

N° d'ordre :

## THÈSE

Présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

Pour obtenir le grade de :

## DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

Spécialité Productique : Automatique et Informatique Industrielle

Par

Moufida KSOURI-LAHMARI

Diplômée de l'ENSET de Tunis



## CONTRIBUTIONS À LA COMMANDE MULTIMODÈLE DES PROCESSUS COMPLEXES

Soutenue le 5 juillet 1999 devant le Jury d'examen

Président :	G. Dauphin-Tanguy	Professeur à l'EC Lille
Rapporteurs :	J. Bernussou	Directeur de recherche au LAAS
	R. Ben Abdennour	Professeur à l'ENIG
Examineurs :	M. Benrejeb	Professeur à l'ENIT
	P. Borne	Professeur à l'EC Lille
	A. El Kamel	Maître de Conférences à l'EC Lille
	S. Maouche	Professeur à Lille I

Thèse préparée à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis sous la Direction du Professeur Mohamed Benrejeb et à l'Ecole Centrale de Lille sous la Direction du Professeur Pierre Borne et du Docteur Abdelkader El Kamel.

**A mon mari**

## *Remerciements*

*Le présent travail a été réalisé dans le Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle (LAI) de l'Ecole Centrale de Lille et le Laboratoire de Recherche en Automatique (LARA) de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis.*

*Je tiens tout d'abord à remercier très vivement le Professeur Pierre Bonne, Directeur Scientifique de l'Ecole Centrale de Lille. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour toute l'aide qu'il m'a apporté et l'enseignement qu'il a su me dispenser. Je le remercie aussi très fort pour son inégalable côté humain.*

*Il m'est aussi très agréable de remercier le Professeur Mohamed Benrejeb, Directeur du LARA qui a bien voulu m'accueillir au sein de son équipe et me faire profiter de sa compétence et de ses connaissances, je lui voue toute ma gratitude.*

*Qu'il me soit permis de remercier aussi Monsieur Abdelkader El Kamel, Maître de Conférences à l'Ecole Centrale de Lille pour ses conseils judicieux et ses encouragements qui m'ont été d'une aide précieuse.*

*Madame Geneviève Dauphin Tanguy, Professeur à l'École Centrale de Lille qui m'a fait le très grand honneur d'accepter de présider mon jury de thèse. Je lui suis très reconnaissante et l'en remercie très vivement.*

*Je remercie aussi Monsieur Ridha Ben Abdennour, Professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Gabès pour avoir accepté de rapporter sur ce travail. Je tiens aussi à lui exprimer toute ma gratitude pour son aide très précieuse lors du démarrage de mes recherches.*

*Qu'il me soit permis de remercier Monsieur Jacques Bernusson, Directeur de recherche au LAAS pour m'avoir fait l'honneur de rapporter sur ce travail.*

*Mes remerciements vont aussi à Monsieur Salah Maouche, Professeur à l'Université Lille I pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de participer au jury de cette thèse.*

*Enfin, je remercie tous ceux qui ont pu de près ou de loin m'aider à finaliser ce travail.*

## TABLE DES MATIÈRES

Table des matières.....	3
Introduction générale .....	5
Chapitre 1 : Commande multimodèle	13
1.1 Introduction.....	15
1.2 De la boîte noire à la boîte grise.....	15
1.3 Approche multimodèle.....	18
1.4 Approche multicommande.....	24
1.5 Le multicritère.....	27
1.6 Mise en œuvre pratique.....	28
1.7 Conclusion.....	46
Chapitre 2 : Validité des modèles	47
2.1 Introduction .....	49
2.2 Calcul des résidus basé sur les observateurs.....	50
2.3 Autres types de résidus.....	57
2.4 Calcul des validités.....	60
2.5 Utilisation des résidus pour la reconfiguration automatique en cas de panne .....	65
2.6 Exemple d'application de la fusion.....	77

2.7	Conclusion.....	86
Chapitre 3 :	Choix de la base de modèles	89
3.1	Introduction.....	91
3.2	Définition des modèles extrêmes : cas des processus linéaires incertains.....	92
3.3	Commande multimodèle des systèmes linéaires incertains.....	96
3.4	Systèmes non linéaires et/ou non stationnaire et/ou à paramètres incertains.....	96
3.5	Application à un système non linéaire.....	98
3.6	Application à un système linéaire non stationnaire incertain.....	100
3.7	Application à un système non linéaire à paramètres incertains.....	122
3.8	Conclusion.....	125
Chapitre 4 :	Stabilité et sensibilité de la commande multimodèle	127
4.1	Introduction.....	129
4.2	Placement de pôles et modélisation des processus.....	130
4.3	Cas de la commande multimodèle.....	132
4.4	Etude de la stabilité dans le cas non linéaire.....	135
4.5	Cas d'un système du troisième ordre.....	140
4.6	Exemple d'un système d'ordre élevé.....	148
4.7	Conclusion.....	156
	Conclusion générale	157
	Références bibliographiques	163

## Introduction Générale



## INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'ingénieur d'aujourd'hui se trouve confronté à des problèmes de plus en plus complexes. Cette complexité est liée tout d'abord à la nature des systèmes considérés [Borne97]: systèmes de grande dimension, non linéaires, à paramètres répartis, non stationnaires, ... D'autre part les objectifs fixés sont de plus en plus ambitieux, faisant intervenir plusieurs paramètres et des fonctions assez complexes. De plus, les contraintes imposées sont également plus nombreuses et tiennent compte de facteurs très variés : techniques, économiques et environnementaux.

On peut représenter la plupart des problèmes rencontrés par l'automaticien de la manière suivante, valable dans une description continue :

Soit le processus

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\in \mathcal{R}^n, \\ \mathbf{u} &\in \mathcal{R}^m. \end{aligned}$$

et  $t$  le temps.

On cherche à minimiser la fonction coût :

$$J = J(\{\mathbf{x}\}, \{\mathbf{u}\}, \{t\}),$$

qui dépend de l'ensemble des valeurs de  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{u}(t)$  sur l'horizon considéré et sous des contraintes instantanées et/ou intégrales.

Le processus est décrit par un système d'équations différentielles continues éventuellement par morceaux, non linéaires, ..., le critère  $J$  est une fonction scalaire plus ou moins complexe. On rencontre de plus en plus des critères qui s'énoncent de manière globale, ce qui conduit à des difficultés croissantes lors de leur traduction en critères exploitables. Les exemples de ce type dans les domaines socio-économiques sont nombreux et on peut citer des critères du type « améliorer les conditions de vie d'une population » ou « optimiser la rentabilité d'une entreprise ». De telles situations obligent à une parfaite connaissance préalable du processus afin de pouvoir traduire simplement le critère énoncé en termes de fonctions coûts habituelles.

Les contraintes imposées aux problèmes d'optimisation découlent de considérations essentiellement liées d'une part au processus lui-même, d'autre part aux moyens d'action, quantités et natures, dont dispose le décideur. Ce dernier, jouant le rôle de « régulateur », élabore la commande  $u(t)$  à appliquer au système.

Plus la connaissance du système et de son environnement est complète et précise et plus l'approche du problème est facilitée. La méconnaissance partielle de certains éléments du processus conduit souvent à des contraintes supplémentaires.

Durant cette dernière décennie, plusieurs chercheurs [Borne 97, Babuska 97, Banerjee 97, Delmotte 96, Dubois 96, Halme 97, Ksouri 97, Meila 97, Murray 97, Narendra 97, Schott 97] se sont intéressés à l'approche multimodèle comme moyen permettant de contourner les difficultés énoncées précédemment, auxquelles il faut ajouter tous les aspects liés à la méconnaissance et aux incertitudes de modélisation.

L'idée est de représenter le système par plusieurs modèles possédant chacun un domaine de validité donné. On remplace alors le processus décrit par l'équation (1) et schématisé par la figure 1 par celui de la figure 2

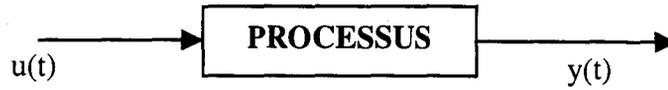


Figure 1

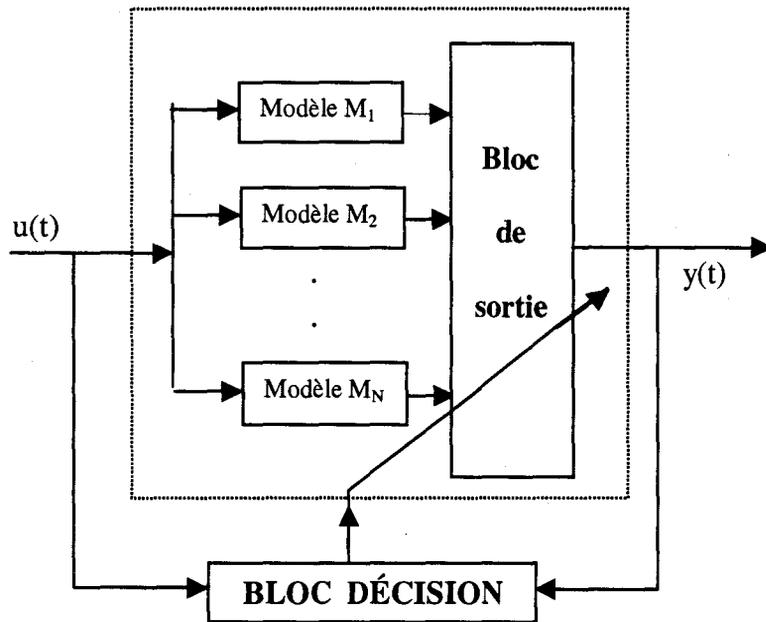


Figure 2

Chaque modèle  $M_i$  possède un domaine de validité  $\mathcal{D}_i$  qui peut être du type spatial, temporel ou spatio-temporel. L'avantage de l'approche multimodèle est lié à la simplicité des modèles  $M_i$  choisis. Ces derniers n'ont souvent rien à voir avec le processus réel envisagé dans sa globalité. Ils peuvent être d'ordre plus faible, de structure différente, linéaires au lieu de non linéaires, mettant en jeu des paramètres différents,...

La figure 2 montre que l'approche multimodèle implique la réalisation d'une couche de décision qui permet de choisir le modèle  $M_i$  adéquat. Tenant compte de l'état actuel du système, la couche décision commande le bloc de sortie.

Il est évident que pour garder les avantages de la description multimodèle, il est nécessaire de simplifier au maximum la couche de décision et le bloc de sortie.

Les contraintes d'exploitation en temps réel viennent s'ajouter à ce qui précède pour obliger à considérer sérieusement le compromis précision/fonctionnalité. Le principe de compatibilité [Zadeh 65, Zadeh 78] illustre ce qui précède :

As the complexity of a system increases, our ability to make precise and yet significant statements about its behaviour diminishes until a threshold is reached beyond which precision and significance (or relevance) become almost mutually exclusive characteristics.

L'approche multimodèle, bien que récente par sa dénomination, se trouve en fait utilisée depuis plusieurs décennies dans la démarche de linéarisation autour d'un point de fonctionnement. Dans ce cas le système donné par l'équation (1) est remplacé par :

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$$

où  $A_i$  et  $B_i$  sont, dans le cas d'un linéarisé tangent, les jacobiens de  $f$  :

$$\begin{cases} A_i = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{P_i} \\ B_i = \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{P_i} \end{cases}$$

$P_i$  étant le point de fonctionnement considéré.

Plusieurs procédés industriels sont commandés par des régulateurs du type PID [Borne 97, Borne 93, Zhao 93], calculés à partir de modèles linéarisés autour de points de fonctionnement. Dans le cas où ce dernier évoluerait, on pourrait grâce à une commande

adaptative suivre cette évolution [Ben Abdennour96, Narendra97]. En milieu industriel, les régulateurs auto-ajustables type STR (Self Tunning Regulator) sont très utilisés. Ces dispositifs supposent que l'évolution du point de fonctionnement reste de dynamique assez faible devant celle de l'adaptation.

L'approche adaptative est aussi confrontée aux problèmes de la connaissance précise du modèle du processus, ce qui n'est pas le cas de plusieurs situations pratiques.

La commande par l'approche multimodèle qui peut être multimodèle et/ou multicommande, propose justement, une alternative aux situations complexes citées précédemment, mais reste aussi confrontée à plusieurs problèmes encore d'actualité au niveau de la recherche. Parmi ces problèmes nous citons :

- 1 Le calcul de la validité  $v_i$  d'un modèle  $M_i$ .
- 2 Le choix et le nombre de modèles  $M_i$  à mettre en œuvre.
- 3 La technique adéquate de fusion ou de commutation de commandes.

De plus, beaucoup d'efforts restent à faire quant à l'étude analytique de la stabilité en multicommande.

Dans notre travail, nous nous sommes intéressés aux aspects cités plus haut et nous proposons des contributions au niveau de chacun des points cités.

Dans le premier chapitre, intitulé commande multimodèle, nous proposons un rappel théorique sur le fondement de la théorie multimodèle, nous proposerons un nouveau concept : « le multicritère », puis par des exemples de simulations nous illustrons ce qui vient d'être avancé.

Le deuxième chapitre traite des problèmes liés au calcul des validités. Nous proposons des résultats originaux pour le calcul des validités des modèles de la bibliothèque et la fusion des commandes. Plusieurs exemples d'illustrations pratiques sont exposés.

Dans le troisième chapitre intitulé « Choix de la base de modèles », nous apportons une solution originale quant à la construction de la bibliothèque de modèles ou de commandes, qui permet de limiter le nombre de modèles à six au maximum

Le quatrième chapitre, aborde le problème de la stabilité de la commande multimodèle. Nous proposons un théorème qui constitue une condition suffisante de stabilité, applicable à une classe particulière mais assez large de systèmes non linéaires. Une étude de la sensibilité vis à vis des variations imprévues des paramètres a aussi été effectuée.

## Chapitre 1

### Commande Multimodèle



# **CHAPITRE 1**

## **Commande Multimodèle**

### **1.1 Introduction**

Dans ce chapitre une description du principe de la commande multimodèle est donnée en même temps qu'une présentation de la situation des recherches actuelles dans le domaine. Nous parlerons aussi des concepts multimodèle et multicommande puis nous proposerons un nouveau concept le multicritère. Des exemples de simulations viendront en fin de chapitre illustrer ce qui vient d'être avancé.

### **1.2 De la boîte noire à la boîte grise**

La théorie de la commande s'est beaucoup développée à partir du moment où une formulation mathématique claire et précise d'une part du modèle du processus à commander et d'autre part des objectifs de la commande a été disponible.

Il est évident que la méconnaissance du modèle du processus est un handicap que les automaticiens de tous temps ont essayé de contourner. Ainsi, pendant longtemps on a parlé de

boite noire. Cette dernière représente le processus qui interagit avec le milieu extérieur par le biais de deux types de signaux, les signaux d'entrée ou de commande  $u(t)$  et les signaux de sortie ou de mesure  $y(t)$  comme le montre la figure 1.1



Figure 1.1 La boite noire

Il est certain que sur le plan pratique les choses se passent autrement. En effet, même si on ne dispose pas de modèle mathématique du processus, on effectue plusieurs essais pratiques afin de pouvoir décider du type de commande à appliquer. On se rend alors compte si le système présente ou non un retard, s'il est non minimum ou minimum de phase, s'il est de classe zéro ou non, ...

En fait la boite noire considérée au départ devient grise comme l'illustre la figure 1.2. Plusieurs informations importantes pour la commande deviennent alors disponibles.

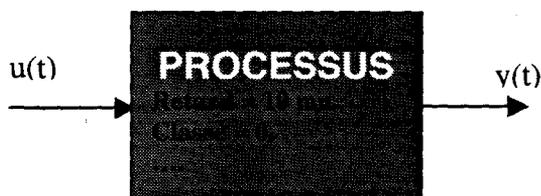


Figure 1.2 La boite grise

L'exploitation d'informations partielles recueillies sur le processus a obtenu un regain d'intérêt avec le développement de nouvelles techniques d'aide à la décision telles que la logique floue et les réseaux de neurones. Avec l'approche floue en particulier, il devient possible d'envisager une commande performante d'un système décrit d'une manière incertaine ou imprécise.

Le problème qui reste encore posé dans la pratique est lié à la façon avec laquelle il faut inclure les informations partielles obtenues sur le système. En effet, si dans certains cas les essais sont orientés dans un sens précis et si l'information recherchée est connue d'avance, malheureusement dans le cas le plus fréquent on ne dispose pas d'assez d'informations sur le système et on n'a pas de méthode systématique permettant d'en tenir compte lors de l'élaboration de la commande.

Actuellement avec les progrès réalisés sur le plan technologique, la prise en compte en temps réel du « blanchissement » de la boîte noire est envisageable. En effet, il est tout à fait possible, lors de l'observation du comportement du système en temps réel, d'actualiser la base de données relative à la connaissance du système et du même coup d'en tenir compte lors de l'élaboration de la commande. Des configurations de ce type sont maintenant de plus en plus envisageables par exemple dans un environnement utilisant une approche neuronale mais aussi dans d'autres environnements [Babuska 97, Borne 97, Bossley 95, Johansen 94, Lee 90, Narendra 95].

### 1.3 Approche multimodèle

L'idée de représenter un processus par plusieurs modèles n'est pas nouvelle. En vérité, tous les concepteurs de modèles savent très bien que le modèle qu'ils sont entrain de développer n'est valable que dans un domaine de fonctionnement précis. Les grandes théories de la physique elles mêmes ont été confrontées, parfois de manière douloureuse, à ces problèmes. On citera l'avènement de la mécanique relativiste et son positionnement par rapport à la mécanique galiléenne ou classique.

Les constructeurs de modèles sont de plus en plus attentifs à la notion de domaine de validité : l'eau cet élément si nécessaire à la vie est rencontré sous forme liquide, solide ou gazeuse suivant les valeurs des paramètres température et pression. C'est pour cela qu'on rattache chaque modèle à un domaine de validité.

L'automaticien, pour réaliser les objectifs de la commande, a besoin d'un modèle ou d'un ensemble de modèles qui représentent convenablement le processus dans ses divers domaines de fonctionnement [Johansen 94, Demotte 97].

Le processus peut être décrit par plusieurs modèles  $M_1, M_2, \dots, M_N$  possédant chacun un domaine de validité  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_N$ . Si  $x(t)$  est l'état du système,  $u(t)$  l'ensemble des commandes et  $y(t)$  les sorties, on peut écrire les représentations d'état suivantes :

Modèle  $M_1$ , domaine de validité  $\mathcal{D}_1$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, u, t) \\ y_1 = g_1(x_1, u, t) \end{cases}$$

Modèle  $M_2$ , domaine de validité  $\mathcal{D}_2$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = f_2(x_2, u, t) \\ y_2 = g_2(x_2, u, t) \end{cases}$$

Modèle  $M_N$ , domaine de validité  $\mathcal{D}_N$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_N = f_N(x_N, u, t) \\ y_N = g_N(x_N, u, t) \end{cases}$$

Les variables  $x(t)$ ,  $u(t)$  et  $y(t)$  appartiennent respectivement à  $\mathcal{R}^n$ ,  $\mathcal{R}^m$ ,  $\mathcal{R}^p$ .

Les domaines  $\mathcal{D}_i$  peuvent être disjoints comme l'indique la figure 1.3. dans ces conditions les coefficients normalisés de validité  $v_1, v_2, \dots, v_N$  ne peuvent prendre que des valeurs 0 ou 1 et vérifient la relation :

$$v_1 + v_2 + \dots + v_N = 1.$$

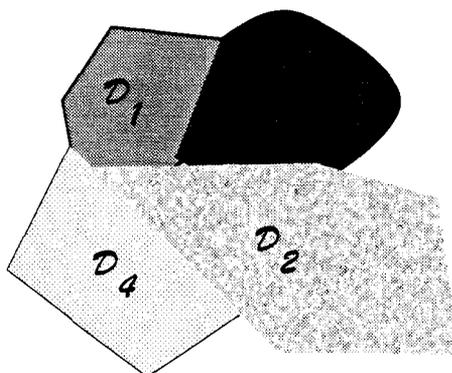


Figure 1.3 Domaines de validité disjoints

A un instant donné, il n'y a qu'un modèle qui est valable, soit par exemple  $M_1$ , la validité  $v_1$  est égale à 1, toutes les autres sont nulles.

Ce type de situation est fréquent dans le cas de systèmes à configurations multiples, ou à plusieurs modes de fonctionnement. C'est aussi le cas des fonctionnements défailants ou dégradés. L'exemple du projet de fusée lancée à partir de la terre vers la planète Mars peut illustrer convenablement cette situation. En effet, il est évident que dans la phase de décollage, le modèle de la fusée tient compte de l'attraction terrestre mais pas de celle de Mars, par contre à l'arrivée cela sera l'inverse, le modèle tiendra compte de l'attraction de Mars et négligera celle de la terre, en cours de route les deux attractions seront négligées.

Les exemples sont nombreux et peuvent être multipliés, citons seulement le cas des systèmes électromécaniques de plus en plus nombreux conçus pour exécuter plusieurs tâches ou fonctions différentes et qui sont souvent à configurations multiples.

Une autre situation qui peut être aussi rencontrée dans une description multimodèle est le cas où les domaines de validités se chevauchent ou possèdent des zones communes, comme le montre la figure 1.4.

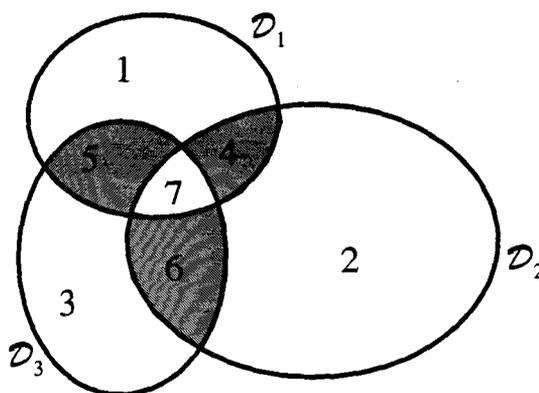


Figure 1.4 Domaines de validité avec recouvrement

On peut rencontrer l'une des situations suivantes :

- Un seul modèle est valable, son coefficient de validité vaut 1, les autres sont nuls, c'est le cas des régions 1, 2 et 3 dans lesquelles le modèle correspondant est supposé localement valable.
- Deux modèles sont partiellement valables en même temps, les validités correspondantes sont non nulles, leur somme est égale à 1, c'est le cas des régions 4, 5 et 6.
- Trois modèles ou plus sont partiellement valables, ce qui correspond au cas de la région 7 de la figure 1.4.

Sur le plan pratique, quand un modèle unique est valable (validité égale à 1), le système peut être représenté par ce dernier modèle. Mais si plusieurs modèles sont à validités non nulles comment peut-on procéder ?

Plusieurs solutions sont proposées dans la littérature [Babuska 97, Borne 97, Delmotte 97] :

- On peut réaliser une fusion des états. Pour illustrer ceci, on a envisagé le cas de la région 4 de la figure 1.4. les modèles  $M_1$  et  $M_2$  sont vrais avec des validités respectives  $v_1$  et  $v_2$ . On a  $v_1 + v_2 = 1$  et  $v_3 = 0$ . On procède alors de la manière suivante, comme l'illustre la figure 1.5 : on excite les modèles  $M_1$  et  $M_2$  par la commande  $u(t)$  et on observe les états  $x_1$  et  $x_2$  de même signification physique. L'état  $x(t)$  est donné par la somme pondérée de  $x_1$  et  $x_2$  soit :

$$x(t) = v_1 x_1(t) + v_2 x_2(t).$$

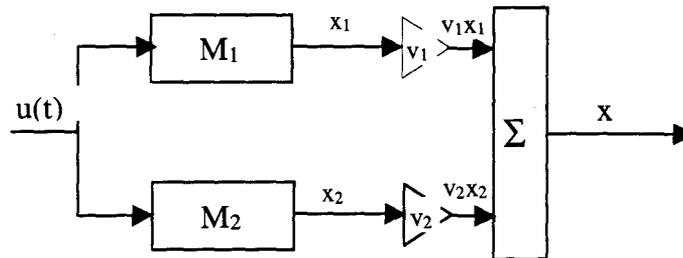


Figure 1.5 Fusion des états

- On peut réaliser une fusion au niveau des sorties, ce qui revient à écrire :

$$y(t) = \sum v_i y_i(t),$$

avec  $y_i$  la sortie du modèle  $M_i$  et  $v_i$  sa validité. Tous les modèles  $M_i$  sont excités par le même signal de commande  $u(t)$ . Dans ce cas il n'est pas nécessaire que les modèles soient de nature ni d'ordre identiques.

- On peut aussi réaliser une fusion au niveau des modèles. Supposons par exemple que les modèles  $M_1$  et  $M_2$  de même ordre et de même structure soient donnés par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u \end{cases}$$

on écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

avec :

$$A = v_1 A_1 + v_2 A_2,$$

$$B = v_1 B_1 + v_2 B_2,$$

$$C = v_1 C_1 + v_2 C_2,$$

$$D = v_1 D_1 + v_2 D_2.$$

Parmi les problèmes qui se posent lors de la mise en œuvre pratique de l'approche multimodèle, il faut citer celui qui est lié aux conditions initiales. En effet, les évolutions de chaque modèle  $M_i$  dépendent en plus des signaux d'entrées  $u(t)$ , des conditions initiales qui sont au nombre de  $n$  (ordre de  $M_i$ ).

Il devient alors impératif de connaître ou d'estimer à l'instant " $t-1$ " l'état du processus, supposé décrit par chaque modèle  $M_i$  afin de pouvoir l'utiliser comme nouvelle condition initiale à " $t-1$ " et faire évoluer les modèles partiels, dont les sorties à l'instant  $t$  fourniront les états  $x_i(t)$  comme le montre le schéma de la figure 1.6.

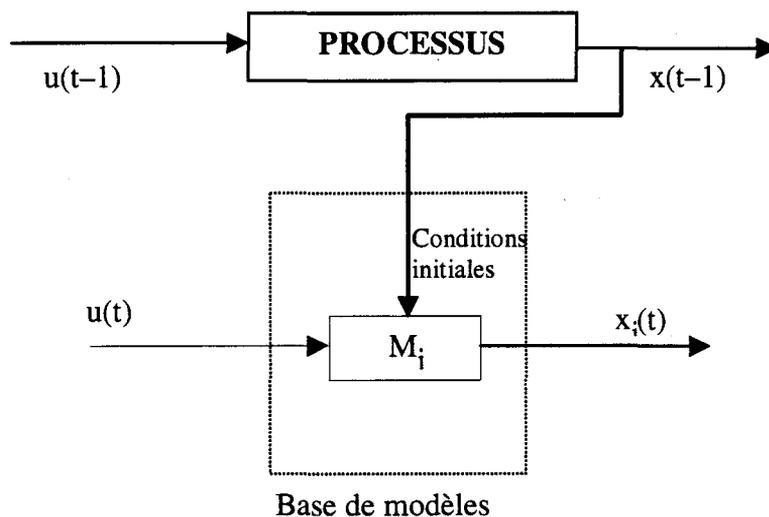


Figure 1.6 Multimodèle et conditions initiales

L'approche multimodèle a fait beaucoup d'adeptes et certains auteurs proposent de concevoir pour chaque processus une bibliothèque dynamique de modèles. Cette dernière, en fonction des performances exigées, pourra s'enrichir et augmenter de taille. Malheureusement, pour les applications pratiques la taille de cette bibliothèque peut constituer un handicap et beaucoup de précautions sont à prendre pour lui éviter d'atteindre des tailles incompatibles avec l'exploitation en temps réel. Nous proposons justement plus loin au chapitre 3, une nouvelle approche qui permet de limiter le nombre de modèles représentatifs à quatre, cinq ou six, tout en garantissant une commande performante.

#### 1.4 Approche multicommande

La multicommande ou commande multimodèle, consiste simplement à élaborer des commandes à partir de chacun des modèles  $M_i$  de la bibliothèque. Une technique du type commande optimale, placement de pôles ou autre peut être utilisée. On se donne généralement le critère à optimiser, soit  $J(x,u,t)$  et on résout les  $N$  problèmes suivants :

$$\underset{u_i}{\text{Min}} J_i(x_i, u_i, t)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_i, u_i, t) \\ y_i = g_i(x_i, u_i, t) \end{cases}$$

On obtient alors les commandes  $u_1, u_2, \dots, u_N$  préconisées au sens du critère pour chacun des modèles de la bibliothèque.

Plusieurs situations peuvent être alors envisagées suivant que les domaines de validité sont disjoints ou non :

- **Cas des domaines de validité disjoints**

Dans ce cas il n'y a à chaque instant qu'un seul modèle de la bibliothèque de validité égale à 1, soit par exemple  $v_i$ . La commande à appliquer est alors tout simplement la valeur calculée à partir du modèle correspondant, c'est à dire  $u(t) = u_i(t)$ .

La commande  $u(t)$  coïncide à chaque instant avec celle du modèle à validité unité. Il y a commutation de commande.

- **Cas des domaines de validité ayant des recouvrements**

Plusieurs solutions peuvent être apportées :

a. On peut écrire la commande  $u(t)$  comme une fusion des commandes :

$$u(t) = \sum_{i=1}^N v_i u_i(t).$$

b. On peut réaliser la fusion non pas au niveau des commandes mais au niveau des coefficients des régulateurs. Par exemple dans une commande par retour d'état, si  $\mathcal{L}_i$

est le gain de retour d'état préconisé par le modèle  $M_i$ , on pourra choisir un gain de retour d'état obtenu par la formule :

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N v_i \mathcal{L}_i.$$

De la même manière, on peut écrire les coefficients d'un régulateur RST dont les coefficients sont obtenus par fusion des coefficients des RST partiels.

Pour certaines applications, on peut opter pour des régulateurs ayant fait leurs preuves en pratique. On connaît bien par exemple l'intérêt qu'offre un régulateur du type PID dans le cas de problèmes de régulation. Un tel régulateur est très utilisé dans les milieux industriels et se montre encore plus performant au voisinage du point de consigne. Pour cette raison nous proposons d'exploiter ce type de réglage en commutation de commande dès que le système s'approche de son point de stabilisation dans le cas d'un problème de régulation. Nous prouverons l'originalité et l'intérêt de la mise en œuvre de cette idée dans le paragraphe 1.6 à l'aide d'une application pratique.

Par cette dernière remarque, nous avons voulu introduire l'idée que la multicommande n'est pas uniquement le fruit des commandes issues des modèles de la bibliothèque, mais peut être introduite à partir de concepts liés à une certaine expertise du problème de l'automatique.

En multicommande, il y a lieu aussi de bien prendre en considération des situations où les conditions initiales peuvent jouer un rôle important, par exemple lors de l'utilisation d'actions du type intégral.

## 1.5 Le multicritère

Nous proposons d'introduire dans ce paragraphe un nouveau concept, le multicritère et pour le justifier nous donnons l'exemple simplifié suivant :

On considère le projet d'envoyer une fusée sur la lune. Supposons qu'on cherche à minimiser la durée du voyage en même temps que l'énergie dépensée. Cet exemple est tout à fait imaginaire et constitue une approche assez simplifiée de la situation réelle.

Il est certain que le critère global « temps minimum », est difficile à traiter tel que. Par contre il est tout à fait réaliste de considérer le voyage comme une succession de trois étapes :

- Un décollage et un trajet dans l'atmosphère terrestre.
- Un parcours hors influence des attractions de la terre et de la lune.
- Un alunissage précédé d'un trajet sous l'influence de l'attraction de la lune.

Le critère global peut évidemment s'écrire comme la somme de trois critères :

$$J = J_1 + J_2 + J_3.$$

Il s'agit dès lors d'optimiser chaque critère à part. le problème gagne en simplicité et devient plus facile à mettre en œuvre.

En fait l'automaticien, dans ses activités de tous les jours, face à des problèmes de plus en plus complexes, est amené à décomposer le problème global, à subdiviser les étapes, à essayer de se ramener à des situations qui lui sont familières, ...

## 1.6 Mise en œuvre pratique

### Introduction :

Les deux types de commandes utilisées dans l'exemple qui sera présenté dans la suite sont la commande optimale et la régulation proportionnelle intégrale.

La première permettra d'amener le système d'un état de départ à un état d'arrivée et la seconde maintiendra la sortie à la valeur atteinte.

On mettra en évidence ainsi la démarche multicommande sur une situation originale où les commandes utilisées ne sont pas nécessairement issues de la bibliothèque des modèles.

Dans une deuxième partie, on utilisera la stratégie multimodèle. Ainsi, le processus sera représenté par des modèles locaux différents. Le choix des points de fonctionnements autour desquels le modèle est linéarisé sera présenté par la suite. Cette linéarisation a l'avantage de permettre la représentation du modèle initial assez complexe, par des modèles beaucoup plus simples. Il est évident que l'on essaiera de maintenir globalement toutes les performances du système.

Pour les passages d'un modèle à un autre, plusieurs méthodes seront présentées.

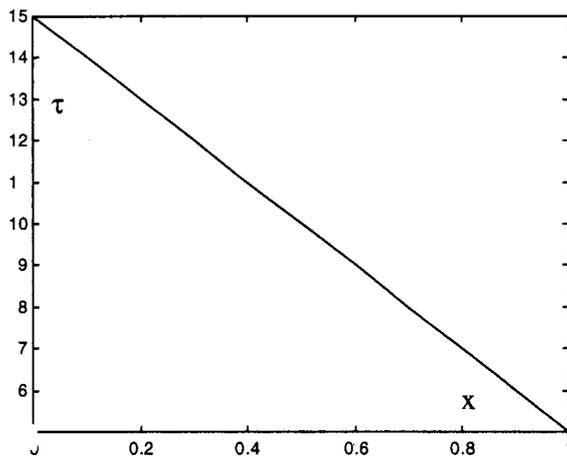
### Présentation du modèle

On considère le modèle de la référence [Delmotte 97] décrit par les équations suivantes :

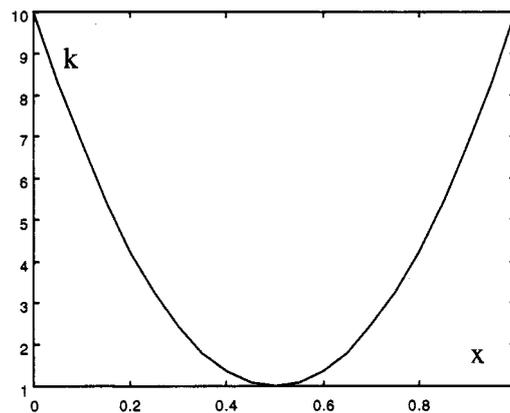
$$\begin{aligned}x + \tau \dot{x} &= ku \\k &= 36x(x - 1) + 10 \\ \tau &= 15 - 10x\end{aligned}$$

On impose à la commande  $u(t)$  d'être toujours inférieure à 2.2. On remarque que le modèle est fortement non linéaire. En effet, son gain statique et sa constante de temps varient tous les deux en fonction des valeurs de la sortie  $x$ .

On voit sur la figure 1.7 que  $\tau$  est une fonction décroissante de  $x$  et passe de 15 s pour  $x = 0$  à 5 s pour  $x = 1$ . Alors que le gain  $k$  présente un minimum pour  $x = 0.5$  ( Figure 1.8).



