N⁰ d'ordre : 2441

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Nizar JAOUA

Propriétés de similarité et de contractivité
de certains opérateurs de composition
sur des classes de fonctions analytiques

Soutenue le 22 *Janvier* 1999 *devant la Commission d'Examen :*

Président	:	F. H. VASILESCU	Université de Lille I
Rapporteurs	:	H. JARCHOW	Université de Zürich
		A. PAJOR	Université de Marne-La-Vallée
Membres	:	D. LI	Université d'Artois-Lens
		M. MBEKHTA	Université de Lille I
Directeur de thèse	:	H. QUEFFÉLEC	Université de Lille I

Remerciements

Cette thèse a été rédigée sous la direction du Professeur H. Queffélec. Il m'a initié à la recherche à travers un mémoire de D.E.A. portant sur les opérateurs de composition appartenant aux classes de Schatten. Il m'a ensuite laissé évoluer dans cette direction tout en m'apportant ses grandes idées et me faisant profiter de ses hautes compétences en la matière. Je n'oublierai jamais le soutien moral qu'il ma toujours apporté, notamment, au début de cette thèse.

Je remercie très vivement le Professeur H. Jarchow avec qui j'ai eu des discussions instructives à l'occasion des conférences qu'il a présentées aux universités de Lille I et d'Artois-Lens.

Je tiens à remercier les Professeurs H. Jarchow et A. Pajor d'avoir accepté de rapporter sur cette thèse. Mes remerciements vont aussi aux Professeurs D. Li, M. Mbekhta et F. Vasilescu qui me font l'honneur d'être membres du jury.

Je suis également reconnaissant envers toute l'equipe d'Analyse Fonctionnelle de Lille I qui m'a permis de développer mes qualités de chercheur-enseignant. Je tiens à remercier le Conseil Scientifique de Lille I de m'avoir confié les tâches d'A.T.E.R. pour une période de deux ans durant laquelle j'ai pu rencontrer plusieurs enseignants tels que M. F. Barme. Cette dernière m'a prodigué de nombreux conseils qui ont assuré l'efficacité de mes travaux dirigés. Je suis aussi reconnaissant à l'égard de mes collègues A.T.E.R. qui n'ont pas hésité à me faire part de leur compétence en matière de frappe. Je tiens à remercier le personnel de la bibliothèque, des secrétariats et du service de la reprographie des mathématiques de Lille I, notamment Annick et Alain.

Mes remerciements vont aussi à tous mes enseignants, et plus particulièrement, à Mme. Jafferin (prépa-Nice), M. Gouguenheim et Mme. Chollet (D.E.U.G. Math-Lille) qui m'ont transmis leur passion de l'enseignement des mathématiques.

J'embrasse affectueusement mes parents, mon frère Noureddine, mon ami Farid et surtout ma sœur Jalila qui ont toujours maintenu leur confiance en moi. Enfin, je suis extrèmement ravi que ce travail se termine alors que j'entame une très belle page de ma vie : celle que je partage joyeusement avec mon épouse Sendes, à qui je dédie cette thèse.

"Les petits ruisseaux font les grandes rivières".

N. Jaoua

Table des matières

Introduction

Durant les trois dernières décennies, les opérateurs de composition ont été le centre d'intérêt d'un grand nombre d'analystes. Cette réputation est due essentiellement au rôle de passerelle qu'ils jouent entre l'Analyse Complexe, l'Analyse Fonctionnelle et la Théorie des Opérateurs.
Ils sont induits par des fonctions φ analytiques sur le disque unité ouvert D à valeurs dans D, et définis sur des espaces de fonctions analytiques sur D par

$$C_\varphi f = f \circ \varphi.$$

C'est dans les années vingt que tout a commencé avec le principe de subordination de Littlewood (voir [45]). De ce principe découle directement la continuité de C_φ (avec $\varphi(0) = 0$) sur les espaces de Hardy H^p. Plus précisément, si $\varphi(0) = 0$, C_φ est une contraction sur ces espaces. En outre, la transformation de Möbius

$$\varphi_a(z) := \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$$

induit un opérateur de composition borné sur H^p pour tout $z \in D$ (voir [45] ou [10]). Il est conclu alors, par composition avec cette transformation, que C_φ est borné sur H^p pour tout symbole φ.
D'autre part, la souplesse de la théorie des fonctions sous-harmoniques (cf [19] ou [21]), a permis d'étendre la continuité de C_φ à d'autres espaces, tels que la classe de Nevanlinna $\mathcal{N}$. Par ce même principe, nous montrerons que cette propriété concerne également les espaces de Hardy à fonctions banachiques H^p_X.

Certains auteurs, comme H. J. Schwartz et C. C. Cowen se sont intéressés au calcul de la norme de C_φ dans l'espace des opérateurs bornés. Cette valeur se révèle, jusqu'à présent, indéterminable à l'exception de certains cas particuliers comme $\varphi(0) = 0$: dans ce cas, C_φ est une contraction et, puisqu'il fixe la fonction constante 1, sa norme vaut 1. Néanmoins, un encadrement de cette valeur a été établi dans le cas général (voir par exemple [10] p. 123). La minoration a permis alors, compte tenu du principe de subordination, de caractériser la contractivité de C_φ sur H^p par la condition $\varphi(0) = 0$. Cela nous mène au problème suivant :

Est-ce qu'en affaiblissant cette condition, on parvient à caractériser une classe plus grande : celle des opérateurs C_φ semblables à une contraction sur H^p ?

Nous donnerons une réponse affirmative en faisant appel au fameux théorème de Denjoy-Wolff (cf. [13] ou [51]). Nous constaterons que si C_φ est polynômialement borné, alors C_φ est semblable à une contraction. Notons que si l'on considère un opérateur autre que C_φ, ce résultat peut être faux d'après un contre exemple récent de G. Pisier (voir [40]).

D'autres auteurs se sont penchés sur l'aspect spectral des opérateurs de composition. Là encore, on ne connait pas le spectre de C_φ (noté $\sigma(C_\varphi)$) pour tous les symboles. Par contre, lorsque φ est analytique sur un voisinage de $\overline{D}$, H. Kamovitz (cf. [31]) donne une description complète de $\sigma(C_\varphi)$ dont une partie nous servira à caractériser les C_φ semblables à une isométrie sur H^p. Ajoutons qu'il y a quelques années, C. C. Cowen et B. D. Maccluer (cf. [9]) ont déterminé $\sigma(C_\varphi)$ pour φ injective non surjective et ayant un point fixe, en remplaçant D par la boule unité ouverte de l'espace $\mathbb{C}^n$.

Par ailleurs, le problème de l'augmentation de l'intégrabilité étudié par H. Hunziker et H. Jarchow dans [27] nous a incité, dans un premier temps, à étudier le problème suivant :

A quelle condition sur φ, l'opérateur C_φ envoie-t-il H^p dans $H^{\beta p}$ $(1 < \beta \leq \infty)$ avec une norme inférieure ou égale à 1 ?

Dans le cas où la réponse est affirmative, on dira que C_φ est *hypercontractif* (ou *β-contractif*). Cette question a été résolue dans [50] pour d'autres opérateurs tels que la convolution par le noyau de Poisson grâce à laquelle nous obtiendrons une caractérisation pour les $C_{\alpha z}$ hypercontractifs. Pour les autres symboles, nous donnerons des conditions nécessaires ou suffisantes.
D'autre part, ces mêmes auteurs de [27] se sont intéressés aux opérateurs C_φ *bornés pour l'ordre* sur H^p; c'est à dire envoyant la boule unité de H^p sur un ensemble latticiellement borné dans $H^{\beta p}$. Ce qui signifie que la fonction maximale

$$M_{\tilde{C}_\varphi} := \sup_{\|f\|_p \leq 1} |\tilde{C}_\varphi f|$$

appartient à $L^{\beta p}(\partial D, m)$ où $\tilde{C}_\varphi := jC_\varphi$ avec $j : f \mapsto f^*$ (f^* étant la fonction limite radiale de f et $m = \frac{d\theta}{2\pi}$ la mesure de Haar sur le cercle unité ∂D). Ils ont caractérisé ces opérateurs en termes des moments "analytiques" $\|\varphi^n\|_1$. Ils nous ont ainsi amené, dans un deuxième temps, à étendre cette notion aux espaces métriques, en l'occurrence, aux espaces de Hardy H^p pour $0 < p < 1$ et à la classe de Nevanlinna $\mathcal{N}$. Dans les deux cas, nous donnerons une caractérisation complète basée également sur le comportement de la suite des moments $\|\varphi^n\|_1$. Nous constaterons, contrairement à ce qui a été fait dans [27], que la classe des opérateurs C_φ $(\mathcal{N}, L^q)$-*ob* (bornés pour l'ordre dans un certain sens) coïncide avec celle des opérateurs C_φ compacts de $\mathcal{N}$ dans H^q. Nous verrons également que les opérateurs C_φ $(\mathcal{N}, L^q)$-*ob* font partie de ceux qui envoient la classe F^+ dans H^q, c'est à dire ceux dont le symbole φ vérifie

$$\|\varphi^n\|_1 = O(e^{-\lambda\sqrt{n}}) \quad \text{pour un} \quad \lambda > 0 \quad \text{(cf. [42])}.$$

Enfin, un des résultats subtils sur les opérateurs de composition est le suivant :

si C_φ est de Fredholm sur H^p, alors il est inversible sur H^p.

Cela résulte du fait que les opérateurs C_φ de Fredholm sur H^p, ainsi que les C_φ inversibles, sont nécessairement induits par des automorphismes de D (voir [5], [37], [2], [10] et très récemment [25] et [34]). Nous montrerons que ce résultat subsiste sur les espaces de Hardy à fonctions banachiques H^p_X.

Tout d'abord, afin d'établir nos résultats, nous aurons besoin de quelques détails de la Théorie des Opérateurs concernant les isométries. Puis, nous ferons appel à des notions d'Analyse Complexe telles que la sous-harmonicité, le point de Denjoy-Wolff et les suites de moments. Ces détails et notions feront l'objet du premier chapitre où nous rappellerons, entre autres, certaines propriétés sur les espaces de Hardy et la classe de Nevanlinna.

Par ailleurs, le second chapitre sera consacré à l'étude de la similarité des opérateurs C_φ à une contraction sur les espaces H^p, de leur contractivité sur les espaces de Hardy à poids $H^2(\beta)$ et finalement de leur contractivité de H^p dans $H^{\beta p}$ $(\beta \geq 1)$.

Ensuite, dans le troisième chapitre, nous aborderons les mêmes notions que précédemment sur les espaces H^p_X et nous généraliserons à ces espaces des résultats connus dans le cas scalaire.

Enfin, nous terminerons par le quatrième chapitre où nous étudierons les opérateurs C_φ bornés pour l'ordre, d'abord sur les espaces H^p, ensuite sur la classe $\mathcal{N}$.

Premier chapitre :

Préliminaires

1 Préliminaires

1.1 Principales notations

Soient X et Y deux espaces de Banach sur le corps des complexes $\mathbb{C}$, Ω un espace mesuré et μ une mesure complexe finie sur Ω. On désigne par D le disque unité ouvert dans $\mathbb{C}$. Les notations suivantes seront utilisées au cours de cette thèse.

- $L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C}$ mesurables; $\sup\ ess_{\omega\in\Omega}|f(\omega)| < \infty\}$.
- $L^p(\Omega,\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{C}$ mesurables; $\int_\Omega |f|^p\, d\mu < \infty\}$ $(0 < p < \infty)$.
- $H(D,X) := \{f : D \to X$ holomorphes$\}$.
- $H(D) := H(D,\mathbb{C})$ et $H(D,D) := \{f : D \to D$ holomorphes$\}$.
- $Aut(D) =$ ensemble des automorphismes de D.
- $\varphi_n =$ itérée d'ordre n de $\varphi \in H(D,D)$; $\varphi_n := \varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi$ (n fois).
- $H^\infty := H(D) \cap L^\infty(D)$.
- $H^p := \{f \in H(D);\ \sup\limits_{0\le r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta < \infty\}$ $(0 < p < \infty)$ = espace de Hardy.
- $\mathcal{N} := \{f \in H(D);\ \sup\limits_{0\le r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta < \infty\}$ = classe de Nevanlinna.
- $D(a,r) := \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| < r\}$ = disque euclidien ouvert de centre a et de rayon r.
- $\partial E =$ frontière de $E \subset \mathbb{C}$.
- $B(X,Y) := \{T : X \to Y$ borné$\}$ et $B(X) := B(X,X)$.
- $K(X,Y) := \{T : X \to Y$ compact$\}$ et $K(X) := K(X,X)$.
- Si H est un espace de Hilbert séparable, $T \in B(H)$ est dit de Hilbert-Schmidt si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$, $(e_n)_{n\ge1}$ étant une base orthonormale de H.

- $T : X \to X$ est isométrique si $\|Tx\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$. Par extension du cas hilbertien, si T est de plus surjective, nous nous permettrons de dire que T est unitaire.

- $T : X \to Y$ est de Fredholm si $dim\ ker(T) < \infty$ et $codim\ Im(T) < \infty$. Cela est équivalent à dire que T est inversible modulo les compacts (voir par exemple [35] p. 28).

- $T : X \to X$ est polynômialement borné s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|P(T)\| \leq M\|P\|_\infty,$$

pour tout polynôme P à coefficients complexes où $\|P\|_\infty = \sup_{|z|=1} |P(z)|$. A titre d'exemple, toute contraction sur un espace de Hilbert est polynômialement bornée avec $M = 1$. Inversement, si toute contraction sur X est polynômialement bornée avec $M = 1$, alors X est hilbertien. Il s'agit là du théorème de von-Neumann (cf. [39]).

- $\|T\|_{B(X,Y)} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y$ = norme de l'opérateur $T \in B(X,Y)$. Sauf s'il y a risque de confusion, on notera tout simplement $\|T\|$.

- $\sigma(T) := \{\lambda \in C$ tel que $\lambda I - T$ ne soit pas inversible sur $X\}$: spectre de $T \in B(X)$.

- X^* = dual topologique de X.

- T^* : opérateur adjoint de T.

- C_φ : opérateur de composition induit par $\varphi \in H(D, D)$.

- $x_n \xrightarrow{w} x$: la suite $(x_n) \subset X$ converge faiblement vers x. C'est à dire :

$$\lim_{n\to\infty} \tau(x_n) = \tau(x) \quad \text{pour tout } \tau \in X^*.$$

- $f_n \xrightarrow{u.c} f$: la suite des fonctions (f_n) (définies sur D) converge vers f uniformément sur tout compact de D. C'est à dire :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| = 0 \quad \text{pour tout compact } K \subset D.$$

1.2 Définitions et rappels

I Isométries

Soit X un espace de Banach sur $\mathbb{C}$. On dit qu'un opérateur $T : X \to X$ est une isométrie si $\|Tx\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$. Pour un espace de Hilbert H, la formule de polarisation permet d'écrire cette définition de manière équivalente :

$$< Tx, Ty > = < x, y > \quad \text{pour tous} \quad x, y \in H.$$

Ce qui est encore équivalent à l'egalité $T^*T = I$.
Il découle de la première définition que toute isométrie est injective et que $\|T\|_{B(X)} = 1$. Cette majoration entraîne que le spectre de T (noté $\sigma(T)$) est nécessairement contenu dans $\overline{D}$. (Rappelons que $\sigma(T) \subset \overline{D}(0, \|T\|)$.) Dans le cas où l'isométrie T est surjective sur un espace de Hilbert, on dit qu'elle est unitaire. Un tel opérateur se caractérise alors par la double identité

$$T^*T = TT^* = I.$$

Le théorème suivant localise davantage $\sigma(T)$.

Théorème 1.2.1
Si u est un opérateur unitaire sur un espace de Hilbert, alors $\sigma(u) \subseteq \partial D$.

Preuve :
Soit $\lambda \in \sigma(u)$. Cela signifie que $\lambda I - u$ n'est pas inversible. Donc $I - \lambda u^* = -u^*(\lambda I - u)$ ne l'est pas non plus puisque u^* est inversible. Comme $0 \notin \sigma(u)$, alors $\lambda \neq 0$ et $\frac{1}{\lambda} I - u^*$ n'est pas inversible. Autrement dit, $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(u^*)$. Cela équivaut à $\frac{1}{\overline{\lambda}} \in \sigma(u)$. Ce qui entraîne, compte tenu de l'inclusion $\sigma(u) \subseteq \overline{D}$, que $\sigma(u) \subseteq \partial D$. ∎

Voici maintenant un exemple fondamental d'isométrie admettant pour spectre le disque $\overline{D}$ tout entier. Il s'agit là de l'opérateur shift unilatéral S défini sur l'espace de Hilbert H de base orthonomale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$Se_n = e_{n+1} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 1.2.2 (cf. [23] p. 227)
S est une isométrie non surjective et $\sigma(S) = \overline{D}$.

Dans le cas où X est un espace de Hilbert, le théorème suivant, dû à Wold-von Neumann (cf. [35] p. 105), permet de préciser le résultat précédent en décomposant orthogonalement les isométries non surjectives.

Théorème 1.2.3 (Décomposition de Wold-von Neumann)
Si T est une isométrie non surjective sur un espace de Hilbert, alors T est la somme directe d'un opérateur unitaire et d'opérateurs unitairement équivalents à S.

Preuve :
Soit H un espace de Hilbert. On pose

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(H) \quad \text{et} \quad L = T(H)^{\perp} \neq \{0\}.$$

Soient u et v les restrictions respectives de T à K et $K^{\perp}$. Puisque $u(K) = K$, on en déduit que u est unitaire sur K (éventuellement, $K = \{0\}$).
D'autre part, $T^n(L) \subseteq T(H) = L^{\perp}$ pout tout $n \geq 1$. Donc, $T^n(L) \perp T^m(L)$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$. Nous allons montrer que $K^{\perp} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(L)$.
Pour cela, remarquons que $T^n(L) = T^n(T(H)^{\perp}) \subseteq T^{n+1}(H)^{\perp} \subseteq K^{\perp}$ pour tout n. Cela implique que $\bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(L) \subseteq K^{\perp}$.
Pour l'inclusion inverse, il suffit de prouver, par récurrence sur n, que $\bigcap_{k=0}^{\infty} T^k(L)^{\perp} \subseteq T^n(H)$. Cela est vrai pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant cette inclusion. Il existe alors $y \in H$ tel que $x = T^n y$ et $< x, T^n z >= 0$ pour tout $z \in L$. Comme T^n est une isométrie, cela entraîne que $< y, z >= 0$. Donc $y \in L^{\perp} = T(H)$. Ce qui implique que $x = T^n y \in T^{n+1}(H)$. En conséquence, on a

$$(\bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(L))^{\perp} = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(L)^{\perp} \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(H) = K.$$

D' où l'inclusion $K^{\perp} \subseteq \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(L)$.
D'après cette égalité, si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de L, alors $\{T^n e;\ e \in \mathcal{B},\ n \in \mathbb{N}\}$ est une base orthonormale de $K^{\perp}$. Pour tout $e \in \mathcal{B}$, on désigne par L_e le sous espace de $K^{\perp}$ de base $(T^n e)_{n \in \mathbb{N}}$. On peut donc écrire $K^{\perp} = \bigoplus_{e \in \mathcal{B}} L_e$ et constater que la restriction T_e de T à L_e est unitairement équivalente à S. En conclusion, on a $T = u \oplus \bigoplus_{e \in \mathcal{B}} T_e$. ■

Remarque :
Dans le cadre des opérateurs de composition, il est bien connu (cf. [37]), que C_φ est une isométrie sur l'espace de Hardy H^2 si et seulement si $\varphi(0) = 0$ et φ est intérieure (i.e $|\varphi^*(e^{i\theta})| := \lim\limits_{\substack{r\to 1 \\ r<1}} |\varphi(re^{i\theta})| = 1$ pour presque tout $e^{i\theta}$). Dans ce cas, la partie unitaire de C_φ, selon la décomposition de Wold-von Neumann, est sa restriction au sous espace des fonctions constantes. Pour la preuve, voir [37] ou [10] p. 304.

Grâce à la décomposition de Wold-von Neumann et aux Théorèmes 1.2.1 et 1.2.2, on retrouve le fait que toute isométrie non surjective sur un espace de Hilbert admet pour spectre le disque fermé $\overline{D}$. Notons qu'on peut prouver ce résultat sans faire appel à cette décomposition. En effet, le lemme suivant permet d'étendre ce résultat aux espaces de Banach non hilbertiens. On rappelle que l'ensemble résolvant de a dans une algèbre $\mathcal{A}$ est défini par $\rho(a) := \{\lambda \in \mathbb{C};\ a - \lambda \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \text{ inversible }\}$ et que pour tout $\lambda \in \rho(a)$, l'inverse de $a - \lambda\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ est noté $R(a, \lambda)$.

Lemme 1.2.4
Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach. Pour tout $a \in \mathcal{A}$, si $(\lambda_n)_{n\in N}$ est une suite de $\rho(a)$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ et $\|R(a, \lambda_n)\| = O(1)$, alors $\lambda \in \rho(a)$ et $R(a, \lambda) = \lim\limits_{n\to\infty} R(a, \lambda_n)$.

Preuve :
D'après l'identité de la résolvante, on a

$$\begin{aligned} \|R(a, \lambda_n) - R(a, \lambda_m)\| &= |\lambda_n - \lambda_m| \|R(a, \lambda_n)R(a, \lambda_m)\| \\ &\leq |\lambda_n - \lambda_m| \|R(a, \lambda_n)\| \|R(a, \lambda_m)\| \end{aligned}$$

Comme $(\lambda_n)_{n\in N}$ est de Cauchy et $\|R(a, \lambda_n)\| = O(1)$, il s'ensuit que $(R(a, \lambda_n))_{n\in N}$ est de Cauchy dans $\mathcal{A}$. Puisque $\mathcal{A}$ est un espace complet, cela entraîne l'existence de $b \in \mathcal{A}$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} \|R(a, \lambda_n) - b\| = 0$. Or, on a

$$R(a, \lambda_n)(a - \lambda_n \mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = (a - \lambda_n \mathbf{1}_{\mathcal{A}})R(a, \lambda_n) = \mathbf{1}_{\mathcal{A}}.$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$, on obtient

$$b(a - \lambda \mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = (a - \lambda \mathbf{1}_{\mathcal{A}})b = \mathbf{1}_{\mathcal{A}}.$$

Cela signifie que $\lambda \in \rho(a)$ et $R(a, \lambda) = b$. ∎

Le théorème suivant se trouve sous forme d'exercice dans [6] p. 213.

Théorème 1.2.5
Soit X un espace de Banach. Si $T : X \to X$ est une isométrie, alors ou bien $\sigma(T) \subseteq \partial D$ ou bien $\sigma(T) = \overline{D}$.

Preuve :
Supposons que $\sigma(T) \not\subseteq \partial D$. Alors $E := \sigma(T) \cap D \neq \emptyset$. Comme E est fermé dans D, il suffit de montrer qu'il est ouvert pour conclure, par connexité de D, que $E = D$ et le résultat s'ensuit alors car $\sigma(T)$ est fermé.
Remarquons d'abord que $D - E = \sigma(T)^c \cap D = \rho(T) \cap D$. Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $D - E$ telle que $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda$. Pour tout $x \in X$, nous avons

$$\|(T - \lambda_n I)x\| \geq \|Tx\| - |\lambda_n|\|x\| = (1 - |\lambda_n|)\|x\|,$$

où la dernière égalité est due au fait que T est une isométrie. Comme $\lambda \in D$ ($\lambda_n \to \lambda$ pour la topologie trace), il existe $\delta > 0$ tel que $\|(T - \lambda_n I)x\| \geq \delta\|x\|$ pour tous $x \in X$ et n assez grand. Cela implique que $\|R(T, \lambda_n)\| = O(1)$. D'où, par le Lemme 1.2.4, $\lambda \in \rho(T)$. Par conséquent, E est un ouvert de D et ceci achève la preuve. ∎

Remarque :
Lorsque T est une isométrie avec $\sigma(T) \subseteq \partial D$, T est nécessairement surjective. En effet, si elle ne l'était pas, cela voudrait dire que $0 \in \sigma(T)$. Ce qui serait absurde. En conséquence, si T est une isométrie non surjective, alors $\sigma(T) = \overline{D}$.

II Transformation de Möbius

Pour tout $a \in D$, l'application φ_a définie sur D par

$$\varphi_a(z) := \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$$

est un automorphisme de D. En particulier, elle vérifie les identités suivantes :

(i) $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$.

(ii) $1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}$ pour tout $z \in D$.

Une telle application s'appelle transformation de Möbius. Nous verrons, grâce à celle-ci, que l'étude de certaines propriétés des opérateurs de composition se voit réduite au cas $\varphi(0) = 0$. Elle intervient également dans quelques changements de variable.

