THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

Pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

SPECIALITE : MATHEMATIQUES

Présentée par
PASCAL VALLAEYS

LA CONJECTURE DE CLEMENS POUR LES COURBES DE DEGRE DIX

Soutenue le 19 janvier 1999

Directeur de Thèse : M. D'ALMEIDA, Professeur, Université de Lille I

JURY

Rapporteurs : M. HIRSCHOWITZ , Professeur, Université de Nice
M. GRUSON, Professeur, Université de Versailles Saint-Quentin
Membres : M. ALEXANDER, Professeur, Université d'Angers
M. MARKUSHEVICH, Professeur, Université de Lille I

Je tiens ici à exprimer tous mes remerciements à mon Directeur de thèse, M. D'Almeida, pour sa patience, sa disponibilité, et la précision de ses nombreuses explications. Je lui dois entièrement d'avoir achevé l'étude sur la conjecture de Clemens pour les courbes de degré dix, ici présentée.

Introduction.

La conjecture de Clemens est la suivante :
Sur une hypersurface quintique générique de $\mathbb{P}^4$, l'espace des courbes lisses, irréductibles, rationnelles, de degré d est fini, non vide et réduit, ceci pour toute valeur de l'entier d.

Cette conjecture fut proposée en 1984 par Clemens [4]. Katz [15] justifia alors que cette conjecture serait démontrée si étaient vérifiées les deux conditions suivantes :

(i) La variété d'incidence I (constituée des couples (C,F) où C est une courbe rationnelle lisse de degré d de $\mathbb{P}^4$, et F une hypersurface quintique la contenant) est irréductible.

(ii) Il existe une courbe C rationnelle lisse de degré d de $\mathbb{P}^4$, et une hypersurface quintique F qui la contient, telles que $N_{C/F}=O(-1)\oplus O(-1)$.

Clemens a justifié que l'hypothèse (ii) est vraie pour une infinité de valeurs de l'entier d, et Katz [15] en a déduit qu'elle est vraie pour toute valeur de d. Prouver la conjecture peut donc se ramener à prouver l'hypothèse (i). De cette première approche il résulte qu'à la conjecture de Clemens s'est ajouté le résultat que sur une hypersurface quintique générique, chacune des courbes C est plongée avec le fibré normal $O(-1)\oplus O(-1)$. Katz [15] a justifié que I est irréductible pour $d\leq 7$, en utilisant le fait qu'une courbe rationnelle lisse de degré inférieur ou égal à 7 est 6-régulière (c'est à dire que $h^1(I_C(5))=0$), ce qui se traduit géométriquement par le fait que pour toute courbe rationnelle lisse de degré d donné, l'espace des hypersurfaces quintiques la contenant est de dimension fixe, à savoir $h^0(I_C(5))-1$, quantité qui ne dépend pas, dans ce cas, de C. Nijsse [19] d'une part, et Jonhsen et Kleiman [13] d'autre part, ont démontré que l'hypothèse (i) restait valable pour d=8 et d=9, ce qui démontre la conjecture de Clemens pour ces deux cas.

Par contre, pour les degrés 12 à 24, Jonhsen et Kleiman [14] ont montré que I n'est plus irréductible, en identifiant explicitement deux composantes distinctes. Ils proposent alors un énoncé se substituant à (i) qui permettrait, en reprenant les arguments de Katz pour une partie seulement de I, de démontrer la conjecture pour d compris entre 10 et 24. Voici cet énoncé :

(i') En notant I_0 l'ensemble des couples (C,F) de I tels que C est 6-régulière ($h^1(I_C(5)=0$), et en notant $I'=I/I_0$, on suppose que la projection suivant la seconde variable de I' sur $\mathbb{P}$, l'espace des hypersurfaces quintiques de $\mathbb{P}^4$, n'est pas dominante.

Nous nous proposons ici de justifier que cette hypothèse (i') est vraie dans le cas des courbes de degré 10, et donc, de ce fait, que la conjecture de Clemens est vraie pour d=10. Pour ce faire, nous scinderons I' en plusieurs parties (qui a priori ne sont pas des composantes), et nous montrerons que la projection de chacune des ces parties ne domine pas $\mathbb{P}$ pour la projection suivant la seconde variable.

Un des points clef de cette démarche consiste à différencier les courbes 6-régulières de celles qui ne le sont pas. Pour ce faire, nous considérons le type de scindage (a_1,a_2,a_3,a_4) d'un courbe C, défini par la condition :
$\Omega^1_{\mathbb{P}^4}(1)|_C = O_{\mathbb{P}^1}(-a_1) \oplus O_{\mathbb{P}^1}(-a_2) \oplus O_{\mathbb{P}^1}(-a_3) \oplus O_{\mathbb{P}^1}(-a_4)$. Nous notons alors qu'une courbe C 6-irrégulière ne peut posséder que certains types de scindage, en utilisant le résultat de Gruson-Lazarsfeld-Peskine [9] sur la régularité des courbes.

En notant $I'(a_1,a_2,a_3,a_4)$ l'ensemble des couples (C,F) de I' tels que C possède le type de scindage (a_1,a_2,a_3,a_4), nous justifierons que pour chacun des types de scindage possible pour une courbe 6-irrégulière, la projection de $I'(a_1,a_2,a_3,a_4)$ sur $\mathbb{P}$ n'est pas dominante. Un des moyens possibles pour cela consiste à prouver que la dimension de $I'(a_1,a_2,a_3,a_4)$ est strictement inférieure à la dimension de $\mathbb{P}$ (qui est 125). Cela nous aménera alors à majorer $h^1(I_C(5))$ suivant le type de scindage de C.

Pour trois des types de scindages rencontrés, correspondant à des courbes C non dégénérées, nous pourrons en reprenant les arguments développés par Gruson, Lazarsfeld et Peskine [9] montrer que C, si elle est 6-irrégulière, possède une droite 7 ou 8-sécante, et que $h^1(I_C(5))$ est inférieur ou égal à deux, majoration qui sera en accord avec celle que nous recherchons.

Pour les autres types de scindage correspondant à des courbes non dégénérées, nous considérerons une surface réglée rationnelle R de degré 3,4 ou 5 contenant C (le degré de R dépend du type de scindage de C). En étudiant les lieux singuliers possibles pour de telles surfaces, ainsi que leur 6-régularité (dans ces cas on aura $h^1(I_{R/\mathbb{P}^4}(5))=0$) en reprenant, pour ce dernier point, le résultat établi par Lazarsfeld [17] pour les surfaces lisses, nous montrerons que $h^1(I_C(5)) \leq 6$, majoration qui pour les types de scindage en question correspondra à la majoration recherchée.

Pour les cas où la courbe C est dégénérée, nous montrerons que si $h^1(I_C(5))$ est trop grand (en regard des majorations que nous cherchons à établir) C est contenue dans deux quartiques distinctes, et dans certains cas dans une cubique. Pour justifier que l'ensemble des couples (C,F) de I' tels que C est dégénérée ne domine pas $\mathbb{P}$ pour la seconde projection, nous montrerons qu'une telle courbe C ne peut se trouver sur une hypersurface quintique générique (donc lisse) de $\mathbb{P}^4$. L'idée sera alors d'utiliser les formules de liaison $(h^1(I_C(5))=h^1(I_{C'}(s+t-n-4))$ si $C\cup C'$ est l'intersection complète de deux surfaces de degrés s et t de $\mathbb{P}^3$.(Voir Peskine Szpiro [21]).

Notations.

Nous désignons par $\mathbb{P}=\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^4,O_{\mathbb{P}^4}(5)))$ l'espace des quintiques de $\mathbb{P}^4$ (de dimension 125), et par M_d l'espace des courbes lisses rationnelles de degré d de $\mathbb{P}^4$ (irréductible de dimension $5d+1$). On note $I = \{ (C,F)\in M_d\times\mathbb{P} \ / \ C\subset F \}$ la variété d'incidence, avec $\pi_1 : I\longrightarrow M_d$, et $\pi_2 : I\longrightarrow\mathbb{P}$ les deux projections.

Posons : $I_0=\{(C,F)\in I \ / \ C$ est 6-régulière$\}$ et $I'=\{(C,F)\in I \ / \ C$ est 6-irrégulière$\}$.

Rappel : On dit qu'une sous-variété C de $\mathbb{P}^r$ est m-régulière si $h^1(\mathbb{P}^r,I_{C/\mathbb{P}^r}(m-i))=0$ quelque soit i strictement positif. C est m-irrégulière sinon.

Remarquons d'abord que I_0 est irréductible : Considérons la projection restreinte : $\pi'_1 : I_0\longrightarrow M_d$. M_d est irréductible de dimension $5d+1$. Or, la fibre au dessus d'une courbe C donnée correspond à l'espace projectif des hypersurfaces quintiques de $\mathbb{P}^4$ la contenant, soit $\mathbb{P}(H^0(I_{C/\mathbb{P}^4}(5)))$.

Considérons la suite exacte $0\longrightarrow I_{C/\mathbb{P}^4}(5)\longrightarrow O_{\mathbb{P}^4}(5)\longrightarrow O_C(5)\longrightarrow 0$, qui donne :

$$0\rightarrow H^0(I_{C/\mathbb{P}^4}(5))\rightarrow H^0(O_{\mathbb{P}^4}(5))\rightarrow H^0(O_C(5))\rightarrow H^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5))\rightarrow \underbrace{H^1(O_{\mathbb{P}^4}(5))}_{=0}$$

donc $h^0(I_{C/\mathbb{P}^4}(5))=h^0(O_{\mathbb{P}^4}(5))-h^0(O_C(5))+h^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5))$.

$$=\binom{9}{5} - (5d+1) + h^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5)) = 125 - 5d + h^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5)).$$

Or, pour chacune des courbes C d'un couple (C,F) de I_0, C est 6-régulière, et donc $h^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5))=0$. Ceci implique que pour π'_1, toutes les fibres possèdent la même dimension, à savoir 124-5d. Comme π'_1 est dominant (car la courbe générique rationnelle de degré $d=10$ de $\mathbb{P}^4$ est 6-régulière : Voir page suivante), comme les fibres (qui sont irréductibles) ont toutes la même dimension, et comme M_d est irréductible, ceci implique que I_0 est irréductible.

Si nous montrons que la projection $\pi_2 : I'\longrightarrow\mathbb{P}$ n'est pas dominante, alors $\pi_2 : I_0\longrightarrow\mathbb{P}$ sera dominante et à fibres finies (Voir Jonhsen et Kleiman [14] Theorem 2.7 P 137), et la conjecture de Clemens sera démontrée en degré 10 (La proposition (i') évoquée en introduction sera démontrée).

Nous n'avons pas pour les courbes rationnelles lisses de degré 10 de critère permettant de caractériser la 6-irrégularité. Par contre nous savons qu'une courbe 6-irrégulière ne peut posséder que certains types de scindage :
Rappel : Le type de scindage, noté $(a_1 \ldots a_r)$ d'une courbe rationnelle $C \subset \mathbb{P}^r$, est défini de la manière suivante : On pose $M = \Omega^1_{\mathbb{P}^r}(1)|_C = T_{\mathbb{P}^r}(-1)^*|_C$. M est un fibré de rang r et de degré -d sur $C \simeq \mathbb{P}^1$ (voir Nijsse P 215). Donc d'après le théorème de décomposition de Grothendieck, on a : $M = O_{\mathbb{P}^1}(-a_1) \oplus \ldots \oplus O_{\mathbb{P}^1}(-a_r)$, avec $\sum a_i = d$ = le degré de C = 10 dans notre cas. C'est la suite d'entier $a_1, \ldots, a_r$ qui définit le type de scindage de C, noté $(a_1, \ldots, a_r)$. Cette suite comportera ici quatre entiers, dont l'un sera 0 si la courbe C est dégénérée, et les autres strictement positifs (Voir Nijsse [19] pour ce dernier point).

Nous cherchons à énumérer les différents types de scindage possibles pour une courbe rationnelle lisse, de degré 10, qui est 6-irrégulière. Pour cela, nous allons nous servir du critère de GLP [8], ie la proposition 1.2 de la page 494, que voici :
Proposition 1.2 [GLP 9] : Soit $C \subseteq \mathbb{P}^r$ une courbe réduite, de normalisée $\overline{C}$, et soit $p : \overline{C} \longrightarrow \mathbb{P}^r$ le morphisme associé. On pose $M = p^*\Omega_{\mathbb{P}^r}{}^1(1)$, et on suppose donné sur $\overline{C}$ un fibré en droite A tel que $H^1(\overline{C}, \Lambda^2 M \otimes A) = 0$. Alors $C \subseteq \mathbb{P}^r$ est $h^0(\overline{C}, A)$-régulière.

Donc, pour qu'une courbe C soit 6-irrégulière, il faut que $H^1(C, \Lambda^2 M \otimes O_{\mathbb{P}^1}(5)) \neq 0$. Or $\Lambda^2 M$ se décompose en une somme de faisceaux inversibles ($= \oplus O_{\mathbb{P}^r}(-a_i - a_j)$ avec $1 \leq i < j \leq r$). Donc la condition précédente signifie que dans le type de scindage de C apparaissent deux coéfficients dont la somme donne 7 ou plus.

Nous avons donc les types suivants :

a] (1,1,1,7)	b] (1,1,2,6)	c] (1,1,3,5)	d] (1,1,4,4)	e] (1,2,2,5)
f] (1,2,3,4)	g] (0,1,1,8)	h] (0,1,2,7)	i] (0,1,3,6)	j] (0,1,4,5)
k] (0,2,2,6)	l] (0,2,3,5)	m] (0,2,4,4)	n] (0,3,3,4)	

Note : Nous voyons bien ici que le type de scindage générique, qui est (2,2,3,3) d'après Ramella [22], n'est pas possible pour une courbe 6-irrégulière, ce qui signifie qu'une courbe rationnelle lisse de degré 10 générique de $\mathbb{P}^4$ est 6-régulière.

