

The 5000 000 000

50376-
1999-
409

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
LABORATOIRE DE MECANIQUE DE LILLE U.R.A. 1441 C.N.R.S.

Année 1999

THESE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE LILLE I

Discipline : Génie-Civil

par

Hai Yun LU

Titre :

**EXTENSION DE LA METHODE DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT
AUX COMPORTEMENTS MECANIQUES NON LINEAIRES**

Directeur de thèse : D. KONDO

Tirage provisoire



SOMMAIRE

INTRODUCTION	01
CHAPITRE 1 METHODE DE FRONTIERE EN ELASTICITE ET EN MECANIQUE NON LINEAIRE	04
1.1 Rappels des équations de l'élasticité linéaire	05
1.2 Equations intégrales pour les problèmes d'élasticité linéaire	06
1.2.1 Solutions fondamentales	06
1.2.2 Identité de Somigliana pour les milieux élastiques linéaires	08
1.2.3 Formulation intégrale de frontière	09
1.2.4 Champ de contraintes dans le domaine	11
1.2.5 Formulation indirecte	13
1.3 Formulation intégrale en milieu non linéaire	15
1.3.1 Equations de base	15
1.3.2 L'identité de Somigliana dans le cas non linéaire	18
1.3.3 Introduction à la formulation de la MDD en milieu non linéaire –	
Conclusion	22
CHAPITRE 2 METHODE DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT EN MILIEU NON LINEAIRE	24
2.1 Formulation par déformations initiales de la MDD	25
2.1.1 Identité de Somigliana pour les comportements non linéaires	25
2.1.2 Distribution des contraintes dans le domaine	26
2.1.3 Formulation au contour	29
2.1.4 Problèmes de déformation plane	31
2.1 Formulation par contraintes initiales de la MDD	35
2.3 Implémentation numérique	36
2.3.1 Discrétisation des équations intégrales	36
2.3.2 Evaluation des intégrales hypersingulières de la frontière	43
2.3.3 Schéma d'intégration pour les éléments de frontière et pour les cellules	49
CHAPITRE 3 IMPLEMENTATION NUMERIQUE POUR LES LOIS ELASTOPLASTIQUES ET APPLICATIONS	54
3.1 Solution de la MDD pour les lois de comportement non linéaire	55
3.2 Application de la MDD aux problèmes élastoplastiques 2-D	58
3.2.1 Equations de l'élastoplasticité classique	59
3.2.2 Implantation numérique des lois élastoplastiques	61
3.3 Exemples d'application numérique des modèles élastoplastiques	62
3.3.1 Etude d'un cylindre épais creux soumis à une pression interne	62
3.3.2 Plaque perforée sollicitée en traction	67
3.3.3 Tunnel circulaire soumis à un champ de contraintes anisotrope	69

CHAPITRE 4 APPLICATIONS A QUELQUES PROBLEMES D'ENDOMMAGEMENT ET DE MECANIQUE NON LINEAIRE DE LA RUPTURE	72
4.1 Application de la MDD à la mécanique de l'endommagement	73
4.1.1 Présentation du modèle d'endommagement isotrope	73
4.1.2 Mise en œuvre du modèle d'endommagement : algorithme	76
4.1.3 Exemple numérique pour le modèle d'endommagement	78
4.2 Application de la MDD à la mécanique élastoplastique de la rupture	79
4.2.1 Notion d'intégrale de contour J en élasticité	80
4.2.2 Evaluation de l'intégrale de Rice J par la MDD en élastoplasticité	82
4.2.3 Etude de la fissuration d'une plaque	84
 CONCLUSIONS	 87
 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	 89
 ANNEXE A1 : Modèles élastoplastiques - Critères	 92

INTRODUCTION

Les deux grandes classes de méthodes numériques les plus largement utilisées en mécanique sont la méthode des éléments finis et la méthode des éléments frontière. La méthode des éléments finis (MEF) (Zienkiewicz, 1977) est de loin la plus répandue. Sa facilité de mise en œuvre numérique, ajoutée aux possibilités qu'elle offre pour traiter des problèmes posés sur des géométries complexes et pour des matériaux à comportement non linéaire variés (Owen & Hinton, 1980), justifie sa prédominance globale.

Il existe cependant de nombreux problèmes pour lesquels la MEF perd de son efficacité. On peut citer, à titre d'exemple, le cas de domaine infini ou encore de problèmes dans lesquels les champs mécaniques présentent de fortes singularités comme en mécanique de la rupture. Les méthodes de frontière (cf. par exemple Banerjee, 1994) se sont donc révélées comme une alternative sérieuse aux éléments finis dans l'étude de nombreux problèmes d'élasticité, notamment ceux impliquant de fortes concentrations de contraintes. Dans ces méthodes, les équations aux dérivées partielles sont transformées en équations intégrales définies sur le contour du domaine, ce qui réduit d'une unité la dimension du problème. Bien que de structure généralement pleine, le système d'équations à résoudre est de taille beaucoup plus réduite par rapport à celle auquel conduirait la MEF pour le même problème. Contrairement donc à la MEF, seul le contour du domaine est discrétisé en un nombre fini d'éléments sur lesquels sont appliqués des fonctions polynomiales destinées à interpoler les champs approchés entre les points nodaux. De plus, à la différence des méthodes basées sur une discrétisation du domaine, les champs obtenus dans les méthodes de frontière vérifient l'équation d'équilibre local et conduisent de ce fait à des solutions de grande précision.

Les méthodes de frontière ont connu depuis quelques années de nombreux progrès en mécanique des solides, et plus particulièrement dans deux domaines spécifiques :

- étude des problèmes de fissures (Bui, 1977 ; Nguyen and Yan, 1994), notamment les fissures 3-D (Sladek and Sladek, 1982 ; Cruse, 1988).

- analyse de comportements non linéaires tels que la plasticité (Brebbia and Dominguez, 1992).

Ces progrès ont conduit d'une part à la mise en œuvre de méthodes relativement performantes pour traiter les problèmes de singularité en fond de fissure, et d'autre part pour étendre le domaine d'application des méthodes intégrales aux comportements non linéaires. Pour un état de lieu récent sur ces questions, on peut se consulter l'excellent ouvrage de M. Bonnet (1995). S'agissant des comportements non linéaires, on est conduit à la résolution d'une succession de problèmes linéaires, les contributions des non linéarités prenant souvent la forme de termes additionnels de sources (ex : déformations initiales). Les travaux effectués sur ce sujet sont malheureusement encore peu nombreux et il semble que les performances des méthodes d'équations intégrales appliquées aux problèmes non linéaires restent encore à démontrer.

L'étude présentée dans ce mémoire s'inscrit dans cette perspective. Elle vise essentiellement à étendre la méthode des discontinuités de déplacements (MDD) à la plasticité et à l'endommagement. La MDD est une technique numérique initiée et développée en élasticité linéaire par Crouch (1976) aux USA. Des équipes françaises, dont celle de J.P. Henry il y a quelques années au Laboratoire de Mécanique de Lille (cf. thèses de E. Morel, 1987 ; de Y. Belkacemi, 1991 etc..) ou celle de A. Ehrlacher (cf. thèse de Yin, 1992 ; Yin & Ehrlacher, 1993) ont également travaillé sur cette méthode numérique. Outre l'utilisation même de la MDD, l'étude présentée dans ce mémoire a la double originalité de :

- s'affranchir des hypothèses d'incompressibilité plastique généralement faites dans les travaux antérieurs concernant le comportement élastoplastique
- mettre en œuvre la méthode développée pour diverses classes de matériaux dont le comportement est soit plastique, soit élastique - endommageable.

Le mémoire est structuré en quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à une synthèse bibliographique sur les méthodes intégrales en élasticité linéaire et à leur extension aux comportements non linéaires. On y présente en particulier les divers formalismes disponibles pour le traitement des milieux non linéaires : approche par contraintes initiales, approche par déformations initiales, approche par forces de volume modifiées. Le cas particulier des méthodes de frontière de type indirect est discuté.

Dans le second chapitre on étudie l'extension proprement dite de la méthode des discontinuités de déplacements aux comportements non linéaires. Les développements y sont présentés notamment en déformation plane. Un traitement soigneux est apporté aux diverses

questions liées à cette extension : régularisation des intégrales hypersingulières par utilisation du principe d'Hadamard, schéma d'intégration des cellules internes, analyse des termes issus de la compressibilité des matériaux. Ce dernier aspect permet d'envisager l'application des méthodes à de nombreux matériaux du génie civil.

L'implantation numérique de la méthode développée sur la base d'une approche par déformations initiales est faite au chapitre 3. On présente les algorithmes d'intégration des lois élastoplastiques. Les performances du code sont évaluées sur un certain nombre d'exemples test. Des comparaisons avec des données d'expérience (lorsque celles ci sont disponibles) ou avec les calculs Eléments Finis sont effectuées pour valider la méthode.

Le dernier chapitre est consacré à l'analyse des comportements élasto endommageables et de la fissuration en élastoplasticité. On présente d'abord les algorithmes spécifiques nécessaires pour l'implantation de la loi d'endommagement isotrope retenu. Puis on traite l'exemple d'une structure en milieu endommageable. Le chapitre s'achève sur l'étude des problèmes de mécanique de la rupture, à travers l'évaluation de l'intégrale J de Rice dans diverses configurations de fissures. Les premiers résultats obtenus sont comparés avec d'autres issus de la littérature.

CHAPITRE 1 :

METHODES DE FRONTIERE EN ELASTICITE ET EN MECANIQUE NON LINEAIRE

Ce chapitre essentiellement bibliographique concerne l'étude des méthodes de frontière en élasticité et de leur extension aux comportements non linéaires. Les formulations intégrales, classiques en élasticité, sont présentées. L'extension au cas non linéaire est abordée à l'aide de trois approches : déformations initiales, contraintes initiales, forces de volume modifiées. Le cas particulier des méthodes de type indirect, qui sera prolongé dans les chapitres suivants, est discuté à la fin de ce premier chapitre.

Dans ce chapitre, on rappelle d'abord brièvement les concepts de base de la théorie de l'élasticité linéaire. Les équations aux dérivées partielles associées au problème d'élasticité sont précisées. On présente ensuite les équations intégrales (de types direct ou indirect) d'abord en élasticité linéaire puis pour les comportements non linéaires.

1.1 Rappel des équations de l'élasticité linéaire

Soit un solide occupant un domaine Ω en équilibre élastique. On se place en hypothèse de petites perturbations. Le problème d'équilibre élastique conduit aux équations locales suivantes qui relient le champ de déplacement u aux champs de déformation ε et donc de contraintes σ par l'intermédiaire de la loi de comportement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad 1.1a$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = C_{ijkl}u_{k,l} \quad 1.1b$$

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad 1.1c$$

C est le tenseur d'élasticité et b le vecteur des forces de volume.

La convention de sommation d'Einstein est adoptée dans tout le mémoire. $u_{i,j}$ représente la dérivée partielle $\partial u_i / \partial x_j$.

Les composantes du vecteur contraintes sur une facette de normale n sont données par :

$$p_i = \sigma_{ij}n_j \quad 1.2$$

Le matériau étant supposé élastique linéaire isotrope, les relations contraintes-déformations sont fournies par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad 1.3$$

G et ν sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du matériau.

$$G = \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\nu)} \text{ avec } E \text{ module d'élasticité du matériau.}$$

La combinaison de l'ensemble des équations conduit aux équations classiques dites de Lamé- Navier :

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,kj} - b_j = 0 \quad 1.4$$

Par substitution, on peut alors établir les conditions aux limites en contraintes

$$\frac{2G\nu}{1-2\nu}u_{k,k}n_i + G(u_{i,j} + u_{j,i})n_j = p_i \quad 1.5$$

La résolution des équations (1.4) et (1.5) fournit les champs solutions du problème d'équilibre élastique. Dans la plupart des situations pratiques, elle ne peut pas être faite de manière analytique. D'où l'intérêt croissant des méthodes comme celles que nous présentons maintenant.

1.2 Equations intégrales pour les problèmes d'élasticité linéaire

Les méthodes des frontière sont généralement rangées en deux catégories : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les applications des méthodes de type direct (dans lesquelles les inconnues sont des variables physiques, ex : déplacement) aux problèmes d'élasticité linéaire ont été décrites par Cruse (1969), Lachat & Watson (1976), Rizzo et Shippy (1977) etc.. Alternativement, les formulations indirectes, basées sur une distribution de source (de densités inconnues,) ont aussi connu de nombreux développements en élasticité. Ceux ci sont par exemple décrits dans Jaswon & Symm (1977), Banerjee (1994) ou Bonnet (1995). Ce paragraphe est destiné à un bref rappel des équations intégrales en élasticité linéaire, en insistant sur la démarche conduisant des solutions fondamentales aux formulations intégrales.

1.2.1 Solutions fondamentales

Les solutions fondamentales constituent l'élément de base de toute formulation d'équations intégrales. Par souci de clarté, les solutions singulières unité sont présentées dans cette section.

La solution du problème élastique correspondant à un milieu infini, homogène, isotrope avec une force ponctuelle est la solution fondamentale due à Kelvin. Les déplacements, provoqués en un point quelconque q du domaine par une force ponctuelle unité appliquée au point s suivant la direction j est (Brebbia, 1978 ; Brebbia et Dominguez, 1992) :

$$u_i^*(q) = U_{ij}^*(q, s) e_j(s) \quad 1.6a$$

où

$$U_{ij}^*(q, s) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \left\{ (3-4\nu)\delta_{ij} + r_i r_j \right\} \quad 1.6b$$

pour les problèmes 3-D

et

$$U_{ij}^*(q, s) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \left\{ (3-4\nu)\ln(r)\delta_{ij} - r_i r_j \right\} \quad 1.7$$

pour les problèmes de déformation plane.

$r = r(s, q)$ représente la distance entre le point d'application de la charge s et le point intérieur q ; ses dérivées sont prises par rapport aux coordonnées de q , c'est à dire,

$$\begin{aligned} r &= (r_i r_i)^{1/2} \\ r_i &= x_i(q) - x_i(s) \\ r_{,j} &= \frac{\partial r}{\partial x_j(q)} = \frac{r_i}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial n} &= \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial n} = r_{,i} n_i \end{aligned} \quad 1.8$$

avec n_i les cosinus directeurs de la normale extérieure n par rapport aux axes. Dans le cas 2-D, on a $n_1 = \cos(n, x_1)$, $n_2 = \cos(n, x_2)$.

Les contraintes en chaque point intérieur q dues à la force ponctuelle en s peuvent alors s'écrire sous la forme :

$$\sigma_{ij}^*(q) = \sigma_{ijk}^*(q, s) e_k(s) \quad 1.9a$$

où $\sigma_{ijk}^*(q)$ est la solution fondamentale en contraintes :

$$\sigma_{ijk}^*(q, s) = \frac{-1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left\{ (1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik} - r_{,i}\delta_{kj}) + \beta r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\} \quad 1.9b$$

Le vecteur contrainte pour une facette de normale \vec{n} s'écrit alors :

$$p_i^*(q) = P_{ij}^*(q, s)e_j(s) \quad 1.10a$$

avec

$$P_{ij}^*(q, s) = \frac{-1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + \beta r_{,i}r_{,j} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\} \quad 1.10b$$

Remarque : Dans les expressions (1.9b) et (1.10b), $\alpha = 2, 1$; $\beta = 3, 2$ respectivement pour les cas 3-D et 2-D (déformation plane) ; les dérivées sont prises par rapport aux coordonnées du point intérieur q .

1.2.2 Identité de Somigliana pour les milieux élastiques linéaires

Considérons un domaine Ω homogène isotrope, élastique linéaire, ayant comme frontière une surface régulière $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (figure 1.1a). Considérons également un domaine Ω^* entourant Ω (figure 1.1b). Soient deux états d'équilibre, correspondant à des conditions aux limites différentes. Ces états sont représentés par les champs usuels $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i, p_i, b_i$, dans Ω et les champs $\sigma_{ij}^*, \varepsilon_{ij}^*, u_i^*, p_i^*, b_i^*$ dans Ω^* .

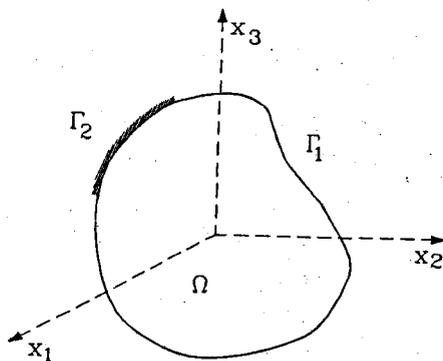


Figure 1.1a : Domaine Ω et frontière Γ

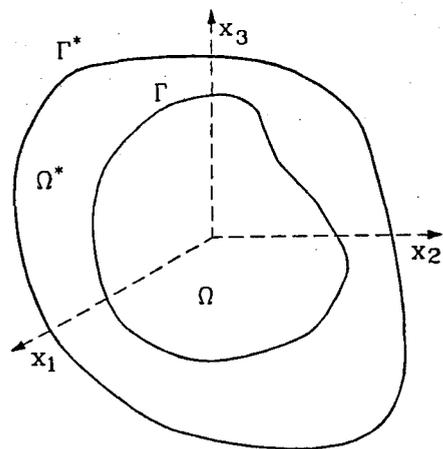


Figure 1.1b : Domaine Ω^*

Le principe de réciprocité de Maxwell-Betti s'écrit :

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega + \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma = \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma \quad 1.11$$

Supposons que les composantes b^* des forces de volume sont sous la forme de forces unité appliquées au point $s \in \Omega^*$ dans chacune des 3 directions orthogonales :

$$b_j^* = \delta(s, q) e_j \quad 1.12$$

où $\delta(s, q)$ est la fonction delta de Dirac, $q \in \Omega^*$ est un point courant du domaine. Utilisant les propriétés de la fonction delta :

$$\begin{aligned} \delta(s, q) &= 0, \quad \text{si } s \neq q \\ \delta(s, q) &= \infty, \quad \text{si } s = q \\ \int_{\Omega^*} f(q) \delta(s, q) d\Omega^*(q) &= f(s), \end{aligned} \quad 1.13$$

l'équation (1.11) peut s'écrire sous la forme suivante connue sous le nom *d'Identité de Somigliana* pour les déplacements en s :

$$\begin{aligned} u_i(s) &= \int_{\Gamma} U_{ij}^*(s, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) \\ &\quad + \int_{\Omega} U_{ij}^*(s, q) b_j(q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad 1.14$$

Dans cette formule et dans tout ce qui suit, $s, q \in \Omega$, et $S, Q \in \Gamma$.

1.2.3 Formulation intégrale de frontière

Le vecteur déplacements en tout point intérieur du domaine peut être évalué à l'aide de l'identité de Somigliana dès que $p_j(Q)$ et $u_j(Q)$ sont connus sur le contour, les forces de volumes étant supposées données. Par conséquent la détermination des champs mécaniques

n'est possible que si les variables à la frontière sont connues. Les équations 1.14 étant valides en tout point du domaine, une expression intégrale de frontière peut être obtenue à l'aide d'un passage à la limite.

A cet effet, supposons que le domaine peut être représenté comme indiqué à la figure 2.2 (cf. chapitre 2). Le passage à la limite effectué sur les équations (1.14) pour $s \rightarrow S$ ($S \in \Gamma$) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) &= \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} U_{ij}^*(S, Q) P_j(Q) d\Gamma(Q) \\ &+ \int_{\Omega_\varepsilon} U_{ij}^*(S, q) b_j(q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad 1.15$$

La limite de la première intégrale de cette équation peut être séparée sous la forme

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} P_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad 1.16$$

La première intégrale dans le membre de droite de (1.16) peut ensuite s'écrire

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(S, Q) [u_j(Q) - u_j(S)] d\Gamma(Q) \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ u_j(S) \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(S, Q) d\Gamma(Q) \right\} \end{aligned} \quad 1.17$$

De la condition de continuité de $u_j(Q)$, on observe que la première intégrale dans le membre de droite 1.17) s'annule. La seconde intégrale étant prise au sens de la valeur principale de Cauchy, elle peut être exprimée à l'aide de C défini par $C_{ij}(S) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(S, Q) d\Gamma(Q)$. La dernière intégrale dans (1.16) ne présente pas de singularité particulière et peut être interprétée

au sens classique de l'intégration. En définitive, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la représentation intégrale suivante est obtenue :

$$C_{ij} u_j(S) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(S, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} U_{ij}^*(S, q) b_j(q) d\Omega(q) \quad 1.18$$

Dans (1.18) la seconde intégrale du membre de droite est à considérer au sens de la valeur principale de Cauchy ; les coefficients $C_{ij}(S)$ sont ceux précédemment définis. Pour un point S situé sur une partie régulière de la frontière, $C_{ij}(S) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$. Dans le cas contraire, il faut prendre des expressions de ces coefficients présentées par exemple dans (Ricardella, 1973). Soulignons qu'en pratique, le calcul explicite de C n'est généralement pas nécessaire puisqu'il peut être indirectement obtenu par considération des mouvements de solide rigide (Brebbia et Dominguez, 1992).

La représentation intégrale (1.18) est valide pour les problèmes 2-D ou 3-D ; elle fournit une relation entre les déplacements de contour, les vecteurs contraintes au contour et les forces de volume dans un milieu élastique. Les forces de volume étant supposées connues, cette représentation permet, lorsque les conditions aux limites sont précisées, de déterminer les variables inconnues. C'est ce point de vue qui est habituellement mis à profit pour obtenir des solutions numériques dans les méthodes de type direct.

1.2.4 Champ de contraintes dans le domaine

L'équation (1.18) fournit les déplacements en tout point intérieur en fonction des déplacements et contraintes de contour. Le champ de contraintes en un point intérieur peut être obtenu en différentiant les déplacements par rapport aux coordonnées de s puis en substituant les déformations déduites dans la loi de Hooke généralisée :

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

L'expression finale se met sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij}(s) = \int_{\Gamma} D_{ijk}^*(s, Q) p_k(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} P_{ijk}^*(s, Q) u_k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} D_{ijk}^*(s, q) b_k(q) d\Omega(q) \quad 1.19$$

Toutes les opérations de dérivation sont directement effectuées sous le signe intégrale au point intérieur considéré. Pour la solution fondamentale de Kelvin, les deux tenseurs du 3^e ordre intervenant dans (1.19) s'écrivent :

$$D_{ijk}^*(q, s) = \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left\{ (1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik} - r_{,i}\delta_{kj}) + \beta r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \quad 1.20a$$

$$P_{ijk}^*(q, s) = \frac{G}{2\alpha\pi(1-\nu)r^\beta} \left\{ \beta \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - \gamma r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + \beta\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu)(\beta n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \quad 1.20b$$

Les formules ci dessus sont applicables pour les milieux 2-D et 3-D. Pour le cas 2-D, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\gamma = 4$; en 3-D $\alpha = 2$, $\beta = 3$ et $\gamma = 5$. Notons que toutes les dérivées indiquées par les virgules sont prises aux points de la frontière et la substitution $\frac{\partial r}{\partial x_i(s)} = -r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(q)}$ a été déjà effectuée.

Les champs de contraintes obtenus à l'aide des formules précédentes sont en général plus précis que ceux que l'on obtiendrait par d'autres méthodes numériques (p. ex. MEF). Cependant, lorsque le point intérieur est très proche de la frontière (p. ex. à moins du quart de la taille du plus petit élément proche du point), les valeurs obtenues pour ces champs sont peu précises. Notons également que les valeurs obtenues pour les champs de déplacements au contour sont connues à partir de la représentation intégrale. Ceci n'est pas le cas pour le champ de contraintes du fait que le tenseur de contraintes a plus de termes indépendants que le vecteur contraintes. Cette question sera examinée ultérieurement.

1.2.5 Formulation indirecte

La formulation intégrale précédente est connue comme la représentation intégrale directe ; elle fournit les déplacements dans le domaine et à la frontière à l'aide des vecteurs contraintes et des déplacements sur la frontière. Il existe d'autres représentations intégrales pour lesquelles les déplacements sont exprimés en fonction d'autres variables (distribution de sources réelles ou fictives) qui peuvent n'avoir aucun sens physique. Ces représentations forment la base des formulations intégrales indirectes.

Dans cette section deux formulations indirectes seront présentées. L'approche suivie ici pour établir celles-ci à partir de la représentation directe est initialement due à Lamb (1932).

Considérons les domaines intérieur $\Omega^{(i)}$ et extérieur $\Omega^{(e)}$ délimités par le contour Γ (figure 1.2).

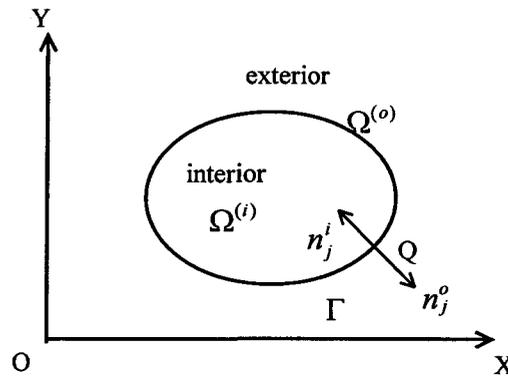


Figure 1.2 Définition des domaines intérieur et extérieur

Considérons un état d'équilibre $(\sigma_{ij}^{(i)}, \epsilon_{ij}^{(i)}, u_i^{(i)}, p_i^{(i)})$ sur le domaine intérieur et un autre état d'équilibre $(\sigma_{ij}^{(e)}, \epsilon_{ij}^{(e)}, u_i^{(e)}, p_i^{(e)})$ sur le domaine extérieur. Le vecteur contraintes associé au domaine extérieur sera référé à l'aide de la normale n du domaine intérieur (voir figure 1.2). Par souci de simplicité les forces de volume sont supposées nulles. Pour le domaine extérieur, en utilisant le théorème de réciprocité entre la solution fondamentale appliquée en un point dans $\Omega^{(i)}$ et l'état $(\sigma_{ij}^{(e)}, \epsilon_{ij}^{(e)}, u_i^{(e)}, p_i^{(e)})$ on obtient :

$$\int_{\Gamma} U_{ij}^*(s, Q) p_j^{(o)}(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, Q) u_j^{(o)}(Q) d\Gamma(Q) = 0 \quad 1.21$$

Les équations intégrales pour le domaine intérieur sont obtenues à l'aide de (1.14) :

$$u_i^{(o)}(s) - \int_{\Gamma} U_{ij}^*(s, Q) p_j^{(o)}(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, Q) u_j^{(o)}(Q) d\Gamma(Q) = 0 \quad 1.22$$

Soustrayant (1.21) de (1.22) on aboutit à

$$u_i^{(o)}(s) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(s, Q) \left[p_j^{(o)}(Q) - p_j^{(o)}(Q) \right] d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, Q) \left[u_j^{(o)}(Q) - u_j^{(o)}(Q) \right] d\Gamma(Q) \quad 1.23$$

Si l'on impose la continuité des déplacements à travers le contour, soit $u_j^{(o)}(Q) = u_j^{(i)}(Q)$, l'équation (1.23) s'écrit :

$$u_i^{(o)}(s) = \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, Q) \tau_j(Q) d\Gamma(Q) \quad 1.24a$$

$$\text{dans laquelle } \tau_j(Q) = p_i^{(i)}(Q) - p_i^{(o)}(Q) \quad 1.24b$$

Cette représentation connue sous le nom de formulation en discontinuité de forces (potentiel simple couche de densité $\tau_j(Q)$) et aboutit à une méthode dite de forces fictives..