III Noyau de Poisson

Soit $z \in D$. Le noyau de Poisson en z est la fonction P_z définie sur ∂D par

$$P_z(e^{i\theta}) := \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} = Re(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}).$$

La propriété fondamentale de cette fonction positive est que celle-ci reproduit, en un certain sens, les fonctions harmoniques décrites dans le paragraphe suivant.

IV Fonctions harmoniques

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $u : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^2. On dit que u est harmonique dans Ω si

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Il est bien connu (cf. par exemple [43] p. 237), que u est harmonique dans Ω si et seulement si elle vérifie la propriété de moyenne. A savoir, pour tout $z \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $\overline{D}(z,r) \subset \Omega$, on a

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+re^{i\theta})\, d\theta. \tag{1}$$

De ce fait, il résulte que toute fonction harmonique dans D coïncide avec son intégrale de Poisson. Autrement dit, si u est harmonique dans D et continue sur $\overline{D}$, alors

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_z(e^{i\theta})u(e^{i\theta})\, d\theta \quad \text{pour tout } z \in D. \tag{2}$$

Notons également que la réciproque est vraie. En effet, l'intégrale de Poisson de u étant la partie réelle d'une fonction analytique sur D, le second membre de (2) définit une fonction harmonique sur D si $u(e^{i\theta})$ est continue sur ∂D.

Il est également connu que $u : D \to \mathbb{R}$ est harmonique dans D si et seulement si u est la partie réelle d'une fonction analytique dans D. En particulier, si u est harmonique dans D et $f \in H(D)$, alors $u \circ \varphi$ est harmonique dans D.

V Fonctions sous-harmoniques

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. On dit que la fonction $v : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ est sous-harmonique si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

(*i*) v est semi-continue supérieurement, c'est-à-dire :

$$v(\omega) \geq \overline{\lim_{z \to \omega}} v(z) \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega.$$

(*ii*) pour tout $z \in \Omega$, il existe $r_z > 0$ tel que $\overline{D}(z, r_z) \subset \Omega$ et que pour tout $0 \leq r \leq r_z$, on ait

$$v(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z + re^{i\theta})\, d\theta. \tag{$*$}$$

(On montre alors que $(*)$ a lieu pour tout $r > 0$ tel que $\overline{D}(z, r) \subset \Omega$).

Les intégrales de (*ii*) sont nécessairement convergentes. Cela découle de (*i*) et du fait que v ne prend jamais la valeur $+\infty$.
Les fonctions sous-harmoniques peuvent aussi être définies à l'aide des fonctions harmoniques. Par exemple (cf.[19] p. 7), v est sous-harmonique dans Ω si et seulement si, pour tout ouvert borné B tel que $\overline{B} \subset \Omega$ et pour toute fonction u harmonique dans B et continue sur $\overline{B}$ telle que $v \leq u$ sur ∂B, l'inégalité "$v \leq u$" a lieu partout dans $\overline{B}$. A titre d'exemple, on peut citer les cas suivants :

- $v = |u|$ où u est harmonique.
- $v = |f|^p$ où $f \in H(D)$ et $0 < p < \infty$.
- $v = \log^+ |f| := \max(\log |f|, 0)$ où $f \in H(D)$.
- $\phi \circ v$ où ϕ est croissante, convexe sur $[-\infty, +\infty[$ et continue en $-\infty$ et v est sous-harmonique. Pour la preuve, voir [21], p. 34. Par exemple, la fonction $\log(1 + |f|)$ est sous-harmonique dans D pour tout $f \in H(D)$. En effet, sur un voisinage de tout point $a \in D$ tel que $f(a) \neq 0$, on peut écrire $f = \exp \circ g$ où g est analytique. Cela entraîne que sur ce voisinage, on a $\log(1 + |f|) = \phi \circ v$ où $\phi(x) = \log(1 + e^x)$ (croissante et convexe) et $v = Re(g)$ (harmonique).

Le théorème suivant est une conséquence déterminante de la sous-harmonicité. En effet, il permet d'établir la continuité des opérateurs de composition sur plusieurs sous-espaces de $H(D)$. Cela dit, sans utiliser les fonctions sous-harmoniques, Littlewood donna une preuve (voir [45] p. 13) pour l'espace de Hilbert H^2 en utilisant seulement l'opérateur shift unilatéral et l'opérateur de multiplication.

Théorème 1.2.6 (Principe de subordination de Littlewood, cf. [19])
Soient v une fonction sous-harmonique dans D et $\varphi \in H(D,D)$ avec $\varphi(0)=0$. Pour tout $0 \le r < 1$, on a

$$\int_0^{2\pi} v(\varphi(re^{i\theta}))\, d\theta \le \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})\, d\theta.$$

Preuve :
Soit u une fonction harmonique sur le disque rD, continue sur $r\overline{D}$ et coïncidant avec v sur le cercle $\partial(rD)$. Comme v est sous-harmonique, $v(z) \le u(z)$ pour tout $z \in r\overline{D}$. D'autre part, par le lemme de Schwarz, $\varphi(re^{i\theta}) \in r\overline{D}$. On a alors, $u \circ \varphi$ étant harmonique :

$$\int_0^{2\pi} v(\varphi(re^{i\theta}))\, d\theta \le \int_0^{2\pi} u(\varphi(re^{i\theta}))\, d\theta$$

$$= 2\pi\, u(\varphi(0)) = 2\pi\, u(0) = \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta = \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})\, d\theta.$$

■

Le lemme suivant est une autre conséquence de la sous-harmonicité. Il interviendra dans l'évaluation des fonctions de la classe de Nevanlinna qui sera présentée ultérieurement.

Lemme 1.2.7
Soient $v : D \longrightarrow [0,\infty[$ continue et sous-harmonique et $z \in D$. Alors, on a

$$v(z) \le \frac{1+|z|}{1-|z|} \sup_{0 \le R < 1} \Big(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(Re^{it})\, dt \Big).$$

Preuve :
Soit $0 < r < 1$. La fonction $v_r : z \mapsto v(rz)$ est continue sur $\overline{D}$ et sous-harmonique dans D. Elle est alors majorée par son intégrale de Poisson dans ce disque. En particulier. on a

$$v_r(z) \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_r(e^{it}) P_z(e^{it})\, dt$$

Or,

$$P_z(e^{it}) = \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} \le \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Donc,

$$v(rz) \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{it})\,dt \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}\sup_{0\leq R<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(Re^{it})\,dt.$$

Le résultat s'ensuit alors par continuité de v sur D en faisant tendre r vers 1. ∎

VI Métrique pseudo-hyperbolique

Soient a et b deux points de D. En posant $d(a,b) := |\varphi_a(b)|$, on obtient une distance sur D dite pseudo-hyperbolique. En effet, nous avons

$$d(a,b) \geq 0.$$
$$d(b,a) = d(a,b).$$
$$d(a,b) = 0 \iff a = b.$$

Tandis que l'inégalité triangulaire est une conséquence immédiate de la relation

$$d(a,b) \leq \frac{d(a,c)+d(b,c)}{1+d(a,c)d(b,c)}, \tag{3}$$

qui, à son tour, découle de l'invariance de d sous l'action de $Aut(D)$ (voir Lemme 1.2.8) et de l'inégalité

$$|a| \leq \frac{|c|+r}{1+|c|r} \tag{4}$$

où $r = d(a,c)$.

Pour établir (4), il suffit de voir que le disque pseudo-hyperbolique $H(c,r) := \{z \in D;\ d(z,c) \leq r\}$ est en fait le disque euclidien de diamètre $[c_1, c_2]$, où

$$c_1 = \frac{|c|-r}{1-|c|r}\frac{c}{|c|} \qquad \text{et} \qquad c_2 = \frac{|c|+r}{1+|c|r}\frac{c}{|c|}.$$

(Notons que la droite c_1c_2 passe par 0). Puisque $a \in H(c,r)$, $|a| \leq |c_2| = \frac{|c|+r}{1+|c|r}$.

Le lemme suivant (cf. [45]) est une généralisation classique du lemme de Schwarz.

Lemme 1.2.8 (de Schwarz-Pick)
Soit $\varphi \in H(D,D)$. Pour tout $(z,\omega) \in D^2$, on a

$$d(\varphi(z),\varphi(\omega)) \leq d(z,\omega).$$

De plus, il y a égalité pour un $(z,\omega) \in D^2$ si et seulement si il y a égalité pour tout $(z,\omega) \in D^2$, et si et seulement si $\varphi \in Aut(D)$.

Preuve :
Notons que le cas particulier $\varphi(\omega) = \omega = 0$ est tout simplement ce qu'affirme le Lemme de Schwarz. Pour le cas général, ce lemme appliqué à la fonction $\varphi_a \circ \varphi \circ \varphi_\omega$ avec $a = \varphi(\omega)$, donne, compte tenu du fait que $\varphi_\omega^{-1} = \varphi_\omega$:

$$|\varphi_a(\varphi(z))| \leq |\varphi_\omega(z)|.$$

Soit encore :

$$d(\varphi(z), a) \leq d(z, \omega).$$

De plus, on a égalité si et seulement si, d'après le lemme de Schwarz , $\varphi_a \circ \varphi \circ \varphi_\omega$ est une rotation de D. Ce qui veut dire que $\varphi \in Aut(D)$. ∎

Lemme 1.2.9 (cf. [45])
Pour tout compact K de D, on a (au sens de la distance pseudo-hyperbolique)

$$\lim_{\substack{|z|\to 1 \\ |z|<1}} d(z, K) = 1.$$

Preuve :
Soit $r = \sup\{|z|; z \in K\}$. Comme K est compact , il existe $\omega \in K$ tel que

$$d(z, K) = d(z, \omega).$$

Or, puisqu'on a

$$1 - (d(z,\omega))^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|\omega|^2)}{|1-\bar{z}\omega|^2} \leq \frac{(1-|z|^2)(1+|\omega|)}{1-|\omega|} \leq \frac{(1-|z|^2)(1+r)}{1-r},$$

il s'ensuit que

$$\lim_{\substack{|z|\to 1 \\ |z|<1}} d(z, K) = 1.$$

∎

Le théorème suivant, connu sous le nom de “principe de l'application contractive”, résulte des lemmes précédents.

Théorème 1.2.10 (cf. [45])
Si $\varphi \in H(D, D)$ est sans point fixe dans D, alors on a

$$|\varphi_n| \overset{u.c}{\to} 1.$$

Preuve :
On suppose dans un premier temps que $\varphi \notin Aut(D)$. La preuve se fait alors en deux étapes. D'abord, on montre que

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_n(0)| = 1. \tag{$*$}$$

Ensuite, on déduit le résultat en utilisant les Lemmes 1.2.8 et 1.2.9.
Supposons que $(*)$ n'ait pas lieu. Il existe alors une sous-suite $(\varphi_{n_k}(0))_k$ convergeant vers un point $a \in D$. Posons $z_n = \varphi_n(0)$. D'après le Lemme 1.2.8, la suite $(d(z_n, z_{n+1}))_n$ est décroissante. Donc, elle converge vers un $\delta \in [0, 1]$. Mais puisque

$$\lim_{k\to\infty} d(z_{n_k}, z_{n_k+1}) = d(a, \varphi(a)),$$

d'un côté, et puisque φ n'a pas de point fixe, de l'autre, on en déduit que $0 < \delta < 1$. Or, nous avons aussi

$$\lim_{k\to\infty} d(z_{n_k+1}, z_{n_k+2}) = d(\varphi(a), \varphi_2(a)) = \delta.$$

Donc, on doit avoir

$$d(a, \varphi(a)) = d(\varphi(a), \varphi_2(a)).$$

Ce qui est, d'après le Lemme 1.2.8, incompatible avec l'hypothèse $\varphi \notin Aut(D)$. Par conséquent, $(*)$ a nécessairement lieu.
Ensuite, si la conclusion du théorème était fausse, il existerait deux compacts $K, K' \subset D$ tels que

$$\varphi_n(K) \cap K' \neq \emptyset \quad \text{pour une infinité de } n.$$

Nous aurions alors (modulo une sous-suite) $\omega_n \in K$ tel que $\varphi_n(\omega_n) \in K'$, si bien que

$$\begin{aligned} d(\varphi_n(0), K') &\leq d(\varphi_n(0), \varphi_n(\omega_n) \quad (\text{pour un } \omega \in D) \\ &\leq d(0, \omega_n) \quad (\text{par le Lemme 1.2.8}) \\ &= |\omega_n| \leq \sup\{|z|; z \in K\}. \end{aligned}$$

Ce qui serait en contradiction avec le Lemme 1.2.9 que l'on peut appliquer car K' est un compact de D et car la condition $(*)$ est vérifiée d'après la première étape de cette preuve. D'où le résultat souhaité.

Supposons maintenant que $\varphi \in Aut(D)$. La conclusion du Théorème 1.2.10 subsiste même si l'on considère des automorphismes sans point fixe dans D (i.e non elliptiques). En effet,

$$\varphi \in Aut(D) \quad \text{ssi} \quad \varphi(z) = e^{i\theta}\varphi_a(z),$$

pour un $\theta \in [-\pi, \pi[$ et un $a \in D$. Une discussion sur les paramètres θ et a donne les trois cas suivants :

(1) $|a| < \cos(\frac{\theta}{2})$: c'est le cas elliptique où φ admet un point fixe dans D. A noter que s'il en existe un autre dans D, le lemme de Schwarz entraîne que $\varphi = id_D$. Ce fait est valable pour toutes les fonctions de $H(D, D)$.

(2) $|a| = \cos(\frac{\theta}{2})$ avec $\theta \neq 0$: c'est le cas parabolique où φ admet un seul point fixe ζ dans $\overline{D}$ situé précisément sur ∂D. On sait qu'alors

$$\frac{1}{\varphi(z) - \zeta} - \frac{1}{z - \zeta} = c \quad \text{pour tout } z \in D,$$

où c est une constante non nulle. De cette égalité, on déduit que $\varphi_n \stackrel{u.c}{\to} \zeta$.

(3) $|a| > \cos(\frac{\theta}{2})$ avec $\theta \neq 0$: c'est le cas hyperbolique où φ admet deux points fixes distincts ζ et ζ' dans $\overline{D}$ situés précisément sur ∂D et vérifiant

$$\varphi'(\zeta).\varphi'(\zeta') = 1 \quad \text{et} \quad 0 < \varphi'(\zeta), \varphi'(\zeta') \neq 1.$$

Prenons par exemple $0 < \varphi'(\zeta) < 1$. On sait qu'alors

$$\frac{\varphi(z) - \zeta}{\varphi(z) - \zeta'} = \varphi'(\zeta).\frac{z - \zeta}{z - \zeta'}.$$

Ce qui entraîne que $\varphi_n \stackrel{u.c}{\to} \zeta$. ∎

Le théorème suivant, connu sous le nom de "théorème de Denjoy-Wolff" et prouvé dans [13] ou [51], précise la conclusion du Théorème 1.2.10.

Théorème 1.2.11
Si $\varphi \in H(D, D)$ est sans point fixe dans D, alors il existe un unique point $\zeta \in \partial D$ (appelé point de Denjoy-Wolff de φ) tel que

$$\varphi_n \stackrel{u.c}{\to} \zeta.$$

Dans [45], l'auteur donne une version plus précise du Théorème 1.2.11. Elle est connue sous le nom de "grand théorème d'itération". Voici l'enoncé :

Théorème 1.2.12
soit φ une fonction de $H(D,D)$ qui ne soit pas un automorphisme elliptique de D. On a les assertions suivantes.

(1) *Si φ admet un point fixe $a \in D$, alors*

$$|\varphi'(a)| < 1 \quad et \quad \varphi_n \overset{u.c}{\to} a.$$

(2) *Si φ est sans point fixe dans D, alors il existe un unique point $\zeta \in \partial D$ (appelé point de Denjoy-Wolff de φ) tel que*

(*i*) $\varphi_n \overset{u.c}{\to} \zeta$.

(*ii*) $\lim_{r \to 1^-} \varphi(r\zeta) = \zeta$.

(*iii*) $\varphi'(\zeta) := \lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in \Delta_\zeta}} \frac{\varphi(z) - \zeta}{z - \zeta}$ *existe et* $0 < \varphi'(\zeta) \leq 1$. Δ_ζ *étant un secteur angulaire quelconque inclus dans D de sommet ζ et d'ouverture $< \pi$.*

(3) *Inversement, si φ admet un point $\zeta \in \partial D$ vérifiant* (*ii*) *et* (*iii*), *alors elle n'a pas de point fixe dans D et, ζ est son point de Denjoy-Wolff.*

(4) *Si $\zeta \in \partial D$ est le point de Denjoy-Wolff de φ et $\varphi'(\zeta) < 1$, alors, pour tout $z \in D$, l'orbite $\{\varphi_n(z)\}_n$ converge non-tangentiellement vers ζ. C'est à dire que, $\varphi_n(z)$ tend vers ζ en restant dans un secteur Δ_ζ d'ouverture $< \pi$.*

Remarque :
Dans [1], l'auteur étend le Théorème 1.2.11 à certaines contractions sur des espaces métriques localement compacts.

VII Espaces de Hardy

On rappelle que l'espace de Hardy H^p $(0 < p < \infty)$ est l'espace des fonctions f holomorphes dans D telles que

$$\|f\|_p := \Big(\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}|^p \, d\theta \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Le théorème suivant (cf. par exemple [43]), assure l'existence presque partout sur ∂D de la limite radiale de toute fonction $f \in H^p$ $(0 < p < \infty)$. On note m la mesure de Haar $(m = \frac{d\theta}{2\pi})$.

Théorème 1.2.13
Pour tout $f \in H^p$, on a les assertions suivantes.

(i) $f^*(e^{i\theta}) := \lim\limits_{\substack{r \to 1 \\ r<1}} f(re^{i\theta})$ *existe presque partout.*

(ii) $f^* \in L^p(\partial D, m)$.

En fait, la convergence obtenue dans le Théorème 1.2.13 a lieu aussi dans l'espace $L^p(\partial D, m)$. Cela découle d'un théorème fondamental de F. Riesz qui entraîne que l'application

$$\begin{array}{rccc} j: & H^p & \longrightarrow & L^p(\partial D, m) \\ & f & \longmapsto & f^* \end{array}$$

est une isométrie si l'on considère le cas $1 \leq p < \infty$ pour lequel

$$\|f\|_p := \Big(\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}|^p \, d\theta \Big)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme faisant de H^p un espace de Banach. Rappelons aussi le théorème de factorisation de Riesz.

Théorème 1.2.14 (Factorisation de Riesz, voir [19] p. 20)
Toute fonction $f \not\equiv 0$ de H^p $(0 < p < \infty)$ se factorise de façon unique sous la forme

$$f(z) = B(z)g(z),$$

où

$$B(z) := z^m \prod_n \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z}$$

est le produit de Blaschke associé à f $((a_n)_n$ étant la suite des zéros non nuls de $f)$ et g est une fonction de H^p sans zéros dans D. De plus, $\|f\|_p = \|g\|_p$.

Maintenant, nous sommes prêts à établir la continuité de l'opérateur d'évaluation sur H^p $(0 < p < \infty)$ et à déterminer sa norme dans $(H^p)^*$. Notons que pour $0 < p < 1$,

$\|.\|_p$ n'est plus une norme. Mais, $d_p(f,g) := \|f-g\|_p^p$ définit une distance pour laquelle H^p devient un espace métrique complet. De plus, en posant

$$\|\tau\|_{(H^p)^*} := \sup_{\|f\|_p=1} |\tau(f)|,$$

on peut voir, comme dans le cas des espaces de Banach, qu'une forme linéaire τ sur H^p est bornée (i.e $\|\tau\| < \infty$) si et seulement si elle est continue. On peut aussi vérifier que $(H^p)^*$, muni de cette norme, est un espace de Banach.

Le théorème qui suit, dont nous rappelons une preuve, est une autre application du théorème de factorisation de Riesz cité précédemment.

Théorème 1.2.15 (voir [55])

Soit $0 < p < \infty$. L'evaluation δ_z en tout point $z \in D$, définie par $\delta_z f := f(z)$, est continue sur H^p et pour tout $1 \leq p < \infty$, on a

$$\|\delta_z\| = (1-|z|^2)^{-\frac{1}{p}}.$$

De plus, pour tout $\varphi \in H(D,D)$, on a

$$C_\varphi^* \delta_z = \delta_{\varphi(z)}.$$

Preuve :

Soit $z \in D$. Supposons d'abord $p = 2$. Nous savons alors que, pour tout $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$, on a

$$\|f\|_2 = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)||z|^n \leq (1-|z|^2)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_2.$$

D'où la continuité de δ_z sur H^2. Il existe alors un unique $k_z \in H^2$ tel que

$$f(z) = \delta_z f = < f, k_z > \quad \text{pour tout } f \in H^2. \qquad (*)$$

En particulier, pour $f = e_n : z \mapsto z^n$ ($n \in \mathbb{N}$), on a

$$< k_z, e_n > = \bar{z}^n.$$

Puisque $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de H^2, il s'ensuit que

$$k_z(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}^n \omega^n = \frac{1}{1-\bar{z}\omega}.$$

D'où

$$\|\delta_z\|_{(H^2)^*} = \|k_z\|_2 = (< k_z, k_z >)^{\frac{1}{2}} = k_z(z)^{\frac{1}{2}} = (1-|z|^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Signalons que la propriété $(*)$ justifie le terme "noyaux reproduisants de H^2" que l'on attribue aux fonctions k_z.
Soient maintenant $0 < p < \infty$ et $f \in H^p$. Par le Théorème 1.2.14, il existe $h \in H^2$ sans zéro dans D tel que

(i) $|f|^p \leq |h|^2$ dans D.

(ii) $|f^*|^p = |h^*|^2$ presque partout sur ∂D.

Les relations (i) et (ii) sont dues au fait que le produit de Blaschke B vérifie

$$|B| < 1 \text{ dans } D \text{ et } |B^*| = 1 \text{ presque partout sur } \partial D.$$

(B peut être réduit à 1 si f n'a pas de zéros). On a alors

$$|f(z)| \leq |h(z)|^2 \leq (1-|z|^2)^{-1}\|h\|_2^2 = (1-|z|^2)^{-1}\|f\|_p^p.$$

Par conséquent, on en déduit que

$$|f(z)|^p \leq (1-|z|^2)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_p.$$

Ce qui entraîne la continuité de δ_z sur H^p. De plus, pour tout $p \geq 1$, ona $\|\delta_z\| \leq (1-|z|^2)^{-\frac{1}{p}}$.
Pour la minoration de $\|\delta_z\|_{(H^p)^*}$, il suffit d'évaluer en z la fonction $f_z := (1-|z|^2)^{\frac{1}{p}} k_z^{\frac{2}{p}}$ qui est de norme 1 dans H^p.
La dernière assertion de ce théorème a lieu, car pour tout $f \in H^p$, on a

$$C_\varphi^* \delta_z(f) = \delta_z(C_\varphi f) = \delta_z(f \circ \varphi) = f(\varphi(z)) = \delta_{\varphi(z)}(f).$$

∎

VIII Espaces de Hardy à poids

Étant donné une suite de nombres réels $\beta(n) > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) avec $\beta(0) = 1$, on appelle espace de Hardy à poids, et on note $H^2(\beta)$, l'espace des séries $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ telles que

$$\|f\|^2 := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta(n)^2 < \infty.$$

Muni du produit scalaire

$$< f, g > := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b_n} \beta(n)^2 \quad \text{avec} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

$H^2(\beta)$ est un espace de Hilbert dans lequel les monômes $z^n (n \in \mathbb{N})$ forment un système orthogonal total (voir [38]. De plus, si l'on suppose que

$$\lim_{n \to \infty} \beta(n)^{\frac{1}{n}} = 1, \tag{$*$}$$

on constate que les éléments de $H^2(\beta)$ sont en fait des fonctions analytiques dans D. Dans cette thèse, nous considèrerons les espaces $H^2(\beta)$ où les suites β vérifient la condition $(*)$. A noter que l'espace H^2, vu dans le paragraphe précédent, coïncide avec l'espace de Hardy à poids $H^2(\beta)$ où $\beta(n) = 1$ pour tout n.

Le lemme suivant, dont nous rappelons une preuve, généralise la propriété des noyaux reproduisants (déja vue pour H^2) aux espaces $H^2(\beta)$.

