N° d'ordre : 2688

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Geoffroy DEROME

TRANSCENDANCE DES VALEURS DES FONCTIONS AUTOMORPHES ARITHMÉTIQUES

Soutenue le 17 Décembre 1999 devant la Commission d'Examen :

Président :	J.C DOUAI, Professeur (Université de Lille I)
Directeur de Thèse :	P. COHEN, DR CNRS (Université de Lille I)
Rapporteurs :	M. WALDSCHMIDT, Professeur (Université Paris VI)
	J. WOLFART, Professeur (Université Frankfurt)
Membres :	P. DEBES, Professeur (Université de Lille I)
	M. HUTTNER, Professeur (Université de Lille I)
	P. SOLE, DR CNRS (Sophia Antipolis)

REMERCIEMENTS

Je me permets tout d'abord d'exprimer ma gratitude envers P.Cohen qui m'a proposé comme sujet de thèse d'étudier la transcendance des valeurs des fonctions automorphes, et qui a eu la gentillesse de diriger mes recherches pendant plus de trois ans.

Les professeurs Michel Waldschmidt et Jürgen Wolfart ont accepté d'honorer ma thèse en faisant parti du jury en tant que rapporteur. Connaissant leurs emplois du temps extrémement chargés, je souhaite les remercier chaleureusement pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Il m'est très agréable de remercier le professeur Jean Claude Douai pour tout le temps qu'il a bien voulu me consacrer, et en particulier pour m'avoir initié aux rudiments de la cohomologie étale et à la théorie des motifs.

Enfin je n'oublie pas de remercier Andrea Moreira pour son aide liée aux problèmes que j'ai rencontré avec l'informatique et pour son initiation au language TeX. Sa compétence fut très précieuse. La tache de relecture auquelle Pierre Grinspan a accepté de se soumettre est considérable et je souhaite le remercier vivement pour les commentaires qu'il m'a fait.

Un grand merci également au professeur Pierre Debes pour ses remarques qui m'ont été très utiles.

Je remercie les universités de Lille 1 et de Paris 11 pour le soutien financier que j'ai obtenu pour préparer cette thèse et en particulier le professeur Luc Illusie. Sans ce soutien ce manuscript n'existerait probablement pas aujourd'hui.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE

Ce travail fait suite aux publications de P.B.Cohen [Co] et de Shiga-Wolfart [S-W]. On considère un domaine symétrique borné complexe D et un groupe arithmétique Γ tel que le quotient $\Gamma\backslash D$ soit en bijection avec une famille analytique Σ de variétés abéliennes polarisées d'un certain type comme dans [Shi1]. En fait, le domaine D se décompose en un produit de g de domaines symétriques bornés complexes élémentaires D_ν, et chaque élément de D_ν est une matrice à coefficients complexes. En particulier, on peut parler des points algébriques du domaine D.

Le théorème principal obtenu par P.Cohen, H.Shiga et J.Wolfart est le suivant:

Théorème. *On a équivalence entre les propositions i) et ii)*

i) Le point z appartient à $D(\overline{\mathbb{Q}})$ et l'élément de Σ associé à z est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

ii) La variété abélienne sous-jacente à l'élément de Σ associé à z est à multiplication complexe. On dit alors que z est un point spécial du domaine D.

L'implication $ii) \Rightarrow i)$ était déjà connue par la théorie de la multiplication complexe, et l'implication $i) \Rightarrow ii)$ utilise les méthodes de la transcendance. L'espace $\Gamma\backslash D$ est en bijection avec l'ensemble des points complexes d'une variété algébrique quasi-projective V_Σ. Notons

$$J_\Sigma : D \to V_\Sigma(\mathbb{C})$$

une application holomorphe induisant un isomorphisme entre $\Gamma\backslash D$ et $V_\Sigma(\mathbb{C})$. Si J_Σ et V_Σ sont correctement normalisées, alors le théorème énoncé ci-dessus admet le corollaire suivant

Corollaire. *Soit z un point de $D(\overline{\mathbb{Q}})$ non spécial, alors*

$$J_\Sigma(z) \notin V_\Sigma(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Ce corollaire peut se voir en fait comme une généralisation du théorème de Schneider portant sur la transcendance des valeurs de la fonction modulaire elliptique j aux points $\tau \in \mathfrak{H}$ algébriques non quadratiques imaginaires.

Déja dans les articles [Co] et [S-W], on trouve des exemples de points $z \in D$ non algébriques tel que $J_\Sigma(z) \notin V_\Sigma(\overline{\mathbb{Q}})$. Le résultat le plus significatif dans cette direction est le théorème suivant que l'on trouve à la fois dans les articles de [S-W] et dans [Co] dans un cas particulier (voir la proposition 4 p.19 pour la première référence et la proposition 1 p.992 pour la seconde).

Théorème. *Soient F un corps de nombres totalement réel de degré n et Σ une famille analytique de variétés abéliennes polarisées de dimension n définies sur $\mathbb{C}$ telle que l'algèbre des endomorphismes de la variété abéliennes sous-jacentes à un élément de Σ contient F. Etant donné $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathfrak{H}^n$ non spécial tel que $z_\nu \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour au moins un indice ν compris entre 1 et n, alors*

$$J_\Sigma(z) \notin V_\Sigma(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Bien sûr on aimerait généraliser ce thérorème dans le cas d'une famille analytique Σ quelconque de la manière suivante:

Conjecture. *Soit $z \in D$ un point non spécial avec $z_\nu \in D_\nu(\overline{\mathbb{Q}})$ pour au moins un indice ν compris entre 1 et g. Etant donné Σ une famille analytique de variétés abéliennes polarisés paramétrées par D, on a*

$$J_\Sigma(z) \notin V_\Sigma(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Cette conjecture sera démontrée ici dans le cas particulier où $D = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ (voir le théorème 3.4 du chapitre III pour un énoncé précis). Le cas général reste ouvert, puisque aucun contre exemple n'a encore pu être prouvé. En fait, avant d'attaquer la preuve de ce théorème 3.4, on va, dans le chapitre II (voir l'introduction de ce chapitre pour les détails) contrôler l'algébricité (en un sens que l'on définira) du point $Z \in \mathfrak{H}_n$ associé à une variété abélienne polarisée $(A, \mathcal{C})$ simple définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de dimension n.

Le travail présenté ici est divisé en quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré à des rappels sur les variétés abéliennes et les espaces de modules. Dans le second chapitre, comme nous venons de le signaler, on contrôle l'algébricité du point $z \in D$ associé à une variété abélienne simple définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Nous montrerons en particulier que les résultats obtenus dans ce chapitre généralise ceux obtenus par la collaboration Cohen, Shiga et Wolfart. Le troisième chapitre est consacré aux applications du second chapitre, et en particulier à la transcendance des valeurs des fonctions automorphes arithmétiques. Enfin, dans le quatrième chapitre, nous allons exhiber les équations du plongement modulaire dans deux cas particuliers. Ceci nous permet, en reprenant une idée due à H.Shiga, de donner aussi des résultats de transcendance portant sur les valeurs des fonctions automorphes arithmétiques. Nous comparerons alors les deux approches.

Les résultats les plus importants sont les théorèmes 1.9 et 3.5 du chapitre II, ainsi que les théorèmes 2.1 et 3.4 du chapitre III.

PREMIER CHAPITRE

Introduction

Ce chapitre est consacré à des rappels sur les variétés abéliennes et les espaces de modules indispensables pour énoncer et démontrer les résultats que nous présenterons ultérieurement. Ces généralités que nous allons maintenant rappeler sont pour la plupart bien connues, et nous nous permettrons le plus souvent de donner des références pour une preuve éventuelle. Le lecteur trouvera donc pêle-mêle des résultats triviaux et des résultats un plus profonds. Il est peut-être souhaitable de commencer à lire le chapitre II et de se référer au chapitre I lors des multiples renvois.

§1 Généralités sur les variétés abéliennes polarisées

On désignera par k un corps.

Définition 1.1. Un groupe algébrique G sur k est une variété algébrique G définie sur k munie de deux morphismes:

$$m : G \times G \to G$$

$$inv : G \to G$$

et d'un élément $\epsilon \in G(k)$ tel que la structure sur $G(\overline{k})$ induite par m et inv soit celle d'un groupe d'élément neutre ϵ.

Définition 1.2. Une variété abélienne A est un groupe algébrique complet.

Remarque. Si A_1 et A_2 sont deux variétés abéliennes alors $A_1 \times A_2$ est encore une variété abélienne.

Proposition 1.3. *Une variété abélienne est une variété lisse et projective.*

Référence. Pour une démonstration de la projectivité, on peut consulter le §7 de l'article de [Mil].

Proposition 1.4. *La loi de groupe sur une variété abélienne A est commutative.*

Référence. Voir par exemple l'article de [Mil] corollaire 2.4 p.105.

Théorème et définition 1.5. *Un morphisme de variétés abéliennes $f : A \to A'$ est un morphisme de variétés algébriques envoyant ϵ sur ϵ'. Le morphisme f induit alors un homomorphisme de groupes de $A(\overline{k})$ dans $A'(\overline{k})$.*

Notation. On notera $\mathrm{End}(A)$ l'anneau des morphismes de la variété abélienne A dans elle-même, et $\mathrm{End}^0(A) = \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ la $\mathbb{Q}$-algèbre déduite par extension des scalaires.

Définition 1.6. Un morphisme de variétés abéliennes $f : A \to A'$ est une isogénie si f est surjective et $\dim A = \dim A'$.

Définition 1.7. Une variété abélienne A est simple s'il n'existe pas de sous-variétés abéliennes non triviales de A.

Définition 1.8. Une polarisation $\mathcal{C}$ d'une variété abélienne A est un ensemble de diviseurs de A vérifiant les trois conditions suivantes:

1) $\mathcal{C}$ contient un diviseur ample.

2) Si X_1 et X_2 appartiennent à $\mathcal{C}$ alors il existe deux entiers n_1 et n_2 strictement positifs tels que n_1X_1 et n_2X_2 soient deux diviseurs algébriquement équivalents.

3) $\mathcal{C}$ est un ensemble maximal satisfaisant les deux conditions ci-dessus.

Remarque. Toute variété abélienne A peut toujours être équipée d'au moins une polarisation.

Définition 1.9. On dit que $f : (A, \mathcal{C}) \to (A', \mathcal{C}')$ est un morphisme (resp. une isogénie) de variétés abéliennes polarisées si f est un morphisme (resp. une isogénie) de variétés abéliennes et si $f^*(X') \in \mathcal{C}$ pour tout $X' \in \mathcal{C}'$.

Sauf mention contraire, à partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce chapitre nous ne considérerons que des variétés abéliennes définies sur $k = \mathbb{C}$, ce qui permet de donner des preuves très faciles des résultats qui vont suivre.

Si A est une variété abélienne, alors

$$A(\mathbb{C}) \simeq T_A/D$$

où T_A est l'espace tangent à l'origine de la variété abélienne A, et où D est un réseau de T_A.

Théorème 1.10. *Un morphisme de variétés abéliennes $f : A \to A'$ s'identifie à une application linéaire* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_A, T_{A'})$ *vérifiant* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f)(D) \subseteq D'$. *Le morphisme f est une isogénie si et seulement si de plus on a simultanément les deux conditions suivante* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f)$ *est bijective et* $\dim T_A = \dim T_{A'}$. *On définit le degré de l'isogénie f par*

$$\deg(f) = \mathrm{Card}\left(\frac{D'}{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f)(D)}\right).$$

Remarque. L'isogénie f est un isomorphisme si et seulement si $\deg(f) = 1$.

Proposition 1.11. *La relation "être isogène à" est une relation d'équivalence.*

Preuve de la proposition. Il est clair que la relation est réfexive et transitive. Pour démontrer que la relation est symétrique, on montre en fait que si $f : A \to A'$ est une isogénie de degré d alors il existe $g : A' \to A$ une autre isogénie telle que $g \circ f = d\mathrm{Id}_A$. On pourra consulter la première proposition du §2 de l'article de [Ros] pour les détails.

Remarque. En particulier une isogénie f de A s'identifie à un élément de $\mathrm{End}(A)$ inversible dans $\mathrm{End}^0(A)$.

Proposition 1.12. *Si A est une variété abélienne simple, alors tout $f \in \mathrm{End}(A)$ non trivial est une isogénie. En particulier* $\mathrm{End}^0(A)$ *est une algèbre à division.*

Référence. Voir l'article de [Ros] p.82.

Notons i l'isomorphisme entre l'algèbre $L = \mathrm{End}^0(A)$ et l'algèbre des endomorphismes de l'espace T_A qui préservent $D_{\mathbb{Q}} = D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Si on choisit une base $(t_1, \ldots, t_n)$ de T_A sur $\mathbb{C}$, on obtient une représentation complexe, $\Phi : L \to M_n(\mathbb{C})$, dite représentation complexe analytique de L.

Si on suppose de plus que A est simple, alors $L = \mathrm{End}^0(A)$ est une algèbre à division, et l'isomorphisme i permet de voir $D_{\mathbb{Q}}$ comme un L-espace vectoriel. En particulier $[L : \mathbb{Q}]$ divise $2n$. On notera:

$$m = \frac{2n}{[L : \mathbb{Q}]}.$$

Corollaire 1.13. *Soit A une variété abélienne simple de dimension n définie sur $\mathbb{C}$. S'il existe une sous-algèbre L_1 de $L = \mathrm{End}^0(A)$ de degré $2n$ alors $L_1 = L$.*

Preuve du corollaire 1.13. En effet:

$$m[L : L_1] = \frac{m[L : \mathbb{Q}]}{[L_1 : \mathbb{Q}]} = 1$$

ce qui force en particulier $[L : L_1] = 1$, i.e. $L_1 = L$.

Nous allons maintenant traduire les définitions 1.8 et 1.9 dans le cas particulier auquel nous nous sommes restreints.

Soient $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(A) = H^1(A, \mathcal{O}_A^*)$ et E l'image de $\mathcal{L}$ par l'application de Chern

$$c_1 : H^1(A, \mathcal{O}_A^*) \to H^2(A, \mathbb{Z}) = \Lambda^2 \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D, \mathbb{Z}).$$

Notons

$$W = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_A, \mathbb{C}).$$

L'image de E par l'injection:

$$H^2(A, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(A, \mathbb{C}) = \Lambda^2 \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_A, \mathbb{C}) = \Lambda^2(W \oplus \overline{W})$$

est $E_{\mathbb{R}}$, l'extension $\mathbb{R}$-linéaire de E. En fait $E_{\mathbb{R}} \in H^{1,1}(A)$, et par suite:

$$E_{\mathbb{R}}(ix, iy) = E_{\mathbb{R}}(x, y)$$

pour tout $(x, y) \in T_A \times T_A$.

Proposition 1.14. *Le fibré en droite $\mathcal{L}$ est ample si et seulement si $E_{\mathbb{R}}(ix, x) > 0$ pour tout $x \in T_A \setminus \{0\}$.*

Définition 1.15. Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et D un réseau de V. On dit qu'une forme bilinéaire alternée non dégénérée E sur V est une forme de Riemann pour le tore complexe $T = V/D$ si et seulement si:

1) $E(x, y) \in \mathbb{Z}$ pour tout $(x, y) \in D^2$.
2) $E(ix, iy) = E(x, y)$ pour tout $(x, y) \in V^2$.
3) $E(ix, x) > 0$ pour tout $x \in V \setminus \{0\}$.

On dit que la forme de Riemann E est normalisée pour le tore complexe $T = V/D$ si de plus il existe d_1 et d_2 deux éléments de D tels que $E(d_1, d_2) = 1$.

Remarque. Si on pose:

$$H(x, y) = E(ix, y) + iE(x, y)$$

pour tout $(x, y) \in V^2$, alors H est une forme Hermitienne définie positive.

Corollaire 1.16. *L'extension $\mathbb{R}$-linéaire $E_{\mathbb{R}}$ de l'image de $X \in \mathcal{C}$ ample par l'application de Chern c_1 est une forme de Riemann pour le tore complexe T_A/D.*

Proposition 1.17. *Etant donné un tore complexe $T = V/D$ de dimension n et une forme de Riemann E pour T, il existe une base $\mathcal{B}$ appelée base symplectique de D sur $\mathbb{Z}$ et $d = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ un n-uplet d'entiers strictement positifs vérifiant $\delta_1 | \dots |\delta_k| \dots |\delta_n$ tels que:*

$$Mat_{\mathcal{B}}(E) = J_d$$

où

$$Mat_{\mathcal{B}}(E)$$

désigne la matrice de la forme de Riemann dans la base $\mathcal{B}$,

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \delta_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \delta_n \end{pmatrix},$$

et

$$J_d = \begin{pmatrix} 0_n & \Delta \\ -\Delta & 0_n \end{pmatrix}.$$

Preuve de la proposition 1.17. Résulte du théorème de la base adaptée. On peut consulter le lemme 1 du livre de [Lan] §3 chapitre VI pour les détails.

Remarque 1. Si la forme de Riemann est normalisée alors $\delta_1 = 1$. Le n-uplet $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ ne dépend alors que de T et de E.

Remarque 2. Vu la définition de $\mathcal{C}$, il existe toujours $X \in \mathcal{C}$ ample tel que le n-uplet $d = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ ainsi associé à l'extension $\mathbb{R}$-linéaire de l'image de $X \in \mathcal{C}$ par c_1 vérifie $\delta_1 = 1$. Par suite $d = (1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ ne dépend que de $(A, \mathcal{C})$ et s'appelle le type de la polarisation.

Définition 1.18. On dit qu'une variété abélienne polarisée est principalement polarisée si elle est de type: $d = (1, 1, \dots, 1)$.

Comme on l'a vu, à une variété abélienne polarisée $(A, \mathcal{C})$ définie sur $\mathbb{C}$, on associe un tore complexe $T = A(\mathbb{C})$ et une forme de Riemann E. Réciproquement on dispose du théorème suivant:

Théorème 1.19. *Soit T un tore complexe muni d'une forme de Riemann E. Alors T est l'ensemble des points complexes d'une variété abélienne A définie sur $\mathbb{C}$. De plus on peut munir A d'une polarisation $\mathcal{C}$ correspondant à E.*

Référence pour une démonstration du théorème 1.19. Voir l'article de [Ros] p.85.

Théorème 1.20. *Soient $(A, \mathcal{C})$ et $(A', \mathcal{C}')$ deux variétés abéliennes polarisées. On note $(T_A/D, E)$ (resp. $(T_{A'}/D', E')$) le tore complexe muni de la forme de Riemann normalisée associée à $(A, \mathcal{C})$ (resp. à $(A', \mathcal{C}')$). Un morphisme f de variétés abéliennes polarisées $f : (A, \mathcal{C}) \to (A', \mathcal{C}')$ s'identifie à un morphisme de $(T_A/D, E)$ dans $(T_{A'}/D', E')$, i.e. à une application linéaire* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_A, T_{A'})$ *vérifiant*

1) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f)(D) \subseteq D'$.

2) Il existe $n_f \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $E'(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f)x, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f)y) = n_f E(x,y)$ *pour tout* $(x,y) \in T_A \times T_A$.

Remarque. Ainsi, la donnée d'une variété abélienne polarisée à isomorphisme près est équivalente à la donnée d'un tore complexe muni d'une forme de Riemann normalisée à isomorphisme près.

Mise en garde. Il convient de ne pas confondre $\mathrm{End}(A,\mathcal{C})$ et $\mathrm{End}(A)$. En effet $\mathrm{Aut}(A,\mathcal{C})$ est toujours fini, alors que si par exemple $A = E \times E$ où E est une courbe elliptique non à multiplication complexe, on a: $\mathrm{Aut}(A) = M_2(\mathbb{Z})^* = \mathrm{Gl}_2(\mathbb{Z})$.

Proposition 1.21. *Soit* $f : A \to A'$ *une isogénie et* $\mathcal{C}'$ *une polarisation de* A'. *Alors il existe une et une seule une polarisation* $\mathcal{C}$ *de* A *telle que le morphisme* f *se prolonge en un morphisme de* $(A,\mathcal{C})$ *dans* $(A',\mathcal{C}')$.

Preuve de la proposition 1.21. Notons E' la forme de Riemann normalisée sur $T_{A'}/D'$ induite par $\mathcal{C}'$, et posons

$$E(x,y) = E'(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f)x, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f)y)$$

pour tout $(x,y) \in T_A \times T_A$.

Il est alors facile de vérifier que E est une forme de Riemann pour T_A/D, ce qui termine la preuve de la proposition 1.21.

Proposition 1.22. *Toute variété abélienne* A *est isogène à une variété abélienne principalement polarisée.*

Références pour la démonstration de la proposition 1.22. Voir la proposition figurant au §5 de l'article de [Ros].

Proposition 1.23. *Soient* A_1 *et* A_2 *deux variétés abéliennes. Posons* $A = A_1 \times A_2$. *Toute polarisation* $\mathcal{C}$ *de* A *induit de manière naturelle une polarisation* $\mathcal{C}_1$ *de* A_1 *et* $\mathcal{C}_2$ *de* A_2, *et inversement.*

Preuve de la proposition 1.23. On a

$$T_A = T_{A_1} \times T_{A_2}$$

et

$$D = D_1 \times D_2.$$

Si E_1 (resp. E_2) est une forme de Riemann normalisée pour T_{A_1}/D_1 (resp. T_{A_2}/D_2), alors on pose:

$$E((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = E_1(x_1,y_1) + E_2(x_2,y_2)$$

pour tout $(x_1,y_1) \in T_{A_1} \times T_{A_1}$ et $(x_2,y_2) \in T_{A_2} \times T_{A_2}$. On vérifie que E est une forme de Riemann normalisée pour T_A/D.

Réciproquement, soit E une forme de Riemann normalisée pour T_A/D, on pose alors

$$E_1(x_1,y_1) = E((x_1,0),(y_1,0))$$

et

$$E_2(x_2,y_2) = E((0,x_2),(0,y_2))$$

pour tout $(x_1,y_1) \in T_{A_1} \times T_{A_1}$ et $(x_2,y_2) \in T_{A_2} \times T_{A_2}$.

Il est alors facile de voir que E_1 (resp. E_2) est une forme de Riemann normalisée pour T_{A_1}/D_1 (resp. T_{A_2}/D_2).

Nous rappelons maintenant le théorème de réductibilité de Poincaré.

Théorème 1.24. *Soit B une sous-variété abélienne de A alors, il existe une autre sous-variété abélienne C de A unique à isogénie près telle que:*

$$A \text{ est isogène à } B \times C.$$

Références. Voir [Lan] chapitre VII §4.

Remarque 1. Vu ce qui précède le même théorème est vrai si, au lieu de considérer des variétés abéliennes et des isogénies, on considère des variétés abéliennes polarisées et des isogénies de variétés abéliennes polarisées.

Remarque 2. Ce théorème est encore vrai sans l'hypothèse $k = \mathbb{C}$. On peut consulter [Mil] proposition 12.1 p.122 pour les détails.

Ce théorème admet le corollaire suivant, encore appelé théorème de réductibilité de Poincaré.

Corollaire 1.25. *Soit A une variété abélienne. Il existe $A_1, \ldots, A_s$ des sous-variétés abéliennes simples de A deux à deux non isogènes, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ des nombres entiers strictements positifs tel que:*

$$A \text{ est isogène à } A_1^{\alpha_1} \times A_2^{\alpha_2} \times \ldots \times A_s^{\alpha_s}$$

De plus si

$$A \text{ est isogène à } B_1^{\beta_1} \times B_2^{\beta_2} \times \ldots \times B_k^{\beta_k}$$

où $B_1, \ldots, B_k$ sont des variétés abéliennes simples deux à deux non isogènes et $\beta_1, \ldots, \beta_k$ des entiers strictement positifs, alors $k = s$ et il existe σ une permutation de $\{1, \ldots, s\}$ telle que:

$$\beta_{\sigma(i)} = \alpha_i$$

et

$$B_{\sigma(i)} \text{ isogène à } A_i.$$

Remarque. Bien entendu les deux remarques précédentes restent valables ici.

Proposition 1.26. *Les notations étant celles du corollaire 1.25, supposons qu'il existe une algèbre à division L_1 et un morphisme d'algèbres injectif θ de L_1 dans* $\mathrm{End}^0(A)$. *Alors pour tout i compris entre 1 et s, il existe un morphisme d'algèbres injectif θ_i de L_1 dans* $\mathrm{End}^0(A_i^{\alpha_i})$.

Preuve de la proposition 1.26. En effet, on sait que:

$$\mathrm{End}^0(A) \simeq \Pi_{1 \leq i \leq s} \mathrm{End}^0\left(A_i^{\alpha_i}\right),$$

Notons p_i le morphisme projecteur de $\mathrm{End}^0(A)$ sur $\mathrm{End}^0(A_i^{\alpha_i})$ et $\theta_i = p_i \circ \theta$ pour tout $1 \leq i \leq s$.

On a: $\theta_i(1_{L_1}) = 1_{\mathrm{End}^0(A_i^{\alpha_i})}$, et par suite θ_i est un morphisme d'algèbre injectif. En effet, il suffit de considérer $\ker(\theta_i)$, et de remarquer que tout idéal I de l'algèbre à division L_1 différent de L_1 est nécéssairement réduit à $\{0\}$.

On rappelle maintenant la définition de la multiplication complexe.

Théorème et définition 1.27. *On dit qu'une variété abélienne simple A est à multiplication complexe si $\mathrm{End}^0(A)$ est un corps commutatif de degré $2\dim A$. On montre alors que $\mathrm{End}^0(A)$ est une extension quadratique imaginaire d'un corps totalement réel de degré $\dim(A)$. Si A est non simple, on dit que A est à multiplication complexe si A est isogène à un produit de variétés abéliennes simples à multiplication complexe.*

§2 Algèbre des endomorphismes d'une variété abélienne. Représentation complexe canonique admissible.

Etant donné une algèbre semi-simple L de dimension finie sur $\mathbb{Q}$, on dit que ρ est une involution de L si ρ est un anti-automorphisme de L vérifiant $(x^\rho)^\rho = x$ pour tout $x \in L$. On dit que l'involution ρ est positive si de plus on a $\mathrm{tr}_{L/\mathbb{Q}}(xx^\rho) > 0$ pour tout $x \in L \setminus \{0\}$, où $\mathrm{tr}_{L/\mathbb{Q}}$ désigne la trace réduite de l'extension $L/\mathbb{Q}$.

Théorème 2.1. *Soit (A, C) une variété abélienne polarisée de dimension n définie sur $\mathbb{C}$. Alors, la polarisation C induit sur $L = \mathrm{End}^0(A)$ une involution positive dite involution de Rosati que l'on notera ρ. De plus on a:*

$$E_{\mathbb{R}}(\Phi(a)x, y) = E_{\mathbb{R}}(x, \Phi(a^\rho)y)$$

pour tout $a \in L$, $x \in \mathbb{C}^n$ et $y \in \mathbb{C}^n$, où $E_{\mathbb{R}}$ est une forme de Riemann sur $\mathbb{C}^n$ associée à (A, C) obtenue à partir du choix d'une base de T_A sur $\mathbb{C}$, et Φ est la représentation complexe analytique de L obtenue à partir de cette même base.

Référence pour une démonstration du théorème 2.1. Voir l'article de [Shi1] p.154.

La classification des algèbres à division munies d'une involution positive a été réalisée par Albert et est résumée dans le théorème suivant:

Théorème 2.2. *Soit L une algèbre à division de dimension finie sur $\mathbb{Q}$ munie d'une involution positive ρ. On note $K = Z(L)$ le centre de L, $q^2 = [L : K]$ et $F = \{x \in K; \rho(x) = x\}$. Alors F est un corps de nombres totalement réel de degré g et on dispose de la classification suivante:*

Type I: $L = F$.

Type II: L est une algèbre de quaternions totalement indéfinie; i.e. une algèbre centrale simple L sur F telle que les composantes simples de $L_{\mathbb{R}} = L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ soient isomorphes à $M_2(\mathbb{R})$.

Type III: L est une algèbre de quaternions totalement définie; i.e. une algèbre centrale simple L sur F telle que les composantes simples de $L_{\mathbb{R}} = L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ soient isomorphes à $\mathbb{H}$, algèbre des quaternions hamiltoniens.

Type IV: L est une algèbre centrale simple sur K et K est une extension quadratique imaginaire de F.

De plus on a:

$$L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \begin{cases} \mathbb{R}^g & \textit{si } L \textit{ est de type I}, \\ M_2(\mathbb{R})^g & \textit{si } L \textit{ est de type II}, \\ \mathbb{H}^g & \textit{si } L \textit{ est de type III}, \\ M_q(\mathbb{C})^g & \textit{si } L \textit{ est de type IV}. \end{cases}$$

Cela fournit g morphismes d'algèbres:

$$\pi_\nu : L \to \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{si } L \textit{ est de type I,} \\ M_2(\mathbb{R}) & \textit{si } L \textit{ est de type II,} \\ \mathbb{H} & \textit{si } L \textit{ est de type III,} \\ M_q(\mathbb{C}) & \textit{si } L \textit{ est de type IV,} \end{cases}$$

pour $\nu = 1, \ldots, g$ par projection sur chacun des facteurs. En plongeant $\mathbb{H}$ de manière canonique dans $M_2(\mathbb{C})$, on obtient alors g (resp. $2g$) représentations complexes irréductibles de L dans le cas de type I, II ou III (resp. dans le cas de type IV), que l'on notera $\chi_1, \ldots, \chi_g$ (resp. $\chi_1, \ldots, \chi_g, \overline{\chi}_1, \ldots, \overline{\chi}_g$).

Références pour une démonstration du théorème 2.2. Voir l'article de [Shi1] pp.150-153.

Définition 2.3. Etant donné K/k une extension de corps, deux k-représentations complexes θ_1 et θ_2 de degré n d'une $\mathbb{Q}$-algèbre R sont K-équivalentes si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{Gl}_n(K)$ telle que:

$$P\theta_1(a) = \theta_2(a)P$$

pour tout $a \in R$. On note alors: $\theta_1 \sim_K \theta_2$.

