The 10 000 TOL

Université des Sciences et Technologies de Lille I

N d'ordre : 2575

- 50376 - 2999 - 343

THÈSE DE DOCTORAT en MÉCANIQUE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE I

par

Laurent DESCAMPS

sujet :

THÉORIES ET SOLUTIONS AUTOSEMBLABLES DE L'EXPLOSION PONCTUELLE ANISOTROPE DANS UN GAZ



Soutenue le 10 novembre 1999 devant le jury composé de :

Président : M. A. DYMENT, Professeur émérite, université de Lille I
Rapporteurs : M. L. BRUN, Directeur de recherche, CEA Bruyères le Châtel M. D. ZEITOUN, Professeur, université de Provence – IUSTI
Examinateurs : M. P. A. BOIS, Professeur, université de Lille I M. J. P. FLODROPS, Maître de recherche, O.N.E.RA-Lille
Directeur de thèse : M. A. MERLEN, Professeur, université de Lille I

À mon père

Remerciements

Mes remerciements s'adressent tout d'abord à Monsieur Alain MERLEN, professeur à l'université de Lille I, qui, par son expérience et la disponibilité dont il a fait preuve, a su me conseiller et me guider durant mes recherches.

Je tiens à remercier Monsieur Arthur DYMENT, professeur émérite à l'université de Lille I, qui, après avoir éveillé mon intérêt pour la mécanique des fluides, m'a permis de m'investir dans ce travail. Je le remercie d'avoir accepté la présidence de ce jury et tiens à lui témoigner toute ma reconnaissance.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur Louis BRUN, directeur de recherche au CEA Bruyères le Châtel, qui a bien voulu consacrer une grande partie de son temps à l'analyse attentive de ce mémoire. Ses précieux conseils et les nombreuses remarques qu'il m'a suggérées m'ont été d'un grand profit. De la même façon, je remercie Monsieur David ZEITOUN, professeur à l'université de Provence, d'avoir témoigné son intérêt pour ce travail en acceptant d'en être rapporteur.

Je remercie vivement Monsieur Pierre-Antoine BOIS, professeur à l'université de Lille I, et Monsieur Jean-Pierre FLODROPS, maître de recherche à l'ONERA-Lille, d'avoir accepté de participer à ce jury.

Je remercie Messieurs BAHUREL et DUPRIEZ, directeurs successifs de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille, de m'avoir accueilli dans leur établissement et mis à ma disposition les moyens nécessaires à la réalisation de cette thèse.

Je tiens également à remercier la Direction Générale de L'Armement qui par son soutien a permis de mener ce travail à terme.

Je voudrais aussi remercier Olivier Masek pour toute l'aide qu'il m'a apportée dans le domaine de l'informatique, Eric Fabre pour son écoute et ses conseils avisés, ainsi que l'ensemble des membres, ingénieurs et techniciens, du Département d'Aérodynamique APpliquée de L'IMFL pour les conseils et encouragements qu'ils ont su m'apporter tout au long de ce travail.

Je suis enfin très heureux d'exprimer mes chaleureux remerciements aux membres de ma famille, ainsi qu'à tous mes amis, pour leur soutien moral et leurs encouragements.

Table des matières

Liste des figures vi		vii
Introducti	on générale	1
Partie I	Théorie et calculs d'explosions violentes anisotropes autosemblables	3
Not	ations principales	5
Chapit	tre 1 Explosion intense anisotrope autosemblable	7
1.1	Introduction	7
1.2	Modèle et hypothèses	7
1.3	Analyse dimensionnelle	10
	1.3.1 Équations adimensionnées	11
	1.3.2 Conditions sur le choc	12
	1.3.3 Un problème inverse	12
1.4	Fermeture du problème	13
	1.4.1 Cas général	13
·	1.4.2 Cas particulier de l'explosion instantanée	14
Chapit	tre 2 Formulation mathématique	17
2.1	Analyse mathématique du problème	17
2.2	Trajectoires et "trajectoires"	18
2.3	Formulation intrinsèque	19
2.4	Conditions d'intégrabilité des formes différentielles	21
2.5	Nature du système "augmenté"	23
2.6	Projection des équations dans le système de coordonnées intrinsèques (ζ,ξ)	24
Chapit	tre 3 Résolution et traitement numérique	27
3.1	Introduction	27
3.2	Maillage de calcul	28
3.3	Projection des équations dans le système de coordonnées (\hat{S}, ξ)	29
3.4	Méthode numérique	30
Chapit	tre 4 Exploitation numérique	33
4.1	Présentation du cas test	33
4.2	Explosion ponctuelle à débit d'énergie constant	34
	4.2.1 Reconstruction du maillage dans l'espace X, θ	34
	4.2.2 Influence de la discrétisation sur le choc	36
	4.2.3 Grandeurs physiques dans la couche de choc	36
4.3	Explosion instantanée	38
	4.3.1 Courbure des "trajectoires": rôle de ϕ	39

	4.3.2 "Vitesse d'avancement" le long des "trajectoires": rôle de ψ	40
	4.3.3 Influence de la compressibilité du gaz	41
4.4	Cas d'écoulements de type mixte	42
	4.4.1 Application à l'aérodynamique hypersonique	42
4.5	Conclusion	44
Partie II trope	Une approximation au premier ordre du problème de l'explosion aniso-	47
Nota	tions principales	49
Chapit: valente	re 5 Explosion faiblement anisotrope : modélisation par explosion isotrope mobile équi-	51
5.1	Introduction	51
5.2	Formulation du problème de la source isotrope translatée	52
	5.2.1 Source ponctuelle au repos	52
	5.2.2 Modélisation du déplacement de la source	53
	5.2.3 Hypothèse de petites perturbations	53
	5.2.4 Domaine de validité du modèle	54
	5.2.5 Repère mobile de résolution	55
	5.2.6 Forme de la solution perturbée	56
5.3	Explosion anisotrope équivalente	58
	5.3.1 Identité des solutions	60
	5.3.2 Equivalence des conditions sur le choc	61
	5.3.3 Équivalence des équations du mouvement	62
	5.3.4 Condition à la frontière du vide	62
Chapit	re 6 Solution du problème de la source isotrope translatée	65
6.1	Introduction	65
6.2	Équations adimensionnées	65
6.3	Conditions sur le choc	67
6.4	Condition à la frontière du vide	68
6.5	Équation globale de l'énergie	70
6.6	Résolution numérique	73
	6.6.1 Calcul de l'écoulement de base	73
	6.6.2 Solution du problème d'ordre 1	74
	6.6.3 Méthode numérique	75
Chapity	ro 7 Básultota	77
	Velidation du coloul	
7.1		11
7.3	Effet du déplacement de la source d'énergie	78
	7.3.1 Déformation et loi de propagation du choc	78
	739 Écoulement interne	70
74	Explosion anisotrope équivalente	10
7.5	Application aux écoulements hypersoniques	81
7.6	Conclusion	84
1.0		01
Conclusion	générale	87
Annexes	1	89
Planches de	e la partie I	09
Planches de la partie II133		
Bibliographie 155		

Liste des figures

5

Figures de la partie I

1.1	Explosion ponctuelle non-instantanée	8
1.2	Explosion du fil rectiligne infini et analogie hypersonique	9
1.3	Notations générales	10
1.4	Illustration de la propriété de similitude interne de l'écoulement	12
1.5	Domaine d'application du principe de la conservation de l'énergie	13
1.6	Domaine d'application du principe de conservation de l'énergie dans le cas de l'explosion instantanée $(\alpha = 0)$	14
2.1	Photographie de l'écoulement à un instant t fixé : relation entre trajectoires matérielles et "trajectoire"	19
2.2	Bijectivité du changement de variables	20
2.3	Axe de symétrie locale: par définition tout rayon passant par un point du choc de pente nulle	22
2.4	Lignes iso ζ au voisinage d'un axe de symétrie	24
31	Représentation locale des lignes iso \hat{S} dans le plan $(\hat{\zeta}, \hat{\xi})$	20
3.2	Comparaison sur le choc des courbes analytiques et approximations de Chebyshey pour $N = 8$	32
3.3	Comparation des courbes analytiques et approximations de Chebyshev pour $N = 12$	32
0.0		52
4.1	Forme de choc symétrique par rapport aux axes Oy et Oz	33
4.2	Représentation des fonctions $R^*(\theta)$ et $m(\theta)$	34
4.3	Illustration du déroulement d'une intégration	35
4.4	Mise en évidence du croisement des "trajectoires" sur l'axe $\theta=\pi/2$ pour un calcul réalisé avec $N=12$	36
4.5	Notations sur la frontière du vide	37
4.6	Accélération des "trajectoires" le long de la frontière du vide	38
4.7	Structure hypothétique des "trajectoires" dans la zone de l'écoulement $\theta = \pi/2$	40
4.8	Pincement des "trajectoires" le long de la frontière du vide	40
4.9	Avancement en ζ sur les "trajectoires": rôle du facteur intégrant ψ	41
4.10	Représentation des fonctions $R^*(heta_c)$ et $R^{*\prime}(heta_c)$ pour différentes valeurs de Λ	43
4.11	Influence de la continuité de la pente du choc en $\theta = 0$ sur la structure des "trajectoires"	43
4.12	Analogie de l'explosion anisotrope avec "choc oblique" et de l'écoulement hypersonique avec choc attaché autour d'un obstacle élancé de type waverider à bord d'attaque anguleux	44
4 .1 3	Structure de l'écoulement au voisinage de l'axe $\theta = \frac{\pi}{2}$	44

Figures de la partie II

5.1	Source d'énergie isotrope en translation autosemblable	53
5.2	Évolutions respectives des vitesses de déplacement du choc et de la source pour différentes valeurs du paramètre n et $\eta = 0.1$	54
5.3	Source ponctuelle dans un écoulement uniforme	55
5.4	Source isotrope mobile et solution anisotrope équivalente	5 6
5.5	Notations dans le repère de l'explosion anisotrope équivalente	5 9
6.1	Notations sur le choc dans le repère mobile de calcul	67
6.2	Domaine d'application du principe de la conservation de l'énergie	69
6.3	Domaine d'intégration de l'équation globale de l'énergie	70
7.1	Ombroscopie d'onde de bouche (arme de calibre 7.62mm)	80
7.2	Interprétation de la solution de l'explosion isotrope translatée dans le repère de calcul R	81
7.3	Analogie hypersonique : corps élancé en loi de puissance ($n < 1$) soumis à une rafale transversale	82
7.4	Incidence locale $ u(\frac{x}{L})$ pour $n = 0.90$	8 3
7.5	Coefficient de portance $C_y(n)$	8 3
7.6	Analogie hypersonique : Cas particulier du cône en incidence $(n = 1)$.	84

49

89

Figures des annexes

A.1	Signification physique de la grandeur g	91
B.1	Lignes coordonnées et repère local en M	93
C.1	Repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_{ heta})$	95
C.2	Repère local $(\vec{e}_x, \vec{e}_{\theta}')$	96
D.1	Base $(ec{e}_{\zeta},ec{e}_{\xi})$ dans le plan $(\eta, heta)$	97
D.2	Base $(\vec{e}_{\zeta}, \vec{e}_{\xi})$ dans le plan physique $\ldots \ldots \ldots$	97
F.1	Répartition des racines des polynomes de Chebyshev sur $]-1,1[$ pour six valeurs de N	10 1

Introduction générale

Les solutions autosemblables des équations de la mécanique des fluides sont souvent prises comme références asymptotiques pour les modélisations plus élaborées ou les calculs numériques. Elles font figures de points de repères pour tout chercheur ou ingénieur de la discipline. Lorsqu'une telle solution apparaît et se confronte avec succès à l'expérience, le risque est d'oublier les hypothèses très fortes qui soutendent ces modèles au profit de l'éclairage global et souvent très pertinent qu'ils apportent sur les phénomènes. Ce mémoire tente un retour sur l'une des plus connues, et donc des moins facile à contester, parmi ces solutions autosemblables : la théorie de l'explosion isotrope ponctuelle de Sedov-Taylor [31, 32, 34]. À l'origine de notre approche il y a la constatation suivante : il n'y a pas de temps caractéristique dans ce problème si l'explosion est violente. Selon l'approche classique, il ne peut donc y avoir de vorticité initiale qui, en effet, introduirait nécessairement un temps caractéristique. L'espace étant isotrope, le problème est donc à symétrie sphérique et la vorticité constamment nulle. Pourtant, l'expérience fourni de nombreux exemples de chocs non sphériques pouvant être modélisés par des explosions ponctuelles anisotropes autosemblables dans des milieux homogènes. Citons le cas du tir d'armes à feu pour lequel la source de l'anisotropie observée sur la forme du choc est la forte vorticité de l'écoulement lors de la formation de l'onde de souffle. Dans un modèle autosemblable d'explosion ponctuelle, cette vorticité doit être injectée dans un volume nul à l'instant initial; elle est donc nécessairement infinie à cet instant. En d'autres termes, le temps caractéristique de l'explosion ponctuelle isotrope est infini (vorticité nulle), alors que celui de l'explosion ponctuelle anisotrope est nul (vorticité infinie). Sur cette dualité temps-vorticité peuvent être construits deux modèles autosemblables qui encadrent les situations réelles où la vorticité est finie et où l'anisotropie de l'écoulement découle d'une phase initiale plus ou moins longue de formation du choc et de structuration de l'écoulement. On peut donc penser que si les perturbations anisotropes apparaissent par le fait de faibles hétérogénéités du milieu, le modèle classique isotrope s'avérera globalement correct. En revanche, si l'anisotropie réside dans le processus initial de formation de l'onde de souffle, ce modèle risque fort de masquer des structures essentielles de l'écoulement. C'est à cette interrogation que nous avons voulu répondre. Les travaux qui suivent montrent que cette simple inversion d'échelle, du temps infini au temps nul, introduit une complexité sans commune mesure avec les modèles classiques et engendre des structures d'écoulement totalement différentes.

La démarche suivie dans cette recherche s'inscrit dans une philosophie particulière de l'approche des problèmes de mécanique des fluides. Depuis les dix dernières années, le domaine de la mécanique des fluides numérique connaît un essor considérable, favorisé par les progrès de l'informatique. L'augmentation de la puissance des calculateurs modernes repousse plus loin les limites de la complexité des problèmes traités et autorise la mise en œuvre de codes réalisant l'intégration directe des équations de Navier-Stokes dans des configurations d'écoulements concrètes toujours plus ardues. Cependant, les méthodes numériques comportent elles aussi leurs limites et se doivent toujours d'être confrontées à l'expérience qui, lorsque elle est réalisable, demeure le moyen d'étude incontournable. Aussi, depuis quelques années, la recherche en aérodynamique s'est-elle progressivement orientée vers une démarche, de plus en plus systématique, alliant la simulation numérique à l'expérimentation physique, parfois aux dépends de la recherche de modèles théoriques. Certains écoulements de fluides compressibles se distinguent par l'extrême rapidité de la vitesse d'évolution des phénomènes et grandeurs physiques qui les caractérisent, rendant à ce titre leur étude expérimentale particulièrement délicate. En outre, ils nécessitent le plus souvent des conditions très spécifiques pour être engendrés. Dans cette gamme d'écoulements figurent les phénomènes relevant du domaine de la balistique intermédiaire, ou encore ceux rencontrés en aérodynamique hypersonique, et de toute évidence les explosions violentes. Dans ce contexte, le succès du modèle de l'explosion ponctuelle démontre l'intérêt de l'approche théorique basée sur les méthodes de l'analyse dimensionnelle et de la similitude dans le traitement de ce type de problèmes. Pour le numéricien, les solutions obtenues par cette approche permettent une validation des codes de calcul en proposant des cas tests qui, par ailleurs, peuvent également servir à l'initialisation des simulations numériques. L'approche analytique nourrit également des liens étroits avec l'étude expérimentale qui lui fournit en premier lieu les hypothèses simplificatrices nécessaires à l'élaboration de modèles théoriques. À l'inverse, la nature analytique de ces solutions permet l'identification des principaux éléments caractérisant un phénomène physique et conduit à des résultats en accord avec l'expérience. Aujourd'hui, l'approche théorique n'est plus restreinte à la recherche de solutions analy tiques de problèmes très simplifiés. Une complexification certaine est notamment rendue possible grâce à l'usage de logiciels de calcul formel. Ceux-ci, en facilitant la tache calculatoire parfois contraignante, autorisent l'élaboration de modèles mathématiques plus évolués, généralement sources d'importants développements analytiques. L'un des avantages de

cette approche est que la solution du problème théorique, dont l'existence et l'unicité sont établies analytiquement, est le plus souvent ramenée à la résolution de "simples" systèmes différentiels.

Les travaux présentés dans cette thèse s'inscrivent dans le cadre de la thématique *explosion et onde de souffle* initiée à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille dans les années 80 par l'étude de problèmes du domaine de la balistique intermédiaire¹. Dans ce contexte, Merlen & Dyment ont proposé une extension de la théorie de Sedov aux ondes de souffle non-isotropes et ont considéré deux causes d'anisotropie de l'onde de choc:

- la source d'énergie est isotrope mais le milieu ambiant est animé d'un mouvement de translation uniforme impliquant une perturbation dissymétrique de l'écoulement isotrope, c'est la théorie de l'explosion dans un courant [26],
- l'anisotropie résulte directement d'une anisotropie de l'apport d'énergie, le milieu extérieur demeurant au repos, il s'agit de la théorie des explosions violentes anisotropes à similitude interne [23].

Toutefois, les équations du problème de l'explosion autosemblable avec apport d'énergie anisotrope n'avaient alors pu être résolues. Elles firent l'objet d'une amorce de résolution par Fabre dans les années 90 [10, 27]. Cette première tentative s'est cependant heurtée à des difficultés de fond qui ont été résolues dans le présent travail. Aussi, dans le prolongement des travaux menés à l'IMFL, cette thèse tente d'apporter une solution au problème général des mouvements autosemblables anisotropes avec choc fort par une approche numérique originale. Le mémoire comporte 7 chapitres distribués sur deux parties :

- Dans le premier chapitre sont rappelés les principes de la modélisation des explosions violentes anisotropes autosemblables. L'aspect théorique de la résolution, exposé dans le second chapitre, consiste à reformuler le problème dans un système de coordonnées intrinsèques construit sur les trajectoires des particules fluides. Dans la construction de ce nouvel espace, la question de la biunivocité de la transformation des variables est centrale. Le traitement numérique du nouveau système d'équation obtenu est réalisé par un approche mixte combinant une méthode des caractéristiques à une méthode de Telenin employant une discrétisation en polynômes de Chebyshev (chapitre 3). La méthode numérique est ensuite éprouvée sur un cas test simple (chapitre 4).
- Pour tenter d'apporter une validation partielle aux résultats parfois surprenants obtenus par l'approche numérique exposée dans la première partie, la seconde partie traite indirectement des cas d'écoulements faiblement anisotropes par une approche quasi-analytique s'appuyant sur l'acquis de l'IMFL dans le domaine des explosions. Dans un premier temps, on propose la modélisation d'un problème auxiliaire qui est celui d'une explosion isotrope mobile, animée d'un mouvement de translation non uniforme dans un milieu au repos. L'approximation au premier ordre de ce problème est mathématiquement équivalente à une certaine explosion anisotrope fixe dans un milieu au repos lorsque l'anisotropie peut être considérée comme faible (chapitre 5). De ce fait, la résolution de ce dernier problème est ramenée à celle du problème de l'explosion isotrope mobile. L'intérêt de cette équivalence est que la solution du problème auxiliaire est connue et obtenue par une méthode directement adaptée de celle développée pour le problème de l'explosion dans un courant, déjà traitée à l'IMFL [26]. Cette méthode, décrite au chapitre 6, permet, en effectuant un développement asymptotique de la solution isotrope de référence, à ramener l'intégration d'un système aux dérivées partielles à l'intégration de deux systèmes différentiels. Les résultats sont exposés au chapitre 7. Ils font apparaître une limitation du domaine d'application de cette méthode à une gamme restreinte de loi d'apport d'énergie. Cependant, sur le domaine de validité de la solution, les résultats mettent en évidence des structures d'écoulements analogues à celles obtenues par l'approche numérique directe et valident en ce sens les résultats de la première partie.

^{1.} Plus particulièrement, il s'agissait d'étudier le phénomène d'onde de bouche, qui est l'onde de souffle très violente produite à l'extrémité du canon d'une arme à feu par le jet de gaz brûlés après expulsion du projectile [17], l'objectif étant la caractérisation de l'influence de l'onde de bouche sur l'environnement immédiat du canon (problème de l'interaction onde de bouche – entrée d'air dans le cas d'arme embarquée sur avion ...). Merlen & Dyment ont montré que sous certaines conditions, la propagation de cette onde de bouche est autosemblable et analogue à la propagation d'une onde de choc produite par une explosion avec apport d'énergie progressif [25].

Première partie

Théorie et calculs d'explosions violentes anisotropes autosemblables

Notations principales

Indices et exposants:

- l'indice "∞" correspond aux conditions d'écoulement à l'infini amont ;
- l'indice "c" correspond aux conditions d'écoulement sur le choc Σ ;
- l'exposant "*" indique les variables sans dimension;
- le prime indique les grandeurs évaluées sur la frontière du milieu raréfié;
- le paramètre "k" caractérise la géométrie de l'écoulement :
 - -k = 1: écoulement plan cylindrique;
 - -k=2: écoulement plan à symétrie de révolution.
- La dérivée d'une fonction f par rapport à une variable μ est notée : f_{μ} .

Caractères romains:

A, B	matrices définies en annexe E	
b	terme égal à $[v^{*2} + (g + mv^{*2})], (2.27)$	
с	terme égal à $[g + mv^*]$	
<i>c</i> *	vitesse du son adimensionnée (1.14)	
d	terme égal à $[v^* + m(g + mv^*)]$	
\boldsymbol{E}	intensité de l'apport d'énergie, (1.1)	
ε	apport d'énergie anisotrope, $\mathcal{E} = E\epsilon(\theta)t^{\alpha}$, (1.1)	
$\vec{e}_r, \vec{e}_{ heta}$	(figure 1.3)	
f	variable définie par $f = \log \rho^*$, (2.1)	
<i>g</i>	variable définie par $g = u^* - mv^* - \frac{\gamma+1}{2}$, (2.1)	
h	variable définie par $h = \log p^*$, (2.1)	
$J_{i,i=15}$	seconds membres du système adimensionné, (1.13)	
m	paramètre défini par $m = \frac{R_{\theta}}{R}$, (1.11)	
Ν	nombre de trajectoires de calcul (§ 3.4)	
n	paramètre défini par $n = rac{lpha+2}{k+3}, \hspace{0.1 in} (1.10)$	
0	centre de l'explosion	
p	pression	
p_∞, ho_∞	pression et masse volumique en amont du choc	
$(q_n,q_ au)$	composantes de la vitesse dans le repère lié au choc, (figure 1.3)	
(u, v)	composantes radiale et orthoradiale de la vitesse, (figure 1.3)	
r	rayon polaire, (figure 1.1)	
R	rayon polaire du choc, (figure 1.3)	
R'	rayon polaire de la frontière du milieu raréfié	
S	entropie adimensionnée $S = h - \gamma f$, (2.29)	
Ŝ	accroissement d'entropie défini par $\hat{S} = S - S_c$, (3.6)	
t	temps	
V_{∞}	vitesse à l'infini amont de l'écoulement hypersonique	
(x, y, z)	coordonnées cartésiennes, (figure 1.1)	
X	distance sans dimension relative à $r, X = \frac{r}{R}, (1.7)$	
Caractères grecs:		
α	exposant caractérisant le débit d'énergie, défini par (1.1)	
$\epsilon(heta)$	fonction caractéristique de la répartition azimutale d'énergie, (1.1)	

 $\gamma \lambda$ indice adiabatique du gaz

- angle défini par (1.11), (figure 1.3)
- (ψ, ϕ) facteurs intégrants, (2.15)
- masse volumique ρ
- Σ frontière du choc, (figure 1.1)
- Σ' frontière du milieu raréfié, (figure 1.1)
- θ angle polaire, (figure 1.1)
- vitesse de propagation du choc Ŵ

vitesse normale de propagation du choc, $\omega_n = \vec{\omega} \cdot \vec{n} = \frac{\partial R(t,\theta)}{\partial t} \sin \lambda$, (1.5) ω_n

coordonnées curvilignes, (2.15) (ζ,ξ)

Chapitre 1

Explosion intense anisotrope autosemblable

1.1 Introduction

La libération, brutale et localisée, d'une importante quantité d'énergie dans un gaz, initialement au repos et occupant tout l'espace, donne naissance à une onde de choc très intense se propageant dans le milieu ambiant et séparant ce dernier de l'écoulement engendré en aval du choc. C'est dans les années 50 qu'a été proposée par Sedov [31], et indépendamment par Taylor [32] et Von Neumann [34], la première modélisation de ce phénomène. Cette célèbre théorie, connue sous le nom de *Théorie de l'explosion isotrope ponctuelle*, a été l'un des grands succès de l'application des méthodes de l'analyse dimensionnelle et de la théorie des groupes de transformation à l'étude de problèmes physiques très simplifiés, avec pour objectif l'obtention de solutions autosemblables. Ces solutions, en raison de leur caractère analytique, permettent d'accéder aux propriétés essentielles du phénomène physique considéré et demeurent en ce sens de puissants outils d'analyse et d'interprétation physique, mais également de comparaison avec l'expérience². La contrepartie étant assurément la restriction imposée par les hypothèses souvent très fortes, mais nécessaires à l'élaboration de telles solutions.

En plus de la simulation d'explosions atomiques, la théorie de l'explosion isotrope ponctuelle offre une large gamme d'applications. En astrophysique, elle permet de modéliser l'explosion d'une supernovae³. En aérodynamique hypersonique, elle permet de simuler l'écoulement stationnaire autour d'un engin élancé à symétrie de révolution, ceci en vertu d'un principe analogie qui existe entre ces deux classes d'écoulement. Enfin dans le domaine de la balistique intermédiaire, elle peut être employée pour modéliser l'onde de souffle issue de la bouche du canon d'une arme à feu.

Toutefois, les explosions réelles ne sont pas sphériques et une forte vorticité y est naturellement présente. En aérodynamique hypersonique par exemple, une caractéristique essentielle de l'écoulement est l'existence d'une forte rotationnalité issue du nez de l'obstacle. S'agissant des problèmes de tirs d'armes à feu, l'onde de bouche, pourtant quasi-sphérique, issue de l'extrémité du canon de l'arme après expulsion du projectile engendre un écoulement très fortement rotationnel et dépendant du processus initial de formation du choc. L'efficacité du modèle mono-dimensionnel de Sedov, simple et robuste, apparaît alors fort mystérieuse. Il fournit en effet un résultat solide : la loi de propagation du choc. Mais il exclut par ailleurs toute existence de vorticité au sein de l'écoulement réside dans ses conditions initiales. La réponse à cette interrogation réside dans la compréhension des structures d'écoulements associées aux explosions non-isotropes pour lesquelles il existe une vorticité non-nulle à l'instant initial. Dans cette optique, Merlen & Dyment ont proposé une extension du modèle mono-dimensionnel de Sedov à un modèle d'explosion non-sphérique dont l'anisotropie de l'écoulement résulte d'une anisotropie de l'apport d'énergie. Le rappel de cette modélisation fait l'objet du présent chapitre.

1.2 Modèle et hypothèses

Plaçons-nous dans le cadre des hypothèses de la théorie de l'explosion isotrope autosemblable [31] et considérons l'écoulement instationnaire consécutif à la libération, de façon instantanée ou progressive, d'une importante quantité d'énergie dans un gaz initialement au repos. De façon classique dans l'étude de problème avec ondes de choc, le gaz est supposé parfait et idéal de sorte que les effets de viscosité et de transfert de chaleur puissent être négligés. On note ρ_{∞} la masse volumique du gaz dans le milieu au repos et γ son rapport des chaleurs spécifiques.

^{2.} Les solutions à similitude interne fournissent par ailleurs d'excellents starters pour les codes de simulation numérique.

^{3.} La masse volumique du milieu extérieur obéit alors à une distribution en loi de puissance : $\rho_{\infty} = R^{-\Omega}$ où R est la distance par rapport au centre de l'explosion [2].

^{4.} Des travaux russes récents (Ktitorov [13]) cherchent à élucider ce problème à partir de perturbations imposées aux solutions autosemblables, soit en modifiant localement le champ de masse volumique extérieur, soit en lui imposant une rotation d'ensemble. Il s'agit alors d'études de stabilité du système d'équations régissant le phénomène.

L'énergie est supposée libérée depuis l'instant initial t = 0 selon une loi en puissance du temps :

(1.1)
$$\mathcal{E}_0 = Et^{\alpha} \quad \text{avec} \quad 0 \le \alpha \le 3$$

où E est une constante réelle positive représentative de la quantité d'énergie libérée, et α un réel positif ou nul caractérisant le débit d'énergie, le cas limite $\alpha = 0$ correspondant à "l'explosion", par définition instantanée.

Physiquement, le gaz ambiant, initialement au repos, se trouve comprimé au passage du front de choc. Cette compression est si intense que le fluide n'est plus à même d'occuper l'espace qui lui est offert, et qu'il occupait avant passage du choc. Aussi observe-t-on en aval du choc une raréfaction du milieu plus ou moins brutale selon le mode d'apport d'énergie. Dans le cas limite de la libération instantanée d'énergie ($\alpha = 0$), la théorie de Sedov prévoit que cette raréfaction s'opère très progressivement et l'écoulement est alors *continu* depuis le choc jusqu'au centre de l'explosion. Pour un apport d'énergie progressif ($\alpha > 0$), la raréfaction est telle qu'il y a formation, en aval de l'onde, d'une *poche de milieu raréfié* centrée sur le lieu de l'explosion, également en expansion autour de l'origine, et emprisonnant l'écoulement dans un domaine dénommé *couche de choc*, délimité d'un côté par le front du choc noté Σ , de l'autre par la frontière du milieu raréfié notée Σ' (figure 1.1).



FIG. 1.1: Explosion ponctuelle non-instantanée

Cette frontière matérialise l'interface séparant le milieu continu dans la couche de choc, du milieu raréfié pour lequel les hypothèses de milieu continu ne sont plus valables. Rappelons qu'au centre de la poche de vide se trouve la source continuant de libérer l'énergie selon une loi en puissance de temps. En négligeant la dissipation d'énergie dans le milieu raréfié et en supposant que l'écoulement est adiabatique, l'énergie issue de la source doit nécessairement être intégralement transmise au milieu continu. Cette transmission d'énergie s'effectue par le biais du mouvement d'expansion de Σ' sous forme d'énergie de dilatation. Sur Σ' , la masse volumique est théoriquement nulle mais la pression – nulle à l'intérieur de la cavité vide – ne s'y annule pas. Σ' est donc une surface de discontinuité et présente de plus toutes les caractéristiques d'une frontière matérielle sur laquelle il y a continuité de la masse volumique et de la vitesse, mais discontinuité de la pression.

Hypothèse de symétrie

On distingue deux types de symétrie selon que la source d'énergie est ponctuelle ou rectiligne infinie. Lorsque la source est ponctuelle, l'écoulement est méridien autour de la direction Oy (figure 1.1). On appelle plan méridien le plan Oyz, et θ l'angle polaire mesuré par rapport à l'axe Oy (θ variant entre 0 et π). Si l'on suppose que l'énergie n'est plus libérée en un point mais le long d'un fil, considéré comme rectiligne et infini, l'écoulement engendré est plan, orthogonal au fil, et invariant par translation dans la direction Ox orthogonale au plan de l'écoulement ; θ varie alors entre 0 et 2π (figure 1.2).

Principe d'analogie

L'explosion du fil rectiligne infini s'applique typiquement en aérodynamique hypersonique en vertu de l'analogie existant entre les écoulements *instationnaires mono-dimensionnels* (propagation d'une onde dans un tube de section constante) et les écoulements hypersoniques stationnaires autour de corps élancés. Cette analogie découle de l'identité formelle des systèmes d'équations et conditions aux frontières de ces deux phénomènes lorsque l'on effectue la transformation $x = V_{\infty}t$, où $V_{\infty}\vec{x}$ est la vitesse de l'écoulement infini amont⁵. Cette transformation permet d'interpréter l'écoulement transversal dans chaque plan $x = C^{\text{te}}$ comme l'écoulement instationnaire produit par la dilatation d'un piston cylindrique indéformable centré sur l'axe $O\vec{x}$. Dans l'analogie, les traces de la paroi de l'obstacle et de l'onde de choc dans un plan transversal sont respectivement associées au mouvement du piston et à la propagation de l'onde de choc en amont du piston (figure 1.2). Un obstacle à nez émoussé, prolongé par un corps cylindrique correspond au



engin hypersonique

FIG. 1.2: Explosion du fil rectiligne infini et analogie hypersonique

mouvement d'un piston dont la vitesse est infiniment grande à l'origine puis s'annule brusquement après un temps très court. Une explosion intense instantanée ($\alpha = 0$) produit un écoulement similaire⁶. Lorsque la forme de l'obstacle obéit à une loi en puissance de x, l'analogie a lieu avec une explosion non instantanée apportant à chaque instant une énergie égale à celle que déploie le piston dans sa dilatation. Dans l'analogie, cette énergie est rigoureusement égale à la traînée de pression de l'obstacle.

Pour généraliser l'écriture des équations aux deux types de symétries considérées, nous introduisons classiquement un paramètre entier noté k tel que :

- -k = 2: écoulement plan méridien autour de l'axe Oy (cas de l'explosion ponctuelle, application au tir d'arme),
- -k = 1: écoulement plan (explosion d'un fil infini, analogie hypersonique).

Anisotropie de l'apport d'énergie

Afin d'étendre le modèle isotrope aux ondes de souffle anisotropes, on suppose que l'anisotropie de l'explosion est due exclusivement à une anisotropie de l'apport d'énergie et l'on introduit pour cela une fonction de répartition spatiale de l'énergie, notée ϵ , ne dépendant exclusivement que de l'azimut θ . La part d'énergie émise dans une direction radiale s'exprime alors :

(1.2)
$$\mathcal{E}(\theta) = E\epsilon(\theta)t^{\alpha}$$

D'une façon générale, la fonction de répartition $\epsilon(\theta)$ vérifie l'équation suivante :

(1.3)
$$\int_{0}^{(3-k)\pi} \epsilon(\theta) (\sin \theta)^{(k-1)} d\theta = \frac{1}{(2\pi)^{(k-1)}}$$

^{5.} Dans la formule (1.1), E est alors une énergie par unité de longueur et t n'est plus le temps physique mais le temps auxiliaire $t = \frac{x}{V_{t-1}}$

^{6.} L'analogie hypersonique n'ayant de sens que si l'obstacle est élancé, il convient dans ce cas de négliger l'émoussement de vant la longueur de l'obstacle [11].

Équations du mouvement

L'écoulement est régi par les équations d'Euler instationnaires, écrites ci-après en coordonnées polaires (k = 1) ou cylindriques (k = 2). Dans ces équations, u et v dénotent les composantes respectivement radiale et orthoradiale de la vitesse d'une particule (figure 1.3):

(1.4)
$$\begin{cases} r^{k}(\sin \theta)^{(k-1)}\rho_{t} + (\sin \theta)^{(k-1)}(r^{k}\rho u)_{r} + r^{(k-1)}\left(\rho v(\sin \theta)^{(k-1)}\right)_{\theta} = 0\\ \rho\left(ru_{t} + ruu_{r} + vu_{\theta} - v^{2}\right) + rp_{r} = 0\\ \rho\left(rv_{t} + ruv_{r} + vv_{\theta} + uv\right) + p_{\theta} = 0\\ r\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)_{t} + ru\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)_{r} + v\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)_{\theta} = 0\end{cases}$$

Ces équations expriment respectivement la conservation de la masse, la loi fondamentale de la dynamique suivant les directions radiale et orthoradiale, et la conservation de l'énergie qui, sous les hypothèses de gaz parfait idéal et d'écoulement adiabatique, est remplacée par la conservation de l'entropie p/ρ^{γ} d'une particule sur sa trajectoire. Il faut noter que la présence de cette dernière équation exclut l'existence de toute discontinuité interne à l'écoulement, et en particulier la présence de chocs internes (cette hypothèse sera vérifiée a posteriori).

On désigne par $r = R(t, \theta)$, l'équation du front de choc Σ , et par ω_n la composante normale au choc de sa vitesse de propagation qui, avec les notations de la figure 1.3, s'écrit :

(1.5)
$$\omega_n = \vec{\omega} \cdot \vec{n} = \frac{\partial R(t,\theta)}{\partial t} \sin \lambda$$

où \vec{w} est la vitesse d'expansion du choc et λ la mesure de l'angle entre la tangente au choc et la direction radiale.



FIG. 1.3: Notations générales

1.3 Analyse dimensionnelle

On suppose la quantité d'énergie libérée E suffisamment importante pour que l'explosion puisse être considérée comme *intense*: au début du mouvement et à une distance proche du centre de l'explosion, le saut de pression subit par les particules à la traversée du front de choc est suffisamment grand pour pouvoir négliger la pression du milieu ambiant p_{∞} (également appelée *contre-pression*) devant les pressions atteintes sur le choc. On néglige en outre la masse et les dimensions de la source d'énergie (hypothèse de *source ponctuelle*) de sorte qu'en définitive, l'inventaire des constantes physiques intervenant dans la formulation du phénomène se limite à:

$$E, \rho_{\infty}, \alpha, \gamma, k,$$

parmi lesquelles seules E et ρ_{∞} sont dimensionnées. L'ordre du système étant supérieur au nombre des données constantes dimensionnées, l'écoulement présente une similitude interne. Par suite, il est nécessaire de choisir une

des grandeurs primaires parmi les variables pour adimensionner le problème. En choisissant E, ρ_{∞} et t comme grandeurs primaires, l'équation du choc peut s'écrire:

(1.6)
$$R(t,\theta) = \left(\frac{Et^{(\alpha+2)}}{\rho_{\infty}}\right)^{\frac{1}{k+3}} R^{*}(\theta)$$

où $R^*(\theta)$ est le profil réduit du front du choc. Cette relation exprime l'invariance au cours du temps de la géométrie du front de choc R^* et fournit explicitement sa loi de propagation dans l'espace physique (r, θ) en fonction du temps. La similitude interne permettant de résoudre implicitement le problème par rapport au temps, la composante réduite quelconque d'un champ inconnu est de la forme $F(X, \theta)$ où X peut être choisi par :

$$(1.7) X = \frac{r}{R}$$

En outre, la similitude interne imposant la recherche de solutions autosemblables, la frontière Σ' délimitant la poche de vide, lorsqu'elle existe, doit obéir à une loi de propagation semblable à celle du choc :

(1.8)
$$R'(t,\theta) = \left(\frac{Et^{(\alpha+2)}}{\rho_{\infty}}\right)^{\frac{1}{k+3}} R^*(\theta) X'(\theta) \quad \text{avec} \quad X' = \frac{R}{R}$$

Grandeurs réduites

Chaque grandeur physique décrivant le phénomène peut s'écrire en fonction d'une grandeur réduite (étoilée) ne dépendant que des variables réduites (X, θ) de la façon suivante :

(1.9)
$$u = \frac{2n}{\gamma+1} \frac{r}{t} u^*(X,\theta) \qquad v = \frac{2n}{\gamma+1} \frac{r}{t} v^*(X,\theta)$$
$$p = \frac{2n^2}{\gamma+1} \rho_{\infty} \frac{r^2}{t^2} p^*(X,\theta) \qquad \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_{\infty} \rho^*(X,\theta)$$

où l'on a posé:

$$(1.10) n = \frac{\alpha+2}{k+3},$$

Les constantes multiplicatives ont été choisies de telle sorte que les fonctions ρ^*, p^*, u^* et v^* prennent des valeurs simples sur le choc⁷.

Par la suite, nous appellerons espace de similitude (ou espace réduit) l'espace des inconnues réduites. L'espace de similitude coïncide avec l'espace physique à un instant t fixé. La figure 1.4 illustre la distinction entre espace physique et espace de similitude. Elle représente, dans l'espace physique et en perspective, l'expansion d'une onde de choc (ainsi que l'écoulement aval) dans un plan méridien horizontal. Imaginons un observateur mobile sur un axe vertical normal à ce plan et s'en éloignant à une vitesse telle qu'il voit toujours le choc sous le même angle solide. Il verra alors l'écoulement évoluer derrière un choc entièrement figé et suivant un champ de vitesses apparentes permanent qui n'est autre que la solution calculée dans l'espace de similitude.

1.3.1 Équations adimensionnées

Avec les notations de la figure 1.3 on appelle $m(\theta)$ le paramètre défini par :

(1.11)
$$m = \operatorname{cotg} \lambda = \frac{R_{\theta}}{R} = \frac{R_{\theta}^*(\theta)}{R^*(\theta)}$$

Le géométrie du front du choc ne se déformant pas dans le mouvement d'expansion autosemblable, ce paramètre est indépendant du temps et est seul caractéristique de l'anisotropie de l'onde de choc.

Avec les relations (1.9) et du fait de la similitude interne, le système d'équations dimensionnées (1.4) dépendant des trois variables (1.4) peut être réduit à un système dépendant des deux variables sans dimension (X, θ) :

(1.12)
$$\begin{cases} X\left(u^{*}-mv^{*}-\frac{\gamma+1}{2}\right)\rho_{X}^{*}+X\rho^{*}u_{X}^{*}-mX\rho^{*}v_{X}^{*}+(\rho^{*}v^{*})_{\theta}=\rho^{*}J_{1}\\ X\left(u^{*}-mv^{*}-\frac{\gamma+1}{2}\right)u_{X}^{*}+v^{*}u_{\theta}^{*}+X\frac{\gamma-1}{2\rho^{*}}p_{X}^{*}=J_{2}+m_{\theta}v^{*2}\\ X\left(u^{*}-mv^{*}-\frac{\gamma+1}{2}\right)v_{X}^{*}+v^{*}v_{\theta}^{*}+\frac{\gamma-1}{2\rho^{*}}\left(p_{\theta}^{*}-mXp_{X}^{*}\right)=J_{3}\\ X\left(u^{*}-mv^{*}-\frac{\gamma+1}{2}\right)\left[\frac{p_{X}^{*}}{p^{*}}-\gamma\frac{\rho_{X}^{*}}{\rho^{*}}\right]+v^{*}\left[\frac{p_{\theta}^{*}}{p^{*}}-\gamma\frac{\rho_{\theta}^{*}}{\rho^{*}}\right]=-J_{4}\end{cases}$$

7. Ces expressions sont classiques et correspondent à la formulation choisie dans le cas de l'explosion isotrope ponctuelle [14].



FIG. 1.4: Illustration de la propriété de similitude interne de l'écoulement

où les fonctions J_i sont données par :

(1.13)
$$\begin{cases} J_{1} = -(k+1) u^{*} - (k-1) v^{*} \cot g \theta \\ J_{2} = u^{*} \left(\frac{\gamma+1}{2n} - u^{*}\right) + v^{*2} - \frac{\gamma-1}{\gamma} c^{*2} - m_{\theta} v^{*2} \\ J_{3} = v^{*} \left(\frac{\gamma+1}{2n} - u^{*}\right) \\ J_{4} = -\left(\frac{\gamma+1}{n} - 2u^{*}\right) \end{cases}$$

et où l'on a posé:

Dans ces équations, les termes sources figurant aux seconds membres proviennent exclusivement de la transformation des termes instationnaires des équations du système (1.4).

