

Bu U 20.202 442

N° d'ordre : 2491

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

LABORATOIRE DE MECANIQUE DE LILLE

EUDIL- Groupe fiabilité des structures

THESE DE DOCTORAT

Discipline : Mécanique

Présentée et soutenue publiquement le 26 mars 1999 par

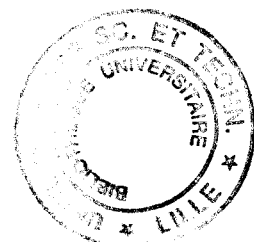
SANSEN Pascal

Ingénieur EUDIL

***Formulation énergétique d'un critère
de rupture locale d'un solide en thermoplasticité***

Jury

| | | |
|----------------------|--|--|
| Président : | M. De Saxcé | Professeur USTL, Lille |
| Rapporteurs : | M. Maugin M. Nguyen D. H. | Directeur de recherche CNRS, Professeur Paris VI Professeur, Laboratoire de techniques Aéronautiques et spatiales, Université de Liège |
| Directeur de thèse : | M. Weichert | Professeur, Institut für Allgemeine Mechanik, Aachen |
| Codirecteur : | M. Dufrénoy | Maitre de conférence USTL, EUDIL, Lille |
| Examineurs : | M. Degallaix M. Nait | Professeur Ecole Centrale, Lille Professeur USTL, EUDIL, Lille |



REMERCIEMENTS

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été menés au sein du département mécanique de l'Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille (EUDIL), dans l'équipe fiabilité des structures rattachée au Laboratoire de Mécanique de Lille, de l'Université des Sciences et Technologies de Lille.

Cette thèse a été effectuée sous la direction scientifique de Monsieur le Professeur WEICHERT. Je lui adresse mes plus vifs remerciements pour les conseils et la confiance qu'il m'a accordées en me laissant un large champ d'initiatives.

J'adresse mes remerciements à Monsieur DUFRENOY, Maître de Conférence à l'Ecole Universitaire d'Ingénieur de Lille et codirecteur scientifique de mon travail pour son aide et les conseils qu'il m'a accordés tout au long de ce travail, mais aussi pour l'ensemble des projets en école d'ingénieur, et DEA que j'ai effectué sous son encadrement.

J'adresse mes plus sincères remerciements :

A Monsieur DE SAXCÉ, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille pour ses discussions fructueuses, la gentillesse de son accueil et pour avoir accepté la présidence de ce jury

A Monsieur MAUGIN, Directeur de recherche CNRS, Professeur à Paris VI et Monsieur NGUYEN D. H. Professeur à l'Université de Liège pour avoir bien voulu accepter de juger ce travail

A Monsieur DEGALLAIX, Professeur à l'Ecole centrale de Lille et Monsieur NAIT, Professeur à l'Ecole Universitaire d'Ingénieur de Lille pour avoir accepté de participer à ce jury.

A Monsieur KONDO, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille pour ses judicieux conseils.

A Monsieur HADDI et aux différents membres du département Mécanique de L'EUDIL, du Laboratoire de Mécanique de Lille et à mes amis chercheurs pour leur soutien moral et amical.

En dernier lieu, je tiens à remercier ma famille, et plus particulièrement, mon épouse et mes enfants pour le soutien qu'ils m'ont apporté et la patience dont ils ont fait preuve durant ce travail, mais également durant mes nombreuses années de formation continue.

SOMMAIRE

page

| | |
|---|----|
| INTRODUCTION | 7 |
| 1 PRESENTATION | 9 |
| 1.1 Contexte de l'étude | 9 |
| 1.1.1 Présentation générale des systèmes de freinage ferroviaire | 9 |
| 1.1.2 Sollicitations thermomécaniques transitoires du disque | 13 |
| 1.2 Synthèse bibliographique | 27 |
| 1.2.1 Rappel de différentes notions sur l'endommagement et la rupture | 27 |
| 1.2.2 Approche de l'endommagement par la théorie de la localisation | 27 |
| 1.2.3 La prévision de la durée de vie | 28 |
| 1.2.4 Les théories de la fissuration | 30 |
| 1.2.5 L'intégrale J et la température | 31 |
| 1.2.6 Le théorème de Noether | 31 |
| 1.2.7 Le concept de force matérielle d'Eshelby et ses développements | 32 |
| 1.3 Démarche de l'étude | 33 |
| 2 LA THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS | 35 |
| 2.1 La thermodynamique des milieux continus | 36 |
| 2.1.1 L'inégalité de Clausius-Duhem | 36 |
| 2.1.2 Objet de la thermodynamique des milieux continus | 36 |
| 2.2 La méthode de l'état local, le potentiel thermodynamique | 37 |
| 2.2.1 Axiome de l'état local | 37 |
| 2.2.2 Lois d'état et lois complémentaires | 38 |
| 2.3 Formulation des lois complémentaires | 38 |
| 2.3.1 Hypothèse de dissipation normale | 38 |
| 2.3.2 Les matériaux standards généralisés | 39 |
| 2.3.3 Etude des matériaux standards généralisés en transformation infiniment petite isotherme | 40 |

| | | |
|-------|--|----|
| 3 | LA THERMOPLASTICITE | 43 |
| 3.1 | Application des principes de la thermodynamique à un système ne possédant pas de source de chaleur interne | 43 |
| 3.2 | Formulation lagrangienne | 47 |
| 3.2.1 | Calcul de l'énergie libre totale | 47 |
| 3.2.2 | Calcul du potentiel thermoplastique total | 47 |
| 3.2.3 | Calcul du potentiel | 50 |
| 3.2.4 | Calcul de l'inégalité de Clausius-Duhem en fonction des derniers résultat obtenus | 51 |
| 3.2.5 | Calcul du lagrangien | 51 |
| 3.2.6 | Vérification du lagrangien et de l'équilibre du solide | 52 |
| 4 | APPLICATION DU THEOREME DE NOETHER AU DOMAINE ELASTOSTATIQUE ET THERMOPLASTIQUE | 56 |
| 4.1 | Application du théorème de Noether au domaine élastostatique | 56 |
| 4.2 | Application du théorème de Noether au domaine thermoplastique | 62 |
| 4.2.1 | Divergence et lagrangien nul | 62 |
| 4.2.2 | Calcul de la loi de conservation et de sa divergence | 65 |
| 4.3 | Aspects énergétiques de l'intégrale M^* | 70 |
| 5 | FORMULATION NUMERIQUE DE L'INTEGRALE M^* | 73 |
| 5.1 | Représentation paramétrique | 73 |
| 5.2 | Calcul de l'intégrale M^* | 76 |
| 5.3 | L'indépendance du contour de l'intégrale M^* | 79 |
| 5.4 | Cas d'application pour obtenir l'indépendance du contour de M^* | 81 |
| 5.4.1 | Problème de Flamant | 81 |
| 5.4.2 | Dilatation d'un disque avec | 82 |
| 5.5 | Cas d'application du calcul de M^* pour des sollicitations mécaniques et thermomécaniques | 83 |
| 5.5.1 | Etude d'un disque soumis à une contrainte d'origine mécanique, étude dans le domaine élastique | 83 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 5.5.2 | Etude d'un disque soumis à une sollicitation d'origine thermique, étude dans le domaine thermo-plastique | 87 |
| 5.6 | Modification de l'intégrale M^* pour obtenir une intégrale indépendante du contour | 88 |
| 5.7 | Généralisation de l'écriture de l'intégrale M^{**} | 97 |
| 5.8 | Modification de l'intégrale M^* pour obtenir l'intégrale M^0 et le théorème de Noether | 100 |
| 5.9 | L'intégrale M^{**} et le disque de frein | 101 |
| 6 | CONCLUSION | 103 |
| 7 | BIBLIOGRAPHIE | 105 |

NOTATION GENERALE

| Symbole | signification |
|-----------------|--|
| a | particule |
| a | constante |
| A_α | forces généralisées |
| A_j | forces thermodynamiques associées au paramètre α_j |
| a_α | vitesses généralisées |
| b | constante |
| b | force de volume par unité de masse |
| c | contrainte |
| C | contrainte maximale de cisaillement |
| C_ε | chaleur spécifique à déformation constante |
| d | tenseur des vitesses de déformation. |
| D | tenseur des coefficients d'écrouissage |
| D | variable d'endommagement |
| D^p | dissipation plastique |
| D_v^p | dissipation intrinsèque volumique |
| E | énergie interne |
| e | énergie interne massique |
| f^k | potentiel plastique |
| F | gradient de la déformation totale |
| F^e | gradient de déformation élastique |
| F^p | gradient de déformation plastique |
| h | quantité surfacique de taux de chaleur |
| \bar{h} | condition limite de flux de température |
| H | vecteur proportionnel au déplacement d'entropie ou flux d'entropie |
| I | matrice unité |
| J | intégrale J de Rice |
| k | tenseur de conduction thermique |
| $\ell[u]$ | fonctionnelle de u |
| \hat{L} | densité lagrangienne |
| L_n^d | lagrangien de la dissipation |
| \hat{L}_n^c | densité lagrangienne sur la surface Ω |
| \tilde{L}_n | densité lagrangienne dans la cavité |
| M | intégrale relative à la symétrie de dilatation |
| M^* | équivalent à l'intégrale M dans le domaine thermoplastique |
| M^{**} | intégrale indépendante du contour dans le domaine thermoplastique |

| | |
|---------------------------|---|
| M^ω | généralisation de l'intégrale M dans le domaine élastique |
| $M^{\omega*}$ | généralisation de l'intégrale M* dans le domaine élastique |
| n | vecteur unité de normale intérieure à $\partial\Omega$. |
| P | pression hydrostatique |
| q | paramètre d'écrouissage |
| r | densité volumique définissant un taux de chaleur |
| R | tenseur de la force associée à la vitesse de transformation plastique |
| S | entropie |
| S^{th} | entropie due à la dissipation thermique |
| S^{p} | entropie due à la dissipation plastique |
| s | entropie massique |
| $\bar{\sigma}$ | efforts de surface sur $\partial_\sigma \varepsilon$ |
| \bar{t} | condition limite de traction sur la surface $\partial\Omega$ |
| T_r | température de référence |
| T | température absolue |
| \bar{u} | condition limite de déplacement |
| u | vecteur déplacement |
| v | volume |
| V | énergie de déformation à température constante |
| V_c | quantité de chaleur transformée en travail |
| $w(\varepsilon^e)$ | fonction d'énergie |
| α | variable interne caractérisant l'état d'écrouissage |
| α_{th} | coefficient de dilatation thermique |
| β | tenseur de couplage déformation - température |
| σ | tenseur des contraintes. |
| ε | tenseur des déformations. |
| ε^e | tenseur des déformations élastiques |
| ε^{p} | tenseur des déformations plastiques |
| ε^{th} | tenseur des déformations thermiques |
| λ^k | multiplicateur plastique. |
| λ | scalaire positif |
| π | second tenseur de Piola Kirchhoff |
| Π | énergie libre totale |
| ψ | énergie libre spécifique. |
| ψ^{th} | potentiel thermoplastique |
| ψ^{L} | potentiel des forces extérieures |
| ρ | densité massique |
| ρ_x | densité massique dans la configuration relâchée |
| τ | contrainte de cisaillement sur le plan de normale n |
| $\partial\Omega$ | frontière du domaine considéré |
| $\partial\Omega_u$ | frontière sur laquelle les déplacements sont imposés. |

| | |
|---------------------|---|
| $\partial\Omega_t$ | frontière sur laquelle les forces sont données. |
| Ω | domaine considéré |
| Ω | potentiel viscoplastique |
| χ_t | variable d'état à l'instant t |
| θ | différence de température |
| Φ | fonction caractéristique d'un mouvement |
| ϕ | dissipation volumique |
| φ | potentiel convexe |
| Δ_v | système d'équations différentielles |
| div | divergence |
| $\text{Div}_i p$ | divergence à l'ordre i de p |
| grad | gradient |
| $\text{pr}^{(n)} v$ | prolongation à l'ordre n du champ de vecteurs v |
| tr | trace d'un tenseur |
| $u_{.i}^\alpha$ | dérivée partielle de u^α par rapport à x^i |
| $u_{j.i}^\alpha$ | dérivée partielle de u_j^α par rapport à x^i |
| $u_{.i}^\alpha$ | dérivée partielle de u^α par rapport à x^i |
| $u_{.xx}$ | dérivée seconde de u par rapport à x |
| v | champ de vecteurs |
| $\partial\varphi$ | sous gradient de φ |
| ∇ | opérateur nabla |

INTRODUCTION

De nombreux progrès technologiques ont été réalisés ces dernières années dans le domaine du freinage ferroviaire ce qui a permis d'améliorer, non seulement la vitesse de circulation des trains, mais aussi le comportement en service du matériel et la sécurité des passagers. Afin de repousser ces limites, de nombreuses actions de recherche ont été entreprises depuis plusieurs années dans le domaine du freinage, aussi bien par les équipementiers, les ensambleurs que les exploitants eux-mêmes. L'état des connaissances étant relativement empirique de nombreux groupes de recherche se sont constitués tant au niveau industriel qu'universitaire. En dehors des critères de performances pures à respecter (distance d'arrêt), il s'agit d'assurer la non défaillance du système de freinage en fonctionnement.

Néanmoins, l'augmentation des énergies et des puissances de freinage ont conduit à observer sur différents matériels des niveaux de températures très élevés et l'apparition de fissures en surface des disques de frein, après des durées d'exploitation plus ou moins longues, signe de la sévérité des sollicitations.

L'objectif de cette étude réside dans l'étude d'une méthode permettant de déterminer à partir de quel niveau de sollicitation apparaîtra la défaillance du disque définie par la présence d'une fissure macroscopique sur le disque de frein.

Pour mener à bien cette étude nous allons développer successivement les thèmes suivants :

Dans le premier chapitre nous présenterons la phénoménologie du problème de freinage, la sollicitation thermique associée et nous terminerons par une synthèse bibliographique des différentes approches de l'endommagement et de la rupture.

Dans le deuxième chapitre nous rappellerons les équations fondamentales de la mécanique, le premier et le deuxième principe de la thermodynamique des milieux continus, les notions de plasticité et l'extension aux matériaux standards généralisés. Ce chapitre fait appel aux notions de thermodynamique des milieux continus de Germain et des matériaux standards généralisés de Halphen et Nguyen Quoc Son.

Dans le troisième chapitre nous étudierons la thermoplasticité. Nous utiliserons les travaux de Biot. Nous développerons une formulation lagrangienne discrète de la thermoplasticité, les équations d'Euler-Lagrange nous permettront de vérifier que le solide que nous étudions est en équilibre. Nous utiliserons les développements effectués par Simo et Honein et par Wagner et Simo.

Dans le quatrième chapitre nous énoncerons le théorème de Noether, le théorème du lagrangien nul et la formulation théorique de la loi de conservation. Nous appliquerons le théorème de Noether dans le domaine élastique pour un solide soumis à une sollicitation entraînant une symétrie de dilatation. La loi de conservation que nous obtenons par le théorème de Noether a été démontrée par Knowles et Sternberg.

Puis nous étudierons l'application du théorème de Noether pour un solide soumis à une sollicitation thermoplastique dans le cas de la symétrie de dilatation. Nous obtiendrons alors

une intégrale que nous appellerons M^* . Nous terminerons le chapitre par une interprétation énergétique de cette intégrale.

Dans le cinquième chapitre nous présenterons une formulation numérique de l'intégrale M^* . Nous étudierons les conditions d'indépendance du contour, les solutions théoriques existantes et les modifications que l'on peut apporter à l'intégrale M^* pour obtenir l'indépendance du contour. Nous étudierons enfin les conditions d'utilisation de l'intégrale M^* dans le contexte du disque de frein.

1 PRESENTATION.

1.1 Contexte de l'étude

Dans ce paragraphe nous allons montrer de façon succincte les différents types de frein existants, puis plus en détail l'application du freinage par disque et garniture sur le TGV et enfin le cycle de sollicitation que nous allons étudier, au travers des différents résultats obtenus lors des études précédentes. Ce paragraphe est le résumé du travail de Dufrenoy [DUF¹ 95] sur le comportement thermomécanique du frein à disque ferroviaire.

1.1.1 Présentation générale des systèmes de freinage ferroviaire

Plusieurs types de frein peuvent être utilisés suivant le matériel considéré et l'exploitation visée :

Les freins à friction sur roue, sur disque ou sur rail qui dissipent l'énergie sous forme de chaleur.

Les freins dynamiques qui convertissent l'énergie cinétique en énergie électrique elle-même dissipée dans des résistances ou dans la caténaire.

Les freins à courant de Foucault qui induisent des champs magnétiques qui s'opposent au mouvement de la rame.

Le freinage des rames à grande vitesse

Le freinage des bogies **moteurs** des TGV-A et TGV-R est réalisé par un frein dynamique agissant en conjugaison avec un frein pneumatique à semelles.

Le freinage électrique du type rhéostatique est assuré par les deux moteurs synchrones autopilotés, qui sont alimentés soit par la caténaire soit par des batteries (frein basse tension) et qui sont utilisés lors du freinage en alternateurs. Ce frein dissipe **20 %** de l'énergie de la rame.

Le frein pneumatique par semelles agit sur les seize roues des quatre bogies moteurs, à raison d'une semelle en matériau fritté de 320 mm de longueur par roue. Ce frein permet de dissiper moins de **10%** de l'énergie de la rame.

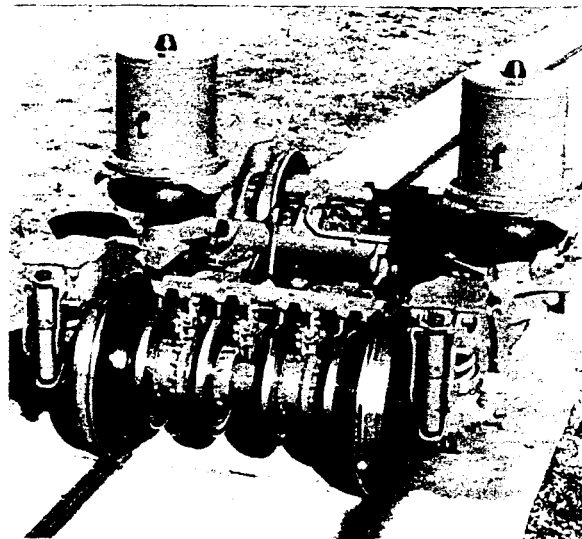


Fig 1 - Bogie porteur du TGV-A

Le freinage des bogies **porteurs** de la rame est obtenu par frottement de garnitures en matériau fritté sur des disques non ventilés en acier ; les disques sont au nombre de quatre par essieu (figure 1). Ce frein dissipe environ **60%** de l'énergie de la rame. L'énergie dissipée par la résistance à l'avancement représente **10%** de l'énergie de la rame.

Le dispositif de freinage par frein à disque se compose d'un disque solidaire de l'essieu à freiner et d'un système supportant les garnitures. En raison des sollicitations thermiques très élevées des surfaces en frottement, les garnitures organiques classiques ne pouvaient plus convenir et il a été nécessaire de recourir à un matériau fritté à base de cuivre et de fer. La mise au point d'une garniture à haute énergie constitue une opération délicate. En effet, il faut d'une part assurer une pression uniforme de la garniture sur le disque afin d'éviter la formation de points chauds et d'autre part limiter la perte d'efficacité de la garniture sous humidité. Le disque est une couronne forgée de 640 mm de diamètre et de 45 mm d'épaisseur en acier à haute limite élastique du type 28CDV05-08 traité pour obtenir une dureté sur piste de 330 à 390 HB.

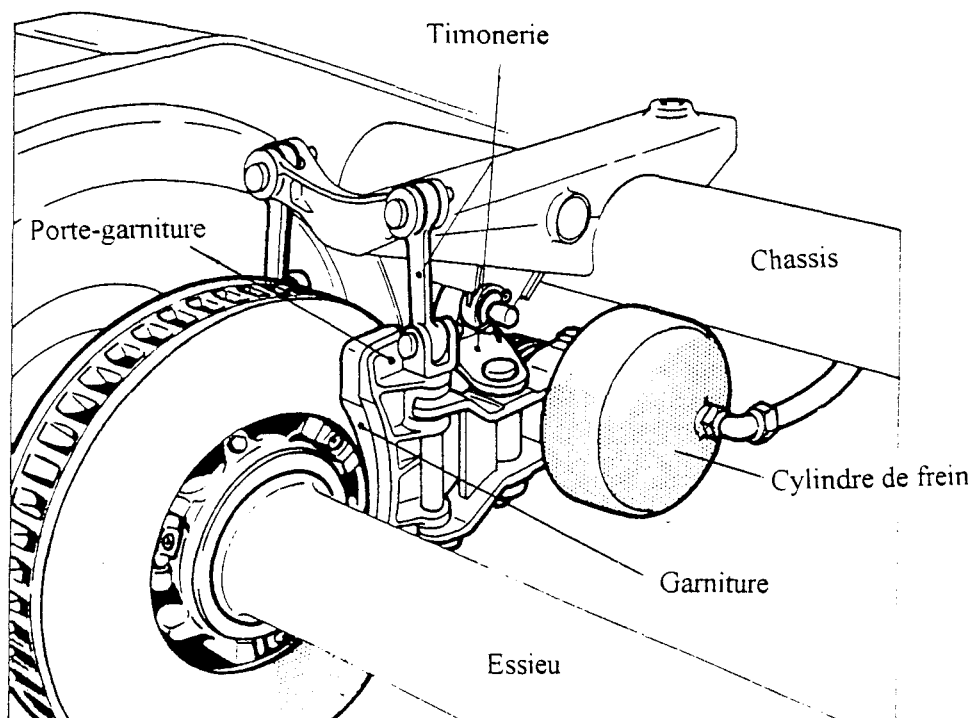


Fig 2 - Schéma d'un équipement de freins à disques

Description générale des phénomènes.

Le système de freinage à friction par disque est composé de plusieurs éléments, le disque de frein, les garnitures, le porte-garnitures et la timonerie dont le rôle est de transmettre l'effort de freinage du cylindre aux garnitures (figure 2). L'ensemble de ces composants possède un comportement particulier lors d'une sollicitation par freinage. Ces comportements ont été pris en compte lors de nombreuses études précédentes [DUF¹ 95], [DUF² 95], [DUF³ 95]. Ils ont mis en évidence des gradients thermiques importants visualisés par la formation de cercles de feu et de points chauds sur la piste de frottement, ainsi que l'apparition dans certains cas de fissures radiales en surface du disque après une durée d'exploitation assez courte.

cercles de feu et de points chauds sur la piste de frottement, ainsi que l'apparition dans certains cas de fissures radiales en surface du disque après une durée d'exploitation assez courte.

Les cercles de feu sont des couronnes de température élevée observées sur la face du disque pendant le freinage. D'après les études effectuées précédemment, ces cercles de feu sont dus à des variations de portée des garnitures sur le disque pendant la phase de freinage; suivant l'usure de la garniture, ces cercles sont plus ou moins larges et se déplacent radialement sur le disque.

Les points chauds : Il a été observé expérimentalement que dans le cas où les points chauds se développent, ils s'intensifient au cours du freinage et persistent souvent pour les freinages suivants, aux mêmes emplacements. Ce phénomène est particulièrement important puisqu'il engendre des gradients thermiques très élevés et par conséquent des contraintes thermiques très sévères. Les températures maximales sont généralement situées sur le sommet des points chauds et peuvent dépasser localement les 1000°C avec des gradients de 800°C sur des distances très faibles de quelques dizaines de millimètres (figure 3).

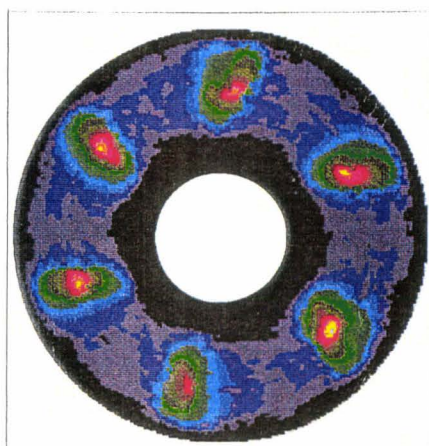


Figure 3- Thermographie de points chauds

Ils sont régulièrement espacés sur chaque face du disque et en quinconce. Leur nombre est souvent proche de 6, voire 5, et plus rarement 4 ou 7.

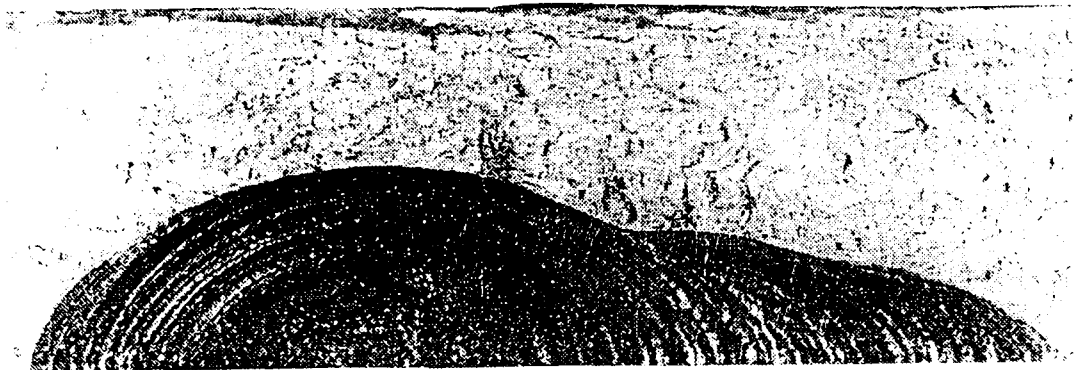
Les configurations les plus défavorables sont issues des deux phénomènes thermiques principalement observés et définis précédemment : les cercles de feu et les points chauds macroscopiques. Tous deux engendrent des déformations plastiques, néanmoins nettement plus conséquentes pour les points chauds.

De plus il a été observé l'apparition de **fissures** dans des zones fortement transformées avec dépassement du seuil de transformation AC3 du matériau. On se place dans le cas du comportement général où les fissures de fatigue apparaissent dans les zones de contraintes élevées.

L'observation de la surface de frottement, parfois sans grossissement, révèle la présence d'un faïençage superficiel sur la surface de frottement. Lors des essais, ce réseau de fissures apparaît rapidement après quelques cycles de freinage. Sa progression tend à se stabiliser par la suite, en formant des zones plus ou moins denses. Il semble traduire un phénomène global d'adaptation de la structure sous l'amplitude des contraintes de surface. L'observation du développement des fissures macroscopiques sur la surface des disques au

cours d'essais au banc, montre que même si le phénomène d'amorçage de la fissure est certainement lié au faïencage, son apparition est plus tardive.

Selon les constatations SNCF, aussi bien sur banc d'essai qu'en ligne, les fissures macroscopiques apparaissent de façon non systématique sur les disques, après une période pouvant aller de 6 mois à plusieurs années d'exploitation. Elles dépendent fortement du type de garnitures utilisé. Elles sont toujours radiales et d'apparition brutale (quelques centimètres), pas forcément dans les zones fortement faïencées. La trace des fissures suivent ensuite une progression rectiligne jusqu'à l'arrêt et peuvent s'étendre jusqu'à 100 mm de longueur. Elles ne débouchent jamais sur la périphérie intérieure ou extérieure du disque (figure 4).



x 3



x 5

Fig. 4 - Coupe d'une fissure perpendiculaire à la face de frottement

Les faciès de progression en profondeur du matériau sont caractéristiques des fissures de fatigue. Les lignes d'arrêt se resserrent, signe d'une propagation limitée dans cette direction. La direction principale de propagation est radiale. La disposition des lignes concentriques est fidèle aux observations d'une fissure initiale assez importante, puis d'une propagation moins

rapide avec un resserrement des lignes d'arrêt. Il peut exister plusieurs zones d'amorçage qui se rejoignent pour donner une fissure unique.

La prépondérance après refroidissement, de contraintes résiduelles de traction circonférentielles, notamment sur les zones fortement sollicitées thermiquement traduit la présence de déformations plastiques, développées durant les phases de freinage.

1.1.2. Sollicitations thermomécaniques transitoires du disque.

Il est nécessaire à ce stade, d'étudier si la sollicitation thermomécanique du disque répond au mécanisme de la fatigue oligocyclique. Nous considérerons pour cela l'étude d'un freinage et d'un refroidissement dans des conditions supposées endommageantes.

Fatigue oligocyclique

L'essai de fatigue le plus simple consiste à soumettre une éprouvette à des cycles d'efforts périodiques, d'amplitude maximale constante et à noter le nombre de cycles jusqu'à la rupture. En utilisant différentes éprouvettes avec des contraintes maximales différentes et même contrainte moyenne, on obtient la courbe dite de Wöhler (figure 5).

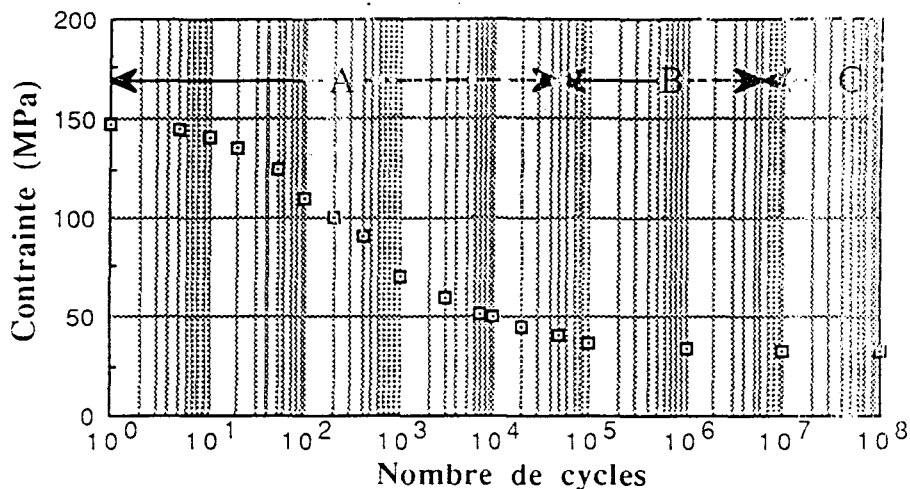


Fig. 5 - Courbe de Wöhler

Trois domaines sont habituellement distingués :

La zone A de fatigue oligocyclique, dans laquelle la rupture intervient après un nombre de cycles assez faible (10^4 à 10^5), sous forte contrainte et précédée d'une déformation plastique cyclique notable.

La zone B d'endurance limitée, où la rupture est atteinte après un nombre de cycles limité, qui augmente quand la contrainte baisse.

La zone C d'endurance illimitée sous faible contrainte, pour laquelle la rupture n'intervient pas avant un nombre très élevé de cycles ($N_r > 10^7$ cycles).

Si l'on étudie la durée de vie avant apparition de la fissure, on parle alors de durée de vie avant amorçage N_a et non plus avant rupture N_r .

La fatigue oligocyclique est plastique, ce qui signifie qu'à chaque cycle réalisé, une déformation plastique se produit. Celle-ci intervient fréquemment dans le cas de pièces travaillant à haute température et soumises à de forts gradients thermiques (turbines, cylindres de laminoir, moules, etc.).

La fatigue oligocyclique à haute température peut être divisée en deux domaines: la fatigue isotherme à température constante tout le long de la durée de vie du matériau et la fatigue thermique, pour laquelle la température est variable. D'après Spera [SPE 76], la fatigue thermique est définie comme la détérioration graduelle des matériaux qui subissent des chauffages et des refroidissements alternés lorsque leur dilatation thermique est partiellement ou complètement bridée. Le "bridage" des dilatations peut avoir deux origines:

Interne à la pièce, provoquée par l'existence de gradients thermiques internes. Le bridage est issu des chauffages et refroidissements superficiels rapides, ou d'une structure hétérogène avec des coefficients de dilatation différents. On parle dans ce cas de fatigue thermique sous contraintes internes ("thermal-stress fatigue").

Externe à la pièce, introduite par des forces externes appliquées sur sa surface et qui consiste dans l'opposition externe de la dilatation thermique (par exemple par encastrement des extrémités de l'éprouvette). On parle alors de fatigue thermomécanique ("thermal-mechanical fatigue").

Sollicitation étudiée

Phénomène thermique considéré :

Les sollicitations qui engendrent des distributions de contraintes élevées sont celles pour lesquelles les gradients thermiques les plus importants sont observés. Ces configurations les plus défavorables sont issues des deux phénomènes thermiques principalement observés et définis précédemment : les cercles de feu et les points chauds macroscopiques. Ces derniers constituent le cas le plus sévère puisqu'ils sont très localisés avec des maxima pouvant dépasser les 1000°C, alors que les premiers dépassent rarement les 550°C. Tous les deux engendrent des déformations plastiques, néanmoins nettement plus conséquentes pour le second. De plus, il a été observé l'apparition de fissures dans des zones fortement transformées avec dépassement du seuil de transformation AC3 du matériau, qui indique une sollicitation thermique supérieure à 885°C, qui n'est rencontrée qu'en présence de points chauds.

On se place dans le cas du comportement général où les fissures de fatigue apparaissent dans les zones de contraintes élevées.

On rappelle que les effets locaux d'élévation des températures durant des instants brefs ne sont pas considérés.

La technique de modélisation utilisée est décrite dans le paragraphe suivant. Nous proposons d'étudier le cas du freinage d'arrêt à 300 km.h⁻¹ avec une décélération de 0.4 m.s⁻² et un temps de freinage de 213 s en présence de points chauds. Cette configuration est en outre réaliste et conforme à l'exploitation de service du TGV, alors que les freinages à forte puissance sont tout à fait exceptionnels. Le refroidissement associé correspond à une réaccélération de 0.3 m.s⁻² jusque 300 km.h⁻¹ et à une stabilisation en vitesse durant environ 10 mn afin d'assurer l'évacuation dans l'air ambiant de la majorité de l'énergie de freinage (figure 6). Ce cycle élémentaire sera répété dans le temps afin d'étudier la sollicitation cyclique.

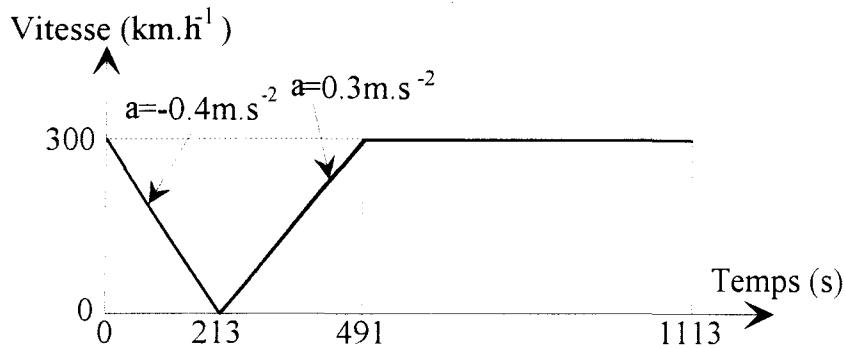


Fig. 6 - Cycle de freinage étudié

Sollicitation considérée :

Les sollicitations exercées sur le disque se composent des contraintes issues des gradients de températures et de celles dues aux efforts tangentiels de frottement.

Les résultats des résolutions du contact avec frottement indiquent des niveaux de contraintes nettement plus faibles que celles issues des gradients thermiques en supposant une pression uniforme. Les valeurs de contraintes normales sont inférieures à 15 MPa lors du contact initial avec frottement. Les contraintes tangentielles équivalentes de Von Mises maximales n'excèdent pas les 60 MPa, alors qu'elles peuvent dépasser localement les 1000 MPa avec l'unique sollicitation thermique [DUF¹ 95].