**Figure 1.7** Variation de la constante de temps  $\tau$  en fonction de l'état  $x$



**Figure 1.8** Variation du gain  $k$  en fonction de l'état  $x$

**Position du problème**

On cherche à amener le système de l'état  $x = 0$  à l'état  $x = 1$  en un temps fini inférieur ou égal à 5 s tout en minimisant le critère J donné par:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [(x - x_f)^2 + u^2] dt$$

Après ce temps caractérisant le régime transitoire, le système doit être maintenu à la valeur finale  $x_f$

**Mise en œuvre d'une commande basée sur l'approche optimale calculée à chaque instant pour le modèle instantané**

Soit  $y_c$  la consigne, pour  $\tau$  et  $k$  fixés, la commande est donnée par l'expression  $u = -\mathcal{L} x + \mathcal{L} y_c$  comme le montre le schéma de la figure 1.9.

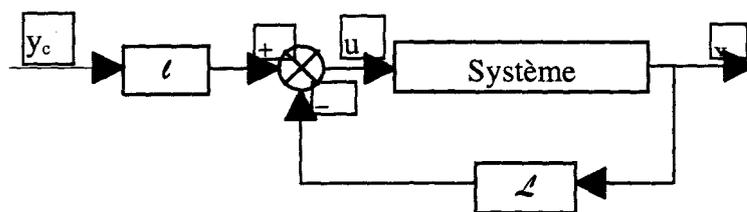


Figure 1.9 Commande par retour d'état

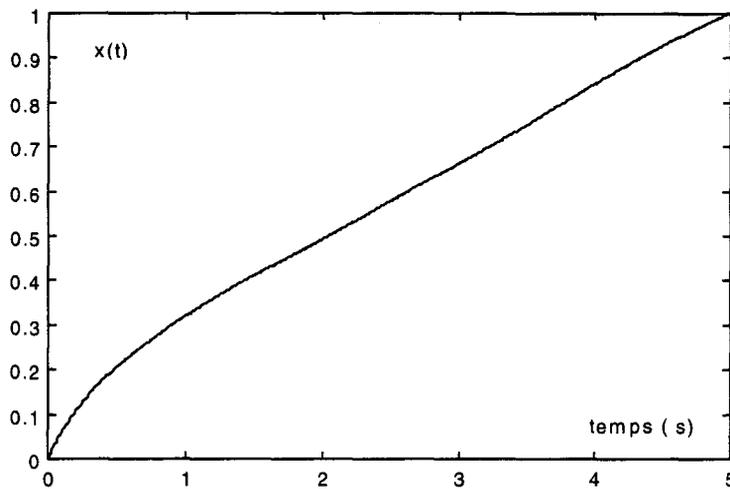
avec :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{k} (\sqrt{k^2 + 1} \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2 - 1} - 1)$$

$$\ell = x_f \frac{2\beta + k^2(\beta^2 + 1)}{k\sqrt{k^2 + 1}(\beta^2 - 1)}$$

$$\beta = e^{\frac{\sqrt{k^2 + 1}(t_r - t)}{\tau}}$$

Les essais en simulation conduisent à la courbe de la figure 1.10, qui représente l'état  $x$  en fonction du temps. On remarque qu'au bout de 5 s, l'état atteint bien la valeur  $x_f = 1$ .



**Figure 1.10** Evolution de l'état suite une consigne unitaire  
Cas de la commande optimale

La commande  $u$  est donnée par la courbe de la figure 1.11. Cette dernière passe par un maximum à  $t = 1.9$  s et reste toujours inférieure à 2.2.

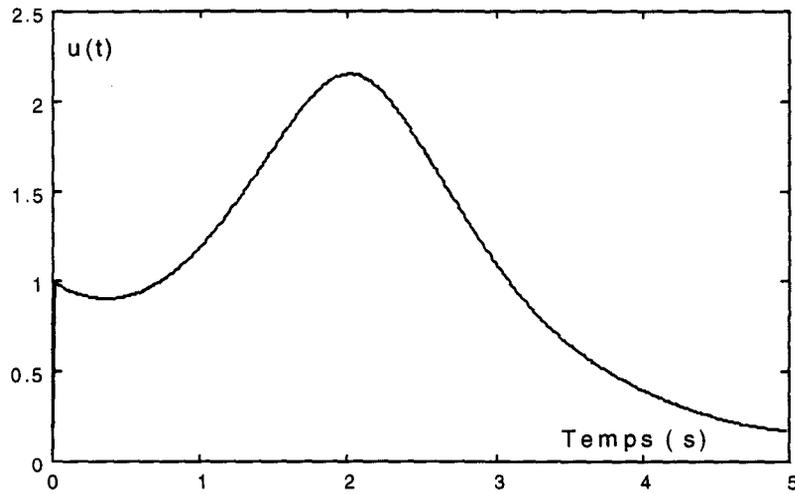


Figure 1.11 Evolution de la commande  
Cas de la commande optimale

La valeur obtenue pour le critère est  $J = 8.93$ .

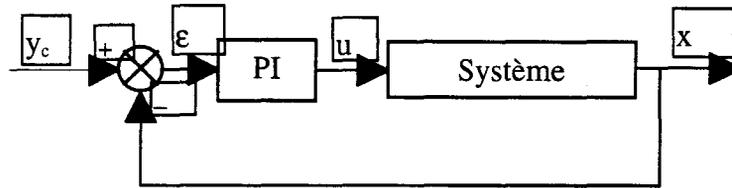
On constate de plus qu'à  $t = 5$  s, la dérivée de l'état est non nulle, et la valeur 1 ne se maintient pas. C'est cette remarque qui nous a amenés à envisager une multicommande pour stabiliser le système.

### Commande PI

Dans ce cas, la commande  $u$  s'écrit de la manière suivante:

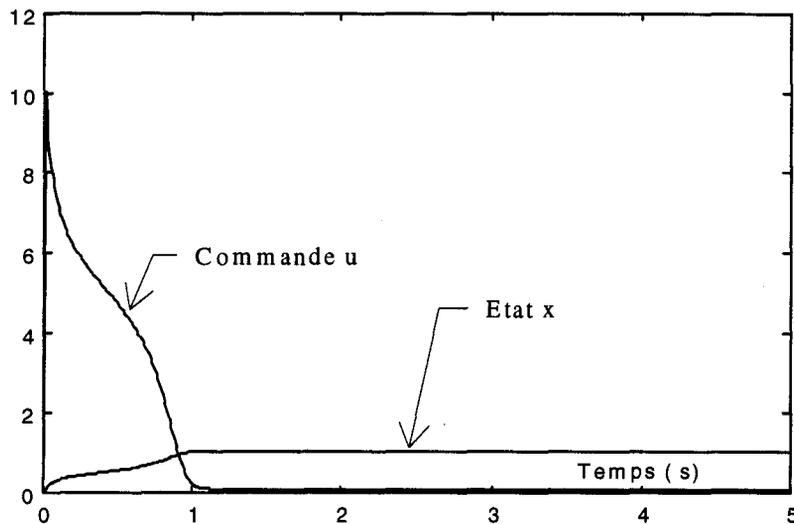
$$u = K_p \varepsilon + K_I \int \varepsilon dt$$

où  $\varepsilon$  est l'écart entre la consigne et la sortie comme la montre la figure suivante:



**Figure 1.12** Commande PI

Pour les valeurs  $K_p = 10$ , et  $K_i = 1$ , choisies après plusieurs essais en simulation, on obtient les courbes de la figure 1.13. Sur cette figure sont représentés les évolutions de l'état  $x$  et de la commande  $u$  appliquée au système.



**Figure 1.13** Effet d'un réglage PI

On remarque qu'on arrive à la valeur finale à  $t = 1$  s environ, mais la commande prend des valeurs importantes, et atteint un maximum qui vaut 10, en même temps le critère vaut 24.7. Si on impose à la commande d'être inférieure à 2.2, conformément au cahier des charges, on obtient les courbes de la figure 1.14. Sur cette dernière on observe bien la saturation de la commande à la valeur imposée, en même temps qu'une stabilisation beaucoup plus lente pour

l'état du système qui atteint la valeur 1.1 en 2.4 s environ (ce qui met en évidence un léger dépassement).

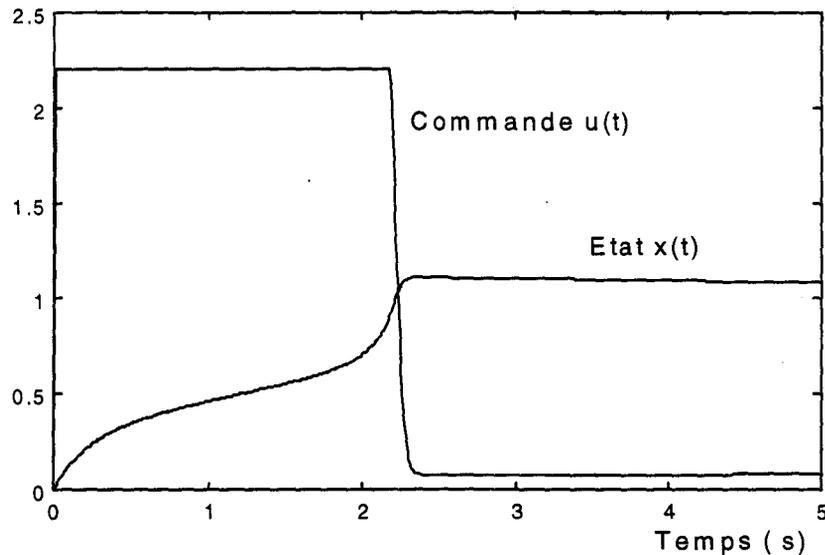


Figure 1.14 Régulateur PI avec saturation de la commande

Pour ce type de commande, la valeur du critère est  $J = 11.44$ .

### Commutation CO/PI

On envisage dans ce cas, comme le montre le schéma de la figure 1.15, de passer d'une commande du type optimal à une commande PI. La condition de commutation est que l'état atteigne une valeur imposée  $x_i$ .

Ceci permet de profiter des avantages de chacune des deux commandes. En effet, pour le régime transitoire, la commande optimale permet d'optimiser le critère, alors qu'en régime permanent, la commande PI permet de stabiliser le système.

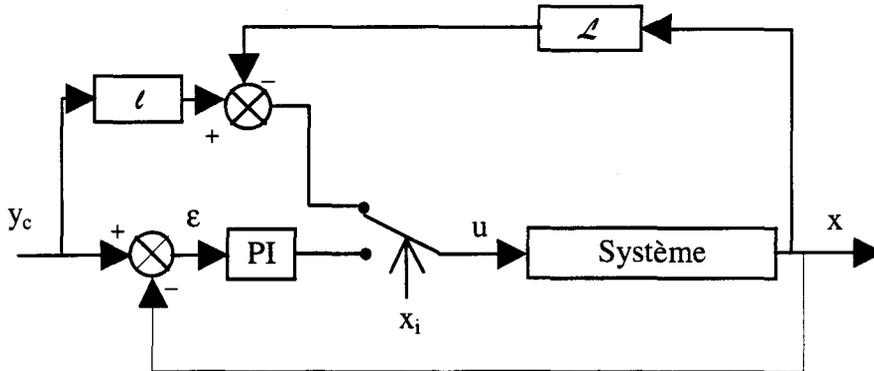


Figure 1.15 Commutation entre commandes CO / PI

Les courbes de la figure 1.16, montrent l'évolution de l'état du système pour une commutation se produisant respectivement à  $x_i = 0.9$ ;  $x_i = 0.6$  et  $x_i = 0.5$ .

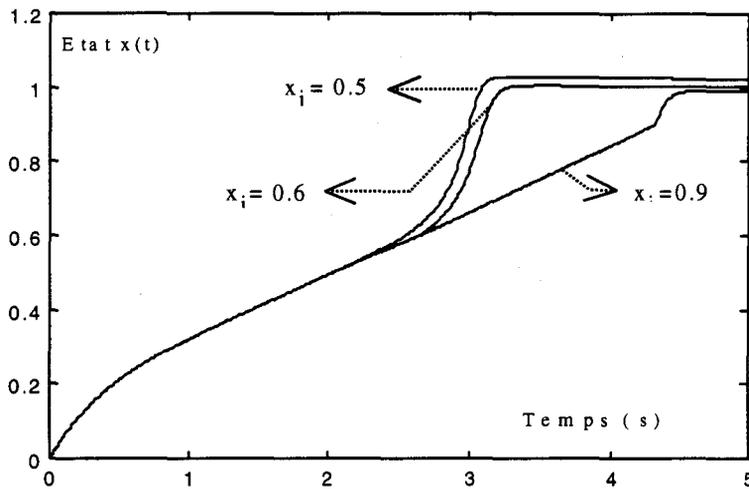


Figure 1.16 Commutation CO / PI  
Influence de  $x_i$

Le critère J a été calculé pour chaque cas et on obtient les résultats suivants:

$x_i$	J
0.5	10.08
0.6	9.85
0.9	8.95

Au sens du critère imposé, l'optimum est obtenu quand la commutation est réalisée le plus tard possible.

Les courbes de la figure 1.17, représentent en même temps l'état et la commande quand la commutation se fait à  $x_i = 0.9$ .

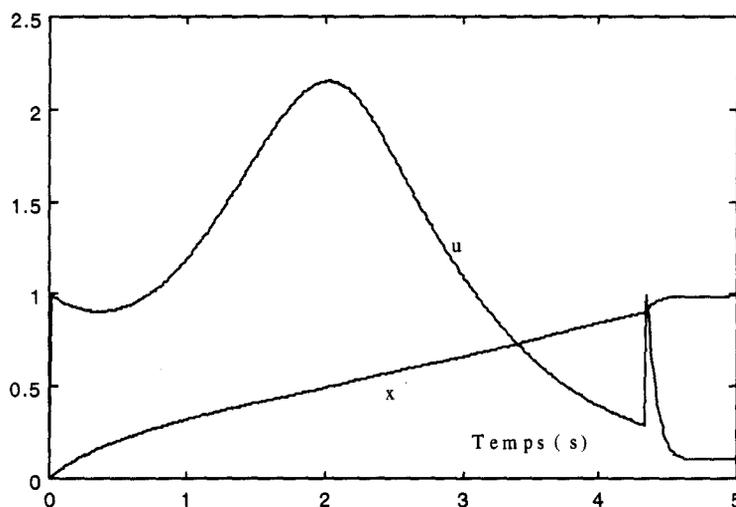


Figure 1.17 Commutation CO / PI à  $x_i = 0.9$

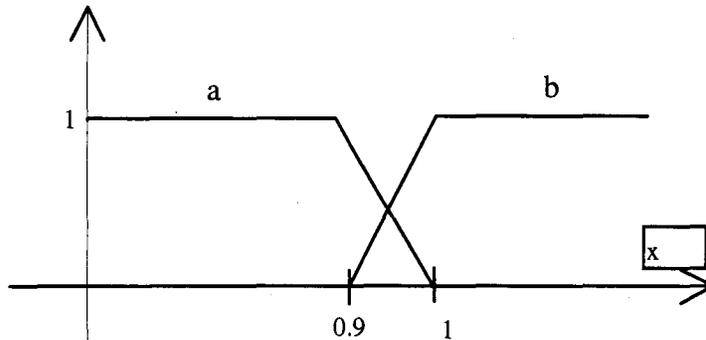
### Fusion CO/PI

Dans ce cas la commande est obtenue par pondération entre la commande optimale et la commande PI:

$$u = \alpha u_{op} + \beta u_{PI}$$

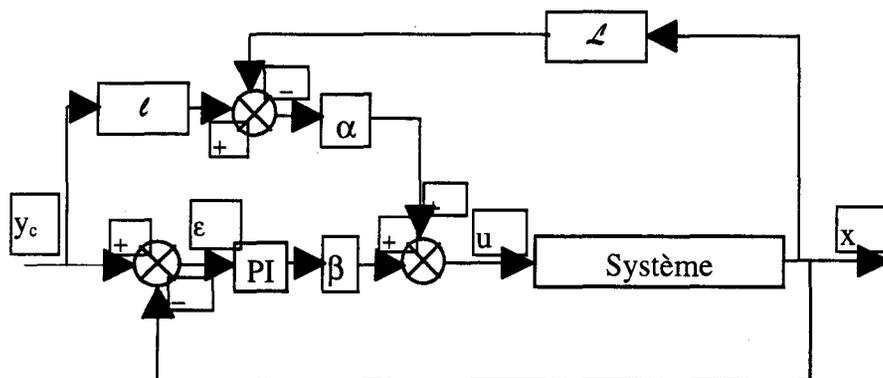
avec  $\alpha = \alpha(x)$  et  $\beta = \beta(x)$ .

Les lois de variation de  $\alpha$  et  $\beta$  sont données par les courbes suivantes de la figure 1.18:



**Figure 1.18 Coefficients de fusion**

Le schéma de la figure 1.19 représente le principe de la fusion CO/PI.



**Figure 1.19 Schéma de principe  
Fusion CO / PI**

Les courbes de la figure 1.20 montrent l'efficacité d'une telle commande. En effet, par comparaison aux courbes de la figure 1.17, on observe une nette amélioration du comportement du système, et en même temps une diminution du critère J qui passe de 8.95 à 8.93.

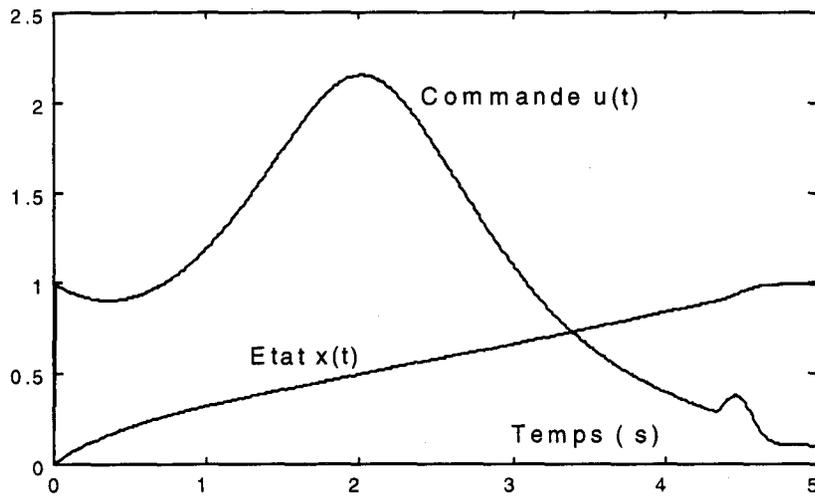


Figure 1.20 Fusion CO / PI

### Représentation multimodèle

On envisage maintenant d'utiliser l'approche multicommande en exploitant une bibliothèque de modèles. Le principe d'une telle approche est présenté sur le schéma de la figure 1.21

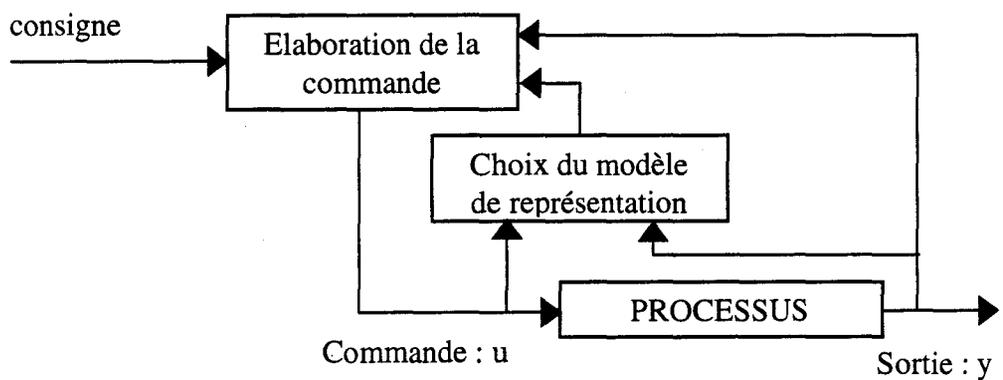


Figure 1.21 : Multicommande  
Schéma de principe

Le processus d'entrée  $u$ , et de sortie  $y$  peut être mono ou multivariable, et est représenté par les équations :

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t),$$

$$y(t) = g(x, u, t).$$

En pratique, on suppose qu'on ne dispose pas d'une information complète sur ce modèle généralement d'ordre élevé, et éventuellement à structure et/ou paramètres variants.

Sur la figure 1.21, le bloc "choix du modèle de représentation", permet suivant des critères, tels que la distance paramétrique, les valeurs des résidus,... de sélectionner un modèle parmi ceux disponibles dans une base de données spécifique au procédé à commander. Cette bibliothèque est construite à partir des connaissances qu'on a sur le processus. Les modèles choisis sont évidemment simples afin que la loi de commande reste facile à mettre en œuvre.

Le bloc "élaboration de la commande" de la figure précédente, détermine la (ou les) loi (s) de commande à appliquer au processus à un instant donné, en utilisant une politique du type commutation ou fusion de commandes.

Le processus considéré est représenté par un ensemble de modèles  $M_1, M_2, \dots$ . Chacun de ces derniers est par exemple supposé linéaire, et peut être représentatif du processus, avec une certaine précision dans un domaine donné  $\mathcal{D}_i$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_i, u, t) \\ y_i = g_i(x_i, u, t) \end{cases}$$

En d'autres termes, si  $x \in \mathcal{D}_i$ , le modèle  $M_i$  représente le processus avec une validité non nulle, comprise entre zéro et un. Le domaine  $\mathcal{D}_i$ , peut être lui même formé de l'union de plusieurs domaines  $\mathcal{D}_{i,j}$ . En effet, en plus du domaine  $\mathcal{D}_{i,0}$ , obtenu au voisinage de  $x_{i,0}$ , valeur autour de laquelle a été effectuée la linéarisation conduisant au modèle  $M_i$ , on peut rencontrer d'autres régions de l'espace, éloignées de  $x_{i,0}$ , et où le modèle  $M_i$  présente un comportement voisin de celui du processus.

Par exemple on peut observer des validités comme celles de la figure 1.22. Cette dernière montre que  $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_{i,0} \cup \mathcal{D}_{i,1} \cup \mathcal{D}_{i,2} \cup \dots$

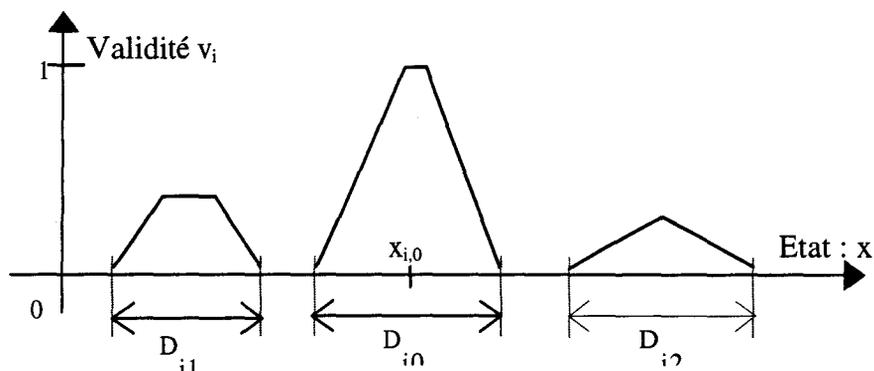


Figure 1.22 Exemple de validité d'un modèle  $M_i$

La mesure de la fonction de validité peut être faite à partir du pouvoir de prédiction du modèle comme ceci est détaillé dans le chapitre 2.

Le système étudié est représenté par les modèles linéaires du premier ordre suivant:

- Au voisinage de  $x = 0$  :  $X(p) = \frac{10}{1+15p} U(p)$ .
- Au voisinage de  $x = 0.5$  :  $X(p) = \frac{1}{1+10p} U(p)$ .
- Au voisinage de  $x = 1$  :  $X(p) = \frac{10}{1+5p} U(p)$ .

Ce choix est arbitraire, mais tient compte du fait que l'objectif étant d'amener l'état  $x$  du système de  $x_0 = 0$  à  $x_f = 1$ , trois modèles locaux régulièrement espacés ont été choisis. Il est évident qu'un choix différent aurait pu être envisagé.

Nous allons présenter maintenant la stratégie de la commande choisie:

Pour les modèles  $M_0$  et  $M_1$ , on a opté pour une commande du type optimal avec critère quadratique, alors que pour le modèle  $M_3$ , on a considéré une commande PI.

Plusieurs méthodes ont été envisagées pour le calcul de la commande, qui s'écrit dans tous les cas sous la forme:

$$u = c_0 u_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

où  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$  sont les commandes calculées respectivement pour les modèles  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_2$ .

Les coefficients  $c_0$ ,  $c_1$  et  $c_2$  sont donnés par les graphiques de la figure 1.23 qui correspondent respectivement au cas de la commutation et de la fusion.

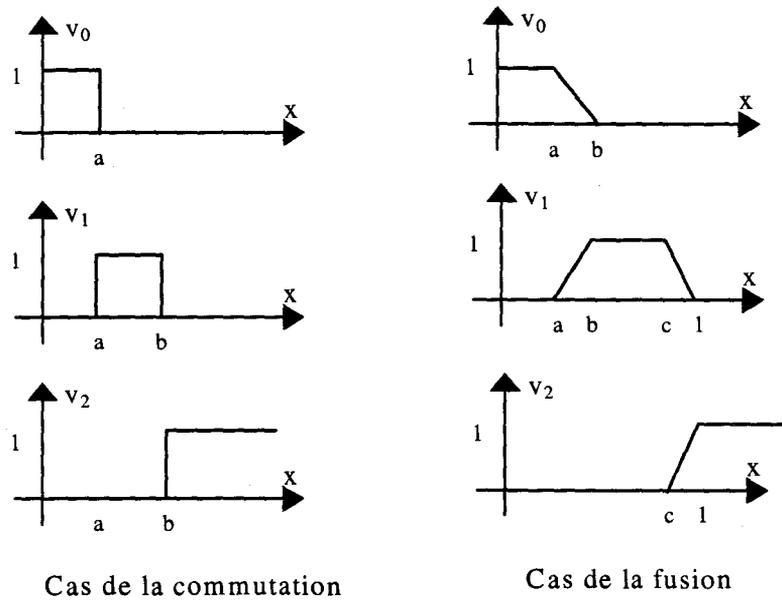


Figure 1.23 : Validités

Les résultats sont illustrés par la figure 1.24 dans le cas d'une commutation entre les modèles, et la figure 1.25 dans le cas d'une fusion des commandes.

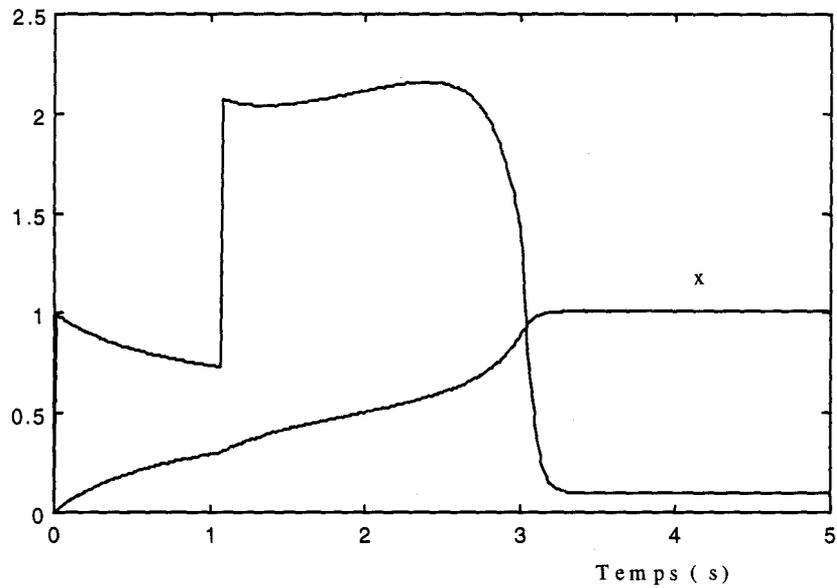
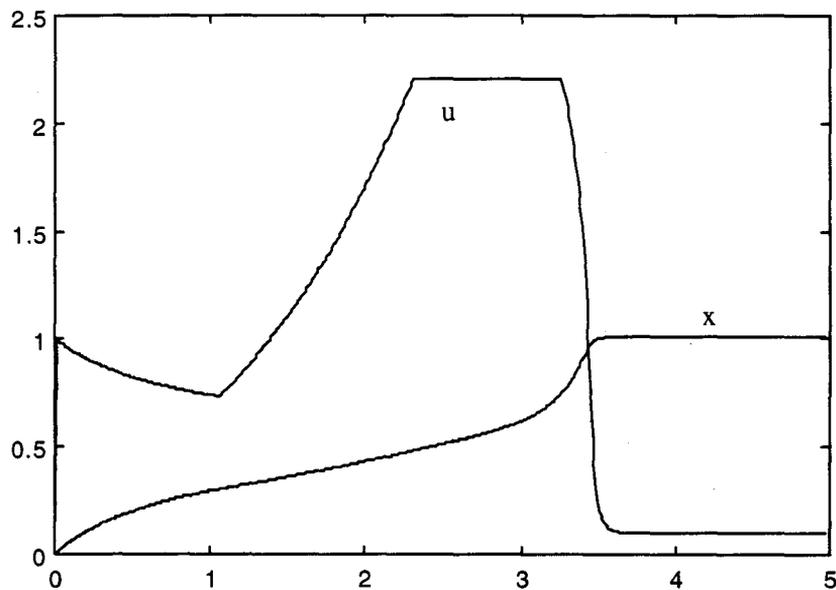


Figure 1.24 Etat  $x$  et commande  $u$  dans le cas d'une commutation entre les modèles.  
 $a = 0.3$ ;  $b = 0.9$



**Figure 1.25** Etat  $x$  et commande  $u$  dans le cas d'une fusion  
 $a = 0.3$ ;  $b = 0.5$ ;  $c = 0.9$

Pour toutes les simulations effectuées, nous avons calculé les valeurs du critère donné par l'expression :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [(x - x_f)^2 + u^2] dt$$

Nous trouvons 10.2 et 9.9 comme valeurs de  $J$  respectivement dans le cas de la commutation et dans le cas de la fusion. On voit que le critère est amélioré dans le cas de la fusion.

### Utilisation du résidu

Nous allons envisager maintenant une deuxième stratégie qui consiste à sélectionner le modèle le plus crédible par le calcul d'un résidu défini par:

$$r_i = |x - x_i|,$$

où  $x$  est l'état réel et  $x_i$  l'état prédit par le modèle  $M_i$ .

On calcule :

$$r_0 = dx_0 = |x - x_0|$$

$$r_1 = dx_1 = |x - x_1|.$$

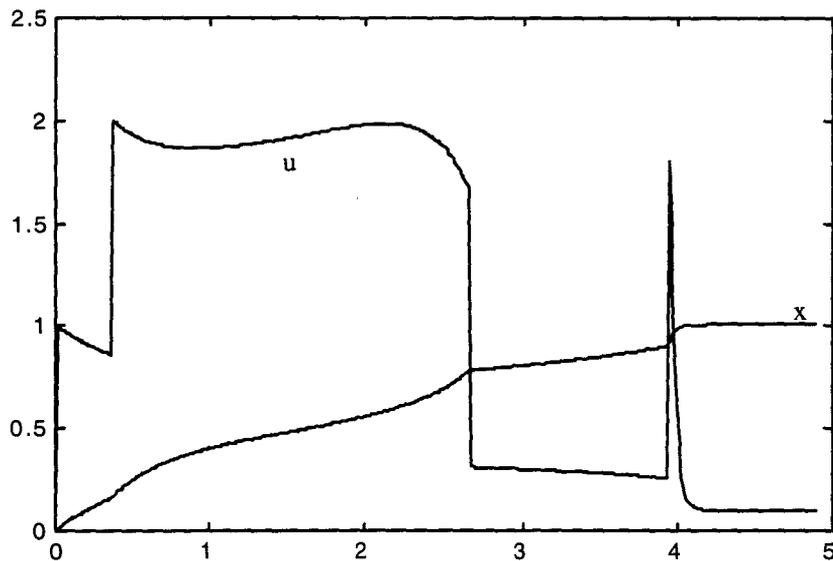
La commande  $u$  est donnée par :

$$u = a u_0 + b u_1 + c u_2,$$

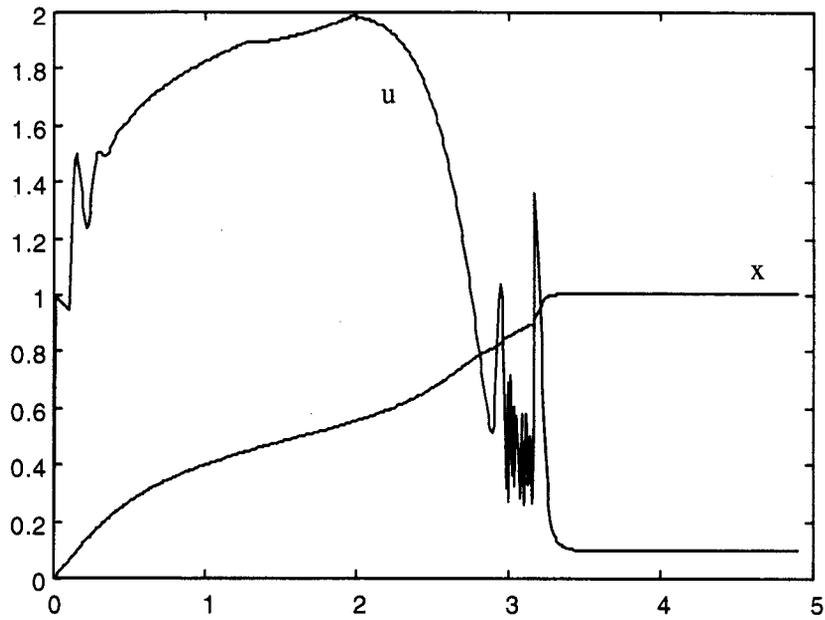
avec

- $u_0$  : commande optimale générée par le modèle  $M_0$ ,
- $u_1$  : commande optimale générée par le modèle  $M_1$ ,
- $u_2$  : commande PI générée par le modèle  $M_2$ .
- si  $x < 0.9$  :  $a = r_1/(r_0+r_1)$ , et  $b = 1 - a$ ,  $c = 0$ .
- si  $x \geq 0.9$  :  $c = 1$ ,  $a = b = 0$ .

Les figures 1.26 et 1.27 suivantes montrent les résultats obtenus.



**Figure 1.26** Multicommande : Exploitation des résidus.  
Cas de la commutation.



**Figure 1.27** Multicommande  
Exploitation des résidus  
Cas de la fusion.

On constate que dans tous les cas la deuxième stratégie de commande conduit à de meilleurs résultats du point de vue du critère choisi comme l'illustre le tableau suivant :

	Commutation		Fusion	
Stratégie	1	2	1	2
Critère J	10.22	10.03	9.88	9.67

En conclusion de ces essais, il ressort que la technique de résidu conduit à de meilleurs résultats aussi bien en commutation qu'en fusion de commande, comparativement à un choix a priori des domaines de validité.

## 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré l'intérêt de la représentation multimodèle et ses applications pour la commande. L'application pratique que nous avons envisagée a permis de voir les avantages de la multicommande. Nous avons en particulier proposé d'exploiter une commande PI très performante dans le cas de la régulation et surtout au voisinage du point de consigne.

Des essais sur la fusion et la commutation ont permis de montrer l'amélioration que peut apporter la multicommande au critère choisi avec un avantage dans le cas de la fusion.

