

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE  
U.F.R. DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES  
DÉPARTEMENT DE MÉCANIQUE FONDAMENTALE

## THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LILLE I  
Discipline : MÉCANIQUE

présentée par

**Tougna DAWAI**



Titre de la thèse:

**Dynamique des structures tourbillonnaires au  
voisinage des frontières en présence des sources**

Soutenue le 30 novembre 1999 devant le jury composé de

**Président :** Arthur DYMENT, Professeur Emérite à l'Université de LILLE I

**Rapporteurs :**

Armando BABIANO, Directeur de recherches au CNRS, ENS, Paris

Gueorgui KHOMENKO, Professeur à l'Université du Littoral

**Examineurs :**

Pierre-Antoine BOIS, Professeur à l'Université de LILLE I

Guy CAIGNAERT, Professeur, E.N.S.A.M., LILLE

Victor GONCHAROV, Directeur de Recherches, Institute of Atmospheric Physics,  
Russian Academy of Sciences

**Directeur de thèse :** Vadim PAVLOV, Professeur à l'Université de LILLE I.

# Remerciements

Ce travail de recherche a été effectué au Laboratoire de Mécanique de Lille (URA CNRS 1441).

Je dois remercier Monsieur Vadim Pavlov, Professeur à l'Université de Lille I pour les trois raisons principales suivantes :

Premièrement, pour la confiance qu'il a eu en moi en me proposant un sujet de thèse très intéressant.

Deuxièmement, pour m'avoir fait découvrir l'approche hamiltonienne et son application à la résolution des problèmes de la dynamique des vortex.

Enfin, pour sa disponibilité, sa rigueur scientifique et l'enthousiasme remarquables, dont j'ai bénéficié pendant ces trois années de recherche.

Je remercie Messieurs Armando Babiano, Directeur de recherches au CNRS, ENS ULM, Paris et Gueorgui Khomenko, Professeur à l'Université du Littoral pour avoir accepté la charge de rapporteurs et pour leurs remarques constructives.

Je remercie vivement Monsieur Arthur Dymont, professeur Emérite à l'Université de Lille I, pour avoir accepté de présider le jury de thèse et pour toute l'attention particulière qu'il a accordée à mon travail.

Je remercie également Messieurs Pierre-Antoine Bois, Professeur à l'Université de Lille I, Guy Caignaert, Professeur à l'ENSAM Lille et Victor Goncharov, Directeur de Recherches, Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences qui, malgré leurs charges ont accepté d'examiner mon travail.

Enfin, je voudrais remercier mon grand frère Wadjiri Tougna qui a toujours pris la relève de nos parents lorsque cela était nécessaire pour me soutenir tout au long de mes études.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Modèles physiques et mathématiques de l'écoulement tourbillonnaire</b>	<b>12</b>
1.1 Quelques remarques préliminaires . . . . .	12
1.2 Modèles mathématiques du mouvement d'un fluide . . . . .	14
1.3 Mouvement des tourbillons ponctuels 2D . . . . .	24
1.3.1 Résolutions possibles des difficultés liées au concept des tourbillons ponctuels . . . . .	24
1.3.2 Equations régissant le mouvement d'un tourbillon ponctuel	26
1.3.3 Système de tourbillons . . . . .	28
1.4 Equations de base dans le plan complexe . . . . .	30
1.5 Tourbillons ponctuels dans un domaine avec des frontières . . . . .	31
1.5.1 Méthode des transformations conformes . . . . .	32
1.5.2 Fonction de Kirchhoff-Routh . . . . .	33
1.6 Quelques informations sur l'application de la méthode des tourbillons ponctuels pour la description des écoulements bidimensionnels . . . . .	35
1.7 Approche hamiltonienne appliquée à l'étude des mouvements de tourbillons ponctuels . . . . .	37
<b>2 Mouvement des tourbillons bidimensionnels au voisinage des frontières en présence des sources</b>	<b>51</b>
2.1 Préambule . . . . .	51
2.2 Formulation du problème et équations de base . . . . .	53
2.3 Modèle d'une paire de tourbillons : cas d'un canal ouvert . . . . .	57
2.4 Cas d'une variation temporelle du débit . . . . .	61
2.5 Quelques observations . . . . .	69
2.6 Comportement d'un tourbillon au voisinage d'une frontière de forme triangulaire . . . . .	72

<b>3</b>	<b>Echelles caractéristiques des domaines tourbillonnaires apparaissant près des irrégularités des frontières</b>	<b>80</b>
3.1	Avant-propos . . . . .	80
3.2	Quelques estimations qualitatives . . . . .	81
3.3	Modèle mathématique . . . . .	84
3.4	Position du problème dans le plan complexe $w$ . . . . .	84
3.5	Solution approchée . . . . .	86
3.6	Conclusion . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Déconnexion et reconnexion des filaments tourbillonnaires</b>	<b>94</b>
4.1	Préliminaires . . . . .	94
4.2	Modèle d'un filament tourbillonnaire . . . . .	95
4.3	Discussions . . . . .	99
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>103</b>
	<b>Annexes</b>	<b>105</b>

# Introduction

Ce travail de recherche porte sur l'étude de différents types d'écoulements tourbillonnaires, à savoir, la dynamique des structures tourbillonnaires au voisinage des frontières en présence des sources.

Dans un domaine aussi vaste que la dynamique tourbillonnaire où il y a une pléthore de problèmes à étudier, il est impossible de faire le tour complet de la question. Aussi nous focalisons-nous principalement sur les tourbillons localisés. Nous appelons tourbillons localisés, des structures tourbillonnaires dont la vorticité est très concentrée et très élevée par rapport au reste du domaine d'écoulement.

Les structures tourbillonnaires localisées sont largement observées dans la nature (voir Figures 0.1 et 0.2).

Les études expérimentales et théoriques des structures tourbillonnaires s'avèrent très compliquées. En effet, parfois, même les mécanismes de leur génération ne sont pas bien connus.

Signalons aussi que les calculs numériques directs, sans l'analyse préliminaire qualitative du problème des structures tourbillonnaires peuvent masquer des informations importantes à cause du nombre de facteurs de second rôle, ou générer des détails, même inexistantes en réalité.

C'est pourquoi l'étude des phénomènes tourbillonnaires sur la base des modèles mathématiques simples présente un intérêt particulier.

Malgré les progrès significatifs dans l'étude et la classification des régimes tourbillonnaires, beaucoup de questions restent encore sans réponses. Une grande partie des travaux sur ce sujet étudie la déformation des coeurs de ces tourbillons localisés; ce qui n'est pas notre objectif ici. Nous ne nous occuperons pas non plus des mécanismes de formation de ces tourbillons. Nous nous intéressons dans ce travail exclusivement à leur mouvement.

Les tourbillons localisés (objets physiques) fournissent un modèle mathématique commode pour décrire la dynamique tourbillonnaire: les tourbillons singuliers, pour lesquels la vorticité est localisée en un point (2D) ou sur des lignes tourbillonnaires (3D), etc. Les tourbillons singuliers offrent une description simplifiée, valable lorsque leurs vis-à-vis physiques sont bien concentrés et bien séparés. Les astrophysiciens par exemple, emploient un double standard semblable en utilisant des globes pour la description d'une structure interne des astres, mais en appliquant le concept des masses ponctuelles pour la description des déplacements de mêmes objets dans le cadre de la mécanique céleste.

D'amples informations sur les modèles des tourbillons singuliers peuvent être trouvées dans l'article de H. Aref: Integrable, chaotic and turbulent vortex motion in two-dimensional flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, (1983), p. 345-389.

Les modèles se basant sur l'approximation des zones de vorticité constante ou sur des filaments tourbillonnaires sont également des arsenaux de première importance pour étudier les mouvements tourbillonnaires (voir ci-dessous).

Dans ce travail, nous adopterons le plan qui suit.

Au chapitre un, nous regroupons quelques aspects physiques et mathématiques de base qui sont dispersés dans les ouvrages ou dans les articles. Pour ne pas les répéter incessamment dans les travaux originaux nous présentons ces aspects dans ce premier chapitre; ceux-ci nous serviront dans les prochains chapitres où nous avons présenté nos contributions.

Les résultats essentiels de nos travaux ont fait l'objet de (i) publications dans des revues avec comité de lecture [1, 2]; (ii) communications à des congrès avec actes publiés [3]; (iii) communications à des congrès avec actes à diffusion restreinte [4-7]; (iv) publications dans des revues sans comité de lecture [8, 9].

Les résultats originaux principaux de notre travail sont présentés aux chapitres deux, trois et quatre.

Nous proposons au chapitre deux, l'étude de l'interaction d'une paire tourbillonnaire avec une frontière de type canal ouvert en présence d'une source d'intensité constante ou temporellement variable.

Les questions que nous allons aborder dans ce chapitre sont :

Comment se comportent les tourbillons quasi bidimensionnels au voisinage des particularités des frontières?<sup>1</sup>. Quelle est l'influence des sources extérieures sur leur mouvement? Quelle est l'influence de la modulation temporelle des facteurs extérieurs, telle l'intensité d'une source extérieure sur la topologie des trajectoires<sup>2</sup> des tourbillons, sur les points stationnaires?

La classification des topologies des trajectoires des tourbillons et les positions des points stationnaires sont présentées. L'estimation des positions des points stationnaires lorsque l'intensité de la source varie temporellement est faite par analogie avec le pendule de Kapitsa. Dans ce cas, les topologies des trajectoires des tourbillons changent radicalement.

Dans le chapitre trois, dans le cadre du mouvement 2D, on analyse la possibilité de formation d'un domaine tourbillonnaire de dimension finie au voisinage

---

1. L'explication de la physique du processus est extrêmement simple. Un tourbillon ponctuel, par exemple, dans un domaine sans frontières est complètement immobile. Dès qu'on lui adjoint une frontière, aussi simple soit-elle, le tourbillon va se mouvoir (la présence d'une frontière, crée un tourbillon image qui induit au point où se trouve le tourbillon principal, une vitesse, astreignant ainsi le tourbillon principal à se déplacer) en suivant des trajectoires dont la complexité topologique dépend de la configuration de la frontière considérée.

2. Par topologie des trajectoires, nous entendons le caractère qualitatif des trajectoires.

d'un obstacle de forme polygonale.

Voici les questions que nous proposons de traiter dans ce chapitre :

Sous quelles conditions la formation d'un domaine tourbillonnaire quasi 2D de dimension finie au voisinage d'un obstacle est-elle possible? Lorsque le scénario est réalisable, peut-on précisément déterminer la configuration des frontières de ce domaine? Quelle est la vorticité qui y règne? Peut-on la déterminer en fonction des paramètres tels que la dimension caractéristique du domaine tourbillonnaire, la taille des frontières, le nombre de Reynolds de l'écoulement extérieur?

Pour le modèle proposé, lorsqu'un tel scénario est réalisable, une allure de la courbe délimitant le domaine de vorticité non nulle est trouvée. Nous avons montré que le niveau de vorticité est lié à la dimension caractéristique du domaine tourbillonnaire. Cette dimension dépend de la taille de l'obstacle, fonction homogène du nombre de Reynolds.

Bien que la majeure partie de ce travail soit consacrée aux mouvements tourbillonnaires 2D à de grandes valeurs du nombre de Reynolds (où les effets de viscosité sont négligés), nous avons, au chapitre quatre, discuté quelques éléments du mouvement 3D, notamment en examinant le problème de déconnexion et de reconnexion des filaments tourbillonnaires. Nous avons montré qu'une manifestation des effets dissipatifs dans un écoulement moyen peut être expliquée par la reconnexion des filaments tourbillonnaires singuliers. Le phénomène de reconnexion s'accompagne d'un changement de topologie de l'écoulement. Nous avons donné une interprétation des résultats des calculs. Selon notre interprétation, le phénomène peut se réaliser dans un fluide quand se forment les "bulles" microscopiques aux domaines de "contacts" de filaments ayant des surfaces (frontières) sur lesquelles peuvent "s'appuyer" les filaments tourbillonnaires (voir les détails à la fin du chapitre quatre).

Enfin, nous clôturerons ce mémoire, en évoquant en conclusion, les applica-



tions possibles des études faites. Les réponses aux problèmes susmentionnés sont déterminantes, car les structures tourbillonnaires jouent des rôles clés dans les industries, dans le contrôle de la turbulence. Enfin, la connaissance de la dynamique tourbillonnaire peut être un moyen efficace pour surveiller le transport de polluants dans l'environnement.



FIG. 0.1 - *Tornade : exemple de fil tourbillonnaire*

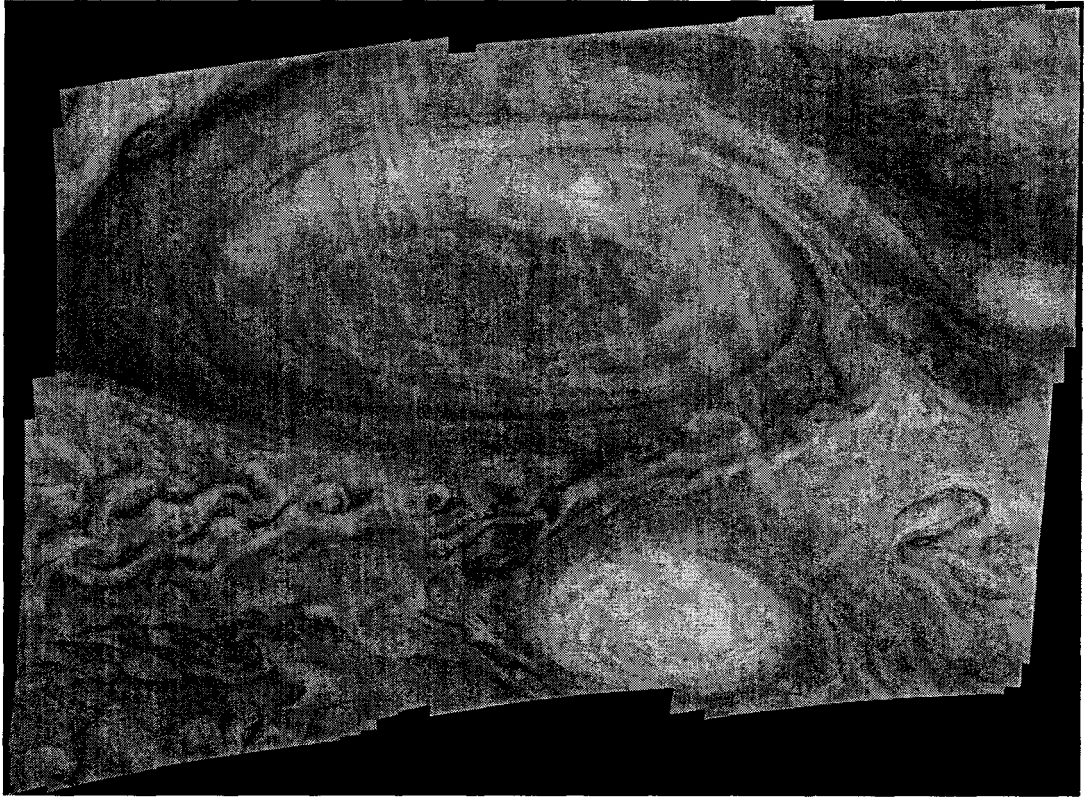


FIG. 0.2 - *Grande Tâche Rouge (GTR) sur Jupiter: exemple de domaine où la vorticité est quasi constante*

# Bibliographie

- [1] T. DAWAI, V. PAVLOV, Mouvement des tourbillons bidimensionnels au voisinage des frontières en présence des sources, C. R. ACAD. SCI., Paris, 1999, t. 327, 1, série IIb, 71-76.
- [2] T. DAWAI, V. PAVLOV, Echelles caractéristiques des domaines tourbillonnaires apparaissant près des irrégularités des frontières, C. R. ACAD. SCI., Paris, 1999, t. 327, 11, série IIb, 1133-1138.
- [3] T. DAWAI, V. PAVLOV, Dynamics of Point-Vortex Structures in a Time-dependent Coastal (River) 2D-Flow. *Annales Geophysicae*, 16, Sup IV, C1151, 1998
- [4] T. DAWAI, V. GONCHAROV, V. PAVLOV, Etude d'une structure tourbillonnaire au voisinage d'une vallée, *Atelier de Modélisation de l'Atmosphère*. Météo France, Toulouse 2-3 décembre 1997, p. 7-10.
- [5] T. DAWAI, V. PAVLOV, Modélisation du mouvement des tourbillons localisés à proximité d'une chaîne de montagnes, *Atelier de Modélisation de l'Atmosphère*. Météo France, Toulouse 8-9 décembre 1998, p. 189-192.
- [6] DAWAI T., PAVLOV V., Interactions tourbillons-sources en présence des frontières polygonales, *Congrès Français de Mécanique*, section : turbulence, Toulouse 30 août au 3 septembre 1999.

- [7] T. DAWAI, V. PAVLOV, Estimations des échelles caractéristiques des domaines tourbillonnaires se formant près des frontières rigides, *Congrès Français de Mécanique*, section : turbulence, Toulouse du 30 août au 3 septembre 1999.
  
- [8] T. DAWAI, V. PAVLOV, Dynamics of point-vortex structures in a 2D-flow in the presence of boundaries, *Publications Institut de Recherche en Mathématiques Avancées*, Lille 1998, **46**, No. VI, p. 1-15.
  
- [9] T. DAWAI, V. PAVLOV, Kapitsa's Pendulum and motion of point-vortices in a fast time-dependent 2D-flow near boundaries with vertices, *Publications Institut de Recherche en Mathématiques Avancées*, Lille 1998, **47**, No. I, p. 1-12.

# Chapitre 1

## Modèles physiques et mathématiques de l'écoulement tourbillonnaire

### 1.1 Quelques remarques préliminaires

L'hydrodynamique qui est l'une des sciences les plus anciennes prend aujourd'hui (et ce n'est pas pour la première fois dans son histoire) un nouvel essor prodigieux. Les causes en sont nombreuses.

La première et principale cause réside dans les possibilités offertes par le développement des ordinateurs, qui deviennent de plus en plus puissants. En effet les nouvelles techniques de calcul ont mis à notre portée non seulement des calculs autrefois impossibles, mais aussi ont permis d'utiliser les ordinateurs pour réaliser des expériences numériques qui présentent de grands avantages sur les expériences de laboratoire.

La seconde cause : l'élargissement notable des moyens mathématiques mis à la disposition de l'hydrodynamique. Tout en perfectionnant les méthodes exis-

tantes, on a créé de nouvelles méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe et de la théorie des équations aux dérivées partielles spécialement pour les applications hydrodynamiques. On a recours de plus en plus souvent aux méthodes modernes de l'analyse fonctionnelle.

La troisième cause : la révolution scientifique et technique, le progrès intense de la technique, les études développées de l'environnement. Tout cela pose une foule de nouveaux problèmes à l'hydrodynamique.

Au XIX-ème et au début du XX-ème siècle, les traités d'hydrodynamique comprenaient essentiellement de longs calculs sur des fonctions élémentaires et spéciales. Selon une expression imagée de S. Goldstein, un hydrodynamicien américain contemporain, sous ces calculs on ne pouvait plus distinguer l'eau, ni s'imaginer qu'elle est mouillée [22]. Même aujourd'hui on trouve beaucoup de travaux qui contiennent des calculs longs et complexes des solutions exactes des équations différentielles d'hydrodynamique, qui n'ont rien à voir avec la réalité. Selon l'opinion du savant russe Lavrentiev [22], l'intérêt pratique de telles recherches est sensiblement dévalorisé ne serait-ce que pour la simple raison que les équations de l'hydrodynamique elles-mêmes ne sont qu'une très grossière approximation de nombreux phénomènes physiques ; De sorte que certains résultats de la théorie "exacte" rappellent par leur absurdité les calculs avec un grand nombre de chiffres significatifs d'une valeur qui n'est en réalité qu'une très grossière approximation de la valeur exacte.

Il nous semble rationnel de repérer, au moyen d'expériences et d'observations, les paramètres principaux qui gouvernent les phénomènes physiques dans l'intervalle spatio-temporel étudié et de construire un modèle mathématique simple qui ne tienne compte que de ces paramètres.

L'objet de ce chapitre est de rappeler quelques éléments fondamentaux de la mécanique des fluides dont nous nous servons par la suite. Pour ce faire, nous

nous baserons principalement sur les travaux [4, 7, 18, 19, 20, 23, 24, 31, 45]. Les résultats originaux de notre travail sont présentés aux chapitres deux, trois et quatre.

## 1.2 Modèles mathématiques du mouvement d'un fluide

Rappelons quelques notions fondamentales de la dynamique des milieux continus. On dit que le mouvement d'un milieu occupant un certain volume est donné si à tout instant  $t$  on peut définir (c'est-à-dire calculer avec toute la précision voulue) le champ de vitesses des éléments matériels  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  en tout point  $\mathbf{x}$  de ce volume. Cette définition générale a besoin d'être précisée dans de nombreux cas. Les frontières du domaine occupé par le milieu en mouvement peuvent varier avec le temps ; elles peuvent être inconnues a priori et doivent alors être déterminées avec le champ de vitesses à partir de conditions données ; les frontières peuvent apparaître au cours du mouvement lorsque par exemple dans le milieu se forment des poches.

Outre le champ de vitesses on doit généralement donner d'autres grandeurs décrivant l'état du milieu : la densité  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , la pression,  $P(\mathbf{x}, t)$ , la température  $T(\mathbf{x}, t)$ , etc., selon le problème posé. Pour pouvoir décrire mathématiquement le mouvement du milieu continu, il faut mettre au point un modèle mathématique adéquat. Généralement ce modèle ne doit refléter que les propriétés les plus importantes, sinon il se mettrait mal à l'étude, donnerait peu de résultats concrets et rendrait difficile la comparaison de la théorie avec l'expérience. Un modèle bien choisi permet souvent de mener à bien la résolution du problème.



## FLUIDE INCOMPRESSIBLE NON VISQUEUX

Parfois la compressibilité du milieu est si faible qu'on peut la négliger (voir plus loin).

L'écoulement du fluide non visqueux se laisse alors décrire, en présence de forces extérieures, par les équations suivantes :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.1)$$

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{F}. \quad (1.2)$$

La première équation traduit sous forme mathématique la condition d'incompressibilité, la seconde est précisément l'équation du mouvement : au premier membre, on a l'accélération  $d\mathbf{v}/dt = \partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  des "particules de fluide" en mouvement, au second, les forces hydrodynamiques  $-\frac{1}{\rho} \nabla P$  et extérieures ( $\mathbf{F}$ ) appliquées à ces particules.

Discutons les conditions que doit vérifier un fluide pour être considéré comme incompressible (condition dont la traduction mathématique est représentée par l'équation (1.1)).

Considérons  $\mathbf{v}$  la vitesse du fluide,  $c_s$  la vitesse du son dans le fluide,  $L$  la longueur pour laquelle la vitesse varie sensiblement et  $\tau$  le temps au bout duquel on constate une variation notable de la vitesse. Il est alors bien connu [20] que lorsque la pression varie adiabatiquement de  $\Delta P$ , la masse volumique varie de  $\Delta \rho = (\partial \rho / \partial P)_s \Delta P$ . De plus nous savons d'après le théorème de Bernoulli que, dans un écoulement stationnaire les oscillations de la pression ont pour ordre de grandeur  $\Delta P \sim \rho \mathbf{v}^2$ , de telle manière que  $\Delta \rho \sim (\partial \rho / \partial P)_s \rho \mathbf{v}^2$  c'est-à-dire  $\Delta \rho \sim \rho \mathbf{v}^2 / c_s^2$ , où  $c_s$  est la vitesse du son dans le fluide. Le fluide ne peut être considéré comme incompressible que si  $\Delta \rho / \rho \ll 1$ , ce qui nous conduit à la condition nécessaire :

$$|\mathbf{v}| \ll c_s. \quad (1.3)$$

La condition (1.3) ne peut être suffisante que dans le cas d'un écoulement stationnaire ; nous devons donc rechercher une autre condition pour un écoulement instationnaire. Considérons  $\tau$  et  $L$  des quantités représentant respectivement la durée et la distance pour lesquelles on a une variation notable de la vitesse. Si nous comparons les termes  $\partial_t \mathbf{v}$  et  $\nabla P/\rho$ , qui apparaissent dans l'équation d'Euler, nous obtenons en ordre de grandeur :  $\mathbf{v}/\tau \sim \Delta P/L\rho$  ou  $\Delta P \sim L\rho\mathbf{v}/\tau$  et, pour la variation de  $\rho$  on obtient :  $\Delta\rho \sim L\rho\mathbf{v}/\tau c_s^2$ . De même, si nous comparons les termes  $\partial\rho/\partial t$  et  $\rho(\nabla \cdot \mathbf{v})$ , qui figurent dans l'équation de continuité, on trouve qu'on ne peut négliger le terme  $\partial\rho/\partial t$  devant  $\rho(\nabla \cdot \mathbf{v})$  que si  $\Delta\rho/\tau \ll \rho\mathbf{v}/L$  ou encore :

$$\tau \gg L/c_s. \quad (1.4)$$

La condition (1.4) signifie que le temps  $L/c_s$  au cours duquel un signal sonore parcourt la distance  $L$  est très petit devant le temps  $\tau$  pendant lequel le mouvement du fluide varie sensiblement ; ceci permet alors de considérer comme instantané le processus de propagation des interactions dans le fluide.

Nous pouvons nous résumer en disant que, si la vitesse du fluide est très petite devant la vitesse du son dans ce même fluide et si la condition  $\tau \gg L/c_s$  est vérifiée alors le fluide peut être considéré comme incompressible.

On obtient des applications plus intéressantes si l'on impose certaines conditions complémentaires aux mouvements étudiés. Voici quelques unes de ces conditions qui nous serviront dans les parties originales de ce travail.

#### ÉCOULEMENT PLAN

Peu de problèmes spatiaux d'hydrodynamique peuvent être résolus jusqu'au bout. Certains problèmes plans peuvent être simplifiés sous l'hypothèse complémentaire que le champ de vitesses est plan. Cela signifie qu'il existe une direction  $\mathbf{N}$  à laquelle toutes les vitesses du champ sont perpendiculaires et dans tous les

plans perpendiculaires à  $\mathbf{N}$  le champ conserve son aspect (de sorte que les champs sont confondus à une translation suivant  $\mathbf{N}$ . Un tel champ est complètement décrit par l'un des champs de vitesses dans un plan perpendiculaire à  $\mathbf{N}$ ). Dirigeons  $\mathbf{N}$  suivant l'axe des  $z$  et désignons par  $v_x$  et  $v_y$  respectivement les composantes du vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  sur les axes des  $x$  et des  $y$ . Les conditions d'incompressibilité et de potentialité se mettent alors sous la forme

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0. \quad (1.5)$$

De ces équations (1.5), on voit que les composantes de la vitesse s'expriment comme suit en fonction de  $\phi$ :

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (1.6)$$

Le potentiel des vitesses  $\phi$  est donc solution de l'équation de Laplace

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (1.7)$$

Les équations (1.5) montrent également que l'expression  $-v_y dx + v_x dy$  est (localement) la différentielle exacte d'une fonction  $\psi$  de sorte que

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.8)$$

La direction de la tangente à la courbe  $\psi(x, y) = C^{te}$  déduite de l'égalité  $d\psi = -v_y dx + v_x dy$ , coïncide évidemment avec celle du vecteur vitesse ( $dy/dx = v_y/v_x$ ) si bien que les courbes  $\psi = C^{te}$ , sont les directions vectorielles du champ de vitesses.

En écoulement stationnaire ces courbes sont confondues avec les trajectoires des particules mobiles, c'est-à-dire avec les lignes de courant, d'où le nom de fonction de courant donnée à  $\psi$ . De la seconde équation (1.5) il s'ensuit que  $\psi$  tout comme  $\phi$  est une fonction harmonique et la comparaison de (1.6) et de (1.8) montre qu'entre ces fonctions on a les relations

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.9)$$

avec  $\Delta\psi = 0$  et  $\Delta\phi = 0$ .

De telles fonctions sont dites conjuguées harmoniques.

Les simplifications notables apportées par l'hypothèse d'écoulement plan s'expliquent par les deux faits suivants : (i) la fonction de courant en termes de laquelle sont formulés plusieurs problèmes est définie de façon naturelle dans le cas plan alors qu'elle l'est difficilement dans le cas tridimensionnel ; (ii) dans les problèmes plans le potentiel et la fonction de courant forment ensemble une fonction analytique dont la théorie est très bien élaborée tant qualitativement que quantitativement ([27] et bien d'autres ouvrages).

Le schéma de l'écoulement plan ne s'applique pas seulement aux champs de vitesses plans. Il est utilisé aussi à la description approchée de cas plus généraux, par exemple l'étude de l'écoulement autour d'une aile d'avion sur une grande partie de son envergure (la théorie de l'aile d'envergure infinie). Aux extrémités de l'aile le schéma n'est plus valable et doit être précisé.

Un cas particulier d'un écoulement plan est celui d'un écoulement bidimensionnel.

Donnons ici quelques estimations [24] sur la possibilité d'application de l'approximation 2D. Considérons comme exemple le mouvement d'un fluide incompressible dans un bassin dont le fond est rigide. On suppose que la surface supérieure du fluide est libre d'efforts visqueux. Les équations qui régissent le mouvement du fluide sont : les équations de Navier-Stokes, l'équation de continuité ; des équations auxquelles il faut ajouter les conditions aux limites suivantes : l'absence de tensions visqueuses sur la surface libre et la condition de non glissement au fond. Soient  $v$  et  $w$  des vitesses typiques horizontale et verticale respectivement,  $L$  une longueur typique horizontale et  $d$  l'épaisseur de la couche de fluide qui est supposée être de l'ordre de la longueur typique verticale. Le nombre de Froude  $Fr = v^2/gL$  est supposé très petit devant 1, par contre le nombre de Reynolds

$Re = vd/\nu$  est grand devant 1. Nous supposons que la couche fluide est très fine, que le mouvement peut être considéré comme quasi bidimensionnel et que les inégalités  $v^2/gL \ll 1$ ,  $\nu/vd \ll 1$ ,  $d/L \ll 1$  et  $w/v \ll 1$  sont satisfaites, ( $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide et  $g$  l'accélération de la pesanteur). Dans un tel écoulement la surface libre du fluide peut être approximée par une plaque horizontale insensible à toute friction. Nous cherchons à présent à approximer les équations de l'hydrodynamique en utilisant la même démarche que dans [24].

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla + w \partial_z) \mathbf{v} = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} \right) + \nu (\Delta + \partial_z^2) \mathbf{v}, \quad (1.10)$$

$$g = -\partial_z (P/\rho), \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \partial_z w = 0, \quad (1.12)$$

où  $g$  est l'accélération due à la pesanteur.

Les conditions aux limites du problème sont :

Sur la surface libre :

$$\partial_z \mathbf{v} = 0 \text{ et } w = 0; \text{ en } z = 0 \quad (1.13)$$

Au fond du bassin :

$$\mathbf{v} = 0 \text{ et } w = 0; \text{ en } z = d(x, y) \quad (1.14)$$

où  $\mathbf{v}$  est la composante horizontale,  $w$  la composante verticale.  $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$  et  $\partial_z$  sont respectivement l'opérateur gradient horizontal et vertical.  $P$  est la pression qui règne dans le fluide,  $\rho$  est la masse volumique du fluide et  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$  est l'opérateur laplacien bidimensionnel.

Dans l'approximation d'eau peu profonde, c'est-à-dire  $L \gg d$ , le développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de  $z = 0$  pour les composantes  $\mathbf{v}$  et  $w$  de la

vitesse donne :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'_0 z + \frac{1}{2} \mathbf{v}''_0 z^2, \quad (1.15)$$

$$w = w_0 + w'_0 z + \frac{1}{2} w''_0 z^2, \quad (1.16)$$

avec  $\nabla \cdot (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'_0 z + \frac{1}{2} \mathbf{v}''_0 z^2) + \partial_z (w_0 + w'_0 z + \frac{1}{2} w''_0 z^2) = 0$ . Et par identification des coefficients du polynôme en  $z$  on obtient la relation suivante :

$$w'_0 = -\nabla \cdot \mathbf{v}_0, \quad w''_0 = -\nabla \cdot \mathbf{v}'_0. \quad (1.17)$$

Des conditions aux limites (1.13) et (1.14) et de la relation (1.17) découlent les relations suivantes :

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0, \quad \mathbf{v}'_0 = 0, \quad \mathbf{v}''_0 = \frac{-2}{d^2} \mathbf{v}_0, \quad (1.18)$$

$$w_0 = w'_0 = w''_0 = 0. \quad (1.19)$$

Les équations de mouvement prennent alors la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla \left( \frac{P_0}{\rho} \right) + \nu \Delta \mathbf{v}_0 - \frac{2\nu}{d^2} \mathbf{v}_0, \quad (1.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0. \quad (1.21)$$

$P_0$  et  $\mathbf{v}_0$  sont respectivement la distribution de la pression et le champ de vitesses hydrodynamique (sur la surface libre du fluide).

En résumé, un écoulement 3D peut être approximé par un écoulement 2D si les conditions suivantes sont vérifiées :  $v^2/gL \ll 1$ ,  $\nu/vd \ll 1$ ,  $d/L \ll 1$  et  $w/v \ll 1$ .  $v$  est la vitesse typique horizontale,  $w$  la vitesse typique verticale,  $d$  une longueur typique verticale et  $L$  une longueur typique horizontale (par exemple, la longueur du bassin).