Lemme 1.2.16
L'espace $H^2(\beta)$ admet pour noyaux reproduisants les fonctions k_z^β $(z \in D)$ définies par

$$k_z^\beta(\omega) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{\beta(n)^2} \omega^n \quad \textit{pour tout} \quad \omega \in D.$$

Preuve :
Les fonctions k_z^β données par ce lemme sont dans $H^2(\beta)$. En effet, la série entière de terme général $\frac{z^n}{\beta(n)^2}$ admet pour rayon de convergence

$$\left(\lim_{n \to \infty} \beta(n)^{-\frac{2}{n}} \right)^{-1} = 1.$$

Cela implique que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{\beta(n)^2} < \infty \quad \text{pour tout } z \in D.$$

Ce qui signifie que $k_z^\beta \in H^2(\beta)$. D'autre part, pour toute fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)z^n$ dans $H^2(\beta)$, on a

$$< f, k_z^\beta >= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\widehat{k_z^\beta}(n)}\beta(n)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)z^n = f(z).$$

Pour la réciproque, supposons que, pour tout $z \in D$, il existe $g_z \in H^2(\beta)$ telle que

$$< f, g_z >= f(z) \quad \text{pour tout} \quad f \in H^2(\beta).$$

Alors, en particulier, pour $p_n(\omega) = \omega^n$, on trouve $< p_n, g_z >= z^n$. Or, puisque $g_z \in H^2(\beta) \subset H(D)$, on peut écrire

$$g_z(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{g_z}(n)\omega^n \quad \text{pour tout} \quad \omega \in D.$$

Il s'ensuit donc que

$$\overline{\widehat{g_z}(n)}\beta(n)^2 = z^n.$$

D'où l'égalité $g_z = k_z^\beta$ et cela achève la preuve. ■

Le théorème qui suit nous permet d'obtenir la continuité de l'opérateur C_φ sur certains espaces de Hardy à poids à partir de sa continuité sur un autre.

Théorème 1.2.17 (cf. [8])
Soient $\varphi \in H(D, D)$ avec $\varphi(0) = 0$ et β et γ deux suites vérifiant $(*)$ telles que

$$\frac{\beta(n)}{\beta(n+1)} \leq \frac{\gamma(n)}{\gamma(n+1)} \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si C_φ est borné sur $H^2(\beta)$, alors il est borné sur $H^2(\gamma)$ et on a

$$\|C_\varphi\|_{B(H^2(\gamma))} \leq \|C_\varphi\|_{B(H^2(\beta))}.$$

Corollaire 1.2.18
Si $\varphi \in H(D, D)$ avec $\varphi(0) = 0$ et si β est une suite décoissante vérifiant $(*)$, alors C_φ est une contraction sur $H^2(\beta)$.

IX Espaces de Hardy de fonctions banachiques

Soit X un espace de Banach. On dit qu'une fonction $f : D \longrightarrow X$ est holomorphe si, pour tout $\tau \in X^*$, on a $\tau \circ f \in H(D)$. Il est bien connu (cf. [24] (chap. 8)) que $f : D \longrightarrow X$ est holomorphe si et seulement si elle est analytique; à savoir, il existe une suite d'éléments x_n de X telle que, pour tout $z \in D$, on ait

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n x_n \quad \text{où} \quad x_n \in X.$$

Soit $1 \leq p < \infty$. On désigne par H_X^p l'espace des fonctions $f : D \longrightarrow X$ holomorphes telles que

$$\|f\|_{p,X} := \Big(\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta})\|_X^p \, d\theta \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

On vérifie aisément que $\|.\|_{p,X}$ est une norme sur H_X^p et que celui-ci est un espace de Banach pour cette norme. Le cas particulier $X = \mathbb{C}$ redonne les espaces de Hardy H^p dans lesquels toute fonction admet une limite radiale presque partout sur ∂D. Rappelons que cela nous permet d'identifier H^p à un sous-espace de $L^p(\partial D, m)$. Toutefois, dans le cas général, ce résultat n'est pas toujours vrai et cela dépend de l'espace X (voir [3]). Cela nous mène à la définition suivante dans laquelle H_X^∞ dénote l'espace des fonctions $f : D \longrightarrow X$ analytiques telles que

$$\|f\|_{\infty,X} := \sup_{z \in D} \|f(z)\|_X < \infty.$$

Définition (propriété de Radon-Nikodym analytique (cf. [20])) :
Un espace de Banach X a la propriété de Radon-Nikodym analytique si, pour tout $f \in H_X^\infty$,

$$f^*(e^{i\theta}) := \lim_{\substack{r \to 1 \\ r < 1}} f(re^{i\theta})$$

existe dans X pour presque tout $e^{i\theta}$.

Dans [3] et [16], il est prouvé que X a la propriété de Radon-Nikodym analytique si et seulement si $f^*(e^{i\theta})$ existe (pour presque tout $e^{i\theta}$) pour tout $f \in H_X^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$. L'auteur de [20] caractérise cette propriété en utilisant les martingales analytiques qui sont les suites de fonctions F_n $(n \in \mathbb{N})$ définies sur $[0, 2\pi]^{\mathbb{N}}$ par

$$F_n(\theta_1, \theta_2, \cdots) := \sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} f_k(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{k-1}),$$

où $f_k : [0, 2\pi]^{k-1} \longrightarrow X$ est mesurable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Voici sa caractérisation.

Théorème 1.2.19 (définition initiale)
X admet la propriété de Radon-Nikodym analytique si et seulement si toute martingale analytique L^1-bornée dans X est convergente.

Pour un espace de Banach X séparable, il est connu que cette propriété entraîne la séparabilité de H_X^p (voir [3]). La réciproque de ce résultat a été établie ultérieurement dans [11].

X La classe de Nevanlinna

On dit qu'une fonction f de $H(D)$ est dans la classe de Nevanlinna $\mathcal{N}$, si

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta < \infty.$$

A partir de la double inégalité

$$\log^+ x \leq \log(1+x) \leq 1 + \log^+ x \quad (x \geq 0),$$

on voit que $f \in \mathcal{N}$ si et seulement si

$$\|f\|_{\mathcal{N}} := \sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 + |f(re^{i\theta})|) \, d\theta < \infty.$$

Cette pseudo-norme permet de définir la distance suivante invariante par translation :

$$d(f,g) = \|f - g\|_{\mathcal{N}} \quad \text{pour tous} \quad f, g \in \mathcal{N}.$$

Munie de cette distance, la classe $\mathcal{N}$ devient un espace métrique complet, mais de manière surprenante ce n'est pas un espace vectoriel topologique : il existe des fonctions $f \in \mathcal{N}$ telles que $d(\varepsilon f, 0)$ ne tende pas vers 0 quand ε tend vers 0 (voir [46]). D'autres propriétés de l'espace $(\mathcal{N}, d)$ sont étudiées dans [19] et [18].
Comme pour les espaces H^p, la limite radiale f^* de toute fonction $f \in \mathcal{N}$ existe presque partout sur ∂D (voir [19]). Les fonctions de $\mathcal{N}$ vérifiant

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta = \int_0^{2\pi} \log^+ |f^*(e^{i\theta})| \, d\theta$$

forment un espace vectoriel topologique, appelé classe de Smirnov et noté $\mathcal{N}^+$. Pour le détail, voir [52] où l'auteur prouve, entre autres, que $\mathcal{N}^+$ n'est pas un espace vectoriel localement convexe. Cependant, ce même auteur montre dans [53], que la classe F^+ des fonctions $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)z^n$ telles que $|\hat{f}(n)| \leq c_\varepsilon e^{\varepsilon\sqrt{n}}$ pour tout $\varepsilon > 0$, munie de la famille des semi-normes

$$\|f\|_c := \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)| e^{-c\sqrt{n}} \quad (c > 0),$$

est un espace vectoriel localement convexe. Il prouve également qu'elle contient $\mathcal{N}^+$ comme sous-espace dense (alors que $\mathcal{N} \not\subset F^+$, cf. chap. 4, Lemme 4.3.3). En outre, nous avons les inclusions strictes suivantes :

$$H^\infty \subset H^p \subset H^q \subset \mathcal{N}^+ \subset \mathcal{N} \cap F^+ \quad (0 < q < p < \infty).$$

Le lemme suivant montre que la topologie induite par la distance d sur la classe $\mathcal{N}$ est plus forte que celle de la convergence uniforme sur tout compact de D. Il décrit, d'autre part, le comportement des coefficients de Taylor des fonctions de $\mathcal{N}$.

Lemme 1.2.20

(1) *Pour tous $f \in \mathcal{N}$ et $z \in D$, on a*

$$|f(z)| \leq \exp\Big(\frac{2\|f\|_{\mathcal{N}}}{1 - |z|}\Big) - 1.$$

(2) *Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{N}$, alors il existe $a, b > 0$ tels que $|a_n| \leq a e^{b\sqrt{n}}$ pour tout $n \in N$.*

Preuve :

(1) D'après le Lemme 1.2.7 appliqué à la fonction sous-harmonique $v(z) = \log(1 + |f(z)|)$, on a

$$\log(1 + |f(z)|) \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}\|f\|_{\mathcal{N}} \leq \frac{2}{1 - |z|}\|f\|_{\mathcal{N}}.$$

ce qui entraîne (1) en passant à l'exponentielle.

(2) Posons $\lambda = \|f\|_{\mathcal{N}}$. Les inégalités de Cauchy montrent, compte tenu de (1), que pour tout $0 < r < 1$, on a

$$|a_n| \leq \exp\Big(\frac{2\lambda}{1 - r} + n \log\frac{1}{r}\Big) \leq \exp\Big(\frac{2\lambda}{1 - r} + n\frac{1 - r}{r}\Big).$$

En particulier, pour $r = 1 - \sqrt{\frac{2\lambda}{n}}$, on obtient

$$|a_n| \leq \exp\left(2\sqrt{2\lambda n} + O(1)\right).$$

Ce qui donne le résultat souhaité avec $a = \exp(O(1))$ et $b = 2\sqrt{2\lambda}$. ■

Il est bien connu (cf. [54]) que l'assertion (2) du lemme précédent peut être remplacée par $|a_n| \leq c_\varepsilon e^{\varepsilon\sqrt{n}}$ pour tout $\varepsilon > 0$ si $f \in \mathcal{N}^+$. Ceci justifie alors l'inclusion $\mathcal{N}^+ \subset F^+$. Par contre, l'inclusion inverse n'a pas lieu. Plus précisément, la proposition suivante montre que F^+ n'est même pas contenu dans $\mathcal{N}$.

Proposition 1.2.21 (cf. [18])
Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \infty$ *et* $\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$, *alors, pour presque tous les choix de signes, la fonction* $\sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n z^n$ *n' pas de limite radiale, et ceci sur un ensemble de mesure* 1.

Par exemple, il existe des signes $\pm$ tels que si $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \pm \frac{1}{\sqrt{n}} z^n$, alors $f \notin \mathcal{N}$. Evidemment, ici, $f \in F^+$.
On peut remplacer, dans la proposition précédente, les signes $\pm$ par une suite de variables aléatoires (Z_n) indépendantes, uniformément distribuées et prenant leurs valeurs sur ∂D. Une telle suite s'appelle suite de Steinhaus. On obtient ainsi le résultat suivant qui semble nouveau.

Proposition 1.2.22
Si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \infty$ *et* $\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$, *alors, presque sûrement, la fonction* $f_\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z_n(\omega) z^n$ *n'appartient pas à* $\mathcal{N}$. *Plus précisément, on a*

$$\sup_{0\leq r<1} \int_0^{2\pi} \log|f_\omega(re^{i\theta})|\, d\theta = \infty \quad \textit{presque sûrement.}$$

Preuve :
Posons $M_2(r) := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}$ (pour $r < 1$), $d\sigma(\theta) := \frac{d\theta}{2\pi}$, $\nu := d\sigma \otimes d\omega$, $Y_r(\theta,\omega) := |f_\omega(re^{i\theta})|$, $X_r(\omega) := \int_0^{2\pi} \log(1 + Y_r(\theta,\omega))\, d\sigma(\theta)$ et $X := \sup_{0\leq r<1} X_r = \lim_{\substack{r\to 1 \\ r<1}} X_r$.
Pour tout θ fixé, il résulte de l'inégalité d'Ullrich-Favorov (voir [49]), que

$$\int_0^{2\pi} \log(1 + Y_r(\theta,\omega))\, d\omega \geq \int_0^{2\pi} \log Y_r(\theta,\omega)\, d\omega \geq \log M_2(r) - a,$$

où a est une constante strictement positive. Intégrons par rapport à σ, puis appliquons le théorème de Fubini pour obtenir

$$E(X_r) \geq \log M_2(r) - a. \tag{1}$$

Ici, E désigne l'espérance par rapport à $d\omega$.
D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$X_r^2 \leq \int_0^{2\pi} \log^2(1 + Y_r(\theta, \omega))\, d\sigma(\theta).$$

Or, la fonction $x \mapsto \log^2(1+x)$ est concave sur $[e-1, +\infty[$. Donc, par l'inégalité de Jensen, il s'ensuit que

$$E(X_r^2) \leq 1 + \log^2 \Big(1 + \frac{1}{M_r} \int \int Y_r(\theta, \omega)\, d\sigma(\theta) d\omega\Big),$$

où $M_r := \nu\{(\theta, \omega);\ Y_r(\theta, \omega) \geq e - 1\}$.
Rappelons maintenant l'inégalité de Salem-Zygmund (cf. [30]) :

$$\mu(Y \geq \frac{1}{2} \int Y\, d\mu) \geq \frac{1}{4} \frac{(\int Y\, d\mu)^2}{\int Y^2\, d\mu}, \tag{2}$$

où μ est une mesure de probabilité et Y est une fonction positive de carré intégrable.
Appliquée à $\mu = \nu$ et $Y = Y_r$, cette inégalité donne

$$\nu(Y_r \geq \frac{1}{2} \int \int Y_r\, d\sigma d\omega) \geq \frac{1}{4} \frac{(\int \int Y_r\, d\sigma d\omega)^2}{\int \int Y_r^2\, d\sigma d\omega}.$$

Or, les inégalités de Khintchine (cf. [30]) impliquent que

$$(\int \int Y_r\, d\sigma d\omega)^2 \geq \frac{1}{2} \int \int Y_r^2\, d\sigma d\omega = \frac{1}{2}(M_2(r))^2.$$

On obtient alors

$$\nu(Y_r \geq \frac{1}{4} M_2(r)) \geq \frac{1}{8}.$$

Comme $M_2(r) \to \infty$ quand $r \to 1$, il s'ensuit que $M_r \geq \frac{1}{8}$ pour $r \geq r_0$, et que

$$E(X_r^2) \leq 1 + \log^2(1 + 8M_2(r)) \quad \text{pour tout} \quad r_0 \leq r < 1. \tag{3}$$

Soit P la probabilité associée à $d\omega$. (2) appliquée cette fois à $\mu = P$ et à $Y = X_r$ donne, compte tenu de (1) et (3) :

$$P(X_r \geq \frac{1}{2} E(X_r)) \geq \frac{1}{4}\ \frac{(\log(M_2(r)) - a)^2}{1 + \log^2(1 + 8M_2(r))} =: \frac{1}{4} \lambda_r \tag{4}$$

pour tout $r_0 \leq r < 1$.

Soit $A > 0$ fixé arbitrairement. (1) et (4) entraînent, pour r assez proche de 1 ($r_A \leq r < 1$), que

$$P(X_r \geq A) \geq \frac{1}{4}\lambda_r,$$

et cela implique que $P(X \geq A) \geq \frac{1}{4}\lambda_r$. Comme $\lambda_r \to 1$ quand $r \to 1$, on obtient

$$P(X \geq A) \geq \frac{1}{4}.$$

Par passage à la limite quand $A \to \infty$, on en déduit que $P(X = \infty) \geq \frac{1}{4}$. Enfin, par la loi du zéro-un de Kolmogorov, on conclut que

$$P(X = \infty) = 1.$$

Ce qui signifie que $f_\omega \notin \mathcal{N}$ presque sûrement. ∎

Remarques :

1. La Proposition 1.2.22 permet d'écarter la conjecture de Bloch-Nevanlinna (actuellement réfutée) : $f \in \mathcal{N} \Longrightarrow f' \in \mathcal{N}$. Par exemple, pour tout ω, la fonction $f_\omega(z) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Z_n(\omega)}{n \log^2 n} z^n$ est continue sur $\overline{D}$, donc elle appartient à $\mathcal{N}$. Par contre, $f'_\omega \notin \mathcal{N}$ presque sûrement.

2. Il existe des fonctions $f \notin \mathcal{N}$ telles que

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta < \infty.$$

Par exemple, si $f(z) = \exp \frac{1}{(1-z)^2}$, la formule de Jensen montre que $\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta = \log |f(0)| = 1$. Pourtant, le Lemme 1.2.20 montre que $f \notin \mathcal{N}$.

Le corollaire qui suit découle directement de la proposition précédente.

Corollaire 1.2.23

Soit $(a_n)_n$ une suite bornée avec $\sum_n |a_n|^2 = \infty$. Si $f_\omega(z) = \sum_n a_n Z_n(\omega) z^n$, alors $f_\omega \in F^+$ pour tout ω et $f_\omega \notin \mathcal{N}$ pour presque tout ω.

XI Suites de moments

On considère l'opérateur Δ défini sur l'espace des suites $F = (F(n))_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\Delta F(n) = F(n) - F(n+1).$$

La suite de ses itérés définie par :

$$\begin{cases} \Delta^0 F = F. \\ \Delta^{n+1} F = \Delta(\Delta^n F) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

satisfait la formule binômiale suivante :

$$\Delta^n F(k) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j F(j+k) \quad \text{pour tout } k, n \in \mathbb{N}.$$

Le théorème suivant est une version du théorème de Hausdorff (cf. [48] p. 9) adaptée à nos objectifs.

Théorème 1.2.24
Soit F une suite réelle. Il existe une fonction mesurable $f : [0,1] \to [0,1]$ telle que

$$F(n) = \int_0^1 f(t)^n \, dt \quad \textit{pour tout}\, n \in \mathbb{N},$$

si et seulement si

$$F(0) = 1 \quad \textit{et} \quad \Delta^n F(k) \geq 0 \quad \textit{pour tous}\ k, n \in \mathbb{N}.$$

Désormais, on appellera *suite de moments* toute suite vérifiant les conditions du théorème précédent. Par exemple, pour tout $\varphi \in H(D,D)$, la suite $(\|\varphi^n\|_1)_{n\in\mathbb{N}}$, étant égale à la suite $(\|\varphi^{*^n}\|_1)_{n\in\mathbb{N}}$ (voir [19]), est une suite de moments. Plus précisément, vue l'analycité de φ, on dira qu'une telle suite est une *suite de moments analytiques.* Généralement, la condition $\Delta^n F(k) \geq 0$ est difficile à tester. On pourrait alors utiliser la proposition suivante dans laquelle $F^{(n)}$ désigne la dérivée n^{eme} de F.

Proposition 1.2.25
Si la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est de classe C^∞ telle que $F(0) = 1$ et $signF^{(n)} = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(F(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de moments.

Cette proposition découle directement du Théorème 1.2.24 et de la formule suivante qu'on peut prouver par récurrence :

$$\Delta^n F(k) = (-1)^n \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1}_{(n \text{ fois})} F^{(n)}(k + t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\, dt_1 dt_2 \cdots dt_n.$$

Par ailleurs, les suites de moments analytiques ont été caractérisées parmi les suites de moments (cf. [27]) par la condition :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Delta^n F(0) < \infty.$$

En général, cette condition est difficile à vérifier. C'est pourquoi nous ferons appel au théorème suivant (cf. [27]) permettant d'approcher toute suite de moments par une suite de moments analytiques.

Théorème 1.2.26
Pour toute suite F de moments, il existe $\varphi \in H(D, D)$ telle que

$$|F(n) - \|\varphi^n\|_1| \leq \frac{1}{2^n} \quad \textit{pour tout}\ n \in \mathbb{N}.$$

Comme conséquence du théorème précédent, on a le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.27
Si F est une suite de moments telle que

$$\lim_{n\to\infty} F(n) = 0 \quad \textit{et} \quad 2^n F(n) \geq M > 1 \quad \textit{quand} \quad n \to \infty,$$

alors il existe $\varphi \in H(D, D)$ telle que $\|\varphi^n\|_1 \sim F(n)$.

Notons que, dans la conclusion du corollaire précédent, nous avons nécessairement

$$|\varphi^*(e^{i\theta})| < 1 \quad \text{pour presque tout} \quad e^{i\theta}.$$

Dans tout le reste, on désignera par φ toute fonction de $H(D, D)$.

Deuxième chapitre :

Contractivité des opérateurs de composition sur les espaces de Hardy

2 Contractivité des opérateurs de composition sur les espaces de Hardy

L'objet de ce chapitre est d'établir quelques propriétés des opérateurs de composition définis sur des espaces de Hardy H qui diffèrent les unes des autres selon que la structure est classique (c'est le cas lorsque $H = H^p$ avec $1 \leq p < \infty$) ou munie d'une suite de poids β (dans ce cas $H = H^2(\beta)$). Nous traitons des notions telles que la contractivité et la similarité à une contraction, d'abord dans le cas classique, ensuite dans le cas où l'on considère une suite de poids. A la fin du chapitre, nous étudions les opérateurs C_φ hypercontractifs; c'est à dire, ceux qui envoient H^p dans $H^{\beta p}$ $(\beta > 1)$ avec une norme inférieure ou égale à 1.

2.1 Etude sur H^p $(1 \leq p < \infty)$

On rappelle que H^p est l'espace de Hardy classique: c'est à dire, l'espace des fonctions f analytiques dans D vérifiant

$$\|f\|_p^p := \sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta.$$

Sur cet espace, l'opérateur C_φ est borné. C'est par exemple une conséquence du principe de subordination de Littlewood qui permet d'établir la contractivité de C_φ lorsque $\varphi(0) = 0$ (voir Théorème 1.2.6). A noter qu'un opérateur borné est dit contractif si sa norme est inférieure ou égale à 1.

2.1.1 Opérateurs de composition contractifs

La condition $\varphi(0) = 0$ caractérise exactement les opérateurs C_φ contractifs sur H^p. Cela découle d'un résultat de [10] p. 123, que l'on va compléter à l'aide d'un théorème de cette même page et d'un résultat de [7].

Théorème 2.1.1.1

C_φ est borné sur H^p et on a

$$\sup_{|z|<1} \left(\frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|C_\varphi\| \leq \left(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

D'autre part,

$$\|C_\varphi\| = \begin{cases} (1-|a|^2)^{-\frac{1}{p}} & si\ \varphi \equiv a \in D \\ 2^{\frac{1}{p}}\left(1+|s|^2-|t|^2+((1-|s|^2+|t|^2)^2-4|t|^2)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{p}} & si\ \varphi(z) = sz+t \\ & s \neq 0\ et\ |s|+|t| \leq 1 \\ \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\frac{1}{p}} & si\ \varphi\ est\ intérieure. \end{cases}$$

De plus, lorsque φ est intérieure et s'annule en 0, C_φ est une isométrie et inversement.

Remarque 2.1.1.2

Nous verrons, dans la section 3, que l'opérateur C_φ est inversible sur H^p_X (X étant un espace de Banach) si et seulement si φ est un automorphisme de D. Cela entraîne, d'après le Théorème 2.1.1.1, que les rotations de D sont les seules à induire des opérateurs de composition unitaires sur H^p.

2.1.2 Similarité à une contraction

Théorème 2.1.2.1

Dans les assertions suivantes, (1), (3) et (4) sont équivalentes pour tout $1 \leq p < \infty$. De plus, si $p = 2$, elles sont équivalentes à (2).

(1) *C_φ est semblable à une contraction.*

(2) *C_φ est polynômialement borné.*

(3) *C_φ est à puissances bornées.*

(4) *φ admet un point fixe dans D.*

Preuve :

(1) $\Longrightarrow$ (2) soit P un polynôme à coefficients complexes. On rappelle que $\|P\|_\infty := \sup\limits_{|z|=1} |P(z)|$. D'après l'hypothèse, il existe $S \in B(H^2)$ inversible tel que

$$\begin{aligned} C_\varphi &= S^{-1}CS \quad \text{où} \quad C \text{ est une contraction sur } H^2. \\ P(C_\varphi) &= S^{-1}P(C)S. \\ \|P(C_\varphi)\| &\leq \|S^{-1}\|\|P(C)\|\|S\| \leq \|S^{-1}\|\|S\|\|P\|_\infty. \end{aligned}$$

La dernière inégalité découle du théorème de von-Neumann rappelé au début du premier chapitre.

$(1) \Longrightarrow (3)$ dans la preuve de $(1) \Longrightarrow (2)$, on remplace 2 par $1 \leq p < \infty$ et on prend $P(z) = z^n$ pour obtenir

$$\|C_\varphi^n\| \leq \|S^{-1}\|\|C\|^n\|S\| \leq \|S^{-1}\|\|S\|.$$

$(2) \Longrightarrow (3)$ est immédiat.

$(3) \Longrightarrow (4)$ supposons que φ n'a pas de point fixe dans D. D'après le théorème de Denjoy-Wolff, cité en préliminaire, il existe un unique point $\zeta \in \partial D$ tel que

$$\varphi_n \overset{u.c}{\rightarrow} \zeta$$

où $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des itérées de φ. A noter que la version faible $|\varphi_n(0)| \to 1$ suffit. Comme on a

$$\|C_\varphi^n\| = \|C_{\varphi_n}\| \geq (1 - |\varphi_n(0)|^2)^{-\frac{1}{p}},$$

il s'ensuit que

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|C_\varphi^n\| = \infty.$$

Ce qui contredit l'assertion (3).