Si l'on impose la continuité du vecteur contraintes travers le contour, soit $p_j^{(o)}(Q) = p_j^{(i)}(Q)$, et en posant $\Delta u_j(Q) = u_j^{(i)}(Q) - u_j^{(o)}(Q)$, (1.23) s'écrit

$$u_i^{(o)}(s) = - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, Q) \Delta u_j(Q) d\Gamma(Q) \quad 1.25$$

Cette représentation est connue sous le nom de formulation en discontinuité de déplacement Δu (potentiel double couche de densité $\Delta u_j(Q)$).

1.3 Formulation intégrale en milieu non linéaire

Dans cette section, on présente la formulation intégrale pour les problèmes posés en milieu non linéaire. Les premiers travaux dans ce domaine ont été présentés par Swedlow et Cruse (1971), la première mise en œuvre numérique étant proposée par Riccardella (1973). Ce n'est qu'à partir des années 80 que de sérieuses applications ont pu être présentées en élastoplasticité (cf. p.ex. Telles et Brebbia, 1979 ; Banerjee et Cathie, 1980 etc..) ou en viscoplasticité (Morjaria et Mukherjee, 1981). Cet essor des méthodes de frontière en plasticité s'est poursuivi dans de nombreux travaux (Banerjee et Raveendra, 1986; Cruse, 1988; Aliabadi et Rooke, 1991 etc..). Le formalisme général qui sera présenté, peut être adapté à une large classe de comportements mécaniques incluant l'élastoplasticité, la viscoplasticité ou l'endommagement. Les formulations indirectes en milieu non linéaire, sont ensuite obtenues à partir d'un théorème de réciprocité étendu aux déplacements en milieux non linéaires. Trois formes étendues de l'identité de Somigliana seront établies en utilisant les déformations initiales ou les contraintes initiales ou encore les forces de volume modifiées. Les formulations indirectes pour les milieux non linéaires sont alors déduites en utilisant un formalisme similaire à celui de la section 1.2.5.

1.3.1 Equations de base

On se place dans le cadre général des comportements mécaniques non linéaires (théorie de incrémentale de la plasticité, endommagement). Les formulations intégrales seront également recherchées sous forme incrémentale. Pour le problème en vitesse, on a :

- L'équilibre du milieu non linéaire sous la forme

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{b}_j = 0 \tag{1.26}$$

dans laquelle le $\dot{\cdot}$ désigne la vitesse des grandeurs mécaniques considérées. Pour des comportements non linéaires indépendants du temps physique, il s'agit simplement des incréments de ces grandeurs (dépendance avec le chargement).

- la forme des conditions aux limites en contraintes s'écrit :

$$\dot{p}_i - \dot{\sigma}_{ij} n_j = 0 \quad 1.27$$

où comme précédemment n_j représente les composantes de la normale unitaire extérieure à la frontière.

On se place en hypothèse de petites perturbations, et la décomposition additive suivante du champ de déformations totales du milieu non linéaire est adoptée :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^a \quad 1.28$$

ε^e et ε^a sont respectivement les parties élastique et anélastique du tenseur de déformation totale ε . Notons que les déformations anélastiques, qui peuvent inclure les déformations plastiques, les déformations de fluage, les déformations thermiques ou encore celles liées à la présence d'endommagement sont considérées ici comme des "déformations initiales".

■ L'application de la loi de Hooke à la partie élastique de l'incrément de déformations donne :

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^a) + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\dot{\varepsilon}_{kk} - \dot{\varepsilon}_{ll}^a)\delta_{ij} \quad 1.29a$$

qui peut également s'écrire :

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^a \quad 1.29b$$

c'est à dire :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^e - \dot{\sigma}_{ij}^a \quad 1.29c$$

$\dot{\sigma}_{ij}^e$ représente l'incrément de contraintes élastique correspondant à l'incrément de déformations totales $\dot{\epsilon}$ si le milieu était élastique et $\dot{\sigma}_{ij}^a$ représente les composantes du tenseur de "contraintes initiales" données par (voir figure 1.3.1)

$$\dot{\sigma}_{ij}^a = (2G\dot{\epsilon}_{ij}^a + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{\epsilon}_{kk}^a\delta_{ij}) \tag{1.30}$$

Substituant (1.30) dans (1.29a) et (1.29b) et tenant compte de (1.29c), on obtient :

$$\dot{u}_{j,ii} + \frac{1}{1-2\nu}\dot{u}_{i,jj} = 2(\dot{\epsilon}_{ij,i}^a + \frac{\nu}{1-2\nu}\dot{\epsilon}_{kk}^a) - \frac{\dot{b}_j}{G} \tag{1.31a}$$

et

$$\dot{p}_i + 2G(\dot{\epsilon}_{ij}^a n_j + \frac{\nu}{1-2\nu}\dot{\epsilon}_{kk}^a n_i) = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{u}_{i,l} n_l + G(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) n_j \tag{1.31b}$$

L'équation (1.31a) est la forme étendue des équations de Lamé - Navier et (1.31b) l'écriture des conditions aux limites en contraintes correspondantes.

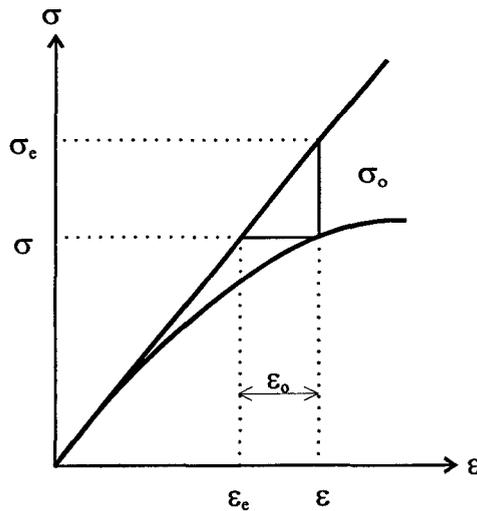


Figure1.3.1 Représentation des contraintes initiales stress et des déformations initiales

1.3.2 L'identité de Somigliana dans le cas non linéaire

■ L'approche par déformations initiales

Cette approche fut à l'origine introduite par Swedlow et Cruse (1971) dans le cadre d'une formulation directe des méthodes de frontière pour la résolution de problèmes d'élastoplasticité 3-D. Dans cette section, la forme étendue de l'identité de Somigliana sera présentée en suivant une procédure plus générale.

Considérons un domaine dont le comportement est initialement élastique linéaire. La réponse non linéaire du matériau constituant le domaine est modélisée en prenant en compte les déformations anélastiques, seulement aux points appropriés du domaine.

Afin d'établir la forme étendue de l'identité de Somigliana, considérons deux états indépendants d'équilibre du domaine, notés avec et sans *. Le principe de réciprocité pour le problème en vitesse peut être écrit pour le problème 3-D sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}^*(s, q) \dot{\varepsilon}_{ij}^\varepsilon(q) d\Omega(q) = \int_{\Omega_\varepsilon} \dot{\sigma}_{ij}(q) \varepsilon_{ij}^*(s, q) d\Omega(q) \quad 1.32$$

dans laquelle $\dot{\varepsilon}_{ij}^\varepsilon = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^a$ et Ω_ε est le domaine obtenu en excluant la boule de rayon ε et de surface $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ centrée au point singulier s (point de chargement, voir figure 1.3).

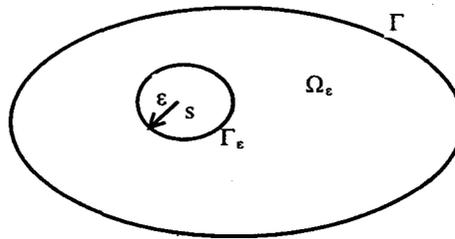


Figure 1.3 Boule de rayon ε et surface $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ centrée au point singulier s , isolée dans le domaine

En tenant compte de l'écriture précédente de $\dot{\varepsilon}_{ij}^\varepsilon$ on peut réécrire (1.32) :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}^*(s, q) \dot{\varepsilon}_{ij}(q) d\Omega(q) = \int_{\Omega_\varepsilon} \dot{\sigma}_{ij}(q) \varepsilon_{ij}^*(s, q) d\Omega(q) + \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}^*(s, q) \dot{\varepsilon}_{ij}^a(q) d\Omega(q) \quad 1.33$$

En suivant la même procédure que dans la section 1.2, (1.33) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_i^*(s, Q) \dot{u}_i(Q) d\Gamma(Q) &= \int_{\Gamma + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_i^*(s, Q) \dot{p}_i(Q) d\Gamma(Q) \\ &+ \int_{\Omega_\varepsilon} u_i^*(s, q) \dot{b}_i(q) d\Omega(q) + \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}^*(s, q) \dot{\varepsilon}_{ij}^a(q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad 1.34$$

Examinons d'abord les intégrales de contour définies sur $\bar{\Gamma}_\varepsilon$. La première intégrale dans (1.34) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_i^*(s, Q) \dot{u}_i(Q) d\Gamma(Q) &= \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_i^*(s, Q) [\dot{u}_i(Q) - \dot{u}_i(s)] d\Gamma(Q) \\ &+ \dot{u}_i(s) \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_i^*(s, Q) d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad 1.35$$

Comme $u_i(q)$ est continu en tout point du domaine, on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_i^*(s, Q) [\dot{u}_i(Q) - \dot{u}_i(s)] d\Gamma(Q) = 0 \quad 1.36$$

La dernière intégrale sur $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ dans (1.35) peut être évaluée en utilisant l'expression (1.10a) :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_i^*(s, Q) d\Gamma(Q) = e_j(s) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(s, Q) d\Gamma(Q) = \delta_{ij} e_j \quad 1.37$$

On en déduit :

$$\dot{u}_i(s) \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_i^*(s, Q) d\Gamma(Q) = \dot{u}_i(s) e_i \quad 1.38$$

On peut vérifier que l'autre intégrale figurant dans (1.34) est telle que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_i^*(s, Q) \dot{p}_i(Q) d\Gamma(Q) = 0 \quad 1.39$$

De ces résultats et en prenant la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la forme étendue de (1.14) est :

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(s) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, Q) \dot{p}_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) \\ & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(s, q) \dot{b}_j(q) d\Omega(q) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(s, q) \dot{\varepsilon}_{jk}^a(q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad 1.40$$

L'équation (1.40) est l'identité de Somigliana pour les problèmes en milieux non linéaires pour l'approche par déformations initiales. L'intégrale de volume doit y être considérée au sens de la valeur principale de Cauchy. Cette équation est valide pour les problèmes 3-D en utilisant les solutions fondamentales de Kelvin. Pour les problèmes 2-D, une attention spéciale doit être accordée pour les intégrales faisant intervenir les incréments de déformations anélastiques (Mukherjee, 1977). Ce point sera discuté en détail au chapitre 2 (section 2.1.4).

Notons que l'intégrale de volume dans (1.40) n'affecte pas la procédure de limite utilisée dans la section 1.2.3 pour établir les équations intégrales de frontière. Aussi, pour les milieux non linéaires le terme de déformations initiales est à rajouter simplement à (1.18) pour obtenir les équations intégrales de frontière appropriées.

■ L'approche par contraintes initiales

Reprenons l'expression (1.29c) $\dot{\sigma}_{ij}^e = \dot{\sigma}_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}^a$ dans laquelle $\dot{\sigma}_{ij}^e = C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kj}$.

En tenant compte de la symétrie du tenseur d'élasticité C_{ijkl} , on obtient :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}^*(s, q) \dot{\varepsilon}_{ij}(q) d\Omega(q) = \int_{\Omega_\varepsilon} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^*(s, q) \dot{\varepsilon}_{ij}(q) d\Omega(q) = \int_{\Omega_\varepsilon} \dot{\sigma}_{ij}^e(q) \varepsilon_{ij}^*(s, q) d\Omega(q) \quad 1.41$$

Cette équation peut être réécrite en considérant la décomposition de $\dot{\sigma}_{ij}^e$:

$$\int_{\Omega_e} \sigma_{ij}^*(s, q) \dot{\epsilon}_{ij}(q) d\Omega(q) = \int_{\Omega_e} \dot{\sigma}_{ij}^* \epsilon_{ij}^*(s, q) d\Omega(q) + \int_{\Omega_e} \dot{\sigma}_{ij}^a \epsilon_{ij}^*(s, q) d\Omega(q) \quad 1.42$$

Intégrant par parties les premières intégrales de chacun des deux membres de (1.42), comme dans la section 1.2.2, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma+\Gamma_e} p_i^*(s, Q) \dot{u}_i(Q) d\Gamma(Q) &= \int_{\Gamma+\Gamma_e} u_i^*(s, Q) \dot{p}_i(Q) d\Gamma(Q) \\ &+ \int_{\Omega_e} u_i^*(s, q) \dot{b}_i(q) d\Omega(q) + \int_{\Omega_e} \dot{\epsilon}_{ij}^*(s, q) \sigma_{ij}^a(q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad 1.43$$

Suivant la même procédure de limite que dans l'approche par déformations initiales, (1.43) devient :

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(s) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, Q) \dot{p}_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) \\ &+ \int_{\Omega} u_{ij}^*(s, q) \dot{b}_j(q) d\Omega(q) + \int_{\Omega} \dot{\epsilon}_{ijk}^*(s, q) \sigma_{jk}^a(q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad 1.44$$

Cette équation est l'analogie en contraintes initiales de (1.40). Par conséquent, les équations intégrales de frontière correspondant à l'approche des contraintes initiales sont de la même forme que dans l'approche par déformations initiales, le dernier terme étant remplacé par l'intégrale de volume associée aux contraintes initiales $\int_{\Omega} \dot{\epsilon}_{ijk}^*(s, q) \sigma_{jk}^a(q) d\Omega(q)$. On doit cependant noter que, contrairement à l'observation faite dans l'approche par déformations initiales, la réduction des équations aux problèmes 2-D se fait ici simplement en faisant varier les indices de 1 à 2.

■ L'approche par forces de volume modifiées

La dernière intégrale présentée dans l'équation (1.40) peut s'écrire à l'aide des dérivées de U_{ij}^* de la façon suivante :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* \dot{\epsilon}_{jk}^a d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ G(u_{ij,k}^* + u_{ik,j}^*) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{ii,l}^* \delta_{jk} \right\} \dot{\epsilon}_{jk}^a d\Omega \quad 1.45$$

L'intégration par parties donne

$$\int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* \dot{\epsilon}_{jk}^a d\Omega = \int_{\Gamma} u_{ij}^* 2G \left(\dot{\epsilon}_{jk}^a n_k + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{ii}^a n_j \right) d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ij}^* 2G \left(\dot{\epsilon}_{jk,k}^a + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{ii,j}^a \right) d\Omega \quad 1.46$$

La substitution de (1.46) dans (1.40) fournit

$$C_{ij} \dot{u}_j = \int_{\Gamma} u_{ij}^* \dot{p}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}^* \dot{u}_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* \dot{b} d\Omega \quad 1.47a$$

$$\text{avec } \dot{b}_j = \dot{b}_j - 2G \left(\dot{\epsilon}_{ij,i}^a + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{kk,j}^a \right) \quad 1.47b$$

$$\dot{p}_j = \dot{p}_j + 2G \left(\dot{\epsilon}_{ij}^a n_i + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{kk}^a n_j \right) \quad 1.47c$$

$C_{ij} = 1$ pour les points intérieurs.

L'équation (1.47a) peut être vue comme l'application des techniques d'élément de frontière à un milieu 'élastique' soumis à un champ de forces de volume modifiées \dot{b} et à des efforts surfaciques \dot{p} donnés par (1.47b) et (1.47c). Ainsi, la résolution du problème en milieu non linéaire est réduite à la recherche de la solution d'un problème élastique qui peut être résolu à l'aide des méthodes décrites au paragraphe 1.2. Remarquons que la solution en contraintes correspondant doit être calculée en utilisant les équations (1.28) et (1.29a).

1.3.3 Introduction à la formulation de la MDD en milieu non linéaire – Conclusion

Comme nous l'avons indiqué au début de ce chapitre, les formulations indirectes des équations intégrales en milieu non linéaire peuvent être directement dérivées des relations entre méthodes directe et indirecte. Dans cette section, on s'intéresse plus particulièrement à la formulation de la méthode des discontinuités de déplacement (MDD) pour les milieux non linéaires.

Considérons l'identité de Somigliana étendue (équation 1.40) et supposons la continuité du vecteur contraintes à travers la frontière. On obtient alors la formulation intégrale suivante que nous désignerons par formulation en déformation initiales de la MDD :

$$\dot{u}_i(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) \Delta \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(s, q) \dot{\epsilon}_{jk}^a(q) d\Omega(q) \quad 1.48$$

Cette équation est obtenue en l'absence de forces de volume. $\dot{u}_i(s)$ représente les composantes de la vitesse de déplacement en un point intérieur s , $\Delta \dot{u}(Q)$ est le vecteur vitesse de discontinuité de déplacements en un point Q de la frontière du domaine. Dans (1.48) l'intégrale de volume doit être considérée au sens de la valeur principale de Cauchy.

Conclusion : Dans ce chapitre, les équations intégrales de frontière en élasticité linéaire ont été présentées sous une forme qui unifie les formulations directe et indirect aussi bien en élasticité qu'en mécanique non linéaire. Trois formulations directes en milieu non linéaire, associées à une méthode de discontinuité de déplacements, ont été ensuite dérivées : approche par déformations initiales, approche par contraintes initiales et approche par forces de volume modifiées. Les formulations indirectes associées peuvent s'en déduire sans grande difficulté. Le cas de la méthode des discontinuité de déplacements a été brièvement examiné dans les grandes lignes.

Remarquons juste, comme nous l'avons vu, que si les vitesses du vecteur contrainte et de déplacement sur la frontière et la distribution de déformation/contraintes initiales sont connues, alors on peut évaluer les vitesses de déplacement aux points intérieurs à partir de formulations d'éléments de frontières basées sur des déformations ou contraintes initiales. Les vitesses de déformation et par suite de contraintes aux points intérieurs peuvent être obtenues via la loi de comportement non linéaire. Le détail de cette extension sera présenté au second chapitre.

Soulignons à nouveau que l'évaluation des champs mécaniques aux points intérieurs à l'aide des méthodes de frontière de type indirect (cas de la méthode de discontinuités de déplacements) est beaucoup plus efficace que par les méthodes de type direct, du fait du faible nombre de termes à calculer. Pour la modélisation des problèmes à comportement non – linéaires, il est nécessaire de déterminer des champs de mécanique en un grand nombre de points intérieurs. Ceci est une raison supplémentaire pour le choix de la MDD au détriment d'une méthode directe.

CHAPITRE 2 :

METHODE DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT EN MILIEU NON LINEAIRE

Dans ce second chapitre on se propose d'étendre la méthode des discontinuités de déplacement aux comportements non linéaires. Les expressions des champs de déplacements et des champs de contraintes sont développées dans ce cadre via les identités de Somigliana étendues. L'équation associée aux conditions aux limites en contraintes est également fournie. Une formulation originale et plus générale, permettant d'étudier les milieux compressibles est ensuite présentée avec les noyaux appropriés. Les intégrales hypersingulières inhérentes aux développements proposés sont régularisées en utilisant l'intégrale en partie finie d'Hadamard. Le chapitre s'achève sur la présentation d'une stratégie pour l'implémentation numérique de la méthode.

Introduction

Ce chapitre concerne une extension de la méthode des discontinuités de déplacement pour la résolution des problèmes en milieu non linéaire. A partir des identités de Somigliana étendues, nous établissons les expressions des champs de déplacements et des champs de contraintes ainsi que l'équation associée aux conditions aux limites en contraintes. Le cas plus général des matériaux compressibles (ex : matériaux du génie civil) est ensuite étudiée de manière soignée. Ceci constituera l'un des apports originaux de ce chapitre. Les intégrales hypersingulières associées à ces développements seront régularisées en utilisant une technique du type intégrale en partie finie d'Hadamard.

2.1 Formulation par déformations initiales de la MDD

Ce paragraphe concerne l'établissement et l'étude des équations intégrales associées à une formulation en déformations initiales de la MDD.

2.1.1 Identité de Somigliana pour les comportements non linéaires

Considérons une fissure plane, caractérisée par deux surfaces coplanaires notées Γ_c^+ et Γ_c^- (Figure 2.1). Ces surfaces sont traitées dans la MDD comme une unique surface Γ_c mais avec des normales opposées. Les composantes du vecteur discontinuité (ou saut) de déplacement Δu_i sont définies comme :

$$\Delta u_i(Q) = u_i(Q^-) - u_i(Q^+) \quad 2.1$$

où $u_i(Q^+)$ et $u_i(Q^-)$ sont les déplacements au point Q respectivement sur les lèvres supérieure et inférieure de la fissure.

Rappelons d'abord que la vitesse de déplacement en un point intérieur (s), due à la distribution des discontinuités de déplacement Δu le long de la frontière et à la distribution des déformations initiales $\dot{\varepsilon}_{ij}^a$ dans le domaine, est donnée par l'identité de Somigliana étendue :

$$\dot{u}_i(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) \Delta u_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(s, q) \dot{\varepsilon}_{jk}^a(q) d\Omega(q) \quad 2.2$$

où $\sigma_{ijk}^*(s, q)$ et $P_{ij}^*(s, Q)$ représentent les solutions fondamentales de Kelvin données par les expressions (1.8b) et (1.9b) ; i et j sont les directions d'axes associées au système de coordonnées cartésiennes. Rappelons pour la suite que la distance entre le point source s et le point de champ Q est notée r . Remarquons également que les intégrales de frontières seront étendues aux surfaces de fissures $\Gamma_c = \Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^-$. Les intégrales du domaine sont évaluées seulement dans les régions où apparaissent des déformations anélastiques lors du chargement. Ceci constitue naturellement un des avantages des méthodes de frontière par rapport aux méthodes d'éléments finis.

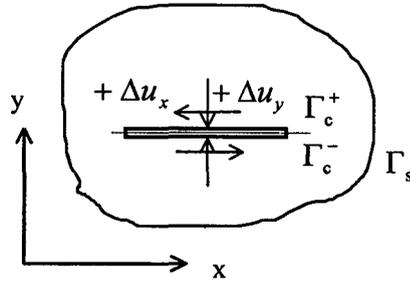


Figure 2.1 Définition des composantes du vecteur discontinuité de déplacement

2.1.2 Distribution des contraintes dans le domaine

Pour les solutions incrémentales des problèmes en milieu non linéaire, l'évaluation des contraintes revêt également une importance fondamentale. Dans le but d'obtenir aussi bien une bonne précision qu'une facilité de mise en œuvre numérique, les formulations intégrales propres pour les contraintes sont préférées à la méthode qui consisterait à calculer les déplacements aux points intérieurs et à différentier numériquement ceux ci comme c'est le cas dans Banerjee et Raveendra (1986).

Les équations intégrales correctes pour les contraintes en un point intérieur pour les comportements non linéaires ont été présentées la première fois par Bui (1978) en s'appuyant sur le concept de dérivation des intégrales singulières de Mikhlín. La procédure utilisée ici pour obtenir ces équations est similaire à celle donnée par Telles (1983). Les solutions fondamentales de Kelvin seront considérées en conjonction avec l'approche par déformations initiales.

Les contraintes dans le domaine peuvent être obtenues par différentiation des équations intégrales de déplacement (2.2) et application de la loi de Hooke sur la partie élastique du tenseur de déformation totale (les forces de volume étant négligées) :

$$\dot{\sigma}_{ij} = G\left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i}\right) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - (2G\dot{\varepsilon}_{ij}^a + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \dot{\varepsilon}_{kk}^a \delta_{ij}) \quad 2.3$$

les dérivées des déplacements étant données par

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_m} = - \int_{\Gamma} \frac{\partial p_{ij}^*}{\partial x_m} \dot{u}_j d\Gamma + \frac{\partial}{\partial x_m} \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* \dot{\varepsilon}_{jk}^a d\Omega \quad 2.4$$

Rappelons que la vitesse de déformation est décomposée en parties élastique et anélastique :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^a \quad 2.5$$

La dérivées spatiales présentes dans (2.4) sont prises par rapport aux coordonnées spatiales du point de charge. Une telle différentiation peut être directement appliquée au tenseur solution fondamentale pour la première intégrale de (2.3) comme dans le cas élastique, mais une attention spéciale doit être accordée à la dernière intégrale. A l'aide de la formule de Leibniz¹, la dérivation de l'intégrale sur le domaine peut être évaluée de la manière suivante (Telles, 1983) :

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* \dot{\varepsilon}_{jk}^a d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ijk}^*}{\partial x_m} \dot{\varepsilon}_{jk}^a d\Omega - \dot{\varepsilon}_{jk}^a(s) \int_{\Gamma_1} \sigma_{ijk}^* r_{,m} d\Gamma \quad 2.6$$

La première intégrale dans le membre de droite de (2.6) est à interprétée au sens de la valeur principale de Cauchy. Γ_1 dans la seconde intégrale représente un cercle de rayon unité pour les problèmes 2-D (ou la surface d'une sphère unité pour les problèmes 3-D), cercle centré au point de

¹ La formule de Leibniz donne $\frac{d}{d\alpha} \int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} F(x, \alpha) dx = \int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} \frac{F(x, \alpha)}{d\alpha} dx - F[\varphi_1(\alpha), \alpha] \frac{d\varphi_1(\alpha)}{d\alpha} + F[\varphi_2(\alpha), \alpha] \frac{d\varphi_2(\alpha)}{d\alpha}$

charge s . $r_{,m}$ est la dérivée de r (distance entre le point de collocation (ou de charge) s et le point de champ q) par rapport aux coordonnées du point de champ, c'est à dire., $r_{,m} = -\partial r / \partial x_m$.