Lorsque les effets de viscosité peuvent être négligés ( $Re^{-1} \rightarrow 0$ ), on obtient alors de (1.20) les équations d'Euler pour l'écoulement bidimensionnel :  $\partial \mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P$ , où  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ ,  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ .

En terme de vorticité,  $\omega = \text{rot}\mathbf{v}$ , l'équation précédente se transforme en

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega = 0. \quad (1.22)$$

#### ECOULEMENT   ROTATION DONN E

De nombreux effets hydrodynamiques sont incompatibles avec le schéma des écoulements à potentiel. Ce dernier peut être parfois remplacé par un schéma d'écoulement à rotation donn e  $\omega$ .

Supposons que le fluide est incompressible et que les forces extérieures qui lui sont appliqu es dérivent d'un potentiel  $\phi_{ext}$ . Nous obtenons dans ce cas :

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + [\omega, \mathbf{v}] = -\nabla\mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = |\mathbf{v}|^2/2 + P/\rho - \phi_{ext}, \quad (1.23)$$

où le terme  $[\omega, \mathbf{v}]$  désigne le produit vectoriel de  $\omega$  par  $\mathbf{v}$ .

Cette équation est appel e équation de Lamb et  $\mathcal{L}$  est la fonction de Lamb. Sous cette forme l'équation du mouvement est fort commode pour l'étude des écoulements à rotation donn e.

Examinons le cas de l'écoulement plan. Ici le vecteur rotation  $\omega = \text{rot}\mathbf{v}$  est dans ce cas perpendiculaire au plan d'écoulement. Si nous supposons de plus que l'écoulement est permanent, on peut alors écrire l'équation de Lamb (1.23) sous la forme

$$\omega v_y = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}, \quad -\omega v_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}$$

où  $\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$ .

Si l'on introduit la fonction de courant  $\psi$  définie par les formules (1.5) et qu'on identifie ensuite les dérivées mixtes de la fonction  $\mathcal{L}$ , on obtient l'identité

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \quad (1.24)$$

qui montre que la grandeur  $\omega$  doit être constante sur les courbes de niveau  $\psi = C^{te}$ , c'est-à-dire ne dépendre que de  $\psi$  :

$$\omega = \omega(\psi). \quad (1.25)$$

Dans les applications la forme de cette dépendance est habituellement supposée connue. En portant la fonction de courant dans (1.24) on constate qu'elle est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\omega(\psi). \quad (1.26)$$

Si la fonction  $\psi$  n'est pas linéaire, l'équation (1.26) ne l'est pas non plus et de ce fait elle est difficile à étudier. Si le second membre de cette équation est constant dans un domaine  $D$ , l'équation se ramène à l'équation de Poisson.

### CONDITIONS AUX LIMITES

Rappelons quelques faits bien connus. La résolution des problèmes d'hydrodynamique ainsi schématisés se ramène à la recherche de la solution de l'équation aux dérivées partielles (1.26) qui satisfait à certaines conditions supplémentaires.

Il existe deux types de conditions supplémentaires : les conditions initiales et les conditions aux limites. Les conditions initiales doivent être posées uniquement pour les écoulements non stationnaires.

Pour un écoulement plan ou un écoulement à symétrie axiale les conditions aux limites se forment particulièrement bien en terme de fonction de courant. En effet, pour ces écoulements les lignes de courant  $\psi = C^{te}$  et les lignes  $\phi = C^{te}$  sont deux à deux orthogonales et en outre la nullité de la dérivée  $\frac{\partial\phi}{\partial l}$  dans une direction quelconque  $l$  entraîne celle de la dérivée  $\frac{\partial\phi}{\partial m}$  dans une direction  $m$  perpendiculaire à la direction  $l$ . De sorte que sur la frontière de l'écoulement on peut remplacer la condition  $\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$  par la condition  $\frac{\partial\phi}{\partial s} = 0$ , la dérivée étant prise dans la direction de la frontière. Or la dernière condition traduit le fait que  $\psi = C^{te}$  sur la frontière, autrement dit que la frontière est une ligne de courant.

### POTENTIEL COMPLEXE

Soit un écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible dans un



domaine plan  $D$ . On définit le potentiel complexe d'un écoulement dans le plan  $z$  par :

$$\Phi_0(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \quad z = x + iy$$

$\Phi_0(z)$  est une fonction analytique de  $z$  dans  $D$ ,  $\phi(x, y)$  est le potentiel des vitesses et  $\psi(x, y)$  la fonction de courant.  $\phi$  et  $\psi$  vérifient les relations suivantes :

$$u = \partial_y \psi = \partial_x \phi, \quad v = -\partial_x \psi = \partial_y \phi \quad (1.27)$$

$$\mathbf{v} = u - iv = d\Phi_0/dz = 2i\partial_z \psi, \quad (1.28)$$

est la vitesse complexe de l'écoulement [13, 27].

### SIGNIFICATION PHYSIQUE DES POINTS SINGULIERS

Les points singuliers isolés des fonctions analytiques admettent une interprétation hydrodynamique simple [19, 22].

#### (i) *Source*

Soit un champ de vitesses plan créé par l'unique source ponctuelle à l'origine des coordonnées complexes  $z = 0$ . Pour des raisons de symétrie il est clair que le vecteur vitesse est de la forme  $v = \lambda(|z|)z$ , où  $\lambda > 0$ . Le flux de ce vecteur à travers le cercle de rayon  $r$  est égal à

$$m = \int_{|z|=r} v_n ds = \lambda(r)r \cdot 2\pi r$$

d'où  $\lambda(r) = \frac{m}{2\pi r^2}$ ,  $m$  étant une constante caractérisant le débit de la source.

Donc, le vecteur vitesse de l'écoulement s'écrit

$$v = \frac{m\bar{z}}{2\pi|z|^2} = \frac{m}{2\pi z} \quad (1.29)$$

et son potentiel complexe (que l'on déduit de la formule (1.28) par intégration en rejetant le terme constant non essentiel) a pour expression  $\Phi_0(z) = (m/2\pi)\text{Log}z$ .

Une source ponctuelle est un point par lequel le fluide coule constamment et au voisinage duquel il n'y a pas d'autres sources.

(ii) *Tourbillon*

On détermine exactement de la même façon le vecteur vitesse et le potentiel complexe de l'écoulement plan créé par l'unique tourbillon ponctuel placé à l'origine des coordonnées :

$$v = \frac{\Gamma i}{2\pi z}, \quad \Phi_0(z) = \frac{-\Gamma i}{2\pi} \text{Log}z.$$

La constante  $\Gamma$  caractérise l'intensité du tourbillon.

On pourrait aussi considérer un tourbillon-source, c'est-à-dire l'union en un seul point d'une source et d'un tourbillon [36]. Si un tourbillon-source est placé à l'origine des coordonnées et si son intensité est caractérisée par un nombre complexe  $m - i\Gamma$ , le vecteur vitesse et le potentiel complexe de l'écoulement créé par celui-ci sont donnés par la relation

$$v = \frac{c}{2\pi z}, \quad \phi(z) = \frac{c}{2\pi} \text{Log}z. \quad (1.30)$$

On voit donc qu'un point de ramification logarithmique d'un potentiel complexe s'interprète physiquement comme un tourbillon-source placé en ce point.

## 1.3 Mouvement des tourbillons ponctuels 2D

### 1.3.1 Résolutions possibles des difficultés liées au concept des tourbillons ponctuels

Pour les fluides ordinaires, des tourbillons discrets doivent être considérés comme une approximation ; cette approximation est valable lorsque ceux-ci sont bien concentrés et bien séparés. Les tourbillons ponctuels offrent alors une description simplifiée et élégante.

Le mouvement des tourbillons ponctuels 2D dans un domaine illimité est connu depuis Helmholtz et Lord Kelvin. Beaucoup de travaux suivirent [19, 28, 29,

31, 45] et bien d'autres. Aujourd'hui les tourbillons ponctuels continuent à faire l'objet de nombreuses recherches avec des applications diverses [36, 40, 43, 44, 46].

Les tourbillons ponctuels 2D sont des concentrations de vorticité singularis  es en des points du plan qui interagissent les uns avec les autres.

Pour différentes raisons, de tels modèles ont été trouvés attrayants : dans beaucoup de cas l'étude de la dynamique des tourbillons singuliers et leur interaction est plus simple que dans des problèmes analogues pour la distribution continue de vorticité. Un champ hydrodynamique initial arbitraire peut être représenté sous forme de superposition des champs générés par ces tourbillons, etc...

Dans ce cas-ci, des écoulements d'Euler peuvent être décrits par un système de tourbillons ponctuels : la vorticité totale est donn  e par

$$\Omega = \sum_i \kappa_i \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i).$$

Evidemment, le modèle des tourbillons ponctuels offre des modèles mathématiques commodes où l'on néglige les effets des noyaux finis de tourbillons. En astrophysique, une double norme semblable est utilis  e. Par exemple, les masses de point sont consid  r  es pour décrire des problèmes de la mécanique céleste, mais des globes de fluide sont utilisés pour modéliser la structure stellaire.

Faisons ici quelques commentaires au sujet des difficultés liées au concept des tourbillons singuliers.

(i) Dans la description traditionnelle des résultats expérimentaux les écoulements comportent des distributions continues de vorticité. Comment peut-on approximer une distribution continue de vorticité par des moyens de tourbillons ponctuels? La réponse peut être comme suit : la signification physique a seulement fait la distribution moyenne  $\langle \Omega \rangle = \int_{\Sigma} d\sigma \Omega$  où la taille caractéristique du domaine de l'espace faisant la moyenne  $(\Sigma)^{1/2}$ ,  $(D/N)^{1/2} \ll (\Sigma)^{1/2} \ll D^{1/2}$ . Ici  $N$  est le nombre total des tourbillons,  $D$  la zone du domaine où les tourbillons sont localisés. Après calculs, le procédé de moyennage doit être appliqué seulement

après calcul de  $\omega$ .

(ii) Pour un champ de vorticité compos e de tourbillons ponctuels les intégrales de n'importe quelle puissance finie de la vorticité impliquent des puissances des fonctions delta et sont donc singuliers. Pourtant dans le cas du modèle physique typique le champ de vorticité a des moments parfaitement bien définis. Comment peut-on définir ces intégrales et moments? L'interprétation des intégrales est simple si nous utilisons la considération suivante (voir le [19]):

$$\int dx \delta^n(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dx \delta_\epsilon^{n-1}(0) \delta(x).$$

Ici,  $\delta_\epsilon(x)$  est une fonction delta avec  $\delta_\epsilon(0) = \epsilon^{-1}$  et la condition de normalisation  $\int dx \delta_\epsilon(x) = 1$ .  $\epsilon$  est l'échelle caractéristique du domaine où la fonction delta est localisée. Ainsi, nous obtenons

$$\int dx \delta^n(x) = \epsilon^{-(n-1)} \int dx \delta(x) = \epsilon^{-(n-1)}.$$

Si  $\Omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \kappa_i \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$  (pour la description bidimensionnelle), nous obtenons le bilan estimatif pour le moment

$$M^{(n)} = \int d\mathbf{x} \Omega^n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \kappa_i^n \sigma^{-(n-1)}.$$

Ici,  $\sigma$  est la zone caractéristique du domaine occup e par un tourbillon localis e.

Le nombre  $N$  de tourbillons est fix e par le nombre de moments  $M^{(n)}$  en question. Les paramètres  $\kappa_i$  sont trouv es en résolvant l'ensemble des équations

$$\sum_{i=1}^N \kappa_i^j = \sigma^{j-1} M^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

### 1.3.2 Equations régissant le mouvement d'un tourbillon ponctuel

Dans notre description du mouvement d'un fluide, la représentation eulerienne est utilisée et un vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  du fluide est consid er e à un point quelconque

de l'espace en fonction des coordonnées  $\mathbf{r}$  et du temps  $t$ . En d'autres termes, cela suppose que l'on peut prendre une photographie du système à tout moment et observer les vitesses, sans avoir le chemin de chaque particule individuelle et ceci pendant l'évolution d'écoulement. Dans une telle approche on mesure la vitesse par le volume qui les traverse par une unité de superficie plutôt que par le déplacement effectué par une particule dans une unité de temps. L'intérêt des processus du fluide remuant nous conduit à l'approche lagrangienne basée sur l'étude du mouvement d'une particule fluide individuelle  $X$  ayant une vitesse eulerienne connue  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ . Par suite, le mouvement d'une telle particule est décrit par la solution du système dynamique [19, 31, 45]:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (1.31)$$

avec une condition initiale  $\mathbf{r} = X$  à  $t = 0$  ( $\dot{\mathbf{r}}$  désigne la dérivée de  $\mathbf{r}$  par rapport au temps). Ce résultat peut être facilement démontré (voir par exemple [14] pour une démonstration détaillée).

Soit alors  $\mathbf{v}$  la vitesse de l'écoulement bidimensionnel, la vorticité est définie par:  $\omega = \text{rot } \mathbf{v}$ . En prenant le rotationnel de l'équation d'Euler et en tenant compte de l'équation d'incompressibilité, on obtient l'équation de la vorticité:

$$\dot{\omega} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (1.32)$$

avec  $\omega = \text{rot } \mathbf{v}$ .

Supposons que la vorticité  $\omega$  soit localis e ponctuellement et se présente sous la forme:

$$\omega = \sum_{j=1}^N \kappa_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j),$$

$N$  étant le nombre des tourbillons se trouvant dans le domaine d'écoulement. En posant cette expression dans l'équation (1.32) et en égalant les facteurs devant les fonctions delta et leurs dérivées ( $\sum_{j=1}^N \kappa_j (\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)) \{-\dot{\mathbf{r}}_j + \mathbf{v}\} = 0$ ), nous trouvons

que pour satisfaire l'équation (1.32), il est nécessaire et suffisant qu'on ait :

$$\dot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{v}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_j}.$$

Tout revient alors à évaluer la vitesse du centre du tourbillon avec la vitesse eulérienne du fluide au point où se trouve celui-ci.

### 1.3.3 Système de tourbillons

*Un tourbillon* - Un tourbillon ponctuel (voir par exemple [4, 19, 31, 41, 45]), dans un domaine sans frontières est complètement immobile. En présence des frontières, son mouvement définit un système hamiltonien à un seul degré de liberté qui est toujours intégrable [4].

Par contre, lorsqu'on a deux tourbillons au moins se trouvant dans un domaine sans frontière, ceux-ci interagissent par induction de vitesses. Ils peuvent se mouvoir ou rester en équilibre. Un exemple simple de système de deux tourbillons ponctuels est une paire de tourbillons (Figure 1.1). Si  $\kappa$  est l'intensité d'un des tourbillons et  $d$  est la distance qui les sépare, alors la paire se déplace avec une vitesse  $\kappa/(2\pi d)$ .

*Deux tourbillons* - Deux cas sont possibles :

(i) cas où les deux tourbillons sont de même signe (négatif ou positif).

Lorsque deux tourbillons de même signe se rapprochent, ils ont tendance chacun à entraîner l'autre dans leur propre mouvement induit, et par conséquent à tourner l'un autour de l'autre.

(ii) cas où les deux tourbillons sont de signe opposé, on parle alors de dipôle.

Lorsque deux tourbillons de signe opposé se trouvent côte à côte, ils tendent à s'entraîner dans leur mouvement par induction mutuelle dans la même direction, et à se déplacer en couple. Dans le repère lié au dipôle, le fluide est aspiré entre les deux tourbillons, dans le sens induit par la rotation de ceux-ci.

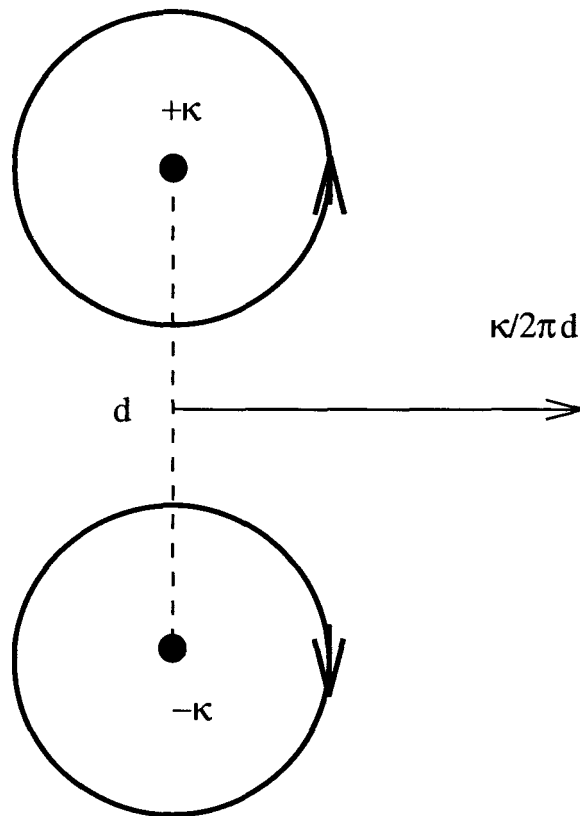


FIG. 1.1 - *Paire de tourbillons se déplaçant avec une vitesse  $\kappa/(2\pi d)$*

Des structures tourbillonnaires similaires sont observés dans les océans (voir plus loin au chapitre deux, figure 2.2), elles ont une longue durée de vie (quelques semaines, voire quelques mois) et peuvent quitter le lieu où elles ont pris naissance et se déplacer sur des grandes distances.

Le mouvement de deux tourbillons (de même signe ou non) dans un domaine illimité définit un système hamiltonien qui est toujours intégrable (voir [4, 45]); au-delà de trois, sauf cas exceptionnel le mouvement devient chaotique et il est non intégrable (un système de quatre tourbillons de vorticité totale nulle est intégrable si son énergie s'annule [18]).

## 1.4 Equations de base dans le plan complexe

Rappelons une fois de plus la définition du potentiel complexe d'un écoulement stationnaire de fluide parfait incompressible dans un domaine plan  $D$ . On définit le potentiel complexe d'un écoulement dans le plan  $z$  par :

$$\Phi_0(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \quad z = x + iy.$$

$\Phi_0(z)$  est une fonction analytique de  $z$  dans  $D$ ,  $\phi(x, y)$  est le potentiel des vitesses et  $\psi(x, y)$  la fonction de courant.  $\phi$  et  $\psi$  vérifient les relations suivantes :

$$u = \partial_y \psi = \partial_x \phi, \quad v = -\partial_x \psi = \partial_y \phi. \quad (1.33)$$

$\mathbf{v} = u - iv = d\Phi_0/dz = 2i\partial_z \psi$  est la vitesse complexe de l'écoulement [13, 27].

Soit un tourbillon d'intensité  $\kappa$  placé au point  $z_0$  dans un domaine  $D$  illimité, le potentiel complexe créé par un tel tourbillon au point  $z$  est  $-i\kappa/2\pi \ln(z - z_0)$ .

Dans un cas plus général, lorsque  $N$  tourbillons ponctuels se meuvent dans un domaine  $D$  illimité, le potentiel créé par ces  $N$  tourbillons en tout point  $z$  du domaine  $D$  est :

$$\Phi_D(z) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^N \kappa_k \ln(z - z_k). \quad (1.34)$$

On suppose dans ce cas que les tourbillons sont placés aux points  $z_1, z_2, \dots, z_N$  et ont pour intensité  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_N$ .

On sait que le champ des vitesses du fluide au point  $z_j$ , où se trouverait le tourbillon, est donné par la relation (par exemple, [31, 45]) :

$$u_j - iv_j = \left\{ \frac{d}{dz} \left( \Phi_D(z) + \frac{i\kappa_j}{2\pi} \ln(z - z_j) \right) \right\}_{z=z_j}. \quad (1.35)$$

L'équation

$$\dot{x}_j - i\dot{y}_j = u_j - iv_j \quad (1.36)$$



est l'équation du mouvement du *jème* tourbillon dans le plan  $z = x + iy$ .

Il est alors clair que dans un domaine sans frontières, un tourbillon ponctuel solitaire  $y$  restera immobile.

## 1.5 Tourbillons ponctuels dans un domaine avec des frontières

Le mouvement des tourbillons en présence des frontières est très différent de celui dans des domaines illimités. En effet un tourbillon en présence d'une frontière ne peut rester immobile que sous des conditions particulières, il interagit avec ces frontières (voir par exemple [9, 14, 36, 45]).

Prenons l'exemple d'un tourbillon ponctuel solitaire en mouvement dans un domaine  $D$  du plan  $z$ , de frontière  $\partial D$ , d'équation  $y = 0$ .

Nous devons alors rechercher une fonction  $\Phi_0(z)$  analytique dans  $D$  et respectant la condition  $\Im(\Phi_0(z))|_{\partial D} = Cte$ , la fonction  $\Phi_0(z)$  étant le potentiel complexe de l'écoulement.

Soit un tourbillon d'intensité  $\kappa$  placé au point  $z_0$  dans un domaine  $D$  illimité, le potentiel complexe créé par un tel tourbillon au point  $z$  est  $-i\kappa/2\pi \ln(z - z_0)$ .

En présence d'une paroi plane (placée par exemple, en  $y = 0$ ), le problème de la recherche de potentiel complexe est résolu par la méthode des images. Par symétrie, l'image du tourbillon se trouve au point  $\bar{z}_0$  et son intensité est  $-\kappa$ . Le potentiel résultant créé au point  $z$  est donné par la relation:  $\Phi_0(z) = -i\kappa/2\pi \ln(z - z_0) + i\kappa/2\pi \ln(z - \bar{z}_0)$ .

On voit alors que le mouvement d'un tourbillon ponctuel singulier d'intensité  $-\kappa$  se trouvant au point  $z_0$  en présence d'une paroi plane se passe comme si celui-ci était dans un milieu illimité mais en présence d'un autre tourbillon d'intensité  $\kappa$  se trouvant au point  $\bar{z}_0$ .

Lorsque le domaine d'écoulement est délimité par une paroi de forme complexe (par exemple une bande [45]), le problème de la détermination du potentiel complexe se complique, il est alors utile d'utiliser la méthode des transformations conformes [31, 27].

### 1.5.1 Méthode des transformations conformes

Soient deux plans  $(x, y)$  et  $(X, Y)$ . Une transformation bijective  $W$  qui à tout point de coordonnées  $(x, y)$  associe le point de coordonnées  $(X, Y)$  est dite conforme si les conditions suivantes sont vérifiées:  $\partial_x X = \partial_y Y$ ,  $\partial_y X = -\partial_x Y$  (conditions de Cauchy).

De telles transformations conservent les angles entre courbes, les points de singularités, les circulations et les débits des écoulements.

Si  $f$  est le potentiel complexe d'un écoulement dans un domaine  $D$  de frontière  $\partial D$  et, si  $W = W(z)$  désigne une transformation conforme, alors  $f(W(z))$  est le potentiel complexe d'un nouvel écoulement dans le domaine  $D'$  (image de  $D$  par la transformation  $W$ ) de frontière  $\partial D'$  (image de  $\partial D$  par  $W$ ).

Si  $f$  possède des points de singularités, ceux-ci deviennent des points de singularités de  $f(W(z))$  de même nature. On peut trouver des détails sur ce sujet dans [7, 13, 41].

C'est par souci de trouver des domaines plus simples dans lesquels on sait exprimer le potentiel complexe que l'on utilise les transformations conformes.

En général, pour une frontière complexe, il est difficile de déterminer analytiquement la transformation  $W$ , il est alors nécessaire d'approximer une telle frontière par une beaucoup plus simple. Très souvent, on approxime la frontière par un polygone à  $n$  côtés puis, on applique le théorème de Schwartz-Christoffel. Nous rappelons ce théorème que l'on peut trouver dans les ouvrages classiques [27, 31].

- Théorème de Schwartz-Christoffel :

Soit un polygone à  $n$  côtés, de sommets  $A_k$ , d'angles intérieurs aux sommets  $\pi\alpha_k$  ( $0 \leq \pi\alpha_k \leq 2$   $k = 1, 2, 3, \dots, n$  et  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n$ ), la transformation conforme d'un tel polygone en demi-plan supérieur ( $\Im w \geq 0$ ) est donnée par la relation suivante

$$\frac{1}{c} \frac{dW}{dz} = \prod_{k=1}^n (W - a_k)^{1-\alpha_k}, \quad (1.37)$$

les  $a_k$  étant les images par la transformation  $W$  des sommets  $A_k$ .

Trois points parmi les  $a_k$  peuvent être choisis arbitrairement, ainsi les autres peuvent être déterminés sans ambiguïté.

Il faut préciser que la détermination de la transformation  $W$  dans la relation (1.37) consiste non seulement à choisir les trois points arbitraires mais aussi, à déterminer la constante  $c$  et une autre constante d'intégration.

## 1.5.2 Fonction de Kirchhoff-Routh

Soit un ensemble de  $N$  tourbillons d'intensité  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_N$  placés en  $z_1, z_2, \dots, z_N$ , en présence d'une paroi, le potentiel complexe créé au point  $z$  par l'ensemble des tourbillons est de la forme [28, 29, 45]

$$\Phi_0(z) = f(z) + \sum_{j=1}^N \kappa_j G(z; z_j) = \phi + i\psi, \quad (1.38)$$

$f$  est le potentiel créé par l'écoulement irrotationnel (sources, puits...) et  $G$  la fonction de Green qui vérifie  $\Im(G) = 0$  sur la paroi.

Introduisons la fonction  $g$  par :  $g(z; z_j) = G(z; z_j) + i/2\pi \ln(z - z_j)$ .

La fonction de Kirchhoff-Routh est définie par :

$$\Psi = \Im \left\{ \sum_j \kappa_j f(z_j) + 1/2 \sum_{j,k, j \neq k} \kappa_j \kappa_k G(z_j; z_k) + 1/2 \sum_j \kappa_j^2 g(z_j; z_j) \right\} \quad (1.39)$$

Si le domaine d'écoulement est illimité, la fonction de Kirchhoff-Routh est donnée par la relation :

$$\Psi = -1/4\pi \sum_{j,k,j \neq k} \kappa_j \kappa_k \ln |z_j - z_k|.$$

Si le domaine d'écoulement est limité par une plaque plane (une ligne droite dans le cas bidimensionnel), la fonction de Kirchhoff-Routh est donnée par la relation :

$$\Psi = -1/4\pi \sum_{j,k,j \neq k}'' \kappa_j \kappa_k \ln |z_j - z_k|. \quad (1.40)$$

$\sum''$  désigne une sommation sur les tourbillons y compris leur image.

Lorsque le domaine d'écoulement est délimité par une frontière solide de forme complexe, il est important de faire sa transformation conforme en un domaine de frontière plus simple, en l'occurrence un demi-plan supérieur de frontière  $\Im W = 0$ .

Considérons comme précédemment un ensemble de  $N$  tourbillons placés au point  $z_1, z_2, \dots, z_N$  dans le domaine  $D$  du plan  $z$ . Soit  $z = z(W)$  la transformation conforme qui applique le domaine  $D$  du plan  $z$  sur le domaine  $D'$  du plan  $W$ .

Les singularités dans  $D$  se retrouvent dans  $D'$  [3]. Par contre, les fonctions de Kirchhoff-Routh dans  $D$  et dans  $D'$  ne sont pas égales en général, cependant il existe une relation entre elles.

Si  $\Psi_0(z)$  est la fonction de Kirchhoff-Routh dans  $D$ , alors la fonction  $\Psi(W)$  de Kirchhoff-Routh dans  $D'$  est lié à  $\Psi_0$  par la relation [29, 45] :

$$\Psi_0(z(W)) = \Psi(W) + 1/4\pi \sum_{j=1}^N \kappa_j^2 \ln |dz/dW|_{W_j}. \quad (1.41)$$

## 1.6 Quelques informations sur l'application de la méthode des tourbillons ponctuels pour la description des écoulements bidimensionnels

Lorsque le nombre de tourbillons ponctuels 2D élémentaires augmente, la trajectoire individuelle de chaque tourbillon devient sans intérêt. On obtient alors une dynamique chaotique du système bidimensionnel. Mais la surprise est que ce régime ne correspond pas à une distribution complètement désorganisée de vorticité : des structures cohérentes se forment.

Des études d'écoulements (bidimensionnels pour la plupart) ont été stimulées par la découverte de ces structures cohérentes.

Rappelons que le système de plusieurs tourbillons 2D est hamiltonien et non intégrable (si le nombre de tourbillons dépasse trois) [4], on peut être tenté de passer à la mécanique statistique[39]. Celle-ci mène à une théorie très intéressante, en particulier pour un domaine borné.

Evidemment, des résultats similaires peuvent être déduits en utilisant des modes de Fourier, voir par exemple [26] pour une discussion à propos de ce sujet.

Novikov a considéré un système de tourbillons identiques et a noté la hiérarchie pour les fonctions de distribution [38]. En introduisant une fonctionnelle généralisée pour ces distributions, on a prouvé que ce système satisfait une équation du mouvement qui est essentiellement l'équation de Hopf pour des zones de vitesses induites par des tourbillons discrets.

Dans [25], on a considéré un modèle cinétique dans lequel les paires de tourbillons se produisent stochastiquement.

Aref et Siggia [5] ont utilisé une équation cinétique dans l'approximation de

temps de relaxation pour élucider des propriétés de la désintégration d'une allée de tourbillons.

Une discussion lucide des problèmes avec des calculs numériques de rouleaux de feuilles de tourbillons a été présentée par Moore [34]. Les calculs du rouleau d'une feuille de tourbillons d'amplitude finie sont présentés dans [3, 5, 12],

Une ligne des tourbillons identiques est assujettie à un mécanisme d'instabilité où les tourbillons voisins tournent l'un autour de l'autre [11]. Dans une représentation par des tourbillons ponctuels, une analyse linéarisée simple de stabilité prouve que le mode le plus instable a la longueur d'onde la plus courte qui peut être supportée par une ligne des noeuds périodiquement espacés. Puisque cette vague la plus instable implique seulement des paires de tourbillons voisins et est périodique le long de la ligne, elle peut être réduite à un problème à deux corps. Les tourbillons peuvent alors se permuter ou fusionner. Il n'y a naturellement aucune fusion possible pour les tourbillons ponctuels, mais la trajectoire "du plot réfléchorisé" réunit une paire de tourbillons voisins beaucoup plus proches qu'ils ne l'étaient au début.

La plupart des modèles proposés de la dynamique bidimensionnelle dans les couches de cisaillement sont habituellement basés sur l'énergétique de la fusion (ou d'un autre processus dynamique, par exemple de la "déchirure" suggérée dans [35]).

Le calcul par Acton [2] de la fusion de deux régions de tourbillons appartient aussi à cette catégorie. Cet article contient des informations sur le mouvement de tourbillons d'intensités différentes.

L'allée de tourbillons est constituée de deux bandes parallèles de vorticité de circulation opposée. Lorsque ces bandes sont convenablement perturbées, elles s'enroulent. Cet écoulement particulier était un des premiers à être modélisé, en remplaçant chaque zone tourbillonnaire par un tourbillon ponctuel. En hydro-

dynamique bidimensionnelle, les tourbillons survivent et dominent l'écoulement aux étapes postérieures de l'évolution. Le processus de séparation de paires est discuté longuement dans [5].

## 1.7 Approche hamiltonienne appliquée à l'étude des mouvements de tourbillons ponctuels

Dans cette section nous traçons brièvement les grandes lignes de l'approche hamiltonienne. La considération détaillée du sujet a été donnée dans les travaux [23, 24].

La structure hamiltonienne des modèles hydrodynamiques comprend l'hamiltonien  $\mathcal{H}$ , donné par l'énergie totale exprimée en termes de variables de champs  $u_i$  et des crochets fonctionnels de Poisson  $\{, \}$ . Les systèmes hamiltoniens hydrodynamiques évoluent selon la loi

$$\partial_t u_i = \{u_i, \mathcal{H}\} = \int dx' \{u_i, u'_j\} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u_j(\mathbf{x}')}, \quad (1.42)$$

où l'hamiltonien,  $\mathcal{H}$ , du système est la quantité fonctionnellement dépendante des champs  $u_i$ .

La conservation de l'énergie suit la loi  $\partial_t \mathcal{H} = \{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} = 0$ .

Admettons la possibilité de la description canonique pour les systèmes hydrodynamiques déterminés par l'Hamiltonien et les crochets de Poisson. Cela signifie qu'il y a un ensemble de variables canoniques coordonnées généralisées  $q_n$  et moments généralisés  $p_n$ , ( $n = 1, \dots, N$ ), de sorte que :

a) les conditions canoniques suivantes sont vérifiées.

$$\{q_i, q'_k\} = \{p_i, p'_k\} = 0, \quad \{q_i, p'_k\} = \delta_{ik} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (1.43)$$

b) tous les champs physiques  $\vec{\pi}$ ,  $\rho$ ,  $s_n$  peuvent être exprimés en termes de  $q_n$ ,  $p_n$  et les équations du mouvement prennent la forme de (1.42).

Un tel choix simplifie considérablement le problème puisqu'il ramène essentiellement le problème à une recherche de la dépendance fonctionnelle  $\vec{\pi}[q, p]$  exprimant le moment hydrodynamique en termes de variables canoniques<sup>1</sup>.

