second cas, ces principes sont bien issus de l'expérience, mais aussi ils peuvent être déduits de lois plus générales, la mécanique physique entre alors dans le cadre d'une science positive, c'est-à-dire déduite mathématiquement de principes indiscutables. Alors, cette nécessité de recourir à quelques faits déduits de l'expérience n'est peut-être qu'un état provisoire de la science, état qui est dû aux imperfections de l'analyse. C'est ce que suggère le texte suivant de 1872:

> "L'impossibilité où l'on s'est trouvé jusqu'ici, faute de moyens analytiques assez puissants et faute aussi de données expérimentales suffisantes, d'introduire, dans la plupart des théories physiques les actions élémentaires exercées d'atome en atome à des distances imperceptibles, n'empêche pas ces théories de satisfaire l'esprit, quand elles sont basées d'ailleurs sur des hypothèses simples et vraisemblables."[29]

L'idéal proche de celui de Poisson, la réduction de la mécanique à la considération de forces "d'atome en atome", peut rester celui du géomètre. Le rôle accordé à la partie empirique de la mécanique est mineur, comme l'affirme Boussinesq dans une lettre à Saint-Venant:

> "Quant à la nécessité de faire appel aux faits, ma théorie n'en a besoin, comme toutes les théories <u>physico-mathématiques sans exception</u> (souligné par Boussinesq), que pour savoir dans quelles limites les lois (lois limites) trouvées théoriquement, sont pratiquement applicables.[30]

Ici Boussinesq semble suggérer que les faits fondateurs des diverses branches de la mécanique physique, faits tirés de l'expérience, ne joueraient qu'un rôle mineur. Leur importance pourrait être de définir le domaine de la mécanique physique sur lequel le géomètre est en train de travailler. C'est ce que semble indiquer le passage suivant:

---

[29] J. Boussinesq, *Note complémentaire au Mémoire précédent*, in *Recherches sur les principes de la Mécanique-Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résultent des idées exposées au § VI*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, <u>18</u>, 1873, p. 367.

[30] J. Boussinesq, *Lettre à Saint-Venant*, 6 Janvier 1877.

" De tels principes, suggérés par l' expérience, sont en quelque sorte, pour le géomètre, la définition du corps de phénomènes qu'il étudie."[31]

Alors, ces principes découpent l'Univers de la mécanique physique en provinces. Si l'ensemble de l'Univers est régi par des principes généraux - la loi de conservation de l' énergie, la loi de continuité des fonctions, la loi de l'indépendance des mouvements simultanés - chaque province est gouvernée par des principes spéciaux - comme la dépendance du flux calorifique avec la température pour le domaine calorifique par exemple - qui en fixent les particularités.

Si l'on veut situer l'œuvre de Boussinesq dans le cours de l'Histoire de la Physique, il convient de savoir si l'on doit la rattacher directement à la tradition de Poisson, celle qui consiste à faire débuter le raisonnement par la prise en compte des actions moléculaires, ou bien s'il faut plutôt la rattacher directement à la conception que Fourier expose dans la citation donnée ci-dessus. L'étude des trois textes que nous avons précédemment utilisés, de par leur caractère polémique ou didactique, ne nous renseigne pas suffisamment sur la méthode de Boussinesq. Il faut consulter ses écrits proprement scientifiques de façon précise. C'est ce que nous ferons à partir d'un choix de mémoires qui nous semblent représentatifs, choix que nous justifierons dans le paragraphe suivant. Nous caractériserons en cours d'étude la méthode de Boussinesq en mécanique physique; chemin faisant, nous soulignerons l'homogénéité de ses procédés de démonstration. Nous avons montré la persistance des idées épistémologiques principales de Boussinesq au cours de sa longue existence; nous montrerons l'évolution d'une de ses conceptions scientifiques, c'est-à-dire le passage d'une vision de la nature où la considération de l'équilibre est primordiale à celle où la prise en compte du mouvement est premier. C'est ce que nous nommerons le passage d'une vision statique du monde à une vision dynamique.

Une fois le champ de la recherche défini, il convient de déterminer les lois physiques elles-mêmes. C'est là plutôt, dans la tradition de la physique mathématique classique française, celle de Laplace, Poisson, Fourier, Lamé, une affaire d'analyse. C'est ce qu'affirme aussi Boussinesq:

"(La physique mathématique) gardera son caractère dominant de science mathématique; car elle déduira de ces quelques faits primitifs, grâce au principe fécond de continuité avec lequel nous a familiarisés

---

[31] J. Boussinesq, *Considérations sur le but, la méthode et les principaux résultats de la mécanique physique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 282.

l'analyse infinitésimale, tout un vaste ensemble de lois particulières et précises que les phénomènes confirmeront."[32]

Les méthodes de cette déduction mathématique sont détaillés de façon plus précise dans les "*Considérations sur(...)la mécanique physique*":

"(Ces principes), combinés d'une part à la grande loi de continuité, qui s'applique à l' état moyen local affecté par la matière aux divers endroits et aux divers instants, d'autre part avec les lois non moins importantes de la conservation de la quantité de mouvement, des moments, des force vives, qu'on emploie pour connaître à chaque instant l' état moyen de très petits volumes matériels découpés par la pensée dans le corps, ces principes particuliers donnent prise à l'analyse. Et celle-ci, par l'application de ses méthodes générales, surtout par l'emploi des séries de Taylor, en déduit tout un vaste corps de lois précises, aussi intéressantes pour le praticien que pour le savant."[33]

Cette partie de l'œuvre de Boussinesq, partie proprement déductive, nous intéressera moins, elle est plus affaire de calcul mathématique que d'idées physiques. La partie précédente ayant déjà mis en évidence ce qui nous semble caractéristique de la méthode de Boussinesq, pour le dire nettement le recours constant à l'intuition, nous ne traiterons de la déduction mathématique des lois que dans la mesure où elle nous semble présenter des particularités intéressantes.

Quel que soit le niveau auquel Boussinesq commence ses raisonnements, niveau de l'atome ou niveau des principes spéciaux propres à chaque domaine, la mécanique physique prend le caractère d'une déduction mathématique. C'est ce qui fait écrire à Boussinesq:

"C'est ainsi qu'elle (la mécanique physique) édifiera ce qu'on peut appeler la *Géométrie de la Nature*, non moins belle, même au point de vue abstrait, que la Géométrie toute idéale des analystes purs."[34]

Cette dénomination de *Géométrie de la Nature* qualifie à la fois la méthode de Boussinesq et situe sa mécanique physique par rapport aux autres sciences. Nous allons voir dans la suite de ce chapitre que Boussinesq utilise des "images" susceptibles d'être dessinées, par

---

[32] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 4.

[33] J. Boussinesq, *Considérations sur le but, la méthode et les principaux résultats de la mécanique physique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série,p. 282.

[34] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 4.

exemple des "courants de chaleur" qui sont comme des flots d'énergie, des parallélépipèdes qui se déforment, des projections. Il considère aussi comme explication géométrique, une explication qui met en jeu le travail; en effet, le travail est le produit d'une longueur par une force, elle-même dérivée de l'énergie, grandeur définie par des considérations géométriques. La mécanique physique mérite bien, pour Boussinesq, le qualificatif de géométrie. La citation d'où est extrait ce terme se trouve dans les "Leçons synthétiques (...)", et donc s'adresse à des non-spécialistes. Boussinesq doit utiliser le langage courant de l'époque; c'est ce qui nous a amené à consulter les dictionnaires spécialisés d'alors. Voici ce que l'on trouve dans l'un d'eux[35]:

> Article Mathématiques:
> "Les sciences mathématiques ont pour objet les propriétés des nombres et celles de toutes les grandeurs en tant qu'elles peuvent être mesurées ou exprimées par des nombres. On les divise en mathématiques pures et mathématiques appliquées. Les premières embrassent l'arithmétique, l'algèbre, le calcul infinitésimal, la géométrie. Dans les mathématiques appliquées on range la mécanique, l'astronomie théorique, la physique mathématique, le calcul des probabilités."[36]

Il semble donc que les sciences ayant quelque rapport avec la mécanique physique soient nettement séparées de la géométrie, vue ici comme une branche des mathématiques pures. En réalité, le cas de la géométrie est plus compliqué:

> "En toute rigueur les mathématiques pures pourraient être réduites à ce que l'on nomme aujourd'hui l' analyse. La géométrie serait alors placée dans les mathématiques appliquées, car son objet n'est pas purement abstrait. Néanmoins, le petit nombre et la simplicité des principes qu'elle emprunte à l'expérience, la facilité avec laquelle on peut concevoir l'étendue indépendamment des corps donnent à la géométrie un caractère d'abstraction auquel elle doit sa rigueur, et qui l'a fait ranger dans les mathématiques pures."[37]

La géométrie ainsi décrite emprunte à l'expérience mais emprunte peu. C'est aussi le cas de la mécanique physique de Boussinesq, qui cependant doit emprunter plus à la réalité que la mécanique dite "rationnelle". En ce sens le terme Géométrie doit être qualifié au moyen de son objet: ce sera donc une *Géométrie de la Nature* . L'analogie entre la géométrie et la mécanique physique de Boussinesq est encore accrue par le rôle qu'y joue l'espace. Selon H. Sonnet l'espace de la géométrie

---

[35]H. Sonnet, *Dictionnaire des mathématiques appliquées*, Paris, Hachette, 1871.
[36]ibid., p. 1039.
[37]ibid., p. 1039.

est abstrait. Nous avons vu que, pour Boussinesq, si l'espace physique, celui dans lequel se trouvent les corps, est bien l'espace de sa mécanique, celle-ci doit supposer un espace absolu, abstrait, "logiquement antérieur", qui seul permet de déterminer quelle est la loi physique la plus simple et donc la vraie loi de la nature. C'est effectivement là une nouvelle analogie entre la Géométrie mathématique et la Géométrie de la Nature. La mécanique physique est donc bien une géométrie. Alors que la Géométrie en quelque sorte "pure", embrasse l'infini des possibles, la mécanique physique, "Géométrie de la Nature", ne décrit que l'un de ces possibles réalisés. C'est ce que Boussinesq exprime dès le début de sa carrière et aussi à la fin de sa vie:

> "Celles-ci (les quantités idéales du géomètre) épuisant les catégories du possible, expriment en quelque sorte, la *Toute puissance*[38] dans l'ordre des idées qui les concerne, tandis que les quantités réelles se réfèrent uniquement à la création présente, ou à un ordre de choses effectif, nullement tenu d'épuiser l'idée et d'égaler sa cause."[39]

De même que le monde géométrique idéal fournit l'ensemble des êtres géométriques qui servent à décrire le réel; la déduction analytique fournira les lois qui régissent les phénomènes. Mais ici se produit une complication: les phénomènes que nous observons sont rarement uniques, il y a toujours plusieurs phénomènes qui se produisent en même temps. Il est impossible d'isoler l'action d'une seule loi agissant dans la nature. Boussinesq cite le cas des déformations élastiques telles que la flexion ou la torsion. De telles actions ne sont pas produites par des forces ou des couples purs:

> "Ces actions, aux endroits mêmes où elles sont appliquées, produisent des déformations très complexes, variables suivant que la tige est sollicitée au moyen de tenailles, ou d'autres tiges soudées à la première, ou de liens de différente nature."[40]

---

[38]Rappelons que dans la lettre à Saint-Venant (16 Juillet 1968), Boussinesq parle de la "toute puissance divine", ce qui correspond sans doute à sa pensée profonde.

[39]J. Boussinesq, *Comment peut s'expliquer l'exercice instantané de la pesanteur et des actions moléculaires, à toutes les distances où se produisent ces forces*, C.R., 154, 1912, pp. 738 à 742. Aussi: J. Boussinesq, *Comment peut s'expliquer l' exercice instantané de la pesanteur et des actions moléculaires, à toutes les distances où se produisent ces forces*, in *Cours de physique mathématique de la faculté des sciences*, Paris, Gauthier-Villars, t. 3, 1921, pp. 290 à 298.

[40]J. Boussinesq, *Considérations sur le but, la méthode et les principaux résultats de la mécanique physique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 288.

Ce que l'esprit humain conçoit comme la torsion ou la flexion, ne se réalise jamais dans la nature, une flexion pure ou une torsion pure n'existe pas:

> "La nature ne réalise donc ces phénomènes si importants que d'une manière approchée ou asymptotique; et leurs vraies lois, leurs *lois naturelles,* ne sont par suite que vérifiées approximativement."[41]

La loi naturelle, pour Boussinesq, est donc la loi qui régirait un phénomène si celui-ci se produisait seul. Les lois exactes des phénomènes bruts ne sont pas connues, ni même peut-être connaissables.

> "Quant aux lois exactes des phénomènes bruts, lois inconnues et sans doute inextricables, elles se rapportent à des modes de déformations qui ne sont, à proprement parler, ni de simples extensions ni des flexions, ni des torsions, ni même les combinaisons de ceux-là."[42]

Certes, il se produit des cas où la nature "épure" suffisamment les phénomènes pour que la vraie loi d'un phénomène donné apparaisse. Tel est le cas des phénomènes astronomiques qui, à cause des grandes distances interstellaires et de la petitesse du rayon des planètes, peuvent être décrits à partir d'un repère d'étoiles supposées fixes, et de sphères parfaites[43]. Tel n'est pas le cas général de la mécanique physique. Pour reconnaître les lois naturelles dans l'enchevêtrement des phénomènes, l'esprit agit comme une sorte de filtre ou de caisse de résonance. Là encore nous n'avons conscience des phénomènes de la réalité physique que s'ils éveillent en nous des images ou des relations du monde géométrique idéal:

> "Ces phénomènes, en d'autres termes ne nous intéressent, ils ne nous sont même intelligibles, qu'à la condition de reproduire assez fidèlement les traits de certains objets simples de l'ordre géométrique idéal, vrai domaine immédiat de l' esprit, et à la faveur de la clarté qu'ils leur empruntent par suite de la ressemblance reconnue."[44]

La "Géométrie de la Nature" ne saurait être totalement objective, elle ne saurait se passer de sujet connaissant:

> "Mais toute science porte l'empreinte du sujet connaissant, et une loi n'est naturelle qu'à la condition de se trouver tout à la fois, dans la

---

[41] ibid., p. 289.
[42] ibid., p. 285.
[43] ibid., p. 287.
[44] ibid., p. 286.

mesure du possible, conforme à la nature de notre esprit et à la nature même des choses."[45]

L'habituel mystère de l'adéquation des mathématiques avec la nature physique est résolue par Boussinesq dans le cadre de ses croyances propres, et aussi de l'ambiance leibnizienne de l'épistémologie de l'époque:

"Cette ressemblance de deux objets d'ordre pourtant bien différent est l'expression d'une sorte de parenté qui les relie et qui relève et ennoblit le fait physique."[46]

On songe à l'harmonie préétablie de Leibniz. De même que la similitude des deux ordres n'est clairement évidente, pour Leibniz, que pour un Dieu de perfection, de même la parenté entre les deux ordres de phénomènes n'échapperait pas, pour Boussinesq, à une intelligence parfaite:

" Elle n'échapperait donc pas (cette parenté) à une intelligence supérieure qui, douée d'une connaissance également parfaite des deux ordres de réalité, les jugerait l'un et l'autre tels qu'ils sont et ne serait pas réduite, comme nous à ne comprendre les choses physiques qu'à la lumière des conceptions géométriques abstraites."[47]

Dégager les lois naturelles, telle doit être, dans la mesure du possible, l'ambition du géomètre mais aussi celle de l' ingénieur. En effet, il n'y a pas seulement une harmonie entre le monde géométrique idéal et la monde matériel, mais aussi entre les réalisations de l'homme et son sens intime:

---

[45]ibid., p. 287.

[46]ibid., p. 287.

[47]ibid., p. 287. Ce passage est à rapprocher de celui qui décrit le passage de l'abstrait au concret: "Et c'est ainsi que, remplissant l'univers physique de nos conceptions, nous transportons, presque sans nous en douter, dans un monde concret très complexe et qui nous dépasse, les notions les plus simples du monde géométrique perçu en toute clarté par notre raison. Heureusement, grâce à l'harmonie des divers ordres de choses, ou si l'on veut, au degré déjà très haut de notre adaptation au milieu qui nous voit naître, les faits justifient cette intelligibilité de la nature: ils montrent que l'univers physique a des lois, surtout des lois quantitatives, et que ces lois sont traduisibles mathématiquement comme les objets eux-mêmes, c'est-à-dire comportent des expressions analytiques aussi approchées que le sont des vrais objets leurs types géométriques ou idéaux, sous le rapport des formes et des grandeurs mesurables", in J. Boussinesq, *Sur le passage de l' abstrait au concret, dans les applications de l'analyse des mathématiciens aux réalités physiques*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, pp. 329 et 330.

"Par exemple, quand un ingénieur doit construire un canal, le sentiment esthétique, indice des préférences de l'esprit, et les raisons d'utilité, d'économie, de durée de l'œuvre, expressions des rapports multiples entre les choses, s'accordent pour lui faire donner au canal la forme prismatique ou cylindrique, qui est géométriquement la plus simple, et qui se prête aussi aux modes d'écoulements les moins compliqués, les plus accessibles à notre analyse."[48]

C'est donc de façon résolument optimiste que Boussinesq considère sa mécanique physique. L'adéquation entre le monde idéal géométrique et le monde physique, simplement postulée dans le cadre de la mécanique générale, se trouve présente même dans les réalisations humaines. Il y a là de bonnes raisons pour croire à la pérennité de la mécanique que nous appelons maintenant classique.

Dans la suite de ce chapitre nous montrerons, en quelque sorte, Boussinesq aux prises avec la réalité, c'est-à-dire essayant de géométriser des phénomènes déjà en partie explorés mathématiquement. Il fallait croiser cette préoccupation de description avec les caractéristiques de la mécanique physique que nous avons mentionnées. Nous choisirons donc des textes où chacun met en évidence une de ces caractéristiques.

I . 2 . Importance de la théorie de l'élasticité dans l'œuvre de Boussinesq

Les théories de l'élasticité jouent un rôle important dans la Physique mathématique de la seconde moitié du XIX° siècle. L'élasticité englobe non seulement l'étude de l'équilibre et des déformations des solides, mais aussi celle de l'équilibre et des mouvements des liquides. L'hydrostatique et l'hydrodynamique entrent donc dans le champ de l'élasticité. Ces diverses branches de la Physique mathématique sont aussi, à cette époque, le lieu où se déroulent d'importantes controverses mettant en cause les bases mêmes de la mécanique newtonienne. En optique, même si autour du milieu du XIX° siècle certains, comme Biot, défendent la théorie de l'émission, la théorie "des ondulations" de la lumière s'impose[49]. Dans ce "système des ondulations"[50], après les travaux de Fresnel, l'optique apparaît comme l'application des lois de l'élasticité à un milieu particulier: l'éther, qu'il soit libre, dans le vide, ou inclus dans des corps transparents ou opaques. La propagation de la chaleur échappe aux équations de l' élasticité. Elle fait l'objet de théories mécaniques qui, dépassant les visées de Fourier, se fondent sur les lois

---

[48]ibid., p. 294.

[49]Abbé Moigno, *Répertoire d'optique moderne*, Paris, Leipzig, A. Franck, 1847, t. 1, pp. 1 à 289.

[50]ibid.

de l'équilibre et du mouvement, mais ont comme équation fondamentale celle qui traduit l'équivalence de la chaleur et du travail. De plus la chaleur obscure, le rayonnement invisible qui transporte la chaleur, s'avère être de même nature que la lumière visible, c'est un défi pour les physiciens que d'établir la liaison entre l'optique, théorie de la lumière qui est une théorie de l'élasticité, et la théorie de la chaleur qu'il conviendra d'établir. C'est là un sens que l'on peut donner au texte de Lamé, que nous avons cité au paragraphe V du premier chapitre, et qui concerne la recherche d'un grand principe unificateur de la physique mathématique.

Boussinesq est intervenu, entre autres, dans ces divers secteurs de la Physique mathématique. L'élasticité, par la position centrale qu'elle a dans la Physique mathématique de l'époque, joue donc un rôle important, au moins sur le plan des idées, au sein de sa mécanique physique. Nous organiserons donc ce chapitre comme suit. A partir de l'étude de certains aspects de la théorie de l'élasticité (en y incluant l'hydrodynamique) nous montrerons la profonde cohérence entre l'œuvre scientifique Boussinesq et sa théorie de la science. Mais sa Physique mathématique n'est pas une simple réflexion philosophique. Boussinesq propose aussi des solutions efficientes à divers problèmes en Physique, solutions qui l'amènent implicitement à prendre part dans le débat sur les forces centrales newtoniennes. La théorie de Boussinesq de la propagation de la chaleur dans les solides a été analysée par G. Bachelard[51]. Nous nous situerons par rapport à celui-ci et étudierons particulièrement la notion de flux calorifique dans cette partie de l'œuvre de Boussinesq.

Boussinesq décrit ainsi, en 1880, la constitution de la théorie de l'élasticité:

> "La plus importante (des théories qui composent, outre l'hydrodynamique, la mécanique physique) est la théorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Elle comprend: 1° l'étude générale de la manière dont les pressions intérieures, dans ces corps, dépendent en chaque endroit des petites déformations, suivant les diverses contextures internes de la matière et aussi d'après le principe de conservation de l'énergie; 2° l'étude des conditions d'équilibre et des équations des petits mouvements, ainsi que leur intégration dans quelques cas simples; 3° et surtout l'application de ces formules générales à la démonstration des lois de l' extension, de la

[51] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, t. 1, *Principes généraux*, Paris, Gauthier-Villars, 1901, t. 2, *Refroidissement et échauffement par rayonnement et conductibilité des tiges, lames et masses cristallines*, Paris, Gauthier-Villars, 1903.

flexion et de la torsion des corps allongés, afin de rendre rationnel l'enseignement de toute une grande section de la mécanique appliquée."[52]

Ce qui précède définit, en quelque sorte, la manière dont Boussinesq conçoit l' étude de l' élasticité.

La phrase notée 1° indique que les aspects fondamentaux que l'on doit prendre en compte sont, d'une part d'ordre géométrique (les contextures internes de la matière) et d'autre part énergétiques (le principe de conservation de l'énergie). La référence aux contextures internes de la matière, c'est-à-dire à son homogénéité ou hétérogénéité, son isotropie ou anisotropie, renvoie aux caractéristiques de symétrie que peut avoir la substance considérée et donc à la pure géométrie. De nombreux exemples de cette façon de considérer les problèmes d'élasticité sont présents dans l'œuvre de Boussinesq, nous en verrons quelques-uns. Le second aspect, l'aspect énergétique, relève, lui aussi, de la géométrie. Que l'on se souvienne, en effet, de ce que nous avons montré au chapitre 2: la conservation de la masse et la conservation de l'énergie sont des conséquences de l'isotropie de l'espace; ici encore, la théorie de l'élasticité de Boussinesq est bien fondée sur la géométrie. L'analyse va donc pouvoir déduire rationnellement de considérations géométriques les lois qui éventuellement seront celles de la réalité physique. C'est l'expérience, et même l'observation commune, qui déterminera la pertinence de ces lois. Comme nous l'avons déjà vu, les forces dérivent de la considération de l'énergie, et donc de la considération géométrique de la matière, puisque pour Boussinesq la conservation des forces vives est une conséquence de l'uniformité de l'espace. C'est donc bien, conformément à la théorie de la connaissance de Boussinesq, la géométrie du monde idéal qui gouverne la théorie de l'élasticité.

La seconde phrase - 2°- intègre justement les pressions dans l'expression des conditions de l'équilibre et du mouvement des solides et des fluides, mais ce n'est que "dans quelques cas simples". Si nous rassemblons divers textes de Boussinesq, tant relatifs à l'élasticité des solides qu'à l'hydrodynamique, nous voyons que les lois de l'élasticité ainsi déduites ne concernent pas seulement les solides mais aussi les fluides, ce qui est assez général à l' époque et même de nos jours. Les lois de l'élasticité sont donc communes aux fluides et aux solides. La démonstration d'une formule générale de l'élasticité, applicable à la fois aux solides et aux fluides, suppose, pour Boussinesq, que l'on puisse déduire d'une même loi primitive, celle des actions entre molécules, les lois de l'élasticité des solides et des fluides. Ce sont, comme nous le

---

[52] J. Boussinesq, *Considérations sur le but, la méthode et les principaux résultats de la mécanique physique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, pp. 306 et 307.

montrerons[53], les actions de présence qui autorisent cette démonstration.

De là, Boussinesq emprunte deux voies complémentaires:

-celle qui consiste à expliquer, surtout qualitativement, les caractères de solidité et de fluidité des corps;

-et celle qui consiste à déduire les formules de l'élasticité généralement admises à l'époque, et même encore aujourd'hui, les équations de Lamé en quelque sorte perfectionnées, de considérations, soit purement géométriques, soit énergétiques[54].

La première de ces voies nous conduira jusqu'en 1891 où une passe d'armes oppose Boussinesq à M. Brillouin quant à l'antériorité de l'explication dynamique de la fluidité[55]. La seconde nous conduira à considérer, outre les démonstrations de l'élasticité, certains aspects de l'hydrodynamique de Boussinesq[56].

Dans la troisième partie de sa présentation de l'élasticité -3°-, c'est l'aspect pratique de la théorie de l'élasticité qui est mise en avant par Boussinesq. Les formules déduites des considérations précédentes doivent maintenant entrer dans le domaine de la mécanique appliquée, domaine qu'elles doivent rationaliser et rendre ainsi accessible au plus grand nombre de praticiens. Et ainsi ces formules doivent montrer leur efficacité, elles doivent guider l'Ingénieur dans l' exercice de son Art, elles sont les garantes de la solidité des ouvrages[57]. Boussinesq signale

---

[53]Nous examinerons tout particulièrement le bref article suivant: J. Boussinesq, *Note sur l'action réciproque de deux molécules*, C. R., 65, 1867, pp. 44 à 48.

[54]G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l' élasticité des corps solides*, 1° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1852, 2° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1866.

G. Bruhat, *Mécanique*, 6° éd, révisée par A. Foch, Paris, Masson, 1961.

L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie de l'élasticité* (*Physique théorique*, t. 4), Moscou, Mir, 1967.

[55]M. Brillouin, *Théorie élastique de la plasticité et de la fragilité des corps solides*, Note, C.R., 112, 1891, pp. 1054 à 1056.

J. Boussinesq, *Sur l'explication physique de la fluidité*, C.R., 112, 1891, pp. 1099 à 1102.

[56]J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des ondes liquides périodiques*, Extrait de l'auteur, C.R., 78, 1869, pp. 905 à 906.

J. Boussinesq, *Théorie des ondes liquides périodiques*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France (Recueil des savants étrangers de l' Académie des sciences de Paris), 20, 1872, pp. 509 à 615.

[57]Parmi les maîtres de cet art, sans conteste, Saint-Venant occupe la première place. Boussinesq minimise dans ce texte, me semble-t-il, l'importance historique de Saint-Venant. Ce dernier est non seulement le "créateur de la théorie de la torsion", mais aussi le rénovateur de ce que l'on peut appeler l'élasticité appliquée, celui qui a eu la volonté d'allier le calcul à l'expérience. On peut citer ici l'opinion d'un contemporain de la fin de la vie de Saint-Venant, Isaac Todhunter, praticien de l' élasticité, auteur d'une Histoire de cette discipline (I. Todhunter, *A history of elasticity and of strength of materials*, 1° éd, Vol. I, 1886, Vol. II, part 1 and 2, 1893, re-ed. New York, Dover, 1960). Voici deux extraits de cette Histoire:
"Les ingénieurs tels Robison et Vicat étaient déçus par les théories mathématiques et invoquaient ce que Saint-Venant a très justement appelé *l'appréciation de sentiment*" (vol. 2, part 1, p.834).

ce qu'il considère comme sa propre contribution à la théorie de l'élasticité dans ce domaine dans une note de bas de page:

> "Il restait cependant, pour rendre entièrement rationnelle la théorie fondamentale de M. de Saint-Venant, à démontrer par les équations générales de l'élasticité ce fait, choisi par lui comme point de départ, que dans une tige longue, les fibres longitudinales n'exercent sensiblement, les unes sur les autres, que des actions dirigées suivant leur tangente."[58]

Cette proposition sur l'action des fibres est prise par Saint-Venant, Clebsch, Kirchhoff, Thomson et Tait comme un postulat, Boussinesq la démontre rationnellement, ici encore par des considérations géométriques[59]. Boussinesq ne signale pas ses travaux sur les contours des plaques qui sont pourtant jugés par Todhunter comme une contribution importante de Boussinesq et Saint-Venant à la théorie de l'élasticité[60]. Peut-être est-ce une reconnaissance de l'antériorité des découvertes de Thomson et Tait sur le même sujet? A ces travaux il faut ajouter la monumentale *"Application des potentiels à l' étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques"* (1885). Dans ce volumineux ouvrage (722 pages) Boussinesq franchit un pas nouveau

---

L'élasticité appliquée fait donc une grande place à l'intuition, à l'expertise, les mathématiques peuvent sembler de peu de secours. Todhunter cite un extrait du *"Cours lithographié"* des *"Leçons de mécanique appliquée faites par intérim par M. de Saint-Venant, Ingénieur des ponts et chaussées"* de 1837 à 1838.
"L'usage des mathématiques cessera de s'attirer des reproches si on le renferme dans ses vraies limites. Le calcul pur est simplement un instrument logique tirant des conséquences rigoureuses de prémisses posées souvent contestables. La mécanique y joint quelques principes physiques que l'expérience a mis hors de contestation, mais elle laisse aux expériences particulières le soin de déterminer quelles forces sont en jeu dans chaque cas, et il règne toujours à cet égard plus ou moins d'incertitude qui affecte nécessairement le résultat. (Ce sont) des renseignements extrêmement précieux et dont on ne doit jamais se priver, car il est extrêmement utile à la détermination que l'on a à prendre, de connaître la solution exacte d'un problème fort approché de celui qui est proposé. (...) De cette manière le champ de l'appréciation instinctive se trouvera réduit aux différences qui ne peuvent pas être le sujet du calcul théorique" (vol. 2, part. 1, p. 834).

[58] J. Boussinesq, *Considérations sur le but, la méthode et les principaux résultats de la mécanique physique*, in, *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des lettres de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 307.

[59] J. Boussinesq, *Etude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres. Premier mémoire: Des tiges*, C. R., 72, 1871, p. 407.

J. Boussinesq, *Complément à une étude de 1871 sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres. Première partie: Des tiges. Deuxième partie: Des plaques*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 15, 1879, pp. 163 à 194, et 329 à 344.

[60] J. Boussinesq, *Sur les conditions spéciales au contour des plaques*, C. R., 86, 1876, p. 304.

dans la manière de traiter les problèmes d'élasticité: il réinvente, après Lamé, des potentiels qui, différents des potentiels classiques (newtoniens par exemple) rendent compte des déformations des solides, même quand les actions qui agissent sur eux prennent naissance à l'intérieur de leur matière[61]. On doit encore ajouter à ces études d'élasticité pratique, celles qui portent sur l'équilibre des masses pulvérulentes. Boussinesq, poursuivant les travaux de Rankine, fonde une nouvelle science: celle des corps demi-fluides. Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, les travaux mentionnés dans ce paragraphe méritent, par leur intérêt scientifique, leur implication historique, une étude dont l'ampleur dépasserait les limites de notre travail. Par contre ils n'apportent que peu d'informations sur la conception de la science de Boussinesq, nous ne les étudierons donc pas.

Les conceptions épistémologiques de Boussinesq se montrent étroitement liées aux considérations pratiques dans son considérable "Essai sur la théorie des eaux courantes", peut-être son œuvre la plus pérenne. Boussinesq y résout un certain nombre de problèmes cruciaux pour la construction des canaux, des écluses, des réservoirs. Il donne ainsi des formules sur les divers types d'écoulements de l'eau, mais aussi sur la houle, les clapotis, phénomènes si importants dans la conception de la carène des navires. Cet "Essai (...)" sera évoqué dans le second paragraphe[62].

II . Les actions de présence comme explication des équations de l'élasticité de Lamé

Nous avons déjà signalé l'importance des actions de présence dans la définition de l'énergie par Boussinesq si l'on considère la cohérence que doit avoir son expression de l'énergie potentielle. Les allusions à ces actions de présence sont discrètes, même si Boussinesq affirme leur importance, dans ses "Recherches sur les principes de la mécanique (...)" de 1872. La discrétion de Boussinesq à ce sujet s'explique facilement. Il y a d'abord l'hostilité plus que résolue de Saint-Venant. Cette hostilité traduit celle de tous les partisans de la physique moléculaire que nous appellerons "traditionnelle", celle de Poisson, Laplace, et bien sûr Saint-Venant. Pour ce dernier au moins, l'atome est, ne peut être, pour des raisons autant rationnelles que physiques, qu'un atome ponctuel, et donc les actions entre deux atomes ne peuvent se faire que suivant la droite qui les joint. Les mystérieuses actions de présence qui influent sur les interactions entre deux atomes sans se trouver sur la ligne qui

---

[61] J. Boussinesq, *Application des potentiels à l'étude des mouvements des solides élastiques*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 13, 4° série, 1885.

[62] J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France (Recueil des savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris), 23, 1872, p. 1 à 680, additions, même revue, 24, pp. 1 à 64.

les relie troublent le bon ordre géométrique de la mécanique. Un texte paraît, en 1867, où Boussinesq utilise implicitement ces actions de présence. Il y prend parti pour les équations de l'élasticité des corps homogènes d'élasticité constante à deux coefficients, ou équations de Lamé. Cela lui permet d'expliquer la fluidité. Bien des années plus tard, en 1891, Boussinesq reprend ses explications sur l'élasticité des fluides; alors nous verrons comment, dans ce cas, les actions de présence ont été remplacées par une vision dynamique du comportement des molécules, la force en son sens newtonien a disparu, seul reste le mouvement.

II . 1 . Problèmes de la théorie de l'élasticité au moment où Boussinesq utilise les actions de présence

Nous désignerons sous le terme de "forces centrales", des forces ou des actions entre deux molécules qui, géométriquement, sont décrites comme issues de points, qui s'exercent suivant la droite qui les joint, et dont l'intensité ne dépend que de la distance les sépare. Cette dépendance peut être de la forme $1/r^n$ ou être de forme plus complexe, comme c'est le cas dans la théorie de Boscovich.

II . 1 . 1 . La théorie de l'élasticité des solides selon Lamé

Le problème d'élasticité que nous allons évoquer maintenant peut paraître secondaire: il s'agit de celui de l'égalité éventuelle des coefficients λ et μ (appelés coefficients de Lamé) qui interviennent dans les équations des forces élastiques Ni et Ti des corps homogènes d'élasticité constante. Cette question jette pourtant un doute sur l'un des principaux fondements de certaines mécaniques physiques du XIX° siècle: celui des actions entre points matériels, uniquement fonction de leur distance. De plus, selon Saint-Venant, que nous citerons lorsque nous étudierons sa propre théorie de l'élasticité, considérer comme inégaux les deux coefficients λ et μ, peut induire de graves erreurs dans les applications pratiques de l'élasticité.

Deux théories s'opposent: celle de Lamé, théorie encore utilisée de nos jours dans les traités élémentaires et celle, défendue énergiquement par Saint-Venant, qui repose sur les actions uniquement fonction de la distance séparant les molécules. Nous exposerons tout d'abord la théorie de Lamé en suivant la présentation qu'il en fait en 1852 devant l'Académie des sciences, et en nous aidant de la seconde édition de ses "Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides"[63] (1866); la théorie concurrente est défendue par Saint-Venant, nous l'exposerons ensuite. Boussinesq, lui, suivant sa méthode habituelle, essaye de concilier ces deux théories. Quoique partant d'une conception

---

[63]G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 1° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1852, 2° éd, Paris, Gauthier-Villars, 1866.

atomique de la matière, il n'accorde que peu d'importance à la notion même de force. Par l'hypothèse hardie des actions de présence, il concilie cette fragile base atomique avec l'évidence des phénomènes banals, l'évidente différence entre les solides et les liquides. Voici d'abord un aperçu de la théorie de Lamé, qu'il présente ainsi, en 1852:

> "Je me suis proposé d'établir, avec toute la clarté nécessaire, les équations qui régissent l' élasticité, considérée dans les corps solides; d'en déduire, le plus simplement possible, les lois générales de ce phénomène physique; enfin, de prouver que cette théorie mathématique est maintenant aussi exacte, aussi rigoureuse que la mécanique rationnelle."[64]

C'est que la situation de la théorie de l'élasticité est plus que précaire:

> "Les premiers pas de cette science, toute nouvelle, ont été incertains; des discussions se sont élevées entre d'illustres géomètres de cette Académie, sur les principes posés sur la nature des actions moléculaires, et sur les fonctions qui peuvent les représenter."[65]

Lamé signale vigoureusement ce qui lui semble être le défaut majeur des théories antérieures à la sienne:

> "Les objections et les réponses, également obscures et incomplètes, ont inspiré des doutes sur la réalité de la nouvelle théorie; doutes que sont venues confirmer plusieurs épreuves expérimentales, constatant l'inexactitude de certains nombres déduits de cette théorie."[66]

Quels que soient les nombres dont il est question, on doit compter parmi eux, comme la suite de la Note le montre, les coefficients λ et μ. Lamé expose ensuite sa théorie qu'il fonde sur la prise en compte d'une force élastique "analogue à la tension d'un fil"[67]. On doit ici quitter la note pour se référer aux "Leçons sur (....) l'élasticité des corps solides". La démarche de Lamé est moins simple qu'il n'y paraît. Tout d'abord il définit la force élastique qui agit sur un élément de surface à partir des

---

[64]G. Lamé, *Note sur la théorie de l'élasticité des corps solides,* C. R., 35, 1852, pp. 459 à 464. La citation se trouve à la page 459. Lamé signale également qu'il ne se prétend pas l'inventeur de cette théorie; c'est, dit-il, en grande partie un œuvre de coordination (Note des C. R., p. 459), idée qu'il affirme aussi dans ses "Leçons sur l'élasticité des corps solides" en 1866 (p. 25). Son entreprise est donc semblable à celle de Boussinesq qui, lui, dans un domaine plus étendu, et à partir d'une position plus radicale, rationalise l'ensemble de la mécanique.

[65]G. Lamé, *Note sur la théorie de l'élasticité des corps solides,* C. R., 35, 1852, p. 459.

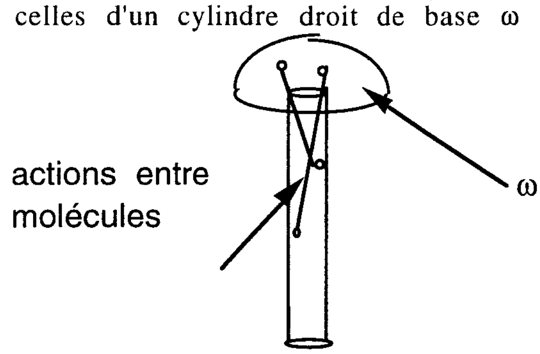
[66]ibid., p. 459.

[67]ibid., p. 460.

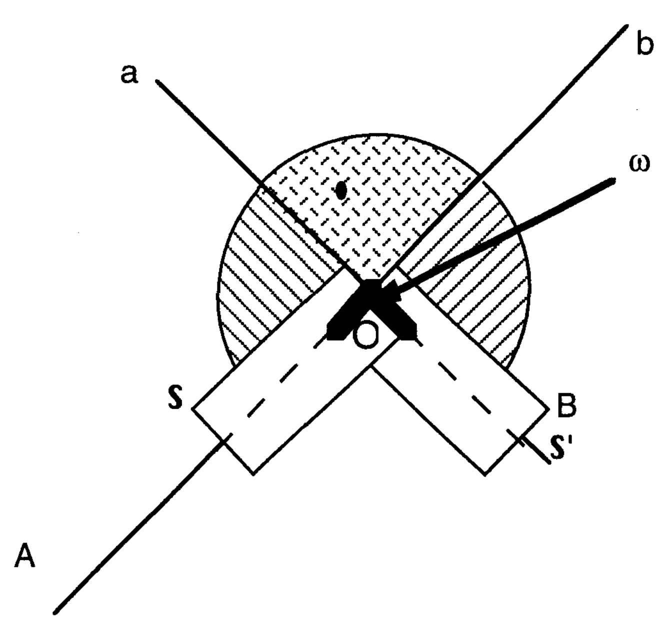
actions entre molécules[68]. On verra en note que cette définition de l'action élastique est loin d'être exempte de reproches. Mais Lamé

---

[68]Voici comment procède Lamé (G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 2° éd, Paris, Gauthier-Villars, 1866), pour établir son expression de la force élastique. Il commence par prendre en compte l'action mutuelle de deux molécules. Il ne dit pas que cette action est uniquement fonction de la distance (p. 7), celle-ci est simplement nulle lorsque l'écartement des molécules par rapport à l'état primitif est nul. C'est ainsi se rapprocher de la conception de Navier, mais aussi de Fourier pour qui, à l'état d'équilibre thermique, il n'y a pas d'action calorifique entre molécules. Pour définir la force élastique qui s'exerce sur une surface ω, il prend en compte l'action des molécules d'une demi-sphère centrée sur ω, de rayon inférieur à celui des actions moléculaires, sur celles d'un cylindre droit de base ω (figure 1).



Cette définition tombe sous le coup de la critique, mentionnée au moins deux fois par Saint-Venant (in Moigno, *Leçons de Mécanique analytique, Statique*, Paris, Gauthier-Villars, 1868, p. 618, et L'Institut, 44, 1843, pp. 12 et 13, ainsi que A. de Saint-Venant, *Résumé des Leçons données à l' Ecole des Ponts et Chaussées par Navier, avec notes et appendices de M. Barré de Saint-Venant*, 3° éd., Paris, Dunod, 1864, 3° appendice). Suivant la forme de la surface de séparation, certaines actions sont comptées deux fois. Dans le cas de la figure 2, le calcul des pressions (ou des forces élastiques) se fait à travers une surface prise sur l'intersection des plans dont les traces avec la figure sont Aa et Bb. Si l'on utilise les deux cylindres S et S' pour appliquer la méthode de Lamé, les actions issues de la partie aob commune aux deux demi-sphères sont comptées deux fois.



Comme le signale Saint-Venant, de telles erreurs dans le calcul des pressions que subissent des éléments polyédriques, pourraient être graves. Voir: A. de Saintdonne plus loin (p. 10) une autre façon de concevoir la force élastique, conception qui correspond à celle qu'il présente à l'Académie des sciences.

> " Un corps solide étant en équilibre d'élasticité, si l'on imagine un plan qui le coupe en deux parties que l'on isole, chacune de ces parties s'agitera intérieurement; mais on conçoit que son état d'équilibre pourrait être conservé, si l'on appliquait, sur chaque élément plan sécant, une force d'intensité et de direction convenables."[69]

Puis, dans les "Leçons (...)", il critique fortement cette dernière façon de procéder (p. 11 et 12) pour conclure:

> "Ainsi la première définition que nous avons donnée de la force élastique, non seulement est la seule complète, mais en outre peut servir à l'explication d'autres phénomènes. Toutefois, nous adoptons la seconde (définition de la force élastique); éclaircie par les considérations qui précèdent, appuyée sur l' analogie avec les tensions, elle fait pressentir en peu de mots, le rôle important des forces élastiques dans les phénomènes qui nous occupent."[70]

Lamé reconnait donc qu'il est indispensable de considérer le niveau moléculaire, mais il calcule souvent, malgré ses dénégations, comme si la matière était continue, ainsi que le fait Fourier.

Venant, *Résumé des Leçons données à l' Ecole des Ponts et Chaussées par Navier, avec notes et appendices de M. Barré de Saint-Venant*, 3° éd., Paris, Dunod, 1864, 3° appendice.
Lamé finalement n'utilise pas cette définition de la pression. Celle que nous exposons dans le corps du texte s'apparente plutôt à la pression telle que la considère Cauchy en 1827, lorsqu'il utilise un tétraèdre pour déterminer les composantes des pressions sur une surface d'orientation quelconque. La description mathématique se fait, en réalité, sur un espace continu. Toutefois, pour faire apparaître les dilatations et glissements dans l'expression des forces élastiques, Lamé sera obligé de considérer les actions entre molécules, d'où la nécessité de deux définitions de la force élastique.
Saint-Venant donne sa propre définition de la pression, approuvée par Cauchy: "Je pense donc qu'il faut renoncer à la définition des pressions rapportée plus haut. J'ai proposé en 1834, dans un mémoire, et ensuite en 1837, dans un cours lithographié, d'en adopter une autre, analogue à celle donnée du *flux de chaleur* à travers une petite face par Fourier (ch. I, 96), et par Poisson (Mémoire de 1815, publié en 1821, *Journal de l'Ecole polytechnique*, article 56). Cette définition consiste à appeler pression, sur une petite face plane quelconque, imaginée à l'intérieur du corps, ou à la limite de séparation de deux corps, la résultante de toutes les actions attractives et répulsives qu'exercent les molécules situées d'un côté de cette face sur les molécules situées de l' autre côté, et dont les directions traversent cette face", in A. de Saint-Venant, L'Institut, 44, 1843, p. 12.

[69] G. Lamé, *Note sur la théorie de l'élasticité des corps solides*, C. R., 35, 1852, p. 460.

[70] G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 1° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1852, 2° éd, Paris, Gauthier-Villars, 1866, p. 12.

Puis il passe à ce qui constitue la caractéristique de sa méthode: au lieu de fonder le calcul sur l'action fonction des distances des molécules, il raisonne à partir des projections (u, v, w) du déplacement d'une molécule lorsque le solide est déformé à partir de sa position à l'état naturel[71]. Si u est la projection du déplacement d'une molécule sous l'effet d'une déformation, u' celle d'une molécule voisine, initialement distante de ξ, l' expression de u' en fonction de u est:

$$u' = u + (du/dx) \, . \, h + (du/dy) \, . \, k + (du/dz) \, . \, l \qquad (1)$$

et les équations correspondantes pour v et w. h, k, l sont les projections de ξ sur les axes.

Ainsi, la distance entre les deux molécules n'est plus seule à intervenir; interviennent aussi les dérivées des déplacements des molécules. Lamé signale par la suite que, même si la formule précédente a été établie en supposant la ligne d'action de la force élastique dirigée suivant la droite qui joint ces molécules, elle reste valable si l'on suppose que cette force a une autre direction. Il s'exprime ainsi:

> " Mais l'action mutuelle de deux molécules M, M' déplacées dépend toujours, et nécessairement, des projections u,v,w, du déplacement de M et des projections u', v',w' du déplacement de M'; or que cette action soit ou non dirigée suivant MM' on conçoit que ses trois composantes seront toujours des fonctions de u,v,w, de ϕ,ψ,ζ (angles polaires et distance initiale des molécules) et de u', v', w' , exprimés par les développements de (1); en sorte qu'elles seront considérées, par première approximation, comme étant des fonctions linéaires de u,v,w et de d(u,v,w)/d(x,y,z)."[72]

Lamé envisage donc ici, explicitement, les cas où les forces ne sont pas centrales, ne sont pas dirigées suivant la ligne qui joint les molécules. On peut ajouter que, puisqu'elles ne dépendent que des dérivées des déplacements des molécules, il n'est pas obligatoire non plus qu'elles dépendent exclusivement des distances entre les molécules.

Puis, Lamé exprime la variation de distance entre deux molécules $\Delta\xi$ en fonction de (u' - u) , (v' - v) et (w' -w), et détermine les forces élastiques normales et tangentielles, Ni et Ti, obtenues par l'équilibre du parallélépipède et du tétraèdre de Cauchy, en fonction des dérivées de

---

[71] G. Lamé, *Note sur la théorie de l'élasticité des corps solides*, C. R.,35, 1852, p. 460. Aussi: G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 1° éd., Paris, Gauthier-Villars, 2° éd, Paris, Gauthier-Villars, 1866, pp. 28 et 29.
[72] ibid., p 36.

(u,v,w).[73] Il montre que ces expressions dépendent des trois dilatations et des trois glissements élémentaires, soit:

$$(du/dx)\ ,\ (dv/dy),\ (dw/dz),$$
$$((dv/dz) + (dw/dy))\ ,\ ((dw/dx)) + (du/dz)),\ ((du/dy) + (dv/dx)),$$

et conclut:

> "Les forces élastiques s'expriment à l'aide des dérivées partielles du premier ordre des trois fonctions dont je viens de parler (u,v,w). Les coefficients compris dans ces expressions sont au nombre de trente-six."[74]

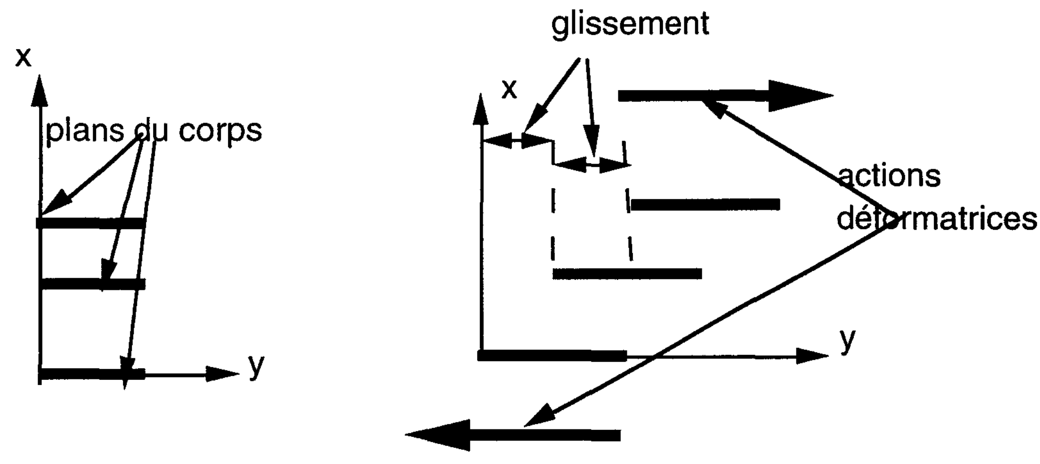
En effet les trois glissements et les trois dilatations interviennent dans les six expressions des Ni et Ti (i =1, 2, 3), ce qui donne bien les trente-six coefficients annoncés[75]. Lamé va ensuite réduire les divers

---

[73]ibid., pp. 29 à 33.

[74]G. Lamé, *Note sur la théorie de l'élasticité des corps solides,* C. R., 35, 1852, p. 460.

[75]Etant donné l'importance, pour la suite, des expressions des dilatations et des glissements, nous donnons ici quelques précisions. Si un corps élastique est soumis à une traction simple (sans glissement) le long de l' axe des x, la dérivée du déplacement des molécules par rapport à x est du/dx. Nous aurons souvent l'occasion de mentionner que nombre de géomètres considèrent que du/dx représente l'allongement par unité de longueur du corps considéré.
Le glissement est défini par Saint-Venant comme "la quantité dont ont glissé lors d'une déformation particulière des plans parallèles". On peut visualiser comme suit les glissements dans le cas où on ne considère que deux dimensions.

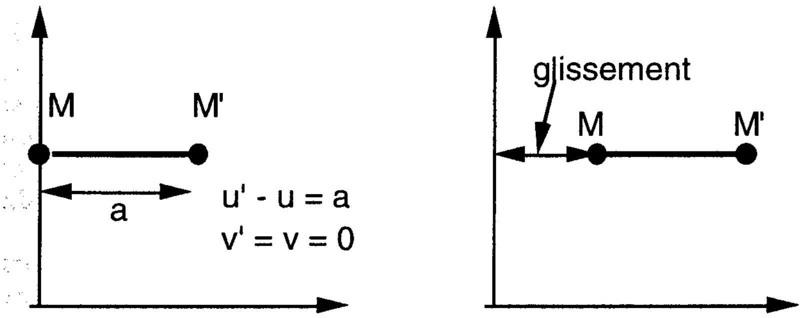


Dans un glissement simple parallèle à l'axe des x, si la droite qui joint deux molécules est parallèle à l'axe des x, elle reste parallèle à cet axe, leur distance ne change pas.

coefficients par des considérations de symétries. Mais ce ne sont pas des considérations issues directement de l'observation macroscopique comme le fera Boussinesq; il prend comme point de départ ce qu'il pense être le déplacement des molécules dans tel cas particulier. Ainsi, dans le cas d'une dilatation, il suppose que les déplacements des molécules sont de la forme u =0 , v=0, w = c. z dans le cas d'un solide homogène et d'élasticité constante; puis il considère le cas d'une torsion simple où il suppose que u = -ω.y.z, v =ω.x.z, w =0. Cette utilisation de la symétrie est donc fondée sur des hypothèses. Les résultats obtenus, la réduction des trente-six coefficients à huit, puis deux, constitue plus qu'une démonstration, c'est une définition du degré de symétrie des corps considérés:

> "On a ainsi une définition naturelle des solides homogènes d'élasticité constante; et les équations correspondantes contiennent deux coefficients, dont le rapport reste indéterminé."[76]

Les deux coefficients dont parle Lamé sont les coefficients λ et μ (dits de Lamé) qui interviennent dans la définition des Ti et Ni suivant Lamé, soit par exemple:



Si nous tentons une démonstration dans le style de Boussinesq, on peut dire que: le glissement ne dépendra que de (du/dx), (du/dy), (dv/dx), (dv/dy). Puisqu'il n'y a pas, par hypothèse, de dilatations, (du/dx) et (dv/dy) sont nuls. Comme le déplacement de M se fait parallèlement à l'axe des x, (du/dy) est aussi nul. Donc le glissement ne dépend que de (dv/dx). On trouvera des démonstrations complètes dans:

G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 1° éd., 1852, 2° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1866, pp. 29 à 31.

Aussi:

A. de Saint-Venant, *Résumé des Leçons données à l' Ecole des Ponts et Chaussées par Navier, avec notes et appendices de M. Barré de Saint-Venant*, 3° éd, Paris, Dunod, 1864, 3° appendice, pp. 550 à 555.

A. de Saint-Venant, in A. Clebsch, *Théorie de l' élasticité des corps solides, trad, MM. Barré de Saint-Venant et Flamant, avec notes étendues de M. de Saint-Venant*, Paris, Dunod, 1868, note du § 16, pp.76 et 77.

A. de Saint-Venant, in abbé Moigno, *Leçons de Mécanique analytique, Statique*, Paris, Gauthier-Villars, 1868, p. 618.

A. de Saint-Venant, *Résumé d' article*, L'institut, 44, 1843, p. 639 et 640.

[76] G. Lamé, *Note sur la théorie de l'élasticité des corps solides*, C. R., 35, 1852, p. 461.

$N1 = \lambda . \theta + 2\mu . (du/dx)$, $T1 = \mu . ((dv/dz)) + (dw/dy))$, θ est la dilatation du milieu.[77]

L'égalité ou le rapport constant, supposé par certains, va être le sujet d'une discorde entre deux écoles de physico-mathématiciens. Les uns, comme Boussinesq, ne voient pas de raison pour admettre l'égalité des coefficients; d'autres, comme Saint-Venant, voient dans la formule de l'élasticité de Lamé, une atteinte à la rationalité même de la théorie de l'élasticité. Tous les traités de l'élasticité retentissent de cette dispute, et cela jusqu'à la fin du siècle[78]. L'aspect finalement hypothétique de la théorie de Lamé rend la critique facile, critique à laquelle s'emploie activement Saint-Venant. Lamé n'épargne pas non plus ses adversaires. Ainsi, écrivant sur la réduction du nombre de coefficients par ses derniers, il dit:

> "Partant de cette définition de la constance de l'élasticité, et considérant la force élastique comme résultante d'actions moléculaires en nombre infini, ils ont obtenu ses composantes par des intégrations. De la sorte, les trente six coefficients se sont réduits à un seul. Mais cette simplification était exagérée. Elle s'appuyait d'ailleurs sur l'hypothèse inadmissible de la continuité de la matière dans les milieux solides, ou bien elle supposait, gratuitement, les actions moléculaires en nombre infini. De là sont venus les doutes et les inexactitudes."[79]

II .1 . 2 . La mise en cause des méthodes de Poisson et de Navier

L'attaque est donc violente, dans les années 1810-1830, contre les travaux de Navier et de Poisson fondateurs de ces théories de l'élasticité décriées par Lamé. Cette attaque se fait plus précise dans les "Leçons sur (...) l'élasticité" (1866). Après avoir rappelé les principes des calculs par "intégration autour d'un point" (voir note)[80], Lamé conclut ainsi[81]:

---

[77]Cette dilatation, θ, est l'augmentation relative de volume, quand u, v, w varient . Lamé l'obtient, en supposant que les arètes d'un parallélépipède (dx, dy, dz) croissent d'une quantité fonction de u,v, w, suivant les variables correspondantes, et en négligeant les termes d'ordre supérieur à un.

[78]Voir par exemple: J. Sarrau, *Cours de mécanique de l'Ecole polytechnique, cours lithographié*, 1889-1890, p. 190.

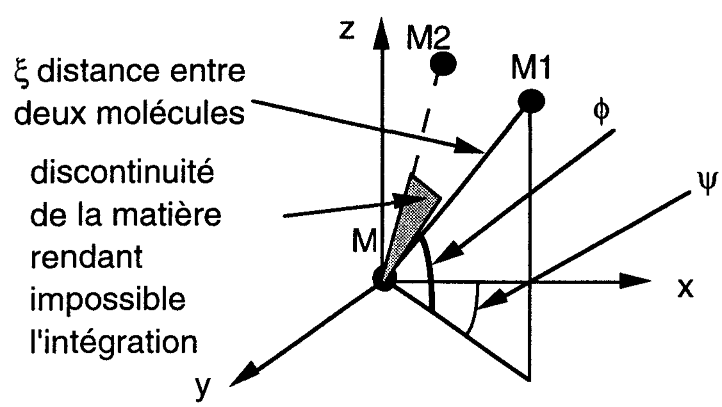
[79]G. Lamé, *Note sur la théorie de l'élasticité des corps solides*, C. R.,35, 1852, p. 460.

[80]Lamé effectue l'ensemble de ces calculs en coordonnées semi-polaires. L'intégration nécessaire pour certains calculs doit se faire en tenant compte des variables suivantes, ξ la distance entre deux molécules, ϕ et ψ les deux angles polaires.

"Telle est la méthode suivie par Navier, et autres géomètres, pour obtenir les équations générales de l'élasticité dans les milieux solides. Mais cette méthode suppose évidemment la continuité de la matière, hypothèse inadmissible. Poisson croit lever cette difficulté, en remplaçant l'intégrale en x par une somme d'un nombre de termes finis et indéterminés; mais cette sommation n'étant qu'indiquée, il ne fait en réalité, que substituer le signe Σ au signe $\int$, et cela pour une seule des intégrations, car il effectue les deux autres ."[82]

Saint-Venant, partisan d'une action entre molécules uniquement fonction de la distance, critique, lui aussi, cette "intégration autour d'un point". Se référant aux travaux de Cauchy, il écrit (1868):

"On y voit qu'en convertissant les sommes **S** d'actions en intégrales, comme si les points matériels qui les exercent étaient contigus les uns aux autres, on arrive à ces conséquences: I° que les pressions sont constamment normales aux faces, ou n'ont aucune composante tangentielle; 2° qu'elles ne varient que comme le carré de la densité lorsque l'on comprime, dilate ou déforme le corps dans l'intérieur duquel elles s'exercent. De sorte que tous les corps se comporteraient comme un fluide et d'une espèce même que la nature n'offre point."[83]



Lamé indique que la loi de variation F (ξ) de la force entre deux molécules est totalement inconnue; on ne peut donc effectuer de façon précise les intégrations autour de M. Ces intégrations ne sont d'ailleurs possibles, selon Lamé, dans cet ouvrage, que si l'on suppose la matière continue, d'après G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 1° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1852, 2° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1866, p. 38.

[81]G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 1° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1852, 2° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1866, p. 38.

[82]ibid., p. 38.

[83]A. de Saint-Venant, in abbé Moigno, *Leçons de Mécanique analytique, Statique*, Paris, Gauthier-Villars, 1868, p. 694. Les corps dont parle Saint-Venant seraient dépourvus de composantes tangentielles Ti. Ils n'offriraient aucune résistance aux déformations telles que les cisaillements, et seraient totalement mous, et ne

Après cette critique des méthodes de ses prédécesseurs, Lamé expose les avantages de la sienne:

> "La méthode que nous avons suivie dans la Leçon actuelle, et dont on trouve l'origine dans les travaux de Cauchy, nous paraît à l'abri de toutes les objections; loin de supposer la continuité de la matière, elle laisse dans une sorte d'indétermination le nombre des couples moléculaires dont les actions composent la force élastique; ce nombre peut être grand ou faible, il peut différer d'un milieu solide à un autre, et les résultats obtenus n'en seront pas moins vrais."[84]

C'est là une attaque contre les tenants d'une force intermoléculaire dépendant uniquement du couple de molécules considérées et de la distance qui les sépare[85]. Boussinesq a pu s'inspirer de cette partie de l'œuvre de Lamé pour créer ses actions de présence. La position de Lamé ne pouvait que déplaire à Saint-Venant, ferme défenseur des forces centrales (au sens précisé plus haut), qui ne peut qu'être opposé à une telle conception. Il va batailler contre l'exposé de la théorie de l'élasticité de Lamé chaque fois que l'occasion se présentera, et aussi proposer la sienne, inspirée des travaux de Cauchy (en tout, près 400 pages)[86]. L'exposé le plus rapide se trouve dans la Statique de Moigno (1868). Nous allons en rendre compte, en signalant surtout les points de divergence avec la théorie de Lamé.

