THÈSE

Présentée à

L'UNIVERSITE LILLE 1

Par **Arnaud LEYSSENS**

pour obtenir le grade de DOCTEUR

Spécialité : Mathématiques

Préparée sous la direction de M. **Jean-Claude DOUAI**

ESPACES HOMOGENES GENERIQUEMENT TRIVIAUX

soutenue le 5 novembre 1999 devant le jury formé de :

Professeur **T.A. SPRINGER**, Mathematisch Instituut Utrecht, [rapporteur, Président de Jury]
Professeur **L. BREEN**, Université Paris XIII, [rapporteur]
Professeur **J.-C. DOUAI**, Université de Lille 1, [Directeur de thèse]
Professeur **P. COHEN**, Université de Lille 1
Professeur **P. DEBES**, Université de Lille 1
Professeur **P. MAMMONE**, Université de Lens

Je souhaite remercier ici toutes les personnes qui m'ont accompagné et aidé durant ce travail, à commencer bien sur par le professeur Jean-Claude Douai qui m'a donné mon sujet de thèse et m'a initié aux différentes connaissances dont j'ai eu besoin tout au long de mes travaux. Sa patience et sa disponibilité m'ont été d'une grande aide pour mener à bien cette thèse.

Le professeur Pasquale Mammone fut l'un des premiers à m'initier à la recherche mathématique à l'occasion d'un cours de DEA. Il a accepté aujourd'hui de faire partie de mon jury de thèse et je lui en suis reconnaissant. Je remercie également les professeurs Pierre Dèbes et Paula Cohen pour avoir accepté de participer au jury.

Le professeur Lawrence Breen et le professeur T.A. Springer ont accepté d'être rapporteurs. Je souhaite ici les remercier pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail.

Table des matières

Introduction

Soit S un schéma intègre régulier noethérien, K son corps des fonctions et G un schéma en groupes réductifs sur S. Dans le séminaire Chevalley de 1958, J.P. Serre ([19]) et A. Grothendieck ([11]) formulent la conjecture suivante : tout espace homogène principal de G défini sur S et admettant une section sur Spec K est localement trivial pour la topologie de Zariski. En d'autres termes, la suite

$$0 \to H^1(S_{Zar}, G) \to H^1(S, G) \to H^1(K, G)$$

est exacte.

Cette conjecture a notamment reçu une réponse affirmative sous les conditions suivantes : S est une variété algèbrique intègre et lisse définie sur un corps k infini et G est un groupe réductif et connexe défini sur k (G vérifiant une certaine condition d'isotropie si k n'est pas parfait) ([3]), ou S est le spectre d'un anneau de dimension 1 ou d'un anneau local hensélien. ([15]).

D'une manière plus générale, Nisnevich ([14]) montre que pour tout schéma régulier intègre noethérien S, la suite

$$0 \to H^1(S_{cd}, G) \to H^1(S, G) \to H^1(K, G)$$

est exacte, $H^1(S_{cd}, G)$ désignant le premier ensemble de cohomologie pour la topologie complètement décomposée.

Le but de ce travail est d'étendre ces résultats aux espaces homogènes non nécessairement principaux de G, le groupe d'isotropie étant supposé réductif.

Pour étudier les espaces homogènes de G sur un schéma S, nous utilisons la 2-cohomologie non abélienne développée par Giraud [10]. Plus précisément, à un S-espace homogène X de G avec isotropie H, on associe une gerbe dont le lien est localement représentable par H (voir le chapitre 1 pour les définitions concernant les gerbes, les liens et la 2-cohomologie non abélienne ou [10] pour un traitement détaillé). La neutralité de cette gerbe équivaut à l'existence d'un espace homogène de G dominant X sur S.

Cette méthode est due à Springer qui utilise dans [20] la 2-cohomologie non abélienne pour montrer la proposition suivante : Si G est un groupe algèbrique connexe défini sur un corps parfait k de dimension cohomologique inférieure ou égale à 1, tout espace homogène de G défini sur k est dominé sur k par un espace homogène principal de G. L'utilisation de la 2-cohomologie non abélienne a également permis à Borovoi [2] de montrer un principe de Hasse pour les espaces homogène des groupes semi-simples simplement connexes définis sur les corps locaux ou les corps de nombres. La même méthode est encore utilisée par Flicker, Scheiderer et Sujatha [9] pour montrer une version du théorème de Springer sur les corps de dimension cohomologique virtuelle inférieure ou égale à 1.

La question de l'existence de points, localement pour la topologie de Zariski, dans les espaces homogènes génériquement triviaux a déjà reçu une réponse affirmative sous les conditions suivantes : G est un groupe réductif défini au-dessus d'une courbe sur un corps algèbriquement clos ou fini et le groupe d'isotropie est semi-simple [7]. La démonstration de ce résultat utilise une nouvelle fois la 2-cohomologie non abélienne et l'étude des gerbes associées aux espaces homogènes.

Le premier chapitre de cette thèse est consacré à une brève présentation de la théorie des gerbes et de la 2-cohomologie non abélienne dont nous ferons grand usage dans la suite de ce travail. D'autre part, nous y précisons les notions concernant les espaces homogènes, en particulier les liens entre ceux-ci, les gerbes et les espaces homogènes principaux.

Le chapitre 2 est consacré à la démonstration des résultats concernant les gerbes et la 2-cohomologie non abélienne. On s'intéresse en particulier aux gerbes génériquement triviales ou génériquement neutres. Dans la première partie, nous montrons que toute gerbe définie sur un anneau local régulier et génériquement triviale est triviale. Dans la seconde partie, on s'intéresse aux gerbes définies sur un espace affine au-dessus d'un corps k en s'appuyant sur des résultats de Raghunathan ([17]) et Colliot-Thélène et Ojanguren ([3]) au sujet des torseurs des groupes réductifs sur les espaces affines. Enfin, la troisième partie est consacrée à l'étude des gerbes sur les anneaux de valuation discrète. Nous montrons en particulier qu'une gerbe génériquement neutre est neutre.

Le troisième chapitre est consacré aux espaces homogènes rationnellement triviaux et à l'existence de points dans ces espaces. Ce chapitre possède la même structure que le précédent. Dans la première partie, on s'intéresse aux espaces homogènes sur les anneaux henséliens et on montre qu'un espace homogène rationnellement trivial sur un schéma régulier admet des sections localement pour la topologie complètement décomposée. La deuxième partie concerne les espaces homogènes au-dessus des espaces affines sur un corps k. Enfin, la troisième partie est consacrée aux espaces homogènes définis sur un anneau de valuation discrète.

Chapitre 1

Gerbes et espaces homogènes

1.1 Rappels sur les gerbes

1.1.1 Gerbes

Cette section est consacrée à de brefs rappels concernant la théorie des gerbes et la 2-cohomologie non abélienne. Nous renvoyons le lecteur souhaitant de plus amples détails à l'ouvrage de Giraud ([10]) auquel nous faisons de nombreuses références.

Soit S un site étale et $\mathcal{G}$ une catégorie fibrée au dessus de S. On suppose que pour tout ouvert étale U de S, la fibre $\mathcal{G}(U)$ est un groupoïde. On dit que $\mathcal{G}$ est un *préchamp* si pour tout ouvert étale U de S et pour tout couple (x,y) d'objets de $\mathcal{G}(U)$, le foncteur Hom(x,y) est un faisceau.

On dit que le préchamp $\mathcal{G}$ est un *champ* si la condition suivante est vérifiée pour tout ouvert étale U de S, pour tout recouvrement étale $(U_i)_{i\in I}$ de U et toute famille $(x_i)_{i\in I} \in \prod_i \mathcal{G}(U_i)$: S'il existe pour tout i et j dans I un isomorphisme ϕ_{ij} entre les restrictions de x_i et x_j dans $\mathcal{G}(U_i \cap U_j)$ et si pour tous i,j,k dans I, les restrictions de ϕ_{ij}, ϕ_{ik} et ϕ_{kj} au-dessus de $U_i \cap U_j \cap U_k$ vérifient $\phi_{ij} = \phi_{ik}\phi_{kj}$, alors, il existe $x \in \mathcal{G}(U)$ tel que la restriction de x au-dessus de chaque U_i est isomorphe à x_i.