1.3.2 Conditions sur le choc

Par hypothèse, la pression extérieure p_{∞} est négligeable devant les valeurs de la pression atteintes sur le choc. Par suite, les relations de saut sur Σ s'écrivent en X = 1:

(1.15)
$$q_n = \frac{2}{\gamma+1}\omega_n \qquad q_\tau = 0 \qquad p = \frac{2\rho_\infty}{\gamma+1}\omega^2 \qquad \frac{\rho}{\rho_\infty} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1},$$

où

(1.16)

$$q_n = u \sin \lambda - v \cos \lambda$$
 et $q_\tau = u \cos \lambda + v \sin \lambda$

sont les projections de la vitesse sur la normale et la tangente au choc (figure 1.3). Compte tenu de (1.9), ces conditions s'écrivent sous forme adimensionnée :

$$u^*(1, heta) = rac{1}{1+m^2} = \sin^2\lambda$$
 $v^*(1, heta) = -rac{m}{1+m^2} = -\sin\lambda\cos\lambda$
 $p^*(1, heta) = rac{1}{1+m^2} = \sin^2\lambda$ $ho^*(1, heta) = 1.$

1.3.3 Un problème inverse

Découlant directement de l'hypothèse de source ponctuelle, l'absence de longueur caractéristique a permis d'aboutir à une formulation autosemblable du problème fournissant explicitement la loi de propagation du front de choc. En contrepartie, il a été nécessaire d'employer cette loi comme longueur de référence pour adimensionner le rayon polaire r. C'est la raison pour laquelle apparaît le paramètre m dans les équations (1.12) et les conditions sur le choc (1.16). Le problème direct de la détermination de la forme du choc à partir de la donnée de la répartition azimutale d'énergie, est donc particulièrement difficile à résoudre dans la mesure où la résolution nécessite la connaissance de la fonction m, c'est-à-dire la forme du choc $R^*(\theta)$. Aussi, comme dans le cas isotrope, on formulera le problème sous forme *inverse* : la forme du choc est une *donnée* du problème et l'on cherche à calculer la forme de la répartition d'énergie à l'origine de l'écoulement. Dès lors que l'équation du choc est connue, les conditions aux limites (1.16) sont parfaitement définies et constituent alors les conditions initiales du calcul.

L'intégration des équations du mouvement (1.12) associées aux conditions (1.16), s'effectue depuis le choc Σ , où toutes les fonctions sont déterminées, vers la frontière Σ' dont on ne connaît *a priori*, ni la forme, ni la position. En premier lieu, le problème posé est la localisation de cette surface. En général, elle est obtenue de façon naturelle comme limite du processus d'intégration lorsque la masse volumique tend vers 0. Dans les cas particuliers où la masse volumique ne s'annule pas⁸, la frontière Σ' est obtenue lorsque $\omega' = u'$, cette relation exprimant la condition de glissement sur cette frontière. Toutefois, bien que la forme de cette frontière soit obtenue directement en fin d'intégration, la résolution ne sera complète que lorsque nous aurons déterminé la répartition d'énergie $\epsilon(\theta)$ à l'origine de l'écoulement. Dans le cas de l'explosion non-instantanée, l'application du principe de la conservation de l'énergie conduit à une équation de fermeture liant la forme de la frontière du vide à la fonction $\epsilon(\theta)$.

1.4 Fermeture du problème

1.4.1 Cas général

Appliquons le principe de la conservation de l'énergie au domaine \mathcal{V}' représenté sur la figure 1.5. Dans le cas sphérique, \mathcal{V}' est un cône de sommet O limité à sa base par la frontière du vide Σ' , tandis que dans le cas cylindrique, c'est un dièdre infini.



FIG. 1.5: Domaine d'application du principe de la conservation de l'énergie

Par définition, Σ' est la frontière séparant le fluide dans la couche de choc du milieu raréfié contenu dans \mathcal{V}' . Par suite, comme aucune particule ne traverse cette frontière, et puisque l'écoulement est supposé adiabatique, il n'y a pas de flux d'énergie au travers de Σ' . Le principe de la conservation de l'énergie exprime que la variation d'énergie interne dans le milieu \mathcal{V}' est égale au travail des forces de pression sur Σ' . Si *e* désigne l'énergie interne par unité de volume, la conservation de l'énergie dans le domaine \mathcal{V}' s'écrit alors simplement :

$$rac{d}{dt} \int \limits_{\mathcal{V}'} e \, dartheta = rac{\partial}{\partial t} \int \limits_{\mathcal{V}'} e \, dartheta = - \int \limits_{\Sigma'} p' \, ec u' . ec n' \, d\sigma$$

En choisissant E comme grandeur caractéristique de l'écoulement en aval du choc, nous avons implicitement fait l'hypothèse que toute l'énergie issue de O était transmise au milieu continu sans aucune dissipation. Cette quantité d'énergie est alors seule responsable de la variation d'énergie interne e dans le domaine \mathcal{V}' . Compte tenu de (1.3), la relation précédente généralisée au cas cylindrique et au cas sphérique s'écrit:

$$(2\pi)^{(k-1)} \alpha E t^{(\alpha-1)} \int_{0}^{\theta} \epsilon(\Theta)(\sin\Theta)^{(k-1)} d\Theta = (2\pi)^{(k-1)} \int_{0}^{\theta} p' R'^{k} \frac{\partial R'}{\partial t} \sin\lambda' (\sin\Theta)^{(k-1)} d\Theta$$

8. pour n = 1, c'est-à-dire ($\alpha = 2, k = 1$) dans le cas cylindrique et ($\alpha = 3, k = 2$) dans le cas sphérique

En substituant les relations (1.8) et (1.9) dans l'expression ci-dessus puis en dérivant par rapport à θ , on aboutit à une expression particulièrement simple, reliant la forme de la frontière du vide R^*X' à la répartition azimutale d'énergie $\epsilon(\theta)$, ce qui ferme le problème:

(1.17)
$$\epsilon(\theta) = \frac{2n^3}{\alpha (\gamma + 1)} \frac{p^{*\prime}}{\sqrt{1 + {m^\prime}^2}} R^{*(k+3)} X^{\prime(k+3)} \quad \text{pour } \alpha \neq 0$$

Nous pouvons dès à présent remarquer que la fonction $\epsilon(\theta)$ est proportionnelle à $R^{*(k+3)}$, ce qui laisse présager qu'une anisotropie importante de l'apport d'énergie initial se traduira par une anisotropie plus faible de la forme de l'onde de choc.

L'expression (1.17) devient singulière pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire lorsque l'explosion est *instantanée*. Ceci n'est pas surprenant car nous savons en effet que dans le cas de l'explosion isotrope instantanée, l'écoulement est continu depuis le centre de l'explosion jusqu'au choc et qu'il n'y a pas formation de zone de vide. Dans ce cas particulier, l'écriture du principe de la conservation globale de l'énergie permet de fermer le problème.

1.4.2 Cas particulier de l'explosion instantanée

Appliquons le principe de la conservation de l'énergie au domaine diédrique (k = 1) ou conique (k = 2) \mathcal{V} de sommet O, d'angle au sommet θ et contenant l'onde de choc Σ (figure 1.6).



FIG. 1.6: Domaine d'application du principe de conservation de l'énergie dans le cas de l'explosion instantanée ($\alpha = 0$)

L'écoulement étant supposé adiabatique, la seule énergie apportée au volume \mathcal{V} est la fraction d'énergie issue de la source O et libérée dans le cône de largeur angulaire θ . L'intégralité de cette énergie ne se retrouve pas dans le volume \mathcal{V} car il faut également tenir compte du flux d'énergie au travers de la surface latérale⁹ S. À un instant tfixé, ceci s'exprime par la relation:

$$(2\pi)^{(k-1)} \int_{0}^{\theta} E\epsilon(\theta) t^{\alpha}(\sin\phi)^{(k-1)} d\phi = \int_{\mathcal{V}} \left(e + \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \right) dv + \int_{0}^{t} \left[\int_{\mathcal{S}} \left(e + \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \right) v \, d\mathcal{S} \right] dt$$

9. Par raison de symétrie, le flux d'énergie au travers de la surface latérale $\theta = 0$ est nul

Compte tenu de (1.9), cette équation s'écrit sous forme adimensionnée :

$$(1.18) \quad \int_{0}^{\theta} R^{*(k+3)}(\phi) \left(\int_{0}^{1} \left(p^{*} + \rho^{*} \left(u^{*2} + v^{*2} \right) \right) X^{(k+2)} dX \right) (\sin \phi)^{(k-1)} d\phi + \frac{2(\alpha+2)}{5(\gamma+1)\alpha} R^{*(k+3)} (\sin \theta)^{(k-1)} \int_{0}^{1} \left(\gamma p^{*} + \rho^{*} \left(u^{*2} + v^{*2} \right) \right) v^{*} X^{(k+2)} dX = \frac{25(\gamma^{2} - 1)}{2(\alpha+2)^{2}} \int_{0}^{\theta} \epsilon(\phi) (\sin \phi)^{(k-1)} d\phi$$

Pour $\alpha = 0$, cette équation n'a de sens que si la seconde intégrale du membre de gauche est nulle, c'est-à-dire si le flux d'énergie au travers de la surface latérale est nul. Il a été montré que, dans le cas où $\alpha = 0$, ce terme correspond à la forme intégrale sur \mathcal{V} de l'équation de conservation de l'entropie figurant dans (1.12) [17]. Par suite l'équation (1.18) est parfaitement définie. Il en résulte que, dans le cas de l'explosion instantanée, la répartition spatiale d'énergie reste à tout instant identique à la répartition initiale $\epsilon(\theta)$.

Après dérivation par rapport à θ , l'équation (1.18) s'écrit :

(1.19)
$$R^*(\theta)^{(k+3)} \int_0^1 \left(p^* + \rho^* \left(u^{*2} + v^{*2} \right) \right) X^{(k+2)} \, dX = \frac{\gamma^2 - 1}{2n^2} \epsilon(\theta)$$

Cette équation constitue la relation de fermeture dans le cas $\alpha = 0$.

À ce stade de la modélisation se pose le problème de la résolution numérique. Face à un problème aux dérivées partielles, l'intégration par des méthodes numériques "classiques" est bien souvent le seul recours. Seulement, dans le cas présent, ces méthodes se prêtent mal à la résolution de ce problème du fait de sa formulation inverse et de sa nature autosemblable. La similitude interne introduit en effet une singularité à l'instant initial puisque la structure entière de l'écoulement est établie et contenue dans un volume ponctuel. Cette singularité est implicitement contenue dans la formulation du problème. Toutefois, cette formulation du problème demeure encore suffisamment simple pour que soit envisageable une approche analytique, ce qui sera fait dans la partie II de cette thèse.

Chapitre 2

Formulation mathématique

2.1 Analyse mathématique du problème

L'objet de ce paragraphe est l'étude des propriétés mathématiques du système d'équations aux dérivées partielles (1.12) régissant le problème de l'explosion anisotrope. Avant tout développement, l'observation des équations de ce système, obtenues après adimensionnement des équations d'Euler (1.4), incite en premier lieu à effectuer le changement de variable suivant :

(2.1)
$$\eta = \log X$$
 et $\begin{cases} g = u^* - mv^* - \frac{\gamma + 1}{2} \\ f = \log \rho^* \\ h = \log p^* \end{cases}$

où $m(\theta)$, défini par (1.11), est la fonction caractéristique de l'anisotropie locale du choc. Avec ces nouvelles inconnues, les équations du système (1.12), exprimant respectivement la conservation de la masse, de la quantité de mouvement dans les directions radiale et orthoradiale, et de l'entropie peuvent alors s'écrire:

$$(2.2) \begin{cases} g f_{\eta} + g_{\eta} + v^{*} f_{\theta} + v^{*}_{\theta} = J_{1} \\ g g_{\eta} + m g v^{*}_{\eta} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} c^{*} h_{\eta} + v^{*} g_{\theta} + m v^{*} v^{*}_{\theta} = J_{2} \\ g v^{*}_{\eta} - m \frac{\gamma - 1}{2\gamma} c^{*^{2}} h_{\eta} + v^{*} v^{*}_{\theta} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} c^{*^{2}} h_{\theta} = J_{3} \\ \gamma g f_{\eta} - g h_{\eta} + \gamma v^{*} f_{\theta} - v^{*} h_{\theta} = J_{4} \end{cases}$$

où les seconds membres J_i sont donnés par (1.13). Dans cette formulation, l'inconnue g se substitue à la composante radiale u^* de la vitesse tandis que l'inconnue v^* est conservée. Le lecteur trouvera en annexe A le sens physique de la grandeur g.

Le système (2.2) est quasilinéaire et non-homogène, et son équation caractéristique s'écrit :

(2.3)
$$(g - v^*\varsigma)^2 \left[\frac{\gamma - 1}{2} c^{*^2} \left(1 + (m + \varsigma)^2\right) - (g - v^*\varsigma)^2\right] = 0,$$

où ς est la pente locale des *lignes caractéristiques* dans le plan (η, θ) :

(2.4)
$$\varsigma = \frac{dr_l}{d\theta}$$

L'équation (2.3) admet quatre racines :

- une racine double réelle:

(2.5)
$$\varsigma_{1,2} : \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{g}{v^*}$$

associée à deux familles de caractéristiques réelles confondues, signe de **double hyperbolicité** du problème. D'après (2.1), le choc (d'équation X = 1) est une courbe sur laquelle $\frac{d\eta}{d\theta} = 0$. Or, de toute évidence, la fonction g ne peut s'annuler sur Σ . Par conséquent, le choc n'est jamais confondu avec les lignes définies par (2.5) et il est donc légitime d'y fixer les conditions initiales du problème. Nous montrerons au paragraphe suivant que les lignes caractéristiques (2.5) sont en fait confondues avec l'image dans le plan de la similitude des trajectoires des particules fluides. - deux racines distinctes $\varsigma_{3,4}$, solutions de l'équation de second degré:

$$\left(\frac{\gamma-1}{2}c^{*2}-v^{*2}\right)\varsigma^{2}+\left[2\,g\,v^{*}+(\gamma-1)\,m\,c^{*2}\right]\,\varsigma+\frac{\gamma-1}{2}\,c^{*2}\,(1+m^{2})-g^{2}=0$$

dont le discriminant s'écrit :

(2.6)
$$\Delta^* = \left(u^* - \frac{\gamma + 1}{2}\right)^2 + v^{*2} - \frac{\gamma - 1}{2}c^{*2}$$

Si l'on introduit le nombre de Mach relatif d'une particule par rapport au mouvement de dilatation d'ensemble :

$$M_r^2=rac{\left(u-rac{nr}{t}
ight)^2+v^2}{c^2}$$

 $\mathbf{soit}:$

(2.7)
$$M_r^2 = \frac{\left(u^* - \frac{\gamma + 1}{2}\right) + v^{*2}}{\frac{\gamma - 1}{2}c^{*2}}$$

l'étude du signe de Δ^* revient à l'étude de la position de M_r par rapport à 1. On a ainsi $M_r < 1$ dans un domaine elliptique et $M_r > 1$ dans un domaine hyperbolique.

Il n'est bien évidemment pas envisageable à ce stade de prédire la nature hyperbolique ou elliptique du système dans tout l'écoulement, excepté au voisinage du choc où, en utilisant (1.16) et (1.11), la condition $\Delta^* > 0$ s'écrit :

(2.8)
$$\frac{\gamma+1}{2\gamma} - \sin^2 \lambda \ge 0$$

où λ est l'angle entre la tangente au choc et la direction radiale (figure 1.3). Cette condition est indépendante de k et de α . Il en résulte que la nature elliptique ou hyperbolique du problème au voisinage du choc est indépendante de la façon dont se fait l'apport d'énergie au cours du temps, ainsi que du type de symétrie. Elle dépend exclusivement de γ et de la répartition azimutale d'énergie (qui conditionne en effet directement la forme du choc (§ 1.4.1)).

Pour $\gamma = 1.4$, le problème change de nature pour $\lambda \approx 68^{\circ}$. Dans le cas d'une onde peu anisotrope $(85^{\circ} < \lambda(\theta_c) < 90^{\circ})$, le système, en plus d'être déjà doublement hyperbolique, est donc également de type elliptique au voisinage du choc. L'expérience montrera *a posteriori* que pour les cas test considérés, il le restera dans toute la couche de choc.

L'augmentation de l'anisotropie du front de choc entraîne l'apparition de zones localement hyperboliques. Le passage d'une zone hyperbolique à une zone elliptique s'effectue, soit de façon continue, l'interface entre ces deux zones est alors une caractéristique double le long de laquelle $M_r = 1$, soit de façon discontinue au travers de chocs internes à l'écoulement. Cette dernière éventualité remet en cause la formulation initiale du problème du fait de la présence de l'équation de conservation de l'entropie dans le système $(1.4)^{10}$. Ce cas de figure n'étant pas rencontré dans les cas-tests qui seront traités, cette approche ne sera pas abordée.

2.2 Trajectoires et "trajectoires"

Supposons résolu le problème de la détermination du mouvement. En représentation eulérienne, l'équation différentielle des trajectoires dans l'espace physique est obtenue en écrivant que le vecteur vitesse en un point P coïncide avec le vecteur $d \stackrel{\rightarrow}{OP}/dt$, soit en coordonnées polaires $dr/u = rd\theta/v = dt$. Compte tenu de (2.1) et des relations (1.9) liant vitesse physique et vitesse réduite, on a donc simultanément le long d'une trajectoire:

(2.9a)
$$\frac{dr}{u^*} = \frac{rd\theta}{v^*} = \frac{2n}{\gamma+1}\frac{r}{t}d$$

(2.9b)
$$d\eta = \frac{dr}{r} - \frac{n}{t}dt - mdt$$

On vérifie aisément que l'élimination de dr/r et dt/t entre ces relations conduit à (2.5): les trajectoires des particules fluides sont les caractéristiques doubles du problème. Les courbes intégrales de (2.5) sont images dans l'espace réduit des trajectoire matérielles de l'espace physique; inversement, le relèvement dans l'espace-temps d'une courbe intégrale de (2.5) selon (2.9a) et (2.9b) est une trajectoire.

^{10.} Celle-ci n'étant plus vérifiée à la traversée d'un choc, il faudrait alors remplacer cette équation par celle de l'énergie totale ou de l'enthalpie d'arrêt et de plus adopter une formulation conservative permettant de s'affranchir des discontinuités pour la résolution numérique.

Dans l'espace de similitude (§ 1.3), la solution, qui est indépendante du temps, est une "photographie" instantanée de l'écoulement à un instant t quelconque fixé. L'intégration de (2.5) dans cet espace est une famille de courbes dont l'équation différentielle dans l'espace physique à un instant t fixé peut être obtenue par relèvement de (2.5) selon (2.9b) seul, avec dt = 0, soit :

$$rac{dr}{r}=rac{(u^*-rac{\gamma+1}{2})d heta}{v^*}$$

L'intégration de cette équation différentielle dans l'espace physique (tout comme l'intégration de (2.5) dans l'espace de similitude) nécessite la donnée d'un constante, par exemple la valeur θ_c identifiant l'azimut du point origine de cette courbe sur le choc à l'instant considéré. Afin de les distinguer des trajectoires matérielles, nous noterons ces courbes "trajectoires". Cette distinction est illustrée sur la figure 2.1 présentant la structure de l'écoulement à un instant $t = t_n$ fixé. Les points $(R_i, i = 1..n)$ repèrent, sur une direction radiale particulière $\theta = \theta_c$, les positions



FIG. 2.1: Photographie de l'écoulement à un instant t fixé : relation entre trajectoires matérielles et "trajectoire"

successives du front de choc aux instants $t_i \leq t_n$. Lorsque qu'elles ont été atteintes par le front de choc, les particules, initialement immobiles en R_i , ont été "expulsées" dans le mouvement d'expansion de l'explosion. La "trajectoire" correspondante est le lieu de ces particules à l'instant $t = t_n$; elle est en quelque sorte la ligne d'émission de toutes les particules qui ont traversé le choc en $R(t, \theta_c)^{11}$.

Notons enfin qu'il n'est pas surprenant que les trajectoires soient des caractéristiques du système (1.4) (ou de même que les "trajectoires" soient caractéristiques du système (2.2)) du fait de la présence de l'équation de conservation de l'entropie. On remarque cependant l'apparition au second membre de la forme adimensionnée (1.12) de cette équation d'un terme source¹² J_4 non nul, ce qui illustre encore la distinction entre trajectoires matérielles et "trajectoires": dans l'espace physique, l'entropie se conserve sur les trajectoires tandis que dans l'espace de similitude, sa forme réduite obéit à une équation de transport le long des "trajectoires"¹³.

2.3 Formulation intrinsèque

Le problème de la détermination du mouvement consiste en l'intégration du système quasilinéaire non homogène de type mixte (2.2). L'étude des propriétés mathématiques de ce système a mis en évidence le rôle particulier de lignes caractéristiques joué par les "trajectoires". Afin de tirer profit de ces propriétés, nous choisissons d'envisager la résolution dans un système de coordonnées curvilignes construit sur les "trajectoires". Soient (ζ, ξ) ces coordonnées, que nous qualifierons encore de coordonnées intrinsèques, et telles que :

 $-\zeta$ est l'abscisse curviligne comptée le long des "trajectoires"

^{11.} Il est intéressant de remarquer qu'à l'extrémité de ces "trajectoires" (sur la frontière du milieu raréfié) se trouvent les particules qui ont traversé le choc à l'instant initial, alors que sa vitesse était en théorie infinie.

^{12.} Dans chacune des équations du système (1.12), un terme source est directement issu de l'adimensionnement du terme instationnaire figurant au premier membre de l'équation dimensionnée.

^{13.} Celles-ci sont en effet une succession de particules possédant chacune une entropie constante et distincte. L'intensité du choc s'atténuant dans le temps, on peut en déduire que l'entropie réduite est une fonction croissante le long d'une "trajectoire" et qu'elle tend théoriquement vers l'infini sur la frontière du milieu raréfié.

 $-\xi$ est l'abscisse curviligne sur le second réseau de courbes à définir.

Afin de préserver le caractère *euclidien* de l'espace physique, les relations de transformation des variables (η, θ) aux nouvelles variables (ζ, ξ) doivent impérativement établir une correspondance *biunivoque* et *continue* entre l'espace des coordonnées (r, θ) et l'espace des coordonnées (ζ, ξ) . Si tel n'était pas le cas, nous pourrions rencontrer par exemple la configuration illustrée sur la figure 2.2(a) pour laquelle à un couple de valeurs (r, θ) il correspond les couples (ζ_1, ξ_1) et (ζ_2, ξ_2) , situation significative d'un croisement de trajectoires et naturellement dépourvue de toute vraisemblance physique.



FIG. 2.2: Bijectivité du changement de variables

Il est clair que la condition nécessaire pour garantir la biunivocité de la transformation (sauf éventuellement en des points singuliers) est que les lignes coordonnées $\zeta = C^{te}$ et $\xi = C^{te}$ forment un réseau de courbes orthogonales dans le plan de similitude (figure 2.2(b)).

Première relation de changement de variables

Le point de départ dans la construction du nouveau système de coordonnées est l'équation de la pente locale des "trajectoires" (2.5), exprimées en fonction des variables (η, θ) . Cette équation différentielle, valable en tout point $M(\eta, \theta)$ d'une "trajectoire", peut encore s'écrire:

(2.10)
$$\Omega(\eta,\theta) = 0$$

où Ω est la forme différentielle linéaire à deux variables attachée au point $M(\eta, \theta)$ et définie sur une "trajectoire":

(2.11)
$$\Omega = v^*(\eta, \theta) d\eta - g(\eta, \theta) d\theta$$

D'après (2.10), nous pourrions définir la première coordonnée ξ simplement par $d\xi = \Omega$, de sorte que les "trajectoires" soient, par définition, des lignes coordonnées le long desquelles $\xi = C^{\text{te}}$. Cependant, la notation $d\xi = \Omega$ signifie que Ω est la différentielle *exacte* (ou totale) de la fonction ξ , or il n'y a aucune raison pour qu'il en soit ainsi. Pour rendre (2.11) exacte, il faut introduire un facteur intégrant dont le rôle est de modifier l'intensité du vecteur de composantes $(v^*, -g)$ (mais non sa direction) de telle sorte que le nouveau vecteur soit effectivement le gradient de ξ . Notons $\phi(\eta, \theta)$ le facteur intégrant ¹⁴ associé à Ω , et tel que la forme $\phi(v^*d\eta - gd\theta)$ soit la différentielle exacte de la fonction ξ ; on définit alors la première relation de changement de variables par :

(2.12)
$$d\xi = \phi(\eta, \theta) \left(v^* d\eta - g d\theta \right) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \xi \cdot \overrightarrow{dM}$$

Seconde relation de changement de variables

En s'inspirant de (2.12), nous pourrions définir la seconde coordonnée ζ par $d\zeta = \psi(v^*d\theta + gd\eta)$, où $\psi(\eta, \theta)$ est le facteur intégrant associé à ζ . Seulement, cette forme ne fait qu'assurer l'orthogonalité dans le plan (η, θ) . En déduire que les lignes coordonnées ainsi définies sont orthogonales dans le plan de smilitude est prématuré et suppose en effet que le plan (η, θ) est lui même orthogonal dans l'espace (r, θ) . Or, il n'en est rien car l'orthogonalité disparaît

^{14.} Nous sommes assurés de l'existence de ϕ car une forme différentielle à deux variables admet une infinité de facteurs intégrants se déduisant les uns des autres par une fonction continue bijective arbitraire [4].

avec la transformation des variables $(t, r, \theta) \rightarrow (t, X, \theta)$. Il faut en fait chercher la seconde relation de changement de coordonnées sous une forme plus générale, posons :

$$(2.13) d\zeta = \psi \Big(F(\eta, \theta) \, d\eta + G(\eta, \theta) \, d\theta \Big)$$

où les fonctions F et G sont à définir afin de satisfaire :

(2.14)
$$\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\zeta\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\xi\right)=0$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est indépendant de la base dans laquelle ceux-ci sont exprimés. La relation (2.12) fournit les composantes (covariantes) de grad ξ en coordonnées (η, θ) de façon explicite, les fonctions ψF et ψG de (2.13) étant pour leur part les composantes (covariantes) de grad ζ . C'est par conséquent dans l'espace des coordonnées (η, θ) que nous écrirons (2.14). Pour être exprimé, ce produit scalaire nécessite la détermination de la métrique de l'espace (η, θ) engendrée par les transformations successivement appliquées : $(r, \theta) \to (X, \theta) \to (\eta, \theta)$. Le calcul de cette métrique est exposé en annexe C. Moyennant la connaissance du tenseur métrique contravariant (C.1) de l'espace (η, θ) rappelé ci-après :

$${\cal G}^{\,\eta heta}=rac{1}{r^2}egin{bmatrix}1+m^2&-m\-m&1\end{bmatrix}$$

le produit scalaire (2.14) s'écrit :

$$\sum_{ij} \left[\mathcal{G}^{\eta heta}
ight]^{ij} \left[\overrightarrow{\operatorname{grad}} \zeta
ight]_i \left[\overrightarrow{\operatorname{grad}} \xi
ight]_j = 0, \qquad i = 1, 2$$

soit après développement:

$$[v^* + m(g + mv^*)] F - (g + mv^*) G = 0$$

dont une solution triviale est :

$$F=(g+mv^*), \qquad G=v^*+m(g+mv^*)$$

Les relations de changement de variables recherchées prennent donc les formes définitives suivantes :

(2.15)
$$d\zeta = \psi \left[(g + mv^*) d\eta + (v^* + m(g + mv^*)) d\theta \right]$$
$$d\xi = \phi \left[v^* d\eta - g d\theta \right]$$

Le jacobien de la transformation ainsi définie est égal à :

$$J_{\zeta\xi} = \det(\mathcal{J}_{\zeta\xi}) = -\psi \, \phi \, \left(v^{st 2} + \left(g + m v^st
ight)^2
ight)$$

et peut s'annuler dans les deux cas suivants :

- $-\phi = 0$ ou $\psi = 0$: l'un au moins des deux facteurs intégrants est nul. Cette situation implique une dégénérescence du changement de variable (2.15) qui transforme alors un espace à deux dimensions en un espace à une seule dimension.
- $(-v^{*2} + (g + mv^{*})^{2} = 0$: ce qui se produit en tout point de l'écoulement où l'on a simultanément :

$$igg(v^*=0 \ u^*=rac{\gamma+1}{2}$$

2.4 Conditions d'intégrabilité des formes différentielles

Les facteurs intégrants ψ et ϕ ont été introduits (§ 2.3) dans le but de rendre les formes différentielles (2.12) et (2.13) totales de sorte que l'on soit en droit écrire:

$$egin{aligned} &d\zeta = \left. rac{\partial \zeta}{\partial \eta}
ight|_{ heta} d\eta + \left. rac{\partial \zeta}{\partial heta}
ight|_{\eta} d heta = ec{ ext{grad}} \, \zeta \,. \, ec{dM} \ &d\xi = \left. rac{\partial \xi}{\partial \eta}
ight|_{ heta} d\eta + \left. rac{\partial \xi}{\partial heta}
ight|_{\eta} d heta = ec{ ext{grad}} \, \xi \,. \, ec{dM} \end{aligned}$$

avec:

(2.16a)
$$\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\Big|_{\theta} = \psi \ (g + mv^*) \qquad \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial \theta}\Big|_{\eta} = \psi \ (v^* + m \ (g + mv^*))$$

(2.16b)
$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\Big|_{\theta} = \phi \ v^* \qquad \qquad \frac{\partial \xi}{\partial \theta}\Big|_{\eta} = -\phi \ g$$

(2.16b)

Pour qu'il en soit ainsi, les fonctions ψ et ϕ doivent chacune vérifier une équation de compatibilité obtenue simplement en explicitant l'équation toujours valable :

(2.17)
$$\begin{array}{c} \overrightarrow{\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \zeta)} = 0 & , \text{ pour } \psi \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \xi)} = 0 & , \text{ pour } \phi \end{array}$$

S'agissant de ψ , l'écriture de (2.17) conduit à:

(2.18)
$$\begin{aligned} \psi\left(m \left.\frac{\partial g}{\partial \eta}\right|_{\theta} + (1+m^2) \left.\frac{\partial v^*}{\partial \eta}\right|_{\theta}\right) + \left(v^* + m(g+mv^*)\right) \left.\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right|_{\theta} \\ -\psi\left(\left.\frac{\partial g}{\partial \theta}\right|_{\eta} + m \left.\frac{\partial v^*}{\partial \theta}\right|_{\eta}\right) - (g+mv^*) \left.\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right|_{\eta} = \psi J_5 \end{aligned}$$

où l'on a posé:

$$(2.19) J_5 = v^* \frac{\partial m}{\partial \theta}$$

L'équation pour ϕ s'écrit quant à elle plus simplement :

(2.20)
$$\left| \frac{\partial g}{\partial \eta} \right|_{\theta} + g \left| \frac{\partial \log \phi}{\partial \eta} \right|_{\theta} + \left| \frac{\partial v^*}{\partial \theta} \right|_{\eta} + v^* \left| \frac{\partial \log \phi}{\partial \theta} \right|_{\eta} = 0$$

Ces équations sont deux équations supplémentaires qu'il faudra adjoindre aux quatre équations du système (2.2); dans la suite des développements, nous appellerons système "augmenté" le nouveau système ainsi constitué.

Étudions plus particulièrement l'équation (2.18) sur les axes de symétrie locale de l'écoulement. Dans cette dénomination figure bien entendu l'axe Oy mais plus généralement tout rayon passant par un point du choc tel que $m(\theta) = 0$ (figure 2.3). D'après les conditions (1.16) et compte tenu de (2.1), on vérifie qu'en tout point P du choc





tel que $m(\theta) = 0$, on a:

(2.21)
$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial p^*}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \rho^*}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

Ces simplifications, appliquées à la troisième équation du système (2.2) (quantité de mouvement orthoradiale), conduisent à :

(2.22)
$$\frac{\partial v^*}{\partial \eta}\Big|_{\theta} = 0$$

Comme $v^*(P)$ est initialement nulle sur le choc, la seule composante non nulle de la vitesse en P est u^* (ou g): il s'ensuit qu'au départ du choc, la "trajectoire" de cette particule n'est pas déviée. Si l'on effectue un petit déplacement $d\eta$ sur cette "trajectoire" (radiale), on a de nouveau m = 0 et $v^* = 0$, les simplifications (2.21) restent donc valables et le raisonnement précédent est applicable. On en déduit que les "trajectoire" issues des points du choc tels que $m(\theta) = 0$ sont purement radiales. On peut d'ailleurs vérifier que l'équation (2.5) conduit, lorsque $v^* = 0$, à:

$$\frac{d\theta}{d\eta} = 0$$

Compte tenu des simplifications (2.21) et de (2.22), l'équation de compatibilité (2.18) se réduit sur un axe de symétrie à :

(2.23)
$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\Big|_{\eta} = 0$$

Cette équation triviale n'apporte aucune information supplémentaire et traduit simplement le fait que, comme les inconnues (u, p, ρ) , ψ est une fonction *paire* en raison des symétries du problème (à la différence de v qui est l'unique fonction impaire du problème). Puisque le terme $\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\Big|_{\theta}$ n'apparaît plus dans l'équation (2.23), il n'est plus possible, en dépit de la donnée de ψ_c en ces points particuliers du choc, de calculer l'évolution de ψ sur ces "trajectoires". L'équation (2.18) est indéterminée sur les axes de symétrie de l'écoulement. Le traitement de cette indétermination sera abordé au § 3.4.

2.5 Nature du système "augmenté"

Étudions d'abord les propriétés du nouveau système augmenté et reprenons pour cela l'étude menée au § 2.1 en l'appliquant au système ci-dessous auquel on a ajouté les équations (2.18) et (2.20).

L'ajout de ces équations introduit deux nouvelles racines réelles distinctes associées à deux familles de lignes caractéristiques réelles :

- La première racine, associée à l'équation de compatibilité pour $\log \phi$, est égale à :

$$c_5=rac{g}{v^*},$$

Elle est identique à la racine (2.4), dont on rappelle qu'elle désigne la pente des "trajectoires" (§ 2.1); ces dernières deviennent donc caractéristiques triples pour le système (2.24).

- La seconde racine, liée à l'équation de compatibilité de ψ , s'écrit :

$$arsigma_6 = -rac{v^*+m(g+mv^*)}{g+mv^*}$$

On montre aisément qu'elle désigne la direction des lignes coordonnées $\zeta = C^{te}$ qui sont donc caractéristiques pour l'équation de compatibilité de ψ . Cette remarque éclaire l'indétermination identifiée au § 2.4 concernant l'équation de compatibilité pour ψ (2.18) qui n'est pas intégrable sur un axe de symétrie locale. En effet, par définition des courbes caractéristiques, il est impossible, connaissant la valeur de ψ en un point d'une courbe $\zeta = C^{te}$, de "propager" cette grandeur dans la direction orthogonale à cette courbe, c'est-à-dire dans la direction des courbes $\xi = C^{te}$ qui, rappelons le, sont les "trajectoires" des particules fluides. Comme les "trajectoires" issues des points du choc où m = 0 demeurent purement radiales, les courbes $\zeta = C^{te}$ sont donc orthogonales aux axes de symétrie locale (figure 2.4).

Nous voyons dès à présent que la donnée de ψ sur ces directions est donc nécessaire. Une solution partielle à ce problème sera proposée au § 3.4.



FIG. 2.4: Lignes iso ζ au voisinage d'un axe de symétrie

L'ensemble des remarques précédentes nous guidera dans l'écriture des équations en variables intrinsèques ainsi que dans le choix de la variable d'intégration.

2.6 Projection des équations dans le système de coordonnées intrinsèques (ζ, ξ)

Il s'agit d'écrire les équations du système (2.24) dans l'espace des variables (ζ, ξ). De façon générale, les relations permettant de traduire, en fonction des nouvelles variables, les opérateurs de dérivations partielles par rapport aux anciennes variables sont données, d'après (2.16a) et (2.16b), par :

(2.25)
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \eta} \bigg|_{\theta} = \psi \left(g + mv^{*} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta} \bigg|_{\xi} + \phi v^{*} \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \right|_{\zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \bigg|_{\eta} = \psi \left(v^{*} + m \left(g + m v^{*} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \zeta} \bigg|_{\xi} - \phi g \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \right|_{\xi} \end{cases}$$

En appliquant ce changement de variables à la formulation matricielle (2.24), on aboutit après calcul à :

(2.26a)
$$\psi \left[bf_{\zeta} + (g + mv^*) g_{\zeta} + (v^* + m(g + mv^*)) v_{\zeta}^* \right] + \phi \left[v^* g_{\xi} - g v_{\xi}^* \right] = J_1$$

(2.26b)
$$\psi \left[b g_{\zeta} + m b v_{\zeta}^{*} + \frac{(\gamma - 1)}{2\gamma} c^{*2} (g + m v^{*}) h_{\zeta} \right] + \phi \frac{(\gamma - 1)}{2\gamma} c^{*2} v^{*} h_{\xi} = J_{2}$$

(2.26c)
$$\psi \left[b v_{\zeta}^{*} + \frac{(\gamma - 1)}{2 \gamma} c^{*^{2}} v^{*} h_{\zeta} \right] - \phi \frac{(\gamma - 1)}{2 \gamma} c^{*^{2}} (g + mv^{*}) h_{\xi} = J_{3}$$

(2.26d)
$$\psi b (\gamma f_{\zeta} - h_{\zeta}) = J_4$$

(2.26e)
$$-\psi^2 \left[v^* g_{\zeta} + g v_{\zeta}^* \right] + \phi \left[\psi \left(\left(g + m v^* \right) g_{\xi} + \left(v^* + m \left(g + m v^* \right) \right) v_{\xi}^* \right) + b \psi_{\xi} \right] = \psi J_5$$

(2.26f)
$$\psi \left((g + mv^*) g_{\zeta} + (v^* + m (g + mv^*)) v_{\zeta}^* + b (\ln \phi)_{\zeta} \right) + \phi \left(v^* g_{\xi} - g v_{\xi}^* \right) = 0$$

où on a posé:

(2.28)

(2.27)
$$b = v^{*2} + (g + mv^{*})^{2}$$

Si l'on observe plus en détail les équations du système (2.26), on s'aperçoit qu'elles présentent certaines particularités résultant directement du rôle de courbes caractéristiques joué par les "trajectoires" et les courbes orthogonales.

- Conservation de l'entropie

Remarquons d'abord que l'équation 2.26d (équation de l'énergie) ne comporte pas de dérivées en ξ , elle peut encore s'écrire:

$$-\psi\,\left({v^*}^2+(g+mv^*)^2
ight)\,\left.rac{dS}{d\zeta}
ight|_{m \xi}=J_4$$

où la grandeur S, définie par :

(2.29)
$$S = h - \gamma f = \log\left(\frac{p^*}{\rho^{*\gamma}}\right)$$

est significative de la forme réduite de l'entropie d'une particule. Si l'on introduit cette nouvelle inconnue, il convient alors d'éliminer l'une des inconnues f ou h. Choisissons de préserver h. De l'équation (2.28) on tire l'expression de f_{ζ} :

(2.30)
$$\psi b f_{\zeta} = \frac{J_4}{\gamma} + \frac{\psi b}{\gamma} h_{\zeta}$$

qui, injectée dans l'équation (2.26a), conduit à :

$$\psi\left[\frac{b}{\gamma}h_{\zeta}+(g+mv^{*})g_{\zeta}+(v^{*}+m(g+mv^{*}))v_{\zeta}^{*}\right]+\phi\left(v^{*}g_{\xi}-gv_{\xi}^{*}\right)=J_{1}-\frac{J_{4}}{\gamma}$$

- Équation de l'enthalpie d'arrêt

Sous les hypothèses d'adiabaticité et de gaz parfait idéal, nous savons que l'enthalpie d'arrêt est la seconde grandeur lagrangienne. On montre qu'une combinaison linéaire des équations (2.26b), (2.26c) et (2.26d) conduit à l'équation différentielle ordinaire :

$$\psi \, b \left. \left. rac{dh_i}{d\zeta}
ight|_{\xi} = 2(g+mv^*)(J_2+v^{*2}m_ heta) + 2v^*J_3 - rac{c^{*2}J_4}{\gamma}$$

exprimant la conservation sur une "trajectoire" de la forme réduite de l'enthalpie d'arrêt définie par :

$$h_i = ((g + mv^*)^2 + v^{*2}) + c^{*2}$$

– Réduction de l'équation de compatibilité pour ϕ

On remarque que l'équation (2.26f), équation de compatibilité pour ϕ , ne comporte pas de dérivées partielles de cette grandeur par rapport à ξ . Soustrayons cette équation de (2.26a), on obtient alors:

$$\psi b \left(f_{\zeta} - (\ln \phi)_{\zeta}\right) = J_1,$$

Puis, en substituant l'expression de f_{ζ} obtenue précédemment, il vient :

(2.31)
$$\left. \psi b \left. \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{h}{\gamma} - \ln \phi \right) \right|_{\xi} = J_1 - \frac{J_4}{\gamma}$$

Cette équation est une équation de transport de la quantité $\left(\frac{h}{\gamma} - \ln \phi\right)$ le long des "trajectoires".

– Réduction de l'équation de compatibilité pour ψ

On peut montrer que l'équation (2.26e), où ne figure pas de terme $\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}\Big|_{\xi}$, peut se ramener à l'équation suivante :

$$(2.32) \quad \phi \left[(g + mv^*)g_{\xi} + (v^* + m(g + mv^*))v_{\xi}^* + b\log\psi_{\xi} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma}c^{*2}h_{\xi} \right] \\ = \frac{1}{b} \left(v^*(J_2 + bm_{\theta}) - (g + mv^*)J_3 \right)$$

Il s'agit d'une équation différentielle de la variable ξ le long des courbes $\zeta = C^{\text{te}}$. On retrouve le fait que ces courbes sont caractéristiques pour l'équation de compatibilité régissant ψ .

- Reconstruction de l'espace physique

L'intégration des équations du problème fournit la solution dans l'espace des variables (ζ, ξ) . Pour reconstruire la solution dans l'espace physique, il faut simultanément intégrer les relations D.1 définissant la transformation inverse des variables (ζ, ξ) aux variables $(\eta, \theta)^*$. Comme nous réalisons l'intégration le long des "trajectoires" $(d\xi = 0)$, nous sommes ramenés à intégrer les deux équations différentielles ordinaires suivantes :

(2.33)
$$\psi \left. \frac{d\eta}{d\zeta} \right|_{\xi} = \frac{g}{b}, \qquad \psi \left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_{\xi} = \frac{v^*}{b}$$

Chapitre 3

Résolution et traitement numérique

3.1 Introduction

(3.1)

Afin de tirer profit du rôle de courbes caractéristiques joué par les trajectoires, nous avons construit un système de coordonnées intrinsèques dans lequel nous avons récrit l'ensemble des équations du problème. Par ailleurs, la recherche de la forme du changement de coordonnées a introduit deux inconnues supplémentaires, ψ et ϕ , pour lesquelles nous disposons, pour chacune d'entre elles, d'une équation dite de compatibilité (§ 2.4). Parmi ces six équations aux dérivées partielles, deux ont pu être ramenées à des équations différentielles ordinaires (§ 2.6). Enfin, la reconstruction de la solution dans l'espace physique implique l'intégration de deux équations différentielles supplémentaires. Nous sommes finalement en présence du système d'équations suivant :

$$\left\{ egin{aligned} &\psi\,\mathcal{A}\,egin{pmatrix}h\\g\\w^*\\\psi\end{pmatrix}&+\phi\,\mathcal{B}\,egin{pmatrix}h\\g\\w^*\\\psi\end{pmatrix}&=egin{pmatrix}J_1-J_4/\gamma\\J_2&J_3\\\psi\,J_5\end{pmatrix}\ &\psi\,b\,\,rac{d}{d\zeta}\Big|_{\xi}\,(h-\gamma\,f)=-J_4\ &\psi\,b\,\,rac{d}{d\zeta}\Big|_{\xi}\,egin{pmatrix}h-\gamma&f\end{pmatrix}=-J_4\ &\psi\,b\,\,rac{d}{d\zeta}\Big|_{\xi}\,egin{pmatrix}h-\gamma&f\end{pmatrix}=J_1-J_4/\gamma\ &\psi\,b\,\,rac{d}{d\zeta}\Big|_{\xi}=g\ &\psi\,b\,\,rac{d}{d\zeta}\Big|_{\xi}=v^* \end{aligned}
ight.$$

où les matrices \mathcal{A} et \mathcal{B} sont données en annexe E. À ce système sont associées les conditions *initiales* imposées sur le front de choc:

$$(3.2) \qquad \qquad \begin{cases} g_c = -\frac{\gamma+1}{2} \\ h_c(\theta_c) = -\log(1+m(\theta_c)^2) \\ v_c(\theta_c) = -\frac{m(\theta_c)}{1+m(\theta_c)^2} \\ \eta_c = 1 \end{cases}$$

Pour leur part, les coordonnées ζ et ξ sont initialisées à partir des différentielles (2.15) en tenant compte du fait que sur le choc on a $d\eta = 0$, soit :

(3.3)
$$\begin{cases} d\zeta_c = \psi_c \left(v_c^* + m \left(g_c + m v_c^* \right) \right) d\theta_c \\ d\xi_c = -\phi_c g_c d\theta_c \end{cases}$$

L'intégration de ces différentielles par rapport θ_c conduit à :

(3.4)
$$\begin{cases} \zeta_c(\theta_c) = \int_0^{\theta_c} \psi_c \ (v_c^* + m \left(g_c + m v_c^*\right)\right) \ d\theta_c \\ \\ \xi_c(\theta_c) = \int_0^{\theta_c} -\phi_c \ g_c \ d\theta_c \end{cases}$$

Le calcul des répartitions initiales de ζ et ξ nécessite la donnée des fonctions ψ et ϕ sur le choc. À la différence de toutes les autres inconnues du problème, il n'existe pour ces êtres mathématiques aucune condition physique permettant de les initialiser sur le choc. En outre, sur le plan strictement mathématique, nous savons qu'une forme différentielle à deux variables admet une infinité de facteurs intégrants se déduisant les uns des autres par une fonction continue bijective arbitraire. On montre aisément qu'en définitive le choix de ψ_c et ϕ_c peut être quelconque, nous choisirons $\psi_c = \phi_c = 1$ pour l'expérimentation numérique.