Dans ce chapitre nous avons aussi introduit l'idée du multicritère qui peut dans certains cas pratiques permettre une décomposition totale du problème dans le sens où on associe à chaque modèle local la commande et le critère adéquats.

## Chapitre 2

### Validité des Modèles



## CHAPITRE 2

### Validité des modèles

#### 2.1 Introduction

L'approche CMM (commande multimodèle) compte parmi ses objectifs, la réduction de la complexité de la description d'un système grâce à sa représentation par une série de modèles simples ( $M_i$ ).

Sur le plan pratique, ceci permet d'envisager une commande plus facile à élaborer et à mettre en œuvre. La simplicité du modèle  $M_i$ , entraîne celle de l'algorithme de commande et par suite la possibilité de son implantation en temps réel, avec des moyens de calcul raisonnables.

La difficulté de l'approche multimodèle se situe au niveau de la décision à prendre à chaque instant quant au choix et à la valeur de la validité du modèle  $M_i$  permettant d'élaborer la commande.

Ce problème a été abordé à plusieurs reprises dans la littérature [Delmotte 97, Delmotte 96<sub>1</sub>, Delmotte 96<sub>2</sub> ] et peut être considéré comme un problème d'estimation de la pertinence des modèles.

On peut réaliser un superviseur qui a pour objectif d'estimer, à chaque instant, la validité de chaque modèle  $M_i$ . Les validités sont caractérisées par des indices  $v_i$  prenant des valeurs

comprises entre 0 et 1. La valeur 1 signifie que le modèle correspondant  $M_i$  décrit parfaitement, selon le critère considéré, le processus à cet instant. Au contraire la valeur 0 correspond à la situation d'inadaptation totale du modèle  $M_i$ .

On réalise ainsi l'importance qu'il faut accorder au calcul des validités et à leur influence sur l'élaboration de la commande dans l'approche CMM.

Les méthodes utilisées dans la littérature pour le calcul des validités, passent généralement par la détermination de résidus.

Dans ce chapitre nous parlerons de quelques techniques de calcul des validités. Nous proposerons des résultats originaux pour le calcul des résidus et la fusion des commandes et nous les illustrerons par deux applications pratiques.

## 2.2 Calcul des résidus basé sur les observateurs

Le calcul des validités passe par celui des résidus. Une des méthodes des plus développée sur le plan théorique pour la génération des résidus est l'utilisation des observateurs [Basseville 88, Delmotte 97, Cassar 94, Frank 90, Gertier 88, Iserman 84, Mouyon94, Nuninger 97, Staroswiecki 91, Staoroswiecki 94]. Parmi ces derniers on peut citer celui de Kalman et celui de Luenberger.

### a) Les observateurs

Définition : on considère le processus décrit par l'équation d'état (2.1)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t) \\ y(t) = g(x, u, t) \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $x \in \mathfrak{R}^n$  et  $y \in \mathfrak{R}^m$ ,

Un observateur ( $\mathcal{O}$ ) est un système dynamique qui permet d'estimer des fonctions de l'état  $x$  et de la commande  $u$  ( $\eta = \psi(x,u)$ ), à partir de la mesure de la sortie  $y$  et de la commande  $u$  du processus [Mouyon94].

On peut dans ces conditions considérer l'observateur comme un système d'entrées  $y$  et  $u$  et de sortie  $\eta$  comme le montre la figure 2.1.

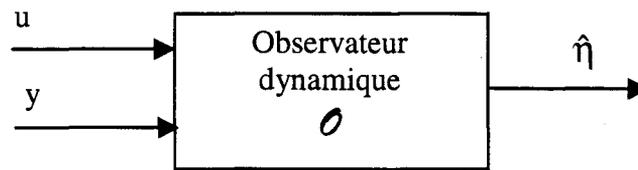


Figure 2.1 : Observateur

On peut décrire l'observateur dynamique par une équation d'état comme celle donnée par (2.2).

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(z, y, u) \\ \hat{\eta}(t) = G(z, y, u) \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $z$  est l'état de l'observateur.

On dit que  $\hat{\eta}$  est un estimateur de  $\eta = \psi(x,u)$  si :

$$\|\hat{\eta} - \eta\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

Les automaticiens spécialistes en surveillance définissent le résidu comme un observateur qui possède une sortie nulle en absence de panne et non nulle dans le cas contraire [Mouyon 94].

Dans le contexte multimodèle on peut opter pour une définition du même type du résidu, la panne étant simplement un éloignement du domaine de validité. Ainsi quand le modèle  $M_i$  de la bibliothèque est validé (validité  $v_i = 1$ ), la sortie  $\hat{\eta}$  de l'observateur associé au modèle  $M_i$

converge vers zéro. Les observateurs construits à partir de chaque modèle  $M_i$  servent à observer le processus et par suite les entrées de l'observateur sont  $u$  et  $y$ . Ceci nous conduit à la définition suivante :

**Définition**

Etant donné :

- un modèle  $M_i$  de la bibliothèque des modèles, d'entrée  $u$ , de sortie  $y_i$  et d'état  $x_i$ ,
- un observateur dynamique donné par les équations (2.3)

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = F_i(z_i, y, u) \\ \hat{\eta}_i(t) = G_i(z_i, y, u) \end{cases} \quad (2.3)$$

On appelle résidu  $r_i$  du modèle  $M_i$ , la sortie  $\hat{\eta}_i$  de tout observateur scalaire qui reste égale à zéro si le modèle  $M_i$  est valable (validité  $v_i = 1$ ) et qui est positive non nulle si on s'écarte du domaine de validité.

On propose maintenant une procédure pour la construction de résidus, inspirée de la démarche des spécialistes en surveillance :

1. Augmenter la dimension du vecteur des fonctions  $z_i = \varphi(x_i)$  estimées par l'état de l'observateur jusqu'à faire apparaître une ou plusieurs relations de dépendances entre  $u$ ,  $y_i$  et  $z_i$ . Ce sont des relations de redondance analytique.
2. Mettre les relations précédentes sous la forme

$$H_i(z_i, y_i, u) = H_i(\varphi(x_i), g_i(x_i, u), u) = 0.$$

3. Ecrire la sortie de l'observateur  $G_i = H_i$ , en remplaçant  $y_i$  par  $y$ , sortie mesurée du processus d'où :

$$R_i = H_i(z_i, y, u).$$

Il faut remarquer que nous n'avons pas à estimer l'état exact du modèle  $M_i$  car celui-ci est parfaitement connu mais à estimer ce que serait l'état  $x$  du processus si son évolution était décrite par le modèle  $M_i$ . Cette estimation est faite à partir de la connaissance de la commande  $u$  et de la sortie  $y$  du processus. Cette approche présente de plus l'avantage de permettre de réinitialiser régulièrement le modèle  $M_i$  afin que la validité estimée garde un sens.

La réinitialisation sera effectuée systématiquement par la suite dans la recherche de la commande  $u$ .

On résume dans (2.4) les équations de l'observateur générateur du résidu  $r_i$  du modèle  $M_i$  :

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = F_i(z_i, y, u) \\ r_i(t) = H_i(z_i, y, u) \end{cases} \quad (2.4)$$

La figure 2.2 représente le schéma de principe de l'observateur générateur de résidus alors que la figure 2.3 donne les détails de la structure de cet observateur.

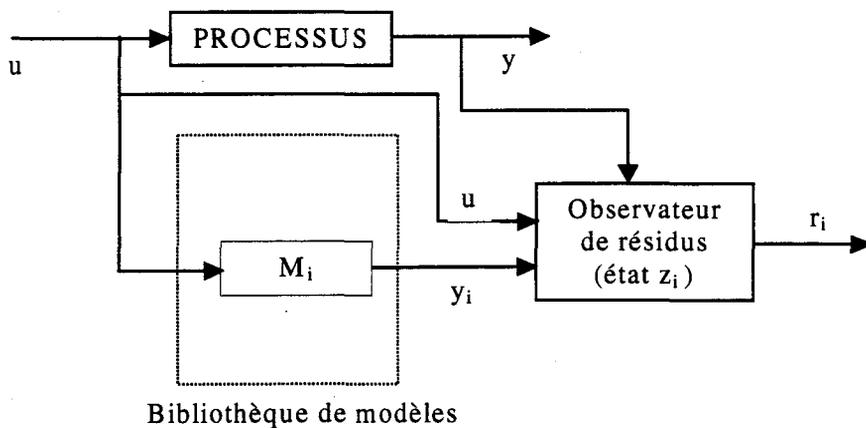


Figure 2.2 : Génération de résidus

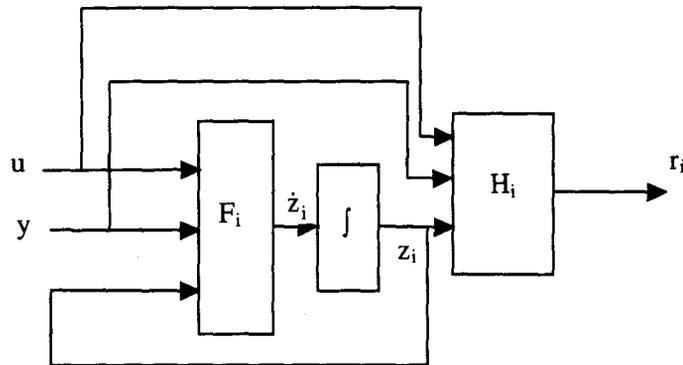


Figure 2.3 : Observateur de résidus

La détermination des résidus dans le cas de l'approche multimodèle est beaucoup plus simple que celle dans le cas de pannes. En effet, si les modèles  $M_i$  de la bibliothèque sont choisis linéaires comme montré au chapitre 1, la synthèse du générateur de résidus est simplifiée.

On rappelle les équations d'état du modèle  $M_i$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \\ y_i(t) = C_i x_i(t) + D_i u(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

Nous développerons dans la suite les approches observateurs de Kalman et de Luenberger.

### b) Observateur de Kalman

On se place dans le cas où le processus pourrait être décrit avec le modèle  $M_i$ , ce qui correspondrait en toute rigueur à une validité  $v_i$  unité. Les équations de l'observateur de Kalman sont données par :

$$\dot{\hat{x}}_i = A_i \hat{x}_i + B_i u - G(y - C_i \hat{x}_i - D_i u) \quad (2.6)$$

L'équation (2.6) est facile à interpréter. En effet, l'estimé  $\hat{x}_i$  est donné par une équation dynamique identique à celle de l'état  $x$  avec un terme correctif qui est le produit d'un gain  $G$  par l'erreur de prédiction  $(y - C_i \hat{x}_i - D_i u)$  appelée aussi processus d'innovation.

Comme le montre l'équation (2.6), l'observateur est d'ordre  $n$ , on estime tout l'état. L'erreur d'estimation définie par :

$$\varepsilon_i = x - \hat{x}_i,$$

possède une dynamique donnée par :

$$\dot{\varepsilon}_i = \dot{x} - \dot{\hat{x}}_i = (A_i + G_i C_i) \varepsilon_i.$$

L'erreur d'estimation  $\varepsilon_i$  est donc indépendante de  $u$  et de  $y$  et sa dynamique peut être choisie arbitrairement si et seulement si la paire  $(C_i, A_i)$  est observable. On peut choisir comme résidu les erreurs  $\|\varepsilon_i\|$  ou encore l'innovation  $\|(y - C_i \hat{x}_i - D_i u)\|$ .

### C) Observateur de Luenberger

On admet les mêmes hypothèses que pour l'observateur de Kalman. Dans ce cas la fonction à estimer est une fonction linéaire de l'état [Mouyon 94] :

$$z_i = V_i x_i.$$

L'observateur est donné par l'équation (2.7).

$$\dot{\hat{z}}_i = \Pi_i \hat{z}_i - T_i y + R_i u \quad (2.7)$$

avec

$$V_i A_i + T_i C_i = \Pi_i V_i,$$

$$V_i B_i + T_i D_i = R_i.$$

La dérivée de l'erreur d'estimation  $\varepsilon_i = z_i - \hat{z}_i$  est donnée par :

$$\dot{\varepsilon}_i = \Pi_i \varepsilon_i.$$

Comme application de l'observateur de Luenberger considérons le cas des équations (2.6) avec  $D_i = 0$  et  $V_i = C_i$ , on a alors :

$$z_i = C_i x_i = y_i,$$

d'où l'observateur :

$$\dot{\hat{y}}_i = \Pi_i \hat{y}_i - T_i y + R_i u$$

avec :

$$C_i A_i + T_i C_i = \Pi_i C_i,$$

$$C_i B_i = R_i.$$

On en déduit :

$$(\Pi_i - T_i) C_i = C_i A_i$$

$$R_i = C_i B_i$$

On choisit comme résidu l'écart entre la sortie du modèle et celle de l'observateur :

$$r_i = \|y_i - \hat{y}_i\|.$$

Déterminons la dynamique du résidu. Pour cela calculons la dérivée :

$$\dot{r}_i = \|\dot{y}_i - \dot{\hat{y}}_i\| = \|C_i \dot{x}_i - \Pi_i \hat{y}_i + T_i y - R_i u\|$$

d'où :

$$\dot{r}_i = \|C_i (A_i x_i + B_i u) - \Pi_i \hat{y}_i + T_i y - R_i u\|,$$

ce qui conduit finalement à :

$$\dot{r}_i = \Pi_i r_i.$$

On vérifie que  $r_i$  est bien un résidu pour le modèle  $M_i$  et que sa dynamique est donnée par  $\Pi_i$ .

### 2.3 Autres types de résidus

Si la construction des observateurs est indispensable pour la réinitialisation des modèles  $M_i$ , on peut envisager d'autres approches pour le calcul des résidus. On trouve dans la littérature plusieurs exemples de résidus, choisis souvent pour une application particulière, mais obéissant dans tous les cas à la démarche décrite précédemment.

#### a) Approche géométrique

Cette approche est assez naturelle et consiste à mesurer la distance de l'état actuel du processus à celui du modèle considéré  $M_i$ . [Delmotte 97, Delmotte 96, Johansen 97] Comme le montre la figure 2.3, le système étant caractérisé par le point  $M$  et le modèle  $M_i$  par le point  $M_i$ , ses distances aux modèles  $M_1, M_2, \dots, M_N$  de la bibliothèque sont respectivement  $d_1, d_2, \dots, d_N$ .

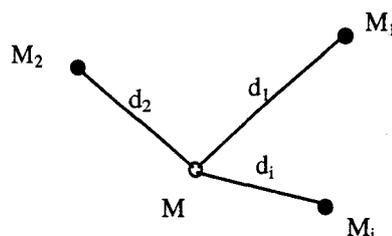


Figure 2.3 : distance géométrique

On voit que plus le modèle  $M$  est proche du modèle  $M_i$ , plus la distance qui sépare leur points représentatifs est faible, on choisit donc comme résidus les distances aux modèles :

$$r_i = d_i.$$

Il est certain qu'on peut considérer le domaine de validité comme un hypervolume. Par exemple sur la figure 2.4, on voit qu'on peut écrire :

$$r_i = d_i \text{ si } M \notin \mathcal{D}_i$$

$$r_i = 0 \text{ si } M \in \mathcal{D}_i$$

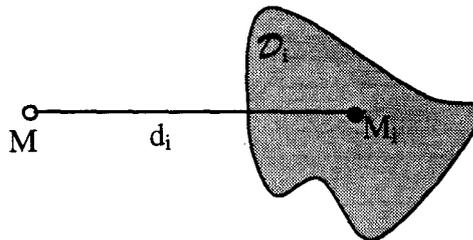


Figure 2.4 : distance géométrique

La distance géométrique peut être calculée de plusieurs manières, la plus simple, lorsque l'état  $x$  du processus est accessible, étant la distance des états :

$$r_i = \|x - x_i\|.$$

Dans le cas de la figure 2.4 on pourrait choisir :

$$r_i = \min_{x_i \in \mathcal{D}_i} \|x - x_i\|.$$

En pratique, il est souvent commode de normaliser les résidus. On écrit alors :

$$r_i = \frac{r_i}{\sum_{j=1}^N r_j}$$

N étant le nombre de modèles de la bibliothèque.

### **b) Écart des sorties**

Lorsque l'état du système n'est pas accessible, le choix de l'écart entre la sortie du processus et celle du modèle considéré ( soit  $M_i$  ) comme résidu est fréquemment utilisé. On écrit :

$$r_i = | y - y_i |$$

### **c) Pondération par la commande**

Nous proposons une nouvelle formulation des résidus faisant intervenir les commandes générées par les modèles de la bibliothèque.

En effet, dans certains cas pratiques, il peut s'avérer intéressant de faire intervenir dans l'expression du résidu la commande partielle  $u_i$  générée par un régulateur calculé pour le modèle  $M_i$ . Nous suggérons par exemple :

$$r_i = | y - y_i | + \alpha |u_i|,$$

avec  $\alpha$  un facteur de pondération,  $\alpha = 0$  nous ramène au cas classique. On montrera au paragraphe 2.6 l'intérêt d'une telle proposition, mais on comprend intuitivement que lorsque les résidus calculés comme écart entre les sorties sont faibles, par exemple  $r_i$  assez voisin de  $r_j$ , il est alors plus naturel de pénaliser la modèle qui génère la commande la plus grande en module. La commande  $u_i$  est calculée conformément au schéma de la figure 2.5.

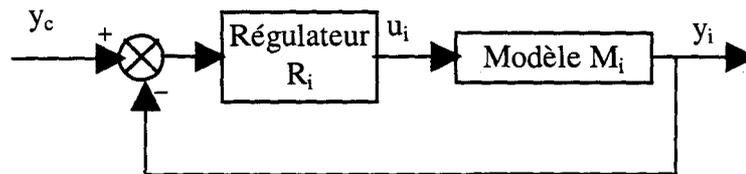


Figure 2.5 : Détermination des commandes partielles  $u_i$

#### d) Dérivée de la sortie

La valeur absolue  $|\dot{y}|$  de la dérivée de la sortie peut être utilisée pour le calcul du résidu lorsque le processus peut être soumis à de brusques variations de comportement qualitatif comme cela apparaît dans certains problèmes de défaillance.

## 2.4 Calcul des validités

Les validités varient en sens inverse des résidus. On s'arrangera toujours pour avoir des validités comprises entre 0 et 1. La valeur zéro exprimant que le modèle correspondant ne convient pas du tout, alors que la valeur un signifie que le modèle est parfaitement valable. Lors de la construction de la bibliothèque, il est important de choisir des modèles exclusifs,

c'est à dire, on ne doit en aucun moment avoir plus d'un modèle à validité unité. Fréquemment, on choisit les validités telles qu'à chaque instant leur somme soit égale à l'unité[Delmotte 97] Par exemple :

$$v_i = \frac{1 - r_i}{N - 1}$$

On vérifie que :

$$\sum_{i=1}^N v_i = 1.$$

On peut aussi calculer les validités par des expressions plus complexes, par exemple :

$$v_i = \max[v_{\min}, 1 - r_i / \text{err}_{\max}].$$

Une telle expression, permet de moduler la vitesse de décroissance d'une validité en fonction des erreurs sur le modèle comme le montre la figure (2.6) et d'éviter de rejeter totalement un modèle donné.

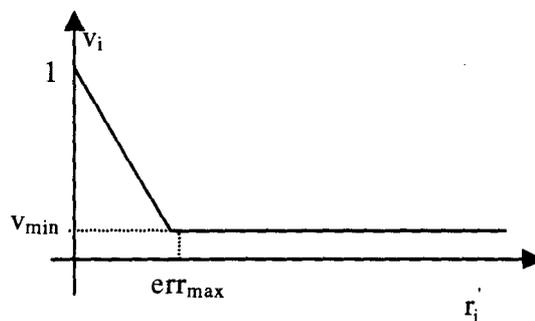


Figure 2.6 : Validité en fonction du résidu

En pratique, il est souvent important d'avoir recours au renforcement des validités par des traitements supplémentaires [Delmotte 97]. Ces derniers permettent de supprimer le phénomène de perturbation induit par les «mauvais » modèles sur le «bon » modèle. On écrit par exemple :

$$v_i^{\text{renf}} = v_i \prod_{j \neq i} (1 - v_j).$$

Dans ce cas une étape supplémentaire de normalisation peut être envisagée.

### Calcul des validités par l'approche floue

La méthode de calcul des validités  $v_i$  que nous proposons repose sur l'utilisation de l'approche floue. Cette démarche permet de contourner plusieurs difficultés rencontrées dans les approches actuellement exploitées, tout en garantissant un certain degré de robustesse vis à vis de l'imprécision liée soit au calcul soit à la définition même des résidus.

La détermination des résidus normalisés conduit aux valeurs de  $r_i'$ . Le calcul des validités par l'approche floue peut être effectué comme le montre le schéma de la figure 2.7.

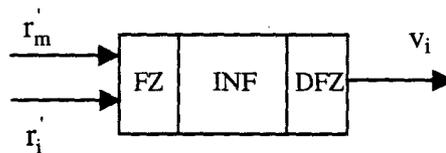


Figure 2.7 : Génération des validités par l'approche floue

Parmi les  $N$  modèles de la bibliothèque, on choisit un modèle donné considéré comme jouant un rôle particulier, cela pourrait être par exemple le modèle moyen, comme il sera détaillé au chapitre 3. On désigne par  $r_m'$  le résidu calculé pour ce modèle.

N-1 modules flous identiques sont alors à réaliser et calculent chacun à part les validités  $v_i$  des N-1 modèles de la bibliothèque. Chacun des modules possède deux entrées et une sortie. Ils comprennent trois étages :

1. Le premier FZ est un étage de fuzzification qui permet de fuzzifier les valeurs numériques de  $r_i$  et  $r_m$ . Les fonctions d'appartenance peuvent être du type triangulaire telles que représentées sur la figure 2.8. L'univers de discours est supposé de dimension trois {f, M, F}.

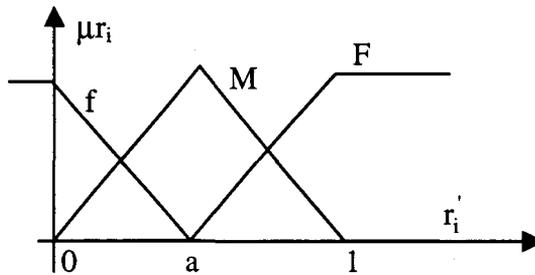


Figure 2.8 : Exemple de fonctions d'appartenance

2. L'étage INF permet de générer les validités  $v_i$  en appliquant les règles d'inférence. Dans le cas d'un univers de discours à trois variables {f, M, F}, la table de règles pourrait avoir par exemple la forme suivante.

$\mu_{r_i}$	$r_i(1) : f$	$r_i(2) : M$	$r_i(3) : F$
$\mu_{r_m}$			
$r_m(1) : f$	F	f	f
$r_m(2) : M$	F	M	f
$r_m(3) : F$	F	F	f

Cette table, appelée par la suite table 1, exprime la corrélation entre le modèle moyen et le modèle  $M_i$ . Par exemple si le résidu  $r_i$  est faible (f), la validité  $v_i$  est forte dans tous les cas, de même si le résidu  $r_i$  est fort (F),  $v_i$  est faible dans tous les cas. Par contre si  $r_i$  est moyen, ce qui correspond à une situation de doute, le modèle moyen intervient comme le montre la colonne du milieu. Lors de la mise en œuvre pratique, on peut utiliser la méthode d'inférence min-max.

Il est certain qu'on aurait pu envisager d'autres tables, par exemple une plus forte corrélation entre le modèle moyen et le modèle extrême pourrait se traduire par la table 2 qui exprime que quand la validité du modèle moyen est faible (résidu  $r_m$  fort) alors la validité globale  $v_i$  est renforcée. Par contre si la validité du modèle moyen est forte (résidu  $r_m$  faible) alors la validité globale  $v_i$  est diminuée.

$\mu_{r_i}$	$r_i(1) : f$	$r_i(2) : M$	$r_i(3) : F$
$\mu_{r_m}$			
$r_m(1) : f$	M	f	f
$r_m(2) : M$	F	M	f
$r_m(3) : F$	F	F	M

3. L'étape de défuzzification DFZ conduit aux valeurs numériques des validités. On peut par exemple exploiter la méthode du centre de gravité.

Un exemple mettant en œuvre l'approche floue de l'estimation des validités sera présenté au chapitre 3.

## 2.5 Utilisation des résidus pour la reconfiguration automatique en cas de panne

### a) Position du problème : cas d'une seule panne

On considère un processus caractérisé en fonctionnement normal par un modèle  $M_0$ , et en fonctionnement défaillant par un modèle  $M_1$  tels que:

$$M_0 \quad \dot{x} = f_0(x,u,t)$$

$$y = g_0(x,u,t)$$

$$M_1 \quad \dot{x} = f_1(x,u,t)$$

$$y = g_1(x,u,t)$$

On cherche à concevoir une commande qui permette de garantir certaines performances au système lorsqu'il passe du fonctionnement normal au fonctionnement dégradé. Pour cela, on propose le schéma de commande représenté sur la figure 2.9.

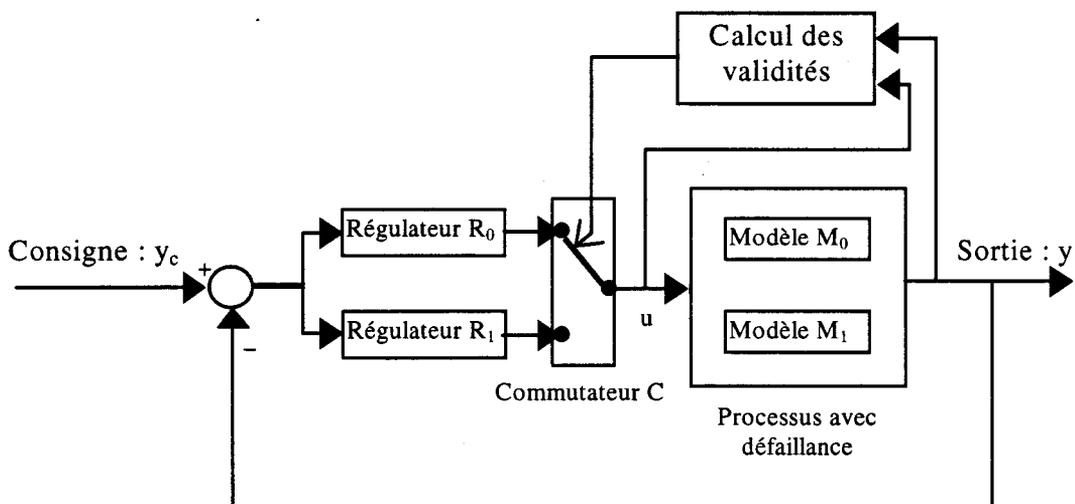


Figure 2.9 : Principe de la reconfiguration automatique

La consigne  $y_c$  est comparée à la sortie  $y$  du processus, et le signal d'erreur alimente en même temps les régulateurs  $R_0$  et  $R_1$  calculés de façon à assurer un fonctionnement optimal respectivement aux modèles  $M_0$  et  $M_1$ .

Un commutateur  $C$  sélectionne la sortie de l'un ou l'autre des deux régulateurs et commande le processus. L'ordre de commutation est généré par un bloc qui détecte l'instant de défaillance par calcul des validités. Ceci peut se faire de plusieurs manières par exemple :

- Par la mesure de la variation relative des sorties théorique du modèle simulé et réelle du processus pour une même commande  $u$ .
- Par identification dynamique des paramètres du modèle.
- Par estimation d'état.

### Système étudié

On adopte les modèles suivants:

$$M_0 : H_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(1+s)(1+2s)},$$

$$M_1 : H_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{(1+\tau s)}.$$

On impose pour le système bouclé un temps de stabilisation voisin de 6 s, un dépassement inférieur à 4% et une erreur statique de position nulle.

### Calcul des régulateurs

Les régulateurs adoptés sont du type PI de fonction de transfert:

$$R(s) = K_p + K_i/s.$$

Des calculs simples conduisent aux résultats suivants:

Régulateur	$K_p$	$K_I$
$R_0$	1	0.5
$R_1$	$\tau K_I$	$1/(2 K)$

Les figures 2.10 et 2.11 montrent les réponses indicielles du système bouclé correspondant respectivement au fonctionnement sans défaillance ( $M_0$  seul) et au fonctionnement dégradé ( $M_1$  seul). Elles prouvent le choix adéquat des paramètres de réglage.

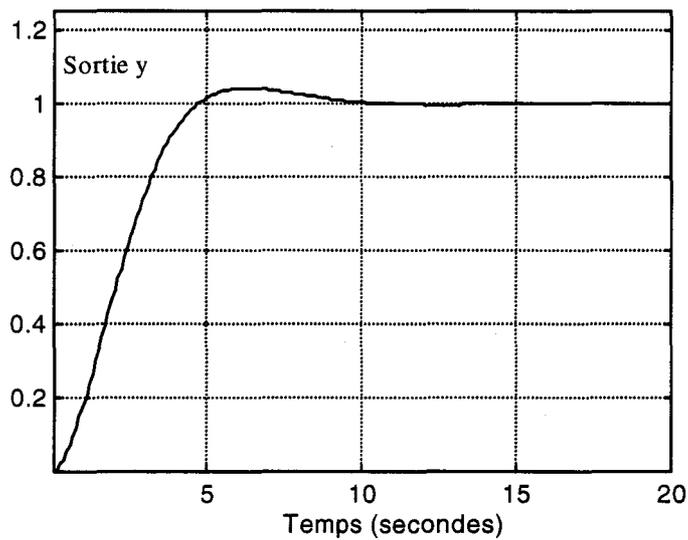


Figure 2.10 : Réponse indicielle du procédé Mode sans défaillance.

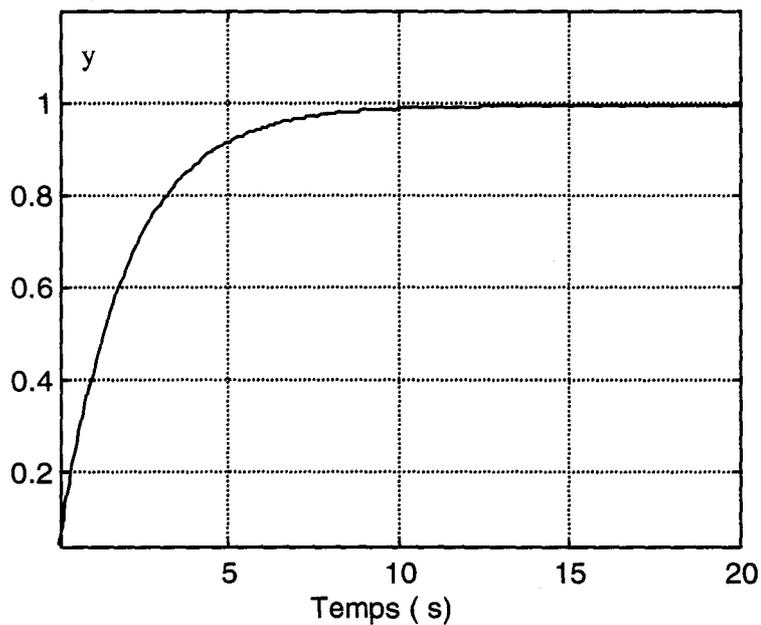


Figure 2.11 : Réponse indicielle du modèle dégradé.

### Simulations

Afin de montrer l'efficacité de la méthode et justifier son intérêt, nous envisageons dans un premier temps son utilisation dans le cas théorique où l'instant de production de la défaillance est parfaitement connu. Le cas contraire sera envisagé par la suite.

Le schéma de principe de la simulation effectuée à l'aide de la boîte à outils simulink de MATLAB, est donné sur les figures 2.12 et 2.13 suivantes. La défaillance est simulée par une action extérieure assurant la commutation entre les modèles décrivant le processus.

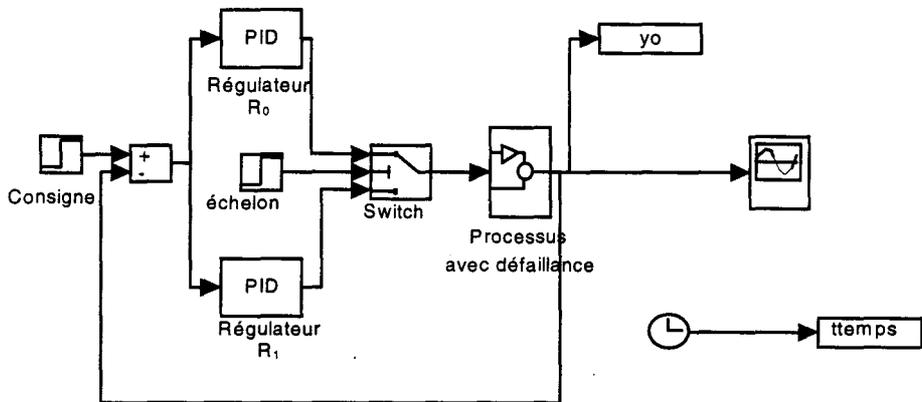


Figure 2.12 : Schéma général de la commande

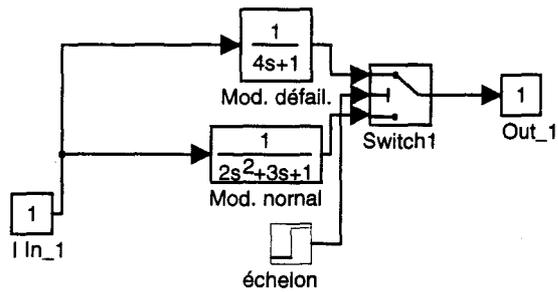


Figure 2.13 : Simulation du processus avec un modèle défaillant correspondant à  $K=1$  et  $t=4$  s

Nous avons envisagé les trois cas de modèles défaillants suivants :

Modèle	K	$\tau$ (s)
$M_{11}$	0.8	4
$M_{12}$	1	40
$M_{13}$	-1	4

Sur la figure 2.14, on représente les réponses du système lorsqu'une défaillance se produit à  $t = 10$  s, le modèle du système défaillant étant  $M_{11}$ , dans les deux cas suivants:

- sans commutation de commande; on passe au modèle dégradé en maintenant la commande relative au modèle  $M_0$ ,
- avec commutation de commande.

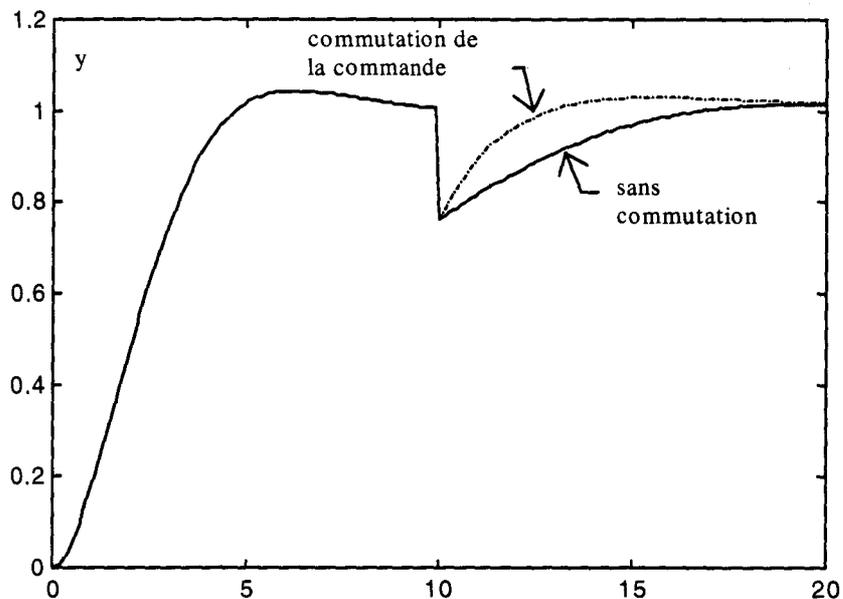


Figure 2.14 : Réponses indicielles en boucle fermée.  
Système avec défaillance à 10 s et modèle  $M_{11}$

On constate que les courbes sont confondues jusqu'au  $t = 10$  s et s'écartent légèrement après cet instant. Dans ce cas le fonctionnement dégradé ne justifie pas une commutation de commande. Ceci est encore confirmé même si la commutation se produit durant le régime transitoire comme le montrent les courbes de la figure 2.15.

