

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE UFR DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES LABORATOIRE DE MECANIQUE DE LILLE

20000 424

THESE DE DOCTORAT

Discipline : Mécanique Présentée et soutenue publiquement par :



Agnès KUBICKI

Pour obtenir le grade de **DOCTEUR EN MECANIQUE**

MODELE RHEOLOGIQUE POUR LA DIFFUSION D'ONDES DE GRAVITE EN AIR HUMIDE SATURE ET APPLICATION A LA CONVECTION NUAGEUSE

Soutenue le 17 décembre 1999, devant la commission d'examen composée de :

M.	D. BUISINE	Professeur, Université de Lille I	Président
Mme	R. DROUOT	Professeur, Université de Versailles	Rapporteurs
M.	J.P. CALTAGIRONE	Professeur, Université de Bordeaux I	
M.	U. EHRENSTEIN	Professeur, Université de Nice	Examinateurs
M .	V. PAVLOV	Professeur, Université de Lille I	
M.	P.A. BOIS	Professeur, Université de Lille I	Directeur de thèse



Altocumulus aux motifs cellulaires et rouleaux. Vue d'avion. (Photographié par M. Choteau) (Laboratoire de Mécanique de Lille)

A Martial,

« … Oh ! Regardez le ciel ! cent nuages mouvants, Amoncelés là-haut sous le souffle des vents, Groupent leurs formes inconnues ; Sous leurs flots par moments flamboie un pâle éclair, Comme si tout à coup quelque géant de l'air Tirait son glaive dans les nues. … »

> Extrait des Feuilles d'automne. Victor Hugo

Remerciements

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Mécanique de Lille (URA CNRS 1441) à l'Université des Sciences et Technologies de Lille dans l'équipe Axe Mécanique des Fluides (dynamique des fluides de l'environnement).

Je tiens à remercier très sincèrement avant tout Monsieur le Professeur P.A. Bois de l'Université des Sciences et Technologies de Lille pour avoir encadré avec tant de qualité mes travaux. Il a su me prodiguer d'excellents conseils, m'orienter et m'aider. Je tiens à souligner sa grande confiance et sa valeur humaine, qui notamment ont pu me guider pendant ces cinq longues années, ainsi que ses connaissances scientifiques et ses qualités pédagogiques. Je lui exprime ma plus grande reconnaissance et amitié. Qu'il accepte à travers ces quelques lignes toute ma gratitude...

Mes remerciements vont à Monsieur le Professeur D. Buisine de l'Université des Sciences et Technologies de Lille pour l'intérêt qu'il a porté à mon étude et pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant mon Jury de thèse.

Je suis très reconnaissante envers Madame le Professeur R. Drouot de l'Université de Versailles et Monsieur le Professeur J.P. Caltagirone de l'Université de Bordeaux I, qui, par leurs critiques et leurs conseils directs ont permis l'aboutissement de ce travail. Je les remercie vivement d'avoir voulu juger ce travail en tant que rapporteurs.

Je remercie sincèrement Messieurs les Professeurs V. Pavlov de l'Université des Sciences et Technologies de Lille et U. Ehrenstein de l'Université de Nice d'avoir contribué au succès de cette thèse en l'examinant et en acceptant d'être membres de mon Jury de soutenance.

Je remercie, de même, Monsieur le Professeur G. Caignaert, Directeur du Laboratoire de Mécanique de Lille de m'avoir accueillie pour réaliser cette thèse au sein du laboratoire, et son soutien à certaines occasions.

Je voulais remercier sincèrement et amicalement pour le temps d'une vue d'avion M. Choteau, et pour tant d'autres choses qu'il est inutile d'énumérer puisqu'elle s'y reconnaîtra sans aucun doute, mais aussi, et cela me tient à cœur, pour leur grande amitié et soutien la famille d'O. Wiplier ; pour le temps de quelques *toiles d'araignée* et plusieurs fous rires, D. Crépin ; et pour celui de quelques photos avalées sous disquettes, J. Carlier et J.M. Foucaut.

Merci à tous de m'avoir soutenue et encouragée dans ma recherche et d'avoir développé mon instinct de *chasseuse* de nuages.

Alors mes pensées s'envolent...et ces quelques lignes ne suffiront jamais à exprimer profondément tout ce que je ressens pour les êtres les plus chers qui m'ont toujours encouragée, soutenue et aidée pendant cette période : je pense à mes parents qui ont tellement fait pour moi et ma sœur Sophie, et enfin à toi Martial à qui je dédie ce modeste travail. Merci pour votre patience.

De tout mon cœur, je n'ajouterai plus que ces mots : merci pour tout et plus encore...

Table des matières

Table des matières

.

	Page
In	roduction générale
Ch	apitre 1 – Les équations des mouvements de fluides hétérogènes à rhéologie de mélange
po	ur le cas de l'air humide saturé16
1-	Introduction
2-	Rappels sur les lois de bilan dans la théorie des mélanges
	2-1 Conservation de la masse
	2-2 Conservation de la quantité de mouvement
	2-3 Conservation de l'énergie
3-	Cas de l'air humide saturé23
	3-1 Conditions de l'étude
	3-2 Loi de Fick
	3-3 Equation de Clausius-Clapeyron et équations d'état
4-	Les équations de la dissipation dans l'atmosphère nuageuse
	4-1 Ecriture des équations double diffusives pour une loi d'état arbitraire27
	4-2 Cas des gaz parfaits
	4-3 Comportement de la chaleur latente L_{ν}
5-	Cas des petites concentrations d'eau et de vapeur
Ch	apitre 2 – Les équations de Boussinesq et l'étude en convection profonde
1-	Introduction
2-	Approximation de Boussinesq
	2-1 Equations adimensionnelles
	2-2 Conditions générales de validité
	2-3 Equations fondamentales représentant la première approximation de Boussinesq41

3-	Problème réduit et équation linéarisée	43
	3-1 Modèle double diffusif	43
	3-2 Equation linéarisée et comportement d'onde en convection profonde	45
4-	Etude de la propagation des ondes dans le milieu en convection profonde	47
	4-1 Changement de variable	47
	4-2 Comportement des racines et résultats qualificatifs	49

Chapitre 3 – Un problème de Rayleigh-Bénard humide en convection peu profonde......53

1-	Introduction	54
2-	Formulation du problème de Rayleigh-Bénard humide	55
	2-1 Modèle double diffusif et équation	.56
	2-2 Conditions aux limites	60
3-	Problème auxiliaire	.61
	3-1 Définition du problème auxiliaire	61
	3-2 Solutions stationnaires	62
	3-3 Solutions oscillatoires	65
4-	Problème réel	70
	4-1 Restrictions induites par la loi d'état	.70
	4-2 Domaine de validité de la solution	72
5-	Interprétations et conclusions qualitatives ou d'ordre physique	75
Со	nclusion générale	77
Bi	bliographie	.82
An	nexe 1 – Eléments de thermodynamique des mélanges dans le cas de l'air humide	87
1-	Equation de Gibbs-Duhem	88
	1-1 Loi d'état de l'air humide	88
	1-2 Ecriture pour l'enthalpie de la relation de Gibbs-Duhem	89

2-	Equation de l'énergie	91
An	nexe 2 – Etablissement de l'équation (2.28)	94
1-	Système réduit	95
	1-1 Equations de diffusion	95
	1-2 Equation de Clausius-Clapeyron	96
2-	Analyse en modes normaux	97
	2-1 Elimination de la variable U et de la variable V	98
	2-2 Elimination de la variable P	98
	2-3 Elimination de la variable R	98
	2-4 Elimination de la variable T	99
	2-5 Elimination de la variable Q_{ν}	99

Annexe 3 – Etude des racines de l'équation de dispersion (2.34) dans le plan complexe..101

1-	Approche théorique	
	1-1 Comportement pour X petit	103
	1-2 Comportement pour X grand	
	1-3 Propriétés pour des valeurs de X autres que 0 et $+\infty$	
	1-4 Représentation dans le plan complexe	
2-	Approche numérique	

Introduction générale

Introduction générale

L'étude de la propagation des ondes de gravité dans un air humide saturé a pour but de mettre en évidence les différents types de mouvements pouvant exister dans ce milieu.

Le travail proposé définit une modélisation rhéologique, puis asymptotique, permettant de décrire les mouvements convectifs du mélange « air sec-vapeur d'eau-eau liquéfiée » composant cet air humide saturé, et, concrètement, un nuage.

Une interprétation physique du phénomène consiste à considérer le milieu comme étant un nuage non-précipitant, et les mouvements étudiés se manifestent par la présence de langues de vapeur à l'intérieur des nuages.

Le cas d'éventuelles précipitations est exclu et la description du milieu est abordée par une rhéologie de milieu continu.

L'une des difficultés de la mise en équation provient du fait qu'il s'agit d'un mélange ternaire, dissipatif et non inerte : le milieu physique est, en effet, un fluide composé de trois phases (air sec, vapeur d'eau, eau condensée), dont la concentration est suffisante pour appliquer une rhéologie de mélange, la phase « eau liquide » restant toutefois suffisamment dispersée pour être représentée comme un aérosol.

Une modélisation du mélange ternaire par un milieu continu équivalent a été effectuée par Bois (1994), mais la mise en équation n'a été réalisée que pour les mouvements non dissipatifs, tandis que pour les problèmes considérés ici, les équations s'étendent au cas des milieux dissipatifs. L'étude de la convection en milieu humide saturé soulève de nombreux problèmes de modélisation, dus notamment à la présence des trois phases dans le milieu, mais aussi à l'existence des différents facteurs de dissipation ainsi qu'à la prise en compte des échanges de masse entre les constituants.

En effet, dans le cas d'un nuage, le mélange est thermodynamiquement saturé, ce qui signifie qu'il se produit entre les deux phases « vapeur » et « eau condensée » un processus d'échange de masse par évaporation ou par condensation. La dissipation, quant à elle, est due d'abord à la viscosité et à la conduction thermique, mais également à la diffusion moléculaire, qui est spécifique des mélanges.

La prise en compte d'un grand nombre de ces propriétés peut être envisagée dans une simulation numérique, mais il est plus aisé d'isoler le plus grand nombre possible de ces facteurs lorsque l'on cherche la caractérisation d'un phénomène particulier.

De nombreux travaux ont porté dans les dernières décennies sur la modélisation des phénomènes liés à la convection nuageuse. Citons, par exemple, les travaux de Bougeault (1981), Durran et Klemp (1982), C.S. Bretherton & P.K. Smolarkiewicz (1987, 1988, 1989) et Bois (1994). Chacun des ces travaux utilise les équations dans une optique différente. Par exemple, Bougeault considère que les gaz sont parfaits, et l'écriture a priori de l'approximation de Boussinesq en vue de modélisation turbulente rend les conclusions valables uniquement dans des couches minces. La dissipation est négligée dans les travaux de Durran et Klemp, mais aussi dans ceux de Bois. Les échanges mutuels de masse par condensation ou évaporation sont négligés par Bretherton, où l'auteur fait de plus l'hypothèse que les nombres de Prandtl et de Schmidt sont exactement égaux à un : cette propriété permet des simplifications mathématiques variées, dont la plus simple est de faire disparaître le caractère double diffusif du problème. Physiquement on peut admettre cette propriété lorsque les dissipations sont d'origine turbulente, mais dans des problèmes d'instabilité linéaire comme ceux que l'on examine au Chapitre 3, il est difficile de faire des hypothèses de type turbulent.

On examine dans le présent travail, l'influence des deux diffusions régnant dans le milieu, l'une due à la dissipation thermique, l'autre à la nature hétérogène du milieu et aux changements de phase eau liquide-vapeur d'eau.

Diverses hypothèses, notamment la négligence de la pression de la phase liquide et la prise en compte, dans les coefficients de diffusion, uniquement de ceux qui concernent la diffusion mutuelle des deux gaz, permettent de ramener la description du milieu à celle d'un milieu binaire. Il est possible, dans ces conditions, de réduire le modèle rhéologique à un système simplifié double diffusif. On peut alors étudier dans le système réduit l'existence de mouvements convectifs.

Les paramètres jouant un rôle effectif dans le problème sont le gradient de concentration de vapeur d'eau et le gradient de température, et les résultats dépendent fortement de la chaleur latente de vaporisation et des deux nombres de Prandtl et de Schmidt.

Le mémoire présenté est organisé de la manière suivante :

Dans un premier chapitre, la mise en équations des mouvements, les hypothèses rhéologiques principales et les implications thermodynamiques sont écrites. Les équations les plus importantes sont l'équation de Clausius-Clapeyron qui régit les échanges de masse entre la phase gazeuse et la phase liquide, et la loi de Fick, qui régit quant à elle, la diffusion de la vapeur d'eau dans l'air sec. Toutefois, l'hypothèse de saturation joue également un rôle important dans l'identification des variables indépendantes modélisant le milieu.

Dans un deuxième chapitre, on s'intéresse à la modélisation de mouvements de convection : le cadre général est celui de l'approximation de Boussinesq, qui est écrite sous forme asymptotique afin de permettre aussi bien l'étude de mouvements sur des grandes échelles verticales (convection profonde) que des mouvements de petite échelle (convection peu profonde). Après avoir réduit le système à une forme « bien posée » comprenant un nombre égal d'équations et d'inconnues, on linéarise les équations. On s'intéresse alors aux mouvements de convection profonde : dans l'hypothèse d'une faible concentration de vapeur (ce qui simplifie légèrement l'écriture), on examine l'équation de dispersion associée à une propagation d'ondes. Deux résultats sont obtenus : d'une part l'identification, parmi les mouvements, de ceux qui représentent des « couches-limites », et, d'autre part, résultat plus orignal, la possibilité d'existence de mouvements périodiques non amortis malgré la dissipation.

L'existence de mouvements linéarisés périodiques à la fois en espace et en temps conduit à s'interroger sur l'existence de mouvements oscillatoires dans les problèmes d'instabilité : de tels mouvements n'existent pas, en effet, dans le cas des fluides purs. On pose, ainsi, au Chapitre 3, un problème de Rayleigh-Bénard en milieu peu profond en choisissant des conditions aux limites de deux surfaces libres. La résolution, d'abord, d'un problème d'instabilité double diffusive simplifié permet d'identifier, dans l'espace défini par le nombre de Rayleigh et un nombre de Rayleigh humide, deux zones d'instabilité, stationnaire et oscillatoire. Pour le problème exact étudié ensuite, on montre que la seule instabilité qui se produit dans les cas réalistes est l'instabilité stationnaire. L'étude des solutions du problème complet d'instabilité oscillatoire permet finalement de tirer des conclusions sur le degré de validité des résultats obtenus.

Chapitre 1

Les équations des mouvements de fluides hétérogènes à rhéologie de mélange pour le cas de l'air humide saturé

1- Introduction

La dynamique des fluides hétérogènes (fluides complexes) fait apparaître dans ceux-ci des mouvements que l'on ne rencontre pas dans les fluides purs, et qui ont pour origine les échanges thermodynamiques ayant lieu à l'intérieur du milieu lui-même du fait de son nonéquilibre. La modélisation de ces mouvements doit donc examiner avec précision la nature des échanges de chaleur dans le milieu, et adopter un formalisme cohérent pour la description de ces échanges.

Dans le cas des fluides géophysiques (on s'intéresse ici à l'air nuageux, mais la description est valable aussi pour l'eau salée), il est possible de se restreindre à une description macroscopique utilisant la théorie des mélanges : ainsi, l'air nuageux, qui est un air humide saturé, est composé de trois constituants : air sec, vapeur d'eau, eau condensée ; l'eau salée est composée de deux constituants : eau pure, sel liquide ; etc..

Dans tous les cas on s'intéresse ici à des mélanges de milieux qui, pris isolément, sont des fluides purs.

L'objet du présent chapitre est d'établir les équations qui seront utilisées dans la suite : les mélanges sont décrits par une rhéologie de milieu continu, et on rappelle tout d'abord (§2) les équations des mouvements de ces milieux. On particularise ensuite le milieu (§3) en examinant le cas de l'air humide saturé : l'existence d'échanges mutuels de masse entre deux phases rend cet examen un peu délicat.

Enfin (§4), on forme les systèmes généraux d'équations pratiques, systèmes utilisant diverses simplifications comme :

- (a) loi d'état de gaz parfait pour les phases gazeuses ;
- (b) petites concentrations.

2- Rappels sur les lois de bilan dans la théorie des mélanges

Un mélange est un milieu composé lui-même d'autres milieux appelés constituants.

Dans la théorie des mélanges, on suppose que les constituants aussi bien que le milieu global ont un comportement de milieu continu.

Une particule du milieu, de masse ρdv , est supposée contenir une particule de chacun des constituants (masse $\rho_{\alpha} dv$). On suppose ainsi que le milieu est constitué de N + 1constituants fluides (voir, par exemple, Bowen, 1976 ou De Groot et Mazur, 1962). A chaque fluide correspond un indice α , celui-ci variant de 0 à N. Chaque constituant α a sa propre vitesse \mathbf{u}_{α} et sa masse volumique ρ_{α} .

Ces constituants mélangés forment un milieu de masse volumique ρ . On a ainsi :

$$\rho = \sum_{\alpha=0}^{N} \rho_{\alpha} \,. \tag{1.1}$$

On définit les concentrations q_{α} par :

$$q_{\alpha} = \frac{\rho_{\alpha}}{\rho}.$$
 (1.2)

La vitesse u du milieu moyenné, appelée vitesse barycentrique, est définie par :

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{\alpha=0}^{N} \rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}, \qquad (1.3)$$

et on définit également la vitesse de diffusion \mathbf{v}_{α} par :

$$\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u} \,. \tag{1.4}$$

On vérifie aisément que $\sum_{\alpha=0}^{N} q_{\alpha} = 1$ et que $\sum_{\alpha=0}^{N} \rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = 0$.

2-1 Conservation de la masse

Le milieu moyenné étant un fluide, la masse totale se conserve dans le mouvement barycentrique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$
(1.5)

Le bilan de masse pour chaque constituant α est donné par les équations :

$$\frac{\partial \rho_{\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) = \hat{\rho}_{\alpha}, \qquad \alpha = 0, \dots, N, \qquad (1.6)$$

où $\hat{\rho}_{\alpha}$ est un terme source qui représente le taux de masse volumique reçu par unité de temps par le constituant α de la part des autres constituants.

L'équation (1.6) est le bilan des masses dans le mouvement propre du constituant α (la « dérivée particulaire » dans l'équation (1.6) est $\frac{d^{\alpha}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla$).

La combinaison des N + 1 équations de (1.6) et (1.5) implique :

$$\sum_{\alpha=0}^{N} \hat{\rho}_{\alpha} = 0. \qquad (1.6 \text{ bis})$$

L'écriture des équations de la diffusion moléculaire est légèrement modifiée grâce à l'utilisation de la dérivée particulaire associée au mouvement moyen, soit :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \,. \tag{1.7}$$

19

En utilisant la formule d'analyse vectorielle : $\nabla \cdot (a\mathbf{u}) = a\nabla \cdot \mathbf{u} + u\nabla a$, on obtient alors :

$$\rho \frac{dq_{\alpha}}{dt} + \nabla \cdot (\rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) = \hat{\rho}_{\alpha}.$$
(1.8)

L'équation (1.8) ramène le mouvement du constituant α au mouvement moyen du milieu (dérivée particulaire $\frac{d}{dt}$). On l'appelle aussi équation de la diffusion moléculaire.

2-2 Conservation de la quantité de mouvement

Le fluide étant pesant, on désigne par g l'accélération de la pesanteur.

Dans sa forme la plus générale, l'équation du mouvement du fluide visqueux s'écrit sous forme vectorielle :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \overline{\sigma}, \qquad (1.9)$$

 $\tilde{\sigma}$ est le tenseur des contraintes :

$$\overline{\sigma} = (-p + \xi \nabla \cdot \mathbf{u})\overline{1} + 2\mu \overline{D}, \qquad (1.10)$$

et \overline{D} est le tenseur des taux de déformations ; ξ et μ sont les coefficients de viscosité. On fait l'hypothèse de Stokes $\xi = -\frac{2}{3}\mu$, μ étant la viscosité dynamique du fluide. Les éléments du tenseur \overline{D} , appelés d_{ij} , sont définis par :

$$d_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,j}).$$
 (1.11)

Après quelques calculs, l'équation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p = \rho \mathbf{g} + \mu \left[\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right].$$
(1.12)

(1.12) n'est autre que l'équation classique de Navier-Stokes : à ce niveau, on ne distingue pas la nature hétérogène du milieu.

2-3 Conservation de l'énergie

La loi générale de conservation de l'énergie s'exprime par l'équation :

$$\rho \frac{de}{dt} = \overline{\sigma} \cdot \overline{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho Q \,. \tag{1.13}$$

Nous avons supposé qu'il existe dans cette équation un terme source volumique de chaleur Q.

q est le vecteur densité de flux de chaleur reçue par le milieu ; les tenseurs $\overline{\sigma}$ et \overline{D} ont été définis précédemment.