3.2 Maillage de calcul

Le problème est formulé sous forme inverse et doit être intégré depuis le choc vers la frontière du vide. La technique choisie pour l'intégration de ce système associe une méthode des caractéristiques à une méthode dérivée de la méthode de Telenin (Holt [12, chap. 6]). Cette dernière est basée sur une représentation polynomiale (ou un développement en séries trigonométriques) des inconnues dans une des directions coordonnées. Ces fonctions d'interpolation sont utilisées pour calculer les variations des inconnues dans la direction considérée afin de réduire la résolution d'un système d'EDP à l'intégration d'un système différentiel dans une direction privilégiée, dite d'avancement. La méthode de Telenin est applicable aux systèmes d'équations aux dérivées partielles de type elliptique, mixte elliptique-hyperbolique, ou parabolique. Elle a été employée avec profit dans la résolution de problèmes d'écoulements supersoniques et hypersoniques autour de corps élancés de géométries diverses (nez émoussé ou pointu, corps axisymétrique ou non) et placés en incidence. Mais avant d'exposer plus en détails la méthode, il est nécessaire de définir un espace de calcul et un maillage de cet espace.

Il est clair que les "trajectoires" $\xi = C^{te}$ vont constituer le premier réseau de lignes de maillage, permettant ainsi d'intégrer les équations hyperboliques du système (3.1). Le long de ces lignes, l'abscisse curviligne ζ semble s'imposer naturellement comme variable d'intégration. Or, les lignes $\zeta = C^{te}$ (othogonales aux lignes $\xi = C^{te}$) sont caractéristiques pour l'équation de compatibilité de ψ , rendant de fait son intégration impossible le long des $\xi = C^{te \ 15, \ 16}$. Cette indétermination peut être levée en remarquant que l'équation de conservation de l'entropie (2.28) écrite sous la forme inversée :

(3.5)
$$\left. \frac{d\zeta}{dS} \right|_{\xi} = -\frac{\psi b}{J_4}$$

permet de considérer ζ comme inconnue et de choisir S comme variable d'intégration. On substitue alors à ζ , variable *métrique* dont la borne supérieure est inconnue, une variable *entropique* dont on sait qu'elle tend théoriquement vers l'infini en fin d'intégration. Sur le plan numérique, cela permet d'approcher Σ' d'aussi près que l'on veut.

La grandeur S étant fonction de ξ sur le choc, nous choisirons plutôt comme nouvelle variable d'intégration l'accroissement d'entropie:

$$\hat{S}(\zeta,\xi) = S(\zeta,\xi) - S_c(\xi),$$

de sorte que le domaine de variation de \hat{S} soit :

 $0\leq \hat{S}<\infty$

Les variables (\hat{S}, ξ) forment un système de variables lagrangiennes : ξ identifie une "trajectoire" unique tandis que \hat{S} repère une seule particule sur celle-ci (on vérifie aisément que le second membre de (2.28) est strictement positif et \hat{S} est ainsi monotone).

^{15.} Ceci se vérifie immédiatement dans l'équation (2.26e) qui, écrite en variables (ζ, ξ), ne comporte pas de terme $\partial \psi/\partial \zeta$.

^{16.} En outre, le choix de la grandeur métrique ζ comme variable d'intégration aurait impliqué un avancement identique sur chaque "trajectoire". Or, le comportement des "trajectoires" est tout à fait inconnu à l'approche de la frontière du vide et il se peut qu'il y en ait certaines qui atteignent «plus rapidement» Σ' que d'autres, entraînant alors un "blocage" de l'intégration sur les autres "trajectoires".
3.3 Projection des équations dans le système de coordonnées (\hat{S}, ξ)

De façon générale, les relations de changement de variables s'écrivent :

(3.7)
$$\begin{cases} \left. \frac{\partial}{\partial \zeta} \right|_{\xi} = \left. \frac{\partial}{\partial \hat{S}} \right|_{\xi} \left. \frac{\partial \hat{S}}{\partial \zeta} \right|_{\xi} \\ \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \right|_{\zeta} = \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \right|_{\hat{S}} + \left. \frac{\partial}{\partial \hat{S}} \right|_{\xi} \left. \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \right|_{\zeta} \end{cases}$$

Comme S_c ne dépend que de ξ , on a sur une "trajectoire" d'après (3.6) et (2.28):

(3.8)
$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial \zeta}\Big|_{\xi} = \frac{dS}{d\zeta}\Big|_{\xi} = -\frac{J_4}{\psi b}$$

Explicitons à présent le terme $\frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi}\Big|_{\zeta}$; la différentielle de \hat{S} s'écrit :

(3.9)
$$d\hat{S} = \frac{\partial \hat{S}}{\partial \zeta} \bigg|_{\xi} d\zeta + \frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi} \bigg|_{\zeta} d\xi$$

Sur une courbe particulière définie par $\hat{S} = C^{te}$ on a donc :

(3.10)
$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial \xi}\Big|_{\zeta} = -\frac{\partial \hat{S}}{\partial \zeta}\Big|_{\xi}\frac{d\zeta}{d\xi}\Big|_{\hat{S}}$$

où le terme $\frac{d\zeta}{d\xi}\Big|_{\hat{S}}$ représente la variation de ζ lorsque l'on passe d'une "trajectoire" à une autre en suivant une ligne $\hat{S} = C^{\text{te}}$. Avec les notations de la figure 3.1, la relation (3.10) exprime simplement que la variation de \hat{S} lorsqu'on passe de 1 à 1' est identique à celle lorsqu'on passe de 1 à 2. Il faut noter que le terme $\frac{d\zeta}{d\xi}\Big|_{\hat{S}}$ ne peut être déterminé analytiquement et devra être approché numériquement par un développement de ζ par rapport à ξ dans la direction $\hat{S} = C^{\text{te}}$.



FIG. 3.1: Représentation locale des lignes iso \hat{S} dans le plan (ζ, ξ)

Compte tenu de (3.8) et (3.10), les relations de changement de variables (3.7) s'écrivent en définitive :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta}\Big|_{\xi} &= -\frac{J_4}{\psi b} \left. \frac{\partial}{\partial \hat{S}} \right|_{\xi} \\ \frac{\partial}{\partial \xi}\Big|_{\zeta} &= \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \right|_{\hat{S}} - \frac{J_4}{\psi b} \left. \frac{d\zeta}{d\xi} \right|_{\hat{S}} \left. \frac{\partial}{\partial \hat{S}} \right|_{\xi} \end{aligned}$$

(3.11)

Appliquons ce changement de variables aux quatre équations aux dérivées partielles du système (3.1), il vient :

(3.12)
$$-\frac{J_4}{b} \left[\mathcal{A} - \frac{\phi}{\psi} \left. \frac{d\zeta}{d\xi} \right|_{\hat{S}} \mathcal{B} \right] \begin{pmatrix} h \\ g \\ v^* \\ \psi \end{pmatrix}_{\hat{S}} + \phi \mathcal{B} \begin{pmatrix} h \\ g \\ v^* \\ \psi \end{pmatrix}_{\xi} = \begin{pmatrix} J_1 - \frac{J_4}{\gamma} \\ J_2 \\ J_3 \\ \psi J_5 \end{pmatrix}$$

En posant:

(3.13)
$$\mathcal{E} = -\frac{J_4}{b} \left[\mathcal{A} - \frac{\phi}{\psi} \left. \frac{d\zeta}{d\xi} \right|_{\hat{S}} \mathcal{B} \right],$$

ce système peut être récrit:

(3.14)
$$\begin{pmatrix} h \\ g \\ v^* \\ \psi \end{pmatrix}_{\hat{S}} = \mathcal{E}^{-1} \left(\begin{pmatrix} J_1 - \frac{J_4}{\gamma} \\ J_2 \\ J_3 \\ \psi J_5 \end{pmatrix} - \phi \mathcal{B} \begin{pmatrix} h \\ g \\ v^* \\ \psi \end{pmatrix}_{\xi} \right)$$

Les expressions analytiques exactes des seconds membres des équations du système (3.14) ont pu être obtenues à l'aide d'un logiciel de calcul formel, elles sont données en annexe E.

Enfin, le changement de variables appliqué aux quatre équations différentielles du système (3.1) conduit à :

(3.15a)
$$\frac{d\zeta}{d\hat{S}}\Big|_{\xi} = -\frac{\psi b}{J_4}$$

(3.15b)
$$\frac{d}{d\hat{S}}\left(\frac{h}{\gamma} - \ln\phi\right)\Big|_{\xi} = \frac{1}{b}\left(J_1 - \frac{J_4}{\gamma}\right)$$

(3.15c)
$$\frac{d\eta}{d\hat{S}}\Big|_{\xi} = -\frac{g}{J_4}$$

(3.15d)
$$\frac{d\theta}{d\hat{S}}\Big|_{\xi} = -\frac{v}{J}$$

3.4 Méthode numérique

Méthode de Telenin

On cherche à intégrer sur chaque "trajectoire" de l'écoulement les systèmes (3.14) et (3.15) associés aux conditions initiales (3.2) et (3.4). L'objectif dans un premier temps est de ramener ce nombre infini d'équations à un nombre fini par le biais d'une discrétisation de l'espace de calcul (\hat{S}, ξ) , avec la contrainte que cette discrétisation soit la plus "large" possible pour une précision de calcul requise. Plutôt que d'utiliser des différences finies pour évaluer les variations des inconnues dans la direction coordonnée dite transverse (complémentaire de la direction d'avancement), la méthode de Telenin propose l'emploi de représentations polynomiales (ou de séries de fonctions) qui fourniront directement les dérivées des inconnues intervenant dans les seconds membres de (3.14). La procédure de calcul de la méthode de Telenin consiste alors à démarrer l'intégration dans la direction d'avancement depuis le choc, où tous les termes des seconds membres de (3.14) sont estimés à l'aide des polynômes d'interpolation. À l'issue du premier pas de calcul, les nouvelles valeurs des fonctions inconnues sont utilisées pour à nouveau déterminer les coefficients des polynômes, puis réévaluer les valeurs des dérivées, et enfin effectuer le pas d'intégration suivant.

Pour le choix des polynômes d'interpolation, revenons au préalable sur quelques propriétés essentielles de la solution. À l'exception de points singuliers atteints en fin d'intégration, les fonctions h, g, v^* et ψ sont continues et à variations bornées dans le domaine de calcul. En effet, en raison de la présence de l'équation de conservation de l'entropie dans la formulation du problème, nous devons restreindre l'étude aux configurations pour lesquelles il n'existe pas de discontinuités de type choc interne au sein de l'écoulement. Cette condition implique en particulier que l'équation du choc soit une fonction continue et dérivable ainsi que sa dérivée première. En outre, de façon évidente, les inconnues du problème sont périodiques de période 2π . De plus, en raison de l'hypothèse de symétrie plane (k = 1) ou axiale (k = 2) par rapport à l'axe Oy, on peut limiter le calcul de la solution à la demi période $[0, \pi]$.

Une première possibilité consiste à développer les inconnues en séries trigonométriques de la variable ξ (ou de façon équivalente θ_c) dans la direction *transversale* $\hat{S} = C^{te}$. Dans ce cas, l'intervalle $[0, \pi]$ est divisé en segments de longueurs égales et la solution est calculée en des points régulièrement espacés définis par:

$$heta_{c_j} = rac{j\pi}{2N+1}$$

Cependant, le développement en séries de Fourier impose le calcul de la solution sur les points frontières du domaine $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Or, sur ces "trajectoires" nous serions directement confrontés au problème de l'indétermination de l'équation de compatibilité pour ψ mise en évidence au § 2.4. Dans l'état actuel des recherches, ce problème reste entier. Pour cette raison, le développement en séries de Fourier n'est pas envisageable.

Le problème de l'indétermination peut être contourné si l'on choisit de projeter les inconnues sur une base de polynômes de Chebyshev, ce qui permet en effet de s'affranchir du calcul de la solution sur les points frontières du domaine.

Polynômes de Chebyshev

Les variables (\hat{S}, ξ) forment un système de coordonnées lagrangiennes. Par définition, toutes les particules d'une même "trajectoire" sont repérées par une même valeur de ξ . Cette valeur est distincte d'une "trajectoire" à une autre et n'est fonction que de l'angle θ_c , identifiant l'origine sur le choc de la "trajectoire". Puisque la relation (3.3) liant ξ à θ_c est biunivoque, la discrétisation de l'espace de calcul (\hat{S}, ξ) dans la direction ξ revient à une discrétisation dans la direction θ_c .

Par raison de symétrie, on limite le calcul de la solution au demi plan supérieur $0 < \theta < \pi$. La méthode consiste à approcher les fonctions exactes h, g, v^* , ψ et ζ par des polynômes de Chebyshev d'un certain degré N et de la variable θ_c (annexe F). Sur le choc, la mise en œuvre de cette approximation nécessite la connaissance de la solution en N points définis, d'après l'annexe (F.4), par:

(3.16)
$$\theta_{c_i} = \frac{\pi}{2}(x_i + 1) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} i = 1, \dots, N \\ 0 < \theta_{c_i} < \pi \\ -1 < x_i < 1 \end{cases}$$

où les $(x_i, i = 1..N)$ sont les N racines du polynôme $T_N(x)$. Ces points identifient les origines des N "trajectoires" qui seront intégrées numériquement. Le choix de la localisation des "trajectoires" de calcul n'est donc pas libre mais directement conditionné par le degré de l'approximation de Chebyshev (figure de l'annexe F). C'est un inconvénient de cette méthode qui n'autorise pas de resserrement du maillage de calcul dans des zones isolées de l'écoulement où une plus grande précision serait appréciée.

Sur le choc, et plus généralement à une itération quelconque *it* du calcul, la connaissance des valeurs des fonctions h, g, v^*, ψ et ζ aux N points de calcul, repérés par $(\hat{S}_{it}, (\theta_{c_i}, i = 1...N))$, permet de calculer selon la relation (F.2) les coefficients $C_j^h, C_j^g, C_j^{v^*}, C_j^{\psi}$ qui approchent ces fonctions par (F.3) sur la base des polynômes $T_1(x) \ldots T_N(x)$. Les coefficients C_i^h s'obtiennent par exemple ainsi :

$$C_{j}^{h} = rac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} h(\hat{S}_{it}, heta_{c_{i}}) \cos{[(j-1)x_{i}]}$$

À l'aide de (F.5), on en déduit ensuite les coefficients $C_j^{h'}$, $C_j^{g'}$, $C_j^{v^{\star'}}$, $C_j^{\psi'}$ de l'approximation de chacune des dérivées, à $\hat{S} = \hat{S}_{it} = C^{te}$, des fonctions h, g, v^* , et ψ par rapport à θ_c . Compte tenu de (F.6), ces mêmes dérivées par rapport à ξ peuvent en définitive être approchées par les relations suivantes:

$$\left. rac{\partial h(\hat{s}_{it}, heta_{c_i})}{\partial \xi}
ight|_{\hat{S}_{it}} pprox - rac{2}{\pi \phi_c g_c} \left[\sum_{j=1}^{N-1} C_j^{h'} T_{j-1}(x_i) - rac{1}{2} C_1^{h'}
ight]$$

Nous sommes alors en mesure d'expliciter sur chaque "trajectoire" de calcul le second membre du système (3.14). La résolution du problème formé des équations (3.14) et (3.15) se ramène à l'intégration de N sous-systèmes différentiels discrets, écrits sur chacune des N "trajectoires" de calcul et comportant chacun huit équations. Ce système global de $8 \times N$ équations peut être intégré par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 à pas variable. Chaque étape du calcul se décompose ainsi, avec dans un premier temps la projection de la solution dans la direction ξ , puis l'intégration de l'ensemble des équations dans la direction d'avancement \hat{S} . Théoriquement, l'intégration s'achève lorsque la masse volumique tend vers 0.

La précision du calcul dépend bien évidemment du choix du degré N des polynômes d'approximation de Chebyshev, c'est-à-dire du nombre de "trajectoires" de calcul. La valeur optimale de N doit être la plus petite possible pour une précision de calcul donnée. Disposant de la solution sur le choc, nous pouvons déterminer la valeur minimale de N permettant d'approcher au mieux la solution. Les figures 3.2 et 3.3 présentent les répartitions analytiques de h_c et v_c^* correspondant à un cas test fortement anisotrope et qui sera présenté au chapitre suivant. À ces courbes sont superposées les approximations de ces fonctions obtenues par des polynômes de degré 8 et 12. On peut constater qu'un polynôme de degré 8 se révèle être insuffisant tandis que N = 12 permet déjà une bonne approximation. Seulement,



FIG. 3.2: Comparaison sur le choc des courbes analytiques et approximations de Chebyshev pour N = 8



FIG. 3.3: Comparaison des courbes analytiques et approximations de Chebyshev pour N = 12

en raison de la non linéarité du système intégré, rien ne permet d'affirmer a priori que ce degré sera suffisant pour assurer une approximation correcte de la solution tout au long du déroulement de l'intégration, et particulièrement à l'approche de la frontière du vide. La valeur optimale de N varie d'une configuration à une autre et ne peut être déterminée que de façon empirique. Pour un cas d'écoulement donné (forme du choc, valeur de γ et α , type de symétrie) on effectue plusieurs calculs en augmentant la valeur de N jusqu'à ne plus constater de différence entre les solutions. Nous verrons cependant qu'un degré trop important induira des difficultés d'intégration numérique liées à la physique du phénomène.

Chapitre 4

Exploitation numérique

4.1 Présentation du cas test

La formulation inverse du problème de l'explosion anisotrope nécessite la connaissance de la forme de l'onde de choc comme donnée du problème (§ 1.3.3). Pour illustrer et valider la méthode mise au point, on se donne l'équation du choc Σ sous la forme :

$$R^*(heta) = 1 + \Lambda^2 - 2\Lambda \cos(2 heta)$$

où :

 $-1 < \Lambda < 0$

Ce cas test, utilisé par Fabre [10], présente l'avantage de lier le "degré" d'anisotropie à un unique paramètre Λ . La plage de variation de ce paramètre autorise un large éventail de formes de choc (figure 4.1), allant de l'onde quasi circulaire ($\Lambda \rightarrow 0$) jusqu'à des formes beaucoup plus anisotropes pour lesquelles il existe une zone hyperbolique.



FIG. 4.1: Forme de choc symétrique par rapport aux axes Oy et Oz

Cette forme de choc satisfait à l'hypothèse de symétrie par rapport à l'axe horizontal. De plus, la fonction $R^*(\theta)$ étant périodique de période π , le choc admet l'axe $\theta = \frac{\pi}{2}$ comme second axe de symétrie¹⁷.

Le paramètre d'anisotropie m s'écrit simplement :

$$m = rac{4\Lambda\sin2 heta}{1-\Lambda^2-2\Lambda\cos2 heta}$$

La pente locale du choc est nulle en $\theta = 0$, $\theta = \pi$ et $\theta = \pi/2$ (figure 4.2), elle est maximale en :

$$heta=rac{1}{2}rccos\left(rac{2\Lambda}{1+\Lambda^2}
ight)$$



FIG. 4.2: Représentation des fonctions $R^*(\theta)$ et $m(\theta)$

Nous avons vu que la nature localement elliptique ou hyperbolique du problème était déterminée par la condition (2.8). Dans le cas présent, celle-ci s'exprime compte tenu de (1.16):

$$\min\left(rac{1}{1+m^2}
ight) \geq rac{\gamma+1}{2\gamma}$$

Tout calcul fait, le problème reste mixte elliptique-hyperbolique tant que :

$$0>\Lambda>-0.1001$$

Au delà de cette valeur, il y a apparition d'une zone entièrement hyperbolique au sein de la couche de choc.

L'expérimentation numérique consiste en l'étude de l'influence des différents paramètres suivants: k pour la géométrie de l'écoulement, α pour la loi d'apport d'énergie, γ pour la caractérisation du gaz, Λ pour le degré d'anisotropie, et N pour la précision de la discrétisation. Pour mener cette étude, nous présentons quatre configurations de calcul représentatives des diverses applications physiques de la théorie de l'explosion intense anisotrope. Le premier cas étudié est celui de l'explosion ponctuelle à débit d'énergie constant dont l'une des applications concrète est l'étude du phénomène d'onde de bouche en balistique intermédiaire. À cette occasion, nous insisterons plus particulièrement sur l'aspect numérique afin d'évaluer la fiabilité de l'outil dont nous disposons. Nous verrons que la méthode mise au point permet de calculer plus de 90% de la couche de choc mais qu'apparaissent des difficultés d'intégration numérique à l'approche de la frontière du vide. Ces difficultés seront abordées plus en détail dans l'étude du second cas qui est celui d'une explosion ponctuelle instantanée. L'analyse de la structure de l'écoulement (de type "couche épaisse" § 7.2) montrera que ces difficultés sont liées à la physique même du phénomène.

4.2 Explosion ponctuelle à débit d'énergie constant

Initialement, la théorie de l'explosion intense anisotrope a été développée à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille dans le cadre de recherches en balistique intermédiaire. Il s'agissait alors de modéliser le comportement de l'onde de choc issue de la bouche du canon d'une arme à feu après expulsion du projectile, ceci afin d'en étudier l'influence, d'une part sur la trajectoire du projectile, d'autre part sur l'environnement immédiat du canon (par exemple l'entrée d'air d'un réacteur dans le cas d'une arme embarquée sur un avion de combat). Il fut alors démontré que l'écoulement en aval de l'onde de bouche générée pour un tir idéal en atmosphère infinie est équivalent à celui produit par une explosion ponctuelle (k = 2) à débit d'énergie constant ($\alpha = 1$). La frontière des gaz brûlés agit en fait comme la dilatation d'un piston sphérique ; elle matérialise la frontière du vide de l'explosion analogue (photo 7.1 page 80). Le lecteur trouvera dans la référence [25] la démonstration de cette équivalence ainsi qu'une description phénoménologique de l'écoulement consécutif au tir d'une arme à feu.

4.2.1 Reconstruction du maillage dans l'espace X, θ

Pour débuter l'analyse de cette première configuration et afin de mieux cerner le rôle des différents changements de variables successivement appliqués dans notre modélisation, la planche I.1 propose les étapes de la reconstruction du maillage dans l'espace de similitude à partir du maillage de calcul.

^{17.} Cette propriété n'est cependant pas imposée par les hypothèses du problème ni par la technique d'intégration numérique.

La planche I.1a présente l'espace de calcul (\hat{S}, ξ) . Non effectivement représentées sur cette figure, les "trajectoires" sont dans ce plan des droites horizontales d'équation $\xi_i = \xi_c(\theta_{ci})$. Ce calcul a été réalisé avec 16 "trajectoires" d'intégration et pour une anisotropie du choc importante ($\Lambda = -0.07$), cette anisotropie restant toutefois insuffisante pour qu'il y ait présence d'une zone hyperbolique dans la couche de choc. Le temps d'intégration est de l'ordre de quelques minutes. Les droites verticales représentent la progression des lignes iso \hat{S} au cours de l'intégration, nous les avons tracées toutes les dix itérations. Le resserrement de ces lignes à partir de $\hat{S} = 3$ témoigne de la réduction du pas d'intégration réalisée par la méthode de Runge-Kutta à l'approche de la frontière Σ' .

Sur la représentation dans le plan cartésien $(\zeta - \zeta_c, \xi_c)$ (planche I.1b), l'allure des *iso* \hat{S} montre que l'évolution de ζ , grandeur significative d'une abscisse curviligne, est très variable selon la valeur de ξ_c , c'est-à-dire selon l'azimut θ_c du point du choc dont est issue la "trajectoire". On constate en particulier que la croissance de ζ est d'autant plus importante que l'origine de la "trajectoire" est éloignée des points du choc $\theta_c = 0$ (soit $\xi_c = 0$), $\theta_c = \pi/2$ ($\xi_c \sim 0.31$) et $\theta_c = \pi$ ($\xi_c \sim 0.62$). Inversement, les "trajectoires" proches des axes de symétrie parcourent, durant le même "temps d'intégration", le trajet le plus faible. Cette disparité de vitesse d'avancement sur les "trajectoires" justifie l'emploi de la variable entropique \hat{S} comme variable d'intégration, au dépend de la variable métrique ζ (§ 3.2).

Dans le plan (η, θ_c) (planche I.1c), les lignes $\hat{S} = C^{\text{te}}$ présentent une allure tout autre. Notons que la progression des $iso\hat{S}$ s'effectue cette fois vers la gauche puisque $\eta = \log X \leq 0$. Par définition, η est une grandeur caractéristique d'une longueur comptée dans la direction radiale. On constate que η atteint un maximum (en valeur absolue) sur l'axe $\theta = \pi/2$, ce qui traduit une augmentation plus forte de l'épaisseur de la couche de choc dans cette zone.

Ce comportement est plus appréciable sur la planche I.1d où on a volontairement omis de relier les points des courbes $\hat{S} = C^{\text{te}}$, ceci afin de visualiser plus distinctement les différentes "trajectoires" de calcul. Ces dernières ne sont plus des droites horizontales mais des courbes puisqu'en ordonnée figure, non pas θ_c (constant le long des "trajectoires"), mais la valeur de θ locale. On peut alors observer une incurvation des "trajectoires", s'intensifiant à l'approche de la frontière Σ' .

C'est sur la planche I.1e, présentant les "trajectoires" dans l'espace de similitude, que les considérations précédentes prennent tout leur sens. On perçoit nettement la disparité de trajet parcouru par les différentes "trajectoires", ainsi que l'épaississement plus important de la zone centrale ($\theta = \pi/2$) de la couche de choc. On note que le changement de direction des "trajectoires" est d'autant plus brutal que la "trajectoire" est proche de l'axe de symétrie $\theta = 0$. Par ce changement de direction, l'ensemble des "trajectoires" semblent converger vers un puits unique situé par raison de symétrie sur l'axe $\theta = \pi/2$.

Il n'a pas été possible de poursuivre l'intégration jusqu'à son terme comme l'illustre la figure 4.3 ci-après. On constate en effet une diminution brutale et rapide du pas d'intégration à partir de l'itération 60. La figure de droite indiquant que cette réduction est imposée par le facteur intégrant ψ sur les deux "trajectoires" situées de part et d'autre de l'axe $\theta = \pi/2$. Sur la planche I.1e, ces deux "trajectoires" semblent déjà se rejoindre. La dégénérescence du changement de variables Euler-Lagrange au point de convergence, s'il existe, implique de fortes contraintes sur la métrique locale de l'espace des variables (ζ, ξ) , ces contraintes étant "reprises" par le facteur intégrant ψ .



FIG. 4.3: Illustration du déroulement de l'intégration : sur la première figure sont tracées l'évolution du pas d'intégration (axe de gauche) et celle de l'entropie \hat{S} (axe de droite) à chaque itération. La seconde figure présente, pour chaque itération, la "trajectoire" (axe de gauche) et l'inconnue (axe de droite) qui ont imposé la réduction (ou l'augmentation) du pas de calcul dans la méthode de Runge-Kutta.

Avant toute tentative d'interprétation de la solution, il est nécessaire de s'assurer de la précision de notre calcul. De l'observation de la planche I.1b, on peut en effet se demander si la discrétisation dans la direction ξ est suffisante pour assurer une approximation correcte de la solution, particulièrement dans la zone centrale en fin d'intégration.

4.2.2 Influence de la discrétisation sur le choc

Un calcul identique au précédent, mais réalisé avec N = 12, laisse apparaître un croisement des "trajectoires" sur l'axe $\theta = \pi/2$ (figure 4.4 ci-après). En tout état de cause, un tel comportement n'est physiquement pas admissible et doit être le fait d'un défaut de précision numérique. Rappelons pourtant que la valeur N = 12 fournit une approximation probante de la solution sur le choc (figure 3.3, § 3.4), ce qui porte à croire que cela n'est pas suffisant pour garantir la précision durant toute l'intégration.



FIG. 4.4: Mise en évidence du croisement des "trajectoires" sur l'axe $\theta = \pi/2$ pour un calcul réalisé avec N = 12

Les planches I.2 et I.3, réalisées respectivement avec N = 24 et N = 48, permettent d'apprécier l'influence de l'augmentation du nombre de "trajectoires" de calcul (et donc le degré de l'approximation par polynômes de Chebyshev) sur la reconstruction du maillage dans l'espace de similitude. Dans l'ensemble, les diverses représentation des iso \hat{S} restent très semblables et les "trajectoires" dans l'espace de similitude demeurent inchangées durant la majeure partie de leur intégration. Ceci atteste de la robustesse de la méthode, déjà précise avec seulement 16 "trajectoires" de calcul.

L'influence de l'augmentation de N se fait principalement ressentir dans la zone de l'hypothétique *puits* où semblent vouloir aboutir les "trajectoires". Assurément, la valeur de N conditionne la qualité de l'approximation de ζ dans la direction $\xi \ge \hat{S} = C^{\text{te}}$ (planches I.1b, I.2b et I.3b). Or, c'est è partir de cette approximation qu'est évaluée à chaque étape la dérivée $\frac{d\zeta}{d\xi}\Big|_{\hat{S}}$ intervenant dans les relations de changement de variables (3.11), et donc dans la formulation (3.14). Ce terme apparaît en particulier au dénominateur du second membre de l'équation pour ψ (E.1). Par raison de symétrie, $\frac{d\zeta}{d\xi}\Big|_{\hat{S}} = 0$ sur l'axe $\theta = \pi/2$, et la planche I.3b laisse entrevoir que ce terme croît très fortement de part et d'autre de cet axe. On voit donc l'intérêt d'augmenter le nombre de "trajectoires" de calcul dans cette zone afin de garantir une meilleur approximation de $\frac{d\zeta}{d\xi}\Big|_{\hat{S}}$. Comme nous l'avons déjà mentionné au § 3.4, l'inconvénient de la méthode de Chebyshev est qu'elle n'autorise pas le libre choix des "trajectoires" de calcul et n'offre pas la possibilité d'une discrétisation plus fine dans des zones spécifiques du domaine; l'unique solution est un resserrement global du maillage. La contrepartie de l'augmentation de N est le rapprochement des deux "trajectoires" situées de part et d'autre de l'axe $\theta = \pi/2$. Par suite, l'extrême proximité de ces "trajectoires" avec cet axe engendre des difficultés d'intégration liées au fait que l'équation (2.18) y est singulière. L'expérimentation numérique montre que N = 48 est un bon compromis entre une valeur trop faible générant des erreurs numériques et une valeur trop grande limitant plus tôt l'intégration (en outre, un degré trop important peut également conduire à des problèmes de divergence des coefficients de Chebyshev d'ordre élevés).

4.2.3 Grandeurs physiques dans la couche de choc

Étudions à présent le comportement des différentes grandeurs dans l'écoulement et leur sensibilité au degré d'anisotropie du choc.

Cas de très faible anisotropie

La planche I.4 présente l'évolution des quantités p/p_c , ρ^* , u^* et v^* intégrées le long des "trajectoires" pour un cas de très faible anisotropie ($\Lambda = -.005$) et réalisé avec N = 48. Par raison de symétrie et pour ne pas surcharger les graphiques, seules 6 "trajectoires" de calcul ont été choisies parmi 24 dans l'intervalle $]0, \pi/2[$. À titre de point

de repère, nous avons également tracé la solution du problème de l'explosion isotrope dans des conditions identiques $(\alpha = 1, k = 2, \gamma = 1.4)$ (¹⁸).

Il est important de noter que ces évolutions sont tracées en fonction de la variable d'avancement \hat{S} le long des "trajectoires" et ne sont pas représentatives de l'évolution des grandeurs dans l'épaisseur de la couche de choc. Remarquons également que nous n'avons pas tracé p^* mais plutôt le rapport p/p_c , ceci afin de permettre une interprétation physique plus aisée. En choisissant comme pression de référence la pression au point du choc défini par X = 1 et $\theta_c = 0$, ce rapport s'exprime simplement par :

$$\frac{p}{p_c} = \left(\frac{R(\theta)X}{R(0)}\right)^2 p^*(X,\theta)$$

Notons aussi que ρ^* et ρ/ρ_c sont équivalents.

Les différences observables pour p/p_c selon les "trajectoires", ainsi que l'apparition de la vitesse orthoradiale v^* , attestent de l'influence importante de l'anisotropie du choc sur l'écoulement interne, et ce même pour une très faible valeur de Λ , c'est-à-dire pour une onde de choc quasi sphérique.

La différence fondamentale est l'apparition brutale et tardive de la composante v^* . Elle est à valeurs positives dans le premier cadran et négative dans le second par raison de symétrie. Ce comportement traduit bien le fait que les "*trajectoires*", dans le plan de la similitude subissent, une forte incurvation et deviennent quasiment orthogonales à la direction radiale (planche I.3e). Elles semblent toutes converger vers un point qui est le lieu de pression minimale dans l'écoulement (planche I.4a, $\theta_c = 87.12$).

La vitesse radiale adimensionnée u^* tend asymptotiquement vers 1.2, qui est la valeur théorique de la vitesse d'expansion de la frontière du vide dans le cas isotrope $(\frac{\gamma+1}{2} \text{ avec } \gamma = 1.4)$. Toutefois, la condition de glissement sur Σ' s'écrit avec les notations de la figure 4.5:

$$\omega'_n = \frac{\partial R'}{\partial t} \sin \lambda' = u' \sin \lambda' - v' \cos \lambda'$$

soit encore sous forme réduite:

$$u'^* = \frac{\gamma+1}{2} + m'v'^*$$



FIG. 4.5: Notations sur la frontière du vide

La valeur limite de u'^* est donc fonction de la géométrie de Σ' ainsi que de la composante tangente à Σ' de la vitesse des particules $(m'v'^*)$, c'est pourquoi l'on observe de faibles différences sur u^* selon les "trajectoires" (planche I.4c).

Seule la masse volumique reste peu influencée par l'anisotropie de l'écoulement, sa décroissance est identique pour toutes les "trajectoires" et égale à celle obtenue dans le cas isotrope (planche I.4b). L'allure progressive de cette décroissance ne doit pas surprendre puisque ρ^* (ou ρ/ρ_c) est ici tracée en fonction de \hat{S} . En revanche, lorsque les grandeurs p/p_c , ρ/ρ_c , u^* et v^* sont représentées en fonction de la valeur locale¹⁹ de X (planche I.5), on observe alors que, dans ce cas d'écoulement en couche mince (partie I, § 7.2), la masse volumique présente un comportement semblable à celui du cas isotrope et tend vers 0 avec une pente infinie (planche I.5b et également II.6a).

^{18.} Ce calcul a été effectué à l'aide du code élaboré dans la partie II de ce mémoire

^{19.} Il s'agit de la valeur de X intégrée le long de la "trajectoire" et non sur un rayon.

Les brusques décroissances de la pression (planche I.5a) et de la vitesse radiale (planche I.5c, $X \approx 0.88$) coïncident avec l'incurvation des "trajectoires" à l'approche de Σ' . En effet, le calcul se poursuit sur des "trajectoires" devenues quasi orthoradiales et X ne varie alors que très peu.

Influence de l'anisotropie du choc

Lorsque l'anisotropie du choc devient plus importante (planche I.6), les grandeurs physiques diffèrent de plus en plus d'une "trajectoire" à l'autre à l'exception notable de la masse volumique (planche I.6b) dont le comportement reste celui de l'explosion isotrope. Cette invariance de ρ^* selon les "trajectoires" mérite sans doute une interprétation en terme d'intégrale d'adiabaticité ou de masse, mais considérablement plus complexe que celle réalisée par Sedov dans le cas isotrope.

À la différence du cas de faible anisotropie précédemment traité, la limite théorique $u'^* = \frac{\gamma+1}{2}$, de la vitesse radiale dans l'explosion isotrope, n'est approchée que par les "trajectoires" proches des axes $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ (planche I.6c), ce qui témoigne d'une déformation non négligeable de la géométrie de la frontière du vide. Ceci est également visible sur l'allure de la vitesse orthoradiale (planche I.6d) dont la croissance est plus progressive, le virage pris par les "trajectoires" est donc moins brutal.

Les grandeurs principales de cet écoulement sont également tracées dans l'espace de similitude en représentation bidimensionnelle surfacique sur la planche I.7. Par raison de symétrie, seul le premier cadran ($0 < \theta < \pi/2$) est représenté. On distingue nettement l'effet de l'anisotropie du choc sur la répartition du rapport de pression. La dépression est localisée dans la zone $\theta = \pi/2$ et est maximale sur la frontière Σ' . On observe sur la planche I.7b que l'augmentation de la vitesse orthoradiale v^* , constatée sur la planche I.6d, est en fait extrêmement localisée le long de Σ' dans une couche de faible épaisseur. Bien que u^* et v^* ne s'annulent jamais, on vérifie que le nombre de Mach tend progressivement vers 0 en raison de la décroissance de la masse volumique (planche I.7c). Nous avons également tracé la forme sans dimension de la composante normale au plan (y, z) du rotationnel de la vitesse dont l'expression est donnée en annexe G. On peut voir que celui-ci reste positif et borné dans une grande partie de la couche de choc, il change ensuite de signe et devient très grand (en valeur absolue) dans une mince couche le long de Σ' (planche I.7e). Ceci s'explique dans cette zone par la structure des "trajectoires" qui se concentrent dans un espace restreint et s'enroulent autour de la frontière du vide (figure 4.6). Aspirées vers la zone de plus basse pression, les particules voient leur vitesse augmenter de façon importante (principalement la composante orthoradiale v^* , planche I.6d). Cette accélération donne lieu à un fort gradient transversal de vitesse entre "trajectoires" et donc à un cisaillement se traduisant par un rotationnel important. Le rotationnel est négatif car plus la "trajectoire" est proche de Σ' , plus elle est accélérée.



FIG. 4.6: Accélération des "trajectoires" le long de la frontière du vide

Dans l'étude de cette première configuration, n'a pas été abordé le comportement des facteurs intégrants ψ et ϕ , cette analyse sera réalisée en détail dans le paragraphe suivant. Notons seulement que, sur la planche I.7f, le facteur ϕ croît très rapidement dans la zone où le rotationnel devient très grand.

4.3 Explosion instantanée

Le cas de l'explosion anisotrope ponctuelle (k = 2) à libération d'énergie instantanée $(\alpha = 0)$ est particulièrement intéressant puisque dans ce cas, la théorie de Sedov [31] prévoit que l'écoulement est continu depuis le choc jusqu'au centre de l'explosion; les trajectoires des particules fluides sont purement radiales et il n'y a pas de poche de milieu raréfié. Les planches I.8 et I.9 présentent les étapes de la reconstruction du maillage dans l'espace de similitude à partir du maillage d'intégration (\hat{S}, ξ) , pour un calcul d'explosion ponctuelle instantanée très faiblement anisotrope ($\Lambda = -0.01$), et pour respectivement N = 24 et N = 48 "trajectoires" de calcul.

La première constatation est l'existence, comme dans le cas d'apport d'énergie non instantané, d'une zone de vide en expansion autour de la source d'énergie (planche I.8e). Par comparaison avec le cas précédemment traité, l'épaisseur de la couche de choc est nettement plus importante. En outre, malgré la forme quasi sphérique du choc ($\Lambda = -0.01$), on peut observer la plus forte déformation de la géométrie de la frontière du vide Σ' . On en déduit que la diminution de α intensifie les effets de l'anisotropie sur l'écoulement interne.

Plaçons-nous dans l'optique du problème direct et intéressons nous, non plus au choc, mais à l'apport d'énergie qui est à l'origine de cet écoulement. Nous avons vu (§ 1.4.1) que la forme de Σ' était directement reliée à la répartition azimutale d'énergie $\epsilon(\theta)$ par la relation (1.17). Dans le cas présent, l'apport d'énergie est donc très fortement anisotrope au regard de l'anisotropie faible du choc. On en déduit que les effets de l'anisotropie s'exercent prioritairement sur la topologie interne de l'écoulement, et ne sont que faiblement ressentis au niveau du choc. Ce résultat permet d'expliquer l'efficacité du modèle simplifié de Sedov, et particulièrement sa capacité à prédire avec précision la loi de propagation de l'onde de choc dans les cas d'explosions atomiques par exemple²⁰.

Les constatations précédentes sont confirmées par l'évolution des diverses grandeurs physiques le long des "trajectoires" (planche I.10 ainsi que planche I.13 en représentation bidimensionnelle surfacique). Observons d'abord que la diminution du rapport de pression, voisin de 0.3 en fin d'intégration, est plus importante que dans le cas $\alpha = 1$ (planches I.11a et I.4a). L'anisotropie de la pression demeure quand à elle sensiblement égale au cas $\alpha = 1$. Seulement, ici encore il convient de rappeler que ces courbes sont tracées en fonction de \hat{S} , c'est-à-dire le long des "trajectoires". La couche de choc étant plus épaisse et les "trajectoires" plus déviées, l'anisotropie de pression est globalement plus importante comme on peut le constater sur la planche I.13a.

Il est tout à fait remarquable de constater que la masse volumique, comme dans le cas $\alpha = 1$ traité précédemment, présente un comportement semblable à celle obtenue dans le cas isotrope (planche I.10b). Elle décroît d'abord rapidement pour tendre ensuite vers 0 avec une pente nulle. Les structures de ces deux écoulements sont pourtant fondamentalement différentes. Dans le cas anisotrope, les "trajectoires" s'enroulent et donnent naissance à une poche de milieu raréfié, à la différence du cas isotrope où l'écoulement est continu depuis le choc jusqu'au centre de l'explosion. En raison des mêmes difficultés numériques exposées au § 4.2.1 et survenant en fin d'intégration dans la zone de convergence des "trajectoires", il n'a pas été possible de poursuivre le calcul au delà de la valeur déjà très faible $\rho_0 = 0.0077(^{21})$. Compte tenu de l'anisotropie importante de Σ' , la valeur de X est alors comprise entre 0.52 pour les "trajectoires" de la zone $\theta = \pi/2$ et 0.74 pour celles de la zone $\theta = 0$. À titre de comparaison, dans le modèle isotrope de Sedov, la valeur $\rho_0 = 0.0077$ est atteinte en X = 0.62 et s'annule en X = 0. Le trajet parcouru par les "trajectoires" durant cette phase de très lente décroissance de la masse volumique est donc considérable puisqu'il représente 60% de l'épaisseur de la couche de choc. Par suite, il est évident dans notre cas que la partie de l'écoulement non accessible par le calcul est encore importante. Ceci transparaît clairement dans le comportement de la vitesse radiale u^* (planche I.10c) dont les fortes différences selon les "trajectoires" reflètent l'importante déformation de la frontière Σ' (§ 4.2.3.0). En outre, on note que plus la "trajectoire" est proche de la zone $\theta = \pi/2$, plus u^{*} décroît de façon prononcée jusqu'à devenir parfois même négatif. Il semblerait donc que les particules, après avoir rejoint cette zone, s'engouffrent dans un goulot d'étranglement pour former un jet rentrant dans la direction du centre de l'explosion (figure 4.7).