Pour un type donné, nous noterons :
$I'(a_1 \ldots a_4) = \{ (C,F) \in I \ / \ C$ est de type $(a_1 \ldots a_4)$ et 6-irrégulière$\}$
I' sera donc l'union de ces $I'(a_1 \ldots a_4)$, pour tous les types possibles pour une courbe 6-irrégulière.

Pour prouver la conjecture de Clemens en degré 10, il nous suffira donc de montrer que π_2 : $I'(a_1...a_4) \longrightarrow \mathbb{P}$ n'est pas dominante, pour chacun des types possibles pour une courbe 6-irrégulière.

Un de moyens possibles pour prouver cela est de démontrer que la dimension de $I'(a_1...a_4)$ est inférieure ou égale à 124 dans chacun des cas possibles.

Notation : On pose $M_d(a_1...a_4)=\{C\in M_d$ / C possède le type de scindage $(a_1...a_4)\}$.
Pour la dimension de $I'(a_1...a_4)$, nous procédons ainsi : Un élément de $I'(a_1...a_4)$ correspond au choix d'une courbe C de type $(a_1...a_4)$, et d'une hypersurface quintique la contenant. La dimension de $I'(a_1...a_4)$ sera donc inférieure ou égale à la dimension de l'espace des courbes de type $(a_1...a_4)$: dim $M_d(a_1...a_4)$ plus la dimension de l'espace des quintiques contenant cette courbe : $\dim(\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^4,I_{C/\mathbb{P}^4}(5))$.
Il nous suffira donc pour prouver la conjecture de Clemens pour d=10 de prouver que $\dim(\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^4,I_{C/\mathbb{P}^4}(5))+\dim M_d(a_1...a_4) \leq 124$, soit que :
$h^0(\mathbb{P}^4,I_{C/\mathbb{P}^4}(5))+\dim M_d(a_1...a_4) \leq 125$, (avec C de type $(a_1,...,a_4)$)
pour chacun des types possibles pour une courbe 6-irrégulière.

Nous savons (d'après Ramella [22]) que : $\dim M_d(a_1...a_4) = (d+1)(5)-4-\delta(a_1...a_4)$,

avec $\delta(a_1...a_4) = \sum_{i,j=1}^{4} \max(0,a_i-a_j-1)$.

Or $h^0(I_{C/\mathbb{P}^4}(5))=125-5d+h^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5))$. Nous sommes donc amenés à démontrer que :
$125-5d+h^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5))+(d+1)(5)-4-\delta(a_1....a_4) \leq 125$, soit que :
$h^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5)) \leq \delta(a_1....a_4) - 1$ (A) , pour chacun des types de scindage possibles pour une courbe 6-irrégulière.

Les majorations nécessaires.

Nous pouvons maintenant établir pour chaque type la majoration requise pour pouvoir appliquer notre raisonnement. Nous utilisons la formule (A) :
a] (1,1,1,7) $h^1\leq 14$ b] (1,1,2,6) $h^1\leq 10$ c] (1,1,3,5) $h^1\leq 8$ d] (1,1,4,4) $h^1\leq 7$
e] (1,2,2,5) $h^1\leq 6$ f] (1,2,3,4) $h^1\leq 3$ g] (0,1,1,8) $h^1\leq 18$ h] (0,1,2,7) $h^1\leq 15$
i] (0,1,3,6) $h^1\leq 13$ j] (0,1,4,5) $h^1\leq 11$ k] (0,2,2,6) $h^1\leq 12$ l] (0,2,3,5) $h^1\leq 9$
m] (0,2,4,4) $h^1\leq 8$ n] (0,3,3,4) $h^1\leq 6$

Les trois méthodes pour majorer $h^1(I_C(5))$.

Le premier outil que nous emploierons sera le complexe d'Eagon-Northcott. Nous reprendrons de ce point de vue la démarche adoptée dans GLP [8], dont l'idée èst la suivante : D'une part nous chercherons à exhiber une droite L (d-2) ou (d-3)-sécante de C. D'autre part, nous construirons à l'aide du complexe d'Eagon

Northcott une résolution de $I_{C\cup L}(5)$, qui nous permettra d'aboutir à la 6-régularité de $C\cup L$, et donc à $h^1(I_{C\cup L}(5))=0$. Nous pourrons alors utiliser la suite exacte : $0 \longrightarrow I_{C\cup L/\mathbb{P}^4}(5) \longrightarrow I_{C/\mathbb{P}^4}(5) \longrightarrow I_{C/C\cup L}(5) \longrightarrow 0$, dont la suite exacte longue de cohomologie nous permettra d'obtenir : $h^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5)) \leq h^1(I_{C/C\cup L}(5))$.
Or $I_{C/C\cup L}(5) = O_L(\ 5P - (C.L)\ )$, où P désigne un point de L. Nous pourrons donc, dans ce cas, majorer $h^1(I_C(5)$.

La seconde méthode que nous utiliserons (introduite par Nijsse) sera basée sur une interprétation simple de la quantité $h^1(I_C(5))$. En effet, considérons la suite exacte : $0 \longrightarrow I_C(5) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^4}(5) \longrightarrow O_C(5) \longrightarrow 0$. En prenant la suite exacte longue associée, nous voyons que la quantité $h^1(I_C(5))$ représente la codimension (dans l'espace des sections globales de $O_C(5)$) de l'espace des sections de $O_C(5)$ que l'on peut étendre en une section globale de $O_{\mathbb{P}^4}(5)$. L'idée pour majorer $h^1(I_C(5))$ consistera donc à majorer la codimension de l'espace des sections que l'on peut ainsi étendre à $\mathbb{P}^4$.

Dans un premier temps, nous construirons une surface réglée rationnelle R contenant C (Voir la partie I pour la technique employée). Nous noterons $\overline{R}$ le modèle lisse de cette surface. Nous noterons par une barre la partie de dimension 1 des images réciproques des courbes de R, sur $\overline{R}$. Par exemple $\overline{C}$ désignera la courbe de $\overline{R}$ se projetant sur C. Nous appelons τ la projection : $\overline{R} \longrightarrow R$.

Pour majorer la quantité $h^1(I_C(5))$, nous procéderons ainsi : Nous nous donnons une section globale s de $O_C(5)$, et nous chercherons à étendre la section à $\mathbb{P}^4$ en plusieurs étapes. Nous majorerons la codimension de l'espace des sections globales auxquelles nous pourrons appliquer le processus décrit dans chaque étape. La codimension de l'espace des sections globales de $O_C(5)$ auxquelles nous pourrons appliquer toutes les étapes sera alors inférieure ou égale à la somme des codimensions successivement obtenues. Pour cela, nous introduisons les étapes suivantes :

-Nous étendons la section globale s au lieu singulier de la surface R.
Nous obtenons ainsi une section globale de $O_{C\cup D}(5)$, avec D le lieu singulier de R, éventuellement réductible.

-Nous remontons cette section sur $\overline{R}$, étape qui ne pose aucune difficulté, car il suffit d'appliquer τ^*. Nous obtenons ainsi une section globale de $O_{\overline{C}\cup\overline{D}}(5)$.

-Nous étendons la section globale précédente à toute la surface $\overline{R}$, en utilisant la suite exacte $0 \longrightarrow I_{\overline{C}\cup\overline{D}/\overline{R}}(5) \longrightarrow O_{\overline{R}}(5) \longrightarrow O_{\overline{C}\cup\overline{D}}(5) \longrightarrow 0$, et en calculant la quantité $h^1(I_{\overline{C}\cup\overline{D}/\overline{R}}(5))$ qui majorera la codimension de l'espace des sections globales de

$O_{\overline{C \cup D}}(5)$ qui peuvent être étendues à $\overline{R}$.

-Nous pourrons ensuite projeter la section obtenue dans $\mathbb{P}^4$, pour obtenir une section globale de $O_R(5)$, dont la restriction à C sera la section s du départ. Cela aura bien un sens de projeter la section car elle sera correctement définie sur le lieu double.

-Nous chercherons ensuite à étendre la section à $\mathbb{P}^4$. Nous montrerons donc que $h^1(I_{R/\mathbb{P}^4}(5))=0$, dans chacun des cas possibles, ce qui nous permettra d'obtenir une surjection : $H^0(O_{\mathbb{P}^4}(5)) \longrightarrow H^0(O_R(5)) \longrightarrow 0$. Nous reprendrons pour cela le résultat de Lazarsfeld sur la régularité des surfaces [16], que nous chercherons à étendre dans le cas de surfaces réglées que nous rencontrerons, c'est à dire celles possédant comme lieu singulier des points doubles isolés et éventuellement une ou deux droites doubles, une droite triple, ou une conique double. (Le théorème de Lazarsfeld se réfère au cas lisse).

Nous introduirons enfin une troisième méthode, pour les cas dégénérés g) à n), dans la partie II, en montrant que si $h^1(I_C(5))$ est "trop grand", la courbe C est contenue dans deux surfaces quartiques. Nous justifierons alors qu'une courbe C pour laquelle $h^1(I_C(5))>7$, ne peut se trouver sur une hypersurface quintique générique de $\mathbb{P}^4$.

I Les cas non-dégénérés.

Notations.

On note toujours C la courbe rationelle lisse de degré d de $\mathbb{P}^4$. Nous supposons cette courbe 6-irrégulière. On note p : $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^r$ le plongement, avec ici $r=4$ (mais nous conserverons cette notation dans le cas dégénéré $r=3$).

On pose $M = p^*\Omega^1_{\mathbb{P}^r}(1) = \Omega^1_{\mathbb{P}^r}(1)|_C = O_{\mathbb{P}^1}(-a_1) \oplus .. \oplus O_{\mathbb{P}^1}(-a_r)$.

Nous avons la suite exacte d'Euler remontée par p^* :

$0 \longrightarrow M \longrightarrow V_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow O_{\mathbb{P}^1}(d) \longrightarrow 0$, avec $V_{\mathbb{P}^1} = O_{\mathbb{P}^1}{}^{r+1}$, et $O_{\mathbb{P}^1}(d) = O_C(1)$.

On considère le produit $\overline{C} \times \mathbb{P}^r \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^r$. On note π et f les deux projections, respectivement sur $\mathbb{P}^1$ et sur $\mathbb{P}^r$. On appelle Γ le graphe de p dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^r$. Il est à noter ici que $\mathbb{P}(V_{\mathbb{P}^1}) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^r$, et $\mathbb{P}(O_{\mathbb{P}^1}(d)) = \Gamma$, et donc la surjection : $V_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow O_{\mathbb{P}^1}(d) \longrightarrow 0$ définit l'inclusion $\Gamma \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^r$. On pose $A = O_{\mathbb{P}^1}(5)$, pour comprendre pourquoi le critère de $h^0(A)$-régularité de GLP ne s'applique plus à C.

Nous utiliserons la résolution de Koszul de $O_\Gamma \otimes \pi^* A$ (Voir GLP [9] P 495) :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & & \\ & & & & \mathfrak{F}_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\ \pi^*(\Lambda^2 M\otimes A)\otimes f^* O_{\mathbb{P}^r}(-2) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi^*(M\otimes A)\otimes f^* O_{\mathbb{P}^r}(-1) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \pi^* A \arrow[r] & O_\Gamma \otimes \pi^* A \arrow[r] & 0 \\ & \mathfrak{F}_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\ 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & \end{tikzcd}$$

(1)

Plonger C dans une variété.

Nous exposons ici l'idée utilisée pour plonger C dans une surface, ou dans une variété de dimension trois de $\mathbb{P}^4$. Nous considérons la suite exacte : $0 \longrightarrow M \longrightarrow V_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow O_{\mathbb{P}^1}(d) \longrightarrow 0$. Nous choisissons un sous-fibré P de M, et nous composons l'inclusion $0 \longrightarrow P \longrightarrow M$ avec l'injection $0 \longrightarrow M \longrightarrow V_{\mathbb{P}^1}$. Notons E le conoyau du morphisme obtenu. Nous avons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & & & & \\ 0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & V_{\mathbb{P}^1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & 0 & (\alpha) \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & V_{\mathbb{P}^1} \arrow[r] & O_{\mathbb{P}^1}(d) \arrow[r] & 0 & (\beta) \end{tikzcd}$$

En résulte une surjection : $E \longrightarrow O_{\mathbb{P}^1}(d) \longrightarrow 0$, et de cette surjection, nous déduisons l'inclusion $\mathbb{P}(O_{\mathbb{P}^1}(d)) = \Gamma \subset \mathbb{P}(E)$. Nous avons ainsi construit une variété dont la dimension et le degré dépendent de E (et donc du choix de P), contenant Γ. En appliquant f, nous obtenons donc une variété $f(\mathbb{P}(E))$ contenant $C=f(\Gamma)$. Pour plonger Γ dans une surface, il faut que E soit un fibré de rang 2 (car alors $\mathbb{P}(E)$ sera de dimension 2), et donc que P soit de rang r-1 ($V_{\mathbb{P}^1}$ est de rang r+1). Comme la surface aura pour degré le degré de E = - le degré de P (voir la suite exacte α), nous choisirons : $P=O_{\mathbb{P}^1}(-a_1)\oplus\ldots\oplus O_{\mathbb{P}^1}(-a_{r-1})$, pour que ce degré soit le plus petit possible.

Note : Quand nous parlerons du modèle lisse de la surface ainsi obtenue (notée R), ou quand nous évoquerons la désingularisation de R, nous ferons référence à la restriction de f à $\mathbb{P}(E)$, notée dans la suite : τ: $\mathbb{P}(E) \longrightarrow R$.

La droite L.