Substituant l'expression (2.6) dans (2.4), on obtient :

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_m} = - \int_{\Gamma} \frac{\partial p_{ij}^*}{\partial x_m} \dot{u}_j d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ijk}^*}{\partial x_m} \dot{\epsilon}_{jk}^a d\Omega - \dot{\epsilon}_{jk}^a \int_{\Gamma_1} \sigma_{ijk}^* r_{,m} d\Gamma \quad 2.7$$

Le terme libre correspondant à l'intégrale sur Γ_1 dans (2.7) peut être évaluée dans le cas 3-D) sous forme analytique, σ_{ijk}^* étant donné par (1.8b) et

$$- \dot{\epsilon}_{jk}^a \int_{\Gamma_1} \sigma_{ijk}^* r_{,m} d\Gamma = \frac{1}{15(1-\nu)} \left[(8-10\nu) \dot{\epsilon}_{im}^a - (1-5\nu) \dot{\epsilon}_{ll}^a \delta_{im} \right] \quad 2.8$$

Les contraintes dans le domaine sont alors données par :

$$\dot{\sigma}_{ij}(s) = - \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(s, Q) \Delta \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} \sigma_{ijkl}^*(s, q) \dot{\epsilon}_{kl}^a(q) d\Omega(q) + f_{ij} (\dot{\epsilon}_{kl}^a)^2 \quad 2.9$$

Les deux derniers termes dans (2.9) représentent l'influence des déformations anélastiques. Les noyaux p_{ijk}^* sont obtenus par combinaison linéaire de dérivées des solutions fondamentales p_{ij}^* en élasticité (voir équation 1.20b); σ_{ijkl}^* représente les dérivées du tenseur contraintes généralisées dû aux forces unité :

$$\sigma_{ijkl}^* = \frac{G}{2\alpha\pi(1-\nu)r^\beta} \left\{ \beta(1-2\nu)(\delta_{ij} r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} r_{,i} r_{,j}) + \beta\nu(\delta_{li} r_{,j} r_{,k} + \delta_{jk} r_{,l} r_{,i} + \delta_{ik} r_{,l} r_{,j} + \delta_{jl} r_{,i} r_{,k}) - \beta\gamma r_{,j} r_{,i} r_{,k} r_{,l} + (1-2\nu)(\delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{jk} \delta_{li}) - (1-4\nu) \delta_{ij} \delta_{kl} \right\} \quad 2.10$$

$\alpha = 2, 1$; $\beta = 3, 2$; $\gamma = 5, 4$ pour respectivement les problèmes 3-D et de déformation plane.

² Soulignons à nouveau que la forme correcte de ces équations intégrales a été proposée pour la première fois par Bui (1978) en s'appuyant sur le concept de dérivation dû à Mikhlin (1962), les expressions largement utilisées dans les publications antérieures étant toutes erronées. C'est un fait rare dans le développement des méthodes intégrales qui mérite d'être souligné.

L'intégrale de frontière dans (2.9) est régulière mais l'intégrale de domaine contient une singularité de type Cauchy, d'ordre $(1/r^2)$ lorsque le point de charge appartient à la cellule sur laquelle est effectuée l'intégration. Le terme libre f_{ij} résulte de la différentiation de l'intégrale de domaine dans (2.2), y compris les termes provenant de l'application de la loi de Hooke, c'est à dire :

$$-(2G\dot{\varepsilon}_{ij}^a + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{ii}^a\delta_{ij}),$$

$$f_{ij}(\dot{\varepsilon}^a) = -\frac{2G}{15(1-\nu)}\left[(7-5\nu)\dot{\varepsilon}_{ij}^a + (1+5\nu)\dot{\varepsilon}_{ii}^a\delta_{ij}\right] \quad 2.11$$

2.1.3 Formulations au contour

Les identités de Somigliana étendues donnent les déplacements et contraintes en tout point intérieur du domaine, une fois que les discontinuités de déplacement sont connues sur la frontière et les ε^a dans les domaines appropriés. Par conséquent les champs mécaniques dans le domaine ne peuvent être évalués que si le problème aux limites est résolu. Comme précédemment, (2.2) et (2.9) sont valables en tout point dans Ω y compris sur Γ ; les intégrales de frontière peuvent être obtenues en considérant ces équations à la frontière. Ceci permet de construire un système d'équations qui, une fois résolu, fournit les valeurs des inconnues à la frontière et dans les domaines où les déformations initiales sont non nulles. Ces dernières étant a priori inconnues, une procédure itérative doit être introduite pour rechercher celles qui satisfont simultanément les équations d'équilibre et la loi de comportement non linéaire.

■ Equation de déplacement à la frontière

Pour $r \neq 0$ l'intégrale de frontière dans (2.2) est régulière. Lorsque le point intérieur approche la frontière ($s \rightarrow Q$), c'est à dire $r \rightarrow 0$, la limite de la solution fondamentale $P_{ij}^*(s, Q)$ qui présente une singularité en $1/r$ doit être évaluée. Puisque les discontinuités de déplacement doivent être continues au point Q, la procédure de calcul de limite produit dans l'intégrale de l'équation (2.2) un terme de saut sur les déplacements et une intégrale impropre. Pour un point S de la frontière, (2.2) s'écrit alors :

$$C_{ij}\dot{u}_i(S) = -\int_{\Gamma} p_{ij}^*(S, Q)\Delta\dot{u}(Q)d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(S, q)\dot{\varepsilon}_{jk}^a(q)d\Omega(q) \quad 2.12$$

L'intégrale de frontière dans (2.12) doit être considérée au sens de la valeur principale de Cauchy. Les coefficients $C_{ij}(S)$ sont ceux définis à la section (1.2.3) du premier chapitre. Ils valent $\delta_{ij}/2$ pour une frontière lisse au point S .

■ Equation de contraintes à la frontière

Le calcul des contraintes à la frontière par les méthodes de frontière est usuellement réalisé en évaluant les contraintes par différentiation des fonctions de forme et insertion dans la loi de Hooke (Brebbia et Dominguez, 1992). L'expression des conditions aux limites dans le repère local permet d'établir les équations du problème à résoudre. Dans cette étude une méthode différente est adoptée. L'identité de Somigliana en contraintes (2.9) est considérée directement à la frontière, l'intégrale hypersingulière qui en résulte est régularisée en utilisant l'intégrale en partie finie d'Hadamard. Il est bien reconnu que le calcul des contraintes à l'aide des équations intégrales hypersingulières fournit des résultats plus précis comparativement au calcul par différentiation des fonctions de forme (Hildenbrandt et Kuhn, 1992 ; Huber et al., 1993).

Dans l'évaluation de la limite dans (2.9) pour l'obtention de la représentation intégrale des contraintes aux points de la frontière, une attention particulière est nécessaire. En effet, le terme libre $f_{ij}(\epsilon^a)$ dans (2.9) comporte l'intégrale sur le cercle de rayon unité défini par Γ_1 résultant de la différentiation de l'intégrale de domaine dans (2.2). Il s'en suit l'hypothèse que le point s se trouve à l'intérieur du domaine délimité par la frontière Γ . Lorsque le point se trouve sur la frontière, il est seulement possible de prendre la limite en partant du domaine vers un point régulier de la frontière ; aussi le cercle unité doit être remplacé par un demi cercle de rayon unité.

En suivant une procédure similaire à celle de Telles (1983) dans les méthodes directes, on peut prouver que si le point se trouve sur la frontière, la différentiation de l'intégrale de domaine conduit à une intégrale définie sur un demi cercle qui vaut la moitié de l'intégrale sur le cercle unité

$$\dot{\epsilon}_{jk}^a \int_0^\pi \sigma_{ijk,r,m}^* d\Gamma = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{jk}^a \int_0^{2\pi} \sigma_{ijk,r,m}^* d\Gamma \quad 2.13$$

L'intégrale de frontière dans (2.9) présente une hypersingularité en $1/r^2$ lorsque le point intérieur approche la frontière c'est à dire $s \rightarrow Q$. En faisant l'hypothèse de la continuité de la dérivée de la discontinuité de déplacement au point Q, la procédure de limite donne les équations intégrales de contraintes en un point sur une frontière régulière :

$$\dot{\sigma}_{ij}(S) = -\oint_{\Gamma} P_{ijk}^*(S, Q) \Delta u_k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(S, q) \dot{\epsilon}_{kl}^a(q) d\Omega(q) + \frac{1}{2} f_{ij}(\dot{\epsilon}_{kl}^a) \quad 2.14$$

L'intégrale \oint dans le membre de droite indique une intégrale au sens de la valeur principale d'Hadamard.

n étant la normale unitaire extérieure à la frontière au point s, le vecteur contraintes sur la frontière est alors obtenu à l'aide de $t_j = \dot{\sigma}_{ij} n_i$:

$$t_j(S) = -n_i(S) \cdot \oint_{\Gamma} P_{ijk}^*(S, Q) \Delta u_k(Q) d\Gamma(Q) + n_i(S) \left[\int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(s, q) \dot{\epsilon}_{kl}^a(q) d\Omega + \frac{1}{2} f_{ij}[\dot{\epsilon}^a(S)] \right] \quad 2.15$$

2.1.4 Problèmes de déformation plane

On se propose d'examiner ici la réduction des formulations précédentes au cas plan. On commence par établir les équations en milieu plan incompressible. Des résultats plus originaux sont ensuite présentés dans le cas plus général où le milieu étudié est compressible.

■ Formulation pour matériaux incompressibles

Pour les problèmes de déformation plane (la déformation totale hors plan est nulle), la déformation anélastique hors plan n'est pas nulle : $\dot{\epsilon}_{33}^a \neq 0$ dans (2.12). Le travail $(\sigma_{33i}^* \dot{\epsilon}_{33}^a)$ fourni suivant la troisième direction doit être pris en considération dans l'intégrale comportant les vitesses de déformations anélastiques. Ceci est généralement traité dans la littérature en faisant l'hypothèse d'une incompressibilité des déformations plastiques, c'est à dire $\dot{\epsilon}_{kk}^a = \dot{\epsilon}_{11}^a + \dot{\epsilon}_{22}^a + \dot{\epsilon}_{33}^a = 0$. Cette hypothèse conduit à (Mukherjee, 1977) :

$$\dot{u}_i(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) \Delta \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} \hat{\sigma}_{ijk}^*(s, q) \dot{\epsilon}_{jk}^a(q) d\Omega(q) \quad 2.16$$

dans lequel :

$$\hat{\sigma}_{ijk}^* = \sigma_{ijk}^* + \frac{2\nu r_i \delta_{jk}}{4\pi(1-\nu)r} \quad 2.17$$

L'incrément de contraintes correspondant a pour expression

$$\dot{\sigma}_{ij}(s) = - \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(s, Q) \Delta \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} \hat{\sigma}_{ijkl}^*(s, q) \dot{\epsilon}_{kl}^a(q) d\Omega(q) + f_{ij}[\dot{\epsilon}^a(s)] \quad 2.18$$

dans laquelle la dernière intégrale est à prendre au sens de la valeur principale de Cauchy et,

$$\hat{\sigma}_{ijkl}^* = \sigma_{ijkl}^* + \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} (4\nu r_i r_j \delta_{kl} - 2\nu \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad 2.19$$

$$f_{ij}(\dot{\epsilon}^a) = \frac{-G}{4(1-\nu)} \left[2\dot{\epsilon}_{ij}^a + (1-4\nu)\dot{\epsilon}_{ll}^a \delta_{ij} \right] \quad 2.20$$

Bien entendu dans ces expressions $i, j, k, l = 1, 2$.

Remarque : Comme nous l'avons déjà souligné, l'hypothèse d'incompressibilité plastique n'est en général pas vérifiée pour les géomatériaux tels les bétons et les roches qui nous intéressent pour des applications ultérieures en génie civil. Une approche plane incluant la compressibilité des matériaux s'avère indispensable. La section suivante est consacrée à cet aspect des développements.

■ Formulations pour matériaux compressibles

Considérons à nouveau la formulation tridimensionnelle (2.2)

$$\dot{u}_i(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) \Delta \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(s, q) \dot{\epsilon}_{jk}^a(q) d\Omega(q) \text{ dans laquelle } i, j, k = 1, 2, 3.$$

En déformation plane, le déplacements hors plan est tel que $\dot{u}_3(s) = 0$. Le champ de contraintes peut être alors évaluée en utilisant seulement les déplacements dans le plan ; de même les composantes 13 et 23 des contraintes et déformations sont toutes nulles. L'équation précédente peut alors être réduite sous la forme suivante, avec les indices variant de 1 à 2 :

$$\dot{u}_i(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) \Delta \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) + \iint_{\Omega} [\sigma_{ijk}^*(s, q) \dot{\varepsilon}_{jk}^a(q) + \sigma_{i33}^*(s, q) \dot{\varepsilon}_{33}^a(q)] d\Omega(q) \quad 2.21$$

Dans cette équation, les noyaux 2-D $p_{ij}^*(s, Q)$ et $\sigma_{ijk}^*(s, q)$, obtenues en intégrant les noyaux 3-D correspondants suivant x_3 sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, sont respectivement données par les équations (1.9b) et (1.8b) avec les paramètres appropriés. Le terme supplémentaire $\sigma_{i33}^*(s, q)$ pour $\varepsilon_{33}^a(s) \neq 0$ s'écrit de la manière suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{i33}^*(s, q) dx_3 = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} 2\nu r_{,i} \quad 2.22$$

Remarquons que les intégrales dans (2.21) sont des intégrales de surface et de ligne. Nous avons cependant gardé les notations précédentes afin de bien mettre en évidence la similitude avec les équations intégrales 3-D. Notons également que si nous utilisons $\dot{\varepsilon}_{ii}^a = 0$ pour éliminer ε_{33}^a dans l'intégrale de surface de (2.21) pour les matériaux incompressibles, les noyaux modifiés suivants sont obtenus :

$$\sigma_{ijk}^*(s, q) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu)(\delta_{ij} r_{,k} + \delta_{ik} r_{,j}) - \delta_{jk} r_{,i} + 2r_{,j} r_{,j} r_{,k} \right] \quad 2.23$$

Ce résultat est bien celui présenté par Mukherjee (1977).

Etablissons maintenant les équations pour le champ des contraintes. La vitesse de déformations dans le domaine est calculée en différentiant l'équation intégrale de déplacement (2.21). Suivant la même procédure que celle déjà utilisée (section 2.1.2), on obtient :

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_m} = - \int_{\Gamma} \frac{\partial p_{ij}^*}{\partial x_m} \dot{u}_j d\Gamma + \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{ijk}^*}{\partial x_m} \dot{\varepsilon}_{jk}^a + \frac{\partial \sigma_{i33}^*}{\partial x_m} \dot{\varepsilon}_{33}^a \right) d\Omega - \dot{\varepsilon}_{jk}^a(s) \int_{\Gamma_1} \sigma_{ijk}^* r_{,m} d\Gamma - \dot{\varepsilon}_{33}^a(s) \int_{\Gamma_1} \sigma_{i33}^* r_{,m} d\Gamma \quad 2.24$$

Les intégrales sur Γ_1 doivent être calculées sur le cercle de rayon unité, centré au point de charge.

Ceci donne :

$$-\dot{\varepsilon}_{jk}^a(s) \int_{\Gamma_1} \sigma_{ijk}^* r_{,m} d\Gamma - \dot{\varepsilon}_{33}^a(s) \int_{\Gamma_1} \sigma_{i33}^* r_{,m} d\Gamma = \frac{1}{8(1-\nu)} \left[(6-8\nu) \dot{\varepsilon}_{im}^a - (1-4\nu) \dot{\varepsilon}_{ll}^a \delta_{im} + 4\nu \dot{\varepsilon}_{33}^a \delta_{im} \right] \quad 2.25$$

A nouveau, pour les matériaux plastiquement incompressibles, ε_{33}^a peut être éliminé de cette équation en utilisant $\varepsilon_{33}^a = -(\varepsilon_{11}^a + \varepsilon_{22}^a)$, ce qui fournit

$$-\dot{\varepsilon}_{jk}^a(s) \int_{\Gamma_1} \sigma_{ijk}^* r_{,m} d\Gamma - \dot{\varepsilon}_{33}^a(s) \int_{\Gamma_1} \sigma_{i33}^* r_{,m} d\Gamma = \frac{1}{8(1-\nu)} \left[(6-8\nu) \dot{\varepsilon}_{im}^a - \dot{\varepsilon}_{ll}^a \delta_{im} \right] \quad 2.26$$

Remarquons que l'équation (2.3) est également valide pour les problèmes de déformation plane avec $i,j,k=1,2$ et $l=1,2,3$. Les incréments de contraintes correspondants sont alors obtenus en substituant l'expression (2.24) dans (2.3) :

$$\dot{\sigma}_{ij}(s) = - \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(s, Q) \Delta \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) + \iint_{\Omega} \left[\sigma_{ijkl}^*(s, q) \dot{\varepsilon}_{kl}^a(q) + \sigma_{ij33}^* \dot{\varepsilon}_{kl}^a(q) \right] d\Omega(q) + f_{ij} \left[\dot{\varepsilon}^a(s) \right] \quad 2.27$$

La dernière intégrale est à prendre au sens de la valeur principale de Cauchy et,

$$\sigma_{ij33}^* = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left(2\nu \delta_{ij} - 4\nu r_{,i} r_{,j} \right) \quad 2.28$$

$$f_{ij}(\dot{\varepsilon}^a) = \frac{-G}{4(1-\nu)} \left[2\dot{\varepsilon}_{ij}^a + (\dot{\varepsilon}_{ll}^a + 4\nu \dot{\varepsilon}_{33}^a) \delta_{ij} \right] \quad 2.29$$

En utilisant $\dot{\varepsilon}_{33}^a = -\dot{\varepsilon}_{ll}^a$ ($l = 1, 2$) dans (2.21) et (2.27) on obtient à nouveau les équations (2.16) et (2.18) pour les matériaux, incompressibles, l'influence de $\dot{\varepsilon}_{33}^a$ étant transmise via les autres composantes du tenseur de déformations initiales. Les noyaux obtenus de cette manière sont exactement les mêmes que dans (2.17) et (2.19). Ainsi les expressions plus générales (2.21) et (2.27), que nous avons établies, se réduisent bien aux formulations usuellement présentées dans la littérature pour les matériaux supposés incompressibles.

Les problèmes de contrainte plane peuvent être résolus en utilisant (2.16) et (2.18) avec

$\hat{\sigma}_{ijkl}^* = \sigma_{ijkl}^*$, et $\hat{\sigma}_{ijk}^* = \sigma_{ijk}^*$, ν devant être remplacé par $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$, et le terme libre donné par :

$$f_{ij}(\dot{\varepsilon}^a) = -\frac{G}{4(1-\bar{\nu})} \left[2\dot{\varepsilon}_{ij}^a + \dot{\varepsilon}_{ii}^a \delta_{ij} \right] \quad 2.30$$

2.2 Formulations en contraintes initiales de la MDD

Afin d'être complet, on présente brièvement ici les formulations en contraintes initiales de la MDD. Celles ci peuvent être obtenues à partir des déformations initiales en utilisant les expressions suivantes :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* \dot{\varepsilon}_{jk}^a d\Omega = \int_{\Omega} C_{jklm} \varepsilon_{lmi}^* \dot{\varepsilon}_{jk}^a d\Omega \quad 2.31$$

où C est le tenseur d'élasticité et $C_{lmjk} \varepsilon_{jk}^a = \sigma_{lm}^a$,

$$\int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* \dot{\varepsilon}_{jk}^a d\Omega = \int_{\Omega} C_{jklm} \varepsilon_{lmi}^* \dot{\varepsilon}_{jk}^a d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{lmi}^* \dot{\sigma}_{lm}^a d\Omega \quad 2.32$$

Ainsi, les équations en vitesse de déplacement et en vitesse de contraintes pour l'approche en contraintes initiales sont données par :

$$\dot{u}_i(s) = -\int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) \Delta \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^*(s, q) \dot{\sigma}_{jk}^a(q) d\Omega(q) \quad 2.33$$

$$\dot{\sigma}_{ij}(s) = -\int_{\Gamma} p_{ijk}^*(s, Q) \Delta \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijkl}^*(s, q) \dot{\sigma}_{kl}^a(q) d\Omega(q) + g_{ij} \left[\dot{\sigma}^a(s) \right] \quad 2.34$$

les intégrales associées au terme de contraintes initiales étant à considérer au sens de la valeur principale et le tenseur ε^* relié à la solution fondamentale est donnée par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijkl}^* = \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\beta} \{ & (1-2\nu)(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{jk}\delta_{li} - \delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ij}r_{,k}r_{,l}) \\ & + \beta\nu(\delta_{li}r_{,j}r_{,k} + \delta_{jk}r_{,l}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,l}r_{,j} + \delta_{jl}r_{,i}r_{,k}) + \beta\delta_{kl}r_{,i}r_{,j} - \beta\gamma r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l} \} \end{aligned} \quad 2.35$$

avec $\alpha = 2, 1$; $\beta = 3, 2$; $\gamma = 5, 4$ pour respectivement les problèmes 3-D et de déformation plane.

Les expressions pour les termes libres sont de la forme suivante :

$$g_{ij}(\dot{\sigma}^a) = -\frac{1}{15(1-\nu)} \left[(7-5\nu)\dot{\sigma}_{ij}^a + (1-5\nu)\dot{\sigma}_{ii}^a\delta_{ij} \right] \quad \text{en 3-D} \quad 2.36$$

et

$$g_{ij}(\dot{\sigma}^a) = \frac{-1}{8(1-\nu)} \left[2\dot{\sigma}_{ij}^a + (1-4\nu)\dot{\sigma}_{ii}^a\delta_{ij} \right] \quad \text{pour la déformation plane} \quad 2.37$$

Remarquons pour le problème de déformation plane que, à l'inverse de l'approche par déformations initiales, les équations précédentes n'introduisent aucun terme de travail suivant la troisième direction, ni aucune hypothèse concernant l'incompressibilité plastique. La raison en est que pour l'approche en contraintes initiales $\dot{\varepsilon}_{i33}^* = 0$, et l'effet de $\dot{\varepsilon}_{33}^a$ est déjà inclus dans les expressions de $\dot{\sigma}_{ij}^a$. Les problèmes de contrainte plane peuvent être traités en remplaçant ν par $\bar{\nu}$ dans les expressions du problème de déformation plane.

Choix de la méthode : Les approches en déformations initiales et en contraintes initiales sont équivalentes. Elles ne diffèrent essentiellement que par le choix des variables inconnues. L'approche en déformations initiales a été choisie pour les raisons suivantes : i) elle fournit directement la carte des champs de déformations anélastiques ; ii) elle a donné de bons résultats sur des applications faites par d'autres auteurs sur des matériaux métalliques (cf. Brebbia et al., 1984).

2.3 Implémentation numérique

2.3.1 Discrétisation des équations intégrales

La résolution numérique des problèmes aux limites et des équations intégrales associées nécessite de discrétiser la frontière ainsi que le domaine nécessaire. Ceci se fait à l'aide d'une série

d'éléments sur lesquels les déplacements, contraintes et éventuellement déformations initiales doivent être interpolés à partir des valeurs aux points nodaux. Après construction de la forme discrétisée des équations intégrales pour l'ensemble des points nodaux de la frontière et domaine plastifiée, un système d'équations algébriques linéaire est obtenu. A l'aide des conditions aux limites imposées, le système d'équations peut être résolu pour obtenir les variables inconnues. Les déplacements et contraintes en tout point du domaine peuvent alors être évalués par quadrature numérique en utilisant les formulations appropriées. Dans cette section, une procédure générale de discrétisation pour la résolution de problèmes aux limites 2-D (déformation plane) est présentée. La démarche pour les problèmes 3-D est strictement la même.

Considérons la formulation générale en déformations initiales dans laquelle les déformations anélastiques sont supposés compressibles, c'est à dire $\dot{\epsilon}_{kk}^a \neq 0$. Rappelons les équations associées.

Equation de déplacement :

$$C_{ij}(S)\dot{u}_j(S) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S, Q)\Delta\dot{u}_j(Q)d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} [\sigma_{ijk}^*(S, q)\dot{\epsilon}_{jk}^a(q) + \sigma_{i33}^*(S, q)\dot{\epsilon}_{33}^a(q)]d\Omega(q) \quad 2.38$$

Equation de contraintes :

$$\dot{\sigma}_{ij}(s) = - \int_{\Gamma} P_{ijk}^*(s, Q)\Delta\dot{u}_k(Q)d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} [\sigma_{ijkl}^*(s, q)\dot{\epsilon}_{kl}^a(q) + \sigma_{ij33}^*(s, q)\dot{\epsilon}_{33}^a(q)]d\Omega(q) + f_{ij}[\dot{\epsilon}^a(s)] \quad 2.39$$

Equation associé à l'incrément du vecteur contraintes :

$$\dot{t}_j(S) = -n_i(S) \cdot \int_{\Gamma} P_{ijk}^*(S, Q)\Delta\dot{u}_k(Q)d\Gamma(Q) + n_i(S) \left[\int_{\Omega} \sigma_{ijkl}^*(S, q)\dot{\epsilon}_{kl}^a(q) + \int_{\Omega} \sigma_{ij33}^*(S, q)\dot{\epsilon}_{33}^a(q)d\Omega + f_{ij}[\dot{\epsilon}^a(S)] \right] \quad 2.40$$

L'équation (2.38) est valide pour en tout point de charge, avec $C_{ij} = \delta_{ij}$ pour les points intérieur, $C_{ij} = \delta_{ij}/2$ pour les points situés sur une surface régulière. Rappelons que la première intégrale est à interpréter au sens de la valeur principale de Cauchy et que par souci de simplicité, les forces de volume, qui ne posent aucune difficulté d'implémentation numérique ne sont pas considérées ici.

Les équations (2.38) à (2.40) constituent les équations de base de la méthode des discontinuités de déplacements en milieu non linéaire. Il est maintenant plus judicieux de travailler avec une notation matricielle à la place de la notation indicielle. Pour une modélisation numérique générale des problèmes de fissure, (voir Figure 2.1), les lèvres de fissure ainsi que le contour du domaine sont discrétisés à l'aide de L éléments et le domaine où apparaissent des déformations anélastiques en M cellules.

L'incrément de discontinuité de déplacement à la frontière est approximé sur chaque élément à l'aide des fonctions d'interpolation :

$$\Delta \dot{u} = N \Delta \dot{u}^j \quad 2.41a$$

où N est la fonction d'interpolation et $\Delta \dot{u}^j$ les incréments de discontinuité de déplacement (au nombre de $2 \times Q$ en 2-D et $3 \times Q$ en 3-D, Q étant le nombre de noeuds sur l'élément) aux points nodaux Γ_j de la frontière. En un noeud donné, on a dans le cas 2-D

$$\Delta \dot{u} = \begin{Bmatrix} \Delta \dot{u}_1 \\ \Delta \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad 2.41b$$

Les vitesses de déformations initiales $\dot{\epsilon}_{ij}^a$ sont interpolées dans chaque cellule sous la forme :

$$\dot{\epsilon}^a = \bar{N} \dot{\epsilon}^{a(j)} \quad 2.42$$

dans laquelle \bar{N} est la fonction d'interpolation et $\dot{\epsilon}_i^{a(j)}$ les valeurs des incréments de déformations

anélastiques en un certain nombre de cellules internes. On a $\dot{\epsilon}^a = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11}^a \\ \dot{\epsilon}_{12}^a \\ \dot{\epsilon}_{22}^a \\ \dot{\epsilon}_{33}^a \end{Bmatrix}$.