---

pourraient transmettre les vibrations transversales; même l'éther n'offre pas une telle plasticité.

[84]G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 1° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1852, 2° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1866, p. 38.

[85]Avant Lamé et Boussinesq, Cauchy avait déjà évoqué cette éventualité de forces dépendant de façon indissociable de plus de deux points. Ainsi écrit Cauchy:
"Mais, outre ces forces qui se manifestent quand deux points matériels sont placés en présence l'un de l'autre, et que l'on pourrait appeler, pour cette raison, des actions *binaires*, ne devrait-on pas admettre, au moins dans certaines circonstances, des actions, ternaires, quaternaires, etc..., dont chacune dépendrait des positions relatives de trois, de quatre, etc..., points placés en présence l'un de l'autre, et serait proportionnelle au produit des masses de ces divers points", in A. Cauchy, *Mémoire sur le secours que les sciences de calcul peuvent fournir aux sciences physiques ou même aux sciences morales, et sur l'accord des théories mathématiques et physiques avec la véritable philosophie*, C. R., 21, 1845, pp. 134 à 143.

[86]Particulièrement dans: Abbé Moigno, *Leçons de Mécanique analytique, Statique*, Paris, Gauthier-Villars, 1868, pp. 616 à 723. Et aussi, A. de Saint-Venant, *Sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 8, 1863, pp. 257 à 480. Mais surtout: A. Barré de Saint-Venant, *Résumé des Leçons données à l' Ecole des Ponts et Chaussées par Navier, avec notes et appendices de M. Barré de Saint-Venant*, 3° éd, Paris, Dunod, 1864, 3°, 4°, 5° appendices, pp. 524 à 762.

II . 1 . 3 . Eléments de la théorie de l'élasticité selon Saint-Venant

La méthode de Saint-Venant n'est pas fondamentalement différente de celle de Lamé. Il considère les pressions, là où l'auteur précédent considérait les force élastiques par unité de surface, ce qui ne peut induire qu'une différence de signe. Toutefois le premier prend soin de rectifier la définition usuelle de la pression, comme nous l'avons signalé à la note 68. Une différence de notation doit être signalée. Lorsque Lamé désigne ses forces élastiques par Ni et Ti, Saint-Venant désigne les pressions par Pmn; la première lettre en indice indique la face (plan du trièdre de coordonnées) à laquelle cette pression se rapporte (face désignée par sa normale), la seconde sous-lettre caractérise la direction de la force pressante. Ainsi N1 devient l'équivalent de Pxx, et T2, qui s'exerce sur la face normale aux x, et qui est dirigée suivant les z, prendra le nom de Pxz. C'est uniquement par la considération du tétraèdre de Cauchy que Saint-Venant établit l'équivalent des relations de Lamé-Cauchy entre les pressions sur une face quelconque et les Ni et Ti[87]. Puis il fait apparaître les trois dilatations et compressions, qu'il désigne par ∂x, ∂y et ∂z, et les trois glissements, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}, avec la convention sur les indices déjà donnée. C'est alors qu'apparaît la première critique vis-à-vis de l'autre méthode; elle concerne la linéarité des pressions élastiques vis-à-vis des dilatations et des glissements. C'est un point crucial puisque, nous l' avons vu, les expressions trouvées par Lamé, et qui s'appliquent à tous les types de forces, sont des expressions linéaires des glissements et déplacements. Saint-Venant commence par réfuter l'opinion de ceux qui posent en quelque sorte *a priori* cette linéarité:

> "Plusieurs auteurs éminents ont cru pouvoir dériver la *linéarité* de ces six fonctions de la seule considération de l' extrême petitesse de leurs six variables ∂x, ∂y et ∂z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} ou des déplacements moléculaires dont ces variables dépendent, en arguant de ce qu'on peut, vu leur petitesse, négliger leurs carrés, leurs produits, etc. devant leur puissance 1 dans le développement des fonctions."[88]

Saint-Venant affirme alors que rien ne permet de faire *a priori* une telle affirmation, les puissances d'ordre 1 peuvent ne pas exister et ensuite la puissance 1 n'est pas forcément la plus basse possible (s'il existe des puissances plus basses que 1, comme les ∂ et g sont petits, ce sont elles qui seront prépondérantes). Il convient donc, pour justifier

---

[87] A. de Saint-Venant, in abbé Moigno, *Leçons de Mécanique analytique, Statique*, Paris, Gauthier-Villars, 1868, pp. 625 à 727.
[88] ibid., p. 654.

cette linéarité, de la justifier physiquement. Plus haut il a évoqué la grande loi sur laquelle repose sa théorie de l' élasticité:

> "Par là, ils ont cru pouvoir éluder la grande loi physique des actions à distance et ses conséquences nécessaires en ce qui regarde, comme nous le verrons plus loin, le nombre des coefficients des formules."[89]

Ainsi, pour Saint-Venant, la rationalité sur laquelle reposent les forces centrales se double d'une justification physique: la grande loi physique, celle de la dépendance exclusive de la force avec la distance. C'est ce qu'il montre ensuite:

> "Or c'est (la linéarité) ce qui ne peut être démontré qu'en s'appuyant empiriquement sur un nombre suffisant de faits, ou en se basant sur la grande loi en question; loi qui a été déduite elle-même de tous les faits du monde matériel et admise par tous les physiciens depuis Newton jusqu'à Laplace, et depuis Ampère jusqu'à Cauchy, comme la conception explicative des phénomènes la plus justifiée et la plus universelle, et qui est posée maintenant, dès l'enseignement élémentaire, comme base principale de la Mécanique envisagée du point de vue concret et physique."[90]

Saint-Venant montre ensuite que si l'on suppose les forces centrales, alors les actions entre les molécules se font suivant la différence $f(r1)$ - $f(r0)$. Or dit-il, dans ce cas-là, la linéarité d'une telle fonction est hors de question, sans doute parce que cette différence permet les développements en série, en fonction de r1-r0 = r∂r, et que les glissements et dilatations dépendent justement de r1-r0.

Il traite alors le cas des solides isotropes, puis des solides quelconques dont il exprime les pressions sur trois plans rectangulaires quelconques en donnant l'expression des pressions Pnn et Pmn (équivalent des Ni et des Ti) par un développement linéaire en fonction des trois glissements et des trois dilatations. Comme on a trois de ces pressions par plan de coordonnées et qu'elles sont fonctions des six variables, on a bien trente-six coefficients distincts.

Le problème est donc la réduction de ces coefficients. Pour cela l'auteur fait appel à un argument inattendu chez lui: la réduction qu'opère G. Green pour les mêmes coefficients, mais un peu adaptée. C'est en fait le principe de conservation du travail ou de l'énergie dans des transformations de mêmes états initial et final. Green, lui, passait par la considération d'une fonction proche de notre potentiel. Saint-Venant pose que le travail effectué dans une déformation mettant en jeu trois déformations et trois glissements donnés est indépendant de

---

[89] ibid., p. 654.

[90] ibid., p. 654 et 655.

l'ordre dans lequel on fait ces glissements et déformations. Autrement dit l' expression:

$$T = F(\partial x, \partial y\ \partial z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy})$$

est indépendante de l'ordre dans lequel on considère les variables. Il s'ensuit quinze égalités entre les coefficients des pressions, et donc ceux-ci sont réduits à vingt-et-un. Saint-Venant indique alors qu'il serait possible de réduire encore le nombre de ces coefficients à l'aide de six nouvelles égalités, mais il ne le fait pas, car tous les physiciens ne sont pas d'accord avec la méthode qu'il utilise. Il effectuera cette réduction dans une autre version de sa théorie de l' élasticité déduite directement de la considération des forces centrales[91]. Ici, pour sa démonstration, Saint-Venant évalue l'influence d'une dilatation parallèle à l' axe oy sur la pression qui s'exerce dans le milieu suivant l' axe ox, et détermine l'action d'un glissement parallèle à l'axe oy sur la pression qui s'exerce suivant oy. Saint-Venant procède par projections successives sur des droites issues d'un même point. Implicitement, il suppose que les actions moléculaires ne dépendent que de la distance qui sépare les molécules; mais aussi, ce qui est loin d'être évident, que les actions mises en jeu dans une dilatation sont de même nature que celles qui agissent dans le cas d'un glissement. Saint-Venant poursuit la réduction du nombre de coefficients par des considérations de symétrie; il indique ainsi sa façon de procéder:

> "On particularise facilement les coefficients (...) que nous venons d'obtenir (...), en supposant avec Cauchy que s'il y a, avant les déplacements, symétrie par rapport à un plan perpendiculaire aux x, il répond, au moins moyennement, à chaque molécule m située d'un côté de ce plan à une distance x, une molécule égale située de l' autre côté à une distance -x, et pour laquelle y et z sont les mêmes."[92]

Saint-Venant poursuit l'établissement des formules, et finalement obtient une expression des pressions pour les corps isotropes: une formule à un seul coefficient. La remarque faite à propos de l'utilisation des symétries par Lamé, les hypothèses sur la composition moléculaire réelle d'un corps, valent aussi pour Saint-Venant, et donc la théorie n'a pas toute la rigueur désirable.

Dans le même ouvrage Saint-Venant tente une démonstration des formules de l'élasticité directement à partir des formules des actions centrales (à partir de la page 672)[93]. On s'attend à ce qu'il résolve le problème des "intégrations autour d'un point" pour exprimer les

---

[91]ibid., p. 672 à 710.
[92]ibid., p. 701.
[93]ibid., p. 673.

pressions. On est de suite déçu; dès l'abord, il fait intervenir la densité ρ d'un petit volume de matière dans l'expression de l'action que ce volume exerce sur une molécule de masse m:

$$m.\ \rho.\omega.\ r.\ \cos(r, n)\ f(r)$$ [94]

C'est en quelque sorte supposer le problème résolu, les actions réelles entre molécules du volume qui agit sur la molécule de masse m, étant "groupées" en son centre de gravité. Plus loin, Saint-Venant "dissimule" cette masse volumique dans des coefficients qui affectent les glissements et dilatations dans les formules des pressions. Saint-Venant, en 1868, ne doit pas être satisfait de sa théorie car il reprend dans le même ouvrage une théorie de l'élasticité fondée sur le "potentiel des actions moléculaires", et qui conduit aux mêmes résultats que la précédente[95].

On peut donc dire que si la théorie de Lamé n'atteint pas la rigueur à laquelle elle prétend, celle de Saint-Venant ne découle pas entièrement de la "grande loi de générale" de la mécanique des systèmes physiques. On pourrait songer à trancher par des expériences, mais celles-ci, celles de Wertheim[96] par exemple, sont contestées.

II . 1 . 4 . Importance de la controverse sur les valeurs relatives de λ et μ

Lors de la présentation de ses "Leçons sur (...) l' élasticité des solides", Lamé est interpellé par Cauchy :

> "M. Cauchy demande en quoi les résultats que M. Lamé a indiqués, et auxquels il est parvenu, en appliquant la théorie des corps élastiques aux vibrations lumineuses, diffèrent des résultats obtenus par M. Cauchy lui même, en 1830."[97]

Lamé répond que:

---

[94]ibid., p. 674.

[95]ibid., pp. 710 à 724.

[96]Pour les vérifications expérimentales de l'époque, voir: A. de Saint-Venant, *Résumé des Leçons données à l' Ecole des Ponts et Chaussées par Navier, avec notes et appendices de M. Barré de Saint-Venant*, 3° éd, Paris, Dunod, 1864, 5° appendice, pp. 665 à 685. Avec les déterminations actuelles, on a pu constater que les deux coefficients λ et μ sont différents, mais très proches pour les solides usuels.

[97]G. Lamé, *Note sur la théorie de l'élasticité des corps solides.* C. R., 35, 1852, p. 463.

"(...) si aucune différence essentielle n'existe dans les résultats, il était néanmoins utile de chercher, le plus possible, à présenter cette application d'une manière élémentaire."[98]

Si la divergence des opinions ne porte que sur la clarté des exposés respectifs, on comprend mal pourquoi Saint-Venant a consacré à ce sujet tant de pages. En particulier, dans l'appendice V aux leçons de Navier (1864), il ne consacre pas moins de 238 pages à la question. C'est que, pour lui, l'importance théorique de la question se double d'un intérêt pratique. Après avoir écrit que, pratiquement, dans les problèmes simples d'élasticité comme la torsion pure, il est prudent de prendre les formules à deux coefficients, il poursuit:

"Mais il en est autrement dans les questions pratiques complexes telles que celles de flexions et torsions simultanées, ou même dans celles où il y a à la fois à considérer la contraction linéaire et la contraction cubique (...) le doute n'est plus possible quand on en vient aux chiffres. Il faut sortir de l' état toujours transitoire où il laisse l'esprit et adopter forcément une valeur numérique pour le rapport en question k/K (qui correspond à λ/μ).

On conçoit donc l'importance de bien examiner de nouveau et à fond si cette valeur k/K n'est pas toute connue *a priori* et théoriquement, afin de l'employer dans la pratique; et cela, même dans le cas d'élasticités plus ou moins inégales, lorsqu'une ignorance absolue du degré et du sens des inégalités obligera à supposer l'isotropie comme état moyen donnant les résultats les plus probablement approchés."[99]

C'est donc une question de la plus haute importance sur le plan pratique, et l'on comprend que le "réformateur de la théorie de l'élasticité" lui consacre tant de pages. Il n'est pas le seul. Dans les mêmes appendices aux leçons de Navier, Saint-Venant évoque l'opinion de savants qui sont intervenus dans le débat sur le nombre de coefficients. On constate alors que le débat n'est pas seulement entre les partisans de Cauchy, au nombre desquels il faut compter, dans ce cas, Saint-Venant et les "novateurs" français, mais qu'il s'étend hors des frontières. Sans exposer leurs travaux, citons: Oersted, Neumann, Haughton, Clausius, Weber, Green, W. Thomson, Kirchhoff, Maxwell, Stokes.

C'est dans ce contexte que Boussinesq, Professeur au Collège de Gap, intervient. Son but sera de donner une base à la fois moléculaire et rationnelle à l'équation à deux coefficients de Lamé. C'est à l'occasion

---

[98]ibid., p. 464.

[99]A. Barré de Saint-Venant, *Résumé des Leçons données à l' Ecoles des Ponts et Chaussées par Navier, avec notes et appendices de M. Barré de Saint-Venant*, 3° éd., Paris, Dunod, 1864, 5° appendice, p. 659.

d'une note sur la fluidité et la solidité des corps qu'il propose une explication où interviennent les "actions de présence", explication qui conduit à considérer les deux coefficients de Lamé comme différents. Boussinesq cherche à montrer que les équations à deux coefficients de Lamé sont générales, qu'elles s'appliquent aussi bien aux fluides qu'aux solides. Les cas de la fluidité et de la solidité sont particulièrement adaptés à l'étude théorique de ces coefficients. En effet, dans les équations de Lamé:

$$N1 = \lambda.\ \theta + 2\mu\ .\ (du/dx) \quad , T1 = \mu.\ ((\ dv/dz)) + (dw/dy))$$

les termes affectés du coefficient μ induisent des variations de forces élastiques sensiblement proportionnelles aux déformations linéaires (glissements ou dilatations), ce sont eux qui caractérisent l'élasticité des solides. Celui affecté du coefficient λ ne dépend que de la variation relative du volume. Tant que celle-ci reste à peu près constante, les corps se déforment facilement: c'est le cas des fluides, fluides dont la caractéristique est dans le cas général l'isotropie. De plus, si l'on suppose $\mu = 0$, on a un corps sans composante tangentielle d' élasticité, un fluide parfait.

Boussinesq va chercher à donner une interprétation moléculaire totale de cette équation qui décrit si bien la différence d'élasticité des solides et des fluides. Il se range alors aux côtés de Lamé en justifiant l'indépendance des deux coefficients λ et μ[100].

II . 2 . Les explications de la solidité et de la fluidité des corps par Boussinesq

Dans ce paragraphe nous allons montrer surtout comment évolue la conception de la matière qu'a Boussinesq entre l'année 1867 et sa mort. Comme l'ensemble des physiciens, il passe d'une vision où la référence

---

[100]Cette affirmation de Boussinesq ne pouvait être approuvée par Saint-Venant qui le fait savoir dans la lettre du 13 Juin 1870 qu'il adresse à Boussinesq auquel il trouve l'excuse...de l'ignorance:
"Aucun doute, quand vous avez fait ce coup d'essai, vous étiez persuadé que l'inégalité des coefficients λ et μ et que la variabilité de leur rapport suivant la matière était une chose généralement admise, car Lamé a rendu ce mauvais service de propager cette doctrine là, et vous étiez sans doute content de croire avoir ainsi trouvé des raisons à l'appui, *ce qu'on n'avait pas fait avant vous* (rajouté en marge). Eh bien, elle n'a plus aujourd'hui à l'Académie que des indifférents, car elle ne s'appuie sur rien au total. Je m'élève contre, et fortement, dans toutes les occasions, car je la crois parfaitement fausse, et je l'ai dit vertement il y a peu de semaines à Phillips qui demandait mon avis. Je crois que trois des membres de la section de géométrie, Bertrand, Hermite, Bonne (certainement) et puis Liouville y sont contraires", in A. de Saint-Venant, *Lettre à Boussinesq*, 14 juillet 1868, in J. Boussinesq, A. de Saint-Venant et alii, *Correspondance du comte de Saint-Venant (de 1834 à 1885)*, Paris, Bibliothèque de l'Institut, MS. 4226.
L'échange d'idées entre les deux hommes sur ce sujet se poursuivra jusqu'en 1875 au moins.

est l'équilibre, soit des corps macroscopiques, soit des molécules, à une conception où le mouvement est l'élément explicatif essentiel. C'est ce que nous appelons le passage d'une vision statique de l'univers à une vision dynamique. Ce changement de point de vue s'accompagne d'une modification de la conception de Boussinesq concernant les actions qui s'exercent entre les molécules. En 1867, pour expliquer les différences marquées entre fluides et solides, il est implicitement obligé de faire intervenir des actions moléculaires d'un type particulier: les actions de présence. Mystérieuses et irrationnelles, elles sont, peu à peu, remplacées par des actions plus habituelles entre molécules. Cette diminution du rôle des actions de présence dans la Physique de Boussinesq est parallèle à l'évolution de Boussinesq vers une description dynamique du comportement des molécules. Nous commencerons par nous intéresser aux actions de présence.

II . 2 . 1 . La situation des actions de présence dans la théorie de la connaissance de Boussinesq

Boussinesq termine ainsi sa lettre à Saint-Venant dans laquelle le premier discute la conception des atomes du second (14 Juillet 1868):

> "Cette incertitude au sujet de la constitution des choses dont notre raison n'a peut-être qu'une idée un peu altérée, me paraît une objection très forte contre tout système trop précis, tel celui du père Boscovich, plus précis peut-être que ne le comporte notre nature intellectuelle, et faisant par là craindre qu'on voit transformé et simplifié le problème en l'idéalisant. Ces réserves ne font pas du reste que je repousse le système (des atomes ponctuels). Mais jusqu'à présent, je me contente de considérer la matière comme divisible en molécules de dimensions très petites par rapport aux rayons d'activité moléculaire sans préciser davantage. Revenant à l'action réciproque de deux molécules, il me semble possible qu'elle dépende, non seulement de leur distance et de leur nature, mais encore de leur manière d'être, par rapport à elles, des molécules qui les entourent. Voir C.R. LXV page 44."[101]

La dernière phrase fait allusion à ce que Boussinesq appellera, dans les "Recherches sur les principes de la mécanique (...)" de 1872, les "actions de présence". Il suggère que l'action entre molécules pourrait être influencée par la présence d'autres molécules. En d'autres termes, l'action de deux molécules l'une sur l'autre ne dépendrait pas seulement de la distance qui les sépare, elle différerait suivant leur environnement moléculaire.

---

[101] Il s'agit de la note suivante: J. Boussinesq, *Note sur l'action réciproque de deux molécules*, C. R., 65, 1867, pp. 44 à 48, citation extraite de la Note, p. 460.

C'est là supposer que l'action entre molécules est modifiée par la présence d'autres molécules, sans que cette distance elle-même change, ce qui s'oppose à la conception des forces centrales telles que nous les avons définies plus haut.

C'est évidemment une hérésie aux yeux Saint-Venant, partisan de toujours de la mécanique d'allure newtonienne, où l'action entre molécules dépend uniquement de la distance qui les sépare. Dans la suite de la correspondance, Saint-Venant s'efforce de convaincre Boussinesq que seuls les atomes ponctuels sont susceptibles d'avoir une existence réelle. Il n'y parvient pas, et il ne pouvait le faire, car ces actions de présence prennent naturellement place dans la théorie de la connaissance de Boussinesq telle que nous l'avons exposée au début du chapitre précédent: elles font partie de ces demi-lueurs qui peuvent guider l'entendement.

Selon Boussinesq, certes, seuls les atomes ponctuels sont susceptibles de fournir des éléments pour la construction rationnelle, analytique, de la science. Ils sont le reflet dans le monde physique de l'élément de base du monde géométrique idéal: le point. Mais notre esprit est limité, il ne perçoit que la forme géométrique des choses. Néanmoins il est également sensible à des "demi-lueurs" qui peuvent être l'objet de la science. Le sentiment, le bon sens, aidés par des considérations générales, nous indiquent qu'il est possible d'admettre autre chose qu'une simple action entre molécules prises par couple. Saint-Venant ne comprend pas comment une molécule pourrait en "gêner une autre"[102]; et effectivement un point matériel ne peut en "gêner un autre", si ce n'est par le moyen d'actions du type de celles de Boscovich. Boussinesq répond:

> "Je veux bien que cette idée (des actions dues à la présence des molécules) vous gène, ne se présente pas comme inévitable, quelle soit même éminemment hypothétique. Tout ce que je prétends c'est que, a priori, elle n'est pas plus invraisemblable que l'hypothèse contraire, et a posteriori, certains faits tendent à la faire regarder comme vraisemblable. Ainsi les rapports calorifiques ou lumineux de deux corps sont bien définis par l'interposition d'un écran, et il n'est pas nécessaire pour cela que certaines molécules de l'écran soient mathématiquement sur la ligne droite que fait un point matériel d'un corps à un point matériel de l'autre. Je crois à une sorte d'absorption analogue exercée par le milieu interposé entre deux atomes et tendant à diminuer l'influence de l'un sur l'autre (ici quelques mots illisibles). J'admets très bien, entre tous les points, des

[102] J. Boussinesq, A. de Saint-Venant, *Objections qui pourraient être faites au Mémoire de Monsieur Boussinesq: Recherches sur les principes de la Mécanique etc.*, Paris, Archives de l'Académie des sciences, fonds Saint-Venant, carton 2, page 16 de la bibliographie générale, 30 Juin 1875.

> influences réciproques d'atomes, en quelque sorte le contrecoup de tout changement survenu dans les autres."[103]

Autrement dit, les actions de présence permettent de prendre en compte *toutes* les actions entre toutes les molécules. C'est évidemment, comme nous l'avons signalé, la seule attitude logiquement cohérente avec le premier principe de Boussinesq: la variation de l'état dynamique d'un système ne dépend que de son état statique. Ce principe perd tout son sens si on limite l'action de molécules m_1, m_2, m_3, etc., sur une molécule m à l'action de couples, mm_1, mm_2, mm_3, etc., sans tenir compte de l'action des triplets, quadruplets, etc., tels que mm_1m_2 et $mm_1m_2m_3$. Mais pour Boussinesq, en 1875, ces actions de présence ne peuvent entrer dans le cadre de la science positive:

> "Seulement je suis fortement convaincu que ces actions mystérieuses (les actions de présence) ne relèvent pas de la science positive et qu'elles n'ont rien de commun (que le nom) avec les produits mathématiques d'une masse et d'une accélération, que l'on considère seuls sous le nom de force dans la Mécanique, et qui ne sont, comme tout ce qui est l'objet d'une vision claire en fait de choses physiques, que des figures de géométrie susceptibles d'évaluation numérique."[104]

De telles actions de présence ne sont pas rationnelles, ou du moins ne sont pas concordantes avec l'univers géométrique idéal. En effet, dans un tel univers, toute relation mathématique entre deux point s'exprime en fonction de leur position dans l'espace. Or pour Boussinesq les points de l' espace sont indépendants, ils ne sauraient influer l'un sur l'autre. Il n'y a donc pas adéquation parfaite - conformément à l'épistémologie de Boussinesq - entre le monde géométrique idéal et le monde physique.

Ainsi peut-on constater, par ce qui précède, que Boussinesq n'a pas, en 1875, une vision claire de ce que sont ces "actions de présence"; elles sont simplement nécessaires si l'on veut expliquer les phénomènes les plus simples. Mais elles ne peuvent être clairement définies dans le cadre de la mécanique.

Toutefois, il n'est pas possible d'ignorer ces lois dans le cadre de l'épistémologie qui sous-tend toute science:

> "Je ne crois donc pas possible de faire intervenir ces actions, véritables mais trop obscures, dans les démonstrations proprement dites, mais je crois leur emploi tolérable et même bon dans les prolégomènes autant philosophiques que scientifiques que l'on donne

---

[103]ibid.
[104]ibid.

comme introduction à l'énoncé des grandes lois de la science positive, et dans lesquels on ne peut demander aux auteurs une rigueur, une netteté que la chose ne comporte pas."[105]

Boussinesq, dans sa lettre du 23 Juin 1869 à Saint-Venant, montre que cette idée des actions de présence est particulièrement féconde dans le cadre de la théorie de l' élasticité:

> "Je ne regarde pas comme certain que l'action réciproque de deux atomes soit indépendante de la présence d'autres atomes. Il me paraît très possible au contraire qu'elle en dépende. Dans cette hypothèse, on arrive, pour l'expression des forces élastiques dans un milieu isotrope, aux formules à deux coefficients, ainsi que je l'ai montré dans une note insérée aux C.R. du 1° Août 1867 en supposant que l'action d'une molécule s'étende à un grand nombre d'autres, ce qui permet de faire ces intégrations autour d'un point, dont se sont servis Navier, Poisson, etc."[106]

C'est évidemment réconcilier la conception de l'élasticité suivant la tradition de Navier, Poisson et Saint-Venant avec celle de Lamé. Mais c'est aussi abandonner cette tradition de rationalité absolue qui fait de la mécanique une Géométrie de la matière.

La simple considération des actions de présence comme moyen d'expliquer certains phénomènes disqualifie les forces centrales comme seul mode d'action entre atomes. Si l'action d'un atome sur un autre dépend de son environnement, alors l'action mutuelle de deux atomes dépend de l'environnement de chacun. Il n'y a donc plus égalité entre les actions de l'un sur l'autre. C'est le principe fondamental de la mécanique newtonienne, le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, qui est alors aboli. L'existence de telles actions impose, au

---

[105]ibid.

[106]ibid. Cette idée qui consiste à supposer que les actions entre molécules ont une "portée" grande par rapport au rayon d'activité moléculaire sera reprise par Boussinesq dans les "Recherches (...)"de 1872. Dans cette supposition l'action d'une molécule s'exerce sur une distance qui est grande par rapport aux espaces intermoléculaires. Si l'on veut trouver la force exercée sur une molécule par toutes les autres, *il faut tenir compte de la présence de toutes les molécules environnantes et intégrer ou sommer sur toutes les molécules".* Comme les distances intermoléculaires sont petites par rapport à la distance sur laquelle on intègre (portée de la force entre les molécules éloignées), les molécules peuvent être supposées contiguës, on peut alors intégrer comme si la matière était continue. Comme nous le verrons, cette conception permet de prendre en compte, sans hypothèses autres que les actions de présence, la symétrie du milieu. Mais la même conception d'actions moléculaires à longue portée, empêche Boussinesq d'adhérer à la naissante théorie cinétique des gaz. En effet les forces à longue portée maintiendraient liés entre eux les "amas de molécules" et ceux-ci ne pourraient se déplacer librement. Voir: J. Boussinesq, *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 18, 1873, p. 310 et p. 324.

moins, une refonte de la mécanique newtonienne et non pas une simple adaptation.

On peut ainsi juger de l'audace de Boussinesq lorsqu'il présente, en 1872, ses actions de présence, dans ses "Recherches sur les principes de la mécanique (...)". Il a déjà abordé, discrètement, le sujet dans une Note du 1° juillet 1867, Note que nous examinons sous un double aspect, celui du débat sur l'inégalité de λ et μ, et celui de l'application de l'épistémologie de Boussinesq. L'examen de sa correspondance avec Saint-Venant (voir chapitre précédent) où il déclare que les idées qu'il expose dans les "Recherches sur les principes de la mécanique (...)" de 1872, étaient déjà les siennes avant 1869, permet d'utiliser ce que nous savons de la conception de la science de Boussinesq pour analyser les textes de 1872.

II . 2 . 2 . Aperçu de la "Note sur l'action réciproque de deux molécules" (1867)

Lorsqu'il écrit cette Note[107], Boussinesq a vingt-cinq ans. Malgré ce jeune âge on peut utiliser les idées épistémologiques qu'il exposera par la suite, pour comprendre quelles sont les implications de cette Note. Boussinesq en expose ainsi le but :

> "Je me propose, dans cette Note, de chercher la formule la plus générale qui puisse représenter l'action réciproque de deux molécules, dans un milieu isotrope un peu dérangé de sa position d' équilibre."[108]

La "formule la plus générale" doit s'entendre ici comme une formule s'appliquant aussi bien aux solides qu'aux fluides. Le fait que le milieu soit "un peu dérangé de sa position d'équilibre" permet de faire naître des déformations qui seront assez petites pour permettre de limiter certains développements de fonctions en séries de Taylor au premier ordre. L'auteur fait dépendre l'action (il ne dit pas la force) entre deux molécules M et M' de leur distance ζ et des cosinus directeurs de la droite qui les porte. Boussinesq ne dit évidemment pas que ces actions ne dépendent **que** de cette distance. Les diverses déformations sont représentées par le petit déplacement - u, v, w, - que subit une "molécule" de coordonnées x, y, z. Puis il se propose de développer cette action entre molécules sous forme de séries de Taylor et ensuite de retrouver la forme des équations à deux coefficients λ et μ de Lamé.

---

[107]J. Boussinesq, *Note sur l'action réciproque de deux molécules*, C. R., 65, 1867, pp. 44 à 48.

[108]ibid., p. 44.

II . 2 . 2 . a . Les hypothèses utilisées et leur cohérence avec la théorie de la connaissance de Boussinesq

L'auteur va s'appuyer sur quatre hypothèses.

La première consiste à supposer que les molécules peuvent être figurées par des points, ce qui est cohérent avec ce que nous savons de l'épistémologie de Boussinesq. L'atome (ici la molécule) lui-même n'est pas connaissable, il peut être représenté par un simple point matériel. La molécule ici n'est pas un morceau de matière susceptible de rotations et vibrations, comme l'envisage Verdet par exemple[109].

La deuxième hypothèse est aussi cohérente avec la philosophie de Boussinesq: c'est la supposition de la continuité des fonctions, ce qu'il appellera la "grande loi de la continuité des fonctions". C'est elle qui permet de décomposer ces fonctions en séries de Taylor.

La troisième hypothèse, toujours implicite, est que le développement en série peut être limité à l'ordre un. Comme l'a montré Saint-Venant la petitesse des déplacements ne prouve pas que l'on puisse déterminer quel est l'ordre des dérivées que l'on peut négliger. Mais cette limitation est généralement admise dans toutes les théories de l'élasticité de l'époque. Boussinesq l'adopte sans justification, ce qui est conforme à la vision qu'il a de l'hypothèse en Physique:

> "Il suffit, pour que ces expressions soient acceptables, qu'elles soient simples, qu'elles se prêtent aisément à l'explication de tous les phénomènes (lumineux, dans le contexte)."[110]

La quatrième hypothèse consiste à supposer que les fonctions qui traduisent les actions sont des fonctions linéaires des dérivées, ce qui est conforme au principe de simplicité si souvent invoqué par Boussinesq.

II . 2 . 2 . b . Les procédés mathématiques utilisés

D'abord Boussinesq utilise la symétrie du milieu considéré, ici l'isotropie, pour déterminer la fonction traduisant l'action entre molécules. Il utilise ce procédé, qu'il emploiera systématiquement dans la suite de son œuvre, pour réduire le nombre des différentielles à prendre en compte dans les développements en série des fonctions, procédé qui est assez commun à l'époque et que l'on retrouve par

---

[109] E. Verdet, *Théorie mécanique de la chaleur*, éd. Prudhon et Violle, t. 2, Paris, Masson, 1872, p. 20.

[110] J. Boussinesq, *Note complémentaire au mémoire précédent-Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résultent des idées exposées au § VI*, in *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, p. 370.

exemple chez Lamé[111]. Boussinesq commence par prendre comme axe des z la droite MM', et il évalue l'action F entre les deux molécules suivant cet axe. Il utilise pour cela le fait que le solide est supposé isotrope, et donc le choix de l'axe est indifférent. Pour une même déformation, caractérisée par r (vecteur en notations modernes) certaines dérivées des composantes u, v, w, du déplacement des molécules changent ou ne changent pas de signe lorsqu'on permute le sens des axes en gardant leur direction. Ainsi dv/dz est changé de signe si l'on change de sens l'axe des z. En effet le petit accroissement dv, projection de dr sur l'axe des y, garde le même sens puisqu'il est réel; par contre l'élément différentiel pris sur l'axe des z change de sens. Si, par exemple, dv/dz était positif avant le changement de sens de l'axe des z, il devient négatif et ne peut figurer dans l'expression de l'action entre les deux molécules, qui est symétrique par rapport à cet axe. Il en est de même pour toutes les dérivées dont le numérateur et le dénominateur ne se rapportent pas au même axe. Il ne reste plus que les dérivées du/dx, dv/dy, dw/dz. Puisque les axes des x et des y jouent le même rôle, du/dx et dv/dy auront le même coefficient, différent de celui de dw/dz. En tenant compte de la linéarité de la fonction on peut l'écrire sous la forme:

$$A + B\ (du/dx + dv/dy + dw/dz) + C\ (dw/dz) \quad (1)$$

L'expression du/dx + dv/dy + dw/dz correspond à ce l'on appelle à l'époque la dilatation du milieu. Elle représente, nous l'avons dit, la variation relative de volume d'un petit élément de matière[112].
On peut reconnaître dans (1) une variante de l'équation que Lamé donne pour l'expression de la composante normale de la force élastique,

$$N_3 = \lambda.\theta + 2\mu.(dw/dz)$$ [113]

et dans laquelle B et C jouent le même rôle que λ et 2μ. Comme le dit plus loin Boussinesq, le terme A représente l'état primitif du corps avant déformation (état naturel).

L'utilisation des symétries, constante chez Boussinesq, évite d'avoir recours à des intégrales ou des sommes qui, on le voit avec Poisson, rendent les calculs compliqués et aléatoires. Boussinesq se dispense, une fois de plus, de décrire par le menu les actions entre molécules. On

---

[111] G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Paris, Gauthier-Villars, 1866, pp. 39 à 51.

[112] L'ensemble des procédés mathématiques ici utilisés sont exposés dans les volumineux cours de Mathématiques de Boussinesq. En particulier l'expression de la dilatation se trouve dans: J. Boussinesq, *Cours d'Analyse infinitésimale*, tome 1, *Calcul différentiel*, fascicule 1, partie élémentaire, Paris, Gauthier-Villars, 1887, n° 61.

[113] G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l' élasticité des corps solides*, Paris, Gauthier-Villars, 1866, p. 51.

pourrait dire que l'intégration est faite par la nature, le résultat visible de cette intégration est la symétrie du milieu considéré. C'est sans doute renoncer à l'idéal d'une mécanique physique déduite mathématiquement de quelques principes de base, mais c'est tout à fait conforme à l'épistémologie de Boussinesq telle qu'il la présente en 1873:

> "On peut regretter sans doute que toutes ces belles lois, au lieu de nous révéler en détail les mystères du monde des atomes, ou infiniment petits de la nature, sur lesquels elles semblaient devoir nous éclairer, ne soient que la traduction, sous mille formes différentes, de quelques faits simples, qu'un premier coup d'œil jeté sur le monde rend en quelque sorte évidents, et qui ne concernent que l'action totale des particules matérielles dont chacune contient un nombre immense de molécules."[114]

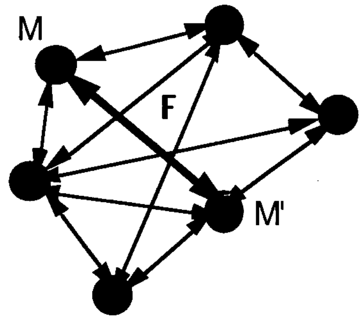
La Physique mathématique ne peut se passer de l'expérience même si celle-ci est commune.

II . 2 . 2 . C . Justification de l'utilisation des symétries par les actions de présence

Nous avons vu au § II . 1 . 1 . de ce chapitre que Lamé utilisait lui aussi des symétries, mais c'était à partir d'hypothèses sur la constitution moléculaire des corps déformés, ce qui rendait ses calculs discutables. L'expression de Boussinesq citée plus haut, "ce qui permet de faire ces intégrations autour d'un point, dont se sont servis Navier, Poisson", demande une explication. Dans la Note Boussinesq ne se livre à aucune intégration. Ce qui peut ressembler à une intégration, c'est justement, comme nous l'avons signalé, l'utilisation de symétries. Dans les intégrations de Poisson et Navier les actions entre molécules sont disposées comme suit.

---

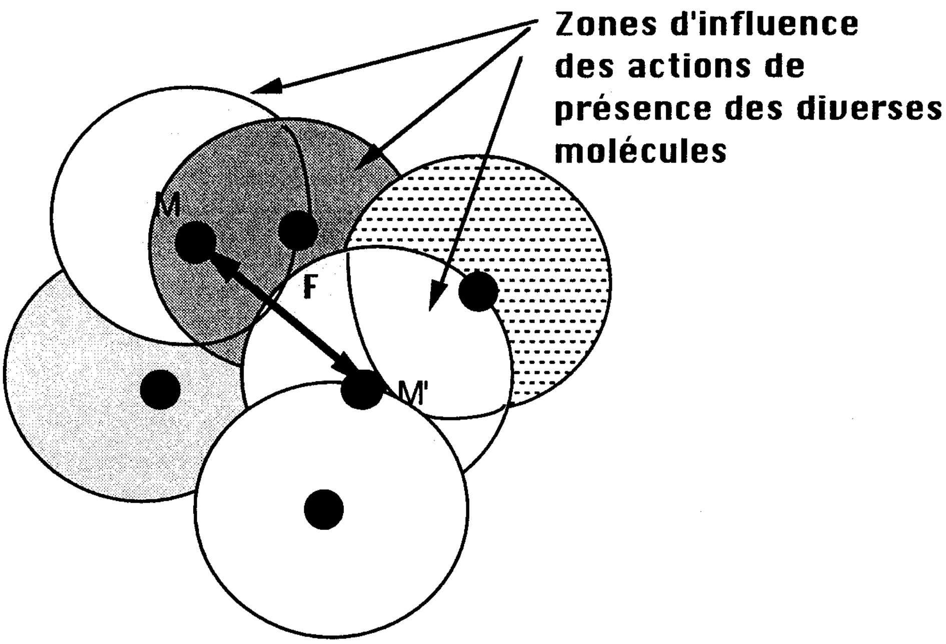
[114] J. Boussinesq, *Note complémentaire au mémoire précédent-Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résultent des idées exposées au § VI*, in *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, p. 369.



L'action F de la molécule M sur la molécule M' n'est pas influencée par les actions des autres molécules (Poisson, Navier)

La symétrie ne peut être légitimement employée pour l'expression de l'action entre deux molécules, puisque celle-ci ne dépend que de leur distance. Ce n'est qu'au moment de l'intégration ou de la sommation que l'on peut utiliser la symétrie du milieu. Mais alors, il doit être fait des hypothèses sur les déplacements des molécules lors des déformations, ce qui rend ces intégrations contestables.

Pour Boussinesq, au contraire, l'action qui s'exerce entre deux molécules est fonction de la présence de toutes les molécules. Celles qui les environnent, par leur seule présence, influencent leur interaction. Voici un dessin qui explique la conception de Boussinesq.



L'action F entre les deux molécules M et M' est influencée par la présence des autres molécules (Boussinesq)

Ainsi l'action entre M et M' dépend de la disposition de toutes les molécules qui les entourent, c'est-à-dire de la symétrie de leur arrangement, en d'autres termes de la symétrie apparente, macroscopique, du milieu. De plus, les actions moléculaires ayant un grande portée par rapport à la distance intermoléculaire, il s'ensuit que le milieu peut être considéré comme continu. Alors les discontinuités réelles de la matière n'affectent pas l'action entre M et M', et c'est toute la fonction qui traduit cette interaction qui est soumise à la symétrie du milieu, et non pas, seulement, certains de ses points. L'équation qui traduit l'interaction de M et M' a donc la même symétrie que le milieu. Ce n'est qu'ainsi que l'on peut justifier les simplifications par symétrie de Boussinesq. C'est évidemment une façon moderne de concevoir la symétrie de la substance; ce sont bien les caractères abstraits de la symétrie, par rapport à un point, par rapport à un plan, etc., qui sont pris en compte, et non la disposition spatiale concrète des molécules. Boussinesq ne considère pas chaque molécule prise individuellement, mais les molécules environnantes ensemble. Pour justifier les actions de présence par la référence aux faits, nous avons vu (Chapitre 2, § III . 4 . 3 . a , Note 331) que Boussinesq invoque le cas des composés chimiques où les propriétés du composé sont très différentes de celles du composant. Ainsi, les actions qui agissent dans les composants ne sont pas les mêmes lorsqu'ils sont à l'état libre et lorsqu'ils sont inclus dans le composé; elles ne peuvent être conçues que dans un milieu considéré globalement. L'énergie, nous l'avons signalé, est délocalisée dans l'ensemble du système, elle peut sous cet aspect aussi, avantageusement remplacer toute notion d'action entre molécules.

Seules les actions de présence peuvent justifier par une rationalité, en quelque sorte physique, l'utilisation de symétries dans la réduction de l'équation des actions entre deux molécules. Toutefois cette rationalité est incompatible avec celle, purement géométrique, de la mécanique traditionnelle, celle de Saint-Venant par exemple.

Mais il faut réintroduire la matière dans cet univers, et par là même, représenter les actions de cette matière.

II . 2 . 2 . d . L'introduction de la matière

L'introduction de la matière se fait par la prise en compte de la densité du milieu dans l' équation

$$A + B \, (du/dx + dv/dy + dw/dz) + C \, (dw/dz) \quad (1)$$

La dilatation, $du/dx + dv/dy + dw/dz$, représente la variation relative de volume. Boussinesq lui fait correspondre une variation relative de la densité ρ. Il a en vue une formule générale qui englobe à la fois l'élasticité des solides et des fluides. Or le passage du solide au liquide s'accompagne d'un changement de densité, c'est donc avec de bonnes raisons qu'il fait intervenir cette densité. Dans la formule (1) l'expression de la dilatation du/dx + dv/dy + dw/dz (variation relative de volume) peut être remplacée par la variation relative de densité $\delta\rho/\rho$, où la différentielle a été remplacée par un accroissement fini. De même, le milieu étant homogène, l'accroissement relatif de la distance z entre deux molécules, soit $\delta\zeta/\zeta$, peut remplacer le rapport d'infiniment petits dw/dz. La formule (1) devient:

$$A(\zeta) - \{ B(\zeta)/\rho\}.\, \delta\rho + C(\zeta).\,(d\zeta/\zeta) \quad (2)$$

Le signe - devant B provient d'une définition particulière de la dilatation par Boussinesq.

Les deux premiers termes peuvent être considérés comme le développement suivant les puissances ascendantes de $\delta\rho$ limité au premier ordre, fonction qui elle-même peut être décomposée en suivant les dérivées d'ordre ascendant de $\delta\zeta$, si l'on néglige les variations de $\delta\rho$. Après regroupement des divers termes l'expression (2) devient:

$$f(\zeta + \delta\zeta, \rho + \delta\rho) + F(\zeta).\, \delta\zeta/\zeta \quad (3)$$

Boussinesq a donc réussi la décomposition de l'action entre molécules en deux termes qui, pour lui, sont des actions entre molécules.

Le premier terme $f(\zeta + \delta\zeta, \rho + \delta\rho)$ représente ce que Boussinesq appelle les "forces de première espèce". Dans le mémoire de 1872, la Note que nous étudions est citée et les forces de première espèce sont décrites ainsi:

> "Il n'y a rien d'invraisemblable à ce que les forces de première espèce dépendent de la densité ρ; car il se peut que la matière interposée entre deux molécules gêne leur action réciproque, et d'autant plus qu'elle est plus dense."[115]

Ce sont donc bien les actions de présence qui sont incluses dans l'expression $f(\zeta + \delta\zeta, \rho + \delta\rho)$. Le second terme $F(\zeta).\, \delta\zeta/\zeta$, lui, représente l'élasticité, surtout des solides, les actions correspondantes ne dépendent que des distances entre les molécules, elles tendent à ramener le solide à son état naturel. Suivant l'auteur cette force constitue la solidité (voir fin du paragraphe précédent). Si nous revenons au premier type d'actions, voilà ce qu'en dit Boussinesq dans la Note de 1867:

---

[115] J. Boussinesq, *Recherches sur les principes de la mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoires de l'Académie des sciences et lettres de Montpellier, 1872, Journal de mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, p. 354.

"La première n'agit pas dans les mouvements qui ont lieu sans changement de densité, du moins si l'on suppose que l'action moléculaire s'étende à un grand nombre de molécules. En effet, pendant toute la durée d'un pareil mouvement, chaque molécule est constamment en rapport avec une même quantité de molécules placées de la même manière. Ainsi la première force n'empêche pas le glissement des molécules les unes sur les autres: elle constitue l'élasticité des fluides."[116]

Effectivement, dans les conditions énoncées par Boussinesq, la symétrie du fluide restant la même, l'intensité des forces de première espèce reste la même, seule change leur orientation. Comme le fluide est isotrope, la position relative des molécules avant et après déformation du fluide est sensiblement identique. Le changement de direction de la force de première espèce ne demande, à la limite, aucun travail puisqu'il correspond à une simple rotation géométrique. Les déformations sans changement de volume se font donc facilement dans les fluides. S'il y a changement de volume, il y a variation de la distance intermoléculaire ζ et les forces de seconde espèce entrent en jeu, comme dans le cas des solides.

L'existence de deux types de forces, qui selon Boussinesq sont à l'origine de l'inégalité des deux coefficients λ et μ, établit une distinction entre solides et fluides. Dans les premiers, ce sont les forces de seconde espèce, $F(\zeta).\ d\zeta/\zeta$, qui sont prépondérantes; dans les liquides, ce sont celles de première espèce qui dominent. Voici une autre conséquence de l'existence des forces de première espèce, conséquence dont nous verrons l'importance dans le paragraphe suivant :

"On voit aussi qu'elle (l'action de première espèce) ne doit donner à fort peu près sur un élément plan quelconque, par raison de symétrie, qu'une pression normale à l'élément plan et indépendante par suite de l'orientation de celui-ci."[117]

Autrement dit, ces forces de première espèce sont responsables des pressions dans les fluides et de leurs propriétés. Il reste à expliquer par quel moyen: c'est ce que fera Boussinesq entre 1880 et 1890.
Boussinesq conclut sa Note en en rappelant l'objet, à savoir la question des deux coefficients d'élasticité:

"Navier et Poisson, dans leurs mémoires sur l'élasticité des corps solides, ne comptaient que les actions de deuxième espèce, et c'est

---

[116] J. Boussinesq, *Note sur l'action réciproque de deux molécules*, C. R., 65, 1867, p.46.
[117] J. Boussinesq, *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoires de l'Académie des sciences et lettres de Montpellier, 1872, Journal de mathématiques pures et appliquées , 18, 1873, p. 352.

pourquoi ils ne trouvaient dans l'expression des forces élastiques qu'un seul coefficient. En tenant compte en outre, de celles de première espèce, on a les formules de M. Lamé, et, de plus, les forces normales contiennent un terme constant arbitraire, qui représente chez les fluides la pression à l' état primitif."[118]

On ne trouve pas, à notre connaissance, de déduction complète, par Boussinesq, des équations de Lamé à deux coefficients à partir de la formule (2). On peut toutefois constater la similitude de la formule de Lamé,

$$N_3 = \lambda.\theta + 2\mu.(dw/dz)$$

et de celle de Boussinesq,

$$f(\zeta + \delta\zeta, \rho + \delta\rho) + F(\zeta).\delta\zeta/\zeta$$

pour l'action entre deux molécules prise selon l'axe des z (ce qui correspond à N_3). $F(\zeta)$ correspond à 2μ, ce coefficient peut donc varier suivant les distances intermoléculaires, et donc suivant les substances, ce que le "bon sens" semble indiquer, mais qu'à l'époque les expériences ont du mal à prouver. L'expression de λ est plus difficile à trouver; on conçoit toutefois que le terme $f(\zeta + \delta\zeta, \rho + \delta\rho)$ puisse être mis sous la forme d'un produit de facteurs dont l'un serait $\delta\rho$ et qui correspondrait à θ, et dont l'autre correspondrait à λ.

Jusqu'en 1881 au moins, Saint-Venant continuera à défendre, dans ses écrits officiels, la mécanique moléculaire classique. Pour lui, remettre en cause l'égalité de λ et μ, c'est remettre en cause le principe rationnel du caractère central des forces intermoléculaires, et aussi l'égalité de l'action et de la réaction, donc finalement la Physique newtonienne.

La Note que nous venons de voir constitue un exemple de la méthode de Boussinesq. Partant de son grand principe de continuité ou de tout autre fait suffisamment général, il détermine la fonction représentative du phénomène par des considérations géométriques, des considérations de symétrie. L'arrangement des divers facteurs obtenus par décomposition en séries de Taylor fournit l'équation cherchée. Dans le cas que nous avons examiné ci-dessus, la forme de la fonction cherchée était connue d'avance: il fallait trouver deux termes additifs représentant, l'un l'élasticité des fluides, l'autre l'élasticité des solides. La démonstration ainsi menée apporte l'appui de la rationalité à l'hypothèse des deux coefficients et permet de donc trancher en sa

---

[118] J. Boussinesq, *Note sur l'action réciproque de deux molécules*, C. R., 65, 1867, p. 46.

faveur là où les expériences ne sont pas déterminantes. En plus l'expression mathématique de la fonction cherchée met ici en évidence des actions de présence qui vont, nous allons le voir, s'avérer bien réelles. Il nous semble avoir indiqué dans le cours de ce paragraphe combien cette démarche était cohérente avec l'épistémologie, peut-être implicite alors, de Boussinesq.

II . 3 . Une interprétation possible des actions de présence de Boussinesq dans le cas de la fluidité

Les actions de présence de Boussinesq semblent un procédé *ad hoc* pour conserver les acquis de la mécanique moléculaire tout en annexant les théories de Lamé ou de Green. Nous allons montrer ici qu'elles peuvent se révéler un procédé heuristique intéressant, ceci au moyen d'un article de Boussinesq de 1891. D'abord nous situerons le cadre historique de la nouvelle interprétation de sa fluidité au moyen d'un article de Brillouin où ce dernier critique la mécanique moléculaire classique dans le cadre des théories de l' élasticité.

II . 3 . 1 . La critique par Brillouin de la mécanique moléculaire classique

Dans une note que nous avons déjà mentionnée, Marcel Brillouin s'en prend violemment à la mécanique moléculaire classique, celle de Laplace et de Saint-Venant, et ceci toujours avec l'argument de l'inégalité des deux coefficients qui mettent en jeu ceux de Lamé, λ et μ. Voici la fin de ce texte:

> "Dans toutes ces recherches je ne suis point remonté à la source des forces élastiques, aux forces moléculaires elles-mêmes. Ce qu'on appelle la théorie de l'élasticité, la théorie moléculaire pure, est insoutenable; elle doit être complétée. Cette théorie conduit, comme on sait, à un rapport fixe entre le coefficient d'élasticité de glissement (μ) et le coefficient de compressibilité[119]: et l'expérience montre que ce rapport est variable avec la température."[120]

---

[119]Saint-Venant appelle V la "*proportion de la contraction de volume* produite par une pression uniforme p appliquée sur l'unité superficielle de toutes les faces du parallélépipède", Ec "le coefficient de contraction cubique", et G "le coefficient de glissement ou de torsion". Entre ces grandeurs il y a la relation " $p = Ec \cdot V$ ", et il démontre que $Ec = (5/3) \cdot G$. Ce qui correspond à l'affirmation de M. Brillouin (note 16 de Saint-Venant, in A. Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides, Note finale du § 16*, Paris, Dunod, p. 76).

Bruhat prend comme "coefficient de compressibilité" χ tel que $p \cdot \chi = - \theta$, où p est la pression et θ la dilatation du milieu. Ainsi, θ correspond à -V et χ à (1/ Ec). G a la même signification pour les deux auteurs. Bruhat démontre que $\chi = 3/(3\lambda + 2\mu)$ et que G correspond à μ. On a ainsi $Ec = ((3\lambda + 2\mu)/ 3) \cdot G$. Si l'on se place dans la

Nous voyons par là, à nouveau, l'importance du problème des coefficients d'élasticité à l'époque.

> Bien plus la fixité de ce rapport a pour conséquence l'impossibilité de l' état liquide, et cette remarque montre quelles précautions l'on doit apporter dans l'exposition des théories capillaires, fondées comme celle de Laplace et de Gauss, sur l'hypothèse moléculaire pure."[121]

En d'autres termes, l'hypothèse des deux coefficients différents, hypothèse qui relève d'une "mécanique moléculaire modifiée", et non plus comme chez Saint-Venant de la stricte considération des forces attachées à des points, permet, nous l'avons vu avec l'explication de Boussinesq, de faire une distinction nette entre liquide et solide. Au contraire, dans le cadre de ce que nous pouvons appeler l'hypothèse moléculaire stricte, celle de Saint-Venant, la distinction entre fluide et liquide est délicate. A partir d'une certaine amplitude des vibrations calorifiques on peut comprendre qu'il y ait fusion, mais la formule qui permet de prévoir cette fusion fait du liquide simplement un solide très dilaté. La théorie "moléculaire stricte" rend donc compte de façon incomplète, ou même pas du tout, du comportement des liquides[122].

---

théorie à une seule constante $\lambda = \mu = G$, et l'on a bien Ec = (5/3) . G. Le "coefficient de compressibilité" de Brillouin est donc à assimiler au "coefficient de contraction cubique" de Saint-Venant (citations in G. Bruhat, *Cours de Physique générale*, Mécanique, 6° éd., revue et corrigée par A. Foch, Paris, Masson, 1967, pp. 628, 629 et 642).
On a pu constater que ce qui est en cause dans l'article de Brillouin, c'est bien l'égalité des coefficients λ et μ.

[120]M. Brillouin, *Théorie élastique de la plasticité et de la fragilité des corps solides*, Note, C.R., 112, 1891, pp. 1054 à 1056.

[121]ibid., p. 156.

[122]On trouve une explication de la fusion suivant la théorie moléculaire que l'on pourrait dire "stricte" dans l' article de Saint-Venant intitulé: *Sur la manière dont les vibrations calorifiques peuvent dilater les corps, et sur le coefficient des dilatations*, paru aux Comptes Rendus de l'Académie des sciences (C. R., 82, 1876, pp. 33 à 39). L'idée de base, empruntée à Poncelet, est que les forces répulsives qui s'exercent entre molécules (forces que Saint-Venant ne voit aucun inconvénient à attribuer à un quelconque fluide), sont plus importantes que les forces attractives lorsque la distance intermoléculaire diminue. C'est l'explication qualitative habituelle de l'impénétrabilité des corps et de leur élasticité. Dans ces conditions, les mouvements oscillatoires ne sont pas symétriques par rapport aux positions d'équilibre des molécules. La résultante de la force attractive et de la force répulsive a, d'après le texte Saint-Venant, l'allure suivante (p. 34, dessin non donné par Saint-Venant):

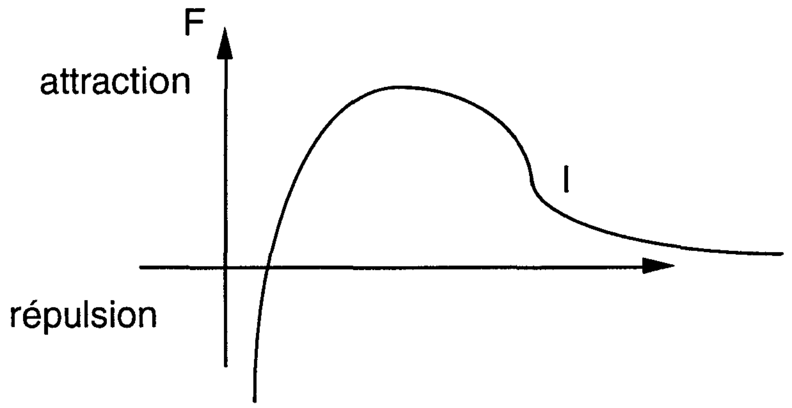
Vient ensuite l'explication par Brillouin de l'origine de cette inadaptation de la mécanique moléculaire à la description de la matière:

> Il ne faut plus regarder les molécules comme immobiles dans l'état d'équilibre, ni comme obéissant exclusivement aux déplacements d'ensemble que définissent les équations de l'élasticité, mais comme animées de mouvements indépendants, d'amplitude petite dans les vrais corps solides, suffisante néanmoins pour que les actions mutuelles moyennes soient un peu modifiées. Dans les liquides, ces mouvements de progression, que montre d'ailleurs suffisamment la diffusion, seront assez rapides et assez étendus pour rétablir instantanément l'isotropie troublée et justifier ainsi le mode de calcul de Laplace et de Gauss."[123]

II . 3 . 2 . Le passage d'une vision "statique" de la matière à une vision "dynamique" et l'importance de l'isotropie dans l'explication de la fluidité

Pour éclairer, dans la dernière citation de M. Brillouin, la partie relative à Laplace, on peut citer J. Dhombres et son article sur la théorie de la capillarité de Laplace[124]:

> "Le modèle gravitationnel du calcul (des actions de capillarité) recelait une troisième hypothèse implicite, celle qui consistait à considérer que l'effet dû à chacun des points inclus dans le volume différentiel de la sphère fluide (volume infiniment petit) pouvait être rassemblé en un seul point, situé en son centre et capitalisant toute la masse du volume. Ce modèle permettait évidemment l'emploi du calcul différentiel puisqu'ensuite il suffisait d'additionner les forces produites par de tels éléments différentiels en calculant des intégrales.



A partir du point I la force est de moins en moins attractive. On conçoit qu'il y ait fusion, mais pas le passage brusque du solide au liquide.

[123] M. Brillouin, *Théorie élastique de la plasticité et de la fragilité des corps solides*, Note, C.R., 112, 1891, pp. 1056.

[124] J. Dhombres, *La théorie de la capillarité selon Laplace: mathématisation superficielle ou étendue?*, Revue d'Histoire des sciences, 62, 1989, pp. 44 à 77.

En fait la force était conçue, *a priori*, comme s'exerçant entre masses ponctuelles: c'était avant tout une donnée mathématique susceptible du traitement par le calcul différentiel et intégral."[125]

La célèbre controverse entre Poisson et Navier a montré que cette intégration portant sur des points géométriques séparés, que ce soient des atomes ou des positions moyennes, comme nous l'avons déjà dit, n'allait pas de soi[126]. Il n'est nullement évident, pour un physicien, de remplacer le discontinu physique par le continu géométrique du calcul intégral.

Ce que dit Brillouin, c'est qu'il faut avoir quelque bonne raison de postuler cette isotropie, cette continuité de l'espace physique. D'après lui, ce qui permet de supposer l'isotropie, c'est le mouvement des molécules.

Or, si l'on s'en tient à la vision du monde telle qu'on peut encore la rencontrer chez Saint-Venant, les atomes, les points matériels, si l'on fait abstraction des petits déplacements dus aux déformations élastiques, sont presque immobiles, ou font de petits mouvements, vus comme périodiques, et dus à l'agitation thermique. Ce qui est pris en compte, c'est le point moyen des déplacements, le point d'équilibre des forces, et c'est à partir de ce point que les divers mouvements (élastiques, thermiques) sont décrits. La référence, le fondement du raisonnement est l'équilibre, l'immobilité. Cette mécanique moléculaire est donc une statique où l'on s'efforce d'introduire les déformations de la matière, déformations qui peuvent être variables dans le temps, quoiqu'en général, sauf dans le cas de la lumière, elles soient supposées lentes. Ce peut être, soit une reconnaissance de l'inaptitude de la Physique mathématique à prendre en compte l'importance réelle des vibrations calorifiques, soit un parti pris scientifique.