Pour faire apparaître cette droite particulière, la démarche est la suivante :

Nous considérons la résolution de $O_\Gamma\otimes\pi^*A$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
 & & & \mathfrak{F}_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
\pi^*(\Lambda^2M\otimes A)\otimes f^*O_{\mathbb{P}^r}(-2) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi^*(M\otimes A)\otimes f^*O_{\mathbb{P}^r}(-1) \arrow[rr] \arrow[ur] & & \pi^*A \arrow[r] & O_\Gamma\otimes\pi^*A \arrow[r] & 0 \\
 & \mathfrak{F}_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

(1)

En appliquant le foncteur R^1f_* à cette suite exacte, et en utilisant les formules de projection, nous obtenons le morphisme v :

$$H^1(\Lambda^3M\otimes A)\otimes O_{\mathbb{P}^r}(-3)\xrightarrow{\ v\ }H^1(\Lambda^2M\otimes A)\otimes O_{\mathbb{P}^r}(-2)\longrightarrow R^1f_*\mathfrak{F}_1\longrightarrow 0.$$

Posons $P = O_{\mathbb{P}^1}(-a_1)\oplus O_{\mathbb{P}^1}(-a_2)$. Considérons le quotient $0\longrightarrow P\longrightarrow V_{\mathbb{P}^1}\longrightarrow E\longrightarrow 0$ (α), qui donne l'inclusion $\Gamma\subset\mathbb{P}(E)\subset\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^r$. Alors E est de rang trois et de degré a_1+a_2. Construisons une résolution de $O_{\mathbb{P}(E)}$, en utilisant le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\pi^*P \arrow[r] \arrow[dr] & \pi^*V_{\mathbb{P}^1} \arrow[d] \\
 & f^*O_{\mathbb{P}^r}(1)
\end{tikzcd}$$

et la suite exacte (α). Nous obtenons un morphisme $\pi^*P\longrightarrow f^*O_{\mathbb{P}^r}(1)$ puis un morphisme $\pi^*P\otimes f^*O_{\mathbb{P}^r}(-1)\longrightarrow f^*O_{\mathbb{P}^r}$, et enfin en dualisant une section : $f^*O_{\mathbb{P}^r}\longrightarrow(\pi^*P)^V\otimes f^*O_{\mathbb{P}^r}(1)$, dont le lieu des zéros est $\mathbb{P}(E)$. Nous avons donc la suite exacte (résolution) :

$$(\pi^*P)\otimes f^*O_{\mathbb{P}^r}(-1)\longrightarrow f^*O_{\mathbb{P}^r}\longrightarrow O_{\mathbb{P}(E)}\longrightarrow 0.$$

Comme nous avons une inclusion $\Gamma\subset\mathbb{P}(E)$, nous pourrons avoir des inclusions (décalées de deux rangs en raison de la différence de dimension qui est de deux) entre les termes de la résolution de Koszul de $O_{\mathbb{P}(E)}$, et les termes de la résolution de Koszul de $O_\Gamma\otimes\pi^*A$. Nous allons décaler les degrés (en tensorisant par un fibré $N=\pi^*(O_{\mathbb{P}^1}(-\alpha))\otimes f^*O_{\mathbb{P}^r}(-\beta)$) de manière à faire apparaître explicitement ces inclusions, en identifiant $P\otimes O_{\mathbb{P}^1}(-\alpha)$ et son image dans $\Lambda^3M\otimes A$.

La résolution de $O_{\mathbb{P}(E)}\otimes N$ obtenue est :

$$\pi^*(P\otimes O_{\mathbb{P}^1}(-\alpha))\otimes f^*O_{\mathbb{P}^r}(-1-\beta)\longrightarrow\pi^*(O_{\mathbb{P}^1}(-\alpha))\otimes f^*O_{\mathbb{P}^r}(-\beta)\longrightarrow O_{\mathbb{P}(E)}\otimes N\longrightarrow 0$$

et en appliquant le foncteur R^1f_*, nous trouvons :

$$H^1(P\otimes O_{\mathbb{P}^1}(-\alpha))\otimes O_{\mathbb{P}^r}(-1-\beta)\xrightarrow{\ w\ }H^1(O_{\mathbb{P}^1}(-\alpha))\otimes O_{\mathbb{P}^r}(-\beta)\longrightarrow \text{Coker } w\longrightarrow 0.$$

Nous avons donc finalement le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
H^1(\Lambda^3M\otimes A)\otimes O_{\mathbb{P}^r}(-3) \arrow[r, "v"] & H^1(\Lambda^2M\otimes A)\otimes O_{\mathbb{P}^r}(-2) \arrow[r] & R^1f_*\mathfrak{F}_1 \arrow[r] & 0 \\
H^1(P\otimes O_{\mathbb{P}^1}(-\alpha))\otimes O_{\mathbb{P}^r}(-1-\beta) \arrow[r, "w"] \arrow[u] & H^1(O_{\mathbb{P}^1}(-\alpha))\otimes O_{\mathbb{P}^r}(-\beta) \arrow[r] \arrow[u] & \text{Coker } w \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Nous cherchons les types de scindage pour lesquels, une fois les degrés identifiés, nous avons : $H^1(O_{\mathbb{P}^1}(-\alpha))\otimes O_{\mathbb{P}^r}(-\beta) = H^1(\Lambda^2M\otimes A) \otimes O_{\mathbb{P}^r}(-2)$. (Nous voyons dès à présent que pour identifier les dégrés entre les résolutions, nous devons prendre $\beta=2$).
Comme nous avons une injection : $0 \longrightarrow H^1(P\otimes O_{\mathbb{P}^1}(-\alpha))\otimes O_{\mathbb{P}^r}(-1-\beta) \longrightarrow H^1(\Lambda^3M\otimes A)\otimes O_{\mathbb{P}^r}(-3)$ nous obtiendrons une surjection : Coker $w \longrightarrow R^1f_*\mathfrak{F}_1 \rightarrow 0$, et ceci impliquera que : Supp(Coker v) = Supp ($R^1f_*\mathfrak{F}_1$) $\subset$ Supp(Coker w).

Pour le cas c] (1,1,3,5).
Nous avons dans ce cas $P=O_{\mathbb{P}^1}(-1)\otimes O_{\mathbb{P}^1}(-1)$. Donc E est de rang trois et de degré 2. $\Lambda^2M\otimes A = O_{\mathbb{P}^1}(-3)$ + des termes de degré supérieur à -1. Donc dans ce cas, avec $\alpha=3$ et $\beta=2$, nous avons bien : $H^1(O_{\mathbb{P}^1}(-\alpha))\otimes O_{\mathbb{P}^r}(-\beta) = H^1(\Lambda^2M\otimes A) \otimes O_{\mathbb{P}^r}(-2)$.
Donc, coker w = $R^1f_*(O_{\mathbb{P}(E)}\otimes\pi^*O_{\mathbb{P}^1}(-3)\otimes O_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^r}(-2))$, et Supp $R^1f_*\mathfrak{F}_1 \subset$ Supp (Coker w).

Pour le cas d] (1,1,4,4).
Le raisonnement et les résultats sont exactement les mêmes que précédemment.

Pour le cas f] (1,2,3,4).
Nous prenons $P = O_{\mathbb{P}^1}(-1) \otimes O_{\mathbb{P}^1}(-2)$. Donc E est de rang trois et de degré trois. $\Lambda^2M\otimes A = O_{\mathbb{P}^1}(-2)$ + des termes de degré supérieur à -1. Donc dans ce cas, avec $\alpha=2$ et $\beta=2$, nous avons bien : $H^1(O_{\mathbb{P}^1}(-\alpha))\otimes O_{\mathbb{P}^r}(-\beta) = H^1(\Lambda^2M\otimes A) \otimes O_{\mathbb{P}^r}(-2)$.
Donc, coker w = $R^1f_*(O_{\mathbb{P}(E)}\otimes\pi^*O_{\mathbb{P}^1}(-2)\otimes O_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^r}(-2))$, et : Supp $R^1f_*\mathfrak{F}_1\subset$Supp (Coker w).

Pour les autres cas.
Le raisonnement précédent n'est plus valable, car par un rapide calcul nous constatons que $H^1(O_{\mathbb{P}^1}(-\alpha)) \neq H^1(\Lambda^2M\otimes A)$. Par conséquent, on ne peut plus déduire de la construction une inclusion du support de $R^1f_*\mathfrak{F}_1$ dans celui de Coker w. Aussi pour ces cas, nous adopterons une autre méthode qui sera l'objet de la seconde moitié de cette deuxième partie.

<u>Deuxième étape</u> : <u>exhiber la droite L</u>.

Nous considérons donc maintenant uniquement les cas c],d] et f], avec comme acquis la relation d'inclusion : L = Supp $R^1f_*\mathfrak{F}_1 \subset$ Supp (Coker w).
Dans chacun des trois cas, nous avons coker w = $R^1f_*(O_{\mathbb{P}(E)}\otimes N)$ avec N un faisceau inversible sur $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^r$. Nous pouvons déduire de ceci (comme fait dans GLP) que le support de Coker w est le lieu sur $\mathbb{P}(E)\subset\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^r$ où la projection par f n'est pas finie. Il s'agit donc d'une sous variété linéaire dont la dimension est le nombre de composante de degré 0 de E moins 1 (E en tant que faisceau sur $\mathbb{P}^1$ se décompose en somme de $O_{\mathbb{P}^1}(i)$). E est de rang trois, et de degré non nul, donc le nombre de composantes de degré zéro est au plus deux, ce qui signifie que le support de coker w est de dimension au plus un. Or, L = Supp $R^1f_*\mathfrak{F}_1 \subset$ Supp (Coker w), et L ne peut être de dimension zéro, car sinon nous pourrions appliquer la démonstration de la

proposition 1.2 de GLP à C (car les calculs d'homologie ne se font qu'à partir du rang 1), et nous aurions C 6-régulière. Donc L est de dimension au moins 1. Donc l'inclusion est une égalité et L est un sous-espace linéaire de $\mathbb{P}^r$ de dimension 1, autrement dit une droite.

Note : De ceci nous pouvons déduire la décomposition de E : $E = O_{\mathbb{P}^1} \oplus O_{\mathbb{P}^1} \oplus O_{\mathbb{P}^1}(2)$ pour les cas c] et d], $E = O_{\mathbb{P}^1} \oplus O_{\mathbb{P}^1} \oplus O_{\mathbb{P}^1}(3)$ pour le cas f].

L'intersection L.C.

Nous savons que $L \subset f(\mathbb{P}(E))$ est une droite obtenue par projection de $Y = \mathbb{P}(O_{\mathbb{P}^1} \oplus O_{\mathbb{P}^1})$. Pour calculer L.C, nous allons donc simplement calculer $Y.\Gamma$ dans $\mathbb{P}(E)$. Pour ce faire, nous allons chercher les classes de Y et de Γ dans l'anneau de Chow de $\mathbb{P}(E)$ qui est bien connu : Il est engendré par F et H, avec F une fibre et H la classe de $O_{\mathbb{P}(E)}(1)$. Dans chacun des trois cas (c],d] et f]), nous avons la suite exacte : $0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^1}(c) \longrightarrow E \longrightarrow O_{\mathbb{P}^1} \oplus O_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow 0$, avec c=2 pour les cas c] et d], et c=3 pour le cas f]. Comme précédemment, nous remontons les morphismes par π^*, pour obtenir, après avoir composé avec la surjection $\pi^*(E) \longrightarrow O_{\mathbb{P}(E)}(1) \longrightarrow 0$: $\pi^*(O_{\mathbb{P}^1}(c)) \longrightarrow O_{\mathbb{P}(E)}(1) \longrightarrow 0$. En dualisant et en tensorisant par $O_{\mathbb{P}(E)}(1)$, nous obtenons une section : $O_{\mathbb{P}(E)} \longrightarrow \pi^*(O_{\mathbb{P}^1}(-c)) \otimes O_{\mathbb{P}(E)}(1)$, dont le lieu des zéros est Y. Ceci nous permet alors de conclure que dans l'anneau de Chow de $\mathbb{P}(E)$, nous avons : $Y = -c.F + H$.
Nous pouvons maintenant appliquer un raisonnement similaire pour Γ : Nous trouvons alors $\Gamma = c_2(P \otimes O_{\mathbb{P}(E)}(1))$, où P est le fibré correspondant à l'inclusion de Γ dans $\mathbb{P}(E)$, qui après calcul donne : $\Gamma = (d-c)\, F.H + H^2$. De cela nous déduisons : $Y.\Gamma = -c(d-c).F^2.H + (d-c).F.H^2 - c\, F.H^2 + H^3$, d'où finalement $Y.\Gamma = d-c$.

Le calcul de $h^1(I_{C \cup L/\mathbb{P}^4}(5))$.

L'idée est maintenant la suivante : Dans les cas qui nous intéressent, la courbe C n'est pas 6-régulière. L'obstacle pour appliquer la démonstration de la proposition 1.2 de GLP est le fait que $R^1 f_* \mathfrak{F}_1 \neq 0$. Maintenant que nous avons déterminé le support de ce faisceau, nous pouvons essayer d'appliquer un raisonnement du même genre. Nous allons donc justifier que $C \cup L$ est 6-régulière. Pour cela, reprenons la résolution de $O_\Gamma \otimes \pi^* A$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
 & & & & \mathfrak{F}_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
\pi^*(\Lambda^2 M \otimes A) \otimes f^* O_{\mathbb{P}^r}(-2) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi^*(M \otimes A) \otimes f^* O_{\mathbb{P}^r}(-1) \arrow[rr] \arrow[urr] & & \pi^* A \arrow[r] & O_\Gamma \otimes \pi^* A \arrow[r] & 0 \\
 & \mathfrak{F}_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

(1)

Considérons : $0 \longrightarrow \mathfrak{F}_1 \longrightarrow \pi^*(M \otimes A) \otimes f^* O_{\mathbb{P}^r}(-1) \longrightarrow \mathfrak{F}_0 \longrightarrow 0$.