La prise en compte de nouvelles relations thermodynamiques permet de modifier l'écriture de la relation (1.13) (voir aussi Annexe 1, §1-2). Considérons tout d'abord la relation thermodynamique de Gibbs-Duhem :

$$de = Tds - pd(\frac{1}{\rho}) + \sum_{\alpha=0}^{N} g_{\alpha} dq_{\alpha}, \qquad (1.14)$$

où g_{α} est l'enthalpie libre du α -ième constituant :

$$g_{\alpha} = h_{\alpha} - Ts_{\alpha}, \qquad s_{\alpha} = s_{\alpha}(T, p_{\alpha}), \qquad (1.15)$$

ainsi que la loi de Dalton :

$$p = \sum_{\alpha=0}^{N} p_{\alpha} . \qquad (1.16)$$

Compte tenu de ces deux relations, l'équation de l'énergie pour un milieu de mélange dissipatif peut s'écrire, en éliminant l'énergie interne :

$$c_{p}\frac{dT}{dt} - \frac{T}{\rho}\lambda\frac{dp}{dt} + \sum_{\alpha=0}^{N}h_{\alpha}\frac{dq_{\alpha}}{dt} = \Phi - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{q} + Q.$$
(1.17)

Les grandeurs h_{α} représentent les enthalpies de chacun des constituants, Φ est la dissipation visqueuse, c_p la chaleur spécifique du mélange à pression et à concentrations constantes, λ le coefficient d'expansivité à pression et à concentrations constantes. Ces grandeurs sont définies par :

$$c_p = T(\frac{\partial}{\partial T})_{p,q_{\alpha}}, \qquad \lambda = -\frac{1}{\rho}(\frac{\partial\rho}{\partial T})_{p,q_{\alpha}}.$$
 (1.18)

La loi de comportement pour q est donnée par :

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}' + \sum_{\alpha=0}^{N} \rho_{\alpha} \boldsymbol{h}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} , \qquad (1.19)$$

où les v_{α} sont les vitesses de diffusion de chaque constituant.

Habituellement, pour un fluide, q' vérifie la loi de comportement thermique appelée loi de Fourier, définie à l'aide du coefficient de conductivité thermique k:

$$\mathbf{q}' = -k\nabla T \,. \tag{1.20}$$

Ces lois de comportement introduites dans l'équation (1.17) fournissent alors :

$$c_{p}\frac{dT}{dt} - \frac{T}{\rho}\lambda\frac{dp}{dt} + \sum_{\alpha=0}^{N}h_{\alpha}\frac{dq_{\alpha}}{dt} = \Phi + \frac{k}{\rho}\Delta T - \frac{1}{\rho}\sum_{\alpha=0}^{N}\nabla\cdot(\rho q_{\alpha}h_{\alpha}\mathbf{v}_{\alpha}) + Q.$$
(1.21)

La nature hétérogène du milieu apparaît dans les termes $\frac{dq_{\alpha}}{dt}$ du premier membre, et dans les termes $\rho q_{\alpha} h_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$ du second membre.

3- Cas de l'air humide saturé

3-1 Conditions de l'étude

Nous nous intéressons, dans ce qui suit, à la modélisation des mouvements d'une atmosphère humide saturée. Nous considérons l'air atmosphérique comme un mélange ternaire constitué d'air sec, de vapeur d'eau et d'eau condensée (une étude de la thermodynamique de ce milieu est rappelée en Annexe 1).

Dans des conditions réalistes, pour le cas d'un nuage, ce mélange est saturé, c'est à dire qu'il se produit, entre les deux phases « vapeur » et « eau condensée », un processus d'échange de masse par évaporation ou condensation.

Nous modéliserons ce mélange ternaire avec la restriction que ce mélange est supposé continu : cela revient à supposer la phase liquide comme un milieu continu équivalent (physiquement, il s'agit d'un aérosol).

L'humidité de l'atmosphère est, de plus, suffisamment faible pour exclure l'étude du cas d'éventuelles précipitations.

Nous désignerons par les indices g, v, L, les quantités correspondant à l'air sec, la vapeur d'eau, l'eau condensée, et par w celles correspondant à l'eau « totale » dans le mélange (eau liquide et vapeur d'eau).

Les grandeurs relatives au mélange n'ont pas d'indice. Par conséquent, si q_g , q_v et q_L sont respectivement les concentrations d'air sec, de vapeur d'eau et d'eau condensée, on a :

$$q_{g} + q_{v} + q_{L} = q_{g} + q_{w} = 1.$$
 (1.22)

3-2 Loi de Fick

Nous reprenons l'écriture des équations de diffusion moléculaire. Dans ces équations apparaissent les vitesses de diffusion v_g , v_v et v_L qui sont reliées aux gradients de concentration par la loi de Fick. Les autres v_{α} sont liées aux concentrations par la formule suivante, désignant arbitrairement par v_{α} l'une des vitesses de diffusion :

$$\rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{N} \rho D_{\alpha\beta} \nabla q_{\beta} .$$
 (1.23)

Les coefficients $D_{\alpha\beta}$ sont les coefficients de diffusion du mélange. Ces coefficients ne sont pas indépendants et satisfont aux relations d'Onsager.

Compte tenu de la relation $\sum_{\alpha=0}^{N} \rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = 0$ (voir §2-1), on a pour un mélange ternaire la relation :

$$\rho_{g}\mathbf{v}_{g} = \rho(D_{gv}\nabla q_{v} + D_{gL}\nabla q_{L}). \tag{1.24}$$

Nous gardons l'hypothèse d'un mouvement non précipitant. Cette hypothèse, courante en théorie de la condensation, exprime que les gouttes d'eau sont suffisamment petites pour ne pas être soumises à la force de pesanteur : le milieu est un aérosol. Les gouttes liquides se déplacent dans le mélange avec la vitesse principale du mélange.

Il en résulte que le seul coefficient différent de 0 est le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air sec, D_{gv} , que nous appellerons dorénavant D. Ainsi les coefficients D_{Lg} , D_{gL} , D_{LL} sont nuls, $\mathbf{v}_L = \mathbf{0}$ et la loi de Fick pour \mathbf{v}_g et \mathbf{v}_v est réduite à la loi de Fick binaire :

$$\mathbf{v}_{\mathbf{L}} = 0, \tag{1.25}$$

$$\rho_{g}\mathbf{v}_{g} = -\rho_{v}v_{v} = \rho D \nabla q_{v}.$$

D, par la suite, est supposé constant.

De plus, l'air sec n'a pas d'échange de masse avec les autres constituants, par conséquent, dans (1.6) et (1.6 bis) :

$$\hat{\rho}_{g} = 0$$
 et $\hat{\rho}_{v} + \hat{\rho}_{L} = 0$, (1.26)

et les équations de diffusion moléculaire sont ramenées à l'une des deux formes équivalentes :

$$\rho \frac{dq_g}{dt} + D\nabla \cdot (\rho \nabla q_v) = 0, \qquad (1.27)$$

$$\rho \frac{dq_v}{dt} - D\nabla \cdot (\rho \nabla q_v) = -\rho \frac{dq_L}{dt}.$$

En introduisant la chaleur latente de vaporisation de l'eau $L_v = h_v - h_L$ et les équations précédentes dans l'équation de l'énergie, celle-ci s'écrit alors :

$$c_{p}\frac{dT}{dt} - \frac{\lambda T}{\rho}\frac{dp}{dt} - L_{v}\frac{dq_{L}}{dt} = \Phi + \frac{k}{\rho}\Delta T - q_{g}\mathbf{v}_{g}\cdot\nabla(h_{g} - h_{v}) + Q.$$
(1.28)

Notons que les termes du second membre de cette équation représentent à eux seuls les termes dissipatifs.

3-3 Equation de Clausius-Clapeyron et équations d'état

Une autre approximation classique en théorie de la condensation est considérée (voir, par exemple, Einaudi et Lalas, 1973 ou Durran et Klemp, 1982) : le milieu principal étant l'air, les constituants autres sont alors des gaz ou des aérosols. En général dans ces mélanges, la pression du gaz équivalent à l'aérosol est négligeable. La pression de la phase liquide p_L est donc ici négligée, et a, par conséquent, pour loi d'état : $p_L = 0$.

Une conséquence de cette hypothèse permet de traiter la phase liquide comme un gaz parfait ayant une constante polytropique R_L nulle.

Si la vapeur d'eau est à saturation, l'échange de masse entre la vapeur d'eau et l'eau liquide suit l'équation de Clausius-Clapeyron (voir, par exemple, Zemansky, 1957) :

$$\frac{dp_{\nu}}{dT} = \frac{L_{\nu}}{T(\tau_{\nu} - \tau_{\lambda})},\tag{1.29}$$

où τ_{ν} et τ_{λ} sont les volumes spécifiques des phases « réelles » vapeur et liquide respectivement (voir note (1)).

Comme la vapeur est beaucoup plus légère que le liquide, le volume spécifique τ_{λ} doit être négligé par rapport à τ_{ν} , et la formule de Clausius-Clapeyron peut être approchée par la relation suivante :

$$\frac{dp_{\nu}}{dt} = \frac{L_{\nu}\rho_{\nu}}{T}\frac{dT}{dt}.$$
(1.30)

Il reste à définir les lois d'état pour les différents constituants : celles-ci sont respectivement pour la vapeur d'eau, l'air sec et le mélange :

$$p_{v} = p_{v}(\rho_{v}, T), \qquad p_{g} = p_{g}(\rho_{g}, T),$$

$$p = p_{v} + p_{g} = p(\rho, T, q_{v}, q_{g}).$$
(1.31)

Finalement, les équations (1.5), (1.12), (1.27), (1.28), (1.31) et la relation de Clausius-Clapeyron (1.30) constituent un système fermé de neuf équations scalaires pour neuf variables scalaires qui sont \mathbf{u} , p, ρ , T, q_v , q_g et q_L .

[(1) Le volume spécifique τ_{λ} est le volume spécifique réel de l'eau, tandis que $\tau_L = \frac{1}{\rho_L}$ est le volume spécifique du milieu continu équivalent à l'aérosol constitué par la phase liquide. Pour plus de détails concernant les bases thermodynamiques de cette approximation, voir Einaudi et Lalas, 1973].

4- Les équations de la dissipation dans l'atmosphère nuageuse

4-1 Ecriture des équations double diffusives pour une loi d'état arbitraire

On remarque que le système obtenu n'est pas un système très « utilisable ». On s'est donc attaché, dans un deuxième temps, à simplifier l'écriture de ce système.

Nous avons donc éliminé dans les équations l'une des concentrations au profit des deux autres. Notre choix s'est porté sur l'élimination de la concentration d'eau liquide q_L en utilisant la loi d'échange adoptée pour l'interaction qui n'est autre que la loi de Clausius-Clapeyron.

Nous pouvons modifier cette loi en différenciant la première relation (1.31) et en introduisant le résultat dans (1.30). On aboutit à :

$$\frac{1}{q_{\nu}}\frac{dq_{\nu}}{dt} = \left[\left(\frac{\partial\rho_{\nu}}{\partial\rho_{\nu}}\right)_{T}L_{\nu} - \lambda_{\nu}T\right]\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt},\qquad(1.32)$$

où λ_{v} est le coefficient d'expansivité de la vapeur d'eau défini par :

$$\lambda_{\nu} = -\frac{1}{\rho_{\nu}} \left(\frac{\partial \rho_{\nu}}{\partial T}\right)_{p_{\nu}}.$$
(1.33)

Par la suite, on veut obtenir une expression de la variation de la concentration de l'eau liquide dq_L en fonction de dp, dq_v et dT, résultat obtenu en « combinant » la relation de Clausius-Clapeyron (1.32) et la loi d'état (1.31), qui prend la forme suivante en la différenciant :

$$\frac{1}{q_{\nu}}\frac{dq_{\nu}}{dt} + \frac{T}{\rho_{\nu}}\left(\frac{\partial\rho_{\nu}}{\partial\rho_{\nu}}\right)_{T}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{\rho,q_{\nu},q_{g}}\frac{dT}{dt}\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial\rho_{\nu}}{\partial\rho_{\nu}}\right)_{T}\left[\frac{1}{\rho_{\nu}}\frac{dp}{dt} - \left(\frac{\partial\rho}{\partial\rho}\right)_{T,q_{\nu},q_{g}}\frac{1}{\rho_{\nu}}\frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial\rho_{g}}{\partial\rho_{g}}\right)_{T}\frac{1}{q_{\nu}}\frac{dq_{w}}{dt}\right].$$
 (1.34)

27

On obtient alors dq_L en exprimant dans (1.32) $d\rho$ en fonction de dq_v et dT qu'on réinjecte ensuite dans (1.34):

$$\frac{dq_{L}}{dt} = \left[\left(\frac{\partial p_{v}}{\partial \rho_{v}}\right)_{T} \left(\frac{\partial \rho_{g}}{\partial p_{g}}\right)_{T} - 1 - \frac{1}{q_{v}} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{T,q_{v},q_{g}} \left(\frac{\partial \rho_{g}}{\partial p_{g}}\right)_{T} \right] \frac{dq_{v}}{dt} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho_{g}}{\partial p_{g}}\right)_{T} \frac{dp}{dt} + \left[\frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\rho,q_{v},q_{g}} \left(\frac{\partial \rho_{g}}{\partial p_{g}}\right)_{T} \frac{1}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{T,q_{v},q_{g}} \left(\frac{\partial \rho_{g}}{\partial p_{g}}\right)_{T} \frac{1}{T} \left(\left(\frac{\partial \rho_{v}}{\partial p_{v}}\right)_{T} L_{v} - \lambda_{v} T \right) \right] \frac{dT}{dt}. \quad (1.35)$$

L'utilisation de (1.1) et la loi de Dalton (1.16) permettent d'alléger l'écriture du coefficient de $\frac{dq_v}{dt}$:

$$\frac{dq_{L}}{dt} = -\left[1 + \frac{q_{g}}{q_{v}}\right]\frac{dq_{v}}{dt} - \left(\frac{\partial\rho_{g}}{\partial\rho_{g}}\right)_{T}\frac{dp}{dt} + \left(\frac{\partial\rho_{g}}{\partial\rho_{g}}\right)_{T}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{\rho,q_{v},q_{g}} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\rho}\right)_{T,q_{v},q_{g}}\left(\left(\frac{\partial\rho_{v}}{\partial\rho_{v}}\right)_{T}\frac{L_{v}}{T} - \lambda_{v}\right)\right]\frac{dT}{dt} \quad (1.36)$$

En remplaçant dq_g par $-(dq_v + dq_L)$ dans la première relation de (1.27), et grâce à (1.36), finalement l'équation de la diffusion moléculaire est donnée par :

$$\left(\frac{\partial \rho_{g}}{\partial p_{g}}\right)_{T}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\rho,q_{v},q_{g}}+\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{T,q_{v},q_{g}}\left(\left(\frac{\partial \rho_{v}}{\partial p_{v}}\right)_{T}\frac{L_{v}}{T}-\lambda_{v}\right)\right]\frac{dT}{dt}-\frac{q_{g}}{q_{v}}\frac{dq_{v}}{dt}-\left(\frac{\partial \rho_{g}}{\partial p_{g}}\right)_{T}\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}=\frac{D}{\rho}\nabla\cdot\left(\rho\nabla q_{v}\right).$$
(1.37)

On peut alors éliminer dq_L dans la première forme de l'équation de l'énergie (1.28), et grâce à (1.27), écrire :

$$c_{p}\frac{dT}{dt} - \frac{\lambda T}{\rho}\frac{dp}{dt} + L_{v}\frac{dq_{v}}{dt} = \frac{k}{\rho}\Delta T - q_{g}\mathbf{v}_{g}\cdot\nabla(h_{g} - h_{v}) + L_{v}\frac{D}{\rho}\nabla\cdot(\rho\nabla q_{v}) + \Phi + Q. \quad (1.38)$$

Le système final simplifié est constitué dorénavant par les équations (1.5), (1.12), (1.32), (1.37), (1.38), système fermé de sept équations scalaires à sept inconnues : \mathbf{u} , p, ρ , T, q_v .

Les deux équations de dissipation (1.37) et (1.38) prennent maintenant des formes totalement symétriques : si l'on suppose que $\frac{dp}{dt}$ est connu dans ces équations (ce qui est à peu près le cas comme nous le verrons plus tard, grâce à l'approximation de Boussinesq), les inconnues réelles dans ce problème sont $\frac{dT}{dt}$ et $\frac{dq_v}{dt}$. Si les coefficients de ces paramètres dans (1.37) et (1.38) sont constants, les équations se ramènent à deux équations indépendantes mettant en évidence des combinaisons linéaires de $\frac{dT}{dt}$ et $\frac{dq_v}{dt}$.

Les effets de diffusion et les effets de conduction de chaleur apparaissent dans les laplaciens figurant dans les seconds membres des équations et ne peuvent pas être considérés séparément : cette propriété caractérise un phénomène double diffusif. Dans la pratique, les coefficients de dissipation ne sont pas constants mais restent des fonctions lentement variables de l'altitude (voir Chapitre 2).

Les deux équations de diffusion moléculaire et de l'énergie se ramènent alors à des équations double diffusives dont la structure mathématique est la même que dans un problème de double diffusion classique.

4-2 Cas des gaz parfaits

Nous ajoutons maintenant une hypothèse supplémentaire afin d'alléger l'écriture des équations du système. En effet, les formules précédentes prennent des formes plus simples et d'application pratique plus aisée dans le cas d'un mélange de gaz parfaits. On a donc supposé concrètement que les gaz composant le milieu étaient des gaz parfaits.

Nous considérons pour l'air sec, la vapeur d'eau et le mélange total, les lois d'état suivantes :

$$p_{g} = R_{g}\rho_{g}T, \qquad p_{v} = R_{v}\rho_{v}T, \qquad p = R_{m}\rho T,$$

$$R_{m} = R_{e}q_{g} + R_{v}q_{v}.$$
(1.39)

 R_{ν} et R_{g} sont des constantes adiabatiques pour l'air sec et la vapeur d'eau, R_{m} est un coefficient moyen dépendant des rapports de mélange et des concentrations (les valeurs pratiques pour R_{ν} (vapeur d'eau) et R_{g} (air sec) sont 464 et 287 unités MKS respectivement).

Dans ce cas, (1.36), (1.37) et (1.38) prennent les formes particulières respectives :

$$\frac{dq_L}{dt} = -\left[1 + \frac{q_g}{q_v}\right]\frac{dq_v}{dt} - \frac{R_m}{R_g}\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} + \frac{R_m}{R_g}\frac{L_v}{R_vT^2}\frac{dT}{dt},\qquad(1.40)$$

$$-\frac{q_g}{q_v}\frac{dq_v}{dt} + \frac{R_m}{R_g}\frac{L_v}{R_vT^2}\frac{dT}{dt} - \frac{R_m}{R_g}\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = \frac{D}{\rho}\nabla\cdot(\rho\nabla q_v), \qquad (1.41)$$

$$c_{p}\frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} + L_{v}\frac{dq_{v}}{dt} = \frac{k}{\rho}\Delta T + D\nabla q_{v}\cdot\nabla(h_{v} - h_{g}) + L_{v}\frac{D}{\rho}\nabla\cdot(\rho\nabla q_{v}) + \Phi + Q. \quad (1.42)$$

En éliminant les termes de diffusion entre (1.41) et (1.42), il reste pour (1.42) :

$$\left[c_{p} - \frac{R_{m}}{R_{g}}\frac{L^{2}_{v}}{R_{v}T^{2}}\right]\frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\left[1 - \frac{L_{v}}{R_{g}T}\right]\frac{dp}{dt} + L_{v}\left[1 + \frac{q_{g}}{q_{v}}\right]\frac{dq_{v}}{dt} = \frac{k}{\rho}\Delta T + D\nabla q_{v} \cdot \nabla (h_{v} - h_{g}) + \Phi + Q. \quad (1.43)$$

Les équations (1.41) et (1.43) sont les formes double diffusives symétriques des équations de dissipation : le laplacien Δq_{ν} se retrouve seul dans la partie droite de (1.41) et, de la même façon, ΔT se retrouve seul dans la partie droite de (1.43).

4-3 Comportement de la chaleur latente L_{ν}

On notera que, pour le cas des gaz polytropiques, la relation $L_v = h_v - h_L$ implique que :

$$L_{\nu} = L_{\nu_0} + (c_{p_{\nu}} - c_{p_{\tau}})(T - \theta_0), \qquad (1.44)$$

 L_{v_0} et θ_0 étant deux constantes, L_{v_0} est la chaleur latente de vaporisation à la température θ_0 .

