

No. d'ordre : 2458

50376
1999
67

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le grade de

Docteur

Spécialité : Automatique et Informatique Industrielle

par

Ayeley Philippe TCHANGANI

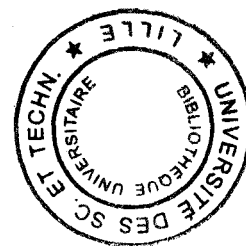
Ingénieur Ecole Centrale de Lille

Sur la Stabilité des Systèmes Héréditaires Non Linéaires

Soutenue le 06 Janvier 1999 devant la commission d'examen :

- Président :** Marcel Staroswiecki (Prof., Université Lille 1, France)
- Rapporteurs :** Lyoubomir T. Grouyitch (Prof., UTMB, Belfort, France)
Vladimir B. Kolmanovskii (Prof., MIEM, Moscou, Russie)
Rabah Rabah (Prof., Ecole des Mines, Nantes France)
- Examineurs :** Stephen P. Banks (Prof., Sheffield University, Angleterre)
Pierre Borne (Prof., Ecole Centrale, Lille, France)
Dorothée Normand-Cyrot (DR CNRS, ESE, Paris, France)
- Directeur de Thèse :** Jean-Pierre Richard (Prof., Ecole Centrale, Lille, France)
- Codirecteur :** Michel Dambrine (MdC, Ecole Centrale, Lille, France)

Travail préparé au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille
(LAIL, UPRESA CNRS 8021).



A la mémoire de mon père
To the memory of my father

Table des Matières

Avant Propos	5
Notations	8
Introduction générale	11
I Présentation des systèmes héréditaires	14
I.1 Classification et exemples	15
I.1.1 Systèmes de type retardé	16
I.1.2 Systèmes de type neutre	22
I.2 Nature et représentation des systèmes héréditaires	26
I.2.1 Problème de Cauchy	27
I.2.2 Résolution numérique des systèmes héréditaires	28
I.2.3 Autres formes de représentation	30
I.3 Introduction à la stabilité des systèmes héréditaires	32
I.3.1 Notion d'état d'équilibre	32
I.3.2 Stabilité : définitions	33
I.4 Conclusion	37
II Stabilité des systèmes héréditaires : différentes méthodes d'approche	39
II.1 Equation caractéristique : système linéaire	40
II.1.1 Systèmes linéaires de type retardé	40

II.1.2	Systèmes linéaires à retards de type neutre	46
II.1.3	Stabilité dépendant du retard : continuité des zéros	47
II.1.4	Cas de retards distribués	52
II.2	Fonctionnelles et fonctions de Lyapunov scalaires	54
II.2.1	Fonctionnelles de Lyapunov : méthode de Krasovskii	55
II.2.2	Fonctions de Lyapunov : méthode de Razumikhin	56
II.2.3	Fonctionnelles de Lyapunov pour les systèmes de type neutre	59
II.2.4	Fonctionnelles de Lyapunov dégénérées	61
II.2.5	Techniques de construction des fonctionnelles de Lyapunov	64
II.3	Fonctions vectorielles de Lyapunov et systèmes de comparaison	66
II.3.1	Fonctions vectorielles de Lyapunov	68
II.3.2	Principe de comparaison et systèmes de comparaison	69
II.3.3	Systèmes de comparaison dégénérés	70
II.4	Conclusion	72
III	Stabilité des systèmes neutres	73
III.1	Introduction	73
III.2	Représentation des systèmes neutres	74
III.3	Principe des systèmes de comparaison dégénérés	76
III.3.1	Systèmes de comparaison dégénérés	76
III.3.2	Normes vectorielles	80
III.3.3	Construction des systèmes de comparaison dégénérés	81
III.3.4	Stabilité pratique et comportement asymptotique	88
III.3.5	Exemple	92
III.4	Méthodes multi-étapes de construction d'une fonctionnelle de Lyapunov	95
III.4.1	Principe de la méthode	95
III.4.2	Application au cas linéaire	97
III.5	Conclusion	99

IV Stabilité des systèmes à retards distribués	101
IV.1 Introduction	101
IV.2 Approche par principe de comparaison	102
IV.3 Cas linéaire stationnaire : application de certaines transformations de modèles	108
IV.3.1 Systèmes purement retardés, à retards ponctuels	112
IV.3.2 Cas des systèmes purement retardés, à retards distribués	117
IV.3.3 Cas d'un retard distribué en série avec un retard ponctuel	120
IV.4 Stabilité robuste	121
IV.5 Conclusion	126
V Stabilisation des systèmes héréditaires	128
V.1 Introduction	128
V.1.1 Placement de spectre	130
V.1.2 Approche H_∞	132
V.1.3 Commande sous contraintes, linéarisation entrée-sortie	133
V.1.4 Bilan	134
V.2 Stabilisation des systèmes à retards non linéaires	135
V.2.1 Stabilisation par retour de la valeur instantanée de l'état	136
V.2.2 Stabilisation par retour de la valeur retardée de l'état	137
V.2.3 Stabilisation par retour d'état : approche par retard distribué	139
V.3 Observateurs asymptotiques	143
V.4 Conclusion	144
Conclusion générale et perspectives	146
Annexe 1 : Annexes relatives au Chapitre III	164
Annexe 2 : Annexes relatives au Chapitre IV	166

Annexe 3 : Annexes relatives au Chapitre V	167
Annexe 4 : liste de publications de l’auteur	168

Avant Propos

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Automatique et Informatique Industrielle de Lille (LAIL, UPRESA CNRS 8021) sous la direction conjointe du **Professeur Jean-Pierre Richard** (Professeur à l'Ecole Centrale de Lille) et du **Docteur Michel Dambrine** (Maître de Conférences à l'Ecole Centrale de Lille). Nous leur sommes particulièrement reconnaissant pour avoir su partager avec nous leur enthousiasme pour la recherche et surtout pour nous avoir appris la rigueur scientifique.

Le **Professeur Marcel Staroswiecki** (Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille et Directeur du LAIL), spécialiste de la supervision des systèmes complexes, préside notre jury de thèse malgré ses lourdes tâches. Nous le remercions vivement pour cela, et espérons que notre contribution scientifique l'intéressera et pourra donner lieu à des collaborations futures dans son domaine.

Le **Professeur Vladimir B. Kolmanosvkii** (Professeur au MIEM et à l'Académie des Sciences de Moscou) de renommée internationale entre autres pour sa contribution à l'analyse de la stabilité des systèmes héréditaires, a accepté d'être rapporteur sur ce mémoire. Nous le remercions beaucoup pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de juger notre travail ainsi que pour les conseils qu'il nous a prodigués pendant ses séjours au sein de notre laboratoire, et pour la confiance qu'il a placée en nous pour des publications co-signées.

Le **Professeur Lyoubomir T. Grouyitch** (Professeur à l'Université de Technologie Belfort - Montbéliard (UTMB)) internationalement connu pour ses travaux relatifs à diverses notions de stabilité, a accepté, malgré les nombreuses charges qui sont les siennes, de porter son jugement sur notre travail et d'être membre de notre jury de thèse. Qu'il nous soit permis de le remercier pour ses commentaires constructifs qui ont permis à ce manuscrit de gagner en rigueur.

Le **Professeur R. Rabah** (Professeur à l'Ecole des Mines de Nantes), spécialiste des

systèmes de dimension infinie et des systèmes neutres en particulier, nous fait un grand honneur en acceptant de rapporter sur notre travail, qu'il a suivi au cours d'actions nationales communes concernant les systèmes à retards. Nous le remercions vivement de sa participation au jury.

Nous remercions le **Docteur Dorothée Normand-Cyrot** (Directrice de Recherches au CNRS, LSS, Paris) qui, malgré ses charges, a accepté de participer à notre jury de thèse et d'examiner nos travaux : ses compétences en matière de systèmes non linéaires seront elles aussi un élément important dans l'évaluation de ce travail.

Le **Professeur Stephen P. Banks** (Professeur à l'Université de Sheffield), spécialiste de la commande des systèmes non linéaires et à paramètres distribués, mathématicien de haut niveau, nous fait lui aussi l'honneur de participer à notre jury de thèse malgré ses nombreuses tâches. Qu'il nous soit permis de lui témoigner ici notre gratitude.

Le **Professeur Pierre Borne** (Directeur Scientifique de l'Ecole Centrale de Lille), grand spécialiste de la commande des systèmes complexes, a accepté d'examiner notre travail. Nous lui adressons toute notre gratitude pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant d'être membre de notre jury, ainsi que toute la gentillesse qu'il a montrée à notre égard pendant les trois ans que nous avons passés dans ce laboratoire.

Nos discussions avec le **Professeur V.R. Nosov** (Professeur au MIEM, Moscou) pendant son séjour au LAIL au début de notre thèse nous ont été d'un grand apport notamment pour les résultats du Chapitre *III*. Qu'il reçoive ici toute notre reconnaissance.

Le LAIL, avec le dévouement et la gentillesse de son personnel et l'excellente ambiance qui règne entre les chercheurs, est un cadre idéal pour un épanouissement aussi bien scientifique qu'humain. Nous tenons donc à remercier tous les membres du LAIL pour la compréhension dont ils ont toujours fait preuve à notre égard. Certains ont été plus proches de nous de différentes manières. Qu'il nous soit permis de faire spécialement mention de **Dr W. Perruquetti**, **Dr A. Bartholoméüs-Goubet**, **Mr. L. Lefevre** (pour des discussions d'ordre scientifiques), **Mr. P. Gallais** (specialiste PC et Monsieur "je suis toujours disponible"), **Mr. J. Lasue** (ingénieur CNRS, spécialiste Mac), **MM.**

K. Mesghouni, S. Lamiri, T. Felfel (collègues de bureau).

Enfin nous tenons à remercier le Ministère Français de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche (**MESR**) pour le soutien financier qu'il nous a apporté dans l'accomplissement de ce travail, ainsi que la direction de l'Ecole Centrale de Lille qui nous a confié des enseignements auprès de ses élèves ingénieurs, ainsi que la Région Nord-pas de Calais qui soutenait ce travail dans le cadre du contrat d'objectif "GRAISyHM" (Groupement de Recherche en Automatisation Intégrée et Systèmes Hommes-Machines).

Notations

- Notations relatives aux ensembles et fonctions

- $\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs
- $\mathbb{R}$: ensemble ou corps des nombres réels
- $\mathbb{R}_+$ (ou $\mathbb{R}^+$) : ensemble des nombres réels positifs ou nuls
- $\mathbb{R}^n$: espace vectoriel réel de dimension n
- $[a, b]$: intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b
- $]a, b[$: intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b
- $[a, b[$: intervalle semi-fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b
- $\mathbb{C}$: ensemble ou corps des nombres complexes
- $\mathbb{C}^+$: ensemble des nombres complexes à parties réelles positives ou nulles
- $\text{Re}(z)$: partie réelle du nombre complexe z
- $\text{Im}(z)$: partie imaginaire du nombre complexe z
- $\bar{z}$: nombre conjugué du nombre complexe z
- φ fonction de $[-h, 0]$ dans $\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{C} = C([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$ ou $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$: ensemble des fonctions continues de $[-h, 0]$ dans $\mathbb{R}^n$ (h éventuellement infini, dans ce cas $\mathcal{C} = C(-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$)
- $x(t; t_0, \varphi)$: vecteur à l'instant t , solution d'une équation différentielle fonctionnelle pour un instant initial t_0 et une condition initiale fonctionnelle φ
- $x(t)$: notation abrégée pour $x(t; t_0, \varphi)$
- x_t : élément de $\mathcal{C}$ associée à une fonction $x(t)$ définie par $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ $\forall \theta \in [-h, 0]$ ou $x_t(\theta) = x(t + \theta) \forall \theta \leq 0$ dans le cas h infini

- $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$
- $\mathcal{C}^1 = C^1([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$ ou $C^1(\mathbb{R}^n)$: ensemble des fonctions continûment différentiables de $[-h, 0]$ dans $\mathbb{R}^n$
- $x_t(t_0, \varphi)$: fonction correspondant à la solution $x(t; t_0, \varphi)$
- le retard maximal (éventuellement infini) sera noté η dans la suite du mémoire
- $\mathcal{D}$: sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{C}(\mathcal{D})$: sous-ensemble de $\mathcal{C}$ défini par $\mathcal{C}(\mathcal{D}) = \{\varphi \in \mathcal{C} : \varphi(\theta) \in \mathcal{D}, \forall \theta \in [-h, 0]\}$
- $\mathbb{R}[s]$: anneau des polynômes en s à coefficients réels
- $|\cdot|$: valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe
- $\|\cdot\|$: une norme sur $\mathbb{R}^n$
- $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$: norme sur $\mathcal{C}$ définie par $\forall \varphi \in \mathcal{C} : \|\varphi\|_{\mathcal{C}} = \max_{\theta \in [-h, 0]} \{\|\varphi(\theta)\|\}$
- $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$: $\forall \varphi \in \mathcal{C}^1 : \|\varphi\|_{\mathcal{C}^1} = \max \left\{ \max_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\|, \max_{\theta \in [-h, 0]} \left\| \frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} \right\| \right\}$
- $\mathcal{W}$: espace des fonctions absolument continues de $[-h, 0]$ dans $\mathbb{R}^n$ de carré de la dérivée intégrable muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ définie par $\|\varphi\|_{\mathcal{W}}^2 = \|\varphi(0)\|^2 + \int_{-h}^0 \|\dot{\varphi}(s)\|^2 ds$
- $\mathcal{L}_2([0, \infty[; \mathbb{R}^n)$: ensemble de fonctions de $[0, \infty[$ dans $\mathbb{R}^n$ de carré de norme sommable
- $D^+\mathcal{V}(t, \varphi)$: dérivée à droite au sens de Dini¹ le long des trajectoires d'une équation différentielle de la fonctionnelle $\mathcal{V}(t, \varphi)$ définie par $D^+\mathcal{V}(t, \varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup \frac{\mathcal{V}(t+\epsilon, x_{t+\epsilon}) - \mathcal{V}(t, x_t)}{\epsilon}$

• Notations relatives aux vecteurs

¹Ulisse Dini (1845 - 1918). Après des études universitaires à Pise puis à Paris, le mathématicien italien Ulisse Dini enseigne, à partir de 1866, à l'Université de Pise dont il est recteur de 1888 à 1890. Il fait partie du mouvement qui développe, à Pise, l'analyse fonctionnelle en cette fin de dix-neuvième siècle. Ses travaux portent sur la fonction de variable réelle, et il s'intéresse en particulier aux conditions pour qu'une limite d'une suite de fonctions continues soit continue. On lui doit aussi d'autres résultats sur les séries.

- x^T : transposée de x
 - $x \leq y$ (ou $x \geq y$) : pour $x, y \in \mathbb{R}^r$ signifie l'inégalité composantes par composantes
 - $|x|$: vecteur associé à x et définie par $|x| = [|x_1|, \dots, |x_i|, \dots, |x_r|]^T$
 - $\|x\|$: est une norme de x
 - $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^r, V(x) = [V_1(x_1), \dots, V_i(x_i), \dots, V_r(x_r)]^T$ norme vectorielle régulière
- Notations relatives aux matrices
- $[a_{ij}]$: matrice carrée dont le coefficient de la i^{eme} ligne et j^{eme} colonne est a_{ij}
 - A^T : transposée de A
 - A^* : transposée conjuguée de A
 - A^+ : matrice dont la diagonale est la même que celle de A et dont les coefficients hors-diagonaux sont les valeurs absolues des coefficients hors-diagonaux de A correspondants
 - $A \leq B$ (respect. $A \geq B$) : signifie inégalité coefficients par coefficients
 - $|A|$: matrice associée à A définie par $|A| = [|a_{ij}|]$
 - $\|A\|$: norme de la matrice A définie par $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \{\|Ax\|\}$
 - $\mu(A)$: mesure de la matrice A associée à la norme $\|\cdot\|$ définie par $\mu(A) = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{\|I + \Delta A\| - 1}{\Delta}$
 - I_n : matrice identité de $\mathbb{R}^{n \times n}$
 - Soit $A = [A_{ij}]$ où $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ et V , une norme vectorielle régulière alors on définit les matrices $V(A)$ et $\Gamma(A)$ par :
 - * $V(A) = [V(A)_{ij}]$: définie par $V(A)_{ij} = \sup_{V_j(x_j) \neq 0} \left\{ \frac{V_i(A_{ij}x_j)}{V_j(x_j)} \right\}$
 - * $\Gamma(A) = [\Gamma(A)_{ij}]$: définie par $\Gamma(A)_{ii} = \mu_i(A_{ii})$ et $\Gamma(A)_{ij} = V(A)_{ij}$ pour tout $i \neq j$
 - * $\mu_i(A_{ii})$: mesure de la matrice A_{ii} associée à la norme V_i

Introduction générale

L'analyse de la stabilité est une étape nécessaire et cruciale dans la conception de lois de commande pour les systèmes dynamiques. En effet, si on veut imposer à un processus des trajectoires données, ou tout au moins modifier ses dynamiques, il faut s'assurer que les rétroactions (les lois de commande) que l'on élabore ne le déstabilisent pas. La solution ou la trajectoire que l'on impose doit être rendue stable, c'est-à-dire qu'une perturbation autour de cette trajectoire ne doit pas conduire le système à s'écarter énormément de celle-ci. Ainsi l'analyse de la stabilité apparaît comme un préliminaire à la commande des systèmes dynamiques.

Dans le domaine des sciences pour l'ingénieur, il est courant de supposer que l'évolution future d'un système dynamique "ordinaire" peut être entièrement déterminée par un ensemble fini de variables considérées à l'instant présent. Ainsi cette évolution ne dépendrait pas autrement de l'histoire du système, c'est-à-dire la manière dont il est arrivé dans cet "état". Cette hypothèse n'est plus vérifiée lorsque l'on veut étudier le comportement des systèmes dits "héréditaires" où interviennent certains phénomènes de mémoire, de temps de transport de matière, de temps de transmission de l'information, ... Il convient alors de considérer une partie de l'histoire du processus dans l'écriture de son modèle dynamique (notons toutefois que les systèmes ordinaires sont des cas particuliers des systèmes héréditaires).

Un grand nombre de travaux ont concerné ces systèmes, qui restent souvent réfractaires aux méthodes de commande développées dans le cas ordinaire : ainsi, pour ne citer que ces quatre dernières années, des études ont concerné leur stabilité et stabilisation [5, 13, 22, 99] ainsi que leur caractérisation structurelle [95, 107, 118]. D'autres actions collectives ont impliqué plusieurs équipes de recherche sur ce sujet [2, 27, 75, 115] et une bibliographie relative à ce thème peut être trouvée dans [114]. Cependant, la plupart de ces travaux ont concerné essentiellement soit les systèmes à retards ponctuels, soit les modèles linéaires. Le travail de ce mémoire essaie donc de contribuer à combler les la-

cunes concernant l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires et à retards distribués, de type retardé ou neutre.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré à la classification des systèmes héréditaires les plus courants et à la présentation d'exemples issus de différents domaines. Un rappel des principales définitions relatives à l'étude de la stabilité est également donné dans ce même chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les différentes techniques utilisées pour l'analyse de la stabilité des systèmes héréditaires. Les bases de la méthode directe de Lyapunov (Lyapunov-Krasovskii et Lyapunov-Razumikhin) ainsi que celles des méthodes basées sur le principe de comparaison sont introduites à ce niveau.

Le troisième chapitre est dédié à l'étude de la stabilité des systèmes neutres. Les principaux résultats originaux de ce chapitre reposent sur l'utilisation du principe de comparaison : ainsi, par analogie avec les travaux de Kolmanovskii et Nosov sur les "fonctionnelles dégénérées", nous définissons les *systèmes de comparaison dégénérés*, qui permettront d'établir de nouveaux critères de stabilité. Ils permettent également d'établir des conditions pour qu'un sous-ensemble donné soit attractif, ainsi que des conditions de stabilité pratique : de telles notions prennent compte des situations où l'on juge suffisant de s'approcher d'un objectif sans nécessairement l'atteindre précisément. Les conditions correspondantes sont moins contraignantes que dans le cas de la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre.

Le quatrième chapitre de ce mémoire est consacré aux systèmes à retards distribués. Nous présentons essentiellement les critères de stabilité obtenus par application du principe de comparaison, mais proposons également certains résultats obtenus par construction de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii. Nous étudions certaines transformations de modèles conduisant à élargir les possibilités d'application de ces méthodes : en effet, les conditions généralement obtenues étant seulement suffisantes, une adaptation de modèle peut s'avérer intéressante dans de nombreux cas.

Dans le dernier chapitre, le problème de la stabilisation est considéré. Après un bref

rappel de différentes techniques de stabilisation, notamment le placement de spectre fini, la commande H_∞ , la commande sous contraintes et la linéarisation entrée-sortie, nous employons les résultats du Chapitre IV pour concevoir différentes lois de commande par retour d'état "partiel" ou "complet" pour la stabilisation robuste de certaines classes de systèmes héréditaires. Ces termes de retour *partiel* ou *complet* mettent l'accent sur le fait que pour un système à retard, l'état est une fonction et non plus un vecteur de dimension finie : un retour ne tenant compte que de valeurs instantanées ($u(t) = k(x(t))$ par exemple) de l'état n'est donc que "partiel". Par contre un retour distribué dans le temps correspond plus à un retour "complet". Notons ici que lecteur intéressé par les aspects "commande" pourra commencer la lecture de ce mémoire par l'introduction de ce Chapitre V. La notion d'observateurs asymptotiques est également introduite dans ce même chapitre et le principe de comparaison est appliqué à la conception d'un observateur asymptotique pour une classe de systèmes héréditaires.

Enfin, certaines des preuves de résultats énoncés dans ce mémoire se trouvent dans les articles regroupés dans les annexes.

Chapitre I

Présentation des systèmes héréditaires

Ce chapitre a pour but d'esquisser un tour d'horizon des principaux types de systèmes héréditaires étudiés dans la littérature. Comme nous allons le voir à partir des différents exemples évoqués, le phénomène d'hérédité (retard) peut être dû à plusieurs causes : être intrinsèque au processus considéré (temps d'incubation en épidémiologie, ..), être dû à un phénomène de transport de matière, d'énergie, d'information ..., à un temps de traitement de l'information (temps de calcul d'un ordinateur par exemple). De nombreux exemples de phénomènes physiques modélisés par des systèmes héréditaires peuvent se rencontrer dans la littérature, citons [31, 41, 42, 61, 60, 78, 69, 97, 47] ; cette liste étant bien sûr loin d'être exhaustive.

Selon la manière dont le passé intervient sur l'évolution du système, on utilise les terminologies de *systèmes de type retardé* (à retards ponctuels et/ou distribués) ou de *systèmes de type neutre* (à retards ponctuels et/ou distribués) [7, 31, 61, 60].

Dans la première section de ce chapitre, nous donnerons une classification des systèmes héréditaires selon le type (retardé ou neutre) et selon la nature du retard ou délai (ponctuel ou discret/distribué).

La deuxième section est consacrée aux particularités (par rapport aux systèmes dits

ordinaires) de ces systèmes, et notamment à la mise en évidence du caractère infini de leur état (c'est-à-dire que ici l'état est une fonction).

Enfin, dans la troisième section nous introduisons le problème de la stabilité, qui est la question fondamentale traitée dans ce mémoire.

I.1 Classification et exemples

Les systèmes héréditaires sont des systèmes dynamiques pour lesquels l'évolution à partir d'un instant donné t dépend non seulement des valeurs des variables du système et des informations à cet instant, mais aussi à toute ou partie de l'histoire du système. Soit $x(t) \in \mathbb{R}^n$, un vecteur représentant les variables internes du système dont on veut étudier l'évolution ; de tels systèmes sont régis alors par une équation de la forme:

$$G_0(t, x(t), \dot{x}(t), x_t, \dot{x}_t) = 0, \quad t \geq t_0, \quad (\text{I.1})$$

où x_t représente la restriction de la fonction $x(t)$ à un intervalle $[t-h, t]$ (éventuellement $]-\infty, t]$) et G_0 est une fonctionnelle vectorielle. L'équation (I.1) représente les systèmes héréditaires dits généralisés [22]. Dans beaucoup de cas, l'équation (I.1) peut se simplifier, notamment dans le cas où la dérivée $\dot{x}(t)$ peut être explicitée à chaque instant t , donnant alors lieu à l'équation (I.2):

$$\dot{x}(t) = G_1(t, x(t), x_t, \dot{x}_t), \quad t \geq t_0, . \quad (\text{I.2})$$

C'est cette seconde forme que nous allons considérer tout au long de ce mémoire. Dans la littérature, deux classes importantes de ces systèmes apparaissent selon que la fonctionnelle G_1 dans (I.2) dépend ou non de $\dot{x}_t$ et conduit à la dénomination de systèmes de type retardé ou systèmes de type neutre respectivement.

I.1.1 Systèmes de type retardé

Les systèmes de type retardé correspondent au cas où G_1 ne dépend pas explicitement de $\dot{x}_t$ où (I.2) devient :

$$\dot{x}(t) = G_r(t, t, x(t), x_t), \quad t \geq t_0, . \quad (\text{I.3})$$

Ce type d'équations sont appelées équations différentielles fonctionnelles. Ces systèmes sont employés pour la modélisation de phénomènes intervenant dans un grand nombre de domaines : sciences de l'ingénieur, sciences naturelles (biologie, écologie, etc), ... (voir [31, 41, 42, 61, 60, 78] et les références incluses). Le phénomène de retard peut intervenir sur l'équation (I.3) de deux manières principales, largement considérées dans la littérature : de manière ponctuelle, on parle alors de *systèmes à retards ponctuels (ou discrets)* ou de manière continue conduisant aux systèmes dits *systèmes à retards distribués*.

Systèmes à retards ponctuels (ou discrets)

On les appelle aussi des équations différentielles aux différences. Dans ce cas, l'équation (I.3) devient :

$$\dot{x}(t) = G_r(t, t - h_i(t), x(t), x(t - h_i(t))), \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots; \quad (\text{I.4})$$

les $h_i(t)$ étant une suite finie ou infinie de fonctions du temps dont les valeurs sont positives et généralement bornées ou supposées telles, c'est à dire qu'il existe une constante η telle que toutes les valeurs prises par les fonctions h_i vérifient l'inégalité $0 \leq h_i(.) \leq \eta$.

Ces modèles permettent de prendre en compte des temps de transport, de traitements d'information, etc. Nous allons donner dans les paragraphes suivants deux exemples de problèmes pratiques modélisés sous forme de systèmes à retards discrets.

Exemple I.1 Distribution d'albumine dans le sang

Le modèle hydraulique suivant (Figure I-1) peut être utilisé pour illustrer le mécanisme de distribution d'albumine dans le sang [60].

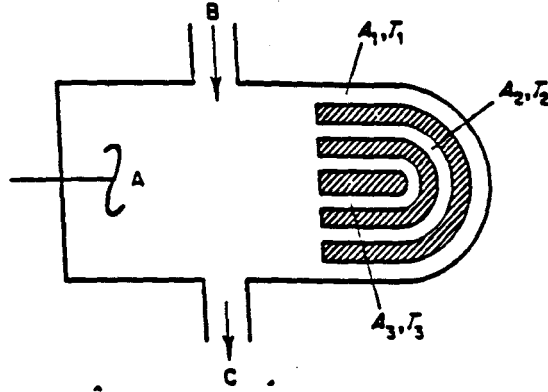


Figure I-1: Distribution d'albumine

On considère le système représenté à la figure I-1 où A est un réservoir de volume unitaire rempli par de l'eau qui circule à travers trois pompes de débit A_1 , A_2 , A_3 et de temps de parcours T_1 , T_2 , T_3 . Supposons qu'à l'instant $t = 0$, l'on introduise $1g$ d'une teinture dans le réservoir A . Le mélange est supposé instantané. L'eau teinturée s'écoule du réservoir A à travers la pompe C de débit L et l'eau pure entre dans le réservoir par la pompe B de même débit. On suppose qu'il n'y a aucun mélange dans les pompes (en d'autres termes on néglige les phénomènes de diffusion) et que la vitesse d'écoulement est constante dans chaque section transversale de pompe. Soit $x(t)$ la concentration de la teinture dans le réservoir à l'instant t . Alors un bilan de la matière conduit à l'équation

$$\dot{x}(t) = -(A_1 + A_2 + A_3 + L)x(t) + A_1x(t - T_1) + A_2x(t - T_2) + A_3x(t - T_3) \quad (I.5)$$

qui traduit l'évolution de la concentration de teinture à l'intérieur du réservoir avec les conditions initiales :

$$x(\theta) = 0, \forall \theta \in [-\max(T_1, T_2, T_3), 0[, \quad x(0) = 1.$$

L'équation (I.5) représente bien un système à retards ponctuels multiples. Les retards sont ici des délais de transport de matière. Notons que les conditions initiales ne sont

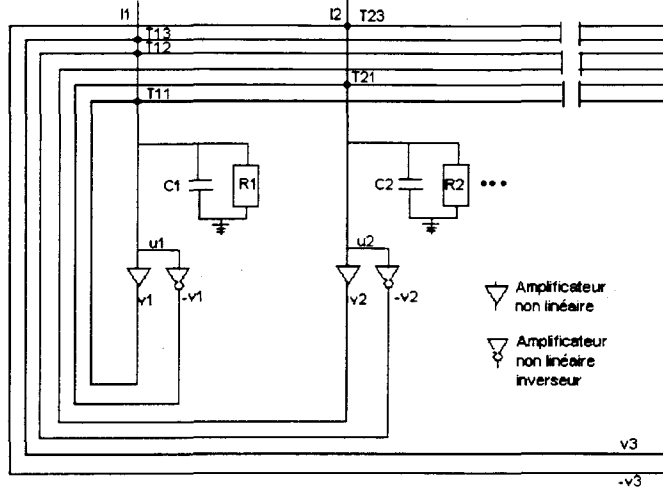


Figure I-2: Réseau de neurones artificiels

pas continues, elles sont seulement continues par morceaux. Ceci n'est pas contraignant car la solution résultante sera continue pour $t \geq 0$.

Exemple I.2 Réseaux de neurones artificiels de Hopfield [91]

Considérons le circuit électrique de la figure I-2. Ce circuit représente un réseau de neurones artificiels de Hopfield. Chaque unité i (neurone) du réseau est constituée d'un circuit $R_i - C_i$ et d'un amplificateur de fonction de sortie g_i . Elle est décrite par la tension u_i sur son entrée [91]. L'équation d'évolution de ce réseau s'écrit

$$C_i \dot{u}_i(t) = \sum_{j=1}^n T_{ij} v_j - \frac{1}{\tau_i} u_i(t) + I_i(t) \quad (\text{I.6})$$

où $R_i, C_i > 0$ représentent respectivement la résistance et la capacité de l'unité i , R_{ij} étant la résistance de connexion entre la sortie de l'unité i et l'entrée de l'unité j ($T_{ij} = \frac{1}{R_{ij}}$, R_{ij} peut être négatif du fait de l'inversion du signe de la sortie de i), $\frac{1}{\tau_i} = R_i + \sum_{j=1}^n |T_{ij}|$, $v_i(t) = g_i(u_i(t))$, $g_i \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, (-1, 1))$ représente la caractéristique non linéaire de l'amplificateur de l'unité i et $I_i(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ une entrée externe de courant.

Ces réseaux ont été largement utilisés dans la résolution de divers problèmes tels que

reconnaissance de forme, traitement d'images, optimisation, etc [91]. Mais une des plus anciennes applications de ces réseaux est son utilisation comme mémoire associative. Dans ce cas, les sources de courant sont supposées délivrer un courant constant et les équilibres asymptotiquement stables sont utilisés comme des mémoires.

Par ailleurs, dans la pratique (implantation par la technique VLSI par exemple [91, 99]), les délais de transmission de l'information à travers les interconnexions ne peuvent être ignorés. Ainsi en posant, $x(t) = [.., x_i(t), ..]^T$, $x_i(t) = C_i u_i(t)$, $B = \text{diag}(.., b_i, ..)$, $b_i = \frac{1}{\tau_i C_i} > 0$, $T = [T_{ij}] \in R^{n \times n}$, $S(x) = [.., s_i(x_i), ..]^T$, $s_i(x_i) = g_i(\frac{x_i}{C_i})$, $I = [.., I_i, ..]^T$ et en notant h le délai de transmission, l'équation (I.6) devient

$$\dot{x}(t) = -Bx(t) + TS(x(t-h)) + I \quad (\text{I.7})$$

équation plus réaliste et qui est celle que nous considérerons. Il est montré (voir [99] et les références incluses) qu'il y a deux possibilités pour le système linéarisé de (I.7) : soit le système est stable quelque soit la valeur du retard soit il existe une valeur critique du retard au delà de laquelle le système devient instable. Par conséquent, pour l'utilisation du circuit comme mémoire associative, l'analyse de la stabilité de l'équation (I.7) s'avère importante.

Nous allons maintenant considérer l'autre aspect de la manifestation du phénomène de retard lorsque celui-ci intervient de manière répartie.

Systèmes à retards distribués

Ici l'influence du retard intervient de manière continue sur l'évolution actuelle du système. Dans ce cas, la fonctionnelle G_r de (I.3) ne peut se réduire à une fonction des valeurs de la restriction x_t de $x(t)$ à différents instants. Les cas les plus fréquemment étudiés sont ceux où G_r dépend du passé par une certaine "somme" des valeurs correspondant à

à une équation de la forme :

$$\dot{x}(t) = G_d(t, x(t), \int_{t-\eta(\cdot)}^t H(\cdot)x(s)ds), \quad t \geq t_0, \quad s \leq t \quad (\text{I.8})$$

où $H(\cdot)$ est une matrice dépendant en général du temps et éventuellement d'autres variables. Pour s'affranchir de certaines difficultés mathématiques nous allons supposer, comme c'est souvent le cas dans la littérature [60], que le noyau $H(\cdot)$ est au moins continu par morceaux et de norme sommable c'est-à-dire $\int_0^\infty \|H(\cdot)\| ds < \infty$ dans un certain domaine.

De tels systèmes trouvent leur usage dans la modélisation de beaucoup de phénomènes et le plus souvent des systèmes d'évolution de populations [31, 78, 21, 46] comme nous allons le voir dans les exemples suivants.

Exemple I.3 *Dynamique des populations.*

Les modèles décrivant l'évolution d'une population d'une espèce ou l'interaction entre plusieurs espèces partageant un même écosystème [31, 78, 21, 46] sont établis à partir de la loi de variation du taux de croissance instantané par unité de population pour une espèce, soit une équation de type

$$\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} = f_i(\cdot), \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad n \geq 1 \quad (\text{I.9})$$

où n représente le nombre d'espèces dans l'écosystème ; $x_i(t)$ est une certaine mesure de l'espèce i (densité spatiale, concentration, nombres de têtes, etc) à l'instant t , $f_i(\cdot)$ représente le taux de croissance instantané. Les différences de modélisation selon les auteurs [46] sont essentiellement dues à la structure des fonctions $f_i(\cdot)$ considérées (linéaires, non linéaires ; dépendance par rapport aux valeurs instantanées des variables, dépendance par rapport à leur histoire, etc). Par exemple le cas f_i constant donne lieu à une évolution exponentielle conduisant à l'explosion (modèle d'évolution de la population humaine

selon Malthus¹) ou à l'extinction de l'espèce selon que f_i est positif ou négatif. Ici nous considérons le cas où les $f_i(\cdot)$ dépendent de l'histoire des populations. Les plus célèbres modèles sont les équations de Volterra² dont une classe est donnée par [31]

$$f_i(\cdot) = \lambda_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \int_{t-\eta}^t k_{ij}(t-s)x_j(s) \quad (I.10)$$

(η pouvant être infini) de telle sorte que le système (I.9)-(I.10) est un système à retards distribués. C'est une généralisation des équations de type logistique [31, 46] introduites pour rendre compte de la saturation de la population (correction de la loi de Malthus).

Une sous-classe de ces systèmes, appelée système proies-prédateurs, a reçu une attention particulière de part leur célébrité historique [46]. Il s'agit du cas de deux espèces, l'une proie et l'autre son prédateur.

Exemple I.4 Système proies-prédateurs (biomasse-bétail).

Récemment [4], il a été présenté une forme de ces modèles où les prédateurs correspondent au bétail et la proie à la biomasse. Remarquons qu'ici il n'y a pas de possibilité pour la proie de se comporter comme un prédateur alors que dans d'autres systèmes comme celui de poissons-poissons-hommes (voir [4] et les références qui s'y trouvent), certains poissons pouvant manger d'autres poissons. Ceci est important pour la modélisation du système. Dans [4], il a été présenté deux types de modèles selon qu'on considère un effet de mémoire sur la limitation de ressource (ici la biomasse) ou non. Dans le cas où l'on ne prend pas en compte le phénomène de mémoire sur la limitation de ressource, le système

¹ Thomas Robert Malthus (1766 - 1834). Pasteur et économiste britannique. Dans son "Essai sur le principe de population (1798)", il attribue la misère et la pauvreté au fait que la population croît beaucoup plus vite que les ressources, et préconise la limitation des naissances.

² Vito Volterra (1860 - 1940). Mathématicien, physicien et homme politique italien. Professeur de physique mathématique, il fit progresser l'analyse fonctionnelle et fut le premier à en appliquer les méthodes aux sciences biologiques (problèmes de croissance, d'hérédité, etc). Sénateur (à partir de 1905), il s'opposa au fascisme.

s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{G}(t) &= aG(t)[1 - \frac{1}{k}G(t) - \frac{\alpha}{a} \int_{-\infty}^t \omega_1(t-s)U_1(H(s))ds] \\ \dot{H}(t) &= H(t)[- \gamma - \delta H(t) + \beta \int_{-\infty}^t \omega_2(t-s)U_2(G(s))ds]\end{aligned}\quad (I.11)$$

où $G(t)$ représente la densité de biomasse, $H(t)$ la population du bétail, $a > 0$ le taux de croissance inhérent de la biomasse en l'absence du bétail, $k > 0$ une certaine caractéristique de la biomasse, $\alpha > 0$ le taux maximal de consommation de biomasse par le bétail, $\delta > 0$ le taux d'auto-inhibition du bétail, $\beta > 0$ le taux de croissance maximal du bétail, $\gamma > 0$ le taux de disparition du bétail en l'absence de biomasse. Les fonctions $U_i (i = 1, 2)$ sont continues et définies sur $[0, \infty)$ et vérifient $U_i(0) = 0$, $\dot{U}_i(s) > 0$, et $\lim_{s \rightarrow \infty} U_i(s) = 1$; les noyaux $\omega_i (i = 1, 2)$ sont des fonctions continues, positives et bornées sur $[0, \infty)$ telles que $\int_0^\infty \omega_i(u)du = 1$

Il est important pour un contrôle efficace de l'évolution de l'environnement de savoir si un équilibre d'un tel système est (asymptotiquement) stable ou non pour des paramètres donnés (c'est-à-dire si l'introduction d'une certaine quantité de bétail peut conduire à la pénurie de biomasse, par exemple) ou, à l'inverse, d'être capable d'ajuster les paramètres (prélèvement, désherbage,...) pour qu'un équilibre donné soit stable.

Nous allons présenter dans les paragraphes suivants l'autre volet des systèmes héréditaires : les systèmes de type neutre.

I.1.2 Systèmes de type neutre

C'est le cas (I.2) où la fonctionnelle G_1 dépend explicitement de $\dot{x}_t$ et que nous rappelons ici:

$$\dot{x}(t) = G_n(t, x(t), x_t, \dot{x}_t), \quad t \geq t_0. \quad (I.12)$$

De même que dans le cas précédent, on distingue les systèmes de type neutre à retards ponctuels

$$\dot{x}(t) = G_{np}(t, t - h_i(t), x(t), x(t - h_i(t)), \dot{x}(t - h_i(t))), \quad t \geq t_0, \quad (\text{I.13})$$

et des systèmes de type neutre à retards distribués

$$\dot{x}(t) = G_{nd}(t, s, x(t), \int_{t-\eta(\cdot)}^t H(\cdot)x(s)ds, \int_{t-\eta(\cdot)}^t K(\cdot)\dot{x}(s)ds), \quad t \geq t_0. \quad (\text{I.14})$$

Une autre forme des systèmes de type neutre se rencontre dans la littérature (voir [61, 60]) :

$$\frac{d}{dt} [Z(t, x_t)] = F(t, x_t), \quad t \geq t_0, \quad (\text{I.15})$$

où $Z : \mathbb{R} \times \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un opérateur dérivable par rapport à son premier argument (le temps). Cette formulation est celle que nous allons considérer dans ce mémoire.

Illustrons cela sur l'exemple suivant.

Exemple I.5 *Ligne de transmission sans pertes [60].*

Soit une ligne de transmission sans pertes résistives constituée d'un long câble de longueur l alimentée par un générateur de tension $E(t)$ et de résistance R . L'autre extrémité est reliée à une charge constituée par une capacité C_1 et un élément de caractéristique $i(t) = g(v(t))$ comme sur la figure I-3. Les constantes L et C représentent respectivement l'inductance et la capacité linéique de la ligne.

Soient $v(t, x)$ et $i(t, x)$ la tension et l'intensité au point x ($0 < x < l$) de la ligne à l'instant t . L'évolution de ces grandeurs obéit aux équations aux dérivées partielles [30] :

$$L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad ; \quad C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} \quad ; \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (\text{I.16})$$

avec les conditions aux limites

$$E(t) - v(0, t) - Ri(0, t) = 0 \quad ; \quad C_1 \frac{\partial v(l, t)}{\partial t} = i(l, t) - g(v(l, t)). \quad (\text{I.17})$$

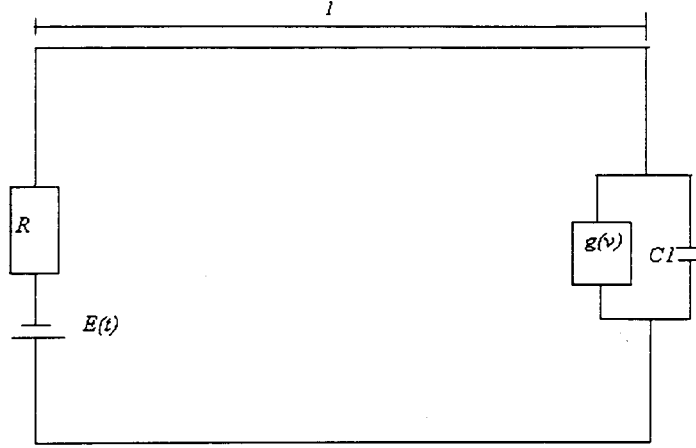


Figure I-3: Ligne de transmission sans pertes

Il est aisé d'établir que chaque grandeur $v(x, t)$ ou $i(x, t)$ vérifie l'équation d'ondes

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = LC \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, \quad (\text{I.18})$$

dont la solution générale est de la forme

$$v(x, t) = \Phi(x - vt) + \Psi(x + vt); \quad (\text{I.19})$$

Φ et Ψ sont des fonctions arbitraires régulières appelées fonctions de d'Alembert³. En remplaçant l'expression de $v(x, t)$ dans (I.18) on trouve que $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Posons $\xi_1 = x - vt$ et $\xi_2 = x + vt$ alors

$$-C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = vC \frac{d\Phi(\xi_1)}{d\xi_1} - vC \frac{d\Psi(\xi_2)}{d\xi_2} = \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} \quad (\text{I.20})$$

³ Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783). Philosophe, écrivain et mathématicien français. Auteur d'ouvrages scientifiques, il a découvert le principe qui porte son nom (Traité de dynamique, 1743) et la théorie mathématique de la précession (Recherche sur la précession des équinoxes 1749).

et en intégrant cette expression par rapport à x , il vient

$$i(x, t) = vC[\Phi(x - vt) - \Psi(x + vt)] + c. \quad (I.21)$$

La constante c signifie qu'il peut avoir un courant continu qui se superpose au courant i .

Soit $Z = \frac{1}{vC} = \sqrt{\frac{L}{C}}$, l'impédance linéique de la ligne. De (I.19) et (I.21) l'on trouve

$$2\Phi(-vt) = v(l, t + \frac{l}{v}) + Zi(l, t + \frac{l}{v}) \quad ; \quad 2\Psi(vt) = v(l, t - \frac{l}{v}) - Zi(l, t - \frac{l}{v})$$

et à partir de la première condition aux limites on obtient

$$i(l, t) - Ki(l, t - \frac{2l}{v}) = 2(Z + R)^{-1}E(t - \frac{l}{v}) - Z^{-1}[v(l, t) + Kv(l, t - \frac{2l}{v})]$$

où $K = (Z - R)(Z + R)^{-1}$. La seconde condition aux limites donne

$$C_1 \frac{d}{dt}[x(t) - Kx(t - \tau)] = 2(Z + R)^{-1}E(t - \frac{\tau}{2}) - Z^{-1}[x(t) + Kx(t - \tau)] - g(x(t)) + Kg(x(t - \tau)) \quad (I.22)$$

où $x(t) = v(l, t)$ et $\tau = \frac{2l}{v}$. L'équation (I.22) est un système neutre de la forme (I.15).

D'autres systèmes de ce type peuvent être établis pour certains systèmes aux dérivées partielles de type hyperbolique vérifiant certaines conditions aux bords (voir par exemple [95]).

Remarque I.1 Dans le cas de retards ponctuels, un signal émis dans le passé agit sans modification sur le système après un certain temps matérialisé par les $h_i(\cdot)$ qui peuvent donc être interprétés comme des temps de transport ou de transmission. En revanche, dans le cas des retards distribués, l'effet du passé est modifié par la sommation, ce qui traduit un effet de mémoire. Différents noyaux peuvent être employés, mais ceux généralement utilisés [21] sont les fonctions de la forme $t \rightarrow T^{-n}t^{n-1}e^{-\frac{t}{T}}$ où T est un temps

caractéristique et n un entier naturel non nul souvent choisi égal à 1 ou 2 (le cas $n = 1$ correspond à une mémoire évanescence).

Les quelques exemples présentés montrent l'importance des systèmes héréditaires dans le processus de modélisation de phénomènes physiques, nous allons présenter dans la section suivante les caractéristiques mathématiques de ces systèmes.

I.2 Nature et représentation des systèmes héréditaires

En automatique [10], l'état d'un système dynamique à l'instant t est l'ensemble des informations nécessaires et suffisantes à cet instant pour déterminer l'évolution future du système. Ainsi pour les systèmes dynamiques modélisés par des équations différentielles ordinaires (EDO)

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \geq t_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{I.23})$$

pour fixer l'évolution d'une solution de (I.23), il suffit de disposer de la valeur du vecteur x à instant t_0 donné ; par conséquent l'état du système à l'instant t est le vecteur $x(t)$ de *dimension finie*. La solution peut ainsi être notée $x(t; t_0, x_0)$

Dans le cas des systèmes héréditaires (I.3) (ou (I.12)), la connaissance de x à un instant t n'est pas suffisante pour déterminer l'évolution future du système. Il faut connaître l'évolution de x dans le cas (I.3) (et celle de x et de sa vitesse $\dot{x}$ dans le cas (I.12)) pour l'ensemble des instants antérieurs à t depuis l'instant $t - \eta$. L'état du système n'est plus un vecteur de dimension finie mais une fonction : $x_t : [-\eta, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (η pouvant être infini, dans ce cas l'état est la fonction $x_t :]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$), continue et dérivable (dans le cas des systèmes neutres) telle que, $x_t(\theta) = x(t + \theta), \forall \theta \in [-\eta, 0]$. La solution doit ainsi être notée $x(t) = x(t; t_0, \varphi)$, avec $x_{t_0} = \varphi$ et x_t , notation dite de Shimanov [120]. Les systèmes héréditaires sont donc des systèmes de *dimension infinie*, classifiés

comme équations différentielles fonctionnelles (EDF).

I.2.1 Problème de Cauchy

Considérons ici, pour fixer les idées, un système retardé de la forme

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \eta)), t \geq t_0 \quad (\text{I.24})$$

et un système neutre

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \eta), \dot{x}(t - \eta)), t \geq t_0 \quad (\text{I.25})$$

dans le cas particulier où η est une constante positive, alors le problème de Cauchy⁴ se formule ainsi : étant donnée une fonction continue $\varphi : [-\eta, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (respectivement dérivable), existe-t-il une solution $x(t) = x(t; t_0, \varphi)$ c'est-à-dire vérifiant (I.24) (respectivement (I.25)) et telle que $x_{t_0} = \varphi$ (respectivement $x_{t_0} = \varphi$ et si φ est dérivable alors $\dot{x}_{t_0} = \dot{\varphi}$).

Dans le cas plus général (I.15), pour le problème de Cauchy, il s'agira de trouver $x(t)$ telle que $x_{t_0} = \varphi$ et que $Z(t, x_t)$ soit dérivable et vérifie (I.15) pour $t \geq t_0$.

On peut consulter [7, 28, 41, 42, 60, 61] pour la théorie générale sur les conditions d'existence et d'unicité des solutions au problème de Cauchy.

⁴Baron Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857). Mathématicien français, auteur de nombreux travaux (plus de 500 mémoires) notamment en analyse mathématique.