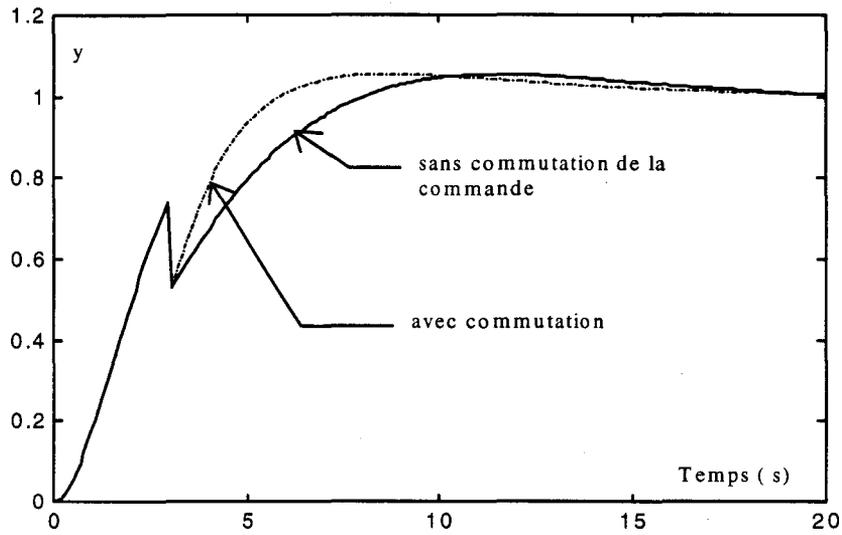


Figure 2.15 : Réponses indicielles. Défaillance à 3 s.  
Modèle de la défaillance  $M_{11}$ .

Par contre, si le fonctionnement en mode dégradé correspond au modèle  $M_{12}$ , on remarque que s'il n'y a pas de commutation de commande, le comportement du système est fortement oscillatoire, et le dépassement et le temps de stabilisation ne sont plus conformes au cahier des charges. Ceci est illustré par la figure 2.16.

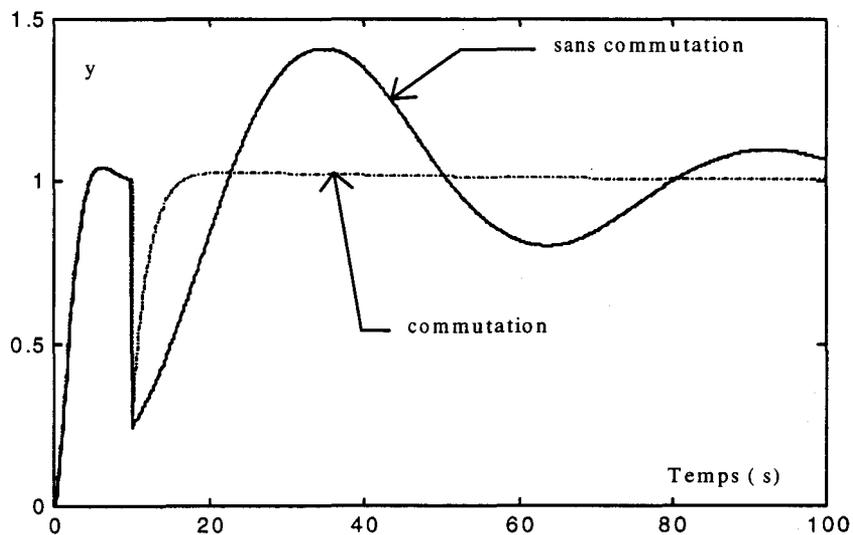


Figure 2.16 : Réponses indicielles. Défaillance à 10 s.  
Modèle dégradé  $M_{12}$ .

De la même manière, cette commutation de commande s'avère indispensable pour le cas du fonctionnement en modèle dégradé correspondant au modèle  $M_{13}$ . En effet, en l'absence de cette dernière, le système devient instable comme le montre la figure 2.17.

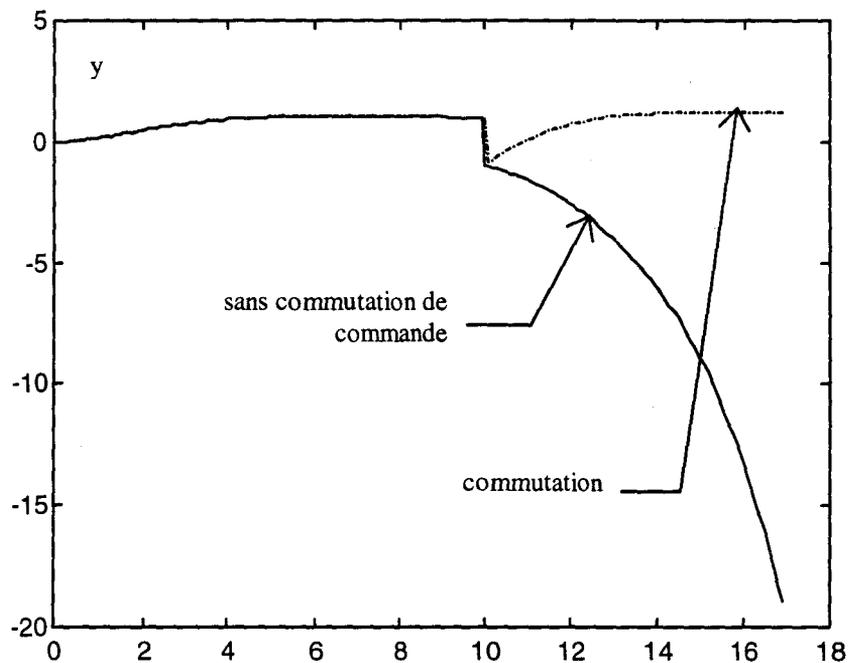


Figure 2.17 : Réponses indicielles. Défaillance à  $t=10$ s.  
Modèle dégradé  $M_{13}$

On peut conclure, ce qui était évident a priori, qu'il est plus intéressant d'envisager la commutation de commande sur des modèles dégradés qui conduisent à une détérioration des performances.

### Détection automatique de la défaillance

L'instant de défaillance étant imprévisible, sa détection peut être faite à l'aide du calcul des validités. On propose dans ce qui suit l'utilisation de la dérivée de la sortie comme résidu.

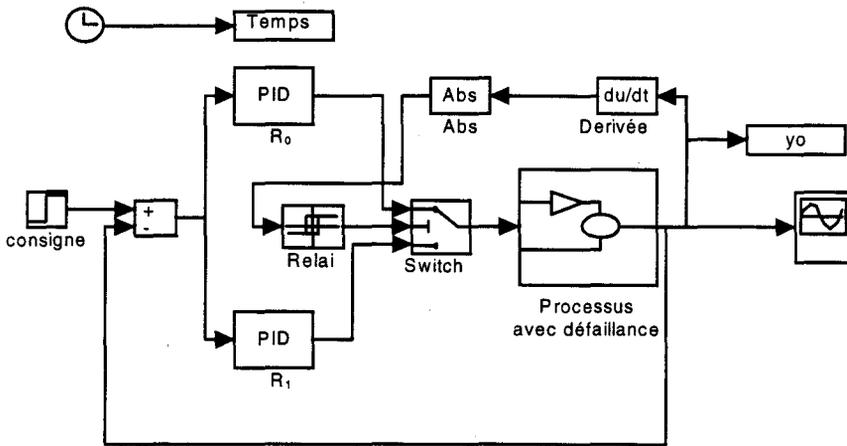


Figure 2.18 : Détection automatique de la défaillance.

La figure 2.18 montre le schéma de simulation avec détection automatique de la défaillance, utilisant la valeur absolue de la dérivée de la sortie. Les résultats de la simulation (figure 2.19), montrent l'efficacité de la méthode.

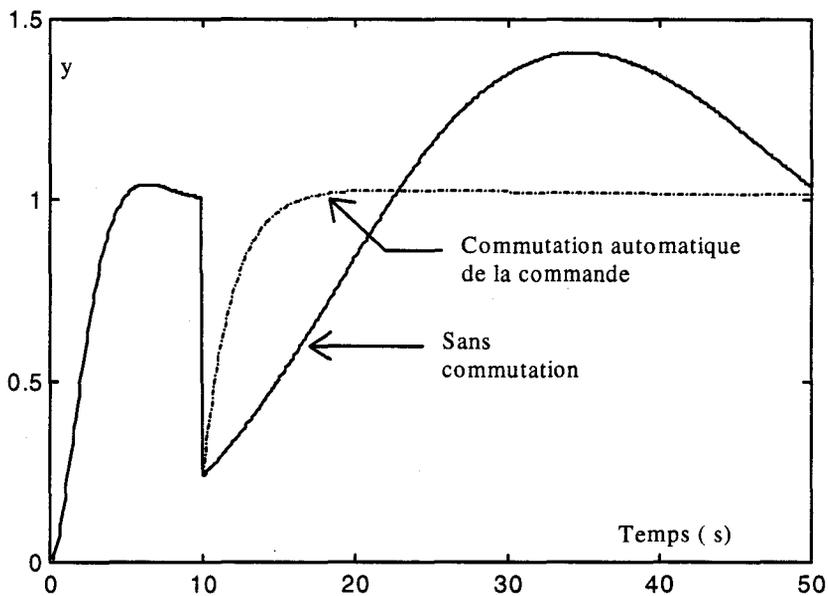


Figure 2.19 : Réponses indicielles.  
Modèle dégradé  $M_{12}$

La réponse à une consigne en rampe (figure 2.20) confirme les résultats précédents.

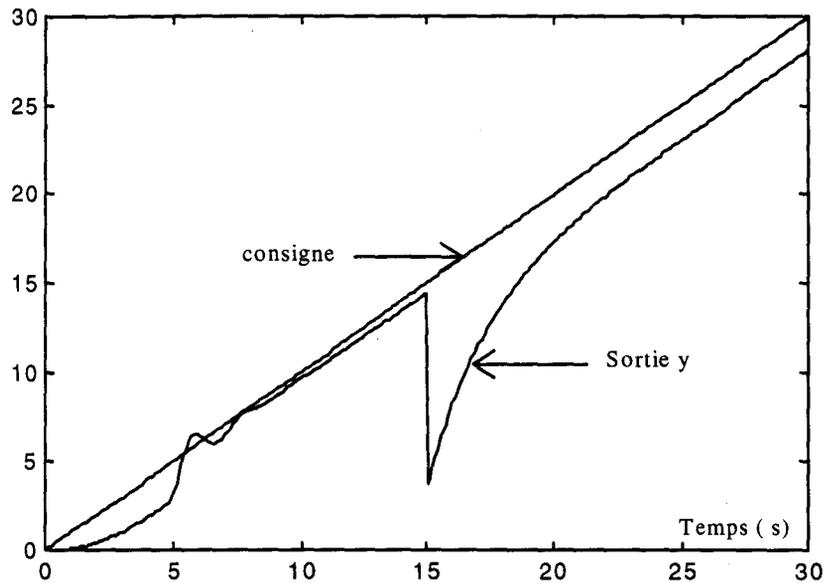


Figure 2.20 : Réponse à une rampe.  
 Détection automatique de la défaillance.  
 Modèle dégradé  $M_{12}$

**b) Reconfiguration automatique lorsque plusieurs modèles défaillants peuvent exister :**

Le schéma de principe global de simulation est donné sur la figure 2.21. Le bloc «processus avec défaillance» représente le système étudié, le bloc « régulateur » correspond à un régulateur reconfigurable. L'entrée et la sortie du processus sont envoyées à une unité, qui comprend les modèles de défaillance possibles ainsi qu'une fonction de calcul de résidu, et de décision sur le modèle de défaillance en cours.

Deux modes défaillants possibles sont envisagés, mais la généralisation à un nombre quelconque de défauts est immédiate. L'instant de la défaillance simulée est provoqué par action externe, dans la suite nous supposerons quelque soit le type de défaillance, et que celle ci se produit après 10 secondes de fonctionnement.

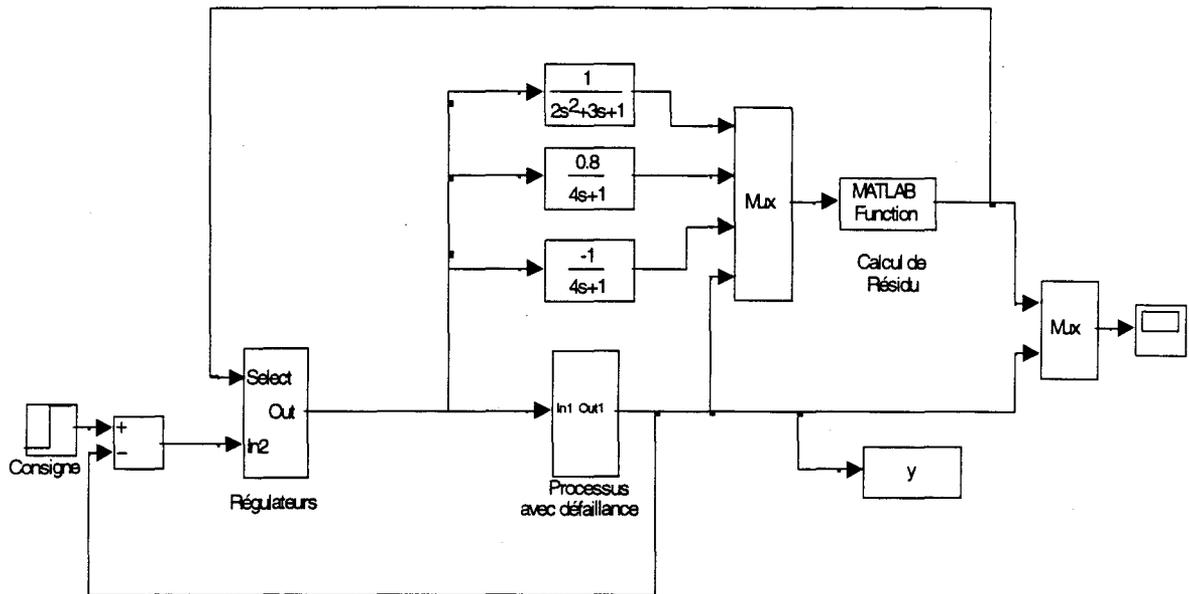


Figure 2.21 : Reconfiguration multipannes

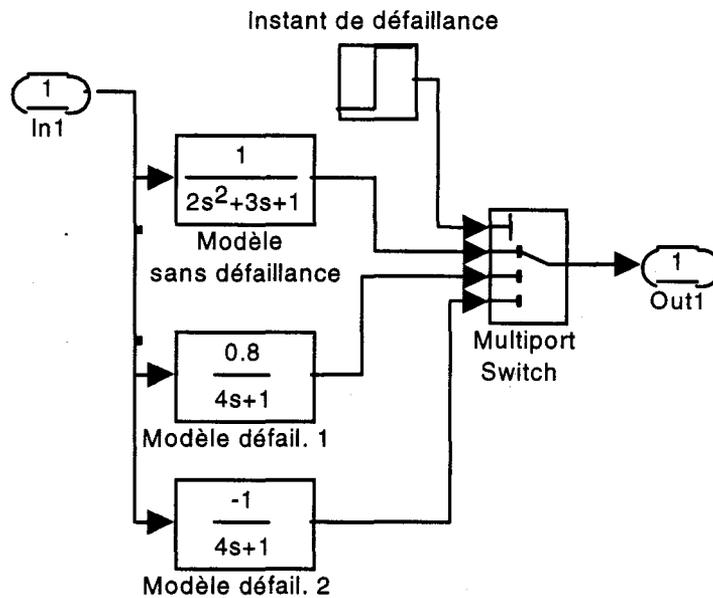


Figure 2.22 : Processus défaillant

Le régulateur reconfigurable est donné sur la figure 2.23. Un switch multiport permet de sélectionner un régulateur parmi trois correspondants respectivement, aux régulateurs

optimaux calculés pour le système avec le modèle correspondant au fonctionnement normal et les modèles défaillants 1 et 2.

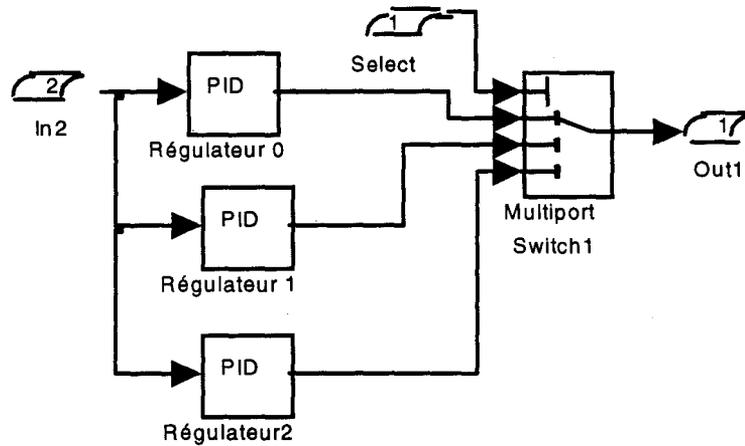


Figure 2.23 : Régulateur reconfigurable

Les résidus  $r_0$ ,  $r_1$  et  $r_2$  sont calculés par les modules des écarts entre les sorties des modèles 0, 1 et 2 avec la sortie du processus  $y$ .

$$\begin{aligned}
 r_0 &= |y_0 - y|; \\
 r_1 &= |y_1 - y|; \\
 r_2 &= |y_2 - y|; \\
 i^* &= \arg(\min_i (r_i))
 \end{aligned}$$

Les résidus  $r_0$ ,  $r_1$  et  $r_2$  sont calculés par les modules des écarts entre les sorties des modèles 0, 1 et 2 avec la sortie du processus. La commande  $i^*$  permet de déterminer l'indice du résidu le plus faible et donc celui du régulateur à mettre en œuvre.

Les figures 2.24 et 2.25 illustrent le bon comportement du système respectivement quand la défaillance 1 ou la défaillance 2 se produisent à 10 s.

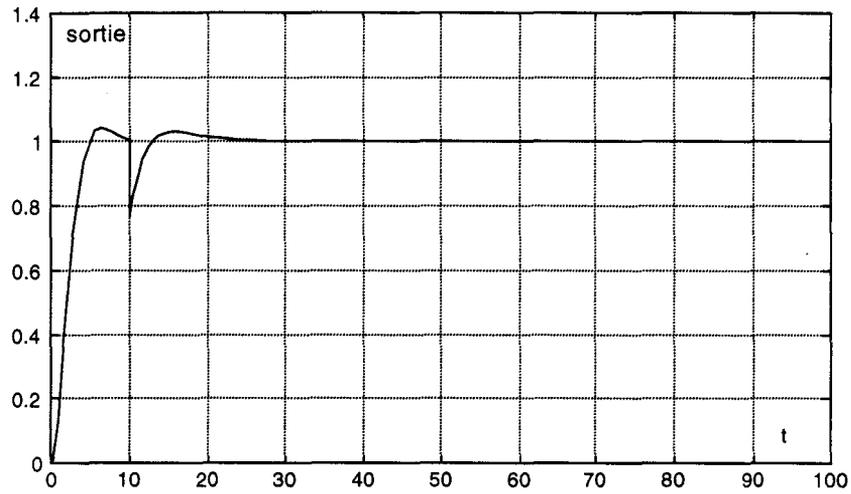


Figure 2.24 : La défaillance 1 se produit à  $t = 10$  s

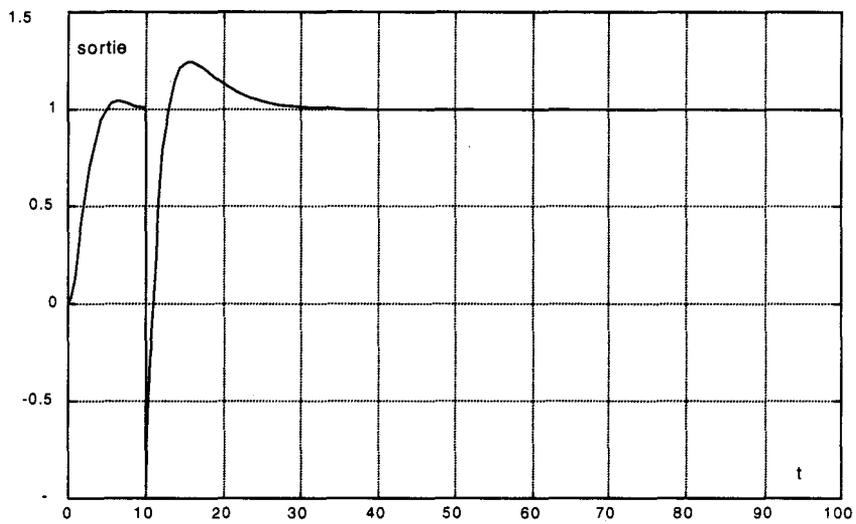


Figure 2.25 : La défaillance 2 se produit à  $t = 10$  s

## 2.6 Un exemple d'application de la fusion

On propose maintenant de mener une étude pratique et comparative sur quelques méthodes de calcul des validités et sur les moyens d'élaboration de la commande. On

montrera en particulier l'intérêt de notre proposition du §2.3 qui concerne l'introduction de la commande partielle  $u_i$  dans l'expression du résidu.

On reprend l'exemple traité au premier chapitre, dont on rappelle les équations :

$$\begin{aligned}x + \tau \dot{x} &= ku \\k &= 36x(x - 1) + 10 \\ \tau &= 15 - 10x\end{aligned}$$

L'horizon d'évolution correspond à 5 secondes et la consigne  $x_c$  est un échelon unité.  $k$  et  $\tau$  sont bornés par les valeurs minimales et maximales:

$$k_{\min} = 1 ; k_{\max} = 10 ; \tau_{\min} = 5s ; \tau_{\max} = 15s.$$

Afin de limiter l'amplitude de la commande, on impose à la commande de saturer avec :

$$|u| \leq 2.2.$$

### 2.6.1 Choix et commande des modèles de la base

La bibliothèque de modèles a été construite suivant une méthode que nous avons développée et qui est exposée au chapitre 3.

Modèle	K	$\tau$
M <sub>1</sub>	1	5
M <sub>2</sub>	1	15
M <sub>3</sub>	10	5
M <sub>4</sub>	10	15

Chacun de ces quatre modèles sera commandé de manière optimale selon un critère quadratique suivant le schéma de la figure 2.26.

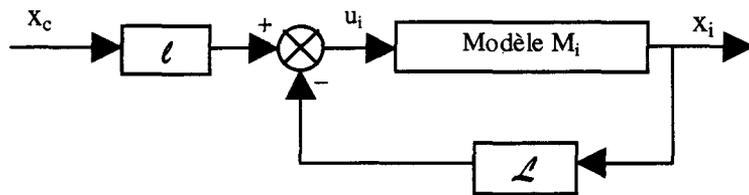


Figure 2.26 : Commande optimale du modèle  $M_i$

Sur cette figure  $u_i$  représente une commande du type optimal,  $x_c$  la consigne et  $x_i$  la sortie relative au modèle  $M_i$ .  $L$  et  $l$  sont calculés d'après les formules données au premier chapitre.

On rappelle qu'on cherche à amener le système de l'état initial  $x = 0$  à l'état final  $x = 1$  en un temps fini égal à 5 s tout en minimisant le critère  $J$  donné par:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [(x - x_f)^2 + u^2] dt$$

De plus, après le régime transitoire le système doit être maintenu à la valeur finale  $x_c$ . C'est pour cela qu'on utilise une commande proportionnelle et intégrale qui se déclenche dès que l'état atteint 0.98 et remplace alors la commande optimale.

Trois méthodes ont été développées pour élaborer la commande.

1. Calcul du résidu  $r_i = |x - x_i|$  et commande du système par la valeur  $u_i$  relative au système présentant le résidu le plus faible. C'est la méthode de commutation entre les différents modèles.
2. Calcul du même résidu, mais utilisation d'une combinaison des commandes  $u_i$ . C'est la fusion des commandes.
3. Fusion des commandes prenant en compte les résidus et les commandes  $u_i$  elles-mêmes.

Mais tout d'abord, nous allons donner les résultats obtenus lorsqu'on applique au système séparément chacune des commandes relatives aux modèles  $M_i$ . Le schéma de câblage est celui de la figure 2.27.

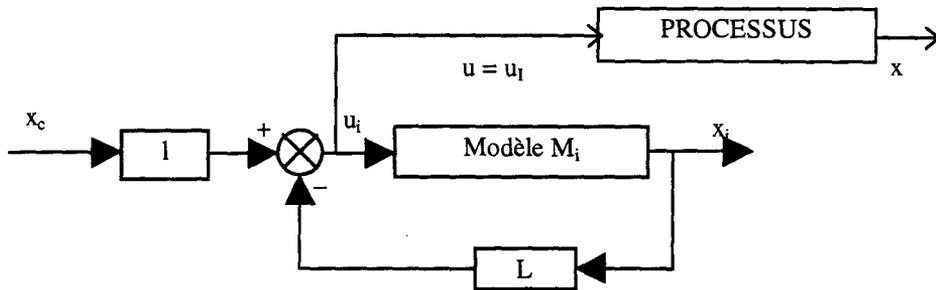


Figure 2.27 : Evaluation de l'action isolée de chaque modèle de la bibliothèque

Les courbes des figures 2.28 à 2.31, montrent l'évolution de la sortie et de la commande du système respectivement pour les quatre modèles de la bibliothèque.

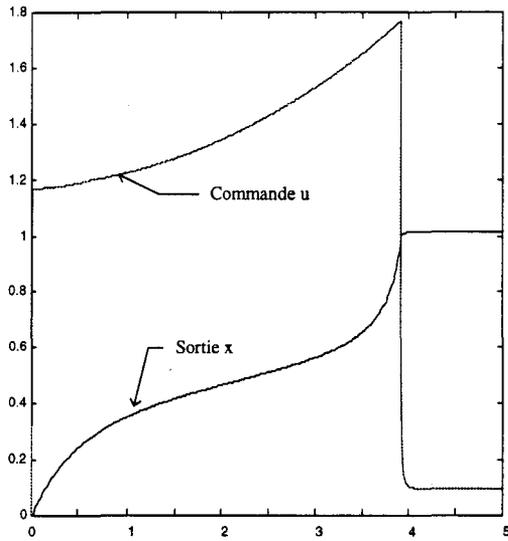


Figure 2.28 : Evolution de la sortie et de la commande  
Action du modèle  $M_1$  seul

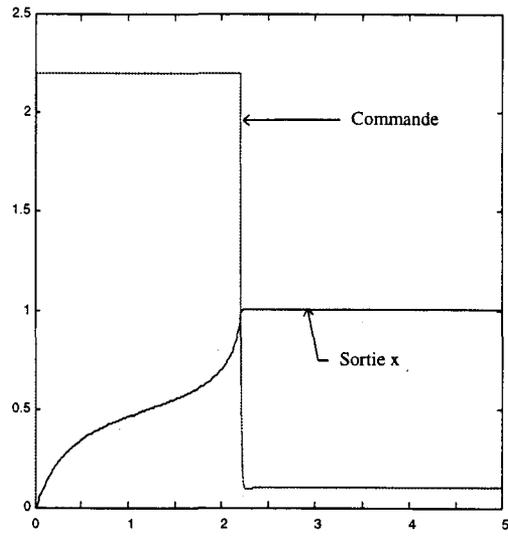


Figure 2.29 : Evolution de la sortie et de la commande  
Action du modèle  $M_2$  seul

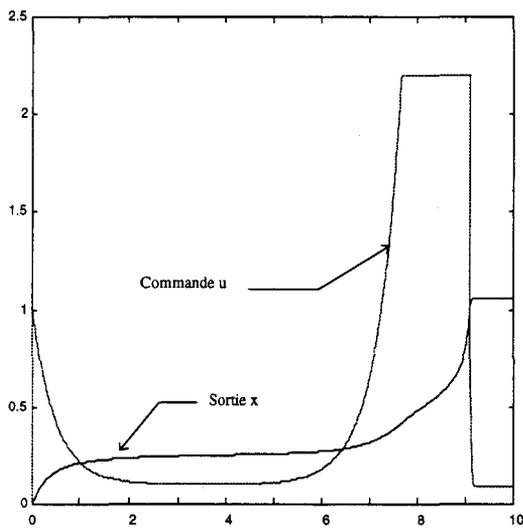


Figure 2.30 : Evolution de la sortie et de la commande  
Action du modèle  $M_3$  seul

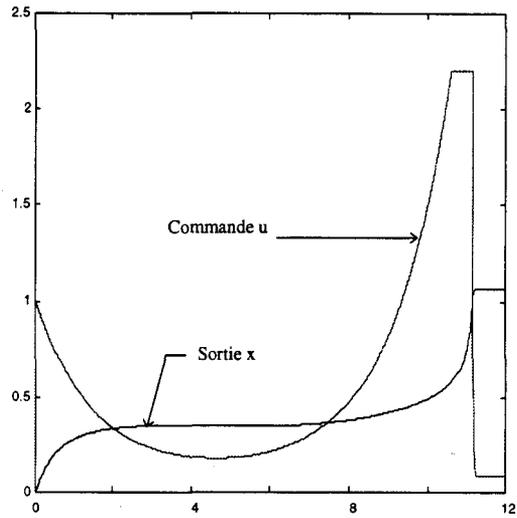


Figure 2.31 : Evolution de la sortie et de la commande  
Action du modèle  $M_4$  seul

## 2.6.2 Commande du processus non linéaire

### • Utilisation des résidus et commutation entre les commandes des différents modèles

Nous proposons maintenant d'exploiter la multicommande en utilisant les commandes partielles  $u_i$  de chacun des quatre modèles auxquelles il faut ajouter la commande PI quand on arrive au voisinage du point de consigne.

Le schéma de câblage est donné sur la figure 2.32.

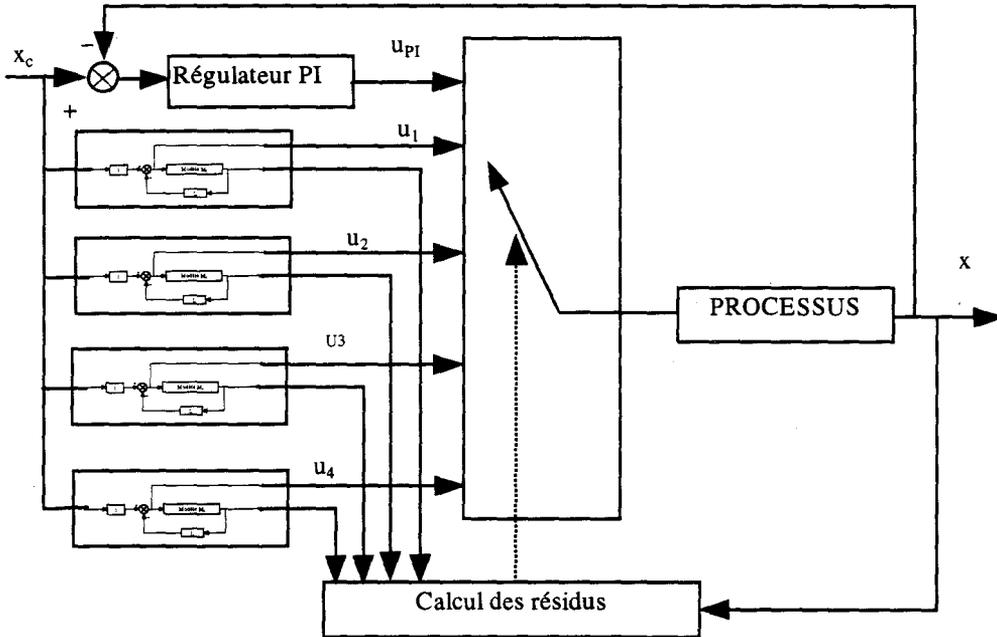


Figure 2.32 : Commutation entre les commandes

Les résultats de simulation sont illustrés par les courbes de la figure 2.33. On remarque les commutations sur la commande.

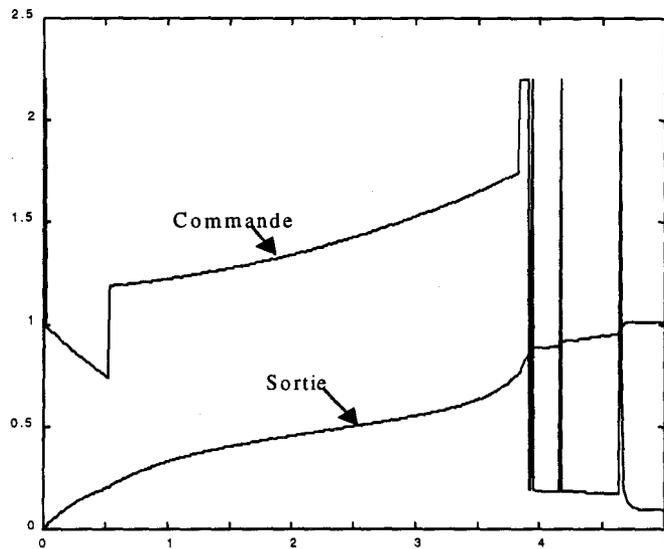


Figure 2.33 : Commutation des commandes

• Calcul des résidus et fusion des commandes

La loi de fusion des commandes a été choisie de façon à favoriser la commande relative au modèle présentant le résidu le plus faible. Le schéma de câblage est identique au précédent, en remplaçant le commutateur par l'organe de fusion.

Cette loi est définie par :

$$\begin{aligned}
 r_1 &= |x_1 - x|; \\
 r_2 &= |x_2 - x|; \\
 r_3 &= |x_3 - x|; \\
 r_4 &= |x_4 - x|; \\
 v_1 &= (r_2 + r_3 + r_4) / (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) / 3; \\
 v_2 &= (r_1 + r_3 + r_4) / (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) / 3; \\
 v_3 &= (r_1 + r_2 + r_4) / (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) / 3; \\
 v_4 &= (r_1 + r_2 + r_3) / (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) / 3;
 \end{aligned}$$

La commande appliquée au processus est donnée par :

$$u = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 + v_4 u_4, \text{ si } x < 0.98$$

$$\text{sinon } u = u_{PI} \text{ (commande PI).}$$

Les courbes obtenues dans ce cas sont celles de la figure 2.34. On remarque une évolution plus douce sans discontinuité de la commande.

Nous avons représenté sur la figure 2.35 l'évolution des valeurs calculées des validités au cours du temps. On remarque la forte contribution du modèle  $M_4$  au début, suivie de celles des modèle  $M_1$  et  $M_2$ .