La matrice des fonctions d'interpolation est de dimension $2 \times 2Q$ en 2-D et $3 \times 3Q$ en 3-D. Pour l'équation de déplacement, les composantes de la solution fondamentale p_{ij}^* peuvent être écrites comme une matrice 2×2 :

$$p^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \quad 2.43$$

Le noyau σ_{ijk}^* intervenant dans l'intégrale de domaine est exprimé sous la forme

$$\hat{\sigma}^* = \begin{bmatrix} \sigma_{111}^* & 2\sigma_{112}^* & \sigma_{122}^* & \sigma_{133}^* \\ \sigma_{211}^* & 2\sigma_{212}^* & \sigma_{222}^* & \sigma_{233}^* \end{bmatrix} \quad 2.44$$

Pour l'équation de contraintes, le noyau de contour P_{ijk}^* et le noyau de domaine σ_{ijkl}^* sont exprimés comme :

$$P^* = \begin{bmatrix} P_{111}^* & P_{112}^* \\ P_{121}^* & P_{122}^* \\ P_{221}^* & P_{222}^* \end{bmatrix} \quad 2.45$$

et

$$\hat{\sigma}^* = \begin{bmatrix} \sigma_{1111}^* & 2\sigma_{1112}^* & \sigma_{1122}^* & \sigma_{1133}^* \\ \sigma_{1211}^* & 2\sigma_{1212}^* & \sigma_{1222}^* & \sigma_{1233}^* \\ \sigma_{2211}^* & 2\sigma_{2212}^* & \sigma_{2222}^* & \sigma_{2233}^* \end{bmatrix} \quad 2.46$$

Avec ces notations, la forme discrétisée de l'équation (2.38) pour un noeud de contour S_i s'écrit :

$$C(S_i)\Delta\dot{u}(S_i) = -\sum_{j=1}^L \left(\int_{\Gamma_j} p^* N d\Gamma \right) \Delta\dot{u}^j + \sum_{j=1}^M \left(\int_{\Omega_j} \hat{\sigma}^* \bar{N} d\Omega \right) \dot{\varepsilon}^{a(j)} \quad 2.47$$

De même l'équation de contraintes est discrétisée de la manière suivante :

$$\dot{\sigma}(s_i) = -\sum_{j=1}^L \left(\int_{\Gamma_j} P^* N d\Gamma \right) \Delta\dot{u}^j + \sum_{j=1}^M \left(\int_{\Omega_j} \hat{\sigma}^* \bar{N} d\Omega \right) \dot{\varepsilon}^{a(j)} + C'(s_i)\dot{\varepsilon}^a(s_i) \quad 2.48$$

La forme discrétisée correspondant à l'équation du vecteur contraintes au contour peut être établie en suivant une procédure similaire pour le point S

$$\dot{t}_j(S_i) = -n_i(S) \sum_{j=1}^L \left(\int_{\Gamma_j} P^* N d\Gamma \right) \Delta \dot{u}^j + n_i(S) \left[\sum_{j=1}^M \left(\int_{\Omega_j} \hat{\sigma}^* \bar{N} d\Omega \right) \dot{\varepsilon}^{a(j)} + \frac{1}{2} C'(s_i) \dot{\varepsilon}^a(s_i) \right] \quad 2.49$$

Noter que (2.47) est aussi valide pour un point intérieur s_i avec $C = I$. Les intégrales dans les équations précédentes peuvent être évaluées de manière analytique dans des cas simples. Cependant, de manière générale, les schémas d'intégration numérique sont plus efficaces, notamment lorsque des éléments courbes sont utilisées.

Les fonctions d'interpolation étant usuellement exprimés dans le système de coordonnées homogènes, il s'avère nécessaire de transformer les coordonnées de l'élément du système intrinsèque au système global cartésien :

$$d\Gamma = |J| d\eta \quad 2.50$$

$$d\Omega = |G| d\zeta d\eta \quad 2.51$$

Afin de calculer les valeurs des jacobiens J , il faut connaître la variation des variables de coordonnées intrinsèques x en fonction de celles du système homogène. Celle ci est donnée par les fonctions d'interpolation précédemment utilisées pour les déplacements, contraintes et déformations anélastiques.

Pour la discrétisation du contour, on a

$$x = Nx^j \quad 2.52$$

Pour la discrétisation du domaine, on a :

$$x = \bar{N}x^j \quad 2.53$$

Les x^j sont les valeurs nodales des coordonnées sur l'élément considéré.

L'équation (2.47) peut alors s'écrire comme suit

$$C^i \Delta \dot{u}^i = - \sum_{j=1}^L \left(\int_{\Gamma_j} p^* N |J| d\eta \right) \Delta \dot{u}^j + \sum_{j=1}^M \left(\int_{\Omega_j} \hat{\sigma}^* \bar{N} |G| d\zeta d\eta \right) \dot{\varepsilon}^{a(j)} \quad 2.54$$

Pour les situations normales pour lesquelles $S_i \neq \Gamma_i$, l'application des procédures d'intégration numérique aux formules ci dessus donne

$$C^i \dot{u}^i = - \sum_{j=1}^L \left(\sum_{k=1}^l w_k (p^* N)_k |J| \right) \Delta \dot{u}^j + \sum_{j=1}^M \left(\sum_{p=1}^r w_p (\hat{\sigma}^* \bar{N})_p |G| \right) \dot{\varepsilon}^{a(j)} \quad 2.55$$

où l est le nombre de points d'intégration sur la surface des éléments et w_k les poids en ces points. r est le nombre de points d'intégration sur les cellules. Les fonctions $(p^* N)$ et $(\hat{\sigma}^* \bar{N})$ doivent être évaluées aux points d'intégration. L'application de (2.55) sur l'ensemble des noeuds du contour conduit à la relation matricielles suivante :

$$\dot{u} = -H \Delta \dot{u} + D \dot{\varepsilon}^a \quad 2.56$$

où H est la même matrice qu'en élasticité linéaire et D une matrice provenant des intégrales prises sur les cellules.

De manière similaire, l'équations de contraintes ainsi que celle du vecteur contraintes au contour peuvent s'écrire comme suit :

$$\dot{\sigma}(s_i) = - \sum_{j=1}^L \left(\sum_{k=1}^l w_k (P^* N)_k |J| \right) \Delta \dot{u}^j + \sum_{j=1}^M \left(\sum_{p=1}^r w_p (\hat{\sigma}^* \bar{N})_p |G| \right) \dot{\varepsilon}^{a(j)} + C^i(s_i) \dot{\varepsilon}^a(s_i) \quad 2.57$$

$$\text{et } \dot{t}(s_i) = -n_i \sum_{j=1}^L \left(\sum_{k=1}^l w_k (P^* N)_k |J| \right) \Delta \dot{u}^j + n_i \sum_{j=1}^M \left(\sum_{p=1}^r w_p (\hat{\sigma}^* \bar{N})_p |G| \right) \dot{\varepsilon}^{a(j)} + \frac{1}{2} C^i \dot{\varepsilon}^a \quad 2.58$$

Comme précédemment, des schémas d'intégration numérique peuvent être utilisés pour l'intégration sur les cellules. Cependant, lorsque le point singulier s_i se situe sur la cellule Ω_j , l'intégration sur le domaine est seulement possible au sens de la valeur principale. Noter également que pour l'équation du vecteur contraintes, les intégrales de contour deviennent hypersingulières

lorsque le point de charge coïncide avec le point de champ ; dans ce cas, elles existent seulement au sens de la valeur principale d'Hadamard.

L'application des équations (2.57) et (2.58) à l'ensemble des noeuds de contour conduit aux relations suivantes :

$$\dot{\sigma} = -H'\Delta\dot{u} + (D' + C')\dot{\varepsilon}^a \quad 2.59$$

et

$$\dot{i} = -\tilde{H}'\Delta\dot{u} + (\tilde{D}' + \tilde{C}')\dot{\varepsilon}^a \quad 2.60$$

où C' et \tilde{C}' sont des matrices représentatives des termes libres, D' et \tilde{D}' sont les matrices dues à la présence des déformations anélastiques. Les matrices H' et \tilde{H}' correspondent aux intégrales de contour en élasticité, de manière similaire à H .

Les équations (2.59) and (2.60) peuvent être réécrites sous la forme

$$\dot{\sigma} = -H'\Delta\dot{u} + D'^*\dot{\varepsilon}^a \quad 2.61$$

et

$$\dot{i} = -\tilde{H}'\Delta\dot{u} + \tilde{D}'^*\dot{\varepsilon}^a \quad 2.62$$

avec $D'^* = D' + C'$ et $\tilde{D}'^* = \tilde{D}' + \tilde{C}'$.

L'incrément de contraintes correspondant est donné par

$$\dot{\sigma}^e = \dot{\sigma} + \dot{\sigma}^a \quad 2.63$$

$$\text{où } \dot{\sigma}^e = -H'\Delta\dot{u} + D'^{**}\dot{\varepsilon}^a \quad 2.64$$

dans laquelle le second terme dans le membre de droite inclut déjà les termes de contraintes initiales, c'est à dire, $(2G\dot{\varepsilon}_{ij}^a + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{ii}^a\delta_{ij})$.

Pour un problème bien posé, un nombre suffisant de données en contraintes et/ou déplacements doit être prescrit. Les inconnues (discontinuité de déplacements) sont alors évaluées à l'aide de (2.56) et (2.62) (cf. la forme matricielle suivante) :

$$\dot{f} = -A\Delta\dot{u} + B\dot{\varepsilon}^a \quad 2.65$$

où la contribution des données prescrites est incluse dans le vecteur \dot{f} .

La multiplication de l'équation (2.65) par A^{-1} donne

$$\Delta \dot{u} = m + K \dot{\varepsilon}^a \quad 2.66a$$

où

$$K = A^{-1}B \quad 2.66b$$

$$m = -A^{-1} \dot{f} \quad 2.66c$$

Substituant (2.66a) dans (2.61), on a

$$\dot{\sigma} = n + F \dot{\varepsilon}^a \quad 2.67a$$

dans laquelle

$$F = D^* - H' K \quad 2.67b$$

$$n = -m H' \quad 2.67c$$

Soulignons que la solution élastique au problème en vitesse est fournit par m et n . L'équation (2.67a) représente la relation entre d'une part les contraintes dans les cellules et les déformations anélastiques correspondant et d'autre part la solution élastique. Cette équation lorsqu'elle est adjointe à (2.65) fournit un moyen de résoudre le problème non linéaire. Ceci fera l'objet du prochain chapitre où un algorithme général de résolution sera proposé

Pour terminer ce chapitre, examinons maintenant deux points techniques de grande importance dans la mise en œuvre numérique de la méthode développée : régularisation des intégrales hypersingulières, schéma d'intégration des cellules internes.

2.3.2 Evaluation de l'intégrale hypersingulière de la frontière

La détermination analytique des intégrales hypersingulières en utilisant la partie finie est réalisée de la manière décrite ci dessous. Ceci correspond à une régularisation de ces intégrales.

Lorsque le point de charge coïncide avec le point de champ, c'est à dire $S \rightarrow Q$, $P_{ijk}^* \rightarrow \frac{1}{r^2}$, présente une singularité, puisque $r = |S - Q|$. Due à cette singularité de P_{ijk}^* , l'intégrale

hypersingulière dans le membre de droite de (2.49) peut être écrite dans le système de coordonnées locales ξ sous la forme suivante :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Delta \dot{u}(\xi)}{(\xi - \xi')^2} d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{\xi' - \varepsilon} \frac{\Delta \dot{u}(\xi)}{(\xi - \xi')^2} d\xi + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\xi' + \varepsilon}^{+1} \frac{\Delta \dot{u}(\xi)}{(\xi - \xi')^2} d\xi + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\xi' - \varepsilon}^{\xi' + \varepsilon} \frac{\Delta \dot{u}(\xi)}{(\xi - \xi')^2} d\xi \quad 2.68$$

Supposons $\Delta \dot{u}(\xi) / \partial \xi$ continu au sens de Hölder en ξ' , c'est à dire,

$$|\Delta \dot{u}^{(1)}(\xi) - \Delta \dot{u}^{(1)}(\xi')| \leq A |\xi - \xi'|^\alpha \quad 2.69$$

avec $0 < \alpha \leq 1$ et A une constante positive.

Comme l'intégrale impropre est évaluée au voisinage de ξ' , l'expression (2.69) implique que

$$|\Delta \dot{u}(\xi) - \Delta \dot{u}(\xi') - \Delta \dot{u}^{(1)}(\xi')(\xi - \xi')| \leq A |\xi - \xi'|^\beta \quad 2.70$$

avec $1 < \beta \leq 2$.

L'équation (2.68) peut être réécrite alors comme

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Delta \dot{u}(\xi)}{(\xi - \xi')^2} d\xi = I_{m1}(\xi') + I_{m2}(\xi') + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\xi' - \varepsilon}^{\xi' + \varepsilon} \frac{\Delta \dot{u}(\xi)}{(\xi - \xi')^2} d\xi \quad 2.71$$

$$\text{où } I_{m1}(\xi') = \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{\xi' - \varepsilon} \frac{[\Delta \dot{u}(\xi) - \Delta \dot{u}(\xi') - \Delta \dot{u}^{(1)}(\xi')(\xi - \xi')]}{(\xi - \xi')^2} d\xi + \Delta \dot{u}(\xi') \int_{-1}^{\xi' - \varepsilon} \frac{1}{(\xi - \xi')^2} d\xi + \Delta \dot{u}^{(1)}(\xi') \int_{-1}^{\xi' - \varepsilon} \frac{1}{(\xi - \xi')} d\xi \right\}, \quad 2.72$$

et

$$I_{m2}(\xi') = \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\xi' + \varepsilon}^{+1} \frac{[\Delta \dot{u}(\xi) - \Delta \dot{u}(\xi') - \Delta \dot{u}^{(1)}(\xi')(\xi - \xi')]}{(\xi - \xi')^2} d\xi + \Delta \dot{u}(\xi') \int_{\xi' + \varepsilon}^{+1} \frac{1}{(\xi - \xi')^2} d\xi + \Delta \dot{u}^{(1)}(\xi') \int_{\xi' + \varepsilon}^{+1} \frac{1}{(\xi - \xi')} d\xi \right\}. \quad 2.73$$

La dernière intégrale dans (2.71) peut s'évaluer comme

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\xi' - \varepsilon}^{\xi' + \varepsilon} \frac{\Delta \dot{u}(\xi)}{(\xi - \xi')^2} d\xi = - \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \frac{2\Delta \dot{u}(\xi')}{\varepsilon} \right\} \quad 2.74$$

Remarquons que la première intégrale (2.72) est régulière, les termes non bornés (seconde et troisième intégrales) peuvent être intégrés de façon analytique pour donner

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta \dot{u}(\xi') \int_{-1}^{\xi' - \varepsilon} \frac{1}{(\xi - \xi')^2} d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta \dot{u}(\xi') \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\Delta \dot{u}(\xi')}{\xi' - 1} \right) \quad 2.75$$

et
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta \dot{u}(\xi') \int_{-1}^{\xi' - \varepsilon} \frac{1}{(\xi - \xi')} d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta \dot{u}(\xi') \ln \varepsilon - \ln(\xi' - 1) \Delta \dot{u}^{(1)}(\xi') \quad 2.76$$

Par substitution de (2.75) et (2.76) dans (2.72), on obtient l'expression suivante :

$$I_{m1}(\xi') = \text{partie finie} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\Delta \dot{u}(\xi') \frac{1}{\varepsilon} + \Delta \dot{u}^{(1)}(\xi') \ln \varepsilon \right] \quad 2.77$$

De manière similaire (2.73) s'écrit

$$I_{m2}(\xi') = \text{partie finie} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\Delta \dot{u}(\xi') \frac{1}{\varepsilon} - \Delta \dot{u}^{(1)}(\xi') \ln \varepsilon \right] \quad 2.78$$

Substituant (2.74), (2.77) et (2.78) dans (2.71), nous avons

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Delta \dot{u}(\xi)}{(\xi - \xi')^2} d\xi = \text{partie finie} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{2\Delta \dot{u}(\xi')}{\varepsilon} \right\} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{2\Delta \dot{u}(\xi')}{\varepsilon} \right\} \quad 2.79$$

Les deux derniers termes s'annulent et l'intégrale existe ainsi au sens de la valeur principale d'Hadamard.

Illustration :

L'application du principe d'Hadamard pour l'évaluation des noyaux de contour hypersinguliers en élastostatique est illustrée sur l'exemple suivant. Considérons une ligne de

discontinuité de longueur $2a$ dans un domaine élastique infini (figure 2.2). Par souci de simplicité, des éléments à un noeud (discontinuité de déplacement constant par élément) ont été utilisés et la partie élastique de l'équation de contraintes au contour (2.14) est considéré. La contrainte au point $(0,0)$ est donnée par :

$$\sigma_{ij}(0,0) = - \int_{-a}^a P_{ijk}^* \Delta u_k dr \quad 2.80a$$

$$\text{où } \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \int_{-a}^a P_{111}^* dr & \int_{-a}^a P_{112}^* dr \\ \int_{-a}^a P_{121}^* dr & \int_{-a}^a P_{122}^* dr \\ \int_{-a}^a P_{211}^* dr & \int_{-a}^a P_{222}^* dr \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{Bmatrix} \quad 2.80b$$

Le noyau P_{ijk}^* est donnée par l'expression (1.2.22). Comme $\frac{\partial r}{\partial n} = 0$,

$$n_1 = \cos(n, x_1) = 0, \quad n_2 = \sin(n, x_2) = 1, \quad 2.81$$

$$r_{,1} = \frac{r_1}{r} = 1, \quad r_{,2} = \frac{r_2}{r} = 0,$$

$$\text{alors } P_{111}^* = P_{122}^* = P_{221}^* = 0, \quad 2.82$$

$$P_{112}^* = P_{121}^* = P_{222}^* = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2}$$

et

$$\sigma_{11} = - \int_{-a}^a \frac{G\Delta u_2}{2\pi(1-\nu)r^2} dr \quad 2.83a$$

L'hypersingularité apparaît quand $r \rightarrow 0$; l'utilisation du principe d'Hadamard conduit à :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= - \int_{-a}^a \frac{G\Delta u_2}{2\pi(1-\nu)r^2} dr = \frac{-G\Delta u_2}{2\pi(1-\nu)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{1}{r^2} dr + \int_{\varepsilon}^{+a} \frac{1}{r^2} dr + \int_{+\varepsilon}^a \frac{1}{r^2} dr \right) \\ &= \frac{-G\Delta u_2}{2\pi(1-\nu)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{-2}{a} + \frac{2}{\varepsilon} - \frac{2}{\varepsilon} \right) = \frac{G}{\pi(1-\nu)a} \Delta u_2 \end{aligned} \quad 2.83b$$

De même, on établit :

$$\sigma_{12} = \frac{G}{\pi(1-\nu)a} \Delta u_1 \quad 2.83c$$

$$\sigma_{22} = \frac{G}{\pi(1-\nu)a} \Delta u_2 \quad 2.83d$$

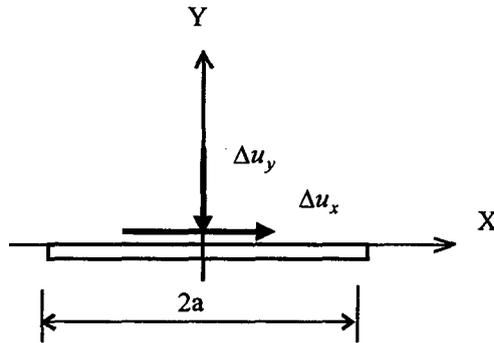


Figure 2.2 Ligne de discontinuité de déplacement dans un domaine infini

Ces résultats sont analogues à ceux présentes par Crouch et Starfield (1983). Ayant déterminé de manière analytique, la partie finie de l'intégrale, une procédure numérique standard peut alors être appliquée pour résoudre le système d'équations algébriques correspondant. Les conditions d'existence des valeurs principales des intégrales imposent des restrictions particulières pour la modélisation des fissures. Afin de satisfaire ces conditions, diverses techniques numériques peuvent être utilisées. Ceci est discuté maintenant.

Si les points de collocation sont choisis aux noeuds des éléments de frontière, l'intégrale en valeur principale de Cauchy (intégrale en partie finie du premier ordre) dans (2.38) nécessite que les composantes des discontinuités de déplacement soient continues au sens de Hölder aux noeuds. Dans ce cas, chaque élément de frontière continu ou discontinu satisfait cette exigence. Cependant pour l'équation du vecteur contraintes (2.40), l'intégrale en valeur principale d'Hadamard (intégrale en partie finie du second ordre) nécessite que les composantes des dérivées des discontinuités de déplacement soient continues au sens de Hölder sur le contour régulier. Dans ce cas, les éléments discontinus, pour lesquels les noeuds sont des points intérieurs de l'élément ont la régularité nécessaire (voir Figure 2.3).

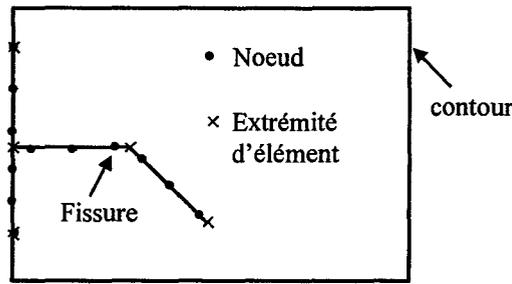


Figure 2.3 : Points de collocation sur la frontière et sur une fissure

Il existe une autre technique, dans laquelle les points de collocation sont distincts des nœuds des éléments de frontière et qui satisfait aussi la condition de continuité d' Hölder des dérivées premières des discontinuités de déplacement aux nœuds. Elle consiste à prendre les points où sont évaluées les vecteurs contraintes à l'intérieur des éléments (Ling Chaoxi et al., 1995) (voir figure 2.4). Noter que dans cette méthode, le nombre de points de collocation ('points du vecteur contraintes') pour l'équation (2.40) est égal au nombre total de nœuds.

Dans la présente étude, des fonctions de forme les plus simples (discontinuité de déplacement constante par élément) ont été utilisées. Avec ces fonctions de forme, les conditions de différentiabilité imposées pour les composantes des discontinuités de déplacement Δu_i , pour assurer l'existence de l'intégrale en partie finie sont automatiquement satisfaites (noeud au milieu de chaque élément).

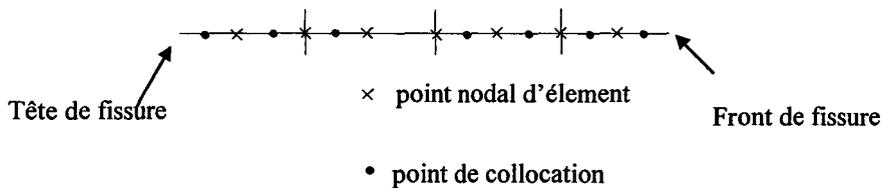


Figure 2.4 : Discrétisation d'une fissure – cas de points de collocation au centre des éléments

2.3.3 Schéma d'intégration pour les éléments de frontière et pour les cellules

Dans cette section, on présente un schéma d'intégration pour l'implémentation numérique des équations décrites précédemment. L'objectif visé est d'évaluer l'applicabilité de la méthode des discontinuités de déplacements aux problèmes non linéaires. Pour des raisons de simplicité, mais sans perdre la généralité de la démarche, des éléments triangulaires à déformations initiales constantes dans les cellules et des éléments rectiligne à discontinuité de déplacements constante (point de collocation située au milieu de chaque élément) sont utilisés. Il est évident que des résultats plus précis pourront être obtenus si des éléments d'ordre supérieur sont considérés.

Les vitesses de déformations anélastiques pour chaque élément triangulaire j , $\varepsilon^{(a)}$ sont de la forme $\left[\begin{matrix} j \dot{\varepsilon}_{11}^a & j \dot{\varepsilon}_{12}^a & j \dot{\varepsilon}_{22}^a & j \dot{\varepsilon}_{33}^a \end{matrix} \right]^T$. En référence à l'implémentation de type Kelvin, un schéma d'intégration semi analytique est utilisée pour l'évaluation des intégrales de domaines intervenant dans (2.12), (2.14) et (2.15). Il est inspiré des travaux de Telles (1983) ; nous en présentons ici un résumé. Afin d'illustrer ce schéma d'intégration, le cas où le noeud singulier coïncide avec le *centroïde* de la cellule sera d'abord étudié. Considérons alors :

$$d = \int_{\Delta\Omega_m} {}^1\hat{\sigma}_{ijkl}^* \dot{\varepsilon}_{kl}^{a(m)} d\Omega = \dot{\varepsilon}_{kl}^{a(m)} \int_{\Delta\Omega_m} {}^1\hat{\sigma}_{ijkl}^* d\Omega \quad 2.84$$

où ${}^1\hat{\sigma}_{ijkl}^*$ est donnée par (2.10).