Selon la géométrie du mouvement hydrodynamique bidimensionnel du fluide sur une surface il est normal de l'étudier dans un système correspondant de coordonnées orthogonales curvilignes  $\zeta^1, \zeta^2$ .<sup>2</sup>

Le tenseur métrique  $g_{ik}$  caractérisant les propriétés géométriques de l'espace lié à ce système de coordonnées, a une forme diagonale avec des composantes  $g_{11}, g_{22}$  non nulle.

Omettant des détails de l'analyse (pour des détails voir [23] où quelques explications sur la possibilité d'une telle représentation sont données) nous pouvons écrire que

$$\vec{\pi} = (\nabla\zeta^k)(\rho\partial_k\varphi - \lambda_l\partial_k\xi^l). \quad (1.44)$$

Ici toutes les variables de champs ( $\rho, \phi, \lambda_l, \xi^l$ ) sont des fonctions de  $\vec{\zeta}$ , et du temps,  $\partial_k = \partial/\partial\zeta^k$  est un opérateur différentiel - une dérivée partielle par rapport à  $\zeta^k$ .

Si nous assignons

$$p_k = g^{1/2}(\rho\partial_k\varphi - \lambda_l\partial_k\xi^l), \quad (1.45)$$

où  $g$  est le déterminant du tenseur métrique  $g_{ik}$ , l'équation de (1.44) peut être

---

1. Pour des raisons historiques la dépendance  $\vec{\pi}[q, p] = \rho\nabla\varphi - p_n\nabla q_n$  de  $q_n, p_n$  s'appelle souvent *représentation de Clebsch* pour la densité du moment, et les variables canoniques  $q_n, p_n$  s'appellent *potentiels de Clebsch*.

2. Dans une telle description, les lignes de même niveau  $\zeta^3$  sont orthogonales sur les surfaces fluides  $\zeta^3 = \text{const}$  de telle manière que  $\zeta^3$  joue le rôle d'un paramètre continu identifiant ces surfaces. Les autres coordonnées  $\zeta^1$  et  $\zeta^2$  forment sur une telle surface un système des coordonnées orthogonales curvilignes qui décrivent le mouvement du fluide.



réécrite de façon plus compacte

$$\pi_i = g^{-1/2}(\partial_i \zeta^k) p_k. \quad (1.46)$$

L'expression obtenue nous permet de réarranger la partie de l'hamiltonien hydrodynamique ayant le sens de l'énergie cinétique :

$$\int d\mathbf{x} \rho^{-1} \vec{\pi}^2 = \int d\vec{\zeta} g^{-1/2} \rho^{-1} g^{ik} p_i p_k. \quad (1.47)$$

Rappelons que les règles initiales de la description hamiltonienne de l'hydrodynamique bidimensionnel dans un système de coordonnées curvilignes peuvent être écrites

$$\mathcal{H}^* = \frac{1}{2} \int d\vec{\zeta} u^\alpha p_\alpha + \mathcal{U}[\rho], \quad (1.48)$$

$$p_\alpha = \rho^* \partial_\alpha \varphi^* - \lambda_\beta^* \partial_\alpha \xi^{*\beta} \quad (1.49)$$

où  $p_\alpha$  et  $u^\alpha$  sont, respectivement, les composantes du moment hydrodynamique et un vecteur de vitesse hydrodynamique, qui sont reliés par  $p_\alpha = \rho^* g_{\alpha\beta} u^\beta$ . Les indices grecs de vecteur et tenseur ont les valeurs  $\alpha, \beta = 1, 2$ . Les couples  $(\rho^*, \varphi^*)$ ,  $(\lambda^*, \xi^*)$  sont les couples de variables canoniquement conjugués.

Dans le cadre de la description (1.48), (1.49) le modèle du fluide non homogène incompressible est réalisé dans la condition  $\rho = \rho(\zeta^3)$ , c'est-à-dire, si les surfaces fluides sont des surfaces de densité égale. Dans ce cas-ci, semblable au cas de modèles plats, la partie potentielle de l'hamiltonien est exclue parce que  $\delta\mathcal{U} = 0$ .<sup>3</sup>

Le champ  $\varphi^*$  peut être exclu de la considération via l'équation  $div \mathbf{v} = 0$ , qui est évidemment représentée sous la forme

$$g^{-1/2} \partial_\beta (g^{1/2} u^\beta) = 0. \quad (1.50)$$

---

3. Notons que la densité  $\rho$ , qui est une fonction fixée de  $\zeta^3$ , peut être exclue de la description en utilisant la transformation canonique suivante :

$$\lambda_\alpha = \lambda_\alpha^* / \rho, \quad \xi^\alpha = \xi^{*\alpha}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}^* / \rho.$$

Ainsi, les variables  $\lambda_\beta$ ,  $\xi^\beta$  (variables canoniques) sont essentielles dans le cadre de la description.

D'autre part, la condition d'incompressibilité nous permet d'introduire la fonction de courant  $\Psi$

$$u^\beta = g^{-1/2} \varepsilon^{\beta\alpha} \partial_\alpha \Psi, \quad (1.51)$$

où  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  est un tenseur anti-symétrique unitaire de second ordre,  $\varepsilon^{12} = 1$ ,  $\varepsilon^{21} = -1$ .

Remarquons ici que  $\Psi$  possède une symétrie  $\Psi \rightarrow \Psi + C^{te}$ , c'est-à-dire la coordonnée de la fonction de courant  $\langle \Psi \rangle$  peut être omise.

En utilisant l'équation (1.51), l'hamiltonien  $\mathcal{H}^*$  peut être réorganisé sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^* &= \frac{\rho}{2} \int d\vec{\zeta} (\nabla \Psi)^2 = -\frac{\rho}{2} \int d\vec{\zeta} \Psi \Omega = \\ &= -\frac{\rho}{2} \int d\zeta^1 d\zeta^2 g^{1/2} \Psi \Omega, \end{aligned} \quad (1.52)$$

où

$$\Omega = g^{-1/2} \varepsilon^{\beta\alpha} \partial_\alpha u_\beta = \Delta \Psi. \quad (1.53)$$

Ici, la quantité  $\Omega$  est la vorticité g n ralis e sur un écoulement non plan,  $u_\beta$  sont des composantes covariantes de la vitesse hydrodynamique  $u_\beta = g_{\beta\alpha} u^\alpha$ ,  $\Delta$  est un opérateur bidimensionnel, semblable à l'opérateur de Laplace, défini par:

$$\begin{aligned} \Delta &= g^{-1/2} \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta g_{\alpha\gamma} g^{-1/2} \varepsilon^{\gamma\nu} \partial_\nu = \\ &= g^{-1/2} (\partial_1 g_{22} g^{-1/2} \partial_1 + \partial_2 g_{11} g^{-1/2} \partial_2). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Dans l'expression (1.52), la partie de  $\Omega$ , indépendante de l'espace c'est-à-dire  $\langle \Omega \rangle$ , peut être aussi  limin e en raison de la condition sur la fonction de courant :  $\int d\vec{\zeta} \Psi \langle \Omega \rangle = \langle \Omega \rangle \int d\vec{\zeta} \Psi = 0$ .

La partie dépendante des coordonnées de la fonction de courant  $\Psi$  peut être exprim e en termes de champ couple,  $\Omega$ . De l'équation (1.53) nous trouvons le

rapport entre ces caractéristiques du champ, c'est-à-dire entre  $\psi$  et  $\omega$  :

$$\Psi = \int d\vec{\zeta}' G(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}') \Omega(\vec{\zeta}'), \quad (1.55)$$

ici, la fonction de Green  $\mathcal{G}(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}')$  est une solution de l'équation

$$\Delta G(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}') = \delta^{(2)}(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}') - V^{-1}, \quad (1.56)$$

où  $V$  est le “volume” d'un domaine où la fonction delta est définie (pour une surface sphérique, le “volume” est  $V = 4\pi R^2$  et la structure concrète de  $\mathcal{G}$  est définie par la géométrie du problème). Ce résultat suit le fait que la surface, par exemple d'une sphère, a un “volume”, mais n'a aucune borne. Si  $V \rightarrow \infty$ , on a une équation traditionnelle.<sup>4</sup> En appliquant l'opérateur  $\Delta$  à l'expression (1.56), nous trouvons le rapport exact,  $\Delta\Psi = \Omega - \langle\Omega\rangle$ . Ainsi, l'énergie du fluide peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{H}^* = -\frac{\rho}{2} \int \int d\vec{\zeta} d\vec{\zeta}' \Omega \Omega' \mathcal{G}(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}'). \quad (1.57)$$

Dans le système considéré il existe une zone de vorticité localisée, la fonction de courant complète (champ de vorticité) peut se présenter comme une somme d'une partie régulière du champ  $\psi^r$  (ou  $\Omega^r$ ), et singulière de  $\Psi^s$  ( $\Omega^s$ ), associée aux tourbillons localisés. L'hamiltonien,  $\mathcal{H}^*$ , (intégrale du mouvement, de l'énergie exprimée en termes de variables canoniques) est dans ce cas-ci égal à

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^* = \frac{\rho}{2} \int d\vec{\zeta} (\nabla\Psi^r)^2 - \rho \sum_{i=1}^N \kappa_i \Psi^r(\vec{\zeta}_i) - \\ - \frac{\rho}{2} \sum_{i,j} \kappa_i \kappa_j \mathcal{G}_{ij}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

---

4. Pour un fluide incompressible idéal bidimensionnel, nous avons  $\Delta\Psi = \Omega$ , pour des écoulements quasi géostrophiques dans le modèle atmosphérique barotropique, prenant en compte sa “compressibilité” et la prétendue rigidité gyroscopique, et pour l'océan  $[\Delta - R^{-2}]\Psi = \Omega$ . Ici,  $\omega$  est la vorticité potentielle,  $R = \sqrt{gH}/\beta$  est l'échelle d'Obukhov (Obukhov 1949),  $H$  est la profondeur d'océan ou la taille atmosphérique caractéristique,  $g$  est l'accélération de la gravité, et  $\beta$  est le paramètre de Coriolis. L'opérateur  $\Delta$ , est le Laplacien écrit dans le métrique sphérique.

Le premier terme ici représente l'énergie courante régulière, le second,  $\mathcal{H}_{rs}$ , décrit l'hamiltonien de l'interaction entre *courants réguliers* et *tourbillons localisés*, et le dernier terme  $\mathcal{H}_{int}$  décrit *l'interaction entre les tourbillons localisés*.

Ainsi, l'étude du mouvement de tourbillons bidimensionnels quand ils interagissent l'un sur l'autre est assurée par l'hamiltonien  $\mathcal{H}_{int}$ , leur comportement quand ils interagissent l'un sur l'autre lorsqu'ils sont encastés, par exemple, dans des écoulements zonaux de cisaillement régulier est décrit par  $\mathcal{H}_{rs} + \mathcal{H}_{int}$ , etc...

Les modèles bidimensionnels de fluide parfait permettent l'existence des tourbillons singuliers (points). Montrons comment l'approche hamiltonienne peut être employée pour décrire un tel modèle.

Une version développée de la transformation de Clebsh aurait pu être présentée dès le début en généralisant la relation (1.49) en utilisant un développement simple du nombre de couples de variables canoniques  $\xi^i d\lambda_i$ , et en supposant que l'indice  $i$  comptant ces champs prend les valeurs  $1, 2, \dots, N$ , et que les  $\xi^i$  sont des variables lagrangiennes d'un type général.

Considérons maintenant dans le cadre d'une formulation hamiltonienne si modifiée, une évolution d'un système se composant de  $N$  tourbillons singuliers. Nous supposons que le système de tourbillons se compose d'une superposition linéaire des "sources de point", et le champ  $\Omega$ , est caractérisé par la distribution de la vorticité suivante :

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_i \kappa_i \delta^{(2)}(\vec{\zeta} - \vec{\zeta}_i(t)) = \\ &= g^{-1/2} \sum_i \kappa_i \delta^{(1)}(\zeta^1 - \zeta_i^1(t)) \delta^{(1)}(\zeta^2 - \zeta_i^2(t)). \end{aligned} \quad (1.59)$$

Dans ce cas-ci, la vorticité totale est donnée par :

$$\int d\vec{\zeta} \Omega(\vec{\zeta}) = \sum_i \kappa_i. \quad (1.60)$$

Les  $\kappa_i$  sont des intensités de tourbillons indépendantes du temps,  $[\kappa_i] = L^2 T^{-1}$ ,  $\vec{\zeta}_i =$

$(\zeta_i^1, \zeta_i^2)$  sont les coordonnées qui dépendent du temps  $\delta^{(2)}(\vec{\zeta} - \vec{\zeta}_i)$  est la fonction de Dirac bidimensionnelle (voir [21]),  $\vec{\zeta}_i = \vec{\zeta}_i(t)$ .

Dans cette section, convenons que l'indice répétitif ne signifiera pas une sommation, elle est notée par  $\Sigma$ .

La relation (1.53) peut être donnée sous la forme

$$\begin{aligned}\Omega &= g^{-1/2} \varepsilon^{\beta\alpha} \partial_\alpha u^\beta = \\ &= g^{-1/2} \varepsilon^{\beta\alpha} \partial_\alpha (\partial_\beta \varphi - g^{-1/2} \lambda_\mu \partial_\beta \xi^\mu) = \\ &= g^{-1/2} J(\xi^\mu, g^{-1/2} \lambda_\mu),\end{aligned}\tag{1.61}$$

où,  $J(g, h) = \varepsilon^{\beta\alpha} \partial_\beta g \partial_\alpha h$  est le jacobien.

La considération de (1.59) et (1.61) prouve que la distribution nécessaire de la vorticité est r alis e si, des potentiels  $\xi^\mu, \lambda_\mu$  du côté droit de l'expression pr sent e sont choisis comme

$$\xi^i = a_i \theta(\zeta^1 - \zeta_i^1), \quad \lambda_i = g^{1/2} b_i \theta(\zeta^2 - \zeta_i^2).\tag{1.62}$$

Ici  $\theta(s)$  est la fonction de Heaviside,  $a_i, b_i$  sont des paramètres indépendants du temps qui satisfont la condition  $a_i b_i = \kappa_i$ . Les équations (1.62) peuvent être interpr t es comme une transition de la description de la dynamique de système dans la base canonique  $\xi^i, \lambda_i$    la description dans l'espace de phase  $\zeta_i^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ). L'évolution du système en termes de variables  $\zeta_i^\alpha$  est définie par l'ensemble complet des crochets de Poisson

$$\{\zeta_i^\alpha, \zeta_j^\beta\} = \sum_l \int d\vec{\zeta} \left( \frac{\delta \zeta_i^\alpha}{\delta \xi^l} \frac{\delta \zeta_j^\beta}{\delta \lambda_l} - \frac{\delta \zeta_i^\alpha}{\delta \lambda_l} \frac{\delta \zeta_j^\beta}{\delta \xi^l} \right).\tag{1.63}$$

Maintenant nous pouvons calculer les crochets de Poisson (1.63). Tenant compte des variables  $\zeta_i^\alpha, \xi^i$  et  $\lambda_i$  qui sont reli es par :

$$\{\zeta_i^\alpha, \zeta_j^\beta\} = \sum_l \int d\vec{\zeta} \left( \frac{\delta \zeta_i^\alpha}{\delta \xi^l} \frac{\delta \zeta_j^\beta}{\delta \lambda_l} - \frac{\delta \zeta_i^\alpha}{\delta \lambda_l} \frac{\delta \zeta_j^\beta}{\delta \xi^l} \right),\tag{1.64}$$

relation déduite directement de (1.62) (voyez également la définition de la fonction delta), nous trouvons les dérivées variationnelles

$$\begin{aligned}\frac{\delta \zeta_i^\alpha}{\delta \xi^j} &= -a_i^{-1} \delta_{ij} \delta_{\alpha 1} \delta^{(1)}(\zeta^2 - \zeta_i^2), \\ \frac{\delta \zeta_i^\beta}{\delta \lambda_j} &= -g^{-1/2} b_i^{-1} \delta_{ij} \delta_{\beta 2} \delta^{(1)}(\zeta^1 - \zeta_i^1).\end{aligned}\tag{1.65}$$

Dans le résultat, la substitution de (1.65) dans (1.64) donne

$$\{\zeta_i^\alpha, \zeta_j^\beta\} = \kappa_i^{-1} g_i^{-1/2} \delta_{ij} \varepsilon^{\alpha\beta},\tag{1.66}$$

où  $g_i = g(\vec{\zeta} = \vec{\zeta}_i)$  est calculé au point où le tourbillon est localisé.

Ainsi, en termes de variable  $\zeta_i^\alpha$  la dynamique du système du tourbillon singulier peut être décrite par l'équation

$$\partial_t \zeta_i^\alpha = \{\zeta_i^\alpha, \mathcal{H}\} = \frac{\varepsilon^{\alpha\beta}}{\kappa_i g^{1/2}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta_i^\beta},\tag{1.67}$$

où le couple canonique de variables dynamiques est  $\zeta_i^\alpha$ ,  $\{, \}$  est le crochet *fonctionnel* de Poisson exprimé en termes de dérivées variationnelles  $\delta/\delta\zeta_i^\alpha$ ,  $\mathcal{H}$  est l'hamiltonien, c'est-à-dire *l'énergie totale du fluide* exprimée en termes de *variables canoniques*.

L'hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, et c'est donc une intégrale de mouvement :  $\partial_t \mathcal{H} = \{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} = 0$ .

En utilisant la fonction de Green  $\mathcal{G}(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}')$ , qui satisfait l'équation

$$\Delta \mathcal{G}(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}') = \delta^{(2)}(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}') - V^{-1},\tag{1.68}$$

nous pouvons trouver pour l'hamiltonien des tourbillons localisés

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j}^N \kappa_i \kappa_j \mathcal{G}(\vec{\zeta}_i, \vec{\zeta}_j).\tag{1.69}$$

L'expression finale pour  $\mathcal{H}$  par l'intermédiaire de la fonction de Green implicite est obtenue par la substitution de (1.59) dans (1.69).

L'expression pour  $\mathcal{H}$  ayant une incertitude qui résulte de la transformation en une énergie infinie de l'interaction quand  $i = j$ . Nous pouvons écrire

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_i + \mathcal{H}_{int} = -\frac{1}{2} \sum_i \kappa_i^2 G_{ii} - \frac{1}{2} \sum'_{i \neq j} \kappa_i \kappa_j G_{ij}. \quad (1.70)$$

Nous pouvons montrer que l'hamiltonien  $\mathcal{H}_i$  a une divergence logarithmique. Mais ce terme peut être exclu de la considération, parce qu'il est indépendant des coordonnées de l'espace dues à l'indépendance de  $G_{ii}$  sur les coordonnées. Des coordonnées sphériques peuvent être considérées comme exemple d'un système de coordonnées curvilignes qui satisfont cette exigence.<sup>5</sup>

---

5. Evidemment, seulement dans le cas où le caractère de ces infinis ne dépend pas de l'emplacement des tourbillons, l'action individuelle correspondant à l'énergie infinie qui n'affecte pas l'évolution des tourbillons peut être exclue de l'hamiltonien (1.69). La nature mathématique de ces infinis est universelle. On la définit par le fait que quand  $|\vec{\zeta} - \vec{\zeta}'| \rightarrow 0$  la fonction de Green a une divergence logarithmique. Puisque la divergence décrite ci-dessus apparaît seulement dans le cas des tourbillons singuliers, quand la distribution de vorticité est décrite par la fonction delta, ce problème ne se produit pas pour des objets de tailles finies.

# Bibliographie

- [1] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A., *Handbook of Mathematical Functions*, 1964, U.S.Govt. Printing Office, Washington, D.C.
- [2] ACTON, E., 1976, The modelling of large eddies in a two-dimensional shear layer, *J. Fluid Mech.*, **76**, p. 561-592
- [3] AMSDEN, A. A., HARLOW; F. H., 1964, Slip instability. *Phys. Fluids* **7**, p. 327-334
- [4] AREF, H., Integrable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1983, **15**, p. 345-389
- [5] AREF, H., SIGGIA, E. D., 1981, Evolution and breakdown of vortex street in two dimensions, *J. Fluid Mech.*, **109**, p. 435-463
- [6] AREF, H., SIGGIA, E. D., 1980, vortex dynamics of the two-dimensional turbulent shear layer, *J. Fluid Mech.*, **109**, p. 435-463
- [7] BATCHELOR, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967, 615 pp.
- [8] BATCHELOR G. K., On steady laminar flow with closed stream lines at the large Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, 1956, **1**, 177-190.



- [9] BLONDEAUX, P. ET DE BERNARDINIS, B., On the formation of vortex pairs near orifices, *J. Fluid Mech.*, 1983, **135**, 111-122.
- [10] BOGOLJUBOV, N.N. ET SHIRKOV, D.B., 1980, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*. Ed.: Interscience, 1959; 3rd ed., Wiley 1980.
- [11] BROWAND, F. K., WINANT P. D., 1976, Large Scales in the developing mixing layer, *J. Fluid Mech.*, **76**, p. 127-144
- [12] CHRISTIANSEN, J. P., 1973, Numerical simulation of hydrodynamics by the method of point vortex, *J. Comput. Phys.*, **16**, p363-379
- [13] DARROZES, J.S. ET FRANÇOIS, C., *Mécanique des fluides incompressibles* Tome I, Ecole Nationale Supérieure de Techniques avancées, 1975.
- [14] DAWAI T., PAVLOV V., Mouvement des tourbillons bidimensionnels au voisinage des frontières en présence des sources, C. R. ACAD. SCI., Paris, 1999, t. 327, **1**, série IIb, 71-76.
- [15] DAWAI T., PAVLOV V., Echelles caractéristiques des domaines tourbillonnaires apparaissant près des irrégularités des frontières, C. R. ACAD. SCI., Paris, 1999, t. 327, **11**, série IIb, 1133-1138.
- [16] DELCOURT, B. A. G., BROMN, G. L., 1976. The evolution and emerging structure of a vortex sheet in an inviscid and viscous fluid modelled by a point vortex method In 2nd Sump. Turbul. Shear Flows, Imperial Coll., London, **14** p. 35-40
- [17] DIMOTAKIS, P. E., DEBUSSY, F. D., KOOCHESFAHANI, M. M., 1981, Particule streak velocity field measurements in a two-dimensional mixing layer, *Phys. Fluids*, **24**, 995-999

- [18] ECKHARDT B., Integrable four vortex motion, *Phys. Fluids*, 1988, **31**, 2796-2801.
- [19] LAMB, H., 1932 *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge: Cambridge University Press (reprinted New York : Dover, 1945. )
- [20] L.LANDAU ET E.LIFCHITZ. *Mécanique des fluides*, Edition MIR Moscou, 1971, 31-44
- [21] LANDAU, L.D., LIFSHITZ, E.M., 1982 *Physique théorique : Théorie des champs*, ed., Ed.: Mir, Moscou.
- [22] LAVRENT'EV, M.A. ET SHABAT, B.V., *Effets hydrodynamiques et modèles mathématiques*, 1980, Ed.: Mir, Moscow.
- [23] GONCHAROV, V.P. ET PAVLOV, V.I., Some remarks on the physical foundations of the Hamiltonian description of fluid motions. *Europ. J. Mech., B/Fluids*, 1997, **16**, no. 4, 509-555.
- [24] GONCHAROV V. P., PAVLOV V.I., Vortex structures generated by a coastal current in harbour-like basins at large Reynolds numbers, *Journ. Fluid Mech.*, 1997, **351** 201-221.
- [25] KOVASZNAY L. S. G., 1978, Large scale structure in turbulence : A question or an answer. In structure and mechanism of Turbulence I, Lecture Notes in Physics, **75**, 1-18, Berlin/Heidelberg/New York : Springer
- [26] KRAICHMAN, R. H, MONTGOMERY, D., 1980, Two-dimensional Turbulence. *Rep. pro. Phys.* **43**, p.547-619
- [27] LAVRENT'EV, M.A. ET SHABAT, B.V., *Methods of theory of complex variable functions*, 1965 Ed.: Nauka, Moscow.

- [28] LIN, C. C. On the motion of vortices in two dimensions. I. Existence of the Kirchhoff-Routh function, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1941, **27**, 570-575.
- [29] LIN, C. C., On the motion of vortices in two dimensions-II some further investigations on the Kirchhoff-Routh function, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1943, **27**, 575-577.
- [30] MARCUS, P.S. Vortex dynamics in a shearing zonal flow. *J. Fluid Mech.*, 1990, **215**, 393-430.
- [31] MILNE-THOMSON, L.M., *Theoretical hydrodynamics*, Vth Edition, MacMillan, London, 1968.
- [32] MOORE D. M., SAFFMAN, P. G AND TANVEER, S., The calculation of some Batchelor flows: The Sadovskii vortex and rotational corner flow, *Phys. Fluids*, 1988, **31**, 978-990.
- [33] MORSE, P.M., FESHBACH, H, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, 1953.
- [34] MOORE, D. W., On the vortex point method. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 1981, **2**, p. 65-84
- [35] MOORE, D. W., SAFFMAN, P. G., 1975, The density of organized vortices in a turbulent mixing layer, *J. Fluid Mech.*, **69**, p. 465-473
- [36] NOVIKOV, A.E ET NOVIKOV, E. A Vortex-sink dynamics, *Physical Review E*, 1996, **54**, p. 3681-3686
- [37] NOVIKOV, E.A., Generalized dynamics of three-dimensional vortical singularities (vortons), 1983.
- [38] NOVIKOV, E. A., Dynamics en statistics of a system of vortices, *Sov. Phys. JETP*, 1975, **41**, p.937-943

- [39] ONSAGER, L., Statistic Hydrodynamics. *Nuovo Cimento*, 1949, **6**, p.279-287 (suppl.)
- [40] OVERMAN, E. A., AND ZABUSKY, N. J., Evolution and merger of isolated vortex structures. *Phys. Fluids*, 1982, **25**, 1297-1305.
- [41] PATERSON, A.R., *A first course in fluid dynamics*, Cambridge University Press, 1983.
- [42] PEDLOSKY, J., *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [43] POLVANI, L.M., DRITSHEL, D.G., Wave and vortex dynamics on the surface of a sphere. *J. Fluid Mech.*, 1993, **255**, 35-64.
- [44] REZNIK, G.M., Dynamics of singular vortices on a beta-plane. *J. Fluid Mech.*, 1992, **240**, 405-432.
- [45] SAFFMAN, P. G., *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press, 1992.
- [46] ZABUSKY, N.J, MCWILLIAMS, J.S., A modulated point vortex for geostrophic beta-plane dynamics. *Phys. Fluids*, 1982, **25**.

# Chapitre 2

## Mouvement des tourbillons bidimensionnels au voisinage des frontières en présence des sources

### 2.1 Préambule

Dans ce chapitre, l'interaction d'une paire tourbillonnaire avec une frontière de forme complexe en présence d'une source d'intensité constante ou temporellement variable est considérée. La classification des topologies des trajectoires des tourbillons et les positions des points stationnaires sont présentées. L'estimation des positions des points stationnaires lorsque l'intensité de la source varie temporellement, est faite par analogie avec le pendule de Kapitsa. Dans ce cas, les topologies des trajectoires des tourbillons changent radicalement.

La description du comportement des tourbillons 2D est un problème classique de l'hydrodynamique [2, 3].

Le mouvement d'un tourbillon ponctuel 2D au voisinage d'une frontière  $\partial D$  d'un domaine de configuration simple  $D$  peut être résolu de façon élémentaire

(par exemple, par la méthode des images). Cependant, le comportement du même tourbillon dans une bande (en présence de deux frontières), est un problème plus difficile à résoudre [4]. En particulier, à cause de l'invariance par rapport à une translation spatiale le long de l'axe de la bande, les positions des points stationnaires où les tourbillons ponctuels sont immobiles, ne sont pas bien déterminées. Toutefois, cette dégénérescence peut être supprimée, si nous considérons un modèle plus réaliste ayant la forme d'un canal, par exemple, dont les traits essentiels sont présentés sur la Figure 2.1.

Il existe un deuxième aspect du problème, lié aux applications possibles du modèle considéré aux problèmes de l'environnement.

Des structures (2D) tourbillonnaires ont été abondamment observées dans les océans : au voisinage des particularités topographiques, au voisinage des îles, etc. La Figure 2.2 [5] en est un exemple. Cette image satellitaire faite dans une bande de fréquences infrarouges montre en fait la trace quasi circulaire des phytoplanctons, dont on déduit alors la présence des mouvements tourbillonnaires au voisinage de l'embouchure du fleuve. Dans cette situation, les questions qui se posent sont évidemment les suivantes : Comment se comportent les tourbillons au voisinage des particularités des frontières? Quelle est l'influence des sources extérieures sur l'évolution de ces tourbillons, sur leur mouvement?

Notons que l'étude expérimentale et théorique des structures tourbillonnaires à relativement grande échelle dans des conditions géophysiques, s'avère très compliquée. En effet, parfois, même les mécanismes de leur génération ne sont pas bien connus. Signalons aussi que les calculs numériques directs, sans l'analyse préliminaire qualitative du problème, des structures tourbillonnaires exigent en général beaucoup de temps. Des informations fausses peuvent être générées, créant des détails, même inexistantes en réalité. C'est pourquoi l'étude du phénomène sur une base des modèles mathématiques simples présente un intérêt particulier [6, 7].

Dans le cadre de notre analyse, nous supposons que les tourbillons sont déjà formés et ne discutons donc pas des mécanismes de leur formation.

Le but essentiel de ce chapitre est donc la formulation d'un modèle simple permettant de saisir les traits de base du phénomène, de déterminer les régimes possibles du mouvement des tourbillons, ainsi que leurs positions stationnaires (c'est-à-dire les lieux des points où les tourbillons peuvent rester immobiles) en fonction des paramètres géométriques et dynamiques du problème.

## 2.2 Formulation du problème et équations de base

Dans le cadre de l'approximation de fluide idéal et d'écoulement bidimensionnel incompressible, l'équation de mouvement du fluide pour la distribution de la vorticité  $\omega = \text{rot } \mathbf{v}$  est donnée [2, 3] par :

$$\dot{\omega} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega = 0. \quad (2.1)$$

Supposons que la vorticité  $\omega$  se présente sous la forme :  $\omega = \sum_{j=1}^N \kappa_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ . En posant cette expression dans l'équation (2.1) et en égalant les facteurs devant les fonctions delta et leurs dérivées, nous trouvons que pour satisfaire l'équation (2.1), il est nécessaire et suffisant qu'on ait :  $\dot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{v}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_j}$ . La vitesse du centre du tourbillon est donc déterminée par la vitesse du fluide au point  $z_j$ .

Dans le plan  $z = x + iy$ , l'équation du mouvement du j-ème tourbillon s'écrira alors (en termes de composantes) :

$$\dot{z}_j = \dot{x}_j - i\dot{y}_j = u_j - iv_j. \quad (2.2)$$

Soit  $D$  un domaine illimité du plan  $z = x + iy$  contenant un fluide incompressible. Supposons que  $N$  tourbillons ponctuels se trouvent dans  $D$ . Le potentiel créé par

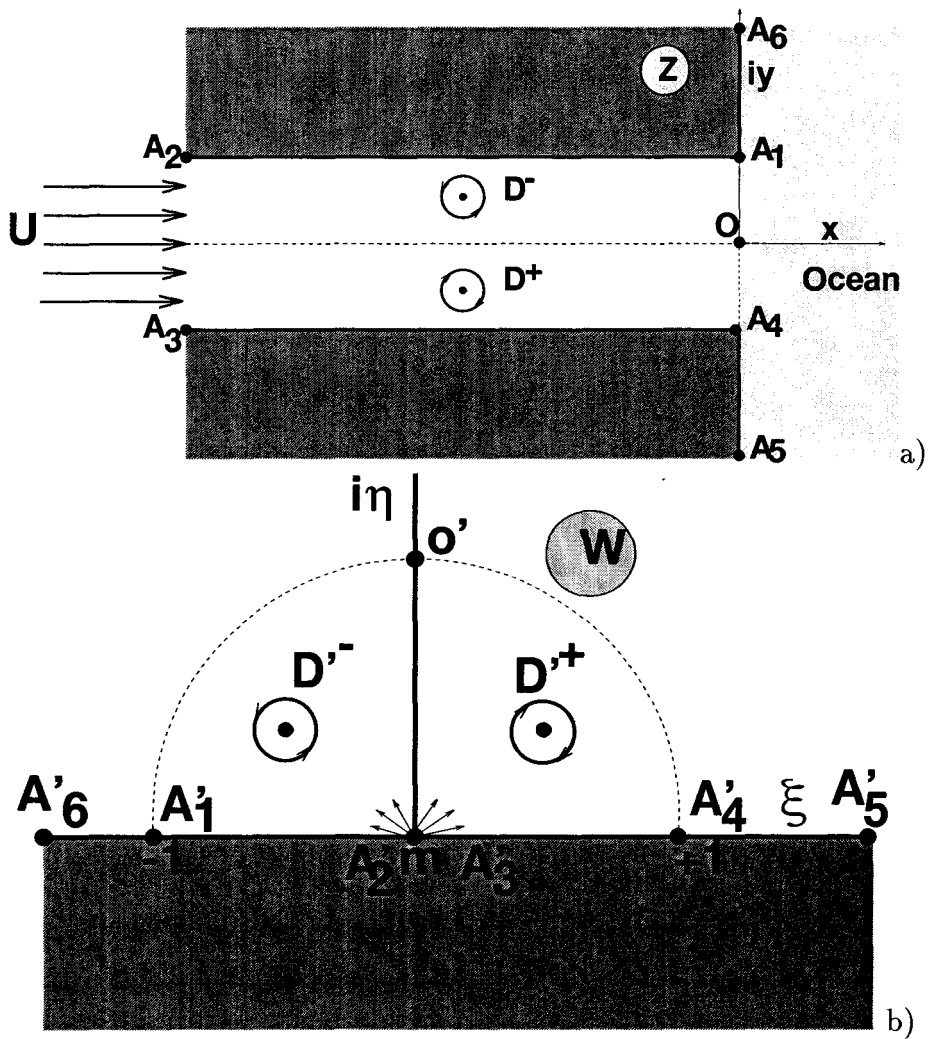


FIG. 2.1 - Les croquis a) du modèle du canal ouvert et b) de la transformation conforme.



les  $N$  tourbillons en tout point  $z$  du domaine  $D$  est :

$$\Phi_D(z) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^N \kappa_k \ln(z - z_k). \quad (2.3)$$

On suppose dans ce cas que les tourbillons sont placés aux points  $z_1, z_2, \dots, z_N$  et ont pour intensité  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_N$ .