Maintenant, on élimine $\frac{dp}{dt}$ dans (1.40). En utilisant la nouvelle équation d'état de gaz parfait et (1.44), on obtient une relation entre q_v , ρ et T:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{q_{\nu}}\frac{dq_{\nu}}{dt} + \left(\alpha + \frac{R_{\nu}(1-\alpha) - L_{\nu_0}}{R_{\nu}T}\right)\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = 0, \qquad (1.45)$$

où :

$$\alpha = 1 - \frac{c_{p_v} - c_{p_L}}{R_v}.$$
 (1.46)

Un cas particulier très important est celui où (1.45), après intégration, peut s'écrire :

$$q_{\nu} = q_{\nu_0} \frac{\rho_0 \theta_0^{\,\alpha}}{\rho T^{\alpha}} \exp\left[\left(\frac{L_{\nu_0}}{R_{\nu} \theta_0} - \frac{c_{\,\mu} - c_{\,\mu_L}}{R_{\nu}}\right) \left(1 - \frac{\theta_0}{T}\right)\right] = q_{\nu}(\rho, T), \quad (1.47)$$

Dans ce cas, l'équation (1.47) peut être considérée comme une « loi d'état » pour le milieu dont la description serait réduite à ces variables.

Le cas où (1.47) est satisfaite se produit si cette même équation est vraie à l'instant initial : dans ce cas, en vertu de (1.45), elle est vraie pour tout t. Cette circonstance est celle qui se produit dans les cas pratiques.

On remarquera aussi que la variable q_g , après calculs, s'est éliminée.

Les équations sont maintenant (1.41), (1.43) et (1.45) (ou (1.47)): les coefficients dépendent de tout l'état du milieu, mais les opérateurs (Δ , $\frac{d}{dt}$, etc.) ne portent que sur p, ρ , T, q_v . Si l'on ajoute à ces équations l'équation de continuité et celle de la quantité de mouvement, on retrouve le système, mais simplifié, des sept équations scalaires pour les sept inconnues p, ρ , T, q_v et **u**.

5- Cas des petites concentrations d'eau et de vapeur

Les fluides que nous considérons ont été décrits par un modèle rhéologique de mélange; on examine la particularité due à ce qu'un des constituants est beaucoup plus dense que les autres.

Etant donné que le cas qui nous intéresse est celui d'un nuage non précipitant, les concentrations de l'aérosol d'eau liquide et de vapeur d'eau dans le mélange sont très faibles devant celle de l'air sec. Cette simplification peut être discutée mais est généralement admise (voir, par exemple, Einaudi et Lalas, 1973).

Nous supposons donc que q_v et q_L sont petits, du même ordre, et, par conséquent, que $q_g \approx 1$.

Seules les formules où interviennent les concentrations vont alors être légèrement modifiées. L'équation de continuité et l'équation de la quantité de mouvement restent inchangées. On donne la forme particulière des équations (1.37) et (1.38) dans le cas des petites concentrations, en ne gardant que la partie principale, soit :

$$\frac{1}{q_{\nu}}\frac{dq_{\nu}}{dt} = -\left(\frac{\partial\rho}{\partial\rho}\right)_{T,q_{\nu},q_{g}}\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} + \left[\left(\frac{\partial\rho_{\nu}}{\partial\rho_{\nu}}\right)_{T}\frac{L_{\nu}}{T} + \lambda - \lambda_{\nu}\right]\frac{dT}{dt},\qquad(1.48)$$

$$c_{p}\frac{dT}{dt} - \frac{\lambda T}{\rho}\frac{dp}{dt} + L_{v}\frac{dq_{v}}{dt} = \frac{k}{\rho}\Delta T + Q + \Phi.$$
(1.49)

32

Dans (1.49), le terme $L_{\nu} \frac{dq_{\nu}}{dt}$ peut être en fait, soit conservé, soit négligé, suivant l'ordre de grandeur de L_{ν} . Dans ce cas, (1.37) est une équation dégénérée, puisque ses conclusions sont déjà contenues dans (1.48). Plutôt que d'examiner une forme simplifiée de (1.27), il est plus simple de retourner aux équations (1.27), et on pose directement :

$$\frac{dq_{L}}{dt} = -\frac{dq_{v}}{dt} + \frac{D}{\rho} \nabla \cdot (\rho \nabla q_{v}). \qquad (1.50)$$

Le caractère double diffusif présenté dans les équations (1.40) à (1.42) semble disparaître dans ce cas : en sortant dq_v de (1.48) et en l'insérant dans (1.49), l'équation résultante ne comporte seulement que les variations dT et dp. Par la suite, le développement de dq_L est donné par (1.50).

Le caractère de la double diffusion dans un tel cas sera considéré alors plus tard. En effet, dans le deuxième chapitre où nous aborderons l'approximation de Boussinesq, nous verrons de quelle façon le caractère double diffusif de la dissipation peut subsister, dans le cas notamment où le nombre de Schmidt est petit et de même ordre de grandeur que q_v (le nombre de Schmidt sera défini lors de la non dimensionnalisation des équations).

Nous nous intéressons maintenant comme précédemment au cas des gaz parfaits.

Les équations (1.49) et (1.50) restent valables.

Par ailleurs, la « loi d'état » (1.47), avec $R_m \approx R_g$, prend la forme particulière :

$$q_{\nu} = q_{\nu_0} \frac{p_0 \theta_0^{\alpha - 1}}{p T^{\alpha - 1}} \exp\left[\left(\frac{L_{\nu_0}}{R_{\nu} \theta_0} - \frac{c_{p_{\nu}} - c_{p_L}}{R_{\nu}}\right) \left(1 - \frac{\theta_0}{T}\right)\right] = q_{\nu}(p, T).$$
(1.51)

(1.51) est l'équation d'état pour q_v dans un mélange saturé pour le cas des petites concentrations.

Chapitre 2

Les équations de Boussinesq

et l'étude en convection profonde

1-Introduction

Bien que l'approximation de Boussinesq soit communément utilisée dans les problèmes traitant de convection, son caractère asymptotique n'est ni très bien connu, ni beaucoup utilisé.

Les travaux les plus anciens introduisant l'essentiel du caractère asymptotique de l'approximation de Boussinesq datent d'il y a environ une quarantaine d'années, où Spiegel et Veronis (1960) présentèrent cette approximation pour le cas des fluides parfaits. Plus tard, d'autres travaux suivirent ce papier : Mihaljan (1962) étudia le cas pour les couches liquides minces, et Dutton et Fichtl (1969) tentèrent de présenter, sous une forme unifiée, le cas des liquides et des gaz. Mais c'est seulement durant les années 1970-1980 que les progrès sur l'utilisation des modèles asymptotiques ont permis de formuler rigoureusement l'approximation de Boussinesq : Zeytounian (1974) pour des milieux bornés en hauteur, et ensuite Bois (1976-1979) pour d'autres milieux non bornés.

En pratique, l'intérêt de cette forme asymptotique est de fournir des équations comportant des coefficients lentement variables, qui peuvent être plus facilement résolues par l'utilisation des techniques asymptotiques. L'introduction de coefficients lentement variables permet de poser, en hauteur non bornée, des problèmes dont l'écriture Boussinesq classique n'est possible qu'en milieu confiné.

L'objet de ce deuxième chapitre est d'établir les équations de la propagation d'ondes périodiques en convection profonde pour les milieux humides saturés.

On rappelle, tout d'abord, les conditions générales de validité de l'approximation de Boussinesq (ayant, au préalable, effectué une analyse dimensionnelle), et on présente alors la première dégénérescence des équations fondamentales (§2). On réduit par la suite le problème de manière à conserver un modèle double diffusif. On en établit une version linéarisée équivalente à une équation d'ordre huit. Pour des solutions d'ondes périodiques, cette équation se transforme en une équation complexe de degré huit (§3), dont il faut étudier les solutions.

Nous verrons, enfin (§4), que les solutions de l'équation linéarisée décrivant les mouvements montrent, notamment, que dans un milieu profond, il peut exister, malgré la présence d'une dissipation, des mouvements périodiques faiblement amortis avec l'altitude.

2- Approximation de Boussinesq

2-1 Equations adimensionnelles

L'un des principaux domaines d'application de l'approximation de Boussinesq est l'étude de la convection dans les fluides géophysiques. Afin de modéliser le comportement convectif du nuage, le phénomène étudié sera décrit à l'aide de l'approximation de Boussinesq sous une forme asymptotique.

Pour écrire les hypothèses de Boussinesq sous cette forme, il est nécessaire d'effectuer une analyse dimensionnelle. L'objet de cette analyse est d'écrire les équations du système que l'on étudie en variables sans dimension et de faire apparaître les paramètres gouvernant les dégénérescences du problème. Les paramètres physiques gouvernant ces équations ne peuvent plus apparaître que sous forme de nombres, et il devient alors possible de comparer entre elles des grandeurs qui, dimensionnées, ne seraient pas mesurées avec les mêmes unités.

Nous introduisons par conséquent maintenant quelques quantités caractéristiques : L, U, ρ_0 , θ_0 et c_{p_g} . L et U sont une longueur et une vitesse caractéristiques de l'écoulement ; ρ_0 et θ_0 sont une masse volumique et une température de référence ; c_{p_g} est la chaleur spécifique de l'air sec, et c'est elle qui est prise comme référence. La pression de référence vaut alors $p_0 = \rho_0 c_{p_g} \theta_0$.

On a également $R_g = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c_{p_g}$: γ est l'indice adiabatique de l'air sec.
Les variables sans dimension sont les quantités « surlignées » \overline{t} , \overline{x} , \overline{u} , \overline{T} , $\overline{\rho}$, \overline{q}_{α} , \overline{p} , \overline{c}_{p} , $\overline{\Phi}$ et \overline{Q} reliées aux variables physiques par les relations :

$$t = \frac{L}{U}\overline{t}, \quad \mathbf{x} = L\overline{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u} = U\overline{\mathbf{u}}, \quad T = \theta_0\overline{T}, \quad \rho = \rho_0\overline{\rho}, \quad q_\alpha = \overline{q}_\alpha,$$
(2.1)

$$p = \rho_0 c_{p_0} \theta_0 \overline{p}, \qquad c_p = c_{p_g} \overline{c}_p, \qquad \Phi = \frac{\rho_0 L^2}{\mu U^2} \overline{\Phi}, \qquad Q = Q_0 \overline{Q}.$$

Les équations en variables sans dimension s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho} \,\overline{\mathbf{u}}) = 0, \qquad (2.2)$$

$$\overline{\rho}\frac{d\overline{\mathbf{u}}}{d\overline{t}} + \frac{1}{\varepsilon^2}\nabla\overline{p} = -\frac{1}{F^2}\overline{\rho}\mathbf{k} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\Delta\overline{\mathbf{u}} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\overline{\mathbf{u}})\right],$$
(2.3)

$$\overline{q}_{\nu} = q_{\nu_0} \frac{1}{\overline{\rho} \overline{T}^{\alpha}} \exp\left[\left(\Lambda_{\nu_0} + \alpha - 1\right)\left(1 - \frac{1}{\overline{T}}\right)\right] = \overline{q}_{\nu}(\overline{\rho}, \overline{T}), \qquad (2.4)$$

$$-\frac{\overline{q}_{g}}{\overline{q}_{v}}\frac{d\overline{q}_{v}}{d\overline{t}} + (\overline{q}_{g} + r_{v}\overline{q}_{v})\left(-\frac{1}{\overline{p}}\frac{d\overline{p}}{d\overline{t}} + \frac{\Lambda_{v}}{\overline{T}^{2}}\frac{d\overline{T}}{d\overline{t}}\right) = \frac{1}{\operatorname{Re}S^{*}}\left(\Delta\overline{q}_{v} + \frac{1}{\overline{\rho}}\nabla\overline{q}_{v}\cdot\nabla\overline{\rho}\right), \quad (2.5)$$

$$\overline{c}_{p}\frac{d\overline{T}}{d\overline{t}} - \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{d\overline{p}}{d\overline{t}} + \Lambda_{v}r_{v}\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{d\overline{q}_{v}}{d\overline{t}} = \frac{1}{\operatorname{Re}\operatorname{Pr}}\frac{\Delta\overline{T}}{\overline{\rho}} + \frac{\chi_{v} - 1}{\operatorname{Re}S^{*}}\nabla\overline{q}_{v}\cdot\nabla\overline{T} + \frac{\varepsilon^{2}}{\operatorname{Re}}\overline{\Phi} + \overline{Q_{0}}\overline{Q} + \frac{1}{\operatorname{Re}S^{*}}r_{v}\Lambda_{v}\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{1}{\overline{\rho}}\nabla\cdot(\overline{\rho}\nabla\overline{q}_{v}). \quad (2.6)$$

Les opérateurs $\frac{\partial}{\partial \dots}$, $\frac{d}{d \dots}$, $\nabla \cdot$, etc. sont sans dimension, et k est le vecteur unitaire de la verticale ascendante.

Nous rappelons que nous avons laissé de côté la loi d'état pour nous intéresser au système de sept équations à sept inconnues, car c'est seulement dans cette équation d'état qu'apparaît la variable q_g . Cette loi d'état sans dimension est :

$$\overline{p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} (\overline{q}_g + r_v \overline{q}_v) \overline{\rho} \overline{T}, \qquad (2.7)$$

que nous utiliserons par la suite dans le Chapitre 3.

Nous avons posé, dans les équations (2.2)-(2.6) :

$$\operatorname{Re} = \frac{LU\rho_{0}}{\mu}, \qquad \operatorname{Pr} = \frac{\mu c_{p_{0}}}{k}, \qquad S^{*} = \frac{\mu}{D\rho_{0}},$$

$$F = \frac{U}{\sqrt{Lg}}, \qquad \varepsilon = \frac{U}{\sqrt{c_{p_{0}}\theta_{0}}}.$$
(2.8)

Le nombre ε caractérise la compressibilité de l'écoulement dans le milieu; le nombre de Reynolds Re compare les forces d'inertie aux forces de viscosité; le nombre de Prandtl Pr compare les transferts de quantité de mouvement associés aux forces visqueuses aux transferts de chaleur par conduction; le nombre de Froude F caractérise le rapport entre les forces d'inertie et les forces volumiques associées au champ de pesanteur; et enfin, le nombre de Schmidt S^* compare les transferts de quantité de mouvement, associés aux forces visqueuses, aux transferts de masse par diffusion moléculaire.

Dans l'équation (2.6), apparaît de plus un nombre \overline{Q}_0 , lié à l'intensité réelle Q_0 du terme source, par la relation :

$$\overline{Q}_0 = \frac{LQ_0}{c_{p_0}U\theta_0}.$$
(2.9)

Nous avons posé aussi :

$$\Lambda_{\nu} = \frac{L_{\nu}}{R_{\nu}\theta_{0}}, \qquad \Lambda_{\nu_{0}} = \frac{L_{\nu_{0}}}{R_{\nu}\theta_{0}}, \qquad r_{\nu} = \frac{R_{\nu}}{R_{g}}, \qquad \chi_{\nu} = \frac{c_{p_{\nu}}}{c_{p_{g}}}, \qquad \chi_{L} = \frac{c_{p_{L}}}{c_{p_{g}}}, \qquad (2.10)$$
$$\gamma = \frac{c_{p}}{c_{\nu}}, \qquad \Lambda_{\nu_{0}}' = 1 - \alpha = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{(\chi_{\nu} - \chi_{L})}{r_{\nu}},$$

et utilisé les relations (valables pour des gaz parfaits) :

$$\Lambda_{\nu} = \Lambda_{\nu_{0}}'(\overline{T} - 1) + \Lambda_{\nu_{0}}, \qquad (2.11)$$

$$c_p = c_{p_g} q_g + c_{p_L} q_L + c_{p_v} q_v, \qquad \overline{c}_p = \overline{q}_g + \chi_v \overline{q}_v + \chi_L \overline{q}_L. \qquad (2.12)$$

2-2 Conditions générales de validité

L'analyse qui sera présentée ici suit celle déjà effectuée par Bois (1991) à laquelle on peut se référer pour de plus amples détails.

Il faut avant tout poser les hypothèses de base de cette approximation.

L'approximation de Boussinesq réfère le mouvement du milieu à un état statique dont les variables ne dépendent que de l'altitude rapportée à une échelle significative de cet état, soit *H*. L'écriture de l'équation d'équilibre $\nabla p = \rho \mathbf{g}$ montre que cette échelle peut être (par exemple) $H = \frac{p_0}{\rho_0 g}$: dans les gaz, *H* est ce que l'on appelle habituellement l'échelle atmosphérique. En variables non-dimensionnées, l'équation d'équilibre s'écrit alors :

$$\frac{d\bar{p}}{d\zeta} + \bar{\rho} = 0, \qquad (2.13)$$

où $\overline{p} = \frac{p'}{p_0}$, $\overline{\rho} = \frac{\rho'}{\rho_0}$, $\zeta = \frac{z'}{H}$; les grandeurs p, ρ , ζ sont des variables normalisées, les

grandeurs primées désignant les grandeurs physiques mesurées avec des unités.

On a $\zeta = \frac{z'}{H}$, et le mouvement s'effectue a l'échelle L telle que $z = \frac{z'}{L}$, soit $\zeta = \varepsilon z$.

Les conditions de validité de l'approximation de Boussinesq imposent ensuite que, si l'on désigne par L l'échelle caractéristique du phénomène étudié (et qui satisfait donc par hypothèse l'approximation de Boussinesq), alors d'une part, le paramètre $\varepsilon = \frac{L}{H}$ doit être petit, et, d'autre part, l'échelle de vitesse caractéristique du mouvement doit satisfaire l'égalité $U\sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}} = \varepsilon$. L'échelle caractéristique L du milieu est petite devant l'échelle atmosphérique H. Nous ne discutons pas ici ces conditions de validité que nous supposons satisfaites.

Notons, cependant, que réécrites pour les paramètres sans dimension significatifs du problème, ces conditions impliquent :

$$\varepsilon \ll 1, \qquad F^2 = \varepsilon.$$
 (2.14)

Il existe ainsi une relation entre les effets de compressibilité dans le milieu et le rapport des deux longueurs verticales : c'est l'hypothèse fondamentale de l'approximation de Boussinesq.

Dans l'atmosphère terrestre, H est de l'ordre de 10 km, par conséquent, l'échelle verticale L ne doit pas excéder quelques kilomètres (deux ou trois kilomètres maximum, et, usuellement, beaucoup moins).

En l'absence d'eau, le système possède des solutions d'équilibre pour lesquelles la distribution de température est liée au terme source de l'équation de l'énergie. Si nous prenons en compte les échanges d'eau dus à la condensation ou à l'évaporation, il n'existe pas, en général, une solution d'équilibre exacte.

Cependant, si l'on considère un état d'équilibre ($\overline{\mathbf{u}} = 0$), en ayant une distribution imposée de température $\overline{T} = T_0(\zeta)$, et une concentration imposée de vapeur d'eau $\overline{q}_v = Q_{0v}(\zeta)$, les équations (2.2)-(2.7) sont alors satisfaites « approximativement » (à l'ordre ε^2) par la pression, la densité et la concentration d'air sec $\overline{p} = P_0(\zeta)$, $\overline{\rho} = R_0(\zeta)$ et $\overline{q}_g = Q_{0g}(\zeta)$, qui satisfont les équations :

$$P_{0}'(\zeta) + R_{0}(\zeta) = 0,$$

$$P_{0}(\zeta) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} (Q_{0g}(\zeta) + r_{\nu}Q_{0\nu}(\zeta))R_{0}(\zeta)T_{0}(\zeta).$$
(2.15)

Notons que, lorsque le terme source dans l'équation de l'énergie est nul ($Q \equiv 0$ dans (2.6)), les équations (2.2)-(2.6) sont satisfaites exactement par des distributions linéaires de température et de vapeur d'eau (les gradients sont constants). Quand $Q \neq 0$, si l'on néglige les termes d'ordre ε^2 , il est possible de trouver une solution quasi-statique : la vitesse, dans cette solution, se lit : $\overline{\mathbf{u}} = \varepsilon \overline{w}(\zeta) \mathbf{k}$.

Dans la suite, nous nous intéressons seulement aux termes d'ordre 0 et 1 en ε , aussi, nous supposons que le repos est une solution particulière à l'ordre considéré, les équations (2.15) restant valables.

2-3 Equations fondamentales représentant la première approximation de Boussinesq

On peut alors formuler l'approximation de Boussinesq par une procédure asymptotique unique, ε étant dorénavant le petit paramètre gouvernant cette expansion, ce qui permet de réduire le système à un système d'équations à coefficients lentement variables.

Suivant le processus général de l'approximation de Boussinesq (Bois 1991), la fluctuation de pression est d'ordre ε^2 , tandis que celles des autres variables sont d'ordre ε .

