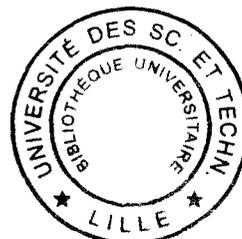


UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
U.F.R. DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
DEPARTEMENT DE MÉCANIQUE FONDAMENTALE



THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE LILLE I
Discipline : MÉCANIQUE

présentée

par

Olivier WIPLIER

Titre de la thèse :

*Etude numérique des instabilités d'un écoulement
de couche limite en présence d'une paroi déformable*

soutenue le 16 Novembre 1999 devant le jury composé de

M. :	P.-A.	BOIS	Professeur, Université de Lille I	Président
MM. :	E.	DE LANGRE	Maître de Conférences, Ecole Polytechnique, Palaiseau	Rapporteurs
	S.	HUBERSON	Professeur, Université du Havre	
MM. :	P.	BONTOUX	Directeur de Recherches CNRS, IRPHE Marseille	Examineurs
	D.	BUISINE	Professeur, Université de Lille I	
M. :	U.	EHRENSTEIN	Professeur, Université de Nice	Directeur de thèse

*Tu me dis, j'oublie.
Tu m'enseignes, je me souviens.
Tu m'impliques, j'apprends.*

B. Franklin

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Uwe Ehrenstein qui, avec une grande disponibilité, m'a grandement aidé à mener à bien ce travail et m'a fait bénéficier de ses compétences et son expérience. Il fut toujours là pour prodiguer d'excellents conseils et m'encourager dans mon travail lorsque c'était nécessaire. Qu'il trouve dans ces quelques lignes l'expression de ma plus grande reconnaissance.

Je remercie vivement Messieurs E. de Langre et S. Huberson d'avoir assumé volontiers la charge de rapporteurs et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je remercie également Monsieur P.-A. Bois pour avoir accepté de présider ce jury et Messieurs P. Bontoux et D. Buisine qui ont accepté d'être membres de ce jury.

Je remercie Monsieur G. Caignaert, directeur du Laboratoire de Mécanique de Lille (URA CNRS 1441), de m'avoir accueilli pour réaliser cette thèse.

Je tiens à remercier tous les collègues du L.M.L. avec qui j'ai passé d'agréables moments durant ces trois années et qui, pour certains, ont toujours été présents pour m'encourager et me soutenir tout au long de mon parcours. Ne pouvant citer ici tous les jeffs, je tiens surtout à saluer les anciens : Agnès Kubicki, Mélanie Choteau, Jérôme Fortin et Tougna Dawai.

Enfin, mes pensées s'étendent à mon épouse et à ma famille qui m'ont toujours soutenu. Je me permets de dédier ma thèse à mon défunt grand-père Charles (qu'il trouve dans ce travail l'aboutissement de ses espérances).

Table des matières

Introduction	7
1 Présentation générale	11
1.1 Introduction	11
1.2 Equations de Navier-Stokes	12
1.3 Ecoulement de base	12
1.4 Modèle théorique de la paroi déformable	13
1.5 Mise en équations	18
2 Stabilité linéaire	21
2.1 Introduction	21
2.2 Méthode des petites perturbations	22
2.3 Modes normaux	22
2.4 Formulation du problème	23
2.5 Résultats de stabilité linéaire	25
2.5.1 Historique succinct des études antérieures	25
2.5.2 Validation de la procédure de résolution	27
2.5.3 Comparaison entre les formulations cartésienne et non-cartésienne	33
2.5.4 Rôle des instabilités tridimensionnelles	38
2.6 Résumé	41
3 Simulation spatiale d'instabilités: méthodes numériques	43
3.1 Introduction	43
3.2 La méthode de résolution numérique	43
3.2.1 Conditions à l'interface	43
3.2.2 Intégration en temps	44
3.2.3 Discrétisation spatiale et algorithme	46
3.3 Validation de l'algorithme	53

3.3.1	Solution exacte stationnaire	54
3.3.2	Solution exacte instationnaire	55
4	Résultats de simulations spatiales d'instabilités	57
4.1	Validations	57
4.1.1	Comparaison entre la simulation numérique et la stabilité linéaire	57
4.1.2	Effets non parallèles et non linéaires	59
4.1.3	Couche limite sur plaque plane	63
4.2	Membrane sous tension avec amortissement	68
4.3	Plaque mince élastique montée sur ressorts	73
4.3.1	Paroi souple semi-infinie	75
4.3.2	Paroi souple de longueur finie	80
4.4	Résumé	86
5	Instabilités convectives et absolues	89
5.1	Concepts	90
5.1.1	Stabilité hydrodynamique	90
5.1.2	Analyse temporelle	92
5.1.3	Analyse spatiale	93
5.1.4	Instabilité spatio-temporelle	95
5.2	Ecoulement de couche limite interagissant avec une paroi souple	98
5.2.1	Nature des instabilités	98
5.2.2	Existence d'instabilités absolues	102
5.2.3	Effet de l'amortissement : mode transitionnel	104
5.2.4	Effets du nombre de Reynolds Re	111
5.3	Perturbations localisées et simulation spatiale	112
5.3.1	Technique de simulation numérique spatiale	112
5.3.2	Etudes de la réponse de la paroi	113
5.3.3	Evolution spatio-temporelle de l'énergie du fluide	120
5.3.4	Influence de la paroi souple sur l'évolution temporelle de l'énergie du fluide	123
5.4	Résumé	124
	Conclusion	127
	A Couche limite de Blasius	129
	B Méthode d'Arnoldi	131

<i>Table des matières</i>	5
C Différences finies	133
D Détail des matrices A, B et C	135
E Théorie asymptotique, figures de Carpenter et Gajjar (1990)	139
Bibliographie	140

Introduction

Gray (1936) était le premier à mentionner dans la littérature scientifique que les dauphins pouvaient atteindre des vitesses de déplacement élevées à l'égard des lois hydrodynamiques de frottement pariétal, ce paradoxe fut appelé "secret des dauphins". L'idée d'utiliser de parois souples pour la réduction de la traînée et le retard de transition laminaire/turbulent était née. Kramer (1960) fut le premier à tenter d'exploiter technologiquement le "secret des dauphins" mais la nature ne délivre pas facilement ses secrets. Néanmoins, bien que Kramer eût une compréhension imparfaite de la structure et de la fonction de l'épiderme du dauphin, celui-ci observait des réductions de traînée importantes dans une série d'expériences sur des corps de révolution couverts de revêtements souples (conçus pour être proches de l'épiderme du dauphin) et remorqués à de hautes vitesses dans l'eau de mer.

Alors que le "secret des dauphins" n'est pas encore complètement levé, notamment la corrélation entre les grandes vitesses et la peau souple de ce cétacé n'est à ce jour qu'une hypothèse parmi d'autres, il n'y a toujours pas de réponse claire quant à l'effet des parois souples sur la transition. Même s'il s'est avéré que l'apparition des ondes de Tollmien-Schlichting, responsables de la transition dite naturelle dans des couches cisailées, peut être retardée par des revêtements de parois souples interagissant avec l'écoulement, cette même interaction est responsable de l'apparition d'autres sources d'instabilités identifiées par Benjamin (1960). Bien que depuis les travaux de Kramer (1960) de nombreuses études aient eu pour objet l'étude d'écoulements de couche limite le long de parois souples, ce n'est qu'à partir des années quatre-vingts que des études numériques ont clairement mis en évidence la possibilité de retarder l'apparition des ondes de Tollmien-Schlichting lorsque la paroi est couverte d'un revêtement souple. Cependant, dans un tel système fluide-structure non seulement des instabilités visqueuses provoquées par le fluide (précisément les ondes de Tollmien-Schlichting) apparaissent, mais des ondes de surface provoquées par le mouvement de la paroi peuvent également devenir dangereuses. La classification des différents types d'instabilité a été entreprise par Carpenter et Garrad (1985, 1986), à partir d'une étude numérique d'instabilité linéaire. Ces recherches ont en particulier permis de

reconnaître deux types d'ondes de surface, une première qui correspond à un mode propre de la paroi modifié par la présence du fluide et une seconde qui correspond à une instabilité fluide-structure appelée divergence. Les ondes de divergence sont interprétées comme une instabilité absolue contrairement aux instabilités de Tollmien-Schlichting et aux ondes de surface lesquelles sont des instabilités convectives.

L'état de l'art à la fin des années quatre-vingts a été documenté dans les articles de synthèse de Riley et al. (1988) et Carpenter (1990). Une vue d'ensemble des interactions de couche limite avec parois souples [Gad-el-Hak (1986)] a récemment été remise à jour et publiée par Gad-el-Hak (1996).

Des études ultérieures, notamment les travaux de Lucey et Carpenter (1995), ont confirmé le fait que même si des parois souples peuvent retarder l'apparition d'instabilités visqueuses, la transition prématurée observée par exemple dans des expériences de Gaster (1987) est souvent due à des instabilités hydroélastiques. Récemment, Davies et Carpenter (1997b) ont étudié l'interaction complexe entre les différents modes d'instabilités d'un écoulement de canal revêtu de parois souples. Ces interactions de modes peuvent alors aboutir à une instabilité absolue provoquée par la coalescence des modes de paroi contrairement à l'écoulement le long d'une paroi rigide qui est convectivement instable [Deissler (1987)]. Le problème d'instabilités secondaires d'un écoulement de couche limite avec parois souples a été abordé par Joslin et Morris (1992b) montrant que les taux de croissance des instabilités secondaires peuvent être réduits de manière significative par l'utilisation de parois souples.

Plus récemment, Ehrenstein et Rossi (1996) se sont concentrés sur les ondes de Tollmien - Schlichting non linéaires pour un écoulement de Blasius sur parois souples en utilisant l'approximation d'un écoulement localement parallèle. Il est montré numériquement que pour une classe spécifique de revêtements, modélisés par des membranes sous tension, le comportement de bifurcation non linéaire devient hautement sous-critique. Or, pour ces calculs, les limites de l'hypothèse d'un écoulement parallèle deviennent évidentes pour les parois hautement flexibles. Dans ce cas, les distortions de l'écoulement principal calculées apparaissent être erronées et ces erreurs sont attribuées aux effets non parallèles par Ehrenstein et Rossi. L'influence de l'épaississement de la couche limite sur la stabilité linéaire en présence de parois souples a été abordée par Yeo *et al.* (1994) en utilisant une analyse à échelle multiple. D'après ces résultats, les effets non parallèles ont une influence déstabilisante aussi bien sur les instabilités de Tollmien-Schlichting que sur les modes de paroi, en particulier pour les bas nombres de Reynolds.

Une voie possible pour inclure les effets non parallèles est d'effectuer une simulation numérique directe de l'évolution de la perturbation spatiale. Récemment, des simulations

numériques de l'évolution linéaire d'ondes dans un canal, où la paroi inférieure était recouverte d'un panneau souple de longueur finie, ont été réalisées par Davies et Carpenter (1997a). La réponse de parois souples à un écoulement uniforme a été étudiée par Lucey *et al.* (1997a) en utilisant un modèle non linéaire pour les mécanismes de la paroi. Dans ce modèle, l'hypothèse d'un écoulement potentiel instable est utilisée et il est montré que l'interaction fluide-structure peut mener à l'apparition des ondes de divergence non linéaires. Des calculs d'interactions complexes entre une couche limite et une paroi souple, la composante de l'écoulement rotationnel étant obtenue par une méthode de vortex discrets, ont été publiés par Lucey *et al.* (1997b).

Le but de ce travail est d'effectuer une simulation numérique directe de l'interaction non linéaire en résolvant les équations de Navier-Stokes couplées à un modèle de paroi. La simulation numérique de la croissance d'une perturbation spatiale en présence d'une paroi souple est un problème difficile à résoudre numériquement, la géométrie de l'écoulement faisant partie de la solution. Le problème de la simulation numérique directe d'un écoulement avec des géométries complexes et dépendant du temps a été étudié par exemple par Carlson *et al.* (1995).

Dans la présente étude, une procédure numérique capable de décrire l'évolution non parallèle et spatiale d'une perturbation s'amplifiant dans une couche limite couplée à une paroi flexible est présentée. Le modèle prend en compte pleinement l'interaction non linéaire entre le fluide et la structure. La paroi est représentée par une plaque élastique montée sur ressorts ou une membrane sous tension similaire à des modèles de paroi flexible utilisés par d'autres auteurs.

Le document est organisé de la manière suivante. Le chapitre 1 est une présentation générale du problème précisant la formulation des équations utilisées, le modèle de paroi souple étudié et la géométrie du domaine. Dans le chapitre 2, une étude de stabilité linéaire fournit les premiers éléments de compréhension du phénomène. Dans les chapitres 3 et 4, la procédure de résolution numérique du problème complet et la simulation spatiale d'instabilités sont exposées. Des tests de validation de l'algorithme sont présentés. Ensuite, différents types de revêtements souples sont étudiés incluant le cas de panneaux de longueur finie. Dans le chapitre 5, les résultats sur la coalescence de certains modes et la nature convective et absolue des instabilités sont présentés. Enfin, une synthèse des résultats est effectuée dans la conclusion.

Chapitre 1

Présentation générale

1.1 Introduction

L'interaction entre une paroi souple et l'écoulement de couche limite est ainsi au cœur de la présente étude ; il semble alors naturel de considérer une paroi souple à la fois suffisamment simple pour pouvoir être décrite par un modèle d'une complexité limitée, et qui en même temps est représentative pour des études de contrôle de la transition. Aussi, tirant des renseignements des travaux antérieurs sur le sujet [Ehrenstein et Rossi (1996)], le but est de proposer une modélisation avec un minimum d'hypothèses simplificatrices *i.e.* incluant à la fois des effets non linéaires et des effets non parallèles du système couplé fluide-structure. Les efforts portent sur la résolution des équations en géométrie complexe, la dernière étant non périodique afin d'inclure des effets non parallèles. Par ailleurs, étant donné que la paroi interagit avec l'écoulement à travers la composante normale du tenseur des contraintes, la géométrie est elle-même une inconnue du problème. Une autre difficulté réside dans le traitement des termes non linéaires. Etant donné la difficulté de la prise en compte complexe de l'interaction entre le fluide et la structure, nous nous limitons dans cette étude à un écoulement bidimensionnel. Le modèle bidimensionnel décrit par la suite pourra être étendu aux équations qui régissent l'évolution de perturbations tridimensionnelles, tout au moins lorsque l'on considère la troisième direction (transversale) comme étant homogène. Nous reviendrons sur ce point dans la discussion des perspectives ultérieures.

1.2 Equations de Navier-Stokes

Les équations des écoulements incompressibles de fluide visqueux newtonien s'écrivent

$$\rho^* \frac{d\vec{u}^*}{dt^*} = -\vec{\nabla}^* p^* + \mu^* \Delta^* \vec{u}^*. \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{u}^* = 0, \quad (1.2)$$

Les équations (1.1) (équations de quantité de mouvement) et (1.2) (équation d'incompressibilité) forment le système de Navier-Stokes. Les grandeurs \vec{u}^* , p^* , ρ^* , μ^* représentent respectivement le champ de vitesses, la pression, la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide. Les opérateurs gradient et Laplacien dans le système de coordonnées physiques sont définis par $\vec{\nabla}^*$ et Δ^* . On notera que dans tout le document, les variables avec dimension sont étoilées. L'écriture des équations de Navier-Stokes en variables sans dimension s'obtient en écrivant dans (1.1) et (1.2) :

$$\vec{x}^* = L^* \vec{x}, \quad \vec{u}^* = U^* \vec{u}, \quad t^* = T^* t \quad \text{et} \quad p^* = \rho^* U^{*2} p, \quad (1.3)$$

où les grandeurs caractéristiques L^* , U^* et T^* correspondent à une longueur de référence, une vitesse de référence et un temps de référence déterminé par $T^* = L^*/U^*$. En définitive, les équations de Navier-Stokes *adimensionnées* s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \frac{1}{Re} \Delta \vec{u}. \quad (1.5)$$

Le nombre de Reynolds de l'écoulement est défini par la relation :

$$Re = \frac{L^* U^*}{\nu^*}, \quad (1.6)$$

où ν^* est la viscosité cinématique du fluide.

1.3 Écoulement de base

Un écoulement de fluide incompressible de viscosité cinématique ν^* est considéré le long d'une paroi, laquelle dans le cas rigide est localisée à $y^* = 0$, $0 \leq x^*$. Dans le cas d'un écoulement laminaire sans gradient de pression où l'interface reste plane, la solution est un écoulement de couche limite de Blasius. Cette solution définit alors un écoulement de base $(U(x^*, y^*), V(x^*, y^*))$ vérifiant les équations de couche limite dépendant de la coordonnée normale à la paroi y^* et de la coordonnée longitudinale x^* . Bien que cet

écoulement de Blasius ne soit pas solution exacte des équations de Navier-Stokes, il est considéré néanmoins comme un écoulement laminaire pour l'étude des instabilités. Ceci est conforme à l'approche adoptée par d'autres auteurs (Joslin *et al.*, 1992a).

On peut alors définir une vitesse de référence qui est celle de l'écoulement uniforme U_∞^* à l'infini et une longueur de référence basée sur l'épaisseur de déplacement de la couche limite telle que :

$$\delta^* = \gamma \sqrt{\frac{\nu^* x^*}{U_\infty^*}} \quad \text{avec} \quad \gamma = 1.7208. \quad (1.7)$$

Le nombre de Reynolds de l'écoulement est défini avec l'épaisseur de déplacement par la relation :

$$Re = \frac{U_\infty^* \delta^*}{\nu^*}. \quad (1.8)$$

La solution des équations de couche limite est la solution de similitude de plaque plane. La fonction de courant est définie en fonction du paramètre de similitude Θ par :

$$\psi^* = \sqrt{\nu^* U_\infty^* x^*} f(\Theta), \quad (1.9)$$

f étant solution de l'équation de Blasius [cf. Schlichting (1979)] permettant de déterminer un écoulement de base non parallèle et adimensionné (les grandeurs non étoilées représentent les grandeurs sans dimension).

Alors qu'en théorie de stabilité linéaire, l'étude en fonction du nombre de Reynolds Re consiste à se déplacer le long de la paroi, en simulation spatiale, la donnée d'un nombre de Reynolds à l'entrée Re permet de fixer un profil de vitesse qui détermine les profils du domaine d'étude en fonction de x (voir annexe couche limite de Blasius).

1.4 Modèle théorique de la paroi déformable

Qu'est ce que l'on entend par *paroi déformable*? Le terme a été appliqué, d'une manière générale, pour tous les cas suivants : paroi déformable passive, paroi déformable active et paroi déformable active contrôlée par le mouvement du fluide (détecteur). Les parois déformables actives ont été le sujet de recherches expérimentales, entre autres, de Park *et al.* (1985). Les parois déformables actives contrôlées par le mouvement du fluide ont été étudiées théoriquement, par exemple, par Metcalfe *et al.* (1986).

Dans la présente étude, des surfaces déformables passives seront considérées. Dans les années 1980, Carpenter and Garrad (1985, 1986) montraient théoriquement que les surfaces de type Kramer (modèle plaque/ressort) pouvaient mener à des retards significatifs de la transition. Cependant, leurs études reposaient uniquement sur le concept de

stabilité linéaire. Ensuite, des expériences pratiquées par Willis (1986) et Gaster (1987) confirmeraient de manière plus générale l'influence favorable des parois déformables malgré l'influence néfaste de certains types d'instabilités dans certaines configurations.

Pour l'étude de l'interaction d'un fluide et d'une surface déformable, les mécanismes de la paroi (masse, flexion/torsion, rigidité du ressort, ...) sont aussi importants que les mécanismes du fluide. Toutes les parois déformables ne sont pas les mêmes quant à leur réponse aux forces générées par le fluide. La plupart des parois déformables étudiées sont représentées dans deux groupes principaux de modèles théoriques, appelés *modèles surfaciques* et *volumiques*, respectivement.

Pour les modèles surfaciques, la déformée de la structure est fonction uniquement de la surface moyenne (le déplacement aux limites de la plaque est identique à celui sur la ligne moyenne). Par ailleurs, la relative simplicité de ces derniers a de grands avantages pour la mise en oeuvre d'une étude numérique et permet de clarifier le rôle des mécanismes stabilisant et déstabilisant qui rentrent en compte quand un écoulement interagit avec une paroi déformable. Par conséquent, pour notre étude, le choix d'un modèle surfacique de paroi a été fait.

Nous passons tout d'abord en revue quelques modèles de parois qui ont été utilisés en vue du contrôle passif d'écoulements. Un modèle de paroi déformable a été introduit par Grosskreutz (1975) pour des études expérimentales de réduction de la traînée dans des couches limites turbulentes. Bien que les résultats obtenus pour l'écoulement turbulent semblent décevants, la surface réagit aux fluctuations du fluide dans l'écoulement transitionnel en réduisant le taux de croissance de l'instabilité linéaire (Carpenter et Morris, 1990).

Le modèle théorique de paroi de Grosskreutz est constitué d'une plaque élastique fine supportée par des charnières et des membres rigides à ressort incliné par rapport à l'horizontal d'un angle θ^* . Le modèle est illustré sur la Figure 1.1. La surface a la possibilité de se déplacer dans les directions perpendiculaire et horizontale. La distance entre chaque membre est supposée être beaucoup plus petite qu'une longueur d'onde caractéristique de l'instabilité de l'écoulement. Ce modèle mécanique peut être considéré comme une approximation du modèle pour une plaque déformable supportée par des morceaux de fibre composite ou une plaque plane supportée par des côtes qui s'étendent dans la direction transverse à la paroi.

Pour des petits déplacements d'un élément hors équilibre, la surface se déplace dans une direction perpendiculaire au bras pivotant rigide. L'équation du mouvement pour l'élément est obtenue en postulant que la force totale agissant sur la surface par les fluctuations du fluide soit en équilibre avec les forces induites par la paroi.

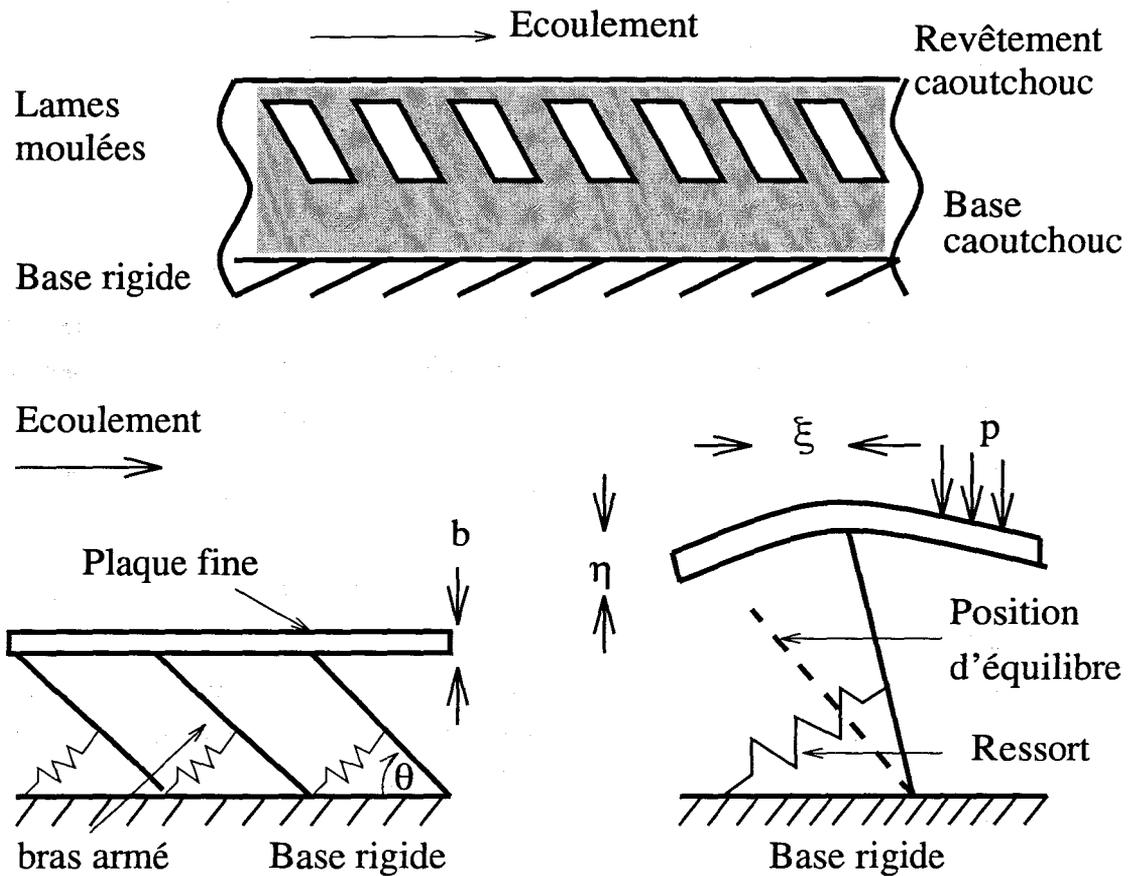


FIG. 1.1 - Schéma du modèle expérimental et théorique de la paroi déformable : en haut, paroi souple nonisotrope de Grosskreutz (1971) ; en bas, modèle de paroi souple anisotrope (Carpenter, 1984 et Carpenter et Morris, 1985).

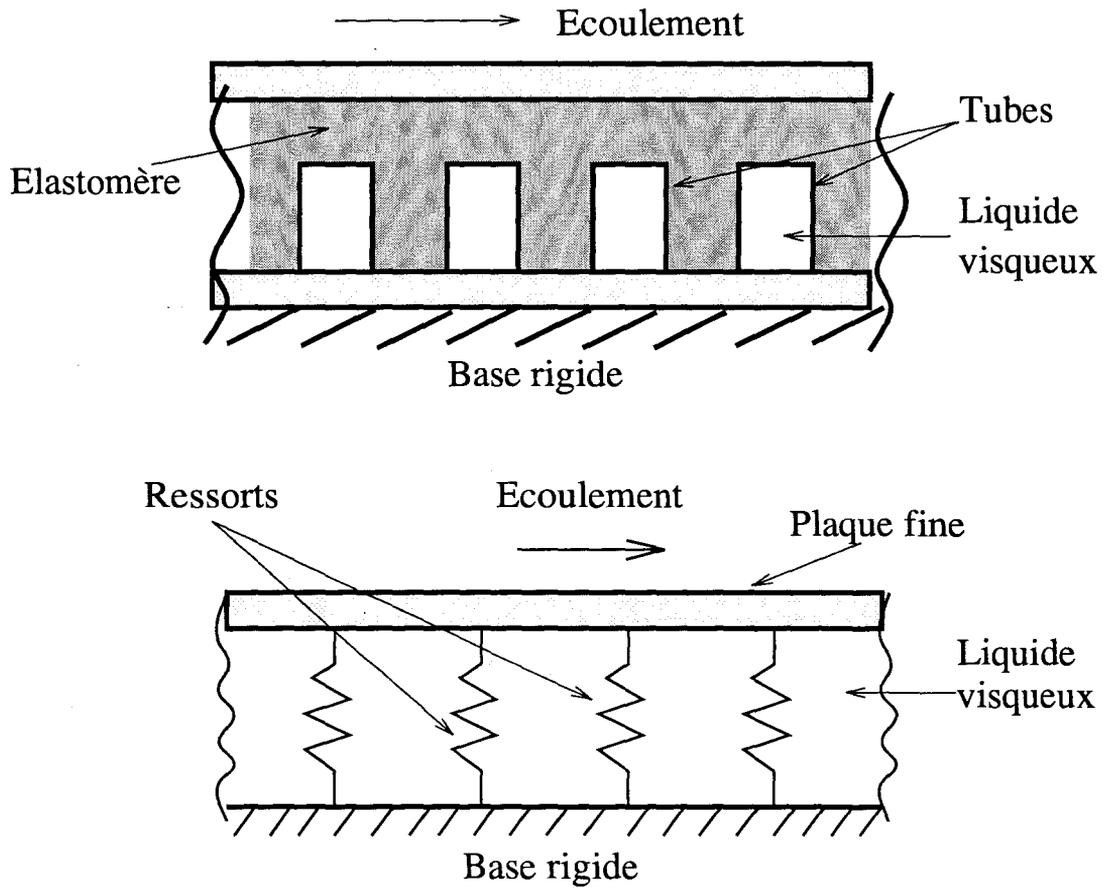


FIG. 1.2 - Schéma du modèle expérimental et théorique de la paroi de Kramer: en haut, paroi de Kramer (1960a et 1960b); en bas, modèle plaque/ressort (Carpenter et Garrad, 1985 et 1986).

Les coordonnées (x^*, y^*, z^*) représentent les coordonnées physiques suivant les directions longitudinale, normale et transversale respectivement ; les variables (ξ^*, η^*, ζ^*) représentent les déplacements de la surface physique suivant les directions longitudinale, normale et transversale respectivement ; $\delta\theta^*$ est le déplacement angulaire de l'élément relatif à la position d'équilibre ; l^* est la longueur du bras pivotant ; ρ_p^* et b^* représentent la masse volumique et l'épaisseur de la plaque ; B^* est le module de flexion-torsion de la plaque ; E^* est le module d'Young de la plaque ; ν_p^* est le nombre de Poisson ; κ^* est la rigidité du ressort effective ; d^* est l'amortissement (modélisation d'un substrat éventuel) ; enfin $p^*, \sigma_P^*, \tau_P^*$ sont les fluctuations de pression, de contrainte normale visqueuse et de frottement pariétal visqueux du fluide agissant sur la paroi.

A partir des équations d'équilibre local pour les plaques minces dans la théorie des petites déformations, les équations du mouvement pour la plaque prennent la forme :

$$\sigma_P^* = \rho_p^* b^* \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial t^{*2}} + d^* \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + B^* \frac{\partial^4 \eta^*}{\partial x^{*4}} + \kappa^* l^* \delta\theta^* \cos(\theta^*), \quad (1.10)$$

$$\tau_P^* = \rho_p^* b^* \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial t^{*2}} + d^* \frac{\partial \xi^*}{\partial t^*} - E^* b^* \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial x^{*2}} + \kappa^* l^* \delta\theta^* \sin(\theta^*). \quad (1.11)$$

La modélisation de la paroi de Grooskreutz repose sur l'hypothèse $\zeta^* \ll \eta^*, \xi^*$. Par conséquent, le déplacement suivant la direction transversale est pris tel que $\zeta^* = 0$. Les équations du mouvement de la paroi sont couplées par une relation géométrique entre les déplacements suivant les directions longitudinale et normale, et le déplacement angulaire $\delta\theta^*$ par les relations :

$$\xi^* = l^* \delta\theta^* \sin(\theta^*), \quad (1.12)$$

$$\eta^* = l^* \delta\theta^* \cos(\theta^*). \quad (1.13)$$

En utilisant l'adimensionnement (1.3), l'équation du mouvement de la plaque prend alors une forme adimensionnée :

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + d \frac{\partial \eta}{\partial t} + B \cos^2(\theta) \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - Tr \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \kappa \eta \\ = \sigma_P \cos^2(\theta) + \tau_P \cos(\theta) \sin(\theta), \end{aligned} \quad (1.14)$$

où les coefficients sont déterminés par :

$$m = \frac{b^* U_\infty^* \rho_p^*}{\mu^* Re}, \quad d = \frac{d^*}{\rho^* U_\infty^*}, \quad B = \frac{B^* U_\infty^* \rho^{*2}}{\mu^{*3} Re^3}, \quad Tr = \frac{E^* b^*}{\mu^* U_\infty^* Re}, \quad \kappa = \frac{\kappa^* \mu^* Re}{\rho^{*2} U_\infty^{*3}}, \quad (1.15)$$

$$\text{avec } Re = \frac{U_\infty^* \delta^*}{\nu^*} \text{ et } B^* = \frac{E^* b^{*3}}{12(1 - \nu_p^{*2})}.$$

où m, d, B, Tr et κ sont respectivement la masse par élément de surface, l'amortissement, le module de flexion/torsion, la tension et la raideur du ressort dans la plaque. Les composantes normale et tangentielle du tenseur des contraintes sont définies par :

$$\sigma_P = -p + \frac{2}{Re} \left[\frac{\partial u}{\partial x} n_1^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_1 n_2 + \frac{\partial v}{\partial y} n_2^2 \right], \quad (1.16)$$

$$\tau_P = \frac{1}{Re} \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} n_1 n_2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_2^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_1^2 - 2 \frac{\partial v}{\partial y} n_2 n_1 \right], \quad (1.17)$$

(u, v) étant respectivement les composantes longitudinale et normale de la perturbation de vitesse de l'écoulement et $\vec{n} = \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x}, 1 \right) / \sqrt{1 + (\partial \eta / \partial x)^2}$ étant le vecteur normal unité à la paroi. La perturbation de pression et le tenseur des contraintes visqueuses ont été adimensionnés par $\rho^* U_\infty^{*2}$, ρ^* étant la masse volumique du fluide.

Les conditions aux limites à l'interface fluide-structure sont d'un aspect crucial dans la formulation du problème de l'interaction entre un fluide et une paroi déformable. Le couplage entre les composantes fluctuantes de la vitesse de l'écoulement et le déplacement de la paroi donne les conditions cinématiques, en $y = \eta(x, t)$, suivantes :

$$(U + u)[x, \eta(x, t)] = \frac{d\eta}{dt} \tan(\theta), \quad (V + v)[x, \eta(x, t)] = \frac{d\eta}{dt}. \quad (1.18)$$

Ici, le champ de vitesses total est la somme de l'écoulement de base $\vec{U} = (U, V)$ et de la perturbation $\vec{u} = (u, v)$.

La paroi de Grosskreutz ne sera utilisée par la suite que pour des études de stabilité linéaire. Dans la plupart des calculs, on considérera une plaque mince élastique montée sur ressorts de type Kramer comme montrée sur la Figure 1.2. Pour les conditions cinématiques (1.18) et la condition dynamique (1.14), il suffira alors de poser $\theta = 0$.

1.5 Mise en équations

L'écoulement est régi par les équations de Navier-Stokes qui doivent être résolues dans le domaine inconnu :

$$x_a^* \leq x^* \leq x_b^*, \quad \eta^*(x^*, t^*) \leq y^* < \infty. \quad (1.19)$$

où x_a^* représente la limite en amont dans la direction longitudinale et x_b^* la limite en aval. On peut ainsi définir une vitesse de référence qui est celle de l'écoulement uniforme U_∞^* à l'infini et une longueur de référence basée sur l'épaisseur de déplacement de la couche limite à l'entrée du domaine x_a^* telle que :

$$\delta_a^* = \gamma \sqrt{\frac{\nu^* x_a^*}{U_\infty^*}} \text{ avec } \gamma = 1.7208. \quad (1.20)$$

Le nombre de Reynolds de l'écoulement est défini avec l'épaisseur de déplacement à l'entrée du domaine x_a^* par la relation :

$$Re = \frac{U_\infty^* \delta_a^*}{\nu^*}. \quad (1.21)$$

Pour des études numériques d'instabilités hydrodynamiques et de transition dans les fluides, il s'avère en général nécessaire d'utiliser des méthodes de haute précision, comme des méthodes spectrales ou des méthodes de différences finies d'ordres élevés. L'emploi de telles méthodes (contrairement à des discrétisations du type éléments ou volumes finis) est naturel en géométrie cartésienne. Pour prendre en compte l'influence de la paroi dans l'écoulement autrement que par les conditions limites, un changement de variables qui transforme la géométrie complexe du domaine physique (1.19) est introduit :

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x, \quad \bar{y} = y - \eta(x, t), \quad (1.22)$$

pour obtenir une géométrie cartésienne :

$$\bar{x}_a \leq \bar{x} \leq \bar{x}_b, \quad 0 \leq \bar{y} < \infty. \quad (1.23)$$

Comme conséquence de la transformation (1.22), de multiples termes supplémentaires apparaissent dans l'expression des opérateurs différentiels, ainsi le gradient, le Laplacien et la dérivée en temps deviennent :

$$\vec{\nabla} = \vec{\bar{\nabla}} + \vec{G}_\eta, \quad \vec{G}_\eta = \left(-\frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, 0 \right), \quad (1.24)$$

$$\Delta = \bar{\Delta} + L_\eta, \quad L_\eta = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} - 2 \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2}, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + T_\eta, \quad T_\eta = -\frac{\partial \eta}{\partial \bar{t}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}}. \quad (1.26)$$

Ce changement de variables ajoute alors des termes de métrique inconnus et rend le système à résoudre plus complexe. Les équations de Navier-Stokes et l'équation d'incompressibilité s'écrivent en termes de perturbation de la vitesse \vec{u} et de perturbation de la pression p sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \bar{t}} + C(\vec{u}) + N(\vec{u}) + \vec{\bar{\nabla}} p - \frac{1}{Re} \bar{\Delta} \vec{u} = S(\eta, \vec{u}, \vec{U}, p), \quad (1.27)$$

$$\vec{\bar{\nabla}} \cdot \vec{u} = -\vec{G}_\eta \cdot \vec{U} - \vec{G}_\eta \cdot \vec{u}, \quad (1.28)$$

où $C(\vec{u}) = (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}$ exprime les termes d'advection dépendant de l'écoulement de base \vec{U} , $N(\vec{u}) = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ représente les termes non linéaires cartésiens et $S(\eta, \vec{u}, \vec{U}, p)$ est défini par tous les termes restants dépendant de η . Comme nous l'avons mentionné plus haut, bien que l'écoulement de base \vec{U} soit solution des équations de couche limite, nous supposons cependant que \vec{U} est solution du système de Navier-Stokes dans le cas plan (c'est à dire $\eta = 0$).

En appliquant l'opérateur divergence aux équations de quantité de mouvement pour le système de Navier-Stokes et en utilisant l'équation d'incompressibilité $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_t = 0$, on obtient l'équation de Poisson pour la pression du fluide totale :

$$\Delta p_t = J(\vec{u}_t) \quad \text{avec} \quad J(\vec{u}_t) = 2 \left[\frac{\partial u_t}{\partial \bar{x}} \frac{\partial v_t}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial u_t}{\partial \bar{y}} \frac{\partial v_t}{\partial \bar{x}} \right], \quad (1.29)$$

le vecteur $\vec{u}_t = (u + U, v + V)$ représentant le champ de vitesse total. Par conséquent, l'équation de Poisson pour la perturbation de la pression devient dans les coordonnées transformées :

$$\bar{\Delta} p = -L_\eta p + \bar{J}(\vec{u}_t) - \bar{J}(\vec{U}). \quad (1.30)$$

Dans le domaine de calcul (\bar{x}, \bar{y}) , les conditions cinématiques (1.18) deviennent pour la perturbation de la vitesse :

$$u(\bar{x}, 0) = 0, \quad v(\bar{x}, 0) = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{t}}. \quad (1.31)$$

et la condition dynamique (1.15) s'écrit :

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 \eta}{\partial \bar{t}^2} + d \frac{\partial \eta}{\partial \bar{t}} + B \cos^2(\theta) \frac{\partial^4 \eta}{\partial \bar{x}^4} - T \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \bar{x}^2} + \kappa \eta \\ = \sigma_P \cos^2(\theta) + \tau_P \cos(\theta) \sin(\theta), \end{aligned} \quad (1.32)$$

où les composantes normale et tangentielle du tenseur des contraintes sont définies par :

$$\sigma_P = -p + \frac{2}{Re} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_1^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_1 n_2 + \frac{\partial v}{\partial y} n_2^2 \right], \quad (1.33)$$

$$\tau_P = \frac{1}{Re} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_1 n_2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) (n_2^2 - n_1^2) - 2 \frac{\partial v}{\partial y} n_2 n_1 \right]. \quad (1.34)$$

Dans toute la suite du document, les variables \bar{x}, \bar{y} et \bar{t} seront notées x, y et t pour plus de commodité.

Chapitre 2

Stabilité linéaire

2.1 Introduction

La théorie de la stabilité d'écoulements laminaires décompose le mouvement en un écoulement principal (dont la stabilité constitue le problème posé) et une perturbation superposée à ce dernier. On s'efforce alors de suivre dans le temps de telles perturbations qui sont superposées à l'écoulement principal. La question décisive est de savoir si les perturbations croissent ou s'atténuent avec le temps. Si les perturbations s'atténuent avec le temps, l'écoulement principal est considéré stable ; mais, si les perturbations croissent avec le temps, l'écoulement est considéré comme instable et la possibilité d'une transition vers un écoulement turbulent existe. La recherche de la stabilité d'un écoulement perturbé peut être effectuée à l'aide de la *méthode des petites perturbations*. Cette méthode accepte seulement les perturbations qui sont cohérentes avec les équations du mouvement linéarisées autour d'un état laminaire de base et analyse la manière dont les perturbations se développent dans l'écoulement, en se basant sur les équations aux dérivées partielles appropriées. C'est l'objet de la *théorie de la stabilité linéaire* ; son objectif est de prédire les valeurs critiques des paramètres (notamment le nombre de Reynolds) à partir desquelles un écoulement principal prescrit perd sa stabilité. Rappelons cependant que la théorie de la stabilité linéaire ne donne pas des conditions suffisantes de stabilité d'un écoulement. En effet, bons nombres d'écoulements sont linéairement stables tout en étant instables par rapport à des perturbations d'amplitudes finies (voir Nagata, 1990 ; Clever et Busse, 1992 et Cherhabili et Ehrenstein, 1997).

2.2 Méthode des petites perturbations

Dans l'étude de stabilité (voir Schlichting (1987) et Drazin et Reid (1981)), l'écoulement principal est décrit par ses composantes de vitesse U et V respectivement dans la direction longitudinale et normale puis sa pression P . Les quantités correspondantes pour la perturbation sont notées u' , v' et p' .

Le problème est simplifié dans un premier temps en stipulant que l'écoulement principal est un écoulement de type couche limite de Blasius parallèle (comme défini à la section 1.3) c'est à dire :

$$U(y), \quad V = 0 \quad \text{et} \quad P = cste. \quad (2.1)$$

La perturbation est supposée infinitésimale et tous les termes quadratiques des composantes fluctuantes sont négligés ceci permettant de ne garder que les termes linéaires (*stabilité linéaire*).

Il en résulte les équations des perturbations linéarisées adimensionnées suivantes :

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} + \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{dU}{dy} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dU}{dy} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{dU}{dy}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dU}{dy}. \quad (2.4)$$

Trois équations pour u' , v' et p' sont alors obtenues. Les conditions aux limites sont données par le mouvement de la paroi et l'écoulement externe. On remarquera que, par rapport à l'étude linéaire d'écoulements parallèles classiques, des nouveaux termes apparaissent, fonction de η , conséquence de la linéarisation de $S(\eta, \vec{u}, \vec{U}, p)$ dans (1.27).

2.3 Modes normaux

De manière habituelle, pour l'étude de la stabilité d'un écoulement parallèle (Drazin et Reid, 1981), la perturbation est écrite sous la forme :

$$\vec{u}'(x, y, t) = \vec{\hat{u}}(y) \exp(\sigma t + i\alpha x), \quad (2.5)$$

$$p'(x, y, t) = \hat{p}(y) \exp(\sigma t + i\alpha x). \quad (2.6)$$

En effet, l'approximation d'écoulement parallèle implique une géométrie homogène en x ce qui justifie le terme en $\exp(i\alpha x)$. Une perturbation bidimensionnelle arbitraire est supposée se développer en une série de Fourier; chacun de ses termes représente une

oscillation partielle et l'étude en modes normaux donne le nombre d'onde α conduisant à une instabilité. On notera que les vecteurs propres des fluctuations ne dépendent que de la coordonnée normale y .

Dans le cadre de la théorie temporelle, dans les équations (2.5) et (2.6), α est une quantité réelle. La quantité σ étant complexe :

$$\sigma = \sigma_r + i \sigma_i,$$

où σ_i est la fréquence de l'oscillation partielle, alors que σ_r détermine le degré d'amplification ou d'amortissement. Les perturbations sont amorties si $\sigma_r < 0$ et l'écoulement principal est stable (laminaire), alors que pour $\sigma_r > 0$, elles se développent.

La notation complexe est utilisée, par conséquent le phénomène physique est relié seulement à la partie réelle des fonctions, soit

$$\mathcal{R}e(\vec{v}') = e^{\sigma_r t} [\vec{v}_r \cos(\alpha x + \sigma_i t) - \vec{v}_i \sin(\alpha x + \sigma_i t)].$$

Il est intéressant d'introduire le nombre :

$$c = \frac{i \sigma}{\alpha} = c_r + i c_i. \quad (2.7)$$

En effet, c_r représente la vitesse de propagation de l'onde dans la direction longitudinale (vitesse de phase) alors que c_i détermine encore le degré d'amortissement, ou d'amplification, suivant son signe.

2.4 Formulation du problème

En substituant les fonctions (2.5) et (2.6) dans les équations des perturbations linéarisées adimensionnées (2.2) à (2.4), que nous multiplions par le nombre Re , les équations de Navier-Stokes linéarisées adimensionnées en approche avec changement de variables se présentent alors sous la forme suivante (après avoir remplacé σ par $-i\omega$ plus couramment utilisé) :

$$\begin{aligned} & [\alpha^2 + i\alpha ReU] DU\hat{\eta} + [D^2 - \alpha^2 - i\alpha ReU] \hat{u} \\ & - ReDU\hat{v} - i\alpha Re\hat{p} = -i\omega Re\hat{u} + i\omega ReDU\hat{\eta}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$[D^2 - \alpha^2 - i\alpha ReU] \hat{v} - ReD\hat{p} = -i\omega Re\hat{v}, \quad (2.9)$$

$$-i\alpha DU\hat{\eta} + i\alpha\hat{u} + D\hat{v} = 0, \quad (2.10)$$

où D désigne l'opérateur dérivé suivant la coordonnée y soit $D = \frac{d}{dy}$.

C'est le système d'équations différentielles de la perturbation (*équations de stabilité*) qui forme le point de départ pour la théorie de stabilité d'écoulements laminares.

Les conditions aux limites linéarisées deviennent :

- en $y = 0$:

$$\cos(\theta) \hat{u} = -i\omega \sin(\theta) \hat{\eta}, \quad (2.11)$$

$$\hat{v} = -i\omega \hat{\eta}, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & - \left[B \alpha^4 \cos^2(\theta) + \kappa + Tr \alpha^2 \sin^2(\theta) - \frac{2i\alpha}{Re} DU \cos^2(\theta) \right] \hat{\eta} \\ & - \frac{2i\alpha}{Re} \cos^2(\theta) \hat{u} + \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{Re} D\hat{u} \\ & + \frac{i\alpha \cos(\theta) \sin(\theta)}{Re} \hat{v} - \cos^2(\theta) \hat{p} = -\omega^2 m \hat{\eta} - i\omega d \hat{\eta}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

- quand $y \rightarrow \infty$:

$$\hat{u} = \hat{v} = 0, \quad (2.14)$$

$$\hat{p} = 0. \quad (2.15)$$

La discrétisation du système d'équations (2.8) à (2.15) conduit à un problème aux valeurs propres généralisé où l'on détermine la fréquence complexe ω en fonction du nombre d'onde réel α , et du nombre de Reynolds Re .

On peut l'écrire formellement sous la forme :

$$[A] (X) = \omega [B] (X). \quad (2.16)$$

Les matrices A et B sont à coefficients complexes et X est la fonction propre complexe contenant le champ de vitesses et la pression de la perturbation associée à la valeur propre généralisée ω . On remarque la présence d'un terme en ω^2 dans l'équation (2.13) que l'on traite à l'aide d'une variable auxiliaire $\bar{\eta} = \omega \hat{\eta}$ afin de pouvoir écrire le problème aux valeurs propres comme défini ci-dessus. Le système (2.16) peut alors être résolu par un algorithme QZ standard qui permet d'obtenir toutes les valeurs propres. Pour l'étude de la stabilité linéaire, seule la partie du spectre donnant une amplification temporelle (ou alors la partie du spectre la moins amortie) nous intéresse. Ainsi, il est judicieux de résoudre le système (2.16) par la méthode dite d'Arnoldi de Nayar et Ortega (1993), dont nous présenterons brièvement les grandes lignes en annexe, car elle permet de déterminer uniquement la partie du spectre principal à un temps de calcul réduit.

L'amplification temporelle ω est fonction du nombre d'onde α et du nombre de Reynolds Re , que nous écrivons formellement sous la forme :

$$\omega = \omega(\alpha, Re). \quad (2.17)$$

Pour calculer la courbe de stabilité neutre du problème, il faut fixer une des deux variables (α, Re) et résoudre l'équation $\omega_i(x) = 0$. On utilise alors la méthode de Müller (Stoer et Burlisch, 1993) qui est une méthode efficace et robuste pour trouver le zéro d'une fonction définie dans le plan complexe et, en particulier, pour trouver une racine simple (réelle aussi bien que complexe) ou multiple d'un polynôme. Cette méthode interpole une fonction f par un polynôme quadratique à l'aide de la formule d'interpolation de Newton.

2.5 Résultats de stabilité linéaire

2.5.1 Historique succinct des études antérieures

Bien que depuis les travaux de Kramer (1960) de nombreuses études aient eu pour objet l'étude d'écoulements de couche limite le long de parois souples, ce n'est qu'à partir des années quatre-vingts que des études numériques ont clairement mis en évidence la possibilité de retarder l'apparition des ondes de Tollmien-Schlichting lorsque la paroi est couverte d'un revêtement souple.

En 1985 et 1986, Carpenter et Garrad ont entrepris une classification des différents types d'instabilités à partir d'une étude numérique d'instabilité linéaire. Dans leur article de 1985, deux types principaux d'instabilités sont considérés. Le premier, qui ne pourrait exister sans viscosité, est appelé instabilité de Tollmien-Schlichting (TS). Le second, l'instabilité de surface (OS pour onde de surface), dépend principalement de la souplesse de la paroi et pourrait exister dans l'hypothèse d'un écoulement non-visqueux. Ces deux instabilités peuvent ensuite ne former qu'une seule instabilité appelée mode transitionnel sous l'action d'un amortissement modélisant un substrat visqueux entre la plaque élastique et la base rigide. Pour étudier les instabilités de paroi induites par le mouvement du fluide, Carpenter et Garrad (1986) ont considéré un écoulement potentiel permettant de ramener le système d'équations fluide - solide à une seule équation (éq. 2.2 de Carpenter et Garrad, 1986). Cette équation, pour une paroi souple de type plaque mince ou membrane sous-tension (cf. (1.14)), s'écrit :

$$\rho_m^* b^* \frac{\partial \eta^{*2}}{\partial t^{*2}} + d^* \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + B^* \frac{\partial \eta^{*4}}{\partial x^{*4}} - T^* \frac{\partial \eta^{*2}}{\partial x^{*2}} + \kappa^* \eta^* = \rho^* \alpha^* (U_\infty^* - c^*)^2 \eta^*. \quad (2.18)$$

En utilisant l'écriture en modes normaux pour la déformée de la paroi $\eta^* = \eta e^{i(\alpha x - \omega t)}$ et en posant $c = \omega/\alpha$, la relation de dispersion adimensionnée pour la vitesse d'onde complexe

s'écrit (éq. 2.6 de Carpenter et Garrad, 1986):

$$c^2 - c_0^2 + C_A (1 - c)^2 + i c C_d = 0, \quad (2.19)$$

en posant $C_A = \frac{\rho^*}{b^* \rho_p^* \alpha^*}$ et $C_d = \frac{d^*}{b^* U_\infty^* \rho_p^* \alpha^*}$; la grandeur c_0 est appelée vitesse d'onde libre et est égale à :

$$c_0 = \{C_B^* C_A^{-2} + C_T^* + C_K^* C_A^2\}^{1/2}, \quad (2.20)$$

avec $C_B^* = \frac{B^* \rho^{*2}}{b^{*3} \rho_p^{*3} U_\infty^2}$, $C_T^* = \frac{T^*}{b^* \rho_p^* U_\infty^2}$ et $C_K^* = \frac{\rho_p^* b^* \kappa^*}{\rho^{*2} U_\infty^2}$.

Dans cette analyse, en plus de l'instabilité de surface, un autre mode est identifié : c'est une onde de type divergence statique (i.e. $c = 0$).

Finalement, Carpenter et Garrad (1985 et 1986) ont identifié et étudié quatre types d'instabilités possibles : onde de Tollmien-Schlichting, onde de surface, onde transitionnelle et onde de divergence.

En 1990, Carpenter et Morris ont montré la capacité de certaines parois souples à pouvoir réduire le taux de croissance de l'instabilité visqueuse et ainsi la possibilité de retarder le phénomène transitionnel. Ce travail est basé sur une étude numérique de la stabilité linéaire de la couche limite. Ils ont également étudié les mécanismes de transfert d'énergie entre le fluide et la paroi. L'état de l'art à la fin des années quatre-vingts a été documenté dans les articles de Riley et *al.* (1988) et Carpenter (1990).

En 1997, Davies et Carpenter ont présenté, pour une paroi de type Kramer, le calcul de la classe d'onde de surface prédite en considérant l'équation (1.14) sans forçage extérieur et sans amortissement i.e. $d = 0$. Une solution :

$$\eta(x, t) = \mathcal{R} \{ \tilde{\eta} e^{i\omega t} \} = \mathcal{R} \{ \eta_p e^{i\beta x} e^{i\omega t} \}, \quad (2.21)$$

représente une solution homogène de cette équation. Les β sont donnés par

$$\beta^4 = \frac{m\omega^2 - \kappa}{B}. \quad (2.22)$$

Ainsi :

$$\beta = \begin{cases} \pm (1 \pm i) \gamma / \sqrt{2} & \text{si } \kappa > m\omega^2, \\ \pm \gamma, \pm i\gamma & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.23)$$

où :

$$\gamma = \left(\frac{|m\omega^2 - \kappa|}{B} \right)^{1/4}. \quad (2.24)$$

Les solutions homogènes sont alors données par :

$$\tilde{\eta} = \begin{cases} e^{\pm \gamma x / \sqrt{2}} \cos(\gamma x / \sqrt{2}), e^{\pm \gamma x / \sqrt{2}} \sin(\gamma x / \sqrt{2}) & \text{si } \kappa > m\omega^2 \\ e^{\pm \gamma x}, \cos(\gamma x), \sin(\gamma x) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.25)$$

La solution devra également satisfaire des conditions limites imposées aux bords de la paroi souple. Evidemment, pour des ondes libres (sans forçage extérieur), la fréquence de coupure est $\omega_0 = (\kappa/m)^{1/2}$. Quand un écoulement de fluide est présent, les solutions de (2.25) sont modifiées. Ces solutions ont été qualifiées comme des ondes de surface (Carpenter et Garrad, 1986).

2.5.2 Validation de la procédure de résolution

2.5.2.1 Instabilités de la couche limite sur paroi souple

Dans la littérature, la plupart des études de stabilité linéaire ne prennent pas en compte la géométrie du problème dans les équations de Navier-Stokes linéarisées ce qui implique que, dans une formulation sans changement de variables, les membres de droite du système (2.2) à (2.4) sont tous nuls. Dans ce cas, les conditions cinématiques définies en (1.18) pour la vitesse de l'écoulement totale, exprimées en séries de Taylor et après linéarisation, donnent :

$$\tilde{u}(x, 0) + \eta \frac{dU}{dy}(0) = 0, \quad \tilde{v}(x, 0) = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (2.26)$$

(\tilde{u}, \tilde{v}) étant la vitesse de perturbation, solution du système de Navier-Stokes linéarisé en coordonnées cartésiennes.