$(4) \Longrightarrow (1)$ soit $a \in D$ un point fixe de φ. On pose :

$$\psi = \varphi_a \circ \varphi \circ \varphi_a \quad \text{où} \quad \varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$$

On rappelle que $\varphi_a \in Aut(D)$ et $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$. Comme $\psi \in H(D, D)$ et $\psi(0) = 0$, d'après le Théorème 2.1.1.1, l'opérateur C_ψ est une contraction sur H^p. Mais l'identité :

$$\varphi = \varphi_a \circ \psi \circ \varphi_a^{-1}$$

entraîne que

$$C_\varphi = C_{\varphi_a}^{-1} C_\psi C_{\varphi_a}$$

D'où l'assertion (1). ∎

Corollaire 2.1.2.2

Si C_φ^N est compact pour un $N \in \mathbb{N}^*$ alors C_φ est semblable à une contraction.

Preuve :

D'après le Théorème 2.1.2.1, il suffit de prouver que φ admet un point fixe dans D dès qu'une certaine puissance de C_φ est compacte. Pour cela, on va d'abord montrer

l'existence d'un tel point lorsque C_φ est compact sur H^2. A noter que la compacité d'un tel opérateur sur H^p pour un p entraîne sa compacité sur H^p pour tout p (cela est dû essentiellement au Théorème 1.2.14).
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de D telle que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 1$. Alors, si $k_n(z) := \frac{k_{z_n}}{\|k_{z_n}\|}$ (les k_{z_n} étant des noyaux reproduisants de H^2; voir Lemme 1.2.16), on a $k_n \overset{u.c}{\to} 0$. Mais, comme $\|k_n\|_2 = O(1)$, il s'ensuit que $k_n \overset{w}{\to} 0$. Or, C_φ^* est compact, donc $\lim_{n\to\infty} \|C_\varphi^* k_n\|_2 = 0$. Soit encore, puisque $C_\varphi^* k_z = k_{\varphi(z)}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-|\varphi(z_n)|^2}{1-|z_n|^2} = \infty. \qquad (i)$$

D'autre part, si on considère une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1[$ telle que $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$, le théorème de Rouché appliqué aux fonctions $id_D - r_n\varphi$ et id_D sur $\overline{D}(0,r_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, assure l'existence d'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ telle que

$$r_n\varphi(z_n) = z_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \qquad (ii)$$

Dans ce cas, on obtient :

$$\frac{1-|\varphi(z_n)|^2}{1-|z_n|^2} \leq 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \qquad (iii)$$

Ceci est vrai, en particulier, pour une sous-suite de (z_n) convergeant vers $\omega \in \overline{D}$. Si φ était sans point fixe dans D, on aurait $\omega \in \partial D$, car sinon, par passage à la limite dans (ii), ω serait fixe par φ. Dans ce cas, (i) et (iii) seraient en contradiction. D'où, φ admet un point fixe dans D.
Supposons maintenant $C_\varphi^N = C_{\varphi_N}$ compact pour un $N \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, φ_N admet un point fixe $a \in D$. Donc $\varphi(a)$ est également un point fixe de φ_N. Si $\varphi(a) \neq a$, d'après le lemme de Schwarz, on doit avoir $\varphi_N = id_D$. Mais alors $C_\varphi^N = I$ ne peut pas être compact. Donc, $\varphi(a) = a$. ■

Pour étudier la similarité à une isométrie, nous allons exploiter le résultat suivant (cf. [31]) donnant le spectre de C_φ dans un cas particulier.

Théorème 2.1.2.3
Supposons φ analytique sur un voisinage de $\overline{D}$, non intérieure et admettant un point fixe a dans D. Si C_φ^n n'est compact sur H^p $(1 \leq p < \infty)$ pour aucun $n \in \mathbb{N}$, alors il existe $0 < \rho < 1$ tel que

$$\sigma(C_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq \rho\} \cup \{(\varphi'(a))^n; n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{1\}.$$

Théorème 2.1.2.4
Supposons φ analytique sur un voisinage de $\overline{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) *C_φ est semblable à une isométrie.*

(2) *φ est intérieure et admet un point fixe dans D.*

Preuve du Théorème 2.1.2.4 :
(1) $\Longrightarrow$ (2) l'hypothèse implique que C_φ est semblable à une contraction. Par le Théorème 2.1.2.1, φ a nécessairement un point fixe dans D. Supposons que φ ne soit pas intérieure. Comme C_φ^n n'est compact pour aucun $n \in \mathbb{N}$ (un opérateur semblable à une isométrie n'est jamais compact en dimension infinie), d'après le Théorème 2.1.2.3, le spectre de C_φ ne peut être ni $\overline{D}$ ni une partie de ∂D. Or, le spectre d'une isométrie est une partie de ∂D si elle est surjective, sinon, il est égal à $\overline{D}$ (voir Théorème 1.2.5). On en déduit que C_φ ne peut pas être semblable à une isométrie. Ce qui est absurde.
(2) $\Longrightarrow$ (1) se démontre de la même façon que (4) $\Longrightarrow$ (1) du Théorème 2.1.2.1. Si ce n'est qu'ici, d'après le Théorème 2.1.1.1, l'opérateur C_ψ est isométrique puisque ψ est intérieure (comme étant composée de fonctions intérieures) et s'annule en 0. ■

Question :
Le Théorème 2.1.2.3 donne le spectre de C_φ avec φ analytique sur un voisinage de $\overline{D}$. Peut-on se passer de cette hypothèse dans le Théorème 2.1.2.4 ?

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate des Théorèmes 3.2.3 et 2.1.2.4.

Corollaire 2.1.2.5
Les opérateurs de composition semblables à des transformations unitaires sont ceux dont le symbole est un automorphisme elliptique de D.

2.2 Etude sur $H^2(\beta)$

Nous rappelons que l'espace de Hardy à poids $H^2(\beta)$ est l'espace des fonctions $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ telles que

$$\|f\|^2_{H^2(\beta)} := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta(n)^2 < \infty$$

où $\beta = (\beta(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle vérifiant

$$\begin{cases} \beta(n) > 0 & \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N} \\ \beta(0) = 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \beta(n)^{\frac{1}{n}} = 1. \end{cases}$$

Nous rappelons également, pour tous $f, g \in H^2(\beta)$ avec $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, que la relation

$$< f, g >:= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b_n} \beta(n)^2$$

définit un produit scalaire pour lequel $H^2(\beta)$ est un espace de Hilbert et que les fonctions k_z^β définies sur D par

$$k_z^\beta(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{\beta(n)^2} \omega^n \quad \text{pour tout } \omega \in D$$

sont les noyaux reproduisants de cet espace (voir Lemme 1.2.16).

2.2.1 Opérateurs de composition contractifs

Théorème 2.2.1.1
La condition $\varphi(0) = 0$ est nécessaire pour que $C_\varphi : H^2(\beta) \to H^2(\beta)$ soit de norme 1.

Preuve :
Puisqu'on a

$$\|C_\varphi\|^2 = \|C_\varphi^*\|^2 \geq \|C_\varphi^* k_0^\beta\|_{H^2(\beta)}^2 = \|k_{\varphi(0)}^\beta\|_{H^2(\beta)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\varphi(0)|^{2n}}{\beta(n)^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi(0)|^{2n}}{\beta(n)^2},$$

alors, si $\|C_\varphi\| = 1$, on doit avoir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi(0)|^{2n}}{\beta(n)^2} = 0$$

et, cela entraîne que $\varphi(0) = 0$. ∎

La suffisance de la condition du Théorème 2.2.1.1 n'est pas toujours garantie. Cela dépend de la suite β et du symbole φ.

Définition :

On considère l'opérateur de multiplication M_φ défini par

$$M_\varphi f := \varphi f.$$

Contrairement à ce qui se passe sur H^2, l'opérateur M_φ n'est pas nécessairement borné sur les espaces de Hardy à poids.

Pour cette raison, on définit l'espace $H^\infty(\beta)$ par

$$H^\infty(\beta) := \{g \in H(D); gf \in H^2(\beta) \text{ pour tout } f \in H^2(\beta)\}.$$

Puisque $1 \in H^2(\beta)$, nous avons

$$H^\infty(\beta) \subset H^2(\beta) \subset H(D).$$

Enfin, pour tout $g \in H^\infty(\beta)$, si on pose

$$||g||_{\infty,\beta} := ||M_g||_{B(H^2(\beta))},$$

alors cela définit une norme pour laquelle l'espace $H^\infty(\beta)$ est une algèbre de Banach.

Proposition 2.2.1.2

Supposons $\varphi \in H^\infty(\beta)$ *avec* $||\varphi||_{\infty,\beta} \leq \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\beta(n+1)}{\beta(n)}$.

La condition $\varphi(0) = 0$ *est suffisante pour que* C_φ *soit de norme* 1.

Preuve :

On adapte la preuve de Littlewood faite dans le cas $\beta \equiv 1$. On désigne par B l'opérateur "backward" shift défini par

$$\begin{cases} B(1) & = 0 \\ B(z^n) & = z^{n-1} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Soit f un polynôme de degré n. Pour tout $z \in D$, on a

$$f(z) = \hat{f}(0) + z(Bf)(z)$$

et donc

$$f(\varphi(z)) = \hat{f}(0) + \varphi(z)(Bf)(\varphi(z)).$$

Soit encore

$$C_\varphi f = \hat{f}(0) + M_\varphi C_\varphi B f.$$

Si $\varphi(0) = 0$, alors $\hat{f}(0)$ et $M_\varphi C_\varphi Bf$ sont orthogonaux et on a

$$\|C_\varphi f\|^2 = |\hat{f}(0)|^2 + \|M_\varphi C_\varphi Bf\|^2.$$

Remplaçant f par $B^k f$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il vient :

$$\|C_\varphi B^k f\|^2 = |\hat{f}(k)|^2 + \|M_\varphi C_\varphi B^{k+1} f\|^2 \leq |\hat{f}(k)|^2 + \frac{\beta(k+1)^2}{\beta(k)^2}\|C_\varphi B^{k+1} f\|^2.$$

Soit

$$\beta(k)^2\|C_\varphi B^k f\|^2 \leq |\hat{f}(k)|^2\beta(k)^2 + \beta(k+1)^2\|C_\varphi B^{k+1} f\|^2 \tag{1}$$

Comme $\deg(f) = n$, $B^k f = 0$ pour tout $k \geq n+1$.
Ecrivant (1) pour $k = 0, \ldots, n$ et, additionnant membre à membre, on obtient :

$$\|C_\varphi f\|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2\beta(k)^2 = \|f\|^2.$$

Soit maintenant $f \in H^2(\beta)$. On pose $f_n := \sum_{k=0}^{n} \hat{f}(k) z^k$.
D'après ce qui précède, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\|C_\varphi f_n - C_\varphi f_m\| \leq \|f_n - f_m\|.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy puisqu'elle converge vers f, il en est donc de même de la suite $(C_\varphi f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe alors $g \in H^2(\beta)$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \|C_\varphi f_n - g\| = 0. \tag{2}$$

D'autre part, on a

$$f_n \overset{u.c}{\to} f$$

car la convergence dans $H^2(\beta)$ entraîne la convergence uniforme sur tout compact de D. Donc

$$f_n \circ \varphi \overset{u.c}{\to} f \circ \varphi.$$

Ce qui donne, compte tenu du (2) :

$$C_\varphi f \in H^2(\beta) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \|C_\varphi f_n - C_\varphi f\| = 0.$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$ dans

$$\|C_\varphi f_n\| \leq \|f_n\|,$$

on obtient :

$$\|C_\varphi f\| \leq \|f\| \quad \text{pour tout } f \in H^2(\beta).$$

D'où la contractivité de C_φ. ∎

Remarque 2.2.1.3

1. On a déjà vu (cf. Corollaire 1.2.18) que si $\varphi(0) = 0$ et β est décroissante, alors $\|C_\varphi\| = 1$.

2. Il existe des fonctions φ de $H(D, D)$ s'annulant à l'origine et induisant des opérateurs de composition bornés mais non contractifs. En voici un exemple.

Soit φ non linéaire avec $\|\varphi\|_\infty < 1$ et $\varphi(0) = 0$. Il est clair que $C_\varphi(H^2(\beta)) \subset H^\infty \subset H^2(\beta)$. Donc, l'opérateur C_φ est borné sur $H^2(\beta)$. On prend maintenant β vérifiant

$$\beta(1)^2 < \sum_{n=2}^{\infty} |a_n(\varphi)|^2 \beta(n)^2.$$

Pour ce choix de β et, si on note p_n la fonction qui à z associe z^n, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi p_1\|^2_{H^2(\beta)} = \|\varphi\|^2_{H^2(\beta)} &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(\varphi)|^2 \beta(n)^2 \\
&= |a_1(\varphi)|^2 \beta(1)^2 + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n(\varphi)|^2 \beta(n)^2 \\
&> (1 + |a_1(\varphi)|^2) \beta(1)^2 \\
&\geq \|p_1\|^2_{H^2(\beta)}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\|C_\varphi\| > 1$, bien que $\varphi(0) = 0$.

2.2.2 Opérateurs de composition isométriques

Proposition 2.2.2.1

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $a \in \overline{D}$. Si C_{ap_k} est isométrique, alors

$$|a| = 1 \quad \textit{et} \quad \beta(k^n) = \beta(1) \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Preuve :

Posons $\varphi(z) = az^k$. Une récurrence montre que la n^{ieme} itérée de φ s'écrit sous la forme :

$$\varphi_n = a^{s_n(k)} z^{k^n} \quad \text{où} \quad s_n(k) = \sum_{j=0}^{n-1} k^j.$$

Si C_φ est isométrique, alors C_{φ_n} l'est aussi, et par conséquent

$$\|\varphi_n\| = \|C_{\varphi_n} z\| = \|z\|.$$

Soit encore

$$|a|^{s_n(k)} \beta(k^n) = \beta(1) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \tag{$*$}$$

Si $k = 1$, $s_n(1) = n$ et $(*)$ donne : $|a|^n \beta(1) = \beta(1)$. Donc, $|a| = 1$. Sinon, on a

$$\frac{s_n(k)}{k^n} \log |a| + \frac{1}{k^n} \log \beta(k^n) = \frac{1}{k^n} \log \beta(1)$$

et, puisque

$$\lim_{n\to\infty} \beta(k^n)^{\frac{1}{k^n}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{s_n(k)}{k^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{k^n}}{k-1} = \frac{1}{k-1},$$

on doit avoir $|a| = 1$. Ce qui entraîne, compte tenu de $(*)$:

$$\beta(k^n) = \beta(1) \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

■

Remarque 2.2.2.2

1. Bien qu'intérieurs et nuls en 0, les monômes $ap_k(|a| = 1; k \geq 2)$ n'induisent pas d'opérateurs de composition isométriques sur les espaces $H^2(\beta)$ tels que $\beta(k^n) \neq \beta(1)$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Les rotations sont les seules à induire des opérateurs de composition unitaires sur tous les espaces $H^2(\beta)$. En effet, un simple calcul prouve que toute rotation de D induit un opérateur de compositon unitaire. Inversement, si on a un opérateur C_φ unitaire sur tous les espaces $H^2(\beta)$ alors $\varphi \in Aut(D)$. D'autre part, comme C_φ est de norme 1, d'après le Théorème 2.2.1.1, $\varphi(0) = 0$. Par conséquent, $\varphi(z) = \lambda z$ avec $|\lambda| = 1$.

Question :

Existe-t-il une fonction φ non intérieure et une suite β telles que C_φ soit isométrique sur $H^2(\beta)$?

2.2.3 Problème de similarité à une contraction

Théorème 2.2.3.1
Supposons $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta(n)^2} = \infty$.
Si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|C_\varphi^n\| < \infty$ *alors* φ *admet un point fixe dans* D.

Preuve :
Supposons $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|C_\varphi^n\| < \infty$ et φ sans point fixe dans D. Par le théorème de Denjoy-Wolff rappelé au second chapitre, il existe un point $\zeta \in \partial D$ tel que

$$\varphi_n \overset{u.c}{\to} \zeta.$$

D'autre part, on a

$$\|C_\varphi^n\| = \|C_{\varphi_n}\| = \|C_{\varphi_n}^*\| \geq |C_{\varphi_n}^* k_0^\beta\|_{H^2(\beta)} = \|k_{\varphi_n(0)}^\beta\|_{H^2(\beta)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\varphi_n(0)|^{2k}}{\beta(k)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\lim_{n\to\infty} |\varphi_n(0)| = 1$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta(k)^2} = \infty$, il s'ensuit, par le lemme de Fatou, que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\varphi_n(0)|^{2k}}{\beta(k)^2} = \infty.$$

Ce qui contredit l'hypothèse $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|C_\varphi^n\| < \infty$. D'où le résultat par l'absurde. ■

Corollaire 2.2.3.2
Supposons $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta(n)^2} = \infty$.
Si C_φ *est semblable à une contraction, alors* φ *admet un point fixe dans* D.

Contrairement à ce qui se passe sur l'espace H^2, l'existence d'un point fixe dans D n'est pas toujours une condition suffisante pour que C_φ soit semblable à une contraction sur $H^2(\beta)$.
Cela n'a rien d'étonnant puisque la nullité de φ en 0 n'entraîne pas nécessairement la contractivité de C_φ et puisque les automorphismes de D n'induisent pas toujours des opérateurs de composition bornés.
Cependant, la proposition suivante donne un exemple d'espaces $H^2(\beta)$ partageant cette propriété avec l'espace classique H^2.
On dira que $H^2(\beta)$ est *invariant par automorphisme* si les opérateurs de composition induits par les automorphismes de D y sont bornés. Dans ce cadre, nous avons le résultat suivant en analogie avec le Théorème 2.1.2.1.

Théorème 2.2.3.3
Supposons β décroissante et $H^2(\beta)$ invariant par automorphisme. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) *C_φ est semblable à une contraction.*

(2) *C_φ est polynômialement borné.*

(3) *C_φ est à puissances bornées.*

(4) *φ admet un point fixe dans D.*

La preuve de ce théorème se fait de la même façon que dans le cas classique H^2. Notons que la décroissance de β entraîne la suffisance de la condition $\varphi(0) = 0$ pour que $\|C_\varphi\| = 1$ (voir Corollaire 1.2.18). Elle implique également la divergence de la série de terme général $\frac{1}{\beta(n)^2}$.

Questions :
1. Peut-on affaiblir l'hypothèse faite sur β dans le Théorème 2.2.3.1 ?
2. Existe-t-il un exemple d'application φ et de suite β pour lesquelles l'opérateur C_φ n'est pas semblable à une contraction sur $H^2(\beta)$ alors que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|C_\varphi^n\| < \infty$?

2.3 Hypercontractivité des opérateurs de composition

Dans cette section, il s'agit des opérateurs C_φ envoyant H^2 dans $H^{2\beta}$ $(1 \leq \beta \leq \infty)$ tout en restant contractifs. Certains auteurs comme H. Hunziker et H. Jarchow, ont résolu la première partie de ce problème; à savoir, l'augmentation de l'intégrabilité (voir [27]). Quant à nous, nous donnerons des conditions nécessaires ou suffisantes sur φ et β pour que C_φ, vu comme opérateur de H^2 dans $H^{2\beta}$, soit de norme 1.
Lorsque C_φ envoie H^p dans $H^{\beta p}(1 \leq \beta, p < \infty)$, sa norme dans l'espace $B(H^p, H^{\beta p})$ sera désignée par $\|C_\varphi\|_{p,\beta p}$.
La proposition suivante, dont la preuve (cf. [19]) repose sur le Théorème 1.2.14, explique la raison pour laquelle on va se contenter du cas $p = 2$ pour étudier cette question.

Proposition 2.3.1
Si $C_\varphi(H^p) \subseteq H^{\beta p}$ pour un $1 \leq p < \infty$, alors $C_\varphi(H^p) \subseteq H^{\beta p}$ pour tout $1 \leq p < \infty$. De plus, on a

$$\|C_\varphi\|_{p,\beta p}^p = \|C_\varphi\|_{1,\beta}.$$

Corollaire 2.3.2
Si $\|C_\varphi\|_{p,\beta p} \leq 1$ pour un $1 \leq p < \infty$, alors $\|C_\varphi\|_{p,\beta p} \leq 1$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

Définitions :
1. On dira que C_φ est *β-borné* (resp. *β-contractif*), si $\|C_\varphi\|_{p,\beta p} < \infty$ (resp. $\|C_\varphi\|_{p,\beta p} \leq 1$) pour un $1 \leq p < \infty$.
2. Soit μ une mesure de Radon complexe sur le disque D. μ est dite *β-Carleson* si

$$\sup_{\substack{0<h<1 \\ 0\leq\alpha\leq 2\pi}} \frac{|\mu|(W(h,\alpha))}{h^\beta} < \infty$$

où $|\mu|$ est la variation totale de μ et $W(h,\alpha)$ désigne la "fenêtre de Carleson" de taille h définie par

$$W(h,\alpha) := \{re^{i\theta}; 1-h \leq r < 1; \alpha - \frac{h}{2} \leq \theta \leq \alpha + \frac{h}{2}\}.$$

Le théorème suivant, prouvé dans [27], donne une caractérisation complète des opérateurs C_φ β-bornés en termes des mesures de Carleson.

Théorème 2.3.3
Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) *C_φ est β-borné.*

(2) *m_φ est β-Carleson. (m_φ étant la mesure image de m par $\varphi^* : \partial D \to \overline{D}$)*

Corollaire 2.3.4
Si C_φ est β-contractif, alors on a

(1) *m_φ est β-Carleson.*

(2) *$\varphi(0) = 0$.*

Preuve :

(1) Cela découle immédiatement du Théorème 2.3.3.

(2) Puisque $\|C_\varphi\|_{2,2} \leq \|C_\varphi\|_{2,2\beta} \leq 1$, on en déduit, d'après le Théorème 2.1.1.1, que $\varphi(0) = 0$. ■

Dans [50], l'auteur caractérise l'hypercontractivité des opérateurs de convolution par les noyaux de Poisson $P_r(e^{i\theta}) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$, avec $r \in]0,1[$ assez petit. Ces opérateurs sont définis sur les espaces $L^p(\partial D, m)$ et H^p par

$$([P_r]f)(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Voici son théorème.

Théorème 2.3.5

Soient p et q deux réels tels que $1 < p < q < \infty$. On a les assertions suivantes.

(1) $\|[P_r]\|_{B(L^p,L^q)} = 1$ *si et seulement si* $r^2 \leq \frac{p-1}{q-1}$.

(2) $\|[P_r]\|_{B(H^p,H^q)} = 1$ *si et seulement si* $r^2 \leq \frac{p}{q}$.

La caractérisation (2) et le lemme suivant vont nous permettre de déterminer les opérateurs $C_{\alpha z}$ hypercontractifs avec $|\alpha| \leq 1$.

Lemme 2.3.6

Soient $f \in H^\infty$ avec $f(0) = 0$ et $q \in]0, +\infty[$. Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, on a

$$\|1 + \varepsilon f\|_q = 1 + \frac{q}{4}\|f\|_2^2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

Preuve :

Pour tout $z \in D$, on a

$$(1 + \varepsilon f(z))^{\frac{q}{2}} = 1 + \varepsilon \frac{q}{2} f(z) + \varepsilon^2 \frac{q}{4}(\frac{q}{2} - 1) f^2(z) + o(\varepsilon^2)$$

avec ici, $o(\varepsilon^2)$ indépendant de z puisque f est bornée. On a alors

$$\begin{aligned} |1 + \varepsilon f(z)|^q &= |(1 + \varepsilon f(z))^{\frac{q}{2}}|^2 = (1 + \varepsilon f(z))^{\frac{q}{2}} \overline{(1 + \varepsilon f(z))^{\frac{q}{2}}} \\ &= 1 + \varepsilon q Re(f(z)) + \varepsilon^2 \frac{q}{2}(\frac{q}{2} - 1) Re(f^2(z)) + \varepsilon^2 \frac{q^2}{4} |f(z)|^2 + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Puisque les fonctions $Re(f)$ et $Re(f^2)$ sont harmoniques sur D et $f(0) = 0$, l'intégration sur $[0, 2\pi]$ donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1 + \varepsilon f(e^{i\theta})|^q \, d\theta = 1 + \varepsilon^2 \frac{q^2}{4}\|f\|_2^2 + o(\varepsilon^2).$$

Soit encore

$$\|1 + \varepsilon f\|_q = 1 + \varepsilon^2 \frac{q}{4}\|f\|_2^2 + o(\varepsilon^2).$$

■

Théorème 2.3.7

Soient $\alpha \in \overline{D}$ et $1 < \beta < \infty$.

Pour les assertions suivantes, il y a équivalence entre (1) *et* (2) *et entre* (3) *et* (4).

(1) $C_{\alpha z}$ *est β-borné.*

(2) $|\alpha| < 1$.

(3) $C_{\alpha z}$ *est β-contractif.*

(4) $|\alpha| \leq \beta^{-\frac{1}{2}}$.