On définit donc, à partir de l'état statique, un développement asymptotique des équations (2.2)-(2.7) par :

$$\overline{p} = P_0(\zeta) + \varepsilon^2 \widetilde{p} , \qquad \overline{T} = T_0(\zeta) + \varepsilon \widetilde{T} , \qquad \overline{\rho} = R_0(\zeta) + \varepsilon \widetilde{\rho} ,$$

$$\overline{q}_v = Q_{0v}(\zeta) + \varepsilon \widetilde{q}_v, \qquad \overline{q}_g = Q_{0g}(\zeta) + \varepsilon \widetilde{q}_g .$$
(2.16)

La première dégénérescence des équations du système (2.2)-(2.6) s'écrit, après calculs :

$$\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}(\varepsilon), \qquad (2.17)$$

$$R_{0}(\zeta)\frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dt} + \nabla \tilde{p} = -\tilde{\rho}\mathbf{k} + \frac{1}{\mathrm{Re}}[\Delta \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}})] + 0(\varepsilon), \qquad (2.18)$$

$$\frac{1}{R_0(\zeta)}\frac{d\widetilde{\rho}}{dt} + \frac{1}{T_0(\zeta)}\frac{d\widetilde{T}}{dt}\left[\alpha - \frac{\Lambda_{\nu_0} + \alpha - 1}{T_0(\zeta)}\right] + \frac{1}{Q_{0\nu}(\zeta)}\frac{d\widetilde{q}_{\nu}}{dt} = 0(\varepsilon), \qquad (2.19)$$

$$-\frac{Q_{0g}(\zeta)}{Q_{0v}(\zeta)}\frac{d\tilde{q}_{v}}{dt} + (Q_{0g}(\zeta) + r_{v}Q_{0v}(\zeta))\frac{\Lambda_{0v}(\zeta)}{T_{0}^{2}(\zeta)}\frac{d\tilde{T}}{dt} - \tilde{w}[\frac{Q_{0v}(\zeta)}{Q_{0g}(\zeta)}Q_{0v}'(\zeta) - (Q_{0g}(\zeta) + r_{v}Q_{0v}(\zeta))(\Lambda_{0v}(\zeta)\frac{T_{0}'(\zeta)}{T_{0}^{2}(\zeta)} - \frac{P_{0}'(\zeta)}{P_{0}(\zeta)})] = \frac{1}{\operatorname{Re}S^{*}}\Delta\tilde{q}_{v} + 0(\varepsilon), \quad (2.20)$$

$$\overline{c}_{p_0}(\zeta)\frac{d\widetilde{T}}{dt} + \frac{\gamma - 1}{\gamma}r_{\nu}\Lambda_{0\nu}(\zeta)\frac{d\widetilde{q}_{\nu}}{dt} + \widetilde{w}[\overline{c}_{p_0}(\zeta)T_0'(\zeta) - \frac{P_0'(\zeta)}{R_0(\zeta)} + \frac{\gamma - 1}{\gamma}r_{\nu}\Lambda_{0\nu}(\zeta)Q_{0\nu}'(\zeta)] = \frac{1}{\operatorname{Re}\operatorname{Pr}}\frac{1}{R_0(\zeta)}\Delta\widetilde{T} + \frac{\gamma - 1}{\gamma}r_{\nu}\frac{\Lambda_{0\nu}(\zeta)}{\operatorname{Re}S^*}\Delta\widetilde{q}_{\nu} + 0(\varepsilon). \quad (2.21)$$

La loi d'état (2.7) s'écrit :

$$\frac{\widetilde{q}_{g} + r_{\nu}\widetilde{q}_{\nu}}{Q_{0g}(\zeta) + r_{\nu}Q_{0\nu}(\zeta)} + \frac{\widetilde{\rho}}{R_{0}(\zeta)} + \frac{\widetilde{T}}{T_{0}(\zeta)} = 0(\varepsilon).$$
(2.22)

Nous avons posé dans (2.17)-(2.21) :

$$\Lambda_{0\nu}(\zeta) = \Lambda_{\nu_0} + \Lambda'_{\nu_0}(T_0(\zeta) - 1),$$

$$\bar{c}_{\rho_0}(\zeta) = Q_{0g}(\zeta) + \chi_{\nu}Q_{0\nu}(\zeta) + \chi_L Q_{0L}(\zeta).$$
(2.23)

Le système (2.17)-(2.21) est un système quasilinéaire avec des coefficients lentement variables. Ses solutions peuvent être examinées de deux manières différentes :

- (i) en conservant, d'une part, dans le système, les coefficients lentement variables, nous pouvons modéliser des comportements de convection profonde dans le milieu, ce que nous étudions dans la suite de ce Chapitre 2 ;
- d'autre part, en approchant les valeurs des coefficients par leur valeur à un niveau donné (l'altitude de référence), le système décrit une convection peu profonde dans le voisinage de cette altitude, ce qui fera l'objet du Chapitre 3.

3- Problème réduit et équation linéarisée

3-1 Modèle double diffusif

Comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, nous laissons de côté la loi d'état (2.22), et nous considérons le système (2.17)-(2.21), qui est autonome.

On linéarise alors les équations autour de l'état de repos.

Cependant, le système linéarisé reste complexe, et c'est pourquoi nous allons apporter des hypothèses simplificatrices supplémentaires, celles-ci ayant déjà été évoquées dans la fin du Chapitre 1 précédent pour le cas des petites concentrations d'eau et de vapeur. Cette simplification, outre son caractère mathématique, est cohérente avec la description réaliste d'un nuage.

Ainsi, la première idée est de supposer que l'amplitude de la concentration de la vapeur d'eau et celle de la concentration d'eau liquide sont petites et du même ordre de grandeur que q_0 : cette hypothèse est réaliste (en effet, l'ordre de grandeur de q_0 est, en pratique, 10^{-3}).

De nombreux coefficients dans le système (2.17)-(2.21) prennent alors des formes plus simplifiées.

Malheureusement, cette simplification entraîne quelques singularités qu'il est alors nécessaire d'examiner. L'une d'entre elles est que, lorsque l'on néglige les termes d'ordre q_0 , le caractère double diffusif du système disparaît (les laplaciens figurant dans (2.20) et (2.21) $\Delta \tilde{q}_v$ deviennent, en effet, négligeables).

Une autre singularité associée à la petite amplitude de q_0 apparaît dans l'équation d'état (2.22), mais sera examinée dans le Chapitre 3, lorsqu'on réintroduira celle-ci dans le système pour examiner, sur les conclusions alors établies, les restrictions imposées par sa prise en compte.

Afin d'éviter la disparition du caractère double diffusif de ce système pour un petit q_0 , nous supposons alors que le nombre de Schmidt du problème est petit lui aussi, du même ordre q_0 que les concentrations d'eau, à savoir :

$$S^* = q_0 S$$
, (2.24)

où S est un nouveau nombre de Schmidt qui est lui-même supposé d'ordre unité.

En tenant compte de q_0 petit et de l'hypothèse (2.24), les équations (2.20) et (2.21) prennent les nouvelles formes suivantes :

$$-\frac{1}{Q_{0\nu}(\zeta)}\frac{d\tilde{q}_{\nu}}{dt} + \frac{\Lambda_{0\nu}(\zeta)}{T_{0}^{2}(\zeta)}\frac{d\tilde{T}}{dt} - \tilde{w}[\frac{Q_{0\nu}'(\zeta)}{Q_{0\nu}(\zeta)} - \left(\Lambda_{0\nu}(\zeta)\frac{T_{0}'(\zeta)}{T_{0}^{2}(\zeta)} - \frac{P_{0}'(\zeta)}{P_{0}(\zeta)}\right)] = \frac{1}{\operatorname{Re}S}\Delta\tilde{q}_{\nu} + 0(\varepsilon), \quad (2.25)$$

$$\frac{d\widetilde{T}}{dt} + \widetilde{w}[T_0'(\zeta) + 1] = \frac{1}{\operatorname{Re}\operatorname{Pr}} \frac{\Delta\widetilde{T}}{R_0(\zeta)} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} r_\nu \frac{\Lambda_{0\nu}(\zeta)}{\operatorname{Re}S} \Delta\widetilde{q}_\nu + 0(\varepsilon) .$$
(2.26)

Notons que, pour q_0 petit, $\overline{c}_{p_0}(\zeta)$ et $Q_{0g}(\zeta)$ sont approchés par la valeur 1.

Le système [(2.17), (2.18), (2.19), (2.25), (2.26)] est le système réduit associé au problème donné. Ce problème est régulier, dans le sens qu'il possède les mêmes singularités que le problème complet.

3-2 Equation linéarisée et comportement d'onde en convection profonde

Nous limitons maintenant notre attention au système réduit.

Nous linéarisons les équations autour de l'état de repos (en fait, nous remplaçons les dérivées matérielles par les dérivées partielles par rapport au temps dans ces équations).

Les solutions du système sont cherchées sous la forme :

~ (

$$(\widetilde{u},\widetilde{v},\widetilde{w},\widetilde{p},\widetilde{\rho},\widetilde{T},\widetilde{q}_{v}/q_{0}) = (U,V,W,P,R,T,Q)e^{i(\sigma t - kx - hy)}.$$
(2.27)

On cherche en fait des solutions périodiques en temps, qui se déplacent dans le plan (x, y), dont l'amplitude varie seulement en fonction de l'altitude.

La fréquence est σ (pulsation fixée, réelle), et les composantes d'un vecteur d'onde horizontal sont (k,h).

On remplace ces formes de solutions dans les équations du système.

Après quelques calculs, les équations linéarisées se réduisent à une équation linéaire d'ordre huit, avec des coefficients lentement variables, satisfaite par la composante verticale W de la vitesse, qui est finalement :

$$\frac{1}{\operatorname{Re}^{3} S_{1} \operatorname{Pr} R_{0}^{2}(\zeta)} D^{8}W + \frac{i\sigma}{\operatorname{Re}^{2} R_{0}(\zeta)} A(\zeta) D^{6}W + \frac{1}{\operatorname{Re}} \sigma^{2} B(\zeta) D^{4}W + R_{0}(\zeta) \bigg[-i\sigma^{3} - \frac{K^{2} N^{2}(\zeta)}{\operatorname{Re} R_{0}(\zeta)} D_{0}(\zeta) \bigg] D^{2}W = i\sigma K^{2} R_{0}(\zeta) N^{2}(\zeta) \big(\delta(\zeta) + \beta(\zeta)\big) W + 0(\varepsilon), \qquad (2.28)$$

où nous avons posé :

$$K^{2} = k^{2} + h^{2}, \qquad D^{2} = \frac{d^{2}}{dz^{2}} - K^{2}, \qquad D^{2n} = (D^{2})^{n}, \qquad (2.29)$$

et :

$$N^{2}(\zeta) = \frac{1}{T_{0}(\zeta)}(1 + T_{0}'(\zeta)),$$

$$\Gamma(\zeta) = \frac{Q'_{0\nu}(\zeta)}{Q_{0\nu}(\zeta)} + \frac{1}{T_0(\zeta)} \left(\lambda_0(\zeta) - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\right), \qquad \lambda_0(\zeta) = \frac{\Lambda_{0\nu}(\zeta)}{T_0(\zeta)},$$

$$\beta(\zeta) = \frac{1}{T_0(\zeta)}(1-\alpha) - \lambda_0(\zeta) + \alpha, \qquad \mu_0(\zeta) = \frac{\gamma-1}{\gamma}r_{\nu}\lambda_0(\zeta),$$

$$A(\zeta) = \frac{\lambda_0(\zeta)\mu_0(\zeta) - 1}{S_1} + \frac{1}{\Pr} - \frac{1}{\Pr S_1},$$

$$S_1 = \frac{S}{R_0(\zeta)Q_{0\nu}(\zeta)}, \qquad \qquad \delta(\zeta) = \frac{\Gamma(\zeta)}{N^2(\zeta)},$$

(2.30)

$$B(\zeta) = 1 + \frac{1}{\Pr} + \frac{1}{S_1} \left(\lambda_0(\zeta) \mu_0(\zeta) - 1 \right),$$

$$D_0(\zeta) = -\frac{1}{\Pr} \left(\delta(\zeta) - \lambda_0(\zeta) \right) + \frac{\beta(\zeta)}{S_1} \left[\mu_0(\zeta) \left(\delta(\zeta) - \lambda_0(\zeta) \right) + 1 \right].$$

La quantité $N(\zeta)$ est la fréquence de Brunt-Vaïsälä sans dimension de l'air sec.

Les deux paramètres $N^2(\zeta)$ et $\Gamma(\zeta)$ définissent la stabilité statique du milieu humide (cette propriété, qui pourrait directement être mise en évidence sur la version non dissipative des équations de départ, sera explorée plus précisément au chapitre suivant).

On retrouvera la démarche du calcul conduisant à l'équation (2.28) dans l'Annexe 2.

4- Etude de la propagation des ondes dans le milieu en convection profonde

Il reste alors à étudier les solutions de cette équation de degré huit pour le cas de la convection profonde.

4-1 Changement de variable

Puisque l'équation (2.28) n'est écrite qu'à l'ordre 0 en ε , il n'est possible d'examiner ses solutions qu'à cet ordre.

Nous cherchons par conséquent la solution sous la forme suivante :

$$W = \hat{W}e^{i\phi' z}, \qquad (2.31)$$

où \hat{W} est une amplitude (constante), et ϕ' est un nombre d'onde vertical (constant).

Nous noterons au passage que si l'on considérait les termes d'ordre ε , la phase $\phi'z$ devrait être remplacée par une phase $\vartheta = \varepsilon^{-2}\phi(\zeta)$; l'amplitude, quant à elle, serait cherchée comme une fonction lentement variable, et enfin, une procédure de méthode d'échelles multiples devrait être appliquée.

La formule (2.31) correspond à l'ordre 0 de cette procédure.

L'introduction de (2.31) dans (2.28) fournit pour ϕ'^2 une équation algébrique qui est l'équation de dispersion (complexe) associée à (2.28).

On effectue, dans cette équation, le changement de variable suivant, en posant :

$$\phi'^{2} = -K^{2} + \operatorname{Re} R_{0}(\zeta) \sigma \psi, \qquad X = \frac{\operatorname{Re} R_{0}(\zeta) \sigma^{3}}{K^{2} N^{2}(\zeta)}.$$
(2.32)

Les changements (2.32), une fois introduits dans l'équation linéarisée (2.28), fournissent, après calculs, l'équation de dispersion :

$$\frac{1}{\Pr S_1}\psi^4 - iA(\zeta)\psi^3 + B(\zeta)\psi^2 + i\left(1 - \frac{iD_0(\zeta)}{X}\right)\psi = \frac{i}{X}\left[\beta(\zeta) + \delta(\zeta)\right].$$
(2.33)

L'équation (2.33) montre que le nombre de Reynolds ne figure seulement qu'à travers la variable X; par conséquent, les cas limites d'un nombre de Reynolds petit ou grand peuvent être examinés en évaluant le développement des racines pour X petit ou X grand.

Comme il n'est pas possible d'obtenir des conclusions pratiques très significatives dans le cas général, nous nous intéressons maintenant au cas où les coefficients A, B, D_0 , sont approchés par leur valeur en $\zeta = 0$ (cela revient à remplacer ces fonctions lentement variables par leur valeur moyenne).

On obtient alors l'équation approchée :

$$\frac{1}{\Pr S}\psi^{4} - iA\psi^{3} + B\psi^{2} + i\left(1 - \frac{iD_{0}}{X}\right)\psi = \frac{i}{X}(1 - \Lambda_{\nu_{0}} + \delta), \qquad (2.34)$$

48

avec, cette fois-ci :

$$\beta = 1 - \Lambda_{\nu_0}, \qquad \mu_0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} r_{\nu} \Lambda_{\nu_0}, \qquad S_1 = S,$$

$$A = \frac{\Lambda_{\nu_0}\mu_0 - 1}{S} + \frac{1}{\Pr} - \frac{1}{\Pr S}, \qquad B = \frac{\Lambda_{\nu_0}\mu_0 - 1}{S} + 1 + \frac{1}{\Pr}, \qquad (2.35)$$

$$D_0 = -\frac{1}{\Pr}(\delta - \Lambda_{\nu_0}) + \frac{1 - \Lambda_{\nu_0}}{S} \left[\mu_0 (\delta - \Lambda_{\nu_0}) + 1 \right].$$

4-2 Comportement des racines et résultats qualitatifs

L'équation (2.34) possède quatre racines, qu'on appellera ψ_j (j=0, 1, 2, 3). Ces racines ψ_j peuvent être étudiées, dans le plan complexe, de la même façon que Bois (1979) l'avait fait pour l'équation analogue qu'il avait obtenue (de degré six) pour le cas de l'air sec. Les ψ_j sont des fonctions continues de la variable X, et les développements des ψ_j doivent être construits pour des petites valeurs de X comme pour des grandes valeurs de X.

Les comportements des racines ϕ'_j (j=0, 1, 2, 3) de l'équation de dispersion se déduisent sans difficulté des comportements obtenus pour les racines ψ_j .

Une étude développée de ces racines est donnée dans l'Annexe 3.

Nous présentons ici un exemple qualitatif (sur la Figure 2.a) des chemins suivis par les racines dans le plan complexe quand X varie, (qu'on appellera plus loin « trajectoires »), chemins reportés sur cette figure lorsque X devient positif. Notons que les valeurs négatives de X peuvent aussi être considérées, et les trajectoires correspondantes sont à peu près semblables.

D'autres exemples qualitatifs de représentation de chemins parcourus par les racines sont donnés dans l'Annexe 3.



Valeurs qui ne sont jamais atteintes par ϕ'^2 .



Après avoir effectué les calculs des comportements des racines pour les cas $X \rightarrow 0$ et $X \rightarrow \infty$, nous en donnons ci-dessous les conclusions.

Les trajectoires possèdent alors les propriétés suivantes :

(i) Pour $X \to 0$, toutes les racines tendent vers 0. Physiquement, cette propriété signifie que, pour un nombre de Reynolds tendant vers 0, (c'est à dire pour une grande viscosité), tous les mouvements sont amortis avec e^{-Kz} .

- (ii) Pour X grand, trois des trajectoires (qu'on appellera (C_1) , (C_2) , (C_3)) s'éloignent à l'infini : comme la partie imaginaire du ϕ'_j correspondant est infinie, ces ϕ'_j définissent des mouvements amortis : il s'agit d'amortissements rapides. Puisque ces mouvements sont définis pour des grands nombres de Reynolds, les trois ϕ'_j correspondants sont associés à des comportements de couches limites. En particulier, de tels mouvements existent seulement dans les voisinages immédiats de frontières telles qu'une surface libre ou une paroi éventuellement présente dans le domaine de l'écoulement.
- (iii) La dernière trajectoire (qu'on appellera (C_0)) décrit, pour X grand, un autre mouvement plus complexe. Notons ϕ'_0 la limite du ϕ' correspondant pour X infini. Suivant le signe de ${\phi'_0}^2$, l'écoulement correspondant est soit oscillatoire non amorti, soit amorti sans oscillation. Comme faire tendre X vers l'infini revient à examiner le cas Re $\rightarrow \infty$, c'est à dire le cas du fluide parfait, ces deux types de mouvement sont ceux que l'on peut obtenir en fluide parfait.

Cependant, il peut exister, pour des valeurs de X autres que celles tendant vers 0 ou vers l'infini, une racine réelle, appelée ϕ^* (associée à la racine ψ^*). Cette racine, quand elle existe, décrit le seul mouvement oscillatoire non amorti existant dans le fluide dissipatif.

L'existence d'un tel écoulement est due au caractère double diffusif du problème présent, et représente la différence qualitative essentielle entre ce problème de fluide hétérogène et le problème de fluide pur (voir, par exemple Bois, 1979). De ce point de vue physique, il est associé au fait que le principe d'échange des stabilités n'est pas valable dans ce problème (voir note (1)).

[(1) Le principe d'échange des stabilités démontre que les écoulements instables convectifs n'existent en fluide dissipatif pur que s'ils sont stationnaires : ici, l'existence de la racine ϕ^* montre que l'on peut en trouver également qui soient non stationnaires, propriété qui n'est pas surprenante lorsque l'on se rappelle que les écoulements double diffusifs ne vérifient pas le principe d'échange des stabilités]. Nous avons inséré dans l'Annexe 3, des données utilisées pour le problème avec des valeurs numériques bien précises. En effet, nous avons pu, grâce à un programme numérique de résolution d'une équation complexe de degré quatre à coefficients complexes (méthode de Müller), représenter numériquement les chemins suivis par les racines dans le plan complexe. Ce travail nous a permis de vérifier et confirmer les résultats que nous obtenions théoriquement.

Notons, pour finir que, puisque $\operatorname{Re}(\zeta) \to 0$ quand $\zeta \to \infty$, les petites valeurs de X correspondent aussi à une altitude infinie.

Par conséquent, tous les écoulements sont amortis par viscosité à une altitude infinie, ce qui est conforme à l'intuition physique.

Désormais, le comportement global des écoulements est complètement décrit à l'ordre 0 en ε : l'étude des termes d'ordre 1 en ε serait utile uniquement afin de décrire le voisinage d'éventuels points tournants ou des niveaux critiques pour une petite viscosité.