Proposition 2.4. *Soit K/k une extension de corps et supposons que k est infini. Deux k-représentations θ_1 et θ_2 de degré n d'une $\mathbb{Q}$-algèbre R qui sont K-équivalentes sont aussi k-équivalentes.*

Preuve de la proposition 2.4. On peut consulter [C-R] p.200, ou bien raisonner de la manière suivante. Il existe un entier strictement positif s, des éléments $t_1, \ldots, t_s$ de K qui sont k-linéairement indépendants, et des éléments $P_1, \ldots, P_s$ de $M_n(k)$ tels que

$$P = \sum_{j=1}^{s} t_j P_j.$$

Ainsi on a

$$\sum_{j=1}^{s} t_j \left(P_j\theta_1(a) - \theta_2(a)P_j\right) = 0_{M_n(K)}.$$

Vu les hypothèses on déduit que

$$P_j\theta_1(a) = \theta_2(a)P_j$$

pour tout $a \in R$ et $j = 1, \ldots, s$. Considérons maintenant

$$f \in k[X_1, \ldots, X_s]$$

défini par

$$f = \det(X_1P_1 + \ldots + X_sP_s).$$

Comme $f(t_1, \ldots, t_s) \neq 0$, il est clair que f est un polynôme non nul. Le corps k étant infini par hypothèse, on sait qu'il existe $a_1, \ldots, a_s$ des éléments de k tels que

$$f(a_1, \ldots, a_s) \neq 0.$$

Par suite

$$P' = \sum_{i=1}^{s} a_i P_i \in \mathrm{Gl}_n(k)$$

et

$$P'\theta_1(a) = \theta_2(a)P'$$

pour tout $a \in R$.

Parmi toutes les représentations complexes $\mathbb{C}$-équivalentes à Φ, il en existe une construite à partir des représentations complexes irréductibles de L.

Proposition 2.5. *On a:*

$$\Phi \sim_{\mathbb{C}} \Phi_0$$

où:

$$\Phi_0(a) = \begin{pmatrix} \Phi_1(a) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \Phi_\nu(a) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \Phi_g(a) \end{pmatrix}$$

avec $\Phi_\nu(a) \in M_{\frac{n}{g}}(\mathbb{C})$, *pour tout* $\nu = 1, \dots, g_1$, *définie par:*

$$\Phi_\nu(a) = \begin{cases} \chi_\nu(a) \otimes I_{\frac{m}{2}} & \text{si } L \text{ est de type I,} \\ \chi_\nu(a) \otimes I_m & \text{si } L \text{ est de type II ou III,} \\ \begin{pmatrix} \chi_\nu(a) \otimes I_{r_\nu} & 0 \\ 0 & \overline{\chi}_\nu(a) \otimes I_{s_\nu} \end{pmatrix} & \text{si } L \text{ est de type IV.} \end{cases}$$

On rappelle qu'étant donné deux matrices $X \in M_u(\mathbb{C})$ *et* $Y \in M_v(\mathbb{C})$, *on a coutume de noter:*

$$X \otimes Y = \begin{pmatrix} x_{11}Y & \dots & \dots & x_{1u}Y \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{u1}Y & \dots & \dots & x_{uu}Y \end{pmatrix} \in M_{uv}(\mathbb{C}).$$

Références. Voir [Shi1] §2.1 pp.155-156.

Dans le cas où L est de type I, II ou III alors la représentation complexe Φ_0 ne dépend que de L et de n. Par contre, si L est de type IV, la variété abélienne polarisée $(A, \mathcal{C})$ définit pour tout ν compris entre 1 et g_1 un couple d'entiers (r_ν, s_ν) soumis à la relation $r_\nu + s_\nu = mq$.

Définition 2.6. On appellera Φ_0 la représentation complexe canonique admissible associée à A.

Lemme 2.7. *Quitte à choisir une représentation $\mathbb{C}$-équivalente à χ_ν, on peut supposer que $\chi_\nu(L) \subset M_q(\overline{\mathbb{Q}})$.*

Preuve du lemme 2.7. Notons $\sigma_1, \dots, \sigma_g$ (resp. $\sigma_1, \dots, \sigma_g, \overline{\sigma}_1, \dots, \overline{\sigma}_g$) les plongements de K dans $\overline{K}$ si L est de type I, II ou III (resp. si L est de type IV), et par K^{σ_ν} l'image de K dans $\overline{K}$ par σ_ν. On peut munir L d'une structure de K^{σ_ν}-algèbre, en définissant l'action de $x \in K^{\sigma_\nu}$ sur $l \in L$ comme étant égale à yl, où $y \in K$ est l'unique préimage de $x \in K^{\sigma_\nu}$ par σ_ν.
Il est clair que L est une K^{σ_ν}-algèbre centrale simple, et que:

$$L \otimes_{K^{\sigma_\nu}} \overline{K} \simeq M_q(\overline{K}).$$

La composée de l'isomorphisme décrit ci-dessus avec l'injection i_ν où

$$i_\nu : L \hookrightarrow L \otimes_{K^{\sigma_\nu}} \overline{K},$$

fournit une représentation complexe irréductible χ'_ν de L. On vient donc de construire g (resp. $2g$) représentations complexes irréductibles de L deux à deux non équivalentes, dans le cas où L est de type I, II ou III (resp. de type IV). Ainsi toutes les représentations complexes irréductibles de L sont (à isomorphisme près) parmis celles que l'on vient de construire.

Comme $\chi'_\nu(L) \subset M_q(\overline{K})$, on déduit le résultat annoncé puisque K étant un corps de nombres $\overline{K}$ s'identifie au corps des nombres algébriques.

Remarque. Dans tout ce qui suit, on supposera toujours que $\chi_\nu(L) \subset M_q(\overline{\mathbb{Q}})$ pour tout $1 \leq \nu \leq g$.

§3 Espaces de modules de variétés abéliennes polarisées

Dans ce paragraphe nous allons rappeler la construction des espaces de modules paramétrant des familles de variétés abéliennes polarisées. L'essentiel de la théorie est dû à G.Shimura [Shi1].

a) Espaces de modules maximaux de variétés abéliennes polarisées.

Il est facile de voir qu'il n'existe sur une courbe elliptique qu'une seule polarisation possible. La généralisation en dimension supérieure d'une courbe elliptique est une variété abélienne polarisée. Pour obtenir un espace de module raisonnable nous sommes amenés à considérer des variétés abéliennes munies de leurs polarisations.

Etant donné un n-uplet $d = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ d'entier vérifiant $\delta_1 = 1$ et $\delta_2 | \dots | \delta_n$, on rappelle que l'on a posé

$$J_d = \begin{pmatrix} 0_n & \Delta \\ -\Delta & 0_n \end{pmatrix},$$

où

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \delta_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \delta_n \end{pmatrix}.$$

On désigne par $\Gamma_{n,d}$ le sous-groupe de $\mathrm{Gl}_{2n}(\mathbb{Z})$ défini par

$$\Gamma_{n,d} = \left\{M \in \mathrm{Gl}_{2n}(\mathbb{Z}); M J_d \,{}^t M = J_d\right\}.$$

Notons

$$\mathfrak{H}_n(\mathbb{C}) = \left\{M \in M_n(\mathbb{C});\ {}^t M = M \text{ et } \mathrm{Im}(M) \text{ est définie positive}\right\}.$$

On dispose d'une action du groupe $\Gamma_{n,d}$ sur $\mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$. Plus précisément, l'action de $M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \in \Gamma_{n,d}$ sur $Z \in \mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$ notée $Z' = MZ$ est définie par

$$Z' = (M_1 Z + M_2 \Delta)(M_3 Z + M_4 \Delta)^{-1} \Delta.$$

Théorème 3.1. *L'ensemble $\Gamma_{n,d} \backslash \mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$ est en bijection avec les classes d'isomorphismes d'éléments de $\Sigma_{n,d}$.*

Preuve du théorème 3.1.
a) Soit $Z \in \mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$, on note:

$$\lambda_j = {}^t(z_{1j}, \dots, z_{kj}, \dots, z_{nj})$$

et

$$\lambda_{j+n} = {}^t(0, \dots, d_j, \dots, 0)$$

pour tout $1 \leq j \leq n$.
Posons:

$$H_Z(x, y) = {}^t x \left(\Im(Z)\right)^{-1} \overline{y}$$

et

$$E_Z = \Im(H_Z).$$

On vérifie que

$$E_Z(\lambda_j, \lambda'_j) = E_Z(\lambda_{j+n}, \lambda_{j'+n}) = 0$$

et

$$E_Z(\lambda_j, \lambda_{j'+n}) = d_j \delta_{jj'}.$$

Ainsi les éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants. En effet, supposons une relation de $\mathbb{R}$-dépendance entre ces éléments

$$\sum_{j=1}^{2n} a_j \lambda_j = 0_{\mathbb{C}^n}$$

on a alors

$$E_Z\left(\lambda_k, \sum_{j=1}^{2n} a_j \lambda_j\right) = 0_{\mathbb{R}}$$

ce qui donne

$$a_{k+n} = 0 \text{ si } 1 \leq k \leq n$$

et

$$a_{k-n} = 0 \text{ si } n+1 \leq k \leq 2n.$$

Le $\mathbb{Z}$-module libre Λ_Z engendré par $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ est un réseau de $\mathbb{C}^n$, et E_Z est une forme de Riemann de type d pour ce réseau. Le couple $(\mathbb{C}^n/\Lambda_Z, E_Z)$ définit à isomorphisme près un élément de $\Sigma_{n,d}$ que l'on notera $\mathcal{P}(Z,n,d)$.

b) Réciproquement, donnons-nous un tore complexe $T = \mathbb{C}^n/D$ muni d'une forme de Riemann E normalisée de type d.

Soit $\mathcal{B} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})$ une base de D sur $\mathbb{Z}$ telle que

$$Mat_{\mathcal{B}}(E) = J_d.$$

Notons

$$\Omega = (\,\Omega_1 \quad \Omega_2\,) = (\lambda_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq 2n} \in M_{n,2n}(\mathbb{C})$$

la matrice des périodes ainsi obtenue.

A l'aide des relations bilinéaires de Riemann:

$$\begin{cases} \Omega J_d^{-1}\,{}^t\Omega = 0_{M_n(\mathbb{C})} \\ \sqrt{-1}(\overline{\Omega} J_d^{-1}\,{}^t\Omega > 0) \end{cases}$$

on déduit que:

$$\begin{cases} \Omega_1\,{}^t\Omega_2\Delta^{-1} - \Omega_2\Delta^{-1}\,{}^t\Omega_1 = 0_{M_n(\mathbb{C})} \\ \sqrt{-1}(\overline{\Omega}_1\,{}^t\Omega_2\Delta^{-1} - \overline{\Omega}_2\Delta^{-1}\,{}^t\Omega_1) > 0 \end{cases}$$

ce qui prouve que Ω_1 et Ω_2 sont deux matrices inversibles et que:

$$Z = \Delta\Omega_2^{-1}\Omega_1 \in \mathfrak{H}_n(\mathbb{C}).$$

Supposons maintenant que l'on ait choisi une autre base $\mathcal{B}' = (\lambda_1', \dots, \lambda_{2n}')$ de D sur $\mathbb{Z}$ telle que

$$Mat_{\mathcal{B}'}(E) = J_d.$$

Alors il existe $u \in \mathrm{Gl}_{\mathbb{Z}}(D)$ telle que

$$u(\lambda_j) = \lambda_j'$$

pour tout $j = 1, \dots, 2n$. Notons $M = Mat_{\mathcal{B}}(u) \in \mathrm{Gl}_{2n}(\mathbb{Z})$. Comme

$$E\left(u(\lambda_j), u(\lambda_{j'})\right) = E(\lambda_j, \lambda_{j'})$$

pour tout $1 \leq j, j' \leq 2n$, on déduit

$${}^tMJ_dM = J_d.$$

Maintenant

$$\Omega' = \Omega M$$

i.e.

$$\Omega_1' = \Omega_1 M_1 + \Omega_2 M_3$$

et
$$\Omega_2' = \Omega_1 M_2 + \Omega_2 M_4$$
où on a noté
$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$$
avec $M_i \in M_n(\mathbb{Z})$. Par suite
$$Z' = \Delta(\Omega_1 M_2 + \Omega_2 M_4)^{-1}(\Omega_1 M_1 + \Omega_2 M_3)$$
i.e.
$$Z' = \Delta(ZM_2 + \Delta M_4)^{-1}(ZM_1 + \Delta M_3)$$
Comme ${}^tZ = Z$ et ${}^tZ' = Z'$, on déduit que
$$Z' = ({}^tM_1 Z + {}^tM_3\Delta)({}^tM_2 Z + {}^tM_4\Delta)^{-1}\Delta$$
avec ${}^tM \in \Gamma_{n,d}$.

Ainsi le couple (T, E) définit un élément $[Z] \in \Gamma_{n,d}\backslash\mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$. De plus, si on applique la méthode du a) au point $Z \in \mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$ que l'on vient d'obtenir, il est facile de vérifier que l'on obtient un couple (T', E') isomorphe au couple (T, E) de départ.

Lorque $d = (1, \dots, 1)$, on notera Σ_n pour désigner $\Sigma_{n,d}$, et $\Gamma_n = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ pour $\Gamma_{n,d}$. De même étant donné $Z \in \mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$, on désignera par $\mathcal{P}(Z, n)$ pour $\mathcal{P}(Z, n, d)$, et $A(Z, n)$ la variété abélienne sous-jacente à $\mathcal{P}(Z, n)$.

Rappel. Les objets $\mathcal{P}(Z, n)$ et $\mathcal{P}(Z', n)$ (resp. $A(Z, n)$ et $A(Z', n)$) sont isomorphes si et seulement s'il existe $M \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ (resp. $M \in \mathrm{Sl}_{2n}(\mathbb{Z})$) telle que $Z' = MZ$.

Posons
$$\mathrm{Gl}_{2n}^{+}(\mathbb{Z}) = \{M \in M_{2n}(\mathbb{Z}); \det M \in \mathbb{N}^*\}$$
et
$$\mathrm{GSp}_{2n}(m)(\mathbb{Z}) = \left\{M \in M_{2n}(\mathbb{Z}); MJ\,{}^tM = mJ\right\},$$
où
$$J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix},$$
puis
$$\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}) = \cup_{m\in\mathbb{N}^*} \mathrm{GSp}_{2n}(m)(\mathbb{Z}).$$
On vérifie sans peine que $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z})$ est un monoïde.

Théorème 3.2. *Les objets $\mathcal{P}(Z,n)$ et $\mathcal{P}(Z',n)$ (resp. $A(Z,n)$ et $A(Z',n)$) sont isogènes si et seulement s'il existe $M \in \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z})$ (resp. $M \in \mathrm{Gl}_{2n}^{+}(\mathbb{Z})$) telle que $Z' = MZ$. Plus précisément, il existe $f : \mathcal{P}(Z,n) \to \mathcal{P}(Z',n)$ une isogénie de variétés abéliennes principalement polarisées de degré m si et seulement s'il existe $M \in \mathrm{GSp}_{2n}(m)(\mathbb{Z})$ telle que $Z' = MZ$.*

Remarque 1. On a: $\mathrm{GSp}_{2n}(1)(\mathbb{Z}) = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$. On retrouve donc le fait qu'une isogénie de degré 1 est un isomorphisme.

Remarque 2. Dans le cas où $n = 1$, on a: $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Gl}_2^{+}(\mathbb{Z}) = \mathrm{GSp}_2(\mathbb{Z})$. Ainsi un isomorphisme (resp. une isogénie) entre deux courbes elliptiques est également un isomorphisme (resp. une isogénie) entre ces deux courbes elliptiques munies de leurs polarisations canoniques.

En d'autre termes une courbe elliptique ne peut être équipée que d'une seule polarisation contrairement au cas des variétés abéliennes.

b) Autres espaces de modules de variétés abéliennes polarisées.

On va dans ce sous-paragraphe s'intéresser à des familles de variétés abéliennes polarisées vérifiant certaines conditions. Il est fortement conseillé au lecteur de se référer à [Shi1] pp.149-166 pour obtenir tous les détails. Nous nous bornerons ici à énumérer les différentes étapes de la construction et à mettre en évidence les points qui nous seront utiles pour la suite.

On se donne une algèbre à division L_1 munie d'une involution positive ρ_1, un entier n tel que le degré de L_1 divise $2n$ et une représentation complexe Φ_1 de L_1 de degré n. Posons

$$m_1 = \frac{2n}{[L_1 : \mathbb{Q}]}$$

et définissons également les entiers g_1 et q_1 relativement au couple (L_1, ρ_1).

Remarque 1. Si L_1 est de type I ou un corps commutatif de type IV alors il n'existe qu'une seule involution positive ρ_1 de L_1.

Remarque 2. L'involution positive ρ_1 de L_1 s'étend en une involution positive de $M_r(L_1)$ en posant

$$M^{\rho_1} = \left(m_{ji}^{\rho_1}\right)_{1\leq i,j\leq r}$$

si

$$M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq r} \in M_r(L_1).$$

Notons $\chi_1^1, \cdots, \chi_{g_1}^1$ (resp. $\chi_1^1, \cdots, \chi_{g_1}^1, \overline{\chi}_1^1, \cdots, \overline{\chi}_{g_1}^1$) un système de représentants des classes d'équivalences des représentations complexes irréductibles de L_1 dans le cas où L_1 est de type I, II, III (resp. dans le cas où L_1 est de type IV) vérifiant

$$\chi_\nu^1(L_1) \subset M_{q_1}(\overline{\mathbb{Q}})$$

pour tout $1 \leq \nu \leq g_1$.

Etant donné $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq m_1} \in M_{m_1}(L_1)$, on définit $\omega_\nu^1(B) \in M_{m_1q_1}(\overline{\mathbb{Q}})$ de la manière suivante. Notons

$$(\beta_{ijhk}^\nu)_{1\leq h,k\leq q_1} = \chi_\nu^1(b_{ij}),$$

et

$$B_{hk}^\nu = (\beta_{ijhk}^\nu)_{1\leq i,j\leq m_1} \in M_{m_1}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

On pose

$$\omega_\nu^1(B) = \begin{pmatrix} B_{11}^\nu & \cdots & \cdots & B_{1q_1}^\nu \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{q_11}^\nu & \cdots & \cdots & B_{q_1q_1}^\nu \end{pmatrix} \in M_{m_1q_1}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Par extension des scalaires on définit encore $\omega_\nu^1(B) \in M_{m_1q_1}(\mathbb{C})$ lorsque $B \in M_{m_1}(L_1 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$.

On désigne par $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$ l'ensemble des triplets $(A, \mathcal{C}, \theta)$ où A est une variété abélienne de dimension n définie sur $\mathbb{C}$ munie d'une polarisation $\mathcal{C}$ et où θ est un morphisme d'algèbre injectif de L_1 dans $\mathrm{End}^0(A)$ tel que de plus les conditions suivantes soient réalisées:

1) la représentation complexe analytique de $\mathrm{End}^0(A)$ obtenue à partir d'une base de T_A sur $\mathbb{C}$, restreinte à L_1 via θ, est équivalente à Φ_1.

2) la restriction à $\theta(L_1)$ de l'involution positive sur $\mathrm{End}^0(A)$ induite par $\mathcal{C}$ coïncide sur $\theta(L_1)$ avec l'involution $\theta(x) \to \theta\left(x^{\rho_1}\right)$.

Remarque. Pour obtenir un bon espace de module, nous devons, contrairement au sous paragraphe a), considérer non seulement des variétés abéliennes polarisées, mais des triplets $(A, \mathcal{C}, \theta)$. Comme $\theta(r) = r1_{End^0(A)}$, $\Phi_1(r) = rI_n$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et $\rho_1|\mathbb{Q} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$, on déduit que dans le cas où $L_1 = \mathbb{Q}$, $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$ s'identifie à l'ensemble des couples $(A, \mathcal{C})$ constitués d'une variété abélienne A de dimension n définie sur $\mathbb{C}$ et d'une polarisation $\mathcal{C}$ sur A. En d'autre termes les nouveaux espaces de modules que nous construisons ici généralisent celui construit au sous-paragraphe a).

Il est maintenant naturel de préciser les morphismes entre ces triplets.

Définition 3.3. Soient $(A, \mathcal{C})$ et $(A', \mathcal{C}')$ deux variétés abéliennes polarisées et θ (resp. θ') une injection de L_1 dans $\mathrm{End}^0(A)$ (resp. dans $\mathrm{End}^0(A')$). Un morphisme (resp. une isogénie) de $(A, \mathcal{C}, \theta)$ dans $(A', \mathcal{C}', \theta')$ est un morphisme (resp. une isogénie) f de $(A, \mathcal{C})$ dans $(A', \mathcal{C}')$ tel que $f \circ \theta(a) = \theta'(a)$ pour tout $a \in L_1$.

La remarque qui suit découle facilement de la Propostion 1.21.

Remarque. Soient $(A', \mathcal{C}')$ une variété abélienne polarisée et θ' une injection de L_1 dans $\mathrm{End}^0(A')$. Suppposons que $f : A \to A'$ soit une isogénie, alors il existe une unique polarisation $\mathcal{C}$ de A et une unique injection θ de L_1 dans $\mathrm{End}^0(A)$ telle que $f : (A, \mathcal{C}, \theta) \to (A', \mathcal{C}', \theta')$ soit une isogénie.

Théorème 3.4. *Si $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$ est non vide, alors la représentation complexe Φ_1 est $\mathbb{C}$-équivalente à la représentation complexe Φ_1' où*

$$\Phi_1'(a) = \begin{pmatrix} \Phi_1^1(a) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \Phi_\nu^1(a) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \Phi_{g_1}^1(a) \end{pmatrix}$$

pour tout $a \in L_1$, et

$$\Phi_\nu^1(a) = \begin{cases} \chi_\nu^1(a) \otimes I_{\frac{m_1}{2}} & \text{si } L_1 \text{ est de type I,} \\ \chi_\nu^1(a) \otimes I_{m_1} & \text{si } L_1 \text{ est de type II ou III,} \\ \begin{pmatrix} \chi_\nu^1(a) \otimes I_{r_\nu^1} & 0 \\ 0 & \overline{\chi}_\nu^1(a) \otimes I_{s_\nu^1} \end{pmatrix} & \text{si } L_1 \text{ est de type IV.} \end{cases}$$

Ainsi on peut supposer sans perte de généralité que $\Phi_1 = \Phi_1'$, et on appellera Φ_1 la ou une représentation complexe canonique admissible selon que L_1 est de type I, II, III ou IV.

Notons

$$H(\Phi_1) = \Pi_{1 \le \nu \le g_1} H(\Phi_\nu^1)$$

où

$$H(\Phi_\nu^1) = \begin{cases} S^1_{\frac{m_1}{2}} & \text{si } L_1 \text{ est de type I,} \\ S_{m_1} & \text{si } L_1 \text{ est de type II,} \\ A_{m_1} & \text{si } L_1 \text{ est de type III,} \\ \mathbb{C}^{r_\nu^1 s_\nu^1} & \text{si } L_1 \text{ est de type IV.} \end{cases}$$

Bien entendu S_t (resp. A_t) désigne le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $M_t(\mathbb{C})$ constitué par les matrices symétriques (resp. antisymétriques).

Remarque. Dans le cas où L_1 est de type IV et où le produit $r_\nu^1 s_\nu^1$ est nul, on convient que $H(\Phi_\nu^1)$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel trivial.

Notons

$$\mathfrak{H}(\Phi_1) = \Pi_{1\leq\nu\leq g_1}\mathfrak{H}(\Phi_\nu^1)$$

où

$$\mathfrak{H}(\Phi_\nu^1) = \begin{cases} \mathfrak{H}^1_{\frac{m_1}{2}} & \text{si } L_1 \text{ est de type I,} \\ \mathfrak{H}^1_{m_1} & \text{si } L_1 \text{ est de type II,} \\ \mathfrak{H}^2_{m_1} & \text{si } L_1 \text{ est de type III,} \\ \mathfrak{H}^3_{r_\nu^1, s_\nu^1} & \text{si } L_1 \text{ est de type IV,} \end{cases}$$

et

$$\mathfrak{H}_t^1 = \left\{M \in M_t(\mathbb{C});\ {}^tM = M,\ \Im(M) > 0\right\}$$
$$\mathfrak{H}_t^2 = \left\{M \in M_t(\mathbb{C});\ {}^tM = -M,\ I_t - M{}^t\overline{M} \text{ positive hermitienne}\right\}$$
$$\mathfrak{H}_{r,s}^3 = \left\{M \in M_{r,s}(\mathbb{C}); I_r - M\,{}^t\overline{M} \text{ positive hermitienne}\right\}$$

Remarque 1. Dans le cas où $rs = 0$ l'espace $\mathfrak{H}^3_{r,s}$ n'a aucune signification. On convient alors que $\mathfrak{H}^3_{r,s}$ est réduit à un point.

Remarque 2. Bien que l'espace $\mathfrak{H}(\Phi_1)$ ne possède pas de $\overline{\mathbb{Q}}$-structure, on posera

$$\mathfrak{H}_t^i(\overline{\mathbb{Q}}) = \mathfrak{H}_t^i \cap M_t(\overline{\mathbb{Q}})$$

pour tout $i = 1, 2$, et

$$\mathfrak{H}^3_{r,s}(\overline{\mathbb{Q}}) = \mathfrak{H}^3_{r,s} \cap M_{r,s}(\overline{\mathbb{Q}}),$$

ce qui permet de définir de manière naïve $\mathfrak{H}(\Phi_1)(\overline{\mathbb{Q}})$.

Posons

$$G_t^1 = \left\{M \in M_{2t}(\mathbb{R});\ {}^tM \begin{pmatrix} 0_t & 1_t \\ -1_t & 0_t \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0_t & 1_t \\ -1_t & 0_t \end{pmatrix}\right\}$$

$$G_t^2 = \left\{M = i(U); U \in M_t(\mathbb{H});\ {}^t\overline{M} \begin{pmatrix} 1_t & 0_t \\ 0_t & -1_t \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1_t & 0_t \\ 0_t & -1_t \end{pmatrix}\right\}$$

On rappelle qu'étant donné $U = A + jB \in M_t(\mathbb{H})$ avec $A, B \in M_t(\mathbb{C})$, on note

$$i(U) = \begin{pmatrix} A & -B \\ -\overline{B} & -\overline{A} \end{pmatrix}.$$

$$G^3_{r,s} = \left\{M \in M_{r+s}(\mathbb{C});\ {}^t\overline{M} \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & -1_s \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & -1_s \end{pmatrix}\right\}$$

Puis

$$G(\Phi_1) = \begin{cases} G^1_{\frac{m_1}{2}} \times \ldots \times G^1_{\frac{m_1}{2}} & \text{si } L_1 \text{ est de type I,} \\ G^1_{m_1} \times \ldots \times G^1_{m_1} & \text{si } L_1 \text{ est de type II,} \\ G^2_{m_1} \times \ldots \times G^2_{m_1} & \text{si } L_1 \text{ est de type III,} \\ G^3_{r^1_1, s^1_1} \times \ldots \times G^3_{r^1_{g_1}, s^1_{g_1}} & \text{si } L_1 \text{ est de type IV.} \end{cases}$$

Remarque. Si K est un sous-groupe compact de $G(\Phi_1)$ alors $\mathfrak{H}(\Phi_1)$ s'identifie à $G(\Phi_1)/K$.

Soient $z = (z_1, \ldots, z_{g_1}) \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$ et $V = (V_1, \ldots, V_{g_1}) \in G(\Phi_1)$. Pour tout $\nu = 1, \ldots, g_1$, on pose

$$V_\nu = \begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu \\ c_\nu & d_\nu \end{pmatrix}$$

où $a_\nu, b_\nu, c_\nu, d_\nu$ sont des matrices carrées dans le cas de type I, II ou III, et où $a_\nu \in M_{r^1_\nu}(\mathbb{C})$, et $d_\nu \in M_{s^1_\nu}(\mathbb{C})$ dans le cas où L_1 est de type IV. L'action de $V \in G(\Phi_1)$ sur $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$ que l'on note

$$V(z) = (z'_1, \ldots, z'_{g_1})$$

est définie par

$$z'_\nu = \begin{cases} (a_\nu z_\nu + b_\nu)(c_\nu z_\nu + d_\nu)^{-1} & \text{si } L_1 \text{ est de type I, II ou III,} \\ (\overline{a}_\nu z_\nu + \overline{b}_\nu)(\overline{c}_\nu z_\nu + \overline{d}_\nu)^{-1} & \text{si } L_1 \text{ est de type IV et } r^1_\nu s^1_\nu \neq 0, \\ z_\nu & \text{si } L_1 \text{ est de type IV et } r^1_\nu s^1_\nu = 0. \end{cases}$$

Pour définir correctement des familles analytiques de triplets incluses dans $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$, on commence par se fixer:

1) Une matrice $T_1 \in \mathrm{Gl}_{m_1}(L_1)$ telle que
a) $T_1^{\rho_1} = -T_1$
b) $\sqrt{-1}(\omega^1_\nu(T_1))^{-1}$ soit de même signature que J^1_ν pour tout $1 \leq \nu \leq g_1$, où

$$J^1_\nu = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1_{\frac{m_1}{2}} & 0 \\ 0 & -1_{\frac{m_1}{2}} \end{pmatrix} & \text{si } L_1 \text{ est de type I} \\ \begin{pmatrix} 1_{m_1} & 0 \\ 0 & -1_{m_1} \end{pmatrix} & \text{si } L_1 \text{ est de type II ou III} \\ \begin{pmatrix} 1_{r^1_\nu} & 0 \\ 0 & -1_{s^1_\nu} \end{pmatrix} & \text{si } L_1 \text{ est de type IV} \end{cases}$$

On pose alors

$$T^1_\nu = \omega^1_\nu(T_1)$$

Si L_1 est de type I ou II, on construit à partir de T^1_ν une matrice W^1_ν à coefficients algébriques pour tout $\nu = 1, \ldots, g_1$ satisfaisant l'égalité suivante

$$W^1_\nu (T^1_\nu)^{-1}\, {}^t W^1_\nu = \begin{pmatrix} 0_{l_1} & 1_{l_1} \\ -1_{l_1} & 0_{l_1} \end{pmatrix},$$

où

$$l_1 = \begin{cases} \frac{m_1}{2} & \text{si } L_1 \text{ est de type I,} \\ m_1 & \text{si } L_1 \text{ est de type II.} \end{cases}$$

Si L_1 est de type III, on peut trouver un élément $W_1 \in M_{m_1}(L \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}})$ tel que

$$\pi_\nu(W_1 T_1^{-1} W_1^{\rho_1}) = \sqrt{-1} 1_{m_1}.$$

On pose alors

$$W_\nu^1 = \omega_\nu^1(W_1)$$

pour tout $\nu = 1, \dots, g_1$.