Preuve :

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supposons que $|\alpha| = 1$. Alors, φ est une rotation de D dans D. Par conséquent, l'opérateur C_φ envoie H^2 sur lui-même. D'où le résultat par l'absurde.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Puisque $\|\varphi\|_\infty = |\alpha| < 1$, on a

$$C_\varphi(H^2) \subset H^\infty \subset H^{2\beta}.$$

Donc C_φ est β-borné.

(3) $\Longrightarrow$ (4) On considère la fonction g définie sur D par $g(z) = 1 + \varepsilon z$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Comme $C_{\alpha z} g = 1 + \varepsilon f$ où $f(z) = \alpha z$ pour tout $z \in D$, le Lemme 2.3.6 appliqué à ce f et $q = 2\beta$ donne

$$\|C_\varphi g\|_{2\beta} = 1 + \frac{\beta|\alpha|^2}{2}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

Ce même lemme appliqué cette fois à $f \equiv z$ et $q = 2$ donne

$$\|g\|_2 = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

Or, l'hypothèse implique que $\|C_\varphi g\|_{2\beta} \leq \|g\|_2$. Simplifiant, puis, passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on trouve que $|\alpha|^2 \leq \frac{1}{\beta}$. Soit encore $|\alpha| \leq \beta^{-\frac{1}{2}}$.
(4) $\Longrightarrow$ (3) Remarquons d'abord que $([P_r]f)(z) = f(rz)$ pour tout $f \in H^p$ et $z \in D$. Cela implique que $\|[P_r]\|_{B(H^2,H^{2\beta})} = \|C_{\alpha z}\|_{2,2\beta}$ avec $r = |\alpha|$. La preuve s'achève alors en utilisant l'assertion (2) du Théorème 2.3.5. ■

Corollaire 2.3.8
Si $\varphi(0) = 0$ et $\|\varphi\|_\infty \leq \beta^{-\frac{1}{2}}$, alors C_φ est β-contractif.

Preuve :
On pose $r = \|\varphi\|_\infty$ et $\psi = \frac{1}{r}\varphi$. Par le lemme de Schwarz, on a $|\varphi(z)| \leq r|z|$. Donc $\psi \in H(D,D)$. D'autre part, $C_\varphi = C_{r\psi} = C_\psi C_{rz}$ entraîne que

$$\|C_\varphi\|_{1,\beta} \leq \|C_\psi\|_{\beta,\beta}\|C_{rz}\|_{1,\beta} \leq 1,$$

où la dernière inégalité découle du fait que $\psi(0) = 0$ et du Théorème 2.3.7 que l'on peut appliquer puisque $r \leq \beta^{-\frac{1}{2}}$. ■

Dans le théorème suivant, on désigne par H_0^2 le sous-espace des fonctions de H^2 s'annulant en 0.

Théorème 2.3.9
Si C_φ est β-contractif, alors on a les assertion suivantes.

(1) $\|C_\varphi\|_{B(H_0^2)} \leq \beta^{-\frac{1}{2}}$.

(2) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(\varphi(e^{i\theta}))|^2|\varphi(e^{i\theta})|^2 \, d\theta \leq \frac{1}{\beta}\|g\|_2^2$ *pour tout $g \in H^2$. En particulier,* $\|\varphi\|_2 \leq \beta^{-\frac{1}{2}}$.

Preuve :
(1) Supposons d'abord $f \in H^\infty$ avec $f(0) = 0$. Alors, il en est de même de $f \circ \varphi$, puisque la contractivité de C_φ entraîne que $\varphi(0) = 0$ (voir Corollaire 2.3.4). Soit $\varepsilon > 0$ sufisamment petit. Par le Lemme 2.3.6, on obtient

$$\begin{cases} \|1 + \varepsilon f \circ \varphi\|_{2\beta} & = 1 + \frac{\beta}{2}\|f \circ \varphi\|_2^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \\ \|1 + \varepsilon f\|_2 & = 1 + \frac{1}{2}\|f\|_2^2 + o(\varepsilon^2) \end{cases}$$

Or, d'après l'hypothèse, on a

$$\|1 + \varepsilon f \circ \varphi\|_{2\beta} \leq \|1 + \varepsilon f\|_2.$$

Donc, après simplification, puis passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on en déduit que

$$\beta \|f \circ \varphi\|_2^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Ce qui entraîne que $\|f \circ \varphi\|_2 \leq \beta^{-\frac{1}{2}} \|f\|_2$.
Soit maintenant $f \in H_0^2$. La suite des sommes partielles $(f_n)_n$ définie par $f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \hat{f}(k) z^k$ converge vers f dans H^2. Donc, elle converge vers f uniformément sur tout compact de D. D'autre part, comme $f_n \in H_0^\infty$, d'après ce qui précède, pour tout $r \in [0, 1[$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(\varphi(re^{i\theta}))|^2 \, d\theta \leq \|f_n \circ \varphi\|_2^2 \leq \frac{1}{\beta} \|f_n\|_2.$$

Passant à la limite quand $n \to \infty$, on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varphi(re^{i\theta}))|^2 \, d\theta \leq \frac{1}{\beta} \|f\|_2.$$

D'où,

$$\|f \circ \varphi\|_2 \leq \beta^{-\frac{1}{2}} \|f\|_2.$$

(2) Cela découle de (1) en tenant compte du fait que la fonction $zg \in H_0^2$ pour tout $g \in H^2$. ∎

Remarque 2.3.10

1. La condition "m_φ est β-Carleson avec $\varphi(0) = 0$" n'est pas suffisante pour que C_φ soit β-contractif. Pensons par exemple à $\varphi(z) = \alpha z$ où $\beta^{-\frac{1}{2}} < |\alpha| < 1$.
Ce même exemple montre aussi que la condition "$\|\varphi\|_\infty < 1$ avec $\varphi(0) = 0$" n'est pas non plus toujours suffisante.

2. Puisque la β-continuité de C_φ entraîne sa compacité pour $1 < \beta < \infty$ (voir [27]), la condition "$|\varphi^*| < 1$ presque partout sur ∂D" est nécessaire pour avoir sa β-contractivité.

Question :

La condition $\|\varphi\|_\infty < 1$ est-elle nécessaire pour que C_φ soit β-contractif ?

Le lemme suivant va nous permettre de répondre à cette question sous réserve de vérification de certaines hypothèses en termes de φ et β.

Lemme 2.3.11

On a les assertions suivantes.

(1) *Si C_φ est β-borné, alors*

$$(1-|z|^2)^{\frac{1}{\beta}} \underset{\substack{|z|\to 1\\ |z|<1}}{=} O(1-|\varphi(z)|^2) \quad \textit{quand} \quad |z| \to 1.$$

(2) *Si C_φ est β-contractif, alors*

$$\sup_{|z|<1} \frac{(1-|z|^2)^{\frac{1}{\beta}}}{1-|\varphi(z)|^2} \leq 1.$$

Preuve :

(1) L'hypothèse implique que l'opérateur adjoint $C_\varphi^* : (H^{2\beta})^* \longrightarrow (H^2)^*$ est borné. Soit $z \in D$ fixé arbitrairement. Comme l'évaluation δ_z en z est bornée sur H^p et de norme $(1-|z|^2)^{-\frac{1}{p}}$(voir Théorème 1.2.15), il s'ensuit que

$$\|C_\varphi^*\delta_z\|_{(H^2)^*} \leq \|C_\varphi^*\|\|\delta_z\|_{(H^{2\beta})^*} = \|C_\varphi\|_{2,2\beta}\|\delta_z\|_{(H^{2\beta})^*}.$$

Or, $C_\varphi^*\delta_z = \delta_{\varphi(z)}$ (d'après le même théorème). Donc

$$(1-|\varphi(z)|^2)^{-\frac{1}{2}} \leq \|C_\varphi\|_{2,2\beta}(1-|z|^2)^{-\frac{1}{2\beta}}.$$

Soit encore

$$\frac{(1-|z|^2)^{\frac{1}{\beta}}}{1-|\varphi(z)|^2} \leq \|C_\varphi\|_{2,2\beta}^2 \qquad (*)$$

(2) Remplaçant dans $(*)$, $\|C_\varphi\|_{2,2\beta}^2$ par 1, on obtient

$$\frac{(1-|z|^2)^{\frac{1}{\beta}}}{1-|\varphi(z)|^2} \leq 1 \quad \text{pour tout} \quad z \in D.$$

D'où le résultat souhaité. ■

Dans le théorème qui suit, nous avons besoin de la notion de fonction α-lipschitzienne avec $0 < \alpha \leq 1$. On dit qu'une fonction f, définie sur une partie Ω de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, est α-lipschitzienne de rapport k, si

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|^\alpha \quad \text{pour tout} \quad (x,y) \in \Omega^2.$$

De telles fonctions forment un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ noté $Lip^\alpha(\Omega)$. Mais d'abord, établissons le lemme suivant.

Lemme 2.3.12
Soient $f \in H(D)$ continue sur $\overline{D}$ et $\alpha \in]0,1[$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) $f \in Lip^{\alpha}(\overline{D})$ *avec rapport* k.

(2) $f \in Lip^{\alpha}(\partial D)$ *avec rapport* k.

Preuve :
(1) $\Longrightarrow$ (2) C'est immédiat.
(2) $\Longrightarrow$ (1) Supposons, dans un premier temps, que f est analytique sur un voisinage de $\overline{D}$.
Soit $v \in \partial D$ fixé arbitrairement. Considérons la fonction g définie sur $\overline{D}$ par

$$\begin{cases} g(u) & = \frac{|f(u)-f(v)|}{|u-v|^{\alpha}} \quad \text{si } u \neq v \\ g(v) & = 0 \end{cases}$$

g est continue sur $\overline{D}$. En effet, elle l'est en tout point de $\overline{D}\backslash\{v\}$. De plus, comme elle est analytique sur un voisinage de $\overline{D}$, on obtient

$$\lim_{\substack{u \to v \\ u \in \overline{D}\backslash\{v\}}} g(u) = \lim_{\substack{u \to v \\ u \in \overline{D}\backslash\{v\}}} (|\frac{f(u)-f(v)}{u-v}|.|u-v|^{1-\alpha}) = 0.$$

Donc, g est continue sur $\overline{D}$. D'autre part, g s'écrit localement comme module d'une fonction analytique sur D. Donc, elle est sous-harmonique sur D. Le principe du maximum donne alors

$$g(u) \leq \sup_{\zeta \in \partial D} g(\zeta) \quad \text{pour tout } u \in \overline{D}.$$

Or, par hypothèse, on a

$$|f(u) - f(v)| \leq k|u-v|^{\alpha} \quad \text{pour tout } u, v \in \partial D.$$

On en déduit alors que $g(u) \leq k$, pour tout $u \in \overline{D}$. Soit encore

$$|f(u) - f(v)| \leq k|u-v|^{\alpha} \quad \text{pour tout } u \in \overline{D} \text{ et } v \in \partial D. \qquad (i)$$

Soit maintenant v fixé arbitrairement dans D. D'après ce qui précède, en échangeant les rôles de u et v, on trouve

$$|f(u) - f(v)| \leq k|u-v|^{\alpha} \quad \text{pour tout } u \in \partial D.$$

Considérant la même fonction g, on remarque que celle-ci est continue sur $\overline{D}$ et localement sous-harmonique dans $D\backslash\{v\}$. Comme elle s'annule en v, elle est sous-harmonique partout dans D. Une fois de plus, le principe du maximum s'applique à g pour donner le résultat souhaité; à savoir :

$$|f(u) - f(v)| \leq k|u - v|^{\alpha} \quad \text{pour tout } u \in \overline{D} \text{ et } v \in D. \tag{ii}$$

Traitons maintenant le cas général. Pour tout $r \in]0, 1[$, on pose

$$f_r(z) = f(rz) \quad \text{pour tout } z \in D.$$

$f_r \in Lip^{\alpha}(\partial D)$ avec rapport k. En effet, pour tout $u \in \partial D$, on a

$$f_r(u) = (f * P_r)(u) = \int_{\partial D} P_r(\omega) f(u\overline{\omega})\, dm(\omega).$$

Donc, pour tout $u, v \in \partial D$, on obtient

$$\begin{aligned} |f_r(u) - f_r(v)| &\leq \int_{\partial D} P_r(\omega)|f(u\overline{\omega}) - f(v\overline{\omega})|\, dm(\omega) \\ &\leq k \int_{\partial D} P_r(\omega)|u\overline{\omega} - v\overline{\omega}|^{\alpha}\, dm(\omega) \\ &= k|u - v|^{\alpha}. \end{aligned}$$

Puisque f_r est analytique sur $D(0, \frac{1}{r})$, il résulte, compte tenu de (i) et (ii), que

$$|f_r(u) - f_r(v)| \leq k|u - v|^{\alpha} \quad \text{pour tout } u, v \in \overline{D}.$$

D'où, par continuité de f sur $\overline{D}$, on en déduit que

$$|f(u) - f(v)| \leq k|u - v|^{\alpha} \quad \text{pour tout } u, v \in \overline{D}.$$

■

Remarque 2.3.13

Le résultat du lemme précédent est vrai même pour $\alpha = 1$. En effet, si f est analytique sur un voisinage de $\overline{D}$, la fonction

$$g(u, v) := \begin{cases} \frac{f(u) - f(v)}{u - v} & \text{si } u \neq v \\ f'(v) & \text{si } u = v \end{cases}$$

est analytique sur D^2 et continue sur $\overline{D}^2$. Par le principe du maximum distingué (cf. [26] p. 26), on a

$$\sup_{u,v\in\overline{D}} |g(u,v)| \leq \sup_{u,v\in\partial D} |g(u,v)|.$$

D'où le résultat pour f analytique sur un voisinage de $\overline{D}$. Le cas général s'en déduit comme dans la preuve de (2) $\Longrightarrow$ (1) de ce lemme.

Théorème 2.3.14

Supposons

$$\varphi \in Lip^{\frac{1}{\beta}}(\partial D) \quad \textit{avec rapport } k \quad \textit{où} \quad 0 < k < 2^{\frac{1}{\beta}-1}. \tag{$**$}$$

Si C_φ est β-contractif, alors $\varphi(0) = 0$ et $\|\varphi\|_\infty < 1$.

Preuve :

On a déjà vu que la β-contractivité de C_φ entraînait la nullité de φ en 0. Pour établir la seconde assertion, nous allons supposer le contraire; à savoir $\|\varphi\|_\infty = 1$.

Par continuité de φ sur ∂D, il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $|\varphi(e^{i\theta})| = 1$. Comme $\varphi \in Lip^{\frac{1}{\beta}}(\partial D)$, par le Lemme 2.3.12, $\varphi \in Lip^{\frac{1}{\beta}}(\overline{D})$ avec le même rapport k. Donc, pour tout $r \in [0, 1[$, on a

$$1 - |\varphi(re^{i\theta})| \leq |\varphi(e^{i\theta}) - \varphi(re^{i\theta})| \leq k(1-r)^{\frac{1}{\beta}}. \tag{1}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\frac{(1-r^2)^{\frac{1}{\beta}}}{1-|\varphi(re^{i\theta})|^2} &= \frac{(1-r)^{\frac{1}{\beta}}}{1-|\varphi(re^{i\theta})|} \frac{(1+r)^{\frac{1}{\beta}}}{1+|\varphi(re^{i\theta})|} \\
&\geq (1+r)^{\frac{1}{\beta}-1} \frac{(1-r)^{\frac{1}{\beta}}}{1-|\varphi(re^{i\theta})|} \quad \text{(par le lemme de Schwarz)} \\
&\geq 2^{\frac{1}{\beta}-1} \frac{(1-r)^{\frac{1}{\beta}}}{1-|\varphi(re^{i\theta})|} \quad (\text{car } \beta \geq 1).
\end{aligned}$$

Soit encore, compte tenu du (1) :

$$\sup_{0\leq r<1} \frac{(1-r^2)^{\frac{1}{\beta}}}{1-|\varphi(re^{i\theta})|^2} \geq \frac{2^{\frac{1}{\beta}-1}}{k} > 1.$$

Par conséquent, $\sup_{|z|<1} \dfrac{(1-|z|^2)^{\frac{1}{\beta}}}{1-|\varphi(z)|^2} > 1$. Ce qui contredit le Lemme 2.3.11. ∎

Question :

Peut-on affaiblir l'hypothèse $(**)$ du Théorème 2.3.14 ?

Définitions :

Soient X un espace de Banach, (Ω, μ) un espace mesuré et q un réel tel que $0 < q < \infty$. Un opérateur $T : X \longrightarrow L^q(\Omega, \mu)$ est dit *borné pour l'ordre* (en abrégé *ob*) si la fonction maximale associée $M_T : \omega \longmapsto \sup_{\|x\| \leq 1} |(Tx)(\omega)|$ est q-intégrable. Si de plus, $\|M_T\|_q \leq 1$, on dit qu'il est *contractif pour l'ordre* (en abrégé *oc*).

Etant donné $\varphi \in H(D, D)$, on dira que $C_\varphi : H^p \to H^q (1 \leq p < q < \infty)$ est *ob* (resp. *oc*) si l'opérateur $\widetilde{C}_\varphi := jC_\varphi$ est *ob* (resp. *oc*); j étant l'application de H^q dans $L^q(\partial D, m)$ qui à f associe sa limite radiale f^*.

Soit β un réel tel que $1 \leq \beta < \infty$. En utilisant le théorème de factorisation de M. Riesz, on vérifie que $C_\varphi : H^p \to H^{\beta p}$ est *ob* (resp. *oc*) pour un cetain $1 \leq p < \infty$ si et seulement si il l'est pour tout $1 \leq p < \infty$. Dans ce cas, on dit qu'il est *β-ob* (resp. *β-oc*).

Le résultat suivant (cf. [27]), caractérise les opérateurs C_φ *β-ob.*

Théorème 2.3.15

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) C_φ *est β-ob.*

(2) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1-|\varphi(e^{i\theta}|^2)^\beta} < \infty$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta-1} \|\varphi^n\|_1 < \infty$.

Le théorème qui suit met en évidence le cas limite $\beta = \infty$ dans le cadre des opérateurs C_φ *ob.*

Théorème 2.3.16

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) $\|\varphi\|_\infty < 1$.

(2) $C_\varphi(H^p) \subset H^\infty$ *pour tout* $1 \leq p < \infty$.

(3) $C_\varphi(H^p) \subset H^\infty$ *pour un* $1 \leq p < \infty$.

Preuve :

(1) $\Longrightarrow$ (2) Soit $f \in H^p$. Pour tout $z \in D$, on a

$$|f(\varphi(z))| \leq \|\delta_{\varphi(z)}\|_{(H^p)^*}\|f\|_p = (1-|\varphi(z)|^2)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_p \leq (1-\|\varphi\|_\infty^2)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_p.$$

Donc $f \circ \varphi \in H^\infty$ et $\|f \circ \varphi\|_\infty \leq (1-\|\varphi\|_\infty^2)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_p$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) est immédiat.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Pour tout $\zeta \in \partial D$, la fonction $z \longmapsto \frac{1}{(\zeta - z)^{\frac{1}{2p}}}$ est dans H^p. L'hypothèse assure alors l'existence d'un nombre $c > 1$ tel que

$$\frac{1}{|\zeta - \varphi(z)|^{\frac{1}{2p}}} \leq c.$$

Ce qui veut dire qu'il existe $\delta \in]0,1[$ tel que

$$|\zeta - \varphi(z)| \geq \delta \quad \text{pour tout } z \in D. \qquad (*)$$

Soit $z \in D$ tel que $\varphi(z) \neq 0$. La relation $(*)$, pour $\zeta = \frac{\varphi(z)}{|\varphi(z)|}$, donne

$$|\varphi(z)|(\frac{1}{|\varphi(z)|} - 1) \geq \delta.$$

Donc, $1 - |\varphi(z)| \geq \delta$. Ce qui signifie que $|\varphi(z)| \leq 1 - \delta$. Cela étant vrai pour tout $z \in D$, on en déduit que $\|\varphi\|_\infty \leq 1 - \delta < 1$. ■

Remarque 2.3.17

1. D'après les théorèmes précédents, les opérateurs C_φ *β-ob* ($1 \leq \beta < \infty$) n'envoient pas forcément $H^p(1 \leq p < \infty)$ dans H^∞. Cependant, c'est le cas lorsque leurs symboles sont dans $Lip^{\frac{1}{\beta}}(\partial D, m)$. Cela découle du fait que si C_φ est *β-ob*, alors il est β-compact. Ce qui entraîne, sous l'hypothèse "$\varphi \in Lip^{\frac{1}{\beta}}(\partial D, m)$", que $\|\varphi\|_\infty < 1$. Pour les détails, voir [27].

2. Par le Théorème 2.3.16, on en déduit que si $C_\varphi(H^p) \subset H^\infty$ pour un $1 \leq p < \infty$, alors $C_\varphi : H^p \rightarrow H^\infty$ est compact pour tout p.

Nous terminons ce chapitre par un théorème qui dit que l'évaluation en 0 est le seul opérateur de composition *β-oc* et que c'est le seul à envoyer $H^p(1 \leq p < \infty)$ dans H^∞ de façon contractive.

Théorème 2.3.18

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) $C_\varphi : H^p \to H^\infty$ *est contractif (pour un* $p; 1 \leq p < \infty$*).*

(2) C_φ *est* β*-oc.*

(3) $\varphi \equiv 0$.

Preuve :

Nous allons montrer que (1) et (2) sont équivalentes à (3).

(3) $\Longrightarrow$ (1) Pour tout $f \in H^p$ $(1 \leq p < \infty)$, on a

$$C_\varphi f = f \circ \varphi \equiv f(0) \ \in H^\infty.$$

De plus,

$$\|f \circ \varphi\|_\infty = |f(0)| \leq \|f\|_p.$$

(3) $\Longrightarrow$ (2) Puisque $C_\varphi(H^p) \subset H^\infty$, on va considérer C_φ comme opérateur de H^p dans $H^{\beta p}$. Pour tout $\zeta \in \partial D$, on a

$$M_{\widetilde{C}_\varphi}(\zeta) := \sup_{\|f\|_p \leq 1} |f(\varphi(\zeta))| = \sup_{\|f\|_p \leq 1} |f(0)| = \|\delta_0\|_{(H^p)^*} = 1.$$

Donc la fonction maximale $M_{\widetilde{C}_\varphi}$ est dans $L^{\beta p}(\partial D, m)$ et, $\|M_{\widetilde{C}_\varphi}\|_{\beta p} = 1$. Par conséquent, C_φ est β-*oc*.

(1) $\Longrightarrow$ (3) Pour tout $z \in D$ et $f \in H^p$ avec $\|f\|_p = 1$, on a

$$|f(\varphi(z))| \leq \|f \circ \varphi\|_\infty \leq 1.$$

Donc,

$$\|\delta_{\varphi(z)}\|_{(H^p)^*} = (1 - |\varphi(z)|^2)^{-\frac{1}{p}} \leq 1 \quad \text{pour tout } z \in D.$$

On en déduit que $1 - |\varphi(z)|^2 = 1$ pour tout $z \in D$. D'où $\varphi \equiv 0$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) C_φ étant β-*oc*, il est β-*ob*; par conséquent, d'après [27], il est β-compact. Il existe alors $A \subseteq \partial D$ tel que $m(A) = 1$ et $|\varphi^*(\zeta)| < 1$ pour tout $\zeta \in A$. Soit $p \in [1, \infty[$. pour tout $\zeta \in A$, on a

$$(M_{\widetilde{C}_\varphi}(\zeta))^{\beta p} := (\sup_{\|f\|_p \leq 1} |f(\varphi^*(\zeta))|)^{\beta p} = \|\delta_{\varphi^*(\zeta)}\|_{(H^p)^*}^{\beta p} = \frac{1}{(1 - |\varphi^*(\zeta)|^2)^\beta}.$$

Comme $m(A) = 1$, l'intégration sur ∂D donne

$$\begin{aligned}
\|M_{\widetilde{C}_\varphi}\|_{\beta p}^{\beta p} &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tfrac{d\theta}{(1-|\varphi^*(e^{i\theta})|^2)^\beta} \\
&\geq \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tfrac{d\theta}{1-|\varphi^*(e^{i\theta})|^2} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi^*(e^{i\theta})|^{2n}\, d\theta\Big).
\end{aligned}$$

Or, d'après l'hypothèse, $\|M_{\widetilde{C}_\varphi}\|_{\beta p} \leq 1$. On doit donc avoir $\varphi^* \equiv 0$ sur A. Ce qui entraîne, compte tenu d'un résultat classique (cf. [19] p. 17), que $\varphi \equiv 0$. ■

Troisième chapitre :

Opérateurs de composition sur les espaces H_X^p $(1 \leq p < \infty)$

3 Opérateurs de composition sur les espaces H^p_X $(1 \leq p < \infty)$

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux opérateurs C_φ définis sur l'espace de Hardy H^p_X où X est un espace de Banach. On dit qu'une fonction f de $H(D, X)$ appartient à H^p_X si

$$\|f\|^p := \sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta})\|^p_X \, d\theta < \infty.$$

Muni de cette norme, H^p_X est un espace de Banach. En particulier, si $X = H$ est un espace de Hilbert séparable de base orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, l'espace H^2_H devient un espace de Hilbert dont les fonctions $\varepsilon_{m,n} : z \longmapsto z^m e_n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ forment une base orthonormale.