Les efforts issus du contact ne sont pas retenus. Néanmoins ils correspondent à des phénomènes du second ordre localisés en surface, qui peuvent s'avérer très sensibles à l'échelle microscopique.

Etude thermomécanique :

Le calcul des sollicitations thermomécaniques a été réalisé par la Méthode des Eléments Finis. Le cas étudié suppose l'existence de six points chauds uniformément répartis sur la surface de contact (cas général du disque de TGV). Les déformations ondulatoires du disque correspondantes et les distributions de températures observées expérimentalement montrent que la surface effective de contact et l'élévation de température n'affectent que les points chauds.

La dissipation de la puissance de freinage est ainsi localisée sur une surface réduite dont la taille dépend de la pression d'application de la garniture.

La surface de dissipation du flux de chaleur a été déterminée à partir d'un calcul 3D de la surface de contact de la garniture sur le disque dans le cas de la présence de points chauds. Leur amplitude maximale a été fixée en fonction des mesures effectuées sur le disque, à savoir 0.15 mm pour un diamètre de points chauds de 140 mm.

La surface d'application de la distribution de la puissance de freinage est déterminée à partir de la zone de réaction du contact statique. Elle est définie circulaire autour du sommet du point chaud.

Cette estimation de la surface effective de contact nous permet uniquement d'avoir une information globale de la surface effective de dissipation de la puissance de freinage. Les variations locales de distribution de pression ne sont pas considérées, ni la dynamique de contact de la garniture sur ces points chauds. L'amplitude de la pression de contact sur le point chaud est de type parabolique.

Une discrétisation parabolique par morceaux a été introduite (figure 7).

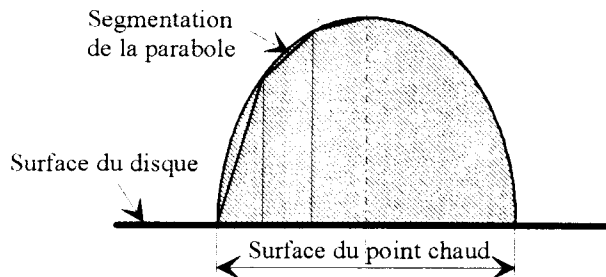


Fig. 7 - Distribution angulaire de la puissance de freinage sur le point chaud.

Résultats

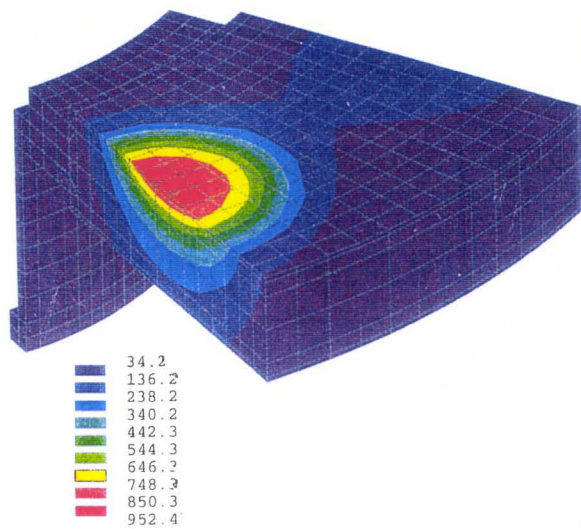
La géométrie discrétisée est tridimensionnelle, limitée à 1/12^{ème} de la structure correspondant à la portion angulaire antisymétrique minimale dans le cas de six points chauds. Un demi point chaud est alors simulé de chaque côté du modèle (figure 8a). Le flasque de liaison à l'essieu est introduit avec hypothèse de continuité de matière, mais pas l'essieu, pour lequel les calculs montrent une influence négligeable.

Les hypothèses principales du calcul des sollicitations du disque sont répertoriées ci-dessous:

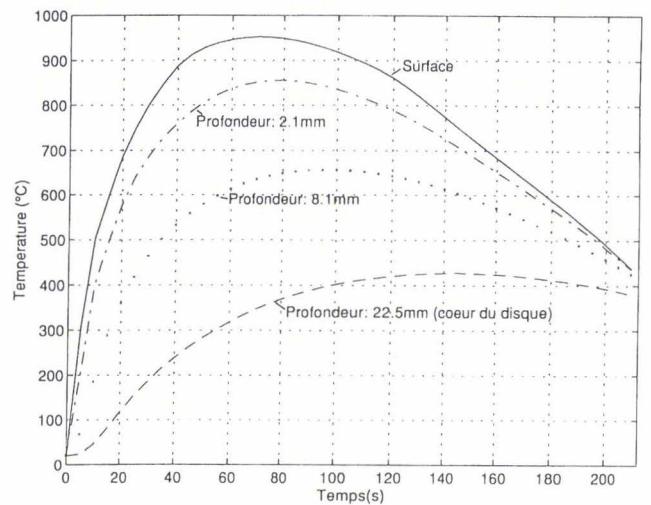
- Pas de prise en compte des gradients thermiques locaux et brefs ou microscopiques.
- Pas de prise en compte des modifications de structure du matériau. Seules les variations des caractéristiques thermiques et mécaniques avec la température sont introduites.
- L'influence du faïençage n'est pas considérée.
- Pas de prise en compte de la sollicitation mécanique du frottement.
- Les phénomènes visqueux ne sont pas introduits (comportement élastoplastique).
- Le calcul est réalisé avec l'hypothèse de petites déformations étant donnée l'amplitude limitée des déformations plastiques. Dans les différents calculs, l'écroutissement cinématique non linéaire est introduit. L'écroutissement cinématique se rapproche plus de la réalité que l'écroutissement isotrope. Il donne une meilleure approximation de l'effet Bauschinger.

Evolution des températures du disque :

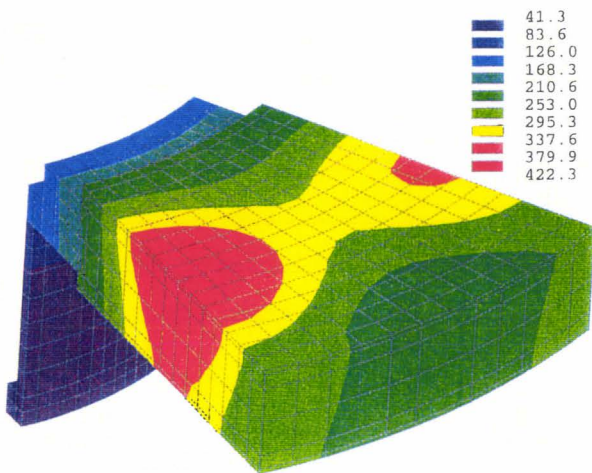
Elles s'élèvent rapidement en raison de la concentration de la chaleur dissipée. Le maximum est atteint 67 secondes après le début du freinage (figure 8a). La distribution des températures indique un échauffement très superficiel, puis plus diffus en fin de freinage de par la conduction dans le disque (figures 8a à 8d).



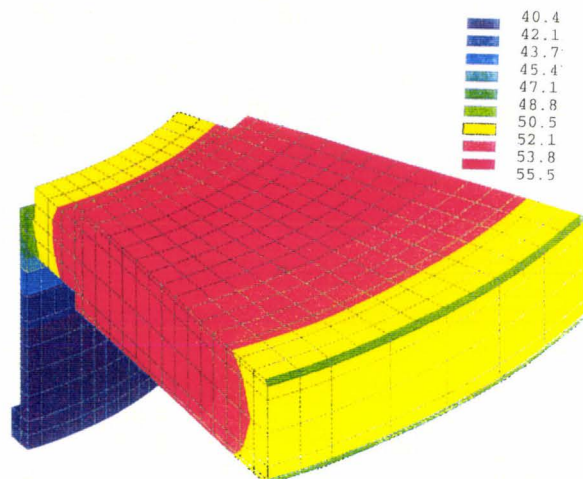
a) Distribution à $t = 72$ sec (température maximale °C) à la verticale du point chaud pendant le freinage.



b) Evolution sur différentes épaisseurs.



c) Distribution à $t = 213$ s (fin du freinage)



d) Distribution à $t = 1113$ s (fin du refroidissement)

Fig 8 - Evolution et distribution des températures du disque

Une comparaison de relevés expérimentaux obtenus par thermographie infrarouge et reportée sur un maillage élément fini indique une bonne concordance des niveaux de températures, ainsi que de leur évolution dans le temps (maximum obtenu à des temps proches) (figure 9). Les points chauds sont plus ou moins circulaires selon les freinages et les

variations de portée de la garniture. Leur disposition symétrique et leur forme homogène permettent de conforter l'hypothèse du modèle d'un secteur angulaire antisymétrique du disque.

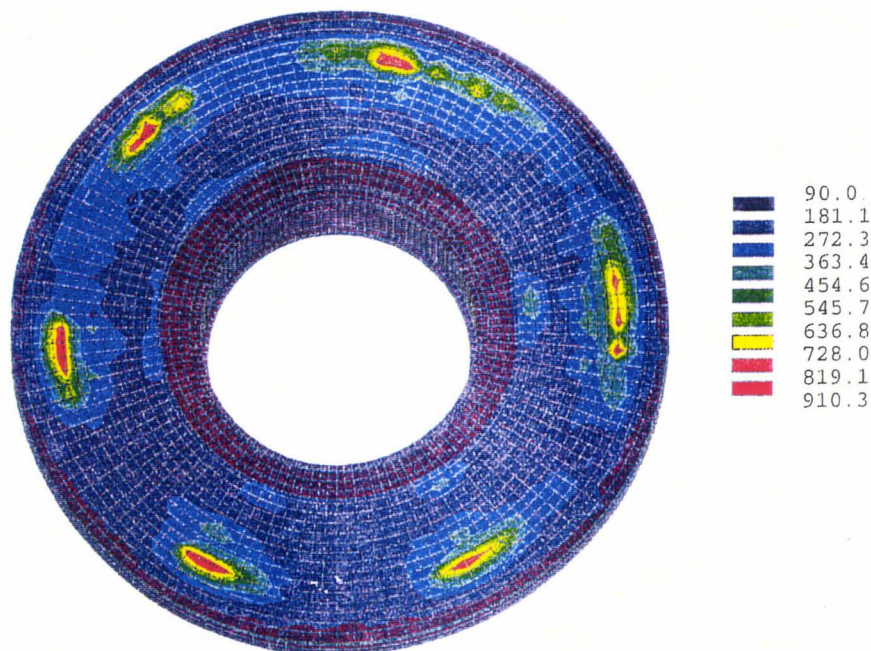


Fig. 9 - Mesure expérimentale de la température de surface du disque
(à l'instant de la température maximale $t = 72s$)

La variation de la portée radiale de la garniture déjà mise en évidence pour les cercles de feu s'applique également aux points chauds, d'où la forme plutôt étendue circonférentiellement dans le cas présent. Cette distribution n'est cependant pas générale et l'on peut observer des cas de zones plus circulaires ou de formes différentes selon les freinages, au gré de la variation de portée de la garniture.

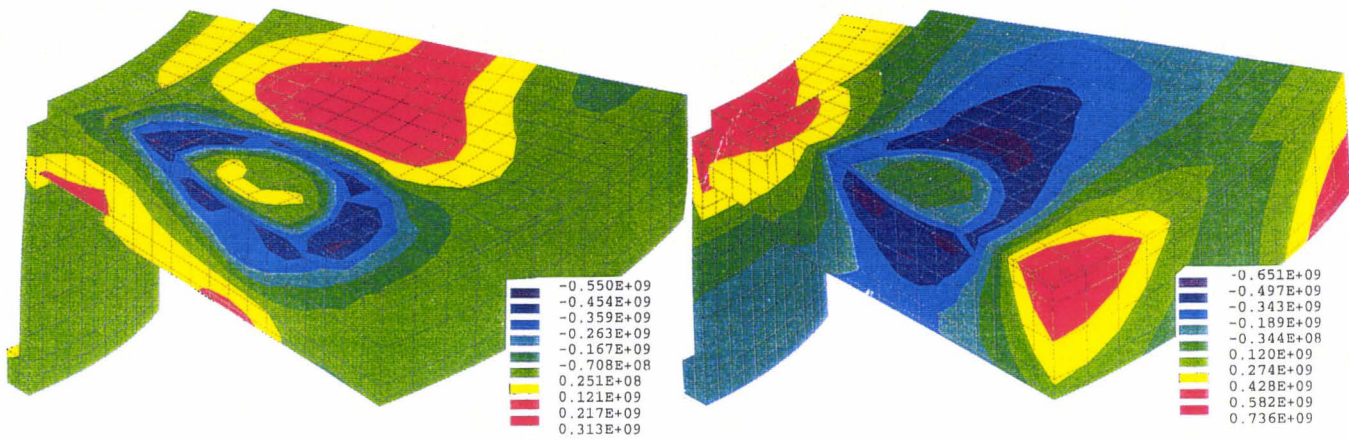
Evolution de l'état de contrainte :

Lors du freinage :

En partant d'un état vierge de contraintes du disque, en raison de l'élévation de la température, l'état de contrainte évolue rapidement au cours du freinage. La concentration des gradients thermiques engendre un état de compression sur le point chaud dont la dilatation est entravée par le métal froid qui l'entoure. La figure 10a décrit cette distribution dans le sens circonférentiel et radial à l'instant de la température maximale.

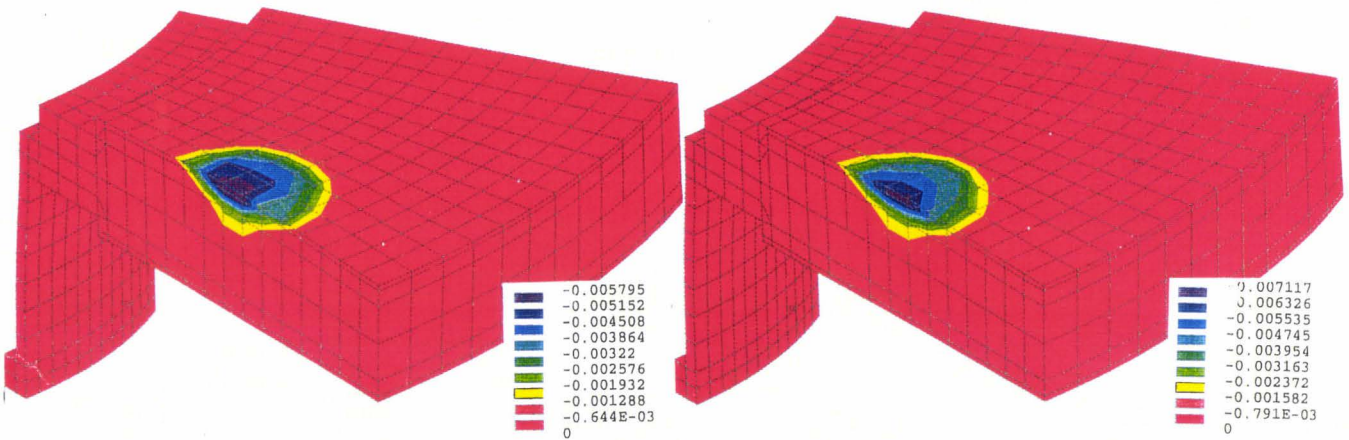
Des déformations plastiques sont initiées 8s après le début du freinage, alors que la température maximale est de 470°C , ceci en raison de la baisse de la limite d'élasticité avec la température. Comme le module d'Young chute également avec la température, le niveau de contraintes baisse ensuite avec l'élévation de la sollicitation thermique sur les zones les plus activées thermiquement.

L'amplitude des déformations plastiques continue à croître avec une limite d'élasticité de plus en plus basse. Ceci explique un état de contrainte plus faible au sommet du point chaud que sur son contour aussi bien en surface que dans l'épaisseur (figure 10b).



Contraintes radiales (N.m⁻²)

Contraintes circonférentielles (N.m⁻²)



Déformations plastiques radiales (%)

Déformations plastiques circonférentielles (%)

Fig. 10a - Distribution des contraintes et des déformations plastiques à l'instant de la température maximale

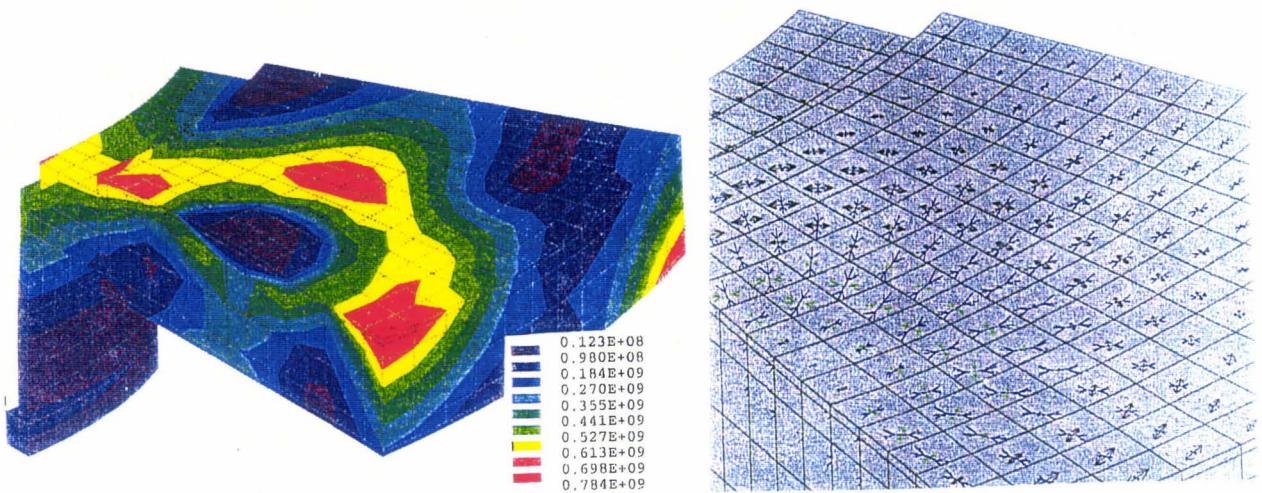


Fig. 10b - Contraintes équivalentes (N.m⁻²) et directions principales autour du point chaud

Les amplitudes des déformations plastiques et de la contrainte de compression sont supérieures dans la direction circonférentielle par rapport à celles de la direction radiale. La déformation plastique maximale est observée sur le sommet du point chaud pour lequel la température est la plus élevée et où par conséquent le module d'Young et la limite élastique sont les plus faibles.

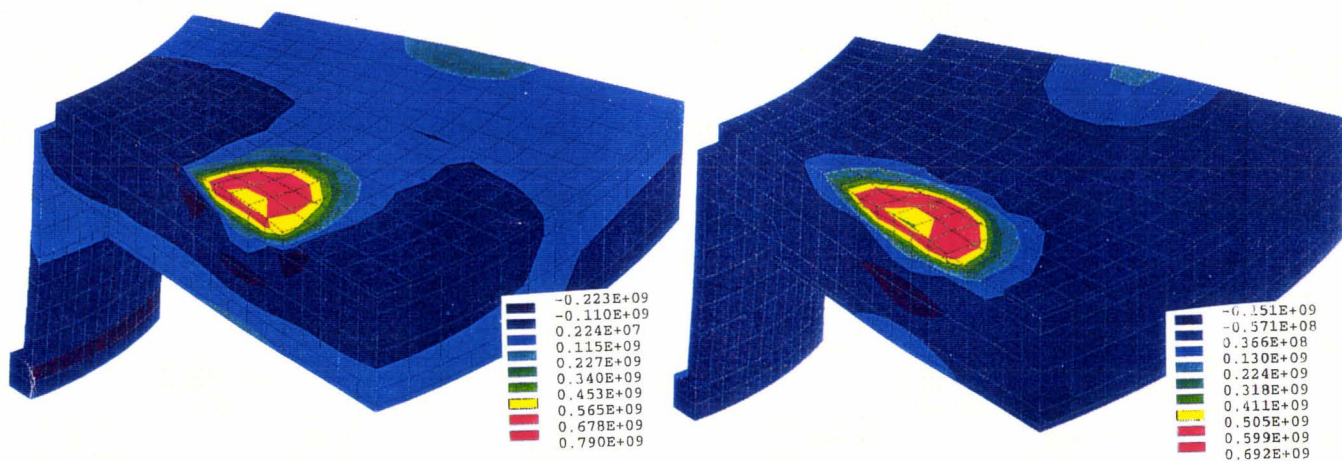
De par la géométrie annulaire de la structure, les directions principales sont conformes au repère cylindrique, sauf sur la base des points chauds, étant donnés leur forme et le cisaillement engendré (figure 10b).

Lors du refroidissement :

A la fin du freinage et durant la phase de refroidissement, l'état de compression du disque diminue avec la baisse de température. Des contraintes résiduelles de traction sont générées, issues des déformations plastiques de la phase de freinage (figure 11).

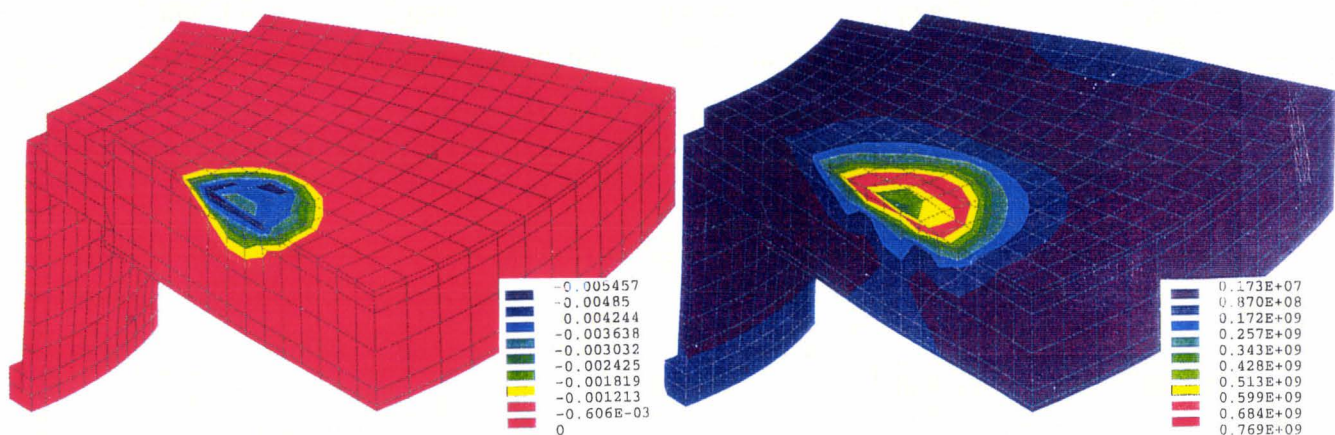
La distribution des déformations plastiques radiales est similaire à celles de la direction circonférentielle représentée sur la figure 11c, avec néanmoins une amplitude plus faible (-0.4% contre -0.55% respectivement). Des mesures des contraintes résiduelles indiquent des niveaux de contrainte compatibles avec les résultats obtenus [DUF¹ 95].

Les déformations plastiques résiduelles ainsi que les contraintes ne sont pas maximales au sommet du point chaud après refroidissement. L'explication est donnée dans le paragraphe suivant avec le détail de l'évolution du cycle de sollicitation.



a) Contraintes circonférentielles (N.m⁻²)

b) contraintes radiales (N.m⁻²)



c) Déformations plastiques circonférentielles (%) d) Contraintes équivalentes de Von Mises (N.m⁻²)

Fig 11-Distribution des contraintes et des déformations à la fin du refroidissement (t = 1113°)

Cycle de sollicitation stabilisé

a) Définitions

L'étude d'un freinage suivi d'un refroidissement a permis de mettre en évidence l'alternance des sollicitations en compression, puis en traction, avec un écoulement plastique dont l'amplitude varie entre les états de sollicitations extrêmes.

D'une manière générale nous allons décrire l'évolution de la contrainte et de la déformation au cours d'un cyclage thermique (figure 12)

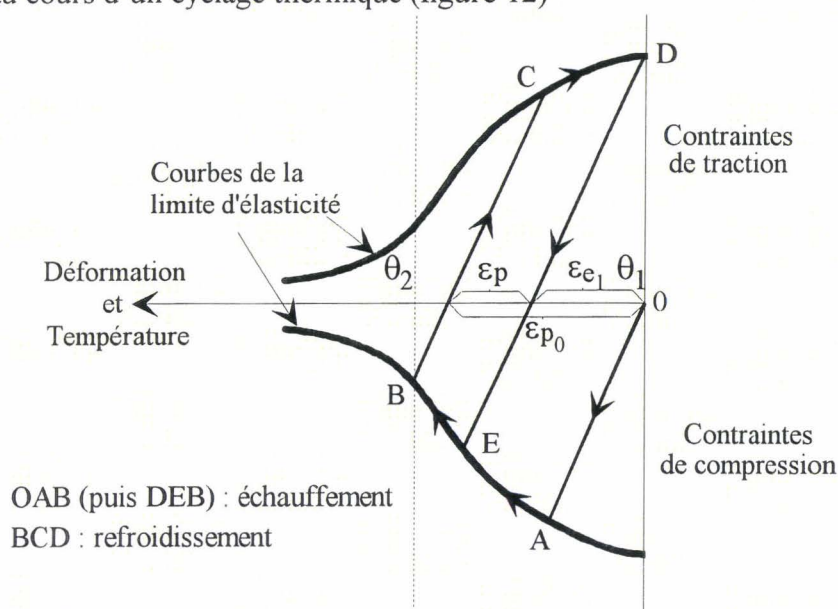


Fig. 12 - Evolution simplifiée de la contrainte et de la déformation au cours du cyclage thermique entre les températures θ_1 et θ_2

Au cours du premier chauffage, de θ_1 à θ_2 l'état de contraintes suit le chemin OAB. En A, la limite d'élasticité est atteinte et les contraintes suivent sa courbe de variation avec la température jusqu'en B avec une déformation plastique égale à ε_{p_0} . Au cours du refroidissement, l'état de contraintes suit le chemin BCD (contraintes résiduelles de traction). Au second chauffage, toujours de θ_1 à θ_2 , le chemin suivi DEB induit une déformation plastique de compression dont l'amplitude est ε_p , tel que $\varepsilon_p = \varepsilon_{p_0} - \varepsilon_{e_1}$.

Le premier cycle thermique est particulier dans la mesure où il comprend une déformation plastique de compression élevée, tandis que les cycles suivants tendent à se stabiliser avec des contraintes de traction et de compression.

Cet état de contrainte alternée avec déformation plastique d'amplitude variable correspond à un endommagement par fatigue oligocyclique. Nous nous attacherons dans ce paragraphe, à étudier si ce régime est vérifié dans notre application, sachant que deux formes différentes du cycle contrainte-déformation peuvent intervenir:

- Le cas où il y a absence de déformation plastique et où le trajet de sollicitation de la figure 12 se limite alors au segment OA. Nous avons pu déjà vérifier que ce scénario ne nous concerne pas au niveau du point chaud.
- Le cas où il y a absence de déformation plastique alternée, avec cependant cyclage de la contrainte en traction. Le trajet se limiterait alors à OABC, avec C sur la verticale à l'origine. Après la plastification du premier chauffage le cycle des contraintes thermiques appartient au domaine élastique; la structure est alors "adaptée" à la sollicitation. Nous avons pu voir lors du premier freinage et après le refroidissement, que dans notre cas il y a variation de l'amplitude de déformation plastique, mais ce comportement doit être vérifié pour les cycles suivants. Il s'agit de vérifier également s'il y a accommodation du cycle de contraintes-déformations vers une hystérésis stabilisée (trajet DEBC de la figure 12 ou figure 13), ou s'il y a effet de rochet, avec augmentation progressive de la déformation à chaque cycle → défaillance incrémentale.

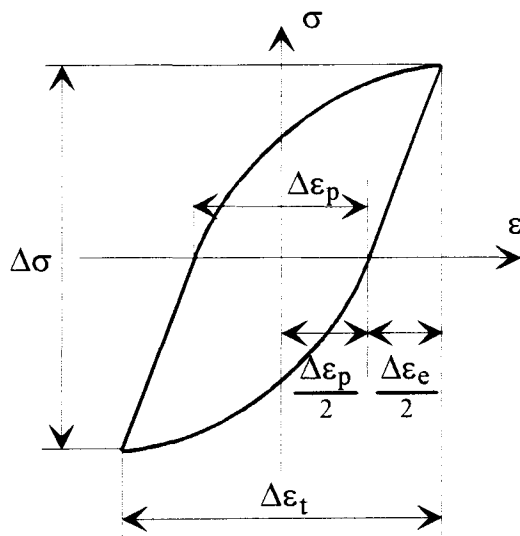


Fig. 13 - Boucle hystérésis

b) Etude du cyclage thermique

Le cycle proposé consiste à enchaîner plusieurs freinages et refroidissements de mêmes caractéristiques que ceux étudiés précédemment (figure 6). Le cyclage thermique résultant est tracé sur la figure 14 pour le sommet du point chaud et pour sept freinages. L'hypothèse principale de ce cyclage est la position fixe des points chauds alors qu'ils se déplacent en réalité lentement au fur et à mesure des freinages [DUF¹ 95].

La température maximale du disque s'élève quelque peu au cours du cycle complet, pour culminer à environ 1000°C au cinquième freinage. Les distributions des contraintes et des déformations élastiques et plastiques ont été présentées précédemment (figures 10 et 11), sachant que leur amplitude est similaire pour chaque freinage aux même instants.

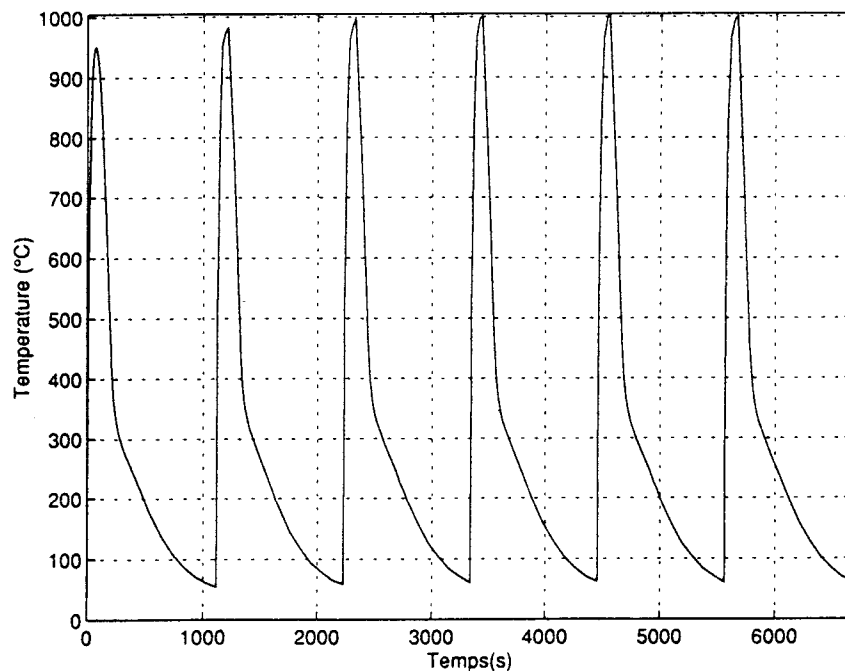


Fig. 14 - Evolution de la température maximale pour un cycle de sept freinages et refroidissements (au centre du point chaud)

On constate sur le tracé de la boucle d'hystérésis au sommet du point chaud dans la direction circonférentielle, une variation de l'amplitude de la déformation plastique avec une stabilisation de la boucle après six freinages (figure 15).

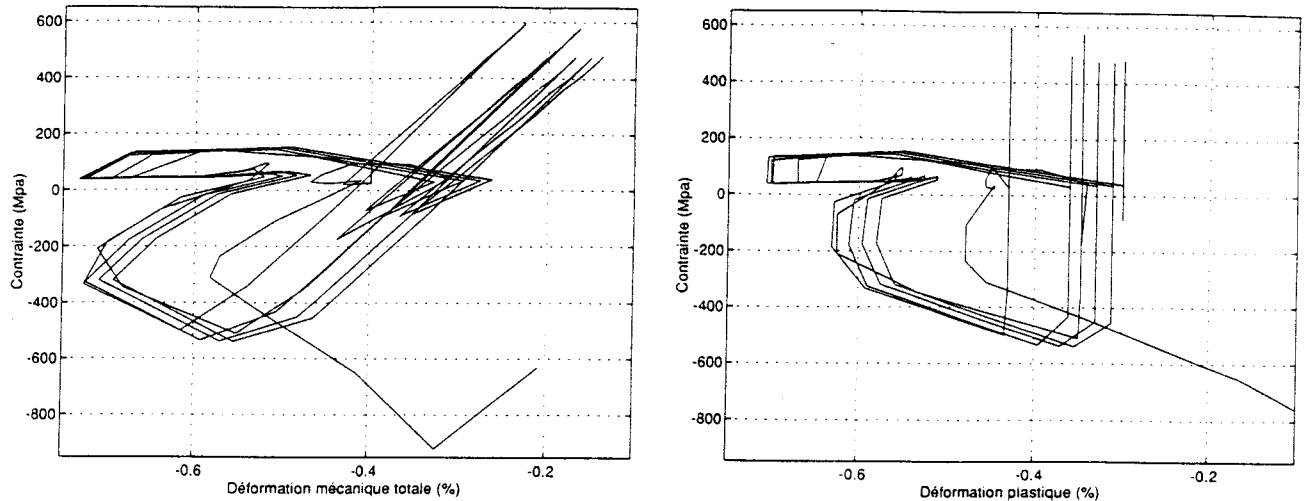


Fig. 15 - Boucles contraintes-déformations mécaniques totales et plastiques dans le sens circonférentiel

La variation des déformations plastiques est maximale au sommet du point chaud. La figure 16 détaille les boucles stabilisées avec indication des températures. L'évolution du coefficient de dilatation thermique avec la température est rappelée pour mémoire et les boucles de déformations plastiques et élastiques stabilisées du sixième freinage sont tracées en fonction de la température. Ces courbes confirment la stabilisation d'un cycle de déformation plastique alternée.

Description du cycle stabilisé (à partir du sixième freinage) :

de 60 à 470°C: *début du chauffage: réponse élastique.*

Le chauffage induit un état de compression du disque qui s'oppose aux contraintes résiduelles de traction. La contrainte circonférentielle passe de + 450 à - 450 MPa avec des déformations élastiques de compression. L'évolution de la contrainte en fonction de la déformation mécanique totale n'est pas tout à fait linéaire en raison de la baisse du module d'Young avec la température.

de 470 à 700°C: *écrouissage.*

Il y a écoulement plastique et comme la limite d'élasticité décroît avec la température tout comme le module d'Young, le niveau de contrainte baisse. Les déformations élastiques et plastiques augmentent en compression.

de 720 à 800°C: *chute du coefficient de dilatation thermique*

Le coefficient de dilatation thermique chute brusquement d'où une baisse des déformations élastiques et une stabilisation des déformations plastiques.