Notre but est de trouver la trajectoire  $z_j(t)$  du  $j$ -ème tourbillon, d'intensité constante  $\kappa_j$ , dans le domaine  $D$ .

On sait que le champ des vitesses du fluide au point  $z_j$ , où se trouverait le tourbillon, est donné par la relation (par exemple, [2]) :

$$u_j - iv_j = \left\{ \frac{d}{dz} \left( \Phi_D(z) + \frac{i\kappa_j}{2\pi} \ln(z - z_j) \right) \right\}_{z=z_j}. \quad (2.4)$$

Lorsque la frontière  $\partial D$  du domaine  $D$  est une paroi solide, il faut respecter les conditions aux frontières<sup>1</sup> (condition de non pénétration de la paroi). Pour respecter ces conditions aux frontières, le potentiel complexe de l'écoulement doit être pris sous la forme générale: une fonction analytique doit être ajoutée à  $\Phi_D(z) + i(\kappa_j/2\pi) \ln(z - z_j)$ , de telle façon que le potentiel total  $\Phi_D(z)$  satisfasse la condition  $\Im(\Phi_D) = C^{te}$  sur la frontière rigide fixe. L'expression  $\Phi_D(z) + i(\kappa_j/2\pi) \ln(z - z_j)$  représente ici le potentiel de vitesse de l'écoulement où se trouve le  $j$ -ème tourbillon.

Dans le cas général, le problème, dû à la complexité possible de la frontière du domaine  $D$ , peut être résolu en faisant une transformation conforme du domaine  $D$  en domaine  $D'$  de frontière  $\partial D'$  de configuration plus simple.

Considérons alors la transformation conforme  $z = z(w)$  qui applique le domaine  $D$  du plan  $z$  sur le domaine  $D'$  du plan  $w$ . Par définition même de la transformation conforme [2], le potentiel créé au point  $z$  du domaine  $D$  par les tourbillons placés aux points  $z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) est égal au potentiel créé au point  $w$  du domaine  $D'$  par les tourbillons placés aux points  $w_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ )

---

1. Ces conditions peuvent être satisfaites dans certains cas simples par la méthode des images.

du plan  $w$ . De même les intensités des tourbillons restent les mêmes après la transformation conforme. Autrement dit nous avons :

$$\Phi_D(z) = \Phi_{D'}(w), \quad \Phi_{D'}(w)|_{z \rightarrow z_j} = -\frac{i}{2\pi} \kappa_j \ln(w - w_j) + \Phi_{jD'},$$

où  $\Phi_{D'}(w)$  vérifie<sup>2</sup>:  $\Im\{\Phi_{D'}(w)\} = C^{te}$  sur la frontière  $\partial D'$ . La fonction  $\Phi_{jD'}$  est donc analytique au point où se trouve le  $j$ -ème tourbillon.

L'équation (2.4) s'écrit alors

$$u_j - iv_j = \left\{ \frac{d}{dz} \left( \Phi_{D'}(w) + \frac{i\kappa_j}{2\pi} \ln(w - w_j) + \frac{i\kappa_j}{2\pi} \ln \frac{z - z_j}{w - w_j} \right) \right\}_{z=z_j} = \left\{ \frac{dw}{dz} \frac{d}{dw} \left( \Phi_{D'}(w) + \frac{i\kappa_j}{2\pi} \ln(w - w_j) \right) + \frac{i\kappa_j}{2\pi} \frac{dw}{dz} \frac{d}{dw} \left( \ln \frac{z - z_j}{w - w_j} \right) \right\}_{w_j}. \quad (2.5)$$

Le dernier terme de l'équation (2.5) peut être réécrit sous une forme plus commode.

Développons  $z(w)$  en série au voisinage de  $w_j$ . A l'ordre deux près, un tel développement s'écrit :

$$z = z_j + \frac{dz}{dw} \Big|_{w_j} (w - w_j) + \frac{1}{2} \frac{d^2z}{dw^2} \Big|_{w_j} (w - w_j)^2 + O(2),$$

où  $z_j = z(w_j)$ . On obtient donc :

$$\frac{z - z_j}{w - w_j} = \frac{dz}{dw} \Big|_{w_j} + \frac{1}{2} \frac{d^2z}{dw^2} \Big|_{w_j} (w - w_j),$$

et, finalement, l'expression :

$$\frac{d}{dw} \left( \ln \frac{z - z_j}{w - w_j} \right) \Big|_{w=w_j} = \frac{1}{2} \frac{d^2z}{dw^2} \frac{dw}{dz} \Big|_{w_j}.$$

Le dernier terme de (2.5) peut donc s'écrire :

$$\frac{i\kappa_j}{2\pi} \left\{ \frac{dw}{dz} \frac{d}{dw} \left( \ln \frac{z - z_j}{w - w_j} \right) \right\}_{w_j} = \left\{ \frac{i\kappa_j}{4\pi} \frac{d^2z}{dw^2} \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 \right\}_{w_j}.$$

---

2. En fait, si la frontière  $\partial D'$  est composée de plusieurs éléments topologiquement séparés, la condition qui suit doit être écrite pour chacun des  $\partial D'_m$ , et, pour deux segments distincts, on peut avoir deux constantes différentes (voir, par exemple, [10]).

La vitesse complexe du fluide au point  $z_j$  dans le domaine  $D$  du plan  $z$  vaut alors :

$$u_j - iv_j = \left\{ \frac{dw}{dz} \frac{d}{dw} \left( \Phi_{D'}(w) + \frac{i\kappa_j}{2\pi} \ln(w - w_j) \right) + \frac{i\kappa_j}{4\pi} \frac{d^2z}{dw^2} \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 \right\}_{w=w_j}. \quad (2.6)$$

Finalement, compte tenu de l'équation (2.2), nous avons :

$$\dot{\bar{w}}_j = \lim_{w \rightarrow w_j} \left\{ \left[ \frac{d}{dw} \left( \underbrace{\Phi_{D'}(w)}_1 + \underbrace{\frac{i\kappa_j}{2\pi} \ln(w - w_j)}_2 \right) + \frac{d}{dw} \underbrace{\frac{i\kappa_j}{4\pi} \ln \frac{dz}{dw}}_3 \right] \left| \frac{dz}{dw} \right|^{-2} \right\}, \quad (2.7)$$

avec une condition aux limites  $\Im\{\Phi_{D'}(w)\}|_{\partial D'} = C^{te}$ .

Cette équation décrit le mouvement du centre du tourbillon se trouvant au point  $z_j$  dans le domaine  $D$  du plan  $z$  en termes de variables  $(w_j, \bar{w}_j)$  (voir également l'analyse présentée dans [7, 8]). Le premier terme est le potentiel complexe de l'écoulement, le second est le potentiel complexe du  $j$ -ème tourbillon au signe près. La superposition de ces expressions représente donc le potentiel au point où se trouve le  $j$ -ème tourbillon. Le troisième terme peut être interprété comme le potentiel complexe créé par les particularités du domaine physique. Ce terme est donc la contribution dans le potentiel complexe de la présence des frontières rigides du domaine physique d'écoulement. Le facteur  $|dz/dw|^{-2}$  est un résultat de la transformation conforme du plan  $z$  au plan  $w$ .

## 2.3 Modèle d'une paire de tourbillons : cas d'un canal ouvert

Pour illustrer les particularités du comportement des tourbillons dans le cadre de la méthode évoquée ci-dessus, nous considérons le cas d'une paire de tourbillons dans un domaine qui peut être modélisé par un canal ouvert (domaine  $D$  de la

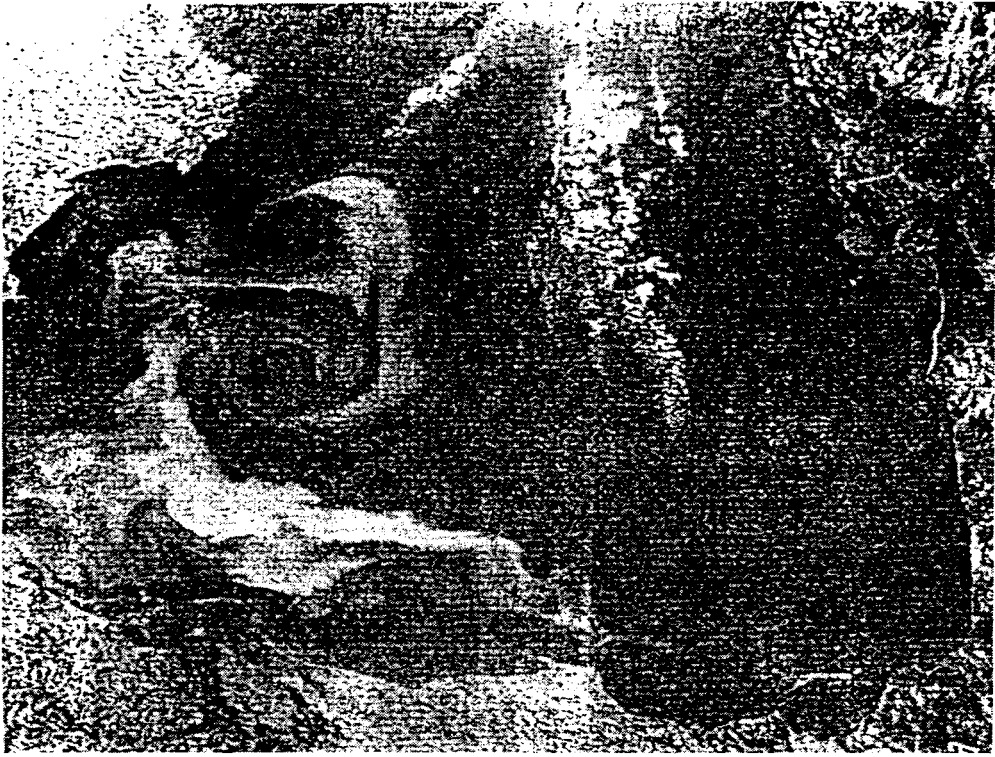


FIG. 2.2 - *Structures tourbillonnaires observées dans l'océan.*

Figure 2.1). Nous supposons qu'à l'infini-amont se trouve un écoulement uniforme de vitesse  $U$ . Le tourbillon  $D^+$  "tourne" dans le sens des aiguilles d'une montre et  $D^-$  dans le sens contraire. Il convient alors, dans notre cas, de transformer le domaine d'écoulement  $D$  en domaine  $D'$  (demi-plan  $\Im w \geq 0$ , ici  $\Im w$  désigne la partie imaginaire de  $w$ ). Transformons la bande semi-infinie de largeur  $l$  du plan  $z$  (domaine  $D$ ) en demi-plan supérieur  $\Im w \geq 0$  (domaine  $D'$ ), en utilisant le théorème de Schwartz-Christoffel [2]:

$$z(w) = (l/\pi) \left\{ \sqrt{1-w^2} + \ln w - \ln(1 + \sqrt{1-w^2}) \right\} - il/2.$$

Le tourbillon droit  $D^+$  du plan  $z$  se transforme en tourbillon  $D'^+$  du plan  $w$  et le tourbillon gauche  $D^-$  en  $D'^-$  (voir Figure 2.1). Le tourbillon droit  $D'^+$  a pour coordonnée complexe  $w_1 = w$ , et pour intensité  $\kappa_1 = -\kappa$ , le gauche a pour coordonnée complexe  $w_2 = -\bar{w}$  et pour intensité  $\kappa_2 = \kappa$ . La source est placée au point  $w = 0$ . L'image du tourbillon droit a pour coordonnée complexe  $w_3 = -w$  et pour intensité  $\kappa_3 = -\kappa$ . L'image du tourbillon gauche est placée au point  $w_4 = \bar{w}$  et a pour intensité  $\kappa_4 = \kappa$ . Le potentiel complexe créé en un point quelconque  $w_0$  dans le plan des  $w$  par la source de débit  $m = 2Ul$ , par les tourbillons droit et gauche et par leur image est:  $\Phi_{D'}(w_0) = (m_0/2\pi)[ip \ln(w_0 - w) - ip \ln(w_0 + \bar{w}) + ip \ln(w_0 + w) - ip \ln(w_0 - \bar{w}) + \mu \ln w_0]$ . On vérifie alors facilement que la condition  $\Im\{\Phi_{D'}(w)\} = C^{te}$ , sur  $\partial D'$ , est satisfaite.

Dans ce qui suit, nous supposons  $\kappa$  constant,  $m(t) = m_0(1 + \epsilon f(t))$ ,  $m_0$  étant une constante,  $p = \kappa/m_0$ ,  $\mu = m(t)/m_0$ . Outre cela, faisons encore le changement de variable temporelle:  $t = \tau t_1$ , mais dans les équations au lieu d'écrire  $t_1$ , nous écrirons  $t$ . Le paramètre  $\tau$  est défini par la relation  $\tau = \pi U_0/l$ , ( $U_0$  est la vitesse caractéristique de l'écoulement,  $U_0 = \langle U \rangle$ ). Nous trouvons alors:

$$\dot{\bar{w}} = \left\{ -ipw^2(w^2 - \bar{w}^2)^{-1} + (1/4)(2\mu + ip) + ip[4(1 - w^2)]^{-1} \right\} (\bar{w}|1 - w^2|^{-1}). \quad (2.8)$$

Remarquons que l'équation (2.8) peut être reformulée sous la forme hamiltonienne [9]. En omettant *ipso facto* les constantes additives, ces équations peuvent s'écrire

sous la forme adimensionnée suivante :

$$\dot{\bar{w}} = -i \left| w^2 (1 - w^2)^{-1} \right| \mathcal{H}_{,w}, \quad (2.9)$$

où  $\mathcal{H}_{,w} = \partial \mathcal{H} / \partial w$ , la fonction d'Hamilton adimensionnée est donnée par la relation :  $\mathcal{H} = (1/4)(p \ln |w + \bar{w}|^2 + p \ln |w - \bar{w}|^2 - 2p \ln |w|^2 + 2i\mu \ln(w/\bar{w}) - p \ln |w^2/(1 - w^2)|)$ . L'hamiltonien  $\mathcal{H}$  est une fonction réelle des variables  $w$  et  $\bar{w}$  :  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(w, \bar{w}) = \overline{\mathcal{H}}$ . Il existe une relation entre  $\mathcal{H}$  et la fonction de Kirchhoff-Routh (voir par exemple [4]).

Soit  $\mu = 1$ , c'est-à-dire  $m(t) = m_0$ . Les points stationnaires, s'ils existent, sont donnés par la condition :  $\dot{w} = 0$ . Ce qui revient à écrire :

$$(2 + ip) - ip4u/(u - \bar{u}) + ip(1 - u)^{-1} = 0, \quad (2.10)$$

où  $u = w^2$ ,  $p = \kappa/m_0$ . Cette expression donne une dépendance  $u_s = u_s(p)$ . Les solutions de l'équation (2.10) peuvent alors se mettre sous la forme paramétrique suivante :

$$u_s = 1 - \cos s \exp is, \quad p = -2/3 \tan s, \quad \pi/2 < s < \pi. \quad (2.11)$$

A toute valeur du paramètre  $p$  correspond un point stationnaire. La position du point stationnaire, par exemple pour  $p = 0.5$  est représentée sur la Figure 2.3 par le symbole +. Au voisinage des points stationnaires  $(u_s, \bar{u}_s)$ , l'hamiltonien  $\mathcal{H} = (1/4)[i \ln(u/\bar{u}) + 2p \ln |u - \bar{u}| + p \ln |1 - u| - 2p \ln |u|]$  a la forme suivante :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_s + \left\{ \Re \left[ (\mathcal{H}_{,uu})_s (u - u_s)^2 \right] + (\mathcal{H}_{,u\bar{u}})_s |u - u_s|^2 + \dots \right\}. \quad (2.12)$$

Pour étudier le caractère topologique des points  $u_s$ , la méthode de Laplace est utilisée. L'analyse montre que leur topologie dépend du signe du paramètre  $\mathcal{K} = (\mathcal{H}_{,u\bar{u}})_s^2 - |\mathcal{H}_{,uu}|_s^2$ . Si  $\mathcal{K} > 0$ , le point stationnaire est de type centre, si  $\mathcal{K} < 0$ , il est de type selle.

Pour le cas étudié, les calculs donnent :  $\mathcal{K} \sim (-11+3 \cos 2s)/96 \cos^6 s \sin^2 s < 0$ , ce qui montre que tous les points stationnaires se trouvent sur une séparatrice. Si  $\mu = 1$ , l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  ne dépend pas explicitement du temps, et par conséquent,  $\mathcal{H}$  est intégrale première du problème. Des courbes de niveau  $\mathcal{H} = C^{te}$ , on trouve les trajectoires cherchées. On voit sur la Figure 2.3 deux types de courbes : (i) des courbes ouvertes, sur lesquelles un tourbillon s'y trouvant quittera le lit du fleuve et sera éjecté dans le domaine extérieur ; (ii) des courbes fermées, sur lesquelles un tourbillon s'y trouvant y restera.

## 2.4 Cas d'une variation temporelle du débit

Dans le paragraphe précédent, l'interaction d'une paire de tourbillons avec une cavité dans un écoulement stationnaire a été discutée. En particulier, la classification des topologies des trajectoires des tourbillons et les positions des points stationnaires ont été présentées. Ici, nous nous focalisons sur l'influence de la variation temporelle de l'intensité de la source sur la configuration de telles structures. Nous montrons, dans le cas de la variation rapide en temps de l'intensité de la source, que les topologies des trajectoires des tourbillons peuvent changer radicalement, mais les positions des points stationnaires peuvent être trouvées par analogie avec le pendule de Kapitsa.

Il est bien connu, dans des phénomènes géophysiques, par exemple les écoulements dans des canaux, dans des embouchures de fleuves etc., que les paramètres du problème peuvent varier temporellement (en l'occurrence, l'intensité de la source). Il est donc impossible de déterminer les positions des points stationnaires de façon systématique.

Néanmoins, il existe une méthode (méthode de Kapitsa) très efficace dont l'idée générale a été formulée dans [10, 11, 12]. Par cette méthode, les problèmes

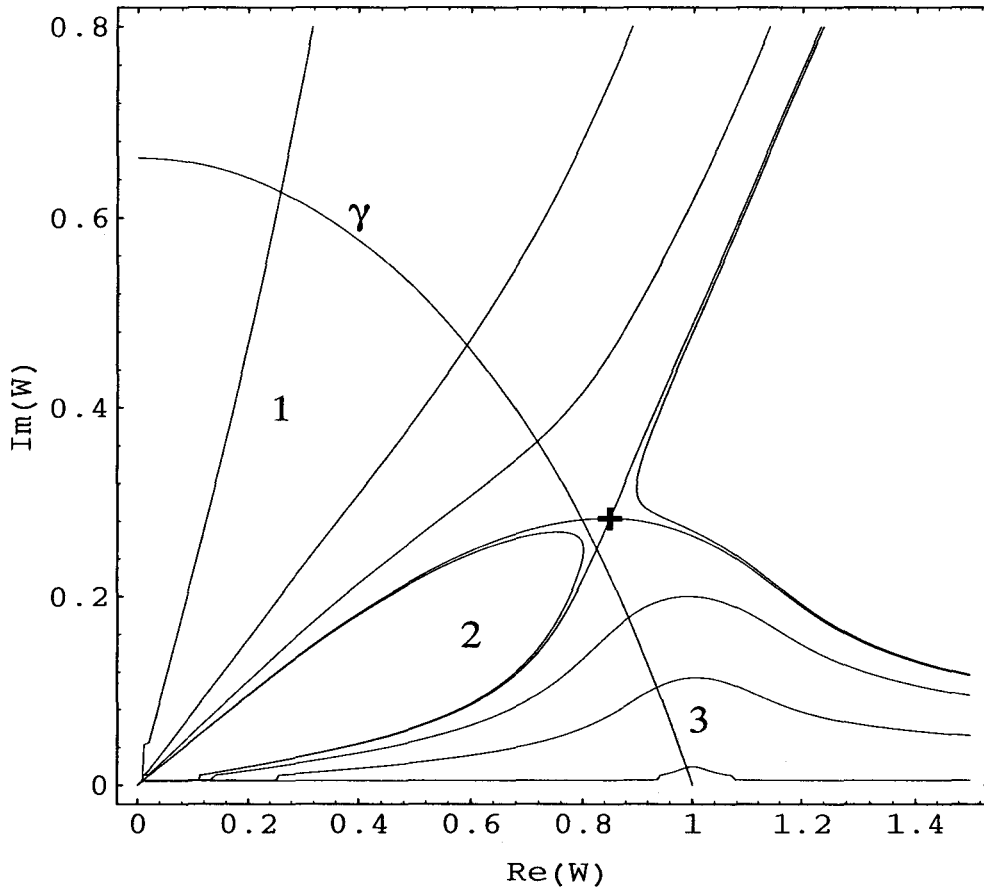


FIG. 2.3 - Trajectoires du tourbillon droit dans le plan de phase. Le point stationnaire est indiqué par +. La ligne séparant le fleuve de l'océan est représentée par  $\gamma$ .  $p = 0.5$ ,  $p = \kappa/m_0$ ,  $-\kappa$  est l'intensité du tourbillon droit,  $m_0$  est l'intensité de la source.



de ce type peuvent être résolus dans le cas où la variation temporelle des paramètres est très rapide. Signalons que cette méthode est très pratique et facile à utiliser, mais elle est très peu ou presque pas utilisée dans les études concernant la dynamique tourbillonnaire.

Dans l'analyse ci-dessous présentée, nous nous focalisons sur l'influence de la variation temporelle de l'intensité de la source sur la modification de la configuration des trajectoires des tourbillons, en particulier sur le problème de l'existence et de la localisation des positions des points stationnaires. Les solutions de tels problèmes sont d'un intérêt pratique évident.

A partir d'un modèle simple bien défini, nous voulons montrer que dans le cas d'une variation temporelle rapide de l'intensité de la source, les positions des points stationnaires, et donc les topologies des trajectoires des tourbillons changent radicalement. Pour résoudre le problème, nous appliquons la méthode précédemment évoquée et dont les points essentiels sont présentés dans l'exemple mécanique ci-dessous.

Prenons l'exemple d'un modèle simple : un pendule plan de masse unité dont le point de suspension effectue des oscillations verticales d'amplitude  $a$  et de fréquence  $\nu$  élevée ( $\nu \gg \sqrt{g/L}$ ), où  $g$  désigne l'accélération de la pesanteur et  $L$  la longueur du pendule. Déterminons alors les positions d'équilibre stable d'un tel pendule.

Ce problème a un seul degré de liberté caractérisé par l'angle  $\theta$  que fait l'axe du pendule avec la verticale ascendante.

L'idée de la méthode de Kapitsa [10, 11, 12] consiste à décomposer la fonction  $\theta$  en deux parties :  $\theta(t) = \langle \theta(t) \rangle + \xi(t)$ , où  $\langle \theta(t) \rangle$  décrit le mouvement "lent" et  $\xi(t)$  décrit le mouvement oscillatoire "rapide" au voisinage de ce mouvement.

En tenant compte de l'hypothèse de fréquence élevée, on peut montrer que le

mouvement “lent” du pendule peut être régi par l’équation [10, 11, 12] :

$$L^2 d^2\langle\theta\rangle/dt^2 = -dU_{eff}/d\langle\theta\rangle, \quad U_{eff} = gL \left( -\cos\langle\theta\rangle + (a^2\nu^2/4gL) \sin^2\langle\theta\rangle \right).$$

Tout se passe alors comme si le pendule se mouvait dans un champ effectif :

$$U_{eff} = gL(-\cos(\theta) + (a^2\nu^2/4gL) \sin^2(\theta)).$$

Les positions d’équilibre correspondent alors aux extremums de cette fonction.

On peut vérifier d’une part, que l’état ( $\langle\theta\rangle = 0$ ) (position verticale vers le bas) représente toujours un état d’équilibre stable. D’autre part, si la condition  $a^2\nu^2 > 2gL$  est vérifiée, contrairement aux idées habituelles sur les mouvements pendulaires, la configuration verticale vers le haut ( $\langle\theta\rangle = \pi$ ) représente aussi un état d’équilibre stable.

Ceci constitue un résultat exceptionnel, qui peut avoir une application pratique importante.

Cette façon de déterminer les positions des points stationnaires peut être alors généralisée à des problèmes beaucoup plus compliqués.

#### MODÈLE DU CANAL OUVERT

Appliquons la méthode dont l’idée a été formulée ci-dessus à l’interaction des tourbillons avec une source en présence des frontières rigides.

La structure tourbillonnaire étudiée est celle constituée de deux tourbillons d’intensités  $-\kappa$  et  $\kappa$  en présence d’une source de débit  $m$  dans un canal ouvert (domaine du plan complexe  $z$ ). Il a été montré précédemment que l’équation du mouvement d’un de ces tourbillons est :

$$\dot{\bar{w}} = \left\{ -ip \frac{w^2}{w^2 - \bar{w}^2} + \frac{2\mu + ip}{4} + \frac{ip}{4} \frac{1}{1 - w^2} \right\} \frac{\bar{w}}{|1 - w^2|}, \quad (2.13)$$

avec  $p = \kappa/m_0$ ,  $m(t) = m_0(1 + \epsilon f(t))$ ,  $\mu = m(t)/m_0$ , où nous avons désigné par  $m_0 = \langle m(t) \rangle$  l’intensité moyenne de la source. Les intensités  $m_0$  et  $\kappa$  sont supposées constantes.

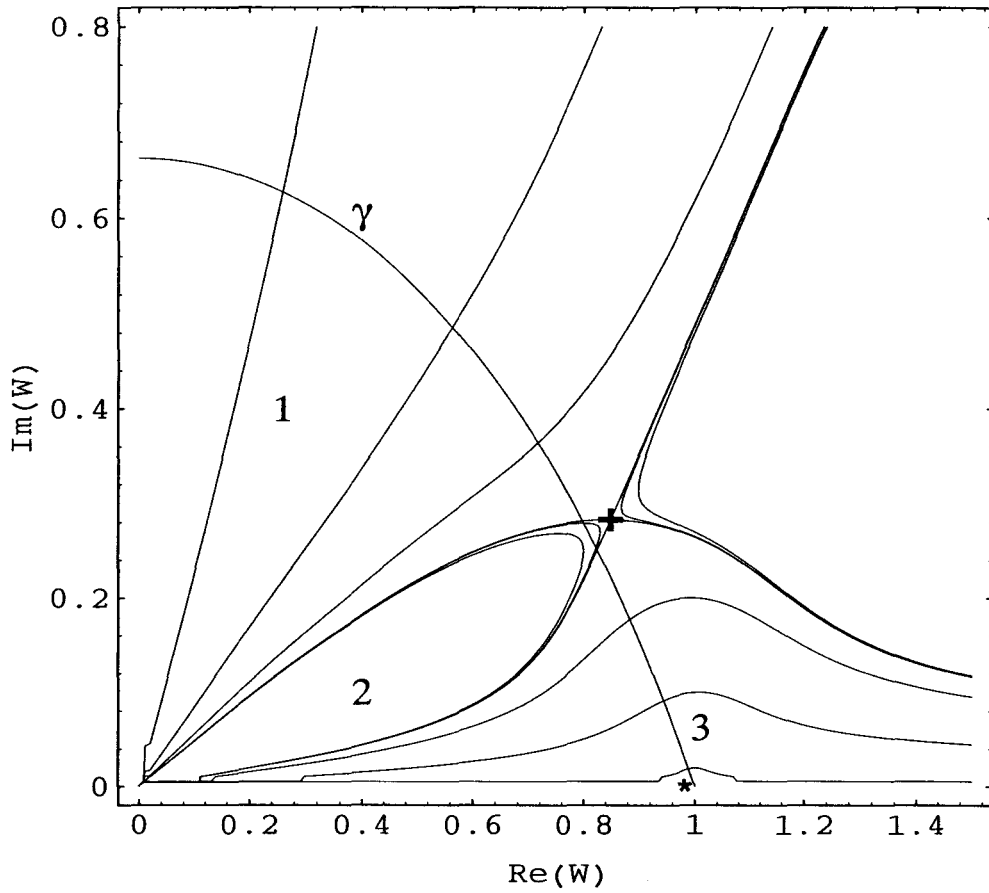


FIG. 2.4 - Trajectoires du tourbillon droit dans le plan de phase. Le point stationnaire est indiqué (dans le cas d'une indépendance temporelle du débit) par +. Le point stationnaire est indiqué (dans le cas d'une dépendance temporelle du débit) par \*. La ligne séparant le fleuve de l'océan est représentée par  $\gamma$ .  $p = \kappa/m_0$ ,  $-\kappa$  est l'intensité du tourbillon droit,  $m_0$  est l'intensité moyenne de la source.  $\Pi = \left(\frac{\epsilon m_0}{\kappa \lambda}\right)^2 = 7.10^{-7}$ ,  $p = 0.5$ .

La forme hamiltonienne quant à elle, est donnée par :

$$\dot{\bar{w}} = -i \left| w^2 / (1 - w^2) \right| \frac{\partial H}{\partial w}, \quad (2.14)$$

où la fonction d'Hamilton  $H$  est donnée par la relation :

$$H = \frac{1}{4} \left\{ p \ln |w + \bar{w}|^2 + p \ln |w - \bar{w}|^2 - 2p \ln |w|^2 + \right. \\ \left. + 2i\mu \ln(w/\bar{w}) - p \ln \left| w^2 / (1 - w^2) \right| \right\}. \quad (2.15)$$

Supposons que l'intensité de la source peut se mettre sous la forme  $m(t) = m_0 + m_1(t)$ , avec  $m_1(t) = \epsilon m_0 \sin(\lambda t)$ ,  $p = \kappa / m_0$ . Le paramètre  $\lambda = 2l^2 / m_0 T$  est la pulsation adimensionnée, où  $l$  désigne la largeur du canal,  $m_0$  l'intensité moyenne de la source,  $T$  la période réelle de la modulation de l'intensité de la source.

Il est alors possible de mettre l'équation du mouvement du centre du tourbillon droit sous la forme :

$$\dot{\bar{w}} = \left[ -ip \frac{w^2}{w^2 - \bar{w}^2} + \frac{2(1 + \epsilon \sin(\lambda t)) + ip}{4} + i \frac{p}{4} \frac{1}{1 - w^2} \right] \frac{\bar{w}}{|1 - w^2|}. \quad (2.16)$$

On peut remarquer que le système dont l'évolution est décrite par l'équation (2.16) est équivalent à un système hamiltonien, à savoir :

$$\dot{\bar{w}} = -\frac{i}{\kappa} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w}, \quad \dot{w} = \frac{i}{\kappa} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{w}}, \quad (2.17)$$

où

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + m_1(t)g(w, \bar{w}), \quad m_1(t) = \epsilon m_0 \sin(\lambda t),$$

et  $\mathcal{H}_0(w, \bar{w})$  est l'Hamiltonien du système non perturbé.

Supposons que le paramètre  $\lambda = 2l^2 / m_0 T$  est assez grand. Recherchons alors la solution de l'équation (2.17) sous la forme  $w = \langle w \rangle + w_1$ , où  $\langle w \rangle$  désigne la valeur moyennée de  $w$  sur l'intervalle de l'ordre de  $1/\lambda$  et  $w_1$  la partie fluctuante.

Après un développement en série par rapport à  $w_1$  du second terme de l'équation (2.17), on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \dot{\bar{w}} \rangle + \dot{\bar{w}}_1 = & -\frac{i}{\kappa} \left\{ \mathcal{H}_{0,1}^0 + \mathcal{H}_{0,11}^0 w_1 + \mathcal{H}_{0,12}^0 \bar{w}_1 + \mathcal{H}_{0,112}^0 w_1 \bar{w}_1 + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{0,111}^0 w_1^2 + \right. \\ & + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{0,122}^0 \bar{w}_1^2 + \dots + g_{,1}^0 m_1 + g_{,11}^0 m_1 w_1 + g_{,12}^0 \bar{w}_1 + \\ & \left. + g_{,112}^0 m_1 w_1 \bar{w}_1 + \frac{1}{2} g_{,111}^0 m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} g_{,122}^0 m_1 \bar{w}_1^2 + \dots \right\}. \quad (2.18) \end{aligned}$$

L'indice “,1” signifie que l'on prend la dérivée par rapport à  $w$  et l'indice “,2” signifie que l'on prend la dérivée par rapport à  $\bar{w}$ . La puissance “0” signifie qu'après dérivation, on prend la quantité dérivée sur la trajectoire moyenne ( $\langle w \rangle, \langle \bar{w} \rangle$ ) qui a priori n'est pas confondue avec la trajectoire non perturbée.