Si L_1 est de type IV, on choisit pour tout $\nu = 1, \dots, g_1$ une matrice $W_\nu^1 \in M_{m_1 q_1}(\overline{\mathbb{Q}})$ telle que

$$W_\nu^1 (\sqrt{-1}(T_\nu^1)^{-1})\, {}^t\overline{W}_\nu^1 = \begin{pmatrix} 1_{r_\nu^1} & 0 \\ 0 & -1_{s_\nu^1} \end{pmatrix}.$$

2) Un $\mathbb{Z}$-sous-module $\mathcal{M}_1$ de $L_1^{m_1}$ de rang $2n$ vérifiant

$$\mathrm{tr}_{L_1/\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_1 T_1 \mathcal{M}_1^{\rho_1}) \subset \mathbb{Z}.$$

Posons

$$G(T_1) = \{U \in M_{m_1}(L_1 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}); U T_1 U^{\rho_1} = T_1\}$$

et

$$\Gamma(T_1, \mathcal{M}_1) = \{U \in M_{m_1}(L_1); U T_1 U^{\rho_1} = T_1, \mathcal{M} U = \mathcal{M}\}.$$

Pour tout $U \in G(T_1)$, on note

$$\Psi(U) = {}^t\left({}^t\overline{W}_1^{1\,-1} \omega_1^1(U)\, {}^t\overline{W}_1^1, \dots, {}^t\overline{W}_{g_1}^{1\,-1} \omega_{g_1}^1(U)\, {}^t\overline{W}_{g_1}^1\right).$$

L'application Ψ est un morphisme de groupe injectif de $G(T_1)$ dans $G(\Phi_1)$. L'action de $M \in \Gamma(T_1, \mathcal{M}_1)$ sur $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$ est déduite de l'action de $\Psi(M)$ sur $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$.

Remarque. Soit $z' = \Psi(U)z$, où $U \in \Gamma(T_1, \mathcal{M}_1)$ et $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$. Alors $z_\nu \in \mathfrak{H}(\Phi_\nu^1)(\overline{\mathbb{Q}})$ si et seulement si $z'_\nu \in \mathfrak{H}(\Phi_\nu^1)(\overline{\mathbb{Q}})$.

A l'aide de T_1 et de $\mathcal{M}_1$, G.Shimura construit pour tout $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$, un élément $(A, \mathcal{C}, \theta)$ de $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$. La famille analytique $\Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$ désignera le sous-ensemble de $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$ lorsque le point z décrit $\mathfrak{H}(\Phi_1)$.

Théorème 3.5. *On dispose d'une bijection entre $\Gamma(T_1, \mathcal{M}_1) \backslash \mathfrak{H}(\Phi_1)$ et les classes d'isomorphisme d'éléments de $\Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$.*

Référence. Voir l'article de [Shi1] théorème 1 p.163 et théorème 2 p.165.

Remarque. Pour faire le lien avec le sous-paragraphe a), il convient de remarquer que

$$\Sigma_{n,d} = \Sigma(J_d, \mathbb{Z}^{2n})$$

et

$$\Gamma_{n,d} = \Gamma(J_d, \mathbb{Z}^{2n}).$$

Précisons maintenant le tore complexe $A(\mathbb{C})$ sous-jacent au triplet associé à z et appartenant à $\Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$ Posons

$$Y_\nu = \begin{cases} \begin{pmatrix} z_\nu & 1_{\frac{m_1}{2}} \\ \overline{z}_\nu & 1_{\frac{m_1}{2}} \end{pmatrix} & \text{si } L_1 \text{ est de type I,} \\ \begin{pmatrix} z_\nu & 1_{m_1} \\ \overline{z}_\nu & 1_{m_1} \end{pmatrix} & \text{si } L_1 \text{ est de type II,} \\ \begin{pmatrix} -z_\nu & 1_{m_1} \\ 1_{m_1} & \overline{z}_\nu \end{pmatrix} & \text{si } L_1 \text{ est de type III,} \\ \begin{pmatrix} 1_{r_\nu^1} & z_\nu \\ {}^t\overline{z}_\nu & 1_{s_\nu^1} \end{pmatrix} & \text{si } L_1 \text{ est de type IV.} \end{cases}$$

Puis

$$X_\nu^1(z, T_1) = Y_\nu^1 \overline{W}_\nu^1$$

A l'aide de la matrice $X_\nu^1(z, T_1)$, on construit $r_1^\nu(z, T_1), \ldots, r_{m_1}^\nu(z, T_1)$ des éléments de $\mathbb{C}^{\frac{n}{g_1}}$ par les équations (17), (18), (19) et (20) de l'article de [Shi1] pp.158-159.

Il est important de remarquer pour les démonstrations qui vont suivre que

$$z_\nu \in \mathfrak{H}(\Phi_\nu^1)(\overline{\mathbb{Q}})$$

implique

$$r_j^\nu(z, T_1) \in \overline{\mathbb{Q}}^{\frac{n}{g_1}}$$

pour tout $1 \leq j \leq m_1$. On note

$$r_j(z, T_1) = {}^t(r_j^1(z, T_1), \ldots, r_j^\nu(z, T_1), \ldots, r_j^{g_1}(z, T_1)) \in \mathbb{C}^n$$

pour tout $1 \leq j \leq m_1$.

Les éléments $r_1(z, T_1), \ldots, r_{m_1}(z, T_1)$ forment une base de $\mathbb{C}^n$ sur $\Phi_1(L_1)$. Notons

$$D(z, T_1, \mathcal{M}_1) = \left\{ \sum_{i=1}^{m_1} \Phi_1(a_i) r_i(z, T_1); (a_1, \ldots, a_{m_1}) \in \mathcal{M}_1 \right\}.$$

On a alors

$$A(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n / D(z, T_1, \mathcal{M}_1).$$

Réciproquement on dispose du résultat suivant

Théorème 3.6. *Etant donné $(A, \mathcal{C}, \theta) \in S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$, il existe une matrice $T_1 \in \mathrm{Gl}_{m_1}(L_1)$ et $\mathcal{M}_1$ un $\mathbb{Z}$-sous-module libre de $L_1^{m_1}$ de rang $2n$ vérifiant les conditions ci dessus tel que $(A, \mathcal{C}, \theta) \in \Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$*

Références. Voir le théorème 1 p.163. de l'article de [Shi1]

Indiquons la construction de T_1 et de $\mathcal{M}_1$ à partir d'un élément $(A, \mathcal{C}, \theta)$ de $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$, puis la construction de $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$ associé à $(A, \mathcal{C}, \theta) \in \Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$.

A isomorphisme près, la donnée de $(A, \mathcal{C}, \theta) \in S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$ est équivalente à la donnée d'un réseau D de $\mathbb{C}^n$ tel que $D_\mathbb{Q} = D \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ soit un $\Phi_1(L_1)$-espace vectoriel et d'une forme de Riemann E pour le réseau D.

Fixons $(r_1, \dots, r_{m_1})$ une base de $D_{\mathbb{Q}}$ sur $\Phi_1(L_1)$. On pose

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ (a_1, \dots, a_{m_1}) \in L_1^{m_1} ; \sum_{i=1}^{m_1} \Phi_1(a_i) r_i \in D \right\},$$

et on définit une unique matrice $T = (t_{ij})_{1 \leq i,j \leq m_1} \in \mathrm{Gl}_{m_1}(L_1)$ par

$$E\left(\sum_{i=1}^{m_1} \Phi_1(a_i) r_i, \sum_{j=1}^{m_1} \Phi_1(b_j) r_j \right) = \mathrm{tr}_{L_1/\mathbb{Q}} \left(\sum_{1 \leq i,j \leq m_1} a_i t_{ij} b_j^{\rho_1} \right).$$

Passons maintenant à la construction du point $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$ à partir de T_1, $\mathcal{M}_1$ et de la base $(r_1, \dots, r_{m_1})$ de $D_{\mathbb{Q}}$ sur $\Phi_1(L_1)$. On construit les matrices X_ν^1 à partir des éléments $r_1^\nu, \dots, r_{m_1}^\nu$ selon les équations (17), (18), (19) et (20) de l'article de [Shi1]. On note

$$X_\nu^1 (\overline{W}_\nu^1)^{-1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} U_\nu & V_\nu \\ \overline{U}_\nu & \overline{V}_\nu \end{pmatrix} & \text{si } L_1 \text{ est de type I ou II,} \\ \begin{pmatrix} U_\nu & V_\nu \\ \overline{V}_\nu & -\overline{U}_\nu \end{pmatrix} & \text{si } L_1 \text{ est de type III,} \\ \begin{pmatrix} A_\nu & B_\nu \\ C_\nu & D_\nu \end{pmatrix} & \text{si } L_1 \text{ est de type IV.} \end{cases}$$

et on pose

$$z_\nu = \begin{cases} V_\nu^{-1} U_\nu \in \mathfrak{H}^1_{\frac{m_1}{2}} & \text{si } L_1 \text{ est de type I ou II,} \\ -V_\nu^{-1} U_\nu \in \mathfrak{H}^2_{m_1} & \text{si } L_1 \text{ est de type III,} \\ \overline{A}_\nu^{-1} \overline{B}_\nu = {}^t(D_\nu^{-1} C_\nu) \in \mathfrak{H}^3_{r_\nu^1, s_\nu^1} & \text{si } L_1 \text{ est de type IV.} \end{cases}$$

L'élément $(A, \mathcal{C}, \theta) \in \Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$ est alors représenté par $z = (z_1, \dots, z_{g_1}) \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$.

Théorème et définition 3.7. *Un point $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$ est spécial si z est le point fixe d'un tore maximal $T \subset G(\Phi_1)$ défini sur $\mathbb{Q}$ et compact. Etant donné $\Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$ une famille analytique incluse dans $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$, la variété abélienne sous-jacente au triplet associé à z et appartenant à $\Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$ est à multiplication complexe si et seulement si z est un point spécial du domaine $\mathfrak{H}(\Phi_1)$.*

Remarque. Si $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$ est un point spécial, alors $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)(\overline{\mathbb{Q}})$. Le théorème de C.S.W donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point z appartenant à $\mathfrak{H}(\Phi_1)(\overline{\mathbb{Q}})$ soit spécial.

Théorème 3.8. *Il existe dans toutes les familles analytiques $\Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$ des variétés abéliennes polarisées à multiplication complexe. De plus dans l'espace $\Gamma(T_1, \mathcal{M}_1) \backslash \mathfrak{H}(\Phi_1)$ les points spéciaux sont Zariski denses.*

Théorème 3.9. *Soient $(A, \mathcal{C})$ et $(A', \mathcal{C}')$ deux variétés abéliennes polarisées de dimension n définies sur $\mathbb{C}$. Soit θ (resp. θ') un morphisme d'algèbre injectif de L_1 dans $\mathrm{End}^0(A)$ (resp. $\mathrm{End}^0(A')$), et supposons que $(A, \mathcal{C}, \theta)$ appartienne à $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$.*

1) Si A' est une variété abélienne isogène à A, et si $(A', \mathcal{C}', \theta') \in S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$, alors notant $z = (z_1, \ldots, z_{g_1}) \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$ (resp. $z' = (z'_1, \ldots, z'_{g_1}) \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$) un représentant de $[z] \in \Gamma_{\Sigma_1} \backslash \mathfrak{H}(\Phi_1)$ (resp. de $[z'] \in \Gamma_{\Sigma'_1} \backslash \mathfrak{H}(\Phi_1)$) associé à $(A, \mathcal{C}, \theta) \in \Sigma_1$ (resp. à $(A', \mathcal{C}', \theta') \in \Sigma'_1$), alors pour tout ν compris entre 1 et g_1 on a

$$z_\nu \in \mathfrak{H}(\Phi^1_\nu)(\overline{\mathbb{Q}}) \iff z'_\nu \in \mathfrak{H}(\Phi^1_\nu)(\overline{\mathbb{Q}}).$$

En particulier, le fait que le point z_ν de $\mathfrak{H}(\Phi^1_\nu)$ soit algébrique est indépendant de $\mathcal{C}$, θ et du choix de la famille analytique $\Sigma_1 \subset S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$.

2) Si les triplets $(A, \mathcal{C}, \theta)$ et $(A', \mathcal{C}', \theta')$ sont isogènes, alors le triplet $(A', \mathcal{C}', \theta')$ appartient à $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$.

Preuve du théorème 3.9. Commencons par démontrer la deuxième partie du théorème. La seule chose non triviale à vérifier est que l'involution positive ρ'_1 induite sur L_1 par la polarisation $\mathcal{C}'$ de A' est égale ρ_1.

Désignons par $f : (A, \mathcal{C}, \theta) \to (A', \mathcal{C}', \theta')$ une isogénie. On a:

$$E(x, \Phi_1(a^{\rho_1})y) = E(\Phi_1(a)x, y)$$

et

$$E(\Phi_1(a)x, y) = \frac{1}{n_f} E'(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f) \circ \Phi_1(a)x, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f)y).$$

Comme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f) \circ \Phi_1(a) = \Phi_1(a) \circ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f)$$

on déduit que:

$$E'(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f) \circ \Phi_1(a)x, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f)y) = E'(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f)x, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f) \circ \Phi_1(a^{\rho'_1})y)$$

Puisque

$$E'(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f)x, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f) \circ \Phi_1(a^{\rho'_1})y) = n_f E(x, \Phi_1(a^{\rho'_1})y)$$

on déduit que

$$E(x, \Phi_1(a^{\rho_1})y) = E(x, \Phi_1(a^{\rho'_1})y)$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. La forme bilinéaire alternée E étant non dégénérée, on a:

$$\Phi_1(a^{\rho_1}) = \Phi_1(a^{\rho'_1})$$

pour tout $a \in L_1$. Ce qui prouve que $\rho'_1 = \rho_1$, la représensentation Φ_1 étant injective. D'où $(A', \mathcal{C}', \theta') \in S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$.

Passons maintenant à la démonstration de la première partie du théorème. On sait alors (voir [Shi1] p.162 et p.165) qu'il existe $\Lambda'^1_\nu \in \mathrm{Gl}_{\frac{m_1}{2}}(\mathbb{C})$ (resp. $\Sigma^1_\nu \in \mathrm{Gl}_{m_1}(\mathbb{C})$), (resp. $\Sigma^1_\nu \in \mathrm{Gl}_{r^1_\nu}(\mathbb{C})$ et $\Delta^1_\nu \in \mathrm{Gl}_{s^1_\nu}(\mathbb{C})$) si L_1 est de type I, (resp. de type II ou III), (resp. de type IV), telle que, si on note

$$\Lambda^1_\nu = \begin{cases} \begin{pmatrix} \Lambda'^1_\nu & 0 \\ 0 & \overline{\Lambda}'^1_\nu \end{pmatrix} & \text{si } L_1 \text{ est de type I,} \\ \begin{pmatrix} \Sigma^1_\nu & 0 \\ 0 & \overline{\Sigma}^1_\nu \end{pmatrix} & \text{si } L_1 \text{ est de type II ou III,} \\ \begin{pmatrix} \Sigma^1_\nu & 0 \\ 0 & \overline{\Delta}^1_\nu \end{pmatrix} & \text{si } L_1 \text{ est de type IV.} \end{cases}$$

alors on a:

$$\Lambda_\nu^1 X_\nu^1(z,T_1) = X_\nu^1(z',T_1')\,{}^t\omega_\nu^1(U)$$

où $U \in M_{m_1}(L_1)$. D'autre part

$$X_\nu^1(z,T_1) = Y_\nu^1(z,T_1)\overline{W}_\nu^1$$

et

$$X_\nu^1(z',T_1') = Y_\nu^1(z',T_1')\overline{W}'^{\,1}_\nu.$$

On déduit, sachant que W_ν^1 et $W_\nu'^1$ sont des matrices à coefficients algébriques, que si $z_\nu' \in \mathfrak{H}(\Phi_\nu^1)(\overline{\mathbb{Q}})$, alors

$$\Lambda_\nu^1 Y_\nu(z,T_1) \in \begin{cases} M_{m_1}(\overline{\mathbb{Q}}) & \text{si } L_1 \text{ est de type I,} \\ M_{2m_1}(\overline{\mathbb{Q}}) & \text{si } L_1 \text{ est de type II ou III,} \\ M_{m_1q_1}(\overline{\mathbb{Q}}) & \text{si } L_1 \text{ est de type IV.} \end{cases}$$

Pour établir l'algébricité de z_ν il ne reste plus qu'à évaluer le produit matriciel $\Lambda_\nu^1 Y_\nu(z,T_1)$ dans chacun des cas suivants:

a) L_1 est de type I, on a

$$\begin{pmatrix} \Lambda_\nu'^1 & 0_{\frac{m_1}{2}} \\ 0_{\frac{m_1}{2}} & \overline{\Lambda}_\nu'^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_\nu & I_{\frac{m_1}{2}} \\ \overline{z}_\nu & I_{\frac{m_1}{2}} \end{pmatrix} \in M_{m_1}(\overline{\mathbb{Q}})$$

ce qui prouve que:

$$\Lambda_\nu'^1 \in \mathrm{Gl}_{\frac{m_1}{2}}(\overline{\mathbb{Q}})$$

puis que:

$$z_\nu \in M_{\frac{m_1}{2}}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

b) L_1 est de type II, on a

$$\begin{pmatrix} \Sigma_\nu^1 & 0_{m_1} \\ 0_{m_1} & \overline{\Sigma}_\nu^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_\nu & I_{m_1} \\ \overline{z}_\nu & I_{m_1} \end{pmatrix} \in M_{2m_1}(\overline{\mathbb{Q}})$$

ce qui prouve que:

$$\Sigma_\nu^1 \in \mathrm{Gl}_{m_1}(\overline{\mathbb{Q}})$$

puis que:

$$z_\nu \in M_{m_1}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

c) L_1 est de type III, on a

$$\begin{pmatrix} \Sigma_\nu^1 & 0 \\ 0 & \overline{\Sigma}_\nu^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z_\nu & I_{m_1} \\ I_{m_1} & \overline{z}_\nu \end{pmatrix} \in M_{2m_1}(\overline{\mathbb{Q}})$$

ce qui prouve que:

$$\Sigma_\nu^1 \in \mathrm{Gl}_{m_1}(\overline{\mathbb{Q}})$$

puis que:

$$z_\nu \in M_{m_1}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

d) Si L_1 est de type IV, on a

$$\begin{pmatrix} \Sigma_\nu^1 & 0 \\ 0 & \overline{\Delta}_\nu^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{r_\nu^1} & z_\nu \\ {}^t\overline{z}_\nu & I_{s_\nu^1} \end{pmatrix} \in M_{m_1 q_1}(\overline{\mathbb{Q}})$$

ce qui prouve que:

$$\Sigma_\nu^1 \in \mathrm{Gl}_{r_\nu^1}(\overline{\mathbb{Q}})$$

puis que:

$$z_\nu \in M_{r_\nu^1, s_\nu^1}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

§4 Notion de plongement modulaire

Commençons par le lemme trivial suivant:

Lemme 4.1. *Donnons nous k un corps. Soient R_1 et R_2 deux k-algèbres, et $f : R_1 \to R_2$ un morphisme de k-algèbres, alors étant donné u un entier strictement positif, l'application:*

$$M_u(f) : M_u(R_1) \to M_u(R_2)$$

définie par:

$$M_u(f)(A) = (f(a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq u} \in M_u(R_2)$$

où

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq u} \in M_u(R_1)$$

est un morphisme de k-algèbre. De plus $M_u(f)$ est injective si f est injective.

Preuve du lemme 4.1. Il est clair que:

$$M_u(f)(A+B) = M_u(f)(A) + M_u(f)(B),$$

et que:

$$M_u(f)(\lambda A) = \lambda M_u(f)(A)$$

pour tout $\lambda \in k$ et A, B éléments de $M_u(R_1)$.

Il reste à vérifier que:

$$M_u(f)(AB) = (M_u(f)(A))(M_u(f)(B)).$$

Posons $C = AB$. On a:

$$f(c_{ij}) = f\left(\sum_{k=1}^{u} a_{ik} b_{kj}\right),$$

i.e.

$$f(c_{ij}) = \sum_{k=1}^{u} f(a_{ik}) f(b_{kj})$$

ce qui prouve que

$$M_u(f)(C) = (M_u(f)(A))(M_u(f)(B))$$

et termine la démonstration du lemme.

On se donne une algèbre à division L_2 munie d'une involution positive ρ_2. Fixons un entier naturel strictement positif u, une $\mathbb{Q}$-algèbre L_1 et un morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbre injectif

$$i : L_1 \hookrightarrow M_u(L_2).$$

L'involution ρ_2 s'étend de manière naturelle en une involution positive sur $M_u(L_2)$, comme on l'a rappelé au §3.b de ce chapitre, et la restriction via i fournit une involution positive sur L_1 que l'on notera ρ_1.

Soient n_2 un entier naturel tel que $[L_2 : \mathbb{Q}] \,|\, 2n_2$ et Φ_2 une représentation complexe canonique admissible associée à L_2 et à n_2. Donnons nous $(A_2, \mathcal{C}_2, \theta_2)$ un triplet appartenant à une famille analytique Σ_2 incluse dans $S(L_2, \Phi_2, \rho_2)$.

Posons

$$A_1 = A_2^u$$

et

$$\theta_1 = M_u(\theta_2) \circ i.$$

Le morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbre θ_1 de L_1 dans $M_u(\mathrm{End}^0(A_2)) \simeq \mathrm{End}^0(A_1)$ est injectif par le lemme 4.1. Enfin si on désigne par $\mathcal{C}_1$ la polarisation produit induite par $\mathcal{C}_2$ sur A_1, alors le triplet $(A_1, \mathcal{C}_1, \theta_1)$ appartient à une famille analytique Σ_1 incluse dans $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$

Théorème 4.2. *Il existe $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H(\Phi_2), H(\Phi_1))$ dépendant que de Σ_1 et Σ_2 tel que l'image d'un élément de Σ_2 représenté par $z \in \mathfrak{H}(\Phi_2)$ par l'injection canonique $\Sigma_2 \hookrightarrow \Sigma_1$ soit un élément de Σ_1 représenté par $F(z) \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$.*

Référence. Voir le livre de [Sa] p.85. Il convient de noter qu'il est important de travailler avec les domaines symétriques bornées. En particulier, on suppose ici que

$$\mathfrak{H}_t^1 = \left\{ M \in M_t(\mathbb{C});\ {}^tM = M \text{ et } I_t - M\overline{M} \text{ positive hermitienne} \right\}.$$

On identifiera toujours de manière canonique $H(\Phi_i)$ avec $\mathbb{C}^{d_i}$ où $d_i = \dim_{\mathbb{C}} H(\Phi_i)$ pour tout $i = 1, 2$.

Théorème 4.3. *On a*

$$Mat_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(F) \in M_{d_2, d_1}(\overline{\mathbb{Q}}),$$

où $\mathcal{B}_i$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^{d_i}$ pour tout $i = 1, 2$.

Preuve du théorème 4.3. En effet, pour tout $z \in \mathfrak{H}(\Phi_2)$ spécial on a $z \in \mathfrak{H}(\Phi_2)(\overline{\mathbb{Q}})$ et $F(z) \in \mathfrak{H}(\Phi_1)(\overline{\mathbb{Q}})$. Comme de plus l'ensemble des points spéciaux $z \in \mathfrak{H}(\Phi_2)$ est dense on peut trouver une base de $H(\Phi_2)$ formée de tels points.

Proposition 4.4. *Soit z un point de $\mathfrak{H}(\Phi_2)$ tel que $F(z) \in \mathfrak{H}(\Phi_1)(\overline{\mathbb{Q}})$ alors $z \in \mathfrak{H}(\Phi_2)(\overline{\mathbb{Q}})$*

Preuve de la proposition 4.4. Il suffit en fait de montrer qu'il existe:

$$z' \in \mathfrak{H}(\Phi_2)(\overline{\mathbb{Q}})$$

tel que:

$$F(z') = F(z).$$

En effet, on aura $z = \gamma z'$ où $\gamma \in \Gamma_{\Sigma_2}$, et on conclura que $z \in \mathfrak{H}(\Phi_2)(\overline{\mathbb{Q}})$. Ainsi, la proposition 4.4 va résulter du lemme suivant:

Lemme 4.5. *Soient $M \in M_{d_2,d_1}(\overline{\mathbb{Q}})$ et $Y \in M_{d_2,1}(\overline{\mathbb{Q}})$. Alors, s'il existe $X \in M_{d_1,1}(\mathbb{C})$ telle que $Y = MX$, il existe aussi $X_0 \in M_{d_1,1}(\overline{\mathbb{Q}})$ telle que $MX_0 = Y$.*

Preuve du lemme 4.5. Il existe un entier q, des nombres complexes $t_1, \dots, t_q$ tels que les éléments $1, t_1, \dots, t_q$ soient $\overline{\mathbb{Q}}$ linéairement indépendants et des éléments $X_0, \dots, X_q$ de $M_{d_1,1}(\overline{\mathbb{Q}})$ tels que

$$X = X_0 + t_1 X_1 + \dots + t_q X_q.$$

Par suite

$$Y = MX_0 + t_1 MX_1 + \dots + t_q MX_q.$$

Comme $Y, MX_0, MX_1, \dots, MX_q$ sont des éléments de $M_{d_2,1}(\overline{\mathbb{Q}})$, on déduit vu la $\overline{\mathbb{Q}}$-linéaire indépendance des éléments $1, t_1, \dots, t_q$ que:

$$Y = MX_0.$$

Corollaire 4.6. *Soit $(A, \mathcal{C}, \theta)$ un triplet appartenant à une famille analytique Σ incluse dans $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$ telle que $\mathfrak{H}(\Phi_1) = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Supposons que A soit isogène à une puissance pure d'une variété abélienne simple A_2 i.e A_1 isogène à A_2^u. Alors, si $\mathfrak{H}(\Phi_2) = \mathfrak{H}$, où Φ_2 est la représentation complexe canonique admissible associée à A_2, le triplet $(A, \mathcal{C}, \theta) \in \Sigma$ est représenté par $(z', z'') \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ vérifiant $z' \in \overline{\mathbb{Q}}$ si et seulement si $z'' \in \overline{\mathbb{Q}}$.*

Preuve du corollaire 4.6. Tout d'abord, on peut supposer que

$$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}.$$

Soit $\mathcal{C}_2$ la polarisation de A_2 induite par $\mathcal{C}_1$ et l'isogénie. Fixons θ_2 un isomorphisme entre une algèbre à division L_2 et $\mathrm{End}^0(A_2)$. D'où une injection

$$i : L_1 \hookrightarrow M_u(L_2).$$

Le triplet $(A_2, \mathcal{C}_2, \theta_2)$ appartient à une famille analytique Σ_2 incluse dans $S(L_2, \Phi_2, \rho_2)$. Notons $\tau \in \mathfrak{H}$ un représentant de $(A_2, \mathcal{C}_2, \theta_2) \in \Sigma_2$, et Σ_1 la famille analytique construite à partir de $(A_2, \mathcal{C}_2, \theta_2)$, Σ_2 et i comme dans le préambule. Soit $(A_1, \mathcal{C}_1, \theta_1)$ l'image de $(A_2, \mathcal{C}_2, \theta_2)$ par l'injection canonique $\Sigma_2 \hookrightarrow \Sigma_1$. On sait d'après le théorème qu'il existe a' et a'' deux nombres algébriques dépendant que de Σ_1 et Σ_2 tel que $(A_1, \mathcal{C}_1, \theta_1) \in \Sigma_1$ soit représenté par $(z_1', z_1'') \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ où

$$\begin{cases} z_1' = a'\tau \\ z_1'' = a''\tau \end{cases}$$

Par suite $z_1' \in \overline{\mathbb{Q}}$ si et seulement si $z_1'' \in \overline{\mathbb{Q}}$. Maintenant $(A, \mathcal{C}, \theta)$ et $(A_1, \mathcal{C}_1, \theta_1)$ sont deux éléments de $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$ isogènes et on conclut par le théorème 3.9.

Nous allons maintenant donner quelques applications du corollaire 4.6, pour cela, nous allons avoir besoin du lemme suivant

Lemme 4.7. *Soit A une surface abélienne simple définie sur $\mathbb{C}$. Notons $L = \mathrm{End}^0(A)$. Alors L ne peut être de type III, et on a la classification suivante*

1) Si L est de type I, alors L est ou bien un corps totalement réel de degré 2 ou bien un corps isomorphe à $\mathbb{Q}$.

2) Si L est de type II, alors L est une algèbre à division de degré 4 totalement indéfinie.

3) Si L est de type IV, alors L est un corps commutatif de degré 2 ou 4.

De plus étant donné une algèbre à division L comme ci-dessus, il existe une surface abélienne simple A définie sur $\mathbb{C}$ telle que $L = \mathrm{End}^0(A)$.

Notations. Si L_1 est de type I, II, III on notera parfois $D_n(L_1)$ au lieu de $\mathfrak{H}(\Phi_1)$, et $S_n(L_1, \rho_1)$ au lieu de $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$. Bien endendu Φ_1 désigne la représentation canonique admissible associée à L_1 et à n. Si on ne désire pas préciser une famille analytique $\Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$ incluse dans $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$, on la notera plutôt $\Sigma_n(L_1, \rho_1)$.