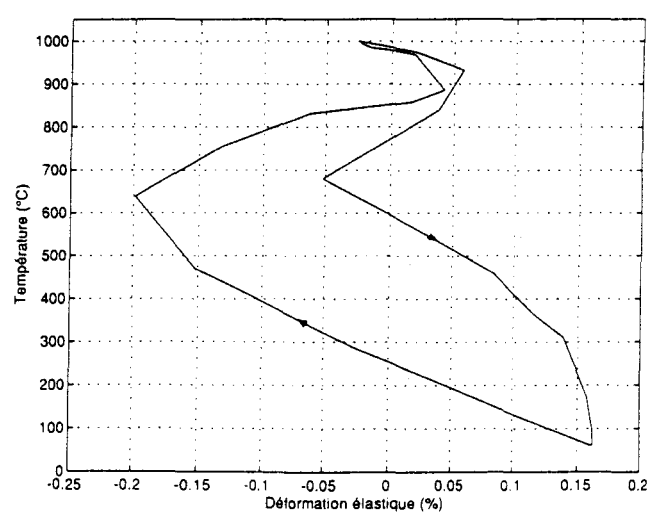
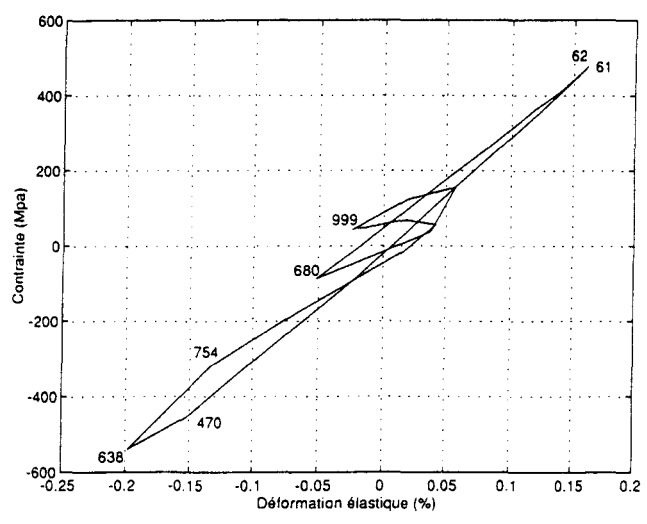
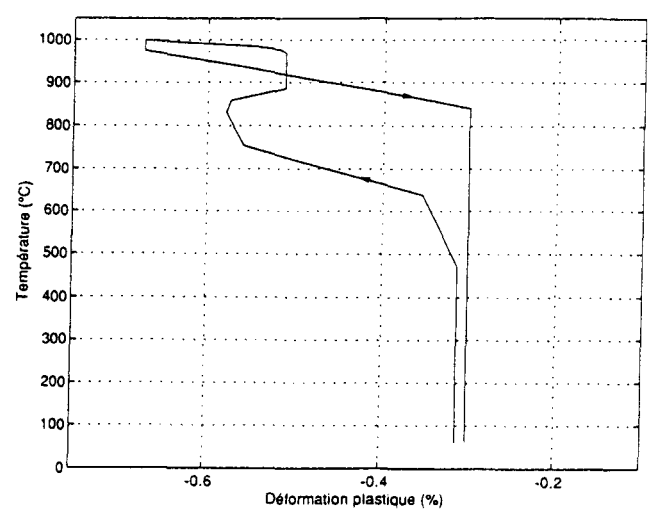
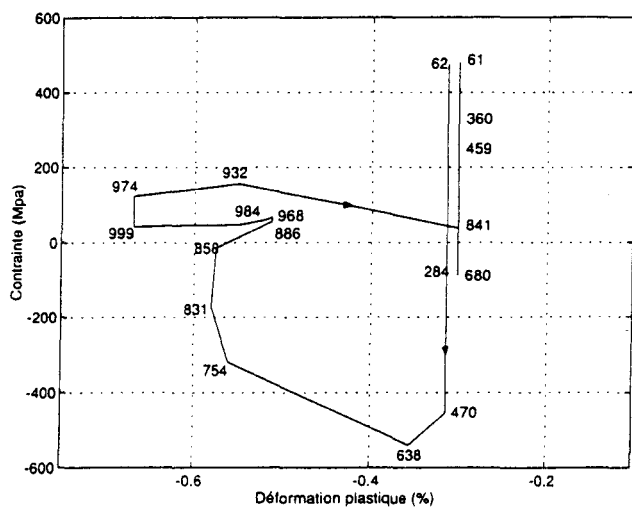
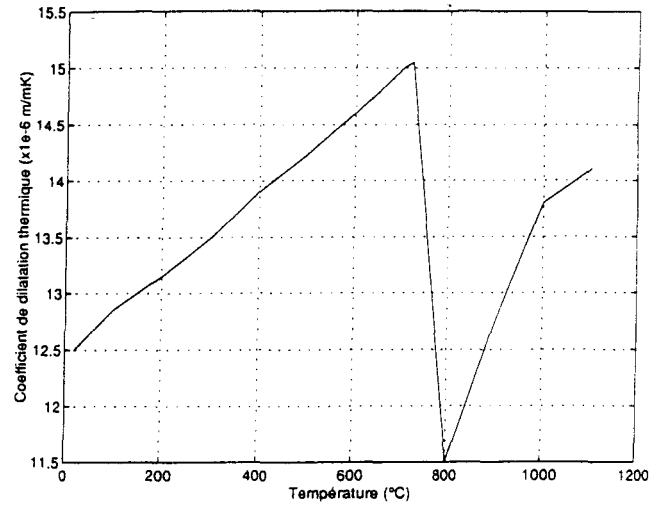
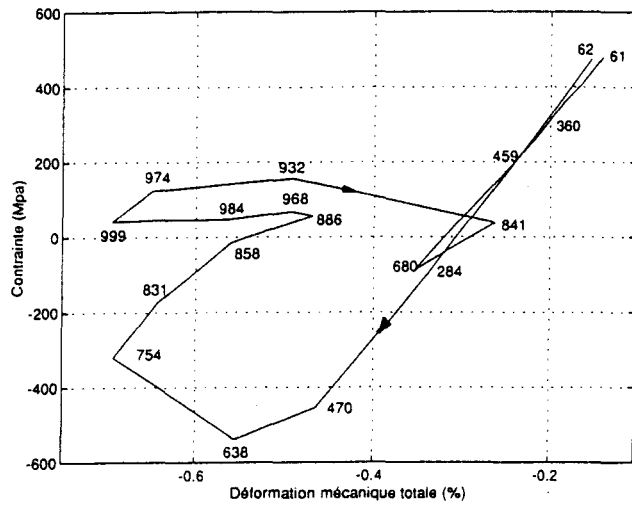


Fig. 16 - Boucles hystérésis stabilisées au sommet du point chaud dans la direction circonférentielle.

de 800 à 886°C : *le coefficient de dilatation thermique augmente à nouveau.*

En raison de l'influence des déformations autour du centre du point chaud, la diminution de la déformation plastique est importante. Le phénomène s'amplifie jusqu'à engendrer un déchargement plastique, le champ de contrainte passe en traction limitée.

de 886 à 999°C : *remontée du coefficient de dilatation thermique.*

La température continue à augmenter, le coefficient de dilatation thermique remonte à un niveau important. La déformation élastique est constante. L'écroutissage est ensuite poursuivi avec augmentation de la déformation plastique en compression jusqu'à la température maximale de 1000°C. La contrainte est quasiment stable durant cette période avec même une légère baisse en raison du comportement quasiment parfaitement plastique du matériau et de la légère diminution de la limite d'élasticité avec la température.

de 999 à 841°C : *début du refroidissement.*

La déformation élastique de compression diminue avec la température : réponse élastique de 999 à 974°C. Puis il y a déchargement plastique et remontée de la limite d'élasticité. La contrainte est presque constante en raison du comportement du matériau presque parfaitement plastique, avec même une légère baisse de 932 à 841°C issue de la diminution du coefficient de dilatation thermique.

de 841 à 60°C : *réponse élastique.*

L'état de contrainte repasse sous la courbe de variation de la limite d'élasticité avec la température. Le coefficient de dilatation thermique décroît toujours dans un premier temps pour atteindre son point bas, d'où une baisse de la contrainte et de la déformation élastique. Puis il remonte et décroît de nouveau, ce qui provoque les variations brutales des déformations élastiques. Celles-ci retrouvent enfin leur niveau initial avec une progression non linéaire due à la remontée du module d'Young avec la température.

La première partie de ce chapitre nous a permis de présenter le contexte de cette étude. Nous avons résumé l'étude qui a été effectuée par Dufrenoy [DUF¹ 95] sur le comportement thermomécanique des disques de frein vis à vis des risques de défaillance. Cette étude à laquelle j'ai participé [SAN 95] a servi de base au travail présenté ici. En effet elle nous a donné l'idée de poursuivre l'étude de l'apparition d'une fissure sur le disque de frein.

La complexité du phénomène physique étant réelle, nous essaierons de nous approcher au mieux de ce contexte physique. Il nous sera difficile de caractériser l'endommagement du disque de frein dans sa configuration exacte. Un certain nombre d'hypothèses simplificatrices sont nécessaires. Mais la démarche que nous avons adoptée nous permettra de nous en approcher.

Avant de détailler l'étude du disque il est nécessaire de faire le point sur les études qui ont été réalisées dans le passé. Même si les différentes approches existantes sont parfaitement justifiées dans le contexte dans lequel elles ont été réalisées, elles ne s'adaptent pas réellement ou de façon imprécise à l'étude de l'endommagement du disque de frein.

1.2 Synthèse bibliographique

Nous allons citer dans ce paragraphe quelques notions importantes de l'endommagement, de la prévision de la durée de vie. Les théories de la propagation des fissures sont également abordées pour leur aspect énergétique. Ces deux approches nous permettront de justifier la démarche générale adoptée.

1.2.1 Rappel de différentes notions sur l'endommagement.

La connaissance des phénomènes de fatigue est un sujet très ancien. Il suffit pour s'en convaincre de lire l'histoire de la fatigue de Schutz [SCH 96].

De nombreux critères de rupture c'est à dire des fonctions des composantes des contraintes ou des déformations caractérisant la rupture de l'élément de volume ont été proposés (Tresca, Von-Mises, Mohr). Mais ce n'est qu'assez récemment que l'on s'est proposé de modéliser la détérioration progressive de la matière qui précède la rupture macroscopique. En 1958, c'est Kachanov qui a publié l'un des premiers mémoires consacré à une variable continue d'endommagement dans le cadre de la rupture par fluage.

Il nous faut préciser ce que l'on entend par endommagement. Un matériau est vierge de tout endommagement s'il est dépourvu de fissures et de cavités à l'échelle microscopique, ou de façon plus pragmatique, si son comportement à la déformation est celui d'un matériau élaboré dans les meilleures conditions. Le stade final de l'endommagement est la rupture de l'élément de volume c'est à dire l'existence d'une fissure macroscopique.

On peut globalement distinguer deux grandes classes de modèles d'endommagement : ceux basés sur une approche fondée sur la micromécanique et l'homogénéisation qui cherche à établir un lien entre l'état macroscopique du milieu considéré et sa microstructure [JU 96], [GAM 93] et ceux issus d'une approche phénoménologique qui traite l'endommagement à l'aide de variables internes dans le cadre théorique de la thermodynamique des processus irréversibles [CHA 96]. Cette dernière approche qui consiste à postuler a priori la forme de la loi de conservation macroscopique est parfois décriée, mais elle s'avère souvent suffisante dans beaucoup de cas usuels. Une voie intermédiaire existe pour laquelle les considérations à l'échelle mésoscopique viennent justifier les choix de la formulation macroscopique.

1.2.2 Approche de l'endommagement par la théorie de la localisation.

Une approche originale de la théorie de l'endommagement et de l'apparition d'une fissure a été réalisée par R. Billardon et I. Doghri [BIL 89]. Ils ont proposé de considérer que l'amorçage d'une macro-fissure dans la structure correspond localement à la perte d'ellipticité des équations d'équilibre continu en vitesse. L'orientation de la surface de discontinuité et la forme du tenseur saut de vitesse de déformation qui peuvent alors être calculées, sont considérées comme les orientations et de le mode d'ouverture instantané locaux de la fissure lors de son amorçage. A. Benallal [BEN 91] et [BEN 92] a introduit les effets du couplage thermomécanique et de la thermo-elasto-plasticité dans les phénomènes de localisation. Même si l'approche de l'endommagement par la théorie de la localisation est au stade de la proposition, elle semble être très intéressante.

Dans le cas de la fatigue le stade final de l'endommagement est consécutif à des cycles de sollicitation. Ceci nous entraîne nécessairement vers la notion de durée de vie.

1.2.3 La prévision de la durée de vie

Les modèles de prévision de durée de vie en fatigue thermique sont généralement issus des modèles de la fatigue isotherme étendus aux conditions anisothermes. Ils ont fait l'objet d'investigations expérimentales avec des applications sur des configurations pour lesquelles les conditions limites sont bien maîtrisées et les sollicitations décomposées. Leurs applications à des structures tridimensionnelles restent délicates étant donnée la fréquente interaction des sollicitations, elles nécessitent des vérifications expérimentales approfondies. De nombreuses études ont été menées sur les aubes de turbines pour lesquelles les phénomènes de fluage sont importants étant donné les temps de maintien en température très longs [ABD 89], [LEM 88]. Le problème le plus délicat réside dans notre cas dans les variations importantes des températures.

Les modèles de prédiction de durée de vie sont nombreux ; nous citerons quelques modèles qui ont été utilisés lors d'une étude antérieure [SAN 95] :

Le modèle de Taira [TAI 73] dérivé de la relation de Manson et Coffin en fatigue isotherme. Le concept proposé par Taira consiste à suggérer que pour un cyclage en fatigue thermique, la même durée de vie peut être obtenue par un cyclage isotherme à même déformation plastique mais à une température équivalente donnée dans le cas d'un cyclage thermomécanique à basse température par la demi somme des températures extrêmes.

Le modèle de l'activation thermique de Degallaix [DEG 81] et [DEG 90]. Ce modèle consiste à séparer l'influence de l'amplitude des déformations plastiques et de la température. Il est basé sur le cumul de ces deux endommagements de fatigue, fonctions de la déformation plastique dont l'un est activé thermiquement.

Le modèle avec interaction fatigue-fluage (Modèle de Chaboche-Lemaitre) [LEM 88], [LEM.78]. Ce modèle consiste à prendre en compte les deux processus d'endommagement que sont le fluage et le cyclage mécanique.

S.J.Kim et W.D.Kim [KIM 94], J.H.Kim, S.J.Kim et W.D.Kim [KIM 95] ont développé un modèle d'endommagement applicable en grandes déformations dans le cas d'un milieu élastoplastique et viscoplastique. Le modèle est basé sur les principes de la thermodynamique (inégalité de Clausius-Duhem). La notion de contrainte effective est utilisée mais la température n'est pas intégrée dans le modèle.

N.R.Hansen et H.L.Schreyer [HAN 94] ont développé un modèle original d'endommagement. Ils utilisent la notion d'énergie élastique équivalente et de déformation équivalente en fonction d'un scalaire d'endommagement dans le cas de l'endommagement isotrope. Dans le cas de l'endommagement anisotrope l'utilisation d'un tenseur d'ordre deux ou d'ordre quatre est discutée. Les notions de température et de dissipation plastique peuvent être introduites par les principes de la thermomécanique.

J.W.Ju [JU 89] présente une nouvelle théorie de l'endommagement élastoplastique, sur la base de la théorie de la thermodynamique et l'inégalité de Clausius-Duhem. Il utilise les notions de déformation plastique effective, de contrainte effective en fonction d'un scalaire d'endommagement. Ce modèle peut être appliqué dans le cas de l'endommagement ductile ou fragile, isotropique ou anisotropique.

La plupart de ces modèles d'endommagement sont basés sur la démarche suivante :

On effectue un calcul au premier cycle de sollicitation ce qui permet de déterminer à l'aide des caractéristiques du matériau les données nécessaires à la prédiction de la durée de vie. A l'aide de différents modèles on détermine ensuite la durée de vie du matériau suivant les données obtenues au premier cycle de sollicitation. Ces modèles d'endommagement utilisent la règle de Miner du cumul du dommage de la fatigue. Un scalaire D caractérise alors l'état d'endommagement du matériau.

$D = 0$ correspond à l'état vierge.
 $D = 1$ correspond à l'état de rupture.

A $D = 1$ on a donc un nombre de cycles de sollicitation égal au nombre de cycles à rupture. Ce type de démarche, s'il a l'avantage de nécessiter peu de calculs numériques car on effectue un seul calcul au premier cycle de sollicitation, possède néanmoins des inconvénients. En effet on effectue un calcul au premier cycle de sollicitation et grâce aux essais d'endurances effectués sur un modèle simplifié en l'occurrence une éprouvette on extrapole la durée de vie du matériau.

Mais au cours du cycle de sollicitation du matériau nous savons qu'il peut y avoir adaptation du matériau, effet de rochet ou stabilisation du cycle des déformations. Nous ne pouvons donc pas maîtriser l'évolution du cycle des déformations au cours de la sollicitation du matériau par fatigue.

Une approche originale des phénomènes de fatigue est celle adoptée par Dang Van [DAN.95]. L'application du critère de Dang Van nous permet de dire qu'à un instant donné suivant une direction donnée il y a défaillance du matériau. Il se présente sous la forme :

$$\max_t \left[\max_n \|c(\bar{n}, t)\| + aP(t) \right] \leq b$$

a et b sont des constantes déterminées expérimentalement.

n est la normale à la facette considérée.

P est la pression hydrostatique

$$c(n, t) = C(n, t) + \tau^*(n)$$

$\tau^*(n)$ est la contrainte de cisaillement sur le plan de normale n

$C(n, t)$ est la contrainte maximale de cisaillement au cours du cycle après adaptation sur chaque plan de normale n .

Pour utiliser le critère de Dang Van il est nécessaire de calculer l'état des contraintes des déformations et toutes les autres données du type de sollicitation considéré à la fin de plusieurs cycles de sollicitations donnés. Ensuite, à cet instant là seulement, nous pouvons déterminer s'il y a défaillance ou non du matériau suivant le type de sollicitation donné. Cette méthode demande soit un type de calcul différent qui prend en compte l'adaptation, c'est la méthode préconisée par Dang Van et Maitournam [MAI 93], soit une quantité plus importante de calculs répétitifs par la méthode de calcul des éléments finis par exemple.

L'application du critère de Dang Van nous oblige évidemment à trouver le maximum au cours du temps et suivant une direction la valeur de la contrainte de cisaillement. Mais, il nous oblige également à balayer les points critiques du solide considéré car ce critère est valable en un point donné.

Après avoir examiné les théories de l'endommagement, cette étude sous-entend un examen des théories de la fissuration.

1.2.4 Les théories de la fissuration.

Parallèlement aux théories de l'endommagement, se sont développées les théories de la fissuration. Dès 1920, Griffith montrait que la rupture d'un milieu élastique fragile pouvait être caractérisée par une variable appelée plus tard, taux de restitution d'énergie dont la valeur critique indépendante de la géométrie de la structure était une caractéristique du matériau.

Depuis, les travaux de Rice [RIC 68] et d'Eshelby [ESH¹ 75] de nombreuses contributions sont apparues concernant les intégrales indépendantes du contour et leurs applications à la mécanique de la rupture. Les intégrales (J, L, M) présentées par Knowles et Sternberg [KNO 72] sont liées au taux d'énergie libre associé soit à la translation, la rotation ou la dilatation. La relation entre le taux d'énergie libre, (expression similaire à M) et l'intégrale J_1 est donnée par Freund [FRE 78]. Les intégrales mentionnées sont restreintes aux applications quasi-statiques.

Plusieurs publications existent concernant l'application de l'intégrale J aux problèmes plus généraux. Blackburn [BLA 72] a présenté l'intégrale J^* comme une approche de l'analyse de la rupture après écoulement plastique et la compare avec d'autres méthodes.

Les études incluant les modèles dépendant du temps ont suscité un intérêt particulier de certains auteurs : Atluri [ATL 82] considérait des intégrales de contours dans le cas de différents types de matériaux (élastiques, inélastiques) ; Freund [FRE 72], Nishioka et Atluri [NIS 83] ; Eischen et Herrmann [EIS 87] ont fait usage du concept des intégrales indépendantes du contour dans le cas de la mécanique de la rupture dynamique. Nishioka et Atluri [NIS 83] ont donné le sens physique des intégrales indépendantes du contour pour la propagation de fissure elasto-dynamique ainsi que les facteurs d'intensité de contraintes dépendant du temps. Simo et Honein [SIM 90] ont généralisé la notion de l'intégrale J à la plasticité et la viscoplasticité. A partir du théorème de Noether [NOE 18] et [NOE 71] associé à la symétrie de translation, ils ont développé une intégrale indépendante du contour.

1.2.5 L'intégrale J et la température

Un nombre important de recherches a été effectué de façon à introduire les déformations dues à la température dans l'intégrale J. Ainsworth, et al. [AIN 78] furent parmi les premiers à considérer explicitement la déformation thermique dans une intégrale indépendante du contour. Bass et Bryson [BAS 83] ont inclus les forces de volume et ont déduit la dilatation thermique dans une intégrale indépendante du contour. Hellen et Blackburn [BLA 86] proposent une nouvelle définition de J^* en présence de la température. Xu Li [XUL 93] Wilson et Yu [WIL 79] ont développé une intégrale fonction des déformations thermiques dans le cas des matériaux homogènes élastiques ne possédant pas de forces de volume. Cette intégrale est calculée suivant le principe de la superposition linéaire de deux comportements (thermique et mécanique). Mc Cartney [CAR 79], Nguyen Quoc Son, Germain et Suquet [GER 83] ont donné une interprétation thermodynamique de l'intégrale J^w de Wilson et Yu [WIL 79].

L'intégrale J et ses nombreuses applications sont issues d'un théorème ancien, le théorème de Noether.

1.2.6 Le théorème de Noether.

Le théorème de Noether [NOE 18] et [NOE 71] est à l'origine de la formulation des lois de conservations utilisées pour certaines théories de la fissuration mais il a permis également d'autres développements. En 1921 Bessel-Hagen [BES 21] a étendu le théorème de Noether par l'introduction du concept de la symétrie divergente. Gelfand et Fomin [GEL 63] ont appliqué ce théorème dans le cas de symétries à un seul paramètre et ont associé des lois de conservation à différents problèmes variationnels. Fletcher [FLE 71] a obtenu des lois de conservations dans le cas de l'élasto-dynamique. Benyounés [BEN 87] a appliqué une démarche conventionnelle permettant la détermination des lois de conservation d'une équation différentielle. La détermination de ces lois se fait par calcul des différentes symétries puis des symétries variationnelles de l'équation différentielle. Olver [OLV 93], [OLV¹ 84], [OLV² 84] a présenté une importante étude des lois de conservation applicables aux milieux tridimensionnels homogènes et isotropiques. On peut citer également le remarquable ouvrage de Olver [OLV 95] qui nous donne un éventail de différentes possibilités pour trouver des problèmes équivalents à une équation différentielle donnée.

Pour obtenir des lois de conservation pour les milieux dissipatifs Honein, Chien et Herrmann [HON 91] ont établi la méthode de l'action neutre. Cette méthode (NA method) est une procédure systématique de construction des lois de conservation quel que soit le système défini par une équation différentielle. Elle utilise la propriété du lagrangien nul appliqué à la divergence de la loi de conservation. Chien [CHI² 92] nous donne plusieurs applications de la méthode NA.

Golebiewska-Herrmann nous montre une méthode d'obtention d'une loi de conservation par l'application du formalisme lagrangien lorsque celui ci est indépendant de certaines variables. Une application plus particulière du théorème de Noether a été effectuée par Honein et Herrmann [HON 97] pour les plaques non homogènes dans le cas de l'élastostatique.

1.2.7 Le concept de force matérielle d'Eshelby et ses développements.

Le livre de G.A. Maugin [MAU 93], [MAU 95] et [MAU 90] donne un rappel sur les notions de base du concept de force matérielle d'Eshelby [ESH¹ 75], [ESH²75], pour son utilisation dans les matériaux hétérogènes, l'électromagnétisme et le domaine élastique. Le concept de tenseur moment d'Eshelby peut être utilisé pour caractériser la thermomécanique [MAU 98], [MAU 97]. L'une des applications de ce concept la plus surprenante est la mécanique des milieux continus. On peut retrouver les lois de conservation des symétries de translation de rotation et de dilatation à partir du tenseur de moment matériel d'Eshelby [EIS 87].

Certains auteurs ont appliqué une démarche en utilisant les notions de la mécanique :

De Saxcé [DES 97] sur la base des notions de force et de moment, définit une généralisation des lois de conservation en grandes déformations. Par d'importantes hypothèses simplificatrices, on obtient les lois de la mécanique des milieux continus et on peut obtenir l'intégrale J de Rice-Eshelby en petites déformations.

Brun [BRU 96] a calculé le groupe de symétrie de l'ensemble des solutions de l'équation aux dérivées partielles caractérisant l'indéformabilité d'un milieu continu.

P. Germain, Q. S. Nguyen et P. Suquet [GER 83] ont fait un résumé des différentes orientations de recherche en thermodynamique des milieux continus des années 65 à 80. Ils sont arrivés à la conclusion qu'il est nécessaire de donner une meilleure consistance mathématique aux notions de base de la thermodynamique des milieux continus et un approfondissement des interprétations physiques et de leur signification.

Il est intéressant de souligner les rappels des hypothèses du deuxième principe de la thermodynamique effectués par Woods [WOO 81] et [WOO 82].

L'objet de notre étude est l'endommagement d'un solide soumis à une sollicitation thermoplastique du type disque de frein. Nous avons montré un éventail des différentes approches de l'endommagement.

L'approche classique par l'utilisation d'une variable d'endommagement présente l'énorme inconvénient de ne pas tenir compte de l'histoire de la sollicitation. Il est difficile de prévoir comment va se comporter le matériau après un certain nombre de sollicitations. Le critère de Dang-Van présente un avantage évident en ce sens. Toutefois, ce critère est un critère isotherme et par là il ne correspond pas au type de sollicitation qui nous concerne.

Nous avons détaillé également certaines théories de la propagation des fissures. Ce type d'approche est intéressant car l'intégrale J possède une interprétation énergétique.

Simo et Honein [HON 90] ont démontré une intégrale du type intégrale J qui prend en compte la plasticité et Wagner [WAG 93] une intégrale du type intégrale J qui prend en compte la plasticité et la température. Ces deux intégrales ne correspondent pas au type de sollicitation demandé. Elles sont utilisées pour la propagation d'une fissure suivant une symétrie de translation. Notre problème physique possède une sollicitation du type symétrie de dilatation. Il sera donc nécessaire d'adapter ce type d'intégrale au problème physique qui nous concerne.

1.3 DEMARCHE DE L'ETUDE PROPOSEE.

Nous allons étudier l'endommagement d'un solide soumis à une sollicitation du type de celle du disque de frein. Nous allons à cet effet suivre la démarche suivante :

Nous rappellerons dans le **deuxième chapitre** les notions de thermodynamique des milieux continus. Nous avons observé que le disque de frein est soumis à un cycle de sollicitation thermique. Il est donc nécessaire d'aborder cette étude par le rappel d'une loi de la mécanique des milieux continus : le deuxième principe de la thermodynamique et l'inégalité de Clausius-Duhem.

Nous ferons ensuite l'hypothèse de l'état local et nous ferons le bilan des données que nous avons à notre disposition. L'inégalité de Clausius-Duhem est une traduction du second principe, il est nécessaire d'examiner les variables que nous allons y faire figurer.

Dans le premier chapitre nous avons observé que le disque, soumis à un cycle de sollicitation issu de la propagation de la chaleur, subissait une plastification. La notion de potentiel de dissipation est introduite. Ce potentiel de dissipation est soumis à la condition d'être de valeur supérieure ou égale à zéro suivant le second principe de la thermodynamique.

Le comportement thermodynamique d'un milieu étant déterminé par un potentiel et un mécanisme dissipatif associé, nous limiterons le nombre de mécanismes dissipatifs possibles par l'axiome de l'orthogonalité et l'hypothèse de la dissipation normale.

Une fonction appelée fonction pseudo-potentiel des dissipations permet de lier un potentiel dissipatif et une fonction de dissipation. Les propriétés de cette fonction et l'existence d'un pseudo potentiel dual des dissipations et des propriétés duales sont évoquées.

L'étude a été réalisée dans un cadre général, c'est alors le moment d'introduire une loi de comportement particulière : la plasticité.

Nous obtiendrons alors une formulation de l'inégalité de Clausius-Duhem qui sera simplifiée par l'hypothèse d'une transformation élastique à température constante et uniforme telle qu'elle ne modifie, ni la déformation plastique, ni les variables internes. Il n'y a donc pas de couplage thermoplastique dans l'inégalité de Clausius-Duhem que nous aurons écrite.

Nous poursuivons par l'étude des matériaux standards généralisés en transformation infiniment petite isotherme, sans prise en compte de la viscoplasticité. Nous pouvons ensuite définir une dissipation volumique intrinsèque due à la plasticité et à l'écroutissement.

Dans le **troisième chapitre** nous développerons les notions de thermoplasticité et une formulation lagrangienne.

Les notions de thermoplasticité :

Au disque de frein sera ajouté un système composé d'un réservoir de chaleur. Les principes de la thermodynamique pour un système isolé permettent d'utiliser les propriétés de la variation d'entropie de l'ensemble du système disque de frein et réservoir de chaleur. Nous

obtenons une équation d'équilibre importante du problème thermoplastique reliant le flux thermique, les contraintes, les déformations et les variables d'écroutissage.

La formulation lagrangienne :

Dans le but de pouvoir calculer une loi de conservation par le théorème de Noether un lagrangien sera formulé. Avant de donner la formulation du lagrangien, les différents potentiels thermodynamiques et la formulation de l'inégalité de Clausius-Duhem en fonction des potentiels obtenus seront calculés.

Puis le lagrangien sera calculé en fonction de l'énergie de déformation, de la dissipation que nous avons introduite à l'aide du deuxième principe de la thermodynamique, des matériaux standards généralisés et le calcul des différents potentiels. Par le calcul des dérivées partielles du lagrangien par rapport aux différentes variables qui le composent, nous vérifierons que notre solide est en équilibre et la validité de ce lagrangien.

Dans le **quatrième chapitre** nous énoncerons :

Le théorème de la symétrie variationnelle qui est une condition nécessaire à l'utilisation du théorème de Noether.

Le théorème de Noether qui nous permet d'obtenir une loi de conservation.

Le théorème du lagrangien nul qui nous permet de justifier l'addition de la dissipation thermoplastique dans le lagrangien du cas élastique.

Nous appliquerons le théorème de Noether dans le cas élastique et thermoplastique en symétrie de dilatation.

L'application de ces différents théorèmes sera réalisée dans le domaine élastique et thermoplastique. L'aspect énergétique de la loi de conservation thermoplastique sera ensuite démontré.

Après avoir calculé une loi de conservation thermoplastique il est intéressant de pouvoir en faire une application numérique.

Dans le **cinquième chapitre**, la représentation paramétrique de la loi de conservation sera donnée dans le cas de l'utilisation de la méthode d'approximation par les éléments finis.

Nous étudierons l'indépendance du contour dans le cas élastique et nous donnerons une solution théorique pour obtenir cette indépendance du contour. La modélisation d'un quart de disque soumis à un déplacement constant sera réalisée et nous analyserons les résultats dans le cas des déformations élastiques. Nous étudierons ensuite un disque soumis à une sollicitation mécanique engendrant des déformations purement élastiques puis soumis à une sollicitation thermique avec déformations plastiques. Nous donnerons ensuite une généralisation de la méthode pour obtenir l'indépendance du contour. Enfin, nous discuterons de l'application de l'apport développé au cas du disque de frein.

2 La thermodynamique des milieux continus

Les résultats des études de Dufrénoy [DUF¹ 95] ont montré que les contraintes et les déformations plastiques dans les disques de frein sont issues principalement des sollicitations en température. La difficulté de comparer des contraintes différentes à des niveaux de température très différents nous a amenés à envisager l'étude du phénomène physique par l'étude de la thermodynamique.

Dans le but de rappeler les hypothèses prises lors de notre étude, nous ferons un bref rappel des notions de mécanique et de thermodynamique. Pour ces différents rappels, les ouvrages de Germain [GER 73] et Maugin [MAU 92] ont été utilisés.

Soit Ω un domaine en \mathbb{R}^3 connexe strictement intérieur au système \mathcal{S} étudié.

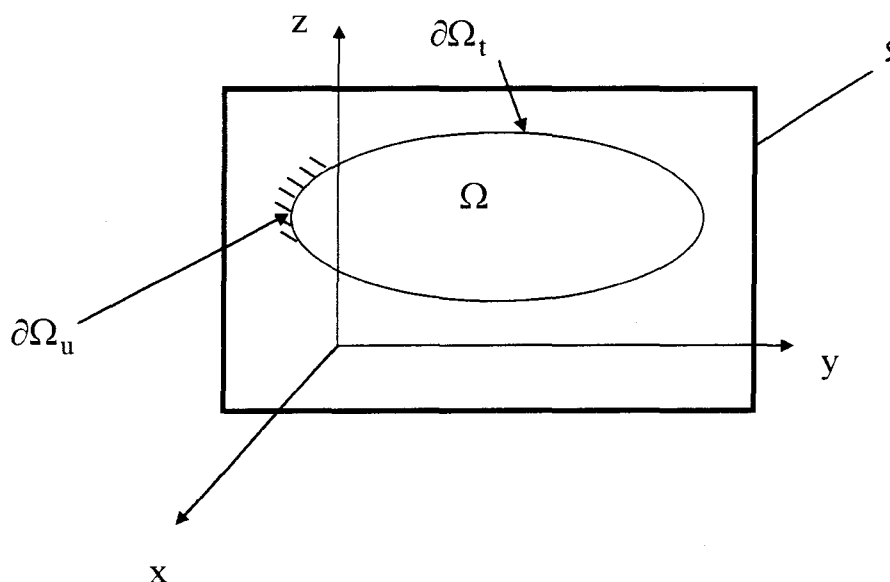


Fig. 17 - Domaine d'étude.

La frontière $\partial\Omega$ est telle que :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_t, \quad \partial\Omega_u \cap \partial\Omega_t = \emptyset$$

$\partial\Omega_u$ est la portion de la frontière où les déplacements sont donnés.

$\partial\Omega_t$ est la portion de la frontière où les forces sont données.

Sur le domaine Ω est appliquée une force de volume.

Tout point M_i du domaine Ω a une température T_i .

2.1 La thermodynamique des milieux continus.

2.1.1 L'inégalité de Clausius-Duhem.

Le deuxième principe de la thermodynamique postule que

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r}}{T} d\mathbf{v} - \int_{\partial\Omega} \frac{\bar{\mathbf{h}} \cdot \bar{\mathbf{n}}}{T} d\Gamma \quad (1)$$

T est appelé la température absolue.

S appelé entropie de Ω à l'instant t .

\mathbf{r} est une densité volumique définissant un taux de chaleur fournie à Ω .

$\bar{\mathbf{n}}$ représente le vecteur unité de normale intérieure à $\partial\Omega$.

$\bar{\mathbf{h}}$ est la quantité surfacique du taux de chaleur reçue par conduction à travers $\partial\Omega$.

Par l'application du théorème de la divergence appliqué à l'inéquation (1) et de la définition de l'énergie libre, on obtient, après calcul, une forme appropriée à la mécanique des milieux continus : l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\rho \frac{d\psi}{dt} \leq \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \rho s \frac{dT}{dt} - \frac{\bar{\mathbf{h}} \cdot \vec{\text{grad}}(T)}{T} \quad (2)$$

avec \mathbf{d} le tenseur des vitesses de déformation.

$\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes.

ψ l'énergie libre spécifique.

s appelé entropie spécifique par unité de masse de Ω à l'instant t .

2.1.2 Objet de la thermodynamique des milieux continus.

Soit un système défini par une configuration abstraite et la distribution des masses volumiques ρ_0 dans cette configuration, son mouvement est défini par

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{a}, t) \quad (3)$$

représentant la position à l'instant t d'une particule \mathbf{a} .