On prend la moyenne temporelle (sur une période par exemple) de l'équation (2.18). La valeur moyenne sur une période de la fonction  $w_1(t)$  est nulle et la fonction  $\langle w \rangle$  varie très peu. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \langle \dot{\bar{w}} \rangle = & -\frac{i}{\kappa} \left\{ \mathcal{H}_{0,1}^0 + \mathcal{H}_{0,112}^0 \langle w_1 \bar{w}_1 \rangle + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{0,111}^0 \langle w_1^2 \rangle + \right. \\ & + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{0,122}^0 \langle \bar{w}_1^2 \rangle + \dots + g_{,11}^0 \langle m_1 w_1 \rangle + g_{,12}^0 \langle m_1 \bar{w}_1 \rangle + \\ & + g_{,112}^0 \langle m_1 w_1 \bar{w}_1 \rangle + \frac{1}{2} g_{,111}^0 \langle m_1 w_1^2 \rangle + \\ & \left. + \frac{1}{2} g_{,122}^0 \langle m_1 \bar{w}_1^2 \rangle + \dots \right\}. \quad (2.19) \end{aligned}$$

On substitue l'équation (2.19) à l'équation (2.18) et on aboutit à :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{w}}_1 = & -\frac{i}{\kappa} \left\{ \mathcal{H}_{0,11}^0 w_1 + \mathcal{H}_{0,12}^0 \bar{w}_1 + \mathcal{H}_{0,112}^0 (w_1 \bar{w}_1 - \langle w_1 \bar{w}_1 \rangle) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{0,111}^0 (w_1^2 - \langle w_1^2 \rangle) + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{0,122}^0 (\bar{w}_1^2 - \langle \bar{w}_1^2 \rangle) + \dots + g_{,1}^0 m_1 + \\ & + g_{,11}^0 (m_1 w_1 - \langle m_1 w_1 \rangle) + g_{,12}^0 (m_1 \bar{w}_1 - \langle m_1 \bar{w}_1 \rangle) + \\ & + g_{,112}^0 (m_1 w_1 \bar{w}_1 - \langle m_1 w_1 \bar{w}_1 \rangle) + \frac{1}{2} g_{,111}^0 (m_1 w_1^2 - \langle m_1 w_1^2 \rangle) + \\ & \left. + \frac{1}{2} g_{,122}^0 (m_1 \bar{w}_1^2 - \langle m_1 \bar{w}_1^2 \rangle) + \dots \right\}. \quad (2.20) \end{aligned}$$

On remarque que les termes entre parenthèses sont d'ordre trois et plus ; en les négligeant, on obtient l'équation du terme fluctuant :

$$\dot{\bar{w}}_1 = -\frac{i}{\kappa} \left\{ \mathcal{H}_{0,11}^0 w_1 + \mathcal{H}_{0,12}^0 \bar{w}_1 + g_{,1}^0 m_1 \right\},$$

ou encore,

$$\left( \partial_t + \frac{i}{\kappa} \mathcal{H}_{0,12}^0 \right) \bar{w}_1 + \frac{i}{\kappa} \mathcal{H}_{0,11}^0 w_1 = -\frac{i}{\kappa} g_{,1}^0 m_1. \quad (2.21)$$

L'équation conjuguée quant à elle, s'écrit :

$$-\frac{i}{\kappa} \mathcal{H}_{0,22}^0 \bar{w}_1 + \left( \partial_t - \frac{i}{\kappa} \mathcal{H}_{0,12}^0 \right) w_1 = \frac{i}{\kappa} g_{,2}^0 m_1. \quad (2.22)$$

On applique l'opérateur  $(\partial_t + i\mathcal{H}_{0,12}^0/\kappa)$  à l'équation (2.22) et on multiplie l'équation (2.21) par  $i\mathcal{H}_{0,22}^0/\kappa$  et en faisant la somme des deux résultats, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa^2} \mathcal{H}_{0,22}^0 \mathcal{H}_{0,11}^0 w_1 + \left( \partial_t + \frac{i}{\kappa} \mathcal{H}_{0,12}^0 \right) \left( \partial_t - \frac{i}{\kappa} \mathcal{H}_{0,12}^0 \right) w_1 &= \\ = \frac{1}{\kappa^2} \mathcal{H}_{0,22}^0 g_{,1}^0 m_1 + \frac{i}{\kappa} g_{,2}^0 \left( \partial_t + \frac{i}{\kappa} \mathcal{H}_{0,12}^0 \right) m_1. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dans ce qui suit, nous supposons que les termes d'exposant zéro sont quasi constants sur un intervalle de temps de l'ordre de  $1/\lambda$  et que la fréquence  $\lambda$  est très grande devant les termes contenant les dérivées de  $\mathcal{H}_0$ .

De l'équation (2.23) on peut donc trouver une estimation :

$$\partial_t^2 w_1 = \frac{i}{\kappa} g_{,2}^0 \partial_t m_1. \quad (2.24)$$

D'où on obtient pour les fonctions  $w_1$  et  $\bar{w}_1$  les expressions :

$$w_1 = -\frac{i\epsilon m_0}{\kappa\lambda} g_{,2}^0 \cos(\lambda t), \quad \bar{w}_1 = \frac{i\epsilon m_0}{\kappa\lambda} g_{,1}^0 \cos(\lambda t). \quad (2.25)$$

Finalement, en posant ces expressions dans l'équation (2.19) nous trouvons l'équation d'une évolution lente :

$$\begin{aligned} \langle \dot{\bar{w}} \rangle = -\frac{i}{\kappa} \left\{ \mathcal{H}_{0,1}^0 + \mathcal{H}_{0,112}^0 \left( \frac{\epsilon m_0}{\kappa\lambda} \right)^2 \frac{g_{,1}^0 g_{,2}^0}{2} - \frac{1}{4} \mathcal{H}_{0,111}^0 \left( \frac{\epsilon m_0}{\kappa\lambda} \right)^2 (g_{,2}^0)^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \mathcal{H}_{0,122}^0 \left( \frac{\epsilon m_0}{\kappa\lambda} \right)^2 (g_{,1}^0)^2 + O(3) \right\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Cette équation présente le résultat final de l'étude. Remarquons qu'elle peut s'écrire sous la forme classique :

$$\langle \dot{\bar{w}} \rangle = -\frac{i}{\kappa} \mathcal{H}_{eff,1}^0, \quad \mathcal{H}_{eff} = \mathcal{H}_0 + \Delta \mathcal{H}. \quad (2.27)$$

Le mouvement moyen du centre du tourbillon en présence, d'une source dont l'intensité varie très rapidement dans le temps, s'effectue comme s'il se mouvait dans un champ effectif  $\mathcal{H}_{eff}$  défini par :  $\mathcal{H}_{eff} = \mathcal{H}_0 + \Delta \mathcal{H}$ .

## 2.5 Quelques observations

Malgré la particularité de la géométrie du modèle étudié, on voit que les résultats obtenus sont très informatifs. Ce modèle montre les particularités des trajectoires des tourbillons au voisinage des frontières rigides. Il montre aussi que les lieux où les tourbillons peuvent rester immobiles existent. Ces lieux sont complètement déterminés par un seul paramètre adimensionné  $p = \kappa/m_0 = \kappa/2Ul$ , composé de l'intensité du tourbillon, de la vitesse de l'écoulement de base et de la largeur du canal. La dépendance correspondante est donnée par le système paramétrique non trivial (2.11).

Dans ce chapitre, le problème de l'existence et de la détermination des positions des points stationnaires, lorsque l'intensité de la source en présence des tourbillons varie très rapidement dans le temps, a été également posé et résolu. La détermination systématique des positions des points stationnaires n'est pas possible lorsqu'un paramètre du problème varie temporellement, cependant, à l'aide de la méthode de Kapitsa, nous avons obtenu une estimation de ces positions.

Sur les Figures 2.4 et 2.5, nous avons représenté les trajectoires d'un des tourbillons composant la paire. Ces trajectoires correspondent, dans le cas où l'intensité de la source est constante, aux courbes d'équation :  $\mathcal{H} = Cte$ . Sur ces figures (voir également [7]), on distingue au minimum trois zones topologiquement

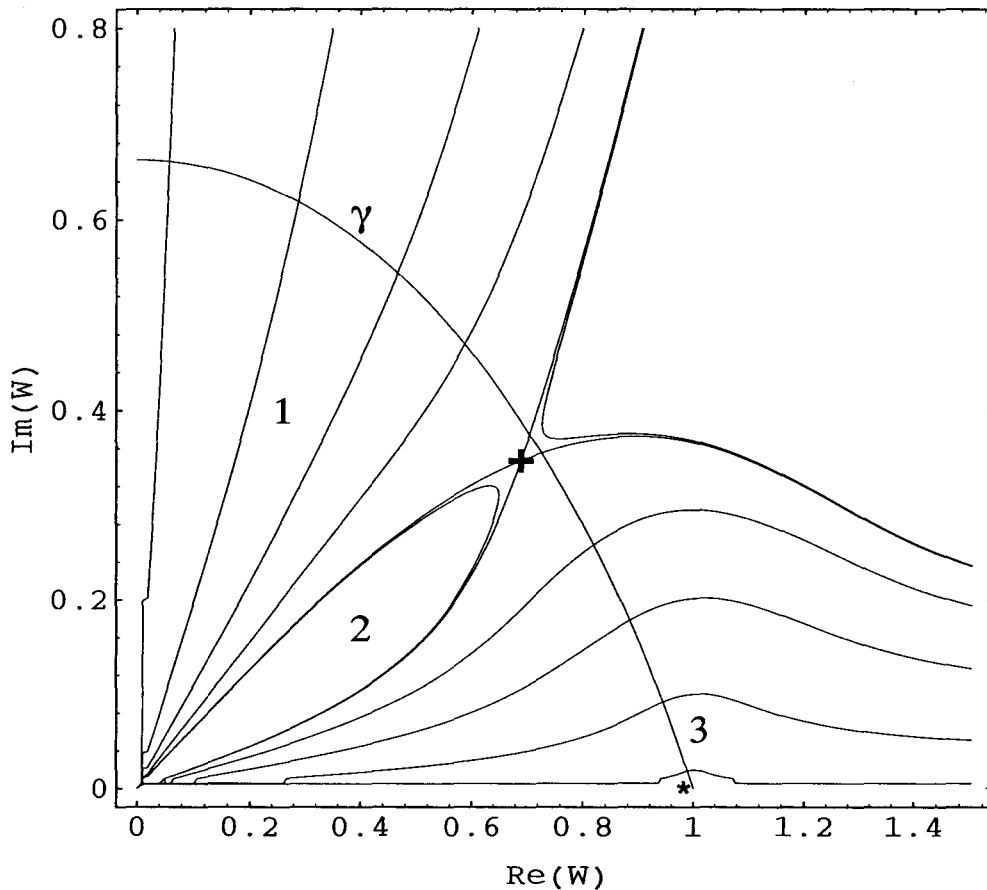


FIG. 2.5 - Trajectoires du tourbillon droit dans le plan de phase. Le point stationnaire est indiqué (dans le cas d'une indépendance temporelle du débit) par +. Le point stationnaire est indiqué (dans le cas d'une dépendance temporelle du débit) par \*. La ligne séparant le fleuve de l'océan est représentée par  $\gamma$ .  $p = \kappa/m_0$ ,  $-\kappa$  est l'intensité du tourbillon droit,  $m_0$  est l'intensité moyenne de la source.  $\Pi = \left(\frac{\epsilon m_0}{\kappa \lambda}\right)^2 = 7.10^{-7}$ ,  $p = 0.9$ .



différentes.

- a) La zone 1 : en prenant naissance dans cette zone, les tourbillons quittent le canal.
- b) La zone 2 : cette zone est une zone de recirculation dans laquelle un tourbillon s'y trouvant y restera en circulation.
- c) La zone 3 : dans cette zone, les tourbillons générés à l'extérieur du canal se rapprochent de la source. Ce phénomène s'explique par la nécessité de respecter les conditions aux frontières. Le domaine d'écoulement a des frontières rigides, tout se passe alors comme si des tourbillons images se formaient. Si les tourbillons (réel et image) sont très proches l'un de l'autre, le tourbillon induit, c'est-à-dire le tourbillon image, crée, à l'endroit où se trouve le tourbillon réel, un champ de vitesse orienté dans le sens opposé à l'écoulement de la source. Si ce champ de vitesse est plus grand que celui de l'écoulement de la source, alors le tourbillon réel se dirigera vers la source, s'il est plus petit, il s'en éloignera et si les deux champs sont égaux, il restera immobile.

En ce qui concerne les points stationnaires, dans le cas où l'intensité de la source est constante (soit  $\mu = 1$ , i.e.  $(m(t) = m_0)$ ), ils s'écrivent sous la forme paramétrique suivante :  $u_s = 1 - \cos s \exp is$ ,  $p = -2/(3 \tan s)$ ,  $\pi/2 < s < \pi$ . Les positions des points stationnaires dans ce cas, pour différentes valeurs de  $p$  sont représentées sur les Figures 2.4 et 2.5 par le symbole +.

Les points stationnaires dans le cas où l'intensité de la source varie temporellement sont représentés sur les Figures 2.4 et 2.5 par le symbole \*. Il est clair que leurs positions changent radicalement par rapport à celle obtenues lorsque l'intensité de la source est constante.

Les résultats obtenus montrent clairement que la modulation rapide de l'intensité de la source agissant sur les structures tourbillonnaires modifie radicalement les positions des points stationnaires. Le déplacement significatif des points sta-

tionnaires change radicalement la topologie des trajectoires et cela peut entraîner des conséquences importantes évidentes.

## 2.6 Comportement d'un tourbillon au voisinage d'une frontière de forme triangulaire

Pour bien illustrer une fois de plus l'influence des frontières sur le mouvement des tourbillons, nous présentons ici le modèle d'un tourbillon en présence d'un écoulement uniforme de vitesse  $V_\infty$  [7].

Le domaine-modèle  $D$  d'écoulement est la région (supérieure) dont la frontière est approximée dans le plan  $z = x + iy$  par un triangle isocèle de sommets  $A_2(-l, 0)$ ,  $A_3(0, h)$  et  $A_4(l, 0)$  et par les demi-droites  $(-\infty, A_2)$  et  $(A_4, +\infty)$ . On désignera par  $\pi\beta$  l'angle au sommet  $A_2$  avec  $0 < \beta < 0.5$ . Un tourbillon d'intensité  $\kappa$  se meut dans  $D$ .

Une transformation conforme du domaine (domaine  $D$ ) du plan physique  $z$  en demi-plan supérieur  $\Im w \geq 0$  (domaine  $D'$ ) du plan complexe  $w$  est donnée par

$$z = C \int_0^w t^{2\beta}(1-t^2)^{-\beta} dt + C_0. \quad (2.28)$$

En imposant les conditions: si  $z = ih$ ,  $w = -1$  et si  $z = il$ ,  $w = 1$ , on trouve pour les deux constantes  $C_0$  et  $C$  les valeurs suivantes:  $C_0 = ih$ ,  $C = (h/\pi)B(1/2, \beta)e^{-i\beta\pi}$ ,  $B(x, y)$  est la fonction Beta [1].

### EQUATIONS RÉGISSANT LE MOUVEMENT DU TOURBILLON

Nous recherchons l'équation qui décrit le mouvement du centre du tourbillon en présence des parois rigides dans un écoulement de vitesse  $V_\infty$  à l'infini. Pour cela nous devons rechercher une fonction  $\Phi_D$  analytique dans  $D$  qui respecte les conditions aux frontières (conditions de non pénétration des parois):

$\Im(\Phi_D) = cte$ . Ces conditions expriment la nullité de la composante normale de la vitesse de l'écoulement sur les parois rigides.

Le potentiel complexe qui correspond à l'écoulement uniforme dans le plan physique  $z$  en tout point  $z_0$  est  $V_\infty z_0$ . Par conséquent, dans le plan complexe  $w$ , celui-ci devient  $Ce^{i\beta\pi}V_\infty w_0$ . Le potentiel complexe total décrivant une superposition de l'écoulement uniforme de vitesse  $V_\infty$  (à l'infini du plan  $z$ ) et du champ créé par le tourbillon et son image en tout point  $w_0$  du domaine complexe  $D'$  du plan  $w$  est

$$\begin{aligned}\phi_{D'}(w_0) = & (B(1/2, \beta)hV_\infty/\pi)w_0 - (i\kappa/2\pi)\ln(w_0 - w) \\ & + (i\kappa/2\pi)\ln(w_0 - \bar{w}).\end{aligned}\quad (2.29)$$

De là, on trouve alors l'équation du centre du tourbillon (voir [6] pour les détails) :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{w}} = & (1/2\pi) \left\{ 2hV_\infty B(1/2, \beta) + i\kappa(w - \bar{w})^{-1} + (i\kappa\beta(w(1 - w^2))^{-1} \right\} |dz/dw|^{-2}, \\ & dz/dw = Cw^{2\beta}(1 - w^2)^{-\beta}.\end{aligned}\quad (2.30)$$

Passons aux variables et paramètres adimensionnés. Le temps caractéristique  $\tau$  est défini par  $\tau = 2B(1/2, \beta)h/(\pi V_\infty)$ .

Une forme hamiltonienne (voir la considération générale de la méthode dans [6]) de l'équation du mouvement du centre du tourbillon nous semble être très pratique, car l'hamiltonien dans notre cas ne dépend pas explicitement du temps et on a donc des intégrales premières du mouvement. Le mouvement du tourbillon peut être décrit par l'équation d'évolution suivante :

$$\dot{\bar{w}} = -i|w^2/(1 - w^2)|^{-2\beta} (\partial H/\partial w), \quad \dot{w} = i|w^2/(1 - w^2)|^{-2\beta} (\partial H/\partial \bar{w}), \quad (2.31)$$

où la fonction d'Hamilton adimensionnée  $H$  est donnée par la relation :

$$H = i\alpha(w - \bar{w}) - p \ln |w - \bar{w}| - p\beta \ln |w^2/(1 - w^2)|, \quad (2.32)$$

avec les paramètres  $p = \kappa/(hV_\infty)$ ,  $\alpha = 2B(1/2, \beta)$ . Un tourbillon se meut donc suivant des courbes  $H = cte$ . Celles-ci représentent les trajectoires possibles du centre du tourbillon.

Les points stationnaires sont obtenus en résolvant l'équation  $\dot{\bar{w}} = 0$ , ce qui revient à résoudre :

$$\alpha + ip(w - \bar{w})^{-1} + ip\beta w^{-1}(1 - w^2)^{-1} = 0. \quad (2.33)$$

Une solution de cette équation peut être cherchée sous la forme  $w = r(s)e^{is}$ , dans un domaine physiquement admissible  $0 < s < \pi$ . Elle peut alors se mettre sous la forme paramétrique suivante :

$$\begin{aligned} r(s) &= (-1 + 2 \cos 2s)^{-1/2} \\ p &= -2\alpha \sin s(1 + \beta + 2\beta \cos 2s)^{-1}(-1 + 2 \cos 2s)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Signalons au préalable que le point  $-\bar{w}_s = -r(s)e^{-it}$  est aussi solution de l'équation (2.33). Outre ces deux solutions, il existe une troisième solution purement imaginaire.

Nous pouvons remarquer qu'une condition nécessaire d'existence des points stationnaires est :  $0 < s < \pi/6$ . Autrement dit, pour que les points stationnaires existent, il faut que  $p$  vérifie la condition :  $p < 0$ . L'interprétation qualitative de ce fait est simple. En effet dans ce cas, le tourbillon image induit au point où se trouve le tourbillon principal, une vitesse dirigée dans le sens contraire de l'écoulement de base. Le tourbillon principal se déplace donc dans le sens inverse de l'écoulement de base et peut donc être immobilisé si  $|p|$  est suffisamment élevé. Notons que la condition  $p < 0$  correspond à  $\kappa < 0$ , car la direction de l'écoulement de base, c'est-à-dire le signe de  $V_\infty$  est imposée, ici ce signe est positif.

Si  $\pi/6 < s < \pi$ , l'équation (2.33) admet une solution, mais celle-ci n'est pas physiquement admissible ; il n'existe donc aucun point stationnaire dans ce cas. En fait,  $p$  étant positif et donc  $\kappa$  aussi, le tourbillon principal se déplace dans le

même sens que l'écoulement de base, il n'y a donc aucune raison physique pour qu'il puisse être immobilisé (Figure 2.6 a)).

Nous avons alors montré sur la base d'un modèle simplifié, que les structures tourbillonnaires simples peuvent se mouvoir en permanence au voisinage de l'obstacle. Ces structures peuvent rester immobiles à des endroits bien déterminés de l'espace, ou alors circuler au voisinage de l'obstacle. De la Figure 2.6 b), nous pouvons constater la possibilité de plusieurs scénarios : en amont et en aval de l'obstacle.

En amont de l'obstacle (côté gauche):

- a) des tourbillons peuvent prendre naissance à des grandes altitudes, puis contourner l'obstacle et disparaître ;
- b) ou bien retourner dans le sens de l'écoulement de base ;
- c) ou enfin former une zone de stagnation.

En aval de l'obstacle, il y a deux possibilités :

- a) les structures tourbillonnaires se formant loin de l'obstacle se dirigent vers celui-ci, mais à cause de la présence des frontières, ces structures s'élèvent et, sans pouvoir franchir l'obstacle à cause de la présence de l'écoulement de base qui y règne, sortent complètement de la zone où se trouve l'obstacle
- b) ou forment une zone de stagnation (voir Figure 2.6 b)). Remarquons qu'il existe dans le cadre du modèle mathématique proposé des endroits "dangereux", des frontières par exemple, ici le voisinage du point anguleux du domaine physique  $z = ih$ , ce qui correspond au point  $w = 0$  dans le plan  $w$ . En ce point  $w = 0$ , la vitesse de l'écoulement, dans le cadre du modèle mathématique proposé, peut être infinie à cause de la singularité introduite par la transformation conforme. La vitesse de l'écoulement, au voisinage des points anguleux, doit être bornée [4]. Pour notre cas, il faut et il suffit que l'équation  $-ip(w_s - \bar{w}_s) / w_s \bar{w}_s + (hV_\infty)^{-1} U(w_s) = 0$  soit vérifiée. Cette question, comme signalée dans [4], n'est pas triviale et mé-

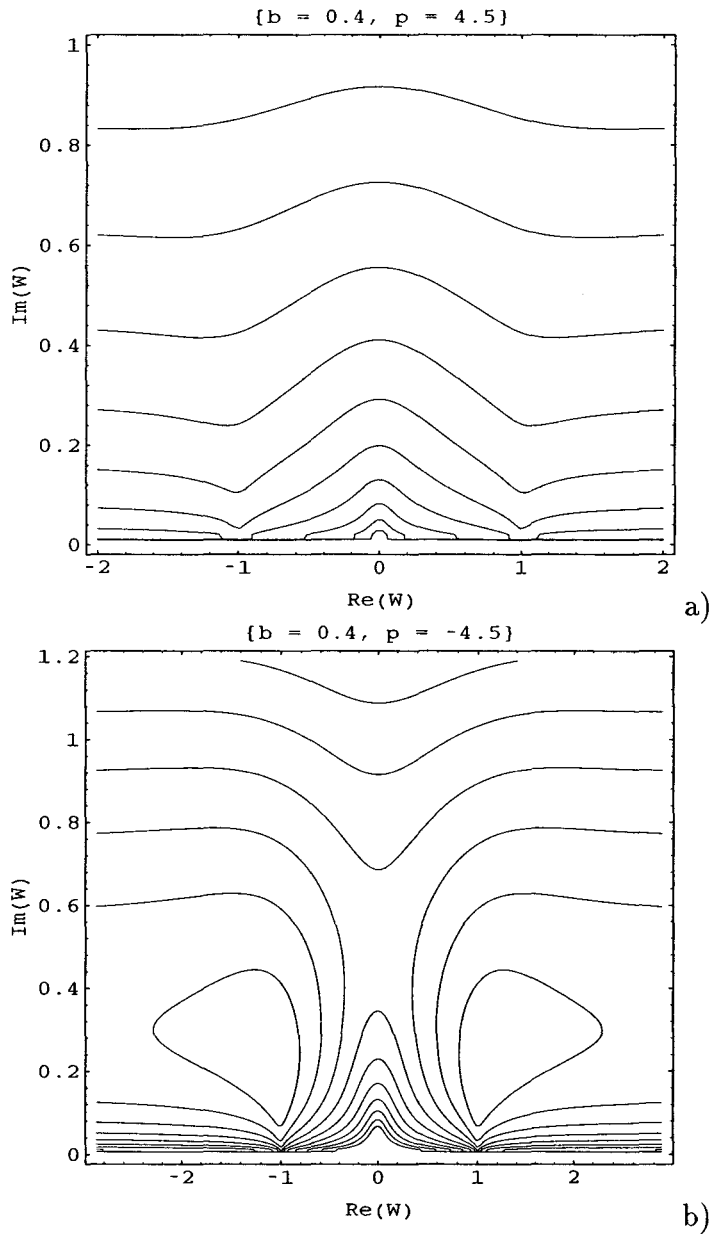


Figure 2.6 a): *Trajectoires du tourbillon dans le plan de phase. Le paramètre  $p$  vaut  $p = -0.45$ ,  $p = \kappa/hV_\infty$ ,  $\kappa$  est l'intensité du tourbillon,  $h$  la hauteur de l'obstacle et  $V_\infty$  la vitesse de l'écoulement de base. Ici,  $\beta = 0.4$ .*

Figure 2.6 b): *Trajectoires du tourbillon dans le plan de phase. Le paramètre  $p$  vaut  $p = 4.5$ ,  $p = \kappa/hV_\infty$ ,  $\kappa$  est l'intensité du tourbillon,  $h$  la hauteur de l'obstacle et  $V_\infty$  la vitesse de l'écoulement de base. Ici  $\beta = 0.4$ .*

rite des études plus approfondies, physiquement plus fondées. Nous devons donc décider, d'après les données expérimentales, de respecter ou non des conditions similaires.

# Bibliographie

- [1] ABRAMOWITZ, M. AND STEGUN, I. A., *Handbook of Mathematical Functions*, U.S.Govt. Printing Office, Washington, D.C., 1964.
- [2] MILNE-THOMSON L. M., *Theoretical hydrodynamics*, Vth Edition, MacMillan, London, 1968.
- [3] LAMB H., *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1932 (reprinted New York: Dover, 1945).
- [4] SAFFMAN P. G., *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press, 1992.
- [5] GINSBURG A. I., FEDOROV K. N., Processes of horizontal exchange in near-surface layer of Black Sea. Investigation of Earth from the Space, **2**, 1994, 75-82.
- [6] GONCHAROV V. P., PAVLOV V.I., Vortex structures generated by a coastal current in harbour-like basins at large Reynolds numbers, Journ. Fluid Mech., 1997, **351**, 201-221.
- [7] DAWAI T., PAVLOV V., Dynamics of point-vortex structures in a 2D-flow in the presence of boundaries. *Publications Institut de Recherches en Mathématiques Avancées*, Lille, 1998, **46**, no.VI, 1-15.



- [8] DAWAI T., PAVLOV V., Modélisation du mouvement des tourbillons localisés à proximité d'une chaîne de montagnes, *Atelier de Modélisation de l'Atmosphère*. Météo France, Toulouse 8-9 décembre 1998, 189-192.
- [9] GONCHAROV V. P., PAVLOV V. I. Some remarks on the physical foundations of the Hamiltonian description of fluid motions. *Eur. J. Mech., B/Fluids*, 1997, 16, no. 4, 509-555.
- [10] LANDAU, L.D. & LIFSHITZ, E.M., *Physique théorique : Mécanique*. IVème ed., Ed.: Mir, Moscou, 1982, 242p.
- [11] KAPITSA, P.L., *JETP*, 1951 **21**, p. 588-607.
- [12] KAPITSA, P.L., *Sov. Phys-Uspekhi*, 1951, **44**, p. 7-20 .
- [13] LAVRENTIEV, M.A. ET SHABAT, B.V., *Effets hydrodynamiques et modèles mathématiques*, 1980. Ed.: Mir, Moscow.

# Chapitre 3

## Echelles caractéristiques des domaines tourbillonnaires apparaissant près des irrégularités des frontières

### 3.1 Avant-propos

On analyse la possibilité de formation d'un domaine tourbillonnaire de dimension finie au voisinage d'un obstacle de forme complexe. Pour le modèle proposé, lorsqu'un tel scénario est réalisable, une allure de la courbe délimitant le domaine de vortacité non nulle est trouvée. Cette courbe représente une solution approximative d'une équation intégral-différentielle obtenue sur la base du modèle proposé. Nous avons montré que le niveau de vortacité est lié à la dimension caractéristique du domaine tourbillonnaire. Cette dimension dépend de la dimension caractéristique de l'obstacle, fonction homogène du nombre de Reynolds.

La formation des zones tourbillonnaires est largement observée au voisinage

d'obstacles. Nous nous concentrons sur les mouvements bidimensionnels. Du point de vue théorique, pour étudier des particularités de ces mouvements, deux approches peuvent être proposées : (i) l'approche qui utilise le concept des tourbillons localisés [1], (ii) celle qui se base sur l'hypothèse de la répartition continue de la vorticité dans des domaines de dimension finie [2]. Dans ce qui suit, nous nous focalisons sur la deuxième approche dont les fondements théoriques sont donnés dans les ouvrages classiques [2, 3]. L'objectif principal de la présente analyse est de trouver une solution approximative d'une équation intégrale non linéaire décrivant la forme de la frontière d'une zone tourbillonnaire ; de déterminer la valeur de la vorticité et la longueur caractéristique de la zone tourbillonnaire en fonction de la dimension caractéristique de l'obstacle et des paramètres extérieurs du problème, tels que la vitesse de l'écoulement, le nombre de Reynolds, etc. Dans ce qui suit, nous présentons une analyse du problème dans le cadre d'un modèle simple capable de faire ressortir les traits essentiels des mouvements tourbillonnaires bidimensionnels au voisinage des obstacles tels que des cavités, des irrégularités côtières, des chaînes de montagnes, etc.

## 3.2 Quelques estimations qualitatives

Soit un mouvement d'un fluide faiblement visqueux (le nombre de Reynolds caractéristique  $Re = Vh/\nu \gg 1$ ,  $V$  est une vitesse caractéristique de l'écoulement à l'infini,  $h$  la hauteur de l'obstacle et  $\nu$  la viscosité cinématique). Les équations de base (pour un fluide incompressible) s'écrivent sous la forme :  $\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla(P/\rho) + \nu \Delta \mathbf{v}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , où  $\mathbf{v}$  désigne le champ de vitesse bidimensionnel,  $P$  est la pression,  $\rho$  la masse volumique,  $\nu$  la viscosité cinématique,  $\Delta = \partial^2 / \partial \xi^2 + \partial^2 / \partial \eta^2$  est l'opérateur laplacien bidimensionnel. Si l'on multiplie scalairement l'équation du mouvement par  $\mathbf{v}$ , et l'on prend l'intégrale "volu-

mique” de l’expression obtenue, on trouve l’équation de l’évolution de l’énergie cinétique dans laquelle les termes ayant la forme de  $div \mathbf{A}$  se transforment en intégrale “surfactive” :

$$\partial_t \int_D dx \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} = - \oint_{\partial D} ds \cdot \left( \rho \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \mathbf{v} + \rho \nu [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}] \right) - \rho \nu I, \quad I = \int_D dx \omega^2. \quad (3.1)$$

Dans cette relation,  $ds = ds \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure au contour  $\partial D$  limitant le domaine d’écoulement où la vorticité peut ˆetre localis  e. Le terme  $[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}]$  est le produit vectoriel de  $\boldsymbol{\omega}$  par  $\mathbf{v}$ . Soit le régime stationnaire (l’énergie cinétique de l’écoulement reste constante au cours du temps). Alors, le terme de gauche de l’équation (3.1) disparaît. En d’autres termes, ce régime ne peut se réaliser que si le flux d’énergie dans le domaine  $D$  compense complètement les pertes visqueuses. Il convient de noter que des écoulements de ce type peuvent subsister grâce aux facteurs extérieurs tels que, par exemple, le gradient de pression. On peut estimer les différents termes de l’équation (3.1) : pour le deuxième terme qui exprime le flux d’énergie pénétrant dans  $D$ , on obtient  $\sim \rho h c_f V^3$ , où  $c_f = c_f(Re)$  est un coefficient empirique (voir l’ouvrage de Schlichting [5]). Pour le troisième, on trouve  $\sim \rho \nu \omega^2 L_z h$ . Ici,  $L_z$  est une dimension longitudinale caractéristique de  $D$ . Nous arrivons à l’estimation :

$$\omega^2 L_z \sim c_f Re V^2 / h. \quad (3.2)$$

Dans cette relation figurent deux inconnues : la vorticité  $\omega$  et la longueur caractéristique de la zone tourbillonnaire  $L_z$ . Les dépendances qui nous intéressent sont  $\omega = \omega(V, h, \nu)$  et  $L_z = L_z(V, h, \nu)$  (l’analyse dimensionnelle simple donne  $\omega = (V/h) f_1(Re)$  et  $L_z = h f_2(Re)$ ), nous devons ajouter encore une relation reliant  $\omega$  et  $L_z$ . Utilisons pour cela le fait que, dans le cas  $Re \gg 1$ , le mouvement du fluide peut ˆetre considéré comme celui d’un fluide quasi parfait [3, 6]. Appliquons au problème considéré les méthodes des variables complexes [2].