On applique f_* : $f_*\mathfrak{F}_1 \longrightarrow f_*(\pi^*(M\otimes A)\otimes f^*O_{\mathbb{P}^r}(-1)) \to f_*\mathfrak{F}_0 \to R^1f_*\mathfrak{F}_1 \to R^1f_*(\pi^*(M\otimes A)\otimes f^*O_{\mathbb{P}^r}(-1))$
Or $R^1f_*(\pi^*(M\otimes A)\otimes f^*O_{\mathbb{P}^r}(-1)) = H^1(C,M\otimes A)\otimes O_{\mathbb{P}^r}(-1)$. Le terme de plus bas degré de $M\otimes A$ est $O_{\mathbb{P}^1}(0)$ ou $O_{\mathbb{P}^1}(1)$, suivant les cas. Donc $R^1f_*(\pi^*(M\otimes A)\otimes f^*O_{\mathbb{P}^r}(-1)) = 0$. Nous avons donc un morphisme u : $f_*(\pi^*(M\otimes A)\otimes f^*O_{\mathbb{P}^r}(-1)) \to f_*\mathfrak{F}_0$ surjectif sauf sur L, le support de $R^1f_*\mathfrak{F}_1$. En écrivant la suite exacte longue un peu plus loin, nous avons : $R^1f_*(\pi^*(M\otimes A)\otimes f^*O_{\mathbb{P}^r}(-1)) \longrightarrow R^1f_*\mathfrak{F}_0 \longrightarrow 0$. **Donc $R^1f_*\mathfrak{F}_0 = 0$.**

Considérons la suite exacte : $0 \longrightarrow \mathfrak{F}_0 \longrightarrow \pi^*A \longrightarrow O_\Gamma\otimes\pi^*A \longrightarrow 0$
On applique f_*, et on obtient : $0 \to f_*\mathfrak{F}_0 \longrightarrow f_*\pi^*A \longrightarrow f_*(O_\Gamma\otimes\pi^*A) \longrightarrow R^1f_*\mathfrak{F}_0$
avec $f_*(O_\Gamma\otimes\pi^*A) = p_*A$. Nous avons donc un morphisme v : $f_*\mathfrak{F}_0 \longrightarrow f_*\pi^*A$ surjectif sauf sur C. (car p_*A possède pour support C).
Nous pouvons maintenant considérer la composée $v\circ u$: $f_*(\pi^*(M\otimes A)\otimes f^*O_{\mathbb{P}^r}(-1)) \longrightarrow f_*\pi^*A$ dont le conoyau possède un support inclus dans $C\cup L$. Soit x un point de $\mathbb{P}^r$ n'appartenant pas à C. Comme $\mathfrak{F}_0 = I_\Gamma \otimes \pi^*A$, v est l'identité en x. Donc, si nous choisissons $x\in L/C$, u n'est pas surjectif en x, v est l'identité, donc la composée $v\circ u$ n'est pas surjective. Donc $\mathrm{Supp}(\mathrm{coker}(v\circ u)) = C\cup L$.

A partir de cela, nous pouvons reprendre le raisonnement de GLP de la page 496 : Nous considérons l'idéal de Fitting d'ordre zéro de Coker $v\circ u$, dont nous construisons une résolution à l'aide du complexe d'Eagon-Northcott. Alors, nous trouvons, exactement de la même manière, que $C\cup L$ est 6-régulière, soit que $h^1(I_{C\cup L/\mathbb{P}^4}(5))=0$.

Le calcul de $h^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5))$.
Nous allons maintenant utiliser la suite exacte :
$0 \longrightarrow I_{C\cup L/\mathbb{P}^4}(5) \longrightarrow I_{C/\mathbb{P}^4}(5) \longrightarrow I_{C/C\cup L}(5) \longrightarrow 0.$
Nous en déduisons : $h^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5)) \leq h^1(I_{C\cup L/\mathbb{P}^4}(5)) + h^1(I_{C/C\cup L}(5))$. Comme $h^1(I_{C\cup L/\mathbb{P}^4}(5))=0$ et que $I_{C/C\cup L}(5) = O_L(-2)$ pour les cas c] et d] et $O_L(-3)$ pour le cas f], nous avons : $h^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5)) \leq 2$
Ces inégalités sont plus strictes que les majorations recherchées. Donc les cas c],d] et f] sont vérifiés.

Les cas a] b] et e]
Nous allons maintenant appliquer, pour les cas non dégénérés restants, la seconde méthode évoquée en introduction, qui consiste à plonger Γ dans une surface, ce qui par projection dans $\mathbb{P}^4$ plongera également C dans une surface. Cette surface construite comme le $\mathbb{P}(E)$ du paragraphe précédent sera réglée et rationnelle. Pour cela, considérons le diagramme suivant où P est un sous-fibré de M:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & V_{\mathbb{P}^1} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \quad (\alpha) \\
 & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & V_{\mathbb{P}^1} & \longrightarrow & O_{\mathbb{P}^1}(d) & \longrightarrow & 0 \quad (\beta)
\end{array}$$

L'idée est maintenant de choisir $P = O_{\mathbb{P}^1}(-a_1) \oplus \ldots \oplus O_{\mathbb{P}^1}(-a_{r-1})$. Alors E sera de rang 2 et de degré $a_1+..+a_{r-1}=d-a_r$. Par projection, nous plongerons donc C dans une surface réglée rationnelle de degré $d-a_r$ (Voir Nijsse[19] ou GLP[9]). On note $R=f(\mathbb{P}(E))$ cette surface. Comme évoqué dans la méthode générale, notre but est de majorer la codimension de l'espace des sections globales de $O_C(5)$ qui peuvent être étendues à R, en remontant les sections sur $\overline{R}$ le modèle lisse de R. Le groupe de Picard de $\overline{R}$ est engendré sur $\mathbb{Z}$ par la classe d'équivalence linéaire d'une fibre, notée V, et la classe d'équivalence linéaire du diviseur associé au fibré $O_{\mathbb{P}(E)}(1)$, notée F. On pose $(-n) = F^2$, et alors $\overline{R}$ est une n-surface de Hirzebruch. F est la courbe irréductible possédant la plus petite self-intersection sur $\overline{R}$. Alors (voir Hartshorne [10] P 381 Corrolary 2.19), il existe α tel que $\alpha>n\geq 0$ et le degré de $R = d-a_r = 2\alpha-n$. Donc, suivant le degré de R, les valeurs suivantes pour n sont

Deg R	2	3	4	5	6
n=	0	1	0 ou 2	1 ou 3	0,2 ou 4

En notant H une section hyperplane de R, nous avons les classes d'équivalence linéaire suivantes : (Rappel : nous notons avec une barre la partie de dimension 1 de l'image réciproque des courbes de R sur $\overline{R}$, et donc également leur classe d'équivalence linéaire) $H \simeq F + \left(\frac{\deg R + n}{2}\right) V$; $\overline{C} \simeq F + \left(d + \frac{n - \deg R}{2}\right) V$

Si L est une droite directrice s-sécante de C, $\overline{L} \simeq F + \left(\frac{n + \deg R}{2} + s - d\right) V$.

(On peut trouver tous ces résultats dans l'article de Nijsse [19] P 216 à 218, ou simplement les obtenir par un rapide calcul).

Rappel : Sur une surface réglée, les génératrices sont les fibres de la projection $f : R \longrightarrow C$, et les directrices sont les courbes transversales coupant chacune des génératrices en un unique point.

Nous pouvons maintenant, en tenant compte du fait que nous connaissons une désingularisation τ de R, et du fait que R contient une courbe rationnelle lisse de degré 10 qui est une directrice, affirmer que :

Proposition 1 : Si le degré de R est inférieur ou égal à 6, la désingularisation $\tau : \overline{R} \rightarrow R$ est un morphisme birationnel à fibres partout finies.

Justification : Supposons que τ ne soit pas partout fini, et considérons un point singulier p au dessus duquel se trouve une courbe (pour le morphisme τ). Notons $\overline{D}$

cette courbe sur $\bar{R}$. Nous pouvons supposer la courbe $\bar{D}$ irréductible, en la remplaçant éventuellement par une de ses composantes irréductibles si nécéssaire. $\bar{D}$ ne peut être une fibre car sa self-intersection doit être strictement négative. Donc $\bar{D} \simeq \alpha F + \beta V$, avec $\alpha > 0$. Si $\bar{D}$ est distincte de F, nous avons $\beta \geq \alpha . n \geq 0$ (Voir Hartshorne [10] P 381). Alors $\bar{D}^2 \geq \alpha . n \geq 0$, ce qui est exclu car $\bar{D}$ doit être de self-intersection strictement négative. Donc $\bar{D} = F$. Nous avons $\bar{C} \simeq F + (d + \frac{n - \deg R}{2}) V$

Donc, $\bar{D}.\bar{C} = (d + \frac{n - \deg R}{2}) - n \geq 5$. Donc $\bar{C}$ possède 5 points communs avec $\bar{D}$, ce qui par projection signifie que C possède un point quintuple en p (Le revêtement $\bar{C} \rightarrow C$ est de degré un car C est une courbe directrice de la surface). Or ceci est exclu car nous nous intéressons au cas où C est lisse.

Remarque : On montre de la même manière que ce résultat reste vrai tant que $d \geq r+2$, en notant d le degré de C et r celui de R.

Rappel de la méthode générale.

Voici les différentes étapes à prendre en compte ici:

Il nous faudra pour chacun des cas :

-Déterminer le lieu singulier (ou les lieux singuliers possibles) de R.

-Etendre la section globale de $O_C(5)$ à $C \cup D$, où D est le lieu singulier de R. Nous déterminerons dans chacun des cas la codimension de l'espace des sections globales de $O_C(5)$ qui peuvent être étendues à $C \cup D$.

-Remonter la section sur $\bar{R}$, pour obtenir une section globale de $\bar{C} \cup \bar{D}$. Ceci est toujours possible en appliquant τ^*.

-Etendre la section à $\bar{R}$, en considérant la suite exacte : $0 \longrightarrow I_{\bar{C} \cup \bar{D}/\bar{R}}(5) \longrightarrow O_{\bar{R}}(5) \longrightarrow O_{\bar{C} \cup \bar{D}}(5) \longrightarrow 0$.

En prenant la suite exacte longue de cohomologie associée, nous voyons à partir de $H^0(O_{\bar{R}}(5)) \longrightarrow H^0(O_{\bar{C} \cup \bar{D}}(5)) \longrightarrow H^1(I_{\bar{C} \cup \bar{D}/\bar{R}}(5))$ que la codimension de l'espace des sections globales de $O_{\bar{C} \cup \bar{D}}(5)$ que l'on peut étendre à $\bar{R}$ est inférieure ou égale à $h^1(I_{\bar{C} \cup \bar{D}/\bar{R}}(5))$. Or, $I_{\bar{C} \cup \bar{D}}(5) = O_{\bar{R}}(5H - \bar{C} - \bar{D})$, et nous pourrons donc calculer ce h^1.

-Projeter la section globale de $O_{\bar{R}}(5)$ pour obtenir une section globale de $O_R(5)$ dont la restriction à C est la section choisie au départ.

-Etendre la section à $\mathbb{P}^4$. Pour ce faire, nous utiliserons la suite exacte : $0 \longrightarrow I_{R/\mathbb{P}^4}(5) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^4}(5) \longrightarrow O_R(5) \longrightarrow 0$ et nous prouverons que $h^1(I_{R/\mathbb{P}^4}(5)) = 0$.

a) Le cas a] (1,1,1,7).

Ici R est de degré $d\text{-}a_r=10\text{-}7=3$. Comme la surface R est non dégénérée dans $\mathbb{P}^4$ (elle contient la courbe C qui est ici non dégénérée), elle est lisse. Donc $R\simeq\overline{R}$. La codimension de l'espace des sections globales de $O_C(5)$ que l'on peut étendre à $\mathbb{P}^4$ est inférieure ou égale à $h^1(O_R(5H\text{-}C))$. Comme deg R = 3, nous avons n=1, et donc les équivalences linéaires : $H \simeq F + 2V$, $C \simeq F + 9V$. Donc $O_R(5H\text{-}C) = O_R(4F+V)$. Pour calculer $h^1(O_R(5H\text{-}C))$, nous pouvons utiliser la formule donnée par Hartshorne [10] V Lemme 2.4, car $(5H\text{-}C).V\geq 0$. $h^1(O_R(5H\text{-}C)) = h^1(\mathbb{P}^1,\mathrm{Sym}^4(O_{\mathbb{P}^1}\oplus O_{\mathbb{P}^1}(-1))\otimes O_{\mathbb{P}^1}(1)) = h^1(\mathbb{P}^1,O_{\mathbb{P}^1}(-3)\oplus O_{\mathbb{P}^1}(-2)\oplus O_{\mathbb{P}^1}(-1)\oplus O_{\mathbb{P}^1}\oplus O_{\mathbb{P}^1}(1)) = 3$.

D'après Lazarsfeld [17] (Corrolary P 423), comme R est lisse, R est (degR+3-4)=2-régulière et donc aussi 6-régulière. Donc $h^1(I_{R/\mathbb{P}^4}(5))=0$ ce qui signifie que les sections globales de $O_R(5)$ peuvent être étendues à $\mathbb{P}^4$.

Donc finalement, $h^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5)) \leq 3$. Ceci correspond bien à la majoration recherchée.

b) Le cas e] (1,2,2,5).

Ici, deg R = 5. Alors, dans $\mathbb{P}^4$, R peut possèder comme singularités :

α-Trois points doubles isolés ou un cas dégénéré de ce cas là.

β-Une droite double.

γ-Une droite double et un point double isolé.

δ-Une droite triple.

ε-Une conique double.

ϕ-Une directrice double et une fibre double.

(Voir le **Lemme 3** en annexe).

α- Considérons tout d'abord le cas où R possède trois points doubles, que nous noterons P_1,P_2 et P_3. Considérons la suite exacte :

$$0\longrightarrow I_{C\cup P_1\cup P_2\cup P_3\backslash\mathbb{P}^4}(5)\longrightarrow I_{C\backslash\mathbb{P}^4}(5)\longrightarrow I_{C\backslash C\cup P_1\cup P_2\cup P_3}(5)\longrightarrow 0.$$

Nous voyons alors trivialement que $h^1(I_{C\backslash\mathbb{P}^4}(5)) \leq h^1(I_{C\cup P_1\cup P_2\cup P_3\backslash\mathbb{P}^4}(5))$ car le support de $I_{C\backslash C\cup P_1\cup P_2\cup P_3}$ est réduit aux trois points P_i.