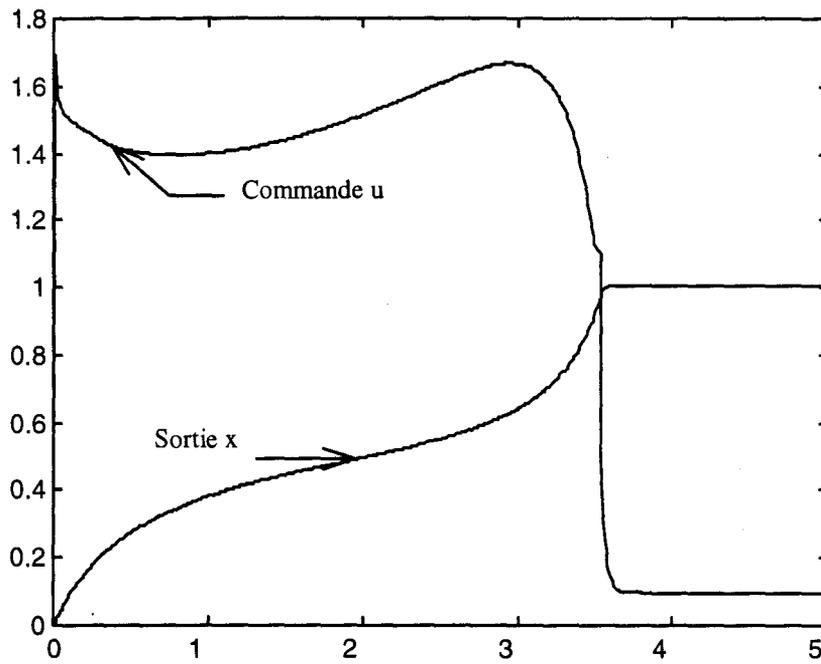


Figure 2.34 : Fusion des commandes

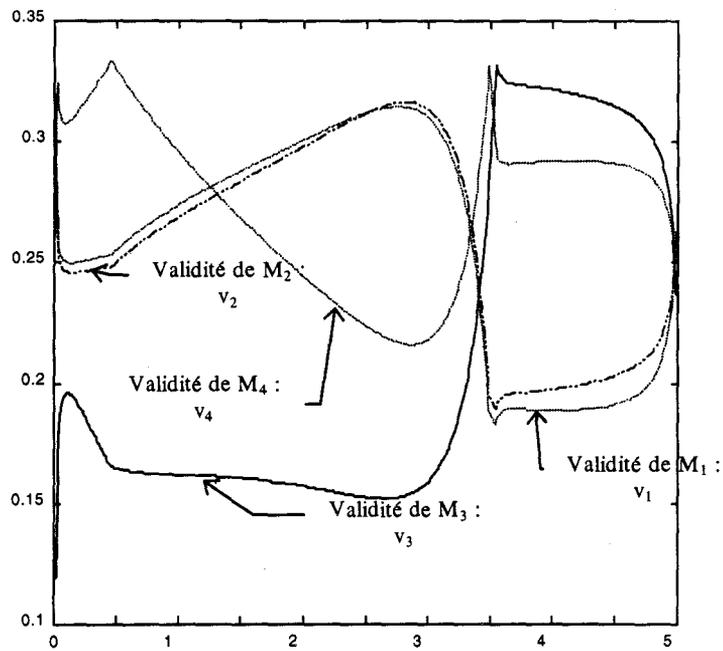


Figure 2.35 : Evolution des validités

• **Fusion tenant compte des commandes  $u_i$ :**

Nous avons opté pour un résidu donné par :

$$r_i = |\alpha u_i| + |x_i - x|.$$

Nous avons réalisé des essais pour plusieurs valeurs du facteur de pondération «  $\alpha$  ». Nous donnons sur les figures 2.36 et 2.37 les résultats obtenus. Comme précédemment la commande est calculée par fusion suivie par une action PI lorsque l'état atteint 0.98.

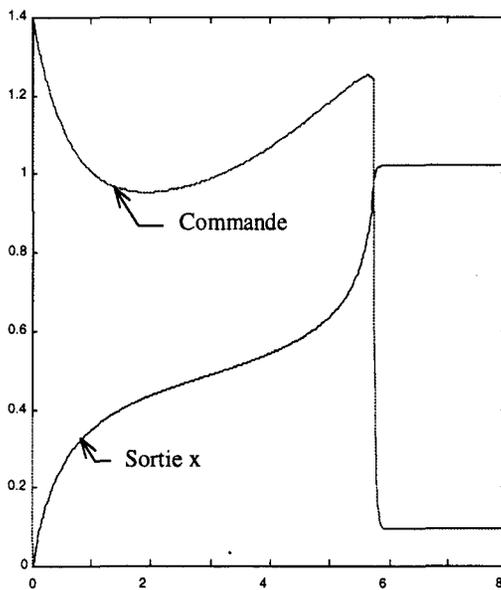


Figure 2.36 : fusion des commandes  
Résidus fonctions des commandes  
 $\alpha = 1$

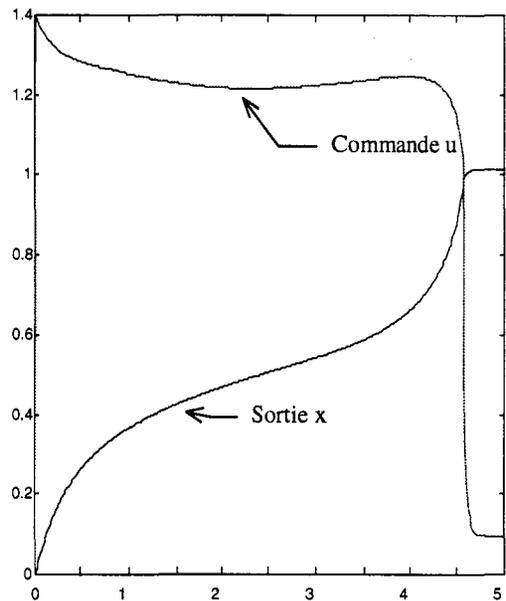


Figure 2.37 : fusion des commandes  
Résidus fonctions des commandes  
 $\alpha = 0.2$

Le tableau donné de la page suivante résume l'ensemble des résultats. On remarque que la régulation basée sur la fusion de commande avec un calcul des résidus tenant compte aussi bien des écarts entre les états que de la valeur des commandes, conduit aux meilleurs résultats du point de vue consommation d'énergie.

Type de commande : u	Critère (x=0 à 0.98)	temps de stabilisation x=0.98
$u=u_1$ : Optimale sur $M_1$	8.88	4
$u=u_2$ : Optimale sur $M_2$	11.42	2.5
$u=u_3$ : Optimale sur $M_3$	13.31	9
$u=u_4$ : Optimale sur $M_4$	12.17	11
Résidu(x)+Commutation	8.93	3.7
Résidu(x)+Fusion	9.03	3.5
Résidu(x,u)+Fusion	8.35	5.7
Résidu(x,u/5)+Fusion	8.43	4.5

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les méthodes de calcul des résidus en empruntant une démarche adoptée par les spécialistes en surveillance. Nous avons proposé un nouveau générateur de résidu utilisant en plus de la distance d'état un terme pénalisant lié à la commande partielle générée par le modèle  $M_i$  correspondant. Une application pratique a permis en simulation de prouver l'intérêt de cette approche.

Nous avons aussi présenté les méthodes de calcul des validités et nous avons proposé une nouvelle approche utilisant la logique floue. L'intérêt de cette nouvelle approche sera prouvé au chapitre 3 sur un exemple pratique.

Des essais en simulation sur la reconfiguration automatique en cas de panne ont permis de tester les techniques de calcul des résidus et de montrer les avantages de l'approche multicommande.



## Chapitre 3

### Choix de la Base de Modèles



## CHAPITRE 3

### Choix de la base de modèles

#### 3.1 Introduction

L'approche multimodèle se révèle très intéressante chaque fois que l'on est confronté à des systèmes assez complexes. Ces derniers sont alors représentés par plusieurs modèles simples, chacun d'eux permettant de générer une commande partielle. Plusieurs auteurs [Johansen 97, Delmotte 96], proposent des structures de contrôleur correspondant au schéma de la figure 3.1 extraite de la référence [Delmotte 97].

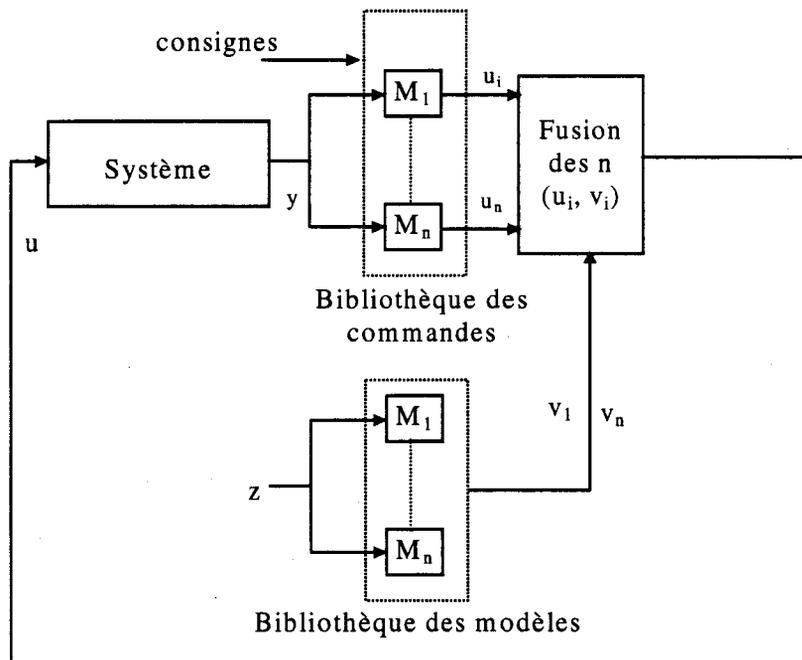


Figure 3.1 : Structure d'un contrôleur multimodèle

La sortie  $y$  du système est utilisée comme entrée des modèles de commande élaborés à partir des modèles partiels. Les commandes  $u_i$  générées sont alors fusionnées, et conduisent à la commande  $u$  à appliquer au système. La fusion est pilotée par les indices de validité  $v_i$ , liés aux modèles partiels et aux entrées  $z$  qui peuvent être des entrées du système, des variables internes, des paramètres d'environnement, et/ou des données d'«experts».

On peut reprocher à l'approche multimodèle le fait de faire appel à plusieurs modèles partiels, dont le nombre peut augmenter de manière démesurée. De plus, il n'y a pas de méthode systématique de choix des modèles partiels, ce qui impose plusieurs essais préliminaires avant de se fixer sur ces derniers.

Dans ce chapitre nous proposons une nouvelle stratégie pour la construction de la base de modèles. Cette stratégie présente l'avantage de limiter à quatre, cinq ou au maximum six le nombre de modèles constituant la base. Nous confirmerons par des simulations présentées en fin de chapitre l'intérêt de la méthode proposée.

### 3.2 Définition des modèles extrêmes : cas des processus linéaires incertains

L'étude de la stabilité des systèmes continus linéaires dont les valeurs des paramètres sont connues seulement par leurs intervalles de localisation peut être réalisée à partir de l'étude de la stabilité de quatre systèmes particuliers [Kharitonov 78, Chapellat 89].

En effet, si nous avons un polynôme à coefficients réels de la forme :

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k ;$$

pour lequel nous savons que :

$$a_k \in [\underline{a}_k, \overline{a}_k] \text{ où } \underline{a}_k = \min(a_k); \text{ et } \overline{a}_k = \max(a_k).$$

les coefficients  $a_k$  étant constants, Kharitonov [Kharitonov 78] a montré que les racines de  $P(\lambda)$  sont à parties réelles strictement négatives

$$\forall a_k \in [\underline{a}_k, \overline{a}_k] \text{ et } \forall k$$

si et seulement si les quatre polynômes suivants ont eux mêmes des racines à parties réelles négatives :

Polynôme	Coefficients classés par ordre des puissances croissantes							
$P_1(\lambda)$	$\underline{a}_0$	$\overline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\overline{a}_5$	$\overline{a}_6$	...
$P_2(\lambda)$	$\underline{a}_0$	$\underline{a}_1$	$\overline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\overline{a}_6$	...
$P_3(\lambda)$	$\overline{a}_0$	$\overline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\overline{a}_4$	$\overline{a}_5$	$\underline{a}_6$	...
$P_4(\lambda)$	$\overline{a}_0$	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\overline{a}_3$	$\overline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{a}_6$	...

L'application de cette propriété s'avère particulièrement intéressante pour l'étude de la stabilité des processus à paramètres constants mais incertains. Par exemple, si nous considérons le processus bouclé de la figure 3.2 pour lequel nous avons :

$$a_i \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i], b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i] \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

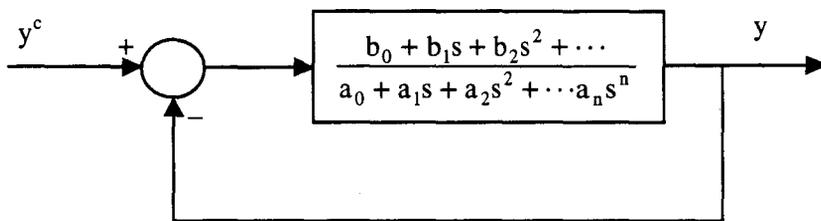


Figure 3.2 : Processus bouclé

La fonction de transfert en boucle fermée vérifie :

$$\frac{Y}{Y^c} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots}{(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)s + (a_2 + b_2)s^2 + \dots s^n}$$

La condition de stabilité est que le critère de Routh soit satisfait pour les quatre polynômes :

$$P_1(s) = (\underline{a_0} + \underline{b_0}) + (\underline{a_1} + \underline{b_1})s + (\underline{a_2} + \underline{b_2})s^2 + \dots$$

$$P_2(s) = (\overline{a_0} + \overline{b_0}) + (\overline{a_1} + \overline{b_1})s + (\overline{a_2} + \overline{b_2})s^2 + \dots$$

$$P_3(s) = (\overline{a_0} + \underline{b_0}) + (\overline{a_1} + \underline{b_1})s + (\overline{a_2} + \underline{b_2})s^2 + \dots$$

$$P_4(s) = (\underline{a_0} + \overline{b_0}) + (\underline{a_1} + \overline{b_1})s + (\underline{a_2} + \overline{b_2})s^2 + \dots$$

En pratique la stabilité du processus de fonction de transfert à paramètres mal définis :

$$F(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots s^n}$$

peut être étudiée à partir de celle des quatre processus de fonctions de transfert :

$$F_1(s) = \frac{\underline{b_0} + \underline{b_1}s + \underline{b_2}s^2 + \dots}{\underline{a_0} + \underline{a_1}s + \underline{a_2}s^2 + \dots s^n}$$

$$F_2(s) = \frac{\overline{b_0} + \overline{b_1}s + \overline{b_2}s^2 + \dots}{\overline{a_0} + \overline{a_1}s + \overline{a_2}s^2 + \dots s^n}$$

$$F_3(s) = \frac{\overline{b_0} + \underline{b_1}s + \underline{b_2}s^2 + \dots}{\overline{a_0} + \underline{a_1}s + \underline{a_2}s^2 + \dots s^n}$$

$$F_4(s) = \frac{\underline{b_0} + \overline{b_1}s + \overline{b_2}s^2 + \dots}{\underline{a_0} + \overline{a_1}s + \overline{a_2}s^2 + \dots s^n}$$

Nous appellerons modèles extrêmes du processus ces quatre modèles définis à partir des valeurs extrêmes des intervalles de définition des coefficients. Ces modèles extrêmes peuvent

constituer à eux seuls la bibliothèque de modèles qui est alors limitée à quatre modèles comme le montre la figure 3.3.

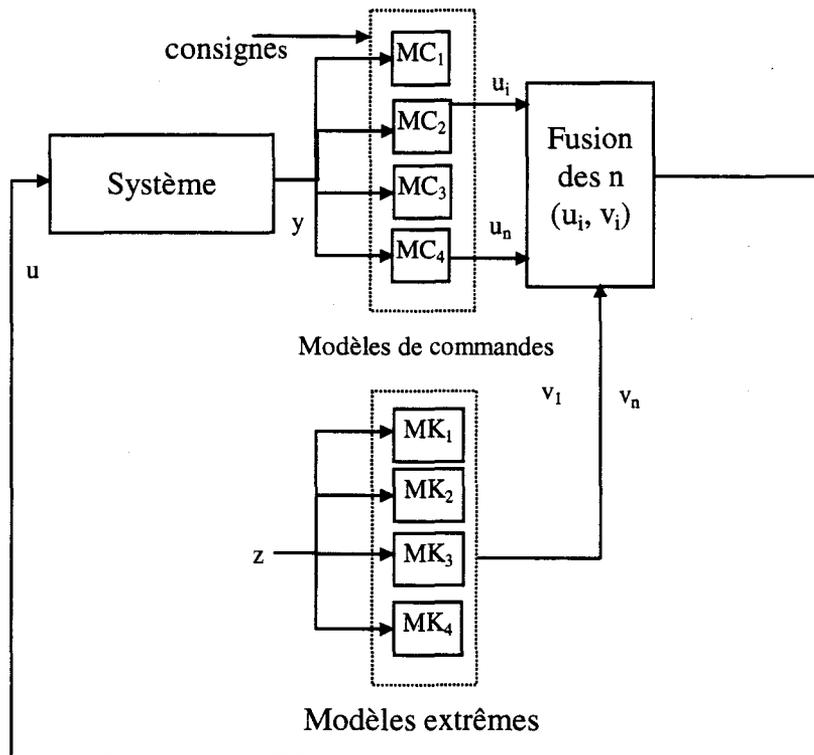


Figure 3.3 : Structure d'un contrôleur multimodèle basé sur les quatre modèles extrêmes

Avec l'approche proposée, on résout d'une part le problème lié à la multiplicité des modèles partiels en les limitant à quatre, quelque soit l'ordre et la complexité du système étudié, et d'autre part, on offre un moyen de détermination systématique des modèles partiels.

### 3.3 Commande multimodèle des systèmes linéaires incertains

Dans la recherche d'une commande multimodèle il apparaît intéressant, compte tenu de leurs propriétés, de faire figurer ces quatre modèles extrêmes dans la base de modèles choisie.

Il apparaît également intéressant de faire figurer dans la base de modèles le modèle moyen de coefficients :

$$a_{im} = \frac{a_i + \bar{a}_i}{2}, \text{ et } b_{im} = \frac{b_i + \bar{b}_i}{2} \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

d'où la fonction de transfert associée :

$$F_m(s) = \frac{b_{0m} + b_{1m}s + b_{2m}s^2 + \dots}{a_{0m} + a_{1m}s + a_{2m}s^2 + \dots s^n}.$$

C'est ce modèle qui est d'ailleurs le plus souvent retenu dans la commande monomodèle pour un processus à coefficients incertains.

### 3.4 Systèmes non linéaires et/ou non stationnaires et/ou à paramètres incertains

Dans ce cas, l'évolution du processus est décrite par une équation de la forme :

$$a_0(.)y + a_1(.)y^{(1)} + a_2(.)y^{(2)} + \dots + a_{n-1}(.)y^{(n-1)} + y^{(n)} = b_0(.)u + b_1(.)u^{(1)} + b_2(.)u^{(2)} + \dots + b_{n-1}(.)u^{(n-1)}$$

Dans cette écriture, (.) représente l'ensemble des variables, incertitudes, bruits ou perturbations intervenant sur les coefficients du processus.

Si nous avons les domaines d'évolution de chacun des paramètres sous forme d'intervalles de localisation :

$$a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i], \quad b_i \in [\underline{b}_i, \bar{b}_i] \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

par analogie avec le cas linéaire, il apparaît encore intéressant de mettre dans la base de modèles les quatre modèles extrêmes et le modèle moyen.

Si de plus chaque coefficient  $\gamma_i(\cdot)$  désignant les coefficients  $b_i(\cdot)$  ou  $a_i(\cdot)$ , dépend de façon connue de l'état  $\gamma_i(\cdot) = \gamma_i(x)$ , il apparaît intéressant dans un problème de régulation d'ajouter à la base formée des cinq modèles précédents le modèle local dont les coefficients sont ceux définis au point de consigne  $x_c$ .

$$a_{ic} = a_i(x_c), \quad b_{ic} = b_i(x_c), \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

$$F_c(s) = \frac{b_{0c} + b_{1c}s + b_{2c}s^2 + \dots}{a_{0c} + a_{1c}s + a_{2c}s^2 + \dots s^n}.$$

Lorsque chaque coefficient  $\gamma_i(\cdot)$  dépend de l'état et/ou du temps et/ou des perturbations  $\gamma_i(\cdot)$

$$= \gamma_i(x, t, \cdot);$$

avec la seule information :

$$\underline{\gamma}_{ic} \leq \gamma_i(x_c, t, \cdot) \leq \overline{\gamma}_{ic};$$

il convient de choisir pour  $F_c(s)$  les coefficients :

$$\gamma_{ic} = \frac{\underline{\gamma}_{ic} + \overline{\gamma}_{ic}}{2},$$

soit :

$$a_{ic} = \frac{\underline{a}_{ic} + \overline{a}_{ic}}{2}, \quad \text{et} \quad b_{ic} = \frac{\underline{b}_{ic} + \overline{b}_{ic}}{2} \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

avec :

$$\underline{a}_{ic} \leq a_i(x_c, t, \cdot) \leq \overline{a}_{ic},$$

et

$$\underline{b}_{ic} \leq b_i(x_c, t, \cdot) \leq \overline{b}_{ic}.$$

### 3.5 Application à un système non linéaire

L'exemple académique choisi a été mis en œuvre dans les chapitres précédents. On cherche à amener le système décrit ci-dessous de l'état initial  $x = 0$  à l'état final  $x = 1$  en un temps fini égal à 5 s tout en minimisant le critère  $J$  donné par:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [(x - x_f)^2 + u^2] dt$$

Le système étant décrit par le modèle suivant:

$$\dot{x} + (15 - 10x)x = (36x(x - 1) + 10)u.$$

En se référant à la notation adoptée précédemment, on peut écrire :

$$a(\cdot) = 15 - 15x,$$

et

$$b(\cdot) = 36x(x-1) + 10.$$

$a(\cdot)$  et  $b(\cdot)$  sont fonctions de l'état et comme ce dernier évolue entre 0 et 1, on calcule les valeurs limites :

$$\underline{b}(\cdot) = 10; \overline{b}(\cdot) = 10; \underline{a}(\cdot) = 15; \overline{a}(\cdot) = 15s.$$

d'où les quatre modèles extrêmes et les fonctions de transfert associées :

Modèle	b(.)	a(.)
MK <sub>1</sub>	1	5
MK <sub>2</sub>	1	15
MK <sub>3</sub>	10	5
MK <sub>4</sub>	10	15

$$F_1(s) = \frac{1}{1+5s},$$

$$F_2(s) = \frac{1}{1+15s},$$

$$F_3(s) = \frac{10}{1+5s},$$

$$F_4(s) = \frac{10}{1+15s}.$$



Nous avons procédé à des simulations en considérant les deux situations suivantes :

- Une bibliothèque de modèles formée d'un très grand nombre de modèles obtenus par linéarisation autour des différents points de fonctionnement.
- Le cas d'une bibliothèque formée des quatre modèles extrêmes.

Dans chaque cas nous avons calculé la valeur obtenue pour le critère ainsi que le temps de stabilisation à 5%. Les résultats prouvent la supériorité de la stratégie que nous proposons. En effet, on calcule un critère ne dépassant pas la valeur 8.35 avec un temps de stabilisation inférieur à 5 s dans le cas d'une fusion avec les quatre modèles extrêmes et un calcul des résidus tenant compte de l'amplitude de la commande comme indiqué au chapitre 2. Par contre, en considérant une commande optimale et en faisant tendre vers l'infini le nombre de

modèles de la bibliothèque, on obtient une valeur du critère égale uniquement à 8.93 pour un temps de stabilisation de 5 s. la stratégie proposée est plus performante et on découvre que ce n'est pas en augmentant le nombre de modèles de la bibliothèque qu'on est assuré d'avoir une meilleure commande. Un choix intelligent des modèles représentatifs du processus permet d'optimiser et de limiter la taille de la bibliothèque.

### 3.6 Application à un système linéaire non stationnaire incertain

Pour cette étude nous avons choisi deux modèles, le premier d'ordre trois est emprunté à la littérature et le deuxième d'ordre cinq est défini par nous mêmes. Nous envisageons une bibliothèque de modèles construite suivant la stratégie que nous préconisons et nous étudions l'influence du modèle moyen ainsi que la technique de commande.

#### 1. présentation des modèles

Les processus sont représentés par :

$$\dot{x} = f(x, u, t) = A(t)x + Bu$$

$$y = C(t)x$$

Le modèle 1 est donné par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = (c_1 \quad c_2 \quad 2);$$

$$-a_0 = -3 + 3q_1 - q_2 + q_1q_2; \quad -a_1 = -1 - 2q_1 - q_2; \quad -a_2 = 1 + q_1$$

$$c_1 = q_1 + q_2 - q_1q_2 - 2q_1q_2q_3 - 1 - 2q_1q_3$$

$$c_2 = 1 - q_1q_3 + q_2 - 2q_1$$

$$-0.1 \leq q_1 \leq 0.1 ;$$

$$-0.1 \leq q_2 \leq 0.1 ;$$

$$-1 \leq q_3 \leq 1.$$

On prend par exemple :

$$q_1 = 0.1 \sin(t)$$

$$q_2 = 0.1 \sin(t+0.05)$$

$$q_3 = 1 \sin(t+0.01).$$

Le modèle 2 est d'ordre plus élevé et est représenté par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

Les paramètres  $a_i$  varient dans les limites indiquées sur le tableau suivant :

	$a_{\text{moyen}}$	$\Delta a$	min	max
$-a_0$	-1	1	-2	0
$-a_1$	1.2	0.5	0.7	1.7
$-a_2$	0.5	1	-0.5	1.5
$-a_3$	-0.3	0.2	-0.5	-0.1
$-a_4$	1	0.1	0.9	1.1

Pour le vecteur  $C$ , nous prendrons d'abord  $C=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  puis  $C=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ .

On choisi par exemple pour la simulation :

$$-a_0 = -1 + \Delta a_0 \sin(t);$$

$$-a_1 = 1.2 + 0.5 \sin(t+0.05);$$

$$-a_2 = 0.5 + 1 \sin(t+0.01);$$

$$-a_3 = -0.3 + 0.2 \sin(t+0.1);$$

$$-a_4 = 1 + 0.1 \sin(t+0.5);$$

## 2. Modèles extrémaux :

On détermine les quatre modèles extrémaux précédemment définis :

Pour l'exemple 1, on obtient :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\underline{a_0} & -\overline{a_1} & -\overline{a_2} \end{pmatrix}; \quad C_1 = (\underline{c_1} \quad \overline{c_2} \quad 2);$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\underline{a_0} & -\underline{a_1} & -\overline{a_2} \end{pmatrix}; \quad C_2 = (\underline{c_1} \quad \underline{c_2} \quad 2);$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\overline{a_0} & -\overline{a_1} & -\underline{a_2} \end{pmatrix}; \quad C_3 = (\overline{c_1} \quad \overline{c_2} \quad 2);$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\underline{a_0} & -\underline{a_1} & -\underline{a_2} \end{pmatrix}; \quad C_4 = (\overline{c_1} \quad \underline{c_2} \quad 2);$$

avec pour les fonctions de transfert associées les coefficients :

$$-\overline{a_0} = -2.79; \quad -\overline{a_1} = -0.7; \quad -\overline{a_2} = 1.1;$$

$$-\underline{a_0} = -3.19; \quad -\underline{a_1} = -1.3; \quad -\underline{a_2} = 0.9;$$

$$\overline{c_1} = -0.95; \quad \overline{c_2} = 1.02;$$

$$\underline{c_1} = -1.039; \quad \underline{c_2} = 0.7;$$

Les pôles des quatre modèles extrêmes sont donnés sur la table ci-dessous qui montre que ces derniers sont instables, l'instabilité est du type oscillatoire dans les quatre cas.

Modèles	1	2	3	4
Pôles	-1.0633 1.0816 + 1.3529i 1.0816 - 1.3529i	-0.9670 1.0335 + 1.4935i 1.0335 - 1.4935i	-1.0337 0.9669 + 1.3282i 0.9669 - 1.3282i	-0.9297 0.9148 + 1.4711i 0.9148 - 1.4711i

Les matrices  $A_i$  étant sous la forme compagne, les zéros des polynômes définis par les  $C_i$  sont aussi zéros des fonctions de transfert des modèles extrêmes. Le calcul prouve que les quatre fonctions de transfert sont à déphasage non minimal comme le montrent les valeurs des zéros données ci-dessous:

Modèle	1	2	3	4
Zéros	1.9625 -0.9808	1.7646 -1.0909	2.0839 -1.0102	1.8654 -1.1286

Pour l'exemple 2, on a :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\underline{a_0} & -\underline{a_1} & -\underline{a_2} & -\underline{a_3} & -\underline{a_4} \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\underline{a_0} & -\underline{a_1} & -\underline{a_2} & -\underline{a_3} & -\underline{a_4} \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\underline{a_0} & -\underline{a_1} & -\underline{a_2} & -\underline{a_3} & -\underline{a_4} \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\underline{a_0} & -\underline{a_1} & -\underline{a_2} & -\underline{a_3} & -\underline{a_4} \end{pmatrix};$$

### 3. Les modèles moyens :

Ils sont calculés comme une moyenne des quatre modèles extrémaux.

On obtient pour l'exemple 1 :

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = (-1 \ 1 \ 2);$$

et pour l'exemple 2 :

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1.2 & 0.5 & -0.3 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

$$C = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

puis

$$C = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1).$$

La valeur de  $C=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$  commune aux cinq modèles de la bibliothèque de l'exemple 2 modifié, conduit aux mêmes valeurs des zéros pour les cinq fonctions de transfert. On trouve:

$$\begin{aligned} &0.3090 + 0.9511i \\ &0.3090 - 0.9511i \\ &-0.8090 + 0.5878i \\ &-0.8090 - 0.5878i \end{aligned}$$

Deux zéros sont instables avec une forte partie imaginaire. Bien évidemment un tel système ne présente aucun intérêt du point de vue physique, il nous sert uniquement pour tester l'ensemble des approches proposées dans des conditions très sévères.

Les pôles des quatre modèles extrêmes et du modèle moyen de l'exemple 2 sont donnés dans le tableau suivant:

Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3	Modèle 4	Modèle moyen
-3.8008	-3.8919	5.9086	5.9718	-0.0054 + 1.1251i
-0.6553 + 0.6602i	-0.6225 + 0.5393i	-0.7606	-0.6990	-0.0054 - 1.1251i
-0.6553 - 0.6602i	-0.6225 - 0.5393i	0.1920 + 0.6254i	0.5959	1.2735
0.5557 + 0.1601i	0.5685 + 0.3058i	0.1920 - 0.6254i	0.0656 + 0.5979i	0.6672
0.5557 - 0.1601i	0.5685 - 0.3058i	0.4679	0.0656 - 0.5979i	-0.9298

On constate que les cinq modèles de la bibliothèque sont instables. Ils seront stabilisés par des commandes adéquates comme cela sera montré plus loin.

#### 4. Structure de la commande

Le schéma proposé repose sur l'idée d'une généralisation de la méthode LQ aux systèmes incertains. Les gains  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{K}$  sont obtenus à partir des gains  $\ell_i$  et  $K_i$  des 4 modèles extrêmes et des gains du modèle moyen en les pondérant par les validités  $v_i$ .

La commande multimodèle utilise les 5 modèles précédents de la manière suivante :

- On calcule la sortie  $y_i$  (relative au modèle  $M_i$ ) :

$$\dot{x}_i = A_i x + B_i u$$

$$y = C_i x_i :$$

- On calcule la sortie  $y_m$  (relative au modèle  $M_m$ ) :

$$\dot{x}_m = A_m x + B_m u$$

$$y = C_m x_m :$$

- L'état  $x_i$  est exploité, comme le montre la figure 3.4, pour générer la commande  $u_i$  ; par la formule :

$$u_i = \ell_i y^c - K_i x.$$

C'est une commande par retour d'état calculée en utilisant la méthode d'optimisation linéaire quadratique LQ qui fournit les gains  $K_i$ .

Le critère retenu est le suivant :

$$J = \int (y^2 + u^2) dt.$$

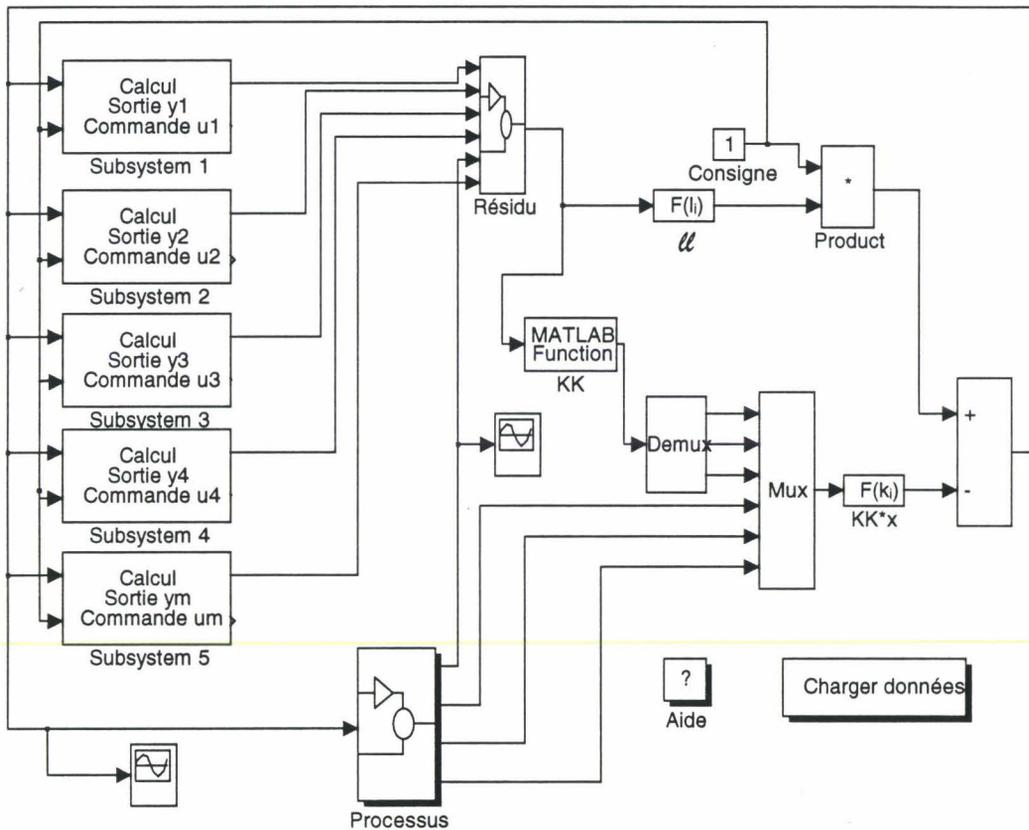
Les gains  $\zeta_i$  sont calculés de façon à annuler l'erreur statique de position pour le modèle

$M_i$  (gain statique en boucle fermée égal à 1) par la formule :

$$\zeta_i = -[C_i(A_i - B_i K_i)^{-1} B_i]^{-1}.$$

Tous les calculs précédents sont effectués par une procédure  $P_1$  qui correspond au bloc

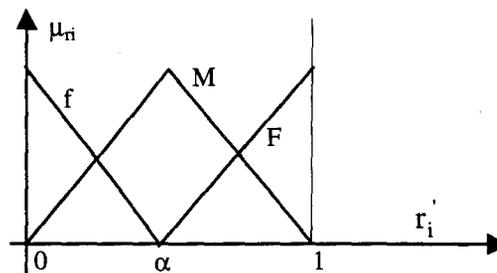
« charger données » de la figure 3.4.