On appelle *S-gerbe* ([10], p. 129) un champ $\mathcal{G}$ au-dessus de S satisfaisant les propriétés supplémentaires suivantes :
(i) Il existe un recouvrement étale $(U_i)_{i \in I}$ de S tel que pour tout $i \in I$ la fibre $\mathcal{G}(U_i)$ est non vide ;
(ii) Pour tout ouvert étale U de S, deux objets x et y de $\mathcal{G}(U)$ sont localement isomorphes, c'est à dire qu'il existe un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de U tel que les restrictions de x et y dans $\mathcal{G}(U_i)$ sont isomorphes pour tout $i \in I$.

Etant donné un ouvert U de S, on appelle sections de $\mathcal{G}$ au-dessus de U les objets de la catégorie $\mathcal{G}(U)$. On dit que la gerbe $\mathcal{G}$ est neutre (ou a une section au-dessus de S) si la fibre $\mathcal{G}(S)$ au-dessus de S est non vide.

1.1.2 Liens

([10], Ch. IV §2.2)-Pour tout ouvert U de S, on note FAGR(U) la catégorie des faisceaux de groupes au-dessus de U et on appelle FAGR le champ au-dessus de S dont la fibre au-dessus d'un ouvert U de S est la catégorie FAGR(U). On considère au-dessus de S le préchamp défini de la manière suivante : Pour tout ouvert U de S, la catégorie au-dessus de U a les mêmes objets que la catégorie FAGR(U) mais les morphismes entre deux objets F et G sont les quotients de Hom(F,G) par l'action des automorphismes intérieurs de F et G ([10], Ch. IV §1.1). A tout préchamp on peut associer de manière canonique ([10], Ch. II, Th. 2.1.3 et §2.1.3.2) un champ et on appelle Li le champ associé au préchamp défini ci-dessus. Un lien au-dessus de S est une section du champ Li au-dessus de S, c'est à dire un objet de la catégorie Li(S).

A toute S-gerbe $\mathcal{G}$ est associé un lien $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ de la manière suivante : Pour tout ouvert U de S, on définit un foncteur de la catégorie $\mathcal{G}(U)$ dans la catégorie FAGR(U) en associant à tout objet x de $\mathcal{G}(U)$ le U-faisceau Aut(x) des automorphismes de x et à tout morphisme $\phi : x \to y$ le U-morphisme $inn(\phi) : Aut(x) \to Aut(y)$ qui envoie $\alpha \in Aut(x)$ sur $\phi\alpha\phi^{-1} \in Aut(y)$. On compose ce foncteur avec le foncteur canonique $\mathcal{B}_U$: FAGR$(U) \to$ Li(U) pour obtenir un foncteur $\mathcal{G}(U) \to Li(U)$. On note $\mathcal{L}_x$ l'image de x par ce foncteur. Etant donnés deux objets x et y de la catégorie $\mathcal{G}(U)$, il existe un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de U tels que les restrictions de $\mathcal{L}_x$ et $\mathcal{L}_y$ au-dessus de U_i sont égales dans la catégorie $\mathrm{Li}(U_i)$ pour tout $i \in I$([10], Ch. IV §2.2.2.2). Puisque la catégorie fibrée Li est un champ, il est possible de recoller les objets $\mathcal{L}_x$ (pour U variant parmi les ouverts étales de S et x variant parmi les objets de $\mathcal{G}(U)$) pour obtenir une section de Li au-dessus de S, c'est à dire un S-lien que l'on note $\mathcal{L}(\mathcal{G})$. On appelle ce lien le lien de la gerbe $\mathcal{G}$. On dit aussi que la gerbe est liée par $\mathcal{L}(\mathcal{G})$.

On dit qu'un S-lien $\mathcal{L}$ est représentable s'il existe un faisceau en groupes H défini sur S tel que $\mathcal{L} = \mathcal{B}(H)$ ([10], Ch. IV, Def. 1.2.1). Un S-lien est toujours localement représentable par un S-faisceau en groupes H. C'est à dire qu'il existe un recouvrement étale $(U_i)_{i\in I}$ de S tel que la restriction de $\mathcal{L}$ au-dessus de chaque U_i est l'image par $\mathcal{B}$ de H_{U_i}. Un S-lien $\mathcal{L}$ localement représentable par un S-faisceau en groupe H définit un élément de $H^1(S, \mathrm{Autext}(H))$ ([10], Ch. IV, Cor. 1.1.7.3). On dit qu'une gerbe $\mathcal{G}$ est localement liée par un S-faisceau en groupes H si le lien de $\mathcal{G}$ est localement représentable par H.

1.1.3 cohomologie non abélienne

([10], Ch. IV)-Etant donné un lien $\mathcal{L}$, deux gerbes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont dites $\mathcal{L}$-équivalentes si $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\mathcal{G}') = \mathcal{L}$ et s'il existe un isomorphisme de gerbes $\mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ induisant l'identité sur le lien $\mathcal{L}$. Si une gerbe $\mathcal{G}$ liée par $\mathcal{L}$ admet une section s au-dessus de S, elle est $\mathcal{L}$-équivalente sur S à la gerbe des torseurs de Aut(s). Son lien est alors représentable par Aut(s).

Etant donné un lien $\mathcal{L}$, on définit l'ensemble de cohomologie $H^2(S, \mathcal{L})$ comme l'ensemble des classes de $\mathcal{L}$-équivalence des gerbes liées par $\mathcal{L}$. Si le lien $\mathcal{L}$ est représentable par un faisceau en groupes H, on notera $H^2(S, H)$ pour $H^2(S, \mathcal{L})$.

Si le lien $\mathcal{L}$ de la gerbe est représentable par un groupe H, l'ensemble $H^2(S, \mathcal{L}) = H^2(S, H)$ contient une classe privilégiée: la classe de la gerbe des torseurs de H. Cette classe sera appelée classe triviale.

C'est une classe neutre mais ce n'est pas la seule en générale. Toute classe neutre de $H^2(S,H)$ est la classe d'équivalence de la gerbe des torseurs d'une forme intérieure de H. Réciproquement, toute forme intérieure H' de H sur S définit une classe neutre dans $H^2(S,H) = H^2(S,H')$: la classe de la gerbe des torseurs de H'.

On note $Z(\mathcal{L})$ le centre abélien du lien $\mathcal{L}$. Si le lien $\mathcal{L}$ est représentable par un groupe H alors le centre de $\mathcal{L}$ est représentable par le centre de H.

On rappelle la propriété suivante ([10]-Théorème 3.3.3) qui jouera un rôle essentiel dans la suite :

Propriété 1.1 *Soit $\mathcal{L}$ un lien, alors $H^2(S,\mathcal{L})$ est un espace principal homogène sous le groupe $H^2(S,Z(\mathcal{L}))$.*

Si le lien $\mathcal{L}$ est représentable par un groupe H de centre Z, l'action de $H^2(S,Z)$ sur $H^2(S,H)$ et l'existence de la classe triviale des torseurs de H dans $H^2(S,H)$ permettent d'identifier les deux ensembles $H^2(S,H)$ et $H^2(S,Z)$. De plus, nous pouvons caractériser les classes neutres de $H^2(S,H)$ de la manière suivante :

Propriété 1.2 *Soit χ un élément de $H^2(S,H)$. On note α la classe d'équivalence de la gerbe des torseurs de H et ϵ l'unique élément de $H^2(S,Z)$ tel que $\chi = \epsilon.\alpha$, le point désignant l'action de $H^2(S,Z)$ sur $H^2(S,H)$ alors :*

$$\chi \text{ est neutre } \iff \epsilon \in \mathrm{Im}[H^1(S,H_{ad}) \to H^2(S,Z)]$$

1.2 Espaces homogènes

Définition 1.1 *Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes, X un S-schéma sur lequel G opère. Le schéma X est un S-espace homogène de G si il existe un sous S-schéma en groupes H de G tel que localement pour la topologie étale, X est isomorphe au quotient étale de G par H. Le groupe H est alors appelé l'isotropie de l'action de G*

sur X.