---

[125]ibid., p. 57.

[126]C.-F. Navier, *Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Mémoires de l'Académie des sciences, 7, 1827, pp. 375 à 396.

C.F. Navier, *Sur les lois des mouvements des fluides en ayant égard à l'adhésion des molécules*, Annales de Chimie et de Physique, 19, 1821, pp. 244 à 260.

S. D. Poisson, *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques*, Annales de Chimie et de Physique, 36, 1828, pp. 337 à 355.

S. D. Poisson, *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, Annales de chimie et de physique, 42, 1828, pp. 145 à 171.

A. Dahan-Dalmédico, *Mathématisations. Augustin-Louis Cauchy et l'Ecole française*, Argenteuil, Editions du choix, Librairie A. Blanchard, 1993, ch. 8, pp. 221 à 234, et ch. 10, pp. 265 à 273.

D. H. Arnold, *The "mécanique physique "of Siméon Denis Poisson: The evolution and isolation in France of is approach to Physical Theory (1800-1840)*, Archives of History of Sciences, 28, 1983, pp. 243 à 367, 29, 1983, pp. 38 à 94 et pp. 287 à 307.

Tout autre est la vision dynamique proposée par M. Brillouin. Pour lui, les atomes sont doués "de mouvements indépendants", sans relation entre eux, ni de phase ni de direction. C'est l'immobilité qui devient l'exception, elle n'est plus le point de départ du raisonnement. C'est le mouvement en lui-même qu'il faut considérer . Alors, dans les liquides, il n'est pas possible de dire à quel moment les atomes sont séparés et quand ils se choquent, on ne peut plus les considérer ni comme séparés ni comme contigus, *ils se fondent dans une masse isotrope.* Le problème de l'explication de l'isotropie des fluides usuels rejoint ici celui de leur élasticité particulière; expliquer pourquoi les liquides peuvent facilement se déformer, revient à expliquer pourquoi leur isotropie subsiste ou se rétablit facilement après une déformation.

En conclusion il me semble que l'on peut résumer ce qu'écrit M. Brillouin en affirmant qu'une description correcte de la matière doit prendre en compte l'aspect dynamique du comportement des particules microscopiques, le mouvement doit être conçu comme un élément explicatif et non comme la conséquence d'une explication. L'explication de la fluidité est corrélative de l'explication d'une propriété de symétrie des fluides: l'isotropie macroscopique.

Il semble que nous nous soyons éloignés des actions de présence. Mais qu'on se rappelle que ces actions expliquaient justement la fluidité. Or, dans le même numéro des Comptes Rendus, Boussinesq élève une réclamation d'antériorité quant à ce que nous pouvons appeler l'explication dynamique de la fluidité. Ainsi, nous pouvons voir quelle a été l'évolution des idées de Boussinesq concernant ces actions qui permettent à la fois la dérivation de l'énergie pour donner l'expression de la force, et l'explication de la fluidité.

II . 3 . 3 . La nouvelle explication de la fluidité par Boussinesq (1891)

Dans le numéro 112 des Comptes Rendus de l'Académie des sciences, Boussinesq fait insérer une réclamation de priorité quant à l'explication dynamique de la fluidité[127]. Cette réclamation débute par un rappel de la Note de Brillouin du même numéro:

> "Il ne faut plus regarder les molécules comme immobiles (...), mais comme animées de mouvements indépendants (...)."[128]

---

[127] J. Boussinesq, *Sur l' explication physique de la fluidité*, C.R., 112, 1891, pp. 1099 à 1102.

[128] M. Brillouin, *Théorie élastique de la plasticité et de la fragilité des corps solides*, Note, C.R., 112, 1891, pp. 1056.

Boussinesq fait alors état de certaines notes dont il se sert pour ses cours, en particulier il affirme:

> "Il se produit dans leurs moindres particules (des fluides), pendant les mouvements moyens locaux ou observables que nous y constatons, d'imperceptibles, mais incessantes modifications des groupements moléculaires, tendant à y égaliser les intervalles dans les diverses directions et, par suite, à y maintenir une constitution pareille dans tous les sens."[129]

Cette idée est affirmée à nouveau avec force dans la suite du texte:

> "La régularisation interne, le rétablissement incessant de l'isotropie, sont rendus possibles par l'amplitude des vibrations calorifiques, assez étendues dans tous les fluides pour dégager les molécules les unes des autres, et y permettre à la matière d'y prendre, dans chaque cas, la disposition la plus stable, laquelle est naturellement la plus simple, c'est-à-dire la plus égale dans tous les sens, la plus homogène. Les mouvements Browniens ne sont sans doute que la partie visible de cette agitation, celle des particules qui, exceptionnellement, progressent dans une même direction et dans un même sens."[130]

C'est donc ce mouvement incessant des molécules qui est responsable de l'isotropie. Ce qui est rejoindre l'opinion de Brillouin sur le fait que l'isotropie a une origine dynamique. Mais Boussinesq tient à prendre la défense de l'élasticité classique où il a obtenu de si grands succès, et il rappelle que dans les fluides très peu visqueux cette réorganisation après déformation du corps a lieu très rapidement, et:

> "(...) on peut alors presque toujours, à une assez grande approximation, y supposer atteint à tout instant, même dans les mouvements les plus rapides, cet état de la matière, que nous avons appelé *élastique*, où la configuration interne de chaque groupe moléculaire est réglée uniquement (au moins entre certaines limites de déformation s'il s'agit d'un solide) d'après les situations relatives occupées par les centres de ce groupe et des groupes environnants, c'est-à-dire d'après l'état statique moyen local, ou visible, dont les changements sont définis par les déformations d'ensemble ∂ , g de la particule."[131]

Autrement dit, c'est l'environnement d'une molécule qui détermine son état statique moyen. Il y a renversement de la perspective par rapport à la vison statique précédente où toute la description des phénomènes partait de la position moyenne fixe des molécules. Dans la première

---

[129] J. Boussinesq, *Sur l' explication physique de la fluidité*, C.R., 112, 1891, p. 1101.
[130] ibid., p. 1100.
[131] ibid., p. 1100.

explication de la fluidité par Boussinesq, les molécules bougent autour d'un centre fixe: leur position moyenne. La formule qui réglait les déplacements était conçue à partir de ces positions moyennes auxquelles à l'équilibre les molécules tendaient à revenir. C'est la statique, l'équilibre, qui étaient importants. Dans le second cas, celui de l'explication dynamique, c'est l'action relative, les déplacements, les chocs, l'impénétrabilité des molécules qui créent une position moyenne, celle qui justement servait de "point d'appui" à l'interprétation précédente. Là, comme dans tout système mécanique, l'évolution de ce système dépend de l'état statique seul, c'est-à-dire de la position exacte des atomes. Toutefois, cet état statique est conçu par Boussinesq comme l'élément déterminant de l'évolution dynamique du système et non comme un ensemble de positions d'équilibre des molécules. C'est donc bien la dynamique du système qui détermine l'état moyen dont parle Boussinesq.

Boussinesq réaffirme maintenant les résultats qu'il avait trouvés dans sa Note de 1867.

> "Mais quel que soit le degré de viscosité, cet état élastique, une fois produit, est, dans tous les fluides, éminemment simple, puisqu'il ne varie, à température constante, qu'avec la place ou l'étendue totale laissée à chaque petit volume matériel pour y répartir uniformément ses molécules, c'est-à-dire, en d'autres termes, qu'avec la densité actuelle ρ, et puisqu'il n'est astreint par suite à la conservation d'aucun mode spécial de contexture, en ce qui concerne la place de chaque molécule prise individuellement ou suivie dans son identité aux divers endroits qu'il lui arrive d'occuper."[132]

Le première partie de la phrase (avant ρ) fait clairement ressortir le lien qu'il y a entre l'agitation thermique et la masse volumique, tout comme l'expression des actions de présence y étaient incluses. La seconde fait allusion aux deux types de variables utilisées en hydrodynamique, celles de Lagrange et celles d'Euler[133].

En rapprochant les diverses citations, il apparaît que l'isotropie est due à l'agitation thermique. Or c'est cette isotropie qui permet de calculer comme si les divers points matériels étaient contigus; c'était aussi la fonction en partie dévolue aux actions de présence, leur rôle est maintenant tenu par l' agitation des molécules. On se souvient que les actions de présence étaient partie prenante dans le premier terme de

---

[132]ibid., p. 1100.

[133]Les variables de Lagrange: "On cherche à étudier chaque particule individuellement. Les coordonnées x, y, z, d'une particule fluide à l'instant t, par rapport à un système d'axes cartésiens ox, oy, oz, sont appelées variables de Lagrange". Les variables d'Euler: "Dans cette méthode, on étudie comment varie la vitesse des particules en tout point de l' écoulement et à tout instant", in R. Oziaux, J. Perrier, *Mécanique des fluides appliquée*, Paris, Bordas, 1978, p. 37.

la formule, $f(\zeta+\delta\zeta, \rho+\delta\rho) + F(\zeta). \delta\zeta/\zeta$, et plus particulièrement dans le terme faisant intervenir les variations de densité. Il est donc probable que ce que Boussinesq appelait, en 1872, des actions de présence se trouve ici transformé en conséquence de l'agitation. Mais dans cette agitation doivent, on peut le supposer, se développer des actions, des gênes, qui favorisent cette isotropie et qui sont dues à la présence de ces molécules. C'est ce qui est dit plus loin dans le même texte:

> "Les forces élastiques se réduiront donc, en chaque point de ceux-ci, à ce que l'on a appelé la pression moyenne p [égale à $-1/3(N_x + N_y + N_z)$] qui est une pression normale, de même valeur sur tous les éléments se croisant en sens divers; de plus, à une température t donnée, cette force p dépendra uniquement de ρ et t , à cause des énormes répulsions exercées entre les molécules les plus voisines."[134]

La référence à la pression normale due à la fluidité était représentée par la densité et mettait en action les forces de présence. Ici c'est le mouvement des molécules et la répulsion que ces molécules exercent entre elles qui donnent ces pressions normales. Le reste de la note a pour but de mettre en évidence le rôle des frottements dans les fluides.

Cette évolution de la pensée de Boussinesq sur la fluidité est tout à fait dans le sens désiré par Brillouin. L'équation

$$f(\zeta+\delta\zeta, \rho+\delta\rho) + F(\zeta). \delta\zeta/\zeta$$

est purement statique, les molécules sont immobiles si l'on néglige les brefs instants où ζ devient δζ et ρ devient δρ, alors que, nous l'avons vu, sa vision de 1889 est dynamique.

Dans l'explication de la fluidité, Boussinesq passe d'une conception statique de la matière à une conception dynamique. Mais cette évolution est progressive, elle ne se fait ni de manière brusque ni de façon linéaire. C'est ce que montrent les conceptions des actions de présence que l'on peut se former d'après les écrits de Boussinesq. En effet, deux interprétations sont possibles pour les actions de présence, elles sont toutes deux cohérentes avec ce qui a été dit au cours de ce paragraphe. La première peut se déceler surtout dans la correspondance de Boussinesq et de Saint-Venant entre 1868 et 1875. Là, l'action entre deux molécules, M et M1 par exemple, est influencée par la seule présence des molécules environnantes sans que la distance entre M et M1 change.Il s'agit d'une sorte d'influence, peut-être sur l'espace, sur l'éther qui sépare M et M1. Cette interprétation vaut à la fois pour la correspondance de 1868 et celle de 1875.

---

134 ibid., p. 1102.

La seconde interprétation nous semble apparente dans le mémoire sur les principes de la mécanique de 1872. Boussinesq y parle de "gêne" que les molécules environnantes exerceraient sur M et M1. Alors, on pense à une sorte d'encombrement stérique des molécules qui entourent M et M1; les premières pourraient empêcher M et M1 de se rapprocher, et cela explique l'intervention de la densité. Mais alors, les corps seraient d'autant plus fluides qu'ils sont plus denses, ce qui est contraire au cas général. Ou bien il faut supposer que Boussinesq pense déjà que les molécules sont animées de mouvements d'origine thermique, et que c'est le "choc" des molécules qui produit l'effet de présence. Cette dernière hypothèse est compatible avec le fait que la fluidité augmente avec la température. Elle est compatible avec les premières apparitions des descriptions dynamiques de la matière chez Boussinesq. En effet, dans le même mémoire, Boussinesq donne une définition dynamique du flux fondée sur le mouvement des molécules. En revanche il reste en 1875 attaché à des actions de présence conçues comme des "influences" sur l'action des molécules et de plus, comme nous l'avons souligné, il n'adhère pas totalement à une vision dynamique du mouvement moléculaire(théorie des gaz parfaits).Les deux interprétations des forces de présence nous semblent cohabiter dans l'esprit de Boussinesq entre 1872 et 1891. Elles témoignent du passage progressif d'une vision statique du monde à une vision dynamique.

Cette disparition progressive des actions de présence est corrélative de l'évolution de la conception des actions entre molécules, comme nous l'avons signalé à la note 331 du deuxième chapitre. Entre 1867 et 1875 Boussinesq affirme que tous les types de forces (indépendantes de la vitesse), et donc les actions de présence sont compatibles avec sa mécanique générale. En même temps il utilise les actions de présence (correspondance de 1868 et "Recherches sur les principes de la Mécanique etc." de 1872). Dans cette période il n'a pas de vision dynamique complète de la structure de la matière. En 1889 Boussinesq, selon ce qu'il dit dans l'article des C.R. de 1891, a une conception dynamique de l'élasticité des fluides. Alors, dans les "Leçons synthétiques (...)", l'hypothèse des forces centrales devient une "hypothèse plausible sur les actions moléculaires ou exercées à des distances imperceptibles"[135]. De plus cette hypothèse est "simple"[136] et nous avons vu dans le deuxième chapitre combien simplicité et vérité sont proches pour Boussinesq. Les actions centrales, si elles sont compatibles avec la théorie exposée, ne sont pas mentionnées. En 1910, il publie un article dans lequel il affirme que l'énergie potentielle se

---

[135] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 41.
[136] ibid., p. 42.

calcule à partir des "actions des molécules prises par couple"[137], et que ces actions ne dépendent que de la distance qui sépare les deux molécules: *c'est en revenir aux forces centrales, c'est donner raison à Saint-Venant.* Mais en 1910 Boussinesq a produit sa théorie dynamique de la chaleur. Ainsi, à mesure que la conception dynamique de la matière s'affirme, Boussinesq adhère à l'idée de force centrale. C'est, nous semble-t-il, que *tout devient descriptible en termes de forces centrales et de mouvement.* Les "influences exotiques"[138] dont parlait Saint-Venant, en 1881, dans sa défense des forces centrales, sont interprétables par le mouvement des molécules. *En particulier, les actions de présence peuvent être vues comme des chocs. Boussinesq peut alors accepter la dépendance exclusive de l'action entre molécules avec leur distance, et cela d'autant mieux que cela rend la Physique géométrisable dans ses moindres détails.*

De ce qui précède il découle qu'il faut prendre au sérieux l'épistémologie de Boussinesq concernant les demi-lueurs. Jusqu'en 1875, Boussinesq ne perçoit pas nettement ce que sont ces actions de présence qui lui permettent d'expliquer la fluidité, et qui, en plus, rendent cohérente sa définition de l'énergie. Il reste attaché à une mécanique où la référence est la statique. Pourtant, confusément, il commence à décrire de façon dynamique le fluide calorifique (voir § VI.5.1 du présent chapitre).Il n'y a pas encore chez lui de vision dynamique unitaire de la matière. Les actions de présence sont nécessaires d'après "le sentiment que nous avons des choses", elles ne sont pas mathématisables en terme d'équations différentielles, elles ne font pas partie de la science positive. Ce sont des demi-lueurs, et non pas des vérités éclatantes qui ont leur modèle dans le monde géométrique idéal. Elles témoignent pourtant d'une réalité qu'il ne faut pas négliger. En 1891, et déjà en 1899 dans les "Leçons synthétiques (...)", il affirme que ce qui est important, dans l'élasticité des liquides au moins, c'est le mouvement, et les actions de présence n'y sont que sous-entendues. En 1910, elles sont exclues de l'expression même de l'énergie potentielle, mais en 1901 et 1902, Boussinesq a produit sa "Théorie mécanique de la chaleur (...)", théorie que Bachelard qualifie de "dynamique". Ainsi, à mesure que la conception dynamique de la matière de Boussinesq s'affermit, les actions de présence disparaissent, elles cessent d'avoir leur utilité.

On peut constater que les actions de présence ont joué un rôle heuristique efficace: au lieu de s'enferrer dans les contradictions de l'ancienne mécanique, Boussinesq a préféré faire confiance à son

---

[137] J. Boussinesq, *Sur les principes de la mécanique et sur leur applicabilité à des phénomènes qui semblent mettre en défaut certains d'entre eux*, C.R., 150, 1910, pp. 1639 à 1643, particulièrement p. 1640.

[138] A. de Saint-Venant, in A. Clebsch, Théorie de l'élasticité des corps solides, Paris, Dunod, p. 73.

intuition, à ses demi-lueurs, et supposer de confuses actions en attendant que l'"idée mère", l'idée clairement explicative, la vision dynamique de la matière, se fasse jour. Dans cette disparition des demi-lueurs, dans leur remplacement par le mouvement, élément presque clair des données intuitives de la géométrie, Boussinesq ne peut que puiser une confiance accrue dans les principes mêmes de sa mécanique générale.

III . L'optique de Boussinesq ou la "Théorie nouvelle des ondes lumineuses"

III . 1 . Le contexte historique de l'optique autour de 1868

En 1866, Verdet présente ainsi les résultats obtenus par Fresnel:

> " Cinq conditions lui semblent devoir être admises, savoir:
> 1° La direction transversale des vibrations;
> 2° La perpendicularité des vibrations au plan de polarisation;
> 3° La conservation des forces vives ;
> 4° La continuité du mouvement dans les deux milieux, de part et d'autre de la surface de séparation;
> 5° La proportionnalité de l'indice de réfraction à la racine carrée de la densité de l' éther. "[139]

Il commente ensuite ces cinq conditions, et signale celles qui lui semblent requérir des démonstrations plus étendues que celles données par Fresnel. En particulier, la perpendicularité des vibrations au plan de polarisation (seconde condition) ne semble être pour Verdet que:

> "Une hypothèse qui n'a ni plus ni moins de probabilité que l'hypothèse contraire; mais Fresnel croyait, par sa théorie de la double réfraction, l'avoir démontrée."[140]

Les quatrième et cinquième conditions peuvent être vues comme contradictoires:

> "La quatrième (condition) mécanique est assez évidente: s'il y avait discontinuité à la surface de séparation, c'est-à-dire si le déplacement relatif des molécules infiniment voisines des deux côtés de cette surface de séparation avait une valeur finie, il en résulterait des forces élastiques infiniment grandes par rapport à celles qui déterminent la

---

[139]E. Verdet, *Introduction aux œuvres de Fresnel*, in Œuvres complètes d'Augustin Fresnel, Mallet-Bachelier, Paris, 1866, p. 381.
[140]ibid., p. 381.

propagation du mouvement dans toute l'étendue des deux milieux, et la discontinuité ne subsisterait qu'un temps infiniment court."[141]

Cette condition semble s'opposer à la cinquième qui fait varier la densité de l'éther avec la substance considérée: en effet, sur la surface de séparation des milieux réfringents, il se manifestera une variation de densité qui peut, à cause de l'étroitesse de la couche moléculaire de séparation des deux milieux, être une discontinuité. Verdet indique ensuite que plusieurs possibilités ont été envisagées pour expliquer la réfraction:

> "La cinquième condition n'était qu'une des deux hypothèses simples par lesquelles on représente la cause de la réfraction: on suppose que l'éther engagé dans les corps pondérables est plus dense que l'éther libre, mais que les forces élastiques qui agissent sur les molécules sont les mêmes dans les deux cas, et il en résulte que la densité de l'éther doit être en raison (directe) du carré de l'indice de réfraction."[142]

Des physiciens, tels Saint-Venant, exprimeront leur scepticisme quant à cet éther dont la densité varie, alors que l'élasticité reste la même. Aussi Verdet expose-t-il l'autre hypothèse possible:

> "Mais on peut également supposer que la densité de l'éther est la même dans tous les corps, et que la présence de matière pondérable a pour effet de diminuer les forces élastiques dans le rapport du carré de la vitesse de propagation, et chacune de ces deux hypothèses est corrélative à l'une des deux hypothèses qu'on peut faire suivant la direction des vibrations dans la lumière polarisée."[143]

Dans la première hypothèse, celle des vibrations dans le plan de polarisation, la condition de continuité "ne souffre aucune difficulté et conduit à des résultats conformes à l' expérience". C'est la théorie de Mac Cullagh et Neumann[144]. La théorie concurrente est défendue par Cauchy en 1836, et ses successeurs. Nous allons l'examiner ensuite.

---

[141] ibid., p. 381.
[142] ibid., p. 381.
[143] ibid., p. 382.
[144] Dans son étude sur Cauchy, A. Dahan-Dalmédico reprend cette opinion de Verdet. Elle montre que l'opinion de Cauchy sur la direction des vibrations a varié. En 1830, sa théorie de la double réfraction le conduit à supposer que les pressions dans les corps, à l'état naturel, sont nulles, il s'ensuit que les vibrations lumineuses devraient être dans le plan de polarisation. Mais dans sa théorie de la réflexion, Cauchy est conduit à admettre que les vibrations sont perpendiculaires à ce plan. Finalement en 1836, Cauchy adopte la solution des vibrations perpendiculaires au plan de polarisation, ceci "Peut-être pour dissiper les contradictions que nous avons mentionnées entre la théorie des cristaux optiques et celle de la réflexion et la réfraction" (p. 373 de l'ouvrage cité en fin de note). Le

La question de la variation possible de la densité de l'éther dans les corps réfringents est donc d'une importance capitale, en ce qu'elle est, avant Boussinesq, liée au problème de l'orientation de la vibration lumineuse, mais aussi parce qu'elle conditionne la compréhension du phénomène même de la réfraction et de la réflexion.

Nous ne prétendons pas maintenant, dans ce qui suit, tracer un tableau ni même une esquisse de l'œuvre de Cauchy et de ses successeurs en optique, mais simplement à partir des textes de Briot, Sarrau et surtout de Saint-Venant, dont c'est aussi le but, situer la "Théorie nouvelle des ondes lumineuses" de Boussinesq[145].

L'impression produite par l'œuvre de Cauchy, en 1847, sur ses contemporains est exposée par l'abbé Moigno, pourtant un de ses plus ardents défenseurs:

> "Quoique le nom de M. Cauchy ait retenti souvent au sein de l'Académie et soit devenu populaire, bien peu de personnes ont été jusqu'ici initiées aux secrets de son analyse. Les géomètres s'égarent dans cette multitude de mémoires autographiés, lithographiés, imprimés à Prague, à Turin, à Paris; les physiciens reculent à la seule pensée de demander à des notations arides, à des symboles imaginaires des faits qui frappent si vivement leurs regards."[146]

L'œuvre de Cauchy et de ses successeurs est analysée par Saint-Venant dans un article de 1872, qui est une défense de la "Théorie nouvelle des ondes lumineuses" de Boussinesq[147]. Saint-Venant rappelle d'abord les imperfections de la théorie de Fresnel:

---

même auteur conclut dans le sens de Verdet: "Dans le domaine de l'élasticité des solides Navier, Lamé, Clapeyron, Saint-Venant et Boussinesq adoptent le second point de vue (Vibrations perpendiculaires au plan de polarisation", ce qui est corrélatif à "L'éther engagé dans les corps pondérables est plus dense que l'éther libre" (p. 374 et 375 de l'ouvrage cité en fin de note). Dans le cas de Boussinesq au moins, les choses, comme nous le verrons, ne sont pas si simples. L'hypothèse fondamentale de Boussinesq est justement que l'éther engagé dans la matière et l'éther libre sont semblables. Voir A. Dahan-Dalmédico, *Mathématisations. Augustin-Louis Cauchy et l'Ecole française*, Argenteuil, Editions du Choix et Paris, Librairie Albert Blanchard, 1992.

145 J. Boussinesq, *Théorie nouvelle des ondes lumineuses*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 23,, 2° série, 1868, pp. 313 à 339. Aussi: J. Boussinesq, *Théorie nouvelle des ondes lumineuses* (Extrait), C. R., 65, 1867, p. 235 à 239; J. Boussinesq, *Exposé synthétique des principes d'une théorie nouvelle des ondes lumineuses*, Annales de Chimie et de Physique, 30, 4° série, 1873, pp. 539 à 565.

146 Abbé Moigno, *Répertoire d'optique moderne*, Première partie, Paris, Leipzig, A. Franck, 1847, p. 1.

147 A. de Saint-Venant, *Sur les diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses*, Annales de Chimie et de Physique, 24, 4° série, 1872, pp. 335 à 384.

"Dès la publication de son immortel Mémoire sur la double réfraction, où il semble déduire, d'un calcul des vibrations produites par les forces élastiques, des résultats qu'il avait trouvés tout autrement, presque tout le monde aperçut que la "théorie mécanique" dont il voulait les appuyer était défectueuse; et l'on sentit le besoin d'une théorie rationnelle de cet ordre important de phénomènes."[148]

C'est donc à rendre rationnelle la théorie de Fresnel que les Géomètres vont travailler. Saint-Venant, après avoir attribué à Navier la création de la théorie de l'élasticité, rapporte l'utilisation qu'en fait Cauchy dans le cadre de la "Théorie mécanique de la lumière". Cauchy démontre, analytiquement, l'orientation des directions des vibrations, que Verdet considérait comme des faits d'expérience:

"L'onde (lumineuse) elle-même se partage, 1° en un ellipsoïde, donnant des vibrations que l'on reconnaît être à peu près longitudinales ou presque perpendiculaires aux plans d'ondes, et 2° en une autre surface du quatrième degré, celle de Fresnel, donnant des vibrations qu'on trouve être à peu près transversales, c'est-à-dire s'écartant peu du plan des ondes planes ou tangentes à cette surface, dans les limites toujours étroites des degrés de biréfringence qu'offrent les cristaux connus."[149]

Si l'on suppose que la vibration lumineuse se propage à partir d'un point, la première de ces vibrations correspond à la vibration longitudinale, vibration qui embarrasse fortement les physiciens car elle n'est pas détectable. La surface du quatrième degré est celle qui se décompose en une sphère et un ellipsoïde dans le cas des cristaux uniaxes. Ces surfaces correspondent aux rayons ordinaire et extraordinaire des milieux biréfringents. Cette analyse de Cauchy, que Saint-Venant juge satisfaisante dans les cas précédents, ne rend pas compte, ainsi que ce dernier le dit, de la dispersion, c'est-à-dire du phénomène observé dans le prisme, ni de la polarisation rotatoire, phénomène qui se traduit, entre autres, par la rotation du plan de polarisation d'une vibration qui traverse une lame cristalline ou certaines solutions. La dispersion est d'abord, en 1830, expliquée par Cauchy, par "l'intervention de termes différentiels d'ordre supérieur à deux"[150]. Contre cette opinion, Saint-Venant reprend à son compte une critique de Briot de 1864, que nous citons maintenant:

"Cauchy attribuait la dispersion à des termes négligés dans les équations différentielles, et principalement aux termes renfermant les dérivées du quatrième ordre. Ces termes introduisent, en effet, dans

---

[148]ibid., p. 335.
[149]ibid., p. 340.
[150]ibid., p. 342.

l'expression de la vitesse de propagation un terme variable qui est à peu près inversement proportionnel au carré de la longueur d'onde, ce qui est d'accord avec l' expérience[151]. Mais l'hypothèse de Cauchy me paraît présenter une difficulté insurmontable; car, si ces termes du quatrième ordre avaient, dans le milieu éthéré qui pénètre un corps transparent isotrope, comme un morceau de verre, une importance capable de produire l'inégalité de vitesse observée, ces mêmes termes auraient aussi dans l'éther libre une influence pareille. Mais le phénomène de dispersion n'existe pas dans le vide, c'est -à-dire dans l'éther libre. L'observation des étoiles changeantes, et particulièrement celle de l' étoile Algol par Arago, n'a pas permis de reconnaître la moindre différence de marche des différents rayons lumineux, malgré l'énorme distance où ces étoiles sont de la Terre."[152]

En d'autres termes, si les formules de Cauchy sont en accord avec l'expérience, l'explication, elle, n'est pas recevable. C'est pourquoi Cauchy tente une nouvelle démonstration. Par des moyens purement analytiques, il arrive à mettre chaque déplacement des molécules, dans le cas des solides, sous la forme d'une "équation supposée homogène du second ordre, l'un (des termes de cette équation est), une dérivée de la dilatation cubique, l'autre (est) la somme de trois dérivées secondes par rapport à chacune des trois coordonnées, d'un même (c'est-à-dire soit u, soit v, soit w) des trois déplacements projetés (u, v, w)"[153]. C'est finalement l'équation de propagation d'une vibration dans un solide élastique isotrope non soumis à des actions extérieures[154]. Cette équation sera utilisée par Boussinesq, mais à partir de la théorie de l'élasticité de Lamé. Si cette équation est pertinente dans le cas des milieux isotropes, elle s'applique mal au cas des cristaux. Alors Cauchy a une nouvelle idée en 1849, celle:

---

151 Si l'on appelle c la célérité de la lumière, v sa vitesse dans un milieu quelconque, λ la longueur d'onde de la vibration considérée, et n son indice de réfraction, on désigne actuellement par formule de Cauchy l'expression suivante

$$n^2 = (v/c)^2 = A + B/\lambda^2 + c/\lambda^4.$$

Ce qui donne bien pour v une dépendance à peu près inversement proportionnelle à λ^2. Cette formule donne de bons résultats quand on l'utilise pour les verres habituels et dans le spectre visible. Dans d'autres conditions, infra-rouge et ultra-violet, on préfère la formule de Briot:

$$n^2 = (v/c)^2 = A'\lambda^2 + A + B/\lambda^2 + c/\lambda^4.$$

152 Ch. Briot, *Essais sur la théorie mathématique de la lumière*, Paris, Mallet-Bachelier, 1864, p. XIV.

153 A. de Saint-Venant, *Sur les diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses*, Annales de Chimie et de Physique, 24, 4° série, 1872, p. 350.

154 Si θ est la dilatation cubique ((du/dx) + (dv/dy) + (dw/dz)), u,v,w les déplacements des molécules, et Δ_2 le laplacien du déplacement des molécules (notation de l'époque) avec les notations de Lamé, on peut lui donner la forme suivante:

$$(A \,.\, d\theta/dx) + B \,.\, \Delta_2 u = d^2u/dt^2$$

"(...) d'admettre qu'à l'intérieur des systèmes réguliers et réticulaires de molécules pondérables, disposées en cellules égales et de même orientation, qui constituent les cristaux, les atomes éthérés (sont) disposés de la même manière inégale (ont le même arrangement) aux divers points de chacune d'elles."[155]

Autrement dit, Cauchy suppose que l'éther est cristallisé. Briot rejette aussi cette explication:

"Cauchy attribuait la même disposition régulière (que pour les cristaux) au milieu éthéré qui pénètre un cristal; mais cette hypothèse ne me semble pas d'accord avec les phénomènes. Si le milieu éthéré qui pénètre un cristal transparent du système cubique affectait la disposition régulière qui caractérise ce cristal, la vitesse de propagation ne serait pas la même dans toutes les directions et la lumière serait polarisée, tandis que l'expérience apprend qu'un cristal cubique se comporte comme un morceau de verre. Je ne regarde donc pas le milieu éthéré comme étant lui-même cristallisé, c'est-à-dire comme présentant la même disposition régulière que le cristal lui-même."[156]

On peut voir sur cet exemple que Briot, contrairement à Boussinesq, ne considère pas la symétrie du cristal elle-même, son groupe de symétrie en quelque sorte, mais sa constitution physique, ainsi la lumière ne devrait pas se propager de la même façon suivant les arêtes du cube que suivant les diagonales. Toutefois Briot, en 1864, emprunte à Cauchy une autre de ses idées, celle d'affecter les équations différentielles des mouvements des particules d'éther, non pas de coefficients constants, mais de coefficients périodiques, qui reprennent la même valeur pour des valeurs données des coordonnées. Pour Saint-Venant, la théorie de Briot souffre d'un défaut majeur, qui lui est commun avec celles de Cauchy et qui est de supposer à l'éther des propriétés physiques différentes suivant qu'il se trouve libre (dans le "vide") ou qu'il est engagé dans les corps pondérables. C'est un point que nous avons déjà évoqué, qui semble central pour Saint-Venant, et que Boussinesq traitera: c'est pourquoi nous l'avons mentionné ici. Tout aussi important que le problème de la dispersion est celui des phénomènes de réfraction et de réflexion sous son aspect quantitatif.

"Il fallait, spécialement pour évaluer les quantités de lumière réfléchies et transmises sous diverses incidences, pouvoir poser

---

[155]A. de Saint-Venant, *Sur les diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses*, Annales de Chimie et de Physique, 24, 4° série, 1872, p. 350.

[156]Ch. Briot, *Essais sur la théorie mathématique de la lumière*, Paris, Mallet-Bachelier, 1864, p. VIII.

les conditions de raccordement des ondes qui s'opère à la limite de deux milieux.[157]

Ces conditions ont été posées *a priori* par Fresnel; il reste, comme dit Saint-Venant, à "motiver rationnellement ces conditions, dites de continuité". Cauchy se rallie à l'idée de Fresnel de l'inégalité des densités de l'éther de part et d'autre de la surface de séparation des milieux réfringents[158]. Pour réfuter cette opinion, Saint-Venant en appelle à Navier, Poisson, Cauchy lui-même et Lagrange, pour indiquer ce que doivent être les conditions de continuité entre deux milieux:

> "Quoi qu'il ne parlât pas de pressions intérieures, il est facile de voir, en comparant ces dernières équations avec les formules de pressions trouvées peu après par Poisson et Cauchy, que les équations de Navier reviennent à égaler les trois composantes des pressions extérieures que les éléments de la surface enveloppe supportent, avec

---

[157]A. de Saint-Venant, *Sur les diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses*, Annales de Chimie et de Physique, 24, 4° série, 1872, p. 344.

[158]Moigno donne les principales caractéristiques de la théorie de Cauchy (in abbé Moigno, *Répertoire d'optique moderne*, Paris, Leipzig, A. Franck, 1847, pp. 18 à 20).Il commence par affirmer qu'il n'y a pas de théorie satisfaisante, ni pour les liquides ni pour les solides élastiques, en ce qui concerne les conditions aux limites de la surface de séparation de deux corps. Il y a variation continue des mouvements infiniment petits des molécules d'éther, ainsi que de leurs dérivées lorsque la lumière change de milieu. D'après cela: "On déduira immédiatement du principe que nous venons d'énoncer les lois de la réflexion et de la réfraction produites par la surface de séparation de deux milieux transparents ou opaques; mais il sera absolument nécessaire d'avoir égard aux trois espèces de mouvements qui peuvent généralement se propager dans chaque milieu. Si l'on tenait compte seulement des deux ondes à vibrations transversales, ou qui peuvent être perçues par l'œil dans les milieux transparents, les six équations de condition relatives à la surface réfléchissante ne pourraient plus être vérifiées que dans les cas particuliers, par exemple, pour certaines directions particulières de l'onde incidente" (p. 18 et 19).
Moigno est fermement opposé à la théorie de MacCullagh et Neumann. Il en donne toutefois un exposé. Les principes sont les suivants. La vibration réfractée est la résultante des vibrations incidentes et réfléchies, ce qui revient à composer les mouvements des molécules d'éther dans les deux milieux. Il y a ensuite conservation de la force vive, ce qui est une loi générale. La densité de l'éther est la même dans les corps et dans le vide. Et enfin les vibrations des molécules d'éther d'une lumière polarisée rectilignement sont dans le plan d'incidence (plan de polarisation). Observant que, dans ces conditions, les angles de vibrations sont les mêmes que les angles des rayons, il en déduit les lois de réflexion et de réfraction des rayons polarisés. Voir: Abbé Moigno, *Répertoire d'optique moderne*", Première partie, Paris, Leipzig, A. Franck ,1847, pp. 112 à 114.
La question de la direction des vibrations polarisées est étudiée par des procédés photographiques, en 1891, par Otto Wiener qui conclut, dans les deux théories de la lumière, la théorie mécanique et la théorie électromagnétique, à la validité de l'intuition de Fresnel (vibrations perpendiculaires au plan de polarisation). Voir O. Wiener, *Ondes stationnaires et direction de la vibration de la lumière polarisée*, Annales de Chimie et de Physique, 23, sixième série, 1891, pp. 387 à 429.

les composantes, de sens opposé, des pressions intérieures s'exerçant à travers les mêmes éléments."[159]

Il faut donc appliquer à l'éther les mêmes conditions de continuité qu'aux corps ordinaires. C'est ce que ne fait pas Cauchy, selon Saint-Venant, dans ses divers mémoires. Et l'accusation va même plus loin, car si l'on s'en tient à ce que nous dit ce dernier, Cauchy est prêt à renoncer aux principes mêmes de la mécanique de Lagrange:

> "Aussi, après avoir exposé ces doutes embarrassants, il conclut à rejeter la méthode de Lagrange, et jusqu'à l'équation générale de l'équilibre et du mouvement, de l'auteur de la Mécanique analytique, comme pouvant dit-il, s'appliquer aux questions du genre de celles qui nous occupent."[160]

Si l'on consulte le Mémoire de Cauchy auquel Saint-Venant fait allusion, on voit que Cauchy ne va pas aussi loin dans la contestation de Lagrange[161]. Ainsi, à l'endroit signalé par Saint-Venant, Cauchy commence par rappeler la méthode qu'utilise Lagrange pour traiter les discontinuités, celle d'égalité des pressions de part et d'autre de la discontinuité, puis on peut lire:

> "Il faut donc de toute nécessité, quand il s'agit de la théorie de la lumière, remplacer la méthode de Lagrange par une méthode nouvelle, ou, ce qui revient au même, remplacer le principe entre les pressions extérieure et intérieure par un nouveau principe."[162]

Ce n'est pas toute la mécanique de Lagrange qui est à revoir, mais simplement ce principe d'égalité des pressions.

Le principe que Cauchy pense lui substituer est indiqué plus bas, Boussinesq l'appelle "conditions de Cauchy":

---

[159] A. de Saint-Venant, *Sur les diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses*, Annales de Chimie et de Physique, 24, 4° série, 1872, p. 346.

[160] ibid., p. 347.

[161] Dans ce passage Saint-Venant cite plusieurs mémoires de Cauchy parus dans les C. R., dont il ne donne que la date de publication et les pages. Ce sont:

A. Cauchy, *Mémoire sur le mouvement d'un système de molécules*, C. R., 27, 1848, pp. 93 à 99.

A. Cauchy, *Mémoire sur les conditions relatives aux limites des corps, et en particulier, sur celles qui conduisent aux lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière*, C. R., 27, 1848, pp. 99 à 100.

A. Cauchy, *Mécanique moléculaire*, 1848,C. R., 28, pp. 2 à 6.

A. Cauchy, *Note sur les rayons lumineux simples, et sur les rayons évanescents*, C. R., 28, 1849, pp. 25 à 28.

A. Cauchy, *Mémoire sur la réflexion et la réfraction de la lumière, et sur les nouveaux rayons réfléchis et réfractés*, 1849,C. R., 28, pp. 57 à 65.

[162] ibid., p. 60.

"Suivant ce nouveau principe, lorsque la lumière se propage dans un milieu donné, ou se transmet d'un milieu à un autre à travers une surface qui sépare ces deux milieux, il doit y avoir, en général, continuité du mouvement de l'éther; c'est-à-dire que les déplacements moléculaires mesurés parallèlement aux axes coordonnés, les dérivées des déplacements pris par rapport aux axes, et les dérivées de ces déplacements prises par rapport aux variables indépendantes, (doivent) varier par degrés insensibles avec les coordonnées et le temps."[163]

Quoi qu'il en soit, la question de la continuité de la vibration de l'éther à la limite de séparation de deux milieux n'est pas résolue de façon satisfaisante par Cauchy. Ses successeurs, contemporains de Boussinesq, font diverses tentatives pour rationaliser l'optique. Comme nous l'avons dit, Briot suppose une distribution périodique de l'éther dans les cristaux. Mais ses calculs sont parfois d'une telle longueur qu'il est difficile de les analyser[164]. Sarrau suppose que l'éther reste isotrope et que sa densité change, mais son raisonnement est basé sur des suppositions arbitraires quant à la variation de cette densité. Saint-Venant conclut:

"On ne saurait aussi se le dissimuler: une densité variable, jointe à une élasticité constante, est bien difficile à admettre dans l'éther. Soit qu'on regarde ses atomes comme s'attirant et se repoussant suivant leur distance plus ou moins grande, ou comme se repoussant seulement avec une intensité qui dépend aussi de la distance, il est inévitable de conclure que, lorsque leur rapprochement devient autre, la résistance aux petits changements nouveaux de leurs distances doit l'être aussi."[165]

Autrement dit, si la densité de l'éther change, son élasticité doit changer aussi.

Le problème des propriétés de l'éther dans le vide et dans la matière pondérable reste crucial, non seulement pour déterminer la direction de la vibration lumineuse, mais encore pour interpréter des phénomènes aussi ordinaires que la réfraction ou la réflexion.

---

[163]ibid., p. 61.

[164]Ch. Briot, *Théorie mathématique de la lumière*, Paris, Mallet- Bachelier, 1864. La méthode de Briot est toute empreinte de la physique de la force. A la façon de Navier, il suppose des forces entre molécules d'éther, forces qui s'annulent à l'état naturel. Le calcul se ramène à déterminer la propagation d'une vibration dans le milieu éthéré, déformé de façon spatialement périodique par la matière pondérable.

[165]A. de Saint-Venant, *Sur les diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses*, Annales de Chimie et de Physique, 24, 4° série, 1872, p. 367.

Dans toutes les théories que nous avons précédemment évoquées, le rôle de la matière pondérable est de "déformer" l'éther de façon permanente. Une fois cette déformation produite, le système des molécules éthérées est étudié isolément: il y a donc séparation de l'éther et de la matière pondérable. Les problèmes consistant à prendre simultanément en compte la matière pondérable et l'éther sont liés à ceux de l'établissement des conditions de continuité. En effet, le changement éventuel de densité et d'élasticité de l'éther, qui explique la réfraction et la réflexion, ne saurait être dû qu'à l'action des molécules pondérables. Il est impossible que ces dernières ne soient pas affectées par les phénomènes lumineux. Alors il faut prendre en compte conjointement l'action de ces molécules avec celles de l'éther dans la propagation de la lumière. Ce sera le mérite de Boussinesq de proposer une solution pour l'ensemble de ces difficultés.

Saint-Venant annonce ensuite l'œuvre de Boussinesq et précise la tâche à laquelle doivent travailler les géomètres.

> "Ces considérations graves font désirer fortement que l'idée fondamentale sur laquelle Cauchy a basé une théorie rationnelle de la lumière reçoive un complément et des accessoires nouveaux propres à fournir, de ces phénomènes divers, des explications que les difficultés et les impossibilités présentées ne puissent atteindre."[166]

Et Saint-Venant annonce le mémoire de Boussinesq sur la "Théorie nouvelle des onde lumineuses" en ces termes:

> "Cette pensée a vivement excité, dès 1865, l'esprit de recherche d'un professeur du collège de Gap, M. Boussinesq, qui, quoique jeune, est connu aujourd'hui par des travaux déjà nombreux de mécanique."[167]

Le mémoire décrit ensuite par Saint-Venant est la "Théorie nouvelle des ondes lumineuses" (1868) de Boussinesq. Ce Mémoire devait constituer sa thèse de doctorat. Il avait d'abord soumis ce travail à Verdet qui l'avait accepté; sa mort oblige Boussinesq à s'adresser à un autre savant. Le remplaçant de Verdet, d'après Boussinesq, ne semblait pas favorable à ses idées; il proposera donc un mémoire sur la propagation thermique.

La théorie nouvelle des ondes lumineuses est précédé d'un mémoire d'élasticité: "Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés", qui en est comme le préambule, nous l'examinons maintenant.

---

[166] ibid., p. 367.
[167] ibid., p. 369.

III . 2 . La propagation des ondes dans les milieux isotropes déformés

III . 2 . 1 . Son importance dans la théorie de la lumière de Boussinesq

Dans sa "Théorie nouvelle des ondes lumineuses" , Boussinesq fait plusieurs références à son "Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés"[168], mémoire qui nous offre l'occasion de montrer ce que peut être, pour Boussinesq, la résolution d'un problème de mécanique physique en accord parfait avec ses conceptions épistémologiques. Nous commencerons l'étude des conceptions de l'optique selon Boussinesq par ce mémoire. Les relations entre l'élasticité et l'optique dans la seconde moitié du XIX° siècle sont suffisamment connues pour rendre indispensable l'étude rapide du mémoire sur les milieux isotropes déformés[169].

Boussinesq en présente d'abord une ébauche, dès 1867, à l'Académie des sciences; il s'agit d'une détermination de l'équation de propagation des ondes dans les milieux faiblement anisotropes[170]. De façon synthétique, par des considérations de symétrie, Boussinesq adapte l'équation de propagation des ondes dans les milieux isotropes aux milieux faiblement anisotropes. Dans la présentation, Boussinesq annonce les conditions dans lesquelles il étudie la propagation des ondes: un milieu primitivement isotrope est déformé. Lamé avait traité le cas des milieux solides homogènes, et indiqué une méthode pour traiter le cas d'une homogénéité périodique correspondant à la structure cristalline; visiblement cette méthode est reprise par Boussinesq[171]. Voici la suite de la présentation par l'auteur lui-même:

---

[168] J. Boussinesq, *Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés*, Journal de mathématiques pures et appliquées , 13, 2° série, 1868, pp. 209 à 241.

[169] L'occasion de ce mémoire est fournie par les réactions suscitées par un autre Mémoire de Saint-Venant. Il s'agit de: A. de Saint-Venant, *Mémoire sur la distribution des élasticités autour d'un point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope*", Journal de mathématiques pures et appliquées, 8, 1863, pp. 257 à 282 et 353 à 430. Dans ce mémoire Saint-Venant met en évidence l'ellipsoïde des élasticités pour les corps isotropes légèrement déformés. Mais il utilise pour cela l'idée que les molécules agissent les unes sur les autres suivant une loi uniquement fonction des distances. Il se heurte alors aux critiques de ceux qui, suivant Green et Lamé, pensent que la loi de force est inconnue et donc qu'il est aléatoire de fonder une démonstration sur de tels présupposés.

[170] J. Boussinesq, *Equations des petits mouvements des milieux isotropes comprimés*, C. R., 65, 1867, pp. 167 à 170.

[171] Dans la seconde édition de ses "Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides" de 1866 (références en fin de note), Lamé fixe ce qui devrait être, pour lui par la suite, la direction des recherches en élasticité. Boussinesq suit manifestement cette voie.

"Tous les phénomènes dus à l'élasticité des corps solides homogènes doivent donc se déduire des formules générales (4) et (8) de la leçon précédente, (5) et (6) de la leçon actuelle; sauf les légères différences qui pourraient résulter de ce que les développements ne sont qu'approchés". Ces formules sont:

$$(dN1/dx) + (dT3/dy) + (dT2/dz) + \rho V = 0 \quad (4).$$

Les équations (8) sont les équation déduites du tétraèdre de Cauchy,l' équation (5) est l' équation de définition de la dilatation (relative)

$$\theta = (du/dx) + (dv/dy) + (dw/dz).$$

N1 et T1 sont des fonctions linéaires des dérivées des déplacements projetés sur les axes par rapport aux coordonnées.

Lamé poursuit par une importante notation épistémologique qui, manifestement, inspirera Boussinesq.

"Mais quand les géomètres abordent une question de physique, ils étudient d'abord les termes les plus influents, afin de découvrir les lois les plus générales, ils reviennent ensuite aux termes négligés, pour se rendre compte des perturbations observées dans l'application de ces lois. Telle a été la démarche de l'Astronomie, telle doit être celle de la théorie mathématique de l' élasticité"(p. 34 et 35).

Boussinesq utilise constamment les équations de Lamé; les forces centrales posées comme telles, ne seront jamais utilisées. Rappelons que la théorie de Lamé est basée sur des calculs où l'on commence par considérer que les actions entre molécules s'effectuent suivant la droite qui les joint (n° 4, p. 6). Ainsi, semble-t-il, elles ne s'appliqueraient que dans le cas où l'on considère exclusivement ce type de forces. Lamé montre qu'elles peuvent s'appliquer à tous les types de forces, et il affirme que toutes les forces de la nature ne sauraient être centrales:

"Les formules (6)", celles qui donnent les Ni et les Ti en fonction des dilatations et des glissements, "où les coefficients peuvent être supposés constants, peuvent, dans certains cas, être appliquées aux corps cristallisés, il importe de détruire un doute résultant de la nature même des corps. La démonstration des formules (6), fondée sur le principe n°4, admet que l'action mutuelle de deux molécules est dirigée suivant la ligne qui les joint. Or quand un cristal se forme dans un liquide, les molécules qui viennent grossir le noyau ne se dirigent pas vers les centres mêmes des molécules déjà fixées, mais vers les intervalles qui les séparent; en outre, chemin faisant elles tournent, afin que leurs axes de figure s'arrêtent dans certaines positions, et il paraît difficile, sinon impossible, d'expliquer ces mouvements divers par des actions mutuelles uniquement dirigées sur les lignes mêmes qui joignent les molécules; ce qui conduirait à penser que les formules (6) ne sont pas applicables aux corps cristallisés"(p. 36).

Ce qu'affirme ici Lamé, comme il le fait en d'autres endroits, c'est que les forces qui agissent ne sont pas forcément centrales. Mais, pour lui, quoi qu'il en soit, les projection des déplacements moléculaires seront toujours données par des équations de la forme

$$u' = u + (du/dx)\, h + (du/dy)\, k + (du/dz).l$$

formule que l'on peut exprimer par une somme de dérivées de u,v,w. Ainsi on peut représenter les Ni et Ti par:

$$Aoo + Aou + Bo\, v + Cow + A\, (du/dx) + b(dv/dy) \ldots \text{ et les autres dérivées.}$$

Ensuite Lamé indique exactement comment procéder dans ce type de problème:

-une translation de l'ensemble du corps permet d'annuler certains coefficients:

-une petite rotation autour d'un des axes permet d'en égaler d'autres;

-une troisième permet d'en éliminer certains.

Lamé affirme: "Si l'on parvient ainsi à mettre les problèmes en équations, la nature de l'influence dont il s'agit, les forces qui la traduisent et leurs lois exactes se déduiront comme des conséquences" (p 37). Le scepticisme de Boussinesq lui interdit d'aller jusque là. Mais, comme nous le verrons il s'inspirera de la méthode de calcul. Voir: G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 1° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1852, 2° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1866, pp. 6 et 35 à 37.

"J'obtiens les formules des forces élastiques (celles des milieux légèrement déformés) en m'appuyant seulement sur l'hypothèse, admise par tout le monde, que ces forces peuvent être exprimées en fonction linéaire des dérivées partielles des déplacements."[172]

C'est donc considérer les forces élastiques comme le simple résultat de calculs analytiques. Cet accord avec les idées de Saint-Venant n'empêche pas Boussinesq de mentionner tout ce qui le sépare du grand géomètre:

"Dans le cas où le milieu, après sa déformation, n'est soumis à aucune action extérieure, les formules auxquelles j'arrive, sont celles que M. de Saint-Venant a données comme conséquence d'une distribution ellipsoïdale des élasticités autour de chaque point, et qu'il a reconnu, dans l'hypothèse de l'égalité de certains coefficients, regardés par lui comme conformes à la réalité, être communes aux milieux isotropes inégalement comprimés. Il est arrivé à ce dernier résultat, en admettant que l'action réciproque de deux molécules est simplement fonction de leur distance."[173]

Boussinesq évoque ici le volumineux "Mémoire sur la distribution des élasticités (...)" de Saint-Venant (1863)[174] dont une bonne partie est justement destinée à défendre la théorie des actions atomiques issues de points et uniquement fonctions des distances. Les deux coefficients dont Saint-Venant a reconnu l'égalité sont λ et μ. Cette égalité est une conséquence de la dépendance exclusive des actions avec la distance des molécules. Boussinesq prend donc un parti opposé à celui de Saint-Venant et se range aux côtés de Lamé. Dans ce contexte scientifique Boussinesq cherche à compléter, à rendre plus proche de la réalité, les résultats de Fresnel, à savoir que les ondes propagées par un tel milieu sont quasi transversales et quasi longitudinales. Il indique les conditions dans lesquelles on peut retrouver l'onde de Fresnel et la transversalité rigoureuse des ondes propagées (résultat de Fresnel). Enfin il montre les conditions dans lesquelles les vibrations se trouvent dans le plan de polarisation (théorie de MacCullagh et Neumann et Saint-Venant) et celles où elles lui sont perpendiculaires (théorie de Fresnel). Ainsi le travail de Boussinesq est dirigé vers les mêmes problèmes que ceux qui préoccupent les théoriciens de l'optique.

---

[172] J. Boussinesq, *Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés*, Journal de mathématiques pures et appliquées , 13, 2° série, 1868, p. 209.

[173] ibid., p. 209.

[174] M. de Saint-Venant, *Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 8, 1863, pp. 257 à 282 et 353 à 430.

III . 2 . 2 . Analyse du "Mémoire sur les milieux isotropes déformés"

III . 2 . 2 . a . L'établissement des formules des contraintes en fonction des déformations dans le cas d'un solide légèrement déformé

Boussinesq commence par préciser ce qui se produit lorsqu'on applique des "actions déformatrices" à un milieu primitivement isotrope: il se crée des déformations qui peuvent, soit être élastiques, soit aboutir à un état non élastique (déformation permanente). Il suppose que les actions A, B, C, exercées sur le milieu, sont parallèles aux axes de coordonnées x,y,z. Avant que les forces ne s'exercent, une pression K existait, en un point donné, de part et d'autre d'un plan passant par ce point. Boussinesq se place donc ici dans la tradition de Poisson, laquelle s'oppose à celle de Navier et Lamé pour qui à l'état naturel la pression est nulle. Les pressions qui s'exercent parallèlement aux axes de coordonnées, d'un côté d'un plan du trièdre de référence, sont donc, K +A, K +B, K + C. Ces pressions étant établies, produisent des déformations qui peuvent être permanentes. Leur valeur est de l'ordre de a,b,c, et l'on a: (A/a) = (B/b) = (C/c).

Par cette approximation, Boussinesq impose une relation entre actions et grandeurs de l'ordre des déformations: ces trois rapports sont identiques pour les trois actions et les trois déformations. Il utilisera cette approximation pour caractériser par un seul coefficient l'application des trois contraintes au milieu.

Les molécules ayant des positions déterminées (éventuellement variables avec le temps) on leur impose de petits déplacements par rapport à ces positions. Soit u, v, w les projections du déplacement d'une molécule. A la note 171, nous avons indiqué que Boussinesq semblait suivre les procédés de Lamé pour la résolution des problèmes d'élasticité dans les cristaux. Sa première tâche sera donc de particulariser l'équation qui traduit la dépendance linéaire des contraintes, particulièrement les Ni, Ti, par rapport aux déformations; soit:

Ni ou Ti de la forme $A_{00} + A_{0}u + B_{0}v + C_{0}w + A.(du/dx) + B.(dv/dy) + C.(dw/dz) + D.(dv/dz) + D'.(dw/dy) + E.(dw/dx) + E'.(du/dz) + F.(du/dy) + F'.(dv/dx)$.

Les considérations habituelles de symétrie amènent Boussinesq à conclure que N1, qu'il étudie d'abord, ne dépend que de du/dx, dv/dy, dw/dz; on peut le déduire de ce que la pression est la même de part et d'autre du plan zoy. De même, T1 ne dépend que de dv/dz et dw/dy, qui sont les éléments du glissement s'effectuant dans le plan zoy où agit T1 (par raison de symétrie).

Jusqu'à présent Boussinesq n'a utilisé que des procédés géométriques pour établir les déformations à utiliser dans le cas traité.

Il faut toutefois faire intervenir une caractéristique de l'action entre molécules. Saint-Venant, fermement, affirme que cette action est uniquement fonction de la distance entre molécules. Boussinesq n'a pas besoin de cette hypothèse. Pour Boussinesq, il suffit d' affirmer, "ce qui est l'opinion généralement admise", que chaque coefficient des dérivées partielles des déplacements des molécules est une fonction linéaire des déformations, fonction à laquelle il faut ajouter un coefficient représentant l'état du milieu avant les déformations.

C'est là l'hypothèse fondamentale de Boussinesq; elle l'écarte de l'opinion de Saint-Venant et le rapproche de celle de Lamé. Sans nier l'existence d'actions issues de points et agissant uniquement en fonction de la distance, la méthode de Boussinesq est valable pour tous les types d'actions.

Chacune des dérivées relatives aux petits déplacements moléculaires sera affectée d'un coefficient de la forme

(l + ia + jb + kd); l est le même pour toutes les expressions à cause de l'isotropie primitive du milieu.

D'autres considérations de symétrie lui font égaler, par exemple, le coefficient de c.(dv/dy) et celui de b.(dw/dz); en effet, une permutation simultanée des actions B et C et des axes oy et oz conduirait à permuter c.(dv/dy) et b.(dw/dz) dans l' expression de N1, sans que N1 ne change. Les coefficients qui affectent (dv/dy) et (dw/dz) sont exprimés en fonction de l'un d'eux, l'. Boussinesq ne s'explique pas sur la signification physique ou analytique de ces coefficients. Nous formulerons en note des hypothèses sur les raisons qui peuvent avoir guidé Boussinesq dans leur détermination[175]. Il trouve alors les expressions provisoires de N1 et T1. Voici ces expressions:

---

[175]Le lecteur de Boussinesq est un peu abasourdi quand, après quelques lignes de raisonnement purement géométrique, l'auteur exprime comme suit le coefficient de (du/dx):

$$(l + l'.(a + b + c) + l''.a + n.a + 2m_1 + 2s.(a + b + c) + 2s'.a).(du/dx).$$

Peut-être est-il guidé par les considérations suivantes. Nous rappelons d'abord les formules trouvées par Boussinesq:

$$N1 = K + A + (l + l'(a + b + c) + l''a).\theta + n.(a(du/dx) + b.(dv/dy) + c.(dw/dz)) + 2.(m.1 + (a + b + c) + s'.a) .(du/dx),$$

$$T1 = (m + m'.(a + b + c) + m''.a).(du/dx) + p.(b (dw/dy) + c.(dv/dz)).$$

$$N1 = K + A + (l + l'(a + b + c) + l''a).\theta + n.(a(du/dx) + b.(dv/dy) + c.(dw/dz)) + 2.(m.1 + (a + b + c) + s'.a) .(du/dx)$$

$$\text{et} \quad T1 = (m + m'.(a + b + c) + m''.a).(du/dx) + p.(b (dw/dy) + c.(dv/dz)).$$

Lamé, dans les indications qu'il donne pour montrer que les Ni et Ti peuvent toujours se mettre sous la forme d'une expression des trois glissements et des trois dilatations, fait effectuer une rotation au solide étudié, mais précise que cette rotation est "petite". De même, Boussinesq

---

K représente la pression qui s'exerce sur un côté d'un plan à l'état isotrope, A, celle qui est produite par l'action parallèle à l'axe des x.

a, b, c, sont les grandeurs de l'ordre des déformations qui ont lieu sous l'action de A, B, C.

θ est la dilatation due aux petits mouvements des molécules écartées de leur position d'équilibre.

l, m, m1, représentent la valeur de ces coefficients dans le cas où le milieu n'est pas déformé.