Certaines propriétés des fonctions analytiques se généralisent sans difficulté aux fonctions holomorphes à valeurs vectorielles. Par contre, le principe du maximum "fort" ne s'applique pas toujours. Autrement dit, si f est une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$ et, si $\|f(z)\|$ admet un maximum, alors $\|f(z)\|$ est constante. Mais, f n'est pas nécessairement constante (contrairement au cas scalaire). Penser par exemple à la fonction f qui à tout $z \in D$ associe le couple $(1, z)$ avec ici, $X = \mathbb{C}^2$ muni de la norme $\|(z_1, z_2)\| = \max(|z_1|, |z_2|)$. Dans cet exemple, nous avons $\|f(z)\|$ constante (égale à 1) alors que f ne l'est pas. Toutefois, dans [14] (p. 164), on établit une condition nécessaire et suffisante sur l'espace X pour que ce principe reste valable; à savoir que X est strictement c-convexe.

Dans la suite, nous supposons que X vérifie la propriété de Radon-Nikodym analytique (voir préliminaires sur les H^p_X). Dans ce cas, on peut identifier H^p_X au sous-espace des fonctions de $L^p_X(\partial D, dm)$ dont les cœfficients de Fourier d'indice négatif sont tous nuls. Cela est dû à l'existence presque partout de la fonction limite radiale f^*. Ce qui nous permet d'écrire :

$$\|f\|^p = \|f^*\|^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f^*(e^{i\theta})\|^p_X \, d\theta.$$

Dans le cas d'un espace de Hilbert H, on utilise l'identité de Parseval pour montrer que, si $f \in H^2_H$ avec $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n u_n \in H^2_H$, alors $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|^2_H$.

3.1 Opérateurs de composition contractifs

De même que dans l'étude sur H^2 , la condition $\varphi(0) = 0$ est suffisante pour que C_φ soit de norme 1. En effet, le principe de subordination de Littlewood, généralisé aux fonctions vectorielles, s'applique ici à la fonction sous-harmonique $\|f(.)\|_X^p = (t \mapsto t^p) \circ \|f(.)\|_X$.
Afin de prouver sa nécessité nous avons besoin de la continuité de l'évaluation qui prend ses valeurs cette fois dans X.

Lemme 3.1.1
Pour tout $z \in D$, on a les assertions suivantes.

(1) *l'évaluation*

$$\begin{aligned} \delta_z : \ & H_X^p && \longrightarrow X \\ & f && \longmapsto f(z) \end{aligned}$$

est bornée et $\|\delta_z\|_{B(H_X^p, X)} = (1 - |z|^2)^{-\frac{1}{p}}$.

(2) *il existe $\tau_z \in X^*$ tel que*

$$\|\tau_z\|_{X^*} = 1 \quad et \quad \|\tau_z \delta_z\|_{(H_X^p)^*} = (1 - |z|^2)^{-\frac{1}{p}}.$$

Preuve :
(1) Soit $\tau \in X^*$ avec $\|\tau\|_{X^*} = 1$. Pour tout $f \in H_X^p$, l'application
$F : z \longmapsto \tau(f(z)) = F(z)$ est analytique dans D puisque f l'est aussi et τ est linéaire.
D'autre part, pour tout $r \in [0, 1[$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\tau(f(re^{i\theta}))|^p \, d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta})\|_X^p \, d\theta \leq \|f\|^p.$$

Donc $F \in H^p$ et $\|F\|_p \leq \|f\|$.
Pour tout $z \in D$, on a

$$\|\delta_z f\|_X = \|f(z)\|_X = \sup_{\|\tau\|_{X^*}=1} |\tau(f(z))|.$$

Or, pour tout $\tau \in X^*$, on a

$$|\tau(f(z))| = |F(z)| \leq (1 - |z|^2)^{-\frac{1}{p}} \|F\|_p \leq (1 - |z|^2)^{-\frac{1}{p}} \|f\|.$$

Il s'ensuit alors que

$$\|\delta_z\|_{B(H_X^p, X)} \leq (1 - |z|^2)^{-\frac{1}{p}}.$$

Pour terminer la preuve de (1), on prend la fonction $f_z : \omega \longmapsto \left(\frac{1-|z|^2}{(1-\bar{z}\omega)^2}\right)^{\frac{1}{p}} u$ avec $u \in X$ tel que $\|u\|_X = 1$. Cette fonction est dans H^p_X, de norme 1 et $\|\delta_z f_z\|_X = (1-|z|^2)^{-\frac{1}{p}}$. On en déduit alors que

$$\|\delta_z\|_{B(H^p_X, X)} = (1-|z|^2)^{-\frac{1}{p}}.$$

(2) Pour tout $z \in D$ et $\tau \in X^*$, on a $\tau\delta_z \in (H^p_X)^*$ et

$$\|\tau\delta_z\|_{(H^p_X)^*} = \sup_{\|f\|=1} |(\tau\delta_z)f| = \sup_{\|f\|=1} |\tau(f(z))|.$$

Or, par le théorème de Hahn Banach, pour tout $z \in D$ avec $f(z) \neq 0$, il existe $\tau_z \in X^*$ tel que

$$\|\tau_z\| = 1 \quad \text{et} \quad \tau_z(f(z)) = \|f(z)\|_X.$$

Donc, pour ce τ_z, on a

$$\begin{aligned} \|\tau_z\delta_z\|_{(H^p_X)^*} &= \sup_{\substack{\|f\|=1 \\ f(z)\neq 0}} |\tau_z(f(z))| &&= \sup_{\substack{\|f\|=1 \\ f(z)\neq 0}} \|f(z)\|_X \\ &= \sup_{\|f\|=1} \|f(z)\|_X &&= \|\delta_z\|_{B(H^p_X, X)} \\ &= (1-|z|^2)^{-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de l'assertion (1). ■

Remarque 3.1.2

Dans le cas d'un espace de Hilbert H, sachant que l'on peut écrire $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_H^2$ pour tout $f \in H^2_H$, on peut retrouver l'assertion (1) du Lemme 3.1.1 en utilisant l'inégalité de Cauchy- Schwarz.

Théorème 3.1.3

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) *C_φ est contractif sur H^p_X.*

(2) $\varphi(0) = 0$.

Preuve :

(1) $\Longrightarrow$ (2) l'hypothèse entraîne que $\|C^*_\varphi\| \leq 1$. D'autre part, d'après le Lemme 3.1.1, il existe $\tau \in X^*$ tel que $\|\tau\|_{X^*} = 1$ et $\|\tau\delta_{\varphi(0)}\|_{(H^p_X)^*} = (1-|\varphi(0)|^2)^{-\frac{1}{p}}$. Il vient donc

$$1 \geq \|C^*_\varphi\|.\|\tau\delta_0\|_{(H^p_X)^*} \geq \|C^*_\varphi(\tau\delta_0)\|_{(H^p_X)^*} = \|\tau\delta_{\varphi(0)}\|_{(H^p_X)^*} = (1-|\varphi(0)|^2)^{-\frac{1}{p}}.$$

Ce qui donne $\varphi(0) = 0$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) a déjà été expliqué au début de ce paragraphe. ■

3.2 Opérateurs de composition isométriques

Théorème 3.2.1

Soit H un espace de Hilbert. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) *C_φ est isométrique sur H^2_H.*

(2) *φ est intérieure et $\varphi(0) = 0$.*

Preuve :

(1) $\Longrightarrow$ (2) est valable même pour H^p_X avec X non hilbertien et $p \neq 2$. En effet, l'hypothèse entraîne que C_φ est de norme 1. Donc, d'après le Thérème 3.1.3, $\varphi(0) = 0$. Par ailleurs, si $u \in X$ avec $\|u\|_X = 1$, la fonction $\varphi.u : z \longmapsto \varphi(z)u$ est dans H^p_X. C_φ étant isométrique, donc

$$\|\varphi.u\| = \|C_\varphi(id_D.u)\| = \|id_D.u\| = 1.$$

Ce qui signifie que $\int\limits_{\partial D} |\varphi^*|^p \, dm = 1$. Mais comme $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, il s'ensuit que $|\varphi^*| = 1$ presque partout sur ∂D. Autrement dit, φ est intérieure.

(2) $\Longrightarrow$ (1) commençons d'abord par remarquer que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H, la famille $\{\varphi^n.u_n; n \in \mathbb{N}\}$ est orthogonale dans H^2_H. En effet, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \neq n$, on a

$$\begin{aligned} < \varphi^m.u_m, \varphi^n.u_n > &= \tfrac{1}{2\pi} \textstyle\int_0^{2\pi} \varphi^{*m}(e^{i\theta})\overline{\varphi^{*n}}(e^{i\theta}) < u_m, u_n >_H \, d\theta \\ &= \left(\tfrac{1}{2\pi} \textstyle\int_0^{2\pi} \varphi^{m-n}(e^{i\theta}) \, d\theta\right) < u_m, u_n >_H \\ &= \varphi^{m-n}(0) < u_m, u_n >_H = 0 \end{aligned}$$

Soit maintenant $f \in H^2_H$ avec $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n u_n$. On a alors $(C_\varphi f)(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi^n.u_n$ et

$$\|C_\varphi f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi^n.u_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|^2_H = \|f\|^2.$$

D'où l'assertion (1). ■

Question :

L'implication (2) $\Longrightarrow$ (1) du Théorème 3.2.1 peut-elle avoir lieu lorsque X est un espace de Banach non hilbertien ?

Lemme 3.2.2
On a les assertions suivantes.

(1) *Si* $D \cap \partial(\varphi(D)) = \emptyset$*, alors* φ *est surjective.*

(2) *Si* $D \cap \partial(\varphi(D)) \neq \emptyset$ *alors, il existe* $v \in D$ *et* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D$ *tels que*

$$\lim_{k\to\infty} |z_k| = 1 \quad \textit{et} \quad \lim_{k\to\infty} \varphi(z_k) = v.$$

Preuve :
(1) Puisque φ est analytique non constante, d'après le théorème de l'application ouverte, $\varphi(D)$ est un ouvert de D. D'autre part, si l'on désigne par $\overline{\varphi(D)}^D$ l'adhérence de $\varphi(D)$ dans D, on a

$$\overline{\varphi(D)}^D = \overline{\varphi(D)} \cap D = \varphi(D) \cup (\partial\varphi(D) \cap D) = \varphi(D).$$

Donc, $\varphi(D)$ est à la fois ouvert et fermé dans D. La connexité de D entraîne alors que $D = \varphi(D)$, et on a la surjectivité de φ.

(2) Soit $v \in D \cap \partial(\varphi(D))$. Il existe alors une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans D telle que $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(z_k) = v$. Supposons que $\lim\limits_{k\to\infty} |z_k| \neq 1$. Alors, modulo extraction, on peut supposer qu'il existe $\omega \in D$ tel que $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = \omega$. Cela implique que

$$v = \lim_{k\to\infty} \varphi(z_k) = \varphi(\omega) \in \varphi(D).$$

Ce qui est absurde puisque $\varphi(D) \cap \partial(\varphi(D)) = \emptyset$ ($\varphi(D)$ étant un ouvert strictement inclus dans $\mathbb{C}$). ∎

Théorème 3.2.3
Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) C_φ *est inversible sur* H^p_X.

(2) $\varphi \in Aut(D)$.

Preuve :
(1) $\Longrightarrow$ (2) montrons d'abord que φ est injective.
Soient z et ω dans D tels que $\varphi(z) = \varphi(\omega)$. Alors, pour tout $\tau \in X^*$, $\tau(\delta_z - \delta_\omega) \in ker(C^*_\varphi)$. Or, C^*_φ est inversible. Donc, $\delta_z = \delta_\omega$ dans $B(H^p_X, X)$. Cela entraîne que

$\delta_z(id_D u) = \delta_\omega(id_D u)$ pour tout $u \in X$. soit encore $zu = \omega u$ pour tout $u \in X$. Il s'ensuit alors que $z = \omega$, d'où l'injectivité de φ. Montrons maintenant que φ est surjective. Pour cela, supposons le contraire. Alors, d'après le Lemme 3.2.2, il existe $v \in D$ et une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D$ tels que

$$\lim_{k\to\infty} |z_k| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} \varphi(z_k) = v.$$

On pose $\tau_k := \frac{\tau\delta_{z_k}}{\|\tau\delta_{z_k}\|_{(H_X^p)^*}}$, où τ est la forme linéaire donnée par le Lemme 3.1.1. Comme

$$\|\tau\delta_{z_k}\|_{(H_X^p)^*} = (1-|z_k|^2)^{-\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \|\tau\delta_{\varphi(z_k)}\|_{(H_X^p)^*} \leq (1-|\varphi(z_k)|^2)^{-\frac{1}{p}},$$

il s'ensuit que

$$\|C_\varphi^*\tau_k\|_{(H_X^p)^*} = \frac{\|\tau\delta_{\varphi(z_k)}\|_{(H_X^p)^*}}{\|\tau\delta_{z_k}\|_{(H_X^p)^*}} \leq \left(\frac{1-|z_k|^2}{1-|\varphi(z_k)|^2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Donc, $\lim_{k\to\infty} \|C_\varphi^*\tau_k\|_{(H_X^p)^*} = 0$. Mais, $1 = \|\tau_k\|_{(H_X^p)^*} \leq \|C_\varphi^{*^{-1}}\|_{B(H_X^p)}\|C_\varphi^*\tau_k\|_{(H_X^2)^*}$, d'où la contradiction. Par conséquent, φ est surjective.

(2) $\Longrightarrow$ (1) l'hypothèse implique que $\varphi^{-1} \in H(D,D)$. Donc $C_{\varphi^{-1}}$ est borné sur H_X^p et c'est précisément l'inverse de C_φ dans $B(H_X^p)$. ■

Corollaire 3.2.4

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) *C_φ est unitaire sur H_X^p.*

(2) *φ est une rotation.*

Preuve :

(1) $\Longrightarrow$ (2) cela découle des Théorèmes 3.1.3 et 3.2.3.

(2) $\Longrightarrow$ (1) φ étant de la forme $\varphi(z) = e^{i\theta_0}z$. Donc, pour tout $f \in H_X^p$ et $r \in [0,1[$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(re^{i(\theta+\theta_0)})\|_X^p \, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} \|f(re^{i\theta})\|_X^p \, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta})\|_X^p \, d\theta$$

D'où

$$\|C_\varphi f\|^p = \lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta})\|_X^p \, d\theta = \|f\|^p$$

C_φ est alors isométrique. Or il est bijectif puisque $\varphi \in Aut(D)$. Par conséquent, C_φ est unitaire sur H_X^p. ■

3.3 Opérateurs de composition de Fredholm

Rappelons que sur l'espace H^p, la classe des opérateurs C_φ de Fredholm coïncide avec celle des opérateurs C_φ inversibles (voir [5] ou [34]). Le lemme suivant sera utile dans la généralisation de ce résultat au cas vectoriel.

Lemme 3.3.1

Soient Y un espace de Banach et $T \in B(Y)$. S'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ vérifiant

$$\|y_n\| = 1, \quad y_n \xrightarrow{w} 0 \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \|Ty_n\| = 0,$$

alors T ne peut pas être un opérateur de Fredholm.

Preuve :

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite comme dans le lemme. Supposons que T soit un opérateur de Fredholm. Alors (cf. [35]), il existe $S \in B(Y)$ inversible et $K \in K(Y)$ tels que $ST = I + K$. De l'inégalité

$$\|STy_n\| \leq \|S\|\|Ty_n\|,$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} \|STy_n\| = 0$, autrement dit que $\lim_{n\to\infty} \|y_n + Ky_n\| = 0$. D'autre part, on a $\lim_{n\to\infty} \|Ky_n\| = 0$ puisque $y_n \xrightarrow{w} 0$ et puisque K est compact. Il en résulte que $\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 0$, ce qui est une contradiction. ∎

Théorème 3.3.2

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) *C_φ est un opérateur de Fredholm sur H^p_X.*

(2) *$\varphi \in Aut(D)$.*

Preuve :

(1) $\Longrightarrow$ (2) Montrons d'abord que φ est injective.

Supposons le contraire. Il existe alors deux points distincts a et b dans D et deux disques disjoints D_a et D_b contenus dans D et centrés respectivement en a et b tels que $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Par le théorème de l'application ouverte, l'ensemble $\Omega := \varphi(D_a) \cap \varphi(D_b)$ est un ouvert non vide de D ($\varphi(a) \in \Omega$). Soit $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points distincts de Ω. Il existe alors deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_a$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_b$ telles que

$$\varphi(a_n) = \varphi(b_n) = \omega_n.$$

Pour tout $\tau \in X^*$, la suite $(\tau(\delta_{a_n} - \delta_{b_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $ker(C_\varphi^*)$. On va prouver qu'elle est linéairement indépendante pour au moins un τ. Cela permettra de conclure que $dim(ker(C_\varphi^*)) = \infty$. Ce qui sera en contradiction avec (1). Pour tout $N \in \mathbb{N}$, considérons des nombres complexes $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$ tels que

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \tau(\delta_{a_n} - \delta_{b_n}) = 0. \qquad (*)$$

Soit $x \in X$ avec $x \neq 0$. Pour tout $k = 1, 2\cdots, N$, en appliquant $(*)$ à une fonction $f \in H_X^p$ telle que $f(a_n) = \delta_{n,k}x$ et $f(b_n) = 0$ pour tout $n = 1, \cdots, N$, on obtient $\lambda_k \tau x = 0$ pour tout $\tau \in X^*$ et $k = 1, 2\cdots, N$. Or, comme $x \neq 0$, par le théorème de Hahn Banach, il existe $\tau_0 \in X^*$ tel que $\|\tau_0\| = 1$ et $\tau_0 x = \|x\|$. Cela entraîne que $\lambda_k = 0$ pour tout $k = 1, 2\cdots, N$. D'où l'idépendance linéaire du système $\{\tau_0(\delta_{a_n} - \delta_{b_n}); n \in \mathbb{N}\}$.
Montrons maintenant que φ est surjective.
Si on suppose le contraire, le raisonnement utilisé dans la preuve du Théorème 3.2.3 assure l'existence d'une suite $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (H_X^p)^*$ avec $\|\tau_k\| = 1$ et $\lim\limits_{k\to\infty} \|C_\varphi^* \tau_k\|_{(H_X^p)^*} = 0$. De plus, on a $\tau_k \xrightarrow{w} 0$. En effet, soit $F \in H_X^p$. Posons $f(z) = \tau(F(z))$ où τ est la forme linéaire intervenant dans l'expression de τ_k. On a alors $f \in H^p$ ($\|f\|_p \leq \|F\|$) et,

$$\tau_k(F) = \frac{\tau(F(z_k))}{\|\tau\delta_{z_k}\|_{(H_X^p)^*}} = \frac{f(z_k)}{\|\tau\delta_{z_k}\|_{(H_X^p)^*}} = \frac{\delta_{z_k}(f)}{\|\delta_{z_k}\|_{(H^p)^*}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(Cette limite a été calculée dans [27]). Cela implique, d'après le Lemme 3.3.1, que C_φ^* ne peut pas être de Fredholm. Ce qui signifie que C_φ ne peut pas l'être non plus, d'où la contradiction.
(2) $\Longrightarrow$ (1) D'aprés le Théorème 3.2.3, C_φ est inversible sur H_X^p. Donc, il est de Fredholm. ∎

Remarque :
Si la compacité des opérateurs C_φ n'a pas été étudiée sur H_X^p, c'est parce qu'elle entraîne automatiquement la condition $\dim X < \infty$. Cela résulte du diagramme suivant dans lequel μ_1 et μ_2 désignent respectivement les injections canoniques de H^p et de X

dans $H^p \otimes X$.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & H^p_X & & \\
 & & \wr & & \\
H^p & \overset{\mu_1}{\hookrightarrow} & H^p \otimes X & \overset{\mu_2}{\hookleftarrow} & X \\
C_\varphi \downarrow & & \downarrow C_\varphi \otimes id_X & & \downarrow id_X \\
H^p & \overset{\mu_1}{\hookrightarrow} & H^p \otimes X & \overset{\mu_2}{\hookleftarrow} & X \\
 & & \wr & & \\
 & & H^p_X & &
\end{array}
$$

Notons que, très récemment, les auteurs de [33] ont caractérisé les opérateurs C_φ faiblement compacts sur H^p_X pour X réflexif. Ils ont prouvé que ceux-ci sont exactement ceux qui sont compacts sur H^p.

Quatrième chapitre :

Opérateurs de composition bornés pour l'ordre sur les espaces de Hardy et la classe de Nevanlinna [1]

[1] Ce chapitre fait l'objet d'un article (cf. [28]) qui paraîtra dans Studia Mathematica.

4 Opérateurs de composition bornés pour l'ordre sur les espaces de Hardy et la classe de Nevanlinna

Dans ce chapitre, nous étudions les opérateurs C_φ bornés pour l'ordre. On les considère d'abord sur les espaces de Hardy H^p $(0 < p < \infty)$, ensuite sur la classe de Nevanlinna $\mathcal{N}$ munie de la distance d introduite dans le premier chapitre. Sur cette classe, la continuité de C_φ est due essentiellement au principe de subordination de Littlewood (voir Théorème 1.2.6). A noter que l'inclusion $C_\varphi(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$ est une conséquence directe des égalités suivantes et du théorème de Nevanlinna qui dit que toute fonction $f \in \mathcal{N}$ s'écrit comme quotient de deux fonctions g et h de H^∞ avec h sans zéros (cf. [19] p. 16) :

$$\begin{array}{rcll} C_\varphi(f.g) & = & (C_\varphi f).(C_\varphi g) & \text{pour tous} \quad f,g \in H(D) \text{ et,} \\ C_\varphi(\frac{1}{f}) & = & \frac{1}{C_\varphi f} & \text{pour tout} \quad f \in H(D) \quad \text{sans zéro dans } D. \end{array}$$

Par ailleurs, le problème de sa compacité sur $\mathcal{N}$ n'a été complètement résolu que récemment dans [4]. Il y est prouvé que C_φ est compact sur $\mathcal{N}$ si et seulement si il est compact sur H^2. Notons que le problème analogue sur les espaces H^p a déjà été réglé récemment (voir [45]).

Les opérateurs C_φ bornés pour l'ordre de H^p dans H^q ont été caractérisés en termes des moments analyiques $\|\varphi^n\|_1$ (voir [27]). Ici, nous allons généraliser ce résultat en jouant sur les espaces source et but. Notre résultat principal consiste à caractériser les opérateurs C_φ bornés pour l'ordre de $\mathcal{N}$ dans H^q. Nous verrons qu'ils sont parmi ceux qui envoient la classe F^+ (vue au premier chapitre) dans l'espace H^q; c'est à dire ceux dont le symbole φ vérifie :

$$\|\varphi^n\|_1 = O(e^{-\lambda\sqrt{n}}) \quad \text{pour un} \quad \lambda > 0 \quad \text{(voir [42]).}$$

Nous verrons également, à la fin de ce chapitre, qu'ils sont exactement ceux qui envoient $\mathcal{N}$ dans H^q continûment et compactement.

Notons que certains auteurs ont étudié les opérateurs C_φ bornés pour l'ordre entre d'autres espaces et les ont caractérisés par le biais d'opérateurs intégraux et absolument p-sommants (voir [27] et [15]).

4.1 Définitions

1. Soit X un groupe topologique abélien additif muni d'une distance d invariante par translation. On note $\overline{B_X}(0,s)$ la boule fermée de X de centre 0 et de rayon s. On dit qu'une partie E de X est bornée s'il existe $s > 0$ tel que $E \subset \overline{B_X}(0,s)$.

2. Soit h une fonction positive croissante sur $[0,+\infty[$. On désigne par L_h l'ensemble des fonctions f mesurables sur ∂D telles que

$$\int_0^{2\pi} h(|f(e^{i\theta})|)\, d\theta < \infty.$$

On dit qu'une application $T : X \to L_h$ est *bornée pour l'ordre* si l'image par T de toute partie bornée de X est latticiellement bornée. Ce qui signifie que la fonction maximale

$$M(T,s) := \sup_{x \in \overline{B}_X(0,s)} |Tx|$$

appartient à L_h, pour tout $s > 0$.