Si le sous-groupe H est réduit à l'élément neutre de G, X est un espace homogène principal de G. On note $H^1(S, G, H)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de S-espaces homogènes de G avec isotropie H. C'est un ensemble pointé par la classe d'isomorphie de G/H.

Si X est un S-espace homogène de G avec isotropie H et Y un S-torseur de G, on dit que Y domine X s'il existe un S-morphisme $Y \to X$ équivariant pour l'action de G sur Y et X. Cette relation de domination induit une relation $H^1(S,G) \multimap H^1(S,G,H)$ qui se réduit à l'application naturelle $H^1(S,G) \to H^1(S,G/H)$ quand H est invariant dans G. La proposition suivante ([10]) est une propriété essentielle de la relation de domination définie ci-dessus. Nous en ferons un usage important dans la suite de ce travail.

Proposition 1.1 *Soit G un schéma en groupes défini sur un schéma S, H un sous-schéma en groupes de G défini sur S. La suite d'ensembles pointés :*

$$H^1(S,H) \to H^1(S,G) \multimap H^1(S,G,H)$$

est exacte.

A un espace homogène X de G avec isotropie H, on associe une gerbe $\mathcal{G}_X$, la gerbe des relévements de X à G, de la manière suivante : Les objets de $\mathcal{G}_X$ au-dessus d'un ouvert étale U de S sont les U-torseurs Y de G munis d'un U-morphisme $Y \to X_U$ équivariant pour l'action de G sur Y et X, Les morphismes de $\mathcal{G}_X$ étant définis de manière évidente. Le lien de la gerbe $\mathcal{G}_X$ est localement représentable par H. L'espace homogène X est dominé par un G-torseur sur S si et seulement si la gerbe $\mathcal{G}_X$ est neutre, c'est-à-dire admet une section sur S. Si l'espace homogène X est isomorphe sur S à G/H alors la gerbe $\mathcal{G}_X$ est équivalente sur S à la gerbe des torseurs de H.

Supposons maintenant que l'espace homogène X admette une section sur S alors il existe un sous-groupe H' de G, défini sur S et localement isomorphe à H, tel que X est isomorphe sur S à G/H'. Cependant, X n'est pas dans ce cas nécessairement isomorphe à G/H sur S. Contrairement au cas des espaces homogènes principaux, il peut donc exister dans $H^1(S, G, H)$ plusieurs classes distinctes d'espaces homogènes admettant une section sur S. Si l'espace homogène X admet une section sur S, alors il est dominé sur S par le torseur trivial et la gerbe des relévements $\mathcal{G}_X$ est neutre.

Chapitre 2

Gerbes génériquement neutres

2.1 Résultats généraux

Lemme 2.1 *([6], lemme 1.1) Soit S un schéma quelconque. Tout S_{et}-lien $\mathcal{L}$ localement (pour la topologie étale) représentable par un S-groupe réductif connexe H est représentable sur S par une forme tordue quasi-déployée de H.*

Preuve : Le lien $\mathcal{L}$ est localement représentable par H et H est localement déployé donc le lien $\mathcal{L}$ est localement représentable par un groupe déployé. On peut donc supposer H déployé. Le lien $\mathcal{L}$ définit une classe $[\mathcal{L}]$ dans $H^1(S, \text{Autext}(H))$. Le scindage canonique ([8], exposé XXIV) s de la suite exacte :

$$1 \to H_{ad} \to \text{Aut(H)} \to \text{Autext(H)} \to 1$$

définit une classe $s([\mathcal{L}])$ dans $H^1(S, \text{Aut(H)})$. Soit H_L un représentant de $s([\mathcal{L}])$. Alors le lien $\mathcal{L}$ est représentable par H_L. De plus, comme s respecte le quasi-épinglage naturel de H, le groupe H_L est quasi-déployé.
C.Q.F.D.

En particulier, si G est un schéma en groupes réductifs sur S, H un sous-schéma en groupes réductifs de G et X un espace homogène de

G à isotropie H défini sur S, alors la gerbe $\mathcal{G}_X$ des relévements de X à G est localement liée par H. Donc elle est liée par une forme tordue de H : le lien de la gerbe des relévements de X à G est représentable et on peut donc considérer la classe d'équivalence de cette gerbe dans un ensemble $H^2(S, H')$ avec H' une forme tordue de H.

Lemme 2.2 *Soit A un anneau local régulier de corps des fractions K, H un schéma en groupes semi-simples défini sur Spec A, $\mathcal{G}$ une gerbe sur Spec A dont le lien est localement (pour la topologie étale) représentable par H et dont la restriction à Spec K est liée par H. Alors $\mathcal{G}$ est liée par H sur Spec A.*

Preuve : Le lien $\mathcal{L}$ de la gerbe $\mathcal{G}$ est localement représentable par H et donc définit un élément $[\mathcal{L}]$ dans $H^1(A, \text{Autext(H)})$. L'image de $[\mathcal{L}]$ dans $H^1(K, \text{Autext(H)})$ est triviale. H étant semi-simple, le groupe Autext(H) est fini. L'application

$$H^1(A, \text{Autext(H)}) \to H^1(K, \text{Autext(H)})$$

a donc un noyau trivial ([12]) et $[\mathcal{L}]$ est nul dans $H^1(A, \text{Autext(H)})$ donc le lien de $\mathcal{G}$ est représentable par H sur Spec A.
C.Q.F.D.

Proposition 2.1 *Soit A un anneau local régulier de corps des fractions K, H un schéma en groupes semi-simples sur Spec A, $\mathcal{G}$ une gerbe liée localement (pour la topologie étale) par H sur Spec A. Si la restriction de $\mathcal{G}$ à Spec K est équivalente à la gerbe des torseurs de H sur K, alors $\mathcal{G}$ est équivalente sur Spec A à la gerbe des torseurs de H.*

Preuve : La gerbe $\mathcal{G}$ étant équivalente sur K à la gerbe des torseurs de H, elle est liée par H sur K. D'après le lemme précédent, elle est donc liée par H sur Spec A. La gerbe $\mathcal{G}$ définit donc un élément de $H^2(A, H)$. On note Z le centre de H. L'ensemble $H^2(A, H)$ est un espace principal homogène sous le groupe $H^2(A, Z)$. On note ϵ la classe d'équivalence de la gerbe des torseurs de H dans $H^2(A, H)$, α la classe

d'équivalence de $\mathcal{G}$ et γ l'élément de $H^2(A,Z)$ tel que $\alpha = \gamma.\epsilon$. On note α_K (resp ϵ_K, resp γ_K) l'image de α (resp ϵ, resp γ) dans $H^2(K,H)$. La restriction de $\mathcal{G}$ à Spec K est équivalente à la gerbe des torseurs de H, donc on a $\alpha_K = \epsilon_K$ et $\gamma_K = 0$. Or l'application $H^2(A,Z) \to H^2(K,Z)$ est injective [4] donc $\gamma = 0$ et $\mathcal{G}$ est équivalente sur Spec A à la gerbe des torseurs de H.
C.Q.F.D.

2.2 Gerbes sur les espaces affines

Pout tout corps k, on note A_n le schéma *Spec* $k[t_1,\ldots,t_n]$ et $k(A_n)$ le corps $k(t_1,\ldots,t_n)$. Si L est un corps contenant k, on note A_n^L le schéma *Spec* $L[t_1,\ldots,t_n]$. On s'intéresse dans cette section aux gerbes sur A_n dont la restriction à $k(A_n)$ est triviale ou neutre.