La connaissance de Φ permet de déterminer à chaque instant les vitesses, le gradient \mathbf{F} (fonction de transformation d'une configuration de référence à une autre configuration) et les déformations. La conservation de la masse détermine les masses volumiques ($\rho \det \mathbf{F} = \rho_0$).

La conservation de la quantité de mouvement appliquée à une partie Ω introduit en plus le champ donné \mathbf{b} des forces volumiques extérieures et le champ des tenseurs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$. La conservation de l'énergie introduit le taux de chaleur volumique reçue \mathbf{r} , l'énergie interne

spécifique e et le champ des courants de chaleur \vec{h} . Le second principe introduit l'entropie s et la température absolue T .

En résumé les grandeurs sont : $\Phi, \sigma, e, \vec{h}, s, T, b, r$. Suivant les conditions limites du problème considéré, ces grandeurs sont des données ou des inconnues.

Toutes ces grandeurs doivent être définies pour toute particule et à tout instant t et doivent vérifier les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, ainsi que l'inégalité de l'entropie. Pour être capable de déterminer les inconnues, il faut connaître les lois de comportement thermomécaniques les reliant entre elles et qui décrivent le comportement interne du milieu. Pour chaque type de milieu il faudra d'abord choisir quelles sont les variables permettant de les écrire.

Si on connaît l'ensemble des grandeurs jusqu'à l'instant t on dira que l'on connaît ainsi l'histoire du milieu jusqu'à cet instant. Un processus thermodynamique sera alors décrit par des fonctions ou plus généralement des fonctionnelles exprimant σ, e, \vec{h}, s à l'instant t avec ces variables et il faudra alors écrire ou vérifier qu'il est admissible (vérification de l'inégalité de Clausius-Duhem).

Ces lois jointes aux équations de conservation doivent permettre de déterminer le mouvement de Φ compte tenu des données traduisant l'action extérieure sur le système, des conditions initiales et des conditions limites. Ces indications seront précisées dans les paragraphes suivants.

2.2 La méthode de l'état local, le potentiel thermodynamique

Le disque de frein que nous étudions subit un cycle de sollicitation thermique. Une des manières de décrire les propriétés d'un système thermostatique est de se donner un potentiel, d'où l'intérêt de l'axiome de l'état local.

Supposons un milieu en mouvement. L'axiome de l'état local peut s'énoncer comme suit :

2.2.1 Axiome de l'état local

A tout instant t_n fixé on peut attacher à toute particule, $m+1$ paramètres $\chi_0(t_n), \chi_1(t_n), \dots, \chi_m(t_n)$, tels que l'énergie interne spécifique e , l'entropie s et la température absolue T de cette particule à l'instant t soient données en fonction de $\chi_0(t_n), \chi_1(t_n), \dots, \chi_m(t_n)$ par les mêmes expressions $e(\chi_0(t_n), \chi_1(t_n), \dots, \chi_m(t_n))$, $s(\chi_0(t_n), \chi_1(t_n), \dots, \chi_m(t_n))$, $T(\chi_0(t_n), \chi_1(t_n), \dots, \chi_m(t_n))$ valables en thermostatique.

Bien que le système soit en mouvement, chaque particule peut être considérée comme approximativement en équilibre du point de vue thermodynamique parce que les temps de réponse permettant au système thermostatique perturbé par le mouvement de retrouver un nouvel état d'équilibre thermostatique, sont supposés négligeables par rapport aux durées qui caractérisent l'évolution cinématique et dynamique du milieu.

2.2.2 Lois d'état et lois complémentaires.

Il est nécessaire de montrer comment on peut appliquer les résultats qui précèdent à la définition de processus thermodynamiques admissibles.

On pourra de façon générale écrire la dissipation volumique ϕ sous la forme d'une somme de produits

$$\phi = \sum_{\alpha=1}^m A_{\alpha} a_{\alpha} \quad (4)$$

Ces affirmations à l'état présent peuvent paraître gratuites. L'équation (4) est une hypothèse de travail provisoire ; la seule condition à laquelle doivent satisfaire les lois complémentaires est d'assurer que pour tout milieu et quels que soient les mouvements concevables l'expression ϕ de la dissipation donnée par l'équation (4) est toujours non négative. Si cette condition est satisfaite nous sommes assurés que les processus thermodynamiques qui se trouvent ainsi définis sont admissibles.

2.3 Formulation des lois complémentaires

Le potentiel thermodynamique étant supposé connu, on dit que les règles qui permettent de formuler les lois complémentaires conformément à ces principes définissent un mécanisme dissipatif associé à ce potentiel. Le comportement thermodynamique d'un milieu est donc déterminé par un potentiel et un mécanisme dissipatif associé.

Dans ce paragraphe nous ferons des hypothèses limitant considérablement la généralité des mécanismes dissipatifs possibles.

Par l'hypothèse de la dissipation normale, l'axiome d'orthogonalité, le pseudo-potentiel des dissipations et les propriétés duales, nous définissons le cadre de l'étude. Cette méthode permet la description des propriétés de convexité des deux fonctions. Jusqu'à présent, nous sommes restés dans un cadre très général, il nous reste maintenant à préciser quelles sont les lois de comportement, c'est l'objet du chapitre suivant.

Nous aborderons d'abord l'étude de la dissipation plastique puis celle du comportement thermique du disque de frein. Les deux lois de comportement seront ensuite additionnées dans une étude thermodynamique de l'ensemble disque de frein et son environnement.

2.3.1 Notions de plasticité

Nous nous proposons de compléter les principes du chapitre précédent par l'étude de la dissipation intrinsèque. Cette dissipation sera abordée par l'étude des matériaux standards généralisés [HAL 75]. Nous nous limitons au cas de la plasticité en transformation infiniment petite isotherme.

Soit (o) la configuration occupée par un élément de matière sous contrainte nulle, à la température T_r et soit (a) la configuration actuelle. On désigne par \mathbf{F} le gradient de la transformation totale (o) vers (a), par \mathbf{F}^e le gradient de déformation élastique (χ) vers (a), par

\mathbf{F}^p le gradient de la transformation plastique (o) vers (χ). Ces trois tenseurs sont liés par la relation :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (5)$$

L'état thermodynamique de l'élément de matière est défini par les variables d'état suivantes

- α_j une famille de paramètres internes caractérisant l'état d'érouissage du matériau.
- Si on pose

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e \frac{\pi}{\rho_\chi} = \mathbf{F}^{eT} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} \mathbf{F}^{eT-1} \quad (6)$$

($\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de cauchy, ρ_χ est la masse volumique dans la configuration relachée)

Le tenseur \mathbf{R} est la force associée de la vitesse de la déformation plastique $\left(\frac{d\mathbf{F}^p}{dt} \right) \mathbf{F}^{p-1}$.

De même A'_j est la force associée à la vitesse $\frac{d\alpha_j}{dt}$. On peut écrire

$$\mathbf{R}^T = \frac{\pi}{\rho_\chi} \mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e \quad (7)$$

π est le second tenseur de Piola Kirchhoff.

De par sa définition, la dissipation intrinsèque spécifique a alors pour expression la forme simplifiée de l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$D^p = A'_j \frac{d\alpha_j}{dt} + \text{tr} \left(\mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{F}^p}{dt} \mathbf{F}^{p-1} \right) \quad (8)$$

tr est la trace.

2.3.2 Les matériaux standards généralisés.

Nous appelons matériaux standards généralisés un matériau élastoviscoplastique et élastoplastique à déformation plastique instantanée pour lequel il existe une famille de paramètres internes (α_j) telle que si A'_j désigne la force associée par la relation

$$A'_j = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j} \quad (9)$$

L'hypothèse de dissipativité normale soit vérifiée pour $A(\mathbf{R}, A'_j)$. Pour un tel milieu il existe un potentiel $\varphi(\mathbf{R}, A'_j)$ convexe et semi continu inférieurement tel que

$$\left(\frac{d\mathbf{F}^P}{dt} \mathbf{F}^{P-1}, \frac{d\alpha_j}{dt} \right) \in \partial\varphi(\mathbf{R}, A'_j) \quad (10)$$

$\partial\varphi(\mathbf{R}, A'_j)$ est le sous gradient de φ . Le potentiel φ peut dépendre de la température T lorsque les effets thermiques et mécaniques sont couplés.

Le cas de la plasticité

Nous avons obtenu une formulation générale des matériaux standards généralisés. Nous précisons ces relations pour les appliquer à la plasticité ce qui nous permettra d'obtenir les règles d'écoulement et d'écrouissage avec f^k le potentiel plastique multiple.

La relation (10) se traduit par les égalités

$$\frac{d\mathbf{F}^P}{dt} \mathbf{F}^{P-1} = \lambda_k \frac{\partial f^k}{\partial \mathbf{R}} \quad (11)$$

$$\frac{d\alpha_j}{dt} = \lambda_k \frac{\partial f^k}{\partial A'_j} \quad (12)$$

Règles d'écoulement et d'écrouissage d'un matériau élastoplastique standard généralisé.

La règle d'écoulement plastique et la règle d'écrouissage du matériau sont données par

$$\lambda_k \geq 0 \text{ si } f^k(\mathbf{R}, A'_j) = 0 \text{ et } \dot{f}^k(\mathbf{R}, A'_j) = 0 \quad (13)$$

$$\lambda_k = 0 \text{ si } f^k(\mathbf{R}, A'_j) < 0 \text{ ou } \dot{f}^k(\mathbf{R}, A'_j) < 0 \quad (14)$$

2.3.3 Etude des matériaux standards généralisés en transformation infiniment petite isotherme.

Dans la suite de cette étude nous étudierons les transformations infiniment petites et nous limiterons provisoirement notre étude aux transformations isothermes.

Loi d'évolution de la transformation plastique et des paramètres internes.

Le matériau ne subit que de petits déplacements et de petites déformations. Les tenseurs de contrainte σ , \mathbf{R} , π sont alors égaux et on peut identifier les dérivées $\frac{d}{dt}$ aux dérivées particulières.

soit ε la déformation totale
 ε^e la déformation élastique
 ε^p la déformation plastique

on a :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (15)$$

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} \quad \text{et} \quad S = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (16)$$

Comme ρ est une constante on peut définir l'action thermodynamique A_j associée au paramètre interne α_j d'une manière analogue à la contrainte σ . La dissipation intrinsèque volumique a alors pour expression

$$D_v^p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - A_j \dot{\alpha}_j \geq 0 \quad (17)$$

Appliquant l'hypothèse de la dissipativité normale, on obtient pour un matériau viscoplastique à déformation instantanée en potentiel plastique multiple les lois d'évolution.

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + \lambda_k \frac{\partial f^k}{\partial \sigma} \quad (18)$$

$$-\dot{\alpha}_j = \frac{\partial \Omega}{\partial A_j} + \lambda_k \frac{\partial f^k}{\partial A_j} \quad (19)$$

Ω est le potentiel viscoplastique

$$\lambda_k \geq 0 \quad \text{si} \quad f^k(\mathbf{R}, A') = 0$$

$$\lambda_k = 0 \quad \text{si} \quad f^k(\mathbf{R}, A') < 0$$

Nous limiterons notre étude à l'utilisation de la modélisation de la plasticité. La viscoplasticité ne sera pas prise en compte.

Si on pose :

$$\mathbf{q} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\alpha} \quad (20)$$

avec \mathbf{q} le tenseur des paramètres d'écrouissage et \mathbf{D} comme tenseur des coefficients du module d'écrouissage.

On peut écrire :

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q} \quad (21)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{D}^{-1} : \dot{\mathbf{q}} \quad (22)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_j' = \mathbf{q}$$

Si on pose

$$k = 1 \text{ alors } f^k = f \text{ et } \lambda^k = \lambda \quad (23)$$

on peut donc écrire la loi d'écrouissage (19) sous la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{q}} = \lambda \mathbf{D} : \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (24)$$

De la même façon on peut écrire

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (25)$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur de déformation.
 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ le tenseur de déformation plastique.
 λ le multiplicateur plastique.

Avec les relations (21) et (22) on peut écrire l'équation (17) sous la forme:

$$\mathbf{D}_v^p = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\mathbf{q}} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q} \quad (26)$$

Grâce au modèle des matériaux standards généralisés, nous avons défini la dissipation volumique intrinsèque due à la plasticité et à l'écrouissage. Dans le chapitre suivant, nous allons définir la dissipation thermique dans le disque de frein, l'application des principes de la thermodynamique nous permettra de réunir les dissipations thermiques et volumiques dans une seule équation.

3 THERMOPLASTICITE.

Nous allons développer dans ce chapitre les notions de thermoplasticité. Ces notions sont issues d'un article de Simo et Honein [SIM 90] et d'un article de Wagner et Simo [WAG 92].

Les principes de la thermodynamique seront appliqués aux particularités de notre système physique, ce qui nous permettra d'écrire un lagrangien discrétisé dans le cas de la thermoplasticité quasi statique.

Ce lagrangien sera obtenu par addition des résultats obtenus : dissipation due à la plasticité et à l'érouissage et dissipation thermique. Nous vérifierons ensuite la validité de notre lagrangien en calculant ses dérivées partielles par rapport à ses différentes variables. Le lagrangien sera nécessaire pour l'utilisation du théorème de Noether qui permettra d'écrire une nouvelle loi de conservation.

Avant d'aborder le calcul, nous ferons un bref rappel des notions de calcul variationnel.

Un problème variationnel consiste à trouver les extremums (maximum ou minimum) d'une fonctionnelle

$$\ell[u] = \int_{\Omega} \hat{L}(x, u^{(n)}) dx$$

dans une classe de fonction $u = f(x)$. L'intégrant $\hat{L}(x, u^{(n)})$ est appelé le lagrangien de la fonctionnelle ℓ . Si $u = f(x)$ est un extremum de $\ell[u]$, alors la variation $\delta\ell[f(x)] = 0$.

La variation du lagrangien suivant chacune de ses variables donne les équations de mouvement, voire d'équilibre du solide étudié.

3.1 Application des principes de la thermodynamique à un système ne possédant pas de source de chaleur interne.

Nous allons ajouter au disque de frein Σ_1 un système Σ_2 qui est constitué d'un réservoir de chaleur [BIO 75] et [BIO 55]. Notre système total $\Sigma_1 + \Sigma_2$ est supposé isolé. Son entropie s'écrit sous la forme de la somme de l'entropie de chaque système.

$$S = S_1 + S_2 \tag{27}$$

Nous allons maintenant déterminer l'entropie de chaque système.

On détermine, dans un premier temps, le taux d'entropie du système Σ_1 . On calculera le taux d'entropie due à la dissipation thermique puis, nous ajouterons le taux d'entropie due à l'écroutissage et la dissipation plastique D_V^p , tel que $\dot{S}_1 = \dot{S}_1^{th} + \dot{S}_1^p$

Calcul du taux d'entropie \dot{S}_1^{th} due à la dissipation thermique.

Suivant Fung [FUN 65], nous posons la loi de Fourier sous la forme :

$$\vec{h} = -\text{grad}(T)\mathbf{k} \quad (28)$$

et la définition de la chaleur spécifique sans génération interne de chaleur, sous la forme :

$$-\text{div}(\vec{h}) = C_\varepsilon \dot{T} \quad (29)$$

avec : \vec{h} Le tenseur du vecteur flux de chaleur.
 \mathbf{k} Le tenseur de conduction thermique.
 C_ε La capacité calorifique d'un solide à volume constant.

$$T = T_r + \theta \quad (30)$$

T est la température actuelle.

T_r est la température de référence.

θ est la différence de température.

Grâce à l'équation (28) on peut écrire l'inégalité de Clausius-Duhem (2) sous la forme :

$$-\left(\dot{\Psi} + S\dot{T}\right) + \sigma : \dot{\varepsilon} - \frac{1}{T} \vec{h} \cdot \text{grad}(T) \geq 0. \quad (31)$$

Nous sommes concernés par de petits changements de l'état d'équilibre thermodynamique. Nous considérons donc des changements infinitésimaux de la déformation. Le deuxième principe de la thermodynamique nous donne dans ce cas

$$\sigma = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \right)_T \quad (32)$$

$$-S = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T} \right)_\varepsilon \quad (33)$$

On peut donc écrire [BIO 70] :

$$\dot{S}_1^{th} = \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial S}{\partial T} \dot{T} \quad (34)$$

si l'on introduit l'équation (33) on obtient :

$$\dot{S}_1^{\text{th}} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon \partial T} \dot{\varepsilon} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} \dot{T} \quad (35)$$

Si on pose β le tenseur du couplage température - déformation tel que :

$$\beta = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial T \partial \varepsilon^e} \quad (36)$$

On sait que :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon^e \partial T} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} = -\beta \quad (37)$$

et si on pose C_ε la chaleur spécifique à déformation constante tel que :

$$C_\varepsilon = -T_r \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} \quad (38)$$

L'équation (35) prend la forme :

$$\dot{S}_1^{\text{th}} = \frac{C_\varepsilon \dot{T}}{T_r} + \beta : \dot{\varepsilon}^e \quad (39)$$

Calcul du taux d'entropie \dot{S}_1^p due à l'écroutissage et à la dissipation plastique.

$$\dot{S}_1^p = -\frac{D_v^p}{T_r} \quad (40)$$

donc si l'on introduit l'équation (26) dans (40) nous obtenons :

$$\dot{S}_1^p = \frac{-\sigma : \dot{\varepsilon}^p + \dot{q} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}}{T_r} \quad (41)$$

$$\dot{S}_1 = \dot{S}_1^{\text{th}} + \dot{S}_1^p \quad (42)$$

L'égalité (42) donne :

$$\dot{S}_1 = \frac{-\sigma : \dot{\varepsilon}^p + \dot{q} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}}{T_r} + \frac{C_\varepsilon \dot{T}}{T_r} + \beta : \dot{\varepsilon}^e \quad (43)$$

Calcul du taux d'entropie \dot{S}_2

La variation d'entropie du système S_2 est égale à [BIO 70], [FUN 65] :

$$\dot{S}_2 = \frac{1}{T_r} \text{div}(\bar{\mathbf{h}}) \quad (44)$$

Calcul de la variation d'entropie du système S.

La conservation de l'énergie nous impose que toute l'énergie retirée du système Σ_2 s'ajoute au système Σ_1 . De plus notre système Σ lors de son évolution est en d'état d'équilibre on a $S = 0$, donc

$$S_1 = -S_2 \quad (45)$$

on sait que

$$\dot{T} = \dot{\theta} \quad (46)$$

donc

$$\frac{-\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P + \dot{\mathbf{q}}:\mathbf{D}^{-1}:\mathbf{q}}{T_r} + \frac{C_\varepsilon \dot{\theta}}{T_r} + \beta:(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P) = -\frac{1}{T_r} \text{div}(\bar{\mathbf{h}}) \quad (47)$$

après simplification par T_r on obtient :

$$-\text{div}(\bar{\mathbf{h}}) = -\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P + \dot{\mathbf{q}}:\mathbf{D}^{-1}:\mathbf{q} + T_r \beta:(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P) + C_\varepsilon \dot{\theta} \quad (48)$$

Suivant Biot [BIO 56] [BIO 59] et Fung [FUN 65] on introduit le vecteur $\vec{\mathbf{H}}$ tel que $\bar{\mathbf{h}} = \vec{\mathbf{H}}$

avec la condition $\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{0}}$ quand $\theta = \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ [FUN 65].

De l'équation (48) on obtient :

$$-\text{div}(\vec{\mathbf{H}}) = T_r \beta:(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^P) + C_\varepsilon \theta - \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}^P + \mathbf{q}:\mathbf{D}^{-1}:\mathbf{q} \quad (50)$$

avec : $\bar{\mathbf{h}} = \vec{\mathbf{H}}$ et $\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{0}}$ quand $\theta = \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$

Nous avons obtenu l'équation fondamentale d'équilibre associée au problème thermoplastique reliant le flux thermique, les contraintes, les déformations et les variables d'écroutissage.

3.2 Formulation lagrangienne

Pour développer une loi de conservation par le théorème de Noether nous allons définir un lagrangien qui sera fonction de la dissipation, de l'énergie libre totale et du potentiel de chargement.

Dans le but d'obtenir ce lagrangien, il nous faut passer par plusieurs étapes de calcul. Nous allons définir une énergie totale comme somme de l'intégrale d'un potentiel thermoplastique et d'une énergie due aux efforts extérieurs.

Après avoir calculé le lagrangien, nous constaterons que le lagrangien vérifie les équations d'équilibres du solide considéré.

3.2.1 Calcul de l'énergie totale Π .

L'énergie totale Π , va nous permettre d'écrire une formulation lagrangienne du problème physique.

$$\Pi_n(\chi_{n+1}) = \int_{\Omega} \hat{L}_n(\chi_{n+1}) ds + \int_{\partial\Omega} \hat{L}_n^c(\chi_{n+1}) d\Gamma \quad (51)$$

Le lagrangien \hat{L}_n est défini par la somme des différents termes qui se trouvent sous l'intégrale du potentiel thermoplastique total Ψ^{th} , du potentiel de chargement Ψ^L et par la dissipation plastique D_v^p .

L'énergie totale au temps t_n exprimée en fonction de χ_{n+1} est définie par la somme de l'énergie $\Pi_{n+1}(\chi_{n+1})$ au temps t_{n+1} et de la dissipation comprise dans l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$. Si on découpe l'énergie en intervalles de temps $[t_n, t_{n+1}]$, on modifie le potentiel énergétique mais aussi l'énergie de dissipation lors du passage du temps t_n au temps t_{n+1} .

$$[\text{Energie totale}]_n = [\text{Energie totale}]_{n+1} + [\text{Dissipation}]_n^{n+1} \quad (52)$$

Si on exprime l'énergie à l'instant t en terme de variable à l'instant t_{n+1} on obtient :

$$\Pi_n(\chi_{n+1}) = \Pi_{n+1}(\chi_{n+1}) + \left(L_{n+1}^d(\chi_{n+1}) - L_n^d(\chi_{n+1}) \right) \quad (53)$$

3.2.2 Calcul du potentiel thermoplastique total Ψ^{th} .

Ψ^{th} est le potentiel thermoplastique total. Il est la somme de l'énergie libre de Helmholtz à la température de référence et du terme V_c qui représente la quantité de chaleur qui peut être transformée en travail.

$$\Psi^{\text{th}} = \int_{\Omega} (\Psi|_{\theta=0} + V_c) dv \quad (54)$$

Pour une température $T = T_r + \theta$, sans changement des autres variables d'état, pour un changement $d\theta$ en un point particulier, on obtient un changement de la chaleur $C_\varepsilon d\theta$, où C_ε est la chaleur spécifique à déformation constante. La modification d'énergie interne est, par conséquent, $C_\varepsilon d\theta$ et le changement d'entropie est donc : $\frac{C_\varepsilon d\theta}{T_r + \theta}$.

Donc, l'augmentation de la température $d\theta$ provoque un changement de V_c :

$$V_c = \int_{\Omega} \left(\int_0^\theta C_\varepsilon d\theta - T_r \int_0^\theta \frac{C_\varepsilon}{T_r + \theta} d\theta \right) dv \quad (55)$$

Si on multiplie C_ε par $\frac{T_r + \theta}{T_r + \theta}$ on a :

$$V_c = \int_{\Omega} \left(\int_0^\theta C_\varepsilon \left(\frac{T_r + \theta}{T_r + \theta} \right) d\theta - T_r \int_0^\theta \frac{C_\varepsilon}{T_r + \theta} d\theta \right) dv$$

$$V_c = \int_{\Omega} \left(\int_0^\theta \frac{C_\varepsilon \theta}{T_r + \theta} d\theta \right) dv$$

Pour de petites différences de température $\theta \ll T_r$, $T_r + \theta \cong T_r$ dans le dénominateur donc

$$V_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{C_\varepsilon \theta^2}{T_r + \theta} \right) dv \quad (56)$$

Le terme V_c est équivalent à une puissance.

Le changement de température modifie seulement la déformation volumique.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}} = \alpha_{\text{th}} \theta \mathbf{I} \quad (57)$$

avec

| | |
|--|---|
| $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}}$ | le tenseur de déformation thermique |
| α_{th} | le coefficient de dilatation thermique |
| θ | la différence de température avec la température de référence |
| \mathbf{I} | la matrice identité |

On écrit l'équation de la déformation de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}} + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (58)$$

Par l'hypothèse que l'énergie libre est une fonction strictement convexe des variables $(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha})$, on définit une fonction d'énergie libre Ψ à l'instant t par :

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{q}) = w(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}}) + \frac{1}{2} \mathbf{q} : \boldsymbol{\alpha} \quad (59)$$

$\boldsymbol{\alpha}$ est considéré comme la force thermodynamique conjugué de \mathbf{q} .

Si on introduit l'égalité (21) $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}$ dans (59) on obtient

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{q}) = w(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}}) + \frac{1}{2} \mathbf{q} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q} \quad (60)$$

De l'égalité (54):

$$\Psi^{\text{th}} = \int_{\Omega} \left(\Psi|_{\theta=0} + \frac{1}{2} \left(\frac{C_{\varepsilon}}{T_r + \theta} \right) \theta^2 \right) dv$$

et de l'égalité (50)

$$-\text{div}(\vec{H}) = T_r \beta : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + C_{\varepsilon} \theta - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^p + \mathbf{q} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}$$

dont on peut tirer :

$$\theta = \left(\text{div}(\vec{H}) + T_r \beta : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^p + \mathbf{q} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q} \right) \left(-\frac{1}{C_{\varepsilon}} \right)$$

et de la définition de l'énergie libre de Helmholtz (60) on obtient :

$$\Psi^{\text{th}} = \int_{\Omega} \left(w(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{q}:\mathbf{D}^{-1}:\mathbf{q}) + \frac{1}{2(T_r + \theta)C_\varepsilon} \left[T_r \beta : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \text{div}(\vec{H}) - \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}^p + \mathbf{q}:\mathbf{D}^{-1}:\mathbf{q} \right]^2 \right) dv \quad (61)$$

On pose V l'énergie de déformation avec $\theta = 0$

$$V = w|_{\theta=0}$$

Pour de petits changements de température $\theta \ll T_r$, $T_r + \theta \cong T_r$ donc on peut écrire l'égalité (61) sous la forme :

$$\Psi^{\text{th}} = \int_{\Omega} \left(V(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \frac{1}{2}(\mathbf{q}:\mathbf{D}^{-1}:\mathbf{q}) + \frac{1}{2T_r C_\varepsilon} \left[T_r \beta : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \text{div}(\vec{H}) - \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}^p + \mathbf{q}:\mathbf{D}^{-1}:\mathbf{q} \right]^2 \right) dv \quad (62)$$

3.2.3 Calcul du potentiel des forces extérieures Ψ^L .

Pour les petites déformations et de petits changements de température θ on peut introduire les conditions limites suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{\theta} + \bar{T}_r &= \bar{T} \quad \text{sur } \partial\Omega & \bar{h} &= \bar{\bar{h}} \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}\bar{\mathbf{n}} &= \bar{\bar{\mathbf{t}}} \quad \text{sur } \partial_{\boldsymbol{\sigma}}\Omega & \bar{\mathbf{u}} &= \bar{\bar{\mathbf{u}}} \quad \text{sur } \partial_u\Omega \end{aligned} \quad (63)$$

avec

| | | |
|------|---|---|
| avec | { | \bar{T} La température actuelle. |
| | | \bar{T}_r La température de référence. |
| | | $\bar{\theta}$ La variation de température. |

$\bar{\bar{T}}, \bar{\bar{h}}, \bar{\bar{\mathbf{u}}}$ sont la température, le flux de chaleur limite sur $\partial\Omega$ et le déplacement sur $\partial\Omega_u$.

Suivant Biot [BIO 56] et [BIO 59] le potentiel de chargement s'écrit alors :

$$\Psi^L = - \int_{\Omega} (\rho \bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{u}}) dv - \int_{\partial\Omega} \left(\bar{\bar{\mathbf{t}}} \cdot \bar{\mathbf{u}} - \frac{\bar{\theta}}{T_r} \vec{H} \cdot \bar{\mathbf{n}} \right) d\Gamma \quad (64)$$

3.2.4 Calcul de la dissipation par l'inégalité de Clausius-Duhem.

Si on différencie l'énergie libre de Helmholtz en utilisant la méthode de Coleman [NOW 84] nous obtenons :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - \beta \boldsymbol{\theta} \quad (65)$$

On peut donc écrire l'inégalité de Clausius-Duhem (2) sous la forme :

$$D^p = - \left(\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\mathbf{q}}} : \dot{\mathbf{q}} + S \dot{T}_r \right) + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{T_r} \bar{\mathbf{h}} \cdot (\text{grad}(T)) \geq 0 \quad (66)$$

car

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\mathbf{q}}} : \dot{\mathbf{q}}$$

et

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$$

donc

$$D^p = - \left(\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \mathbf{q} : \mathbf{D}^{-1} : \dot{\mathbf{q}} + S \dot{T}_r \right) + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{T_r} \bar{\mathbf{h}} \cdot \left(\overrightarrow{\text{grad}}(T) \right) \geq 0$$

Par la définition de $\bar{\mathbf{h}} = -\mathbf{k} \left(\overrightarrow{\text{grad}}(T) \right)$ et par les propriétés de la réduction des formes quadratiques on peut écrire :

$$D^p = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{q} : \mathbf{D}^{-1} : \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2T_r} \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{k}^{-1} \dot{\mathbf{H}} \geq 0 \quad (67)$$

3.2.5 Calcul du lagrangien.

Les conditions d'optimisation de Kuhn-Tucker pour les lois d'érouissage et la règle d'écoulement plastique sont formulées par l'introduction de la fonction lagrangienne [LUE84] et [STR 86] :

$$L_{n+1}^d = L_n^d + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \left(D^p - \lambda_{n+1} f_{n+1} \right) d\Omega dt \quad (68)$$

Par substitution de (67) dans l'équation (68), et par l'approximation des dérivées par la méthode des différences finies d'ordre 1 et l'approximation de l'intégrale sur le temps par la formule de Newton - progressif (différences divisées), on obtient :

$$L_{n+1}^d = L_n^d + \int_{\Omega} \left((\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} - \lambda_{n+1} f_{n+1} + \frac{1}{2T_r \Delta t} (\bar{\mathbf{H}}_{n+1} - \bar{\mathbf{H}}_n)^T \mathbf{k}^{-1} (\bar{\mathbf{H}}_{n+1} - \bar{\mathbf{H}}_n) \right) d\Omega \quad (69)$$

Par addition des différents termes qui se trouvent sous l'intégrale des potentiels ψ^{th} et ψ^L et par addition de la dissipation D et du terme $-\lambda_{n+1} f_{n+1}$ on obtient :

$$\Pi_n(\chi_{n+1}) = \Pi_{n+1}(\chi_{n+1}) + (L_{n+1}^d(\chi_{n+1}) - L_n^d(\chi_{n+1})) \quad (70)$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{L}_n(\chi_{n+1}) = & V(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) + \frac{1}{2} (\mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1}) - \rho \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \cdot \bar{\mathbf{u}}_{n+1} + \\ & \frac{1}{2T_r C_\varepsilon} \left[T_r \beta : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) + \text{div}(\bar{\mathbf{H}}_{n+1}) - \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p + \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} \right]^2 \\ & - \lambda_{n+1} f_{n+1} + (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} + \\ & \frac{1}{2T_r \Delta t} (\bar{\mathbf{H}}_{n+1} - \bar{\mathbf{H}}_n)^T \mathbf{k}^{-1} (\bar{\mathbf{H}}_{n+1} - \bar{\mathbf{H}}_n) \end{aligned} \quad (71)$$

et

$$\hat{L}_n^c(\chi_{n+1}) = -\bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \bar{\mathbf{u}}_{n+1} + \frac{1}{T_r} \bar{\theta} \bar{\mathbf{H}}_{n+1} \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad (72)$$

3.2.6 Vérification du lagrangien et de l'équilibre du solide.

Avec (65) et l'hypothèse

$$1 + \frac{\theta}{T_r} \approx 1 \quad \text{si } \theta \ll T_r \quad (73)$$

suivant le principe du travail virtuel, un corps est en équilibre si

$$\delta \Pi = 0 \quad (74)$$

La variation $\delta \Pi$ s'écrit sous la forme

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{a}_1} \delta \mathbf{a}_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{a}_2} \delta \mathbf{a}_2 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{a}_n} \delta \mathbf{a}_n = 0 \quad (75)$$

et on obtient

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} \end{pmatrix} = 0 \quad (76)$$

afin de vérifier cette équation nous allons calculer la dérivée de Gâteaux par rapport à ses différentes variables.

Les résultats du calcul des dérivations ont été obtenus par [WAG 92].

Dérivation par rapport à λ :

Par dérivation de $\lambda_{n+1} \mathbf{f}_{n+1}$ on a :

$$\delta \Pi_n(\chi_{n+1}; \delta \lambda) = \int_{\Omega} (\mathbf{f}_{n+1} \delta \lambda) d\Omega = 0$$

Si $\mathbf{f}_{n+1} \leq 0$ on a $\lambda_{n+1} \geq 0$ et $\mathbf{f}_{n+1} \lambda_{n+1} = 0$

Dérivation par rapport à \mathbf{q} :

$$\delta \Pi_n(\chi_{n+1}; \delta \mathbf{q}) = \int_{\Omega} \left(-\mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} \frac{2\theta_{n+1}}{T_r} + \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_n - \lambda_{n+1} \frac{\partial \mathbf{f}_{n+1}}{\partial \mathbf{q}} \right) \delta \mathbf{q} d\Omega = 0$$

Si $\frac{\theta}{T_r}$ est négligeable on a :

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n - \lambda_{n+1} \mathbf{D} : \frac{\partial \mathbf{f}_{n+1}}{\partial \mathbf{q}} \quad (77)$$

qui est la forme discrétisée de l'équation (24)

Dérivation par rapport à ε^p :

$$\delta \Pi_n(\chi_{n+1}; \delta \varepsilon^p) = \int_{\Omega} \left(\sigma_{n+1} \left(1 + \frac{\theta_{n+1}}{T_r} \right) - \frac{\partial V}{\partial \varepsilon^p} + \beta \theta_{n+1} + \left(\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p \right) : \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} - \lambda_{n+1} \frac{\partial \mathbf{f}_{n+1}}{\partial \sigma} : \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right) \delta \varepsilon^p d\Omega = 0$$

Si $\frac{\theta_{n+1}}{T_r}$ est négligeable on a :

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \lambda_{n+1} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \sigma} \quad (78)$$

qui est la forme discrétisée de l'équation (25)

Dérivation par rapport à H :

Si \mathbf{k}^{-1} est symétrique

$$\begin{aligned} \delta \Pi_n(\chi_{n+1}; \delta \bar{\mathbf{H}}) &= \int_{\Omega} \left(-\frac{\theta_{n+1}}{T_r} \frac{\partial(\operatorname{div}(\bar{\mathbf{H}}_{n+1}))}{\partial \bar{\mathbf{H}}} + \frac{1}{T_r \Delta t} (\bar{\mathbf{H}}_{n+1} - \bar{\mathbf{H}}_n)^T \mathbf{k}^{-1} \delta \mathbf{H} \right) d\Omega + \\ &\int_{\partial \Omega} \left(\frac{\bar{\theta}}{T_r} \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}_{n+1}}{\partial \bar{\mathbf{H}}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \right) d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

après calculs on obtient

$$\frac{\vec{\operatorname{grad}}(\theta_{n+1}) \mathbf{k}}{T_r} + \frac{1}{T_r \Delta t} (\bar{\mathbf{H}}_{n+1} - \bar{\mathbf{H}}_n) = \vec{0} \quad (79)$$

En prenant la dérivée de $-\operatorname{div}(\bar{\mathbf{H}})$, on obtient l'équation d'équilibre de l'énergie :

$$-\operatorname{div}(\bar{\mathbf{H}}) = T_r \beta : (\varepsilon - \varepsilon^p) + C_\varepsilon \theta - \sigma : \varepsilon^p + \mathbf{q} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q} \quad (80)$$

Dérivation par rapport à u :

On utilisera : $\varepsilon_{n+1} = \delta \bar{\mathbf{u}}$

$$\delta \Pi_n(\chi_{n+1}; \delta \bar{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon} - \theta_{n+1} \beta \right) : \nabla(\delta \bar{\mathbf{u}}) - \rho \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \right) d\Omega - \int_{\partial \Omega} (\bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0$$

après calcul on a

$$\operatorname{div}(\sigma_{n+1}) + \rho \bar{\mathbf{b}}_{n+1} = \vec{0} \quad (81)$$

On obtient donc par dérivation de l'énergie totale par ses différentes variables les équations de la plasticité, les lois d'érouissage et de la thermique, ce qui justifie la validité du lagrangien discrétisé.