Afin d'évaluer l'intégrale, on considère un système de coordonnées cylindriques (r) dont l'origine est au point singulier (figure 2.5). Dans ce système de coordonnées le tenseur ${}^1\hat{\sigma}_{ijkl}^*$ peut être représenté par :

$$\frac{1}{r^2} \Phi_{ijkl} \quad 2.85$$

où Φ_{ijkl} est une fonction de ϕ seulement. Pour calculer la valeur principale (au sens d'Hadamard), l'expression (2.84) est alors écrite comme :

$$d = \dot{\varepsilon}_{kl}^{a(m)} \int_{\Delta\Omega_m} {}^1\hat{\sigma}_{ijkl}^* d\Omega = \dot{\varepsilon}_{kl}^{a(m)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R(\phi)} \varphi \frac{1}{r} dr d\phi \quad 2.86$$

dans lequel $R(\phi) = \frac{-2A}{b_\gamma \cos\phi + a_\gamma \sin\phi}$ avec A l'aire du triangle et b_γ, a_γ sont tels que

$$b_\gamma = y_1 - y_2, \quad a_\gamma = x_2 - x_1$$

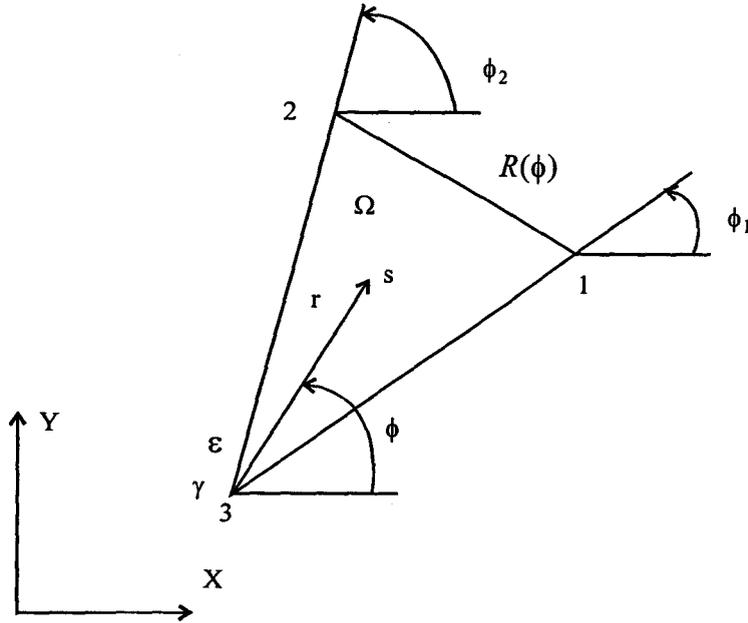


Figure 2.5 Système de coordonnées cylindriques pour l'intégration semi analytique

L'intégration de (2.86) par rapport à r donne

$$d = \dot{\varepsilon}_{kl}^{a(m)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \phi \left\{ \ln \left(\frac{-2A}{b_\gamma \cos\phi + a_\gamma \sin\phi} \right) - \ln(\varepsilon) \right\} d\phi \quad 2.87$$

Considérons d'abord la partie suivante de l'intégrale

$$\omega = - \int_{\phi_1}^{\phi_2} \phi \ln(\varepsilon) d\phi. \quad 2.88$$

Noter que si on modifie les bornes d'intégration de (2.88) pour inclure la contribution de toutes les cellules adjacentes connectée à un point intérieur γ , on vérifie, grâce aux propriétés de Φ_{ijkl} que

$$\omega = - \ln(\varepsilon) \int_0^{2\pi} \phi d\phi = 0. \quad 2.89$$

De même s'il s'agit d'un point γ sur un contour régulier, alors les bornes d'intégration dans (2.88) doivent être modifiées pour inclure les cellules adjacentes connectées au point du contour. A nouveau, grâce à la propriété intrinsèque de φ_{ijkl} , on obtient le même résultat

$$\omega = -\ln(\varepsilon) \int_0^{\pi} \varphi d\phi = 0 \quad 2.90$$

Ainsi le terme singulier s'annule et le reste de l'expression de d peut s'écrire

$$d = \varepsilon_{kl}^{(\alpha(m))} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \varphi \ln \left(\frac{-2A}{b_\gamma \cos \phi + a_\gamma \sin \phi} \right) d\phi \quad 2.91$$

L'intégration par rapport à ϕ ne présente pas de difficulté. Elle s'effectue par simple changement de variable $\phi = \frac{1}{2} [\eta(\phi_2 - \phi_1) + (\phi_2 + \phi_1)]$ où η est défini sur l'intervalle $[-1, 1]$.

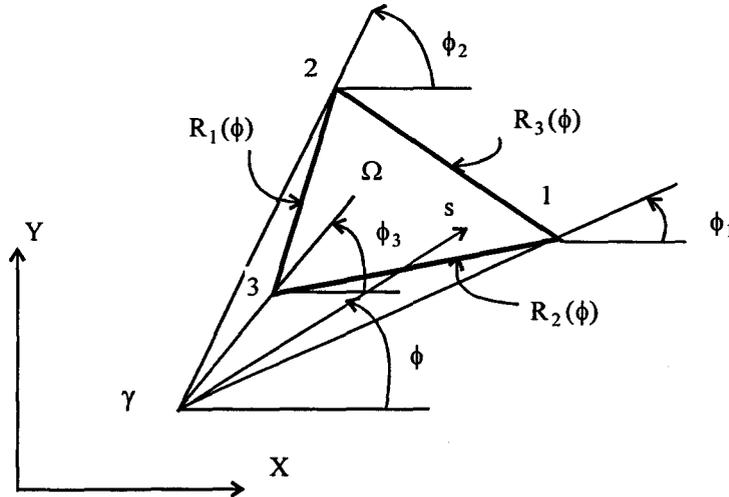


Figure 2.6 Schéma d'intégration semi analytique : cas général

Pour le cas général où le point singulier γ ne coïncide avec aucun des "centroïdes" des cellules, la même procédure peut être utilisée. Puisque les intégrales sont toujours régulières, un schéma d'intégration numérique peut être utilisé dans ce cas. Néanmoins, la procédure d'intégration semi analytique est recommandée afin de diminuer les temps de calcul et d'avoir une bonne précision. En référence à la figure (2.6) l'intégrale peut être exprimée comme :

$$d = \dot{\varepsilon}_{kl}^{a(m)} \left\{ \int_{\phi_1}^{\phi_3} \int_{R_2(\phi)}^{R_3(\phi)} \phi \frac{1}{r} dr d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_2} \int_{R_1(\phi)}^{R_3(\phi)} \phi \frac{1}{r} dr d\phi \right\} \quad 2.92$$

Les formules de quadrature de Gauss à une dimension (5 points d'intégration sont suffisants) peuvent être utilisées pour évaluer (2.92).

Quelques précisions :

Dans cette section, la discrétisation numérique de la MDD étendue aux milieux non linéaires a été décrite. L'hypersingularité de l'équation de contraintes au contour a été traitée en utilisant le principe d'Hadamard, ce qui permet d'explicitier les formes discrétisées des équations.

Si nous spécifions les valeurs des composantes du vecteur contraintes pour chaque élément de contour (fissures comprises), alors les composantes des discontinuités de déplacement Δu_k^i peuvent être obtenues à l'aide des équations établies (2.65 et 2.66a). Les contraintes et déplacements en des points choisis dans le milieu peuvent être calculés en utilisant (2.54) et (2.57).

Noter que les formulations qui viennent d'être présentées sont également applicables aux problèmes de fissures dans un solide infini ($\Gamma = \Gamma_c$) ; dans ce cas, la discrétisation de contour n'est pas exigée. Ces formulations peuvent être aussi utilisées pour résoudre les problèmes intérieur (milieu fini) ou extérieur (problème de cavité) (voir figure 2.7). Dans ces cas les discontinuités de déplacement le long du contour Γ_s sont fictives.

Soulignons enfin que le code de calcul développé pour résoudre les problèmes énumérés utilisent la même convention que Crouch et Starfield (1983) : le contour est parcouru de manière à ce que la normale extérieure pointe en dehors de la région étudiée. Cette convention est illustrée sur les exemples suivants (Figure 2.7).

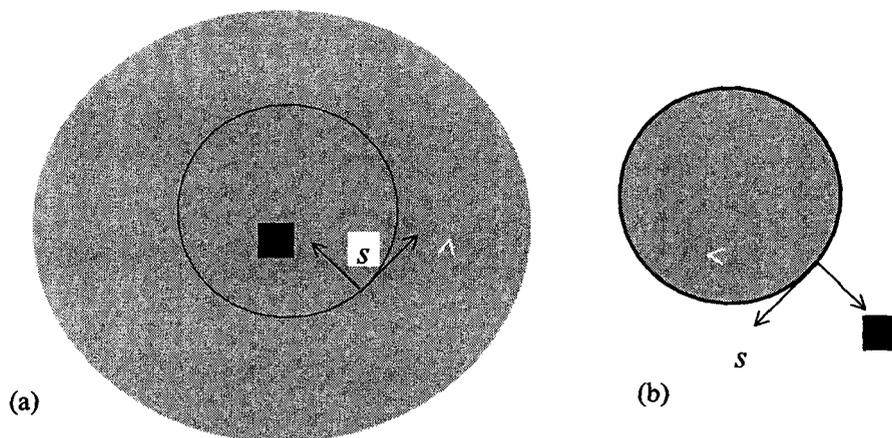


Figure 2.7 Convention pour le parcours du contour (a) : problème de cavité ; (b) : Disque solide

CHAPITRE 3 :

MISE EN OEUVRE NUMÉRIQUE DE LA MDD POUR LES LOIS ELASTOPLASTIQUES ET APPLICATIONS

Ce chapitre est consacré à l'implantation numérique de la MDD dans le cas des lois élastoplastiques. La forme incrémentale de ces lois est d'abord brièvement résumée puis nous décrivons la mise en œuvre des algorithmes précédemment élaborés. Nous évaluons les performances du code développé sur un certain nombre d'exemples test. Les comparaisons avec les données d'expérience (lorsque celles ci sont disponibles) ou avec les calculs Eléments Finis confirment la pertinence de la méthode. Le chapitre s'achève sur l'étude d'un tunnel profond creusé dans un massif rocheux : on montre bien dans ce cas l'avantage que peut présenter la MDD sur d'autres méthodes numériques (ex : Méthode des Eléments Finis).

Dans ce chapitre les techniques de mise en œuvre de la MDD en milieu élastoplastique sont décrites. Un algorithme de résolution adapté à l'écriture incrémentale des lois de comportement est présenté et appliqué sur plusieurs cas de structures.

3.1 Solution de la MDD pour les lois de comportement non linéaires

Le schéma implanté est essentiellement le même qu'en élément fini pour les problèmes de plasticité incrémentale [55]. Pour un problème donné, les déplacements instantanés, les déformations et les contraintes sont supposés connus et on recherche leur variation en réponse à un incrément de charge. On dispose ainsi d'un nouvel état de départ pour un incrément de charge ultérieur, ce qui permet de déterminer la réponse du matériau pour toute l'histoire du chargement considéré.

La représentation générale du code d'élément de frontière pour la résolution des problèmes non linéaires est donnée sur la figure 3.1. Rappelons que les inconnues du problème sont les discontinuités de déplacement sur le contour et les déformations initiales dans les zones où apparaissent les non linéarités.

Notons Δq la variation d'une quantité q pour un incrément de charge donné. Supposons l'application d'une charge Δf ; les équations (2.65) et (2.64) du chapitre 2 peuvent s'écrire respectivement comme :

$$\Delta f = -A\Delta[u] + B\Delta\varepsilon^a \quad 3.1$$

$$\Delta\sigma^e = -\bar{H}'\Delta u + \bar{D}'\Delta\varepsilon^a \quad 3.2$$

où $\Delta[u]$ désigne ici l'incrément de discontinuités de déplacement correspondant à Δf , $\Delta\sigma^e$ est la contrainte élastique compatible avec les déformations initiales $\Delta\varepsilon^a$ issues de la loi de comportement non linéaire considérée.

Remarquons que les équations (3.1) et (3.2) associées à la MDD ne sont pas non linéaires. Les non linéarités du problème proviennent de la loi de comportement du milieu.

Comme de manière générale les déformations initiales $\Delta\varepsilon^a$, appropriées pour un incrément de charge Δf donné, sont à priori inconnues dans le domaine, une procédure itérative doit être introduite pour les déterminer. Celle ci se déroule de la manière suivante. Pour un Δf donné, on détermine grâce à la loi de comportement l'incrément de déformations initiales ; celui ci est alors appliqué dans le domaine pour évaluer la redistribution des contraintes. Ceci génère un nouvel incrément de déformations initiales à redistribuer et ainsi de suite jusqu'à ce que la contribution du dernier incrément puisse être négligée. Notons qu'un tel schéma itératif est basé sur le fait que les équations de contour (3.1) et (3.2) sont linéaires. Ainsi, une fois terminé le processus, les équations d'équilibre et les relations de comportement sont simultanément satisfaites dans tout le domaine.

Soulignons également que le déroulement du schéma itératif décrit génère les séquences de pseudo incréments suivantes :

$$\left\{ \delta u_k \right\}_{k=0}^k, \left\{ \delta \sigma_k^e \right\}_{k=0}^k \text{ et } \left\{ \delta \varepsilon_k^a \right\}_{k=0}^k.$$

La limite de ces séquences lorsque $k \rightarrow \infty$ sont respectivement Δu , $\Delta \sigma^e$ et $\Delta \varepsilon^a$. En pratique cependant, le processus d'itération s'arrête à un nombre fini d'étapes quand la condition de convergence est satisfaite. Puisque les équations de frontière sont linéaires, les sommes partielles de ces séquences à la k^{e} itération satisfont

$$\left(\sum_{k=0}^k \delta \sigma_k^e \right) = -\bar{H} \left(\sum_{k=0}^k \delta u_k \right) + \bar{D} \left(\sum_{k=0}^k \delta \varepsilon_k^a \right) \quad 3.3$$

$$\Delta f = -A \left(\sum_{k=0}^k \delta u_k \right) + B \left(\sum_{k=0}^k \delta \varepsilon_k^a \right) \quad 3.4$$

Ceci assure que les équations d'équilibre et les relations de comportement non linéaire sont simultanément satisfaites dans tout le domaine.

L'algorithme implanté lors de cette étude est résumé ci dessous :

Génération de données (définissant le contour et les éléments du domaine)

Initialisation : Définitions d'éventuelles précontraintes σ_0 + Evaluation des déformations initiales et des déformations totales associées à σ_0

Evaluer les matrices du système (par intégration des noyaux de contour)

Boucle sur les incréments de contraintes

Enregistrement de l'incrément de contraintes Δf

Définir l'incrément de déformations initiales $\delta\varepsilon_0^a$

Résolution du système d'équations

pour générer l'incrément de discontinuité de déplacement initiale $\delta u_0 = -A^{-1}\Delta f$

Démarrer la boucle d'itération avec $k = 1, 2, \dots$

Evaluer l'incrément de contraintes en supposant un comportement élastique aux points intérieurs estimés (comme région des non linéarité)

$$\delta\sigma_k^e = -\bar{H}\delta u_{k-1} + \bar{D}\delta\varepsilon_{k-1}^a$$

Calculer l'incrément de contraintes corrigé $\delta\sigma_k$ ainsi que l'incrément de déformations initiales $\delta\varepsilon_k^a$

Appliquer la loi de comportement

Accumuler les contraintes et les déformations initiales

Vérifier la convergence

comparer $\delta\varepsilon_k^a$ calculé avec sa valeur cumulée obtenue lors de l'incrément de charge courant, afin de conclure si la convergence est assurée ; sortir alors de la boucle.

Appliquer en retour l'incrément de déformations initiales $\delta\varepsilon_k^a$ au contour puis calculer l'incrément de discontinuité de déplacement $\delta u_k = A^{-1}B\delta\varepsilon_k^a$

Poursuivre l'itération

Enregistrer les résultats

Appliquer l'incrément de charge suivant

FIN

Notons qu'une fois la convergence obtenue pour tous les points choisis, les contraintes et l'incrément de déformations initiales sont accumulés ; afin d'éviter la propagation des erreurs, ces valeurs sont utilisées comme point de départ pour le prochain incrément de charge. La procédure adoptée est schématisée sur la figure 3.1

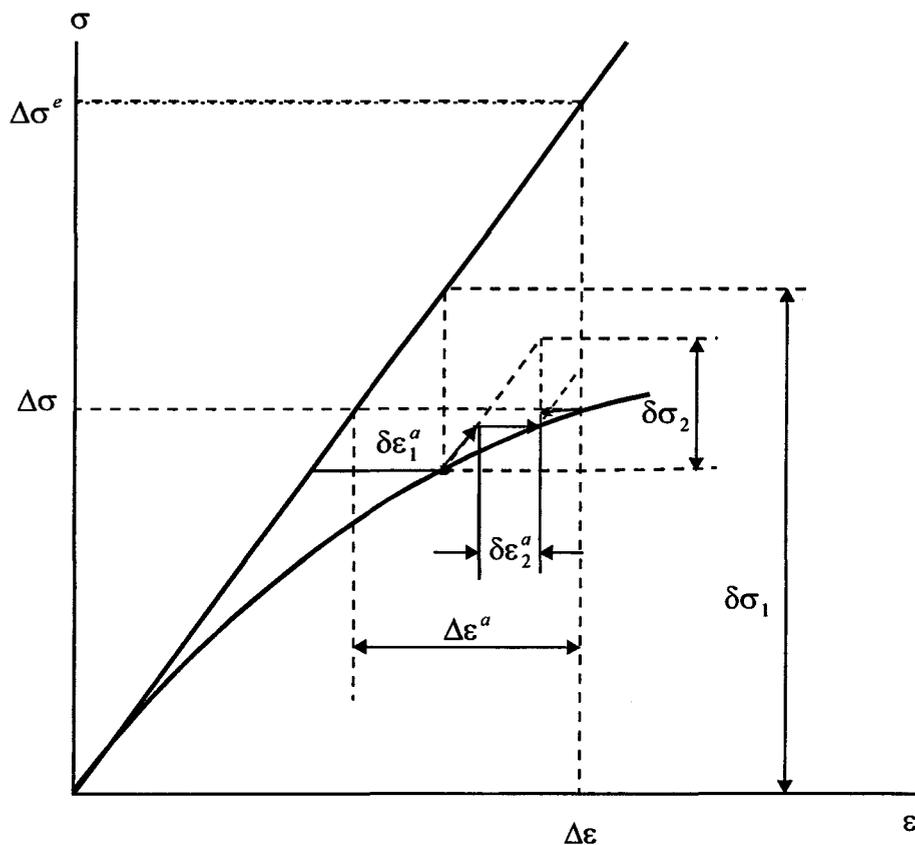


Figure 3.1 Schéma itératif associé aux incréments de déformation initiales

3.2 Application de la MDD aux problèmes élastoplastiques 2-D

Dans ce paragraphe, on présente brièvement l'essentiel de la théorie classique de la plasticité incrémentale. La présentation est réduite au strict minimum, les modèles proprement dits étant un peu décrits en annexe A1. Pour une présentation plus détaillée de la plasticité, on pourra consulter des ouvrages spécialisés (p.ex. Hill, 1950 ; Salençon, 1989). Quatre modèles de comportement, reliés aux différents critères de charge suivants sont implantés : critères de Tresca et Von Mises pour la plasticité des métaux, critères de Mohr-Coulomb et Drucker-Prager pour les géomatériaux (roches, bétons, sols).

3.2.1 Equations de l'élastoplasticité classique

Sous l'hypothèse de petites perturbations et de transformations isothermes, on adopte la règle de partition des déformations totales en une partie élastique réversible et une autre irréversible : $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$. ε^p est la déformation plastique. La formulation des lois de comportement élastoplastique se fait généralement dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. Elle nécessite le choix d'un potentiel d'énergie ainsi que celui d'une fonction seuil et d'un pseudo potentiel de dissipation.

a) Potentiel d'énergie : $\psi = \psi(\varepsilon - \varepsilon^p, V_k) = \psi(\varepsilon^e, V_k)$

Les V_k sont des paramètres d'écrouissage. Les lois d'état déduites de ce potentiel s'écrivent :

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} \quad (3.5)$$

et les forces thermodynamiques associées aux variables internes

$$A_k = \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \quad , \quad \sigma = - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^p} \quad (3.6)$$

La non négativité de la dissipation intrinsèque se traduit alors par :

$$\sigma : \dot{\varepsilon}^p - A_k \cdot \dot{V}_k \geq 0 \quad (3.7)$$

b) Fonction seuil (ou de charge) et loi d'évolution de la déformation plastique

Le domaine d'élasticité est déterminé par une fonction seuil $f(\sigma_{ij}, \kappa) = 0$

κ est un paramètre, fonction d'un paramètre d'écrouissage donnant la position instantanée de la surface de charge dans l'espace des contraintes.

Dans le cas des matériaux dits standard, le pseudo potentiel de dissipation coïncide avec la fonction de charge¹. La loi d'évolution de la déformation plastique se résume alors par :

¹ Pour les lois non associées, il est nécessaire d'adjoindre un pseudo potentiel de dissipation g donnant l'évolution des déformations plastiques.

$$\begin{cases} f(\sigma, \kappa) < 0, & \text{alors } \dot{\varepsilon}^p = 0 \\ f(\sigma, \kappa) = 0 & \text{et } \dot{f}(\sigma, \kappa) < 0, & \text{alors } \dot{\varepsilon}^p = 0 \\ f(\sigma, \kappa) = 0 & \text{et } \dot{f}(\sigma, \kappa) = 0, & \text{alors } \dot{\varepsilon}^p \neq 0 \end{cases} \quad 3.8$$

Dans le dernier cas, l'évolution de ε^p est donnée par la loi d'écoulement (hypothèse de normalité)

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\partial f(\sigma, \kappa)}{\partial \sigma} \quad 3.9$$

Le multiplicateur plastique λ est donné par la condition de consistance $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = 0$

Ecriture incrémentale des lois élastoplastiques

Les lois de comportement non linéaires se formulent généralement de manière incrémentale. En plasticité incrémentale on a :

$$\dot{\sigma} = C^{ep} \dot{\varepsilon} \text{ soit } d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{ij} \quad 3.10$$

avec la matrice élastoplastique tangente qui peut s'écrire $C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl} - \frac{1}{\gamma} C_{ijmn} a_{mn} a_{op} C_{opkl}$. C est la matrice

d'élasticité du matériau ; on a posé a tel que $a^T = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{33}} \right\}$. γ est donné par .

$$\gamma = a_{ij} C_{ijkl} a_{kl} + \frac{dk}{d\kappa} \sigma_{ij} a_{ij} \text{ (voir annexe A1).}$$

Remarques :

Les fonctions de charge des lois de comportement élastoplastiques retenues (Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager) ainsi que les a^T correspondants sont également présentés en annexe A1.

3.2.2 Implantation numérique des lois élastoplastiques

Nous présentons ici une démarche unifiée pour l'implantation numérique des lois de comportement élastoplastique pour des problèmes plans. La formulation adoptée est de type déformations initiales.

Lors de l'application d'un incrément de contraintes, un ou plusieurs éléments intérieurs peuvent dépasser le seuil d'écoulement. Les contraintes et déformations dans la zone plastique doivent être ajustées de manière à satisfaire à la fois la fonction de charge et la loi de comportement.

La procédure d'intégration des lois de comportement élastoplastiques est décrite ci dessous :

Etape a) Du programme principal, on obtient σ_{k-1} , ε_{k-1}^a and $\delta\sigma_k^e$.

Faire une boucle sur les point intérieurs.

Etape b) Cumuler la contrainte totale pour chaque élément en supposant un comportement élastique linéaire : $\sigma_k^e = \sigma_{k-1} + \delta\sigma_k^e$

Etape c) Vérifier si $F(\sigma_k^e, \kappa_{k-1}) < 0$ alors le point intérieur est dans le domaine élastique ; passer alors à l'élément suivant

Sinon trouver la valeur de R tel que $f(\sigma_{k-1} + (1-R)\delta\sigma_k^e) - k(\kappa_{k-1}) = 0$

Si l'écoulement prend place dans le dernier élément, alors poser $R=1$

$$\text{sinon } R = \frac{f(\sigma_k^e) - k(\kappa_{k-1})}{f(\sigma_k^e) - f(\sigma_{k-1})}$$

Calculer l'état de contrainte pour l'élément plastifié $\sigma_{k-1} + (1-R)\delta\sigma_k^e$

Etape d) Calculer $a_k = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$ et $d\lambda_k = \frac{a_k(R\delta\sigma_k^e)}{a_k^T D_e a_k + H}$

Calculer l'incrément de déformations initiales à partir de $\delta\varepsilon_k^a = d\lambda_k a_k$

Evaluer $\sigma_k = \sigma_{k-1} + \delta\sigma_k^e - d\lambda_k D_e$

Passer au point intérieur suivant

Reprendre le processus avec σ_k et $\delta\varepsilon_k^a$.

Les différentes étapes ci dessus sont illustrées à la figure 3.2

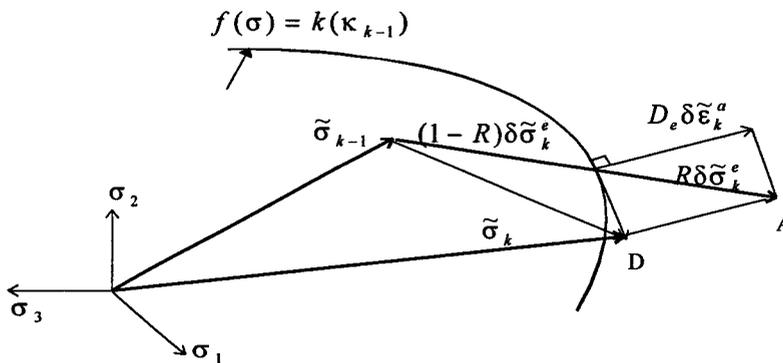


Figure 3.2 Représentation vectorielle des contraintes et déformations initiales incrémentales

3.3 Exemples d'application numérique des modèles élastoplastiques

Dans le présent paragraphe, diverses applications numériques concernant des problèmes élastoplastiques 2-D sont étudiées en s'appuyant sur les algorithmes de résolution précédemment présentés. Le programme de calcul a été conçu de manière suffisamment générale pour résoudre aussi bien des problèmes de déformation plane que de contrainte plane. Les 4 lois de comportement présentées au 3.2 sont introduites dans le code. Pour la plupart des applications effectuées, les résultats obtenus ont été comparés à ceux fournis par le code de calcul par Eléments Finis CESAR-LCPC. L'ensemble des calculs a été effectué sur une station HP-9000.

3.3.1 Etude d'un cylindre épais creux soumis à une pression interne (figure 3.3)

La première application numérique est un cylindre épais creux soumis à une pression interne croissante. Les diamètres intérieur et extérieur du cylindre creux valent respectivement 200 mm et 400 mm). Le but de ce premier calcul est de tester la validité du code développé sur un cas où les conditions aux limites sont relativement simples.

Le chargement est appliqué suivant une séquence incrémentale de 100 MPa à 180 MPa . L'incrément de charge est choisi inférieur à 1 MPa . Des conditions de déformation plane sont considérées suivant l'axe du cylindre.

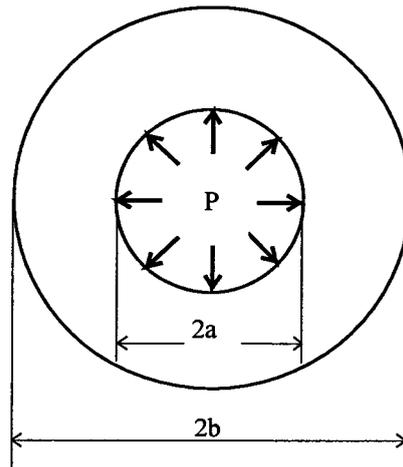


Figure 3.3 Cylindre creux sous pression interne

La discrétisation des éléments de contour ainsi que du domaine intérieur est illustrée sur la figure 3.4. Des éléments de frontière à discontinuité de déplacement constante, et des cellules internes triangulaires à déformations initiales constantes sont utilisés. Puisque le problème possède une symétrie radiale, seuls les éléments et cellules se situant dans le premier quadrant sont considérés dans l'analyse. Les influences de chaque élément dans le premier quadrant et celles qui en sont déduites pour ses images dans les trois autres quadrants sont additionnées pour avoir les influences complètes. En conséquence, la taille du système d'équations finales à résoudre a été réduite de 4.