Proposition 2.2 *Soit k un corps de caractéristique 0, H un groupe réductif défini sur k et $\mathcal{G}$ une gerbe liée par H sur A_n. Si il existe un point fermé x_0 :* $\mathrm{Spec\ k} \to \mathrm{A_n}$ *tel que la restriction de $\mathcal{G}$ à x_0 est neutre, alors $\mathcal{G}$ est neutre sur A_n. En particulier, si $\mathcal{G}$ est neutre au point générique de A_n, elle est neutre sur A_n.*
Si de plus $\mathcal{G}$ est génériquement triviale, c'est à dire équivalente sur $k(A_n)$ à la gerbe des torseurs de H, alors $\mathcal{G}$ est triviale sur A_n.

Preuve : On note γ la classe d'équivalence de $\mathcal{G}$ dans $H^2(A_n,H)$, Z le centre de H sur k, et . l'action de $H^2(A_n,Z)$ sur $H^2(A_n,H)$ qui fait du second un espace principal homogène sous le premier. On écrit γ sous la forme $\gamma = \alpha.\epsilon$ où ϵ désigne la classe d'équivalence de la gerbe des H-torseurs sur A_n. On note α_{x_0} l'image de α dans $H^2(k,Z)$ par le changement de base défini par x_0. La restriction de $\mathcal{G}$ à x_0 est neutre donc

$$\alpha_{x_0} \in \mathrm{Im}[H^1(k,H_{ad}) \to H^2(k,Z)]$$

On note α' l'image de α_{x_0} dans $H^2(A_n,Z)$ par le changement de base $\mathrm{A_n} \to \mathrm{Spec\ k}$, on a :

$$\alpha' \in \mathrm{Im}[H^1(A_n,H_{ad}) \to H^2(A_n,Z)]$$

Or, pour un corps k de caractéristique 0, les groupes $H^2(k, Z)$ et $H^2(A_n, Z)$ sont isomorphes ([3], preuve du théorème 4.2) donc $\alpha' = \alpha$, et donc

$$\alpha \in \mathrm{Im}[H^1(A_n, H_{ad}) \to H^2(A_n, Z)]$$

ce qui implique que $\mathcal{G}$ est neutre.

Si $\mathcal{G}$ est génériquement neutre, alors il existe un ouvert U de A_n tel que la restriction de $\mathcal{G}$ à U est neutre. Si x_0 : Spec k$\to U$ est un point fermé de U, la restriction de $\mathcal{G}$ à x_0 est neutre.

Si $\mathcal{G}$ est génériquement triviale, alors la restriction de α au point générique est nulle. Or l'application $H^2(A_n, Z) \to H^2(k(A_n), Z)$ est injective ([3], théorème 4.2) donc α est nul et $\mathcal{G}$ est triviale.
C.Q.F.D.

Corollaire 2.1 *Soit k un corps de caractéristique 0 et H un groupe réductif défini sur k tels que l'une des conditions suivantes soit vérifiée:*

i) k est algèbriquement clos;

ii) k est un corps local non archimédien et $\overline{\mathrm{H}}$ *est semi-simple connexe;*

iii) k est un corps global et $\overline{\mathrm{H}}$ *est semi-simple simplement connexe.*

Alors l'ensemble $H^2(A_n, H)$ *ne contient que des éléments neutres.*

En effet, dans chacun de ces cas, $H^2(k, H)$ ne contient que des classes neutres (c.f. [5] pour ii) et iii))

Lemme 2.3 *Soit k un corps de caractéristique non nulle et T un tore défini sur k. Alors l'application* $H^2(A_n, T) \to H^2(k(A_n), T)$ *est injective.*

Preuve : Soit T un tore défini sur k. On considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} H^2(A_n, T) & \longrightarrow & H^2(A_n^{k_s}, T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(k(A_n), T) & \longrightarrow & H^2(k(A_n^{k_s}), T) \end{array}$$

La flêche de droite est injective car T est déployé sur k_s et l'application

$$H^2(A_n^{k_s}, G_m) \to H^2(k(A_n^{k_s}), G_m)$$

est injective ([13], p.107). Un élément α de $H^2(A_n, T)$ dont l'image dans $H^2(k(A_n), T)$ est nulle a donc une image nulle dans $H^2(A_n^{k_s}, T)$. La suite spectrale de Hochschild-Serre relative au revétement galoisien $A_n^{k_s} \to A_n$ montre que α est l'image d'un élément β de $H^2(\mathrm{Gal}(k_s/k), T(k_s[t_1, \cdots, t_n])$. Or,

$$H^2(\mathrm{Gal}(k_s/k), T(k_s[t_1, \cdots, t_n])) = H^2(\mathrm{Gal}(k_s/k), T(k_s)) = H^2(k, T).$$

Donc α est l'image d'un élément de $H^2(k, T)$. Or, α est génériquement nul, donc α est nul.
C.Q.F.D

Proposition 2.3 *Soit k un corps de caractéristique non nulle, H un groupe réductif défini sur k, $\mathcal{G}$ une gerbe liée par H sur A_n. Si la restriction de $\mathcal{G}$ au point générique est triviale, alors $\mathcal{G}$ est triviale sur A_n.*

Preuve : On note Z le centre de H, T un tore maximal de H et T_{ad} le tore T/Z. La suite exacte $1 \to Z \to T \to T_{ad} \to 1$ donne un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(A_n, T) & \longrightarrow & H^1(A_n, T_{ad}) & \longrightarrow & H^2(A_n, Z) & \longrightarrow & H^2(A_n, T) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1(k(A_n), T) & \longrightarrow & H^1(k(A_n), T_{ad}) & \longrightarrow & H^2(k(A_n), Z) & \longrightarrow & H^2(k(A_n), T) \end{array}$$

La flêche de droite est injective d'après le lemme 2.3. Soit α un élément de $H^2(A_n, Z)$ dont l'image dans $H^2(k(A_n), Z)$ est nulle. Une chasse

au diagramme montre que α est alors l'image d'un élément β de $H^1(A_n, T_{ad})$ tel que la restriction de β au point générique de A_n provient d'un élément de $H^1(k(A_n), T)$. Les T_{ad}-torseurs sur A_n proviennent de T_{ad}-torseurs sur Spec k par le changement de base $A_n \to$ Spec k ([17], p. 205), donc β est l'image sur A_n d'un élément de $H^1(A_n, T)$ et donc α est nul.
On écrit γ la classe d'équivalence de $\mathcal{G}$ dans $H^2(A_n, H)$ et $\gamma = \alpha.\epsilon$. La gerbe $\mathcal{G}$ est génériquement triviale donc α est génériquement nul. L'injectivité de l'application

$$H^2(A_n, Z) \to H^2(k(A_n), Z)$$

montre que α est nul et donc $\mathcal{G}$ est triviale.
C.Q.F.D.

Lemme 2.4 *Soit H un groupe réductif défini sur un corps k et vérifiant l'une des deux conditions suivantes :*

i) H est semi-simple ;

ii) H est déployé sur k.

Alors toute gerbe sur A_n localement (pour la topologie étale) liée par H et génériquement liée par H est liée par H sur A_n.

Preuve : Soit $\mathcal{G}$ une gerbe sur A_n localement liée par H et génériquement liée par H. Le lien L de $\mathcal{G}$ définit un élément [L] de $H^1(A_n, \mathrm{Autext}(H))$ dont l'image dans $H^1(k(A_n), \mathrm{Autext}(H))$ est nulle. Dans le cas où H est semi-simple, le groupe Autext(H) est un groupe fini. Dans la cas où H est déployé, le groupe Autext(H) est un groupe constant. Dans ces deux cas, l'application

$$H^1(A_n, \mathrm{Autext}(H)) \to H^1(k(A_n), \mathrm{Autext}(H))$$

a un noyau trivial. Donc le lien de $\mathcal{G}$ est représentable par H.
C.Q.F.D.