Sur le plan physique mais aussi pour des raisons fondamentales, le problème du traitement numérique de la fin d'intégration n'est donc pas dépourvu d'intérêt. Pour mieux comprendre les difficultés numériques auxquelles nous sommes confrontés et qui semblent directement être induites par la physique même du phénomène, nous allons revenir sur les rôles respectifs des facteurs intégrants ϕ et ψ dont la signification physique demeure à ce stade encore imprécise.

4.3.1 Courbure des "trajectoires": rôle de ϕ

La planche I.12b ainsi que la carte I.13d montrent que ϕ augmente très rapidement au voisinage de la frontière du vide. Cette augmentation coïncide avec la déviation des "trajectoires" qui devient plus intense. Voyons comment relier ces deux observations et rappelons pour cela la seconde relation (2.15):

$$d\xi = \phi \, \left(v^* \, d\eta - g \, d\theta \right)$$

Supposons que nous nous plaçons dans une direction radiale $\theta = C^{\text{te}}$. Compte tenu de $\eta = \log X$, la relation précédente s'écrit immédiatement :

$$d\xi = rac{\phi v^*}{X} dX$$
 à $heta = \mathrm{C}^{\mathrm{te}},$ et $d\xi = -\phi_c g_c d heta_c = rac{\gamma+1}{2} d heta_c$ en $X = 1$

^{20.} C'est la raison pour laquelle le modèle de Sedov demeure largement utilisé dans l'initialisation des codes de simulations numériques. 21. Il faut toutefois noter que dans le cas isotrope, il est difficile d'atteindre des valeurs beaucoup plus faibles, et ce même en programmant

les expressions analytiques de Sedov qui deviennent près de l'origine très sensibles aux erreurs d'arrondi.



FIG. 4.7: Structure hypothétique des "trajectoires" dans la zone de l'écoulement $\theta = \pi/2$

Lorsque ϕ devient très grand (v^* et X étant petits mais différents de 0), une variation dX fixée équivaut à une variation de ξ beaucoup plus importante. En d'autres termes, lorsque l'on effectue un petit déplacement radial dans l'espace de similitude, on "saute" d'une "trajectoire" ξ_1 à une "trajectoire" ξ_2 issue d'un point du choc θ_{c2} très éloigné de l'origine θ_{c1} de la "trajectoire" ξ_1 . Cette situation, illustrée sur la figure 4.8 ci-après, est tout à fait significative du phénomène de pincement des "trajectoires" observé au voisinage de Σ' sur la planche I.9e et plus en détail sur la planche I.14a



FIG. 4.8: Pincement des "trajectoires" le long de la frontière du vide

4.3.2 "Vitesse d'avancement" le long des "trajectoires" : rôle de ψ

Le rôle de ψ est un peu moins intuitif. Dans le processus de construction pas à pas de l'espace (ζ, ξ) , il intervient comme régulateur de l'avancement en ζ le long des "trajectoires" $\xi = C^{te}$ selon la courbure de celles-ci ; la condition à satisfaire demeurant toujours l'orthogonalité de ces deux réseaux de courbes. Cette idée est illustrée sur la figure 4.9 présentant différentes possibilités de progression de la grandeur ζ sur deux "trajectoires" ξ_1 et ξ_2 .

La ligne iso ζ repérée $\zeta_{1'}$, correspond à un avancement trop lent, qui serait par exemple obtenu par $\frac{d\zeta}{dS} = \delta \psi \frac{J_4}{b}$ avec $\delta < 1$. La seconde ligne, repérée ζ_1 , est celle obtenue dans notre formulation par la relation (3.15a):

$$\left. \frac{d\zeta}{d\hat{S}} \right|_{\epsilon} = \psi \frac{J_4}{b}$$

où ψ apparaît clairement comme facteur régulateur de la croissance de ζ . La troisième ligne, notée $\zeta_{1''}$, serait obtenue pour avancement trop rapide, l'orthogonalité n'est alors plus assurée.



FIG. 4.9: Avancement en ζ sur les "trajectoires": rôle du facteur intégrant ψ

Notons que les courbes iso \hat{S} sont orthogonales à l'axe $\theta = \pi/2$ (planche I.14b), comme le sont les courbes $\zeta = C^{\text{te}}$ (planche I.14a), dont on rappelle qu'elles sont caractéristiques pour ψ . Ces deux familles de courbes sont donc confondues. Ainsi, même dans l'espace (\hat{S}, ξ) , l'intégration de ψ est indéterminée sur l'axe $\theta = \pi/2$.

En résumé, ϕ et ψ assurent la biunivocité globale du changement de variables "Euler-Lagrange" de l'espace (r, θ) vers l'espace (ζ, ξ) .

4.3.3 Influence de la compressibilité du gaz

Les planches I.15 à I.17 présentent de façon désormais classique l'ensemble des résultats relatifs à un calcul d'explosion ponctuelle (k = 2) à débit d'énergie constant $(\alpha = 1)$ dans un milieu caractérisé par une valeur de γ égale à 7. Une valeur importante de γ simule des milieux peu compressibles. La valeur $\gamma = 7$ est un premier pas vers la loi de Tait pour l'eau. Sedov [31] avait déjà extrapolé ses résultats pour γ grand en première approche du problème de la bulle de Rayleigh, il avait montré que son modèle approchait correctement la phase d'expansion de la bulle.

En comparant la planche I.15e à la planche I.3e obtenue pour $\gamma = 1.4$, on note immédiatement l'augmentation de l'épaisseur de la couche de choc résultant directement de la moindre compressibilité du fluide qui s'y trouve emprisonné. L'épaisseur de la couche de choc est sensiblement égale à celle obtenue dans le cas d'une explosion anisotrope avec apport d'énergie instantanée (planche I.9e). Ainsi, l'exposant α de la loi d'apport d'énergie n'est pas l'unique facteur d'épaississement de la couche de choc, γ en est un autre.

Comme nous l'avons déjà noté, l'augmentation de la couche de choc amplifie les effets de l'anisotropie du choc sur l'écoulement interne. Aussi, le cas réalisé ici avec seulement $\Lambda = -0.03$ peut-il être qualifié de fortement anisotrope du point de vue de la forme de l'apport d'énergie, comme en atteste la géométrie très ovalisée de la frontière Σ' .

La comparaison avec l'explosion instantanée précédemment traitée ne s'arrête qu'à l'épaisseur de leur couche de choc respective. Les structures des "trajectoires" diffèrent en effet sensiblement. Pour $\gamma = 7$, leur allure est à rapprocher de celle obtenue pour $\gamma = 1.4$ et la même valeur de α (planche I.3e). Elles convergent vers un puits parfaitement localisé et ne repartent pas vers le centre de l'explosion comme dans le cas de l'explosion instantanée. L'intégration est pratiquement complète comme le montre les évolutions des diverses grandeurs présentées sur la planche I.16. Au puits de convergence (qui est le point de pression minimale dans l'écoulement), la vitesse des particules tend bien vers $\frac{\gamma+1}{2} = 4$ (planche I.16c). Ce calcul confirme donc la faiblesse de l'effet d'accumulation pendant cette phase d'expansion de la "bulle". Il ne semble pas apparaître d'amorce de jet rentrant très puissant qui serait dû à l'anisotropie de la bulle. Ces résultats coïncident bien avec les conceptions nouvelles sur la dynamique des bulles anisotropes et sur leur jets rentrants qui ne sont plus évoqués comme de gros réservoir de quantité de mouvement capables d'expliquer par exemple la sonoluminescence [15, 28, 30].

La faible compressibilité du milieu transparaît sur les faibles variations de la masse volumique (planche I.16b) ainsi que sur le comportement remarquable de la pression qui, à la différence des cas réalisés avec $\gamma = 1.4$, est d'abord croissante juste en aval du choc et diminue ensuite légèrement (planche I.16a). Il se forme alors une zone de compression dans la direction $\theta = 0$, dans laquelle la vitesse de propagation de Σ' est la plus importante (planche I.17a). L'allure des autres grandeurs est cohérente avec les analyses apportées jusqu'à présent. Le facteur intégrant ψ décroît lentement vers 0 tandis que ϕ augmente très fortement dans la zone de pincement des "trajectoires" le long de la frontière du vide (planches I.16e, I.16f, I.17c,I.17d).

4.4 Cas d'écoulements de type mixte

Nous avons vu au § 2.1 que, dans l'espace de similitude, la nature elliptique ou hyperbolique du problème était déterminée par la position par rapport à 1 du nombre de Mach relatif défini par (2.7). En outre, l'écoulement peut être localement supersonique au voisinage du choc à condition que ce dernier soit suffisamment "oblique", c'est la condition (2.8). Jusqu'à présent, nous n'avons traité que des cas d'explosions pour lesquels l'écoulement était entièrement subsonique en raison de la faible anisotropie de $R^*(\theta)$. Pour notre cas test, nous avons montré au début de ce chapitre que la condition (2.8) était réalisée pour $\Lambda < -0.101$. Afin d'évaluer notre méthode dans telle situation, nous présentons un calcul réalisé avec $\Lambda = -0.12$ et pour $\alpha = 2$, k = 1 et $\gamma = 1.4$. Les résultats sont présentés sur les planches I.18 à I.20.

On observe sur la planche I.20d, présentant la répartition du nombre de Mach, la présence d'une zone hyperbolique localisée dans la zone $45^{\circ} < \theta_c < 60^{\circ}$. Dans cet intervalle, la pente du choc est maximale (figure 4.2), ainsi que la déviation subie par les particules (planche I.20e). Les cartes du nombre de Mach et de la vitesse orthoradiale sont assez similaires, la zone hyperbolique coïncide avec la zone dans laquelle v^* est maximale. On constate sur la planche I.19e que le nombre de Mach décroît régulièrement et devient très tôt inférieur à 1 (pour $\hat{S} \approx 0.04$). En outre, le déroulement du calcul numérique montre que ce passage s'effectue sans difficultés et en particulier sans qu'aucune discontinuité ne soit observable sur les autres grandeurs de l'écoulement. Ainsi pour cette famille de chocs, la présence d'une zone hyperbolique n'engendre pas de chocs internes; notre formulation avec équation de conservation de l'entropie reste donc valable.

Les brusques changements de comportement observables pour l'ensemble des grandeurs sur la "trajectoire" la plus proche de l'axe $\theta = 0$ (planches I.19a à I.19e, "trajectoire" $\theta_c = 2.05^{\circ}$) correspondent au virage très brutal pris par cette "trajectoire" au voisinage de Σ' . La vitesse radiale est alors pratiquement égale à 1.2, vitesse d'expansion de Σ' qui à cet endroit est quasi circulaire. Pour sa part, la composante orthoradiale v^* , jusqu'alors très faible, subit une importante augmentation (planche I.19d).

L'exemple présenté ici correspond à un choc à vitesse constante (n = 1). Rappelons que dans le cas *isotrope*, cela correspond au *problème du piston cylindrique*, la masse volumique ne s'annule pas sur la frontière Σ' mais tend vers une valeur finie (§ 7.1). On peut observer sur la planche I.19b que le long de la "trajectoire" la plus proche de l'axe horizontal ($\theta_c = 2.05$), l'évolution de ρ^* , avant que la "trajectoire" ne soit déviée, est tout à fait comparable à celle obtenue dans le cas isotrope. Cette remarque est également valable pour les grandeurs p^* et u^* . En revanche, on note que l'accélération de l'écoulement due au contournement va modifier considérablement les valeurs de ρ^* au voisinage de Σ' . Là encore, le modèle isotrope est incapable d'expliquer ce phénomène.

Pour ce cas de forte anisotropie, le bilan doit toutefois est nuancé car il apparaît clairement sur la figure I.18 que la solution est incomplète. Dans la zone $0 < \theta < \pi/4$, les "trajectoires" forment une enveloppe bien visible et délimitent ainsi la frontière Σ' . Mais dans la zone $\pi/4 < \theta < \pi/2$, l'allure des "trajectoires" ne permet pas de déterminer avec précision la position de Σ' . Une nouvelle fois, le calcul numérique est rendu particulièrement difficile en raison d'une réduction drastique du pas d'intégration imposée par les variations de ψ sur les deux "trajectoires" situées de part et d'autre de l'axe $\theta = \pi/2$. Comme nous l'avons déjà noté, ces "trajectoires" ont à parcourir un trajet considérablement plus faible que celles issues par exemple de la zone $\theta = 0$. Cette extrême distorsion est particulièrement visible sur la planche I.18b.

4.4.1 Application à l'aérodynamique hypersonique

Considérons la famille de chocs définie par la relation suivante et représentée sur la figure 4.10:

$$R^*(heta_c) = 1 - rac{\Lambda}{2} \, heta_c \, (heta_c - \pi) \qquad ext{où} \qquad \Lambda < 0$$

dont la pente locale, égale à

$$R^{st\prime}(heta_c) = \Lambda\left(rac{\pi}{2} - heta_c
ight),$$

est une fonction linéaire de l'angle polaire θ_c (figure 4.10). L'onde de choc correspondante est symétrique par rapport aux axes Oy et Oz. La valeur de la pente sur l'axe horizontal est directement contrôlée par le paramètre Λ . C'est par cette discontinuité de l'équation de l'onde Σ que ce cas test se distingue du précédent.



FIG. 4.10: Représentation des fonctions $R^*(\theta_c)$ et $R^{*'}(\theta_c)$ pour différentes valeurs de Λ

Revenons un instant sur la structure de l'écoulement lorsque la pente du choc est continue en $\theta_c = 0$ (ou π). Ce dernier, dans son mouvement d'expansion, est alors "vu" par les particules du milieu au repos, et situées sur cet axe, comme un choc droit très violent. Par raison de symétrie, la "trajectoire" sur l'axe est strictement radiale et abouti à son propre puits (figure 4.11a). La frontière Σ' est alors constituée de trois puits localisés en $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ et $\theta = \pi$. Lorsque le choc est discontinu, il ne peut exister de "trajectoire" radiale suivant l'axe $\theta = 0$, la structure de



a: cas d'un choc "droit"

b: cas d'un choc "oblique" avec discontinuité de pente

FIG. 4.11: Influence de la continuité de la pente du choc en $\theta = 0$ sur la structure des "trajectoires"

l'écoulement est alors celle représentée sur la figure 4.11b. La frontière Σ' , d'épaisseur nulle en $\theta = 0$, est également discontinue et délimitée par la "trajectoire" issue du point infiniment proche de $\theta_c = 0$.

Le paramètre Λ détermine le degré d'anisotropie de Σ . L'étude de la condition (2.8) montre qu'il apparaît une zone hyperbolique au voisinage du choc dès que $\Lambda < -0.26$ (pour $\gamma = 1.4$). Les planches I.21 et I.22 présentent les résultats d'un calcul réalisé pour $\Lambda = -0.4$, $\alpha = 1$, k = 1 et $\gamma = 1.4$ (écoulement de type "couche mince"). Dans le cadre de l'application de la théorie de l'explosion violente à l'aérodynamique hypersonique, ces conditions permettent de modéliser l'écoulement dans une section transversale d'un engin élancé placé sans incidence dans un écoulement hypersonique de vitesse à l'infini amont V_{∞} (§ 7.5). Dans l'analogie, la frontière Σ' s'identifie à la trace de l'engin dans un plan transversal. Puisque dans le cas présent, le choc Σ et la frontière Σ' sont discontinues dans la direction $\theta = 0$ et que l'épaisseur de la couche de choc y est nulle, cette configuration correspond à l'écoulement autour d'un obstacle de type waverider à bord d'attaque anguleux avec choc attaché (figure 4.12).

On distingue nettement sur la planche I.22b la présence de la zone hyperbolique. Le nombre de Mach, maximum en $\theta = 0$, y décroît de façon régulière jusqu'à devenir inférieur à 1 (planche I.21e). On observe que ce passage s'effectue sans discontinuité sur les autres grandeurs p^* , ρ^* , u^* et v^* , ce qui traduit ici encore l'absence de chocs internes au sein de l'écoulement.

Comme dans le cas de l'explosion instantanée, le calcul ne peut être mené à terme en raison de difficultés numériques résultant de l'intégration de l'équation de compatibilité de ψ sur les deux "trajectoires" situées de part et d'autres de l'axe $\theta = \pi/2$. Au fur et à mesure que l'intégration progresse, ces deux "trajectoires" ne cessent de s'approcher de l'axe vertical le long duquel l'équation pour ψ n'est plus intégrable. Au voisinage de cet axe, les courbes iso \hat{S} et iso ζ sont pratiquement confondues, ce qui entraîne en particulier:

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \left. \frac{d\zeta}{d\xi} \right|_{\hat{S} = \mathbf{C}^{\mathsf{te}}} = 0$$



FIG. 4.12: Analogie de l'explosion anisotrope avec "choc oblique" et de l'écoulement hypersonique avec choc attaché autour d'un obstacle élancé de type waverider à bord d'attaque anguleux

Rappelons que ce terme, figurant au dénominateur du second membre de l'équation (E.1), est évalué à chaque étape par le développement de ζ en polynômes de Chebyshev de la variable ξ dans la direction $\hat{S} = C^{\text{te}}$. L'insuffisance de précision de cette approximation est source d'erreurs dans l'évaluation de (E.1) et entraîne une chute du pas de calcul de Runge-Kutta. Ceci a pour effet de bloquer l'intégration sur l'ensemble des "trajectoires". En conséquence, la géométrie de la frontière Σ' ne peut être déterminée entièrement. Ainsi, du point de vue de l'analogie hypersonique, la "pointe" observée en $\theta = \pi/2$ sur la planche I.22d ne saurait être considérée comme une spécificité de la section de l'engin hypersonique. On observe sur la planche I.22c la présence de deux "poches", symétriques par rapport à l'axe vertical, de rotationnel élevé et de signes contraires. En outre, au contact de chacune de ces zones on peut entrevoir l'amorce de la formation d'une seconde zone, d'étendue plus large, où le rotationnel serait également important mais de signe opposé. Ceci est illustré sur la figure 4.13 ci-après.



FIG. 4.13: Structure de l'écoulement au voisinage de l'axe $\theta = \frac{\pi}{2}$

L'aboutissement des "*trajectoires*" dans cette zone demeure inconnu. Cette observation pose alors la question de l'existence d'éventuelles lignes de courant internes à l'écoulement et qui ne seraient pas issues du choc. Si tel était le cas, la forte croissance du rotationnel pourrait être mise en relation avec la présence d'éventuels tourbillons contrarotatifs d'extrados.

4.5 Conclusion

L'analyse des propriétés mathématiques du système d'équation gouvernant le phénomène des explosions anisotropes ponctuelles à débit d'énergie en loi de puissance du temps à mis en évidence le rôle particulier joué par les *"trajectoires"* des particules fluides. Afin de tirer profit de ces propriétés, une approche analytique a permis de reformuler le problème dans un système orthogonal de coordonnées intrinsèques construit sur les *"trajectoires"* et sur le réseau de courbes orthogonales dans le plan de la similitude. La construction de cet espace engendre une variété non euclidienne dont la métrique est connue pas à pas. Les relations définissant localement cette transformation ont été obtenues sous forme différentielle et l'adjonction de deux facteurs intégrants assure leur intégration. Le système d'équations aux dérivées partielles a ensuite été ramené à un système différentiel par le biais d'une méthode de collocation de Chebyshev. La variable d'intégration est une variable lagrangienne liée à l'entropie initiale des particules, ce qui permet, en théorie, de rejeter à l'infini la singularité induite par la similitude interne, souvenir du fait qu'à l'instant initial l'écoulement est ponctuel. La méthode numérique ainsi mise au point est très efficace en temps de calcul et économique en espace mémoire. Elle permet de traiter indistinctement les cas peu anisotropes, pour lesquels l'écoulement dans la couche de choc est entièrement elliptique, et les cas de fortes anisotropies pour lesquels la nature du problème est mixte elliptique-hyperbolique.

·

Deuxième partie

Une approximation au premier ordre du problème de l'explosion anisotrope

Notations principales

Indices et exposants:

On conserve dans cette partie les notations générales employées dans la première partie de ce mémoire (page 5) :

- l'indice " ∞ " correspond aux conditions d'écoulement à l'infini amont;
- l'indice "c" correspond aux conditions d'écoulement sur le choc Σ ;
- le " ' " indique les grandeurs évaluées sur la frontière Σ' ;
- l'exposant "*" indique les variables sans dimension;
- La dérivée d'une fonction f par rapport à une variable μ est notée f_{μ} ;
- le paramètre "k" caractérise l'écoulement :
 - -k = 1: écoulement plan cylindrique;
 - $-\ k=2$: écoulement plan à symétrie de révolution.

À ces notations générales viennent s'ajouter les notations particulières suivantes :

- l'indice "iso" indique les grandeurs relatives à l'explosion isotrope de Sedov;
- le "~" indique les fonctions exprimées dans le repère $\tilde{\Re}$;
- les grandeurs sans dimension de l'écoulement perturbé sont affectées de :
 - l'indice "0" pour l'écoulement de base;
 - l'indice "1" pour l'effet du premier ordre de la vitesse de déplacement de la source.

Par souci de cohérence et afin d'éviter toute confusion, l'ensemble de ces notations peut être combiné pour permettre une identification précise de chaque terme. Ainsi, le terme $\tilde{u}_{0\xi}^{*\prime}$, désigne la dérivée par rapport à ξ de la composante radiale, dans le repère $\tilde{\Re}$, de la vitesse adimensionnée de l'écoulement de base, cette dérivée étant évaluée sur la frontière Σ' .

Caractères romains:

c_{∞}	vitesse du son: $c_{\infty}^2 = \gamma \frac{p_{\infty}}{q_{\infty}}$, (1.14)
$f(\xi)$	fonction définie par (6.31)
f_1,g_1,h_1	inconnues auxiliaires définies par (6.41)
н	fonction définie par (6.31)
${\mathcal I}$	intégrale définie par (6.45)
$ec{K_0},ec{K_1}$	vecteurs définis par (6.48) et (6.44)
m	paramètre défini par $m(\theta) = \frac{R_{\theta}}{R}$, (1.11)
M_c	nombre de Mach du choc isotrope
n	paramètre défini par $n = \frac{\alpha+2}{k+3}$, (1.10)
ñ	vecteur normal à une surface
0	lieu de l'explosion anisotrope équivalente, (figure 5.4)
O_1	lieu de l'explosion isotrope translatée (figure 5.1)
Õ	centre du repère mobile de calcul de l'explosion isotrope translatée (figure 5.4)
\mathcal{P}	puissance de l'apport d'énergie, (6.14)
$ec{q}$	notation générale désignant le vecteur vitesse d'une particule
$(q_n, q_{ au})$	composantes de la vitesse dans le repère lié au choc, (figure 1.3)
R	rayon polaire du choc, (figure 1.3), (5.5) (5.17)
R'	rayon polaire de la frontière du vide, (5.18)
$(\Re:O,ec{\imath},ec{\jmath},ec{k})$	repère galiléen de référence, (figure 5.1)
$(\Re_1:O_1,ec{\imath},ec{\jmath},ec{k})$	repère mobile lié à la source translatée, (figure 5.1)
$(ilde{\Re}: ilde{O},ec{\imath},ec{\jmath},ec{k})$	repère mobile de calcul, (figure 5.3)
r	rayon polaire dans R, (figure 1.1)
\tilde{r}	rayon polaire dans $\tilde{\Re}$, (figure 6.1)
\bar{s}^*_0	variable définie par (6.6)
0	

t	temps
(u^*,v^*,p^*, ho^*)	solution isotrope adimensionnée, (5.15)
(u,v,p, ho)	solution anisotrope équivalente, (5.30)
$ec{U}_{\infty} = -Ut^{(n-1)}ec{j}$	vitesse de déplacement de la source (5.8)
$ec{X_0},ec{X_1}$	vecteurs définis par (6.48) et (6.44)
\overline{z}_0	inconnue auxiliaire définie par (6.32)

Caractères grecs:

α	exposant caractérisant le débit d'énergie, défini par (1.1)
β	constante définissant la vitesse du repère de calcul $ ilde{\Re}$, (§5.2.5)
$\epsilon(\theta)$	fonction caractéristique de la répartition azimutale d'énergie, (1.1)
ε0	expression égale à $(\tilde{u}_0 - \frac{\gamma+1}{2}), (6.35)$
γ	indice adiabatique du gaz
$\dot{\lambda}$	angle défini par (1.11), (figure 1.3)
λ_s	distance sans dimension de Sedov, (5.19)
η	paramètre adimensionné caractérisant l'effet du déplacement de la source d'énergie(5.9)
ρ	masse volumique
Σ	frontière du choc, (figure 1.1)
Σ'	frontière du milieu du milieu raréfié, (figure 1.1)
θ	angle polaire dans le repère \Re , (figure 1.1)
θ_1	angle polaire dans le repère \Re_1 , (figure 5.1)
Õ	angle polaire dans le repère $ ilde{\mathfrak{R}}$, (figure 5.4)
ω	vitesse de propagation du choc, $\omega = \frac{\partial R(t,\theta)}{\partial t}$
ω_n	composante normale de la vitesse de propagation du choc, (6.11)
ξ	distance sans dimension de la présente théorie, (5.6)
$\xi_0, \xi_1, \xi'_0, \xi'_1$	constantes de normalisation
ζ	paramètre sans dimension relatif à la pression extérieure (5.12)

•

Chapitre 5

Explosion faiblement anisotrope : modélisation par explosion isotrope mobile équivalente

5.1 Introduction

Les mouvements autosemblables avec choc fort consécutifs à un apport d'énergie en loi de puissance du temps ont fait l'objet, dans leur globalité, de la première partie de ce mémoire. La méthode numérique qui a été mise au point est applicable sur toute la plage de variation de l'exposant α de la loi d'apport d'énergie depuis le problème de l'explosion instantanée jusqu'au problème du piston sphérique. Elle permet en outre de traiter indifféremment les cas peu anisotropes et les cas fortement anisotropes pour lesquels il y a présence d'une zone entièrement hyperbolique au sein de la couche de choc. Seulement, bien que les formes traitées peuvent être, en théorie, quelconques (avec la seule condition qu'elles ne présentent pas de discontinuités), des difficultés d'ordre numérique limitent dans la pratique l'usage de ces solutions à des cas suffisamment réguliers. En fait, une meilleure connaissance de la topologie des ces écoulements et de leur capacité à concentrer la vorticité dans des espaces très restreints permet de comprendre les difficultés numériques soulevées dans la partie I. Dans cette optique, la présente partie traite des cas d'explosions faiblement anisotropes par une approche "quasi-analytique" s'appuyant sur les acquis théoriques de l'IMFL en matière de solutions asymptotiques des équations de l'explosion isotrope. Le terme analytique signifie que nous utilisons l'outil informatique pour intégrer un système différentiel ordinaire pour des fonctions universelles. Nous n'avons donc de doute, ni sur l'existence et l'unicité des solutions, ni sur la précision de leur évaluation numérique. Il ne s'agit pas là d'un acte de pur académisme mais d'un démarche nécessaire pour assurer la pertinence de résultats, parfois surprenants, qui ne pouvaient être confrontés à l'expérience autrement que qualitativement.

L'idée qui est à l'origine des travaux exposés dans cette partie est de construire un problème auxiliaire, basé sur une perturbation de la solution mono-dimensionnelle bien connue, et dont l'approximation au premier ordre soit mathématiquement équivalente à une explosion faiblement anisotrope dans un milieu au repos. La résolution du problème direct (explosion faiblement anisotrope) est alors ramenée à celle du problème auxiliaire, ce dernier pouvant être traité par une méthode de petites perturbations. Cette approche est une généralisation de celle qui a permis l'élaboration de la théorie de l'explosion dans un courant [26] et des faibles incidences sur les ogives hypersoniques [19, 20].

On considère dans cette partie des profils réduits de chocs de la forme :

(5.1)
$$R(\theta) = \xi_0 (1 + a\varepsilon \cos \theta)$$

où ξ_0 est une constante qui sera obtenue par la solution du problème mono-dimensionnel, et ε un petit paramètre correspondant à une perturbation de la répartition azimutale d'énergie (1.2) de la forme:

(5.2)
$$\epsilon(\theta) = \frac{1}{2k\pi}(1 - \varepsilon \cos\theta)$$

La détermination du problème auxiliaire est guidée par l'étude des conditions qu'il doit satisfaire pour pouvoir prétendre à être équivalent au problème direct. Tout d'abord, les conditions sur le choc du problème équivalent doivent strictement rester celles d'une explosion dans un milieu au repos. Ceci implique en particulier que la perturbation ne saurait provenir d'une mise en mouvement du milieu ambiant, nous devons donc considérer que c'est la source d'énergie isotrope qui se déplace. En outre, comme nous cherchons l'équivalence avec un écoulement autosemblable, la seconde condition à respecter est que le problème perturbé doit impérativement être autosemblable. En d'autres termes, comment choisir la loi de la vitesse de déplacement de la source d'énergie pour que celle-ci n'introduise pas de dimension physique supplémentaire dans le bilan des paramètres du problème? Rappelons l'inventaire des grandeurs physiques du problème de l'explosion anisotrope (§ 1.3):

$$E, \rho_{\infty}, \alpha, \gamma, k,$$

auxquels il faut adjoindre t pour obtenir un système primaire. La seule combinaison de ces grandeurs ayant les dimensions d'une vitesse est :

$$\left(rac{E}{
ho_{\infty}}
ight)^{rac{1}{k+3}}t^{(n-1)},$$

où n est défini par (1.10). Par conséquent, si nous choisissons la vitesse de déplacement de la source isotrope sous la forme :

$$(5.3) U_{\infty} = Ut^{(n-1)}$$

où U est une grandeur ayant les dimensions de $(E/\rho_{\infty})^{1/(k+3)}$, la variable sans dimension associée à la vitesse de déplacement sera indépendante du temps. Nous pouvons alors envisager l'identification d'un tel écoulement avec une explosion anisotrope à similitude interne.

5.2 Formulation du problème de la source isotrope translatée

5.2.1 Source ponctuelle au repos

Plaçons-nous dans le cadre des hypothèses formulées au paragraphe 1.2. L'explosion est supposée ponctuelle et l'énergie libérée de façon isotrope sous la forme Et^{α} . Notons que l'étude est restreinte au domaine de validité de l'hypothèse de choc fort pour des raisons que nous développerons au § 5.2.4.

Supposons dans un premier temps la source immobile. Ces conditions sont évidemment celles de la théorie de l'explosion isotrope autosemblable dans un gaz au repos [31]. Rappelons les résultats élémentaires de cette théorie : l'écoulement engendré par l'apport d'énergie brutal isotrope est mono-dimensionnel à symétrie cylindrique ou sphérique selon que la source est respectivement linéaire ou ponctuelle. Les trajectoires des particules fluides sont exclusivement radiales. L'écoulement est régi par les équations suivantes :

(5.4)
$$\begin{cases} r^{k}\rho_{t} + (r^{k}\rho u)_{r} = 0\\ \rho (ru_{t} + ruu_{r}) + rp_{r} = 0\\ r \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)_{t} + ru \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)_{r} = 0 \end{cases}$$

L'hypothèse de choc intense entraîne la disparition de la pression extérieure de l'inventaire des grandeurs caractéristiques du problème qui se réduit donc à γ , E, ρ_{∞} , α et k, les seules variables étant le temps t et le rayon polaire r. Comme au § 1.3, le problème présente une similitude interne et peut être implicitement résolu par rapport au temps. Les équations aux dimensions permettent d'écrire l'équation du choc sous la forme :

(5.5)
$$R_{iso}(t) = \left(\frac{Et^{(\alpha+2)}}{\rho_{\infty}}\right)^{\frac{1}{k+3}} \xi_0$$

Il faut noter dans cette expression que, contrairement à $R^*(\theta)$ dans la formule (1.6), ξ_0 est ici une constante qui ne dépend que de k, γ, α . La seule variable du problème peut s'écrire :

(5.6)
$$r = \left(\frac{Et^{(\alpha+2)}}{\rho_{\infty}}\right)^{\frac{1}{k+3}} \xi_0 \,\xi,$$

où ξ est la variable adimensionnée. Le choc d'équation r = R(t) correspond à $\xi = 1$. Lorsque l'intégralité de l'énergie est libérée instantanément ($\alpha = 0$), on sait que l'écoulement est continu depuis l'origine jusqu'au choc et la variable adimensionnée ξ varie de 0 à 1. Dès lors que l'énergie est libérée selon une loi de puissance du temps ($\alpha > 0$), le domaine de variation de ξ est $\xi'_0 < \xi < 1$ avec $\xi'_0 > 0$, [31, 32]. Le milieu continu est alors confiné entre le choc ($\xi = 1$) et une frontière matérielle dont la position est inconnue ($\xi = \xi'_0$).

Avec le même système de grandeurs primaires, on peut adimensionner les inconnues du problème qui s'écrivent alors :

(5.7)
$$\rho(r,t) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_{\infty} \rho_{iso}^{*}(\xi) \quad u(r,t) = \frac{2n}{\gamma+1} \frac{r}{t} u_{iso}^{*}(\xi) \quad p(r,t) = \frac{2n^{2}}{\gamma+1} \frac{r^{2}}{t^{2}} p_{iso}^{*}(\xi),$$

où les fonctions $p_{iso}^*, u_{iso}^*, p_{iso}^*$ sont sans dimension et valent 1 sur le choc.

5.2.2 Modélisation du déplacement de la source

Considérons à présent la source d'énergie animée d'un mouvement de translation à la vitesse :

(5.8)
$$\vec{U}_{\infty} = -Ut^{(n-1)}\vec{j}$$

où U > 0 est une grandeur ayant les dimensions de $(E/\rho_{\infty})^{1/(k+3)}$ et *n* le paramètre défini au chapitre 1 par (1.10). Nous choisissons d'orienter la vitesse dans le sens des «y» négatifs pour des raisons qui apparaîtront au § 5.2.5. À l'instant, initial, on suppose la source O_1 confondue avec l'origine située en O du repère galiléen $(\Re : O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (figure 5.1). L'équation du mouvement de O_1 dans ce repère s'écrit immédiatement $OO_1 = -U \frac{t^n}{n} \vec{j}$.



FIG. 5.1: Source d'énergie isotrope en translation autosemblable. À l'instant t = 0, la source d'énergie isotrope O_1 est confondue avec l'origine située en O du repère $(\Re : O, \vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k})$ supposé galiléen, elle s'en éloigne à la vitesse $-Ut^{(n-1)}\vec{j}$.

Physiquement, le déplacement de la source entraîne de façon évidente une dissymétrie de l'écoulement qui n'est alors plus isotrope. Les inconnues du problème dépendent donc d'une variable d'espace supplémentaire : la variable angulaire θ_1 . De plus, les trajectoires n'étant plus simplement radiales, il y a apparition de la composante tangentielle de la vitesse des particules fluides (notée v). Tant que la vitesse de déplacement de la source reste petite devant la vitesse d'expansion du choc, on conçoit aisément que la solution perturbée est peu différente de la solution isotrope. Il est alors légitime d'utiliser le même système de grandeurs primaires (E, ρ_{∞}, t) pour exprimer le paramètre sans dimension associé à la grandeur U, celui-ci s'écrit :

(5.9)
$$\eta = \frac{U}{\xi_0} \left(\frac{\rho_{\infty}}{E}\right)^{\frac{1}{k+3}}$$

Il caractérise l'influence du déplacement de la source sur l'écoulement et on vérifie qu'il ne dépend, ni du temps, ni d'aucune autre variable du problème, c'est une constante. Ceci exprime que l'évolution de la perturbation engendrée par la translation de la source d'énergie s'effectue de façon autosemblable. Ainsi, tant que la solution sphérique de référence reste à similitude interne, l'écoulement perturbé le reste également.

5.2.3 Hypothèse de petites perturbations

L'hypothèse de petites perturbations est formulée en considérant que $\eta \ll 1$, donnons un sens physique à cette condition. La norme de la vitesse de propagation du choc non perturbé s'exprime simplement par:

(5.10)
$$\omega_{iso} = \frac{dR_{iso}}{dt} = n \left(\frac{E}{\rho_{\infty}}\right)^{\frac{1}{k+3}} t^{(n-1)} \xi_0$$

On a donc la relation :

$$\eta = n \frac{Ut^{(n-1)}}{\omega_{iso}},$$

qui exprime que le paramètre η est significatif du rapport de la vitesse de déplacement de la source à la vitesse d'expansion du choc non perturbé. On a représenté sur la figure 5.2 l'évolution des vitesses du choc et du déplacement de la source pour $\eta = 0.1$ et différentes valeurs de n.



FIG. 5.2: Évolutions respectives des vitesses de déplacement du choc et de la source pour différentes valeurs du paramètre n et $\eta = 0.1$

5.2.4 Domaine de validité du modèle

Pour qu'il soit légitime de construire un développement de Taylor par rapport à η de la solution sphérique, il faut que la condition $\eta \ll 1$ s'applique, ce qui s'écrit :

(5.11)
$$\frac{U}{\xi_0} \left(\frac{\rho_\infty}{E}\right)^{\frac{1}{k+3}} \ll 1$$

On observe que cette condition ne dépend pas du temps, elle est donc valable même à t = 0, où les deux vitesses sont pourtant infinies (figure 5.2). La validité de la solution cherchée est donc la même que celle de l'explosion isotrope fixe: c'est celle de l'hypothèse de choc fort. On peut en effet montrer que la prise en compte de la pression extérieure, du fait de l'atténuation du choc, fait perdre à l'écoulement son caractère autosemblable. Il suffit pour cela de calculer le paramètre adimensionné associé à p_{∞} , qui, dans notre système de grandeurs primaires, s'exprime par :

(5.12)
$$\zeta = \frac{p_{\infty}}{\xi_0^2} \left(\frac{t^{2(k+1-\alpha)}}{E^2 \rho_{\infty}^{(k+1)}} \right)^{\frac{1}{k+1}}$$

On voit donc qu'à la différence du paramètre η qui est une constante, ζ est une variable dépendante du temps. En notant M_c , le nombre de Mach du choc de l'explosion isotrope, ζ peut encore s'écrire:

$$\zeta = rac{n^2}{\gamma M_c^2}$$

Cette variable est inversement proportionnelle au carré du nombre de Mach du choc de l'écoulement de base. Au début du mouvement, M_c est très grand, ce qui implique que ζ est très petit. On voit que notre approche est cohérente puisqu'il existe bien initialement une hiérarchie entre η et ζ telle que $\eta \gg \zeta$ pendant une durée suffisante. Il convient cependant de déterminer la limite à partir de laquelle l'influence de p_{∞} n'est plus négligeable à l'égard de celle de U. Pour cela, on établit facilement la relation suivante liant η et ζ :

$$\eta^2 = \gamma \left(\frac{Ut^{(n-1)}}{c_{\infty}} \right)^2 \zeta$$

Comme $n \leq 1$, on a initialement $\zeta \ll \eta^2 \operatorname{car} \left(Ut^{(n-1)}/c_{\infty} \right)^2 \gg 1$ pour $t \simeq 0$. Ensuite, lorsque t grandit, le terme $\left(Ut^{(n-1)}/c_{\infty} \right)^2$ décroît mais ζ reste d'ordre supérieur ou égal à η^2 tant que $\left(Ut^{(n-1)}/c_{\infty} \right)^2$ est d'ordre supérieur ou égal à 1. Ainsi, l'effet de p_{∞} est négligeable devant celui de U tant que:

$$(5.13) t < \left(\frac{U}{c_{\infty}}\right)^{\frac{1}{1-n}}$$

Au delà, l'atténuation du choc est telle que l'effet de p_{∞} n'est plus négligeable par rapport à l'effet du déplacement et le modèle autosemblable ne convient plus. Dans le cas particulier n = 1 (correspondant à $U_{\infty} = U$, constante) il suffit que U/c_{∞} soit d'ordre supérieur ou égal à 1, c'est un cas déjà traité dans [17] et [1].

Ces remarques conditionnent l'ordre jusqu'auquel nous devons effectuer les développements et déterminent leur domaine de validité. Résumons ces résultats :

- pour préserver la similitude interne de l'écoulement perturbé, nous devons volontairement limiter les développements à l'ordre 1 en η , puisque dès l'ordre 2, ils intègrent l'influence de la pression extérieur; - pour que ces développements soient acceptables, η doit être petit devant 1: c'est la condition (5.11) que nous rappelons ici:

$$\frac{U}{n\xi_0} \left(\frac{\rho_\infty}{E}\right)^{\frac{1}{k+3}} \ll 1$$

- enfin la solution obtenue est valable tant que :

$$0 \leq t < \left(rac{U}{c_{\infty}}
ight)^{rac{1}{1-n}}$$

5.2.5 Repère mobile de résolution

Dans ce paragraphe, nous rappelons un résultat important issu de la théorie de l'explosion ponctuelle dans un courant uniforme [17] pour ensuite l'appliquer à notre étude. Le cadre de cette théorie est le suivant : on considère une explosion ponctuelle isotrope fixe se produisant dans un milieu animé d'un mouvement de translation uniforme. On note O_1 le lieu de l'explosion et U_{∞} la vitesse du courant, parallèle à l'axe O_1y_1 (figure 5.3).



FIG. 5.3: Source ponctuelle dans un écoulement uniforme. U_{∞} est la vitesse de l'écoulement, O_1 l'origine de l'explosion, \tilde{O} le centre du repère de calcul $\tilde{\mathbb{R}}$, en translation à la vitesse βU_{∞} relativement à O_1 .

Il a été montré qu'il était nécessaire, pour résoudre le problème, d'introduire un repère *auxiliaire* de calcul dans lequel sont reformulées les équations. Ce repère, que nous noterons $(\tilde{\Re}, \tilde{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, est en translation uniforme à la vitesse βU_{∞} par rapport au lieu de l'explosion, où β est une constante qui est déterminée par le calcul. Nous ne détaillerons pas ici les considérations théoriques inhérentes à la détermination de ce coefficient, cependant nous pouvons apporter une justification qualitative des raisons de l'introduction de ce repère particulier: sous les effets conjugués du courant et de la pression extérieure, le choc se déforme, l'écoulement dans la couche de choc devient anisotrope, et la surface Σ' subit également une déformation de sa géométrie (qui est initialement cylindrique (k = 1) ou sphérique (k = 2)). Or, Σ' est définie comme étant la surface séparant l'écoulement dans la couche de choc du milieu raréfié. Par conséquent, comme aucune particule ne traverse cette limite, nous pouvons considérer qu'elle se comporte comme une frontière matérielle. Nous verrons, au § 5.2.6, que sa déformation peut s'interpréter, à l'ordre 1 en η , comme une translation pure à laquelle vient se superposer, à l'ordre 2, une petite déformation sous l'action de la pression extérieure et de l'effet d'ordre 2 du courant. Ainsi, au premier ordre, la frontière du vide ne subit qu'une translation dans la direction du courant; cette translation s'effectuant sans déformation de sa géométrie. On en déduit qu'il existe nécessairement un repère $\tilde{\Re}$ qui accompagne ce mouvement de translation et dans lequel la frontière Σ' reste centrée.