Si L_1 est de type IV, étant donné pour tout ν compris entre 1 et g_1 un couple (r_ν^1, s_ν^1) vérifiant $r_\nu^1 + s_\nu^1 = m_1 q_1$, on notera parfois $D_n(L_1, r_1^1, \dots, r_{g_1}^1)$ au lieu de $\mathfrak{H}(\Phi_1)$, et $S_n(L_1, r_1^1, \dots, r_{g_1}^1, \rho_1)$ au lieu de $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$. Ici encore Φ_1 désigne la représentation complexe canonique admissible associée à L_1, n et au couple (r_ν^1, s_ν^1) pour tout $1 \leq \nu \leq g_1$. De même, si on ne désire pas préciser une famille analytique $\Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$ incluse dans $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$, on la notera plutôt $\Sigma_n(L_1, r_1^1, \dots, r_{g_1}^1, \rho_1)$.

De plus lorsqu'il n'existe qu'une seule involution positive ρ_1 sur L_1 nous ne ferons pas toujours figurer ρ_1 dans les notations.

Théorème 4.8. *Soit L_1 un corps totalement réel de degré 2. Notons $\Sigma_2(L_1)$ une famille analytique incluse dans $S_2(L_1)$ paramétrée par $D_2(L_1) = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Soit $z = (z_1, z_2) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ tel que l'un des deux nombres complexes z_1 ou z_2 soit algébrique l'autre étant transcendant, alors la surface abélienne A sous-jacente au triplet associé à $z = (z_1, z_2)$ et appartenant à $\Sigma_2(L_1)$ est simple.*

Preuve du théorème 4.8. Raisonnons par l'absurde et supposons que A soit non simple. D'après le théorème de réductibilité de Poincaré et la proposition 1.26, il est facile de voir que nécéssairement la variété abélienne A est isogène à A_1^2 où A_1 est une courbe elliptique. Comme $D_1(\mathbb{Q}) = \mathfrak{H}$ la situation est redevable du corollaire 4.6 , et on déduit que les deux nombres complexes z_1 et z_2 sont soit simultanément algébriques, soit simultanément transcendants. Contradiction.

Théorème 4.9. *Soient L_1 une algèbre à division de type II et de degré 8 et ρ_1 une involution positive sur L_1. Notons $\Sigma_4(L_1, \rho_1)$ une famille analytique incluse dans $S_4(L_1, \rho_1)$ paramétrée par $D_4(L_1) = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Soit $z = (z_1, z_2) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ tel que l'un des deux nombres complexes z_1 ou z_2 est algébriques, l'autre étant transcendant, alors la variété abélienne sous-jacente au triplet associé à $z = (z_1, z_2)$ et appartenant à $\Sigma_4(L_1, \rho_1)$ est simple.*

Preuve du théorème 4.9. Raisonnons par l'absurde et supposons que A est non simple. Par le corollaire 1.25, A est isogène à

$$A_1^{\alpha_1} \times \dots \times A_i^{\alpha_i} \times \dots \times A_s^{\alpha_s}$$

où les variétés abéliennes A_i pour $i = 1, \dots, s$ sont simples deux à deux non isogènes. D'après la proposition 1.26, on sait que pour tout indice i compris entre

1 et s l'algèbre L_1 s'injecte dans $\mathrm{End}^0(A_i^{\alpha_i})$. Si $s \geq 2$, alors $\dim A_i^{\alpha_i} < 4$, et on ne peut avoir:

$$8 = [L_1 : \mathbb{Q}] \mid 2\dim(A_i^{\alpha_i})$$

D'où nécessairement $s = 1$ et A est isogène à $A_1^{\alpha_1}$. Le cas $\dim A_1 = 1$ est à exclure à l'aide d'un argument similaire à celui donné au théorème précédent. Ainsi nécessairement $\dim A_1 = 2$, et A est isogène à A_1^2.

Connaisant les différentes possibilités pour l'algèbre des endomorphismes d'une surface abélienne et tenant compte du fait que L_1 s'injecte dans $M_2(\mathrm{End}^0(A_1))$, on déduit que nécessairement $\mathrm{End}^0(A_1)$ ne peut être qu'un corps C.M. de degré 4 ou une algèbre de type II et de degré 4. Il est clair que $\mathrm{End}^0(A_1)$ ne peut être un corps C.M. de degré 4, en effet A_1 serait à multiplication complexe et il en serait donc de même pour la variété abélienne A ce qui implique en particulier que les nombres complexes z_1 et z_2 sont tous les deux algébriques. Contradiction.

Ainsi $L_1' = \mathrm{End}^0(A_1)$ est une algèbre à division de type II et de degré 4. Comme $D_2(L_1') = \mathfrak{H}$, on déduit d'après le corollaire 4.6 que les nombres complexes z_1 et z_2 sont soit simultanément algébriques, soit simultanément transcendants. Contradiction.

Théorème 4.10. *Soit L_1 un corps C.M. de degré 4. Notons $\Sigma_4(L_1, 1, 1)$ une famille analytique incluse dans $S_4(L_1, 1, 1)$ paramétrée par $D_4(L_1, 1, 1) = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Soit $z = (z_1, z_2) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ tel que l'un des deux nombres complexes z_1 ou z_2 est algébrique, l'autre transcendant. Alors la variété abélienne A sous-jacente au triplet associé à $z = (z_1, z_2)$ et appartenant à $\Sigma_4(L_1, 1, 1)$ est simple. De plus $L = \mathrm{End}^0(A)$ ne peut être une algèbre à division non commutative de type IV et de degré 8.*

Preuve du théorème 4.10. Commençons par montrer que A est simple. Pour cela raisonnons par l'absurde et supposons que cela ne soit pas le cas. Comme dans les preuves des théorèmes précédents, il est facile de voir que nécessairement A est isogène à une puissance pure d'une variété abélienne simple A_1. En effet sinon A serait isogène à un produit de deux surfaces abéliennes simples à multiplication complexe, ce qui impliquerait que A est à multiplication complexe et les nombres complexes z_1 et z_2 seraient algébriques.

Il est clair que le cas $\dim A_1 = 1$ est à exclure, en effet $D_1(\mathbb{Q}) = \mathfrak{H}$ et la situation est redevable du corollaire 4.6.

Ainsi nécessairement $\dim A_1 = 2$ et $\mathrm{End}^0(A_1)$ ne peut être qu'un corps totalement réel de degré 2, un corps C.M. de degré 2 ou 4, une algèbre à division de type II et de degré 4.

En appliquant une nouvelle fois le corollaire 4.6, on voit qu'il est impossible que $\mathrm{End}^0(A_1)$ soit un corps C.M. de degré 2 ou même une algèbre à division de type II et de degré 4.

Par ailleurs, si $\mathrm{End}^0(A_1)$ est un corps C.M. de degré 4, alors A_1 est à multiplication complexe, et il en est donc de même pour A. D'où l'algébricité de z_1 et de z_2, ce qui contredit les hypothèses.

Ainsi $\mathrm{End}^0(A_1)$ ne peut être qu'un corps totalement réel F_1 de degré 2, et l'élément $(A, \mathcal{C}, \theta) \in \Sigma_4(L_1, 1, 1)$ est isogène au carré d'un élément appartenant à $\Sigma_2(F_1)$. Vu le théorème 3.9, on peut même supposer que l'élément $(A, \mathcal{C}, \theta) \in \Sigma_4(L_1, 1, 1)$ est isomorphe au carré d'un élément appartenant à $\Sigma_2(F_1)$.

De plus, on a vu qu'il existe (a_1, b_1, a_2, b_2) quatre nombres algébriques tel que si un élément de $\Sigma_2(F_1)$ est représenté par $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$, alors le carré de cet élément, vu comme un élément de $\Sigma_4(L_1, 1, 1)$ est représenté par $z = (z_1(\tau), z_2(\tau)) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ où

$$\begin{cases} z_1(\tau) = a_1\tau_1 + a_2\tau_2 \\ z_2(\tau) = b_1\tau_1 + b_2\tau_2 \end{cases}$$

Notons

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \in M_2(\overline{\mathbb{Q}}).$$

La matrice M ne peut être inversible, en effet, sinon, il existerait $\tau \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ tel que $(z_1(\tau), z_2(\tau)) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ soit un point générique pour les fonctions $f_1, \ldots, f_k$ définies au théorème 3 de l'article de [Shi1]p.169 relativement à la famille analytique $\Sigma_4(L_1, 1, 1)$.

Ainsi, l'élément $(A, \mathcal{C}, \theta) \in \Sigma_4(L_1, 1, 1)$ associé à z est générique, par le préambule du §4 [Shi1] p.176.

Or d'après le théorème 5 de l'article de [Shi1]p.176, on sait que tout élément générique $(A, \mathcal{C}, \theta) \in \Sigma_4(L_1, 1, 1)$ vérifie $\mathrm{End}^0(A) \simeq L_1$. Contradiction. Ainsi la matrice $M \in M_2(\overline{\mathbb{Q}})$ est singulière,

$$b_1 z_1 = a_1 z_2,$$

et

$$b_2 z_1 = a_2 z_2.$$

Les quatre nombres algébriques a_1, a_2, b_1 et b_2 ne peuvent être tous nuls. D'où les nombres complexes z_1 et z_2 sont soit simultanément algébriques, soit simultanément transcendants. Contradiction.

Nous venons donc de prouver que la variété abélienne A est simple.

Supposons maintenant que $L = \mathrm{End}^0(A)$ soit une algébre à division non commutative de type IV et de degré 8. Alors comme $D_4(L_1, 1) = \mathfrak{H}$ on déduit que d'après le corollaire 4.6 que les nombres complexes z_1 et z_2 sont soit simultanément algébriques, soit simultanément transcendants. Contradiction.

DEUXIEME CHAPITRE

Introduction

Soient L_1 une algèbre à division munie d'une involution positive ρ_1, n un entier vérifiant $[L_1 : \mathbb{Q}] \mid 2n$ et Φ_1 une représentation complexe canonique admissible associée à L_1 et à n. Considérons une variété abélienne A définie sur $\mathbb{C}$ de dimension n munie d'une polarisation $\mathcal{C}$, et une injection θ de L_1 dans $\mathrm{End}^0(A)$. Si $(A, \mathcal{C}, \theta)$ appartient à $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$ alors $(A, \mathcal{C}, \theta)$ appartient à une famille analytique Σ_1 incluse dans $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$. Au triplet $(A, \mathcal{C}, \theta) \in \Sigma_1$ on associe un point $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$ bien défini modulo l'action de Γ_{Σ_1} sur $\mathfrak{H}(\Phi_1)$.

Le théorème obtenu par la collaboration de P.B.Cohen, H.Shiga et J.Wolfart que l'on appellera C.S.W et dont on trouvera une référence dans [Co] ou [S-W] s'énonce de la manière suivante:

Théorème. *Si A est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, alors A est à multiplication complexe si et seulement si $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)(\overline{\mathbb{Q}})$.*

Dans tout ce qui va suivre, à l'exception du §3, on se place en fait dans le cas où $L_1 = \mathbb{Q}$. On a alors nécessairement $\Phi_1(a) = aI_n$ pour tout $a \in \mathbb{Q}$, $\rho_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$, et $\mathfrak{H}(\Phi_1) = \mathfrak{H}_n$.

Au paragraphe 1, on va associer à $Z \in \mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$ un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{2n}$ de dimension n, que l'on notera V_Z et que l'on définit par:

$$V_Z = \left\{ (e_1, e_2, \ldots, e_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n}; Z \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{n+1} \\ \vdots \\ e_{2n} \end{pmatrix} = 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})} \right\}.$$

Supposons maintenant que A est une variété abélienne simple. Nous noterons g le degré du sous-corps totalement réel maximal inclus dans le centre de $\mathrm{End}^0(A) = \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et nous introduirons à la section 1.8 du paragraphe 1b) un entier c qui va mesurer "la tendance à la multiplication complexe" de A. L'entier c est compris, par définition, entre 0 et g. Nous montrerons au lemme 1.11 que $c = g$ si et seulement si A est à multiplication complexe. Nous cherchons ici à évaluer la codimension *cod* du plus petit $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{2n}$ contenant V_Z et défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, à l'aide des entiers c, g et n. Nous montrerons en fait que si on suppose de plus que A est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ alors

$$cod = \frac{c}{g} n.$$

Vu que le $\mathbb{C}$-sous-espace V_Z de $\mathbb{C}^{2n}$ est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, ou ce qui revient au même que $cod = n$, si et seulement si $Z \in \mathfrak{H}_n(\overline{\mathbb{Q}})$, on déduit que le résultat proposé ici, améliore, dans un cas particulier, le théorème obtenu par [Co] et [S-W].

Le paragraphe 3 est quant à lui consacré aux retombées de ce résultat lorsque l'on ne suppose plus nécessairement $L_1 = \mathbb{Q}$. En effet, dans ce cadre plus général le domaine $\mathfrak{H}(\Phi_1)$ se décompose en un produit de g_1 domaines symétriques $\mathfrak{H}(\Phi^1_\nu)$ pour $\nu = 1, \ldots, g_1$. Nous donnerons une majoration de

$$\mathrm{Card}\left\{\nu \in \{1, \ldots, g_1\}; z_\nu \in \mathfrak{H}(\Phi^1_\nu)(\overline{\mathbb{Q}})\right\}$$

lorsque A est simple et défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ en fonction de c, g et g_1.

Le plan de ce second chapitre est le suivant. Dans le premier paragraphe, nous donnons le résultat principal de ce chapitre. La démonstration de ce résultat figure au §2, et la démonstration d'un point technique en annexe §4. Le paragraphe 3 est quant à lui réservé à d'autres applications du résultat principal.

§1 Enoncé du théorème principal

a) Corps de définition d'un K-sous-espace vectoriel de K^n.

On fixe dans ce sous-paragraphe K/k une extension de corps. En fait pour les applications, on aura $K = \mathbb{C}$ et $k = \overline{\mathbb{Q}}$.

Définition 1.1. Notons V un K-sous-espace vectoriel de K^n de codimension p. Alors:

$$V = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n ; A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_{M_{p,1}(K)} \right\}$$

avec

$$A \in M_{p,n}(K) \text{ de rang } p.$$

On dit que V est défini sur k si et seulement s'il existe:

$$B = \in \mathrm{Gl}_p(K)$$

telle que:

$$BA \in M_{p,n}(k).$$

On a alors

$$V = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n ; BA \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_{M_{p,1}(K)} \right\}$$

Remarque. Les notations et les hypothèses étant celles de la définition 1.1, il existe $A_1 \in M_p(K)$ une matrice extraite de A inversible. Il est facile de vérifier que V est défini sur k si et seulement si $A_1^{-1} A \in M_{p,n}(k)$.

Proposition 1.2. *Les notations et les hypothèses étant celles de la définition 1.1, le K-sous-espace vectoriel V de K^n est inclus dans un K-sous-espace vectoriel de K^n de codimension r et défini sur k si et seulement s'il existe*

$$B \in M_{r,p}(K)$$

telle que

$$BA \in M_{r,n}(k)$$

et

$$\mathrm{rg}(BA) = r.$$

Pour démontrer la proposition 1.2 nous avons besoin d'un lemme que nous énonçons

Lemme 1.3. *Soient F_1, F_2 et F_3 trois K-espaces vectoriels de dimension finie. Considérons $v_1 \in \mathrm{Hom}_K(F_1, F_2)$ et $v_2 \in \mathrm{Hom}_K(F_1, F_3)$. Si $\ker(v_1) \subseteq \ker(v_2)$, il existe $v_3 \in \mathrm{Hom}_K(F_2, F_3)$ telle que $v_2 = v_3 \circ v_1$.*

Preuve du lemme 1.3. Désignons par S un supplémentaire de $\mathrm{Im}(v_1)$ dans F_2. On a :

$$F_2 = \mathrm{Im}(v_1) \oplus S.$$

Soit:

$$x = x_1 + x_2 \in F_2$$

avec

$$x_1 \in \mathrm{Im}(v_1)$$

et

$$x_2 \in S.$$

Par définition de $\mathrm{Im}(v_1)$, il existe $y \in F_1$ tel que

$$x_1 = v_1(y).$$

Supposons que y' soit un autre élément de F_1 tel que $x_1 = v_1(y')$. On a alors

$$y - y' \in \ker(v_1).$$

Par suite:

$$v_2(y) = v_2(y').$$

On définit alors sans ambiguïté une application v_3 de F_2 dans F_3, en posant:

$$v_3(x) = v_2(y).$$

Il est alors facile de montrer que $v_3 \in \mathrm{Hom}_K(F_2, F_3)$ et que $v_2 = v_3 \circ v_1$.

Preuve de la proposition 1.2. La réciproque est claire, en effet, si on note:

$$V' = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n ; BA \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_{M_{r,1}(K)} \right\}$$

alors V' est un K-sous-espace vectoriel de K^n contenant V défini sur k et de codimension r.

Etablissons maintenant le sens direct. Désignons par V' un K-sous-espace vectoriel de K^n contenant V défini sur k et de codimension r. On a:

$$V' = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n ; D \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_{M_{r,1}(K)} \right\}$$

où $D \in M_{r,n}(K)$ de rang r, et on sait par définition qu'il existe $C \in \mathrm{Gl}_r(K)$ telle que $D' = CD \in M_{r,n}(k)$. Ainsi:

$$V' = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n ; D' \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_{M_{r,1}(K)} \right\}$$

avec $D' \in M_{r,n}(k)$ de rang r. Il reste à montrer qu'il existe $B \in M_{r,p}(K)$ telle que $D' = BA$. Pour cela considérons:

$$\begin{aligned} v_1 : M_{n,1}(K) &\to M_{p,1}(K) \\ X &\mapsto AX. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v_2 : M_{n,1}(K) &\to M_{r,1}(K) \\ X &\mapsto D'X. \end{aligned}$$

On a:

$$\ker(v_1) \subseteq \ker(v_2),$$

puisque $V \subseteq V'$. Par suite, d'après le lemme 1.3, on déduit qu'il existe

$$\begin{aligned} v_3 : M_{p,1}(K) &\to M_{r,1}(K) \\ X &\mapsto BX. \end{aligned}$$

Ainsi, on a:

$$D'X = (BA)X$$

pour tout $X \in M_{n,1}(K)$, ce qui prouve que:

$$D' = BA.$$

Proposition et définition 1.4. *Soit V un K-sous-espace vectoriel de K^n. On peut alors considérer l'intersection de tous les K-sous-espaces vectoriels de K^n contenant V et définis sur k. Le K-sous-espace vectoriel ainsi obtenu est défini sur k. Il s'appelle le plus petit K-sous-espace vectoriel de K^n contenant V et défini sur k.*

Définition 1.5. On dit qu'une application K-linéaire $f \in \mathrm{Hom}_K(K^{n_1}, K^{n_2})$ est définie sur k si et seulement si

$$Mat_{(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)}(f) \in M_{n_1,n_2}(k)$$

où $Mat_{(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)}(f)$ désigne la matrice de l'application linéaire f dans les bases canoniques $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de K^{n_1} et K^{n_2} respectivement.

Proposition 1.6. *Soit V un K-sous-espace vectoriel de K^n de codimension p et défini sur k. Soit f un élément de $\mathrm{Aut}_K(K^n)$ défini sur k. Alors $f^{-1}(V)$ est un K-sous-espace vectoriel de K^n de codimension p défini sur k.*

Preuve de la proposition 1.6. Notons

$$M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = Mat_{\mathcal{B}}(f)$$

où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de K^n. On a:

$$V = \left\{ (y_1, \dots, y_n) \in K^n ; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, p \right\}$$

où

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n} \in M_{p,n}(K)$$

avec

$$\mathrm{rg}(A) = p.$$

Il est clair que

$$f^{-1}(V) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} m_{jk} x_k \right) = 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, p \right\}$$

ou encore

$$f^{-1}(V) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n; \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k = 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, p \right\}$$

où on a noté:

$$C = (c_{ik})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq k \leq n} = AM \in M_{n,p}(K).$$

Il est clair aussi que

$$\mathrm{rg}(C) = p.$$

Par hypothèse il existe:

$$B \in \mathrm{Gl}_p(K)$$

telle que

$$BA \in M_{p,n}(k).$$

Comme

$$M \in M_n(k)$$

on a:

$$BC = (BA)M \in M_{p,n}(k).$$

D'où la proposition 1.16.

Remarque 1. Soient E un k-espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E sur k. Posons $E_K = E \otimes_k K$ et considérons $\Psi \in \mathrm{Hom}_K(K^n, E_K)$ définie par

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes x_i.$$

On peut alors dire qu'un K-sous espace vectoriel V de E_K est défini sur k, si $\Psi^{-1}(V)$ est un K-sous espace vectoriel de K^n défini sur k selon la définition 1.1. Clairement cette nouvelle définition est indépendante du choix de la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E sur k, et d'autre part elle généralise celle donnée en 1.1. Il est également facile de vérifier que les résultats 1.2 et 1.4 restent valides.

Remarque 2. De même, étant donné E et F deux k-espaces vectoriels de dimension n_1 et n_2, on peut généraliser la définition 1.5, et convenir que $f \in \mathrm{Hom}_K(E_K, F_K)$ est défini sur k si

$$Mat_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) \in M_{n_1, n_2}(k),$$

où $\mathcal{B}_1$, (resp. $\mathcal{B}_2$) désigne une base de E_K, (resp. de F_K) obtenu en étendant les scalaires à K d'une base de E, (resp. F) sur k. Encore une fois la proposition 1.6 reste valable dans ce cadre plus général.

b)Enoncé proprement dit.

Soit $(A, \mathcal{C})$ un élément de $\Sigma_{n,d}$ i.e. une variété abélienne polarisée de dimension n et de type de polarisation d. Notons $[Z] \in \Gamma_{n,d}\backslash\mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$ l'élément associé à $(A, \mathcal{C}) \in \Sigma_{n,d}$ et $Z \in \mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$ un représentant.

On notera dans tout ce qui suit:

$$V = M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}}) = \overline{\mathbb{Q}}^{2n}$$

et

$$V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C} = M_{2n,1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{2n}.$$

Soit

$$V_Z = \left\{E \in V_{\mathbb{C}}; \begin{pmatrix} Z & I_n \end{pmatrix} E = 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}\right\}.$$

Alors V_Z est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $V_{\mathbb{C}}$ de dimension n. Nous allons nous intéresser à la codimension du plus petit $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $V_{\mathbb{C}}$ contenant V_Z et défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Le lemme suivant montre que cette codimension ne dépend que de la classe d'isomorphisme de la variété abélienne polarisée $(A, \mathcal{C})$ et non du choix particulier de Z.

Lemme 1.7. *Soit $Z' \in [Z]$ où $[Z] \in \Gamma_{n,d}\backslash\mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$. Alors la codimension du plus petit $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $V_{\mathbb{C}}$ contenant V_Z et défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ est égale à la codimension du plus petit $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $V_{\mathbb{C}}$ contenant $V_{Z'}$ et défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Preuve du lemme 1.7. Par hypothèse il existe:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_{n,d}$$

telle que:

$$Z' = MZ$$

i.e.

$$Z' = (AZ + B\Delta^{-1})(CZ + D\Delta^{-1})^{-1}\Delta^{-1}.$$

Compte tenu du fait que les matrices Z et Z' sont symétriques, on a aussi:

$$Z' = \Delta^{-1}(Z\,{}^tC + \Delta^{-1}\,{}^tD)^{-1}(Z\,{}^tA + \Delta^{-1}\,{}^tB).$$

Considérons maintenant $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ définie par:

$$g(E) = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC\Delta \\ \Delta^{-1}\,{}^tB & \Delta^{-1}\,{}^tD\Delta \end{pmatrix} E.$$

Il est clair que g est un automorphisme de $V_{\mathbb{C}}$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et que $g(V_Z) = V_{Z'}$. En particulier l'application g établit une bijection entre les $\mathbb{C}$-sous-espaces vectoriels de $V_{\mathbb{C}}$ de codimension r contenant V_Z et définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et les $\mathbb{C}$-sous-espaces vectoriels de $V_{\mathbb{C}}$ de codimension r contenant $V_{Z'}$ et définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$. D'où le résultat annoncé.

Définition 1.8. A toute variété abélienne simple A de dimension n on associe un entier c qui va mesurer "la tendance à la multiplication complexe".

$$c = \begin{cases} 0 & \text{si } L \text{ est de type I-II ou III,} \\ \operatorname{Card}\{\nu \in \{1,\dots,g\}; r_\nu s_\nu = 0\} & \text{si } L \text{ est de type IV.} \end{cases}$$

Ici r_ν et s_ν sont les multiplicités des représentations irréductibles χ_ν et $\overline{\chi}_\nu$ intervenant dans la représentation canonique admissible Φ_0 associée à A. Cette représentation a été introduite à la proposition 2.5 du paragraphe 2 chapitre I.

Remarque au sujet de la définition 1.8. Si A' est une variété abélienne isogène à A, alors Φ_0 est encore une représentation complexe canonique admissible pour A', en particulier l'entier c' associé à A' est égal à c.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème principal:

Théorème Principal 1.9. *Soit (A, C) un élément de $\Sigma_{n,d}$ telle que la variété abélienne A soit simple et définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Désignons par Z un représentant de la classe $[Z] \in \Gamma_{n,d}\backslash\mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$ associée à (A, C). Alors le plus petit $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $V_{\mathbb{C}}$ contenant V_Z et défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ est de codimension égale à $\frac{c}{g}n$.*

Les deux lemmes qui vont suivre montrent en fait que le théorème principal 1.9 généralise les travaux de P.B.Cohen, H.Shiga et J.Wolfart.

Lemme 1.10. *On a $Z \in \mathfrak{H}_n(\overline{\mathbb{Q}})$ si et seulement si V_Z est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $V_{\mathbb{C}}$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Preuve du lemme 1.10. Le sens direct est clair. Pour la réciproque, on sait d'après la définition 1.1 qu'il existe

$$B \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$$

telle que:

$$B\,(Z \quad I_n) = (BZ \quad B) \in M_{n,2n}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

D'où finalement:

$$B \in \mathrm{Gl}_n(\overline{\mathbb{Q}})$$

et

$$Z = B^{-1}(BZ) \in M_n(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Lemme 1.11. *Soit A une variété abélienne simple de dimension n. Alors A est à multiplication complexe si et seulement si $c = g$.*

Preuve du lemme 1.11. Si A est à multiplication complexe alors $L = \mathrm{End}^0(A)$ est une algèbre de type IV et $m = 1$, $q = 1$. Ainsi, pour tout $1 \leq \nu \leq g$ on a:

$$r_\nu + s_\nu = 1.$$

Cette égalité force:

$$r_\nu s_\nu = 0$$

pour tout $1 \leq \nu \leq g$. D'où $c = g$.

Réciproquement, si $c = g$ alors comme $g \geq 1$ on déduit déjà que $L = \mathrm{End}^0(A)$ est de type IV. Pour terminer la démonstration, on peut soit évoquer la proposition

14 de [Shi1] p.176 ou bien raisonner de la manière suivante. Soit $\mathcal{C}$ une polarisation de A, et θ l'identité de L. On a:

$$(A, \mathcal{C}, \theta) \in S(L, \Phi_0, \rho)$$

où ρ est l'involution induite par $\mathcal{C}$ sur L. Si $r_\nu s_\nu = 0$ pour tout $1 \leq \nu \leq g$ alors $\mathfrak{H}(\Phi_0)$ ne contient qu'un unique élément qui est alors nécessairement un point spécial. D'où la variété abélienne A est à multiplication complexe.

Corollaire 1.12. *Soit $(A, \mathcal{C})$ un élément de $\Sigma_{n,d}$ telle que la variété abélienne A soit simple et définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Désignons par $Z \in \mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$ un représentant de la classe $[Z] \in \Gamma_{n,d} \backslash \mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$ associée à $(A, \mathcal{C})$. Alors $Z \in \mathfrak{H}_n(\overline{\mathbb{Q}})$ si et seulement si A est à multiplication complexe.*

Preuve du corollaire 1.12. Ce corollaire résulte du théorème principal et des lemmes 1.10 et 1.11.

Nous aurons besoin, pour les applications que nous proposerons du théorème principal, d'une majoration de l'entier c. C'est l'objet du lemme qui suit.

Lemme 1.13. *Soit A une variété abélienne simple de dimension n non à multiplication complexe. Alors $c \leq \frac{n}{p} - 1$ où p désigne le plus petit nombre premier intervenant dans la décomposition de l'entier n. En particulier, si n est premier, on a: $c = 0$.*

Preuve du lemme 1.13. Vu la définition de c, on peut supposer que $L = \mathrm{End}^0(A)$ est une algèbre de type IV. Par suite $[L : \mathbb{Q}] = 2gq^2$ et $n = mgq^2$.

L'éventualité $g = n$, $m = 1$ et $q = 1$ est à exclure. En effet, la variété abélienne A serait alors à multiplication complexe, ce qui est contraire aux hypothèses. D'où $g \leq \frac{n}{p}$.

Si $g \neq \frac{n}{p}$ alors il est clair que: $c \leq \frac{n}{p} - 1$. Pour terminer la démonstration on peut donc supposer que: $g = \frac{n}{p}$. On a alors: $m = p$, $q = 1$ et $\Phi_0 = \oplus_{1 \leq \nu \leq g}(r_\nu \chi_\nu + s_\nu \overline{\chi}_\nu)$. Il reste à montrer que le produit $r_\nu s_\nu$ ne peut-être nul pour tout ν compris entre 1 et g. Pour cela on peut soit évoquer de nouveau la proposition 14 de l'article de [Shi1] p.176, soit raisonner par l'absurde et remarquer que $\mathfrak{H}(\Phi_0)$ est réduit à un seul point, nécéssairement spécial. Comme:

$$(A, \mathcal{C}, \theta) \in S(L, \Phi_0, \rho)$$

où $\mathcal{C}$ est une polarisation de A et θ l'identité de L, on en déduit que la variété abélienne A est à multiplication complexe. Ce qui est contraire aux hypothèses.

La proposition suivante montre que la majoration de l'entier c donnée par le théorème précédent est la meilleure possible.