3. Dans le cas des opérateurs de composition, on prend $X = H^p$ $(0 < p < \infty)$ ou $X = \mathcal{N}$ et on a alors $C_\varphi(X) \subset X$, pour tout $\varphi \in H(D,D)$. D'autre part, on prend $h(x) = \log^+ x := \max(\log x, 0)$ ou $h(x) = x^q$ $(0 < q < \infty)$. On se limitera toujours à ces deux exemples dans lesquels L_h est un espace vectoriel et, à la place de L_h, on écrira $\log^+ L$ si $h(x) = \log^+ x$ et L^q si $h(x) = x^q$.
Etant donné une fonction $\varphi \in H(D,D)$ telle que $|\varphi^*(e^{i\theta})| < 1$ presque partout, on dira que C_φ est (X, L_h)-*borné pour l'ordre* et on écrira (X, L_h)-*ob*, si l'opérateur $\tilde{C}_\varphi := j \circ C_\varphi : X \to L_h$ est borné pour l'ordre. (Rappelons que $j(f) = f^*$).
D'après cette définition, nous constatons que les opérateurs C_φ (X, L_h)-*ob* sont étroitement liés aux opérateurs d'évaluation sur X aux points de l'ensemble $D \cap \varphi^*(\partial D)$.
Dans tout le reste, la classe $\mathcal{N}$ sera munie de la distance d introduite dans le second chapitre et l'espace $X = H^p$ de la distance $d(f,g) = \|f-g\|_p$ si $1 \leq p < \infty$ et de la distance $d(f,g) = \|f-g\|_p^p$ si $0 < p < 1$. Notons que, dans les deux derniers cas, l'homogénéité de la distance entraîne que

$$M(\tilde{C}_\varphi, s) = \begin{cases} sM(\tilde{C}_\varphi, 1) & \text{si} \quad 1 \leq p < \infty \\ s^{\frac{1}{p}} M(\tilde{C}_\varphi, 1) & \text{si} \quad 0 < p < 1 \end{cases}$$

et, cela implique que C_φ est (H^p, L_h)-*ob* si et seulement si

$$M_{\tilde{C}_\varphi} := M(\tilde{C}_\varphi, 1) \in L_h.$$

Remarque :
La classe des opérateurs de composition (X, L_h)-*ob* est stable par automorphismes de D. En effet, il est clair que si $S : X \to X$ est borné; c'est à dire, si S envoie toute partie bornée sur une partie bornée, et si $T : X \to L_h$ est borné pour l'ordre, alors $TS : X \to L_h$ est borné pour l'ordre. Puisque, pour tout $\psi \in Aut(D)$, nous avons

$$\tilde{C}_{\psi o \varphi} = \tilde{C}_{\varphi} C_{\psi},$$

on en déduit que si C_φ est (X, L_h)-*ob*, il en est de même de $C_{\psi o \varphi}$. Inversement, s'il existe $\psi_0 \in Aut(D)$ tel que $C_{\psi_0 o \varphi}$ soit (X, L_h)-*ob*, alors, d'après ce qui précède, il en est de même de $C_{\psi o \varphi}$ pour tout $\psi \in Aut(D)$, en particulier, pour $\psi : z \mapsto z$. Donc, C_φ est (X, L_h)-*ob*. D'autre part, en remarquant que

$$M(\tilde{C}_{\varphi o \psi}, s) = M(\tilde{C}_{\varphi}, s) \circ \psi,$$

presque partout sur ∂D, pour tous $\psi \in Aut(D)$ et $s > 0$, nous déduisons que C_φ est (X, L_h)-*ob* si et seulement si il en est ainsi pour $C_{\varphi o \psi}$.

4.2 Opérateurs de composition (H^p, L_h)-*ob*

Le théorème suivant généralise le résultat de H. Hunziker et H. Jarchow établi dans [27].

Théorème 4.2.1
Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) C_φ *est* (H^p, L_h)-*ob.*

$$(2) \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-1} \|\varphi^n\|_1 < \infty & si \quad h(x) = x^q. \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\varphi^n\|_1}{n} < \infty & si \quad h(x) = \log^+ x. \end{cases}$$

Preuve :
Puisque $|\varphi^*(e^{i\theta})| < 1$ presque partout, $(f \circ \varphi)^* = f \circ \varphi^*$ et, par le Théorème 1.2.15, on obtient

$$\begin{aligned} M_{\tilde{C}_\varphi}(e^{i\theta}) &= \sup_{f \in \overline{B}_{H^p}(0,1)} |(f \circ \varphi)^*(e^{i\theta})| \\ &= \sup_{f \in \overline{B}_{H^p}(0,1)} |f(\varphi^*(e^{i\theta}))| \\ &= (1 - |\varphi^*(e^{i\theta})|^2)^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Pour $h(x) = x^q$, le résultat est prouvé dans [27]. Pour $h(x) = \log^+ x$, nous avons

$$h(M_{\tilde{C}_\varphi}(e^{i\theta})) = -\frac{1}{p}\log(1 - |\varphi^*(e^{i\theta})|^2).$$

Cette identité, compte tenu de l'encadrement $1 \leq 1 + |\varphi^*| \leq 2$, implique que $M_{\tilde{C}_\varphi} \in L_h$ si et seulement si $\log(1 - |\varphi^*|) \in L^1$. Utilisant le développement en série entière de la fonction $x \mapsto -\log(1-x)$, il vient

$$-\log(1 - |\varphi^*(e^{i\theta})|) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi^*(e^{i\theta})|^n}{n} \quad \text{pour presque tout } e^{i\theta}.$$

Enfin, par le théorème de Beppo-Levi et l'égalité $\|\varphi^*\|_1 = \|\varphi\|_1$, on conclut que (1) et (2) sont équivalentes. ■

D'après la définition et l'inclusion $L^q \subset \log^+ L$, les opérateurs de composition (H^p, L^q)-*ob* sont nécessairement $(H^p, \log^+ L)$-*ob*. Cependant, la réciproque n'est pas vraie, comme le confirme la proposition suivante.

Proposition 4.2.2

Il existe une famille à un paramétre d'opérateurs de composition qui sont $(H^p, \log^+ L)$-ob pour tout $0 < p < \infty$ et qui ne sont (H^p, L^q)-ob pour aucun couple (p, q).

Preuve :

Pour montrer l'existence d'une telle famille, il suffit d'appliquer le Corollaire 1.2.27 à une famille de suites de moments $(F_\beta(n))_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_\beta(n)}{n} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_\beta(n)}{n^\alpha} = \infty \quad \text{pour tout } 0 < \alpha < 1. \qquad (\diamond)$$

Ensuite, on achève la preuve en faisant appel au Théorème 4.2.1.

Par exemple, toute suite équivalente à $(\log n)^{-\beta}$ avec $\beta > 1$ vérifie $(\diamond)$. En particulier, pour tout $\beta > 1$ la suite $(F_\beta(n))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$F_\beta(n) = (1 + \log(n+1))^{-\beta}$$

vérifie $(\diamond)$ et c'est une suite de moments (appliquer le Théorème 1.2.25 et la formule de Faà di Bruno rappelée dans [29] et employée dans la preuve de la Proposition 4.3.6). Or, puisque $F_\beta(n) \to 0$ et $\frac{1}{2^n} = o(F_\beta(n))$, le Corollaire 1.2.27 assure l'existence de $\varphi_\beta \in H(D, D)$ telle que

$$\|\varphi_\beta^n\|_1 \sim F_\beta(n).$$

D'où, par le Théorème 4.2.1 et $(\diamond)$, nous concluons que les opérateurs C_{φ_β} $(\beta > 1)$ sont comme dans la Proposition 4.2.2. ■

Remarque :

Dans la preuve de la proposition précédente, on a nécessairement $\|\varphi_\beta\|_\infty = 1$. En effet, si $\|\varphi_\beta\|_\infty < 1$, on devrait avoir

$$(\log n)^{-\beta} \sim \|\varphi_\beta^n\|_1 \leq \|\varphi_\beta\|_\infty^n.$$

Ce qui serait absurde. A noter qu'un opérateur C_φ tel que $\|\varphi\|_\infty < 1$ est nécessairement (H^p, L^q)-*ob* pour tous $0 < p, q < \infty$.

Voici maintenant une construction explicite (ne faisant pas appel à [29]) de plusieurs opérateurs de composition qui sont (H^p, L^q)-*ob*, pour tous $0 < p, q < \infty$ et induits par des fonctions $\varphi \in H(D, D)$ telles que $\|\varphi\|_\infty = 1$.
Soit $\alpha > 0$. On considère une partition mesurable $(A_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ du cercle unité telle que

$$m(A_j) = e^\alpha (e^{-\alpha\sqrt{j}} - e^{-\alpha\sqrt{j+1}}).$$

Définissons la fonction g_α sur ∂D par

$$g_\alpha(e^{it}) := \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{j}}} \chi_j(e^{it}),$$

où χ_j désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A_j.
Nous avons la proposition suivante.

Proposition 4.2.3

La fonction extérieure φ_α définie sur D par

$$\varphi_\alpha(z) := \exp\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log g_\alpha(e^{it})\, dt\Big)$$

induit un opérateur de composition (H^p, L^q)-ob pour tous $0 < p, q < \infty$.

Preuve :

Puisqu'on a

$$-\log g_\alpha(e^{it}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\sqrt{j}} \chi_j(e^{it}),$$

par intégration, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -\log g_\alpha(e^{it})\, dt = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\sqrt{j}} m(A_j) \leq \alpha \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j) = \alpha.$$

Donc $\log g_\alpha$ est intégrable sur ∂D et on peut prendre la fonction extérieure associée φ_α (définie comme dans l'énoncé). Nous avons

$$|\varphi_\alpha(z)| = \exp(u(z)),$$

où $u(z)$ est l'intégrale de Poisson de la fonction négative $\log g_\alpha$ $(0 < g_\alpha < 1)$. Il s'ensuit alors que $\varphi_\alpha \in H(D, D)$. Rappelons (cf. [19] p. 5) que

$$u^*(e^{i\theta}) = \log g_\alpha(e^{i\theta}) \quad \text{pour presque tout } e^{i\theta}.$$

Ce qui donne

$$|\varphi_\alpha^*(e^{i\theta})| = g_\alpha(e^{i\theta}) < 1 \quad \text{pour presque tout } e^{i\theta}.$$

Notons qu'ici, on a $\|\varphi_\alpha\|_\infty = 1$. Pour le reste de la preuve, observons que

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\alpha^n\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_\alpha^n(e^{it})\, dt \\
&= \sum_{j=1}^{n} e^{-\frac{\alpha n}{\sqrt{j}}} m(A_j) + \sum_{j=n+1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha n}{\sqrt{j}}} m(A_j) \\
&\leq e^{-\alpha\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} m(A_j) + \sum_{j=n+1}^{\infty} m(A_j) \\
&\leq e^{-\alpha\sqrt{n}} + e^{\alpha} e^{-\alpha\sqrt{n}} = (1+e^{\alpha}) e^{-\alpha\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Cela entraîne que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-1} \|\varphi^n\|_1 < \infty \quad \text{pour tout } 0 < q < \infty.$$

Enfin, on achève la preuve en utilisant le Théorème 4.2.1. ■

Remarque :

Dans la preuve de la proposition précédente, la majoration des moments analytiques a été suffisante pour établir le résultat. Toutefois, on peut trouver un minorant de la même forme. En effet, on a

$$\|\varphi_\alpha^n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_\alpha^n(e^{it})\, dt$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{j=n}^{2n-1} e^{-\frac{\alpha n}{\sqrt{j}}} m(A_j)\\
&\geq e^{-\alpha\sqrt{n}} \sum_{j=n}^{2n-1} m(A_j)\\
&= e^{-\alpha\sqrt{n}} e^{\alpha}(e^{-\alpha\sqrt{n}} - e^{-\alpha\sqrt{2n}}) \sim e^{\alpha} e^{-2\alpha\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

4.3 Opérateurs de composition $(\mathcal{N}, L_h)$-*ob*

Lemme 4.3.1

On a les assertions suivantes.

(1) *Pour tout $s > 0$, il existe $b_s, c_s > 0$ tels que*

$$b_s \exp(\frac{c_s}{1-|z|}) \leq \sup_{f \in \overline{B}_{\mathcal{N}}(0,s)} |f(z)| \leq \exp(\frac{2s}{1-|z|}) \quad \textit{pour tout } z \in D.$$

(2) *Pour tout $p > 0$ et $z \in D$, on a*

$$\sup_{f \in \overline{B}_{\mathcal{N}}(0,p+1)} |f(z)| \geq \exp(\frac{p}{1-|z|}).$$

Preuve :

(1) Soit $f \in \overline{B}_{\mathcal{N}(0,s)}$. Par le Lemme 1.2.20, on a

$$|f(z)| \leq \exp\Big(\frac{2s}{1-|z|}\Big) - 1 \leq \exp\Big(\frac{2s}{1-|z|}\Big).$$

Ce qui donne l'inégalité droite. Pour établir l'inégalité gauche, posons pour $0 < c \leq 1$:

$$f_c(\omega) := \exp\Big(\frac{c(1+\omega)}{1-\omega}\Big) - 1 =: \exp(g_c(\omega)) - 1$$

et montrons d'abord que

$$||f_c||_{\mathcal{N}} \leq 6\sqrt{c}. \qquad (*)$$

En effet, pour tout $\frac{1}{4} \leq r < 1$ et tout $0 < \epsilon \leq \pi$, on a

$$\begin{aligned}
I(r) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log(1 + |f_c(re^{i\theta})|)\, d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta|>\varepsilon} \log(1 + |f_c(re^{i\theta})|)\, d\theta\\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta|\leq\varepsilon} \log(1 + |f_c(re^{i\theta})|)\, d\theta\\
&=: I_1(r) + I_2(r)
\end{aligned}$$

Sur l'arc $\{e^{i\theta} : |\theta| > \varepsilon\}$, on utilise la majoration (noter que $Re(g_c) \geq 0$)

$$|f_c(re^{i\theta})| \leq |g_c(re^{i\theta})| \exp\left(Reg_c(re^{i\theta})\right) \leq \frac{2c}{|1-re^{i\theta}|}\exp(cP_r(e^{i\theta})) \leq \frac{2c\pi}{|\theta|}\exp(cP_r(e^{i\theta})).$$

La dernière inégalité découle de $|1-re^{i\theta}|^2 \geq 4r\sin^2\frac{\theta}{2} \geq \sin^2\frac{\theta}{2} \geq \frac{\theta^2}{\pi^2}$. D'où

$$1 + |f_c(re^{i\theta})| \leq (1+\frac{2c\pi}{\varepsilon})\exp(cP_r(e^{i\theta})) \leq \exp(\frac{2c\pi}{\varepsilon})\exp(cP_r(e^{i\theta})),$$

puis

$$I_1(r) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{2c\pi}{\varepsilon} + cP_r(e^{i\theta}))\,d\theta = \frac{2c\pi}{\varepsilon} + c.$$

Sur l'arc complémentaire $\{e^{i\theta} : |\theta| \leq \varepsilon\}$, on utilise la majoration

$$\log\left(1 + |\exp(g_c(\omega)) - 1|\right) \leq \log\left(2 + \exp(Reg_c(\omega))\right) \leq 2 + Reg_c(\omega)$$

pour montrer que

$$I_2(r) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta|\leq\varepsilon}(2 + cP_r(e^{i\theta}))\,d\theta \leq \frac{2\varepsilon}{\pi} + c.$$

D'où, $I(r) \leq 2c + \frac{2c\pi}{\varepsilon} + \frac{2\varepsilon}{\pi}$, ce qui donne $(*)$ en choisissant $\varepsilon = \pi\sqrt{c}$.
Donc, si on prend $c = c_s := min(\frac{s^2}{36}, 1)$, on voit que $f_c \in \overline{B}_{\mathcal{N}}(0,s)$.
Maintenant, pour tout $z = |z|e^{i\alpha} \in D$, la fonction h_c définie par $h_c(\omega) := f_c(e^{-i\alpha}\omega)$ est aussi dans $\overline{B}_{\mathcal{N}}(0,s)$, puisque $\|h_c\|_{\mathcal{N}} = \|f_c\|_{\mathcal{N}}$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}|h_c(z)| &= \exp\left(\frac{c(1+|z|)}{1-|z|}\right) - 1\\ &\geq \exp(\frac{c}{1-|z|}) - 1\\ &\geq (1-e^{-c})\exp(\frac{c}{1-|z|}).\end{aligned}$$

Il s'ensuit que,

$$\sup_{f\in\overline{B}_{\mathcal{N}}(0,s)} |f(z)| \geq h_c(z)| \geq b\exp(\frac{c}{1-|z|}),$$

où $b = b_s := 1 - e^{-c}$.

(2) Pour tout $p > 0$, considérons la fonction k_p définie sur D par

$$k_p(\omega) := \exp(\frac{p(1+\omega)}{1-\omega}).$$

Comme

$$\log(1+|k_p(re^{i\theta})|) \leq 1+\log^+(|k_p(re^{i\theta})|) \leq 1+pP_r(e^{i\theta}),$$

l'intégration suivie du passage à la limite quand r tend vers 1 entraîne que $\|k_p\|_{\mathcal{N}} \leq 1+p$. De même que dans la preuve de (1), pour tout $z=|z|e^{i\alpha} \in D$, la fonction $l_p : \omega \mapsto k_p(e^{-i\alpha}\omega)$ appartient à $\overline{B}_{\mathcal{N}}(0,p+1)$. De plus, elle vérifie

$$|l_p(z)| = \exp(\frac{p(1+|z|)}{1-|z|}) \geq \exp(\frac{p}{1-|z|}).$$

Par conséquent, pour tout $z \in D$, on a

$$\sup_{f\in\overline{B}_{\mathcal{N}}(0,p+1)} |f(z)| \geq |l_p(z)| \geq \exp(\frac{p}{1-|z|}).$$

Ceci achève la preuve. ∎

Remarque :

D'après (2), les constantes $b_s = 1$ et $c_s = s-1$ conviennent pour tout $s > 1$. En outre, pour les s suffisamment petits, on peut montrer qu'il existe des constantes b_s et c_s vérifiant :

$$b_s \sim c_s \sim \frac{s}{\log\frac{1}{s}}.$$

Théorème 4.3.2

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) *Il existe $s>0$ tel que $M(\tilde{C}_\varphi, s) \in \log^+ L$.*

(2) *C_φ est $(\mathcal{N}, \log^+ L)$-ob.*

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi^n\|_1 < \infty$.

(4) *C_φ est (H^p, L^p)-ob pour un et donc tout $0<p<\infty$.*

(5) *$C_\varphi : H^2 \to H^2$ est de Hilbert-Schmidt.*

Preuve :

Nous rappelons que (3), (4) et (5) sont équivalentes (voir [27] et [47]).

Par définition, (1) n'est rien d'autre que l'intégrabilité de toutes les fonctions $\log^+(M(\tilde{C}_\varphi, s))$.

Pour presque tout $e^{i\theta}$, on a

$$M(\tilde{C}_\varphi, s)(e^{i\theta}) := \sup_{f\in\overline{B}_{\mathcal{N}}(0,s)} |f(\varphi^*(e^{i\theta}))|.$$

Par le Lemme 4.3.1, il existe $b_s, c_s > 0$ tels que

$$b_s \exp(\frac{c_s}{1-|\varphi^*(e^{i\theta})|}) \leq M(\tilde{C}_\varphi, s)(e^{i\theta}) \leq \exp(\frac{2s}{1-|\varphi^*(e^{i\theta})|})$$

presque partout sur ∂D.
D'autre part, comme la fonction $\log^+$ est croissante et

$$\begin{aligned} \log^+(b_s \exp(\frac{c_s}{1-|\varphi^*(e^{i\theta})|})) &\geq \log(1+b_s\exp(\frac{c_s}{1-|\varphi^*(e^{i\theta})|})) - 1 \\ &\geq \frac{c_s}{1-|\varphi^*(e^{i\theta})|} + \log b_s - 1, \end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\frac{c_s}{1-|\varphi^*(e^{i\theta})|} + \log b_s - 1 \leq \log^+ M(\tilde{C}_\varphi, s)(e^{i\theta}) \leq \frac{2s}{1-|\varphi^*(e^{i\theta})|}$$

presque partout sur ∂D. En développant $\frac{1}{1-x}$ aux points $x = |\varphi^*(e^{i\theta})| < 1$, puis, en appliquant le théorème de Beppo-Levi, on en déduit que, pour chaque $s > 0$ fixé,

$$M(\tilde{C}_\varphi, s) \in \log^+ L \quad \text{si et seulement si} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi^{*^n}\|_1 < \infty.$$

Le Théorème 4.3.2 s'ensuit alors en tenant compte de l'égalité $\|\varphi^n\|_1 = \|\varphi^{*^n}\|_1$. ■

Le lemme suivant va jouer un rôle déterminant dans la caractérisation des opérateurs de composition $(\mathcal{N}, L^q)$-*ob*. Une partie de ce lemme (la majoration sans le facteur $n^{-\frac{3}{4}}$) se trouve dans [41] p. 106.

Lemme 4.3.3
Pour tout $p > 0$, il existe $c_1(p), c_2(p) > 0$ tels que

$$\exp(\frac{p}{1-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(p) z^n \quad \textit{pour tout } z \in D,$$

avec

$$c_1(p) n^{-\frac{3}{4}} e^{2\sqrt{np}} \leq a_n(p) \leq c_2(p) n^{-\frac{3}{4}} e^{2\sqrt{np}} \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve :
Pour tout $z \in D$, nous avons

$$\exp(\frac{p}{1-z}) \;=\; 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p^k \frac{(1-z)^{-k}}{k!}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}p^k\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!k!}z^n\\
&= 1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}p^{k+1}\frac{(n+k)!}{k!(k+1)!}z^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(p)z^n,
\end{aligned}
$$

avec, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$
\begin{aligned}
a_n(p) &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}p^{k+1}\frac{(n+k)!}{k!(k+1)!}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}p^{k+1}\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k!(k+1)!}\\
&\geq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^{k+1}n^k}{k!(k+1)!}=(\frac{p}{n})^{\frac{1}{2}}I_1(2\sqrt{np}).
\end{aligned}
$$

Ici, I_1 est la fonction de Bessel J_1 modifiée, définie par

$$
I_1(z):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{z}{2})^{1+2k}}{k!(k+1)!}.
$$

Or, il est connu (cf. [32], p 123) que, pour $z \in \mathbb{R}^+$:

$$
I_1(z)\sim e^z(2\pi z)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{quand } |z|\to\infty.
$$

D'où une minoration de la forme

$$
a_n(p)\geq c_1(p)n^{-\frac{3}{4}}e^{2\sqrt{np}}.
$$

Par ailleurs, si on pose

$$
u_k := p^{k+1}\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k!(k+1)!} \quad \text{pour tout } k\in\mathbb{N},
$$

on peut trouver $A_p > 0$ tel que

$$
\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{p(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}\leq\frac{p(n+k+1)}{k^2}\leq\frac{1}{2} \quad \text{pour tout } k\geq A_p\sqrt{n}.
$$

On remarque alors que le reste d'ordre $A_p\sqrt{n}$ de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}}u_k$ vérifie

$$
\sum_{k\geq A_p\sqrt{n}}u_k = o(\sum_{k<A_p\sqrt{n}}u_k) \quad \text{quand } n\to\infty.
$$

D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$u_k = \frac{p^{k+1}n^k}{k!(k+1)!}(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{k}{n}) \leq \frac{p^{k+1}n^k}{k!(k+1)!}e^{\frac{k^2}{n}}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
a_n(p) &= \sum_{k<A_p\sqrt{n}} u_k + \sum_{k\geq A_p\sqrt{n}} u_k \\
&\leq 2 \sum_{k<A_p\sqrt{n}} u_k \qquad (\text{ pour } n \text{ assez grand}) \\
&\leq 2 \sum_{k<A_p\sqrt{n}} \frac{p^{k+1}n^k}{k!(k+1)!}e^{\frac{k^2}{n}} \\
&\leq c \sum_{k<A_p\sqrt{n}} \frac{p^{k+1}n^k}{k!(k+1)!} \quad (\text{pour une constante } c>0) \\
&\leq c\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{k+1}n^k}{k!(k+1)!} = c(\frac{p}{n})^{\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{np}).
\end{aligned}$$

La dernière inégalité et le comportement de la fonction I_1 quand $|z| \to \infty$ entraînent une majoration de la forme

$$a_n(p) \leq c_2(p)n^{-\frac{3}{4}}e^{2\sqrt{np}}.$$

Ce qui achève la preuve. ■

Remarque :

On peut montrer que les meilleures constantes $c_1(p)$ et $c_2(p)$ dans la preuve du lemme précédent vérifient :

$$\begin{cases} c_1(p) \geq \delta_1 & \text{if} \quad p \geq p_1 > 0 \\ c_2(p) \leq \delta_2 & \text{if} \quad p \leq p_2 < \infty \end{cases}$$

Théorème 4.3.4

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) $\|\varphi^n\|_1 = O(e^{-t\sqrt{n}})$ *pour tout* $t > 0$.

(2) C_φ *est* $(\mathcal{N}, L^q)$*-ob pour tout* $0 < q < \infty$.

(3) C_φ *est* $(\mathcal{N}, L^q)$*-ob pour un* $0 < q < \infty$.