2.3 Gerbes sur les anneaux de valuation discrète

Lemme 2.5 *Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K, H un schéma en groupes semi-simples défini sur Spec A, H_0 une forme intérieure de H_K définie sur Spec K. Alors il existe une forme intérieure de H, définie sur Spec A dont la restriction à Spec K est isomorphe à H_0*

Preuve : Le groupe H_0 est semi-simple, il existe donc un modèle semi-simple de H_0 sur Spec A si et seulement si H_0 est déployé sur $\mathrm{K_{nr}}$, l'extension maximale non ramifiée de K . Le schéma en groupes H est défini sur Spec A, donc la restriction de H à K_{nr} est déployée. Les restrictions de H et H_o au dessus de K_{nr} étant isomorphes, H_o est déployé au dessus de K_{nr}. Il existe donc un modèle réductif de H_o au dessus de Spec A, que nous noterons H_1. Montrons maintenant que H_1 est une forme intérieure de H sur Spec A.
Le groupe H_0 est une forme de H sur K, donc H_0 et H_K ont même type sur Spec K. On en déduit que H et H_1 ont même type sur Spec A. Ainsi, H_1 est une forme de H sur Spec A. On considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} H^1(A, H_{ad}) & \longrightarrow & H^1(A, \mathrm{Aut}H) & \longrightarrow & H^1(A, \mathrm{Autext}H) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta} \\ H^1(K, H_{ad}) & \longrightarrow & H^1(K, \mathrm{Aut}H) & \longrightarrow & H^1(K, \mathrm{Autext}H) \end{array}$$

La forme H_1 de H définit une classe $[H_1]$ dans $H^1(A, \mathrm{Aut}H)$ dont l'image dans $H^1(K, \mathrm{Aut}H)$ appartient à $\mathrm{Im}[H^1(K, H_{ad}) \to H^1(K, \mathrm{Aut}H)]$. L'application θ est injective puisque Autext(H) est fini ([12]) donc $[H_1]$ appartient à $\mathrm{Im}[H^1(A, H_{ad}) \to H^1(A, \mathrm{Aut}H)]$ et H_1 est une forme intérieure de H sur Spec A.
C.Q.F.D.

Théorème 2.1 *Soient A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K, H un schéma en groupes semi-simples sur Spec A, $\mathcal{G}$ une gerbe sur Spec A dont le lien est représentable par H. Si la restriction de $\mathcal{G}$ à Spec K est neutre, alors $\mathcal{G}$ est neutre sur Spec A.*

Preuve : La restriction de $\mathcal{G}$ à Spec K est neutre donc équivalente sur K à la gerbe des torseurs de H_0 où H_0 est une forme intérieure de H définie sur K. D'après le lemme précédent, il existe donc une forme intérieure de H, notée H_1, définie sur Spec A, dont la restriction à Spec K est isomorphe à H_0. Les schémas en groupes H_1 et H définissent le même lien, $\mathcal{G}$ est donc une gerbe liée par H_1 sur Spec A et la restriction de $\mathcal{G}$ à Spec K est équivalente à la gerbe des torseurs de H_1. La proposition 2.1 nous permet de conclure que $\mathcal{G}$ est équivalente sur Spec A à la gerbe des torseurs de H_1 et donc est neutre.
C.Q.F.D.

Dans l'énoncé du théorème, on peut remplacer l'hypothèse "le lien de $\mathcal{G}$ est représentable par H" par "le lien de $\mathcal{G}$ est localement (pour la topologie étale) représentable par H". En effet, on sait que dans ce dernier cas, le lien de $\mathcal{G}$ est représentable par une forme tordue de H (lemme 2.1).

On note, pour un schéma S quelconque, $N^2(S, H)$ le sous-ensemble de $H^2(S, H)$ formé des classes neutres. L'existence d'un modèle sur Spec A pour toute forme intérieure de H définie sur K permet d'obtenir le résultat suivant :

Corollaire 2.2 *Soit H un schéma en groupes semi-simples sur Spec A, l'application*

$$N^2(A, H) \to N^2(K, H)$$

est bijective.

Preuve : L'injectivité est une conséquence immédiate de celle de l'application $H^2(A, Z) \to H^2(K, Z)$ [4]. Soit maintenant $\mathcal{G}$ une gerbe neutre sur K, elle est équivalente à la gerbe des torseurs de H' pour une forme intérieure H' de H. le groupe H' admet un modèle semi-simple sur Spec A qui est aussi une forme intérieure de H et que nous notons encore H'. La classe d'équivalence de la gerbe des torseurs de H' sur Spec A est un élément de $N^2(A, H)$ dont l'image dans $N^2(K, H)$ est

la classe d'équivalence de $\mathcal{G}$.
C.Q.F.D.

Corollaire 2.3 *Si K est un corps local ou un corps de nombres, H un schéma en groupes semi-simples simplement connexes sur X, alors toutes les gerbes de $H^2(A, H)$ sont neutres.*

En effet, toutes les gerbes de $H^2(K, H)$ sont neutres [6].

Nous allons maintenant étendre le résultat du théorème 2.1 au cas où H est un schéma en groupes réductifs, non nécessairement semi-simples.

Soit H un schéma en groupes réductifs défini sur Spec A, H^{ss} son groupe dérivé et H^{sc} le revêtement simplement connexe de ce dernier. On note Z le centre de H et Z^{sc} celui de H^{sc}. Le morphisme $\rho : H^{sc} \to H$ induit un isomorphisme $H^{sc}/Z^{sc} \simeq H/Z$ et un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, H_{ad}) & = & H^1(X, H_{ad}) \\ {\scriptstyle \delta'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ H^2(X, Z^{sc}) & \xrightarrow{\rho_*} & H^2(X, Z) \end{array}$$

Proposition 2.4 *Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K, H un schéma en groupes réductifs sur Spec A, $\mathcal{G}$ une gerbe liée par H sur Spec A dont la restriction à Spec K est neutre, alors $\mathcal{G}$ est neutre sur Spec A.*

Preuve: On note γ la classe d'équivalence de $\mathcal{G}$ dans $H^2(A, H)$, α la classe d'équivalence de la gerbe des torseurs de H et ϵ l'élément de $H^2(A, Z)$ tel que $\gamma = \epsilon.\alpha$. On note α' la classe d'équivalence de la gerbe des torseurs de H^{sc} dans $H^2(A, H^{sc})$. De plus, on note α_K

et γ_K (resp. ϵ_K, resp. α'_K) les images de α et γ (resp. ϵ, resp. α') dans $H^2(K, H)$ (resp. $H^2(K, Z)$, resp. $H^2(K, H^{sc})$). La restriction de $\mathcal{G}$ au-dessus de K est neutre donc

$$\epsilon_K \in \mathrm{Im}[H^1(K, H_{ad}) \to H^2(K, Z)].$$

Soit θ un élément de $H^1(K, H_{ad})$ tel que $\epsilon_K = \delta_K(\theta)$ et soit χ l'image de δ dans $H^2(K, Z^{sc})$. On a donc $\rho_{*,K}(\chi) = \epsilon_K$. L'élément γ_1 de $H^2(K, H^{sc})$ défini par $\chi.\alpha'$ est neutre puisque $\chi \in \mathrm{Im}[H^1(K, H_{ad}) \to H^2(K, Z^{sc})]$. Donc d'après le corollaire 2.1, γ_1 est la restriction d'un élément de $N^2(A, H^{sc})$ que nous notons encore γ_1. On note ϵ_1 l'élément de $H^2(A, Z^{sc})$ tel que $\gamma_1 = \epsilon_1.\alpha'$. On a alors $\epsilon_{1,K} = \chi$. Soit finalement $\theta_1 \in H^1(A, H_{ad})$ tel que $\epsilon_1 = \delta'(\theta_1)$ (L'existence de θ_1 est assurée par la neutralité de γ_1). Le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H^2(A, Z^{sc}) & \longrightarrow & H^2(A, Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(K, Z^{sc}) & \xrightarrow{\rho_*} & H^2(K, Z) \end{array}$$

montre que $\rho_*(\epsilon_1)_K = \epsilon_K$, d'où, l'application $H^2(A, Z) \to H^2(K, Z)$ étant injective ([4]), $\rho_*(\epsilon_1) = \epsilon = \delta(\theta_1)$, ce qui montre que

$$\epsilon \in \mathrm{Im}[H^1(X, H_{ad}) \to H^2(X, Z)]$$

et donc que γ est une classe neutre.