Proposition 1.14. *Soit n un nombre entier strictement positif non premier et p le plus petit nombre premier intervenant dans la décomposition de l'entier n. Alors il existe A une variété abélienne simple de dimension n non à multiplication complexe avec $c = \frac{n}{p} - 1$.*

Preuve de la proposition 1.14. Soient $g_1 = \frac{n}{p}$ et L_1 un corps C.M. de degré $2g_1$ muni de son involution positive canonique ρ_1. On désigne par $\sigma_1, \ldots, \sigma_{g_1}, \overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_{g_1}$

les $2g_1$ plongements de L_1 dans $\mathbb{C}$. Notons Φ_1 la représentation complexe canonique admissible associée à L_1, n et au g_1-uplet r^1 où $r^1 = (p, \dots, p, 1)$. On a

$$m_1 = \frac{n}{g_1}.$$

Soit $\Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$ une famille analytique de variétés abéliennes polarisées appartenant à $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$. Le théorème 5 p.176 de l'article de [Shi1] montre en particulier qu'un élément générique $(A, \mathcal{C}, \theta)$ de $\Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$ vérifie $\theta(L_1) = \mathrm{End}^0(A)$. Par suite une telle variété abélienne est simple non à multiplication complexe avec $c = \frac{n}{p} - 1$.

Corollaire 1.15. *Soient n un nombre premier et $(A, \mathcal{C})$ un élément de $\Sigma_{n,d}$. Supposons que A est simple non à multiplication complexe et définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Désignons par Z un représentant de la classe $[Z] \in \Gamma_{n,d}\backslash\mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$ associée à $(A, \mathcal{C}) \in \Sigma_{n,d}$. Alors il n'existe pas de $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel strict de $V_{\mathbb{C}}$ contenant V_Z et défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Remarque 1. C'est essentiellement ce corollaire que nous utiliserons pour les applications à la transcendance chapitre III §2 dans le cas où $n = 2$.

Remarque 2. Le corollaire 1.15 tombe en défaut sans l'hypothèse de simplicité, comme le montre l'exemple suivant.

Soient E_1 une courbe elliptique définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ avec $\mathrm{End}(E_1) = \mathbb{Z}$ et E_2 une courbe elliptique à multiplication complexe. On sait que E_1 est représenté par $\tau_1 \in \mathfrak{H}$ non algébrique et que E_2 est représenté par $\tau_2 \in \mathfrak{H}$ quadratique imaginaire.

Notons A la variété abélienne produit des courbes elliptiques E_1 et E_2, puis $\mathcal{C}$ la polarisation principale de A induite par les polarisations principales canoniques de E_1 et de E_2 fournies par les diviseurs $D_1 = (O_1)$ et $D_2 = (O_2)$. Il est alors clair que la surface abélienne A est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et n'est pas à multiplication complexe. De plus $(A, \mathcal{C})$ est représentée par $[Z] \in \mathrm{PSp}_4(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_2(\mathbb{C})$, où:

$$Z = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix}.$$

Or on a:

$$V_Z \subset H \subsetneq \mathbb{C}^4$$

où

$$H = \{(e_1, e_2, e_3, e_4) \in \mathbb{C}^4; \tau_2 e_2 + e_4 = 0\}$$

est clairement un hyperplan de $\mathbb{C}^4$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ puisque $\tau_2 \in \overline{\mathbb{Q}}$.

§2 Démonstration du théorème principal

Soit Z un élément de $\mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$ représentant de $[Z] \in \Gamma_{n,d}\backslash\mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$ associée à une variété abélienne polarisée $(A, \mathcal{C})$ appartenant à $\Sigma_{n,d}$. Comme on l'a vu, à isomorphisme près, la donnée de $(A, \mathcal{C}) \in \Sigma_{n,d}$ est équivalente à la donnée de $(T = \mathbb{C}^n/D, E)$ où D est un réseau de $\mathbb{C}^n$ et E est une forme de Riemann normalisée de type d.

Notons $\mathcal{B} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})$ une base de $D_{\mathbb{Q}} = D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$ et

$$\Omega = (\lambda_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le 2n} \in M_{n,2n}(\mathbb{C})$$

la matrice des périodes obtenue à partir de cette base. L'objectif de la partie A est de comparer la codimension du plus petit $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $V_{\mathbb{C}}$ contenant V_Z et défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ à $\dim_{\overline{\mathbb{Q}}}(\ker(u_\Omega) \cap M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}}))$, où

$$\begin{aligned} u_\Omega : M_{2n,1}(\mathbb{C}) &\to M_{n,1}(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto \Omega X. \end{aligned}$$

On a vu au lemme 1.7 de ce chapitre que la codimension du plus petit $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $V_{\mathbb{C}}$ contenant V_Z et défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ ne dépend que de $[Z] \in \Gamma_{n,d}\backslash\mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$. Il est également facile de voir que $\dim_{\overline{\mathbb{Q}}}(\ker(u_\Omega) \cap M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}}))$ est indépendant du choix de la matrice des périodes Ω. En effet, notons $\mathcal{B}' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{2n})$ une autre base de $D_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$, Ω' la matrice des périodes associées. Désignons par $P \in \mathrm{Gl}_{2n}(\mathbb{Q})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$. On a alors

$$\Omega' = \Omega P,$$

et l'application linéaire inversible

$$\begin{aligned} M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}}) &\to M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}}) \\ X &\mapsto PX. \end{aligned}$$

envoie $\ker(u_{\Omega'}) \cap M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}})$ sur $\ker(u_\Omega) \cap M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}})$. En particulier

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}}(\ker(u_{\Omega'}) \cap M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}})) = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}}(\ker(u_\Omega) \cap M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}})).$$

La seconde partie de ce paragraphe consiste justement à évaluer cette dimension sous quelques hypothèses supplémentaires sur la variété abélienne A en choisissant judicieusement une matrice des périodes Ω.

PARTIE A.

On suppose que la base $\mathcal{B}$ de $D_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$ provient en fait d'une base de D sur $\mathbb{Z}$ et que $Mat_{\mathcal{B}}(E) = J_d$.

Notons

$$V_1 = \left\{G \in V_{\mathbb{C}} ; \Omega G = 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}\right\}.$$

On dispose de la proposition suivante

Proposition 2.1. *Il existe un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $V_{\mathbb{C}}$ contenant V_1 défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et de codimension r si et seulement s'il existe un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $V_{\mathbb{C}}$ contenant V_Z défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et de codimension r.*

Preuve du la proposition 2.1. Notons

$$W = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix},$$

et définissons $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ en posant $f(G) = WG$ pour tout $G \in M_{2n,1}(\mathbb{C})$. Il est clair que f est un automorphisme de $V_{\mathbb{C}}$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Vu la construction de $Z \in \mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$ à partir de $\Omega \in M_{n,2n}(\mathbb{C})$ et de Δ donnée au théorème 3.1 du chapitre I, il est facile de voir que l'application $f|V_1$ réalise une bijection entre V_1 et V_Z. On conclut alors grâce à la proposition 1.16 de ce chapitre.

Proposition 2.2. *Il existe un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $V_{\mathbb{C}}$ contenant V_1 de codimension r et défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ si et seulement s'il existe $D \in M_{2n,r}(\overline{\mathbb{Q}})$ de rang r telle que $\Omega D = 0_{M_{n,r}(\mathbb{C})}$.*

Preuve de la proposition 2.2.

Cette preuve utilise de manière essentielle les relations bilinéaires de Riemann satisfaites par la matrice des périodes Ω, et en particulier l'égalité suivante:

$$(*) \qquad \Omega J_d^{-1}\,{}^t\Omega = 0_{M_n(\mathbb{C})}$$

Ensuite, d'après la proposition 1.2 du paragraphe 1a) du chapitre II, affirmer qu'il existe un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $V_{\mathbb{C}}$ contenant V_1 de codimension r défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ signifie qu'il existe $C \in M_{r,n}(\mathbb{C})$ telle que $D' = C\Omega$ soit une matrice de rang r appartenant à $M_{r,2n}(\overline{\mathbb{Q}})$.

Le sens direct est clair. En effet s'il existe $C \in M_{r,n}(\mathbb{C})$ telle que $D' = C\Omega$ soit une matrice de rang r appartenant à $M_{r,2n}(\overline{\mathbb{Q}})$, alors si on note

$$D = J_d^{-1}\,{}^tD',$$

on déduit, puisque $J_d \in \mathrm{Gl}_{2n}(\mathbb{Q})$, que D est une matrice de rang r, appartenant à $M_{2n,r}(\overline{\mathbb{Q}})$. Vu l'égalité $(*)$, il est également immédiat que $\Omega D = 0_{M_{n,r}(\mathbb{C})}$.

Avant d'établir la réciproque considérons

$$\begin{aligned} v_1 : M_{n,1}(\mathbb{C}) &\to M_{2n,1}(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto J_d^{-1}\,{}^t\Omega X \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v_2 : M_{2n,1}(\mathbb{C}) &\to M_{n,1}(\mathbb{C}) \\ Y &\mapsto \Omega Y. \end{aligned}$$

Vu l'égalité $(*)$ on a:

$$v_2 \circ v_1 = 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}.$$

i.e.

$$\mathrm{Im}(v_1) \subseteq \ker(v_2).$$

Mais $\mathrm{rg}(\Omega) = n$ donc $\dim(\mathrm{Im}(v_1)) = \dim(\ker(v_2)) = n$, et finalement

$$\mathrm{Im}(v_1) = \ker(v_2).$$

Supposons donc qu'il existe $D \in M_{2n,r}(\overline{\mathbb{Q}})$ de rang r telle que

$$\Omega D = 0_{M_{n,r}(\mathbb{C})}.$$

En considérant les colonnes de la matrice D, on déduit, vu ce qui précède, qu'il existe $C' \in M_{n,r}(\mathbb{C})$ telle que

$$D = J_d^{-1}\,{}^t\Omega C'.$$

Posons:

$$C = {}^tC' \in M_{r,n}(\mathbb{C})$$

et

$$D' = {}^t(J_d D) \in M_{r,2n}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Il est alors clair que la matrice D' est de rang r, et que l'on a:

$$D' = C\Omega.$$

D'où la proposition 2.2.

Ainsi on vient de démontrer le théorème suivant:

Théorème 2.3. *La codimension du plus petit $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $V_{\mathbb{C}}$ contenant V_Z et défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ est égale à $\dim_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \ker(u_\Omega)\right)$, où:*

$$\begin{aligned} u_\Omega : M_{2n,1}(\mathbb{C}) &\to M_{n,1}(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto \Omega X. \end{aligned}$$

Comme nous l'avons déjà indiqué, nous allons maintenant montrer que sous certaines hypothèses de simplicité et de rationalité de la variété abélienne A, on peut construire une matrice des périodes Ω telle que $\dim_{\overline{\mathbb{Q}}}(M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \ker(u_\Omega))$ s'exprime naturellement à l'aide des entiers c, g et n. C'est l'objet de la partie B.

PARTIE B. Dans toute cette partie on suppose que la variété abélienne A est simple et définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. L'espace tangent T_A de A est alors muni d'une $\overline{\mathbb{Q}}$-structure.

Théorème 2.4. *Soit $(t_1, \ldots, t_n)$ une base de T_A sur $\overline{\mathbb{Q}}$. On déduit par extension des scalaires une base de $T_{A,\mathbb{C}} = T_A \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$. Si Φ désigne une représentation complexe analytique de $L = \mathrm{End}^0(A)$ obtenue à partir de cette base, alors on a: $\Phi(L) \subset M_n(\overline{\mathbb{Q}})$.*

Preuve du théorème 2.4. Voir la référence [Mo] pp.269-270.

D'après la proposition 2.4 du chapitre I, on sait que les représentations Φ et Φ_0 qui sont $\mathbb{C}$-équivalentes sont aussi $\overline{\mathbb{Q}}$-équivalentes. Par suite, il existe une base $(t_1, \ldots, t_n)$ de T_A sur $\overline{\mathbb{Q}}$ telle que la représentation complexe analytique de L ainsi obtenue soit égale à Φ_0. Notons alors:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}^n &\to T_{A,\mathbb{C}} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i t_i \end{aligned}$$

l'isomorphisme déduit par extension des scalaires. Soit:

$$\exp : T_{A,\mathbb{C}} \twoheadrightarrow A(\mathbb{C})$$

une application exponentielle telle que sa différentielle au point $O_{T_{A,\mathbb{C}}}$ soit un élément de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(T_{A,\mathbb{C}})$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. On notera

$$\mathcal{L} = \ker \exp$$

et

$$\mathcal{L}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

puis

$$\mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}} = \phi^{-1}(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}).$$

Alors $\mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}}$ est un $\Phi_0(L)$-espace vectoriel:

$$\Phi_0(a)(\mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}}) \subset \mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}}$$

pour tout $a \in L$, et on dispose du diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\Phi_0(a)} & \mathbb{C}^n \\ \phi\big\downarrow & & \phi\big\downarrow \\ T_{A,\mathbb{C}} & \xrightarrow{i(a)} & T_{A,\mathbb{C}} \end{array}$$

où $i(a)$ est l'endomorphisme de $T_{A,\mathbb{C}}$ induit par $a \in L$.

Fixons $(a_1, \ldots, a_m)$ une base de $\mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}}$ sur $\Phi_0(L)$, et notons

$$(**) \qquad a_j = {}^t(a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \in \mathbb{C}^n$$

les composantes du vecteur a_j.

Théorème 2.5. *Les nm nombres complexes a_{ij} pour $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le m$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants.*

Remarque au sujet du théorème 2.5. Ce résultat d'indépendance linéaire des périodes est dû à G.Wüstholz. La démonstration repose d'ailleurs sur le théorème du sous-groupe analytique de Wüstholz que nous allons énoncer au théorème 2.6. Le lecteur est invité à se référer à l'article de [S-W] pp.5-9 pour une démonstration du théorème 2.5.

Théorème 2.6. *Soit G un groupe algébrique commutatif défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. On note T_G l'espace tangent à G en l'origine et $T_{G,\mathbb{C}} = T_G \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}$. Soient v un élément de $T_{G,\mathbb{C}}$ tel que $\exp_G(v) \in G(\overline{\mathbb{Q}})$ et F un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $T_{G,\mathbb{C}}$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et contenant v. Alors il existe un sous-groupe algébrique W de G défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ tel que $v \in T_{W,\mathbb{C}} \subseteq F$.*

Référence. Voir l'article de [Wü].

Posons $s = [L : \mathbb{Q}]$ et notons $(l_1, \ldots, l_s)$ une base de L sur $\mathbb{Q}$. On définit:

$$\lambda_k = \Phi_0(l_i)a_j,$$

pour tout $k = i + s(j-1)$, avec $1 \le i \le s$ et $1 \le j \le m$.

Ainsi $(\lambda_k)_{1 \le k \le 2n}$ est une base de $\mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$. Notons

$$\lambda_k = {}^t(\lambda_{1k}, \ldots, \lambda_{nk})$$

les composantes de $\lambda_k \in \mathbb{C}^n$. On définit Ω une matrice des périodes en posant:

$$\Omega = (\lambda_{ik})_{1 \le i \le n, 1 \le k \le 2n} \in M_{n,2n}(\mathbb{C}).$$

Théorème 2.7. *Le $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel* $\ker(u_\Omega) \cap M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}})$ *est trivial si L est de type I, II ou III. Il est de dimension égale à $\frac{c}{g}n$ si L est de type IV.*

La démonstration de ce théorème utilise la proposition 2.8 que nous énoncerons au cours de la démonstration du théorème 2.7 et que nous prouverons en appendice §4.

Preuve du théorème 2.7. Soit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \in M_{2n,1}(\mathbb{C}).$$

Le vecteur X appartient à $\ker(u_\Omega)$ si et seulement si

$$\sum_{1 \le k \le 2n} \lambda_{h,k} x_k = 0$$

ou encore:

$$\sum_{1 \le i \le s; 1 \le j \le m} \mu_{h,i,j} y_{i,j} = 0$$

pour tout $1 \le h \le n$, où on a noté:

$$y_{i,j} = x_{i+s(j-1)}$$

et

$$\mu_{h,i,j} = \lambda_{h,i+s(j-1)}$$

pour tout $1 \le i \le s$, $1 \le j \le m$ et $1 \le h \le n$.

Comme

$$\mu_{h,i,j} = \sum_{1 \le k \le n} m^i_{hk} a_{kj}$$

où

$$a_j = {}^t(a_{1j}, \ldots, a_{kj}, \ldots, a_{nj}) \in \mathbb{C}^n$$

les composantes du vecteur a_j considéré en $(**)$, et où

$$M_i = \Phi_0(l_i) = (m^i_{hk})_{1 \le h,k \le n},$$

on déduit que:

$$X \in \ker(u_\Omega) \iff \sum_{1 \le j \le m} \sum_{1 \le k \le n} \left(\sum_{1 \le i \le s} m^i_{hk} y_{i,j} \right) a_{kj} = 0.$$

Si maintenant $X \in M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}})$ on a alors:

$$\sum_{1 \le i \le s} m^i_{hk} y_{i,j} \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

D'après le théorème 2.5, on sait que les éléments a_{ij} de $\mathbb{C}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, m$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants, d'où

$$X \in \ker(u_\Omega) \cap M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}}) \iff \sum_{1 \leq i \leq s} m^i_{hk} y_{i,j} = 0$$

pour tout $1 \leq h \leq n, 1 \leq k \leq n$ et $1 \leq j \leq m$. i.e.

$$X \in \ker(u_\Omega) \cap M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}}) \iff \sum_{1 \leq i \leq s} y_{i,j} M_i = 0_{M_n(\overline{\mathbb{Q}})}$$

pour tout $1 \leq j \leq m$. Or on dispose de la proposition suivante:

Proposition 2.8. *Si L est de type I, II ou III les éléments $M_1, \ldots, M_s$ de $M_n(\mathbb{C})$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants. Si par contre L est de type IV, alors*

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(M_1, \ldots, M_s)) = s - cq^2.$$

Suite de la démonstration du théorème 2.7. Supposons dans un premier temps que L est de type I, II ou III, on déduit donc que:

$$y_{i,j} = 0$$

pour $1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq m$. i.e.

$$x_k = 0$$

pour tout $1 \leq k \leq n$. Ce qui prouve que:

$$\ker(u_\Omega) \cap M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}}) = \left\{0_{M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}})}\right\}.$$

Il reste à considérer le cas où L est de type IV. On définit:

$$\begin{aligned} v : \overline{\mathbb{Q}}^s &\to M_n(\overline{\mathbb{Q}}) \\ (y_1, \cdots, y_s) &\mapsto \sum_{1 \leq i \leq s} y_i M_i. \end{aligned}$$

et $v_{\mathbb{C}}$ l'application linéaire induite par extension des scalaires de $\overline{\mathbb{Q}}$ à $\mathbb{C}$. On a:

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathrm{Im}(v) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}(v_{\mathbb{C}}) = s - cq^2.$$

Par le théorème du rang on déduit:

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}} \ker(v) = cq^2$$

et par suite

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}}(\ker(u_\Omega) \cap M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}})) = cmq^2.$$

Comme

$$n = mgq^2,$$

on a finalement:

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}}(\ker(u_\Omega) \cap M_{2n,1}(\overline{\mathbb{Q}})) = \frac{c}{g}n.$$

§3 Conséquences du théorème principal 1.9.

Dans ce paragraphe nous utiliserons fortement les notations et résultats énoncés au sous-paragraphe 3.b du Chapitre I.

On se donne L_1 une algèbre à division munie d'une involution positive ρ_1. Soient n un entier tel que le degré de L_1 divise $2n$ et Φ_1 une ou la (selon que L_1 est de type IV ou non) représentation canonique admissible associée à L_1 et à n. On rappelle que

$$\Phi_1(a) = \begin{pmatrix} \Phi_1^1(a) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \Phi_\nu^1(a) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \Phi_{g_1}^1(a) \end{pmatrix}$$

pour tout $a \in L_1$.

On se fixe $\Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$ une famille analytique de triplets incluse dans $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$ paramétrée par $\mathfrak{H}(\Phi_1)$. Etant donné $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$ et $(A, C, \theta) \in \Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$ le triplet associé à z, on rappelle que

$$A(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n / D(z, T_1, \mathcal{M}_1)$$

où

$$D(z, T_1, \mathcal{M}_1) = \left\{ \sum_{i=1}^{m_1} \Phi_1(a_i) r_i(z, T_1); (a_1, \dots, a_{m_1}) \in \mathcal{M}_1 \right\}.$$

Vu la construction de la base $(r_1(z, T_1), \dots, r_{m_1}(z, T_1))$ de $\mathbb{C}^n$ sur $\Phi_1(L_1)$, on a la propriété suivante

$$z_\nu \in \mathfrak{H}(\Phi_\nu^1)(\overline{\mathbb{Q}}) \implies r_i^\nu(z, T_1) \in \overline{\mathbb{Q}}^{\frac{n}{g_1}}$$

pour tout $i = 1, \dots, m_1$.

a) Critère pour la multiplication complexe.

Bien que ce sous-paragraphe ne soit pas une conséquence directe du théorème principal 1.9, il figure à cet endroit pour pouvoir le comparer aux résultats que nous développons au sous-paragraphe b).

Le lemme suivant est dû à P.Cohen [Co] pp.993-994. Pour les commodités du lecteur nous nous permettrons de reproduire une preuve.

Lemme 3.1. *Fixons un indice ν compris entre 1 et g_1. Soit ${\Lambda'}_\nu^1$ un élément de $M_{\frac{n}{g_1}}(\mathbb{C})$ tel que ${\Lambda'}_\nu^1 \circ \Phi_\nu^1(a) = \Phi_\nu^1(a) \circ {\Lambda'}_\nu^1$ pour tout $a \in L_1$, alors le nombre de* *coefficients distincts non nuls* α *de* $\Lambda'^{\,1}_{\nu} \in M_{\frac{n}{g_1}}(\mathbb{C})$ *est inférieur ou égal à* $\frac{nm_1}{g_1}$. *L'égalité ne pouvant avoir lieu que lorsque* L_1 *est de type IV et* $r^1_\nu s^1_\nu = 0$.

Preuve du lemme 3.1. La forme de la matrice $\Lambda'^{\,1}_{\nu}$ est donnée par la formule (33) de l'article de [Shi1] p.162. Nous sommes naturellement amené à distinguer trois cas.

a) L'algèbre L_1 est de type I. On a alors $m_1 = \frac{2n}{g_1}$. D'où:

$$\alpha \leq \frac{n^2}{g_1^2} = \frac{1}{2}\frac{nm_1}{g_1} < \frac{nm_1}{g_1}.$$

b) L'algèbre L_1 est de type II ou III. On a alors $m = \frac{n}{2g_1}$. On sait que:

$$\Lambda'^{\,1}_{\nu} = \begin{pmatrix} \Sigma^1_\nu & 0 \\ 0 & \Sigma^1_\nu \end{pmatrix} \in M_{\frac{n}{g_1}}(\mathbb{C})$$

avec

$$\Sigma^1_\nu \in M_{\frac{n}{2g_1}}(\mathbb{C}).$$

Par suite:

$$\alpha \leq \left(\frac{n}{2g_1}\right)^2 = \frac{n^2}{4g_1^2} = \frac{nm_1}{2g_1} < \frac{nm_1}{g_1}.$$

c) L'algèbre L_1 est de type IV. On a alors $n = m_1 g_1 q_1^2$. On sait que:

$$\Lambda'^{\,1}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1_{q_1} \otimes \Sigma^1_\nu & 0 \\ 0 & 1_{q_1} \otimes \Delta^1_\nu \end{pmatrix}$$

avec

$$\Sigma^1_\nu \in M_{r^1_\nu}(\mathbb{C})$$

et

$$\Delta^1_\nu \in M_{s^1_\nu}(\mathbb{C}).$$

Par suite:

$$\alpha \leq (r^1_\nu)^2 + (s^1_\nu)^2 \leq (r^1_\nu + s^1_\nu)^2 = \left(\frac{n}{g_1 q_1}\right)^2 = \frac{nm_1}{g_1}.$$

L'égalité ne pouvant avoir lieu que si $r^1_\nu s^1_\nu = 0$.

Théorème 3.2. *Les notations et les hypothèses étant celles du préambule, on suppose que* $(A, \mathcal{C}, \theta) \in \Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$ *est tel que* A *soit simple définie sur* $\overline{\mathbb{Q}}$ *et que* θ *réalise un isomorphisme entre* L_1 *et* $\mathrm{End}^0(A)$. *Soit* $z = (z_1, \ldots, z_g)$ *un point de* $\mathfrak{H}(\Phi_1)$ *représentant la classe* $[z] \in \Gamma(T_1, \mathcal{M}_1)\backslash\mathfrak{H}(\Phi_1)$ *associée à* $(A, \mathcal{C}, \theta) \in \Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$. *Alors pour tout indice* ν *compris entre* 1 *et* g *tel que* $\dim\mathfrak{H}(\Phi^1_\nu) > 0$ *on a* $z_\nu \notin \mathfrak{H}(\Phi^1_\nu)(\overline{\mathbb{Q}})$.

Preuve du Théorème 3.2. Tout d'abord remarquons, puisque θ est un isomorphisme, que $g = g_1$, $m = m_1$ et $\Phi_0 = \Phi_1$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un indice ν compris entre 1 et g tel que $\dim\mathfrak{H}(\Phi^1_\nu) > 0$ et $z_\nu \in \mathfrak{H}(\Phi^1_\nu)(\overline{\mathbb{Q}})$.

Les tores complexes $\mathbb{C}^n/D(z,T_1,\mathcal{M}_1)$ et $T_{A,\mathbb{C}}/\mathcal{L}$ sont isomorphes. Il existe donc $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_{A,\mathbb{C}},\mathbb{C}^n)$ telle que $u(\mathcal{L}) = D(z,T_1,\mathcal{M}_1)$. Posons

$$i(a) = u \circ \Phi_1(a) \circ u^{-1}$$

pour tout $a \in L_1$. On sait qu'il existe une base $(t_1,\dots,t_n)$ de T_A sur $\overline{\mathbb{Q}}$ induisant une base de $T_{A,\mathbb{C}} = T_A \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$ tel que l'élément $i(a) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(T_{A,\mathbb{C}})$ préservant $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ait pour matrice $\Phi_1(a)$. Notons $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, T_{A,\mathbb{C}})$ définie par

$$\phi(z_1,\dots,z_n) = \sum_{i=1}^{n} z_i t_i.$$

On dispose donc du diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\Phi_1(a)} & \mathbb{C}^n \\ \phi\big\downarrow & & \phi\big\downarrow \\ T_{A,\mathbb{C}} & \xrightarrow{i(a)} & T_{A,\mathbb{C}} \end{array}$$

Posons $v = u \circ \phi \in M_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{L}_1 = \phi^{-1}(\mathcal{L})$. On a :

$$v \circ \Phi_1(a) = \Phi_1(a) \circ v$$

pour tout $a \in L$, et

$$v(D(z,T_1,\mathcal{M}_1)) = \mathcal{L}_1.$$

Ainsi $\mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}}$ et $D(z,T_1,\mathcal{M}_1)_{\mathbb{Q}}$ sont deux $\Phi_1(L_1)$-espaces vectoriels de dimension m et v est une application $\Phi_1(L_1)$-linéaire entre $D(z,T_1,\mathcal{M}_1)_{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}}$.

Notons $\mathcal{L}^{\nu}_{1,\mathbb{Q}} = p_\nu(\mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}})$ et $D(z,T_1,\mathcal{M}_1)^{\nu}_{\mathbb{Q}} = p_\nu(D(z,T_1,\mathcal{M}_1)_{\mathbb{Q}})$ où p_ν désigne le projecteur de $\mathbb{C}^n$ défini par

$$p_\nu({}^t(x^1,\dots,x^{\nu-1},x^\nu,x^{\nu+1},\dots,x^g)) = {}^t(0,\dots,0,x^\nu,0,\dots,0).$$

Par définition même de Φ_1, $\mathcal{L}^{\nu}_{1,\mathbb{Q}}$ et $D^{\nu}(z,T_1,\mathcal{M}_1)_{\mathbb{Q}}$ sont encore deux $\Phi_1(L_1)$-espaces vectoriels.

Comme v commute avec la représentation complexe Φ_1, on sait d'après le lemme 3.1 qu'il existe v_ν un isomorphisme $\Phi_1(L_1)$-linéaire entre $D^{\nu}(z,T_1,\mathcal{M}_1)_{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{L}^{\nu}_{1,\mathbb{Q}}$ tel que $v_\nu \otimes \mathbb{R}$ vu comme un élément de $M_n(\mathbb{C})$ comporte strictement moins de $\frac{2n^2}{[L_1:\mathbb{Q}]g} = \frac{nm}{g}$ coefficients non nuls. Posons

$$i_\nu : \mathbb{C}^{\frac{n}{g}} \to \mathbb{C}^n$$

définie par

$$i_\nu(x^\nu) = (0,\dots,0,x^\nu,0,\dots,0).$$

Les éléments $(i_\nu(r^{\nu}_1(z,T_1)),\dots,i_\nu(r^{\nu}_m(z,T_1)))$ forment une base de $D^{\nu}(z,T_1,\mathcal{M}_1)_{\mathbb{Q}}$ sur $\Phi_1(L_1)$, et vu l'hypothèse de départ on a:

$$i_\nu(r^{\nu}_i(z,T_1)) \in \overline{\mathbb{Q}}^n$$

pour tout $i = 1, \ldots, m$. Par suite

$$\lambda_1 = v_\nu\left(i_\nu\left(r_1^\nu(z, T_1)\right)\right), \ldots, \lambda_m = v_\nu\left(i_\nu\left(r_m^\nu(z, T_1)\right)\right)$$

forment une base de $\mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}}^\nu$ sur $\Phi_1(L_1)$, et la dimension du $\overline{\mathbb{Q}}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par les composantes des vecteurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ est strictement inférieure à $\frac{nm}{g}$. Or on a vu au théorème 2.5 du chapitre II que les composantes d'une base de $\mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}}$ sur $\Phi_1(L_1)$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendantes. Il en est à fortiori de même pour les composantes d'une base de $\mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}}^\nu$ sur $\Phi_1(L_1)$. Contradiction.

A l'aide du théorème 3.2 de ce chapitre et de la propostion 4.4 du chapitre I, on peut donner une démonstration du théorème principal de [Co] et [S-W] dans le cas où les variétés abéliennes sont simples.