On peut évidemment se demander s'il est bien utile d'accompagner cette surface Σ' . Une réponse technique invoquant une plus grande facilité numérique n'est pas vraiment convaincante pour justifier les complications théoriques qui découlent de la réécriture du problème dans un repère mobile. En fait, c'est une raison fondamentale qui impose le calcul dans ce repère : pour utiliser un développement en petites perturbations d'une solution de base, il faut choisir un domaine de définition où la solution existe et a un sens. Si, pour une valeur donnée de θ_1 , la solution en Σ' est étirée vers le milieu continu, en $\pi - \theta_1$, elle devra l'être dans le sens opposé, c'est-à-dire à l'intérieur du vide. Contrairement à ce qui se passe sur le choc, on doit donc extrapoler une fonction de part et d'autre d'un point, sachant qu'à l'extérieur du domaine, celle-ci est singulière. En accompagnant la translation, Σ' devient alors une frontière "fixe" sur laquelle il n'est plus nécessaire d'étirer la solution de base²². Voyons comment appliquer ce résultat au problème qui nous concerne. Il nous faut établir en premier lieu le parallèle qui existe entre le problème de l'explosion dans un courant et celui de la source mobile dans un milieu au repos. En reprenant les notations de la figure 5.1, l'apport d'énergie isotrope est issu de la source située en O_1 . Soit $(\Re_1 : O_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère lié à la source, il est animé d'un mouvement de translation à la vitesse $-Ut^{(n-1)}\vec{j}$ par rapport à l'origine O du repère $(\Re : O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ supposé galiléen. À l'instant initial on suppose ces deux repères confondus. Si l'on se place dans le repère mobile \Re_1 , la source peut être considérée comme fixe dans un milieu ambiant en mouvement à la vitesse $Ut^{(n-1)}\vec{j}$. Au regard du résultat précédent, il convient donc d'introduire pour la résolution un repère de calcul $(\tilde{\Re} : \tilde{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ se déplaçant à la vitesse $\beta Ut^{(n-1)}$ *relativement* à \Re_1 dans le sens du courant apparent. L'équation du mouvement de \tilde{O} s'écrit $O_1\tilde{O} = \beta U \frac{t^n}{n}\vec{j}$. Cette situation correspond à la figure 5.3 à la seule différence que la vitesse du courant n'est plus constante. Si à présent nous transposons l'ensemble dans le repère galiléen \Re (figure 5.4), la vitesse absolue de \tilde{O} dans ce repère, d'après la loi de composition des vitesses, est égale à $(\beta - 1)Ut^{(n-1)}\vec{j}$, et l'équation du mouvement de \tilde{O} dans \Re est donnée par :

(5.14)
$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1O} = (\beta - 1)U\frac{t^n}{n}\overline{j}$$



FIG. 5.4: O_1 est la source d'énergie isotrope en translation à la vitesse $-Ut^{(n-1)}$, \tilde{O} est le centre du repère de calcul, O est le lieu de la source d'énergie anisotrope équivalente

Nous verrons que le calcul montre que β est compris entre 0 et 1; la configuration des trois repères est donc celle représentée sur la figure 5.4 où, par souci de clarté, nous avons volontairement dilaté les distances $O_1 \tilde{O}$ et $\tilde{O}_1 O$, qui sont en réalité petites devant le rayon du choc.

5.2.6 Forme de la solution perturbée

On note $\tilde{r} = \tilde{R}(t, \tilde{\theta})$, l'équation du choc perturbé exprimée dans le repère $\tilde{\Re}$ défini au paragraphe précédent, et $\tilde{r} = \tilde{R}'(t, \tilde{\theta})$, celle de la frontière Σ' lorsqu'elle existe. Par analogie avec le cas isotrope (5.7), nous cherchons la solution sous la forme:

$$\tilde{R}(t,\tilde{\theta}) = \left(\frac{Et^{(\alpha+2)}}{\rho_{\infty}}\right)^{\frac{1}{k+3}} \xi_0 \,\tilde{R}^*(\tilde{\theta},\eta) \qquad \tilde{R}'(t,\tilde{\theta}) = \left(\frac{Et^{(\alpha+2)}}{\rho_{\infty}}\right)^{\frac{1}{k+3}} \xi_0 \,\tilde{R}^{*\prime}(\tilde{\theta},\eta)$$

$$\tilde{p}(r,\tilde{\theta},t) = \frac{2n^2}{\gamma+1} \rho_{\infty} \frac{r^2}{t^2} \,\tilde{p}^*(\xi,\tilde{\theta},\eta) \qquad \tilde{\rho}(r,\tilde{\theta},t) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_{\infty} \,\tilde{\rho}^*(\xi,\tilde{\theta},\eta)$$

$$\tilde{u}(r,\tilde{\theta},t) = \frac{2n}{\gamma+1} \frac{r}{t} \,\tilde{u}^*(\xi,\tilde{\theta},\eta) \qquad \tilde{v}(r,\tilde{\theta},t) = \frac{2n}{\gamma+1} \frac{r}{t} \,\tilde{v}^*(\xi,\tilde{\theta},\eta)$$

(

^{22.} C'est en explicitant cette dernière idée que l'on aboutit à une condition permettant de calculer le coefficient pondérateur β qui détermine la vitesse de déplacement du repère; nous reviendrons sur ce point au § 5.2.6.0.

Afin de préciser la forme des fonctions sans dimension \bar{R}^* , \tilde{u}^* , \tilde{v}^* , \tilde{p}^* et $\tilde{\rho}^*$ intervenant dans ces expressions, examinons quelques propriétés remarquables du problème. Lorsque η tend vers 0, la solution de l'écoulement perturbé tend vers la solution isotrope. On sait dans ce cas que l'écoulement est purement radial et que l'ensemble des inconnues ne dépend que de la seule variable ξ , ceci se traduit par les relations suivantes:

$$\begin{split} &\lim_{\eta \to 0} \tilde{R}^* = 1 & \lim_{\eta \to 0} \tilde{R}'^* = \xi'_0 \\ &\lim_{\eta \to 0} \tilde{p}^* = p^*_{iso}(\xi) & \lim_{\eta \to 0} \tilde{\rho}^* = \rho^*_{iso}(\xi) \\ &\lim_{\eta \to 0} \tilde{u}^* = u^*_{iso}(\xi) & \lim_{\eta \to 0} \tilde{v}^* = 0 \end{split}$$

Par ailleurs, on suppose, comme dans le cas anisotrope, que le problème perturbé présente une symétrie plane (k = 1)ou cylindrique (k = 2) autour de l'axe horizontal Oy. Il s'ensuit, pour les fonctions \tilde{R} , \tilde{u} , \tilde{p} et $\tilde{\rho}$ une parité en $\tilde{\theta}$, alors que \tilde{v} est l'unique fonction impaire du problème. Une rapide étude préalable des conditions sur le choc suggère d'adopter une forme explicite en $\tilde{\theta}$. On cherche alors les inconnues adimensionnées intervenant dans (5.15) sous la forme :

où les fonctions $\tilde{u}_0^*, \tilde{u}_1^*, \tilde{\rho}_0^*, \tilde{\rho}_1^*, \tilde{p}_0^*$ et \tilde{p}_1^* ne dépendent que de ξ . Les fonctions indicées 0 sont représentatives de l'écoulement de base, celles indicées 1 sont caractéristiques de l'effet d'ordre 1 du déplacement de la source. Ce modèle permet de séparer les variables ξ et $\tilde{\theta}$ et de résoudre implicitement le problème en $\tilde{\theta}$. On ramène ainsi l'intégration d'un problème à trois variables à celle de deux problèmes à une seule variable. Dans ce modèle, l'équation du choc est donnée par :

(5.17)
$$\tilde{R}(t,\tilde{\theta}) = \left(\frac{E}{\rho_{\infty}}\right)^{\frac{1}{k+3}} t^n \xi_0 \underbrace{\left(1 + \eta \, \xi_1 \cos \tilde{\theta}\right)}_{\tilde{R}^*},$$

et de la même manière on écrit l'équation de la frontière du vide :

(5.18)
$$\tilde{R}'(t,\tilde{\theta}) = \left(\frac{E}{\rho_{\infty}}\right)^{\frac{1}{k+3}} t^n \xi_0 \underbrace{\left(\xi'_0 + \eta \,\xi'_1 \cos \tilde{\theta}\right)}_{\tilde{R}^{*\prime}}.$$

Domaine de variation de la variable de similitude

Dans les expressions (5.17) et (5.18), les quantités $(\xi_0, \xi_1, \xi'_0, \xi'_1)$ sont des constantes inconnues. Ceci pose la question du domaine de variation de ξ , déjà évoquée au § 5.2.5. En effet, en raison des déformations du choc et de la frontière du vide, la variable ξ , définie par (5.6), évolue entre des bornes inconnues. Celles-ci ne peuvent être déterminées qu'après résolution complète du problème. Afin d'éclairer ce point, appelons λ_s la variable adimensionnée employée par Sedov et définie par :

$$\lambda_s = \frac{r}{R_{iss}}$$

À l'ordre 0, c'est-à-dire en considérant la source immobile, notre solution coïncide avec celle de Sedov et la variable ξ est égale à λ_s , dont le domaine de variation est $\xi'_0 \leq \lambda_s \leq 1$. lorsque l'on tient compte de l'effet d'ordre 1 du déplacement, le domaine de variation de ξ devient :

$$\xi_0' + \eta \cos \theta \, \xi_1' \leq \xi \leq 1 + \eta \cos \theta \, \xi_1$$

La variable ξ subit donc une *dilatation* par rapport à la variable λ_s , fonction de l'azimut θ et de la perturbation η . Cela signifie qu'une même valeur numérique de ξ n'a pas le même sens selon l'ordre d'approximation auquel on la considère : la valeur $\xi = 1$, par exemple, repère le choc à l'ordre 0 et un tout autre point à l'ordre 1 car le choc se trouve en $\xi = 1 + \eta \xi_1 \cos \theta$. Puisqu'à l'ordre 0, notre variable ξ est identique à λ_s , la solution numérique calculée à cet ordre fournira, non pas $\tilde{\rho}_0^*(\xi), \tilde{u}_0^*(\xi), \tilde{p}_0^*(\xi), \min \tilde{\rho}_0^*(\lambda_s), \tilde{u}_0^*(\lambda_s), \tilde{p}_0^*(\lambda_s)$. Par suite, pour pouvoir appliquer les relations (5.16) et ainsi reconstruire la solution perturbée, il est nécessaire de développer la variable ξ autour de λ_s par rapport à η . La relation décrivant la dilatation de ξ par rapport à λ_s est donnée par :

(5.20)
$$\xi = \lambda_s + \eta \cos \theta \Delta(\lambda_s),$$

57

où :

$$\Delta(\lambda_s) = \xi_1 \left(\frac{\lambda_s - \xi_0'}{1 - \xi_0'} \right) + \xi_1' \left(\frac{1 - \lambda_s}{1 - \xi_0'} \right)$$

Elle exprime que λ_s est l'approximation d'ordre 0 de ξ et on vérifie que l'on a bien :

$$\xi_0' \leq \lambda_s \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \xi_0' + \eta \cos ilde{ heta} \, \xi_1' \leq \xi \leq 1 + \eta \cos ilde{ heta} \, \xi_1$$

Reconstruction de la solution physique

Afin d'illustrer la remarque précédente, considérons par exemple la fonction $\tilde{\rho}^*(\xi, \bar{\theta})$ dont le développement s'écrit $\tilde{\rho}^* = \tilde{\rho}^*_0(\xi) + \eta \cos \tilde{\theta} \tilde{\rho}^*_1(\xi)$. Le calcul à l'ordre 0 fournit $\tilde{\rho}^*_0(\lambda_s)$. Compte tenu de (5.20), la valeur de la fonction $\tilde{\rho}^*_0$ en ξ est obtenue par un développement de Taylor autour de λ_s :

$$ilde{
ho}_0^*(\xi) = ilde{
ho}_0^*(\lambda_s) + \eta \, \Delta(\lambda_s) \, \cos ilde{ heta} \, rac{d \, ilde{
ho}_0^*(\lambda_s)}{d \xi} + o(\eta)$$

En effectuant un développement identique pour $\eta \rho_1^*$ et en ne retenant que les termes d'ordre 1 on a:

$$\eta\, ilde
ho_1^st(\xi)=\eta ilde
ho_1^st(\lambda_s)+O(\eta)$$

Avec un raisonnement semblable pour les autres inconnues, la solution (5.16) s'écrit :

$$(5.21) \begin{cases} \tilde{p}^{*}(\xi,\tilde{\theta},\eta) = \tilde{p}_{0}^{*}(\lambda_{s}) + \eta\cos\tilde{\theta} \left[\tilde{p}_{1}^{*}(\lambda_{s}) + \Delta(\lambda_{s}) \, \tilde{p}_{0_{\xi}}^{*}(\lambda_{s}) \right] \\ \tilde{\rho}^{*}(\xi,\tilde{\theta},\eta) = \tilde{\rho}_{0}^{*}(\lambda_{s}) + \eta\cos\tilde{\theta} \left[\tilde{\rho}_{1}^{*}(\lambda_{s}) + \Delta(\lambda_{s}) \, \tilde{\rho}_{0_{\xi}}^{*}(\lambda_{s}) \right] \\ \tilde{u}^{*}(\xi,\tilde{\theta},\eta) = \tilde{u}_{0}^{*}(\lambda_{s}) + \eta\cos\tilde{\theta} \left[\tilde{u}_{1}^{*}(\lambda_{s}) + \Delta(\lambda_{s}) \, \tilde{u}_{0_{\xi}}^{*}(\lambda_{s}) \right] \\ \tilde{v}^{*}(\xi,\tilde{\theta},\eta) = \eta \, \tilde{v}_{1}^{*}(\lambda_{s})\sin\tilde{\theta} \end{cases}$$

Condition fixant le mouvement du repère mobile \overline{R}

L'approche précédente revient à *étirer* la solution d'ordre 0 sur le domaine de validité de la solution perturbée, elle s'apparente à la méthode de *stretching* utilisée par Tsien [33] pour résoudre de nombreux problèmes à frontières libres par petites perturbations. Cependant, si ce procédé est pratique pour des dilatations ou contractions du domaine, il tombe en défaut pour la translation. Or, d'après la forme (5.18) donnée à \tilde{R}^* , la déformation de X', sous l'effet du déplacement de la source, peut s'interpréter à l'ordre 1 comme une translation pure. Pour cette raison, nous avons introduit au § 5.2.5 le repère \tilde{R} dont le rôle est d'accompagner cette translation de sorte que, dans ce repère, la frontière Σ' reste centrée. Ceci se traduit avec notre modèle par :

(5.22)
$$\xi'_1 = 0$$

Cette condition détermine le mouvement du repère mobile, nous y reviendrons au § 6.4. Dans le repère ainsi défini, le domaine de variation de ξ est donc:

$$\xi_0' \leq \xi \leq 1 + \eta \, \xi_1 \cos \bar{\theta}$$

5.3 Explosion anisotrope équivalente

Voyons comment le problème de la source isotrope translatée, tel que nous venons de le poser, peut s'identifier à celui d'une explosion anisotrope fixe dans un milieu au repos. Le problème est donc de déterminer le coefficient aintervenant dans (5.1). Pour cela, revenons un instant sur la figure 5.4, page 56. Cette figure schématise l'écoulement anisotrope engendré par un apport d'énergie isotrope non-instantané issu de O_1 , l'anisotropie résultant de la translation simultanée de la source durant la libération de l'énergie. Nous avons vu au § 5.2.2 qu'avec la forme de la vitesse de translation que nous avons choisie, l'écoulement reste à similitude interne tant que le choc peut être considéré comme intense. La question posée est alors de savoir si cet écoulement peut être consécutif à un apport d'énergie violent et anisotrope issu d'une source immobile. Formellement, démontrer l'équivalence consiste à prouver que la solution du problème anisotrope vérifie les équations du problème de la source translatée ainsi que les conditions sur le choc pour les points concernés.

Relations de changement de variables

Puisqu'à l'instant initial, la source isotrope se trouve en O, origine du repère de référence, ce point doit également être le lieu de l'explosion anisotrope équivalente. Le problème de l'explosion anisotrope est régi par les équations (1.12). Afin d'établir les relations de changement de variables permettant d'exprimer ces équations dans le repère mobile, on cherche d'abord les relations liant les coordonnées (X, θ) d'un point dans le repère \Re aux coordonnées $(\xi, \tilde{\theta})$ d'un point dans le repère $\tilde{\Re}$.



FIG. 5.5: Notations dans le repère de référence R de l'explosion anisotrope équivalente et dans le repère de calcul \tilde{R} de l'explosion isotrope translatée

Avec les notations de la figure 5.5, la relation géométrique liant les rayons R et \tilde{R} s'écrit simplement :

(5.23)
$$R(\theta)^2 = \left(\tilde{R}(\tilde{\theta})\sin\tilde{\theta}\right)^2 + \left(\tilde{R}(\tilde{\theta})\cos\tilde{\theta} + (\beta - 1)U\frac{t^n}{n}\right)^2$$

Substituons dans cette formule les expressions de R et \tilde{R} données par (1.6) et (5.17) ainsi que celle de U tirée de (5.9), en ne conservant que les termes d'ordre 0 et 1, on obtient :

(5.24)
$$R^*(\theta) = \xi_0 \left(1 + \eta \cos \tilde{\theta} \left(\xi_1 + \frac{\beta - 1}{n} \right) \right)$$

En procédant de façon similaire pour r et \tilde{r} , on obtient :

(5.25)
$$r = \bar{r} \left(1 + \eta \, \frac{(\beta - 1)}{\xi n} \, \cos \tilde{\theta} \right)$$

La variable sans dimension X, définie par (1.7), peut alors s'écrire sous la forme:

(5.26)
$$X = \xi + \eta \cos \tilde{\theta} \left(\frac{\beta - 1}{n} - \xi \left(\xi_1 + \frac{\beta - 1}{n} \right) \right)$$

On vérifie que, sur le choc, on a bien X = 1 en $\xi = 1 + \eta \cos \tilde{\theta} \xi_1$. De la relation (5.25) et sachant que $\sin \theta = (\tilde{r}/r) \sin \tilde{\theta}$, on peut également déduire les formules suivantes :

$$\sin\theta = \left(1 - \eta \, \frac{\beta - 1}{\xi n} \cos \tilde{\theta}\right) \sin \tilde{\theta} \qquad \cos\theta = \cos \tilde{\theta} + \eta \, \frac{\beta - 1}{\xi n} \sin^2 \tilde{\theta}$$

La combinaison de ces équations conduit à :

(5.27)
$$\sin(\tilde{\theta} - \theta) = \eta \, \frac{\beta - 1}{\xi n} \sin \tilde{\theta} \qquad \cos(\tilde{\theta} - \theta) = 1$$

On en déduit la relation liant θ à $(\xi, \tilde{\theta})$:

(5.28)
$$\theta = \tilde{\theta} - \eta \, \frac{\beta - 1}{\xi n} \sin \tilde{\theta}$$

Ayant établi les relations de changement de variables pour un point, cherchons à présent comment transformer les opérateurs de dérivation intervenant dans (1.12). Plutôt que de calculer directement le jacobien de la transformation $(X, \theta) \rightarrow (\xi, \tilde{\theta})$, il est plus simple de calculer le jacobien de la transformation inverse $(\xi, \tilde{\theta}) \rightarrow (X, \theta)$:

$$\begin{pmatrix} dx \ d heta \end{pmatrix} = egin{bmatrix} rac{\partial X}{\partial \xi} \Big|_{ ilde{ heta}} & rac{\partial X}{\partial ilde{ heta}} \Big|_{\xi} \ rac{\partial heta}{\partial \xi} \Big|_{ ilde{ heta}} & rac{\partial heta}{\partial ilde{ heta}} \Big|_{\xi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} darepsilon \end{pmatrix}$$

À partir de (5.26) et (5.28), les composantes de la matrice jacobienne s'obtiennent immédiatement :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} \Big|_{\tilde{\theta}} = 1 - \eta \cos \tilde{\theta} \left(\xi_1 + \frac{\beta - 1}{n} \right) & \frac{\partial X}{\partial \tilde{\theta}} \Big|_{\xi} = -\eta \sin \tilde{\theta} \left(\frac{\beta - 1}{n} - \xi \left(\xi_1 + \frac{\beta - 1}{n} \right) \right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\tilde{\theta}} = \eta \frac{\beta - 1}{n \xi^2} \sin \tilde{\theta} & \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{\theta}} \Big|_{\xi} = 1 - \eta \frac{\beta - 1}{n \xi} \cos \tilde{\theta} \end{bmatrix}$$

L'inversion de cette matrice fournit les composantes du jacobien de la transformation inverse :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial X} \Big|_{\theta} = 1 + \eta \cos \tilde{\theta} \left(\xi_{1} + \frac{\beta - 1}{n} \right) & \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \Big|_{X} = \eta \sin \tilde{\theta} \left(\frac{\beta - 1}{n} - \xi \left(\xi_{1} + \frac{\beta - 1}{n} \right) \right) \\ \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial X} \Big|_{\theta} = -\eta \frac{\beta - 1}{n \xi^{2}} \sin \tilde{\theta} & \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \theta} \Big|_{X} = 1 + \eta \frac{\beta - 1}{n \xi} \cos \tilde{\theta} \end{bmatrix}$$

De ces expressions on déduit les relations de changement de variables pour les opérateurs de dérivation :

(5.29)
$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial X} \bigg|_{\theta} = \left(1 + \eta \cos \tilde{\theta} \left(\xi_{1} + \frac{\beta - 1}{n} \right) \right) \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \right|_{\tilde{\theta}} - \eta \left| \frac{\beta - 1}{n \xi^{2}} \sin \tilde{\theta} \left| \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \right|_{\xi} \right. \\ \left. \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_{X} = \eta \sin \tilde{\theta} \left(\frac{\beta - 1}{n} - \xi \left(\xi_{1} + \frac{\beta - 1}{n} \right) \right) \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \right|_{\tilde{\theta}} + \left(1 + \eta \left| \frac{\beta - 1}{n \xi} \right| \cos \tilde{\theta} \right) \left| \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \right|_{\xi} \right.$$

5.3.1 Identité des solutions

On note (p, ρ, u, v) , la solution de l'explosion anisotrope, exprimée dans le repère \Re , et $(\tilde{p}, \tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v})$ celle de l'explosion isotrope translatée, exprimée dans le repère $\tilde{\Re}$. Comme l'origine des temps est la même dans les deux repères, les deux solutions s'écrivent, d'après (1.9), (5.15) et (5.16):

source anisotropesource isotrope translatée
$$u = \frac{2n}{\gamma+1} \frac{r}{t} u^*(X, \theta)$$
 $\tilde{u} = \frac{2n}{\gamma+1} \frac{\tilde{r}}{t} \tilde{u}^*(\xi)$ $v = \frac{2n}{\gamma+1} \frac{r}{t} v^*(X, \theta)$ $\tilde{v} = \frac{2n}{\gamma+1} \frac{\tilde{r}}{t} \tilde{v}^*(\xi)$ $p = \frac{2n^2}{\gamma+1} \rho_{\infty} \frac{r^2}{t^2} p^*(X, \theta)$ $\tilde{p} = \frac{2n^2}{\gamma+1} \rho_{\infty} \frac{\tilde{r}^2}{t^2} \tilde{p}^*(\xi)$ $v = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_{\infty} \rho^*(X, \theta)$ $\tilde{\rho} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_{\infty} \tilde{\rho}^*(\xi)$

L'identification des deux solutions a lieu en tout point M de coordonnées (X, θ) dans \Re , et $(\xi, \tilde{\theta})$ dans $\tilde{\Re}$, vérifiant les équations:

$$X = \xi + \eta \cos \tilde{\theta} \left(\frac{\beta - 1}{n} - \xi \left(\xi_1 + \frac{\beta - 1}{n} \right) \right)$$
$$\theta = \tilde{\theta} - \eta \, \frac{\beta - 1}{\xi n} \sin \tilde{\theta}$$

L'identification des solutions porte sur la vitesse, qui est une grandeur vectorielle, et sur les grandeurs scalaires que sont la pression et la densité. Pour ces dernières l'identification est immédiate. Pour la grandeur vectorielle, il faut noter que (\tilde{u}, \tilde{v}) mesurent les composantes radiale et orthoradiale de la vitesse des particules relativement au

(5.30)

repère centré en O. Il convient donc de leur ajouter les composantes de la vitesse d'entraînement de ce repère. Avec les notations de la figure 5.5, l'identification des solutions s'exprime donc par les équations suivantes, liant ici les grandeurs dimensionnées :

(5.31)
$$\begin{cases} \rho(r,\theta) = \tilde{\rho}(\tilde{r},\tilde{\theta}) \\ p(r,\theta) = \tilde{p}(\tilde{r},\tilde{\theta}) \\ u(r,\theta) = \tilde{u}(\tilde{r},\tilde{\theta})\cos(\theta-\tilde{\theta}) + \tilde{v}(\tilde{r},\tilde{\theta})\sin(\theta-\tilde{\theta}) + (\beta-1)Ut^{(n-1)}\cos\theta \\ v(r,\theta) = -\tilde{u}(\tilde{r},\tilde{\theta})\sin(\theta-\tilde{\theta}) + \tilde{v}(\tilde{r},\tilde{\theta})\cos(\theta-\tilde{\theta}) - (\beta-1)Ut^{(n-1)}\sin\theta \end{cases}$$

Compte tenu de (5.30), (5.20), (5.21) et des relations géométriques (5.25) et (5.27), ces équations s'expriment entre fonctions sans dimension par:

$$\rho^{*}(X,\theta) = \tilde{\rho}_{0}^{*}(\lambda_{s}) + \eta \cos \tilde{\theta} \left[\tilde{\rho}_{1}^{*}(\lambda_{s}) + \Delta(\lambda_{s}) \tilde{\rho}_{0_{\xi}}^{*} \right]$$

$$p^{*}(X,\theta) = \tilde{p}_{0}^{*}(\lambda_{s}) + \eta \cos \tilde{\theta} \left[\tilde{p}_{1}^{*}(\lambda_{s}) + \Delta(\lambda_{s}) \tilde{p}_{0_{\xi}}^{*}(\lambda_{s}) - 2 \frac{\beta - 1}{n\lambda_{s}} \tilde{p}_{0}^{*}(\lambda_{s}) \right]$$

$$u^{*}(X,\theta) = \tilde{u}_{0}^{*}(\lambda_{s}) + \eta \cos \tilde{\theta} \left[\tilde{u}_{1}^{*}(\lambda_{s}) + \Delta(\lambda_{s}) \tilde{u}_{0_{\xi}}^{*}(\lambda_{s}) - \frac{\beta - 1}{n\lambda_{s}} \left(\tilde{u}_{0}^{*}(\lambda_{s}) - \frac{\gamma + 1}{2n} \right) \right]$$

$$v^{*}(X,\theta) = \eta \sin \tilde{\theta} \left[\tilde{v}_{1}^{*}(\lambda_{s}) + \frac{\beta - 1}{n\lambda_{s}} \left(\tilde{u}_{0}^{*}(\lambda_{s}) - \frac{\gamma + 1}{2n} \right) \right]$$

5.3.2 Équivalence des conditions sur le choc

La solution (p, ρ, u, v) satisfait aux conditions sur le choc de l'explosion anisotrope (1.16). m, défini par (1.11), y est le paramètre caractérisant l'anisotropie locale du choc. À l'aide de (5.24), le développement de ce paramètre à l'ordre 1 s'écrit :

(5.33)
$$m(\theta) = -\eta \sin \tilde{\theta} \left(\xi_1 + \frac{\beta - 1}{n} \right)$$

Ainsi, m est de l'ordre de η et les conditions (1.16) se réduisent, à l'ordre 1, à :

(5.34) $p^*(1,\theta) = 1$ $\rho^*(1,\theta) = 1$ $u^*(1,\theta) = 1$ $v^*(1,\theta) = -m$

Pour qu'il y ait équivalence, la solution (5.30), vérifiant les équations ci-avant, doit également satisfaire les conditions (6.12) et (6.13) du problème isotrope translaté. Ces équations sont écrites sur le choc anisotrope d'équation X = 1, soit d'après (5.26) pour $\xi = 1 + \eta \cos \bar{\theta} \xi_1$. En substituant (5.32) dans (5.34), puis en ramenant les conditions écrites en $\xi = 1 + \eta \cos \bar{\theta} \xi_1$, à des conditions en $\xi = 1$ à l'aide d'un développement de Taylor, on aboutit aux conditions suivantes pour $\tilde{p}, \tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}$:

- à l'ordre 0:

(5.32)

$$ilde{p}_0^*(1) = 1$$
 $ilde{
ho}_0^*(1) = 1$ $ilde{u}_0^*(1) = 1$

- à l'ordre 1:

$$\begin{split} \tilde{p}_{1}^{*}(1) &= -\frac{2(1-\beta)}{n} - \xi_{1} \tilde{p}_{0_{\xi}}(1) \\ \tilde{\rho}_{1}^{*}(1) &= -\xi_{1} \tilde{\rho}_{0_{\xi}}(1) \\ \tilde{u}_{1}^{*}(1) &= \frac{(\gamma-1)(1-\beta)}{2n} - \xi_{1} \tilde{u}_{0_{\xi}}(1) \\ \tilde{v}_{1}^{*}(1) &= \xi_{1} - \frac{(\gamma+1)(1-\beta)}{2n} \end{split}$$

On retrouve donc exactement les équations (6.12) et (6.13), autrement dit, la solution (p^*, ρ^*, u^*, v^*) , telle qu'elle a été construite en (5.32), vérifie les conditions sur le choc du problème de la source isotrope translatée.

5.3.3 Équivalence des équations du mouvement

۰ ·

La démonstration de l'équivalence des équations du mouvement ne présente que peu d'intérêt en raison de son aspect purement "calculatoire". Par suite, nous ne présentons que la démarche suivie. Il s'agit, dans les équations (1.12) du problème de l'explosion intense anisotrope autosemblable, d'exprimer dans un premier temps les diverses dérivées partielles qui y figurent. À l'aide de (5.32) et des règles de dérivation (5.29), elles s'écrivent :

$$\begin{split} \frac{\partial \rho^{*}}{\partial X} &= \tilde{\rho}_{0_{\xi}}^{*} + \eta \cos \tilde{\theta} \left[\tilde{\rho}_{1_{\xi}}^{*} + \left(\xi_{1} + \frac{\beta - 1}{n} \right) \tilde{\rho}_{0_{\xi}}^{*} \right] \\ \frac{\partial \rho^{*}}{\partial \theta} &= -\eta \sin \tilde{\theta} \left[\tilde{\rho}_{1_{\xi}}^{*} + \left((\xi_{1} + \frac{\beta - 1}{n}) \xi + \frac{\beta - 1}{n} \right) \tilde{\rho}_{0_{\xi}}^{*} \right] \\ \frac{\partial u^{*}}{\partial X} &= \tilde{u}_{0_{\xi}}^{*} + \eta \cos \tilde{\theta} \left[\tilde{u}_{1_{\xi}}^{*} + \left(\xi_{1} + \frac{(\beta - 1)(\xi - 1)}{n\xi} \right) \tilde{u}_{0_{\xi}}^{*} + \left(\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma + 1}{2} \right) \frac{\beta - 1}{n\xi^{2}} \right] \\ \frac{\partial u^{*}}{\partial \theta} &= -\eta \sin \tilde{\theta} \left[\tilde{u}_{1_{\xi}}^{*} + \left(\xi_{1} + \frac{(\beta - 1)(\xi - 1)}{n\xi} \right) \xi \tilde{u}_{0_{\xi}}^{*} - \left(\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma + 1}{2} \right) \frac{\beta - 1}{n\xi^{2}} \right] \\ \frac{\partial v^{*}}{\partial X} &= \eta \sin \tilde{\theta} \left[\tilde{v}_{1_{\xi}}^{*} + \frac{\beta - 1}{n\xi} \left(\tilde{u}_{0_{\xi}}^{*} - \frac{1}{\xi} \left(\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma + 1}{2} \right) \right) \right] \\ \frac{\partial v^{*}}{\partial \theta} &= \eta \cos \tilde{\theta} \left[\tilde{v}_{1_{\xi}}^{*} + \frac{\beta - 1}{n\xi} \left(\tilde{u}_{0_{\xi}}^{*} - \frac{(\beta - 1)(\gamma + 1)}{2n\xi} \right) \right] \\ \frac{\partial p^{*}}{\partial X} &= \tilde{p}_{0_{\xi}}^{*} + \eta \cos \tilde{\theta} \left[\tilde{p}_{1_{\xi}}^{*} + \left(\xi_{1} + \frac{(\beta - 1)(\xi - 2)}{n\xi} \right) \tilde{p}_{0_{\xi}}^{*} + 2 \frac{(\beta - 1)}{n\xi^{2}} \tilde{p}_{0}^{*} \right] \\ \frac{\partial p^{*}}{\partial \theta} &= -\eta \sin \tilde{\theta} \left[\tilde{p}_{1_{\xi}}^{*} - \tilde{p}_{0_{\xi}}^{*} \left(\xi_{1} + \frac{(\beta - 1)(\xi - 1)}{n\xi} \right) \tilde{p}_{0_{\xi}}^{*} + 2 \frac{(\beta - 1)}{n\xi} \tilde{p}_{0}^{*} \right] \end{split}$$

La substitution de ces expressions dans les équations (1.12) conduit aux systèmes (6.5) et (6.7).

5.3.4 Condition à la frontière du vide

Rappelons que le problème de l'explosion anisotrope est un problème inverse et sa résolution n'est complète que lorsque l'on a déterminé la forme de l'apport d'énergie qui est à l'origine de l'écoulement. La formule (1.17), rappelée ci-dessous, permet de calculer la répartition azimutale d'énergie $\epsilon(\theta)$ après intégration complète du problème. Elle exprime que la répartition d'énergie est uniquement liée à la forme de la frontière du vide et à la pression qui y règne :

$$\epsilon(\theta) = rac{2 n^3}{lpha (\gamma + 1)} R^{*^{(k+3)}} X'^{(k+3)} p^{*'}$$

Dans cette expression, toutes les grandeurs sont à considérer sur la frontière Σ' , d'équation r = RX' dans \Re :

- l'équation de Σ' dans le repère $\tilde{\Re}$ est : $\xi = \xi'_0 + \eta \cos \tilde{\theta} \xi'_1$. Ainsi, d'après (5.26), X' peut s'écrire :

$$X' = \xi'_0 + \eta \cos \tilde{\theta} \left[\xi'_1 + \frac{\beta - 1}{n} - \xi'_0 \left(\xi_1 + \frac{\beta - 1}{n} \right) \right]$$

 $-p^{*'}$ est la valeur de la pression adimensionnée p^* sur la frontière Σ' . D'après les relations (5.32) on a :

$$p^*(X') = \tilde{p}_0^*(\xi'_0) + \eta \cos \tilde{\theta} \Big[\tilde{p}_1^*(\xi'_0) + \xi'_1 \, \tilde{p}_{0_{\xi}}^*(\xi'_0) - 2 \frac{\beta - 1}{n \xi'_0} \tilde{p}_0^*(\xi'_0) \Big],$$

où $\tilde{p}_0^*(\xi_0')$ est donnée a posteriori après résolution du problème d'ordre 0 par la formule (6.18) et \tilde{p}_1^* par (6.19).

Par suite, l'équation (1.17) peut s'écrire:

(5.35)
$$\epsilon(\theta) = \frac{1}{2k\pi} - \eta \frac{\cos\tilde{\theta}}{\pi n\xi'_0} \left(\frac{n-1}{2}\beta + \frac{k+1}{2k}\right)$$

qui correspond à la répartition azimutale d'énergie à l'origine de l'explosion anisotrope équivalente. On vérifie qu'à l'ordre 0, on a $\epsilon(\theta) = 1/2k\pi$, qui correspond bien à un apport d'énergie isotrope. En vertu de (5.2), posons :

(5.36)
$$\epsilon = \frac{2k\eta}{n\xi_0'} \left(\frac{n-1}{2}\beta + \frac{k+1}{2k} \right)$$

Le rapprochement de (5.24) et (5.36) fournit alors le coefficient a de la forme du choc équivalent recherché :

$$a=\frac{\xi_0'\left(n\xi_1+\beta-1\right)}{k(n-1)\beta+(k+1)}$$

De façon analogue, en posant pour la frontière du milieu raréfié :

$$R'(\theta) = \xi'_0(1 + a'\varepsilon\cos\theta)$$

le coefficient a' recherché s'écrit :

$$a' = \frac{n\xi_1' + (\beta - 1) - \xi_0'(\xi_1 n + \beta - 1)}{(n - 1)\beta k + (k + 1)}$$

.
Chapitre 6

Solution du problème de la source isotrope translatée

6.1 Introduction

On étudie l'écoulement engendré par la source d'énergie isotrope mobile située en O_1 dans le repère $\tilde{\mathfrak{R}}$ introduit au § 5.2.5 (figure 5.4). L'écoulement est supposé plan ou à symétrie de révolution. On considère un plan méridien et on note $(\tilde{r}, \tilde{\theta})$ les coordonnées polaires d'un point dans ce plan relativement au repère $\tilde{\mathfrak{R}}$. Ce dernier étant animé d'un mouvement de translation à la vitesse $-(1-\beta)Ut^{(n-1)}\vec{j}$ par rapport à O, il n'est manifestement pas galiléen, excepté lorsque n = 1. Par suite, pour exprimer le problème dans ce repère, il est nécessaire de considérer *les forces d'origine inertielle induites par le mouvement de translation non-uniforme*. L'accélération inertielle subie par les particules est égale à :

$$\rho(1-\beta)(n-1)Ut^{(n-2)}\vec{j},$$

qui, projetée dans le système de coordonnées cylindriques, comporte deux composantes, radiale et orthoradiale. L'écoulement est régi par les équations (5.4), étendues au cas anisotrope $(\partial/\partial \tilde{\theta} \neq 0 \text{ et } \tilde{v} \neq 0)$, auxquelles on ajoute un terme d'inertie au second membre des deux équations de quantité de mouvement. Les équations du problème de la source isotrope translatée s'expriment dans le repère $\tilde{\Re}$:

(6.1)
$$\begin{cases} \bar{r}^{k}(\sin\tilde{\theta})^{(k-1)}\tilde{\rho}_{t}+(\sin\tilde{\theta})^{(k-1)}(\bar{r}^{k}\tilde{\rho}\tilde{u})_{\bar{r}}+\bar{r}^{(k-1)}\left(\tilde{\rho}\tilde{v}(\sin\tilde{\theta})^{(k-1)}\right)_{\tilde{\theta}}=0\\ \tilde{\rho}\tilde{r}(\tilde{r}\tilde{u}_{t}+\tilde{r}\tilde{u}\tilde{u}_{\bar{r}}+\tilde{v}\tilde{u}_{\tilde{\theta}}-\bar{v}^{2})+\tilde{r}\tilde{p}_{\bar{r}}=\tilde{\rho}\tilde{r}(n-1)(1-\beta)Ut^{(n-2)}\cos\tilde{\theta}\\ \tilde{\rho}(\tilde{r}\tilde{v}_{t}+\tilde{r}\tilde{u}\tilde{v}_{\bar{r}}+\tilde{v}\tilde{v}_{\tilde{\theta}}+\tilde{u}\tilde{v})+\tilde{p}_{\tilde{\theta}}=-\tilde{\rho}\tilde{r}(n-1)(1-\beta)Ut^{(n-2)}\sin\tilde{\theta}\\ \tilde{r}\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^{\gamma}}\right)_{t}+\tilde{r}\tilde{u}\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^{\gamma}}\right)_{\bar{r}}+\tilde{v}\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^{\gamma}}\right)_{\tilde{\theta}}=0\end{cases}$$

6.2 Équations adimensionnées

La variable de similitude ξ définie par (5.6) s'écrit :

(6.2)
$$\xi = \left(\frac{\rho_{\infty}}{Et^{\alpha+2}}\right)^{\frac{1}{k+3}} \frac{\tilde{r}}{\xi_0}$$

En exprimant les dérivées partielles de cette variable par rapport à \tilde{r} , $\tilde{\theta}$ et t, et compte tenu du fait que η est une constante, on obtient les relations de changement de variables permettant d'exprimer les dérivées partielles en fonction des variables sans dimension $(\xi, \tilde{\theta})$ du problème adimensionné:

(6.3)
$$\begin{cases} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\tilde{r},\tilde{\theta}} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\xi,\tilde{\theta}} - \frac{n\xi}{t} \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \right|_{t,\tilde{\theta}} \\ \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \right|_{t,\tilde{\theta}} = \frac{\xi}{\tilde{r}} \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \right|_{t,\tilde{\theta}} \\ \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \right|_{t,\tilde{r}} = \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \right|_{t,\xi} \end{cases}$$

Compte tenu de (5.15), les équations (6.1) peuvent alors s'écrire sous la forme adimensionnée suivante :

$$(6.4) \qquad \left\{ \begin{cases} \xi \left[\left(\tilde{u}^{*} - \frac{\gamma+1}{2} \right) \tilde{\rho}_{\xi}^{*} + \tilde{\rho}^{*} \tilde{u}_{\xi}^{*} \right] + \left(\tilde{\rho}^{*} \tilde{v}^{*} \right)_{\tilde{\theta}}^{*} = -\tilde{\rho}^{*} \left[(k+1) \tilde{u}^{*} + (k-1) \tilde{v}^{*} \cot g \tilde{\theta} \right] \\ \xi \left[\tilde{u}^{*} - \frac{\gamma+1}{2} \tilde{u}_{\xi}^{*} + \frac{\gamma-1}{2\tilde{\rho}^{*}} \tilde{p}_{\xi}^{*} \right] + \tilde{v}^{*} \tilde{u}_{\tilde{\theta}}^{*} = -\tilde{u}^{*} \left(\tilde{u}^{*} - \frac{\gamma+1}{2n} \right) + \tilde{v}^{*2} - (\gamma-1) \frac{\tilde{p}^{*}}{\tilde{\rho}^{*}} \\ -\beta \eta \left(\frac{\gamma+1}{2n} \right)^{2} \frac{(n-1)}{\xi} \cos \tilde{\theta} \\ \xi \left(\tilde{u}^{*} - \frac{\gamma+1}{2} \right) \tilde{v}_{\xi}^{*} + \tilde{v}^{*} \tilde{v}_{\tilde{\theta}}^{*} + \frac{\gamma-1}{2\tilde{\rho}^{*}} \tilde{p}_{\tilde{\theta}}^{*} = \tilde{v}^{*} \left(\frac{\gamma+1}{2n} - 2\tilde{u}^{*} \right) \\ +\beta \eta \left(\frac{\gamma+1}{2n} \right)^{2} \frac{(n-1)}{\xi} \sin \tilde{\theta} \\ \xi \left(\tilde{u}^{*} - \frac{\gamma+1}{2} \right) \left(\frac{\tilde{p}_{\xi}^{*}}{\tilde{p}^{*}} - \gamma \frac{\tilde{\rho}_{\xi}^{*}}{\tilde{\rho}^{*}} \right) + \tilde{v}^{*} \left(\frac{\tilde{p}_{\theta}^{*}}{\tilde{\rho}^{*}} - \gamma \frac{\tilde{\rho}_{\theta}^{*}}{\tilde{\rho}^{*}} \right) = \frac{\gamma+1}{n} - 2\tilde{u}^{*} \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on substitue aux inconnues $\tilde{p}^*, \tilde{\rho}^*, \tilde{u}^*, \tilde{v}^*$, leurs développements en petites perturbations, donnés par (5.16), et ordonne selon les puissances de η . Comme la solution doit être vraie quelques soient η et $\tilde{\theta}$, on obtient, en développant jusqu'à l'ordre 1, deux systèmes différentiels indépendants :

- ordre 0:

(6.5)
$$\begin{cases} \xi \left[\tilde{\rho}_{0}^{*} \left(\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma+1}{2} \right) \right]_{\xi} = -\tilde{\rho}_{0}^{*} \tilde{u}_{0}^{*} (k+1) \\ \xi \left[\tilde{\rho}_{0}^{*} \tilde{u}_{0}^{*} \left(\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \frac{\gamma-1}{2} \tilde{p}_{0}^{*} \right]_{\xi} = -\tilde{\rho}_{0}^{*} \tilde{u}_{0}^{*} \left(\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma+1}{2n} \right) - (\gamma-1) \tilde{p}_{0}^{*} \\ \xi \left[\tilde{\rho}_{0}^{*} \left(\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma+1}{2} \right) \tilde{s}_{0} \right]_{\xi} = -2 \tilde{\rho}_{0}^{*} \left(\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma+1}{2n} \right) - \tilde{\rho}_{0}^{*} \tilde{u}_{0}^{*} \tilde{s}_{0}^{*} (k+1) \end{cases}$$

où on a posé:

- ordre 1:

(6.7)

$$\begin{split} \xi \left[\tilde{\rho}_{0}^{*} \tilde{u}_{1}^{*} + \tilde{\rho}_{1}^{*} \left(\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma+1}{2} \right) \right]_{\xi} &= -(k+1)(\tilde{\rho}_{1}^{*} \tilde{u}_{0}^{*} + \tilde{\rho}_{0}^{*} \tilde{u}_{1}^{*}) - k \tilde{\rho}_{0}^{*} \tilde{v}_{1}^{*} \\ \xi \left[\tilde{\rho}_{0}^{*} \tilde{u}_{0}^{*} \tilde{u}_{1}^{*} + (\tilde{\rho}_{1}^{*} \tilde{u}_{0}^{*} + \tilde{\rho}_{0}^{*} \tilde{u}_{1}^{*}) \left(\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma+1}{2} \right) + \frac{\gamma-1}{2} \tilde{p}_{1}^{*} \right]_{\xi} = \\ &- \beta \left(\frac{\gamma+1}{2n} \right)^{2} \frac{n-1}{\xi} \tilde{\rho}_{0}^{*} + (1-\gamma) \tilde{p}_{1}^{*} - k \tilde{\rho}_{0}^{*} \tilde{u}_{0}^{*} \tilde{v}_{1}^{*} \\ &- \left[\left(\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma+1}{2n} \right) + (k+1) \tilde{u}_{0}^{*} \right] \tilde{\rho}_{1}^{*} \tilde{u}_{0}^{*} \\ &- \left[\left(2 \tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma+1}{2n} \right) + 2(k+1) \tilde{u}_{0}^{*} \right] \tilde{\rho}_{0}^{*} \tilde{u}_{1}^{*} \end{split}$$

$$\begin{split} \xi \left[\tilde{\rho}_{0}^{*} \left(\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma + 1}{2} \right) \tilde{v}_{1}^{*} \right]_{\xi} &= \beta \left(\frac{\gamma + 1}{2n} \right)^{2} \frac{n - 1}{\xi} \tilde{\rho}_{0}^{*} + \frac{\gamma - 1}{2} \tilde{p}_{1}^{*} \\ &- \tilde{\rho}_{0}^{*} \tilde{v}_{1}^{*} \left[\left(2 \tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma + 1}{2n} \right) + (k + 1) \tilde{u}_{0}^{*} \right] \\ \xi \epsilon \tilde{\rho}_{0}^{*} \left[\frac{\tilde{p}_{1}^{*}}{\tilde{p}_{0}} - \gamma \frac{\tilde{\rho}_{1}^{*}}{\tilde{\rho}_{0}^{*}} \right]_{\xi} = -2 \tilde{\rho}_{0}^{*} \tilde{u}_{1}^{*} \left[1 - \frac{\left(\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma + 1}{2n} \right)}{\left(\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma + 1}{2} \right)} \right] \end{split}$$

66

6.3 Conditions sur le choc

Pour résoudre les systèmes (6.5) et (6.7), nous devons leur adjoindre les conditions sur Σ d'équation $\xi = \tilde{R}^*$. Les relations de conservation à la traversée du choc en mouvement sont données par :

(6.8)
$$\begin{cases} (\tilde{\omega}_n - \tilde{q}_n) \frac{\tilde{\rho}}{\rho_{\infty}} = (\tilde{\omega}_n - U_n) \\ \tilde{q}_{\tau} = U_{\tau} \\ \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left(\frac{\tilde{p}}{p_{\infty}} - 1\right) = (\tilde{\omega}_n - U_n)^2 \frac{\rho_{\infty}}{\gamma p_{\infty}} - 1 \\ \frac{\tilde{p}}{p_{\infty}} \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - \frac{\tilde{\rho}}{\rho_{\infty}}\right) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{\tilde{\rho}}{\rho_{\infty}} - 1 \end{cases}$$

Dans ces équations et avec les notations de la figure 6.1 :

 $-\tilde{\omega}_n$ est la vitesse normale de propagation du choc;

 $-\tilde{q}_n$ et \tilde{q}_{τ} sont les projections de la vitesse des particules en aval du choc suivant les directions \vec{n} et $\vec{\tau}$;

 $-(U_n, U_\tau)$ ces mêmes projections pour les particules situées en amont du choc.