Les deux approches sont-elles équivalentes? Pour cela, les deux conditions d'incompressibilité doivent être écrites sous la même forme, ce qui est réalisable en utilisant la transformation $u = \tilde{u} + \eta \frac{dU}{dy}(y) = 0$ et $\tilde{v} = v$. En injectant cette expression dans le système (2.2) à (2.4), on aboutit à :

$$NS(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{1}{Re} \eta \frac{d^3 U}{dy^3}(y) \vec{i}, \quad (2.27)$$

où $NS(\tilde{u}, \tilde{v})$ représente le système de Navier-Stokes linéarisé en coordonnées cartésiennes et \vec{i} le vecteur unité dans la direction longitudinale x . Bien que le terme supplémentaire du membre de droite de l'équation (2.27) soit petit pour des parois modérément flexibles, il peut devenir non négligeable pour des déplacements de paroi importants lesquels se produisent par exemple quand un mode propre de la paroi (voir plus loin) ou un état de déformée globale de la surface est présent. L'approche sans changement de variables (formulation cartésienne), pour le système (2.27) sans la partie droite, est équivalente à l'équation d'Orr-Sommerfeld une fois la solution écrite en modes normaux.

Comme cas test, en approche cartésienne, nous prenons une configuration largement étudiée dans la littérature (cf. par exemple Carpenter et Garrad, 1985). Le modèle est celui

d'une paroi de type Kramer où une plaque fine flexible est supportée par des ressorts. Les grandeurs du fluide et de la paroi sont les suivantes : vitesse externe $U_\infty^* = 18m/s$, masse volumique $\rho^* = 1025kg/m^3$, viscosité cinématique (eau de mer) $\nu^* = 1.37 \times 10^{-6}m^2/s$, épaisseur $b^* = 2mm$, masse volumique $\rho_p^* = 946kg/m^3$, module d'Young $E^* = 0.5 \times 10^6 N/m^2$, nombre de poisson $\nu_p^* = 0.5$, rigidité du ressort $\kappa^* = 0.115 \times 10^9 N/m^3$ et amortissement $d^* = 0$.

En Mécanique des interactions fluide-structure, le nombre de paramètres physiques devient relativement important (voir ci-avant) à cause du couplage des deux modélisations. Une analyse dimensionnelle du problème couplé fluide-solide est alors très utile (de Langre, 1999). En effet, cette technique permet de faire apparaître des paramètres adimensionnels qui servent à déterminer l'influence d'un milieu sur l'autre et vice-versa. Les nombres adimensionnels propres à l'interaction permettant d'analyser un problème d'interaction fluide-structure sont les suivants :

- $\mathcal{M} = \frac{\rho_p^*}{\rho^*}$, le rapport des masses volumiques ;
- $C_Y = \frac{\rho^* U_\infty^{*2}}{E^*}$, appelé nombre de Cauchy, qui mesure l'ordre de grandeur des déformations consécutives à la pression dynamique $\rho^* U_\infty^{*2}$;
- $U_R = \frac{U_\infty^*}{\sqrt{E/\rho_p^*}}$, appelé vitesse réduite, qui représente un rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse des ondes élastiques dans le solide.

Pour notre cas test, il vient $\mathcal{M} = 0.92$, $C_Y = 0.66$ et $U_R = 0.78$. Cependant, dans notre problème, nous avons défini deux longueurs : l'épaisseur de déplacement de la couche limite δ^* et l'épaisseur de la plaque b^* . Par conséquent, les nombres adimensionnels s'expriment sous la forme suivante :

- $\Lambda^M = \frac{b^* \rho_p^*}{\delta^* \rho^*} = \mathcal{M} \frac{b^*}{\delta^*}$;
- $\Lambda^F = 12 (1 - \nu_p^2) \frac{\rho^* U_\infty^{*2}}{E^*} \left(\frac{\delta^*}{b^*} \right)^3 = 12 (1 - \nu_p^2) C_Y \left(\frac{\delta^*}{b^*} \right)^3$ (Lucey *et al.*, 1997a) ;
- $\Lambda^U = \frac{U_\infty^*}{\sqrt{E/\rho_p^*}} \frac{\delta^*}{b^*} = U_R \frac{\delta^*}{b^*}$.

Comme l'épaisseur de déplacement varie le long de la plaque, il est difficile de donner des valeurs Λ^M , Λ^F et Λ^U pour une configuration donnée en théorie de stabilité linéaire (l'épaisseur de déplacement étant fonction de la localisation en x^*). Pour information, on notera que pour un nombre de Reynolds variant de 400 à 4000 et une vitesse à l'infini de

20m/s alors l'épaisseur de déplacement d'une couche limite d'eau de mer varie de 0.03mm à 0.3mm.

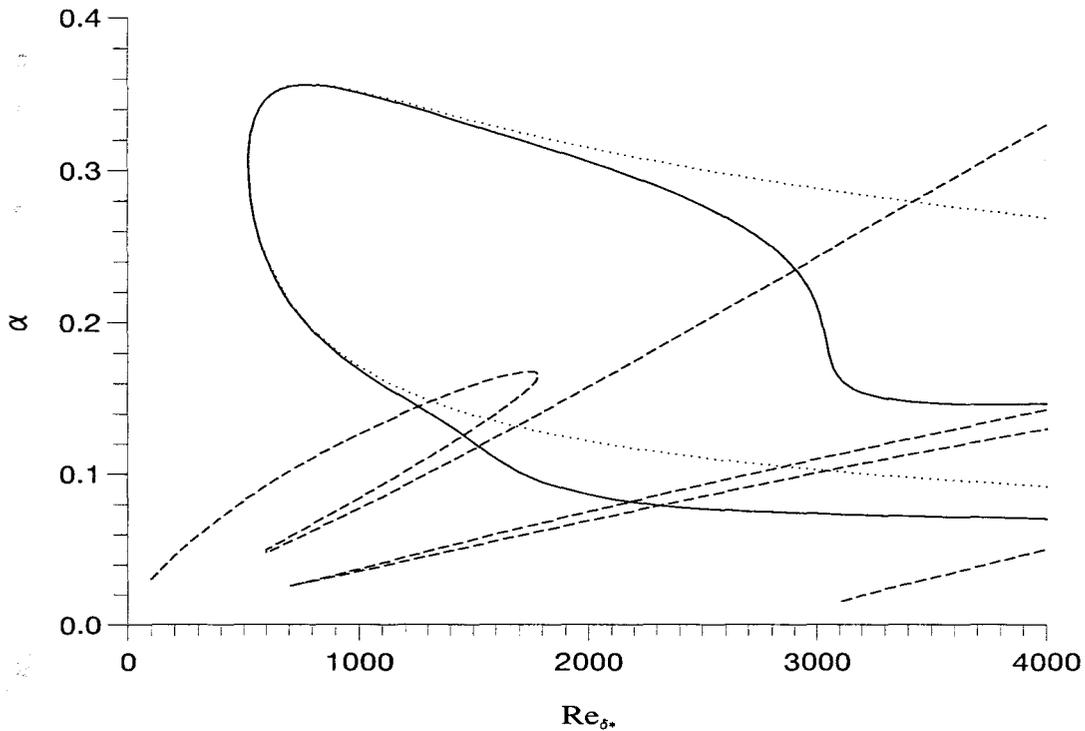


FIG. 2.1 - Courbes de stabilité neutre d'un écoulement de couche limite sur plaque plane ... et sur paroi souple : — TS et -- OS avec $M = 0.92$, $C_Y = 0.66$ et $U_R = 0.78$.

Les résultats de stabilité linéaire sont représentés sur la figure 2.1. La courbe en pointillés représente la courbe de stabilité neutre de la couche limite de Blasius sur plaque plane et cette instabilité (de nature visqueuse) est appelée instabilité de Tollmien-Schlichting. Les courbes de stabilité neutre sur paroi souple donnent une idée de la complexité du problème. Nous sommes en présence de deux types d'instabilités avec des domaines d'amplification variables. L'existence de plusieurs modes d'instabilité est peut-être la différence la plus significative entre le processus de transition sur une plaque plane rigide et celui sur paroi souple. L'onde de Tollmien-Schlichting (le trait continu de la figure 2.1) est celle que l'on observe également dans une couche limite sur une surface plane. Elle est caractérisée pour une couche limite par une vitesse de phase $c_r = \frac{\omega_r}{\alpha}$ de l'ordre de 0.30. Ce type d'instabilité est observé d'une manière générale dans les écoulements parallèles, et son analyse est maintenant classique. La flexibilité de la paroi modifie en partie la courbe de stabilité neutre mais son caractère de base reste inchangé.

En plus de la zone d'instabilité visqueuse (T.S.), on observe une nouvelle zone instable représentant une instabilité de surface induite par le mouvement du fluide sur la paroi (déjà identifié par Carpenter et Garrad, 1985). Elle est caractérisée par une vitesse de

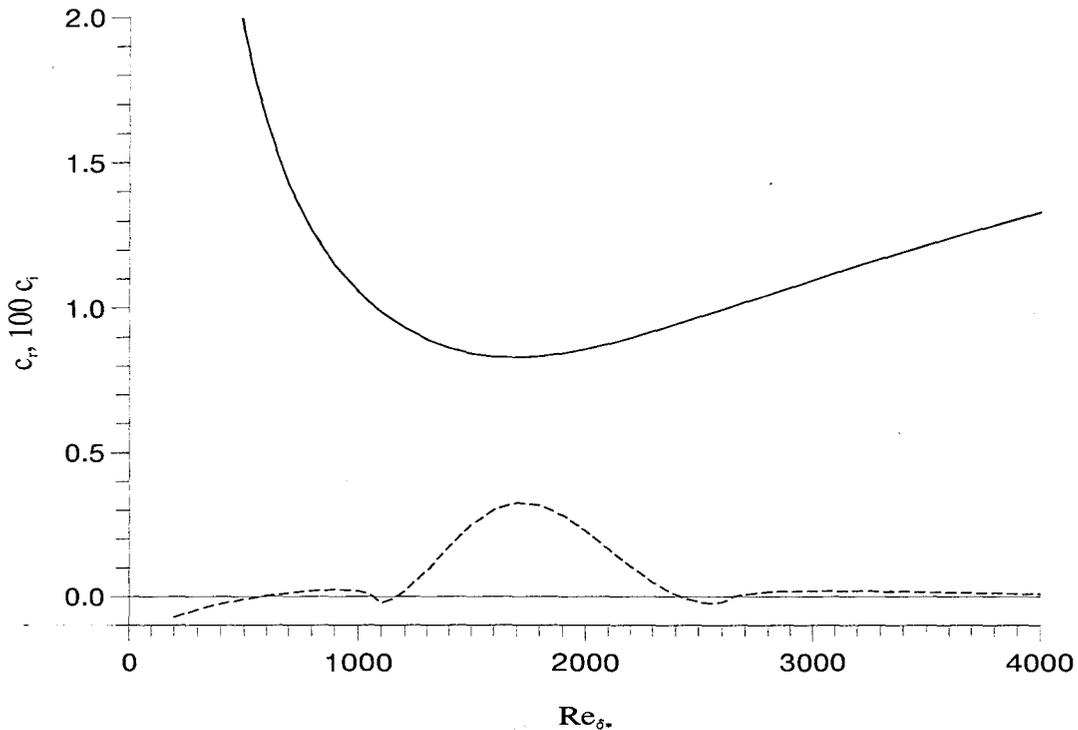


FIG. 2.2 - Variation de la vitesse d'onde complexe en fonction de Re_s avec $\alpha = 0.09$; — c_r et - - $100 c_i$ avec $\mathcal{M} = 0.92$, $C_Y = 0.66$ et $U_R = 0.78$.

phase de l'ordre de l'unité. C'est le mode propre de la paroi (Davies et Carpenter, 1997). Par la suite, cette instabilité sera appelée onde de surface (O.S.). La courbe de stabilité neutre associée se décompose en trois zones (voir Figure 2.2) : deux zones où les vitesses de phase sont supérieures à 1 (supérieure et inférieure) et une zone où la vitesse de phase est inférieure à 1 (milieu).

2.5.2.2 Amortissement et mode transitionnel

Pour continuer notre analyse, nous allons maintenant introduire de l'amortissement afin de prendre en compte un substrat éventuel dans la paroi souple et ainsi pouvoir en quantifier les effets. Afin d'avoir une meilleure représentation de l'influence de l'amortissement sur les instabilités de Tollmien-Schlichting et les ondes de surface, nous traçons les courbes de stabilité neutre de ces deux modes avec les mêmes données que précédemment en prenant une épaisseur de plaque b^* de $1mm$ (ce choix est réalisé pour nous permettre de mieux observer l'influence de l'amortissement comme nous allons le voir).

Les courbes de stabilité neutre correspondantes (sans amortissement) sont tracées sur la Figure 2.3 (trait continu pour les ondes de Tollmien-Schlichting et trait en tirets pour les ondes de surface). On remarquera que la diminution de l'épaisseur de la plaque a un effet

stabilisant sur les instabilités de Tollmien-Schlichting (réduction de la boucle principale en deux boucles beaucoup plus petites) et un effet déstabilisant sur les instabilités de surface (zone centrale beaucoup plus étendue).

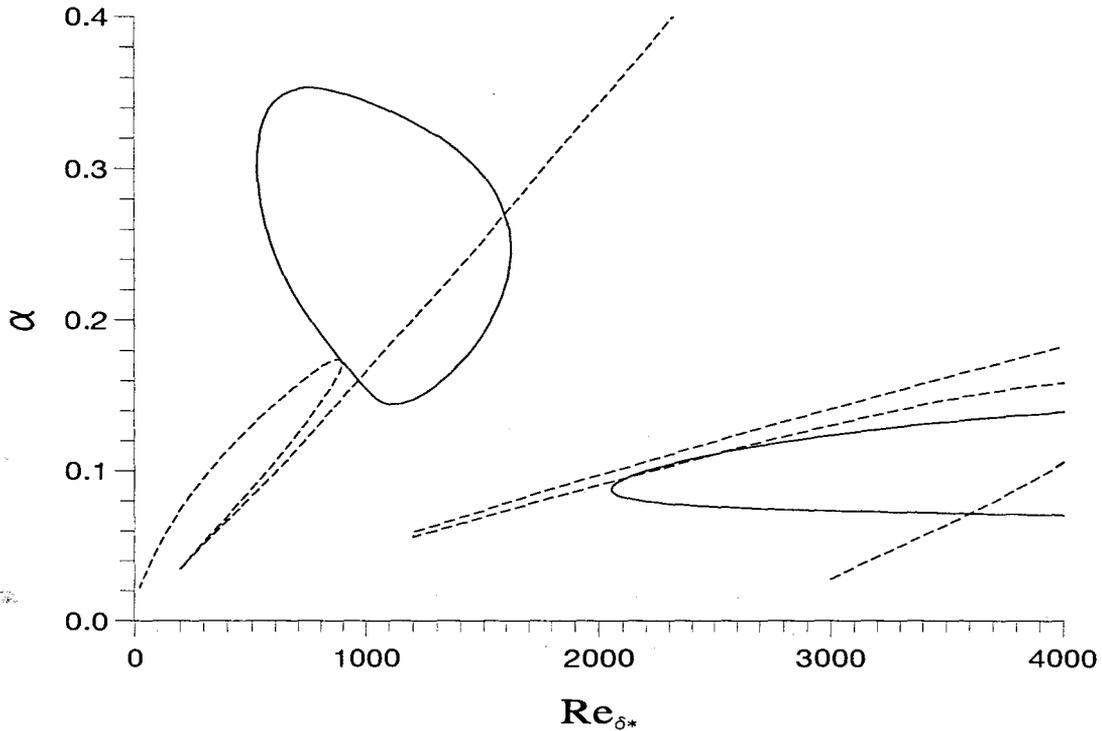


FIG. 2.3 - Courbes de stabilité neutre d'une paroi souple d'épaisseur 1mm : — TS et -- OS avec $M = 0.92$, $C_Y = 0.66$ et $U_R = 0.78$.

L'influence de la paroi souple sur les courbes neutres de l'instabilité de Tollmien-Schlichting des Figures 2.1 et 2.3 est alors clairement mise en évidence. Pour la première on observe une légère déformation de la boucle à partir de $Re = 3000$ qui s'accroît pour différencier la boucle principale en deux boucles plus petites dans la seconde figure. Ce phénomène est lié aux paramètres de la paroi avec dimension (1.15) qui dépendent du nombre de Reynolds Re dans l'hypothèse d'un écoulement localement parallèle, utilisée pour l'analyse de stabilité linéaire. Par exemple, κ augmente avec Re alors que B diminue avec Re^3 . Maintenant, comme l'ont montré Carpenter (1990) et d'autres, pour des parois suffisamment flexibles (par exemple en utilisant une petite épaisseur de plaque) les ondes de Tollmien-Schlichting peuvent être supprimées pour un certain domaine de valeurs de Re avant d'apparaître à nouveau pour des Re plus grands (ceci est dû à la croissance du coefficient de rigidité du ressort adimensionné, voir Figure 2.3).

Pour compléter notre analyse, une étude de l'influence de l'amortissement (dans la condition dynamique) sur le développement des instabilités est réalisée. La Figure 2.4 nous montre les zones d'instabilité amplifiée pour deux configurations avec amortissement

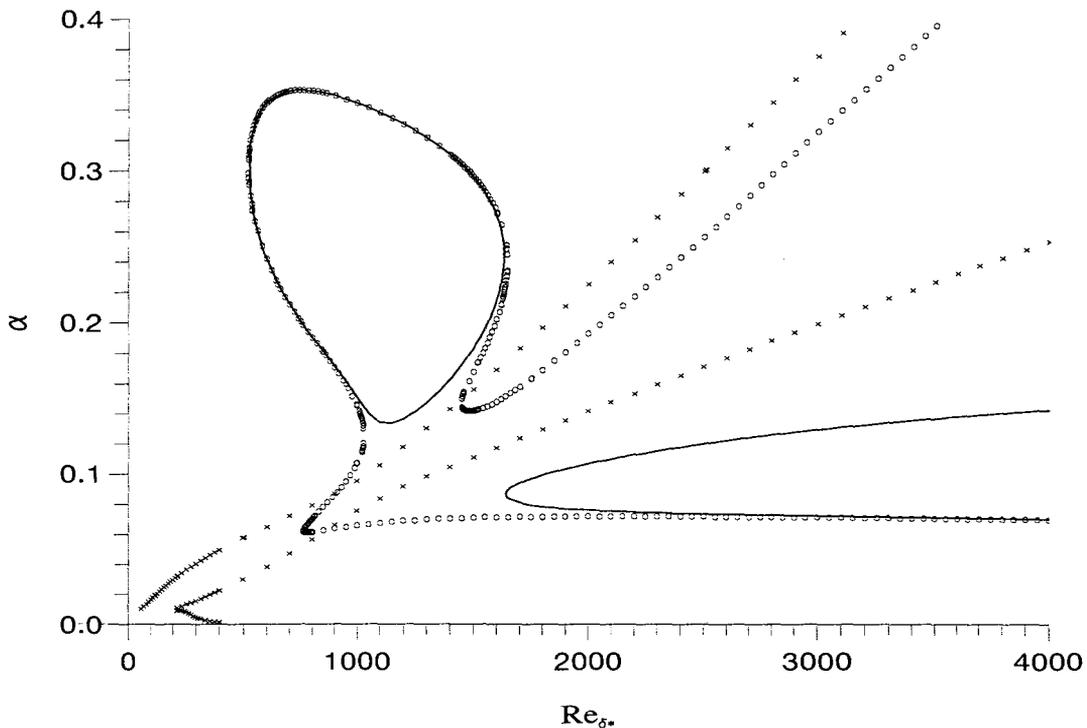


FIG. 2.4 - Effet de l'amortissement sur la stabilité neutre ; $d = 0.054$: — T.S., \times O.S. et $d=0.108$: \circ avec $M = 0.92$, $C_Y = 0.66$ et $U_R = 0.78$.

d , en continu $d = 0.054$ et en points $d = 0.108$ (respectivement $d^* = 1000 \text{ kg/m}^2 \text{ s}$ et $d^* = 2000 \text{ kg/m}^2 \text{ s}$ en grandeurs avec dimension). Pour $d = 0.054$, il est clair que l'amortissement a un effet stabilisant sur l'instabilité de surface (la zone amplifiée formée par les \times est fortement réduite) et que l'amortissement a un effet déstabilisant sur l'instabilité T.S. mais dans une moindre mesure (courbe en trait continu). Si l'on s'en tient à ce résultat, on peut alors chercher le coefficient d'amortissement "optimal" qui permettrait d'atténuer l'instabilité O.S. (onde de surface) et d'avoir une zone amplifiée T.S. la plus petite possible. Or, en calculant les points de stabilité neutre pour un amortissement d de 0.108, une nouvelle difficulté apparaît dans le calcul de la courbe neutre. Le phénomène semble causé par une interaction entre les modes T.S. et O.S. .

En effet, la courbe neutre (formée par des \circ) de la Figure 2.4 prend la forme des courbes de stabilité neutre visqueuse et de surface présentées sur la Figure 2.3. La vitesse de phase c_r de cette nouvelle instabilité varie dans le cas étudié entre 0.30 et 0.60 alors que pour les ondes de Tollmien-Schlichting, c_r est compris entre 0.30 et 0.40 et pour les ondes de surface, c_r est supérieur à 0.75. Cette nouvelle instabilité prend alors les caractéristiques à la fois des ondes visqueuses et des ondes de surface qui la forment. Sen et Arora (1988), qui observaient ce phénomène, ont qualifié ce mode de *mode transitionnel*. Dans toute la suite du document, ce terme sera utilisé pour caractériser cette instabilité.

Nous avons donc mis en évidence tous les éléments pouvant caractériser le couplage d'un écoulement de couche limite sur une paroi souple de type Kramer (plaque mince montée sur ressorts) à l'aide d'une analyse de stabilité linéaire, *i.e.* :

- une instabilité de couche limite (instabilité visqueuse appelée onde de Tollmien-Schlichting);
- une instabilité de structure (instabilité de paroi appelée onde de surface);
- un mode transitionnel (interaction T.S. et O.S.).

2.5.3 Comparaison entre les formulations cartésienne et non-cartésienne

A ce stade, on peut se poser la question des effets de courbure (que l'on néglige dans la formulation cartésienne) sur le développement des différentes instabilités et étudier l'influence de la courbure quand celle-ci devient importante (*i.e.* $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ "grand").

La prise en compte de la géométrie du problème dans les équations de Navier-Stokes linéarisées aboutit au système (2.2) à (2.4). Dans ce cas, les conditions cinématiques définies en (1.18) pour la perturbation de la vitesse donnent :

$$u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (2.28)$$

(u, v) étant la vitesse de perturbation, solution du système de Navier-Stokes linéarisé en coordonnées non-cartésiennes.

Pour illustrer l'influence du changement de variables, les résultats pour $Re_{\delta^*} = 2000$ sont présentés sur la Figure 2.5 et comparés aux solutions numériques de l'approche sans changement de variables pour l'instabilité de surface. Les données du fluide et de la paroi sont les suivantes : vitesse externe $U_{\infty}^* = 18m/s$, masse volumique $\rho^* = 1025kg/m^3$, viscosité cinématique $\nu^* = 1.37 \times 10^{-6}m^2/s$, épaisseur $b^* = 2mm$, masse volumique $\rho_p^* = 946kg/m^3$, module d'Young $E^* = 0.5 \times 10^6N/m^2$, nombre de poisson $\nu_p^* = 0.5$, rigidité du ressort $\kappa^* = 0.115 \times 10^9N/m^3$ et amortissement $d^* = 0$ ($\mathcal{M} = 0.92$, $C_Y = 0.66$ et $U_R = 0.78$). Un bon accord est trouvé entre les solutions numériques des formulations cartésienne et non-cartésienne sur la Figure 2.5. De légères différences dans les facteurs d'amplification des ondes de surface sont mises en évidence dans l'approche avec changement de variables. Le résultat le plus représentatif est la "disparition" des zones instables pour les ondes de surface avec des vitesses de phase supérieures à 1 (l'instabilité passe à un état amorti). Les Figures 2.5 et 2.6 mettent aussi en évidence une diminution du taux d'amplification des instabilités dans l'approche avec changement de variables.

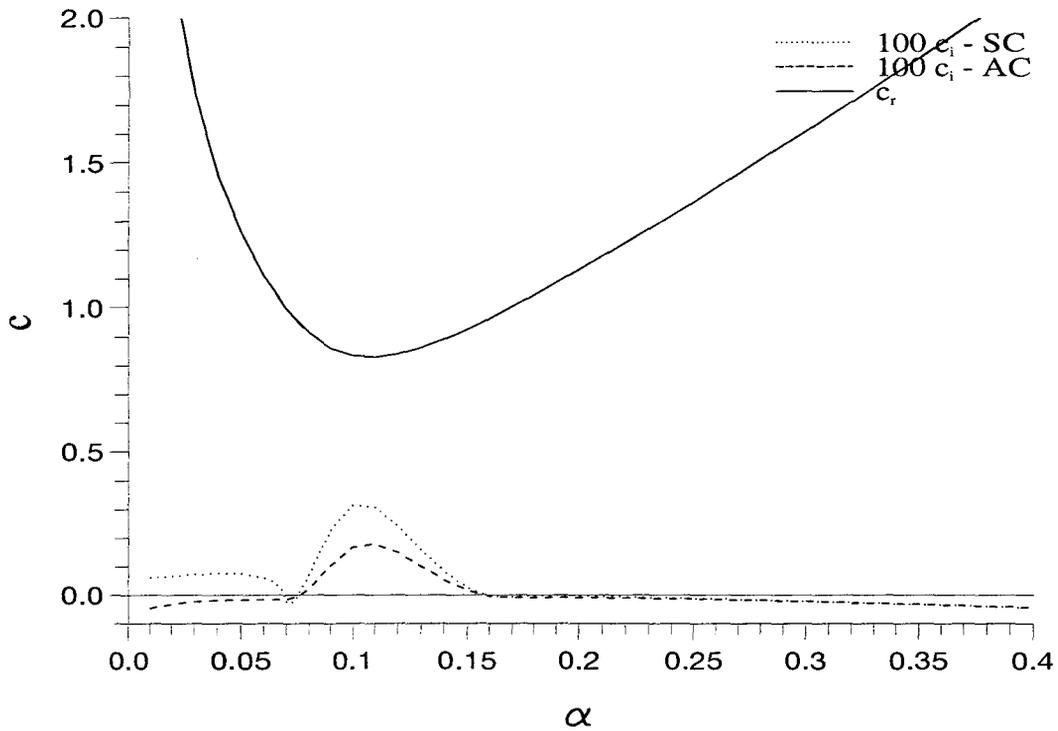


FIG. 2.5 - Variation de la vitesse d'onde complexe en fonction du nombre d'onde pour $Re_{\delta^*} = 2000$; \cdots $100 c_i$ en approche sans changement de variables et $- -$ $100 c_i$ en approche avec changement de variables.

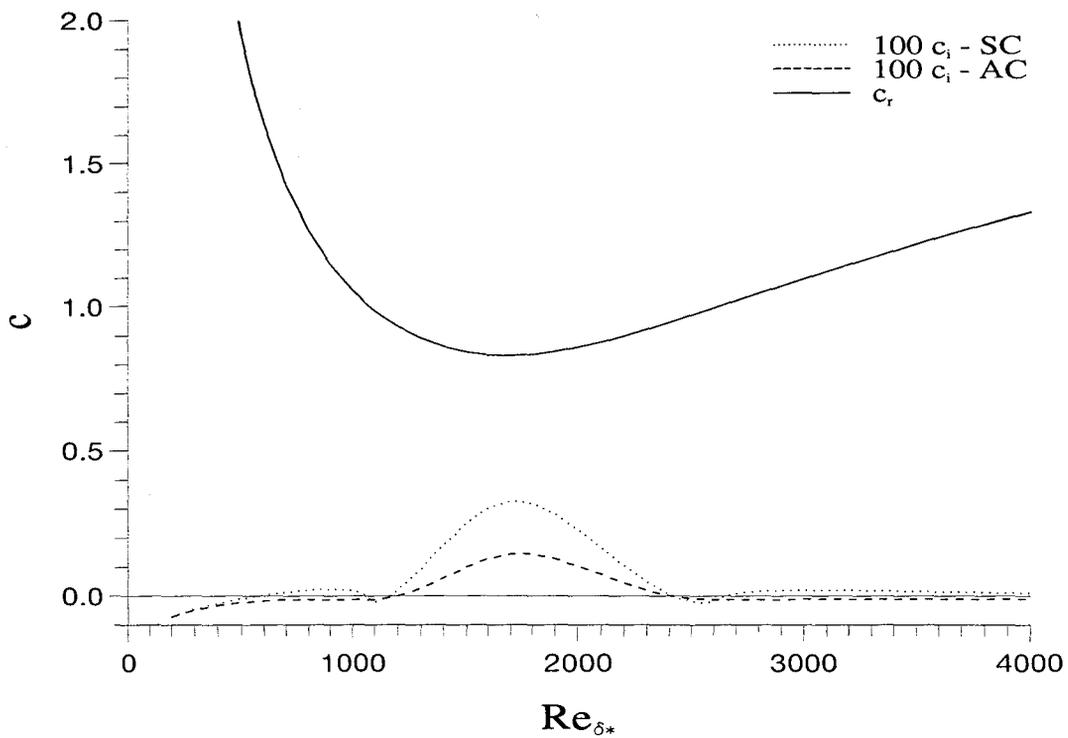


FIG. 2.6 - Variation de la vitesse d'onde complexe en fonction de Re_{δ^*} avec $\alpha = 0.09$ (même légende que précédemment).

Après avoir passé en revue dans la littérature la plupart des études sur le sujet (presque toujours réalisées en formulation cartésienne), un travail de Carpenter et Gajjar (1990) a attiré toute notre attention. Celui-ci s'appuyait sur une théorie asymptotique capable de calculer les taux d'amplification de perturbations bi- et tri-dimensionnelles d'une couche limite de Blasius en présence d'une paroi souple. Cette théorie permet d'avoir une meilleure prise en compte des effets de la paroi sur le développement des instabilités. Une comparaison avec les résultats de la théorie asymptotique présentés sur la Figure 9 de Carpenter et Gajjar (1990) (voir Annexe E) montre un très bon accord entre ses solutions et nos solutions numériques obtenues en utilisant l'approche avec changement de variables. En effet, l'approche sans changement de variables montrait une région instable principale dans un domaine $\alpha - Re$ encadré par des régions additionnelles d'instabilité de part et d'autre de la région principale alors que l'approche avec changement de variables ne confirme que l'existence de la région d'instabilité principale.

Pour évaluer l'influence de la paroi sur l'écoulement, les fonctions propres ont été calculées pour nous permettre d'obtenir une idée des profils de vitesse. Pour la représentation graphique, l'amplitude de la perturbation de vitesse normale est normalisée en imposant $\hat{v} = 1$ à la paroi. Sur les Figures 2.7 et 2.8, la quantité $(U - c_r)\hat{v}$ est tracée (pour ensuite faciliter la comparaison avec la théorie asymptotique et les calculs numériques de Carpenter et Gajjar) pour l'instabilité de surface dans les deux formulations. On constate alors que l'amplitude de la partie imaginaire des fonctions propres est sensiblement différente suivant la formulation utilisée. Au regard des solutions obtenues par Carpenter et Gajjar (1990) (voir Figures 10 et 11 de l'annexe E), nos solutions sont en très bon accord avec leurs résultats. Les prédictions de la théorie asymptotique et celles de notre approche avec changement de variables montrent donc de grande similitude aussi bien qualitativement que quantitativement.

Pour le cas de la Figure 2.7, *i.e.* $\alpha = 0.11$, le calcul en approche sans changement de variables donne $c = 0.828 + i0.00307$ (identique avec les résultats de Carpenter et Gajjar dans leur approche numérique), alors que pour l'approche avec changement de variables, on obtient $c = 0.829 + i0.00179$ ce qui illustre encore l'influence des effets non parallèles causés par le déplacement de la paroi sur le taux d'amplification c_i .

Pour les instabilités visqueuses dites de Tollmien-Schlichting, la Figure 2.9 montre la distribution de $(U - c_r)\hat{v}$ à travers la couche limite pour l'instabilité T.S. . Le graphe pour l'approche sans changement de variables est présenté sur la Figure 12 de Carpenter et Gajjar (1990) (voir Annexe E). On observe que pour les deux formulations cartésiennes et non-cartésiennes, comme dans le cas des instabilités de surface, la partie réelle de la fonction propre se superpose. Pour la partie imaginaire, la différence est moins importante

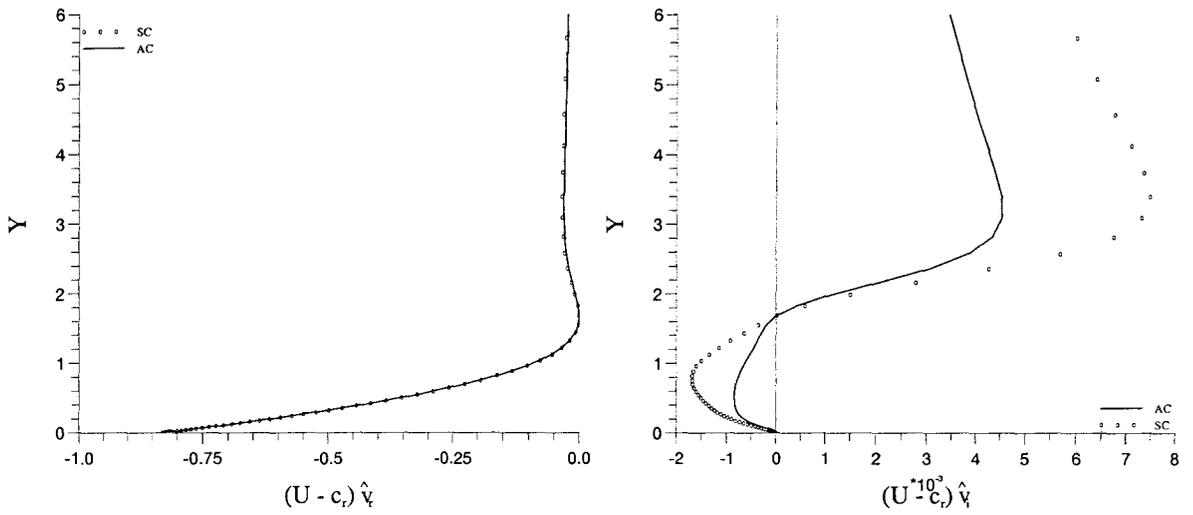


FIG. 2.7 - Variation de la quantité $(U - c_r) \hat{v}$ à travers la couche limite pour l'instabilité O.S. quand $c_r < 1$ et $\alpha = 0.11$. $c = 0.828 + 0.00307i$; SC approche sans changement de variables et AC approche avec changement de variables.

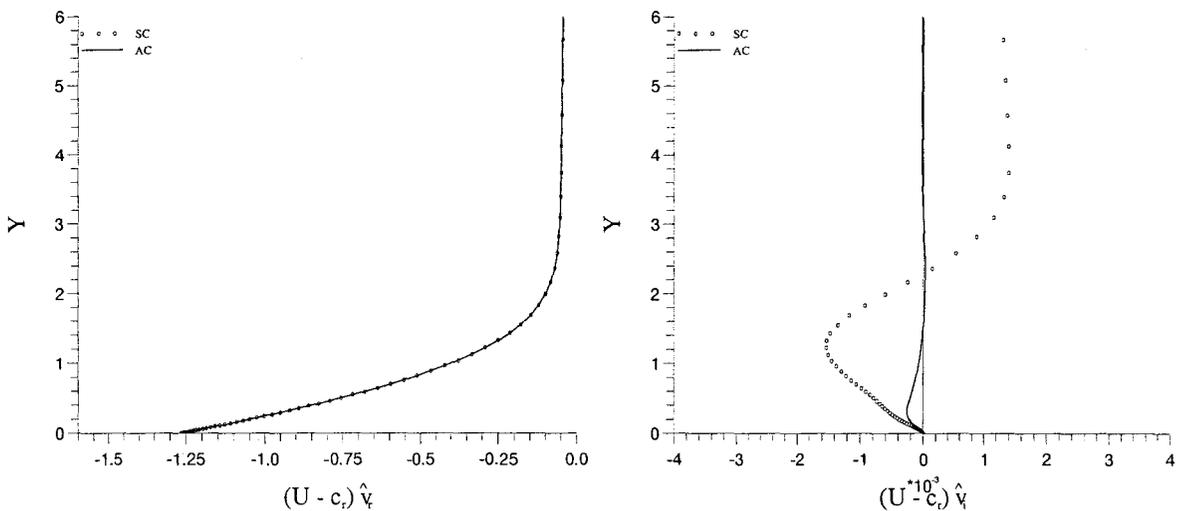


FIG. 2.8 - Variation de la quantité $(U - c_r) \hat{v}$ à travers la couche limite pour l'instabilité O.S. quand $c_r > 1$ et $\alpha = 0.05$. $c = 1.264 + 0.00074i$.

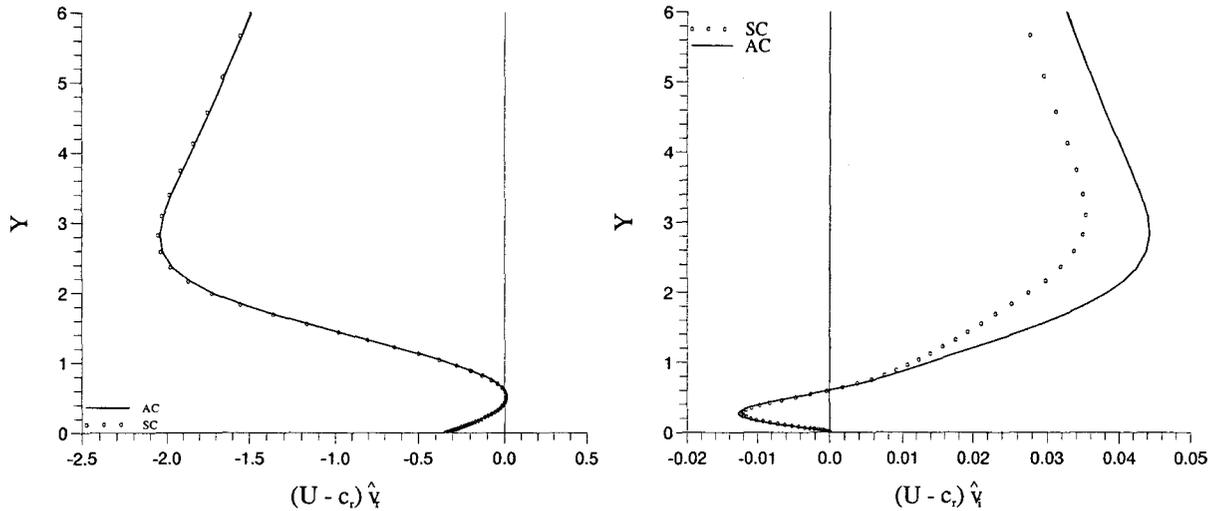


FIG. 2.9 - Variation de la quantité $(U - c_r)\hat{\psi}$ à travers la couche limite pour l'instabilité T.S. quand $\alpha = 0.11$. $c = 0.3415 + 0.007i$.

que dans les cas des ondes de surface. Elle n'est observée principalement que pour la partie supérieure du profil. Les vitesses d'onde complexe c de l'instabilité de Tollmien-Schlichting dans les deux formulations sont : pour l'approche sans changement de variables $c = 0.3415 + 0.007i$ et pour l'approche avec changement de variables $c = 0.343 + 0.0088i$. Une légère différence est alors constatée.

Pour quantifier l'influence de la prise en compte de la déformation de la paroi dans les équations de Navier-Stokes, on calcule le terme $\chi = \frac{|\eta|}{Ma_x|v(y)|}$ pour les trois cas présentés ci-avant. Pour l'instabilité de Tollmien-Schlichting, *i.e.* $c = 0.3415$, $\chi = 8.3$; pour l'instabilité de surface avec vitesse de phase inférieure à 1, *i.e.* $c = 0.828$, $\chi = 11$; pour l'instabilité de surface avec vitesse de phase supérieure à 1, *i.e.* $c = 1.264$, $\chi = 16$. Si l'on compare le terme χ avec les résultats correspondants, on observe que plus la valeur de χ est grande, plus l'influence des termes de courbure sur l'instabilité est importante (taux d'amplification et profil de vitesse). Il est alors clair que la paroi influe de manière non négligeable sur le développement des instabilités.

Après avoir montré l'influence du changement de variables de manière localisée dans le domaine (Re_δ^*, α) , on donne maintenant une vision plus globale de la situation en déterminant les courbes de stabilité neutre. La Figure 2.10 représente les points de stabilité neutre des ondes de Tollmien-Schlichting et des ondes de surface dans une approche avec changement de variables avec les grandeurs du fluide et de la paroi suivantes : vitesse externe $U_\infty^* = 18m/s$, masse volumique $\rho^* = 1025kg/m^3$, viscosité cinématique $\nu^* = 1.37 \times 10^{-6}m^2/s$, épaisseur $b^* = 2mm$, masse volumique $\rho_p^* = 946kg/m^3$, module d'Young $E^* = 0.5 \times 10^6 N/m^2$, nombre de poisson $\nu_p^* = 0.5$, rigidité du ressort $\kappa^* = 0.115 \times 10^9 N/m^3$ et amortissement $d^* = 0$ ($\mathcal{M} = 0.92$, $C_Y = 0.66$ et $U_R = 0.78$). Ce cas a été présenté dans

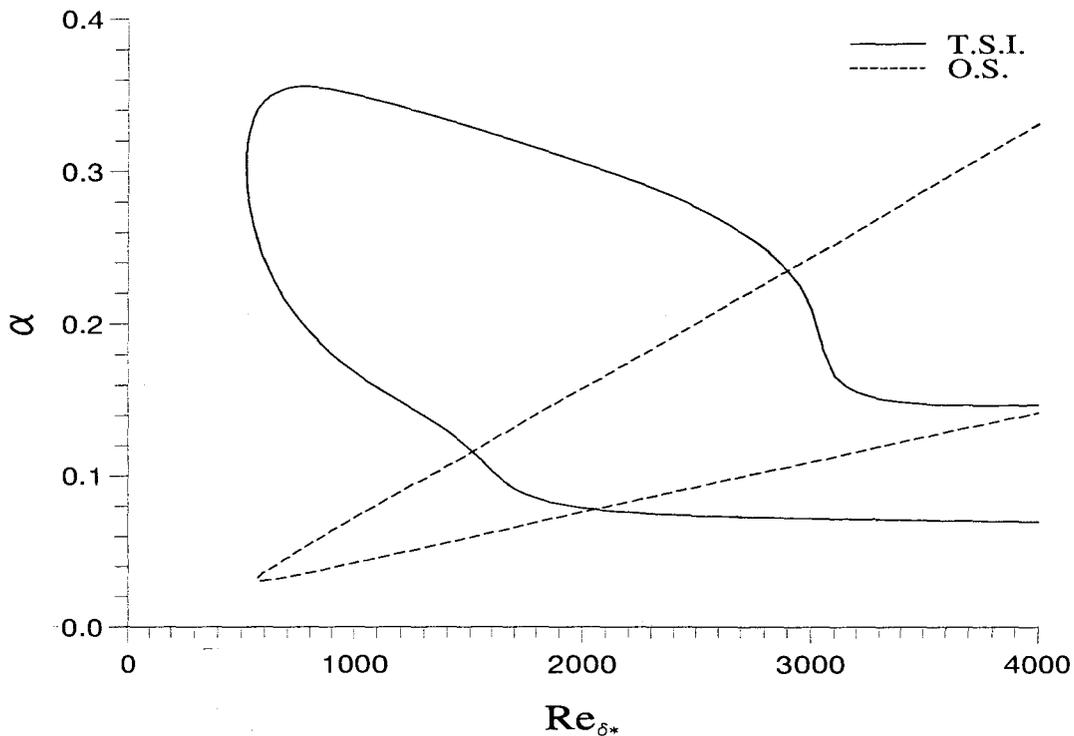


FIG. 2.10 - Courbes de stabilité neutre avec approche avec changement de variables avec $M = 0.92$, $C_Y = 0.66$ et $U_R = 0.78$.

le paragraphe 2.5.2 dans une approche sans changement de variables (cf. Figure 2.1). Les deux principales différences observées sont : une “disparition totale” des zones instables pour les ondes de surface ayant des vitesses de phase supérieures à 1 et une possibilité d’obtenir un nombre de Reynolds critique pour l’instabilité de surface. Ce système est donc stable vis à vis des petites perturbations jusqu’à un nombre de Reynolds critique de l’ordre de 520 pour les instabilités de Tollmien-Schlichting et jusqu’à un nombre de Reynolds critique de l’ordre de 570 pour les instabilités de surface. Par conséquent, le fait d’introduire la déformation de la paroi dans les équations de Navier-Stokes permet de rendre le phénomène d’instabilité de surface plus réaliste et donc de mener une étude de stabilité plus cohérente.

2.5.4 Rôle des instabilités tridimensionnelles

En stabilité linéaire, le problème de la couche limite sur plaque plane est reconnu comme étant dominé par les instabilités bidimensionnelles. C’est Squire (1933) qui montrait que pour une perturbation tridimensionnelle instable d’un écoulement parallèle correspond une perturbation bidimensionnelle instable à un nombre de Reynolds plus petit. C’est pourquoi, pour obtenir le nombre de Reynolds critique en utilisant des perturbations

périodiques, il suffit de considérer les perturbations bidimensionnelles uniquement.

Pour le problème de la couche limite de Blasius interagissant avec une paroi souple de type Kramer (*i.e.* $\theta = 0$), Rotenberry et Saffman (1990) ont montré que le théorème de Squire pouvait encore s'appliquer en considérant la viscosité dynamique μ^* et la longueur δ^* comme grandeurs de référence fixées. En effet, en observant attentivement les travaux de Rotenberry et Saffman, la transformation de Squire s'applique naturellement car le nombre de Reynolds apparaît toujours à la puissance 0 ou 2 dans l'équation dynamique. Mais, pour une couche limite, il est naturel d'étudier l'évolution de la perturbation le long de la paroi. C'est pourquoi, dans notre étude, les grandeurs de référence utilisées sont la vitesse U_∞^* et la masse volumique ρ^* . Or, pour ce type d'adimensionnement, le théorème de Squire ne s'applique plus pour l'équation dynamique (voir les coefficients 2.30). Cependant, ni la littérature, ni nos propres recherches ne mettent en évidence une amplification tridimensionnelle plus importante que l'amplification bidimensionnelle pour un même nombre de Reynolds (pour une paroi de type Kramer *i.e.* $\theta = 0$).

Pour la paroi de Grosskreutz, l'équation du mouvement de la paroi s'écrit :

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + d \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(B_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + 2B_{xz} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial z^2} + B_z \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} \right) \cos^2(\theta) - Tr \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \kappa \eta \\ = \left(-p + \frac{2}{Re} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos^2(\theta) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos(\theta) \sin(\theta), \end{aligned} \quad (2.29)$$

où les coefficients sont déterminés par :

$$\begin{aligned} m = \frac{b^* U_\infty^* \rho_P^*}{\mu^* Re}, \quad d = \frac{d^*}{\rho^* U_\infty^*}, \quad B_i = \frac{B_i^* U_\infty^* \rho^{*2}}{\mu^{*3} Re^3}, \quad Tr = \frac{E^* b^*}{\mu^* U_\infty^* Re}, \quad \kappa = \frac{\kappa^* \mu^* Re}{\rho^{*2} U_\infty^{*3}}, \\ \text{avec } Re = \frac{U_\infty^* \delta^*}{\nu^*} \text{ et } B_i^* = \frac{E_i^* b^{*3}}{12(1 - \nu_P^{*2})}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

où les constantes B_x , B_{xz} et B_z représentent les modules de flexion-torsion de la plaque dans les directions longitudinale, longitudinale - transversale et transversale. Ces coefficients sont introduits pour faire intervenir l'effet tridimensionnel de la paroi (le déplacement transversal étant considéré comme nul) et pour ajouter de nouvelles possibilités dans le comportement de la paroi : isotrope ($B_x = B_{xz} = B_z$) et anisotrope (B_x , B_{xz} et B_z tous différents), le cas $B_{xz} = B_z = 0$ étant le cas orthotrope.

Des études (par exemple, Joslin *et al.*, 1991) ont mis en évidence l'apparition de perturbations tridimensionnelles plus instables que la perturbation bidimensionnelle. Ces études étaient réalisées pour des perturbations périodiques évoluant dans une couche limite de Blasius le long d'une paroi souple de type Grosskreutz. Dans ce paragraphe, nous proposons d'illustrer brièvement ce phénomène. De nouveau, nous supposons que l'écoulement

de couche limite laminaire est représenté par le profil de Blasius. Une perturbation tridimensionnelle sous forme de modes normaux est utilisée pour définir les fluctuations de la vitesse, de la pression et de la déformation de la paroi avec :

$$\{\vec{v}, p, \eta\}(x, y, z, t) = \left\{ \vec{v}(y), \hat{p}(y), \hat{\eta} \right\} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (2.31)$$

où \vec{v} , \hat{p} et $\hat{\eta}$ sont des fonctions propres complexe, α et β sont des nombres d'onde réels et ω est une fréquence complexe (une troisième coordonnée transversale z a été introduite ainsi qu'une troisième composante du champ de vitesses *i.e.* $\vec{v} = (u, v, w)$). Le système linéaire fait apparaître une troisième équation de quantité de mouvement.

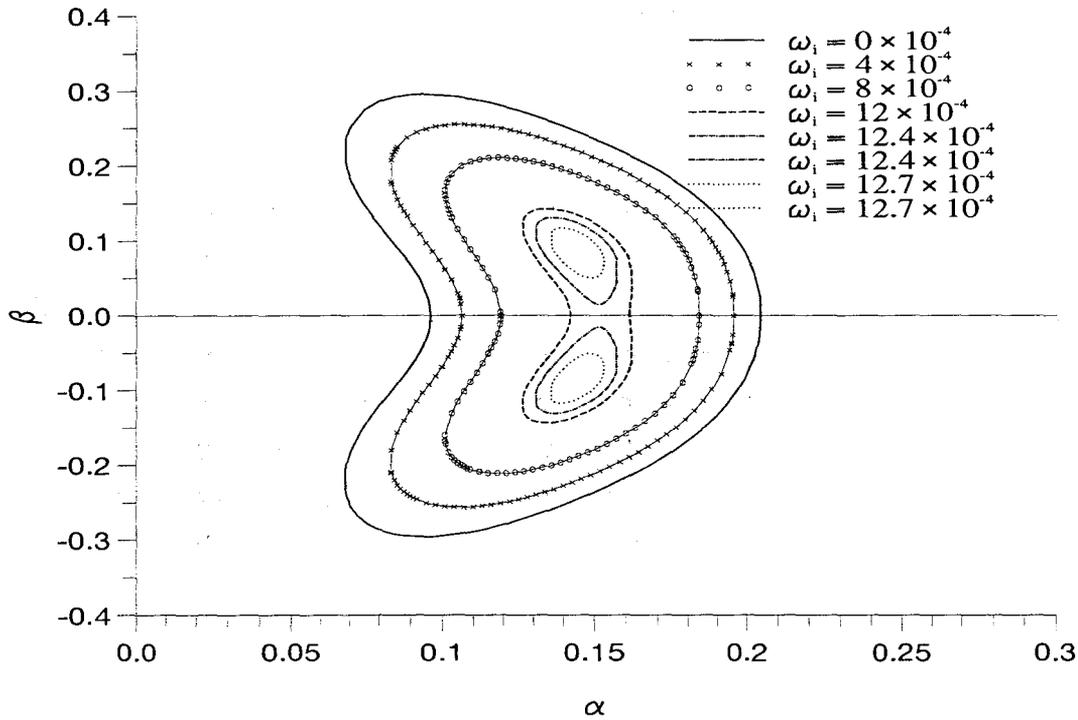


FIG. 2.11 - Courbes d'iso-amplitudes ω_i pour $b = 0.111\text{mm}$ avec $\Lambda^M = 0.99$, $\Lambda^F = 7.27$ et $\Lambda^U/\delta^* = 0.89$.

Soient les grandeurs du fluide et le jeu de paramètres de paroi suivants : vitesse externe $U_\infty^* = 20\text{m/s}$, masse volumique $\rho^* = 1000\text{kg/m}^3$, viscosité cinématique $\nu^* = 1 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$, épaisseur $b^* = 0.111\text{mm}$, masse volumique $\rho_p^* = 1000\text{kg/m}^3$, module d'Young $E^* = 0.509 \times 10^6\text{N/m}^2$, nombre de poisson $\nu_p^* = 0.5$, rigidité du ressort $\kappa^* = 0.059 \times 10^9\text{N/m}^3$, angle d'inclinaison $\theta = 60\text{deg}$ et amortissement $d^* = 0$; une étude temporelle est réalisée à un nombre de Reynolds $Re_{\delta^*} = 2240$ en considérant la plaque comme isotrope.

La Figure 2.11 résume l'étude du cas cité ci-dessus en formulation cartésienne pour différentes amplitudes temporelles ω_i des instabilités de Tollmien-Schlichting. On observe

alors trois caractéristiques des courbes d'amplification : la forme (de coeur), la symétrie par rapport à l'axe $\beta = 0$ et un taux d'amplification maximale tridimensionnelle. En utilisant une formulation $\alpha = \gamma \cos(\varphi)$ et $\beta = \gamma \sin(\varphi)$, l'amplification maximale fait un angle $\varphi \approx 31^\circ$ avec la direction de l'écoulement. Par conséquent, l'approche 2D n'est plus pertinente pour donner des informations sur les taux d'accroissement maximums des instabilités et, dans ce cas, il faut prêter une attention particulière au phénomène de passage de l'amplification maximale bidimensionnelle à celle tridimensionnelle.

2.6 Résumé

Un modèle théorique de surface déformable de type Kramer ($\theta = 0$) a été étudié autant pour sa facilité de mise en œuvre que pour la possibilité de conjuguer l'influence des principaux mécanismes d'une paroi. D'abord, les modes instables apparaissant dans le système de couche limite de Blasius couplé à une paroi souple ont été retrouvés : l'instabilité visqueuse, dite de Tollmien-Schlichting, et l'instabilité générée par le mouvement du fluide sur la plaque qui est nommée instabilité de surface.

Ensuite, on a mis en évidence l'influence de la prise en compte de la déformation de la paroi sur le développement des instabilités dans les équations de Navier-Stokes. Le choix du traitement de l'interaction de la couche limite de Blasius avec la paroi souple n'est alors pas sans influence (surtout pour les ondes de surface).

Enfin, ce chapitre a considéré la croissance des perturbations tridimensionnelles sur un modèle de paroi souple de type Grosskreutz en identifiant des taux de croissance des ondes de Tollmien-Schlichting plus importants en théorie tridimensionnelle qu'en théorie bidimensionnelle.

Cependant, toutes ces études sont restrictives car elles ne donnent que des informations limitées par les hypothèses faites : écoulement localement parallèle, système linéaire et paroi considérée comme infinie. Différentes études montrent l'influence que peut avoir un écoulement non parallèle (Yeo *et al.*, 1994) ou les non-linéarités (Ehrenstein et Rossi, 1996) sur les solutions issues du couplage fluide-structure. C'est pourquoi, nous proposons de mener une étude numérique s'appuyant sur une modélisation de ce système fluide / structure aussi proche que possible d'une réalité expérimentale. Cette modélisation, dans le cas des écoulements de couche limite, ne cherche pas seulement à tenir compte des non-linéarités présentes lors du processus de transition, mais aussi des effets non parallèles dus, à la fois, à l'épaississement de la couche limite, et à la présence de la déformation de la paroi (qui peut être de longueur finie). Le chapitre suivant présente cette approche.