Les lois d'équilibres étant respectées nous avons montré que notre solide est en équilibre.

Nous avons introduit dans ce chapitre les notions de thermoplasticité. Les équations de la thermique et le deuxième principe de la thermodynamique nous ont permis d'écrire une équation importante du problème thermoplastique reliant le flux thermique, les contraintes, les déformations et les variables d'écroutissage. Cette équation a été introduite dans la formulation de l'énergie libre. L'énergie libre nous a permis d'écrire une formulation lagrangienne du problème physique considéré. Ce lagrangien nous permettra par l'application du théorème de Noether d'obtenir une loi de conservation.

4 APPLICATION DU THEOREME DE NOETHER AU DOMAINE ELASTIQUE ET THERMOPLASTIQUE.

En 1918 Emmy Noether démontra le résultat remarquable qu'un système ayant pour base un principe variationnel, chaque loi de conservation du système provient d'une propriété de symétrie correspondante.

Pour appliquer le théorème de Noether, il est nécessaire d'avoir certaines formes de structure variationnelle dans le système en considération. Chaque groupe de symétrie d'un système d'équation d'Euler-Lagrange ne donne pas une loi de conservation. Il est nécessaire que le groupe satisfasse une propriété variationnelle supplémentaire. Nous allons donc, dans un premier temps, donner quelques précisions sur le théorème de Noether avant de l'appliquer au sujet qui nous concerne.

Le théorème de Noether [NOE 18] et [NOE 71] sous sa forme initiale est un théorème de mathématiques pures. Nous utiliserons une forme appliquée du théorème de Noether donnée par Olver [OLV 93], [OLV¹ 84] et [OLV² 84] (annexe1).

Nous utiliserons les propriétés du théorème de Noether dans le cas de l'élastostatique. Les résultats obtenus dans ce dernier cas sont déjà connus, ils ont été démontrés par J.K.Knowles et E.Sternberg [KNO 72]. Nous utiliserons ensuite les propriétés du lagrangien nul pour introduire les résultats obtenus dans le cas de la thermoplasticité dans ceux connus en élastostatique.

4.1 APPLICATION DU THEOREME DE NOETHER AU DOMAINE ELASTIQUE

A la vue des résultats obtenus par P.Dufrénoy [DUF¹ 95] qui sont résumés dans le chapitre 1, nous pouvons constater que, pour un repère centré au point chaud nous avons globalement une symétrie de dilatation de notre phénomène physique. Ceci est logique puisque le solide est soumis à une sollicitation thermique. La propagation de la chaleur ne possède pas de direction privilégiée puisque le matériau est continu et homogène.

Dans le but de simplifier le problème nous supposons l'absence de forces de volume. Les équations d'équilibres sont déterminées par minimisation de la fonctionnelle

$$W[u] = \int_{\Omega} w(x, u^{(1)}) dx \quad (82)$$

qui représente l'énergie de déformation. Elle est fonction de plusieurs paramètres : le gradient de déformation, les contraintes. Néanmoins, certaines particularités du phénomène physique nous donneront des restrictions sur la forme de $w(x, u^{(1)})$. Des particularités peuvent nous

donner des symétries variationnelles de $w(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(l)})$ et par le théorème de Noether, nous donnerons immédiatement des lois de conservation utilisables dans le cas des solides élastiques.

La formulation de la fonctionnelle de l'énergie de déformation (82) est donnée sous sa forme générale. Il est nécessaire d'ajouter une hypothèse concernant l'énergie de déformation. Si le matériau est homogène, l'énergie de déformation est explicitement indépendante des coordonnées x_i .

On considère la symétrie de dilatation

$$(\mathbf{x}) \rightarrow (\lambda \mathbf{x}) \quad \lambda > 0 \quad (83)$$

pour la fonctionnelle $\Pi[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) d\mathbf{x}$ nous allons prouver que \mathbf{v} tel que

$$\mathbf{v} = \mathbf{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{P-N}{P} \mathbf{u}^j \frac{\partial}{\partial u^j}$$

est un générateur infinitésimal donc qu'il génère une symétrie variationnelle de w .

Dans le cas général d'une étude tridimensionnelle $N = 3$. $P = 2$ est le degré d'homogénéité de l'énergie de déformation.

Par identification de l'égalité

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}$$

(annexe 1) on peut écrire :

$$\xi^i = x^i \quad (84)$$

$$\phi^j = \frac{P-N}{P} u^j \quad (85)$$

$$\phi^x = \text{div}_x (\phi - \xi u_{,x}) + \xi u_{,xx}$$

avec $u_{,xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\text{div}_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_{,x} \frac{\partial}{\partial u} + u_{,xx} \frac{\partial}{\partial u_{,x}}$

$$\phi^x = \text{div}_x \left(\frac{P-N}{P} u^j - x u_{,x} \right) + x u_{,xx}$$

$$\phi^x = -u_{,x} - xu_{,xx} + xu_{,xx} + u_{,x} \frac{P-N}{P}$$

$$\phi^x = -u_{,x} + u_{,x} \frac{P-N}{P} \quad (86)$$

De même

$$\phi^y = \text{div}_y(\phi - \xi u_{,y}) + \xi u_{,yy}$$

$$\phi^z = \text{div}_z(\phi - \xi u_{,z}) + \xi u_{,zz}$$

Nous avons symétrie variationnelle si :

$$\text{pr}^{(n)}v(L) + L\text{div}(\xi) = 0$$

Nous appliquons ce théorème avec une prolongation à l'ordre 1 soit $n = 1$

$$\text{pr}^{(1)}v(L) + W\text{div}(\xi) = 0$$

que nous allons vérifier.

Nous avons :

$$\text{div}(\xi) = D_x(x) + D_y(y) + D_z(z) = 3 \quad (87)$$

si on développe la définition de la prolongation (annexe 1) à l'ordre 1 on obtient :

$$\text{pr}^{(1)}v = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{P-N}{P} u^j \frac{\partial}{\partial u^j} + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_{,x}^j} + \phi^y \frac{\partial}{\partial u_{,y}^j} + \phi^z \frac{\partial}{\partial u_{,z}^j} \quad (88)$$

Si on introduit l'égalité (86) dans la définition de la prolongation à l'ordre 1 (88) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(1)}v = & x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{P-N}{P} u^j \frac{\partial}{\partial u^j} - u_{,x}^j \left(1 - \frac{P-N}{P}\right) \frac{\partial}{\partial u_{,x}^j} - u_{,y}^j \left(1 - \frac{P-N}{P}\right) \frac{\partial}{\partial u_{,y}^j} \\ & - u_{,z}^j \left(1 - \frac{P-N}{P}\right) \frac{\partial}{\partial u_{,z}^j} \end{aligned} \quad (89)$$

et si l'égalité (89) est appliquée à l'énergie de déformation nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(1)}v(\mathbf{w}) = & x^i \frac{\partial(\mathbf{w})}{\partial x^i} + \frac{P-N}{P} u^j \frac{\partial(\mathbf{w})}{\partial u^j} - u^j_{,x} \left(1 - \frac{P-N}{P}\right) \frac{\partial(\mathbf{w})}{\partial u^j_{,x}} \\ & - u^j_{,y} \left(1 - \frac{P-N}{P}\right) \frac{\partial(\mathbf{w})}{\partial u^j_{,y}} - u^j_{,z} \left(1 - \frac{P-N}{P}\right) \frac{\partial(\mathbf{w})}{\partial u^j_{,z}} \end{aligned} \quad (90)$$

Nous allons détailler le calcul de cette dernière égalité.

On suppose que le matériau est homogène. Dans ce cas, l'énergie de déformation w ne dépend pas explicitement des coordonnées x , y et z . Nous avons donc :

$$x^i \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{w}) = 0 \quad (91)$$

L'équation de Navier en présence d'un champ de déplacement irrotationnel qui est la caractéristique de la dilatation volumique, nous permet d'écrire

$$\frac{P-N}{P} u^j \frac{\partial}{\partial u^j}(\mathbf{w}) = 0 \quad (92)$$

On sait que

$$\frac{\partial}{\partial u^j_{,x}}(\mathbf{w}) = \sigma_x$$

donc :

$$- u^j_{,x} \frac{\partial}{\partial u^j_{,x}}(\mathbf{w}) - u^j_{,y} \frac{\partial}{\partial u^j_{,y}}(\mathbf{w}) - u^j_{,z} \frac{\partial}{\partial u^j_{,z}}(\mathbf{w}) = -2w \quad (93)$$

Dans le cas d'une étude tridimensionnelle $N = 3$ et comme le degré d'homogénéité de l'énergie de déformation P est $P = 2$, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{P-N}{P} u^j \frac{\partial}{\partial u^j}(\mathbf{w}) = & -\frac{1}{2} u^j \frac{\partial}{\partial u^j}(\mathbf{w}) \\ - u^j_{,x} \left(-\frac{P-N}{P}\right) \frac{\partial}{\partial u^j_{,x}}(\mathbf{w}) - & u^j_{,y} \left(-\frac{P-N}{P}\right) \frac{\partial}{\partial u^j_{,y}}(\mathbf{w}) - u^j_{,z} \left(-\frac{P-N}{P}\right) \frac{\partial}{\partial u^j_{,z}}(\mathbf{w}) = -w \end{aligned} \quad (94)$$

Nous obtenons donc par addition des résultats (87), (91), (92), (93), (94) l'égalité :

$$\text{pr}^{(1)}v(\mathbf{L}) + \text{Ldiv}(\xi) = -w - 2w + 3w = 0 \quad (95)$$

ce qui confirme que le générateur infinitésimal de ce groupe de transformation écrit sous sa forme générale

$$v = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{2} u^j \frac{\partial}{\partial u^j}$$

gène une symétrie variationnelle de w .

- Il existe une autre possibilité de montrer que le générateur infinitésimal

$$x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{2} u^j \frac{\partial}{\partial u^j}$$

gène une symétrie variationnelle de w [OLV 93] :

Si $w(\nabla u)$ est une fonction algébrique homogène de degré P , alors

$$w(\lambda \nabla u) = \lambda^P w(\nabla u) \quad \lambda > 0 \quad \text{quel que soit } \nabla u.$$

Le groupe de dilatation

$$(x, u) \rightarrow (\lambda x, \lambda^{(P-N)/P} u)$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$(x, u) \rightarrow (\lambda x, \lambda^{1-N/P} u)$$

nous permet d'écrire :

$$\nabla u \rightarrow \lambda^{-N/P} \nabla u$$

On obtient alors le résultat suivant :

Pour tout $\tilde{u} = \lambda^{(P-N)/P} u$, et $\tilde{x} = \lambda x$ le groupe de dilatation

$$(x, u) \rightarrow (\lambda x, \lambda^{(P-N)/P} u) \quad \lambda > 0$$

est une symétrie variationnelle puisque

$$\int_{\tilde{\Omega}} w(\nabla \tilde{u}) d\tilde{x} = \int_{\Omega} w(\lambda^{-N/P} \nabla u) \lambda^N dx = \int_{\Omega} w(\nabla u) dx \quad (96)$$

- Une dernière méthode proposée par Bui [BUI 77] permet de montrer les conditions d'invariance de $w dv$.

Considérons une transformation à un paramètre scalaire $\delta\eta$ correspondant à un changement d'échelle dans les trois directions de l'espace ou bien deux directions de l'espace (problème plan).

$$x'_i = (1 + \delta\eta)x_i$$

$$u'_i = (1 + c\delta\eta)u_i$$

le volume élémentaire se transforme suivant :

$$dv \rightarrow dv' = (1 + \delta\eta)^N dv$$

$N=3$ dans le cas 3D

$N=2$ dans le cas 2D

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = \frac{1 + c\delta\eta}{1 + \delta\eta} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$w(u_{i,j}) \rightarrow w\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j}\right) = \left(\frac{1 + c\delta\eta}{1 + \delta\eta}\right)^2 w\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

La condition d'invariance de $w dv$ s'écrit :

$$\left(\frac{1 + c\delta\eta}{1 + \delta\eta}\right)^2 (1 + \delta\eta)^N = 1$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$(1 + c\delta\eta)^2 (1 + \delta\eta)^{N-2} = 1$$

en petites déformations on peut faire l'approximation

$$(1 + 2c\delta\eta)(1 + (N - 2)\delta\eta) = 1$$

D'où, si on néglige le terme $(2c\delta\eta)(N - 2)\delta\eta$

$$2c + N - 2 = 0$$

Si $N=3$ (espace à trois dimensions) $c = -0.5$

Si $N=2$ (espace à deux dimensions) $c = 0$

Dans le cas d'une étude dans un espace de dimension deux nous obtenons :

$$(x, u) \rightarrow (\lambda x, u) \quad \lambda > 0$$

Nous avons montré plusieurs méthodes pour obtenir la symétrie variationnelle. Nous pouvons maintenant écrire une loi de conservation.

Suivant le corollaire du théorème de Noether (annexe 1)

$$P_i = \sum_{\alpha=1}^q \phi_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_{,i}^{\alpha}} + \xi^i L - \sum_{\alpha=1}^q \sum_{j=1}^p \xi^j u_{,j}^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_{,i}^{\alpha}}$$

sont les composantes de la loi de conservation $\text{div}(\vec{P}) = 0$ pour l'équation d'Euler-Lagrange $E(L) = 0$. Par substitution des égalités (84) et (85) dans le corollaire du théorème de Noether (annexe 1) la loi de conservation correspondante est

$$\sum_{i=1}^p \text{div}^i \left(\frac{P-N}{P} \sum_{\alpha=1}^q u^{\alpha} \frac{\partial \hat{L}}{\partial u_{,i}^{\alpha}} + x^i \hat{L} - \sum_{j=1}^p \sum_{\alpha=1}^q x^j u_{,j}^{\alpha} \frac{\partial \hat{L}}{\partial u_{,i}^{\alpha}} \right) = 0 \quad (97)$$

Dans notre cas si on pose :

$$T_j^i = \hat{L} \delta_j^i - u_{,j} \frac{\partial \hat{L}}{\partial u_{,i}} \quad (98)$$

avec I la matrice unité ;

$$\vec{T} = \hat{L} I - \nabla^T \vec{u} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \nabla \vec{u}} \quad (99)$$

La quantité associée à P est :

$$M^i = \frac{P-N}{P} u^j \frac{\partial \hat{L}}{\partial u_{,i}^j} + x^j T_j^i \quad (100)$$

4.2 APPLICATION DU THEOREME DE NOETHER EN THERMOPLASTICITE

Nous avons utilisé les résultats du théorème de Noether appliqué au cas élastostatique. Nous allons maintenant l'étendre au cas de la thermoplasticité en utilisant les résultats obtenus précédemment.

4.2.1 Divergence et lagrangien nul.

Pour appliquer le théorème du lagrangien nul (annexe 1), nous allons le simplifier en abordant le problème variationnel à l'ordre 1 ce qui est le cas de l'élasticité.

Application du corollaire du théorème du lagrangien nul en thermoplasticité.

L'équation d'Euler-Lagrange d'un problème variationnel de degré 1, $W[u] = \int_{\Omega} L dx$

écrit en élasticité sous la forme

$$W[u] = \int_{\Omega} w(\mathbf{x}, u^{(1)}) d\mathbf{x}$$

s'écrit :

$$\frac{\partial L(\chi_{n+1})}{\partial \left(\frac{\partial \chi_{n+1}}{\partial \mathbf{x}} \right)} = \frac{\partial w(\chi_{n+1})}{\partial \left(\frac{\partial u_{n+1}}{\partial \mathbf{x}} \right)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$$

Dans le cas de la thermoplasticité, on a obtenu précédemment (70) le résultat suivant:

$$\Pi_n(\chi_{n+1}) = \int_{\Omega} \hat{L}_n(\chi_{n+1}) ds + \int_{\partial\Omega} \hat{L}_n^c(\chi_{n+1}) d\Gamma$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{L}_n(\chi_{n+1}) = & V(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1}) - \rho \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \cdot \bar{\mathbf{u}}_{n+1} + \\ & \frac{1}{2T_r C_\varepsilon} \left[T_r \boldsymbol{\beta} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) + \text{div}(\bar{\mathbf{H}}_{n+1}) - \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p + \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} \right]^2 \\ & - \lambda_{n+1} f_{n+1} + (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} + \\ & \frac{1}{2T_r \Delta t} (\bar{\mathbf{H}}_{n+1} - \bar{\mathbf{H}}_n)^T \mathbf{k}^{-1} (\bar{\mathbf{H}}_{n+1} - \bar{\mathbf{H}}_n) \end{aligned} \quad (101)$$

et

$$\hat{L}_n^c(\chi_{n+1}) = -\bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \bar{\mathbf{u}}_{n+1} + \frac{1}{T_r} \bar{\boldsymbol{\theta}} \bar{\mathbf{H}}_{n+1} \cdot \bar{\mathbf{n}}$$

Il est nécessaire de vérifier si les termes que l'on ajoute dans le lagrangien $\hat{L}_n^c(\chi_{n+1})$ sont des termes de lagrangien nul de façon à pouvoir admettre ces termes dans la loi de conservation définie dans le domaine élastique.

Suivant le théorème du lagrangien nul (annexe 1) :

$$0 \equiv E(L) = \frac{\partial L}{\partial u} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{,x}} + D_x^2 \frac{\partial L}{\partial u_{,xx}} + \dots + (-1)^n D_x^n \frac{\partial L}{\partial u_{,n}}$$

avec :

$$D_x P = \frac{\partial P}{\partial x} + u_{,x} \frac{\partial P}{\partial u}$$

avec

$$u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Si on pose

$$L = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{,x})$$

on a

$$0 \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} - D_x \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_{,x}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \mathbf{u}_{,x}} - \mathbf{u}_{,x} \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}_{,x}} - \mathbf{u}_{,xx} \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u}_{,x}^2} \quad (102)$$

Avec le lagrangien défini en thermoplasticité on obtient :

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial (\nabla \chi_{n+1})} = \left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, -\frac{\theta_{n+1}}{T_r}, 0, 0, 0 \right)^T$$

avec $\chi_{n+1} = (\bar{\mathbf{u}}_{n+1}, \bar{\mathbf{H}}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p, \mathbf{q}_{n+1}, \lambda_{n+1})$

le résultat $\frac{\partial \hat{L}}{\partial (\nabla \bar{\mathbf{u}}_{n+1})} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ est logique puisque la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ est issue de l'énergie

de déformation du lagrangien. Par contre le deuxième terme $\frac{\partial \hat{L}}{\partial (\nabla \bar{\mathbf{H}}_{n+1})} = -\frac{\theta_{n+1}}{T_r}$ n'est pas

un terme issu de la déformation élastique. Ce terme est issu de la dissipation thermique. Il ne permet pas de vérifier l'hypothèse du lagrangien nul. On négligera alors la valeur $\text{div}(\bar{\mathbf{H}}_{n+1})$.

avec

$$\chi_{n+1} = (\bar{\mathbf{u}}_{n+1}, \bar{\mathbf{H}}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p, \mathbf{q}_{n+1}, \lambda_{n+1})$$

nous avons toujours

$$\frac{\partial L(\chi_{n+1})}{\partial \left(\frac{\partial \chi_{n+1}}{\partial \mathbf{x}} \right)} = \frac{\partial L(\chi_{n+1})}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}} \right)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (103)$$

On obtient donc :

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial (\nabla \chi_{n+1})} = (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, 0, 0, 0, 0)^T \quad (104)$$

Ce dernier résultat (104) nous permet d'écrire que tous les termes de dissipation de l'égalité (101) sont identiquement nuls par la dérivation (104). Ceci justifie l'utilisation du théorème du lagrangien nul appliqué aux égalités (100) et (101).

4.2.2 Calcul de la loi de conservation et de sa divergence.

Nous avons obtenu précédemment (99) :

$$\bar{T}_{n+1}^p = \hat{L}I - \nabla^T \bar{u} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \nabla \bar{u}}$$

donc par l'égalité (104)

$$\bar{T}_{n+1}^p = \hat{L}_n(\chi_{n+1})I - (\nabla \bar{u}_{n+1})^T \sigma_{n+1} \quad (105)$$

et si l'on introduit l'égalité (101) dans l'égalité (105) on obtient :

$$\bar{T}_{n+1}^p = \left[\begin{array}{l} V(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1}) - \rho \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \cdot \bar{\mathbf{u}}_{n+1} + \\ \frac{1}{2T_r C_\varepsilon} \left[T_r \beta : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) - \sigma_{n+1} : \varepsilon_{n+1}^p + \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} \right]^2 \\ - \lambda_{n+1} f_{n+1} + (\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p) : \sigma_{n+1} - (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} \\ + \frac{1}{2T_r \Delta t} (\bar{\mathbf{H}}_{n+1} - \bar{\mathbf{H}}_n)^T \mathbf{k}^{-1} (\bar{\mathbf{H}}_{n+1} - \bar{\mathbf{H}}_n) \\ - (\nabla \bar{\mathbf{u}}_{n+1})^T \sigma_{n+1} \end{array} \right] I \quad (106)$$

Nous avons calculé la valeur de \bar{T}_{n+1}^p , il est nécessaire d'introduire cette quantité par le théorème de la divergence dans une loi de conservation modifiée.

Nous avons obtenu par le théorème de Noether la loi de conservation $\text{div}(\bar{\mathbf{P}}) = 0$. Jusqu'à présent, nous avons calculé la valeur de $\bar{\mathbf{P}}$ que nous avons appelé M^i pour des raisons historiques [KNO 72]. Nous n'avons pas calculé $\text{div}(\bar{\mathbf{P}})$. Nous pouvons à ce sujet citer Olver [OLV 93] :

Si un lagrangien $L(x, u^{(n)})$ peut être écrit sous la forme d'une divergence, $L = \text{div}(\bar{\mathbf{P}})$ pour tout p uplet \mathbf{P} , alors par le théorème de la divergence $L[u] = \int_{\Omega} L ds = \int_{\partial \Omega} \bar{\mathbf{P}} d\Gamma$ quelle que soit la fonction $u = f(x)$ et le domaine Ω et sa frontière $\partial \Omega$.

Le théorème de Noether nous donne la loi de conservation suivante : $\text{div}(\bar{\mathbf{P}}) = 0$. Par un théorème de [OLV 93], on montre que si $\text{div}(\bar{\mathbf{P}}) = 0$ est une loi de conservation pour notre application élastique, alors \mathbf{P} lui même est une loi de conservation.

Donc, si on applique le théorème de la divergence à l'égalité (100) on obtient :

$$\int_{\partial\Omega} (M^i) \bar{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (M^i_{,i}) d\Omega = 0$$

Cette loi de conservation est vérifiée en l'absence de singularité. Nous sommes en présence d'une singularité, cette valeur sera donc différente de zéro.

Il sera nécessaire de calculer la valeur de $\text{div}(\bar{T}_{n+1}^p)$ et d'introduire sa valeur dans l'égalité ci dessus.

CALCUL DE $\text{div}(\bar{T}_{n+1}^p)$.

Après calcul on obtient [WAG 90] :

$$\begin{aligned} \text{div}(\bar{T}_{n+1}^p) = & -\rho \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \nabla \mathbf{q}_n - \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \nabla \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \\ & + \frac{1}{T_r \Delta t} (\nabla \bar{H}_{n+1} - \nabla \bar{H}_n)^T \mathbf{k}^{-1} (\bar{H}_{n+1} - \bar{H}_n) \\ & - \frac{\theta_{n+1}}{T_r} \left[T_r \boldsymbol{\beta} : (\nabla \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \nabla \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) - \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \nabla \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p + \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \nabla \mathbf{q}_{n+1} \right] \end{aligned} \quad (107)$$

Si on simplifie l'équation ci-dessus en considérant qu'il n'y a pas de variation de température, ni de déformation plastique, ni écrouissage, on obtient :

$$\text{div}(\bar{T}_{n+1}^p) = \rho \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \quad (108)$$

Par intégration on obtient le tenseur moment d'Eshelby.

Si on applique le théorème de Noether à l'étude de la symétrie de dilatation nous pouvons utiliser les résultats que nous avons obtenus précédemment.

$$\bar{\mathbf{T}} = \hat{L}_n(\chi_{n+1}) \mathbf{I} - \nabla(\bar{\mathbf{u}}_{n+1})^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$$

$$M^i = \frac{P - N}{P} u^j \frac{\partial \hat{L}}{\partial u^j_i} + x^j T^i_j$$

On obtient donc en introduisant (106) :

$$M^i = x^i \left(\begin{array}{l} V(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{n+1} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{q}_{n+1}) - \rho \bar{\mathbf{b}}_{n+1} \cdot \bar{\mathbf{u}}_{n+1} + \\ \frac{1}{2T_r C_\varepsilon} \left[T_r \beta : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) - \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p + \mathbf{q}_{n+1} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{q}_{n+1} \right]^2 \\ - \lambda_{n+1} f_{n+1} + (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{q}_{n+1} + \\ \frac{1}{2T_r \Delta t} (\bar{\mathbf{H}}_{n+1} - \bar{\mathbf{H}}_n)^\top \mathbf{k}^{-1} (\bar{\mathbf{H}}_{n+1} - \bar{\mathbf{H}}_n) \\ - (\nabla \bar{\mathbf{u}}_{n+1})^\top \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ + \frac{P-N}{P} \bar{\mathbf{u}}_{n+1} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \end{array} \right) \mathbf{I} \quad (109)$$

Si on calcule la divergence de M^i nous obtenons les égalités suivantes :

$$M^i_{,i} = \frac{P-N}{P} \left(\left(u^j_{,i} \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial u^j_{,i}} \right) + u^j \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial u^j_{,i}} \right)_{,i} \right) + x^j T^i_{j,i} + x^j_{,i} T^i_j \quad (110)$$

avec

$$x^j_{,i} = \delta_i^j \quad (111)$$

le symbole de kronecker

$$x^j_{,i} T^i_j = T^i_i = \text{Trace}(\mathbf{T}) \quad (112)$$

et

$$\delta_i^i = N \quad (113)$$

donc

$$x^j_{,i} T^i_j = T^i_i = N \hat{\mathcal{L}} - u^k_{,i} \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial u^k_{,i}} \quad (114)$$

d'autre part :

$$u^j_{,i} \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial u^j_{,i}} = (\nabla \mathbf{u})^\top \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial (\nabla \mathbf{u})} = P \mathbf{w} \quad (115)$$

P est le degré d'homogénéité de l'énergie de déformation suivant le théorème d'Euler. Dans le cas de l'énergie de déformation $P = 2$.

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial u^j_{,i}} = \sigma_j^i \quad (116)$$

et

$$u^j \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial u_{,i}^j} \right)_{,i} = u^j (\sigma_i^j)_{,i} = -\bar{u}_{n+1} (\rho \bar{b}_{n+1}) \quad (117)$$

Si l'on introduit les équations (114), (115), (116), et (117) dans l'équation (110) on obtient l'égalité suivante :

$$M_{,i}^i = x^j (T_{j,i}^i) + N(\hat{L} - w) - \frac{P-N}{P} (\bar{u}_{n+1} \cdot \rho \bar{b}_{n+1}) \quad (118)$$

d'où

$$M_{,i}^i = x^i \left(\begin{array}{l} -\rho \nabla (\bar{b}_{n+1} \cdot \bar{u}_{n+1}) + \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \nabla \mathbf{q}_n - \sigma_{n+1} : \nabla \varepsilon_n^p + \\ \frac{1}{T_r \Delta t} (\nabla \bar{H}_{n+1} - \nabla \bar{H}_n)^T \mathbf{k}^{-1} (\bar{H}_{n+1} - \bar{H}_n) \\ - \frac{\theta_{n+1}}{T_r} \left[T_r \beta : (\nabla \varepsilon_{n+1} - \nabla \varepsilon_{n+1}^p) - \sigma_{n+1} : \nabla \varepsilon_{n+1}^p + \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \nabla \mathbf{q}_{n+1} \right] \end{array} \right) \\ + N \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} (\mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1}) - \rho \bar{b}_{n+1} \cdot \bar{u}_{n+1} - \lambda_{n+1} f_{n+1} + (\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p) : \sigma_{n+1} + \\ \frac{1}{2 T_r C_\varepsilon} \left[T_r \beta : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) - \sigma_{n+1} : \varepsilon_{n+1}^p + \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} \right]^2 \\ - (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} + \frac{1}{2 T_r \Delta t} (\bar{H}_{n+1} - \bar{H}_n)^T \mathbf{k}^{-1} (\bar{H}_{n+1} - \bar{H}_n) \end{array} \right) \\ - \frac{P-N}{P} (\bar{u}_{n+1} \cdot \rho \bar{b}_{n+1}) \quad (119)$$

Par le théorème de la divergence en l'absence de singularité on peut écrire

$$M^* = \int_{\partial \Omega} (M^i) n d\Gamma - \int_{\Omega} (M_{,i}^i) d\Omega = 0 \quad (120)$$

On peut alors écrire l'intégrale M^* sous la forme :

$$M^* = \int_{\partial \Omega} \left(\frac{P-N}{P} u^j \frac{\partial \hat{L}}{\partial u_{,i}^j} + x^j T_{j,i}^i \right) n d\Gamma - \int_{\Omega} \left(x^j T_{j,i}^i + N(\hat{L} - w) - \frac{P-N}{P} (\bar{u}_{n+1} \cdot \rho \bar{b}_{n+1}) \right) d\Omega \quad (121)$$

avec \mathbf{n} la normale extérieure à $\partial\Omega$. En l'absence de forces de volume on peut réduire l'intégrale M^* à :

$$\begin{aligned}
M^* = & \int_{\partial\Omega} \left(\begin{array}{c} \mathbf{x}^i \\ \left(\begin{array}{c} V(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1}) + \\ \frac{1}{2T_r C_\varepsilon} \left[T_r \boldsymbol{\beta} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) - \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p \right]^2 \\ + \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} \\ + (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} \\ + \frac{1}{2T_r \Delta t} (\bar{\mathbf{H}}_{n+1} - \bar{\mathbf{H}}_n)^T \mathbf{k}^{-1} (\bar{\mathbf{H}}_{n+1} - \bar{\mathbf{H}}_n) \\ - (\nabla \bar{\mathbf{u}}_{n+1})^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ + \frac{P-N}{P} \bar{\mathbf{u}}_{n+1} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \end{array} \right) \mathbf{I} \end{array} \right) \mathbf{n}_i \, d\Gamma - \\
& \int_{\Omega} \left(\begin{array}{c} \mathbf{x}^i \\ \left(\begin{array}{c} \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \nabla \mathbf{q}_n - \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \nabla \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \frac{1}{T_r \Delta t} (\nabla \bar{\mathbf{H}}_{n+1} - \nabla \bar{\mathbf{H}}_n)^T \mathbf{k}^{-1} (\bar{\mathbf{H}}_{n+1} - \bar{\mathbf{H}}_n) \\ - \frac{\theta_{n+1}}{T_r} \left[T_r \boldsymbol{\beta} : (\nabla \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \nabla \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) - \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \nabla \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p + \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \nabla \mathbf{q}_{n+1} \right] \end{array} \right) + \\ N \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1}) + (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \\ \frac{1}{2T_r C_\varepsilon} \left[T_r \boldsymbol{\beta} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) - \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p + \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} \right]^2 \\ - (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} + \frac{1}{2T_r \Delta t} (\bar{\mathbf{H}}_{n+1} - \bar{\mathbf{H}}_n)^T \mathbf{k}^{-1} (\bar{\mathbf{H}}_{n+1} - \bar{\mathbf{H}}_n) \end{array} \right) \end{array} \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{122}$$

En l'absence de singularité à l'intérieur du domaine Ω , l'intégrale $M^* = 0$.

Si on considère que $\text{div}(\bar{\mathbf{H}}) = 0$ est une quantité négligeable alors :

$$\theta_{n+1} \cong \frac{-1}{C_\varepsilon} \left[T_r \beta : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) - \sigma_{n+1} : \varepsilon_{n+1}^p + \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} \right] \quad (123)$$

$$M^* = \int_{\partial\Omega} \left(\begin{array}{c} \mathbf{x}^i \left(\begin{array}{c} V(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1}) + \frac{C_\varepsilon}{2T_r} [\theta_{n+1}]^2 \\ + (\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p) : \sigma_{n+1} - (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} + \\ \frac{1}{2T_r \Delta t} (\bar{H}_{n+1} - \bar{H}_n)^T \mathbf{k}^{-1} (\bar{H}_{n+1} - \bar{H}_n) \\ - (\nabla \bar{u}_{n+1})^T \sigma_{n+1} \\ + \frac{P-N}{P} \bar{u}_{n+1} \sigma_{n+1} \end{array} \right) \mathbf{n}_i d\Gamma - \\ \int_{\Omega} \left(\begin{array}{c} \mathbf{x}^i \left(\begin{array}{c} \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \nabla \mathbf{q}_n - \sigma_{n+1} : \nabla \varepsilon_n^p \\ - \frac{\theta_{n+1}}{T_r} \left[T_r \beta : (\nabla \varepsilon_{n+1} - \nabla \varepsilon_{n+1}^p) - \sigma_{n+1} : \nabla \varepsilon_{n+1}^p + \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \nabla \mathbf{q}_{n+1} \right] + \\ \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1}) + (\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p) : \sigma_{n+1} + \frac{C_\varepsilon}{2T_r} [\theta_{n+1}]^2 \\ - (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} + \frac{1}{2T_r \Delta t} (\bar{H}_{n+1} - \bar{H}_n)^T \mathbf{k}^{-1} (\bar{H}_{n+1} - \bar{H}_n) \end{array} \right) \end{array} \right) d\Omega \quad (124)$$

4.3 Aspects énergétiques de l'intégrale M^*

L'intégrale M^* possède une interprétation énergétique de la même façon que l'intégrale J [SHO 87]. Par Bui et Rice [BUD 73] et suivant l'argumentation de Simo et Honein [SIM 90] l'intégrale M^* est équivalente à un échange d'énergie totale.

Le développement ci dessous concerne une région Ω_A contenant une cavité C libre de toute contrainte. Les conditions limites sur la surface extérieure Ω_A sont invariantes durant l'intervalle de temps appartenant à l'intervalle $t \in [t_n, t_{n+1}]$

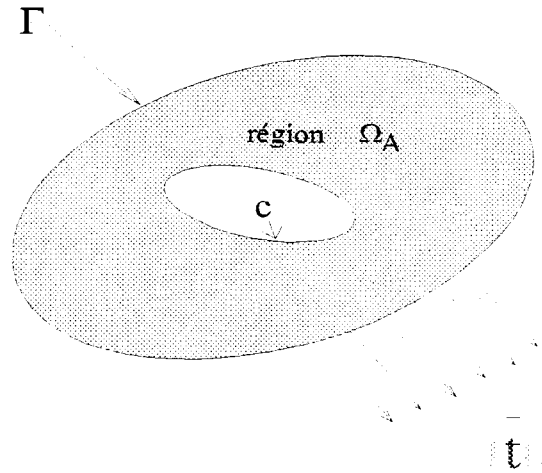


Fig 18 - Domaine arbitraire contenant une cavité.