I.2.2 Résolution numérique des systèmes héréditaires

Les méthodes classiques de Runge⁵-Kutta⁶, d'Euler⁷ pour la résolution des équations différentielles ordinaires sont extensibles au cas des systèmes héréditaires. La méthode pas-à-pas permet de résoudre numériquement les systèmes héréditaires et permet par la même occasion d'établir l'existence et l'unicité de la solution. Nous allons en rappeler le principe [40] sur le système (I.25).

Etant donné, une fonction continue et dérivable φ_0 sur $[t_0 - \eta, t_0]$, on forme l'équation

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), \varphi_0(t - \eta), \dot{\varphi}_0(t - \eta)), \text{ pour } t_0 \leq t \leq t_0 + \eta, \\ x(t_0) &= \varphi_0(t_0)\end{aligned}$$

dont la solution est notée φ_1 . Si cette solution est définie et dérivable sur tout le segment $[t_0, t_0 + \eta]$, on forme le système

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), \varphi_1(t - \eta), \dot{\varphi}_1(t - \eta)), \text{ pour } t_0 + \eta \leq t \leq t_0 + 2\eta, \\ x(t_0 + \eta) &= \varphi_1(t_0 + \eta)\end{aligned}$$

avec la solution φ_2 . De proche en proche, si φ_{k-1} est définie et dérivable sur $[t_0 + (k - 2)\eta, t_0 + (k - 1)\eta]$ alors on définit φ_k comme solution de

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi_{k-1}(t - \eta), \dot{\varphi}_{k-1}(t - \eta)), \text{ pour } t_0 + (k - 1)\eta \leq t \leq t_0 + k\eta.$$

⁵Karl David Tolme Runge (1856 - 1927). Mathématicien et physicien allemand, Karl Runge étudie à Munich puis à Berlin. Enseignant à Berlin, Hanovre et Göttingen, ses travaux portent sur l'étude des solutions approchées d'équations différentielles et sur les algorithmes associés.

⁶Martin Wilhem Kutta (1867 - 1944). Mathématicien et physicien allemand, Martin Kutta enseigne à l'Ecole Polytechnique de Stuttgart. Il développe en 1901 la méthode de Runge pour la résolution numérique du problème de Cauchy pour les systèmes d'équations différentielles.

⁷Leonhard Euler (1707 - 1783). Mathématicien Suisse, Leonhard Euler étudie d'abord la philosophie et le droit et découvre les mathématiques grâce à Jean Bernouilli. En 1727, aidé par Nicolas et Daniel Bernouilli, il entre à l'Académie des Sciences de Saint Petersburg. On lui doit beaucoup de résultats dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique. Devenu aveugle en 1771, il meurt à l'âge de 76 ans.

La solution de (I.25) avec la condition initiale φ_0 est donnée par $x(t; t_0, \varphi_0) = \varphi_k(t)$ pour tout $t_0 + (k-1)\eta \leq t \leq t_0 + k\eta$.

Remarque I.2 *Il est à remarquer qu'à la différence des équations ordinaires, la solution générique de (I.25) n'est pas analytique même pour des fonctions analytiques f et φ_0 . Sa dérivée est discontinue en tout point $t_0 + (k-1)\eta$ pour des fonctions initiales φ_0 ne vérifiant pas la condition*

$$\dot{\varphi}_0(t_0) = f(t_0, \varphi_0(t_0), \varphi_0(t_0 - \eta), \dot{\varphi}_0(t_0 - \eta)). \quad (\text{I.26})$$

Dans le cas des systèmes de type retardé, c'est-à-dire le cas de l'équation (I.24), c'est la dérivée d'ordre k qui présente une discontinuité de première espèce en tout point $t_0 + (k-1)\eta$ pour les solutions de conditions initiales φ_0 ne vérifiant pas

$$\dot{\varphi}_0(t_0) = f(t_0, \varphi_0(t_0), \varphi_0(t_0 - \eta)), \quad (\text{I.27})$$

la solution devenant de plus en plus lisse quand le temps croît [22].

Par contre dans le cas des systèmes de type neutre, il y a propagation de la discontinuité.

La méthode pas-à-pas couplée avec les méthodes classiques de résolution numérique des EDO (Runge-Kutta, Euler, etc) permet de donner une solution numérique d'un système héréditaire. Certains travaux [20] ont concerné cet aspect numérique des systèmes héréditaires.

Si la représentation sous forme d'équations différentielles fonctionnelles des systèmes héréditaires que nous avons adoptée dans les sections précédentes est largement employée dans la littérature, il existe aussi d'autres représentations qui facilitent l'étude de certaines propriétés spécifiques. Nous allons rappeler brièvement certaines de ces représentations dans le paragraphe suivant.

I.2.3 Autres formes de représentation

On peut représenter les systèmes héréditaires de différentes manières selon le but recherché [114]. Les formes les plus couramment utilisées autres que celles employées dans les sections précédentes, considèrent soit le caractère infini de leur dimension soit une approche géométrique (représentation sur anneau valable uniquement dans le cas linéaire).

Représentation en dimension infinie

Nous allons donner une idée de cette représentation à partir du système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + B_0 u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{I.28})$$

où $u(t)$ est l'entrée et $y(t)$ la sortie, $x(t)$ étant définie comme précédemment. Soit $L_2 = L_2([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de carrées sommables et $M_2 = \mathbb{R}^n \times L_2$ un espace de Hilbert. Posons $\bar{x}(t) = [x(t), x_t] = [x^0(t), x^1(t)] \in M_2$ (voir [114, 118]) et définissons les opérateurs, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ par :

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &\longrightarrow \bar{A}\bar{x}(t) = [A_0 x^0(t) + A_1 x^1(t)(-h), \frac{dx^1(t)(\theta)}{d\theta}] \\ u(t) &\longrightarrow \bar{B}u(t) = [B_0 u(t), 0] \\ y(t) &\longrightarrow \bar{C}x(t) = y(t) \end{aligned}$$

alors le système (I.28) s'écrit dans l'espace M_2 .

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t), \\ y(t) &= \bar{C}x(t). \end{aligned} \quad (\text{I.29})$$

En considérant le semigroupe $S(t)$ engendré par $\bar{A}$, la solution de (I.28) est donnée comme dans le cas des ODE par

$$\bar{x}(t) = S(t) \bar{x}_0 + \int_0^t S(t-\theta) \bar{B}(\theta) u(\theta) d\theta.$$

Des détails plus approfondis de cette représentation peuvent être trouvés dans [2, 8] et les références qui s'y trouvent. Cette représentation a l'avantage d'immerger les systèmes héréditaires dans la classe plus générale des systèmes de dimension infinie [99] mais pose les problèmes liés à cette classe de systèmes.

Représentation sur anneau

Cette approche n'est valable que dans le cas linéaire. Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m A_i x(t-h_i) + \sum_{i=1}^m B_i \dot{x}(t-h_i) + \sum_{i=1}^m C_i u(t-h_i) \\ y(t) = \sum_{i=1}^m D_i x(t-h_i), \quad x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^p, \quad y(t) \in R^q \end{cases} \quad (\text{I.30})$$

Soit ∇_i l'opérateur de retard défini par $\nabla_i x(t) = x(t-h_i)$, alors le système (I.30) peut se représenter par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\nabla_1, \dots, \nabla_i, \dots, \nabla_m) x(t) + B(\nabla_1, \dots, \nabla_i, \dots, \nabla_m) \dot{x}(t) + C(\nabla_1, \dots, \nabla_i, \dots, \nabla_m) u(t) \\ y(t) = D(\nabla_1, \dots, \nabla_i, \dots, \nabla_m) x(t) \end{cases} \quad (\text{I.31})$$

où $A(\nabla_1, \dots, \nabla_i, \dots, \nabla_m)$, $B(\nabla_1, \dots, \nabla_i, \dots, \nabla_m)$ sont des matrices $n \times n$; $C(\nabla_1, \dots, \nabla_i, \dots, \nabla_m)$ une matrice $n \times p$ et $D(\nabla_1, \dots, \nabla_i, \dots, \nabla_m)$ une matrice $q \times n$ à composantes dans l'anneau $R[\nabla_1, \dots, \nabla_i, \dots, \nabla_m]$ des polynômes en $\nabla_1, \dots, \nabla_i, \dots, \nabla_m$ à coefficients réels.

Introduite dans [94], cette représentation a été largement utilisée dans la littérature et a permis l'établissement de nombreux résultats concernant la commandabilité, l'observabilité, la stabilisation, etc. L'on pourra consulter [13, 2, 95, 107] pour une présentation plus détaillée.

Dans ce qui précède, nous avons donné différents aspects des systèmes héréditaires.

Le sujet principal de ce mémoire, à savoir la stabilité de ces systèmes, sera considéré dans la section suivante. Nous allons ainsi définir les propriétés et les notions relatives au problème d'étude de la stabilité des systèmes héréditaires notamment les notions qualitatives d'état d'équilibre, différentes notions de stabilité et les notions quantitatives comme : domaine de stabilité, domaine d'attraction, ensemble positivement invariant, etc.

I.3 Introduction à la stabilité des systèmes héréditaires

La stabilité dans l'analyse des systèmes constitue une propriété importante et correspond grossièrement à la continuité des "modes de comportement" d'un système par rapport à la variation de certaines de ses variables. Ainsi on peut parler de la stabilité par rapport aux paramètres du modèle plus connue sous la terminologie de problème de *sensibilité*, par rapport au modèle du système, on parlera alors de *stabilité structurelle*, ou encore par rapport aux conditions initiales dont le principe peut s'exprimer ainsi : étant donné un état de fonctionnement d'un système et pour une "petite" perturbation autour de cet état, le fonctionnement résultant serait-il "très différent" ou pas du fonctionnement nominal ? C'est la *stabilité au sens de Lyapunov*⁸ que nous considérons tout au long de ce mémoire.

I.3.1 Notion d'état d'équilibre

Un état d'équilibre d'un système dynamique est un état invariant c'est-à-dire tel que si à l'instant initial le système se trouve dans cet état alors il y restera tant qu'il ne subira pas de perturbations.

⁸ Alexander Michailovich Lyapunov (1857 - 1918). Professeur à Saint Petersburg, il fut le fondateur de la théorie de la stabilité du mouvement

Définition I.1 Soit $x(t; t_0, \varphi)$ la solution de (I.3) (respect. (I.12)) de condition initiale $x_{t_0} = \varphi$ (respect. $x_{t_0} = \varphi, \dot{x}_{t_0} = \dot{\varphi}$) alors $x_e \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ (respect. $x_e \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$) est un état d'équilibre de (I.3) (respect. (I.12)) si $x(t; t_0, x_e)$ existe et est unique et $x_t(t_0, x_e) = x_e$ pour $t \geq t_0$.

Il est aisé de prouver que l'état d'équilibre d'un système héréditaire est une fonction constante. En effet si x_e est un état d'équilibre de (I.3) (respect. (I.12)) alors $\forall \delta > 0$, $x_t(t_0, x_e) = x_{t+\delta}(t_0, x_e) = x_e$; soit $\forall \theta \leq 0$ $x_t(t_0, x_e)(\theta) = x_{t+\delta}(t_0, x_e)(\theta) = x_e(\theta)$ ce qui implique que $x(t + \theta; t_0, x_e) = x(t + \delta + \theta; t_0, x_e) = x_e(\theta)$, c'est-à-dire que la fonction $x(t; t_0, x_e)$ est constante ; donc il existe un point y_e de $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall \theta \leq 0$, $x_t(t_0, x_e)(\theta) = y_e = x_e(\theta)$.

Ainsi on parlera indifféremment d'état d'équilibre ou de point d'équilibre. Une condition nécessaire et suffisante pour que $x_e \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ (respect. $x_e \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$) soit un état d'équilibre de (I.3) (respect. (I.12)) est que pour tout instant initial t_0 , x_e correspond à une solution unique constante $x(t) \equiv \text{constante}$ de (I.3) (respect. (I.12)).

I.3.2 Stabilité : définitions

Les états d'équilibre (au sens fonctionnel ou ponctuel car il y a équivalence pour un équilibre) correspondent à des états nominaux de fonctionnement dont il faut étudier la stabilité. Dans la suite nous ne considérerons que l'étude de la stabilité de la solution nulle que nous supposons toujours être un état d'équilibre, car l'étude de la stabilité d'une solution quelconque peut toujours se ramener à l'étude de la stabilité de la solution nulle en formant l'équation aux écarts. Les définitions qui suivent sont issues de [22] et sont une généralisation des définitions données par Grujić [39] pour les équations différentielles ordinaires.

Les définitions ci-dessous sont considérées uniquement dans le cas de retard fini h .

Définition I.2 La solution nulle de (I.3) est dite stable par rapport à un instant initial

t_0 si

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(t_0, \varepsilon) > 0)(\forall \varphi \in \mathcal{C} : \|\varphi\|_{\mathcal{C}} < \delta(t_0, \varepsilon) \\ \Rightarrow \|x(t; t_0, \varphi)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0).$$

Elle est stable par rapport à un ensemble d'instants initiaux si elle est stable pour chaque instant de l'ensemble et stable si cet ensemble est $\mathbb{R}$ tout entier.

$\Omega_s(t_0) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ est dit domaine de stabilité par rapport à t_0 de cette solution si $\Omega_s(t_0) = \cup_{\varepsilon > 0} \Omega(t_0, \varepsilon)$ où $\Omega(t_0, \varepsilon)$ est le plus grand voisinage dans $\mathcal{C}$ de la fonction nulle tel que $\{\varphi \in \Omega(t_0, \varepsilon) \Rightarrow \forall t \geq t_0, \|x(t; t_0, \varphi)\| < \varepsilon\}$.

La stabilité est dite

- uniforme si les différents paramètres définis plus haut sont indépendants de t_0 ,
- globale si $\Omega_s(t_0) = \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.

Définition I.3 ([60]). *La solution nulle de (I.12) est dite stable par rapport à un instant initial t_0 si*

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(t_0, \varepsilon) > 0)(\forall \varphi \in \mathcal{W} : \|\varphi\|_{\mathcal{W}} < \delta(t_0, \varepsilon) \\ \Rightarrow \|x(t; t_0, \varphi)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0).$$

Elle est stable par rapport à un ensemble d'instants initiaux si elle est stable pour chaque instant de l'ensemble et stable si cet ensemble est $\mathbb{R}$ tout entier.

$\Omega_s(t_0) \subseteq \mathcal{W}$ est dit domaine de stabilité par rapport à t_0 de cette solution si $\Omega_s(t_0) = \cup_{\varepsilon > 0} \Omega(t_0, \varepsilon)$ où $\Omega(t_0, \varepsilon)$ est le plus grand voisinage dans $\mathcal{W}$ de la fonction nulle tel que $\{\varphi \in \Omega(t_0, \varepsilon) \Rightarrow \forall t \geq t_0, \|x(t; t_0, \varphi)\| < \varepsilon\}$.

La stabilité est dite

- uniforme si les différents paramètres définis plus haut sont indépendants de t_0 ,
- globale si $\Omega_s(t_0) = \mathcal{W}$.

Définition I.4 *La solution nulle de (I.3) (resp. (I.12)) est dite instable si elle n'est pas*

stable.

Dans beaucoup de cas pratiques, il est recommandé qu'après une "petite perturbation" autour d'un mode de fonctionnement nominal, un système puisse reprendre ce mode de fonctionnement après un certain temps : c'est la notion d'attractivité.

Définition I.5 La solution nulle de (I.3) (respect. (I.12)) est dite attractive par rapport à t_0 si

$$\begin{aligned} (\exists \delta(t_0) > 0)(\forall \varphi : \|\varphi\|_C < \delta(t_0) \text{ (respect. } \|\varphi\|_{\mathcal{W}} < \delta(t_0)) \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; t_0, \varphi)\| = 0. \end{aligned}$$

L'ensemble $\Omega_a(t_0) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ (respect. $\Omega_a(t_0) \subseteq \mathcal{W}$) est dit domaine d'attraction par rapport à t_0 de cette solution s'il est le plus grand voisinage de 0 tel que $\forall \varphi \in \Omega_a(t_0), \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; t_0, \varphi)\| = 0$.

L'attractivité est :

- uniforme si δ est indépendant de t_0
- globale si $\Omega_a(t_0) = \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ (respect. $\Omega_a(t_0) = \mathcal{W}$)

Les deux notions de stabilité et d'attractivité combinées donnent la stabilité asymptotique, propriété généralement exigée dans la pratique.

Définition I.6 La solution nulle de (I.3) (respect. (I.12)) est asymptotiquement stable par rapport t_0 si elle est stable par rapport t_0 et attractive par rapport t_0 . Le domaine de stabilité asymptotique par rapport t_0 est l'ensemble $\Omega_{sa}(t_0) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ (respect. $\Omega_{sa}(t_0) \subseteq \mathcal{W}$) tel que $\Omega_{sa}(t_0) = \Omega_s(t_0) \cap \Omega_a(t_0)$.

Comme précédemment la stabilité asymptotique peut être uniforme (stabilité et attractivité uniformes) et/ou globale (stabilité et attractivité globales).

Dans la plupart des cas il n'est pas possible de connaître entièrement et exactement les ensembles, $\Omega_s(t_0)$, $\Omega_a(t_0)$ et $\Omega_{sa}(t_0)$ et l'on doit se contenter d'une estimation.

Définition I.7 Un ensemble $\Omega \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ est une estimation du domaine de stabilité (respectivement d'attraction, de stabilité asymptotique) de la solution nulle de (I.3) par rapport à t_0 si Ω est un voisinage de 0 et $\Omega \subseteq \Omega_s(t_0)$ (respectivement $\Omega \subseteq \Omega_a(t_0)$, $\Omega \subseteq \Omega_{sa}(t_0)$).

Définition I.8 Un ensemble $\Omega \subseteq \mathcal{W}$ est une estimation du domaine de stabilité (respectivement d'attraction, de stabilité asymptotique) de la solution nulle de (I.12) par rapport à t_0 si Ω est un voisinage de 0 et $\Omega \subseteq \Omega_s(t_0)$ (respectivement $\Omega \subseteq \Omega_a(t_0)$, $\Omega \subseteq \Omega_{sa}(t_0)$).

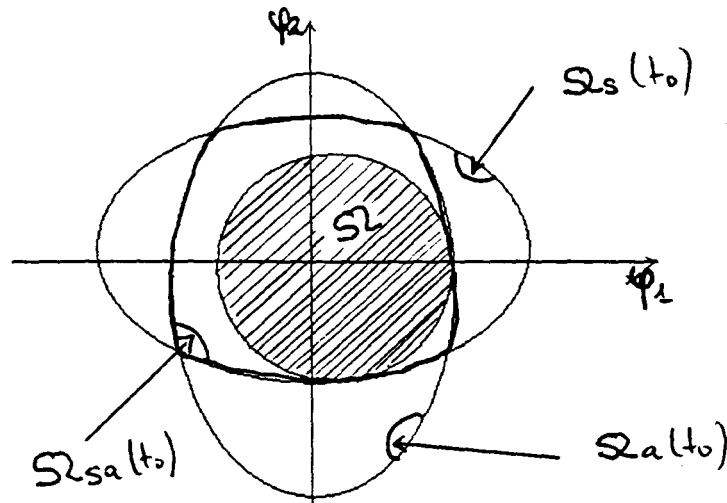


Figure I-4: Estimation du domaine de stabilité asymptotique

Il arrive que pour des raisons de sécurité l'état d'un système est contraint à rester dans un sous-ensemble de l'espace d'état. Il est donc important, pour un sous-ensemble donné de l'espace d'état, de savoir si partant d'un élément de ce sous-ensemble, l'état en sortira ou pas : c'est la notion d'invariance positive.

Définition I.9 Un ensemble $\Omega \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ (respect. $\Omega \subseteq \mathcal{W}$) est dit positivement invariant pour (I.3) (respect. (I.12)) si pour toute condition initiale dans Ω l'évolution résultante demeure dans Ω .

Stabilité robuste

En pratique, tout modèle d'un processus ne constitue qu'une approximation de la réalité et les incertitudes de modélisation doivent être prises en compte si l'on veut un asservissement correct par exemple. Donc pour l'analyste, il est important que les propriétés définies précédemment pour un système nominal restent valables pour de "petites" variations de modèle. Cela conduit à la notion de *robustesse*. Soit le système (I.32), qui représente une écriture condensée d'un système héréditaire incertain,

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t, \dot{x}_t), \quad t \geq t_0, \quad F \in \mathcal{F} \quad (\text{I.32})$$

avec le retard $\eta(\cdot)$ vérifiant $\eta_{\min} \leq \eta(\cdot) \leq \eta_{\max}$ ($\eta_{\max}$ éventuellement infini) et $\mathcal{F}$ un ensemble de modèles possibles pour le processus (on suppose que $x(t) \equiv 0$ est un point d'équilibre de (I.32) pour toute fonction $F \in \mathcal{F}$). Alors l'on a:

Définition I.10 *La solution nulle de (I.32) est robustement (asymptotiquement) stable par rapport à $[\eta_{\min}, \eta_{\max}]$ et à $\mathcal{F}$ si elle est (asymptotiquement) stable pour tout retard $\eta(\cdot) \in [\eta_{\min}, \eta_{\max}]$ et toute incertitude de modèle contenue dans $\mathcal{F}$.*

En réalité, la définition précédente donne deux types de robustesse ; la robustesse par rapport au retard et la robustesse par rapport aux incertitudes. On peut ainsi être amené à ne considérer que l'une des robustesses. Dans [139], la stabilité robuste par rapport au retard a été considéré pour un intervalle de variation du retard de la forme $[0, \eta_{\max}]$.

I.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les systèmes héréditaires ont été présentés et classifiés selon le modèle (systèmes à retards/systèmes à retards de type neutres) et selon le retard (retards discrets/retards distribués). Leur particularité dimensionnelle (par rapport aux systèmes ordinaires) et leur structure d'état ont été présentées. A travers les quelques exemples

évoqués dans ce chapitre, il ressort que les équations héréditaires permettent de décrire l'évolution de beaucoup de phénomènes physiques couvrant des domaines aussi variés que les sciences de l'ingénieur (ligne de transmission sans pertes, réseaux de neurones) ; les sciences de la santé (distribution d'albumine dans le sang) ; les sciences de l'environnement et de la démographie (systèmes proies-prédateurs) et beaucoup d'autres champs d'application que l'on peut trouver dans les références cités. De manière générale, il s'agit des phénomènes où interviennent des délais de transport de matière, de transmission, des temps de traitements ou des effets de mémoire. L'importance des états d'équilibre et surtout de leur stabilité asymptotique a été soulevée et montre l'intérêt de l'analyse des propriétés qualitatives et quantitatives relative à la stabilité de ces systèmes, problème introduit dans la dernière section de ce chapitre et que nous nous proposons d'étudier plus longuement dans la suite de ce mémoire.

Chapitre II

Stabilité des systèmes héréditaires : différentes méthodes d'approche

Avec la puissance de calcul et la rapidité offertes par les avancées technologiques dans le domaine de l'informatique, les praticiens et les ingénieurs ont tendance à recourir systématiquement aux ordinateurs pour résoudre les problèmes auxquels ils sont confrontés. Mais cette démarche, si elle permet de connaître certaines particularités d'un système, ne permet pas d'avoir une idée globale sur son comportement. Par exemple, par simulation sur ordinateur on peut connaître une trajectoire d'un système dynamique non linéaire relativement compliqué, pour des paramètres fixés. Mais l'on ne pourra jamais s'assurer par une telle approche de l'existence de cycles limites par exemple (voir l'avant-propos de [19]). En effet l'étude à entreprendre dans ce cas est de nature qualitative. Ainsi cette information qualitative qui peut être déterminante pour le système n'est pas accessible par simple "listing" des valeurs des coordonnées du système pour certaines valeurs des paramètres. De même, comment prouver par simulation qu'un système différentiel ordinaire comme $\dot{x}(t) = A(t, x(t))x(t)$ dont on sait que la matrice $A(t, x(t))$ vérifie des conditions de bornitude du type $\underline{A} < A(t, x(t)) < \bar{A}$ a des comportements convergents ? Il ressort que c'est au moment où la complexité des systèmes exige l'utilisation des ordinateurs qu'apparaissent les problèmes plus globaux, *qualitatifs*, pour lesquels celui-ci

est peu susceptible d'être utile. L'étude qualitative des comportements des systèmes dynamiques reste donc une composante importante dans l'analyse des systèmes complexes et notamment le comportement asymptotique de petites déviations autour des équilibres du système : *c'est la stabilité au sens de Lyapunov*, considérée ici pour les systèmes héréditaires.

Ce chapitre est consacré aux différentes méthodes utilisées pour caractériser la stabilité de l'équilibre 0 d'un système héréditaire donné. Dans la pratique, pour l'analyse d'un système dynamique est effectuée en premier ordre en l'approchant son "linéarisé" autour d'un point de fonctionnement. Ainsi ce chapitre considère en premier lieu les systèmes linéaires, dans la première section. La seconde section est consacrée à la seconde méthode de Lyapunov et la troisième aux méthodes de comparaison.

II.1 Equation caractéristique : système linéaire

Nous allons considérer dans cette partie le cas des systèmes linéaires avec des retards discrets. Notons que dans leur principe les méthodes évoquées peuvent être appliquées dans le cas des retards distribués moyennant quelques précautions sur le noyau sous l'intégrale (voir [60] pour les détails). Pour ces systèmes linéaires, l'étude de la stabilité est liée au signe de la partie réelle des racines de leur équation caractéristique (voir [7, 41] et les références qui s'y trouvent). Cette équation est établie en cherchant des solutions de la forme $x(t) = ce^{\lambda t}$ où c est un vecteur constant. Nous allons donner dans la première partie de cette section quelques méthodes d'analyse de la stabilité basées sur la localisation dans le plan complexe des racines de l'équation caractéristique pour les systèmes à retards ; la seconde partie relèvera les différences qui interviennent dans le cas des systèmes neutres.

II.1.1 Systèmes linéaires de type retardé

Soit le système linéaire de type retardé

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - h_i), \quad h_i > 0, \quad t \geq 0. \quad (\text{II.1})$$

Son équation caractéristique est

$$p(\lambda, h_1, \dots, h_m) = \det \left[\lambda I - A_0 - \sum_{i=1}^m A_i e^{-\lambda h_i} \right] = 0. \quad (\text{II.2})$$

où $p(\lambda, h_1, \dots, h_m)$ est la fonction caractéristique notée simplement $p(\lambda)$ quand il n'y a pas de risque de confusion. Dans le cas des équations différentielles ordinaires, la fonction caractéristique est un polynôme de degré n en λ ; ceci n'est pas le cas pour $p(\lambda)$ définie en (II.2) du fait de la présence des termes $e^{-\lambda h_i}$: on dit que c'est un quasi-polynôme.

L'étude de la stabilité de la solution nulle de (II.1) se réduit alors à la caractérisation des parties réelles des racines de l'équation (II.2) et notamment l'absence ou non des racines à parties réelles positives grâce au résultat fondamental (voir [7, 28, 41]):

Théorème II.1 *La solution nulle de (II.1) est asymptotiquement stable si et seulement si l'équation (II.2) n'a pas de racines dans le demi-plan $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ du plan complexe.*

Il est certaine fois possible et intéressant de pouvoir quantifier la vitesse avec laquelle le système revient à son équilibre après une perturbation autour de celui-ci en comparant son comportement à l'évolution temporelle d'une fonction test. Les fonctions test généralement utilisées sont les exponentielles décroissantes et ceci donne lieu à la stabilité asymptotique exponentielle.

Théorème II.2 *La solution nulle de (II.1) est exponentiellement stable avec le taux de convergence $\gamma > 0$ (ou γ -stable) si et seulement si l'équation (II.2) n'admet pas de racines dans le demi-plan complexe $\text{Re}(\lambda) \geq -\gamma$.*

Preuve : Posons $y(t) = e^{\gamma t} x(t)$ alors l'équation caractéristique associée à l'équation

différentielle vérifiée par y est

$$p(\lambda, h_1, \dots, h_m) = \det \left[(\lambda - \gamma)I - A_0 - \sum_{i=1}^m A_i e^{-(\lambda - \gamma)h_i} \right] = 0. \quad (\text{II.3})$$

et en appliquant le théorème précédent on a $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma t} x(t) = 0$.

Ainsi dans le cas des systèmes linéaires, il suffit de pouvoir localiser les racines de l'équation caractéristique pour conclure quant à la stabilité asymptotique de l'équilibre 0. Alors que dans le cas des systèmes ordinaires, il existe des méthodes simples et efficaces telles le critère de Routh ou les méthodes du lieu des racines qui permettent de vérifier si la condition des théorèmes précédents est remplie ou non, il n'en va pas de même pour les systèmes héréditaires. En effet, on montre [7] que l'équation (II.2) a, en général, une infinité de racines. Néanmoins, il existe de nombreuses méthodes plus ou moins efficaces de caractérisation des zéros de (II.2). Nous listons ci-dessous quelques unes de ces méthodes qui sont parmi les premiers résultats traitant de la localisation des zéros d'une fonction transcendental. On pourra consulter [60, 22, 99] pour plus de détails.

Méthode de Pontriagin [60] (valable dans le case des retards commensurables)

Considérons le quasi-polynôme (II.2) et remplaçons λ par $i\omega$ où ω est un réel et $i^2 = -1$; alors $p(i\omega)$ peut se mettre sous la forme

$$p(i\omega) = g(\omega) + if(\omega)$$

et on a le critère de Pontriagin¹:

¹Lev Semenovitch Pontriagin (1908 - 1988). Le mathématicien soviétique Lev Pontriagine devient aveugle à l'âge de quatorze ans ; il termine cependant ses études à l'université de Moscou en 1929. Il travaille ensuite à l'institut Steklov et donne parallèlement des cours, à partir de 1935, à l'Université de Moscou. Il est rédacteur en chef en 1974 de *Applied Mathematics and Optimization* et en 1975 du *Matematitcheski sbornik*. Ses travaux concernent la théorie des processus d'optimisation, la topologie algébrique et les groupes topologiques.

Proposition II.1 *Si l'équation caractéristique (II.2) n'a pas de racines à partie réelle positive alors les zéros des fonctions $g(\omega)$ et $f(\omega)$ sont réels, simples et alternés et*

$$g(\omega)f(\omega) - f(\omega)g(\omega) > 0, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (\text{II.4})$$

Pour que $p(\lambda)$ n'ait pas de zéros à parties réelles positives, il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée:

- a) tous les zéros des fonctions $g(\omega)$ et $f(\omega)$ sont réels, simples et alternés et l'inégalité (II.4) est vérifiée pour au moins un réel ω ;*
- b) tous les zéros de la fonction $g(\omega)$ (ou $f(\omega)$) sont réels et simples et pour chaque zéro la relation (II.4) est satisfaite.*

D-partition [60]

Cette méthode repose sur le fait que les zéros du quasi-polynôme varient de manière continue par rapport aux paramètres du système et par conséquent les points critiques sont les points d'intersection avec l'axe imaginaire. On trace dans l'espace des paramètres les surfaces correspondant à ces points critiques (c'est-à-dire l'ensemble des points pour lesquels il existe un zéro de (II.2) sur l'axe imaginaire.

Méthodes fréquentielles

Les méthodes fréquentielles sont souvent utilisées en automatique pour établir la stabilité d'un système linéaire. Elles sont essentiellement basées sur le principe de l'argument. En se basant sur ce principe plusieurs critères de localisation des zéros de l'équation caractéristique ont été établis : critère de Michailov, critère intégral, critère de Nyquist, critère de Tsypkin.

Critère de Michailov [60] En substituant λ par $i\omega$, $p(i\omega)$ peut se mettre sous la forme

$$p(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega) \quad (\text{II.5})$$

et le critère de Michailov s'énonce comme suit :

Proposition II.2 *Pour que $p(\lambda)$ n'ait pas de racines à parties réelles strictement positives, il faut et il suffit que la variation de la fonction $p(i\omega)$ soit égale à $n\frac{\pi}{2}$ quand ω varie de 0 à ∞ soit $\arg[p(i\omega)]_0^\infty = n\frac{\pi}{2}$.*

Critère intégral [60] Posons

$$R(\omega) = \operatorname{Re} \left[\frac{\frac{d}{dz}p(z)}{p(z)} \right]_{z=i\omega}$$

On a par définition $p(z) = |p(z)| e^{i \arg[p(z)]}$ et par conséquent $\frac{\frac{d}{dz}p(z)}{p(z)} = \frac{\frac{d}{dz}|p(z)|}{|p(z)|} + i \frac{d}{dz} [\arg[p(z)]]$ et en posant $z = i\omega$, on a $dz = i d\omega$ et

$$\frac{\frac{d}{dz}p(z)}{p(z)} = -i \frac{\frac{d}{d\omega} [|p(i\omega)|]}{|p(i\omega)|} + \frac{d}{d\omega} [\arg[p(i\omega)]] .$$

D'autre part en considérant (II.5) on a

$$\left[\frac{\frac{d}{dz}p(z)}{p(z)} \right]_{z=i\omega} = \frac{U(\omega)V'(\omega) - V(\omega)U'(\omega)}{U^2(\omega) + V^2(\omega)} - i \frac{U(\omega)U'(\omega) + V(\omega)V'(\omega)}{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$

d'où

$$R(\omega) = \frac{d}{d\omega} [\arg[p(i\omega)]] = \frac{U(\omega)V'(\omega) - V(\omega)U'(\omega)}{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$

et en appliquant le critère de Michailov précédent, il vient la proposition suivante (critère intégral).

Proposition II.3 *La solution nulle de (II.2) est asymptotiquement stable si, et seulement si, $\int_0^\infty R(\omega) d\omega = n\frac{\pi}{2}$.*

Ce critère est beaucoup plus calculatoire que le précédent ; sa forme purement analytique le rend programmable. Il est donc plus efficace grâce aux moyens de calcul dont

on dispose aujourd'hui. Voyons cela sur un petit exemple. Soit le système scalaire

$$\dot{x}(t) = -x(t-1)$$

dont le quasi-polynôme est $p(\lambda) = \lambda + e^{-\lambda}$; alors $R(\omega) = \frac{\cos \omega + \omega \sin \omega - 1}{\omega^2 - 2\omega \sin \omega + 1}$. En utilisant le logiciel de calcul Maple on obtient $\int_0^\infty R(\omega) d\omega = 1.570796327$ correspondant approximativement à $\frac{\pi}{2}$.

Critère de Nyquist simplifié [60]

Proposition II.4 *Supposons que le système en boucle ouverte soit stable, alors pour que le système en boucle fermée soit asymptotiquement stable, il faut et il suffit que le lieu de Nyquist n'entoure pas au sens strict le point -1 dans le plan (U, V) .*

Critère de Tsytkin [60] Ici on considère un système écrit sous la forme de fonction de transfert en boucle ouverte $W(\lambda) = \frac{R_{n-1}(\lambda)}{Q_n(\lambda)} e^{-\tau\lambda}$ où R_{n-1} et Q_n sont des polynômes en λ de degré $n-1$ et n ; alors on a

Proposition II.5 (*critère de Tsytkin*). *Supposons que le polynôme $Q_n(\lambda)$ est stable. Alors le système en boucle fermée est stable pour tout retard $0 \leq \tau < \infty$ si et seulement si*

$$|Q_n(i\omega)| > |R_{n-1}(i\omega)|, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Remarque II.1 *Les critères de Michailov et de Nyquist sont difficiles à appliquer en pratique car ils nécessitent des constructions graphiques (lieu de Michailov ou de Nyquist) [60]. D'autres méthodes d'analyse des systèmes linéaires à retards peuvent être trouvées dans la littérature, citons par exemple le critère de Chebotarev [60] qui est une extension du critère de Routh mais n'est pas très commode en pratique car, basé sur la vérification de la positivité d'une suite infinie de déterminants ; la méthode de Walton et Marschall [141] permet en un nombre de pas fini de donner un critère de stabilité dépendant de la taille du retard pour les systèmes linéaires à retards commensurables (une méthode*

similaire a été établie dans [44]) ; la méthode des pseudo-retards considère elle aussi les systèmes à retards commensurables [22, 45, 136, 112]. D'autres méthodes basées sur des approximations des termes exponentiels (approximants de Padé par exemple [123]) ont été utilisées dans l'étude de la stabilité des systèmes à retards.

II.1.2 Systèmes linéaires à retards de type neutre

Soit le système linéaire de type neutre

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[Zx_t] &= A_0x(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - h_i), \quad h_i > 0, \quad t \geq 0, \\ Zx_t &= x(t) - \sum_{i=1}^m B_i x(t - h_i).\end{aligned}\tag{II.6}$$

Son équation caractéristique est

$$p(\lambda, h_1, \dots, h_m) = \det \left[\lambda(I - \sum_{i=1}^m B_i e^{-\lambda h_i}) - A_0 - \sum_{i=1}^m A_i e^{-\lambda h_i} \right] = 0. \tag{II.7}$$

On peut établir [60] un théorème analogue au Théorème II.1 de la première section.

Théorème II.3 *Supposons que l'équation (II.7) n'ait pas de racines dans le demi-plan $\text{Re}(z) \geq 0$ du plan complexe et que*

$$\sum_{i=1}^m \|B_i\| < 1, \tag{II.8}$$

alors la solution nulle de (II.6) est asymptotiquement stable.

Remarque II.2 *Les différences ici par rapport au cas des systèmes de type retardé tiennent en deux points :*

1) *en plus du fait que le quasi-polynôme caractéristique doit avoir ses racines à parties réelles strictement négatives, il est nécessaire aussi que la condition (II.8) soit vérifiée*

pour conclure à la stabilité asymptotique de la solution nulle de (II.6).

2) il y a possibilité d'existence de racines caractéristiques sur des branches asymptotiques à l'axe imaginaire. En effet considérons le système $\dot{y}(t) + \dot{y}(t-h) + y(t) = 0$ dont l'équation caractéristique est $p(\lambda) = \lambda + (\lambda + 1)e^{-\lambda h} = 0$. Les racines de cette équation ayant un module suffisamment grand sont asymptotiquement égales à $i\frac{2(k-1)\pi}{h}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Méthodes d'investigations de la stabilité des systèmes linéaires neutres

Une fois encore, toute la difficulté de l'analyse réside dans le problème de la localisation des racines de l'équation (II.7) dans le plan complexe.

La plupart des méthodes données dans le cadre des systèmes à retards restent valables à l'exception en général des méthodes fréquentielles de Michailov, Nyquist et intégrale. Ceci est dû à l'oscillation de l'hodographe de Michailov dans le plan (u, v) (voir [60] pour plus de détail) si bien que la limite de $\arg p(i\omega)$ quand $\omega \rightarrow \infty$ ne peut pas être définie.

Les méthodes de Pontriagin, de Chebotarev et de D-partition sont applicables sans changement [60].

II.1.3 Stabilité dépendant du retard : continuité des zéros

La méthode que nous allons exposer ici, tirée de [25], utilise la "continuité des zéros" de l'équation caractéristique par rapport aux retards. Soit le système

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [Zx_t] &= \sum_{i=0}^m A_i x(t - \alpha h_i), \quad \alpha \geq 0, \quad t \geq 0, \\ Zx_t &= x(t) - \sum_{i=1}^m B_i x(t - \alpha h_i), \quad 0 = h_0 < h_1 < h_2 < \dots < h_m. \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Le problème est le suivant : si la solution nulle de (II.9) est asymptotiquement stable pour $\alpha = 0$, existe-t-il un $\alpha^* > 0$ tel que la solution nulle reste asymptotiquement stable

pour tout $\alpha \in [0, \alpha^*)$? Posons

$$G_\alpha(\lambda) = \lambda(I - \sum_{i=1}^m B_i e^{-\alpha \lambda h_i}) - \sum_{i=0}^m A_i e^{-\alpha \lambda h_i}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+,$$

et notons $Sp(G_\alpha)$ le spectre de G_α , c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres : $Sp(G_\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \det G_\alpha(\lambda) = 0\}$, et $\sigma(G_\alpha) = \sup\{\operatorname{Re}(\lambda), \lambda \in Sp(G_\alpha)\}$. Dans le cas des systèmes de type retardé, il est montré [25, 28] que la fonction σ est continue sur $[0, \infty)$ et donc la réponse à la question précédente est affirmative. On peut donc estimer une borne de α en dessous de laquelle on est sûr que la solution nulle de (II.9) reste asymptotiquement stable. Dans le cas des systèmes de type neutre, la fonction $\sigma(G_\alpha)$ est continue uniquement sur $]0, \infty)$ avec possibilité de discontinuité en 0 d'après le théorème suivant.

Théorème II.4 [25] *Pour toutes matrices A_i, B_i , la fonction de $\alpha, \sigma(G_\alpha)$ existe et est continue sur l'ouvert $]0, \infty[$.*

Ainsi en général, $\sigma(G_\alpha)$ n'est pas continue en 0 comme le montre l'exemple suivant.

Exemple II.1 *Soit le système scalaire*

$$\frac{d}{dt}[x(t) + \frac{1}{2}x(t - \alpha\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}x(t - \alpha\pi)] = -[x(t) + \frac{1}{2}x(t - \alpha\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}x(t - \alpha\pi)],$$

alors on a [25]

$$G_\alpha(\lambda) = (\lambda + 1)(1 + \frac{1}{2}e^{-\alpha\lambda\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\alpha\lambda\pi}).$$

Pour $\alpha = 0$, $\sigma(G_\alpha) = -1$; si $\alpha \neq 0$, alors $G_\alpha(\frac{2i}{\alpha}) = 0$ et $G_\alpha(\lambda) \neq 0$ pour $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ et donc $\sigma(G_\alpha) = 0$ pour $\alpha \neq 0$; d'où la discontinuité de σ .

La continuité de σ en 0 n'est assurée que pour une classe particulière de systèmes (II.9) contenant ceux dont la solution nulle est uniformément exponentiellement stable. Nous allons rappeler dans cette section les conditions qui assurent la continuité de σ ;

elles reposent sur les travaux de Datko [25]. Le théorème suivant donne une condition suffisante de continuité de $\sigma(G_\alpha)$ en 0.

Théorème II.5 [25] *Si*

$$\det[I - \sum_{i=1}^m B_i e^{-\alpha \lambda h_i}] = 0$$

a toutes ses racines dans un demi-plan $]-\infty, -\beta_0]$, $\beta_0 > 0$, alors la fonction $\sigma(G_\alpha)$ est continue en $\alpha = 0$.

Un corollaire intéressant à ce théorème peut être établi pour les systèmes de la forme

$$\frac{d}{dt} [x(t) - Bx(t - \alpha h_m)] = \sum_{i=0}^m A_i x(t - \alpha h_i), \quad \alpha \geq 0, \quad t \geq 0$$

Corollaire II.1 [25] *La fonction $\sigma(G_\alpha)$ est continue sur $[0, \infty[$ si $\det(\lambda I - B) = 0$ n'a pas de racines dans le disque unité ouvert ($|\lambda| < 1$) du plan complexe $\mathbb{C}$ c'est-à-dire si $|\sigma(B)| < 1$.*

L'importance de ces résultats est de permettre d'estimer une borne de α en dessous de laquelle la stabilité de la solution nulle de (II.9) est assurée, étant donnée cette stabilité pour $\alpha = 0$. Le théorème suivant permet d'estimer un tel α .

Théorème II.6 [25] *Supposons que $\det[I - \sum_{i=1}^m B_i e^{-\alpha \lambda h_i}] = 0$ a toutes ses racines dans un demi-plan $]-\infty, -\beta_0]$, $\beta_0 > 0$ et $\sigma(G_0) < 0$. Alors il existe un réel $q > 0$ tel que $\sigma(G_\alpha) < 0$ pour tout $\alpha \in [0, q[$ et par conséquent pour tout $\alpha \in [0, q[$ la solution nulle de (II.9) est uniformément exponentiellement stable.*

Pour montrer l'efficacité de ce théorème nous allons l'appliquer à l'exemple ci-dessous.

Exemple II.2 [25] *Soit le système*

$$\frac{d}{dt} [x(t) - Bx(t - h)] = Ax(t), \quad t \geq 0 \tag{II.10}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{5}{4} & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Il est aisé de montrer que ce système vérifie les conditions du théorème précédent. Soit $q > 0$, un réel, alors

$$\begin{aligned} \det G_q(i\omega) &= 0 = i\omega(1 - \frac{1}{2}e^{-i\omega q})[i\omega(1 - \frac{1}{2}e^{-i\omega q}) + 1] + \frac{5}{4} \\ &= [i\omega(1 - \frac{1}{2}e^{-i\omega q}) + \frac{1}{2} - i][i\omega(1 - \frac{1}{2}e^{-i\omega q}) + \frac{1}{2} + i]. \end{aligned}$$

Cette équation donne lieu à deux systèmes d'équations en prenant les parties réelles et les parties imaginaires de chaque facteur ; soit

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\omega}{2} \sin \omega q + \frac{1}{2} = 0 \\ \omega(1 - \frac{1}{2} \cos \omega q) = 1 \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\omega}{2} \sin \omega q + \frac{1}{2} = 0 \\ \omega(1 - \frac{1}{2} \cos \omega q) = -1 \end{array} \right\}.$$

L'unique solution de ces systèmes est $\omega = 1$ et $\sin \omega q = 1$; ainsi q vaut $\frac{\pi}{2}$ et la solution nulle de (II.10) est exponentiellement stable pour tout retard $0 \leq h < \frac{\pi}{2}$.

Dans certains cas, il est possible d'établir un résultat valable pour tout $\alpha \geq 0$ c'est-à-dire un critère de stabilité indépendant du retard. C'est le cas du théorème suivant.

Théorème II.7 [25] Si

$$\det[I - \sum_{i=1}^m B_i e^{-\alpha \lambda_i}] = 0$$

a toutes ses racines dans un demi-plan $]-\infty, -\beta_0]$, $\beta_0 > 0$, si la matrice $(I - \sum_{i=1}^m B_i)^{-1} \sum_{i=0}^m A_i$ est de Hurwitz et si $\det G_\alpha(i\omega) \neq 0$ pour tout $\alpha \geq 0$, $\omega \geq 0$ alors la solution nulle de (II.9) est uniformément exponentiellement stable.

Exemple II.3 Considérons le système

$$\frac{d}{dt} [x(t) - Bx(t-h)] = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \quad t \geq 0 \quad (\text{II.11})$$

avec $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour ce système on a l'équation :

$$\det(I - Be^{-\lambda h}) = 0 = 1 + e^{-2\lambda h}$$

dont les solutions sont de la forme

$$\lambda = -\frac{\ln(2)}{2h} + i\frac{k\pi}{2h}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad h > 0$$

qui appartiennent bien à un demi plan de la forme $]-\infty, -\beta_0]$ si $\beta_0 > \frac{\ln(2)}{2h}$. De même

$$(I - B)^{-1}(A_0 + A_1) = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

est de Hurwitz ; ainsi les conditions du théorème précédent sont remplies. Il suffit donc de montrer que $\det G_q(i\omega) \neq 0$ pour tout $\alpha, \omega \geq 0$. Pour faciliter les calculs, effectuons le changement de variable $y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} x(t)$. Alors $y(t)$ vérifie l'équation

$$\frac{d}{dt} [y(t) - B^* y(t - h)] = A_0^* y(t) + A_1^* y(t - h) \quad (\text{II.12})$$

avec $B^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$, $A_0^* = A_0$ et $A_1^* = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Il est évident que les systèmes (II.11) et (II.12) sont équivalents au sens de la stabilité. Alors en considérant (II.12) on a l'équation

$$\det G_q(i\omega) = [i\omega(1 - \frac{1}{2}ie^{-i\omega q}) + 1 - ie^{-i\omega q}][i\omega(1 + \frac{1}{2}ie^{-i\omega q}) + 1 + ie^{-i\omega q}] = 0$$

et en procédant comme dans l'exemple précédent on aboutit à deux systèmes d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega}{2} \cos \omega q + 1 = \sin \omega q \\ \omega(1 - \frac{1}{2} \sin \omega q) = \cos \omega q \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\omega}{2} \cos \omega q + 1 = -\sin \omega q \\ \omega(1 + \frac{1}{2} \sin \omega q) = -\cos \omega q \end{array} \right\} ;$$

en remarquant que $\cos \omega q = 0$ n'est solution d'aucun des deux systèmes, on peut éliminer ω dans les deux systèmes et on obtient $\sin \omega q = 1$ ou $\sin \omega q = -1$ qui est évidemment impossible, c'est-à-dire que $\det G_q(i\omega) \neq 0$ pour tout $q, \omega \geq 0$; donc la solution nulle de (II.11) est exponentiellement stable pour tout retard $h \geq 0$.

Dans le cas des systèmes à retards l'équivalent des résultats précédents s'exprime :

Théorème II.8 [25] Soit le système

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sum_{i=0}^m A_i x(t - \alpha h_i), \quad \alpha \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (\text{II.13})$$

Si $\sum_{i=1}^m A_i$ est de type Hurwitz et

$$\det[i\omega I - \sum_{i=1}^m A_i e^{-i\omega \alpha h_i}] = 0$$

n'a pas de solution pour ω réel et pour $\alpha \geq 0$ alors la solution nulle de (II.13) est uniformément exponentiellement stable pour tout $\alpha \geq 0$.