FIG. 6.1: Notations sur le choc dans le repère mobile de calcul

Dans le repère mobile, le milieu extérieur est vu en mouvement à la vitesse $(1 - \beta)Ut^{(n-1)}\vec{j}$, la projection de cette vitesse suivant la normale \vec{n} et la tangente $\vec{\tau}$ au choc conduit aux composantes suivantes :

(6.9)
$$\begin{cases} U_n = (1-\beta) U t^{(n-1)} \sin(\tilde{\theta} + \lambda) \\ U_{\tau} = -(1-\beta) U t^{(n-1)} \cos(\tilde{\theta} + \lambda) \end{cases}$$

Par ailleurs les composantes \tilde{q}_n et \tilde{q}_{τ} s'écrivent immédiatement :

$$ilde q_n = ilde u \sin \lambda - ilde v \cos \lambda \qquad ilde q_ au = ilde u \cos \lambda + ilde v \sin \lambda$$

On rappelle que λ , introduit au § 1.2, est l'angle entre la tangente au choc $\vec{\tau}$ et la direction radiale. En revenant à sa définition donnée par (1.11), on peut écrire:

$$\operatorname{cotg} \lambda = \frac{\tilde{R}_{\tilde{\theta}}^*}{\tilde{R}^*} \qquad \sin \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\tilde{R}_{\tilde{\theta}}^*/\tilde{R}^*\right)^2}} \qquad \cos \lambda = \frac{\tilde{R}_{\tilde{\theta}}^*/\tilde{R}^*}{\sqrt{1 + \left(\tilde{R}_{\tilde{\theta}}^*/\tilde{R}^*\right)^2}}$$

Compte tenu de (5.17), le développement de ces relations jusqu'à l'ordre 1 fournit :

(6.10)
$$\operatorname{cotg} \lambda = -\eta \xi_1 \sin \theta + o(\eta) \quad \cos \lambda = \operatorname{cotg} \lambda + o(\eta) \quad \sin \lambda = 1 + O(\eta)$$

Enfin, la vitesse normale du choc $\tilde{\omega}_n$, définie comme dans le cas anisotrope par $\tilde{\omega}_n = d\tilde{R}/dt \sin \lambda$, s'écrit après développement jusqu'à l'ordre 1:

(6.11)
$$\tilde{\omega}_n = n \left(\frac{E}{\rho_\infty}\right)^{\frac{1}{k+3}} t^{(n-1)} \xi_0 (1 + \eta \xi_1 \cos \tilde{\theta})$$

On est ainsi en mesure d'adimensionner les relations (6.8) avec (5.15), que l'on développe ensuite à l'aide des expressions (5.16). Il faut toutefois remarquer que les conditions (6.8) sont écrites sur le choc d'équation $\xi = \tilde{R}^*$; à l'ordre 0 cette équation est approchée par $\xi = 1 + O(\eta)$ et cela revient à écrire les conditions en $\xi = 1$. Mais à l'ordre 1, l'équation du choc est donnée par $\tilde{R}^* = 1 + \eta \cos \tilde{\theta} \xi_1$, les termes négligés à l'ordre 0 vont donc intervenir à l'ordre 1. On prend en compte ces termes en ramenant la condition écrite en $\xi = \tilde{R}^*$ à une condition en $\xi = 1 + O(\eta)$ en effectuant un développement de Taylor des fonctions au voisinage de $\xi = 1$. On écrira par exemple :

$$\begin{split} \tilde{\rho}^{*}(\bar{R}^{*}) &= \tilde{\rho}_{0}^{*}(1 + \eta \cos \bar{\theta} \xi_{1}) + \eta \cos \bar{\theta} \ \tilde{\rho}_{1}^{*}(1 + \eta \cos \bar{\theta} \xi_{1}) \\ &= \tilde{\rho}_{0}^{*}(1) + \eta \cos \bar{\theta} \Big[\xi_{1} \bar{\rho}_{0}^{*}(1) + \bar{\rho}_{1}^{*}(1) \Big] + o(\eta) \end{split}$$

Après calcul, les conditions adimensionnées sur le choc s'écrivent :

- à l'ordre 0:

- à l'ordre 1:

(6.13)
$$\begin{cases} \tilde{p}_{1}^{*}(1) + \xi_{1}\tilde{p}_{0_{\xi}}^{*}(1) = -\frac{2(1-\beta)}{n} \\ \bar{\rho}_{1}^{*}(1) + \xi_{1}\bar{\rho}_{0_{\xi}}^{*}(1) = 0 \\ \tilde{u}_{1}^{*}(1) + \xi_{1}\bar{u}_{0_{\xi}}^{*}(1) = \frac{(\gamma-1)(1-\beta)}{2n} \\ \tilde{v}_{1}^{*}(1) = \xi_{1} - \frac{(\gamma+1)(1-\beta)}{2n} \end{cases}$$

Les expressions des dérivées premières des fonctions d'ordre 0 en $\xi = 1$, figurant dans ces conditions, sont obtenues a posteriori à partir de la résolution des équations du système de base (§ 6.6.1). Elles sont données en annexe H.

On remarque, en observant les équations (6.5) du problème d'ordre 0 associées aux conditions (6.12), que la constante ξ_0 n'y apparaît pas. Il est donc tout à fait possible, à ce stade des développements, de calculer la solution de base sans pourtant connaître la loi de propagation du choc; une relation supplémentaire est néanmoins nécessaire pour en déterminer la valeur. Par contre à l'ordre supérieur, la connaissance de la constante ξ_1 et du paramètre β est indispensable puisque celles-ci interviennent dans les conditions (6.13). Les relations de fermeture permettant de déterminer ces grandeurs sont obtenues à partir de l'application du principe de la conservation de l'énergie à des domaines convenablement choisis.

6.4 Condition à la frontière du vide

Écrivons sur la frontière du vide les conditions reliant le travail des forces de pression sur Σ' à l'énergie émise en O_1 . Pour cela, on exprime le principe de la conservation de l'énergie pour le système matériel qui coïncide avec le domaine \mathcal{V}_0 représenté en trait gras sur la figure 6.2. Selon le type de symétrie considérée, ce volume est un cône (k = 2) ou un dièdre infini (k = 1), de sommet O_1 limité à sa base par la portion de surface Σ' interceptée par l'angle au sommet θ_1 constant. Compte tenu du fait qu'aucune particule ne traverse Σ' et qu'on suppose qu'il n'y a pas d'apport de chaleur externe, la seule variation de l'énergie interne dans le domaine \mathcal{V}' provient de la source O_1 . On suppose que cette énergie est intégralement et instantanément transmise, sans dissipation, au milieu continu au travers de la dilatation de Σ' . Cette condition s'écrit en tenant compte du déplacement relatif du repère $\tilde{\mathcal{R}}$ par rapport à \Re_1 :

(6.14)
$$\mathcal{P} - \int_{\Sigma'} \tilde{p}' \left(\vec{\tilde{\omega}}' + \beta U t^{(n-1)} \vec{j} \right) \cdot \vec{n}' \, dS = 0,$$



FIG. 6.2: Domaine d'application du principe de la conservation de l'énergie

où \tilde{p}' est la pression sur $\Sigma', \vec{\tilde{\omega}}'$ la vitesse d'expansion de Σ' exprimée dans $\tilde{\Re}$, et \mathcal{P} la puissance de l'apport d'énergie libérée en O_1 . D'après (5.18), et de façon analogue à (6.11), $\vec{\tilde{\omega}}'$ est donnée par la formule suivante :

(6.15)
$$\vec{\tilde{\omega}}'.\vec{n} = n \left(\frac{E}{\rho_{\infty}}\right)^{\frac{1}{k+3}} t^{(n-1)} \xi_0(\xi_0' + \eta \xi_1' \cos \tilde{\theta}) \sin \lambda'$$

Par ailleurs, la puissance de l'apport d'énergie Et^{α} libérée en O_1 est égale à :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\pi k} \int_{0}^{\theta_{1}} (2\pi)^{(k-1)} (\sin v)^{(k-1)} \frac{d}{dt} (Et^{\alpha}) \, dv,$$

qu'on écrira de façon générale sous la forme :

$$\mathcal{P} = \frac{(2\pi)^{(k-2)}}{k} \alpha E t^{(\alpha-1)} \left(\theta_1^{(2-k)} - (k-1)\cos\theta_1 \right)$$

Comme les développements des fonctions inconnues sont formulés dans $\tilde{\Re}$, on utilisera les relations suivantes liant les angles θ_1 et $\tilde{\theta}$:

(6.16)
$$\begin{cases} \theta_1 = \tilde{\theta} - \eta \frac{\beta}{\xi'_0} \sin \tilde{\theta} \\ \cos \theta_1 = \cos \tilde{\theta} + \eta \frac{\beta}{{\xi'_0}^2} \sin^2 \tilde{\theta} \end{cases}$$

Enfin l'élément de surface dS sur Σ' pour le cas cylindrique et le cas sphérique s'exprime dans $\tilde{\Re}$:

(6.17)
$$dS = \frac{1}{\sin\lambda'} (2\pi)^{(k-1)} \tilde{\rho}^k (\sin\tilde{\theta})^{(k-1)} d\tilde{\theta} \quad \text{en} \quad \tilde{\rho} = \tilde{\Re}'$$

De façon désormais classique, on développe (6.14) jusqu'à l'ordre 1 et on ramène la condition écrite en $\xi = \xi'_0 + \eta \cos \bar{\theta} \xi'_1$ à une condition en $\xi = \xi'_0$ par un développement de Taylor autour de ξ'_0 en fonction de η . On obtient après calcul :

- à l'ordre 0 :

(6.18)
$$\tilde{p}_0^{*\prime} = \frac{(\gamma+1)\,\alpha}{2^{(k+1)}\pi\,n^3\,\xi_0^{(k+3)}\,\xi_0^{\prime(k+3)}};$$

- à l'ordre 1:

(6.19)
$$\tilde{p}_{1}^{*\prime} = -\frac{\tilde{p}_{0}^{*\prime}}{\xi_{0}^{\prime}} \left(\left(k + \frac{1}{n}\right)\beta + \left(k + 3\right)\xi_{1}^{\prime} \right) - \xi_{1}^{\prime} \tilde{p}_{0_{\xi}}^{*\prime}.$$

Avec l'expression de $\tilde{p}_{0_{\xi}}^{*'}$ donnée en annexe H, cette équation peut encore s'écrire après résolution par rapport à ξ_1' :

(6.20)
$$\xi_1' = -\frac{1}{k+1} \left[\xi_0' \frac{\tilde{p}_1^{*\prime}}{\tilde{p}_0^{*\prime}} + \beta(k+\frac{1}{n}) \right]$$

La relation (6.18) relie directement ξ_0 à \tilde{p}_0^* en $\xi = \xi'_0$, elle permet donc de déterminer la valeur de la constante ξ_0 après résolution complète du système (6.5) : l'écoulement non perturbé est ainsi complètement déterminé.

La relation (6.20) relie, quant à elle, le terme de déformation ξ'_1 au terme de déplacement β . Dans le repère mobile $\tilde{\Re}$ qui accompagne la translation de Σ' (§ 5.2.6.0), l'absence de déformation de celle-ci se traduit avec notre modèle par la condition :

(6.21)
$$\xi'_1 = 0$$

Cette condition, associée à l'équation (6.20), constitue une première équation de fermeture permettant de déterminer le paramètre β et donc le mouvement du repère $\tilde{\Re}$. Nous verrons au § 6.6.3, lors du traitement numérique, comment mettre en œuvre cette condition.

Il manque néanmoins une relation supplémentaire permettant de déterminer le coefficient ξ_1 . Cette équation est obtenue en écrivant une forme de la conservation de l'énergie dans un domaine conique incluant le choc.

6.5 Équation globale de l'énergie

On exprime la conservation globale de l'énergie dans le domaine fluide qui occupe, à un instant t, le volume $(\mathcal{V} + \mathcal{V}_{\infty})$ représenté sur la figure 6.3. Ce domaine est contenu, soit dans un cône pour le cas sphérique, soit dans un dièdre pour le cas plan. Le volume \mathcal{V} est la portion de la couche de choc interceptée par le cône (ou le dièdre) de sommet \tilde{O} et d'angle $\tilde{\theta}$. Il est délimité par le choc Σ , la frontière Σ' séparant le milieu perturbé du milieu raréfié, et la surface latérale S_1 . Le domaine \mathcal{V}_{∞} contient le fluide encore non perturbé par le choc, il est délimité par une frontière fixe sphérique \mathcal{S}_{∞} et la surface latérale cylindrique $\bar{\mathcal{S}}_{\infty}$. Ce domaine n'est pas fixe mais en mouvement à une vitesse égale à celle du sommet \tilde{O} du cône, c'est-à-dire $-(1-\beta)Ut^{(n-1)}\vec{j}$ (figure 5.4). On note e l'énergie interne par unité de masse du gaz et \vec{q} sa vitesse; la normale extérieure est notée \vec{n}_{∞} sur les frontières du domaine non perturbé et \vec{n} sur les frontières de \mathcal{V} .



FIG. 6.3: Domaine d'intégration de l'équation globale de l'énergie

La dérivée particulaire de l'énergie totale du milieu ($\mathcal{V} + \mathcal{V}_{\infty}$) que l'on suit dans son mouvement est égale à :

$$(6.22) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \left(e + \frac{q^2}{2} \right) \rho \, d\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_{\infty}} \left(e_{\infty} + \frac{q_{\infty}^2}{2} \right) \rho_{\infty} \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{q^2}{2} \right) \rho \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_{\infty}} \frac{\partial}{\partial t} \left(e_{\infty} + \frac{q_{\infty}^2}{2} \right) \rho_{\infty} \, d\mathcal{V} + \\\int_{\mathcal{V}_{\infty}} \int_{\mathcal{V}_{\infty}} \left(e + \frac{q^2}{2} \right) \rho \, \vec{q}. \vec{n} \, d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}_{\infty} + \vec{\mathcal{S}}_{\infty} + \Sigma} \left(e_{\infty} + \frac{q_{\infty}^2}{2} \right) \rho_{\infty} \, \vec{q}_{\infty}. \vec{n}_{\infty} \, d\mathcal{S}_{\infty}$$

Le principe de conservation de l'énergie exprime que la variation de l'énergie totale du milieu fluide dans le domaine $(\mathcal{V} + \mathcal{V}_{\infty})$ est égale au travail des forces extérieures agissant sur ce domaine. Pour chacun d'entre eux, l'inventaire des efforts extérieurs se décompose de la façon suivante :

- sur \mathcal{V}_{∞} , ce sont les forces de pression agissant sur \mathcal{S}_{∞} , $\overline{\mathcal{S}}_{\infty}$ et Σ ; la conservation de l'énergie pour ce domaine s'exprime donc :

(6.23)
$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_{\infty}} \left(e_{\infty} + \frac{q_{\infty}^2}{2} \right) \rho_{\infty} \, d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{S}_{\infty} + \bar{\mathcal{S}}_{\infty} + \Sigma} p_{\infty} \, \vec{q}_{\infty} . \vec{n}_{\infty} \, d\mathcal{S}$$

- sur \mathcal{V} , les efforts extérieurs sont les forces de pression sur \mathcal{S}_{∞} et Σ , et les forces s'exerçant sur Σ' . Nous définissons Σ' comme étant la surface séparant le milieu continu, la couche de choc, du milieu discontinu \mathcal{V}' qui est une poche de vide; aucune particule ne traverse cette frontière. En considérant Σ' comme une frontière matérielle, on peut supposer que toute l'énergie émise en O est transmise au milieu continu par le biais de la dilatation de Σ' qui agit alors comme un piston. Le principe de l'action et de la réaction permet d'affirmer que le travail des forces provenant du milieu raréfié est égal au travail des forces de pression exercées par le milieu continu sur le piston. La conservation de l'énergie totale dans \mathcal{V} s'écrit alors simplement:

(6.24)
$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \left(e + \frac{q^2}{2} \right) \rho \, d\mathcal{V} = -\int_{\Sigma + S_{\infty} + \Sigma'} p \, \vec{q}. \vec{n} \, dS$$

L'onde de choc Σ est une surface de discontinuité mobile séparant les milieux \mathcal{V} et \mathcal{V}_{∞} , il convient donc de récrire localement la conservation de l'énergie au travers de cette surface en tenant compte de son déplacement et du mouvement relatif de chacun des milieux par rapport à celle-ci. En notant $\vec{\omega}$ la vitesse du choc, Σ_{ext} et Σ_{int} les faces internes et externes de l'onde de choc, la conservation de l'énergie à travers le choc s'écrit:

(6.25)
$$\int_{\Sigma_{\text{ext}}} \rho_{\infty} \left(e_{\infty} + \frac{q_{\infty}^2}{2} \right) (\vec{q}_{\infty} - \vec{w}) \cdot \vec{n}_{\infty} \, dS + \int_{\Sigma_{\text{ext}}} p_{\infty} \, \vec{q}_{\infty} \cdot \vec{n}_{\infty} \, dS = \int_{\Sigma_{\text{int}}} \rho \left(e + \frac{q^2}{2} \right) (\vec{q} - \vec{w}) \cdot \vec{n} \, dS + \int_{\Sigma_{\text{int}}} p \, \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS$$

Comme le gaz est supposé parfait, son énergie interne spécifique e s'exprime en fonction de la pression et de la masse volumique :

(6.26)
$$e = \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{p}{\rho} \qquad e_{\infty} = \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}}$$

À l'aide des relations (6.22) à (6.26), le principe de la conservation de l'énergie dans le domaine global $(\mathcal{V} + \mathcal{V}_{\infty})$ s'exprime de la façon suivante:

$$(6.27) \quad \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{q^2}{2} \right) d\mathcal{V} + \int_{\Sigma} \left[\left(\frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{q^2}{2} \right) - \left(\frac{p_{\infty}}{\gamma - 1} + \rho_{\infty} \frac{q_{\infty}^2}{2} \right) \right] \vec{w}.\vec{n} \, d\mathcal{S} \\ + \int_{\mathcal{S}_1} \left(\frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \rho \frac{q^2}{2} \right) \vec{q}.\vec{n} \, d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}_{\omega} + \bar{\mathcal{S}}_{\infty}} \left(\frac{\gamma p_{\infty}}{\gamma - 1} + \rho_{\infty} \frac{q_{\infty}^2}{2} \right) \vec{q}.\vec{n} \, d\mathcal{S} \\ + \int_{\mathcal{S}'} \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{q^2}{2} \right) \vec{q}.\vec{n} \, d\mathcal{S} = -\int_{\Sigma'} p \vec{q}.\vec{n} \, d\mathcal{S}$$

Cette formule peut se simplifier si l'on remarque que sur S_{∞} et \bar{S}_{∞} , la vitesse \vec{q}_{∞} est égale à la vitesse relative de l'écoulement extérieur par rapport à \tilde{O} : soit $(1 - \beta)Ut^n \vec{j}$ (figure 5.4). Par ailleurs, nous avons fixé la limite temporelle de notre modèle de telle sorte que l'effet de la pression p_{∞} soit d'ordre η^2 , il est alors facile d'en déduire que l'intégrale sur $(S_{\infty} + \bar{S}_{\infty})$ est négligeable ainsi que le terme $(p_{\infty}/(\gamma-1)+\rho_{\infty}q_{\infty}^2/2)$ dans l'intégrale sur le choc. Pour terminer d'expliciter cette formule, examinons séparément chacune de ces intégrales :

- dans \mathcal{V} , la dérivée temporelle est explicitée grâce aux règles de dérivation (6.3); par ailleurs, on tiendra compte de l'expression générale de l'élément de volume $d\mathcal{V}$:

$$d\mathcal{V} = (2 \pi)^{(k-1)} \sin(ilde{ heta})^{(k-1)} ilde{r}^k d ilde{r} d ilde{ heta}$$

- sur Σ , $\vec{w}.\vec{n}$ est donné par la formule (6.11) et dS par (6.17) en $\tilde{r} = \tilde{R}$.
- sur Σ' , la condition de glissement permet d'identifier $\vec{q}.\vec{n}$ à la vitesse d'expansion ω' , donnée par (6.15).
- sur la surface latérale S_1 , $\vec{q}.\vec{n}$ est par définition égale à v; l'élément de surface est égal à :

$$dS = (2\pi)^{(k-1)} r^{(k-1)} (\sin \tilde{\theta})^{(k-1)} d\tilde{r}$$

Avec ces remarques, la formule (6.27) prend la forme définitive suivante, valable à l'approximation au premier ordre :

$$(6.28) \quad \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \right) d\mathcal{V} + \int_{\Sigma} \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{q^2}{2} \right) w d\mathcal{S} + \int_{S_1} \left(\frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \right) v d\mathcal{S} + \int_{\Sigma'} \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \omega' d\mathcal{S} = -\int_{\Sigma'} p \omega' d\mathcal{S}$$

On adimensionne (6.28) avec les formules (5.9), (5.15), et on développe à l'aide de (5.16), (5.17), (5.18). Sur le choc et la frontière du vide, on ramène les fonctions évaluées en $\xi = \tilde{R}$ et $\xi = \tilde{R}'$ à des fonctions de $\xi = 1$ et $\xi = \xi'_0$ par des développements de Taylor. On utilise à cet effet les fonctions données en annexe H et les conditions sur le choc (6.5) et (6.13). On obtient après calcul:

- Ordre 0:

(6.29)
$$\alpha \int_{\xi_0'}^1 \left(\tilde{p}_0^* + \tilde{\rho}_0^* \tilde{u}_0^{*^2} \right) \xi^{(k+2)} d\xi = n \left(\gamma - 1 \right) \tilde{p}_0^{*'} {\xi'}_0^{(k+3)}$$

Cette équation n'apporte qu'une seule information nouvelle par rapport à (6.18): la constante ξ'_0 est nulle si $\alpha = 0$, c'est-à-dire pour l'explosion instantanée. Elle se substitue, pour fermer le problème d'ordre 0, à (6.18) inapplicable dans ce cas.

- Ordre 1:

(6.30)
$$\int_{\xi_0'}^1 f(\xi) d\xi = \mathcal{H}(\xi_1, \xi_0', \xi_1')$$

où les fonctions $f(\xi)$ et $\mathcal{H}(\xi_1, \xi'_1, \xi'_0)$ sont données par :

$$(6.31) \qquad \begin{cases} f(\xi) = \xi^{(k+2)} \left[\frac{\alpha}{k} \left[\tilde{p}_1^* + \tilde{u}_0^* \left(\tilde{\rho}_1^* \tilde{u}_0^* + 2 \tilde{\rho}_0^* \tilde{u}_1^* \right) \right] + \frac{2n}{\gamma+1} \left(\gamma \tilde{p}_0^* + \tilde{\rho}_0^* \tilde{u}_0^{*^2} \right) \tilde{v}_1^* \right] \\ \mathcal{H}(\xi_1, \xi_0', \xi_1') = -\frac{\alpha}{k} \left(2\xi_1 - \left(\tilde{p}_0^{*\prime} + \tilde{\rho}_0^{*\prime} \tilde{u}_0^{*\prime^2} \right) \xi_1' \xi_0'^{(k+2)} \right) \\ + \frac{n}{k} (\gamma-1) \left(\tilde{p}_1^{*\prime} \xi_0' + (k+1) \tilde{p}_0^{*\prime} \xi_1' \right) \xi_0'^{(k+2)} \end{cases}$$

L'équation (6.30) constitue la seconde équation de fermeture à l'ordre 1, elle détermine ξ_1 .

6.6 Résolution numérique

6.6.1 Calcul de l'écoulement de base

Nous avons montré que l'écoulement de base était régi par les équations (6.5) associées aux conditions (6.12). Ces équations sont celles de l'explosion isotrope ponctuelle et leur résolution a été traitée par Sedov [31]. Il a notamment montré l'intérêt d'introduire une nouvelle variable auxiliaire définie par :

(6.32)
$$\tilde{z}_0^* = \frac{\gamma \tilde{p}_0^*}{\tilde{\rho}_0^*}$$

Il est alors possible de ramener l'intégration de trois équations couplées, à la résolution successive de trois équations différentielles ordinaires indépendantes. La substitution de (6.32) dans les équations (6.5) conduit aux deux équations :

(6.33)
$$\xi \left[\varepsilon_0 \frac{\tilde{z}_{0_{\xi}}^*}{\tilde{z}_0^*} + (\gamma - 1) \tilde{u}_{0_{\xi}}^* \right] = \frac{\gamma + 1}{n} + \tilde{u}_0^* \left((k - 1) - \gamma (k + 1) \right)$$

(6.34)
$$\xi \left[\frac{\gamma - 1}{2\gamma} \tilde{z}_{0_{\xi}}^{*} + \left(\varepsilon_{0} - \frac{\gamma - 1}{2\gamma\varepsilon_{0}} \tilde{z}_{0}^{*} \right) \tilde{u}_{0_{\xi}}^{*} \right] = - \left(\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma + 1}{2n} \right) \tilde{u}_{0}^{*} + \tilde{z}_{0}^{*} \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \left(\frac{(k+1)\tilde{u}_{0}^{*} - 2\varepsilon_{0}}{\varepsilon_{0}} \right)$$

où, pour simplifier les expressions, on a posé:

(6.35)
$$\varepsilon_0 = \left(\tilde{u}_0^* - \frac{\gamma+1}{2}\right)$$

La résolution de ce système pour $\tilde{u}^*_{0_\ell}$ et $\tilde{z}^*_{0_\ell}$ fournit les deux équations différentielles suivantes :

(6.36)
$$\xi \frac{d\tilde{u}_{0}^{*}}{d\xi} = \frac{2\varepsilon_{0}\tilde{u}_{0}^{*}\left(\tilde{u}_{0}^{*}-\frac{\gamma+1}{2n}\right) - (\gamma-1)\tilde{z}_{0}^{*}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\frac{n-1}{n} + (k+1)\tilde{u}_{0}^{*}\right)}{\left(\tilde{z}_{0}^{*}(\gamma-1) - 2\varepsilon_{0}^{2}\right)}$$

$$(6.37) \qquad \qquad \xi \frac{d\tilde{z}_{0}^{*}}{d\xi} = -\frac{\tilde{z}_{0}^{*} \left[\tilde{u}_{0}^{*} \left(\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma+1}{2n} \right) - \varepsilon_{0} \left(\tilde{u}_{0}^{*} \left(k + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) - \frac{\gamma+1}{n(\gamma-1)} \right) + \tilde{z}_{0}^{*} \left(\frac{ute_{0} - \frac{\gamma+1}{2n} \left(\frac{1+n(\gamma-1)}{n} \right)}{\left(\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma+1}{2} \right)} \right) \right]}{\left(\tilde{z}_{0}^{*} (\gamma-1) - 2\varepsilon_{0}^{2} \right)}$$

La dernière équation différentielle est ensuite obtenue en substituant l'expression de $\tilde{u}_{0_{\xi}}^*$ ci-avant dans l'équation de la masse à l'ordre 0; on obtient :

(6.38)
$$\frac{\xi}{\tilde{\rho}_0^*} \frac{d\tilde{\rho}_0^*}{d\xi} = \frac{\left[\frac{(n-1)}{n} \frac{(\gamma+1)(\gamma-1)}{\gamma} \tilde{z}_0^* - 2\varepsilon_0 \tilde{u}_0^* \left(\frac{(\gamma+1)(1-n)}{2n} + k\left(\tilde{u}_0^* - \frac{\gamma+1}{2}\right)\right)\right]}{\left(\tilde{u}_0^* - \frac{\gamma+1}{2}\right) \left(\tilde{z}_0^*(\gamma-1) - 2\varepsilon_0^2\right)}$$

Les seconds membres de ces équations ne sont fonctions que de \tilde{z}_0^* et \tilde{u}_0^* , ainsi, plutôt que de conserver ξ comme variable d'intégration, on utilisera à profit la grandeur thermodynamique \tilde{z}_0^* . En notant respectivement G_1, G_2, G_3 les seconds membres des équations (6.36) (6.37) et (6.38), la résolution du système (6.5) revient à l'intégration successive des trois équations différentielles indépendantes suivantes:

(6.39a)
$$\frac{d ilde{u}_0^*}{d ilde{z}_0^*} = rac{G_1(ilde{u}_0^*, ilde{z}_0^*)}{G_2(ilde{u}_0^*, ilde{z}_0^*)}$$

(6.39b)
$$\frac{d\log\xi}{d\tilde{z}_0^*} = \frac{1}{G_2(\tilde{u}_0^*, \tilde{z}_0^*)}$$

(6.39c)
$$\frac{d\log \bar{\rho}_0^*}{d\bar{z}_0^*} = \frac{G_3(\tilde{u}_0^*, \tilde{z}_0^*)}{G_2(\tilde{u}_0^*, \tilde{z}_0^*)}$$

Dans les cas où la masse volumique tend vers 0 sur Σ' (c'est-à-dire pour $n \neq 1$) l'emploi de la variable \tilde{z}_0^* présente sur le plan numérique un intérêt supplémentaire : elle permet de substituer à la variable ξ , dont la borne supérieure est inconnue, une variable dont on sait qu'elle tend, en théorie, vers l'infini sur la frontière Σ' . L'emploi de cette variable repousse la localisation de la frontière Σ' à l'infini et permet donc de s'en approcher d'aussi près que l'on veut.

Bien qu'il soit possible d'intégrer successivement (6.39a), (6.39b) et (6.39c), nous choisissons d'intégrer ces équations de façon simultanée afin d'améliorer la précision et l'efficacité du calcul. En effet, l'intégration successive impose l'emploi d'un pas de calcul identique pour les trois équations afin de pouvoir directement bénéficier de la solution \bar{u}_0^* et ainsi éviter les erreurs qu'engendrerait une interpolation. Dans ce cas, il est alors préférable d'utiliser une méthode à pas de calcul fixe et d'imposer un pas délibérément petit afin de garantir la précision. En outre, la séparation des problèmes d'ordre 0 et 1 autorise également leur intégration successive. Toutefois, ce procédé présente le même inconvénient que précédemment : de manière à pouvoir bénéficier directement de la solution d'ordre 0, l'intégration du système d'ordre 1 réutilise la discrétisation de l'ordre 0. Ceci pose un problème de précision car le pas de calcul adopté à l'ordre 0 ne conduit pas nécessairement à une précision suffisante à l'ordre 1. Ce problème peut être traité en adoptant un pas volontairement petit aux dépends de l'efficacité du calcul numérique dès l'ordre 0.

Une façon plus élégante et efficace, que nous adopterons, consiste à intégrer simultanément les équations d'ordre 0 et 1. L'intégration est réalisée par un méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 à pas variable. Ceci permet d'adapter le pas de calcul à la fonction la plus irrégulière, celle-ci pouvant figurer aussi bien parmi les fonctions d'ordre 0 que d'ordre 1. On assure ainsi, pour une précision requise, une efficacité optimale. L'intégration s'achève lorsque la masse volumique est voisine de 0 pour $n \neq 1$ et lorsque \tilde{u}_0^* tend vers $\frac{\gamma+1}{2}$ dans le cas particulier n = 1. La valeur de ξ alors atteinte est la constante ξ'_0 , la valeur de ξ_0 est ensuite obtenue à partir de (6.18) par :

(6.40)
$$\left\{ \xi_0 = \left(\frac{\alpha(\gamma+1)}{2^{(k+1)} \pi n^3 \tilde{p}_0^{*\prime} \xi_0^{\prime(k+3)}} \right)^{\frac{1}{k+3}} \right\}$$

6.6.2 Solution du problème d'ordre 1

Des études précédentes ont montré que dans le cas de l'explosion isotrope dans un courant [1], l'inconnue \tilde{v}_1^* présente un comportement singulier au voisinage de la frontière Σ' , rendant ainsi les développements (5.16) non valables. Formellement, les équations (6.7), formulées pour les inconnues $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{\rho})$, se prêtent mal à l'intégration numérique. Pour éviter ce problème, il est nécessaire de reformuler les équations avec un autre système d'inconnues, plus régulières. Le calcul montre que, bien que \tilde{v}_1^* tende vers l'infini au voisinage de Σ' , le produit $\tilde{\rho}_0^* \tilde{v}_1^*$ reste quant à lui fini. L'observation rapide des équations (6.7) suggère d'introduire les nouvelles inconnues suivantes :

(6.41)
$$f_1 = \tilde{\rho}_1^* \tilde{u}_0^* \qquad g_1 = \tilde{\rho}_0^* \tilde{u}_1^* \qquad h_1 = \tilde{\rho}_0^* \tilde{v}_1^*$$

Avec ces inconnues, les équations (6.7) peuvent être reformulées :

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \left\{ \frac{\varepsilon_{0}}{\tilde{u}_{0}^{*}} f_{1_{\xi}} + g_{1_{\xi}} \right\} = \frac{\varepsilon_{0}}{\tilde{u}_{0}^{*}} \left(\frac{\gamma+1}{2\tilde{u}_{0}^{*}} \xi \frac{\tilde{\rho}_{0}^{*}}{\tilde{\rho}_{0}^{*}} - (k+1) \right) f_{1} - (k+1)g_{1} - kh_{1} \\ \left\{ \left\{ \varepsilon_{0} f_{1_{\xi}} + (\tilde{u}_{0}^{*} + \varepsilon_{0})g_{1_{\xi}} + \frac{\gamma-1}{2}\tilde{p}_{1_{\xi}}^{*} \right\} = \left(\xi \frac{\tilde{\rho}_{0}^{*}}{\tilde{\rho}_{0}^{*}} \varepsilon_{0} - (\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma+1}{2n}) \right) f_{1} \\ \left. + \left(2\xi \frac{\tilde{\rho}_{0}^{*}}{\tilde{\rho}_{0}^{*}} \varepsilon_{0} - (2\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma+1}{2n}) \right) g_{1} - k\tilde{u}_{0}^{*}h_{1} - (\gamma-1)\tilde{p}_{1}^{*} - 4\beta \frac{(\gamma+1)^{2}(n-1)}{n^{2}\xi} \tilde{\rho}_{0}^{*} \\ \left\{ \xi\varepsilon_{0}h_{1_{\xi}} = \left(\varepsilon_{0}\xi \frac{\tilde{\rho}_{0}^{*}}{\tilde{\rho}_{0}^{*}} - \left(2\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma+1}{2n}\right) \right) h_{1} + \frac{\gamma-1}{2}\tilde{p}_{1}^{*} + \beta \frac{(\gamma+1)^{2}(n-1)}{4n^{2}\xi} \tilde{\rho}_{0}^{*} \\ \left\{ \xi\varepsilon_{0}\gamma \left(-\frac{1}{\tilde{u}_{0}^{*}} f_{1_{\xi}} + \frac{1}{\tilde{z}_{0}^{*}} \tilde{p}_{1_{\xi}}^{*} \right) = \frac{\gamma\varepsilon_{0}}{\tilde{u}_{0}^{*}} \left((k+1) - \frac{\gamma+1}{2\tilde{u}_{0}^{*}} \xi \frac{\tilde{\rho}_{0}^{*}}{\tilde{\rho}_{0}^{*}} \right) f_{1} \\ \left. + \frac{(n-1)(\gamma+1)}{n\varepsilon_{0}} g_{1} + \frac{\gamma}{z_{0}} \left(\gamma\varepsilon_{0}\xi \frac{\tilde{\rho}_{0}^{*}}{\tilde{\rho}_{0}^{*}} - 2 \left(\tilde{u}_{0}^{*} - \frac{\gamma+1}{2n} \right) \right) \tilde{p}_{1}^{*} \\ \end{array} \right\}$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\xi \left[M \right] \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \\ h_1 \\ p_1 \end{pmatrix}_{\xi} = \left[S \right] \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \\ h_1 \\ p_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta \frac{(\gamma+1)^2(n-1)}{4n^2\xi} \tilde{\rho}_0^* \\ \beta \frac{(\gamma+1)^2(n-1)}{4n^2\xi} \tilde{\rho}_0^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

où [M] et [S] sont des matrices carrées de dimension $[4 \times 4]$ dont les coefficients ne dépendent que de la solution d'ordre 0 et où le dernier vecteur contient les termes sources d'origine inertielle. En notant :

101

(6.43)
$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \\ h_1 \\ p_1 \end{pmatrix},$$

(6.42)

la solution de ce système s'écrit :

(6.44)
$$\xi \left(\vec{X}_{1}\right)_{\xi} = \left[M\right]^{-1} \left[\left[S\right] \left(\vec{X}_{1}\right) + \begin{pmatrix}0 \\ -\beta \frac{(\gamma+1)^{2}(n-1)}{4n^{2}\xi} \tilde{\rho}_{0}^{*} \\ \beta \frac{(\gamma+1)^{2}(n-1)}{4n^{2}\xi} \tilde{\rho}_{0}^{*} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$
(K₁)

Les expressions analytiques exactes des composantes du vecteur \vec{K}_1 ont pu être calculées à l'aide d'un logiciel de calcul formel, elles sont données en annexe I.

L'intégration du système (6.44) associé aux conditions (6.13) conduit à une solution qui est fonction des valeurs initiales des constantes β et ξ_1 . Pour assurer l'unicité de la solution du problème d'ordre 1, ces constantes doivent satisfaire les équations de fermeture (6.21) et (6.30) que nous rappelons ci-dessous :

- la relation (6.21) propose la valeur théorique que doit avoir la constante ξ'_1 dans le repère de calcul \Re , ce dernier étant déterminé par une valeur unique de β que nous noterons β_0 . Pour une valeur donnée du couple (β , ξ_1), avec $\beta \neq \beta_0$, la valeur effective de la constante ξ'_1 , dans le repère ainsi défini, est obtenue après intégration des équations d'ordre 1 par la relation (6.20):

$$\xi_1' = -rac{1}{k+1} \left[\xi_0' rac{ ilde{p}_1^{*\prime}}{ ilde{p}_0^{*\prime}} + eta(k+rac{1}{n})
ight]$$

 la seconde équation de fermeture est donnée par la relation (6.30). L'évaluation de l'intégrale figurant au premier membre de cette équation et que nous noterons :

(6.45)
$$\mathcal{I}(\xi'_0) = -\int_{1}^{\xi'_0} f(\xi) d\xi,$$

est équivalente à la détermination de la solution en $\xi = \xi'_0$ de l'équation différentielle :

(6.46)
$$\frac{d\mathcal{I}(\xi)}{d\xi} = f(\xi), \quad \text{avec la condition initiale:} \quad \mathcal{I}(1) = 0$$

Cette écriture différentielle permet d'incorporer l'évaluation de \mathcal{I} au processus global d'intégration. Ainsi la solution de cette équation en fin de calcul fournit $I(\xi'_0)$.