Soit $\Pi_n(\chi_n)$ l'énergie totale à l'instant t_n et soit $\Pi_{n+1}(\chi_{n+1})$ l'énergie totale à l'instant t_{n+1} . Soit $D(\chi_n, \chi_{n+1})$, la dissipation de l'énergie totale pendant l'intervalle de temps $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Les variables d'état χ_n demeurent inchangées, elles sont considérées comme condition initiale au début de l'intervalle de temps.

Nous pouvons écrire l'équation d'équilibre de l'énergie

$$\Pi_n(\chi_n) = \Pi_{n+1}(\chi_{n+1}) + D(\chi_n, \chi_{n+1}) \quad (125)$$

S'il y a processus de croissance de cavité dans le solide, on trouve un terme additionnel dans l'équation d'équilibre de l'énergie.

$$\Pi_n(\chi_n) = \Pi_{n+1}(\chi_{n+1}) + D(\chi_n, \chi_{n+1}) + F(\chi_{n+1}) \quad (126)$$

où $F(\chi_{n+1})$ est l'énergie due à la dilatation d'une cavité. Grâce à la relation

$$\Pi_n(\chi_{n+1}) = \Pi_{n+1}(\chi_{n+1}) + L_{n+1}^d(\chi_{n+1}) - L_n^d(\chi_{n+1}) \quad (127)$$

L'énergie de dilatation peut donc s'écrire par combinaison des deux équations précédentes sous la forme

$$F(\chi_{n+1}) = -(\Pi_n(\chi_{n+1}) - \Pi_n) \quad (128)$$

Pour la démonstration de l'interprétation physique de l'intégrale M les variables d'état χ_{n+1} sont considérées constantes.

Suivant [SIM 90], la dérivée de l'énergie dissipée par la dilatation d'une cavité est la dérivée de l'énergie totale disponible à l'instant t_n exprimée en fonction des variables d'état χ_{n+1} à l'instant t_{n+1} :

On peut écrire [BUD 73] :

$$\frac{\partial \Pi_n(\chi_{n+1})}{\partial t} = \int_{\Omega_A} \left(\frac{\partial \hat{L}_n(\chi_{n+1})}{\partial t} \right) d\Omega - \int_C (\hat{L}_n(\chi_{n+1}) \mathbf{x}_i) \mathbf{n}_i d\Gamma - \int_{\Gamma} (\hat{L}_n^c(\chi_{n+1}) \mathbf{x}_i) \mathbf{n}_i d\Gamma \quad (130)$$

puisque $\partial\Omega_A = \Gamma + C$ et par le théorème de la divergence on obtient :

$$\frac{\partial \Pi_n(\chi_{n+1})}{\partial t} = \int_{\Omega_A} \left(\frac{\partial \hat{L}_n(\chi_{n+1})}{\partial t} - \frac{\partial \hat{L}_n^c(\chi_{n+1})}{\partial t} \right) d\Omega - \int_C \mathbf{x}_i \left(\hat{L}_n(\chi_{n+1}) \mathbf{I} - (\nabla \bar{\mathbf{u}}_{n+1})^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \mathbf{n}_i d\Gamma \quad (131)$$

par le théorème des puissances virtuelles la première intégrale est nulle on peut donc écrire :

$$\frac{\partial \Pi_n(\chi_{n+1})}{\partial t} = - \int_C \mathbf{x}_i \left(\hat{L}_n(\chi_{n+1}) \mathbf{I} - (\nabla \bar{\mathbf{u}}_{n+1})^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right) \mathbf{n}_i d\Gamma \quad (132)$$

d'autre part si on applique le théorème de la divergence à l'équation (100)

$$\mathbf{M}^i = \mathbf{x}^j \left(\hat{L}_n(\chi_{n+1}) \mathbf{I} - (\nabla \bar{\mathbf{u}}_{n+1})^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \right)$$

on obtient :

$$\int_{\partial\Omega_A} \mathbf{M}^i(\chi_{n+1}) \mathbf{n}_i d\Gamma - \int_C \mathbf{M}^i(\chi_{n+1}) \mathbf{n}_i d\Gamma = \int_{\Omega_A} \text{div}(\mathbf{M}^i(\chi_{n+1})) d\Gamma$$

en inversant l'ordre des termes on obtient

$$\int_C \mathbf{M}^i(\chi_{n+1}) \mathbf{n}_i d\Gamma = \int_{\partial\Omega_A} \mathbf{M}^i(\chi_{n+1}) \mathbf{n}_i d\Gamma - \int_{\Omega_A} \text{div}(\mathbf{M}^i(\chi_{n+1})) d\Gamma$$

soit

$$\int_C \mathbf{M}^i(\chi_{n+1}) \mathbf{n}_i d\Gamma = \mathbf{M}^* \quad (133)$$

ce résultat nous permet de montrer que

$$\frac{\partial F(\chi_{n+1})}{\partial t} = -\mathbf{M}^* \quad (134)$$

Ce type de démonstration effectué par [BUD 73] pour la symétrie de dilatation dans le domaine élastique, et par [SIM 90] pour la symétrie de translation dans le domaine élastoplastique nous permet d'interpréter l'intégrale \mathbf{M}^* comme étant l'énergie de déformation qui provoque une dilatation de la cavité C.

5 FORMULATION NUMERIQUE DE L'INTEGRALE M*

Après avoir formulé de façon théorique l'intégrale M*, il est nécessaire d'en faire une application numérique. Cette application se fera bien entendu dans le contexte du calcul du disque de frein que nous avons développé dans le premier chapitre.

L'une des méthodes numériques les plus utilisées est la méthode des éléments finis. Cette méthode permet de résoudre des équations aux dérivées partielles. Pour résoudre ces équations, il est nécessaire d'utiliser la formulation intermédiaire intégrale (ou variationnelle). La méthode des résidus pondérés permet de transformer les équations aux dérivées partielles en une formulation intégrale. Nous obtenons alors un système d'équations algébriques qu'il est possible de résoudre par une méthode numérique connue.

Les calculs effectués par Dufrénoy [DUF¹ 95] ont été réalisés sur la base de la méthode des éléments finis avec le programme ANSYS. Nous modéliserons notre phénomène physique par la méthode des éléments finis.

La méthode de calcul par la méthode des éléments finis ne sera pas détaillée dans ce chapitre. Seuls les points essentiels permettant de comprendre les méthodes utilisées seront précisés.

5.1 REPRESENTATION PARAMETRIQUE.

L'expression de l'intégrale M*, donnée par (124), comporte une intégration de surface et une intégration de contour. Les éléments utilisés sont isoparamétriques, à huit noeuds (figure 19).

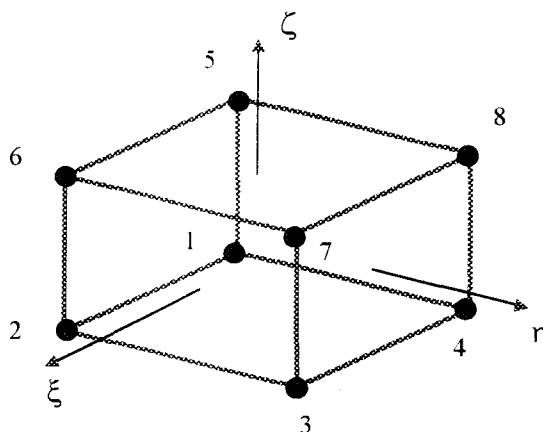


Fig. 19 - Eléments à 8 noeuds.

La relation entre les coordonnées (x,y) et les déplacements (u,v) globaux et locaux est donnée par :

$$x_i = \sum_{k=1}^8 N_k X_{ik} \quad (135)$$

$$y_i = \sum_{k=1}^8 N_k Y_{ik}$$

$$u_i = \sum_{k=1}^8 N_k U_{ik} \quad (136)$$

$$v_i = \sum_{k=1}^8 N_k V_{ik}$$

où, X_{ik} , Y_{ik} sont les coordonnées nodales et U_{ik} V_{ik} les déplacements nodaux.

Un système de coordonnées locales ξ , ζ et η est associé à chaque élément quadratique à huit noeuds. Les fonctions d'interpolation N_i sont construites comme suit :

$$\langle N_k \rangle = \left\langle \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) \right\rangle \quad (137)$$

$$-1 \leq \xi \leq 1$$

$$-1 \leq \zeta \leq 1$$

$$-1 \leq \eta \leq 1$$

ξ_i, ζ_i, η_i sont les coordonnées du noeud considéré

$$N_1 = \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \quad N_2 = \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)$$

$$N_3 = \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \quad N_4 = \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)$$

$$N_5 = \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \quad N_6 = \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)$$

$$N_7 = \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \quad N_8 = \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)$$

UTILISATION EN DEUX DIMENSIONS

Le disque de frein que nous avons à étudier est un solide en trois dimensions. L'intégrale M^* qui a été définie comporte une intégrale de contour et une intégrale de surface. Il y a donc nécessité d'accorder les deux principes.

Utilisant les équations (135), (136), le gradient de u_i dans un élément est donné par :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^8 \sum_{J=1}^2 \frac{\partial N_k}{\partial \eta_J} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_j} U_{ik} \quad (138)$$

$\frac{\partial \eta_J}{\partial x_j}$ est la matrice Jacobien de la transformation (136). Cette méthode de calcul est identique

pour toutes les divergences qui seront calculées.

Si l'on désire effectuer un calcul aux points de Gauss avec un élément linéaire à quatre noeuds et deux dimensions, on obtient les fonctions d'interpolation suivantes (figure 20) :

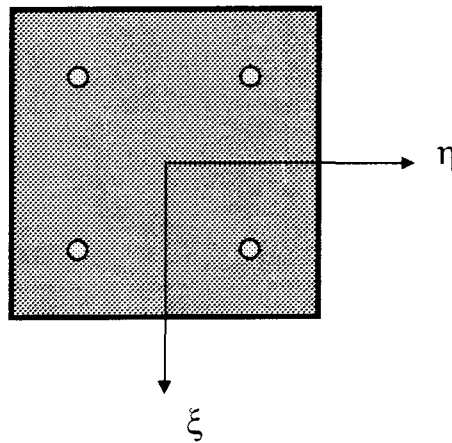


Fig 20 - Elément de référence carré avec les points d'intégration.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) & N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (139)$$

c'est à dire les fonctions d'interpolation de l'élément 3D en posant $\zeta = 1$.

Si l'on choisit d'utiliser quatre points d'intégration suivant la figure 20 les coordonnées des points d'intégration dans le repère local utilisé sont : $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Les coefficients de pondération (ou poids) sont égaux à 1.

5.2 CALCUL DE L'INTEGRALE M*

Avec l'intégration de Gauss, la forme discrétisée de l'intégrale M* (124) telle que :

$$M^* = \int_{\partial\Omega} (M^i) \bar{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (M^i_{,i}) d\Omega = 0$$

est :

$$M^* = \sum_{n=1}^{N_c} \sum_{p=1}^{P_c} (M^i n_j |J_c|)_{\eta_p} w_p + \sum_{n=1}^{N_c} \sum_{m=1}^{M_c} (M^i n_j |J_c|)_{\xi_m} w_m + \sum_{n=1}^{N_s} \sum_{m=1}^{M_s} \sum_{p=1}^{P_s} (M^i_{,i} |J_s|)_{\xi_m, \eta_p} w_m w_p \quad (140)$$

avec : w_p, w_m fonctions de poids,

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (141)$$

$$M^i = x^j \left(\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2} (\varepsilon_{ij}^e |_{n+1} \sigma_{ij} |_{n+1}) + \frac{1}{2} (q_{ij} |_{n+1} D_{ijkl}^{-1} q_{kl} |_{n+1}) + \frac{C_\varepsilon}{2T_r} [\theta_{n+1}]^2 \right) \\ + (\varepsilon_{ij}^p |_{n+1} - \varepsilon_{ij}^p |_n) \sigma_{ij} |_{n+1} - (q_{ij} |_{n+1} - q_{ij} |_n) D_{ijkl}^{-1} q_{kl} |_{n+1} + n_j \\ \left(\frac{1}{2T_r \Delta t} (H_i |_{n+1} - H_i |_n) k^{-1} (H_i |_{n+1} - H_i |_n) \right) \\ - (u_{i,j} |_{n+1}) \sigma_{ij} |_{n+1} \\ + \frac{P-N}{P} u_i |_{n+1} \sigma_{ij} |_{n+1} \end{array} \right) \quad (142)$$

$$\begin{aligned}
M_{,i}^i = & x^j \left(\begin{aligned} & \left(q_{ij}|_{n+1} D_{ijkl}^{-1} q_{kl,j}|_n - \sigma_{ij}|_{n+1} \varepsilon_{ij,j}^p|_n \right) \\ & - \frac{\theta_{n+1}}{T_r} \left[T_r \beta_{ij} \left(\varepsilon_{ij,j}|_{n+1} - \varepsilon_{ij,j}^p|_{n+1} \right) - \sigma_{ij}|_{n+1} \varepsilon_{ij,j}^p|_{n+1} \right] \\ & + q_{ij}|_{n+1} D_{ijkl}^{-1} q_{kl,j}|_{n+1} + m_{ij} q_{ij,j}|_{n+1} \end{aligned} \right) \\
+ N & \left(\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(q_{ij}|_{n+1} D_{ijkl}^{-1} q_{kl}|_{n+1} \right) + \left(\varepsilon_{ij}^p|_{n+1} - \varepsilon_{ij}^p|_n \right) \sigma_{ij}|_{n+1} + \frac{C_\varepsilon}{2T_r} [\theta_{n+1}]^2 \\ & + \frac{1}{2T_r \Delta t} \left(H_j|_{n+1} - H_j|_n \right) k^{-1} \left(H_i|_{n+1} - H_i|_n \right) - \left(q_{ij}|_{n+1} - q_{ij}|_n \right) D_{ijkl}^{-1} q_{kl}|_{n+1} \end{aligned} \right)
\end{aligned} \tag{143}$$

La quantité entre parenthèses est évaluée à chaque point de Gauss. N_s est le nombre d'éléments dans l'aire Ω , N_c est le nombre d'éléments dans le contour. m et p sont respectivement les nombres des points de Gauss dans la direction x et y .

$\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^e|_{n+1} \sigma_{ij}|_{n+1}$ est l'énergie de déformation élastique au temps $n+1$.

$\frac{1}{2} q_{ij}|_{n+1} D_{ijkl}^{-1} q_{kl}|_{n+1}$ est l'énergie due à l'écroutissage au temps $n+1$.

$\frac{C_\varepsilon}{2T_r} (\theta_{n+1})^2$ est la contribution de l'énergie thermique.

$(\varepsilon_{ij}^p|_{n+1} - \varepsilon_{ij}^p|_n) \sigma_{ij}|_{n+1}$ est la contribution due à la plasticité.

$(q_{ij}|_{n+1} - q_{ij}|_n) D_{ijkl}^{-1} q_{kl}|_{n+1}$ est la contribution de l'écroutissage due à la dissipation

$\frac{1}{2T_r \Delta t} (H_i|_{n+1} - H_i|_n) k^{-1} (H_i|_{n+1} - H_i|_n)$ est la contribution énergétique du flux de
chaleur

L'intégrale M^* a été définie dans un repère cartésien. L'intégrale de contour est calculée sur les points de Gauss des éléments définissant un contour autour du point chaud suivant la figure 21.

L'intégrale de surface sera calculée sur l'ensemble des points de Gauss des éléments définissant une surface.

Tous les points de Gauss de l'intégrale de surface et de l'intégrale de contour appartiennent au plan $z = 0$.

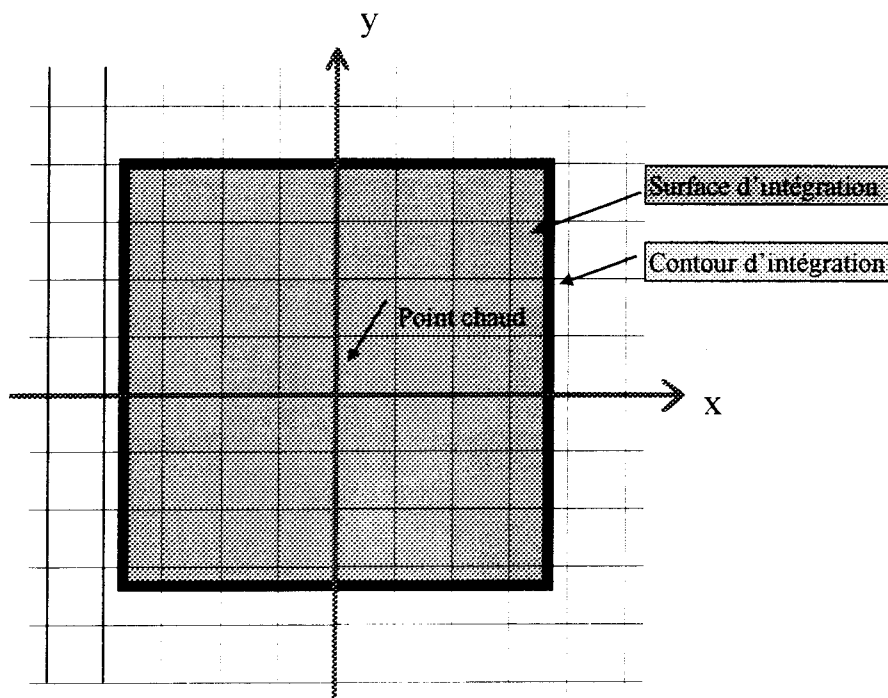


Fig. 21 - Exemple de contour d'intégration.

Il existe quatre points de Gauss qui ont une situation particulière. Il s'agit des points de Gauss situés aux quatre coins du contour d'intégration dans lequel le chemin d'intégration change de direction ξ à η (ou le contraire). Sur la figure 22 a été représenté un élément à deux dimensions et ses quatre points de Gauss.

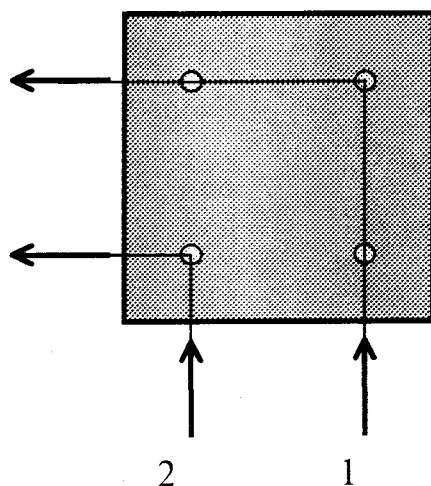


Fig 22 - Exemple d'élément du contour situé dans un changement de direction.

On peut constater que si cet élément constitue un élément de coin du contour, il existe deux chemins d'intégration possibles. Suivant Chi Hang Kang et Nguyen Dang Hung [CHI¹ 92] chaque noeud de coin possède un facteur de correction différent (pour tenir compte du chemin suivi) suivant que l'on passe par le chemin 1 ou 2.

Suivant le chemin 1 le facteur de correction est $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) / 2 = 0.788675$

Suivant le chemin 2 le facteur de correction est $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) / 2 = 0.211325$.

$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ sont les coordonnées des points de Gauss.

5.3 L'INDEPENDANCE DU CONTOUR DE M* (cas élastique bidimensionnel)

L'intégrale M* se compose de la somme d'une intégrale de contour et d'une intégrale de surface. Il serait souhaitable de pouvoir tirer des conclusions sur les conditions de l'indépendance du contour de cette intégrale. Le raisonnement sera inspiré des résultats qui sont connus pour l'intégrale J de Rice (symétrie de translation), [MIA 95].

Avant d'étudier la symétrie de dilatation et sa loi de conservation donnée par l'intégrale M*, il serait utile de rappeler les résultats obtenus pour l'intégrale J. Il est bien connu que l'intégrale de contour de l'intégrale J est indépendante du contour. On retrouve cette affirmation dans une grande quantité de manuels. Cependant les auteurs de ces manuels oublient trop souvent les conséquences de l'indépendance du contour pour les champs de contraintes et les champs de déformations.

- Si on considère l'intégrale J définie dans le cas élastique bidimensionnel par :

$$J = \int_{\Gamma} \left(w n_k - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) d\Gamma \quad (144)$$

On peut utiliser cette intégrale en coordonnées cylindriques. Si l'on considère comme contour Γ un cercle de rayon r centré à la pointe de la fissure (figure 23) on a :

$$J = \int_{\Gamma} r \left(\int_0^{\varepsilon_m} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \cos\theta - \sigma_{ij} n_j u_{i,1} \right) d\theta \quad (145)$$

et si l'on fait tendre le rayon vers 0, on constate que pour que J conserve une valeur constante non nulle indépendante du contour, il faut que

$$\int_0^{\varepsilon_m} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \cos\theta - \sigma_{ij} n_j u_{i,1} = \frac{f(\theta)}{r} \quad (146)$$

d'où

$$J = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) d\theta \quad (147)$$

comme les deux termes de l'intégrale (145) sont proportionnels au produit $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$, ils doivent donc être une fonction inverse du rayon r soit :

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{g(\theta)}{r} \quad (148)$$

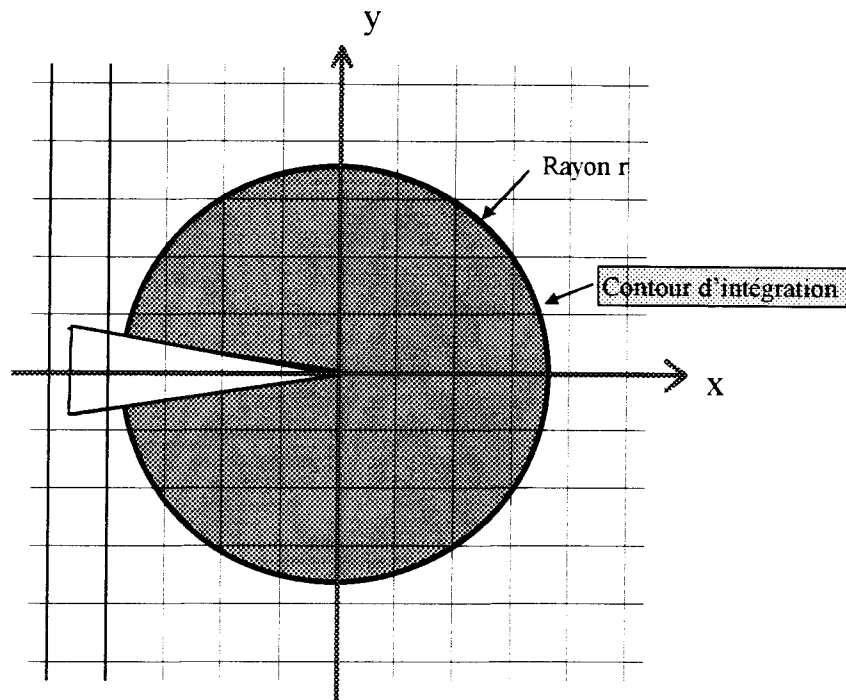


Fig 23 - Exemple de contour centré à la pointe de la fissure.

- Si on considère l'intégrale M définie dans un milieu bidimensionnel élastique par :

$$M = \int_{\Gamma} \left(w x^i n_i - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} x_k \right) d\Gamma \quad (149)$$

Nous pouvons écrire : si

$$u \cong r^\alpha \quad \varepsilon \cong r^{\alpha-1} \quad \sigma \cong r^{\alpha-1} \quad x_i \cong r \quad \int_{\Gamma} d\Gamma \cong r$$

alors

$$w \cong r^{2\alpha-2} \quad (150)$$

donc

$$M \cong r^{2\alpha-2+1+1} \cong r^{2\alpha} \quad (151)$$

si nous voulons que l'intégrale M soit indépendante du contour alors $\alpha = 0$. Nous avons alors par substitution

$$u \approx \text{Ln}(r) \quad \varepsilon \cong r^{-1} \quad \sigma \cong r^{-1} \quad w \cong r^{-2} \quad (152)$$

Si r est suffisamment grand on peut faire l'approximation $u(r) \cong \text{constante}$.

5.4 CAS D'APPLICATION AVEC INDEPENDANCE DU CONTOUR DE M CONDITIONNE PAR $u(r) \cong \text{constante}$.

Dans ce paragraphe nous allons détailler deux cas d'applications respectant la condition pour obtenir l'indépendance du contour.

5.4.1 Problème de Flamant :

Une solution possible pour obtenir l'indépendance du contour est la solution du problème de Flamant. Ce problème consiste à appliquer une force concentrée P agissant suivant la direction x sur le bord d'un domaine semi-infini (Fig 24).

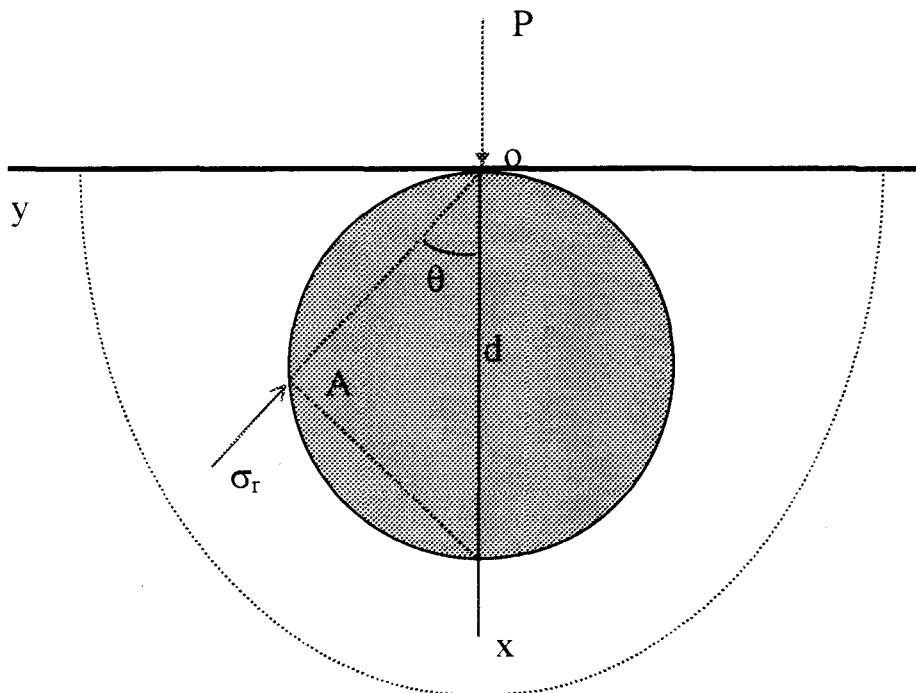


Fig 24 - Force concentrée sur un domaine semi-infini.

$$(x, \bar{u}) \rightarrow (\lambda x, \bar{u}) \quad \lambda > 0 \quad (155)$$

les cas traités ici (problème de Flamant et dilatation d'un disque avec déplacement uniforme) sont très restrictifs, par le fait que l'indépendance du contour est conditionnée par un déplacement uniforme. Il s'agit désormais de passer à des cas pratiques « réalistes » pour lesquels l'indépendance du contour va être à nouveau recherchée. Nous allons nous placer dans des configurations plus conventionnelles de l'étude d'un disque soumis à une sollicitation d'origine mécanique puis thermomécanique.

5.5 CAS D'APPLICATIONS DU CALCUL DE M^* POUR DES SOLLICITATIONS MECANIQUES ET THERMOMECANIQUES.

5.5.1 Etude d'une portion de disque soumis à une contrainte d'origine mécanique, étude dans le domaine élastique (M).

Le modèle précédent est utilisé avec pour condition limite une pression dans la cavité, l'uniformité des déplacements n'est plus imposée (figure 26).

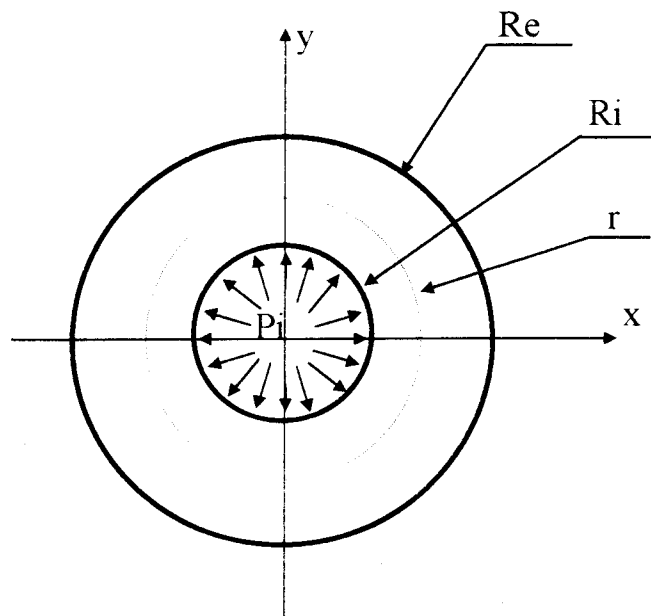


Fig 26 - Cylindre épais soumis à une pression intérieure

- **Approche analytique.**

Nous pouvons modéliser le disque de frein en utilisant les résultats analytiques obtenus pour les enveloppes cylindriques de grande épaisseur [KER 77], [GER 95].

En faisant les hypothèses suivantes :

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (156)$$

on obtient les résultats suivants (avec la pression extérieure nulle) :

$$\sigma_\theta = \frac{P_i u_2}{u_1 - u_2} + \frac{P_i}{r^2} \quad \sigma_r = \frac{P_i u_2}{u_1 - u_2} - \frac{P_i}{r^2} \quad (157)$$

avec

$$u_1 = \frac{1}{R_i^2} \quad u_2 = \frac{1}{R_e^2}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta - \nu \sigma_r}{E} \quad \varepsilon_r = \frac{\sigma_r - \nu \sigma_\theta}{E}$$

d'où

$$\varepsilon_\theta = \frac{P_i}{E} \left(\frac{R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \right) \left(\frac{(1-\nu)}{R_e^2} + \frac{(1+\nu)}{r^2} \right) \quad \varepsilon_r = \frac{P_i}{E} \left(\frac{R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \right) \left(\frac{(1-\nu)}{R_e^2} - \frac{(1+\nu)}{r^2} \right) \quad (158)$$

Nous pouvons alors écrire :

$$u \cong r^{-1} \quad \varepsilon \cong r^{-2} \quad \sigma \cong r^{-2} \quad x_i \cong r \quad \int_{\Gamma} d\Gamma \cong r$$

alors

$$w \cong r^{-4}$$

donc

$$M^* \cong r^{-4+1+1} \cong r^{-2} \quad (159)$$

• Approche numérique.

Nous avons modélisé, par la méthode des éléments finis, le disque qui a été utilisé précédemment avec deux géométries suivant les mêmes conditions limites que le modèle analytique puis, en bridant le diamètre extérieur.

Si nous traduisons ces résultats sous forme d'équation littérale, nous obtenons les équations qui nous donnent la valeur de M en fonction de r.

Nous allons détailler la première application, les évolutions du déplacement, de la contrainte et de la déformation seront données en fonction de la distance au point chaud.

1^{ère} configuration

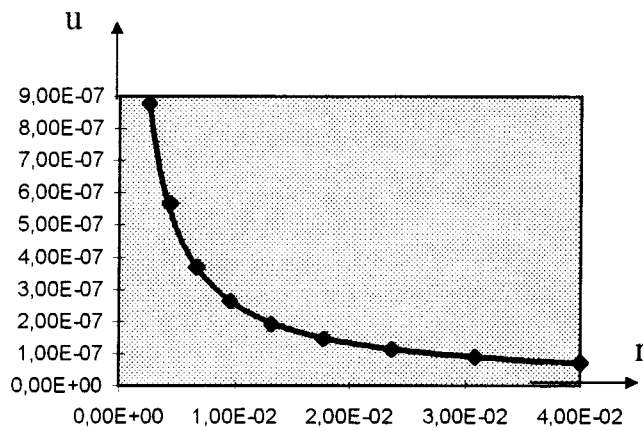
rayon intérieur : $0.5 \cdot 10^{-3}$ mètre

rayon extérieur : $80 \cdot 10^{-3}$ mètre

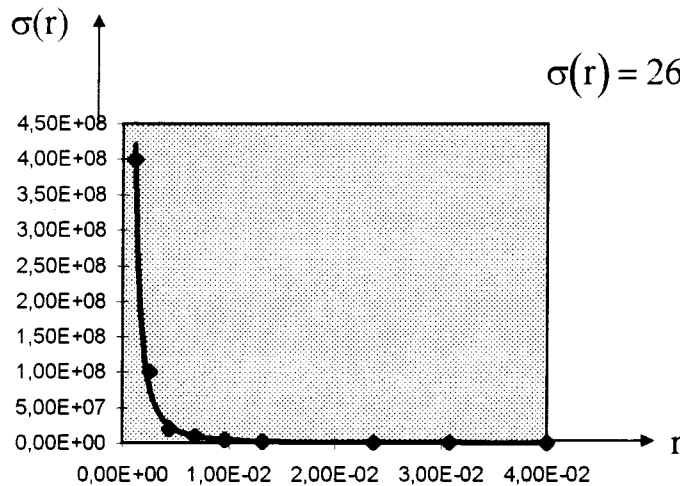
épaisseur : $40 \cdot 10^{-3}$ mètre

pression dans la cavité : $20 \cdot 10^8$ N/m²

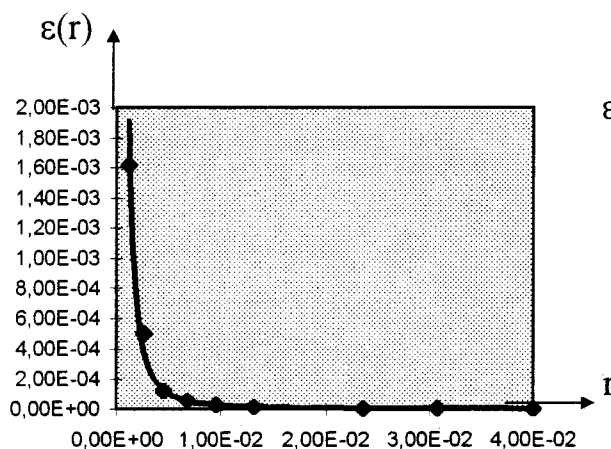
diamètre extérieur : **libre de toute contrainte.**



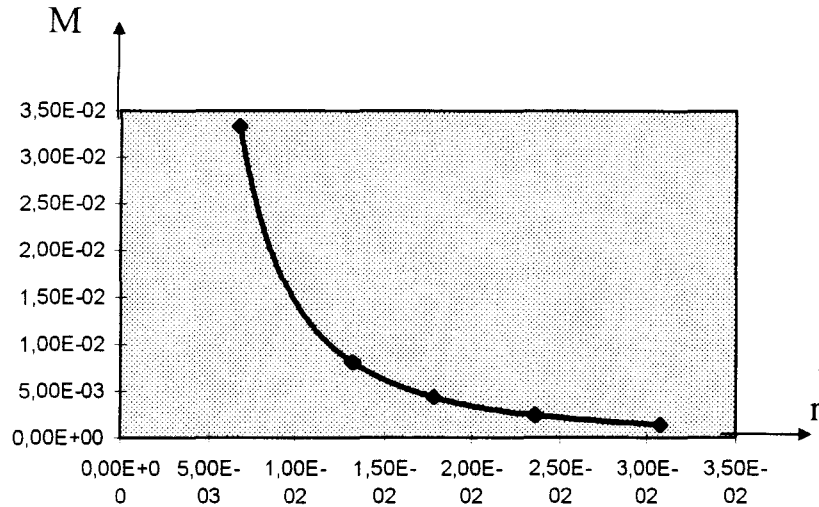
$$u(r) = (4 \cdot 10^{-9}) r^{-0.9303} [\text{m}]$$



$$\sigma(r) = 266.6 r^{-2.1076} [\text{N} / \text{m}^2]$$



$$\epsilon(r) = (3 \cdot 10^{-9}) r^{-1.9986}$$



$$M_1 = (9 \cdot 10^{-7}) r^{-2.095} \quad (160)$$

Fig 27 - Déplacement, contraintes, déformations, et intégrale M^* dans la première configuration

2^{ème} configuration

rayon intérieur : $0.5 \cdot 10^{-3}$ mètre

rayon extérieur : **800** 10^{-3} mètre

épaisseur : $40 \cdot 10^{-3}$ mètre

pression dans la cavité : $20 \cdot 10^8$ N/m²

diamètre extérieur : **est libre de toute contrainte.**

$$M_2 = (1 \cdot 10^{-6}) r^{-2.017}$$

3^{ème} configuration

rayon intérieur : $0.5 \cdot 10^{-3}$ mètre

rayon extérieur : **80** 10^{-3} mètre

épaisseur : $40 \cdot 10^{-3}$ mètre

pression dans la cavité : $20 \cdot 10^8$ N/m²

diamètre extérieur : **ne peut pas se dilater.**

$$M_3 = (2 \cdot 10^{-6}) r^{-1.943}$$

4^{ème} configuration

rayon intérieur : $0.5 \cdot 10^{-3}$ mètre

rayon extérieur : **800** 10^{-3} mètre

épaisseur : $40 \cdot 10^{-3}$ mètre

pression dans la cavité : $20 \cdot 10^8$ N/m²

diamètre extérieur : **ne peut se dilater.**

$$M_4 = (1 \cdot 10^{-6}) r^{-2.01}$$

Nous constatons que dans ces quatre cas nous avons :

$$u \cong r^{-1} \quad \varepsilon(r) \cong r^{-2} \quad \sigma(r) \cong r^{-2} \text{ et } M = \alpha r^{-2} \quad (161)$$

α est une constante qui dépend des conditions limites appliquées sur le disque.