L'expression précédente de T1 peut être rapprochée de celle que l'on obtient pour T1 dans le cas d'un solide isotrope, soit:

$$T1 = \mu \; ((dv/dz) + (dw/dy)).$$

Boussinesq montrera par la suite que p s'annule lorsque les actions A, B, C, cessent de s'exercer, les déformations a, b, c, pouvant demeurer: la limite d'élasticité du corps est alors dépassée. On pourrait donc assimiler le coefficient (m + m'.(a + b + c) + m''.a) à μ. Lorsqu'on prend en compte la déformation du solide primitivement isotrope, déformation traduite par la présence de l'expression (a + b + c). Le terme m"a, peut traduire le fait que la contrainte T1 agit perpendiculairement à l'axe des x (on trouve aussi un facteur a isolé lorsqu'on calcule une des contraintes qui produisent la dilatation d'un parallélépipède isotrope).
Dans l' expression de N1 le facteur (l + l'.(a + b + c) + l".a) peut s'apparenter au coefficient λ de l'expression de N1 dans le cas isotrope ($N1 = \lambda.\theta + 2\mu.(du/dx)$), avec les remarques que nous venons de faire. Alors (a.(du/dx) + b.(dv/dy) + c.(dw/dz)) représente la dilatation due aux petits déplacements des molécules écartées de leur état d'équilibre si le milieu primitivement isotrope est déformé. En effet, (du/dx) est la dilatation (ou compression) suivant x par unité de longueur. Ainsi a.(du/dx) est donc la dilatation (ou compression) produite par les petits déplacements précédents, suivant x, pour la distance représentant la déformation suivant la même direction. Il faut bien voir que cette dilatation est produite par le déplacement moléculaire à partir de la position d'équilibre des molécules. Donc l'expression (a.(du/dx) + b.(dv/dy) + c.(dw/dz)) représente la dilatation due aux petits déplacements vibratoires des molécules, comme nous l' avions annoncé. Elle est du même ordre de grandeur que (l + l'.(a + b + c) + l".a).θ et doit donc être conservée.Le facteur (m1 + (a + b + c) + s'.a) peut jouer le rôle d'un coefficient analogue à μ dans la formule de Lamé pour les corps isotropes; ce coefficient est différent de celui trouvé pour T1 ce qui, bien entendu, peut être justifié puisque le milieu n'est pas isotrope mais simplement symétrique par rapport aux plans de coordonnées. Il ne s'agit là que d'hypothèses, Boussinesq ne donne aucune information sur les raisons de ses calculs.

utilise, suivant un procédé qui lui est familier, une rotation infinitésimale pour trouver des relations entre les divers coefficients. Enfin, il démontre que dans le cas général l'un des coefficients p est égal à (A/a) = (B/b) = (C/c). Il indique que ce coefficient p peut s'annuler sans que a, b, c s'annulent. Alors p est une sorte de coefficient d'élasticité, qui joue un rôle (relation entre les actions A, B, C et les déformations a,b,c) tant que l'on n'a pas atteint la limite d'élasticité du milieu primitif, et qui s'annule dès que la structure du corps et suffisamment modifiée pour que les déformations a, b, c demeurent. Finalement Boussinesq aboutit aux résultats suivants:

$$N1 = K + p.a + (l+ l'.(a +b +c) + l''.a).q + n.(a.(du/dx + dv/dy +dw/dz)) + 2.(m + m'.(a + b + c) +m''.(b+ c-a) + p.a)).(du/dx),$$

$$\text{et}\quad T1 = (m + m'.(a + b + c) + m''.a).((dv/dz) + (dw/dy)) + p.(b.(dw/dy) + c.(dv/dz)).$$

La forme sous laquelle se présentent ces formules, met en évidence le rôle de p; rôle important car, de sa nullité, c'est-à-dire du fait que le milieu est soumis à des pressions extérieures ou pas, dépendra, selon Boussinesq, l'orientation des vibrations lumineuses.

Boussinesq est donc parvenu à établir les expressions des contraintes N1 et T1, uniquement par des considérations de symétrie et par l'application de la linéarité des formules. Très explicitement, comme il le dit lui-même et comme le souligne par la suite Saint-Venant, il n'utilise pas le fait que les actions entre molécules sont des fonctions des distances[176]*. Il se place délibérément dans le cadre défini par Lamé,*

---

[176]L'enjeu du différent entre Saint-Venant et Boussinesq, ou plutôt de Saint-Venant et de toute une école de géomètres, est bien l'existence exclusive des forces seulement fonction de la distance entre molécules. Citons Saint-Venant (références en fin de note):
"Mais c'est par un calcul d'actions s'exerçant entre molécules très proches et fonction de leurs petites distances mutuelles que j'ai, au mémoire de 1863 cité, montré l'identité des formules de pressions dans les corps primitivement isotropes et déformés avec celles de distribution ellipsoïdale. Or un certain nombre de savants rejettent, depuis quelques temps, cette manière de procéder des inventeurs de la mécanique des corps élastiques, bien qu'elle ne soit que l'application rigoureuse d'une grande loi physique qui est toujours tacitement invoquée, même quand on cherche à en éluder l'emploi. Ils partent uniquement, pour établir les formules des pressions ou forces élastiques dans des corps quelconques, de la supposition que leurs six composantes (*stress*) sont fonctions linéaires des six petites déformations élémentaires éprouvées (*strain*) ou, si l'on veut, des neuf dérivées partielles des déplacements des points par rapport à leurs coordonnées". Voici maintenant que Saint-Venant fait de Boussinesq un proche disciple de cette Ecole:
"M. le Professeur Boussinesq, docteur ès sciences, vient donc de rendre à la théorie de l'élasticité un service réel en donnant, des nouvelles formules, une démonstration simple, se basant uniquement sur une supposition analogue (c'est

celui d'une action quelconque entre molécules, cadre qu'il utilisera de nouveau dans la Note 3 de sa "Théorie des ondes liquides périodiques" de 1872[177].

Il applique donc ce point de son épistémologie: les forces ne traduisent aucune réalité physique; ce qui lui importe, c'est l'expression analytique des phénomènes. Sa Note[178] *sur l'action entre molécules, que nous avons vu être fondée sur les actions de présence, est de 1867. On peut donc penser qu'en 1868, il exploite aussi cette idée. En 1875, Boussinesq écrit à Saint-Venant que ces actions de présence résultent de demi-lueurs qu'il n'évoquera dans des écrits publiés, qu'en 1889 (Leçons synthétiques de mécanique générale, p. 90). L'utilisation des symétries, somme toute fréquente pour l'époque, masque peut-être le recours aux actions de présence.*

III . 2 . 2 . b . Les applications

Le sujet du mémoire est bien la propagation des ondes. Pour trouver ces équations, Boussinesq, bien qu'il ne le signale pas, utilise l'équation trouvée par Lamé pour l'étude de la double réfraction[179]. Soit, pour le déplacement d'une molécule suivant l' axe des x:

$$\delta\ (d^2u/dt^2) = (dN1/dx) + (dT1/dy) + (dT2/dz)$$ où δ est la "densité" du milieu.

Les Ni et Ti sont alors remplacées par leur valeurs trouvées précédemment. Pour plus de commodité Boussinesq remplace les l, l', m, m', etc., par certaines de leurs combinaisons. Ces termes sont alors réduits au nombre de six. L'équation trouvée est en d^2u/dt^2 pour le premier membre. Le second membre est une fonction des dérivées secondes des déplacements des molécules; la voici pour le déplacement suivant les x:

---

nous qui soulignons) et très naturelle, à savoir que leurs coefficients sont eux-mêmes des fonctions linéaires des trois quantités très-petites, relatives aux trois directions principales et orthogonales des compressions permanentes éprouvées." Bien que signalant que les formules de Boussinesq "seront, sans aucun doute, adoptées par tous les savants", le but du Mémoire de Saint-Venant est bien de démontrer les formules de Boussinesq dans les cas de la limite d'élasticité dépassée, en se basant sur les actions de molécules uniquement fonction de la distance. Voir A. de Saint-Venant, *Formules de l'élasticité des corps amorphes que des compressions permanentes et inégales ont rendues anisotropes*, C. R. , 13, 1868. pp. 242 à 254.

[177] J. Boussinesq, *Théorie des ondes liquides périodiques*, Mémoires présentés par divers savants à l' Académie des sciences de l'Institut de France (Recueil des savants étrangers de l' Académie des sciences de Paris), 20, 1872, pp. 509 à 615.

[178] J. Boussinesq, *Note sur l'action réciproque de deux molécules*, C. R., 65, 1867, p.46.

[179] G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Paris, Gauthier-Villars, 1866, p. 227.

$(d2u/dt2) = (\lambda + \lambda'.a).(d\theta/dx) + (\mu + \rho.a)\ \Delta 2u + \sigma.(\ a.(d^2u/dx^2) + b(d^2v/dy^2) + c.(d^2w/dz^2)) + \nu.(\ d(a.(du/dx) + b.(dv/dy) + c.(dw/dz))/dx\ )$,
où λ, μ, sont des coefficients propres à Boussinesq et non les coefficients de Lamé

Cette équation apparaît comme une modification de celle de Lamé relative à la propagation d'un ébranlement dans un milieu homogène d'élasticité constante, équation que Boussinesq utilisera aussi dans le cadre de sa "Théorie nouvelle des ondes lumineuses". Voici cette équation écrite avec les notations habituelles (λ_L et μ_L sont maintenant les coefficients de Lamé) :

$$\rho.(d^2u/dt^2) = (\ \lambda_L + \mu_L\ ).(\ d\theta/dx\ ) + \mu_L.\ \Delta\ 2\ u$$ [180].

Dans l'équation trouvée par Boussinesq les forces ont disparu. Leur rôle est tenu par la prise en compte des déformations telles que a, qui résultent justement de l'application de ces forces. Que ces forces soient appliquées ou non, est indiqué par le coefficient σ, coefficient qui contient p, c'est-à-dire σ = p - m", ce qui permettra à Boussinesq de distinguer deux cas dans la propagation des vibrations (vibrations dans le plan de polarisation, et vibrations perpendiculaires à celui-ci .

On peut faire sur cette équation des remarques analogues à celles faites à la note 177 (voir la note)[181].

---

[180]Lamé établit cette équation à partir de celle de l'équilibre entre les forces élastiques et les forces appliquées (références en fin de note), soit:

$$(\ dN1/dx\ ) + (\ dT3/dy\ ) + (\ dT2/dz) + \rho\ X = 0 \text{ (p. 65).}$$

Puis, par intervention du théorème de d'Alembert, il introduit la variation de u en fonction du temps:

$$(\ dN1/dx\ ) + (\ dT3/dy\ ) + (\ dT2/dz) + \rho\ X = \rho.(d^2u/dt^2) \text{ (p. 66).}$$

Et si l'on supprime les forces appliquées, on a:

$$(\ dN1/dx\ ) + (\ dT3/dy\ ) + (\ dT2/dz) = \rho.(d^2u/dt^2) \text{ (p. 140),}$$

et par utilisation des équations de Lamé qui donnent N_1, T_1 et T_2, on obtient l'expression suivante:

$$(\lambda + \mu\ )\ .\ d\theta/dx) + m\ .\ \Delta 2\ u = \rho\ .\ (d2u/dt2) \text{ (p. 140).}$$

Voir: G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides,* 2° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1866, pp. 65, 66 et 140.

[181]On reconnait dans (dθ/dt) la dérivée de la dilatation, dans $(\mu + \rho.a)\ \Delta_2 u$, le laplacien de u avec l'intervention d'une direction privilégiée indiquée par la présence de a et dans $\sigma.(\ a.(d^2u/dx^2) + b.(d^2v/dy^2) + c.(d^2w/dz^2)) + \nu.(d(a.(du/dx) + b.(dv/dy) + c.(dw/dz))/dx))$. l'expression, dans une direction privilégiée, des forces dues à ce que les molécules sont dérangées de leur état d'équilibre atteint après déformation du milieu. En effet, selon Lamé ("Leçons (...) sur l'élasticité des corps solides", p. 140), en l'absence de forces appliquées, l'équation des variations de u s'écrit:

$$(\lambda + \mu)\ .\ (d\theta/dx) + m\ .\ \Delta_2\ u = \rho\ .\ (d2u/dt2).$$

L'un des objectifs de Boussinesq, sinon le seul, est de retrouver les équations exactes de la propagation des ondes, mais aussi l'approximation de Fresnel et les théories de MacCullagh et Neumann, théories dépendantes de la direction des vibrations et de la vitesse de propagation de celles-ci. Il définit une direction quelconque de propagation des ondes dans le milieu par ses cosinus directeurs m, n, p, et la direction des vibrations par les cosinus correspondants, m', n', p'. Ces variables, portées dans l' équation de propagation des ondes, fournissent l'équation permettant de calculer la vitesse des ondes, soit:

$$((\lambda + \mu - \omega^2 + (\sigma+\lambda').(am^2 + bn^2 + cp^2)).((mm' + nn' + pp') + (\rho+\nu).(amm' + bnn' + cpp')) = 0$$

Les déformations a, b, c sont petites. Pour que cette équation soit nulle, il faut que $((\lambda + \mu - \omega^2 + (\sigma + \lambda')(am^2 + bn^2 + cp^2)).(mm' + nn' + pp')$ soit très petit, du même ordre, ce qui implique, ou que $(mm' + nn' + pp')$ soit petit, ou que $(\lambda + \mu - \omega^2)$ le soit . Si mm' +nn' +pp' est très petit, cela signifie que la vibration est pratiquement transversale par rapport à la direction de propagation. L'autre cas correspond à une vibration pratiquement longitudinale dans la direction de propagation[182].

La démonstration de Boussinesq est inspirée des travaux de Lamé sur les milieux isotropes, tels qu'ils se trouvent dans ses "Leçons (...) sur l'élasticité des corps solides" (p.65 et suivantes). Boussinesq a remplacé les forces par des grandeurs telles que les déformations, grandeurs objectivement mesurables. *Il met en évidence deux systèmes de vibrations, quasi transversales et quasi longitudinales, et montre ensuite que ces ondes ne sont rigoureusement transversales ou longitudinales que dans le cas où le milieu est isotrope, mais on peut dire que par rapport à Cauchy par exemple, il n'indique pas que ces vibrations sont les seules qui peuvent se propager dans un tel milieu.*

Le second membre est la force motrice due à l'élasticité du milieu, et le premier en quelque sorte la "force de rappel" des molécules vers leur position d'équilibre. Dans $\nu.(d(a.(du/dx) + b.(dv/dy) + c.(dw/dz))/dx)$ on peut voir l'analogue de $(\lambda+\mu).(d\theta/dx)$, lorsque le milieu est déformé par les actions A, B, et C, représentées par a, b et c, et dans

$$\sigma.(a.(d^2u/dx^2) + b.(d^2v/dy^2) + c.(d^2w/dz^2))$$

l'équivalent de $\mu \,.\, \Delta_2 u$, avec les mêmes remarques que précédemment. Ainsi

$$\sigma.(a.(d^2u/dx^2) + b.(d^2v/dy^2) + c.(d^2w/dz^2)) + \nu.(d(a.(du/dx) + b.(dv/dy) + c.(dw/dz))/dx)$$

serait l'analogue d'une force de rappel, c'est-à-dire une force due à l'écartement des molécules par rapport à l'équilibre atteint après déformation. Le second membre de l'équation donnée par Boussinesq serait la somme des actions élastiques dues à la déformation du milieu par les actions A, B, C et de celles produites par le mouvement vibratoire.

[182] J. Boussinesq, *Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 13, 2° série, 1868, p. 222.

Ensuite Boussinesq montre, par le calcul des vitesses que le milieu peut propager dans toutes les directions deux vibrations quasi transversales. *Mais il ne montre pas qu'il peut toujours propager des ondes longitudinales ou quasi longitudinales; cela laisse la possibilité d'envisager le cas des milieux, tels l'éther, qui ne propageraient pas de telles vibrations.*

Enfin Boussinesq retrouve l'ellipsoïde des élasticités, l'équation de la surface d'onde avec, comme cas particulier, ce qu'il appelle la surface d'onde de Fresnel[183].

Le résultat le plus étonnant du mémoire est celui où Boussinesq retrouve à la fois les résultats de Fresnel, pour qui la vibration moléculaire est dans le plan défini par le rayon (éventuellement lumineux) et sa projection sur le plan tangent à la surface d'onde, et la théorie de MacCullagh et Neumann pour qui la vibration moléculaire est perpendiculaire à ce plan. Pour cela, il détermine la tangente de l'angle V de la vibration avec la projection du rayon sur le plan tangent à la surface d'onde. Nous ne donnons ici qu'une expression très simplifiée:

$$\text{tang } V = \pm(\sigma/\rho)/((1 - (\sigma/\rho)\ (B)^{1/2})$$

Si $\sigma = 0$ et $\rho \neq 0$, alors tang V s'annule. Suivant Boussinesq:

> "C'est le cas de la double réfraction d'après Fresnel: la vibration se fait suivant la projection du rayon sur le plan tangent à l'onde."[184]

Encore faut-il que Boussinesq précise dans quelles circonstances on peut avoir les conditions $\sigma = 0$ et $\rho \neq 0$. L'égalité et l'inégalité ont lieu simultanément si le milieu est déformé et si les actions déformatrices sont encore présentes[185].

---

[183]Boussinesq, à la page 229 du mémoire, donne ce qu'il appelle l'équation sous forme synthétique $\mathbf{S}(\ x^2/(\mathbf{S}x^2-\alpha\ ))$. Les signes **S** indiquent que cette expression est une somme obtenue en additionnant le terme qui suit **S** avec les termes analogues dans lesquels on a remplacé x par y et α par β, puis pour l'autre terme, x par z et α par γ. Le développement de la formule ainsi obtenue, est dans sa forme, analogue à celle de Fresnel, telle que la reproduit A. Dahan-Dalmédico à la page 328 de "Mathématisations". Voir: J. Boussinesq, *Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 13, 2° série, 1868, p. 209, et, A. Dahan-Dalmédico, *Mathématisations. Augustin-Louis Cauchy et l' Ecole française*, Argenteuil, Editions du Choix, Paris, Librairie Albert Blanchard, 1992, p.328.

[184]J. Boussinesq, *Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 13, 2° série, 1868, p. 234.

[185]La suppression des actions déformatrices entraîne, comme nous l'avons déjà souligné, que p s'annule (ce terme p n'est pas le cosinus directeur de ce paragraphe, mais un terme cité au paragraphe précédent). Dans ce cas, σ égale ρ, ce qui, nous dit simplement Boussinesq, "détruit la double réfraction". En effet l'équation de propagation des ondes initialement trouvée par Boussinesq est:

Boussinesq montre ensuite en quoi sa démonstration diffère de celle de Briot:

> " M. Briot l'obtient (l'hypothèse de Fresnel sur la direction des vibrations), dans ses Essais sur la théorie mathématique de la lumière (n^{os} 43 et 45), en supposant que les molécules d'éther se repoussent en raison inverse de la sixième puissance de la distance."[186]

Nous sommes tentés de voir dans ce qui précède une attaque de Boussinesq contre les utilisateurs de la force dans son acception causale. Si, effectivement, Briot part de la supposition que les molécules d'éther se repoussent en raison de $1/d^6$, on ne peut voir là qu'une hypothèse bien extraordinaire, et lui préférer, celle "universellement admise", de la linéarité des coefficients par rapport aux déformations. Mais il y a là sans doute, une petite perfidie de Boussinesq. Briot suppose au départ que l'action des molécules d'éther voisines d'une molécule donnée influent plus sur elle que celles qui en sont éloignées, ce qui est aussi ce que suppose par ailleurs Boussinesq dans son mémoire de 1872. Ensuite il suppose que les actions entre molécules sont en $1/d^n$. Enfin il démontre que n=6. L'essentiel de l' argument est une démonstration[187].

Finalement Boussinesq examine le cas où $\sigma=\rho\neq 0$. Il montre que cela correspond à une suppression des contraintes A, B, C, sans que les déformations a, b, c disparaissent; alors les vibrations sont perpendiculaires aux précédentes.

> "Ce serait, dit Boussinesq, le cas de la double réfraction d'après les idées de MM. MacCullagh et Neumann"[188].

Il n'en dit pas plus sur ces idées.

Boussinesq a donc retrouvé et précisé, à sa manière, les théories des déformations élastiques portant sur les problèmes traités par Fresnel. Il

---

$$(d2u/dt2) = (\lambda + \lambda'a)\ (d\theta/dx) + (\mu + \rho a)\ \Delta_2 u + \sigma\ (\ a(d^2u/dx^2\ ) + b(d^2v/dy^2) + c(d^2w/dz^2)) + \nu(\ d(\ a(du/dx) + b(dv/dy) + c(dw/dz))/dx)$$

Si l'on remonte la chaîne des divers termes qu'il utilise $\sigma = 0 \rightarrow \rho = o \rightarrow \nu = o$ et $\lambda=\lambda'=0$, ce qui porté dans l'équation précédente la réduit à $(d^2u/dt2) = \lambda\ (d\theta/dx) + \mu\ \Delta_2 u$, qui est l'équation de propagation dans un milieu isotrope et donc non biréfringent. Voir: J. Boussinesq, *Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés*, Journal de mathématiques pures et appliquées , 13, 2° série, 1868, pp. 219, 232, 234.

[186]ibid., p. 234.

[187]Ch. Briot, *Essais sur la théorie mathématique de la lumière*, Paris, Mallet-Bachelier, 1864, §§ 33 à 44, pp. 44 à 60.

[188]J. Boussinesq, *Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés*, Journal de mathématiques pures et appliquées , 13, 2° série, 1868, p. 235.

ne traite pas du cas de la dispersion, ce cas sera traité dans la "Théorie nouvelle des ondes lumineuses".

Dans ce mémoire, Boussinesq est donc parti d'une simple supposition à caractère analytique: les coefficients des dérivées des déplacements sont des fonctions linéaires des déformations. Ces déformations elles-mêmes ne sont pas précisées par une loi physique qui pourrait être de la nature de la loi de Hooke: les déformations sont simplement supposées petites.

La force a presque totalement disparu du mémoire. Il ne reste que les expressions des Ni et des Ti qui sont déduites par de simples considérations de symétrie, donc de géométrie. Ces contraintes disparaissent du résultat et sont donc de simples intermédiaires de calcul. Le résultat de l'article fournit, pour la direction des vibrations, une interprétation des résultats expérimentaux qui eux-mêmes sont sujets à des interprétations divergentes.

C'est donc par l'analyse pure, la Géométrie, et la simplicité extrême des hypothèses, que Boussinesq trouve les équations de propagation des ondes. La base physique est très mince, elle est formée par les résultats de Lamé, qui sont plutôt des résultats déduits de la mécanique dite "rationnelle".

III . 3 . La "Théorie nouvelle des ondes lumineuses" (1868)

Le mémoire sur la "Propagation des ondes dans les milieux isotropes déformés" laisse sans solution spécifique la propagation des ondes dans l'éther, et plus particulièrement la question de l'action de la matière pondérable sur la substance impondérable qu'est l'éther. La difficulté du passage de l'étude des vibrations dans la matière pondérable à celle des vibrations lumineuses est dégagée longuement par Lamé[189]. On ne peut, entre autres, plus appliquer l'équation même qui relie les forces élastiques aux variations des amplitudes des vibrations dans le temps[190]. Les physico-mathématiciens, tels Briot, admettent une déformation de l'éther par la matière pondérable, et l'existence de forces entre les molécules d'éther. Il s'agit d'une description qui se veut très précise et explicative, mais comme nous l'avons déjà signalé, d'une

---

[189] Ainsi s'exprime Lamé:

"Mais puisque l'éther est réellement le milieu dont les vibrations propagent la lumière dans les cristaux biréfringents, les formules que nous avons exclusivement employées (celles relatives à l'élasticité dans les solides homogènes d'élasticité constante) sont sans doute insuffisantes. La densité de l'éther peut n'être pas la même dans toute l'étendue du système d'une molécule; et de là résulterait la nécessité de substituer des fonctions périodiques aux coefficients constants des Ni, Ti. En outre, les termes qui contiennent les dérivées secondes des déplacements ne seraient pas négligeables" (G. Lamé, *"Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides"*, 1866, p. 330.)

[190] $\delta\,(d^2u/dt^2) = (dN1/dx) + (dT1/dy) + (dT2/dz)$ où δ est la "densité" du milieu.

grande complexité. Boussinesq, lui, considère effectivement les actions entre atomes d'éther et matière pondérable, mais sans rechercher une extrême précision dans la description de ces actions[191]. C'est l'action réciproque lors du mouvement vibratoire, les actions et réactions dynamiques des molécules d'éther et de matière pondérable qui, ensemble, fournissent les termes de l'équation de propagation de la lumière. Cette description se fonde sur une hypothèse qui n'est pas formulée de façon très affirmée: l'action entre éther et matière pondérable se ramène à une sorte de frottement.

Boussinesq abandonne à nouveau ici la description au moyen de forces de type plus ou moins explicitement newtonien pour se concentrer sur la déduction des équations différentielles du mouvement. La nature des actions entre éther et matière pondérable est indiquée de façon vague. Ce qui compte pour Boussinesq, c'est de retrouver de façon simple les équations différentielles du mouvement vibratoire lumineux.

Une telle démarche, novatrice, ne pouvait que susciter la critique des géomètres de l'époque; elle entraîne les vives critiques de Sarrau. Cela donne l'occasion à Boussinesq d'affirmer publiquement, dans son mémoire de 1872 sur les principes de la mécanique, ses convictions épistémologiques. Nous les évoquerons en conclusion.

III . 3 . 1. Analyse du mémoire sur la "Théorie nouvelle des ondes lumineuses"

Nous allons étudier maintenant le mémoire proprement dit. Il est suivi de nombreux compléments ou éclaircissements.[192] Boussinesq fera une synthèse de ses conceptions dans le tome 2 de son cours de Physique mathématique de 1903[193]. C'est là une sorte d'exposé final de la théorie mécanique de la lumière au moment où elle cède la place à la

---

[191] J. Boussinesq, *Théorie nouvelle des ondes lumineuses*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 23,, 2° série, 1868. pp. 313 à 339. Aussi: J. Boussinesq, *Théorie nouvelle des ondes lumineuses* (Extrait), C. R., 65, 1867, p. 235 à 239; J. Boussinesq, *Exposé synthétique des principes d'une théorie nouvelle des ondes lumineuses*, Annales de Chimie et de Physique, 30, 4° série, 1873. pp. 539 à 565.

[192] J. Boussinesq, *Etude sur les vibrations rectilignes et sur la diffraction, dans les milieux isotropes et dans l' éther des cristaux*, C. R., 65, 1867, p. 672, et Journal de mathématiques pures et appliquées, 13, 1868, pp. 340 à 371.

J. Boussinesq, *Exposition synthétique des principes de la théorie nouvelle des ondes lumineuses,* Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, pp. 361 à 363, et Annales de chimie et de Physique, 1873, 30, pp. 539 à 565.

J. Boussinesq, *Addition au mémoire intitulé: Théorie nouvelle des ondes lumineuses,* Journal de Mathématiques pures et appliquées, 13, 1868, pp. 433 à 438.

[193] J. Boussinesq, *Note 2 - Exposé de la théorie des ondes lumineuses contenue en germe dans la troisième et la quatrième leçons*, Cours de physique mathématique de la Faculté des sciences, Paris, Gauthier-Villars, 1903, pp. 267 à 561.

théorie électromagnétique. G. Bachelard en a donné les principes dans son *Etude sur l' évolution d'un problème de physique*,[194] à partir de l'exposé succinct du premier tome du Cours (leçons 3 et 4). Les idées, y compris celles exposées dans la Note étendue qui clôt le second tome du Cours, ne sont pas différentes de celles exposées dans la "Théorie nouvelle des ondes lumineuses" présentée en 1867 devant l'Académie des sciences, mais publiée en 1868 dans le Journal de mathématiques pures et appliquées (Journal de Liouville). Le sujet traité par Bachelard ne l'amenait pas à s'intéresser aux discontinuités éventuelles entre l'éther libre et celui inclus dans la matière pondérable, il n'en parle donc pas. C'est au contraire la partie qui nous semble importante, car très originale par rapport aux théories de la lumière de 1867. C'est donc la "Théorie nouvelle des ondes lumineuses" publiée en 1868 que nous exposerons. En 1903, dans son cours de Physique mathématique, Boussinesq montre l'importance que cette théorie a revêtue en 1867:

> "C'est en 1867 que j'ai commencé à faire connaître le mode d'explication des ondes lumineuses dont les III° et IV° leçons ont exposé les principes(...). Notre grand physicien Fizeau la regarda (...) comme très fondée et très suggestive. Quelques années après, des savants éminents, surtout en Allemagne, mais aussi en France, la reprirent, en l'étendant même aux milieux absorbants (car je m'y étais borné aux cas de transparence parfaite), et ils lui demandèrent des points de départ ou des vues simples pour les travaux d'optique physique dont elle a ainsi inspiré un certain nombre."[195]

En 1903, Boussinesq ne manifeste plus la juvénile assurance qu'il avait en 1868, lorsqu'il publiait sa "Théorie nouvelle des ondes lumineuses". Il dit dans son cours de Physique mathématique:

> "Comme je ne sais s'il me sera jamais donné de publier ailleurs l'ensemble des résultats, plus ou moins probables, de mes réflexions sur ce sujet des ondes lumineuses, exceptionnellement délicat, où est si grande encore la part de l'incertain, j'essaierai d'en compléter ici l'exposé ébauché dans les III° et IV° leçons ."[196]

Retournons à l'époque où la "Théorie nouvelle des ondes lumineuses " suscitait d'âpres débats.

III . 3 . 1 . a . Les actions entre éther et matière pondérable selon Boussinesq

---

[194]G. Bachelard, *Etude sur l'évolution d'un problème de physique. La propagation thermique dans les solides,* Paris, Alcan, 1° éd., 1927, Paris, J. Vrin, 2° éd., 1973, pp. 132 à 150.

[195]ibid., pp. 267 et 268.

[196]ibid., pp. 268 et 269.

Le Mémoire est donc une théorie de la propagation des vibrations dans l'éther. Boussinesq qui, par la suite, jusqu'en 1901 et après, décrira de façon précise ce milieu, se borne ici à en donner les propriétés avec quelques justifications. Pour lui, l'éther est un milieu isotrope pouvant transmettre les vibrations très rapides, c'est-à-dire les vibrations lumineuses, mais se laissant traverser par des masses importantes[197]. Ce qu'il résume comme suit:

> "On doit donc, ce me semble, considérer cet agent comme doué d'une élasticité puissante pour des vibrations de très petite amplitude, mais admettre, en même temps, que ces forces élastiques cessent d'être proportionnelles aux écarts, avant que ceux-ci deviennent appréciables, et qu'elles restent toujours très petites en valeur absolue."[198]

Affirmation paradoxale que Boussinesq ne justifie pas dans ce texte. Cette justification sera ébauchée dans son mémoire de 1872, et surtout dans la première partie de la "Théorie analytique de la Chaleur" (1901). Nous avons donné ces explications au chapitre précédent (§ III.4. 5 . e). Mais en 1867, les propriétés de l'éther sont en quelque sorte posées *a priori*. Quelques années plus tard (1872), dans sa réponse à Sarrau, Boussinesq donnera sa conception de l'éther:

> "La facilité que l'éther possède de pénétrer ainsi et même de circuler librement à travers les pores de la matière pondérable s'explique, si l'on admet, d'une part que celle-ci est composée de molécules laissant entre elles des espaces beaucoup plus grands que celui qu'elles occupent, et d'autre part, que l'éther, au lieu d'être, lui aussi condensé en molécules, se trouve incomparablement plus divisé et par suite plus dilaté, ou à l'état d'atomes exerçant entre eux ces actions, les plus énergiques de toutes par unité de masse, qu'on appelle atomiques ou chimiques, mais dont l'intensité n'est sensible qu'à des distances au plus comparables aux dimensions d'une molécule."[199]

L'image qui guide Boussinesq dans sa "Théorie nouvelle des ondes lumineuses, celle qui est réellement opératoire, est la suivante:

> "Les molécules pondérables se trouvant ainsi disséminées dans l'éther, comme le sont, dans l'air ou dans l'eau, les poussières qui y

---

[197] J. Boussinesq, *Théorie nouvelle des ondes lumineuses*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 23, 2° série, 1868, p. 313.

[198] ibid., p. 313.

[199] J. Boussinesq, *Note complémentaire au mémoire précédent- Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résultent des idées exposées au § VI*, in *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits,* Journal de Mathématiques pures et appliquées , 18, 1873, p. 362.

voltigent ou nagent, ou comme le sont encore, à la surface d'un liquide, un grand nombre de corps flottants, il est inévitable que ces molécules se mettent à vibrer dès que l' éther interposé entre en vibration lui-même."[200]

Image où l'on "voit" très bien, comme le fait Boussinesq par la suite, les vagues d'éther emporter dans le même mouvement qui les anime, les molécules de matière pondérable de faible résistance, mais se briser et épuiser leur énergie contre des particules plus massives[201].

Ce qui préoccupe ici Boussinesq, ce n'est pas une description minutieuse de l'éther, c'est plutôt de trouver la façon dont, simplement, on peut concilier ce qui semble inconciliable: les conditions de continuité à la limite d'un milieu réfringent et du vide (contenant en fait de l'éther libre) par exemple, avec les phénomènes de réfraction et de réflexion. La continuité des fonctions qui traduisent les lois physiques, semble indiquer que l'éther conserve ses propriétés dans tous les milieux, et les phénomènes évoqués, qu'il en change. Pour résoudre cette contradiction, Boussinesq va faire intervenir comme agent causal ce qui est plutôt un embarras pour les autres physiciens: la matière pondérable. Voici ce qu'il écrit, toujours dans la "Théorie nouvelle des ondes lumineuses".

> "Cela posé, concevons un corps homogène, créé au milieu de l'éther libre en repos. S'il existe pendant le repos des actions entre ces deux espèces de matière, ce que nous ne savons pas, l'éther contenu dans l'intérieur du corps sera soumis à des actions sensiblement égales dans tous les sens, et dont la résultante sera nulle; mais celui qui se trouvera près de la surface sera comprimé ou dilaté par l'action des couches sous-jacentes de matière pondérable. D'après la pensée énoncée ci-dessus, cette action devra être extrêmement petite, et il me paraît naturel d'admettre qu'elle ne changera pas d'une manière appréciable l'état de l'éther."[202]

L'éther pour Boussinesq a donc la même constitution lorsqu'il est libre et lorsqu'il est engagé dans la matière pondérable.

Il faut prendre l'affirmation de Boussinesq au pied de la lettre: si l'on suppose que le corps et l'éther sont en repos relatifs, il n'y a pas de déformation statique de l'éther par la matière pondérable. Cela résout

---

[200] ibid., p. 363.

[201] Boussinesq a peut-être trouvé cette image dans les *"Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides"* de Lamé (1866), où celui-ci explique la cohésion des corps solides par la présence d'éther entre les molécules pondérables. Ces molécules sont assimilées à des flotteurs lestés. C'est leur action, comme dans la théorie de Boussinesq, qui modifie les caractéristiques, réelles pour Lamé, apparentes pour Boussinesq, de l'éther. Voir: G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 2° édition, 1866, pp. 333 et 334.

[202] ibid., p. 314.

évidemment les questions de continuité aux limites. Voici la suite de la citation précédente:

> "Si elle (la matière pondérable) changeait en particulier son élasticité (celle de l'éther), on n'arriverait pas aux conditions de continuité de Cauchy, ni par suite aux lois observées de la réflexion et de la réfraction, ainsi que nous le verrons au § VIII. Nous admettrons donc que l'éther contenu dans les corps est sensiblement identique à l'éther libre."[203]

Si la continuité est "sauvée", il faut encore expliquer comment les phénomènes optiques peuvent se produire. Boussinesq va maintenant distinguer deux types d'actions entre éther et matière pondérable: celle qui a lieu dans les corps transparents, et celle qui se produit dans les corps opaques.

> "(Un corps) sera parfaitement transparent si la matière pondérable y vibre en concordance avec l' éther."[204]

Boussinesq explique ce qu'il entend par là: les molécules pondérables sont déplacées par l'éther comme des flotteurs, et ainsi:

> "Chaque molécule pondérable, soumise à la seule action de l'éther qui l'environne, finit par osciller à l'unisson de cet éther, et les ondes se propagent sans perte sensible d'énergie à travers le corps qui est ainsi transparent ou diathermane."[205]

On peut noter ici que la matière pondérable vibre aussi, à la même fréquence que l'éther ou presque; les deux substances, éther et matière pondérable, sont donc intimement liées. Le cas des corps imparfaitement transparents est ainsi décrit dans la "Théorie nouvelle des ondes lumineuses":

> "Un corps imparfaitement transparent sera au contraire celui qui, ne pouvant vibrer à l'unisson de son éther, brisera sans cesse, en morcellera à l'infini les ondes qui se propageront à l'intérieur. Il donnera ainsi naissance à de nouveaux mouvements vibratoires, dont la longueur d'onde pourra n'être pas la même que celle des premiers.

---

[203]ibid., p. 314.
[204]ibid., p. 314.
[205]ibid., p. 314.

> Si le morcellement est tellement rapide que toute onde de force moyenne soit anéantie avant d'avoir parcouru un espace sensible, le corps opaque sera athermane."[206]

Dans ce dernier cas:

> "L'éther ne conserve bientôt plus qu'une demi-force vive extrêmement petite par rapport à celle de la matière pondérable, dont la densité est comme infinie par rapport à la sienne, et c'est cette dernière quantité d'énergie actuelle, acquise insensiblement par le corps et conservée au moyen de ses actions élastiques qu'elle met en jeu, qui est appelée chaleur sensible."[207]

Cette étude particulière sera, nous dit Boussinesq, l'objet d'un mémoire où il se propose d'expliquer de ce point de vue les principaux phénomènes physiques et dynamiques de la chaleur[208]. En réalité il faudra attendre 1901, pour que ce "mémoire" voit le jour, ce sera la monumentale *" Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la théorie mécanique de la lumière"*.

Voilà les hypothèses sur lesquelles Boussinesq va développer sa théorie. Comme c'est toujours le cas, l'aspect moléculaire ou plutôt atomique est évoqué. Bien vite le fait explicatif du phénomène s'impose. Ici, pour les corps transparents, ce sera la possibilité pour les atomes d'éther de ne pas abandonner d'énergie, ou très peu, aux molécules pondérables. La nature même des forces qui agissent entre les molécules est laissée dans la pénombre. Ce que nous en dit Boussinesq est plus que vague:

> "Bien que ces forces nous soient inconnues, il est naturel de penser que leur effet le plus grand et sensible provient d'une espèce de frottement entre les molécules d'éther et celles de la matière pondérable, qui passent très près l'une de l'autre sans avoir une vitesse commune."[209]

Cette imprécision dans la description des forces, est bien conforme à l'épistémologie de Boussinesq, telle qu'elle est déjà formée à cette époque, mais c'est une hérésie pour les partisans de l'Ecole de Cauchy. Rappelons ce qu'en dit Sarrau qui accuse Boussinesq:

---

[206]J. Boussinesq, *Recherches sur les principes généraux de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits,* Mémoires de l'Académie des sciences et des lettres de Montpellier, 1872, Journal de mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, p. 336.

[207]J. Boussinesq, *Théorie nouvelle des ondes lumineuses*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 23, 2° série, 1868, p. 316.

[208]ibid., p. 315.

[209]ibid., p. 317.

"(...) de substituer à l'analyse mécanique des phénomènes une sorte de symbole analytique d'une généralité telle, qu'ils y soient tous compris."[210]

La réponse de Boussinesq est une profession de foi, ou un plaidoyer *pro domo*, absolument explicite:

"On voit que les formules auxquelles nous avons été conduits pour représenter l' action dynamique de la matière pondérable sur l'éther, dans les phénomènes lumineux, résultent d'une série d'hypothèses vraisemblables, dont chacune paraît même presque inévitable."[211]

D'ailleurs, pour Boussinesq, sa théorie n'est pas différente de celles des autres branches de la mécanique:

"Quoi qu'il en soit et pour revenir à notre sujet particulier, la théorie de la lumière n'est pas plus tenue que les autres branches de la mécanique de déduire dès à présent, d'actions d'atome à atome simples fonctions des distances , toutes les formules dont elle a besoin, et notamment les expressions, relatives à la réaction de la matière pondérable sur l'éther, que des considérations simples et naturelles lui indiquent comme les plus vraisemblables. Il suffit, pour que ces expressions soient acceptables, qu'elles se prêtent aisément à l'explication de tous les phénomènes lumineux, et elles le seront surtout tant que des faits importants, comme ceux dont je parlerai à la fin de ces pages, resteront en dehors de toutes les autres théories connues."[212]

Les phénomènes que Boussinesq dit avoir expliqués sont la réflexion, la réfraction simple et double, la polarisation rectiligne et rotatoire, la dispersion.

C'est donc le principe de simplicité qui est invoqué ici, et aussi l'efficacité de la théorie. Pour Boussinesq, la raison, la pure géométrie ne doit pas,ne saurait avoir, dans l'état où se trouve alors l'analyse, le dernier mot. La théorie de la lumière de Boussinesq apparaît comme une position d'attente, et sans doute, pour longtemps encore.

---

[210] J. Sarrau, *Observations relatives à l'analyse faite par M. de Saint-Venant des diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses*, Annales de Chimie et de Physique, 28, 4° série, 1873, pp. 266 à 273.

[211] J. Boussinesq, *Exposé synthétique des principes d'une théorie nouvelle des ondes lumineuses*, Annales de Chimie et de Physique, 30, 4° série, 1873, p. 545.

[212] J. Boussinesq, *Note complémentaire au Mémoire précédent-Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résultent des idées exposées au § VI*, in *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, p.370.

III . 3 . 1 . b . L' équation du mouvement de l' éther

Boussinesq utilise les principes classiques de l'élasticité. La position d'une molécule M d'éther est définie par sa position d'équilibre, x, y, z, et:

-en première approximation, par ses déplacements u,v,w, écarts par rapport à sa position d'équilibre;

-en seconde approximation; par les dérivées premières de ces déplacements par rapport à x, y, z;

-en troisième approximation, par les dérivées secondes de ces mêmes quantités par rapport à ces mêmes coordonnées.

Les molécules de matière pondérable étant entraînées par l' éther, leurs déplacements u_1, v_1, w_1 sont aussi des fonctions des mêmes dérivées de u,v,w des déplacements du petit volume d'éther entourant la molécule M d'éther, déplacements assimilables à ceux de la molécule M elle-même.

Boussinesq fait maintenant son hypothèse majeure: l'éther contenu dans la matière pondérable n'est pas sensiblement différent de l'éther libre[213].

Puisque l'on se limite aux petits mouvements très rapides des vibrations lumineuses, l'éther peut être supposé parfaitement élastique. Dans ces conditions, il doit obéir aux mêmes équations que celles qui régissent les mouvements dans les solides homogènes d'élasticité constante habituels. Les mouvements qui l'animent auront donc des équations de la même forme que celle des solides élastiques ordinaires. En se référant à Lamé, Boussinesq donne comme forme, pour un très petit volume, ω, incluant la molécule M:

$$\omega\left(\left(\lambda+\mu\right)\left(d\theta/dx\right)+\mu\left(\Delta_2\, u\right)\right)$$

La conception de Boussinesq, celle de l'identité de l'éther engagé dans la matière pondérable et de celui qui se trouve dans le vide, jointe à la liberté qu'il se donne de ne pas définir précisément les forces, permet d'éviter des considérations hasardeuses sur les Ni et les Ti. Il évite également les difficultés mathématiques issues de la prise en compte des actions entre molécules prises deux à deux. La difficulté demeure de faire intervenir la matière pondérable.

C'est alors qu'intervient la seconde affirmation originale de Boussinesq: dans le cas des solides transparents, le mouvement des

---

[213] J. Boussinesq, *Théorie nouvelle des ondes lumineuses*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 23, 2° série, 1868, pp. 316 et 317.

molécules pondérables (de densité ρ_1) est dû aux actions que leur imprime l'éther:

"Par suite, l'accélération des molécules pondérables contenues dans le volume ω est due à l'éther de ce volume, et leur force motrice est égale et contraire à leur action sur l' éther. En désignant par ρ_1 la densité de matière pondérable, cette action aura pour composante, suivant l'axe des x, $- \rho_1(d^2u_1/dx^2)$."[214]

L'éther déplace la molécule pondérable avec une accélération égale à d^2u_1/dx^2; elle est donc soumise (par unité de volume) à une action suivant x, F_x, de la part de l'éther telle que $F = \rho_1(d^2u_1/dx^2)$. D'après le principe de l'action et de la réaction, la molécule pondérable exerce sur l'éther une réaction égale à $-\rho_1(d^2u_1/dx^2)$.

Autrement dit, la matière pondérable intervient sur l'éther par la réaction qu'elle exerce sur celui-ci. De cette interprétation de la réalité, Boussinesq va tirer le plus grand profit. Cette conception lui permet de ne pas faire intervenir deux équations ou systèmes d'équations différents, un pour la matière pondérable et un pour l'éther: ici, pour Boussinesq, c'est l'éther seul qui devra être étudié. Les "forces" de réactions dues à la matière pondérable jouent le rôle des forces extérieures (ρX) dans les équations correspondantes de Lamé, lesquelles sont de la forme:

$$(dN1/dx) + (dT3/dy) + (dT2/dz) + \rho X = \rho.(d^2u/dt^2).$$

C'est donc un seul milieu, l'éther, soumis à des actions extérieures, les réactions de la matière pondérable, qui devra être étudié. Cette méthode simplifie considérablement le problème.

Enfin, puisque les déplacements des molécules pondérables sont produits par les déplacements de l'éther, on peut remplacer les déplacements u_1, v_1, w_1 des molécules pondérables, par des fonctions des déplacements des molécules d'éther, u,v,w. L'équation générale des mouvements de l'éther ne contiendra que les déplacements de celui-ci. Le problème est, en somme, une généralisation de celui de la propagation des ondes dans les milieux isotropes déformés par des forces extérieures, celles-ci étant remplacées pour l'éther par les réactions de la matière pondérable. Mais dans le cas actuel, Boussinesq n'a pas à déterminer la forme de l'équation de propagation. Elle est donnée par: $\omega ((\lambda + \mu) (d\theta/dx) + \mu (\Delta_2 u) = \rho (d^2u/dt^2)$. Il lui restera "seulement" à la particulariser suivant la nature du milieu

---

[214]ibid., p. 317.

transparent, et la nature du phénomène physique étudié: réfraction, réflexion, dispersion. Voyons de façon précise comment il procède.

III . 3 . 2 . L'établissement des équations de propagation de la lumière dans les milieux transparents ou diathermanes

C'est par analogie avec les conceptions de Lamé que Boussinesq établit son équation de propagation de la lumière. Rappelons cette équation:

$$(\lambda + \mu) (d\theta/dx) + \mu (\Delta_2 u) + \rho x = \rho (d^2u/dt^2)$$

où ρx représente la composante suivant les x des forces extérieures (le poids de la substance par unité de volume par exemple) et ρ la masse volumique.

Boussinesq remplace simplement le facteur ρx_0 par la réaction des molécules pondérables sur l'éther, soit, $- \rho_1(d^2u_1/dx)$, où ρ_1 est la masse volumique de l'éther. L'équation finale est:

$$(\lambda + \mu) (d\theta/dx) + \mu (\Delta_2 u) - \rho_1(d^2u_1/dt^2) = \rho (d^2u/dt^2).$$

On a deux variables: u_1 et u. Mais comme il a déjà été dit, le déplacement des molécules pondérables est une fonction de celui des molécules très voisines de l'éther, c'est-à-dire une fonction des dérivées premières et secondes de u.

Les procédés mathématiques que nous avons évoqués dans les paragraphes précédents sont ici à nouveau employés. Boussinesq traite le cas des milieux isotropes, lesquels peuvent être, du point de vue optique, symétriques ou dissymétriques[215].

Boussinesq, sans s'obliger à des justifications, impose à u_1 la symétrie du milieu, et donc aussi à la fonction de u et de ses dérivées qui représentent u_1. Par ses considérations habituelles de symétrie, et en effectuant des rotations infinitésimales[216], il parvient à donner la forme de dépendance entre u1 et u pour des milieux isotropes, soit:

---

[215]Boussinesq (pp. 319 et 320) distingue les milieux isotropes, dont les équations de propagation sont les mêmes dans tous les sens, des milieux symétriques, qui conservent cette équation de propagation par changement de sens d'un certain système d'axes; les milieux dissymétriques ne conservent de symétrie par rapport à aucun système d'axes. Un milieu isotrope symétrique peut être par exemple un cristal. L'isotropie (simple) est donc l'identité de comportement du corps autour de chacun de ses points.

[216]Elles se résument aux opérations suivantes:

$(d/dx) = (d/dx') - r . (d/dy')$ et les opérations correspondantes pour les autres axes;

$u = u' - r v'$; $u_1 = u'_1 - r v'_1$ et les opérations correspondantes pour les autres axes.

$$(\lambda + \mu) (d\theta/dx) + \mu (\Delta_2 u) - \rho_1(Au + B ((du/dz) -(dw/dy) + C(dq/dx) + D\Delta_2 u) = \rho (d^2u/dt^2).$$

C'est donc bien la symétrie de la matière pondérable qui s'impose. Le comportement de l'éther dans celle-ci sera une fonction de la structure du corps considéré, mais surtout une conséquence des actions dynamiques qui se produisent lors du mouvement, puisque c'est la réaction des particules pondérables qui intervient. Le phénomène est tout entier dépendant des mouvements des molécules, de ce caractère dynamique. Les lois de propagation du mouvement ne peuvent être comprises que si on prend en compte le mouvement relatif des divers éléments. Etablir les équations de propagation, les équations du mouvement, à partir d'une description des forces quasi statiques, celles qui s'exercent entre molécules, n'est plus pertinent. On voit ici, encore une fois, toute la difficulté du passage de la vision que nous avons appelée statique, celle qui déduit le mouvement des lois de l'équilibre, à une vision dynamique, celle pour qui le mouvement est le facteur déterminant. Pour Boussinesq, suivant son premier principe, en droit, c'est l'état statique, celui qui correspond à un instant déterminé, à un intervalle de temps infiniment court, qui va régler le mouvement. Mais dans sa mécanique physique, c'est le mouvement qui produit le phénomène et le rend susceptible d'être soumis à l'analyse. La difficulté est ici résolue en n'utilisant pas dans les calculs les positions des molécules. C'est le milieu dans sa globalité qui est le siège de la propagation. Et, comme dans le cas de l'étude de la fluidité et de la solidité, il impose sa symétrie aux équations différentielles du mouvement.

Dans ce texte apparaît une différence essentielle avec la conception de Briot par exemple. Pour les physico-mathématiciens qui considèrent l'action de "molécule" d'éther à "molécule" d'éther, l' action de la matière pondérable se réduit à déformer celui-ci, que ce soit pour le cristalliser, comme le supposera un moment Cauchy, ou pour lui imposer des déformations périodiques, comme lui et son Ecole le feront par la suite. Dans tous les cas, une fois la déformation de l'éther admise, la matière pondérable n'intervient plus, c'est l'éther ainsi déformé qui est le sujet de l'étude. Les complications deviennent alors énormes, puisqu'il faut prendre en compte un milieu discontinu, et donc formé d'une infinité de particules, et, en plus, déformé une fois pour toutes.

Boussinesq traite maintenant d'un cas qui n'a pas été résolu par Fresnel, celui de la dispersion.

III . 3 . 2 . a . L'explication de la dispersion

L'équation

$$(\lambda + \mu).(d\theta/dx) + \mu . (\Delta_2 u) - \rho_1(d^2u_1/dt^2) = \rho (d^2u/dt^2)$$

est remplacée, après substitution à u1 de son expression en fonction de u, par la suivante:

$$(\lambda + \mu).(d\theta/dx) + \mu . (\Delta_2 u) - \rho_1(Au + B.((du/dz) - (dw/dy) + C(d\theta/dx) + D.\Delta_2 u) = \rho (d^2u/dt^2).$$

Comme dans le cas des milieux isotropes déformés, Boussinesq a alors obtenu l'équation de propagation d'une déformation quelconque. Il particularise maintenant cette équation, mais c'est en supposant que la vibration des molécules est toujours harmonique, ce que l'on peut supposer avoir été démontré par Cauchy. u prend donc la forme suivante:

$u = M.e^{(2\pi/\tau)\ (t-(mx\ +ny\ +pz)/\omega)\sqrt{-1}}$, avec les significations habituelles.

La simple substitution de la vibration dans l'équation de propagation du déplacement u donne l'équation finale de propagation du déplacement dans les milieux isotropes, équation qui prend la forme suivante:

$$(\lambda + \mu + (4C\ \pi^2\ \rho_1)/\tau^2) . (d\theta/dx) + (\mu + (4C\ \pi^2\ \rho_1)/\tau^2)).(\Delta_2\ u) + (4C\pi^2\rho_1)/\tau^2).B.((dv/dx) - (dw/dy)) = (\rho + \rho_1\ A).(d^2u/dt^2).$$

Cette équation est immédiatement appliquée aux milieux isotropes symétriques. Dans ce cas les deux dérivées (du/dz) et (dw/dy) sont égales, ou bien B s'annule. Quoi qu'il en soit, l'expression précédente se simplifie et prend la forme:

$$(\lambda + \mu + (4C\ \pi^2\ \rho_1)/\tau^2) . (d\theta/dx) + (\mu + (4C\pi^2\rho_1)/\tau^2) . (\Delta_2\ u) = (\rho+\rho_1 A).(d^2u/dt^2).$$

Boussinesq dégage alors simplement le sens qu'il attribue aux divers coefficients par analogie avec l'équation de propagation des ondes dans les milieux isotropes d'élasticité constante non soumis à des forces extérieures, soit:

$$(\lambda + \mu) (d\theta/dx) + \mu (\Delta 2\ u) = \rho(d2u/dt2)$$

Pour lui, et cela sans qu'il cherche à donner une explication quelconque, tout se passe comme si les coefficients ($\lambda + \mu$) et μ étaient augmentés d'une quantité inversement proportionnelle à τ^2 (rappelons que τ est la période de la vibration lumineuse) et la densité de l'éther d'une quantité égale à la masse volumique des molécules pondérables[217]. Par rapprochement avec les résultats de Lamé (n° 59, p. 141 et 142), Boussinesq produit une formule donnant le carré de la vitesse de propagation de la lumière en fonction de τ, de la forme $F+G/\tau^2$, ce qui est bien la formule expérimentale de la dispersion[218].

La vitesse des ondes longitudinales est donnée par une expression de la forme $(\lambda+2\mu).(h+(m/\tau^2)$. Pour que ces vibrations ne se propagent pas il faut que $(\lambda+2\mu) = 0$. Boussinesq ne cherche pas à le démontrer, mais dans la "Théorie mécanique de la lumière(...)", en 1901, il donnera une explication qualitative de la non propagation de ces ondes (voir chapitre 2, § III.4. 5 . e).

Dans cette théorie, Boussinesq ne choisit donc pas entre les deux écoles dominantes, celle de l'élasticité de l'éther constante et de la densité variable, et celle qui préconise l'inverse. Les deux hypothèses peuvent prendre place dans cette théorie, en fonction de la valeur que l'on accorde à la masse volumique des particules pondérables et aux divers coefficients. La loi qui avait tenu Fresnel en échec et qui présente tant de difficultés pour les physiciens est donc démontrée. D'autre part les équations trouvées mettent effectivement en jeu la matière pondérable; c'est ce que nous pouvons voir dans la phrase suivante:

> "Supposons un instant que le milieu soit isotrope symétrique, ou que B = 0. On voit qu'il se comportera comme un corps homogène

---

[217]Plus tard, en 1903, dans le second tome de la "*Théorie analytique de la chaleur mise en accord avec la théorie mécanique de la lumière*", Boussinesq donnera des explications sur cet "alourdissement" des molécules pondérables: c'est qu'elles entraînent l'éther. L'augmentation de l'élasticité de l'éther provient de ce que les atomes d'éther, lors des petits déplacements, ont tendance à reprendre leurs positions initiales. A cause de la faible portée des forces qui s'exercent entre les molécules d'éther, cet effet ne se produit pas lors des grands déplacements. Il compare ce phénomène à celui qui se produit lorsqu'on fait vibrer un "pendule court " dans un liquide.

[218]Lamé donne comme vitesse pour les ondes longitudinales

$$\Omega = (\lambda + 2\mu)/\rho^{1/2}$$

et pour les ondes transversales

$$V = (\mu/\rho)^{1/2}.$$

En substituant aux divers coefficients de Lamé ceux qu'il a trouvés, Boussinesq obtient la formule donnée dans le texte. Elle correspond à la formule de Cauchy simplifiée $n2 = a + b/\lambda^2$ (n est l'indice du milieu) que l'on peut mettre sous la forme $v^2 = F+G/\tau^2$. Voir: G. Lamé, *Leçons sur la théorie de l'élasticité des corps solides*, 1° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1852, 2° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1866, n° 59, pp. 141 et 142.

d'élasticité constante, qui aurait pour densité $\rho + \rho' A$, et pour coefficients d'élasticité ceux de l'éther, augmentés d'un terme très petit inversement proportionnel à τ^2."[219]

Les propriétés qui sont décrites dans cette phrase sont, finalement, celles d'une matière habituelle, même si l'éther est privé de poids. Nous avons vu aussi que les méthodes de calcul utilisées résident dans la considération des symétries du milieu. Mais aussi l'éther perd de sa réalité physique. C'est ici simplement le lieu où une certaine équation de propagation, celle trouvée par Lamé pour les solides homogènes d'élasticité constante, est pertinente; ce n'est plus cet agrégat de molécules qui interagissent et qui tout seul, une fois déformé par la matière pondérable, transmet les vibrations. Il ne faudrait pas supposer que Boussinesq a franchi le pas qui consiste à se passer du corps qui transmet des vibrations et à supposer un espace "vide", mais où des vibrations peuvent se déplacer. Boussinesq reste prisonnier d'une certaine image de l'éther: celle de l'éther comme "moteur" de la matière pondérable. Plus tard, dans la "Théorie analytique de la chaleur (...)", il reprendra le même point de vue: celui de l'action de l'éther sur la matière pondérable, image héritée sans doute de Lamé.

III . 3 . 2 . b . La double réfraction rectiligne

Ici Boussinesq va rejoindre son mémoire sur la propagation des ondes dans les milieux isotropes déformés[220].

Il se place dans le cas des milieux presque symétriques, et affirme que dans ces conditions, seuls les termes qui, dans le déplacement de la molécule pondérable, dépendent directement de u,v,w et non pas leurs dérivées, sont affectés par l'écart à l'isotropie; les autres demeurent les mêmes que dans le cas d'un corps isotrope. C'est là ce qu'il appelle la première approximation, la seconde consisterait à tenir compte des dérivées du premier ordre. A.u devient $A + A\alpha u$, c'est-à-dire $A(1 + \alpha).u$. Alors, pour chaque composante du déplacement des molécules pondérables, l'équation est de la forme:

$$(d^2u/dt^2) = A.(1 + \alpha).u + B.((du/dz) - (dw/dy)) + C (dq/dx) + D.\Delta 2 \ u$$

où α est un coefficient qui tient compte de ce que le milieu n'est pas absolument isotrope.

Ce résultat, porté dans l'équation la plus générale de propagation des vibrations, celle qui fonde la " Théorie nouvelle des ondes lumineuses", c'est-à-dire

---

[219] J. Boussinesq, *Théorie nouvelle des ondes lumineuses*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 23, 2° série, 1868, p. 322.

[220] ibid., p. 328.

$$(\lambda + \mu).(d\theta/dx) + \mu.(\Delta 2\ u) - \rho_1(d^2u_1/dt^2) = \rho\ (d^2u/dt^2),$$

donnera, après réduction des divers coefficients l'équation suivante:

$$(d^2u/dt^2) = K\ (1 + a).(d\theta/dx) + L\ (1 + a).\Delta 2\ u + (4\pi^2/\tau^2).k((dv/dx\ ) - (dw/dy)).$$

Il est intéressant pour la suite de connaître la valeur des divers coefficients:

$$K = (\lambda + \mu + (4\pi^2 C\rho_1/\tau^2))/(\rho +\rho_1\ A); \quad a = - (\rho_1\ A\ \alpha)/ (\rho +\rho_1 A)$$

Le terme $(4\pi^2/\tau^2).k.((dv/dx\ ) - (dw/dy))$, nous dit Boussinesq, peut être négligé car "le coefficient k est faible dans tous les corps biréfringents connus". Nous pensons en réalité que ce terme, qui dépend de τ, introduirait dans le problème la dispersion, ce qui n'est pas l'objet de cette partie du travail de Boussinesq. L'équation précédente devient alors:

$$(d^2u/dt^2\ ) = K\ (1 + a).(d\theta/dx) + L\ (1 + a).\Delta_2\ u,$$

que l'on peut rapprocher, comme le fait quelques lignes plus bas Boussinesq, d'une des formules de l'étude sur les milieux isotropes déformés:

$$(d2u/dt2) = (\lambda +\lambda'a).(dq/dt) + (\mu +\rho a).D2u + \sigma.(a(d^2u/dx^2) + b(d^2v/dy^2) +c(d^2w/dz^2))+ \nu\ .\ d(a(du/dx) + b(dv/dy) + c(dw/dz))/dx.$$

Cette équation devient, si l'on supprime les termes de second ordre:

$$(d^2u/dt^2) = (\lambda +\lambda'a).(d\theta/dt) + (\mu +\rho a).\Delta_2 u\ .$$

Il y a une analogie frappante entre cette dernière formule, et celle trouvée dans le cas de la "Théorie nouvelle des ondes lumineuses". Le coefficient a de l'équation des ondes dans les milieux isotropes déformés, $(d2u/dt2) = (\lambda +\lambda'a)\ (d\theta/dt) + (\mu +\rho a)\ \Delta_2 u)$, traduisait le résultat d'une action déformatrice. Le coefficient a de la formule des ondes lumineuses traduit la présence de matière pondérable qui déforme l'éther de manière dynamique. Dans les deux cas, il y a présence d'une action déformatrice.

Ainsi Boussinesq écrit:

> "Si nous faisons k = 0, les équations (de la théorie des ondes lumineuses) seront des cas particuliers des équations (des ondes dans les milieux isotropes déformés) étudiées dans notre mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés. Il suffira, pour les identifier, de poser dans ces équations,
>
> $$\lambda = \lambda' = K, \quad \mu = \rho = L, \quad \sigma = 0, \quad \nu = 0.$$
>
> On aura ainsi la théorie de la double réfraction rectiligne de Fresnel, puisque s = o; mais les vibrations ne seront qu'à peu près transversales, et non pas rigoureusement comme le supposait Fresnel."[221]

C'est de façon tout à fait naturelle que Boussinesq arrive, dans ce cas, à conclure que les vibrations sont perpendiculaires au plan contenant le rayon et sa projection sur le plan d'onde.