Par suite, le problème numérique consiste à rechercher le couple de valeurs (β, ξ_1) qui soit solution de la fonction vectorielle à deux variables:

(6.47)
$$\begin{aligned} \xi_0' \frac{\tilde{p}_1'}{\tilde{p}_0'} + \beta(k + \frac{1}{n}) &= 0\\ \mathcal{I}(\xi_0') - \mathcal{H}(\xi_1, \xi_0', \xi_1') &= 0 \end{aligned}$$

6.6.3 Méthode numérique

En privilégiant l'approche analytique, nous avons ramené l'intégration d'un problème à trois variables à la résolution de deux problèmes à une seule variable. Sur le plan numérique, la méthode à mettre en œuvre s'en trouve considérablement simplifiée puisque nous n'avons à résoudre que des équations différentielles ordinaires. Ceci permet en outre d'éviter les problèmes de stabilité, de convergence et de précision, inhérents aux méthodes numériques dites "classiques". En contrepartie, la démarche analytique génère des développements mathématiques importants et conduit à des expressions relativement complexes. Dans ce type d'étude, l'usage de logiciels de calcul formel se révèle extrêmement avantageux.

Pour les raisons exposées au § 6.6.1, nous choisissons d'intégrer l'ensemble des équations de façon simultanée. En notant \vec{X}_0 le vecteur d'inconnues $(\tilde{u}_0^*, \log \xi, \log \tilde{\rho}_0^*)$, on écrit les équations (6.39a), (6.39b), (6.39c) sous la forme matricielle:

(6.48)
$$\frac{d}{d\tilde{z}_0^*}\left(\vec{X}_0\right) = \vec{K}_0$$

Par ailleurs, à l'aide de (6.39b), on substitue dans (6.44) la variable d'intégration \tilde{z}_0^* à ξ . On a donc à intégrer le système différentiel à 8 équations :

(6.49)
$$\begin{cases} \frac{d}{d\bar{z}_0^*}(\vec{X}_0) = \vec{K}_0 & \text{équations d'ordre 0} \\\\ \frac{d}{d\bar{z}_0^*}(\vec{X}_1) = \frac{1}{G_2}\vec{K}_1 & \text{système d'ordre 1 (équations (6.44))} \\\\ \frac{d\mathcal{I}}{d\bar{z}_0^*} = \frac{1}{G_2}f(\xi) & \text{équation de fermeture (6.46)} \end{cases}$$

La détermination des coefficients β et ξ_1 s'effectue selon un processus itératif: β et ξ_1 sont initialisés respectivement à 0.50 et 0.01; à l'issue de la première intégration du système (6.49), deux nouvelles valeurs numériques de β et ξ_1 , solutions de (6.47), sont prédites par une méthode de Newton à deux variables. Le processus est ainsi réitéré jusqu'à obtention de β et ξ_1 avec une précision requise. Sous cette forme, la convergence de la méthode n'est cependant pas excellente. En effet, la solution d'ordre 1 est extrêmement sensible à la valeur numérique de ξ_1 puisque celle-ci détermine directement les conditions initiales (6.13) du problème. Ces nouvelles conditions conduiront à une solution sensiblement différente, qui à son tour fournira une valeur numérique de ξ_1 très différente de la précédente. Par ailleurs, la méthode est également sensible à la précision avec laquelle on approche la frontière Σ' . En variant cette précision, certaines fonctions, comme la masse volumique $\tilde{\rho}_1^*$, peuvent subir d'importants écarts qui influenceront la prédiction des nouvelles valeurs de β et ξ_1 . Par suite, pour accélérer la convergence, il convient de débuter l'intégration en exigeant une précision relativement faible, d'une part sur β et ξ_1 , d'autre part sur l'approche de Σ' (de l'ordre de 10^{-2}); ceci permet de cerner rapidement les valeurs correctes. Il faut ensuite augmenter conjointement ces précisions au cours du calcul. Il est ainsi possible de calculer la solution avec une précision de l'ordre de 10^{-6} en une dizaine d'itérations sur (β, ξ_1) .

Chapitre 7

Résultats

Pour l'expérience numérique, nous avons étudié l'influence des paramètres suivants :

- la géométrie de l'écoulement:

- k=1: écoulement plan à symétrie axiale par rapport à l'axe Ox
- k=2: écoulement à symétrie de révolution autour de l'axe Oy

- l'indice adiabatique du gaz:

 $-\gamma = 4/3$: gaz polyatomique;

 $-\gamma = 7/5$: gaz diatomique;

- $\gamma = 5/3$: gaz monoatomique.

- la loi d'apport d'énergie :

- cas plan: $0 \le \alpha \le 2$, $(0 \le n \le 1)$;
- cas à symétrie de révolution : $0 \le \alpha \le 3$, $(0 \le n \le 1)$.

7.1 Validation du calcul

Dans un premier temps, nous avons comparé nos résultats à ceux obtenus par Andriamanalina [1] dans le cas particulier n = 1. En effet, dans notre modèle, ce cas correspond à une vitesse de déplacement constante de la source; ce qui, en considérant la source immobile est équivalent à l'explosion fixe se produisant dans un écoulement uniforme traitée en [1]. La comparaison s'effectue pour le cas plan, k = 1 et $\alpha = 2$. Indépendamment de l'effet de la perturbation, ce cas est remarquable car la vitesse de propagation de Σ (donnée par (5.10)) reste constante (figure 5.2, page 54) autrement dit, il n'y a pas d'atténuation de l'intensité du choc et l'écoulement est toujours à similitude interne. Les planches II.2 et II.3 présentent respectivement les évolutions, en fonction de la distance adimensionnée ξ , des grandeurs réduites de l'écoulement de base et leur perturbation d'ordre 1. Pour les grandeurs d'ordre 0, notre calcul fournit des résultats identiques à ceux obtenus par Andriamanalina. À l'ordre 1, on note une légère différence que nous attribuerons à une meilleure précision de notre calcul pour deux raisons: i) grâce au calcul formel, nous avons pu exprimer et programmer les expressions analytiques exactes des seconds membres du système (6.44) (aucune inversion de matrice n'est nécessaire), ii) la stratégie de calcul consistant à intégrer simultanément les systèmes d'ordre 0 et 1 implique également un gain en précision de calcul.

Sans approfondir pour le moment l'analyse de ces courbes, notons toutefois le comportement particulier de ρ_0 qui ne s'annule pas sur la frontière du vide (en $\xi = \xi'_0$). Σ' se comporte alors comme un piston en expansion avec une vitesse de dilatation constante.

7.2 Écoulement de base

L'un des principaux résultats de la théorie de Sedov est la loi de propagation du choc, donnée par (5.5). On a tracé, pour trois valeurs de γ et pour les deux types de symétries, l'évolution de deux constantes ξ_0 et ξ'_0 en fonction du coefficient α de la loi d'apport d'énergie (planche II.4). Les valeurs numériques de ces différentes constantes sont également regroupées sous forme de tableaux sur la planche II.1. On constate que ξ_0 est minimum pour n = 1 et croît au fur et à mesure que α décroît. Inversement, ξ'_0 décroît lentement depuis un maximum atteint pour n = 1, cette décroissance devenant brutale pour α compris entre 0 et 0.3. Ceci traduit une augmentation rapide de l'épaisseur de la couche de choc lorsque le débit d'énergie s'approche de la libération instantanée. Conformément à la théorie de Sedov, ξ'_0 tend asymptotiquement vers la limite théorique 0 obtenue pour $\alpha = 0$ (absence de milieu raréfié pour l'explosion instantanée).

L'épaississement de la couche de choc s'explique par le changement de comportement de la masse volumique lorsque α décroît. Excepté le cas n = 1 mentionné au paragraphe précédent, on voit nettement sur les planches II.6 et II.7 que, pour des valeurs élevées de α , la masse volumique présente un comportement singulier à l'approche de Σ' : elle tend vers 0 avec une pente infinie. La valeur prise par ξ'_0 est proche de 1 et on parle alors d'écoulement en couche mince. On observe ensuite que, pour α inférieur à une valeur critique α^* , la masse volumique tend vers 0 avec une pente nulle. Cette lente décroissance implique une forte augmentation de l'épaisseur de la couche de choc. L'étude des équations d'ordre 0 donne l'expression de la valeur critique α^* [1, 17]:

$$lpha^*=rac{(2k-1)(4-2\gamma)}{2k+\gamma(2k-1)}$$

Les valeurs numériques de α^* pour différentes valeurs de k et γ sont retranscrites dans le tableau ci-après.

	$\gamma = 1.33$	$\gamma = 1.40$	$\gamma = 1.67$
k=1	0.40	0.36	0.18
k=2	0.50	0.44	0.22

De l'analyse des planches II.4, on détermine également l'influence de la compressibilité du gaz et du type de symétrie. Ainsi, plus γ est faible (et donc plus le gaz est compressible) plus la matière se trouve comprimée dans un volume restreint (délimité par Σ et Σ'). Inversement, moins le gaz est compressible et plus la couche de choc est épaisse. On constate par ailleurs que l'épaisseur de la couche de choc est plus faible pour l'écoulement à symétrie de révolution que pour l'écoulement plan.

7.3 Effet du déplacement de la source d'énergie

7.3.1 Déformation et loi de propagation du choc

D'importants renseignements concernant l'effet du déplacement de la source sont fournis à l'ordre 1 par les paramètres β et ξ_1 . Rappelons que dans notre modèle, ξ_1 caractérise la déformation de la géométrie du choc (équation 5.17), celle-ci étant exprimée dans le repère mobile $\tilde{\Re}$ dont l'équation du mouvement est déterminée par β (équation 5.14). Leurs évolutions respectives sont présentées en fonction de α sur la planche II.5. On notera que α ne varie qu'entre 1.2 et 3 pour k = 2, et 1 et 2 pour k = 1. En effet, il n'est pas possible d'effectuer le calcul pour des valeurs de α inférieures pour des raisons que nous analyserons par la suite. Nous commenterons ces courbes dans le sens α décroissant et mentionnerons les valeurs numériques en premier lieu pour $\gamma = 1.4$ et k = 1 (les valeurs pour k = 2 sont spécifiées entre parenthèses).

Pour α voisin de 2 (resp. 3), ξ_1 est très petit et négatif. Avec α décroissant, ξ_1 croît progressivement jusqu'à changer de signe (lorsque $\alpha \approx 1.7$ pour k = 1 et $\alpha \approx 2.6$ pour k = 2). On remarque à ce stade peu d'influence de la valeur de γ puisque toutes les courbes sont pratiquement confondues. ξ_1 augmente ensuite brutalement pour atteindre rapidement des valeurs de l'ordre de 1. L'influence de α , déjà importante sur la solution de base, l'est donc également sur la géométrie du choc et par conséquent sur la structure de l'écoulement perturbé. De façon générale, la diminution de α augmente la déformation de Σ et entraîne un déplacement global de l'écoulement dans le sens opposé à celui de la source, excepté pour la plage de valeurs de α pour lesquelles ξ_1 est négatif. On observe également à ce stade une influence grandissante de la compressibilité du gaz puisque l'écart entre les différentes courbes se creuse sensiblement : pour $\alpha = 1.05$ par exemple, on obtient $\xi_1 = 0.40$ pour $\gamma = 1.33$ et respectivement 0.51 puis 0.94 pour $\gamma = 1.40$ et $\gamma = 1.67$ (planche II.1). Enfin le type de symétrie est aussi un facteur important.

Ces observations laissent entrevoir a posteriori une limitation de la méthode puisque dès lors que ξ_1 prend des valeurs importantes, la validité du développement en petites perturbations (5.17) est remise en cause. Mais la seule observation de l'évolution de ξ_1 n'est pas suffisante pour déterminer le domaine d'application de notre modèle, il faut s'assurer également de la validité des développements (5.16).

7.3.2 Écoulement interne

Les planches II.8 et II.9 présentent l'évolution des grandeurs \tilde{u}_1^* , \tilde{v}_1^* , $\tilde{\rho}_1^*$ et \tilde{p}_1^* calculées pour $\gamma = 1.4$ et différentes valeurs de α . Ces mêmes grandeurs sont représentées sur les planches II.12 et II.13 pour $\gamma = 1.33$ et $\gamma = 1.67$ dans le

cas plan. L'observation de ces planches suggère dans un premier temps les remarques générales suivantes concernant l'effet du déplacement de la source d'énergie :

- on constate naturellement l'apparition de la composante tangentielle de la vitesse v. Il s'ensuit que la symétrie radiale de l'écoulement de référence est détruite;
- on vérifie par ailleurs que la condition de glissement sur la frontière du vide est bien satisfaite. Cette condition impose en effet que la composante normale à Σ' de la vitesse des particules soit égale à la vitesse d'expansion de Σ' . Or, comme dans $\tilde{\mathcal{R}}$ la frontière du vide est centrée, cette condition s'écrit simplement $\omega' = \tilde{u}'$ et est indépendante de θ . Elle implique donc $\tilde{u}_1^*(\xi'_0) = 0$ (planche II.8d);
- la frontière Σ' est également par définition le lieu de l'écoulement où, excepté dans le cas n = 1, la masse volumique s'annule, ce qui s'écrit d'après (5.21):

$$ilde{
ho}_0^*(\xi_0')+\eta\cos heta\left(ilde{
ho}_1^*(\xi_0')+\Delta(\xi_0')\, ilde{
ho}_{0_{m{arepsilon}}}^*(\xi_0')
ight)=0$$

Cette équation ne peut être vérifiée que si ·

$$orall heta \Rightarrow \left\{ egin{array}{l} ilde{
ho}_0^*(\xi_0') = 0 \ ilde{
ho}_1^*(\xi_0') = \xi_1' \, ilde{
ho}_{0_\xi}^*(\xi_0') \end{array}
ight.$$

Or, le mouvement du repère mobile est déterminé par la condition $\xi'_1 = 0$ (équation 6.21) et § 5.2.6.0). Ainsi, la conservation globale de l'énergie (§ 6.6.2) permet bien d'obtenir la solution physique puisqu'on vérifie sur la planche II.8a (*resp.* II.9a, II.12a, II.13a) que l'on obtient :

$$ilde
ho_1^*(\xi)=0 \quad ext{en} \quad \xi=\xi_0'$$

- Concernant la perturbation de pression, on remarque sur la planche II.8b que la fonction \tilde{p}_1^* est négative et strictement décroissante. Cela traduit, pour la partie de l'écoulement située dans le premier cadran ($0 < \theta < \pi/2$) une diminution de pression, et inversement une augmentation de pression dans la partie de l'écoulement située dans le second cadran ($\pi/2 < \theta < \pi$). Le point de pression minimale est localisé en $\theta = 0$ sur Σ' , et celui de pression maximale en $\theta = \pi$, également sur Σ' . La dissymétrie de pression au sein de l'écoulement interne engendre une inflexion, d'abord progressive puis brutale, des trajectoires des particules fluides vers la zone de plus basse pression. Ce comportement est illustré par l'évolution de \tilde{v}_1^* (planche II.8d). Nous reviendrons sur ce point au paragraphe 7.4.

L'influence du paramètre α , entrevue précédemment (§ 7.3.1), est confirmée puisqu'on remarque de façon générale une augmentation de l'amplitude de variation de l'ensemble des fonctions de perturbations lorsque α décroît. Ceci pose à nouveau la question du domaine de validité du modèle. On remarque en effet que \tilde{v}_1^* tend vers l'infini sur Σ' . Dans ce cas cependant, cette singularité ne remet pas en cause la validité du développement de \tilde{v}^* car la fonction $h_1 = \tilde{\rho}_0^* \tilde{v}_1^*$ demeure quand à elle parfaitement finie, comme on peut le vérifier sur la planche II.11. Les planches II.10 et II.11 présentent l'évolution, en fonction de la variable d'intégration \tilde{z}_0 , des quantités d'ordre 0 et d'ordre 1 directement intégrées par le code numérique. On peut constater que les fonctions f_1 , g_1 et h_1 présentent des allures régulières et demeurent finies. Ceci justifie la formulation du problème d'ordre 1 avec ces nouvelles inconnues (§ 6.6.2). Cependant, les fonctions f_1 (et donc $\tilde{\rho}_1^*$) et \tilde{p}_1^* prennent rapidement des valeurs qui restreignent très fortement le domaine de validité de ce modèle.

La mise en relation de ces observations avec les résultats de la première partie de ce mémoire permet de comprendre les raisons de cette importante restriction du domaine d'application relativement à α . La première partie avait déjà mis en évidence le rôle important de la diminution de α sur l'anisotropie interne de l'écoulement. En outre, l'une des principales hypothèses de la présente modélisation, découlant directement de l'hypothèse de petite perturbation, est que la frontière Σ' reste non-déformée (§ 5.2.5). Or, on peut observer sur l'ensemble des figures de la planche I.5, présentant une explosion très faiblement anisotrope ($\Lambda = -0.005$) pour $\alpha = 1$, que la frontière du vide n'est pas circulaire. L'hypothèse de frontière Σ' non déformée n'est donc plus valable, même dans les cas de très faibles anisotropies.

La poursuite de l'analyse des résultats est conditionnée par le type d'application physique envisagée au travers du repère dans lequel est interprétée la solution. Dans ce paragraphe était présentée la solution d'ordre 1 direct ement issue de l'intégration des équations (6.44) et exprimée dans le repère $\tilde{\mathfrak{R}}$. La reconstruction, dans le repère \mathfrak{R}_1 , de la solution de l'explosion isotrope translatée ne sera pas présentée. Du fait de la vitesse infinie de déplacement de la source d'énergie à l'instant initial, ce problème ne conduit en effet à aucune application concrète physiquement envisageable. En revanche, interprétée dans le repère fixe \mathfrak{R} , la solution est équivalente au problème d'une certaine explosion anisotrope fixe dans un milieu au repos.

7.4 Explosion anisotrope équivalente

On a représenté sur la planche II.14 (*resp.* II.15) les formes de choc $R^*(\theta)$ de l'explosion anisotrope équivalente (calculées à partir de (5.24)) pour des valeurs de α comprises entre 1.1 et 2 (*resp.* 1.4 et 3) et pour trois valeurs de γ . À titre d'indication sont également tracées, en représentation paramétrique, les répartitions azimutales d'énergie correspondantes, calculées à partir de (5.35). Celles-ci sont par ailleurs représentées en fonction de θ sur la planche II.16. Pour reconstruire la solution perturbée, nous avons choisi la valeur $\eta = 0.05$, ceci afin de satisfaire l'hypothèse de petite perturbation et d'assurer la validité des développements.

À l'échelle du tracé, on ne distingue pratiquement aucune influence de α sur la représentation paramétrique de $\epsilon(\theta)$ car toutes les courbes semblent confondues. Cependant, même si les courbes $\epsilon(\theta)$ sont circulaires, elles sont fortement "excentrées" par rapport à O, lieu de l'explosion. C'est en ce sens qu'elles traduisent une forte anisotropie de la source. On remarque que les effets d'une anisotropie relativement importante de l'apport d'énergie ne sont ressentis que de façon atténuée sur la géométrie du choc. De façon surprenante, on observe également que le choc progresse moins vite dans le sens où l'apport d'énergie est le plus fort. La formule (1.17) reflète ce double résultat puisqu'on y remarque que $\epsilon(\theta)$ est proportionnel à $(R^*X')^{(k+3)}$. Ainsi l'effet de l'anisotropie d'énergie s'exerce principalement sur la frontière du vide, en revanche la forme du choc est pour sa part conditionnée par l'équilibre de l'énergie et des forces de pression sur Σ' . Ceci avait déjà été mis en évidence par Merlen & Dyment[25], dans le cadre d'étude de balistique intermédiaire. Ils avaient observé que l'onde de choc formée à la bouche du canon d'une arme à feu restait quasi-sphérique, ceci malgré l'anisotropie évidente du débit d'énergie à la bouche de l'arme (figure 7.1).



FIG. 7.1: Ombroscopie d'onde de bouche (arme de calibre 7.62mm)

Les planches II.17 à II.18 sont des représentations bidimensionnelles surfaciques des diverses grandeurs de l'écoulement dans la couche de choc. Sur ces planches, le point de coordonnées (0,0) est le centre du repère fixe \Re . On a également localisé, d'une part le repère \Re_1 (petite flèche verticale), et d'autre part le repère $\tilde{\Re}$ (flèche de taille moyenne). De façon analogue aux planches II.14 et II.15, ces cartes ne sont pas représentées dans l'espace physique mais dans *l'espace de similitude* (§ 1.3). Dans cet espace, le mouvement est figé et les repères \Re_1 et $\tilde{\Re}_1$ sont immobiles, l'abscisse du point \tilde{O} est par exemple égale à :

$$ec{O ilde{O}}=rac{-(eta-1)rac{Ut^n}{n}}{\left(rac{E}{
ho_\infty}
ight)^{rac{1}{(k+3)}}t^n}ec{i}=-\eta(eta-1)rac{\xi_0}{n}ec{i}$$

Les grandeurs sans dimension de l'explosion anisotrope ont été construites à partir de la solution ρ_0 , u_0 , p_0 , $\tilde{\rho}_1^*$, \tilde{u}_1^* , \tilde{v}_1^* , \tilde{p}_1^* grâce aux formules (5.32). On observe qu'il y a formation, dans la partie "droite" de l'écoulement, d'une zone de dépression résultant de l'avancement plus rapide du choc dans cette direction et de l'augmentation de l'épaisseur de la couche de choc (planche II.17a), la masse volumique y est de ce fait plus faible. Inversement en $\theta = \pi$, où le choc est ralenti, le rapprochement des surfaces Σ et Σ' entraîne une compression du fluide; la masse volumique y est la plus importante, ce qui traduit une accumulation de matière dans cette zone. Comme nous l'avons développé au paragraphe 7.3.1, la dissymétrie de pression entraîne une déviation, plus ou moins brutale selon l'anisotropie de l'écoulement, des trajectoires des particules fluides. Elle se traduit par l'augmentation de la vitesse orthoradiale v_0 .

On observe alors l'existence d'une mince zone, localisée autour de la frontière du vide, où v_0 est maximale. Cette zone est le siège d'une importante vorticité due aux gradients transversaux de vitesse (planche II.17a). On visualise très bien ce comportement sur la planche II.17b présentant les "trajectoires" (cf. § 2.2) des particules fluides. Celles-ci, après avoir subi une brusque déviation, convergent vers un *puits* unique, lieu de pression minimale dans l'écoulement. Rappelons que dans le cas de l'explosion isotrope, les trajectoires sont rectilignes et aboutissent chacune à un puits unique. La frontière du vide est alors constituée d'une infinité de puits. On constate qu'une très faible perturbation de cet écoulement engendre une structure fondamentalement différente.

7.5 Application aux écoulements hypersoniques

Une autre application physique du problème de l'explosion isotrope translatée est possible si l'on interprète la solution dans le repère $\tilde{\Re}$, le milieu extérieur est alors vu en mouvement à la vitesse non uniforme $(1 - \beta)Ut^{(n-1)}\vec{y}$ et la source d'énergie est pour sa part translatée à la vitesse $-\beta Ut^{(n-1)}\vec{y}$ dans la direction opposée. Supposons que \tilde{O} est fixe ($\tilde{\Re}$ est alors galiléen), cela revient à considérer le problème d'une explosion violente se produisant dans un courant, et dont la source d'énergie²³ est translatée dans la direction opposée (figure 7.2b). Par suite, l'identité avec le problème de la source isotrope translaté est réalisée à condition de poser :

(7.1)
$$\bar{\eta} = \frac{(1-\beta)U}{\xi_0} \left(\frac{\rho_{\infty}}{E}\right)^{\frac{1}{k+3}} = (1-\beta)\eta$$



FIG. 7.2: Interprétation de la solution de l'explosion isotrope translatée dans le repère de calcul Å.

Dans l'analogie hypersonique (§ 1.2), la frontière Σ' (qui reste non déformée et centrée sur \tilde{O}) s'identifie à la trace, dans un plan transversal, d'un engin élancé à symétrie de révolution placé sans incidence dans un écoulement hypersonique (figure 1.2) et subissant une *rafale transversale* d'intensité égale à l'image de la vitesse du courant extérieur $(1 - \beta)Ut^{(n-1)}\vec{y}$ par la transformation $t = \frac{x}{V_{\infty}}$ (figure 7.3). On note \bar{U} la vitesse de la rafale, fonction de l'abscisse longitudinale x de l'engin:

$$ec{U} = (1-eta) U \left(rac{x}{V_\infty}
ight)^{(n-1)} ec{y} =
u(x) V_\infty ec{y}$$

où $\nu(x)$ peut être considérée comme l'incidence locale de la rafale²⁴:

$$u(x)=(1-eta)Urac{x^{(n-1)}}{V_\infty^n}$$

On note $(\bar{u}_1^*, \bar{v}_1^*, \bar{p}_1^*, \bar{p}_1^*)$ les fonctions adimensionnées d'ordre 1 de la solution du problème formulé avec $\bar{\eta}$. Pour obtenir ces fonctions à partir de celles résultant de l'intégration du problème de la source translatée, il suffit de

^{23.} Dans le cadre de l'application aux écoulements hypersoniques, la source d'énergie est en l'occurrence un fil rectiligne imfini et initialement en \tilde{O} , l'écoulement est plan (k = 1), invariant par translation dans la direction du fil.

^{24.} On peut décomposer la vitesse de l'écoulement par $\vec{V} = V_{\infty}\vec{x} + \nu(x)V_{\infty}\vec{y}$.



coupe dans le plan transversal $x = x_0$

FIG. 7.3: Analogie hypersonique : corps élancé en loi de puissance (n < 1) soumis à une rafale transversale.

traduire l'équivalence des deux problèmes. Pour les pressions, l'identité des solutions conduit par exemple aux relations suivantes :

$$\left\{egin{array}{c} ar{p}_0^* = ilde{p}_0^* \ ar{\eta}ar{p}_1^* = \eta ilde{p}_1^* \end{array}
ight.$$

On en déduit :

$$ar{p}_1^*=rac{ ilde{p}_1^*}{(1-eta)}$$

Ainsi techniquement, la solution est simplement obtenue en divisant par $(1-\beta)$ la solution du problème de l'explosion isotrope translatée. En outre, le problème ayant été reformulé avec le paramètre $\bar{\eta}$, il convient également de réexaminer le domaine de validité de l'hypothèse de petite perturbation. Introduisons à cet effet le paramètre $\bar{\nu}$, valeur moyenne sur l'obstacle de l'incidence $\nu(x)$, donné par:

(7.2)
$$\bar{\nu} = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} \nu(x) \, dx = \frac{(1-\beta)UL^{(n-1)}}{nV_{\infty}^{n}}$$

On peut alors récrire $\nu(x)$ sous la forme:

(7.3)
$$\nu(x) = n\bar{\nu} \left(\frac{x}{L}\right)^{(n-1)},$$

dont l'évolution est tracée sur la figure 7.4 pour n = 0.90. Dans le problème de l'explosion isotrope translatée, la grandeur quantifiant l'intensité de la perturbation est U, alors que dans l'optique de l'aérodynamique hypersonique, le paramètre représentatif est $\bar{\nu}$. D'après 7.1, l'hypothèse de petites perturbations pour le cas hypersonique s'écrit :

$$\bar{\eta} = (1 - \beta)\eta \ll 1$$

Or, à chaque valeur de n, définissant une géométrie particulière de l'obstacle, il correspond une valeur de β issue du calcul de la solution du problème de l'explosion translatée. Nous avons vu que pour n de l'ordre de 0.83, β est de l'ordre de 1 et donc $(1 - \beta)$ est de l'ordre de 0 (§ 7.3.1, planche II.1. Il s'ensuit que la valeur correspondante de $\eta = \bar{\eta}/(1 - \beta)$ ne satisfait plus l'hypothèse de petites perturbations du problème de la source translatée. En d'autre termes, dans les cas d'explosions translatées pour lesquelles β est de l'ordre de 1, la quantité U doit être très grande pour que $\bar{\nu}$, son "image" dans l'analogie, soit faible devant 1. Or la solution de l'explosion translatée n'est plus valable dans ce cas. Ceci restreint sensiblement le domaine de validité du modèle pour l'application aux écoulements hypersoniques.



FIG. 7.4: Incidence locale $\nu(\frac{x}{L})$ pour n = 0.90

Efforts aérodynamiques.

Dans l'analogie hypersonique, la frontière Σ' s'apparente à la trace de l'obstacle dans un plan transversal et l'énergie de l'explosion s'identifie à sa traînée. Celle-ci s'exprime :

$$F_x = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^L (ar p(\Sigma') - p_\infty) R' R'_x \, dx d heta$$

On note L la longueur de l'obstacle, $\tau = 2 \frac{R(L)}{L} \xi_0 \xi'_0$ l'épaisseur relative du corps, et $S_{\text{ref}} = (\pi L^2/4) \tau^2$ la surface de référence. Compte tenu du fait que la pression extérieure est négligeable, on obtient après calcul:

$$F_x = \frac{1}{2} \frac{\pi L^2 \tau^2}{4} \rho_\infty V_\infty^2 L^2 C_x$$

où C_x est le coefficient de traînée :

$$C_x = rac{ au^2}{2\pi \xi_0^4 {\xi_0'}^4}$$

En l'absence d'écoulement transversal, aucun effort de portance ne s'exerce sur l'ogive en raison de l'axisymétrie de l'écoulement. La portance induite par la rafale transversale est donnée par :

$$F_{y_{
m rafale}} = - \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{L} ar{p}(\Sigma') R' \cos heta \, dx d heta$$

Après calcul on obtient:



FIG. 7.5: Coefficient de portance $C_y(n)$

Chapitre 7. Résultats

(7.4)
$$F_{y_{\text{rafale}}} = -\frac{1}{2} S_{\text{ref}} \rho_{\infty} V_{\infty}^{2} \underbrace{\left[\frac{4n^{2}}{\gamma+1} \xi_{0}' \bar{p}_{1}^{*} \frac{(1-\beta)UL^{(n-1)}}{(3n-1)V_{\infty}^{n}}\right]}_{C_{y_{\text{rafale}}}}$$

 $C_{y_{rafale}}$ est le coefficient de portance, tracé ci-contre. À l'aide de (7.2) il s'exprime encore :

(7.5)
$$C_{y_{\text{rafale}}} = \frac{2(2n-1)(n+1)\beta}{\pi n(3n-1)\xi_0^4 \zeta_0'^4(1-\beta)}\bar{\nu}$$

Cas particulier du cône

Dans le cas particulier n = 1, la fonction (7.3) s'exprime :

$$u_{n=1} = (1-eta) rac{U_\infty}{V_\infty} = ext{Cste}$$

Le flux transversal est donc constant sur toute la longueur de l'obstacle qui, lorsque n = 1, est un cône d'équation :

$$R'(x)=\left(rac{E}{
ho_{\infty}}
ight)^{rac{1}{k+3}}rac{x}{V_{\infty}}\xi_{0}\xi_{0}'$$

On en déduit que la solution du problème de la source translatée observée dans le repère \Re s'applique au calcul de l'écoulement hypersonique, de vitesse infini amont V_{∞} , autour d'un cône placé à l'incidence ν (figure 7.6), c'est le cas traité en [1].



FIG. 7.6: Analogie hypersonique : Cas particulier du cône en incidence (n = 1).

Le coefficient de portance (7.5) s'écrit dans ce cas:

$$C_{y_{ ext{incidence constante}}} = rac{2eta}{\pi\xi_0^4\xi_0^4(1-eta)} \;
u$$

Il est identique à celui calculé dans [1] lorsque n = 1. Dans les mêmes conditions, on rappelle que la théorie newtonienne donne $C_y = 2\nu$.

7.6 Conclusion

Adaptée de la théorie de l'explosion dans un courant [26], la théorie de l'explosion isotrope translatée a été développée dans l'optique d'apporter, par le biais d'une résolution analytique, une solution au problème de l'explosion anisotrope autosemblable pour les cas de faibles anisotropies et ainsi de valider les résultats obtenus dans la première partie de ce mémoire. L'anisotropie de l'explosion est provoquée par la perturbation de la solution de référence que constitue l'explosion isotrope ponctuelle de Sedov. De manière à pouvoir identifier l'écoulement résultant à celui consécutif à une explosion anisotrope dont l'anisotropie est issue de la source d'énergie, le choix de la forme de la perturbation est soumis à deux contraintes: i) la loi d'évolution temporelle de la perturbation doit préserver la propriété d'auto-similitude ii) les conditions sur le choc de l'écoulement perturbé doivent strictement rester celles d'une explosion anisotrope dans un milieu au repos. Ces conditions sont remplies en supposant que la source isotrope est en translation non uniforme selon une loi de puissance du temps.

De façon classique dans l'étude de ce type d'écoulement, l'analyse dimensionnelle et le traitement en petites perturbations permettent de simplifier considérablement le problème en réduisant le nombre des variables de trois à une. L'influence du déplacement de la source sur les grandeurs de l'écoulement est prise en compte sous la forme de développements en petites perturbations de la solution de référence autour de la variable liée au déplacement de la source. Les développements doivent être limités à l'ordre 1 pour préserver la similitude interne de l'écoulement. En contrepartie, la solution n'est applicable que dans le cadre de l'hypothèse de choc fort, c'est-à-dire au début du mouvement. L'équivalence formelle des équations et conditions régissant ce problème avec celles du problème de l'explosion intense anisotrope à similitude interne a pu être démontrée. La résolution numérique est ramenée à l'intégration de deux systèmes d'équations différentielles ordinaires. Les calculs ont été effectués pour différentes valeurs de α et γ ainsi que pour les types de symétries plane et cylindrique. Le code de calcul a pu être validé dans le cas n = 1, correspondant à une translation uniforme de la source, avec les résultats obtenus dans le cadre de la théorie de l'explosion dans un courant [1]. L'expérience numérique a montré une forte influence de l'exposant α de la loi d'apport d'énergie et révélé les limites du domaine d'application de la méthode. Ainsi, seuls peuvent être traités les cas où $\alpha > 1.2$, correspondants à des écoulements de type couche mince (décroissance de la masse volumique avec une pente infinie sur la frontière du vide). Aucun cas d'écoulement en couche épaisse n'est envisageable, en particulier le cas de l'explosion instantanée ($\alpha = 0$). De façon générale, le déplacement de la source entraîne une destruction de la symétrie radiale de l'écoulement de référence, cette dissymétrie intervenant au niveau des géométries du choc et de la frontière du vide, ainsi que sur l'ensemble des grandeurs dynamiques de l'écoulement. En particulier, la perturbation très prononcée de la pression dans la couche de choc engendre, à l'approche de la frontière du milieu raréfié, une inflexion brutale des "trajectoires" des particules fluides qui migrent vers la zone de l'écoulement de plus basse pression. En ce sens, la méthode a permis de mettre en évidence les structures nouvelles associées aux explosions anisotropes autosemblables, et confirme les résultats obtenus dans la première partie de ce mémoire.

Conclusion générale

La plus grande partie des écoulements traités a dévoilé sa structure fondamentalement différente de celle du cas isotrope, fondée sur une relation étroite entre la forme du choc et la répartition de la vorticité dans la couche de choc. De façon générale, l'anisotropie du front de choc implique une anisotropie du champ de pression aval. Sous l'effet de cette dissymétrie de pression, les "trajectoires" (images des trajectoires matérielles dans la similitude interne) s'incurvent au voisinage de la cavité raréfié et s'enroulent autour de celle-ci pour pour converger vers un "puits" commun, qui est le lieu de plus basse pression dans la couche de choc. Ce phénomène de "pincement" des "trajectoires", associé à un fort gradient transversal de vitesse, est responsable d'un fort rotationnel localisé dans un mince couche le long de la cavité vide. La similitude interne traduit l'invariance au cours du temps de la structure de l'écoulement. Elle introduit donc une singularité, souvenir du fait qu'à l'instant initial, cette structure était contenue en un point, lieu de l'explosion. Par suite, l'image de cette singularité n'est donc pas un ensemble de noeuds comme dans le cas isotrope (toutes les trajectoires sont radiales et aboutissent chacune à un puits qui leur est propre), mais un seul point présentant les propriétés d'un noeud dégénéré, et de fait numériquement délicat à approcher. L'un des résultats les plus remarquables est que cette structure s'applique également au cas de l'explosion instantanée anisotrope pour lequel, contrairement à ce que prévoit la théorie de Sedov dans le cas isotrope, il semble que la solution ne soit pas continue jusqu'au centre de l'explosion. En particulier, il se formerait, comme dans le cas d'un apport d'énergie non-instantané, une cavité vide en expansion autour de la source d'énergie.

L'influence du débit de la source d'énergie a pu être identifiée. Ainsi, la diminution de α intensifie les effets de l'anisotropie du choc sur l'écoulement interne. La structure des "trajectoires", ajoutée à la forte disproportion constatée entre l'anisotropie très prononcée de la frontière du vide (dont on rappelle qu'elle est directement reliée à celle de la source d'énergie) et celle du choc, tendent à prouver que les effets de l'anisotropie s'exercent principalement sur la topologie de l'écoulement interne et ne sont que faiblement ressentis sur le choc. Ce résultat permet de comprendre l'efficacité du modèle monodimensionnel de Sedov dans sa capacité à prédire avec précision la loi de propagation du choc. En revanche, ce dernier ne peut contenir les caractéristiques que nous avons décrites et qui sont intimement liées à l'existence de vorticité au sein de l'écoulement. L'approche quasi-analytique développée dans la seconde partie de ce mémoire à montré que ces caractéristiques étaient conservées même pour une très faible perturbation de l'écoulement isotrope. Ainsi, la solution autosemblable à symétrie isotrope (vorticité nulle) ne peut être considérée comme limite asymptotique de l'explosion autosemblable anisotrope (vorticité infinie) lorsque l'anisotropie s'annule. Ces deux écoulements autosemblables sont les limites d'un domaine qui encadre les explosions réelles pour lesquelles le mode d'apport d'énergie coïncide avec une génération finie de vorticité.

Bien entendu, ce mémoire n'épuise pas le problème des chocs anisotropes, ni même celui des chocs autosemblables, mais les approches mises en œuvre ici peuvent servir à d'autres cas. Les premières tentatives en milieu peu compressible sont une anticipation de ce que pourraient apporter nos méthodes de calcul dans le cas du problème de la bulle de Rayleigh anisotrope. Il semble que la phase d'expansion de ce problème fasse apparaître également une couche de vorticité interne au contact de la bulle, mais que la structure de "jet rentrant" n'est pas perceptible ou du moins que si amorce il y a, elle ne ressemble pas à un processus cumulatif intense. Comme perspectives d'extension de notre modèle, citons encore le problème de la focalisation anisotrope d'ondes de chocs [6], ou encore, dans le domaine de l'astrophysique, celui des explosions en milieu non homogène [3].

.

Annexes

i. i. ł.

Annexe A

Signification physique de la quantité $g = u^* - \frac{\gamma+1}{2} - mv^*$

Isolons le terme $\left(u^* - \frac{\gamma+1}{2}\right)$ intervenant dans g. Ce terme est la forme adimensionnée de la composante radiale de la vitesse relative d'une particule par rapport à un *point géométrique* de l'espace physique (et non une particule) dont la loi de mouvement, *similaire* à celle du choc (1.6) ou de la frontière du vide (1.8), découle de l'homothétie qui laisse *invariante la forme de l'onde au cours du temps*. L'équation de ce point imaginaire est donnée par :

$$r(t) = \left(rac{E}{
ho_{\infty}}
ight)^{rac{1}{k+3}} t^n R^* X(heta = heta_c)$$

et sa vitesse:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{nr}{t}\vec{e_r}$$

Notons \vec{V}_{rel} , la vitesse relative d'une particule par rapport au point géométrique avec lequel elle *coïncide* à un instant t. À l'aide des relations d'adimensionnement (1.9), elle s'écrit :

$$ec{V}_{rel} = ec{V} - r_t ec{e}_r = rac{2n}{\gamma+1} rac{r}{t} \left[\left(u^* - rac{\gamma+1}{2}
ight) ec{e}_r + v^* ec{e}_ heta
ight]$$

Avec les notations de la figure A.1, la projection orthogonale de cette vitesse sur la direction indiquée par la normale



FIG. A.1: Signification physique de la grandeur g

au point du choc situé sur le même rayon s'écrit :

$$ec{V}_{rel}.ec{n} = \left(u^* - rac{\gamma+1}{2}
ight) \sin\lambda - v^* \cos\lambda = g \sin\lambda = g \, ec{e}_r.ec{n}$$

La quantité g peut donc s'interpréter comme la projection de la vitesse relative \vec{V}_{rel} sur la direction radiale \vec{e}_r parallèlement à la direction $\vec{\tau}$. De la même façon, la projection suivant \vec{e}_r de \vec{V}_{rel} sur $\vec{\tau}$ s'écrit:

$$\left[\left(u^*-rac{\gamma+1}{2}
ight)m+v^*
ight]\sin\lambda=v^*+m(g+mv^*)$$

de sorte que

$$ec{V_{rel}} = gec{e}_r + \left[v^* + m(g+mv^*)
ight]ec{ au}$$

g et $(v^* + m(g + mv^*))$ sont donc les coordonnées contravariantes de $\vec{V} - r_t \vec{e_r}$ dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{\tau})$.

Annexe B

Résultats généraux de géométrie différentielle et d'algèbre tensorielle

Considérons un espace de dimension 2 rapporté à un repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ (non obligatoirement orthonormé). On note x_1, x_2 les coordonnées d'un point M dans ce repère:

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1,2} x_i \vec{e_i}$$

Appliquons un changement de coordonnées défini par deux fonctions $f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)$ continues et admettant des dérivées partielles continues par rapport aux variables (x_1, x_2) . On appelle (x'_1, x'_2) les coordonnées curvilignes de M, images de (x_1, x_2) :

$$x_1' = f_1(x_1, x_2), \qquad x_2' = f_2(x_1, x_2)$$

Lorsque l'une des coordonnées curvilignes x'_i varie, l'autre restant fixée, le point M décrit une courbe appelée courbe coordonnée. Si en M le jacobien J n'est pas nul, les vecteurs tangents à ces courbes sont indépendants et définissent une base. On appelle repère local en M, la base constituée des vecteurs suivants (figure B.1):

$$ec{e}_1'=rac{\partial \overline{OM}}{\partial x_1'},\qquad ec{e}_2'=rac{\partial \overline{OM}}{\partial x_2'}$$

Un déplacement infinitésimal $d\overline{OM}$

$$d\overline{OM} = dx_1\vec{e_1} + dx_2\vec{e_2}$$

est par ailleurs égal à:

$$d\overrightarrow{OM}=rac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial x_1'}dx_1'+rac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial x_2'}dx_2'$$

soit encore dans la base (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)

$$d\overrightarrow{OM} = dx'_1 \underbrace{\left(rac{\partial x_1}{\partial x'_1} ec{e}_1 + rac{\partial x_2}{\partial x'_1} ec{e}_2
ight)}_{ec{e}'_1} + dx'_2 \underbrace{\left(rac{\partial x_1}{\partial x'_2} ec{e}_1 + rac{\partial x_2}{\partial x'_2} ec{e}_2
ight)}_{ec{e}'_2}$$

Les propriétés métriques de l'espace des coordonnées x'_i rapportées au repère local en M sont caractérisées par le tenseur métrique, que nous noterons \mathcal{G} , dont les composantes g'_{ij} sont les produits scalaires des vecteurs de base $\vec{e'_i}$:

$$g'_{ij} = \vec{e}'_i . \vec{e}'_j$$

 g'_{ij} est d'un champ de tenseur car ses composantes dépendent de la position de M. Si la base est orthogonale le tenseur est diagonal. La base est orthonormée lorsque, de plus, les termes diagonaux sont unitaires.