II.1.4 Cas de retards distribués

Comme mentionné plus haut, les méthodes valables dans le cas des retards discrets le restent dans le cas des retards distribués pourvu que les conditions du théorème général sur les racines de l'équation caractéristiques soient vérifiées. C'est pourquoi dans ce qui suit nous allons donner, pour mémoire, ces conditions dans le seul cas des systèmes de type neutre avec retard infini. Soit le système [60, 61]

$$\dot{x}(t) = \int_{-\infty}^0 dK_0(s)x(t+s) + \int_{-\infty}^0 dK_1(s)\dot{x}(t+s), \quad t \geq 0 \quad (\text{II.14})$$

où la matrice K_0 est une matrice avec des coefficients à variations bornées et à premiers moments bornés, c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^0 \|dK_0(s)\| < \infty, \quad \int_{-\infty}^0 s \|dK_0(s)\| < \infty \quad (\text{II.15})$$

et où K_1 est une matrice qui vérifie

$$\int_{-\infty}^0 \|dK_1(s)\| < 1. \quad (\text{II.16})$$

L'équation caractéristique de (II.14) s'écrit

$$p(\lambda) = \det [\lambda(I - K_1(\lambda)) - K_0(\lambda)] = 0 \quad (\text{II.17})$$

avec

$$K_1(\lambda) = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda s} dK_1(s) \text{ et } K_0(\lambda) = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda s} dK_0(s)$$

et le théorème fondamental s'énonce :

Théorème II.9 ([60, 61]). *Si l'équation (II.17) n'a pas de racine dans le demi-plan $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ du plan complexe $\mathbb{C}$ et si les noyaux K_0 et K_1 vérifient les conditions (II.15)-(II.16), alors la solution nulle de (II.14) est asymptotiquement stable.*

En pratique, le nombre infini des racines des équations caractéristiques rend laborieux l'usage des méthodes basées sur l'exploration du signe des parties réelles de ces racines ; la méthode directe de Lyapunov, rappelée dans la section suivante, semble une alternative intéressante à cette difficulté.

II.2 Fonctionnelles et fonctions de Lyapunov scalaires

Comme nous l'avons rappelé à diverses occasions, les méthodes basées sur l'exploration du signe des parties réelles des racines de l'équation caractéristique sont difficiles à mettre en oeuvre dans la pratique et, de plus, elles ne sont valables que dans le cas linéaire. A l'inverse la complexité des systèmes rencontrés dans les sciences et techniques conduit à des modèles de plus en plus fortement non linéaires. De plus, il n'est pas toujours possible de résoudre explicitement une équation différentielle pour des paramètres et conditions initiales fixés afin de vérifier sa convergence éventuelle vers un équilibre. Il est donc intéressant de trouver une méthode qui permette de caractériser sans nécessité de résolution les solutions convergeant vers un équilibre du système, même si cette méthode ne permet pas de conclure systématiquement. Etant donné un équilibre, la façon la plus simple de vérifier qu'une trajectoire donnée converge vers cet équilibre est de montrer que la distance entre cet équilibre et le point courant de la trajectoire diminue avec le temps. La méthode directe ou seconde méthode de Lyapunov est basée sur ce principe et considère des distances "généralisées" appelées fonctions de Lyapunov. Cette méthode reste une référence de part la généralité de son principe qui lui confère son caractère assez universel. La différence d'approche dans le cas des systèmes héréditaires est due à la manière de considérer une fonction de Lyapunov. Cette section sera consacrée à la mise en oeuvre de cette méthode pour les systèmes héréditaires. Toute la méthode directe de Lyapunov repose sur la recherche de ces fonctions ou fonctionnelles de Lyapunov, c'est-à-dire celles dont on pourra montrer la décroissance vers zéro.

Soit le système de type retardé

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t), \quad t \geq t_0, \quad x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad -\eta \leq \theta \leq 0, \quad x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta), \quad F(t, 0) \equiv 0 \quad (\text{II.18})$$

alors on a le résultat suivant [60].

Théorème II.10 *S'il existe une fonctionnelle $\mathcal{V}$ définie positive (c'est-à-dire qu'il existe une fonction scalaire ω vérifiant $\omega(\theta) > 0$ pour $\theta > 0$ et $\omega(0) = 0$ telle que*

$\mathcal{V}(t, \varphi) \geq \omega(\|\varphi(0)\|)$, $\forall \varphi, \forall t$) telle que $D^+\mathcal{V} \leq 0$ le long des trajectoires de (II.18) alors la solution nulle de (II.18) est stable. $\mathcal{V}$ est alors dite fonctionnelle de Lyapunov. Rappelons que $D^+\mathcal{V}D^+\mathcal{V}(t, \varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup \frac{\mathcal{V}(t+\epsilon, x_{t+\epsilon}) - \mathcal{V}(t, x_t)}{\epsilon}$.

Deux grandes approches de la méthode directe de Lyapunov sont généralement employées pour l'analyse de la stabilité (uniforme et asymptotique) des systèmes retardés (II.18) : la méthode de Krasovskii qui utilise des fonctionnelles et la méthode de Razumikhin² qui emploie des fonctions. Les deux premières sections de cette partie sont consacrées à la présentation de ces deux approches.

II.2.1 Fonctionnelles de Lyapunov : méthode de Krasovskii

La méthode de Krasovskii [42, 61, 60, 66, 68] consiste alors à rechercher des fonctionnelles ayant certaines propriétés (par exemple définie positives) qui décroissent le long des solutions du système (II.18). Une telle fonctionnelle sera dite de Lyapunov-Krasovskii généralisant la deuxième méthode de Lyapunov pour les systèmes de type retardé.

Théorème II.11 ([60]). Soit $u, v, w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions continues, non décroissantes ; $u(\varpi)$ et $v(\varpi)$ strictement positives pour $\varpi > 0$ et $u(0) = v(0) = 0$. Supposons que la fonction F de (II.18) est bornée pour des valeurs bornées de ses arguments et qu'il existe une fonctionnelle continue $\mathcal{V} : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$a) u(\|\varphi(0)\|) \leq \mathcal{V}(t, \varphi) \leq v(\|\varphi\|_c),$$

$$b) D^+\mathcal{V}(t, \varphi) \leq -w(\|\varphi(0)\|) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ le long des trajectoires de (II.18).}$$

Alors la solution nulle de (II.18) est uniformément stable. Si de plus $w(\varpi) > 0$ pour $\varpi > 0$ alors la solution nulle de (II.18) est uniformément asymptotiquement stable.

Théorème II.12 ([60]). Soit $u, v, w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions continues, non décroissantes ; $u(\varpi)$ et $v(\varpi)$ strictement positives pour $\varpi > 0$ et $u(0) = v(0) = 0$. Supposons

²Boris Razumikhin : Docteur ès sciences physiques et mathématiques, il est l'auteur de plusieurs travaux traitant essentiellement de la mécanique analytique, de la théorie de la stabilité et de la théorie de la commande. On lui doit également plusieurs méthodes d'optimisation statique et dynamique qui s'inspirent des grands principes de la mécanique analytique.

que la fonction F de (II.18) est bornée pour des valeurs bornées de ses arguments et qu'il existe une fonctionnelle continue $\mathcal{V} : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- i) $u(\|\varphi\|_{\mathcal{C}}) \leq \mathcal{V}(t, \varphi) \leq v(\|\varphi\|_{\mathcal{C}})$,
 - ii) $D^+\mathcal{V}(t, \varphi) \leq -w(\|\varphi\|_{\mathcal{C}})$, pour tout $t \geq t_0$ et $w(\varpi) > 0$ pour $\varpi > 0$,
 - iii) $\mathcal{V}$ est lipschitzienne $|\mathcal{V}(t, \varphi) - \mathcal{V}(t, \psi)| \leq k \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{C}}$, $k > 0$,
- alors la solution nulle de (II.18) est exponentiellement stable.

Remarque II.3 Une fonctionnelle qui vérifie les hypothèses d'un des deux théorèmes précédents est appelée fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii.

Tout l'art de la méthode de Lyapunov-Krasovskii revient à trouver une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii $\mathcal{V}$ qui vérifie les conditions listées ci-dessus. S'il n'est pas trop difficile de construire une fonctionnelle candidate, en construire une qui vérifie les conditions de décroissance reste une tâche ardue.

II.2.2 Fonctions de Lyapunov : méthode de Razumikhin

Au cours de l'application des théorèmes précédents, on doit vérifier la négativité de la dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii considérée le long de toutes les trajectoires du système ; en réalité les trajectoires pour lesquelles il est absolument nécessaire de vérifier cette condition sont celles qui ont tendance à diverger. Ce principe, utilisé pour la première fois par Razumikhin [111] et dont la première démonstration correcte a été donnée par Krasovskii [66], a été largement employé et permet de donner les conditions de stabilité de (II.18) en employant les fonctions définies positives sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ à la place de fonctionnelles, selon le théorème :

Théorème II.13 ([66, 111]) Soit $u, v, w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions continues, non décroissantes ; $u(\varpi)$ et $v(\varpi)$ strictement positives pour $\varpi > 0$ et $u(0) = v(0) = 0$. Supposons que la fonction F de (II.18) est bornée pour des valeurs bornées de ses arguments.

Alors s'il existe une fonction continue $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- a) $u(\|x(t)\|) \leq V(t, x(t)) \leq v(\|x(t)\|), t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R}^n,$
b) $\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(\|x(t)\|)$ pour les trajectoires de (II.18) vérifiant

$$V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, x(t)), \forall \theta \in [-\eta, 0],$$

alors la solution nulle de (II.18) est uniformément stable.

De plus si $w(\varpi) > 0$ pour $\varpi > 0$ et s'il existe une fonction $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, p(\varpi) > \varpi$ pour $\varpi > 0$ telle que

- i) $u(\|x(t)\|) \leq V(t, x(t)) \leq v(\|x(t)\|), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n,$
ii) $\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(\|x(t)\|),$ pour les trajectoires de (II.18) vérifiant

$$V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq p(V(t, x(t))), \forall \theta \in [-\eta, 0],$$

alors la solution nulle de (II.18) est uniformément asymptotiquement stable.

Remarque II.4 Une telle fonction est appelée fonction de Lyapunov-Razumikhin. Dans la pratique, les fonctions p souvent utilisées [99] sont celles de la forme $p(\varpi) = q\varpi, q > 1$.

Dans le cas des systèmes linéaires, l'utilisation de certaines fonctionnelles et fonctions de type quadratique dans la mise en pratique des théorèmes précédents conduit à un problème de résolution des équations de type Riccati que l'on peut résoudre par les techniques *LMI* (Linear Matrix Inequalities) [99] dont l'on peut trouver une présentation dans [12].

Application

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h). \quad (\text{II.19})$$

- 1) Soit la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii :

$$\mathcal{V}(t, \varphi) = \varphi^T(0) P \varphi(0) + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) S \varphi(\theta) d\theta$$

où les matrices P et S sont symétriques définies positives ; en prenant sa dérivée le long de (II.19), on a la proposition :

Proposition II.6 *La solution nulle de (II.19) est asymptotiquement stable indépendamment du retard s'il existe trois matrices définies positives P, Q, S telles que*

$$A_0^T P + P A_0 + P A_1 S^{-1} A_1^T P + S + Q = 0.$$

En terme de LMI, l'égalité précédente est équivalente à ce que la matrice

$$\begin{bmatrix} A_0^T P + P A_0 + S & P A_1 \\ A_1^T P & -S \end{bmatrix}$$

soit définie positive.

2) Soit maintenant la fonction de Lyapunov-Razumikhin :

$$V(t, \varphi) = \varphi^T(0) P \varphi(0)$$

alors on obtient la proposition :

Proposition II.7 *La solution nulle de (II.19) est asymptotiquement stable indépendamment du retard s'il existe une matrice définie positive Q et un réel $q > 0$ tels que les matrices P et S vérifient l'égalité*

$$A_0^T P + P A_0 + \frac{1}{q} P A_1 S^{-1} A_1^T P + Q = 0$$

ou que la matrice $\begin{bmatrix} A_0^T P + P A_0 & \frac{1}{\sqrt{q}} P A_1 \\ \frac{1}{\sqrt{q}} A_1^T P & -S \end{bmatrix}$ *est définie positive.*

II.2.3 Fonctionnelles de Lyapunov pour les systèmes de type neutre

Ici on considère les systèmes neutres de la forme

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t, \dot{x}_t), x_t(\theta) = x(t+\theta), -\eta \leq \theta \leq 0, x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta), \dot{x}_{t_0}(\theta) = \dot{\varphi}(\theta). \quad (\text{II.20})$$

Dans ce cas, la manière la plus adéquate de mettre en oeuvre la méthode directe de Lyapunov est de construire une fonctionnelle dépendant des dérivées en application du théorème suivant.

Théorème II.14 ([60]) *Supposons qu'il existe une fonctionnelle $\mathcal{V}(t, x_t, \dot{x}_t)$ continue dont la dérivée le long des trajectoires de (II.20) existe, des fonctions scalaires w_i continues strictement décroissantes telles que $w_i(0) = 0$ et $w(\varpi) > 0$ pour $\varpi > 0$ et vérifiant les deux conditions*

$$a) \ w_1(\|x_t\|_{\mathcal{W}}) \leq \mathcal{V}(t, x_t, \dot{x}_t) \leq w_2(\|x_t\|_{\mathcal{W}}),$$

$$b) \ \dot{\mathcal{V}}(t, x_t, \dot{x}_t) \leq 0,$$

alors la solution nulle de (II.20) est stable.

$$\text{Si } \dot{\mathcal{V}}(t, x_t, \dot{x}_t) \leq -w_3(\|x(t)\|),$$

alors la solution nulle de (II.20) est asymptotiquement stable.

Cette approche appliquée à des systèmes linéaires de type neutre avec des fonctionnelles de type quadratique conduit à des conditions de stabilité en termes de solutions d'équations de Riccati algébriques [140]. En effet, soit le système de type neutre

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(t - \tau) + C \dot{x}(t - \tau). \quad (\text{II.21})$$

En considérant la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii

$$\mathcal{V}(\varphi, \dot{\varphi}) = \varphi^T(0)P\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta)Q\varphi(\theta)d\theta + \int_{-\tau}^0 \dot{\varphi}^T(\theta)N\dot{\varphi}(\theta)d\theta$$

où les matrices P, Q, N sont définies positives, le résultat suivant est obtenu.

Théorème II.15 [140] *La solution nulle du système neutre (II.21) est asymptotiquement stable indépendamment du retard si*

i) *A est une matrice de Hurwitz (c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres sont à partie réelle strictement négative),*

ii) *C est une matrice de Schur-Cohn (c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1),*

iii) *il existe des matrices symétriques définies positives P, M et Δ telles que*

$$PN^{-1}P - (\Delta + B^T X B) - (A^T + PN^{-1})X(X^{-1} + B\Delta^{-1}B^T)X(A + N^{-1}P) > 0$$

où $X = (N^{-1} - CN^{-1}C^T)^{-1}$ et N est l'unique solution définie positive de l'équation $N = C^T N C + M$.

Exemple II.4 *Considérons le système scalaire*

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + c(t) \dot{x}(t-h), \quad t \geq 0, \quad a > 0. \quad (\text{II.22})$$

En prenant la fonctionnelle

$$\mathcal{V}(t, x_t, \dot{x}_t) = x^2(t) + \frac{1}{a} \int_{t-h}^t \dot{x}^2(\theta) d\theta,$$

on obtient que si $|c(t)| < 1, t \geq 0$, alors la solution nulle de (II.22) est asymptotiquement stable.

Naturellement pour les systèmes de type neutre de la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [Z(t, x_t)] &= F(t, x_t), \quad t \geq t_0, \quad x_t(\theta) = x(t+\theta), \quad -\eta \leq \theta \leq 0, \\ x_{t_0}(\theta) &= \varphi(\theta), \quad F(t, 0) \equiv Z(t, 0) \equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

($\mathcal{Z}$ étant une fonctionnelle défini de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^n$, F étant supposée bornée pour des valeurs bornées de ses arguments), il est plus aisé de définir une fonctionnelle dépendant de $\mathcal{Z}(t, \varphi)$; mais dans ce cas elle n'est plus, en général, définie positive ; de telles fonctionnelles ou fonctions sont dites *dégénérées* [59, 60]. La dégénérescence de la fonctionnelle ou fonction ne permet pas de conclure à la stabilité de la solution nulle de (II.23) sur le seul critère de décroissance le long des trajectoires. Il faut adjoindre à cette propriété une caractérisation de l'opérateur $\mathcal{Z}$ (ceci est à rapprocher des conditions (II.8) posées sur les matrices B_i dans le cas linéaire stationnaire (II.6)).

II.2.4 Fonctionnelles de Lyapunov dégénérées

On considère les systèmes neutres (II.23). Soit $\mathcal{V}(t, \mathcal{Z}(t, x_t))$ une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie positive par rapport à l'opérateur $\mathcal{Z}(t, x_t)$ alors la décroissance de $\mathcal{V}(t, \mathcal{Z}(t, x_t))$ le long des trajectoires de (II.23) permet de majorer l'opérateur $\mathcal{Z}$ le long de ces trajectoires sous la forme

$$\|\mathcal{Z}(t, x_t)\| \leq f(t), \quad t \geq t_0$$

et donc pour assurer la stabilité de la solution nulle, il est important que $\mathcal{Z}$ vérifie certaines propriétés de "contraction" que nous allons présenter ci-dessous.

Définition II.1 ([59, 60]). Soit l'inéquation (de solution y_t)

$$\|\mathcal{Z}(t, y_t)\| \leq f(t), \quad t \geq t_0, \quad f(t) \geq 0, \quad y_{t_0} = \phi. \quad (\text{II.24})$$

La solution nulle de (II.24) et par abus de langage l'opérateur $\mathcal{Z}$ sont dits

a) *f-stable* si pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tel que $\|y(t; t_0, \phi)\| \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$ et toutes les conditions initiales ϕ et fonctions f vérifiant $\|\phi\|_{\mathcal{C}} \leq \delta(t_0, \varepsilon)$ et $\sup_{t \geq t_0} f(t) \leq \varepsilon$,

b) *asymptotiquement f-stable*, si elle est *f-stable* et $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t; t_0, \phi)\| = 0$ pour tout ϕ dans un sous-ensemble $\mathcal{C}_a$ de $\mathcal{C}$ et toute fonction f telle que $f(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

c) *f-bornée*, si à toute condition initiale bornée correspond une solution bornée.

La méthode directe de Lyapunov s'applique alors en deux étapes :

- 1) assurer la f -stabilité (f -stabilité asymptotique) de l'opérateur $\mathcal{Z}$;
- 2) trouver une fonctionnelle dégénérée décroissante le long des solutions de (II.23).

Théorème II.16 ([59, 60]). Soit $\mathcal{V} : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, \varphi, \mathcal{Z}(t, \varphi)) \rightarrow \mathcal{V}(t, \varphi, \mathcal{Z}(t, \varphi))$ une fonction continue telle que sa dérivée le long des trajectoires de (II.23) existe, soient w_i ($i = 1, 2, 3$) des fonctions scalaires continues strictement croissantes telles que $w_i(0) = 0$ et $w_i(\varpi) > 0$ pour $\varpi > 0$. Supposons que les trois conditions suivantes soient remplies :

a) $w_1(\|\mathcal{Z}(t, x_t)\|) \leq \mathcal{V}(t, x_t, \mathcal{Z}(t, x_t)) \leq w_2(\|x_t\|_{\mathcal{C}}),$

b) $\dot{\mathcal{V}}(t, x_t, \mathcal{Z}(t, x_t)) \leq 0,$

c) la solution nulle de (II.24) est f -stable,
alors la solution nulle de (II.23) est stable.

Si le point a) est vérifié et

i) $\dot{\mathcal{V}}(t, x_t, \mathcal{Z}(t, x_t)) \leq -w_3(\|\mathcal{Z}(t, x_t)\|),$

ii) la solution nulle de (II.24) est asymptotiquement f -stable,
alors la solution nulle de (II.23) est asymptotiquement stable.

Ce théorème permet le traitement de la classe des systèmes dont le second membre dépend explicitement de $\mathcal{Z}$, soit les systèmes de la forme :

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{Z}(t, x_t)] = F(t, \mathcal{Z}(t, x_t)), \quad t \geq t_0. \quad (\text{II.25})$$

En effet pour ces systèmes il suffit de vérifier les propriétés de f -stabilité de $\mathcal{Z}$ et la stabilité de la solution nulle de l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{y}(t) = F(t, y(t)). \quad (\text{II.26})$$

Corollaire II.2 ([60, 59]). Supposons que la solution nulle de (II.26) soit stable (respectivement asymptotiquement stable) et que la solution nulle de l'inégalité (II.24) soit

f-stable (respectivement asymptotiquement *f*-stable) alors la solution nulle de (II.25) est stable (respectivement asymptotiquement stable).

Dans la littérature, les opérateurs $Z(t, x_t)$ les plus courants sont ceux de la forme $Z(t, x_t) = x(t) - G(t, x_t)$ où la fonctionnelle G est supposée vérifier $G(t, 0) \equiv 0$. Etant donnée l'importance de la propriété de *f*-stabilité de Z , il est nécessaire de caractériser les opérateurs généralement utilisés et qui possèdent cette propriété. C'est ce qui va être entrepris ci-dessous.

Lemme II.1 ([60, 59]). *Supposons que la fonctionnelle G vérifie la condition de Lipschitz*

$$\|G(t, x_t) - G(t, y_t)\| \leq \nu \|x_t - y_t\|_C$$

*avec $0 < \nu < 1$ alors la solution nulle de (II.24) est *f*-stable et *f*-bornée.*

Preuve : De l'inégalité (II.24) on a

$$\|y(t)\| \leq \|G(t, y_t)\| + f(t) \leq \nu \|y_t\| + f(t).$$

Posons $m(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \|y(s)\|$ alors

$$m(t) \leq \nu m(t) + \nu \|\phi\| + \sup_{0 \leq s \leq t} f(s), \text{ soit } \|y(t)\| \leq m(t) \leq \frac{\nu}{1 - \nu} \|\phi\| + \frac{1}{1 - \nu} \sup_{0 \leq s \leq t} f(s).$$

Dans le cas $G(t, y_t) = g(t, y(t - h))$, on montre la *f*-stabilité asymptotique

Lemme II.2 ([60, 59]). *Si $G(t, y_t) = g(t, y(t - h))$ et $\|g(t, y(t - h))\| \leq \nu \|y(t - h)\|$, $0 < \nu < 1$, alors la solution nulle de (II.24) est asymptotiquement *f*-stable et *f*-bornée.*

D'autres conditions peuvent être consultées dans [60].

II.2.5 Techniques de construction des fonctionnelles de Lyapunov

La difficulté dans l'application des résultats précédents est de trouver la fonctionnelle ou la fonction de Lyapunov adéquate, ce qui dépend fortement de l'expérience de l'analyste. En effet il n'existe pas de méthodes formelles (algorithmes, systèmes experts) permettant sa construction générale. Ceci a conduit Burton [15] à qualifier la méthode directe de Lyapunov d'*art*. C'est à cet effet qu'il a été proposé récemment par Kolmanovskii une méthode semi-heuristique [54, 55] permettant la construction de fonctionnelles de Lyapunov pour les systèmes héréditaires en plusieurs étapes. Le principe est le suivant :

1) transformer le second membre de (II.18) en deux termes $F(t, x_t) = F_1(t, x(t)) + F_2(t, x_t)$ avec $F_1(t, 0) \equiv F_2(t, 0) \equiv 0$ de sorte que le premier terme ne dépende que de t et de la valeur courante $x(t)$, et que la solution nulle du système différentiel ordinaire formé par le premier terme, c'est-à-dire $\dot{y}(t) = F_1(t, y(t))$, admette une solution nulle uniformément asymptotiquement stable,

3) en vertu du théorème d'inversion [43], il existe une fonction de Lyapunov $v(t, y(t))$ pour le système ordinaire défini précédemment,

4) en remplaçant $y(t)$ par la "transformation" employée en 1) dans v , on obtient une fonctionnelle $\mathcal{V}_1$, ensuite on calcule la fonctionnelle $\mathcal{V}_2$ de sorte que la fonctionnelle résultant de la somme de $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$ soit décroissante le long des trajectoires de (II.18).

Montrons l'efficacité de cette méthode en l'appliquant à l'exemple ci-dessous.

Exemple II.5 Soit le système scalaire ([54])

$$\dot{x}(t) = -b(t)x(t-h) \quad (\text{II.27})$$

sur lequel nous allons appliquer la méthode précédente pour construire une fonctionnelle de Lyapunov, en supposant que la fonction b vérifie $\inf_t b(t) > 0$ et $\int_t^{t+h} b(s)ds < 1$:

1) transformation : on remarque que

$$b(t)x(t-h) = b(t+h)x(t) - \frac{d}{dt} \int_{t-h}^t b(s+h)x(s)ds,$$

et posant

$$z(t) = x(t) - \int_{t-h}^t b(s+h)x(s)ds$$

le système (II.27) devient

$$\dot{z}(t) = -b(t+h)x(t),$$

2) le système ordinaire correspondant est

$$\dot{y}(t) = -b(t+h)y(t) ;$$

3) on prend $v(t, y(t)) = y^2(t)$,

4) on remplace $y(t)$ par $z(t)$ dans v et on obtient $\mathcal{V}_1$ définie par

$$\mathcal{V}_1(t, x_t) = \left[x(t) - \int_{t-h}^t b(s+h)x(s)ds \right]^2$$

d'où l'on a

$$\dot{\mathcal{V}}_1(t, x_t) = -2b(t+h)x^2(t) + 2b(t+h)x(t) \int_{t-h}^t b(s+h)x(s)ds.$$

et on sait que

$$2x(t) \int_{t-h}^t b(s+h)x(s)ds \leq x^2(t) \int_{t-h}^t b(s+h)ds + \int_{t-h}^t b(s+h)x^2(s)ds$$

donc on prend

$$\mathcal{V}_2(t, x_t) = \int_{t-h}^t b(s+2h) \int_s^t b(s_1+h)x(s_1)ds_1ds.$$

On montre [54] alors que

$$\mathcal{V}(t, x_t) = \left[x(t) - \int_{t-h}^t b(s+h)x(s)ds \right]^2 + \int_{t-h}^t b(t+2h)ds \int_s^t b(s_1+h)x(s_1)ds,$$

est une fonctionnelle de Lyapunov et on conclut à la stabilité asymptotique de (II.27).

On peut remarquer que cette procédure n'est pas univoque ; en effet, la manière de décomposer l'équation (II.18) et le choix de la fonction $v(t, y(t))$ peuvent se faire de différentes manières. Ceci conduit à différents résultats que l'on peut améliorer à son gré. Cette procédure, qui peut comporter plus d'étapes que les quatre données ici, a permis l'obtention de résultats significatifs aussi bien pour les systèmes à retards discrets ou distribués que pour les systèmes à retards de type neutre [54, 55] [56, 58].

II.3 Fonctions vectorielles de Lyapunov et systèmes de comparaison

Il est aujourd'hui reconnu que la méthode directe de Lyapunov est et reste la technique de référence pour l'étude de la stabilité des équilibres d'un système dynamique. Mais comme nous l'avons vu précédemment, la recherche d'une fonction ou d'une fonctionnelle de Lyapunov n'est pas une tâche facile et malgré les tentatives de formalisation de la construction de tels outils (méthodes à plusieurs étapes présentées plus haut), cette méthode reste d'un accès limité. La difficulté augmente naturellement avec la complexité des systèmes et en l'occurrence avec le phénomène d'hérédité. Dès lors, des auteurs ont cherché à contourner cette difficulté de construction d'une fonction de Lyapunov en remplaçant l'étude du système initial par celle d'un système plus facile à analyser et dont la stabilité entrainerait celle du système initial : *les systèmes de comparaison* sont issus de cette recherche.

Dans son principe le plus général on peut décrire comme suit la notion de système de comparaison "un système dynamique $\mathcal{A}$ est dit système de comparaison pour un système

B par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ (par exemple la stabilité de leur solution nulle), si la vérification de la propriété $\mathcal{P}$ pour le système A entraîne la même propriété pour B ." En pratique, le système A doit être plus simple à analyser que B .

Les premières formulations de cette approche remontent probablement aux travaux de Nemytskii et Stepanov [98] (voir [37]). Par la suite les travaux de Ważewski [146] qui donnent des conditions pour que des inégalités différentielles entraînent les mêmes inégalités sur les solutions a rendu effective l'usage de cette approche pour l'analyse de la stabilité. Ainsi pour l'étude de la stabilité de la solution nulle d'un système, il suffit de pouvoir majorer la dérivée d'une certaine "fonction scalaire ou vectorielle" de ces variables par une fonction vérifiant les conditions dites de Ważewski pour que l'étude de la stabilité de la solution nulle du système défini par la fonction majorante permette de conclure à la stabilité de la solution nulle du système original : c'est *le principe de comparaison*. Nous nous intéresserons en particulier à une formulation vectorielle des inégalités différentielles reposant sur les fonctions vectorielles de Lyapunov, introduites simultanément en 1962 par Matrosov [89] et Bellman [6]. Cependant, les calculs généraux sont assez complexes et plusieurs variantes de ces fonctions ont été introduites par différents auteurs et notamment les normes vectorielles (travaux du LAIL). En effet l'avantage de choisir une fonction de Lyapunov de ce type est de disposer d'une part d'une distance "vectorielle" par rapport à l'origine de $\mathbb{R}^n$ et d'autre part de conduire à travers des calculs assez simples à des domaines de stabilité convexes.

Plusieurs types de systèmes dynamiques ont pu être étudiés par cet intermédiaire : équations différentielles ordinaires [38, 88, 70, 104], équations aux différences ordinaires [11], systèmes à retards [5, 22, 113]. Nous généraliserons par la suite cette approche aux systèmes à retards distribués [131, 132, 133] et neutres [128, 129, 130].

Nous allons dans cette partie rappeler ce principe pour les systèmes à retards de la

forme

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t))), \quad t \geq t_0, \quad x_{t_0} = \varphi, \quad \varphi \in C([- \tau, 0], \mathbb{R}^n) \quad (\text{II.28})$$

où les τ_i sont des fonctions positives et majorées par τ .

II.3.1 Fonctions vectorielles de Lyapunov

Nous allons ici généraliser la notion de fonction définie positive aux fonctions vectorielles.

Définition II.2 Soit $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ ($r \leq n$), une fonction vectorielle, elle est dite définie positive si ses composantes vérifient $V_i(t, x) \geq 0$, et si on a, $\forall \alpha_i > 0$, $i = 1$ à r , $\sum_1^r \alpha_i V_i(t, x) \equiv 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$.

Etant donné un système (II.28) on supposera toujours que D^+V la dérivée le long de ses trajectoires existe. Supposons de plus qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \times \dots \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ telle que l'inégalité

$$D^+V(t, x) \leq g(t, V(x(t)), V(x(t - \tau_1(t))), \dots, V(x(t - \tau_m(t))))), \quad t \geq t_0 \quad (\text{II.29})$$

soit vérifiée le long des trajectoires de (II.28) dans un voisinage $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ de l'origine. On associe à cette inégalité (II.29) le système différentiel

$$\dot{z}(t) = g(t, z(t), z(t - \tau_1(t)), \dots, z(t - \tau_m(t))), \quad t \geq t_0, \quad z_{t_0} \in C([- \tau, 0], \mathbb{R}^r); \quad (\text{II.30})$$

alors on a la définition suivante :

Définition II.3 Le système (II.30) est dit système de comparaison de (II.28) par rapport à la propriété $\mathcal{P}$ (ici stabilité/stabilité asymptotique de la solution nulle), si la vérification de la propriété $\mathcal{P}$ pour le système (II.30) entraîne la même propriété pour (II.28).

Un principe de comparaison consiste alors à donner des conditions sur la fonction g pour que (II.30) soit un système de comparaison par rapport à la stabilité (asymptotique) pour (II.28).

II.3.2 Principe de comparaison et systèmes de comparaison

Définition II.4 ([24]). Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x, y) \rightarrow f(t, x, y)$, alors

a) f est strictement croissante en y si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x, y, y' \in \mathbb{R}^n, y < y' \Rightarrow f(t, x, y) < f(t, x, y') \quad (\text{II.31})$$

b) f est quasi-monotone non décroissante en x si, pour tout $i = 1, \dots, n$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$,

$$x_i = x'_i \text{ et } x \leq x' \text{ implique } f_i(t, x, y) \leq f_i(t, x', y) \quad (\text{II.32})$$

Ces conditions sont souvent désignées dans la littérature sous le nom de conditions de Chaplygin-Ważewski (voir [37], p.117).

Nous pouvons énoncer maintenant l'outil fondamental de cette partie : le principe de comparaison.

Théorème II.17 ([24, 71, 70]). Si la fonction $g(t, \xi, \xi_1, \dots, \xi_m)$ de l'inégalité (II.29) est:

- 1) continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \times \dots \times \mathbb{R}^r$,
- 2) strictement croissante par rapport aux ξ_i ($i = 1, \dots, m$) et quasi-monotone non décroissante par rapport à ξ ,
- 3) telle que le système (II.30) possède une solution unique pour toute condition initiale $z_{t_0} \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^r)$ et $t_0 \in \mathbb{R}$,

alors le système (II.30) est un système de comparaison du système (II.28) par rapport à la stabilité (asymptotique) de la solution nulle et par rapport à $C(\mathcal{D})$.

Ce principe a permis d'établir diverses conditions de stabilité simples à tester [5, 22, 93, 137]. Le lemme de Tokumaru *et al* [137], ainsi que les résultats de [5, 22] permettent de donner des conditions de stabilité en termes de M -matrices que nous utiliserons largement dans la suite de ce mémoire. Nous allons rappeler ici un critère dû à Mori *et al* [93].

Théorème II.18 ([93]). *Soit le système*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h), \quad t \geq 0. \quad (\text{II.33})$$

Si $-\mu(A) > \|B\|$, où μ est la mesure de matrice associée à la norme $\|\cdot\|$, alors la solution nulle de (II.33) est asymptotiquement stable indépendamment du retard. De plus la solution réelle de l'équation

$$1 + \frac{\sigma}{\mu(A)} + \frac{\|B\|}{\mu(A)} e^{\sigma h} = 0$$

est telle que

$$\|x(t)\| \leq k \|x_0\| e^{-\sigma t}, \quad t \geq 0, \quad k > 0.$$

Les normes vectorielles régulières, que nous allons largement employer sont définies comme suit.

Définition II.5 *Le vecteur x de $\mathbb{R}^n$ est partitionné sous la forme $x = [x_1, \dots, x_i, \dots, x_r]^T$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ avec $r \leq n$, $\sum_{i=1}^r n_i = n$. Une telle décomposition est dite régulière. On définit alors une norme vectorielle $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ par $V(x) = [V_i(x_1), \dots, V_i(x_i), \dots, V_r(x_r)]^T$ où $V_i(x_i)$ est une norme (scalaire) sur $\mathbb{R}^{n_i}$.*

II.3.3 Systèmes de comparaison dégénérés

Cette partie sera reprise plus en détail dans le prochain chapitre ; nous n'en présenterons ici que les principes. Nous avons vu plus haut que pour les systèmes neutres de la forme

$$\frac{d}{dt} [Z(t, x_t)] = F(t, x_t), \quad t \geq t_0, \quad x_{t_0} = \varphi \quad (\text{II.34})$$

il est souvent plus facile de définir une fonction de Lyapunov dégénérée. Ainsi en combinant cette notion de fonctions dégénérées et de systèmes de comparaison, nous allons définir les systèmes de comparaison dégénérés conformément à nos travaux [128, 129]. Soit $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$, $(t, x) \rightarrow V(t, x)$ une fonction vectorielle de définie positive, alors la fonction obtenue en remplaçant x par $Z(t, x_t)$ sera dite fonction vectorielle de Lyapunov dégénérée. Supposons que l'inégalité

$$D^+V(Z(t, x_t)) \leq g(t, V(Z(t, x_t))), \quad t \geq t_0 \quad (\text{II.35})$$

soit vérifiée le long des trajectoires de (II.34), alors on lui adjoint le système ordinaire

$$\dot{z}(t) = g(t, z(t)), \quad t \geq t_0, \quad z(t_0) \quad (\text{II.36})$$

et on aboutit à la définition suivante.

Définition II.6 ([128, 129]). *Le système (II.36) est dit système de comparaison dégénéré global de (II.34) par rapport à la norme vectorielle V si*

$$V(Z(t_0, \varphi)) \leq z(t_0) \text{ implique } V(Z(t, x_t)) \leq z(t), \quad t \geq t_0.$$

Les conditions pour que (II.36) soit un système de comparaison dégénéré pour (II.34) sont similaires au cas des systèmes à retards et sont données dans le théorème suivant.

La démonstration des deux théorèmes qui suivent sera présentée au Chapitre III, section III.3.

Théorème II.19 ([128]). *Si la fonction $g(t, \xi)$ de l'inégalité (II.35) est:*

- 1) *continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$,*
- 2) *quasi monotone non décroissante par rapport à ξ ,*
- 3) *telle que le système (II.36) possède une solution unique pour toute condition initiale $z(t_0) \in \mathbb{R}^r$ et $t_0 \in \mathbb{R}$,*

alors le système (II.36) est un système de comparaison dégénéré du système (II.34).

Théorème II.20 ([128]) *Si le théorème précédent est vérifié et si de plus l'opérateur $\mathcal{Z}$ est f -stable (respect. asymptotiquement f -stable) alors le système (II.36) est un système de comparaison du système (II.34) par rapport à la stabilité (respect. stabilité asymptotique) de la solution nulle.*

Ainsi l'analyse de la stabilité de la solution nulle du système (II.34) revient à analyser un système ordinaire de type (II.36) en assurant une certaine "stabilité" de l'opérateur $\mathcal{Z}$. Ce procédé sera utilisé dans le prochain chapitre qui est consacré à l'étude de la stabilité des systèmes neutres de type (II.34).

II.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons passé en revue différentes méthodes d'analyse de la stabilité des systèmes héréditaires. La première section, avec les méthodes basées sur la caractérisation des racines de l'équation caractéristique a montré la difficulté d'une approche directe (nécessaire et suffisante), même dans le cas linéaire (auquel elle est restreinte).

Dans la deuxième section a été rappelée une méthode qui peut s'avérer plus aisée d'emploi, même si elle ne conduit qu'à des conditions suffisantes : la méthode directe de Lyapunov. Deux principales variantes de cette approche sont souvent utilisées dans la littérature : la méthode de Lyapunov-Krasovskii (construction de fonctionnelles) et la méthode de Lyapunov-Razumikhin (construction de fonctions). De même, la récente méthode semi-heuristique de construction de fonctionnelles introduite par Kolmanovskii a été présentée. Pour les systèmes à retards de type neutre il a été fait mention de construction de fonctionnelles de Lyapunov dégénérées.

La troisième et dernière section a rappelée le principe de comparaison qui est un outil majeur pour ce mémoire et que nous avons simplement élargi au cas des systèmes neutres en présentant le concept de système de comparaison dégénéré. Cette section sert ainsi d'introduction aux résultats qui seront établis dans les chapitres prochains.

Chapitre III

Stabilité des systèmes neutres

III.1 Introduction

Si l'étude de la stabilité des systèmes ordinaires a atteint un certain niveau de maturité aujourd'hui, ce n'est pas le cas pour les systèmes héréditaires et notamment pour les systèmes de type neutre. Pourtant le besoin de modélisations assez fines et les exemples du premier chapitre ou ceux que l'on peut trouver dans [42, 61] prouvent l'importance de ces systèmes dans les sciences de l'ingénieur. Parallèlement si la propriété qualitative de stabilité est indispensable dans la pratique, il est tout aussi important de quantifier cette propriété en termes de domaines de stabilité [27, 113, 134]. En effet il ne suffit pas de prouver qu'un point d'équilibre d'un système dynamique est stable, il faut aussi savoir quelle "amplitude de perturbation" autour de cet équilibre il pourra supporter.

De même, il peut arriver que l'on ne puisse pas montrer formellement la stabilité d'un équilibre mais qu'on ne soit en fait intéressé que par le ralliement d'un voisinage de cet équilibre. C'est le problème de l'estimation du comportement asymptotique [135, 130]. Ainsi, atteindre une température oscillant entre 99° et 101° au lieu de 100° peut être admissible, par contre il faut pouvoir garantir qu'un changement de régime donné ne sera pas déstabilisant.

En pratique, le fonctionnement d'un système est souvent limité dans le temps et les

variables sont contraintes à évoluer dans des domaines bornés prédéfinis. Ces considérations ont conduit à la notion de stabilité pratique qui consiste à assurer que le système partant d'un ensemble de conditions initiales donné évoluera dans un domaine donné pendant un temps donné. Cette notion introduite par Weiss et Infante [148] avait ses prémisses dans la monographie [72] (voir par exemple [105]). La notion de stabilité pratique avec temps d'établissement a été introduite par Grujić [36]. En ce qui concerne les systèmes héréditaires, cette propriété a été discutée dans [5, 26, 34] pour les seuls systèmes de type retardé. Dans ce chapitre nous discuterons aussi de la stabilité pratique des systèmes de type neutre.

On a vu dans le deuxième chapitre que, d'une part, la méthode directe de Lyapunov reste la méthode de référence pour l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques et, d'autre part, que construire une fonction ou fonctionnelle de Lyapunov adéquate demande un certain "savoir faire". Nous allons donc montrer dans la deuxième section de ce chapitre que la méthode des systèmes de comparaison peut s'avérer une bonne alternative à l'analyse de la stabilité ainsi qu'au problème important et intéressant dans la pratique, de l'estimation à la fois des domaines de stabilité et des comportements asymptotiques de certaines classes de systèmes à retards de type neutre [128, 129, 134][135, 130].

Enfin, dans la troisième section, nous considérerons, dans le cas neutre, la méthode de construction d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii en plusieurs étapes proposée par Kolmanovskii [63]. Cette dernière méthode est complémentaire de la précédente car elle opère sur des classes de représentations plus vastes.

III.2 Représentation des systèmes neutres

Nous avons vu dans les chapitres précédents que les systèmes neutres sont représentés dans la littérature sous deux formes principales :

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t, \dot{x}_t), \quad t \geq t_0, \quad x_{t_0} = \varphi, \quad \dot{x}_{t_0} = \dot{\varphi} \quad (\text{III.1})$$

et

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{Z}(t, x_t)] = F(t, x_t), t \geq t_0, x_{t_0} = \varphi, \mathcal{Z}(t, x_t) = x(t) - G(t, x_t). \quad (\text{III.2})$$

Cette dernière forme est aussi appelée forme de Hale [61]. Pour la forme de Hale, il n'est pas nécessaire que $x(t)$ soit dérivable : seule la différentiabilité de l'opérateur $\mathcal{Z}(t, x_t)$ est requise. Il se pose alors la question du passage d'une représentation à l'autre. On peut remarquer tout de suite que si la fonctionnelle $G : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $x(t)$ sont différentiables alors il est toujours possible d'écrire (III.2) sous la forme (III.1) :

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t) + \frac{d}{dt} G(t, x_t).$$

Par contre, il n'est pas forcément possible de passer de (III.1) à (III.2). Une condition nécessaire pour que cela soit possible est la quasilinearité de F c'est-à-dire la linéarité par rapport à $\dot{x}_t$. Mais cette condition n'est pas suffisante. Pour le voir, considérons les deux systèmes

$$\dot{x}(t) = x(t-1) \dot{x}(t-1), \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = x(t-1) \dot{x}(t-2).$$

Le premier système peut être réécrit sous la forme (III.2) en

$$\frac{d}{dt} [x(t) - \frac{1}{2} x^2(t-1)] = 0 ;$$

ce qui n'est pas le cas pour le deuxième système ; pourtant ils sont tous les deux linéaires en $\dot{x}_t$.

La difficulté du problème de Cauchy et du problème de résolution des systèmes neutres ne sera pas donc la même suivant le modèle utilisé [61]. Dans ce qui suit nous considérerons la forme de Hale (III.2) pour la Section III.3.1 ; les sections suivantes seront consacrées essentiellement à l'autre forme.

III.3 Principe des systèmes de comparaison dégénérés

Dans le principe de comparaison, on majore une fonction (scalaire ou vectorielle) définie positive de la valeur courante de la solution d'un système dynamique par une fonction que l'on espère asymptotiquement convergente vers zéro. Si maintenant cette majoration se fait par rapport à un opérateur (ici $\mathcal{Z}$) qui ne s'annule pas seulement en zéro, alors la convergence de la fonction majorante n'assure pas nécessairement la stabilité asymptotique de l'équilibre considéré : nous parlerons dans ce cas, comme pour les fonctions de Lyapunov, de dégénérescence. Dans cette section nous allons réunir les conditions d'établissement de systèmes de comparaison pour une classe de systèmes neutres de la forme (III.2).

III.3.1 Systèmes de comparaison dégénérés

Soit $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^r$, $(t, x) \rightarrow V(t, x)$ une fonction vectorielle définie positive et soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage borné de l'origine et définissons

$$\mathcal{C}(\mathcal{D}) = \{\varphi \in \mathcal{C} : \varphi(\theta) \in \mathcal{D}, \forall \theta \in [-h, 0]\}. \quad (\text{III.3})$$

Supposons ensuite que l'inégalité

$$D^+V(\mathcal{Z}(t, \varphi)) \leq g(t, V(\mathcal{Z}(t, \varphi))), \quad t \geq t_0 \quad (\text{III.4})$$

soit vérifiée le long des trajectoires de (III.2) pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$. On adjoint à l'inégalité (III.4), le système différentiel ordinaire

$$\dot{z}(t) = g(t, z(t)), \quad t \geq t_0, \quad z(t_0) \in \mathbb{R}_+^r. \quad (\text{III.5})$$

Dès lors il se pose la question du comportement des solutions de (III.2) par rapport au comportement de celles de (III.5). Si les solutions de (III.5) majorent celles de (III.4),

soit $V(Z(t, x_t)) \leq z(t)$, $t \geq t_0$, alors on parle de système de comparaison dégénéré selon la définition suivante.

Définition III.1 *Le système différentiel ordinaire (III.5) est dit système de comparaison dégénéré (SCD) local de (III.2) par rapport à V et à $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ si*

$$V(Z(t_0, \varphi)) \leq z(t_0) \text{ implique } V(Z(t, x_t)) \leq z(t), \quad t \geq t_0.$$

pour toute solution $x(t; t_0, \varphi)$ de (III.2) demeurant dans $\mathcal{C}(\mathcal{D})$. Si $\mathcal{C}(\mathcal{D}) = \mathcal{C}$, alors le système de comparaison dégénéré est dit global.

Pour les systèmes non linéaires, la stabilité est souvent locale : nous omettrons généralement dans la suite de préciser le caractère local du système de comparaison dégénéré.

Les conditions pour que (III.5) soit un système de comparaison dégénéré de (III.2) sont similaires au cas des systèmes de type retardé [22] et sont données dans le théorème suivant.

Théorème III.1 *Si la fonction $g(t, \xi) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ de l'inégalité (III.4) est :*

- 1) *continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$,*
- 2) *quasi monotone non décroissante par rapport à ξ ,*
- 3) *telle que le système (III.5) possède une solution unique pour toute solution x_t de (III.2) contenue dans $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ et toute condition initiale $z(t_0) \in \mathbb{R}^r$ et $t_0 \in \mathbb{R}$,*
alors le système (III.5) est un système de comparaison dégénéré de (III.2).

Preuve : Montrons que

$$V(Z(t_0, \varphi)) \leq z(t_0) \text{ implique } V(Z(t, x_t)) \leq z(t), \quad t \geq t_0. \quad (\text{III.6})$$

Pour cela, comme dans [22] considérons l'équation

$$\dot{z}^n(t) = g(t, z^n(t)) + \varepsilon^n, \quad z(t_0) = z(t_0) + \varepsilon^n$$

où ε^n est un vecteur constant de composantes positives aussi petites que l'on veut. Alors on a

$$V(Z(t, x_t)) < z^n(t)$$

aussi longtemps que x_t reste dans $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ et $z^n(t)$ existe. Supposons le contraire alors l'ensemble $\{t : V(Z(s, x_s)) \leq z^n(s), \forall s \in [t_0, t]\}$ est non vide car contient t_0 et bornée par hypothèse donc sa borne supérieure existe ; notons la t_1 . Par continuité, il existe un indice j tel que

$$V_j(Z(t_1, x_{t_1})) = z_j^n(t_1) \text{ et } V_i(Z(t_1, x_{t_1})) \leq z_i^n(t_1), i \neq j$$

Posons $\varepsilon(t) = z^n(t) - V(Z(t, x_t))$, alors,

$$\dot{\varepsilon}_j(t_1) = g_j(t_1, z^n(t_1)) - D^+ V_j(Z(t_1, x_{t_1})) + \varepsilon_j^n$$

et compte tenu de l'inégalité (III.4), il vient

$$\dot{\varepsilon}_j(t_1) \geq g_j(t, z^n(t_1)) - g_j(t_1, V(Z(t_1, x_{t_1}))) + \varepsilon_j^n.$$

Or par définition de t_1 on a $\{z_j^n(t_1) = V_j(Z(t_1, x_{t_1})) \text{ et } z_k^n(t_1) \geq V_k(Z(t_1, x_{t_1})) \text{ pour tout } k \neq j\}$ et comme la fonction g est quasi-monotone non décroissante par rapport à son second argument, on a

$$g_j(t, z^n(t_1)) - g_j(t_1, V(Z(t_1, x_{t_1}))) \geq 0$$

c'est-à-dire que

$$\dot{\varepsilon}_j(t_1) \geq \varepsilon_j^n > 0.$$

La fonction $t \rightarrow \varepsilon_j(t)$ est donc strictement croissante dans un voisinage de t_1 , ce qui contredit le fait que

$$\text{pour } t < t_1 \text{ } \varepsilon_j(t) > 0 \text{ et } \varepsilon_j(t_1) = 0.$$

L'inégalité (III.6) s'obtient alors par passage à la limite en faisant tendre ε^n vers 0 ■

Cependant ce théorème ne permet pas de vérifier la stabilité de la solution nulle de (III.2) à partir de celle de (III.5) comme c'est le cas pour les systèmes retardés. En effet tout dépend de l'opérateur $\mathcal{Z} : \mathcal{Z}(t, x_t) = 0$ n'implique pas forcément $x(t) = 0$, et par conséquent la solution nulle de (III.5) peut très bien être stable sans que celle de (III.2) ne le soit. Pour obtenir que la stabilité de la solution nulle de (III.5) entraîne celle de la solution nulle de (III.2), il faut adjoindre au théorème précédent une condition sur l'opérateur $\mathcal{Z}$, notamment la condition de f -stabilité (f -stabilité asymptotique), d'où le résultat suivant.