Sur cette figure on distingue les quatre sous systèmes correspondant au calcul des sorties  $y_i$  et des commandes  $u_i$ . Les sorties  $y_i$  sont utilisées en même temps que la sortie  $y$  du processus pour calculer les résidus qui sont donnés par les formules :

$$r_i = \frac{|y - y_i|}{\sum_{j=1}^{4,m} |y - y_j|} ;$$

Les validités sont calculées par l'approche floue décrite au chapitre 2 avec la première table d'inférence, les fonctions d'appartenances sont choisies de formes triangulaires comme le montre la figure suivante :



Nous avons introduit un paramètre  $\alpha$  dans la description des fonctions d'appartenance afin d'illustrer l'influence de leur choix sur le comportement du système.

La méthode de défuzzyfication choisie est du type barycentrique.

Les validités sont utilisées pour calculer :

- le facteur de pondération de la consigne  $u$

$$u = \sum_{j=1}^4 v_j \ell_j$$

- le terme de retour d'état  $KK$  qui est un vecteur à 3 composantes calculées par

$$KK = \sum_{j=1}^4 v_j K_j .$$

avec  $K_j$  le gain optimum (LQ du modèle  $M_j$ ), d'où :

$$KKx = KK x = \sum_{j=1}^3 KK(j)x_j .$$

On obtient donc la commande  $u$ , comme le montre la figure 3.4, par la différence :

$$u = u y_c - KKx .$$

### 5. Résultats de simulation. Exemple 1

Les résultats de simulation montrent la robustesse de l'approche proposée. Les figures 3.5 et 3.6 représentent les évolutions de la sortie  $y(t)$  et de la commande  $u(t)$  dans le cas de l'exemple 1 et pour des fonctions d'appartenances identiques caractérisées par  $\alpha = 0.5$ . On constate que malgré les fortes variations dues au vecteur  $C$  caractérisant la sortie du processus, cette dernière se stabilise au bout de 5 s environ. La figure 3.7 montre l'influence de ce paramètre. On voit que pour  $\alpha = 0.9$ , le système présente une dynamique plus lente.

Il est certain que nous aurions pu nous attacher à la détermination de fonctions d'appartenances optimisées ou à l'étude de l'influence des différentes techniques de fuzzyfication ou de défuzzyfication, mais ceci n'est pas l'objet de notre préoccupation actuelle.

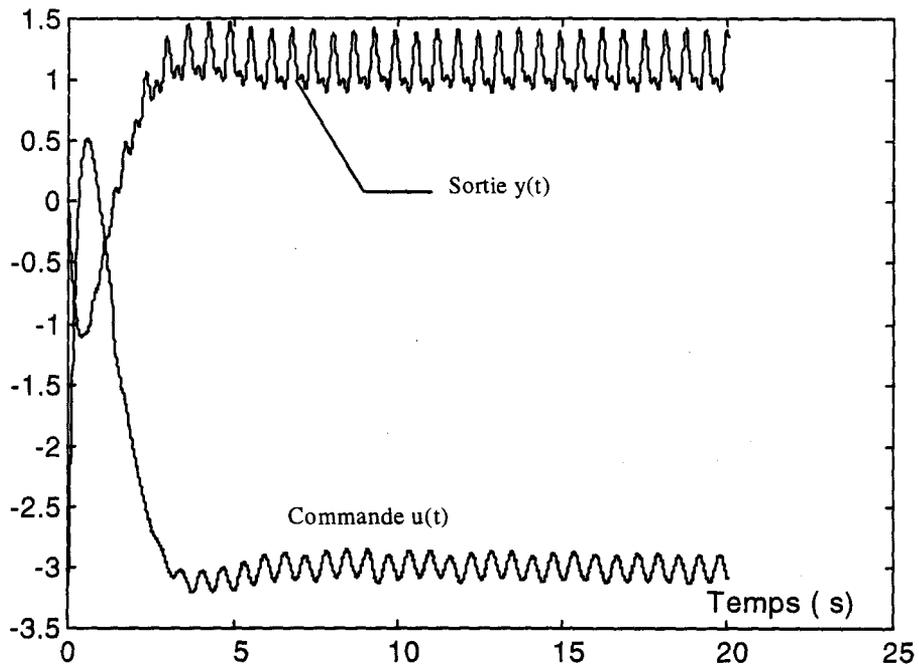


Figure 3.5 : Commande multimodèle. Réponse indicielle.  
Cas de l'exemple 1

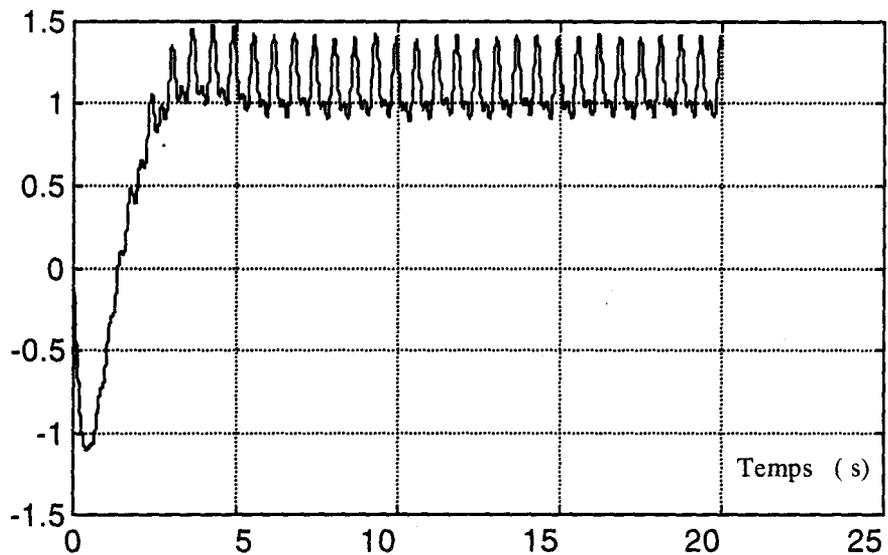


Figure 3.6 : Commande multimodèle  
Evolution de la sortie  $y(t)$ , exemple 1

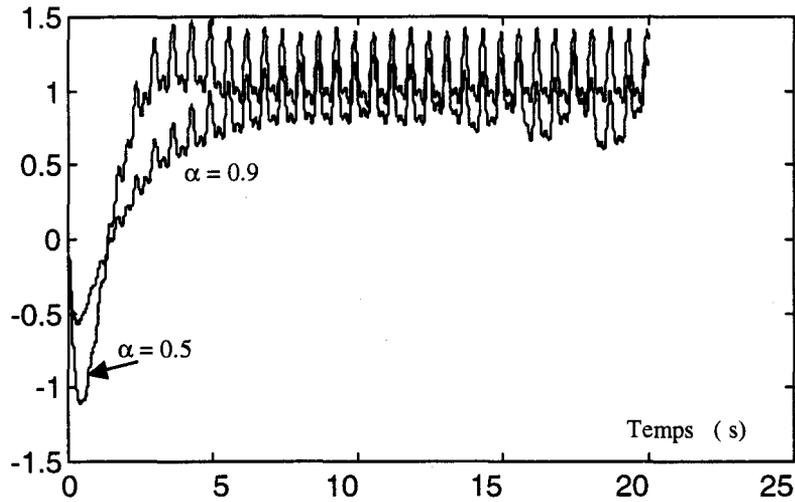


Figure 3.7 : influence des fonctions d'appartenance

Les essais des figures 3.5, 3.6 et 3.7 ne tiennent pas compte du modèle moyen. Les figures 3.8 et 3.9 représentent les résultats de simulation obtenus avec l'exemple 1 en tenant compte du modèle moyen.

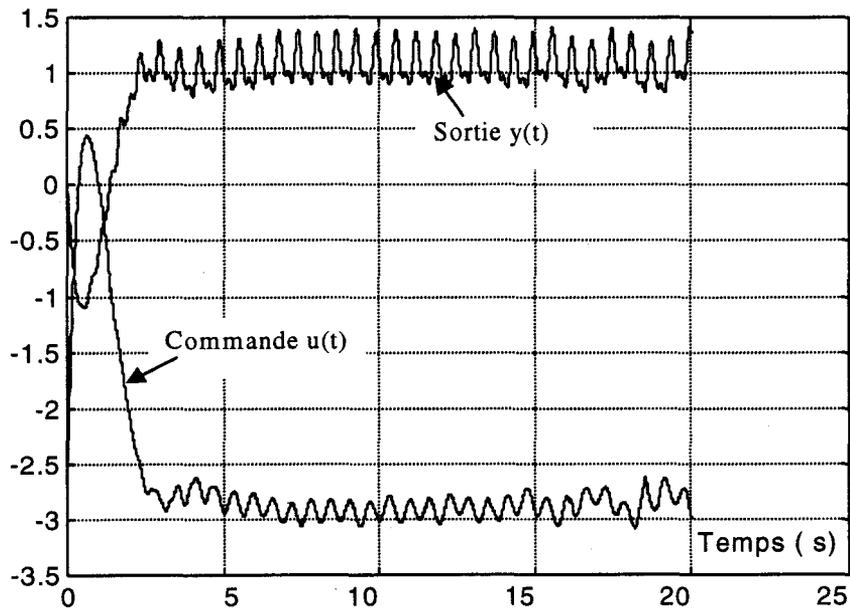


Figure 3.8 : Fusion floue et modèle moyen, exemple 1

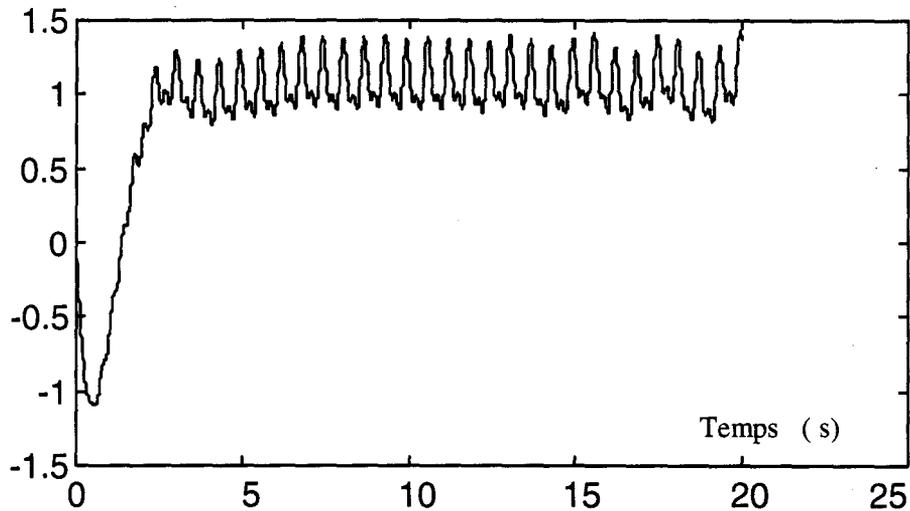


Figure 3.9 : Fusion floue et modèle moyen  
Evolution de la sortie, exemple 1

On constate, avec l'introduction du modèle moyen dans l'estimation des validités, une très légère amélioration au niveau de la dynamique de la réponse du système commandé.

#### 6. Résultats de simulation. Exemple 2, commande LQ

On envisage dans un premier temps le cas d'une fusion de commandes de type LQ, la bibliothèque étant formée des quatre modèles extrêmes avec le modèle moyen et la fusion floue utilise une des deux tables de règles suivantes :

		Table d'inférence N° 1			Table d'inférence N° 2		
$\mu r_i$	$r_i(1) : f$	$r_i(2) : M$	$r_i(3) : F$	$r_i(1) : f$	$r_i(2) : M$	$r_i(3) : F$	
$\mu r_m$							
$r_m(1) : f$	F	f	f	M	f	f	
$r_m(2) : M$	F	M	f	F	M	f	
$r_m(3) : F$	F	F	f	F	F	M	

La différence entre les deux tables est due au fait que sur la table 2, tient compte d'une plus forte corrélation entre le modèle moyen et le modèle extrême. Ceci s'exprime par le fait que quand la validité du modèle moyen est faible (résidu  $r_m$  fort) alors la validité globale  $v_i$  est renforcée. Par contre si la validité du modèle moyen est forte (résidu  $r_m$  faible) alors la validité globale  $v_i$  est diminuée.

La table 1, exprime une corrélation moindre entre le modèle moyen et le modèle  $M_i$ , puisque celle ci ne s'exprime que dans le cas où le résidu du modèle  $M_i$  est moyen c'est à dire ni faible ni élevé. Par exemple si le résidu  $r_i$  est faible (f), la validité  $v_i$  est forte dans tous les cas, de même si le résidu  $r_i$  est fort (F),  $v_i$  est faible dans tous les cas. Par contre si  $r_i$  est moyen, ce qui correspond à une situation de doute, le modèle moyen intervient comme le montre la colonne du milieu. Lors de la mise en œuvre pratique, on peut utiliser la méthode d'inférence min-max.

La figure 3.10 montre que l'introduction du modèle moyen améliore le comportement du système. En effet, en absence du modèle moyen et pour des conditions initiales nulles, le système commandé présente des oscillations de fortes amplitudes. Ces dernières sont notablement amorties dès qu'on tient compte du modèle moyen.

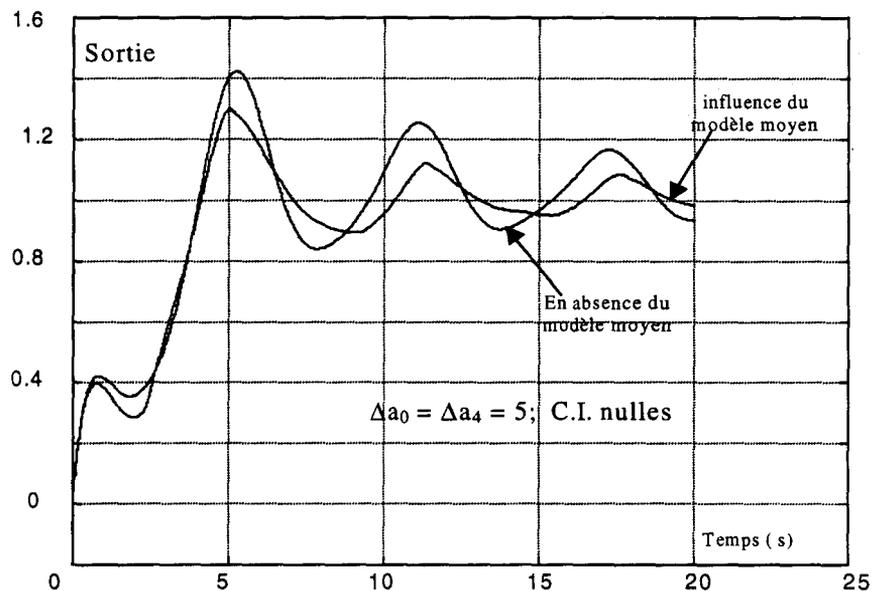


Figure 3.10 : Influence de la prise en compte du modèle moyen.  
Cas de l'exemple 2 .  $C=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

Il y a lieu aussi de remarquer que l'exemple 2 choisi présente un comportement caractérisé par une instabilité si on exploite le modèle moyen tout seul.

Nous savons qu'il est fréquent en pratique de remplacer le système par son modèle moyen pour le calcul de la commande. Dans le cas de l'exemple 2 ceci est justement néfaste pour le système. La multicommande apporte une solution au problème car elle permet de stabiliser le système.

La figure 3.11, montre les résultats de simulation dans les mêmes conditions dans le cas de commandes LQ obtenues à partir du modèle moyen d'une part et d'une fusion floue d'autre part. L'instabilité du système commandé est corrigée grâce à l'utilisation de la méthode que nous proposons ( Figure 3.12 ).

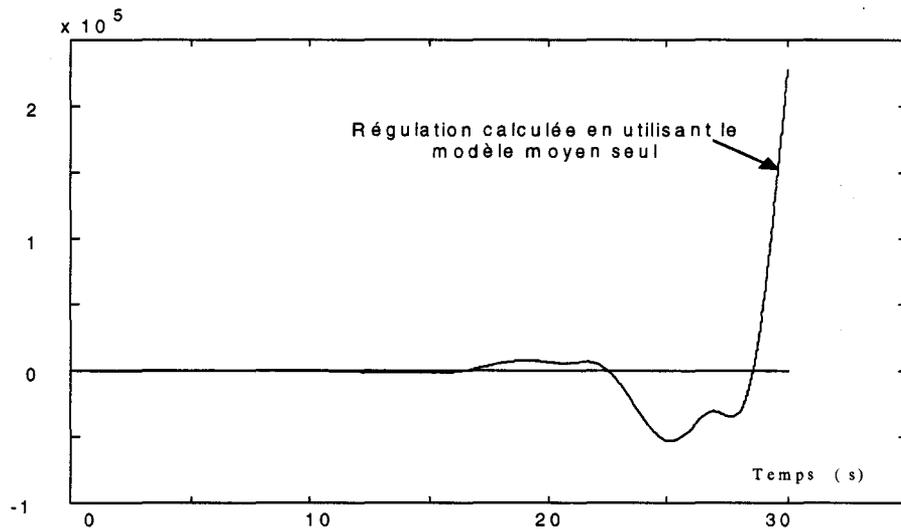


Figure 3.11 : Commande LQ  
 $\Delta a_0=0.1; \Delta a_4=5; x(0) = [10, -5, 10, 2, 11]^T C=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

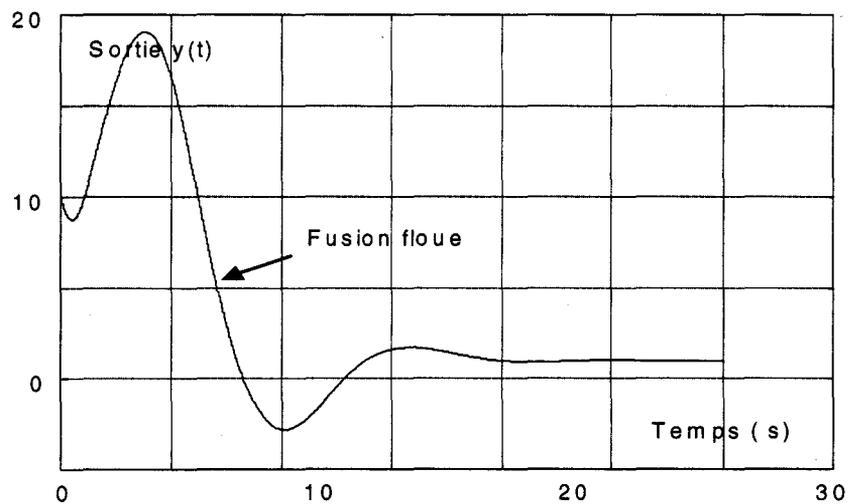


Figure 3.12 : Commande LQ  
 $\Delta a_0=0.1; \Delta a_4=5; x(0) = [10, -5, 10, 2, 11]^T, C=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

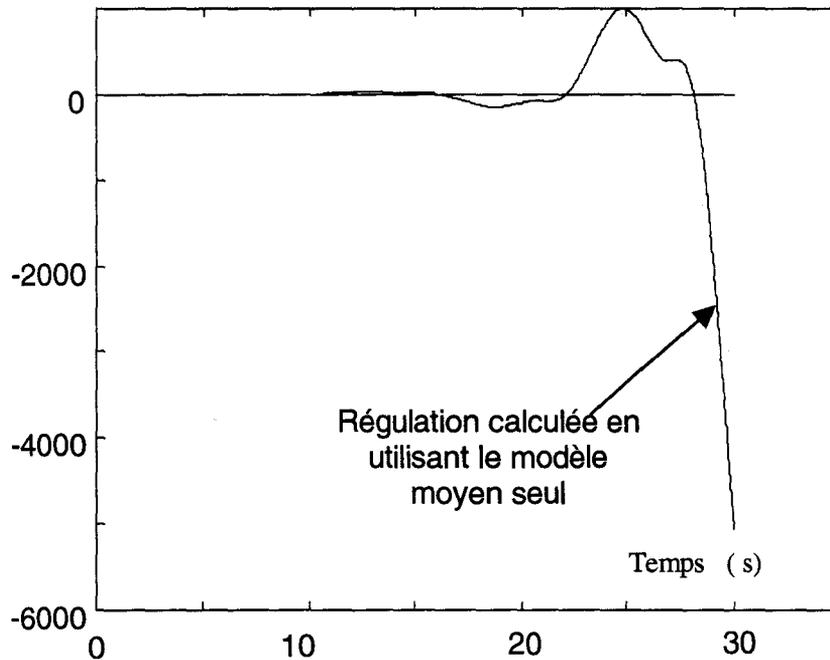


Figure 3.13 : Commande LQ  
 $\Delta a_0=0.1; \Delta a_4=5; x(0) = [0, 0, 0, 0, 0]^T, C=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$

Les figures 3.11 et 3.13 montrent que le modèle moyen utilisé seul pour calculer une commande du type LQ conduit à une instabilité du système bouclé. Cette instabilité est totalement éliminée dès qu'on utilise une commande multimodèle exploitant une bibliothèque formée par les quatre modèles extrêmes et le modèle moyen, les validités étant calculées par l'approche floue développée au chapitre 2 et les commandes partielles choisies sont du type LQ. La réponse indicielle du modèle avec  $C=[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  avec fusion floue des quatre solutions issues modèles extrêmes est représentée figure 3.14.

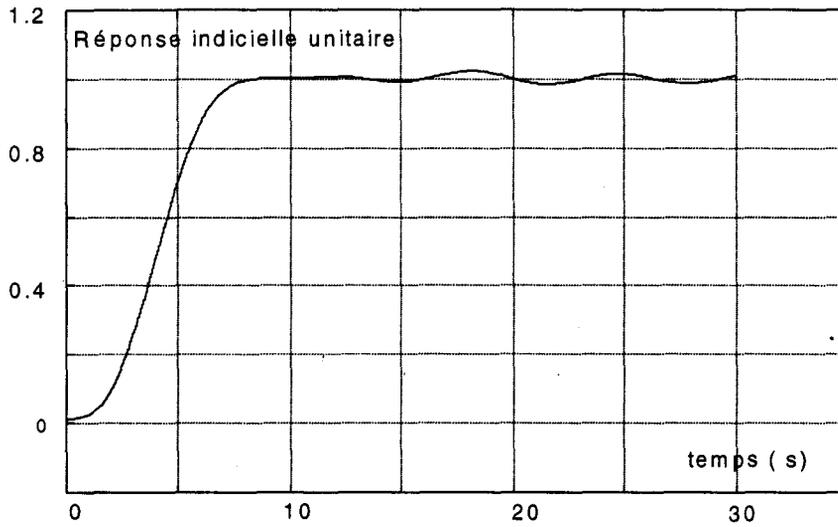


Figure 3.14 : Fusion floue avec modèles extrêmes et modèle moyen  
Cas de l'exemple 2 avec  $C = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]$

La figure 3.15 représente l'évolution de la commande dans le cas d'une fusion floue avec une table de règles type 1 et en absence de zéros avec  $C = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ . On remarque que les valeurs de commande restent comprises entre  $-1.3$  et  $+1.2$ .

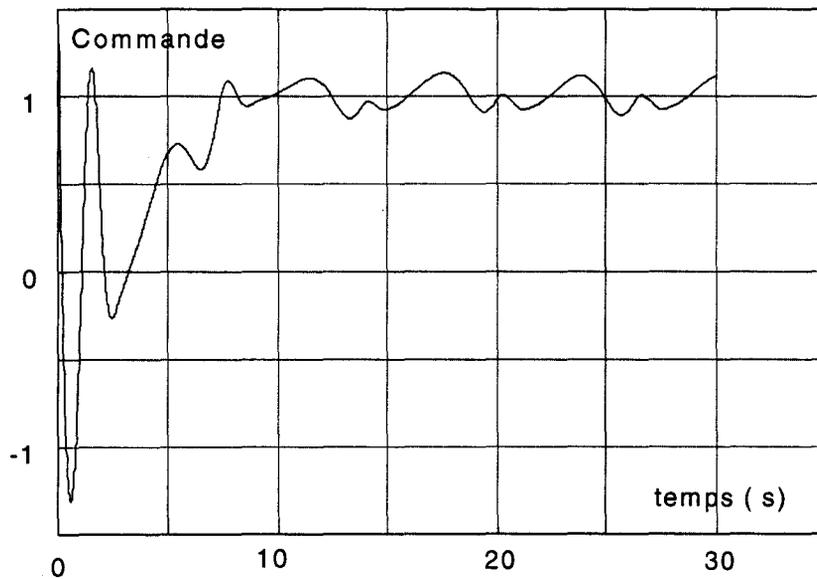


Figure 3.15 : Fusion floue avec modèles extrêmes et modèle moyen  
Cas de l'exemple 2 avec  $C = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]$

Toutes les simulations précédentes ont été effectuées avec la table d'inférence N°1, la figure 3.16 représente le résultat obtenu avec la table 2. On remarque que la table 1 donne de meilleurs résultats.

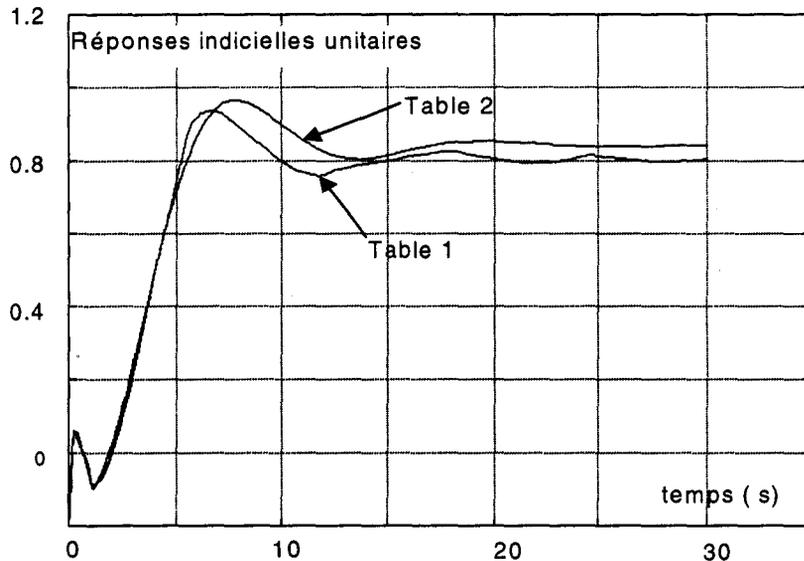


Figure 3.16 : Fusion floue avec modèles extrêmes et modèle moyen  
Cas de l'exemple 2 avec  $C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ .  
Influence de table d'inférence

### 7. Résultats de simulations. Placement de pôles, cas de l'exemple 2

Nous avons aussi testé la commande multimodèle en adoptant une bibliothèque formée de 5 modèles en utilisant la fusion floue comme précédemment, mais en adoptant une commande par placement de pôles.

Le schéma général de la commande est celui exploité plus haut, nous calculons dans le cas de l'exemple 2 et pour chaque modèle partiel un gain de retour d'état de façon à placer les pôles pour tous les modèles de la bibliothèque en :

$$\text{Pôles} = [-5; -0.7; -0.6; -0.55; -0.5];$$

Ce choix est réalisé de façon à conserver la dynamique naturelle moyenne du processus.

Les courbes obtenues pour les deux cas respectifs  $C=[1\ 0\ 0\ 0\ 0]$  et  $C=[1\ 1\ 1\ 1\ 1]$  sont représentés sur les figures 3.17 et 3.18 :

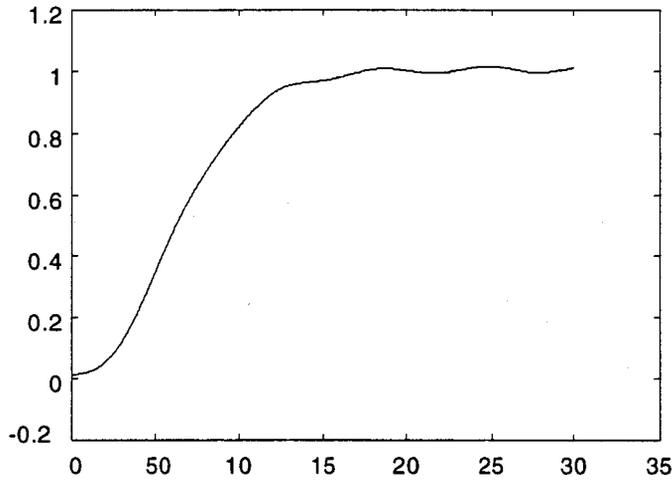


Figure 3.17 :Placement de pôles  
 $C= [1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ ;  $\Delta a_0 = \Delta a_4 = 0.1$

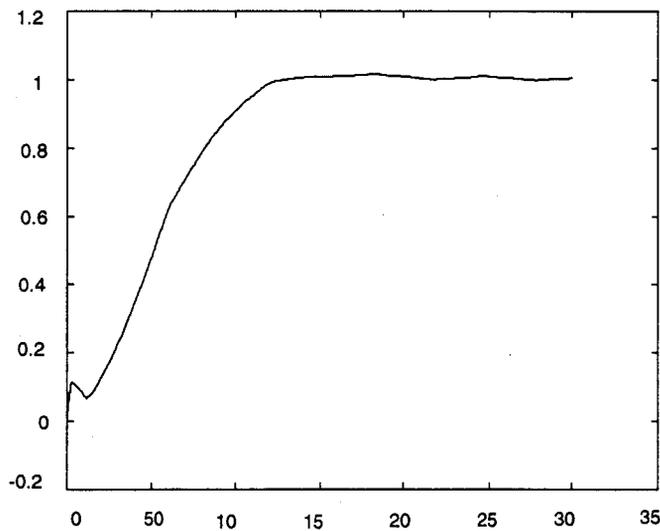


Figure 3.18 :Placement de pôles  
 $C= [1\ 1\ 1\ 1\ 1]$ ;  $\Delta a_0 = \Delta a_4 = 0.1$

On remarque qu'on obtient une aussi bonne stabilisation que par la commande LQ avec une dynamique légèrement plus faible.

Les figures 3.19 et 3.20 montrent les résultats de simulations effectuées pour chaque modèle de la bibliothèque pris à part conformément au schéma de la figure 3.21.

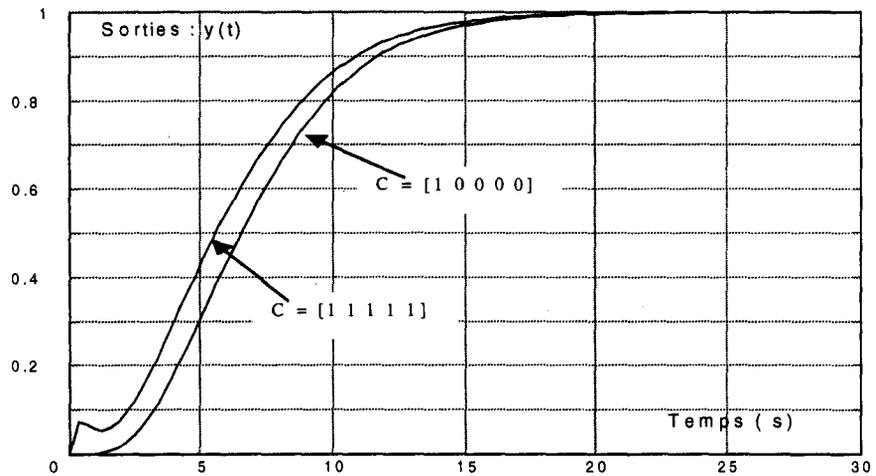


Figure 3.19 : Réponses indicielles unitaires des 5 modèles de la bibliothèque corrigés avec le même placement de pôles et considérés séparément

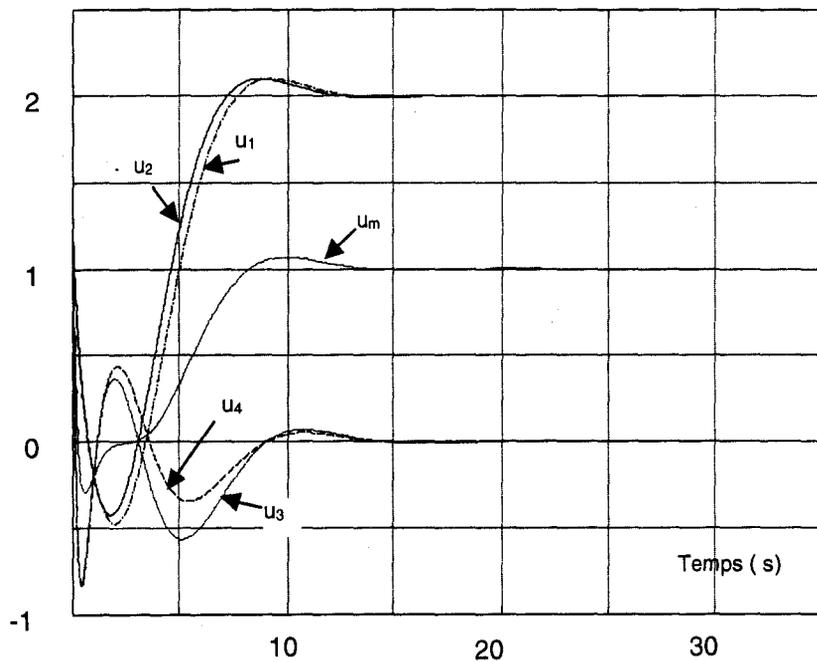


Figure 3.20: Evolution des commandes relatives à chaque modèle

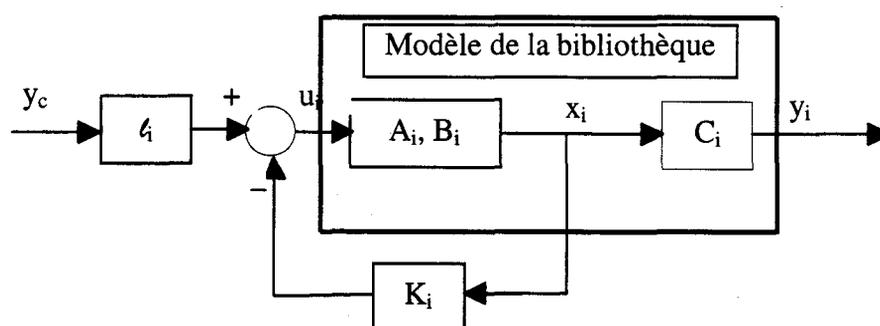


Figure 3.21 : Commande associée au modèle  $M_i$

On observe sur la figure 3.19 que les réponses indicielles unitaires des cinq modèles sont presque identiques, par contre les commandes partielles  $u_i$ , permettant d'obtenir ces résultats, sont différentes, comme le montre la figure 3.20.