Nous allons maintenant chercher à majorer $h^1(I_{C\cup P_1\cup P_2\cup P_3\backslash\mathbb{P}^4}(5))$. Pour cela, nous utiliserons le fait que ce nombre représente la codimension de l'espace des sections globales de $O_{C\cup P_1\cup P_2\cup P_3}(5)$ qui peuvent être étendues à $\mathbb{P}^4$. Pour étendre une telle section, nous passons par la désingularisée de R, $\overline{R}$. Nous noterons Δ l'union des six points correspondants aux images réciproques des P_i sur $\overline{R}$. (R est obtenue par une projection partout finie d'après la **Proposition 1**, et donc au dessus d'un point double se trouvent deux antécédents). Notons encore $\tau : \overline{R}\longrightarrow R$ la désingularisation.

Pour remonter une section globale de $O_{C\cup P_1\cup P_2\cup P_3}(5)$ sur $\overline{C}\cup\Delta$, il suffit d'appliquer τ^*. Pour passer de $O_{\overline{C}\cup\Delta}(5)$ à $O_{\overline{R}}(5)$ nous cherchons à majorer $h^1(I_{\overline{C}\cup\Delta\backslash\overline{R}}(5))$.

Pour cela utilisons la suite exacte : $0\to I_{\overline{C}\cup\Delta\backslash\overline{R}}(5)\to I_{\overline{C}\backslash\overline{R}}(5)\to I_{\overline{C}\backslash\overline{C}\cup\Delta}(5)\to 0$,

qui nous donne : $h^1(I_{\overline{C}\cup\Delta\backslash\overline{R}}(5)) \leq h^1(I_{\overline{C}\backslash\overline{R}}(5)) + 6$. Pour calculer $h^1(I_{\overline{C}\backslash\overline{R}}(5))$, nous allons à nouveau utiliser les classes d'équivalences linéaires de $\overline{C}$ et H : Ici, pour deg(R)=5, nous avons deux valeurs possibles pour n : 1 et 3.

Si n=1, $H \simeq F + 3V$, $\overline{C} \simeq F + 8V$. Donc $I_{\overline{C}\backslash\overline{R}}(5) = O_{\overline{R}}(5H-\overline{C}) = O_{\overline{R}}(4F+7V)$

$h^1(I_{\overline{C}\backslash\overline{R}}(5)) = h^1(O_{\overline{R}}(4F+7V)) = h^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{Sym}^4(O_{\mathbb{P}^1}\oplus O_{\mathbb{P}^1}(-1)) \otimes O_{\mathbb{P}^1}(7)) = 0.$

Si n=3, $H \simeq F + 4V$, $\overline{C} \simeq F + 9V$. Donc $I_{\overline{C}\backslash\overline{R}}(5) = O_{\overline{R}}(5H-\overline{C}) = O_{\overline{R}}(4F+11V)$

$h^1(I_{\overline{C}\backslash\overline{R}}(5))=h^1(\mathbb{P}^1,\mathrm{Sym}^4(O_{\mathbb{P}^1}\oplus O_{\mathbb{P}^1}(-3))\otimes O_{\mathbb{P}^1}(11))=0$. Donc $h^1(I_{\overline{C}\cup\Delta\backslash\overline{R}}(5))\leq 6$. L'espace des sections globales de $O_{\overline{C}\cup\Delta}(5)$ que l'on peut étendre à $\overline{R}$ est donc de codimension au plus six. Les sections ainsi étendues peuvent être redescendues par τ_*, car elles sont bien définies sur le lieu singulier de R.

D'après le **Lemme 4** énoncé en annexe, $h^1(I_{R\backslash\mathbb{P}^4}(5)) = 0$, ce qui signifie que nous pouvons étendre toute section globale de $O_R(5)$ à $\mathbb{P}^4$. Donc finalement , nous obtenons $h^1(I_{C\backslash\mathbb{P}^4}(5)) \leq 6$. C'est exactement le résultat attendu.

Pour les cas dégénérés possibles, la même méthode reste valable car quelles que soient les singularités, il y aura au plus six antécédents sur $\overline{R}$, et le Lemme 4 s'adapte facilement au cas des points triples. Donc nous trouverons également : $h^1(I_{C\backslash\mathbb{P}^4}(5)) \leq 6$

β- Si le lieu singulier est une droite double, nous utilisons à peu près la même démarche que précédemment. Intéressons-nous au cas n=3. On vérifie sans peine que $\overline{C} \simeq F+9V$, $\overline{L}\simeq F+V$ et L est une 7-sécante de C. Donc $I_{C\backslash C\cup L}(5) = O_L(-2)$. Nous trouvons alors : $h^1(I_{C\backslash\mathbb{P}^4}(5)) \leq h^1(I_{C\cup L\backslash\mathbb{P}^4}(5)) + h^1(I_{C\backslash C\cup L}(5))$

et donc : $h^1(I_{C\backslash\mathbb{P}^4}(5)) \leq h^1(I_{C\cup L\backslash\mathbb{P}^4}(5)) + 1$. En passant par $\overline{R}$ (comme précédemment), nous trouvons $h^1(I_{C\cup L\backslash R}(5)) \leq h^1(O_{\overline{R}}(3F+10V)) = 0$.

Ensuite, nous cherchons à calculer $h^1(I_{R\backslash\mathbb{P}^4}(5))$, et pour cela nous utilisons le **Lemme 5** en annexe, qui nous donne $h^1(I_{R\backslash\mathbb{P}^4}(5))=0$.

Donc, nous trouvons finalement : $h^1(I_{C\backslash\mathbb{P}^4}(5)) \leq 1$, qui satisfait la majoration recherchée. Nous procédons de même pour le cas n=1.

γ- Pour la droite double et le point double isolé, nous combinons les deux méthodes précédentes, et nous trouvons $h^1(I_{C\backslash\mathbb{P}^4}(5)) \leq 3$.

δ- Pour la droite triple Δ, nous trouvons $h^1(I_{C\backslash\mathbb{P}^4}(5))=2$: pour étendre la section de C à $C\cup\Delta$, nous sommes amenés à calculer $h^1(I_C(5H\text{-}C.\Delta))$ qui vaut 2 car Δ coupe C en 8 points. La section s'étend de $C\cup\Delta$ à la surface réglée R avec la même méthode que précédemment, et la surface R étant 6-régulière d'après le **Lemme 6** en annexe, nous pouvons étendre la section de R à $\mathbb{P}^4$.

ε- Pour la conique double, nous trouvons $h^1(I_{C\backslash\mathbb{P}^4}(5))=0$, car cette conique coupe C en huit points, et la surface R étant 6-régulière d'après le **Lemme 6** en annexe toute section globale de $O_R(5)$ peut être étendue à $\mathbb{P}^4$.

ϕ- Enfin, pour le cas de la fibre double et de la directrice double, nous commençons par étendre une section globale donnée de $O_C(5)$ à la directrice, puis à la fibre. Nous trouvons finalement $h^1(I_{C\backslash\mathbb{P}^4}(5))=1$, la régularité de la surface réglée R étant obtenue également par le **Lemme 6** en annexe.

c) Le cas b] (1,1,2,6).

Ici, R est de degré 4. Donc d'après le **Lemme 2** en annexe, R possède comme seule singularité un unique point double ou une droite double. Nous appliquons alors exactement la même méthode qu'au paragraphe précédent, et nous trouvons $h^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5))\leq 2$, qui satisfait la majoration recherchée.

II Les cas dégénérés.

Nous reprenons ici les notations des pages 2 et 4.

Nous devons montrer que la projection π_2 : $I'(a_1,..,a_4)\longrightarrow\mathbb{P}$ n'est pas dominante, pour chacun des types de scindage g) à n).(Nous aurons donc toujours dans la suite $a_1=0$). Le cas n) désigne le type de scindage générique pour une courbe rationnelle lisse de degré dix dégénérée dans $\mathbb{P}^4$. Or, nous savons par le théorème du rang maximum (Voir Hirschowitz [12]) que pour une courbe générique de $\mathbb{P}^3$ (notée C), l'application $H^0(O_{\mathbb{P}^3}(5))\rightarrow H^0(O_C(5))$ est soit injective, soit surjective, et donc ici surjective. Ceci signifie donc que dans l'espace des courbes possédant le type de scindage (0,3,3,4), une courbe générique C vérifie : $h^1(I_C(5))=0$. Ceci nous permet d'en déduire que la projection de $I'(0,3,3,4)$ sur $M_d(0,3,3,4)$ n'est pas dominante. Nous pouvons donc nous contenter de démontrer, si nous cherchons à prouver que la dimension de $I'(a_1,..,a_4)$ est inférieure à 124, que : $h^0(I_{C/\mathbb{P}^4}(5))+\dim M_d(0,3,3,4)-1\leq 124$, ce qui revient à démontrer que $h^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5))\leq 7$. Ceci nous permet d'affirmer que l'ensemble des couples (C,F) de $I'(a_1,..,a_4)$ tels que $h^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5)) \leq 7$ forment un ensemble qui ne domine pas $\mathbb{P}$ par la projection π_2. Nous montrerons donc maintenant que si une courbe C vérifie $h^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5)) \geq 8$, alors cette courbe ne peut se trouver sur une hypersurface quintique générique de $\mathbb{P}^4$. Comme une telle hypersurface est lisse, nous démontrerons donc que si $h^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5))$ est supérieur ou égal à 8, C ne peut être sur une hypersurface quintique lisse.

Supposons que $h^1(I_{C/\mathbb{P}^4}(5)) \geq 8$.
Introduisons la suite exacte suivante associée à un plan H de $\mathbb{P}^3$:
$0\longrightarrow O_{\mathbb{P}^3}(-1)\longrightarrow O_{\mathbb{P}^3}\longrightarrow O_H\longrightarrow 0$, que nous tensorisons par $I_C(5)$. Nous obtenons :
$0\longrightarrow I_C(4)\longrightarrow I_C(5)\longrightarrow I_{C\cap H/H}(5)\longrightarrow 0$. (I) Nous remarquons d'abord que nous pouvons choisir le plan H dans $\mathbb{P}^3$ de sorte que les points de $C\cap H$ soient en position générale (Voir ACGH [1] P 113 : Théorème de position générale). Or, nous avons le Lemme suivant (ACGH [1] P 115) :

Lemme : Si $p_1,..,p_d$ est un ensemble de points de $\mathbb{P}^{r-1}$ tels que r points quelconques parmi ceux-ci soient linéairement indépendants, alors $p_1,..,p_d$ imposent au moins $\min(d,k(r-1)+1)$ conditions indépendantes sur les polynômes homogènes de degré k.

Ceci implique donc ici que ces dix points imposent 10 conditions indépendantes à une courbe de H de degré 5 pour qu'elle passe par ces points . En utilisant la suite exacte $0\longrightarrow I_{C\cap H/H}(5)\longrightarrow O_H(5)\longrightarrow O_{C\cap H}(5)\longrightarrow 0$, nous en déduisons que $h^1(I_{C\cap H/H}(5))=0$. Donc, en utilisant la suite exacte (I), nous aboutissons au fait que $h^1(I_C(4))\geq h^1(I_C(5))$, et donc $h^1(I_C(4))\geq 8$. A l'aide de la suite exacte : $0\rightarrow H^0(I_C(4))\rightarrow H^0(O_{\mathbb{P}^3}(4))\rightarrow H^0(O_C(4))\rightarrow H^1(I_C(4))\rightarrow 0$, nous en déduisons que $h^0(I_C(4)) \geq 35-41+8 = 2$. Ceci implique en particulier que la courbe C est contenue dans deux quartiques distinctes S et S' de $\mathbb{P}^3$.

Supposons dans un premier temps que ces deux quartiques sont sans composantes communes. Notons C' la courbe telle que $C\cup C'=S\cap S'$. C' est de degré 6.
Nous pouvons alors relier la cohomologie de I_C à celle de $I_{C'}$ à l'aide du résultat suivant (Voir Peskine Szpiro [21]) :

Théorème : Soit C une courbe de $\mathbb{P}^3$, X une intersection complète contenant C, et Γ le sous-schéma algébriquement lié à C par X. On suppose que s et t sont les degrés des deux surfaces définissant cette intersection complète. Alors $h^1(I_C(n))=h^1(I_\Gamma(s+t-n-4))$.