Théorème III.2 (voir [128, 129]). *Si (III.5) est un système de comparaison dégénéré de (III.2) et si de plus l'opérateur $\mathcal{Z}$ est f -stable (respect. asymptotiquement f -stable) alors (III.5) est un système de comparaison du système (III.2) par rapport à la stabilité (respect. stabilité asymptotique) de la solution nulle.*

Preuve : La fonction $z \rightarrow g(t, z)$ étant quasi-monotone non décroissante par rapport à z , la solution $z(t; t_0, V(\mathcal{Z}(t_0, \varphi)))$ de (III.5) majore $V(\mathcal{Z}(t, x_t(t_0, \varphi)))$ où $x_t(t_0, \varphi)$ est la solution de (III.2) de condition initiale φ , soit

$$V(\mathcal{Z}(t, x_t(t_0, \varphi))) \leq z(t; t_0, V(\mathcal{Z}(t_0, \varphi))), \quad \forall t \geq t_0.$$

Par définition de $V(\mathcal{Z}(t_0, \varphi))$, chacune de ses composantes i vérifie

$$\omega_i^1(\|\mathcal{Z}_i(t, x_t(t_0, \varphi))\|) \leq V_i(\mathcal{Z}_i(t, x_t(t_0, \varphi))) \leq \omega_i^2(\|\mathcal{Z}_i(t, x_t(t_0, \varphi))\|)$$

où les ω_i^1, ω_i^2 sont des fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\omega_i^1(\theta), \omega_i^2(\theta) > \theta \text{ pour } \theta > 0 \text{ et } \omega_i^1(0) = \omega_i^2(0) = 0$$

d'où par équivalence des normes il existe des constantes c_i telles que

$$\|Z(t, x_t(t_0, \varphi))\| \leq \sum_{i=1}^r c_i \|Z_i(t, x_t(t_0, \varphi))\| \leq \sum_{i=1}^r c_i \omega_i^1 (\|Z_i(t, x_t(t_0, \varphi))\|)$$

et on obtient alors

$$\|Z(t, x_t(t_0, \varphi))\| \leq \sum_{i=1}^r c_i z_i(t; t_0, Z(t_0, \varphi))$$

et on a la conclusion par l'hypothèse de f -stabilité de Z ■

Ainsi l'analyse de la stabilité de la solution nulle du système (III.2) revient à analyser un système ordinaire de type (III.5) en assurant une certaine propriété de "stabilité" de l'opérateur Z . La difficulté lors de l'application de ce principe réside dans l'établissement de l'inégalité (III.4) et par conséquent du choix de la fonction vectorielle V . Le choix judicieux d'une telle fonction conduisant à une inégalité du type (III.4) n'est pas trivial pour un système neutre donné. Nous allons présenter dans ce qui suit une classe de ces fonctions (les normes vectorielles) dont la propriété de convexité permet de construire de manière systématique des systèmes de comparaison dégénérés pour une certaine classe de systèmes à retards de type neutre.

III.3.2 Normes vectorielles

On appelle norme vectorielle une fonction vectorielle dont les composantes sont des normes scalaires. Le principe est le suivant : on considère une partition de $x \in \mathbb{R}^n$ en $x = [x_1, \dots, x_i, \dots, x_r]^T$ où $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ avec $\sum_{i=1}^r n_i = n$ (une telle partition est dite régulière) alors $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$, $(t, x) \rightarrow V(t, x) = [V_1(t, x_1), \dots, V_i(t, x_i), \dots, V_r(t, x_r)]^T$ est une norme vectorielle si chaque V_i est une norme scalaire de $\mathbb{R}^{n_i}$. Dans la suite toutes les fonctions vectorielles que nous considérerons seront de cette forme. Cependant, cette approche pourrait aisément être généralisée :

1) à toute fonction convexe V , c'est-à-dire vérifiant l'inégalité de type triangulaire $V(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha V(x) + (1 - \alpha)V(y)$, $\alpha \in [0, 1]$.

2) à toute partition obtenue après changement de base sur x (permutation notamment), conduisant à une norme vectorielle $W(t, x) = V(t, Px)$, $\det P \neq 0$. Nous allons voir qu'à partir des fonctions vectorielles de ce type il est toujours possible de construire un système de comparaison dégénéré pour une large classe de systèmes neutres de la forme (III.2).

III.3.3 Construction des systèmes de comparaison dégénérés

Considérons la classe des systèmes neutres (III.2) et procédons à une décomposition du second membre F sous la forme :

$$F(t, x_t) = F_0(t, Z(t, x_t)) + F_1(t, x_t), \quad (\text{III.7})$$

avec

$$F_0(t, 0) \equiv F_1(t, 0) \equiv 0. \quad (\text{III.8})$$

On peut remarquer que la décomposition (III.7) n'est pas trop restrictive étant donné que même si l'opérateur Z n'apparaît pas explicitement dans F , on peut l'introduire artificiellement. La décomposition (III.7) n'étant pas unique, on peut établir plusieurs résultats à partir de différentes décompositions. Nous supposons ensuite que la fonctionnelle F_0 de (III.7) est continûment différentiable par rapport à son second argument et nous noterons

$$f(t, u) = \frac{\partial F_0(t, u)}{\partial u}. \quad (\text{III.9})$$

Soit $\mathcal{D}$ un voisinage borné de l'origine 0 de $\mathbb{R}^n$, et $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ le sous ensemble de $\mathcal{C}$ défini comme en (III.3), alors on suppose également qu'il est possible de trouver une matrice $r \times r$, $N(t)$ à coefficients positifs ou nuls au moins continus par morceaux telle que

$$V(F_1(t, x_t)) \leq N(t)V(Z(t, x_t)), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x_t \in \mathcal{C}(\mathcal{D}) \quad (\text{III.10})$$

où V est une norme vectorielle. Enfin soit $M(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{r \times r}$ une matrice continue par

morceaux telle que

$$M(t) = \sup_{\varphi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})} \{\Gamma(f(t, \mathcal{Z}(t, \varphi)))\}. \quad (\text{III.11})$$

L'existence de la matrice $M(t)$ est assurée par le fait que $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ est borné et que $\Gamma(f(t, \mathcal{Z}(t, \varphi)))$ continue par hypothèse. A partir de ces hypothèses, on établit le lemme de construction des systèmes de comparaison dégénérés qui servira de base aux résultats de cette section.

Lemme III.1 ([129]). *Tout système neutre de la forme (III.2)-(III.7) vérifiant les conditions (III.8)-(III.10)-(III.11), admet le système ordinaire (III.12)*

$$\dot{y}(t) = (M(t) + N(t))y(t) \quad (\text{III.12})$$

comme système de comparaison dégénéré (SCD) par rapport à la norme vectorielle V et à l'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{D})$. Ce SCD est global si $\mathcal{C}(\mathcal{D}) = \mathcal{C}$.

Avant de donner la preuve de ce lemme, montrons le lemme suivant.

Lemme III.2 *Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et différentiable par rapport à son second argument, de jacobienne $f(t, x)$ et telle que $F(t, 0) \equiv 0$ alors*

$$F(t, x) = \int_0^1 f(t, \mu x) x d\mu$$

Preuve : Soit $g_{t,x}(\mu) = F(t, \mu x)$; cette fonction est différentiable par rapport à μ car F est différentiable et

$$\frac{dg_{t,x}(\mu)}{d\mu} = f(t, \mu x)x.$$

On a donc

$$g_{t,x}(1) - g_{t,x}(0) = \int_0^1 f(t, \mu x) x d\mu = \int_0^1 f(t, \mu x) d\mu x = F(t, x) - F(t, 0) = F(t, x) \blacksquare$$

Preuve du Lemme III.1 : En considérant (III.8), (III.9) et le lemme précédent, le

système (III.2)-(III.7) peut se réécrire sous la forme

$$\frac{dZ(t, x_t)}{dt} = \int_0^1 f(t, sZ(t, x_t)) ds Z(t, x_t) + F_1(t, x_t). \quad (\text{III.13})$$

Définissons la fonction $Q_i : \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, r$, par

$$Q_i[x_i, y_i] = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta} [V(x_i + \Delta y_i) - V(x_i)].$$

Alors la dérivée au sens de Dini de $V_i(Z_i(t, x_t))$ est donnée par

$$D^+ V_i(Z_i(t, x_t)) = Q_i[Z_i(t, x_t), \frac{dZ_i(t, x_t)}{dt}].$$

En remplaçant $\frac{dZ_i(t, x_t)}{dt}$ par sa valeur dans (III.13), il vient

$$\begin{aligned} D^+ V_i(Z_i(t, x_t)) &= Q_i[Z_i(t, x_t), \int_0^1 f_{ii}(t, sZ(t, x_t)) ds Z_i(t, x_t) + \\ &\quad \sum_{j=1, j \neq i}^r \int_0^1 f_{ij}(t, sZ(t, x_t)) ds Z_j(t, x_t) + F_{1i}(t, x_t)]. \end{aligned}$$

En considérant la définition de Q_i , on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} D^+ V_i(Z_i(t, x_t)) &\leq Q_i[Z_i(t, x_t), \int_0^1 f_{ii}(t, sZ(t, x_t)) ds Z_i(t, x_t)] + \\ &\quad \sum_{j=1, j \neq i}^r \int_0^1 V_{ij}(f(t, sZ(t, x_t))) ds V_j(Z_j(t, x_t)) + V_i(F_{1i}(t, x_t)) \end{aligned}$$

et en remarquant que la mesure $\mu_i(A_{ii})$ d'une matrice A_{ii} par rapport à la norme V_i est donnée par

$$\mu_i(A_{ii}) = \sup_{x_i \neq 0} [V_i(x_i)^{-1} Q_i[x_i, A_{ii}x_i]],$$

on aboutit à

$$D^+ V_i(Z_i(t, x_t)) \leq \int_0^1 \mu_i(f_{ii}(t, sZ(t, x_t))) ds V_i(Z_i(t, x_t)) +$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^r \int_0^1 V_{ij}(f(t, sZ(t, x_t))) ds V_j(Z_j(t, x_t)) + V_i(F_{1_i}(t, x_t)).$$

Le même processus réalisé pour tous les indices de 1 à r conduit à l'inégalité

$$D^+V(Z(t, x_t)) \leq \int_0^1 \Gamma(f(t, sZ(t, x_t))) ds V(Z(t, x_t)) + V(F_1(t, x_t))$$

et finalement les conditions (III.10) et (III.11) entraînent

$$D^+V(Z(t, x_t)) \leq [M(t) + N(t)] V(Z(t, x_t)). \quad (\text{III.14})$$

Comme les coefficients hors-diagonaux de la matrice $M(t)$ et les coefficients de $N(t)$ sont non négatifs par construction, la fonction $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$, $g(t, \xi) = (M(t) + N(t))\xi$ qui apparaît dans l'inégalité (III.14) est quasi-monotone non décroissante. En vertu du Théorème III.1 on a la conclusion ■

Le lemme suivant complète les conditions assurant que le système (III.12) soit un système de comparaison de (III.2)-(III.7) par rapport à la stabilité (asymptotique) de la solution nulle, conduisant ainsi à une analyse en deux points : la vérification de la propriété de contraction de l'opérateur Z et la vérification de la stabilité de la solution nulle du système ordinaire (III.12).

Lemme III.3 ([129]) *Si les conditions du Lemme III.1 sont remplies et si l'opérateur Z est f -stable (respectivement asymptotiquement f -stable) alors (III.12) est un système de comparaison de (III.2)-(III.7) par rapport à la stabilité (respectivement stabilité asymptotique) de la solution nulle.*

Preuve : La fonction $y \rightarrow [M(t) + N(t)]y$ est quasi monotone non décroissante par construction et par conséquent la solution $y(t; t_0, V(Z(t_0, \varphi)))$ de (III.12) majore $V(Z(t, x_t(t_0, \varphi)))$ où $x_t(t_0, \varphi)$ est la solution de (III.2)-(III.7) de condition initiale φ , soit

$$V(Z(t, x_t(t_0, \varphi))) \leq y(t; t_0, V(Z(t_0, \varphi))), \quad \forall t \geq t_0.$$

Remarquons qu'il existe des constantes c_i telles que

$$\|Z(t, x_t(t_0, \varphi))\| \leq \sum_{i=1}^r c_i V_i(Z(t_0, \varphi)_i) \leq \sum_{i=1}^r c_i y_i(t; t_0, Z(t_0, \varphi))$$

et on a la conclusion par hypothèse de la f -stabilité de l'opérateur Z ■

En particulier si la fonctionnelle G de (III.2) est contractante on a le corollaire suivant.

Corollaire III.1 ([59], [60]). *Si la fonctionnelle G de (III.2) vérifie la condition de Lipschitz*

$$\|G(t, x_t) - G(t, y_t)\| \leq \gamma \|x_t - y_t\|_C \text{ avec } 0 < \gamma < 1$$

et si les conditions du Lemme III.1 sont remplies alors le système (III.12) est un système de comparaison de (III.2)-(III.7).

Dès lors l'analyse de la stabilité de la solution nulle de (III.2) revient à celle de (III.12) avec tous les moyens disponibles pour l'analyse de ces systèmes ordinaires. En particulier posons $\Phi(t_0, t)$ la matrice de transition (ou matrice fondamentale) du système (III.12) alors on a le théorème suivant.

Théorème III.3 ([128, 129, 130]). *Si l'opérateur Z est f -stable (respectivement asymptotiquement f -stable) et si $\forall t \geq t_0 \|\Phi(t_0, t)\| \leq \zeta < \infty$ (respectivement $\|\Phi(t_0, t)\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$) alors la solution nulle de (III.2)-(III.7) est stable (respectivement asymptotiquement stable).*

Preuve : résultat classique des systèmes ordinaires [43] ■

De même en considérant la fonction candidate de Lyapunov $v(y(t)) = y^T(t)P(t)y(t)$ où $P(t) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est une matrice définie positive et dérivable pour tout $t \geq t_0$, on obtient le théorème suivant.

Théorème III.4 *Si l'opérateur Z est asymptotiquement f -stable et s'il existe une matrice définie positive $Q(t)$ pour tout $t \geq t_0$, telle que $P(t)$ soit la solution définie positive*

de l'équation de Lyapunov

$$\dot{P}(t) + [M(t) + N(t)]^T P(t) + P(t) [M(t) + N(t)] + Q(t) = 0 \quad (\text{III.15})$$

où $M(t)$ et $N(t)$ sont définies par (III.9)-(III.11) et (III.10), alors la solution nulle de (III.2)-(III.7) est asymptotiquement stable.

Preuve : Il suffit de considérer la fonction candidate de Lyapunov

$$v(x(t)) = x^T(t)P(t)x(t) \quad \blacksquare$$

Si ces deux théorèmes peuvent s'appliquer sans trop de difficulté dans le cas linéaire stationnaire (et dans le cas où $M(t)$ et $N(t)$ sont périodiques pour le Théorème III.3), en général le calcul de la matrice de transition ou la résolution de l'équation de Lyapunov (III.15) peut s'avérer difficile : il est alors nécessaire d'avoir des critères facilement et rapidement vérifiables. Le théorème suivant donne un critère plus aisé à vérifier que les deux précédents.

Théorème III.5 ([135]). *Si l'opérateur $\mathcal{Z}$ est asymptotiquement f -stable et s'il existe un vecteur u à composantes strictement positives et un réel $\varepsilon > 0$ tels que*

$$[M(t) + N(t)]u < -\varepsilon u, \quad \forall t \geq t_0 \quad (\text{III.16})$$

alors la solution nulle de (III.2)-(III.7) (avec les hypothèses (III.7)-(III.8)-(III.9)) est asymptotiquement stable.

Preuve : D'après le Lemme III.2, il suffit de montrer que la solution nulle du système (III.12) est asymptotiquement stable. Pour ce faire, définissons la fonction

$$v(y(t)) = \max_i \left\{ \frac{|y_i(t)|}{u_i} \right\};$$

il est facile de montrer que cette fonction est une fonction de Lyapunov de (III.12) $\blacksquare$

Un autre avantage offert par le théorème précédent est la possibilité d'obtenir une estimation positivement invariante des domaines de stabilité de la solution nulle de (III.2). En effet l'on peut montrer le résultat ci-dessous.

Théorème III.6 ([134, 135]). Soient $u > 0$ un vecteur de dimension r , $\lambda > 0$ un réel et $\mathcal{J}(\lambda, u)$ l'ensemble défini par $\mathcal{J}(\lambda, u) = \{\varphi \in \mathcal{C} : V(\mathcal{Z}(t_0, \varphi)) \leq \lambda u\}$. Si le vecteur u vérifie les conditions (III.16) du théorème précédent, alors l'ensemble $\mathcal{J}(\lambda, u)$ tel que $\mathcal{J}(\lambda, u) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{D})$ est une estimation positivement invariante du domaine de stabilité asymptotique de la solution nulle du système (III.2) vérifiant les conditions (III.7)-(III.8)-(III.10).

Preuve : Cette preuve se trouve dans l'Annexe 1.1 ■

La recherche d'une estimation du domaine de stabilité asymptotique $\mathcal{J}(\lambda, u)$ de la solution nulle de (III.2)-(III.7) peut se faire en trois étapes [135] :

- 1) choisir une norme vectorielle V et trouver le sous ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ de $\mathcal{C}$ pour que les conditions (III.8)-(III.10)-(III.11) soient vérifiées ;
- 2) vérifier la stabilité asymptotique de la solution nulle de (III.2) en trouvant un vecteur positif u tel que $[M(t) + N(t)]u < 0$;
- 3) prendre pour $\mathcal{J}(\lambda, u)$ le plus grand sous-ensemble de $\mathcal{C}$ contenu dans $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ (donc le plus grand $\lambda > 0$).

Dans certaines conditions il est très facile de déterminer un vecteur u vérifiant les conditions des théorèmes précédents. Ces conditions sont rappelées dans le corollaire ci-dessous.

Corollaire III.2 ([113]). Si $M(t) + N(t)$ est une matrice constante et irréductible ayant toutes ses valeurs propres à parties réelles strictement négatives, alors elle est l'opposée d'une M -matrice et on peut prendre pour u le vecteur propre associé à sa valeur propre de plus grande partie réelle.

Si tous les coefficients de $M(t) + N(t)$ sont localisés dans une seule ligne et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la matrice $M(t) + N(t) + \varepsilon I_r$ soit l'opposée d'une M -matrice à chaque instant t alors un vecteur u possible est le vecteur propre associé à sa valeur propre de plus grande partie réelle.

III.3.4 Stabilité pratique et comportement asymptotique

La condition (III.10) est certainement la contrainte la plus forte faite sur le modèle (III.2). Si elle s'avère impossible à établir, l'obtention d'un système de comparaison dégénéré du type (III.12) est compromise : néanmoins, il se peut que l'on réussisse dans ce cas à majorer $F_1(t, x_t)$ sur un ensemble borné $\mathcal{C}(\mathcal{D})$, par un vecteur constant q de dimension r défini par

$$q = \sup_{t \geq t_0, \varphi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})} \{V(F_1(t, \varphi))\}, \quad (\text{III.17})$$

et que la matrice $M(t)$ définie en (III.11) soit également majorée sur $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ par une matrice constante M . Le système de comparaison dégénéré (III.12) que l'on établit dans ce cas sera *non homogène*, soit

$$\dot{y}(t) = My(t) + q, \quad y(t_0) = V(\mathcal{Z}(t_0, \varphi)). \quad (\text{III.18})$$

Un tel système ne converge pas vers $y = 0$, mais son équilibre est

$$y_e = -M^{-1}q. \quad (\text{III.19})$$

S'il ne permet plus d'établir la stabilité de la solution nulle de (III.2), il peut cependant donner une indication intéressante (et suffisante en pratique) sur la bornitude des comportements asymptotiques. En effet, en pratique, la précision des capteurs et actionneurs étant limitée, le comportement du système peut être jugé acceptable si le fonctionnement réel est voisin de celui souhaité. Ainsi il sera souvent suffisant de s'assurer que le système évoluera dans un voisinage de l'équilibre (stabilité pratique) ou qu'après un régime transi-

toire, il atteindra et restera dans un domaine connu autour de l'équilibre (comportement asymptotique).

Pour simplifier la présentation, nous supposons dans cette partie que la fonctionnelle $G(t, \varphi)$ de (III.2) vérifie l'inégalité

$$V(G(t, \varphi)) \leq G_0 V(\varphi(0)) + G_1 V(\varphi(-h)), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}(\mathcal{D}) \quad (\text{III.20})$$

et que la matrice $G_0 + G_1$ a toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité de telle sorte que la matrice $I - G_0 - G_1$ est l'opposée d'une M-matrice.

Remarque III.1 *On peut utiliser une formulation plus large que (III.18) par exemple $\dot{y}(t) = g(y(t))$ avec $g(y_e) = 0$, $y_e \neq 0$. Les résultats de [104] peuvent s'appliquer dans ce cas.*

Stabilité pratique

Dans cette section nous allons montrer que l'on peut définir un voisinage de l'origine dans lequel on peut garantir l'évolution asymptotique du système. La définition suivante est une adaptation des définitions de [5] et [36, 105].

Définition III.2 *Soient $\mathcal{B}(0, q)$, $q \in \mathbb{R}_+^r$ une boule vectorielle de $\mathbb{R}^n$ définie par $\mathcal{B}(0, q) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq q\}$ et $\mathcal{C}(\mathcal{B}(0, q)) = \{\varphi \in \mathcal{C} : V(\varphi(\theta)) \in \mathcal{B}(0, q), \forall \theta \in [-h, 0]\}$. Alors le système (III.2) est dit pratiquement stable par rapport à $\{t_0, T, \mathcal{C}(\mathcal{B}(0, q_0)), \mathcal{B}(0, q_c)\}$ si*

$$\varphi \in \mathcal{C}(\mathcal{B}(0, q_0)) \quad \text{implique} \quad x(t; t_0, \varphi) \in \mathcal{B}(0, q_c), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T]$$

où t_0 est l'instant initial, $T > 0$ le temps de fonctionnement du système, $\mathcal{C}(\mathcal{B}(0, q_i)) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{D})$, l'ensemble des conditions initiales et $\mathcal{B}(0, q_c) \subseteq \mathcal{D}$ le domaine prédéfini dans lequel le système est contraint à évoluer.

La Figure III.1 ci-dessous illustre cette définition.

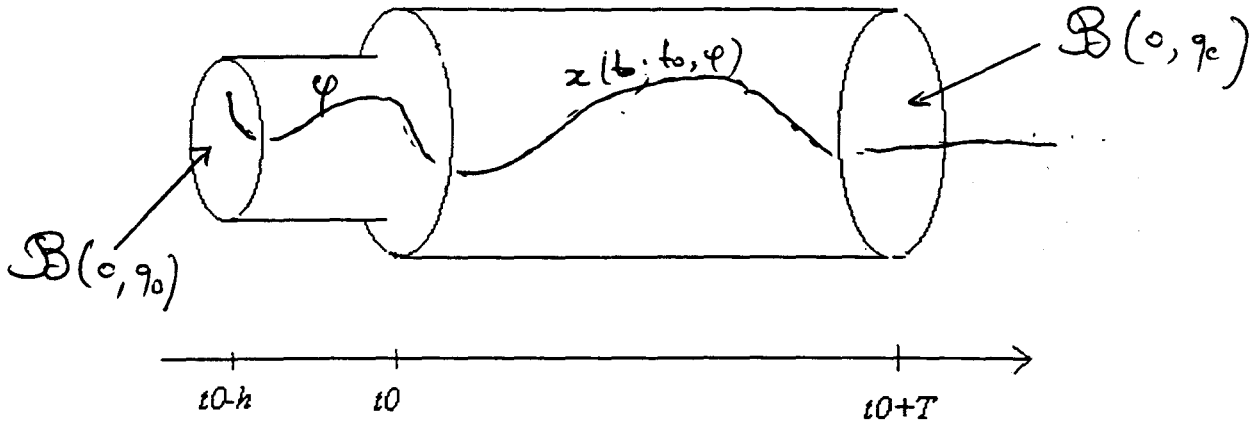


Figure III-1: Illustration de la stabilité pratique

En considérant le système de comparaison non homogène (III.18) on peut montrer le théorème ci-dessous.

Théorème III.7 *Supposons que la matrice M est de Hurwitz et que $G_0 + G_1$ est asymptotiquement stable au sens de Shur-Cohn. Alors le système (III.2) est pratiquement stable par rapport à $\{t_0, T, C(B(0, q_0)), B(0, q_c)\}$ si*

$$(I - G_0 - G_1)^{-1} \left[G_1 q_0 + \sup_{s \in [t_0, T]} e^{M(s-t_0)} [V(Z(t_0, \varphi)) + M^{-1}q] - M^{-1}q \right] \leq q_c.$$

Preuve : Par construction la matrice M est l'opposée d'une M-matrice et par conséquent son inverse a tous ses coefficients négatifs. De même la matrice $(I - G_0 - G_1)^{-1}$ a ses coefficients positifs par hypothèse (III.20). D'après les résultats précédents on a

$$V(Z(t, x_t)) \leq y(t) = e^{M(t-t_0)} [V(Z(t_0, \varphi)) + M^{-1}q] - M^{-1}q$$

où $y(t)$ est la solution de (III.18) et $x(t; t_0, \varphi)$ la solution de (III.2) de condition initiale φ ; or d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$V(x(t)) \leq V(G(t, x_t)) + V(Z(t, x_t)) \leq G_0 V(x(t)) + G_1 V(x(t-h)) + V(Z(t, x_t))$$

soit

$$V(x(t)) \leq G_0 V(x(t)) + G_1 V(x(t-h)) + e^{M(t-t_0)} [V(Z(t_0, \varphi)) + M^{-1}q] - M^{-1}q. \quad (\text{III.21})$$

Soit $m(t)$ une fonction définie par $m(t) = \sup_{t_0 \leq s \leq t} V(x(s))$, alors d'après (III.21) on a

$$m(t) \leq G_0 m(t) + G_1 [V(\varphi) + m(t)] + \sup_{t_0 \leq s \leq t} e^{M(s-t_0)} [V(Z(t_0, \varphi)) + M^{-1}q] - M^{-1}q \quad (\text{III.22})$$

avec $V(\varphi) = \left[\sup_{-h \leq \theta \leq 0} V_1(\theta), \dots, \sup_{-h \leq \theta \leq 0} V_i(\theta), \dots, \sup_{-h \leq \theta \leq 0} V_r(\theta) \right]^T$ soit

$$m(t) \leq (I - G_0 - G_1)^{-1} \left[G_1 q_0 + \sup_{t_0 \leq s \leq t} e^{M(s-t_0)} [V(Z(t_0, \varphi)) + M^{-1}q] - M^{-1}q \right] \quad (\text{III.23})$$

et d'après la condition du théorème

$$V(x(t)) \leq m(t) \leq q_c, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T] \quad \blacksquare$$

Comportement asymptotique

Définition III.3 La boule vectorielle $\mathcal{C}(\mathcal{B}(0, q_a))$ est un ensemble globalement attractif de (III.2) si toute solution de (III.2) converge asymptotiquement dans $\mathcal{C}(\mathcal{B}(0, q_a))$.

De même, sur la base du système (III.18) on peut caractériser un ensemble attractif pour le système (III.2) c'est-à-dire son comportement pour des temps infinis.

Théorème III.8 ([130]). Sous les hypothèses du Théorème III.7, soit $q_a = -(I - G_0 - G_1)^{-1} M^{-1}q$, $\mathcal{C}(\mathcal{B}(0, q_a))$ est un ensemble globalement attractif de (III.2).

Preuve : Il suffit de prendre la limite quand $t \rightarrow \infty$ des deux membres de l'inégalité (III.21) soit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) \leq -(I - G_0 - G_1)^{-1} M^{-1} q \quad \blacksquare$$

III.3.5 Exemple

L'exemple académique ci-dessous va montrer les possibilités d'application des résultats précédents.

Exemple III.1 *Soit le système neutre*

$$\frac{dZ(t, x_t)}{dt} = \begin{pmatrix} -3 + f_1(t, x_t, d(t)) & f_2(t, x_t, d(t)) \\ f_3(t, x_t, d(t)) & -4 + f_4(t, x_t, d(t)) \end{pmatrix} Z(t, x_t) + \begin{bmatrix} f_5(t, x(t), d(t)) \\ f_6(t, x(t), d(t)) \end{bmatrix},$$

$$t \geq t_0, x \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{III.24})$$

Le vecteur $d(t)$ représente l'ensemble des perturbations supposées bornées et pouvant intervenir sur le système à l'instant t .

1) *Système de comparaison homogène.*

On suppose ici que les conditions ci-dessous sont remplies :

$$Z(t, x_t) = x(t) - G(t, x_t), \quad G(t, x_t) = \begin{bmatrix} g(t, x(t-h), d(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Les fonctionnelles f_i et g vérifient :

$$\left. \begin{aligned} |f_i(t, x_t, d(t))| &\leq 1, \quad i = 1..4, \\ |f_5(t, x(t), d(t))| &\leq \alpha_1 |x_2(t)|, \\ |f_6(t, x(t), d(t))| &\leq \alpha_2 |x_2(t)|, \\ |g(t, x(t-h), d(t))| &\leq [\beta_1, \beta_2] \begin{bmatrix} |x_1(t-h)| \\ |x_2(t-h)| \end{bmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad \forall t \geq t_0, \forall d(t), \forall x_t \in \mathcal{C}. \quad (\text{III.26})$$

Les paramètres α_1 et α_2 sont à déterminer de telle sorte que la solution nulle de (III.24) soit asymptotiquement stable. Considérons la norme vectorielle $V(x(t)) = [|x_1(t)|, |x_2(t)|]^T$.

D'après les conditions (III.26), les éléments du système de comparaison dégénéré de type (III.12) associé à (III.24) sont

$$M + N = \begin{pmatrix} -2 & 1 + \alpha_1 \\ 1 & -3 + \alpha_2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 + \alpha_1 \\ 1 & -3 + \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ d'où la proposition suivante.}$$

Proposition III.1 Supposons que $0 < \beta_1 + \beta_2 < 1$ alors la solution nulle de (III.24)-(III.25)-(III.26) est globalement asymptotiquement stable si $M + N$ est de Hurwitz, c'est-à-dire si les réels α_1 et α_2 vérifient les inégalités

$$\begin{cases} \alpha_1, \alpha_2 > 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 < 5 \end{cases}$$

Posons $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Dans ce cas, $M + N = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ dont la valeur propre de plus grande partie réelle est $-2 + \sqrt{2}$. Un vecteur propre associé à cette valeur propre est $[\sqrt{2}, 1]^T$. Donc d'après le Théorème III.6 et le corollaire III.2, l'ensemble

$$\mathcal{J}(\lambda) = \left\{ \varphi \in C([-h, 0]; \mathbb{R}^2) : \begin{cases} |\varphi_1(0) - g(t_0, \varphi(-h), d(t_0))| \leq \lambda\sqrt{2} \\ |\varphi_2(0)| \leq \lambda \end{cases}, \lambda > 0 \right\}$$

est un ensemble positivement invariant pour (III.24).

2) Système de comparaison non homogène.

Supposons ici que $G(t, x_t) = \begin{bmatrix} g_1(t, x_t, d(t)) \\ g_2(t, x_t, d(t)) \end{bmatrix}$ avec

$$\begin{aligned} |f_i(t, x_t, d(t))| &\leq 1, \quad i = 1, 6 \\ |G(t, x_t)| &= \begin{bmatrix} |g_1(t, x_t, d(t))| \\ |g_2(t, x_t, d(t))| \end{bmatrix} \leq \\ &\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} |x_1(t)| \\ |x_2(t)| \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} |x_1(t-h)| \\ |x_2(t-h)| \end{bmatrix}, \\ &\forall t \geq t_0, \forall d(t), \forall x_t \in \mathcal{C}, \quad 0 < \gamma_i + \delta_i < 1. \end{aligned} \tag{III.27}$$

Dans ces conditions on ne peut obtenir qu'un système de comparaison dégénéré non homogène de la forme (III.18) dont les éléments sont :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G_0 + G_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 + \delta_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 + \delta_2 \end{pmatrix}.$$

Définissons $\mathcal{A}$ par

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} |x_1| \leq \frac{4}{5(1-\gamma_1-\delta_1)} \\ |x_2| \leq \frac{3}{5(1-\gamma_2-\delta_2)} \end{cases} \right\}$$

alors on a la proposition suivante.

Proposition III.2 L'ensemble

$$\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \{ \psi \in C([-h, 0] ; \mathbb{R}^2) : \psi(\theta) \in \mathcal{A}, \forall \theta \in [-h, 0] \}$$

est un ensemble globalement attractif pour (III.24) vérifiant les conditions (III.27).

III.4 Méthodes multi-étapes de construction d'une fonctionnelle de Lyapunov

Nous venons de voir que la considération des systèmes de comparaison permet la caractérisation de certaines classes de systèmes neutres sous les deux aspects qualitatif (stabilité, stabilité asymptotique) et quantitatif (estimation de domaines, stabilité pratique, attracteur), tous deux étant importants en pratique. Cependant les résultats exposés dans la partie précédente ne permettent pas de caractériser tous les types de systèmes neutres notamment la classe des systèmes de la forme (III.1) qui ne s'écrivent pas sous la forme (III.2). Dans la présente section nous allons considérer une autre façon d'utiliser la seconde méthode de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité des systèmes à retards de type neutre. L'idée consiste à construire pour un système neutre donné une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii dépendant des dérivées (ce qui n'était pas le cas dans la section précédente). La construction d'une fonctionnelle de Lyapunov adéquate pour un système donné n'étant pas évidente, nous allons rappeler essentiellement une méthode heuristique multi-étapes de construction d'une telle fonctionnelle sur la base d'une idée présentée par Kolmanovskii. Son principe [63] est analogue à la procédure vue au Chapitre II, Section II.2.6.

Cette méthode consiste à construire, pour un système neutre de la forme [63]

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t, \dot{x}_t), \quad x_t = \varphi, \quad \dot{x}_t = \dot{\varphi}, \quad (\text{III.28})$$

une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii en suivant une certaine procédure plus ou moins systématique. Le caractère non unique donne lieu à plusieurs types de résultats.

III.4.1 Principe de la méthode

La procédure [63] est la suivante :

- 1) considérer une transformation $\mathcal{L}x(t)$ (en général $\mathcal{L}x(t) = x(t) - F_4(t, x_t)$) telle que le second membre de l'équation (III.28) se décompose en

$$F(t, x_t, \dot{x}_t) = F_1(t, x(t)) + F_2(t, x_t, \dot{x}_t) \quad (\text{III.29})$$

$$F_2(t, x_t, \dot{x}_t) = F_3(t, x_t, \dot{x}_t) + \frac{d}{dt} F_4(t, x_t)$$

avec $F_1(t, 0) = 0$; $F_2(t, 0, 0) = 0$; F est décomposée en la somme de deux termes dont le premier F_1 ne dépend que de la valeur instantanée de l'état, $x(t)$;

- 2) considérer l'équation ordinaire $\dot{y}(t) = F_1(t, y(t))$ pour laquelle on construit une fonction de Lyapunov $v(t, y(t))$;
- 3) calculer la fonctionnelle $V_1(t, x_t)$ en remplaçant le second argument de v par la fonctionnelle $\mathcal{L}x(t)$ dépendant de la transformation réalisée au point 1).
- 4) calculer ensuite la fonctionnelle $V_2(t, x_t, \dot{x}_t)$ telle que $V = V_1 + V_2$ soit une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii.

La considération de $V_1(t, x_t) = v(t, \mathcal{L}x(t))$ nécessite souvent d'assurer la stabilité de l'équation $\mathcal{L}x(t) = 0$; de plus toute la procédure dépend à la fois de la transformation opérée en 1) et de la fonctionnelle $\mathcal{L}x(t)$ considérée. Il existe donc plusieurs façons de procéder, la qualité des résultats pouvant différer d'une transformation à l'autre.

Cette procédure a été appliquée au système (III.30) [63]

$$\dot{x}(t) = G_1(t, x(t - h_1)) + G_2(t, \dot{x}(t - h_2)), \quad t \geq t_0, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n ; \quad (\text{III.30})$$

où les fonctions G_i sont continues, $G_i(t, 0) = 0$ et pour toutes fonctions bornées φ , $\psi : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on a

$$\begin{aligned} \|G_1(t, \varphi(-h_1)) - G_1(t, \psi(-h_1))\| &\leq \alpha_1 \|\varphi(-h_1) - \psi(-h_1)\|, \\ \|G_2(t, \psi(-h_1))\| &\leq \alpha_2 \|\psi(-h_2)\|, \quad 0 < \alpha_2 < 1. \end{aligned}$$

Enfin on suppose que G_1 est différentiable par rapport à son second argument avec

$$f(t, x) = \frac{\partial G_1(t, x)}{\partial x} \text{ et } \mu_1 = \sup_{t, x} [\mu(f(t, x))].$$

où $\mu(M)$ représente la mesure de la matrice M . La décomposition du second membre de (III.30) en

$$\begin{aligned} F_1(t, x(t)) &= A_1(t, x(t)), \\ F_3 &= A_1(t, x(t - h_1)) - A_1(t, x(t)) + A_2(t, x(t - h_2)), \\ F_4 &= 0. \\ \mathcal{L}x(t) &= x(t) \end{aligned} \tag{III.31}$$

a permis d'établir le théorème suivant [63].

Théorème III.9 *Si*

$$\alpha_2 + \alpha_1 h_1 < 1 \text{ et } \mu_1 + \frac{\alpha_1(\alpha_1 h_1 + \alpha_2)}{1 - \alpha_2 - \alpha_1 h_1} < 0$$

alors la solution nulle de (III.30) est asymptotiquement stable.

III.4.2 Application au cas linéaire

Soit le système linéaire stationnaire de type neutre :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - h_1) + C \dot{x}(t - h_2). \tag{III.32}$$

Une première décomposition du système (III.32) sous la forme

$$\begin{aligned} F_1 &= Ax(t) \\ F_3 &= Bx(t - h_1) + C \dot{x}(t - h_2) \Rightarrow \mathcal{L}x(t) = x(t); \\ F_4 &= 0 \end{aligned}$$

permet d'obtenir le critère indépendant du retard suivant [63].

Théorème III.10 *Si*

$$\|C\| < 1 \quad \text{et} \quad \mu(A) + \frac{\|B\| + \|A\| \|C\|}{1 - \|C\|} < 0$$

alors la solution nulle de (III.32) est asymptotiquement stable.

Ce critère se réduit à celui de Mori *et al*, [93] quand $C = 0$, c'est-à-dire dans le cas des systèmes de type retardé. Il est indépendant de la taille du retard.

Si l'on utilise plutôt la décomposition

$$\begin{aligned} F_1 &= (A + B)x(t) \\ F_3 &= 0 \\ F_4 &= -B \int_{t-h_1}^t x(s)ds + Cx(t - h_2) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}x(t) = x(t) + B \int_{t-h_1}^t x(s)ds - Cx(t - h_2) ;$$

alors on peut obtenir le résultat dépendant du retard ci-dessous [63].

Théorème III.11 *Si la matrice $A+B$ est de Hurwitz et s'il existe deux matrices symétriques définies positives P et Q vérifiant l'équation de Lyapunov*

$$(A + B)^T P + P(A + B) = -Q. \quad (\text{III.33})$$

telles que

$$\|B\| h_1 + \|C\| < 1 \quad \text{et} \quad \left\| (A + B)^T P \right\| (\|B\| h_1 + \|C\|) < \frac{\lambda_m(Q)}{2}$$

alors la solution nulle de (III.32) est asymptotiquement stable.

D'autres critères sont obtenus par cette procédure (voir [63]).

III.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, essentiellement deux approches, pour la recherche des critères de stabilité des systèmes à retards de type neutre.

La première approche a consisté à étendre le principe de comparaison en définissant, de manière systématique à partir de fonctions vectorielles de Lyapunov particulières (les normes vectorielles), des systèmes de comparaison de type différentiel ordinaire, dits dégénérés. Ceci a permis d'établir des critères vérifiables en deux étapes : la stabilité d'un système ordinaire et la propriété de contraction d'un certain opérateur. Cette approche, puisqu'elle se ramène à des équations relativement plus simple, permet de développer des critères d'estimation (positivement invariante) des domaines de stabilité de manière assez aisée. Dans le cas où le système de comparaison dégénéré établi est non homogène, l'on peut établir la stabilité pratique et caractériser le comportement asymptotique du système en terme d'attracteur.

Il est à remarquer, même si cela n'a pas été développé ici, que l'utilisation des fonctions vectorielles de Lyapunov peut s'avérer également utile pour l'investigation de la stabilité des systèmes interconnectés ou de grande dimension qui sont courants dans la pratique [31] et que les résultats obtenus dans ce mémoire peuvent être étendus facilement à ce type de systèmes.

La seconde approche a consisté à rappeler la construction en plusieurs étapes de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii adéquates pour un système neutre donné.

Une caractéristique intéressante des approches de type comparaison est d'autoriser des incertitudes sur les paramètres du système pourvu que soient connues les bornes de ces incertitudes : ces résultats permettent donc d'étudier la robustesse par rapport aux incertitudes de modèle.

Ces résultats sur les systèmes neutres peuvent être améliorés en travaillant au relâchement des hypothèses posées à cet effet, nous pensons pouvoir remplacer la condition

(III.9) par une condition du type :

$$V(F_1(t, x_t)) \leq N_1(t)V(x_t(0)) + N_2(t)V(x_t(-h)), \forall t \geq t_0, \forall x_t \in \mathcal{C}(\mathcal{D}) \quad (\text{III.34})$$

qui est beaucoup plus facile à obtenir et conduit à un système de comparaison retardé (et non plus ordinaire). Ceci nous permettrait de donner une démonstration rigoureuse d'une conjecture présentée à "European Control Conference" (ECC'97) dont nous n'avons pas fait mention dans ce mémoire. En particulier pour un système linéaire stationnaire de la forme $\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + B \dot{x}(t-h)$ nous obtenons la condition de stabilité : $\|B\| < 1$ et $\mu(A_0) + \frac{\|A_1 + A_0 B\|}{1 - \|B\|} < 0$ qui est meilleur que les critères existants¹ : $\|B\| < 1$ et $\mu(A_0) + \frac{\|A_1\| + \|A_0\|\|B\|}{1 - \|B\|} < 0$.

¹Par exemple dans "K. Gopalsamy (1992). Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics, *Mathematics and Its Applications*, Academic Publishers, Dordrecht."

Chapitre IV

Stabilité des systèmes à retards distribués

IV.1 Introduction

Comme nous l'avons dit dans le premier chapitre, les systèmes à retards distribués sont largement utilisés pour la modélisation de processus dans les domaines aussi variés que la biologie [78, 79], l'automatique [62], l'économie, l'environnement, l'écologie, la dynamique des populations [21, 31], l'épidémiologie [60, 61], etc. Ces systèmes se distinguent des systèmes à retards ponctuels par le fait que la dynamique du système à l'instant t (soit, la dérivée $\dot{x}(t)$) dépend explicitement de $x(s)$ considérée sur un intervalle de temps $[t - \eta, t]$ de mesure non nulle (et non plus des instants isolés $s \in \{t - h_i\}$).

De plus, les effets de retards distribués peuvent être volontairement introduits pour améliorer la commande des systèmes à retards ponctuels [13]. S'ils permettent d'obtenir des placements de pôles intéressants dans le cas linéaire stationnaire à retards constants, la présence de nonlinéarités ou de variations du retard peut soulever des questions de robustesse qui doivent pouvoir être analysées en termes de stabilité.

Cependant, si l'étude de la stabilité de ces systèmes a retenu l'attention des chercheurs depuis des années [21, 31, 27, 41, 60, 61, 78, 114], elle n'a pas encore atteint un niveau de

maturité comparable à ce qui se fait par exemple dans le cadre des systèmes ordinaires. Ici encore l'analyse de la stabilité passe par la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov adéquate ; construction qui, rappelons le, ne peut guère être systématisée. C'est pourquoi dans ce chapitre, nous développerons les deux approches précédentes, à savoir : le principe de comparaison (à partir des normes vectorielles) et la construction en plusieurs étapes d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii, pour établir des critères de stabilité plus aisément vérifiables.

IV.2 Approche par principe de comparaison

Dans cette partie nous considérons les systèmes non linéaires à retards ponctuels et distribués de la forme suivante [133]

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= F(t, x(t), x(t-h)) + G(t, x(t), x(t-h)) \\ &\quad + \int_{-h}^0 H(t, x(t), x(t+s), s) x(t+s) ds, \\ t &\geq t_0, \quad x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta), \quad \varphi \in C([-h, 0]; \mathbb{R}^n).\end{aligned}\tag{IV.1}$$

Remarque IV.1 *Les résultats que nous allons établir ici restent valables dans le cas où le retard distribué est différent du retard ponctuel avec les conditions initiales définies par $x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta)$, $\varphi \in C([-h_{\max}, 0]; \mathbb{R}^n)$ avec $h_{\max}$ le maximum des deux retards ; de même ils restent valables si ces retards sont non constants mais bornés.*

Les paramètres de ce système, c'est-à-dire les fonctionnelles F , G et H , sont supposés vérifier les conditions :

- $F, G \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ sont continues et

$$\left\{ \begin{array}{l} i) F(t, 0, x(t-h)) \equiv G(t, x(t), 0) \equiv 0, \\ ii) F(t, x, y) \text{ est différentiable par rapport } x, \frac{\partial}{\partial x}[F(t, x, y)] = f(t, x, y), \\ iii) G(t, x, y) \text{ est différentiable par rapport } y, \frac{\partial}{\partial y}[G(t, x, y)] = g(t, x, y), \end{array} \right. \quad (\text{IV.2})$$

- $H(t, x(t), x(t+s), s) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [-h, 0]; \mathbb{R}^{n \times n})$.

Compte tenu des conditions (IV.2), le système (IV.1) peut se mettre (confère le Lemme III.2 du Chapitre III) sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \left[\int_0^1 f(t, \mu x(t), x(t-h)) d\mu \right] x(t) + \left[\int_0^1 g(t, x(t), \mu x(t-h)) d\mu \right] x(t-h) \\ & + \int_{-h}^0 H(t, x(t), x(t+s), s) x(t+s) ds. \end{aligned}$$

Soit $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^r$ ($r \leq n$), $V(x) = [V_1(x_1), \dots, V_i(x_i), \dots, V_r(x_r)]^T$ une norme vectorielle.

En posant

$$\begin{aligned} M(t, x(t), x(t-h)) &= \int_0^1 \Gamma(f(t, \mu x(t), x(t-h))) d\mu, \\ N(t, x(t), x(t-h)) &= \int_0^1 V(g(t, x(t), \mu x(t-h))) d\mu, \end{aligned}$$

on a le lemme ci-dessous.

Lemme IV.1 ([133]). *Etant donnée une norme vectorielle V , l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} D^+V(x(t)) &\leq M(t, x(t), x(t-h)) V(x(t)) + N(t, x(t), x(t-h)) V(x(t-h)) \\ &\quad + \int_{-h}^0 V(H(t, x(t), x(t+s), s)) V(x(t+s)) ds, \\ t &\geq t_0 \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

est vérifiée pour tout système (IV.1) soumis aux hypothèses (IV.2).

Preuve : La démonstration de ce lemme se trouve dans la partie “appendix A” de l’Annexe 2.1. ■

On va adjoindre à cette inégalité le système

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= M(t, x(t), x(t-h)) z(t) + N(t, x(t), x(t-h)) z(t-h) \\ &\quad + \int_{-h}^0 V(H(t, x(t), x(t+s), s)) z(t+s) ds, \\ t &\geq t_0, z_{t_0} = \psi, \end{aligned} \tag{IV.4}$$

ce qui conduit au lemme suivant.