Chapitre 3

Simulation spatiale d'instabilités : méthodes numériques

3.1 Introduction

Une méthode numérique est développée afin de résoudre les équations de Navier-Stokes en géométrie complexe et évolutive décrite par la déformation de la paroi, la géométrie étant une inconnue du problème. L'outil de simulation numérique permet d'étudier le développement de perturbations dans une couche limite le long d'une paroi souple en prenant pleinement en compte des effets non parallèles dus à l'accroissement de la couche limite et au mouvement de la paroi, ainsi que les interactions non linéaires. La complexité du système étudié demande alors d'utiliser différentes techniques numériques qui doivent permettre de déterminer simultanément le champ de vitesses de l'écoulement et la déformée de la paroi pour des instabilités se propageant le long de la paroi souple.

3.2 La méthode de résolution numérique

3.2.1 Conditions à l'interface

Le modèle de paroi est celui d'une plaque élastique montée sur ressorts ou une membrane sous tension, où seuls les déplacements verticaux sont autorisés, qui permet de satisfaire nos critères présentés ci-avant. Ce modèle correspond à celui utilisé par d'autres auteurs et il rend compte de toutes les sources d'instabilité qui apparaissent lorsque le fluide interagit avec une structure souple. La déformation verticale $\eta(x, t)$ de la paroi en

formulation non-cartésienne est solution de l'équation dynamique :

$$m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + d \frac{\partial \eta}{\partial t} + B \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - Te \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \kappa \eta = [-p + \sigma](x, 0). \quad (3.1)$$

Ce modèle est celui décrit par l'équation (1.14) avec $\theta = 0$, avec un terme supplémentaire décrivant la tension dans la plaque. Dans (3.1), p est la perturbation de pression du fluide, σ est la composante normale du tenseur des contraintes visqueuses du fluide et Te représente la tension (où $Te = 0$ pour la plaque élastique montée sur ressorts), rappelons l'expression du tenseur des contraintes visqueuses à l'interface :

$$\sigma = \frac{2}{Re} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_1^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_1 n_2 + \frac{\partial v}{\partial y} n_2^2 \right]. \quad (3.2)$$

La perturbation de pression et la composante normale du tenseur des contraintes visqueuses ont été adimensionnées par $\rho^* U_\infty^{*2}$, ρ^* étant la masse volumique du fluide. Dans l'équation (3.2) (u, v) représente respectivement les composantes longitudinale et normale de la perturbation de la vitesse de l'écoulement et :

$$\vec{n} = (n_1, n_2) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2}} \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x}, 1 \right), \quad (3.3)$$

le vecteur unité normal à la paroi. Les paramètres adimensionnés dans (3.1) sont reliés aux caractéristiques de la paroi par

$$m = \frac{m^*}{\delta_a^* \rho^*}, \quad d = \frac{d^*}{U_\infty^* \rho^*}, \quad B = \frac{B^*}{\delta_a^{*3} \rho^* U_\infty^{*2}}, \quad Te = \frac{T^*}{\delta_a^* \rho^* U_\infty^{*2}}, \quad \kappa = \frac{\kappa^* \delta_a^*}{\rho^* U_\infty^{*2}}, \quad (3.4)$$

où m^*, d^*, B^*, T^* et κ^* sont respectivement la masse par élément de surface, l'amortissement, le module de flexion/torsion, la tension et la raideur du ressort. On remarquera que pour la simulation spatiale, les coefficients de la paroi sont exprimés en fonction de δ_a^* l'épaisseur de déplacement à l'entrée du domaine (et non plus le nombre de Reynolds).

3.2.2 Intégration en temps

Pour l'intégration en temps du système de Navier-Stokes donné par (1.27) et (1.28), un schéma d'Euler retardé du second ordre a été utilisé, la partie cartésienne du Laplacien comme le gradient de pression sont pris implicitement. Un schéma Adams/Bashforth du second ordre est utilisé pour les termes restants (les termes d'advection, les termes convectifs et ceux avec η). La version discrète de (1.27) et (1.28) du chapitre 1 s'écrit alors

$$(\Delta - 3\tau) \vec{u}^{n+1} = \vec{\nabla} q^{n+1} + \phi f^{n,n-1}, \quad (3.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{n+1} = \phi h^{n,n-1}. \quad (3.6)$$

Ici :

$$f^{n,n-1} = -4\tau\bar{u}^n + \tau\bar{u}^{n-1} + Re \left[C(\bar{u}) + N(\bar{u}) - S(\eta, \bar{u}, \bar{U}, p) \right]^{n,n-1}, \quad (3.7)$$

et :

$$h^{n,n-1} = - \left[\vec{G}_\eta \cdot \bar{U} + \vec{G}_\eta \cdot \bar{u} \right]^{n,n-1}. \quad (3.8)$$

L'expression des opérateurs différentiels est rappelée ci-dessous :

$$\vec{G}_\eta = \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x}, 0 \right), \quad (3.9)$$

$$L_\eta = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} - 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (3.10)$$

$$T_\eta = -\frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.11)$$

L'exposant $n, n - 1$ désigne une évaluation explicite du type Adams/Bashforth avec $[\cdot]^{n,n-1} = 2[\cdot]^n - [\cdot]^{n-1}$. La grandeur τ est définie telle que $\tau = Re/2\Delta t$ avec Δt le pas de temps et q représente le produit Rep . Afin d'éviter des réflexions à la sortie du domaine, une technique de domaine tampon est utilisée [Street et Macaraeg (1989)]. Dans ce but, une zone est insérée entre le domaine physique et la limite en aval de l'étude de telle manière que la fonction d'atténuation ϕ , appliquée aux termes convectifs et à ceux dépendant de η , soit égale à 1 dans le domaine physique d'intérêt et décroisse rapidement vers zéro dans le domaine tampon (la fonction sera discutée plus tard). La fonction d'atténuation ϕ est la même que celle employée par Joslin et al (1992,1993). Ainsi, le système (3.5) et (3.6) est progressivement transformé en un problème de type Stokes linéaire, et l'instabilité est réduite progressivement jusqu'à la sortie du domaine d'étude.

La version discrète de l'équation pour la pression (1.30) du chapitre 1 devient (avec $q = Rep$)

$$\Delta p^{n+1} = \phi g^{n,n-1} \quad (3.12)$$

avec

$$g^{n,n-1} = -Re \left[L_\eta p + J(\bar{u}_t) - J(\bar{U}) \right]^{n,n-1}. \quad (3.13)$$

L'équation (3.12) est l'équation de Poisson pour la perturbation de pression, ayant supposé que le champ de vitesses total est incompressible, *i.e.* $\vec{\nabla} \cdot \bar{u}_t = 0$. Réciproquement, supposons que durant l'avancement en temps $\vec{\nabla} \cdot \bar{u}_t = 0$ est vérifiée pour les pas de temps antérieurs $n, n - 1$. Appliquant l'opérateur de divergence aux équations de quantité de mouvement, en tenant compte de (3.12), on obtient une équation de Helmholtz homogène (au second ordre en temps près) pour la quantité $\left(\vec{\nabla} \cdot \bar{u}_t \right)^{n+1}$. Par conséquent, il suffit

d'annuler le terme $(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_t)^{n+1}$ sur le bord Γ , et la condition :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{|\Gamma}^{n+1} = -\phi \left[\vec{G}_\eta \cdot \vec{U} + \vec{G}_\eta \cdot \vec{u} \right]_{|\Gamma}^{n,n-1}, \quad (3.14)$$

permet ainsi d'assurer l'incompressibilité du champ de vitesses, à l'ordre deux en temps. En résumé, pour une condition initiale incompressible, notre algorithme donne lieu au cours de l'intégration en temps à un champ de vitesses incompressible, compatible avec le schéma en temps.

Les conditions cinématiques (1.31) et l'équation dynamique (3.1) sont discrétisées en utilisant un schéma retardé du second ordre en temps (le terme de pression est pris implicitement, et le schéma Adams/Bashforth est utilisé pour la contrainte normale visqueuse) :

$$u^{n+1}(x, 0) = 0, \quad v^{n+1}(x, 0) = \frac{3\eta^{n+1} - 4\eta^n + \eta^{n-1}}{2\Delta t}, \quad (3.15)$$

$$m \frac{2\eta^{n+1} - 5\eta^n + 4\eta^{n-1} - \eta^{n-2}}{\Delta t^2} + d \frac{3\eta^{n+1} - 4\eta^n + \eta^{n-1}}{2\Delta t} + B \frac{\partial^4 \eta^{n+1}}{\partial x^4} - T e \frac{\partial^2 \eta^{n+1}}{\partial x^2} + \kappa \eta^{n+1} = \phi \left\{ -p^{n+1} + \sigma^{n,n-1} \right\} (x, 0). \quad (3.16)$$

Pour l'équation dynamique, les termes de dérivée de η suivant x sont discrétisés à l'aide d'un schéma aux différences finies centrées d'ordre 2, impliquant la résolution d'une matrice pentadiagonale. Le second membre de (3.16) est multiplié par la fonction d'atténuation ϕ , ainsi le déplacement de paroi η tend vers zéro dans le domaine tampon. L'équation (3.16) sera complète lorsque les conditions aux bords (de part et autre de la paroi souple) pour η auront été spécifiées.

L'algorithme pour résoudre le système d'équations (3.5), (3.6), (3.12) et (3.14), couplé à la paroi par (3.15) et (3.16) repose sur la technique de la matrice d'influence (Kleiser, 1980, Ehrenstein et Peyret, 1989), laquelle détermine une condition de Dirichlet pour la perturbation de pression p équivalente à $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_t = 0$ sur le bord Γ .

3.2.3 Discrétisation spatiale et algorithme

Pour des études numériques d'instabilités hydrodynamiques et de transition dans les fluides, il s'avère en général nécessaire d'utiliser des méthodes de haute précision, comme des méthodes spectrales ou des méthodes de différences finies d'ordres élevés. Dans ce paragraphe, les techniques numériques utilisées pour la simulation spatiale sont abordées : (1) discrétisation dans les directions longitudinale et normale ; (2) méthode de décomposition aux valeurs propres et méthode de la matrice d'influence, utilisées pour déterminer la pression ; (3) technique du domaine tampon, utilisé pour prévenir des réflexions d'ondes

à la sortie; et (4) conditions d'entrée, permettant d'observer l'évolution des ondes dans le système couplé fluide-structure.

3.2.3.1 Discrétisation spatiale

Discrétisation dans la direction longitudinale

Dans la direction longitudinale x , un schéma aux différences finies centrées d'ordre quatre pour l'équation de pression et les équations du mouvement est utilisé sur un domaine de calcul de N_x points discrets. Aux noeuds limites et près de la limite, des différences finies décentrées du quatrième ordre sont utilisées. Dans la présente étude, un maillage longitudinal uniforme est considéré.

Pour les approximations en différences finies centrées, décentrées en amont ou en aval, la fonction étudiée est exprimée en séries de Taylor :

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x f'_i + \frac{\Delta x^2}{2} f''_i + \dots + \frac{\Delta x^m}{m!} f_i^m + O(\Delta x^{m+1}), \quad (3.17)$$

où f_i est la fonction évaluée au point i , Δx est le pas d'espace uniforme. En exprimant les noeuds voisins de i à l'aide de séries similaires et en combinant avec l'équation (3.17), les approximations en différences centrées du quatrième ordre peuvent être trouvées pour les dérivées premières et secondes f'_i et f''_i . Ces approximations sont utilisées pour les points intérieurs (*i.e.*, les points pour lesquels la dérivée ne s'étend pas jusqu'aux points limites). Pour les noeuds limites et près de la limite, des différences décentrées en amont et en aval du quatrième ordre formées de manière similaire sont utilisées. Afin d'éviter des oscillations, les dérivées premières seront discrétisées par des différences finies centrées d'ordre huit à l'intérieur du domaine (aux bords, le schéma décentré d'ordre quatre est conservé), conformément aux recommandations de Rist et Fasel (1995) pour des simulations de la transition sur paroi plane. Une forme explicite de ces relations est fournie dans l'appendice *Différences finies*.

Discrétisation dans la direction normale

Dans la direction normale à la paroi y , les polynômes de Chebyshev sont utilisés pour approximer la perturbation aux points de collocation Gauss-Lobatto. Les polynômes de Chebyshev sont utilisés car, comme Gottlieb et Orszag (1977) l'ont montré, ils fournissent une bonne résolution dans les régions de hauts gradients (notamment près des bords). Les propriétés des polynômes de Chebyshev avec des grilles de collocation sont données dans Gottlieb, Hussaini, et Orszag (1984). Une discussion détaillée des propriétés des méthodes spectrales et leurs applications sont fournies par Canuto, Hussaini, Quarteroni, et Zang (1987). Dans ce document, seule une brève description des identités nécessaires est donnée.

Les points de Gauss-Lobatto pour les polynômes de Chebyshev sont :

$$\xi_j = \cos \left[\frac{j\pi}{N_y} \right], \quad j = 0 \text{ à } N_y, \quad (3.18)$$

où $N_y + 1$ est le nombre de points de collocation et N_y le degré le plus élevé des polynômes de Chebyshev. Les polynômes de Chebyshev sont définis sur l'intervalle $[-1, 1]$ et sont donnés par :

$$T_n(\xi) = \cos(n \cos^{-1} \xi), \quad (3.19)$$

où n est l'ordre du polynôme de Chebyshev T_n . Les dérivées aux points de collocation peuvent être représentées par :

$$\frac{df}{d\xi}(\xi_i) = \sum_{j=0}^{N_y} \tilde{\mathbf{D}}_{i,j} f(\xi_j), \quad (3.20)$$

où les indices répétés indiquent une sommation. La matrice dérivée $\tilde{\mathbf{D}}$ est donnée par :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}_{i,j} &= \frac{c_i}{c_j} \frac{(-1)^{i+j}}{\xi_i - \xi_j} & (i \neq j; i, j = 0, 1, \dots, N_y) \\ \tilde{\mathbf{D}}_{j,j} &= -\frac{\xi_j}{2(1-\xi_j^2)} & (j = 1, 2, \dots, N_y - 1) \\ \tilde{\mathbf{D}}_{0,0} &= -\frac{2N_y^2+1}{6} = -\tilde{\mathbf{D}}_{N_y, N_y} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

où c_i et c_j valent 1 pour $i, j = 1, 2, \dots, N_y - 1$ et $c_0 = c_{N_y} = 2$. Les dérivées de plus haut ordre sont simplement des puissances multiples de $\tilde{\mathbf{D}}$, telles que :

$$\tilde{\mathbf{D}}_p = \tilde{\mathbf{D}}^p, \quad (3.22)$$

où p est l'ordre de la dérivée.

Puisque l'équation de la fonction d'interpolation spectrale (3.19) est définie sur $[-1, 1]$ et que le problème physique d'intérêt est un domaine semi-infini $[0, \infty]$, une transformation algébrique est utilisée. Les études des méthodes spectrales et des transformations de maillage de régions non bornées ont été menées par Boyd (1989) et Grosch et Orszag (1977), ceux-ci préconisant entre autres une transformation algébrique transformant le domaine semi-infini :

$$y = L \frac{(1 + \xi)}{(1 - \xi)}. \quad (3.23)$$

Cette transformation étant singulière pour $\xi \rightarrow 1$, au lieu de (3.23), nous avons utilisé une transformation algébrique proposée par Joslin *et al* (1992) :

$$y = \frac{y_{max} L (1 + \xi)}{2L + y_{max} (1 - \xi)}, \quad (3.24)$$

donc :

$$\xi = \frac{(2L + y_{max})y - y_{max}L}{y_{max}(L + y)}, \quad (3.25)$$

où $y \in [0, y_{max}]$ et $\xi \in [-1, 1]$, y_{max} est la distance normale à la paroi localisant la limite à l'infini dans le domaine tronqué, et L contrôle l'étirement de la grille dans la direction normale à la paroi. En évitant la singularité pour $\xi \rightarrow 1$, cette transformation algébrique permettait notamment la résolution de l'équation de Helmholtz par décomposition aux valeurs propres. Suite à la transformation, les dérivées normales dans les équations (3.21) et (3.22) sont modifiées de la manière suivante :

$$\mathbf{D} = m\tilde{\mathbf{D}} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}^2 = m^2\tilde{\mathbf{D}}^2 + mm'\tilde{\mathbf{D}}, \quad (3.26)$$

où la métrique est définie par $m = d\xi/dy$ et $m' = dm/d\xi$.

3.2.3.2 Décomposition en valeurs propres

Pour l'inversion des équations de Helmholtz et de Poisson discrètes, une méthode de décomposition en valeurs propres est employée. A cette fin, l'opérateur dérivée seconde en y discrétisé est diagonalisé et le problème est réduit à la résolution d'une série de problèmes de type Helmholtz monodimensionnels en x , ces derniers pouvant être résolus de manière efficace en adaptant l'algorithme de résolution (de type LU) à la structure pentadiagonale des matrices. La description de la méthode est présentée ci-dessous.

L'équation de Helmholtz se présente sous la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \tau u = f, \quad (3.27)$$

qui, sous sa forme discrétisée, donne :

$$\Delta \mathbf{U} - \tau \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.28)$$

où τ représente le coefficient constant de l'équation (3.5). Le terme \mathbf{F} représente le membre de droite de l'équation (3.5), et \mathbf{U} correspond à la matrice solution :

$$\mathbf{U}_{j,i} = [u(y_j, x_i)], \quad 1 \leq i \leq N \text{ et } 1 \leq j \leq M. \quad (3.29)$$

Discrétisées en y et x , les équations d'Helmholtz deviennent :

$$\mathbf{D}^2 \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{X}^T - \tau^2 \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (3.30)$$

où \mathbf{D}^2 est l'opérateur de collocation-Chebyshev dans l'équation (3.26) modifié afin d'inclure les conditions limites, et \mathbf{X}^T est la transposée de l'opérateur différences finies centrées

dans la direction longitudinale, qui pour la présente étude est précis à l'ordre quatre et mène à une matrice pentadiagonale. La matrice \mathbf{D}^2 peut être décomposée en :

$$\mathbf{D}^2 = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}, \quad (3.31)$$

où $\mathbf{\Lambda}$ est une matrice diagonale de valeurs propres et \mathbf{Q} est la matrice correspondante de vecteurs propres de \mathbf{D}^2 . Deux nouvelles matrices sont introduites pour définir les produits :

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{U}, \quad \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{F}. \quad (3.32)$$

Substituant les équations (3.31) et (3.32) dans (3.30), on obtient :

$$\mathbf{\Lambda}\hat{\mathbf{U}} + \hat{\mathbf{U}}\mathbf{X}^T - \tau\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{F}}. \quad (3.33)$$

On note, pour $j = 1$ à M ,

$$\hat{U}_j = (\hat{u}_{j,1}, \dots, \hat{u}_{j,N}), \quad (3.34)$$

$$\hat{F}_j = (\hat{f}_{j,1}, \dots, \hat{f}_{j,N}), \quad (3.35)$$

avec $\hat{u}_{j,i}$ et $\hat{f}_{j,i}$ les composantes de $\hat{\mathbf{U}}$ et $\hat{\mathbf{F}}$. Donc, pour $j = 1$ à M , il faut résoudre :

$$[\mathbf{X} + (\mathbf{\Lambda}_j - \tau)]\hat{U}_j^T = \hat{F}_j^T. \quad (3.36)$$

L'équation (3.36) est utilisée pour déterminer $\hat{\mathbf{U}}$ et ensuite \mathbf{U} par (3.32). Par ailleurs, l'opérateur $[\mathbf{X} + (\mathbf{\Lambda}_j - \tau)]$ et la matrice \mathbf{Q} dépendant uniquement du maillage, l'ensemble n'est donc calculé qu'une seule fois avant le démarrage de l'itération en temps.

3.2.3.3 Méthode de la matrice d'influence

Un soin particulier au calcul de la pression doit être apporté car celle-ci est l'élément clef du couplage fluide-structure. Dans la résolution numérique, à chaque pas de temps, le système (3.5) - (3.16) doit être résolu. Le but est de trouver une condition à la limite de Dirichlet pour la pression équivalente à l'équation d'incompressibilité (3.14). Pour ce faire, on applique la procédure suivante (la technique est analogue à celle utilisée par Ehrenstein et Peyret (1989) pour une formulation vorticité - fonction de courant des équations de Navier-Stokes). Le système est formellement écrit sous la forme :

$$(\Delta - 3\sigma)\bar{u}^{n+1} = -\vec{\nabla}q^{n+1} + \bar{f}^{n,n-1}, \quad (3.37)$$

$$\Delta q^{n+1} = g^{n,n-1}, \quad (3.38)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{u}^{n+1} = h^{n,n-1} \text{ sur la limite } \Gamma, \quad (3.39)$$

$$u^{n+1} = 0, v^{n+1} = \alpha\eta^{n+1} + \eta^{n,n-1} \text{ en } y = 0, \quad (3.40)$$

$$L\eta^{n+1} = \eta^{n,n-1} - p^{n+1} + \phi^{n,n-1} \text{ en } y = 0, \quad (3.41)$$

L étant l'opérateur différentiel de l'équation dynamique (3.16) et $\eta^{n,n-1}$ les termes explicites résultant de l'intégration en temps (et $q = Rep$). Notons que u et v sont nulles à l'infini et égales aux profils de perturbation à l'entrée.

Avant de commencer l'intégration en temps, le système d'équations suivant est résolu

$$\Delta\hat{q}_k = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (3.42)$$

$$\hat{q}_k(x_j) = \delta_{k,j} \text{ sur } \Gamma, \quad (3.43)$$

où Ω représente le domaine de calcul, Γ la limite de calcul et $\delta_{k,j}$ le symbole de Kröner défini comme $\delta_{k,j} = 1$ pour $i = j$ et $\delta_{k,j} = 0$ pour $i \neq j$. L'équation étant discrétisée en chaque point limite x_j .

Connaissant \hat{q}_k pour $1 \leq k \leq K$, K étant le nombre total de points sur la limite (entrée du domaine, paroi souple et sortie du domaine, les perturbations de pression et de vitesse étant prises nulles à l'infini), on calcule :

$$L\hat{\eta}_k = -\hat{p}_k, \quad (3.44)$$

$$(\Delta - 3\sigma)\vec{\hat{u}}_k = -\vec{\nabla}\hat{q}_k, \quad (3.45)$$

avec

$$\hat{u}_k = 0, \hat{v}_k = \alpha\hat{\eta}_k \quad \text{en } y = 0, \quad (3.46)$$

$$\hat{u}_k = 0, \hat{v}_k = 0 \quad \text{au sinon sur } \Gamma. \quad (3.47)$$

Les solutions élémentaires obtenues, les colonnes de la matrice d'influence M ne sont calculées qu'une seule fois, M étant de la forme

$$M = \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{\hat{u}}_{1|\Gamma}, \vec{\nabla} \cdot \vec{\hat{u}}_{2|\Gamma}, \dots, \vec{\nabla} \cdot \vec{\hat{u}}_{K|\Gamma} \right], \quad (3.48)$$

où chaque vecteur colonne $\vec{\nabla} \cdot \vec{\hat{u}}_{j|\Gamma}$ est évaluée aux points à la limite. La matrice d'influence, ne dépendant que du seul maillage de calcul, ne nécessite qu'une unique évaluation pour une géométrie fixée qui est calculée avant de commencer l'intégration en temps des équations.

Durant l'intégration en temps, à chaque pas de temps, les problèmes inhomogènes sont résolus :

$$\Delta\tilde{q} = g^{n,n-1}, \quad \tilde{q}_{|\Gamma} = 0, \quad (3.49)$$

$$L\tilde{\eta} = \eta^{n,n-1} + \phi^{n,n-1} \text{ en } y = 0, \quad (3.50)$$

$$(\Delta - 3\sigma) \vec{u} = -\vec{\nabla} \tilde{q} + \vec{f}^{n,n-1}, \quad (3.51)$$

$$\tilde{u} = 0, \tilde{v} = \alpha \tilde{\eta} + \eta^{n,n-1} \text{ en } y = 0, \quad (3.52)$$

(avec les conditions d'entrée inhomogène). Les valeurs de $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ aux points limites sont calculées et le vecteur $\vec{\gamma}$ solution de :

$$M\vec{\gamma} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|_{\Gamma} + h^{n,n-1}, \quad (3.53)$$

contient les valeurs de la pression aux points limites équivalents à (3.39). Une fois le vecteur $\vec{\gamma}$ déterminé, (3.38) est résolue avec $q^{n+1}(x_j) = \gamma_j$, $1 \leq j \leq K$, équivalente à (3.39); alors la variable η est calculée en utilisant (3.41) et finalement (3.37) est résolue avec les conditions cinématiques (3.40).

3.2.3.4 Technique du domaine tampon

La technique du domaine tampon permettant d'obtenir un traitement de la limite à la sortie évitant toutes réflexions a été introduite par Street et Macaraeg (1989). A chaque pas de temps, pour un écoulement incompressible, un système elliptique doit être résolu (Helmholtz et Poisson). Pour traiter ce problème, les termes sources des équations de Helmholtz et de Poisson sont réduits à zéro à l'aide d'une multiplication par une fonction d'atténuation appropriée dans un "domaine tampon", lequel est localisé à la fin du domaine de calcul d'intérêt. Dans cette région, la pression et le champ de vitesses sont découplés dans l'algorithme d'intégration en temps.

La fonction d'atténuation utilisée dans ce travail est similaire à celle de Street et Macaraeg (1989) et Danabasoglu *et al.* (1990) :

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left\{ 4 \left[1 - 2 \frac{(x - x_d)}{(x_b - x_d)} \right] \right\} \right), \quad (3.54)$$

où x_d marque le début du domaine tampon et x_b marque la localisation de la sortie du domaine. Comme montré par la suite, une longueur du domaine tampon d'environ trois longueurs d'ondes longitudinales est adéquate pour fournir une fonction d'atténuation assez lisse et éviter toute influence de la condition à la sortie. La perturbation est alors continûment amortie dans le domaine tampon pour être égale à zéro à la sortie. La fonction $\phi(x)$ est tracée sur la Figure 3.1 avec comme paramètres $x_d = 880$ et $x_b = 1000$.

3.2.3.5 Conditions à l'entrée

La perturbation de vitesse (périodique en temps) à l'entrée x_a du domaine est celle donnée par une étude de stabilité linéaire, tandis qu'à la sortie x_b la perturbation est

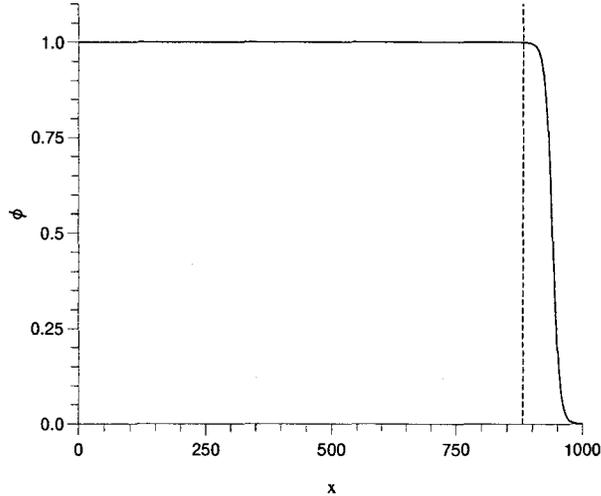


FIG. 3.1 - Courbe de la fonction ϕ suivant la direction longitudinale x .

supposée s'annuler, ce qui est consistant avec l'introduction d'un domaine tampon entre le domaine physique et la sortie du domaine de calcul (cf. Figure 3.2).

Des résultats de stabilité linéaire *spatiale* fournissent un nombre d'onde α complexe, en fonction de la fréquence réelle ω (et du nombre de Reynolds). Le nombre d'onde apparaissant au carré dans les équations de stabilité linéaire (2.8) et (2.9), des variables auxiliaires sont introduites afin de ramener le système après discrétisation à un problème aux valeurs propres matricielles généralisées que l'on résoud par une méthode *QZ* standard. Une méthode d'interpolation dite de Müller permet ensuite de déterminer les points de stabilité neutre en localisant la courbe $\alpha_i(\omega, Re) = 0$, α_i étant la partie imaginaire de α (fonction de ω et Re), la solution étant instable si $\alpha_i < 0$.

Ecrivant la perturbation sous la forme $\vec{u}(y) e^{i[\alpha(x-x_a) - \omega_0 t]}$ (avec $\vec{u}(y) = \vec{u}_r(y) + i\vec{u}_i(y)$), le forçage (périodique en temps) à l'entrée s'écrit :

$$\vec{\Phi}(y, t) = \vec{u}_r(y) \cos(\omega_0 t) + \vec{u}_i(y) \sin(\omega_0 t), \quad \text{avec} \quad \max_y \sqrt{\vec{u}_r(y)^2 + \vec{u}_i(y)^2} = A, \quad (3.55)$$

où l'amplitude A est définie avec la composante longitudinale $\vec{u}(y)$ du mode propre.

3.3 Validation de l'algorithme

Pour valider l'algorithme, un ensemble de tests (stationnaire et instationnaire) est réalisé sur les équations de Navier-Stokes en considérant $\vec{U} = \vec{0}$ et $\eta = 0$. Il s'agit en un premier temps de vérifier uniquement l'algorithme et la précision du schéma en considérant une solution exacte imposée (en adjoignant un terme de force approprié). Cependant, ils ont été menés afin de vérifier la précision du calcul et l'ordre du schéma.

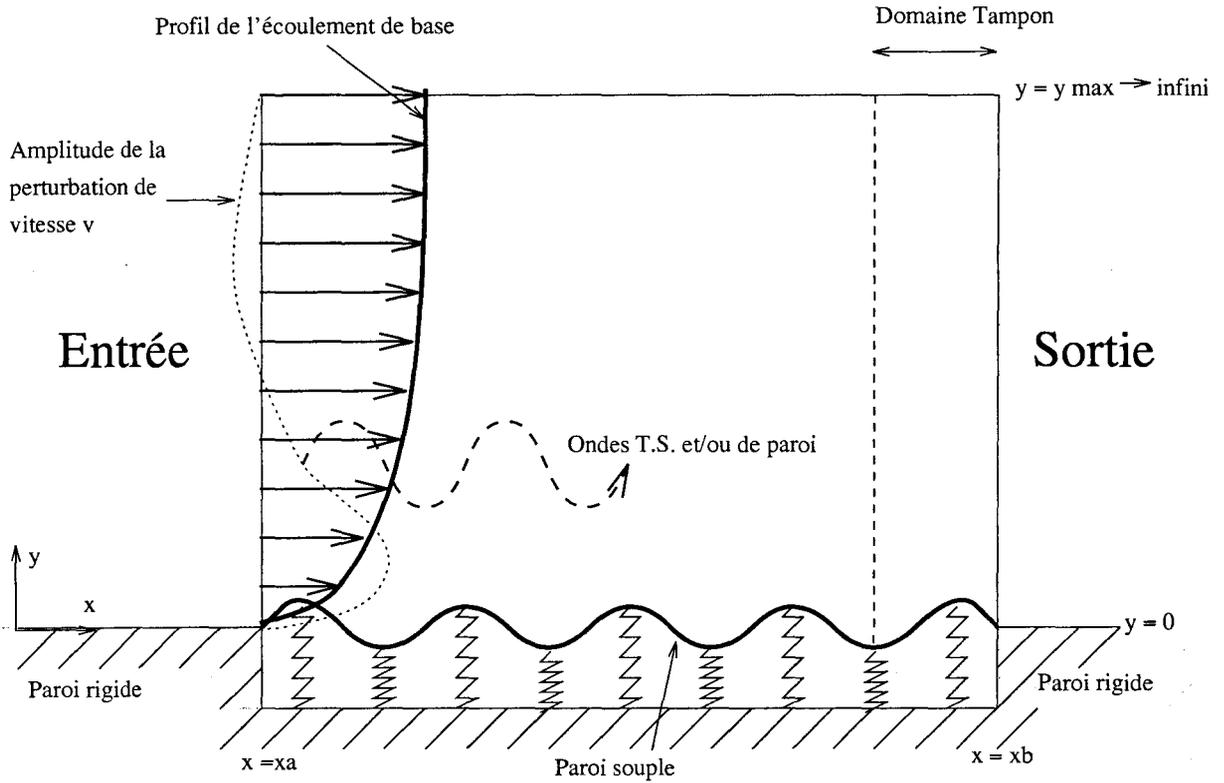


FIG. 3.2 - La géométrie du domaine de calcul.

3.3.1 Solution exacte stationnaire

Pour cet essai numérique, nous avons choisi une solution exacte qui se développe sur plusieurs longueurs d'ondes dans la direction longitudinale x et s'atténue progressivement dans la direction normale à la paroi (domaine semi-infini tronqué) comme pour une perturbation évoluant dans une couche limite sur plaque plane :

$$\psi_{ex}(x, y) = \cos(\alpha x) e^{\beta x} e^{-\gamma y}, \quad (3.56)$$

$$P_{ex}(x, y) = \cos(\alpha x) e^{\beta x} e^{-\gamma y}, \quad (3.57)$$

pour $x \in [0, 10]$ et $y \in [0, 75]$ avec $\alpha = 2\pi$, $\beta = 1 \times 10^{-2}$ et $\gamma = 1$. La valeur de $y = 75$ a été choisie pour s'assurer de la décroissance jusqu'à zéro de la perturbation en y (comme dans les simulations spatiales).

La Figure 3.3 montre l'évolution de l'erreur :

$$\epsilon_{\phi} = \frac{\|\phi_{ex} - \phi\|_{L^2}}{\|\phi_{ex}\|_{L^2}}, \quad (3.58)$$

où

$$\|\phi\|_{L^2} = \left[\frac{1}{N_x * N_y} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \phi^2(x_i, y_j) \right]^{1/2}, \quad (3.59)$$

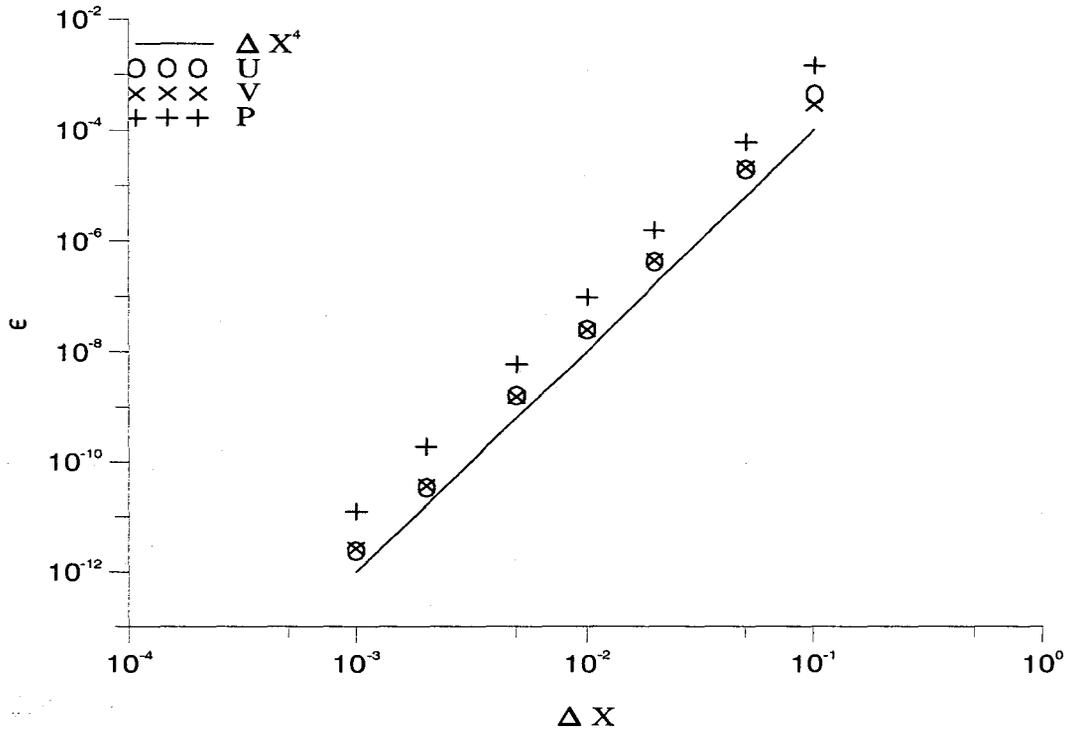


FIG. 3.3 - Solution stationnaire des équations de Navier-Stokes ; erreurs sur u , v et p

où $\| \cdot \|_{\mathbb{L}^2}$ représente la norme \mathbb{L}^2 . La valeur de N_y choisie ($N_y = 80$) assure que l'erreur due à la discrétisation en polynômes de Chebyshev est négligeable par rapport à l'erreur faite en utilisant un schéma aux différences finies qui est bien en $O(\Delta x^4)$.

3.3.2 Solution exacte instationnaire

Nous avons considéré le problème évolutif représenté par le système de Navier-Stokes résolu en utilisant une procédure d'intégration en temps avec un schéma aux différences finies à 3 niveaux (Euler retardé du 2nd ordre). Pour cet essai numérique, nous avons choisi la solution exacte du paragraphe précédent avec un terme instationnaire :

$$\psi_{ex}(x, y, t) = \frac{2\pi - 1 + \sin(2\pi t)}{40\pi} \cos(\alpha x) e^{\beta x} e^{-\gamma y}, \quad (3.60)$$

$$P_{ex}(x, y, t) = \frac{2\pi - 1 + \sin(2\pi t)}{40\pi} \cos(\alpha x) e^{\beta x} e^{-\gamma y}, \quad (3.61)$$

dans le domaine $x \in [0, 10]$ et $y \in [0, 75]$ avec $\alpha = 2\pi$, $\beta = 1 \times 10^{-2}$ et $\gamma = 1$ et pour tout $t > 0$. Cette solution exacte nous donne \bar{v}^0 , \bar{v}^1 ; les \bar{v}^m , $m \geq 2$ ont été déterminés par la résolution numérique du système.

La Figure 3.4 montre l'évolution de l'erreur :

$$\max_t \epsilon_{\phi, t=n\Delta t} = \frac{\| \phi_{ex}^n - \phi^n \|_{\mathbb{L}^2}}{\| \phi_{ex}^n \|_{\mathbb{L}^2}} \quad (3.62)$$

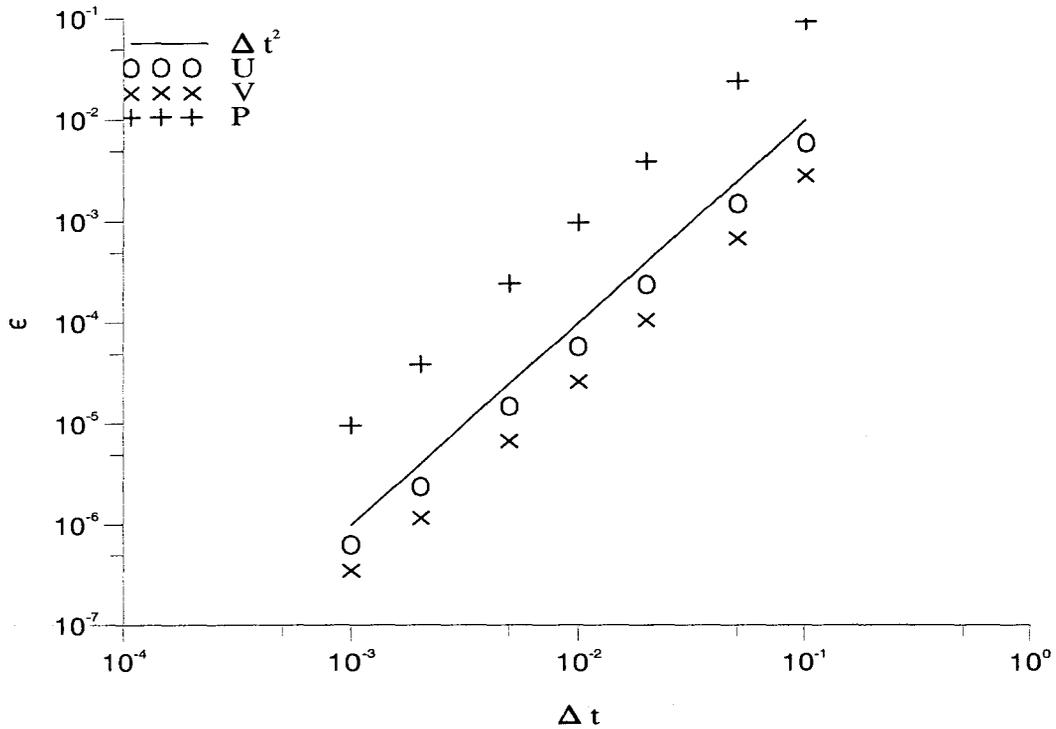


FIG. 3.4 - Solution instationnaire des équations de Navier-Stokes ; erreurs sur u , v et p

où ϕ_{ex}^n désigne la solution exacte en temps $n\Delta t$ et ϕ^n la solution calculée.

Les valeurs de N_x et de N_y choisies ($N_x = 1000$ et $N_y = 80$) assure que l'approximation faite par l'utilisation des polynômes de Chebyshev et le schéma aux différences finies d'ordre 4 est négligeable par rapport à l'erreur faite en temps qui est bien en $O(\Delta t^2)$.

Chapitre 4

Résultats de simulations spatiales d'instabilités

4.1 Validations

4.1.1 Comparaison entre la simulation numérique et la stabilité linéaire

Dans ce paragraphe, la précision des méthodes numériques utilisées pour les calculs de simulation numérique directe (notée plus couramment DNS) est testée sur des perturbations de petite amplitude, les résultats étant comparés aux résultats de stabilité linéaire. Pour cela, un écoulement principal parallèle est supposé, permettant de fournir un bon cas test initial en satisfaisant aux hypothèses de la stabilité linéaire discutées au chapitre 2. Un nombre de Reynolds Re_{δ_*} de 900 et une fréquence réduite de F_r de 86×10^{-6} à l'entrée sont choisis comme cas test (voir Joslin *et al.*, 1992). Pour tenter de déterminer les exigences de résolution du maillage, des calculs sont effectués sur différentes grilles.

Dans la direction normale à la paroi, la longueur du domaine s'étend de la paroi à une limite supérieure où les conditions limites à *l'infini* sont imposées. Pour la limite à *l'infini*, celle-ci est choisie à une distance suffisamment éloignée de la paroi pour éviter des effets de coupure. Par la suite, nous prendrons une valeur de y_{max} de 75 (représentant 75 fois l'épaisseur de déplacement de la couche limite) comme suggéré par Joslin *et al.* Le coefficient d'étirement L de la grille dans la direction normale est utilisé pour fournir une distribution adaptée des points de collocation près de la paroi. Pour nos résolutions, nous prendrons un coefficient d'étirement L de 1 pour avoir une bonne prise en compte des phénomènes près de la paroi car c'est l'interaction entre le fluide et la structure qui domine toute la simulation. Le nombre de pas de temps par période est fixé à 640 pour maintenir

une bonne précision temporelle pour les simulations non linéaires. Enfin, un nombre de points de collocation suivant y de 60 est suffisant pour avoir de bonnes estimation et représentation des profils de vitesse et de pression.

Comme premier exemple, nous traitons le cas de la plaque plane sur un domaine d'étude de 10 longueurs d'ondes de Tollmien-Schlichting. Ces dix longueurs d'ondes sont subdivisées en un domaine physique de sept longueurs d'ondes et un domaine tampon de trois longueurs d'ondes. A l'entrée, une perturbation 2-D est prescrite avec une amplitude A de 0.001. En théorie de stabilité linéaire, le taux de croissance spatiale est $\alpha_i = -.004509$. Les taux de croissance pour la simulation spatiale sont calculés en déterminant u'/u (u' représente la dérivée de la quantité r.m.s. de la composante longitudinale de la vitesse u par rapport à x) et en utilisant un schéma aux différences finies centrées simple pour u' ; les résultats et les erreurs (maximales) sont montrés dans le tableau 4.1 pour différents nombres de points en x^* (erreur basée sur la comparaison avec le taux de croissance de stabilité linéaire). Un très bon accord est trouvé entre les résultats de stabilité linéaire et ceux de la simulation spatiale.

Comme second exemple, nous considérons le cas test d'une plaque élastique montée sur ressorts ($Te = 0$ dans (3.1)), les grandeurs du fluide et de la paroi sont les suivantes : vitesse externe $U_\infty^* = 18m/s$, masse volumique $\rho^* = 1025kg/m^3$, viscosité cinématique (eau de mer) $\nu^* = 1.37 \times 10^{-6}m^2/s$, épaisseur $b^* = 0.14mm$, masse volumique $\rho_p^* = 946kg/m^3$, module d'Young $E^* = 0.5 \times 10^6 N/m^2$, nombre de poisson $\nu_p^* = 0.5$, rigidité du ressort $\kappa^* = 10 \times 10^9 N/m^3$ et amortissement $d^* = 0$ ($\mathcal{M} = 0.92$, $C_Y = 0.66$ et $U_R = 0.78$). Dans cette étude, la rigidité du ressort est assez importante pour supprimer les instabilités de surface et la plaque est suffisamment fine pour que la flexibilité influe sur la stabilité linéaire. Le domaine d'étude étant identique au cas précédent, les mêmes résultats sont présentés dans le tableau 4.1 basés sur la comparaison avec le taux de croissance spatiale linéaire de $\alpha_i = -.004210$. Un très bon accord est trouvé entre les résultats de stabilité linéaire et ceux de la simulation spatiale.

N_x	$-\alpha_i$	Erreur %	N_x	$-\alpha_i$	Erreur %
20	0.004429	1.77	20	0.004167	1.02
30	0.004464	1.00	30	0.004170	0.95
40	0.004472	0.82	40	0.004172	0.90
60	0.004479	0.67	60	0.004179	0.74

TAB. 4.1 - Taux de croissance DNS: cas rigide (à gauche) et cas souple (à droite).

Comme montré dans la Figure 4.1, la technique du domaine tampon a permis aux ondes

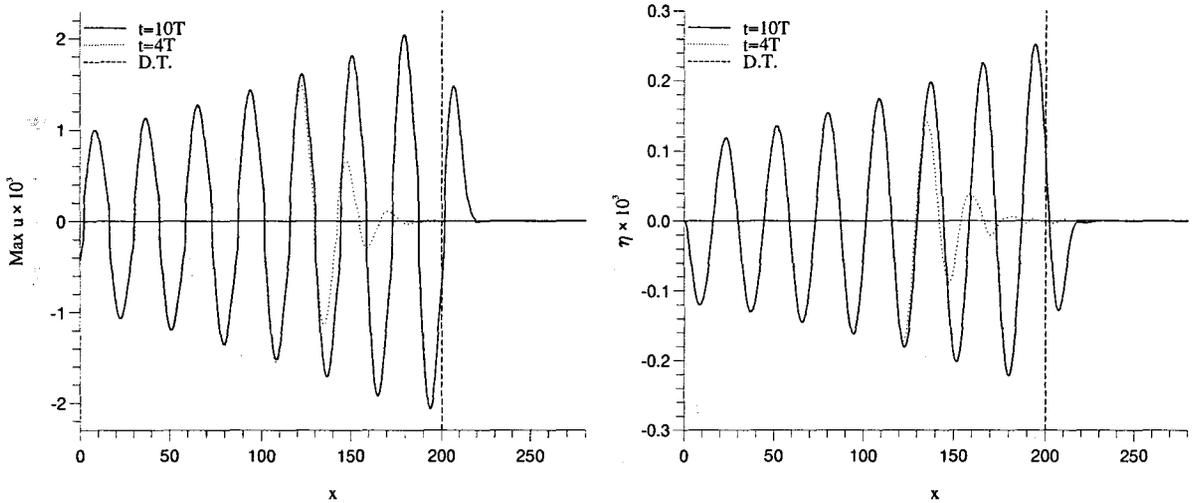


FIG. 4.1 - — Amplitudes de la composante longitudinale de la vitesse et de la déformée de la paroi ; - - début du domaine tampon pour $Re_{\delta_a} = 900$, $Fr = 86 \times 10^{-6}$ et $A = 0.001$ avec $\mathcal{M} = 0.92$, $C_Y = 0.66$ et $U_R = 0.78$.

de traverser la limite en aval du domaine sans réflexion. C'est réalisable en spécifiant un domaine tampon de trois longueurs d'ondes de Tollmien-Schlichting. Le choix de la longueur du domaine tampon fait suite aux travaux de Joslin et al. (1992) où des tests avec des régions de taille différente ont été menés.

4.1.2 Effets non parallèles et non linéaires

Pour comparer les calculs de stabilité spatiale non parallèle aux résultats de stabilité linéaire basée sur l'hypothèse d'un écoulement localement parallèle, nous simulons le développement spatiale de perturbations en utilisant un système de Navier-Stokes linéarisé. La paroi souple étudiée est celle définie précédemment et les résultats de stabilité linéaire spatiale sont représentés sur la Figure 4.2. Pour le cas test, un nombre de Reynolds de 600 et une fréquence adimensionnée de 0.08 sont choisis à l'entrée du domaine celui-ci s'étendant sur 18 longueurs d'ondes T.S. (dont 3 pour le domaine tampon); la perturbation évoluant à une fréquence dimensionnelle :

$$\omega^* = \frac{\omega U_\infty^2}{Re \nu^*} \Leftrightarrow f^* = \frac{\omega U_\infty^2}{Re 2\pi\nu^*},$$

ou sous la forme d'une fréquence réduite $Fr = \frac{\omega}{Re} = 13.33 \times 10^{-6}$ représentée par une droite en tirets sur la Figure 4.2. En effet, le fait de se déplacer en x correspond sur le diagramme de stabilité à un déplacement le long de la droite $Fr = \omega/Re$.

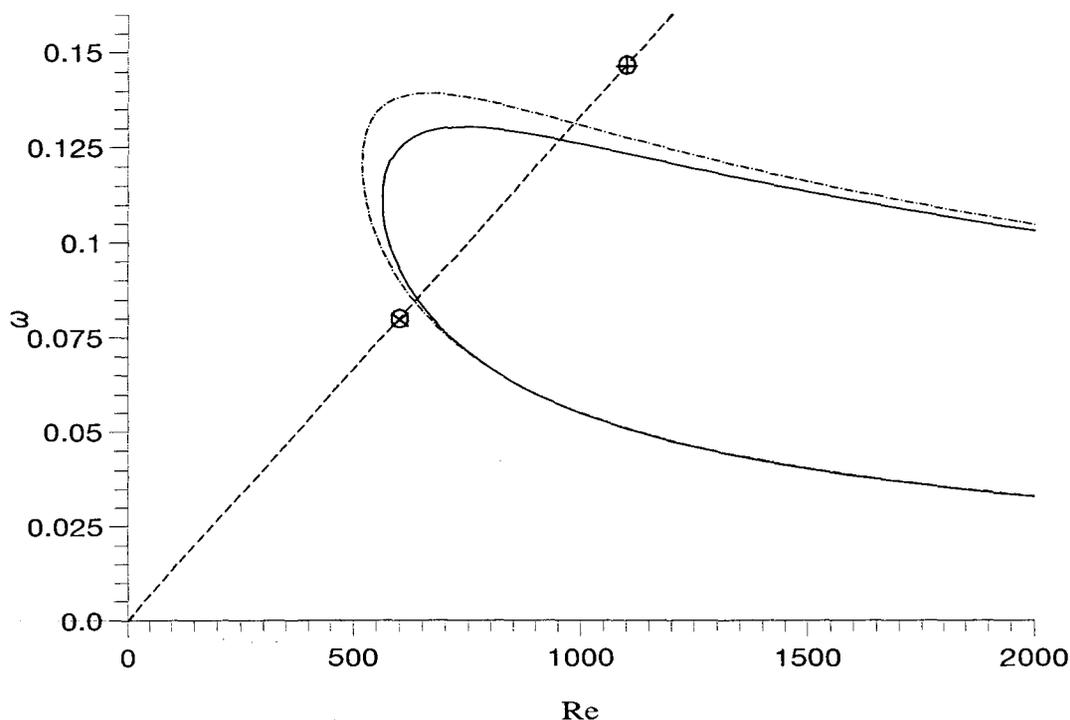


FIG. 4.2 - Courbes neutres pour l'instabilité spatiale: $-\cdot-$ paroi rigide, $-$ paroi souple et $--$ $Fr = 13.33 \times 10^{-6}$ avec $\mathcal{M} = 0.92$, $C_Y = 0.66$ et $U_R = 0.78$.

L'évolution spatiale dans la direction longitudinale correspond à un déplacement le long de la ligne en tirets sur le diagramme de stabilité linéaire. Dans la Figure 4.2, l'entrée est représentée par le point \otimes , *i.e.* $Re = 600$ et $\omega = 0.08$, le point \oplus à $Re = 1100$ correspond à la fin du domaine physique (le domaine tampon commence ici). Les courbes de stabilité neutre pour le cas souple et pour le cas rigide sont représentées respectivement en un trait continu et un trait en tirets-points.

La croissance de l'amplitude linéaire, du point d'entrée x_a^* au point d'abscisse x^* , résultant des calculs de stabilité basés sur l'hypothèse d'écoulement localement parallèle, est donnée par la relation :

$$\frac{A}{A_0} = \exp\left(-\int_{x_a^*}^{x^*} \alpha_i^* dx^*\right), \quad (4.1)$$

$-\alpha_i^*$ étant le facteur d'amplification spatiale dimensionnelle locale prédit par la théorie de stabilité linéaire et A_0 est l'amplitude à l'entrée. Pour la simulation numérique spatiale, la perturbation étant périodique en temps avec une périodicité $T = \frac{2\pi}{\omega}$, les composantes de la vitesse peuvent être décomposées en modes, une fois le champ de l'écoulement obtenu. Pour la composante longitudinale (aussi bien que pour la composante normale), on peut

écrire :

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{u_{n1}(x, y) \sin(n\omega t) + u_{n2}(x, y) \cos(n\omega t)\}. \quad (4.2)$$

En injectant une perturbation périodique en temps à l'entrée, les calculs utilisant le système de Navier-Stokes linéarisé permettent d'obtenir le mode fondamental (seul non nul). Pour comparer les résultats numériques avec l'analyse de stabilité linéaire localement parallèle, les effets de bord de la plaque sont minimisés en faisant coïncider les limites en amont et en aval de la paroi respectivement avec l'entrée et la sortie du domaine de calcul. A l'entrée x_a^* , le mode propre de Tollmien-Schlichting sur paroi souple fournit le profil de la perturbation de vitesse (3.55). Des conditions de type rotule $\eta = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$ sont utilisées à l'entrée et à la sortie du domaine pour l'équation dynamique. Bien que les analyses de stabilité linéaire prédisent des valeurs non nulles pour $\eta, \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$, les conditions aux limites homogènes sont plus faciles à implémenter dans la procédure de résolution numérique, le déplacement de la paroi et ses dérivées apparaissant dans le système de Navier-Stokes comme une conséquence du maillage (1.22), (1.24) à (1.26). Le problème étant ici de travailler dans une configuration semi-infinie.