Chapitre 3

Espaces homogènes

3.1 Résultats généraux

La proposition suivante permet de ramener, moyennant une hypothèse sur le centre du groupe d'isotropie, l'étude des espaces homogènes génériquement triviaux à celle des espaces homogènes principaux. La méthode utilisée nécessite certains résultats sur les gerbes (conditions i) et ii) de la proposition) et pourra donc s'appliquer dans les cas où ces propriétés sont démontrées dans le chapitre 2.

Proposition 3.1 *Soit S un schéma intègre régulier noethérien, K son corps des fonctions, G un schéma en groupes réductifs défini sur S, H un sous groupe semi-simple de G, de centre Z tel que*

$$\mathrm{Im}[H^1(K,Z) \to H^1(K,H)] = 0,$$

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i) Toute gerbe localement liée par H sur S et génériquement liée par H est liée par H sur S;

ii) Toute gerbe liée par H sur S et dont la restriction à Spec K est triviale est triviale sur S.

Si l'application $H^1(S,G) \to H^1(K,G)$ a un noyau trivial alors tout espace homogène de G avec isotropie H génériquement trivial admet une section sur S.

Preuve : Soit $\mathcal{G}$ la gerbe des relèvements de X à G. Elle est liée par H localement pour la topologie étale et liée par H sur K, donc elle est liée par H sur S (propriété i). De plus, X étant rationnellement trivial, la restriction de $\mathcal{G}$ à Spec K est équivalente à la gerbe des torseurs de H, donc $\mathcal{G}$ est équivalente sur S à la gerbe des torseurs de H (propriété ii). En particulier, $\mathcal{G}$ est neutre et donc X est dominé sur S par un G-torseur. De plus, $\mathcal{G}$ étant équivalente sur S à la gerbe des torseurs de H, il existe un G-torseur Y et un G-morphisme $Y \to X$ tels que $\mathrm{Aut}_{\mathrm{G,X}}(Y \to X) = H$. La restriction de X à Spec K est triviale, donc X est dominé sur K par le G-torseur trivial. Le morphisme $G_K \to X_K$ est une forme sur K du morphisme $Y_K \to X_K$ et définit donc un élément ξ de $H^1(K, H)$, mais $\mathrm{Aut}_{\mathrm{G,X_K}}(G \to X_K) = H$ donc $\xi \in \mathrm{Im}[H^1(K, Z) \to H^1(K, H)]$ et donc $\xi = 0$ d'après l'hypothèse faite sur H. Le G-torseur Y est donc rationnellement trivial. D'autre part, l'application $H^1(S, G) \to H^1(K, G)$ a un noyau trivial donc Y a une section sur S et il en est de même pour X.
C.Q.F.D.

L'hypothèse $\mathrm{Im}[H^1(K, Z) \to H^1(K, H)] = 0$ est vérifiée notamment quand le groupe H est adjoint, simplement connexe ou déployé sur Spec K. La proposition s'applique donc pour ces groupes.

Les résultats sur les espaces homogènes principaux rationnellement triviaux sur les anneaux henséliens obtenus par Nisnevich ([15]) et les résultats du chapitre précédent au sujet des gerbes permettent d'obtenir la proposition suivante :

Proposition 3.2 *Soit A un anneau local hensélien de corps des fractions K, G un schéma en groupes réductifs sur Spec A, H un sous-groupe semi-simple de G et Z le centre de H. On suppose que :*

$$\mathrm{Im}[H^1(K, Z) \to H^1(K, H)] = 0.$$

Soit X un espace homogène de G avec isotropie H. Si X est rationnellement trivial alors X admet une section sur Spec A.

Preuve : On peut appliquer la proposition 3.1. La condition i) est vérifiée d'après le lemme 2.2 et la condition ii) est le résultat de la

proposition 2.1. L'injectivité de l'application $H^1(A, G) \to H^1(K, G)$ est un résultat de Nisnevich [15]
C.Q.F.D.

Plus généralement, si A est un anneau local régulier, le lemme 2.2 et la proposition 2.1 assurent que les conditions i) et ii) de la proposition 3.1 sont vérifiées. Donc si G est un schéma en groupes réductifs défini sur Spec A et H un sous-groupe semi-simple de G, de centre Z tel que $\mathrm{Im}[H^1(K, Z) \to H^1(K, H)] = 0$, et si l'application $H^1(A, G) \to H^1(K, G)$ a un noyau trivial alors tout espace homogène de G avec isotropie H rationnellement trivial admet une section sur Spec A. C'est notamment le cas si A est un anneau local de dimension 2 et G un schéma en groupes réductifs quasi-déployé ([16]).

Nous verrons dans les sections suivantes d'autres cas d'application de la proposition 3.1.: proposition 3.4 (S est un espace affine de dimension n ou le spectre d'une algèbre locale sur un corps parfait k) et proposition 3.7 (S est le spectre d'un anneau de valuation discrète).

La proposition précédente nous permet de caractériser, pour un schéma régulier intègre noethérien S de corps des fonctions K, le noyau de l'application $H^1(S, G, H) \to H^1(K, G, H)$ en termes de topologie complétement décomposée. Nous commençons par quelques rappels concernant cette topologie (voir [14] pour un traitement détaillé).

Soit X un schéma, Et/X la catégorie des schémas étales sur X et soit $\phi : X' \to X$ un morphisme étale. On considère le sous-ensemble suivant de X:

$$cd(X'/X) = \{x \in X | \exists x' \in \phi^{-1}(x) | \phi^{\alpha}(k(x)) \xrightarrow{\sim} k(x')\}$$

où ϕ^{α} est l'application canonique induite par ϕ sur les corps résiduels. Soit X un un objet de Et/X. Un famille de morphismes étales

$$\{\phi_i : X'_i \to X' | i \in I\}$$

est un recouvrement complétement décomposé de X' si

$$\bigcup_{i \in I} cd(X'_i/X') = X'.$$

On définit une topologie de Grothendieck sur Et/X en prenant pour recouvrements de X' les recouvrements complétement décomposés de X'. On appelle cette topologie la topologie complétement décomposée.

Soit $i_x : x \to X$ un point de X. Une paire (U,s) consistant en un X-schéma étale de type fini $\phi : U \to X$ et une x-section $s : x \to U$ de ϕ est appelée un voisinage complétement décomposé de x. On note $N_{cd}(x)$ la catégorie de tous les voisinages complétement décomposés de x et $N_{cd}(x)^0$ la catégorie duale. Alors on a :

$$\varprojlim_{(U,s)\in N_{cd}(x)^0} = Spec\ O^h_{X,x}$$

où $O^h_{X,x}$ est le hensélisé de l'anneau local $O_{X,x}$ de X en x par rapport à son idéal maximal.

Théorème 3.1 *Soit S un schéma régulier intègre noetherien, K le corps des fonctions de S, G un schéma en groupes réductifs sur S, H un sous-groupe semi-simple de G, de centre Z vérifiant*

$$\mathrm{Im}[H^1(K, Z) \to H^1(K, H)] = 0,$$

X un espace homogène de G à isotropie H. Si X est rationnellement trivial alors X a localement des sections pour la topologie complètement décomposée.

Preuve : En effet, soit x un point de X et $\mathcal{O}_x$ l'anneau local de X en x et $\mathcal{O}^h_x$ le hensélisé de l'anneau $\mathcal{O}_x$. Le schéma Spec $\mathcal{O}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{x}}$ est la limite des voisinages de x dans la topologie complétement décomposée et la restriction de X à Spec $\mathcal{O}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{x}}$ admet une section par la proposition précédente, donc pour tout x de X, il existe un voisinage de x pour la topologie complètement décomposée tel que la restriction de X à ce voisinage admet une section, donc X a localement des sections pour la topologie complètement décomposée.
C.Q.F.D.