Théorème 3.3. *Les notations étant celles du préambule, supposons que $(A, \mathcal{C}, \theta) \in \Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$ soit tel que A est simple et définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Notons $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$ un représentant de $[z] \in \Gamma(T_1, \mathcal{M}_1)\backslash\mathfrak{H}(\Phi_1)$ associé à $(A, \mathcal{C}, \theta) \in \Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$. Alors si A n'est pas à multiplication complexe, on a*

$$z \notin \mathfrak{H}(\Phi_1)(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Preuve du théorème 3.3. On raisonne par l'absurde, i.e. on suppose que la variété abélienne A n'est pas à multiplication complexe, et que: $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)(\overline{\mathbb{Q}})$.

Notons $L = \mathrm{End}^0(A)$ et ρ l'involution positive sur L induite par $\mathcal{C}$. On a $(A, \mathcal{C}, \mathrm{Id}_L) \in S(L, \Phi_0, \rho)$. Notons $\Sigma(T_0, \mathcal{M}_0)$ une famille analytique d'éléments de $S(L, \Phi_0, \rho)$ contenant $(A, \mathcal{C}, \mathrm{Id}_L)$. On sait d'après la proposition 4.4 du chapitre I que $(A, \mathcal{C}, \mathrm{Id}_L) \in \Sigma(T_0, \mathcal{M}_0)$ est représenté par $[z'] \in \Gamma(T_0, \mathcal{M}_0)\backslash\mathfrak{H}(\Phi_0)$ tel que $z' \in \mathfrak{H}(\Phi_0)(\overline{\mathbb{Q}})$. Comme A n'est pas à multiplication complexe il existe au moins un indice ν compris entre 1 et g tel que $\dim(\mathfrak{H}(\Phi_0)) > 0$, ce qui est en contradiction avec le théorème 3.2 de ce chapitre.

b) Critère pour la multiplication complexe généralisée.

Définition 3.4. On dit qu'une variété abélienne simple A est à multiplication complexe généralisée si $\mathrm{End}^0(A)$ est une algèbre à division de type IV.

Avant d'énoncer le théorème qui suit, on convient que tout point d'un domaine symétrique complexe de dimension nulle est un point algébrique de ce domaine.

Théorème 3.5. *Les notations étant celle du préambule, soit $(A, \mathcal{C}, \theta)$ un élément de $\Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$ tel que A soit une variété abélienne simple définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors, si $z = (z_1, \ldots, z_{g_1}) \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$ est un réprésentant de la classe $[z] \in \Gamma(T_1, \mathcal{M}_1)\backslash\mathfrak{H}(\Phi_1)$ associée à $(A, \mathcal{C}, \theta) \in \Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$, on a:*

$$\mathrm{Card}\left\{\nu \in \{1, \ldots, g_1\}; z_\nu \in \mathfrak{H}(\Phi_\nu^1)(\overline{\mathbb{Q}})\right\} \leq E\left(\frac{c}{g} g_1\right),$$

où $E(x)$ désigne la partie entière du nombre x.

En particulier, s'il existe un indice ν compris entre 1 et g_1 tel que $z_\nu \in \mathfrak{H}(\Phi^1_\nu)(\overline{\mathbb{Q}})$ alors la variété abélienne A est à multiplication complexe généralisée.

Remarque 1. Ce théorème généralise le théorème 3.2 énoncé au sous-paragraphe a) de ce chapitre. En effet, dans le cas où $\theta(L_1) = \mathrm{End}^0(A)$, on a $g_1 = g$, et il existe précisément c indices ν compris entre 1 et g tel que $\dim\mathfrak{H}(\Phi^1_\nu) = 0$. Comme par convention tout point $z_\nu \in \mathfrak{H}(\Phi^1_\nu)$ avec $\dim\mathfrak{H}(\Phi^1_\nu) = 0$ est algébrique, on déduit que si ν est un indice compris entre 1 et g tel que $\dim\mathfrak{H}(\Phi^1_\nu) > 0$, on a $z_\nu \notin \mathfrak{H}(\Phi^1_\nu)(\overline{\mathbb{Q}})$.

Remarque 2. La valeur de chacun des deux membres de l'inégalité est indépendante du choix de la polarisation C sur A, du morphisme d'algèbre θ, ainsi que de la famille analytique $\Sigma(T_1, \mathcal{M}_1) \subset S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$. Pour le membre de droite c'est clair, et pour le membre de gauche cela résulte du théorème 3.9 du chapitre I.

Pour la démonstration de ce théorème nous avons besoin d'un lemme.

Lemme 3.6. *Soient p et q deux entiers vérifiant $q \geq p$. Notons $l_1, \dots, l_p$ des éléments de $M_{1,q}(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_p \end{pmatrix} \in M_{p,q}(\mathbb{C})$. Soient J un sous-ensemble de $\{1, \dots, p\}$ de cardinal r que l'on notera $J = \{j_1, \dots, j_r\}$ et $N = \begin{pmatrix} l_{j_1} \\ \vdots \\ l_{j_r} \end{pmatrix} \in M_{r,q}(\mathbb{C})$. Alors, si la matrice M est de rang p, la matrice N est de rang r.*

Preuve du lemme 3.6. Par hypothèse les vecteurs $l_1, \dots, l_p$ de $M_{1,q}(\mathbb{C})$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants. Il en est donc trivialement de même pour les vecteurs $l_{j_1}, \dots, l_{j_r}$.

Preuve du théorème 3.5. Soit $(l_1, \dots, l_s)$ une base de L_1 sur $\mathbb{Q}$. Posons:

$$\lambda_{i+s(j-1)} = \Phi_1(l_i) r_j(z, T_1)$$

pour tout $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq m_1$. On note alors

$$\Omega = (\lambda_{ik})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq 2n} \in M_{n,2n}(\mathbb{C})$$

la matrice des périodes ainsi obtenues, et

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \vdots \\ \Omega_\nu \\ \vdots \\ \Omega_g \end{pmatrix}$$

avec

$$\Omega_\nu \in M_{\frac{n}{g_1}, 2n}(\mathbb{C}).$$

Il est facile de vérifier que:

$$z_\nu \in \mathfrak{H}(\Phi^1_\nu)(\overline{\mathbb{Q}}) \text{ implique } \Omega_\nu \in M_{\frac{n}{g_1}, 2n}(\overline{\mathbb{Q}})$$

Notons

$$I = \{\nu \in \{1, \dots, g_1\}; z_\nu \in \mathfrak{H}(\Phi_\nu^1)(\overline{\mathbb{Q}})\}$$

et

$$\alpha = \mathrm{Card}(I).$$

Posons

$$V_1 = \{E \in M_{2n,1}(\mathbb{C}); \Omega E = 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}\}.$$

On a:

$$V_1 \subset W_1$$

où

$$W_1 = \left\{E \in M_{2n,1}(\mathbb{C}); \Omega_\nu E = 0_{M_{\frac{n}{g_1},1}(\mathbb{C})} \text{ pour tout } \nu \in I\right\}.$$

Le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel W_1 de $M_{2n,1}(\mathbb{C})$ est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ puisque Ω_ν est une matrice à coefficients algébriques pour tout $\nu \in I$, et de codimension $\alpha\frac{n}{g_1}$ par le lemme 3.6. Or, on sait d'après le résultat principal 1.9 du chapitre I que la codimension du plus petit $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{2n}$ contenant V_1 et défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ est égale à $\frac{c}{g}n$.

D'où

$$\alpha\frac{n}{g_1} \leq \frac{c}{g}n$$

ce qui fournit:

$$\alpha \leq \frac{c}{g}g_1.$$

La première partie du théorème est donc démontrée. Maintenant, si $z_\nu \in \mathfrak{H}(\Phi_\nu^1)(\overline{\mathbb{Q}})$ pour au moins un indice ν compris entre 1 et g_1, alors $\alpha \geq 1$, ce qui force, vu l'inégalité que l'on vient d'obtenir $c \geq 1$ et prouve en particulier que $\mathrm{End}^0(A)$ est une algèbre à division de type IV.

§4 ANNEXE:
Dimension du $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ engendré par $\Phi_0(L)$.

On rappelle que $s = [L : \mathbb{Q}]$ et que $(l_1, \dots, l_s)$ désigne une base de L sur $\mathbb{Q}$. On note également $M_i = \Phi_0(l_i)$ pour tout $1 \leq i \leq s$. Comme promis nous allons maintenant démontrer la proposition 2.8 que nous rappelons.

Proposition 2.8. *Si L est de type I, II ou III les éléments $M_1, \dots, M_s$ de $M_n(\mathbb{C})$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants. Si par contre L est de type IV, alors*

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(M_1, \dots, M_s)) = s - cq^2.$$

Preuve de la proposition 2.8.

a) L de type I, on a alors $s = g$, et

$$\begin{aligned} L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^g \\ l \otimes_{\mathbb{Q}} 1 &\mapsto (\chi_\nu(l))_{1 \leq \nu \leq g}. \end{aligned}$$

Comme $(l_1 \otimes 1, \ldots, l_s \otimes 1)$ est une base de $L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, les éléments

$$(\chi_1(l_i), \ldots, \chi_\nu(l_i), \ldots, \chi_g(l_i)) \in \mathbb{R}^g$$

pour $i = 1, \ldots, s$ sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants.

De plus, si on regarde $(\chi_1(l_i), \ldots, \chi_\nu(l_i), \ldots, \chi_g(l_i))$ comme des éléments de $\mathbb{C}^g$ pour $i = 1, \ldots, s$, il est clair qu'ils sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants.

Maintenant $\Phi_\nu(l) = \chi_\nu(l) \otimes 1_{\frac{m}{2}}$ donc les éléments $(\Phi_1(l_i), \ldots, \Phi_\nu(l_i), \ldots, \Phi_g(l_i))$ de $M_{\frac{n}{g}}(\mathbb{C})^g$ pour i variant de 1 à s sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants. On en déduit la $\mathbb{C}$ indépendance linéaire des éléments $\Phi_0(l_i)$ de $M_n(\mathbb{C})$ pour $i = 1, \ldots, s$.

b) L de type II, on a alors $s = 4g$, et

$$\begin{aligned} L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} &\xrightarrow{\sim} M_2(\mathbb{R})^g \\ l \otimes_{\mathbb{Q}} 1 &\mapsto (\chi_\nu(l))_{1 \leq \nu \leq g}. \end{aligned}$$

On démontre exactement comme au a) que les éléments

$$(\chi_1(l_i), \ldots, \chi_\nu(l_i), \ldots, \chi_g(l_i)) \in M_2(\mathbb{R})^g$$

pour $i = 1, \ldots, s$ sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants. Ces éléments sont également $\mathbb{C}$-linéairement indépendants si on les regarde comme des éléments de $M_2(\mathbb{C})^g$.

Maintenant $\Phi_\nu(l) = \chi_\nu(l) \otimes 1_m$ donc les éléments $(\Phi_1(l_i), \ldots, \Phi_\nu(l_i), \ldots, \Phi_g(l_i))$ de $M_{\frac{n}{g}}(\mathbb{C})^g$ pour i variant de 1 à s sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants. On en déduit qu'il en est de même pour les s éléments $\Phi_0(l_1), \ldots, \Phi_0(l_s)$ de $M_n(\mathbb{C})$.

c) L de type III, on a alors $s = 4g$, et

$$\begin{aligned} L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^g \\ l \otimes_{\mathbb{Q}} 1 &\mapsto (\pi_\nu(l))_{1 \leq \nu \leq g}. \end{aligned}$$

Les éléments $(\pi_1(l_i), \ldots, \pi_g(l_i))$ de $\mathbb{H}^g$ pour $i = 1, \ldots, s$ sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants. Soit i le morphisme de $\mathbb{R}$-algèbre injectif défini par:

$$\begin{aligned} i : \mathbb{H} &\hookrightarrow M_2(\mathbb{C}) \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pour $x = a + jb$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Notons $\chi_\nu = i \circ \pi_\nu$. Les éléments

$$(\chi_1(l_i), \ldots, \chi_g(l_i)) \in M_2(\mathbb{C})^g$$

pour $i = 1, \ldots, s$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants. En effet, soit:

$$\sum_{1 \leq i \leq s} \lambda_i \, (\chi_1(l_i), \ldots, \chi_\nu(l_i), \ldots, \chi_g(l_i)) = 0_{M_2(\mathbb{C})^g}$$

une relation de dépendance linéaire sur $\mathbb{C}$. On a alors

$$\sum_{1\leq i\leq s} \lambda_i \chi_\nu(l_i) = 0_{M_2(\mathbb{C})}$$

pour tout $1 \leq \nu \leq g$. Posons

$$\pi_\nu(l_i) = a_i^\nu + j b_i^\nu.$$

et

$$\chi_\nu(l_i) = \begin{pmatrix} a_i^\nu & b_i^\nu \\ -\overline{b}_i^\nu & \overline{a}_i^\nu \end{pmatrix}$$

On a:

$$\sum_{1\leq i\leq s} \lambda_i a_i^\nu = \sum_{1\leq i\leq s} \lambda_i b_i^\nu = -\sum_{1\leq i\leq s} \lambda_i \overline{b}_i^\nu = \sum_{1\leq i\leq s} \lambda_i \overline{a}_i^\nu = 0_{\mathbb{C}}.$$

Ainsi:

$$\sum_{1\leq i\leq s} \lambda_i a_i^\nu = \sum_{1\leq i\leq s} \overline{\lambda}_i a_i^\nu = 0_{\mathbb{C}}$$

et

$$\sum_{1\leq i\leq s} \lambda_i b_i^\nu = \sum_{1\leq i\leq s} \overline{\lambda}_i b_i^\nu = 0_{\mathbb{C}}.$$

Ce qui prouve que:

$$\sum_{1\leq i\leq s} \Re(\lambda_i) a_i^\nu = \sum_{1\leq i\leq s} \Im(\lambda_i) a_i^\nu = 0_{\mathbb{C}}$$

et

$$\sum_{1\leq i\leq s} \Re(\lambda_i) b_i^\nu = \sum_{1\leq i\leq s} \Im(\lambda_i) b_i^\nu = 0_{\mathbb{C}}$$

i.e.

$$\sum_{1\leq i\leq s} \Re(\lambda_i)(a_i^\nu + j b_i^\nu) = \sum_{1\leq i\leq s} \Im(\lambda_i)(a_i^\nu + j b_i^\nu) = 0_{\mathbb{H}}$$

pour tout $1 \leq \nu \leq g$.

Ou encore:

$$\sum_{1\leq i\leq s} \Re(\lambda_i)((\pi_1(l_i), \ldots, \pi_\nu(l_i), \ldots, \pi_g(l_i)) = 0_{\mathbb{H}^g}$$

et

$$\sum_{1\leq i\leq s} \Im(\lambda_i)((\pi_1(l_i), \ldots, \pi_\nu(l_i), \ldots, \pi_g(l_i)) = 0_{\mathbb{H}^g}.$$

Ce qui fournit $\Re(\lambda_i) = \Im(\lambda_i) = 0$ i.e. $\lambda_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq s$, et on conclut comme précédemment.

d) L de type IV, on a alors $s = 2gq^2$, et

$$L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} M_q(\mathbb{C})^g$$
$$l \otimes_{\mathbb{Q}} 1 \mapsto (\chi_\nu(l))_{1\leq \nu \leq g}.$$

Les éléments $(\chi_1(l_i), \dots, \chi_\nu(l_i), \dots, \chi_g(l_i))$ de $M_q(\mathbb{C})^g$ pour $i = 1, \dots, s$ sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants. Il est facile d'en déduire que les éléments

$$\left(\chi_1(l_i), \dots, \chi_\nu(l_i), \dots, \chi_g(l_i), \overline{\chi}_1(l_i), \dots, \overline{\chi}_\nu(l_i), \dots, \overline{\chi}_g(l_i)\right)$$

de $M_q(\mathbb{C})^{2g}$ pour $i = 1, \dots, s$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants et forment donc une base de $M_q(\mathbb{C})^{2g}$. Considérons alors:

$$\begin{aligned} v : M_q(\mathbb{C})^{2g} &\to M_q(\mathbb{C})^{2g} \\ (A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g) &\mapsto (p_1(A_1), \dots, p_g(A_g), q_1(B_1), \dots, q_g(B_g)). \end{aligned}$$

où

$$p_\nu = \begin{cases} \mathrm{Id}_{M_q(\mathbb{C})} & \text{si } r_\nu \geq 1, \\ 0_{\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M_q(\mathbb{C}))} & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$q_\nu = \begin{cases} \mathrm{Id}_{M_q(\mathbb{C})} & \text{si } s_\nu \geq 1, \\ 0_{\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M_q(\mathbb{C}))} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que $v \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M_q(\mathbb{C})^{2g})$ et que $\dim_{\mathbb{C}} \ker(v) = cq^2$. Par le théorème du rang on déduit que:

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}(v) = 2gq^2 - cq^2.$$

Ainsi les éléments $v\left(\chi_1(l_i), \dots, \chi_g(l_i), \overline{\chi}_1(l_i), \dots, \overline{\chi}_g(l_i)\right)$ de $M_q(\mathbb{C})^{2g}$ engendrent pour i variant de 1 à s un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $M_q(\mathbb{C})^{2g}$ de dimension $s - cq^2$. Sachant d'autre part que

$$\Phi_\nu(l) = \begin{pmatrix} \chi_\nu(l) \otimes 1_{r_\nu} & 0 \\ 0 & \overline{\chi}_\nu(l) \otimes 1_{s_\nu} \end{pmatrix}$$

où il est bien entendu qu'en particulier:

$$\Phi_\nu(l) = \begin{cases} \chi_\nu(l) \otimes I_{mq} & \text{si } s_\nu = 0, \\ \overline{\chi}_\nu(l) \otimes I_{mq} & \text{si } r_\nu = 0, \end{cases}$$

on déduit que les éléments $(\Phi_1(l_i), \dots, \Phi_\nu(l_i), \dots, \Phi_g(l_i))$ de $M_{\frac{n}{g}}(\mathbb{C})^g$ pour $i = 1, \dots, s$ engendrent un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $M_{\frac{n}{g}}(\mathbb{C})^g$ de dimension $s - cq^2$. Ce qui prouve que les éléments $\Phi_0(l_i)$ engendrent, pour $i = 1, \dots, s$, un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ de dimension $s - cq^2$.

TROISIEME CHAPITRE

Introduction

Ce chapitre est consacré aux applications des résultats développés au chapitre II et notamment des théorèmes 1.9 et 3.5. Comme applications nous avons essentiellement en vue la transcendance des valeurs de la fonction J_Σ. Comme nous l'avons déjà affirmé dans l'introduction générale la fonction J_{Σ_1} est un analogue de l'invariant modulaire elliptique j en dimension supérieure, et les résultats de transcendance concernant les valeurs de cette fonction sont des généralisations du théorème de Schneider.

Le premier paragraphe est consacré aux rappels sur les variétés de Shimura et les fonctions automorphes. En particulier, c'est dans ce paragraphe que nous introduirons la fonction J_{Σ_1} associée à une famille analytique Σ_1.

Dans le second paragraphe, nous donnerons des exemples de transcendance des valeurs de la fonction $J_{\Sigma_{n,d}}$. Nous ferons usage dans ce paragraphe du théorème 1.9 du chapitre II.

Enfin le troisième paragraphe est consacré à trois autres exemples de transcendance des valeurs de la fonction J_{Σ_1}. Ici nous utiliserons les résultats établis à la fin du §4 du chapitre I, ainsi que le théorème 3.5 du chapitre II.

§1 Variétés de Shimura et fonction automorphe

Soit L_1 une algèbre à division de dimension finie sur $\mathbb{Q}$ munie d'une involution positive ρ_1. Soit n un entier naturel tel que $[L_1 : \mathbb{Q}]$ divise $2n$. Notons Φ_1 une représentation canonique admissible associée à L_1 et à n.

Fixons également Σ_1 une famille analytique de triplets $(A, \mathcal{C}, \theta)$ incluse dans $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$. On a vu au chapitre I qu'il existe un groupe modulaire Γ_{Σ_1} agissant sur $\mathfrak{H}(\Phi_1)$, tel que les classes d'isomorphismes d'éléments de Σ_1 soient en bijection avec $\Gamma_{\Sigma_1}\backslash\mathfrak{H}(\Phi_1)$.

La variété $\Gamma_{\Sigma_1}\backslash\mathfrak{H}(\Phi_1)$ est en bijection avec l'ensemble des points complexes d'une partie Zariski ouverte V_{Σ_1}, appelé variété de Shimura, d'une variété projective. Soit J_{Σ_1} une application holomorphe de $\mathfrak{H}(\Phi_1)$ sur $V_{\Sigma_1}(\mathbb{C})$ qui induit un isomorphisme de $\Gamma_{\Sigma_1}\backslash\mathfrak{H}(\Phi_1)$ sur $V_{\Sigma_1}(\mathbb{C})$. On notera $\mathcal{P}(z, \Sigma_1)$ le triplet $(A_z, \mathcal{C}_z, \theta_z)$ associé à $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$ et appartenant à Σ_1. Rappelons à ce titre que ce triplet n'est défini qu'à isomorphisme près. Nous désignerons par $A(z, \Sigma_1)$ la variété abélienne sous-jacente à $\mathcal{P}(z, \Sigma_1)$. En fait, Shimura associe à Σ_1 un corps de nombres k_{Σ_1} de degré fini sur $\mathbb{Q}$ (voir [Shi2] théorème 5.1 p.322) et montre que l'on peut choisir V_{Σ_1} et J_{Σ_1} de telles manières que les conditions suivantes soient satisfaites (voir [Shi2] théorème 6.2 p.329):

i) La variété V_{Σ_1} est définie sur k_{Σ_1}.

ii) Le corps des modules, relativement à l'extension $\mathbb{C}/k_{\Sigma_1}$, de l'élément $\mathcal{P}(z, \Sigma_1)$ est $k_{\Sigma_1}(J_{\Sigma_1}(z))$, et ce pour tout $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$.

iii) Soient $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/k_{\Sigma_1})$, deux éléments z et z' de $\mathfrak{H}(\Phi_1)$, les triplets $\mathcal{P}(z, \Sigma_1)$ et $\mathcal{P}(z', \Sigma_1)^\sigma$ sont isomorphes si et seulement si $J_{\Sigma_1}(z) = J_{\Sigma_1}(z')^\sigma$.

En fait, nous utiliserons seulement les propriétés i'), ii') déduites immédiatement de i), ii).

i') La variété V_{Σ_1} est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

ii') Le corps des modules, relativement à l'extension $\mathbb{C}/\overline{\mathbb{Q}}$, de l'élément $\mathcal{P}(z,\Sigma_1)$ est $\overline{\mathbb{Q}}(J_{\Sigma_1}(z))$, et ce pour tout $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$.

Remarque. Dans le cas où $L_1 = \mathbb{Q}$ et $n = 1$, La variété V_{Σ_1} n'est rien d'autre que l'ouvert $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ de $\mathbb{P}^1$ dont l'ensemble des points complexes sera identifié avec $\mathbb{C}$. Pour l'application J_{Σ_1} on peut prendre la fonction modulaire elliptique j dont le développement en série est:

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n$$

où $q = e^{2i\pi\tau}$ et $(c_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres entiers positifs.

Théorème 1.1. *Soit (A, C, θ) un élément de Σ_1 de corps des modules K_{mod} relativement à l'extension $\mathbb{C}/\overline{\mathbb{Q}}$. Alors, il existe une extension de degré fini de K_{mod} telle que (A, C, θ) soit définie sur cette extension.*

Preuve du théorème 1.1. Voir la proposition 5 de [Shi1] p.166.

Vu qu'il n'existe aucune extension de degré fini de $\overline{\mathbb{Q}}$ autre que $\overline{\mathbb{Q}}$ lui-même, on déduit:

Corollaire 1.2. *La variété abélienne polarisée $\mathcal{P}(z,\Sigma_1)$ est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ si et seulement si*

$$J_{\Sigma_1}(z) \in V_{\Sigma_1}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Ainsi, le théorème principal obtenu par P.Cohen, H.Shiga et J.Wolfart admet comme corollaire le théorème de transcendance suivant:

Corollaire 1.3. *Soit z un point de $\mathfrak{H}(\Phi_1)$. On a $J_{\Sigma_1}(z) \notin V_{\Sigma_1}(\overline{\mathbb{Q}})$ dès que z n'est pas un point spécial du domaine $\mathfrak{H}(\Phi_1)$.*

Référence. Voir [Co] ou [S-W].

Avant de présenter de nouveaux résultats de transcendance, faisons l' observation suivante:

L'ensemble $\Gamma_{\Sigma_1}\backslash\mathfrak{H}(\Phi_1)$ est infini non dénombrable dès que $\mathfrak{H}(\Phi_1)$ est de dimension strictement positive. Comme $V_{\Sigma_1}(\overline{\mathbb{Q}})$ est dénombrable, on déduit qu'il existe une infinité non dénombrable d'éléments $[z] \in \Gamma_{\Sigma_1}\backslash\mathfrak{H}(\Phi_1)$ tel que $J_{\Sigma_1}(z) \notin V_{\Sigma_1}(\overline{\mathbb{Q}})$

Le but de ce chapitre est de donner des exemples de points $z \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$ non algébriques tels que $J_{\Sigma_1}(z) \notin V_{\Sigma_1}(\overline{\mathbb{Q}})$.

Il est clair que nous ne proposons que quelques exemples d'application, et que beaucoup d'autres résultats du même style peuvent être démontrés par des méthodes analogues. En d'autres termes la liste d'exemples n'est pas exhaustive.

§2 On suppose que $\Sigma_1 = \Sigma_{n,d}$.

On notera pour simplifier $V_{S,n,d} = V_{\Sigma_{n,d}}$, $J_{S,n,d} = J_{\Sigma_{n,d}}$ et $\mathcal{P}(Z,n,d) = \mathcal{P}(Z,\Sigma_{n,d})$.

a) Cas où $n = 2$.

Soit δ un entier strictement positif et $d = (1, \delta)$.

Théorème 2.1. *Soient:*

z_1 *un nombre algébrique avec* $\Im(z_1) > 0$,

z_2 *un nombre transcendant avec* $\Im(z_2) > 0$,

x *un nombre algébrique vérifiant* $\Im(z_1)\Im(z_2) - (\Im(x))^2 > 0$.

On note:

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & x \\ x & z_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}_2(\mathbb{C})$$

et $\mathcal{P}(Z, 2, d) \in \Sigma_{2,d}$ *la variété abélienne polarisée associée à* $[Z] \in \Gamma_{2,d}\backslash\mathfrak{H}_2(\mathbb{C})$. *Si les éléments* $1, x, z_1$ *sont* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants alors la variété abélienne polarisée* $\mathcal{P}(Z, 2, d)$ *est simple et non définie sur* $\overline{\mathbb{Q}}$. *Par suite:*

$$J_{S,2,d}(Z) \notin V_{S,2,d}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

De la même façon on établit le résultat suivant:

Théorème 2.2. *Soient:*

t *un nombre transcendant réel,*

x *un nombre algébrique réel non nul,*

z_1 *et* z_2 *deux nombres algébriques vérifiant* $\Im(z_1) > 0$ *et* $\Im(z_2) > 0$.

Alors on a:

$$J_{S,2,d}\begin{pmatrix} z_1 - xt & t \\ t & z_2 - \frac{1}{x}t \end{pmatrix} \notin V_{S,2,d}(\overline{\mathbb{Q}})$$

dès que les éléments $1, z_1, z_2, z_1 z_2$ *sont* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants.*

Remarque 1. Si $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, alors on a la même conclusion en ne supposant seulement que les éléments $1, z_1, z_2$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

Remarque 2. Nous ne démontrerons que le théorème 2.1, la preuve du théorème 2.2 étant analogue.

Preuve du Théorème 2.1. Comme $Z \notin \mathfrak{H}_2(\overline{\mathbb{Q}})$, la variété abélienne $A(Z, 2, d)$ n'est pas à multiplication complexe. Raisonnons par l'absurde i.e. supposons que $\mathcal{P}(Z, 2, d)$ soit définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et admettons un instant que l'on sache que $A(Z, 2, d)$ est simple. Vu le corollaire 1.15 du chapitre II, on sait qu'il n'existe pas de $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^4$ contenant V_Z et défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ hormis $\mathbb{C}^4$ lui même, où on rappelle que:

$$V_Z = \left\{ (e_1, e_2, e_3, e_4) \in \mathbb{C}^4 ; Z \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = 0_{M_{2,1}(\mathbb{C})} \right\}.$$

Or il est clair que

$$H = \left\{ (e_1, e_2, e_3, e_4) \in \mathbb{C}^4 ; ze_1 + xe_2 + e_3 = 0 \right\}$$

est un hyperplan de $\mathbb{C}^4$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et contenant V_Z. L'hypothèse de départ est donc absurde et $\mathcal{P}(Z, 2, d)$ ne peut être définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Vu le corollaire 1.2 de ce chapitre on déduit que $J_{S,2,d}(Z) \notin V_{S,2,d}(\overline{\mathbb{Q}})$.

Il reste donc à montrer que $A(Z, 2, d)$ est simple. Pour cela, on commence par rappeler le résultat suivant:

Proposition 2.3. *Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}^2$. Le tore complexe $T = \mathbb{C}^2/\Lambda$ est simple si et seulement si pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda^2$ les vecteurs λ_1 et λ_2 de $\mathbb{C}^2$ sont liés sur $\mathbb{R}$ dès qu'ils sont liés sur $\mathbb{C}$.*

Preuve de la proposition 2.3. Commençons tout d'abord par montrer le sens direct par contraposé. On suppose donc qu'il existe λ_1 et λ_2 deux éléments de Λ qui sont liés sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$-linéairement indépendants.