Chapitre 3

Un problème de Rayleigh-Bénard humide en convection peu profonde

1-Introduction

Nous appliquons, dans ce chapitre, les équations établies précédemment au problème de Rayleigh-Bénard en convection peu profonde.

On peut en effet s'attendre à obtenir, pour ce problème, des conclusions différentes de celles du problème de Bénard classique, compte tenu du fait que l'étude des ondes périodiques faite au Chapitre 2 a permis d'identifier dans le milieu des mouvements périodiques (donc instationnaires) qui ne sont pas non plus atténués en espace.

De tels mouvements, si nous les faisons apparaître dans un problème d'instabilité convective, caractérisent une instabilité oscillatoire qui n'existe pas dans le problème de Bénard.

Le problème de Rayleigh-Bénard classique consiste à considérer une couche mince d'un fluide dilatable comprise entre deux niveaux horizontaux s'étendant à l'infini, maintenues à des températures différentes. La température du niveau inférieur est plus élevée que celle du niveau supérieur. Le fluide, au voisinage de ce niveau, est plus dense et tend à descendre, alors que le fluide plus chaud tend à monter. Il se forme ainsi, des courants qui accroissent l'échange de chaleur entre les parties froides et chaudes lorsque la différence de température entre les deux surfaces dépasse une valeur critique.

Ce phénomène, qui est très répandu dans la nature, peut être mis en évidence, aussi bien dans les comportements des fluides atmosphériques ou géophysiques, que dans la formation de petits cristaux, ou l'évaporation d'une couche fluide, etc.. Le phénomène, qui est dû essentiellement à la variation de masse volumique en fonction de la température, est applicable au milieu considéré ici, mais avec une masse volumique dépendant à la fois de la température et de la concentration d'eau. L'étude de l'apparition de l'instabilité convective pour notre milieu peut alors être décrite à l'aide d'un nombre de Rayleigh Ra et d'un nombre de Rayleigh humide Rh. On cherchera à identifier dans l'espace des paramètres (Ra, Rh) des zones d'instabilité stationnaire et d'instabilité oscillatoire.

Après avoir rappelé la formulation du problème de Rayleigh-Bénard humide, pour le problème double diffusif (§2), nous en écrivons les conditions aux limites de surfaces libres.

Nous étudions alors les différentes instabilités stationnaires et oscillatoires pouvant se manifester, puis nous examinerons ensuite les restrictions induites par la loi d'état (§4).

Nous finirons (§5) par interpréter les résultats et tirer les conclusions qualitatives ou d'ordre physique.

2- Formulation du problème de Rayleigh-Bénard humide

L'étude de l'apparition de l'instabilité convective dans le milieu air humide saturé peut être, nous le verrons, décrite à l'aide de deux nombres de Rayleigh : un nombre de Rayleigh Ra et un autre nombre de Rayleigh humide Rh, définis par la suite en fonction de N^2 et Γ .

Les hypothèses générales sont celles du Chapitre 2 : petites concentrations d'eau liquide et de vapeur d'eau (d'ordre de grandeur q_0) et petit nombre de Schmidt S^* , tel que $S^* = q_0 S$. En revanche, on ne précise rien sur l'ordre de grandeur de la chaleur latente de vaporisation Λ_{r_0} , le nombre de Reynolds Re, ou le rapport τ des diffusivités dans le milieu.

Les conditions de formation de l'instabilité sont alors établies dans le plan (Ra, Rh) en fonction de l'état statique du milieu, ainsi que des caractéristiques phénoménologiques comme la chaleur latente de vaporisation et le rapport des diffusivités (calorifique et due à l'hétérogénéité) de l'air nuageux.

2-1 Modèle double diffusif et équation

Dans ce paragraphe, une convection libre peu profonde dans une couche d'épaisseur finie est considérée. Cette épaisseur est choisie comme l'échelle verticale L de nos équations, qui est donc supposée petite devant l'échelle atmosphérique H: le rapport $\varepsilon = \frac{L}{H}$ définit le modèle Boussinesq.

Etant donné que le comportement global des écoulements est totalement décrit à l'ordre 0 en ε , les coefficients lentement variables des équations du système considéré sont approchés par leurs valeurs en z = 0, hypothèse liée elle-même à ce que l'on s'intéresse à une convection peu profonde.

Ces valeurs sont données en z = 0 par :

$$-P_0'(0) = R_0(0) = T_0(0) = 1, \qquad P_0(0) = \frac{\gamma - 1}{\gamma},$$

$$Q_{0\nu}(0) = q_0,$$
 $Q_{0L}(0) = q_0(r_{\nu} - 1),$ $Q_{0g}(0) = 1 - q_0 r_{\nu},$ (3.1)

$$\Lambda_{0\nu}(0) = \Lambda_{\nu_0}, \qquad \overline{c}_{p_0}(0) = 1 + q_0(\chi_{\nu} - \chi_L + r_{\nu}(\chi_L - 1)).$$

On a désigné par q_0 la concentration de vapeur d'eau dans le milieu en équilibre au niveau de référence z = 0.

Les équations du système considéré sont les huit équations (2.17)-(2.22), aux huit inconnues $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}, \tilde{\rho}, \tilde{T}, \tilde{q}_v, \tilde{q}_g$, dans lesquelles \tilde{q}_g ne figure uniquement que dans l'équation algébrique (2.22).

Les coefficients lentement variables sont alors remplacés dans les équations (2.17)-(2.22), par leurs valeurs indiquées compte tenu des formules (3.1). Nous faisons de plus l'hypothèse que $q_0 \ll 1$. Cette hypothèse permet de simplifier quelques coefficients dans le système des équations (2.17)-(2.22), mais cette simplification doit être faite avec certaines précautions, compte tenu du fait que, pour certaines formules, elle introduit en même temps une singularité.

On pose alors :

$$\widetilde{q}_L = q_0 \widehat{q}_L, \qquad \qquad \widetilde{q}_v = q_0 \widehat{q}_v. \qquad (3.2)$$

En utilisant les nouvelles notations, le système linéarisé autour de l'état de repos, associé aux équations (2.17), (2.18), (2.25), (2.26), (2.22), et l'équation (A2.8), prennent les nouvelles formes :

$$\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \widetilde{p} = -\widetilde{\rho} \mathbf{k} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \widetilde{\mathbf{u}}, \qquad (3.4)$$

$$\frac{\partial \hat{q}_{\nu}}{\partial t} + \tilde{w}\Gamma = \frac{\Lambda_{\nu_0}}{\operatorname{Re}\operatorname{Pr}}\Delta \tilde{T} + \frac{\Lambda_{\nu_0}\mu_0 - 1}{\operatorname{Re}S}\Delta \hat{q}_{\nu}, \qquad (3.5)$$

$$\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t} + \widetilde{w}N^2 = \frac{1}{\operatorname{Re}\operatorname{Pr}}\Delta\widetilde{T} + \frac{\mu_0}{\operatorname{Re}S}\Delta\hat{q}_{\nu}, \qquad (3.6)$$

$$\widetilde{\rho} + \widetilde{T} = -q_0(\hat{q}_g + r_v \hat{q}_v), \qquad (3.7)$$

$$\hat{q}_{\nu} + \tilde{\rho} + (1 - \Lambda_{\nu_0})\tilde{T} = 0.$$
(3.8)

Les valeurs (constantes) des paramètres ont déjà été citées auparavant.

Les deux facteurs d'instabilité du milieu (formules (2.30)) prennent maintenant les valeurs constantes suivantes :

$$\Gamma = Q'_{0\nu} + \Lambda_{\nu_0} - \frac{\gamma}{\gamma - 1}, \qquad N^2 = 1 + T'_0, \qquad (3.9)$$

Notons aussi que maintenant :

$$\mu_0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} r_{\nu} \Lambda_{\nu_0} \,. \tag{3.10}$$

Le système est ensuite résolu en effectuant une analyse du problème en modes normaux, procédé classique pour un problème de stabilité linéaire : étant donné que les conditions aux limites sont indépendantes de x et de y, nous recherchons une solution du système (3.3)-(3.8) de la forme (2.27), qui s'écrit :

$$(\widetilde{u},\widetilde{v},\widetilde{w},\widetilde{p},\widetilde{\rho},\widetilde{T},\widehat{q}_{v}) = (U,V,W,P,R,T,Q)e^{i(\sigma t - kx - hy)}, \qquad (3.11)$$

où U, V, etc. ne dépendent que de z. k et h sont les composantes du vecteur d'onde horizontal, σ est une fréquence, qui, au seuil d'un état instable, doit être réelle.

Après calculs, les inconnues peuvent être éliminées successivement, et ainsi, les équations se réduisent à une seule équation satisfaite par W (on le rappelle, W est la vitesse verticale du milieu), qui n'est autre que l'équation (2.28) du Chapitre 2, mais avec des coefficients constants.

On obtient, en définitive, l'équation de degré huit suivante :

$$\frac{1}{\operatorname{Re}^{3} S \operatorname{Pr}} D^{8} W + \frac{i\sigma}{\operatorname{Re}^{2}} \left(\frac{\Lambda_{\nu_{0}} \mu_{0} - 1}{S} + \frac{1}{\operatorname{Pr}} - \frac{1}{\operatorname{Pr} S} \right) D^{6} W + \frac{\sigma^{2}}{\operatorname{Re}} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{Pr}} + \frac{\Lambda_{\nu_{0}} \mu_{0} - 1}{S} \right) D^{4} W$$
$$+ \left[-i\sigma^{3} + \frac{K^{2}}{\operatorname{Re} \operatorname{Pr}} (\Gamma - \Lambda_{\nu_{0}} N^{2}) - \frac{K^{2}}{\operatorname{Re} S} (1 - \Lambda_{\nu_{0}}) \left\{ \mu_{0} (\Gamma - \Lambda_{\nu_{0}} N^{2}) + N^{2} \right\} \right] D^{2} W$$
$$= i\sigma K^{2} (\Gamma - \Lambda_{\nu_{0}} N^{2} + N^{2}) W. \quad (3.12)$$

où K^2 et D^2 sont donnés par les formules (2.29).

L'équation (3.12) peut, à nouveau, être réduite à une équation ayant une forme plus simplifiée, en introduisant les paramètres :

$$Ra = -\Pr \operatorname{Re}^{2} N^{2}, \qquad Rh = \Pr \operatorname{Re}^{2} \Gamma^{*},$$

$$\Gamma^{*} = \Gamma - \Lambda_{\nu_{0}} N^{2}, \qquad \tau = \frac{S}{\Pr}.$$
(3.13)

Le nombre Ra est le nombre de Rayleigh de l'écoulement (positif si N^2 est négatif).

Compte tenu de ce que $Q'_{0w} = -(\Gamma - \Lambda_{v_0}N^2)$ (voir ci-après, formules (3.35) à (3.37)), le nombre *Rh* est le nombre de Rayleigh humide, rapporté au gradient total d'eau (liquide + vapeur), de signe opposé à celui de ce gradient.

Le nombre τ est le rapport des deux diffusivités du milieu (l'une calorifique, l'autre due à l'hétérogénéité).

Réécrite avec les nouvelles notations (3.13), la forme réduite de l'équation (3.12) s'écrit :

$$D^{8}W + i\sigma \operatorname{Re}\left[\operatorname{Pr}(\Lambda_{\nu_{0}}\mu_{0} - 1) + \tau \operatorname{Pr} - 1\right]D^{6}W + \sigma^{2}\operatorname{Re}^{2}\operatorname{Pr}\left\{\tau(1 + \operatorname{Pr}) + \Lambda_{\nu_{0}}\mu_{0} - 1\right\}D^{4}W + \left[-i\sigma^{3}\operatorname{Re}^{3}\tau\operatorname{Pr}^{2} - K^{2}\left\{\operatorname{Ra}(\Lambda_{\nu_{0}} - 1) - \operatorname{Rh}\left[\mu_{0}(\Lambda_{\nu_{0}} - 1) + \tau\right]\right\}\right]D^{2}W + i\sigma K^{2}\operatorname{Re}\tau\operatorname{Pr}(\operatorname{Ra} - \operatorname{Rh})W = 0.$$
(3.14)

Le système (3.3)-(3.8) est un système double diffusif avec effet Soret et effet Dufour : il n'est pas possible d'établir pour lui un théorème d'échange des stabilités (qui, d'ailleurs, n'est pas satisfait, voir remarques faites dans l'introduction).

Afin d'examiner les instabilités de ce système, relativement à des conditions aux limites données, le seul moyen est d'en examiner successivement les instabilités stationnaires et les instabilités oscillatoires, séparément.

2-2 Conditions aux limites

Bien que ce cas ait un caractère académique, il est plus commode de s'intéresser à un milieu bordé par deux surfaces libres, qui permettront d'identifier aisément les seuils d'instabilité. En effet, les conditions de surface libre pour le problème de Bénard sont le cas le plus simple des conditions aux limites associées à l'équation (3.14).

Notons que ces « surfaces libres » ne sont pas les frontières d'un nuage, mais des surfaces libres au sens Boussinesq classique, c'est à dire des surfaces sur lesquelles on a l'annulation de la vitesse verticale et de la perturbation de pression : considérer des surfaces libres, dans ce cas, présente l'avantage de permettre d'obtenir des solutions simples du point de vue analytique.

Si nous écrivons la continuité de la température et de la concentration à ces limites, les autres conditions aux limites sont standard (voir, par exemple, Drazin et Reid, 1981).

Finalement, nous supposons :

$$W = D^2 W = 0$$
, $T = 0$, $\hat{q}_v = 0$ en $z = 0$ et $z = 1$. (3.15)

T et \hat{q}_{v} désignent les deux perturbations de température et de concentration de vapeur. Les deux premières relations expriment les conditions de surfaces libres dans l'approximation de Boussinesq, les deux autres restantes traduisent, quant à elles, l'annulation sur cette surface des perturbations de température et de concentration de vapeur : elles expriment la continuité de la température et de la concentration de vapeur à la traversée de la surface libre.

Bien que le problème ainsi posé soit un peu artificiel, la solution de ce problème permet d'inférer qualitativement celle d'un problème à conditions aux limites plus réalistes.

Les conditions (3.15) sont satisfaites par des solutions particulières de l'équation (3.12) de la forme :

$$W = A \sin n\pi z , \qquad (3.16)$$

où A est une constante, et n un entier tel que $n \ge 1$.

On considère donc ces solutions dans ce qui suit.

3- Problème auxiliaire

3-1 Définition du problème auxiliaire

Nous allons alors, dans un premier temps, réduire notre problème, afin d'identifier dans l'espace (Ra, Rh) défini par nos deux nombres de Rayleigh, des zones d'instabilité stationnaire et des zones d'instabilité oscillatoire (nous envisageons plus loin comment le problème complet se rattache à ce problème réduit).

Le problème réduit est donc défini par l'équation (3.14), abstraction faite des restrictions pouvant s'exercer sur les paramètres qui la définissent.

Les solutions de l'équation sont recherchées dans la famille (3.16).

L'équation (3.14) possède des solutions stationnaires de même que des solutions oscillatoires, que l'on pourra identifier par une procédure classique de l'instabilité double diffusive (voir, par exemple, Drazin et Reid, 1981).

En réinjectant la forme des solutions particulières (3.16) dans l'équation (3.14), on obtient l'équation algébrique suivante :

$$Q^{8} - i\sigma \operatorname{Re}\left[\operatorname{Pr}(\Lambda_{\nu_{0}}\mu_{0} - 1) + \tau \operatorname{Pr} - 1\right]Q^{6} + \sigma^{2} \operatorname{Re}^{2} \operatorname{Pr}\left\{\tau(1 + \operatorname{Pr}) + \Lambda_{\nu_{0}}\mu_{0} - 1\right\}Q^{4} \\ + \left[i\sigma^{3} \operatorname{Re}^{3} \tau \operatorname{Pr}^{2} + K^{2}\left\{\operatorname{Ra}(\Lambda_{\nu_{0}} - 1) - \operatorname{Rh}\left[\mu_{0}(\Lambda_{\nu_{0}} - 1) + \tau\right]\right\}\right]Q^{2} \\ + i\sigma K^{2} \operatorname{Re} \tau \operatorname{Pr}(\operatorname{Ra} - \operatorname{Rh}) = 0, \quad (3.17)$$

où l'on a posé :

$$Q^2 = K^2 + n^2 \pi^2$$
, $Q^{2n} = (Q^2)^n$. (3.18)

On examinera, tout d'abord, les solutions de (3.17), au voisinage du seuil d'instabilité.

Ce problème ne possède une solution non triviale que pour des valeurs particulières de σ , appelées en général valeurs propres associées à A, amplitude de la perturbation.

Ces valeurs propres sont définies comme les racines de l'équation caractéristique (3.17), dite équation de dispersion.

3-2 Solutions stationnaires

Pour un départ d'instabilité stationnaire, correspondant au cas $\sigma = 0$, l'équation (3.17) se réduit à :

$$\frac{Q^{\circ}}{K^{2}} = -Ra(\Lambda_{\nu_{0}} - 1) + Rh[\mu_{0}(\Lambda_{\nu_{0}} - 1) + \tau].$$
(3.19)

62

Pour une valeur donnée de K, la valeur minimale pour laquelle il existe des modes normaux, correspond à n = 1.

On pose, dans (3.19), pour plus de facilité :

$$f(K^2) = \frac{Q^6}{K^2} = \frac{(K^2 + n^2 \pi^2)^3}{K^2}.$$
 (3.20)

Le seuil d'instabilité se détermine en annulant la dérivée $\frac{df}{dK^2}$ dans (3.20).

Après calculs, le nombre d'onde K_c du mode associé est obtenu pour :

$$K_C = \frac{n\pi}{\sqrt{2}}, \qquad (3.21)$$

et on a alors pour (3.20) :

$$\frac{Q^6}{K^2} = \frac{27n^4\pi^4}{4}.$$
(3.22)

On retrouve l'interprétation de ces résultats de calculs sur la Figure 3.a.

Le minimum absolu du nombre de Rayleigh est atteint pour n = 1 (c'est seulement là que l'on voit arriver cette condition), et on a finalement :

$$K_{c} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2,2214,$$

$$Ra_{c} = \frac{27\pi^{4}}{4} \approx 657,51.$$
(3.23)





$$K_C$$
 correspondant au minimum de la courbe : $K_C = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ et $f(K^2) = \frac{27\pi^4}{4}$.

64

Ces données permettent de fournir le résultat suivant : l'équation (3.14), avec les conditions aux limites (3.15), possède des solutions stationnaires si, alors, est satisfaite l'inégalité :

$$Rh\left[\mu_{0}\left(\Lambda_{\nu_{0}}-1\right)+\tau\right]-Ra(\Lambda_{\nu_{0}}-1)\geq\frac{27\pi^{4}}{4}.$$
(3.24)

Dans le plan (Ra, Rh), pour des valeurs réalistes des paramètres ($\mu_0 \ge 0$, $\Lambda_{\nu_0} \ge 1$), cette inégalité (3.24) définit une région d'instabilité stationnaire. Cette zone, représentée sur la Figure 3.b (voir page 65), est délimitée par la droite XY; la partie stable correspond à la région située au-dessous de la ligne XY.

3-3 Solutions oscillatoires

L'équation (3.14) possède également des solutions oscillatoires. C'est le cas correspondant à σ réel, différent de zéro.

Pour de telles valeurs de σ , l'équation (3.17) possède une partie réelle et une partie imaginaire qu'il convient d'annuler séparément. En éliminant la racine $\sigma = 0$ (puisqu'elle correspond au cas précédent), on obtient alors les deux équations qui, respectivement, représentent l'annulation de la partie réelle et l'annulation de la partie imaginaire :

$$\frac{Q^{6}}{K^{2}} + \sigma^{2} \operatorname{Re}^{2} \operatorname{Pr} \frac{Q^{2}}{K^{2}} \left\{ \tau(1 + \operatorname{Pr}) + \Lambda_{\nu_{0}} \mu_{0} - 1 \right\} = - \left\{ \operatorname{Ra}(\Lambda_{\nu_{0}} - 1) - \operatorname{Rh} \left[\mu_{0}(\Lambda_{\nu_{0}} - 1) + \tau \right] \right\}, \quad (3.25)$$

$$-\left\{\Pr(\Lambda_{\nu_0}\mu_0 - 1) + \tau \Pr(-1)\right\} \frac{Q^6}{K^2} + \sigma^2 \frac{Q^2}{K^2} \operatorname{Re}^2 \tau \operatorname{Pr}^2 = -\tau \operatorname{Pr}(Ra - Rh).$$
(3.26)

De la partie imaginaire (3.26), on peut déduire une expression de $\sigma^2 \frac{Q^2}{K^2}$ en fonction de

 $\frac{Q^{\circ}}{K^2}$ qu'on remplace alors dans la partie réelle (3.25). Ainsi, en éliminant σ^2 entre les deux équations, on obtient, après un petit calcul, la relation satisfaite par les deux nombres de Rayleigh :

$$\frac{Q^{6}}{K^{2}}\frac{1}{\tau}(\Lambda_{\nu_{0}}\mu_{0}-1+\tau)(\Lambda_{\nu_{0}}\mu_{0}-1+\tau-\frac{1}{\Pr}+\tau\Pr)$$

$$=Ra\left\{\tau(1+\Pr)+\Lambda_{\nu_{0}}(\mu_{0}-1)\right\}-Rh(\mu_{0}-1+\tau\Pr).$$
(3.27)

Or, la plus petite valeur de $\frac{Q^6}{K^2}$ telle que soit satisfaite (3.27) est la valeur $\frac{27\pi^4}{4}$ (correspondant à n = 1, même argumentation que pour l'instabilité stationnaire).