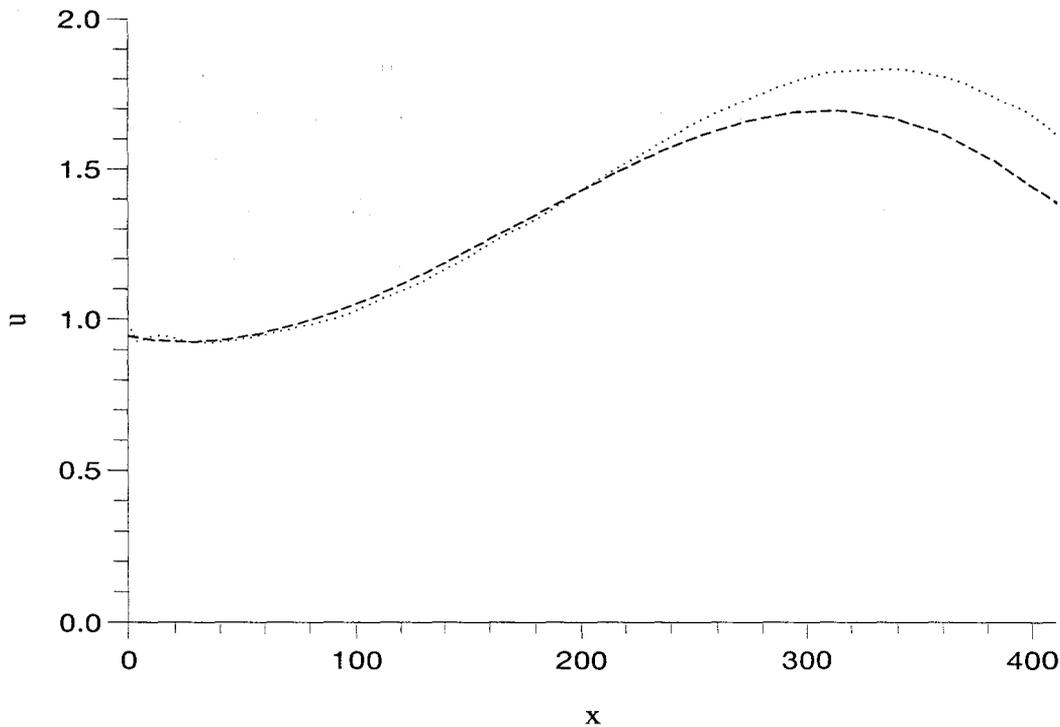


FIG. 4.3 - *Maximum suivant y de l'amplitude du mode fondamental de la perturbation de vitesse longitudinale ; comparaison avec la croissance spatiale linéaire : -- stabilité linéaire et ... simulation spatiale.*

L'évolution de l'amplitude du mode fondamental, le maximum étant pris suivant la

direction y^* pour chaque localisation x^* , est montrée Figure (4.3) avec un trait en pointillés, alors que la croissance de l'amplitude prédite par l'analyse de stabilité linéaire en écoulement localement parallèle est tracée par une ligne en tirets. Comme l'étude est linéaire, l'amplitude a été normalisée à un à l'entrée. La simulation est poursuivie jusqu'à ce que l'onde atteigne la sortie du domaine d'étude. Ensuite, les modes sont extraits du champ d'écoulement en suivant la simulation et en intégrant les quantités sur une période. Par la suite, dans les figures, la localisation $x = 0$ correspondra à l'entrée du domaine. Les courbes coïncident jusqu'à une certaine localisation en x^* puis divergent, l'effet de non-parallélisme de l'écoulement produit alors des taux de croissance spatiaux plus importants. C'est en accord qualitatif avec les résultats de Yeo *et al.* (1994) qui montrait que le non-parallélisme avait une influence déstabilisante sur les instabilités de Tollmien-Schlichting.

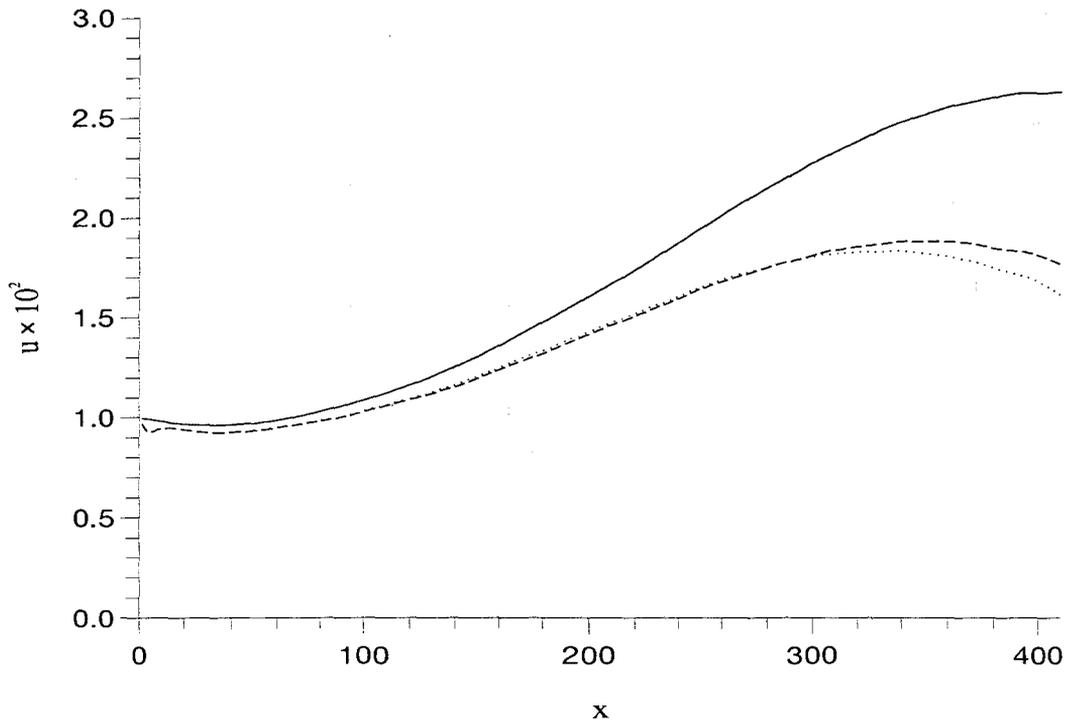


FIG. 4.4 - Maximum suivant y de l'amplitude du mode fondamental de la perturbation de vitesse longitudinale ; calcul spatial faiblement non linéaire : — paroi souple, — paroi rigide et \cdots stabilité linéaire.

En résolvant maintenant le système de Navier-Stokes non linéaire complet, une perturbation (cf. (3.55)) d'amplitude initiale $A = 0.01$ est injectée à l'entrée du domaine. Le mode fondamental (en prenant le maximum en y^* pour chaque x^*) pour le cas souple (trait en tirets) est comparé sur la Figure 4.4 avec le calcul pour la plaque plane (trait en continu), en gardant le même nombre de Reynolds et la même fréquence. Il convient de

remarquer que les non-linéarités (bien que faibles) affectent les amplitudes de perturbations lesquelles sont moins importantes en présence d'une surface flexible. La croissance de l'amplitude linéaire correspondante pour le cas de la paroi souple, montrée par un trait en pointillés, est représentée après ajustement avec l'amplitude initiale pour coïncider avec les courbes à l'entrée. L'amplitude de la vitesse dans le cas souple exhibe une petite oscillation au voisinage de l'entrée à $x = 0$. Ce comportement singulier est une conséquence des conditions homogènes à la limite en amont pour la paroi qui provoque une forte variation de la déformée de la surface au début de la plaque.

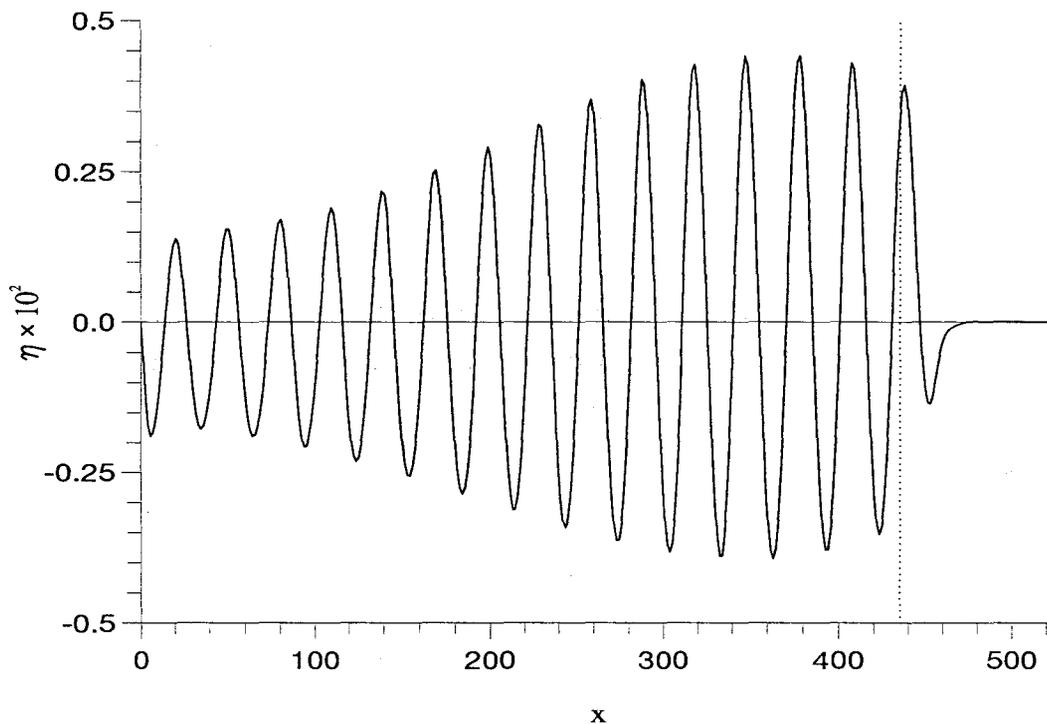


FIG. 4.5 - Evolution spatiale non linéaire de la paroi η à $t = 18T$ avec $A = 0.01$; \cdots fin du domaine physique.

Le déplacement de la paroi $\eta(x, t)$ à $t = 18T$ est tracé sur la Figure 4.5 lequel exhibe comme attendu une pente soudaine à l'entrée. Le domaine tampon commence à la ligne en pointillés verticale forçant l'amplitude à converger vers zéro et toute réflexion à la sortie peut être évitée. Un domaine tampon supprimant la perturbation a aussi été utilisé par Kloker *et al.* (1993) pour des études de transition numérique dans les couches limites.

4.1.3 Couche limite sur plaque plane

Les simulations avec des amplitudes fortement non linéaires disponibles pour l'interaction fluide-structure sont basées sur des hypothèses simplificatrices comme l'approximation

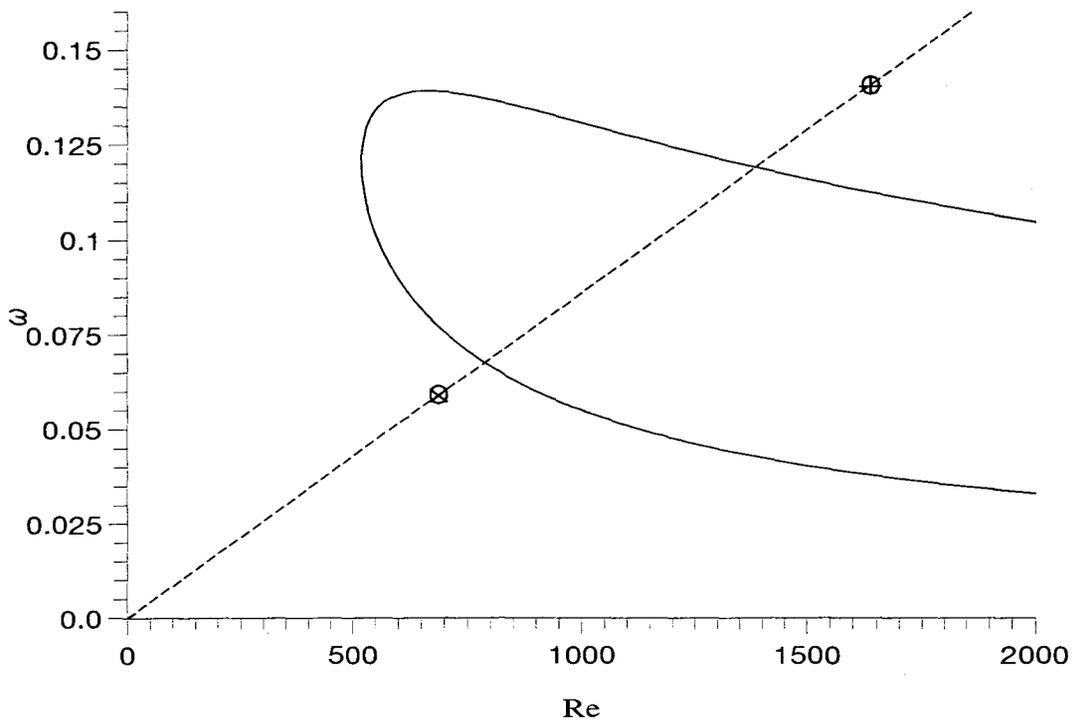


FIG. 4.6 - Courbe neutre spatiale dans le cas de la paroi rigide; $\cdots Fr = 86 \times 10^{-6}$.

mation d'un écoulement localement parallèle (Ehrenstein et Rossi, 1996) ou un modèle d'écoulement de fluide non visqueux (Lucey *et al.*, 1997a). Par conséquent, pour tester notre procédure de résolution numérique en configuration non linéaire, nous comparons les résultats avec paroi rigide avec ceux publiés par Joslin *et al.* (1992), en considérant un cas test identique. Dans la Figure 4.6, l'entrée du domaine de calcul est représentée par le point \otimes , *i.e.* $Re = 688.315$ et $\omega = 0.059195$, le point \oplus à $Re = 1636$ et $\omega = 0.1407$ correspond à la fin du domaine physique. L'étude se fait sur une longueur du domaine physique de $30\lambda_{TS}$ (longueur d'onde de Tollmien-Schlichting) avec un domaine tampon de longueur $3\lambda_{TS}$. Comparé à Joslin *et al.* (1992), nous utilisons une grille plus grossière dans la direction longitudinale (avec approximativement 20 points par longueur d'onde de Tollmien-Schlichting ce qui donne 700 points dans le domaine total). Dans la direction normale à la paroi, nous avons utilisé 60 points de collocation et pour la discrétisation temporelle, 640 points ont été utilisés par période T . Comme dans Joslin *et al.* (1992), le facteur de distribution de points L dans (3.24) a été pris égal à 10 avec $y_{max} = 75$.

L'amplitude du mode fondamental avec l'amplitude initiale $A = 0.025$ est montrée sur la Figure 4.7. Pour faciliter la comparaison, nous avons extrait approximativement les résultats de la Figure 8 de Joslin *et al.* (1992) comme points de données. Alors que les résultats coïncident correctement jusqu'à $x \approx 700$, le pic maximal global est sous-estimé dans notre simulation. Les amplitudes de la distortion de l'écoulement principal u_0 et de

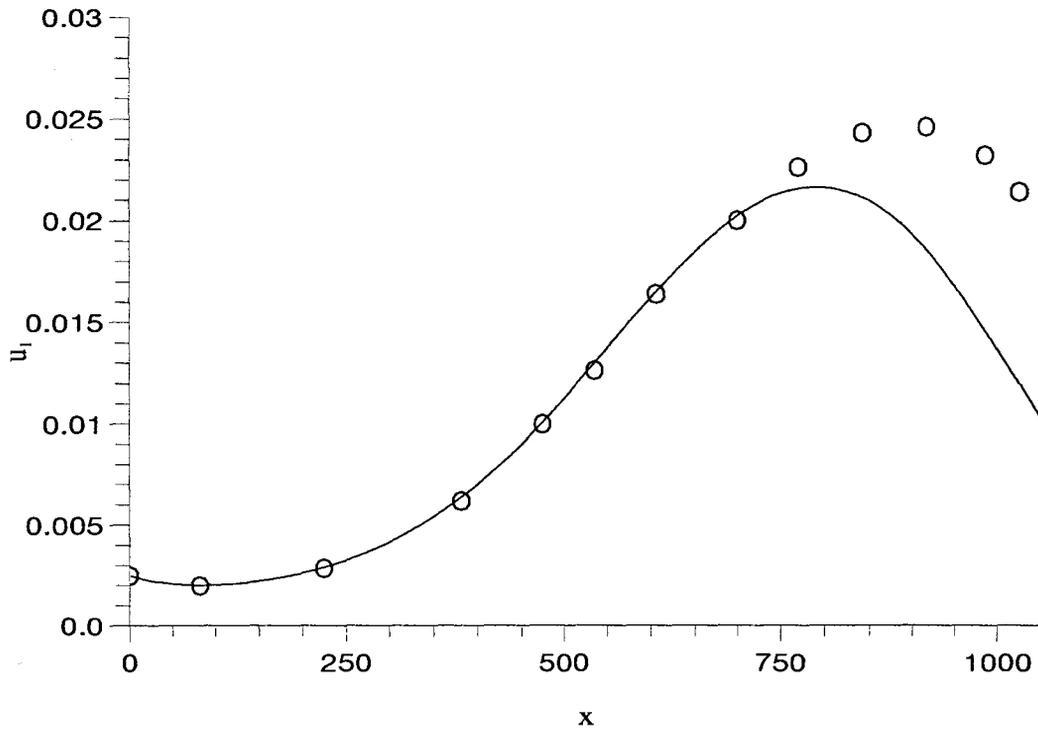


FIG. 4.7 - Maximum suivant y de l'amplitude pour le mode fondamental de la perturbation de vitesse longitudinale, cas rigide à $t > 33T$ avec $A = 0.0025$; \circ points extraits de la Figure 8 de Joslin *et al.* (1992).

la première harmonique u_2 sont montrées dans la Figure 4.8.

Bien que le comportement qualitatif soit le même dans que Joslin *et al.* (en particulier le creux dans l'amplitude de la distortion de l'écoulement principal près de $x = 750$ est représenté), les amplitudes maximales diffèrent. Un raffinement de la grille, en utilisant 40 points par longueur d'onde T.S. dans la direction longitudinale, mène à des résultats presque identiques (non tracés ici). Ce qui indique alors que les différences quantitatives entre les résultats de Joslin *et al.* et les nôtres ne sont pas seulement dues aux différences de maillage. On peut alors spéculer que la différence peut être une conséquence de la différence de traitement dans le domaine tampon. Tandis que dans Joslin *et al.* le système de Navier-Stokes est transformé continûment en équations de couche limite (parabolisées), nous transformons le système de Navier-Stokes non linéaire en un système de Stokes linéaire. Cette dernière procédure est compatible avec la technique de la matrice d'influence que nous utilisons pour déterminer une condition à la limite de Dirichlet pour la pression, équivalente à la condition d'incompressibilité. Cette procédure s'avère suffisamment robuste pour éviter des réflexions à la sortie dans le système couplé fluide-structure. Cependant, cette transformation, lissant via le domaine tampon la perturbation à la sortie, paraît affecter les amplitudes non linéaires en amont, tout en reproduisant le comportement qualitatif.

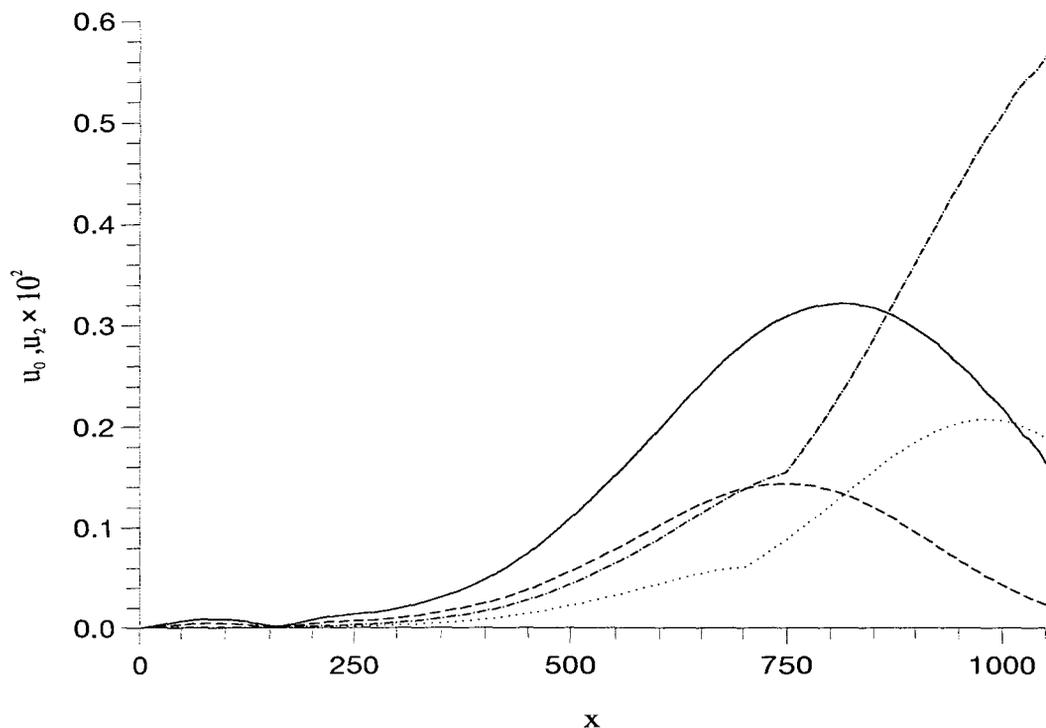


FIG. 4.8 - Maximum suivant y de l'amplitude de la perturbation de vitesse longitudinale pour le cas rigide à $t > 33T$ pour $A = 0.0025$: \cdots u_0 distortion de l'écoulement principal et $- -$ u_2 première harmonique et pour $A = 0.0035$: $- \cdot -$ u_0 distortion de l'écoulement principal et $-$ u_2 première harmonique.

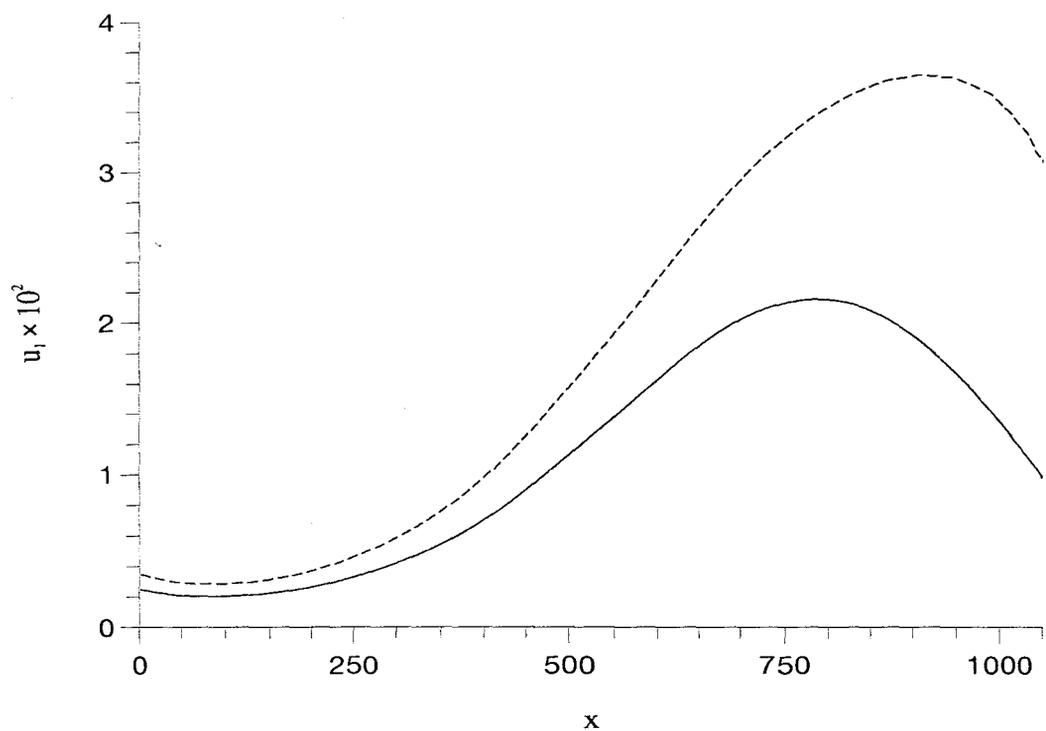


FIG. 4.9 - Maximum suivant y de l'amplitude pour le mode fondamental de la perturbation de vitesse longitudinale à $t > 33T$: $- -$ $A = 0.0035$ et $-$ $A = 0.0025$.

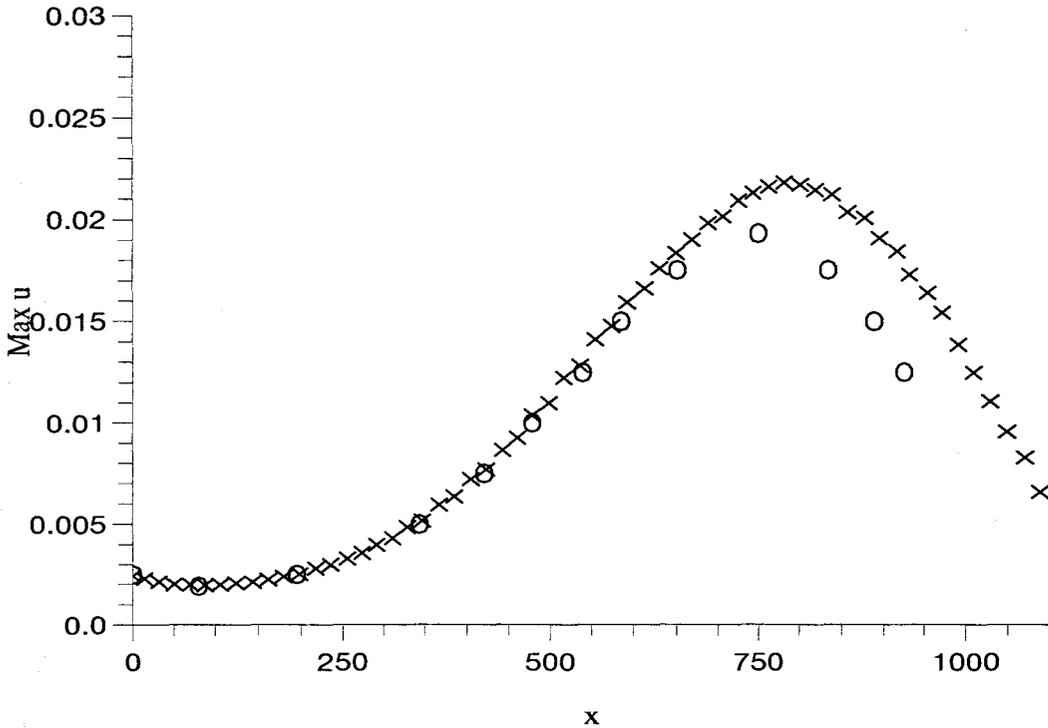


FIG. 4.10 - *Maximum suivant y de l'amplitude de la perturbation de vitesse longitudinale u : \times à $t > 33T$ avec $A = 0.0025$; \circ points extraits de la Figure 1.18 de Airiau (1994).*

Par ailleurs, un résultat de Airiau (1994) montrant l'évolution du maximum de la perturbation de la vitesse longitudinale dans la même configuration (voir la Figure 1.18 de Airiau) est comparé à notre simulation sur la Figure 4.10. L'évolution générale de u est similaire dans les deux approches mais la localisation et la valeur du maximum diffèrent légèrement. Par ailleurs, une simulation numérique spatiale identique réalisée avec une amplitude de perturbation $A = 0.0035$ met en évidence l'importance de l'amplitude introduite à l'entrée du domaine étudiée (voir Figures 4.9 et 4.8). Une légère variation peut alors donner lieu à des résultats avec des ordres de grandeurs très différents.

Pour conclure les comparaisons avec le cas de la paroi rigide, les phénomènes caractérisant l'évolution de la perturbation non linéaire sont reproduits par notre procédure de résolution, et ce sont ces phénomènes sur lesquels nous nous focalisons dans ce document pour un système couplé fluide-structure. Pour nos calculs de paroi souple, un facteur d'étirement de $L = 1$ semble plus approprié pour une distribution des points de collocation près de la paroi plutôt que des grandes valeurs de L . Les résultats que nous allons discuter ont été obtenus en utilisant 20 points par longueur d'onde en x^* et 60 points de collocation en y^* . Pour l'intégration en temps, un nombre de 640 pas de temps par période a été choisi.

4.2 Membrane sous tension avec amortissement

Dans un travail précédent (Ehrenstein et Rossi, 1996), les ondes de Tollmien - Schlichting non linéaires pour un écoulement de Blasius sur des parois souples ont été calculées en utilisant l'hypothèse d'un écoulement localement parallèle. Pour une certaine classe de parois souples, modélisée par une membrane sous tension avec amortissement, le comportement non linéaire s'avère être sous-critique. Ici, nous prenons les mêmes caractéristiques de paroi que dans Ehrenstein et Rossi (1996) et les valeurs des paramètres dimensionnelles dans (3.4) sont définies comme dans Domaradzki et Metcalfe (1987) en utilisant des valeurs de référence à x_0^* (donc Re_0) avec :

$$m = \frac{m_0 Re_0}{Re}, \quad d = d_0, \quad Te = \frac{T_0 Re_0}{Re} \quad (B = \kappa = 0). \quad (4.3)$$

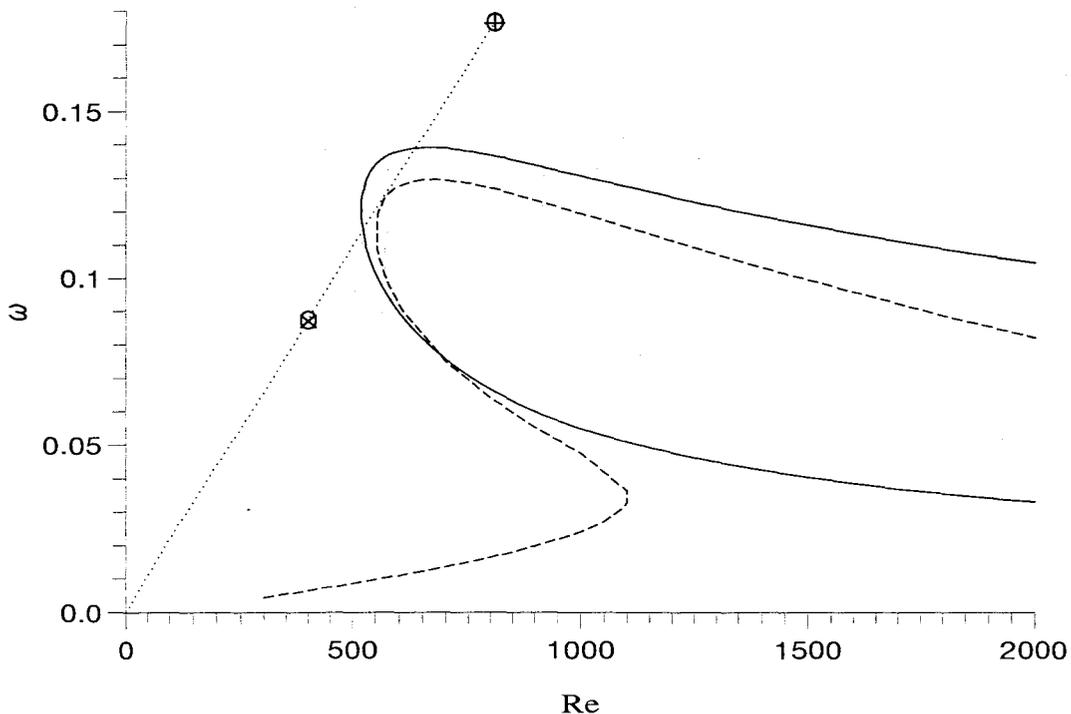


FIG. 4.11 - Courbes neutres en théorie spatiale : — cas rigide, -- membrane sous tension avec amortissement ; ... $Fr = 218.9 \times 10^{-6}$.

Pour les grandeurs $Re_0 = 580$, $d_0 = 0.2$ et $m_0 = 0.0212$, $T_0 = 15$ (valeurs des paramètres utilisées dans Ehrenstein et Rossi, 1996), les résultats de stabilité linéaire spatiale sont représentés sur la Figure 4.11, la courbe en tirets représente le cas flexible. L'entrée de la simulation numérique spatiale est localisée à $Re = 400$ dans la région sous-critique et la fréquence $\omega = 0.08756$ a été choisie de telle manière que la droite de la fréquence réduite soit tangente au nez de la courbe neutre. Une membrane de longueur finie est insérée dans une paroi rigide, la longueur de la partie rigide en amont et en

aval de la membrane étant de $3\lambda_{TS}$ (λ_{TS} = longueur d'onde de Tollmien-Schlichting, ici $\lambda_{TS} = 27.6$). Le panneau souple a une longueur de $18\lambda_{TS}$. Le domaine physique termine à $Re = 807$ pour laisser place à un domaine tampon de $3\lambda_{TS}$ capable d'éviter toute réflexion quand la perturbation atteint la sortie du domaine (le domaine de calcul total étant alors de $27\lambda_{TS}$). Le développement spatial non linéaire a été calculé pour des amplitudes $A = 0.001$ et $A = 0.05$ dans (3.55), la perturbation à l'entrée étant celle du profil de vitesse de Tollmien-Schlichting sur paroi rigide.

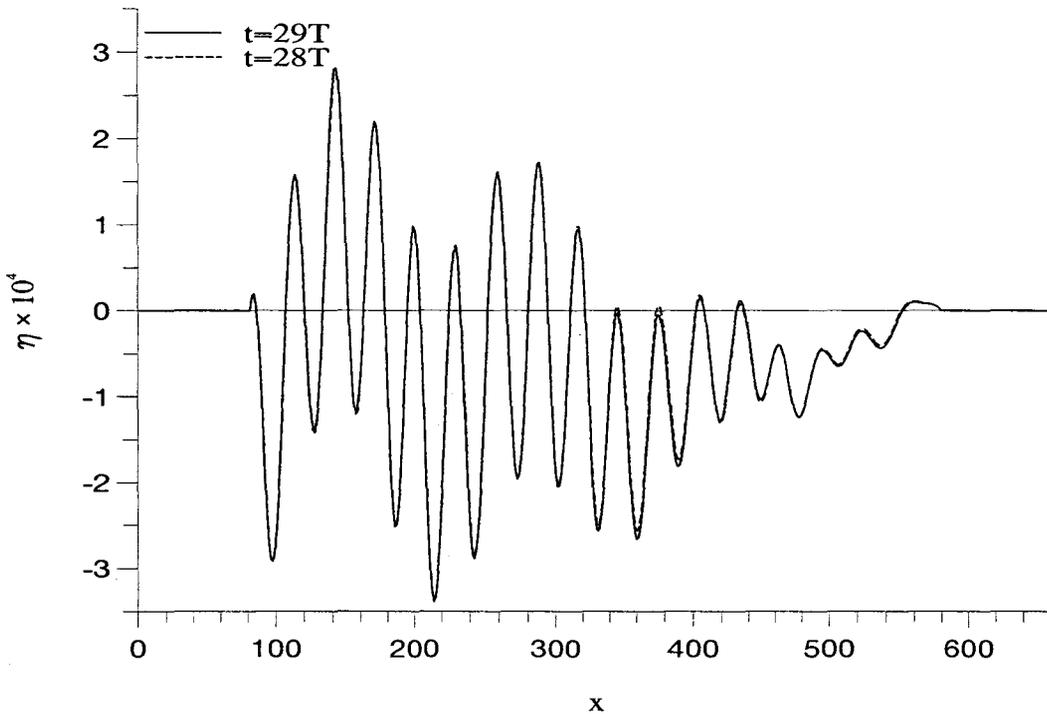


FIG. 4.12 - Membrane sous tension, évolution spatiale non linéaire de la paroi η pour une amplitude initiale $A = 0.001$.

Le déplacement de la paroi pour une amplitude de perturbation initiale $A = 0.001$ est montré sur la Figure 4.12 pour $t = 28T$ et $t = 29T$. Le domaine tampon débute à $x = 660$ (approximativement 24 longueurs d'ondes de l'entrée). Le bord en amont de la membrane sous tension est localisé à $x = 80$, la paroi souple ayant une longueur de $18\lambda_{TS}$ le bord en aval se situe à $x = 580$. La condition limite aux bords de la membrane est prise telle que $\eta = 0$, on observera alors que le déplacement de la paroi exhibe un fort gradient à son bord en amont. En plus de l'instabilité de Tollmien-Schlichting, une onde de surface est clairement mise en évidence sur la Figure 4.12. On peut observer également que les déformées de la paroi prises à deux temps différant d'une période se superposent, donc la solution est périodique en temps. Le maximum suivant y de la perturbation de vitesse longitudinale est montré sur la Figure 4.13. Les deux profils à deux périodes différentes sont

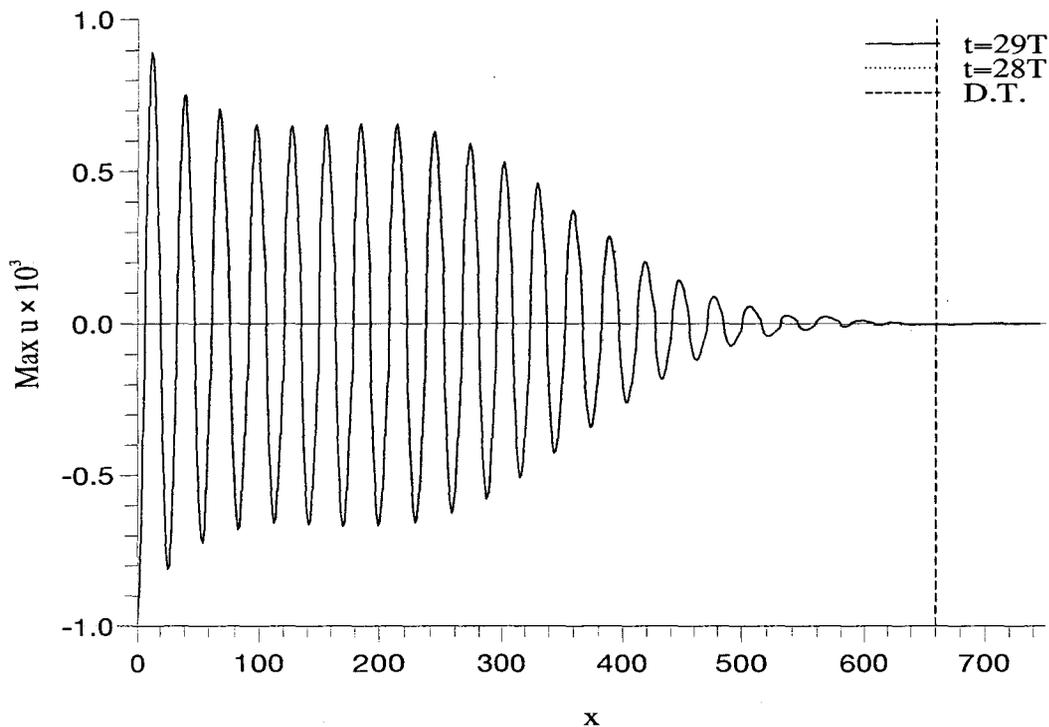


FIG. 4.13 - Membrane sous tension, maximum de la perturbation de la vitesse longitudinale $u(x, y)$, $A = 0.001$, -- fin du domaine physique.

semblables et clairement dominés par l'instabilité visqueuse dite de Tollmien-Schlichting. De plus, la perturbation de la vitesse s'amortit, se stabilise et s'amortit à nouveau en accord avec la théorie de stabilité linéaire.

Pour une amplitude de la perturbation initiale plus importante $A = 0.05$, le déplacement de la paroi est assez différent, tracé sur la Figure 4.14. Les solutions à deux périodes en temps différentes se superposent presque, mais maintenant la membrane exhibe un état de déformation global. Pour ce calcul non linéaire, l'évolution spatiale du champ de l'écoulement, bien que dominé par l'instabilité de Tollmien-Schlichting, apparaît être affecté par l'état de "flambement" de la surface représenté sur la Figure 4.15, où le maximum suivant y de la perturbation de vitesse longitudinale est montré.

On observe clairement que la variation brutale de la déformée de la paroi η de $x = 400$ à $x = 580$ dans la Figure 4.14 influe de manière non négligeable sur le développement de l'instabilité spatiale dominée par Tollmien-Schlichting. Sur la Figure 4.15, dans cette même zone, la perturbation perd alors son caractère d'onde pour une autre solution capable d'évoluer sur ce type de configuration (on notera que pour le cas $A = 0.001$, la perturbation de la vitesse longitudinale évoluait normalement vers la sortie sur la Figure 4.13). Les amplitudes du mode fondamental u_1 , de la distortion de l'écoulement principal u_0 et de la première harmonique u_2 (comme fonction de x , le maximum étant pris suivant y)

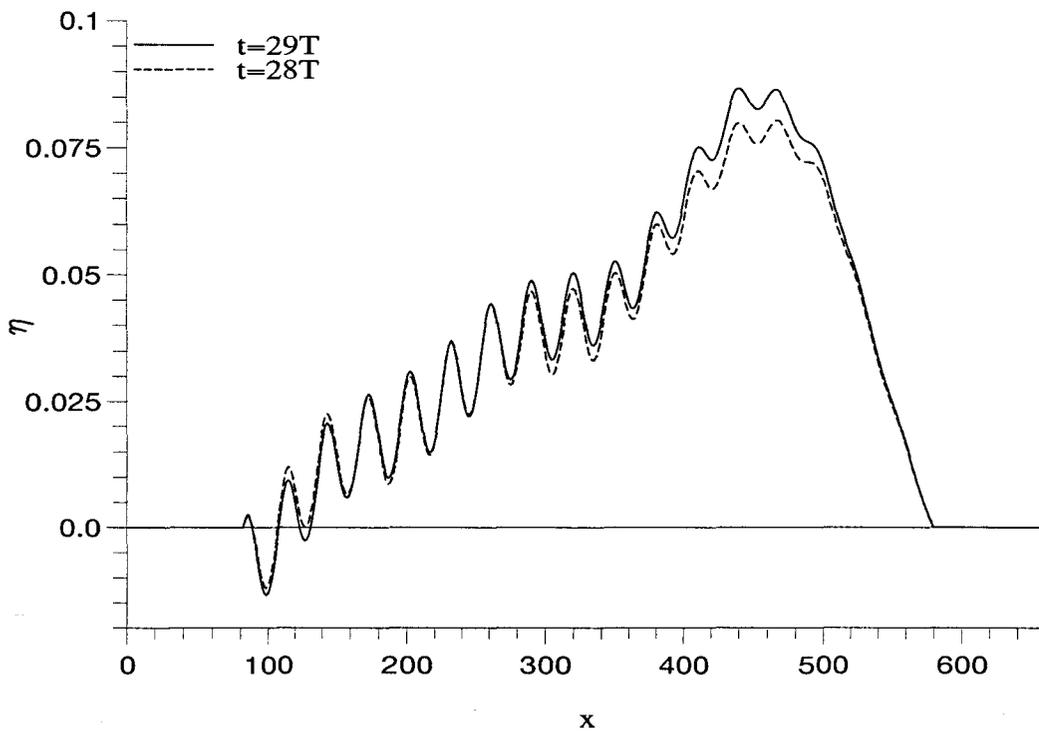


FIG. 4.14 - Membrane sous tension, évolution spatiale non linéaire de la paroi η pour une amplitude initiale $A = 0.05$.

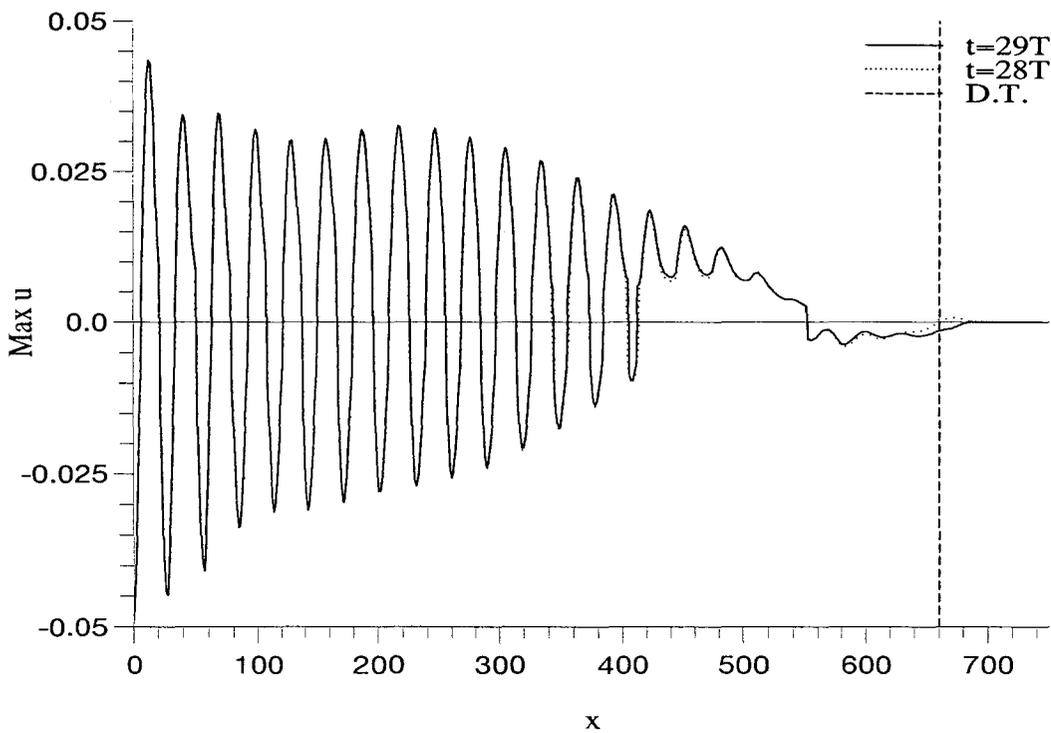


FIG. 4.15 - Membrane sous tension, maximum de la perturbation de la vitesse longitudinale $u(x, y)$, $A = 0.05$, -- fin du domaine physique.

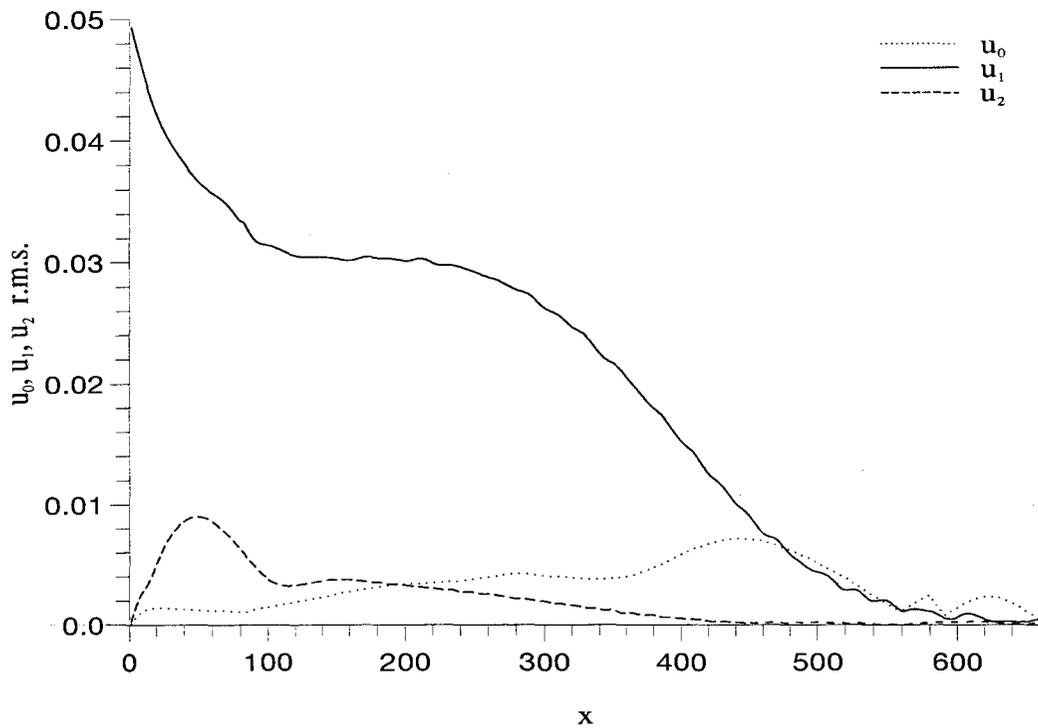


FIG. 4.16 - Membrane sous tension, maximum en y de l'amplitude des modes de la composante longitudinale de la vitesse $u(x, y)$, $A = 0.05$, -- fin du domaine physique.

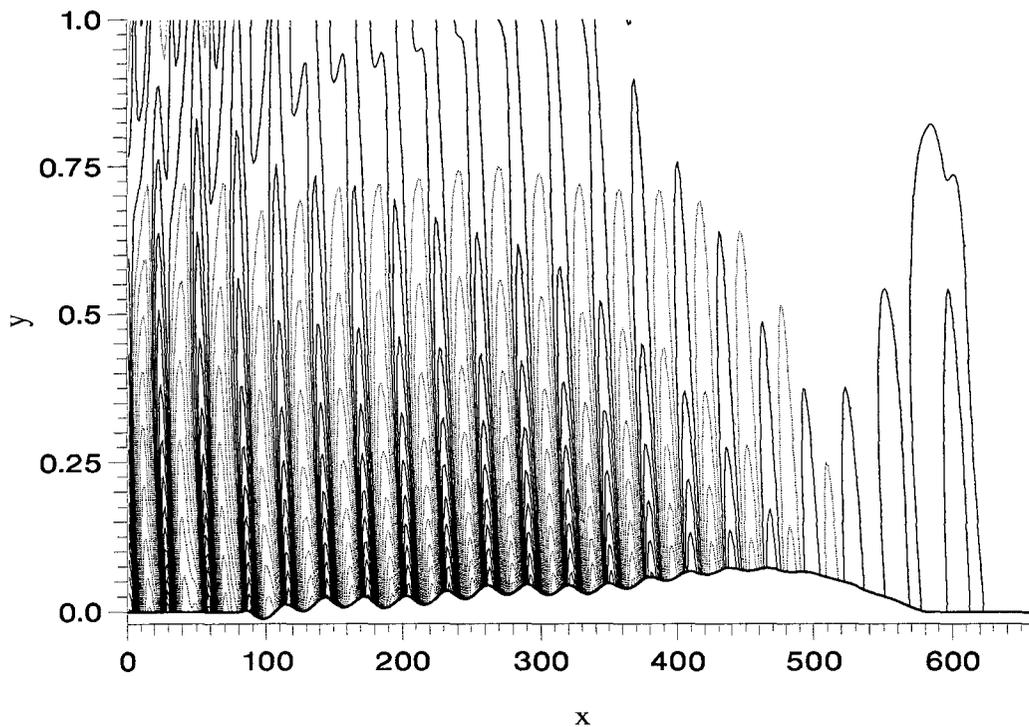


FIG. 4.17 - Isolignes de la perturbation de vorticité sur une membrane sous tension avec une amplitude $A = 0.05$ à $t = 27T$.

sont montrées sur la Figure 4.16. On observe en particulier que le mode u_1 est presque constant pour $100 < x < 300$ puis diminue en atteignant la limite du domaine physique. Finalement, une image globale de l'écoulement de ce cas d'étude est réalisée sur la Figure 4.17, où les isolignes de la perturbation de la vorticité de l'écoulement sont montrées dans les coordonnées physiques (x, y) (ici $y = 1$ correspond à l'épaisseur de déplacement).

L'influence de la déformée de la paroi, qui n'est plus négligeable, affecte clairement le champ d'écoulement. Nous avons donc ici un cas typique où l'approximation d'un écoulement localement parallèle n'est plus pertinente. C'est dans ce genre de configuration que l'outil de simulation spatiale joue pleinement son rôle (détection de comportement non-linéaire du système fluide-structure).

Même si le domaine de calcul n'est peut-être pas assez étendu dans la direction longitudinale, il est néanmoins évident que les non linéarités influent fortement sur la forme de l'onde de l'instabilité de surface. Avec les moyens de calcul que nous avons utilisés, il est difficile d'augmenter de manière substantielle le domaine spatial car l'algorithme numérique doit résoudre un système pleinement non linéaire qui est coûteux en temps. A chaque pas de temps, les parties non cartésiennes des opérateurs doivent être calculées ce qui augmentent substantiellement le temps C.P.U. . Les calculs ont été effectués sur une station de travail 128 Mbyte Digital Alpha 200 4/166 et une simulation avec 27 longueurs d'ondes de Tollmien-Schlichting (avec 540 points en x , 60 points de collocation en y et environ 1.8×10^4 pas de temps) nécessite plus de 60 heures sur la station de travail. En utilisant un processeur de l' IBM/SP2 du CNUSC en France, 12 heures étaient nécessaires.

4.3 Plaque mince élastique montée sur ressorts

Nous considérons une plaque élastique montée sur ressorts avec les caractéristiques du fluide et le jeu de paramètres de paroi suivants: vitesse externe $U_\infty^* = 18m/s$, masse volumique $\rho^* = 1025kg/m^3$, viscosité cinématique $\nu^* = 1.37 \times 10^{-6}m^2/s$, épaisseur $b^* = 2.0mm$, masse volumique $\rho_p^* = 946kg/m^3$, module d'Young $E^* = 0.50 \times 10^6 N/m^2$, nombre de poisson $\nu_p^* = 0.5$, rigidité du ressort $\kappa^* = 0.115 \times 10^9 N/m^3$ et amortissement $d^* = 0$ ($\mathcal{M} = 0.92$, $C_Y = 0.66$ et $U_R = 0.78$). Les résultats de stabilité linéaire sont présentés sur la Figure 4.18 où les différentes instabilités de Tollmien-Schlichting et de surface sont présentes.

On réalise un calcul de stabilité linéaire spatiale avec les paramètres de paroi considérés ici, une fréquence $\omega = 0.077554$ et un nombre de Reynolds $Re = 1700$ (marqué par \otimes dans la Figure 4.18), il apparaît alors quatre solutions avec des nombres α complexes :

$$\alpha_1 = 0.237 - i0.01016, \quad \alpha_2 = 0.0932 - i0.0001536,$$

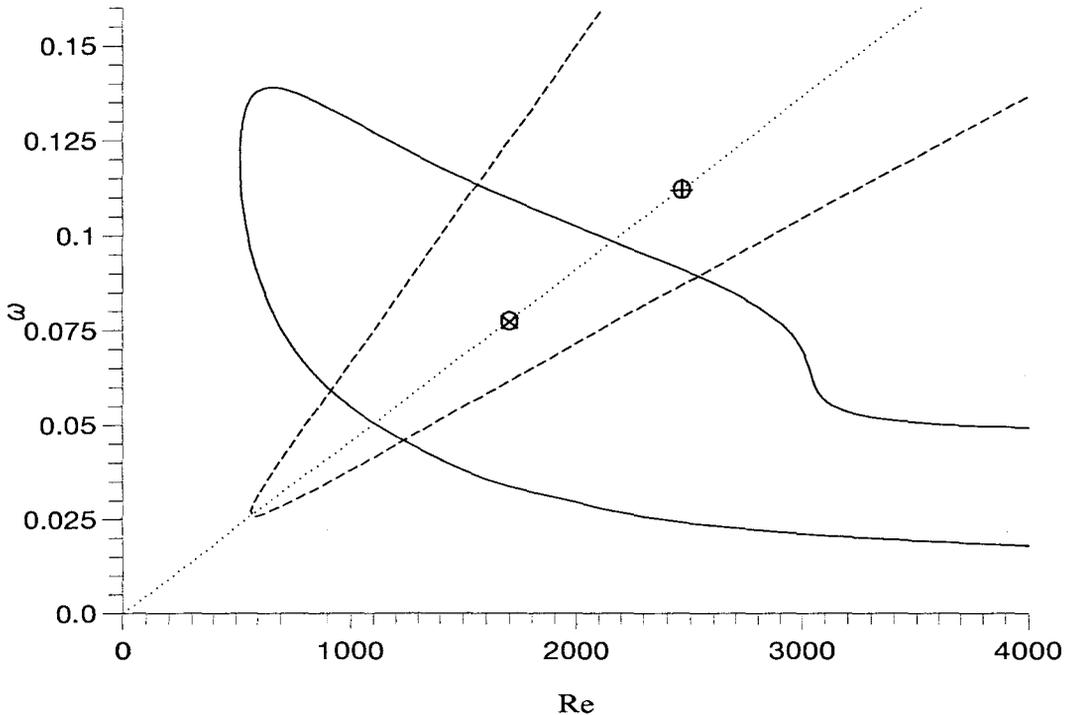


FIG. 4.18 - Courbes neutres, stabilité linéaire spatiale pour une plaque élastique montée sur ressorts: — onde de Tollmien-Schlichting, -- onde de surface; ... $Fr = 45.62 \times 10^{-6}$ avec $M = 0.92$, $C_Y = 0.66$ et $U_R = 0.78$.

$$\alpha_3 = -0.143 - i0.001012, \quad \alpha_4 = 0.0424 - i0.06001. \quad (4.4)$$

où α_1 a été identifié comme l'instabilité de Tollmien-Schlichting et α_2 comme l'instabilité de surface. Pour les deux autres modes, cette étude nous indique que le mode α_3 est une onde qui se propage vers l'amont et que les modes α_3 et α_4 ne passent jamais à un état amorti (pas de courbe de stabilité neutre associée à ces modes dans la Figure 4.18). Nous essaierons de comprendre un peu plus tard ce que cela peut signifier.