Les essais effectués sur le processus avec une fusion floue montrent que la commande par placement de pôles conduit à des résultats aussi bons que ceux observés avec la commande LQ. Toutefois, un placement de pôles choisi sans tenir compte des dynamiques naturelles du processus pourra conduire à un comportement transitoire aberrant et à des oscillations et dépassements transitoires excessifs. Par exemple pour  $C=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$  et pour le choix des pôles  $=[-1,-2,-10,-15,-8]$ , on obtient la réponse indicielle de la figure 3.22 :

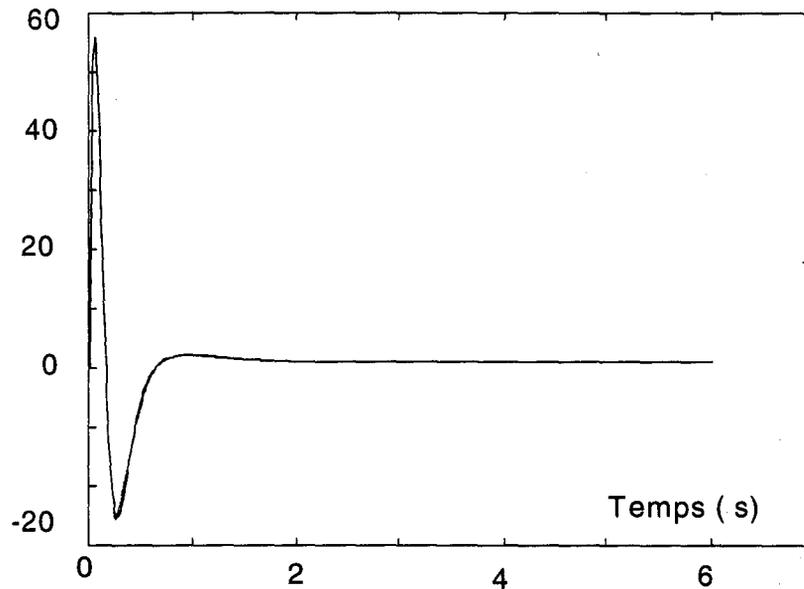


Figure 3.22 : Commande par placement de pôles

On peut remarquer que malgré le transitoire extrêmement perturbé la commande proposée arrive à stabiliser le processus à la valeur de consigne choisie.

### 3.7 Application à un système non linéaire à paramètres incertains

On considère maintenant l'exemple suivant:

$$a_0 y + a_1 \dot{y} + a_2 \ddot{y} + \ddot{y} = b_0 u ,$$

avec :

$$a_0 = 1 + 0.5 \sin 10y ;$$

$$a_1 = 2.5 - 8 \sin^2 y$$

$$a_2 = 2 + \sin^2 y ;$$

$$b_0 = 1$$

On calcule facilement les valeurs limites :

	min	max	moyen
$a_0$	0.5	1.5	1
$a_1$	-5.5	2.5	-1.5
$a_2$	2	3	2.5

Les simulations effectuées avec une commande LQ, ont conduit à la courbe suivante . On remarque que la fusion stabilise le système mais qu'il subsiste une certaine erreur statique (figure 3.23) qui peut être compensée par un simple ajustement du gain d'entrée (figure3.24)

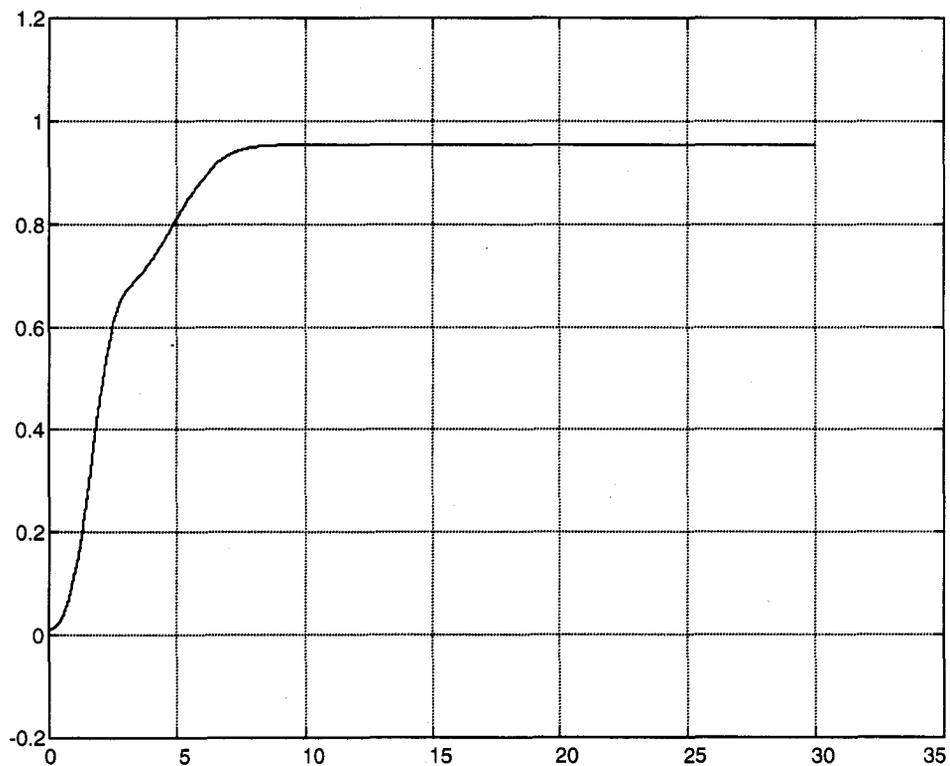


Figure 3.23 : Fusion floue et commande LQ  
Modèle non linéaire, non stationnaire

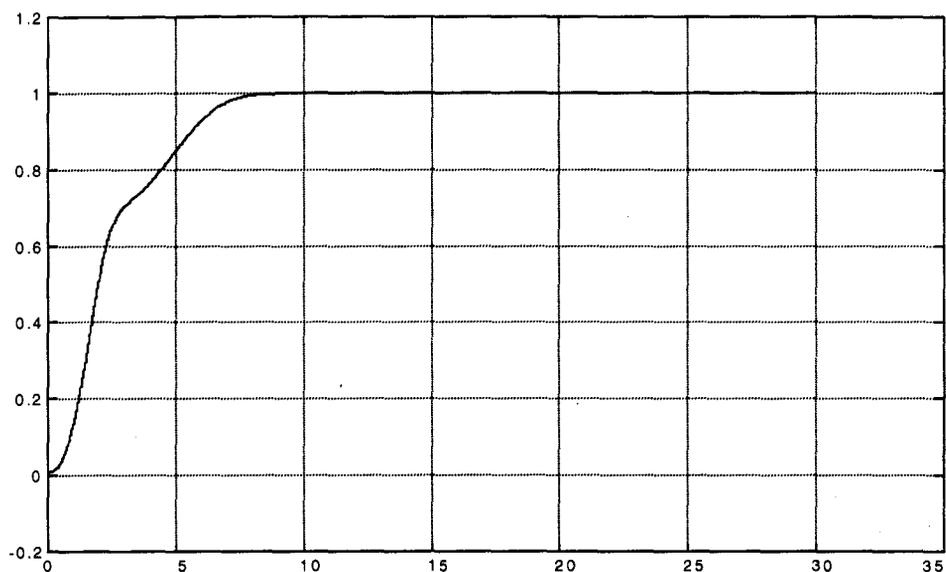


Figure 3.24 : Fusion floue et commande LQ  
Modèle non linéaire, non stationnaire  
Après ajustement du gain statique

Une approche plus intéressante consiste à commuter sur le modèle local défini au point de consigne  $y=1$  lorsque l'erreur devient inférieure à un certain seuil prédéfini.(figure 3.25)

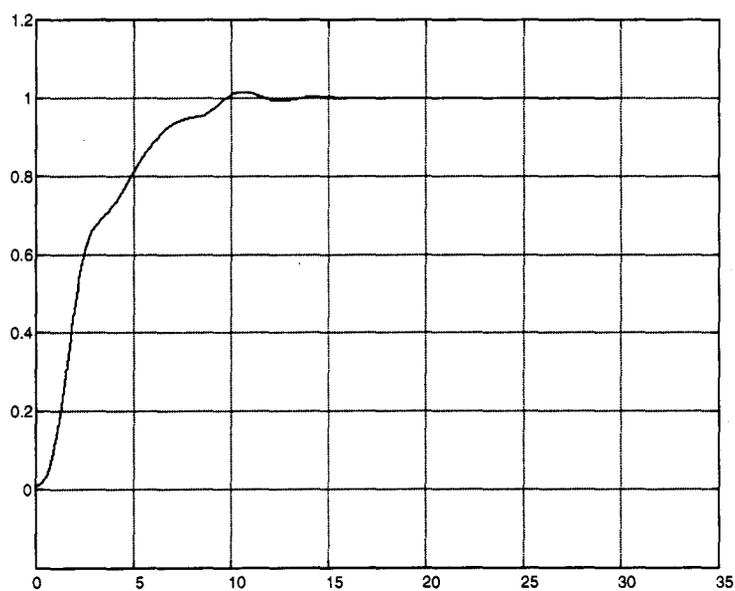


Figure 3.25 : commutation sur le modèle local lorsque l'erreur devient inférieure ou égale à 5%  
Courbe obtenu sans réajustement du gain

### 3.8 Conclusion

Dans ce chapitre la contribution essentielle apportée est liée à la limitation de la taille de la bibliothèque de modèles. En effet, nous avons proposé une démarche qui permet de limiter à quatre, cinq ou au maximum six le nombre de modèles utilisés. Nous avons proposé une méthode de détermination systématique des modèles à retenir et ceci quelque soit l'ordre du système.

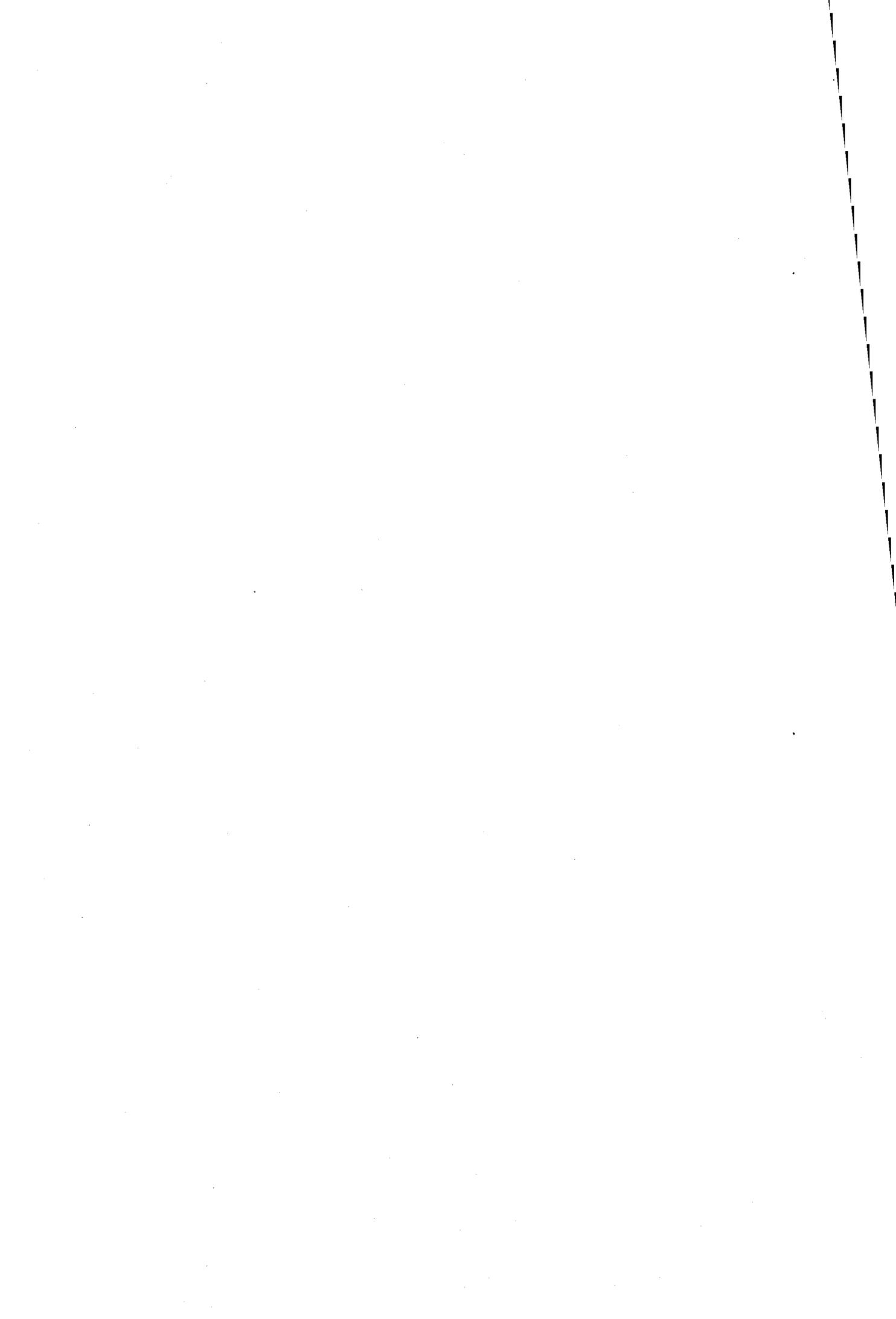
Plusieurs mises en oeuvre sur des exemples particulièrement durs ont permis de valider notre démarche. En particulier, quatre idées ont été vérifiées :

- 1- La robustesse d'une commande LQ formulée avec une approche multimodèle. Les quatre modèles extrêmes sont utilisés pour calculer les gains du retour d'état( $K_i$ ) et la chaîne directe ( $l$ ). on calcule les gains  $K$  et  $l$  à appliquer en utilisant une technique de fusion basée sur une pondération à l'aide des résidus.
- 2- L'introduction du modèle moyen ou du modèle local défini au point de consigne en plus des quatre modèles extrêmes améliore la robustesse et la précision. La fusion floue permet de stabiliser un processus instable avec une commande calculée et prenant en compte le modèle moyen dans le calcul des validités.
- 3- La fusion de commande utilisant la logique floue permet d'améliorer le comportement dynamique du système et en particulier, augmente l'insensibilité au choix et au calcul des résidus.
- 4- La commande par placement de pôles permet d'obtenir de bons résultats si ceux ci sont choisis de façon à respecter les dynamiques naturelles du système. Dans le cas contraire,

on peut avoir des comportements transitoires et des niveaux de commandes physiquement inadmissibles.

## Chapitre 4

### Stabilité et Sensibilité de la Commande Multimodèle



## **CHAPITRE 4**

### **Stabilité et sensibilité de la commande multimodèle**

#### **4.1 Introduction**

La commande multimodèle ou multicommande conduit à des résultats très intéressants. Nous avons pour notre part, présenté dans les chapitres précédents notre contribution en abordant en particulier les problèmes liés aux choix du critère de validité. Nous avons suggéré l'utilisation de la fusion floue pour le calcul de la commande. Nous avons aussi proposé une approche pour la construction d'une base de modèles. Les essais pratiques ont prouvé la pertinence des améliorations proposées.

Malheureusement l'approche multicommande souffre encore de l'absence d'outils pour l'étude de la stabilité et à notre connaissance il y a peu de travaux publiés sur le sujet. Dans ce chapitre nous proposons d'ouvrir le débat en abordant la question. Nous énoncerons une condition suffisante de stabilité applicable à une certaine classe de systèmes dans le cas d'une commande par placement de pôles.

A travers des exemples pratiques nous étudierons aussi la sensibilité de la commande multimodèle aux variations imprévues des paramètres.

## 4.2 Placement de pôles et modélisation du processus

La modélisation la plus appropriée pour le placement de pôles, lorsqu'elle est possible, est la modélisation sous la forme commandable (4.1) :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(.) & -a_1(.) & -a_2(.) & \dots & -a_{n-1}(.) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad (4.1)$$

ou encore:

$$\dot{x} = A(.)x + Bu; \quad (4.2)$$

qui permet, si les coefficients  $a_i$  sont constants, d'obtenir directement les coefficients du retour d'état assurant un placement de pôles donné.

En effet, si  $A(.) = A = \text{Cte}$ , les pôles du système en boucle ouverte sont racines du polynôme:

$$P_A(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + \lambda^n;$$

Dans ce cas [Borne90, Borne 93] le retour d'état :

$$u = -Lx + \ell y_c,$$

avec

$$L = [\ell_0 \ell_1 \ell_2 \dots \ell_{n-1}];$$

conduit au système en boucle fermée dont l'évolution est régie par la relation:

$$\dot{x} = (A - BL)x + B\ell y_c; \quad (4.3)$$

avec:

$$A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_0 + \ell_0) & -(a_1 + \ell_1) & -(a_2 + \ell_2) & \dots & -(a_{n-1} + \ell_{n-1}) \end{bmatrix};$$

et :

$$P_{A-BL}(\lambda) = (a_0 + \ell_0) + (a_1 + \ell_1) \lambda + (a_2 + \ell_2) \lambda^2 + \dots + \lambda^n;$$

Le schéma de la figure 4.1 représente la structure complète du système muni de sa commande. Nous avons ajouté les sorties observées définies par :

$$y = C x.$$

Dans le cas où C est la matrice unité, on observe tout l'état x. Si le système est monovarié de dimension n, nous avons les dimensions suivantes des matrices:

$$A (n, n); \quad B (n, 1); \quad C (1, n); \quad L (1, n); \quad \ell (1, 1).$$

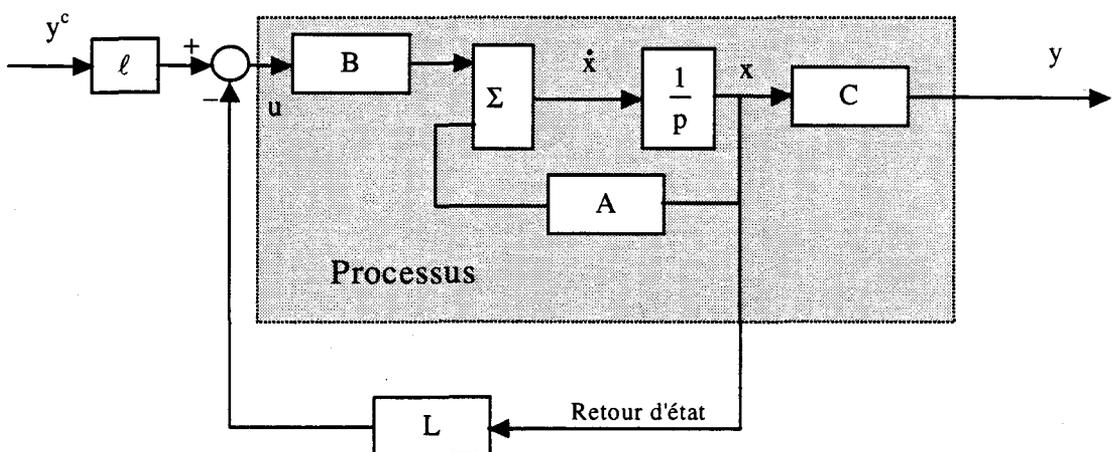


Figure 4.1 : Commande par retour d'état

Si on désire imposer au processus bouclé les pôles choisis  $p_i$ , il faut obtenir :

$$P_{A-BL}(\lambda) = (a_0 + \ell_0) + (a_1 + \ell_1) \lambda + (a_2 + \ell_2) \lambda^2 + \dots + \lambda^n = \prod_{i=1}^n (\lambda - p_i); \quad (4.4)$$

La solution est alors évidente, il faut prendre  $\ell_i = \alpha_i - a_i$ , pour toutes les valeurs de  $i$  variant de 0 à  $n-1$ . Les coefficients  $\alpha_i$  sont obtenus en développant :

$$\prod_{i=1}^n (\lambda - p_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \lambda^n.$$

Le terme  $\ell$  de la formule est choisi de façon à imposer au processus en boucle fermée un gain statique unité. En effet, dans le cas d'une entrée en échelon de position et en régime permanent ( $\dot{x}=0$ ), le système étant stable en boucle fermée, l'équation 4.3 conduit à :

$$x = -(A - BL)^{-1} B \ell y^c,$$

il vient d'après 4.4 :

$$y = -C(A - BL)^{-1} B \ell y^c.$$

Nous sommes en présence d'un système de  $m$  équations à  $m$  inconnues, les inconnues étant les composantes de  $\ell$ . Il est évident que  $y$  et  $y^c$  sont de même dimension.

Dans le cas particulier d'un système monovisible ( $m = 1$ ), nous pouvons écrire :

$$\ell = -\left(C(A - BL)^{-1} B\right)^{-1}.$$

### 4.3 Cas de la commande multimodèle

Dans une approche multimodèle la matrice  $A_j$  correspondant au modèle  $M_j$  admet la forme :

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{0j} & -a_{1j} & -a_{2j} & \dots & -a_{n-1,j} \end{bmatrix};$$

Il est possible pour chaque modèle  $M_j$  d'imposer les mêmes pôles  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) en écrivant :

$$P_{A_j - BL_j} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \lambda^n;$$

il suffit pour cela de prendre :

$$L_j = [ \ell_{0j} \ell_{1j} \ell_{2j} \dots \ell_{n-1,j} ];$$

avec :

$$\ell_{ij} = \alpha_i - a_{ij}; \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Il vient alors pour chaque modèle bouclé la même matrice de régime libre :

$$A_j - BL_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

La commande du processus réel peut être alors choisie sous forme d'un retour d'état dont les coefficients sont obtenus par fusion des coefficients définis pour chaque modèle, fusion effectuée en tenant compte des degrés de validité associés à chaque modèle :

$$\ell_i(\cdot) = \ell_i(\{ \ell_{ij} \}, \{ v_{ij} \}).$$

Il vient en régime libre pour le système défini par l'équation 4.1 :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_0(.) + l_0(.)) & -(a_1(.) + l_1(.)) & -(a_2(.) + l_2(.)) & \dots & -(a_{n-1}(.)) + l_{n-1}(.) \end{bmatrix} x ; (4.5)$$

Puisque la matrice  $A_j - BL_j$  est constante et pour tout  $j$  est égale à :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix},$$

en toute région de l'espace d'état telle que la validité d'un modèle est égale à un, les autres validités étant nulles, nous obtenons pour le processus bouclé l'équation d'état :

$$A(.) - BL(.) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0(.) & -\alpha_1(.) & -\alpha_2(.) & \dots & -\alpha_{n-1}(.) \end{bmatrix},$$

avec  $\alpha_i(.) = \alpha_i$  pour chaque modèle de la base, c'est à dire les pôles imposés à chaque modèle  $M_j$ . Ce cas est particulièrement intéressant lorsque les modèles choisis dans la base sont des modèles locaux.

#### 4.4 Etude de la stabilité dans le cas non linéaire

**Théorème :**

On considère un processus modélisé sous la forme commandable:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(.) & -a_1(.) & -a_2(.) & \dots & -a_{n-1}(.) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} u;$$

Soient les modèles de la bibliothèque  $M_j$ ,  $j = 1$  à  $N$ . On effectue un même placement de pôles pour chaque modèle  $M_j$  et on désigne par  $L_j$  les retours d'état calculés. On admettra que tous les pôles imposés ( $p_1, p_2, \dots, p_n$ ) sont distincts et stables.

Une commande par fusion des retours d'état exprimée par :

$$L = \sum_{j=1}^N v_j L_j,$$

est stabilisante si la condition suivante est vérifiée :

$$(-1)^n \det \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & |\beta_1| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & p_{n-1} & |\beta_{n-1}| \\ |\gamma_1(.)| & \dots & |\gamma_{n-1}(. )| & \gamma_n(.) \end{bmatrix} > 0;$$

avec :

$$\beta_i = \left[ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_i) \right]^{-1}, \quad \forall i = 1, \dots, n-1.$$

$$\gamma_i(.) = -P_{A(.)-BL(.)}(\lambda_i), \quad \forall i = 1, \dots, n-1.$$

$$\gamma_n(.) = \text{trace}(A(.) - BL(.)) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i.$$

**Démonstration :**

La matrice du régime libre du système bouclé étant sous forme commandable, un changement de base de la forme :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_{n-1}^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-2} & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-1} & 1 \end{bmatrix},$$

avec :

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j$$

donne à la matrice du régime libre une forme en flèche [Benrejeb 80, Borne 92] :

$$P^{-1}(A(\cdot) - BL(\cdot))P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \gamma_1(\cdot) & \dots & \gamma_{n-1}(\cdot) & \gamma_n(\cdot) \end{bmatrix}; \quad (4.6)$$

avec :

$$\beta_i = \left[ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_i) \right]^{-1}, \quad \forall i = 1, \dots, n-1.$$

$$\gamma_i(\cdot) = -P_{A(\cdot) - BL(\cdot)}(\lambda_i), \quad \forall i = 1, \dots, n-1.$$

$$\gamma_n(\cdot) = \text{trace}(A(\cdot) - BL(\cdot)) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i.$$

A ce niveau si les pôles  $p_i$  imposés au système sont distincts, le choix de  $\lambda_i = p_i$  pour  $i = 1$  à  $n-1$ , permet dans le cas où un modèle a une validité égale à un, les validités des autres modèles étant nulles d'avoir tous les  $\gamma_i(\cdot)$  nuls pour  $i = 1$  à  $n-1$  et  $\gamma_n(\cdot) = p_n$ . dans ces conditions l'expression 4.6 devient :

$$P^{-1}(A(\cdot) - BL(\cdot))P = \begin{bmatrix} p_1 & \dots & 0 & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & p_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & p_n \end{bmatrix},$$

évidemment le système est stable puisque :

$$p_i < 0 \quad \forall i = 1 \text{ à } n.$$

Dans le voisinage d'un modèle pour lequel la validité est nettement dominante si le processus est à coefficients continus, on peut affirmer qu'il est très probable que les  $\gamma_i(\cdot)$  pour  $i = 1$  à  $n-1$  restent petits en modules et que  $\gamma_n(\cdot)$  reste proche de  $p_n$ .

Dans tous les cas la matrice :

$$P^{-1}(A(\cdot) - BL(\cdot))P = \begin{bmatrix} p_1 & \dots & 0 & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & p_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \gamma_1(\cdot) & \dots & \gamma_{n-1}(\cdot) & \gamma_n(\cdot) \end{bmatrix} = A_F(\cdot),$$

a ses éléments non constants isolés dans la dernière ligne, il en est de même de sa majorante :

$$M_F(\cdot) = \begin{bmatrix} p_1 & \dots & 0 & |\beta_1| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & p_{n-1} & |\beta_{n-1}| \\ |\gamma_1(\cdot)| & \dots & |\gamma_{n-1}(\cdot)| & \gamma_n(\cdot) \end{bmatrix}.$$

Le critère de stabilité pratique de Borne-Gentina [Gentina 72, Gentina 76, Borne 87, Borne 93] s'applique et les pôles  $p_i$  ayant été choisis négatifs il vient la condition suffisante de stabilité :

$$(-1)^n \det \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & |\beta_1| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & p_{n-1} & |\beta_{n-1}| \\ |\gamma_1(\cdot)| & \dots & |\gamma_{n-1}(\cdot)| & \gamma_n(\cdot) \end{bmatrix} > 0.$$

Le calcul peut encore être simplifié s'il est possible de remplacer tout ou une partie des  $|\gamma_i(\cdot)|$  par leurs majorants :

$$|\gamma_i(\cdot)| \leq \gamma_{iM} \quad \forall (\cdot) \text{ admissible}$$

$$\gamma_n(\cdot) \leq \gamma_{nM} \quad \forall (\cdot) \text{ admissible}$$

**Généralisation :**

Si le système en régime libre ne peut se modéliser sous forme commandable mais si la matrice du régime libre du système en boucle ouverte admet la forme suivante :

$$A(\cdot) = A_0 + g h^T(\cdot),$$

et si la matrice  $A_0$  et le vecteur  $g = [0 \ 0 \ \dots \ 1]$  sont constants alors que seul le vecteur  $h(\cdot)$  est non constant, il est encore possible d'appliquer le théorème précédent.

En effet, dans les conditions précédentes l'utilisation de la notion de polynôme symbolique [Richard 80, Richard 87] permet de passer à la forme en flèche par changement de base à coefficients constants. Le cas de la forme compagne correspond d'ailleurs à une modélisation de ce type.

Le retour d'état choisi pour chaque modèle de la base n'introduit pas d'éléments non constants sauf dans la dernière ligne si le vecteur B est constant et égal à  $[0 \ 0 \ \dots \ 1]^T$ . Il est donc encore possible de mettre la matrice du régime libre du système complet en boucle fermée sous la forme en flèche puisque :

$$A(.) - BL(.) = A_0 + g \left( h(.) - L^T(.) \right)^T.$$

Le même polynôme caractéristique :

$$P_{A_j - BL_j}(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \lambda^n = \prod_{i=1}^n (\lambda - p_i);$$

étant imposé à tous les modèles, il est encore possible de trouver une matrice de passage P telle que :

$$P^{-1}(A(.) - BL(.))P = \begin{bmatrix} p_1 & \dots & 0 & \beta'_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & p_{n-1} & \beta'_{n-1} \\ \gamma'_1(.) & \dots & \gamma'_{n-1}(\cdot) & \gamma'_n(\cdot) \end{bmatrix} = A_F(.).$$

S'il est possible de trouver une majorante  $M_F(.)$  de  $A_F(.)$  dont les éléments non constants sont isolés dans une seule rangée le critère de Borne-Gentina qui s'exprime sous la forme :

$$p_i < 0 \quad \forall i = 1 \text{ à } n-1,$$

$$(-1)^n \det M_F(.) > 0,$$

permet de conclure à la stabilité du système multimodèle.

Il est à noter ici encore que si en un point donné la validité d'un modèle est égale à un, celles des autres étant nulles, les produits  $\beta_i(\cdot)\gamma_i(\cdot)$  seront nuls et resteront faibles dans un voisinage de ce point.

## 4.5 Cas d'un système du troisième ordre

### a) Approche théorique

On considère le cas d'un système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u;$$

ce qui conduit à la matrice d'état sous forme commandable donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}.$$

Les trois coefficients  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont fonctions de  $y$  et  $t$ , le système est non linéaire non stationnaire.

On considère le retour d'état :

$$L = \sum_{j=1}^N v_j L_j = [l_0, l_1, \dots, l_{n-1}];$$

avec  $N$  le nombre de modèles de la bibliothèque et  $v_j$  la validité du modèle  $M_j$ .

On déduit :

$$A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 - l_0 & -a_1 - l_1 & -a_2 - l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

On envisage la matrice de passage suivante :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ p_1 & p_2 & 0 \\ p_1^2 & p_2^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

On calcule facilement :

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \frac{-1}{p_2 - p_1} \\ 0 & p_2 & \frac{1}{p_2 - p_1} \\ -(\alpha_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_1^2 + p_1^3) & -(\alpha_0 + \alpha_1 p_2 + \alpha_2 p_2^2 + p_2^3) & -(\alpha_2 + p_1 + p_2) \end{bmatrix}$$

On pose :

$$\gamma_1 = -(\alpha_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_1^2 + p_1^3);$$

$$\gamma_2 = -(\alpha_0 + \alpha_1 p_2 + \alpha_2 p_2^2 + p_2^3);$$

$$A_F = P^{-1}AP.$$

d'où :

$$A_F = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \frac{-1}{p_2 - p_1} \\ 0 & p_2 & \frac{1}{p_2 - p_1} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & -(\alpha_2 + p_1 + p_2) \end{bmatrix}$$

On en déduit une majorante de  $A_F$  :

$$M_F = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline p_2 - p_1 \\ \hline 1 \\ \hline p_2 - p_1 \\ \hline \end{array} \\ 0 & p_2 & \\ \hline \text{Max}(\gamma_1) & \text{Max}(\gamma_2) & \text{Max}(\alpha_2 + p_1 + p_2) \end{bmatrix}$$

Une condition suffisante de stabilité s'écrit alors :

$$p_1 < 0;$$

$$p_2 < 0;$$

$$\det(M_F) < 0.$$

### b) Application numérique

Nous avons choisi l'exemple suivant :

$$a_0 = -21 + \Delta a_0 \frac{\cos(y)}{1 + \sin^2(y)};$$

$$a_1 = -25 + \Delta a_1 \cos(2t);$$

$$a_2 = -3 + \Delta a_2 \sin(y).$$

On considère les valeurs nominales :

$$\Delta a_0 = \Delta a_1 = 1; \Delta a_2 = 0.2.$$

Les valeurs des paramètres ont été choisies de façon à conduire à des modèles extrêmes ainsi qu'à un modèle moyen instable. En effet on calcule les modèles de la base:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 22 & 24 & 2.8 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 22 & 26 & 2.8 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 20 & 24 & 3.2 \end{bmatrix}; \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 20 & 26 & 3.2 \end{bmatrix}$$

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 21 & 25 & 3 \end{bmatrix}$$

Le tableau suivant donne les valeurs des pôles de chacun des modèles de la base  $M_j$  :

Modèle	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_m$
pôles	-1.1227	-0.9885	-1.0138	-0.8956	-1.0000
	-2.8805	-3.1893	-2.8091	-3.1025	-3.0000
	6.8031	6.9779	7.0229	7.1981	7.0000

On constate effectivement que chaque modèle de la base présente un pôle instable, ce dernier est situé au voisinage de la valeur 7. Les pôles stables sont aux voisinages des valeurs -1 et -3. Une méthode proposée par Borne et al [Borne 93] permet de placer convenablement les pôles en boucle fermée. Il suffit dans ce cas de prendre les pôles stables -1 et -3 auxquels il faut ajouter le pôle -7 symétrique du pôle instable 7. Nous effectuons donc un placement de pôles par retour d'état en :

$$p_1 = -1; \quad p_2 = -3; \quad p_3 = -7.$$

Le calcul numérique conduit aux retours d'états  $L_j$  spécifiques à chaque modèle  $M_j$  et donnés sur la tableau qui suit :

Modèle	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_m$
Retour d'état	43.0000	43.0000	41.0000	41.0000	42.0000
$L_j$	55.0000	57.0000	55.0000	57.0000	56.0000
	13.8000	13.8000	14.2000	14.2000	14.0000

On adopte la matrice de passage :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ p_1 & p_2 & 0 \\ p_1^2 & p_2^2 & 1 \end{bmatrix}$$

On calcule :

$$A_F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & \frac{-1}{2} \\ 1 - \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 & 27 - \alpha_0 + 3\alpha_1 - 9\alpha_2 & 4 - \alpha_2 \end{bmatrix};$$

avec :

$$\alpha_0 = -21 + \Delta a_0 \frac{\cos(y)}{1 + \sin^2(y)} + \ell_0;$$

$$\alpha_1 = -25 + \Delta a_1 \cos(2t) + \ell_1;$$

$$\alpha_2 = -3 + \Delta a_2 \sin(y) + \ell_2.$$

Soit en remplaçant dans  $A_F$ :

$$A_F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & \frac{-1}{2} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

avec:

$$\gamma_1 = -\Delta a_0 \frac{\cos(y)}{1 + \sin^2(y)} + \Delta a_1 \cos(2t) - \Delta a_2 \sin(y) - \ell_0 + \ell_1 - \ell_2;$$

$$\gamma_2 = -\Delta a_0 \frac{\cos(y)}{1 + \sin^2(y)} + 3\Delta a_1 \cos(2t) - 9\Delta a_2 \sin(y) - \ell_0 + 3\ell_1 - 9\ell_2;$$

$$\gamma_3 = 7 - \Delta a_2 \sin(y) - \ell_2.$$

On peut calculer les majorants de  $\ell_0$ ,  $\ell_1$  et  $\ell_2$  à partir des expressions  $L_j$  :

$$41 \leq \ell_0 \leq 43;$$

$$55 \leq \ell_1 \leq 57;$$

$$13.8 \leq \ell_2 \leq 14.2.$$

Il vient  $M_F$  le majorant de  $A_F$  :

$$M_F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} \\ 4.4 & 11.6 & -6.6 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que la condition de stabilité est bien vérifiée puisque :

$$\det(M_F) = -7.4 < 0$$

### c) Etude de la sensibilité

On se propose maintenant d'étudier la sensibilité de la multicommande par rapport à la variation des paramètres. Pour cela on suppose que la base de modèle construite n'est pas modifiée, par contre un ou plusieurs paramètres voient leur plage de variation augmenter. Par exemple sur la figure 4.2, nous avons effectué des variations de  $\Delta a_0$  qui passe de 1 à 10 puis à 100.