En effet la présence de la matière pondérable impose une déformation constante et élastique de l'éther, et donc, conformément à ce que nous avons vu dans le cas des ondes dans les milieux isotropes déformés, la vibration lumineuse doit bien se trouver dans le plan précédemment cité. On peut en déduire, bien que Boussinesq ne le dise pas, que dans le vide les vibrations seraient dans un plan perpendiculaire à celui évoqué plus haut, puisqu'il n'y aurait pas d'actions déformatrices.

Ainsi la théorie de Boussinesq est plus complexe que celle qui est décrite parfois. Si effectivement Boussinesq assure qu'à l'état naturel les pressions en un point s'annulent par destruction de pressions opposées, et ne sont pas simplement nulles comme le supposait Navier, il ne suppose pas de variation de la densité de l'éther ni de son élasticité. L'éther est pratiquement le même dans le vide et dans la matière pondérable. Si maintenant nous examinons les facteurs qui interviennent dans les calculs, on s'aperçoit que, dans le cas de la "Théorie nouvelle des ondes lumineuses" , il faut considérer que c'est à la fois la densité et l'élasticité *apparentes* de l'éther qui diffèrent. Ainsi dans le coefficient K des formules de la double réfraction rectiligne, on peut trouver à la fois une variation de l' élasticité et de la densité:

---

[221] Sur ce dernier point Boussinesq n'est pas très explicite dans la "Théorie nouvelle des ondes lumineuses". Il développe la question de la propagation de la lumière dans les corps cristallisés dans le même numéro du "Journal de mathématiques pures et appliquées". D'autres points y sont abordés comme la conservation de la force vive lors de la propagation de la lumière. Voir: J. Boussinesq, *Etude sur les vibrations rectilignes et sur la diffraction, dans les milieux isotropes et dans l' éther des cristaux,* Journal de mathématiques pures et appliquées, 13, 2° série, 1868, pp. 340 à 376.

$$K = (\lambda + \mu + (4\pi^2 C\rho_1/\tau^2))/(\rho + \rho_1 A).$$

D'après Boussinesq lui-même, le terme $4\pi^2 C\rho_1/\tau^2$ correspond à une augmentation *apparente* du coefficient d'élasticité, et $(\rho+\rho_1)$ est la variation *apparente* de la masse volumique. Il y a donc variation seulement apparente et simultanée de l'élasticité et de la densité de l'éther.

Ce n'est qu'à la fin de son mémoire, en moins d'une page, que Boussinesq indique comment sa théorie remplit les conditions de continuité de Cauchy, conditions qu'il présente ainsi:

> "Elles consistent à admettre que les déplacements u, v, w de ces molécules d'éther, et les dérivées premières par rapport à x, y, et z de ces déplacements, sont égaux chacun à chacun en tout point de la surface, de part et d'autre de celle-ci."[222]

Pour lui, la solution est évidente dans le cadre de sa théorie:

> "Ces conditions s'obtiennent naturellement dans notre manière de concevoir l' éther. En effet, cet agent, ayant dans deux corps adjacents la même élasticité et la même densité, forme un milieu unique où les u, v, w ne peuvent varier brusquement d'un point aux points voisins."[223]

Boussinesq termine en résumant sa conception : la constance de la densité et de l' élasticité de l' éther dans tous les milieux:

> "Quant à la constance de sa densité (de l'éther), elle n'est pas nécessaire à notre théorie; mais elles nous paraît une condition naturelle de la constance d'élasticité, et nous la regardons comme vraisemblable."[224]

Cette théorie de la lumière de Boussinesq est en rupture avec la tradition de Poisson, et peut apparaître comme une avancée vers une physique acceptant de ne pas rester accrochée à des hypothèses, rationnelles mais physiquement contestables, comme l'atome ponctiforme et l'action entre molécules fonction des simples distances.

---

[222] J. Boussinesq, *Théorie nouvelle des ondes lumineuses*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 23, 2° série, 1868, p. 338.

[223] ibid., p. 338.

[224] ibid., p. 338.

Les grandeurs, même celles les plus accessibles à l'expérience, l'élasticité et la masse volumique, acquièrent des significations dépendant de la théorie qui les utilise. Cette tendance, qui rend à la physique la possibilité de réorganiser le réel, est caractéristique de la manière de Boussinesq, qui pense que la réalité ultime de l'univers physique est inconnaissable pour l'homme; seul l'aspect géométrique des chose lui est clairement perceptible. Pour le reste on est en droit de faire des suppositions raisonnables (voir III-3-1-a de ce chapitre) pourvu qu'elles soient efficaces.

IV . L'établissement par Boussinesq des formules de l'élasticité pour tous les corps

Boussinesq, dans son mémoire sur la "Théorie des ondes liquides périodiques"[225] (mentionné parfois sous le titre d'*Essai sur la théorie des ondes liquides périodiques*) aborde de façon originale les problèmes d'élasticité, tant des solides que des fluides. Ce qui nous a semblé le plus intéressant, dans ce mémoire, est de montrer comment il arrive à déduire les lois de l'élasticité, d'une part, presque exclusivement au moyen de la Géométrie et de l'Analyse, et d'autre part au moyen la loi de la conservation de l'énergie. Nous examinerons la première de ces façons de procéder dans le cadre de sa démonstration des formules de l'élasticité valables pour tous les corps, solides ou fluides, homogènes ou hétérogènes. La seconde est utilisée dans la Note 3 du mémoire, note où il démontre les formules de l'élasticité en utilisant l'énergie.

IV . 1 . Objet de l'essai sur la "Théorie des ondes liquides périodiques"

Dans la "Notice sur les travaux scientifiques de M. J. Boussinesq"[226], sans doute écrite par lui-même, on trouve une présentation de la "Théorie des ondes liquides périodiques":

> "Ce mémoire concerne l'étude des petits mouvements, à composantes pendulaires, qui se propagent à la surface libre et dans la masse d'un liquide pesant en équilibre, quand une certaine partie en est directement ébranlée par des oscillations périodiques et concordantes d'un système de corps immergés: il est donc consacré au phénomène qui a fourni le type de tous les mouvements ondulatoires."[227]

---

[225] J. Boussinesq. *Théorie des ondes liquides périodiques*, Recueil des Savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris, 20,1872,pp. 509 à 615.

[226] J. Boussinesq, *Notice sur les travaux scientifiques de M. J. Boussinesq*, Lille, Imprimerie Danel, 1883.

[227] ibid., p. 50.

En d'autres termes il s'agit d'un mémoire sur les mouvements d'un liquide soumis à des vibrations périodiques. Boussinesq y découvre, entre autres, les analogies de tels mouvements avec les phénomènes lumineux.

Le Mémoire est précédé d'un rapport approbatif de Saint-Venant[228], où ce dernier en précise la place dans l'étude de l'hydrodynamique: Boussinesq se propose de traiter avec précision le cas de la propagation des ondes périodiques dans un liquide. Les équations qu'il trouve complètent celles de Poisson et ouvrent des voies nouvelles:

> "De pareilles équations (celles de Boussinesq), laissées avec tous leurs termes, l'on ne retirerait pas forcément cette conséquence paradoxale et physiquement fausse, fournie par Poisson, par les équations ordinaires incomplètes: que les ébranlements provoqués quelque part dans les liquides se transmettent instantanément dans toute leur masse."[229]

Boussinesq décrit aussi le mouvement des molécules de liquide, mouvement dont il constate l'accord avec des expériences faites en 1842 par Caligny. Toutefois cette démonstration des lois de l'élasticité oblige Boussinesq à utiliser des forces, au sens habituel du terme. Cela ne le satisfait sans doute pas, car il adjoint à ce mémoire la "Note 3" dans laquelle il décrit ces forces à l' aide de ce qui deviendra - ou sont - pour lui "ce qu'il y a de plus réel dans la nature: l'énergie et la longueur"[230]. Dans ce deuxième cas nous verrons comment intervient ce que Boussinesq considère comme le fait de base de la théorie de l' élasticité: l'utilisation de six variables indépendantes (trois dilatations et trois glissements). Il commence par démontrer les équations de l'élasticité dans les milieux homogènes, hétérogènes, solides, fluides, c'est-à-dire de contexture quelconque.

---

[228]A. de Saint-Venant (rapporteur) et Delaunay, Bonnet, Jamin, *Rapport sur le Mémoire de Monsieur Boussinesq, présenté le 19 Avril 1869, avec additions du 19 novembre, et relatif à la théorie des ondes liquides périodiques,* C. R., 72, 1870, pp. 360 à 367.

[229]ibid., p. 363.

[230]J. Boussinesq, *Note 3, où sont établies des relations générales et nouvelles entre l'énergie interne d'un corps, fluide ou solide, et ses pressions ou forces élastiques,* in J. Boussinesq, *Théorie des ondes liquides périodiques*, Recueil des Savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris, 20,1872, pp. 584 à 599. Cette note, où Boussinesq évoque la possibilité de forces quelconques et non pas centrales, ne fait pas l'objet d'un commentaire de Saint-Venant dans le rapport approbatif, alors qu'il commente les deux autres notes.

IV . 2 . Les équations du mouvement des corps continus de contexture quelconque

Nous avons vu que Boussinesq donne, grâce à sa conception des demi-lueurs, une interprétation des équations de Lamé à deux coefficients. Une autre de ses conceptions épistémologiques, celle de la puissance de l'analyse, lui permet d'établir avec précision les équations des mouvements élastiques dans tous les cas. Nous trouvons cette démonstration dans le mémoire sur la "Théorie des ondes liquides périodiques"[231].

Lamé, dans ses "Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides"[232], fondait ses calculs des forces élastiques, sur l'équation:

$$u' = u + (du/dx) \cdot h + (du/dy) \cdot k + (du/dz) \cdot l$$

où u' et u sont les projections des déplacements suivant x de deux molécules voisines lors d'une déformation. h, k, l, sont les projections de la distance initiale de ces molécules (voir § II-1-1 de ce chapitre).

Le calcul des forces élastiques, et l'ensemble de la théorie de Lamé sur l'élasticité, dépendent de cette équation. Donc les équations de Lamé ne dépendent que des trois variables h, k, l. Ces trois variables suffisent à définir la position d'un point matériel (en statique). Comme Lamé ne traite que le cas des solides homogènes d'élasticité constante, tous les points matériels du milieu sont équivalents, et ces trois variables suffisent pour décrire les propriétés de ce milieu. Si le milieu est hétérogène, chaque point peut jouer un rôle différent, et devrait être repéré par un système de variables hi, ki, li, différent pour chaque point matériel. Boussinesq traite le problème en faisant dépendre les coordonnées d'un point de celles de trois points voisins. Ainsi il fait intervenir neuf variables, ce qui selon Saint-Venant accroit la précision des solutions. Pour mettre en jeu ces neuf variables, Boussinesq utilise un parallélépipède dont il rappelle l'usage en hydrodynamique. C'est là une circonstance supplémentaire qui accroit la généralité de sa démonstration, en englobant des techniques d'étude des l'élasticité de fluides. Cette méthode de Boussinesq, dans cette partie du mémoire, malgré l'utilisation du parallélogramme, se distingue de la méthode purement géométrique de Cauchy autour de l'année 1822, telle que la définit A. Dahan-Dalmédico:

---

[231] J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des ondes liquides périodiques. Extrait de l'auteur*, C.R., 78, 1869, pp. 905 à 906.

[232] G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique des corps solides élastiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1° éd., Paris, Gauthier-Villars, 2° éd., 1866, p. 29.

"Cauchy abandonne donc (en 1822) l'idée d'un milieu agrégat de points-centres de force, qui était celle de Navier à la suite de Laplace, et déclare emprunter à l'hydrostatique (qu'il venait d'enseigner à l'Ecole polytechnique) un modèle de description du phénomène d'élasticité."[233]

Et plus loin:

"Pour établir les équations d'équilibre d'un corps solide, variable de forme et soumis à des forces accélératrices quelconques, il suffira d'écrire qu'il y a équilibre entre les forces motrices qui sollicitent un élément infiniment petit dans le sens des axes de coordonnées et les composantes des pressions ou tensions intérieures qui agissent sur les faces de cet élément."[234]

Les volumes de Cauchy dans cette période, ou de Lamé en 1866, sont en fait des volumes "pleins", pleins de matière continue. Boussinesq lui, dans cette première partie du mémoire, utilise un modèle mixte. Il descend effectivement au niveau moléculaire pour prendre en compte l'hétérogénéité de la substance, mais à un moment, il est obligé d'utiliser les équations de Lamé qui en fait supposent une matière continue. Nous allons donner l'idée de cette démonstration en faisant usage de dessins, qui ne sont pas de Boussinesq mais de nous, et dont nous espérons qu'ils aideront à la compréhension de l'exposé. Nous donnerons aussi en fac-similé les équations auxquelles parvient Boussinesq.

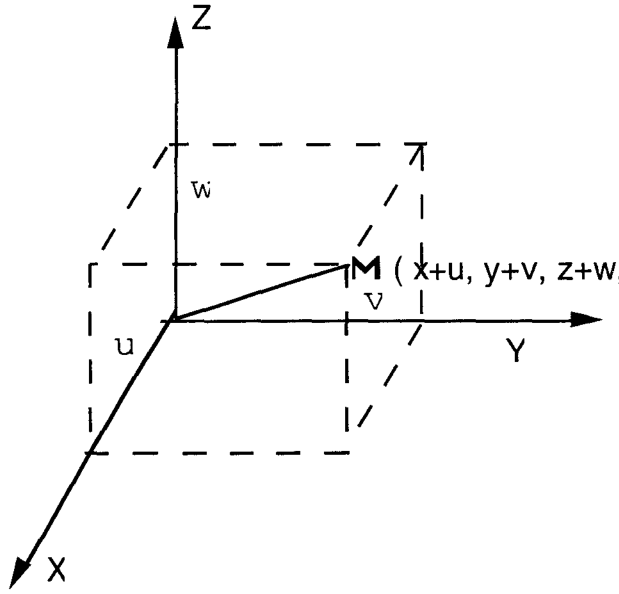
L'idée est de trouver les équations des déformations que subissent les arêtes d'un volume prismatique devenu rectangle au bout d'un temps t, sous l'action de forces extérieures à l'ensemble du matériau considéré. C'est-à-dire, en fait, la loi des variations des pressions entre deux points d'une masse matérielle, ces deux points étant pris sur les deux faces du parallélépipède. Avant déformation le parallélépipède est oblique et non rectangle, ce qu'il devient sous l'action des contraintes. Ainsi, lorsque le parallélogramme est rectangle, il est soumis à des contraintes qui sont les Ni et les Ti, ce qui permet d'adopter la méthode de l'équilibre du parallélépipède (équilibre du parallélépipède sous l'action des diverses forces qui lui sont appliquées). Voici le calcul.

Une molécule du corps, de cordonnées initiales x, y, z, se trouve au bout du temps t aux coordonnées (x + u, y + v, z + w).

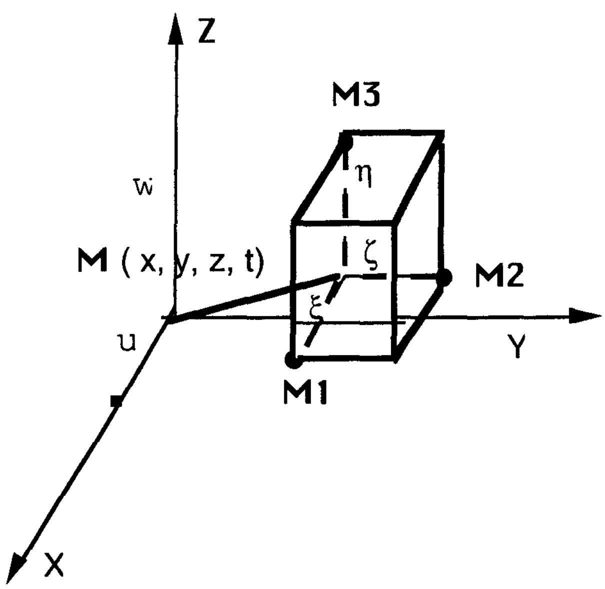
---

[233] A. Dahan-Dalmédico, *Mathématisations. Augustin-Louis Cauchy et l'Ecole Française*, Argenteuil, Editions du choix, Paris, Librairie Albert Blanchard, 1992, p. 236.

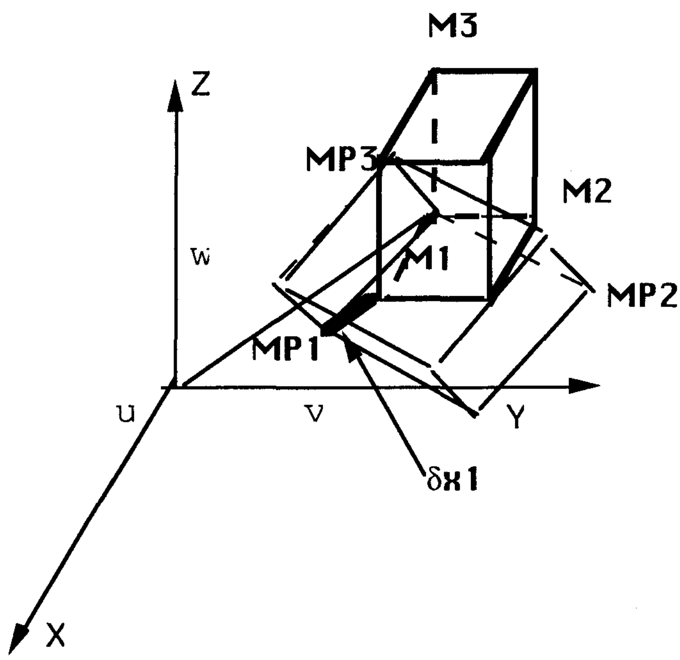
[234] ibid., pp. 237 et 238.



A partir de cette position, Boussinesq construit un parallélépipède rectangle d'arêtes infiniment petites, ξ, η, ζ. A trois sommets de celui-ci se trouvent trois molécules M1, M2, M3.



Primitivement ce parallélépipède était "obliquangle", suivant l'expression de Saint-Venant, les molécules correspondant à M1, M2, M3, se trouvant en Mp1, Mp2, et Mp3.



Toute la démonstration va consister étudier à les déformations des arêtes de ce parallélépipède, sous l'action de forces dont les composantes, N1, N2, N3, T,1, T2, T3, sont réellement, à l'instant t considéré, des composantes normales et tangentielles aux faces du parallélogramme.

Boussinesq exprime les coordonnées d'une molécule, M1 par exemple, à l'instant t, en fonction des coordonnées de cette même molécule à un instant infiniment proche antérieur à t, et cela en fonction des coordonnées de M à ce même instant. Les coordonnées de M1 ont pour expression x+δx, y+δy, z+δz, et leur expression en fonction des dérivées premières des u, v, w, est de la forme:

$$u +(du/dx).\ \delta_1 x +(du/dy)\ .\ \delta_1 y + (du/dz)\ .\ \delta_1 z \quad (1)$$

Rappelons que Saint-Venant signale, dans son rapport approbatif, tout l'avantage de la méthode de Boussinesq. Pour une molécule M1, l'équation de son mouvement dépendra de trois quantités, δ1x, δ1y, δ1z, ce qui fait que pour les trois molécules, M1, M2, M3, les équations dépendent de neuf quantités. Il en est de même pour la molécule M dont la position est repérée par rapport à celles de M1, M2, M3. Le nombre des quantités traduisant les déformations du milieu est trois fois plus important que si l'on considérait les variations de force élastique à partir du déplacement relatif de deux molécules comme le fait Lamé. Ici le souci d'extrême précision permet d'appliquer les résultats aux liquides, et même aux gaz, tant que les écoulements ne sont pas tourbillonnaires. Le but final est de déterminer comment varient les forces entre deux faces opposées du parallélogramme. Egalement, la considération du parallélépipède rectangle, à l'instant t, permet de considérer comme éléments différentiels de longueur à *prendre en considération pour déterminer les variations des forces, justement, x, h, z, comptés le long des axes initiaux. Comme le signale Boussinesq, ce parallélépipède généralement utilisé en hydrodynamique, rend la démonstration applicable aussi bien aux liquides qu'aux solides.*

Mais une telle démonstration qui a pour but une grand précision suppose que l'on reformule l'expression de la dilatation (relative) θ du volume, que Boussinesq calcule à partir du parallélépipède lui-même. Il en donne une expression compliquée, qui lui permet de calculer δx_1 par exemple. Puis, classiquement, il dit que la force motrice par unité de volume ($\rho . d^2u/dt^2$) appliquée au parallélogramme, multipliée par la nouvelle masse - puisqu'il y a eu variation de volume et donc de densité du parallélogramme - sera égale à la somme des forces qui lui sont appliquées. Ce qui fournit les équations suivantes pour la pression appliquée à la face parallèle aux axes des y et des z:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dN_1}{dx}\frac{d\theta}{d\frac{du}{dx}}+\frac{dN_1}{dy}\frac{d\theta}{d\frac{du}{dy}}+\frac{dN_1}{dz}\frac{d\theta}{d\frac{du}{dz}} \\ +\frac{dT_3}{dx}\frac{d\theta}{d\frac{dv}{dx}}+\frac{dT_3}{dy}\frac{d\theta}{d\frac{dv}{dy}}+\frac{dT_3}{dz}\frac{d\theta}{d\frac{dv}{dz}} \\ +\frac{dT_2}{dx}\frac{d\theta}{d\frac{dw}{dx}}+\frac{dT_2}{dy}\frac{d\theta}{d\frac{dw}{dy}}+\frac{dT_2}{dz}\frac{d\theta}{d\frac{dw}{dz}} \end{array}\right\}+\rho X=\rho\frac{d^2u}{dt^2}. \qquad (2)$$

Cette expression est en réalité l'équivalent de l'expression de Lamé pour l'équilibre du parallélépipède. On peut s'en rendre compte si, dans l'expression de la dilatation, on ignore les dérivées d'ordre supérieur à un, alors:

$$\theta = (1 + du/dx) (1 + dv/dy) (1+ dv/dz)$$

peut être remplacé par

$$(du/dx + dv/dy + dv/dz).$$

Et l'équation se réduit bien à l'équation correspondante de Lamé, par exemple:

$$(dN1/dx) + (dT3/dy) + (dT2/dz) + \rho . X = \rho . d^2u /dt^2$$

Ce n'est donc pas à une refonte totale de la conception du calcul que Boussinesq parvient. S'il parvient à des expressions plus complètes des équations de l'élasticité, c'est en réussissant à mener à bien ses calculs en conservant le plus de dérivées possible. Ce calcul correspond en *quelque sorte à la loi naturelle de l'élasticité des corps, solides, liquides ou gazeux, homogènes ou hétérogènes, puisqu'elle est issue directement de l'analyse, et donc en accord avec l'univers géométrique.*

La précision du calcul, le nombre de dérivées conservées, permettent de les appliquer aux solides aussi bien qu'aux fluides. De même, ne pas avoir recours aux simplifications par symétrie, autorise à les accepter aussi bien pour les corps homogènes qu'hétérogènes.

IV . 3 . La déduction des lois de l'élasticité en fonction de l'énergie interne

L'extrême précision de la déduction précédente, son caractère absolument analytique, font qu'elle ne traduit sans doute pas correctement la complexité du réel. En particulier l'imbrication des divers phénomènes qui interviennent dans l'élasticité n'est pas prise en compte; et spécialement les actions dues aux phénomènes calorifiques ne sont pas évoquées. Les lois précédemment étudiées sont, toutefois, aussi valables si l'on se place à la température du zéro absolu, ou si l'on ne considère que les phénomènes adiabatiques, mais dans ce dernier cas, il faut au moins évoquer les vibrations d'origine thermique au cours du calcul pour se rapprocher de la réalité.

Dans la Note 3 de la "Théorie des ondes liquides périodiques", Boussinesq commence donc par décrire l'influence des vibrations calorifiques. Ainsi dit-il:

> "La méthode employée au paragraphe 1 (méthode du parallélogramme) ne donne pas seulement les équations exactes des mouvements des corps continus élastiques, isotropes ou hétérogènes, solides ou fluides; elle permet encore, lorsque la température de ces corps est supposée assez voisine du zéro absolu pour qu'on puisse, dans les calculs des actions mutuelles de leurs molécules, faire abstraction des mouvements vibratoires d'amplitude insensible, ou calorifiques, et aussi dans un autre cas très général dont nous allons parler, d'exprimer complètement leurs forces élastiques en fonction des dérivées partielles des déplacements, et de celle de leur énergie interne par rapport aux six variables dont cette énergie dépend."[235]

Les phénomènes thermiques étant supposés adiabatiques, ils seront la conséquence des déformations du milieu, et l'on peut ainsi supposer l'énergie confinée dans un certain volume de matière. S'approcher de la réalité suppose que les résultats soient exprimés en fonction de grandeurs réelles, des grandeurs fondamentales de la nature: l'énergie et les trois dilatations et trois glissements subis par les corps. C'est l'objet de cette Note de 1872.

---

[235] ibid., p. 384.

Mais l'intérêt de cette note est surtout de montrer comment Boussinesq utilise, réellement, le principe de conservation de l' énergie.

Pour un lecteur actuel, les calculs semblent assez ordinaires. La nouveauté de la méthode, en 1872, apparaît si on la compare avec un article de Saint-Venant qui, dans sa première partie, traite du même sujet[236]. Boussinesq retrouve d'ailleurs, comme il le dit, les résultats de Saint-Venant, et les références de l'article du premier montrent qu'il s'agit, dans cette Note, d'une réécriture de l'article de Saint-Venant. La nouveauté est, justement, l'intervention de la conservation de l' énergie. Pour faire apparaître l'originalité de l'article de Boussinesq, nous donnons les grandes lignes de la première partie du Mémoire de 1863 de Saint-Venant.

IV . 3 . 1 . L'établissement des relations entre énergie interne et déformations élastiques par Saint-Venant

Le but de la première partie du Mémoire est, encore une fois, d'établir les relations entre pressions et déformations élastiques, en tenant compte de l'état primitif du corps, et en montrant que dans le cas d'un corps isotrope elles s'expriment en fonction d'un seul coefficient. Cette démonstration est effectuée suivant plusieurs méthodes, seule celle qui fait intervenir l'énergie interne nous intéresse[237].

Saint-Venant commence par rappeler les notations habituelles:

$\partial_x, \partial_y, \partial_z$ pour les dilatations,
g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} pour les glissements,

$p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}$ pour les pressions normales et tangentielles.

Il traite d'abord les cas où l'on considère comme point de départ l'état naturel:

> "Tout le monde admet que si les pressions ou tensions *sont produites seulement par les déformations éprouvées*, c'est-à-dire si, antérieurement, le corps se trouvait dans l' état dit *naturel* , où aucune

---

[236] A. de Saint-Venant, *Sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 8, 1863, pp. 257 à 420.

[237] A. de Saint-Venant, *Formules diverses où entrent les coefficients dont l'élasticité dépend.-Etablissement, de plusieurs manières, d'une partie souvent omise, où figurent six constantes complémentaires, qui sont les composantes des pressions pouvant exister antérieurement aux déplacements des points*, in *Sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 8, 1863, pp. 257 à 353.

pression intérieure ni extérieure ne s'y exerçait, (...) ces six forces sont des fonctions linéaires des six déformations élémentaires."[238]

L'ensemble des six équations des pressions dépend donc de trente-six coefficients. Saint-Venant introduit ensuite ce qu'il appelle l'énergie potentielle ou le potentiel, et exprime la différentielle de l'énergie interne dans ce cas, en fonction des différentielles des déformations, ce qui donnera par la suite, nous le verrons, l'énergie potentielle en fonction de ces mêmes déformations:

> "Il est également facile de voir que si
>
> $$\Phi$$
>
> représente ce que l'on appelle quelquefois l'*énergie potentielle* ou le *potentiel* des actions intérieures pour l'unité de volume du corps au point (x,y,z), c'est-à-dire si
>
> $$\Phi.xyz$$
>
> exprime,(...) le *travail total* que ces actions intérieures produiraient jusqu'au retour de l'élément à son état dit naturel, où il n'y avait, disons-nous, aucune pression, et si nous désignons par
>
> $$\Phi^1$$
>
> la valeur de Φ dans le cas (...) où les déformations ∂ et g se comptent à partir de l' état naturel "[239],

alors la différentielle de l'énergie potentielle s'exprime comme suit:

$$d\Phi^1 = p^1{}_{xx}\, d\partial_x + p^1{}_{yy}\, \partial_y + p^1{}_{zz}\partial_z + p^1{}_{yz}\, dg_{yz} + p^1{}_{zx} dg_{zx} + p^1{}_{xy} dg_{xy} \quad \text{[240]} \quad \text{(a)}$$

les exposants 1 indiquant que l'on est parti de l'état naturel.

C'est là toute la référence de Saint-Venant à l'énergie. Il n'y parle pas d'énergie cinétique. La formulation de Saint-Venant montre que ce qui lui importe, c'est la fonction Φ. Il désigne cette fonction par deux termes qui ne sont pas équivalents: le "potentiel" qui réfère à la conception de Clausius, pour qui l'élément essentiel est le travail, et l'énergie potentielle qui renvoie à la théorie de la conservation de l'énergie où la somme des énergies potentielle et cinétique est fondamentale.[241] Quant à l'établissement de cette équation, Saint-Venant l'explique dans une note:

---

[238]ibid., p. 261.
[239]Ibid., pp. 264 .
[240]ibid., pp. 264.
[241]Pour la conception de Clausius, voir: R. Clausius, *De la fonction potentielle et du potentiel*, traduit de l'allemand par F. Folie, Paris, Gauthier-Villars, 1870. Voir particulièrement la partie relative au potentiel (p.106 à 133) où Clausius traite des

"Car les actions intérieures font à chaque instant équilibre aux pressions, $p^1{}_{xx}$,..., $p^1{}_{xy}$, sur les six faces de l' élément, et le travail des unes est égal au signe près au travail des autres; or, pour une augmentation $d\partial_z$ de la dilatation ∂_z par exemple, les deux faces xy se sont éloignées de $zd\partial_z$ et les pressions qui s'y exercent produisent un travail (...) $p^1{}_{zz} \cdot xy \cdot zd\partial_z$."[242]

Ici, Saint-Venant calcule les travaux des forces intérieures en supposant l' égalité des pressions exercées de chaque côté d'un élément plan, puis en supposant que cet élément plan se déplace, d'où il déduit l'égalité des travaux.

C'est là une vision macroscopique de la nature, l'aspect moléculaire n'est pas évoqué. Dans le même type de calcul, Boussinesq justifiera ces égalités par des approximations détaillées, auxquelles il accorde la plus grand importance, tant dans son "Essai sur la théorie des eaux courantes"[243] de 1872, que dans sa "Théorie analytique de la chaleur(...)" de 1903[244].

Nous voyons aussi que ce qui intéresse Saint-Venant, c'est l'expression du travail, et non la conservation de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique. Le potentiel est pour lui assimilable à un travail qui se conserve, s'il n'y a pas de pertes de chaleur ou de force vive vibratoire:

---

relations entre le travail, l'énergie cinétique, le potentiel. C'est le travail qui est l'élément important de la variation du potentiel, le lien entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Dans une théorie de la conservation de l'énergie, comme on peut la voir dans l'article de Sainte-Claire Deville, ou dans la conservation de la force de Helmholtz, telle qu'on peut la voir dans son mémoire de 1847, il y a transformation directe de force vive en force de tension (énergie potentielle), ou inversement (voir pour l'importance de Clausius, voir le premier chapitre, § IV, de notre thèse).

[242] A. de Saint-Venant, *Formules diverses où entrent les coefficients dont l'élasticité dépend.-Etablissement, de plusieurs manières, d'une partie souvent omise, où figurent six constantes complémentaires, qui sont les composantes des pressions pouvant exister antérieurement aux déplacements des points*, in *Sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 8, 1863, pp. 264 et 265.

[243] J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France (Recueil des savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris), 23, 1872, p. 1 à 680, additions, même revue, 24, pp. 1 à 64.

[244] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la théorie mécanique de la lumière*, Paris, Gauthier-Villars, t. 1, 1901, Paris, Gauthier-Villars, t. 2, 1903.

"Ce qui montre que le potentiel ou travail Φ^1, est nécessairement le même quand la quantité de chaleur ou de force vive vibratoire ne varie pas pour d'égales valeurs de

$$\partial x,\ \partial y,\ \partial z,\ gxz,\ gzx,\ gxy,$$

ou qu'il est ainsi une fonction de ces six variables, et a pour dérivées partielles les six composantes respectives de la pression

$$p1_{xx},\ p1_{yy},\ p1_{zz},\ p1_{yz},\ p1_{zx},\ p1_{xy}.$$"[245]

D'où il déduit l'égalité des dérivées secondes partielles de Φ^1 du type:

$$dp^1xx/d\partial y = d^2\Phi^1/d\partial x d\partial y.$$

Ce qui donne quinze égalités entre les coefficients qui figurent dans l'expression des pressions, et ramène à 21 le nombre des coefficients figurant dans les équations des pressions. Saint-Venant évoque ensuite le fait que les forces qui s'exercent entre les points ne dépendent que des distances entre ces points, et en déduit neuf égalités, ce qui réduit à 15 le nombre des coefficients et à un seul coefficients, par raison de symétrie, dans le cas d'un corps isotrope.

Il montre ensuite que la fonction $\Phi 1$, dont la différentielle est l'équation (a), est une fonction du second degré en ∂n et gnm, puisque on a supposé au début que ∂x et gnm étaient nuls à l'origine. C'est alors qu'il signale les relations, que démontrera Boussinesq, et qui lient les pressions aux dérivées partielles. Elles sont de la forme:

$$d\Phi 1/d\partial_n = p_{nn} \quad \text{et} \quad d\Phi 1/\ dg_{xy} = p_{xy}.$$[246]

Puis il passe au cas où l'état de départ est contraint. Il ne suffit pas d'ajouter $\Phi 0$, le potentiel qu'avait alors le corps, il faut aussi ajouter le travail Wp des pressions qui existaient au départ. L'expression finale est donc:

$$\Phi = \Phi^0 + Wp + \Phi^1$$

On a vu les réticences de Saint-Venant concernant l'utilisation de la conservation de l'énergie et même vis-à-vis de la théorie mécanique de la chaleur. C'est sans doute la raison pour laquelle dans ce Mémoire, Saint-Venant ne donne pas d'explication au niveau moléculaire, sauf sa

---

[245] A. de Saint-Venant, *Formules diverses où entrent les coefficients dont l'élasticité dépend.-Etablissement, de plusieurs manières, d'une partie souvent omise, où figurent six constantes complémentaires, qui sont les composantes des pressions pouvant exister antérieurement aux déplacements des points*, in *Sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 8, 1863, p. 265.

[246] ibid., p. 266.

référence habituelle aux forces centrales, qui est surtout une nécessité logique. Son utilisation de l'énergie potentielle est plus proche de celle que l'on peut faire du "potentiel" de Clausius que de la théorie de la conservation de l'énergie.

IV . 3 . 2 . Le calcul de Boussinesq

IV . 3 . 2 . a . Caractéristiques générales

Tout autre que celle de Saint-Venant est l'attitude de Boussinesq. Dès le début de la Note, il se place dans le cadre de sa théorie de la conservation de l'énergie, et il en expose les grandes lignes au début même de sa Note 3. Nous avons déjà exposé ses idées (chapitre 2, § III.2 . 3 . a), nous les rappelons ici au moyen de citations.

> "Il ne sera peut-être pas inutile de rappeler ici brièvement la notion d'énergie interne par unité de volume d'un corps, et d'étendre cette notion au cas (nullement improbable) où l'action de deux atomes très voisins dépendrait, non seulement de leur nature et de leur distance, mais encore de la nature et des distances, respectives à ces deux atomes et entre eux, des autres atomes qui pourraient se trouver tout près des premiers."[247]

C'est là évidemment une allusion aux actions de présence. Il indique ensuite que l'énergie se divise en deux parties: l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. L'énergie potentielle est formée de l'énergie due aux actions telles que l' attraction newtonienne, et l'autre:

> "(...) correspond aux actions moléculaires proprement dites, ne varie qu'avec les distances des molécules très voisines; celle-ci, dont l'expression générale est encore inconnue, peut être appelée énergie potentielle interne."[248]

On peut remarquer tout de suite que, dans cette énergie potentielle interne, l'énergie due uniquement aux mouvements calorifiques n'est pas distinguée de celle due aux forces élastiques de cohésion de la matière. La séparation entre les actions calorifiques et les autres ne sera donc pas totale. Elle sera faite, de façon formelle, il est vrai, dans la "Théorie analytique de la chaleur" de 1903. Il n'en va pas de même pour l'énergie actuelle.

---

[247] J. Boussinesq, *Note (1)*, in J. Boussinesq, *Note 3, où sont établies des relations générales et nouvelles entre l'énergie interne d'un corps, fluide ou solide, et ses pressions ou forces élastiques*, in J. Boussinesq, *Théorie des ondes liquides périodiques*, Recueil des Savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris, 20, 1872, pp. 585

[248] ibid., pp. 585 et 586.

"On démontre en effet par le calcul qu'elle (l'énergie actuelle interne) est sensiblement la somme de la demi-force vive correspondant aux mouvements visibles ou finis, et de celle qui, correspondant aux vibrations d'amplitude très petite, constitue la chaleur sensible de cette portion de matière."[249]

Boussinesq indique ensuite que l'énergie interne totale, somme des énergies internes potentielle et actuelle, peut être rapportée à un volume du corps, et donc à son unité de volume. Ce n'est qu'ensuite comme conséquence de sa théorie de l'énergie, qu'il donne sa définition du travail:

"D'après la définition même de l'énergie potentielle interne, sa variation durant un instant dt, changée de signe, représente le travail total, durant le même instant, des actions réciproques, exercées à de très petites distances, par les molécules du corps."[250]

Il y a une différence notable entre l'interprétation de Saint-Venant et celle de Boussinesq. Pour le premier, les actions qu'il fait intervenir dans les calculs, les forces qui "travaillent", sont celles qui agissent à la surface du volume considéré; il ne se soucie pas de celles qui sont à l'intérieur du volume. Boussinesq, lui, dès l' abord, manifeste la volonté de se rapprocher le plus possible des actions moléculaires réelles, il se place délibérément dans le cadre de la mécanique physique de Poisson, qui voulait réellement déduire de ces actions la mécanique.

C'est donc dès le début de cette note que Boussinesq met en évidence l'originalité de son travail: l'utilisation de l'énergie et la prise en compte, autant que faire se peut, de l'action réelle des molécules.

IV . 3 . 2 . b . Le calcul des forces élastiques en fonction de l'énergie

Rappelons que le but de la note est, comme dans l'article de Saint-Venant, de calculer l'énergie interne en fonction des déformations subies par le corps. Nous donnerons les lignes générales du calcul, en résumant les arguments de Boussinesq par des égalités et, parfois, pour les résultats partiels, nous reproduirons exactement les équations de Boussinesq.

Tout d'abord il définit les conditions du problème: le corps sera soit au zéro absolu, soit considéré comme imperméable à la chaleur. Dans ces conditions:

---

[249]ibid., p. 586.
[250]ibid., p. 565.

> "Les forces élastiques et l'énergie interne, généralement fonction, pour tous les éléments de volume, de sa température actuelle et des changements de forme et de dimension qu'il a subis, ne dépendront plus que de ces changements, puisque la température pourra être regardée comme nulle ou en dépendra elle-même."[251]

Ce qui revient à la même constatation que celle de Saint-Venant.

Après avoir rappelé sa théorie de l'énergie, Boussinesq donne deux propriétés mathématiques de l'énergie interne, Φ, dans l'état primitif du milieu:

> "Φ ne dépendra que des positions relatives occupées à chaque instant par les molécules très voisines de M, et sera une fonction parfaitement déterminée des dérivées premières $d(u,v,w)/d(x,y,z)$ qui définissent ces positions."[252]

La première partie de la phrase est simplement l'affirmation de sa définition de l'énergie: celle-ci ne dépend que des positions relatives des molécules, de ce qu'il appellera, dans les "Leçons synthétiques de mécanique générale" de 1889, l'état statique du système. La dernière partie de la phrase est une façon de contourner la notion de force, ou de mettre sa théorie en accord avec sa conception des actions de présence, et donc d'élargir son calcul à tous les types de forces. La fonction Φ est, forcément, une fonction continue; c'est le postulat fondamental de toute la mécanique de Boussinesq. L'énergie du système dépendra des divers déplacements des molécules ui, vi, wi dont dépendent leurs positions relatives. La variation de cette énergie dépend des actions entre molécules, et donc de $d\Phi/dr$, si r est la distance entre les molécules. La variation de Φ dépend donc de $d(u,v,w)/d(x,y,z)$ si l'on se limite au premier ordre des dérivées, ce qui est l'opinion constante des physico-mathématiciens de l'époque.

C'est donc dans le cadre strict de sa mécanique générale que Boussinesq aborde le problème. Pour lui, contrairement à Saint-Venant, l'énergie a un sens physique.

La méthode appliquée est celle du parallélépipède utilisé dans le paragraphe précédent, qui est toutefois maintenant, au départ, supposé rectangle, ce dont Boussinesq aura besoin pour calculer simplement le travail des contraintes, Ni, Ti. L'idée générale est de calculer le travail

---

[251] ibid., p. 565.

[252] J. Boussinesq, *Note 3, où sont établies des relations générales et nouvelles entre l'énergie interne d'un corps, fluide ou solide, et ses pressions ou forces élastiques,* in J. Boussinesq, *Théorie des ondes liquides périodiques,* Recueil des Savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris, 20,1872, p. 586.

fourni par les forces qui s'exercent sur et dans ce parallélogramme, en un temps unité, et d'en déduire la différentielle de l'énergie interne, puis cette énergie elle-même.

Il écarte d'abord l'étude des vibrations calorifiques.

C'est à ce moment que se manifeste la préoccupation de description des phénomènes au niveau moléculaire.

> "Ces dernières (les vibrations calorifiques) ne donneront aucun travail correspondant au mouvement calorifique, c'est-à-dire aux oscillations d'amplitude insensible qui se superposent au mouvement général de chaque molécule[253]. En effet, d'une part, le travail des composantes que j'ai appelées X,Y,Z, (celles exercées par les molécules situées à l' extérieur du parallélépipède) par unité de masse sera la même que si toute la masse était concentrée au centre de gravité: or ces oscillations calorifiques des molécules étant dirigées dans tous les sens, ce centre de gravité n'a pas d'autre vitesse que celle qui correspond au mouvement général de translation de l' élément. D'autre part, les actions moléculaires s'exerçant à travers les faces, et dont les forces élastiques sont les résultantes, ne fourniront non plus aucun travail total correspondant aux mêmes vibrations; car c'est justement ce que l'on a admis en supposant le corps imperméable à la chaleur. D'après cela, nous pourrons, dans l'évaluation du travail de toutes les forces extérieures appliquées à l'élément de volume $\xi\eta\zeta$, faire abstraction du mouvement calorifique."[254]

On voit nettement ici la volonté de description des phénomènes au niveau moléculaire. Dans une lettre à Saint-Venant que nous citerons, Boussinesq considère ce passage comme une mise en évidence de la notion de flux de chaleur, il est toutefois patent que la fonction essentielle du flux: à savoir le transport de chaleur, n'est pas encore mise en évidence. Cette question sera l'objet de longs développements dans sa "Théorie analytique de la chaleur(...)" de 1901.

Boussinesq évalue les variations de longueur de ses côtés ξ, η, ζ en fonction des vitesses, ce dont il aura besoin pour déterminer les contraintes, comme il en a eu besoin dans sa théorie de l'énergie pour séparer forces et variations d'énergie correspondantes. Il décompose ensuite le mouvement du parallélépipède en deux mouvements: l'un, mouvement d'ensemble assimilé à une translation, et représenté par le

---

[253]On peut voir d'après cette phrase que Boussinesq reste attaché à une conception du mouvement calorifique proche de celle de Saint-Venant (voir § II . 3 . 1 de ce chapitre). Il n'a pas encore adopté une conception proprement dynamique du mouvement des molécules.

[254]ibid., p. 588.

mouvement du centre de gravité, est dû à la résultante des forces extérieures appliquées au volume; l'autre est dû à la variation du volume du parallélépipède, compression par exemple, son centre de gravité restant immobile.

Boussinesq va faire correspondre à la somme des travaux en jeu dans ces mouvements des quantités d'énergie actuelle et potentielle qu'il égalera; il applique ainsi strictement la conservation de l'énergie. Le travail n'est pas alors une grandeur fondamentale, c'est plutôt un "véhicule" de l'énergie.

La variation d'énergie actuelle, qui correspond au mouvement du centre de gravité du parallélépipède, peut être évaluée par le travail des forces extérieures. A la variation de volume correspond une variation d'énergie interne du volume considéré.

L'équation du mouvement d'ensemble du parallélépipède, c'est-à-dire celle de son centre de gravité, peut être déduite du second membre de l'équation (IV . 3 . 2. a . de ce chapitre) relative à u et de celles correspondant à v et w, soit:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dN_1}{dx}\frac{d\theta}{d\frac{du}{dx}}+\frac{dN_1}{dy}\frac{d\theta}{d\frac{du}{dy}}+\frac{dN_1}{dz}\frac{d\theta}{d\frac{du}{dz}} \\ +\frac{dT_3}{dx}\frac{d\theta}{d\frac{dv}{dx}}+\frac{dT_3}{dy}\frac{d\theta}{d\frac{dv}{dy}}+\frac{dT_3}{dz}\frac{d\theta}{d\frac{dv}{dz}} \\ +\frac{dT_2}{dx}\frac{d\theta}{d\frac{dw}{dx}}+\frac{dT_2}{dy}\frac{d\theta}{d\frac{dw}{dy}}+\frac{dT_2}{dz}\frac{d\theta}{d\frac{dw}{dz}} \end{array}\right\}+\rho X=\rho\frac{d^2u}{dt^2}. \qquad (2)$$

Le travail de l'ensemble des forces extérieures, dans le cas d'une translation, peut être exprimé à l'aide du mouvement du centre de gravité du parallélépipède. Il faut prendre garde à faire intervenir la variation de volume due à l'action de ces forces; cela oblige à exprimer la masse volumique en fonction de θ (variation relative de volume). Si Γ est l' accélération du centre de gravité, le travail des forces produisant son déplacement pendant un temps dt est alors $M . \Gamma.V . dt$ où M est la masse du parallélépipède. Boussinesq rassemble le travail correspondant sous la forme:

$$1/2 . \rho . (\xi\eta\zeta)/ (1 + \theta) d (V^2)$$

Le terme $\rho . (\xi.\eta.\zeta)/ (1 + \theta)$ représente la masse du parallélépipède calculée en fonction de sa variation de volume sous l'action des forces qui lui sont appliquées.

Nettement, Boussinesq exprime ici le travail sous forme de la différentielle d'une énergie actuelle; il prépare ainsi la mise en relation des grandeurs principales de la conservation de l'énergie: l'énergie actuelle, le travail, l'énergie potentielle.

Nous appellerons ce travail moteur Wmot, et donc, dans la suite, nous remplacerons 1/2 . r . ($\xi\eta\zeta$)/ (1 + θ) d (V^2) par l'expression Wmot. Wmot est dû à la différence d'intensité entre les forces qui s'exercent sur les faces du parallélépipède, auxquelles s'ajoutent les forces exercées de l'extérieur sur le corps (poids par exemple)[255].

Les forces produisant les variations de volume sont justement les Ni et Ti que l'on considère lorsqu'il y a équilibre élastique, qui figurent dans le premier membre de l'équation précédente, et que Boussinesq exprime par l'expression suivante:

$$\frac{\xi\eta\zeta\,dt}{1+\theta}\Bigg[\left(N_1\frac{d\theta}{d\frac{du}{dx}}+T_3\frac{d\theta}{d\frac{dv}{dx}}+T_2\frac{d\theta}{d\frac{dw}{dx}}\right)\frac{d\frac{du}{dx}}{dt}$$
$$+\left(T_3\frac{d\theta}{d\frac{du}{dx}}+N_2\frac{d\theta}{d\frac{dv}{dx}}+T_1\frac{d\theta}{d\frac{dw}{dx}}\right)\frac{d\frac{dv}{dx}}{dt}$$
$$+\left(T_2\frac{d\theta}{d\frac{du}{dx}}+T_1\frac{d\theta}{d\frac{dv}{dx}}+N_3\frac{d\theta}{d\frac{dw}{dx}}\right)\frac{d\frac{dw}{dx}}{dt}+\dots\Bigg]. \qquad (3)$$

Nous appellerons ce travail W(Ni,Ti). Le travail des forces intérieures est égal, *d'après la définition même de l'énergie potentielle par Boussinesq,* à la variation de l' énergie potentielle interne changée de signe, que nous désignerons par - dΨint.

C'est la seconde phase de l'application du principe de conservation de l'énergie. Par cette méthode de la variation de l'énergie potentielle interne, Boussinesq renouvelle le calcul de Saint-Venant: il se passe de relations sur les forces. Ainsi les forces centrales, que Saint-Venant appliquait implicitement, ne sont plus les seules que l'on peut considérer, conformément à ce qu'il dit dans sa présentation de la conservation de l'énergie.

Le travail total, diminué de la variation d'énergie potentielle interne effectué sur le parallélépipède, est alors égal à:

---

[255]C'est un point faible de la démonstration de Boussinesq de ne pas avoir donné un sens moléculaire à ces forces. C'est ce qu'il fera dans l'"Essai sur les eaux courantes".

$$Wmot + W(Ni,Ti) - d\Psi int.$$

Il équivaut à la demi-variation des forces vives de l'ensemble des molécules du volume considéré: d'abord la demi-force vive due au mouvement d'ensemble que l'on a écrite $1/2 \,.\, (\, \xi\eta\zeta / 1 + \theta \,)\, d(V^2)$ - nous l'appelons dEce - et la demi-variation des forces vives des molécules dans leur mouvement par rapport au centre de gravité - nous l'appelons dEci. On peut donc écrire:

$$Wmot + W(Ni,Ti) - d\Psi int = dEce + dEci$$

Comme Wmot = dEce, on a: $W(Ni,Ti) = d\Psi int + dEci$. On reconnait dans le second membre la variation de l'énergie interne $d\Phi$. D'où l'équation finale, indiquant que le travail des forces élastiques est égal à la variation d'énergie interne:

$$W(Ni,Ti) = d\Phi$$

Il est remarquable que cette expression qui est, finalement, le point de départ de l'article de Saint-Venant, n'apparait nullement évidente si l'on veut se rapprocher réellement d'une description au niveau moléculaire. On peut également voir que la méthode de Boussinesq ne nécessite pas la connaissance détaillée des mouvements des "ultimes particules de matière". A part les imprécisions sur le calcul du travail des Ni et Ti que nous avons signalées, c'est un calcul très précis au niveau moléculaire, même si l'on ne considère pas les atomes comme des points matériels.

Cette démonstration est l'application stricte de la loi de conservation de l' énergie, et de la définition du travail à partir de l'énergie potentielle par Boussinesq. Si nous partons de la loi de conservation de l'énergie telle que la donne Boussinesq

$$\Sigma\,(1/2).m.V2 + \Psi = Cte, \text{ soit } Ec + \Psi = Cte,$$

où l'énergie actuelle est la somme des énergies actuelles de tous les points du parallélépipède, on peut par différentiation écrire:

$$dEc = - d\Psi,$$

et d'après la définition même du travail par Boussinesq, on a:

$$d\Psi = - dW = dEc$$

En appelant dW la somme de tous les travaux tant extérieurs qu'intérieurs subis par la parallélogramme, dWext les travaux dus aux forces extérieures, dWint ceux dus aux forces intérieures, et en tenant compte de ce que dWint=-dΨint (Ψint énergie potentielle interne), on a:

$$dEc = - d\Psi = dW = dWext + dWint = dWext - d\Psi int,$$

ce qui est bien l'équation

$$Wmot + W(Ni,Ti) - d\Psi int = dEce + dEci,$$

trouvée par Boussinesq.

Boussinesq cherche ensuite à écrire les équations classiques exprimant les Ni, Ti, en fonction de l'énergie interne: c'est l'équivalent des équations classiques de l'élasticité.

Pour cela il utilise l'équation que nous avons écrite W(Ni,Ti) = dΦ sous la forme W(Ni,Ti) - dΦ = 0:

> "Le second membre (de cette équation) sera nul, et on devra égaler séparément à zéro, dans le premier le coefficient de chaque dérivée par rapport au temps, car quelles que soient à l'époque t, les valeurs des d(u,v,w)/ d(x,y,z), leurs dérivées par rapport au temps dépendent des vitesses qu'on peut supposer imprimées à cette époque aux molécules voisines de M et sont complètement arbitraires."[256]

Détaillons ce point important. Boussinesq tire les conséquences de l'égalité:

W(Ni,Ti) = dΦ mise sous la forme W(Ni,Ti) - dΦ = 0

Il exprime d'abord la variation de dΦ par unité de volume en fonction du temps:

$$\frac{d\Phi}{dt}dt = \left(\frac{d\Phi}{d\frac{du}{dx}} \frac{d\frac{du}{dx}}{dt} + \frac{d\Phi}{d\frac{dv}{dx}} \frac{d\frac{dv}{dx}}{dt} + \frac{d\Phi}{d\frac{dw}{dx}} \frac{d\frac{dw}{dx}}{dt} + \ldots \right) dt.$$

---

[256] J. Boussinesq, *Note 3, où sont établies des relations générales et nouvelles entre l'énergie interne d'un corps, fluide ou solide, et ses pressions ou forces élastiques,* in J. Boussinesq, *Théorie des ondes liquides périodiques*, Recueil des Savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris, 20,1872, p. 590.

qu'il égale à l'expression de la partie du travail consacrée à la variation de volume des contraintes appliquées au parallélépipède:

$$\left\{\frac{\xi\eta\zeta\,dt}{1+\theta}\left[\left(N_1\frac{d\theta}{d\frac{du}{dx}}+T_3\frac{d\theta}{d\frac{dv}{dx}}+T_2\frac{d\theta}{d\frac{dw}{dx}}\right)\frac{d\frac{du}{dx}}{dt}\right.\right.$$
$$+\left(T_3\frac{d\theta}{d\frac{du}{dx}}+N_2\frac{d\theta}{d\frac{dv}{dx}}+T_1\frac{d\theta}{d\frac{dw}{dx}}\right)\frac{d\frac{dv}{dx}}{dt}$$
$$\left.+\left(T_2\frac{d\theta}{d\frac{du}{dx}}+T_1\frac{d\theta}{d\frac{dv}{dx}}+N_3\frac{d\theta}{d\frac{dw}{dx}}\right)\frac{d\frac{dw}{dx}}{dt}+\cdots\right]. \qquad (3)$$

que l'on ramène à l'unité de volume en divisant par (ξ.η.ζ)/ (1 + θ). Pour que l'équation W(Ni,Ti) - dΦ, ramenée à l'unité de volume, soit nulle quelles que soient les valeurs des termes de la forme d(du/dx)/dt, il faut les égaler. En effet du/dx, par exemple, représente le déplacement d'une molécule par unité de longueur, et d(du/dx)/ dt, représente la vitesse de ce déplacement. Ces vitesses imprimées aux molécules sont complètement arbitraires, à cause de l'agitation calorifique principalement. Il faut donc que les termes qu'elles affectent soient nuls pour que W(Ni,Ti) - dΦ soit nul. Ainsi

(dΦ/(du/dx)).((du/dxdt)/dt) devra être égal à
[N1(dθ/(d(du/dx)))+T3(dθ/(d(dv/dx)))+T4(dθ/d(dw/dx))]((du/dxdt)/dt)

De là Boussinesq tire les équations suivantes, expression des Ni et Ti en fonction de l'énergie et des déplacements:

$$\begin{cases} N_1\dfrac{d\theta}{d\frac{du}{dx}}+T_3\dfrac{d\theta}{d\frac{dv}{dx}}+T_2\dfrac{d\theta}{d\frac{dw}{dx}}=\dfrac{d\Phi}{d\frac{du}{dx}}, \\ N_1\dfrac{d\theta}{d\frac{du}{dy}}+T_3\dfrac{d\theta}{d\frac{dv}{dy}}+T_2\dfrac{d\theta}{d\frac{dw}{dy}}=\dfrac{d\Phi}{d\frac{du}{dy}}, \\ N_1\dfrac{d\theta}{d\frac{du}{dz}}+T_3\dfrac{d\theta}{d\frac{dv}{dz}}+T_2\dfrac{d\theta}{d\frac{dw}{dz}}=\dfrac{d\Phi}{d\frac{du}{dz}}, \end{cases}$$

et six autres analogues, où, dans les seconds membres, on a v et w au lieu de u, et, dans les premiers, l'on a T_3, N_2, T_1 et T_2, T_1, N_3, au lieu de N_1, T_3, T_2.

On reconnait la méthode qui sera utilisée dans les "Recherches sur les principes de la mécanique(...)" et plus tard dans les Leçons synthétiques(...)". C'est surtout là un procédé de calcul, mais qui est *essentiel, si l'on veut pouvoir déduire de l'énergie les équations des forces élastiques et, plus généralement, déduire la force de l'énergie.*

On peut se rendre compte que ces équations sont, dans leur essence, identiques à celles qui donnent l'expression des forces en fonction de l'énergie potentielle dans le cas général (chapitre 2, § III . 4 . 2 .). En effet, nous avons dit que l' expression du/dx peut être considérée comme l'augmentation de u par unité de longueur, soit ∂_X. Si en plus on suppose que la déformation est une simple dilatation dans le sens des x, la dilatation relative ($\partial_X + \partial y + \partial z$) par unité de volume se réduit à ∂ , et donc l'équation devient:

$$N1 = d\Phi_1/\partial_X,$$

ce qui est bien une équation du même type que celle utilisée pour la définition des forces au chapitre précédent.

IV . 3 . 2 . C . L'intervention du fait fondamental de l'élasticité

Boussinesq cherche maintenant à trouver les relations entre l'énergie interne et les diverses déformations, ∂_n et gnm. Ce sont les équivalents des équations $d\Phi 1/d\partial_n = p_{nn}$ et $d\Phi 1/ dg_{xy} = p_{xy}$ de Saint-Venant. Mais c'est surtout exprimer la réalité physique de la nature en établissant les lois de l'élasticité sur des relations entre des quantités réelles: les énergies et les longueurs, comme le montre le caractère géométrique de la démonstration.

Jusqu'à présent, Boussinesq n'a pas fait usage de ce qu'il considère comme le principe fondamental de l'élasticité: les lois de l'élasticité ne dépendent, à température constante, que des trois dilatations et des trois glissements. C'est ce qu'il fait maintenant:

> "Observons que l'énergie interne, considérée jusqu'à présent comme fonction des neuf dérivées d(u,v,w)/d(x,y,z), ne dépend en réalité que de six variables indépendantes (les trois glissements et les trois dilatations). Si l'on conçoit, en effet, le parallélépipède matériel qui, construit à partir de la molécule M, a trois arêtes, dans l'état primitif du milieu, respectivement parallèles aux axes des x, y, z et égales à des droites infiniment petites h, k, l, son énergie interne Φ, sous l'unité de volume primitif, ne pourra dépendre, à l' époque t, que de la forme et des dimensions du parallélépipède à la même époque (...) et donc finalement des dilatations linéaires ∂x, ∂y, ∂z , et des trois glissements gyz, gzx, gzy."[257]

[257]ibid., p. 592.

Par cette réduction, le problème qui était un problème de mécanique physique en quelque sorte indéterminé, devient alors un problème d'élasticité appliquée aux petites déformations. En effet, en fonction du domaine de la mécanique physique que l'on étudie, les dérivées d(u,v,w)/d(x,y,z) qui règlent l'évolution de l'énergie interne, auront des relations différentes entre elles. Le physico-mathématicien doit donc choisir les variables macroscopiques et les relations entre ces variables qui, accessibles à l'expérience, sont les variables fondamentales du domaine étudié, ou comme le dit Boussinesq lui-même, "définissent en quelque sorte la classe des phénomènes étudiés"[258]*. Ici ce seront les ∂n et gnm. Dans le cas d'un mouvement désordonné de la matière, comme un mouvement tourbillonnaire, nous verrons au paragraphe suivant, que le fait fondateur est différent, même si les équations générales obtenues ressemblent aux équations de l'élasticité des solides. Le rôle de ce principe est donc bien de spécifier le champ d'application de la mécanique physique à l'élasticité.*

Boussinesq cherche donc à établir une équation de la forme $\Phi = f(\sigma n, gnm)$. Pour cela il doit d'abord trouver une équation de la forme $d\Phi = f(\sigma n, d\sigma n, gnm, dgnm)$. Par commodité, il n'utilise pas les glissements et les dilatations, mais six variables Di et Gi, avec i et j pouvant être égaux à 1,2, ou 3, plus commodes pour faire apparaître les expressions, très compliquées, des Ni et Ti. Pour Saint-Venant de telles relations sont la conséquence de son équation de départ:

$$d\Phi^1 = p^1{}_{xx}\, d\partial_x + p^1{}_{yy}\, \partial_y + p^1{}_{zz}\partial_z + p^1{}_{yz}\, dg_{yz} + p^1{}_{zx} dg_{zx} + p1\, {}_{xy} dg_{xy}$$

et aussi du fait que Φ^1 est une différentielle exacte. Ce sont donc des considérations purement analytiques qui permettent de trouver la relation $d\Phi = f(\sigma n, d\sigma n, gnm, dgnm)$. Boussinesq utilise une méthode géométrique dont nous donnons l'idée en note[259].