Quitte à échanger λ_1 avec λ_2, on peut supposer que:

$$\lambda_2 = \tau\lambda_1.$$

où

$$\tau \in \mathfrak{H}.$$

Ainsi T contient le sous-tore complexe

$$\mathbb{C}\lambda_1 / (\mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2)$$

qui est isomorphe à

$$\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}).$$

Réciproquement, supposons qu'il existe un réseau Λ' de $\mathbb{C}$ tel que $T' = \mathbb{C}/\Lambda'$ soit un sous-tore complexe de T. Il existe donc

$$i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^2)$$

injectif tel que:

$$i(\Lambda') \subset \Lambda.$$

Notons λ'_1 et λ'_2 une base du $\mathbb{Z}$-module Λ'. Il est clair que les éléments λ'_1 et λ'_2 de Λ' sont liés sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$-linéairement indépendants, et qu'il en est de même pour les éléments $i(\lambda'_1)$ et $i(\lambda'_2)$ de $\mathbb{C}^2$.

Retour à la démonstration du théorème 2.1.

On a :

$$A(Z, 2, d)(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^2/\Lambda_{Z,2,d}$$

où

$$\Lambda_{Z,2,d} = \Delta\mathbb{Z}^2 + Z\mathbb{Z}^2$$

et

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $A(Z, 2, d)$ soit non simple. Vu la proposition 2.3, il existe λ_1 et λ_2 deux éléments de $\Lambda_{Z,2,d}$ qui sont liés sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$-linéairement indépendants. Notons

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} a_1 + c_1 z_1 + d_1 x \\ b_1\delta + c_1 x + d_1 z_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} a_2 + c_2 z_1 + d_2 x \\ b_2\delta + c_2 x + d_2 z_2 \end{pmatrix}$$

où

$$(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2) \in \mathbb{Z}^8.$$

Par hypothèse on sait que:

$$\begin{vmatrix} a_1 + c_1 z_1 + d_1 x & a_2 + c_2 z_1 + d_2 x \\ b_1 \delta + c_1 x + d_1 z_2 & b_2 \delta + c_2 x + d_2 z_2 \end{vmatrix} = 0$$

En tenant compte du fait que x et z_1 sont des nombres algébriques et que z_2 est un nombre transcendant, on déduit que:

$$\begin{cases} d_2(a_1 + c_1 z_1 + d_1 x) = d_1(a_2 + c_2 z_1 + d_2 x) \\ (a_1 + c_1 z_1 + d_1 x)(b_2 \delta + c_2 x) = (a_2 + c_2 z_1 + d_2 x)(b_1 \delta + c_1 x) \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} d_2 a_1 - d_1 a_2 + (d_2 c_1 - d_1 c_2) z_1 = 0 \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1)\delta + (c_1 b_2 - c_2 b_1)\delta z_1 + (d_1 b_2 \delta + a_1 c_2 - d_2 b_1 \delta - a_2 c_1) x + (d_1 c_2 - d_2 c_1) x^2 = 0 \end{cases}$$

Les éléments $1, x, z_1$ étant $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, on déduit que le système précédent est équivalent à:

$$\begin{cases} a_1 d_2 = d_1 a_2 \\ c_1 d_2 = d_1 c_2 \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1)\delta + (c_1 b_2 - c_2 b_1)\delta z_1 + (d_1 b_2 \delta + a_1 c_2 - d_2 b_1 \delta - a_2 c_1) x + (d_1 c_2 - d_2 c_1) x^2 = 0 \end{cases}$$

puis à:

$$\begin{cases} a_1 d_2 = d_1 a_2 \ (1) \\ c_1 d_2 = d_1 c_2 \ (2) \\ a_1 b_2 = a_2 b_1 \ (3) \\ c_1 b_2 = c_2 b_1 \ (4) \\ d_1 b_2 \delta + a_1 c_2 = d_2 b_1 \delta + a_2 c_1 \ (5) \end{cases}$$

Nous sommes amenés à envisager plusieurs cas.

1) le produit $c_1 c_2$ n'est pas nul.

Vu les égalités (2) et (4), on déduit

$$d_1 b_2 = d_2 b_1$$

par suite:

$$d_2 \lambda_1 = d_1 \lambda_2$$

et donc

$$d_1 = d_2 = 0$$

L'égalité (5) devient

$$a_1 c_2 = a_2 c_1.$$

A l'aide de l'égalité (4) on déduit

$$c_2\lambda_1 = c_1\lambda_2$$

ce qui force :

$$c_1 = c_2 = 0$$

et conduit à une absurdité.

2) On a $c_1 = 0$ et $c_2 \neq 0$.

Les égalités (2) et (4) fournissent:

$$d_1 = b_1 = 0,$$

puis l'égalité (5) se résume à

$$a_1 = 0.$$

Ainsi:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui est absurde.

3) On a $c_2 = 0$ et $c_1 \neq 0$.

Par un raisonnement analogue à celui effectué en 2) on montre que:

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) On a $c_1 = c_2 = 0$

Ainsi

$$d_1\lambda_2 = d_2\lambda_1$$

ce qui prouve

$$d_1 = d_2 = 0.$$

Les égalités:

$$a_1\lambda_2 = a_2\lambda_1$$

et

$$b_1\lambda_2 = b_2\lambda_1$$

fournissent:

$$a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0.$$

Ainsi

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui est absurde.

b) Cas où $n \geq 3$.

Le lemme suivant donne des conditions suffisantes sur $Z \in \mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$ pour que $A(Z,n,d)$ soit simple et que $c = 0$.

Lemme 2.4. *Soit $Z = (z_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ un point de $\mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$. Soient $1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n$ avec $\alpha \neq \beta$ et désignons par $(H1_{\alpha\beta})$ pour $\alpha \neq \beta$, $(H1_\gamma)$ et $(H2)$ les hypothèses suivantes:*

$(H1_{\alpha\beta})$ la famille constituée par les produits $z_{\alpha k} z_{l\beta}$ pour $1 \leq k, l \leq n$, les éléments $z_{\alpha i}$ pour $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\beta\}$ et $z_{j\beta}$ pour $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\alpha\}$ ainsi que par $z_{\alpha\beta}$ et 1 est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendante.

$(H1_\gamma)$ la famille constituée par les produits $z_{\gamma k} z_{\gamma l}$ pour $1 \leq k, l \leq n$, les éléments $z_{\gamma i}$ pour $1 \leq i \leq n$ ainsi que par 1 est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendante.

$(H2)$ la famille constituée par les éléments z_{ij} pour $1 \leq i \leq j \leq n$ et par 1 est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendante.

Alors si $(H2)$ est vraie ainsi que l'une des deux hypothèses $(H1_{\alpha\beta})$ ou $(H1_\gamma)$, on a:

$$\mathrm{End}^0(A(Z,n,d)) \simeq \mathbb{Q}.$$

En particulier $A(Z,n,d)$ est simple et $c = 0$.

Preuve du lemme 2.4. On a:

$$A(Z,n,d)(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n / (\Delta \mathbb{Z}^n + Z\mathbb{Z}^n),$$

et $\mathrm{End}^0(A(Z,n,d))$ est isomorphe à la sous-algèbre de $M_n(\mathbb{C})$ formée des éléments $M \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant:

$$M\Delta = \Delta A + ZB$$

et

$$MZ = \Delta C + ZD,$$

où $(A,B,C,D) \in (M_n(\mathbb{Q}))^4$.

On est donc amené à résoudre l'équation matricielle:

$$\Delta A \Delta^{-1} Z + ZB\Delta^{-1} Z - \Delta C - ZD = 0_{M_n(\mathbb{C})}.$$

avec $(A,B,C,D) \in (M_n(\mathbb{Q}))^4$. Cette équation s'écrit:

$$\sum_{1 \leq k,l \leq n} z_{ik} b_{kl} \delta_l{}^{-1} z_{lj} + \sum_{1 \leq l \leq n} \delta_i a_{il} z_{lj} \delta_l{}^{-1} - \sum_{1 \leq k \leq n} z_{ik} d_{kj} - \delta_i c_{ij} = 0$$

pour tout $1 \leq i,j \leq n$.

Il est facile de voir que chacune des conditions $(H1_{\alpha\beta})$ ou $(H1_\gamma)$ implique:

$$B = 0_{M_n(\mathbb{C})}.$$

Il suffit en effet de choisir $i = \alpha$, $j = \beta$ ou $i = j = \gamma$ selon le cas.

L'équation matricielle se réécrit donc sous la forme:

$$\Delta A \Delta^{-1} Z - ZD - \Delta C = 0_{M_n(\mathbb{C})}$$

i.e.

$$\sum_{1 \leq l \leq n} \delta_i a_{il} \delta_l{}^{-1} z_{lj} - \sum_{1 \leq k \leq n} z_{ik} d_{kj} - \delta_i c_{ij} = 0$$

pour tout $1 \leq i,j \leq n$. Vu maintenant l'hypothèse (H2), on déduit

$$\begin{cases} a_{ij} = d_{ij} = c_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j, \\ a_{ii} = d_{ii} = \lambda \text{ et } c_{ii} = 0 & \text{pour tout } i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

D'où le lemme 2.4.

Corollaire 2.5. *Soient t_1, t_2 et t_3 trois nombres complexes $\overline{\mathbb{Q}}$-algébriquement indépendants vérifiant $\Im(t_1) > 0$ et $\Im(t_1)\Im(t_3) - (\Im(t_2))^2 > 0$, x et y deux nombres réels algébriques tels que les éléments $1, x, y$ soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants et z un nombre complexe algébrique de partie imaginaire strictement positive.*

Notons:

$$Z = \begin{pmatrix} t_1 & x & t_2 \\ x & z & y \\ t_2 & y & t_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}_3(\mathbb{C}).$$

On a:

$$J_{S,3,d}(Z) \notin V_{S,3,d}(\overline{\mathbb{Q}}),$$

dès que l'une des hypothèses suivantes est vérifiées:

a) les éléments $1, x, x^2$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

b) les éléments $1, y, y^2$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

c) les éléments $1, x, y, xy$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

Preuve du corollaire 2.5. On vérifie facilement que a) (resp. b), resp. c)) implique les hypothèses $(H1_1)$ (resp. $(H1_3)$, resp $(H1_{1,3})$) du lemme 2.4. Il est également trivial de vérifier que l'hypothèse $(H2)$ est satisfaite. D'où $A(Z,3,d)$ est une variété abélienne simple et $c = 0$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathcal{P}(Z,3,d)$ soit définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors, par le théorème principal 1.9 du chapitre II, on déduit qu'il n'existe pas de $\mathbb{C}$-sous-espaces vectoriels non triviaux de $\mathbb{C}^6$ définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$ contenant V_Z, où on rappelle que:

$$V_Z = \left\{ (e_1, e_2, \ldots, e_6) \in \mathbb{C}^6 ; Z \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix} = 0_{M_{3,1}(\mathbb{C})} \right\}.$$

Or il est clair que:

$$V_Z \subset H \subsetneq \mathbb{C}^6$$

où

$$H = \{(e_1, e_2, \ldots, e_6) \in \mathbb{C}^6 ; xe_1 + ze_2 + ye_3 + e_5 = 0\}$$

est un hyperplan défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Ceci fournit une contradiction et prouve que:

$$J_{S,3,d}(Z) \notin V_{S,3,d}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

§3 Autres exemples.

Nous allons maintenant donner deux jolies applications des théorèmes 3.2 et 3.5 du chapitre II. C'est essentiellement dans ce paragraphe que nous utiliserons les résultats établis à la fin du paragraphe 4 du chapitre I.

Théorème 3.1. *Soient L_1 une algèbre à division de type II et de degré 8 et ρ_1 une involution positive sur L_1. Désignons par $\Sigma_4(L_1, \rho_1)$ une famille analytique d'élément de $S_4(L_1, \rho_1)$ paramétrée par $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Soit $z = (z_1, z_2) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ tel que l'un des deux nombres complexes z_1 ou z_2 soit algébrique, l'autre transcendant. Alors le triplet $(A, \mathcal{C}, \theta)$ associé à z et appartenant à $\Sigma_4(L_1, \rho_1)$ n'est pas définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, ou ce qui revient au même*

$$J_{\Sigma_4(L_1,\rho_1)}(z) \notin V_{\Sigma_4(L_1,\rho_1)}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Preuve du théorème 3.1. On sait, d'une part que A est simple d'après le théorème 4.9 du chapitre I et d'autre part que $\theta(L_1) = \mathrm{End}^0(A)$ par le corollaire 1.13 du chapitre I.

Il est clair que le triplet $(A, \mathcal{C}, \theta) \in \Sigma_4(L_1, \rho_1)$ ne peut être défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, en effet, si tel était le cas la variété abélienne A serait définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et le théorème 3.2 du chapitre précédent fournirait la transcendance des nombres complexes z_1 et z_2. D'où

$$J_{\Sigma_4(L_1,\rho_1)}(z) \notin V_{\Sigma_4(L_1,\rho_1)}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Théorème 3.2. *Soit L_1 un corps de nombres totalement réel de degré 2. Soit $\Sigma_2(L_1)$ une famille analytique de triplets incluse dans $S_2(L_1)$ paramétrée par $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. Etant donné $z = (z_1, z_2) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ tel que l'un des deux nombres z_1 ou z_2 soit algébrique et l'autre transcendant, le triplet $(A, \mathcal{C}, \theta)$ associé à z et appartenant à $\Sigma_2(L_1)$ n'est pas définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, ou ce qui revient au même*

$$J_{\Sigma_2(L_1)}(z) \notin V_{\Sigma_2(L_1)}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Preuve du théorème 3.2. Par le théorème 4.8 du chapitre I, on sait que la variété abélienne A est simple. Raisonnons par l'absurde et supposons que le triplet $(A, \mathcal{C}, \theta)$ est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Par le théorème 3.2, on sait que $\theta(L_1)$ s'injecte strictement dans $\mathrm{End}^0(A)$. D'où pour des raisons de dimension le degré de $\mathrm{End}^0(A)$ est égal à 4. En appliquant le théorème 3.5 on déduit que $\mathrm{End}^0(A)$ est une algèbre de type IV. Ainsi $[\mathrm{End}^0(A) : Z(\mathrm{End}^0(A))] = 1$ ou 2. Mais comme la dimension d'un corps gauche sur son centre est un carré parfait, on déduit que $[\mathrm{End}^0(A) : Z(\mathrm{End}^0(A))] = 1$, i.e. $\mathrm{End}^0(A) = Z(\mathrm{End}^0(A))$. Par suite A est une variété abélienne de type C.M. et les nombres complexes z_1 et z_2 sont tous les deux algébriques, ce qui fournit une contradiction et prouve que

$$J_{\Sigma_2(L_1)}(z) \notin V_{\Sigma_2(L_1)}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Théorème 3.3. *Soit L_1 un corps C.M. de degré 4. Soit $\Sigma_4(L_1, 1, 1)$ une famille analytique de triplets incluse dans $S_4(L_1, 1, 1)$. Etant donné $z = (z_1, z_2) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ tel que l'un des deux nombres complexes z_1 ou z_2 est algébrique et l'autre transcendant, le triplet $(A, \mathcal{C}, \theta)$ associé à z et appartenant à $\Sigma_4(L_1, 1, 1)$ n'est pas définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, ou ce qui revient au même*

$$J_{\Sigma_4(L_1,1,1)}(z) \notin V_{\Sigma_4(L_1,1,1)}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Preuve du théorème 3.3. D'après le théorème 4.10 du chapitre I, on sait que la variété abélienne A est simple. Raisonnons par l'absurde et supposons que le triplet $(A, \mathcal{C}, \theta)$ soit défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Par le théorème 3.2 on sait que $\theta(L_1)$ est un sous-corps strict de $\mathrm{End}^0(A)$. On déduit alors pour des raisons de dimensions que $[\mathrm{End}^0(A) : \mathbb{Q}] = 8$. Maintenant, par le théorème 3.5 on sait que $\mathrm{End}^0(A)$ est une algèbre à division de type IV. Le cas non commutatif ayant été écarté par le théorème 4.10 du chapitre I, on déduit que A est à multiplication complexe. D'où les nombres complexes z_1 et z_2 sont tous les deux algébriques. Ceci fournit une contradiction et prouve que

$$J_{\Sigma_4(L_1,1,1)}(z) \notin V_{\Sigma_4(L_1,1,1)}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Les résultats des théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3 peuvent se résumer de la façon suivante.

Théorème 3.4. *Soit* Γ *un groupe modulaire agissant sur* $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$. *Etant donné* $z = (z_1, z_2) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ *tel que l'un des deux nombres complexes* z_1 *ou* z_2 *soit algébrique, l'autre étant transcendant, il existe une fonction méromorphe* f *sur* $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ *invariante par l'action de* Γ *et prenant des valeurs algébriques aux points spéciaux tel que* f *soit définie en* z *et* $f(z) \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

De la même manière que [S-W] problem 1 p.16, on peut se demander, si le théorème 3.4 reste vrai, si on considère plus généralement un groupe arithmétique Γ.

QUATRIEME CHAPITRE

Introduction

Une idée, due à H.Shiga et reprise ultérieurement par les mathématiciens P.Cohen, H.Shiga et J.Wolfart consitait, pour vérifier qu'une variété abélienne définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ est à multiplication complexe de regarder si elle possède des quotients de périodes algébriques. Nous allons dans un premier temps reproduire ce théorème en donnant une démonstration détaillée.

Dans un second paragraphe, nous montrerons comment, à partir de ce résultat nous pouvons déduire des énoncés de transcendance concernant les valeurs de la fonction $J_{\Sigma_n(L_1)}$ ou $J_{\Sigma_n(L_1,r^1)}$ selon que L_1 est un corps de type I de degré n ou un corps de type IV de degré n et $r^1 = (1, \dots, 1)$.

Il sera alors intéressant de comparer ces résultats avec ceux obtenus au chapitre précédent.

Enfin dans le troisième paragraphe, nous établirons les équations du plongement modulaire relative aux l'inclusions:

$$\Sigma_n(L_1) \hookrightarrow \Sigma_n$$

et

$$\Sigma_n(L_1, r^1) \hookrightarrow \Sigma_n$$

où $\Sigma_n(L_1)$ (resp. $\Sigma_n(L_1, r^1)$) désigne la famille analytique de variétés abéliennes principalement polarisées incluse dans $S_n(L_1)$ si L_1 est de type I (resp. $S_n(L_1, r^1)$ si L_1 est de type IV). Ces équations nous permettrons de donner de nouveaux exemples de points $Z \in \mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$ non algébriques tel que $J_{\Sigma_n}(Z) \notin V_{\Sigma_n}(\overline{\mathbb{Q}})$

§1 Quotients de périodes algébriques

Définition 1.1. On dit qu'une variété abélienne A définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ possède des quotients de périodes algébriques s'il existe ω une forme différentielle holomorphe de A définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ telle que

$$\frac{\int_\gamma \omega}{\int_{\gamma'} \omega} \in \overline{\mathbb{Q}}$$

pour tout γ et γ' éléments de $H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, à chaque fois que:

$$\int_{\gamma'} \omega \neq 0.$$

Proposition 1.2. *Soient A_1 une variété abélienne simple définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et α_1 un entier naturel non nul. Notons:*

$$A = A_1^{\alpha_1}.$$

Alors, si A possède des quotients de périodes algébrique, il en est de même pour A_1.

Preuve de la proposition 1.2. Soit ω une forme différentielle holomorphe sur A fournissant des quotients de périodes algébriques. On a :

$$\omega = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \omega_i$$

où les ω_i sont des formes différentielles holomorphes sur A_1 définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Comme $\omega \neq 0$, il existe au moins un indice i compris entre 1 et α_1 tel que $\omega_i \neq 0$. On peut même supposer sans perte de généralité que $i = 1$. On a:

$$H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \simeq H_1(A_1(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^{\alpha_1}$$

Considérons η et η' deux éléments de $H_1(A_1(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, et notons γ et γ' les éléments de $H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ obtenus en utilisant l'isomorphisme décrit ci-dessus, et en injectant de manière naturelle η et η' sur la première composante de $H_1(A_1(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^{\alpha_1}$. On a:

$$\int_\eta \omega_1 = \int_\gamma \omega$$

et

$$\int_{\eta'} \omega_1 = \int_{\gamma'} \omega.$$

Ainsi, si $\int_{\eta'} \omega_1 \neq 0$, ce qui est en fait toujours le cas comme on le verra plus tard puisque A_1 est simple, on a:

$$\frac{\int_\eta \omega_1}{\int_{\eta'} \omega_1} \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

Ce qui prouve que A_1 possède des quotients de périodes algébriques.

Le théorème suivant était déjà connu (Voir par exemple la proposition 3 de l'article de [S-W] p.9). Néanmoins pour la commodité du lecteur nous décidons de reproduire ici une preuve détaillée qui occupera toute la fin de ce paragraphe.

Théorème 1.3. *Soit A une variété abélienne simple définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Si A possède des quotients de périodes algébriques, alors A est à multiplication complexe.*

Preuve du Théorème 1.3. Notons ω une forme différentielle holomorphe de A donnant des quotients de périodes algébriques. Complétons $\omega_1 = \omega$ avec les éléments $\omega_2, \dots, \omega_n$ pour former une base de l'espace des formes différentielles holomorphes de A définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Notons $(t_1, \dots, t_n)$ la base de T_A sur $\overline{\mathbb{Q}}$ duale de $(\omega_1, \dots, \omega_n)$, et

$$\phi : \mathbb{C}^n \to T_{A,\mathbb{C}}$$
$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} z_i t_i.$$

Comme d'habitude:

$$\mathcal{L} = \ker(\exp : T_{A,\mathbb{C}} \twoheadrightarrow A(\mathbb{C}))$$

correctement normalisé, et

$$\mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}} = \phi^{-1}(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}).$$

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})$ une base de $\mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$, on notera:

$$\lambda_j = {}^t(\lambda_{1,j}, \dots, \lambda_{n,j}) \in \mathbb{C}^n$$

pour tout $j = 1, \dots, 2n$.

Le théorème 1.3 va résulter des lemmes 1.4, 1.5, 1.6 et 1.7.

Le lemme qui suit est un corollaire du théorème du sous-groupe analytique de Wüstholz.

Lemme 1.4. *On suppose seulement ici que A est simple et défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Soit $\mu = {}^t(\mu_1, \dots, \mu_n)$ un élément appartenant à $\mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}} - \{0\}$ alors les éléments $\mu_1, \dots, \mu_n$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$ linéairement indépendants. En particulier $\mu_1 \neq 0$.*

Preuve du lemme 1.4. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des éléments de $\overline{\mathbb{Q}}$ non tous nuls tels que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i = 0.$$

Posons alors:

$$F = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i = 0 \right\}$$

F est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{C}^n$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Ainsi $\phi(F)$ est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel strict de $T_{A,\mathbb{C}}$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. D'après le théorème du sous-groupe analytique de Wüstholz on déduit qu'il existe une sous-variété abélienne de A non triviale. Etant donné que l'on a supposé que A était simple on aboutit donc à une contradiction.

Lemme 1.5. *Les notations et les hypothèses étant celles du théorème 1.3. On pose:*

$$\beta_j = \frac{\lambda_{1,j}}{\lambda_{1,1}}$$

où $\lambda_{1,j}$ désigne la première composante du vecteur λ_j pour tout j variant de 1 à $2n$. Les éléments $\beta_1, \dots, \beta_{2n}$ de $\overline{\mathbb{Q}}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

Preuve du lemme 1.5. Le fait que $\beta_j \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour tout $j = 1, \dots, 2n$ résulte des hypothèses. Montrons maintenant que les éléments $\beta_1, \dots, \beta_{2n}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Supposons qu'il existe $a_1, \dots, a_{2n}$ des éléments de $\mathbb{Q}$ non tous nuls tels que:

$$\sum_{i=1}^{2n} a_i \beta_i = 0$$

et notons

$$\lambda = \sum_{i=1}^{2n} a_i \lambda_i \in \mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}}.$$

La première composante du vecteur λ de $\mathbb{C}^n$ est nulle. Par le lemme 1.4 on déduit que:

$$\lambda = 0_{\mathbb{C}^n}$$

et donc que:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{2n} = 0$$

ce qui prouve que les éléments $\beta_1, \dots, \beta_{2n}$ de $\overline{\mathbb{Q}}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

Lemme 1.6. *Les notations et les hypothèses étant celles du théorème 1.3. Il existe $l_1, \dots, l_{2n}$ des éléments de $\mathrm{End}^0(A)$, tels que, si Φ désigne la représentation complexe analytique de L obtenue à partir de la base $(t_1, \dots, t_n)$ de T_A, on ait:*

$$\Phi(l_i) = \begin{pmatrix} \beta_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ * & \dots & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$$

En particulier, $l_1, \dots, l_{2n}$ constitue une base de $\mathrm{End}^0(A)$ sur $\mathbb{Q}$, et on a :

$$[\mathrm{End}^0(A) : \mathbb{Q}] = 2n.$$

Preuve du lemme 1.6. Pour tout $i = 1, \dots, 2n$, on considère:

$$W_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n; y_1 = \beta_i x_1\}$$

W_i est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Ainsi $(\phi \times \phi)(W_i)$ est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $T_{A,\mathbb{C}} \times T_{A,\mathbb{C}} = T_{(A\times A),\mathbb{C}}$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. D'après le théorème du sous-groupe analytique de Wüstholz on déduit qu'il existe A_i une sous-variété abélienne non triviale de $A \times A$ telle que:

$$(\phi \times \phi)(T_{A_i,\mathbb{C}}) \subset W_i.$$

Tout d'abord la variété abélienne A_i est simple. En effet d'après le théorème de réductibilité de Poincaré, on sait qu'il existe B_i une autre sous-variété abélienne de A^2 telle que:

$$A_i \times B_i \text{ soit isogène à } A^2$$

Maintenant A_i et B_i se décompose en un produit de variétés abéliennes simples, d'après le corollaire 1.11 du chapitre I. Notons α_i (resp β_i) le nombre de variétés abéliennes simples comptées avec multiplicités intervenant dans la décomposition de A_i (resp. de B_i).

Ainsi la variété abélienne A^2 se décompose à isogénie près en un produit de $\alpha_i + \beta_i$ variétés abéliennes simples. Comme A est simple on déduit d'après la partie unicité du théorème de Poincaré que:

$$\alpha_i + \beta_i = 2.$$

Sachant que α_i est un entier supérieur où égal à 1 puisque A_i est non triviale, et qu'il en est de même pour β_i, on déduit que:

$$\alpha_i = 1$$

et par suite que A_i est simple et isogène à A.

Notons $p_{1,i}$ et $p_{2,i}$ les deux morphismes projections de la variété abélienne A_i sur A. Il est clair que $p_{1,i}$ et $p_{2,i}$ sont non triviales. En effet, sinon A_i serait isomorphe à A, et:

$$(\phi \times \phi)(T_{A_i,\mathbb{C}}) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n / y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0\}$$

ce qui est manifestement incompatible avec

$$(\phi \times \phi)(T_{A_i,\mathbb{C}}) \subset W_i.$$

Sachant qu'un morphisme de variété abélienne non trivial entre deux variétés abéliennes simples est une isogénie, on déduit que $p_{1,i}$ et $p_{2,i}$ sont deux isogénies.

Soient $l_i = p_{1,i} \circ p_{2,i}^{-1} \in \mathrm{End}^0(A)$ et Φ la représentation complexe analytique de L obtenue à partir de la base $(t_1, \dots, t_n)$. On a:

$$(\phi \times \phi)(T_{A_i,\mathbb{C}}) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n / \Phi(l_i) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\}.$$

Comme:

$$(\phi \times \phi)(T_{A_i,\mathbb{C}}) \subset W_i,$$

on a:

$$\Phi(l_i) = \begin{pmatrix} \beta_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ * & \dots & \dots & \dots & * \end{pmatrix}.$$

L'indépendance linéaire de $\beta_1, \dots, \beta_{2n}$ sur $\mathbb{Q}$ force l'indépendance linéaire de $l_1, \dots, l_{2n}$. D'où:

$$[\mathrm{End}^0(A) : \mathbb{Q}] \geq 2n.$$

Comme d'autre part on sait que:

$$[\mathrm{End}^0(A) : \mathbb{Q}] \text{ divise } 2n$$

On déduit que:

$$[\mathrm{End}^0(A) : \mathbb{Q}] = 2n,$$

et $l_1, \dots, l_{2n}$ est une base de $\mathrm{End}^0(A)$ sur $\mathbb{Q}$

Lemme 1.7. *Les notations et les hypothèses étant celles du théorème 1.3, la $\mathbb{Q}$-algèbre* $\mathrm{End}^0(A)$ *est commutative.*

Preuve du lemme 1.7. Tout d'abord remarquons que si $l \in \mathrm{End}^0(A)$ alors

$$\Phi(l) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ * & \dots & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$$

avec $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. En effet, on sait par le lemme 1.6 qu'il existe $(a_1, \dots, a_{2n})$ des éléments de $\mathbb{Q}$ tels que

$$l = \sum_{i=1}^{2n} a_i l_i.$$

Par suite

$$\Phi(l)=\sum_{i=1}^{2n}a_i\Phi(l_i)$$

i.e.

$$\Phi(l)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0\\ * & \dots & \dots & \dots & *\\ \vdots & & & & \vdots\\ \vdots & & & & \vdots\\ * & \dots & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$$

avec:

$$x=\sum_{i=1}^{2n}a_i\beta_i\in\overline{\mathbb{Q}}.$$

Soient l'_1 et l'_2 deux éléments de $\mathrm{End}^0(A)$ et posons $l=l'_1l'_2-l'_2l'_1$. Notons:

$$\Phi(l'_i)=\begin{pmatrix} x'_i & 0 & 0 & \dots & 0\\ * & \dots & \dots & \dots & *\\ \vdots & & & & \vdots\\ \vdots & & & & \vdots\\ * & \dots & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$$

pour $i=1$ et 2.

En utilisant le fait que Φ est un morphisme d'algèbre et en effectuant le produit matriciel, on déduit que:

$$\Phi(l)_{1,1}=x'_1x'_2-x'_2x'_1=0$$

En particulier $\Phi(l)$ est une matrice non inversible. Nécessairement $l=0_{\mathrm{End}^0(A)}$, en effet, si tel n'était pas le cas, il existerait $l'\in\mathrm{End}^0(A)$ tel que:

$$ll'=1_{\mathrm{End}^0(A)}$$

puisque $\mathrm{End}^0(A)$ est une algèbre à division, et on aurait:

$$\Phi(l)\Phi(l')=I_n$$

ce qui prouverait que $\Phi(l)$ est inversible. Contradiction.