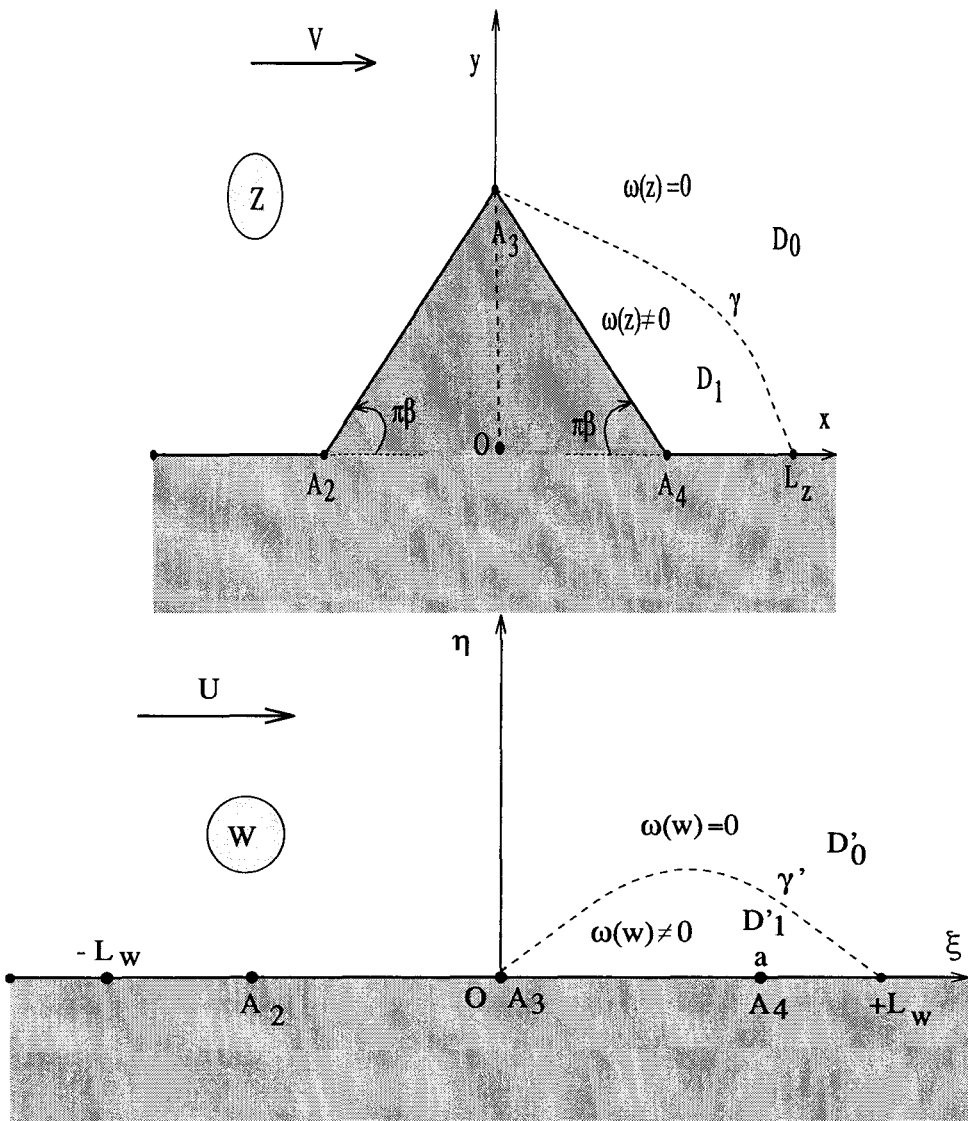


FIG. 3.1 - Illustration de la transformation conforme.

### 3.3 Modèle mathématique

Le modèle mathématique est indiqué sur la Figure 3.1. Le domaine-modèle  $D$  d'écoulement est une région dont la frontière est approximée dans le plan  $z = x + iy$  par un triangle isocèle de sommets  $A_2(-l, 0)$ ,  $A_3(0, h)$  et  $A_4(l, 0)$  et par les demi-droites  $(-\infty, A_2)$  et  $(A_4, +\infty)$  (Figure 3.1). On désignera par  $\pi\beta$  l'angle au sommet  $A_2$  avec  $0 < \beta < 0.5$ . Le domaine  $D$  est composé d'un domaine  $D_1$  de frontière  $\gamma$  dans lequel l'écoulement est tourbillonnaire de vorticité  $\omega_z$  et d'un domaine  $D_0$  dans lequel l'écoulement est à potentiel de vitesse  $V$  à l'infini. L'écoulement considéré doit évidemment respecter les conditions suivantes : la vitesse de l'écoulement est partout continue dans  $D$ , elle est uniforme à l'infini et les frontières rigides ainsi que l'arc  $\gamma$  sont des lignes de courant. Transformons le domaine  $D$  en domaine  $D'$  (demi-plan  $\Im w \geq 0$ , ici  $\Im w$  désigne la partie imaginaire de  $w$ ) et reformulons le problème dans celui-ci. La transformation correspondante est illustrée sur la Figure 3.1. Une transformation conforme [1] appliquant le domaine  $D$  du plan  $z = x + iy$  sur le domaine  $D'$  du plan  $w = \xi + i\eta$  est donnée dans notre cas, par  $z = C \int_0^w dt t^{2\beta} (a^2 - t^2)^{-\beta} + C_0$ . En imposant les conditions : si  $z = ih$ ,  $w = 0$  et si  $z = l$ ,  $w = a$ , on trouve pour les deux constantes  $C_0$  et  $C$  les valeurs suivantes :  $C_0 = ih$ ,  $C = h/(a\pi)B(1/2, \beta)e^{-i\beta\pi}$ , où  $B(x, y)$  est la fonction Beta [7]. Les correspondances entre les paramètres caractéristiques des écoulements dans les plans  $z$  et  $w$  sont :  $U = V(h/a)B(1/2, \beta)/\pi$ ,  $\omega(w) = \omega_z(z)|J|$ , où  $J$  est la matrice jacobienne de la transformation de  $z$  à  $w$  et  $\omega(w)$  la vorticité dans le plan  $w$ .

### 3.4 Position du problème dans le plan complexe $w$

Soit  $D'$  le demi-plan supérieur  $\eta > 0$  ; il faut déterminer les paramètres dynamiques et géométriques pour lesquels il existe un domaine  $D'_1$  inclus dans  $D'$

dont la frontière se compose d'un segment  $[0, L_w]$  de l'axe des  $\xi$  et d'un arc  $\gamma'$  sous-tendu par le segment, tel qu'il existe un domaine à rotation non nulle  $\omega$  dans le domaine  $D'_1$  et à potentiel dans  $D'_0 = D' \setminus \overline{D}'_1$ .  $\overline{D}'_1$  désigne le domaine composé de  $D'_1$  et ses frontières (voir Figure 3.1). Le champ de vitesse est partout continu dans  $D'$  et la ligne  $\gamma'$  est une ligne de courant. D'après la théorie générale, le potentiel complexe de l'écoulement doit être une fonction analytique dans le domaine décrivant le processus physique. Il peut être choisi en présence de la "boule" de vorticité  $\omega(w) \neq 0$  :

$$\phi(w) = Uw - i(2\pi)^{-1} \int d\xi_1 d\eta_1 \omega(\zeta) \ln \left( (w - \zeta)/(w - \bar{\zeta}) \right). \quad (3.3)$$

Ici,  $\zeta = \xi_1 + i\eta_1$  est un point variable d'intégration de  $D'_1$ . Le premier terme de droite représente le potentiel créé par l'écoulement uniforme de base et le deuxième est celui créé par l'écoulement de vorticité  $\omega$ . Nous respectons par un tel choix de la fonction  $\phi(w)$  toutes les conditions aux limites. La fonction de courant, c'est-à-dire la partie imaginaire du potentiel complexe, est :

$$\psi(w) = U\eta - (2\pi)^{-1} \int d\xi_1 d\eta_1 \omega(\zeta) \ln \left| (w - \zeta)/(w - \bar{\zeta}) \right|, \quad w = \xi + i\eta. \quad (3.4)$$

Cette expression respecte les conditions nécessaires suivantes : (i) elle admet des dérivées partielles continues partout dans  $D'$ , (ii)  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \partial_\eta \psi = U$ , (iii) elle prend une valeur constante (la valeur nulle par exemple) sur tout l'axe  $\xi$  et sur l'arc  $\gamma'$ . La fonction de courant étant nulle sur  $\gamma'$ , on obtient l'équation (voir par exemple [2]) :

$$\eta(\xi) - \left( \frac{1}{4\pi U} \right) \int_0^{L_w} d\xi_1 \int_0^{\eta(\xi)} d\eta_1 \omega(\xi) \ln \left\{ \frac{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta(\xi) - \eta_1)^2}{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta(\xi) + \eta_1)^2} \right\} = 0 \quad (3.5)$$

valable dans le domaine  $0 < \xi < L_w$ . La forme de l'arc  $\gamma'$  est donc donn  e par cette équation intégrale non linéaire.

Nous devons ajouter à (3.5) une condition physique aux limites à savoir : la vitesse de l'écoulement dans le plan physique  $z = x + iy$  doit être partout bornée. D'où, on trouve qu'aux points "dangereux"  $w = 0$  et  $w = L_w$ , deux conditions (conditions de Kutta-Joukowski) sont à respecter :

$$\begin{aligned} 2\pi U + \int_0^{L_w} d\xi \omega(\bar{\zeta}) \ln\left(1 + \left(\frac{\eta(\xi)}{\xi - L_w}\right)^2\right) &= 0, \\ 2\pi U + \int_0^{L_w} d\xi \omega(\bar{\zeta}) \ln\left(1 + \left(\frac{\eta(\xi)}{\xi}\right)^2\right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

### 3.5 Solution approchée

La résolution analytique du problème se heurte à de nombreuses difficultés qui empêchent de mener l'analyse à terme, d'où l'intérêt de la recherche d'une solution approximative. Par une transformation  $\xi \rightarrow \xi' = L_w - \xi$ , on peut montrer que la fonction  $\eta = \eta(\xi)$  est symétrique. Cette fonction admet un maximum, qui a pour valeur  $\eta_0$  et se réalise en  $\xi = L_w/2$ . Par simplicité, supposons à présent (pour pouvoir faire ensuite les estimations nécessaires sur les paramètres du problème) que la vorticité  $\omega(w)$  soit constante. Faisons le changement de variables :  $p = 4\pi U/\omega L_w$ ,  $\eta(\mu) = \eta_0 \bar{\eta}(\mu/L_w)$ ,  $\xi_1 = L_w t$ ,  $\xi = L_w s$ ,  $\epsilon = \eta_0/L_w$ . La fonction  $\bar{\eta} = \bar{\eta}(t)$  admet un maximum qui vaut 1 et qui est atteint en  $t = 1/2$ . De (3.5), on trouve l'équation

$$p[\bar{\eta}] \bar{\eta}(s) + \int_0^1 dt \bar{\eta}(t) K(s, t; \epsilon, \bar{\eta}) = 0, \quad (3.7)$$

où le noyau  $K(s, t; \epsilon, \bar{\eta})$  est donné par



$$\begin{aligned}
& K(s, t; \epsilon, \bar{\eta}) = \\
& = (\bar{\eta}(s)/\bar{\eta}(t)) \ln \left\{ \left\{ (s-t)^2 + \epsilon^2(\bar{\eta}(s) - \bar{\eta}(t))^2 \right\} \left\{ (s-t)^2 + \epsilon^2(\bar{\eta}(s) + \bar{\eta}(t))^2 \right\} \right\} \\
& \quad + \ln \left\{ \left\{ (s-t)^2 + \epsilon^2(\bar{\eta}(s) + \bar{\eta}(t))^2 \right\} / \left\{ (s-t)^2 + \epsilon^2(\bar{\eta}(s) - \bar{\eta}(t))^2 \right\} \right\} \\
& \quad + 2 \left\{ (s-t)/(\epsilon\bar{\eta}(t)) \right\} \left\{ \arctan \left\{ \epsilon(\bar{\eta}(s) + \bar{\eta}(t)) \right\} / (s-t) \right. \\
& \quad \quad \left. + \arctan \left\{ \epsilon(\bar{\eta}(s) - \bar{\eta}(t)) \right\} / (s-t) \right\} \\
& \quad - (\bar{\eta}(s)/\bar{\eta}(t)) \ln \left\{ (s-t)^2 + \epsilon^2(\bar{\eta}(s))^2 \right\} \\
& \quad - 4 \left\{ (s-t)/(\epsilon\bar{\eta}(t)) \right\} \arctan \left\{ \epsilon\bar{\eta}(s)/(s-t) \right\}, (3.8)
\end{aligned}$$

et la valeur du paramètre  $p$  par (relation tirée de (3.6))

$$p[\bar{\eta}] = -2 \int_0^1 ds \ln \left\{ 1 + \epsilon^2(\bar{\eta}(s))^2/s^2 \right\} = F_1(\epsilon). \quad (3.9)$$

La difficulté majeure de la résolution du système (3.7)-(3.9) est évidente, il n'y a pas de petit paramètre par rapport auquel un développement peut être effectué (voir par exemple [9], concernant la résolution numérique d'équations similaires).

De l'équation (3.7) on tire, après quelques calculs, une autre relation donnant le paramètre adimensionné  $p$  en fonction du paramètre  $\epsilon$  :

$$p[\bar{\eta}] = - \int_0^1 dt \bar{\eta}(t) K(1/2, t; \epsilon, \bar{\eta}) = F_2(\epsilon), \quad (3.10)$$

où le noyau  $K(1/2, t; \epsilon, \bar{\eta})$  est déterminé conformément à (3.8).

Nous constatons que l'existence d'une zone tourbillonnaire n'est possible que si les deux valeurs de  $p$  données par les équations (3.9) et (3.10) coïncident. De plus, d'après (3.9), il est clair que le paramètre  $p$  doit être négatif. Des explications qualitatives sur ce sujet peuvent être trouvées dans [8]. Les particularités de la fonction  $\bar{\eta}(t)$  sont : admission d'un maximum au point  $t = 1/2$  ( $\bar{\eta}(1/2) = 1$ ), nullité aux points  $t = 0$  et  $t = 1$ . Cela nous permet de rechercher une solution sous la forme  $\bar{\eta}(t) = 4^\alpha t^\alpha (1-t)^\alpha$ , avec  $\alpha = \alpha(\epsilon)$ . Pour une solution de l'équation

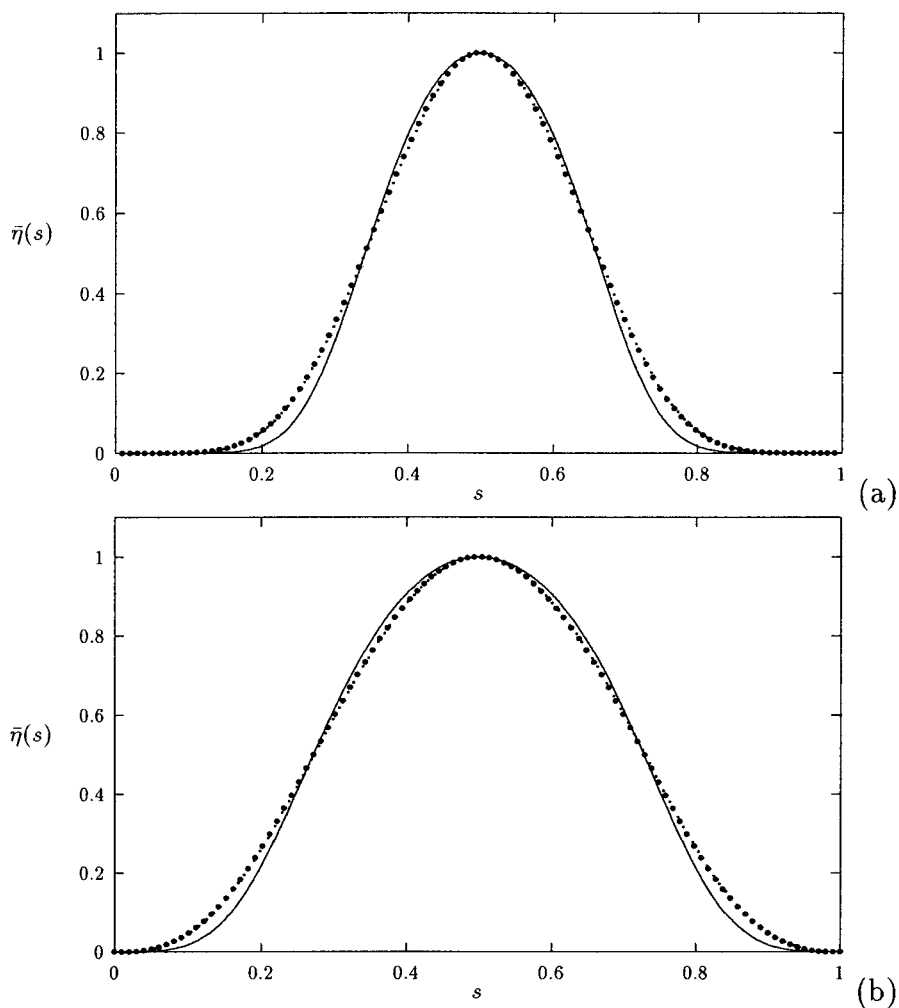


FIG. 3.2 - (a) La forme de la courbe délimitant une zone tourbillonnaire de vorticité constante dans le plan  $w$  pour  $\epsilon = 0.1$ . La courbe en pointillé correspond à  $\bar{\eta}(s)$  quand la valeur du paramètre  $p$  est :  $p \simeq 3.4 \cdot 10^{-2}$  et la courbe en continu correspond à la partie intégrale de l'équation (3.7). On a une bonne approximation si  $\alpha = 6.5$ . (b) La forme de la courbe délimitant une zone tourbillonnaire de vorticité constante dans le plan  $w$  pour  $\epsilon = 0.15$ . La courbe en pointillé correspond à  $\bar{\eta}(s)$  quand la valeur du paramètre  $p$  est :  $p \simeq 7.5 \cdot 10^{-2}$  et la courbe en continu correspond à la partie intégrale de l'équation (3.7). On a une bonne approximation si  $\alpha = 3$ .

(3.7) trouvée pour le paramètre  $\epsilon$  fixé, nous calculons la valeur du paramètre  $p$  correspondante  $p_1 = p_1(\epsilon_1)$  et comparons avec  $p_2 = p_2(\epsilon_1)$  obtenue à partir de la condition aux limites (3.9). Nous constatons immédiatement que pour  $\epsilon \ll 1$  la différence  $p_2 - p_1$  est positive. Cette différence change de signe lorsqu'on a  $\epsilon > 0.2$ . Ces observations nous permettent d'utiliser la technique itérative pour faire les estimations. En omettant les détails de l'analyse nous présentons le résultat final. La fonction  $\bar{\eta}(t)$  est une bonne approximation (voir Figure 3.2) de la solution de l'équation (3.7). Nous voyons (d'après la Figure 3.3) qu'il existe une valeur de  $\epsilon^* \sim 0.12 \div 0.15 < 1$  du paramètre  $\epsilon$  pour laquelle les deux valeurs de  $p$  susmentionnées coïncident. La formation d'une zone tourbillonnaire au voisinage des obstacles rigides bidimensionnels est possible et le paramètre  $p$  (ici à un signe près) est de l'ordre de  $p^* = 0.07$ . La condition pour laquelle la formation de la zone tourbillonnaire est possible est la suivante:  $p = 4\pi U/(\omega L_w) = p^*$ , c'est-à-dire  $\omega L_w \sim U$ . Il faut tenir compte du fait que le paramètre  $L_w$  est lié à  $L_z$  par la transformation conforme  $z = z(w)$  précédemment indiquée et que  $V$  et  $U$  sont liés par ( $U = V(h/a)B(1/2, \beta)$ ). Si  $L_z \gg h$ , on peut poser pour les estimations des expressions intégrales  $\omega(z) \sim B(1/2, \beta)\omega(w)$  et  $L_z \sim B(1/2, \beta)L_w$ . D'ici et de l'expression (3.2), nous déduisons à un coefficient décrivant la géométrie de l'obstacle près:  $\omega \sim c_f V Re/h$ ,  $L_z \sim h/(c_f Re)$ . La vorticité et la longueur caractéristique de la zone tourbillonnaire sont donc présentées en fonction de la hauteur caractéristique de l'obstacle, de la vitesse de l'écoulement et du nombre de Reynolds. Si dans le domaine de  $Re$  de l'expérience, le coefficient  $c_f$  peut être approximé par  $c_f \sim 1/Re^\lambda$  (voir par exemple [5]), nous obtenons pour  $\omega$  et  $L_z$  les estimations suivantes:  $\omega \sim Re^{(1-\lambda)}V/h$ ,  $L_z \sim hRe^{(\lambda-1)}$ , avec  $1 \ll Re \ll Re_c$ , où  $Re_c$  est le nombre de Reynolds critique.

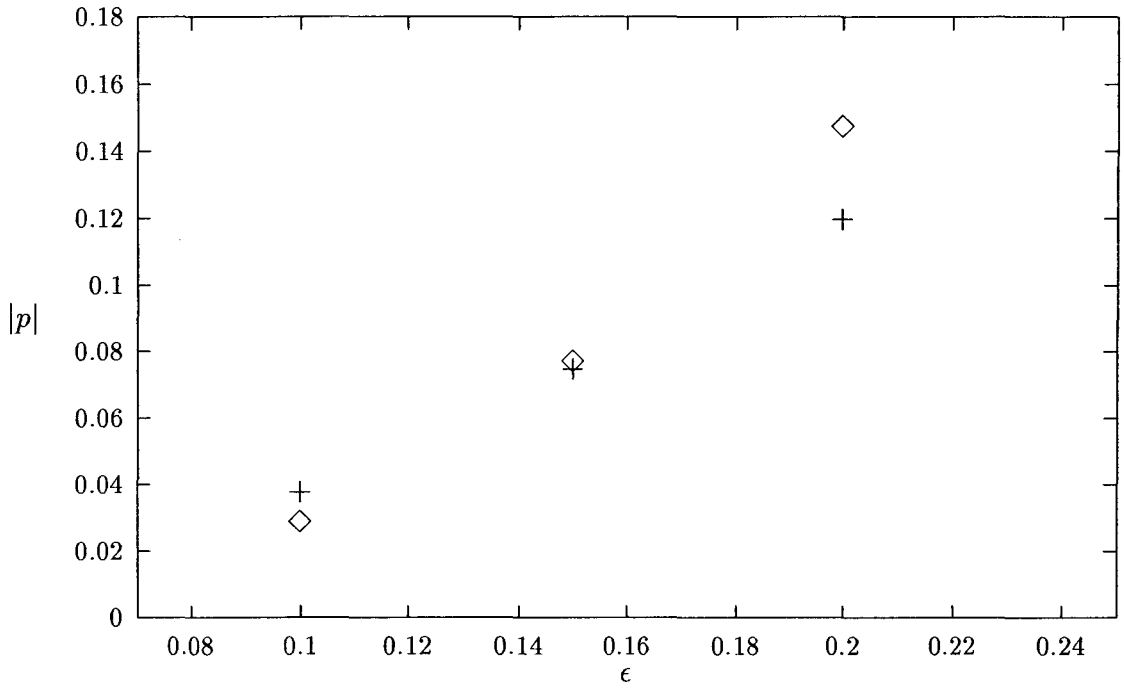


FIG. 3.3 - Intersection des courbes  $p_1 = p_1(\epsilon)$  et  $p_2 = p_2(\epsilon)$  sur lesquelles se trouvent les points  $\diamond$  et  $+$ . Cette intersection donne la valeur  $p$  du problème (3.7), réalisable pour  $\epsilon \simeq 0.14$ .

## 3.6 Conclusion

Les résultats de l'analyse montrent certains aspects importants sur la possibilité de formation de zones tourbillonnaires au voisinage des obstacles. En particulier, on a trouvé les dépendances de la sorte :  $\omega \sim (V/h)(Re)^{-s}$ ,  $L_z \sim h(Re)^s$  qui se confirment expérimentalement [4]. Pour trouver ces dépendances importantes, nous avons déterminé une solution approchée de l'équation non linéaire (3.7) décrivant la forme (Figure 3.2) du domaine où la vorticité non nulle peut être localis e et les valeurs des paramètres  $p$  et  $\epsilon$  pour lesquelles la formation d'une zone tourbillonnaire au voisinage des frontières rigides est possible.

# Bibliographie

- [1] MILNE-THOMSON, L.M., *Theoretical hydrodynamics*, MacMillan, London, 1968.
- [2] LAVRENT'EV, M.A., SHABAT, B.V., *Effets hydrodynamiques et modèles mathématiques*, Editions Mir, Moscow, 1980.
- [3] BATCHELOR, G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [4] ENZO O. MACAGNO AND TIN-KAN HUNG, Computational and experimental study of a captive annular eddy, *J. Fluid Mech.*, 1967, **28**, 43-64.
- [5] SCHLICHTING, H., *Boundary layer theory*, New York: McGraw-Hill, 1955.
- [6] BATCHELOR, G. K., On steady laminar flow with closed stream lines at the large Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, 1956, **1**, 177-190.
- [7] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A., *Handbook of Mathematical Functions*, U.S.Govt. Printing Office, Washington, D.C., 1964
- [8] DAWAI T., PAVLOV V., Mouvement des tourbillons bidimensionnels au voisinage des frontières en présence des sources, C. R. ACAD. SCI., Paris, 1999, t. 327, No. 1, série IIb, p. 71-76.

- [9] MOORE D. M., SAFFMAN, P. G AND TANVEER, S., The calculation of some Batchelor flows: The Sadvskii vortex and rotational corner flow, *Phys. Fluids*, 1988, **31**, 978-990.

# Chapitre 4

## Déconnexion et reconnexion des filaments tourbillonnaires

### 4.1 Préliminaires

Une manifestation des effets dissipatifs dans un écoulement moyen peut être expliquée par “reconnexion” des filaments tourbillonnaires singuliers. Le phénomène se réalise dans un fluide compressible et s’accompagne de la décomposition des filaments tourbillonnaires de grandes échelles en petites avec un changement de topologie de l’écoulement.

Les équations du mouvement d’un fluide parfait, *barotrope* ( $\rho = \rho(p)$ ) peuvent être reformulées (voir, par exemple, les ouvrages [4, 5]) sous forme d’une équation pour une vorticité  $\omega = \text{rot } \mathbf{v}$  :

$$\partial_t \omega + \partial_j (v_j \omega - \omega_j \mathbf{v}) = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = -\frac{d}{dt} \ln \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (4.1)$$

Toutes les notations y sont traditionnelles ( $\mathbf{v}$  est la vitesse hydrodynamique de l’écoulement,  $\rho = \rho_0 + \rho'$  est la densité volumique du milieu,  $\rho_0$  celle du milieu au repos, etc). La vitesse  $\mathbf{v}$  peut donc être décomposée en deux parties : moyennée et fluctuante. Introduisons l’opérateur de moyennage,  $\langle \dots \rangle$ , pris comme celui de



moyenne soit statistique, soit temporelle (en considérant que, seules les grandeurs moyennées sont en réalité observables). Si  $\langle (d/dt) \ln \rho \rangle = 0$ , on a de (4.1) que  $\text{div} \langle \mathbf{v} \rangle = 0$ , et le fluide peut être considéré *en moyenne* comme incompressible. Pour un fluide incompressible, la première équation (4.1) peut s'écrire sous forme hamiltonienne  $\partial_t \boldsymbol{\omega} = \{ \boldsymbol{\omega}, E \}$ , où  $\{., .\}$  désigne le crochet fonctionnel de Poisson,  $E$  est l'énergie totale du système (hamiltonien) [6]. La structure de cette équation montre qu'outre la conservation de l'énergie totale  $E$ ,  $\partial_t E = \{E, E\} = 0$ , il y a conservation de l'invariant de Casimir  $\mathcal{H} = \int d\mathbf{x} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}$ , à cause d'une dégénérescence du crochet de Poisson correspondant [6]:  $\{ \mathcal{H}, E \} = 0$ . L'hélicité  $\mathcal{H}$  caractérise la topologie de l'écoulement [1]. L'équation pour  $\langle \boldsymbol{\omega} \rangle$  résulte de (4.1). Si la partie fluctuante de  $\rho$  est non nulle ( $\rho' \neq 0$ ), la partie droite de l'équation de base l'est aussi. Tout se passe comme si une "décharge" apparaît (formée par l'interaction des fluctuations de  $\rho' = \rho - \rho_0 \sim \rho_0$  et du champ  $\boldsymbol{\omega}$ ), et est responsable de la manifestation des effets de dissipation  $\partial_t E \neq 0$ , et d'un changement de la topologie  $\partial_t \mathcal{H} \neq 0$ , ci-dessous discuté.

## 4.2 Modèle d'un filament tourbillonnaire

Négligeons les fluctuations de  $\rho$  pour l'instant et supposons que la vorticité  $\boldsymbol{\omega}$  est *toujours* concentrée sur un filament tourbillonnaire singulier  $\Gamma$

$$\omega_i(\mathbf{x}, t) = \oint_{\Gamma} d\Gamma_i(s, t) \delta^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{l}(s, t)), \quad d\Gamma_i = \kappa dl_i = \kappa ds (\partial l_i / \partial s). \quad (4.2)$$

La manifestation des effets ci-dessus indiqués est alors liée au problème de *reconnexion de filaments tourbillonnaires* - processus qui est interdit dans un milieu homogène, incompressible. Dans (4.2), la configuration de  $\Gamma$  à l'instant  $t$  est donnée par l'équation  $\mathbf{x} = \mathbf{l}(s, t)$ ,  $\delta^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  étant la fonction de Dirac dans l'espace de trois dimensions. Partout  $t$  est le temps,  $s$  est un paramètre qui énumère les éléments  $d\mathbf{l}(s, t)$  du contour  $\Gamma$ . On peut postuler que  $s$  varie dans l'intervalle

$0 < s < 2\pi$ . Dans ce qui suit, nous omettrons les indices  $s$  et  $t$  chaque fois que nous écrirons  $\mathbf{l}$ . Les composantes de la vitesse hydrodynamique créée par le filament tourbillonnaire (4.2) sont données par la formule

$$v_k(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_{kmn} \partial_m \oint_{\Gamma} d\Gamma_n G(\mathbf{x} - \mathbf{l}), \quad (4.3)$$

où  $G(\mathbf{z}) = -(4\pi)^{-1}|\mathbf{z}|^{-1}$  est la fonction de Green pour l'espace 3D illimité. Cette formule équivalente à la loi de Biot et Savart, permet de trouver (4.2) en prenant le rotationnel de (4.3) avec la condition  $\partial_i \omega_i = 0$ . Le symbole  $\varepsilon_{kmn}$  est le tenseur anti-symétrique de Levi-Chivitta. Dans les formules (4.2) et (4.3)  $d\mathbf{l}$  est un élément du contour "liquide"  $\Gamma$  se déplaçant avec les particules du fluide,  $\kappa$  est une caractéristique de la vorticité (circulation) qui est suppos e constante. Le sens physique de l'équation (4.2) r s de dans le théorème de Helmholtz : si la relation (4.2) est v rifi e, on obtient de (4.1) que chaque élément du filament tourbillonnaire se meut avec la vitesse hydrodynamique locale du fluide g n r e par les autres parties du contour  $\Gamma$ . Ce résultat peut être montré de façon simple si nous donnons l'expression pour une variation de (4.2) due à une déformation du contour  $\Gamma$

$$\begin{aligned} \delta\omega_i &= \kappa \oint_{\Gamma} \{(\delta dl_i) \delta^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{l}) + dl_i \delta \delta^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{l})\} \\ &= \kappa \oint_{\Gamma} \{(\delta dl_i) - dl_i (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla)\} \delta^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{l}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Soit  $\delta \mathbf{l} = dt \mathbf{v}$  pour l'élément choisi du contour : la variation de  $\omega$  est assur e par un déplacement hydrodynamique du contour uniquement ( $\mathbf{x}$  est évidemment fixe), i.e.  $\partial_i \mathbf{l} = \mathbf{v}|_{\mathbf{x}=\mathbf{l}(t)}$ . En utilisant (4.4) ( $\partial_t \omega_i = \delta\omega_i/dt$  avec  $\mathbf{x}$  fixe, etc.), nous arrivons facilement à (4.1).