Continuons notre investigation en calculant le mode propre de la paroi en absence d'un forçage de pression (onde libre). Dans notre cas, pour la même fréquence et le même nombre de Reynolds, la quantité $\omega^2 m - \kappa$ étant positive, on génère une solution de type:

$$\tilde{\eta}(x) = \sin(\beta x) \text{ avec } \beta = \left(\frac{\omega^2 m - \kappa}{B} \right)^{1/4}. \quad (4.5)$$

Le nombre d'onde de l'onde libre β est donc égal à 0.0914. Or, quand le fluide est présent, la solution est modifiée et une instabilité de surface peut être observée. En effet, comme déjà identifié plus haut, le mode α_2 est associé à l'instabilité de surface.

Revenons maintenant à l'analyse de Carpenter et Garrad (1986) décrite dans le paragraphe 2.5.1 (qui considéraient le fluide comme un écoulement potentiel). Dans leur étude, on

peut identifier trois modes :

$$\gamma_1 = 0.0914, \quad \gamma_2 = -0.0918 - i0.107, \quad \gamma_3 = 0.0461 - i0.0568.$$

où l'on retrouve l'onde de surface γ_1 comme prédite ci-avant plus deux solutions. Le mode propre γ_3 possédant une partie réelle positive et une partie imaginaire très importante, Carpenter et Morris (1990) font un rapprochement avec l'onde évanescence décrite par Briggs (1964). Cette onde n'aurait alors pas de sens physique et ne serait donc pas considérée comme une instabilité. Enfin, le mode propre γ_2 correspond probablement au mode de divergence d'après Carpenter et Morris (1990) (la vitesse de phase est "négative").

A ce stade, il est clair que le premier nombre d'onde représente l'instabilité visqueuse dite Tollmien-Schlichting, le deuxième correspond au mode de l'onde libre, le troisième est une solution issue du couplage fluide-structure caractérisée par une direction de propagation vers les $x < 0$ et appelée onde de divergence et enfin le quatrième et dernier mode est également une solution issue du couplage fluide-structure appelé mode "évanescence". En comparant les modes propres issus de la théorie de stabilité linéaire avec l'étude de Carpenter et Morris (1990), on retrouve l'onde de surface et l'onde évanescence avec un bon accord. Par contre, on remarque qu'il existe une pauvre correspondance pour l'onde de divergence entre les prédictions de la théorie potentielle et les solutions numériques de la stabilité linéaire. La raison de cette différence est attribuée à l'importance des effets visqueux sur l'onde de divergence. Ces différents modes propres feront l'objet de discussion dans le chapitre 5.

4.3.1 Paroi souple semi-infinie

Dans un premier temps, nous cherchons à étudier les différents phénomènes pouvant caractériser le couplage fluide-structure à l'aide de la simulation spatiale. Un panneau souple de longueur semi-infinie est considéré, amorcé par une paroi rigide de taille trois λ_{TS} où la perturbation de vitesse longitudinale est introduite. Le profil injecté à l'entrée correspond donc au profil de la perturbation de vitesse pour l'instabilité de Tollmien-Schlichting sur paroi rigide avec une fréquence $\omega = 0.077554$ et un nombre de Reynolds $Re = 1700$, le nombre d'onde et la longueur d'onde correspondants étant $\alpha_r = 0.240$ et $\lambda_{TS} = 26.1$. La paroi souple a une longueur de $15\lambda_{TS}$. A la sortie, la dimension du domaine tampon doit être choisie de façon à ce que les instabilités atteignant cette limite sortent du domaine sans réflexions. L'observation générale des courbes neutres de stabilité linéaire dans nos travaux et dans la littérature montre que seulement deux modes sont des modes instables : le mode de Tollmien-Schlichting et le mode d'onde surface (les caractéristiques des modes de divergence et évanescence seront discutées par la suite). Par conséquent,

comme la longueur d'onde de l'instabilité de surface est 2.5 plus grande que la longueur d'onde de l'instabilité de Tollmien-Schlichting, la taille du domaine tampon est égale à $9\lambda_{TS}$ assurant la non-réflexion des instabilités étudiées. Le domaine complet possède donc une longueur totale de $27\lambda_{TS}$. Pour assurer la continuité de la paroi à ses bords (surtout en amont dans ce cas), des conditions de type encastrement sont préférées aux conditions de type rotule pour éviter une discontinuité de la dérivée première de la paroi. Par conséquent, nous posons $\eta = \partial\eta/\partial x = 0$ aux limites de la paroi. Ces conditions sont nécessaires pour notre procédure de résolution car celle-ci est basée sur un changement de variables qui introduit des termes différents dans les équations de Navier-Stokes qui dépendent du déplacement de la paroi, ce qui nécessite alors une régularité de η .

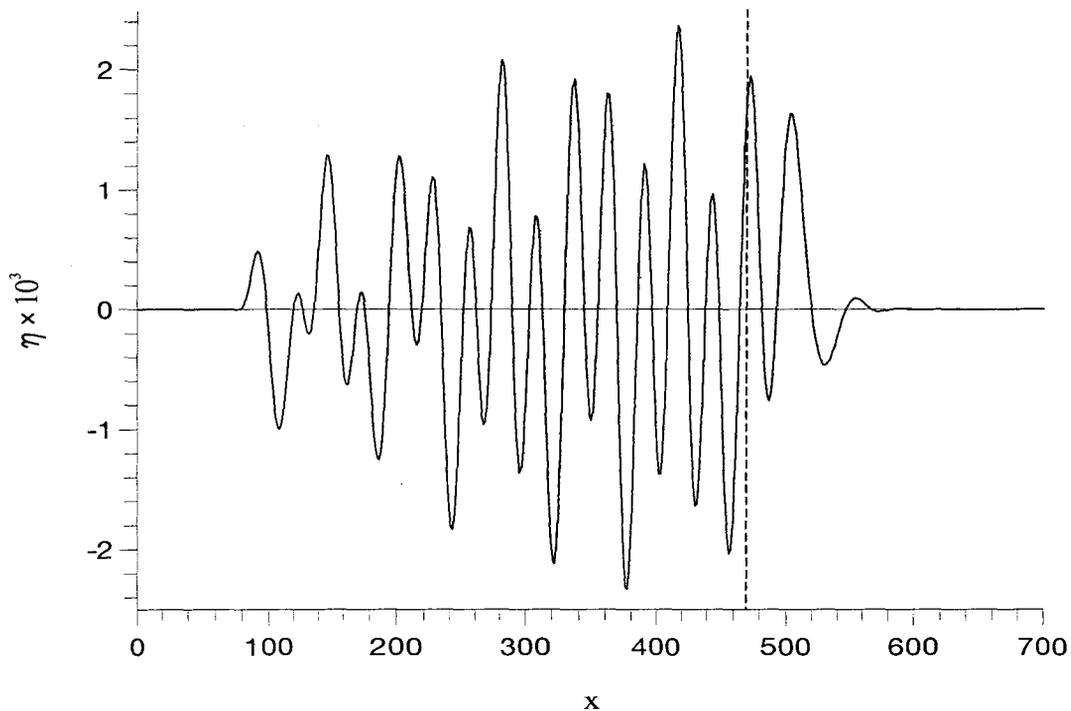


FIG. 4.19 - *Plaque élastique, évolution spatiale non linéaire à $t = 27T$ du déplacement de la paroi η pour $A = 0.001$, -- début du domaine tampon.*

La simulation spatiale débute au point \otimes de la Figure 4.18 ($Re = 1700$ et $\omega = 0.077554$) et le domaine physique termine à $Re = 2260$ sur la droite $Fr = 45.62 \times 10^{-6}$. En utilisant le système complet non linéaire, une amplitude initiale $A = 0.001$ a été considérée à l'entrée. Le déplacement de la paroi à l'instant $t = 27T$ est montré sur la Figure 4.19. On peut alors observer une interaction entre les différents modes d'instabilités qui forment la déformée de la paroi. Une transformée de Fourier discrète du déplacement de la paroi a été réalisée (la solution de la Figure 4.19) et le module de la transformée de Fourier spatiale est représenté sur la Figure 4.20. On voit clairement que la paroi

est fonction de deux modes spatiaux correspondants aux deux parties réelles des valeurs propres spatiales α_1 et α_3 soient l'onde de surface et l'onde de Tollmien-Schlichting (les deux instabilités de la Figure 4.18).

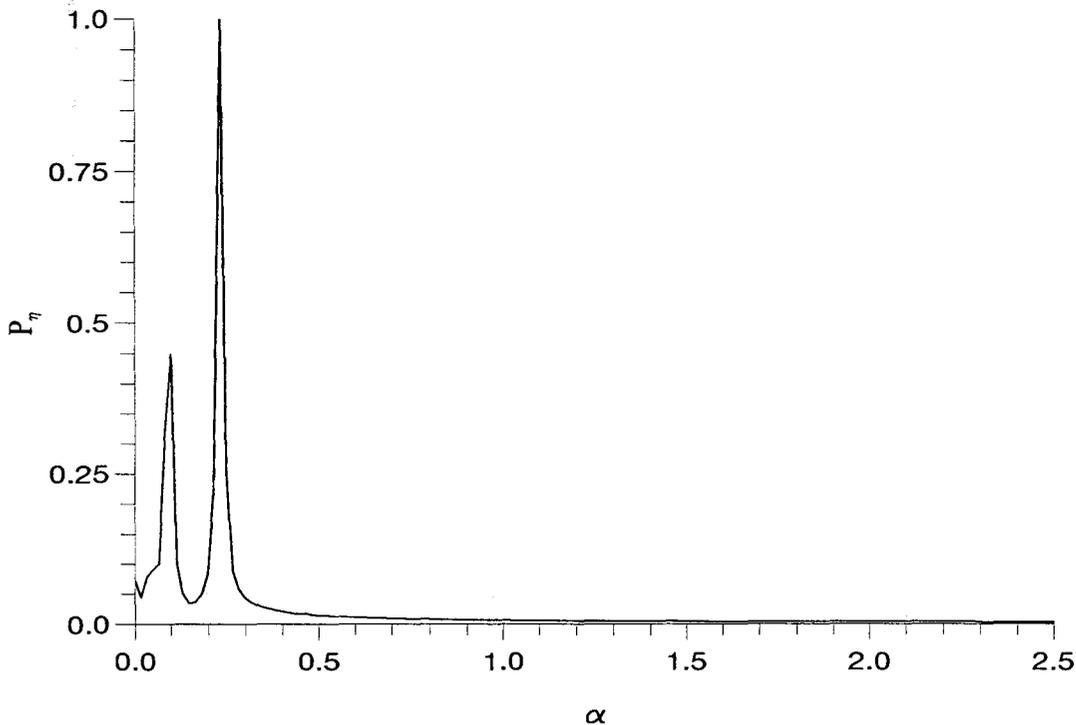


FIG. 4.20 - *Module de la transformée de Fourier spatiale de la paroi η pour la plaque élastique à $t = 27T$ pour $A = 0.001$.*

La Figure 4.21 représente la déformée de la paroi à la localisation $x = 157$ durant 54 périodes. Après un temps d'attente correspondant au temps que met l'onde pour atteindre la partie souple de la paroi (environ 2000 itérations), la paroi commence à se mouvoir du fait que la déformée de la paroi en amont influe sur son développement en aval. A 6000 itérations, la paroi subit une déformation plus importante ce qui correspond approximativement au moment où la perturbation injectée à l'entrée du domaine dépasse la localisation $x = 157$. Puis, la déformée de la surface se stabilise avec une certaine amplitude et une certaine fréquence. L'analyse du signal temporel de η à l'aide d'une transformée de Fourier fait apparaître une fréquence qui correspond à la fréquence du profil introduit au début du domaine (voir Figure 4.22).

Le maximum suivant y de la composante longitudinale de la perturbation de la vitesse est représenté sur la Figure 4.23 à $t = 27T$. L'instabilité de l'écoulement du fluide est dominée par l'onde de Tollmien-Schlichting pour s'atténuer progressivement dans le domaine tampon (représenté par la courbe en tirets). La Figure 4.24 montre l'évolution générale de l'amplitude du mode fondamental de la composante longitudinale de la perturbation

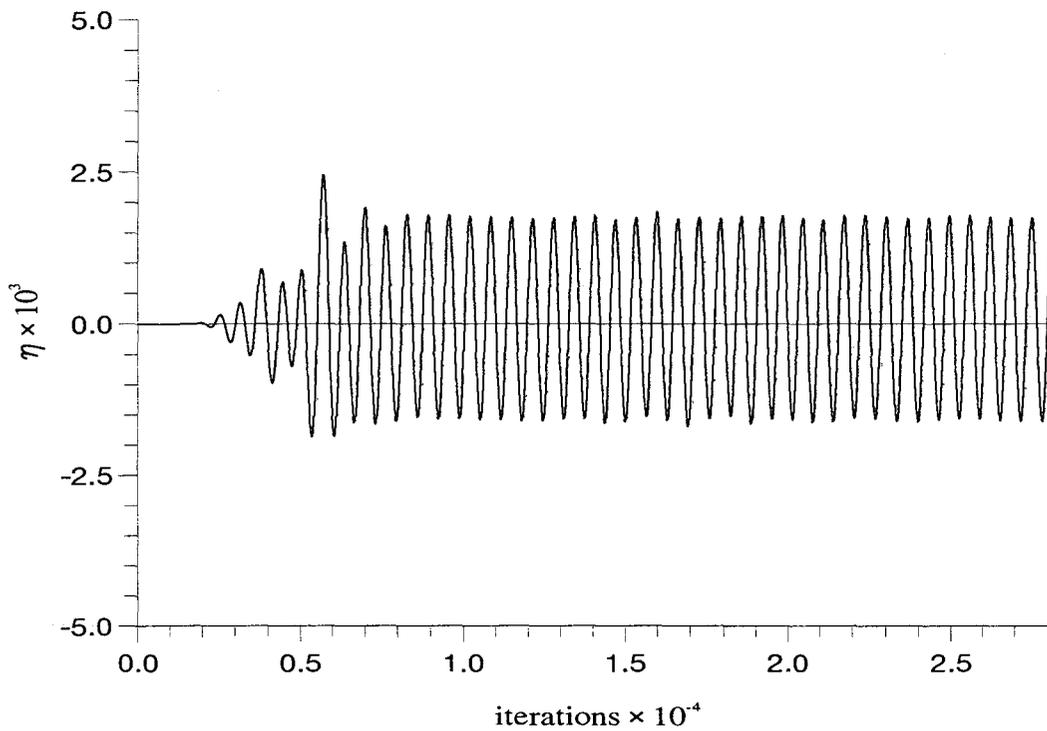


FIG. 4.21 - Plaque élastique, évolution temporelle non linéaire du déplacement de la paroi η pour $A = 0.001$ à $x = 314$.

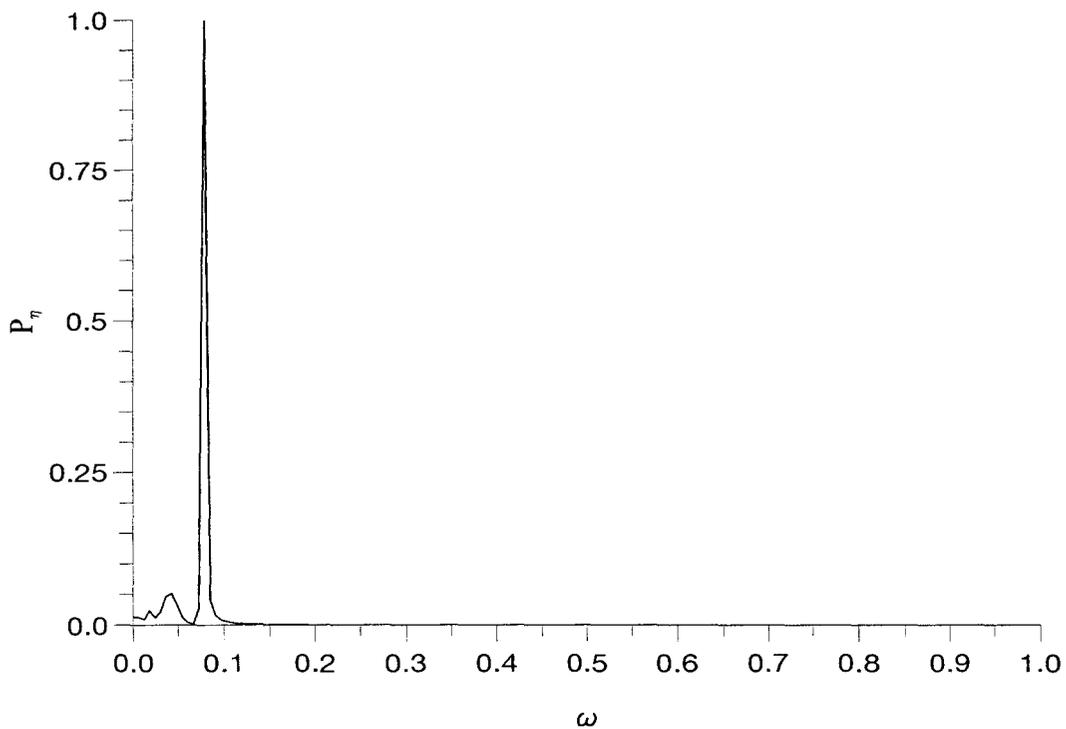


FIG. 4.22 - Module de la transformée de Fourier temporelle de la paroi η pour la plaque élastique à $x = 157$ pour $A = 0.001$.

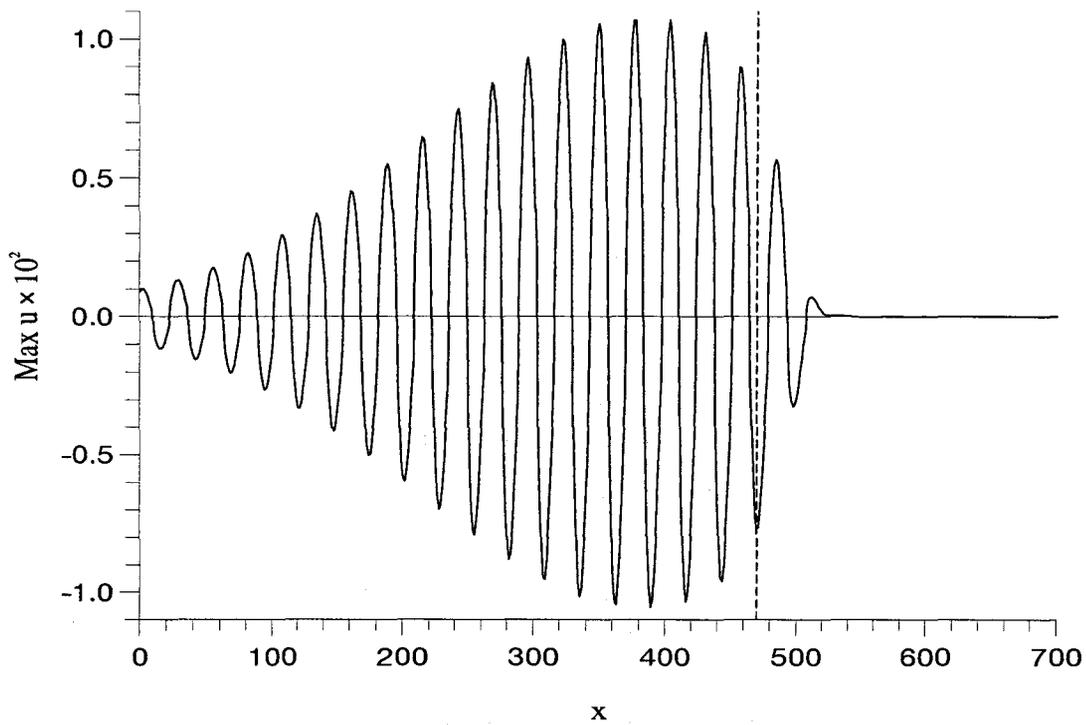


FIG. 4.23 - Maximum de la perturbation de la vitesse longitudinale u à $t = 27T$ pour une amplitude initiale $A = 0.001$; -- fin du domaine physique.

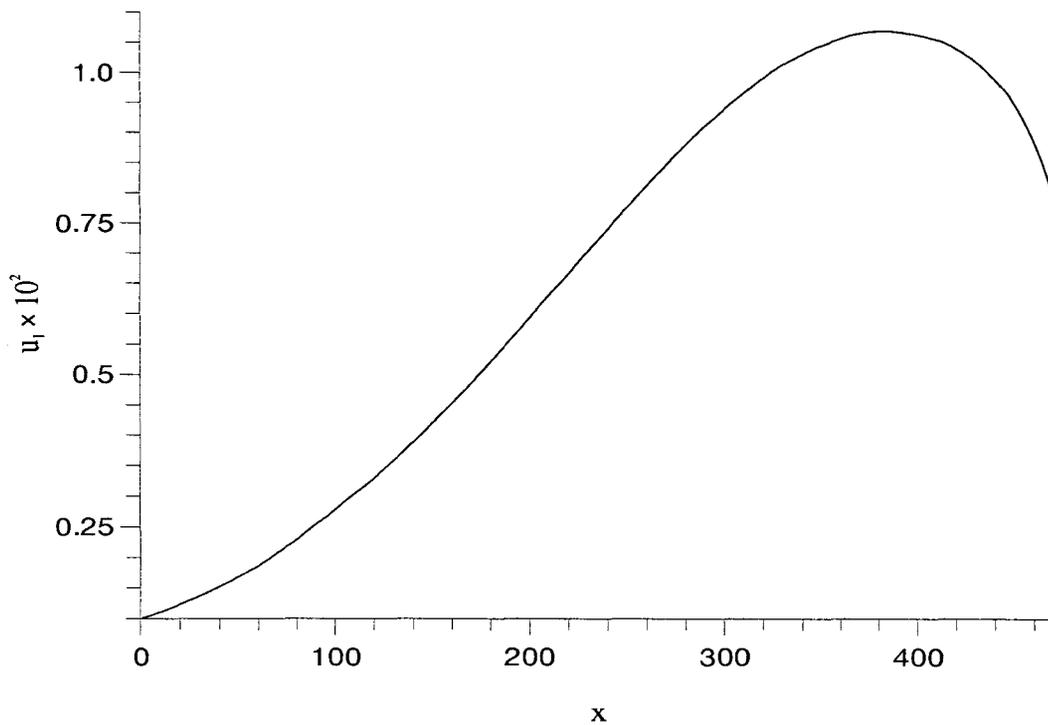


FIG. 4.24 - Maximum du mode fondamental de la perturbation de la vitesse longitudinale u pour une amplitude initiale $A = 0.001$.

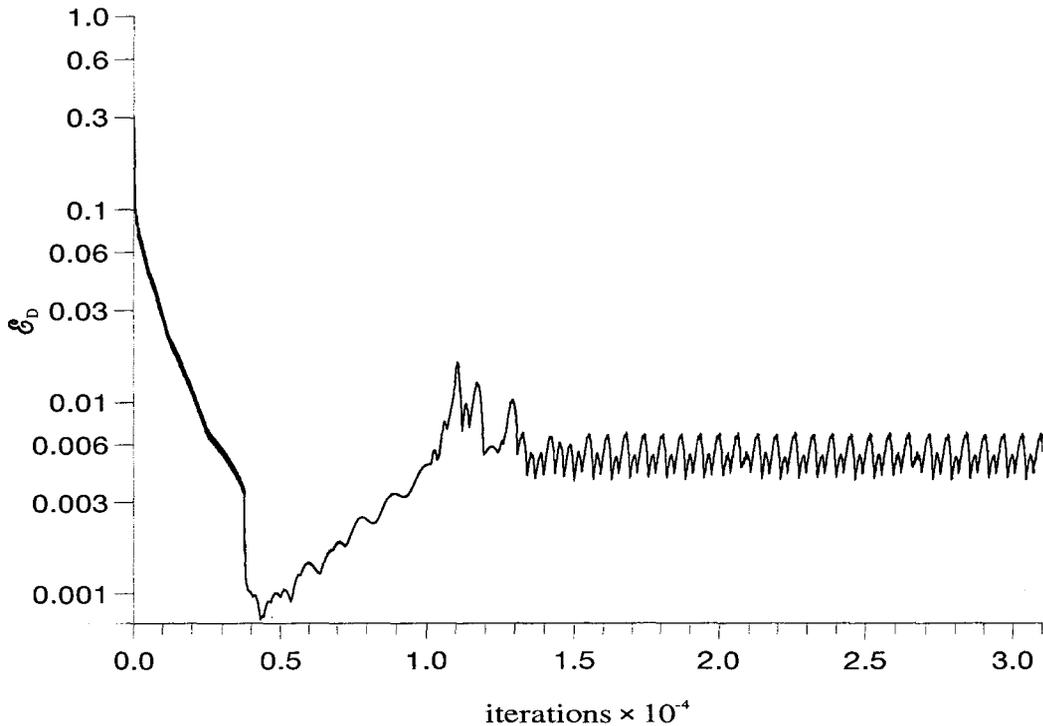


FIG. 4.25 - Erreur \mathcal{E}_D en t pour la paroi semi-infinie.

de la vitesse en fonction de x .

Enfin la Figure 4.25 montre une estimation de l'erreur réalisée sur la divergence en calculant :

$$\mathcal{E}_D(t) = \frac{\|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\|_{L^2}}{\|\vec{u}\|_{L^2}}. \quad (4.6)$$

Après une période transitoire pendant laquelle le système, initialement singulier suite à l'introduction de la perturbation à l'entrée, tend progressivement vers la solution, un état stationnaire apparaît. L'erreur \mathcal{E}_D est alors de l'ordre de 6×10^{-3} .

4.3.2 Paroi souple de longueur finie

Après avoir simulé l'interaction entre la couche limite de Blasius et la paroi souple semi-infinie, on s'intéresse maintenant à un cas plus réaliste d'un point de vue expérimental en considérant le cas de la paroi souple de longueur finie. Un panneau souple de longueur finie encastré dans une paroi rigide est considéré, le bord en amont est localisé à $3\lambda_{TS}$ de l'entrée et une plaque rigide de $6\lambda_{TS}$ est insérée après le bord en aval. La longueur de la surface souple étant prise égale à $15\lambda_{TS}$. Pour cette simulation, une plaque rigide a donc été introduite après la paroi souple jusqu'à la fin du domaine d'étude. Par conséquent, la perturbation de l'écoulement à la fin du domaine physique sera dominée par l'instabilité de Tollmien-Schlichting et un domaine tampon de $3\lambda_{TS}$ sera suffisant pour éviter les

réflexions à la sortie. Le domaine de calcul a ainsi une longueur totale de $27\lambda_{TS}$. De même que précédemment, des conditions de type encastrement sont utilisées aux bord en amont et en aval de la paroi pour obtenir une régularité de la déformée de la surface η .

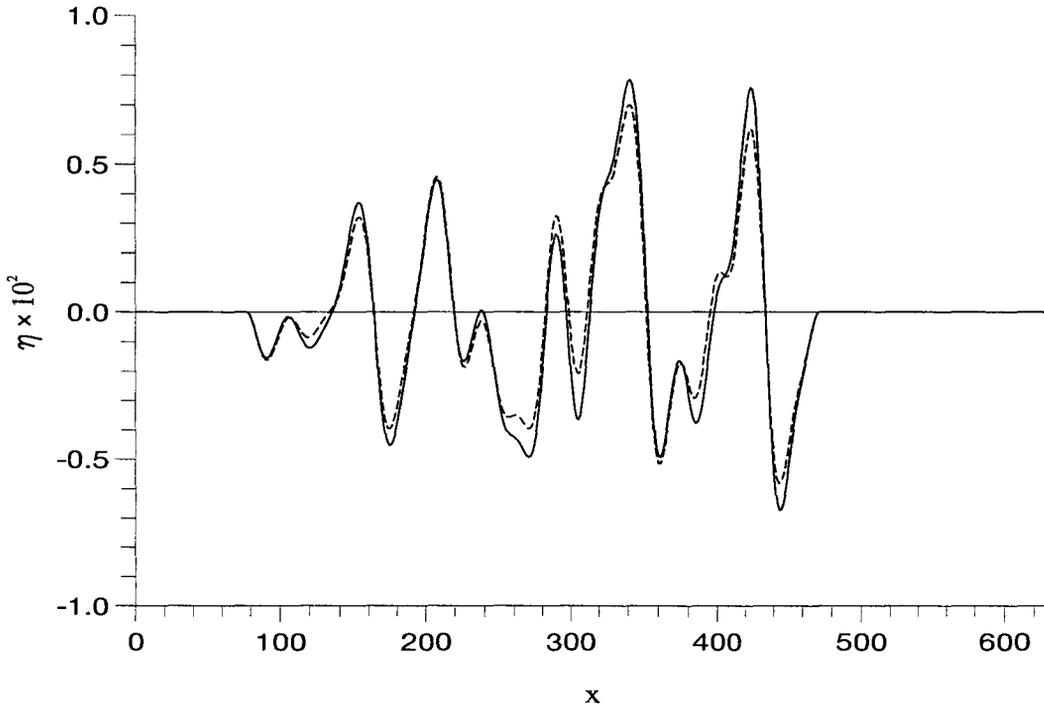


FIG. 4.26 - Plaque élastique, évolution spatiale à $t = 27T$ du déplacement de la paroi η ; — calcul non linéaire avec $A = 0.001$; - - - calcul linéaire.

Le développement spatial de la perturbation commence au point \otimes en $Re = 1700$ de la Figure 4.18 et le domaine physique se termine au second point \oplus en $Re = 2460$. En utilisant le système pleinement non linéaire, une amplitude initiale $A = 0.001$ a été considérée à l'entrée. Une simulation utilisant le système linéarisé a été effectuée également, pour comparaison. Le déplacement de la paroi à un temps $t = 27T$ est montré sur la Figure 4.26. D'abord, on observe que pour les deux simulations linéaire et non linéaire, la déformée de la paroi a un comportement assez semblable. En comparant ce résultat avec le déplacement de la paroi dans une configuration de type semi-infinie, on constate que le comportement spatial de la plaque est sensiblement différent. En effet, si on réalise une transformée de Fourier discrète de la paroi à un instant t (la ligne continue de la Figure 4.26) alors le module de la transformée de Fourier, représenté sur la Figure 4.28, met en évidence un phénomène spatial plus complexe car composé de plusieurs nombres d'ondes (quatre précisément). Les solutions données par la transformée de Fourier sont les suivantes : $\bar{\alpha}_1 = 0.233$, $\bar{\alpha}_2 = 0.096$, $\bar{\alpha}_3 = 0.137$ et $\bar{\alpha}_4 = 0.0686$ (avec une erreur sur le calcul du nombre d'onde $\Delta\alpha = 0.0185$). On observe alors clairement que les différentes valeurs correspondent avec un bon accord aux quatre parties réelles des valeurs propres

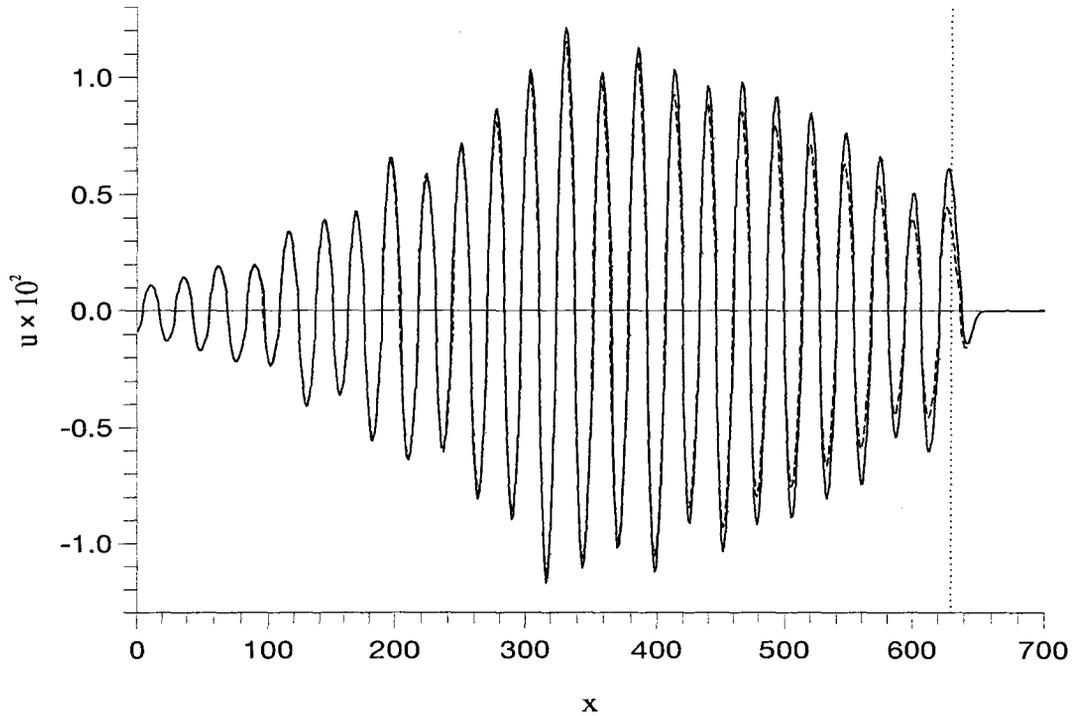


FIG. 4.27 - Plaque élastique, maximum de la perturbation de la vitesse longitudinale u à $t = 27T$; — calcul non linéaire avec $A = 0.001$; --- calcul linéaire; ··· fin du domaine physique.

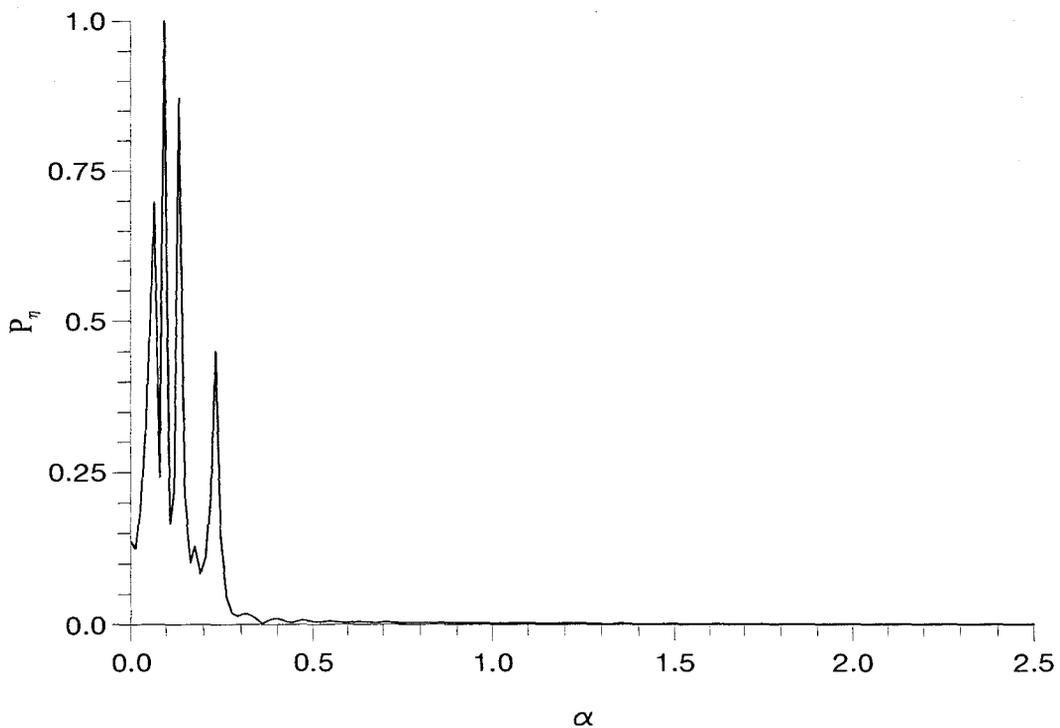


FIG. 4.28 - Module de la transformée de Fourier spatiale de la paroi η pour la plaque élastique de longueur finie à $t = 27T$ pour $A = 0.001$.

spatiales données en (4.4). Les différences observées pour les trois nombres d'ondes α_1 , α_2 et α_3 peuvent être associées aux différentes influences de la simulation spatiale : effets non parallèle, non linéaire, de la structure sur l'écoulement et de la taille finie de la paroi souple. Pour le dernier nombre d'onde α_4 , on constate que la différence avec la stabilité linéaire est légèrement plus importante. La longueur d'onde de ce mode étant de l'ordre de 150, celui-ci ne peut se développer que 2.5 fois sur la longueur de la paroi souple. Par conséquent, on peut supposer que la paroi étudiée n'est pas d'envergure assez importante pour observer proprement ce mode évanescent (ce qui se traduit aussi par la valeur de l'erreur $\Delta\alpha$ proche de la solution α_4). Le maximum suivant y de la composante longitudinale de la perturbation de la vitesse est représenté sur la Figure 4.27. L'instabilité de l'écoulement du fluide est clairement dominé par l'onde de Tollmien-Schlichting, puis celle-ci s'atténue progressivement dans le domaine tampon. Une comparaison avec la simulation linéaire montre que pour une amplitude à l'entrée $A = 0.001$, les non-linéarités affectent seulement légèrement l'amplitude de la perturbation totale. L'amplitude diminue en atteignant la fin du domaine physique car celle-ci est en dehors de la région instable (cf. Figure 4.18).

Le tracé de la déformée de la paroi au cours du temps est représenté pour $x = 210$ (son centre) sur la Figure 4.29. La réponse fréquentielle de la paroi illustre la grande complexité de l'évolution temporelle de la paroi de longueur finie. En effet, la fréquence de la perturbation injectée à l'entrée du domaine est retrouvée mais une variation de l'amplitude de la paroi souple en temps est observée.

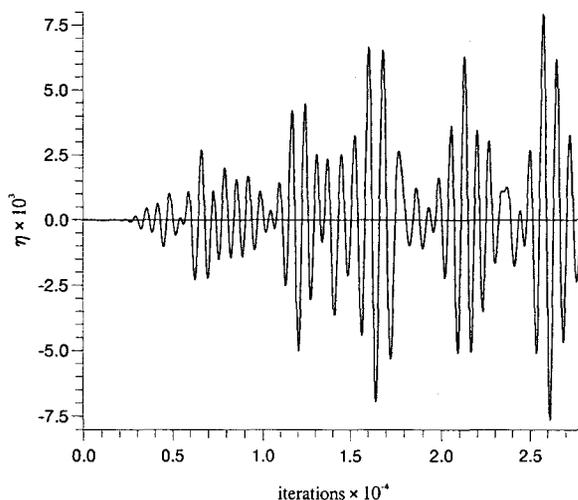


FIG. 4.29 - Déformée de la paroi en temps pour la plaque fine en $x = 210$.

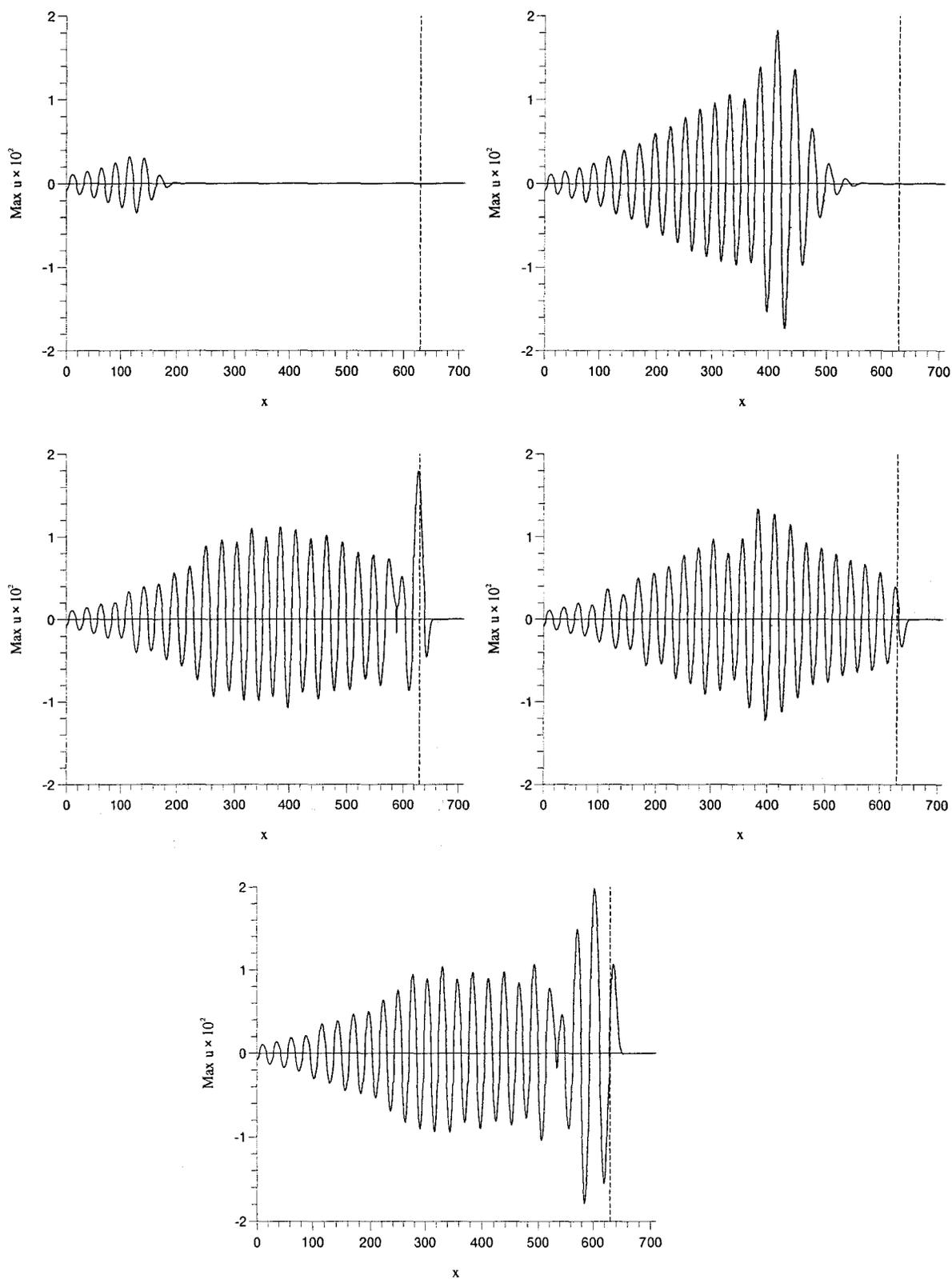


FIG. 4.30 - Maximum suivant y de la perturbation de la vitesse longitudinale u à différents temps $t : 5, 15, 25, 35, 45T$; --- début du domaine tampon.

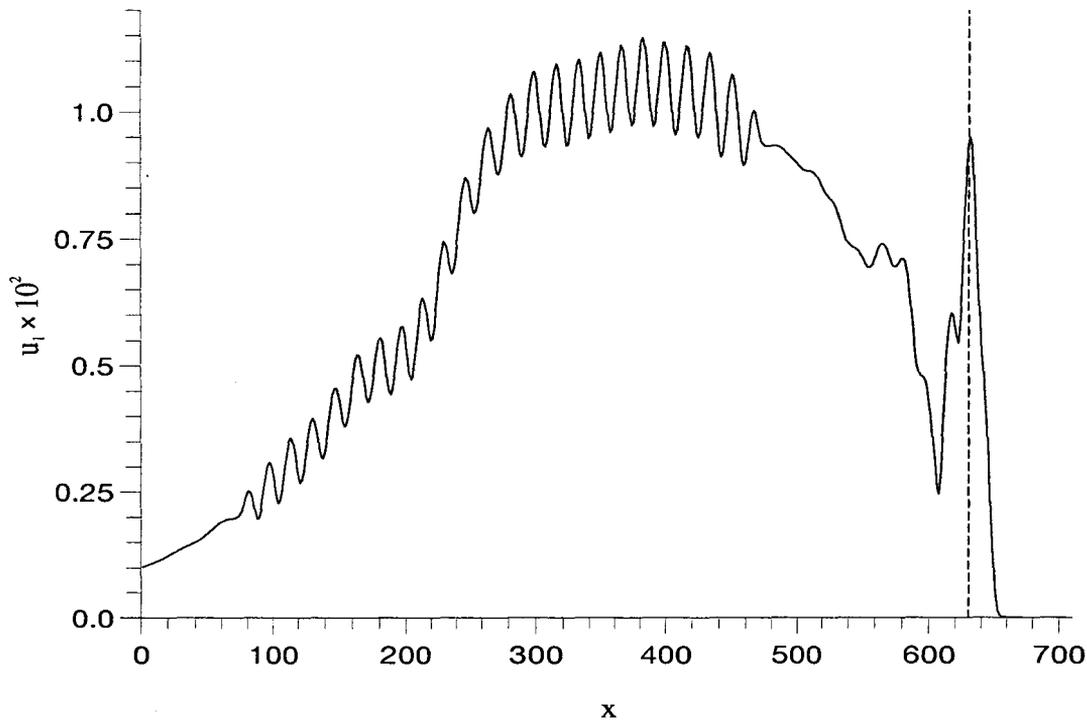


FIG. 4.31 - Maximum du mode fondamental de la perturbation de la vitesse longitudinale u pour une amplitude initiale $A = 0.001$ pour t variant $27T$ à $28T$.

Pour compléter notre analyse du phénomène, l'évolution spatiale de la perturbation de la vitesse longitudinale est montrée sur les Figures de 4.30 pour plusieurs temps qui diffèrent de 10 périodes, laquelle se propage alors dans la direction de l'écoulement (entretenu par le profil de vitesse à l'entrée). Bien que celle-ci soit dominée par le mode de Tollmien-Schlichting, contrairement à la simulation sur la plaque de longueur semi-infinie, la vitesse u est perturbée par d'autres modes. Sur ces figures, on remarque que des paquets d'ondes sont convectés par l'écoulement pour sortir du domaine physique. Finalement, le calcul du mode fondamental de la perturbation de la vitesse longitudinale vient confirmer les observations faites précédemment. La Figure 4.31 met clairement en évidence la superposition d'un autre mode au mode de Tollmien-Schlichting. Pour $x < 80$, le mode u_1 se développe sur la paroi rigide (mode visqueux), pour $x > 80$ et $x < 470$, le mode u_1 est composé du mode visqueux et d'un autre mode issu du couplage fluide-structure et pour $x > 470$ le mode u_1 redevient un mode de paroi rigide exhibant cependant un caractère oscillatoire. Par conséquent, il est clair que l'évolution de perturbations d'une couche limite le long d'une paroi souple de longueur finie n'est plus un phénomène aussi "simple" que la simulation sur paroi semi-infinie. La complexité du phénomène rend les observations beaucoup plus difficiles et les différentes instabilités présentes peuvent être alors à la base d'une détérioration du processus instable (instabilité absolue, par exemple).

4.4 Résumé

Une méthode numérique a été développée pour étudier l'évolution spatiale de perturbations dans une couche limite en présence de parois souples. La méthode prend en compte l'interaction fluide-structure complètement non linéaire aussi bien que les effets non parallèles causés par le déplacement de la paroi et la croissance de la couche limite.

La méthode est capable de reproduire l'évolution spatiale des ondes de type Tollmien-Schlichting dans le régime linéaire ou non linéaire. L'influence des effets non parallèles sur l'accroissement des perturbations a également été mise en évidence.

Quant à l'influence des non-linéarités lors du couplage entre fluide et structure, une expérience numérique réaliste a été menée pour une membrane sous tension, qui avait été considérée antérieurement sous l'hypothèse d'un écoulement parallèle (Ehrenstein et Rossi, 1996). L'importance des non-linéarités se manifeste alors par la présence d'une déformation globale de la paroi. Ce résultat est à rapprocher de Lucey *et al.* (1997a) qui développait un modèle numérique pour étudier la réponse hydroélastique de parois souples sous l'action d'un écoulement principal uniforme. Leur résolution numérique était basée sur la méthode des singularités (sources). Leur étude permettait d'examiner l'influence des non-linéarités des revêtements souples (avec amortissement) sur le développement d'une perturbation du fluide instable en écoulement potentiel. Dans leur travaux, la réponse non-linéaire d'une membrane sous-tension (sans ressorts) est alors dominée par un mode fondamental sinusoïdale.

L'algorithme est capable de traiter des parois souples d'une longueur finie, le cas test considéré ici étant celui d'une plaque mince flexible montée sur des ressorts. Une région fortement instable a été étudiée, et la simulation a pu reproduire les différentes sources d'instabilités présentes dans ce système couplé fluide-structure. Le modèle numérique est ainsi proche d'une réalité expérimentale dans la mesure où les équations de Navier-Stokes sont résolues dans un domaine spatial, dont l'évolution est conditionnée par l'interaction avec la paroi. Néanmoins, après avoir identifié les différents modes présents dans une couche limite de Blasius interagissant avec une paroi souple, la nature de ces derniers n'est pas complètement définie. En effet, il paraît clair que les modes de Tollmien-Schlichting et de surface sont des instabilités qui se développent dans le sens de l'écoulement. Quant aux modes de divergence et évanescents, ceux-ci apparaissent comme des modes se propageant dans le sens opposé de l'écoulement. Or, Lucey et Carpenter (1992) ont classifié le mode de divergence comme une instabilité absolue. D'une manière générale, la complexité de l'interaction entre les différents modes issus du couplage fluide-structure laissent à penser qu'une coalescence entre certains modes (l'un se propageant dans le sens de l'écoulement et

l'autre dans le sens inverse) peut amener la naissance d'une instabilité de nature absolue. Le chapitre suivant propose d'aborder ses différents points en donnant des éclaircissements quant à l'existence et la nature de chaque mode identifié.

Chapitre 5

Instabilités convectives et absolues

Dans ce chapitre, nous proposons une analyse sur la nature convective ou absolue d'une perturbation solution du système couplé fluide-structure. La stabilité linéaire du système physique est décrite par un système d'équations aux dérivées partielles (2.2) et (2.4) couplé au modèle de paroi (2.13) (via la pression et les contraintes visqueuses) et aux conditions cinématiques ((2.11) à (2.15)), que l'on écrit formellement :

$$D \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, U(y), Re, C_i \right) \vec{\Psi}(x, y, t) = 0. \quad (5.1)$$

Dans (5.1), D est un opérateur aux dérivées partielles en t , x et y , linéaire ; $U(y)$ représente la vitesse de l'écoulement dont on étudie la stabilité, Re est le nombre de Reynolds de l'étude, les C_i désignent les différents coefficients de la paroi et $\vec{\Psi}(x, y, t)$ est le vecteur $(\eta(x, t), u(x, y, t), v(x, y, t), p(x, y, t))$.

Une écriture en modes normaux de ce système permet de réaliser des études de stabilité linéaire en théorie temporelle ou spatiale comme présentées dans le chapitre 2. Contrairement à la couche limite sur une paroi rigide qui est connue pour être convectivement instable (démontré pour un écoulement dans un canal par Deissler en 1987), Carpenter (1986) met en évidence la possibilité de l'apparition d'une instabilité absolue lorsque la paroi est flexible.

Afin d'exposer les concepts d'instabilités convectives et absolues, nous présenterons brièvement l'analyse pour un écoulement parallèle. Le concept a été développé initialement pour les problèmes d'instabilités de fluide par Huerre et Monkewitz (1985). Une revue récente des concepts fondamentaux de la nature convective ou absolue de l'instabilité en hydrodynamique a été réalisée par Huerre et Rossi (1998). L'application de ces méthodes à des écoulements visqueux de type Poiseuille plan a été faite par Deissler (1987) en utilisant la technique du col (Bender et Orszag, 1978) pour évaluer le comportement asymptotique du paquet d'onde et par Brevdo (1992) en déterminant numériquement

le spectre spatio-temporel pour ce problème. Pour le cas de la paroi souple, Lucey et Carpenter (1992) ont étudié l'évolution de l'instabilité de divergence sur des panneaux de longueur finie dans un écoulement potentiel uniforme et ont fait remarquer que l'instabilité de divergence sur de tels panneaux était probablement absolue. Un travail rigoureux de Yeo *et al.* (1996) met en évidence l'apparition d'une instabilité absolue pour une couche limite de Blasius interagissant avec des parois viscoélastiques simple couche. Récemment, un travail de De Langre et Ouvrard (1999) sur l'influence de la paroi souple sur la nature convective ou absolue d'un tuyau transportant du fluide a été réalisé. Leur étude montre l'influence de différents paramètres physiques sur la nature stable, convectivement instable ou absolument instable du système.

5.1 Concepts

5.1.1 Stabilité hydrodynamique

Comme on cherche à étudier une perturbation évoluant simultanément dans l'espace et dans le temps, il est suffisant de considérer la réponse spatio-temporelle du système physique à une impulsion. On impose à $t = 0$ une impulsion localisée en $x = 0$ de type $S(x, y) = \delta(x) f(y)$ avec δ la distribution de Dirac.

Dans le cas d'un écoulement de fluide parfait, en appliquant successivement la transformée de Fourier :

$$\hat{\Psi}(\alpha, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, y, t) e^{-i\alpha x} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (5.2)$$

et la transformée de Laplace, en supposant $\hat{\Psi}(\alpha, y, t) = 0$ si $t < 0$,

$$\hat{\hat{\Psi}}(\alpha, y, \omega) = \int_0^{+\infty} \hat{\Psi}(\alpha, y, t) e^{i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{C} \quad (5.3)$$

on obtient l'équation de Rayleigh avec second membre et conditions aux bords (Drazin et Reid, 1981) où Ψ est la fonction de courant :

$$L \hat{\hat{\Psi}}(\alpha, y, \omega) = \varphi(\alpha, y, \omega) = -i \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right) f(y)}{\alpha U'(y) - \omega}, \quad (5.4)$$

avec

$$L = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 - \frac{U''(y) \alpha}{\alpha U'(y) - \omega}, \quad (5.5)$$

$$\hat{\hat{\Psi}}(\alpha, y_1, \omega) = \hat{\hat{\Psi}}(\alpha, y_2, \omega) = 0 \text{ avec } y_1 \leq y \leq y_2. \quad (5.6)$$

La solution de cette équation différentielle en y avec second membre et conditions aux bords peut être obtenue en appliquant la méthode de la fonction de Green (Bender et Orszag, 1978). Le concept d'instabilités absolues et convectives dans ce cas a été largement décrit depuis le travail Huerre et Monkewitz de 1985 (cf. également Huerre et Monkewitz, 1990, Huerre et Rossi, 1998 entre autres).