Ces résultats sont conformes aux résultats analytiques que nous avons cités précédemment (159).

Ces intégrales de contour données par l'équation ci dessus sont dépendantes du contour. La valeur de M varie en fonction du rayon pour chacune des configurations décrites.

Nous avons étudié un disque soumis à une pression intérieure dans le cas de l'élasticité. Nous effectuons le même type de calcul dans le domaine thermo-plastique.

5.5.2 Etude d'un disque soumis à une sollicitation d'origine thermique, étude dans le domaine thermo-plastique.

Nous utilisons à nouveau le même modèle que celui que nous avons utilisé précédemment. Une étude thermique est réalisée. Les résultats sont ensuite extraits pour effectuer un calcul statique. Cette fois, la cavité est soumise à un flux de chaleur constant dans le temps. Le rayon extérieur est soumis à de la convection.

Nous avons étudié le disque suivant la première configuration géométrique précédemment décrite. Les hypothèses suivantes ont été prises : pas de forces de volume ni de couplage thermomécanique ($m = 0$). La température obtenue est inférieure au point de transformation A_c1 pour éviter les changements de phases. L'écoulement adopté est cinématique linéaire.

Nous avons obtenu les résultats suivants :

rayon intérieur : $0.5 \cdot 10^{-3}$ mètre, rayon extérieur : $80 \cdot 10^{-3}$ mètre
 épaisseur : $40 \cdot 10^{-3}$ mètre, diamètre extérieur : **libre de toute contrainte**.

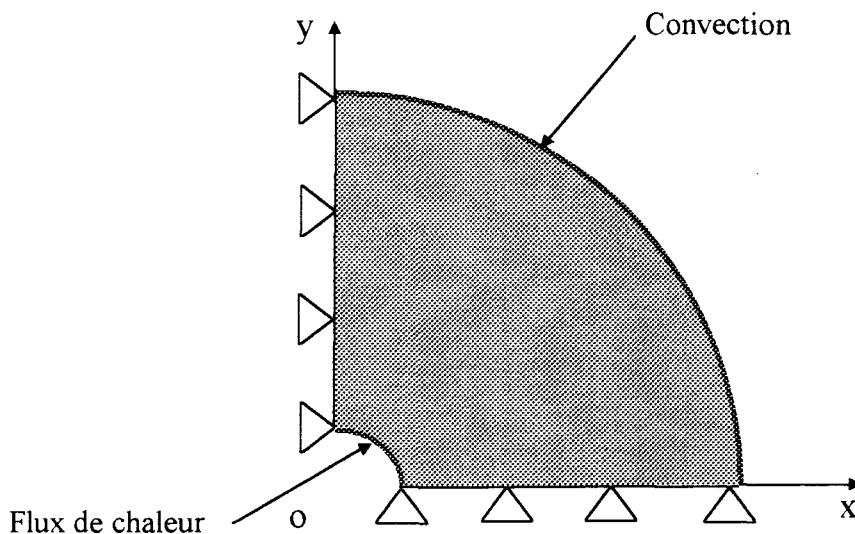


Fig 28 - Conditions limites sur le disque de frein

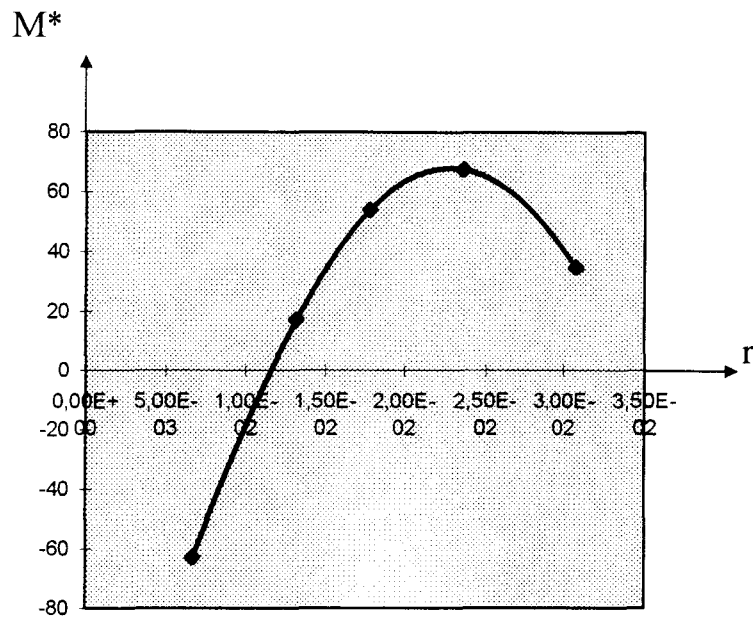


Fig 29 - Intégrale M* dans la première configuration, sollicitation thermique

Nous constatons de façon évidente que l'intégrale M* utilisée dans le domaine thermoplastique est dépendante du contour.

5.6 MODIFICATION DES INTEGRALES M et M* EN M** POUR OBTENIR UNE INTEGRALE INDEPENDANTE DU CONTOUR.

Suite à la dépendance du contour que nous avons constaté, l'étude de l'intégrale M* sera reprise afin d'obtenir l'indépendance du contour.

Dans notre cas de la symétrie de dilatation, les conditions d'obtention de la symétrie variationnelle sont :

$$(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}) \rightarrow \left(\lambda \mathbf{x}, \lambda^{(P-N)} {}^P \bar{\mathbf{u}} \right) \quad \lambda > 0$$

dans le cas d'une étude en deux dimensions

$$(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}) \rightarrow (\lambda \mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}) \quad \lambda > 0$$

- **Rappel : Cas où les déplacements sont uniformes : $u(r) = \text{constante}$: condition d'indépendance du contour pour M.**

L'intégrale M définie précédemment s'écrit sous la forme :

$$M = \int_{\Gamma} \left(w x_i n_i - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} x_k \right) d\Gamma$$

avec

$$P = w x_i n_i - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} x_i \quad \text{tel que} \quad \text{Div}(P) = 0 \quad \text{est une loi de conservation.}$$

Nous avons vu précédemment (§ 5.3) que la condition d'indépendance du contour pour M était d'avoir un déplacement uniforme :

l'analyse dimensionnelle nous donne alors si on se trouve suffisamment loin de la cavité :

$$u \cong \ln(r) \cong \text{constante} \quad \varepsilon \cong r^{-1} \quad \sigma \cong r^{-1} \quad x_i \cong r \quad \int_{\Gamma} d\Gamma \cong r$$

alors

$$w \cong r^{-2}$$

donc

$$M \cong r^{-2+1+1} \cong r^0$$

On choisit de reprendre le cas du cylindre épais traité au paragraphe 5.5.1 pour lequel on a vérifié la dépendance du contour de M, puisque la condition décrite ci dessus n'est pas respectée. On s'attache à trouver une nouvelle intégrale indépendante du contour.

• **Cas du cylindre épais :**

Dans l'étude du cylindre épais soumis à une pression interne nous avons :

$$u \cong r^{-1} \quad \varepsilon \cong r^{-2} \quad \sigma \cong r^{-2} \quad x_i \cong r \quad \int_{\Gamma} d\Gamma \cong r \quad w \cong r^{-4}$$

donc

$$M \cong r^{-4+1+1} \cong r^{-2}$$

et :

$$w(\nabla u) = w\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Comme l'énergie de déformation est une fonction homogène d'ordre 2, on peut alors écrire par combinaison de l'énergie de déformation appliquée au cylindre épais et l'énergie de déformation dans le cas des déplacements constants la relation :

$$w\left(\frac{1}{r} \frac{1}{r}\right) = r^2 w\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (162)$$

et $r^2 = (x_i n_i)^2$

On peut alors définir une nouvelle intégrale M^{**} :

$$M^{**} = \int_{\Gamma} (x_i n_i)^2 \left(w x_i n_i - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} x_k \right) d\Gamma \quad (163)$$

l'intégrale M^{**} est indépendante du contour

$$M^{**} \cong r^2 (r^{-4} r - r^{-2} r^{-2} r) r = r^0 = \text{constante},$$

En résumé :

si $u \cong \ln(r) \cong \text{constante}$ $\sigma \cong r^{-1}$, alors une intégrale indépendante du contour lui est associée :

$$M = \int_{\Gamma} \left(w x^i n_i - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} x_k \right) d\Gamma$$

Si on considère l'application du cylindre épais : $u \cong r^{-1}$, $\sigma \cong r^{-2}$, alors une autre intégrale indépendante du contour lui est associée :

$$M^{**} = \int_{\Gamma} (x_i n_i)^2 \left(w x^i n_i - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} x_k \right) d\Gamma \quad (164)$$

Application numérique :

Nous allons effectuer le calcul de M^{**} dans le domaine élastique et thermoplastique pour vérifier l'indépendance du contour.

Calcul de la nouvelle intégrale M^{**} dans le domaine élastique :

On reprend le modèle du cylindre soumis à une pression intérieure (§5.5.1).

1^{ère} configuration

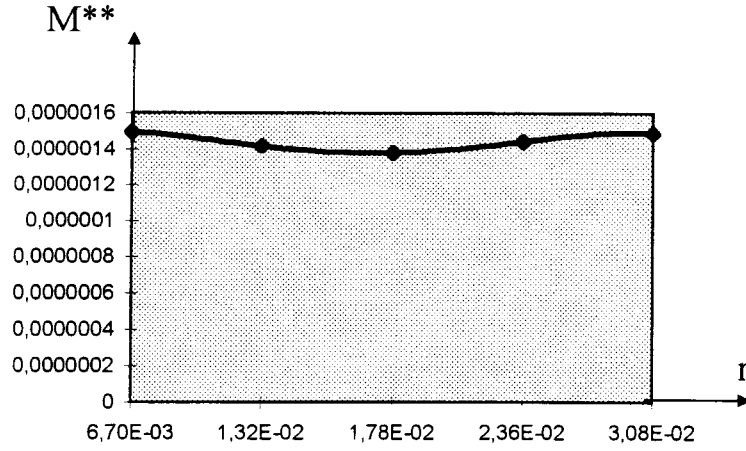
rayon intérieur : $0.5 \cdot 10^{-3}$ mètre

rayon extérieur : **80** 10^{-3} mètre

épaisseur : $40 \cdot 10^{-3}$ mètre

pression dans la cavité : $20 \cdot 10^8$ N/m²

diamètre extérieur : **libre de toute contrainte.**



$$M_1^{**} = (9 \cdot 10^{-7}) r^{-0.095}$$

Fig 31 - Intégrale M^{**} dans la première configuration, sollicitation mécanique

Calcul de la nouvelle intégrale M^{**} dans le domaine thermoplastique.

L'intégrale M utilisée dans le domaine élastique a été modifiée. Il est nécessaire de modifier sur le même principe l'intégrale M^* utilisée dans le domaine thermoplastique.

Nous avons obtenu précédemment les résultats (100), (110) suivants :

$$M^* = \int_{\partial\Omega} (M^i) n_i d\Gamma - \int_{\Omega} (M_{,i}^i) d\Omega = 0$$

$$M^i = \frac{P - N}{P} u^j \frac{\partial \hat{L}}{\partial u_{,i}^j} + x^j T_j^i$$

$$M_{,i}^i = \frac{P - N}{P} \left(\left(u_{,i}^j \frac{\partial \hat{L}}{\partial u_{,i}^j} \right) + u^j \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial u_{,i}^j} \right)_{,i} \right) + x^j T_{j,i}^i + x_{,i}^j T_j^i$$

Nous utiliserons une démarche identique à celle utilisée pour déterminer M^{**} dans le domaine élastique.

Nous nous plaçons dans le cas d'une étude en deux dimensions, c'est à dire $P = N = 2$. Nous obtenons alors pour l'intégrale M^{**} les termes suivants :

$$M^{i**} = (x_i n_i)^2 x^j T_j^i \tag{165}$$

$$M_{,i}^{i**} = (x_i n_i)^2 (x^j T_{j,i}^i + x_{,i}^j T_j^i) + \left((x_i n_i)^2 \right)_{,i} x^j T_j^i \tag{166}$$

Si on détaille le calcul précédent on obtient :

$$x_{,i}^j = \delta_i^j$$

par substitution dans l'équation (166) on obtient

$$M_{,i}^{i**} = (x_i n_i)^2 (x^j T_{j,i}^i + \delta_i^j T_j^i) + 2(x_i n_i) \delta_i^j x^j T_j^i$$

On sait que :

$$\delta_i^j T_j^i = T_i^i = \text{trace}(\mathbf{T}) = N \hat{L} - u_{,i}^k \frac{\partial \hat{L}}{\partial u_{,i}^k}$$

alors

$$M_{,i}^{i**} = (x_i n_i)^2 (x^j T_{j,i}^i + T_i^i) + 2(x_i n_i) x^j T_j^i$$

si l'on remplace T_i^i par sa valeur dans l'équation précédente on obtient :

$$M_{,i}^{i**} = (x_i n_i)^2 \left(x^j T_{j,i}^i + N \hat{L} - u_{,i}^k \frac{\partial \hat{L}}{\partial u_{,i}^k} \right) + 2(x_i n_i) x^j \left(N \hat{L} - u_{,i}^k \frac{\partial \hat{L}}{\partial u_{,i}^k} \right)$$

avec la relation (115)

$$u_{,i}^j \frac{\partial \hat{L}}{\partial u_{,i}^j} = (\nabla \mathbf{u})^T \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial (\nabla \mathbf{u})} = P \mathbf{w}$$

on peut écrire :

$$M_{,i}^{i**} = (x_i n_i)^2 (x^j T_{j,i}^i + N \hat{L} - P \mathbf{w}) + 2(x_i n_i) x^j (N \hat{L} - P \mathbf{w})$$

avec $P = N = 2$

$$M_{,i}^{i**} = (x^j T_{j,i}^i) (x_i n_i)^2 + 2(\hat{L} - \mathbf{w}) (x_i n_i)^2 + 4(x_i n_i) x^j (\hat{L} - \mathbf{w}) \quad (167)$$

Par addition des deux égalités (145) et (147) on obtient

$$M^{**} = \int_{\partial \Omega} \left((x_i n_i)^2 (x^j T_j^i) n_i \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \left((x_i n_i)^2 (x^j T_{j,i}^i) + (2(x_i n_i)^2 + 4(x_i n_i) x^j) (\hat{L} - \mathbf{w}) \right) d\Omega \quad (168)$$

Si on détaille l'équation (168) avec les résultats obtenus précédemment (101),(106), (107) et avec l'hypothèse qui permet de vérifier le théorème du lagrangien nul (la valeur $\text{div}(\vec{H}_{n+1})$ est négligeable), on obtient :

$$\begin{aligned}
M^{**} = & \int_{\partial\Omega} (x_i n_i)^2 x^j \left(\begin{array}{l} V(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1}) + \frac{C_\varepsilon}{2T_r} [\theta_{n+1}]^2 + \\ (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} \\ + \frac{1}{2T_r \Delta t} (\bar{H}_{n+1} - \bar{H}_n)^T \mathbf{k}^{-1} (\bar{H}_{n+1} - \bar{H}_n) \\ - (\nabla \bar{u}_{n+1})^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \end{array} \right) \mathbf{n}_i d\Gamma - \\
& \int_{\Omega} \left((x_i n_i)^2 x^j \left(\begin{array}{l} + \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \nabla \mathbf{q}_n - \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \nabla \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \\ - \frac{\theta_{n+1}}{T_r} \left[T_r \beta : (\nabla \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \nabla \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) - \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \nabla \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p + \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \nabla \mathbf{q}_{n+1} \right] \right) + \right. \\
& \left. \left(2(x_i n_i)^2 + 4(x_i n_i) x^j \right) \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1}) + (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \frac{C_\varepsilon}{2T_r} [\theta_{n+1}]^2 \\ - (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} + \\ \frac{1}{2T_r \Delta t} (\bar{H}_{n+1} - \bar{H}_n)^T \mathbf{k}^{-1} (\bar{H}_{n+1} - \bar{H}_n) \end{array} \right) \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{169}$$

Nous obtenons donc de nouveaux résultats pour l'intégrale M^{**} dans le domaine thermoplastique.

On reprend, tout d'abord, les conditions de la sollicitation thermoplastique de la configuration (§5.5.2).

rayon intérieur : $0.5 \cdot 10^{-3}$ mètre

rayon extérieur : $80 \cdot 10^{-3}$ mètre

épaisseur : $40 \cdot 10^{-3}$ mètre

diamètre extérieur : **libre de toute contrainte**

Nous respectons la symétrie $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}$ avec $\lambda > 0$, par contre notre phénomène physique ne respecte pas la relation $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}' \cong \frac{1}{r}$. Il n'est donc pas étonnant de trouver une intégrale M^{**} dépendante du contour.

- Une autre configuration a été envisagée

rayon intérieur : $0.5 \cdot 10^{-3}$ mètre

rayon extérieur : **200** 10^{-3} mètre

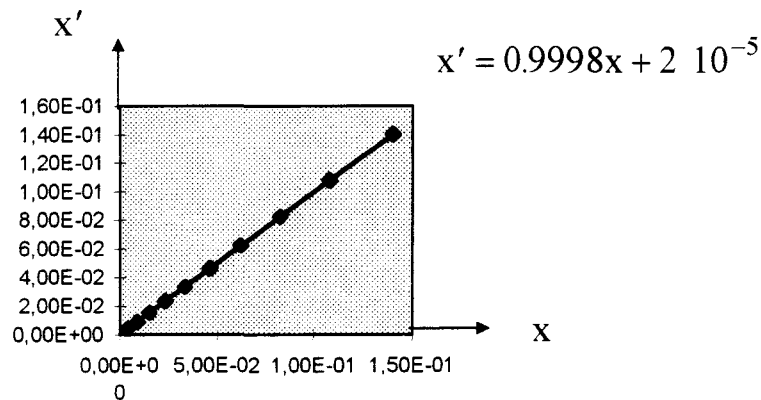
épaisseur : $40 \cdot 10^{-3}$ mètre

diamètre extérieur : **ne peut pas se dilater.**

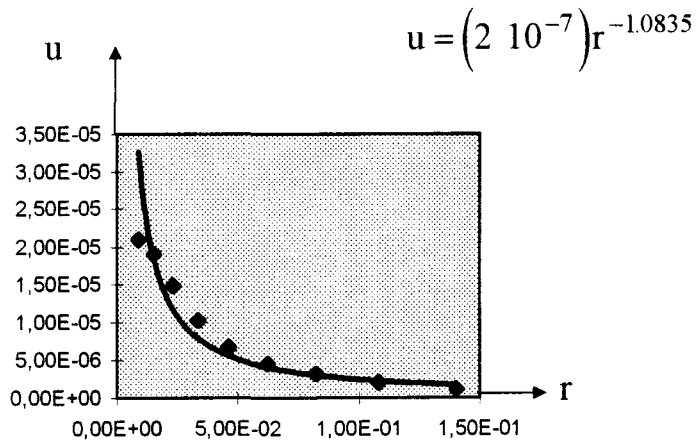
La sollicitation est thermique

Le comportement du matériau est thermoplastique

Nous respectons la symétrie $x \rightarrow x' = \lambda x$ avec $\lambda > 0$



Dans ce cas, notre phénomène physique respecte la relation $u \rightarrow u' \cong \frac{1}{r}$



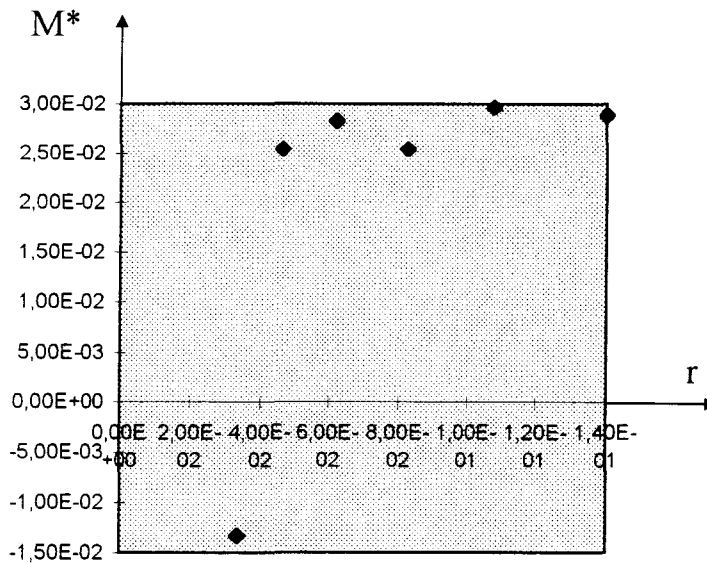


Fig 32 - Déplacements, et intégrale M** dans une configuration sous sollicitation thermique où $u \cong r^{-1}$.

Nous obtenons une intégrale que l'on peut considérer comme indépendante du contour si l'on ne prend pas en compte le premier point. Ce premier point n'est pas situé sur la courbe $u = (2 \cdot 10^{-7})r^{-1.0835}$.

Nous avons calculé une nouvelle intégrale M**. Nous pouvons constater que cette intégrale de contour n'est pas systématiquement indépendante du contour. Il suffit d'examiner le comportement du déplacement en fonction du rayon pour pouvoir prédire le comportement de l'intégrale M ou M**.

Si $u \rightarrow u' \cong \text{constante}$, l'intégrale M est indépendante du contour.

Si $u \rightarrow u' \cong r^{-1}$, l'intégrale M** est indépendante du contour.

Ceci s'explique par le fait que notre intégrale M** a été modifiée pour être utilisée dans une configuration qui correspond au comportement d'un solide épais.

Il est alors utile de généraliser la méthode de calcul de l'intégrale M**. Cette généralisation permettra d'associer aux cas d'application $u \rightarrow u' \cong r^{-\omega}$ une intégrale indépendante du contour M^ω correspondante.

5.7 GENERALISATION DE L'ECRITURE DE L'INTEGRALE M^{**} en M^ω .

- *Cas élastique.*

$$M = \int_{\Gamma} \left(w x_i n_i - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} x_k \right) d\Gamma$$

pour laquelle nous avons indépendance du contour dans le cas où :

$$u \cong \text{constante} \quad \varepsilon \cong r^{-1} \quad \sigma \cong r^{-1} \quad w \cong r^{-2}$$

Si nous écrivons l'intégrale M de façon plus générale sous la forme d'une intégrale fonction des variables nous obtenons :

$$u \cong r^{-\omega} \quad \varepsilon \cong r^{-(\omega+1)} \quad \sigma \cong r^{-(\omega+1)} \quad w \cong r^{-2(\omega+1)}$$

L'énergie de déformation élastique est une fonction homogène d'ordre 2, on a les égalités suivantes :

$$w(\nabla \bar{u}) = w\left(\frac{1}{r}\right) = w\left(\frac{1}{r} \frac{r^\omega}{r^\omega}\right) = r^{2\omega} w\left(\frac{1}{r^{\omega+1}}\right)$$

et $r^{2\omega} = (x_i n_i)^{2\omega}$

on peut écrire :

$$M^\omega = \int_{\Gamma} (x_i n_i)^{2\omega} \left(w x_i n_i - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} x_k \right) d\Gamma \quad (170)$$

L'intégrale M^ω est de la forme : $r^{2\omega} \left(r^{-2(\omega+1)} r - r^{-(\omega+1)} r^{-(\omega+1)} r \right) r = r^0$, elle est alors indépendante du contour.

- *Dans le cas de la thermoplasticité*, on peut écrire de la même façon :

$$M^i = (x_i n_i)^{2\omega} x^j T_j^i$$

$$M_{,i}^i = (x_i n_i)^{2\omega} x^j T_{j,i}^i + \left(2(x_i n_i)^{2\omega} + 2(2\omega)(x_i n_i)^{2\omega-1} x^j \right) (\hat{L} - w)$$

$$\begin{aligned}
M^{\omega*} = & \int_{\partial\Omega} (x_i n_i)^{2\omega} x^j \left(\begin{array}{l} V(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1}) + \frac{C_\varepsilon}{2T_r} [\theta_{n+1}]^2 \\ + (\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p) : \sigma_{n+1} - (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} \\ + \frac{1}{2T_r \Delta t} (\bar{H}_{n+1} - \bar{H}_n)^T \mathbf{k}^{-1} (\bar{H}_{n+1} - \bar{H}_n) \\ - (\nabla \bar{u}_{n+1})^T \sigma_{n+1} \end{array} \right) \mathbf{I} n_i d\Gamma - \\
& \int_{\Omega} \left((x_i n_i)^{2\omega} x^j \left(\begin{array}{l} + \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \nabla \mathbf{q}_n - \sigma_{n+1} : \nabla \varepsilon_n^p + \\ - \frac{\theta_{n+1}}{T_r} [T_r \beta : (\nabla \varepsilon_{n+1} - \nabla \varepsilon_{n+1}^p) - \sigma_{n+1} : \nabla \varepsilon_{n+1}^p + \mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \nabla \mathbf{q}_{n+1}] \right) + \right. \\
& \left. \left(2(x_i n_i)^{2\omega} + (4\omega)(x_i n_i)^{2\omega-1} x^j \right) \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{n+1} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1}) + (\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p) : \sigma_{n+1} + \\ \frac{C_\varepsilon}{2T_r} [\theta_{n+1}]^2 - (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{q}_{n+1} \\ + \frac{1}{2T_r \Delta t} (\bar{H}_{n+1} - \bar{H}_n)^T \mathbf{k}^{-1} (\bar{H}_{n+1} - \bar{H}_n) \end{array} \right) \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{171}$$

Cette généralisation de l'intégrale M^* peut s'appliquer aux différents cas que nous avons étudiés précédemment.

Reprenons le cas qui ne nous avait pas donné satisfaction, la configuration figure 31.

rayon intérieur : $0.5 \cdot 10^{-3}$ mètre

rayon extérieur : $80 \cdot 10^{-3}$ mètre

épaisseur : $40 \cdot 10^{-3}$ mètre

diamètre extérieur : **libre de toute contrainte**.

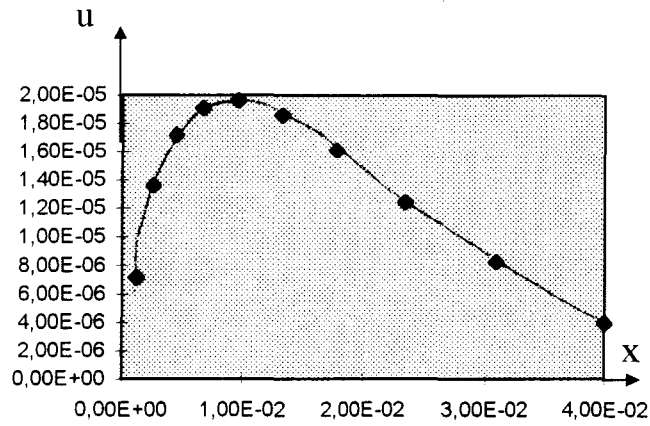
Sollicitation thermique

le comportement du matériau est thermoplastique

La répartition des déplacements n'est pas modifiée

$$u = 7 \cdot 10^{-6} x^{-0.15}$$

pour $x > 1 \cdot 10^{-2}$



En posant $\omega = 0.15$ dans l'équation (171) on obtient les valeurs de $M^{\omega*}$ en fonction de la distance par rapport au point chaud :

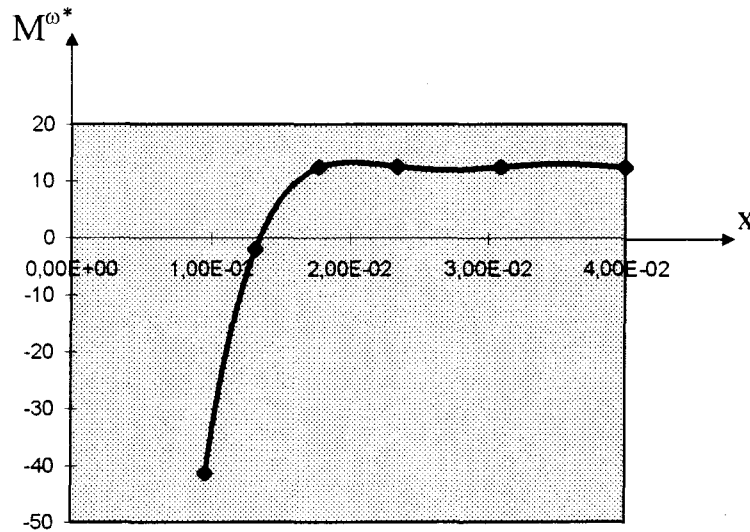


Fig 33 - Déplacements, et intégrale $M^{\omega*}$ dans la première configuration sous sollicitation thermique.

On vérifie bien l'indépendance du contour de $M^{\omega*}$ pour $x > 1 \cdot 10^{-2}$.

Pour $x < 1 \cdot 10^{-2}$, $u(x)$ n'évolue plus en $x^{-\omega}$, ce qui ne correspond pas à l'intégrale $M^{\omega*}$.



5.8 LA MODIFICATION DE L'INTEGRALE M* POUR OBTENIR L'INTEGRALE M° ET LE THEOREME DE NOETHER.

Les résultats que nous avons obtenus ont été justifiés numériquement et théoriquement mais de façon partielle. Nous n'avons pas justifié la correspondance de l'intégrale $M^{\omega*}$ avec une symétrie variationnelle.

On peut toutefois utiliser des indications données par Olver [OLV 93] et [OLV 95].

Définition :

Un champ de vecteurs généralisés

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^p \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_{\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}$$

est une symétrie variationnelle de la fonctionnelle $I[u] = \int L(x, u^{(n)}) dx$ si, et seulement si, il existe un p-uplet $B[u] \in A^p$ de fonctions différentielles telles que

$$\text{pr}(v(L)) + L\text{div}(\zeta) = \text{div}(B) \quad (172)$$

pour tout x, u

Cette dernière définition est le cas général de la définition (87). En effet, si l'on considère que $\text{div}(B) = 0$ on retrouve alors la définition (87). Nous avons donc obtenu les lois de conservation indépendantes du contour (124) dans un cas peut-être plus restrictif que nécessaire. L'utilisation de la définition (172) ci-dessus peut nous donner si l'on suit une démarche logique un certain nombre de lois de conservation supplémentaires.

Reprendre l'étude de la symétrie de dilatation dans le cas du phénomène physique qui nous concerne à l'aide de l'équation (172) serait une démarche longue. Il serait néanmoins utile de détailler la procédure qui permet l'obtention de toutes les lois de conservation et d'examiner le type de résultat obtenu par cette démarche.

La démarche citée a été tirée de la thèse de Benyounés [BEN 87], cette démarche est identique à celle que l'on peut trouver dans d'autres ouvrages tels que Olver [OLV 93].

La première étape consiste à définir une équation différentielle qui caractérise notre phénomène physique.

La deuxième étape consiste à définir le lagrangien correspondant.

La troisième étape consiste à vérifier par le théorème de Cauchy-Kovalevskaya que la solution de l'équation différentielle existe et qu'elle est non dégénérée.

Il est ensuite possible de chercher toutes les symétries ordinaires de l'équation différentielle.

Parmi toutes ces solutions il faut chercher les symétries variationnelles.

Les symétries variationnelles nous donnent ensuite les lois de conservation correspondantes. Nous obtenons ainsi un certain nombre de lois de conservation. Mais toutes ces lois ne sont pas indépendantes. On peut constater que pour un certain nombre d'études, certaines lois sont les combinaisons linéaires d'autres lois. A partir d'un nombre réduit de lois de conservation on peut déduire les autres lois.

Tant que cette démonstration n'a pas été effectuée il est hasardeux de tirer des conclusions trop rapides. Mais il semble que ce type d'étude pourrait donner des résultats intéressants.

Une autre démarche peut être explorée, celle proposée par [EIS 87], [MAU 93], [MAU 95]. Elle consiste à calculer pour la symétrie de dilatation la divergence d'un lagrangien que l'on a préalablement défini. Ceci constitue une autre possibilité de calculer une intégrale indépendante du contour. L'avantage de cette démarche est qu'elle permet de raisonner sur des grandeurs vectorielles. Ceci justifie l'opération qui consiste à multiplier une loi de conservation (sous forme d'un vecteur) par un scalaire pour obtenir une autre loi de conservation.

5.9 L'INTEGRALE M^{**} ET LE DISQUE DE FREIN.

A ce stade de l'étude, il est utile de rappeler les objectifs qui ont été donnés au premier chapitre.

Nous avons cherché à établir un critère énergétique qui nous permet de déterminer s'il y a ou non dilatation d'une fissure macroscopique à la surface du disque.

Le problème physique était le suivant :

Nous sommes en présence d'un disque de frein qui possède six points chauds. Ces points chauds sont répartis de façon régulière sur le disque (figure 3).

Nous obtenons pour chaque point chaud un cycle de sollicitation. Ce cycle est donné pour le freinage dit « de service » (figure 15 et 16).

Pour simplifier notre problème physique nous avons dans un premier temps isolé chaque point chaud. Nous avons considéré une portion de disque qui possède en son centre une petite cavité dont le diamètre extérieur a éventuellement la possibilité de se dilater.

Détermination de M^{o*} .