Ainsi, les solutions oscillatoires de l'équation (3.14) doivent vérifier deux conditions.

(a) D'une part, pour σ^2 donné par (3.26), le couple (*Ra*, *Rh*) doit vérifier l'inégalité :

$$\frac{\tau Ra\left\{\tau(1+\Pr) + \Lambda_{\nu_{0}}(\mu_{0}-1)\right\} - \tau Rh(\mu_{0}-1+\tau \Pr)}{(\Lambda_{\nu_{0}}\mu_{0}-1+\tau)(\Lambda_{\nu_{0}}\mu_{0}-1+\tau - \frac{1}{\Pr}+\tau \Pr)} \ge \frac{27\pi^{4}}{4}.$$
(3.28)

L'équation (3.14), avec des conditions aux limites (3.15), possède des solutions oscillatoires si l'inégalité (3.28) est vérifiée.

En prenant en compte le fait que, pour des valeurs réalistes des paramètres, le dénominateur du premier membre est positif, le coefficient de Ra est alors positif, et celui de Rh est négatif.

La relation (3.28) traduit le fait que le point figuratif du plan (Ra, Rh) doit se trouver dans la zone située à la droite de la droite UV de la Figure 3.b.

La droite UV coupe la première droite XY en un point A qui est le point polycritique du problème.

(b) Il reste, d'autre part, à vérifier que, lorsqu'un régime d'oscillation est établi, la quantité σ^2 est positive (puisque σ réel différent de zéro).

Pour obtenir les restrictions qu'impose la condition $\sigma^2 \ge 0$, nous procédons de la manière suivante : nous partons de la partie réelle (3.25) et de la partie imaginaire (3.26) dans lesquelles nous posons $\sigma^2 = 0$. Nous avons alors :

$$\frac{Q^6}{K^2} = Rh \Big[\mu_0 (\Lambda_{\nu_0} - 1) + \tau \Big] + Ra(1 - \Lambda_{\nu_0}), \qquad (3.29)$$

$$\frac{Q^{6}}{K^{2}} \Big[\Pr(\Lambda_{\nu_{0}} \mu_{0} - 1) + \tau \Pr(-1) \Big] = \tau \Pr(Ra - Rh)$$
(3.30)

La quantité $\frac{Q^6}{K^2}$ est éliminée entre les deux équations (3.29) et (3.30) (en divisant par exemple (3.30) par (3.29)), et on déduit la relation entre les deux nombres de Rayleigh :

$$Ra\left[(1 - \Lambda_{\nu_{0}})\left\{ \Pr(\Lambda_{\nu_{0}}\mu_{0} - 1) + \tau \Pr - 1 \right\} - \tau \Pr\right]$$
$$= \left\{ \left[(1 - \Lambda_{\nu_{0}})\mu_{0} - \tau\right] \left[(\Lambda_{\nu_{0}}\mu_{0} - 1)\Pr + \tau \Pr - 1\right] + \tau \Pr\right\} Rh.$$
(3.31)

Ainsi, la condition $\sigma^2 \ge 0$ impose une nouvelle restriction : σ^2 n'est positif sur la droite-seuil que si est satisfaite une deuxième inégalité :

$$Rh \ge \frac{(\Lambda_{\nu_{0}} - 1) \left[(\mu_{0} \Lambda_{\nu_{0}} - 1) \operatorname{Pr} + \tau \operatorname{Pr} - 1 \right] + \tau \operatorname{Pr}}{\left[(\Lambda_{\nu_{0}} - 1) \mu_{0} + \tau \right] \left[(\mu_{0} \Lambda_{\nu_{0}} - 1) \operatorname{Pr} + \tau \operatorname{Pr} - 1 \right] + \tau \operatorname{Pr}} Ra .$$
(3.32)

Cette nouvelle inégalité définit une deuxième frontière à la zone d'instabilité oscillatoire.

En définitive, la discussion permet d'identifier dans le plan (Ra, Rh) deux principales régions d'instabilité pour le problème réduit, l'une stationnaire et l'autre oscillatoire. Pour des valeurs réalistes des paramètres τ , Pr et Λ_{ν_0} , ces zones ont qualitativement l'allure donnée sur la Figure 3.b. On distingue, par conséquent :

- (i) la région (I), région de stabilité : cette région est située au-dessous de la droite XY ;
- (ii) la région (II), région où l'instabilité est stationnaire : cette région est située au-dessus de la droite XY ;
- (iii) la région (III), enfin, région où l'instabilité est oscillatoire : cette région correspond à la zone intérieure de l'angle UAZ.

On remarquera que dans la zone d'instabilité oscillatoire, on retrouve toujours en même temps l'instabilité stationnaire.

Le point A est le point critique du problème : c'est le point où coalescent les deux instabilités oscillatoire et stationnaire. L'étude complète de ce point nécessiterait une étude faiblement non linéaire de son voisinage, en requérant une analyse asymptotique particulière avec développement intérieur (voir, par exemple, Baines et Gill, 1969 ou Knobloch et Proctor, 1981).

L'existence de ce point est spécifique de la propriété de diffusion croisée dans le milieu. Les résultats sont représentés sur la Figure 3.b : celle-ci n'est pas à l'échelle, afin de mieux différencier les diverses régions.

Notons que les trois droites XY, UV et ZT sont concourantes en A, dont les coordonnées exactes sont : Raa = 790,7, Rha = 13,676.

Nous avons utilisé pour cela, des valeurs numériques correspondant à des données réelles (nous avons utilisé les valeurs numériques du Tableau 1 de l'Annexe A3).





69

Nous avons donc obtenu pour le problème réduit les différentes zones d'instabilité. Cependant, les solutions du problème réduit ne sont pas celles du problème donné, auquel il est alors nécessaire maintenant de revenir.

4- Problème réel

Nous revenons, dans ce qui suit, au système réel : Rh est lié à la distribution de gradient de concentration (voir ci-dessous) de sorte que la zone de validité de la solution dans le plan (Ra, Rh) doit être réexaminée.

Par ailleurs, il s'agit d'introduire dans le système l'équation (3.7), que l'on a négligée jusqu'à présent.

4-1 Restrictions induites par la loi d'état

Nous rappelons, avant de revenir à l'équation (3.14), que le système (3.3)-(3.8) est, par rapport au système linéarisé exact, une approximation écrite sous l'hypothèse $q_0 \ll 1$.

L'équation (3.7) qui est la loi d'état, montre en particulier que la quantité $\tilde{\rho} + \tilde{T}$ est d'ordre de grandeur q_0 . Ainsi, les conditions aux limites du problème étant homogènes, une telle condition peut être satisfaite si toutes les inconnues figurant dans le système [(3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.8)] sont de ce même ordre de grandeur.

On peut alors, en séparant \hat{q}_g des autres variables, poser dans le système d'équations [(3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.8)]:

$$\widetilde{\rho} = q_0 \rho^*, \quad \widehat{q}_v = q_0 q_v^*, \quad \widetilde{T} = q_0 T^*, \quad \widetilde{p} = q_0 p^*, \quad \widetilde{\mathbf{u}} = q_0 \mathbf{u}^*.$$
(3.33)

Les nouvelles variables étoilées vérifient le même système [(3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.8)], tandis que l'approximation de (3.7) s'écrit :

$$\rho^* + T^* = -\hat{q}_g. \tag{3.34}$$

Examinons, par ailleurs, le gradient d'eau total dans l'état statique. Ce gradient est appelé Q'_{0w} .

Pour pouvoir l'exprimer maintenant ici, il faut rappeler qu'il est la version statique de l'équation (1.40), écrite en utilisant les relations (2.15) (l'équation (1.40) est la relation qui exprime les variations de la phase liquide en fonction des variations de pression, de vapeur et de température), qui fournit :

$$Q_{0w}'(\zeta) = -\frac{Q_{0g}(\zeta)}{Q_{0v}(\zeta)}Q_{0v}'(\zeta) - (Q_{0g}(\zeta) + r_vQ_{0v}(\zeta))\frac{P_0'(\zeta)}{P_0(\zeta)} + (Q_{0g}(\zeta) + r_vQ_{0v}(\zeta))\frac{\Lambda_{0v}(\zeta)}{T_0^2(\zeta)}T_0'(\zeta), \quad (3.35)$$

et qui s'écrit ici, en première approximation, compte tenu de $q_0 <<1$, $Q_{0g} \approx 1$, $Q_{0\nu} \approx q_0$ et $P'_0 = -R_0 = -1$, $P_0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$, $T_0 = 1$:

$$Q'_{0w}(\zeta) = -\frac{Q'_{0v}}{q_0} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} + \Lambda_{\nu_0} T'_0 = -(\Gamma - \Lambda_{\nu_0} N^2).$$
(3.36)

d'où :

$$Q_{0w}' = -Rh, \qquad (3.37)$$

Les deux formules (3.36) et (3.37) justifient tout d'abord l'affirmation faite plus haut : que *Rh* n'est autre qu'une normalisation du gradient d'eau total dans l'état statique.

Elles impliquent ensuite, que, pour $q_0 \ll 1$, le nombre de Rayleigh humide Rh est petit et du même ordre : ce n'est donc que dans cette hypothèse qu'il est réaliste d'étudier l'instabilité.

4-2 Domaine de validité de la solution

On observe, suite à ce qui précède, que les solutions du problème précédent ne sont à considérer que dans l'hypothèse :

$$|Rh| << 1.$$
 (3.38)

La solution calculée au paragraphe 4-1 ne doit donc être prise en compte que sous la condition (3.38).

(a) L'instabilité stationnaire est définie dans un domaine qui coupe toujours l'axe des Ra : le voisinage de cet axe est donc, en toute circonstance, un domaine d'instabilité possible. En fait, si l'on fait tendre Rh vers 0, on voit qu'à la limite Rh = 0 (qui englobe le cas q₀ → 0), on a un domaine d'instabilité qui se réduit à la demi-droite Ra < -(Λ_{ν₀} - 1) : cette instabilité est celle que l'on aurait si on n'avait pas la diffusion due à l'hétérogénéité.

Par ailleurs, la propriété d'instabilité pour Ra < 0 (au lieu de Ra > 0 comme c'est le cas en milieu homogène) est due au facteur $\Lambda_{\nu_0} - 1$, c'est à dire, en fait, au changement de phase qui accompagne obligatoirement la convection : en ce sens, on peut dire que l'instabilité stationnaire est étroitement corrélée à la propriété de changement de phase du milieu.
(b) L'instabilité oscillatoire, qui n'existe que dans la zone angulaire UAZ du plan (Ra, Rh), n'existe qu'en même temps qu'une instabilité stationnaire. Comme il s'agit d'instabilité linéaire, elle n'existe, pratiquement, qu'au point polycritique A du problème. Elle est donc à l'origine de phénomènes de bifurcation comme on en rencontre classiquement dans l'étude non linéaire de ces points (voir par exemple Knobloch et Proctor, 1981).

En pratique, l'instabilité oscillatoire ne peut exister que si la coordonnée Rh de A, soit Rha, vérifie la condition (3.38). Or, pour les valeurs pratiques de la Figure 3.c pour lesquelles $q_0 = 10^{-3}$, on a Rha = 13,676 : la condition (3.38) n'est pas vérifiée mais on peut souligner qu'elle n'est pas loin de l'être.

C'est seulement un examen fin des valeurs de *Rha* en fonction de τ qui permettrait de conclure : dans l'étude présente, on peut conclure que la zone d'instabilité oscillatoire, conséquence de la double diffusivité, peut exister ou ne pas exister, selon les valeurs de l'intensité de la concentration d'eau dans le milieu.

Les résultats sont résumés sur la Figure 3.c pour des valeurs numériques réalistes des données correspondant à un nuage atmosphérique (voir Annexe 3).

Dans le cas de la figure, l'instabilité oscillatoire n'existe pas, mais comme noté plus haut, on peut trouver des valeurs de q_0 pour lesquelles elle existerait.

U Rh instabilité oscillatoire **(I)** Rha 0(q₀) Ra instabilité stationnaire (III) R (doigts d'humidité) Raa x

Figure 3.c Conclusions du problème réel. Les échelles ne sont pas respectées sur cette figure afin de faire apparaître plus explicitement les différentes zones. Ces zones sont :

(I) instabilité oscillatoire ; (II) instabilité stationnaire.

Les coordonnées du point critique A sont : Raa#790,7, Rha#13,676, celles de B sont : Rab#-35, Rhb = 0. La zone réaliste est la zone hachurée du plan. Le point polycritique A du problème se trouve en dehors du domaine de réalisme de la solution. Les droites XY, UV et ZT sont respectivement celles d'équations données par (3.24), (3.28) et (3.32), où l'on remplacerait les inégalités par des égalités.

5- Interprétations et conclusions qualitatives ou d'ordre physique

On peut alors interpréter les résultats obtenus : tout d'abord, la validité du problème étudié n'est reconnue que si Rh et q_0 sont petits, du même ordre de grandeur. Ainsi, le point polycritique du problème (point A de la Figure 3.c) n'appartient pas, en général, dans le plan (Ra, Rh), au domaine de validité des solutions obtenues. Il peut y appartenir si q_0 n'est pas très petit.

En ce qui concerne les conclusions obtenues, le système considéré n'est ordinairement instable que par une instabilité stationnaire. (Exceptionnellement, et si le point A appartient au domaine d'instabilité, il peut y avoir également une instabilité oscillatoire, mais l'étude du voisinage de A doit alors être faite par une analyse faiblement non linéaire).

La conclusion d'instabilité stationnaire est en accord avec l'observation courante que la forme des nuages dans le ciel est (aux mouvements de celui-ci près), une forme figée.

On peut également rattacher à cette conclusion la constatation que le nuage convectif de vapeur d'eau qui se forme au-dessus d'une centrale atomique est apparemment stable.

Les conclusions ci-dessus ont un caractère différent de celles d'un simple problème d'instabilité : par exemple, pour $q_0 \ll 1$, dans la région (II) du plan (*Ra*, *Rh*), le domaine réellement instable n'est pas défini autrement que par un ordre de grandeur. Dans le cas où q_0 n'est pas petit, la détermination des régions d'instabilité doit être faite par l'étude directe de l'équation de dispersion associée à (3.12). En fait, il faut souligner que le cas « q_0 non petit » n'a pas réellement de sens physique, parce que l'hypothèse de mouvement non précipitant ou celle de fluide constamment saturé (ou les deux) ne sera plus satisfaite dans ce cas.

Pour la résolution d'un problème pratique, les variations de Rh devraient être bornées par des contraintes portant sur la valeur de \hat{q}_g ou de \hat{q}_L exprimant ces conditions. Ainsi, d'autres phénomènes que la simple convection peuvent venir interférer avec la convection dans ce cas.

Précisons, enfin, pour terminer, que l'hypothèse (2.24) faite sur le nombre de Schmidt n'est pas très contraignante dans la mesure où aucune hypothèse n'a été faite sur le paramètre de diffusivité τ . Toutefois, l'examen de l'ordre de grandeur du paramètre τ peut conduire à d'autres conclusions pratiques, portant par exemple, sur la localisation des zones d'instabilité.

Conclusion générale

Conclusion générale

L'étude qui précède a mis en évidence l'influence des propriétés de double diffusivité sur l'instabilité convective d'un milieu où règnent les influences combinées de la conduction de chaleur et de la diffusion de vapeur, elle-même mêlée à un changement de phase. Dans la réalité, cette configuration est assimilée à un nuage.

Les équations de mouvement ont été décrites en utilisant une formulation asymptotique qui est l'approximation de Boussinesq. Nous rappelons les principales hypothèses utilisées dans la présente étude :

- (i) l'atmosphère humide est considérée comme un milieu continu et l'eau liquide est traitée comme un aérosol, de pression négligeable;
- (ii) il existe un état statique du milieu où les variables ne dépendent que de l'altitude rapportée à une échelle significative de cet état (ici, l'échelle atmosphérique);
- (iii) l'échelle caractéristique verticale des mouvements est petite devant l'échelle atmosphérique.

Sous ces conditions, les deux équations de dissipation ont été réduites à un système double diffusif, satisfait par les inconnues principales du milieu qui sont la température et la concentration de vapeur d'eau.

Nous avons introduit des hypothèses supplémentaires simplificatrices, et en particulier, celle de petites concentrations d'eau et de vapeur, de même qu'un nombre de Schmidt du même ordre de grandeur que q_0 , celle de la concentration de vapeur.

78

En linéarisant autour de l'état de repos, et en introduisant les paramètres caractéristiques (qui sont le nombre de Rayleigh Ra et le nombre de Rayleigh humide Rh), ces équations ont été réduites à une seule équation d'ordre huit.

Afin de poursuivre l'étude de la nature double diffusive du problème, nous avons choisi des conditions aux limites de surfaces libres (plus simples du point de vue analytique). Nous avons vu que, dans le cas de la convection profonde, il peut exister, malgré la dissipation, des mouvements linéarisés périodiques : cette conclusion est, en fait, liée à la nature double diffusive du phénomène ; on peut, en effet, la rapprocher de la conclusion analogue obtenue dans le problème de convection thermohaline (Turner, 1973) pour lequel on obtient également des ondes périodiques à la fois en temps et en espace (« instabilité oscillatoire »). La conclusion obtenue ici est plus précise, parce qu'elle se révèle exacte non seulement en milieu peu profond mais également en milieu profond. L'atténuation, avec l'altitude, de tels mouvements, ne pourrait être recherchée qu'à des distances d'ordre beaucoup plus élevé que dans les ondes de gravité classiques.

Dans le problème d'instabilité en milieu peu profond, nous avons établi alors les conditions d'apparition de l'instabilité dans le plan (*Ra*, *Rh*), en fonction de l'état statique et des caractéristiques phénoménologiques du milieu.

On obtient alors les résultats suivants :

- (a) L'instabilité qui apparaît dans le milieu est en général stationnaire. Lorsque Rh est suffisamment petit, cette instabilité se produit pour les valeurs négatives de Ra, ce qui est dû à la présence du facteur $\Lambda_{v_0} - 1$ dans la formule (3.24). On voit apparaître ainsi le rôle stabilisant du nombre de Rayleigh, rôle que l'on retrouve dans d'autres problèmes comportant des changements de phase (combustion par exemple).
- (b) Exceptionnellement, des instabilités oscillatoires peuvent apparaître, mais les conditions à satisfaire sont assez nombreuses (*Rh* suffisamment important, et, dans ce cas, uniquement les valeurs critiques de *Ra* et *Rh*) pour que ces instabilités ne soient qu'exceptionnelles.

L'ensemble de ces deux conclusions justifie l'observation courante que la forme des nuages dans le ciel est une forme figée, se présentant soit en rouleaux, soit en cellules (voir la photographie de présentation du mémoire).

On obtient de plus la nécessité |Rh| << 1: en réalité, cette condition est tout à fait réaliste, puisque, Rh étant du même ordre que la concentration d'eau, pour une concentration d'eau plus élevée, la modélisation de l'eau liquide par un aérosol ne serait plus justifiée. Il pourrait se former un nouveau phénomène qui serait l'apparition de la pluie, c'est à dire la prise en compte à partir d'un certain seuil, de la pesanteur sur la phase liquide.

Finalement, les conclusions les plus marquantes du point de vue pratique restent les suivantes :

- la stabilité inconditionnelle du nuage lorsque le nombre de Rayleigh est positif et que l'humidité n'est pas homogène ;
- l'existence des mouvements d'instabilité stationnaire dus à la présence de l'humidité dans des zones où le nombre de Rayleigh est négatif, c'est à dire qui seraient statiquement stables si le milieu n'était pas humide.

Quelques conclusions ou quelques conditions obtenues dans ce travail peuvent permettre d'en dégager également quelques perspectives : par exemple, l'existence d'une instabilité à la fois stationnaire et oscillatoire lorsque A existe : l'étude de l'instabilité faiblement non linéaire serait probablement intéressante dans ce cas, mais peut-être aussi un développement (encore) plus poussé par rapport au paramètre q_0 .