Lemme IV.2 ([133]). *Si la solution de (IV.4) existe et est unique pour toute solution $x(t)$ de (IV.1) alors (IV.4) est un système de comparaison de (IV.1) par rapport à la stabilité (simple ou asymptotique) de la solution nulle.*

Preuve : La démonstration (voir Annexe 2.1.) repose sur un résultat présenté par Kolmanovskii [64] et par Lakshmikantham et Leela [71]. Ce résultat est rappelé dans la partie “Appendix B” de l’Annexe 2.1 “Lemme 5.21” : dans son principe il considère deux inégalités différentielles de sens inverses :

$$D^+ z_1(t) \leq \mathcal{F}(t, x_t, z_{1t}) \tag{IV.5}$$

$$D^+ z_2(t) \geq \mathcal{F}(t, x_t, z_{2t}) \tag{IV.6}$$

et concluant sous certaines hypothèses à l’inégalité $z_1(t) \leq z_2(t)$ dès lors que celle-ci est vérifiée sur l’intervalle de temps initial. Nous employons ce résultat dans le cas $z_1(t) = V(x(t))$ et $z_2(t) = z(t)$, c’est-à-dire que l’inégalité (IV.5) est rapprochée de (IV.3), et (IV.6) de l’égalité (IV.4). Le résultat $V(x(t)) \leq z(t)$ s’en suit. ■

Il peut être intéressant de simplifier encore le système en majorant les matrices $M(\cdot)$, $N(\cdot)$ et $V(H(\cdot))$ de façon à obtenir un système (IV.4) linéaire (éventuellement stationnaire). Considérons un voisinage borné de 0, $\mathcal{C}(\mathcal{D})$, défini par $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n :$

$V(x) \leq q, \quad q \in \mathbb{R}^r\}$ et $\mathcal{C}(\mathcal{D}) = \{\varphi \in C : V(\varphi(\theta)) \in \mathcal{D}, \forall \theta \in [-h, 0]\}$. Supposons qu'il existe trois matrices $M(t)$, $N(t)$ et $H_0(t, s)$ continues telles que

$$\begin{cases} \Gamma(f(t, \psi(0), \psi(-h))) \leq M(t) \\ V(g(t, \psi(0), \psi(-h))) \leq N(t) \\ \int_{-h}^0 V(H(t, \psi(0), \psi(s), s))V(\psi(s))ds \leq \int_{-h}^0 H_0(t, s)V(\psi(s))ds \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

pour tout $\psi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$. Alors on a le corollaire suivant.

Corollaire IV.1 ([133]). *Le système linéaire (IV.8)*

$$\dot{z}(t) = M(t) z(t) + N(t) z(t-h) + \int_{-h}^0 H_0(t, s) z(t+s) ds, \quad t \geq t_0 \quad (\text{IV.8})$$

est un système de comparaison de (IV.1) par rapport à la stabilité (asymptotique) de la solution nulle et par rapport à l'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{D})$.

Pour établir la stabilité de la solution nulle de (IV.1), il suffit de montrer celle de la solution nulle du système de comparaison (IV.4). C'est ainsi qu'on montre le théorème ci-dessous.

Théorème IV.1 ([133]). *Posons*

$$\chi(t, x_t) = M(t, x(t), x(t-h)) + N(t, x(t), x(t-h)) + \int_{-h}^0 V(H(t, x(t), x(t+s), s))ds$$

et soit $X(t, x_t) \geq \chi(t, x_t)$ une matrice quelconque. S'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et un vecteur u de dimension r à composantes strictement positives tels que

$$X(t, x_t)u < -\varepsilon u, \quad \forall t \geq t_0, \quad x_t \in \mathcal{C}(\mathcal{D}) \quad (\text{IV.9})$$

alors la solution nulle de (IV.1) est asymptotiquement stable.

Preuve : Soit

$$v(x(t)) = \max_i \left(\frac{V_i(x_i(t))}{u_i} \right)$$

alors à chaque instant il existe un indice k tel que

$$\begin{aligned}
D^+v(x(t)) \leq & \frac{1}{u_k} [M(t, x(t), x(t-h))]_{kk} V_k(x_k(t)) + \\
& \frac{1}{u_k} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^r [M(t, x(t), x(t-h))]_{kj} V_j(x_j(t)) \\
& + \frac{1}{u_k} \sum_{j=1}^r [N(t, x(t), x(t-h))]_{kj} V_j(x_j(t-h)) \\
& + \frac{1}{u_k} \sum_{j=1}^r \int_{-h}^0 [V(H(t, x(t), x(t+s), s))]_{kj} V_j(x_j(t+s)) ds. \quad (\text{IV.10})
\end{aligned}$$

Par définition de $v(x(t))$ et en considérant les trajectoires de (IV.1) vérifiant

$$V_j(x_j(t+s)) \leq V_j(x_j(t+s)), \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}$$

on obtient l'inégalité

$$D^+v(x(t)) \leq \frac{1}{u_k} [X(t, x_t)u]_k v(x(t)) \leq -\varepsilon v(x(t)).$$

Donc la fonction $v(x(t))$ est une fonction de Lyapunov-Razumikhine ■

Remarque IV.2 On aurait montré uniquement la stabilité si l'on avait requis $Xu \leq 0$ au lieu de (IV.9). Le corollaire III.2 du chapitre précédent, permettant le calcul du vecteur u , s'applique à la matrice $X(\cdot)$.

Si l'on considère à la place de V une norme scalaire $\|\cdot\|$ alors on a le corollaire ci-dessous.

Corollaire IV.2 ([133]). Supposons que les conditions suivantes soient remplies

$$\begin{cases} \sup_{\psi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})} \{\gamma(f(t, \psi(0), \psi(-h)))\} \leq -a(t), \\ \sup_{\psi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})} \{\|g(t, \psi(0), \psi(-h))\|\} \leq b(t), \\ \sup_{\psi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})} \left\{ \int_{-h}^0 \|H(t, \psi(0), \psi(s), s)\| ds \right\} \leq \int_{-h}^0 h(t, s) ds, \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

alors la solution nulle de (IV.1) est stable si

$$\sup_{t \geq t_0} \left\{ -a(t) + b(t) + \int_{-h}^0 h(t, s) ds \right\} \leq 0, \quad (\text{IV.12})$$

et asymptotiquement stable si l'inégalité (IV.12) est stricte.

Exemple IV.1 Soit le système suivant

$$\dot{x}(t) = \int_0^h K(t, s, x_t(s)) x(t-s) ds, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{IV.13})$$

Un système similaire, mais linéaire (c'est-à-dire que la matrice $K(t, s, x_t(s))$ ne dépendait que de t et s) a été étudié dans [54] par la construction en plusieurs étapes de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii pour obtenir des résultats en termes d'équations de Riccati. Nous allons obtenir ici un autre résultat en employant le principe de comparaison. Supposons que pour une norme scalaire donnée $\|\cdot\|$ la matrice $K(t, s, x_t(s))$ vérifie les conditions

$$\mu(K(t, s, \psi(s))) \leq -\alpha(t, s)$$

$$\|K(t, s, \psi(s))\| \leq k(t, s)$$

pour tout ψ dans un voisinage borné de 0 dans $\mathcal{C}$. Ce système peut se réécrire comme

$$\dot{x}(t) = \int_0^h K(t, s, x_t(s)) x(t) - \int_0^h K(t, s, x_t(s)) \int_{t-s}^t \int_0^h K(u, v, x_u(v)) x(u-v) dv du ds.$$

En appliquant le corollaire précédent à cette nouvelle représentation on obtient la proposition suivante.

Proposition IV.1 Si

$$\sup_{t \geq t_0} \left\{ - \int_0^h \alpha(t, s) ds + \int_0^h k(t, s) \left(\int_{t-s}^t \left(\int_0^h k(u, v) dv \right) du \right) ds \right\} < 0$$

alors la solution nulle de (IV.13) est asymptotiquement stable. En particulier si α et k sont constants alors cette condition se réduit à

$$h < \frac{\sqrt{2\alpha}}{k}.$$

Remarquons qu'une version matricielle de la condition de cette proposition peut facilement être obtenue.

Les résultats établis ci-dessus ne dépendent pas de la taille du retard discret : or, dans les processus réels, les retards sont souvent bornés et il est donc naturel et intéressant de pouvoir en tenir compte dans les critères de stabilité. La procédure qui a permis la transformation du système de l'exemple précédent va être utilisée dans la suite pour établir des critères de stabilité dépendant de la taille des retards discrets. Pour des raisons de lisibilité nous allons établir ces critères uniquement dans le cas des systèmes linéaires stationnaires.

IV.3 Cas linéaire stationnaire : application de certaines transformations de modèles

Soit le système linéaire à retards suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^m B_i x(t - h_i) + \sum_{j=1}^p C_j \int_{t-\tau_j}^t x(s) ds. \quad (\text{IV.14})$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que la solution nulle de ce système soit asymptotiquement stable est que son équation caractéristique

$$\det \left(sI_n - A - \sum_{i=1}^m B_i e^{-sh_i} + \sum_{j=1}^p C_j \frac{1 - e^{s\tau_j}}{s} \right) = 0,$$

ait toutes ses racines à parties réelles strictement négatives. Mais, comme nous l'avons mentionné dans les chapitres précédents, la recherche de ces racines n'est pas chose aisée. Si le principe de comparaison permet d'établir des critères de stabilité facilement vérifiables, il peut mener à des résultats trop restrictifs à cause des majorations opérées notamment dans le cas linéaire stationnaire. Pour compléter cette méthode, la construction en plusieurs étapes (voir [54, 51]) de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii semble une bonne alternative. De plus certaines transformations de modèles conduisent à des résultats différents pour un même système et peuvent ainsi améliorer les résultats. Nous allons donc appliquer dans cette partie le principe de comparaison et la construction de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii afin d'établir des critères relativement simples à tester.

Il est facile de démontrer à partir de ce qui précède le théorème suivant en considérant une norme vectorielle V .

Théorème IV.2 ([131, 133]). *Soient V une norme vectorielle et $\|\cdot\|$ une norme de $\mathbb{R}^n$. Si l'une des conditions suivantes*

$$\begin{cases} i) \mu(A) + \sum_{i=1}^m \|B_i\| + \sum_{j=1}^p \|C_j\| \tau_j < 0 \\ ii) \Gamma(A) + \sum_{i=1}^m V(B_i) + \sum_{j=1}^p V(C_j) \tau_j \text{ est de Hurwitz} \end{cases}$$

est vérifiée, alors la solution nulle de (IV.14) est asymptotiquement stable.

Preuve : La preuve se trouve dans la partie "Appendix C" de l'Annexe 2.2 : elle est donnée dans le cas plus général où C_j est une matrice $K_j(s)$ variable dans le temps. Il suffit donc de calculer $\int_{\tau_j}^0 (K(s)) ds = V(C_j) \tau_j$. ■

Soit la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii $V = V_1 + V_2$, avec

$$\begin{cases} V_1 = x^T(t) P x(t), \\ V_2 = \sum_{i=1}^m \int_{t-h_i}^t x(s) R_i x(s) ds + \sum_{j=1}^p \int_0^{\tau_j} ds \int_{t-s}^t x^T(\tau) S_j x(\tau) d\tau. \end{cases}$$

(où P, R_i, S_j sont des matrices symétriques définies positives). Rappelons que le calcul

de la dérivée de cette fonctionnelle le long des trajectoires de (IV.14) a permis d'établir le théorème ci-dessous.

Théorème IV.3 ([58]). *S'il existe des matrices symétriques définies positives P , R_i , S_j et Q telles que*

$$\begin{aligned} -Q = & A^T P + P A + \sum_{i=1}^m (R_i + P B_i R_i^{-1} B_i^T P) \\ & + \sum_{j=1}^r (\tau_j S_j + P C_j S_j^{-1} C_j^T P) \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

alors la solution nulle de (IV.14) est asymptotiquement stable.

Ces résultats sont d'une part indépendants des retards ponctuels et d'autre part la "partie stabilisante" est assurée uniquement par la matrice A alors que la solution nulle du système sans retard n'est asymptotiquement stable que si la matrice $A + B$ est de Hurwitz. Il est donc logiquement souhaitable de faire intervenir la matrice B dans la partie stabilisante. Ceci va donner des critères dépendants de tous les retards, ce qui reste quand même un avantage car les conditions indépendantes du retard, si elles offrent une grande robustesse, sont souvent trop limitées quant à leur application sur des processus réels (comme dans le cas d'un système instable possédant des retards en la commande).

D'autres travaux ont déjà exploité le fait qu'on a

$$x(t - h_i) = x(t) - \int_{t-h_i}^t \dot{x}(s) ds \quad (\text{IV.16})$$

et que par conséquent le système (IV.14) peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (A + \sum_{i=1}^m B_i) x(t) - \sum_{i=1}^m B_i A \int_{-h_i}^0 x(t+u) du \\ & - \sum_{i=1}^m B_i \sum_{k=1}^m B_k \int_{-h_i}^0 x(t+u-h_k) du - \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^m B_i \sum_{j=1}^p C_j \int_{-h_i}^0 \int_{-\tau_j}^0 x(t+u+s) ds du + \sum_{j=1}^p C_j \int_{-\tau_j}^0 x(t+s) ds \quad (\text{IV.17})$$

(voir par exemple [5, 35]). En appliquant le développement réalisé au premier paragraphe, nous avons obtenu les conditions de stabilités dépendantes des retards données dans le théorème ci-dessous.

Théorème IV.4 ([131, 133]). *S'il existe une norme scalaire $\|\cdot\|$ (mesure associée $\mu(\cdot)$) ou une norme vectorielle V (matrices $\Gamma(\cdot)$ et $V(\cdot)$ associées, voir notations) telles que l'une des conditions suivantes soit vraie*

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \mu(A + \sum_{i=1}^m B_i) + \sum_{i=1}^m \|B_i A\| h_i + (\sum_{k=1}^m \|B_k\|) (\sum_{i=1}^m \|B_i\| h_i) \\ \quad + (\sum_{i=1}^m \|B_i\| h_i) \left(\sum_{j=1}^p \|C_j\| \tau_j \right) + \sum_{j=1}^p \|C_j\| \tau_j < 0 \\ \\ ii) \Gamma(A + \sum_{i=1}^m B_i) + \sum_{i=1}^m V(B_i A) h_i + (\sum_{k=1}^m V(B_k)) (\sum_{i=1}^m V(B_i) h_i) \\ \quad + (\sum_{i=1}^m V(B_i) h_i) \left(\sum_{j=1}^p V(C_j) \tau_j \right) + \sum_{j=1}^p V(C_j) \tau_j \text{ est de Hurwitz} \end{array} \right.$$

est vérifiée, alors la solution nulle de (IV.14) est asymptotiquement stable.

Preuve : La preuve de ce théorème se trouve dans la partie "Appendix C" de l'Annexe 2.2

Exemple IV.2 Soit pour $x \in \mathbb{R}^2$, muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$, le système

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + Bx(t-h) + C \int_{t-\tau}^t x(s) ds, \quad (\text{IV.18})$$

où

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{pmatrix}.$$

En posant $b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, on a

$$\mu(A + B) = -a + b_1; \gamma(A) = -a; \|BA\| = ab; \|B\| = b; \|C\| = c.$$

Il s'en suit, en appliquant les deux théorèmes précédents, que si l'une des conditions ci-dessous

$$i) a > b \text{ et } \tau < \frac{a-b}{c}$$

$$ii) a - b_1 > 0, \tau < \frac{a-b_1}{c} \text{ et } h < \frac{a-b_1-c\tau}{(a+b)b+bc\tau}$$

est vérifiée alors la solution nulle de (IV.18) est asymptotiquement stable.

Dans [53] des conditions dépendant uniquement du retard τ ont été obtenues en résolvant certaines équations de Riccati.

Dans le but d'établir différents types de critères sur les systèmes à retards (notamment purement distribués et purement discrets), nous allons opérer certaines transformations de modèles, introduites dans [52, 53].

IV.3.1 Systèmes purement retardés, à retards ponctuels

Soit le système

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m B_i x(t - h_i). \quad (\text{IV.19})$$

Posons $A = \sum_{i=1}^m B_i$, $B_{ij} = B_i B_j$, $h_{ij} = h_i + h_j$, $h = \sum_{i=1}^m h_i$, alors on peut réécrire (IV.19) de trois manières différentes :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - \sum_{i,j=1}^m B_{ij} \int_{t-h_{ij}}^{t-h_j} x(s) ds, \quad (\text{IV.20})$$

en second lieu

$$\frac{d}{dt} \left[x(t) + \sum_{i=1}^m B_i \int_{t-h_i}^t x(s) ds \right] = Ax(t), \quad (\text{IV.21})$$

et enfin

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - \sum_{i=1}^m B_i \int_{t-h_i}^t \dot{x}(s) ds. \quad (\text{IV.22})$$

Methode des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii

Les démonstrations complètes des trois théorèmes qui suivent se trouvent dans [52].

En considérant pour la première transformation (IV.20), la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii $V = V_1 + V_2$ avec

$$\begin{cases} V_1 = x^T(t)Px(t) \\ V_2 = \sum_{i,j=1}^m \int_{h_j}^{h_{ij}} ds \int_{t-s}^t x^T(\tau)R x(\tau) d\tau \end{cases}$$

où P et R sont des matrices symétriques définies positives, on obtient le théorème :

Théorème IV.5 ([52], [56]). *S'il existe des matrices symétriques définies positives P , R , et Q telles que*

$$A^T P + PA + mRh + P \sum_{i,j=1}^m h_i B_{ij} R^{-1} B_{ij}^T P = -Q. \quad (\text{IV.23})$$

alors la solution nulle de (IV.19) est asymptotiquement stable.

Pour la deuxième transformation qui conduit à un système de type neutre, nous considérons la fonctionnelle dégénérée $V = V_1 + V_2$ avec

$$\begin{cases} V_1 = a(x_t)^T P a(x_t), \quad a(x_t) = x(t) + \sum_{i=1}^m B_i \int_{t-h_i}^t x(s) ds \\ V_2 = \sum_{i=1}^m \int_0^{h_i} ds \int_{t-s}^t x^T(\tau) R_i x(\tau) d\tau. \end{cases}$$

où P et R_i ($i = 1$ à m) sont des matrices définies positives. On obtient alors le résultat suivant.

Théorème IV.6 ([52], [56]). *Supposons que la solution nulle du système*

$$x(t) + \sum_{i=1}^m B_i \int_{t-h_i}^t x(s) ds = 0$$

soit asymptotiquement stable et qu'il existe des matrices symétriques définies positives, P , R_i et Q telles que

$$-Q = A^T P + P A + \sum_{i=1}^m R_i h_i + \sum_{i,j=1}^m A^T P B_i R_i^{-1} B_i^T P A h_i. \quad (\text{IV.24})$$

Alors la solution nulle de (IV.19) est asymptotiquement stable

Remarque IV.3 Si par exemple $\sum_{i=1}^m \|B_i\| h_i < 1$ alors la solution nulle de

$$x(t) + \sum_{i=1}^m B_i \int_{t-h_i}^t x(s) ds = 0$$

est asymptotiquement stable.

Enfin pour la troisième équation (IV.22), la fonctionnelle $V = V_1 + V_2 + V_3$, avec

$$\begin{cases} V_1 = x^T(t) P x(t) \\ V_2 = \sum_{i=1}^m \int_0^{h_i} ds \int_{t-s}^t \dot{x}^T(\tau) R \dot{x}(\tau) d\tau \\ V_3 = m h \sum_{i=1}^m \int_{t-h_i}^t x^T(s) B_i^T R B_i x(s) ds \end{cases}$$

conduit au théorème suivant.

Théorème IV.7 ([52], [56]). La solution nulle de (IV.19) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices symétriques définies positives P et R telles que l'équation

$$A^T P + P A + \sum_{i=1}^m (h_i P B_i R^{-1} B_i^T P + m h B_i^T R B_i) = -Q. \quad (\text{IV.25})$$

soit vérifiée.

Remarque IV.4 Les équations de Riccati établies dans cette section ne sont pas des équations de Riccati classiques que l'on rencontre en théorie de la commande optimale des systèmes linéaires ordinaires, du filtrage ou de la commande robuste, etc.

Si $h_i \equiv 0$, alors toutes les équations de Riccati précédemment établies se réduisent aux équations de Lyapunov classiques des systèmes linéaires ordinaires.

Afin de comparer l'efficacité des trois théorèmes de cette section nous allons considérer l'exemple suivant étudié dans [53].

Exemple IV.3 Soit le système

$$\dot{x}(t) = B_1 x(t - h_1) + B_2 x(t - h_2), \quad x(t) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{IV.26})$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -\delta & \gamma \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0.$$

En appliquant les trois théorèmes précédents on a les trois conditions de stabilité asymptotique de la solution nulle de (IV.26) suivantes.

- Le théorème IV.5 avec $P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ entraîne

$$(h_1 + h_2) [h_1 (\alpha^2 + \beta^2) + h_2 (\gamma^2 + \delta^2)] < \frac{(\gamma + \delta)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)}. \quad (\text{IV.27})$$

- Le théorème IV.6 avec $P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ et $R_1 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ et $R_2 = \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}$, conduit à la condition

$$h_1 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + h_2 \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} < \frac{\gamma + \delta}{\sqrt{(\alpha + \beta)^2 + (\gamma + \delta)^2}}. \quad (\text{IV.28})$$

- Le théorème IV.7 avec $P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ donne le même résultat (IV.27) que le théorème IV.5.

Pour cet exemple particulier, la première et la troisième transformations conduisent aux mêmes résultats. Par contre la deuxième transformation donne un meilleur résultat : en effet si l'inégalité (IV.27) est vérifiée alors (IV.28) est automatiquement vérifiée [53].

Application du principe de comparaison

En appliquant le principe de comparaison à la première transformation (IV.20), on obtient le résultat suivant (qui fait intervenir les notations $\mu(\cdot)$ et $\Gamma(\cdot)$ introduites au début de ce mémoire).

Théorème IV.8 ([131, 133]/[56]). *S'il existe une norme scalaire $\|\cdot\|$ (mesure associée $\mu(\cdot)$) ou une norme vectorielle V (matrices $\Gamma(\cdot)$ et $V(\cdot)$ associées, voir notations) telles que l'une des conditions suivantes soit remplie*

$$\begin{aligned} i) \quad & \mu\left(\sum_{i=1}^m B_i\right) + \left(\sum_{j=1}^m \|B_j\|\right) \left(\sum_{i=1}^m \|B_i\| h_i\right) < 0 \\ ii) \quad & \Gamma\left(\sum_{i=1}^m B_i\right) + \left(\sum_{i=1}^m V(B_i)\right) \left(\sum_{j=1}^m V(B_j) h_j\right) \text{ est de Hurwitz} \end{aligned}$$

alors la solution nulle de (IV.19) est asymptotiquement stable.

Preuve : La démonstration de ce théorème est similaire à celle du théorème IV.4 sur la transformation du modèle (IV.20) ■

Ainsi par exemple, pour que la solution nulle du système (IV.29)

$$\dot{x}(t) = B \sum_{i=1}^m x(t - h_i) \quad (IV.29)$$

soit asymptotiquement stable, il suffit que

$$\mu(B) < 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq \sum_{i=1}^m h_i < -\frac{\gamma(B)}{\|B\|^2}$$

Cette condition est obtenue dans le cas de l'exemple de [53] pour la norme euclidienne par résolution d'équations de Riccati.

IV.3.2 Cas des systèmes purement retardés, à retards distribués

Soit le système

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r C_i \int_{t-\tau_i}^t x(s) ds, \quad x(t) \in R^n, \quad t \geq 0, \quad \tau_i \geq 0. \quad (\text{IV.30})$$

Posons $\tau C = \sum_{i=1}^r \tau_i C_i$, $C_{ij} = C_i C_j$. Alors on peut établir les trois transformations suivantes :

$$\dot{x}(t) = \tau C x(t) - \sum_{i,j=1}^r C_{ij} \int_{t-\tau_i}^t (s-t+\tau_i) ds \int_{s-\tau_j}^s x(u) du, \quad t \geq \tau, \quad (\text{IV.31})$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left[x(t) + \sum_{i=1}^r C_i \int_{t-\tau_i}^t (s-t+\tau_i) x(s) ds \right] = \tau C x(t), \quad t \geq \tau, \quad (\text{IV.32})$$

ou encore

$$\dot{x}(t) = \tau C x(t) - \sum_{i=1}^r C_i \int_{t-\tau_i}^t (s-t+\tau_i) \dot{x}(s) ds, \quad t \geq \tau. \quad (\text{IV.33})$$

Méthode des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii

Pour des raisons de simplicité, les résultats n'ont été énoncés que pour le cas $r = 1$. La démonstration complète des trois théorèmes suivants est donnée dans [58]. En considérant la fonctionnelle candidate de Lyapunov-Krasovskii $V = V_1 + V_2 + V_3$ avec

$$\begin{cases} V_1 = x^T(t) P x(t) \\ V_2 = \int_0^{\tau_1} ds \int_{t-s}^t (u-t+s) du \int_{s-\tau_1}^s x^T(v) R x(v) dv \\ V_3 = \frac{1}{2} \tau_1^2 \int_{t-\tau_1}^t (s-t+\tau_1) x^T(s) R(s) ds, \end{cases}$$

on obtient le théorème suivant correspondant à la première transformation (IV.31).

Théorème IV.9 ([58], [56]). *S'il existe trois matrices symétriques définies positives P , Q et R telles que*

$$-Q = C_1^T P + P C_1 + \frac{1}{2} \tau_1^2 (R + P C_1^2 R^{-1} C_1^{T2} P) \quad (\text{IV.34})$$

alors la solution nulle de (IV.30) est asymptotiquement stable.

Pour la deuxième (IV.32) transformation qui conduit à un système de type neutre nous allons considérer $V = V_1 + V_2$, avec

$$\begin{cases} V_1 = b(x_t)^T P b(x_t), \quad b(x_t) = \left(x(t) + C_1 \int_{t-\tau_1}^t (s-t+\tau_1) x(s) ds \right) \\ V_2 = \tau_1 \int_0^{\tau_1} ds \int_{t-s}^t (u-t+\tau_1) x^T(u) R x(u) du \end{cases}$$

et on a :

Théorème IV.10 ([58], [56]). *Supposons que la solution nulle de l'équation aux différences*

$$x(t) + C_1 \int_{t-\tau_1}^t (s-t+\tau_1) x(s) ds = 0$$

soit asymptotiquement stable et qu'il existe trois matrices symétriques définies positives P , Q et R telles que

$$-Q = C_1^T P + P C_1 + \frac{1}{2} \tau_1^2 (R + C_1^T P C_1 R^{-1} C_1^T P C_1) \quad (\text{IV.35})$$

alors la solution nulle de (IV.30) est asymptotiquement stable.

Remarque IV.5 *Si par exemple $\tau_1^2 \|C_1\| < 2$ (car dans ce cas $\|G(t, x_t)\| < \gamma \|x_t\|_C$, $\gamma = \frac{\tau_1^2 \|C_1\|}{2} < 1$ où $G(t, x_t) = -C_1 \int_{t-\tau_1}^t (s-t+\tau_1) x(s) ds$) alors la solution nulle de*

$$x(t) + C_1 \int_{t-\tau_1}^t (s-t+\tau_1) x(s) ds = 0$$

est asymptotiquement stable.

Enfin pour la dernière transformation (IV.33) considérons la fonctionnelle $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$ avec

$$\begin{cases} V_1 = x^T(t)Px(t) \\ V_2 = \int_0^{\tau_1} ds \int_{t-s_1}^t (u-t+\tau_1) \dot{x}^T(s_1)R\dot{x}(u)du \\ V_3 = \frac{\tau_1^2}{2} \int_{t-\tau_1}^t [\int_s^t x(u)du]^T C_1^T RC_1 \int_s^t x(u)du \\ V_4 = \frac{\tau_1^2}{2} \int_0^{\tau_1} ds \int_{t-s}^t (u-t+s) x^T(u)Rx(u)du \end{cases}$$

alors on obtient le résultat.

Théorème IV.11 ([58], [56]). *La solution nulle de (IV.30) est asymptotiquement stable s'il existe trois matrices symétriques définies positives P , Q et R telles que*

$$-Q = C_1^T P + C_1^T P + \frac{\tau_1^2}{2} PC_1^T R^{-1} C_1 P + \frac{\tau_1^3}{4} (R + C_1^T RC_1 R^{-1} C_1^T RC_1). \quad (\text{IV.36})$$

Remarque IV.6 *Pour faciliter leur résolution, les équations de Riccati algébriques obtenues peuvent être, mises sous forme LMI [12, 102] par exemple.*

Application du principe de comparaison

En appliquant le principe de comparaison à la transformation (IV.31), on obtient le résultat suivant.

Théorème IV.12 ([56, 57]). *La solution nulle de (IV.30) est asymptotiquement stable si l'une des conditions suivantes est vérifiée*

$$\begin{cases} i) \mu(\tau C) + \sum_{i,j=1}^r \frac{\tau_i^2 \tau_j}{2} \|C_{ij}\| < 0 \\ ii) \Gamma(\tau C) + \sum_{i,j=1}^r \frac{\tau_i^2 \tau_j}{2} V(C_{ij}) \text{ est de Hurwitz.} \end{cases}$$

Preuve : Similaire à celle du théorème IV.4 avec la transformation du modèle (IV.31)

■

Considérons l'exemple suivant pour montrer que le théorème précédent se généralise aisément dans le cas où le retard est infini.

Exemple IV.4 Soit l'équation scalaire

$$\dot{x}(t) = - \int_0^\infty K(s)x(t-s)ds, \quad (\text{IV.37})$$

avec $K : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ que l'on peut réécrire comme

$$\dot{x}(t) = - \int_0^\infty K(s)x(t) - \int_0^\infty K(s)ds \int_{-s}^0 du \int_0^\infty K(v)x(t+u-v)dv. \quad (\text{IV.38})$$

Alors on obtient :

$$\text{si } \int_0^\infty K(s)ds < \infty \text{ et } \int_0^\infty sK(s)ds < 1,$$

alors la solution nulle de (IV.37) est asymptotiquement stable.

La même condition a été obtenue dans [31] par la méthode de Lyapunov-Krasovskii.

IV.3.3 Cas d'un retard distribué en série avec un retard ponctuel

Le résultat précédent basé sur le principe de comparaison va nous permettre de traiter un cas particulier de système à retards distribués, rarement considéré dans la littérature, mais qui, à notre avis, n'est pas dénué de sens pratique. Ce sont les systèmes dont l'évolution actuelle dépendrait uniquement d'une portion de son état, soit les systèmes de la forme

$$\dot{x}(t) = C \int_{t-\tau_1}^{t-\tau_2} x(s)ds, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0, \quad \tau_2 < \tau_1. \quad (\text{IV.39})$$

Un tel effet peut être vu comme un retard distribué sur l'intervalle $[t - (\tau_1 - \tau_2), t]$ suivi d'un retard ponctuel de valeur τ_2 . En effet si nous posons

$$y(t) = C \int_{t-(\tau_1-\tau_2)}^t x(s)ds,$$

alors on a

$$\dot{x}(t) = y(t - \tau_2).$$

Le système (IV.39) peut être représenté sous la forme (IV.30) en posant $r = 2$, $C_1 = -C_2 = C$. En appliquant le théorème IV.12 précédent il vient :

Théorème IV.13 ([56, 57]). Soit $\alpha(\tau_1, \tau_2) = \frac{(\tau_1^3 + \tau_1^2\tau_2 + \tau_1\tau_2^2 + \tau_2^3)}{2(\tau_1 - \tau_2)}$. La solution nulle de (IV.39) est asymptotiquement stable si l'une des conditions suivantes est vraie

- i) $\mu(C) + \alpha(\tau_1, \tau_2) \|C^2\| < 0$
- ii) $\Gamma(C) + \alpha(\tau_1, \tau_2) V(C^2)$ est de Hurwitz.

Remarque IV.7 Un tel théorème peut être appliqué à la commande. Ainsi, on a $\alpha(\tau_1, \tau_2) > \frac{\tau_1^2}{2} = \alpha(\tau_1, 0)$; cela implique qu'un système commandé de la forme

$$\dot{x}(t) = C \int_{t-\tau_1}^{t-\tau_2} x(s)ds + u(t)$$

où $u(t)$ est une entrée réglable peut être stabilisé par une loi de la forme

$$u(t) = C \int_{t-\tau_2}^t x(s)ds,$$

pourvu que $\mu(C) < 0$ et $\tau_1 < \sqrt{-2\frac{\mu(C)}{\|C^2\|}}$.

IV.4 Stabilité robuste

En pratique les modèles des systèmes sur lesquels on fait l'analyse sont souvent mal connus. Pour prendre en compte cette incertitude, on introduit dans le système nominal des termes supplémentaires la plupart du temps additifs. Dans ces conditions il est intéressant de vérifier que si le système nominal vérifie certaines propriétés (stabilité asymptotique uniforme de la solution nulle), alors cette propriété est également vérifiée par le système incertain pour une certaine "amplitude" maximale des incertitudes. C'est la robustesse du système par rapport aux incertitudes du modèle (voir par exemple [100, 132, 139]). Dans ce paragraphe, nous allons considérer ce problème pour les systèmes

à retards distribués.

Pour tenir compte des incertitudes de modèle, on ajoute au système nominal

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \eta(t)) + \int_{-\tau(t)}^0 Cx(t + s)ds,$$

les fonctions non linéaires $f(t, x(t))$, $g(t, x(t - \eta(t)))$ et $h(s, x(t + s))$, de telle sorte que le système réel est

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bx(t - \eta(t)) + f(t, x(t)) + g(t, x(t - \eta(t))) \\ &\quad + \int_{-\tau(t)}^0 [Cx(t + s) + h(s, x(t + s))]ds, \\ t &\geq t_0, x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-\xi, 0], \end{aligned} \quad (\text{IV.40})$$

où $0 \leq \eta(t) \leq \eta_m$ et $0 \leq \tau(t) \leq \tau_m$, $\xi = \max(\eta_m, \tau_m)$. Les matrices $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont constantes, les incertitudes de modèle f, g et h sont des fonctions continues par morceaux et bornées pour des valeurs bornées de leurs arguments. Dans la littérature (voir [35] et les références qui s'y trouvent), lorsque ces incertitudes sont d'ordre paramétrique (mauvaise connaissance des paramètres, erreurs dues à une linéarisation, ...) on distingue deux types d'incertitudes selon que leur importance peut ou non être estimée par rapport à chaque composante de la variable $x(t)$.

- Incertitudes paramétriques structurées : leur influence peut être estimée sur chaque composante de $x(t)$; dans ce cas on suppose qu'il existe des matrices $F(t)$, $G(t)$ et $H(t)$ à coefficients positifs, au moins continues par morceaux telles que

$$\begin{aligned} |f(t, x)| &\leq F(t) |x|; \quad F(t) \in \mathbb{R}_+^{n \times n} \\ |g(t, x)| &\leq G(t) |x|; \quad G(t) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n. \\ |h(s, x)| &\leq H(s) |x|; \quad H(s) \in \mathbb{R}_+^{n \times n} \end{aligned} \quad (\text{IV.41})$$

- Incertitudes paramétriques non structurées : seule l'influence sur la norme de $x(t)$ peut être estimée c'est-à-dire qu'il existe des fonctions $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$ au moins

continues par morceaux telles que

$$\begin{aligned} \|f(t, x)\| &\leq \alpha(t) \|x\|; \quad \alpha(t) \in \mathbb{R}_+ \\ \|g(t, x)\| &\leq \beta(t) \|x\|; \quad \beta(t) \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \\ \|h(s, x)\| &\leq \gamma(s) \|x\|; \quad \gamma(s) \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

Dans cette section, nous allons utiliser l'éventuel effet stabilisateur de la partie associée au retard distribué, c'est-à-dire que nous allons faire apparaître la matrice C dans le terme stabilisateur. En appliquant la même technique que précédemment on obtient les résultats qui suivent.

Incertitudes paramétriques structurées

Soit la matrice $M(t)$ définie à partir de (IV.41) par

$$\begin{aligned} M(t) = & (A + B + \tau(t)C)^+ + F(t) + G(t) + \int_{-\tau(t)}^0 H(s)ds \\ & + \eta(t)(|BA| + |B^2|) + |B| \int_{-\eta(t)}^0 (F(t+u) + G(t+u))du \\ & + |BC| \int_{-\eta(t)}^0 \tau(t+u)du + |B| \int_{-\eta(t)}^0 \int_{-\tau(t+u)}^0 H(s)ds du \\ & + \frac{\tau^2(t)}{2}(|CA| + |CB|) + |C| \int_{-\tau(t)}^0 \int_s^0 [F(t+u) + G(t+u)]du ds \\ & + |C^2| \int_{-\tau(t)}^0 ds \int_s^0 \tau(t+u)du + |C| \int_{-\tau(t)}^0 \int_s^0 \int_{-\tau(t+u)}^0 H(v)dv du ds \end{aligned} \quad (\text{IV.43})$$

où A^+ est la matrice dont la diagonale est la même que celle de A et dont les coefficients hors-diagonaux sont les valeurs absolues des coefficients hors-diagonaux de A correspondants alors et $|A|$ la matrice obtenue en remplaçant les coefficients de A par leur valeur absolue. on obtient alors :

Théorème IV.14 ([126, 127]). *La solution nulle du système (IV.40) vérifiant (IV.41) est asymptotiquement stable s'il existe un vecteur $p > 0$ et un scalaire $\varepsilon > 0$ tels que*

$$\mathbf{M}(t)p < -\varepsilon p, \quad \forall t \geq t_0 + \xi.$$

Preuve : Observons qu'en utilisant les identités

$$\begin{aligned}x(t - \eta(t)) &= x(t) - \int_{-\eta(t)}^0 \dot{x}(t + u) du \\x(t + s) &= x(t) - \int_s^0 \dot{x}(t + u) du\end{aligned}$$

le système (IV.40) peut se réécrire comme:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= [A + B + \tau(t)C]x(t) + f(t, x(t)) + g(t, x(t - \eta(t))) + \\&\int_{-\tau(t)}^0 h(s, x(t + s)) ds - \int_{-\eta(t)}^0 (BAx(t + u) + B^2x(t + u - \eta(t + u)) \\&\quad + Bf(t + u, x(t + u)) + Bg(x(t + u - \eta(t + u)))) \\&\quad + \int_{-\tau(t+u)}^0 [BCx(t + s) + Bh(s, x(t + s))] ds du \\&\quad - \int_{-\tau(t)}^0 \{ \int_s^0 (CAx(t + u) + CBx(t + u - \eta(t + u)) \\&\quad + Cf(t + u, x(t + u)) + Cg(x(t + u - \eta(t + u)))) \\&\quad + \int_{-\tau(t+u)}^0 [C^2x(t + v) + Ch(v, x(t + v))] dv du \} ds, \quad t \geq t_0 + \xi.\end{aligned}\tag{IV.44}$$

Il suffit d'appliquer le lemme IV.1 et le théorème IV.1 à cette nouvelle formulation avec la norme vectorielle $V(x) = [|x_1|, \dots, |x_i|, \dots, |x_n|]^T$ ■

Dans le cas où les retards et les bornes des incertitudes sont constants, il vient le résultat suivant en utilisant les propriétés de M-matrices [22].

Corollaire IV.3 ([126, 127]). *Si les matrices F, G, H intervenant dans (IV.41) et les retards η et τ sont constants alors la solution nulle de (IV.40) est asymptotiquement stable si la matrice*

$$\begin{aligned}&(A + B + \tau C)^+ + F + G + \tau H + \eta\{|BA| + \\&|B^2| + |B|(F + G)\} + \eta\tau(|BC| + |B|H) + \\&\frac{\tau^2}{2}\{|CA| + |CB| + |C|(F + G)\} + \frac{\tau^3}{2}\{|C^2| + |C|H\}\end{aligned}\tag{IV.45}$$

est de Hurwitz.

Incertitudes paramétriques non structurées

Dans le cas des incertitudes non structurées (IV.42) on a le résultat suivant.

Théorème IV.15 ([126, 127]). *La solution nulle du système (IV.40) vérifiant (IV.42) est asymptotiquement stable s'il existe un scalaire $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq t_0 + \xi} \{ \mu(A + B + \tau(t)C) + \alpha(t) + \beta(t) + \int_{-\tau(t)}^0 \gamma(s) ds + \eta(t)(\|BA\| + \|B^2\|) \\ & + \|B\| \int_{-\eta(t)}^0 (\alpha(t+u) + \beta(t+u)) du + \|BC\| \int_{-\eta(t)}^0 \tau(t+u) du \\ & + \|B\| \int_{-\eta(t)}^0 \int_{-\tau(t+u)}^0 \gamma(s) du ds + \frac{\tau^2(t)}{2} (\|CA\| + \|CB\|) \\ & + \|C\| \int_{-\tau(t)}^0 \int_s^0 [\alpha(t+u) + \beta(t+u)] du ds + \|C^2\| \int_{-\tau(t)}^0 \int_s^0 \tau(t+u) du ds \\ & + \|C\| \int_{-\tau(t)}^0 \int_s^0 \int_{-\tau(t+u)}^0 \gamma(v) dv du ds \} < -\varepsilon \end{aligned} \quad (\text{IV.46})$$

Preuve : La preuve est analogue à celle du théorème précédent ■

Corollaire IV.4 ([126]). *La solution nulle du système (IV.40) vérifiant (IV.42) avec $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ et τ constants est asymptotiquement stable si*

$$\begin{aligned} & \mu(A + B + \tau C) + \alpha + \beta + \tau\gamma + \eta\{\|BA\| + \|B^2\| + \|B\|(\alpha + \beta)\} + \\ & \eta\tau(\|BC\| + \|B\|\gamma) + \frac{\tau^2}{2}\{\|CA\| + \|CB\| + \|C\|(\alpha + \beta)\} + \frac{\tau^3}{2}\{\|C^2\| + \|C\|\gamma\} < -\varepsilon \end{aligned}$$

Preuve : immédiate ■

Généralisation au cas des retards multiples

Nous considérons ici des systèmes à retards distribués de la forme

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \int_{-\tau_i}^0 [C_i x(t+s) + h_i(s, x(t+s))] ds. \quad (\text{IV.47})$$

avec des bornes d'incertitudes constantes, soit

$$|h_i(s, x(t+s))| \leq H_i.$$

Il est facile, en reprenant les étapes du paragraphe précédent et avec la norme vectorielle $V(x) = [|x_1|, \dots, |x_i|, \dots, |x_n|]^T$, de montrer ce qui suit.

Théorème IV.16 ([127]). *La solution nulle du système (IV.47) est asymptotiquement stable si*

1) *dans le cas des incertitudes structurées,*

$$\left(\sum_{i=1}^r \tau_i C_i \right)^+ + \sum_{i,j=1}^r (|C_i C_j| + |C_i| H_j) \frac{\tau_i^2 \tau_j}{2} + \sum_{i=1}^r H_i \tau_i \text{ est une matrice de Hurwitz;} \quad (\text{IV.48})$$

2) *dans le cas des incertitudes non structurées,*

$$\mu \left(\sum_{i=1}^r \tau_i C_i \right) + \sum_{i=1}^r \gamma_i \tau_i + \sum_{i,j=1}^r (\|C_i C_j\| + \|C_i\| \gamma_j) \frac{\tau_i^2 \tau_j}{2} < 0. \quad (\text{IV.49})$$

Preuve : Le système (IV.47) peut être réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \left(\sum_{i=1}^r \tau_i C_i \right) x(t) - \\ & \sum_{i=1}^r C_i \int_{-\tau_i}^0 \left(\int_s^0 \sum_{j=1}^r \int_{-\tau_j}^0 (C_j x(t+u+v) + h_j(v, x(t+u+v))) dv du \right) ds \\ & + \sum_{i=1}^r \int_{-\tau_i}^0 h_i(s, x(t+s)) ds. \end{aligned}$$

Ensuite il suffit d'appliquer à cette nouvelle formulation les théorèmes IV.14 et IV.15 précédents. ■

IV.5 Conclusion

Des conditions de stabilité dépendant des retards pour les systèmes à retards distribués et/ou discrets ont été établies dans ce chapitre sur la base de deux approches complémentaires : la construction à partir d'une méthode semi-formelle de fonctionnelle de

Lyapunov-Krasovskii et le principe de comparaison. En utilisant des transformations de modèles, plusieurs types de critères en termes de systèmes de comparaison ont été obtenus [131, 133] en complément de ceux qui se basent sur des fonctionnelles [52, 58, 56, 57]. La non-unicité des transformations peut conduire à l'amélioration des critères en choisissant une transformation ou l'autre. Le principe de comparaison est particulièrement adapté pour l'analyse de la stabilité de systèmes interconnectés [132]. Le problème de la robustesse, très intéressant en pratique, a été également discuté dans le cas d'incertitudes paramétriques structurées ou non.

L'analyse des systèmes à retards distribués est importante car pour les systèmes à retards les lois de commande par retour d'état au sens propre du terme fait intervenir des retards distribués comme nous le montre la théorie des systèmes de dimension infinie.

Chapitre V

Stabilisation des systèmes héréditaires

V.1 Introduction

La stabilisation par des lois de commande en boucle fermée est la technique la plus utilisée dans la littérature. En effet, la considération à chaque instant de l'état ou la sortie du système permet de mesurer les éventuels écarts par rapport au comportement souhaité et de réagir en conséquence.

Le premier travail utilisant le retard pour la commande des systèmes dynamiques est sûrement le “posicast” de Smith [121] en 1957. Il est montré dans ce travail que la poursuite d'une entrée en échelon pour un oscillateur peut être réalisée en utilisant une commande retardée en boucle ouverte ; mais ne ceci permet pas de poursuite de trajectoire pour une condition non nulle du fait de la boucle ouverte [145].

En dimension finie, c'est à dire dans le cas des systèmes ordinaires

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

la commande en boucle fermée par retour d'état s'écrit (pour une consigne nulle)

$$u(t) = k(x(t)).$$

Elle est largement employée pour peu que l'on puisse capter ou tout au moins reconstruire l'état entier $x(t)$ du système à chaque instant.

Pour les systèmes héréditaires, l'équivalent du retour d'état, étant donné le caractère infini de l'état, serait donc une fonctionnelle

$$u(t) = k(x_t). \quad (\text{V.1})$$

Les premiers travaux utilisant tout l'état du système dans l'élaboration des lois de commande remontent aux années 1960 : Krasovskii et Osipov [67, 103] ont considéré un retour d'état réalisé sous forme de retards distribués

$$u(t) = \int_{-h}^0 [dK(s)]x(t+s). \quad (\text{V.2})$$

De plus, Manitius et Olbrot [86] et récemment [13] ont montré que ce type de commande permet d'assigner un spectre fini aux systèmes à retards constants linéaires stationnaires, moyennant une condition de commandabilité spectrale.

En pratique [9], le retard distribué est souvent discrétisé en

$$u(t) = \sum_{i=0}^N K_i x(t - ih). \quad (\text{V.3})$$

Dans le cas particulier où la mesure est supposée être concentrée aux deux extrémités $-h$ et 0 , on aura

$$u(t) = K_0 x(t) + K_1 x(t - h). \quad (\text{V.4})$$

Dans la littérature, les travaux de stabilisation le plus souvent rencontrés [18, 73, 74, 81, 77, 106, 83, 82, 84, 119] se bornent à développer des lois de commande par retour

de la valeur de l'état à l'instant t , soit une fonction de $x(t)$. L'utilisation intensive de ces techniques pour la stabilisation des systèmes à retards est motivée par le fait que les critères de stabilité sur lesquels ils reposent sont souvent des critères indépendants du retard : dans ce cas, l'essentiel de la partie stabilisante est assuré par la partie non retardée de l'équation. Cependant, les techniques par retour "instantané" ne répondent pas à la philosophie du retour d'état pour laquelle la loi de commande doit être du type (V.1). Les lois (V.3) et (V.4) pourraient être qualifiées de "retour d'état partiel", étant donné que c'est qu'une faible partie de l'état uniquement qui est utilisée. Par contre les retours sous forme de retards distribués (V.2) respectent le principe de retour d'état "vrai" (V.1).

Des travaux exploratoires des différentes techniques de stabilisation (commande) des systèmes héréditaires peuvent être trouvés dans de récentes publications, citons à titre d'exemples [62, 114, 145]. Bien sûr, si ces techniques (valables dans le cas linéaire) s'avèrent plus générales et plus performantes, elles rendent nécessaire la définition de critères de stabilité robuste, en présence de retards variables par exemple.

Dans les sections qui suivent nous allons rappeler sans les détailler les techniques de commande les plus couramment utilisées pour stabiliser les systèmes à retards.

V.1.1 Placement de spectre

Cette approche concerne les systèmes linéaires stationnaires [13]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N A_i x(t - h_i) + \sum_{i=1}^N B_i u(t - h_i) \\ y(t) = \sum_{i=1}^N C_i x(t - h_i) + \sum_{i=1}^N D_i u(t - h_i) \end{cases}, \quad (\text{V.5})$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est la commande et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie. Posons

$$A(\lambda) = \sum_{i=1}^N A_i e^{-\lambda h_i}, \quad B(\lambda) = \sum_{i=1}^N B_i e^{-\lambda h_i}, \quad C(\lambda) = \sum_{i=1}^N C_i e^{-\lambda h_i} \quad \text{et} \quad D(\lambda) = \sum_{i=1}^N D_i e^{-\lambda h_i}.$$

Le problème à résoudre est de pouvoir modifier ou imposer les dynamiques du système bouclé en choisissant une loi de commande $u(t)$ convenable. Il est intéressant de pouvoir caractériser les systèmes pour lesquels cette entreprise est possible : cette condition est donnée par la proposition ci-dessous (voir [13] et les références qui s'y trouvent pour les détails).