---

[258] J. Boussinesq, *Considérations sur les buts, la méthode et les principaux résultats de la Mécanique physique*, in J. Boussinesq, *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 282.

[259] Donnons rapidement l'idée de cette démonstration dans le cas où l'on réduit le problème à deux dimensions. Le parallélépipède, ici réduit à un rectangle, est considéré comme ayant déjà été déformé, et a pour côté $1+\partial x$. Il subit une déformation qui allonge son côté de $d\partial x$. Le travail de la composante normale peut alors être assimilé à N. $d\partial x$, celui de la composante tangentielle à MN . T, soit $d\partial x$. $\cos\alpha$. T. Saint-Venant a démontré dans son article que $\cos\alpha = gxy/(1+\partial x)$. Donc le travail de cette force est : $(gxy/(1+\partial x))$. $d\partial x$.T. Soit, pour les deux travaux:

$$d\Phi = (N + (gxy/1+\partial x) .T).\ d\partial x .$$

L' expression différentielle obtenue est la suivante:

$$d\Phi =(N'1 + gxy.\ T'3/ (1 +\partial x) + gzx\ .\ T'2/(1 +\partial x))d\partial x + T'1\ dgxy +$$
$$(\text{des termes pareils en } d\partial y, d\partial z, dgzx, dgzy)$$[260]

Les N'i, T'i sont des valeurs particulières de Ni et Ti dans certaines positions du parallélépipède.

C'est, nous dit Boussinesq, une équation susceptible d'une interprétation "géométrique simple": la dérivée de l'énergie interne par rapport à la dilatation de l'une des arêtes est la composante normale de la force élastique, la dérivée par rapport au cosinus de l'angle des deux arêtes, en est l'une des composantes tangentielles.

La force, ici, est effectivement subordonnée aux grandeurs réelles de la nature, l'énergie - puisque le travail est une variation d'énergie potentielle - et les longueurs. L'équation est bien une relation géométrique.

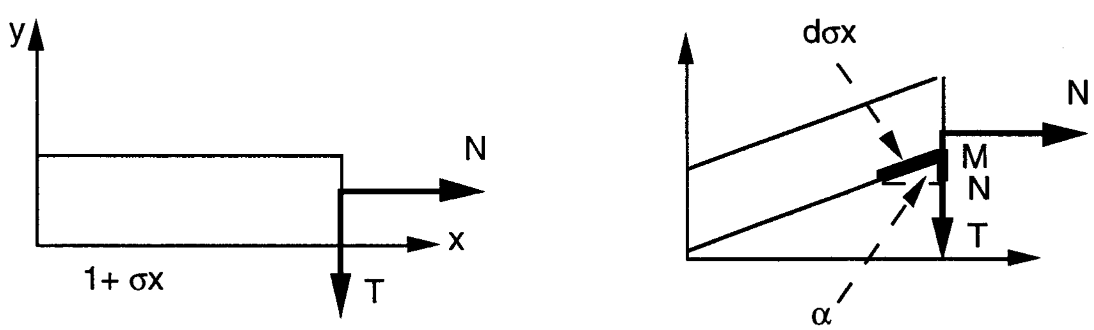
Boussinesq parvient, finalement, à donner l'expression de la différentielle de l' énergie interne en fonction des divers glissements et dilatations:

$$\Phi = A1\partial x + A2\partial y + A3\partial z + B1gyz + B2gzx + B3gxy + \Phi 1$$

C'est donc l'expression de l'énergie interne exprimée uniquement en fonction de longueurs. Il conclut ainsi:

> "Je crois nouvelles toutes les formules de cette Note relative à l'énergie interne et aux forces élastiques, à l'exception d'une qui est due à Cauchy".[261]

Il faut au moins voir la Note précédemment analysée, ou bien comme une tentative de Boussinesq de fonder l'élasticité sur autre chose que



---

[260] J. Boussinesq, *Note 3, où sont établies des relations générales et nouvelles entre l'énergie interne d'un corps, fluide ou solide, et ses pressions ou forces élastiques,* in J. Boussinesq, *Théorie des ondes liquides périodiques*, Recueil des Savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris, 20,1872, p. 596.

[261] ibid., p. 599.

d'hypothétiques actions centrales moléculaires (comme le fait Saint-Venant), ou bien un refus de se résigner à l'imprécision et à un discours tout formel comme le fait Lamé. Le texte précédent est donc le témoin des efforts de Boussinesq pour se libérer réellement de la tradition de la physique mathématique classique, celle du point matériel et de l'action centrale à distance, tout en conservant le souci de décrire la réalité physique, cette réalité physique fondamentale qui se trouve exprimée "en fonction de ce qu'il y a de plus réel en mécanique, savoir, en fonction d'énergies et de longueurs"[262].

V . Une application de l'utilisation des valeurs moyennes: l'étude des écoulements tourbillonnaires

V . 1 . Situation historique et scientifique

M. Nordon, praticien de l'hydrodynamique, présente ainsi en 1992, dans son "Histoire de l'Hydraulique"[263], l'"Essai sur la théorie des eaux courantes" de Boussinesq[264], ouvrage où ce dernier décrit les divers régimes d'écoulement des eaux dans les canaux ou rivières:

> "La première étude magistrale, et peut-être la seule étude complète du phénomène, est due à Boussinesq (Essai sur la théorie des eaux courantes, 1872). Si les calculs sont plus complexes et plus complets parce qu'ils prennent en compte toutes les données et tous les cas, les résultats ne marquent ni rupture, ni nouveauté fracassante par rapport aux études précédentes."[265]

Si la dernière partie de cette affirmation décrit bien le travail de bénédictin de Boussinesq qui ajuste un à un les résultats du calcul à des valeurs expérimentales pour rendre compte de phénomènes complexes, nous verrons que la rigueur du jugement final doit être tempérée. D'autres praticiens reconnaissent l'importance des travaux de Boussinesq. Ainsi en est-il de M. Lesieur, autre praticien de l'hydrodynamique, dans son ouvrage sur la turbulence[266]:

---

[262] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale,* Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 102.

[263] M. Nordon, *Histoire de l'hydraulique,* t. 1, *L'eau conquise*, Paris, Masson, t. 2, 1991, *L'eau calculée*, Paris, Masson, 1992.

[264] J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France (Recueil des savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris), 23, 1872, p. 1 à 680, additions, même revue, 24, 1872, pp. 1 à 64.

[265] ibid., t. 2., p. 143.

[266] M. Lesieur, *La turbulence*, Presses universitaires de Grenoble, Grenoble, 1994.

> Nous avons signalé au chapitre 1 la décomposition dite de Reynolds (mais proposée auparavant par Barré de Saint-Venant et Boussinesq), où les divers paramètres (vitesse, pression, température, etc.) sont décomposés en une partie moyenne et une partie fluctuante."[267]

Quoi qu'il en soit de la pérennité de ces résultats, historiquement, ils se présentent comme la solution d'une énigme, énigme que Boussinesq résout dans le cadre de son épistémologie. Nous allons, brièvement, exposer ce cadre historique. Fort heureusement, dans une série d'articles des Comptes Rendus de l'Académie des sciences, Saint-Venant se charge de préciser ce cadre[268]. L'exposé de Saint-Venant est conforme à ce que l'on peut déduire du mémoire de Darcy et Bazin, qui ont réalisé les expériences servant de base à l'"Essai (...)" de Boussinesq[269]. De plus, une bonne partie des idées qui se trouvent dans l'article de Saint-Venant, tant en ce qui concerne la théorie à élaborer, que ce qui a trait à la manière d'y parvenir, sont repris par Boussinesq. On pourrait aussi dire qu'elles proviennent de Boussinesq, car l'intense correspondance entre ce dernier et Saint-Venant dans les années 1871 et 1872, années d'élaboration de l"Essai (...)", portent en grande partie sur l'hydrodynamique. Il est donc difficile de démêler ce qui appartient à l'un et à l'autre.

Saint-Venant commence par retracer les travaux de Navier et de Poisson sur l'équilibre et le mouvement des fluides, il signale aussi les travaux de Stockes, et donne lui-même une démonstration rationnelle, basée sur l'étude des actions entre molécules, de ce qu'il appelle les équations de Navier, et qui sont:

$$p_{xx} = p - 2\varepsilon \,.\, du/dx, \qquad p_{yy} = p - 2\varepsilon \,.\, du/dx, \qquad p_{zz} = p - 2\varepsilon \,.\, du/dx$$

$$p_{yz} = - \varepsilon \,.\, (dv/dz + dw/dy), \qquad p_{zx} = - \varepsilon \,.\, (dw/dx + du/dz)$$

$$p_{yz} = - \varepsilon \,.\, (du/dy + dv/dx)$$

---

[267]ibid., p. 129.

[268]A. de Saint-Venant, *Sur l'hydrodynamique des cours d'eau,* C. R., 74, 1872, pp. 570 à 579, 649 à 657, 694 à 701, 770 à 774.

[269]Boussinesq indique dans son "Essai" comme référence expérimentale:M.M. Darcy et Bazin, Recherches hydrauliques, Mémoires des savants étrangers de l'Académie des sciences, 19, 1865. Or, à ce tome et à cette date, on trouve: M. Bazin, *Recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux ouverts,* Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut Impérial des sciences, 19, 1865. Les références de Boussinesq aux recherches hydrauliques montrent qu'il s'agit du même mémoire.

Dans ces équations, les p_{mm} sont les composantes de la pression normales aux faces du parallélépipède de référence, les p_{mn} en sont les composantes tangentielles, ε est un coefficient variant avec le liquide et la température. Les signes - s'expliquent, selon Saint-Venant, par le fait qu'il s'agit ici de pressions et non de tractions[270]. Mais ces formules ne sont valables que pour des écoulements bien réguliers:

> "Il (Navier) ne les établit qu'en supposant, dans le fluide, des mouvements moléculaires réguliers, c'est-à-dire ne variant que d'une manière bien continue, ou ni brusque ni rapide d'un point à un autre, ou d'un instant au suivant, de sorte que les variations puissent être exprimées par des développements de Taylor réduits à leur premier terme."[271]

Mais de tels écoulements ne sont qu'exceptionnels, et en quelque sorte, simples faits de laboratoire. Il en est bien autrement dans la nature:

> "Mais tels ne sont pas les mouvements qui s'observent dans les rivières, même dans les rigoles artificielles les mieux dressées(...). On y distingue ces tourbillons, grands et petits, à axe mobile, signalés par Léonard de Vinci, puis par Venturi, et plus près de nous ensuite par Poncelet. On voit aussi s'épanouir, à la surface, ces *bouillons* ou tourbillons à axe à peu près horizontal qui surgissent à chaque instant du fond, et, par suite, de véritables ruptures, avec ces mouvements d'entrecroisement et de mélange qu'a observés M. Boileau dans ses expériences."[272]

Il s'agit donc ici d'une difficulté de taille: il faut prendre en compte, dans tous les cas qui se présentent dans la nature, cet écoulement tourbillonnaire où les déplacements des molécules ne suivent certainement pas des lois linéaires, et où il n'est pas possible d'arrêter les développements de Taylor à l'ordre un.

Dans tout ce désordre, on pressent un ordre, on observe certaines périodicités, qui font espérer une solution[273]. Ici Saint-Venant (ou peut-être Boussinesq) donnent l'idée de la solution possible:

> "Ce sont ces vitesses moyennes *locales*, ces vitesses de translation ou de transport du fluide que mesurent les flotteurs et autres instruments

---

[270]A. de Saint-Venant, *Sur l'hydrodynamique des cours d'eau*, C. R., 74, 1872, p. 572.
[271]ibid., p. 571.
[272]ibid., p. 650.
[273]ibid., pp. 650 et 651.

hydrométriques, et qui déterminent les écoulements, objets de calcul."[274]

Saint-Venant indique ensuite dans quelle voie doivent se poursuivre les recherches:

> "On peut donc regarder comme une chose acquise que, dans tous les cours d'eau qui ne sont pas trop tumultueux, ou dans lesquels les vitesses appelées moyennes locales, d'où dépend le transport des éléments, varient avec une certaine régularité, les six relations (des relations de la même forme que celles de Navier) existent, à chaque instant et en chaque point, entre les dérivées de ces vitesses et les composantes, aussi moyennes en chaque point, des pressions intérieures qui s'y exercent, le coefficient de frottement ε étant aussi local, ou pouvant varier d'un point à l'autre, et même, si le mouvement n'est pas permanent, d'un instant à l'autre."[275]

Il s'agit donc de reconstruire, rigoureusement, une mécanique des fluides aboutissant à des formules analogues à celles de Navier, mais portant sur des valeurs moyennes.

C'est évidemment un grand pas que celui qui consiste de se détacher de la vision moléculaire réaliste, celle qui considère les déplacements réels de particules réelles, pour aller vers une abstraction mathématique: la moyenne.

En effet, c'est un pas important, car on peut chercher dans d'autres voies plus traditionnelles. Saint-Venant signale les travaux de "deux ingénieurs, bons analystes", Kleitz et Lévy, qui ont tenté de résoudre le même problème, mais en considérant les actions de molécule à molécule. L'un et l'autre pensent que les calculs de Navier sont corrects dans leur essence, mais qu'il ne les a pas poussés assez loin.

Kleitz pense qu'il faut tenir compte des dérivées d'ordre supérieur à un dans l'évaluation des vitesses. Cette idée ressemble à celle de Cauchy qui, pour expliquer la dispersion de la lumière, a pensé faire intervenir les dérivées d'ordre supérieur à un dans ses équations de propagation de la lumière dans le vide. Lévy suppose que l'action de deux molécules doit dépendre des puissances 1, 3, 5, 7, etc., des vitesses relatives. C'est finalement la méthode utilisée par Briot dans sa "Théorie mécanique de la chaleur" ou son "Essai sur la théorie mathématique de la lumière"[276].

---

[274] ibid., p. 651.

[275] ibid., p. 654.

[276] Ch. Briot, *Essais sur la théorie mathématique de la lumière*, Paris, Mallet-Bachelier, 1864, p. XIV.

Pour Saint-Venant, ces deux solutions ne sont pas acceptables: elles prennent en compte les vitesses réelles des molécules, ce qui, à cause de l'irrégularité de leur mouvement, ne peut aboutir qu'à un échec. Et il conclut cette partie de son article en réaffirmant que seule la méthode qu'il a indiquée, celle de l'utilisation des valeurs moyennes, peut aboutir. Ainsi:

> "Le problème de l'établissement, dans chaque cas, des équations différentielles du mouvement, et ensuite leur intégration approchée, aura encore sa difficulté souvent grande. Mais il ne présentera plus, envisagé ainsi, cette désespérante énigme contre laquelle des esprits distingués se sont heurtés en vain."[277]

La dernière partie de l'article de Saint-Venant est essentiellement destinée à mettre en valeur les travaux de Boussinesq.

Voyons maintenant comment Boussinesq établit les lois sur les valeurs moyennes.

V . 2 . L'établissement des lois des mouvements de l'eau à l'aide des valeurs moyennes

L'intérêt de ce texte réside surtout en ce que l'on y voit Boussinesq transposer le problème, complexe et réel, du mouvement tourbillonnaire en un problème plus simple mais qui porte sur un fluide abstrait. Il s'aide d'expériences banales, fait souvent appel à l'intuition, mais cette intuition est guidée par l'expérience, conformément à sa distinction entre mécanique générale et mécanique physique, cette dernière devant plus souvent s'aider de l'expérience que la première. On ne peut mieux dire sur la méthode de Boussinesq que ce qu'écrit E. Picard dans son éloge, souvent ironique, de Boussinesq:

> "On a pu dire de ce véritable monument scientifique, modestement intitulé "Essai sur la théorie des eaux courantes", que "Sous la plume de M. Boussinesq, le calcul allait pour la première fois donner des résultats remarquablement conformes à la réalité dans les problèmes de l'application de l'hydrodynamique et de l'hydraulique". Tout cela exigeait une grande sûreté dans le choix des éléments à faire intervenir, par exemple l'ampleur des sections, les moyennes des vitesses, le degré de concentration de l'agitation tourbillonnaire; mais pour discerner dans d'inextricables calculs ce qui est négligeable, Boussinesq avait, on ne saurait trop le remarquer, un flair remarquable, qui est assurément une des caractéristiques de son talent. Le lecteur cependant s'arrête étonné devant l'audace de certaines affirmations et l'assurance avec laquelle l'auteur rétablit des moyennes dans les mouvements désordonnés; mais le sens que Boussinesq avait des phénomènes

---

[277] A. de Saint-Venant, *Sur l'hydrodynamique des cours d'eau*, C. R., 74, 1872, p. 774.

hydrauliques, et sa connaissance des travaux expérimentaux d'éminents ingénieurs comme Bazin et Darcy, ont été le plus souvent pour lui des guides sûrs dans le choix d'indispensables hypothèses."[278]

La démonstration de Boussinesq est calquée sur celles de ses travaux d'élasticité. Successivement il démontre les formules fondamentales de son hydrodynamique, les lois du mouvement, d'abord indéfinies, puis définies de certains écoulements. C'est là que nous trouverons le "fait particulier qui fonde cette science". Le reste du mémoire ne nous apprend que peu de choses sur la méthode de Boussinesq. Il retrouve des lois connues, qu'il résume dans des formules. Dans ces expressions, il a eu soin de faire figurer les diverses variables macroscopiques du problème: dimensions, pente, forme, état des parois du canal. Ainsi cette formule générale peut être appliquée par l'ingénieur à des cas particuliers. L'étude détaillée de cet ouvrage relève de l'histoire de l'hydrodynamique même, on pourra se reporter à l'ouvrage de Nordon déjà cité.

Nous nous bornerons, quant à nous, à étudier le passage de la description des phénomènes au niveau moléculaire à l'établissement des formules macroscopiques fondamentales. C'est là que nous trouverons le "fait particulier qui fonde cette branche de la science". Nous bornerons notre étude à ce point. Cette étude met en évidence la méthode de Boussinesq pour traiter les phénomènes naturels désordonnés, et donc à caractère essentiellement dynamique. Cette étude ne fait pas intervenir la chaleur. Les phénomènes calorifiques feront l'objet d'une étude particulière, au paragraphe VI de ce chapitre, où nous montrerons aussi le passage de la description du niveau microscopique au niveau macroscopique. Dans le cas de la chaleur, l'élément descriptif principal est l'énergie (§ VI); en hydrodynamique, ce sont les vitesses moyennes (§ V). Dans ces paragraphes (V et VI) nous mettons en évidence l'homogénéité de la méthode de Boussinesq pour résoudre les problèmes, qu'ils soient à caractère énergétique ou plutôt essentiellement cinématique.

V . 2 . 1 . L'établissement des lois fondamentales

V . 2 . 2 . La substitution d'un fluide fictif au fluide réel

Nous montrons maintenant comment Boussinesq, pour établir les lois fondamentales de l'écoulement tourbillonnaire de l'eau, remplace celle-ci par un fluide fictif incompressible à écoulement régulier.

Il s'agit d'une adaptation de la démonstration des lois de l'élasticité relatives aux solides, particulièrement telles que les établit Lamé.

---

[278] Em. Picard, *La vie et l'œuvre de Boussinesq*, L'Institut, 28, 1933, pp. 16 et 17.

Boussinesq commence par rappeler les faits: les mouvements des eaux courantes ne sont généralement pas continus, mais on observe certaines régularités indiquant que:

> "Si l'on prend la moyenne des valeurs que reçoit, durant un temps assez court t, la composante parallèle à une direction donnée, de la vitesse en un point fixe, cette moyenne est indépendante du temps dans les cas du mouvement dit *permanent*, graduellement variable d'un instant à l'autre dans celui d'un mouvement *non permanent*, et en tous les cas, fonction continue des coordonnées du point considéré."[279]

Les fonctions qui traduisent les variations dans le temps des vitesses moyennes étant continues, et celles qui, selon Boussinesq, traduisent les variations des coordonnées l'étant aussi, l'analyse va pouvoir être mise en œuvre, comme toujours à cause de "la grande loi de continuité des fonctions". Il y a une certaine audace à supposer la continuité de la fonction dans l' espace, alors que l'examen du phénomène indique au contraire un mouvement désordonné. Cela s'explique sans doute par l'observation de "cette périodicité irrégulière que", nous dit Boussinesq, "l'on observe dans les cours d'eau"[280].

Nous montrons maintenant que dans un premier temps il transpose les formules de l'élasticité des solides en formules d'écoulement des fluides en faisant jouer aux vitesses moyennes le rôle des dérivées des déplacements moléculaires.

Une formule fondamentale de l'élasticité est l'équation de continuité, laquelle peut traduire l'incompressibilité des fluides. Boussinesq transpose cette équation d'incompressibilité, habituellement exprimée par les déplacements moléculaires, en équation de continuité exprimée à l'aide des vitesses moyennes. Comme il appelle u,v,w ces vitesses moyennes, les deux formules, celle traduisant l'incompressibilité d'un liquide en fonction des déplacements des molécules et celle traduisant l'incompressibilité en fonction des vitesses moyennes, sont identiques:

$$du/dx + dv/dy + dw/dz = 0$$

u, v, w sont ici des vitesses moyennes locales.

Pour arriver à ce résultat, il intègre les vitesses réelles sur un intervalle de temps dt, puis néglige les termes d'ordre 2. Il considère lors du calcul les expressions:

---

279 J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France (Recueil des savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris), 23, 1872, p. 25.

280 ibid., p. 25.

$$du/dt, \quad dv/dt, \quad dw/dt,$$
$$((dv/dz)+(dw/dy)), \quad ((dw/dx)+(du/dz)), \quad ((du/dy)+(dv/dx)).$$

On reconnaît les expressions analogues à celles des déplacements et des glissements utilisées en élasticité. Les trois premières sont les vitesses composantes des vitesses relatives moyennes qui, en moyenne, suivent la même direction; les trois dernières représentent la vitesse relative moyenne avec laquelle glissent l'une par rapport à l'autre des molécules qui, en moyenne, suivent des directions parallèles, ce que Boussinesq appelle, dans l'introduction à l' "Essai (...)", "les glissements relatifs moyens des couches fluides"[281]. Il montre que la condition d'incompressibilité s'applique à un certain fluide fictif:

> "Si l'on conçoit, au lieu du liquide étudié réellement, un fluide fictif dont les vitesses auraient u, v, w pour composantes suivant les axes, en chaque point et à chaque instant, c'est-à-dire dont les mouvements vrais seraient exactement les mêmes que les mouvements moyens du liquide considéré, ce fluide fictif sera incompressible".[282]

L'incompressibilité du fluide fictif traduit aussi sa continuité. C'est sous le terme de'"condition de continuité" que Boussinesq désigne plus loin l'équation $du/dx + dv/dy + dw/dz = 0$, elle sert surtout dans l'établissement des équations du mouvement dans chaque cas particulier.

Il faut s'arrêter un instant sur la notion de vitesse moyenne telle que la développe Boussinesq. Il y a en réalité deux conceptions de cette vitesse moyenne.La première est effectivement la moyenne dans un instant très court de la vitesse réelle d'une molécule, ou d'une particule infiniment petite. Si u1 est la composante suivant l'axe des x de la vitesse réelle de la particule, la composante correspondante u de la vitesse moyenne locale pendant un instant τ sera:

$$(1/\tau) \cdot \int_{(t,\, t+\tau)} u1 \cdot dt$$

Bien qu'étant une moyenne, cette vitesse garde les caractéristiques mathématiques d'une vitesse réelle, ce qui fait dépendre du temps les expressions où elle entre[283]. Au paragraphe suivant, Boussinesq doit considérer les expressions suivantes:

---

[281] ibid., p. 7.
[282] ibid., p. 26.
[283] ibid., p. 26.

$$du/dx, \quad dv/dy, \quad dw/dz,$$

$$((dv/dz)+(dw/dy)), \quad ((dw/dx) +(du/dz)), \quad ((du/dy)+(dv/dx))$$

dont il nous dit:

> "Les trois premières représentent les rapports moyens à dt des dilatations éprouvées, pendant un instant dt, par les trois lignes matérielles infiniment petites dx, dy, dz, menées, à l'époque t et à partir de ce point, parallèlement aux x, aux y et aux z; les trois dernières expriment de même les moyennes à dt des accroissements éprouvés, pendant le même instant, par les cosinus respectifs des angles[284] que forment deux à deux ces lignes."[285]

Autrement dit, on peut voir là une seconde interprétation de la vitesse moyenne. Le déplacement u, par exemple, peut également s'interpréter comme un rapport à dt de *dilatations*. Si pour rendre la distinction plus aisée on considère les dilatations éprouvées entre les instants t1 et t2 par Δx comme formées de deux dilatations δx_{t1} et δx_{t2}, la moyenne à considérer à la place de u sera:

$$(\delta x_{t1} + \delta x_{t2})/ (t_2 - t_1)$$

Alors l'expression qui précède peut s'interpréter comme une variation de longueur par unité de temps, comme une déformation prise entre deux instants. Mathématiquement, comme le montre Boussinesq dans la suite du paragraphe, les deux interprétations reviennent presque au même. Mais dans le premier cas, ce sont les vitesses réelles qui entrent dans les expressions, et dans le second cas, ce sont les déformations, les longueurs. L'interprétation de certains passages du texte nécessite cette distinction, si l'on veut conserver à l'état statique son rôle primordial. La double interprétation de la vitesse moyenne permet aussi de confirmer la similitude entre l'hydrodynamique de Boussinesq et l'élasticité des solides.

Ensuite, Boussinesq *fait jouer* à ces vitesses moyennes *locales* (en un point), le rôle que jouent les déplacements (u, v, w) dans la théorie de l'élasticité. Il appelle d'ailleurs ces vitesses moyennes aussi u, v, w.

---

[284]Les accroissements des cosinus éprouvés par les angles sont une autre manière de concevoir les glissements. On considère alors un trièdre attaché au milieu; il se déforme en même temps que lui, les augmentations des cosinus des angles que font les axes du trièdre avant et après déformation sont les glissements du milieu. Voir: A. de Saint-Venant, *Résumé des leçons donnée à l'Ecole des ponts et chaussées par Navier, avec notes étendues de M. Barré de Saint-Venant*, 3° éd., Paris, Dunod, 1864, app. 3, p. 553.

[285]ibid., p. 253.

Boussinesq démontre également, avec des approximations, que l'accélération moyenne locale est une fonction de la vitesse moyenne et des dérivées premières de la vitesse moyenne locale par rapport au temps:

$$u' = (du/dt) + u\,(du/dx) + v(du/dy) + w(du/dz)$$

u' est une composante de l'accélération moyenne locale,
u une composante de la vitesse moyenne locale.

En d'autres termes, Boussinesq a transposé le problème de l'espace géométrique des positions à celui des vitesses moyennes. Cela va lui permettre d'appliquer presque directement les méthodes de l'élasticité des solides à son hydrodynamique.

V . 2 . 3 . La décomposition du mouvement en mouvement moyen et mouvement fluctuant

L'établissement des formules fondamentales de l'écoulement tourbillonnaire, fortement inspiré des travaux de Lamé sur l'élasticité des solides, aboutit à interpréter les équations de Navier[286] dans le cadre du formalisme de la théorie de l'élasticité des solides du premier.

Boussinesq commence par rappeler la décomposition des pressions réelles en fonction des Ni, Ti de Lamé, qu'il considère comme des actions à travers les faces du tétraèdre de Cauchy. Comme nous aurons à nouveau besoin de ce tétraèdre dans le paragraphe suivant, nous donnons une figure.

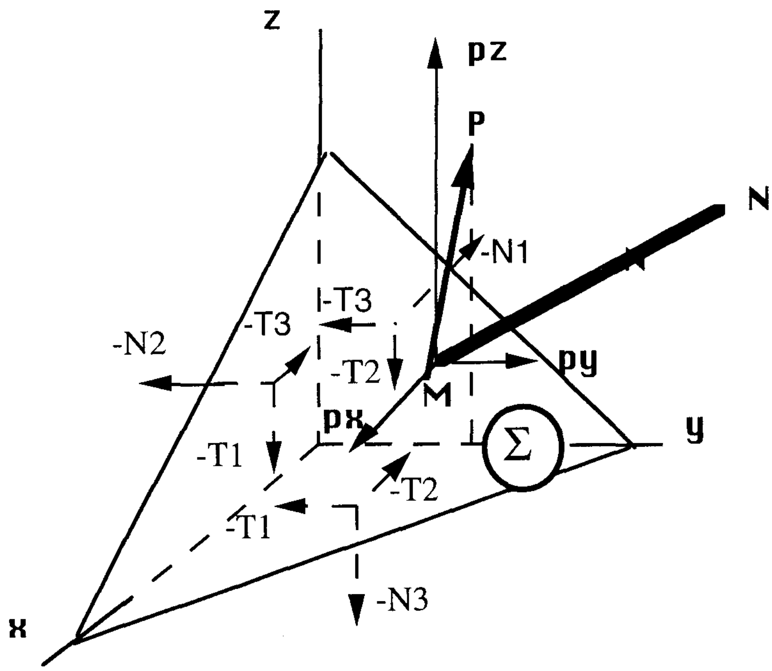
---

[286]Ce sont:

$p_{xx} = p - 2\varepsilon \,.\, du/dx, \quad p_{yy} = p - 2\varepsilon \,.\, du/dx\,, \quad p_{zz} = p - 2\varepsilon \,.\, du/dx$

$p_{yz} = -\,\varepsilon \,.\, (dv/dz + dw/dy), \quad p_{zx} = -\,\varepsilon \,.\, (dw/dx + du/dz)$

$p_{yz} = -\,\varepsilon \,.\, (du/dy + dv/dx)$



Tétraèdre de Cauchy
d'après Bruhat, *Mécanique*, p. 674.

Si p'i est l'action exercée sur une face, on a:

p'i = l . N'a + m . T'b + n . T'c (1)

N'a, T'b ,T'c sont les composantes suivant les axes de l'action p'i exercée sur l'unité de surface, i pouvant être x, y, z, et a,b,c, pouvant être 1, 2, 3; l, m, n sont les cosinus de la normale à la surface Σ avec les axes, et le signe prime (') indique que la quantité correspondante est réelle et non moyenne. On obtient ainsi trois équations de la forme de celles de Navier. Ces expressions sont linéaires en p'i, N'a, T'b et T'c. Elles le sont aussi si on remplace les termes précédents par leur moyenne. Boussinesq en déduit les équations de la même forme pour les valeurs moyennes locales, Na,Tb,Tc, soit:

pi = l . Na + m . Tb + n . Tc (2)

"Un fluide étant un corps très facile à déformer ou qui passe rapidement d'un état d'équilibre stable à un autre très voisin, les résistances qu'il oppose à ses déformations doivent grandir avec le nombre d'états moléculaires distincts, ou équilibre stable par lesquels il passe par unité de temps."[287]

---

[287] J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France (Recueil des savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris), 23, 1872, p. 34.

Cette affirmation, outre qu'elle traduit la réalité, fait dépendre les actions entre molécules de leur vitesse relative, puisque l'état stable est caractérisé par une vitesse instantanée relative nulle. C'est ce qui conduit Boussinesq à une démonstration longue de la dépendance des actions moyennes par rapport aux vitesses relatives. Il veut démontrer que:

> "En d'autres termes, les forces N', T' sont fonction des vitesses relatives dont se trouvent animés à l'époque t, les volumes fluides qui environnent alors le point considéré, et principalement de celles qui sont très grandes; mais leurs moyennes N, T ne peuvent dépendre que des caractères généraux du mouvement autour du point (x, y, z) notamment de la distribution autour de ce point des vitesses moyennes relatives, c'est-à-dire des valeurs dont s'y trouvent affectées les six quantités
>
> $$du/dx, dv/dy, dw/dz,$$
> $$((dv/dz)+(dw/dy)),((dw/dx)+(du/dz)), ((du/dy)+(dv/dx))$$
>
> qui caractérisent les déformations moyennes éprouvées par la matière environnante."[288]

On constate ici la double interprétation possible des expressions ci-dessus en fonction des vitesses moyennes ou des déformations.

La démonstration va consister à établir des relations entre les expressions du/dx, dv/dy, dw/dz, ((dv/dz)+(dw/dy)),((dw/dx)+(du/dz)), ((du/dy) +(dv/dx)), expressions formées à partir des valeurs moyennes des vitesses locales, et les valeurs également moyennes des contraintes Ni, Ti. L'aspect tourbillonnaire du mouvement sera pris en compte au moyen d'un coefficient local équivalent du coefficient ε de *Navier. Les formules auxquelles parvient Boussinesq auront la même forme que celles de Navier, mais elles porteront sur un "fluide moyen" incompressible affecté d'un coefficient variable en chacun de ses points.*

L'auteur décompose d'abord l'écoulement de l'eau en un écoulement moyen, représenté par les vitesses moyennes, et un mouvement tourbillonnaire.

Cette décomposition en parties moyenne et fluctuante est ce que Lesieur appelle la "décomposition de Reynolds", qu'il attribue aussi à

---

[288]ibid., pp. 35, 36, 37, 38.

Boussinesq et Saint-Venant[289]. *La démonstration qu'en donne Boussinesq peut être résumée comme suit.*

Il exprime les vitesses réelles Va et Vb de deux molécules A et B en fonction de la vitesse réelle Vo d'un point O du liquide. Soit:

$$Va = Vo + \delta a \quad , Vb = Vo + \delta b$$

Puis il calcule leur vitesse relative, que nous appelons Vab, mais que Boussinesq ne désigne pas. On a:

$$Vab = Va - Vb = \delta a - \delta b \quad (3)$$

Ensuite Boussinesq introduit la *moyenne* ζ de la vitesse relative des molécules. Cette moyenne est exprimée en fonction de la distance vraie qui les sépare et des six expressions équivalentes aux dilatations et glissements. Cette démonstration est calquée sur celle de Lamé pour la variation de distance de deux molécules[290]. Boussinesq utilise des coordonnées polaires là où Lamé utilise des coordonnées semi-polaires. Il obtient ainsi une expression de ζ, qui est une expression linéaire des six "dilatations" et "glissements". Soit:

$$\zeta = r.((du/dx).\cos^2\alpha + (dv/dy).\cos^2\beta + (dw/dy).\cos^2\gamma + ((dv/dz) +(dw/dy)).\cos\alpha.\ \cos\beta + ((dw/dx) + (du/dz)).\cos\gamma.\cos\alpha + (du/dy +dv/dx).\cos\alpha\ \cos\beta) \quad (4)$$

On remarque alors que ζ dépend de r, qui est la distance réelle des molécules à un instant donné. De même, α,β,γ sont les angles réels que fait r avec les axes.

La vitesse relative moyenne de deux molécules est donc exprimée en fonction des quantités réelles r, α,β,γ, et des quantités moyennes du/dx, dv/dy, dw/dz, ((dv/dz)+(dw/dy)),((dw/dx)) +(du/dz)), ((du/dy) +(dv/dx)).

Cette vitesse relative peut s'exprimer sous la forme

$$Vab = \zeta 1 + \zeta \quad (5)$$

[289]M. Lesieur, *La turbulence*, Presses universitaires de Grenoble, Grenoble, 1994, p. 129.

[290]G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*, 1° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1852, 2° éd., Paris, Gauthier-Villars, 1866, p. 30.

où $\zeta 1$ est une quantité dont la moyenne est nulle. En effet, si l'on calcule la moyenne de Vab à partir de (5), on retrouve bien ζ. Cette dernière quantité a une signification physique que Boussinesq donne maintenant:

> "($\zeta 1$) exprimerait évidemment la vitesse relative d'écartement de molécules, si les vitesses vraies u', v', w' (ce sont les composantes de Vo) qui s'observent aux divers points, se trouvaient toutes diminuées à chaque instant de leurs valeurs moyennes locales respectives u, v, w, ou si, en d'autres termes, tout mouvement général de translation cessait."[291]

Ceci peut s'expliquer en remarquant que, si l'on se reporte à l'équation (3)

$$\mathrm{Vab} = \mathrm{Va} - \mathrm{Vb} = \delta \mathrm{a} - \delta \mathrm{b},$$

la vitesse Vo n'intervient pas. Le même calcul aurait pu se faire en supposant que la vitesse Vo était diminuée de la vitesse moyenne locale Vom.

L'écoulement peut alors être décrit au moyen de deux termes, les vitesses moyennes telles que Vom et les quantités telles que $\zeta 1$. La séparation annoncée entre partie moyenne (Vom) et partie fluctuante ($\zeta 1$) est maintenant réalisée. En moyenne, $\zeta 1$ est nul, car Boussinesq suppose le mouvement totalement désordonné, et $\zeta 1$ caractérise bien l'agitation tourbillonnaire. Si le mouvement moyen cessait, il ne resterait plus que cette agitation tourbillonnaire; les molécules seraient animées des mouvements relatifs correspondants à $\zeta 1$.

Enfin Boussinesq tient à affirmer que sa décomposition n'est pas une simple fiction mathématique, elle pourrait avoir une réalité physique:

> "Cet état d'agitation sur place, sans mouvement progressif, pourrait d'ailleurs se réaliser effectivement sous l'action de forces convenablement choisies. Il n'est nullement incompatible avec l'incompressibilité supposée du fluide."[292]

Maintenant Boussinesq va retrouver l'équivalent des relations de Navier, mais adaptées à l'écoulement tourbillonnaire.

---

[291] J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France (Recueil des savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris), 23, 1872, p. 42.
[292] ibid., p. 42.

Les N'i et T'i, contraintes réelles qui dépendent des vitesses relatives réelles, dépendent donc d'un grand nombre de ces $\zeta 1$, un par couple de molécules. Mais $\zeta 1$ est beaucoup plus grand que ζ, les mouvements dus à l'agitation des molécules étant plus amples que leurs mouvements moyens. On peut donc développer les N'i et T'i, en fonction de ζ, et s'arrêter au premier ordre.

> "Les actions moyennes exercées à travers des éléments plans fixes, pris à l'intérieur d'une eau courante, sont des fonctions linéaires des six expressions (du/dx, dv/dy, dw/dz, (dv/dz+dw/dy), (dw/dx) +(du/dz), (du/dy) +(dv/dx), affectées de coefficients variables avec l'agitation moyenne qui règne au point considéré."[293]

En remplaçant ζ par sa valeur représentée par l'équation (4), on trouve que les N'i, T'i, sont des fonctions linéaires des six expressions des "glissements" et "dilatations" moyens; il en est de même pour leurs moyennes respectives Ni et Ti.

Les coefficients de du/dx, dv/dy, dw/dz, ((dv/dz)+(dw/dy)),((dw/dx)) +(du/dz)), ((du/dy) +(dv/dx)), contiennent les $\zeta 1$, ainsi que r distance vraie des molécules. Ils contiennent une partie de la réalité du mouvement, son caractère désordonné.

Ainsi conclut Boussinesq:

> "Les actions moyennes exercées à travers des éléments plans fixes, pris à l'intérieur d'une eau courante, sont des fonctions linéaires des six expressions du/dx, dv/dy, dw/dz, (dv/dz+dw/dy), (dw/dx) +(du/dz), (du/dy) +(dv/dx), affectées de coefficients variables avec l'agitation moyenne qui règne au point considéré."[294]

C'est finalement le fait fondamental de l'élasticité transposé aux vitesses moyennes des fluides.

Ce résultat est paradoxal, il montre que des actions sont fonctions de l'"agitation", "agitation" définie par l'excès des vitesses relatives réelles sur les vitesses moyennes et donc dépendant des vitesses vraies. Il y a là une contradiction avec le principe de base de la mécanique générale qui veut que les variations de l' état dynamique (accélérations) dépendent de l'état statique seul (positions). La cohérence se retrouve si l'on adopte pour les vitesses moyennes, la seconde interprétation donnée

---

[293]ibid., p. 42.
[294]ibid., p. 42.

plus haut et suivant laquelle la vitesse moyenne est aussi une moyenne de longueurs.

V . 3 . La mise en évidence du fait fondateur de l'hydrodynamique par Boussinesq

Rappelons d'abord que Boussinesq fonde son hydrostatique et son hydrodynamique sur le fait que l'on peut décomposer les actions qu'un liquide exerce à travers une surface, en une force normale à cette surface et une force due aux frottements.

Boussinesq, dans la première partie de son "Essai sur la théorie des eaux courantes" , passage qui est réellement la partie théorique de cet "Essai (...), démontre ce "fait fondateur".

Il utilise ses procédés mathématiques habituels, la considération des symétries, la rotation infinitésimale. Ici la symétrie du milieu n'est pas apparente, Boussinesq utilise comme plan zoy celui pour lequel les "glissements" ((dw/dx) +(du/dz)) et ((du/dy) +(dv/dx)) s'annulent en moyenne. Si l'on considère le tétraèdre de Cauchy précédemment dessiné, cela signifie que les glissements parallèles aux x (colinéaires à T'2 et T'3 vues perpendiculairement à zoy) s'annulent en moyenne dans un temps donné. Alors les "dilatations" et "glissements" restants sont perpendiculaires à ce plan. Ce qui veut dire que les composantes tangentielles des contraintes dans le plan xoy s'annulent en moyenne (dans le cas évoqué par Boussinesq, il reste N1 comme contrainte sur le plan xoy). Donc les T2 et T3 (valeurs moyennes) qui y sont incluses sont nulles. D'après la fin du paragraphe précédent T2 et T3 sont des fonctions linéaires des "dilatations" et "glissements" exprimés en fonction des vitesses moyennes[295], et les contraintes T3 et T2 qui s'exercent dans le plan zoy s'annulent lorsque les "glissements" ((dw/dx) +(du/dz)) et ((du/dy) +(dv/dx)) s'annulent. Alors T1 et T2 sont des fonctions linéaires de ces glissements affectés de coefficients. Ce que l'on peut écrire:

$$T2 = a.((dw/dx) +(du/dz)) + \quad b.((du/dy) +(dv/dx))$$

et

$$T3 = a'.((dw/dx) +(du/dz)) + b'.((du/dy) +(dv/dx)).$$

D'après la figure précédemment donnée du tétraèdre de Cauchy, T2 est invariante par rapport à un changement de sens de l'axe y. Les termes contenant une différentielle de y, mais pas de différentielle de v, sont donc nuls. D'où:

[295] du/dx, dv/dy, dw/dz, (dv/dz) + (dw/dy), (dw/dx) +(du/dz), (du/dy) +(dv/dx)

$$T2 = a.((dw/dx) +(du/dz)).$$

Et T3 est invariant par rapport à un changement de sens de l'axe des z, on peut donc écrire:

$$T3 = b'. ((du/dy) +(dv/dx)).$$

Ce que Boussinesq écrit sous la forme:

$$T2 = \varepsilon . ((dw/dx) +(du/dz)) \text{ et } T3= \varepsilon' . ((du/dy) +(dv/dx))$$

Pour se rapprocher des expressions de Navier, Boussinesq doit démontrer que:

$$\varepsilon = \varepsilon'$$

Ce qu'il réussit en faisant intervenir dans les calculs les composantes normales Ni. Pour cela Boussinesq, suivant un procédé familier, imagine une petite rotation autour de l' axe des z, qui transforme les x en x_1, etc., et utilise les formules de transformation, où r est le petit angle de rotation:

$$d/dx = d/dx_1 - r. d/dy_1, \quad d/dy = d/dy_1 - r. d/dx_1, \quad d/dz = d/dz_1$$

et

$$u= u_1 -r . v_1, \quad v = v_1 + r. u_1, \quad w = w_1$$

De là, il déduit les expressions des Nx et Tx. L'égalité des coefficients ε et ε' est obtenue en considérant, comme plus haut, que la transformée de T1 ne dépend que de ((dv1/dz1) + (dw1/ dy1))[296].

Finalement, Boussinesq retrouve les équations de Navier, mais maintenant adaptées à l'écoulement tourbillonnaire:

$$N1 = -p +2\varepsilon . du /dx, \quad N2 = -p +2\varepsilon . du /dx , \quad N3 = -p +2\varepsilon . du /dx$$
$$T1 = \varepsilon . (dv/dz + dw /dy), \quad T2 = \varepsilon . (dw/dx + du /dz)$$

$$T3 = \varepsilon . (du/dy + dv/dx) \qquad (6)$$

ε représente un coefficient de frottement dont nous parlerons tout à l'heure. Ce qu'il exprime par:

---

[296] J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France (Recueil des savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris), 23, 1872, pp. 42 à 46.

"Ces expressions sont isotropes et ne diffèrent de celles que Navier a données pour représenter les frottements développés dans les mouvements bien continus des fluides, qu'en ce que le coefficient ε doit dépendre en chaque point non seulement de la température et peut-être de la pression p, mais encore et surtout de l'intensité de l'agitation moyenne qui s'y trouve produite."[297]

Boussinesq a donc remplacé l'étude du fluide tourbillonnaire par celui d'un fluide, qui présenterait une inhomogénéité caractérisée en chacun de ses points par le coefficient ε. Ces expressions sont isotropes; cela signifie que le coefficient ε est le même dans toutes les formules des Ni et Ti. On constate de plus que ces équations ressemblent, en un point donné, à celles de Lamé pour les solides homogènes d'élasticité constante, où ε jouerait le rôle d'un μ local. On voit que la pression, p, due à la fluidité du liquide joue le rôle de $\lambda\theta$, ce qui confirme l'analogie entre l'hydrodynamique de Boussinesq et l'élasticité des solides. Cette pression p, vaut, si l'on suppose le liquide fictif incompressible, la moyenne de N1, N2, N3, et est alors pratiquement normale à la surface plane passant par le point où l'on considère la pression, soit:

$$- (1/3) . (N1 + N2 + N3) =$$
$$p - (2/3) . \varepsilon . ((du/dx) + (dv /dy) + (dw/dz)).$$

Et comme on a si le fluide est incompressible:

$$(du/dx) + (dv /dy) + (dw/dz) = 0,$$

alors:

$$-(1/3) . (N1 + N2 + N3) = p.$$

Les équations (6) représentent bien le fait fondateur de l'hydrodynamique de Boussinesq, si l'on se souvient que ce "principe" est énoncé dans le cadre de la mécanique physique, c'est-à-dire dans le cadre d'une mécanique de la moyenne. Rappelons-en les termes:

"Dans la théorie de l'équilibre et du mouvement des fluides, on admettra comme fait d'expérience, que la pression exercée à l'intérieur d'un tel corps, à travers un élément de surface quelconque, se compose d'une force, dite pression élastique du fluide perpendiculaire à cet élément plan, variable avec la densité, le degré de condensation de la matière à l'endroit où il se trouve, et, en outre, une force ordinairement plus petite, provenant sans doute de ce que les particules fluides ne peuvent pas, à l'état de mouvement, conserver entre leurs éléments l'ordre, la disposition symétrique qui permet à la pression d'être exactement normale, bien qu'elles tendent sans cesse, et très-vite à réaliser cette disposition. La petite force considérée étant

[297]ibid., p. 46.

nulle à l'état de repos se trouvera naturellement fonction des simples vitesses relatives dont sont animées, à l'instant actuel, les particules fluides qui passent près de l'élément plan ou qui le traversent."[298]

Effectivement, si l'on considère, par exemple, un plan parallèle au plan zy, la force qui s'y exerce peut être vue comme la résultante d'une force - p, normale à cette surface, et d'une force dont les composantes $2\varepsilon(du/dx)$, $\varepsilon((du/dy)+(dv/dx))$, $\varepsilon((dw/dx)+(du/dz))$ dépendent des frottements.

Dans la suite de l'"Essai (...)", Boussinesq précise la forme mathématique de ε en fonction de la largeur, la forme, la pente du canal. Il tient également compte de la rugosité des parois. Il donne aussi la méthode expérimentale pour obtenir les valeurs des coefficients qui interviennent dans la formule de ε[299].

Puis Boussinesq établit les équations indéfinies du mouvement de l'eau, c'est-à-dire les équations dans lesquelles les parois n'interviennent pas. Il se base sur l'équilibre dynamique du parallélépipède. Ces équations sont finalement les mêmes, dans la forme, que celles des solides élastiques:

$$(dNi/dx) + (dT3/dy) + (dT2/dz) + \rho\ X = \rho\ .\ (du/dt).$$

Les diverses variables qui interviennent dans cette équation sont les équivalents, en moyenne, de celles qui portent les mêmes noms dans la théorie de l'élasticité des solides. Il en déduit ensuite les équations des écoulements dans de nombreux cas, canaux, rivières, etc.

On peut faire un certain nombre de constatations sur ce texte à la lumière de ce qui précède.

S'il faut admettre, comme fait d'expérience, la décomposition de la force pressante en une force normale et une force due aux frottements, les démonstrations précédentes reviennent donc à justifier la substitution au fluide réel d'un fluide fictif incompressible, où les vitesses moyennes du fluide réel jouent le rôle de celles du fluide fictif. Telle quelle, l'utilisation des moyennes représente une avancée sur la manière de traiter les problèmes de physique. Il est peut-être douteux qu'elle ne soit pas une "nouveauté fracassante". Cette méthode tranche

---

298 J. Boussinesq, *Considérations sur le but, la méthode et les principaux résultats de la mécanique physique*, in *Etude sur divers point de la philosophie des sciences*, Mémoires de la société de sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, pp. 279 et 280.

299 J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France (Recueil des savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris), 23, 1872, p. 51.

sur la manière de comprendre la Physique des disciples de Cauchy (seconde manière) et de Poisson. Pour eux, les molécules doivent être prises en compte individuellement, les actions entre couples moléculaires exprimées mathématiquement, même si l'équation réelle de ces actions reste souvent indéterminée. C'est une vision réaliste de la mécanique moléculaire.

La démarche de Boussinesq est donc un passage vers l'abstraction: on ne traite plus le problème réel, mais un autre, analogue et plus simple. On peut interpréter cette démarche en considérant l'épistémologie de Boussinesq, explicite dès 1873[300]*. Rappelons que pour lui la nature intime de la matière est inconnaissable. La seule réalité accessible à notre esprit est la forme géométrique des choses. Nous avons vu précédemment que les symétries observables sont justement ces formes géométriques qui frappent notre esprit, et ce sont elles que Boussinesq utilise.*

Dans le cas de l'écoulement des eaux, des régularités apparaissent si l'on considère les résultats donnés par les appareils de mesure. Ces appareils font eux-mêmes la moyenne, comme nos yeux la faisaient dans le cas des symétries. Mais les lois qui régissent ces moyennes ne peuvent s'exprimer que dans les formules déduites des éléments du monde géométrique idéal au moyen de l'intuition géométrique. Pour mener à bien sa tâche, le physicien doit renoncer à décrire les mouvements de la matière par le menu, de façon trop précise. On ne peut s'empêcher de penser au rôle que jouent de nos jours ces notions de symétrie et de moyenne, dans la mécanique moléculaire actuelle, même si le fossé qui la sépare de celle de Boussinesq est comme infiniment large[301]*.*

Ce qui est important dans la démonstration de Boussinesq, ce n'est pas tant qu'il adapte les équations de Navier au mouvement tourbillonnaire, c'est le fait qu'il remplace les calculs sur les actions moléculaires réelles par des calculs sur un fluide qui, certes, a quelque rapport avec la réalité physique, mais en est comme détaché, une fois que l'on considère les variables pertinentes, ici les vitesses moyennes.

---

[300] J. Boussinesq, *Note complémentaire au mémoire précédent - Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résultent des idées exposées au § VI*, addition à *Recherches sur les principes de la mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, pp. 361 à 392; plus particulièrement, pour la référence à l'épistémologie explicite de Boussinesq, pp. 366 à 372.

[301] Par exemple, voir: F. A. Cotton, *Application de la théorie des groupes à la Chimie*, Paris, Dunod, 1968.

VI . Aperçu de la théorie dynamique de la chaleur de Boussinesq (1903). La séparation entre énergie élastique et énergie calorifique

L'un des ouvrages les plus connus de Boussinesq est sa "*Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la théorie mécanique de la lumière*"[302]. Les démonstrations, fondées sur la conservation de l'énergie, énergie qui se trouve dégagée de son support moléculaire, garderont longtemps leur validité. Dernier ouvrage de grande envergure de Boussinesq, c'est aussi comme une synthèse de ses méthodes et de ses idées.

VI . 1 . Situation de cette partie de l'œuvre de Boussinesq

Nous avons vu au paragraphe II . 3 . de ce chapitre comment Boussinesq, en 1891, interprète la fluidité par une vision dynamique du comportement des molécules, l'interprétation par les actions entre molécules passent au second plan. Dans l'étude de l'élasticité, même si ces actions sont utilisées dans les calculs, finalement, c'est l'énergie interne qui est exprimée pour traduire les phénomènes. Dans son étude des mouvements tourbillonnaires, la réalité même de la matière passe au second plan, le calcul s'effectue sur le fluide fictif, seul accessible à l'analyse, fluide qui résume les propriétés du liquide réel, dans ses aspects accessibles à l'expérience.

Ce dépassement de la mécanique moléculaire classique se manifeste particulièrement dans l'étude sur la conductivité thermique. Celle-ci est exposée en 1901 et 1903 dans l'œuvre la plus connue de Boussinesq, sa "Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière". Là, les actions entre molécules sont vite remplacées par l'évaluation du travail qu'elles fournissent, ce travail se traduisant lui-même par des variations d'énergie potentielle interne; enfin le problème de la conductivité se trouve ramené à celui de l' étude des courants de chaleur, semblables au fluide fictif de l'écoulement tourbillonnaire. Cette rapide énumération montre que la "Théorie analytique de la chaleur" est comme la synthèse des méthodes et conceptions que nous avons vues se mettre en œuvre dans les autres travaux de Boussinesq.

La première partie de cet ouvrage a été étudiée par G. Bachelard, dans son étude sur l'évolution du problème de la propagation de la chaleur dans les solides [303]. G. Bachelard s'est surtout intéressé à la manière

---

[302] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, t. 1, *Problèmes généraux*, Paris, Gauthier-Villars, 1901, t. 2, *Refroidissement et échauffement par rayonnement, conductibilité des tiges, lames et masses cristallines, courants de convection, théorie mécanique de la lumière,* Paris, Gauthier-Villars,1903.

[303] G. Bachelard, *Etude sur l'évolution d'un problème de physique. La propagation thermique dans les solides,* Paris, 1928; Paris, J. Vrin, 2° éd., 1973, pp. 132 à 150.

dont Boussinesq explique la "condensation" de l'énergie lumineuse dans les corps opaques, utilise l'éther, conçoit la conservation de l'énergie. C'est là un point important pour donner une explication mécaniste de la transformation de l'énergie lumineuse en énergie calorifique, et donc, toute sa généralité à l'interprétation mécaniste de la conservation de l'énergie. Les idées sur lesquelles repose l'action de l'éther sur la matière pondérable sont celles que nous avons mises en évidence dans l' étude de la "Théorie nouvelle des ondes lumineuses". Toutefois, dans cette "Théorie (...)", l'attention de Boussinesq se porte sur les corps diaphanes, qui sont aussi diathermanes, c'est-à-dire qui retiennent peu de l'énergie de l'éther (voir le § II . 3 . de ce chapitre). Voici comment Boussinesq présente lui-même sa conception:

> "Or cette brièveté excessive (des vibrations de l'éther), rendant la longueur d'ondulation seulement comparable aux distances intermoléculaires, est cause que les molécules oscillent, pour ainsi dire, isolément, ou avec des écarts de phase notables de l'une à l'autre, de manière à n'ébranler qu'à la longue, par efforts discordants, leurs voisines supposées soustraites ou moins exposées qu'elles à l'action directe des ondes (...). C'est ainsi que se constitue la chaleur des corps, par *stagnation* presque absolue et condensation prodigieuse de la chaleur rayonnante."[304]

Em. Picard rapporte une description imagée du comportement de la chaleur dans les corps opaques, que Boussinesq donne dans une de ses leçons de la Sorbonne:

> "Les corps ne ressemblent plus, comme lorsqu'ils étaient transparents, à un océan que sillonnerait une houle majestueuse et rapide, déroulant des vagues à perte de vue... Il ressemblera plutôt à une mer hachée par la tempête, c'est-à-dire de vagues courtes, relativement trop hautes et trop aiguës pour ne pas déferler souvent, surtout quand elles se heurtent et qu'elles interfèrent."[305]

Il donne également l'origine de ce mouvement des molécules des corps athermanes:

> "Le gros du phénomène, sa partie capable d'impressionner vivement nos organes, consistera donc dans les rapides déplacements $(d'=F((x/\omega') - t)$ de la matière pondérable; et la chaleur rayonnante, en venant se porter presque entièrement sur les molécules massives de cette matière, s'y sera condensée dans un rapport en quelque sorte

---

[304] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, t. 1, *Problèmes généraux*, Paris, Gauthier-Villars, 1901, p. VIII.

[305] Em. Picard, *La vie et l'œuvre de Joseph Boussinesq*, L'Institut, 28, 1933, p. 32,

infini. Or c'est justement cette énorme condensation de la chaleur rayonnante dans les corps qui constitue la chaleur de ceux-ci, ou chaleur proprement dite, en comparaison de laquelle la chaleur de l' éther est comme rien."[306]

On peut donc dissocier l'éther de la matière pondérable, si l'on ne s'intéresse qu'à la propagation de la chaleur dans les solides. Il n'entrait pas dans les intentions de Gaston Bachelard de suivre précisément cette chaleur, dans son cheminement au sein de la matière pondérable: son but n'était pas une étude de l'œuvre de Boussinesq. Ce sont les principes de cette étude que nous exposons ici. La "Théorie nouvelle des ondes lumineuses" est l'étude de la propagation de l'énergie, lumineuse dans ce cas, dans l'éther modifié par le "frottement" des molécules de matière pondérable; l'étude des déplacements de la chaleur, de l'énergie calorifique, dans les corps athermanes en est le complément nécessaire, si l'on veut avoir une vue complète de l'ensemble des phénomènes lumineux et calorifiques. Et c'est l'étude de ce déplacement de chaleur dans la matière pondérable qui constitue, logiquement, une grande partie de la théorie de la conductivité de Boussinesq. Nous ne reprendrons pas ici l'étude des interactions de l'éther et de la matière pondérable.

Dans la présente étude nous souhaitons:

-mettre en évidence la façon dont s'introduit le principe fondamental de la théorie de la conductivité de Boussinesq (variation du flux proportionnellement aux petits écarts de température);

-montrer que la théorie des courants de chaleur revient un peu, comme dans le cas de l'écoulement tourbillonnaire, à raisonner sur un fluide détaché du substrat matériel, celui-ci intervenant par les propriétés globale de l'énergie;

-montrer comment Boussinesq retrouve l'équation de propagation de la chaleur de Fourier sous la forme d'une équation indéfinie de la propagation de la chaleur.

VI . 2 . Présentation de la "Théorie analytique de la chaleur etc." par Boussinesq

Pour cette présentation nous utiliserons les textes de Boussinesq lui-même, extraits soit de la préface à l'œuvre qui nous occupe, soit de la

[306] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, t. 1, *Problèmes généraux*, Paris, Gauthier-Villars, 1901, p. 82.

note de présentation de l'ouvrage à l'Académie des sciences[307]. Le but est clairement précisé dès le début de la note:

> "Le volume que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie a pour but principal, comme l'indique son titre, de mettre cet enseignement (celui de la théorie analytique de la chaleur) en harmonie avec l'ensemble de nos connaissances mécaniques et physiques, en rattachant la doctrine de Fourier, complétée par Laplace, Poisson, Duhamel et Lamé aux principes généraux de la mécanique moléculaire, ou en déduisant les équations usuelles qui règlent les variations de la température aux divers points d'un corps, de l'équation même des forces vives, appliquée au mouvement calorifique vibratoire."[308]

Si l'on cherche, dans ce premier volume ce que Boussinesq entend par "principes généraux de la mécanique moléculaire", on trouve finalement un résumé de ses "Leçons synthétiques de mécanique générale" (1889), plus particulièrement ce qui concerne l'établissement des lois de conservation de l'énergie. Quant à l'application de l'équation des forces vives au mouvement vibratoire, il faut la voir comme l'application des variations de l'énergie potentielle dans les phénomènes de propagation de la chaleur. La suite de la note signale la partie de l'ouvrage analysée par G. Bachelard, et que nous avons mentionnée plus haut. Boussinesq décrit ensuite la méthode qu'il utilise:

> "Les raisonnements y sont constamment présentés d'une manière concrète, à la fois géométrique et physique, où l'Analyse n'intervient que pour fixer l'intuition et conduire aux résultats numériques."[309]

La méthode géométrique sera mise à contribution par le moyen de l'utilisation de symétries, des changements d'axes, du tétraèdre de Cauchy, des propriétés des ellipsoïdes. La partie physique fait allusion à la conservation de l'énergie, que, rappelons-le, Boussinesq considère comme une loi expérimentale, mais aussi comme une loi presque rationnelle. En fin de note, Boussinesq signale l'analogie qu'il établit entre la propagation de la chaleur dans les corps mauvais conducteurs (athermanes) et la filtration d'un fluide par les masses poreuses[310]

---

[307] J. Boussinesq, *Présentation du tome 1 du* Cours de Physique mathématique *qu'il professe à la Sorbonne. Ce volume est intitulé: Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la Théorie mécanique de la lumière: Problèmes généraux,* C. R., 132, 1901, pp. 190 à 192.