3.2 Espaces homogènes sur les espaces affines

Proposition 3.3 *Soit G un groupe réductif défini sur un corps k, H un sous-groupe de G semi-simple ou réductif déployé, X un espace homogène de G à isotropie H sur A_n. Si X est génériquement trivial, alors X est dominé sur A_n par un G-torseur. De plus, tout G-torseur dominant X sur A_n provient génériquement d'un H-torseur.*

Preuve : On construit la gerbe $\mathcal{G}_X$ des relévements de X à G. Elle est localement (pour la topologie étale) liée par H et génériquement liée par H. Donc d'après le lemme 2.4, $\mathcal{G}_X$ est liée par H sur A_n. La restriction de $\mathcal{G}_X$ au point générique est triviale donc $\mathcal{G}_X$ est triviale (d'après la proposition 2.2 si car k = 0, d'après la proposition 2.3 si car $k > 0$). La gerbe des relèvements de X à G est triviale, donc X est dominé par un G-torseur sur A_n. Soit Y un G-torseur dominant X sur A_n. La restriction de Y à $k(A_n)$ domine $X_{k(A_n)}$- qui est trivial- donc $Y_{k(A_n)}$ provient d'un H-torseur.
C.Q.F.D.

Si k est un corps de caractéristique 0, on peut remplacer l'hypothèse "X est génériquement trivial" par "X admet génériquement une section". En effet, dans ce cas la gerbe des relèvements de X à G est génériquement neutre et donc est neutre (proposition 2.2), ce qui assure que X est dominé sur A_n par un espace principal homogène de G.

Dans [17] (p. 188) , M.S. Raghunathan introduit la notion de groupe acceptable :

Définition 3.1 *Un groupe G défini sur un corps k est dit acceptable si pour toute extension L de k, tout torseur de G sur* Spec L[t] *est l'image d'un torseur de G sur* Spec L *par le changement de base* Spec L[t] $\rightarrow$ Spec L

En particulier, les groupes suivants sont acceptables [17] :

i) Si car k=0, tout groupe G est acceptable ;

ii) Un tore est acceptable sur tous corps;

iii) G est simplement connexe de type classique et *car* $k > 5$.

Corollaire 3.1 *Soit G un groupe acceptable sur k, H un sous-groupe de G réductif déployé ou semi-simple, k vérifiant l'une des conditions suivantes :*

i) dim $k \leq 1$ *;*

ii) k est un corps local de corps résiduel de dimension inférieure à 1 et G est simplement connexe et quasi deployé ;

iii) k est un corps global et G est simplement connexe et quasi déployé.

Alors tout espace homogène de G à isotropie H génériquement trivial admet une section sur A_n.

En effet, dans chacun de ces cas, $H^1(A_n, G)$ est réduit à l'élément neutre ([17]). L'espace principal homogène de G qui domine X d'après la proposition 3.3 admet donc une section sur A_n et il en est de même pour X.

Si car k=0 et si dans les cas ii),iii) on suppose en plus H semi-simple simplement connexe, alors tout espace homogène X de G à isotropie H sur A_n a une section. En effet, la gerbe des relèvements de X à G est neutre (corollaire 2.1) donc X est dominé par un espace homogène principal de G sur A_n. Cet espace homogène principal admet une section sur A_n et donc X admet une section sur A_n.

Théorème 3.1.-Soit G un groupe acceptable sur un corps parfait k, H un sous-groupe réductif déployé ou semi-simple de G, X un espace homogène de G à isotropie H sur A_n génériquement trivial, alors X a localement des sections pour la topologie de Zariski.

Preuve : On note K le corps $k(A_n)$. D'après la proposition précédente, X est dominé sur A_n par un espace principal homogène Y de G et la restriction Y_K de Y à Spec K est l'image d'un espace principal homogène de H sur K. Il existe donc un ouvert U de A_n tel que Y_U soit l'image d'un espace principal homogène Z de H sur U. De plus, G est acceptable sur k, donc il existe un ouvert V de A_n tel que Y_V est l'image d'un espace principal homogène de G sur k par le changement de base $V \to$ Spec k ([17], Theorem A). Soit $W = U \cap V$ et soit $\eta \to W$ un point fermé de W. On a un morphisme $Z_\eta \to Y_\eta$ et par le changement de base $W \to$ Spec k, on obtient un morphisme $Z_\eta \times W \to Y_\eta \times W$, et $Y_\eta \times W$ est isomorphe à Y_W. On appelle Z' le H-torseur sur A_n défini par $Z' = Z_\eta \times A_n$ et Y' l'image de Z' dans $H^1(A_n, G)$. L'image Y'_W de Y' par le changement de base $W \to A_n$ est isomorphe à Y_W donc Y'_K est isomorphe à Y_K. Soit G' la forme de G sur k obtenue en tordant G par le cocyle correspondant à Y_η. Il existe une bijection de $H^1(A_n, G)$ sur $H^1(A_n, G')$ envoyant Y' sur 0. L'image de Y dans $H^1(A_n, G')$ est génériquement triviale donc elle est triviale pour un recouvrement de Zariski de A_n, la suite

$$1 \to H^1_{Zar}(A_n, G) \to H^1(A_n, G) \to H^1(K, G)$$

étant exact ([3], Th. 3.1). Donc Y est localement isomorphe à Y' pour la topologie de Zariski. Donc localement pour la topologie de Zariski, Y provient d'un espace principal homogène de H et X est trivial, ce qui montre l'exactitude de la suite :

$$1 \to H^1_{Zar}(A_n, G, H) \to H^1(A_n, G, H) \to H^1(K, G, H).$$

C.Q.F.D.

Pour étudier les torseurs de G sur A_n, Ragunathan ([18]) introduit la condition d'isotropie suivante sur G :

> Chacune des composantes k-simples du groupe G est isotrope sur k.

Sous cette condition, Colliot-Thélène et Ojanguren [3] montrent que l'application :

$$H^1(L[t_1, \dots, t_n], G) \to H^1(L(t_1, \dots, t_n), G)$$

a un noyau trivial pour tout corps L contenant k.

Proposition 3.4 *Soit G un corps défini sur un corps k et vérifiant la propriété d'isotropie ci-dessus, H un sous-groupe semi-simple de G et S un schéma de l'une des formes suivantes :*

i) $S = Spec[L(t_1, \ldots, t_n)]$ avec L un corps contenant k;

ii) S est le spectre d'une k-algebre locale essentiellement lisse.

Soit K le corps des fonctions de S. On suppose que

$$\mathrm{Im}[H^1(K, Z) \to H^1(K, H)] = 0,$$

Alors tout espace homogène de G avec isotropie H rationnellement trivial admet une section sur S

Preuve : Il s'agit une nouvelle fois de l'application de la proposition 3.1. La propriété i) de la proposition 3.1 est vérifiée d'après le lemme 2.4 pour les espaces affines, d'après le lemme 2.2 pour les k-algèbres locales et la propriété ii) est une consq́uence des propositions 2.2 et 2.3 dans le cas des espaces affines et de la proposition 2.1 dans le cas des k-algèbres locales. L'injectivité de l'application $H^1(S, G) \to H^1(K, G)$ est un résultat de Colliot-Thélène et Ojanguren ([3]).

Corollaire 3.2 *Soit k un corps algebriquement clos, G un groupe réductif défini sur k, H un sous-groupe semi-simple de G et A une k-algèbre locale essentiellement lisse. Tout espace homogène de G à isotropie H défini sur spec A et génériquement trivial admet une section sur Spec A.*

En effet dans le cas où k est algèbriquement clos, la condition d'isotropie sur G est automatiquement vérifiée et il en est de même de la condition sur le centre de H.