Proposition V.1 *Le système (V.5) est stabilisable si et seulement si*

$$\text{Rang} [\lambda I - A(\lambda), B(\lambda)] = n, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{Re}(\lambda) \geq 0.$$

Remarque V.1 *Cette condition est analogue à celle de la commandabilité spectrale :*

$$\text{Rang} [\lambda I - A(e^{-\lambda h}), B(e^{-\lambda h})] = n, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Cette notion de commandabilité spectrale [86] est intéressante en pratique car elle implique l'existence d'une loi de commande qui permet de placer arbitrairement le spectre du système en un nombre fini de points [142, 143, 144].

Pour un système (V.5) avec des retards commensurables ($h_i = ih$), il est montré [13] qu'une loi de commande avec des retards distribués de la forme

$$u(t) = \int_0^{Kh} f(\tau)u(t-\tau)d\tau + \int_0^{Kh} g(\tau)x(t-\tau)d\tau + \sum_{i=1}^K k_i x(t-ih)$$

(où h est le retard de base, les fonctions f et g sont des fonctions continues sur $[0, Kh]$ et de carré sommable) permet d'assigner au système des dynamiques (finies, n pôles) arbitraires si, et seulement si, il est spectralement commandable.

Par contre, pour une loi de retour "d'état partiel" de la forme $u(t) = K(\nabla)x(t)$ (ici nous considérons la représentation sur anneau présentée au premier chapitre), les conditions de placement de spectre fini sont nettement plus contraignantes. Ainsi, dans

le cas mono-entrée ($u(t)$ scalaire), il faut et il suffit [85] que la matrice

$$[B(\nabla), A(\nabla)B(\nabla), \dots, A^{n-1}(\nabla)B(\nabla)]$$

soit inversible sur l'anneau $\mathbb{R}[\nabla]$. Une condition suffisante peut être établie : le déterminant de cette matrice doit être constant (indépendant de ∇) et non nul.

Le problème de placement de spectre est lié à la caractérisation structurelle des systèmes linéaires à retards en terme de commandabilité et d'observabilité. Les détails sur ces sujets peuvent être trouvés dans des travaux comme [13, 14, 29, 48, 95, 96, 107, 108, 110] et les références incluses.

V.1.2 Approche H_∞

L'approche H_∞ consiste à réaliser une loi de commande qui optimise les performances du système en boucle fermée dans le cas le plus défavorable. En général, on désire que la norme H_∞ de la fonction de transfert entre l'entrée de perturbation et la sortie soit inférieure à une valeur prédéfinie. Soit $\mathcal{H}_\infty$ l'espace de Hardy [99] c'est-à-dire l'espace de Banach¹ des fonctions matricielles analytiques dans le demi-plan complexe droit $\mathbb{C}^+$ et soit $M(s) \in \mathcal{H}_\infty$, alors $H_\infty(M(s)) = \sup_{s \in \mathbb{C}^+} \{\bar{\sigma}(M(s))\}$ où $\bar{\sigma}(M(s))$ est la valeur singulière maximale de $M(s)$. Considérons le système à entrée non retardée :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + Bu(t) + H\omega(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{V.6})$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est la variable étudiée, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ la commande, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie et $\omega \in \mathcal{L}_2[0, \infty[$ les perturbations additives.

Le problème de commande H_∞ de ce système peut se formuler ainsi : trouver une loi

¹Banach Stefan (1892-1945). Mathématicien polonais. Après des études à l'Institut Polytechnique de Lwów, il fonde avec son professeur Steinhaus l'Ecole de Mathématiques de Lwów. En 1919 il enseigne à l'Institut Polytechnique et, à partir de 1922 à l'Université de Lwów. Son oeuvre mathématique est considérable ; il est l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle.

de commande $u(t)$ telle que

- 1) quand les perturbations sont nulles le système en boucle fermée soit asymptotiquement stable ;
- 2) quand les conditions initiales sont nulles, on ait $\|y(t)\|_2 < \gamma \|\omega(t)\|_2$ où γ est une constante positive donnée.

Cette deuxième propriété s'exprime encore par $\|W_{y,\omega}(s)\|_2 < \gamma^2$ (confère [99]) où $W_{y,\omega}(s)$ est la matrice de transfert entre les perturbations et la sortie.

Des travaux concernant cette approche pour la stabilisation des systèmes à retards peuvent être consultés dans [49, 74, 99, 145] et les références qui s'y trouvent. Ils conduisent essentiellement à des équations de Riccati. Ces travaux concernent en général des entrées non retardées et un état retardé de façon ponctuelle.

V.1.3 Commande sous contraintes, linéarisation entrée-sortie

Dans la pratique, la variable dont on étudie le comportement et/ou la commande peuvent être contraintes à évoluer dans des domaines préfixés. Ceci conduit à des problèmes de stabilisation sous contraintes. Dans [124, 125] le problème de commande saturée des systèmes linéaires à retards est abordé pour des entrées non retardées. Dans le cas non linéaire, les méthodes de comparaison peuvent aussi s'appliquer dans le cas des entrées non retardées comme dans le cas des entrées retardées. Des formulations détaillées et des références relatives à ce problème sont également données dans chacune de ces références [23, 33, 27, 124, 125]. A notre connaissance ils n'ont pas été développés dans le cas des retards distribués.

D'autres approches comme la linéarisation entrée-sortie [87], le rejet de perturbations pour des systèmes mono-entrée mono-sortie [138], le découplage entrée-sortie par retour de sortie [109] pour les systèmes non linéaires à retard font l'objet de recherches actives en ce moment.

V.1.4 Bilan

Ces approches de stabilisation des systèmes héréditaires concernent essentiellement des systèmes linéaires stationnaires. Les lois de commande intégrant des retards distribués permettent d'assigner un spectre fini à certains de ces systèmes. L'approche H_∞ permet l'atténuation des perturbations sur un système linéaire stationnaire mais n'a essentiellement été développé que dans le cas des retards ponctuels sur l'état et sans retard sur la commande. Les approches sous contraintes n'ont concerné que des retards ponctuels, le plus souvent dans le cas d'une loi de commande non retardée. Ainsi, toutes ces techniques sont limitées par les faits suivants :

- D'une part beaucoup de systèmes rencontrés dans la pratique sont non linéaires ou linéaires avec des retards variables.
- D'autre part, dans la plupart des systèmes de l'ingénieur, les retards affectent les actionneurs (ou les capteurs, ce qui revient au même problème en boucle fermée).
- Même si la commande n'est pas retardée, il peut être intéressant d'ajouter volontairement un retard : certaines fois, un système non stabilisable par un retour non retardé peut l'être par un retour retardé. Considérons le système oscillatoire suivant [1]

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = u(t), \quad y(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}.$$

Ce système est facilement stabilisable par la loi $u(t) = -k \dot{y}(t)$ qui suppose soit la différentiation de la sortie $y(t)$ soit la mesure ou la construction d'un observateur de $\dot{y}(t)$. Par contre si on dispose de $y(t)$ sur un intervalle $[t-h, t]$, on peut réaliser un retour de la forme $u(t) = y(t-h)$ pour lequel on montre [1] que certaines valeurs de h assurent la stabilité asymptotique de y . Bien-sûr $h = 0$ n'en fait pas partie. Ceci signifie donc que le retard peut avoir un effet stabilisateur. Un résultat similaire est montré [5] dans le cas non linéaire. Le classique prédicteur de Smith est aussi un exemple d'utilisation positive du retard.

- Enfin, nous avons largement insisté sur l'intérêt des retards distribués, que ce soit dans la phase de modélisation (Chapitre I, Section I.1) ou dans la synthèse d'une loi de commande (sections précédentes).

Dans ce qui suit, nous allons nous baser sur les résultats établis dans les chapitres précédents pour concevoir des lois de commande en vue de la stabilisation de certains systèmes non linéaires à retards ; les non-linéarités étant considérées comme des incertitudes de modèles.

V.2 Stabilisation des systèmes à retards non linéaires

Les développements que nous allons entreprendre dans cette partie reposent sur les résultats contenus dans [126, 127]. Ces résultats considérés dans le cas général figurent dans l'*Annexe 3* et nous présenterons uniquement le cas linéaire stationnaire incertain avec des retards constants, l'extension au cas non linéaire avec des retards variables ne posant pas de problèmes particuliers.

Soit le système linéaire stationnaire incertain

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + f(t, x_t) + Du(t) \quad (\text{V.7})$$

où x_t est l'état et $x(t) \in \mathbb{R}^n$, sa valeur à l'instant t ; $u(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ représente le vecteur de commande ; $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sont des matrices constantes et $f(t, x_t)$ une fonctionnelle (non linéaire en général) représentant l'ensemble des incertitudes de modèle du système, et telle que (V.7) ait une solution pour toute condition initiale.

On distinguera comme au Chapitre IV (voir aussi [5] et les références qui s'y trouvent) les deux types d'incertitudes structurées ou non structurées :

- incertitudes structurées : on suppose qu'il existe deux matrices F et G à coefficients

positifs telles que

$$|f(t, x_t)| \leq F |x(t)| + G |x(t - \tau)|, \quad F, G \in \mathbb{R}_+^{n \times n}; \quad (\text{V.8})$$

- incertitudes non structurées : ici on suppose qu'il existe deux réels positifs α et β tels que

$$\|f(t, x_t)\| \leq \alpha \|x(t)\| + \beta \|x(t - \tau)\|, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+. \quad (\text{V.9})$$

Il s'agit alors de trouver une loi d'évolution de u qui garantisse la stabilité asymptotique de la solution nulle de (V.7) quelles que soient les incertitudes de modèles vérifiant (V.8) ou (V.9). Dans les paragraphes suivants nous allons passer en revue quelques lois de stabilisation valables pour (V.7).

V.2.1 Stabilisation par retour de la valeur instantanée de l'état

On considère ici une loi de commande de la forme

$$u(t) = k(x(t))$$

et dans le cas des systèmes linéaires stationnaires incertains ou non, une loi linéaire

$$u(t) = Kx(t).$$

Cette technique est encore appelée commande sans mémoire du fait que le passé du système n'est pas considéré dans l'élaboration de la loi de stabilisation. Elle a été largement utilisée pour la stabilisation et la stabilisation robuste des systèmes à retards discrets [73, 74, 77, 81, 82, 83, 84, 100, 106, 119]. Les résultats sont souvent présentés en termes d'équations de Riccati.

Pour cette loi de commande, la matrice A joue un rôle important. Par exemple si

nous voulons utiliser le critère de Mori [93] pour vérifier que le système en boucle fermée

$$\dot{x}(t) = (A + DK)x(t) + Bx(t - \tau) + f(t, x_t) \quad (\text{V.10})$$

est stable, il faut s'assurer au préalable que la paire (A, D) soit stabilisable. En effet le critère s'écrit

$$\mu(A + DK) + \|B\| + \alpha + \beta < 0$$

et donc il est impératif de pouvoir rendre suffisamment négatif le terme $\mu(A + DK)$. Si la paire (A, D) n'est pas stabilisable on ne pourra pas vérifier la stabilisation du système par le critère de Mori, même si $(A + B, D)$, qui représente le cas où le retard est négligé, est stabilisable.

V.2.2 Stabilisation par retour de la valeur retardée de l'état

Comme nous l'avons signalé plus haut, l'introduction du retard dans le retour peut être inévitable ou peut avoir un effet stabilisateur. Dans ce cas, la commande u est une fonction de la valeur prise par l'état du système à l'instant t en un instant antérieur $t - \tau_1$ c'est-à-dire une loi de stabilisation de la forme $u(t) = k(x(t - \tau_1))$ ($\tau_1 < \tau$) et dans le cas linéaire stationnaire

$$u(t) = Kx(t - \tau_1). \quad (\text{V.11})$$

Peu d'auteurs ont utilisé cette forme pour stabiliser des systèmes à retards. Dans [50], une loi de la forme

$$u(t) = K_1x(t) + K_2x(t - \tau_1) \quad (\text{V.12})$$

déterminée par la technique H_∞ est employée pour stabiliser un système linéaire incertain. Les résultats sont présentés en terme de résolution d'équations de Riccati ou d'inégalité matricielle linéaire (LMI).

Avec la loi de commande (V.11), le système (V.7) en boucle fermée s'écrit

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + DKx(t - \tau_1) + f(t, x_t). \quad (V.13)$$

Ici nous allons utiliser le fait qu'en l'absence de retard, le système nominal est un système ordinaire de matrice $A + B$ et l'on suppose que la paire $(A + B, D)$ est stabilisable. En faisant les transformations opérées dans [5] et dans les chapitres précédents, ce système peut être réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (A + B + DK)x(t) - BA \int_{t-\tau}^t x(s)ds - B^2 \int_{t-\tau}^t x(s - \tau)ds - \\ & BDK \int_{t-\tau}^t x(s - \tau_1)ds - B \int_{t-\tau}^t f(s, x_s)ds - \\ & DKA \int_{t-\tau_1}^t x(s)ds - DKB \int_{t-\tau_1}^t x(s - \tau)ds - \\ & (DK)^2 \int_{t-\tau_1}^t x(s - \tau_1)ds - DK \int_{t-\tau_1}^t f(s, x_s)ds + f(t, x_t). \end{aligned} \quad (V.14)$$

En appliquant les résultats des chapitres précédents (Théorème IV.1) sur cette nouvelle représentation du système (V.7), on montre la proposition ci-dessous.

Proposition V.2 *La solution nulle du système (V.7) sous incertitudes (V.8) ou (V.9) est robustement stabilisée par la loi de commande (V.11) s'il existe une matrice K telle que*

- 1) *dans le cas des incertitude structurées (V.8) la matrice suivante est de Hurwitz :*

$$\begin{aligned} & [A + B + DK]^+ + \tau \{ |BA| + |B^2| + |BDK| + |B| (F + G) \} + \\ & \tau_1 \{ |DKA| + |DKB| + |DK| (F + G) + |(DK)^2| \} + F + G \end{aligned} \quad (V.15)$$

- 2) *dans le cas des incertitudes non structurées (V.9), on a*

$$0 > \mu [A + B + DK] + \tau \{ \|BA\| + \|B^2\| + \|BDK\| + \|B\| (\alpha + \beta) \} +$$

$$\tau_1 \{ \|DKA\| + \|DKB\| + \|(DK)^2\| + \|DK\|(\alpha + \beta) \} + \alpha + \beta. \quad (\text{V.16})$$

Preuve : Il suffit d'appliquer les Théorèmes IV.14 et IV.15 au système (V.13) ■

Remarque V.2 *Un retour de la valeur instantanée du retard (c'est-à-dire $\tau_1 = 0$) aurait donné respectivement les conditions*

$$[A + B + DK]^+ + \tau \{ |BA| + |B^2| + |BDK| + |B|(F + G) \} + F + G \text{ est de Hurwitz ;} \quad (\text{V.17})$$

et

$$\mu[A + B + DK] + \tau \{ \|BA\| + \|B^2\| + \|BDK\| + \|B\|(\alpha + \beta) \} + \alpha + \beta < 0. \quad (\text{V.18})$$

Ces conditions sont moins sévères que celles de la proposition précédente. Cependant elles sont peut être moins réalistes car on a vu que dans nombre de cas il n'est pas possible d'éviter le retard sur la commande du fait de la transmission de l'information et par conséquent la proposition V.2 permet d'estimer le retard τ_1 dû aux capteurs, actionneurs ou temps de calcul, qui peut être toléré en pratique.

V.2.3 Stabilisation par retour d'état : approche par retard distribué

Soit k une fonctionnelle de $\mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$k : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^m, (t, x_t) \rightarrow k(t, x_t).$$

Nous désignons par retour d'état une loi d'évolution de la commande qui à chaque instant t associe $u(t)$ donnée par

$$t \rightarrow u(t) = k(t, x_t)$$

où x_t est l'état du système à l'instant t . Dans le cas linéaire stationnaire, on aura une loi linéaire

$$t \rightarrow u(t) = \mathcal{K}x_t, \quad \mathcal{K} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^m)$$

où $\mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^m)$ est l'ensemble des opérateurs linéaires de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^m$.

Dans la littérature concernant la stabilisation [3, 9, 13, 49, 150, 145] et les références qui s'y trouvent, le retour d'état le plus souvent utilisé est réalisé sous la forme

$$u(t) = \mathcal{K}x_t = K_0x(t) + \sum_{i=1}^N K_i x(t - h_i) + \int_{-\tau}^0 dK(s)x(t + s). \quad (\text{V.19})$$

La plupart des résultats existants, mis à part ceux relatifs au placement de spectre fini dans le cas des systèmes linéaires stationnaires, sont basés sur les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii donnant lieu à des critères en terme d'équations de Riccati et sont indépendants de la taille du retard. Ces résultats requièrent souvent que le système sans retard soit stable. Ici nous allons utiliser le principe de comparaison pour établir des conditions de stabilisation de (V.7) par une loi de la forme (V.19) plus particulière

$$u(t) = \mathcal{K}x_t = \int_{-\tau}^0 K(s)x(t + s)ds. \quad (\text{V.20})$$

Ces conditions seront dépendantes de la taille du retard. Le système (V.7) bouclé par (V.20) est

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + D \int_{-\tau}^0 K(s)x(t + s)ds + f(t, x_t). \quad (\text{V.21})$$

En utilisant les identités

$$x(t - \tau) = x(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(u)du \quad ; \quad x(t + s) = x(t) - \int_{t+s}^t \dot{x}(u)du$$

on peut réécrire (V.21) sous la forme

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) = & \left[A + B + \int_{-\tau}^0 DK(s)ds \right] - BA \int_{t-\tau}^t x(u)du - B^2 \int_{t-\tau}^t x(u-\tau)du \\
& - B \int_{t-\tau}^t du \int_{-\tau}^0 DK(s)x(u+s)ds - B \int_{t-\tau}^t f(u, x_u)du \\
& - \int_{-\tau}^0 DK(s)Ads \int_{t+s}^t x(u)du - \int_{-\tau}^0 DK(s)Bds \int_{t+s}^t x(u-\tau)du \\
& - \int_{-\tau}^0 DK(s)ds \int_{t+s}^t du \int_{-\tau}^0 DK(v)x(u+v)dv \\
& - \int_{-\tau}^0 DK(s)ds \int_{t+s}^t f(u, x_u)du + f(t, x_t)
\end{aligned}$$

et utiliser les résultats des chapitres précédents (Théorème IV.1) pour démontrer la proposition suivante.

Proposition V.3 *La solution nulle du système (V.7) sous incertitudes (V.8) ou (V.9) est robustement stabilisée par la loi de commande (V.20) s'il existe une matrice $K : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ à coefficients continus par morceaux telle que*

1) *dans le cas des perturbation structurées (V.8), la matrice suivante est de Hurwitz*

:

$$\begin{aligned}
& \left[A + B + \int_{-\tau}^0 DK(s)ds \right]^* + \tau \left\{ |BA| + |B^2| + \int_{-\tau}^0 |BDK(s)|ds + |B|(F + G) \right\} \\
& - \int_{-\tau}^0 s |DK(s)A|ds - \int_{-\tau}^0 s |DK(s)B|ds - \left(\int_{-\tau}^0 |DK(v)|dv \right) \left(\int_{-\tau}^0 s |DK(s)|ds \right) \\
& - \left(\int_{-\tau}^0 s |DK(s)|ds \right) (F + G) + F + G
\end{aligned} \tag{V.22}$$

2) *dans le cas des perturbations non structurées (V.9),*

$$\begin{aligned}
0 > & \mu \left(A + B + \int_{-\tau}^0 DK(s)ds \right) + \tau \left\{ \|BA\| + \|B^2\| + \int_{-\tau}^0 \|BDK(s)\|ds + \|B\|(\alpha + \beta) \right\} \\
& - \int_{-\tau}^0 s \|DK(s)A\|ds - \int_{-\tau}^0 s \|DK(s)B\|ds - \left(\int_{-\tau}^0 \|DK(v)\|dv \right) \left(\int_{-\tau}^0 s \|DK(s)\|ds \right)
\end{aligned}$$

$$- \left(\int_{-\tau}^0 s \|DK(s)\| ds \right) (\alpha + \beta) + \alpha + \beta. \quad (\text{V.23})$$

Preuve : Il suffit d'appliquer les Théorèmes IV.14 et IV.15 au système (V.21) ■

Remarque V.3 *On peut aussi considérer une loi de la forme*

$$u(t) = \int_{-\tau(t)}^{-\nu(t)} Kx(t+s)ds, \quad \tau_m \geq \tau(t) > \nu(t) \geq 0 \quad (\text{V.24})$$

dans laquelle on peut interpréter $\nu(t)$ comme le temps nécessaire pour délivrer la commande à chaque instant [126].

Exemple V.1 *Soit le système scalaire*

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - \tau) + du(t) + f(t, x_t) \text{ avec } |f(t, x_t)| \leq \alpha |x(t)| \quad (\text{V.25})$$

Considérons un retour de sortie à retard ponctuel de la forme (V.11) $u(t) = kx(t - \tau_1)$, alors la solution nulle du système bouclé est asymptotiquement stable s'il existe k négatif tel que

$$a + b + dk + \tau |b| \{|a| + |b| + |dk| + \alpha\} + \tau_1 |dk| \{|a| + |b| + |dk| + \alpha\} + \alpha < 0. \quad (\text{V.26})$$

Si on utilise un retour d'état "complet" $u(t) = \int_{-\tau}^0 kx(t+s)ds$ alors la solution nulle du système bouclé par ce retour est asymptotiquement stable si k vérifie

$$0 > a + b + \tau kd + \tau |b| \{|a| + |b| + \tau |dk| + \alpha\} + \frac{\tau^2}{2} |dk| \{|a| + |b| + \tau |dk| + \alpha\} + \alpha. \quad (\text{V.27})$$

Remarque V.4 *En utilisant la construction de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii en plusieurs étapes d'une part et les transformations de modèles utilisées dans le quatrième chapitre d'autre part, on peut obtenir plusieurs types de critères sous formes d'équations de Riccati. La difficulté en général réside dans le fait que les critères obtenus*

par cette procédure ou par le principe de comparaison sont non linéaires en la matrice de commande K . L'approche LMI peut être une alternative intéressante.

V.3 Observateurs asymptotiques

Afin de réaliser les lois de commande passées en revue dans ce chapitre, il faut pouvoir disposer de l'état x_t ou de sa valeur à l'instant t ou en un instant antérieur à t . C'est le problème de l'observation, problème très bien connu en automatique ; en effet dans la pratique on ne capte que rarement toutes les variables à l'instant t et il faut trouver un procédé qui, à partir des mesures disponibles à l'instant t et des entrées, fournit une estimation des variables manquantes. On peut trouver les résultats relatifs à l'observabilité et plus généralement au problème d'analyse structurelle dans des travaux comme [29, 48, 95, 96, 107, 108, 110].

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t-\tau) \end{cases}, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad y(t) \in \mathbb{R}^p, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m \quad (\text{V.28})$$

où $y(t)$ est la sortie disponible du système à l'instant t . Le retard τ peut être dû au temps de transmission à travers les chaînes de mesure. Il s'agit alors de résoudre le problème suivant : étant données les fonctions y_t , u_t et les dynamiques du système, estimer l'évolution de la fonction x_t . Un tel reconstruteur aura comme entrée la sortie du système réel $y(t) = Cx(t-\tau)$ et la commande $u(t)$ et comme sortie la valeur de l'état observé $\bar{x}(t)$ à l'instant t de telle sorte que l'erreur $\tilde{x}(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ tende asymptotiquement vers 0. Ce mécanisme est appelé un *observateur asymptotique*. Cette partie est consacrée à la réalisation d'un tel observateur pour le système (V.28). Nous supposons ici que la paire $(A_0 + A_1, C)$ est observable.

Soit $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ une matrice constante, considérons le système suivant

$$\dot{\bar{x}}(t) = A_0 \bar{x}(t) + A_1 \bar{x}(t-h) + Bu(t) - K(y(t) - C \bar{x}(t-\tau)). \quad (V.29)$$

Alors, en appliquant les résultats obtenus dans les sections précédentes (proposition V.2), on montre la proposition ci-dessous.

Proposition V.4 *Si la matrice K est telle que*

$$\begin{aligned} 0 &> \mu(A_0 + A_1 + KC) + h \{ \|A_1 A_0\| + \|A_1^2\| + \|A_1 KC\| \} \\ &\quad + \tau \{ \|KCA_0\| + \|KCA_1\| + \|(KC)^2\| \} \end{aligned} \quad (V.30)$$

alors le système (V.29) est un observateur asymptotique de (V.28).

Preuve : En considérant (V.29) et (V.28), on montre que l'erreur $\tilde{x}(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ évolue suivant l'équation

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A_0 \tilde{x}(t) + A_1 \tilde{x}(t-h) + KC \tilde{x}(t-\tau) \quad (V.31)$$

et par conséquent si l'inégalité (V.30) est vérifiée alors la solution nulle de (V.31) (d'après le point 2) de la proposition V.2 avec $\alpha, \beta \equiv 0$) est asymptotiquement stable ■

V.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons passé en revue quelques méthodes de stabilisation des systèmes à retards. Les résultats établis dans les chapitres précédents nous ont permis de concevoir des lois de commande de différents types : par retour de la valeur instantanée de l'état, par retour de la valeur de l'état en un instant antérieur, et par retour d'état complet en terme de retard distribué. Les résultats établis font intervenir tous les paramètres du système, et notamment la taille du retard, et sont robustes vis à vis des incertitudes paramétriques structurées ou non.

La commande par retour d'état est directement liée à la possibilité d'observation de l'état. Le problème d'observation a donc été considéré dans la dernière section et il a été montré que les résultats de stabilité obtenus par application du principe de comparaison peuvent aussi être employés pour concevoir un observateur asymptotique pour un système à retards.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons considéré les systèmes héréditaires et rappelé leur importance dans beaucoup de domaines des sciences naturelles et des techniques de l'ingénieur. Nous nous sommes ici intéressés à l'étude de la stabilité de tels systèmes, propriété étudiée sous ses aspects qualitatifs (stabilité ou instabilité) et quantitatifs (attracteurs, domaines d'attraction) en tenant compte de l'aspect "dimension infinie" de leur description d'état.

En particulier des résultats concernant une classe de systèmes non linéaires, de type neutre ont été obtenus dans le Chapitre *III*. Jusqu'à présent, les critères existants pour ces modèles s'intéressaient de façon qualitative à la propriété de stabilité. Les systèmes de comparaison "dégénérés" qui ont été définis pour cette classe de systèmes (une méthode systématique de construction de systèmes de comparaison dégénérés a été donnée) conduisent à une caractérisation "quantitative" de la stabilité en termes de stabilité pratique et d'attracteurs. De plus la propriété de robustesse vis-à-vis des variations paramétriques (du modèle ou des retards) ou additives peut être prise en compte par ces critères.

Ces résultats sur les systèmes neutres peuvent être améliorés en travaillant au relâchement des hypothèses posées à cet effet : nous pensons pouvoir remplacer la condition (III.9) du Chapitre *III* par une condition du type :

$$V(F_1(t, x_t)) \leq N_1(t)V(x_t(0)) + N_2(t)V(x_t(-h)), \forall t \geq t_0, \forall x_t \in \mathcal{C}(\mathcal{D}) \quad (\text{V.32})$$

qui est beaucoup plus facile à obtenir et conduit à un système de comparaison retardé (et non plus ordinaire) (voir conclusion du Chapitre *III*).

Par ailleurs, nous avons pu définir d'autres critères de stabilité valables dans le cas des modèles retardés, linéaires ou non, à retards distribués ou ponctuels. Ces résultats originaux présentés dans le Chapitre *IV* ont été obtenus en appliquant le principe de comparaison et la construction multi-étapes de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii. Des transformations de modèles ont également été définies et ont montré la possibilité d'amélioration des résultats selon le choix de transformation effectué. Là encore, la

robustesse peut être caractérisée vis-à-vis des paramètres du modèle, ceci incluant des variations des retards.

L'aboutissement d'une telle étude réside bien sûr dans la définition de lois de commande stabilisante : ce point a été abordé dans le dernier chapitre, montrant que les résultats concernant la stabilité des systèmes à retards distribués peuvent être appliqués à la conception d'une commande stabilisante robuste en boucle fermée par retour d'état "partiel" ou "complet". Ces résultats sont également appliqués à la conception d'observateurs asymptotiques de ces systèmes avec la sortie retardée.

Le dernier chapitre constitue ainsi une introduction à l'un des axes vers lequel ce travail peut être prolongé : la commande et l'observation des systèmes héréditaires. En effet les techniques de transformation de modèles présentées dans le Chapitre IV pourraient permettre de concevoir des observateurs et des lois de commande par retour d'état pour modifier de manière robuste les dynamiques d'une classe des systèmes à retards (discrets et/ou distribués). La résolution des équations de Riccati obtenues par application des méthodes de Lyapunov-Krasovskii peut être abordée par une approche *LMI*. Ce travail est en cours d'étude.

Bibliographie

- [1] Abdallah G., Dorato P., Benitez-Read J., Byrne R. (1993). Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems, *Proceedings of American Control Conference*, pp. 3106-3107.
- [2] Analyse et commande des systèmes avec retards, *Actes du colloque Analyse et Commande des Systèmes avec Retards*, Ecole des Mines de Nantes, 21-22 mars 1996.
- [3] Azuma T., Kondo T.F., Uchida K.(1998). Memory state feedback control synthesis for linear systems with time delay via a finite number of linear matrix inequalities, *Preprints of the First IFAC International Workshop, Linear Time Delay Systems, LTDS98*, pp. 183-187, July 6-7, Grenoble, France.
- [4] Baker C.T.H., Tang A. (1998). Stability of Grazing Systems with Infinite Delays, *Mathematics and Computers in Simulation*, **Vol. 45**, pp. 309-317.
- [5] Bartholoméüs-Goubet A. (1996). Sur la Stabilité et la Stabilisation des Systèmes Retardés : Critères Dépendant des Retards, *Thèse de Doctorat*, Université des Sciences et Technologies de Lille, **No. 1910**.
- [6] Bellman R. (1962). Vector Lyapunov Functions, *SIAM J. Control*, **Serie A, 1(1)**, pp. 32 - 34.
- [7] Bellman R., Cooke K. L. (1963). Differential-Difference Equations, Academic Press, New York, London.

- [8] Bensoussan A., Da Prato G., Delfour M.C., Mitter S.K. (1992). Representation and Control of Infinite Dimensional Systems, **Vol. I**, Birkhäuser.
- [9] Borkovskaya I.M., Marchenko V.M. (1996). An Approach to the Problem of Stabilizing Systems with Delay, *J. Appl. Maths Mechs*, **Vol. 60, No.4**, pp. 529-539.
- [10] Borne P., Dauphin-Tanguy G., Richard J.P., Rotella F., Zambettakis I. (1993). Analyse et régulation des processus industriels, **Tome 1**, Editions Technip.
- [11] Borne P., Richard J.P., Radhy N.E. (1996). Stability, stabilization, regulation using vector norms, dans Fossard A.J., Normand-Cyrot (Eds), *Nonlinear Systems*, **Vol. Stability and stabilization**, pp. 45-90, Chapman & Hall.
- [12] Boyd L., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan (1994). Linear matrix inequalities in system and control theory, **SIAM Studies in Applied Mathematics**, SIAM.
- [13] Brethé D. (1997). Contribution à l'étude de la stabilisation des systèmes linéaires à retards, *Thèse de Doctorat*, Université de Nantes.
- [14] Brethé D., Loiseau J.J. (1996). A result that could bear fruit for the control of delay-differential systems, *Proceedings of the 4th IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation*, pp. 168-172, Krete, Greece.
- [15] Burton T. A. (1983). The Volterra integral and differential equations, Academic Press, New York.
- [16] Burton T. A. (1985). Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations, Academic Press, Orlando, **Vol. 178**.
- [17] Chabat B. (1990). Introduction à l'analyse complexe, Editions Mir, Moscou.
- [18] Choi H.H., Chung M.J. (1997). Comments on "Quadratic Stabilization of Continuous Time Systems with State-Delay and Norm-Bounded Time-Varying Uncertainties", *IEEE Trans. Aut. Control*, **Vol. 42, No. 12**, pp. 1740-1742.

- [19] Cotsaftis M. (1997). Comportement et contrôle des systèmes complexes, introduction aux méthodes algébriques, qualitatives et fonctionnelles, Diderot Mutimédia, Paris.
- [20] Cryer C. W. (1972). Numerical methods for functional differential equations, in "Delay and functional differential equations and their applications", Academic Press, NY.
- [21] Cushing J. M. (1977). Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamic, *Lecture Notes in Biomathematics*, Springer-Verlag.
- [22] Dambrine M. (1994). Contribution à l'étude de la stabilité des systèmes à retards, *Thèse de Doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille*.
- [23] Dambrine M., Richard J.P., Borne P. (1995). Feedback control of time-delay systems with bounded control and state, *MPE*, **Vol. 1**, pp. 77-87.
- [24] Dambrine M., Richard J.P. (1997). Comparison Principle for Functional Differential Equations, *Proceedings of 15th IMACS World Congress*, August 24-29, Berlin.
- [25] Datko R. (1978). A procedure for determination of the exponential stability of certain differential-difference equations, *Quarterly of Applied Mathematics*, October 1978.
- [26] Debeljković, D.Lj., Larević M.P., Milinković S.A., Janović M.B. (1998). Finite time stability analysis of linear time delay systems : Bellman-Gronwal approach, *Preprints of First IFAC International Workshop, Linear Time Delay Systems, LTDS98*, pp. 171 - 176, July 6-7, Grenoble, France.
- [27] Dugard L., Verriest E.I. (Eds) (1997). Stability and control of time-delay systems, *Lecture Notes in Control & Inform. Sc.*, Vol. No. 228, Springer Verlag.
- [28] El'sgol'ts L. E., Norkin S. B. (1973). Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments, Academic Press, New York.

- [29] Fliess M., Mounier H. (1995). Interpretation and comparison of various types of delay systems controllabilities, *Proceedings of IFAC Conf. Structure and Control*, pp. 330 - 335, Nantes, France.
- [30] Gardiol F., *Traité d'électricité, Vol. III, Electromagnétisme*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1996.
- [31] Gopalsamy K. (1992). Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics, *Mathematics and Its Application*, **Vol.74**, Kluwer Acad. Pub.
- [32] Gorecki H., Fuksa S., Grabowski P. and Korytowski A. (1989). Analysis and synthesis of time delay systems, John Wiley & Sons.
- [33] Goubet-Bartholoméüs A., Dambrine M., Richard J.P. (1996). Bounded domains and constrained control of time-delay systems, *Actes du colloque : Analyse et commande des systèmes avec retards*, pp. 137-155, 21-22 mars, Nantes, France.
- [34] Goubet-Bartholoméüs A., Dambrine M. and Richard J.P. (1997). Practical stability of nonlinear time-varying delay systems, *Proceedings of IFAC-IFIP-IMACS Conference on Control of Industrial Systems, CIS'97*, **Vol. 2/3**, pp 377-382, 20 - 22 May 1997, Belfort, France.
- [35] Goubet-Bartholoméüs A., Dambrine M., Richard J.P. (1997). Stability of perturbed systems with time-varying delay, *Systems & Control Letters*, **No.31**, pp. 155-163.
- [36] Grujić Lj.T. (1973). On practical stability, *Int.J.Control*, **Vol. 22, No. 4**, pp. 881-887.
- [37] Grujić Lj.T., Martynyuk A.A., Ribbens-Pavella M. (1987). Large Scale Systems Stability under Structural and Singular Perturbations, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag.

- [38] Grujić Lj.T., Gentina J.C., P. Borne (1976). General aggregation of large-scale systems by vector Lyapunov functions and vector norms, *Int. J. Control*, **Vol. 24**, **No. 4**, pp. 529-550.
- [39] Grujić Lj.T. (1975). Novel development of Lyapunov stability of motion, *Int. J. Cont.*, **22**, **No. 4**, pp. 529-549.
- [40] Halanay A. (1966). Differential Equations, Stability, Oscillations, Time Lags, Academic Press, NY, London.
- [41] Hale J. K. (1977). Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag.
- [42] Hale J. K., Verduyn Lunel S. M. (1991). Introduction to functional differential equations, **Applied Math. Sciences**, **99**, Springer-Verlag.
- [43] Hahn W. (1967). Stability of motion, Springer-Verlag.
- [44] Hertz D., Jury E. I., Zeheb E. (1984). Stability independent and dependent of delay for delay differential systems, *J. of the Franklin Institute*, **Vol. 318**, **No 3**, pp 143 - 150.
- [45] Hertz D., Jury E. I., Zeheb E. (1984b). Simplified analytic stability test for systems with commesurate time delays, *IEE proceedings*, **Vol. 131**, **part D**, **No 1**, pp 52 - 56.
- [46] Israel G. (1996). La mathématisation du réel, Editions du Seuil, Paris.
- [47] Izmailov R.(1996). Analysis and Optimization of Feedback Control Algorithms for Data Transfers in High-Speed Networks, *SIAM J. Control and Optimization*, **Vol. 34**, **No. 5**, pp. 1767-1780.
- [48] Karrakchou J., Rachik M., Namir A. (1995). Une nouvelle approche pour la contrôlabilité des systèmes à retard, *Proceedings of IFAC Conf. Systems Structure and Control*, pp. 336-342, Nantes, France.

- [49] Kojima A., Ishijima S. (1996). H^∞ Control for Delay Systems: Explicit Formulas and Game-theoretic Interpretations, *Proceedings of 35th. IEEE Conf. Dec. & Control*, Kobe, Japan, pp. 2103-2109.
- [50] Kokame H., Konishi K., Mori T. (1996). Robust H^∞ Control for Linear Delay-Differential Systems with Time-Varying Uncertainties, *Proceedings of 35th IEEE Conf. Decision and Control*, pp. 2097 - 2102, December, Kobe, Japan.
- [51] Kolmanovskii, V.B (1995). Stability of some nonlinear functional differential equations, *J. Nonlinear Differential Equations*, **No 2**, pp. 185-198.
- [52] Kolmanovskii V.B., Richard J.P. (1998). Stability of systems with pure, discrete multi-delays, *Preprints of IFAC Conference on Systems Structure and Control, SSC'98*, pp. 13-18, Nantes, France.
- [53] Kolmanovskii V.B., Richard J.P. (1998). Stability of some linear systems with delays, *IEEE Transactions on Automatic Control* (à paraître).
- [54] Kolmanovskii V. B. (1995a). The stability of certain retarded systems with variable coefficients, *J. Appl. Maths Mechs*, **Vol. 59, No. 1**, pp. 65-74.
- [55] Kolmanovskii V. B. (1995b), Stability of some nonlinear functional differential equations, *NoDEA*, Vol. 2, pp 185 - 198.
- [56] Kolmanovskii V.B., J.P. Richard, A.P. Tchangani (1998a). Some model transformation for the stability study of linear systems with delay, *Preprints of First IFAC International Workshop, Linear Time Delay Systems, LTDS98*, pp. 75 - 80, July 6-7, 1998, Grenoble, France.
- [57] Kolmanovskii V.B., J.P. Richard, A.P. Tchangani (1998b). Stability of linear systems with discrete-plus-distributed delays : application of some model transformations, *MTNS'98, Invited session: FE4 Neutral Systems : delay effect and applications*.

- [58] Kolmanovskii V. B., Richard J.-P. (1997). Stability of some systems with distributed delay, *RAIRO-APII-JESA*, **Vol. 31-No. 6**, pp. 971 - 981.
- [59] Kolmanovskii V. B., Nosov V. R. (1979). Stability of neutral systems with a deviating argument, *PMM*, **Vol. 43, No. 2**, pp 227 - 236.
- [60] Kolmanovskii V. B., Nosov V. R. (1986). Stability of functional differential equations, Academic Press, New York, London.
- [61] Kolmanovskii V. B., Myshkis A. (1992). Applied theory of functional differential equations, *Mathematics and Its Applications*, Kluwer Acad. Pub.
- [62] Kolmanovskii V.B., Shaikhet L.E. (1996). Control of systems with aftereffect, American Mathematical Society, *RI*, **Vol. 157**.
- [63] Kolmanovskii V. B.(1996). The stability of hereditary systems of neutral type, *PMM*, **Vol. 60, No. 2**, pp. 205 - 216.
- [64] Kolmanovskii V.B. (1995). Applications of differential inequalities for stability of some functional differential equations, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, **Vol. 25, No. 9-10**, pp. 1017-1028.
- [65] Krasovskii N. N. (1956). On asymptotic stability of systems with aftereffect, *PMM*, **Vol. 20, No. 4**, pp. 513 - 518.
- [66] Krasovskii N. N. (1956). On asymptotic stability of systems with aftereffect, *PMM*, **Vol. 20, No. 4**, pp. 513 - 518.
- [67] Krasovskii N.N., Osipov Yu.S. (1963). Stabilization of the motions of a controlled system with delay in a regulation system, *Izv. Akad. Nauk SSSR Tekh. Kibernetika*, **6**, 3-15.
- [68] Krasovskii N. N. (1963). Stability of motion, Stanford University Press.

- [69] Kuang Y. (1993). Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics, *Mathematics in Science and Engineering*, **Vol. 191**, Academic Press, Inc.
- [70] Lakshmikantham V., Matrosov V. M., Sivasundaram S. (1991). Vector Lyapunov Functions and Stability Analysis of Nonlinear Systems, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.
- [71] Lakshmikantham V., Leela S. (1969). Differential and integral inequalities, **Vol. II**, Academic Press, New York.
- [72] LaSalle J., Lefschetz S. (1961). Stability by Lyapunov Direct Method, Academic Press, New York.
- [73] Lee C-H., Li T-H.S., Kung F-C. (1996). Robust stabilization of time-varying uncertain time-delay systems via memoryless feedback control, *J. Syst. Analysis Modelling Simul.*, **Vol. 22**, pp. 85-96.
- [74] Lee J-H., Moon Y.S., Kwon W.H. (1996). Robust H_∞ controller for state and input delayed systems with structured uncertainties, *Proceedings of 35th. IEEE Conf. Dec. & Control*, Kobe, Japan, pp. 2092-2096.
- [75] Linear Time Delay Systems, *Preprints of First IFAC International Workshop on Linear Time Delay Systems, LTDS98*, July 6-7, 1998, Grenoble, France.
- [76] Li-Ming Li (1988). Stability of linear neutral systems. *Bull. Austral. Math. Soc.*, **38**, pp. 339 - 344.
- [77] Li X., de Souza C. E. (1997). Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: a Linear Matrix Inequality approach, *IEEE Trans. Aut. Control*, **Vol. 42, No. 8**, pp. 1144-1148.
- [78] MacDonald N. (1978). Time Lags in Biological Models, *Lecture Notes in Biomathematics*, Springer-Verlag.

- [79] MacDonald N. (1989). Biological delay systems, Cambridge University Press, Cambridge.
- [80] Malek-Zavarei M., Jamshidi M. (1996). Time-delay systems, North- Holland.
- [81] Mahmoud M.S. (1996). Control design for retarded systems: a robust scheme, *J. Syst. Analysis Modelling Simul.*, **Vol. 22**, pp. 133-144.
- [82] Mahmoud M.S., Al-Muthairi N.F. (1994). Quadratic Stabilization of Continuous Time Systems with State-Delay and Norm-Bounded Time-Varying Uncertainties, *IEEE Trans. Aut. Control*, **Vol. 39**, **No. 10**, pp. 2135-2139.
- [83] Mahmoud M.S., Al-Muthairi N.F. (1994). Design of Robust Controllers for Time-Delay Systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, **Vol. 39**, **No. 5**, pp. 995-999.
- [84] Mahmoud M.S. (1994). Stabilizing Control for a Class of Uncertain Interconnected Systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, **Vol. 39**, **No. 12**, pp. 2484-2488.
- [85] Manitius A.Z. (1984). Feedback Controllers for a Wind Tunnel Model Involving a Delay: Analytical Design and Numerical Simulation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **Vol. AC-29**, **No. 12**, pp. 1058-1068.
- [86] Manitius A.Z., Olbrot A.W. (1979). Finite spectrum assignment problem for system with delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **Vol. AC-24**, **No. 4**, pp. 541-553.
- [87] Márquez-Martínez L.A., Moog C.H. (1998). On the input-output linearization for nonlinear time-delay systems, *Preprints of IFAC Conference on Systems Structure and Control, SSC'98*, pp. 575-580, Nantes, France.
- [88] Matrosov V. M. (1968 et 69). Comparisons principle and vector Lyapunov functions, I: *Diff. Uranh.*, **Vol. 4**, **No. 8**, pp. 1374-1386, (1968) ; II: *Diff. Uranh.*, **Vol. 4**, **No. 10**, pp. 1740-1752, (1968) ; III: *Diff. Uranh.*, **Vol. 5**, **No. 7**, pp. 1171-1185, (1969) ; IV: *Diff. Uranh.*, **Vol. 5**, **No. 12**, pp. 2128-2143, (1969).

- [89] Matrosov V. M. (1962). On the theory of stability of motion, *PMM*, **26**, pp. 992 - 1002.
- [90] Michel A. N., Miller R. K. (1977). Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems, Academic Press, New York.
- [91] Michel A. N., Wang K. (1995). Qualitative Theory of Dynamic Systems, The Role of Stability Preserving Mappings, Marcel Dekker.
- [92] Márquez-Martínez L.A., Moog C.H. (1998). On the input-output linearization for nonlinear time-delay systems, *Preprints of IFAC Conference on Systems Structure and Control, SSC'98*, pp. 575-580, Nantes, France.
- [93] Mori T; Fukuma N., Kuwahara M. (1981). Simple stability criteria for single and composite linear systems with time delays, *Int. J. Control*, **Vol.34, No.6**, pp. 1175 - 1184.
- [94] Morse A. S. (1997). Ring models for delay differential systems, *Automatica*, **12**, pp 529-531.
- [95] Mounier H. (1995). Propriétés structurelles des systèmes linéaires à retards : aspects théoriques et pratiques, *Thèse de Doctorat*, Université Paris Sud, France.
- [96] Mounier H., Rabah R. (1996). An algebraic interpretation of the exact controllability for linear delay systems, *Proceedings of 4th IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation*, pp. 699-703, Krete Greece.
- [97] Mounier H., Mboub M., Petit N., Rouchon P., Seret D. (1998). High speed network congestion control with a simplified time-varying delay, *Preprints of IFAC Conference on System Structure and Control*, pp. 43-47, Nantes, France.
- [98] Nemytskii V.V., Stepanov V.V. (1949). Qualitative Theory of Differential Equations, GITTL, (in Russian).

- [99] Niculescu S.-I. (1996). Sur la stabilité et la stabilisation des systèmes linéaires à états retardés, *Thèse de Doctorat*, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [100] Niculescu I., De Souza C.E., Dion J.-M., Dugard L. (1994). Robust stability and stabilization for uncertain linear systems with state delay: Single delay case (I), *Proceedings of IFAC Workshop on Robust Control Design*, Rio de Janeiro, Brazil, pp. 469-474.
- [101] Niculescu S. I. (1997). Systèmes à retards. Aspects qualitatifs sur la stabilité et la stabilisation, Diderot Multimédia, Paris.
- [102] Niculescu S.I., Trofino-Neto A., Dion J.M., Dugard L. (1995). Delay-dependent stability of linear systems with delayed state: an LMI approach. *Proceedings of 34th IEEE CDC'95*, New Orleans, Louisiana, pp. 1495-1505.
- [103] Osipov Yu.S. (1965): Stabilization of controlled system with delay, *Diff. Uravneniya*, **1**, **1**, 102-116.
- [104] Perruquetti W., Richard J.P., Borne P. (1995). Vector Lyapunov functions : recent developments for stability, robustness, practical stability and constrained control, *Nonlinear Times & Digest*, **No. 2**, pp. 227-258.
- [105] Perruquetti W., Richard J.P., Grujić Lj.T., Borne P. (1995). On practical stability with the settling time via vector norms, *Int. J. Control*, **Vol. 62, No.1**, pp. 173-189.
- [106] Phoojaruenchanachai S., Furuta K. (1992). Memoryless Stabilization of Uncertain Linear Systems Including Time-Varying State Delays, *IEEE Trans. Aut. Control*, **Vol. 37, No. 7**, pp. 1022-1026.
- [107] Picard P. (1996). Sur l'observabilité et la commande des systèmes linéaires à retards modélisés sur un anneau, *Thèse de Doctorat*, Université de Nantes, France.