Une autre question peut être également celle de la modélisation de la contiguïté d'une zone saturée (nuage) avec une zone insaturée (air clair) : un problème de ce type a été étudié par Bretherton (1988) mais dans des conditions différentes. La présente étude permettrait d'examiner les conditions de couplage entre deux instabilités. Enfin, un troisième problème, réaliste lui aussi, peut être la description d'une frontière de nuage comportant une discontinuité de concentration d'eau : des réflexions de surface libre devraient alors être envisagées, mais l'écriture des conditions aux limites pourraient être moins simples.

Parmi les conditions imposées dans la présente étude, il faut noter celle qui porte sur le nombre de Schmidt : le fait que τ ne joue pas de rôle particulier dans les conclusions du problème d'instabilité peut faire penser que cette condition est peu contraignante, mais sa validité devrait en tout état de cause être confirmée.

Bibliographie

Références bibliographiques

- Baines P.G. & Gill A.E.: « On thermohaline convection with linear gradients ». J. Fl. Mech., 37, 1969, 289-306.
- Bois P.A.: « Effets dissipatifs dans les écoulements atmosphériques », Parts I and II. J. Méc.,
 18, 1979, 395-417, and 18, 1979, 633-660.
- Bois P.A.: « Asymptotic aspects of the Boussinesq approximation for gases and liquids ». Geoph. Astr. Fl. Dyn., 58, 1991, 45-55.
- Bois P.A. : « Formulation asymptotique de l'approximation de Boussinesq pour les mélanges de fluides. Application à l'air humide ou nuageux ». C.R. Acad. Sci. Paris, 316, 1993, 293-297.
- Bois P.A.: « Boussinesq wave theory in fluid mixtures with application to cloudy atmosphere ». Int. J. Eng. Sc., 32, 1994, 281-290.
- **Bougeault P. :** « Modeling in the trade-wind cumulus boundary layer », Part I : « testing the ensemble cloud relations against numerical data ». J. Atm. Sc., **38**, 1981, 2414-2428.
- Bougeault P.: « Modeling in the trade-wind cumulus boundary layer », Part II : « a high order one-dimentional model ». J. Atm. Sc., 38, 1982, 2429-2439.
- Bowen R.M.: « Theory of mixtures ». In *Continuum Physics*, vol. 3, A.C. Eringen ed. Academic Press, New York, 1976, 1-127.
- Bretherton C.S.: « A theory of nonprecipitating convection between two parallel plates », Part I : « linear theory and cloud structure ». J. Atm. Sc., 44, 1987, 1809-1827.

- Bretherton C.S.: « A theory of nonprecipitating convection between two parallel plates », Part II : « nonlinear theory and cloud field organization ». J. Atm. Sc., 45, 1988, 2391-2409.
- Bretherton C.S.; Smolarkiewicz P. K.: « Gravity waves, compensating subsidences and detrainment around cumulus clouds ». J. Atm. Sc., 46, 1989, 740-759.
- Caldwell D. R.: « Non-linear effects in a Rayleigh-Bénard experiment ». J. Fl. Mech., 42, 1970, 161-175.
- Chandrasekhar S.: «Hydrodynamic and hydromagnetic stability». Oxford, Clarendon, 1961.
- De Groot S.R.; Mazur P.: « Nonequilibrum thermodynamics ». North Holl. Publ., Amsterdam, 1962.
- Drazin P.G.; Reid W.H.: « Hydrodynamic stability ». Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.
- Dudis J.J.: « The stability of a saturated stably-stratified shear layer ». J. Atm. Sc., 29, 1972, 774-778.
- **Durand E.**: « Solutions numériques des équations algébriques ». Tome 1. Masson et Cie, 1960.
- Durran D.R.; Klemp J.B.: « On the effects of moisture on the Brunt-Väisälä frequency ». J. Atm. Sc., 39, 1982, 2152-2158.
- Durran D.R.; Klemp J.B.: « The effects of moisture on trapped mountain lee waves ». J. Atm. Sc., 39, 1982, 2152-2158.
- Dutton J.A.; Fichtl G.H.: « Approximate equations of notions of gases and liquids ». J. Atm. Sc., 26, 1969, 241-253.

84

- Einaudi F.; Lalas D.P.: « The propagation of accoustic- gravity waves in a moist atmosphere ». J. Atm. Sc., 30, 1973, 365-376.
- Eskinazi S.: « Fluid mechanics and thermodynamics of our environment ». Academic Press, New York, 1975.
- Guyon E.; Hulin J.P.; Petit L.: « Hydrodynamique physique ». InterEditions / Editions du CNRS, 1991.
- Huppert H.E.; Turner J.S.: « Double-diffusive convection ». J. Fl. Mech, 106, 1981, 299-329.
- Kambe T.; Takaki R.: « Thermal convection in gas-dropplet mixtures with phase transition ». J. Fl. Mech., 70, 1975, 89-112.
- Knobloch E & Proctor M.R.E.: « Nonlinear periodic convection in double diffusive systems ». J. Fl. Mech., 108, 1981, 291-316.
- Kuo H.L. : « Convection in a conditionally unstable atmosphere ». Tellus, 13, 1961, 441-459.
- Kuo H.L.: «Further studies of the properties of cellular convection in a conditionally unstable atmosphere ». *Tellus*, 17, 1965, 413-433.
- Lalas D.P.; Einaudi F.: « On the stability of a moist atmosphere in the presence of a background wind ». J. Atm. Sc., 30, 1973, 795-800.
- Landau L.; Lifchitz E.: « Physique théorique. Mécanique des fluides ». Mir, Ellipses, 1989.
- Mihaljan J.: « A rigorous exposition of the Boussinesq approximation applicable to a thin layer of fluid ». Astro. J., 136, 1962, 1126-1133.
- Nield D.A.: « The thermohaline Rayleigh-Jeffrey's problem ». J. Fl. Mech., 29, 1967, 545-558.

Nield D.A.; Bejan A.: « Convection in porous media ». Springer Verlag, 1992.

Ogura Y.: « The evolution of a moist convective element in a shallow conditionally unstable atmosphere ». J. Atm. Sc., 20, 1963, 407-424.

Platten J.K. & Legros J.C: : « Convection in liquids ». Springer, 1990.

Queney P. : « Eléments de météorologie ». Masson et Cie, Paris, 1974.

- Spiegel E.A.; Veronis G.: « On the Boussinesq approximation for a compressible fluid ». Astr. J., 131, 1960, 442-447.
- Stoer J. & Burlisch R.: « Introduction to numerical analysis ». Second edition, Springer-Verlag, 1933.

Turner J.S.: « Buoyancy effects in fluids ». Cambridge University Press, 1979.

Tritton D.J.: « Physical fluid dynamics ». Oxford, Clarendon, 1988.

- Walin G.: « Note on the stability of water statified by both salt and heat ». *Tellus*, 16, 389-393.
- Zemansky M.W.: « Heat and thermodynamics ». 5th ed. ; Mac Graw Hill, New York, 1957.
- Zeytounian R.K.: « A rigorous derivation of the equations of compressible viscous fluid motion with gravity at low Mach number ». Arch. Mech. Stos., 26, 1974, 499-509.
- Zeytounian R.K. : « Sur une formulation asymptotique du problème de Rayleigh-Bénard via l'approximation de Boussinesq pour les liquides dilatables ». C. R. Acad. Sci. Paris, 297, 1983, 271-274.
- Zeytounian R.K.: « The Bénard problem for deep convection: rigorous derivation of approximate motions ». Int. J. Eng. Sci., 27, 1989, 1361-1366.

Annexe 1

Eléments de thermodynamique des mélanges dans le cas de l'air humide

1- Equation de Gibbs-Duhem

1-1 Loi d'état de l'air humide

La relation de Gibbs-Duhem prend, compte tenu du milieu, la forme :

$$de = Tds - pd(\frac{1}{\rho}) + g_L dq_L + g_v dq_v + g_g dq_g.$$
(A1.1)

Pour une transformation réversible infinitésimale du milieu, du fait de l'hypothèse de saturation, les deux enthalpies libres g_L et g_v sont égales. Posons $dq_w = dq_L + dq_v : q_w$ est la concentration aqueuse totale dans le milieu. On a $dq_g + dq_w = 0$, de sorte que (A1.1) peut également s'écrire :

$$de = Tds - pd(\frac{1}{\rho}) + (g_g - g_v)dq_g.$$
 (A1.2)

Dans le milieu saturé, on a d'après (A1.2) $e = e(s, \rho, q_g)$. De plus, $T = (\partial e/\partial s)(s, \rho, q_g) = T(s, \rho, q_g), \quad p = -(\partial e/\partial \tau)(s, \rho, q_g), \quad \text{où } \tau = 1/\rho$. Eliminant s entre ces relations, on en conclut que dans le mélange saturé on a :

$$e = e(T, \rho, q_g), \qquad p = p(T, \rho, q_g).$$
 (A1.3)

Par ailleurs, l'hypothèse de saturation implique une relation de la forme :

$$q_{v} = q_{v}(T, p, q_{g}),$$
 (A1.4)

le cas de saturation « juste » correspondant dans (A1.5) à $q_g = 1 - q_v$ (on a alors $q_L = 0$, et la pression p est la pression saturante). Compte tenu de la deuxième relation (A1.3), la relation (A1.4) peut aussi être écrite sous la forme :

$$q_{\nu} = q_{\nu}(T, \rho, q_{g}).$$
 (A1.5)

Les relations (A1.3), (A1.4), (A1.5) sont utilisées dans ce qui suit.

1-2 Ecriture pour l'enthalpie de la relation de Gibbs-Duhem

On en déduit, de la relation de Gibbs-Duhem écrite sous la forme générale (si n+1 constituants), la relation :

$$de + pd\tau = Tds + \sum_{\alpha=0}^{n} g_{\alpha} dq_{\alpha}$$
$$= T(\frac{\partial s}{\partial T})_{p,q_{\alpha}} dT + T(\frac{\partial s}{\partial p})_{T,q_{\alpha}} dp + \sum_{\alpha=0}^{n} \left[T(\frac{\partial s}{\partial q_{\alpha}})_{T,p} + g_{\alpha} \right] dq_{\alpha} , \qquad (A1.6)$$

que l'on peut réécrire en utilisant des formules classiques de thermodynamique (Maxwell, réciprocité, etc.) :

$$de + pd\tau = c_p dT - \frac{\lambda T}{\rho} dp + \sum_{\alpha=0}^{n} \left[T \left(\frac{\partial s}{\partial q_{\alpha}} \right)_{T,p} + g_{\alpha} \right] dq_{\alpha} .$$
 (A1.7)

Le premier membre est égal à la différentielle $dh - \pi dp$ (*h* est l'enthalpie du milieu). Ainsi, le second membre s'exprime uniquement en fonction de dérivées partielles liées à *h* :

$$de + pd\tau = c_p dT - \frac{\lambda T}{\rho} dp + \sum_{\alpha=0}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_{\alpha}}\right)_{T,p} dq_{\alpha} .$$
 (A1.8)

89

On a en particulier :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial q_{\alpha}}\right)_{T,p} = T\left(\frac{\partial s}{\partial q_{\alpha}}\right)_{T,p} + g_{\alpha}.$$
(A1.9)

Il est à noter que le second membre de (A1.9) n'est pas égal à l'enthalpie partielle h_{α} (reliée à q_{α} pour la définition de l'enthalpie h du mélange : $h = \sum_{0}^{n} q_{\alpha} h_{\alpha}$) : cette propriété n'est vraie que dans des cas particuliers (par exemple si les lois d'état des constituants sont celles des gaz parfaits).

Si l'on veut introduire l'enthalpie partielle h_{α} , on peut différentier $h = \sum_{0}^{n} q_{\alpha} h_{\alpha}$ et on obtient :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial q_{\alpha}}\right)_{T,p} = Tq_{\alpha}\left(\frac{\partial s_{\alpha}}{\partial q_{\alpha}}\right)_{T,p} + h_{\alpha} = q_{\alpha}\left(\frac{\partial h_{\alpha}}{\partial q_{\alpha}}\right)_{T,p} + h_{\alpha}.$$
 (A1.10)

Comme l'enthalpie partielle peut s'exprimer en fonction (par exemple) des variables T et p_{α} (pression partielle du constituant α), la dérivée partielle $\partial h_{\alpha}/\partial q_{\alpha}$, qui est prise à T constant dans (A1.10), est proportionnelle elle-même à la dérivée partielle $\partial h_{\alpha}/\partial p_{\alpha}$. On voit que dans le cas particulier où h_{α} ne dépend que de T (c'est le cas du gaz parfait), cette quantité est nulle dans (1.8) dont le second membre se réduit alors à h_{α} . Dans le cas général, cela n'est pas vrai : on a une différence qui est analogue à la différence entre les « potentiels chimiques » $\partial g/\partial q_{\alpha}$ dans l'équation de Gibbs-Duhem écrite avec la variable enthalpie libre, et les enthalpies libres partielles g_{α} de chaque constituant.

Dans le cas de l'air humide saturé, désignons par h_{α}^* ($\alpha = v, L, g$) les dérivées partielles $\partial h/\partial q_{\alpha}$ de l'enthalpie par rapport aux concentrations. La formule (A1.8) prend la forme :

$$de + pd\tau = c_{p}dT - \frac{\lambda T}{\rho}dp + h_{L}^{*} dq_{L} + h_{v}^{*} dq_{v} + h_{g}^{*} dq_{g}.$$
(A1.11)

Compte tenu de ce que $dq_L + dq_v + dq_g = 0$, on peut alors transformer (A1.11) en :

$$de + pd\tau = c_{p}dT - \frac{\lambda T}{\rho}dp - L_{v} * dq_{L} + (h *_{g} - h *_{v})dq_{g}, \qquad (A1.12)$$

où l'on a posé :

$$L_{v}^{*} = h_{v}^{*} - h_{L}^{*}. \tag{A1.13}$$

La quantité L_{ν}^{*} n'est pas a priori la chaleur latente de vaporisation du liquide : elle le devient compte tenu de $L_{\nu} = h_{\nu} - h_{L}$ si l'on a des lois d'état de gaz parfaits, les grandeurs h_{α}^{*} et h_{α} étant alors identiques.

2- Equation de l'énergie

La forme générale de l'équation de l'énergie est :

$$\frac{de}{dt} = \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} + \Phi + \frac{k}{\rho} \Delta T - \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=0}^{n} \nabla \cdot (\rho q_{\alpha} h_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) + Q, \qquad (A1.14)$$

où les termes du second membre représentent la variation de l'énergie interne réversible, la dissipation visqueuse, la dissipation thermique, et la dissipation par diffusion. Quelques manipulations et l'utilisation de (A1.9) transforment cette équation en :

$$c_{p}\frac{dT}{dt} - \frac{T}{\rho}\lambda\frac{dp}{dt} + \sum_{\alpha=0}^{N}\left(\frac{\partial h}{\partial q_{\alpha}}\right)_{p,T}\frac{dq_{\alpha}}{dt} = \Phi + \frac{k}{\rho}\Delta T - \frac{1}{\rho}\sum_{\alpha=0}^{N}\nabla\cdot\left(\rho q_{\alpha}h_{\alpha}\mathbf{v}_{\alpha}\right) + Q, \quad (A1.15)$$

puis l'utilisation de (A1.12) réduit cette équation à :

$$c_{p}\frac{dT}{dt} - \frac{\lambda T}{\rho}\frac{dp}{dt} - L_{v}*\frac{dq_{L}}{dt} = \Phi + \frac{k}{\rho}\Delta T - q_{g}\mathbf{v}_{g}\cdot\nabla(h_{g} - h_{v}) + Q.$$
(A1.16)

On rappelle l'équation de la diffusion moléculaire avec laquelle on travaille :

$$\rho \frac{dq_g}{dt} + D\nabla \cdot (\rho \nabla q_v) = 0.$$
 (A1.17)

Le problème admet donc les deux équations de diffusion (A1.16) et (A1.17). La vitesse de diffusion \mathbf{v}_g , dans ces équations, peut s'exprimer en fonction de la concentration q_v par l'une des relations résultant de la loi de Fick binaire :

$$\mathbf{v}_{\mathrm{L}} = 0, \qquad \qquad \rho_{g} \mathbf{v}_{g} = -\rho_{v} v_{v} = \rho D \nabla q_{v}. \qquad (A1.18)$$

La quantité dq_L dans (A1.16) peut être remplacée par $-(dq_v + dq_g)$, compte tenu de ce que $q_v + q_g + q_L = 1$.

Pour décrire le mouvement du milieu, aux équations (A1.17) et (A1.16), il faut adjoindre la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et l'équation de Clausius-Clapeyron. Ces trois dernières équations peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \mathbf{0}, \qquad (A1.19)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \nabla p = \rho g + \mu \left[\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right], \qquad (A1.20)$$

$$\frac{dq_{\nu}}{q_{\nu}} - \left[\left(\frac{\partial \rho_{\nu}}{\partial p_{\nu}} \right)_T L_{\nu} - \lambda_{\nu} T \right] \frac{dT}{T} = -\frac{d\rho}{\rho}, \qquad (A1.21)$$

où λ_{ν} désigne le coefficient de dilatation thermique isobare de la vapeur d'eau :

$$\lambda_{\nu} = -\frac{1}{\rho_{\nu}} \left(\frac{\partial \rho_{\nu}}{\partial T} \right)_{p_{\nu}}.$$
 (A1.22)

On a aussi :

$$p = p_v + p_g = p(\rho, T, q_v, q_g).$$
 (A1.23)

En définitive, le problème est solution des équations (A1.19), (A1.17), (A1.23), (A1.16), (A1.20), (A1.21), qui représentent un système de huit équations à huit inconnues pour les huit variables scalaires \mathbf{u} , p, ρ , T, q_v , q_g . La concentration d'eau liquide q_L se déduirait de l'équation $q_v + q_g + q_L = 1$.

Annexe 2

Etablissement de

l'équation (2.28)

1- Système réduit

1-1 Equations de diffusion

Nous rappelons que le système réduit associé au problème donné est le système d'équations (2.17), (2.18), (2.19), (2.25), (2.26).

Nous allons, dans un premier temps, modifier l'écriture des équations (2.25) et (2.26) que l'on désigne dans cette annexe respectivement par les équations :

$$-\frac{1}{Q_{0\nu}(\zeta)}\frac{d\widetilde{q}_{\nu}}{dt} + \frac{\Lambda_{0\nu}(\zeta)}{T_{0}^{2}(\zeta)}\frac{d\widetilde{T}}{dt} - \widetilde{w}[\frac{Q_{0\nu}'(\zeta)}{Q_{0\nu}(\zeta)} - \left(\Lambda_{0\nu}(\zeta)\frac{T_{0}'(\zeta)}{T_{0}^{2}(\zeta)} - \frac{P_{0}'(\zeta)}{P_{0}(\zeta)}\right)] = \frac{1}{\operatorname{Re}S}\Delta\widetilde{q}_{\nu} + \Theta(\varepsilon), \quad (A2.1)$$

$$\frac{d\widetilde{T}}{dt} + \widetilde{w}[T_0'(\zeta) + 1] = \frac{1}{\operatorname{Re}\operatorname{Pr}} \frac{\Delta\widetilde{T}}{R_0(\zeta)} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} r_{\nu} \frac{\Lambda_{0\nu}(\zeta)}{\operatorname{Re}S} \Delta\widetilde{q}_{\nu} + 0(\varepsilon) .$$
(A2.2)

Nous utilisons les relations (2.15) qui se ramènent à : $P'_0(\zeta) = -R_0(\zeta)$ et $P_0(\zeta) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} R_0(\zeta) T_0(\zeta)$, pour le modèle double diffusif.