[308] ibid., p. 191.

[309] ibid., p. 192.

[310] ibid.

VI . 3 . Boussinesq continuateur de l'œuvre de Fourier

Dans l'introduction au premier tome de sa "Théorie analytique de la chaleur", Boussinesq indique la nouveauté de son approche; il substitue à l'explication par le "rayonnement particulaire" une interprétation par les lois mêmes du mouvement des système matériels. Il fait donc entrer la thermodynamique dans le cadre de la mécanique. C'est apparemment s'opposer au sens même des travaux de Fourier pour qui:

> "Quelle que soit l'étendue des théories mécaniques, elles ne s'appliquent point aux effets de la chaleur. Ils composent un ordre spécial de phénomènes qui ne peuvent s'expliquer par les principes du mouvement et de l'équilibre."[311]

Nous avons écrit "apparemment", car le principe de base de toute la mécanique de Boussinesq est le principe de conservation de l'énergie. Les forces, et les lois de l'équilibre et du mouvement, sont la conséquence de cette conservation.

Boussinesq fait remonter à Fourier la théorie du rayonnement particulaire:

> "Supposant les solides composés d'un nombre immense de molécules, maintenues à d'imperceptibles distances les unes des autres, il (Fourier) a regardé les molécules comme de petits corps qui auraient, chacun, une température distincte et qui, d'instant en instant, se céderaient les uns aux autres de la chaleur d'après la loi de refroidissement. (...) L'accroissement élémentaire, ou survenu durant un instant dt , de la température u de la molécule quelconque M, résulterait de la chaleur totale, positive ou négative, envoyée à cette molécule par toutes celles qui l'entourent aux distances imperceptibles, et qui pourraient ainsi *rayonner* sur elle une partie de leur chaleur ou recevoir, au contraire, son rayonnement, suivant que la température serait supérieure ou inférieure à la sienne."[312]

C'est ce que Boussinesq appelle la théorie du *rayonnement particulaire*, que sa propre théorie remplace. Ce rayonnement particulaire n'est évidemment que l'un des aspects de l'œuvre de Fourier, chez qui la relation à l'expérience et l'utilisation, voire la création, d'une certaine analyse est déterminante:

---

[311] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, Firmin Didot, 1822, article 1, p. 8.

[312] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, t. 1, *Problèmes généraux*, Paris, Gauthier-Villars, 1901, p, VI.

> "On sait cependant, depuis un demi-siècle (nous sommes en 1903), que la chaleur n'est pas une matière ou un fluide; car elle s'évalue en kilogrammètres. Elle est donc, comme un grand nombre de physiciens s'en étaient doutés depuis longtemps, de la nature d'un travail ou d'une force vive, bref, d'une énergie; (...) et doit être comprise au nombre des phénomènes vibratoires, ou résulter, au fond, des lois du mouvement."[313]

C'est donc faire entrer, aussi, la thermodynamique dans le cadre de la mécanique physique. Dès l'introduction il indique quel va être le principe fondateur de cette science, celui qui définit le domaine d'étude.

> "Le principe expérimental de l'*équilibre des températures* vient ici en aide au physicien-géomètre, arrêté par la complication des équations du mouvement, et lui permet de définir, pour tous les corps, des *niveaux thermiques*, mesurés par le volume correspondant, dit *température* du thermomètre à gaz. Or ces niveaux se règlent, d'après l'élévation relative des températures dans deux corps donnés que l'on met en contact, par le travail de leurs actions mutuelles corrélatif au mouvement calorifique, c'est-à-dire le *flux de chaleur* que gagne, à travers leur surface, le corps à température plus basse, égal à celui que perd le corps à température plus haute."[314]

C'est l'affirmation du principe qui sert de base à la thermodynamique, principe exposé en 1880, que nous rappelons ici:

> "Par exemple aussi, dans la théorie analytique de la chaleur, qui est l'étude de la distribution des températures (supposées assez peu variables) aux divers points d'un corps athermane, on ne pourrait nullement calculer les travaux individuels, correspondant aux vibrations calorifiques, des actions moléculaires exercées à travers un élément plan. Et, cependant, la somme des travaux dans l'unité de temps constitue, pour chaque élément superficiel, une quantité, appelée *flux de chaleur*, qu'on ne peut se dispenser d'évaluer. Mais on y arrive en s'appuyant directement sur ce fait, que le flux dont il s'agit, fini par unité de surface et de temps, dépend de la distribution des températures, dans une très petite étendue tout autour de l' élément plan, et s'annule quand ces températures deviennent égales."[315]

Boussinesq pose donc, comme éléments fondamentaux de la description des phénomènes de conduction, le flux et la température.

---

[313]ibid., p. VIII.
[314]ibid., p. VIII.
[315]J. Boussinesq, *Considérations sur le but, la méthode et les principaux résultats de la mécanique physique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoire de la société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, pp. 277 à 310.

C'est ce passage d'une mécanique moléculaire, qui prend en compte l'action entre molécules individuelles, à une mécanique moléculaire où cette action se "dilue" dans le mouvement et l'énergie que nous exposerons. L'image d'un fluide calorifique se déplaçant dans la matière est trop adaptée à la description des phénomènes de conduction, elle parle tellement à l'esprit, qu'il est presque impossible de ne pas la reprendre. Dans l'approche intuitive que privilégie Boussinesq, cette image trouve une représentation géométrique qui permet la déduction de l'ensemble des lois de la conduction dans les solides. L'analogie hydrodynamique, et avec elle la notion de courant, s'impose ici[316]:

> "Les échanges de chaleur ou flux, pour des dérivées ou pentes de température entre parties d'un corps voisines, sont en rapport de grandeur avec la conductiblité intérieure du corps suivant les divers sens, et se ramènent toujours dans chaque particule matérielle, à un courant unique de chaleur, traversant tous les éléments plans de la particule."[317]

La définition de ces courants est sans doute l'étape la plus importante de la théorie de Boussinesq. Nous lui consacrerons donc une partie de ce paragraphe. Des courants de chaleur, on peut en effet déduire toutes les lois de la conduction:

> "Suivant la contexture de celles-ci (les particules), un même mode de distribution des températures dans la particule donne lieu à des courants différents, tant pour la direction que pour la grandeur, et dont la construction dépend de deux ellipsoïdes, dits l'un principal, l'autre, des conductibilités."[318]

L'utilisation des courants de chaleur permet de prendre en compte, dans les états stationnaires au moins, les deux paramètres qui déterminent les transferts de chaleur: la constitution du milieu et la répartition des températures. Nous montrons, dans un premier temps, comment Boussinesq conçoit la représentation de l'énergie calorifique, puis sa transformation en courants de chaleur.

---

[316]Le courant de chaleur est, en quelque sorte, le flux énergétique qui traverse une surface par unité de temps.

[317]J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, t. 1, *Problèmes généraux*, Paris, Gauthier-Villars, 1901, p. VIII.

[318]ibid., p. IX.

VI . 4 . L'énergie calorifique comme "complication" du principe des forces vives

VI . 4 . 1 . Les insuffisances de la mécanique générale pour l'étude des phénomènes calorifiques

VI . 4 . 1 . a . Le primat de l' énergie

Principalement nous utiliserons comme textes de référence les "Leçons synthétiques (...)" et la "Théorie analytique de la chaleur (...)".

Boussinesq signale très précisément pourquoi une mécanique aussi simple que la mécanique générale habituelle, fondée sur la conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique, cesse d'être pertinente: du fait de l'agitation calorifique, des complications apparaissent. Le but de Boussinesq est de donner une interprétation des lois de la conductivité qui tienne compte de la vision dynamique qu'il a alors de la mécanique moléculaire. Suivant la conception de Boussinesq de la loi naturelle, il convient de séparer, autant que possible, les phénomènes que l'on soupçonne de ne pas obéir aux mêmes lois naturelles. Ici "interfèrent" la mécanique des mouvements apparents, des déplacements sensibles, et aussi des déformations élastiques, et celle des mouvements confus et microscopiques de l' agitation calorifique.

La première tâche de Boussinesq, pour accéder à la loi naturelle de la conductivité, sera de séparer les deux ordres de phénomènes; il le fait en distinguant les énergies qui appartiennent à l'un et à l'autre de ces ordres. Le choix de l'énergie comme élément permettant la discrimination entre les deux types de phénomènes est justifié par le primat de celle-ci sur toutes les autres grandeurs physiques, non seulement comme idée primordiale de la physique, mais aussi comme réalité fondamentale de la nature. L'une des manifestations de la force (dans son sens causal) est la production du travail. Ce travail, d'après la conservation de l' énergie, peut être vu comme une "consommation" d'énergie potentielle. La force n'apparaît que comme une dérivée de l'énergie potentielle totale d'un système supposé isolé; mais cette définition vaut aussi pour un système partiel étendu. Et ainsi:

> "On peut dire que la composante, suivant une direction quelconque, de l'action totale exercée sur un point, exprime la consommation d'énergie potentielle qu'exige, par unité de chemin parcouru, un déplacement infiniment petit du point suivant cette direction."[319]

La force est réduite à un rôle subalterne, ce que Boussinesq exprime vigoureusement:

---

[319]ibid., p. 102.

"Ainsi la force exprimée en fonction de ce qu'il y a *de plus réel* en Mécanique, savoir, en fonction d'énergies et de longueurs, est la dérivée d'une énergie (ou d'un travail) par rapport à une coordonnée."[320]

En mécanique physique, plus que partout ailleurs, la force doit céder le pas à l' énergie.

VI . 4 . 1 . b . La difficulté d'une mécanique où l'énergie jouerait un rôle calqué sur celui de la quantité de mouvement

On pourrait donc envisager une mécanique dans laquelle, de façon simple, l'énergie jouerait le rôle de grandeur conservative, rôle jusque là attribué à la quantité de mouvement et au moment cinétique, et où le travail remplacerait la force:

"Dans le principe des forces vives appliqué à un système partiel, l'énergie totale joue le rôle qu'avaient la projection totale ou le moment total, relatifs à un axe, de la quantité de mouvement du système, dans les principes généraux des quantités de mouvement ou des moments; et l'on voit de même le travail des actions extérieures y prendre le rôle qui, dans ces mêmes principes, revenait à l'impulsion soit ordinaire, soit de rotation des actions extérieures."[321]

C'est évidemment l'énoncé d'un projet qui consisterait à décrire la mécanique dans des termes uniquement énergétiques en se passant même du formalisme de la force. Boussinesq, sans nier la possibilité de la réalisation d'un tel projet, en montre les difficultés; difficultés qui résultent de ce que l'énergie ne contient pas uniquement de la demi-force vive visible, actuelle, mais aussi de l'énergie potentielle, ce qui ne confère pas à l'approche de la mécanique par l'énergie seule, la simplicité de l'exposé de la mécanique par la force et la quantité de mouvement. La complexité est bien plus grande, si l'on veut, comme c'est le but de la mécanique physique, étudier la matière, et donc prendre en compte les mouvements réels de ses ultimes petites particules. Ainsi:

"Par suite d'une plus grande portée, d'une pénétration plus intime dans les détails des phénomènes, le principe des force vives est donc moins simple que les autres.

Or sa complication, au point de vue du mouvement moyen local ou visible d'une particule de matière, est encore accrue, dans tous les

---

[320] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 102.
[321] ibid., p. 102.

termes non relatifs aux forces de pesanteur, par le fait de l' agitation calorifique qui, au contraire, s'élimine des équations exprimant les deux principes (ceux de la conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique)."[322]

La complication produite par l'agitation calorifique rend très difficile toute tentative de description, en même temps, des mouvements visibles et des mouvements calorifiques. En effet, conformément aux convictions épistémologiques de Boussinesq, il est impossible de décrire analytiquement les moindres mouvements des ultimes particules de matière. Il est donc difficile de rendre compte de l'énergie cinétique due au mouvement calorifique, et aussi d'exprimer numériquement à chaque instant l'énergie potentielle, et donc de calculer l'énergie totale.

Le physico-mathématicien peut recourir aux moyennes; et alors se produisent des simplifications. En particulier, il est possible de séparer les deux types d'énergie, celle des mouvements calorifiques, et celle des mouvements sensibles.

De fait, Boussinesq avait déjà opéré cette séparation entre mouvements calorifiques et mouvements perceptibles dans un cas important: celui des mouvements réguliers; c'est ce qu'il a fait dans la Note 3 de sa "Théorie des ondes liquides périodiques (voir § IV . I . de ce chapitre). Dans cette étude qui n'était pas limitée aux liquides, il exprimait finalement l'énergie interne d'un corps soumis à des déformations, par l'équation:

$$\Phi = A1\partial x + A2\partial y + A3\partial z + B1gyz + B2gzx + B3gxy + \Phi 1$$

En réalité, la séparation entre les énergies purement calorifique et purement élastique n'était valable qu'au zéro absolu, sinon l'énergie calorifique et l'énergie élastique correspondant à l'état initial se trouvaient confondues dans la fonction Φ1. Le cas des mouvements désordonnés a été abordé, mais pas sous son aspect énergétique, dans l'étude du mouvement tourbillonnaire. C'est l'aspect cinétique qui avait occupé Boussinesq. Le mouvement tourbillonnaire peut être pris comme une métaphore du mouvement calorifique, et montrer ainsi qu'un mouvement confus peut en fait avoir un " résultat" régulier, un courant. Pour donner à l'énergie calorifique des caractéristiques hydrodynamiques, Boussinesq doit la confiner, lui conférer les qualités d'une matière. Parmi celles-ci, la première est l'extension, c'est-à-dire la possibilité que ses parties soient assignées à des volumes donnés de l'espace. Il y a quelque audace pour Boussinesq à tenter cela. En effet, d'après sa conception même de l'énergie, celle-ci est "délocalisée" dans l'ensemble du système; sans cela sa définition par l'état statique perd

---

[322]ibid., p. 102.

toute cohérence. Alors, il est difficile de comprendre comment cette énergie peut dépendre de l'ensemble des particules et une de ses parties être confinée dans un espace réduit. L'analogie que suggèrent les travaux de Boussinesq est celle du fluide qui peut être contenu dans un récipient, et dont chaque partie est contenue dans un espace.

VI . 4 . 2 . La définition de la quantité de chaleur d'un corps

Le but que se propose Boussinesq est donc de séparer l'énergie calorifique de l'énergie interne totale, puis de lui conférer les qualités, du moins apparentes, d'un fluide en mouvement. Il donne d'abord à la chaleur une qualité qui s'apparente à la masse ou au volume. Le résultat de l'agitation calorifique est double: d'une part elle communique une vitesse aux molécules, mais d'autre part elle fait varier la distance moyenne entre les molécules, elle affecte donc à la fois l'énergie cinétique et l'énergie potentielle des corps. Chacune de ces deux grandeurs doit être "confinée" dans un volume.

VI . 4 . 2 . a . Le confinement de l'énergie actuelle

Boussinesq s'intéresse d'abord à l'énergie actuelle (en fait cinétique) calorifique. Pour mettre en évidence la séparation entre l'énergie actuelle due aux mouvements perceptibles et celle due aux mouvements calorifiques, il donne une démonstration qui, mathématiquement, n'est pas différente de celles qu'ont produites Verdet ou Briot dans leur "Théorie mécanique de la chaleur" (voir chapitre 1, § XI). Elle consiste à distinguer dans le déplacement d'une molécule, la longueur due aux déplacements sensibles et celle due à l'agitation thermique, puis à séparer dans l'énergie cinétique totale, les termes représentant l'énergie cinétique des mouvements perceptibles, et celle due aux mouvements calorifiques. Cette démonstration est donnée au pages 103 à 105 des "Leçons synthétiques (...)". Confirmant l'analogie hydraulique, elle est l'interprétation énergétique de celle, cinématique, qu'il donne pour l'établissement des lois sur les vitesses moyennes dans les écoulements tourbillonnaires. Là, les différences réelles, ζ_1, des vitesses des molécules par rapport à la moyenne de la vitesse relative, ζ, se détruisaient en moyenne, à cause de leurs changements incessants de sens et de direction. Mais l'énergie actuelle fait intervenir le carré de ζ_1, et donc il n'y a plus de compensation due aux changements de sens et de direction des vitesses, bien au contraire. Boussinesq a fait remarquer, dans la théorie des ondes liquides périodiques, que ζ_1 était plus grand que ζ, et donc l'énergie actuelle due au mouvement désordonné sera plus importante que celle due au mouvement moyen. C'est donc la première qu'il convient de considérer. La décomposition de l'énergie actuelle en volumes contigus est presque a priori dans les "Leçons synthétiques (...)". La difficulté vient de ce que Boussinesq a besoin de relier cette agitation à une variation de température pour définir le flux, d'après sa définition même du flux (citation indexée à la note 315). Mais la température caractérise aussi l'écartement moyen des particules: c'est la dilatation, et donc elle affecte aussi l'énergie potentielle interne. La séparation entre énergie potentielle et énergie cinétique ne saurait être absolue C'est ce qui conduit Boussinesq à conclure dans les "Leçons synthétiques (...)":

> "Quoi qu'il en soit, cette demi-force vive calorifique se trouvant évidemment pareille dans des particules similaires, peut être rapportée à l'unité de masse, mieux encore que l'énergie potentielle interne; et comme elle n'est d'ailleurs pas moins invisible que celle-ci, on l' appelle énergie actuelle interne, c'est-à-dire cachée."[323]

L' expression "mieux encore que l'énergie potentielle interne" s'explique en ce sens que l'énergie potentielle dépend, en toute rigueur, de l'ensemble des molécules du système.

Il convient ensuite de déterminer quelle est la variable pertinente relative à cette agitation calorifique: ce sera la température.

> "Comme la température est la seule variable connue dont dépende l'agitation calorifique, dans un corps donné et qui a les situations moyennes, également données, de ses divers points matériels, définies par leurs distances mutuelles, cette demi-force vive du mouvement imperceptible sera pour chaque particule d'un corps, une certaine fonction de sa température, et, en outre, des distances actuelles moyennes de ses points (...). En un mot, la demi-force vive calorifique ne sera, le plus souvent, dans une particule donnée dont la contexture (groupement moléculaire) ne s'altérera pas, fonction que de la température et de ses déformations."[324]

C'est, ici, une démarche semblable à celle qu'avait utilisée Boussinesq dans l'étude du mouvement tourbillonnaire. Le phénomène réel, l'agitation calorifique, n'étant pas accessible à l'analyse, il faut trouver la grandeur qui le représente: dans le cas du mouvement tourbillonnaire, il s'agissait du coefficient ε, déductible de l'expérience; dans le cas de l'agitation thermique, ce sera la température qui est mesurable par le biais des dilatations. La représentation désordonnée du mouvement calorifique par la température est clairement indiquée:

> "Le mouvement d'un point affectera, durant tout instant de longueur à peine sensible, les phases et les vitesses les plus variées, tandis que la température sera quelque chose d'essentiellement indépendant de ces phases, quelque chose ou de persistant ou de très

---

[323]ibid., p. 103.
[324]ibid., p. 105.

lentement variable, en comparaison des phases dont il s'agit: elle exprimera un état général de mouvement, un degré moyen d'agitation, supposant et concernant des myriades de points matériels dans le petit espace où on le considérera."[325]

VI . 4 . 2 . b . Le confinement de l'énergie potentielle

Il reste à décomposer l'énergie potentielle interne en énergie purement élastique et énergie calorifique; et il faut d'abord montrer que l'énergie potentielle interne est décomposable en l'énergie de ses volumes constituants; c'est ce que nous avons fait dans le chapitre 2 au § II . 2 4. f. Il faut ensuite séparer l'énergie calorifique de l'énergie élastique. Boussinesq en donne deux démonstrations: celle de la "Théorie mécanique de la chaleur (...)" est mathématique, et revient, encore une fois, à un développement en série de Taylor. Celle des "Leçons synthétiques" manifeste mieux la conception de l'énergie de Boussinesq. Il constate d'abord que:

> "On serait, à première vue, tenté de regarder comme insignifiants, dans l'expression de l'énergie potentielle interne Φ, les petits écarts calorifiques η, ξ, ζ des coordonnées des molécules de part et d'autre des valeurs moyennes x, y, z."[326]

C'est la référence à l' expérience qui permet à Boussinesq d'affirmer l'importance, quant à l'énergie potentielle, des petites variations des distances entre atomes:

> "Mais il ne faut pas oublier que les variables en fonction desquelles Ψ change avec une rapidité extrême sont justement les plus petites et plus insensibles distances intermoléculaires ou interatomiques, celles que les vibrations calorifiques (à phase très rapidement changeante d'un atome à l'autre) font varier dans un très grand rapport ou presque du tout au tout, comme le prouvent les phénomènes de fusion, volatilisation, dissolution, dissociation et décomposition chimique par la chaleur.
>
> Il y aura donc une partie de l'énergie potentielle interne Ψ , de la forme $\Psi(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) - \Psi (x,y,z)$ qui sera directement calorifique."[327]

---

[325] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, t. 1, *Problèmes généraux*, Paris, Gauthier-Villars, 1901, p. 8.

[326] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 106.

[327] ibid., p. 106.

VI . 4 . 2 . C . Le confinement de la chaleur. L'expression de la chaleur

Il y a donc, dans un volume donné rapporté au même volume de matière, de l'énergie calorifique actuelle, de l'énergie calorifique potentielle, et de l'énergie élastique dite "énergie de ressort". La somme des deux premières constitue l' énergie calorifique du volume considéré.

L'énergie calorifique ou chaleur peut donc être rapportée à des volumes séparés de l' espace.

Ainsi munie d'un volume, pour acquérir les qualités d'une matière, l'énergie calorifique doit être munie de l'équivalent d'une masse. Boussinesq appelle respectivement α et β la chaleur sensible (énergie actuelle) et la chaleur potentielle (énergie potentielle) par unité de volume, et γ la chaleur totale par unité de volume. Ici γ joue le rôle d'une masse volumique, et donc la chaleur dans un volume ω sera $\int_\omega \gamma . d\omega$. L'analogie hydraulique permet de supposer que la chaleur peut s'écouler, et donc en un temps infinitésimal la chaleur écoulée sera: $d\int_\omega \gamma . d\omega$.

Ces variations quantitatives doivent être traduites en leur équivalent calorifique par un travail. Il s'agit pour Boussinesq de réécrire, dans le cas de l'énergie calorifique, l'équation de conservation de l'énergie qu'il a donnée sous la forme:

$$d(\Psi + \Sigma\, 1/2\, (mV^2)) = dTe$$

où dTe est le travail des forces extérieures[328].

Le premier membre de cette équation est déjà connu, c'est $d\int_\omega \gamma . d\omega$. Il reste à calculer le second membre, c'est là qu'intervient le *flux*, que Boussinesq voit comme le travail propre dû au mouvement calorifique.

VI . 5 . Le flux de chaleur comme expression du déplacement de la chaleur

Boussinesq applique ses conceptions dynamiques des mouvements de la matière pour interpréter les déplacements de chaleur. Il le fait en utilisant une conception du flux induite de la supposition du mouvement désordonné des molécules, donc une conception dynamique.

VI . 5 . 1 . Les formulations du flux de chaleur par Boussinesq

---

[328] ibid., p. 11.

Nous indiquons d'abord les formulations successives du flux par Boussinesq, nous pourrons ainsi nous former une idée précise de cette notion.

On trouve une mention du flux suivant l'acception précédente dans la thèse de doctorat de Boussinesq (1867)[329]. Dans cette thèse, où Em. Picard reconnait le "lecteur assidu de Fourier et de Lamé", Boussinesq définit ainsi le flux de chaleur dans le cas d'une transmission par conductivité:

> "La quantité de chaleur qui pénètre pendant un instant *dt* dans un élément de volume, et qui vient de la matière adjacente, est cédée aux molécules de sa surface par les molécules extérieures très voisines. Ce phénomène se passe dans une couche d'épaisseur insensible, qu'on peut regarder comme la surface même de l'élément de volume. Si celui-ci est limité par des surfaces planes, ces faces sont appelées *éléments plans*, et les quantités de chaleur qui les traversent des *flux de chaleur*."[330]

Cette définition est très proche de celle de Lamé:

> "Soit pp' une section plane, faite dans le corps solide, et qui le sépare en deux parties A et B. La seconde partie, B, étant plus chaude que la première, A, lui cède, dans le temps dt, une certaine quantité de chaleur. C'est le flux total qui traverse pp'."[331]

La différence entre les deux définitions réside en ce que Boussinesq porte déjà une attention très particulière à la réalité moléculaire du phénomène, par la mention même des molécules, mais surtout par la localisation du flux dans une couche très petite de la surface. Il se démarque ainsi de Lamé, pour qui les échanges de chaleur dépendent d'un principe, et non pas d'une étude moléculaire fine: la quantité de chaleur cédée, pendant le temps dt, par le volume ω au volume ω', de températures respectives V et V', F étant un coefficient, aura pour expression: $\omega\omega'.(V-V')F dt$ [332]. Il faut constater que, dans la suite du texte, Boussinesq ne va pas jusqu'à exprimer ce flux en fonction d'un travail: la vision énergétique de la chaleur n'est pas apparente dans cette thèse.

Nous avons vu au paragraphe (IV . 3.) de ce chapitre que dans la Note 3 de la "Théorie des ondes liquides périodiques", Boussinesq interprète l'influence des actions calorifiques par leur travail. C'est à

---

[329] J. Boussinesq, *Etude sur la propagation de la chaleur dans les milieux homogènes*, thèse de doctorat, soutenue le 5 février 1867, devant la Faculté des sciences de Paris, Paris, Gauthier-Villars, 1867.

[330] ibid., pp. 9 et 10.

[331] G. Lamé, *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur*, Paris, Mallet-Bachelier, 1861, p. 3.

[332] ibid., p. 2.

l'occasion, semble-t-il, de ses "Recherches sur les principes de mécanique (...)" de 1872, que Boussinesq développe son idée de flux de chaleur comme travail. On trouve mention du flux à la page 346, et de la conception dynamique de la chaleur au paragraphe 16, page 324, mais le flux de chaleur en tant que caractéristique propre et indépendante, conséquence du mouvement calorifique, n'est pas expressément mentionné. La relation existe sans doute déjà dans l'esprit de Boussinesq comme nous pouvons le voir page 342. L'idée de transfert d'énergie au moyen des mouvements imperceptibles des molécules est clairement précisée. Boussinesq l'indique, lors de l'établissement du principe fondamental de la thermodynamique:

> "Les déplacements, suivant les trois axes de coordonnées, des atomes superficiels se composent de deux parties dont l'une correspond au mouvement perceptible de la portion adjacente de la surface, et l'autre aux vibrations calorifiques d'amplitude insensible: le travail des forces extérieures appliquées à ces atomes, respectivement égal au produit de chaque force par la projection sur sa direction de déplacement total de son point d'application, se composera de deux parties, dont l'une, la première à considérer, sera la valeur qu'aurait ce travail si l'agitation calorifique existait seule, et dont l'autre serait la valeur du travail de la même force si, au contraire, chaque atome n'avait pas d'autre mouvement que le mouvement perceptible de l'élément adjacent de la surface. La première n'est autre que la quantité d'énergie communiquée à l'élément de volume en vertu des mouvements vibratoires imperceptibles, ou comme on dit, la chaleur introduite du dehors."[333]

En page 346, Boussinesq mentionne le flux (une autre mention se trouve à la page 349):

> "La valeur dQ de la chaleur introduite dans un élément durant l'instant *dt*, peut être obtenue, comme on le montre dans les Traités sur la "Théorie analytique de la chaleur", pourvu que l'élément de volume soit athermane, c'est-à-dire tel que les flux de chaleur qui traversent les faces ne varient qu'avec le mode de distribution des températures dans l' étendue très petite tout autour."[334]

Le rapprochement entre les deux textes peut laisser soupçonner que Boussinesq concevait alors le flux comme la partie due à la chaleur du travail effectué à travers une surface par les actions moléculaires. C'est en tous les cas ce qu'il affirme à Saint-Venant dans une lettre, une

---

[333]J. Boussinesq, *Recherches sur les principes de la mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoires de l'Académie des sciences et lettres de Montpellier, 1872, Journal de mathématiques pures et appliquées, 18, pp. 342 et 343.

[334]ibid., p. 346.

réclamation de priorité vis-à-vis de Ledieu, qu'il lui adresse le 4 juillet 1874[335].

D'après lui, Boussinesq est le premier à avoir donné une définition dynamique du flux[336]. *Il convient ici de signaler la particularité de la conception de Boussinesq, et d'abord celle de sa conception du*

---

[335]Lettre de Boussinesq à Saint-Venant du 4 juillet 1874. Lors de sa présentation malheureuse de 1872, à la section de géométrie de l'Académie des sciences, le jeune et sans doute encore naïf Boussinesq avait exposé ses idées à diverses personnes. Cette lettre montre les résultats de ses confidences.
"Alors M. Ledieu s'est borné à réclamer la priorité sur un autre point important, dont en effet aucun des auteurs ne s'était occupé: il a prétendu avoir le premier, montré nettement ce qu'était un flux de chaleur d'un corps à travers sa surface, en observant que le travail total des actions moléculaires exercées sur un corps à travers la surface par le corps contigu, n'est pas identique au travail de leur résultante ou pression, mais contient en outre une partie importante correspondant aux vibrations calorifiques, et qui constitue précisément la quantité de chaleur cédée au corps. Or il y avait six mois que mon mémoire de Montpellier où cette idée se trouve longuement, exposée avait paru quand il a publié là dessus son premier article, et je l'avais longuement, dès le mois d'avril 1872, communiqué dans une conversation à Monsieur Yvon Villarceau qui peut-être en aura causé avec Monsieur Ledieu. Au reste la même idée se trouve indiquée au premier alinéa n°2 de la note placée à la suite de la théorie des ondes liquides périodiques: il est vrai qu'elle n'y est pas développée, mais c'est uniquement parce que le sujet ne comportait pas plus de développements, car j'avais trouvé dès cette époque, ma démonstration du principe fondamental de la thermodynamique (équivalence de la chaleur et du travail), celle que donne actuellement Monsieur Ledieu."

[336]Il ne faudrait pas conclure de ce qui précède que Boussinesq, dès cette époque, avait une conception totalement dynamique du comportement moléculaire telle que nous l' avons exposée au § II . 3 . 2. de ce chapitre. Une telle conception aurait supposé une adhésion aux balbutiements de la théorie cinétique des gaz. Bien au contraire, dans son mémoire de 1872, il s'oppose en ces termes à cette théorie:
"La théorie de Daniel Bernoulli et de Krœnig, complétée par Clausius, non sans l'aide de plusieurs hypothèses accessoires, et dans laquelle les gaz sont considérés comme des amas de molécules disjointes se heurtant parfois les unes contre les autres, n'est donc pas la seule qui permette de rendre compte des propriétés connues des corps. J'espère que la théorie nouvelle paraîtra étayée sur des suppositions en moindre nombre et plus vraisemblables. (Suivent des considérations sur les rayons des actions moléculaires) (...). Donc même à l'état gazeux, chaque molécule d'acide carbonique se trouve très probablement dans la sphère d'activité de ses voisines, et les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, qui s'y appliquent, ne doivent pas être dues aux causes assignées par la théorie de Daniel Bernoulli" (in J. Boussinesq, *Recherches sur les principes de la mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoires de l'Académie des sciences et lettres de Montpellier, 1872, Journal de mathématiques pures et appliquées, 18, p. 310).
L'"essai sur la théorie moléculaire des gaz parfaits" se trouve aux pages 357 à 360 du Mémoire de 1872. Elle est basée sur une étude générale, que Boussinesq fait dans le même Mémoire (pages 331 à 333), de l'énergie d'un corps. Cette énergie est calculée en fonction de l' énergie des atomes constituant ce corps. Par des approximations, il retrouve les lois de Mariotte et de Gay-Lussac. Il semble que Boussinesq ait renié cette théorie: bien plus tardivement en 1923, il prétendra ne s'être jamais occupé des gaz (in J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique*, t. III, Paris, Gauthier-Villars, 1921, p. XV).

mouvement calorifique. Ce mouvement est désordonné, sans relation entre les phases des diverses vibrations successives d'une même molécule, ce qui est la conception proprement dynamique du mouvement calorifique. En cela il se distingue de Saint-Venant qui, en 1876 encore, décrit la cinématique du mouvement calorifique avec précision. Ainsi, dans l' article déjà cité[337]*, il expose ainsi le résultat de ses calculs:*

> "Le mouvement de l'atome se compose, comme on voit, d'une première partie qui, seule, le ferait osciller pendulairement de $x=-n_0/a$ à $x = n_0/a$, et une seconde partie, aussi de période $2\pi/a$, mais qui le fait osciller suivant une autre loi, entièrement au delà de la situation d'équilibre x=0."[338]

Autre aspect important, Boussinesq décompose, de façon presque purement intellectuelle, le mouvement de la molécule en mouvement moyen et mouvement calorifique, et surtout, il décrit ce mouvement, non pas en terme de déplacements, mais en terme de travail, ce qui est une conception liée à l'énergie et non pas à la force et au déplacement pris séparément. On s'explique ainsi la vigueur de la réclamation de Boussinesq.

A l'usage de Saint-Venant qui, nous l'avons vu, avoue ne pas être très familier de la théorie mécanique de la chaleur, Boussinesq donne, dans la même lettre (1874), une description imagée de sa conception du flux. Nous la donnons ici, car elle permet de mettre en évidence la persistance de la pensée de Boussinesq sur ce point.

> "Cette démonstration est toute dans la remarque suivante: les pressions équivalentes aux actions moléculaires (exercées sur une surface) au point de vue de la somme totale des projections de ces actions sur un axe quelconque et leur moment par rapport à un axe ne sont plus équivalents au point de vue du travail produit, car le travail total des actions moléculaires durant un instant dt, est la somme 1° des pressions, 2° du travail qu'auraient produit ces actions moléculaires si la surface considérée était restée fixe, durant l'instant dt, mais que l'agitation calorifique fût restée ce qu'elle était en effet. C'est cette dernière partie du travail qui se mesure par les moyens calorimétriques parce qu'elle échappe aux mesures dynamométriques. En résumé la chose importante à observer est : les pressions se trouvent équivalentes aux actions moléculaires tant qu'il n'est question que des projections totales des forces et de leurs moments, elles ne le sont plus dès qu'il

---

[337]A. de Saint-Venant, *Sur la manière dont les vibrations calorifiques peuvent dilater les corps, et sur le coefficient des dilatations*, C.R., 82, 1876, pp. 33 à 39.
[338]ibid., p. 37.

s'agit du travail, ce n'est donc pas sans restriction qu'on peut les appeler leur résultante."[339]

On ne saurait mieux dire, en termes n'utilisant pas l'énergie, ce qu'est le flux calorifique pour Boussinesq. En 1901 l'approche de Boussinesq est fondée sur l'énergie, c'est donc cet aspect qu'il met en évidence. Après avoir, dans l'esprit de la lettre précédente, mis en évidence le travail dû au mouvement calorifique, il conclut:

> "La propagation de la chaleur dans les solides, que nous aurons à étudier, ne donne lieu en fait de mouvements visibles ou moyens, qu'à des déplacements très faibles où les différentielles dx, dy, dz, et par suite, le travail des pressions seront complètement négligeables. Le travail extérieur dT_e s'y réduira donc au flux dont il s'agit.
>
> Et, si nous appelons dJ leur somme, l'équation des forces vives sera simplement
>
> $$d\int_{\omega}\gamma . d\omega = dJ."^{340}$$

Ainsi la conception du flux et de la chaleur de Boussinesq lui permet de donner une équation des forces vives sans référence explicite au substrat matériel habituel: les molécules. Cette équation des forces vives n'est pas une simple fiction mathématique, elle porte sur ce qu'il y a de plus réel selon Boussinesq: l'énergie.

VI . 5 . 2 . Deux propriétés importantes du flux calorifique

Les flux calorifiques résultent des pressions moléculaires. Boussinesq va donc utiliser, pour l'étude des flux, des procédés mathématiques déjà vus en élasticité des solides ou des liquides. Pour sa définition des courants de chaleur, il a besoin de deux théorèmes. D'abord, celui de l'égalité absolue des flux calorifiques qui traversent, en sens inverse, les faces d'un même élément de surface. Il l'appelle *théorème de la neutralisation des flux*. C'est en quelque sorte l'équivalent calorifique de l'égalité des pressions de part et d'autre d'un plan pris au sein d'un fluide parfait; il joue un rôle semblable à celui de l'égalité de l'action et de la réaction en mécanique. Puis celui de *la quasi neutralisation des flux dans une particule infinitésimale*; ce théorème joue un rôle analogue à l'équation de continuité en hydrodynamique. Pour cela il

---

[339] J. Boussinesq, *Note (1)*, in *Lettre à Saint-Venant du 4 Juillet 1874*, MC 4226, Paris, bibliothèque de l'Institut.

[340] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, t. 1, *Problèmes généraux*, Paris, Gauthier-Villars, 1901,p. 26.

traitera le flux par les mêmes méthodes que celles qu'il a utilisées pour les fluides et les solides; en particulier, il devra utiliser le tétraèdre de Cauchy. Cette application du tétraèdre de Cauchy à la chaleur n'est d'ailleurs pas une nouveauté: Lamé, qui y voit un des plus grands progrès de la physique mathématique, l'a déjà utilisé[341]. Boussinesq, lui-même, en fait déjà usage dans sa thèse de 1867. La considération de ce tétraèdre suppose que l'on ait auparavant trouvé les relations, mécaniques ou thermiques, qui lient les actions s'exerçant sur chacune de ses faces. C'est avec précision que Boussinesq établit, dans l'étude de la chaleur, ces relations[342]. C'est une non moins grande attention qu'il leur porte en mécanique. Cette similitude dans le raisonnement nous paraît comme une preuve supplémentaire de la similitude que Boussinesq établit entre matière et chaleur. Nous voyons, en note, comment il établit, dans son "Essai sur la théorie des eaux courantes", l'égalité des pressions s'exerçant entre les deux côtés d'une même face du tétraèdre[343].

VI . 5 . 2 . a . Le théorème de la neutralisation du flux à travers une surface

Nous allons constater les similitudes de traitement mathématique entre les calculs sur les pressions, décrits en note, et ceux qui interviennent dans le calcul sur les flux calorifiques, lors de l'établissement de deux théorèmes essentiels: la neutralisation des flux à travers une surface et la quasi neutralisation des flux dans un petit volume. La démonstration se trouve déjà, de façon abrégée, dans les "Recherches sur les principes de la mécanique (...)" de 1872, dans les "Leçons synthétiques de mécanique générale" (1889), et enfin dans la "Théorie analytique de la chaleur" de 1901.

Boussinesq veut d'abord démontrer que les flux qui traversent en sens inverse une surface s'annulent, c'est-à-dire sont égaux en valeur absolue. Tout d'abord, il considère les travaux mutuels, dT et dT',

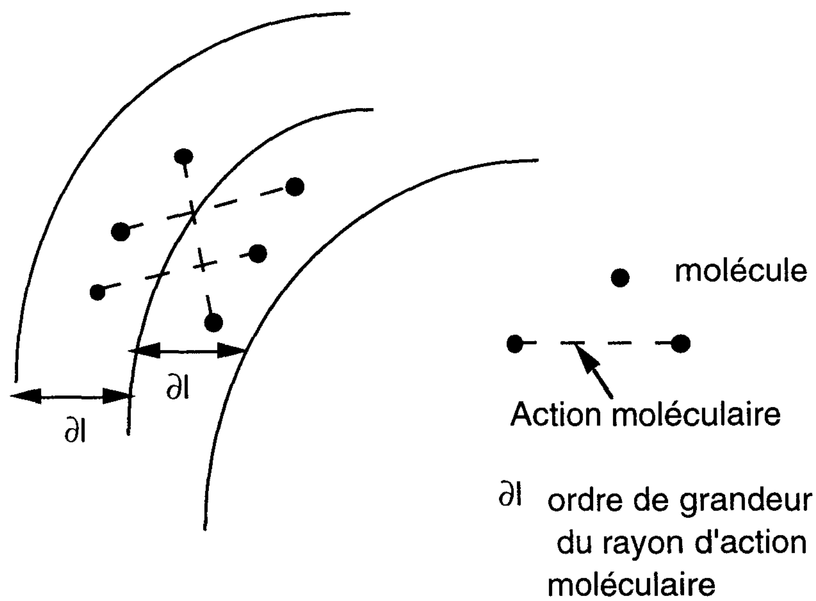
---

341 G. Lamé, *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur*, 1861, Paris, Mallet-Bachelier, p. 23.

342 Cette utilisation des méthodes de Cauchy n'est sans doute pas fortuite. Cauchy lui-même, dans les années 1823 à 1828, produit une méthode d'étude des milieux continus dont A. Dahan-Dalmédico se demande s'il ne s'agit pas d'une "méthode universelle valable pour tous les corps". Cauchy, après avoir établi ses lois sur les pressions dans les corps solides, en constituant d'abord une théorie à une constante, puis une autre à deux constantes, étend cette théorie aux fluides. Il annonce dès 1823 qu'il cherchera à étendre sa méthode au son, mais aussi au calorique assimilé à une vibration se produisant dans un corps entièrement dépourvu d'élasticité.
Voir: A. Dahan-Dalmédico, *Mathématisations. Augustin Cauchy et l'Ecole française*, Argenteuil, Editions du choix, Paris, Librairie Blanchard, 1992, pp. 260 à 263.

343 J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France (Recueil des savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris), 23, 1872, pp. 32 à 35.

effectués par les actions des deux groupes de molécules situées dans deux couches de matière, d'épaisseur peu différente du rayon d'action moléculaire, et séparées par une surface géométrique.



D'après Boussinesq, "Théorie analytique de la chaleur(...)", p. 24

Boussinesq montre que la somme dT + dT' est nulle. C'est l'équivalent de l'égalité des modules des pressions de part et d'autre d'un plan dans un liquide. Il ne peut utiliser le principe de l'action et de la réaction pour établir l'égalité des travaux exercés par les molécules de la couche A sur celles de B et réciproquement: il faudrait connaître les actions mutuelles des molécules des deux couches, mais aussi les positions des molécules; c'est impossible à cause du mouvement désordonné de l'agitation thermique. Il procède comme suit:

> "Leur somme (des travaux) dT + dT', travail des actions mutuelles des deux couches, sera la différentielle, changée de signe, de l'énergie potentielle Ψ_2 du système, des deux corps contigus, par rapport à toutes les imperceptibles droites, r, r',r", ...joignant à travers la surface SS' les molécules des deux couches."[344]

Boussinesq poursuit en se libérant complètement de la référence à la matière et en prenant seulement en compte l'énergie potentielle. Il conclut :

---

[344] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, t. 1, *Problèmes généraux*, Paris, Gauthier-Villars, 1901, p. 27.

"Ainsi la somme dT + dT' peut être négligée en comparaison de $d\psi$ (énergie potentielle calorifique) ou, *a fortiori*, en comparaison de la différentielle de l' énergie calorifique totale $\int_{\omega}\gamma.d\omega$ du corps ω."[345]

C'est donc un procédé analogue à celui qui à permis de négliger une certaine épaisseur de matière, dans le cas de l'égalité des pressions de part et d'autre d'un plan, que Boussinesq applique ici; c'est l'énergie potentielle (interne) qui joue le rôle tenu par la matière plus haut.

Boussinesq interprète comme suit cette neutralisation des flux qui est l'égalité des flux traversant en sens inverse une même surface:

"La chaleur gagnée par un corps, à travers une partie quelconque de sa surface, est perdue par la matière extérieure contiguë et *vice versa*."[346]

Une interprétation intéressante de ce qui précède est donnée dans les "Leçons synthétiques (...)":

"*Voila pourquoi* l'on peut, sans erreur appréciable, *assimiler la chaleur à une matière qui passerait à travers un élément plan, ou regarder le flux qui entre d'un côté comme sortant de l' autre*."[347]

La chaleur peut donc être vue comme une matière, et sans doute un fluide, qui traverse l'élément plan. Dans la "Théorie analytique de la chaleur (...)", Boussinesq observe que c'est cette circonstance qui a fait considérer si longtemps la chaleur comme un fluide. [348]

VI . 5 . 2 . b . Le théorème de la quasi neutralisation du flux dans une particule

Boussinesq démontre un autre théorème, fondé sur le même principe que l'égalité des flux qui traversent une même surface: c'est celui de la "quasi-neutralisation des flux qui pénètrent à travers les faces d'un élément de volume". Ceci signifie que:

---

[345]ibid., p. 28.
[346]ibid., p. 28.
[347]J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 114.
[348]J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, t. 1, *Problèmes généraux*, Paris, Gauthier-Villars, 1901, p. 28.

"Les flux de chaleur qui pénètrent à la fois dans la particule se neutraliseront."[349]

Par flux qui entrent dans la "particule", particule que nous assimilons pour l'instant à un petit volume, il faut entendre ceux qui apportent de la chaleur et ceux qui en enlèvent, c'est-à-dire ceux qui sont positifs et ceux qui sont négatifs. La démonstration que donne Boussinesq de ce théorème dans la "Théorie analytique de la chaleur (...)" est basée sur celui de la neutralisation des flux. Les différences viennent de la prise en compte des actions qui se produisent aux angles de la particule considérée. Une autre démonstration est donnée dans la thèse de Boussinesq de 1867; c'est cette démonstration que nous donnerons car, outre qu'elle montre la genèse de la démonstration précédemment citée, elle sera en partie reproduite lors de la mise en évidence du flux maximal dans la "Théorie analytique de la chaleur (...)".

Montrons d'abord ce que peut être la genèse de la démonstration de Boussinesq. L'idée fondamentale se trouve déjà dans la Thèse de Boussinesq de 1867. Rappelons que dans cette thèse il n'est pas question d'énergie, le flux est simplement la quantité de chaleur qui traverse une surface plane unité par unité de temps. Cette démonstration semble être une adaptation d'un théorème de Lamé, qui montre que la variation de température, par unité de temps, d'un tétraèdre de capacité calorifique C est égale à la somme, algébrique, des flux qui traversent toutes les surfaces de ce volume, divisée par C[350]. Dans sa thèse Boussinesq reprend l'idée du tétraèdre mais réduit ses dimensions à des dimensions infiniment petites. L'intérêt de cette réduction apparaît dès le début du texte lorsque Boussinesq démontre son théorème de la neutralisation du flux. D'abord il exprime les quantités de chaleur traversant les faces du tétraèdre:

" La chaleur totale de conductibilité reçue par le tétraèdre pendant l'instant *dt* est donc:

$$(F - mF_1 - n F_2 - pF_3).\omega.dt."^{351}$$

F est le flux sortant par la face oblique d'un tétraèdre <u>infiniment petit de volume v</u>, face dont l'aire est ω et dont les cosinus directeurs de la normale sont m, n, p. F1, F2, F3 sont les flux entrant par les surfaces

---

[349] J. Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 115.

[350] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, t. 1, *Problèmes généraux*, Paris, Gauthier-Villars, 1901, p. 28.

[351] J. Boussinesq, *Etude sur la propagation de la chaleur dans les milieux homogènes*, thèse de doctorat, soutenue le 5 février 1867, devant la Faculté des sciences de Paris, Paris, Gauthier-Villars, 1867, p. 11.

parallèles aux faces du trièdre de référence (flux principaux), F est le flux sortant par la face oblique. Dans sa démonstration, Boussinesq considère les flux comme des quantités arithmétiques auxquelles il affecte des signes. Cette chaleur transmise par conduction n'est pas la seule à considérer. Il peut aussi s'y adjoindre de la chaleur transmise par rayonnement à partir des molécules se trouvant à distance finie et celle due à d'éventuelles réactions chimiques, c'est ce qu'exprime Boussinesq:

> "Si on y adjoint la chaleur reçue par rayonnement ou par réaction chimique, la somme sera égale au produit du (volume du) tétraèdre par le calorique spécifique (capacité calorifique) et par l'augmentation de la température durant l'instant *dt*."[352]

C'est ici qu'intervient une importante approximation, celle qui met en jeu le fait que le tétraèdre est petit:

> "Désignons par v le volume du tétraèdre, volume incomparablement plus petit que la surface w: ces derniers termes (chaleur due au rayonnement et aux réactions chimiques) seront du même ordre de petitesse que le produit vdt (puisque la chaleur rayonnée par l'éther sera de l'ordre de grandeur de son volume v multiplié par le temps de rayonnement, et la chaleur due aux réactions chimiques de l'ordre de la masse de matière mise en jeu, et donc de son volume v, multiplié par le temps *dt*). Donc la chaleur reçue par conductibilité est du même ordre; divisée par wdt, elle donnera:

$$F - mF_1 - n F_2 - pF_3 = 0$$

ou bien

$$F = mF_1 + n F_2 + pF_3$$

La somme Qv des quantités de chaleur mises en jeu dans le volume infiniment petit considéré est du quatrième ordre de petitesse. En effet, elle est le produit de la capacité calorifique du petit volume, du même ordre de grandeur que le volume, donc du troisième ordre de petitesse, multipliée par le temps infiniment petit du premier ordre dt. Les quantités de chaleurs rayonnantes Qr et chimiques Qch le sont aussi pour la même raison. Si nous appelons Qc la chaleur mise en jeu par conduction, nous pouvons écrire:

$$Qv = Qr + Qch + Qc$$

---

[352] ibid., p. 11.

Les trois quantités sont du même ordre de grandeur (infiniment petits du quatrième ordre), on peut donc égaler Qc à zéro avec une bonne approximation, et écrire l'égalité:

$$F = mF_1 + n\,F_2 + pF_3$$

L'intérêt de cette équation apparaît par la suite. Elle permet à Boussinesq d'exprimer les flux dirigés suivant les axes (flux principaux) sous la forme:

$$F1 = \alpha\ .\ (du/dx) + \beta\ .\ (du/dy) + \gamma.\ (du/dz),$$
$$F2 = \alpha'\ .\ (du/dx) + \beta'\ .\ (du/dy) + \gamma'\ .\ (du/dz),$$
$$F3 = \alpha''\ .\ (du/dx) + \beta''\ .\ (du/dy) + \chi''\ .\ (du/dz),$$

où est u la température.[353]

Le flux dépend non seulement de la répartition des températures du corps, mais aussi de sa composition et de sa structure (présence des coefficients devant les dérivées de la température suivant les axes). Dans cette partie de l'œuvre, Boussinesq met en évidence les rapports au moins mathématiques entre la chaleur et un fluide. Que le flux puisse être assimilé à une pression n'a rien d'étonnant dans le cadre dynamique ou même cinétique de la théorie de Boussinesq[354]: le flux calorifique et la pression, dans leur sens habituel, procèdent du mouvement des molécules. La particularité de la chaleur est de traduire le mouvement désordonné des molécules, et ce mouvement n'est pas réductible à un mouvement ondulatoire régulier[355].

Le traitement de Boussinesq sépare les deux paramètres du problème: d'une part l'aspect énergétique, avec ses composantes d'intensité et de direction, de répartition dans le temps - autrement dit son flux - et d'autre part structure même de la matière. Cette séparation rappelle celle à laquelle on peut procéder lorsqu'on sépare le débit initial d'un fleuve, des caractéristiques qu'il prend suivant les diverses circonstances de son lit.

---

[353]ibid., p. 12.

[354]On peut dire que la théorie de la chaleur est cinétique, en ce sens qu'elle met en jeu le mouvement seul, l'énergie cinétique et non la force. C'est donc le mouvement seul qui est responsable des phénomènes calorifiques.

[355]J. Boussinesq, *Considérations sur le but, la méthode et les principaux résultats de la mécanique physique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 309.

VI . 5 . 2 . c . Le flux maximal

Boussinesq reprend en 1901 la démonstration de sa thèse de 1867 et donne à partir du tétraèdre de Cauchy, une expression du flux à travers une surface infinitésimale quelconque d'une particule, en fonction des flux principaux, F_X, F_Y, F_Z, et des cosinus directeurs $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\chi$, de la normale à la surface. Mais ce n'est pas la décomposition, suivant les axes, de ce flux en fonction de quelque chose qui pourrait être l'équivalent des Ni et des Ti qui est utilisée. C'est bien plutôt l'analogie avec un fluide sans frottement que suggère l'exposé de Boussinesq; bien plus qu'une décomposition comme celle des pressions, c'est l'équation de continuité du fluide qui semble servir de modèle. La loi qui est évoquée est la quasi conservation du flux, loi dans laquelle nous voyons l'équivalent de la loi de conservation du volume, ou équation de continuité, dans le cas d'un fluide incompressible. L'utilisation du tétraèdre de Cauchy garde ici l'avantage - par rapport à l'utilisation, classique en hydrodynamique, du parallélépipède - de permettre le calcul du flux suivant une surface d'orientation quelconque. C'est ainsi que l'on peut comprendre l'expression de la conservation du flux:

> "Le flux de chaleur $F\omega$ traversant un élément de surface ω quelconque est la somme algébrique des flux $Fx\omega_X$, $Fy\omega_Y$, $Fz\omega_Z$, qui traversent ses projections sur les trois plans rectangulaires fixes, mais d'orientation d'ailleurs quelconques, se croisant en un de ses points."[356]

Ce que Boussinesq traduit par une relation, dont il signale bien qu'elle est algébrique. Après avoir exprimé ωx, ωy, ωz en fonction de ω et des cosinus directeurs, puis divisé par ω, il obtient:

$$F = Fx \cos\alpha + Fy \cos\beta + Fz \cos\chi.$$ [357]

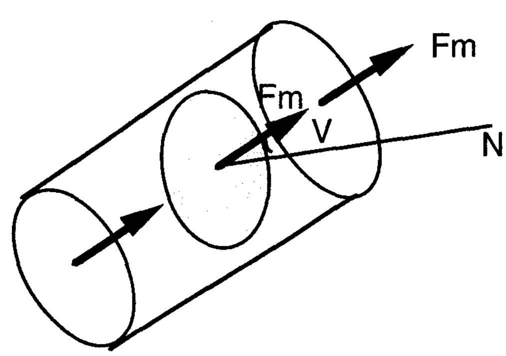
Le lecteur actuel ne manque pas de remarquer que F est le produit cartésien de la normale à ω par un vecteur de module $(Fx^2 + Fy^2 + Fz^2)^{1/2}$. Boussinesq impose directement ce vecteur et le désigne par Fm, ou flux maximum. Puis il exprime F en fonction de Fm et de l'angle V entre Fm et la normale à la surface ω:

$$F = Fm \,.\, \cos V$$

---

[356] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, t. 1, *Problèmes généraux*, Paris, Gauthier-Villars, 1901, p. 110.
[357] ibid., p. 110.

Par cette formule, Boussinesq particularise la direction et l'intensité du flux maximum par rapport aux flux principaux. Par exemple, par rapport à l'axe des x, on peut écrire: cos λ = Fx/Fm, et son intensité qui est: $(Fx^2 + Fy^2 + Fz^2)^{1/2}$, par unité de temps et de surface. Le flux maximum acquiert donc les caractéristiques d'un vecteur, c'est le flux énergétique par unité de surface et de temps, affecté d'une direction particulière par rapport aux flux principaux. Ce flux maximal, ainsi interprété, semble attaché aux flux principaux d'orientation arbitraire. Boussinesq va lui donner un sens physique en montrant qu'il est le même à travers tous les éléments plans parallèles d'une même particule. Pour cela, il considère une portion de plan circulaire, perpendiculaire au flux maximum. Sur cette base il construit un cylindre infinitésimal dont les génératrices sont parallèles à Fm. Le flux maximum, qui est un flux par unité de surface, définit ainsi des lignes de flux, analogues aux lignes de courant de l'hydrodynamique de Boussinesq. A l'intérieur de ce cylindre, le flux calorifique se conserve à cause du théorème de la quasi neutralisation du flux. Sur une seconde face plane du cylindre, parallèle à la première, on retrouvera le même flux maximum. On pourra calculer le flux à travers toute face d'aire unité de la particule - le flux maximum étant le même pour toute la particule - par la formule: F = Fm . cosV. Ce que l'on peut illustrer par le dessin suivant:



D'après Boussinesq, "Théorie analytique de la chaleur(...)", p.112.

Boussinesq montre ensuite que le but de sa démonstration est bien de produire une analogie hydraulique:

> "Les flux calorifiques se comportent donc près du point considéré M d'un corps (même diathermane et pourvu de sources intérieures de chaleur), comme si la chaleur y était un fluide, filtrant à travers un milieu poreux plus ou moins soluble, qui s'y déplacerait actuellement dans le sens LM, en formant tout autour un courant d'une vitesse et d'une direction graduellement variables d'un point à l'autre comme

d'instant en instant, et de manière que le volume du milieux poreux soit insignifiante à côté de celle qui le traverse."[358]

L'analogie se poursuit, par la signification même attachée au flux maximum:

"En conséquence, le flux maximum Fm, débit du courant à travers l'unité d'aire de sa section normale s, sera dit, pour abréger, le *courant actuel de chaleur* en M."[359]

Le terme de "courant de chaleur" était déjà apparu dans un article des C. R., en 1867[360], mais il ne lui donne pas une signification générale, il ne le rattache pas à l'énergie. Ici ce courant est relié, après une longue démonstration, au principe de conservation de l'énergie, c'est un flux d'énergie. Ici le courant de chaleur est le débit de chaleur, un débit d'énergie, qui passe à travers une surface unité dans une direction donnée: c'est bien une quantité physique. La suite de l'ouvrage confirme, comme nous allons le voir, que ce flux maximal n'est pas une simple abstraction mathématique.

VI . 5 . 2 . d . Les utilisations du flux maximal et des flux principaux dans la démonstration du principe fondamental de la thermique de Boussinesq

C'est sur l'utilisation des courants de chaleur, et donc du flux maximal, qu'est basé en grande partie le reste de l'ouvrage. Pour comprendre la signification de ce courant de chaleur, il faut aller un peu plus loin dans le travail de Boussinesq. Dans la fin du premier tome et dans la partie du second consacré à la chaleur, les courants de chaleur sont utilisés, souvent de façon intuitive, avec des analogie marquées avec l'écoulement d'un fluide. Ce caractère presque matériel est marqué dès que Boussinesq étudie la propagation de la chaleur dans les corps solides. L'idée de départ est la même que dans la thèse de 1867: les flux principaux sont exprimés en fonction de coefficients caractéristiques physiques de la particule

$$Fx = M . (du/dx) + N1. (du/dy) + P . (du/dz),$$

$$Fy = N . (du/dx) + Q. (du/dy) + R1 . (du/dz), \quad (a)$$

[358]ibid., p. 112.
[359]ibid., p. 112.
[360]J. Boussinesq, " *Note sur un nouvel ellipsoïde qui joue un grand rôle dans la théorie de la chaleur"*, C. R. , 65, 1867, pp. 104 à 106.

$$Fz = P1 \ . \ (du/dx) + R \ . \ (du/dy) + S \ . \ (du/dz)$$ [361].

C'est aussi, comme l'on voit, l'expression du principe fondamental de la théorie de la chaleur de Boussinesq: le flux dépend de la "répartition" des températures autour du point où on le considère. C'est une apparition tardive de ce principe. Comme toujours, le principe fondateur du domaine de la mécanique physique considéré est le fruit d'une longue élaboration.

Mais le flux énergétique, le flux maximal, a une telle réalité physique, qu'il peut servir lui-même à définir une quantité physique, sur la signification réelle de laquelle on reste perplexe. Ainsi le flux maximal, Fm, est-il écrit:

$$Fm \ . \ (du/dm) = 2 \ \Phi$$

Dans cette équation Φ est:

> "(...) le produit du courant Fm de chaleur par la dérivée de la température suivant la direction dm qui le remonte. Ce produit, et, par conséquent, l'expression 2Φ, est donc une quantité physique, ayant sa valeur indépendante des axes."[362]

Ceci ne peut se comprendre que si Fm est lui-même indépendant des axes, et donc une réalité physique indépendante de la description mathématique.

Comme application de la théorie des flux calorifiques, on peut donner l'équation indéfinie de la propagation de la chaleur, ce qui est l'équivalent pour Boussinesq des équations de Fourier, mais aussi l'aboutissement de son travail sur la conservation de l'énergie. Le paragraphe où il traite de ce problème est justement intitulé:

> "Ce que devient l'équation de l'énergie d'un corps vibrant calorifiquement, quand on y introduit la température."[363]

Boussinesq prend en compte d'abord la capacité calorifique C d'un volume $d\omega$ de matière; lorsque de la chaleur pénètre dans le volume,

---

[361] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, t. 1, *Problèmes généraux*, Paris, Gauthier-Villars, 1901, p. 115.