FIG. B.1: Lignes coordonnées et repère local en M

La connaissance du tenseur métrique g_{ij} relativement à une base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ quelconque permet de définir de façon formelle le produit scalaire de deux vecteurs exprimés dans cette base. Conformément aux conventions de notations de l'algèbre tensorielle, nous représenterons avec des indices *supérieurs* les composantes de deux vecteurs \vec{V} et \vec{W} dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$\overrightarrow{V}=v^1ec{e_1}+v^2ec{e_2},\qquad \overrightarrow{W}=w^1ec{e_1}+w^2ec{e_2}$$

Tout vecteur de l'espace se décomposant de cette façon est dit *contravariant* à la différence des vecteurs de base $\vec{e_i}$ dits *covariants* (représentés avec des indices *inférieurs*)²⁵. Le tenseur g_{ij} calculé avec les vecteurs de base est un tenseur d'ordre 2 doublement covariant. La matrice inverse de la matrice des g_{ij} est égale au tenseur métrique deux fois contravariants g^{ij} :

$$(g_{ij})^{-1} = g^{ij}$$

Les tenseurs g_{ij} et g^{ij} permettent de passer simplement des composantes contravariantes aux composantes covariantes. Si v^i sont les composantes contravariantes de \overrightarrow{V} , les composantes covariantes correspondantes sont obtenues par le produit tensoriel contracté des v^i avec le tenseur métrique de variance opposée:

$$v_i = \sum_j g_{ij} v^j$$

Réciproquement, les composantes contravariantes se déduisent des composantes covariantes par :

$$v^i = \sum_j g^{ij} v_j$$

Le produit scalaire des vecteurs \overrightarrow{V} et \overrightarrow{W} est le produit tensoriel doublement contracté de ces vecteurs (variants ou covariants) avec le tenseur métrique de variance opposée :

$$(\overrightarrow{V}.\overrightarrow{W})=\sum_{ij}g_{ij}\,v^iw^j=\sum_{ij}g^{ij}\,v_iw_j$$

ou encore:

$$(\overrightarrow{V}.\overrightarrow{W})=\sum_{i}v^{i}w_{i}=\sum_{i}v_{i}w^{i}$$

Rappelons enfin que le gradient d'une fonction scalaire f est un vecteur *covariant* grad f qui, dans tout système de coordonnées curvilignes, a pour composantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x'_i}$$

^{25.} Cette distinction fait référence aux règles de changement de base différentes pour un vecteur quelconque et un vecteur de base.

Annexe C

Métrique de l'espace (η, θ)

La métrique de l'espace (η, θ) est induite par les transformations successives appliquées depuis l'espace physique (r, θ) . Le calcul des métriques de ces différents espaces fait intervenir des notions de géométrie différentielle et d'algèbre tensorielle dont sont rappelés quelques résultats élémentaires en annexe B.

Métrique de l'espace physique

Selon le type de symmétrie considéré, le plan physique est rapporté aux coordonnées polaires (k = 1) ou cylindrique (k = 2). Dans un plan méridien de l'écoulement, un déplacement infinitésimal, s'écrit en coordonnées polaires $\overline{dM} = dr \, \vec{e_r} + d\theta \, \vec{e_{\theta}}$, où les vecteurs :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta \, \vec{c}_y + \sin\theta \, \vec{c}_z \\ \vec{e}_\theta = r \left(-\sin\theta \, \vec{c}_y + \cos\theta \, \vec{c}_z \right) \end{cases}$$

définissent en M un repère local. Le tenseur métrique associé en M à la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ ainsi définie s'exprime:

$$\mathcal{G}_{r heta} = egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$



FIG. C.1: Repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_{\theta})$

Métrique de l'espace (X, θ)

L'analyse dimensionnelle (§ 1.3) a permis de réduire le système d'équations à trois variables (t, r, θ) , à un système à deux variables adimensionnées (X, θ) . Nous avons alors appliqué le changement de variables :

$$(t,r, heta) \longrightarrow \left(t,X = rac{r}{R(t, heta)}, heta
ight)$$

que l'on interprète comme définissant une transformation ponctuelle, à t fixé, du plan physique vers le plan de similitude. Le déplacement infinitésimal \overline{dM} peut alors s'écrire en fonction des variables (X, θ) :

$$dM = (R dx + mr d\theta) \vec{e_r} + d\theta \vec{e_\theta} = dX \vec{e_X} + d\theta \vec{e_\theta}$$

où les vecteurs:

$$\vec{e}_x = R \, \vec{e}_r, \qquad \vec{e}_{\theta}' = m \, R \, X \, \vec{e}_r + \, \vec{e}_{\theta}$$

définissent le repère local en M dans le système de coordonnées (X, θ) . Le vecteur \vec{e}_x (porté par une courbe $\theta = C^{te}$) est colinéaire au vecteur \vec{e}_r . Par contre, le vecteur \vec{e}_{θ} , tangent en M à la ligne $X = C^{te}$, n'est pas colinéaire à \vec{e}_{θ} . La base ainsi définie n'est donc pas orthogonale. Le tenseur métrique s'exprime dans cette base :

$${\cal G}_{X heta}=R^2egin{bmatrix} 1&mX\mmode mX&X^2\left(1+m^2
ight) \end{bmatrix}$$

Il n'est pas diagonal et traduit de fait la non orthogonalité de la base $(\vec{e}_X, \vec{e}_\theta)$ relativement au plan physique. Du terme croisé de ce tenseur on déduit l'angle entre les vecteurs de la base locale:

$$\cos{(\widehat{\vec{e}_x}, \vec{e}_{ heta}')} = rac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$



FIG. C.2: Repère local $(\vec{e}_x, \vec{e}_{\theta}')$

On vérifie aisément que cet angle, qui n'est fonction que de l'anisotropie locale du choc $m(\theta)$ est égal à l'angle λ entre la direction radiale et la tangente au choc au point de même azimut (figure C.2). Les lignes coordonnées $X = C^{\text{te}}$ sont parallèles au choc. Par ailleurs, on remarque que sur les axes de symétrie, et plus généralement en tout point du choc caractérisé par $m(\theta_c) = 0$, la base locale en M est orthogonale.

Métrique de l'espace (η, θ)

Considérons à présent la transformation définie par (2.1):

$$(t, X, \theta) \longrightarrow (t, \eta = \log X, \theta), \qquad X > 0$$

Le déplacement infinitésimal *vecldM* s'écrit en fonction des variables (η, θ) :

$$\overline{dM} = d\eta \ ec{e}_\eta + d heta \ ec{e}_ heta^+$$

où $(\vec{e}_{\eta},\vec{e}_{\theta}')$ sont les vecteurs du repère local en M dans le système de coordonnées (η,θ) :

$$\vec{e}_{\eta} = X \, \vec{e}_x = r \, \vec{e}_r$$
 $\vec{e}_{\theta}'' = \vec{e}_{\theta}' = mr \, \vec{e}_r + \vec{e}_{\theta}$

Le tenseur métrique associé à cette base s'écrit :

$${\cal G}_{\eta heta} = r^2 egin{bmatrix} 1 & m \ m & 1+m^2 \end{bmatrix}$$

Le tenseur métrique contravariant est obtenu par inversion de la matrice ci-dessus :

(C.1)
$$\mathcal{G}^{\eta\theta} = \frac{1}{R^2 e^{2\eta}} \begin{bmatrix} 1 + m^2 & -m \\ -m & 1 \end{bmatrix}$$

Annexe D

Métrique de l'espace (ζ, ξ)

Soit la transformation définissant les variables (ζ, ξ) :

$$egin{aligned} &d\zeta = \psi \left[\left(g + mv^*
ight) d\eta + \left(v^* + m \left(g + mv^*
ight)
ight) d heta
ight] \ &d\xi = \phi \left[v^* \, d\eta - g \, d heta
ight] \end{aligned}$$

Si le jacobien n'est pas nul, la transformation inverse s'écrit :

(D.1)
$$\begin{pmatrix} d\eta \\ d\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{v^{*2} + (g + mv^{*})^2} \begin{bmatrix} \frac{g}{\psi} & \frac{v^* + m(g + mv^{*})}{\phi} \\ \frac{v^*}{\psi} & -\frac{g + mv^*}{\phi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\zeta \\ d\xi \end{pmatrix}$$

dont on déduit l'expression des vecteurs de base:

$$\begin{cases} \vec{e}_{\zeta} = \frac{1}{\psi(v^{*2} + (g + mv^{*})^2)} \begin{pmatrix} g \\ v^{*} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_{\eta}, \vec{e}_{\theta})} \\ \vec{e}_{\xi} = \frac{1}{\phi(v^{*2} + (g + mv^{*})^2)} \begin{pmatrix} v^{*} + m(g + mv^{*}) \\ -(g + mv^{*}) \end{pmatrix}_{(\vec{e}_{\eta}, \vec{e}_{\theta})} \end{cases}$$

On vérifie que le tenseur métrique correspondant :

$${\cal G}_{{\mathfrak c},{\mathfrak c}} = rac{r^2}{{v^*}^2 + (g+mv^*)^2} egin{bmatrix} rac{1}{\psi^2} & 0 \ 0 & rac{1}{\psi^2} \end{bmatrix}.$$

est diagonal, signe que les vecteurs $\vec{e_{\zeta}}$ et $\vec{e_{\xi}}$ sont bien orthogonaux dans l'espace physique (figure D.2)



Notons cependant que ces vecteurs n'étant pas unitaires, la dénomination d'abscisse curviligne pour la coordonnée ζ est de fait un abus de language.

.

Annexe E

Équations pour les inconnues h, g, v^*, ψ dans les systèmes de coordonnées (ζ, ξ) et (\hat{S}, ξ)

Dans le système de coordonnées ζ, ξ), les 4 équations aux dérivées partielles pour les inconnues h, g, v^*, ψ s'écrivent sous la forme matricielle :

$$\psi \mathcal{A} \begin{pmatrix} h \\ g \\ v^* \\ \psi \end{pmatrix}_{\zeta|_{\xi}} + \phi \mathcal{B} \begin{pmatrix} h \\ g \\ v^* \\ \psi \end{pmatrix}_{\xi|_{\zeta}} = \begin{pmatrix} J_1 - J_4 / \gamma \\ J_2 \\ J_3 \\ \psi J_5 \end{pmatrix}$$

où les matrices \mathcal{A} et \mathcal{B} sont données par :

$$\mathcal{A} = egin{bmatrix} rac{b}{\gamma} & (g+mv^*) & v^*+m\,(g+mv^*) & 0 \ rac{\gamma-1}{2\gamma}\,c_0^2\,(g+mv^*) & b & m\,b & 0 \ rac{\gamma-1}{2\gamma}\,c_0^2\,v^* & 0 & b & 0 \ 0 & -\psi\,v^* & \psi\,g & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = egin{bmatrix} 0 & v^* & -g & 0 \ rac{\gamma-1}{2\gamma} \, c_0^2 \, v^* & 0 & 0 & 0 \ rac{1-\gamma}{2\gamma} \, c_0^2 \, (g+mv^*) & 0 & 0 & 0 \ 0 & \psi \, (g+mv^*) & \psi \, v^* + m \, (g+mv^*) & b \end{bmatrix}$$

Dans le système de coordonnées (\hat{S}, ξ) , ces mêmes équations s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} h \\ g \\ v^* \\ \psi \end{pmatrix}_{\hat{S}} = \mathcal{E}^{-1} \left(\begin{pmatrix} J_1 - \frac{J_4}{\gamma} \\ J_2 \\ J_3 \\ \psi J_5 \end{pmatrix} - \phi \mathcal{B} \begin{pmatrix} h \\ g \\ v^* \\ \psi \end{pmatrix}_{\xi} \right)$$

où :

$$\mathcal{E} = -rac{J_4}{b}\left[\mathcal{A} - rac{\phi}{\psi} \left. rac{d\zeta}{d\xi}
ight|_{\hat{S}} \mathcal{B}
ight],$$

soit encore:

$$\mathcal{E} = -\frac{J_4}{b} \begin{bmatrix} b\gamma & \frac{\psi c - \phi v^* \frac{d\zeta}{d\xi}}{\psi} & \frac{\psi d + \phi g \frac{d\zeta}{d\xi}}{\psi} & 0\\ \frac{\gamma - 1}{2\gamma} c^{*2} & \left(\frac{\psi c - \phi v^* \frac{d\zeta}{d\xi}}{\psi}\right) & b & mb & 0\\ \frac{\gamma - 1}{2\gamma} c^{*2} & \left(\frac{\psi v^* + \phi c \frac{d\zeta}{d\xi}}{\psi}\right) & 0 & b & 0\\ 0 & - \left(\phi \psi v^* c \frac{d\zeta}{d\xi}\right) & \left(\psi g - \phi d \frac{d\zeta}{d\xi}\right) & -b \frac{\phi}{\psi} \frac{d\zeta}{d\xi} \end{bmatrix}$$

Expressions analytiques exactes des seconds membres des équations précédentes :

$$\begin{split} \left. \frac{dh}{d\hat{S}} \right|_{\xi} &= -\frac{\gamma}{J_4 \left[\frac{\gamma - 1}{2} c^{*2} \left(1 + \left(\frac{\phi}{\psi} \frac{d\zeta}{d\xi} \right)^2 \right) - b \right]} \left\{ \left(c J_2 + v^* J_3 \right) \right. \\ &+ \frac{\phi}{\psi} \frac{d\zeta}{d\xi} \left(\left(c J_3 - v^* J_2 \right) + \phi b c^{*2} \frac{\gamma - 1}{2\gamma} h_{\xi} \right) + \phi b \left(v^* g_{\xi} - g v_{\xi}^* \right) - b \left(J_1 - \frac{J_4}{\gamma} \right) \right\} \end{split}$$

$$\begin{split} \frac{dg}{d\hat{S}}\Big|_{\xi} &= -\frac{\frac{\gamma-1}{2}c^{*2}}{bJ_{4}\left[\frac{\gamma-1}{2}c^{*2}\left(1+\left(\frac{\phi}{\psi}\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^{2}\right)-b\right]}\left\{\left(\frac{\phi}{\psi}\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^{2}g\left[cJ_{2}+v^{*}J_{3}\right]\right.\\ &\left. -\left(\frac{\phi}{\psi}\frac{d\zeta}{d\xi}\right)\left[\phi b\left(d\left(v^{*}g_{\xi}-gv_{\xi}^{*}\right)-\frac{\gamma-1}{2\gamma}c^{*2}gh_{\xi}\right)-bd\left(J_{1}-\frac{J_{4}}{\gamma}\right)+d\left(cJ_{3}+v^{*}J_{2}\right)+g\left(v^{*}J_{3}+cJ_{2}\right)\right]\right.\\ &\left. +\frac{1}{\frac{\gamma-1}{2}c^{*2}}\left[\phi b\left(\left(-\frac{\gamma-1}{2\gamma}c^{*2}+\frac{b}{\gamma}\right)dh_{\xi}-g\left(v^{*}g_{\xi}-gv_{\xi}^{*}\right)\right)+gb\left(J_{1}-\frac{J_{4}}{\gamma}\right)-d\left(cJ_{3}-v^{*}J_{2}\right)-\frac{b^{2}}{\frac{\gamma-1}{2}c^{*2}}\left(J_{2}-mJ_{3}\right)\right]\right]\right] \end{split}$$

$$\begin{split} \frac{dv^*}{d\hat{S}}\Big|_{\xi} &= -\frac{\frac{\gamma-1}{2}c^{*2}}{bJ_4\left[\frac{\gamma-1}{2}c^{*2}\left(1+\left(\frac{\phi}{\psi}\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2\right)-b\right]} \left\{ \left(\frac{\phi}{\psi}\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2 v^*\left[cJ_2+v^*J_3\right] \\ &-\left(\frac{\phi}{\psi}\frac{d\zeta}{d\xi}\right)\left[\phi b\left(c\left(v^*g_{\xi}-gv_{\xi}^*\right)+\frac{\gamma-1}{2\gamma}c^{*2}v^*h_{\xi}\right)-bc\left(J_1-\frac{J_4}{\gamma}\right)+(c^2-v^{*2})J_2+2v^*cJ_3\right] \\ &+\frac{1}{\frac{\gamma-1}{2}c^{*2}}\left[\phi b\left(\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}c^{*2}-\frac{b}{\gamma}\right)h_{\xi}-v^*\left(v^*g_{\xi}-gv_{\xi}^*\right)\right)+v^*b\left(J_1-\frac{J_4}{\gamma}\right)+c\left(cJ_3-v^*J_2\right)-\frac{b^2J_3}{\frac{\gamma-1}{2\gamma}c^{*2}}\right]\right\} \end{split}$$

(E.1)
$$\frac{d\psi}{d\hat{S}}\Big|_{\xi} = -\frac{\psi}{J_4} \left\{ \frac{\left(-cJ_2 - v^*J_3\right)}{b} + \frac{b\left.\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right|_{\hat{S}} + \psi\left(\frac{-v^*J_2 + cJ_3}{\phi b} + \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma}c^{*2}h_{\xi} + dv_{\xi}^* + cg_{\xi} - \frac{J_5}{\phi}\right)\right)}{\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\Big|_{\hat{S}}} \right\}$$

100
Annexe F

Polynômes et approximation de Chebyshev

Polynômes de Chebyshev

Le polynôme de Chebyshev de degré N est noté $T_N(x)$ et est donné par la formule:

 $T_N(x) = \cos(N \arccos x)$

Il possède N zéros dans l'intervalle]-1,1[situés aux points :

(F.1)
$$x_i = \cos\left(\frac{\pi(i-\frac{1}{2})}{N}\right) \qquad i = 1, \dots, N$$

La répartition de ces racines est sensiblement plus resserrée aux extrémités du domaine comme le montre la figure F.1.



FIG. F.1: Répartition des racines des polynomes de Chebyshev sur] -1, 1[pour six valeurs de N

En ces points, les polynômes de Chebyshev vérifient la relation d'orthogonalité discrète :

$$\sum_{k=1}^{N} T_i(x_k) T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ N/2 & i = j \neq 0 \\ N & i = j = 0 \end{cases}$$

Approximation de Chebyshev

Si f(x) est une fonction arbitraire sur l'intervalle [-1, 1], et si N coefficients $(C_j^f, j = 1, ..., N)$, sont définis par :

$$C_j^f = rac{2}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) T_{j-1}(x_i),$$

soit encore

(F.2)
$$C_j^f = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f\left(\cos\left(\frac{\pi(i-\frac{1}{2})}{N}\right)\right) \times \cos\left(\frac{\pi(j-1)(i-\frac{1}{2})}{N}\right),$$

alors la formule d'approximation :

(F.3)
$$f(x) = \left[\sum_{j=1}^{N} C_{j}^{f} T_{j-1}(x)\right] - \frac{1}{2} C_{1}^{f}$$

est exacte pour x égal aux N zéros de $T_N(x)$ dans [-1, 1]. On généralise cette approximation à une fonction F(y) définie dans un intervalle quelconque [a, b] par le changement de variable :

(F.4)
$$x = \frac{2y - (b + a)}{(b - a)}$$
 avec $a < y < b, -1 < x < 1$

de sorte que:

$$F(y)=f(x)$$

À partir des coefficients C_j^f de l'approximation de f(x) dans l'intervalle [-1, 1], on obtient les coefficients $C_j^{f'}$ de l'approximation la dérivée f'(x) par la relation de récurrence suivante:

(F.5)
$$C_{j-1}^{f'} = C_{j+1}^{f'} + 2(j-1)C_j^{f'}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} j = N-1, N-2, \dots, 2\\ C_N^{f'} = 0\\ C_{N+1}^{f'} = 0 \end{cases}$$

La formule d'approximation de f'(x) est analogue à (F.3). La dérivée première F'(y) s'obtient alors simplement par :

(F.6)
$$F'(y) = \frac{2}{b-a}f'(x)$$

Annexe G

Expression du rotationnel

Avec les notations de la figure 1.3, la composante du rotationnel normale au plan (y, z) s'écrit en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques :

$$\mathrm{rot}\,ec{V}.ec{x}=rac{1}{r}ig((rv)_r-u_ hetaig)$$

En substituant dans cette expression les inconnues u et v par leur expression (1.9), le rotationnel s'écrit dans l'espace (X, θ) :

$$\operatorname{rot}ec{V}.ec{x} = rac{2n}{(\gamma+1)t} \Big(2v^* + Xig(v_X^* + mXu_X^*ig) - u_ heta^*ig)$$

Comme *m* ne dépend que de θ , la relation précédente s'écrit en variables (η, θ) :

$$\mathrm{rot}\,ec{V}.ec{x}=2v^*+\left(v^*_\eta+m(g_\eta+mv^*_\eta)
ight)-\left(g_ heta+m_ heta v^*+mv^*_ heta
ight)$$

En appliquant les relations (2.25) permettant de passer aux variables (ζ, ξ), on obtient après calcul:

$$\mathrm{rot}\,ec{V}.ec{x} = 2v^* - v^*m_ heta + \psi\left(gv^*_\zeta - v^*g_\zeta
ight) + \phi\left[(g+mv^*)(g_\xi+v^*v^*_\xi) + v^*v^*_\xi
ight]$$

Enfin, en utilisant les relations (3.11), la forme sans dimension de la composante normale au plan de l'écoulement (y, z) du rotationnel de la vitesse dans le système des variables d'intégration (\hat{S}, ξ) s'écrit:

$$\operatorname{rot} \vec{V}.\vec{x} = 2v^* - v^*m_\theta - \frac{J_4}{b}\left[\left(gv^*_{\hat{S}} - v^*g_{\hat{S}}\right) - \frac{\phi}{\psi}\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}(cg_{\hat{S}} + dv^*_{\hat{S}})\right] + \phi\big(cg_\xi + dv^*_\xi\big)$$

où les coefficients b, c, d sont respectivement égaux à :

$$b = v^{*2} + (g + mv^{*})^{2}$$

 $c = g + mv^{*}$
 $d = v^{*} + m(g + mv^{*})$

Annexe H

Expression des dérivées premières des fonctions u_0, p_0, ρ_0 sur le choc et la frontière du vide

Expressions sur le choc en $\xi = 1$:

$$\begin{split} \frac{\partial p_0}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} &= 2 \frac{(\gamma+1) + k \left(3\gamma-1\right) - \alpha \left[(\gamma+1)(3\gamma-2) + k \gamma (\gamma-1) \right]}{(\gamma-1)(\gamma+1)(\alpha+2)} \\ \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} &= -2 \frac{3(\gamma+1)(\alpha-1) + k \left(\alpha (\gamma-1) - (\gamma+5)\right)}{(\gamma-1)(\gamma+1)(\alpha+2)} \\ \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} &= -\frac{(\gamma+1)(4\alpha-1) + k \left(2 \gamma \alpha + (\gamma-3)\right)}{(\gamma+1)(\alpha+2)} \end{split}$$

Expressions sur la frontière du vide pour $\alpha \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_0}{\partial \xi} \bigg| &= -2\frac{p_0}{\xi} \\ \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \bigg| &= -\frac{(\gamma+1)[2\alpha+(k+1)(\gamma(\alpha+2)-2)]}{\gamma(\alpha+2)} \end{aligned}$$



Annexe I

Expressions analytiques des seconds membres du problème d'ordre 1

La solution du problème d'ordre 1 est fournie par la l'intégration du système différentiel suivant :

$$\xi \left(\vec{X}_{1} \right)_{\xi} = \left[M \right]^{-1} \left[\left[S \right] \left(\vec{X}_{1} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta \frac{(\gamma+1)^{2}(n-1)}{4n^{2}\xi} \tilde{\rho}_{0}^{*} \\ \beta \frac{(\gamma+1)^{2}(n-1)}{4n^{2}\xi} \tilde{\rho}_{0}^{*} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

où la matrice M est donnée par :

$$M = egin{bmatrix} rac{\epsilon_0}{u_0} & 1 & 0 & 0 \ \epsilon_0 & u_0 + \epsilon_0 & 0 & rac{\gamma-1}{2} \ 0 & 0 & \epsilon_0 & 0 \ -\gammarac{\epsilon_0}{u_0} & 0 & 0 & \gammarac{\epsilon_0}{z_0} \end{bmatrix}$$

et la matrice S par :

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_0}{u_0} \left[G_3 \frac{(\gamma+1)}{2u_0} - (k+1) \right] & -(k+1) & -k & 0 \\ \epsilon_0 G_3 - (u_0 - \frac{\gamma+1}{2n}) & 2\epsilon_0 G_3 - (2u_0 - \frac{\gamma+1}{2n}) & -ku_0 & -(\gamma-1) \\ 0 & 0 & \epsilon_0 G_3 - (2u_0 - \frac{\gamma+1}{2n}) & \frac{\gamma-1}{2} \\ \frac{\epsilon_0 \gamma}{u_0} \left((k+1) - \frac{\gamma+1}{2u_0} G_3 \right) & \frac{(\gamma+1)(n-1)}{(u_0 - \frac{\gamma+1}{2})n} & 0 & \frac{\gamma}{z_0} \left[\gamma \epsilon_0 G_3 - 2 \left(u_0 - \frac{\gamma+1}{2n} \right) \right] \end{bmatrix}$$

Après calcul on obtient les expressions analytiques suivantes :

$$\begin{split} \xi \frac{\partial f_1}{\partial \xi} &= \frac{\frac{\epsilon^2}{u_0} G_3 + 2\epsilon(k+1) - 2(u_0 - \frac{(\gamma+1)}{2n})}{-2\epsilon^2 + (\gamma-1)z_0} z_0 f_1 \\ &- \frac{-4\epsilon G_3 - 4ku_0 + \frac{n(k+1)-1}{n}\gamma + \frac{3(n-1+kn}{n} - 2\frac{n-1}{n\gamma}}{-2\epsilon^2 + (\gamma-1)z_0} z_0 g_1 \\ &+ 2\frac{k\epsilon}{-2\epsilon^2 + (\gamma-1)z_0} z_0 h_1 \\ &- 8\frac{(n-1)(\gamma+1)^2}{\xi n^2(z_0(\gamma-1) - 2\epsilon^2)} \beta \rho_0 z_0 \\ \xi \frac{\partial h_1}{\partial \xi} &= \left(G_3 - \frac{u_0 - \frac{\gamma+1}{2n}}{\epsilon_0}\right) z_1 + \frac{(\gamma-1)}{2\epsilon_0} \tilde{p}_1^* + \frac{\beta \rho_0(\gamma+1)^2(n-1)}{4n^2\epsilon_0\xi} \end{split}$$

Planches de la partie I



Planche I.1:

Reconstruction des étapes du changement de variables Euler-Lagrange, 16 trajectoires de calcul $\alpha=1,\,k=2,\,\Lambda=-0.07,\,N=16$



(e) : "trajectoires" dans le plan de similitude

Planche I.2 :

Reconstruction des étapes du changement de variables Euler-Lagrange, 24 trajectoires de calcul $lpha = 1, \, k = 2, \, \Lambda = -0.07, \, N = 24$



Planche I.3 :

Reconstruction des étapes du changement de variables Euler-Lagrange, 48 trajectoires de calcul $\alpha=1,\,k=2,\,\Lambda=-0.07,\,N=48$



Planche I.4 :

Explosion peu anisotrope, évolution des grandeurs adimensionnées le long des trajectoires de calcul en fonction de \hat{S} $\alpha = 1, \, k = 2, \, \Lambda = -0.005, \, \gamma = 1.40, \, N = 48$



Planche I.5 :

Explosion peu anisotrope, évolution des grandeurs a dimensionnées le long des trajectoires de calcul en fonction de X

 $lpha = 1, \, k = 2, \, \Lambda = -0.005, \, \gamma = 1.40, \, N = 48$

:



Planche I.6 :

Cas d'une anisotropie moyenne, évolution des grandeurs a dimensionnées le long des trajectoires de calcul en fonction de \hat{S}

$$lpha = 1, \, k = 2, \, \Lambda = -0.07, \, \gamma = 1.40, \, N = 48$$

ρ 0.90

0.80

0.70

0.60

0.50

0.40

0.30

0.20

0.10

1.2

y



(a) : Rapport de pression $p/p_c(\theta=0)$

N

0.8

0.6

0.4

0.2

0.0

0.2

0.4

0.6

(c) : Rapport de masse volumique ρ/ρ_c

0.8

1.0



(b) : Vitesse orthoradiale v^*







Planche I.7 : Cartes de pression et de masse volumique $\alpha = 1, k = 2, \Lambda = -0.07, N = 48$



Planche I.8 :

Explosion instantanée peu anisotrope, reconstruction des étapes du changement de variables Euler-Lagrange, 24 trajectoires de calcul

$$\alpha = 0, \, k = 2, \, \Lambda = -0.01, \, N = 24$$



Planche I.9:

Explosion instantanée peu anisotrope, reconstruction des étapes du changement de variables Euler-Lagrange, 48 trajectoires de calcul

 $lpha = 0, \, k = 2, \, \Lambda = -0.01, \, N = 48$



Planche I.10:

Explosion instantanée peu anisotrope, évolution des grandeurs adimensionnées le long des trajectoires de calcul en fonction de \hat{S}

$$lpha = 0, \, k = 2, \, \Lambda = -0.01, \, \gamma = 1.40, \, N = 48$$



Planche I.11:

Explosion instantanée peu anisotrope, évolution des grandeurs adimensionnées le long des trajectoires de calcul en fonction de X

 $lpha = 0,\,k = 2,\,\Lambda = -0.01,\,\gamma = 1.40,\,N = 48$



Planche I.12:

Explosion instantanée peu anisotrope, évolution des grandeurs adimensionnées le long des trajectoires de calcul en fonction de \hat{S}

 $lpha=0,\,k=2,\,\Lambda=-0.01,\,\gamma=1.40,\,N=48$



Planche I.13 : Explosion instantanée peu anisotrope $\alpha = 0, k = 2, \Lambda = -0.01, N = 48$



(a) : Représentation des lignes (iso ζ , iso ξ) dans l'espace de similitude, détail de la zone d'écoulement $\theta = \pi/2$



(b) : Représentation des lignes (iso \hat{S} , iso ξ) du maillage d'intégration dans l'espace de similitude, détail de la zone $\theta = \pi/2$

Planche I.14 :

Explosion instantanée Comportement au voisinage de la frontière du vide



Planche I.15 :

Explosion ponctuelle en milieu faiblement compressible, reconstruction des étapes du changement de variables Euler-Lagrange, 48 trajectoires de calcul $\alpha = 1, k = 2, \gamma = 7, \Lambda = -0.03, N = 48$



Planche I.16 :

Explosion ponctuelle en milieu faiblement compressible, évolution des grandeurs adimensionnées le long des trajectoires de calcul en fonction de \hat{S} $\alpha = 1, k = 2, \gamma = 7, \Lambda = -0.03, N = 48$



(e) : Maillage (ζ, ξ)

(f) : Rotationnel

 $\label{eq:planche I.17:} {\mbox{Planche I.17:}} \\ {\mbox{Explosion ponctuelle en milieu faiblement compressible} \\ \alpha = 1, \, k = 2, \gamma = 7, \, \Lambda = -0.03, \, N = 48 \\ \end{array}$



Planche I.18 :

Reconstruction des étapes du changement de variables Euler-Lagrange, 48 trajectoires de calcul $\alpha=2,\,k=1,\,\Lambda=-0.12,\,N=48$



 $\begin{array}{l} \mbox{Planche I.19:}\\ \mbox{Cas de calcul localement hyperbolique}\\ \mbox{Évolution des grandeurs adimensionnées le long des trajectoires de calcul en fonction de \hat{S}}\\ \mbox{$\alpha=2, k=1, \Lambda=-0.12, \gamma=1.40, N=48$} \end{array}$





Planche I.21 :

Analogie hypersonique : waverider avec choc attaché Évolution des grandeurs adimensionnées le long des trajectoires de calcul en fonction de \hat{S}

$$\alpha = 1, k = 1, \Lambda = -0.4, \gamma = 1.40, N = 48$$



Planches de la partie II

. .

 $\overline{\beta}$

0.3952

0.4257

0.4645

0.5150

0.5836

0.6821

0.8347

1.0998

1.6578

α

3.00

2.80

2.60

2.40

2.20

2.00

1.80

1.60

1.40

ξo

0.7889

0.8008

0.8131

0.8262

0.8399

0.8543

0.8695

0.8854

0.9021

α	ξ0	ξ'_0	ξ1	β
2.00	0.8019	0.9280	-0.0228	0.4948
1.90	0.8108	0.9261	-0.0181	0.5292
1.80	0.8199	0.9240	-0.0123	0.5716
1.70	0.8293	0.9216	-0.0034	0.6245
1.60	0.8389	0.9189	0.0102	0.6920
1.50	0.8487	0.9159	0.0311	0.7812
1.40	0.8588	0.9125	0.0645	0.9041
1.20	0.8797	0.9041	0.2175	1.3645
1.10	0.8905	0.8988	0.4078	1.8617

(a) :
$$k=1, \gamma=1.33$$

 ξ_0'

0.9149

0.9128

0.9103

0.9077

0.9047

0.9013

0.8974

0.8880

0.8821

 ξ_1

-0.0267

-0.0209

-0.0137

-0.0029

0.0135

0.0389

0.0795

0.2681

0.5107

 ξ_0

0.8120

0.8212

0.8306

0.8403

0.8504

0.8607

0.8713

0.8934

0.9048

 $\frac{\alpha}{2.}$

1.90

1.80

1.70

1.60

1.50

1.40

1.20

1.10

 β

0.4936

0.5282

0.5711

0.6246

0.6932

0.7842

0.9103

1.3923

1.9334

α	ξ0	ξ'_0	ξ1	β
3.00	0.7963	0.9429	-0.0149	0.3942
2.80	0.8084	0.9413	-0.0114	0.4250
2.60	0.8211	0.9395	-0.0072	0.4644
2.40	0.8345	0.9373	-0.0003	0.5159
2.20	0.8486	0.9348	0.0115	0.5863
2.00	0.8635	0.9318	0.0322	0.6881
1.80	0.8792	0.9282	0.0707	0.8481
1.60	0.8959	0.9237	0.1493	1.1333
1.40	0.9134	0.9180	0.3424	1.7685

 ξ'_0

0.9517

0.9503

0.9487

0.9468

0.9446

0.9420

0.9387

0.9347

0.9296

(b) : $k = 2, \gamma = 1.33$

 ξ_1

-0.0128

-0.0101

-0.0068

-0.0011

0.0085

0.0255

0.0567

0.1192

0.2651

(c) : $k = 1, \gamma = 1.40$

α	ξ0	ξ_0'	ξ_1	β
2.00	0.8488	0.8699	-0.0397	0.4890
1.90	0.8590	0.8670	-0.0295	0.5243
1.80	0.8697	0.8638	-0.0171	0.5687
1.70	0.8807	0.8602	0.0012	0.6246
1.60	0.8921	0.8562	0.0288	0.6969
1.50	0.9040	0.8518	0.0714	0.7942
1.40	0.9164	0.8468	0.1395	0.9318
1.20	0.9425	0.8347	0.4707	1.4952
1.10	0.9564	0.8273	0.9489	2.2196

(e) :
$$k=1, \gamma=1.67$$

(d)	:	k	=	$2, \gamma$	=	1.40
-----	---	---	---	-------------	---	------

α	ξ0	ξ'_0	ξ_1	β
3.00	0.8229	0.9123	-0.0213	0.3905
2.80	0.8360	0.9101	-0.0150	0.4223
2.60	0.8498	0.9076	-0.0076	0.4638
2.40	0.8644	0.9048	0.0046	0.5189
2.20	0.8799	0.9014	0.0250	0.5955
2.00	0.8964	0.8975	0.0607	0.7097
1.80	0.9140	0.8927	0.1286	0.8979
1.60	0.9328	0.8869	0.2772	1.2653
1.40	0.9530	0.8797	0.7265	2.2888

(f) : $k = 2, \gamma = 1.67$

Planche II.1 :

Tableaux des valeurs numériques des constantes caractérisant la progression du choc et de la frontière du vide en fonction de α , k et γ







(b) : Vitesse radiale u_0



(c) : Pression adimensionnée p_0

Planche II.2 : Validation dans le cas n = 1: pression, masse volumique et vitesse radiale d'ordre 0


Planche II.3 : Comparaison dans le cas n = 1, pertubation d'ordre 1





 $\begin{array}{c} \mbox{Planche II.4:} \\ \mbox{Évolution des constantes ξ_0 et ξ_0' en fonction de α, pour les deux types de symétrie et 3 valeurs de γ} \end{array}$







 $\begin{array}{c} \mbox{Planche II.5:} \\ \mbox{Évolution des constantes ξ_1 et β en fonction de α pour les deux types de symétrie et 3 valeurs de γ} \end{array}$







(b) : Pression adimensionnée p_0



(c) : Vitesse radiale adimensionnée u_0







(b) : Pression adimensionnée p_0



(c) : Vitesse radiale adimensionnée u_0

Planche II.7:

Variation des grandeurs a dimensionnées dans la couche de choc, influence de α pour k=2 et $\gamma=1.40$











(b) : u_0



(c) : $\log \rho_0$

 $\begin{array}{l} \mbox{Planche II.10:}\\ \mbox{Fonctions intégrées d'ordre 0 en fonction de z_0}\\ \mbox{$k=1, \gamma=1.40$} \end{array}$





 $\label{eq:planche II.11:} \begin{array}{l} \mbox{Planche II.11:} \\ \mbox{Fonctions intégrées d'ordre 1 en fonction de z_0} \\ \mbox{$k=1, \gamma=1.40$} \end{array}$



Planche II.12:

Variation des fonctions de perturbation d'ordre 1 dans la couche de choc $k=1,\,\gamma=1.33$





Planche II.14 :

Représentation de la géométrie du choc perturbé et de la répartition azimutale d'énergie dans le repère de l'explosion anisotrope équivalente.

Influence de α et γ pour k = 1 et $\eta = 0.05$









Planche II.15 :

Représentation de la géométrie du choc perturbé et de la répartition azimutale d'énergie dans le repère de l'explosion anisotrope équivalente.

Influence de α et γ pour k = 2 et $\eta = 0.05$



 $\begin{array}{l} {\bf Planche ~II.16:} \\ {\rm R}\acute{\rm e} {\rm partition ~azimutale ~d}\acute{\rm e} {\rm nergie}~\epsilon(\theta), {\rm influence ~de}~\alpha,k,\gamma \end{array}$



 $\label{eq:planche II.17:} \begin{array}{l} \mbox{Explosion anisotrope équivalente} \\ k=1,\, \alpha=1.40,\, \gamma=1.67,\, \eta=0.2 \end{array}$





(c) : Vitesse orthoradiale v^\ast

(d) : "trajectoires"

Planche II.18 : Explosion anisotrope ponctuelle $k=2,\,\alpha=1.80,\,\gamma=1.67,\,\eta=0.10$



(c) : vitesse orthoradiale

(d) : "trajectoires"

Planche II.19 : Problème du piston $k=1,\,\alpha=2,\,\gamma=1.40,\,\eta=0.1$

*

Bibliographie

- [1] ANDRIAMANALINA D. . Explosion violente d'un fil rectiligne dans un écoulement. Application à l'hypersonique. Thèse de doctorat, Université des sciences et technologies de Lille I, 1990.
- [2] ANDRIAMANALINA D., MERLEN A. Explosion violente anisotrope dans un gaz stratifié. C. R. Acad. Sc. Paris, 324(IIb):307-313, 1997.
- [3] BANDIERA R. . Convective supernovae. Astronomy and Astrophysics, 139:368, 1984.
- [4] BASS J. . Cours de Mathématiques, vol. I&II. Masson et Cie, Paris, 4^e edition, 1968.
- [5] CHERNYI G.G. . Introduction to hypersonic flow. Academic press Inc., New York-London, 1961.
- [6] CHISNELL R.F. An analytic description of converging shock waves. J. Fluid Mech., 354:357-375, 1998.
- [7] DESCAMPS L., MERLEN A. . Self similar moving isotropic explosion. 22st International Symposium on Shock Waves, London, Juillet 1999.
- [8] DOTY R.T., RASMUSSEN M.L. Approximation for hypersonic flow past an inclined cone. AIAA Journal, 11(6):1310-1315, 1973.
- [9] DYMENT A., MERLEN A. . Écoulement consécutif à une explosion violente ponctuelle dans un gaz animé initialement d'un mouvement uniforme. C. R. Acad. Sc. Paris, 294, février 1982.
- [10] FABRE E. . Explosions et écoulement autosemblables visqueux et non visqueux en hypersonique. Théorie
 Calcul Expérience. Thèse de doctorat, Université des sciences et technologies de Lille I, 1995.
- [11] GUIRAUD J. P., VALLÉE D., , ZOLVER R. . Holt M., editor, Bluntness effects in hypersonic small disturbace theory. Academic press Inc., New York-London, 1965.
- [12] HOLT M. . Numerical Methods in Fluid Dynamics. Springer Verlag, second revised edition, 1984.
- [13] KTITOROV V. M. . Studies of blast wave self-similar perturbations. Rapport technique, Russion Federal Nuclear Center, 1998. November.
- [14] LANDAU L., LIFSHITZ E. . Fluid Mechanics. Pergamon Press, London, 1974.
- [15] LONGUET-HIGGINS H. . Shedding of vortex ring by collapsing cavities with application to single bubble sonoluminescence. J. Acoust. Soc. Am., 100:2678, 1996.
- [16] LORD RAYLEIGH. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *Phil. Mag.*, 34:94–98, 1917.
- [17] MERLEN A. . Similitude physique et modélisation par explosion equivalente des phénomènes aérodynamiques de balistique intermédiaire. Thèse de doctorat d'état, Université des sciences et technologies de Lille I, 1988.
- [18] MERLEN A. . Perspectives offertes par l'analogie entre les explosions intenses et une classe d'écoulements hypersoniques. Rapport technique 06/89, Institut de Mécanique des Fluides de Lille, 1989.

- [19] MERLEN A. . Théorie des faibles incidences en hypersonique pour les corps axisymétriques en loi de puissance et à émoussement faible. C. R. Acad. Sc. Paris, 310(II):465-470, 1990.
- [20] MERLEN A. Fonctions de courant en écoulement hypersonique autour d'ogives quasi pointues et à faible incidence. C. R. Acad. Sc. Paris, 312(II):1065-1070, 1991.
- [21] MERLEN A., ANDRIAMANALINA D. . Analytical solutions for hypersonic flow past slender power law bodies at small angle of attack. *AIAA Journal*, 30(11), 1992.
- [22] MERLEN A., DESCAMPS L. Point source anisotropic explosion. 21st International Symposium on Shock Waves, Geat Keppel Island, Australia, Juillet 1997.
- [23] MERLEN A., DYMENT A. Théorie des explosions violentes anisotropes à similitude interne. Rapport technique 85/14, Institut de Mécanique des Fluides de Lille, 1985.
- [24] MERLEN A., DYMENT A. . Similarity for gun firing aerodynamics. Transitional ballistics, vol. I, p. 153-162, San Antonio, Texas, 1990. 12th Int. Symp. on Ballistics.
- [25] MERLEN A., DYMENT A. . Similarity and asymptotic analysis for gun firing aerodynamics. J. Fluid Mech., 225:497–528, 1991.
- [26] MERLEN A., DYMENT A. Anisotropic blast waves and explosions in a moving gas. Eur. J. Mech., 11(2):161-198, 1992.
- [27] MERLEN A., FABRE E. . Calculation of intense self-similar anisotropic explosions. Int. J. Shock Waves, 3(2), 1993.
- [28] PROSPERETTI A. A new mechanism for sonoluminescence. J. Acoust. Soc. Am., 101:2003–2007, 1997.
- [29] SAKURAÏ A. Blast wave theory. Holt M., editor, Basic developments in fluid dynamics, vol. 1. Academic press Inc., New York-London, 1965.
- [30] SCARDOVELLI R., POPINET S., ZALESKI S., MANSERVISI S. . Two algorithms for 2d interface tracking. Two-phase flow modelling and experimentation, vol. III, p. 1545, 1999.
- [31] SEDOV L. . Similarity and dimensional methods in mechanics. Academic press Inc., New York, 1959.
- [32] TAYLOR G. I. . The formation of a blast wave by a very intense explosion. Proc. R. Soc., A201: 159-166, 1950.
- [33] TSIEN H. S. . The poincaré-lighthill-kuo method. Advances in applied mechanics, 4:281, 1956.
- [34] VON NEUMANN J. . The point source solution. *Collected works*, vol. VI. Pergamon Press, New York, 1963.