Grâce à ces relations, une combinaison de (A2.1) et (A2.2) s'écrit :

$$\frac{1}{Q_{0\nu}(\zeta)}\frac{d\widetilde{q}_{\nu}}{dt} + \widetilde{w}\left[\frac{Q_{0\nu}'(\zeta)}{Q_{0\nu}(\zeta)} + \frac{1}{T_0(\zeta)}\left(\Lambda_{0\nu}(\zeta) - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\right)\right]$$
$$= \frac{\Lambda_{0\nu}(\zeta)}{T_0^2(\zeta)}\frac{1}{\operatorname{Re}\operatorname{Pr}}\frac{\Delta\widetilde{T}}{R_0(\zeta)} + \frac{\Delta\widetilde{q}_{\nu}}{\operatorname{Re}S}\left[\frac{\Lambda_{0\nu}^2(\zeta)}{T_0^2(\zeta)}\frac{\gamma - 1}{\gamma}r_{\nu} - 1\right] + O(\varepsilon). \quad (A2.3)$$

95

En introduisant les notations et les définitions (pour $\Gamma(\zeta)$, $N^2(\zeta)$, $\mu_0(\zeta)$) (2.30) que l'on désigne d'ailleurs ici par :

$$\Gamma(\zeta) = \frac{Q_{0\nu}'(\zeta)}{Q_{0\nu}(\zeta)} + \frac{1}{T_0(\zeta)} \left(\lambda_0(\zeta) - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right),$$

$$N^2(\zeta) = \frac{1}{T_0(\zeta)} (1 + T_0'(\zeta)), \qquad (A2.4)$$

$$\mu_0(\zeta) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} r_v \lambda_0(\zeta) \,.$$

Les équations (A2.3) et (A2.2) prennent les nouvelles formes :

$$\frac{1}{T_0(\zeta)}\frac{d\widetilde{T}}{dt} + \widetilde{w}N^2(\zeta) = \frac{1}{\operatorname{Re}\operatorname{Pr}}\frac{\Delta\widetilde{T}}{R_0(\zeta)T_0(\zeta)} + \frac{\mu_0(\zeta)}{\operatorname{Re}S}\Delta\widetilde{q}_v + 0(\varepsilon), \qquad (A2.5)$$

$$\frac{1}{Q_{0\nu}(\zeta)}\frac{d\tilde{q}_{\nu}}{dt} + \tilde{w}\Gamma(\zeta) = \frac{\Lambda_{0\nu}(\zeta)}{T_0^2(\zeta)}\frac{\Delta\tilde{T}}{R_0(\zeta)}\frac{1}{\operatorname{Re}\operatorname{Pr}} + \frac{\Delta\tilde{q}_{\nu}}{\operatorname{Re}S}\left[\frac{\Lambda_{0\nu}(\zeta)\mu_0(\zeta)}{T_0(\zeta)} - 1\right] + O(\varepsilon). \quad (A2.6)$$

1-2 Equation de Clausius-Clapeyron

L'équation de Clausius-Clapeyron est l'équation (2.19). Nous rappelons que nous avons noté dans (2.30) :

$$\beta(\zeta) = \frac{1}{T_0(\zeta)} (1 - \alpha) - \lambda_0(\zeta) + \alpha .$$
(A2.7)

Finalement, on peut réécrire l'équation de Clausius-Clapeyron sous la forme :

$$\frac{1}{Q_{0\nu}(\zeta)}\frac{d\widetilde{q}_{\nu}}{dt} + \frac{1}{R_0(\zeta)}\frac{d\widetilde{\rho}}{dt} + \frac{\beta(\zeta)}{T_0(\zeta)}\frac{d\widetilde{T}}{dt} = 0(\varepsilon).$$
(A2.8)

Les équations du système réduit sous forme double diffusive sont dorénavant les équations (A2.5), (A2.6) et (A2.8), auxquelles il faut ajouter l'équation de la conservation de la masse, et celle de la conservation de la quantité de mouvement.

2- Analyse en modes normaux

Les solutions du système sont recherchées sous la forme (2.27), après l'avoir linéarisé autour de l'état de repos (les dérivées matérielles par rapport au temps sont remplacées par les dérivées partielles).

Le système s'écrit, avec les définitions (2.30) :

$$-ikU - ihV + W_z = 0(\varepsilon), \qquad (A2.9)$$

$$R_0(\zeta)i\sigma U - ikP = \frac{D^2 U}{\text{Re}} + 0(\varepsilon), \qquad (A2.10)$$

$$R_{0}(\zeta)i\sigma V - ihP = \frac{D^{2}V}{\text{Re}} + 0(\varepsilon), \qquad (A2.11)$$

$$R_{0}(\zeta)i\sigma W + P_{z} + R = \frac{D^{2}W}{\text{Re}} + 0(\varepsilon), \qquad (A2.12)$$

$$\frac{i\sigma}{Q_{0\nu}(\zeta)}Q_{\nu} + W\Gamma(\zeta) = \frac{\Lambda_{0\nu}(\zeta)}{T_0^2(\zeta)}\frac{D^2T}{R_0(\zeta)\operatorname{RePr}} + \frac{D^2Q_{\nu}\left[\Lambda_{0\nu}(\zeta)\right]}{\operatorname{ReS}\left[\frac{\Lambda_{0\nu}(\zeta)}{T_0(\zeta)}\mu_0(\zeta) - 1\right] + \theta(\varepsilon), \quad (A2.13)$$

$$\frac{i\sigma}{T_0(\zeta)}T + WN^2(\zeta) = \frac{1}{\operatorname{Re}\operatorname{Pr}}\frac{D^2T}{R_0(\zeta)T_0(\zeta)} + \frac{\mu_0(\zeta)}{\operatorname{Re}S}D^2Q_v + 0(\varepsilon), \qquad (A2.14)$$

97

$$\frac{1}{Q_{0\nu}(\zeta)}Q_{\nu} + \frac{1}{R_0(\zeta)}R + \frac{\beta(\zeta)}{T_0(\zeta)}T = 0(\varepsilon).$$
(A2.15)

Pour obtenir l'équation linéarisée finale satisfaite par la composante W de la vitesse, il faut éliminer une à une, dans le système ci-dessus, les autres inconnues.

2-1 Elimination de la variable U et de la variable V

Grâce à (A2.9), et la combinaison ik((A2.10)) + ih((A2.11)), on élimine U et V pour n'avoir plus que :

$$i\sigma R_0(\zeta)W_z + K^2 P = \frac{D^2 W_z}{\text{Re}} + 0(\varepsilon).$$
(A2.16)

2-2 Elimination de la variable *P*

On dérive (A2.16) par rapport à
$$z$$
 et $\frac{d}{dz} ((A2.16)) - K^2 ((A2.12))$ donne :

$$i\sigma R_0(\zeta) D^2 W - K^2 R = \frac{D^4 W}{\text{Re}} + 0(\varepsilon).$$
(A2.17)

2-3 Elimination de la variable R

L'équation (A2.15) fournit R en fonction de T, Q_v et W, que l'on peut alors remplacer dans l'équation (A2.17) :

$$i\sigma R_0(\zeta)D^2W + \frac{K^2R_0(\zeta)}{Q_{0\nu}(\zeta)}Q_{\nu} + \frac{\beta(\zeta)R_0(\zeta)}{T_0(\zeta)}K^2T = \frac{D^4W}{\text{Re}} + 0(\varepsilon).$$
(A2.18)

Il reste à combiner l'équation (A2.18) avec les équations (A2.13) et (A2.14).

2-4 Elimination de la variable T

Au préalable, à l'aide de l'équation (A2.14), on effectue la combinaison $\left(\frac{i\sigma}{T_0(\zeta)} - \frac{D^2}{\operatorname{Re}\operatorname{Pr} R_0(\zeta)T_0(\zeta)}\right) ((A2.13)), qui, après calculs, devient :$

$$-\frac{\sigma^2 Q_{\nu}}{T_0(\zeta) Q_{0\nu}(\zeta)} - \frac{i\sigma D^2 Q_{\nu}}{\operatorname{Re}\operatorname{Pr} R_0(\zeta) T_0(\zeta) Q_{0\nu}(\zeta)} - \frac{i\sigma}{T_0(\zeta)} \frac{D^2 Q_{\nu}}{\operatorname{Re} S} \left[\frac{\Lambda_{0\nu}(\zeta) \mu_0(\zeta)}{T_0(\zeta)} - 1 \right] + \frac{i\sigma W\Gamma(\zeta)}{T_0(\zeta)} - \frac{D^4 Q_{\nu}}{T_0(\zeta)} - \frac{D^4 Q_{\nu}}{R_0(\zeta) T_0(\zeta)} = \frac{D^2 W}{R_0(\zeta) T_0(\zeta) \operatorname{Re}\operatorname{Pr}} \left[\Gamma(\zeta) - \frac{\Lambda_{0\nu}(\zeta)}{T_0(\zeta)} N^2(\zeta) \right] + 0(\varepsilon). \quad (A2.19)$$

Par ailleurs, il faut éliminer D^2T entre (A2.13) et (A2.14) :

$$\frac{i\sigma\Lambda_{0\nu}(\zeta)T}{T_0^2(\zeta)} = \frac{D^2Q_{\nu}}{\operatorname{Re}S} + \frac{i\sigma Q_{\nu}}{Q_{0\nu}(\zeta)} + W\left(\Gamma(\zeta) - \frac{\Lambda_{0\nu}(\zeta)}{T_0(\zeta)}N^2(\zeta)\right) + 0(\varepsilon).$$
(A2.20)

Pour éliminer T, il reste à reporter (A2.20) dans (A2.18) :

$$\frac{\beta(\zeta)K^2}{\operatorname{Re}S}D^2Q_{\nu} + \frac{i\sigma K^2}{Q_{0\nu}(\zeta)} \left(\frac{\Lambda_{0\nu}(\zeta)}{T_0(\zeta)} + \beta(\zeta)\right)Q_{\nu} = \frac{i\sigma\Lambda_{0\nu}(\zeta)}{R_0(\zeta)T_0(\zeta)}\frac{D^4W}{\operatorname{Re}} + \frac{\sigma^2\Lambda_{0\nu}(\zeta)}{T_0(\zeta)}D^2W$$
$$-K^2W\beta(\zeta)\left(\Gamma(\zeta) - \frac{\Lambda_{0\nu}(\zeta)}{T_0(\zeta)}N^2(\zeta)\right) + 0(\varepsilon) \quad (A2.21)$$

2-5 Elimination de la variable Q_{ν}

La dernière étape, pour éliminer la dernière variable Q_{ν} , est de faire la combinaison :

$$\left(\frac{\beta(\zeta)K^2}{\operatorname{Re}S}D^2 + \frac{i\sigma K^2}{Q_{0\nu}(\zeta)}\left(\frac{\Lambda_{0\nu}(\zeta)}{T_0(\zeta)} + \beta(\zeta)\right)\right) (A2.19) .$$

On utilisera, pour ce calcul, le résultat (A2.21).

Avec les notations (A2.4), l'équation finale satisfaite pour la composante verticale de la vitesse W, de degré huit, est de la forme :

$$\frac{1}{\operatorname{Re}^{3} S_{1} \operatorname{Pr} R_{0}^{2}(\zeta)} D^{8}W + \frac{i\sigma}{\operatorname{Re}^{2} R_{0}(\zeta)} A(\zeta) D^{6}W$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{Re}} \sigma^{2} B(\zeta) D^{4}W + R_{0}(\zeta) \bigg[-i\sigma^{3} - \frac{K^{2} N^{2}(\zeta)}{\operatorname{Re} R_{0}(\zeta)} D_{0}(\zeta) \bigg] D^{2}W$$

$$= i\sigma K^{2} R_{0}(\zeta) N^{2}(\zeta) (\beta(\zeta) + \delta(\zeta)) W + 0(\varepsilon) . \quad (A2.22)$$

Annexe 3

Etude des racines de l'équation de dispersion (2.34) dans le plan complexe

Nous procédons à l'étude des racines de l'équation de dispersion de degré quatre en ψ , équation numérotée (2.34) dans le Chapitre 2, et que l'on renommera ici de la façon suivante :

$$\frac{\psi^4}{\Pr S} - iA\psi^3 + B\psi^2 + i\left(1 - \frac{iD_0}{X}\right)\psi = \frac{i}{X}(1 - \Lambda_{\nu_0} + \delta).$$
(A3.1)

De manière générale, nous notons ψ_j (j = 0, 1, 2, 3) les quatre racines de l'équation (A3.1).

Ces racines ψ_j sont des fonctions continues de la variable X ; ainsi, nous étudions plus particulièrement les chemins suivis par ces racines dans le plan complexe quand X varie de 0 à $+\infty$.

On appelle, pour plus de facilité, (C_j) les chemins suivis par les racines quand X varie, et les notations $(A, B, D_0, \text{etc.})$ sont celles déjà utilisées (voir Chapitre 2, formules (2.35)).

Nous présenterons, dans un premier temps, une étude théorique de cette équation de dispersion, ce qui permettra de donner un grand nombre d'informations afin de procéder au tracé « qualitatif » des chemins parcourus par les racines dans le plan complexe, et, dans un second temps, une approche numérique utilisant la méthode de Müller permettra, quant à elle, d'apporter des vérifications et confirmations à notre étude théorique. Nous pourrons formuler, alors, les résultats qualitatifs cités dans le Chapitre 2.

1- Approche théorique

1-1 Comportement pour X petit

On remarque que le signe de D_0 intervient dans la forme de trois des solutions qu'on appelle ψ_0 , ψ_1 et ψ_2 . En effet :

> Si
$$D_0 < 0$$
: $\psi_k \approx \left(\frac{-D_0 \operatorname{Pr} S}{|X|}\right)^{\frac{1}{3}} e^{-2ik\frac{\pi}{3}}, \qquad k = 0, 1, 2.$ (A3.2)

> Si
$$D_0 > 0$$
: $\psi_k \approx \left(\frac{D_0 \operatorname{Pr} S}{|X|}\right)^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}(1-2k)}, \qquad k = 0, 1, 2.$ (A3.3)

La quatrième solution, quant à elle, peut s'écrire :

$$\psi_3 \approx \frac{i}{D_0} (1 - \Lambda_{\nu_0} + \delta). \tag{A3.4}$$

1-2 Comportement pour X grand

Quand X est grand, une des racines de (A3.1) peut prendre la forme :

$$\psi_0 \approx \frac{1}{X}$$
(A3.5)

Pour l'étude des trois autres racines ψ_1 , ψ_2 et ψ_3 , on pose $\Psi_j = i\psi_j$ (j = 1, 2, 3). Les Ψ_j sont alors les trois solutions de l'équation de degré trois ramenée à une équation à coefficients réels, qui est donnée par :

$$\Psi^{3} + A \operatorname{Pr} S \Psi^{2} - B \operatorname{Pr} S \Psi + \operatorname{Pr} S = 0.$$
(A3.6)

On remarque que les racines Ψ_j ne dépendent pas de X. Suite à l'étude de cette équation, les conclusions nécessaires peuvent être interprétées à partir des Ψ_j pour les solutions ψ_j .

En supposant A et B positifs, on peut, par exemple, affirmer que :

(a) si une des racines ψ₁ est imaginaire pure positive, les deux autres racines ψ₂ et ψ₃ sont imaginaires pures négatives ;

ou

(b) si une des racines ψ₁ est imaginaire pure positive, les deux autres racines ψ₂ et ψ₃ sont complexes, et, en admettant qu'elles ont, par exemple, la forme particulière ψ₂ = -b + ia et ψ₃ = b + ia (avec (b,a) ∈ ℜ × ℜ et a < 0), on remarque qu'alors, dans ce cas :

$$\psi_1 = \frac{i \Pr S}{a^2 + b^2}.$$
 (A3.7)

Une condition supplémentaire peut être apportée dans le cas (a) ou (b) pour Ψ_1 :

$$\Psi_1 > -A \operatorname{Pr} S. \tag{A3.8}$$

Finalement, il y a une grande dépendance au niveau des différentes valeurs des coefficients mis en jeu.

1-3 Propriétés pour des valeurs de X autres que 0 et $+\infty$

Nous avons étudié le cas où l'axe ψ réel pouvait éventuellement être traversé.

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation (A3.1), on obtient en recherchant des racines réelles pures la condition suivante : il existe, au plus, une racine réelle, appelée ψ^* , pour une valeur atteinte X^* de X, définie par :

$$X^{2} = \frac{-(1 - \Lambda_{\nu_{0}} + \delta - AD_{0} \operatorname{Pr} S)^{3}}{\operatorname{Pr} S \left[B(1 - \Lambda_{\nu_{0}} + \delta) + D_{0} \right] (1 + AB \operatorname{Pr} S)^{2}}.$$
 (A3.9)

On remarque que pour ψ^* :

$$\psi^* = \frac{1 - \Lambda_{\nu_0} + \delta - AD_0 \Pr S}{1 + AB \Pr S} \frac{1}{X}.$$
 (A3.10)

La condition $X^2 > 0$ (car ψ réel) montre que (A3.9) est une condition nécessaire mais non pas suffisante : par conséquent, X^* existe ou n'existe pas.

Nous avons aussi étudié par la même méthode le cas où l'axe ψ imaginaire pouvait être traversé.

On obtient le résultat suivant : l'axe ψ imaginaire n'est jamais traversé par une racine pour des valeurs de X, sauf si l'une des racines ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 est égale à $\frac{i}{D_0}(1 - \Lambda_{\nu_0} + \delta)$ (auquel cas, cette racine est stationnaire dans le plan complexe, indépendamment de la valeur de X). L'étude du paragraphe 1-2 a montré que cette valeur était atteinte pour $X \rightarrow 0$.

1-4 Représentation dans le plan complexe

Notons que les comportements des racines ϕ'_j sont facilement déductibles de ceux obtenus par les racines ψ_i , étant donné que :

$$\phi'^{2} = -K^{2} + \frac{N^{2}K^{2}}{\sigma^{2}}\psi X.$$
 (A3.11)

On peut représenter pour X grand et X petit les chemins suivis par les racines dans le plan complexe en se rapportant aux différents résultats obtenus précédemment.

Nous présentons ici plusieurs figures indiquant les différentes possibilités de chemins suivis (Figure A3:a à Figure A3:c, où nous représentons les graphes $Im(\phi'^2) = f(Re(\phi'^2))$).

Un exemple a déjà été présenté sur la Figure 2.a du Chapitre 2.

Nous remarquons, de même, que nous pouvons relier entre elles les différents racines suivant les valeurs de X et suivant les signes de quelques coefficients. Si, par exemple, on appelle ϕ'_{j}^{2} les valeurs correspondant au cas où $X \rightarrow 0$, et ϕ'_{j}^{2} celles correspondant au cas où $X \rightarrow +\infty$, on peut alors relier les ϕ'_{j}^{2} aux ϕ'_{j}^{2} (voir Figure A3.c).

Quand la racine ψ^* existe, elle est alors seulement l'intersection d'un des chemins avec l'axe des réels.

Ces figures sont des représentations purement « qualitatives », mais donnent des allures globales de courbes.



Valeurs qui ne sont jamais atteintes par ϕ'^2 .

Figure A3.a Chemins décrits dans le plan complexe par les racines de l'équation (2.28) lorsque X varie de 0 à +∞. Nous faisons apparaître sur ces figures le cas où les chemins peuvent éventuellement se

croiser :

<u>haut</u>: configuration avec $D_0 < 0$; <u>bas</u>: configuration avec $D_0 > 0$.



Valeurs qui ne sont jamais atteintes par ϕ'^2 .

Figure A3.b Chemins décrits dans le plan complexe par les racines de l'équation (2.28) lorsque X varie de 0 à $+\infty$. Configuration avec $D_0 < 0$:

<u>haut</u>: cas où X^* existe, c'est à dire ϕ^{*^2} existe ; l'axe des réels est traversé ; <u>bas</u>: cas où X^* n'existe pas, c'est à dire ϕ^{*^2} n'existe pas ; l'axe des réels n'est pas traversé.


Valeurs qui ne sont jamais atteintes par ϕ'^2 .

Figure A3.c Chemins décrits dans le plan complexe par les racines de l'équation (2.28) lorsque X varie de 0 à $+\infty$. Nous faisons apparaître sur ces figures le cas où X^* n'existe pas (ϕ^{*^2} n'existe pas). L'axe des réels n'est pas traversé. Les $\phi_j^{*^2}$ et les $\phi_j^{*^2}$ sont alors reliées:

<u>*haut*</u> : configuration avec $D_0 < 0$; <u>*bas*</u> : configuration avec $D_0 > 0$.

2- Approche numérique

Afin de résoudre numériquement l'équation de dispersion (A3.1), nous avons appliqué la méthode de Müller (voir Stoer et Bulirsch, 1993).

C'est une méthode itérative très efficace qui permet de trouver le zéro d'une fonction dans le plan complexe, et, en particulier, une racine simple (réelle aussi bien que complexe) ou multiple d'un polynôme.

Cette méthode interpole une fonction f par un polynôme quadratique à l'aide de la formule d'interpolation de Newton.

La Figure A3.d donne deux aspects de la représentation exacte d'un cas qui peut être qualitativement décrit. On peut noter qu'il est nécessaire de s'approcher très près du point $(-K^2, 0)$ (point F sur la Figure A3.d), pour reconnaître la configuration en $e^{2ik\frac{\pi}{3}}$ (correspondant à $D_0 > 0$) des directions des courbes en ce point.

Les différentes données, utilisées pour la résolution numérique, sont exprimées en unités MKS. Elles ont les valeurs suivantes :

q_0	10 ⁻³	θ_{0}	288
γ	1,4	Pr	0,76
R _g	287	$S = \frac{S^*}{q_0}$	721,451
C _{pv}	1004	μ_0	8,987
L _{v0}	$2600 \cdot 10^3$	R _v	464

Tableau 1 Valeurs numériques exprimées en unités MKS, utilisées pour la résolution.

Pour les valeurs numériques du Tableau 1, les coefficients A, B et D_0 de l'équation (A3.1) prennent les valeurs : A#1,5563, B#2,5581 et D_0 #16,9432. Les données du Tableau 1 ont été reprises pour le diagramme de stabilité du Chapitre 3.