[362] ibid., p. 118. La quantité 2Φ ne reçoit pas de dénomination particulière; elle sert surtout dans le cas des solides isotropes. L'intuition sur laquelle elle repose nous semble difficile à définir. L'expression $Fm \ . \ (du/dm) = 2 \ \Phi$ peut se mettre sous la forme $Fm = 2 \ \Phi/(du/dm)$ ce qui par analogie avec ce que nous avons vu en élasticité donnerait à Φ le rôle d'une énergie et à Fm celui d'une force. Mais par la suite les analogies se rapportent plutôt à l'optique.

[363] ibid., p. 162.

pendant un instant dt, il se produit dans ce volume un accroissement d'énergie:

$$dt\int C\,(du/dt).\,d\omega$$

Cette augmentation d'énergie est due aux flux calorifiques qui traversent la surface du volume, et à divers autres apports, tels que la chaleur rayonnante due à l'éther inclus dans le solide et la chaleur due aux réactions chimiques. Il désigne ces apports calorifiques par:

$$\phi\,(x, y, z, , t, u)$$

Dans une démonstration visiblement inspirée de Fourier, il évalue l'augmentation de la chaleur dans un parallélépipède dont les arêtes sont parallèles aux flux principaux Fx, Fy, Fz. Il en déduit:

$$C\,(du/dt) = dFx/dx + dFy/dy + dFz/dz + \phi\,(x, y, z, , t, u)$$

Comme les flux principaux sont des dérivées du premier ordre des températures on obtient bien une loi analogue à celle de Fourier.

VI . 5 . 3 . Conclusion sur la théorie de la chaleur de Boussinesq

La démarche suivie par Boussinesq dans son étude de la chaleur entre parfaitement dans le cadre de sa méthode habituelle. Un examen attentif des phénomènes au niveau moléculaire permet de distinguer la racine même du phénomène étudié: ici l'agitation désordonnée des molécules. Nous sommes là au niveau de la physique. La découverte que Boussinesq revendique est justement ce caractère propre de l'agitation calorifique, trait qui le distingue des phénomènes purement élastiques. Les contraintes de la physique mathématique font qu'il ne peut entrer dans les projets du physico-mathématicien de décrire précisément au niveau moléculaire le phénomène lui-même. Comme dans le cas de l'étude des eaux courantes, il faut déterminer la variable pertinente, celle qui est susceptible de mesure: ce sera la température. Si la température représente bien l'agitation moléculaire dans un petit volume, elle doit faire partie d'une équation qui règle son évolution. C'est le principe même qui détermine la théorie de la chaleur de Boussinesq. Mais le flux ne peut être défini lui-même que par rapport à une énergie qui "résume" les propriétés individuelles des molécules. On songe à la transposition du problème dans le cas des eaux courantes: là, les mouvements désordonnés étaient "résumés" par les coefficients ε, coefficients purement locaux qui traduisaient l'agitation locale. La description du phénomène principal, l'écoulement était transférée à un fluide fictif. Boussinesq suit le même principe dans le cas de l'étude de la chaleur: le mouvement désordonné est traduit par une variable locale:

la température, mais cette fois le fluide fictif est un fluide énergétique qui revêt peut-être une certaine réalité pour Boussinesq. Si Boussinesq ne va pas aussi loin, il est pour le moins étrange de voir l'application qu'il met à établir l'analogie entre la propagation de la chaleur et la filtration d'un fluide expansif, impondérable, par un milieux poreux[364]. Bien que ne manquant pas d'affirmer que la chaleur n'est pas un fluide, l'analogie, fondée sur les analogies des équations mathématiques, lui semble digne de remarque:

> "Si donc la théorie *matérielle* de la chaleur n'avait pas été renversée par la Thermodynamique, c'est à un pareil fluide expansif, filtrant dans les corps comme l'air filtre dans du sable, qu'il aurait fallu, ce semble, assimiler la substance qualifiée de chaleur, pour établir la *dynamique* de ses mouvements dans les solides et les liquides."[365]

Et Boussinesq d'assimiler la capacité calorifique à l'espace interstitiel entre les molécules, la pression en un point serait alors due à celle produite par le fluide remplissant les pores débouchant au même endroit. L'expression du flux prend alors son sens plein, c'est le débit du fluide à travers les pores. La conductivité devient une fonction du frottement du fluide dans les pores, et:

> "En résumé, l'assimilation de la chaleur à un fluide expansif, filtrant dans un corps poreux, pourrait conduire au mode de propagation exposé dans ce Cours, avec cette simplification importante, que toute particule admettrait, au point de vue calorifique, trois plans de symétrie de contexture, ou un potentiel des flux, et que par conséquent, l'ellipsoïde des conductibilités ne se distinguerait jamais de l'ellipsoïde principal."[366]

Si donc il est aventuré de conclure que Boussinesq concevait une énergie calorifique détachée du substrat matériel, il n'en reste pas moins que c'est bien une telle représentation qui se trouve dans une bonne partie de son cours.

---

[364]ibid., p. 324 à 333.

[365]ibid., p. 324.

[366]ibid., p. 329. L'ellipsoïde des conductibilités de Boussinesq correspond à un ellipsoïde dont les carrés des rayons sont l'inverse du coefficient de conductibilité K(r) suivant "la pente des températures". L'ellipsoïde principal est déduit du premier de façon à faire correspondre à la plus grande conductivité le plus grand rayon. Les deux ellipsoïdes ne coïncident que dans le cas des corps isotropes.

VII . Conclusion du troisième chapitre

Dans chacun des paragraphes de ce chapitre nous avons mis en évidence les caractéristiques de la mécanique physique de Boussinesq. Pour chacun des exemples traités la méthode est la même. Tout d'abord Boussinesq considère les molécules, qu'il représente par des points matériels; ensuite, dans un long préambule, il étend son propos à leur ensemble. Alors, il fait intervenir un principe caractéristique de la branche de la physique qu'il étudie: optique, élasticité, hydrodynamique, théorie de la chaleur. Puis la déduction analytique lui permet de retrouver ou de découvrir les lois propres au domaine considéré. Ce que nous souhaitons faire maintenant, c'est situer Boussinesq par rapport à certains de ses grands devanciers, particulièrement Poisson et Fourier.

Un premier aspect de la mécanique physique de Boussinesq est son attachement à la mécanique physique de Poisson. Boussinesq considère bien, comme Poisson, les actions moléculaires. Il y a des similitudes entre les deux physiciens. Poisson, comme Boussinesq, n'assimile pas la molécule au point matériel, et il utilise les moyennes[367]. Mais Boussinesq pose, lui, comme principe, qu'il est difficile de considérer les actions moléculaires elles-mêmes: il y a une part d'inconnaissable dans la structure de la matière. C'est là une conséquence de la conception même de la nature de Boussinesq, la complexité de la structure de la matière est telle qu'il faut renoncer à une description précise des actions entre atomes.

> "On peut regretter sans doute que toutes ces belles lois, au lieu de nous révéler en détail les mystères du monde des atomes, ou infiniment petits de la nature, ne soient que la traduction sous mille formes différentes, de quelques faits simples qu'un premier coup d'œil jeté sur le monde rend en quelque sortes évidents."[368]

Il ne faut pas voir là une attitude hostile de Boussinesq à la recherche d'une explication par le microscopique, c'est surtout la reconnaissance de l'inadaptation des limites de l'analyse de son époque[369]. C'est plus une position pessimiste quant aux possibilités de la science ou des limitations propres à l'esprit humain, qu'une conviction philosophique interdisant de fonder la science sur autre chose que l'expérience seule. Il y a donc une proche parenté entre le projet de Poisson et les travaux de

[367]"Les corps sont formés de molécules disjointes, c'est-à-dire, de portions de matière pondérable, d'une grandeur insensible, séparées par des espaces vides." (S. D. Poisson, *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques et des fluides (1)*, Annales de Chimie et de Physique, 42, 1829, p. 149).

[368]J. Boussinesq, *Note complémentaire au Mémoire précédent-Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résultent des idées exposées au § VI*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, p. 369.

[369]ibid., p. 367.

Boussinesq. La différence sensible provient de l'apparition d'un nouveau concept: l'énergie. C'est une différence importante entre Boussinesq et ses contemporains que de ne pas vouloir déduire directement les lois physiques des actions individuelles des molécules. D'emblée, que ce soit dans la "Théorie nouvelle des ondes lumineuses" ou dans la "Théorie des ondes liquides périodiques", l'action entre molécules est résumée, soit par les lois de Lamé sur la propagation des ondes dans les milieux homogènes, soit par la considération de l'énergie. La volonté de déduire les lois physiques de l'action des molécules est bien présente, mais ici cette action est intégrée, soit dans une loi non encore établie à partir des molécules mêmes, soit dans la nouvelle grandeur fondamentale de la physique: l'énergie. Ainsi est évité le recours à la force en tant qu'agent causal. Pour que la force soit bannie de la physique il reste à Boussinesq à établir les lois de l'élasticité et de la Thermodynamique à partir de l'énergie. C'est ce qu'il fait dans la Note 3 de la "Théorie des ondes liquides périodiques" et dans sa "Théorie analytique de la chaleur". Il réalise ainsi le projet de Lamé que nous avons évoqué au premier chapitre (§ V).

L'énergie et la position des molécules sont, d'après Boussinesq, tout ce qu'il est nécessaire de connaître pour décrire le système physique; l'énergie remplace donc la force, et d'ailleurs on peut déduire l'expression de la seconde à partir de la première. La considération de l'énergie comme être physique susceptible de se voir enclos dans un volume géométrique, ramène le problème de mécanique à un problème de géométrie. Le caractère hypothétique des bases mêmes de la physique de Poisson, le recours à la force ou au calorique, se trouve ainsi évité. Peu importe que le calorique existe ou pas; ce qui importe c'est que, même existant, il obéisse à la même loi énergétique que les autres substances. Peu importe que les molécules soient formées d'atomes et qu'elles soient groupées en molécules intégrantes, leurs rotations et leurs translations n'en seront pas moins décrites par les variations d'énergie.

Il n'est pas aussi aisé de substituer une grandeur géométrique à la connaissance précise des positions des molécules; cette méconnaissance peut conduire à l'établissement d'équations fausses. Le danger est encore plus grand si l'on veut utiliser les moyennes, rien ne garantit que les moyennes mathématiques aient quelque rapport avec les "faits moyens" mesurés par les instruments. Pour s'assurer de la véracité des équations, le Géomètre est donc contraint de considérer, au départ de toute démonstration, le représentant de la molécule dans le monde géométrique idéal: le point matériel. Mais les actions entre les points matériels ne seront pas décrites par des forces, elles le seront, soit de façon analytique, par la "grande loi de continuité des fonctions" (Théorie de l'élasticité des corps quelle que soit leur structure), soit par l' énergie (Note 3 de la Théorie des ondes liquides périodiques et Théorie analytique de la chaleur), ou bien encore par le bon sens et l'intuition géométrique (Essai sur les eaux courantes). Le physico-mathématicien aboutit ainsi à un être mathématique qui sera le véritable objet à partir duquel peuvent se déduire les lois que l'on confrontera à l'expérience. Tel est le cas de l'expression de l' énergie interne en élasticité, tel est le cas du fluide incompressible de l'hydrodynamique, ainsi en est-il également des courants de chaleur.

La création rationnelle de ces êtres est donc essentielle, elle garantit que les lois que l'on va en déduire par la suite sont elles-mêmes rationnelles et donc, en vertu de l'harmonie entre l'esprit de l'homme et l'univers, traduisent une réalité. Ainsi s'expliquent ces longs prolégomènes que nous avons exposés et par lesquels débutent les mémoires de Boussinesq. On pouvait douter de leur utilité puisque, dans bien des cas, ils reviennent à justifier des relations qu'il était possible de concevoir intuitivement dès le départ. Ces préambules sont essentiels en ce que, sans eux, toutes les affirmations se valent, toutes les théories sont également dignes d'intérêt. Une fois ces préambules établis, la physique, pour paraphraser Laplace, "rentre dans le domaine de l'Analyse"[370]. *On pourrait presque dire que le rôle du physico-mathématicien est essentiellement la création de ces êtres mathématiques et que, une fois sa tâche réalisée, il cède, la place au géomètre.*

Si donc Boussinesq se rattache à la tradition de Poisson, c'est par la volonté de remonter jusqu'aux molécules, ou plutôt, aux point matériels qui les représentent. Mais la visée des deux physiciens est différente. Poisson veut prendre en compte les propriétés réelles de la matière physique dès le niveau moléculaire. Boussinesq, nous semble-t-il, veut s'assurer de la solidité de l'édifice qu'il va construire par la suite. Puisque les lois déduites doivent être vraies, il semble alors que l'on puisse se passer du secours de l'expérience, la déduction analytique se suffisant à elle-même. Une science ainsi construite réaliserait l'idéal de la physique mathématique: déduire mathématiquement de quelques principes l'ensemble des lois de la nature. Se construisant au moyen de points matériels et de la loi de la conservation de l'énergie, cette physique réaliserait aussi l'idéal mécaniste. Les différentes branches de cette philosophie naturelle ne se distingueraient que par le sens de l'être humain (vue, ouïe, toucher, etc.) qui est affecté par les phénomènes qu'elles décrivent. Comme le dit Boussinesq, la complexité de la nature rend illusoire une telle déduction complète. Il faut donc recourir à:

---

[370]Laplace, *Mémoire sur le mouvement de la lumière dans les milieux diaphanes*, Œuvres complètes de Laplace, t. 12, p. 290.

> "Autant de principes simples, directement empruntés à l'expérience, et qui, pour chaque cas, tiennent lieu de la connaissance détaillée des phénomènes."[371]

On croit reconnaître ici la méthode que Fourier applique dans sa "Théorie analytique de la chaleur". Citons à nouveau Fourier:

> "Les principes de cette théorie sont déduits, comme ceux de la mécanique rationnelle, d'un certain nombre de faits primordiaux, dont les géomètres ne considèrent point la cause, mais qu'ils admettent comme résultant des observations communes et confirmés par toutes les expériences."[372]

Toutefois les *principes simples* de Boussinesq ne sont pas les *faits primordiaux* de Fourier. Pour Fourier, ces faits primordiaux sont réellement fondateurs de sa théorie, ils le dispensent de remonter aux causes. Les principes simples de Boussinesq, eux, apparaissent après une longue élaboration mathématique, ils ne sont pas premiers dans la déduction mathématique ils sont la conséquence d'autres lois, d'autres prémisses. Ce que l'expérience indique au Géomètre, pour la constitution de ces principes simples, ce sont les variables à considérer et aussi, parfois, la forme mathématique à laquelle doit aboutir la déduction. Partant de la loi générale de conservation de l'énergie, Boussinesq peut en déduire, soit les lois de l'élasticité, soit celles de la "Théorie de la chaleur". Dans le premier cas, les variables à considérer sont l'énergie interne et les déformations (dilatations et glissements); dans le second cas ce sont l'énergie interne et la température. L'observation, banale, de régularités locales dans les écoulements tumultueux permet de supposer que les lois de Navier sur l'écoulement régulier sont localement valables. La forme de l'équation à laquelle on doit aboutir est donc connue. Alors le but du physico-mathématicien est de retrouver ces équations, de les développer, d'y inclure ces coefficients dont on ne saurait demander raison qu'à l'expérience car:

> "Chaque formule contient encore, pour le moins, un coefficient dont il faut demander la valeur à l'expérience, et qu'il ne serait pas facile de calculer, alors même que l'expression exacte de l'action de deux molécules serait connue."[373]

---

[371] J. Boussinesq, *Considérations sur le but, la méthode et les principaux résultats de la mécanique physique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, 1880, p. 280.

[372] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur, Discours préliminaire*, Paris, Firmin Didot, 1822, p. XJ.

[373] J. Boussinesq, *Note complémentaire au Mémoire précédent-Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résultent des idées exposées au § VI*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, p. 369.

Le rôle des principes simples de Boussinesq est donc de suppléer aux manques de l'analyse, mais surtout d'aider l'intuition géométrique. Cette dernière pourrait, à elle seule, guider le Géomètre dans le monde géométrique idéal. Ici, il ne s'agit pas de géométrie pure mais de géométrie de la Nature; l'intuition géométrique est impuissante à choisir parmi l'infinité des possibles, elle doit considérer le monde physique, le monde tel qu'il est, et donc s'aider de l'expérience pour identifier la formule adéquate à ce monde. Ce faisant, Boussinesq réalise le vœu de Poisson de construire une mécanique physique prenant réellement en compte les propriétés de la matière. Ces propriétés ou phénomènes, élasticité des corps, frottement des molécules d'eau dans l'écoulement tourbillonnaire, etc., sont inscrites dans le discours analytique par les formules qui traduisent les principes simples que nous suggère l'expérience dans chaque cas; ainsi les lois trouvées sont-elles assurées de bien décrire la nature. Les principes ainsi choisis ne le sont pas au hasard. Il faut, pour que le choix soit pertinent, de l'intuition ou l'appui de l'histoire de la physique.

De ce qui précède il ressort que si en apparence on peut à la fois rattacher la mécanique physique de Boussinesq à celle de Poisson et à la physique mathématique de Fourier, il existe bien évidemment des différences. Il semblerait que Boussinesq pratique une sorte de syncrétisme entre les opinions sur la science de Poisson et de Fourier, mais le projet fondamental de Boussinesq nous semble devoir remonter à Laplace lui-même:

> " (...) note, dans laquelle j'ai cherche à établir que les phénomènes de la nature se réduisent en dernière analyse à des actions *ad distans* de molécule à molécule, et que la considération de ces actions doit servir de base à la théorie mathématique de ces phénomènes."[374]

C'est bien ce que fait Boussinesq, si l'on veut bien remplacer actions *ad distans* par énergie. Mais pour réaliser ce projet, il emprunte à Poisson l'idée de fonder une mécanique qui tienne compte des propriétés réelles de la matière, et à Fourier celle de définir un champ de recherche au moyen d'un principe issu de l' expérience. Sans la référence à Poisson, la mécanique physique n'existe pas, elle n'est que la mécanique rationnelle. Sans l'apport de Fourier, la tentative de déduction à partir des actions entre molécules échoue à cause de la complexité de la nature. La méthode de Boussinesq se présente donc comme la synthèse ou la suite de l'ensemble de la philosophie naturelle française. Mais contrairement à Saint-Venant, il n'adhère pas à l'idéal de rationalité absolue que l'on pouvait déduire des propos de Laplace que nous avons cités. Boussinesq tire avantage de la complexité même de la nature pour

---

[374]Laplace, *Mémoire sur le mouvement de la lumière dans les milieux diaphanes,* Œuvres complètes de Laplace, t. 12, p. 295.

fonder sa physique sur des êtres physiques ou mathématiques qui englobent et ainsi dissimulent la complexité du microscopique. Ce sont finalement ces êtres physiques, courant de chaleur, ou fluide incompressible obéissant localement aux lois de Navier, qui ont survécu.

CONCLUSION FINALE

En 1872, lorsque Boussinesq écrit ses "Recherches sur les principes de la Mécanique", il tente de résoudre les problèmes qui se posent alors à la mécanique "rationnelle".

Dans la seconde moitié du XIX° siècle, les mécaniques théoriques qui veulent prendre en considération la conservation de l'énergie, se fondent sur la notion de force au sens newtonien du terme. Ainsi, elles se construisent sur une notion parfois qualifiée de "métaphysique", ce qui les rend suspectes aux yeux de nombreux physiciens. Tel est le cas, par exemple, de la "dynamique abstraite" de Thomson et Tait. De plus, dans l'expression mathématique de la conservation de l'énergie, la notion de "potentiel" reste peu précise et ne trouve de formulation cohérente que dans le cadre des mécaniques s'appuyant sur les forces centrales.

La Mécanique générale de Boussinesq a la même structure que la Mécanique de Newton. Elle est fondée sur trois principes: celui de la conservation de la force vive ou de l'énergie, celui de la dépendance exclusive de la variation des vitesses par rapport à l'état statique, celui de l'action et de la réaction. A ces trois principes nous avons fait correspondre les trois lois de Newton: loi de l'inertie, loi de proportionnalité de l'accélération à la force, loi de l'action et de la réaction. Les trois principes de Boussinesq ont la signification que nous donnons maintenant.

Le principe de la conservation de la force vive ou de l'énergie indique, de par sa formulation même, que Boussinesq considère que l'énergie, lorsqu'elle devient actuelle, se manifeste en tant que force vive des atomes. Toutefois, les lois de conservation de la force vive et de l'énergie traduisent des caractéristiques différentes de notre monde physique: la première est la conséquence de l'isotropie de l'espace et du nombre limité d'atomes contenus dans l'univers, la seconde révèle que tout système matériel ne peut produire qu'une quantité limitée de puissance vive. Les considérations de type physique et de type géométrique sont donc étroitement liées dans cette mécanique.

Le second axiome de Boussinesq - dépendance exclusive de l'accélération à l'état statique du système - se fonde sur le principe de la relativité galiléenne. Boussinesq est conduit à admettre que les actions entre atomes sont indépendantes de la vitesse.

Le troisième axiome - égalité de l'action et de la réaction - est, lui, posé implicitement et *a priori*.

Boussinesq inclut dans la physique newtonienne la conservation de l'énergie comme principe autonome; en ce sens il en renouvelle la présentation et montre toute l'importance de l'énergie.

Boussinesq n'utilise pas la notion de force (au sens newtonien du terme) pour bâtir sa mécanique. Il la construit directement sur le principe de la conservation de la force vive ou de l'énergie, et se libère ainsi totalement de la notion métaphysique de force. La loi de conservation de la force vive s'exprime au moyen d'une fonction Ψ qui est une fonction descriptive de la géométrie du système. Cette fonction est proche de la fonction potentielle de Clausius et de la fonction Φ de Green. En ce qui concerne la loi de conservation de l'énergie proprement dite, Boussinesq l'exprime, elle aussi, au moyen de la fonction Ψ qui prend maintenant le sens de quantité d'énergie latente - "dissimulée" - dans le système matériel. La notion de "potentiel" a donc, dans la Mécanique générale de Boussinesq, une double signification: celle de fonction descriptive du système et celle d'énergie accumulée. Elle trouve ainsi une signification précise dans le cadre d'une théorie unique.

Les justifications de la mécanique théorique de Boussinesq sont d'ordre géométrique et d'ordre épistémologique. La géométrie qu'utilise Boussinesq est la géométrie euclidienne. Aux raisons que les mathématiciens donnent pour développer les géométries non euclidiennes, Boussinesq oppose les données de ce qu'il appelle l'"intuition géométrique". Cette intuition géométrique lui apparaît comme une réalité intangible qui s'impose à l'esprit humain. Elle révèle à l'homme l'existence d'un monde géométrique idéal indépendant de l'esprit humain. Les êtres qui peuplent ce monde géométrique (points matériels, lignes, figures) sont les reflets dans le monde géométrique idéal des objets du monde matériel. Le physico-mathématicien ne peut raisonner qu'avec les figures et les lois du monde géométrique idéal. Ce n'est que de façon approximative - par mise en correspondance du monde géométrique idéal et du monde matériel - qu'il peut explorer le réel physique. Le raisonnement en mécanique est, pour Boussinesq, un raisonnement géométrique et analytique qui s'appuie sur des lois immuables de la pensée. Parmi celles-ci, les lois de la simplicité et de l'unité jouent un rôle important. S'il existe bien une correspondance entre le monde géométrique idéal et le monde physique, celle-ci n'est pas absolue: la connaissance que l'homme peut avoir de la nature ne peut être qu'approchée. Ce sont donc des arguments d'ordre épistémologique qui justifient la confiance que Boussinesq a en sa Mécanique générale. Pour qu'il puisse douter de ses théories, il faudrait qu'il abandonne ses convictions philosophiques, que celles-ci soient remises en cause par quelque fait scientifique dont l'interprétation ne pourrait s'accorder avec ses idées philosophiques. C'est ce qui est impossible, bien entendu.

Cette confiance de Boussinesq en sa Mécanique, ne peut que se trouver confortée par l'évolution de sa pensée. Dans les années 1860 la conservation de l'énergie semble devoir produire une profonde transformation de la physique: elle résout les problèmes qui se posaient à la mécanique "rationnelle" (perte de force vive dans les chocs, utilisation de la notion métaphysique de force); elle apparaît comme une remarquable découverte (ainsi que le rapporte W. Thomson). Boussinesq a parfaitement intégré la conservation de l'énergie dans sa théorie et sa pratique. La confiance qu'il porte à la mécanique classique revivifiée par la prise en compte de la conservation de l'énergie s'en trouve confortée. En 1872, il reste des domaines sur lesquels la "Science positive" achoppe, tel est le cas, par exemple, de l'explication de la fluidité. Boussinesq adopte, pour l'interprétation de ce phénomène, une hypothèse provisoire: celle des "actions de présence". Peu à peu sa pensée évolue et il remplace ces actions de présence par la prise en compte du mouvement désordonné des particules. Comme d'autres physiciens, Boussinesq écrit alors la physique dans un cadre dynamique. Il participe activement à cette nouvelle évolution de la physique - par exemple à l'occasion de l'édification de sa théorie de la chaleur - car celle-ci s'inclut parfaitement dans sa Mécanique générale, tout comme la conservation de l'énergie y avait pris place naturellement. Elle permet même d'adopter des hypothèses simplificatrices comme celle des actions entre molécules s'exerçant uniquement entre paires de particules. Ainsi, paradoxalement, certaines évolutions de la physique moderne confirment ce qu'il y a de plus traditionnel dans la mécanique de Boussinesq: l'action entre atomes s'exerçant suivant la droite qui les joint.

De plus le principe de l'action et de la réaction, que Boussinesq posait *a priori* dans son mémoire de 1872, acquiert plus de vraisemblance. Il faut signaler aussi que, dans la dernière partie de la vie de Boussinesq, l'"hypothèse" de l'existence d'atomes devient une opinion commune, ce qui confirme ses intuitions de toujours. Ainsi les adversaires les plus résolus de Boussinesq en 1872 ou en 1900, ceux qui niaient l'atome et qui pouvaient faire figure de modernistes, se trouvent avoir tort. Dans l'esprit de Boussinesq l'"antique" physique de Laplace, de Poisson et de Fourier peut s'en trouver confirmée. Boussinesq, jusqu'à la fin de sa vie, remporte de grands succès dans les domaines de l'élasticité ou de l'hydrodynamique. Sa méthode reste constante: il considère d'abord les molécules représentées par des points matériels, puis il applique divers théorèmes de la mécanique; guidé par l'intuition, la loi de simplicité et la géométrie, il obtient des lois physiques en accord avec l'expérience. L'évolution même de la physique, mais aussi sa pratique habituelle de physico-mathématicien, donnent raison à Boussinesq pour la confiance qu'il a en sa Mécanique.

Certains domaines, toutefois, semblent ne pas vouloir se plier à la Mécanique: tel est le cas de l'électrodynamique. Là, les forces semblent dépendre de la vitesse des particules et de leur accélération, ce qui est en contradiction avec les principes de la Mécanique de Boussinesq. Pour que l'on puisse interpréter correctement ces phénomènes, qui semblent soumis à une physique si contraire au "bons sens", il conseille d'attendre que l'"idée mère" apparaisse. C'est ce qu'il a fait lui-même dans le cas de l'explication de la fluidité. Il a d'abord utilisé l'hypothèse des actions de présence, puis il a pris en compte, essentiellement, le mouvement des particules. Cette idée, la considération du mouvement comme élément premier est, pour lui, l'"idée mère" de la nouvelle physique, elle s'applique aussi bien à la théorie de l'élasticité qu'à la théorie de la chaleur. Boussinesq attend donc avec confiance qu'une telle idée se fasse jour en électrodynamique.

Si l'on se place du point de vue de Boussinesq on peut constater qu'il n'a que peu de raisons de croire dans la relativité einsteinienne. Par contre, comme il le dit lui-même, il ne voit aucune raison pour s'opposer à la Mécanique quantique. En effet, la grandeur fondamentale est, en Mécanique quantique, celle qu'il a toujours considérée comme telle: l'énergie. Egalement, la Mécanique quantique postule une impossibilité de connaître dans ses plus petits détails la réalité ultime de la matière, opinion que Boussinesq a toujours soutenue. Nous ne faisons pas de Boussinesq un précurseur de la mécanique quantique, nous faisons simplement remarquer que certains aspects de sa mécanique sont compatibles avec cette nouvelle science.

La Mécanique générale de Boussinesq est une mécanique d'inspiration newtonienne mais dans laquelle l'énergie a pris la première place. Elle représente donc une avancée par rapport à la Mécanique de Newton, en ce qu'elle cesse de faire jouer un rôle éminent à l'obscure force. La Mécanique physique de Boussinesq se rattache à l'ensemble des courants de la Physique mathématique française. A Poisson et Laplace il emprunte l'idée de déduire toute la Mécanique de la considération des actions entre molécules, actions qui sont ici évaluées au moyen de l'énergie. Il retient de Fourier l'idée de caractériser un domaine de la physique par un fait fondateur. Ce n'est pas uniquement cet attachement à une physique déjà ancienne qui empêche Boussinesq d'accepter la Mécanique einsteinienne. Si Boussinesq ne peut adhérer à la relativité, c'est que toute son œuvre est fondée sur les notions éminemment subjectives de "simplicité" et de "sens commun" qui sont incompatibles avec cette nouvelle mécanique. Mais surtout la Mécanique de Boussinesq est un ensemble d'une grande cohérence intellectuelle. Cette cohérence lui confère une sorte d'"évidence géométrique" qui, alliée au talent de Boussinesq pour "tout démontrer", lui donne une redoutable efficacité. Ainsi, associant la cohérence sur le plan des principes à une adéquation apparente à la description de la nature, cette mécanique ne peut que sembler incontestable.

BIBLIOGRAPHIE

Ampère A.- M., *Essai sur la philosophie des Sciences*, Paris, Bachelier, **1834**, rééd., Bruxelles, Culture et civilisation, 1966.

Archibald Th., *Energy and the mathematization of electrodynamics in germany, 1845-1875,* Archives internationales d'histoire des sciences,39, Décembre **1989**, pp. 276 à 308.

Arnold D. H., *The "mécanique physique" of Siméon Denis Poisson: The evolution and isolation in France of is approach to Physical Theory (1800-1840)*, Archives of History of Sciences, 28, **1983**, pp. 243 à 367, 29, pp. 38 à 94, pp. 287 à 307.

Bachelard G., *Etude sur l'évolution d'un problème de physique*: *La propagation thermique dans les solides*, **1928**, Paris, Vrin, 1973.

Barthélémy G., *Des forces accélératrices dans les Principia*, in *Les Principia de Newton, Questions et commentaires*, Revue d'Histoire des Sciences, 60, **1987**, pp. 273 à 279.

Beaumont E. de, *Correspondance* , C.R., 40 , **1855**, p. 1147.

Beghin H., *Cours de Mécanique théorique et appliquée*, t. 1, Paris, Gauthier-Villars,**1952**.

Belanger J.-P., *Traité de dynamique des systèmes matériels*, Paris, Dunod, Gauthier-Villars, **1866**, pp. 274 à 279.

Belhoste B., **Belhoste** J. F., **Cartier** C, **Dufresne** G., **Emptoz** G., **Fontanon** C., **Lemaître** L., *Le moteur hydraulique en France au milieu du XIX° siècle: concepteurs, inventeurs et constructeurs*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences, 29, 1990.

Bennett J. A., *The mechanic's philosophy and the mechanical philosophy*, History of science, 24, **1986**, pp. 1 à 27.

Berthelot M., *Nouvelles remarques sur l'existence réelle d'une matière formée d'atomes isolés, comparables à des points matériels*, Paris, C.R., 68, **1876**, p. 1226 à 1231.

Bertin M., *Rapport sur les progrès de la Thermodynamique en France*, Paris, Hachette, **1867**.

Bevilaqua F., *Helmholtz' s "Ueber die Erhaltung der Kraft"*, in *Hermann von Helmholtz and the foundations of nineteenth-century Science,* Berkeley, University of California press, **1993**, pp 293-351.

Blaquière C., *Vie et œuvre de Boussinesq*, Béziers, Imprimerie Jeanne d'Arc, **1930**.

Blay M., *Les "Principia" de Newton*, Paris, P.U.F., **1995.**

Blay M., **Halleux** R., *La science classique, XVI°-XVIII° siècles, Dictionnaire critique,* Paris, Flammarion, **1998**.

Bouasse H, *Houles, rides, seiches et marées*, Paris, Delagrave, **1924**.

Bouquiaux L., *L'harmonie et la chaos. Le rationalisme leibnizien et la "nouvelle science"*, Louvain, Paris, Editions Peeters, 1994.

Boussinesq J., *Equations des petits mouvements des milieux isotropes comprimés*, C. R., 65, **1867**, pp. 167 à 170.

Boussinesq J., *Note sur l'action réciproque de deux molécules*, C. R., 65, **1867**, pp. 44 à 48.

Boussinesq J., *Théorie nouvelle des ondes lumineuses* (Extrait), C. R., 65, **1867**, p. 235 à 239.

Boussinesq J., *Etude sur les vibrations rectilignes et sur la diffraction dans les milieux isotropes et dans l'éther des cristaux*, C. R., 65, 1867, p. 672, et Journal de Mathématiques pures et appliquées, 13, **1868**, pp. 340 à 371.

Boussinesq J., *Théorie nouvelle des ondes lumineuses*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 13, **1868**, pp. 313 à 339.

Boussinesq J., *Addition au mémoire intitulé: Théorie nouvelle des ondes lumineuses,* Journal de Mathématiques pures et appliquées, 13, **1868**, pp. 433 à 438.

Boussinesq J., *Note sur un nouvel ellipsoïde qui joue un grand rôle dans la théorie de la chaleur"*, C. R. , 65, **1867**, pp. 104 à 106.

Boussinesq J., *Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 13, 2° série, **1868,** pp. 209 à 241.

Boussinesq J., *Essai sur la théorie des ondes liquides périodiques.* Extrait de l'auteur, C.R., 78, **1869**, pp. 905 à 906.

Boussinesq J., *Essai théorique sur les lois trouvées expérimentalement par M. Bazin pour l'écoulement uniforme de l' eau dans les canaux découverts,* C.R., 9, **1870**.

Boussinesq J., *Sur les relations générales et nouvelles entre l'énergie interne d'un corps et se forces élastiques*, C. R., 71, **1870**, p. 400, et Recueil des Savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris, 20, **1870**, pp. 584 à 603.

Boussinesq J., *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France (Recueil des savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris), 23, 1872 , p. 1 à 680, additions, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France (Recueil des savants étrangers de l' Académie des sciences de Paris), 24, **1872** , p. 1 à 64.

Boussinesq J., *Théorie des ondes liquides périodiques*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France (Recueil des savants étrangers de l' Académie des Sciences de Paris), 20, **1872**, pp. 509 à 615.

Boussinesq J., *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, Mémoire présenté à l'Académie des sciences et lettres de Montpellier le 8 Juillet **1872**, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, 1873, pp. 305 à 360.

Boussinesq J., *Exposition synthétique des principes de la théorie nouvelle des ondes lumineuses,* Journal de Mathématiques pures et appliquées, et Annales de chimie et de Physique, **1873,** 30, pp. 539 à 565.

Boussinesq J., *Note complémentaire au mémoire précédent. Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résultent des idées exposées au § VI*, addition à *Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits,* Journal de Mathématiques pures et appliquées, 18, **1873**, pp. 361 à 392.

Boussinesq J., *Sur le calcul des phénomènes lumineux produits à l'intérieur des milieux transparents qu'anime une translation rapide,* *dans le cas où l'observateur participe lui-même à cette translation*, C. R., 76, **1873**, p. 1293.

Boussinesq J., *Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents, comparé à celui des massifs solides, et sur la poussée des terres sans cohésion*, Recueil in-4° des Savants étrangers de l'Académie royale de Belgique, 40, **1876**, pp. 1 à180.

Boussinesq J, *Complément à une étude de 1871 sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres - Première partie: des tiges - Deuxième partie: Des plaques,* Journal de Mathématiques pures et appliquées , 15, **1879**, pp. 163 à 194, et 329 à 344.

Boussinesq J., *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale,* Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 6, 4° série, **1879**, pp. 1 à 141 et 248 à 251, aussi, Paris, Gauthier-Villars, **1879.**

Boussinesq J., *Etude sur divers points de la philosophie des sciences,* Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, **1880,** pp. 255 à 380.

Boussinesq J., *Sur la manière de présenter la théorie des potentiels d'attraction, dans l'hypothèse, généralement admise, de la discontinuité de la matière*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 6, **1880**, pp. 89 à 98.

Boussinesq J., *Considérations sur le but, la méthode et les principaux résultats de la mécanique physique*, in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, **1880**, pp. 277 à 311.

Boussinesq J., *Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique,* in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, **1880**, pp. 255 à 276.

Boussinesq J., *Compléments à un mémoire, publié en 1878, sur la conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale",* in *Etude sur divers points de la philosophie des sciences,* Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 8, 4° série, **1880,** pp. 332 à 370.

Boussinesq J., *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille, 13, 4° série, **1885**.

Boussinesq J., *Cours d'Analyse infinitésimale,* t. 1, *Calcul différentiel*, fascicule 1, *Partie élémentaire*, fascicule 2, *Compléments*, tome 2, *Calcul intégral*, fascicule 1, *Partie élémentaire*, fascicule 2, *Compléments*, Paris, Gauthier-Villars, **1887**.

Boussinesq J. et alii, *Papiers de Joseph Boussinesq, membre de l'Académie des sciences (1842-1929),* Paris, Bibliothèque de l'Institut, MS. 4221 à 4228. Particulièrement: **Boussinesq** J., A. de **Saint-Venant** et alii, *Correspondance du comte de Saint-Venant (de* ***1834*** *à* ***1885****)*, 615 lettres, Paris, Bibliothèque de l'Institut, MS. 4226 et 4227. Aussi: **Boussinesq** J. et alii, *Divers documents*, Paris, Bibliothèque de l'Institut, MS. 4228.

Boussinesq J., *Leçons synthétiques de mécanique générale*, Gauthier-Villars, Paris, **1889**.

Boussinesq J., *Sur l'explication physique de la fluidité*, C.R., 112, **1891**, pp 1099 à 1102.

Boussinesq J., *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, t. 1, *Problèmes généraux*, Paris, Gauthier-Villars, **1901**, t. 2, *Refroidissement et échauffement par rayonnement, conductibilité des tiges, lames et masses cristallines, courants de convection, théorie mécanique de la lumière,* Paris, Gauthier-Villars,**1903**.

Boussinesq J., *Complément aux considérations du n° 43 sur les lois d'économie et de simplicité: importance de ces lois en tant que principes directeurs de l' esprit*, in *Théorie approchée de l' écoulement de l'eau sur un déversoir en mince paroi et sans contraction latérale*, Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, 50, **1908,** pp. 101 à 134.

Boussinesq J., *Sur les principes de la mécanique et sur leur applicabilité à des phénomènes qui semblent mettre en défaut certains d'entre eux*, C.R., 150, **1910**, pp. 1639 à 1643.

Boussinesq J., *Sur la conservation des masses vraies, dans divers phénomènes, principalement lumineux, où apparaissent des masses fictives variables, C. R.,* 150, **1910,** , pp. 1721 à 1725.

Boussinesq J., *Sur l'applicabilité probable, aux rayons ou courants cathodiques, du principe de constance de la masse*, C. R., 151, **1910**, pp. 5 à 10.

Boussinesq J., *Comment peut s'expliquer l'exercice instantané de la pesanteur et des actions moléculaires, à toutes les distances où se produisent ces forces*, C.R., 154, **1912**, pp. 737 à 742.

Bouty M., *Cours de physique de l'Ecole Polytechnique, supplément au tome premier*, in J. Jamin, *Cours de physique de l' Ecole Polytechnique,* t. 1, Paris, Gauthier-Villars, 1878.

Boutroux E., *La philosophie de Leibniz,* in Leibniz, *La monadologie*, rééd., Grasset , Paris, **1991**.

Bouty M., *Cours de physique de l'Ecole Polytechnique, supplément au tome premier*, in J. Jamin, *Cours de physique de l' Ecole Polytechnique,* t. 1, Paris, Gauthier-Villars, **1878**.

Brenner A., *Duhem, science, réalité et apparence*, Paris, Vrin, **1990**.

Briot Ch., *Leçons de Mécanique*, Paris, Dunod, **1861**.

Briot Ch., *Essais sur la théorie mathématique de la lumière*, Paris, Mallet-Bachelier, **1864**.

Briot Ch., *Théorie mécanique de la chaleur*, Paris, Gauthier-Villars, **1869**.

Brillouin L., *Théorie élastique de la plasticité et de la fragilité des corps solides,* Note, C.R., 112, **1891**, pp. 1054 à 1056.

Bruhat G., *Mécanique*, 6° éd, révisée par A. Foch, Paris, Masson, **1961**.

Buchner L., *Force et Matière*, 17° éd., Paris, Schleicher, **1906**.

Caneva K. L., *Robert Mayer and the conservation of energy*, Princeton New Jersey, Princeton University Press, **1993.**

Carnot L. N. M., *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement,* Paris, Deterville, **1803**.

Cauchy A., *Mémoire sur le mouvement d'un système de molécules*, C. R., 27, **1848,** pp. 93 à 99.

Cauchy A., *Mémoire sur les conditions relatives aux limites des corps, et en particulier, sur celles qui conduisent aux lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière,* C. R., 27, **1848**, pp. 99 à 100.

Cauchy A., *Mécanique moléculaire*, **1848**, C. R., 28, pp. 2 à 6.

Cauchy A., *Note sur les rayons lumineux simples*, *et sur les rayons évanescents*, C. R., 28, **1849**, pp. 25 à 28.

Cauchy A., *Mémoire sur la réflexion et la réfraction de la lumière, et sur les nouveaux rayons réfléchis et réfractés,* **1849**, C. R., 28, pp. 57 à 65.

Cauchy A., *Réponse de M. Augustin Cauchy aux dernières observations de M. Duhamel,* C. R., 44, **1857**, p 80.

Chatzis K., *Mécanique rationnelle et mécanique des machines*, in *La formation polytechnicienne*, Paris, Ellipses, **1996**.

Clausius R., *Sur une forme nouvelle du second théorème principal de la théorie mécanique de la chaleur*, traduit des Annales de Poggendorff, 63, par G. Michaelis, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 20, **1855**, p. 64.

Clausius R., *Sur une forme nouvelle du second théorème principal de la théorie mécanique de la chaleur*, traduit des Annales de Poggendorff, 63, par G. Michaelis, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 20, **1855**, pp. 63 à 90.

Clausius R., *De la fonction potentielle et du potentiel*, traduit de l'Allemand par F. Folie, Paris, Gauthier-Villars, **1870**.

Clebsh A., *Théorie de l' élasticité des corps solides*, Traduite par MM. Barré de Saint-Venant et **Flamant**, avec des notes étendues de M. de **Saint-Venant,** Paris, Dunod, **1881**.

Colding A., *Lettre aux rédacteurs du Philosophical Magazine sur l'histoire du principe de conservation de l'énergie*, Traduit par M. Verdet, Annales de Chimie et de Physique, 1, 4° série,**1864**, pp. 466 à 477.

Combes Ch. , **Collignon** Ed. et **Phillips** Ed., *Exposé de la situation de la Mécanique appliquée*, Paris, Hachette, Imprimerie impériale, **1867**.

Cournot A. A., *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'Algèbre et la Géométrie*, Paris, Alger, Hachette, **1847**.

Cournot A. A., *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire*, t. 2, Paris, Hachette, **1861**.

Cournot A. A., *Considérations sur la marche des idées dans les temps modernes*, t.1, Paris, Hachette, **1872**.

Cotton F. A., *Application de la théorie des groupes à la chimie*, Paris, Dunod, **1968**.

Dahan-Dalmédico A., *Mathématisations. Augustin-Louis Cauchy et l'Ecole française*, Argenteuil, Editions du Choix, et Paris, Librairie Albert Blanchard, **1992**.

Deakin M. A. B., *Nineteenth century anticipations of modern theory of dynamical systems*, Archives of history of sciences, 39, **1988**, pp. 187 à 193.

Delaunay Ch., *Traité de Mécanique,* Paris, Anglois et Leclercq, Victor Masson, **1857.**

Dhombres J., *La théorie de la capillarité selon Laplace: mathématisation superficielle ou étendue?*, Revue d'Histoire des Sciences, 62, **1989**,pp. 44 à 77.

Dugas R., *La Mécanique au XVII° siècle*, Neuchatel, Editions du griffon, **1954**.

Dugas R., *Histoire de la mécanique*, 1° éd., Neuchatel, Editions du griffon, **1950**, rééd, Paris, Jacques Gabay, **1996.**

Duhamel B., *Observations faites par M. Duhamel au sujet d'un théorème de mécanique*, C. R., 44, **1857**.

Duhem P., *L'évolution de la mécanique*, Paris, A. Joanin, 1903, rééd., Paris, Hermann, **1905**.

Dumas J. B., *Discours de M. Dumas*, C.R., 66, 1868, pp. 90 et 91.

Dupré A., *Sur la mécanique et ses transformations*, Annales de Chimie et de Physique, 1, 4° série, 1860, pp. 175 à 180. Aussi: C. R. , 50, **1860**, pp. 588 à 591.

Dupré A., *Théorie mécanique de la chaleur*, Paris, Gauthier-Villars, **1869**.

Fabry Ch., *Propagation de la chaleur*, Paris, Armand Colin, **1942**.

Figuier L., *L'année scientifique et industrielle*, Paris, Hachette, **1868**.

Fizeau H., *Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux, et sur une expérience qui paraît démontrer que le mouvement des corps change la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans leur intérieur,* Annales de Chimie et de Physique, **1859**, 3° série, 57, pp. 385 à 404.

Flamant A., *Mécanique générale*, in *Encyclopédie des travaux publics* , 32, Paris, Bernard Tignol, **1888**.

Forester J. , *Chemistry and the conservation of energy: the work of James Prescott Joule,* Studies in history and philosophy of science, 6, **1975**, pp. 273 à 313.

Fourier J.,*Théorie analytique de la chaleur*, Firmin Didot, Paris, **1822**.

Furiet G., *Traité de mécanique* , Paris, Mallet-Bachelier, **1855**.

Green G., *On the laws of reflexion and refraction of light*, Transactions of Cambridge Philosophical Society, 7, **1838**, pp. 244 à 302.

Grove W. R., *Récents progrès de la Science. La continuité dans la nature*, Revue des cours scientifiques, 6, **1869**, pp. 683 à 686.

Harman P. M., *Energy, Force and Mater*, Cambridge University Press, 1° éd., **1982**, rééd., 1983 et 1985.

Heimann P. M., *Conversion of forces and the conservation of energy*, Centaurus, 18, **1974**.

Helmholtz H. von, *Ueber die Erhaltung der Kraft, Eine physikalische Abhandlung,* Berlin, G. Reimer, **1847**, aussi *Mémoire sur la conservation de la force*, trad. L. Pérard, Paris, Masson, 1869, aussi *The conservation of force: A physical memoir (1847)*, ed. Russell Kahl, Middletown (Connecticut), Wesleyan University press, 1971.

Helmholtz H., *Revue générale du développement des sciences dans les temps modernes,* Revue des cours scientifiques, 6,**1870**, pp. 92 à 95.

Israël G., *L'histoire du principe du déterminisme et ses rencontres avec les mathématiques*, in A. Dahan-Dalmédico, J. L. Chabert, K. Chemla, *Chaos et Déterminisme*, Paris, Seuil, **1992**.

Joule J. P., *Expériences sur l'identité entre le calorique et la force mécanique. Détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur dégagée pendant la friction du mercure*, C.R. , 25 , **1847**, p. 309.

Joule J. P., *Lettre à W. Thomson, Lettre J135*, Kelvin collection, Cambridge University Library, 3 Février 1853, cité par, P. M. Heimann, in *Conversion of forces and the conservation of energy,* Centaurus, 18, **1973**.

Keller F-A-E et Em., *Mémoire sur la cause de la pesanteur et des effets attribués à l'attraction universelle*, C. R., 56, **1863**, pp. 530 à 533.

Kuhn T. S., *Un exemple de découverte simultanée: la conservation de l'énergie*, in *La tension essentielle*, *Tradition et changement dans les Sciences*, trad. M.Biezunski, P. Jacob, A. Lyotard-May, G. Voyat, Paris, Gallimard, 1990, pp. 111 à 156, 1° éd. en Anglais, T. S. Kuhn, *The essential tension, Selected studies in scientific tradition and change*, **1977,** University of Chicago press, 1° pub., T. S. Kuhn, *Energy conservation as an Exemple of Simultaneous discovery,* in *Critical Problems in the History of Science,* Marshall Clagett, dir. publ., Madison, University of Wisconsin Press, 1959, pp. 321 à 356.

Lagrange J.-L, *Mécanique analytique*, Paris, 1788; 3° éd., revue et corrigée par M. J. Bertrand, Paris, Mallet- Bachelier, **1852**.

Lamé G., *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 1° éd., Paris, Gauthier-Villars, **1852**, 2° éd., Paris, Gauthier-Villars, **1866**.

Lamé G., *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur*, Paris, Mallet-Bachelier, **1861**.

Lamé G., *Note sur la marche à suivre pour découvrir le principe, seul véritablement universel, de la nature physique*, C. R., 56, **1863**, pp. 983 à 989.

Landau L. et **Lifchitz** E., *Théorie de l'élasticité* (*Physique théorique*, t. IV), Moscou, Mir, **1967**.

Laurent H., *Traité de Mécanique rationnelle*, t. 1, t, 2, Paris, Gauthier-Villars, **1870**.

Lecointe L., *Analyse de Descartes,* Namur, Adolphe Wesmael, **1865.**

Leray M., *Théorie nouvelle de la gravitation*, C.R., 59, **1869**, pp. 215 à 621.

Lesieur M., *La turbulence*, Presses universitaires de Grenoble, Grenoble, **1994.**

Locqueneux, R., *Préhistoire et Histoire de la Thermodynamique classique (Une histoire de la chaleur),* Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, 45, Paris, Blanchard ,**1996**.

Martin Em., *Recherches sur l'éther réel, comme l'un des grands principes de la nature physique*, C. R., 56, **1863,** pp. 1211 à 1214.

Mayer J. R., *Sur la transformation de la force vive en chaleur, et réciproquement (Extrait d'une Lettre de M. Mayer),* C. R., 27, **1848**, pp. 385 à 387.

Mayer J.-R., *Réclamation de priorité contre M. Joule, relativement à la loi de l'équivalence du calorique*, C. R., 27, **1849**.

Mayer J. R., *Les conséquences et les inconséquences de la théorie mécanique de la chaleur*, Recueil des cours scientifiques, 6, **1870**, pp. 124 à 126, p. 124.

Moigno abbé, *Répertoire d'optique moderne*, Paris, Leipzig, A. Franck, t. 1, **1847**.

Moigno abbé, *Leçons de mécanique analytique, Statique*, Gauthier-Villars, Paris , **1868.**

Mott-Smith M., *The conservation of energy simply explained*, Dover Publications, New York, **1964**.

Moyer D. F., *Energy, dynamics, hidden machinery, Rankine, Thomson and Tait, Maxwell*, Studies in history and philosophy of sciences, 8, **1977**, p. 251 à 268.

Navier C.-F., *Sur les lois des mouvements des fluides en ayant égard à l'adhésion des molécules*, Annales de Chimie et de Physique, 19, **1821**, pp. 244 à 260.

Navier C.-F., *Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Mémoires de l'Académie des sciences, 7, **1827,** pp. 375 à 396.

Newton I., *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, Londres, **1687**, 3° éd. **1726**.

Newton I., *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, trad. franç. de Gabrielle-Emilie de Breteuil, marquise du Chastelet, Paris, **1756-1759**; rééd. Blanchard, 1966; F. Gabay, 1989.

Newton I., *Optique,* 1704, **1717**; trad, J. P. Marat, Paris, Leroy, 1787, rééd., Paris, Christian Bourgois, 1989.

Nihoul J. C., *Cours moderne de mécanique rationnelle*, Paris, Albin Michel, **1968.**

Nordon M., *Histoire de l'hydraulique,* t. 1, *L'eau conquise*, Paris, Masson, **1991**, t. 2, *L'eau calculée*, Paris, Masson, **1992**.

Oziaux R., **Perrier** J., *Mécanique des fluides appliquée,* Paris. Bordas, 1978.

Panza M., *L'intuition et l'évidence. La philosophie kantienne et les géométries non euclidiennes; relecture et discussion*, in *Les savants et l'épistémologie vers la fin du XIX° siècle*, sous la direction de M. Panza et J. C. Pont , Paris, Blanchard, **1995**, pp. 39 à 87.

Piaron de Mondésir M., *Nouvelle méthode pour la solution des problèmes de mécanique*, C. R., 69 , **1869**, pp. 1351 à 1356.

Picard E., *La vie et l'œuvre de J. Boussinesq*, l'Institut, 28, **1933**.

Poisson S. D., *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques*, Annales de Chimie et de Physique, t. 36, **1828,** pp. 337 à 355.

Poisson S. D., *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, Annales de Chimie et de Physique,**1828**, t. 42, pp. 145 à 171.

Poncelet J., *Observations générales sur la question relative aux chocs*, C.R., 44, **1857**, p. 83.

Poncelet J., *Cours de mécanique appliquée aux machines*, Paris, Bachelier, **1874**.

Pourprix B., *G. S. Ohm théoricien de l'action contiguë*, Archives internationales d'Histoire de sciences, 134, 1995, pp. 30 à 56.

Rankine W. J. Macquorn , *On the conservation of energy,* The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 17, 4° serie, **1859**.

Rankine W. J. Macquorn, *On the general law of transformation of energy*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 28, 4° série, **1864**.

Reech F., *Cours de Mécanique d'après la nature généralement élastique des corps*, Paris, Carillan- Goery et V. Dalmont, **1852**.

Reech F., *Note sur un mémoire intitulé: Théorie des propriétés calorifiques et expansives des fluides élastiques*, C. R., 46, **1858**, pp. 84 à 89 et pp. 505 à 509.

Reech F., *Note sur les propriétés calorifiques et expansives des gaz*, C. R., 57, **1863**.

Résal H. , *Physique mathématique*, Paris, Gauthier-Villars, **1884.**

Rouché E. et **Comberousse** Ch. de, *Traité de Géométrie élémentaire*, première partie, Géométrie plane, Paris, Gauthier-Villars, **1873**.

Saint-Venant A. de, *Mémoires sur les théorèmes de la Mécanique*, présenté à l'Académie des sciences le 14 Avril **1834**, in *Encyclopédie des travaux publics* , 32, Paris, Bernard Tignol, 1888, pp. IX à XXXII.

Saint-Venant A. de, *Principes de Mécanique fondés sur la cinématique*, Paris, Bibliothèque de l'Institut de France, in 4° M 681 D, t. IV, n° 19, **1851**. Autre édition: **Saint-Venant** A. de, *Principes de Mécanique fondés sur la cinématique*, Paris, Mallet-Bachelier, **1851**.

Saint-Venant A. de, *Sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope*,Journal de Mathématiques pures et appliquées, 8, **1863**, pp. 257 à 395.

Saint-Venant A. de, *Théorie générale de l'élasticité*, in abbé Moigno, *Leçons de mécanique analytique, Statique*, Paris, Gauthier-Villars, **1868**.

Saint-Venant A. de (rapporteur) et **Delaunay**, **Bonnet**, **Jamin**, *Rapport sur le Mémoire de Monsieur Boussinesq, présenté le 19 Avril 1869, avec additions du 19 novembre, et relatif à la théorie des ondes liquides périodiques,* C. R., 72, **1870**, pp. 360 à 367.

Saint-Venant A. de, *Sur l'hydrodynamique des cours d'eau,* C. R., 74, **1872**, pp. 570 à 579, 649 à 657, 694 à 701, 770 à 774.

Saint-Venant A. de, *Sur les diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses*, Annales de Chimie et de Physique, 24, 4° série, **1872**, pp. 335 à 384.

Saint-Venant A. de, **Boussinesq** J., *Objections qui pourraient être faites au mémoire de 1872 de Monsieur Boussinesq, sur les principes de la mécanique etc.*, fonds Saint-Venant, carton 2, p. 16 du répertoire général du fonds, Archives de l'Académie des Sciences de Paris, manuscrit,10 feuillets, (le premier est daté du 30 Juin **1875**).

Saint-Venant A. de, *Sur la manière dont les vibrations calorifiques peuvent dilater les corps, et sur le coefficient des dilatations*, C. R., 82, **1876**, pp. 33 à 39.

Saint-Venant A. de, *De la constitution des atomes*, Bruxelles, F. Hayez, **1878**.

Saint-Venant A. de, in A. Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides,* trad. A. de Saint-Venant et Flamant, avec des Notes étendues de M. de Saint-Venant, Paris, Dunod, **1881.**

Sainte-Claire Deville H., *Principes généraux de la chimie d'après la thermodynamique,* Revue des cours scientifiques, 6, **1868**.

Sarrau Em., *Sur la propagation et la polarisation de la lumière dans les cristaux, second mémoire*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 13, 2° série, **1868**, pp. 59 à 110.

Séguin M., *Note à l' appui de l'opinion émise par M.Joule, sur l'identité du mouvement et du calorique* , C. R. , 25, **1847**, pp. 306 à 308.

Séguin M., *Réflexions et annotations,* in W. R. Grove, *Corrélation des forces physiques*, trad. de l'abbé Moigno, Paris, Mallet, **1856**.

Séguin M., *Mémoire sur la propagation et l'origine de la force*, Cosmos, 13, **1858**.

Séris J.-P., *Machine et communication*, Paris, Vrin, **1987**.

Smith Crosbie and **Wise** Norton, *Energy and Empire*, Cambridge University Press, Cambridge, **1989**.

Sturm Ch. , *Cours de Mécanique de l'Ecole polytechnique*, t. 1, t. 2, Paris, Gauthier-Villars, **1867**; 3° éd., **1881**.

Tait P. G., *On the conservation of energy*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 29, 4° série,**1863**, p. 251.

Tilly M. de, *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique,* Bordeaux, Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 3, 2° série, **1879**.

Thomson W., *Examen de la puissance motrice de la chaleur de S. Carnot, avec les résultats numériques déduits de l'expérience de M. Regnault sur la vapeur d'eau*, Extraits par M. Verdet, Annales de Chimie et de Physique, 35, 3° série,**1852.**

Thomson W., *Mémoire sur la théorie dynamique de la Chaleur*, Extrait par M. Verdet, Annales de Chimie et de Physique, 36, 3° série, **1852**, pp. 118 à 126.

Thomson W. and **Tait** P. G., *Treatise on natural philosophy*, Oxford, **1867**; vol. 1, part. 2, London, Cambridge University press, **1883**; vol. 1, part. 1, London, Cambridge University press, **1896**.

Thomson W. and **Tait** P. G., *Energy*, Good Words, 3, **1867**.

Thomson W. (Lord Kelvin), *On Vortex atoms,* The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 24, 4° serie, **1867.**

Thomson Sir W., *Le temps géologique - Influence des marées sur les mouvements célestes- Chaleur du soleil- Chaleur de la terre-Age de la terre,* Revue des cours scientifiques, 10, Paris, **1868**.

Todhunter I., *A history of elasticity and of strength of materials*, 1° éd, Vol. I, **1886**, Vol. II, part 1 et 2, **1893**, rééd. New York, Dover, **1960**.

Tyndall J., *La chaleur considérée comme un mode de mouvement*, trad., abbé Moigno, Paris, E. Giraud, **1864**.

Tyndall J. *Les glaciers et les transformations de l'eau*, Paris, Germer Baillère, **1880**.

Verdet Em., *Introduction aux œuvres de Fresnel*, in Œuvres complètes d'Augustin Fresnel, Mallet -Bachelier, Paris, **1866**.

Verdet Em., *Théorie mécanique de la chaleur*, publié par MM. Prudhon et Violle, Paris, Masson, t. 1, **1868**, t. 2, **1872**.

Violle J., *Sur l'équivalent mécanique de la chaleur*, Paris, Gauthier-Villars, **1870**.

Wiener O., *Ondes stationnaires et direction de la vibration de la lumière polarisée*, Annales de Chimie et de Physique, **1891**, 23, 6°, pp. 387 à 429.

Zerner M., *Le règne de Joseph Bertrand*, Université de Nice-Sophia-Antipolis, Prépublication, n° 288, 1991, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences, 34, **1991**, pp. 298 à 322.

Zerner M., *Origine et réception des articles de Boussinesq sur le déterminisme*, in *Contra los tiranos de la rutina*, sous la direction de S. Garcia, D. Flament et V. Navarro, Madrid, Ediciones de la comunidad de Madrid, **1992.**

Zerner M., *La transformation des traités français d'analyse (1870 - 1914),* Université de Nice-Sophia-Antipolis, Prépublication n° 389, juin **1994**, **références de publication à venir**.

Table des matières