Le maillage éléments finis correspondant à ce problème est montré sur la figure 3.5; des éléments quadratiques, isoparamétriques avec huit points d'intégration sont utilisés. Les paramètres du modèle (ici le modèle basé sur le critère de Von Mises) sont les suivants :

Module d' Young $E = 210\,000\text{ MPa}$; Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$

Contrainte de seuil d'écoulement uniaxial $\sigma_y = 240\text{ MPa}$;

La distribution de contraintes circonférentielles pour une valeur spécifique de la pression interne ($p = 120\text{ MPa}$ engendrant une zone plastique) est montrée sur les figures 3.6. Le comportement élastoplastique est utilisé avec ou sans écrouissage (plasticité parfaite $H'=0$). Dans le cas du modèle avec écrouissage, le module d'écrouissage utilisé vaut $H' = 84000\text{ MPa}$. Les chemins de sollicitations sont identiques dans les deux calculs. On constate que l'ensemble des résultats obtenus est en accord avec ceux fournis par le code de calcul par éléments finis (voir détails sur les figures 3.6).

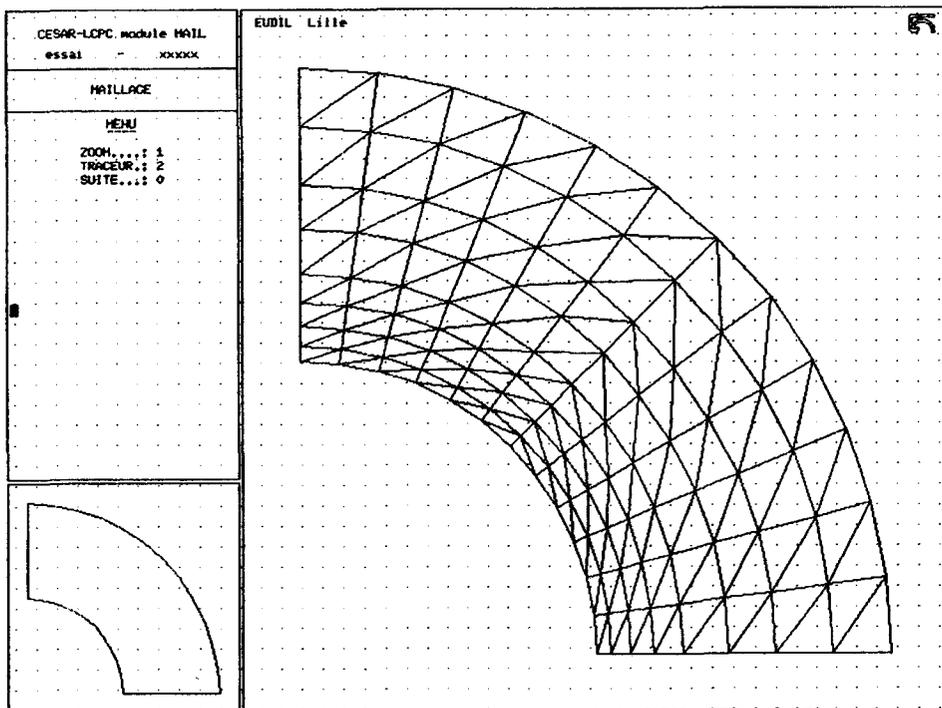


Figure 3.4. Eléments de frontière et cellules internes de discrétisation pour le cylindre creux

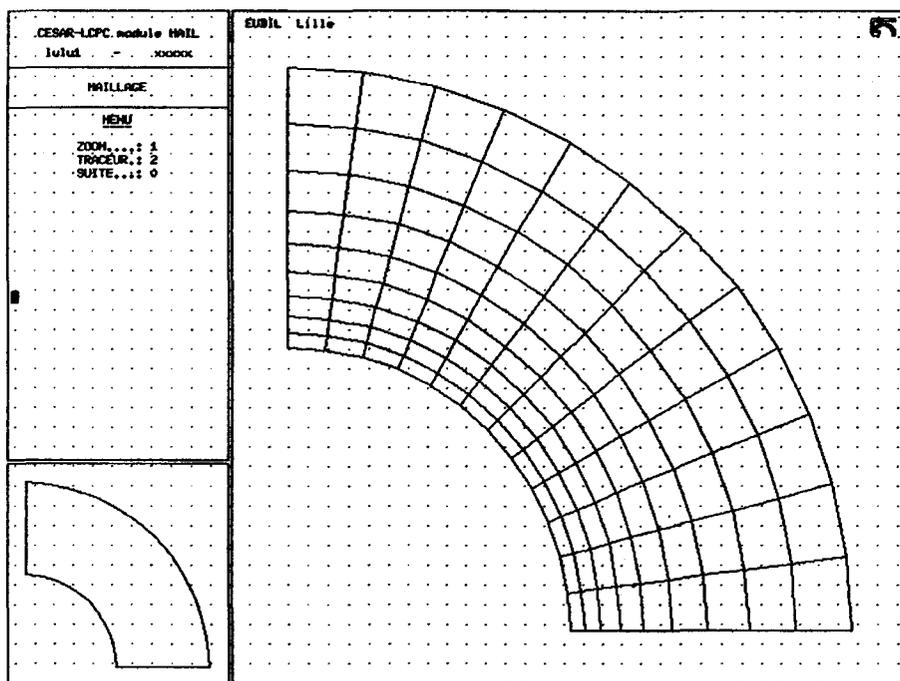


Figure 3.5 Maillage d'éléments finis quadratiques isoparamétriques pour le cylindre creux

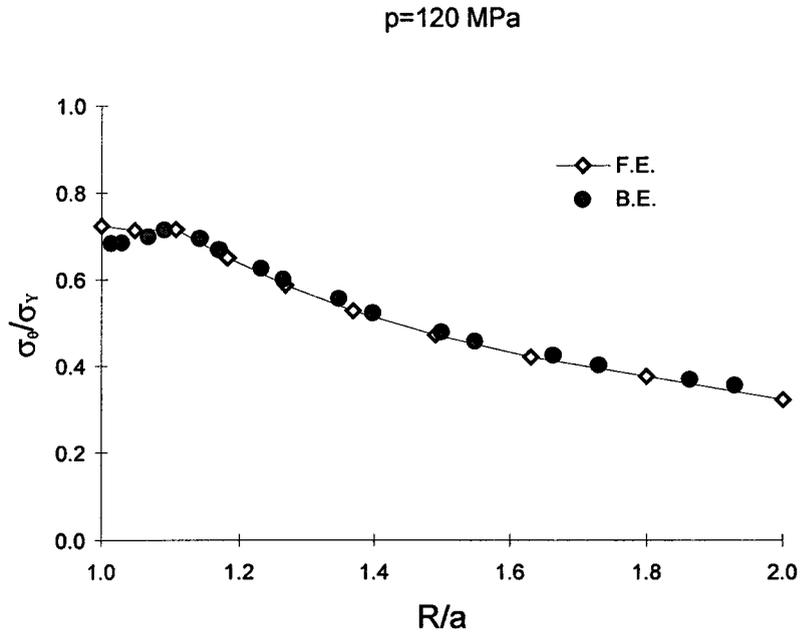


Figure 3.6 (a) Matériau élastoplastique parfait : distribution de contraintes circonférentielles pour $p = 120$ MPa

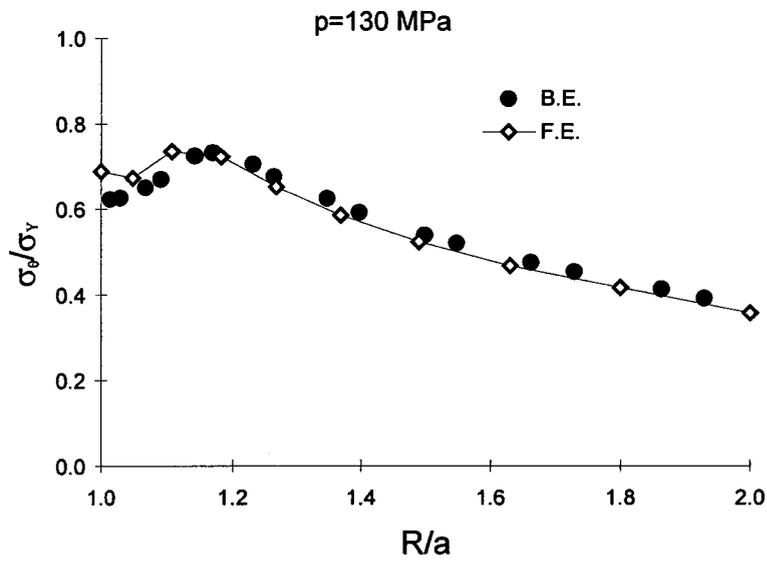


Figure 3.6 (b) Matériau élastoplastique parfait : distribution de contraintes circonférentielles pour $p = 130$ MPa

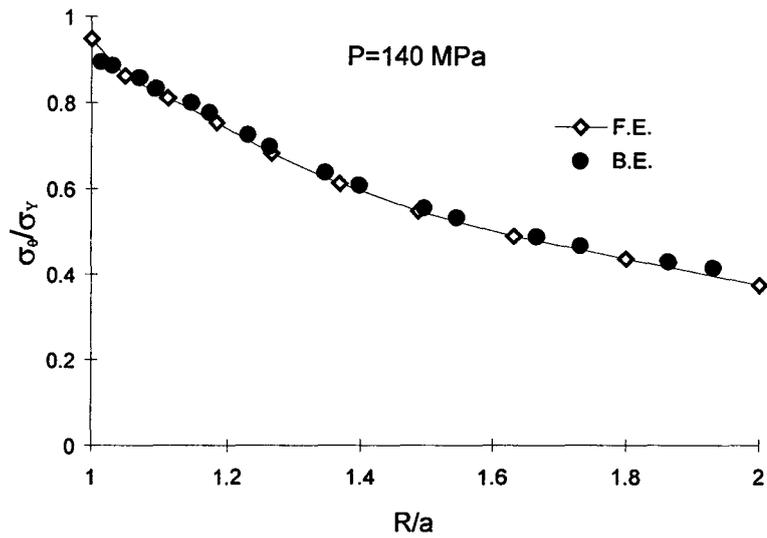


Figure 3.6 (c) Matériau élastoplastique avec écrouissage : distribution de contraintes circonférentielles pour $p = 140 \text{ MPa}$

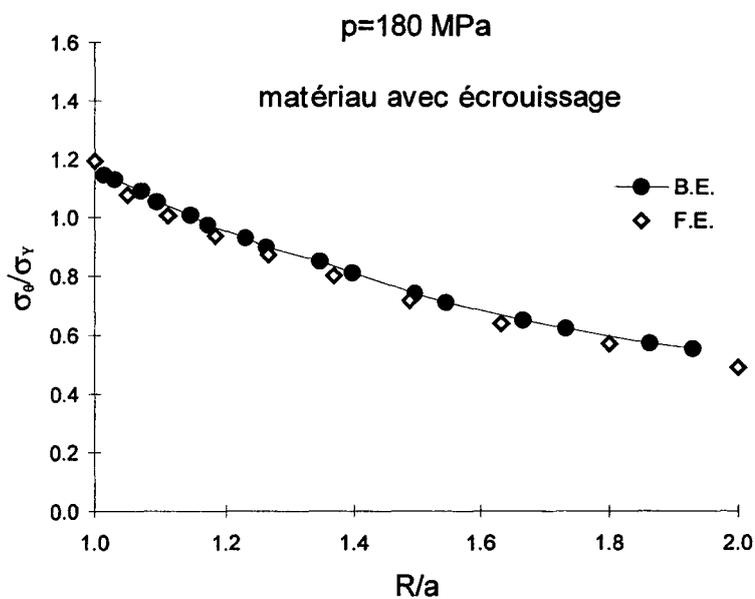


Figure 3.6 (d) Matériau élastoplastique avec écrouissage : distribution de contraintes circonférentielles pour $p = 180 \text{ MPa}$

3.3.2 Plaque perforée sollicitée en traction (figure 3.7)

Ce problème (figure 3.7) a été expérimentalement étudié par Theocaris et Marketos (1964). Les discrétisations des éléments de contour ainsi que du domaine intérieur sont illustrées sur les figures 3.8 (Méthode de frontière) et 3.9 (maillage Eléments Finis). Notons à nouveau que seules les régions où sont attendues (par estimation) des déformations élastoplastiques doivent être discrétisées. Ces zones peuvent être estimées simplement grâce à une analyse de la géométrie et du chargement dans le problème posé.

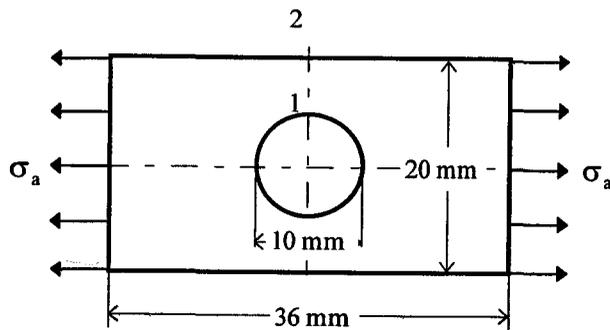


Figure 3.7 Plaque en aluminium perforée

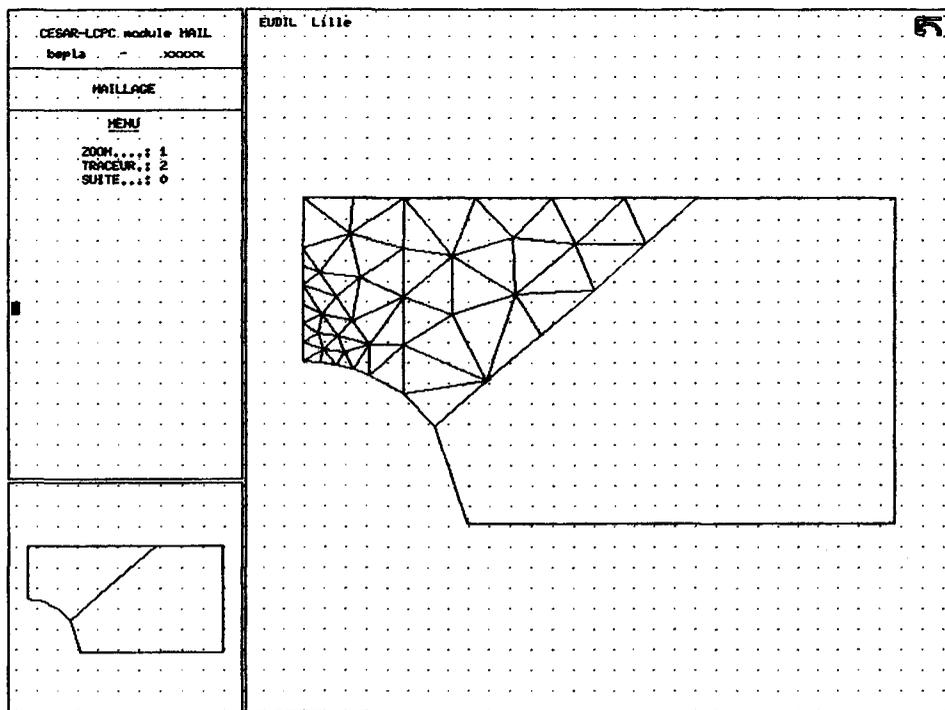


Figure 3.8 Plaque en aluminium perforée. Eléments de contour et cellules internes

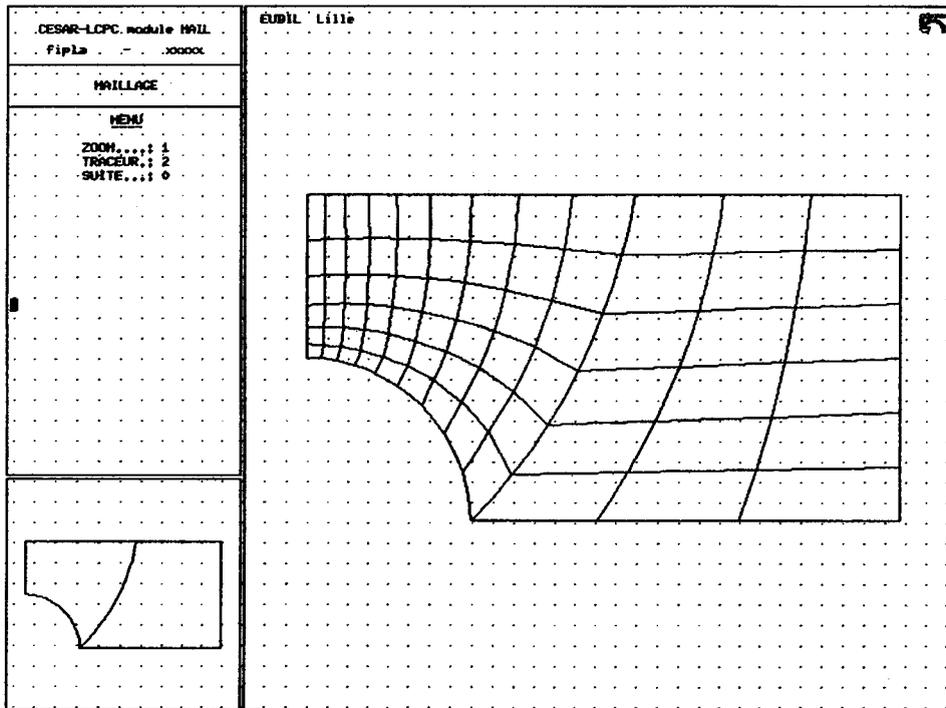


Figure 3.9 Plaque perforée en aluminium : maillage en éléments finis isoparamétriques

Les paramètres matériau utilisés dans les calculs sont les suivants :

$$E = 70\,000 \text{ MPa} ; \nu = 0.2 ; \sigma_Y = 243 \text{ MPa}, \quad H' = 2250 \text{ MPa} .$$

Les contraintes calculées à la racine de la plaque perforée, à l'aide de la MDD pour une charge $\sigma_a = 110 \text{ MPa}$, située juste avant la rupture sont représentées sur la figure 3.10. Elles sont comparées aux données expérimentales de Theocaris et Marketos (1964) ainsi qu'aux résultats de l'analyse Eléments Finis du même problème à l'aide du code CESAR-LCPC.. Bien que les contraintes diffèrent des données de l'expérience au voisinage du trou, les résultats obtenus sont en très bon accord avec le calcul Eléments Finis.

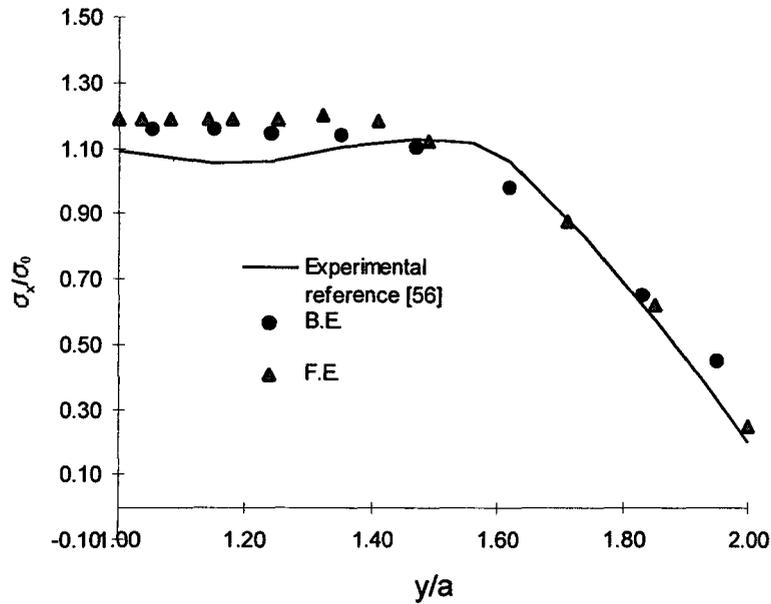


Figure 3.10 Contraintes normalisées σ_{xx} / σ_0 à la racine de la plaque

3.3.3 Tunnel profond circulaire

Cet exemple est présenté afin de souligner l'un des avantages de la méthode de frontière sur la Méthode des Eléments Finis, à savoir la résolution de problèmes en milieu infini. Le domaine infini est supposé initialement soumis à un champ de contraintes uniforme de 10 MPa vertical et de 4 MPa suivant la direction horizontale. Les charges extérieures sont appliquées sur la surface de l'ouverture et augmentées progressivement jusqu'aux contraintes préexistantes (in situ) puis on décharge complètement la frontière de la cavité. Des conditions de déformation plane sont adoptées ainsi qu'un modèle de *Mohr-Coulomb* simulé à l'aide du critère de Drucker-Prager. Le matériau rocheux est supposé parfaitement plastique avec :

$$E = 5000 \text{ MPa} ; \nu = 0.2 ; \text{cohésion } c' = 2.8 \text{ MPa} \text{ et angle de frottement interne } \phi = 30^\circ .$$

La discrétisation utilisée est indiquée sur la figure 3.11.

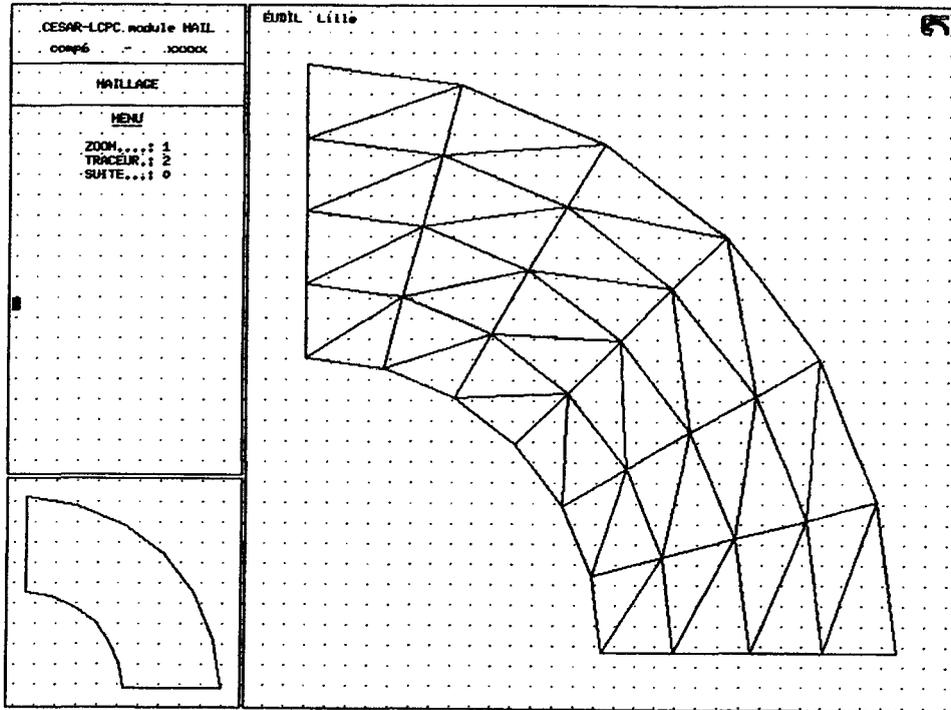


Figure 3.11 Eléments de frontière et cellules internes (aucun élément de frontière n'est requis sur les axes de symétrie)

Les contraintes le long de la section horizontale à la fin du processus de relaxation sont représentées sur la figure 3.12 et comparées aux résultats du calcul MEF. Les résultats sont assez concordants. La différence entre les deux valeurs de σ_y est probablement due à la manière dont les conditions aux limites sont imposées à la frontière extérieure. En effet dans l'analyse de la MEF, il est nécessaire de définir un contour extérieur du milieu alors que celui-ci n'est pas exigé dans la MDD. Dans le présent maillage Eléments finis, un cercle extérieur de rayon $10 R$ (R étant le rayon de la cavité) est considéré, les conditions qui y sont imposées étant celles de déplacements nuls. Sur cet exemple, la simplicité de mise en œuvre du calcul et la précision des résultats obtenus confirment l'intérêt des méthodes de frontière pour les comportements non linéaires.

Conclusion :

Les applications effectuées dans ce chapitre valident le schéma d'implantation numérique retenu et confirment la pertinence de la MDD pour l'analyse des contraintes dans les structures élastoplastiques généralement réservée à la méthode des éléments finis. Il est clair que le nombre d'applications présentées est encore réduit pour valider complètement le code. En tout état de cause, l'outil de calcul numérique (entièrement développé au cours de cette thèse) étant opérationnel, d'autres

comparaisons plus fouillées (ex : composantes des champs de déplacements, de contraintes) sur différents matériaux doivent être menées sur la base des modèles implantés. L'extension aux lois élastoplastiques non associées peut être envisagée dans un avenir proche, ce qui permettra d'aborder certains problèmes relevant du génie civil.

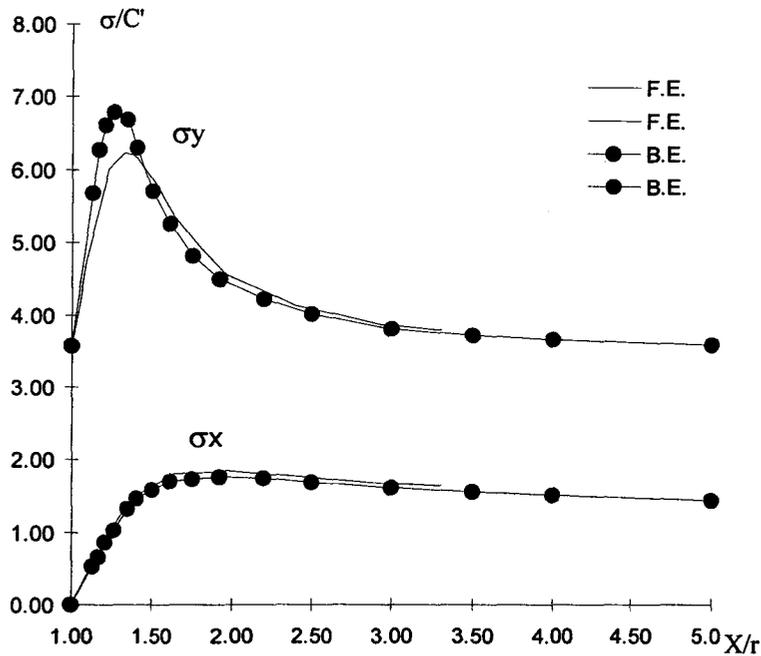


Figure 3.12 Distribution des contraintes le long de la section horizontale à la fin du processus de relaxation

CHAPITRE 4 :

APPLICATIONS A QUELQUES PROBLEMES D'ENDOMMAGEMENT ET DE MECANIQUE NON LINEAIRE DE LA RUPTURE

L'étude numérique complète des problèmes d'endommagement et de fissuration dans les matériaux du Génie Civil est encore un domaine de recherche nécessitant des efforts de recherche importants. A ce premier stade de développement de l'extension de la MDD en mécanique non linéaire, l'objectif visé dans ce chapitre est relativement modeste. Dans un premier paragraphe on développe des algorithmes spécifiques à un modèle d'endommagement isotrope. Un exemple d'illustration est présenté en s'appuyant sur une version modifiée du modèle d'endommagement isotrope de Lemaître et Chaboche (Marigo). Nous abordons ensuite les problèmes de mécanique de la rupture élastoplastique. Après avoir décrit les méthodes de calcul de l'intégrale de contour J, on montre ainsi sur un exemple étudié la bonne comparaison des résultats fournis par le code avec d'autres calculs issus de la littérature.