Donc ici, $h^1(I_C(5))=h^1(I_{C'}(4+4-5-4))=h^1(I_{C'}(-1))=h^0(O_{C'}(-1))$. Si la courbe C' est réduite, cette quantité est nulle, ce qui contredit l'hypothèse faite sur

$h^1(I_C(5))$. Supposons donc que $h^0(O_{C'}(-1))\geq 8$, ce qui implique que C' n'est pas réduite. Considérons la suite exacte : $0\longrightarrow O_{C'}(-2)\longrightarrow O_{C'}(-1)\longrightarrow O_P\longrightarrow 0$, où P désigne le schéma obtenu en prenant une section hyperplane générique de C'. Nous en déduisons que $h^0(O_{C'}(-2))\geq 2$, et donc que $h^1(I_{C'}(-2))=h^1(I_C(6))\geq 2$. La courbe C est donc 7-irrégulière. Nous en déduisons (Voir D'Almeida [6] Th. 0.1 P 30) que C possède une 8-sécante. Or les courbes possédant une α-sécante ($\alpha\geq 5$) dans l'espace des courbes rationnelles de degré d de $\mathbb{P}^3$ forment un sous-espace de codimension au moins α-4 (Voir Jonhsen et Kleiman [12] Lemme 2.4 P 9). Nous pouvons donc, suivant le raisonement fait précédemment, nous contenter de prouver que $h^1(I_C(5))\leq 10$.
Supposons donc que $h^1(I_C(5))\geq 11$. Revenons à C', et notons que le genre arithmétique de C', noté g', est donné par la formule : $g'-g = (\frac{1}{2}(s+t)-2).(d'-d)$, où g est le genre de C, d et d' les degrés de C et C', et s et t les degrés des surfaces dont $C\cup C'$ est l'intersection complète. (Voir Perrin [20] P225). C' est donc ici de genre arithmétique -8. Nous connaissons également le genre arithmétique d'une intersection complète de 2 surfaces : $g(C\cup C')=\frac{1}{2}.st.(s+t-4) + 1$ (Voir Perrin [20] P 161), soit donc ici 33. Ceci implique que C et C' se coupent en 42 points (en utilisant le genre arithmétique de l'union de deux courbes). La 8-sécante de C, notée Δ, est incluse dans chacune des quartiques que nous avions considérées. Donc cette droite apparaît comme une des composantes de C'. Comme nous avons (au moins) un pinceau de quartiques contenant C, nous pouvons supposer que Δ apparaît dans chacune des deux quartiques avec la même multiplicité.
Nous avons alors les cas suivants :

1- Δ est une 9-sécante de C.

2- Δ est une 8-sécante de C qui est dans le lieu double de chacune des quartiques. Alors C' est l'union de Δ avec une multiplicité 4, et d'une courbe C" de degré 2 coupant C en dix points. Nous avons donc soit une conique rencontrant C 10 fois, soit deux droites dont l'une est au moins une 5-sécante de C.

3- Δ est une 8-sécante de C, simple sur chacune des deux quartiques, et donc C' est l'union de Δ et d'une courbe C" de degré 5 coupant C en 34 points. Comme certaines des composantes de C' doivent être multiples (pour avoir $h^0(O_{C'}(-1))\neq 0$), nous voyons simplement que C admet au moins une autre 7-sécante que Δ.

Nous voyons donc que dans chacun des cas, dans l'espace des courbes rationnelles de degré 10, C appartient à un sous-espace de codimension au moins 5.
Nous pouvons donc nous contenter de nier $h^1(I_C(5))\geq 12$.

Supposons donc que $h^1(I_C(5))\geq 12$. Soit H un plan générique de $\mathbb{P}^3$. A l'aide de la suite exacte $0\longrightarrow I_{C'}\longrightarrow I_{C'}(1)\longrightarrow I_{C'\cap H/H}(1)\longrightarrow 0$, nous obtenons :

$H^0(I_{C'\cap H/H}(1)) \longrightarrow H^1(I_{C'}) \longrightarrow H^1(I_{C'}(1))$. Or $h^0(I_{C'\cap H/H}(1))=0$ car C' possède au moins une composante multiple. Donc $h^1(I_{C'}(1)) \geq h^1(I_{C'})$, ce qui pour C signifie que : $h^1(I_C(3)) \geq h^1(I_C(4))$.

Donc $h^1(I_C(3)) \geq 12$. En considérant la suite exacte : $0 \to I_C(3) \to O_{\mathbb{P}^3}(3) \to O_C(3) \to 0$, nous en déduisons que $h^0(I_C(3)) \geq 1$, et donc C est dans une surface cubique de $\mathbb{P}^3$. Alors, l'intersection de cette cubique avec une des quartiques est une courbe de degré 12, dont une des composantes est C. Notons D l'autre composante, qui est de degré 2. Comme précédemment $h^1(I_C(5)) = h^1(I_D(-2)) = h^0(O_D(-2)) \geq 12$. En introduisant la suite exacte : $0 \longrightarrow O_D(-4) \longrightarrow O_D(-2) \longrightarrow O_P \longrightarrow 0$, où P est un schéma constitué de quatre points, nous voyons que $h^0(O_D(-4)) \geq 8$, et donc que $h^1(I_C(7)) = h^1(I_D(-4)) = h^0(O_D(-4)) \geq 8$, et donc C est 8-irrégulière. Nous en déduisons en utilisant le tableau donné par GLP [9] P 504 que $h^1(I_C(7))=1$, ce qui est en contradiction avec l'inégalité obtenue.

Supposons maintenant que S et S' possèdent une composante commune, notée T. T ne peut être un plan car C n'est pas plane. Commençons par noter qu'une hypersurface quintique lisse de $\mathbb{P}^4$ ne peut contenir une surface de degré deux ou trois : Nous utilisons le résultat donné par Hartshorne [10] P281 issu du séminaire de géométrie algébrique de Grothendieck (Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, Amsterdam (1968)) :

Théorème de Lefschetz : Si Y est une hypersurface de $\mathbb{P}^N$, avec $N \geq 4$, alors $Pic(Y) \simeq \mathbb{Z}$, et Pic(Y) est engendré par $O_Y(1)$.

Comme nous nous intéressons à une hypersurface lisse, pour laquelle les diviseurs de Weil et de Cartier coïncident, ceci implique que toute surface contenue dans une hypersurface quintique lisse de $\mathbb{P}^4$ possède un degré qui est multiple de cinq. Comme dans le cas qui nous intéresse la composante commune T de S et S' ne peut être que de degré deux ou trois, elle ne peut être contenue dans une hypersurface quintique lisse de $\mathbb{P}^4$.

Supposons maintenant que la courbe C se trouve sur une hypersurface quintique lisse de $\mathbb{P}^4$, notée F. Nous allons montrer par l'absurde que cette situation est impossible.

Si T est une quadrique, C est l'intersection complète de T et de la surface définie par l'intersection de F avec le $\mathbb{P}^3$ contenant C. Or, nous connaissons le genre d'une courbe définie par une intersection complète (Voir Perrin [20] P 161) : Si C est intersection complète de deux surfaces de degrés s et t, alors $g(C) = \frac{1}{2}.(st)(s+t-4) + 1$. Donc ici, C devrait être de genre 16, or C est rationnelle. Ce cas est donc exclu.

Supposons enfin que T est une cubique. Si cette cubique est lisse, ou si elle ne possède comme singularités que des points isolés, elle est obtenue comme éclatement de $\mathbb{P}^2$ en six points. Si elle possède comme lieu singulier une droite double, elle est réglée. Dans chacun des ces deux cas, il est possible de calculer ou de majorer $h^1(I_{C/T}(5))$ (en passant par le modèle lisse pour le cas de la cubique réglée), et nous pouvons alors en déduire que $h^1(I_{C/\mathbb{P}^3}(5))\leq 3$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse.

Lemme 1 : Soit R une surface réglée rationnelle de $\mathbb{P}^4$ de dégré δ. Alors, si R ne possède comme singularités que des points doubles ordinaires, ceux-ci sont au nombre de : $\lambda = \frac{(\delta-5).\delta}{2} + 3$.

Démonstration : On peut déduire cette formule des résultats de Baker [2] P 174. Ici, nous utilisons les formules données par Le Barz [18]: En notant λ le nombre de points doubles, nous avons : $2\lambda = \delta(\delta-1)-\mu_1-\upsilon_2$, où μ_1 et υ_2 sont les invariants classiques (Voir Baker [2] P 150 et 159 respectivement). En notant c_1 et c_2 les deux classes de Chern de la surface $\overline{R}$ modèle lisse de R (Voir Hartshorne [9] Appendix A.3 pour la définition de ces classes de Chern), nous avons :

$\mu_1 = 3\delta - H.c_1$ et $\upsilon_2 = 6\delta - 4H.c_1 + c_1^{\ 2} - c_2$ (Le Barz [18] P 797).

Ici, nous avons les équivalences linéaires :

$H \simeq F + \frac{(\delta+n)}{2}V$. (avec toujours $-n=F^2$) et $K \simeq -2F + (-2-n)\ V$.

Or, $c_1 = -K \simeq 2F + (n+2)V$. Donc $H.c_1 = \delta+2$. $c_1^{\ 2}=8$, et en utilisant la formule de Noether $(1+p_a)=\frac{1}{12}(c_2+K^2)$, nous trouvons : $c_2=4$. Ceci nous permet alors d'obtenir :

$\mu_1 = 2\delta - 2$, et $\upsilon_2 = 2\delta - 4$, et finalement $\lambda = \frac{(\delta-5).\delta}{2} + 3$.

Lemme 2 : Soit R une surface réglée rationnelle non dégénérée de degré 4 de $\mathbb{P}^4$. Alors R possède au plus comme singularité un point double isolé ou une droite double.

Démonstration :

Si le lieu singulier n'est composé que de points isolés, on voit par le **Lemme 1** qu'il n'y a qu'un unique point double. Une droite double est possible. Une conique double est exclue par le théorème de Bezout (le $\mathbb{P}^3$ défini par cette conique et une fibre couperait la surface suivant une courbe de degré 5 au moins). Les courbes de degré plus haut sont exclues trivialement, toujours par le théorème de Bezout.

Lemme 3 : Soit R une surface réglée rationnelle de degré 5 de $\mathbb{P}^4$. Supposons R non dégénérée. Alors R peut posséder comme singularités :

-trois points doubles isolés, ou un cas dégénéré de celui-ci

-une droite double.

-une droite double et un point double isolé.

-une droite triple.

-une conique double.

-Une directrice double et une fibre double.

Démonstration :

D'après la formule donnée par le **Lemme 1**, nous voyons que si la surface ne possède comme singularités que des points doubles isolés, ceux-ci sont au nombre de trois. Ce cas peut, suivant la projection, dégénérer.

Intéressons-nous aux cas où R possède une droite double. Pour ce faire, considérons $\overline{R}$ le modèle lisse de R, dans $\mathbb{P}^6$. Nous avons deux valeurs possibles pour n : 1 ou 3. Considérons séparement chacun des deux cas. Si n=1, H $\simeq$ F + 3V, et F est une conique. C'est la seule conique sur R. Une droite double peut être soit une fibre double, soit une directrice double. Si R possède une fibre double, qui est alors incluse dans le plan de la conique F, R ne peut posséder aucune autre singularité d'après le théorème de Bezout. Si R possède une directrice double, un point double isolé est possible. Dans le cas d'une directrice double (obtenue par projection de F), une fibre double est possible, mais aucun autre point double n'est envisageable car alors le $\mathbb{P}^3$ défini par les deux droites doubles et le point double contiendrait deux fibres supplémentaires de la surface, ce qui par le théorème de Bezout est exclu.

Considérons maintenant le cas n=3. Ici H $\simeq$ F + 4V. F est dans ce cas une droite, ce qui implique que l'on ne peut avoir sur R de fibres multiples. R peut posséder une directrice double obtenue par projection de F et d'une fibre, ou alors une directrice double et un point double. Le cas d'une directrice double et de deux points doubles est exclu par Bezout car alors le $\mathbb{P}^3$ défini par F et les deux points doubles contiendrait une droite double et quatre fibres de R.

Une droite triple est possible, et est alors obtenue comme projection d'une cubique irréductible ou non du modèle lisse $\overline{R}$. Pour n=1, cette droite triple peut être obtenue comme projection d'une cubique irréductible ou comme projection de la conique F et d'une fibre. Pour n=3 la droite triple peut être obtenue par projection d'une cubique irréductible, ou par projection de la droite F et de deux fibres (il n'y a pas de conique sur $\overline{R}$).

Pour les courbes multiples de degré supérieur : Une conique double est possible, comme projection d'une quartique de $\overline{R}$. R ne peut posséder de courbe double de degré supérieur ou égal à trois : supposons que tel soit le cas, et notons D la courbe multiple de degré au moins 3. Alors D n'est pas plane (selon le théorème de Bézout). Donc étant donnés trois points de D, le plan P qu'ils définissent ne contient pas D. Alors P.R contient trois points doubles de R, ce qui par Bézout est exclu.

Ceci achève la démonstration du **Lemme 3**.

Lemme 4 : Soit R une surface irréductible, complexe et projective de $\mathbb{P}^r$ ($r\geq4$) ne possédant comme singularités qu'un nombre fini de points doubles. On suppose que R est obtenue par une projection à fibres partout finies de son modèle lisse et que R est réduite. Soit d le degré de R. Alors R est (d+3-r) régulière.

Démonstration :

Nous allons ici reprendre la démonstration de R. Lazarsfeld [17] (qui traite du cas lisse) en cherchant à généraliser le résultat pour les surfaces ne possédant comme singularités qu'un nombre fini de points doubles.

a] Commençons par rappeler les étapes de la démonstration de R.Lazarsfeld.

On considère donc la surface $R\subset\mathbb{P}^r$.

1- On fait le choix d'un (r-4) sous-espace de $\mathbb{P}^r$ noté Λ, disjoint de R, et on considère l'éclatement de centre Λ, noté $p : M\longrightarrow\mathbb{P}^r$. On considère ensuite la projection associée dans $\mathbb{P}^3$ $q : M\longrightarrow\mathbb{P}^3$. On note f le morphisme correspondant de $\mathbb{P}^r$ dans $\mathbb{P}^3$.

2-On considère le morphisme induit en degré k, $w_k : f_*O_{\mathbb{P}^r}(k)\longrightarrow f_*O_R(k)$.

3- Pour un choix générique de Λ, w_2 est surjective. On vérifie cela sur les fibres de la projection : le résultat est dû au fait que de manière générique on peut projeter R dans $\mathbb{P}^3$ de sorte que l'image ne possède comme singularité que des points de multiplicité deux ou trois.

4-On pose alors $E=\mathrm{Ker}(w_2)$. Ceci nous permet d'aboutir à la suite exacte :

$0\longrightarrow E\longrightarrow O_{\mathbb{P}^3}(-2)^{N(r)}\oplus O_{\mathbb{P}^3}(-1)^{r-3}\oplus O_{\mathbb{P}^3}\longrightarrow f_*O_R\longrightarrow 0$, (1.3) avec $N(r)=\frac{(r-2)(r-3)}{2}$; (nous obtenons cette suite exacte en considérant une autre manière de définir w_2. P 425).