- [108] Picard P., Sename O., Lafay J.F. (1998). Observers and observability indices for linear systems of delays, *Proceedings of IEEE-IMACS Conf. on Computational Engineering in Systems Applications*, pp. 81-86, France.
- [109] Pothin R., Moog C.H. (1998). Input-output decoupling of nonlinear systems by output feedback, *Preprints of IFAC Conference on Systems Structure and Control, SSC'98*, pp. 765-770, Nantes, France.
- [110] Rabah R. (1995). Structural properties and controllability for delay systems of neutral type, *Proceedings of IFAC Conf. Systems Structure and Control*, pp. 354-358, Nantes, France.
- [111] Razumikhin B. S. (1956). On the stability of systems with a delay, *PMM*, Vol. 20, No. 4, pp. 500 - 512.
- [112] Rekasius Z. V. (1980). A stability test for systems with delays, *Proceedings of the 1980 Joint Automatic Control Conference*, San Francisco, CA, paper TP9-A.
- [113] Richard J. P., Goubet-Bartholoméüs A., Tchangani A. P., Dambrine M. (1997). Nonlinear Delay Systems: Tools for Quantitative Approach to Stabilization, *Chap. 10 (pp 218 - 240) of Stability and control of time-delay systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. "Delay Systems"*, Springer Verlag.
- [114] Richard J.-P. (1998). Some trends and tools for the study of time-delay systems, *Proceedings of IEEE-IMACS Conf. Computational Engineering in Systems Applications*, pp. 27 - 43, Plenary lecture, 1-4 April, Tunisia.
- [115] Richard J.P., Kolmanovskii V.B. (Eds)(1998). Special issue, *Mathematics and computers in simulation*, Vol. 45, No. 3-4, Elsevier Pub.
- [116] Richard J.-P., Kolmanovskii V.B. (Eds) (1998). Special issue, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 45, No. 3-4, Elsevier Pub..

- [117] Robert F. (1964). Normes vectorielles de vecteurs et de matrices, *Revue française de traitement de l'information*, **Vol. 7, No. 4**, pp. 261 - 269.
- [118] Sename O. (1994). Sur la commandabilité et le découplage des systèmes à retards, *Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes*, Ecole Centrale de Nantes.
- [119] Shen J.C., Chen B.S., Kung F.C. (1991). Memoryless stabilization of uncertain dynamic delay systems: Riccati equation approach, *IEEE Trans. AC*, **36**, pp. 638-640.
- [120] Shimanov S.N. (1960). On stability in the critical case of a zero root for systems with time lag, *J. Appl. Math. Mech.*, **Vol. 24**, pp. 653-668.
- [121] Smith O.J.M. (1957). Posicast control of damped oscillatory, *Proceedings of the IRE*, **45**, pp. 1249-1255.
- [122] Stépan G. (1989). Retarded dynamical systems ; stability and characteristic functions, *Research Notes in Marth. Series*, John Wiley and Sons.
- [123] Takahashi S., Yamanaka K., Yamada M. (1987). Detection of dominant poles of systems with time delays using Padé approximation, *Int. J. Control*, **Vol. 45, No. 1**, pp 251 - 254.
- [124] Tarbouriech S. (1997). Local stabilization of continuous-time delay systems with bounded inputs, *Proceedings of European Control Conferences*, ECC'97.
- [125] Tarbouriech S., Hennet J.-C. (1997). Conditions of stability via positive invariance for delay systems, *Actes du colloque : Analyse et commande des systèmes avec retards*, pp. 185-196, 21-22 mars, Nantes, France.
- [126] Tchangani A.P., Dambrine M., Richard J.P. (1998a). Robust stabilization of delay systems with discrete or distributed delayed control, *Proceedings of 37th. IEEE Conf. Dec. & Control*, pp. 4051-4056, Tampa, USA.

- [127] Tchangani A.P., Dambrine M., Richard J.P. (1998b). Robust stability and stabilization of systems with aftereffect, *Journal of Stability And Control: Theory and Applications*, (à paraître).
- [128] Tchangani A. P., Dambrine M., Richard J. P. (1996a). Stability of Neutral Systems via Vector-Lyapunov Function, *Proceedings of the 4th IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation*, pp. 173 - 176, Krete, Greece.
- [129] Tchangani A. P., Dambrine M., Richard J. P. (1996b). Stability and Stabilization of Nonlinear Neutral Systems, *Proceedings of IEEE-IMACS Conference CESA '96*, Vol. 2/2, pp. 812 - 815, Lille, France
- [130] A.P. Tchangani A. P., Dambrine M. and Richard J.P. (1998). Stability, attraction domains, and ultimate boundedness for nonlinear neutral systems, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol 45, No 3-4, pp. 291-298, Elsevier.
- [131] Tchangani A.P., Dambrine M., Richard J.-P. (1997). Stability of linear differential equations with distributed delay, *Proceedings of 36th. IEEE Conf. Dec. & Control*, pp. 3779-3784, San Diego, CA.
- [132] Tchangani A.P., Dambrine M., Richard J.P. (1998). Robust stability of large-scale systems with aftereffect, *Proceedings of IFAC Conference on Large Scale Systems, LSS'98*, pp. 405-410, Patras, Greece.
- [133] Tchangani A.P., Dambrine M., Richard J.-P., Kolmanovskii V.B. (1998). Stability of nonlinear differential equations with distributed delay, *Nonlinear Analysis*, Vol. 34, pp. 1081-1095, Pergamon.
- [134] A.P. Tchangani A. P., Dambrine M., Richard J.P. (1996). Stability domains for neutral systems, *Proceedings of 35th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp 1617-1618, Kobe, Japan.

- [135] Tchangani A. P., Dambrine M., Richard J.P., Nosov V. R.(1997). Estimation of the Asymptotic Stability Domain and Asymptotic Behaviour for Nonlinear Neutral Systems, *Proceedings of IFAC-IFIP-IMACS Conference on Control of Industrial Systems, CIS'97*, **Vol. 1/3**, pp 595 - 600, 20 - 22 May 1997, Belfort, France.
- [136] Thowsen A. (1981). The Routh-Hurwitz method for stability determination of linear differential-difference systems, *Int. J. Control*, **Vol. 33, No 5**, pp 991 - 995.
- [137] Tokumaru H., Adachi N., AmemyiaT. (1975). Macroscopic stability of interconnected systèmes, *6th IFAC Congress*, paper **ID44.4**, pp. 1-7.
- [138] Velasco-Villa M., Moog C.H. (1998). Disturbance decoupling for time-delay nonlinear systems: dynamic approach, *Preprints of IFAC Conference on Systems Structure and Control, SSC'98*, pp. 581-586, Nantes, France.
- [139] Verriest E. I. (1994). Robust Stability of Time-Varying Systems with Unknown Bounded delay, *Proceedings of 33rd IEEE Conf. on Decision and Control*, Lake Buena Vista, FL, pp. 417-422.
- [140] Verriest E. I. (1996). Robust Stability and Stabilization of Deterministic and Stochastic Time Delay Systems, *Actes du colloque Analyse et commande des systèmes avec retards*, pp 197 - 206, Ecole des Mines de Nantes, Nantes, France.
- [141] Walton K., Marschall J. E. (1987). Direct method for TDS stability analysis, *IEE proceedings*, **Vol. 134, part D, No2**, pp 101 - 107.
- [142] Watanabe K. (1986). Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **Vol. 31, No. 6**, pp. 543-550.
- [143] Watanabe K., Ito M., Kaneko M. (1983). Finite spectrum assignment problem of systems with multiple commensurate delays in state variables, *Int. J. Control*, **Vol. 38, No. 5**, pp. 913-926.

- [144] Watanabe K., Ito M., Kaneko M. (1984). Finite spectrum assignment problem of systems with multiple commensurate delays in state and control, *Int. J. Control*, **Vol. 39, No. 5**, pp. 1073-1082.
- [145] Watanabe K., Nobuyama E., Kojima K. (1996). Recent advances in control of time-delay systems: a tutorial review, *Proceedings of 35th. IEEE Conf. Dec. & Control*, Kobe, Japan, pp. 2083-2089.
- [146] Ważewski T. (1950). Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications, *Annales Société Polonaise de Mathématiques*, **Tome XXIII**, pp. 112 - 166.
- [147] Xu D.-Y., Xu Z.-F. (1991). Stability analysis of linear delay-differential systems, *Control-Theory and Advanced Technology*, **Vol. 7, No. 4**, pp 629 - 642.
- [148] Weiss L., Infante E.F. (1965). On the stability of systems defined over finite time interval, *Proceedings National Acad. Science*, **54 (1)**, pp. 44-48.
- [149] Zhang Yi (1988). Stability of large scale neutral differential systems, *Scientia, Sinica (Series A)* 31, pp. 1292-1304
- [150] Zheng F., Cheng M., Gao W.-B. (1994). Feedback Stabilization of linear Systems with Distributed Delays in State and Control Variables, *IEEE Trans. Aut. Control*, **Vol. 39, No. 8**, pp. 1714-1718.

Annexe 1

Annexes relatives au Chapitre III

Annexe 1.1 : Démonstration du Théorème III.6

Supposons que le vecteur u vérifie les conditions du Théorème III.5. Montrons que l'ensemble $\mathcal{J}(\lambda, u) = \{\varphi \in \mathcal{C} : V(\mathcal{Z}(t_0, \varphi)) \leq \lambda u\}$ est positivement invariant c'est-à-dire que si $\varphi \in \mathcal{J}(\lambda, u)$ alors la solution $x(t; t_0, \varphi)$ de (III.2) de condition initiale $x_{t_0} = \varphi$ reste dans $\mathcal{J}(\lambda, u)$.

Supposons le contraire et posons

$$t_1 = \sup \{t : V(\mathcal{Z}(t_0, x_\Delta(t_0, \varphi))) < \lambda u, t_0 \leq \Delta \leq t\}.$$

Par continuité, à l'instant t_1 une au moins des composantes de $V(\mathcal{Z}(t_0, x_\Delta(t_0, \varphi)))$ arrive à la frontière de l'ensemble $\mathcal{J}(\lambda, u)$ c'est-à-dire qu'il existe un indice j telle que

$$V_j(\mathcal{Z}(t_0, x_{t_1}(t_0, \varphi))) = \lambda u_j \text{ et } V_i(\mathcal{Z}(t_0, x_{t_1}(t_0, \varphi))) \leq \lambda u_i, i \neq j.$$

Or $V_j(\mathcal{Z}(t_0, x_{t_1}(t_0, \varphi)))$, compte tenu des relations précédentes et du fait que la matrice $M(t) + N(t)$, est quasi-monotone non décroissante, vérifie

$$D^+ V_j(\mathcal{Z}(t_0, x_{t_1}(t_0, \varphi))) \leq \lambda [(M(t_1) + N(t_1))u]_j \leq -\varepsilon u_j$$

c'est-à-dire que la fonction $t \rightarrow V_j(\mathcal{Z}(t_0, x_t(t_0, \varphi)))$ est strictement décroissante dans un voisinage de t_1 . Donc $x(t; t_0, \varphi)$ ne quitte pas $\mathcal{J}(\lambda, u)$. ■

Annexe 2

Annexes relatives au Chapitre IV



PERGAMON

Nonlinear Analysis 34 (1998) 1081–1095

**Nonlinear
Analysis**

Stability of nonlinear differential equations with distributed delay

A.P. Tchangani^a, M. Dambrine^a, J.P. Richard^{a,*}, V.B. Kolmanovskii^b^a *Ecole Centrale de Lille, LAIL-URA CNRS D1440, B.P. 48, 59651 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*^b *Department of Cybernetics, Moscow University of Electronics and Mathematics,
109028 Moscow, Russia*

Received 30 June 1997; accepted 14 July 1997

Keywords: Delay systems; Nonlinear systems; Stability; Lyapunov method; Comparison systems

1. Introduction and statement of the problem

Functional differential equations of retarded type with distributed delay are often used for modelling many processes in biology, economic, environment, ecology, population dynamics, disease spread problems, and many others (for more details see [4,5,9,10]). Besides, stability and stabilization study is one of the major problems encountered in applications: for hereditary systems, it generally involves some Lyapunov's functionals (Krasovskii's approach [12]), or functions (Razumikhin's approach [15]); but the way to generate them is not easy in practice. We use here an other approach, based on a comparison principle, which consists in replacing the original system by a simpler one which stability implies the stability of the original system. Such a comparison principle has got some attention as well for ordinary differential equations [1,13,14] as in analysis of FDE of retarded type with discrete delay [2,3,8], and of some FDE of neutral type [10,11,16,17]. In this paper, we enlarge this principle to the case of retarded type with distributed delay. Let $\mathbb{R}^n$ be the real n -vector space with the norm $\|\cdot\|$ and ρ the associated distance with $\rho(x, y) = \|x - y\|$; $C = C([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$ is the set of all continuous functions mapping $[-h, 0]$ into $\mathbb{R}^n$, where h is a positive constant. The norm $\|\cdot\|_C$ of C is defined by

$$\|\psi\|_C = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \{\|\psi(\theta)\|\}.$$

* Corresponding author. E-mail: {tchangani, dambrine, jprichard}@ec-lille.fr.

We consider in this paper the FDE described by

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & F(t, x(t), x(t-h)) + G(t, x(t), x(t-h)) \\ & + \int_{-h}^0 H(t, x(t), x(t+s), s) x(t+s) ds, \end{aligned} \quad (1)$$

with initial conditions $x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta)$, $\forall \theta \in [-h, 0]$.

We use the following hypotheses and notations:

- h is a positive constant and possibly infinite,
- $F, G \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ are supposed to verify the following conditions:

$$F(t, 0, x(t-h)) \equiv G(t, x(t), 0) \equiv 0, \quad (2)$$

$$f(t, x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [F(t, x, y)], \quad (3)$$

$$g(t, x, y) = \frac{\partial}{\partial y} [G(t, x, y)], \quad (4)$$

- $H(t, x(t), x(t+s), s) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [-h, 0]; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$,
- x_t is defined by $\forall \theta \in [-h, 0], x_t(\theta) = x(t + \theta)$, Eq. (1) satisfies the conditions of existence and uniqueness of the solution (see [5] for this theory),
- $x(t; t_0, \varphi)$ or $x_t(t_0, \varphi)$ denotes the solution of Eq. (1) with initial condition $x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta)$, $\forall \theta \in [-h, 0]$.
- For any $x \in \mathbb{R}^n$ we consider a partition of x into $x = [x_1, \dots, x_i, \dots, x_r]^T$, where $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ with $\sum_{i=1}^r n_i = n$.
- $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r (r \leq n)$, $V(x) = [V_1(x_1), \dots, V_i(x_i), \dots, V_r(x_r)]^T$ is some candidate of Regular Vector Lyapunov Function (RVLF) [14], where V_i is a scalar norm on $\mathbb{R}^{n_i}$. We will use the same notation V_i for both the norm of a vector and the induced matrix norm.
- According to the partition of x , A_{ij} denotes a $n_i \times n_j$ submatrix of any $n \times n$ matrix A partitioned into

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{1i} & A_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i1} & A_{ii} & A_{ir} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{r1} & A_{ri} & A_{rr} \end{pmatrix}.$$

- The two $r \times r$ matrices $V(A)$ and $\Gamma(A)$ are defined as follows:
 - $V(A) = [V(A)_{ij}]$ with $V(A)_{ii} = V_i(A_{ii})$, and for $j \neq i$,
 - $V(A)_{ij} = \sup \{V_i(A_{ij}x_j)/V_j(x_j): V_j(x_j) \neq 0\}$,
 - $\Gamma(A) = [\Gamma(A)_{ij}]$ with $\Gamma(A)_{ii} = \gamma_i(A_{ii})$ and $\Gamma(A)_{ij} = V(A)_{ij}$.
 - $\gamma_i(A_{ii})$ is the logarithmic norm (or matrix measure) [8] of a square matrix A_{ii} with respect to the norm V_i defined by

$$\gamma_i(A_{ii}) = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta} [V_i(I_i + \Delta A_{ii}) - 1],$$

and I_{n_i} is the identity matrix of order n_i .

- $\lambda(A), sp(A)$ denotes, respectively, an eigenvalue and the sets of all eigenvalues of A .
- $\text{Real}(\lambda)$, is the real part of the complex number λ .
- The notation $x \leq y$ for vectors or $A \leq B$ for matrices are corresponding to inequalities for each corresponding entry.
- For a positive vector q of size r we define the subset Ω_q of C as

$$\Omega_q = \{\varphi \in C : V(\varphi(\theta)) \leq q, \forall \theta \in [-h, 0]\}.$$

This paper is organized as follows: after some background presentation in Section 2, Section 3 contains the main results, which will be applied in Section 4 to derive sufficient stability conditions for linear delay systems.

2. Background

Definition 2.1 (Tchangani et al. [17]). A dynamic system (A) is a Comparison System of a dynamic system (B) with regard to the property P (for example, stability of its zero solution), if the verification of P for system (A) implies the same property for system (B).

Consider the system

$$\dot{z}(t) = g(t, z(t), z_t), \quad t \geq t_0, \quad (5)$$

where g is a functional mapping $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \times C([-h, 0]; \mathbb{R}^r)$ into $\mathbb{R}^r$.

Definition 2.2 (Tchangani et al. [16]). System (5) is an overvaluing system of Eq. (1) with respect to the RVLf V and some subset Ω of C , neighborhood of 0, if the initial condition inequality $V(\varphi(\theta)) \leq z_{t_0}(\theta)$, $\forall \theta \in [-h, 0]$, implies $V(x(t; t_0, \varphi)) \leq z(t; t_0, z_{t_0})$, as long as x_t remains in Ω .

The overvaluing system is global if $\Omega = C$.

3. Main results

In this section we give a way to compute an overvaluing system for the FDE with distributed delay. Let us define the two matrices M and N as follows:

$$M(t, x(t), x(t-h)) = \int_0^1 \Gamma(f(t, \mu x(t), x(t-h))) d\mu,$$

$$N(t, x(t), x(t-h)) = \int_0^1 V(g(t, x(t), \mu x(t-h))) d\mu.$$

Lemma 3.1. For a given RVLFF V , the following inequality holds along any solution of Eq. (1):

$$D^+V(x(t)) \leq M(t, x(t), x(t-h))V(x(t)) + N(t, x(t), x(t-h))V(x(t-h)) \\ + \int_{-h}^0 V(H(t, x(t), x(t+s), s))V(x(t+s))ds, \quad t \geq t_0 \quad (6)$$

Proof. See Appendix A.

Lemma 3.2. Consider a RVLFF V and the following system:

$$\dot{z}(t) = M(t, x(t), x(t-h))z(t) + N(t, x(t), x(t-h))z(t-h) \\ + \int_{-h}^0 V(H(t, x(t), x(t+s), s))z(t+s)ds, \quad t \geq t_0, \quad z_{t_0} = \psi. \quad (7)$$

Suppose that the solution of Eq. (7) exists and is unique for any solution $x(t)$ of Eq. (1). Then Eq. (7) is a comparison system of Eq. (1) with regard to stability and asymptotic stability.

Proof. See Appendix B.

The following corollary gives a way to obtain simpler comparison systems (linear time varying or time-invariant ones for example).

Corollary 3.3. Suppose the following conditions hold:

$$\Gamma(f(t, \psi(0), \psi(-h))) \leq F_0(t), \quad \forall \psi \in \Omega, \quad (8)$$

$$V(g(t, \psi(0), \psi(-h))) \leq G_0(t), \quad \forall \psi \in \Omega, \quad (9)$$

$$\int_{-h}^0 V(H(t, \psi(0), \psi(s), s))V(\psi(s))ds \leq \int_{-h}^0 H_0(t, s)V(\psi(s))ds, \quad \forall \psi \in \Omega, \quad (10)$$

then, system (11)

$$\dot{z}(t) = F_0(t)z(t) + G_0(t)z(t-h) + \int_{-h}^0 H_0(t, s)z(t+s)ds, \quad t \geq t_0 \quad (11)$$

is a comparison system of Eq. (1) with regard to stability (asymptotic stability).

The previous lemmas finally lead to the following theorem:

Theorem 3.4. Define the matrices χ and X as follows:

$$\chi = M(t, x(t), x(t-h)) + N(t, x(t), x(t-h)) + \int_{-h}^0 V(H(t, x(t), x(t+s), s))ds, \\ X \geq \chi \text{ (constant or not).}$$

Suppose that there exists a constant positive number ε and a constant r -order positive vector u such that, for any solution $x(t; t_0; \varphi)$ of Eq. (1) remaining in Ω , the following condition holds:

$$Xu < -\varepsilon u, \quad (12)$$

then the zero solution of Eq. (1) is asymptotically stable, and the set $\Omega_{\lambda u}$, where λ is the greatest positive number such that $\Omega_{\lambda u}$ is included in Ω , is a positively invariant estimate of the asymptotic stability domain of the zero solution of (1).

If $\Omega = C$, then the zero solution of Eq. (1) is globally asymptotically stable.

Remark. Stability holds if the vector u satisfies the inequality $Xu \leq 0$, instead of condition (12).

Proof. See Appendix C.

The following corollary gives some cases where the existence of a vector u verifying condition (12) of Theorem 3.4 may be easily tested.

Corollary 3.5 (See Dambrine [2]). 1. If X is a Hurwitz constant matrix, then it is the opposite of an M -matrix. If moreover it is irreducible, a possible positive constant vector u verifying Theorem 3.4 is one of its importance eigenvector (that is, an eigenvector associated with its eigenvalue of greatest real part).
2. If all the nonconstant entries of X are located in a unique column or in a unique row, and if there exists $\varepsilon > 0$ such that $X + \varepsilon I_r$ is Hurwitz at any time, then a constant vector u verifying Theorem 3.4 is the importance eigenvector associated with the maximum (with regard to nonconstancy) eigenvalue.

The previous results have their equivalent when a scalar norm is considered instead of vector one. The following result is the application of Theorem 3.4 in the scalar case:

Corollary 3.6. Suppose the following conditions hold:

$$\sup_{\psi \in \Omega} \{f(t, \psi(0), \psi(-h))\} \leq -a(t),$$

$$\sup_{\psi \in \Omega} \{g(t, \psi(0), \psi(-h))\} \leq b(t),$$

$$\sup_{\psi \in \Omega} \left\{ \int_{-h}^0 \|H(t, \psi(0), \psi(s), s)\| ds \right\} \leq \int_{-h}^0 h(t, s) ds,$$

then, the zero solution of Eq. (1) is stable if

$$\sup_{t \geq t_0} \left\{ -a(t) + b(t) + \int_{-h}^0 h(t, s) ds \right\} \leq 0$$

and asymptotically stable if

$$\sup_{t \geq t_0} \left\{ -a(t) + b(t) + \int_{-h}^0 h(t,s) ds \right\} < 0.$$

4. Linear time-invariant systems

In this part we apply the previous results to derive sufficient stability conditions for some linear time-invariant delay systems.

4.1. Discrete and distributed systems

Consider the following system:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^m B_i x(t - h_i) + \sum_{j=1}^p C_j \int_{t-\tau_j}^t x(s) ds. \quad (13)$$

Note that $x(t - h_i) = x(t) - \int_{t-h_i}^t \dot{x}(s) ds$ then Eq. (13) can be rewritten as

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \left(A + \sum_{i=1}^m B_i \right) x(t) - \sum_{i=1}^m B_i A \int_{-h_i}^0 x(t+u) du - \sum_{i=1}^m B_i \sum_{k=1}^m B_k \\ & \times \int_{-h_i}^0 x(t+u-h_k) du - \sum_{i=1}^m B_i \sum_{j=1}^p C_j \int_{-h_i}^0 \int_{-\tau_j}^0 x(t+u+s) ds du \\ & + \sum_{j=1}^p C_j \int_{-\tau_j}^0 x(t+s) ds. \end{aligned} \quad (14)$$

Then, along trajectories of this system, the following four inequalities hold:

1. $\frac{d^+ \|x(t)\|}{dt} \leq \gamma(A) \|x(t)\| + \sum_{i=1}^m \|B_i\| \|x(t - h_i)\| + \sum_{j=1}^p \|C_j\| \int_{t-\tau_j}^t \|x(s)\| ds,$
2. $D^+ V(x(t)) \leq \Gamma(A) V(x(t)) + \sum_{i=1}^m V(B_i) V(x(t)) + \sum_{j=1}^p V(C_j) \int_{t-\tau_j}^t V(x(s)) ds,$
3. $\frac{d^+ \|x(t)\|}{dt} \leq \gamma \left(A + \sum_{i=1}^m B_i \right) \|x(t)\| + \sum_{i=1}^m \|B_i A\| \int_{-h_i}^0 \|x(t+u)\| du$
 $+ \sum_{i=1}^m \|B_i\| \sum_{k=1}^m \|B_k\| \int_{-h_i}^0 \|x(t+u-h_k)\| du$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^m \|B_i\| \sum_{j=1}^p \|C_j\| \int_{-h_i}^0 \int_{-\tau_j}^0 \|x(t+u+s)\| \, ds \, du \\
& + \sum_{j=1}^p \|C_j\| \int_{-\tau_j}^0 \|x(t+s)\| \, ds, \\
4. \quad D^+V(x(t)) & \leq \Gamma \left(A + \sum_{i=1}^m B_i \right) V(x(t)) + \sum_{i=1}^m V(B_i A) \int_{-h_i}^0 V(x(t+u)) \, du \\
& + \sum_{i=1}^m V(B_i) \sum_{k=1}^m V(B_k) \int_{-h_i}^0 V(x(t+u-h_k)) \, du \\
& + \sum_{i=1}^m V(B_i) \sum_{j=1}^p V(C_j) \int_{-h_i}^0 \int_{-\tau_j}^0 V(x(t+u+s)) \, ds \, du \\
& + \sum_{j=1}^p V(C_j) \int_{-\tau_j}^0 V(x(t+s)) \, ds.
\end{aligned}$$

Applying previous results lead to the following theorem.

Theorem 4.1. *Each of the four following conditions is sufficient for the asymptotic stability of the zero solution of Eq. (13):*

- (i) $\gamma(A) + \sum_{i=1}^m \|B_i\| + \sum_{j=1}^p \|C_j\| \tau_j < 0$;
- (ii) $\Gamma(A) + \sum_{i=1}^m V(B_i) + \sum_{j=1}^p V(C_j) \tau_j$ is the opposite of an M -matrix;
- (iii) $\gamma(A + \sum_{i=1}^m B_i) + \sum_{i=1}^m \|B_i A\| h_i + (\sum_{k=1}^m \|B_k\|)(\sum_{i=1}^m \|B_i\| h_i) + (\sum_{i=1}^m \|B_i\| h_i)(\sum_{j=1}^p \|C_j\| \tau_j) + \sum_{j=1}^p \|C_j\| \tau_j < 0$;
- (iv) $\Gamma(A + \sum_{i=1}^m B_i) + \sum_{i=1}^m V(B_i A) h_i + (\sum_{k=1}^m V(B_k))(\sum_{i=1}^m V(B_i) h_i) + (\sum_{i=1}^m V(B_i) h_i)(\sum_{j=1}^p V(C_j) \tau_j) + \sum_{j=1}^p V(C_j) \tau_j$ is the opposite of an M -matrix.

Example 1. Let us consider the system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) + C \int_{t-\tau}^t x(s) \, ds \quad (15)$$

with

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

and set for simplicity $a_1 = a_2 = a$, $b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Then considering the Euclidean norm yields

$$\gamma(A+B) = -a + b_1; \quad \gamma(A) = -a; \quad \|BA\| = ab; \quad \|B\| = b; \quad \|C\| = c.$$

It follows that if one of the two following conditions holds:

- (1) $a > b$ and $\tau < (a-b)/c$,
 - (2) $a - b_1 > 0$, $\tau < (a-b_1)/c$ and $h < (a-b_1 - c\tau)/((a+b)b + bc\tau)$
- then the zero solution of Eq. (15) is asymptotically stable.

4.2. Purely discrete delay

Now consider the following class of delay systems:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m B_i x(t - h_i). \quad (16)$$

This system can be rewritten as

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^m B_i \right) x(t) - \sum_{i=1}^m B_i \sum_{j=1}^m B_j \int_{-h_i}^0 x(t + u - h_j) du. \quad (17)$$

Along the trajectories of Eq. (17) the following inequalities are satisfied:

$$\begin{aligned} \frac{d^+ \|x(t)\|}{dt} &\leq \gamma \left(\sum_{i=1}^m B_i \right) \|x(t)\| + \sum_{i=1}^m \|B_i\| \sum_{j=1}^m \|B_j\| \int_{-h_i}^0 \|x(t + u - h_j)\| du, \\ D^+ V(x(t)) &\leq \Gamma \left(\sum_{i=1}^m B_i \right) V(x(t)) + \sum_{i=1}^m V(B_i) \sum_{j=1}^m V(B_j) \int_{-h_i}^0 V(x(t + u - h_j)) du. \end{aligned}$$

Applying previous results leads to Theorem 4.2:

Theorem 4.2. *Each of the two following conditions is sufficient for the asymptotic stability of the zero solution of (16):*

- (i) $\gamma(\sum_{i=1}^m B_i) + (\sum_{j=1}^m \|B_j\|)(\sum_{i=1}^m \|B_i\| h_i) < 0$;
- (ii) $\Gamma(\sum_{i=1}^m B_i) + (\sum_{i=1}^m V(B_i))(\sum_{j=1}^m V(B_j) h_j)$ is the opposite of an M -matrix.

Example 2. Consider the system

$$\dot{x}(t) = B \sum_{i=1}^m x(t - h_i). \quad (18)$$

By applying Theorem 4.2, it follows that the zero solution of Eq. (18) is asymptotically stable if one of the two following conditions holds:

1. $\gamma(B) < 0$ and $0 \leq \sum_{i=1}^m h_i < -\gamma(B)/\|B\|^2$;
2. $\Gamma(B) + V(B)^2 \sum_{i=1}^m h_i$ is the opposite of an M -matrix.

4.3. Purely distributed delay system

Finally, let us consider the following equation:

$$\dot{x}(t) = C \int_{t-\tau}^t x(s) ds. \quad (19)$$

Considering equalities $x(s) = x(t) - \int_s^t \dot{x}(u) du$ and $\dot{x}(u) = C \int_{u-\tau}^u x(v) dv$, together with Eq. (19),

$$\dot{x}(t) = \tau C x(t) - C^2 \int_{t-\tau}^t ds \int_s^t du \int_{u-\tau}^u x(v) dv. \quad (20)$$

Then we have the following inequalities along all solutions of Eq. (19):

$$\frac{d^+ \|x(t)\|}{dt} \leq \tau \gamma(C) \|x(t)\| + \|C^2\| \int_{t-\tau}^t ds \int_s^t du \int_{u-\tau}^u \|x(v)\| dv;$$

$$D^+ V(x(t)) \leq \tau \Gamma(C) V(x(t)) + V(C^2) \int_{t-\tau}^t ds \int_s^t du \int_{u-\tau}^u V(x(v)) dv.$$

Then, the next result follows:

Theorem 4.3. *Each of the two following conditions is sufficient for the asymptotic stability of the zero solution of Eq. (19):*

$$1. \gamma(C) + \tau^2 \|C^2\|/2 < 0,$$

$$2. \Gamma(C) + \tau^2/2 V(C^2),$$

is the opposite of an M-matrix.

Example 3. Consider the scalar equation (21),

$$\dot{x}(t) = c \int_{t-\tau}^t x(s) ds. \quad (21)$$

Applying the first condition of Theorem 4.3 we obtain that if

$$c < 0, \quad \tau^2 |c| < 2,$$

then the zero solution of Eq. (21) is asymptotically stable.

Example 4. This example aims to show that our results can be applied even in the case of infinite delay. Consider the following scalar system studied in [4] by using a Lyapunov's functional:

$$\dot{x}(t) = - \int_0^\infty K(s)x(t-s) ds, \quad (22)$$

where $K : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$.

Eq. (22) is equivalent to

$$\dot{x}(t) = - \int_0^\infty K(s)x(t) - \int_0^\infty K(s) ds \int_{-s}^0 du - \int_0^\infty K(r)x(t+u-r) dr. \quad (23)$$

Then, the following inequality is verified along the trajectories of Eq. (22):

$$\frac{d^+ |x(t)|}{dt} \leq - \int_0^\infty K(s)|x(t)| + \int_0^\infty K(s) ds \int_{-s}^0 du \int_0^\infty K(r)|x(t+u-r)| dr.$$

Consequently, the zero solution of Eq. (22) is asymptotically stable if

$$-\int_0^\infty K(s) ds + \int_0^\infty K(s) ds \int_{-s}^0 du \int_0^\infty K(v) dv < 0,$$

which is equivalent to

$$\int_0^\infty K(s) < \infty, \int_0^\infty K(s)s ds < 1.$$

This is the same condition given in [4].

5. Conclusion

This paper has provided several general results for testing the stability of some nonlinear time-varying functional differential equation of retarded type with distributed delay. The given conditions are dependent on the size of delay and easy to check. In what concerns nonlinear systems, our approach allows to estimate the stability domains: the method for this estimation is rather classical in its principle, but the original point is that the results are directly workable. The results have then been applied to derive sufficient stability conditions for some class of linear time-invariant.

Appendix A

According to Eqs. (3) and (4) we can rewrite Eq. (1) as

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \int_0^1 f(t, \mu x(t), x(t-h)) d\mu x(t) + \int_0^1 g(t, x(t), \mu x(t-h)) d\mu x(t-h) \\ & + \int_{-h}^0 H(t, x(t), x(t+s), s) x(t+s) ds. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Let us define as in [8] the function $Q_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$Q_i[x_i, y_i] = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [V_i(x_i + \Delta y_i) - V_i(x_i)]. \quad (\text{A.2})$$

Then, we have

$$D^+ V_i(x_i(t)) = Q_i[x_i(t), \dot{x}_i(t)], \quad (\text{A.3})$$

and replacing $\dot{x}_i(t)$ by its expression in (A.3) yields:

$$\begin{aligned} D^+ V_i(x_i(t)) = & Q_i[x_i(t), \int_0^1 f(t, \mu x(t), x(t-h))_{ii} d\mu x_i(t) \\ & + \sum_{j \neq i} \int_0^1 f(t, \mu x(t), x(t-h))_{ij} d\mu x_j(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_j \int_0^1 g(t, x(t), \mu x(t-h))_{ij} d\mu x_j(t-h) \\
& + \sum_j \int_{-h}^0 H(t, x(t), x(t+s), s)_{ij} x_j(t+s) ds].
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Considering the definition of Q_i ,

$$\begin{aligned}
D^+ V_i(x_i(t)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta} & \left[V_i(x_i + \Delta \left\{ \int_0^1 f(t, \mu x(t), x(t-h))_{ii} d\mu x_i(t) \right. \right. \\
& + \sum_{j=1, j \neq i}^r \int_0^1 f(t, \mu x(t), x(t-h))_{ij} d\mu x_j(t) \\
& + \sum_{j=1}^r \int_0^1 g(t, x(t), \mu x(t-h))_{ij} d\mu x_j(t-h) \\
& \left. \left. + \sum_{j=1}^r \int_{-h}^0 H(t, x(t), x(t+s), s)_{ij} x_j(t+s) ds \right\} - V_i(x_i(t)) \right]
\end{aligned} \tag{A.5}$$

and then the following inequality holds:

$$\begin{aligned}
D^+ V_i(x_i(t)) \leq Q_i & \left[x_i(t), \int_0^1 f(t, \mu x(t), x(t-h))_{ii} d\mu x_i(t) \right] \\
& + V_i \left(\sum_{j \neq i} \int_0^1 f(t, \mu x(t), x(t-h))_{ij} d\mu x_j(t) \right. \\
& + \sum_{j=1}^r \int_0^1 g(t, x(t), \mu x(t-h))_{ij} d\mu x_j(t-h) \\
& \left. + \sum_{j=1}^r \int_{-h}^0 H(t, x(t), x(t+s), s)_{ij} x_j(t+s) ds \right).
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Remark that

$$\gamma_i(A_{ii}) = \sup \{ V_i(x_i(t))^{-1} Q_i[x_i(t), A_{ii}x_i(t)], x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, x_i \neq 0 \},$$

and so, inequality (A.6) becomes

$$\begin{aligned}
D^+ V_i(x_i(t)) \leq \gamma_i & \left[\int_0^1 f(t, \mu x(t), x(t-h))_{ii} d\mu \right] V_i(x_i(t)) \\
& + \sum_{j \neq i} \int_0^1 V_i(f(t, \mu x(t), x(t-h))_{ij} d\mu x_j(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^r \int_0^1 V_i(g(t, x(t), \mu x(t-h)))_{ij} d\mu x_j(t-h)) \\
& + \sum_{j=1}^r \int_{-h}^0 V_i(H(t, x(t), x(t+s), s))_{ij} x_j(t+s) ds.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

By considering properties of γ_i and V_i , we obtain

$$\begin{aligned}
D^+ V_i(x_i(t)) & \leq \int_0^1 \gamma_i(f(t, \mu x(t), x(t-h)))_{ii} d\mu V_i(x_i(t)) \\
& + \sum_{j \neq i} \int_0^1 V(f(t, \mu x(t), x(t-h)))_{ij} d\mu V_j(x_j(t)) \\
& + \sum_{j=1}^r \int_0^1 V(g(t, x(t), \mu x(t-h)))_{ij} d\mu V_j(x_j(t-h)) \\
& + \sum_{j=1}^r \int_{-h}^0 V(H(t, x(t), x(t+s), s))_{ij} V_j(x_j(t+s)) ds.
\end{aligned}$$

The procedure can be repeated for all i from 1 to r , and leads to the desired inequality

$$\begin{aligned}
D^+ V(x(t)) & \leq \int_0^1 \Gamma(f(t, \mu x(t), x(t-h))) d\mu V(x(t)) \\
& + \int_0^1 V(g(t, x(t), \mu x(t-h))) d\mu V(x(t-h)) \\
& + \int_{-h}^0 V(H(t, x(t), x(t+s), s)) V(x(t+s)) ds.
\end{aligned}$$

Appendix B

Consider the following lemma B1.

Lemma 5.1 (See Kolmanovskii [8] and Lakshmikantham and Leela [13]). *Let $z_1(t)$, $z_2(t) \in \mathbb{R}_+$ verify the following differential inequalities:*

$$\begin{aligned}
D^+ z_1(t) & \leq \int_0^1 \Gamma(f(t, \mu x(t), x(t-h))) d\mu z_1(t) \\
& + \int_0^1 V(g(t, x(t), \mu x(t-h))) d\mu z_1(t-h) \\
& + \int_{-h}^0 V(H(t, x(t), x(t+s), s)) z_1(t+s) ds,
\end{aligned} \tag{B.1}$$

$$D^+ z_2(t) \geq \int_0^1 \Gamma(f(t, \mu x(t), x(t-h))) d\mu z_2(t)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 V(g(t, x(t), \mu x(t-h)) \, d\mu \, z_2(t-h) \\
& + \int_{-h}^0 V(H(t, x(t), x(t+s), s)) \, z_2(t+s) \, ds,
\end{aligned} \tag{B.2}$$

if $z_1(t_0 + \theta) \leq z_2(t_0 + \theta)$, $\forall \theta \in [-h, 0]$ then $z_1(t) \leq z_2(t)$ for all $t \geq t_0$.

Stating $z_1(t) = V(x(t))$ and $z_2(t) = z(t)$ yields Lemma 3.2.

Appendix C

C.1. Asymptotic stability

It is sufficient to prove that the zero solution of Eq. (7) is asymptotically stable. Consider the system (7) and suppose that condition (12) holds, and then define the function $v(z(t))$ by

$$v(z(t)) = \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \frac{z_i(t)}{u_i} \right\}. \tag{C.1}$$

For each t there exists an index k such that $v(z(t)) = z_k(t)/u_k$ and its derivative verifies:

$$\begin{aligned}
\frac{d^+ v(z(t))}{dt} & \leq \frac{1}{u_k} \left[\int_0^1 \gamma_k(f(t, \mu x(t), x(t-h)))_{kk} \, d\mu \, |z_k(t)| \right. \\
& + \sum_{j \neq k} \int_0^1 V(f(t, \mu x(t), x(t-h)))_{kj} \, d\mu \, |z_j(t)| \\
& + \sum_{j=1}^r \int_0^1 V(g(t, x(t), \mu x(t-h)))_{kj} \, d\mu \, |z_j(t-h)| \\
& \left. + \sum_{j=1}^r \int_{-h}^0 V(H(t, x(t), x(t+s), s))_{kj} \, |z_j(t+s)| \, ds \right],
\end{aligned}$$

and along the trajectories verifying $|z_j(t+s)| \leq |z_j(t)|$ for $s \in [-h, 0]$, we have

$$\begin{aligned}
\frac{d^+ v(z(t))}{dt} & \leq \frac{1}{u_k} \left[\int_0^1 \gamma_k(f(t, \mu x(t), x(t-h)))_{kk} \, d\mu \, |z_k(t)| \right. \\
& + \sum_{j \neq k} \int_0^1 V(f(t, \mu x(t), x(t-h)))_{kj} \, d\mu \, |z_j(t)| \\
& + \sum_{j=1}^r \int_0^1 V(g(t, x(t), \mu x(t-h)))_{kj} \, d\mu \, |z_j(t)| \\
& \left. + \sum_{j=1}^r \int_{-h}^0 V(H(t, x(t), x(t+s), s))_{kj} \, |z_j(t)| \, ds \right].
\end{aligned} \tag{C.2}$$

Then, according to the definition of $v(z(t))$,

$$\begin{aligned} \frac{d^+v(z(t))}{dt} \leq & \frac{1}{u_k} \left[\int_0^1 \gamma_k(f(t, \mu x(t), x(t-h)))_{kk} d\mu u_k \right. \\ & + \sum_{j \neq k} \int_0^1 V(f(t, \mu x(t), x(t-h)))_{kj} d\mu u_j \\ & + \sum_{j=1}^r \int_0^1 V(g(t, x(t), \mu x(t-h)))_{kj} d\mu u_j \\ & \left. + \sum_{j=1}^r \int_{-h}^0 V(H(t, x(t), x(t+s), s))_{kj} u_j ds \right] v(z(t)) \end{aligned}$$

and finally

$$\frac{d^+v(z(t))}{dt} \leq \frac{1}{u_k} [\chi u]_k v(z(t)) \leq \frac{1}{u_k} [Xu]_k v(z(t)) < -\varepsilon v(z(t)) \quad (C.3)$$

This implies $(d^+v(z(t)))/dt < -\varepsilon v(z(t))$ along all trajectories verifying $|z_j(t+s)| \leq |z_j(t)|$. So $v(z(t))$ is a Lyapunov–Razumikhin function [15], and the conclusion follows.

C.2. Asymptotic stability domain

From (C.1) C_a is positively invariant and as C_a is a neighborhood of the zero function, it is a positively invariant estimation of its stability domain.

References

- [1] R. Bellman, Vector Lyapunov functions, J. SIAM Control Ser. A (1) (1962) 33–34.
- [2] M. Dambrine, Contribution to the stability analysis of time-delay systems. Ph.D. Thesis, Univ. des Sciences et Technologies de Lille, No 1386, France, 1994, in French.
- [3] M. Dambrine, J.P. Richard, Stability and stability domains analysis for nonlinear differential-difference equations, Dynamic Systems and Applications, No 3, Dynamic Publ. Atlanta, 1994, pp. 369–378.
- [4] K. Gopalsamy, Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.
- [5] J. Hale, Theory of Functional Differential Equations, Springer, New York, 1977.
- [6] A. Hmamed, Stability conditions of delay-differential systems, Int. Control 43 (2) (1986) 455–463. (1986).
- [7] V.B. Kolmanovskii, The stability of certain retarded systems with variable coefficients, PMM 59 (1) (1995) 65–74.
- [8] V.B. Kolmanovskii, Applications of differential inequalities for stability of some functional differential equations, Nonlinear Anal. Theory, Meth. Appl. 25 (9–10) (1995) 1017–1028.
- [9] V.B. Kolmanovskii, A. Myshkis, Applied Theory of Functional Differential Equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.
- [10] V.B. Kolmanovskii, V.R. Nosov, Stability of Functional Differential Equations, Academic Press, New York, 1986.
- [11] V.B. Kolmanovskii, V.R. Nosov, Stability of neutral system with a deviating argument, PMM 43 (2) (1979) 209–218.

- [12] N. Krasovskii, *Stability of Motion*, Stanford Univ. Press, Stanford, 1963.
- [13] V. Lakshmikantham, S. Leela, *Differential and integral inequalities*, vol. II, Academic Press, New York, 1969.
- [14] W. Perruquetti, J.P. Richard, P. Borne, Vector Lyapunov functions: recent developments for stability, robustness, practical stability and constrained control, *Nonlinear Times & Digest* (2) World Federation Publ., Tampa, 1995, pp. 227–258.
- [15] B.S. Razumikhin, The application of Lyapunov's method to problems in the stability of systems with delay, *Autom. i Telemekhanika* 21 (6) (1960) 740–748.
- [16] A.P. Tchangani, M. Dambrine, J.P. Richard, Stability and stabilization of nonlinear neutral systems, *Conf. IEEE SMC CESA'96*, session New results on time-delay systems, Lille, 1996, pp. 812–815.
- [17] A.P. Tchangani, M. Dambrine, J.P. Richard, Stability domains for neutral systems, *Proc. 35th IEEE Conf. on Decision and Control*, Kobe, Japan, 1996, pp. 1617–1619.

Stability of linear differential equations with distributed delay

A.P. Tchanganani, M. Dambrine and J.P. Richard
Ecole Centrale de Lille, LAIL - URA CNRS D1440
B.P. 48, 59651 Villeneuve d'Ascq Cedex-France
e-mail: {tchangani, dambrine, jprichard}@ec-lille.fr

Abstract

This paper deals with the stability analysis of linear functional differential equation (FDEs) of retarded type, with both discrete and distributed delay. The main tool used for solving such problem is based on comparison principle: the behaviour of the solutions of the initial system is compared, through some regular vector Lyapunov's functions (RVLF), to the behaviour of the solution of some simpler FDE.

1 Introduction and statement of the problem

Stability and stabilization study is one of the major problems encountered in control applications. For functional differential equations, such study generally involves some Lyapunov functionals (Krasovskii's approach [12]) or functions (Razumikhin's approach [15]), but the way to generate them is of course not clear.

An other approach based on a comparison principle has been proposed: it consists in studying a simpler system, whose stability implies the stability of the original system. This comparison approach constitutes an alternative and a development to the usual direct Lyapunov's method. It has been previously defined for ordinary differential equations (ODE)[1][13][14], and then generalized to retarded systems [2][9]. Recently, the same approach together with the concept of degenerate Lyapunov function [10][11] has been developed for neutral systems [16][17][3]. However, up to now, it was not applied to distributed delay systems.

The aim of this paper is then to complete this lack and define a comparison principle for such systems, that are often used as models for many processes in biology, economic, environment, ecology, interactions in population, ... (see for instance [4][5][7][10]).

This presentation is, firstly, developed on the basis of linear models with distributed delays, of type

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m_1} B_i x(t-h_i) + \sum_{j=1}^{m_2} \int_{-\tau_j}^0 K_j(s) x(t+s) ds, \quad (1)$$

$x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), \forall \theta \in [-h, 0], h = \max_{i,j} \{h_i, \tau_j\}, h_i, \tau_j$ constant $> 0, K_j(s)$ is a matrix with continuous entries,

where $x(t) \in R^n$ denotes the instantaneous value of the state function $x_t \in C, C = C([-h, 0], R^n)$ is the set of all continuous functions mapping $[-h, 0]$ into R^n with norm $\|\cdot\|_C$ defined by $\|\psi\|_C = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\psi(\theta)\|$: $\theta \in [-h, 0]$ and $\|\cdot\|$ is a norm on R^n ; x_t is defined by $\forall \theta \in [-h, 0], x_t(\theta) = x(t+\theta)$. In the following, $x(t; t_0, \phi)$ or $x_t(t_0, \phi)$ will denote the solution of (1) with initial condition $x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), \forall \theta \in [-h, 0]$.

Secondly, we apply the obtained results to derive sufficient stability conditions for some linear time invariant system with both discrete and distributed delay. For these last models, necessary and sufficient stability conditions have been defined [5][10], but in practice they need complex computations that exclude, for instance, the formal design of stabilizing controllers. Note that, the usual comparison procedure [2][16], can be generalized to nonlinear systems.

2 Background

2.1 Additional notations:

- For any $x \in R^n$ we consider a regular partition of x into $x = [x_1, \dots, x_i, \dots, x_r]^T$ (regular means that $\sum_{i=1}^r n_i = n$).

$V: R^n \rightarrow R, V(x) = [V_1(x_1), \dots, V_i(x_i), \dots, V_r(x_r)]^T$ is some candidate of Regular Vector Lyapunov Func-

Consequently, one can derive another form of comparison system (equivalent of (4)) for (1), based on (5), whose delay is twice the original delay. The following theorem give different sufficient stability conditions of zero solution of (1).