Par les principes de la thermodynamique, par les lois de la plasticité, de la propagation de la chaleur et par le théorème de Noether, il a été possible d'obtenir une loi de conservation. Cette loi de conservation peut s'appliquer dans le cas du cylindre épais. Nous avons montré que cette loi de conservation peut être généralisée, dans certains cas, sous réserve de connaître la loi d'évolution de la déformation en fonction du rayon. Cette loi d'évolution nous permet d'obtenir l'indépendance du contour.

Cette loi d'évolution peut être déterminée à partir des résultats numériques. Cependant, elle varie quelque peu en fonction de l'orientation du rayon choisi à partir du centre du point chaud (symétrie de dilatation non respectée).

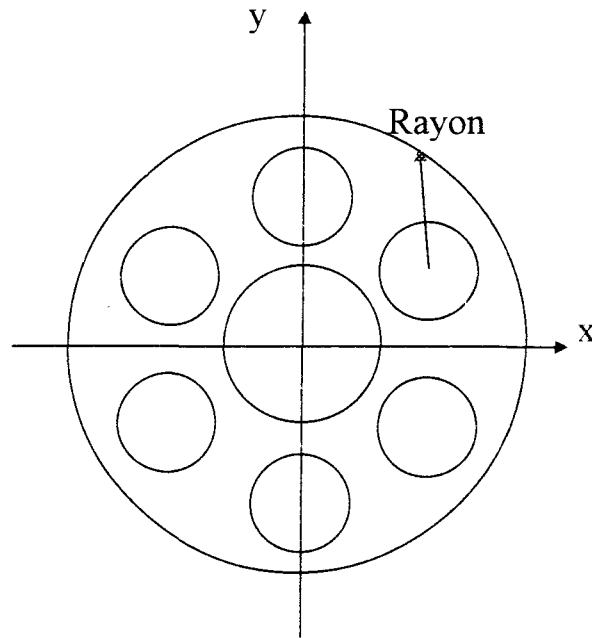


Fig 34 - Répartitions des points chauds sur le disque de frein

Quand cette loi d'évolution est déterminée, il est alors possible de calculer sur le cycle de sollicitation obtenu quel est le point du cycle correspondant à la sollicitation maximale. Celle-ci sera donnée par la valeur maximale de l'intégrale $M^{\omega*}$.

Aspect expérimental :

Nous avons obtenu une valeur numérique pour l'intégrale $M^{\omega*}$. Il se pose le problème de savoir ce que l'on peut faire de cette valeur numérique. Comme pour l'intégrale J cette valeur numérique est à comparer avec une valeur que l'on obtient de manière expérimentale un niveau énergétique de rupture J_c . Cette valeur nous donne le niveau énergétique qui permet la propagation d'une fissure. Dans le cas de l'intégrale $M^{\omega*}$, ce niveau d'énergie correspond au niveau nécessaire à la dilatation ou dilatation d'une cavité au sommet d'un point chaud.

Il existe des méthodes de calcul de l'intégrale J à partir des résultats expérimentaux. Ce type de méthode n'est pas directement utilisable dans le cas de la symétrie de dilatation. Il est donc nécessaire d'effectuer le calcul de l'intégrale $M^{\omega*}$ à partir d'un résultat numérique.

Pour avoir la possibilité de comparer notre résultat du calcul de l'intégrale $M^{\omega*}$ avec les résultats d'une étude expérimentale, il sera donc nécessaire de passer par une étude intermédiaire qui consiste à effectuer une étude numérique qui reproduise le dispositif expérimental. Elle devra bien sûr être validée avec le maximum de mesures expérimentales de comparaison ou recalage. Nous avons alors, par l'intermédiaire du module numérique, la possibilité d'obtenir l'ensemble des données relatives aux déformations d'origines élastiques, plastiques et thermiques nécessaires au calcul de l'intégrale $M^{\omega*}$.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES.

L'étude du comportement thermomécanique des freins à disques a permis d'observer la présence de points chauds macroscopiques angulairement répartis sur la surface des disques. Ces gradients thermiques entraînent des sollicitations thermomécaniques très sévères pouvant entraîner la fissuration des disques.

Après une synthèse des modèles d'endommagement et de rupture en fatigue thermique, la démarche retenue vise à définir un seuil énergétique au delà duquel on aura apparition d'une fissure macroscopique.

Knowles et Sternberg ont défini une intégrale de contour dans le cas élastique pour une symétrie de dilatation, ce qui est le cas de notre application (intégrale M). L'extension au comportement thermoplastique est introduit au travers de la démarche suivante :

- A partir du deuxième principe de thermodynamique qui conduit à l'inégalité de Clausius-Duhem, une formulation lagrangienne discrète de la thermoplasticité est décrite.
- Par l'utilisation du théorème du lagrangien nul, le comportement thermoplastique est introduit dans le lagrangien défini dans le domaine élastique.
- L'application du théorème de Noether nous permet de définir une intégrale M* en thermoplasticité composée d'une intégrale de contour et d'une intégrale de surface.

M* est indépendante du contour si les conditions d'obtention de la symétrie variationnelle sont vérifiées. Dans un espace à deux dimensions ces conditions sont respectées si les déplacements sont constants par la symétrie de dilatation. Seule la solution du problème de Flamant permet de donner une approximation à ces conditions.

L'étude d'une sollicitation thermique dans le cadre du cylindre épais pour lequel l'uniformité des déplacements n'est plus respectée, nécessite de modifier l'intégrale M* si l'on veut obtenir l'indépendance du contour. Une modification des intégrales utilisées dans le cas du cylindre épais dans le domaine élastique et thermoplastique est proposée pour rendre ces intégrales indépendantes du contour. La modification de ces intégrales est ensuite généralisée aux applications où le déplacement est du type $u = r^{-\alpha}$.

Même si les développements présents ont permis la définition d'une intégrale indépendante du contour dans le cas thermoplastique pour une symétrie de dilatation, des développements doivent encore être effectués aussi bien sur les aspects théoriques numériques qu'expérimentaux, y compris pour l'application du frein à disque.

La modification de l'intégrale M (ou M*) en M⁰ pour avoir indépendance du contour souffre d'une démonstration incomplète. Les conditions d'obtention de la symétrie variationnelle associée à M et M* sont définies par le groupe d'action suivant :

$$(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}) \rightarrow (\lambda \mathbf{x}, \lambda^{(P-N)/P} \bar{\mathbf{u}})$$

Dans le cas d'un espace à deux dimensions le groupe d'action devient :

$$(x, \bar{u}) \rightarrow (\lambda x, \bar{u})$$

La loi de conservation liée à cette symétrie a été démontrée dans le domaine élastique par Knowles et Sternberg et étendue en thermoplasticité à l'aide du théorème du lagrangien nul. La modification de M et M^* en M^ω $M^{\omega*}$ permet d'étendre ce champ d'application, néanmoins, il n'a pas été démontré que les nouvelles lois de conservation obtenues sont issues des nouvelles symétries.

Des voies de démonstrations sont proposées.

L'application numérique au frein à disque nécessite une analyse préalable des champs de déformations et de contraintes. Il s'agit, en effet, de définir l'évolution radiale du déplacement afin de définir l'intégrale $M^{\omega*}$ qui sera indépendante du contour. Une analyse de la sensibilité est également nécessaire en raison de la géométrie du disque et de la présence de 6 points chauds répartis angulairement sur le disque, ce qui ne donne pas des conditions de symétrie de dilatation parfaite.

Le calcul des intégrales développées nous donnent une valeur numérique maximale au cours du cycle de sollicitation. Elle doit être comparée à une valeur issue de mesures expérimentales. A partir d'un essai de référence, il s'agit alors de calculer la valeur de M critique correspondant au seuil de fissuration.

Le nombre de données nécessaires au calcul des intégrales de contour et de surfaces est important. La simulation numérique de l'étude expérimentale est une étape intermédiaire indispensable au calcul de l'intégrale M , il est indispensable d'utiliser un modèle numérique qui caractérise le dispositif expérimental afin de disposer des données nécessaires au calcul de l'intégrale.

La concordance entre le frein à disque et le dispositif expérimental réalisé est une étude qu'il faudra mener pour valider les résultats numériques obtenus. De telles investigations expérimentales demeurent délicates à appréhender notamment dans le cas de la fatigue thermique. On peut citer la mise au point du dispositif expérimental (cyclage chauffage-refroidissement, instrumentation, vérification d'une fissuration de surface au sommet du point chaud, détection de la fissure, limitation de l'oxydation, caractérisation du système de chauffe, validation du modèle, etc). L'approche expérimentale peut être réalisée graduellement en commençant par un essai mécanique (cylindre avec pression intérieure) monotone puis cyclique, pour passer ensuite à un dispositif avec sollicitation thermique.

7 BIBLIOGRAPHIE

- [ABD 89] **B.Abdouli, S.Bayard et O.Thouvin.**
Prévision de durée de vie en fatigue-fluage d'un acier CrMoV pour rotors de turbine à haute température.
Fatigue des structures industrielles, IITT international, pp.104-114, (1989).
- [ABR 80] **Abraham, Marsden, Ratiu.**
Manifold, tensor analysis and applications.
Springer Verlag, p.86, (1980).
- [AIN 78] **R.A.Ainsworth, B.K.Neale et R.H.Price.**
Fracture behaviour in the presence of thermal strains.
Tolerance of flaws in pressurized components ; Conference, London, Mechanical Engineering publications for the Institution of Mechanical Engineers. I Mech E pp.171-178, (1978).
- [ATL 82] **S.N.Atluri.**
Path independent integrals in finite elasticity and inelasticity, with body forces, inertia and arbitrary crack-face conditions.
Engng. Fract. Mech. Vol. 16, N° 3, pp.341-364, (1982).
- [BAS 83] **B.R.Bass et J.W.Bryson.**
Energy release rate techniques for combined thermo-mechanical loading.
International journal of fracture, N°22, pp.49-66, (1983).
- [BEN 87] **M.Benyounes.**
Action des symétries généralisées sur les lois de conservation des systèmes lagrangiens.
Thèse de doctorat université des sciences et techniques de Lille Flandres Artois, (1987).
- [BEN 91] **A.Benallal.**
Quelques remarques sur le rôle du couplage thermomécanique dans les phénomènes de localisation.
C.R.Acad Sci Paris, T.312 série 2, pp.117-122, (1991).
- [BEN 92] **A.Benallal.**
On localization phenomena in thermo-elasto-plasticity.
Arch. Mech. 44, N°1, pp.15-29, (1992).
- [BES 21] **E.Bessel-Hagen.**
Über die Erhaltungssätze der Electrodynamik.
Math. Ann. N° 84, pp.258-276, (1921).

- [BIL 89] R.Billardon, I.Doghri.**
Prévision de l'amorçage d'une macro-fissure par localisation de l'endommagement.
CR Acad. Sci. Paris, T.308, série 2, pp.347-352, (1989).
- [BIO 55] M.A.Biot.**
Variational principles in irreversible thermodynamics with application to viscoelasticity.
Physical Review, Vol.97, N°6, pp.1463-1469, march 15, (1955).
- [BIO 56] M.A.Biot.**
Thermoelasticity and irreversible thermodynamics.
Journal of Applied Physics, Vol.27, N°3, pp.240-253, march, (1956).
- [BIO 59] M.A.Biot.**
New thermomechanical reciprocity relation with application to thermal stress analysis.
Journal of the Aero/Space Sciences Vol.26, N° 7, pp.401-408, July (1959).
- [BIO 70] M.A.Biot.**
Variational principles in heat transfert.
Oxford university press, (1970).
- [BIO 75] M.A.Biot.**
A virtual dissipation principle and lagrangian equations in non-linear irreversible thermodynamics.
Bull. Roy. Acad. Belgium, N°61, pp.6-30, (1975).
- [BLA 72] W.S.Blackburn.**
Path indépendant integrals to predict onset of crack instability in a elastic plastic material.
Int. J. Fract. Mech. N°8, pp.343-346, (1972).
- [BLA 86] W.S.Blackburn et T.K.Hellen.**
Non-linear fracture mechanics and finite elements.
Central electricity generating board, Berkeley nuclear laboratories, Gloucestershire, July, (1986).
- [BRU 96] M.Brun.**
DEA de mécanique.
Laboratoire de modélisation mécanique et de mathématiques appliquées (L3MA), Futuroscope.
Responsable C. Vallée (1996).
- [BUD 73] B.Budianski et J.R.Rice.**
Conservation laws and energy-release rates.
Journal of Applied Mechanics Transactions of the ASME, pp.201-203, march, (1973).

- [DEG 90] G.Degallaix.**
Prédiction de durée de vie en fatigue thermomécanique.
Mat-tec, technologie, comportement et traitement des matériaux, IITT International, pp.37-45, (1990).
- [DES 97] G.De Saxcé.**
Mécanique symplectique des milieux continus.
Communication N°13, Congrès national de mécanique, Futuroscope, 1-5 sept (1997).
- [DUF 93] P.Dufrénoy et D.Weichert.**
Modélisation thermomécanique d'un frein à disque. Proceeding of international Symposium on technological innovation in guided transport, ITTG, Lille, (1993).
- [DUF¹ 95] P.Dufrénoy.**
Etude du comportement thermomécanique des disques de freins vis à vis des risques de défaillance.
Thèse de doctorat, Laboratoire de mécanique de Lille, Université des sciences et technologies de Lille, (1995).
- [DUF² 95] P.Dufrénoy et D.Weichert.**
Prediction of railway disc brake temperatures taking the bearing surface variations into account.
Proc. Instn. Mech. Engrs, part F, Vol.209 (F2), pp.67-76 (1995).
- [DUF³ 95] P.Dufrénoy et D.Weichert.**
Numerical prediction of the thermal gradients on disc brakes.
Modelling and simulation, Proceeding of the 1995 European simulation multiconference, Technical University of Prague, pp.76-80, 5-7 June (1995).
- [EIS 87] J.W.Eischen et G.Hermann.**
Energy release rates and related balance laws in linear elastic defect mechanics.
Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.54, June, p.388-392. (1987).
- [ESH¹ 75] J.D.Eshelby.**
The elastic energy-momentum tensor.
Journal of Elasticity, Vol.5, N° 3-4, pp.321-335, november, (1975).
- [ESH² 75] J.D.Eshelby.**
The elastic energy momentum tensor.
Journal of Elasticity, Vol.2, N°4, pp.341-349, (1975).
- [FLE 76] D.C.Fletcher.**
Conservation laws in linear elastodynamics.
Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol.60, pp.329-353, (1976).

- [FRE¹ 78] L.B.Freund.**
Stress intensity factor calculations based on a conservation integral.
Int. J. Solids Structures, Vol.14, pp.241-250, (1978).
- [FRE² 72] L.B.Freund.**
Energy flux into the tip of an extending crack in a elastic solid.
J. of Plasticity, Vol.2, N°4, pp.341-349, (1972).
- [FUN 65] Y.C.Fung.**
Foundations of Solid Mechanics, Prentice Hall, New York, chapters 12-14,
(1965).
- [GAM 93] L. Gambarotta, S. Iagomarsino.**
A microcrack damage model for brittle materials.
Int. J. Solids Structures, Vol.30, N°2, pp.177-198, (1993).
- [GEL 63] I.M.Gelfand et S.V.Fomin.**
Calculus of variation.
Prentice Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, (1963).
- [GER 73] P.Germain.**
Cours de mécanique des milieux continus, Ed. Masson et Cie, Paris (1973).
- [GER 83] P.Germain, Q.S.Nguyen, P.Suquet.**
Continuum thermodynamics.
Transaction of the ASME, Vol.50, December, pp.1010-1020, (1983).
- [GER 95] P.Germain.**
Introduction à la mécanique des milieux continus, Ed. Masson et Cie, Paris (1995).
- [HAD 95] A.Haddi.**
Formulation tridimensionnelle d'un critère de propagation de fissure dans les
matériaux inhomogènes.
Thèse de doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille (1995).
- [HAL 75] B Halphen et Nguyen Quoc Son.**
Sur les matériaux standards généralisés.
Journal de mécanique, Vol.14, N°1, pp.39-63, (1975).
- [HAN 94] N.R.Hansen et H.L.Schreyer.**
A thermodynamically consistent framework for theories of elastoplasticity coupled
with damage.
Int. J. Solids Structures, Vol.31, N°3, pp.359-389, (1994).
- [HON 91] T.Honein, N.Chien et G.Herrmann.**
On conservation laws for dissipative systems.
Physics letter A, N°155, N° 4,5 pp.223-224, mai (1991).

- [HON 97] T.Honein et G.Herrmann.**
Conservation laws in nonhomogeneous plane elastostatics.
J. Mech. Phys. Solids, Vol.42, N°5, pp.789-805, (1997).
- [JU 89] J.W.Ju.**
On energy-based coupled elastoplastic damage theories : constitutive modeling and computational aspects.
Int. J. Solids Structures, Vol.25, N°7, pp.803-833, (1989).
- [JU 91] J.W.Ju.**
On two dimensional self consistent micromechanical damage models for brittle solids.
Int. J. Solids Structures, Vol.27, N°2, pp.27-258, (1991).
- [KER 77] M.Kerguignas, G.Caignaert.**
Résistance des matériaux.
Dunod, Bordas, Paris, (1977).
- [KIM 94] S.J.Kim, W.D.Kim.**
A progressive damage modeling based on the continuum damage mechanics and its finite element analysis.
Journal of Applied Mechanics, Vol.61, pp.45-53, march, (1994).
- [KIM 95] J.H.Kim S.J.Kim, W.D.Kim.**
A finite element analysis of damage propagating during metal forming process.
Eng. Fract. Mech, Vol.51, N°6, pp.915-931, (1995).
- [KNO 72] J.K.Knowles et E.Sternberg.**
On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics.
Arch. Rat. Mech. Anal., N° 44, pp.187-211, (1972).
- [LEM 78] J.Lemaitre et J.L.Chaboche.**
Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement.
Journal de mécanique appliquée, Vol.2, N°3, (1978).
- [LEM 88] J.Lemaitre et J.L.Chaboche.**
Mécanique des matériaux solides.
2^{ème} édition, Bordas, Paris, (1988).
- [LUE 84] D.G.Luenberger.**
Linear and nonlinear Programming.
Addison-Wesley Publishing Co, Menlo Park, Calif, (1984).
- [MAN 73] J. Mandel.**
Relations de comportement des milieux élastiques-viscoplastiques. Notion de repère directeur.
Thermodynamique et plasticité (Int. Symposium of the Continuum thermodynamics), Lisbonne (1973).

- [MAN 71] J. Mandel.**
 Sur les relations de comportement d'un milieu élastique viscoplastique.
 C.R. Acad. Sci, Paris, T.273, série A, pp.44-46, (1971).
- [MAK 94] I.L.Maksmov, N.G.Golubeva, G.M.Maksimov, V.Smetrikin, V.N.Smirnova, J.V.Svirina.**
 Theory of non-isothermal crack propagation in plastic and viscous-plastic materials.
 Materials science and engineering, A176, pp.309-315, (1994).
- [MAU 90] G.A. Maugin.**
 Sur le tenseur de moment matériel d'Eshelby en élasticité non linéaire.
 C.R. Acad. Sci, Paris, T.310, série II, pp.675-678, (1990).
- [MAU 92] G.A. Maugin.**
 The thermomechanics of plasticity and fracture.
 Cambridge university press, Cambridge, (1992).
- [MAU 93] G.A. Maugin.**
 Material inhomogeneities in elasticity.
 Chapman and Hall, London, (1993).
- [MAU 95] G.A. Maugin.**
 Material forces : Concept and applications.
 Appl. Mech. Rev., 48, pp.213-245, (1995).
- [MAU 97] G.A. Maugin.**
 Thermomechanics of inhomogenous-heterogeneous systems.
 ARI, 50, pp.41-56, (1997).
- [MAU 98] G.A. Maugin.**
 Thermomechanics of forces driving singular point sets.
 Arch. Mech., 50, 3, pp.509-519, (1998).
- [MIA 95] D.P.Miannay.**
 Mécanique de la rupture.
 Les éditions de physique, Les Ulis (1995).
- [MOR 71] J.J.Moreau.**
 Séminaire d'analyse convexe, Exposé N°6.
 Montpellier (1971).
- [NGU 74] Q.S. Nguyen et H.D. Bui .**
 Sur les matériaux élastoplastiques à écrouissage positif ou négatif.
 Journal de mécanique, Vol.13, N°2, pp.321-342, juin (1974).

- [NGU 81] Q.S. Nguyen.**
 A thermodynamic description of the running crack problem.
 Proceeding IUTAM symposium on three dimensional constitutive relations and ductile fracture, edited by A.Nemat-Nasser, North-Holland publishing, Amsterdam, pp.315-330, (1981).
- [NIS 83] T.Nisioka et S.N.Atluri.**
 Path independent integrals, energy release rates, and general solutions of near-tip fields in mixed-mode dynamic fracture mechanics.
 Engng. Fract. Mech, Vol.18, N°1, pp.1-22, (1983).
- [NOE 18] E.Noether.**
 Invariant variations probleme.
 Kgl. Ges. Wiss.Nachr. Gottingen, Math-Physik. Kl 2, pp.235-257, (1918).
- [NOE 71] E.Noether et M.A.Tavel.**
 Invariant variation problems.
 Transport theory and statistical physics 1, Vol.3, pp.183-207, (1971).
- [NOW 84] W.Nowacki.**
 Thermoelasticity, 2nd ed, translated by H.Zorski, Pergamon Press Oxford, and PWN Polish Scientific Publishers, Warszawa (1984).
- [OLV¹ 84] P.J.Olver.**
 Conservation laws in elasticity I general results.
 Arch. Rat. Mech. Anal. N° 85, pp.111-129, (1984).
- [OLV² 84] P.J.Olver.**
 Conservation laws in elasticity.
 Arch. Rat. Mech. Anal, N° 85, pp.131-160, (1984).
- [OLV 88] P J Olver.**
 Conservation laws in elasticity III, planar linear anisotropic elastostatics.
 Arch. Rat. Mech. Anal, N° 102, pp.167-181, (1988).
- [OLV 93] P.J.Olver.**
 Applications of Lie groups to differential equations.
 2^{ème} édition, Springer Verlag, New York, (1993).
- [OLV 95] P.J.Olver.**
 Equivalence, invariants and symmetry.
 Cambridge university press, New York, (1995).
- [ORT 86] M.Ortiz et J.C.Simo.**
 An analysis of a new class of integration Algorithms for elastoplastic constitutive relations.
 Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.23, pp.353-366, (1986).

- [RIC 68] J.R.Rice.**
A path independent integral and the approximation analysis of strain concentration by notches and cracks.
Journal of Applied Mech. N°35, pp.379-386, (1968).
- [SAN 95] P.Sansen.**
Endommagement d'un disque de frein.
DEA de mécanique, laboratoire de mécanique de Lille, EUDIL, Université des sciences et technologies de Lille, nov (1995).
- [SCH 96] W.Schutz.**
A history of fatigue.
Eng. Fract. Mech., Vol.54, N°2, pp.263-300, (1996).
- [SHO 87] J.Short.**
A physical interpretation of the M-integral for a Griffith crack.
Int. J. of Fracture, N°34, R23-26, (1987).
- [SIM 89] J.C.Simo, J.G.Kennedy et R.L.Taylor.**
Complementary mixed finite element formulations for elastoplasticity.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.74, pp.177-206, (1989).
- [SIM 90] J.C.Simo et T.Honein.**
Variational formulation, discrete conservation laws, and path-domain independent integrals for elasto-viscoplasticity.
ASME Journal of applied mechanics, Vol.57, pp.488 - 497, September, (1990).
- [SPE 76] D. A. Spera.**
Thermal fatigue of materials and components.
ASTM STP 612, eds DA Spera et DF Mowbray, pp.3-9, (1976).
- [STR 86] G.Strang.**
Introduction to applied mathematics.
Wellesley Cambridge Press, USA (1986).
- [TAI 73] S.Taira.**
Fatigue at elevated temperatures.
ASTM, STP (520), pp.80-101, (1973).
- [WAG 92] D.A.Wagner et J.C.Simo.**
Fracture parameter for thermoelasticity.
Int. J. of Fract, N°56, pp.159-187, (1992).
- [WIL 79] W.K.Wilson et I.W.Yu.**
The use of the J integral in thermal stress crack problems.
Int. J. of Fract., N°15, Vol.4, pp.377-387, august (1979).

[WOO 81] L.C.Woods.

On the local form of the second law of thermodynamics in continuum mechanics.
Quartely of Applied Mathematics, pp.119-126, April, (1981).

[WOO 82] L.C.Woods.

The basic inequalities of continuum thermodynamics.
Rev. Roum. Math. Pures et Appl. T.28, pp.429-434, Bucarest, (1982).

[XUL 93] Xu Li.

J integral and J^* integral in thermal stress conditions.
Eng. Fract. Mech., Vol.45, N°5, pp.713-715, (1993).

ANNEXE 1.

Un système d'équations différentielles d'ordre n en p variables indépendantes et q variables dépendantes est donné par le système d'équations

$$\Delta_v \left(x, u^{(n)} \right) = 0 \quad \text{avec } v = 1, \dots, l$$

l est la dimension de l'espace euclidien considéré.

avec $x = (x^1, x^2, \dots, x^p)$ les variables indépendantes, $u = (u^1, u^2, \dots, u^q)$ les variables dépendantes et $u^{(n)}$ les dérivées de u jusqu'à l'ordre n

Théorème de la formulation générale de la prolongation :

Soit

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

un champ de vecteurs définis sur un ouvert $M \subset X \times U$.

ξ^i est le coefficient de v suivant x^i et ϕ^j est le coefficient de \vec{v} suivant u^α .

Le $n^{\text{ème}}$ prolongement de \vec{v} est le champ de vecteurs

$$\text{pr}^{(n)} \vec{v} = \vec{v} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_j \phi_{\alpha}^j(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_{\alpha}^j}$$

défini sur l'espace $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$ correspondant. La seconde sommation se fait sur tous les multi indices $j = (j_1, \dots, j_k)$ avec $1 \leq j_k \leq p$ et $1 \leq k \leq n$. Les coefficients ϕ_{α}^j de $\text{pr}^{(n)} \vec{v}$ sont donnés par

$$\phi_{\alpha}^j(x, u^{(n)}) = \text{div}_j \left(\phi_{\alpha} - \sum_{i=1}^p \xi^i u_{\alpha, i}^{\alpha} \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{j, i}^{\alpha}$$

avec $u_{\alpha, i}^{\alpha} = \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^i}$ et $u_{j, i}^{\alpha} = \frac{\partial u_j^{\alpha}}{\partial x^i}$

La n ième dérivée totale de $P(x, u^{(n)})$ a la forme générale

$$\operatorname{div}_i P = \frac{\partial P}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_j u_{j,i}^\alpha \frac{\partial P}{\partial u_{j,i}^\alpha}$$

avec pour $j = (j_1, \dots, j_n)$ et

$$u_{j,i}^\alpha = \frac{\partial u_j^\alpha}{\partial x^i} = \frac{\partial^{k+1} u^\alpha}{\partial x^i \partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_k}}$$

Théorème de la symétrie

Supposons :

$$\Delta_v(x, u^{(n)}) = 0 \quad v=1, \dots, l$$

un système d'équations différentielles de rang maximal défini sur $M \subset X \times U$. Si G est un groupe de transformation locale sur M et

$$\operatorname{pr}^{(n)} \bar{v} \left[\Delta_v(x, u^{(n)}) \right] = 0, \quad v=1, \dots, l$$

quel que soit $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ pour chaque générateur infinitésimal \bar{v} de G , alors G est un groupe de symétrie du système.

Après avoir cité le théorème de la symétrie nous allons aborder la notion de dérivée variationnelle et le théorème du lagrangien nul. Ces notions seront utiles dans la définition de la dérivée variationnelle et pour le théorème de Noether.

Définition de l'opérateur d'Euler-Lagrange :

Pour $1 \leq \alpha \leq q$ le α ième opérateur d'Euler-Lagrange est donné par : $E_\alpha = \sum_j (-D)_j \frac{\partial}{\partial u_{j,i}^\alpha}$

avec : $j = (j_1, \dots, j_k) \quad 1 \leq j_k \leq p \quad k \geq 0$.

Si $u = f(x)$ est un extremum du problème variationnel

$$\Pi(u) = \int_{\Omega} L(x, u^{(n)}) dx$$

alors il doit être solution de l'équation d'Euler-Lagrange $E_v(L) = 0 \quad v = 1, \dots, q$

Théorème du lagrangien nul :

Une fonction $L(x, u^{(n)})$ de x, u et des dérivées de u définies sur $X \times U^{(n)}$ est un lagrangien nul, ce qui signifie que l'équation d'Euler-Lagrange $E(L) \equiv 0$ pour tout x, u si et seulement si elle est une divergence totale $L = \text{div}(P)$ pour tout p uplet de la fonction $P = (P_1, \dots, P_p)$ de x, u et les dérivées de u .

Corollaire :

Deux lagrangiens L et \tilde{L} ont la même expression suivant Euler-Lagrange $E(L) = E(\tilde{L})$ si, et seulement si, ils diffèrent par une divergence

$$L = \tilde{L} + \text{div}(P)$$

Après avoir défini le lagrangien nul, il sera nécessaire d'utiliser les notions précédentes liées à la notion de symétrie pour définir la dérivée variationnelle et le théorème de Noether.

Théorème de la symétrie variationnelle :

Un groupe de transformation G sur $M \subset \Omega_0 \times U$ est une symétrie variationnelle de la fonctionnelle $\Pi(u) = \int_{\Omega} L(x, u^{(n)}) dx$ si et seulement si :

$$\text{pr}^{(n)}v(L) + L\text{div}(\xi) = 0$$

pour tout $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$ et chaque générateur infinitésimal

$$v = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \Phi_{\alpha}(x, u) \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} \quad \text{de } G.$$

Théorème :

Si G est un groupe de symétrie variationnelle de la fonctionnelle $\Pi[u] = \int_{\Omega_0} L(x, u^{(n)}) dx$ alors G est groupe de symétrie des équations d'Euler-Lagrange $E(L) = 0$

Théorème de Noether :

On suppose que G est un groupe local de symétrie à un paramètre du problème variationnel

$$\Pi[u] = \int_{\Omega_0} L(x, u^{(n)}) dx. \text{ Soit}$$

$$v = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \Phi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

un générateur infinitésimal de G , et

$$Q_\alpha(x, u) = \phi_\alpha - \sum_{i=1}^q \xi^i u_{,i}^\alpha \quad \text{avec : } u_{,i}^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$$

les caractéristiques de v , alors $Q = Q(Q_1, \dots, Q_q)$ est aussi la caractéristique de la loi de conservation de l'équation d'Euler-Lagrange $E(L) = 0$. En d'autres mots, il existe un p uplet

$$P(x, u^m) = (P_1, \dots, P_p) \text{ tel que}$$

$$\text{div}(P) = Q \cdot E(L)$$

est une loi de conservation caractéristique de l'équation d'Euler-Lagrange $E(L) = 0$.

Avec

$$P = -(A + L\xi) \quad \text{et}$$

$A = (A_1, \dots, A_p)$ est un p uplet de fonctions dépendantes de Q , L , et leur dérivés.

Nous avons énoncé le théorème de Noether sous sa forme générale. Nous donnerons maintenant une version du théorème de Noether pour un problème variationnel du premier ordre.

Corollaire :

Si l'on suppose que $\Pi[u] = \int_{\Omega_0} L(x, u^{(1)}) dx$ est un problème variationnel du premier ordre

et que v est une symétrie variationnelle alors

$$P_i = \sum_{\alpha=1}^q \phi_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_{,i}^\alpha} + \xi^i L - \sum_{\alpha=1}^q \sum_{j=1}^p \xi^j u_{,j}^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_{,i}^\alpha}$$

$i = 1, \dots, p$

forme les composantes de la loi de conservation $\text{div}(P) = 0$ pour les équations d'Euler-Lagrange $E(L) = 0$

Conséquences :

On considère un système différentiel d'Euler-Lagrange noté : $\left(\Delta \mathbf{u} = \frac{\delta L}{\delta \mathbf{u}} = 0 \right)$. On note A_L l'algèbre de Lie formée par les champs de vecteurs généralisés qui sont des symétries variationnelles du système $\left(\Delta \mathbf{u} = \frac{\delta L}{\delta \mathbf{u}} = 0 \right)$. Le système différentiel $\left(\Delta \mathbf{u} = \frac{\delta L}{\delta \mathbf{u}} = 0 \right)$ étant un système d'Euler-Lagrange, on peut associer, à chaque symétrie variationnelle de A_L , une loi de conservation grâce au théorème de Noether.

RESUME.

L'observation du comportement thermomécanique des freins illustre un cas pratique de fatigue en présence de points chauds répartis angulairement sur la surface du disque. Dans le but de prédire la fissuration des disques, une approche énergétique est développée, qui vise à définir un seuil d'énergie au delà duquel on aura apparition d'une fissure macroscopique. Sur la base de l'intégrale M définie dans le cas élastique par Knowles et Sternberg pour une symétrie de dilatation, le comportement thermoplastique est introduit.

A partir de l'inégalité de Clausius-Duhem et de la formation d'un lagrangien dans le cas de la thermoplasticité, le comportement thermoplastique est introduit dans l'intégrale M par le théorème du lagrangien nul. On peut alors, par l'utilisation du théorème de Noether obtenir une intégrale M^* composée d'une intégrale de contour et d'une intégrale de surface. M^* est indépendante du contour sous réserve de respecter les conditions d'obtention de la symétrie variationnelle. Ces conditions sont très sévères dans un espace à deux dimensions elles correspondent à une uniformité des déplacements. Seule la solution du problème de Flamant peut répondre à ces conditions. L'étude d'une sollicitation thermique dans le cadre du cylindre épais, pour lequel l'uniformité des déplacements n'est plus respectée, montre la nécessité de modifier l'intégrale M^* si l'on veut obtenir l'indépendance du contour. Une modification des intégrales utilisées dans le cas du cylindre épais dans le domaine élastique et thermoplastique est proposée pour rendre ces intégrales indépendantes du contour. La modification de ces intégrales est ensuite généralisée aux applications où le déplacement est du type $u = r^{-\alpha}$. Différents exemples d'applications permettent de valider la conformité des résultats théoriques et numériques.

Mots-clés : Fissuration, thermoplasticité, intégrale M , point chaud, frein à disque ferroviaire.

ABSTRACT

The analysis of the thermomechanical behaviour of braking discs illustrates a practical case of thermal fatigue with « hot spots » angularly distributed on the surface of the disc. In order to predict the damage of the disc, an energetic approach is developed, defining an energy threshold corresponding to the macroscopic cracks initiation. On the base of the M integral (scaling symmetry), defined in the elastic case by Knowles and Sternberg, the thermoplastic behaviour is introduced.

From the Clausius-Duhem inequality and the formulation of a lagrangian in the case of the thermoplasticity, the thermoplastic behaviour is introduced in the M integral through the null lagrangian theorem. Using the Noether's theorem, one obtains the M^* integral as the sum of a contour integral and a surface integral. M^* is path independent under conditions to obtain a variational symmetry. These conditions are very restrictive and correspond to uniform displacements (2D). Only the solution of Flamant's problem respects these conditions. The uniformity of the displacements in the case of a thick cylinder under thermal sollicitation is no longer respected. It shows the necessity to modify the M^* integral to obtain path independence. A modification of the integrals in the case of the thick cylinder in elastic and thermoplastic cases is proposed in order to lead to path independence. Extension to path independent integrals for applications where displacements are of the form $u = r^{-\alpha}$ is given. Good agreement between theoretical and numerical results is obtained on several examples.

Key-Words : Crack initiation, thermoplasticity, M integral, hot spot, railway braking disc.