Preuve du théorème 1.3. Par les lemmes 1.6 et 1.7 on sait que $\mathrm{End}^0(A)$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative de dimension $2n$, i.e. A est à multiplication complexe.

§2 Transcendance des valeurs de la fonction $J_{\Sigma(T_1,\mathcal{M}_1)}$

Dans ce paragraphe n désignera un entier naturel non nul, L_1 un corps commutatif de degré n de type I ou IV, et ρ_1 l'involution positive sur L_1. On a:

$$n=\begin{cases} g_1 & \text{si } L_1 \text{ est de type I,}\\ 2g_1 & \text{si } L_1 \text{ est de type IV.}\end{cases}$$

Notons $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ les n plongements de L_1 dans $\mathbb{R}$, (resp. $\mathbb{C}$) si L_1 est de type I, (resp. si L_1 est de type IV). Dans le cas où L_1 est de type IV, on suppose en plus que

$$\sigma_{2\nu} = \overline{\sigma}_{2\nu-1}$$

pour tout $\nu = 1, \ldots, g_1$.

On sait qu'il n'existe qu'une seule involution positive ρ_1 sur L_1. Dans le cas où L_1 est de type I on a $\rho_1 = \mathrm{Id}_{L_1}$. Si par contre L_1 est de type IV alors, désignant par α un élément primitif de L_1 tel que $\alpha^2 \in F_1$, on a $\rho_1(\alpha) = -\alpha$.

Notons Φ_1 la représentation complexe canonique admissible associée à L_1 et à n (resp. à L_1, n et au g_1-uplet $r^1 = (1, \ldots, 1)$) si L_1 est de type I (resp. si L_1 est de type IV).

On a:

$$\mathfrak{H}(\Phi_1) = \begin{cases} \mathfrak{H}^{g_1} & \text{si } L_1 \text{ est de type I,} \\ \left(\mathfrak{H}^3_{1,1}\right)^{g_1} & \text{si } L_1 \text{ est de type IV,} \end{cases}$$

où on rappelle que

$$\mathfrak{H}^3_{1,1} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$$

Théorème 2.1. *Soit Σ_1 une famille analytique incluse dans $S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$. Alors si $z = (z_1, \ldots, z_{g_1})$ est un point non spécial de $\mathfrak{H}(\Phi_1)$ avec $z_\nu \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour au moins un indice ν compris entre 1 et g_1, on a:*

$$J_{\Sigma_1}(z) \notin V_{\Sigma_1}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Preuve du théorème 2.1. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $(A, \mathcal{C}, \theta) \in \Sigma_1 \subset S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$ représenté par $z = (z_1, \ldots, z_{g_1}) \in \mathfrak{H}(\Phi_1)$ avec $z_\nu \in \overline{\mathbb{Q}}$ telle que A soit définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et non à multiplication complexe.

Etape 1 Nécessairement A est isogène à une puissance d'une variété abélienne simple.

Par le corollaire 1.11 du §1 chapitre I, on sait que A est isogène :

$$A_1^{\alpha_1} \times \ldots \times A_s^{\alpha_s},$$

où $A_1, \ldots, A_s$ sont des variétés abéliennes simples définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ deux à deux non isogènes. D'après la proposition 1.26 du §1 chapitre I, on sait que pour tout indice j compris entre 1 et s tel que L_1 s'identifie à une sous-algèbre de $\mathrm{End}^0(A_j^{\alpha_j})$.

Notons:

$$n_j = \dim(A_j^{\alpha_j})$$

D'une part:

$$n_j \leq n$$

car $A_j^{\alpha_j}$ est une sous-variété abélienne de A.

Et d'autre part:

$$n | 2n_j$$

puisque L_1 s'injecte dans $\mathrm{End}^0(A_j^{\alpha_j})$

D'où

$$2n_j = kn \leq 2n$$

et $k=1$ ou $k=2$.

Si $k=1$, alors $\dim(A_j^{\alpha_j})=\frac{n}{2}$, et L_1 est un corps commutatif de degré n inclus dans $\mathrm{End}^0(A_j^{\alpha_j})$, ce qui prouve que L_1 est un corps de type IV et que $A_j^{\alpha_j}$ est une variété abélienne à multiplication complexe pour tout $j=1,\dots,s$, i.e. A est à multiplication complexe. Ainsi nécessairement $k=2$ et A est isogène à une puissance pure d'une variété abélienne simple.

Notons θ_1 l'injection de L_1 dans $\mathrm{End}^0(A_1^{\alpha_1})$ déduite de θ et de l'isogénie, et $\mathcal{C}_1$ la polarisation de $A_1^{\alpha_1}$ induite par $\mathcal{C}$ et l'isogénie. Vu le théorème 3.7 du chapitre I et la remarque située après le théorème 3.3 du chapitre I, quitte à considérer $(A_1^{\alpha_1},\mathcal{C}_1,\theta_1)$ au lieu de $(A,\mathcal{C},\theta)$, on peut supposer que A est une puissance pure d'une variété abélienne simple.

<u>Etape 2</u> La variété abélienne A possède des quotients de périodes algébriques.

Il existe $u\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n,T_{A,\mathbb{C}})$ telle que $u(D(z,T_1,\mathcal{M}_1))=\mathcal{L}$. On définit $i\in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(T_{A,\mathbb{C}})$ par

$$i(a)=u\circ\Phi_1(a)\circ u^{-1},$$

pour tout $a\in L_1$.

On sait qu'il existe une base $(t_1,\dots,t_n)$ de T_A sur $\overline{\mathbb{Q}}$ induisant une base de $T_{A,\mathbb{C}}=T_A\otimes_{\overline{\mathbb{Q}}}\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$ telle que l'élément $i(a)\in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(T_{A,\mathbb{C}})$ préservant $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}=\mathcal{L}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ ait pour matrice $\Phi_1(a)$ pour tout $a\in L_1$. Notons:

$$\phi: T_{A,\mathbb{C}}\to\mathbb{C}^n$$
$$t=\sum_{i=1}^n z_it_i\mapsto(z_1,\dots,z_n),$$

puis $\mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}}=\phi(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}})$. Ainsi $\mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}}$ est un $\Phi_1(L_1)$-espace vectoriel de dimension 2.

On dispose donc du diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^n \arrow[r, "\Phi_1(a)"] & \mathbb{C}^n \\
T_{A,\mathbb{C}} \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "i(a)"] & T_{A,\mathbb{C}} \arrow[u, "\phi"] \\
\mathbb{C}^n \arrow[u, "u"] \arrow[r, "\Phi_1(a)"] & \mathbb{C}^n \arrow[u, "u"]
\end{tikzcd}$$

Posons

$$v=\phi\circ u\in M_n(\mathbb{C})$$

On a:

$$v\circ\Phi_1(a)=\Phi_1(a)\circ v$$

pour tout $a\in F$. Comme $m_1=2$ (et $r^1=(1,\dots,1)$ si L_1 est de type IV), on déduit (voir [Shil]pp.161-162) que

$$v=\begin{pmatrix} v_1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & v_\nu & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & \dots & 0 & v_n\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{C})$$

Ainsi v est un isomorphisme $\Phi_1(L_1)$-linéaire entre $D(z, T_1, \mathcal{M}_1)_{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}}$, et par suite $(v(r_1(z,T_1)), v(r_2(z,T_1)))$ est une base de $\mathcal{L}_{1,\mathbb{Q}}$ sur $\Phi_1(L_1)$. On a:

$$v(r_1(z,T_1)) = {}^t(v_1 r_{11}, v_2 r_{21}, \dots, v_n r_{n1}) \in \mathbb{C}^n$$

et

$$v(r_2(z,T_1)) = {}^t(v_1 r_{21}, v_2 r_{22}, \dots, v_n r_{n2}) \in \mathbb{C}^n,$$

si

$$r_i(z,T_1) = {}^t(r_{1i}, r_{2i}, \dots, r_{ni}) \in \mathbb{C}^n$$

Soient λ_1 et λ_2 deux éléments de $\mathcal{L}^2_{1,\mathbb{Q}}$. Il existe l_1, l'_1, l_2, l'_2 quatre éléments de L_1 tels que:

$$\lambda_{i,1} = \sigma_i(l_1) v_i r_{i1} + \sigma_i(l'_1) v_i r_{i2}$$

et

$$\lambda_{i,2} = \sigma_i(l_2) v_i r_{i1} + \sigma_i(l'_2) v_i r_{i2},$$

où $\lambda_{i,1}$ (resp. $\lambda_{i,2}$) désigne la ième composante du vecteur λ_1 (resp. λ_2). Si $\lambda_{i,2} \neq 0$ on a:

$$\frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{i,2}} = \frac{\sigma_i(l_1) v_i r_{i1} + \sigma_i(l'_1) v_i r_{i2}}{\sigma_i(l_2) v_i r_{i1} + \sigma_i(l'_2) v_i r_{i2}} = \frac{\sigma_i(l_1) r_{i1} + \sigma_i(l'_1) r_{i2}}{\sigma_i(l_2) r_{i1} + \sigma_i(l'_2) r_{i2}},$$

Par suite, si $z_i \in \overline{\mathbb{Q}}$ alors $r_{i1}(z,T_1) \in \overline{\mathbb{Q}}$, $r_{i2}(z,T_1) \in \overline{\mathbb{Q}}$, et

$$\frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{i2}} \in \overline{\mathbb{Q}}$$

D'où A possède des quotients de périodes algébriques.

<u>Etape 3</u> Fin de la démonstration du théorème 2.1.

Vu le théorème 1.2 on sait que A_1 possède des quotients de périodes algébriques. Par suite A_1 est à multiplication complexe, et il en est donc de même pour la variété abélienne A.

§3 Application à la transcendance des valeurs de la fonction J_{Σ_n}

Dans ce sous-paragraphe nous poserons $J_{S,n} = J_{S,n,d}$ et $V_{S,n} = V_{S,n,d}$ lorsque $d = (1, \dots, 1)$, i.e. dans le cas principalement polarisé.

Nous allons au moyen d'un plongement modulaire établir l'existence de points $Z \in \mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$ non algébriques tels que $J_{S,n}(Z) \notin V_{S,n}(\overline{\mathbb{Q}})$.

a) Cas L_1 de type I.

Fixons $(x_1, \dots, x_n)$ une base de $\mathcal{O}_{L_1}$ sur $\mathbb{Z}$, et notons $(x'_1, \dots, x'_n)$ la base duale relativement à la forme bilinéaire non dégénérée $\mathrm{tr}_{L_1/\mathbb{Q}}$.

Soit $z = (z_1, \dots, z_n)$ un point de $\mathfrak{H}^n(\mathbb{C})$. On pose

$$\lambda_i = {}^t(\sigma_1(x_i) z_1, \sigma_2(x_i) z_2, \dots, \sigma_n(x_i) z_n) \in \mathbb{C}^n$$

et

$$\lambda_{i+n} = {}^t(\sigma_1(x_i'), \dots, \sigma_n(x_i')) \in \mathbb{C}^n$$

pour tout $i = 1, \dots, n$. Notons

$$E = \Im(H)$$

où

$$H(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Im(z_i)}(\xi_i \overline{\eta}_i).$$

On vérifie que

$$E(\lambda_i, \lambda_j) = E(\lambda_{i+n}, \lambda_{j+n}) = 0$$

et

$$E(\lambda_i, \lambda_{j+n}) = \delta_{ij}.$$

Par suite les éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ de $\mathbb{C}^n$ sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants. Notons D le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$. On a alors

$$\Phi_1(L_1)D_{\mathbb{Q}} \subseteq D_{\mathbb{Q}}$$

i.e. le doublet (D, E) définit un élément $(A, \mathcal{C}, \theta) \in S(L_1, \Phi_1, \mathrm{Id}_{L_1})$.

Notons

$$r_1 = {}^t(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

et

$$r_2 = {}^t(1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^n$$

Les éléments r_1, r_2 constituent une base de $D_{\mathbb{Q}}$ sur $\Phi_1(L_1)$.

Posons

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{M}_1 = \{(a_1, a_2) \in L_1 \times L_1; \Phi_1(a_1)r_1 + \Phi_1(a_2)r_2 \in D\} = \mathcal{O}_{L_1} \times \mathcal{O}_{L_1}^{\vee}.$$

Il est alors immédiat en appliquant la construction de [Shi1] que $(A, \mathcal{C}, \theta)$ appartient à $\Sigma(T_1, \mathcal{M}_1) = \Sigma_n(L_1)$ et est représenté par

$$[z] \in \Gamma(T_1, \mathcal{M}_1)\backslash\mathfrak{H}^n(\mathbb{C}),$$

où on rappelle que $\Gamma(T_1, \mathcal{M}_1)$ est le sous-groupe de $\mathrm{Sl}_2(F)$ défini par

$$\Gamma(T_1, \mathcal{M}_1) = \{U \in \mathrm{Sl}_2(F); \mathcal{M}U = \mathcal{M}\}$$

et que l'action de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(T_1, \mathcal{M}_1)$ sur $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathfrak{H}^n$ est donnée par

$$z_i' = \frac{\sigma_i(a)z_i + \sigma_i(b)}{\sigma_i(c)z_i + \sigma_i(d)} \in \mathfrak{H}$$

Si on regarde $(A, \mathcal{C})$ comme un élément de Σ_n alors un représentant Z de l'élément de $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_n(\mathbb{C})$ associé à $(A, \mathcal{C})$ est

$$Z = \Omega_2^{-1}\Omega_1$$

où

$$\Omega_k = (\omega_{i,j}^k)_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{C})$$

avec

$$\omega_{ij}^2 = \sigma_i(x_j')$$

et

$$\omega_{ij}^1 = \sigma_i(x_j)z_i$$

Un calcul simple montre que

$$\Omega_2^{-1} = ({\omega'_{ij}}^2)_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{C})$$

avec

$${\omega'_{ij}}^2 = \sigma_j(x_i)$$

Par suite

$$Z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(x_i x_j) z_k.$$

Plaçons nous dans le cas particulier où $n = 2$. On a alors $F = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ où Δ est un entier supérieur ou égal à 2 sans facteurs carrés. On dispose alors de deux plongements galoisiens $\sigma_1 = \mathrm{Id}_F$ et σ_2 où $\sigma_2(\sqrt{\Delta}) = -\sqrt{\Delta}$. D'autre part $\left(x_1 = 1, x_2 = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}\right)$ (resp. $(x_1 = 1, x_2 = \sqrt{\Delta})$) est une base de $\mathcal{O}_F$ sur $\mathbb{Z}$ si $\Delta \equiv 1 \bmod 4$, (resp. si $\Delta \equiv 2$ ou $3 \bmod 4$). D'où le théorème suivant:

Proposition 3.1. *Soit $z = (z_1, z_2) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ un point associé à un élément $(A, \mathcal{C}, \theta)$ de $\Sigma_2(F)$. Si on regarde $(A, \mathcal{C})$ comme un élément de Σ_n, alors $(A, \mathcal{C})$ est représenté par $Z \in \mathfrak{H}_2(\mathbb{C})$, où:*

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2} z_1 + \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2} z_2 \\ \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2} z_1 + \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2} z_2 & (\frac{1+\sqrt{\Delta}}{2})^2 z_1 + (\frac{1-\sqrt{\Delta}}{2})^2 z_2 \end{pmatrix}$$

si $\Delta \equiv 1 \bmod 4$, et

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & \sqrt{\Delta}(z_1 - z_2) \\ \sqrt{\Delta}(z_1 - z_2) & \Delta(z_1 + z_2) \end{pmatrix}$$

si $\Delta \equiv 2$ ou $3 \bmod 4$.

On vient de démontrer le résultat suivant:

Théorème 3.2. *Soit $z = (z_1, \dots, z_n)$ un point non spécial de $\mathfrak{H}^n(\mathbb{C})$ et notons:*

$$Z = \left(\sum_{k=1}^{n} \sigma_k(x_i x_j) z_k\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathfrak{H}_n(\mathbb{C}).$$

Alors, si $z_i \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour au moins un indice i compris entre 1 et n, on a:

$$J_{S,n}(Z) \notin V_{S,n}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

b) Cas L_1 de type IV.

Notons $\mathcal{O}_{L_1}$ l'anneau des entiers de L_1, et fixons $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de $\mathcal{O}_{L_1}$ sur $\mathbb{Z}$. On désigne par $\sigma_1, \ldots, \sigma_{g_1}, \overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_{g_1}$ les plongements de L_1 dans $\mathbb{C}$, et

$$\begin{aligned} B_\nu : L_1 \times L_1 &\to \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto \frac{1}{2}\left(\sigma_\nu(x)\overline{\sigma}_\nu(y) + \sigma_\nu(y)\overline{\sigma}_\nu(x)\right). \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} B : L_1 \times L_1 &\to \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto \sum_{\nu=1}^{g_1} B_\nu(x, y). \end{aligned}$$

Lemme 3.3. *Pour tout $x \in L_1$, on a:*

$$B(x, x) \in \mathbb{Q}.$$

Preuve du lemme 3.3. Il suffit de démontrer le lemme dans le cas où l'extension $F_1/\mathbb{Q}$ est galoisienne (on rappelle que $F_1 = \{x \in L_1; \rho_1(x) = x\}$), puisque la clôture galoisienne d'un corps totalement réel est encore un corps totalement réel.

Fixons $x \in L_1$. Comme $\overline{B(x, x)} = B(x, x)$, il est clair que $B(x, x) \in F_1$. Soit ν_0 un indice compris entre 1 et g_1. Pour tout ν compris entre 1 et g_1, il existe un unique indice $p_{\nu_0}(\nu)$ tel que

$$\sigma_{\nu_0} \circ \sigma_\nu = \sigma_{p_{\nu_0}(\nu)}.$$

Ainsi, on vient donc d'associer à ν_0 une permutation p_{ν_0} de $\{1, \ldots, g_1\}$.

Remarquons maintenant que $\sigma_{\nu_0} \circ \overline{\sigma}_\nu = \overline{\sigma}_{p_{\nu_0}(\nu)}$, ainsi $\sigma_{\nu_0}(B(x, x)) = B(x, x)$, et $B(x, x) \in \mathbb{Q}$.

Lemme 3.4. *Si x et y désignent deux éléments de L_1, alors*

$$B(x, y) \in \mathbb{Q}.$$

Preuve du lemme 3.4. Il suffit de remarquer que

$$B(x, y) = \frac{1}{2}\left(B(x + y, x + y) - B(x, x) - B(y, y)\right)$$

et d'appliquer le lemme précédent.

Par suite

$$\begin{aligned} B : L_1 \times L_1 &\to \mathbb{Q} \\ (x, y) &\mapsto \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{g_1}\left(\sigma_\nu(x)\overline{\sigma}_\nu(y) + \sigma_\nu(y)\overline{\sigma}_\nu(x)\right) \end{aligned}$$

est une forme $\mathbb{Q}$-bilinéaire symétrique définie positive, puisque $B(x,x) > 0$ pour tout $x \in L_1 \setminus \{0\}$, et par suite non dégénérée.

Notons $(x'_1, \dots, x'_n)$ la base duale de $(x_1, \dots, x_n)$ relativement à B, i.e.

$$B(x_i, x'_j) = \delta_{ij}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

Etant donné $(z_1, \dots, z_\nu, \dots, z_{g_1}) \in \left(\mathfrak{H}^3_{1,1}\right)^{g_1}$, notons

$$\lambda_j^\nu = \frac{\sqrt{2}}{2}(z_\nu - i)\,{}^t(\sigma_\nu(x_j), i\overline{\sigma}_\nu(x_j)) \in \mathbb{C}^2$$

et

$$\lambda_{j+n}^\nu = \frac{\sqrt{2}}{2} i(z_\nu + i)\ {}^t(\sigma_\nu(x'_j), i\overline{\sigma}_\nu(x'_j)) \in \mathbb{C}^2.$$

Désignons par $< .,. >_2$ le produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^2$. On a:

$$\Im(< \lambda_i^\nu, \lambda_{j+n}^\nu >_2) = \left(1 - |z_\nu|^2\right) B_\nu(x_i, x'_j)$$

et

$$\Im(< \lambda_i^\nu, \lambda_{j+n}^\nu >_2) = \Im(< \lambda_{i+n}^\nu, \lambda_{j+n}^\nu >_2) = 0$$

pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

Posons maintenant

$$\lambda_j = {}^t(\lambda_j^1, \dots, \lambda_j^\nu, \dots, \lambda_j^{g_1}) \in \mathbb{C}^n$$

pour tout $1 \leq j \leq 2n$, et

$$H(\xi, \eta) = \sum_{\nu=1}^{g_1} \frac{1}{1 - |z_\nu|^2} < \xi_\nu, \eta_\nu >_2$$

pour tout ξ, η appartenant à $\mathbb{C}^n$. On vérifie que H est une forme hermitienne définie positive. Notons

$$E = \Im(H).$$

Un calcul facile montre que:

$$E(\lambda_j, \lambda_{j'}) = E(\lambda_{j+n}, \lambda_{j'+n}) = 0$$

et

$$E(\lambda_j, \lambda_{j'+n}) = \delta_{jj'}$$

pour tout $1 \leq j, j' \leq n$.

Ainsi les éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ de $\mathbb{C}^n$ sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants. Notons D le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$. Le réseau D vérifie

$$\Phi_1(L_1)(D_\mathbb{Q}) \subseteq D_\mathbb{Q}$$

On vient donc de construire un élément $(A, \mathcal{C}, \theta) \in S(L_1, \Phi_1, \rho_1)$. Posons

$$r_k = {}^t(r_k^1, \dots, r_k^\nu, \dots, r_k^{g_1})$$

où

$$r_1^\nu = \frac{\sqrt{2}}{2}(z_\nu - i)\,{}^t(1,i)$$

et

$$r_2^\nu = \frac{\sqrt{2}}{2}i(z_\nu + i)\,{}^t(1,i).$$

Les éléments r_1 et r_2 forment une base de $D_{\mathbb{Q}}$ sur $\Phi_1(L_1)$. Posons

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{O}_{L_1} \times \mathcal{O}_{L_1}^\vee,$$

puis fixons

$$W_\nu = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

pour tout $\nu = 1, \ldots, g_1$.

Il est alors facile de voir que $(A, \mathcal{C}, \theta) \in \Sigma(T_1, \mathcal{M}_1)$, et est représenté par

$$[z] \in \Gamma(T_1, \mathcal{M}_1) \backslash \left(\mathfrak{H}_{1,1}^3\right)^{g_1}.$$

Notons $\Omega = (\,\Omega_1 \quad \Omega_2\,) = (\lambda_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le 2n} \in M_{n,2n}(\mathbb{C})$ la matrice des périodes, et

$$\Omega_k = (\omega_{\nu,j}^k)_{1 \le \nu \le n, 1 \le j \le n}$$

pour $k = 1, 2$. On a

$$\omega_{\nu,j}^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}i(z_\nu + i)\begin{pmatrix} \sigma_\nu(x'_{2j-1}) & \sigma_\nu(x'_{2j}) \\ i\overline{\sigma}_\nu(x'_{2j-1}) & i\overline{\sigma}_\nu(x'_{2j}) \end{pmatrix}$$

et

$$\omega'^{2}_{j,\nu} = \frac{-i\sqrt{2}}{z_\nu + i}\begin{pmatrix} \overline{\sigma}_\nu(x_{2j-1}) & -i\sigma_\nu(x_{2j-1}) \\ \overline{\sigma}_\nu(x_{2j}) & -i\sigma_\nu(x_{2j}) \end{pmatrix}$$

D'où

$$Z_{j,j'} = -2i\sum_{\nu=1}^{g_1}\frac{z_\nu - i}{z_\nu + i}\begin{pmatrix} B_\nu(x_{2j-1}, x_{2j'-1}) & B_\nu(x_{2j-1}, x_{2j'}) \\ B_\nu(x_{2j}, x_{2j'-1}) & B_\nu(x_{2j}, x_{2j'}) \end{pmatrix}$$

Corollaire 3.5. *Soit $z = (z_1, \ldots, z_{g_1})$ un point non spécial de $(\mathfrak{H}_{1,1}^3)^{g_1}$, et notons $Z = (Z_{j,j'})_{1 \le j,j' \le g_1}$, où*

$$Z_{j,j'} = -2i\sum_{\nu=1}^{g_1}\frac{z_\nu - i}{z_\nu + i}\begin{pmatrix} B_\nu(x_{2j-1}, x_{2j'-1}) & B_\nu(x_{2j-1}, x_{2j'}) \\ B_\nu(x_{2j}, x_{2j'-1}) & B_\nu(x_{2j}, x_{2j'}) \end{pmatrix}$$

alors on a

$$J_{\Sigma_n}(Z) \notin V_{\Sigma_n}(\overline{\mathbb{Q}})$$

dès que $z_\nu \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour au moins un indice ν compris entre 1 et g_1.

Cas particulier $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ où Δ est un entier relatif inférieur ou égal à -2 sans facteurs carrés.

a) Δ est congru à 2 ou 3 modulo 4
Alors $(x_1 = 1, x_2 = \sqrt{\Delta})$ est une base de $\mathcal{O}_{L_1}$ sur $\mathbb{Z}$, et on a:

$$B(1,1) = 1$$

$$B(1,\sqrt{\Delta}) = 0$$

$$B(\sqrt{\Delta},\sqrt{\Delta}) = -\Delta$$

D'où

$$Z = 2\frac{z-i}{iz-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

où $d = -\Delta$. Posons

$$\tau = 2\frac{z-i}{iz-1} \in \mathfrak{H}$$

On voit donc que la variété abélienne polarisée sous-jacente à l'élément de $\Sigma_2(L_1, 1)$ associé à $z \in \mathfrak{H}^3_{1,1}$ est isomorphe en tant que variété abélienne polarisée à $E_\tau \times E_{d\tau}$, et par suite isogène à E_τ^2.

b) Δ est congru à 1 modulo 4
Alors $(x_1 = 1, x_2 = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}$ est une base de $\mathcal{O}_{L_1}$ sur $\mathbb{Z}$, et on a:

$$B(x_1, x_1) = 1$$

$$B(x_1, x_2) = \frac{1}{2}$$

$$B(x_2, x_2) = \frac{1}{4}(1-\Delta)$$

D'où

$$Z = 2\frac{z-i}{iz-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & d \end{pmatrix}$$

où $d = \frac{1-\Delta}{4}$. Posons

$$\tau = 2\frac{z-i}{iz-1} \in \mathfrak{H}$$

On voit que si l'on pose

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$A_1 \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & d \end{pmatrix} {}^tA_1 = \begin{pmatrix} \frac{d-1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons maintenant

$$D_1 = {}^tA_1^{-1},$$

$$A = 2(4d-1)A_1$$

et

$$D = (4d-1)D_1$$

alors
$$A\,{}^tD = 2(4d-1)^2 I_2$$
et
$$A\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & d \end{pmatrix} D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d-1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Par suite, si on pose
$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
on a:
$$M \in \mathrm{GSp}_4(2(4d-1)^2),$$
et
$$MZ = \begin{pmatrix} \frac{d-1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Conclusion: la variété abélienne principalement polarisée $\mathcal{P}(Z,2)$ est isogène, en tant que variété abélienne polarisée à $E_{\frac{d-1}{2}\tau} \times E_{2\tau}$, et donc par suite à E_{τ}^2.

D'où le résultat suivant qui précise dans un cas particulier la proposition 18 de l'article de [Shi1].

Théorème 3.6. *Soit L_1 un corps quadratique imaginaire. Toute surface abélienne sous-jacente à un triplet appartenant à $\Sigma_2(L_1,1)$ est non simple. Plus précisément une telle surface abélienne est isogène à un produit de deux courbes elliptiques isogènes.*

CONCLUSION

Pour établir des résultats de transcendance portant sur les valeurs des fonctions automorphes arithmétiques, nous avons dans ce travail exploité deux voies. L'une de ces voies repose sur une application du théorème 1.9 du chapitre II. L'autre approche consiste à étudier les quotients de périodes algébriques.

Comme on l'a vu la première méthode est efficace pour les petites dimensions. La seconde reste à priviligier pour les dimensions supérieures.

REFERENCES

[Be]: D.Bertrand, Lemmes de zéros et nombres transcendants, Sém. Bourbaki 1985-86, no.652, Astérisque 145-146 (1987), 21-44.

[Co]: P.B.Cohen, Humbert surfaces and transcendence properties of automorphic functions, Rocky Mountain J. of Math.26 (1996), no.3, 987-1001.

[C-R]: C.W.Curtis and I.Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, Pure App.Math 11, Interscience, 1966.

[Mil]: J.S.Milne, Abelian varieties. Arithmetic geometry, edited by G.Cornell and J.H. Silverman, Springer-Verlag, New York, 1986, 103-150.

[Mo]: Y.Morita, On the transcendency of special values of arithmetic functions, J.Math.Soc.Japan 24 (1972), 268-274.

[Lan]: S.Lang, Introduction to algebraic and abelian functions, Springer-Verlag, 1995.

[Ros]: M.Rosen, Abelian varieties over $\mathbb{C}$. Arithmetic geometry, edited by G.Cornell and J.H.Silverman, Springer-Verlag, New York, 1986, 79-101.

[Sa]: I.Satake, Algebraic structures of symmetrics domains, Pub. Math. Soc. Japan 14, Shoten Pub. and Princeton University Press, 1980.

[S-W]: H.Shiga and J.Wolfart, Criteria for complex multiplication and transcendence properties of automorphic function, J.Reine Angew.Math, 463 (1995), 1-25.

[Shi1]: G.Shimura, On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions, Ann.Math.78 (1963), 149-192.

[Shi2]: G.Shimura, Moduli and fibre systems of abelian varieties, Ann. of Math., 83(1966), 294-338.

[vdG]: G.van der Geer, Hilbert modular surfaces, Springer-Verlag, 1980.

[Wü]: G.Wüstholz, Algebraic groups, Hodge theory, and Transcendence, Proc. ICM Berkeley 1 (1986), 476-483.

Université des Sciences et Technologies de Lille
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.
E-mail address: derome@agat.univ-lille1.fr