Theorem 3 *The zero solution of (1) is asymptotically stable if one of the following conditions holds*

- a) $\gamma(A) + \sum_{i=1}^{m_1} \|B_i\| + \sum_{j=1}^{m_2} \int_{-\tau_j}^0 \|K_j(s)\| ds < 0$;
- b) $\Gamma(A) + \sum_{i=1}^{m_1} V(B_i) + \sum_{j=1}^{m_2} \int_{-\tau_j}^0 V(K_j(s)) ds$ is the opposite of a *M*-matrix;
- c) $\gamma[(A + \sum_{i=1}^{m_1} B_i)] + \sum_{i=1}^{m_1} \|B_i A\| h_i + (\sum_{i=1}^{m_1} \|B_i\| h_i)(\sum_{k=1}^{m_1} \|B_k\|) + \sum_{i=1}^{m_1} \|B_i\| \sum_{j=1}^{m_2} \int_{t-h_i}^t ds \int_{-\tau_j}^0 \|K_j(s+u)\| du + \sum_{j=1}^{m_2} \int_{-\tau_j}^0 \|K_j(s)\| ds < 0, \forall t$;

d) *there exists a r -order vector u with positive component and $\varepsilon > 0$ such that*

$$[\Gamma(A + \sum_{i=1}^{m_1} B_i)] + \sum_{i=1}^{m_1} V(B_i A) h_i + (\sum_{i=1}^{m_1} V(B_i) h_i)(\sum_{k=1}^{m_1} V(B_k)) + \sum_{i=1}^{m_1} V(B_i \sum_{j=1}^{m_2} \int_{t-h_i}^t ds \int_{-\tau_j}^0 V(K_j(s+u)) du + \sum_{j=1}^{m_2} \int_{-\tau_j}^0 V(K_j(s)) du] u < -\varepsilon u, \forall t.$$

Consider the set defined by :

$$\Omega = \{\phi \in C : V(\phi) \leq \lambda u\}, \lambda > 0 \text{ scalar}, u > 0 \text{ a } r\text{-order vector}.$$

1) *If condition b) holds and u is the eigenvector associated to the eigenvalue of*

$$\Gamma(A) + \sum_{i=1}^{m_1} V(B_i) + \sum_{j=1}^{m_2} \int_{-\tau_j}^0 V(K_j(s)) ds \text{ with greatest real part then } \Omega \text{ is a positively invariant set of trajectories of (1).}$$

2) *If u is the vector defined in condition d) then Ω is a positively invariant set of trajectories of (1).*

Proof: see appendix C

4 Applications

4.1 Time invariant systems with discrete and distributed delays

In this part we apply previous results to derive sufficient stability conditions for some linear time-

invariant delay systems. Consider the following system (6)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m_1} B_i x(t - h_i) + \sum_{j=1}^{m_2} C_j \int_{t-\tau_j}^t x(s) ds, \quad (6)$$

(6) can be rewritten as (7)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (A + \sum_{i=1}^{m_1} B_i)x(t) - \sum_{i=1}^{m_1} B_i A \int_{-h_i}^0 x(t+u) du \\ & - \sum_{i=1}^{m_1} B_i \sum_{k=1}^{m_1} B_k \int_{-h_i}^0 x(t+u-h_k) du \\ & - \sum_{i=1}^{m_1} B_i \sum_{j=1}^{m_2} B_j C_j \int_{-h_i}^0 \int_{-\tau_j}^0 x(t+u+s) ds du \\ & + \sum_{j=1}^{m_2} C_j \int_{-\tau_j}^0 x(t+s) ds \end{aligned} \quad (7)$$

Then theorem 4 is a corollary of theorem 3.

Theorem 4 *The zero solution of (6) is asymptotically stable if one of the following four conditions is satisfied*

- i) $\gamma(A) + \sum_{i=1}^{m_1} \|B_i\| + \sum_{j=1}^{m_2} \|C_j\| \tau_j < 0$;
- ii) $\Gamma(A) + \sum_{i=1}^{m_1} V(B_i) + \sum_{j=1}^{m_2} V(C_j) \tau_j$ is the opposite of a *M*-matrix;
- iii) $\gamma(A + \sum_{i=1}^{m_1} B_i) + \sum_{i=1}^{m_1} \|B_i A\| h_i + (\sum_{k=1}^{m_1} \|B_k\|)(\sum_{i=1}^{m_1} \|B_i\| h_i) + (\sum_{i=1}^{m_1} \|B_i\| h_i)(\sum_{j=1}^{m_2} \|C_j\| \tau_j) + \sum_{j=1}^{m_2} \|C_j\| \tau_j < 0$;
- iv) $\Gamma(A + \sum_{i=1}^{m_1} B_i) + \sum_{i=1}^{m_1} V(B_i A) h_i + (\sum_{k=1}^{m_1} V(B_k))(\sum_{i=1}^{m_1} V(B_i) h_i) + (\sum_{i=1}^{m_1} V(B_i) h_i)(\sum_{j=1}^{m_2} V(C_j) \tau_j) + \sum_{j=1}^{m_2} V(C_j) \tau_j$ is the opposite of a *M*-matrix.

Example 1 Consider the system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - h) + C \int_{t-\tau}^t x(s) ds \quad (8)$$

$$\text{with } A = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix} \text{ and } C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

Let set $b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$; and then considering Hölder norm $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, we have:

$$\gamma(A+B) = -a + b_1; \gamma(A) = -a; \|BA\| = ab; \|B\| = b; \|C\| = c.$$

Applying i) and iii) of theorem 4, it follows the two sufficient conditions of asymptotic stability of zero solution of (8).

$$1) a > b \text{ and } \tau < \frac{a-b}{c};$$

$$2) a - b_1 > 0, \tau < \frac{a-b_1}{c} \text{ and } h < \frac{a-b_1-\tau c}{b(a+b)+\tau bc}$$

4.2 Time invariant systems with discrete delays

Now let consider the following class of delay system.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m B_i x(t-h_i), h_i \geq 0 \quad (9)$$

This system can be rewritten as (10)

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^m B_i \right) x(t) - \sum_{i=1}^m B_i \sum_{j=1}^m B_j \int_{-h_i}^0 x(t+u-h_j) du \quad (10)$$

Applying previous results, theorem 5 follows.

Theorem 5 *The zero solution of (9) is asymptotically stable if one of the two following conditions holds*

$$i) \gamma\left(\sum_{i=1}^m B_i\right) + \left(\sum_{j=1}^m \|B_j\|\right)\left(\sum_{i=1}^m \|B_i\| h_i\right) < 0,$$

$$ii) \Gamma\left(\sum_{i=1}^m B_i\right) + \left(\sum_{j=1}^m V(B_j)\right)\left(\sum_{i=1}^m V(B_i) h_i\right) \text{ is the opposite of a } M\text{-matrix.}$$

Example 2 Consider (11)

$$\dot{x}(t) = B \sum_{i=1}^m x(t-h_i) \quad (11)$$

Applying theorem 5, it follows that, the zero solution of (11) is asymptotically stable, if one of the two following conditions holds

$$1) 0 \leq \sum_{i=1}^m h_i < -\frac{\gamma(B)}{\|B\|},$$

$$2) \Gamma(B) + V(B)^2 \sum_{i=1}^m h_i \text{ is the opposite of a } M\text{-matrix.}$$

4.3 Time invariant systems with distributed delays

Finally let us consider the equation of form (12)

$$\dot{x}(t) = C \int_{t-\tau}^t x(s) ds \quad (12)$$

Considering the fact that $x(s) = x(t) - \int_{t-s}^t \dot{x}(u) du$ and $\dot{x}(u) = C \int_{u-\tau}^u x(v) dv$, (12) becomes

$$\dot{x}(t) = \tau C x(t) - C^2 \int_{t-\tau}^t ds \int_s^t du \int_{u-\tau}^u x(v) dv \quad (13)$$

Then it follows theorem 6.

Theorem 6 *The zero solution of (12) is asymptotically stable if one of the two following conditions holds*

$$i) \gamma(C) + \frac{\tau^2 \|C^2\|}{2} < 0,$$

$$ii) \Gamma(C) + \frac{\tau^2}{2} V(C^2) \text{ is the opposite of a } M\text{-matrix.}$$

5 Conclusion

This paper has provided some results for testing the stability and condition of positively invariance of some bounded subsets for some linear functional differential equation of retarded type with distributed delay. The given conditions depend on the size of distributed and / or discrete delays and are simple to check. The inconvenient of these results is that they are based on majoration: that explains why the obtained conditions are sufficient, but not necessary in general. Note that our approach is still valid in the nonlinear case if the nonlinear system can be overvalued by a linear system.

Appendix A: proof of lemma 1

Let us define for any $p \in \{1, 2, \dots, r\}$ as in [9] the function $Q_p: R^{n_p} \times R^{n_p} \rightarrow R$ defined by

$$Q_p[x_p, y_p] = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta} [V_p(x_p + \Delta y_p) - V_p(x_p)] \quad (14)$$

then we have [9]

$$D^+ V_p(x_p(t)) = Q_p[x_p(t), \dot{x}(t)] \quad (15)$$

$$D^+ V_p(x_p(t)) = Q_p[x_p(t), A_{pp} x_p(t) +$$

$$\sum_{k=1, k \neq p}^r A_{pk} x_p(t) + \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{k=1}^r B_{i,pk} x_k(t-h_i) + \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^r \int_{-\tau_j}^0 K_j(s)_{pk} x_k(t+s) ds].$$

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta} [V_p(x_p(t) + \Delta(A_{pp} x_p(t) +$$

$$\sum_{k=1, k \neq p}^r A_{pk} x_p(t) + \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{k=1}^r B_{i,pk} x_k(t-h_i) + \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^r \int_{-\tau_j}^0 K_j(s)_{pk} x_k(t+s) ds) - V_p(x_p(t))].$$

Therefore we have:

$$D^+V_p(x_p(t)) \leq \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta} [V_p(x_p(t) + \Delta A_{pp}x_p(t)) - V_p(x_p(t))] +$$

$$V_p(\sum_{k=1, k \neq p}^r A_{pk}x_k(t) + \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{k=1}^r B_{i,pk}x_k(t - h_i) + \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^r \int_{-\tau_j}^0 K_j(s)_{pk}x_k(t+s)ds)$$

Remark that [9]:

$$\gamma_p(A_{pp}) = \sup\{V_p(x_p(t))^{-1}Q_p[x_p(t), A_{pp}x_p(t)], x_p \in R^{n_p}, x_p \neq 0\}$$

and then

$$D^+V_p(x_p(t)) \leq \gamma_p(A_{pp})V_p(x_p(t)) +$$

$$V_p(\sum_{k=1, k \neq p}^r A_{pk}x_k(t) + \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{k=1}^r B_{i,pk}x_k(t - h_i) + \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^r \int_{-\tau_j}^0 K_j(s)_{pk}x_k(t+s)ds).$$

Considering properties of γ_p and V_p , we obtain

$$D^+V_p(x_p(t)) \leq \gamma_p(A_{pp})V_p(x_p(t)) +$$

$$\sum_{k=1, k \neq p}^r V(A_{pk})V(x_k(t)) +$$

$$\sum_{i=1}^{m_1} \sum_{k=1}^r V(B_{i,pk})V(x_k(t - h_i)) +$$

$$\sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^r \int_{-\tau_j}^0 V(K_j(s)_{pk})V(x_k(t+s))ds$$

This holds for all p from 1 to r , and therefore the final result is:

$$D^+V(x(t)) \leq \Gamma(A)V(x(t)) + \sum_{i=1}^{m_1} V(B_i)V(x(t - h_i)) + \sum_{j=1}^{m_2} \int_{-\tau_j}^0 V(K_j(s))V(x(t+s))ds \quad (16)$$

Appendix B: proof of lemma 2

We shall proceed by contradiction. Suppose $V(\phi(\theta)) \leq \psi(\theta)$, $\forall \theta \in [-h, 0]$ and

$V(x(t; t_0, \phi)) \leq z(t; t_0, \psi)$, $\forall t \geq t_0$ does not hold. Then it means that there exists an instant

$t_1 = \inf\{t > t_0, V_i(x(t; t_0, \phi)) \geq z_i(t; t_0, \psi), i = 1..r\}$ and an index $p \in \{1, 2, \dots, r\}$ such that

$$V_p(x_p(t_1; t_0, \phi)) = z_p(t_1; t_0, \psi) \\ V_k(x_k(t_1; t_0, \phi)) \leq z_k(t_1; t_0, \psi), k \neq p \quad (17)$$

and there exists $\varepsilon > 0$ such that

$$V_p(x_p(t_1 + \varepsilon; t_0, \phi)) > z_p(t_1 + \varepsilon; t_0, \psi),$$

then according to (17) we have

$$\frac{1}{\varepsilon} [V_p(x_p(t_1 + \varepsilon; t_0, \phi)) - V_p(x_p(t_1; t_0, \phi))] > \frac{1}{\varepsilon} [z_p(t_1 + \varepsilon; t_0, \psi) - z_p(t_1; t_0, \psi)],$$

and taking the limit as $\varepsilon \rightarrow 0^+$ we obtain the inequality

$$D^+V_p(x_p(t_1; t_0, \phi)) > \left(\frac{z_p(t; t_0, \psi)}{dt}\right)_{t=t_1} \quad (18)$$

But, from lemma 1, at the instant t_1 we have the inequality

$$D^+V_p(x_p(t_1)) \leq \gamma_p[A_{pp}]V_p(x_p(t_1)) +$$

$$\sum_{k=1, k \neq p}^r V(A_{pk})V(x_k(t_1)) + \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{k=1}^r V(B_{i,pk})V(x_k(t_1 - h_i)) + \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^r \int_{-\tau_j}^0 V(d_s K_j(s)_{pk})V(x_k(t_1 + s))$$

As all the off-diagonal entries of matrix $\Gamma(A)$ and all entires of $V(B_i)$ and $V(K_j(s))$ are non negative by construction, relations (17) implies:

$$D^+V_p(x_p(t_1)) \leq \gamma_p[A_{pp}]V_p(x_p(t_1)) +$$

$$\sum_{k=1, k \neq p}^r V(A_{pk})V(x_k(t_1)) + \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{k=1}^r V(B_{i,pk})V(x_k(t_1 - h_i)) + \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^r \int_{-\tau_j}^0 V(d_s K_j(s)_{pk})V(x_k(t_1 + s))$$

This means that

$$D^+V_p(x_p(t_1; t_0, \phi)) \leq \left(\frac{z_p(t; t_0, \psi)}{dt}\right)_{t=t_1} \quad (19)$$

which contradicts inequality (18).

Appendix C: proof of theorem 3

We only consider here the proof of the point d) ; the other ones are similar. It is sufficient to prove that zero solution of the comparison system (equivalent of (4)), derived on basis of equation (5), is asymptotically stable. Consider this system and suppose that assumption d) holds. Then, consider the following function $v(z(t))$

$$v(z(t)) = \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \frac{|z_i(t)|}{u_i} \right\} \quad (20)$$

For each t , there exists an index k such that

$$v(z(t)) = \frac{|z_k(t)|}{u_k} \text{ and}$$

$$\frac{d^+ v(z(t))}{dt} \leq \frac{1}{u_k} [\Gamma[(A + \sum_{i=1}^{m_1} B_i)]|z(t)| +$$

$$\sum_{i=1}^{m_1} V(B_i A) \int_{-h_i}^0 |z(t+s)| ds +$$

$$\sum_{i=1}^{m_1} V(B_i) \sum_{k=1}^{m_1} V(B_k) \int_{-h_i}^0 |z(t+s-h_k)| ds + \sum_{i=1}^{m_1} V(B_i) \sum_{j=1}^{m_2} \int_{t-h_i}^t ds \int_{-\tau_j}^0 V(K_j(s+u)) |z(s+u)| du + \sum_{j=1}^{m_2} \int_{-\tau_j}^0 V(K_j(s)) |z(t+s)| ds]_k$$

Along the trajectories verifying $|z_j(t+s)| \leq |z_j(t)|$ for $s \in [-h, 0]$, we have

$$\frac{d^+ v(z(t))}{dt} \leq \frac{1}{u_k} [\Gamma[(A + \sum_{i=1}^{m_1} B_i)] |z(t)| +$$

$$\sum_{i=1}^{m_1} V(B_i A) \int_{-h_i}^0 |z(t)| ds +$$

$$\sum_{i=1}^{m_1} V(B_i) \sum_{k=1}^{m_1} V(B_k) \int_{-h_i}^0 |z(t)| ds +$$

$$\sum_{i=1}^{m_1} V(B_i) \sum_{j=1}^{m_2} \int_{t-h_i}^t ds \int_{-\tau_j}^0 V(K_j(s+u)) |z(t)| du + \sum_{j=1}^{m_2} \int_{-\tau_j}^0 V(K_j(s)) |z(t)| ds]_k$$

Then, according to definition of $v(z(t))$,

$$\frac{d^+ v(z(t))}{dt} \leq \frac{1}{u_k} [(\Gamma[(A + \sum_{i=1}^{m_1} B_i)] + \sum_{i=1}^{m_1} V(B_i A) h_i + (\sum_{i=1}^{m_1} V(B_i) h_i) \sum_{k=1}^{m_1} V(B_k) +$$

$$\sum_{i=1}^{m_1} V(B_i) \sum_{j=1}^{m_2} \int_{t-h_i}^t ds \int_{-\tau_j}^0 V(K_j(s+u)) ds + \sum_{j=1}^{m_2} \int_{-\tau_j}^0 V(K_j(s)) ds) u]_k v(z(t))$$

or

$$\frac{d^+ v(z(t))}{dt} < -\varepsilon v(z(t)) \quad (21)$$

This implies $\frac{d^+ v(z(t))}{dt} < -\varepsilon v(z(t))$, so $v(z(t))$ is a Lyapunov-Razumikhin [15] function, and the conclusion follows.

References

- [1] R. Bellman, "Vector Lyapunov Functions," *J. SIAM Control, Ser. A*, No. 1, 1962, pp 33-34.
- [2] M. Dambrine, "Contribution to the stability analysis of time-delay systems," *Ph.D. Thesis*, Univ. des Sc. et Tech. de Lille, No 1386, 1994, France (in French).
- [3] J.P. Richard, A. Goubet-Bartholoméüs, P. A. Tchangan, and M. Dambrine, "Nonlinear Delay Systems: Tools for Quantitative Approach to Stabilization," *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. "Delay Systems", Springer Verlag (to appear), 1997.
- [4] K. Gopalsamy, "Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics," *Kluwer Academic Publishers*, 1992, Dordrecht.
- [5] J. Hale, "Theory of functional differential equations," *Springer-Verlag*, 1977, N.Y.
- [6] A. Hmamed, "Stability conditions of delay-differential systems," *Int. Control*, 43, 2, 1986, pp 455-463.
- [7] V. Kolmanovskii, and A. Myshkis, "Applied Theory of Functional Differential Equations," *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, 1992.
- [8] V.B. Kolmanovskii, "The stability of certain retarded systems with variable coefficients," *PMM*, Vol. 59, No 1, 1995, pp 65-74.
- [9] V.B. Kolmanovskii, "Applications of differential inequalities for stability of some functional differential equations," *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, Vol. 25, No 9-10, 1995, pp 1017-1028.
- [10] V.B. Kolmanovskii, and V.R. Nosov, "Stability of functional differential equations," *Academic Press*, 1986.
- [11] V.B. Kolmanovskii, and V.R. Nosov, "Stability of neutral system with a deviating argument," *PMM*, Vol. 43, No 2, 1979, pp 209-218.
- [12] N. Krasovskii (1963): *Stability of motion*, Stanford Univ. Press.
- [13] V. Lakshmikantham, S. Leela, "Differential and integral inequalities," Vol. II, *Academic Press*, New-York, 1969.
- [14] W. Perruquetti, J.P. Richard, and P. Borne, "Vector Lyapunov functions : recent developments for stability, robustness, practical stability and constrained control," *Nonlinear Times & Digest*, No 2, 1995, pp 227-258.
- [15] B.S. Razumikhin, "The application of Lyapunov's method to problems in the stability of systems with delay," *Autom. i Telemekhanika*, Vol. 21, No 6, 1960, pp. 740-748.
- [16] A.P. Tchangan, M. Dambrine, and J.P. Richard, "Stability and Stabilization of Nonlinear Neutral Systems," *Proceedings of the IEEE SMC CESA '96*, Lille, France, July 1996, pp 812-815.
- [17] A.P. Tchangan, M. Dambrine, and J.P. Richard, "Stability domains for neutral systems," *Proceedings of the 35th IEEE CDC*, Kobe, Japan, December 1996, pp 1617-1618.

Annexe 3

Annexes relatives au Chapitre V

ROBUST STABILITY AND STABILIZATION OF SYSTEMS WITH AFTEREFFECT

A. P. Tchangani, M. Dambrine and J. P. Richard

Ecole Centrale de Lille, LAIL UPRESA CNRS 8021, Cité Scientifique, BP 48,
59651 Villeneuve d'Ascq, France.

e-mail: {tchangani, dambrine, jprichard}@ec-lille.fr

Recommended by: Vladimir B. Bajić

Accepted in the final form: 10 December, 1998

Abstract. This paper considers the robust, stabilizing control of time-delay, linear systems with nonlinear uncertainties on the parameters and possible variations of the delays. It first gives some stability criteria for systems with both distributed and discrete delays, and then applies them to the design of input-delayed controllers. The proofs are based on comparison methods.

Keywords: stability, stabilization, robustness, systems with aftereffect

1 Introduction and statement of the problem

The aftereffect phenomenon is a natural component of the dynamic processes in many engineering fields (see for instance [4, 5]). Even if the process itself does not include delay phenomena in its inner dynamics, the actuators, sensors and transmission lines that are involved in its automatic control usually introduce such time lags. This explains the great number of works devoted to the so-called functional differential equations (shortly, *FDEs*) [15].

Two generalizations of the Lyapunov direct method, by Razumikhin and Krasovskii, are available for *FDEs* and still receive a great interest (see [3]); they either involve the construction of a definite positive function $v(x(t))$ (Razumikhin theory) or of a functional $v(x_t)$. For robust stability criteria, the Krasovskii approach is mainly chosen, using some generalized quadratic-type functionals: this leads to Riccati-type equations, which in turn are to be studied by computational algorithms such as LMIs (linear matrix inequalities) approach. In the multi-delay case, the obtained LMIs have high dimensions (see for instance [3]). The distributed-delay case was rarely considered through this approach [6].

The *comparison systems* constitute another option: the idea is to derive stability of original system by studying stability of a simpler system, obtained by using differential inequalities and vector-Lyapunov functions (see [7, 8] for the general theory and [1, 16] for concrete choices of vector-Lyapunov functions with Razumikhin principle). It has shown some advantages in basic stability analysis, but also for the estimation of the stability domains (see [16] and references herein). The results apply to the stability study of retarded systems with discrete [1] or distributed delays [18] and to neutral ones [19].

This paper applies this concept to the robust stability and stabilization of uncertain, mixed discrete-plus-distributed delay systems,

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bx(t - \eta(t)) + f(t, x(t)) + g(t, x(t - \eta(t))) \\
&\quad + \int_{-\tau(t)}^0 [Cx(t+s) + h(s, x(t+s))] ds, \\
t &\geq t_0, x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-\xi, 0].
\end{aligned} \tag{1}$$

Here, the delays $\eta(t)$ (discrete) and $\tau(t)$ (distributed) are piecewise continuous functions verifying: $0 \leq \eta(t) \leq \eta_m$ and $0 \leq \tau(t) \leq \tau_m$. $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ are constant matrices, and the nonlinear functions f, g and h are uncertainties which can be structured or not ([1], see definitions in the additional notations).

In the existing literature (see a recent survey in [3]), robustness is often considered with regard to model uncertainties [13, 12, 11, 9, 1] or with regard to time-delay [21, 1]. In what concerns this last, independent-of-delay (*i.o.d.*) stability criteria and delay-dependent (*d.d.*) ones are generally distinguished: *i.o.d.* stability is a very strong property, since it holds for any value of the delay, but needs restrictive conditions. Delay-dependent conditions are generally preferable since, in practice, delay upper-bounds are known.

But, to the best authors knowledge, there are no simple result that concern robust stability of distributed-delay systems, even if this kind of operators is basic in finite-spectrum assignment of linear, time-invariant systems with constant delays [2][22]. Hence, we hope the present study constitutes a possible approach to the robustness analysis of such controllers: robustness with regard to variations of the delay, and with regard to some additive, nonlinear uncertainties.

The paper is organized as follows: Section 2 defines robust, delay-dependent stability criteria. A theorem and its corollary are proved for structured uncertainties, and statements in the unstructured case follow without proof. Then, Section 3 uses these results for the stabilizing control of systems with delayed state and input.

1.1 Additional notations

$x(t) \in \mathbb{R}^n$, with norm $\|\cdot\|$, is the instantaneous value of the state function $x_t \in \mathcal{C} = \mathcal{C}([-\xi, 0]; \mathbb{R}^n)$, $\xi = \max\{\eta_m, \tau_m\}$, defined by: $x_t(\theta) = x(t + \theta) \forall \theta \in [-\xi, 0]$;

$|y| \in \mathbb{R}_+^n$ and $|M| \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ are the component-to-component absolute values of $y \in \mathbb{R}^n$ and $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

M^* denotes the matrix with the same diagonal entries as $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ but with off-diagonal absolute values ($m_{ii}^* = m_{ii}$, $m_{ij}^* = |m_{ij}|$).

$$\mu(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|I + \varepsilon M\| - 1}{\varepsilon}, \text{ the matrix measure of } M, \text{ and } \|M\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|My\|}{\|y\|}.$$

Structured uncertainties [1]: one can estimate the component-by-component effect of perturbations. Then, $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
|f(t, x)| &\leq F(t) |x|; & F(t) &\in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \\
|g(t, x)| &\leq G(t) |x|; & G(t) &\in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \\
|h(s, x)| &\leq H(s) |x|; & H(s) &\in \mathbb{R}_+^{n \times n}.
\end{aligned}$$

Unstructured uncertainties: only a global estimation of the influence of uncertainties can be obtained, and then, $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\|f(t, x)\| &\leq \alpha(t) \|x\|; & \alpha(t) &\in \mathbb{R}_+, \\
\|g(t, x)\| &\leq \beta(t) \|x\|; & \beta(t) &\in \mathbb{R}_+, \\
\|h(s, x)\| &\leq \gamma(s) \|x\|; & \gamma(s) &\in \mathbb{R}_+.
\end{aligned}$$

2 Stability

Many results concern the case where the matrix A is stable [9, 12, 14]; this restriction was partially solved by considering the stabilizing influence of matrix B [3, 17]. This section completes it by including the stabilizing influence of a distributed-delay effect (matrix C).

2.1 Structured uncertainties

In the case of structured uncertainties, a matricial stability criterion for system (1) can be derived as expressed in the following theorem.

Theorem 1 *The zero solution of (1) is asymptotically stable if there are a vector $p > 0$ and a scalar $\varepsilon > 0$ such that for $t \geq t_0 + \xi$, $M(t)p < -\varepsilon p$ holds for the matrix $M(t)$ defined by*

$$\begin{aligned} & (A + B + \tau(t)C)^* + F(t) + G(t) + \int_{-\tau(t)}^0 H(s)ds \\ & + \eta(t)(|BA| + |B^2|) + |B| \int_{-\eta(t)}^0 (F(t+u) + G(t+u))du \\ & + |BC| \int_{-\eta(t)}^0 \tau(t+u)du + |B| \int_{-\eta(t)}^0 \int_{-\tau(t+u)}^0 H(s)ds du \\ & + \frac{\tau^2(t)}{2}(|CA| + |CB|) + |C| \int_{-\tau(t)}^0 \int_s^0 [F(t+u) + G(t+u)]du ds \\ & + |C^2| \int_{-\tau(t)}^0 ds \int_s^0 \tau(t+u)du + |C| \int_{-\tau(t)}^0 \int_s^0 \int_{-\tau(t+u)}^0 H(v) dv du ds \end{aligned} \quad (2)$$

When all uncertainties have constant upper-bound gains and delays are constant, the conditions of previous theorem become easier to check:

Corollary 2 *If F, G, H, η and τ are constant, then the zero solution of (1) is asymptotically stable if the following, constant matrix M is of Hurwitz-type¹:*

$$\begin{aligned} & (A + B + \tau C)^* + F + G + \tau H + \eta\{|BA| + |B^2| + |B|(F + G)\} + \\ & + \eta\tau\{|BC| + |B|H\} + \frac{\tau^2}{2}\{|CA| + |CB| + |C|(F + G)\} + \frac{\tau^3}{2}\{|C^2| + |C|H\} \end{aligned} \quad (3)$$

Proof. Firstly, note that

$$x(t - \eta(t)) = x(t) - \int_{-\eta(t)}^0 \dot{x}(t+u)du, \quad (4)$$

$$x(t+s) = x(t) - \int_s^0 \dot{x}(t+u)du. \quad (5)$$

Thus (1) can be developed for $t \geq t_0 + \xi$ into

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & [A + B + \tau(t)C]x(t) + f(t, x(t)) + g(t, x(t-\eta(t))) + \int_{-\tau(t)}^0 h(s, x(t+s))ds \\ & - \int_{-\eta(t)}^0 (BAx(t+u) + B^2x(t+u-\eta(t+u)) + Bf(t+u, x(t+u)) + Bg(x(t+u-\eta(t+u)))) \\ & + \int_{-\tau(t+u)}^0 [BCx(t+s) + Bh(s, x(t+s))]ds du - \int_{-\tau(t)}^0 \{ \int_s^0 (CAx(t+u) + CBx(t+u-\eta(t+u)) \\ & + Cf(t+u, x(t+u)) + Cg(x(t+u-\eta(t+u)))) + \int_{-\tau(t+u)}^0 [C^2x(t+v) + Ch(v, x(t+v))]dv du \} ds. \end{aligned} \quad (6)$$

By using the vector-Lyapunov function $V(x(t)) = [|x_1(t)|, \dots, |x_i(t)|, \dots, |x_n(t)|]^T$, one can derive a comparison system of (6) as in [1, 17, 18], leading to the result.

¹Remark that this equivalently means that (3) is the opposite of an M -matrix, since it has positive off-diagonal entries: hence, its stability can be simply checked by calculating the signs of its principal minors.

2.2 Unstructured uncertainties

Unstructured uncertainties leads to scalar stability criterion.

Theorem 3 *The zero solution of (1) is asymptotically stable if there is an $\varepsilon > 0$ such that*

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq t_0 + \xi} \{ & \mu(A + B + \tau(t)C) + \alpha(t) + \beta(t) + \int_{-\tau(t)}^0 \gamma(s) ds + \eta(t)(\|BA\| + \|B^2\|) \\ & + \|B\| \int_{-\eta(t)}^0 (\alpha(t+u) + \beta(t+u)) du + \|BC\| \int_{-\eta(t)}^0 \tau(t+u) du \\ & + \|B\| \int_{-\eta(t)}^0 \int_{-\tau(t+u)}^0 \gamma(s) du ds + \frac{\tau^2(t)}{2} (\|CA\| + \|CB\|) \\ & + \|C\| \int_{-\tau(t)}^0 \int_s^0 [\alpha(t+u) + \beta(t+u)] du ds + \|C^2\| \int_{-\tau(t)}^0 \int_s^0 \tau(t+u) du ds \\ & + \|C\| \int_{-\tau(t)}^0 \int_s^0 \int_{-\tau(t+u)}^0 \gamma(v) dv du ds \} < -\varepsilon \end{aligned} \quad (7)$$

Corollary 4 *If $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ and τ are constant, then the zero solution of (1) is asymptotically stable if there exists $\varepsilon > 0$ such that*

$$\begin{aligned} -\varepsilon > & \mu(A + B + \tau C) + \alpha + \beta + \tau\gamma + \eta\{\|BA\| + \|B^2\| + \|B\|(\alpha + \beta)\} + \\ & \eta\tau(\|BC\| + \|B\|\gamma) + \frac{\tau^2}{2}\{\|CA\| + \|CB\| + \|C\|(\alpha + \beta)\} + \frac{\tau^3}{2}\{\|C^2\| + \|C\|\gamma\}. \end{aligned} \quad (8)$$

2.3 Generalization to multiple delays

The previous results are generalizable to the multiple-delay case. For instance, consider the following system,

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \int_{-\tau_i}^0 [C_i x(t+s) + h_i(s, x(t+s))] ds. \quad (9)$$

with constant uncertainties bound, then it follows that

Theorem 5 *The zero solution of (9) is asymptotically stable if one of the following conditions holds:*

1) *the uncertainties are structured and*

$$\left(\sum_{i=1}^r \tau_i C_i \right)^* + \sum_{i,j=1}^r (\|C_i C_j\| + |C_i| H_j) \frac{\tau_i^2 \tau_j}{2} + \sum_{i=1}^r H_i \tau_i \text{ is Hurwitz}; \quad (10)$$

2) *the uncertainties are unstructured and*

$$\mu \left(\sum_{i=1}^r \tau_i C_i \right) + \sum_{i=1}^r \gamma_i \tau_i + \sum_{i,j=1}^r (\|C_i C_j\| + \|C_i\| \gamma_j) \frac{\tau_i^2 \tau_j}{2} < 0. \quad (11)$$

Let us consider now the following system ($0 < \tau_2 < \tau_1$)

$$\dot{x}(t) = \int_{-\tau_1}^{-\tau_2} [Cx(t+s) + h(s, x(t+s))] ds; \quad (12)$$

it will allow one to design controllers as (19). These equations represent the model of systems with distributed delay followed by a discrete delay. Indeed, let put

$$y(t) = C \int_{t-(\tau_1-\tau_2)}^t x(s) ds$$

then

$$\dot{x}(t) = y(t - \tau_2)$$

Using transformation (5) and putting $\rho = \frac{1}{2}(\tau_1^2 - \tau_2^2)$ it follows that:

Theorem 6 *The zero solution of (12) is asymptotically stable if one of the following conditions holds:*

1) *the uncertainties are structured and*

$$C^* + \rho(|C^2| + |C|H) + H \text{ is Hurwitz;} \quad (13)$$

2) *the uncertainties are unstructured and if*

$$\mu(C) + \rho(\|C^2\| + \|C\|\gamma) + \gamma < 0. \quad (14)$$

Proof. Analogous to the previous ones but considering a supremum over the time interval $[-\tau_1, -\tau_2]$.

3 Stabilization

Most of the existing literature concerning the robust stabilization of

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \eta(t)) + f(t, x(t)) + g(x(t - \eta(t))) + D(t)u(t) \quad (15)$$

(where $u(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, piecewise continuous is the control, $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$ continuous), consider a *memoryless* control $u(t) = k(x(t))$ [9, 11, 12, 14]. It means that the parameter with crucial importance is the matrix A which must be stabilizable (in the case D constant for example): if the pair (A, D) is not stabilizable, there will be no answer for the stabilization problem, even if the pair $(A + B, D)$ (which corresponds to the case of negligible delay) is stabilizable. Moreover, memoryless control is not so much realistic in our opinion, since in many cases the delay is introduced by the measurement or control devices, leading to $u(t) = k(x(t - \tau))$ [10]. Then, the previous results appear as useful complements for the robust stabilization of (15) by means of a delayed control. We will give in the following two delayed feedback control laws as basic to stabilize the previous systems by basic applications of previous results.

3.1 Discrete-delayed control

Let us firstly consider the following controller, applied on system (15),

$$u(t) = K(t)x(t - \tau(t)). \quad (16)$$

where $K(t)$ is piece-wise continuous, and $\tau(t)$ verifies $0 \leq \tau(t) \leq \tau_m$. The following result is a direct application of [17, 18].

Proposition 7 *The system (15) is robustly stabilized by (16) if, for some scalar $\epsilon > 0$, one of the following conditions holds for $t \geq t_0 + \xi$,*

1) *in the case of structured uncertainties, there is a vector $p > 0$, such that $M(t)p < -\epsilon p$ holds for the matrix $M(t)$ defined by*

$$\begin{aligned} & (A + B + D(t)K(t))^* + F(t) + G(t) + \eta(t)\{|BA| + |B^2| + |B|(F(t) + G(t)) \\ & + |BD(t)K(t)|\} + \tau(t)\{|D(t)K(t)A| + |D(t)K(t)|(F(t) + G(t)) + |D(t)K(t)B| \\ & + |(D(t)K(t))^2|\} \end{aligned} \quad (17)$$

in the case of unstructured uncertainties,

$$\begin{aligned} & \mu(A + B + D(t)K(t)) + \alpha(t) + \beta(t) + \eta(t)\{\|BA\| + \|B\|(\alpha(t) + \beta(t)) \\ & + \|B^2\| + \|BD(t)K(t)\|\} + \tau(t)\{\|D(t)K(t)A\| + \|D(t)K(t)\|(\alpha(t) + \beta(t)) \\ & + \|D(t)K(t)B\| + \|(D(t)K(t))^2\|\} < -\varepsilon. \end{aligned} \quad (18)$$

2 Distributed delayed control

we consider the following control law, involving a distributed-delay effect

$$u(t) = \int_{-\tau(t)}^{-\nu(t)} Kx(t+s)ds \quad (19)$$

where $\tau_m \geq \tau(t) > \nu(t) \geq 0 \forall t$, and $K = \text{constant}$. Application of the results of Section 2 to system (15) with the control law (19), yields the following proposition.

Proposition 8 The system (15) is robustly stabilized by (19) if, for some scalar $\varepsilon > 0$, one of the following conditions holds for $t > t_0 + \xi$,

1) in the case of structured uncertainties, there is a vector $p > 0$, such that $M(t)p < -\varepsilon p$ holds, where the matrix $M(t)$ defined by

$$\begin{aligned} & \{A + B + [\tau(t) - \nu(t)]D(t)K\}^* + F(t) + G(t) + \eta(t)\{|BA| + |B^2|\} + |B| \int_{-\eta(t)}^0 (F(t+u) \\ & + G(t+u))du + |BD(t)K| \int_{-\eta(t)}^0 (\tau(t+u) - \nu(t+u))du + \frac{1}{2}[\tau^2(t) - \nu^2(t)] \cdot \\ & \{|D(t)KA| + |D(t)KB|\} + |D(t)K| \int_{-\tau(t)}^{-\nu(t)} \int_s^0 (F(t+u) + \\ & G(t+u))duds + |(D(t)K)^2| \cdot \int_{-\tau(t)}^{-\nu(t)} \int_s^0 (\tau(t+u) - \nu(t+u))du ds; \end{aligned} \quad (20)$$

in the case of unstructured uncertainties,

$$\begin{aligned} & \mu(A + B + (\tau(t) - \nu(t))D(t)K) + \alpha(t) + \beta(t) + \eta(t)\{\|BA\| + \|B\|(\alpha(t) \\ & + \beta(t)) + \|B^2\|\} + \|BD(t)K\| \int_{-\eta(t)}^0 (\tau(t+u) - \nu(t+u))du + 0.5[\tau^2(t) \\ & - \nu^2(t)]\{\|D(t)KA\| + \|D(t)KB\|\} + \|D(t)K\| \int_{-\tau(t)}^{-\nu(t)} \int_s^0 (\alpha(t+u) \\ & + \beta(t+u))duds + \|(D(t)K)^2\| \cdot \int_{-\tau(t)}^{-\nu(t)} ds \int_s^0 (\tau(t+u) - \nu(t+u))du < -\varepsilon. \end{aligned} \quad (21)$$

As before, if all parameters are supposed to be constant, the conditions are simpler:

Proposition 9 The system (15) with constant parameters η, D , is robustly stabilized by (19) with constant τ, ν , if one of the following conditions holds for $t > t_0 + \xi$,

1) in the case of structured uncertainties with constant bounds,

$$\begin{aligned} & (A + B + (\tau - \nu)DK)^* + F + G + \eta\{|BA| + |B|(F + G) + |B^2| + |BDK|(\tau - \nu)\} \\ & - \frac{1}{2}(\tau^2 - \nu^2)\{|DKA| + |DK|(F + G) + |DKB|\} + \frac{1}{2}(\tau - \nu)(\tau^2 - \nu^2)|(DK)^2| \text{ is Hurwitz;} \end{aligned} \quad (22)$$

2) in the case of unstructured uncertainties with constant bounds,

$$0 > \mu(A + B + (\tau - \nu)DK) + \alpha + \beta + \eta \{ \|BA\| - \|B\|(\alpha + \beta) + \|B^2\| \} + \\ \|BDK\| \eta(\tau - \nu) + \frac{1}{2}[\tau^2 - \nu^2] \{ \|DKA\| + \|DKB\| + \|DK\|(\alpha + \beta) \} \\ + \frac{1}{2}(\tau - \nu)(\tau^2 - \nu^2) \|(DK)^2\|. \quad (23)$$

4 Conclusion

The problem of input-delayed, robust stabilization of systems with aftereffect has been studied in both structured and unstructured cases. Original points are: 1) the possibility for the process or control to involve distributed delays; 2) the consideration of possible uncertainties on the (constant or varying) delays; 3) the relative simplicity of the conditions in the time-invariant case. 4) the ability to study multiple-delay case (even if we only studied here a special case (9) without discrete delay).

References

- [1] Bartholoméüs-Goubet A., Dambrine M., Richard J.-P. (1997): Stability of perturbed systems with time-varying delays, *Systems & Control Letters*, **31**, pp. 155-163.
- [2] Brethé D., Loiseau J.-J. (1996): A result that could bear fruit for the control of delay-differential systems, *Proc. 4th IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation, MSCA '96*, pp. 168-172, Crete, Greece.
- [3] Dugard L., Verriest E.I. (Eds) (1997): Stability and control of time-delay systems, *Lecture Notes in Control & Inform. Sc.*, Vol. No. **228**, Springer Verlag.
- [4] Hale J. (1977): Theory of functional differential equations, Springer-Verlag, N.Y.
- [5] Kolmanovskii V.B. and Myshkis A. (1992): Applied Theory of Functional Differential Equations, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.
- [6] Kolmanovskii V. B. and Richard J.-P. (1997): Stability of some systems with distributed delay, *JESA, European Journal of Automatic Control*, Vol **31**, No. **6**, pp. 971-981.
- [7] Lakshmikantham V. and Leela S. (1969): Differential and integral inequalities, Vol. II, Academic Press, New-York.
- [8] Lakshmikantham V., Matrosov V.M., Sivasundaram S. (1991): Vector Lyapunov Functions and Stability Analysis of Nonlinear Systems, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Boston, London.
- [9] Lee C-H., Li T-H.S., Kung F-C. (1996): Robust stabilization of time-varying uncertain time-delay systems via memoryless feedback control, *J. Syst. Analysis Modelling Simul.*, Vol. **22**, pp. 85-96.
- [10] Lee C-H., Moon Y.S., Kwon W.H. (1996): Robust H_∞ controller for state and input delayed systems with structured uncertainties, *Proc. 35th. IEEE Conf. Dec. & Control, Kobe, Japan*, pp. 2092-2096.
- [11] Li X. and de Souza C. E. (1997): Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: a Linear Matrix Inequality approach, *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol. **42**, No. **8**, pp. 1144-1148.
- [12] Mahmoud M.S. (1996): Control design for retarded systems: a robust scheme, *J. Syst. Analysis Modelling Simul.*, Vol. **22**, pp. 133-144.

- [13] Niculescu I., De Souza C.E., Dion J.-M., Dugard L. (1994): Robust stability and stabilization for uncertain linear systems with state delay: Single delay case (I), *Proc. IFAC Workshop on Robust Control Design*, Rio de Janeiro, Brazil, pp. 469-474.
- [14] Phoojaruenchanachai S. and Furuta K. (1992): Memoryless Stabilization of Uncertain Linear Systems Including Time-Varying State Delays, *IEEE Trans. Aut. Control*, Vol. 37, No. 7, pp. 1022-1026.
- [15] Richard J.-P. (1998): Some trends and tools for the study of time-delay systems, *Proc. IEEE-IMACS Conf. Computational Engineering in Systems Applications*, Plenary lecture, pp. 27-43, Tunisia, 1-4 April.
- [16] Richard J.-P., Bartholoméüs-Goubet A., Tchangani A.P. and Dambrine M. (1997): Nonlinear delay systems: tools for quantitative approach to stabilization, Chap. 10 of "Stability and control of time-delay systems", *Lecture Notes in Control & Inform. Sc.*, Vol. No. 228, pp. 218-240, Springer Verlag.
- [17] Tchangani A.P., Dambrine M. and Richard J.-P. (1997): Stability of linear differential equations with distributed delay, *Proc. of 36th. IEEE Conf. Dec. & Control*, pp. 3779-3784, San Diego, CA.
- [18] Tchangani A.P., Dambrine M., Richard J.-P. Kolmanovskii V.B. (1997): Stability of nonlinear differential equations with distributed delay, *Nonlinear Analysis*, Vol. 34, pp. 1081-1095, Pergamon.
- [19] Tchangani A.P., Dambrine M. and Richard J.-P. (1998): Stability, attraction domains and ultimate boundedness for nonlinear neutral systems, *Math. & Computers in Simulation*, Vol. 45, No. 3-4, pp. 291 - 298 Elsevier Sc. Publ.
- [20] Tchangani A.P., Dambrine M. and Richard J.-P. (1997): Robust stabilization of delay systems with discrete or distributed delayed control, *Proc. of 37th. IEEE Conf. Dec. & Control*, (to appear), Tampa, Florida, USA.
- [21] Verriest E. I. (1994): Robust Stability of Time-Varying Systems with Unknown Bounded delay, *Proc. of 33rd Conf. on Decision and Control*, Lake Buena Vista, FL, pp. 417-422.
- [22] Watanabe K., Nobuyama E., Kojima K. (1996): Recent advances in control of time-delay systems: a tutorial review, *Proc. 35th. IEEE Conf. Dec. & Control*, Kobe, Japan, pp. 2083-2089.

Annexe 4 : liste de publications de l'auteur

- [1] A.P. Tchangani, M. Dambrine and J.P. Richard (1998). Robust stability and stabilization of systems with aftereffect, *Stability and Control : Theory and Applications*, (to appear).
- [2] A.P. Tchangani, M. Dambrine and J.P. Richard (1998). Stability, attraction domains, and ultimate boundedness for nonlinear neutral systems, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 45, No. 3-4, pp. 291 - 298.
- [3] A.P. Tchangani, M. Dambrine, J.P. Richard and V.B. Kolmanovskii (1998). Stability of nonlinear differential equations with distributed delay, *Nonlinear Analysis*, Vol. 34, pp. 1081-1095, Pergamon.
- [4] J.P. Richard, A. Goubet-Bartholomüs, P. A. Tchangani and M. Dambrine (1997). Nonlinear Delay Systems: Tools for Quantitative Approach to Stabilization, Chap. 10 (pp 218 - 240) of *Stability and control of time-delay systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, No 228, Springer Verlag.
- [5] A.P. Tchangani, M. Dambrine and J.P. Richard (1998). Robust Stabilization of delay systems with discrete or distributed delayed control, in *proc. of 37th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 4051-4056, December, Tampa, USA.
- [6] A.P. Tchangani, M. Dambrine and J.P. Richard (1998). Robust Stability of large scale systems with aftereffect, in *proc. of IFAC LSS, Large Scale Systems*, July 1998, Patras.
- [7] V.B. Kolmanovskii, J.P. Richard and A.P. Tchangani (1998). Some model transformation for the stability study of linear systems with delay, in *preprints of First IFAC International Workshop on Linear Time Delay Systems*, LTDS98, pp. 75 - 80, 6-7, July, Grenoble, France.
- [8] A.P. Tchangani, M. Dambrine and J.P. Richard (1997). Stability of linear differential equations with distributed delay, *proc. of 36th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp 3779 - 3784, December, San Deogo, USA.

[9] A.P. Tchangani, M. Dambrine, J.P. Richard and V. R. Nosov (1997). Estimation of the Asymptotic Stability Domain and Asymptotic Behaviour for Nonlinear Neutral Systems, *proc. of IFAC-IFIP-IMACS CIS'97, Control of Industrial Systems*, Vol. 1/3, pp 595 - 600, 20 - 22 May, Belfort, France.

[10] A.P. Tchangani, M. Dambrine and J.P. Richard (1997). New criteria for nonlinear neutral systems, *proc. of European Control Conference*, 1-4 July, Brussels, Belgium.

[11] A.P. Tchangani, M. Dambrine and J.P. Richard (1996). Stability domains for neutral systems, *proc. of 35th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp 1617-1618, December, Kobe, Japan.

[12] A.P. Tchangani, M. Dambrine and J.P. Richard (1996). Stability and Stabilization of Nonlinear Neutral Systems, *proc. of IEEE-IMACS, CESA '96, Computational Engineering in Systems Applications*, Vol. 2, pp 812-815, July, Lille, France.

[13] A.P. Tchangani, M. Dambrine and J.P. Richard (1996). Stability of neutral systems via vector-Lyapunov functions, *proc. of the 4th IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation*, pp 173-176, Maleme, Krete, Greece, June 10-13.

[14] V.B. Kolmanovskii, J.P. Richard and A.P. Tchangani (1998). Stability of linear systemes with discrete-plus-distributed delays: application of some model transformations, *International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems, MTNS'98*. Invited Session FE4: Neutral Systems: delay effect and applications, 6-10 July, Padova, Italy.

[15] A.P. Tchangani (1997). Quelques Critères de Stabilité des Equations Héréditaires, *5eme Colloque des Doctorants de l'Inter groupe des Ecoles Centrales*, 7 - 10 juin, Nantes, France.

[16] A.P. Tchangani (1996). Stabilité des systèmes à retards et de type neutre, *4eme Colloque des Doctorants de l'Inter groupe des Ecoles Centrales*, 13 - 14 juin, Lille, France.