5-Comme f_*O_R est un $O_{\mathbb{P}^3}$-module Cohen-Macaulay de dimension 2, et que le terme central de la suite exacte (1.3) est localement libre, on en déduit que E est localement libre. On a alors $\mathrm{rang}(E)=r-2+N(r)$ et $c_1(E)=d-r+3-2.N(r)$.

6- A partir de (1.3), nous voyons que si nous réussissons à prouver que $H^1(\mathbb{P}^3,E(k))=0$ pour un certain entier k, alors les hypersurfaces de degré k découpent une série linéaire complète sur R. En particulier $h^1(I_{R/\mathbb{P}^r}(k))=0$.

Donc à partir de ce point, nous cherchons à construire une résolution de E qui permettrait d'obtenir l'annulation d'un certain $H^1(E(k))$.

7-On construit deux fibrés vectoriels A et B tels que :

-On ait la suite exacte : $0\longrightarrow E\longrightarrow B\longrightarrow A\longrightarrow 0$.

-A^* soit (-1)-régulier et B^* soit (-2)-régulier.

Ceci implique alors que $\mathrm{rang}(B)-\mathrm{rang}(A)=r-2+N(r)$ et $c_1(A)-c_1(B)=d+r-3+2.N(r)$.

Pour cela, on considère $w_2 : O_{\mathbb{P}^3}(-2)^{N(r)}\oplus O_{\mathbb{P}^3}(-1)^{r-3}\oplus O_{\mathbb{P}^3}\longrightarrow f_*O_R\longrightarrow 0$, et on ajoute les générateurs manquant dans le premier terme, de manière à engendrer totalement $\oplus H^0(f_*O_R(n))$. On note A le faisceau de ces générateurs. On définit B comme le

noyau du morphisme obtenu. On a alors la suite exacte :
$0 \longrightarrow B \longrightarrow A \oplus O_{\mathbb{P}3}(-2)^{N(r)} \oplus O_{\mathbb{P}3}(-1)^{r-3} \oplus O_{\mathbb{P}3} \longrightarrow f_* O_R \longrightarrow 0$.
Ceci permet trivialement de conclure que l'on a la suite exacte: $0 \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$, avec toutes les hypothèses requises :

a) A^* est (-1)-régulier comme somme directe de fibrés de degré supérieur ou égal à un.

b) On montre la (-2)-régularité de B^* en calculant directement les H^1,H^2 et H^3 correspondants. On utilise pour cette étape le théorème d'annulation de Kodaira.

8- On démontre alors la proposition 2.4 : Soit une suite exacte $0 \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$, avec rang(B)-rang(A)=s, $c_1(A)-c_1(B)=\delta$, A^* (-1)-régulier et B^* (-2)-régulier. Alors E est $(\delta-2s+2)$-régulier. Donc en particulier, $H^1(E(k))=0$ pour $k \geq \delta-2s+1$, ce qui nous permet de conclure sur la régularité de R.

b] Les deux endroits où intervient l'hypothèse de lissité dans la démonstration de Lazarsfeld sont :

1) **Etape 3** : Pour dire que l'on peut projeter (de manière générique) la surface dans $\mathbb{P}^3$ de manière à n'obtenir que des points doubles ou triples. On peut facilement voir par un argument de dimension que la projection générique conserve cette propriété si les singularités au départ sont isolées de multiplicité deux.

2) **Etape 5** : Le point important est que dans le cas d'une surface éventuellement singulière le faisceau $f_* O_R$ n'est plus a priori Cohen-Macaulay, et par conséquent E n'est plus localement libre. O_R est Cohen-Macaulay au voisinage des points lisses de R, mais ne le sera plus au voisinage des singularités isolées (les plans tangents ne se coupent qu'en un seul point). E sera donc libre au voisinage de tous les points qui ne sont pas projection d'un point singulier isolé.

Pour contourner cette difficulté, nous allons utiliser la notion de faisceau réflexif (Voir l'article de R. Hartshorne [11]). Nous allons dans un premier temps montrer que E est réflexif. Pour cela utilisons le Corrolaire 1.5 de Hartshorne :

Cor : Soit X un schéma normal. Soit $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow R \longrightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux cohérents, avec F réflexif. Alors F' est réflexif si et seulement si R ne possède des points associés que de codimension 0 ou 1.

Selon (1.3) E est présenté par la suite exacte :
$0 \longrightarrow E \longrightarrow O_{\mathbb{P}3}(-2)^{N(r)} \oplus O_{\mathbb{P}3}(-1)^{r-3} \oplus O_{\mathbb{P}3} \longrightarrow f_* O_R \longrightarrow 0$. $f_* O_R$ ne possède des points associés que de codimension 0 par hypothèse. Donc il apparaît que E est réflexif. Nous voyons de même que B est réflexif. E et B sont localement libres sur $\mathbb{P}^3$, sauf au voisinage des points obtenus par projection des singularités isolées de R, qui sont tous non Cohen-Macaulay. E est de rang r-2+N(r), et $c_1(E)=-d-r+3-2.N(r)$.

Nous allons alors démontrer que $H^1(E(k))=0$ pour $k \geq d+2-r$, ce qui nous permettra d'arriver à la régularité voulue (Voir le Lemme 1.5 P 426 de Lazarsfeld).
Nous avons la suite exacte : $0 \to E \to B \to A \to 0$, avec A localement libre et B localement libre sauf au voisinage d'un nombre fini de points (les images des singularités isolées), et : rang(B)-rang(A)=r-2+N(r) , $c_1(A)-c_1(B) = -d-r+3-2.N(r)$.
A^* est (-1)-régulier, pour les mêmes raisons que dans le cas traité par Lazarsfeld.
Il nous faut montrer que B^* est (-2)-régulier. Nous allons pour cela nous interesser aux $H^1(B^*(-2-i))$ pour i=1,2,3. Nous allons utiliser la suite exacte de Hartshorne [11] Theorem 2.5 : Pour $\mathfrak{F}$ réflexif sur $\mathbb{P}^3$, on a : $H^3(\mathfrak{F}^* \otimes w) \simeq H^0(\mathfrak{F})'$ (où w est le faisceau canonique sur $\mathbb{P}^3$), et la suite exacte :
$0 \to H^1(\mathfrak{F}^* \otimes w) \to H^2(\mathfrak{F})' \to H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathfrak{F},w)) \to H^2(\mathfrak{F}^* \otimes w) \to H^1(\mathfrak{F})' \to 0$. (A)
Ici, cela donne d'un part (avec $\mathfrak{F}=B(1)$), $H^3(B^*(-5)) = H^0(B(1)) = 0$ comme pour la démonstration de Lazarsfeld. Pour la suite exacte, prenons $\mathfrak{F}=B(-1)$ qui est bien réflexif : $0 \to H^1(B^*(-3)) \to H^2(B(-1))' \to H^0(\mathcal{E}xt^1(B(-1),w)) \to H^2(B^*(-3)) \to H^1(B(-1))' \to 0$.
avec $H^1(B(-1)) = 0$, par construction (Voir Lazarsfeld).
Nous utilisons les notations suivantes: $f : R \longrightarrow \mathbb{P}^3$ est la projection, et en notant $\overline{R}$ le modèle lisse de R, nous avons : $t : \overline{R} \longrightarrow \mathbb{P}^3$.
Notons T le schéma des points doubles isolés, et λ le nombre de ces points doubles. Nous considérons l'ouvert W=R-T de R, et l'ouvert correspondant $\overline{W}$ sur $\overline{R}$. Nous cherchons dans un premier temps à comparer $h^2(B(-1))$ et $h^0(\mathcal{E}xt^1(B(-1),w))$.
$\mathcal{E}xt^1(B(-1),w)$ possède pour support les points non Cohen-Macaulay, c'est à dire les images des singularités isolées par f. Donc $h^0(\mathcal{E}xt^1(B(-1),w))=\lambda$. En utilisant (2.3) : $0 \to B \to A \oplus O_{\mathbb{P}^3}(-2)^{N(r)} \oplus O_{\mathbb{P}^3}(-1)^{r-3} \oplus O_{\mathbb{P}^3} \to f_* O_R \to 0$, nous voyons que $H^2(B(-1)) \simeq H^1(f_* O_R(-1))$.
Considérons la suite exacte : $0 \to O_W(-1) \to O_R(-1) \to O_T \to 0$. (Voir Hartshorne [10] P 68 pour la suite exacte associée à un ouvert. Nous notons O_W pour $j!(O_W)$ où j! est l'extension par zéro, et O_T pour $i_* O_T$ où i est l'inclusion). Nous en déduisons : $h^1(O_R(-1)) = h^1(O_W(-1)) - \lambda$. Comme W et $\overline{W}$ sont isomorphes, nous avons $h^1(O_W(-1)) = h^1(O_{\overline{W}}(-1))$. Notons $\overline{T}$ le schéma des 2λ points images réciproques des points doubles isolés de R sur $\overline{R}$. Intéressons-nous à la suite exacte : $0 \to O_{\overline{W}}(-1) \to O_{\overline{R}}(-1) \to O_{\overline{T}} \to 0$. Comme $h^1(O_{\overline{R}}(-1))=0$ par le théorème d'annulation de Kodaira, nous avons : $h^1(O_{\overline{W}}(-1)) = 2\lambda$. En combinant ces trois résultats, nous trouvons que $h^1(O_R(-1))=\lambda$, et donc que Dim $H^2(B(-1))' =$ Dim $H^0(\mathcal{E}xt^1(B(-1),w))$.
Considérons maintenant le morphisme $u : H^2(B(-1))' \to H^0(\mathcal{E}xt^1(B(-1),w))$ extrait de la suite exacte (A).

Nous reprenons la construction de Hartshorne pour aboutir à la suite exacte
$0 \longrightarrow H^1(\mathfrak{F}^* \otimes w) \longrightarrow H^2(\mathfrak{F})' \longrightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathfrak{F},w)) \longrightarrow H^2(\mathfrak{F}^* \otimes w) \longrightarrow H^1(\mathfrak{F})' \longrightarrow 0$.
Pour cela (voir P131 Th 2.5) il utilise la suite spectrale des foncteurs $\mathcal{E}xt$ et Ext, au rang 2, avec $E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{E}xt^q(\mathfrak{F},w))$. On a $H^2(\mathfrak{F})' \simeq Ext^1(\mathfrak{F},w)$ (voir Hartshorne P 131) et u correspond à la flèche : $Ext^1(\mathfrak{F},w) \longrightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathfrak{F},w))$.
Nous reprenons maintenant les notations de Godement [8] (P84 et P176 en particulier) pour comprendre le morphisme u. La suite exacte évoquée par Hartshorne est obtenue de la manière suivante : Nous construisons le double complexe K associé au faisceau $\mathfrak{F}$ (Voir Godement [8] P 176), et nous lui appliquons la méthode pour obtenir la suite spectrale dégénérée évoquée dans le cas des doubles complexes de groupes page 80 et suivantes. Ce processus est expliqué P 264-265. Nous obtenons ainsi la suite spectrale (A) recherchée. Alors, u correspond à la flèche : $H^i(K) \longrightarrow E_r^{0,i}$, avec ici $r=2$ et $i=1$ (P84). Or ce morphisme est obtenu en composant la surjection $H^i(K) \longrightarrow E_\infty^{0,i} \longrightarrow 0$ et l'injection $0 \longrightarrow E_\infty^{0,i} \longrightarrow E_r^{0,i}$. Dans notre cas, $\mathcal{E}xt^i(\mathfrak{F},w)=0$ pour $i\geq 2$ car $\mathfrak{F}$ au voisinage de chaque point est de dimension homologique au plus 1 (Voir Hartshorne [11] P131 Démonstration du théorème 2.5). Ceci implique qu'au rang $r=2$, l'injection $0 \longrightarrow E_\infty^{0,i} \longrightarrow E_r^{0,i}$ soit déjà une bijection, ie on a déjà atteint "la limite". Ceci implique donc que la flèche $H^i(K) \longrightarrow E_r^{0,i}$ soit surjective dans notre cas, comme composée d'une surjection et d'une bijection. En reprenant les notations de Hartshorne, nous voyons que le morphisme u : $H^2(B(-1))' \rightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1(B(-1),w))$ est surjectif. Comme $H^2(B(-1))'$ possède une dimension égale à celle de $H^0(\mathcal{E}xt^1(B(-1),w))$, u est une bijection. Ceci implique en utilisant la suite exacte :
$0 \rightarrow H^1(B^*(-3)) \rightarrow H^2(B(-1))' \rightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1(B(-1),w)) \rightarrow H^2(B^*(-3)) \rightarrow H^1(B(-1))' \rightarrow 0$
que $H^1(B^*(-3))=0$, qui est ce que nous désirions.

De même, en prenant $\mathfrak{F}=B$, on trouve :
$0 \longrightarrow H^1(B^*(-4)) \longrightarrow H^2(B)' \longrightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1(B,w)) \longrightarrow H^2(B^*(-4)) \longrightarrow H^1(B)' \longrightarrow 0$.
On a $H^1(B)=0$ par construction. On a encore $H^2(B)' \simeq H^0(\mathcal{E}xt^1(B,w))$ par la même méthode que précédemment. Donc finalement $H^2(B^*(-4)) = 0$, ce qui achève de prouver que B^* est (-2)-régulier.

On peut alors construire le complexe d'Eagon-Northcott sur l'ouvert $\mathbb{P}^3$-T où T est constitué d'un nombre fini de points. Comme les termes qui apparaissent dans le complexe sont réflexifs, on peut appliquer la proposition 1.6 (iii) P 126 de Hartshorne[11]. Cette proposition nous permet d'étendre les faisceaux sur $\mathbb{P}^3$ puisque T est de codimension $3\geq 2$. Nous pouvons donc construire le complexe sur $\mathbb{P}^3$, et il sera exact sauf éventuellement sur T. Comme T est de dimension 0, et que les calculs en cohomologie se font à partir des h^1, on conservera la même régularité que pour la démonstration de Lazarsfeld.