Preuve :

$(1) \Longrightarrow (2)$ Remarquons d'abord que (1) est équivalent à

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{t\sqrt{n}} \|\varphi^n\|_1 < \infty \quad \text{pour tout} \quad t > 0. \tag{1'}$$

Soient q et s deux réels fixés arbitrairement dans $]0, +\infty[$. D'après (1) du Lemme 4.3.1, nous avons

$$M(\tilde{C}_\varphi, s)(e^{i\theta}) = \sup_{f \in \overline{B}_{\mathcal{N}}(0,s)} |f(\varphi^*(e^{i\theta}))| \leq \exp(\frac{2s}{1 - |\varphi^*(e^{i\theta})|}). \tag{i}$$

D'autre part, le Lemme 4.3.3 donne une constante positive $c_2(q, s)$ telle que

$$\exp(\frac{2qs}{1 - |\varphi^*(e^{i\theta})|}) \leq c_2(q, s) \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\sqrt{2nqs}} |\varphi^*(e^{i\theta})|^n. \tag{ii}$$

(La série, dans (ii), converge presque partout car $|\varphi^*(e^{i\theta})| < 1$ presque partout). Or, d'après $(1')$, la série

$$\sum_{n \geq 1} e^{2\sqrt{2nqs}} \|\varphi^n\|_1$$

converge. Donc, par le théorème de Beppo-Levi et l'egalité $\|\varphi^n\|_1 = \|\varphi^{*^n}\|_1$, la fonction

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\sqrt{2nqs}} |\varphi^*(e^{i\theta})|^n$$

est intégrable sur ∂D. Cela implique, compte tenu de (i) et (ii), que la fonction maximale $M(\tilde{C}_\varphi, s)$ est q-intégrable sur ∂D. Par conséquent, comme s et q sont arbitraires, l'opérateur C_φ est $(\mathcal{N}, L^q)$-*ob* pour tout $0 < q < \infty$.

$(2) \Longrightarrow (3)$ est immédiat.

$(3) \Longrightarrow (1)$ Soit $t > 0$ fixé arbitrairement. L'hypothèse signifie que

$$M(\tilde{C}_\varphi, s) \in L^q(\partial D, m) \quad \text{pour tout} \quad s > 0.$$

D'après (2) du Lemme 4.3.1 appliqué à $p = \frac{t^2}{4q}$, on a

$$M(\tilde{C}_\varphi, p+1)(e^{i\theta}) = \sup_{f \in \overline{B}_{\mathcal{N}}(0,p+1)} |f(\varphi^*(e^{i\theta})| \geq \exp(\frac{p}{1 - |\varphi^*(e^{i\theta})|}).$$

Maintenant, la q-intégrabilité de $M(\tilde{C}_\varphi, p+1)$ sur ∂D entraîne l'intégrabilité de la fonction : $e^{i\theta} \mapsto \exp(\frac{\frac{t^2}{4}}{1-|\varphi^*(e^{i\theta})|})$. D'où, par le Lemme 4.3.3, la fonction $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{4}} e^{t\sqrt{n}} |\varphi^*|^n$ est intégrable sur ∂D et on obtient alors la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{4}} e^{t\sqrt{n}} \|\varphi^n\|_1$, en faisant appel au Théorème de Beppo-Levi et à l'égalité $\|\varphi^n\|_1 = \|\varphi^{*^n}\|_1$. Finalement, puisque t est arbitraire, $(1')$ et (1) s'ensuivent. ■

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate des Théorème 4.3.4 et 1.2.8.

Corollaire 4.3.5
Si C_φ est $(\mathcal{N}, L^q)$-ob pour un $0 < q < \infty$, alors il est (H^p, L^q)-ob pour tous $0 < p, q < \infty$.

La réciproque du Corollaire 4.3.5 n'est pas toujours vraie. Plus précisément, on a la proposition suivante.

Proposition 4.3.6

(1) *Il existe une famille à un paramétre d'opérateurs C_φ, avec $\|\varphi\|_\infty = 1$, qui sont $(\mathcal{N}, L^q)$-ob pour tout $0 < q < \infty$.*

(2) *Il existe une famille à un paramétre d'opérateurs de composition qui sont (H^p, L^q)-ob pour tous $0 < p, q < \infty$ et qui ne sont $(\mathcal{N}, L^q)$-ob pour aucun $0 < q < \infty$.*

Preuve :
Nous allons établir (1) et (2) simultanément. Pour prouver l'existence de ces ensembles, il suffit d'appliquer le Corollaire 1.2.27 à une famille paramétrée de suites de moments convenablement choisies. Le premier ensemble existe dès qu'on exhibe des suites de moments $(F_\gamma(n))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$F_\gamma(n) = O(e^{-\alpha\sqrt{n}}) \quad \text{pour tout } \alpha > 0. \qquad (\bullet)$$

L'existence de l'autre ensemble sera assurée par d'autres suites $(F_\gamma(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$c_\alpha e^{-\alpha\sqrt{n}} \leq F_\gamma(n) \leq c'_\alpha n^{-\alpha} \quad \text{pour tout } \alpha > 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

Etant donné un nombre $0 < \gamma < 1$, on considère la fonction $G = G_\gamma$ définie sur $[0, +\infty[$ par

$$G(x) = 1 - (x+1)^\gamma.$$

La fonction $F = F_\gamma = \exp \circ G$ est alors de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$. La formule de Faà di Bruno donne

$$F^{(n)} = \sum \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!}(\exp^{(\sum k_i)} \circ G).(\frac{G'}{1!})^{k_1}.(\frac{G''}{2!})^{k_2}.\cdots.(\frac{G^{(n)}}{n!})^{k_n}$$

Ici, la sommation s'effectue sur les entiers $k_1, \cdots, k_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} ik_i = n.$$

Comme $signG^{(k)} = (-1)^k$ pour tout $k \in N^*$, on obtient

$$signF^{(n)} = (-1)^{k_1}.(-1)^{2k_2}.\cdots.(-1)^{nk_n} = (-1)^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Or, puisque $F(0) = 1$ et $F > 0$, par la Proposition 1.2.25, on déduit que $(F(n))_{n\in N}$ est une suite de moments. Mais cette suite vérifie

$$\lim_{n\to\infty} F(n) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2^n} = o(F(n)),$$

Donc, d'après le Corollaire 1.2.27, il existe $\varphi = \varphi_\gamma \in H(D, D)$ telle que $|\varphi^*(e^{i\theta})| < 1$ presque partout et

$$\|\varphi^n\|_1 \sim F(n) \sim e^{1-n^\gamma}. \qquad (\bullet\bullet)$$

Les suites $(F_\gamma(n))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ satisfont $(\bullet)$. Il en est donc de même des suites de moments analytiques correspondantes. Par conséquent, d'après le Théorème 4.3.4, les opérateurs C_{φ_γ} ($\frac{1}{2} < \gamma < 1$) sont $(\mathcal{N}, L^q)$-*ob* pour tout $0 < q < \infty$. Ceci termine la preuve de (1).

D'autre part, les suites $(F_\gamma(n))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ vérifient

$$\begin{cases} e^{-\alpha\sqrt{n}} &= o(F_\gamma(n)) \\ F_\gamma(n) &= o(n^{-\alpha}) \end{cases}$$

pour tout $\alpha > 0$.

Alors, d'après $(\bullet\bullet)$, on en déduit que, pour tout $0 < \gamma < \frac{1}{2}$,

$$e^{-\alpha\sqrt{n}} \le \|\varphi_\gamma^n\|_1 \le n^{-\alpha} \quad \text{pour tout } \alpha > 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

Maintenant, par le Théorème 4.2.1, on peut voir que la seconde inégalité implique que chaque opérateur C_{φ_γ} $(0 < \gamma < \frac{1}{2})$ est (H^p, L^q)-*ob* pour tous $0 < p, q < \infty$. Alors que la première inégalité, selon le Théorème 4.3.4, montre que ces opérateurs ne sont $(\mathcal{N}, L^q)$-*ob* pour aucun $0 < q < \infty$. Ceci termine la preuve de (2). ∎

Remarque :
On peut prouver (1) de cette proposition d'une autre manière. En effet, comme dans la Proposition 4.2.3, on peut donner une construction explicite.
Soient $\alpha > 0$ et $\frac{1}{2} < \gamma < 1$. On considère une partition mesurable $(A_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ du cercle unité telle que

$$m(A_j) = e^{\alpha}(e^{-\alpha j^\gamma} - e^{-\alpha(j+1)^\gamma}).$$

Ici, on définit la fonction $g_{\alpha,\gamma}$ sur ∂D par

$$g_{\alpha,\gamma}(e^{it}) := \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\alpha j^{\gamma-1}} \chi_j(e^{it}),$$

où χ_j désigne la fonction caractéristique de A_j. Maintenant, en prenant les fonctions extérieures associées $\varphi_{\alpha,\gamma}$ comme dans la Proposition 4.2.3 et en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve de celle-ci, nous en déduisons par le Théorème 4.3.4, que les opérateurs $C_{\varphi_{\alpha,\gamma}}$ sont $(\mathcal{N}, L^q)$-*ob* pour tout $0 < q < \infty$.

Le théorème suivant dit que la notion d'opérateurs de composition $(\mathcal{N}, L^q)$-*ob* n'améliore pas leur compacité de $\mathcal{N}$ dans H^q.

Théorème 4.3.7
Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) $\|\varphi^n\|_1 = O(e^{-\lambda\sqrt{n}})$ *pour tout* $\lambda > 0$.

(2) $C_\varphi : \mathcal{N} \to H^q$ *est compact pour tout* $0 < q < \infty$.

(3) $C_\varphi : \mathcal{N} \to H^q$ *est compact pour un* $0 < q < \infty$.

(4) $C_\varphi : \mathcal{N} \to H^q$ *est borné sur tout borné pour un* $0 < q < \infty$.

Preuve :
(1) $\Longrightarrow$ (2) Comme dans [4], on dit que C_φ est compact de $\mathcal{N}$ dans H^q si, pour

tout $s > 0$, l'image de $\overline{B}_{\mathcal{N}}(0,s)$ par C_φ est relativement compacte dans H^q et, par un argument de famille normale, cela est équivalent à dire que

$$f_n \overset{u.c}{\to} 0 \quad \text{et} \quad \|f_n\|_{\mathcal{N}} \leq s \Rightarrow \|C_\varphi f_n\|_q \to 0. \tag{$*$}$$

L'hypothèse implique que $|\varphi^*(e^{i\theta})| < 1$ presque partout. Donc, si $g_n = f_n \circ \varphi$, alors $g_n^* = f_n \circ \varphi^*$ presque partout et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_n^*(e^{i\theta})|^q \, d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n(\varphi^*(e^{i\theta}))|^q \, d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(\frac{2sq}{1-|\varphi^*(e^{i\theta})|}) \, d\theta \\
&=: \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M(e^{i\theta}) \, d\theta.
\end{aligned}$$

$M \in L^1$ car, par le Lemme 4.3.3, le théorème de Beppo-Levi et l'hypothèse appliquée à $\lambda > 2\sqrt{2sq}$, on a

$$\|M\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(2sq)\|\varphi^n\|_1 \leq a_0(2sq) + \sum_{n=1}^{\infty} c_2(2sq)e^{2\sqrt{2nsq}}\|\varphi^n\|_1 < \infty.$$

Cela prouve que $g_n^* \in L^q$. Or, $\hat{g_n^*}(k) = 0$ pour tout $k \leq -1$. Donc $g_n \in H^q$ et on a $\|g_n\|_q = \|g_n^*\|_q$. De plus, pour tout $0 < r < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\|g_n\|_q^q &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\varphi^*|\leq r} |f_n(\varphi^*(e^{i\theta}))|^q \, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{|\varphi^*|>r} M(e^{i\theta}) \, d\theta \\
&\leq \sup_{|\omega\leq r} |f_n(\omega)|^q + \frac{1}{2\pi}\int_{|\varphi^*|>r} M(e^{i\theta}) \, d\theta.
\end{aligned}$$

Il résulte alors de l'hypothèse de $(*)$ que

$$\overline{\lim}\, \|g_n\|_q^q \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\varphi^*|>r} M(e^{i\theta}) \, d\theta =: \rho(r). \tag{$**$}$$

Mais $\rho(r) \to 0$ quand $r \to 1$, puisque $M \in L^1$ et $m(|\varphi^*| > r) \to 0$ quand $r \to 1$. Donc, par passage à la limite dans $(**)$ quand $r \to 1$, on trouve que $\overline{\lim}\|g_n\|_q^q \leq 0$. Ce qui prouve $(*)$ et donc l'assertion (2).

(2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) est immédiat.

(4) $\Longrightarrow$ (1) soient $\lambda > 0$ fixé arbitrairement et $s > 0$ à choisir ultérieurement. On pose

$$g_\alpha(z) := \exp\Big(\frac{s(1+e^{i\alpha}z)}{1-e^{i\alpha}z}\Big).$$

D'après la preuve de (2) du Lemme 4.3.1, on a $\|g_\alpha\|_{\mathcal{N}} \leq 1+s$. Donc, il existe $M_s > 0$ indépendant de α tel que $\|g_\alpha \circ \varphi\|_q \leq M_s$. Ce qui signifie que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\exp\Big(\frac{s(1+e^{i\alpha}\varphi^*(e^{i\theta}))}{1-e^{i\alpha}\varphi^*(e^{i\theta})}\Big)|^q\, d\theta \leq M_s^q$$

ou de façon équivalente, en utilisant l'égalité $\frac{1+z}{1-z} = -1 + \frac{2}{1-z}$ et le Lemme 4.3.3,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\exp\Big(\frac{sq}{2}\frac{(1+e^{i\alpha}\varphi^*(e^{i\theta}))}{1-e^{i\alpha}\varphi^*(e^{i\theta})}\Big)|^2\, d\theta &= e^{-\frac{sq}{2}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sum_{n=0}^{\infty} a_n(sq)e^{in\alpha}\varphi^{*n}(e^{i\theta})|^2\, d\theta \\ &\leq M_s^q.\end{aligned}$$

Maintenant, intégrons par rapport à $\frac{d\alpha}{2\pi}$, puis appliquons les théorèmes de Fubini et de Parseval pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(sq)|^2 \|\varphi^{2n}\|_1 \leq M_s^q e^{\frac{sq}{2}}.$$

En fixant q, il en résulte en particulier que

$$\|\varphi^{2n}\|_1 = O\Big(|a_n(sq)|^{-2}\Big) = O\Big(n^{\frac{3}{2}}e^{-4\sqrt{nsq}}\Big).$$

Or, puisque $\|\varphi^n\|_1 \leq \|\varphi^n\|_2 = \|\varphi^{2n}\|_1^{\frac{1}{2}}$, il s'ensuit que

$$\|\varphi^n\|_1 = O\Big(n^{\frac{3}{4}}e^{-2\sqrt{nsq}}\Big).$$

Enfin, (1) découle de cette dernière relation en ajustant s tel que $2\sqrt{sq} > \lambda$. ∎

Remarque :

Dans la preuve de (4) $\Longrightarrow$ (1) du théorème précédent, on peut se passer du théorème de Parseval. En effet, la fonction

$$F_\theta : \alpha \mapsto \exp\Big(\frac{sq(1+e^{i\alpha}\varphi^*(e^{i\theta}))}{1-e^{i\alpha}\varphi^*(e^{i\theta})}\Big) = e^{-sq}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(2sq)\varphi^{*^n}(e^{i\theta})e^{in\alpha}$$

est dans L^1 et donc $|\hat{F}_\theta(n)| \leq \|F_\theta\|_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela entraîne, compte tenu du Lemme 4.3.3, que

$$e^{-sq}|a_n(2sq)||\varphi^*(e^{i\theta})|^n \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F_\theta(\alpha)|\, d\alpha.$$

Intégrons par rapport à $\frac{d\theta}{2\pi}$ et appliquons le théorème de Fubini, en tenant compte de $\|g_\alpha \circ \varphi\|_q \leq M_s$, nous obtenons $|a_n(2sq)|\|\varphi^n\|_1 \leq e^{qs}M_s^q$. Ce qui donne, d'après le Lemme 4.3.3

$$\|\varphi^n\|_1 = O\Big(n^{\frac{3}{4}}e^{-2\sqrt{2nsq}}\Big).$$

le résultat découle alors en ajustant s tel que $2\sqrt{2sq} > \lambda$.

Nous terminons ce chapitre par le problème suivant.

Question :
Si l'on suppose que $C_\varphi : \mathcal{N} \to H^q$ est continu, on peut prouver que $\|\varphi^n\|_1 = O(e^{-\lambda\sqrt{n}})$ pour un $\lambda > 0$. En effet, la continuité de C_φ entraîne l'existence d'un $s > 0$ tel que $\|g_\alpha \circ \varphi\|_q \leq M_s$ où $M_s > 0$ ne dépendant pas de α. Par le même raisonnement que dans la preuve de (4) $\Longrightarrow$ (1) du théorème précédent, on obtient la relation souhaitée pour tout $0 < \lambda < 2\sqrt{sq}$.
On rappelle que cette relation caractérise aussi bien les C_φ envoyant la classe F^+ dans H^q que les $C_\varphi : F^+ \to H^q$ compacts (voir [42]). Notons que, parmi ces derniers, il en existe au moins un qui n'est compact de $\mathcal{N}$ dans H^q pour aucun $q > 0$ (prendre $\gamma = \frac{1}{2}$ dans la preuve de la proposition 4.3.6). Enfin, cette condition, serait-elle suffisante pour que C_φ envoie $\mathcal{N}$ dans H^q ? Si oui, $C_\varphi : \mathcal{N} \to H^q$ serait-il continu ou faudrait-il que cette condition soit vraie pour tout $\lambda > 0$?

Bibliographie

[1] **A. F. Beardon**, *Iteration of contractions and analytic maps*, J. London Math. Soc., 2, 41 (1990) 141-150.

[2] **P. S. Bourdon**, *Fredholm multiplication and composition operators on the Hardy space*, Int. Equ. Oper. Theory, 13 (1990) 607-610.

[3] **Bukhvalov and A. A. Danilevich**, *Boundary properties of analytic and harmonic functions with values in Banach spaces*, Math. Notes, 31, (1982) 203-214 (Engl. Transl., Math. Notes, 31 (1982) 104-110).

[4] **J. S. Choa and H. O. Kim**, *Compact composition operators on the Nevanlinna class*, Proc. Amer. Math. Soc.,125, 1 (1997) 145-151.

[5] **J. A. Cima, J. Thomson and W. Wogen**, *On some properties of composition operators*, Indiana University Math. J., 24, 3 (1974) 215-220.

[6] **J. B. Conway**, *A course in Functional Analysis*, Second Edition. Springer-Verlag New York (1990).

[7] **C. C. Cowen**, *Linear fractional composition operators on H^2*, Int. Equ. Oper. Theory, 11 (1988) 151-160.

[8] **C. C. Cowen**, *An application of Hadamard multiplication to operators on weighted Hardy spaces*, Linear Algebra and its Applications, 133 (1990) 21-32.

[9] **C. C. Cowen and B. D. MacCluer**, *Spectra of some composition operators*, J. Funct. Anlysis, 125 (1994) 223-251.

[10] **C. C. Cowen and B. D. MacCluer**, *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*, CRC Press, Boca Raton (1995).

[11] **M. Daher**, *Une remarque sur la propriété de Radon-Nikodym*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 313, série I (1991) 269-271.

[12] **C. S. Davis**, *Iterated limits in $\mathcal{N}^*(U^n)$*, Trans. Amer. Math. Soc. 178 (1973) 139-146.

[13] **A. Denjoy**, *Sur l'itération des fonctions analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A., 182 (1926) 255-257.

[14] **S. Dineen**, *Complex Analysis in locally convex spaces*, North-Holland mathematics studies, 57 (1981).

[15] **T. Domenig**, *Composition operators on weighted Bergman spaces and Hardy spaces*, Inaugural- Dissertaion, Universität Zürich (1997).

[16] **P. M. Dowling**, *Representable operators and the analytic Radon-Nikodym property in Banach spaces*, Proc. Royal Irish Acad. 85 A (1985) 143-150.

[17] **N. Dunford and J.T. Schwartz**, *Linear operators, Part I*, Wiley (Interscience), New York (1958).

[18] **P. L. Duren**, *On the Bloch-Nevanlinna conjecture*, Colloquium Mathematicum, 20, 2 (1969) 295-297.

[19] **P. L. Duren**, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press (1970).

[20] **G. A. Edgar**, *Analytic martingale convergence*, J. Funct. Anlysis, 69, 2 (1986) 268-280.

[21] **J. B. Garnett**, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press (1981).

[22] **L. Gross**, *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. 97 (1975) 1061-1081.

[23] **P. Halmos**, *A Hilbert Space Problem Book*, 2^{nd} edition, Springer-Verlag (1974).

[24] **H. Hill**, *Methods in Classical and Functional Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1972).

[25] **G. Hoever**, *Tow classroom proofs concerning composition operators*, Int. Equ. Oper. Theory, 27 (1997) 493-496.

[26] **L. Hörmander**, *An Introduction to Analysis in Several Complex Variables*, North-Holland (1973).

[27] **H. Hunziker and H. Jarchow**, *Composition operators which improve integrability*, Math.Nachr., 152 (1991) 83-99.

[28] **N. Jaoua**, *Order bounded composition operators on the Hardy spaces and the Nevanlinna class*, Studia Math., to appear.

[29] **H. Jarchow**, *Some functional analytic properties of composition operators*, Quaestiones Mathematicae, 18 (1995) 229-256.

[30] **J. P. Kahane**, *Some random series of functions*, Cambridge Studies in Advanced Math. 5, Cambridge University Press (1985).

[31] **H. Kamovitz**, *The spectra of composition operators on H^p*, J. Funct. Analysis,18 (1975) 132-150.

[32] **N. N. Lebedev**, *Special functions and their applications*, Academy of Sciences USSR (1972).

[33] **P. Liu, E. Saksman and H. O. Tylli**, *Small composition operators on analytic vector-valued function spaces*, Pac. J. Math., 84, 2 (1998) 295-309.

[34] **B. D. MacCluer**, *Fredholm compositon operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 125, 1 (1997) 163-166.

[35] **G. J. Murphy**, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Acad. Press, Inc. (1990).

[36] **E. Nelson**, *The free Markov field*, J. Funct. Analysis 12 (1973) 211-227.

[37] **E. Nordgren**, *Composition operators*, Canadian J. Math., 20 (1968) 442-449.

[38] **E. Nordgren**, *Hilbert space operators*, Lecture Notes in Math., 693 (1977) 37-63.

[39] **G. Pisier**, *Similarity problems and completly bounded maps*, Springer Lecture Notes, 1618 (1996).

[40] **G. Pisier**, *A polynomially bounded operatror on Hilbert space which is not similar to a contraction*, J. Amer. Math. Soc., 10, 2 (1997) 351-369.

[41] **I. I. Privaloff**, *Randeigenschaften Analytischer Funktionen*, Deutscher Verlag (1956).

[42] **J. W. Roberts and M. Stoll**, *Composition operators on F^+*, Studia Math., 57 (1976) 217-228.

[43] **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, 3^{rd} edition, McGraw-Hill (1987).

[44] **H. J. Schwartz**, *Composition operators on H^p*, Thesis, University of Toledo (1969).

[45] **J. H. Shapiro**, *Composition Operators and Classical Function Theory*, Springer-Verlag (1993).

[46] **J. H. Shapiro and A.L. Shields**, *Unusual topological proporties of the Nevanlinna class*, Amer. J. Math., 97, 4 (1975) 915-936.

[47] **J. H. Shapiro and P. D. Taylor**, *Compact, nuclear and Hilbert-Schmidt composition operators on H^2*, Indiana University Math. J., 125 (1973) 471-496.

[48] **J. A. Shoat and J. D. Tamarkin**, *The Problem of Moments*, A. M. S. (1943).

[49] **D. Ullrich**, *An extension of the Kahane-Khintchine inequality in a Banach space*, Bull. Amer. Math. Soc. 18 (1988) 52-54.

[50] **F. B. Weissler**, *Logarithmic Sobolev inequalities and hypercontracive estimates on the circle*, J. Funct. Analysis 37 (1980) 218-234.

[51] **J. Wolff**, *Sur l'itération des fonctions analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A. 182 (1926) 42-43.

[52] **N. Yanagihara**, *Multipliers and linear functionnals for the class $\mathcal{N}^+$*, Trans. Amer. Math. Soc., 180 (1973) 449-461.

[53] **N. Yanagihara**,*The containing Fréchet space for the class $\mathcal{N}^+$*, Duke Math J. (1973) 93-103.

[54] **N. Yanagihara**, *Mean growth and Taylor coefficients of some classes of functions*, Annales Polonici Mathematici, 30 (1974) 37-48.

[55] **K. Zhu**, *Operator Theory in Function Spaces*, Marcel Dekker, New York, (1990)