4.1 Application de la MDD à la mécanique de l'endommagement

Les différents modèles élastoplastiques présentés peuvent trouver un certain nombre d'applications en mécanique des géomatériaux. Cependant, dans de nombreux cas, la plasticité n'est pas le mécanisme de déformation prépondérant. Par exemple, pour les roches qualifiées de fragiles ((grès, granite etc..), ou encore les bétons, les déformations anélastiques sont la conséquence d'une mésolfissuration qui se développe au cours du chargement. Cette mésolfissuration provoque à l'échelle macroscopique un endommagement, c'est à dire une dégradation des propriétés mécaniques du matériau. Bien que très récente (les travaux fondateurs se situent vers 1960), la mécanique de l'endommagement a réalisé au cours des dernières années d'énormes progrès, les modèles d'endommagement isotrope (variable d'endommagement scalaire) ayant atteint maintenant un niveau de développement comparable à celui de leurs homologues plastiques. Les études les plus récentes se concentrent essentiellement sur la modélisation de l'anisotropie induite par la mésolfissuration. Pour une synthèse de ces travaux en mécanique de l'endommagement par mésolfissuration on peut se référer à l'ouvrage de Krajcinovic (1996). Malgré l'importance de l'anisotropie induite, nous n'aborderons dans cette première phase des travaux numériques que l'étude d'un modèle couplé élasticité - endommagement isotrope, les développements présentés dans les précédents chapitres ne concernant que des milieux isotropes. A l'instar de la plasticité au troisième chapitre, nous résumons d'abord les éléments essentiels du modèle d'endommagement retenu. Puis nous présentons l'algorithme mis au point pour l'implantation d'un tel modèle. Le paragraphe s'achève sur une application numérique que nous discutons en détail.

4.1.1 Présentation du modèle d'endommagement isotrope

Le modèle retenu dans cette étude est une version modifiée du modèle d'endommagement isotrope de Lemaître et Chaboche (1978) (voir également Marigo, 1982). La forme modifiée, que nous retenons, est décrite par exemple dans Desoyer (1995).

La variable interne d'endommagement est un scalaire noté d , dont les valeurs sont a priori comprises entre 0 et 1. Dans ce modèle formulé dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, le seul mécanisme de dissipation considéré est l'endommagement. Les éléments qui rentrent dans la formulation du modèle sont les suivants.

a) Potentiel d'énergie élastique :

$$(\varepsilon, d) = \frac{1}{2} \{ K \varepsilon_{kk}^2 + 2G(1-d)e_{ij}e_{ij} \} \quad 4.1$$

K et G sont respectivement le module de compressibilité élastique et le module de cisaillement du matériau; $K = \frac{2G\nu}{1-2\nu}$ avec ν le coefficient de Poisson.

d est la variable interne d'endommagement, supposée affecter seulement le module de cisaillement et laisser intacte la compressibilité élastique; e_{ij} est la partie déviatorique du tenseur de déformation : $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{ij}$. L'écriture des lois d'état conduisent aux définitions suivantes

- relations contraintes - déformations

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = K \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G(1-d)e_{ij} \quad 4.2$$

- Force thermodynamique associée à d

$$F^d = - \frac{\partial \Psi}{\partial d} = G e_{ij} e_{ij} \quad 4.3$$

L'inégalité classique de Clausius-Duhem portant sur la dissipation prend la forme

$$F^d \dot{d} \geq 0 \quad 4.4$$

b) Fonction seuil d'endommagement :

La surface seuil d'endommagement est donnée par :

$$f(F^d, d) = F^d - k(d) = G e_{ij} e_{ij} - k(d) = f(\varepsilon, d) \quad 4.5$$

où $k(d)$ est une fonction d'écrouissage. On a pour l'évolution de la variable d'endommagement

$$\begin{cases} f(F^d, d) < 0, & \text{alors } \dot{d} = 0 \\ f(F^d, d) = 0 \text{ et } \dot{f}(F^d, d) < 0, & \text{alors } \dot{d} = 0 \\ f(F^d, d) = 0 \text{ et } \dot{f}(F^d, d) = 0, & \text{alors } \dot{d} \neq 0 \end{cases} \quad 4.6$$

Dans la dernière condition 4.7, l'évolution de d est obtenue en faisant une hypothèse de normalité (on parle alors de matériau d -standard) c'est à dire

$$\dot{d} = \lambda \frac{\partial f(F^d, d)}{\partial F^d} \quad 4.7$$

Le multiplicateur d'endommagement λ est donné par la condition de consistance

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial d} \dot{d} = 0 \quad 4.8$$

Ces relations conduisent à

$$\dot{d} = \frac{\Theta}{k'(d)} 2G[e_{kl} \dot{e}_{kl}] \quad 4.9$$

avec $\Theta = 0$ si $\dot{d} = 0$ et $\Theta = 1$ si $\dot{d} > 0$.

c) Formulation en vitesse de la loi d'endommagement :

La loi de comportement sous forme incrémentale décrivant le couplage élasticité-endommagement s'écrit :

$$\dot{\sigma}_{ij} = K \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2G(1-d) \dot{e}_{ij} - 2\dot{d} G e_{ij} \quad 4.10a$$

$$\text{c'est à dire } \dot{\sigma}_{ij} = K \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + \left[2G(1-d) \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\Theta}{k'(d)} (2G e_{kl})(2G e_{ij}) \right] \dot{e}_{kl} \quad 4.10b$$

ce qui conduit à l'écriture $\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{ed} \dot{e}_{kl}$ avec l'opérateur tangent

$$C_{ijkl}^{ed} = K \delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \left[2G(1-d) \delta_{ij} \right] + \left[2G(1-d) \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\Theta}{k'(d)} (2G e_{kl})(2G e_{ij}) \right] \quad 4.11$$

Pour la mise en œuvre de la loi d'endommagement, on prend généralement $k(d) = \frac{1}{2} k_0 [1 + 2md]$, dans laquelle k_0 détermine le seuil initial d'endommagement du matériau et m est un paramètre caractérisant la tendance à la ductilité du matériau lors du processus d'endommagement. Outre les constantes élastiques, les valeurs de k_0 et m doivent être identifiées à partir des données d'expérience.

4.1.2 Mise en œuvre du modèle d'endommagement : proposition d'un algorithme

Pour la mise en œuvre numérique du modèle d'endommagement dans le code MDD, on fait l'hypothèse d'une décomposition de la déformation totale en parties élastique et inélastique :

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^a \quad 4.12$$

L'ensemble des équations de la formulation de la MDD pour la loi d'endommagement est :

$$\begin{aligned} \Delta f &= -A\Delta u + B\Delta\varepsilon^a \\ \Delta\sigma^e &= -\bar{H}'\Delta u + \bar{D}'\Delta\varepsilon^a \\ \dot{\sigma}_{ij} &= C_{ijkl}^{ed}\dot{\varepsilon}_{kl} \\ \dot{d} &= \frac{\Theta}{k'(d)} 2G[e_{kl}\dot{\varepsilon}_{kl}] \end{aligned} \quad 4.13$$

Pour un incrément de charge donné Δf , les variables $(\sigma, d, \varepsilon^a, \Delta u)$ sont réactualisées selon une procédure conforme à la loi d'endommagement. Les conditions initiales pour (4.13) sont :

$$(\sigma, d, \varepsilon^a, \Delta u) \Big|_{t=0} = (\sigma_0, d_0, \varepsilon_0^a, \Delta u_0) \quad 4.14$$

L'algorithme mis en œuvre pour le modèle d'endommagement est résumé ci dessous :

Initialisation

Débuter l'incrément de la charge

Evaluer l'incrément Δf

Initialiser l'incrément de déformations initiales à $\delta \varepsilon_0^a$

Calculer la valeur initiale des discontinuités de déplacement $\delta u_0 = -A^{-1} \Delta f$

Débuter la boucle d'itération avec $k = 1, 2, \dots$

Evaluer l'incrément de contraintes en supposant un comportement élastique aux points intérieurs pressentis (pour les non linéarités) $\delta \sigma_k^e = -\bar{H} \delta u_{k-1} + \bar{D}' \delta \varepsilon_{k-1}^a$

Calculer l'incrément de déformations correspondant, en utilisant la loi élastique $\delta \varepsilon_k = C^{-1} \delta \sigma_k^e$

Cumuler les déformations totales

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{k-1} + \delta \varepsilon_k$$

Vérifier le critère d'endommagement

$$f(g, d) = G e_{ij} e_{ij} - k(d_k) < 0?$$

$$d_k = d_{k-1} \quad \text{si } f(g, d) \leq 0$$

$$\text{sinon } d_k = d_{k-1} + \delta d_k$$

Corriger l'incrément de contraintes

$$\delta \sigma_k = C_k^{ed} \delta \varepsilon_k$$

Recalculer l'incrément de déformations en supposant un comportement élastique

$$\delta \varepsilon_k = C^{-1} \delta \sigma_k$$

Cumuler les contraintes totales

$$\sigma_k = \sigma_{k-1} + \delta \sigma_k$$

Calculer l'incrément de déformations initiales correspondant

$$\delta \varepsilon_k^a = \delta \varepsilon_k - \delta \varepsilon_k^e$$

Vérifier la convergence

si $\|\delta \varepsilon_k^a\| \leq \textit{tolerance}$? alors sortir de la boucle d'itération

sinon recalculer les incréments de discontinuités de déplacement suivants

$$\delta u_k = A^{-1} B \delta \varepsilon_k^a$$

Passer à l'itération suivante

Enregistrer les résultats

Passer à l'incrément de charge suivant

4.1.3 Exemples numériques pour le modèle d'endommagement

L'exemple étudié ici est celui du cylindre creux sous pression, déjà analysé au chapitre 3 (section 3.3.1). Ce type de test permet d'étudier les mécanismes de déformation et de rupture autour de cavités. Il constitue également un problème aux limites approprié pour valider des lois de comportement. La géométrie du problème est celle indiquée sur la figure 3.3. Le chargement consiste en l'augmentation de la pression interne P_i de 0 à 170 MPa, la pression externe étant maintenue à 0 MPa. Les valeurs des paramètres du modèle d'endommagement sont les suivants :

Module d'Young $E = 210\,000\text{ MPa}$; Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$

$k_0 = 0.24\text{ MPa}$; $m = 8$

Puisque nous ne disposons pas de données expérimentales sur ce exemple dans le cas d'un matériau endommageable, seule la comparaison des résultats obtenus avec les solutions élastiques classiques sont présentées. Un exemple de distribution des contraintes circonférentielles (normalisées avec σ_Y) le long d'un rayon pour une pression p_i de 140 MPa (située au delà du seuil de dégradation) est présentée sur la figure 4.1.

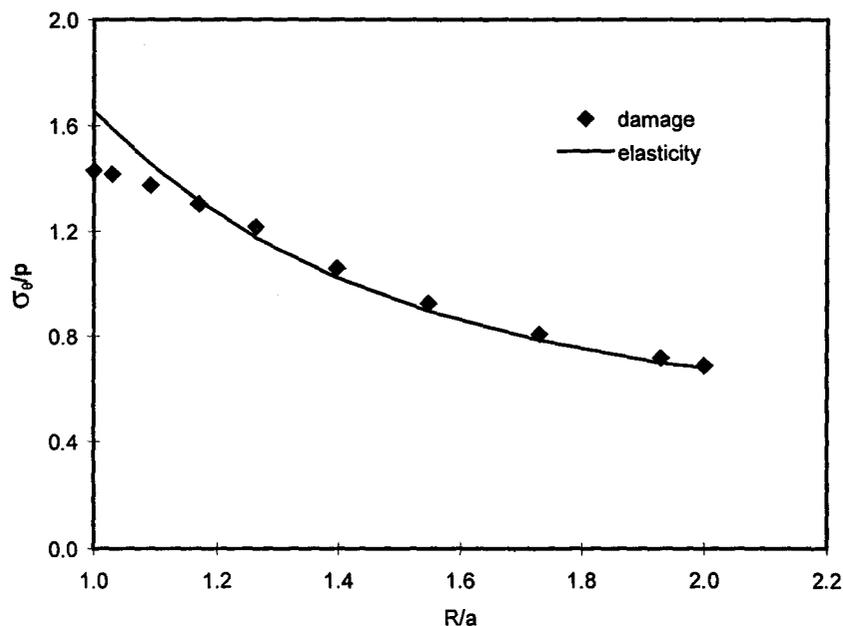


Figure 4.1 : Distribution des contraintes circonférentielles pour un matériau élastique endommageable - $p_i = 140\text{ MPa}$

Nous remarquons que les contraintes circonférentielles prédites au voisinage de la cavité par le modèle d'endommagement sont plus faibles que les valeurs élastiques. Cette redistribution des contraintes est la conséquence d'une dégradation du voisinage de la paroi.

La figure 4.2 montre la variation de l'endommagement d en paroi en fonction de la pression p_i appliquée. On note une croissance de d , d'autant plus importante que p_i est élevée.

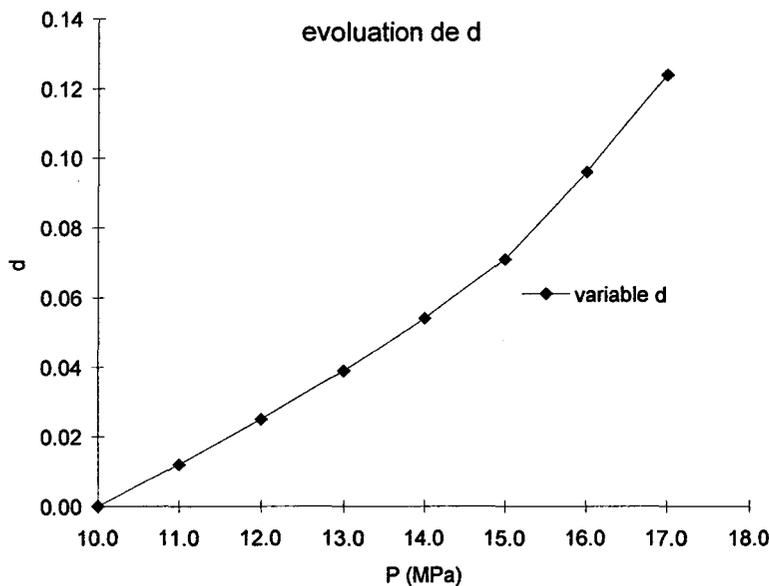


Figure 4.2 Evolution de l'endommagement en paroi avec la pression interne

4.2 Applications de la MDD à la Mécanique Elastoplastique de la Rupture

La mécanique de la rupture s'appuie sur un certain nombre de concepts pour caractériser les conditions de propagation des fissures. Parmi ceux-ci, on peut citer en élasticité linéaire, des grandeurs locales telles que les facteurs d'intensité des contraintes ou des grandeurs globales comme l'énergie d'avancement de fissures G . Ces concepts de base de la mécanique dite linéaire de la rupture sont relativement classiques et ne sont pas présentés ici. On pourra par exemple se référer à l'ouvrage de Bui (1978b). Différentes approches numériques par éléments de frontière, susceptibles de trouver des applications en mécanique linéaire de la rupture, sont décrites dans Aliabadi et Rooke (1991). Parmi elles, la MDD apparaît comme l'une des plus prometteuses, les

performances en mécanique non linéaire restant cependant à faire¹. Dans ce paragraphe on examine plus particulièrement l'application de la MDD aux problèmes de la rupture en milieu élastoplastique. La présentation est structurée en deux sections. Dans la première nous décrivons brièvement la notion d'Intégrale de contour J de Rice (1968) et ses possibilités d'application en plasticité. Nous présentons ensuite la procédure d'évaluation numérique de l'intégrale J. Le chapitre s'achève sur quelques exemples de résultats.

4.2.1 : Notion d'intégrale de contour J en élasticité

La caractérisation des conditions de propagation de fissures en milieu élastique non linéaire a été traitée pour la première fois par Rice (1968). Il en ressort la notion d'intégrale indépendante de contour connue également sous le nom d'Intégrale de Rice J ou Intégrale de Rice-Cherpanov-Eshelby. Considérons un système de coordonnées cartésiennes, le repère associé étant centré en tête de fissure (voir figure 4.3).

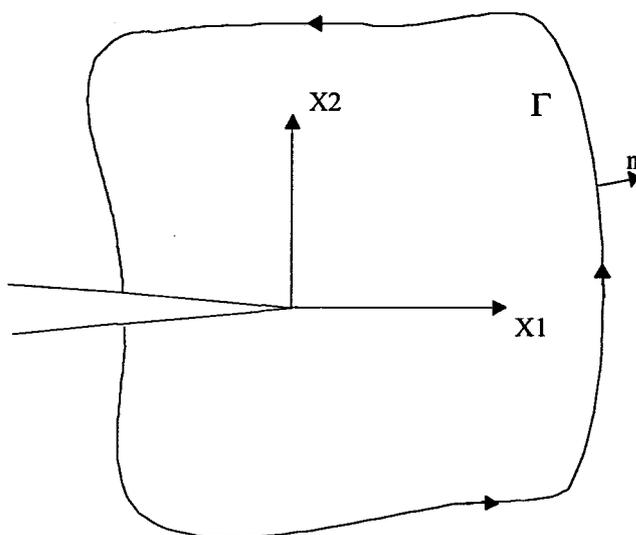


Figure 4.3 : Trajet de contour pour le calcul de l'Intégrale de Rice J

L'intégrale de contour J est définie par :

$$J = \int_{\Gamma} \left(W n_1 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) d\Gamma \quad 4.15$$

¹ Au delà de la MDD, plus qu'un espoir, c'est là un pari et un challenge pour les spécialistes des méthodes de frontière.

W est la densité d'énergie élastique, t_i les composantes du vecteur contraintes et u_i celles du vecteur déplacement ; $d\Gamma$ représente un élément d'arc le long d'un contour d'intégration arbitraire Γ contenant la tête de fissure et n_j les composantes de la normale (extérieure unitaire) au trajet de contour Γ choisi (voir figure 4.3) Cette intégrale est indépendante du contour actuel choisi, à condition que le point de départ et le point d'arrivée du contour soient sur les lèvres opposées de la fissure, celles ci étant non contraintes. Pour un contour fermé ne contenant pas le fond de fissure, $J = 0$.

Pour un matériau élastique linéaire, l'intégrale J coïncide avec l'énergie d'avancement de fissure ($J = G$) et peut être reliée aux facteurs d'intensité de contraintes associés aux différents modes de propagation. Afin de préparer, la mise en oeuvre numérique en élastoplasticité, nous discutons maintenant de l'implantation numérique du calcul de J par la MDD dans le cas élastique linéaire où les méthodes de frontière sont réputées plus performantes que la MEF pour l'indépendance de J vis à vis du contour d'évaluation.

Considérons des trajets de contour circulaire centrés en tête de fissure. Un ensemble de points intérieurs, situés dans des positions symétriques par rapport au plan de la fissure, est défini le long du trajet (figure 4.4). Pour des problèmes de déformation plane en élasticité linéaire, on a : $W = \frac{1}{2E} [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - 2\nu\sigma_{11}\sigma_{22} - \nu\sigma_{33}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + 2(1 + \nu)\sigma_{12}^2]$. Les composantes du vecteur contraintes, $t_i = \sigma_{ij}n_j$, le long du contour sont $t_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2$ et $t_2 = \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2$.

Les dérivées $u_{j,k}$ des déplacements sont directement obtenues à partir des équations intégrales plutôt que par différentiation des déplacements internes en utilisant les approximation par les fonctions de forme. Les déplacements u_i ainsi que les discontinuités de déplacement Δu_j étant reliés par l'identité de Somigliana $u_i(s) = - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, Q) \Delta u_j(Q) d\Gamma(Q)$, les dérivées des déplacements sont alors données par :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = - \int_{\Gamma} \frac{\partial P_{ij}^*}{\partial x_k} \Delta u_j d\Gamma \quad 4.16a$$

dans lequel

$$\frac{\partial P_{ij}^*}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \left[-2(1-2\nu)r_{,k}\delta_{ij} - 8r_{,i}r_{,j}r_{,k} + 2(r_{,i}\delta_{jk} + r_{,j}\delta_{ik}) \right] \frac{\partial r}{\partial n} \right. \\ \left. + \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j} \right] n_k + 2(1-2\nu)(r_{,k}r_{,i}n_j - r_{,k}r_{,j}n_i) - (1-2\nu)(\delta_{ik}n_j - \delta_{jk}n_i) \right\} \quad 4.16b$$

L'intégration le long du trajet de contour est effectuée par quadrature de Gauss.

4.2.2 Evaluation de l'Intégrale de Rice J par la MDD en élastoplasticité

V. *Leitão* et al. (1993) ont récemment présenté diverses intégrales de contour calculées à l'aide de méthodes de frontière de type direct en élastoplasticité. Une des conclusions de ces auteurs est que dans le cas élastoplastique, l'intégrale J , évaluée à l'aide de ces méthodes, reste raisonnablement indépendante du contour lorsque les efforts imposés ne sont pas trop élevés. Ceci peut être considéré comme une motivation supplémentaire des calculs effectués dans cette section.

On suppose la décomposition de la densité d'énergie de déformation W en une partie élastique W_e et une partie plastique W_p : $W = W_e + W_p$ avec $W_e = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e$ et $W_p = \int_0^{\varepsilon_p} \sigma_p^{eq} d\varepsilon_p^{eq}$. Dans ces dernières formules ε_{ij}^e est la déformation élastique, σ_p^{eq} et $d\varepsilon_p^{eq}$ sont les contraintes équivalentes et les incréments des déformations plastiques équivalentes.

L'intégrale J pour un contour général Γ en milieu plastique est donnée par :

$$J = \int_{\Gamma} (W_e n_1 - t_i u_{i,1}) d\Gamma + \int_{\Gamma} W_p n_1 d\Gamma \quad 4.17$$

Soulignons que toutes les quantités intervenant dans la formulation de J sont calculées en suivant l'histoire du chargement.

Dans (4.17), les dérivées $u_{i,1}$ des déplacements sont également calculées directement à partir de l'équation intégrale de déplacement. Nous avons établi que dans le cas de matériaux élastoplastiques compressibles, les déplacements sont donnés par :

$$\dot{u}_i(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) \Delta \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) + \iint_{\Omega} [\sigma_{ijk}^*(s, q) \dot{\epsilon}_{jk}^a(q) + \sigma_{i33}^*(s, q) \dot{\epsilon}_{33}^a(q)] d\Omega(q)$$

ce qui fournit par dérivation

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_m} = - \int_{\Gamma} \frac{\partial p_{ij}^*}{\partial x_m} \dot{u}_j d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ijk}^*}{\partial x_m} \dot{\epsilon}_{jk}^a d\Omega - \dot{\epsilon}_{jk}^a(s) \int_{\Gamma_1} \sigma_{ijk}^* r_{,m} d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{i33}^*}{\partial x_m} \dot{\epsilon}_{33}^a d\Omega - \dot{\epsilon}_{33}^a(s) \int_{\Gamma_1} \sigma_{i33}^* r_{,m} d\Gamma \quad 4.18$$

Dans cette formule, les intégrales sur le cercle unité Γ_1 résultent de la différentiation des intégrales de domaine correspondant et peuvent être intégrées comme suit

$$- \dot{\epsilon}_{jk}^a(s) \int_{\Gamma_1} \sigma_{ijk}^* r_{,m} d\Gamma = \frac{1}{8(1-\nu)} \left[(6-8\nu) \dot{\epsilon}_{im}^a - (1-4\nu) \dot{\epsilon}_{ll}^a \delta_{im} \right] \quad 4.19a$$

$$- \dot{\epsilon}_{33}^a(s) \int_{\Gamma_1} \sigma_{i33}^* r_{,m} d\Gamma = \frac{2\nu}{4(1-\nu)} \dot{\epsilon}_{33}^a \delta_{im} \quad 4.19b$$

Pour être complet, précisons que les dérivées des noyaux σ_{ijk}^* et σ_{33i}^* s'écrivent :

$$\frac{\partial \sigma_{ijk}^*}{\partial x_m} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2(1-2\nu)r_{,m}(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,j}\delta_{jk} - r_{,k}\delta_{ij}) + (1-2\nu)(\delta_{jm}\delta_{ik} + \delta_{im}\delta_{jk} - \delta_{km}\delta_{ij}) - 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,m} + 2(\delta_{km}r_{,i}r_{,j} + \delta_{im}r_{,j}r_{,k} + \delta_{jm}r_{,i}r_{,k}) \right\} \quad 4.20a$$

$$\frac{\partial \sigma_{33i}^*}{\partial x_m} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} 2\nu(\delta_{im} - 2r_{,i}r_{,m}) \quad 4.20b$$

Rappelons également que les contraintes sont données par :

$$\dot{\sigma}_{ij} = G \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - (2G\dot{\epsilon}_{ij}^a + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{ll}^a \delta_{ij})$$

4.2.3 Etude de la fissuration d'une plaque

Cet exemple consiste en l'étude d'une plaque fissurée en son centre (figure 4.4). Cette plaque, soumise à une traction uniforme, a été également étudiée par V. *Leitão* et al. (1993a, 1993b) à l'aide d'une formulation directe des méthodes de frontière. Les résultats obtenus par ces auteurs serviront de base de comparaison pour les résultats fournis par la MDD.

La géométrie ainsi que le chargement uniaxial (d'intensité σ) de la plaque sont montrées sur la figure 4.4. La taille $2a$ de la fissure centrale est telle que $\frac{a}{W} = 0.2$ où W représente la demi largeur de la plaque (nous avons pris dans les calculs $W = 0.1 m$). Des conditions de contrainte plane sont considérées. Suivant *Leitão* et al. (1993a), on suppose le comportement élastique - parfaitement plastique, avec un critère de Von Mises. Les paramètres du matériau sont les suivantes :

Module d'Young $E = 100000 \text{ MPa}$; coefficient de Poisson $\nu = 0.3$

Seuil d'écoulement $\sigma_y = 1000 \text{ MPa}$

Les charges σ appliquées sont comprises entre 0 et $\sigma_n = 0.8\sigma_y$.

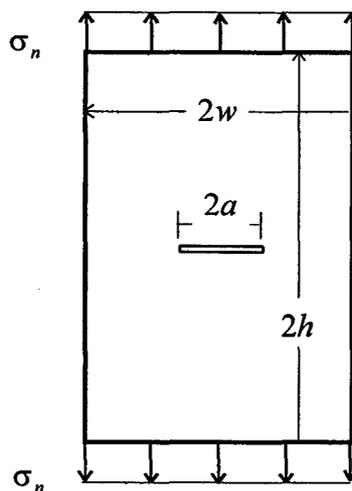


Figure 4.4 : Plaque contenant une fissure centrale - géométrie et chargement

La figure 4.5 montre la discrétisation retenue pour l'étude de la plaque fissurée. 56 éléments de contour et 112 cellules internes triangulaires ont été utilisés.