En présence de fluctuations d sordonn es de l'extérieur (de  $\rho'$  et de vitesses  $\mathbf{w}$  associ es) provoquant des perturbations de la configuration de  $\Gamma$ , un élément quelconque du contour,  $d\mathbf{l}(t)$ , se meut suivant la loi

$$\partial_t \mathbf{l}(t) = \{\langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{w}\} |_{\mathbf{x}=\mathbf{l}(t)}. \quad (4.5)$$

Supposons que la fluctuation  $\mathbf{w}$  obéit aux relations :

$$\langle w_i(\mathbf{x}, t) \rangle = 0, \quad \langle w_i(\mathbf{x}, t) w_j(\mathbf{x}', t') \rangle = 2\delta_{ij} \delta^{(1)}(t - t') \mathcal{D}(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Le terme  $\mathbf{w}$  dans (4.5) peut être interprété comme une vitesse complémentaire fluctuante : la vitesse induite par les effets extérieurs (la présence des autres filaments tourbillonnaires, phénomènes dûs à la compressibilité, etc.). Si l'on pose (4.2), (4.4) et (4.5) dans (4.1), on trouve que

$$\partial_i \omega_i + \langle v_j \rangle \partial_j \omega_i - \omega_j \partial_j \langle v_i \rangle = \partial_j (\omega_j w_i - w_j \omega_i). \quad (4.6)$$

Appliquons l'opérateur  $\langle \dots \rangle$  à l'équation (4.6). Dans la partie droite de celle-ci apparaît le terme  $\langle \omega_i w_j \rangle$  décrivant l'interaction des champs  $\mathbf{w}$  et  $\boldsymbol{\omega}$ . Si  $w_i$  est un processus gaussien, la formule de Furutzu-Novikov (voir [7]) peut être utilisée, et nous trouvons

$$\begin{aligned} \langle \omega_i w_j \rangle &= \int d\mathbf{y} dt' \left\langle \frac{\delta \omega_i(\mathbf{x}, t)}{\delta w_k(\mathbf{y}, t')} \right\rangle \langle w_j(\mathbf{y}, t') w_j(\mathbf{x}, t) \rangle \\ &= 2 \int d\mathbf{y} \mathcal{D}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\delta \omega_i(\mathbf{x}, t)}{\delta w_j(\mathbf{y}, t')}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

La dérivée fonctionnelle d'une grandeur hydrodynamique [6] (figurant dans (4.7), par exemple) est définie par la formule générale

$$\delta u_i(\mathbf{x}, t) / \delta u_j(\mathbf{y}, t') = \delta^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \delta^{(1)}(t, t').$$

En calculant (4.7), remarquons (voir (4.4)) que

$$\frac{\delta \omega_i(\mathbf{x}, t)}{\delta w_j(\mathbf{y}, t')} = -\kappa \oint_{\Gamma} \left\{ \frac{\delta l_i}{\delta f_j} dl_k \partial_k + dl_i \frac{\delta l_k}{\delta w_j} \partial_k \right\} \delta^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{l}). \quad (4.8)$$

La représentation intégrale de l'équation (4.5) est donnée par

$$l_i(\mathbf{x}, t) = \int dt' \theta(t - t') \{ \langle v_i(\mathbf{x}, t') \rangle + w_i(\mathbf{x}, t') \} |_{\mathbf{x}=\mathbf{l}(t')}. \quad (4.9)$$

Nous trouvons alors (en fait, le résultat qui nous intéresse, c'est lorsque  $t' \rightarrow t$ )

$$\frac{\delta l_i(\mathbf{x}, t)}{\delta w_j(\mathbf{y}, t')} = \int dt'' \theta(t - t'') \frac{\delta w_i(\mathbf{x}, t'')}{\delta w_j(\mathbf{y}, t')} = \theta(t - t'') \delta^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \delta_{ij}, \quad (4.10)$$

qui pour  $t = t'$ , avec  $\theta(0) = 1/2$ , devient  $(1/2) \delta_{ij} \delta^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . On a postulé que  $\delta\langle \mathbf{v} \rangle / \delta w_j = 0$ , ce qui représente une définition d'une vitesse moyennée. En regroupant l'ensemble des calculs, nous trouvons finalement pour la dérivée

$$\begin{aligned} \frac{\delta \omega_i(\mathbf{x}, t)}{\delta w_j(\mathbf{y}, t')} &= -\frac{\kappa}{2} \oint_{\Gamma} \delta^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \{ \delta_{ij} dl_k \partial_k + dl_i \delta_{kj} \partial_k \} \delta^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = \\ &= \frac{1}{2} \delta^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \{ \delta_{ij} \partial_k \omega_k + \partial_j \omega_i \}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Le résultat de cette partie du calcul est  $\langle \omega_i w_j \rangle = - \int dy \mathcal{D}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ij} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_j \langle \omega_i \rangle = -\mathcal{D}(0) \partial_j \langle \omega_i \rangle$ . L'équation cherchée pour la vorticité moyennee peut s'écrire comme

$$\partial_t \langle \omega_i \rangle + \langle v_j \rangle \partial_j \langle \omega_i \rangle - \langle \omega_j \rangle \partial_j \langle v_i \rangle = \partial_j \{ \langle \omega_j w_i \rangle - \langle \omega_i w_j \rangle \} = \mathcal{D}(0) \partial_j^2 \langle \omega_i \rangle. \quad (4.12)$$

Ici, le terme  $\partial_j \langle \omega_j w_i \rangle$  s'annule,  $\partial_j^2 \dots \equiv \Delta \dots$  est l'opérateur de Laplace.

En comparant (4.12) avec l'équation d'évolution de la vorticité dans un milieu visqueux, nous constatons immédiatement qu'en choisissant  $\mathcal{D}(0) = \nu$  dans (4.12), nous arrivons à une description de la vorticité dans des fluides avec une dissipation. La partie droite de (4.12) décrit des effets qui sont liés à une diffusion des filaments tourbillonnaires. Se déplaçant avec la vitesse hydrodynamique moyenne locale, chaque élément du contour tourbillonnaire, en même temps, prend part à des mouvements microscopiques aléatoires qui se manifestent comme l'apparition de la viscosité effective  $\nu = \mathcal{D}(0)$ . Remarquons que  $\int dt' \langle w_i(\mathbf{x}, t) w_i(\mathbf{x}, t + t') \rangle = 6 \mathcal{D}(0)$ .

Des calculs simples donnent pour le taux de variation temporelle de l'énergie cinétique du milieu, associ e aux mouvements moyennés de filaments, l'expression suivante

$$\begin{aligned} \partial_t E &\equiv \partial_t \int \rho d\mathbf{x} \langle v \rangle^2 / 2 = -\rho \mathcal{D}(0) \int_D d\mathbf{x} \langle \omega \rangle^2 \\ &- \oint_{\partial D} ds \cdot \left( \rho \left( \frac{\langle \mathbf{v} \rangle^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \langle \mathbf{v} \rangle + \rho \mathcal{D}(0) [\langle \omega \rangle, \langle \mathbf{v} \rangle] \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ici  $ds = ds \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à la surface  $\partial D$  limitant le domaine d'écoulement où les filaments tourbillonnaires peuvent être localisés. Si le fluide est illimité, le dernier terme est sans intérêt. En utilisant l'hypothèse (4.4), nous arrivons à

$$\partial_t E = -\rho \kappa^2 \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} d\mathbf{l}_i d\mathbf{l}'_j \mathcal{D}(\mathbf{l}_i - \mathbf{l}'_j) \delta^{(3)}(\mathbf{l}_i - \mathbf{l}'_j). \quad (4.14)$$

### 4.3 Discussions

La formule (4.14) mérite d'être discutée; elle montre un scénario qui doit se réaliser pour que la "dissipation" du champ créé par les filaments tourbillonnaires se manifeste. On voit de (4.14) que, dans le cadre de ce modèle, l'énergie du système reste inchangée au cours du temps, si  $\mathbf{l}_i(t) \neq \mathbf{l}'_i(t)$ . La "dissipation" se manifeste si le "contact" des éléments différents du contour  $\Gamma$  se produit; donc, s'il y a une déconnexion/reconnexion des filaments - processus qui est interdit dans un milieu homogène. Le taux de perte d'énergie d'une partie régulière du champ correspond alors à la puissance qui doit être dépensée pour que le filament se rompt et se déconnecte. Le scénario du développement du système serait donc évident: une grande structure, le filament d'échelle caractéristique  $L$  se plie, puis se rompt, donnant naissance à deux filaments d'échelle  $L_2 \sim L/2$ ; ces nouvelles structures, après avoir subi une déconnexion aléatoire, donneront à leur tour des structures d'échelles plus petites, par exemple  $L_3 \sim L/4$ , et ainsi de suite (voir Figure 4.1).

Le processus de déconnexion est évidemment interdit dans un milieu *a priori* homogène, illimité et incompressible, où  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , parce que, d'après la condition  $\text{div } \boldsymbol{\omega} = 0$ , le filament doit toujours être fermé, ou se terminer sur des frontières du milieu donné. L'étape b) de la Figure 4.1 (les filaments ont des extrémités  $A(A')B(B')$  déconnectées) ne serait pas possible dans un tel milieu. Mais, l'effet

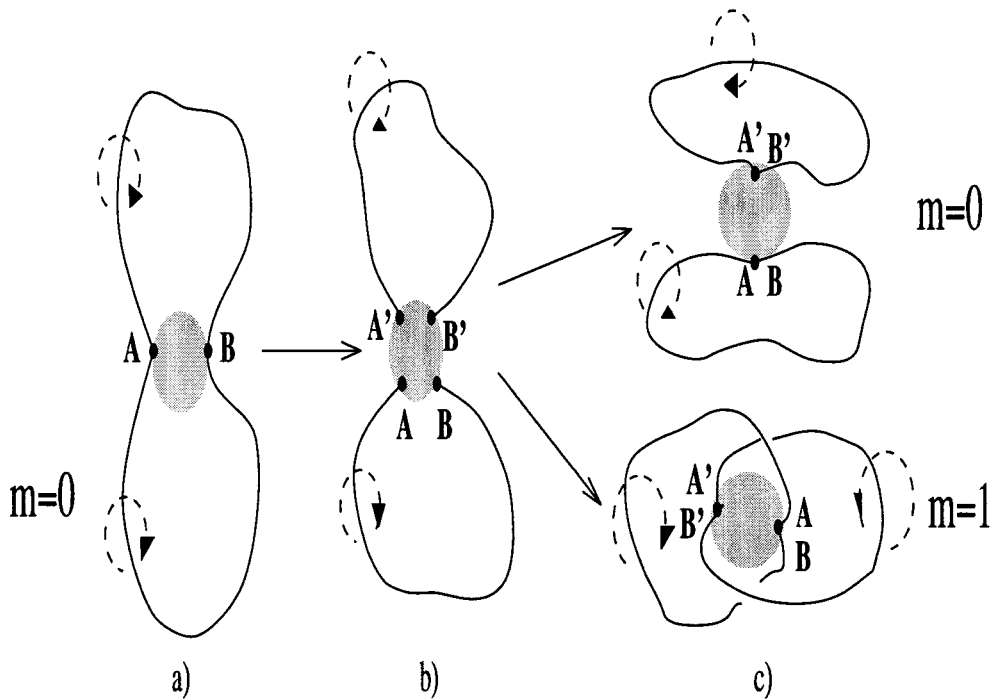


FIG. 4.1 - Reconnexion des filaments tourbillonnaires

de déconnexion peut se réaliser, si nous tenons compte du fait qu'en réalité, le fluide est quand même compressible. La compressibilité se manifeste (voir [2]) dans les domaines, où la vitesse locale  $v$  devient comparable en valeur absolue avec la célérité du son  $c$ ,  $v \sim c$ , où le processus est très rapide,  $\tau \sim L/c$ . En effet, la compressibilité apparaît quand un élément du contour (de vorticité totale de l'ordre de  $\kappa L$ ), se rapproche d'un autre à une distance de l'ordre de  $l \sim (\kappa L/c)^{1/2}$ . Cette estimation découle de (4.3) :  $v \sim \kappa L/l^2$ , qui devient  $v \sim c$ .

Dans cette condition, l'intervalle caractéristique du temps au cours duquel l'élément du filament  $dl$  parcourt la distance de l'ordre de  $l$  est égal à  $\tau \sim l/v$ . Si ce paramètre est donc de l'ordre de  $l/c$ , le fluide dans ce domaine ne peut plus être considéré comme incompressible, car le processus du "contact" est fortement rapide. Une variation de la pression  $p$  dans cet endroit devient  $\delta p \sim \rho c^2$ , i.e. comparable avec la pression interne du fluide, et le fluide peut se rompre. Tout se

passe comme si, à l'endroit du "contact" des éléments du filament, apparaissait un domaine avec des propriétés différentes de celles du milieu initialement pris en considération ; quelque chose comme une "cavité" microscopique apparaît, avec des *frontières* sur lesquelles les filaments s'appuient désormais (voir figure 4.1). La déconnexion et, immédiatement, la reconnexion pourront donc avoir lieu. Dans ce contexte, le paradoxe de l'impossibilité du principe de déconnexion des filaments singuliers (dont la distribution de vorticité est donn  e par (4.2)) dans des fluides incompressibles n'existe pas. Mais, dans le même contexte, il faut être très prudent en appliquant l'approximation du fluide incompressible pour décrire des phénomènes de déconnexion et reconnexion (voir [3, 8] et la bibliographie s'y trouvant). Sinon, les résultats de calculs numériques ne porteront évidemment qu'un caractère qualitatif.

Enfin, le phénomène de reconnexion se réalise, s'il s'accompagne d'un changement de topologie de l'écoulement, i.e. d'une variation possible du nombre de noeuds  $m$  (nombre qui correspond au nombre d'enlacement des filaments, voir les deux scénarios de l'étape c) de la figure 4.1). Ce nombre topologique est proportionnel à  $\mathcal{H} = \int dx \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\omega} \rangle$  [1]. L'hélicité  $\mathcal{H}$ , n'est donc plus une constante du mouvement. Le taux de variation de  $\mathcal{H}$  est donn  e par

$$\begin{aligned}
 \partial_t \mathcal{H} &= -2\mathcal{D}(0) \int dx \langle \boldsymbol{\omega} \rangle \cdot \text{rot} \langle \boldsymbol{\omega} \rangle = \\
 &= -2\kappa^2 \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} dl_i dl'_k \mathcal{D}(1 - I') \varepsilon_{ijk} \partial_j \delta^{(3)}(1 - I').
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

La formule (4.15) montre que, si  $\mathcal{D}(0) \neq 0$  et donc  $\rho' \neq 0$ , le phénomène de reconnexion a lieu. Ayant une probabilité non nulle, ce processus porte un caractère similaire à celui de "l'effet tunnel".

# Bibliographie

- [1] MOFFATT, H.K., The degree of knottedness of tangled vortex lines. *J. Fluid Mech.*, 1969, **35** (1), 117-129.
- [2] LANDAU, L.D., LIFSHITZ, E.M., *Fluid Mechanics*, 2nd ed., rev., Pergamon Press.
- [3] KIDA, S., TAKAOKA, M., Vortex reconnection, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1994, **20**, 169-189.
- [4] BATCHELOR, G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
- [5] MILNE-THOMSON, L.M., *Theoretical hydrodynamics*, MacMillan, London, 1968.
- [6] GONCHAROV, V., PAVLOV, V., Some remarks on the physical fondation of the Hamiltonian description of fluid motions, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 1997, **16**, (4), 509-555.
- [7] ISHIMARU, A., *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, 1979, **2**, Academic Press.
- [8] KIDA, S., TAKAOKA, M. AND HUSSAIN, F., Collision of two vortex rings. *J. Fluid Mech.*, 1991, **230** (1), 583-646.



# Conclusion et perspectives

Dans cette étude, trois points essentiels de la dynamique tourbillonnaire ont été examinés :

*Premier point:* Tourbillons ponctuels en mouvement au voisinage des frontières en présence d'une source.

L'interaction d'une paire tourbillonnaire avec une frontière de forme complexe en présence d'une source d'intensité constante ou temporellement variable a été considérée. La classification des topologies des trajectoires des tourbillons et les positions des points stationnaires ont été présentées. L'estimation des positions des points stationnaires lorsque l'intensité de la source varie temporellement, est faite par analogie avec le pendule de Kapitsa. Dans ce cas, les topologies des trajectoires des tourbillons changent radicalement.

Malgré la particularité de la géométrie du modèle étudié, on voit que les résultats obtenus sont très informatifs. Ce modèle montre les particularités des trajectoires des tourbillons au voisinage des frontières rigides. Il montre aussi que les lieux où les tourbillons peuvent rester immobiles existent. Ces lieux sont complètement déterminés par un seul paramètre adimensionné  $p = \kappa/m_0 = \kappa/2Ul$ , composé de l'intensité du tourbillon, de la vitesse de l'écoulement de base, et de la largeur du canal.

*Deuxième point:* Zones tourbillonnaires de dimension finie.

La possibilité de formation d'un domaine tourbillonnaire de dimension finie

au voisinage d'un obstacle de forme complexe a été analysée. Pour le modèle proposé, lorsqu'un tel scénario est réalisable, une allure de la courbe délimitant le domaine de vorticité non nulle a été trouvée. Cette courbe représente une solution approximative d'une équation intégral-différentielle obtenue sur la base du modèle proposé. Nous avons montré que le niveau de vorticité est lié à la dimension caractéristique du domaine tourbillonnaire. Cette dimension dépend de la taille de l'obstacle, fonction homogène du nombre de Reynolds.

*Troisième point: Déconnexion et reconnexion des filaments tourbillonnaires.*

Nous avons discuté quelques éléments du mouvement 3D, notamment en examinant le problème de déconnexion et reconnexion des filaments tourbillonnaires. Le phénomène de reconnexion est tridimensionnel et très complexe. Il ne peut avoir lieu qu'en présence de dissipation visqueuse. Nous avons alors montré qu'une manifestation des effets dissipatifs dans un écoulement moyen peut être expliquée par la reconnexion des filaments tourbillonnaires singuliers. Le phénomène se réalise dans un fluide compressible et s'accompagne de la décomposition des filaments tourbillonnaires de grandes échelles en petites avec un changement de topologie de l'écoulement.

Dans ce travail, nous nous sommes basés principalement sur des modèles simples, que ce soit pour les frontières des domaines d'écoulements étudiés ou pour le petit nombre de tourbillons, des domaines et filaments tourbillonnaires. Cela nous a permis d'avoir la plupart du temps des résultats qualitatifs. Des études basées sur des modèles de configuration plus complexe et des expérimentations en laboratoire pourront sans doute apporter beaucoup d'informations. C'est manifestement important pour acquérir un meilleur aperçu de la dynamique tourbillonnaire au voisinage d'obstacles réels en présence de sources.

# Annexes



# Mouvement des tourbillons bidimensionnels au voisinage des frontières en présence des sources

Tounga DAWAI, Vadim PAVLOV

UFR de mathématiques pures et appliquées, université de Lille-I, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

(Reçu le 13 juillet 1998, accepté le 31 août 1998)

**Résumé.** L'interaction d'une paire tourbillonnaire avec une frontière de forme complexe en présence d'une source est considérée. La classification des topologies des trajectoires des tourbillons et les positions des points stationnaires sont présentées. © Académie des sciences/Elsevier, Paris

**structures tourbillonnaires / trajectoires des tourbillons / points stationnaires**

***Motion of two-dimensional vortices near boundaries in the presence of sources***

**Abstract.** *The interaction of a vortex pair with a boundary of complex configuration in the presence of a source is considered. Classification of topologies of vortex trajectories and dispositions of stationary points are given. © Académie des sciences/Elsevier, Paris*

**vortex structures / vortex trajectories / stationary points**

## ***Abridged English Version***

The description of the behaviour of two-dimensional vortices is a classical hydrodynamic problem [1, 2].

The motion of a 2D vortex near a boundary  $\partial D$  of a domain  $D$  with a simple configuration can be solved by a simple method (for example, the image method). By contrast, the behaviour of the same vortex in a channel (in the presence of two boundaries) is a difficult problem [3]. In particular, because of degeneration relative to spatial translation along the axis of the channel, the dispositions of stationary points where the point vortices may keep still are not determined. However, this degeneration can be removed if we consider a realistic model; for example, an open channel whose essential aspects are represented in *figure 1*.

Note that there exists a second and more important aspect of the problem, which is connected to possible applications of the considered model to environmental problems.

2D vortex structures have indeed been observed abundantly in the ocean: near topographic features, near islands and so on. *Figure 2* [4] is a good example. This satellite image taken in the infrared frequency band shows in fact the quasi-circular marks of phytoplanktons, from which we deduce the presence of vortex motions near river mouths. In this situation, the questions which can obviously be asked are: how do the vortex structures evolve near features of boundaries? How do exterior sources influence their evolution or their motions?

Note présentée par Évariste SANCHEZ-PALENCIA.

The theoretical and experimental study of vortex structures at a relatively higher scale turns out to be complicated. Indeed, even the mechanism of their generation is often not well-known. Even brute-force computer calculations of vortex structures, without primary qualitative analysis, require a long time. Important information can distort the overall picture by factors of secondary importance or even non-existent details. So it is important to analyse this phenomenon in a relatively simple configuration of mathematical models [5, 6].

In our study, we do not discuss the mechanism of the formation of such vortex structures; we suppose that they are already formed.

The aims of the paper are the formulation of a simple model capable of capturing the essential features of the phenomenon, and the determination of possible regimes of the vortices and their stationary dispositions depending on non-dimensional geometrical and dynamic parameters of the problem.

The basic motion equation of the  $j$ -th vortex is written (in terms of components) as equation (2) with the boundary condition  $\Im\{\Phi_D(w)\}|_{\partial D'} = 0$ . In this equation the first term is the complex potential of the flow, the second is the complex potential of the  $j$ -th vortex with the sign changed. The superposition of these expressions represents the complex potential at the point where the  $j$ -th vortex would be found. The third term can be regarded as the complex potential created by the features of the physical domain. This term gives the contribution in the total complex potential due to the presence of rigid boundaries of the physical domain of the flow. The factor  $|dz/dw|^{-2}$  is the result of the conformal mapping of the  $z$ -plane onto the  $w$ -plane. The equation of the motion can be presented in the Hamiltonian form (4) (see also [5, 7]).

From contour lines  $\mathcal{H} = C^{te}$ , we find the vortex trajectories. We can see in *figure 3* two types of curves: (i) open curves on which, finding itself a vortex will leave the river channel and will be ejected into the exterior domain; (ii) closed curves on which, finding itself a vortex will be at rest. Despite a simplicity of features of the model studied, the results turn out to be sufficiently informative.

To conclude, let us recall that the evolution of vorticity, and thus the motions of point vortices, are essential ingredients of virtually any real flow. On the one hand, vortex motion has always constituted a mathematically sophisticated branch of fluid mechanics. On the other hand, vortex dynamics is of profound practical importance. For example, the emergence of localised vortex structures is a characteristic feature of quasi-geostrophic or 2D flows. Localised vortex structures have been observed abundantly both in the ocean and planetary atmospheres. Well-known examples are the Gulf Stream rings, Agulhas rings, vortices shed from coastal currents, the subsurface Meddies, the Big Red Spot, and so on. It well-known that monopolar and dipolar vortices have relatively long lifetimes, and are believed to play an important role in the transport of heat, salt and other properties. The formation of vortices can also modify very strongly the topology of the background flow, and lead to the formation of structures which intensify such processes as beach drifting, silting and coastal erosion. In order to *understand* the features of these structures' evolution, it is necessary to analyse their dynamics in a relatively simple configuration of flows containing, for example, a small number of interacting vortices. A pair of vortices is one of the most representative examples of such structures.

---

## 1. Introduction

La description du comportement des tourbillons 2D est un problème classique de l'hydrodynamique [1, 2].

Le mouvement d'un tourbillon ponctuel 2D au voisinage d'une frontière  $\partial D$  d'un domaine de configuration simple  $D$  peut être résolu de façon élémentaire (par exemple, par la méthode des images). Cependant, le comportement du même tourbillon dans une bande (en présence de deux

frontières), est un problème plus difficile à résoudre [3]. En particulier, à cause de la dégénérescence par rapport à une translation spatiale le long de l'axe de la bande, les positions des points stationnaires où les tourbillons ponctuels sont immobiles, ne sont pas bien déterminées. Toutefois, cette dégénérescence peut être supprimée, si nous considérons un modèle plus réaliste ayant la forme d'un canal, par exemple, dont les traits essentiels sont présentés sur la *figure 1*.

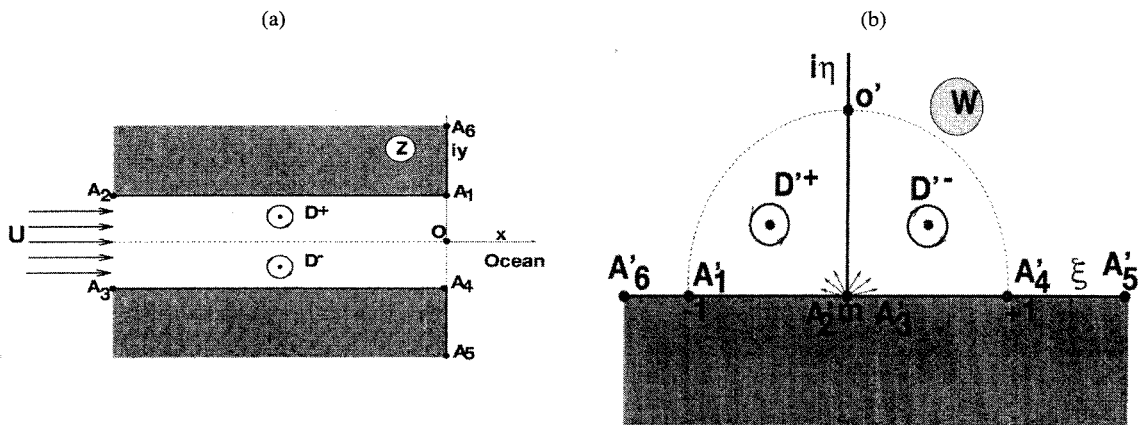


Figure 1. Les croquis (a) du modèle et (b) de la transformation conforme.

Figure 1. The sketches of (a) the model and (b) the conformal mapping.

Il existe un second aspect du problème, lié aux applications possibles du modèle considéré aux problèmes de l'environnement.

Des structures (2D) tourbillonnaires ont été abondamment observées dans les océans : au voisinage des particularités topographiques, au voisinage des îles, etc. La *figure 2* [4] en est un exemple. Cette image satellitaire, faite dans une bande de fréquences infrarouge, montre en fait la trace quasi circulaire des phytoplanctons, dont on déduit alors la présence des mouvements tourbillonnaires au voisinage de l'embouchure du fleuve. Dans cette situation, les questions qui se posent sont évidemment les suivantes : Comment se comportent les tourbillons au voisinage des particularités des frontières ? Quelle est l'influence des sources extérieures sur l'évolution de ces tourbillons, sur leur mouvement ?

Notons que l'étude expérimentale et théorique des structures tourbillonnaires à relativement grande échelle, dans des conditions géophysiques, s'avère très compliquée. En effet, parfois, même les mécanismes de leur génération ne sont pas bien connus. Signalons aussi que les calculs numériques directs des structures tourbillonnaires, sans l'analyse préliminaire qualitative du problème, des structures tourbillonnaires exigent parfois beaucoup de temps. Des informations importantes peuvent être masquées, parfois à cause du nombre des facteurs de second rôle, ou par des détails, même inexistantes en réalité. C'est pourquoi l'étude du phénomène sur une base des modèles mathématiques simples présente un intérêt particulier [5, 6].

Dans le cadre de notre analyse, nous supposons que les tourbillons sont déjà formés et ne discutons donc pas des mécanismes de leur formation.

Le but essentiel de cette note est donc la formulation d'un modèle simple permettant de saisir les traits de base du phénomène, de déterminer les régimes possibles du mouvement des tourbillons, ainsi que leurs positions stationnaires (c'est-à-dire les lieux des points où les tourbillons peuvent rester immobiles) en fonction des paramètres géométriques et dynamiques du problème.



Figure 2. Structures tourbillonnaires observées dans l’océan.

Figure 2. Vortex structures observed in the ocean.

## 2. Formulation du problème et équations de base

Dans le cadre de l’approximation de fluide idéal et d’écoulement bidimensionnel, l’équation de mouvement du fluide pour la distribution de la vorticité  $\omega = \text{rot } \mathbf{v}$  est donnée [1, 3] par :

$$\dot{\omega} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

Supposons que la vorticité  $\omega$  se présente sous la forme :  $\omega = \sum_{j=1}^N \kappa_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ . En posant cette expression dans l’équation (1) et en égalant les facteurs devant les fonctions delta et leurs dérivées, nous trouvons que pour satisfaire l’équation (1), il est nécessaire et suffisant qu’on ait :  $\dot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{v}|_{\mathbf{r} = \mathbf{r}_j}$ . La vitesse du centre du tourbillon est donc déterminée par la vitesse du fluide au point  $z_j$ .

Dans le plan  $z = x + iy$  l’équation du mouvement du  $j^{\text{e}}$  tourbillon s’écrit alors (en termes de composantes) :  $\dot{z}_j = \dot{x}_j - i\dot{y}_j = u_j - iv_j$ . L’analyse [6] montre que l’équation

$$\dot{w}_j = \lim_{w \rightarrow w_j} \left\{ \left[ \underbrace{\frac{d}{dw} \left( \Phi_D(w) \right)}_1 + \underbrace{\frac{i\kappa_j}{2\pi} \ln(w - w_j)}_2 \right] + \underbrace{\frac{d}{dw} \frac{i\kappa_j}{4\pi} \ln \frac{dz}{dw}}_3 \left| \frac{dz}{dw} \right|^{-2} \right\} \quad (2)$$

avec une condition aux limites  $\Im\{\Phi_D(w)\}|_{\partial D} = 0$ , décrit le mouvement du centre du tourbillon se trouvant au point  $z_j$  dans le domaine  $D$  du plan  $z$  en termes de variables  $(w_j, \bar{w}_j)$ . Le premier terme est le potentiel complexe de l’écoulement, le deuxième est le potentiel complexe du  $j^{\text{e}}$  tourbillon au signe près. La superposition de ces expressions représente donc le potentiel au point où se trouve le  $j^{\text{e}}$  tourbillon. Le troisième terme peut être interprété comme le potentiel complexe créé par les particularités du domaine physique. Ce terme est donc la contribution dans le potentiel complexe de la présence des frontières rigides du domaine physique d’écoulement. Le facteur  $|dz/dw|^{-2}$  est un résultat de la transformation conforme du plan  $z$  au  $w$ .

## 3. Modèle d’un canal ouvert : cas d’une paire de tourbillons

Pour illustrer les particularités du comportement des tourbillons dans le cadre de la méthode évoquée précédemment, nous considérons le cas d’une paire de tourbillons dans un domaine qui peut être modélisé par un canal ouvert (domaine  $D$  de la figure 1). Nous supposons qu’à l’infini amont se trouve

un écoulement uniforme de vitesse  $U$ . Le tourbillon  $D^+$  « tourne » dans le sens des aiguilles d'une montre et  $D^-$  dans le sens contraire. Il convient alors dans notre cas, de transformer le domaine d'écoulement  $D$  en domaine  $D'$  (demi-plan  $\Im w \geq 0$ , ici  $\Im w$  désigne la partie imaginaire de  $w$ ). Transformons la bande semi-infinie de largeur  $l$  du plan  $z$  (domaine  $D$ ) en demi-plan supérieur  $\Im w \geq 0$  (domaine  $D'$ ), en utilisant le théorème de Schwartz-Christoffel [1] :

$$z(w) = (l/\pi) \left\{ \sqrt{1-w^2} + \ln w - \ln \left( 1 + \sqrt{1-w^2} \right) \right\} - il/2$$

Le tourbillon droit  $D^+$  du plan  $z$  se transforme en tourbillon  $D'^+$  du plan  $w$  et le tourbillon gauche  $D^-$  en  $D'^-$  (figure 1). Le tourbillon droit  $D'^+$  a pour coordonnée complexe  $w_1 = w$ , et pour intensité  $\kappa_1 = -\kappa$  ; le gauche a pour coordonnée complexe  $w_2 = -\bar{w}$  et intensité  $\kappa_2 = \kappa$ . La source est placée au point  $w = 0$ . L'image du tourbillon droit a pour coordonnée complexe  $w_3 = -w$  et pour intensité  $\kappa_3 = -\kappa$ . L'image du tourbillon gauche est placée au point  $w_4 = w$  et a pour intensité  $\kappa_4 = \kappa$ . Le potentiel complexe créé en un point quelconque  $w_0$  dans le plan des  $w$  par la source de débit  $m = 2Ul$ , les tourbillons droit et gauche et leur image est :

$$\Phi_{D'}(w_0) = (m_0/2\pi) [ip \ln(w_0 - w) - ip \ln(w_0 + \bar{w}) + ip \ln(w_0 + w) - ip \ln(w_0 - \bar{w}) + \mu \ln w_0]$$

On vérifie alors facilement que la condition  $\Im\{\Phi_{D'}(w)\} = C^{te}$ , sur  $\partial D'$ , est satisfaite.