Dans le cas présent, l'étude de stabilité linéaire a été menée après discrétisation du système (5.1). L'opérateur différentiel en y est discrétisé par la méthode de collocation Chebyshev en chaque points y_j (points de collocation). $\vec{\Psi}$ est solution d'un système de M ($M =$ nombre de points en y) équations aux dérivées partielles en x et t . Notons :

$$\vec{\Psi}(x, t) = \{(u(x, y_j, t), v(x, y_j, t), p(x, y_j, t), \eta(x, t)), j = 1 \cdots M\}, \quad (5.7)$$

alors pour pouvoir déterminer numériquement les caractéristiques de *stabilité temporelle et spatiale*, nous devons être en mesure de calculer tantôt $\omega(\alpha)$ ou $\alpha(\omega)$ en résolvant un problème aux valeurs propres généralisées complexes. Après application des transformées de Fourier (5.2) et de Laplace (5.3) à $\vec{\Psi}(x, t)$, il résulte un système d'équations algébriques linéaires. Or, on remarquera que la fréquence complexe ω se présente non-linéairement (au carré) dans l'équation dynamique de la paroi et que le nombre d'onde complexe α apparaît au carré dans le système de Navier-Stokes linéarisé pour le champ de vitesses et en puissance quatre dans le système dynamique pour η . Par conséquent, la non-linéarité est "linéarisée" en introduisant des fonctions auxiliaires, comme dans la méthode matricielle de Bridges et Morris (1984). Posons :

$$\hat{\hat{\Phi}}(\alpha, \omega) = \left(\hat{\hat{\Psi}}(\alpha, \omega), \omega \hat{\eta}, \alpha \hat{\eta}, \alpha^2 \hat{\eta}, \alpha^3 \hat{\eta}, \alpha \hat{\hat{\Psi}}_1(\alpha, \omega), \right) \quad (5.8)$$

avec

$$\hat{\hat{\Psi}}_1(\alpha, \omega) = \left\{ \left(\hat{u}(\alpha, y_j, \omega), \hat{v}(\alpha, y_j, \omega) \right), j = 1 \cdots M \right\}, \quad (5.9)$$

et où $\hat{\hat{\Psi}}$ est la solution du problème après application de (5.2) et (5.3) alors le système équivalent à (5.1), après discrétisation en y et application des transformées de Fourier (5.2) et de Laplace (5.3), peut s'écrire sous la forme :

$$(\alpha \mathbf{A} + \omega \mathbf{B} + \mathbf{C}) \hat{\hat{\Phi}} = \vec{\varphi}. \quad (5.10)$$

Les matrices A , B et C sont données en annexe et $\vec{\varphi}$ représente la contribution de la condition initiale $S(x, y) = \delta(x) f(y)$ avec la fonction $f(y)$ discrétisée en y .

Formellement, (5.10) peut s'écrire sous la forme :

$$\hat{\hat{\Phi}} = \frac{E(\alpha, \omega)}{\det(\alpha \mathbf{A} + \omega \mathbf{B} + \mathbf{C})} \vec{\varphi}, \quad (5.11)$$

avec $E(\alpha, \omega)$ la matrice transposée des co-facteurs. Les caractéristiques de stabilité sont obtenues par la relation $\det(\alpha \mathbf{A} + \omega \mathbf{B} + \mathbf{C}) = 0$, et pour des valeurs propres pertinentes en vue de la stabilité hydrodynamique, cette relation s'apparente à la relation de dispersion $D(\alpha, \omega) = 0$.

5.1.2 Analyse temporelle

Dans la théorie temporelle, on calcule $\omega \in \mathbb{C}$ en fonction des $\alpha \in \mathbb{R}$. Appliquant la transformée de Laplace inverse au système (5.11), on peut écrire formellement pour la transformée de Fourier de $\vec{\Phi}$:

$$\hat{\vec{\Phi}}(\alpha, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_\omega} \frac{E(\alpha, \omega)}{D(\alpha, \omega)} \vec{\varphi} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (5.12)$$

Pour $t < 0$, le contour L_ω étant localisé au-dessus de toutes les branches temporelles (L_ω étant le contour de Bromwich schématisé ci-après), on obtient :

$$\hat{\vec{\Phi}}(\alpha, t) = 0, \quad \text{pour } t < 0. \quad (5.13)$$

Pour $t > 0$, pour un α donné, il existe un ensemble discret de $\omega(\alpha)$ noté $\omega_j(\alpha)$ donnant, après utilisation du théorème des résidus,

$$\hat{\vec{\Phi}}(\alpha, t) = -i \sum_j \frac{E(\alpha, \omega_j(\alpha)) \vec{\varphi} e^{-i\omega_j(\alpha)t}}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(\alpha, \omega_j(\alpha))}. \quad (5.14)$$

La solution du problème étant alors :

$$\vec{\Phi}(x, t) = -\frac{i}{2\pi} \sum_j \int_{F_\alpha} \frac{E(\alpha, \omega_j(\alpha)) \vec{\varphi} e^{i(\alpha x - \omega_j(\alpha)t)}}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(\alpha, \omega_j(\alpha))} d\alpha \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (5.15)$$

Ici, la somme \sum_j doit faire intervenir tous les résidus, mais d'un point de vue de l'instabilité, seules les valeurs $\omega_j(\alpha)$ telles que la partie imaginaire de $(\omega_j(\alpha))$ soit positive apportent une contribution. On peut alors déterminer un taux de croissance temporel maximal donné par

$$\omega_{i,max} = \text{Max} \{ \omega_{j,i}(\alpha), \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et tout indice } j \}. \quad (5.16)$$

L'évolution temporelle de $\Phi(x, y, t)$, écrite par l'équation (5.15), fournit le critère de stabilité et d'instabilité suivant :

- si $\omega_{i,max} > 0$ alors la perturbation croît exponentiellement en temps et l'écoulement de base est linéairement instable ;
- si $\omega_{i,max} < 0$ alors pour tout nombre d'onde la perturbation décroît en temps et l'écoulement de base est linéairement stable.

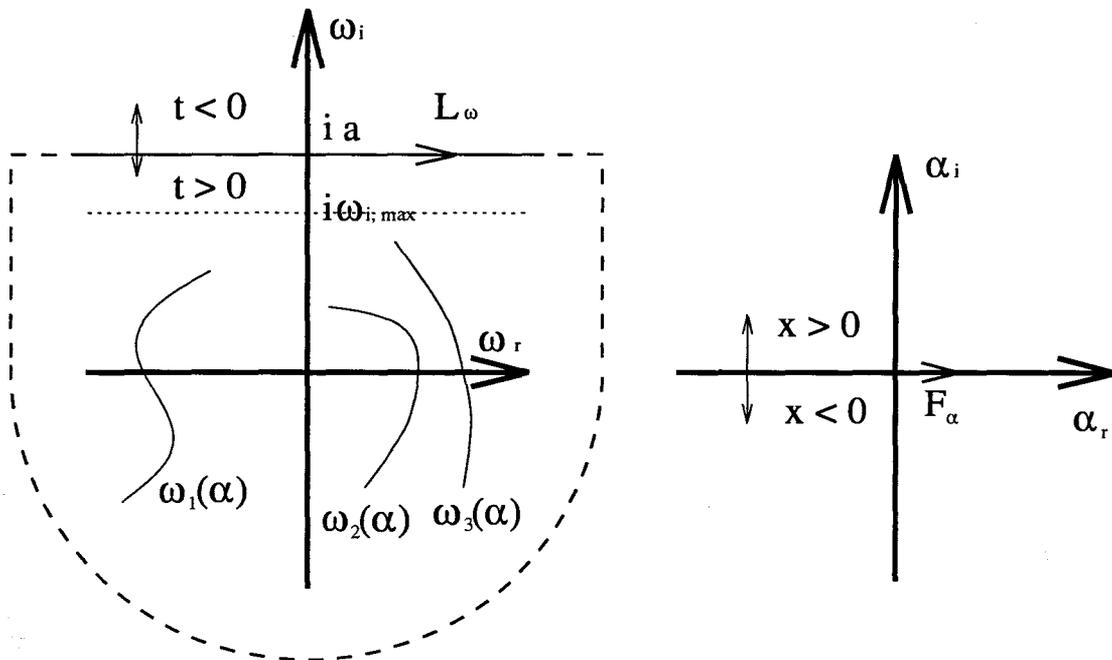


FIG. 5.1 - Contours d'intégration : à gauche, dans le plan complexe ω ; à droite, dans le plan complexe α . Les courbes (à gauche) représentent les localisations des modes temporels $\omega_j(\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ (i.e. le long de F_α .)

5.1.3 Analyse spatiale

Les modes qui croissent en espace plutôt qu'en temps joue souvent un rôle déterminant lors de la transition d'écoulement ouvert comme, par exemple, les couches limites.

Introduisons $\alpha \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{C}$, la relation de dispersion $D(\alpha, \omega) = 0$ fournit des spectres $\alpha(\omega)$. Ces spectres sont des résidus de (5.11), qui peuvent être séparés en deux familles $\alpha^+(\omega)$ et $\alpha^-(\omega)$. En effet, la famille $\alpha^+(\omega)$ telle que $\text{Im}(\alpha^+(\omega)) > -b$ (pour un réel b positif) permet par transformation inverse de déterminer la perturbation pour $x > 0$, tandis que la famille $\alpha^-(\omega)$ avec $\text{Im}(\alpha^-(\omega)) < c$ (pour un réel c positif) décrit la perturbation pour $x < 0$.

Afin d'opérer la transformation inverse, il convient de déformer le contour F_α dans le plan complexe de manière à séparer les deux familles de résidus (cf. Figure 5.2). Pour passer continûment d'une instabilité temporelle à une instabilité spatiale, choisissons d'abord un contour L_ω avec $a > \omega_{i,max}$. Dans ce cas $\text{Im}(\alpha^+(\omega)) > 0$ et $\text{Im}(\alpha^-(\omega)) < 0$, car il n'existe pas de nombre d'onde réel α donnant lieu à un facteur d'amplification temporelle pour un ω_i supérieur à un $\omega_{i,max}$ et l'axe des réels sépare les familles $\alpha^+(\omega)$ et $\alpha^-(\omega)$ dans le plan des nombres d'onde complexe.

Maintenant, le contour L_ω est abaissé continûment et les résidus des équations de

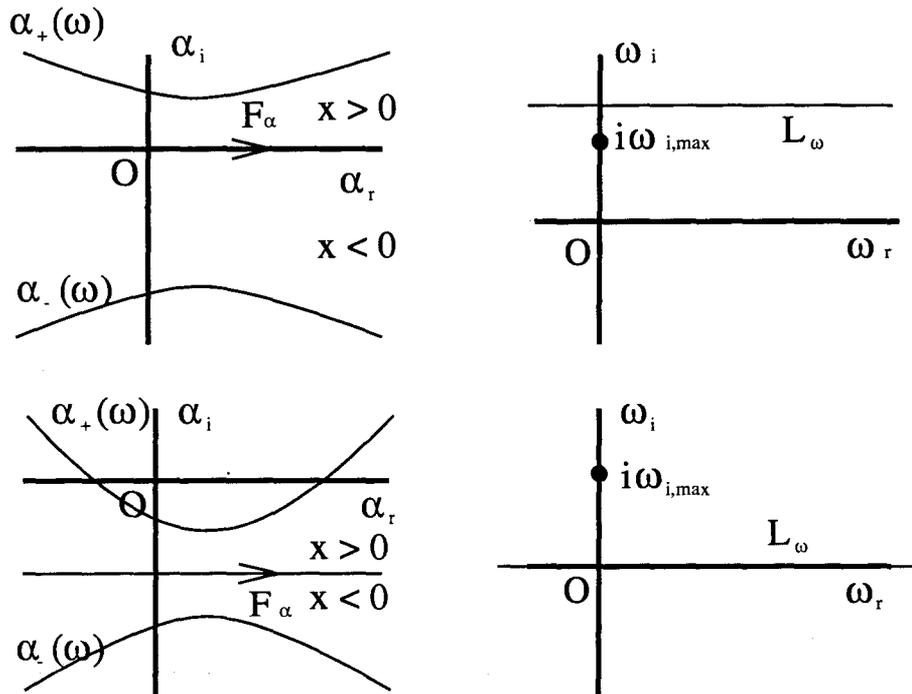


FIG. 5.2 - Localisations des branches spatiales pour un contour L_ω abaissé jusqu'à l'axe des réels.

dispersion $D(\alpha^+(\omega), \omega) = 0$ et $D(\alpha^-(\omega), \omega) = 0$ sont calculés. Deux situations peuvent alors se produire :

- On arrive à abaisser L_ω jusqu'à l'axe des réels et on peut déterminer $\alpha^+(\omega)$ tel que $D(\alpha^+(\omega), \omega) = 0$ pour $\omega \in \mathbb{R}$ et, pour un intervalle de fréquences, un ou plusieurs modes du spectre vérifient $\text{Im}(\alpha^+(\omega)) < 0$. Alors dans l'évaluation des intégrales de Fourier et de Laplace inverses, il apparaît des termes $e^{i(\alpha^+(\omega_r)x - \omega_r t)}$ pour $x > 0$. Si $\text{Im}(\alpha^+(\omega_r)) < 0$ alors lorsque x croît, la perturbation croît également, tout en étant périodique en temps. On dit que l'écoulement est spatialement instable (voir Figure 5.2) ;
- Pour un contour L_ω avec $\text{Im}(\omega) > 0$, on n'arrive plus à déconnecter les branches $\alpha^+(\omega)$ et $\alpha^-(\omega)$ en un point (α_0, ω_0) . Cette singularité est déterminée par $\frac{\partial D}{\partial \alpha}(\alpha_0, \omega_0) = 0$ tel que $D(\alpha_0, \omega_0) = 0$. Ce point est alors appelé *point de pincement* (voir Figure 5.3). Dans ce cas, l'instabilité ne peut plus être qualifiée de spatiale, tout au moins, on ne peut plus distinguer une direction de propagation privilégiée de l'instabilité (les solutions pour $x < 0$ et $x > 0$ ne peuvent plus être séparées par transformation inverse).

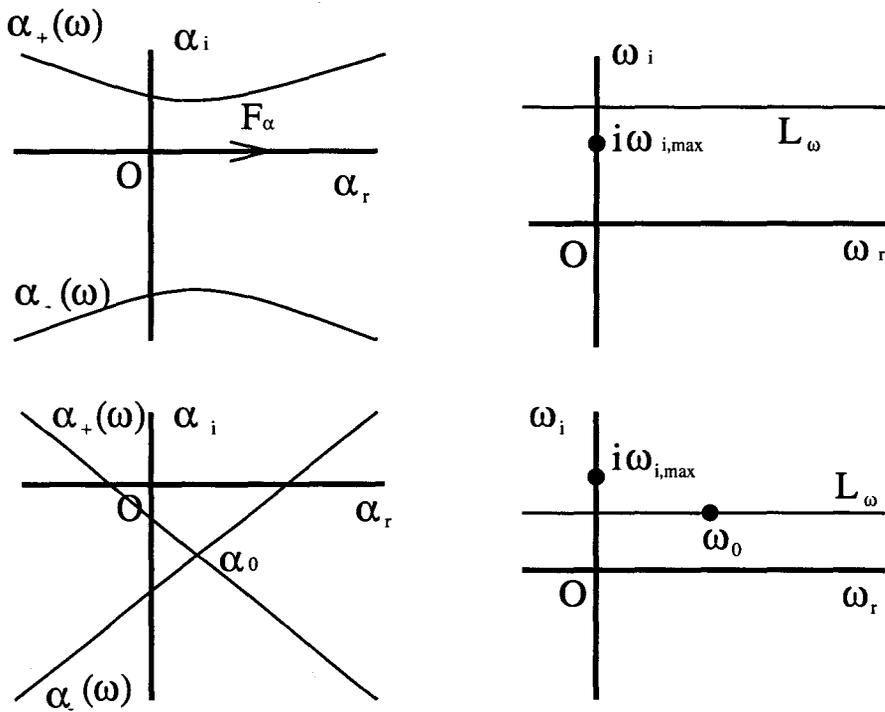


FIG. 5.3 - Connexion des branches spatiales en un point (α_0, ω_0) avec $\text{Im}(\omega_0) > 0$: point de pincement.

5.1.4 Instabilité spatio-temporelle

L'analyse des résidus de la relation de dispersion $D(\alpha, \omega) = 0$ dans le plan complexe des nombres d'onde met donc en évidence deux comportements instables singulièrement différents : l'un se développe périodiquement en temps dans une direction spatiale privilégiée et l'autre s'amplifie temporellement sans directions privilégiées. En effet, si $D(\alpha_0, \omega_0) = 0$ et $\frac{\partial D}{\partial \alpha}(\alpha_0, \omega_0) = 0$ alors la direction $x = 0$ est instable. Que peut-on dire du comportement de la solution du problème? Après applications des transformées de Laplace et de Fourier inverses, l'expression de la solution est devenue :

$$\Phi(x, y, t) = -\frac{i}{2\pi} \int_{F_\alpha} \frac{E(\alpha, \omega(\alpha)) \vec{\varphi} e^{i(\alpha x - \omega(\alpha)t)}}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(\alpha, \omega(\alpha))} d\alpha \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}, \quad (5.17)$$

où l'on a considéré seulement une branche temporelle $\omega(\alpha)$ (le mode le plus instable).

Pour étudier l'évolution spatio-temporelle de la perturbation, il est naturel de se placer dans un repère $x = vt$. L'équation (5.17) s'écrit alors sous la forme :

$$I = -\frac{i}{2\pi} \int_{F_\alpha} e^{i(\alpha v - \omega(\alpha))t} \frac{h(\alpha, y)}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(\alpha, \omega(\alpha))} d\alpha, \quad (5.18)$$

où

$$h(\alpha, y) = E(\alpha, \omega(\alpha)) \vec{\varphi}. \quad (5.19)$$

Maintenant, si on se place au *point de pincement* α_0 , *i.e.* où les deux branches spatiales se rencontrent, la solution est une solution double de la relation de dispersion $D(\alpha, \omega) = 0$ en $\omega = \omega_0$, ce qui implique :

$$D(\alpha_0, \omega_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial D}{\partial \alpha}(\alpha_0, \omega_0) = 0, \quad (5.20)$$

qui est équivalent, si $\frac{\partial D}{\partial \omega}(\alpha_0, \omega_0) \neq 0$ (on suppose que l'on peut toujours déterminer $\omega(\alpha)$), à la relation :

$$\omega_0 = \omega(\alpha_0) \text{ et } \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}(\alpha_0) = 0. \quad (5.21)$$

Cette caractéristique peut être exploitée pour évaluer $\Phi(x, y, t)$ pour des grands temps par une technique dite de la méthode du "col" (Bender et Orszag, 1978). En effet, l'intégrale de (5.18) pouvant s'écrire comme une intégrale de la forme :

$$\mathcal{J}(t) = -\frac{i}{2\pi} \int_C f(\alpha) e^{t\rho(\alpha)} d\alpha, \quad (5.22)$$

il est possible d'appliquer la méthode du col pour évaluer la réponse de I pour $t \rightarrow \infty$. Les détails de la technique ne sont pas présentés ici mais on pourra trouver toutes les informations nécessaires dans la revue de Huerre et Rossi (1998).

De cette technique, on en déduit une amplification de l'exponentiel donnée par $\gamma_v = -v\alpha_{0,i} + \omega_{v,i}$, son maximum est atteint pour une valeur $\alpha_{max} \in \mathbb{R}$, avec $\frac{d\omega_i}{d\alpha}(\alpha_{max}) = 0$ et $v_g = \frac{d\omega_r}{d\alpha}(\alpha_{max})$ où v_g représente la vitesse de groupe telle que l'amplification temporelle soit $\omega_{v_g,i} = \omega_{i,max}$ (*i.e.* maximale). Pour un observateur se déplaçant le long du chemin $x/t = v_g$, l'amplitude du paquet d'onde est maximale. De part et d'autre de cette droite, on peut définir deux vitesses v_- et v_+ ($v_- < v_g < v_+$) telles que $\gamma_v = 0$. Ces fronts d'ondes délimitent alors, dans le plan (x, t) , la croissance du paquet d'onde dans le temps. Deux comportements distincts sont alors possibles pour la réponse impulsionnelle :

- Quand $v_- < 0 < v_+$, le système est *absolument instable* puisque le taux de croissance observé le long du chemin $x/t = 0$ est nécessairement positif (voir Figure 5.4) ;
- Dans le cas opposé où les vitesses de front ont le même signe, *i.e.* $0 < v_- < v_+$, le système est *convectivement instable*. Pour un x donné, la perturbation apparaît à partir d'un temps t_1 pour disparaître si $t > t_2$ (voir Figure 5.5).

En résumé, les propriétés d'instabilité spatio-temporelle sont basées sur le comportement d'une réponse impulsionnelle de l'écoulement dans un domaine de référence donné. Si l'écoulement est instable, une perturbation localisée se développe le long de la direction x (longitudinale) en un paquet d'ondes de modes spatio-temporels, lesquels croissent exponentiellement le long de certaines droites $x/t = v$ et diminuent le long des autres droites.

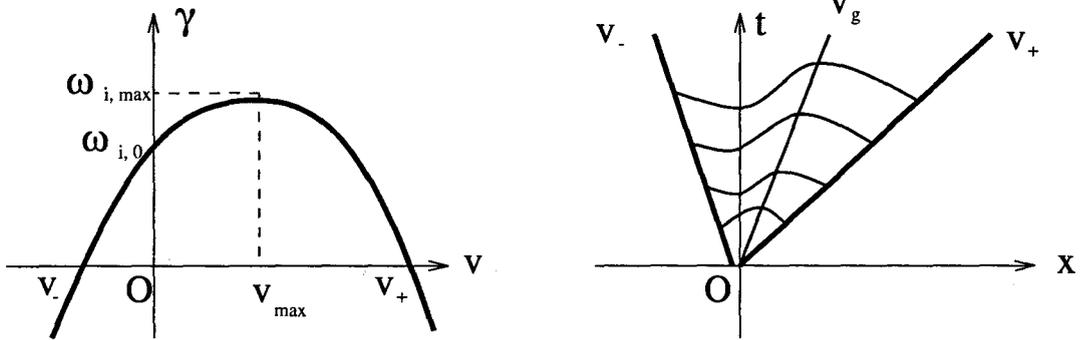


FIG. 5.4 - Taux de croissance temporelle γ pour un observateur se déplaçant à une vitesse $v = x/t$: instabilité absolue.

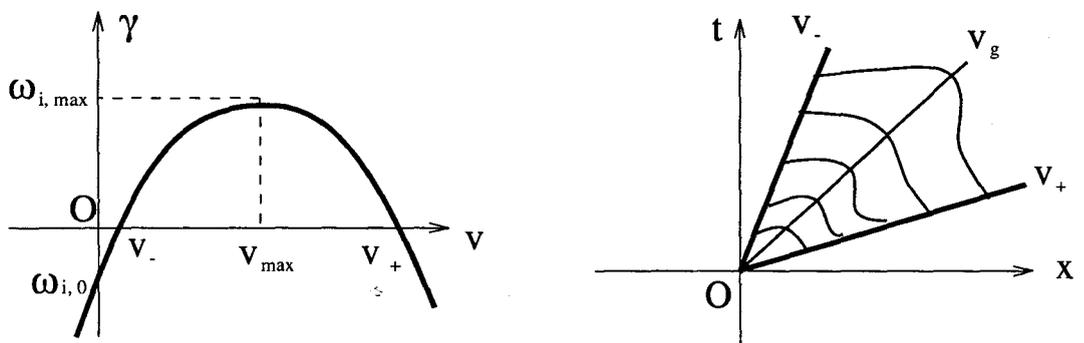


FIG. 5.5 - Taux de croissance temporelle γ pour un observateur se déplaçant à une vitesse $v = x/t$: instabilité convective.

Dans la plupart des situations, les modes instables sont délimités par une paire de droites particulières $x/t = v_{\pm}$ ou “bords” lesquels représentent la propagation des ondes neutres. La connaissance des vitesses aux bords permet de distinguer les instabilités convectives des instabilités absolues (voir Huerre et Monkewitz [1990] pour une revue). Si v_- et v_+ ont le même signe (positif), la réponse linéaire diminue pour chaque localisation fixée, indiquant un type convectif d’instabilité. Si au contraire, v_- est négatif et v_+ est positif, la droite spatio-temporelle $x/t = 0$ se trouve dans le domaine des modes croissants exponentiellement, ce qui indique un type absolu d’instabilité.

5.2 Ecoulement de couche limite interagissant avec une paroi souple

Après avoir posé les bases de la théorie des instabilités convectives et absolues, appliquons cette étude à notre problème de couche limite de Blasius couplé avec une paroi souple. Nous sommes donc amenés à chercher les solutions de la relation de dispersion du système $D(\alpha, \omega) = 0$ soit encore $\det(\alpha \mathbf{A} + \omega \mathbf{B} + \mathbf{C}) = 0$. Dans ce but, la méthode QZ est utilisée car elle permet de capturer tous les modes propres ω (ou α) du spectre discret (auxquels s’ajoutent ceux du spectre continu et ceux du spectre numérique). Pour assurer une approximation satisfaisante de la solution du mode propre $\omega(\alpha)$ associé à la fonction propre Φ de (5.15), soixante points de collocation (polynômes de Chebyshev) sont utilisés.

5.2.1 Nature des instabilités

La recherche d’instabilités convectives dans une couche limite sans gradient de pression interagissant avec une paroi souple a été largement étudiée par Carpenter et Garrad (1985), Evrensel et Kalnins (1988) et Yeo (1988) parmi d’autres. Ici, nous appliquons une représentation analogue à celle de la méthode de Kupfer *et al.* (1987) mais nous l’utilisons dans le plan complexe spatial (α_r, α_i) pour déterminer précisément la nature des instabilités étudiées. Cette technique consiste à prescrire un nombre de Reynolds Re et une fréquence complexe $\omega = \omega_r + i\omega_i$ (avec des coefficients de paroi donnés) puis de résoudre le problème aux valeurs propres généralisées complexes (5.10) afin de nous fournir une multitude de valeurs propres α . Toutes les branches spatiales $\alpha(\omega)$ doivent être recherchées pour $\omega_i > \omega_{i,max}$ afin de connaître la nature convective ou absolue de l’instabilité quand la fréquence complexe passera continûment de l’amplification temporelle maximale à l’amplification temporelle neutre. Le travail et la représentation graphique du spectre discret sont rendus difficiles à cause des multiples solutions issues des spectres continus

et numériques.

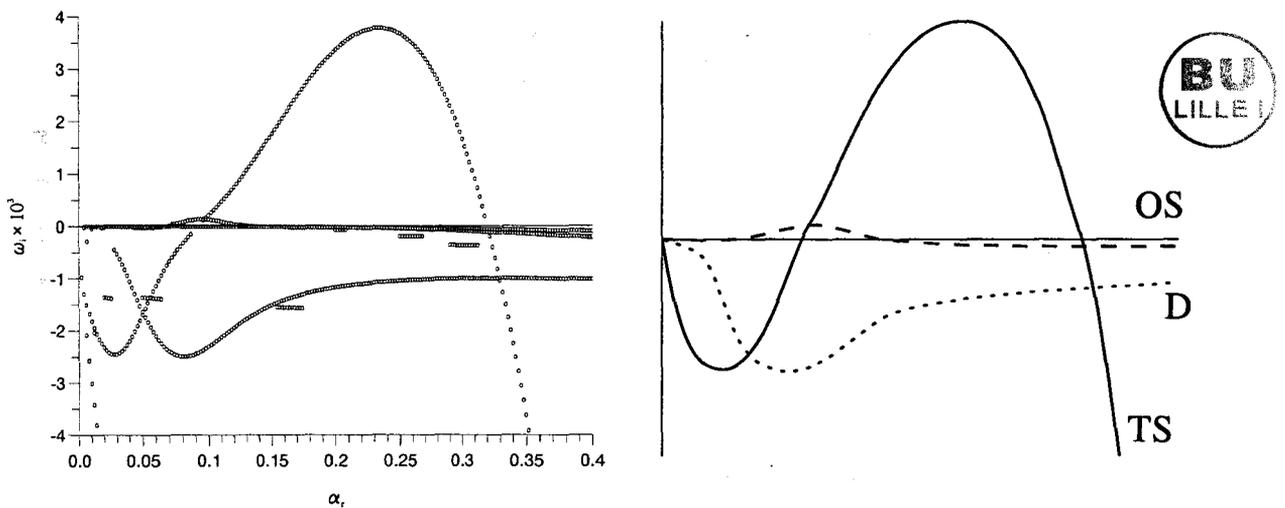


FIG. 5.6 - Localisations des modes temporels $\omega_j(\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ dans le plan (α, ω_j) : à gauche, simulation numérique et à droite, légende des modes (qualitatif).

Prenons comme premier exemple, le cas de la plaque fine flexible supportée par des ressorts (paroi de Kramer) étudiée dans la section 4.3. Les grandeurs du fluide et de la paroi sont les suivantes : vitesse externe $U_\infty^* = 18 \text{ m/s}$, masse volumique $\rho^* = 1025 \text{ kg/m}^3$, viscosité cinématique $\nu^* = 1.37 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, épaisseur $b^* = 2 \text{ mm}$, masse volumique $\rho_p^* = 946 \text{ kg/m}^3$, module d'Young $E^* = 0.5 \times 10^6 \text{ N/m}^2$, nombre de poisson $\nu_p^* = 0.5$, rigidité du ressort $\kappa^* = 0.115 \times 10^9 \text{ N/m}^3$ et amortissement $d^* = 0$. Fixons le nombre de Reynolds à 1700 (ce qui correspond à l'entrée du domaine). Les nombres adimensionnels de l'interaction fluide-structure sont alors $\Lambda^M = 14$, $\Lambda^F = 16 \times 10^{-4}$ et $\Lambda^U = 0.05$. L'étape préliminaire consiste à chercher la valeur de l'amplification temporelle maximale $\omega_{i,max}$ en calculant $\frac{d\omega_i}{d\alpha}(\alpha_{max}) = 0$ (ici on prend d'abord $\alpha \in \mathbb{R}$). Les figures de (5.6) montrent les solutions $\omega(\alpha)$ dans le plan (α_r, ω_i) , on observe alors clairement les différents modes temporels discrets présents dans le système couplé fluide-structure (après traitement du spectre pour tenter d'isoler les valeurs propres discrètes). Les deux modes instables sont présents (onde de Tollmien-Schlichting pour le plus amplifié dans l'intervalle $\alpha \in [0.09, 0.32]$ et onde de surface pour le moins amplifié dans l'intervalle $\alpha \in [0.06, 0.13]$). En plus de ces deux modes instables, d'autres modes stables existent. Seul le mode le moins stable de ces derniers sera étudié un peu plus en détail pour des raisons que l'on explicitera par la suite (les modes restants étant des modes amortis), c'est le mode appelé divergence dans la littérature (identifié par sa vitesse de phase négative).

L'amplification temporelle maximale pour cette étude est $\omega_{i,max} = 3.77 \times 10^{-3}$ pour un nombre d'onde $\alpha_{max} = 0.234$ (la fréquence associée est $\omega_r = 7.64 \times 10^{-2}$). La Figure (5.7) montre les solutions $\alpha(\omega)$ dans le plan complexe (α_r, α_i) pour deux amplifications

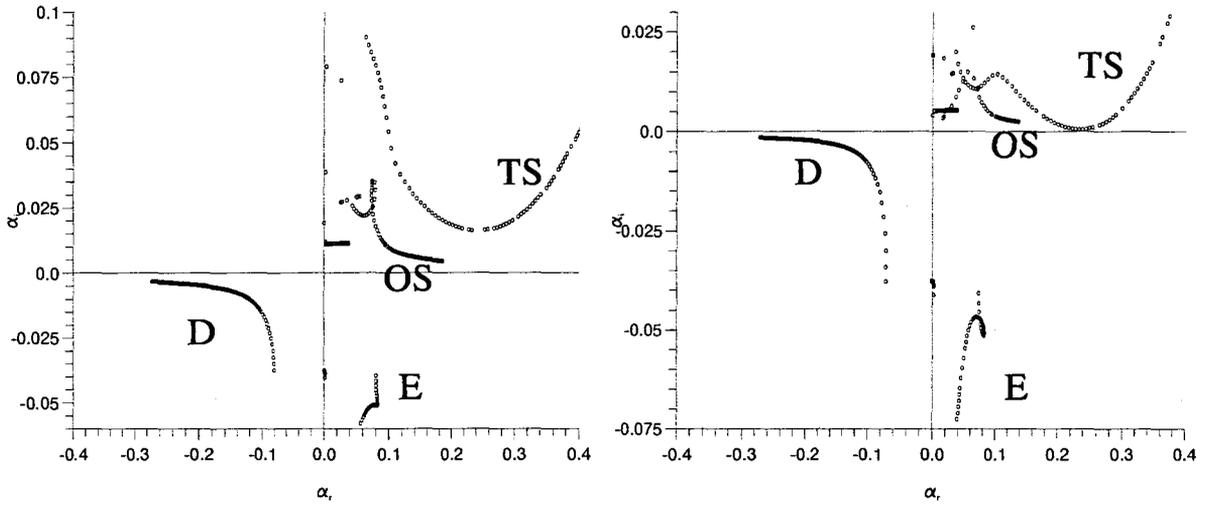


FIG. 5.7 - Spectre global $\alpha(\omega)$ pour (à gauche) $\omega_i = 1.00 \times 10^{-2}$ et (à droite) $\omega_i = 4.00 \times 10^{-3}$ pour ω_r variant de 0 à 0.4 : TS Tollmien - Schlichting, OS onde de surface, D onde de divergence et E onde évanescence.

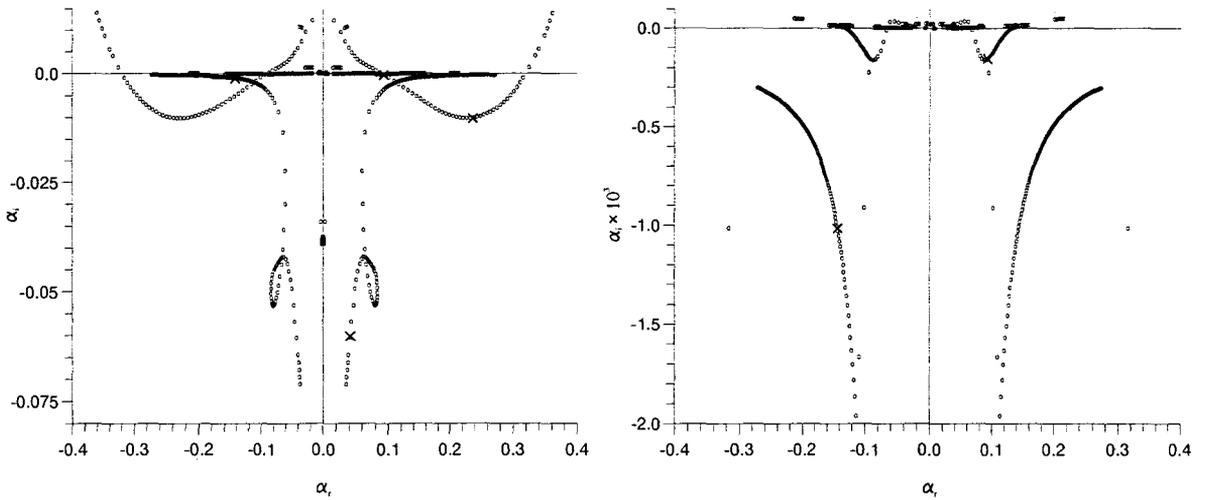


FIG. 5.8 - Spectre global $\alpha(\omega)$ pour $\omega_i = 0.00$ pour ω_r variant de -0.4 à 0.4. Les symboles \times correspondent aux valeurs trouvées avec la fréquence $\omega_r = 0.077554$.

temporelles supérieures à $\omega_{i,max}$: $\omega_i = 1.00 \times 10^{-2}$ et $\omega_i = 4.00 \times 10^{-3}$. On observe alors clairement quatre types de solutions localisées dans les zones $x > 0$ (ondes se propageant en aval) et $x < 0$ (ondes se propageant en amont). Pour $x > 0$, il existe deux modes situés dans le cadran ($\alpha_r > 0, \alpha_i > 0$), ces deux solutions $\alpha(\omega)$ représentent respectivement le mode de Tollmien-Schlichting que l'on identifie par une vitesse de phase de l'ordre de 0.3 et le mode surface (en bas et à gauche du cadran) que l'on identifie par une vitesse de phase de l'ordre de l'unité. Pour $x < 0$, il existe deux modes, le mode évanescent situé dans le cadran ($\alpha_r > 0, \alpha_i < 0$) que l'on identifie par un taux d'accroissement α_i négatif (avec un ordre de grandeur souvent supérieur aux autres modes propres) et une vitesse de phase positive, et le mode de divergence situé dans le cadran ($\alpha_r < 0, \alpha_i < 0$) que l'on identifie par une vitesse de phase négative et un taux d'accroissement α_i négatif (lequel tend rapidement vers zéro quand on augmente la valeur de la fréquence ω_r). Soit c une vitesse de phase telle que $c = \frac{\omega_r}{\alpha_r}$ alors les ondes de Tollmien-Schlichting, de surface et évanescente ont une vitesse de phase c positive tandis que l'onde de divergence a une vitesse de phase "négative" que l'on peut associer alors à une onde se propageant en amont.

Maintenant, si on abaisse le taux d'amplification temporelle ω_i jusqu'à 0, on montre sur la Figure 5.8 que les modes de Tollmien-Schlichting et de surface sont des modes qui perdent leur stabilité (spatiale) et peuvent donc être décrits comme des instabilités. Par contre, les modes de divergence et évanescent ne traversent pas l'axe $\alpha_i = 0$ pour $\omega_i \geq 0$, ce sont donc des ondes qui existent dans le domaine $x < 0$ et qui sont amorties temporellement et spatialement. Les symboles \times représentent la localisation des solutions trouvées au chapitre 3 pour la fréquence $\omega_r = 0.077554$. Le graphe de droite de la Figure 5.8 représente un agrandissement du graphe de gauche proche de l'axe des réels afin de mieux observer le mode de surface. Le spectre de la Figure 5.8 étant établi pour ω_r variant de -0.4 à 0.4 , les solutions $\alpha(\omega)$ sont symétriques par rapport à l'axe $\alpha_r = 0$.

Résumons toutes les informations acquises depuis le début de ce travail sur les différents modes issus du couplage entre la couche limite de Blasius et une paroi souple de type Kramer :

- le mode de Tollmien-Schlichting est une instabilité purement visqueuse (qui n'existerait pas donc dans une étude de fluide parfait) se propageant dans le sens de l'écoulement ;
- le mode de surface est une solution propre de la paroi légèrement déstabilisée par l'influence de la présence du fluide et qui se propage dans le sens de l'écoulement ;
- le mode de divergence est un mode "faiblement" stable (*i.e.* avec des taux d'amor-

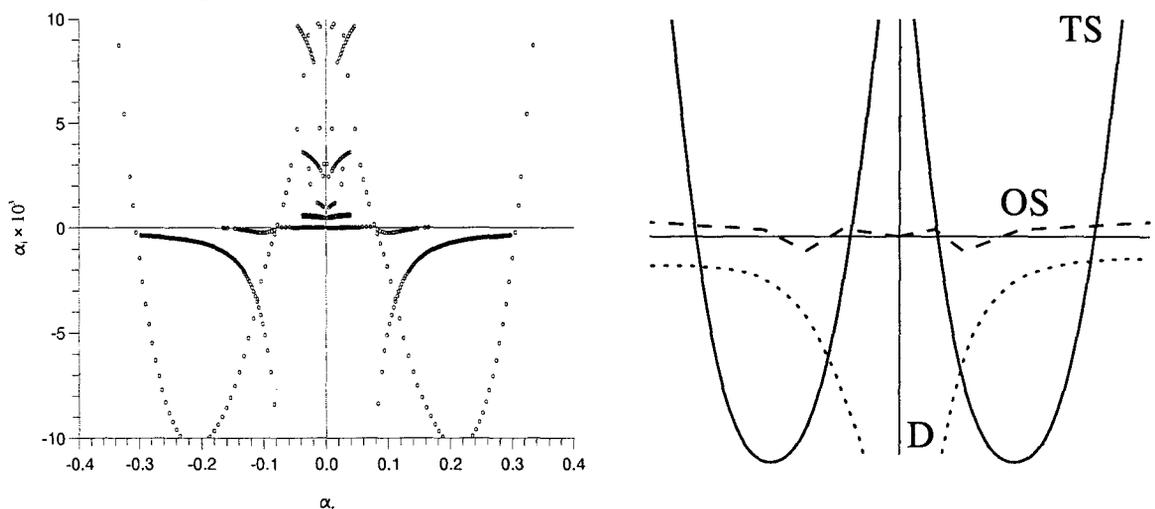
tissement proches de zéro) issu du couplage fluide-structure, ne pouvant exister que si la paroi n'a pas de direction privilégiée (longueur finie) et se propageant dans le sens opposé de l'écoulement (cf. la simulation du chapitre 4);

- le mode évanescant est un mode “fortement” stable (*i.e.* avec des taux d'amortissement de l'ordre de 5×10^{-2}) issu du couplage fluide-structure, ne pouvant exister que si la paroi n'a pas de direction privilégiée (longueur finie) et ayant une vitesse de phase positive.

5.2.2 Existence d'instabilités absolues

5.2.2.1 Influence de l'épaisseur de la paroi souple sur les modes instables

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, il est clair que la diminution de l'épaisseur de la plaque a un effet stabilisant sur l'instabilité de Tollmien-Schlichting et un effet déstabilisant sur l'instabilité de surface. Cependant, les facteurs d'amplification de l'onde de surface restent beaucoup moins importants que ceux de Tollmien-Schlichting (*a priori* dans les configurations habituellement étudiées) comme nous l'avons observé dans le paragraphe précédent. Mais que se passe-t-il exactement pour l'instabilité de surface quand l'épaisseur de la paroi b diminue? Pour apporter des éléments d'informations à ce sujet, on a calculé les solutions $\alpha(\omega)$ pour différentes épaisseurs de plaques b^* , pour un nombre de Reynolds $Re = 2000$ et pour les grandeurs du fluide et de la paroi suivantes: vitesse externe $U_\infty^* = 18m/s$, masse volumique $\rho^* = 1025kg/m^3$, viscosité cinématique $\nu^* = 1.37 \times 10^{-6}m^2/s$, masse volumique $\rho_p^* = 946kg/m^3$, module d'Young $E^* = 0.5 \times 10^6 N/m^2$, nombre de Poisson $\nu_p^* = 0.5$, rigidité du ressort $\kappa^* = 0.115 \times 10^9 N/m^3$ et un amortissement $d^* = 0$. Les résultats sont représentés sur la Figure 5.9 pour une variation de la fréquence ω_r de -0.4 à 0.4 .



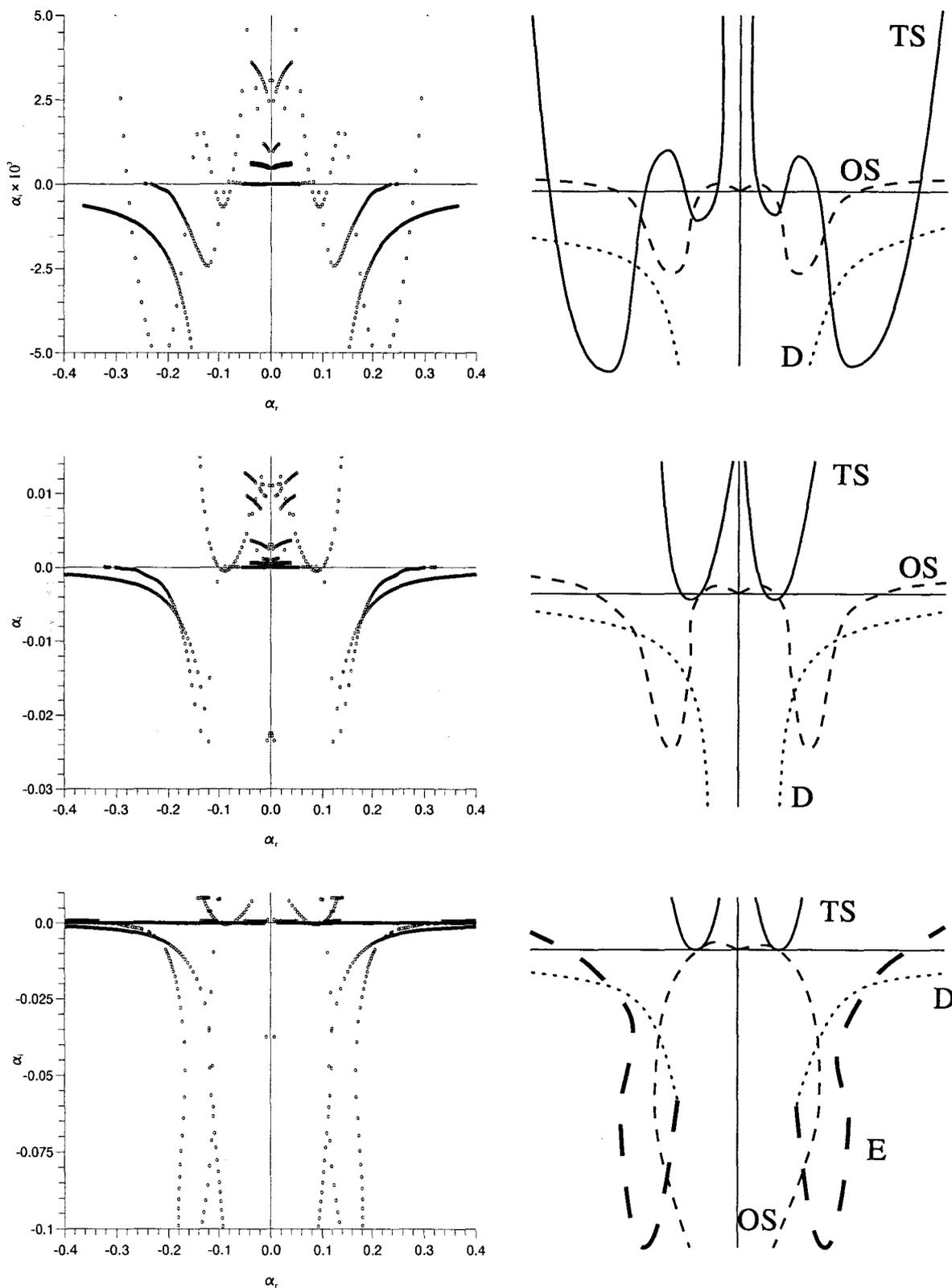


FIG. 5.9 - Spectre global $\alpha(\omega)$ pour $\omega_i = 0.00$ avec $b^* = 2, 1.4, 1.1$, 1mm de haut en bas : à gauche, résultats numériques et à droite, légende des modes (qualitatif).

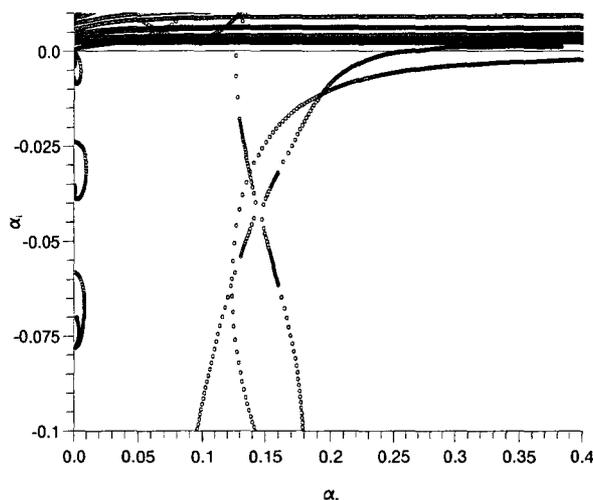


FIG. 5.10 - Spectre global $\alpha(\omega)$ pour $\omega_i = 2.20 \times 10^{-3}$ avec $b^* = 1mm$.

Pour $b^* = 2mm$ (1^{ère} série, $\Lambda^M = 12$, $\Lambda^F = 2.5 \times 10^{-3}$ et $\Lambda^U = 0.059$), on distingue assez bien le mode de divergence, localisé entièrement dans la région $\alpha_i < 0$ (*idem* pour $b^* = 1.4mm$ et $b^* = 1.1mm$), le mode de Tollmien-Schlichting et le mode de surface (qui possède des taux d'amplification faible). Pour $b^* = 1.4mm$ (2^{ième} série, $\Lambda^M = 8.6$, $\Lambda^F = 7.4 \times 10^{-3}$ et $\Lambda^U = 0.084$), la diminution de b^* réduit la zone amplifiée de Tollmien-Schlichting pour en former deux autres d'amplitudes moins importantes (les deux zones correspondent qualitativement aux deux boucles observées pour la courbe de stabilité neutre de Tollmien-Schlichting sur la Figure 2.4 du chapitre 2) mais cette diminution augmente la zone instable de l'onde de surface. Si on continue avec $b^* = 1.1mm$ (3^{ième} série, $\Lambda^M = 6.8$, $\Lambda^F = 1.5 \times 10^{-2}$ et $\Lambda^U = 0.11$), les mêmes remarques que précédemment peuvent être faites avec une instabilité T.S. très faible et une instabilité O.S. beaucoup plus amplifiée (dominante). Enfin, quand on passe à $b^* = 1.0mm$ (4^{ème} série, $\Lambda^M = 6.2$, $\Lambda^F = 2 \times 10^{-2}$ et $\Lambda^U = 0.12$), l'amortissement de l'instabilité T.S. est toujours observé mais on peut constater une modification des modes de surface et évanescents. Pour une amplification temporelle $\omega_i = 2.20 \times 10^{-3}$, la Figure 5.10 met en évidence un point de pincement ce qui signifie que nous sommes en présence d'une instabilité absolue. Par conséquent, la diminution de l'épaisseur de la plaque a un effet stabilisant sur l'instabilité de Tollmien-Schlichting et un effet déstabilisant sur l'instabilité de paroi pouvant conduire à l'apparition d'une instabilité de nature absolue.

5.2.3 Effet de l'amortissement : mode transitionnel

Une recherche des effets de l'amortissement sur les instabilités a été entreprise par Carpenter et Garrad (1985) car il s'avérait que l'amortissement tendait à avoir un effet

fortement stabilisant pour l'instabilité de surface contre un effet déstabilisant pour l'instabilité de Tollmien-Schlichting. L'amortissement modélisait alors un substrat de fluide visqueux compris entre la paroi souple et la base rigide.

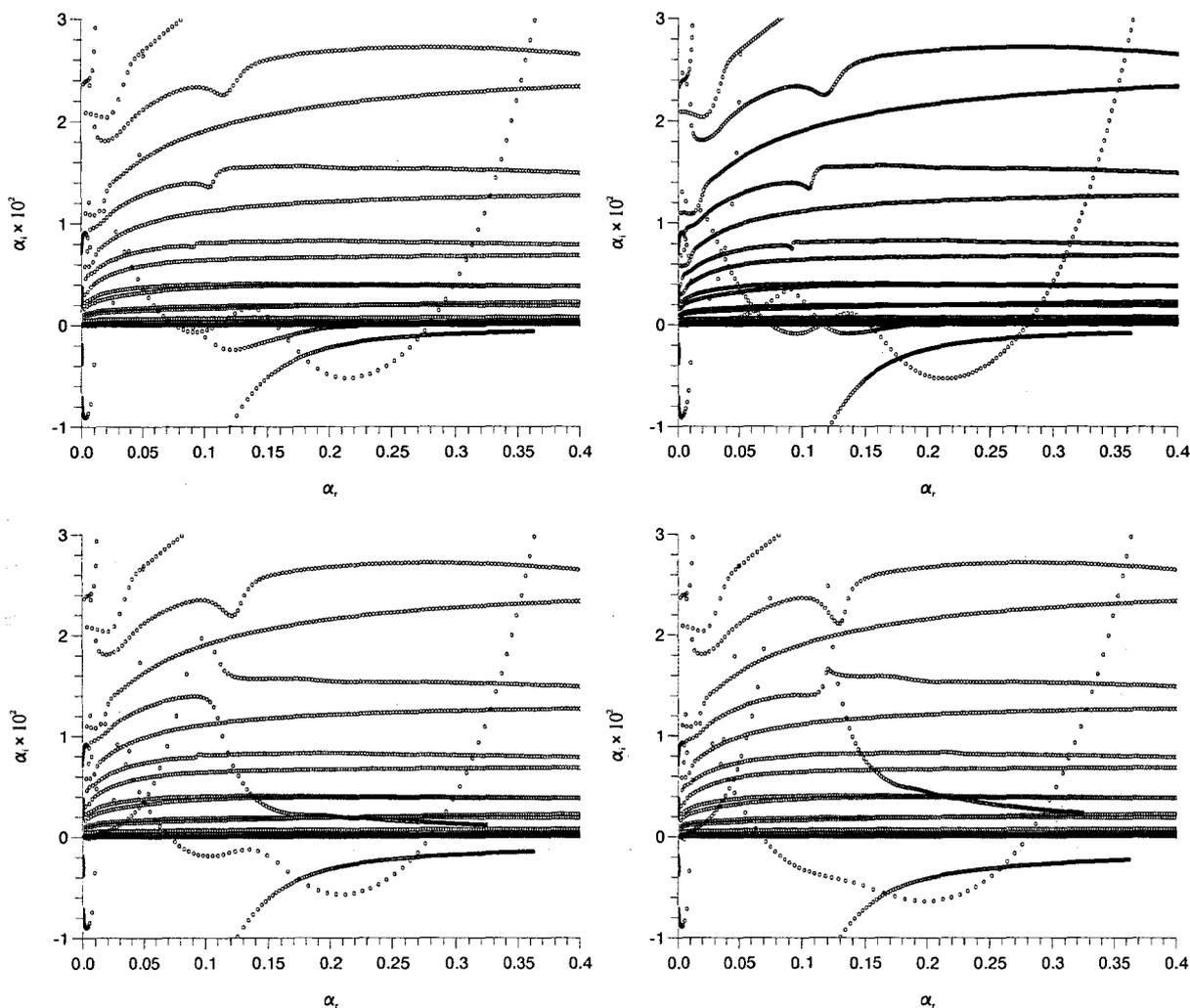


FIG. 5.11 - Spectre global $\alpha(\omega)$ pour $\omega_i = 0.00$ avec $b^* = 1.4\text{mm}$ et pour différentes valeurs de l'amortissement $d^* = 0, 200, 1000, 2000\text{kg/m}^2\text{s}$ de gauche à droite et de haut en bas.