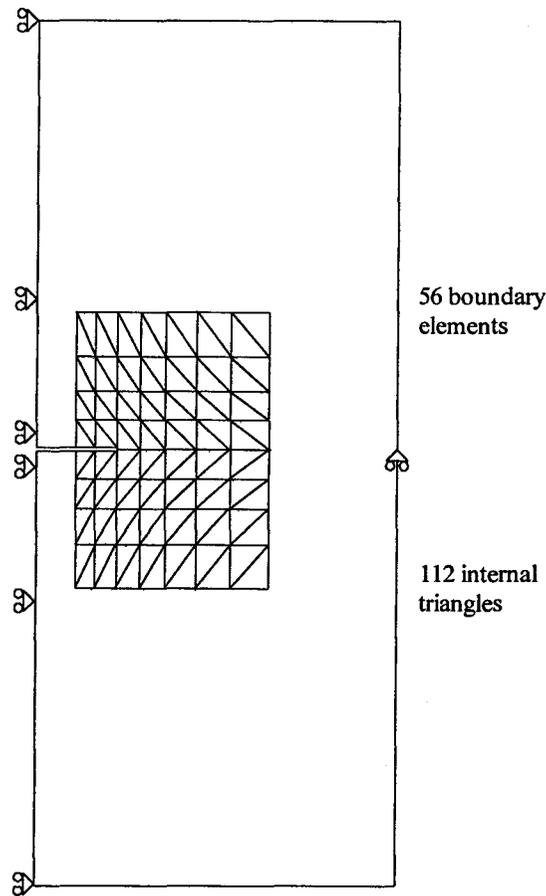


Figure 4.5 : Plaque contenant une fissure centrale : 56 éléments de contour et 112 cellules internes

Les intégrales de contour J sont calculées pour différents chemins de contour entourant la tête de fissure. Nous avons pu noter une certaine indépendance des résultats vis à vis du contour d'intégration. La variation de $\sqrt{\frac{EJ}{(a\sigma_Y^2)}}$ avec le chargement normalisé $\frac{\sigma}{\sigma_n}$ est montrée sur la figure 4.6. Elle est comparée à celle obtenue par *Leitão* et al. (1993a). On observe une concordance entre les résultats, même si l'on note une légère déviation entre les deux calculs aux forts niveaux du chargement. Ceci peut être est due à l'utilisation, dans cette première phase de notre étude, de cellules internes à ε^a constantes, la conséquence étant probablement une imprécision sur les champs de déplacement dans la zone d'intégration (plastifiée). En tout état de cause, des travaux complémentaires sont nécessaires pour améliorer ces résultats.

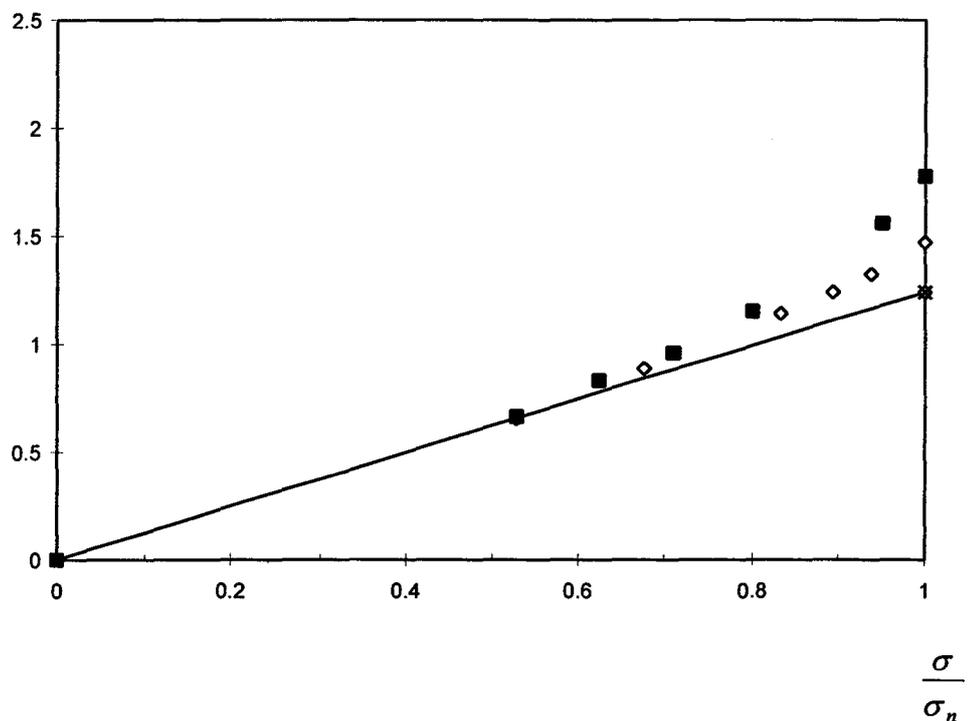


Figure 4.6 : Variation de $\sqrt{\frac{EJ}{(a\sigma_Y^2)}}$ avec le niveau de chargement $\frac{\sigma}{\sigma_n}$ ($\sigma_n = 0.8\sigma_Y$). La droite correspond à la solution élastique linéaire.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

La présente étude a été consacrée à l'extension de la Méthode des Discontinuités de Déplacements (MDD) aux milieux plans à comportement non linéaire. Elle a été motivée par le fait que les seules extensions existantes de méthodes de frontières aux matériaux non linéaires, concernent des méthodes directes ou récemment des méthodes duales. Il nous a ainsi semblé important de mener des études sur l'extension de la MDD, qui par ailleurs a largement fait ses preuves dans l'étude des milieux élastiques fissurés. Cet objectif a été pour l'essentiel atteint, même si, comme nous le soulignerons à nouveau, certaines améliorations doivent être apportées à moyen terme. Hormis l'étude bibliographique, indispensable dans tout domaine de recherche où les développements sont récents, le travail réalisé a comporté plusieurs volets complémentaires :

- développement des noyaux appropriés correspondant à l'extension de la MDD et régularisation des intégrales hypersingulières qui en découlent. Cette régularisation a été menée avec soin en s'appuyant sur des méthodes bien éprouvées (principe d'Hadamard etc..

Les développements proposés ont été également étendus aux milieux compressibles. Cet aspect constitue également une des originalités de cette étude; il ouvre des perspectives pour l'application de la méthode numérique aux géomatériaux. Des résultats nouveaux concernant les termes supplémentaires issus de la compressibilité plastique sont établis et discutés en détail.

- Le développement d'algorithmes numériques appropriés pour l'implantation des lois de comportement retenues (élastoplasticité, loi couplée élasticité – endommagement) dans le cadre d'une formulation en déformations initiales. Bien que la procédure d'extension en milieu élastoplastique ne soit pas totalement nouvelle, la diversité des lois implantées constitue un atout important du code développé. Les lois élastoplastiques étudiées pour l'instant sont toutes de type standard généralisé. Aucune difficulté supplémentaire n'est cependant à craindre pour des lois non associées, les développements proposés au second chapitre restant toujours valables. Enfin, le code a été écrit avec une structure très générale, ce qui permettra l'étude de problèmes 2-D (déformation plane, contrainte plane) pour une large classe de comportements allant éventuellement jusqu'au couplage plasticité - endommagement.

- Test du code de calcul sur un certain nombre de problèmes modèle. L'étude de problèmes de plasticité au chapitre 3 a permis un certain nombre de comparaisons, soit avec des

résultats expérimentaux de la littérature, soit avec des résultats issus de Calcul Eléments Finis que nous avons réalisés. De manière générale, on note une bonne performance du code sur ces cas test, ce qui confirme la pertinence de l'extension de la MDD pour l'étude des problèmes de plasticité. Ceci est encore plus net lorsqu'il s'agit de structures en milieu infini.

■ L'un des domaines d'application visés ultérieurement étant la mécanique de la rupture, nous avons enfin abordé au chapitre 4 l'étude d'une plaque élastoplastique fissurée par le biais de l'intégrale de contour J (Intégrale de Rice). La comparaison avec les résultats obtenus par Leitao et al. (1993a) montre encore un bon accord ; un léger désaccord pour des forts niveaux de contraintes i.e. des cas où les zones de plasticité sont importantes est néanmoins observé. Nous pensons que ces résultats pourront être nettement améliorés à court terme par l'incorporation d'éléments de frontière quadratiques et de cellules internes de plus grande précision. Pour le premier point, les travaux déjà effectués par Kondo et Samba (1995) sur la MDD en élasticité linéaire pourront servir d'excellente base de départ.

Un certain nombre de perspectives à moyen terme peuvent être indiquées pour la suite de ce travail. Tout d'abord, il nous paraît nécessaire de réaliser d'autres applications du code dans sa forme actuelle. Nous pensons en particulier à une analyse comparative plus fouillée de diverses structures, et à l'étude des problèmes de multifissuration (diverses configurations de fissures, interactions entre fissures etc.) abordé par de nombreux auteurs dans le cadre linéaire (Ang, 1986 ; Nguyen et Yan, 1994 ; Chen et Chen, 1995 ; Yin et Ehrlacher, 1996 ; Renaud et al., 1996). L'implantation de lois de comportement plus élaborées (ex : plasticité non associée) peut être envisagée. Quelques développements que l'on peut envisager ultérieurement pourront concerner les deux thèmes suivants : i) étude des milieux hétérogènes (problèmes d'inclusions) à l'aide des déformations initiales ; ii) extension de nos travaux à l'étude des milieux anisotropes non linéaires. Les récentes études de Le Van et al. (1997) peuvent être mis à profit sur cet aspect.

REFERENCES

- Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P. (1991). 'Numerical Fracture Mechanics', Computational mechanics publications, Kluwer Academic Publishers
- Ang, W.T. (1986). 'A Boundary Integral Solution for the Problem of Multiple Interacting Cracks in an Elastic Materials', *Int. J. Fract.*, **31**, 259-270
- Banerjee, P.K. (1994). 'Boundary Element Methods in Engineering', (2nd edition), McGraw-Hill, London Company, U.K.
- Banerjee, P.K. and Cathie, D.N. (1980). 'A direct Formulation and Numerical Implementation of the Boundary Element Method for Two-Dimensional Problems of Elastoplasticity', *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. **22**, pp. 233-245
- Banerjee, P.K. and Raveendra, S.T. (1986). 'Advanced Boundary Element Analysis of Two and Three Dimensional Problems of Elasto-Plasticity', *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. **23**, 985-1002
- Belkacemi (1990), 'Méthode des discontinuités de déplacement en champ complexe' Thèse de doctorat, Université de Lille
- Bonnet, M. (1995). 'Equations intégrales et Eléments de frontière : applications en mécanique des solides et des fluides', CNRS Editions /Eyrolles
- Bouhadanne (1987), Application de l'intégrale de Cauchy à la méthode des discontinuités de déplacement et autres méthodes de collocation. These de doctorat Université de Lille
- Brebbia, C.A. (1984). 'The Boundary Element Techniques', Springer Verlag.
- Brebbia, C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. (1984). 'Boundary Elements - An Introductory Course', Computational Mechanics Publications, McGraw-Hill Book Company, New York
- Bui, H.D. (1977). 'An integral Equations method for solving the problem of a plane crack of arbitrary shape' *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. **25**, pp. 29-39
- Bui, H.D. (1978a). 'Some Remarks About The Formulation of Three-Dimensional Thermoelastoplastic Problems by Integral Equations', *Int. J. Solids Structure*, Vol. **14**, pp. 935-939
- Bui H. D. (1978b) : Mécanique de la rupture fragile. *Ed. Masson, Paris.*
- Chen, W.H. and Chen, T.C. (1995). 'An Efficient Dual Boundary Element Technique for a Two - Dimensional Fracture Problem with Multiple Cracks', *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. **38**, 1739-1756
- Crouch, S.L. (1976). 'Solution of Plane Elasticity Problems by the Displacement Discontinuity Method', *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **10**, 301-342
- Crouch, S.L. and Starfield, A.M. (1983). 'Boundary Element Methods in Solid Mechanics', George Allen & Unwin, London
- Cruse, T.A. (1969). 'Numerical Solutions in Three Dimensional Elastostatics', *Int. J. Solids Structure*, Vol. **5**, pp. 1259-1274

Cruse, T.A. (1988). 'Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics', Kluwer Academic Publishers,

Desoyer T. (1995), Contribution à la modélisation de l'endommagement diffus et localisé. *Mémoire d'Habilitation à diriger des recherches, Université de Poitiers.*

Hildenbrandt, J. and Kuhn, G. (1992). 'Numerical computation of hypersingular integrals and application to the boundary integral equation for the stress tensor.' *Eng. Anal. Boundary Elements*, **10**, 209-217.

Hill, R. (1950). 'The mathematical theory of plasticity', Clarendon Press, Oxford.

Huber, O. Lang, A. and Kuhn, G. (1993). 'Evaluation of the stress tensor in 3-D elastostatics by direct solving of hypersingular integrals.' *Comput. Mech.*, **12**, 39-50.

Jaswon, M.A. and Symm, G.T. (1977). 'Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics', Academic Press, London

Kondo D., Samba G. (1995) Development of a variational displacement discontinuity method : application to some fracture problems, *NUMOG V, Lausanne, Suisse, Balkema*, pp. 191-199.

Lachat, J.C. and Watson, J.O. (1976). 'Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: a Formulation for Three Dimensional Elasto-Statics', *Int. J. Meth. in Engng*, **10**, 991-1005

Lamb, H. (1932). 'Hydrodynamics', 6th edition, New York, Dover

Leitao, V. and Aliabadi, M.H., Rooke, D.P. (1993a). 'The Dual Boundary Element Formulation for Elastoplastic Fracture Mechanics', *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. **38**, 315-333

Leitao, V., Aliabadi, M.H., and Rooke, D.P. (1993b). 'Contour integrals for an Elastoplastic Boundary Element Formulation', *Int. J. Fracture*, Vol. **64**, R97-R103

Lemaitre, J. and Chaboche J. L. (1978). 'Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement', *J. Mec. Appliquée*, Vol. 2 pp. 317-365.

Le Van A. (1997), Boundary integro-differential equation for anisotropic bodies with initial strains or stresses. *Appl. Math. Modelling*, Vol. 21, pp. 145-153.

Ling, C.X. and Wimal, S. (1991). 'Hadamard's Principle for Displacement Discontinuity Modeling of Cracks', *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. **39**, No.1, pp. 141-145

Mikhlin, S.G. (1962). 'Singular Integral Equations', *Amer. Math. Soc. Trans. Series1*, **10**: 84-197

Morel E. (1987), 'Contribution à l'étude de la propagation des discontinuités dans les roches anisotropes : mise au point d'une technique de calcul utilisant l'intégrale de Cauchy et étude expérimentale d'un schiste ardoisier'. Thèse de doctorat Université de Lille

Mukherjee, S. (1977). 'Corrected Boundary Integral Equations in Planar Thermo-elastoplasticity', *Int. J. Solids Structure*, Vol. **13**, pp. 331-335

- Nguyen D.H., Yan A.M. (1994), 'Stress intensity factors and crack extension in a cracked pressurised cylinder', *Engineering Failure Analysis*, Vol. 1, N° 4, pp. 307-315.
- Oliveira Faria, L.M., Mota Soares, C.A. Seabra Pereira, M.F. and Brebbia, C.A. (1981). 'Boundary Elements in 2D Plasticity Using Quadratic Shape Functions', *Appl. Math. Modelling*, Vol. 5, pp. 371-375
- Owen, D.R.J. and Hinton, E. (1980). 'Finite element in Plasticity: Theory and Practice', Swansea, Pineridge Press
- Renaud V., Kondo D. & Henry J. P. (1996) : Computations of effective moduli for microcracked materials : a boundary element approach, *Computational Materials Science*, vol. 5, n° 1-3, pp. 227-237.
- Riccardella, P.C. (1973). 'An Implementation of The Boundary Integral Technique For Planar Problems In Elasticity And Elastoplasticity', Ph.D. thesis, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA. U.S.A.
- Rice, J.R. (1968). 'A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks'. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **35**, 379-386
- Rizzo., F.J. and Shippy, D.J. (1977) 'An Advanced Boundary Integral Equation Method for Three-Dimensional Thermo-elasticity', *Int. J. Meth. in Engng*, **11**, 1753
- Salencon, J. (1996) 'Introduction à l'élastoplasticité et au calcul à la rupture'. Cours Ecole Polytechnique, Presses de l'Ecole Polytechnique
- Sladek J. and Sladek, V. (1982) 'Three-Dimensional cracks analysis for an anisotropic body', *Appl. Math. Modelling*, **6**, pp. 374-380
- Swedlow, J.L. and Cruse, T.A. (1971). 'Formulation of Boundary Integral Equations For Three Dimensional Elastoplastic Flow', *Int. J. Solids Structures*, Vol. 7, pp. 1673-1683
- Telles, J.C.F. and Brebbia, C.A.(1979). 'On the Application of the Boundary Element Method to Plasticity', *Appl. Math. Modelling*, Vol. 3, pp. 466-470
- Telles, J.C.F. and Brebbia, C.A. (1981). 'Elastoplastic Analysis using Boundary Elements', *Numerical Methods in Geomechanics*, (Martins, J.B. ed.), pp. 389-406
- Telles, J.C.F. (1983). 'The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems', *Lecture Notes in Engineering*, Springer Verlag, Berlin
- Theocaris, P. S. and Marketos, E. (1964). 'Elastoplastic analysis of perforated thin strips of a strain-hardening material', *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 12, pp. 377-390
- Yin H. P. (1991) Modélisation de discontinuités de déplacement dans les solides élastiques et application à la microfissuration. Thèse de doctorat, ENPC.
- Yin H. P. & Ehrlacher A. (1993) : Variational approach of displacement discontinuity method and application to crack problem. *Int. J. of Fracture*, vol. 63, pp.135-153.
- Yin H. P. & Ehrlacher A. (1996) : Size and density influence on overall moduli of finite media with cracks. *Mech. Mater.*, vol. 23, pp.287-294.
- Zienkiewicz, O.C. (1977). 'The Finite Element Method', 3rd ed., Mcgraw Hill, New York

Annexe A1 : Modèles élastoplastiques – Critères

La théorie de la plasticité telle que nous l'avons abordé dans cette étude (plasticité associée) est résumée ici. La partition classique $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$ est considérée et on écrit $d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p)$. Les $d\varepsilon_{ij}^p$ sont les composantes du tenseur incrément de déformations plastiques. On définit également la surface de charge (surface seuil) qui, en tenant compte de l'écrouissage, s'écrit de manière générale :

$$F(\sigma_{ij}, \kappa) = f(\sigma_{ij}) - k(\kappa) = 0 \quad \text{A1.1}$$

f est convexe et κ est la variable d'écrouissage.

L'expansion progressive de cette surface seuil peut être définie en reliant le seuil d'écoulement à la déformation plastique via le paramètre d'écrouissage κ . On choisit souvent le travail plastique cumulé :

$$\kappa = w^p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad \text{A1.2}$$

Soulignons que dans l'équation (A1.1), $f(\sigma_{ij})$ est une fonction scalaire des σ_{ij} qui joue le rôle d'une contrainte équivalente désignée par σ_{eq} . Par conséquent, on définit une déformation plastique équivalente ε_{eq}^p dont l'incrément produit un incrément d'énergie de déformation plastique tel que :

$$\sigma_{eq} d\varepsilon_{eq}^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = d\kappa \quad \text{A1.3}$$

A un niveau de plasticité $f = k$, la variation dans la fonction de charge, due à un incrément de contraintes est telle que :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma, \quad \begin{cases} df < 0 & \text{décharge élastique} \\ df = 0 & \text{charge neutre} \\ df > 0 & \text{charge plastique} \end{cases} \quad \text{A1.4}$$

Dans le contexte des lois associées, la règle de normalité permet d'écrire :

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{A1.5}$$

$d\lambda$ étant le multiplicateur de plasticité donné par la condition de consistance $dF = 0$. $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ est une normale à la surface de charge, correspondant à l'état de sollicitation considéré (figure A1.1).

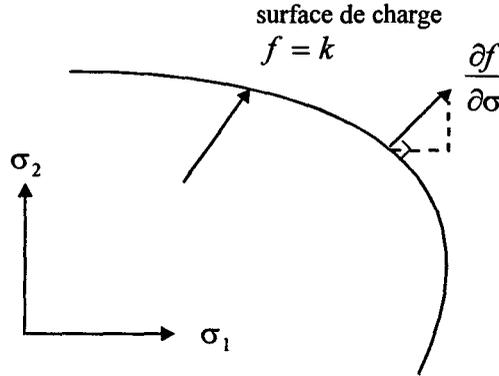


Figure A1.1 Représentation de la règle de normalité

Par substitution des relations précédentes on a :

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - a_{kl}d\lambda) \quad \text{A1.6a}$$

$$\text{avec } a_{kl} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \quad \text{A1.6b}$$

Pour évaluer $d\lambda$, écrivons la condition de consistance

$$dF = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - \frac{\partial k}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad \text{A1.7a}$$

$$\text{soit } a_{ij}d\sigma_{ij} - \frac{\partial k}{\partial \kappa} \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p = 0 \quad \text{A1.7b}$$

En combinant avec la règle de normalité, on a

$$a_{ij}d\sigma_{ij} - \frac{\partial k}{\partial \kappa} \sigma_{ij}a_{ij}d\lambda = 0 \quad \text{A1.7c}$$

La substitution de A1.6a dans cette dernière équation conduit à

$$d\lambda = \frac{1}{\gamma} a_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad \text{A1.8a}$$

$$\text{avec } \gamma = a_{ij} C_{ijkl} a_{kl} + \frac{dk}{d\kappa} \sigma_{ij} a_{ij} \quad \text{A1.8b}$$

Dans (A1.5), $f(\sigma_{ij})$ étant une fonction homogène de degré 1, l'application du théorème d'Euler donne :

$$\sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = f(\sigma_{ij}) = \sigma_{eq} \quad \text{A1.9}$$

ce qui permet d'exprimer

$$\gamma = a_{ij} C_{ijkl} a_{kl} + H' \quad \text{A1.10}$$

$$\text{ou } d\lambda = \frac{a_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{a_{ij} C_{ijkl} a_{kl} + H'} = \frac{a^T C d\varepsilon}{a^T d_D + H'} \quad \text{A1.11}$$

avec $d_D = Ca$; $H' = \frac{dk}{d\varepsilon_{eq}^p}$ peut être interprété comme la pente locale de la courbe contrainte uniaxiale – déformation plastique.

L'équation A1.11 peut être utilisé pour éliminer $d\lambda$ dans A1.7c et on établit ainsi les relations incrémentales

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{ij} \quad \text{A1.12a}$$

$$\text{avec } C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl} - \frac{1}{\gamma} C_{ijmn} a_{mn} a_{op} C_{opkl} \quad \text{A1.12b}$$

Le vecteur a s'écrit sous la forme $a^T = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{33}} \right\}$

Cas des lois élastoplastiques retenus :

Les critères de plasticité $f(\sigma_{ij})$ en milieu isotrope s'expriment comme une fonction des invariants du déviateur du tenseur de contraintes : $I_1 = \sigma_{ii}$, $J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$, $J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki}$.

$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} J_1 \delta_{ij}$ sont les composantes du déviateur de contraintes. On peut également considérer à la place de J_3 un autre invariant θ , connu sous le nom d' angle de Lode :

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta = \frac{1}{3} \text{Arc sin} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \leq \frac{\pi}{6}.$$

Les invariants J_2 et J_3 du déviateur de contraintes S s'écrivent aussi

$$J_2 = \frac{1}{2} (S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2) + \sigma_{12}^2 ; J_3 = S_{33} (S_{33}^2 - J_2).$$

Les différents critères que nous considérons ainsi que l'expression des vecteurs a correspondants sont donnés ci dessous.

a- Critère de Tresca :

$$2\sqrt{J_2} \cos\theta - \sigma_Y = 0 \tag{A1.13a}$$

dans laquelle σ_Y est un paramètre matériau qui doit être expérimentalement déterminé.

$$a^T = \{1, 1, 0, 1\} \tag{A1.13b}$$

b- Critère de Von Mises :

$$\sqrt{3J_2} - \sigma_Y = 0 \tag{A1.14a}$$

$$\text{on a : } a^T = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \{S_{11}, S_{22}, 2\sigma_{12}, S_{33}\} \tag{A1.14b}$$

c- Critère de Mohr - coulomb :

$$\frac{J_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_2} \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right) - c \cos \phi = 0 \quad A1.15a$$

c est la cohésion du matériau et ϕ l'angle de frottement interne.

$$a^T = \left\{ \left(S_{22} S_{33} + \frac{J_2}{3} \right), \left(S_{11} S_{33} + \frac{J_2}{3} \right), -2\sigma_{12} S_{33}, \left(S_{22} S_{11} - \sigma_{12}^2 + \frac{J_2}{3} \right) \right\} \quad A1.15b$$

d- Critère de Drucker - Prager :

$$\alpha J_1 + (J_2)^{1/2} = k' \quad A1.16a$$

avec

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}, \quad k' = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}. \quad A1.16b$$

Pour ce critère, le vecteur a est identique à celui dérivé pour Mohr - Coulomb.

En déformation plane, il est possible de simuler le critère de Mohr - Coulomb par celui de

$$\text{Drucker - Prager en posant } \alpha = \frac{\tan \phi}{(9 + 12 \tan^2 \phi)^{1/2}}, \quad k' = \frac{3c}{(9 + 12 \tan^2 \phi)^{1/2}}.$$

De façon plus générale, la matrice tangente peut également se mettre sous la forme

$$C^{ep} = C - \frac{1}{\gamma} d_D d_D^T \quad \text{où } d_D = C.a$$

Le vecteur d_D de la matrice élastoplastique a la forme suivante en déformation plane.

$$d_D = \left\{ \begin{array}{l} \frac{E}{1+\nu} a_1 + M_2 \\ \frac{E}{1+\nu} a_2 + M_2 \\ G a_3 \\ \frac{E}{1+\nu} a_4 + M_2 \end{array} \right\}, \quad M_2 = \frac{E\nu(a_1 + a_2)}{(1 - \nu^2)} \quad A1.17$$

et

$$d_D = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{E}{1+\nu} a_1 + M_1 \\ \frac{E}{1+\nu} a_2 + M_1 \\ Ga_3 \\ \frac{E}{1+\nu} a_4 + M_1 \end{Bmatrix}, \quad M_1 = \frac{E\nu(a_1 + a_2 + a_4)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{A1.18}$$

en contrainte plane