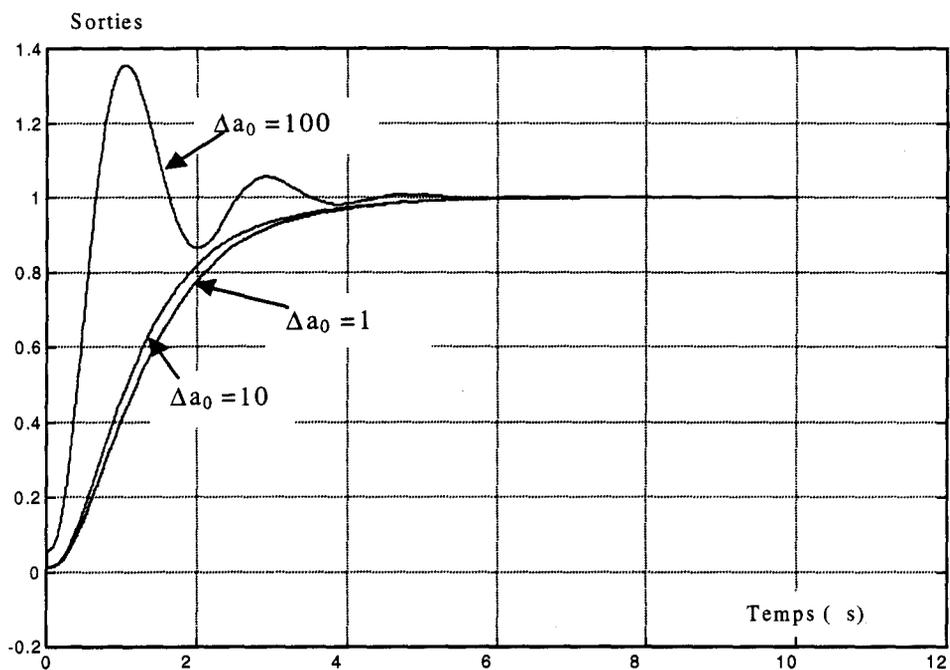


Figure 4.2 : Sensibilité. Variations de  $\Delta a_0$

On remarque que malgré la forte variation envisagée le système reste stable, ce qui prouve le bon comportement de la multicommande et sa robustesse vis à vis des variations paramétriques.

Ce résultat est encore confirmé si on fait varier  $\Delta a_1$  puis  $\Delta a_2$  sur l'exemple considéré. En effet, les figures 4.3 et 4.4 représentent l'effet d'une multiplication des coefficients considérés par un facteur 30 et 50 pour  $\Delta a_1$  et 100 puis 500 pour  $\Delta a_2$ .

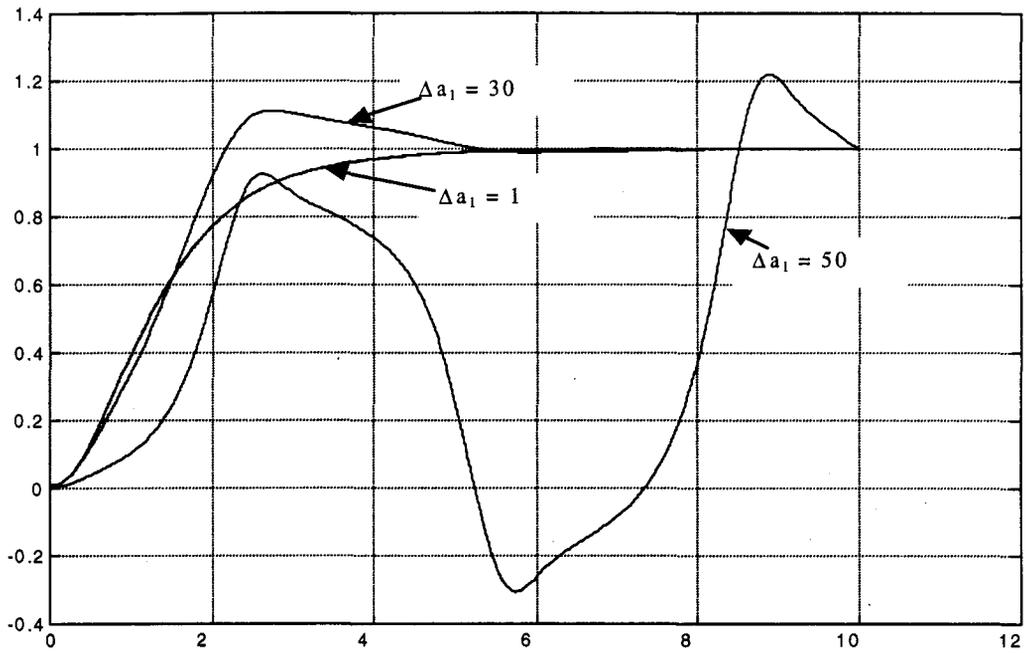


Figure 4.3 : Sensibilité. Variation de  $\Delta a_1$

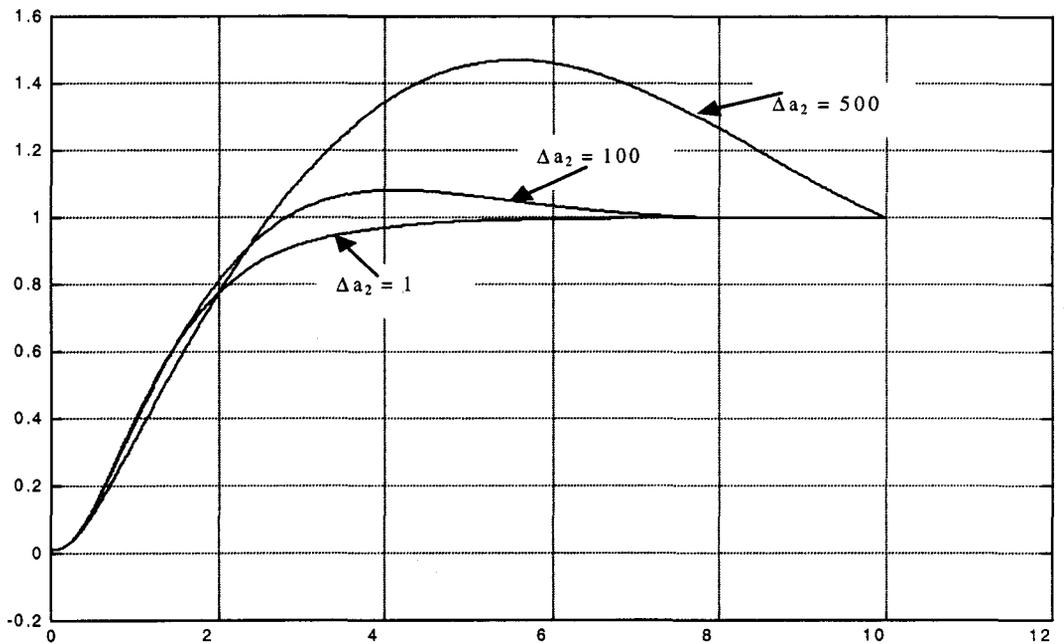


Figure 4.4 : Sensibilité. Influence de  $\Delta a_2$

## 4.6 Exemple d'un système d'ordre élevé

Pour illustrer par une application le théorème énoncé au paragraphe précédent nous avons considéré le cas de l'exemple 2 du chapitre 3 (§3.6).

Le système est non linéaire, non stationnaire, d'ordre 5, représenté par le modèle écrit sous la forme commandable avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Les paramètres  $a_i$  sont donnés par :

$$-a_0 = -1 + \Delta a_0 \sin(t); \quad \Delta a_0 = 0.1;$$

$$-a_1 = 1.2 + 0.5 \sin(t+0.05);$$

$$-a_2 = 0.5 + 1 \sin(t+0.01);$$

$$-a_3 = -0.3 + 0.2 \sin(t+0.1);$$

$$-a_4 = 1 + 5 \sin(t+0.5);$$

On considère les modèles de la base formés par les 4 modèles extrêmes auxquels on ajoute la modèle moyen. Nous avons montré que ces cinq modèles sont instables et nous avons

proposé de les stabiliser par placement de pôles avec un retour d'état. nous avons choisi les pôles suivants :

$$-5, \quad -0.7, \quad -0.6, \quad -0.55, \quad -0.5.$$

Le tableau qui suit résume les résultats obtenus et en particulier les valeurs des vecteurs du retour d'état  $L_j$  :

Modèle	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_m$
Retour d'état $L_j$	-0.5225	-0.5225	-0.3225	-0.3225	-0.4225
	5.8080	4.8080	5.8080	4.8080	5.3080
	12.5985	12.5985	10.5985	10.5985	11.5985
	13.3100	13.7100	13.3100	13.7100	13.5100
	3.3500	3.3500	13.3500	13.3500	8.3500

On considère le retour d'état  $L$  :

$$L = \sum_{j=1}^5 v_j L_j = [ \ell_0 \ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4 ],$$

avec  $v_j$  la validité du modèle  $M_j$ . On remarque d'après le tableau que :

$$-0.5225 \leq \ell_0 \leq -0.3225;$$

$$4.808 \leq \ell_1 \leq 5.808;$$

$$10.5985 \leq \ell_2 \leq 12.5985;$$

$$13.31 \leq \ell_3 \leq 13.71;$$

$$3.35 \leq \ell_4 \leq 13.35;$$

On adopte la matrice de passage :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 & p_4^2 & 0 \\ p_1^3 & p_2^3 & p_3^3 & p_4^3 & 0 \\ p_1^4 & p_2^4 & p_3^4 & p_4^4 & 1 \end{bmatrix}$$

On calcule :

$$A_F = (A(.) - BL(.)) = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & -0.7 & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & -0.55 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \end{bmatrix};$$

avec :

$$\gamma_1 = 3125 + \alpha_0 - 5\alpha_1 + 25\alpha_2 - 125\alpha_3 + 625\alpha_4;$$

$$\gamma_2 = 0.16807 + \alpha_0 - 0.7\alpha_1 + 0.49\alpha_2 - 0.343\alpha_3 + 0.2401\alpha_4;$$

$$\gamma_3 = 0.07776 + \alpha_0 - 0.6\alpha_1 + 0.36\alpha_2 - 0.216\alpha_3 + 0.1296\alpha_4;$$

$$\gamma_4 = 0.0503 + \alpha_0 - 0.55\alpha_1 + 0.3025\alpha_2 - 0.16638\alpha_3 + 0.0915\alpha_4;$$

$$\gamma_5 = 6.85 + \alpha_4.$$

$$\beta_1 = -0.011877; \quad \beta_2 = 15.504; \quad \beta_3 = -45.455; \quad \beta_4 = 29.963.$$

Les coefficients  $\alpha_i$  sont donnés par :

$$\alpha_i = a_i - \ell_i .$$

On notera  $\Delta\alpha_i$  les variations de  $\alpha_i$ , ce qui conduira à :

$$\Delta\alpha_i = \Delta a_i - \Delta \ell_i .$$

d'où :

$$\alpha_0 = -0.57750 + \Delta\alpha_0 ,$$

$$\alpha_1 = -4.1080 + \Delta\alpha_1 ,$$

$$\alpha_2 = -11.099 + \Delta\alpha_2 ,$$

$$\alpha_3 = -13.810 + \Delta\alpha_3 ,$$

$$\alpha_4 = -7.3500 + \Delta\alpha_4 .$$

avec :

$$-2 \Delta a_0 \leq \Delta\alpha_0 \leq 2 \Delta a_0 ,$$

$$-1 \leq \Delta\alpha_1 \leq 1 ,$$

$$-2 \leq \Delta\alpha_2 \leq 2 ,$$

$$-0.4 \leq \Delta\alpha_3 \leq 0.4 ,$$

$$-10 \leq \Delta\alpha_4 \leq 10 .$$

Soit en remplaçant dans  $\gamma_i$ :

$$\gamma_1 = \Delta\alpha_0 - 5 \Delta\alpha_1 + 25 \Delta\alpha_2 - 125 \Delta\alpha_3 + 0.625 \Delta\alpha_4 ;$$

$$\gamma_2 = \Delta\alpha_0 - 0.7 \Delta\alpha_1 + 0.49 \Delta\alpha_2 - 0.343 \Delta\alpha_3 + 0.2401 \Delta\alpha_4$$

$$\gamma_3 = \Delta\alpha_0 - 0.6 \Delta\alpha_1 + 0.36 \Delta\alpha_2 - 0.216 \Delta\alpha_3 + 0.1296 \Delta\alpha_4$$

$$\gamma_4 = \Delta\alpha_0 - 0.55 \Delta\alpha_1 + 0.3025 \Delta\alpha_2 - 0.16638 \Delta\alpha_3 + 0.091506 \Delta\alpha_4 ;$$

$$\gamma_5 = -0.5 + \Delta\alpha_4$$

Il vient  $M_F$  le majorant de  $A_F$  :

$$M_F = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0.0119 \\ 0 & -0.7 & 0 & 0 & 15.5 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0 & 45.45 \\ 0 & 0 & 0 & -0.55 & 29.96 \\ 635.5 & 4.42 & 2.90 & 2.337 & 9.5 \end{bmatrix}$$

On vérifie que la condition de stabilité est bien vérifiée pour  $\Delta a_0 = 0.1$  puisque :

$$\det(M_F) = -0.3375 < 0.$$

Si nous augmentons  $\Delta a_1$  nous obtenons :

$\Delta a_0$	Condition de stabilité : $(-1)^5 \det(M_F)$
0.1	0.3775
1	-1.42
10	-19.42

Nous donnons ci-dessous un listing de programme écrit dans l'environnement MATLAB et exploitant la boîte à outil "calcul symbolique". Ce programme nous a permis d'effectuer tout le calcul permettant d'explicitier l'expression de  $A_F$ .

```

%processus d'ordre 5

% Paramètres limites

da0=10 ; a0min=-1-da0; a0max=-1+da0;
almin=0.7; almax=1.7;
a2min=-0.5; a2max=1.5;
a3min=-0.5; a3max=-0.1;
da4=5; a4min=1-da4; a4max=1+da4;

B=[0 0 0 0 1]';
C=[1 1 1 1 1];

I=eye(5) ;

%modèle extrême N°1
A1 =[0 1 0 0 0; 0 0 1 0 0; 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 1;a0min almax a2max
a3min a4min];
B1=B; C1=C;

%modèle de extrême N°2
A2 =[0 1 0 0 0; 0 0 1 0 0; 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 1;a0min almin a2max
a3max a4min];
B2=B; C2=C;

%modèle de extrême N°3
A3 =[0 1 0 0 0; 0 0 1 0 0; 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 1;a0max almax a2min
a3min a4max];
B3=B; C3=C;

%modèle de Karitonov N°4
A4 =[0 1 0 0 0; 0 0 1 0 0; 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 1;a0max almin a2min
a3max a4max];
B4=B; C4=C;

% (à suivre )

```

( Suite )

**% Calcul des gains optimums par placement de pôles**

```
Poles=[-5; -0.7; -0.6; -0.55; -0.5];
K1 = place(A1,B1,Poles);
K2 = place(A2,B2,Poles);
K3 = place(A3,B3,Poles);
K4 = place(A4,B4,Poles);
Km = place(Am,Bm,Poles);
```

**% Calcul symbolique**

```
syms dalpha1 dalpha2 dalpha3 dalpha4 dalpha5;
```

```
g1 = -1 + dalpha1 -Km(1);
g2 = 1.2 + dalpha2 -Km(2);
g3 = 0.5 + dalpha3 -Km(3);
g4 = -0.3 + dalpha4 -Km(4);
g5 = 1 + dalpha5 -Km(5);
```

```
A=[0 1 0 0 0; 0 0 1 0 0;0 0 0 1 0;0 0 0 0 1;g1 g2 g3 g4 g5];
```

**%matrice de passage à la forme en flèche**

```
p1=-5; p2=-0.7; p3=-0.6; p4=-0.55;p5 = -0.5
P=[1 1 1 1 0;p1 p2 p3 p4 0;p1^2 p2^2 p3^2 p4^2 0;p1^3 p2^3 p3^3 p4^3
0;p1^4 p2^4 p3^4 p4^4 1];
```

**%forme en flèche**

```
AF = inv(P)*A*P
pretty(AF)
vpa(Af(5, :), 5)
```

La commande "syms" permet de définir les symboles  $a_i$ , la matrice de passage P est définie à partir des valeurs  $p_1, p_2, p_3, p_4$  et  $p_5$  indiquées sur le listing et choisies négatives. La forme en flèche  $A_F$  est calculée par la formule de changement de base.

Les variables "dalpha" correspondent au  $\Delta\alpha$  du texte.

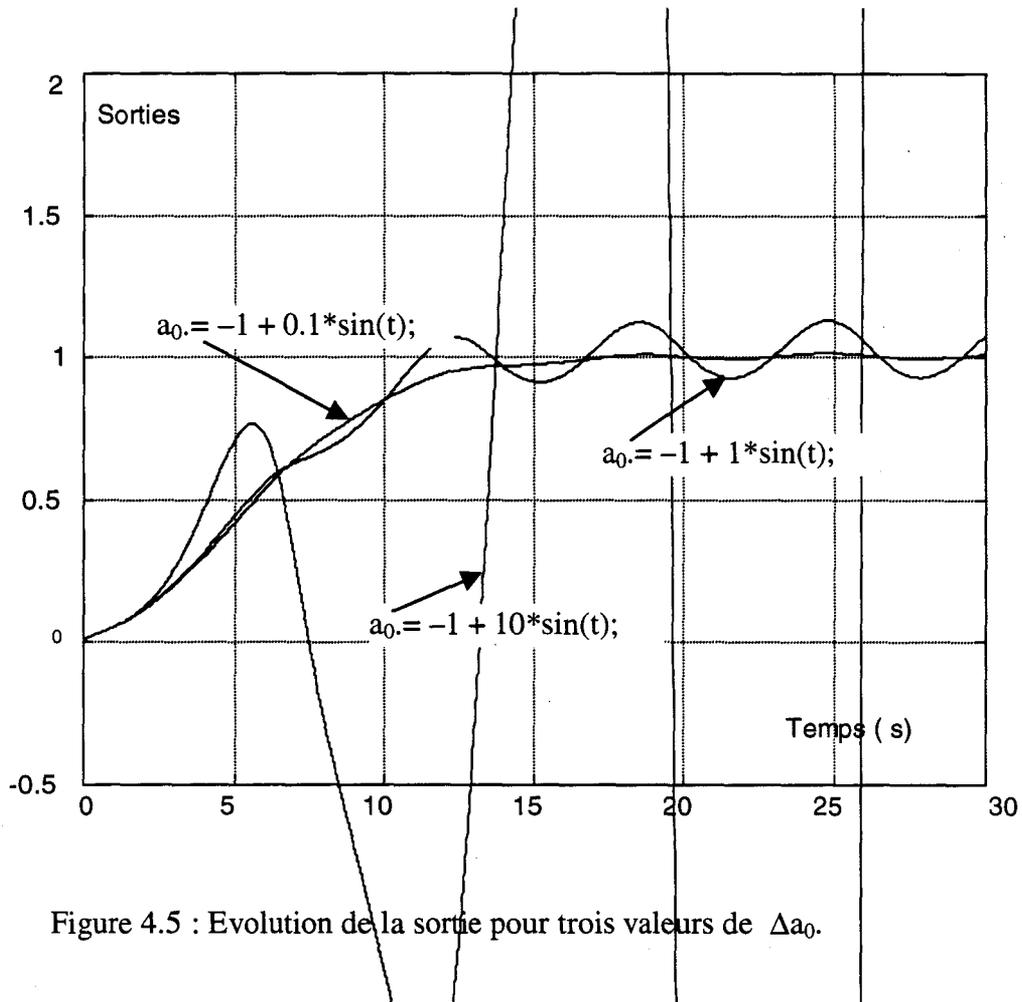


Figure 4.5 : Evolution de la sortie pour trois valeurs de  $\Delta a_0$ .

Les courbes de la figure 4.5 représentent l'évolution de la réponse indicielle unitaire du système en boucle fermée dans les trois cas où la valeur maximale de la variation du paramètre  $a_0$  ( $\Delta a_0$ ) vaut respectivement 0.1, 1 ou 10. On remarque que la stabilité se détériore

et le système est même instable pour la valeur 10. Il est évident que le théorème énoncé offre uniquement une condition suffisante de stabilité, mais la valeur :

$$(-1)^5 \det(M_F),$$

exprimant la condition de stabilité et calculée de la même manière dans les trois cas, comme le montre le tableau précédent, se détériore et devient même fortement négative.

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons abordé la question de la stabilité de la commande multimodèle. L'étude de la stabilité a été de tout temps une étape importante pour la théorie de la commande. Malheureusement, la commande multimodèle présente un degré de complexité tel que les outils mathématiques actuels ne permettent pas de répondre à la question de la stabilité. Dans le cas d'une commande par placement de pôles et si le système peut être modélisé sous la forme commandable, nous avons proposé un théorème qui conduit à une condition suffisante de stabilité. Nous avons envisagé par la suite deux exemples d'applications, le premier du troisième ordre est relatif à un système non linéaire à paramètres incertains, le deuxième est non stationnaire présentant un ordre élevé. Les calculs nous ont permis d'exprimer une condition suffisante de stabilité, puis grâce aux simulations nous avons étudié la sensibilité de l'approche multicommande aux variations imprévues des paramètres. Nous avons pu constater le bon comportement du système et la robustesse de la commande multimodèle vis à vis des variations paramétriques.

**Conclusion Générale**



## Conclusion Générale

Nous pouvons considérer aujourd'hui que la plupart des problèmes posés pour la modélisation et la commande des systèmes linéaires sans contraintes sont résolus. Les solutions qui sont disponibles sont souvent très puissantes et de mise en œuvre facile.

La situation est de loin très différente dans le cas des systèmes non linéaires. Il est par conséquent très intéressant de remplacer, lorsque cela est possible, l'étude d'un système non linéaire par celle d'un système linéaire. La question posée est : jusqu'à quelle limite peut-on procéder ainsi ?

L'approche multimodèle est à ce titre intéressante puisqu'elle permet de remplacer le système non linéaire par un ensemble de modèles plus simples groupés dans une base de modèles. La commande élaborée peut être perçue comme une fusion des commandes partielles calculées à partir de chaque modèle de la base ou, aussi, comme une commutation entre ces dernières.

Dans notre travail, nous nous sommes intéressées à plusieurs aspects liés à l'approche multimodèle. Notre objectif a été d'essayer d'approfondir certains aspects et d'apporter des éléments de réponse à des questions encore non résolues. Nous avons tenu à effectuer plusieurs applications afin de confirmer les différentes approches proposées.

Par des essais sur plusieurs exemples simulés nous avons montré l'intérêt de la commande multimodèle et en particulier en considérant les cas de la fusion et de la commutation des commandes. Nous avons aussi prouvé la supériorité d'un modèle de commande du type PI dans certaines situations pratiques et particulier au voisinage de la stabilisation.

Notre principale contribution a été de préconiser une solution au problème posé par la construction de la base de modèles. En effet, dans la littérature on ne trouve pas de résultats permettant de limiter le nombre de modèles de la base et par suite la complexité des calculs lors d'une exploitation pratique. Nous avons proposé une approche originale permettant de limiter à 6 le nombre maximum de modèles de la base. Nous nous sommes inspirées de l'étude de stabilité développée par Kharitonov pour définir 4 modèles extrêmes et ceci quelque soit l'ordre ou la complexité du système considéré, à la seule condition de pouvoir le modéliser sous forme d'une équation différentielle. A ces quatre modèles, on peut adjoindre le modèle moyen et/ou le modèle local. Ceci porte à six au maximum le nombre de modèles de la base. Cette approche systématique de la construction de la base de modèles a été validée sur plusieurs exemples pratiques. Nous avons considéré des exemples de systèmes non linéaires et /ou à paramètres incertains, d'ordres faible et élevé. Plusieurs techniques ont été utilisées et ont permis de vérifier la robustesse d'une commande LQ fusionnée, l'amélioration du comportement dynamique du système grâce à une fusion de commande utilisant la logique floue et l'intérêt de prendre en compte le modèle moyen et/ou le modèle local.

Un autre résultat original proposé concerne l'étude de la stabilité de la commande multimodèle. En effet, dans le cas d'un placement de pôles et si le modèle s'écrit sous forme

commandable, nous avons établi une condition suffisante de stabilité. Celle-ci a été testée sur des exemples pratiques et nous avons vérifié la sensibilité de la commande multimodèle aux variations paramétriques.

Le calcul des résidus puis des validités des modèles de la bibliothèque en cours de fonctionnement est un point important et délicat. C'est ce calcul qui détermine la qualité finale de la commande multimodèle. Nous avons proposé d'utiliser la logique floue pour la génération des validités. Les résultats pratiques obtenus sont très encourageants.

Les perspectives sont nombreuses et peuvent avoir comme orientations, soit de pousser les développements théoriques pour l'étude de la stabilité de la multicommande, soit d'approfondir le calcul des validités, ...La mise en œuvre pratique sur des systèmes réels est aussi une perspective très intéressante.



## BIBLIOGRAPHIE

- Babuska 97      R. Babuska, H. B. Verbruggen  
"Fuzzy set methods for local modelling and identification"  
Multiple model approaches to modelling and control  
Taylor & Francis Publishers, USA, UK, 1997
- Banerjee 97      A. Banerjee, Y. Arkun, R. Pearson, B. Ogunnaike  
" $H_{\infty}$  control of nonlinear processes using multiple linear models"  
Multiple model approaches to modelling and control  
Taylor & Francis Publishers, USA, UK 1997
- Basseville 88      M. Basseville  
"Detecting change in signals and systems : a survey"  
Automatica, Vol24, N°3, 1988
- Ben Abdennour 96      R. Ben Abdennour  
"Supervision incluant la logique floue des algorithmes d'identification  
paramétrique et de commande prédictive généralisée"  
Thèse d'Etat Es Science GE, ENIT, Tunisie 1996
- Benrejeb 80      M. Benrejeb  
"Sur l'analyse et la synthèse de processus complexes hiérarchisés"  
Thèse d'Etat Es Sciences Physique, UST Lille, N° 479, Mai 1980

- Borne 87            P. Borne  
 "Non-linear systems stability, vector norm approach"  
 Systems and Control Encyclopedia, T. 5, Pergamon Press, 1987
- Borne 90            P. Borne, G. Dauphin Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella, I. Zambettakis  
 "Commande et optimisation des processus"  
 Technip, France 1990
- Borne 92            P. Borne, G. Dauphin Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella, I. Zambettakis  
 "Modélisation et identification des processus", Tome I  
 Technip, France 1992
- Borne 93            P. Borne, G. Dauphin Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella, I. Zambettakis  
 "Analyse et régulation des processus industriels", Tome I  
 Technip, France 1993
- Borne 95            K. M. Bossley, M. Brown, C. J. Harris  
 "Neurofuzzy model construction for the modelling of non linear  
 processes"  
 Proceeding of the 3<sup>rd</sup> European Control Conference, Rome, Italy,  
 September 1995
- Borne 97            P. Borne  
 "Complex industrial systems"  
 IFAC, IFIP-IMACS Conference, Control of Industrial Systems, Vol 1,  
 Belfort, France, May 1997
- Borne 97            P. Borne, F. Delmotte  
 "Recent results on multimodel control"  
 IMACS, Vol 5, Berlin, August 1997

- Borne 98 P. Borne, J. Rozinoer, J. Y. Dieulot, L. Dubois  
 "Introduction à la commande floue"  
 Technip, Paris 1998
- Cassar 94 J. P. Cassar  
 "Génération des relations de redondance analytique pour la surveillance"  
 Journées d'étude S3, Détection et localisation de défaillances  
 Paris 17-18 novembre 94
- Chapellat 89 H. Chapellat, S. P. Bhattacharyya  
 "An alternative proof of Kharitonov's theorem"  
 IEEE trans. on Automatic Control, Vol 34, N°4, April 89
- Delmotte 96<sub>1</sub> F. Demotte, S. Hajri, P. Borne  
 "Multimodel and sliding mode control"  
 WAC'96, Montpellier 1996
- Delmotte 96<sub>2</sub> F. Delmotte, L. Dubois, P. Borne  
 "A general scheme for multi-model controller using trust"  
 Mathematics and Computers in Simulation 41, 1996
- Delmotte 97 F. Delmotte  
 "Analyse multimodèle"  
 Thèse, UST Lille, 1997
- Dubois 96 L. Dubois, T. Fukuda, F. Delmotte, P. Borne  
 "Multi-model systems are universal approximators"  
 CESA'96, IMACS Multiconference, Lille, July 1996

- Frank 90 P. M. Frank  
"Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy : A survey and some new results"  
Automatica, Vol 26, N°3, 1990
- Gentina 72 J. C. Gentina, P. Borne  
"Sur une condition d'application du critère de stabilité linéaire à certaines classes de systèmes continus non linéaires"  
Compte-rendus de l'Académie des Sciences, N°7, t. 275, Paris 1972
- Gentina 76 J. C. Gentina, L. T. Grujic, P. Borne  
"General agregation of large scale systems by vector Lyapunov functions and vector norms"  
International journal of Control, Vol 24-4, 1976
- Gertier 88 J. J. Gertier  
"Survey of model-based failure detection and isolation in complexe plants"  
IEEE Control Systems Magazine, December 1088
- Hajri 97 S. Hajri  
"Commande dynamique par mode glissant : Application à la robustification des processus complexes"  
Thèse, UST Lille, Janvier 1997
- Halme 97 A. Halme, A. Visala, X. C. Zhang  
"Process modelling using the functional state approach"  
Multiple model approaches to modelling and control  
Taylor & Francis Publishers, USA, UK 1997

- Iserman 84            R. Isermann  
 "Process fault detection based on modelling and estimation methods :  
 a survey"  
 Automatica, Vol 20, N°4, 1984
- Johansen 94        T. A. Johansen  
 "Fuzzy model based control : stability, robustness, and performance  
 issues"  
 IEEE trans. on Fuzzy Systems, Vol 2, N°3, August 1994
- Johansen 97        T. A. Johansen, R. Murray-Smith  
 "The operating regime approach to nonlinear modelling and control"  
 Multiple model approaches to modelling and control  
 Taylor & Francis Publishers, USA, UK 1997
- Kharitonov 78      V. L. Kharitonov  
 "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of  
 linear differential equations"  
 Differential. Uravnen., Vol 14, 1978
- Ksouri 97<sub>1</sub>        M. Ksouri-Lahmari, A. El Kamel, M. Benrejeb, P. Borne  
 "Multimodel, multicontrol decision making in system automation"  
 IEEE-SMC'97, Orlando, USA, October 1997
- Ksouri 97<sub>2</sub>        M. Ksouri-Lahmari, P. Borne, M. Benrejeb, A. El Kamel  
 "Reconfiguration automatique en cas de défaillance"  
 17<sup>èmes</sup> journées Tunisiennes d'Electrotechnique et d'Automatique  
 JTEA, Nabeul, Tunisie, Novembre 1997

- Ksouri 98 M. Ksouri-Lahmari, A. El Kamel, M. Benrejeb, P. Borne  
"New results on multimodel control"  
CESA'98, IMACS Multiconference, Nabeul-Hammamet, Tunisia, 1998
- Lee 90 C. Lee  
"Fuzzy logic in control systems : Fuzzy logic controller"  
IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Vol 20, N°2,  
March/April  
1990
- Meila 97 M. Meila, M. I. Jordan  
"Markov mixtures of experts"  
Multiple model approaches to modelling and control  
Taylor & Francis Publishers, USA, UK 1997
- Mouyon 94 Ph. Mouyon, M.I. Arsan, J. F. Magni  
"Synthèse d'observateurs pour le diagnostic de pannes"  
Journées d'étude S3, Détection et localisation de défaillances  
Paris 17-18 novembre 94
- Murray 97 R. Murray-Smith, T. A. Johansen  
"Multiple model approaches to modelling and control"  
Ed Taylor & Francis, 1997
- Narendra 95 K. S. Narendra, J. Balakrishnan, M. K. Ciliz  
"Adaptation and learning using multiple models, switching, and tuning"  
IEEE Control Systems, June 1995

- Narenda 97      K. S. Narenda, J. Balakrishnan  
 "Adaptive control using multiple models"  
 IEEE trans. on Automatic Control, Vol 42, N°2, February 97
- Nuningger 97      W. Nuningger  
 "Stratégie de diagnostic robuste à l'aide de la redondance analytique"  
 Thèse, INP Lorraine, Octobre 1997
- Richard 84      J. P. Richard  
 "Définition d'invariants polynomiaux adaptés à la modélisation et à  
 l'étude des systèmes non linéaires et non stationnaires"  
 Thèse d'Etat Es Sciences Physique, UST de Lille, N°639, Déc. 84
- Richard 87      J. Richard, P. Borne  
 "State space modelling : state space transformation"  
 Systems and Control Encyclopedia, T. 7, Pergamon Press, 1987
- Schott 97      K. D. Schott, B. W. Bequette  
 "Multiple model adaptive control"  
 Multiple model approaches to modelling and control  
 Taylor & Francis Publishers, USA, UK 1997
- Staroswiecki 91      M. Staroswiecki, V. Cocquempot, J. P. Cassar  
 "Observer based and parity approaches for failure detection and  
 identification "  
 IMACS Symposium MCTS, Lille 1991

- Staroswiecki 94 M. Staroswiecki  
"La problématique et les approches de la surveillance des systèmes technologiques "  
Journées d'étude S3, Détection et localisation de défaillances  
Paris 17-18 novembre 94
- Takagi 85 T. Takagi, M. Sugeno  
"Fuzzy identification of systems to modelling and control"  
IEEE trans. on Systems, Man and Cybernetics, Vol SMC15, N°1, J/F  
1985
- Trigeassou 94 J. C. Trigeassou  
"Estimation paramétrique de modèles continus pour le diagnostic"  
Journées d'étude S3, Détection et localisation de défaillances  
Paris 17-18 novembre 94
- Zadeh 65 L. A. Zadeh  
"Fuzzy sets"  
Informatic control, Vo; 8, 1965
- Zadeh 78 L. A. Zadeh  
"Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility"  
Fuzzy Sets and Systems, Vol 1, 1978
- Zhao 93 Z.Y. Zhao, M. Tomizuka, S. Isaka  
"Fuzzy gain scheduling of PID controllers"  
IEEE trans. on Systems, Man and Cybernetics, Vol 23, N°5, S/O 1993

Zhao 97

J. Zhao, R. Gorez, V. Wertz

"Synthesis of fuzzy control systems based on linear Takagi-Sugeno fuzzy models"

Multiple model approaches to modelling and control

Taylor & Francis Publishers, USA, UK 1997