La poursuite de l'étude consiste alors à rechercher le rôle de l'amortissement représenté par la quantité d dans l'équation dynamique. Dans le chapitre 2, on a mis en évidence que la présence d'amortissement pouvait entraîner l'apparition d'un nouveau mode caractérisé par la combinaison des zones instables de l'instabilité de Tollmien-Schlichting et de l'instabilité de surface, celui-ci est appelé "mode transitionnel" (voir Carpenter et Garrad, 1985).

Pour mieux comprendre ce phénomène, il est intéressant d'observer l'allure du mode transitionnel dans une représentation (α_r, α_i) afin de connaître son comportement vis à vis

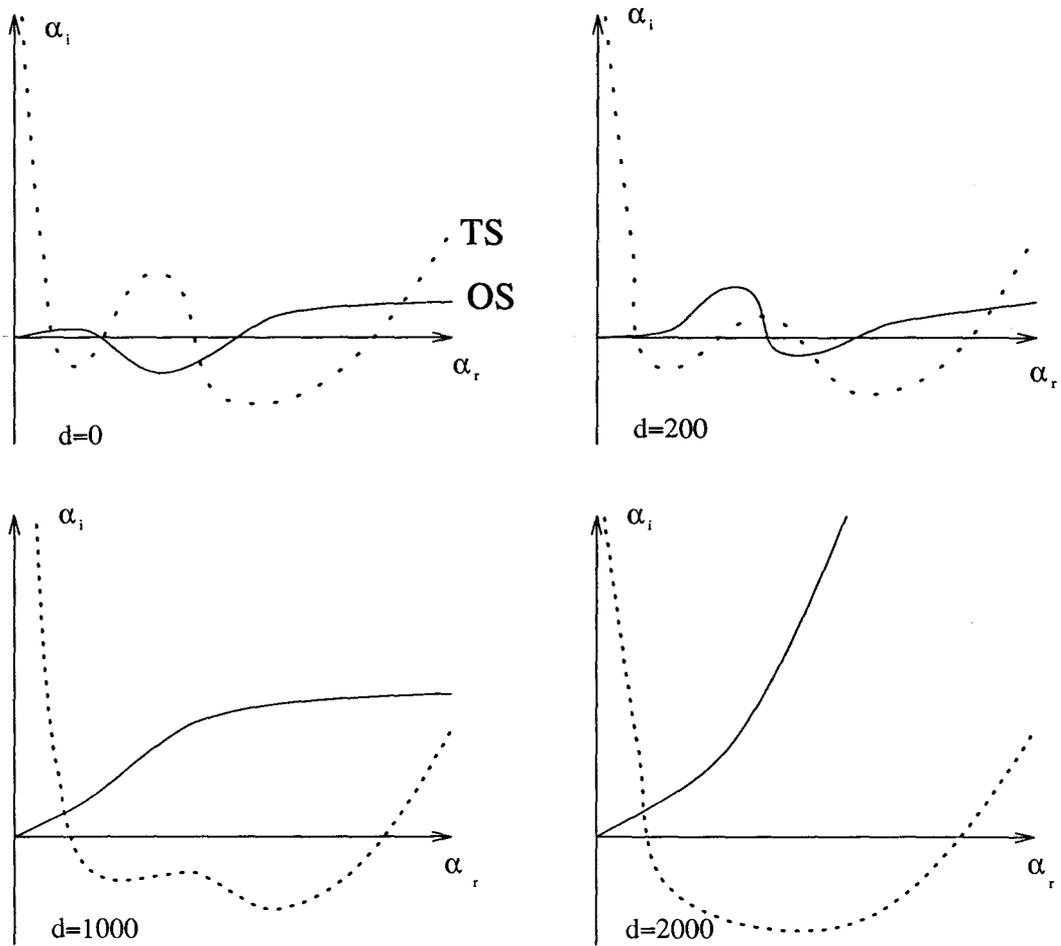


FIG. 5.12 - Effet de l'amortissement : qualitatif.

de l'amortissement. Dans ce but, une étude est réalisée avec les grandeurs du fluide et de la paroi suivantes : vitesse externe $U_\infty^* = 18\text{m/s}$, masse volumique $\rho^* = 1025\text{kg/m}^3$, viscosité cinématique $\nu^* = 1.37 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$, masse volumique $\rho_p^* = 946\text{kg/m}^3$, module d'Young $E^* = 0.5 \times 10^6\text{N/m}^2$, nombre de poisson $\nu_p^* = 0.5$, rigidité du ressort $\kappa^* = 0.115 \times 10^9\text{N/m}^3$ et une épaisseur de plaque $b^* = 1.4\text{mm}$. Le nombre de Reynolds pour cette étude est fixé à 2000 (d'où $\Lambda^M = 8.6$, $\Lambda^F = 7.4 \times 10^{-3}$ et $\Lambda^U = 0.084$).

Les résultats présents suggèrent que lorsque la valeur de l'amortissement augmente, différents régimes instables apparaissent. Pour $d^* = 0$, les deux instabilités de Tollmien-Schlichting et de surface se distinguent clairement et ne paraissent pas interagir. Pour un amortissement légèrement supérieur $d^* = 200\text{kg/m}^2\text{s}$, les effets observés sont en accord avec la théorie de Carpenter et Garrad (1985) en prévoyant une stabilisation de l'onde de surface et une déstabilisation de l'onde visqueuse. Entre des valeurs de d^* proches de $200\text{kg/m}^2\text{s}$ jusqu'à $1000\text{kg/m}^2\text{s}$, le régime de stabilité de l'onde de surface se trouve fortement amorti et le mode visqueux continue à se déstabiliser. Pour des valeurs de d^* de $2000\text{kg/m}^2\text{s}$ et plus, le mode de surface est complètement stabilisé alors que l'instabilité visqueuse devient d'autant plus instable et sa zone d'amplification en α_r d'autant plus importante que la valeur de l'amortissement augmente. Qu'en est-il du mode transitionnel ? Le mode transitionnel était imaginé comme une coalescence des modes de Tollmien-Schlichting et de surface à cause du rôle que jouait l'amortissement et du fait que ce mode occupait presque entièrement les deux zones instables TS et OS. Dans cette étude, le mode transitionnel apparaît uniquement comme une déstabilisation importante de l'instabilité de Tollmien-Schlichting et non pas par une combinaison onde visqueuse et onde de surface car le mode de paroi existe toujours mais il est fortement amorti.

Classification des ondes

Une classification des ondes dans un écoulement de fluide interagissant avec une paroi souple a été entreprise initialement par Landahl (1962) et Benjamin (1963). Cette classification repose sur l'évaluation des transferts énergétiques entre les perturbations du fluide, les perturbations de la paroi souple, et l'écoulement moyen. Une telle analyse a été entreprise par Domaradzki et Metcalfe (1987) en vue de la stabilisation d'une couche limite par l'utilisation de membranes. Une étude exhaustive des bilans d'énergie dans un écoulement de Poiseuille avec des parois souples a été entreprise dans la thèse de Doctorat de L. Blonce (1995), la classification suivante (basée sur l'analyse du bilan énergétique) s'est imposée :

- les perturbations dites de classe A sont stabilisées lors d'un échange d'énergie du fluide vers la paroi souple et déstabilisées lorsque le transfert d'énergie s'opère de la

paroi vers le fluide ;

- les perturbations de classe B ont un comportement opposé à celles de classe A (*i.e.* ces perturbations sont déstabilisées lorsque le transfert d'énergie s'opère du fluide vers la paroi) ;
- les perturbations de classe C ne sont pas influencées par des transferts d'énergie fluide-paroi.

Ici, ce type d'étude basé sur un bilan énergétique n'est pas réalisé. Cependant, pour pouvoir utiliser cette classification des différentes ondes, on utilise une approche qualitative proposée par Carpenter et Garrad (1986) basée sur l'influence de l'amortissement de la paroi d . Dans cette approche, les ondes de classe A sont déstabilisées par l'amortissement, les ondes de classe B sont stabilisées par l'amortissement et les ondes de classe C ne sont pas affectées par l'amortissement.

Par conséquent, en considérant les résultats obtenus dans ce chapitre, l'onde de Tollmien-Schlichting est une onde de classe A, les ondes de surface, de divergence et évanescence sont des ondes de classe B et aucune onde n'entre dans la classe C. Maintenant, si l'on compare avec la littérature, on se rend compte que nous avons la même classification pour l'onde de Tollmien-Schlichting et l'onde de surface. Par contre, l'onde de divergence a été classifiée comme une perturbation de classe A dans les études d'onde progressive et comme une perturbation de classe C dans les études d'onde statique. Au regard de la définition de l'onde de divergence (onde se propageant vers l'amont), notre résultat est alors cohérent avec le résultat de Carpenter et Garrad (1986) car leur diminution d'énergie (pour une onde se propageant vers l'aval) devient alors une augmentation d'énergie (pour une onde se propageant vers l'amont). L'onde de divergence serait donc une onde de classe B. Ce raisonnement paraissant somme toute logique car les ondes de surface, divergence et évanescence sont toutes trois des ondes de structure qui existent même lorsque l'on considère un écoulement potentiel. Par conséquent, pour ces ondes, ce sont les mécanismes de la paroi qui sont prédominants. Enfin, on notera que l'onde évanescence quant à elle n'a pas été classifiée dans la littérature.

Bien qu'il existe différentes manières de qualifier les instabilités dans ce type de système fluide-structure, il apparaît ici que l'étude des branches spatio-temporelles de chaque mode propre fournit des éléments de compréhension directement exploitables sur la nature des ondes présentes dans le système instable. Cette technique permet ainsi d'identifier la direction de propagation et de quantifier l'influence des paramètres physiques sur le processus de stabilisation et de déstabilisation des ondes.

5.2.3.1 Coalescence d'une onde visqueuse et d'une onde évanescente

Si l'on continue notre investigation dans le même sens, *i.e.* sur l'augmentation importante des taux d'accroissement, on peut se poser la question de savoir si ce phénomène de mode transitionnel (mode visqueux) ne pourrait pas conduire à une instabilité absolue. Dans cette idée, on diminue l'épaisseur de la plaque afin d'augmenter la souplesse de la paroi. Cette diminution va induire une onde de surface encore plus instable et peut-être déstabiliser par la même occasion le mode visqueux. Une étude identique à la précédente est réalisée avec une épaisseur de plaque $b^* = 0.8mm$ ($\Lambda^M = 4.9$, $\Lambda^F = 3.9 \times 10^{-2}$ et $\Lambda^U = 0.15$) et un amortissement $d^* = 2000kg/m^2s$ permettant de conduire alors à l'apparition du mode transitionnel (visqueux).

Sur la Figure 5.13, les solutions $\alpha(\omega)$ sont représentées dans le plan (α_r, α_i) pour différentes amplifications temporelles ω_i (les valeurs proches de l'axe α_i sont issues du spectre numérique), le maximum d'amplification temporelle étant déterminé pour $\omega_{i,max} = 2.096 \times 10^{-2}$. Il apparaît clairement que lorsqu'on passe de la quantité $\omega_i = 12.5 \times 10^{-3}$ à $\omega_i = 0.0$, la nature des modes étudiés a été modifiée. En effet, si l'on observe l'évolution progressive des solutions dans le plan (α_r, α_i) pour différents taux d'amplification temporels, on peut mettre en évidence l'apparition d'un point de pincement (voir Figure 5.14). Ce point de pincement est donc la combinaison entre le mode transitionnel qui est une onde progressive se propageant en aval et le mode évanescent qui est une onde progressive se propageant en amont. Par conséquent, d'après la théorie de Huerre et Monkewitz (1985), nous sommes en présence d'un phénomène de nature absolue. Comme le point de pincement existe pour un $\omega_i > 0$, nous avons une *instabilité absolue*. Une étude numérique un peu plus poussée permet de nous donner les différentes grandeurs relatives au point de pincement (ou point selle) : $\omega_r = 0.108$, $\omega_i = 1.82 \times 10^{-3}$, $\alpha_r = 0.18$ et $\alpha_i = -6.69 \times 10^{-2}$. La valeur du taux d'amplification temporelle ω_i de l'instabilité absolue au point de pincement est notée $\omega_i^{(a)}$ et est appelée *taux de croissance absolue*.

L'instabilité absolue, comme décrite au début de ce chapitre, est une forme "dévastatrice" de l'instabilité. C'est pourquoi, il est important d'être capable de détecter sa présence dans le système couplé fluide-structure car ce phénomène peut alors très vite déclencher la transition vers la turbulence. Pour cela, nous allons examiner comment une variation du nombre de Reynolds Re (ce qui correspond à un déplacement le long de la paroi) peut agir sur l'existence d'une instabilité absolue.

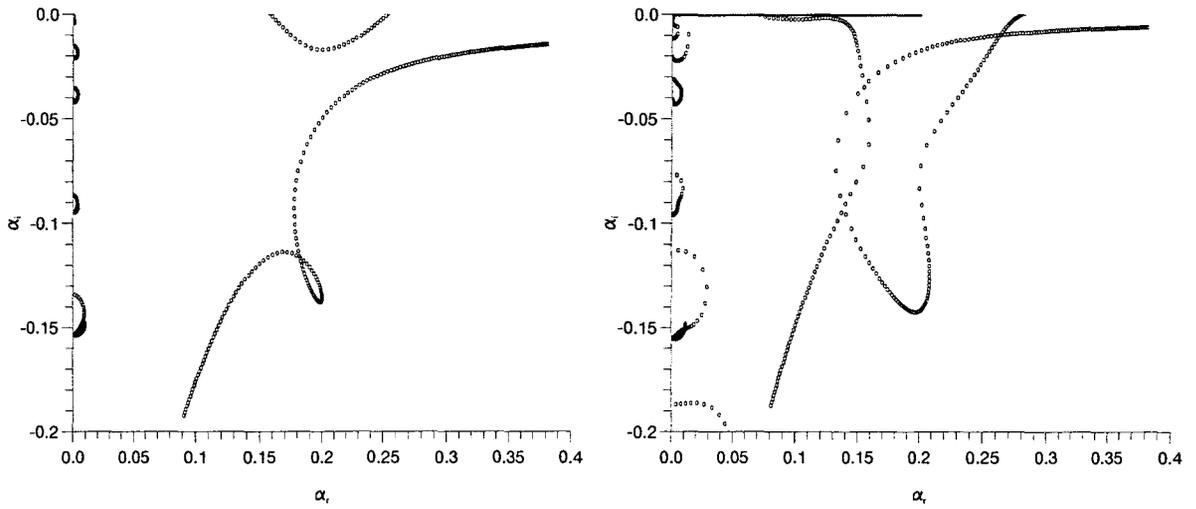


FIG. 5.13 - Spectre global $\alpha(\omega)$ pour (à gauche) $\omega_i = 12.5 \times 10^{-3}$ et (à droite) $\omega_i = 0.0$ avec $b^* = 0.8\text{mm}$ et $d^* = 2000\text{kg/m}^2\text{s}$.

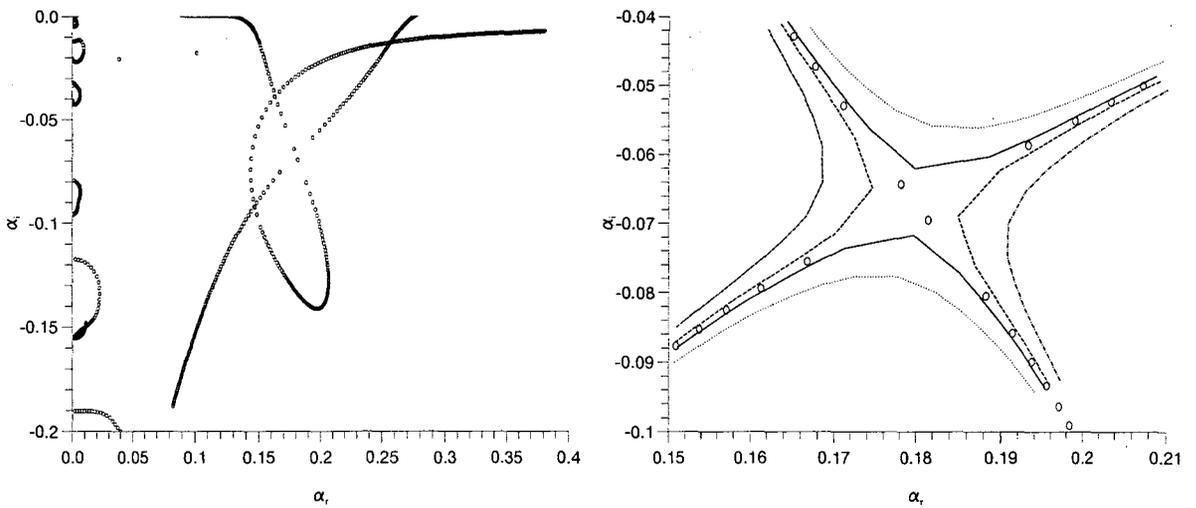


FIG. 5.14 - Spectre global $\alpha(\omega)$ avec $b^* = 0.8\text{mm}$ et $d^* = 2000\text{kg/m}^2\text{s}$ pour (à gauche) $\omega_i = 1.8 \times 10^{-3}$ et (à droite): $\cdots \omega_i = 2.3 \times 10^{-3}$, $— \omega_i = 1.9 \times 10^{-3}$, $\circ \omega_i = 1.8 \times 10^{-3}$, $--- \omega_i = 1.7 \times 10^{-3}$ et $- \cdot - \omega_i = 1.3 \times 10^{-3}$.

5.2.4 Effets du nombre de Reynolds Re

Après avoir examiné l'existence d'une instabilité absolue pour un nombre de Reynolds fixé à 2000, intéressons-nous maintenant à la distribution du taux de croissance absolue en fonction du nombre de Reynolds Re .

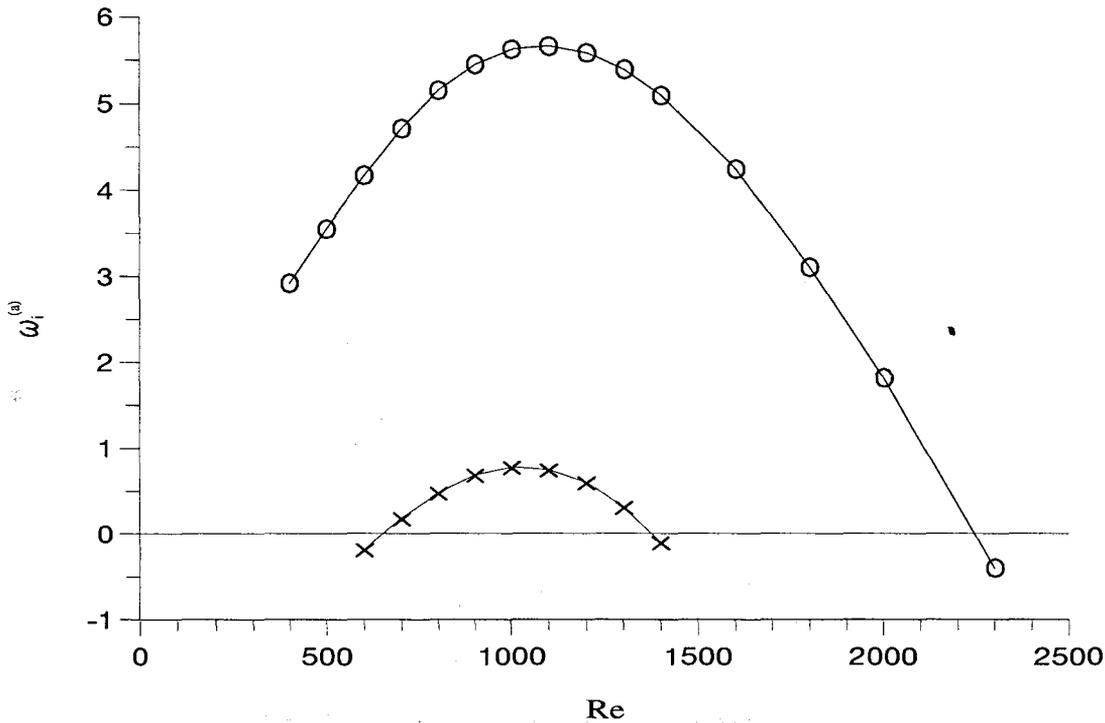


FIG. 5.15 - Variation du taux de croissance absolue $\omega_i^{(a)}$ en fonction du nombre de Reynolds Re avec un amortissement $d^* = 2000\text{ kg/m}^2\text{ s}$ et pour une épaisseur de plaque : ○ $b^* = 0.80\text{ mm}$ et × $b^* = 1.00\text{ mm}$.

La Figure 5.15 montre la variation du taux de croissance absolue $\omega_i^{(a)}$ en fonction du nombre de Reynolds Re pour un amortissement $d^* = 2000\text{ kg/m}^2\text{ s}$ et pour deux épaisseurs de plaque : $b^* = 1.00\text{ mm}$ et $b^* = 0.80\text{ mm}$ (les autres paramètres sont ceux du paragraphe précédent). Dans les deux cas, le mode d'instabilité absolu existe sur un certain intervalle de Re et disparaît pour un nombre de Reynolds assez grand. En étudiant l'influence de l'épaisseur de la plaque, il apparaît clairement qu'une augmentation de b^* a un effet stabilisant sur le mode absolument instable (pour $b^* = 2\text{ mm}$, l'instabilité redevient même purement convective). Cet effet stabilisant se traduit par une réduction du domaine absolument instable. Pour $b^* = 1\text{ mm}$, le système peut alors passer successivement, en se déplaçant le long de la paroi, d'un phénomène instable de nature convective jusqu'à $Re \approx 650$ à un phénomène instable de nature absolue pour redevenir à partir de $Re \approx 1400$ un système convectivement instable. Par conséquent, si une perturbation prend naissance

pour un nombre de Reynolds inférieur à 650, celle-ci se verra d’abord convectée le long de la plaque pour ensuite passer à un état absolument instable entraînant un phénomène d’amplification “explosif”. Par contre, si la perturbation prend naissance pour un nombre de Reynolds supérieur à 1400 alors la perturbation sera uniquement convectée le long de la plaque (dans la limite des hypothèses de résolution). Pour $b^* = 0.80mm$, il n’était pas possible de détecter le passage de l’état convectif à l’état absolu pour les petits nombres de Reynolds. Le fait de ne pas trouver de Re critique inférieur pour l’instabilité absolue est dû probablement à l’approximation d’écoulement localement parallèle.

5.3 Perturbations localisées et simulation spatiale

La recherche de la nature convective ou absolue (décrite par Huerre et Monkewitz, 1985) des instabilités de couche limite de Blasius sur une paroi souple a mis en évidence le fait que les modes de Tollmien-Schlichting et de surface sont des instabilités “véritables” (*i.e.* qui sont instables temporellement) et convectives. Par contre, les modes de divergence et évanescents sont des solutions stables du système couplé fluide-structure et sont présents uniquement si le système a la capacité de générer des ondes se propageant vers l’amont. Enfin, le mode transitionnel (instabilité de Tollmien-Schlichting) est une instabilité convective pouvant amener l’apparition d’une instabilité absolue par coalescence avec le mode évanescent.

A ce stade, bien que l’on soit capable de détecter une instabilité de nature absolue, les hypothèses que nous avons faites concernant l’écoulement de base (parallèle) et la paroi (de longueur infinie), atteignent leurs limites par rapport à la réalité (sans oublier les effets non linéaires). Pour lever ces contraintes, nous avons décidé d’étudier la nature convective ou absolue des instabilités en introduisant directement un signal impulsionnel dans le code de calcul pour observer son développement spatio-temporel dans le système couplé fluide / structure pour des configurations de paroi différentes. Ces résultats viendront alors compléter notre compréhension du phénomène dans une vue plus globale.

5.3.1 Technique de simulation numérique spatiale

On impose à $t = 0$ une impulsion localisée en $x = 0$ de type $S(x, y) = \delta(x) f(y)$ avec δ la distribution de Dirac. Le champ de calcul est initialisé par une perturbation de

vitesse (Delbende et Chomaz, 1998) à divergence nulle $\vec{u}(x, y, t = 0)$ de composantes :

$$\begin{cases} u = -(y - y_0) \exp \left[- \left(\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2} \right) \right] \\ v = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} (x - x_0) \exp \left[- \left(\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2} \right) \right] \end{cases} \quad (5.23)$$

La perturbation initiale prend la forme d'un petit spot de vorticité localisé en $(x = x_0, y = y_0)$. L'enveloppe de distribution est une gaussienne où les coefficients σ_x et σ_y représentent son étendue respectivement suivant la direction x^* et la direction y^* . Les échelles de longueur σ_x et σ_y doivent être *a priori* prises aussi petites que possibles, car les conditions initiales doivent avoir un support aussi petit que possible.

Les valeurs $\sigma_x = 2.0$ et $\sigma_y = 0.15$ ont été choisies pour assurer une bonne représentation numérique pour la discrétisation en différences finies et spectrale (la base de la gaussienne est d'une largeur de 10 points en x pour des amplitudes normalisées aux bords de 0.002). De même, la perturbation est localisée en $y_0 = 1$ ( paisseur de déplacement de la couche limite) pour permettre une condition initiale localisée à l'intérieur de la couche limite.

Pour la simulation spatiale, nous avons choisi un pas d'espace dans la direction longitudinale $\Delta x = 1$ pour le schéma aux différences finies, un coefficient d'étirement $L = 2$ (pour une bonne représentation du spot) et une limite $y_{max} = 75$ à l'infini pour la discrétisation par méthode spectrale dans la direction normale à la paroi et enfin un pas de temps $\Delta t = 0.1$ pour l'intégration en temps.

5.3.2 Etudes de la réponse de la paroi

Dans ce paragraphe, les grandeurs du fluide et le jeu de paramètres de paroi utilisés sont les suivants : vitesse externe $U_\infty^* = 18m/s$, masse volumique $\rho^* = 1025kg/m^3$, viscosité cinématique $\nu^* = 1.37 \times 10^{-6}m^2/s$, épaisseur $b^* = 2mm$, masse volumique $\rho_p^* = 946kg/m^3$, module d'Young $E^* = 0.50 \times 10^6N/m^2$, nombre de poisson $\nu_p^* = 0.5$ et rigidité du ressort $\kappa^* = 0.115 \times 10^9N/m^3$.

5.3.2.1 Cas de la paroi infinie

Comme premier test, nous étudions le cas de la paroi souple de longueur "infinie" afin de pouvoir observer le phénomène d'interaction fluide / structure dans sa forme la plus simple. Cette étude permet ainsi d'obtenir des informations de base sur la présence des ondes dans un tel système. Pour simuler une paroi souple de longueur "infinie", nous choisissons une paroi souple assez longue (en se basant sur la connaissance des

longueurs d'ondes du problème) pour éviter tout phénomène de bord et nous introduisons des domaines tampons à l'entrée et à la sortie du domaine de taille convenablement choisie (longueur basée sur l'expérience pour éviter les réflexions).

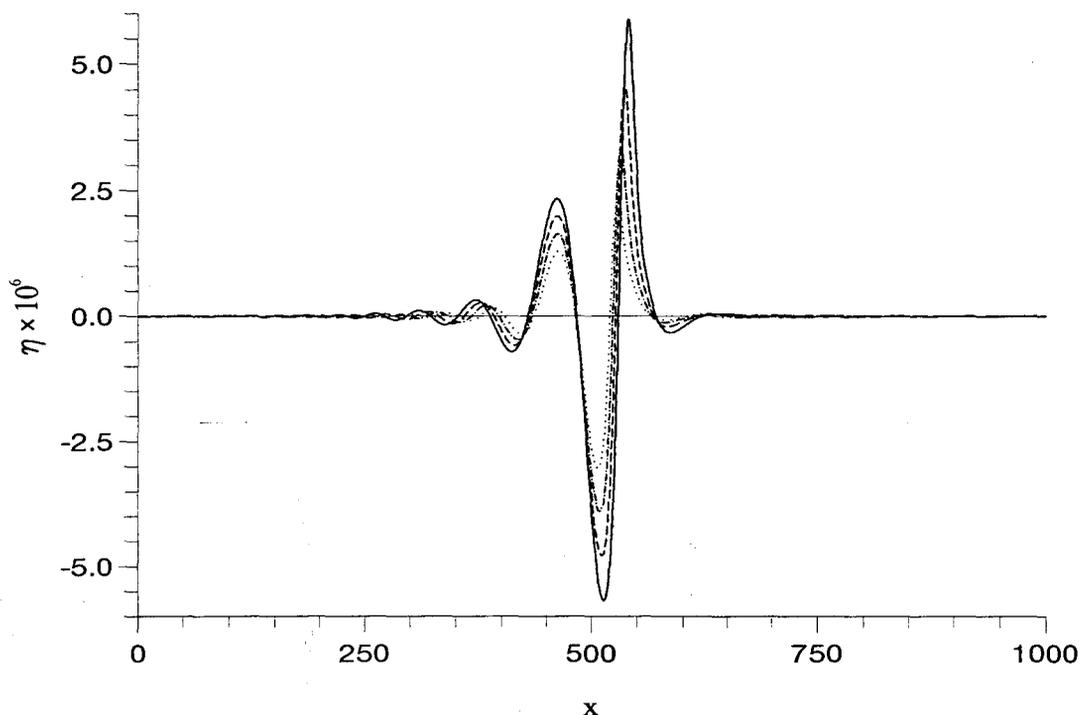


FIG. 5.16 - Variation de la déformée de la paroi en fonction du temps : \cdots $t = 62$, $-\cdot-$ $t = 68$, $--$ $t = 74$ et $—$ $t = 80$.

Dans ce paragraphe, nous cherchons juste à illustrer l'impulsion et son évolution. La Figure 5.16 montre l'évolution en temps de la réponse de la paroi juste après l'injection d'un spot localisé en $x_0 = 500$ à $t = 0$ d'amplitude $A = 1 \times 10^{-4}$ (A représente l'amplitude normalisée de la composante longitudinale de la vitesse de la perturbation localisée). Le nombre de Reynolds est fixé à 1000. Les nombres adimensionnels sont donc $\Lambda^M = 24$, $\Lambda^F = 3.3 \times 10^{-4}$ et $\Lambda^U = 0.03$. Les domaines tampons en amont et en aval sont appliqués respectivement pour x variant de 0 à 120 et de 880 à 1000. Il est alors clair que les limites en amont et en aval du domaine sont assez éloignées et permettent ainsi une étude de la perturbation sans influence des bords. L'observation de la déformée de la paroi met en évidence l'amorce de propagation de modes en amont et en aval. En effet, le fait d'imposer un signal impulsionnel au centre de la plaque n'impose pas de direction privilégiée quant au développement de la perturbation. Par conséquent, le système a la possibilité de générer des ondes qui se propagent dans la direction $x > 0$ et d'autres dans la direction $x < 0$.

5.3.2.2 Mode de divergence

Après avoir mis en évidence l'existence d'ondes se propageant dans le domaine $x < 0$ en utilisant la théorie de stabilité linéaire puis une simulation spatiale d'une perturbation localisée dans l'écoulement, il serait intéressant à ce stade de pouvoir détecter et donc étudier uniquement le mode de divergence sans que celui-ci soit influencé par l'évolution du paquet d'onde convecté.

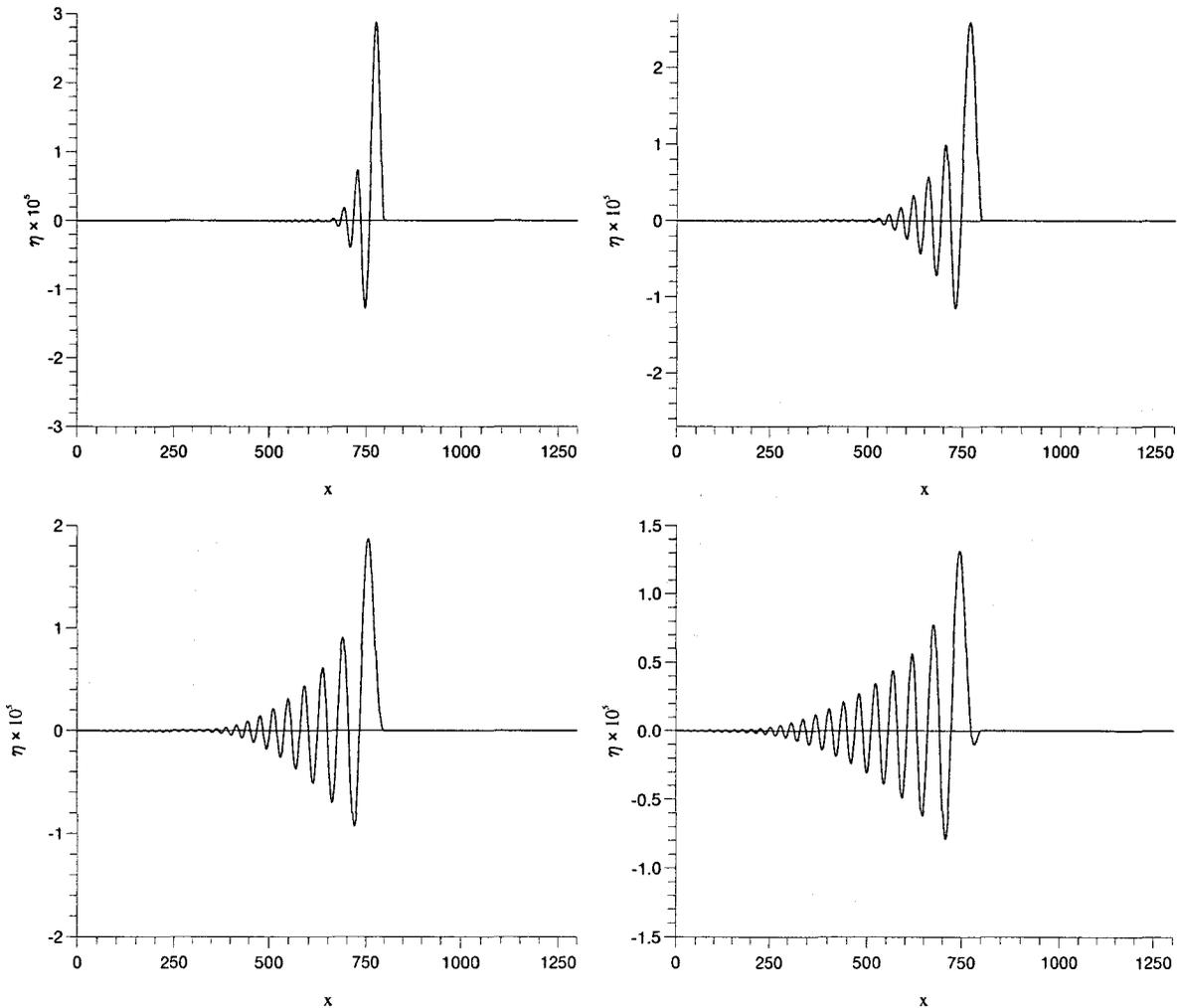


FIG. 5.17 - Déformée de la paroi pour le mode de divergence (en haut, à gauche) à $t = 80$ et (en haut, à droite) à $t = 140$ (en bas, à gauche) à $t = 200$ et (en bas, à droite) à $t = 260$.

Dans ce but, nous avons réalisé une simulation numérique spatiale d'un spot de vortécité introduit dans le champ de l'écoulement pour une paroi souple de longueur semi-infinie. Pour pouvoir observer seulement le mode de divergence, il faut que la paroi souple soit suivie d'une paroi rigide et que la perturbation localisée soit située à la jonction en aval de la paroi souple et de la paroi rigide. Pour cela, on travaille avec un domaine total

de taille $\mathcal{D}_x = 1300$ où les parois souple et rigide se situent respectivement de $x = 0$ à 800 et $x = 800$ à 1300 . On impose à $t = 0$ et $x = 800$ la perturbation du système avec une amplitude $A = 1 \times 10^{-3}$. Le nombre de Reynolds est fixé à 2000 et donne $\Lambda^M = 12$, $\Lambda^F = 2.5 \times 10^{-3}$ et $\Lambda^U = 0.059$. Deux domaines tampon en amont et en aval sont utilisés pour amortir la perturbation aux limites en x de l'étude.

L'évolution de la perturbation est représentée sur la Figure 5.17 pour différents temps t avec une perturbation initiale localisée en $x = 800$. Une solution du problème apparaît pour la paroi sous la forme d'une onde progressive se déplaçant en amont de l'écoulement. Le mode détecté est le mode de divergence identifié précédemment comme une onde se propageant en amont. On observe également sur la Figure 5.17 que ce mode se stabilise lorsqu'il évolue en espace. Par contre, la perturbation de l'écoulement se trouve convectée sur la paroi rigide ce qui est illustré par la Figure 5.18 où est représentée l'évolution en temps et en x de l'énergie de la perturbation de la vitesse du fluide normalisé par la valeur maximale de l'énergie initiale où $E(x, t) = \int_0^\infty (u^2 + v^2)(x, y, t) dy$. On observe également que, dans cette étude, le mode de divergence n'a pratiquement aucune influence sur le développement de l'énergie du fluide, le mode de divergence est un mode de "paroi".

Une approche théorique de recherche des instabilités de surface induites par un écoulement de Blasius pour des parois souples de type Kramer en écoulement potentiel a été réalisée par Carpenter et Garrad (1986). Dans leur travail, le mode de divergence est qualifié comme une instabilité absolue ce qui semblait consistant avec l'observation expérimentale (Gad-el-Hak *et al.*, 1984). Carpenter et Garrad observent que la vitesse de groupe $v_g = \frac{\partial \omega_r}{\partial \alpha_r}$ passe d'une valeur positive à une valeur négative suivant le nombre d'onde α_r , pour ce mode de divergence. Par conséquent, si le développement d'une onde est étudié au voisinage de $v_g = 0$ alors l'onde aura les caractéristiques d'une perturbation sans direction de propagation privilégiée. La même remarque peut être faite pour le cas considéré ici. La Figure 5.19 représente l'évolution de la vitesse de groupe v_g en fonction du nombre d'onde α_r pour le mode de divergence. On peut constater que la vitesse de groupe passe respectivement d'une valeur négative à une valeur positive puis à une valeur négative. Par conséquent, en utilisant le même raisonnement que Carpenter et Garrad, pour une certaine valeur du nombre d'onde, la solution peut se développer comme un mode absolu stable (c'est un phénomène transitoire car il disparaît après un certain temps). Le phénomène, prévu par une analyse de stabilité linéaire locale, est alors retrouvé par la simulation numérique d'une perturbation localisée dans le code de couplage fluide-structure qui a été développé. L'outil numérique utilisé est donc capable de détecter un mode qui n'est pas toujours évident à étudier suite à ses propriétés particulières.

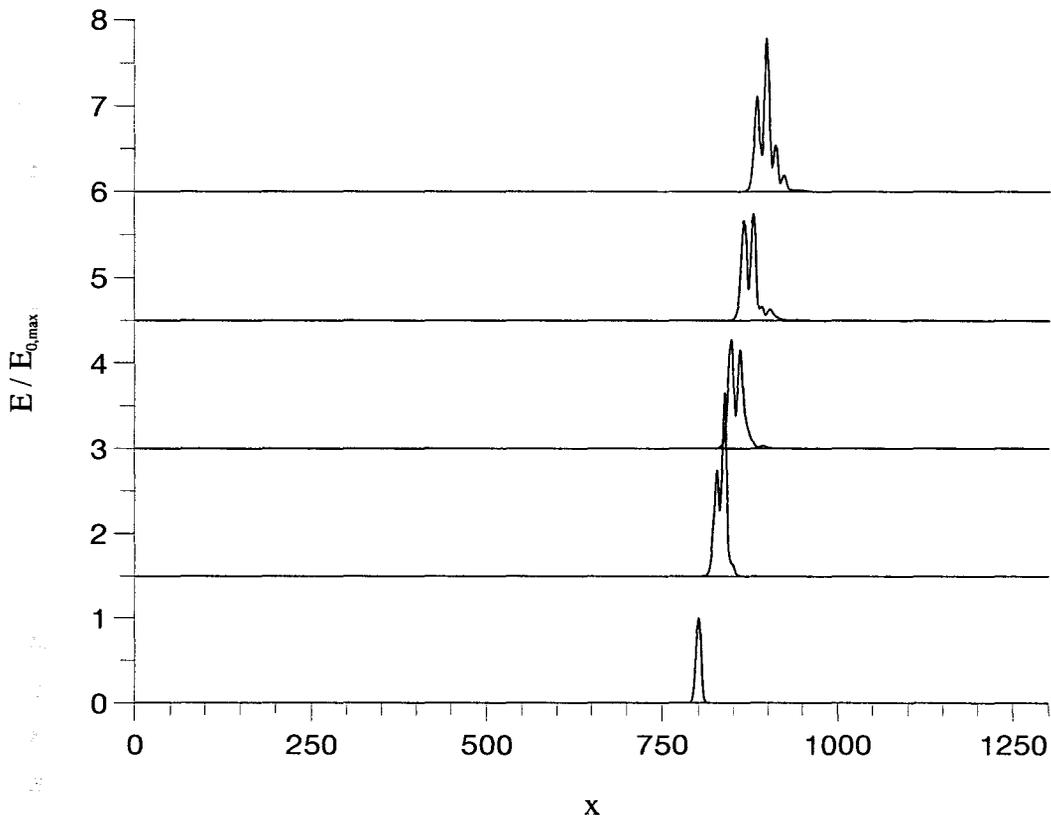


FIG. 5.18 - Energie à des temps $t = 0, 80, 140, 200, 260$.

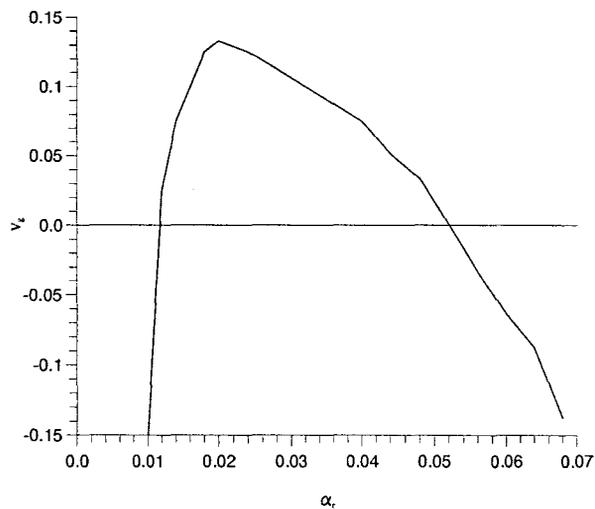


FIG. 5.19 - Vitesse de groupe v_g du mode de divergence par la théorie de stabilité linéaire.

5.3.2.3 Mode de Tollmien - Schlichting

Après avoir étudié l'influence d'une perturbation localisée pour une paroi souple "infinie" et mis en évidence le caractère particulier du mode de divergence, on s'intéresse maintenant au mode dominant du système couplé fluide-structure et de l'écoulement de couche limite *i.e.* le mode de Tollmien - Schlichting. Le mode de Tollmien - Schlichting est une instabilité visqueuse de nature convective dominant le phénomène d'instabilité dans l'écoulement.

Pour analyser l'évolution de l'instabilité de Tollmien-Schlichting dans le système couplé fluide-structure, l'étude d'une perturbation localisée dans une configuration où la paroi est prise semi-infinie (vers la direction en aval) est considérée. La simulation spatiale se déroule sur un domaine total de taille $D_x = 1300$ où les parois rigide et souple se situent respectivement de $x = 0$ à 400 et $x = 400$ à 1300 . On impose à $t = 0$ et $x = 400$ la perturbation du système avec une amplitude $A = 1 \times 10^{-3}$. Le nombre de Reynolds est fixé à 2000 ($\Lambda^M = 12$, $\Lambda^F = 2.5 \times 10^{-3}$ et $\Lambda^U = 0.059$). Un domaine tampon est utilisé pour amortir la perturbation à la sortie de l'étude.

La déformée de la paroi est représentée sur la Figure 5.20 pour différents temps. On observe alors progressivement l'apparition d'un mode instable dominant convectée dans le sens de l'écoulement avec une longueur d'onde fixe. En regardant plus en détails le développement de la paroi souple en temps, on constate qu'une perturbation de moindre envergure précède le paquet d'onde. Ce mode se déplace plus rapidement que l'instabilité de Tollmien-Schlichting et possède une longueur d'onde plus grande que le paquet d'onde. Cette perturbation de la paroi a toutes les caractéristiques de la deuxième instabilité convective observée en théorie linéaire : le mode de surface. On peut également remarquer qu'aucun mode se déplaçant dans le sens opposé à l'écoulement n'apparaît. Ceci est une conséquence de la suppression des instabilités au bord en aval de la paroi, la configuration étant semi-infinie.

La Figure 5.21 montre l'évolution de l'énergie du fluide en temps normalisé par le maximum de l'énergie initiale. Le paquet d'onde se trouve clairement convecté dans le sens de l'écoulement avec une amplification temporelle de l'énergie du système exponentielle. Par conséquent, l'étude du développement d'une perturbation localisée sur une paroi souple avec une direction privilégiée $x - x_0 > 0$ (x_0 abscisse de la perturbation initiale) met en évidence un phénomène instable purement convectif de l'instabilité de Tollmien-Schlichting.

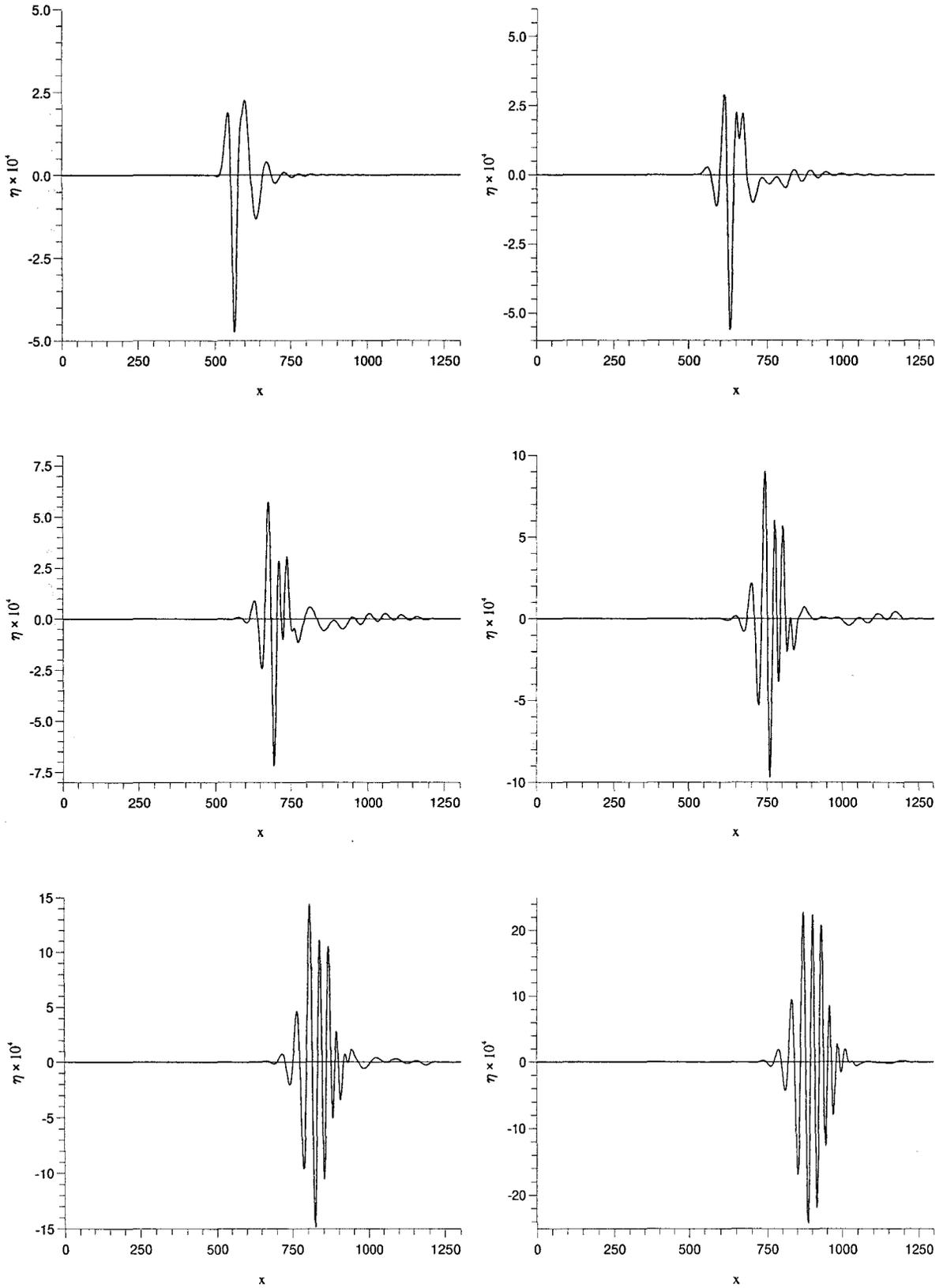


FIG. 5.20 - Déformée de la paroi pour $t = 200, 400, 600, 800, 1000, 1200$.

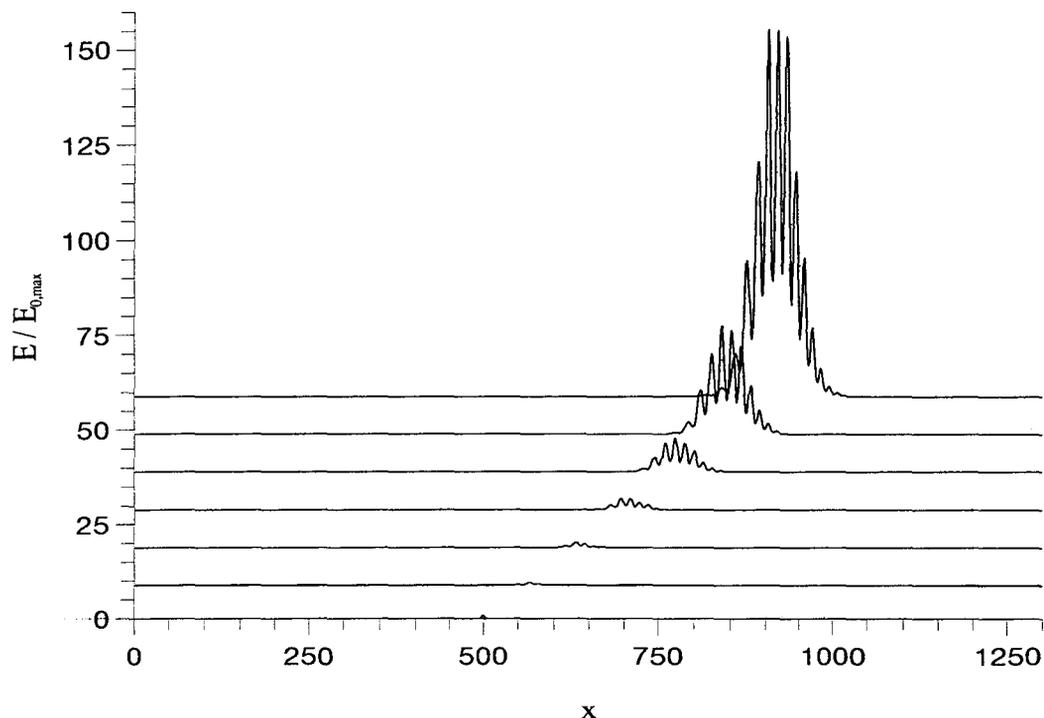


FIG. 5.21 - *Energie du fluide pour $t = 0, 200, 400, 600, 800, 1000, 1200$.*

5.3.3 Evolution spatio-temporelle de l'énergie du fluide

Pour examiner plus précisément l'évolution du paquet d'onde dans une configuration plus réaliste, une simulation numérique spatiale d'un spot de vorticié introduit dans le champ de l'écoulement a été réalisé pour une paroi souple de longueur finie. Le calcul est effectué pour un domaine total de taille $\mathcal{D}_x = 900$ où la paroi souple est encastrée de part et d'autre d'une paroi rigide soit respectivement les domaines $x = 200$ à 600 , $x = 0$ à 200 et $x = 600$ à 900 . A l'instant $t = 0$, on impose dans l'écoulement à une localisation en x équivalente au centre de la paroi souple (*i.e.* $x = 400$), une perturbation localisée avec une amplitude $A = 1 \times 10^{-4}$. Le nombre de Reynolds est fixé à 1000. Un domaine tampon est utilisé à la sortie du domaine pour amortir la perturbation sans la réfléchir. Pour le cas considéré ici, les grandeurs du fluide et le jeu de paramètres de paroi utilisés sont les suivants : vitesse externe $U_\infty^* = 18\text{m/s}$, masse volumique $\rho^* = 1025\text{kg/m}^3$, viscosité cinématique $\nu^* = 1.37 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$, masse volumique $\rho_p^* = 946\text{kg/m}^3$, module d'Young $E^* = 0.50 \times 10^6\text{N/m}^2$, nombre de poisson $\nu_p^* = 0.5$, rigidité du ressort $\kappa^* = 0.115 \times 10^9\text{N/m}^3$ et amortissement $d^* = 2000\text{kg/m}^2\text{s}$. Le nombre de Reynolds est fixé à 2000.

Présentons d'abord le cas où le système couplé fluide-structure est reconnu être convectivement instable. L'épaisseur de la plaque est choisie égale à $b^* = 2\text{mm}$ ($\Lambda^M = 12$,

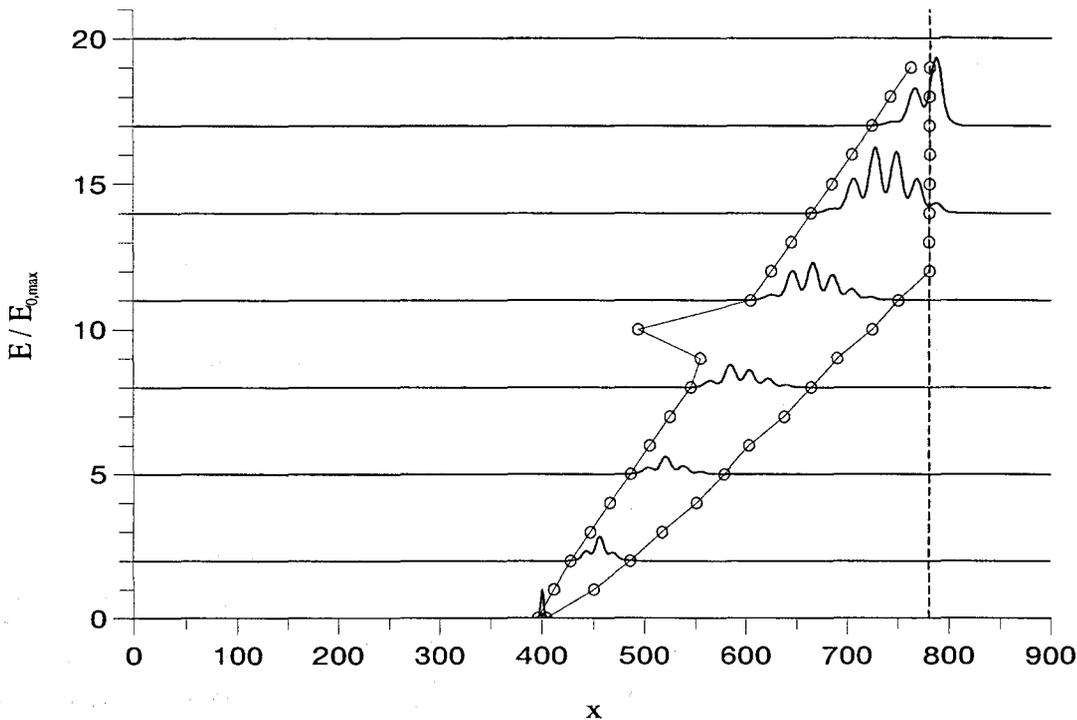


FIG. 5.22 - *Energie pour $t = 0, 187.5, 375, 562.5, 750, 937.5, 1125, 1312.5$ pour une paroi de longueur finie : instabilité convective.*

$\Lambda^F = 2.5 \times 10^{-3}$ et $\Lambda^U = 0.059$) pour s'assurer de la nature convective des instabilités. La Figure 5.22 montre l'évolution en temps de l'énergie du fluide (toujours normalisée par le maximum de l'énergie initiale). On observe effectivement que l'écoulement est convectivement instable car la perturbation localisée se développe le long de la direction x (longitudinale) en un paquet d'ondes de modes spatio-temporels lesquels croissent exponentiellement le long de certaines droites $x/t = v$ et diminuent le long des autres droites. Les modes instables sont alors délimités par une paire de droites particulières $x/t = v_{\pm}$ ou "bords" lesquels représentent la propagation des ondes neutres. Numériquement, le "zéro" n'existant pas, il faut imposer un critère permettant de fixer la valeur en dessous de laquelle l'instabilité est amortie. Le critère proposé est le suivant : soit $crit$ la valeur du critère de stabilité (basée sur l'énergie initiale), on définit la vitesse v_- en calculant un $x_- / \left| \frac{E(x, t)}{E(x, t=0)} \right| < crit$ pour x croissant et, de la même manière, une vitesse v_+ pour x décroissant. A un temps t proche de 690, la droite v_- est momentanément déviée de son axe de propagation principal pour remonter un peu l'écoulement. Ce phénomène temporaire paraît lier au fait qu'aux temps précédents la perturbation atteint la limite en aval de la paroi pour se réfléchir puis s'évanouir avec le temps. Cependant, dans l'ensemble, v_- et v_+ ont le même signe (positif), ce qui signifie que la réponse du système diminue

pour chaque localisation fixée, indiquant alors un type convectif d'instabilité.