3.3 Espaces homogènes sur les anneaux de valuation discrète

Proposition 3.5 *Soit A un anneau de valuation discrète, G un schéma en groupes réductifs défini sur Spec A, H un sous-groupe réductif de G sur Spec A. Tout espace homogène de G avec isotropie H, dont la restriction à Spec K est dominé par un espace homogène principal de G sur K, est dominé sur Spec A par un espace homogène principal de G.*

Preuve : On construit la gerbe des relèvements de X à G. Elle est localement (pour la topologie étale) liée par H donc elle est liée sur Spec A par une forme tordue de H (lemme 2.1). De plus, X étant génériquement dominé par un torseur de G, la restriction de $\mathcal{G}$ à Spec K est neutre (proposition 2.4), donc $\mathcal{G}$ est neutre et X est dominé par un espace homogène principal de G sur Spec A.
C.Q.F.D.

Proposition 3.6 *Soit A, G, H comme ci-dessus avec G semi-simple, k le corps résiduel de A. Supposons de plus que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :*
1) $dim(K) \leq 2$;
2) $dim(k) \leq 2$ et A est hensélien.
Alors toute espace homogène de G à isotropie H défini sur Spec A et dont la restriction à Spec K admet une section a une section sur Spec A.

Preuve : Supposons d'abord que G est simplement connexe. La gerbe des relévements de X à G est neutre donc X est dominé sur Spec A par un espace homogène principal de G.
Dans le cas où $dim(K) \leq 2$, on a $H^1(K, G) = 0$ [1] et l'application $H^1(A, G) \to H^1(K, G)$ a un noyau trivial [15] donc $H^1(A, G) = 0$ et Y a un point sur A, il en est donc de même pour X.
Si A est henselien, l'application $H^1(A, G) \to H^1(k, G)$ est injective donc si $dim(k) \leq 2$, on a $H^1(k, G) = 0$ [1] et donc $H^1(A, G) = 0$.

Comme précédemment, Y a un point sur A et il en est de même pour X.

On suppose maintenant que G est semi-simple et on note G^{sc} son revêtement simplement connexe. On considère la suite exacte :

$$1 \to \mathrm{Ker}\rho \to G^{sc} \to G \to 1.$$

G^{sc} agit sur X par l'intermédiaire de ρ. X est donc un espace homogène de G^{sc} dont l'isotropie est réductive. Donc d'après ce qui a été fait ci-dessus X admet une section sur Spec A.
C.Q.F.D.

Théorème 3.2 *Soit A un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, k son corps résiduel, G un schéma en groupes semi-simples sur Spec A, H un sous-groupe réductif de G. On suppose que* $dim(k) \leq 2$*. Soit X un espace homogène de G à isotropie H défini sur Spec A et dont la restriction à Spec K admet une section alors X admet une section sur Spec A.*

Preuve : Suivant Nisnevich [15],on considère l'application :

$$H^1(A, G, H) \to H^1(K, G, H) \times H^1(A^h, G, H)$$

Soit X un espace homogène de G avec isotropie H, admettant une section sur Spec K. La restriction de X à K^h a une section donc X admet une section sur A^h. Soit $s_1 \in X(K)$ une section de X sur K et $s_2 \in X(A^h)$ une section de X sur A^h. On note s_{1,K^h} (Resp. s_{2,K^h}) la restriction de s_1 (Resp s_2) dans $X(K^h)$. X étant un espace homogène de G, il existe $g \in G(K^h)$ tel que $s_{1,K^h} = g.s_{2,K^h}$. Or Nisnevich a montré [15] que $G(K^h) = G(A^h)G(K)$, donc il existe g_1 dans G(K) et g_2 dans G(A^h) tels que $g = g_{1,K^h}.g_{2,K^h}$. Les sections $g_1^{-1}s_1$ et g_2s_2 ont même restriction dans $X(K^h)$ donc elles se recollent en une section dans X(A) et X admet une section sur A.
C.Q.F.D.

Pour terminer ce chapitre, on remarquera qu'on peut une nouvelle fois appliquer la proposition 3.1 dans le cas où le schéma de base S est le spectre d'un anneau de valuation discrète A de corps des fractions K.

En effet, les conditions sur les gerbes dans la proposition sont vérifiées d'après le lemme 2.2 et la proposition 2.3 du chapitre 2 et l'injectivité de l'application $H^1(A,G) \to H^1(K,G)$ est un résultat de Nisnevich [15]. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Proposition 3.7 *Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K, G un schéma en groupes réductifs défini sur A, H un sous-groupe de G de centre Z tel que*

$$\mathrm{Im}[H^1(K,Z) \to H^1(K,H)] = 0.$$

Soit X un espace homogène de G avec isotropie H génériquement trivial. Alors X admet une section sur Spec A.

Bibliographie

[1] E. BAYER-FLUCKIGER and R. PARIMALA. Galois cohomology of the classical groups over fields of cohomological dimension ≤ 2. *Invent. Math.*, (122):195–229, 1995.

[2] M. BOROVOI. Abelianization of the second non abelian galois cohomology. *Duke Math. J.*, (72):217–239, 1993.

[3] J.L. COLLIOT-THÉLÈNE and M. OJANGUREN. Espaces principaux homogènes localement triviaux. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, pages 97–122, 1992.

[4] J.L. COLLIOT-THÉLÈNE and J.J. SANSUC. Cohomologie des groupes de type multiplicatif sur les schémas réguliers. *C.R. Acad. Sci. Paris*, Série A(287):449–452, 1978.

[5] J.C. DOUAI. Cohomologie galoisienne des groupes semi-simples définis sur les corps globaux. *C.R. Acad. Sci. Paris*, Série A(281):1077–1080, 1975.

[6] J.C. DOUAI. Cohomologie galoisienne des groupes semi-simples définis sur les corps locaux. *C.R. Acad. Sci. Paris*, Série A(280):321–323, 1975.

[7] J.C. DOUAI. Espaces homogènes rationnellement triviaux et arithmétique des schémas en groupes réductifs sur les anneaux de dedekind. *C.R. Acad. Sci. Paris*, série I(317):1007–1012, 1993.

[8] M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK. *Séminaire de géométrie algèbrique du Bois Marie.* 1963-1964.

[9] Y.Z. FLICKER, C. SCHEIDERER, and R. SUJATHA. Grothendieck's theorem on non abelian H^2 and local-global principles. *Journal of the American Math. Society*, 11(3):731–750.

[10] J. GIRAUD. *Cohomologie non abélienne.* Spinger, Heidelberg, 1971.

[11] A. GROTHENDIECK. Torsion homologique et sections rationnelles. *in Anneaux de Chow et applications, séminaire Chevalley, 2eme année, Secrétariat mathématique, Paris*, 1958.

[12] B. MAZUR. Local flat duality. *Amer. J. Math.*, (92):343–361, 1973.

[13] A. MILNE. *Etale cohomology.* Princeton University press, 1980.

[14] Y. A. NISNEVICH. *The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in Algebraic K.Theory.* Algebraic K-theory: connections with geometry and topology, proceedings of the advanced NATO research worshop at Lake Louise, Canada, Dec. 1987, NATO Advanced Study Institute Series, v. 217, Kluwer Academic Publishers, 1989, pp. 241-342.

[15] Y. A. NISNEVICH. Espaces homogènes principaux rationnellement triviaux et arithmétique des schémas en groupes réductifs sur les anneaux de dedekind. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I(299):5–8, 1984.

[16] Y. A. NISNEVICH. Rationally trivial principal homogeneous spaces, purity and arithmetic of reductive group schemes over extensions of two-dimensional local regular rings. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I(309):651–655, 1989.

[17] M.S. RAGHUNATHAN. Principal bundles on affine space. *In C.P. Ramanujan - A tribute, 187-206; Tata institute of Fundamental Research, studies in mathematics*, (8), 1978.

[18] M.S. RAGHUNATHAN. Principal bundles on affine space and bundles on the projective line. *Math. Annalen*, (285):309–332, 1989.

[19] J.P. SERRE. Espaces fibrés algébriques. *In Anneaux de Chow et applications, séminaire Chevalley, 2eme année, Secrétariat mathématique, Paris*, 1958.

[20] T.A. SPRINGER. *Non abelian H^2 in galois cohomology, algebraic groups and discontinuous subgroups.* Proc. Sympos. Pure Math, 9, Amer. Math. Soc., Providence 1966, p. 164-182.