Dans ce qui suit, nous supposons  $\kappa$  constant,  $m(t) = m_0(1 + \epsilon f(t))$ ,  $m_0$  étant une constante,  $p = \kappa/m_0$ ,  $\mu = m(t)/m_0$ . Outre cela, faisons encore le changement de variable temporelle :  $t = \tau t_1$  mais, dans les équations, au lieu d'écrire  $t_1$ , nous écrivons  $t$ . Le paramètre  $\tau$  est défini par la relation  $\tau = \pi U_0/l$ , ( $U_0$  est la vitesse caractéristique de l'écoulement,  $U_0 = \langle U \rangle$ ). Nous trouvons alors :

$$\dot{\bar{w}} = \{-ipw^2(w^2 - \bar{w}^2)^{-1} + (1/4)(2\mu + ip) + ip[4(1-w^2)]^{-1}\}(\bar{w}|1-w^2|^{-1}) \quad (3)$$

Remarquons que l'équation (3) peut être reformulée sous la forme hamiltonienne [7]. En omettant ipso facto les constantes additives, ces équations peuvent s'écrire sous la forme adimensionnée suivante :

$$\dot{\bar{w}} = -i|w^2(1-w^2)^{-1}| \mathcal{H}_{,w} \quad (4)$$

où  $\mathcal{H}_{,w} = \partial \mathcal{H} / \partial w$ , la fonction d'Hamilton adimensionnée, est donnée par la relation :

$$\mathcal{H} = (1/4) (p \ln |w + \bar{w}|^2 + p \ln |w - \bar{w}|^2 - 2p \ln |w|^2 + 2i\mu \ln (w/\bar{w}) - p \ln |w^2/(1-w^2)|)$$

L'hamiltonien  $\mathcal{H}$  est une fonction réelle des variables  $w$  et  $\bar{w}$  :  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(w, \bar{w}) = \bar{\mathcal{H}}$ . Il existe une relation entre  $\mathcal{H}$  et la fonction de Kirchhoff-Routh (voir par exemple [3]).

Soit  $\mu = 1$ , c'est-à-dire  $m(t) = m_0$ . Les points stationnaires, s'ils existent, sont donnés par la condition :  $\dot{\bar{w}} = 0$ . Ce qui revient à écrire :

$$(2 + ip) - ip 4u/(u - \bar{u}) + ip(1 - u)^{-1} = 0 \quad (5)$$

où  $u = w^2$ ,  $p = \kappa/m_0$ . Cette expression donne une dépendance  $u_s = u_s(p)$ . Les solutions de l'équation (5) peuvent alors se mettre sous la forme paramétrique suivante :

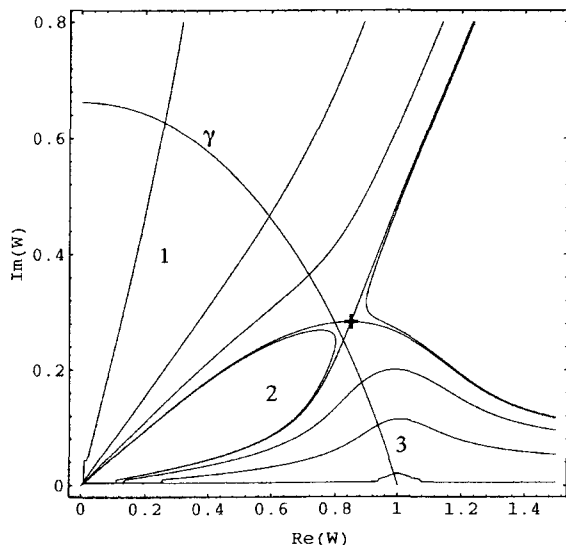
$$u_s = 1 - \cos s \exp is, \quad p = -2/3 \tan s, \quad \pi/2 < s < \pi \quad (6)$$

À toute valeur du paramètre  $p$  correspond un point stationnaire. La position du point stationnaire, par exemple pour  $p = 0,5$  est représentée sur la figure 3 par le symbole +. Au voisinage des points stationnaires  $(u_s, \bar{u}_s)$ , l'hamiltonien  $\mathcal{H} = (1/4) [i \ln (u/\bar{u}) + 2p \ln |u - \bar{u}| + p \ln |1 - u| - 2p \ln |u|]$  a la forme suivante :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_s + \{ \Re [ (\mathcal{H}_{,uu})_s (u - u_s)^2 ] + (\mathcal{H}_{,u\bar{u}})_s |u - u_s|^2 + \dots \} \quad (7)$$

Pour étudier le caractère topologique des points  $u_s$ , la méthode de Laplace est utilisée. L'analyse montre que leur topologie dépend du signe du paramètre  $\mathcal{K} = (\mathcal{H}_{,u\bar{u}})_s^2 - |\mathcal{H}_{,uu}|_s^2$ . Si  $\mathcal{K} > 0$ , le point stationnaire est de type centre ; si  $\mathcal{K} < 0$ , il est de type selle. Pour le cas étudié, les calculs donnent :





**Figure 3.** Trajectoires du tourbillon droit dans le plan de phase. Le point stationnaire est indiqué par +. La ligne séparant le fleuve de l’océan est représentée par  $\gamma$ .  $p = 0,5$ ,  $p = \kappa/m_0$ ,  $-\kappa$  est l’intensité du tourbillon droit,  $m_0$  est l’intensité de la source.

**Figure 3.** Trajectories of the right vortex in the phase plan. The stationary point is indicated by +. The line separating the river from the ocean is represented by  $\gamma$ .  $p = 0,5$ ,  $p = \kappa/m_0$ ,  $-\kappa$  is the intensity of the right vortex,  $m_0$  is the intensity of the source.

$\mathcal{H} \sim (-11 + 3 \cos 2s)/96 \cos^6 s \sin^2 s < 0$ , ce qui montre que tous les points stationnaires se trouvent sur une séparatrice. Si  $\mu = 1$ , l’hamiltonien  $\mathcal{H}$  ne dépend pas explicitement du temps et, par conséquent,  $\mathcal{H}$  est intégrale première du problème. Des courbes de niveau  $\mathcal{H} = C^{te}$ , on trouve les trajectoires cherchées. On voit sur la *figure 3* deux types de courbes : (i) des courbes ouvertes, sur lesquelles un tourbillon s’y trouvant quittera le lit du fleuve et sera éjecté dans le domaine extérieur ; (ii) des courbes fermées, sur lesquelles un tourbillon s’y trouvant y restera.

#### 4. Conclusion

Malgré la particularité de la géométrie du modèle étudié, on voit que les résultats obtenus sont très informatifs. Ce modèle montre les particularités des trajectoires des tourbillons au voisinage des frontières rigides. Il montre aussi que les lieux où les tourbillons peuvent rester immobiles existent. Ces lieux sont complètement déterminés par un seul paramètre adimensionné  $p = \kappa/m_0 = \kappa/2Ul$ , composé de l’intensité du tourbillon, de la vitesse de l’écoulement de base, et de la largeur du canal. La dépendance correspondante est donnée par le système paramétrique non trivial (6).

#### Références bibliographiques

[1] Milne-Thomson L.M., Theoretical Hydrodynamics, Vth edition, MacMillan, London, 1968.  
 [2] Lamb H., Hydrodynamics, 6th ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1932 (reprinted Dover, New York, 1945).  
 [3] Saffman P.G., Vortex Dynamics, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.  
 [4] Ginsburg A.I., Fedorov K.N., Processes of horizontal exchange in near-surface layer of Black Sea, Investigation of Earth from the Space, bf 2, 1994, pp. 75–82.  
 [5] Goncharov V.P., Pavlov V.I., Vortex structures generated by a coastal current in harbour-like basins at large Reynolds numbers, J. Fluid Mech. 351 (1997) 201–221.  
 [6] Dawai T., Pavlov V., Dynamics of point-vortex structures in a 2D-flow in the presence of boundaries, Publications Institut de recherches en mathématiques avancées 46 (VI) (1998) 1–15.  
 [7] Goncharov V.P., Pavlov V.I., Some remarks on the physical fundaments of the Hamiltonian description of fluid motions, Eur. J. Mech. B/Fluids 16 (4) (1997) 509–555.

# Échelles caractéristiques des domaines tourbillonnaires apparaissant près des irrégularités des frontières

Tounga DAWAI, Vadim PAVLOV

Laboratoire de mécanique de Lille, URA CNRS 1441, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France  
E-mail : [tounga.dawai@univ-lille1.fr](mailto:tounga.dawai@univ-lille1.fr)

(Reçu le 3 février 1999, accepté après révision le 6 avril 1999)

**Résumé.** On analyse la possibilité de formation d'un domaine tourbillonnaire de dimension finie au voisinage d'un obstacle de forme complexe. Pour le modèle proposé, lorsqu'un tel scénario est réalisable, une allure de la courbe délimitant le domaine de vorticité non nulle est trouv e. Cette courbe représente une solution approximative d'une équation intégro-différentielle obtenue sur la base du modèle propos e. Nous avons montré que le niveau de vorticité est li e à la dimension caractéristique du domaine tourbillonnaire. Cette dimension dépend de la taille de l'obstacle, fonction homogène du nombre de Reynolds.   1999 Académie des sciences/ ditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**domaines tourbillonnaires / niveau de vorticité / scaling**

## *Characteristic scales of vortex domains appearing near irregularities of boundaries*

**Abstract.** *The possibility of the formation of a vortex domain of finite size near complex boundaries is analysed. For the proposed model, when such a scenario is attainable, the curve configuration delimiting the non-zero vorticity domain is found. This curve represents an approximate solution of an integral-differential equation obtained using the proposed model. It is shown that the vorticity level is a function of the characteristic dimension of the vortex domain, which depends on the size of the obstacle and is a homogeneous function of the Reynolds number.   1999 Académie des sciences/ ditions scientifiques et m edicales Elsevier SAS*

**vortex domains / vorticity level / scaling**

## *Abridged English Version*

The formation of vortex zones has been observed abundantly in the vicinity of obstacles. From the theoretical point of view, in order to study particularities of two-dimensional motions, there are two possible approaches: (i) the approach using the localised vortex concept [1], and (ii) the one based on

Note présentée par  variste SANCHEZ-PALENCIA.

the hypothesis of continuous distribution vorticity in areas of finite size [2]. In what follows, we focus on the second approach whose theoretical foundations are available in the literature [2, 3]. The principal aim of the present analysis is to find the approximate solution of a non-linear integral equation describing the boundary form of a vortex domain according to the characteristic size of the obstacle  $h$  and external parameters of the problem, such that the velocity of the flow, the Reynolds number  $Re = hV/\nu$ . The expressions for the vorticity level  $\omega$  and the characteristic size  $L_z$  are found:  $\omega \sim (V/h) (Re)^{-s}$ ,  $L_z \sim h(Re)^s$ , where  $s$  is a scaling parameter. These can be verified experimentally (see for example [9]). The external velocity is denoted by  $V$ ,  $h$  is the characteristic size of the obstacle, and  $Re$  is the Reynolds number.  $L_z$  is the characteristic length of the vortex domain,  $\omega$  is the vorticity and  $s$  is an empirical parameter. To obtain this result, we find an approximate solution of a nonlinear integral equation describing the boundary form of a vortex domain where the non-zero vorticity can be localised and the parameter values  $p \sim V/(\omega L_z)$  and  $\epsilon \sim h/L_z$  allowing the formation of vortex domains in the vicinity of rigid boundaries.

## 1. Introduction

La formation des zones tourbillonnaires est largement observée au voisinage d'obstacles. Nous nous concentrons sur les mouvements bidimensionnels. Du point de vue théorique, pour étudier des particularités de ces mouvements, deux approches peuvent être proposées : (i) l'approche qui utilise le concept des tourbillons localisés [1], (ii) celle qui se base sur l'hypothèse de la répartition continue de la vorticité dans des domaines de dimension finie [2]. Dans ce qui suit, nous nous focalisons sur la deuxième approche dont les fondements théoriques sont donnés dans les ouvrages classiques [2, 3]. L'objectif principal de la présente analyse est de trouver une solution approximative d'une équation intégrale non linéaire décrivant la forme de la frontière d'une zone tourbillonnaire ; de déterminer la valeur de la vorticité et la longueur caractéristique de la zone tourbillonnaire en fonction de la hauteur caractéristique de l'obstacle et des paramètres extérieurs du problème, tels que la vitesse de l'écoulement, le nombre de Reynolds, etc.

## 2. Quelques estimations qualitatives

Soit le mouvement d'un fluide faiblement visqueux (le nombre de Reynolds caractéristique  $Re = hV/\nu \gg 1$ , où  $V$  est une vitesse caractéristique de l'écoulement à l'infini,  $h$  la hauteur de l'obstacle et  $\nu$  la viscosité cinématique). Les équations de base (pour un fluide incompressible) s'écrivent sous la forme :  $\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla(P/\rho) + \nu \Delta \mathbf{v}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , où  $\mathbf{v}$  désigne le champ de vitesse bidimensionnel,  $P$  est la pression,  $\rho$  la masse volumique,  $\nu$  la viscosité cinématique, et  $\Delta = \partial^2/\partial \xi^2 + \partial^2/\partial \eta^2$  est l'opérateur laplacien bidimensionnel. Si l'on multiplie scalairement l'équation du mouvement par  $\mathbf{v}$ , et l'on prend l'intégrale « volumique » de l'expression obtenue, on trouve l'équation de l'évolution de l'énergie cinétique dans laquelle les termes ayant la forme de  $\text{div } \mathbf{A}$  se transforment en intégrale « surfacique » :

$$\partial_t \int_D \mathbf{dx} \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} = - \oint_{\partial D} ds \cdot \left( \rho \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}] \right) - \rho \nu I, \quad I = \int_D \mathbf{dx} \omega^2 \quad (1)$$

Dans cette relation,  $ds = ds \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure au contour  $\partial D$  limitant le domaine d'écoulement où la vorticité peut être localisée. Le terme  $[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}]$  est le produit vectoriel de  $\boldsymbol{\omega}$  par  $\mathbf{v}$ . En régime stationnaire, le terme de gauche de l'équation (1) disparaît. Il y a donc équilibre entre le

travail des forces extérieures et celui des forces dissipatives  $\rho\nu I$  (forces dues à la viscosité). On peut estimer les différents termes de l'équation (1) : pour le deuxième terme qui exprime le flux d'énergie pénétrant dans  $D$ , on obtient  $\sim \rho h c_f V^3$ , où  $c_f = c_f(Re)$  est un coefficient empirique (voir l'ouvrage de Schlichting [4]). Pour le troisième, on trouve  $\sim \rho\nu\omega^2 L_z h$ . Ici,  $L_z$  est une dimension longitudinale caractéristique de  $D$ . Nous arrivons à l'estimation :

$$\omega^2 L_z \sim c_f Re V^2/h \quad (2)$$

Dans cette relation figurent deux inconnues : la vorticité  $\omega$  et la longueur caractéristique de la zone tourbillonnaire  $L_z$ . Les dépendances qui nous intéressent sont  $\omega = \omega(V, h, \nu)$  et  $L_z = L_z(V, h, \nu)$  (l'analyse dimensionnelle simple donne  $\omega = (V/h) f_1(Re)$  et  $L_z = h f_2(Re)$ ) ; nous devons ajouter encore une relation reliant  $\omega$  et  $L_z$ . Utilisons pour cela le fait que, dans le cas  $Re \gg 1$ , le mouvement du fluide peut être considéré comme celui d'un fluide quasi parfait [3, 5]. Appliquons au problème considéré les méthodes des variables complexes [2].

### 3. Modèle mathématique

Le domaine modèle  $D$  d'écoulement est une région supérieure dont la frontière est approximée dans le plan  $z = x + iy$  par un triangle isocèle de sommets  $A_2(-l, 0)$ ,  $A_3(0, h)$  et  $A_4(l, 0)$  et par les demi-droites  $(-\infty, A_2)$  et  $(A_4, +\infty)$ . On désignera par  $\pi\beta$  l'angle au sommet  $A_2$  avec  $0 < \beta < 0,5$ . Le domaine  $D$  est composé d'un domaine  $D_1$  de frontière  $\gamma$ , dans lequel l'écoulement est tourbillonnaire de vorticité  $\omega_z$ , et d'un domaine  $D_0$ , dans lequel l'écoulement est à potentiel de vitesse  $V$  à l'infini. L'écoulement considéré doit évidemment respecter les conditions suivantes : la vitesse de l'écoulement est partout continue dans  $D$  ; elle est uniforme à l'infini et les frontières rigides ainsi que l'arc  $\gamma$  sont des lignes de courant. Transformons le domaine  $D$  en domaine  $D'$  (demi-plan  $\Im w \geq 0$ , ici  $\Im w$  désigne la partie imaginaire de  $w$ ) et reformulons le problème dans celui-ci. Une transformation conforme [1] appliquant le domaine  $D$  du plan  $z = x + iy$  sur le domaine  $D'$  du plan  $w = \xi + i\eta$  est donnée dans notre cas, par  $z = C \int_0^w dt t^{2\beta} (a^2 - t^2)^{-\beta} + C_0$ . En imposant les conditions : si  $z = ih$ ,  $w = 0$  et si  $z = l$ ,  $w = a$ , on trouve pour les deux constantes  $C_0$  et  $C$  les valeurs suivantes :  $C_0 = ih$ ,  $C = h/(a\pi) B(1/2, \beta) e^{-i\beta\pi}$ , où  $B(x, y)$  est la fonction bêta [6]. Les correspondances entre les paramètres caractéristiques des écoulements dans les plans  $z$  et  $w$  sont :  $U = V(h/a) B(1/2, \beta)/\pi$ ,  $\omega(w) = \omega_z(z)|J|$ , où  $J$  est la matrice jacobienne de la transformation de  $z$  à  $w$  et  $\omega(w)$  la vorticité dans le plan  $w$ .

Positionnons à présent le problème dans le plan complexe  $w$ . Soit  $D'$  le demi-plan supérieur  $\eta > 0$  ; il faut déterminer les paramètres dynamiques et géométriques pour lesquels il existe un domaine  $D'_1$  inclus dans  $D'$  dont la frontière se compose d'un segment  $[0, L_w]$  de l'axe des  $\xi$  et d'un arc  $\gamma'$  sous-tendu par le segment, tel qu'il existe un domaine à rotation non nulle  $\omega$  dans le domaine  $D'_1$  et à potentiel dans  $D'_0 = D'/\overline{D'_1}$ .  $\overline{D'_1}$  désigne le domaine composé de  $D'_1$  et ses frontières. Le champ de vitesse est partout continu dans  $D'$  et la ligne  $\gamma'$  est une ligne de courant. D'après la théorie générale, le potentiel complexe de l'écoulement doit être une fonction analytique dans le domaine décrivant le processus physique. Il peut être choisi en présence de la « boule » de vorticité  $\omega(w) \neq 0$  :

$$\phi(w) = Uw - i(2\pi)^{-1} \int d\xi_1 d\eta_1 \omega(\zeta) \ln((w - \zeta)/(w - \bar{\zeta})) \quad (3)$$

Ici,  $\zeta = \xi_1 + i\eta_1$  est un point variable d'intégration de  $D'_1$ . Le premier terme de droite représente le potentiel créé par l'écoulement uniforme de base et le deuxième est celui créé par l'écoulement de

vorticité  $\omega$ . Nous respectons par un tel choix de la fonction  $\phi(w)$  toutes les conditions aux limites. La fonction de courant, c'est-à-dire la partie imaginaire du potentiel complexe, est :

$$\psi(w) = U\eta - (2\pi)^{-1} \int d\xi_1 d\eta_1 \omega(\xi) \ln |(w - \zeta)/(w - \bar{\zeta})|, w = \xi + i\eta \quad (4)$$

Cette expression respecte les conditions nécessaires suivantes : (i) elle admet des dérivées partielles continues partout dans  $D'$ , (ii)  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \partial_\eta \psi = U$ , (iii) elle prend une valeur constante (la valeur nulle par exemple) sur tout l'axe  $\xi$  et sur l'arc  $\gamma'$ . La fonction de courant étant nulle sur  $\gamma'$ , on obtient l'équation (voir par exemple [2]) :

$$\eta(\xi) - \left(\frac{1}{4\pi U}\right) \int_0^{L_w} d\xi_1 \int_0^{\eta(\xi)} d\eta_1 \omega(\xi) \ln \left\{ \frac{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta(\xi) - \eta_1)^2}{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta(\xi) + \eta_1)^2} \right\} = 0 \quad (5)$$

valable dans le domaine  $0 < \xi < L_w$ . La forme de l'arc  $\gamma'$  est donc donnée par cette équation intégrale non linéaire.

Nous devons ajouter à (5) une condition physique aux limites, à savoir : la vitesse de l'écoulement dans le plan physique  $z = x + iy$  doit être partout bornée. D'ici, on trouve qu'aux points « dangereux »,  $w = 0$  et  $w = L_w$ , deux conditions (conditions de Kutta-Joukowski) sont à respecter :

$$2\pi U + \int_0^{L_w} d\xi \omega(\bar{\zeta}) \ln \left( 1 + \left( \frac{\eta(\xi)}{\xi - L_w} \right)^2 \right) = 0, 2\pi U + \int_0^{L_w} d\xi \omega(\bar{\zeta}) \ln \left( 1 + \left( \frac{\eta(\xi)}{\xi} \right)^2 \right) = 0 \quad (6)$$

#### 4. Solution approchée

La résolution analytique du problème se heurte à de nombreuses difficultés qui empêchent de mener l'analyse à terme, d'où l'intérêt de la recherche d'une solution approximative. Par une transformation  $\xi \rightarrow \xi' = L_w - \xi$ , on peut montrer que la fonction  $\eta = \eta(\xi)$  est symétrique. Cette fonction admet un maximum, qui a pour valeur  $\eta_0$  et se réalise en  $\xi = L_w/2$ . Par simplicité, supposons à présent (pour pouvoir faire ensuite les estimations nécessaires sur les paramètres du problème) que la vorticité  $\omega(w)$  soit constante. Faisons le changement de variables :  $p = 4\pi U/\omega L_w$ ,  $\eta(\mu) = \eta_0 \eta(\mu/L_w)$ ,  $\xi_1 = L_w t$ ,  $\xi = L_w s$ ,  $\epsilon = \eta_0/L_w$ . La fonction  $\bar{\eta} = \bar{\eta}(t)$  admet un maximum qui vaut 1 et qui est atteint en  $t = 1/2$ . De (5), on trouve l'équation :

$$p[\bar{\eta}] \bar{\eta}(s) + \int_0^1 dt \bar{\eta}(t) K(s, t; \epsilon, \bar{\eta}) = 0 \quad (7)$$

où le noyau  $K(s, t; \epsilon, \bar{\eta})$  est donné par :

$$\begin{aligned} K(s, t; \epsilon, \bar{\eta}) = & (\bar{\eta}(s)/\bar{\eta}(t)) \ln \left( \frac{\{(s-t)^2 + \epsilon^2(\bar{\eta}(s) - \bar{\eta}(t))^2\} \{(s-t)^2 + \epsilon^2(\bar{\eta}(s) + \bar{\eta}(t))^2\}}{\{(s-t)^2 + \epsilon^2(\bar{\eta}(s) + \bar{\eta}(t))^2\} \{(s-t)^2 + \epsilon^2(\bar{\eta}(s) - \bar{\eta}(t))^2\}} \right) \\ & + 2\{(s-t)/(\epsilon\bar{\eta}(t))\} \left\{ \arctan \left\{ \epsilon(\bar{\eta}(s) + \bar{\eta}(t)) / (s-t) \right\} + \arctan \left\{ \epsilon(\bar{\eta}(s) - \bar{\eta}(t)) / (s-t) \right\} \right\} \\ & - (\bar{\eta}(s)/\bar{\eta}(t)) \ln \left\{ (s-t)^2 + \epsilon^2(\bar{\eta}(s))^2 \right\} - 4\{(s-t)/(\epsilon\bar{\eta}(t))\} \arctan \left\{ \epsilon\bar{\eta}(s) / (s-t) \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

et la valeur du paramètre  $p$  par (relation tirée de (6))

$$p[\bar{\eta}] = -2 \int_0^1 ds \ln \{ 1 + \epsilon^2(\bar{\eta}(s))^2 / s^2 \} = F_1(\epsilon) \quad (9)$$

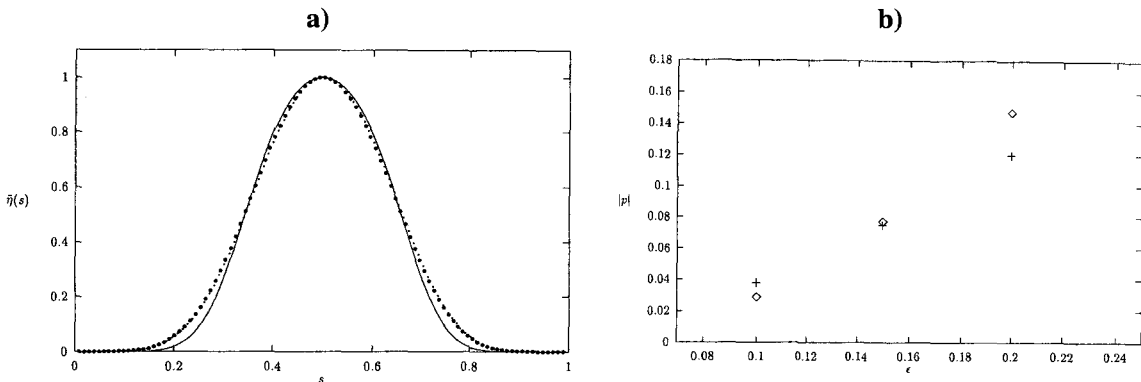
La difficulté majeure de la résolution du système (7)–(9) est évidente : il n'y a pas de petit paramètre par rapport auquel un développement peut être effectué (voir par exemple [7], concernant la résolution numérique des équations similaires).

De l'équation (7), on tire, après quelques calculs, une autre relation donnant le paramètre adimensionné  $p$  en fonction du paramètre  $\epsilon$  :

$$p[\bar{\eta}] = - \int_0^1 dt \bar{\eta}(t) K(1/2, t; \epsilon, \bar{\eta}) = F_2(\epsilon) \tag{10}$$

où le noyau  $K(1/2, t; \epsilon, \bar{\eta})$  est déterminé conformément à (8).

Nous constatons que l'existence d'une zone tourbillonnaire n'est possible que si les deux valeurs de  $p$  données par les équations (9) et (10) coïncident. De plus, d'après (9), il est clair que le paramètre  $p$  doit être négatif. Des explications qualitatives sur ce sujet peuvent être trouvées dans [8]. Les particularités de la fonction  $\bar{\eta}(t)$  sont : admission d'un maximum au point  $t = 1/2$  ( $\bar{\eta}(1/2) = 1$ ), nullité aux points  $t = 0$  et  $t = 1$ . Cela nous permet de rechercher une solution sous la forme  $\bar{\eta}(t) = 4^\alpha t^\alpha (1 - t)^\alpha$ , avec  $\alpha = \alpha(\epsilon)$ . Pour une solution de l'équation (7) trouvée pour le paramètre  $\epsilon$  fixé, nous calculons la valeur du paramètre  $p$  correspondante  $p_1 = p_1(\epsilon_1)$  et comparons avec  $p_2 = p_2(\epsilon_1)$  obtenue à partir de la condition aux limites (9). Nous constatons immédiatement que pour  $\epsilon \ll 1$  la différence  $p_2 - p_1$  est positive. Cette différence change de signe lorsqu'on a  $\epsilon > 0,2$ . Ces observations nous permettent d'utiliser la technique itérative pour faire les estimations. En omettant les détails de l'analyse, nous présentons le résultat final. La fonction  $\bar{\eta}(t)$  est une bonne approximation (figure 1a) de la solution de l'équation (7). Nous voyons (la figure 1b) qu'il existe une valeur  $\epsilon^* \sim 0,12 \div 0,15 < 1$  du paramètre  $\epsilon$  pour laquelle les deux valeurs de  $p$  susmentionnées coïncident. La formation d'une zone tourbillonnaire au voisinage des obstacles rigides bidimensionnels est possible et le paramètre  $p$  (ici à un signe près) est de l'ordre de  $p^* = 0,07$ . La condition pour laquelle la formation de la zone tourbillonnaire est possible est la suivante :  $p = 4\pi U / (\omega L_w) = p^*$ ,



**Figure 1a.** Allure de la courbe délimitant une zone tourbillonnaire de vorticité constante dans le plan  $w$  pour  $\epsilon = 0,1$ . La courbe en pointillé correspond à  $\bar{\eta}(s)$  quand la valeur du paramètre  $p$  est :  $p \approx 3,4 \cdot 10^{-2}$  et la courbe en continu correspond à la partie intégrale de l'équation (7). On a une bonne approximation si  $\alpha = 6,5$ . Pour  $p \approx 7,5 \cdot 10^{-2}$  et  $\epsilon = 0,15$ , on trouve  $\alpha = 3$ .

**Figure 1a.** Form of the curve delimiting the vortex domain with constant vorticity in  $w$ -plane when  $\epsilon = 0,1$ . Dashed curve correspond to  $\bar{\eta}(s)$  when the parameter  $p$  is:  $p \approx 3,4 \cdot 10^{-2}$  and the solid curve corresponds to integral part of equation (7). We have a good approximation when  $\alpha = 6,5$ . For  $p \approx 7,5 \cdot 10^{-2}$  and  $\epsilon = 0,15$  we find  $\alpha = 3$ .

**Figure 1b.** Intersection des courbes  $p_1 = p_1(\epsilon)$  et  $p_2 = p_2(\epsilon)$  sur lesquelles se trouvent les points  $\diamond$  et  $+$ . Cette intersection donne la valeur  $p$  du problème (7), réalisable pour  $\epsilon \approx 0,14$ .

**Figure 1b.** Intersection of curves  $p_1 = p_1(\epsilon)$  and  $p_2 = p_2(\epsilon)$  on which the points  $\diamond$  and  $+$  can be found. This intersection gives the parameter  $p$  of the problem (7), realizable for  $\epsilon \approx 0,14$ .

c'est-à-dire  $\omega L_w \sim U$ . Il faut tenir compte du fait que le paramètre  $L_w$  est lié à  $L_z$  par la transformation conforme  $z = z(w)$  précédemment indiquée et que  $V$  et  $U$  sont liés par ( $U = V(h/a) B(1/2, \beta)$ ). Si  $L_z \gg h$ , on peut poser pour les estimations des expressions intégrales  $\omega(z) \sim B(1/2, \beta) \omega(w)$  et  $L_z \sim B(1/2, \beta) L_w$ . D'ici et de l'expression (2), nous déduisons à un coefficient décrivant la géométrie de l'obstacle près :  $\omega \sim c_f V Re/h$ ,  $L_z \sim h/(c_f Re)$ . La vorticité et la longueur caractéristique de la zone tourbillonnaire sont donc pr sent es en fonction de la hauteur caractéristique de l'obstacle, de la vitesse de l'écoulement et du nombre de Reynolds. Si dans le domaine de  $Re$  de l'expérience, le coefficient  $c_f$  peut être approximé par  $c_f \sim 1/Re^\lambda$  (voir par exemple [4]), nous obtenons pour  $\omega$  et  $L_z$  les estimations suivantes :  $\omega \sim Re^{(1-\lambda)} V/h$ ,  $L_z \sim h Re^{(\lambda-1)}$ , avec  $1 \ll Re \ll Re_c$ , où  $Re_c$  est le nombre de Reynolds critique.

## 5. Conclusion

Les résultats de l'analyse montrent certains aspects importants de la possibilité de la formation de zones tourbillonnaires au voisinage des obstacles. En particulier, on a trouvé les dépendances de la sorte :  $\omega \sim (V/h) (Re)^{-s}$ ,  $L_z \sim h(Re)^s$  qui se confirment expérimentalement [9]. Pour trouver ces dépendances importantes, nous avons déterminé une solution approchée de l'équation non linéaire (7) décrivant la forme (figure 1a) du domaine où la vorticité non nulle peut être localis e et les valeurs des paramètres  $p$  et  $\epsilon$  pour lesquelles la formation d'une zone tourbillonnaire au voisinage des frontières rigides est possible.

## Références bibliographiques

- [1] Milne-Thomson L.M., Theoretical hydrodynamics, MacMillan, London, 1968.
- [2] Lavrent'ev M.A., Shabat B.V., Effets hydrodynamiques et modèles mathématiques,  ditions Mir, Moscow, 1980.
- [3] Batchelor G.K., An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 1967.
- [4] Schlichting H., Boundary layer theory, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [5] Batchelor G.K., On steady laminar flow with closed stream lines at the large Reynolds number, J. Fluid Mech. 1 (1956) 177-190.
- [6] Abramowitz M., Stegun I.A., Handbook of Mathematical Functions, U.S. Govt. Printing Office, Washington, D.C., 1964.
- [7] Moore D.M., Saffman, P.G., Tanveer S. 1988, The calculation of some Batchelor flows: The Sadovskii vortex and rotational corner flow, Phys. Fluids 31 (1988) 978-990.
- [8] Dawai T., Pavlov V., Mouvement des tourbillons bidimensionnels au voisinage des frontières en présence des sources, C. R. Acad. Sci. Paris, série IIb 327 (1) (1999) 71-76.
- [9] Enzo O., Macagno, Tin-Kan Hung, Computational and experimental study of a captive annular eddy, J. Fluid Mech. 28 (1967) 43-64.