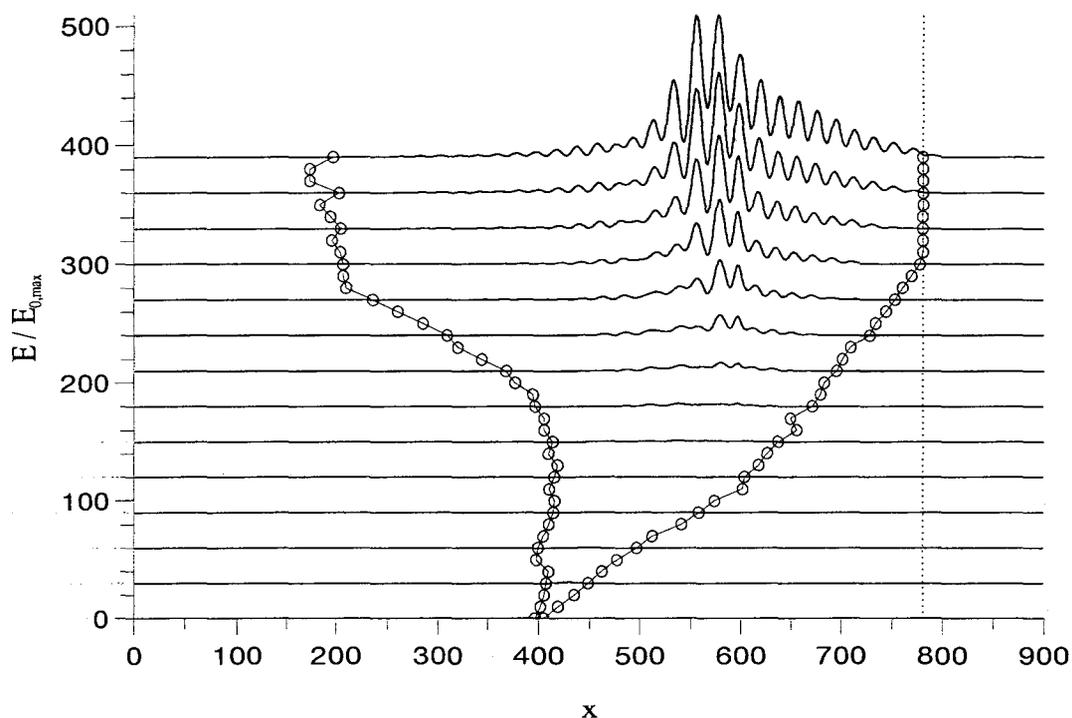


FIG. 5.23 - *Energie pour $t = 0, 20, 80, 140, \dots, 720, 800$ pour une paroi de longueur finie : instabilité absolue.*

Si, au contraire, v_- est négatif et v_+ est positif, la droite spatio-temporelle $x/t = 0$ se trouve dans le domaine des modes croissant exponentiellement, ce qui indique un type absolu d'instabilité. Pour observer ce résultat, il faut se placer dans des bonnes conditions ce qui correspond aux regards de la Figure 5.15, à choisir par exemple, $b^* = 0.8mm$ ($\Lambda^M = 4.9$, $\Lambda^F = 3.9 \times 10^{-2}$ et $\Lambda^U = 0.15$). En réalisant une étude similaire à la précédente mais avec une épaisseur de plaque prise égale à $b^* = 0.8mm$, le phénomène d'instabilité absolue est clairement mis en évidence sur la Figure 5.23. Après une certaine période de temps où la vitesse v_- n'est pas encore négative, la perturbation commence à envahir tout le champ d'écoulement pour croître de manière explosive. La perturbation à caractère absolu reste alors située sur toute la longueur de la paroi, son maximum étant localisé à la limite en aval de la paroi, car la perturbation se trouve ensuite convectée sur la paroi rigide. On remarquera l'efficacité du domaine tampon utilisé dans les différentes simulations spatiales présentées.

5.3.4 Influence de la paroi souple sur l'évolution temporelle de l'énergie du fluide

Lorsqu'un signal impulsionnel est injecté dans la simulation, la perturbation augmente en amplitude et se développe en espace sous une forme oscillatoire de l'énergie. Plusieurs longueurs d'onde régulières peuvent être distinguées, leur nombre augmentant avec la propagation du paquet d'onde dans la direction longitudinale x . L'évolution en temps de l'énergie de la perturbation de la vitesse du fluide sur le domaine entier :

$$\epsilon(t) = \left(\int \int (u^2 + v^2)(x, y, t) dx dy \right)^{1/2} \quad (5.24)$$

est présenté sur la Figure 5.24 en trait continu pour le cas de la paroi rigide. L'étude a été menée sur un domaine $\mathcal{D}_x = 1000$ pour une perturbation localisée introduite en $x = 50$ avec une amplitude initiale $A = 1 \times 10^{-5}$ et un nombre de Reynolds de 2000. Après une période transitoire ($t < 150$), la perturbation subit une croissance exponentielle laquelle est gouvernée principalement par les mécanismes d'instabilité linéaire.

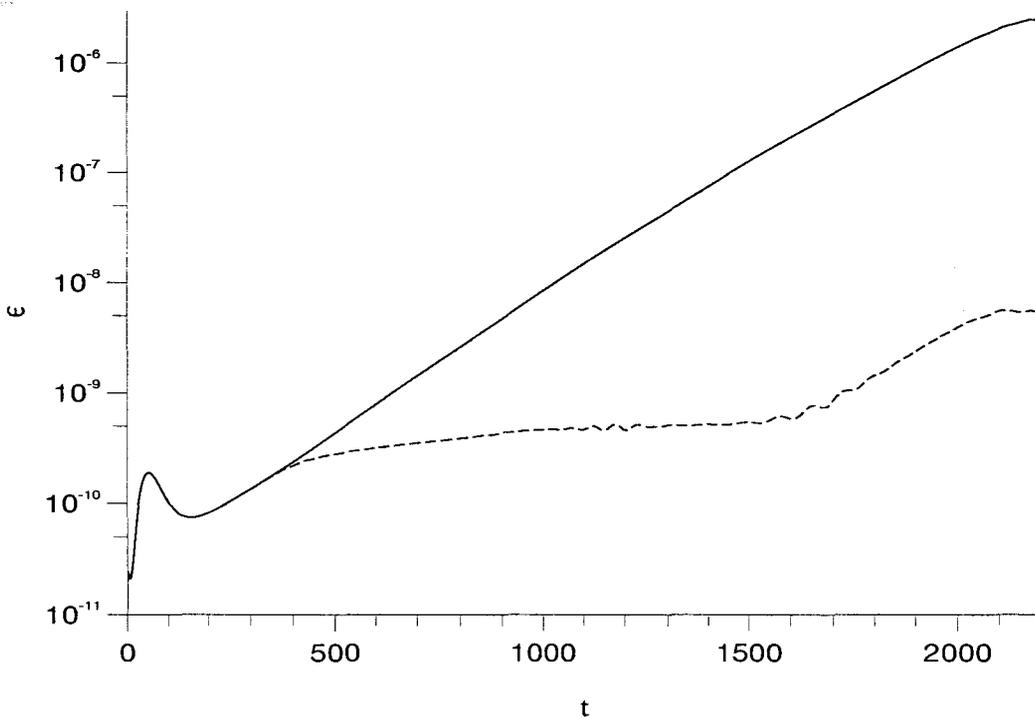


FIG. 5.24 - Energie $\epsilon(t)$: — paroi rigide, -- paroi optimale de Carpenter et Morris (1990).

Pour montrer l'influence de la paroi souple sur l'évolution du paquet d'onde, une étude correspondant au cas optimal de retard de transition en théorie linéaire présenté

par Carpenter et Morris (1990) a été réalisée. En considérant le domaine et la perturbation initiale identiques à la simulation traitée précédemment, une paroi souple est insérée dans la paroi rigide sur l'intervalle $x = 200$ à 700 . Les grandeurs du fluide et le jeu de paramètres de paroi utilisés sont les suivants : vitesse externe $U_\infty^* = 20\text{m/s}$, masse volumique $\rho^* = 1000\text{kg/m}^3$, viscosité cinématique $\nu^* = 1.00 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$, masse volumique $\rho_p^* = 1000\text{kg/m}^3$, module d'Young $E^* = 1.385 \times 10^6\text{N/m}^2$, nombre de poisson $\nu_p^* = 0.5$, rigidité du ressort $\kappa^* = 0.354 \times 10^9\text{N/m}^3$, épaisseur $b^* = 0.735\text{mm}$ et amortissement $d^* = 0$ ($\Lambda^M = 7.4$, $\Lambda^F = 6.5 \times 10^{-3}$ et $\Lambda^U = 0.073$). Le résultat est présenté en tirets sur la Figure 5.24. On constate alors qu'après une période transitoire $t < 150$, la courbe $\epsilon(t)$ en tirets suit celle de la simulation rigide en continu (ce qui correspond au temps de passage de la perturbation sur la paroi rigide) jusqu'à $t < 400$. Ensuite, la perturbation atteint la paroi souple, ce qui se traduit par une réduction importante du taux d'amplification de ϵ (par rapport au cas rigide) comme prévu par Carpenter et Morris (1990). Puis la perturbation se propage le long de la paroi souple sur un temps assez long correspondant au fait que la paroi souple s'étend sur la majeure partie de la structure pour enfin revenir sur la plaque rigide ($t > 1700$) et retrouver l'amplification temporelle du système rigide. Une comparaison des niveaux d'amplitude des deux énergies montre que lorsque la perturbation sur paroi souple atteint la sortie du domaine d'étude, celle-ci est alors 300 fois moins amplifiée que son homologue qui s'est développé sur paroi rigide uniquement.

5.4 Résumé

La réponse d'un signal impulsif dans un écoulement de couche limite de Blasius interagissant avec une paroi souple a été analysée par une étude de stabilité linéaire et une simulation spatiale d'un spot de vorticité. D'un point de vue de la théorie de stabilité linéaire, la nature convective des instabilités de Tollmien-Schlichting et de l'instabilité de surface a été clairement mise en évidence. D'un autre côté, les modes de divergence et évanescent apparaissent comme des ondes qui ne peuvent exister que si la paroi souple n'induit pas de direction privilégiée quant au développement de la perturbation. En outre, l'onde de divergence est une onde qui possède la particularité d'avoir une vitesse de propagation opposée au mouvement de l'écoulement principal.

L'étude de l'influence de l'épaisseur de la plaque sur les modes instables montre que la diminution de la valeur de ce paramètre a un effet stabilisant sur le mode visqueux mais un effet déstabilisant sur le mode de surface pouvant entraîner l'apparition d'une instabilité absolue. Enfin, l'étude de l'effet de l'amortissement sur les instabilités montre que

l'amortissement a un effet stabilisant sur le mode de surface contre un effet déstabilisant pour le mode TS. La mise en évidence du mode transitionnel, observée par Carpenter et Garrad (1985) avec l'augmentation de la valeur de l'amortissement, apparaît ici clairement comme une importante déstabilisation du mode de Tollmien-Schlichting (le mode de surface est alors complètement stabilisé). Par ailleurs, une coalescence entre le mode visqueux et le mode évanescent peut être observée pour certaines grandeurs de la paroi. Cette coalescence met en évidence un point de pincement conduisant à une nature absolue de l'instabilité. La connaissance de ce phénomène est très importante pour éviter toute détérioration de la paroi.

Pour compléter les informations acquises par la théorie de stabilité linéaire et réduire le nombre d'hypothèses simplificatrices, nous avons considéré l'évolution d'un spot de vorticité dans l'écoulement en utilisant l'outil numérique de simulation spatiale. En effet, la simulation spatiale permet de prendre en compte les effets non parallèles induits par l'épaisseur de la couche limite et le déplacement de la paroi, l'influence des non-linéarités mais surtout de considérer des configurations de paroi adéquates pour l'étude des instabilités (paroi semi-infinie vers l'aval, paroi semi-infinie vers l'amont et paroi de longueur finie). L'étude du mode de divergence montre clairement que ce mode est une onde de nature absolue mais stable. De même, l'étude d'une perturbation avec la direction en aval comme sens privilégié de propagation montre clairement la nature convective (et instable) des modes de Tollmien-Schlichting et de surface. Ensuite, nous avons confirmé les observations faites en théorie de stabilité linéaire concernant le développement convectif ou absolu d'une perturbation localisée pour certaines configurations de la paroi. L'instabilité absolue détectée en stabilité linéaire et pour un écoulement parallèle se voit reproduite dans la simulation spatiale, le caractère explosif de l'instabilité étant clairement établi. Enfin, une étude numérique d'une perturbation évoluant sur une plaque rigide, dans laquelle une paroi souple a été encastrée, montre clairement l'influence (positive) que peut avoir la paroi souple sur l'amplification temporelle de l'instabilité.

Conclusion

Une méthode numérique capable de résoudre les équations de Navier-Stokes dans une géométrie complexe et évolutive, elle-même solution du problème, a été développée. L'outil de simulation numérique du problème complexe d'interaction fluide-structure a permis d'étudier le développement de perturbations dans une couche limite le long d'une paroi souple. Contrairement à des études antérieures, le modèle numérique prend pleinement en compte des effets non parallèles dus à l'accroissement de la couche limite et au mouvement de la paroi, ainsi que les interactions non linéaires.

La méthode permet d'étudier l'évolution spatiale des ondes de Tollmien-Schlichting et de surface dans un régime non linéaire. En effet, une expérience numérique réaliste de l'évolution d'une perturbation sur une membrane sous tension montre que, dans le cas fortement non linéaire, la membrane avec amortissement exhibe un état de déformée globale et le mécanisme d'instabilité associée n'est plus une onde progressive. L'influence des non-linéarités sur la déformation de paroi avec amortissement a également été étudiée récemment par Lucey *et al.* (1997) en considérant un écoulement potentiel instable. Leur étude montrait également l'apparition d'un mode de déformation globale de la surface.

Des études numériques se rapprochant de la réalité physique ont pu être menées pour le cas d'une plaque mince élastique montée sur des ressorts de longueur finie encastée dans une paroi rigide. L'algorithme de simulation spatiale développé a permis de reproduire simultanément différentes sources d'instabilités présentes dans le système couplé fluide-structure. Cette étude contribue ainsi à la clarification des mécanismes de ce type de système, en utilisant un modèle avec un minimum d'hypothèses simplificatrices.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, une étude objective et rigoureuse de la nature des instabilités a été entreprise et a permis de qualifier, entre autres, l'onde de divergence qui apparaît comme une onde progressive se déplaçant dans le sens opposé de l'écoulement principal. L'onde de divergence, en se basant sur la théorie de stabilité linéaire et la simulation numérique, serait une onde de nature absolument stable avec des taux d'amortissement spatial proche de zéro (d'où le qualificatif statique donné par Carpenter et Garrad, 1985). Pour le mode transitionnel, une étude de l'influence de l'amortissement

sur les différentes branches spatiales a permis de mettre en évidence les effets observés par Carpenter et Garrad (1985). Cependant, contrairement à l'interprétation de Carpenter et Garrad, le mode transitionnel n'apparaît pas résulter d'une coalescence entre le mode visqueux et le mode de surface. L'amortissement agit principalement en déstabilisant fortement le mode TS (en formant une grande boucle d'un point de vue de stabilité neutre). Par ailleurs, on a été en mesure de détecter une instabilité absolue formée par la coalescence du mode visqueux et du mode évanescent. Cette observation a également pu être mise en évidence par la simulation spatiale d'un spot de vorticité dans l'écoulement. Notons que l'instabilité absolue d'un écoulement de couche limite de Blasius sur des parois viscoélastiques simple couche fut détectée et étudiée par Yeo *et al.* (1996).

Que peut-on dire du contrôle au début de la transition? Bien que l'on puisse trouver des paramètres de paroi optimaux capables de réduire de manière conséquente les taux d'amplifications des différentes instabilités (voir Carpenter et Morris, 1990), le bénéfice peut se trouver anéanti soit par des modes de paroi déstabilisant le fluide, soit par l'apparition d'une instabilité de type absolue. Finalement, même si la plaque mince considérée dans notre étude (paroi de Kramer) peut parfois être qualifiée de peu réaliste, il est à craindre cependant que les phénomènes soient typiques pour d'autres modèles (Yeo *et al.*, 1996).

Certes, les travaux que nous avons présentés sont toujours réalisés pour un écoulement de type bidimensionnel mais ce sont précisément les premières instabilités qui apparaissent dans le début de la transition. L'algorithme peut être étendu à des écoulements tridimensionnels, à condition que la géométrie dans la troisième direction (transversale) soit homogène. La solution peut alors être développée en modes de Fourier dans la direction transversale. Pour chaque mode, il convient alors d'appliquer un algorithme, qui s'apparente à celui décrit ici pour le problème bidimensionnel (les termes de convolution entre modes étant évalués de manière explicite).

Annexe A

Couche limite de Blasius

Pour un écoulement de couche limite laminaire, Prandtl (1927) a obtenu un système d'équations de couche limite pour un écoulement incompressible bidimensionnel, lesquelles sont :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Blasius (1950) montrait que pour un écoulement de couche limite formée le long d'une plaque plane, avec les conditions limites $U(x, 0) = V(x, 0) = 0$ et $U(x, \infty) = 1$, les équations de couche limite pouvaient être résolues en utilisant une fonction de courant définie par un paramètre de similitude Θ :

$$\psi = (\nu U_\infty x)^{1/2} f(\Theta), \quad (\text{A.4})$$

où $\Theta = \frac{y}{x} Re_x^{1/2}$ et $Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu}$. Les vitesses correspondantes sont définies par :

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (\text{A.5})$$

En substituant les vitesses dans les équations de couche limite, on arrive aux équations suivantes pour la fonction de similitude :

$$2f'''(\Theta) + f(\Theta)f''(\Theta) = 0, \quad (\text{A.6})$$

avec les conditions aux limites :

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad f''(\Theta \rightarrow \infty) \rightarrow 1, \quad (\text{A.7})$$

où un prime représente $d/d\Theta$. Les composantes de la vitesse sont données par :

$$U = f'(\Theta) \quad \text{et} \quad V = \frac{1}{2} Re_x^{-1/2} [\Theta f'(\Theta) - f(\Theta)]. \quad (\text{A.8})$$

Un nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement en x_a^* est défini par $Re_{\delta_a^*} = \frac{U_\infty \delta_a^*}{\nu}$. L'épaisseur de déplacement δ_a^* est donnée par :

$$\delta_a^* = \Gamma \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad \text{avec} \quad \Gamma = 1.7208. \quad (\text{A.9})$$

Par conséquent, pour la simulation spatiale, l'écoulement principal doit être redéfini dans nos grandeurs sans dimension pour pouvoir l'appliquer au maillage de l'étude. Pour cela, la variable de similitude se réécrit :

$$\Theta = y^* \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x^*}} = \bar{y} \delta_a^* \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x^*}} = \bar{y} \delta_a^* \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x_a^* + \Delta x^*}} \quad (\text{A.10})$$

$$= \bar{y} \delta_a^* \sqrt{\frac{1}{\frac{\nu x_a^*}{U_\infty} + \frac{\Delta x^* \nu}{U_\infty}}} = \bar{y} \delta_a^* \sqrt{\frac{1}{\frac{\delta_a^{*2}}{\Gamma^2} + \frac{\Delta x^* \nu}{U_\infty}}} = \bar{y} \delta_a^* \frac{\Gamma}{\delta_a^* \sqrt{1 + \frac{\Gamma^2 \nu \Delta x^*}{\delta_a^{*2} U_\infty}}} = \bar{y} \frac{\Gamma}{\sqrt{1 + \frac{\Gamma^2 \Delta \bar{x}}{Re_{\delta_a^*}}}}, \quad (\text{A.11})$$

où * représente les grandeurs avec dimension, $\bar{}$ les grandeurs adimensionnées par δ_a^* et Δx^* l'écart $x^* - x_a^*$. Les composantes de la vitesse s'écrivent sous la forme :

$$U(\bar{x}, \bar{y}) = f'(\Theta) \quad \text{et} \quad V(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{\sqrt{Re_{\delta_a^*}^2 + \Gamma^2 \Delta \bar{x} Re_{\delta_a^*}}} [\Theta f'(\Theta) - f(\Theta)]. \quad (\text{A.12})$$

Annexe B

Méthode d'Arnoldi

Dans cette étude, la méthode QZ donne lieu à des temps de calculs très importants quand on cherche à déterminer, par exemple, la courbe de stabilité neutre. Or nous ne sommes intéressés que par la partie du spectre donnant une amplification temporelle fixée (par exemple, $\omega_i = 0$ pour la courbe neutre). Nous utilisons à cette fin la méthode dite d'Arnoldi (voir Nayar et Ortega, 1993) dont nous présentons brièvement les grandes lignes.

Considérons un problème aux valeurs propres simple de la forme :

$$A\vec{x} = \omega\vec{x}, \quad (\text{B.1})$$

où A est une matrice réelle carrée et \vec{x} la fonction propre associée à la valeur propre ω . Si l'on cherche le spectre de (B.1) localisé proche d'une valeur ω_0 donnée, on considère le problème "inverse - décalé" suivant :

$$(A - \omega_0 I)\vec{x} = \omega\vec{x}, \quad (\text{B.2})$$

et les valeurs propres μ de la matrice $C = (A - \omega_0 I)^{-1}$ sont liées aux valeurs propres ω de (B.1) par :

$$\omega = \omega_0 + 1/\mu. \quad (\text{B.3})$$

Or la méthode d'Arnoldi permet de déterminer la partie du spectre de plus grand module d'une matrice C par l'algorithme suivant :

on choisit un vecteur \vec{q}_1 avec $\langle \vec{q}_1, \vec{q}_1 \rangle = 1$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignant le produit scalaire canonique), et on détermine une suite de vecteurs orthonormée $\vec{q}_2, \dots, \vec{q}_m$ par :

$$\vec{q}_{j+1} = C\vec{q}_j - \sum_{i=1}^j h_{i,j}\vec{q}_i, \quad (\text{B.4})$$

$$h_{j+1,j} = \langle \vec{q}_{j+1}, \vec{q}_{j+1} \rangle^{1/2},$$

$$\vec{q}_{j+1} = \vec{q}_{j+1}/h_{j+1,j},$$

pour $j = 1, \dots, m-1$ avec $h_{i,j} = \langle \vec{q}_j, C\vec{q}_j \rangle$. Notons que $\vec{w} = C\vec{q}_j$ est calculé en résolvant $(A - \omega_0 I)\vec{w}_{j+1} = \vec{q}_j$ après l'utilisation d'une décomposition LU . Les $h_{i,j}$ définissent une matrice $m \times m$ de Hessenberg H dont les valeurs propres approximent celles de A , en particulier celles de plus grand module. En effet, les matrices $H_m = (h_{i,j})$ et $Q_m = (\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m)$ vérifient par construction :

$$AQ_m = Q_m H_m + R_m. \quad (\text{B.5})$$

Pour une valeur de m assez grand, on montre (Nayar et Ortega, 1993) que si (λ, \vec{y}) est le couple valeurs-vecteurs propres de H_m alors une estimation de ce couple pour A sera égale à $(\omega_0 + 1/\mu, Q_m \vec{y})$.

Pour appliquer la méthode d'Arnoldi au problème aux valeurs propres généralisées $Ax = \omega Bx$, il suffit de considérer le problème $C\vec{x} = \mu\vec{x}$ où $C = (A - \omega_0 B)^{-1}$ et $\mu = 1/(\omega - \omega_0)$. Une fois les valeurs propres calculées, nous éliminons celles dont l'erreur est supérieure à une précision *prec1* choisie.

Annexe C

Différences finies

Dans la direction longitudinale, un schéma aux différences finies centrées d'ordre quatre minimum est utilisé pour exprimer les dérivées premières et secondes f'_i et f''_i aux points intérieurs (en effet, pour la dérivée première, un schéma d'ordre huit sera utilisé). Aux points limites, un schéma décentré d'ordre quatre sera considéré. N représente le nombre de points total en x .

Les dérivées premières sont :

$$f'_1 = \frac{1}{12\Delta x} (-25f_1 + 48f_2 - 36f_3 + 16f_4 - 3f_5), \quad (\text{C.1})$$

$$f'_2 = \frac{1}{12\Delta x} (-3f_1 - 10f_2 + 18f_3 - 6f_4 + f_5), \quad (\text{C.2})$$

$$f'_{i=3,N-2} = \frac{1}{12\Delta x} (-f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}), \quad (\text{C.3})$$

$$f'_{i=4,N-3} = \frac{1}{60\Delta x} (-f_{i-3} + 9f_{i-2} - 45f_{i-1} + 45f_{i+1} - 9f_{i+2} + f_{i-3}), \quad (\text{C.4})$$

$$f'_{i=5,\dots,N-4} = \frac{1}{840\Delta x} (3f_{i-4} - 32f_{i-3} + 168f_{i-2} - 672f_{i-1} + 672f_{i+1} - 168f_{i+2} + 32f_{i-3} - 3f_{i-4}), \quad (\text{C.5})$$

$$f'_{i=N-1} = \frac{1}{12\Delta x} (-f_{N-4} + 6f_{N-3} - 18f_{N-2} + 10f_{N-1} + 3f_N), \quad (\text{C.6})$$

$$f'_{i=N} = \frac{1}{12\Delta x} (-3f_{N-4} - 16f_{N-3} + 36f_{N-2} - 48f_{N-1} + 25f_N). \quad (\text{C.7})$$

Les dérivées secondes sont :

$$f''_1 = \frac{1}{12\Delta x^2} (35f_1 - 104f_2 + 114f_3 - 56f_4 + 11f_5), \quad (\text{C.8})$$

$$f''_2 = \frac{1}{12\Delta x^2} (11f_1 - 20f_2 + 6f_3 + 4f_4 - f_5), \quad (\text{C.9})$$

$$f''_{i=3,\dots,N-2} = \frac{1}{12\Delta x^2} (-f_{i-2} + 16f_{i-1} - 30f_i + 16f_{i+1} - f_{i+2}), \quad (\text{C.10})$$

$$f''_{i=N-1} = \frac{1}{12\Delta x^2} (-f_{N-4} + 4f_{N-3} + 6f_{N-2} - 20f_{N-1} + 11f_N), \quad (\text{C.11})$$

$$f''_{i=N} = \frac{1}{12\Delta x^2} (11f_{N-4} - 56f_{N-3} + 114f_{N-2} - 104f_{N-1} + 35f_N). \quad (\text{C.12})$$

Annexe D

Détail des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C}

Après discrétisation en y et application des transformées de Fourier (5.2) et de Laplace (5.3), le système équivalent à (5.1) s'écrit sous la forme :

$$(\alpha \mathbf{A} + \omega \mathbf{B} + \mathbf{C}) \hat{\hat{\Phi}} = \vec{\varphi}, \quad (\text{D.1})$$

tel que

$$\hat{\hat{\Phi}}(\alpha, \omega) = \left(\hat{\hat{\Psi}}(\alpha, \omega), \omega \hat{\eta}, \alpha \hat{\eta}, \alpha^2 \hat{\eta}, \alpha^3 \hat{\eta}, \alpha \hat{\hat{\Psi}}_1(\alpha, \omega) \right), \quad (\text{D.2})$$

avec

$$\hat{\hat{\Psi}}_1(\alpha, \omega) = \left\{ \left(\hat{u}(\alpha, y_j, \omega), \hat{v}(\alpha, y_j, \omega) \right), j = 1 \cdots M \right\}, \quad (\text{D.3})$$

et

$$\hat{\hat{\Psi}}(\alpha, \omega) = \left\{ \left(\hat{u}(\alpha, y_j, \omega), \hat{v}(\alpha, y_j, \omega), \hat{p}(\alpha, y_j, \omega), \hat{\eta}(\alpha, \omega) \right), j = 1 \cdots M \right\}, \quad (\text{D.4})$$

où $\hat{\hat{\Psi}}$ est la solution du problème après application de (5.2) et (5.3) et $\vec{\varphi}$ représente la contribution de la condition initiale $S(x, y) = \delta(x) f(y)$ avec la fonction $f(y)$ discrétisée en y .

La forme assemblée de l'équation matricielle ($\alpha\mathbf{A} + \omega\mathbf{B} + \mathbf{C}$) est la suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -iReU & 0 & -iRe & iReUDU & 0 & DU & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -iReU & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ i & 0 & 0 & -iDU & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2i/Re & 0 & 0 & 2iDU/Re & 0 & 0 & 0 & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} iRe & 0 & 0 & -iReDU & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & iRe & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} D^2 & -ReDU & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^2|1 & -ReD & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

où la 1^{ère} ligne représente l'équation de quantité de mouvement pour la composante longitudinale de la perturbation de la vitesse u et les conditions limites associées, la 2^{ème} ligne représente l'équation de quantité de mouvement pour la composante normale de la perturbation de la vitesse v et les conditions limites associées, la 3^{ème} ligne représente

l'équation d'incompressibilité, la 4^{ième} ligne représente l'équation dynamique et les 6 dernières lignes représentent l'introduction des variables auxiliaires.

Pour une analyse de stabilité linéaire temporelle, les matrices **A** et **C** sont regroupées et les variables auxiliaires pour α ne sont pas introduites. Pour une analyse de stabilité linéaire spatiale, les matrices **B** et **C** sont regroupées et la variable auxiliaire pour ω n'est pas introduite.

Annexe E

Théorie asymptotique, figures de Carpenter et Gajjar (1990)

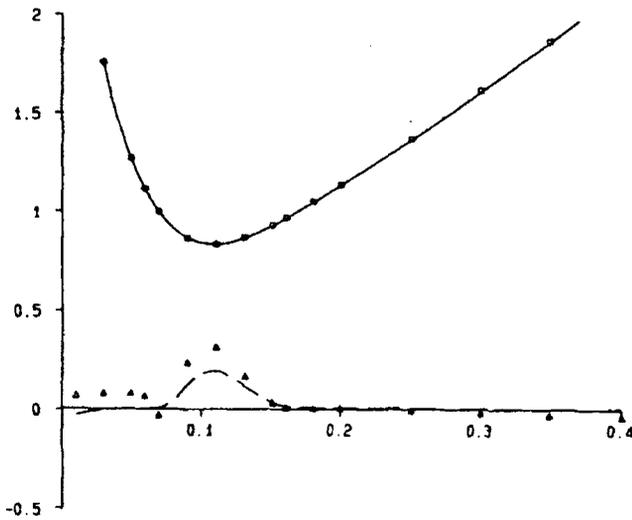


Figure 9. Variation of complex wave speed with wave number for temporally growing two-dimensional disturbances over an isotropic compliant wall. $R_\delta = 2000$. Flow properties: $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1.37 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $U_\infty = 18 \text{ m/s}$. Wall properties: $E = 0.5 \text{ MN/m}^2$, $K_E = 115 \text{ MN/m}^3$, $\nu_p = 0.5$, $\rho_m = 946 \text{ kg/m}^3$, $b = 2 \text{ mm}$. —, \bar{c}_r , - - -, $100\bar{c}_i$ according to asymptotic theory. Data points correspond to accurate numerical solutions of the Orr-Sommerfeld equation. \circ , \bar{c}_r ; Δ , $100\bar{c}_i$.

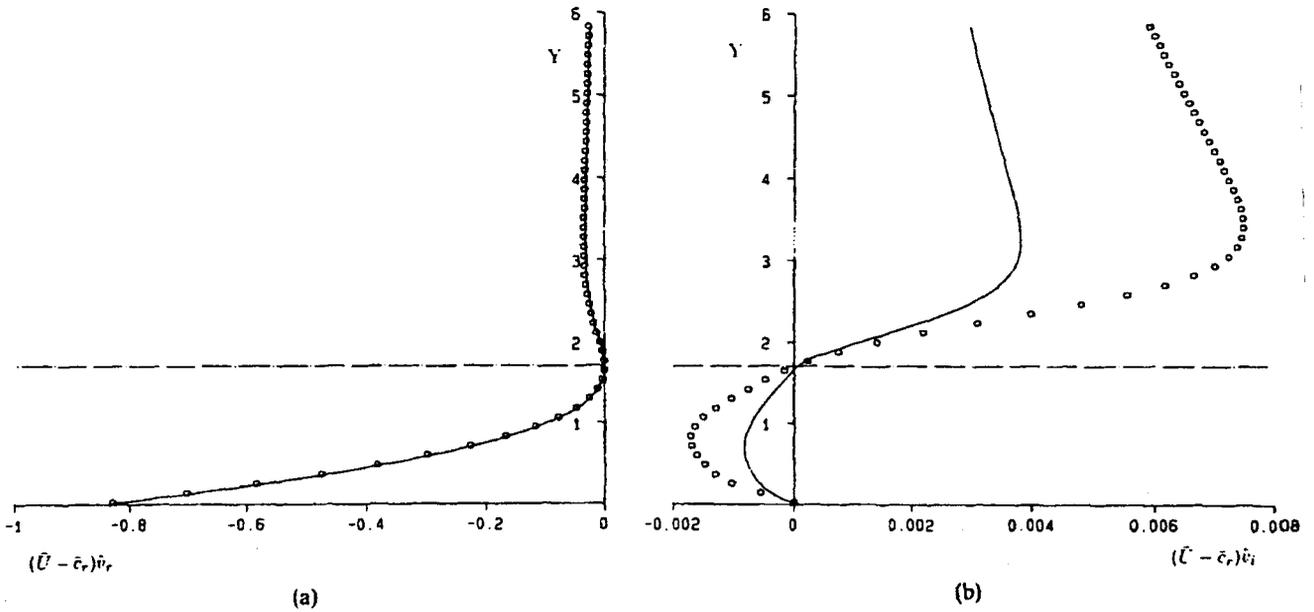


Figure 10. Variation of $(\bar{U} - \bar{c}_r)v$ across the boundary layer for the TWF instability when $\bar{c}_r < 1$. $\bar{c} = 0.828 + 0.00307i$ and $\alpha_0 = 0.11$. Wall and flow properties are as for Figure 9. Solid lines correspond to the predictions of the asymptotic theory and data points correspond to accurate numerical solutions of the Orr-Sommerfeld equation. — · — denotes the location of the critical point.

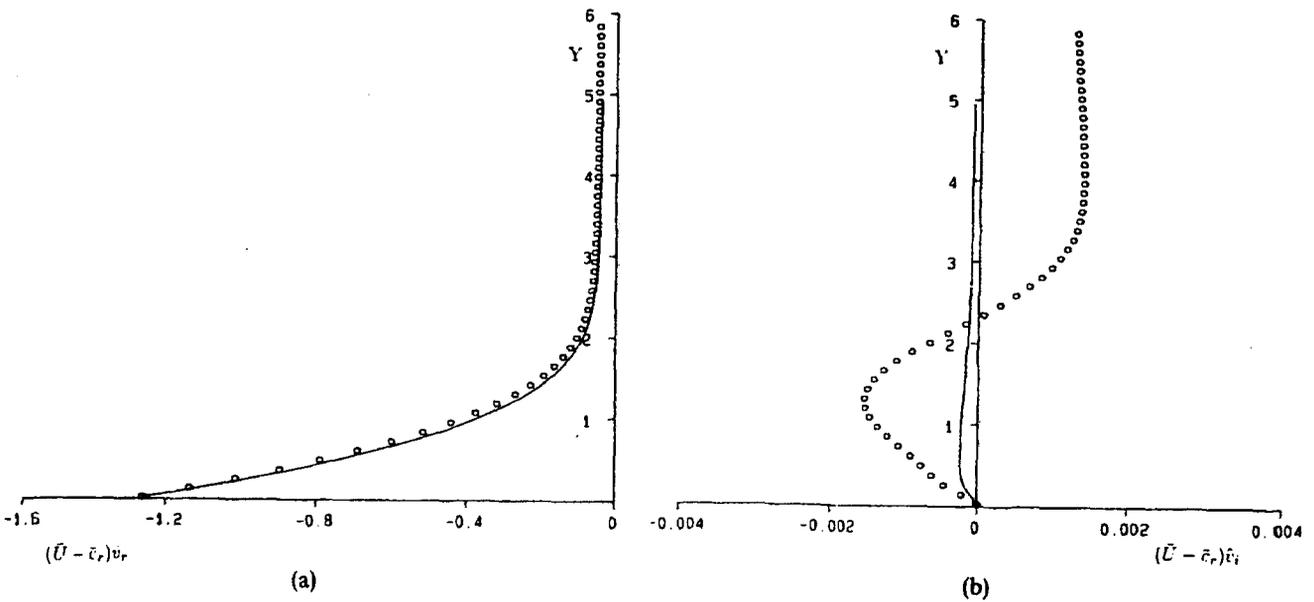
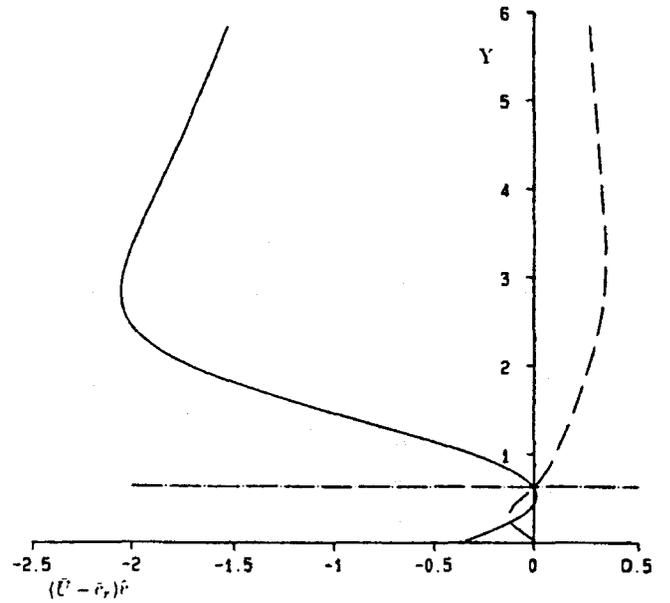


Figure 11. Variation of $(\bar{U} - \bar{c}_r)v$ across the boundary layer for the TWF instability when $\bar{c}_r > 1$. $\bar{c} = 1.264 + 0.00074i$ and $\alpha_0 = 0.05$. The wall and flow properties and notation are as for Figure 10.

Figure 12. Variation of $(\bar{U} - \bar{c}_r)\theta$ across the boundary layer for the TSI. $\bar{c} = 0.3415 + 0.007i$ and $\alpha_0 = 0.11$. The wall and flow properties are as for Figure 10. The lines correspond to accurate numerical solutions of the Orr-Sommerfeld equation. —, $(\bar{U} - \bar{c}_r)\theta_i$; — —, $(\bar{U} - \bar{c}_r)\theta_r$; - · - · denotes the position of the critical point.



Bibliographie

- [1] Airiau C.
Stabilité linéaire et faiblement non linéaire d'une couche limite laminaire incompressible par un système d'équations parabolisées (PSE). - 275 p.
Thèse de Doctorat, Mécanique des Fluides, Ecole nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace, Toulouse, 1994, 141.

- [2] Bender C.M. and Orszag S.A.
Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers.
McGraw-Hill, Singapore, 1978.

- [3] Benjamin T.B.
Effects of a flexible boundary on hydrodynamic instability.
Journal of Fluid Mechanics, 1960, Vol. 9, pp. 513-532.

- [4] Benjamin T.B.
The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows.
Journal of Fluid Mechanics, 1963, Vol. 16, pp. 436-450.

- [5] Blasius H.
The boundary layers in fluids with little friction.
NACA TM 1256, 1950.

- [6] Blonce L.
Modification de l'instabilité d'un écoulement de Poiseuille plan par des effets de paroi et de fluide non-newtonien.
Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1995.

- [7] Boyd J.P.
Chebyshev and Fourier Spectral Methods.

- Volume 49 of Lecture Notes in Engineering, C.A. Brebbia and S.A. Orszag, eds., Springer-Verlag, 1989.
- [8] Brevdo L.
Spatially Amplifying Waves in Plane Poiseuille Flow.
ZAMM; Z. angew. Math. Mech., 1992, Vol. 72, pp. 163-174.
- [9] Bridges T.J. and Morris P.J.
Differential eigenvalue problems in which the parameter appears nonlinearly.
Journal of Computational Physics, 1984, Vol. 55, pp. 437-460.
- [10] Briggs R.J.
Electron-Stream Interaction with Plasmas.
MIT Press, 1964.
- [11] Canuto C., Hussaini A., Quarteroni A. and Zang T.A.
Spectral Methods in Fluid Dynamics.
Springer Series in Computational Physics, New-York, 1987.
- [12] Carlson H.A., Berkooz G. and Lumley J.L.
Direct numerical simulation of flow in a channel with complex, time-dependent wall geometries: a pseudospectral method.
Journal of Computational Physics, 1995, Vol. 121,, pp. 155-175.
- [13] Carpenter P.W.
The Hydrodynamic Stability of Flows over Nonisotropic Compliant Surfaces.
Bulletin of the American Physical Society, 1984, Vol. 29, p. 1534.
- [14] Carpenter P.W.
Status of transition delay using compliant walls.
In *Viscous Drag Reduction in Boundary Layers*, Progress in Astronautics and Aeronautics, edited by D.M. Bushnell and J.N. Hefer (AIAA, New York), 1990, Vol. 123, pp. 79-113.
- [15] Carpenter P.W. and Gajjar J.S.B.
A General Theory for two- and three- dimensionnal wall-mode Instabilities in boundary layers over Isotropic and Anisotropic Compliant Walls.
Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 1990, Vol. 1, pp. 349-378.
- [16] Carpenter P.W. and Garrad A.D.
The Hydrodynamic Stability of Flow over Kramer-Type Compliant Surfaces: Part

1. Tollmien-Schlichting Instabilities.
Journal of Fluid Mechanics, 1985, Vol. 155, pp. 465-510.
- [17] Carpenter P.W. and Garrad A.D.
The Hydrodynamic Stability of Flow over Kramer-Type Compliant Surfaces: Part 2. Flow-Induced Surface Instabilities.
Journal of Fluid Mechanics, 1986, Vol. 170, pp. 199-232.
- [18] Carpenter P.W. and Morris P.J.
The Hydrodynamic Stability of Flows over Nonisotropic Compliant Surfaces: Numerical Solution of the Differential Eigenvalue Problem.
Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Pineridge, Swansea, UK, 1985, pp. 1613-1620.
- [19] Carpenter P.W. and Morris P.J.
The effect of anisotropic wall compliance on boundary-layer stability and transition.
Journal of Fluid Mechanics, 1990, Vol. 218, pp. 171-223.
- [20] Cherhabili A. and Ehrenstein U.
Finite-amplitude equilibrium states in plane Couette flow.
Journal of Fluid Mechanics, 1997, Vol. 342, pp. 159-177.
- [21] Clever R.M. and Busse F.H.
Three-dimensional convection in a horizontal fluid layer subjected to a constant shear.
Journal of Fluid Mechanics, 1992, Vol. 234, pp. 511-527.
- [22] Danabasoglu G., Biringen S. and Streett C.L.
Numerical simulation of spatially-evolving instability control in plane channel flow.
AIAA, June 1990, Vol. 90-1530.
- [23] Davies C. and Carpenter P.W.
Numerical simulation of the evolution of Tollmien-Schlichting waves over finite compliant panels.
Journal of Fluid Mechanics, 1997a, Vol. 335, pp. 361-392.
- [24] Davies C. and Carpenter P.W.
Instabilities in a plane channel flow between compliant walls.
Journal of Fluid Mechanics, 1997b, Vol. 352, pp. 205-243.

- [25] de Langre E. and Ouvrard A.E.
Absolute and convective bending instabilities in fluid-conveying pipes.
Journal of Fluids and Structures, 1999, Vol. 13, Number 6, pp. 663-680.
- [26] de Langre E.
Introduction aux Interactions Fluide-Structure.
Ecole Polytechnique, 1999.
- [27] Deissler R.J.
The convective nature of instability in plane Poiseuille flow.
Physics of Fluids, 1987, Vol. 30, pp. 2303-2305.
- [28] Delbende I. and Chomaz J.M.
Nonlinear convective / absolute instabilities in parallel two-dimensional wakes.
Physics of Fluids, 1998, Vol. 10, No. 11, pp. 2724-2736.
- [29] Domaradzki J.A. and Metcalfe R.W.
Stabilization of laminar boundary-layers by compliant membranes.
Physics of Fluids, 1987, Vol. 30, pp. 695-705.
- [30] Drazin P.G. and Reid W.H.
Hydrodynamic Stability.
Cambridge University Press, 1981.
- [31] Ehrenstein U. and Peyret R.
A Chebyshev collocation method for the Navier-Stokes equations with application to double diffusive convection.
International Journal of Numerical Methods in Fluids, 1989, Vol. 9, pp. 427-452.
- [32] Ehrenstein U. and Rossi M.
Nonlinear Tollmien-Schlichting waves for a Blasius flow over compliant walls.
Physics of Fluids, 1996, Vol. 8, pp. 1036-1051.
- [33] Evrinsel C.A. and Kalnins A.
Response of a compliant slab to viscous incompressible fluid flow.
Trans. ASME Ser. E J Appl. Mech., 1988, Vol. 55, p. 660.
- [34] Gad-el-Hak M.
Compliant coatings: A decade of progress.
Applied Mechanics Review, 1996, Vol. 49, pp. S147-S157.

- [35] Gad-el-Hak M.
Boundary-layer interactions with compliant coatings: An overview.
Applied Mechanics Review, 1986, Vol. 39, pp. 511-524.
- [36] Gad-el-Hak M., Blackwelder R.F. and Riley J.F.
On the interaction of compliant coatings with boundary-layer flows.
Journal of Fluid Mechanics, 1984, Vol. 140, pp. 257-280.
- [37] Gaster M.
Is the dolphin a Red-Herring?
Turbulence Management and Relaminarisation, 1987, pp. 465-510, (ed. H.W. Liepmann and R. Narasimha), IUTAM: Bangalore, India.
- [38] Gottlieb D., Hussaini M.Y. and Orszag S.A.
Theory and application of spectral methods.
in *Spectral Methods for Partial Differential Equations*, R.G. Voigt, D. Gottlieb, M.Y. Hussaini, Eds., 1984, pp.1-54.
- [39] Gottlieb D. and Orszag S.A.
Numerical analysis of Spectral Methods: Theory and Applications.
CBMS Regional Conference Series in Appl. Math., SIAM, 1977.
- [40] Gray J.
Studies in animal locomotion. VI The Propulsive Powers of the Dolphin.
Journal of Experimental Biology, 1936, Vol. 13, pp. 192-199.
- [41] Grosch C.E. and Orszag S.A.
Numerical solution of Problems in unbounded regions: coordinate transforms.
Journal of Computational Physics, Vol.25, n 3, Nov. 1977, pp. 273-295.
- [42] Grosskreutz R.
Wechselwirkungen zwischen turbulenten Grenzschichten und weichen Wänden.
MPI für Strömungsforschung und der AVA, Göttingen, FRG, Mitt. 53, 1971.
- [43] Grosskreutz R.,
An Attempt to Control Boundary-Layer Turbulence with Non-Isotropic Compliant Walls,
University Science Journal Dar es Salaam, Vol. 1, 1975, pp. 65-73.

- [44] Huerre P. and Monkewitz P.A.
Absolute and convective instabilities in free shear layers.
Journal of Fluid Mechanics, 1985, Vol. 159, pp. 151-168.
- [45] Huerre P. and Monkewitz P.A.
Local and Global instabilities in spatially developing flows.
Annual Review of Fluid Mechanics, 1990, Vol. 22, pp. 357-473.
- [46] Huerre P. and Rossi M.
Hydrodynamic and nonlinear instabilities.
in C. Gadrière and P. Manneville editors, Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1998, pp. 81-294.
- [47] Joslin R.D, Morris P.J. and Carpenter P.W.
Role of Three-dimensional Instabilities in Compliant Wall Boundary-layer Transition.
AIAA Journal, 1991, Vol. 29, pp. 1603-1610.
- [48] Joslin R.D, Streett C.L. and Chang C.L.
Validation of three-dimensional incompressible spatial direct simulation code - a comparison with linear stability and parabolic stability equation theories for boundary-layer transition on a flat plate.
NASA TP-3205, 1992a.
- [49] Joslin R.D and Morris P.J.
Effect of compliant walls on secondary instabilities in boundary-layer transition.
AIAA Journal, 1992b, Vol. 30, pp. 332-339.
- [50] Joslin R.D, Streett C.L. and Chang C.L.
Spatial Direct Numerical Simulation of Boundary-layer Transition Mechanisms: Validation of PSE Theory.
Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 1993, Vol. 4, pp. 271-288.
- [51] Kleiser L. and Schuman U.
Treatment of incompressibility and boundary conditions in 3-D numerical spectral simulations of plane channel flow.
in E.H. Hirschel (Ed.), Proc. of 3rd GAMM. Conf. on Num. Meth. in Fluid Mechanics, Vieweg (Braunschweig), 1980, pp. 165-173.

- [52] Kloker M., Konzelmann U. and Fasel H.
Outflow boundary conditions for spatial Navier-Stokes simulations of transition boundary-layers.
AIAA Journal, 1993, Vol. 31, pp. 620-628.
- [53] Kramer M.O.
Boundary-layer stabilization by distributed damping.
Journal of the Aero/Space Sciences, 1960a, Vol. 27, p. 69.
- [54] Kramer M.O.
Boundary-layer stabilization by distributed damping.
Journal of the American Society of Naval Engineers, 1960b, Vol. 72, pp. 25-33.
- [55] Kramer M.O.
Boundary-layer stabilization by distributed damping.
Journal of the American Society of Naval Engineers, 1962, Vol. 74, pp. 341-348.
- [56] Kupfer K., Bers A. and Ram A.K.
The cusp map in the complex-frequency plane for absolute instabilities.
Physics of Fluids, 1987, Vol. 30, p. 3075.
- [57] Landahl M.T.
On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface.
Journal of Fluid Mechanics, 1962, Vol. 13, pp. 609-632.
- [58] Lucey A.D. and Carpenter P.W.
Boundary layer instability over compliant walls: Comparison between theory and experiment.
Physics of Fluids, 1995, Vol. 7, pp. 2355-2363.
- [59] Lucey A.D., Cafolla G.J., Carpenter P.W. and Yang M.
The non-linear hydroelastic behaviour of flexible walls.
Journal of Fluids and Structures, 1997a, Vol. 11, pp. 717-744.
- [60] Lucey A.D., Cafolla G.J. and Carpenter P.W.
Numerical simulation of a boundary-layer flow interacting with a compliant boundary.
Lecture Notes in Physics, 1997b, Vol. 490, pp. 406-411.
- [61] Metcalfe R.W., Rutland C.J., Duncan J.H. and Riley J.J.
Numerical Simulations of Active Stabilization of Laminar Boundary layers.
AIAA Journal, Dec. 1986, Vol. 24, pp. 1494-1501.

- [62] Nagata M.
Three-dimensionnal finite-amplitude solutions in plane Couette flow: bifurcation from infinity.
Journal of Fluid Mechanics, 1990, Vol. 217, pp. 519-527.
- [63] Nayar N. and Ortega J.M.
Computation of selected eigenvalues of generalized eigenvalue problems.
Journal of Computational Physics, 1993, Vol. 108, pp. 8-14.
- [64] Park J.T., Silvis H.S. and Cerwin S.A.
Active-wall Device for Generation of Small Travelling Surface Waves.
Review of Scientific instruments, 1985, Vol. 56, pp. 732-739.
- [65] Prandtl L.
Motion of fluids with very little viscosity.
NACA TM 452, 1927.
- [66] Riley J.R., Gad-El-Hak M. and Metcalfe R.W.
Compliant coatings.
Annual Review of Fluid Mechanics, 1988, Vol. 20, pp. 393-420.
- [67] Rist U. and Fasel H.
Direct numerical simulation of controlled transition in a flat-plate boundary layer.
Journal of Fluid Mechanics, 1995, Vol. 298, pp. 211-248.
- [68] Rotenberry J.M. and Saffman P.G.
Effect of compliant boundaries on weakly nonlinear shears waves in channel flow.
SIAM J. Appl. Math., 1990, Vol. 50, pp. 361-394.
- [69] Schlichting H.
Boundary - layer Theory.
Seventh Edition, Mc Graw Hill, 1979.
- [70] Sen P.K. and Arora D.S.
On the stability of laminar boundary-layer flow over a flat plate with a compliant surface.
Journal of Fluid Mechanics, 1988, Vol. 197, pp. 201-240.
- [71] Squire H.B.
On the stability of three-dimensionnal disturbances of viscous flow between parallel

walls.

Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 1933, Vol. 142, pp. 621-628.

- [72] Stoer J. and Bulirsch R.
Introduction to Numerical analysis.
Second edition, Springer-Verlag, 1993.
- [73] Streett C.L. and Macaraeg M.G.
Spectral multi-domain for large-scale fluid dynamic simulations.
International Journal of Applied Numerical Mathematics, 1989, Vol. 6, 123-140.
- [74] Willis G.J.K.
Hydrodynamic stability of Boundary Layers over Compliant Surfaces.
Ph.D. Thesis, University of Exeter, 1986.
- [75] Yeo K.S.
The stability of boundary-layer flow over single- and multi-layer viscoelastic walls.
Journal of Fluid Mechanics, 1988, Vol. 196, p. 359.
- [76] Yeo K.S., Khoo B.C. and Chong W.K.
The linear stability of boundary-layer flow over compliant walls: Effects of boundary-layer growth.
Journal of Fluid Mechanics, 1994, Vol. 280, pp. 199-225.
- [77] Yeo K.S., Khoo B.C. and Zhao H.Z.
The absolute instability of boundary-layer flow over viscoelastic walls.
Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 1996, Vol. 8, pp. 237-252.