Donc S est (d+3-r)-régulière.

Lemme 5 : Soit R une surface réglée rationnelle de degré 5 de $\mathbb{P}^4$, non dégénérée, réduite, et obtenue par une projection birationnelle à fibres partout finies de son modèle lisse. Nous supposons de plus que R possède comme singularités soit une droite double, soit une droite double et un point double isolé. Alors R est 4-régulière.

Démonstration : Les surfaces que nous considérons ici sont deux de celles apparues dans la démonstration du **Lemme 3**. Nous reprenons les étapes de la démonstration du **Lemme 4**, et nous adapterons les arguments qui ne sont plus valables. Comme précédemment, les deux points de la démonstration de Lazarsfeld qui ne s'appliquent plus au cas singulier sont :

1] **Etape 3** : On vérifie ici simplement que l'image de R par une projection générique dans $\mathbb{P}^3$ possédera comme singularités des points doubles ou des points triples ordinaires. (Argument de dimension).

2] **Etape 5** : O_R sera Cohen-Macaulay au voisinage des points de la droite double (les deux plans tangents se coupent suivant la droite), et par conséquent le seul point où f_*O_R ne sera plus Cohen-Macaulay sera le point singulier isolé possible dans l'un des deux cas.

Nous noterons comme précédemment $\lambda=0$ ou 1 le nombre de points doubles isolés, et T le schéma défini par ce point dans le cas $\lambda=1$. E et B sont ici réflexifs, comme précédemment, et la seule étape de la démonstration du **Lemme 4** qui ne s'appliquera plus directement sera celle qui consiste à prouver que le morphisme u : $H^2(B(-1))' \to H^0(\mathcal{E}xt^1(B(-1),w))$ est un isomorphisme. Nous savons que u est surjectif (Voir **Lemme 4**), et par conséquent, il nous suffira de prouver que : $h^2(B(-1)) \leq h^0(\mathcal{E}xt^1(B(-1),w))$, soit que $h^1(O_R(-1)) \leq \lambda$. Pour cela, nous reprenons le cheminement précédent consistant à passer par W=R-T, puis par $\overline{W}$, puis par $\overline{R}$. Nous aurons toujours $h^1(O_R(-1)) = h^1(O_W(-1)) - \lambda$. Par contre, W et $\overline{W}$ ne sont plus isomorphes, aussi faisons le raisonnement suivant : Considérons la restriction de la projection t à $\overline{W}$, qui est un isomorphisme en dehors de la droite D. Nous avons alors la suite exacte $0 \longrightarrow O_W \longrightarrow t_*(O_{\overline{W}}) \longrightarrow K \longrightarrow 0$, où K est un faisceau de support D.

Il est à noter que D est obtenue par projection de deux droites, Δ et Δ' qui peuvent suivant les cas soit être disjointes (deux fibres) soit se couper en un point (une fibre et une directrice).

Intéressons-nous au faisceau K. Nous allons utiliser les suites exactes suivantes :
-La suite exacte de K : $0 \longrightarrow O_W \longrightarrow t_*(O_{\underline{W}}) \longrightarrow K \longrightarrow 0$
-La suite exacte associée à D : $0 \longrightarrow I_D \longrightarrow O_W \longrightarrow O_D \longrightarrow 0$
-La suite exacte correspondant à $\Delta\cup\Delta'$, qui en appliquant t_* nous donne : $0 \longrightarrow t_*I_{\Delta\cup\Delta'} \longrightarrow t_*(O_{\underline{W}}) \longrightarrow t_*O_{\Delta\cup\Delta'} \longrightarrow 0$, car le morphisme t étant à fibres finies, les R^1t_* sont nuls. A l'aide de ces trois suites exactes, nous pouvons construire le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & I_D \arrow[d] & t_*I_{\Delta\cup\Delta'} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & O_W \arrow[r] \arrow[d] & t_*(O_{\underline{W}}) \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] & 0 \\
 & O_D \arrow[d] & t_*O_{\Delta\cup\Delta'} \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Soit maintenant un ouvert U de R. Se donner une section de I_D au dessus de U (c'est à dire une fonction sur U s'annulant sur D) est exactement la même chose que de se donner une section de $t_*I_{\Delta\cup\Delta'}$ au dessus de U (fonction sur $t^{-1}(U)$ s'annulant sur $\Delta\cup\Delta'$) car t est un isomorphisme en dehors de D. Aussi, nous avons un isomophisme entre ces faisceaux. De cet isomorphisme, nous déduisons un morphisme injectif entre les conoyaux des flèches verticales. En notant K' le conoyau de ce morphisme, nous obtenons la suite exacte : $0 \longrightarrow O_D \longrightarrow t_*O_{\Delta\cup\Delta'} \longrightarrow K' \longrightarrow 0$, et un morphisme $K \longrightarrow K'$. Alors, en utilisant le lemme du serpent, nous obtenons le diagramme complété :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & I_D \arrow[r] \arrow[d] & t_*I_{\Delta\cup\Delta'} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & O_W \arrow[r] \arrow[d] & t_*(O_{\underline{W}}) \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & O_D \arrow[r] \arrow[d] & t_*O_{\Delta\cup\Delta'} \arrow[r] \arrow[d] & K' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Nous déduisons de ce diagramme que $K \simeq K'$. En utilisant la suite exacte du bas du diagramme précédent, nous obtenons que $h^0(K'(-1)) = h^0(K(-1)) = 0$. Ceci nous permet de conclure en considérant la suite exacte : $0 \longrightarrow O_W(-1) \longrightarrow t_*(O_{\overline{W}})(-1) \longrightarrow K(-1) \longrightarrow 0$ que dans tous les cas $h^1(O_W(-1)) \leq h^1(O_{\overline{W}}(-1))$.

Ensuite, nous trouvons comme pour le **Lemme 4** que $h^1(O_{\overline{W}}(-1)) = 2\lambda$.

D'où en combinant les trois résultats : $h^1(O_R(-1)) \leq \lambda$. Ceci implique alors que Dim $H^2(B(-1))' \leq$ Dim $H^0(\mathcal{E}xt^1(B(-1),w))$. Comme le morphisme u est surjectif, ceci implique qu'il est bijectif, et donc son noyau qui est $H^1(B^*(-3))$ est nul. Comme pour le Lemme IV, nous obtenons ainsi les régularités voulues pour B, et nous pouvons reprendre pour la suite de la démonstration le raisonnement de Lazarsfeld.

Lemme 6 : Soit R une surface réglée rationnelle de degré 5 de $\mathbb{P}^4$, non dégénérée, réduite, et possédant comme seule singularité soit une droite triple, soit une conique double, soit une directrice double et une fibre double. Nous supposons de plus R obtenue par une projection birrationnelle à fibres partout finies de son modèle lisse. Alors R est 4-régulière.

Démonstration : Pour les cas de la conique double et de la doite triple, nous procédons exactement comme pour le **Lemme 5**, la seule étape restant à vérifier est que $h^0(K(-1)) = 0$.

Or, notons S la courbe de $\overline{R}$ qui se projette sur la droite triple Δ (resp. la conique double Δ). Nous avons la suite exacte :

$0 \longrightarrow O_D \longrightarrow t_*O_S \longrightarrow K \longrightarrow 0$, qui s'obtient par le même diagramme qu'au **Lemme 5**.

En tensorisant par $O(-1)$ et en prenant la suite exacte longue associée, nous trouvons bien $h^0(K(-1)) = 0$, car $h^1(O_D(-1)) = 0$ dans tous les cas.

Pour le cas de la directrice double et de la fibre double, nous sommes ammenés ici à prouver, comme précédemment, que dans la suite exacte : $0 \longrightarrow O_{F\cup V}(-1) \longrightarrow t_*(O_{\overline{F\cup V_1 \cup V_2}}(-1)) \longrightarrow K(-1) \longrightarrow 0$, nous avons $h^0(K(-1)) = 0$, $\overline{F}$ étant la conique (sur le modèle lisse de R dans $\mathbb{P}^6$) qui se projette sur F, et V_1 et V_2 les deux droites disjointes se projetant sur V. Nous allons commencer par utiliser la suite exacte : $0 \to O_{F\cup V}(-1) \to t_*(O_{F\cup V_1 \cup V_2}(-1)) \to K_1(-1) \longrightarrow 0$, pour laquelle nous n'introduisons pas la conique $\overline{F}$. Nous construisons maintenant le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & O_{F\cup V}(-1) \arrow[r] \arrow[d] & O_{F\cup V}(-1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & t_*(O_{F\cup V_1\cup V_2}(-1)) \arrow[r] \arrow[d] & O_{F\cup V}(-1)\oplus O_V(-1) \arrow[r] \arrow[d] & t_*(L(-1)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1(-1) \arrow[r] \arrow[d] & O_V(-1) \arrow[r] \arrow[d] & L'(-1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

où $L=O_P$ où P est le point d'intersection de F et de V.

Donc $h^0(K_1(-1))=0$. Nous en déduisons que le morphisme : $H^1(O_{F\cup V}(-1))\longrightarrow H^1(t_*(O_{F\cup V_1\cup V_2}(-1)))$ est injectif. De la même manière, nous montrons que le morphisme $H^1(t_*(O_{F\cup V_1\cup V_2}(-1)))\longrightarrow H^1(t_*(O\_{}_{F\cup V_1\cup V_2}(-1)))$ est injectif, ce qui nous permet finalement de conclure que le morphisme :

$H^1(O_{F\cup V}(-1))\rightarrow H^1(t_*(O\_{}_{F\cup V_1\cup V_2}(-1)))$ est injectif et donc que $H^0(K(-1))=0$ ici.

Conclusion.

Nous avons donc vu que pour démontrer la conjecture de Clemens en un degré donné, nous étions amenés (par la méthode que nous avons utilisée) à majorer $h^1(I_C(5))$ suivant le type de scindage de la courbe C. Nous avons ici employé des techniques qui sont sans doutes loin d'être les plus fines possible, ce qui a pour conséquence que nous obtenons exactement les majorations recherchées, mais pas mieux. Si nous essayons d'aborder le cas du degré 11, le traitement adopté dans ce travail se révèle inefficace, d'une part parce que nous sommes amenés à considérer des surfaces réglées non dégénérées de $\mathbb{P}^4$ de degré 7, surface dont le lieu singulier est plus complexe que dans les cas de degré 5, et d'autre part parce que la méthode utilisée pour les cas dégénérés ne s'applique plus. Aussi, faudrait-il pour étudier les cas de degrés supérieurs comprendre de manière plus précise, et éventuellement plus géométrique, les raisons qui entraînent la non nullité de $h^1(I_C(5))$.

Références :

[1] **Arbarello, Cornalba, Griffiths, Harris** : Geometry of algebraic curves, Volume I, Springer Verlag 267.

[2] **Baker H.F.**: Principles of Geometry Vol VI:Algebraic surfaces. Cambridge University Press 1933

[3] **Ballico E., Ellia Ph.** : The maximal rank conjecture for non-special curves in $\mathbb{P}^3$, Invent. math., 79, 541-555 (1985)

[4] **Clemens, C.H.** : Some results on Abel-Jacobi mappings, in P. Griffiths (ed.), Topics in transcendental algebraic geometry. Ann of Math. Studies 106. Princeton University Press 1984.

[5] **Clemens, C.H.** : Homological equivalence modulo algebraic equivalence, is not finitely generated. Publ. Math. I.H.E.S. 58 (1983), 19-38.

[6] **D'Almeida J.** : Courbes de l'espace projectif : Séries linéaires incomplètes et multisécantes. J. für die reine u. ang. Math. 370, 30-51 (1986).

[7] **Edge W.L.** : The theory of ruled surfaces. Cambridge University Press. (1931).

[8] **Godement R.** : Topologie algébrique et Théorie des faisceaux. Hermann. (1958).

[9] **Gruson L., Lazarsfeld R. and Peskine C.** : On a theorem of Castenuovo and the equations defining space curves. Invent. Math. 72, 491-506 (1983).

[10] **Hartshorne R.** : Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics. Vol 52. Berlin Heidelberg. New York : Springer (1977).

[11] **Hartshorne R.** : Stable reflexive Sheaves. Math. Ann. 234, P121-176. (1980).

[12] **Hirschowitz A.** : Sur la postulation générique des courbes rationnelles. Acta Math., 146, 209-230, (1981).

[13] **Johnsen T., Kleiman S.** : Rational curves of degree at most 9 on a general quintic threefold. Commun. Algebra 24, n°8, 2721-2753 (1996)

[14] **Johnsen T., Kleiman S.** : Toward Clemens' conjecture in degrees between 10 and 24. Serdica Math. J. 23 (1997) 131-142.

[15] **Katz S.** : On the finiteness of rational curves on quintic treefolds. Comp. Math. 60. P151-162 (1986)

[16] **Kleiman S.** : The enumerative theory of singularities. Nordic Summer School. Oslo August 5-25, 1976.

[17] **Lazarsfeld R.** : A sharp Castelnuovo bound for smooth surfaces. Duke Math. Journal. Vol 55 N°2 P 423-429. (1987).

[18] **Le Barz P.** : Formules pour les multisécantes des surfaces. C.R. Acad. Sc. Paris t 292 (1981) P 797-800.

[19] **Nijsse P.** : Clemens' conjecture for octic and nonic curves. Indag. Mathem. N.S. 6 (2) P 213-221. (1995).

[20] **Perrin D.** : Géométrie algébrique, CNRS Editions.

[21] **Peskine C. Szpiro L.** : Liaison des variétés algébriques, Invent. Maths., 26, 1974, 271-302.

[22] **Ramella L.** : La stratification du schéma de Hilbert des courbes rationelles de $\mathbb{P}^n$ par le fibré tangent restreint. C.R. Académie Sc. série I t. 311 (3), P 181-184 (1990).