

55 376
1999
3

N° d'ordre : 2658

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Emmanuel THILLY

REARRANGEMENTS CONVEXES DES TRAJECTOIRES DE PROCESSUS STOCHASTIQUES

Soutenue le 16 Décembre 1999 devant la Commission d'Examen :

Président : M. ROUSSIGNOL, Université de Marne la Vallée
Directeur de Thèse : Y. DAVYDOV, Université de Lille I
Rapporteurs : J-M. AZAÏS, Université de Toulouse III
S. COHEN, Université de Toulouse III
Examineurs : A. PHILIPPE, Université de Lille I
Z. SHI, Université de Paris VI
Ch. SUQUET, Université de Lille I

SCD LILLE 1



D 030 254430 4

55376.
1999.
3

N° d'ordre : 2658

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Emmanuel THILLY

REARRANGEMENTS CONVEXES DES TRAJECTOIRES DE PROCESSUS STOCHASTIQUES



Soutenue le 16 Décembre 1999 devant la Commission d'Examen :

Président : M. ROUSSIGNOL, Université de Marne la Vallée
Directeur de Thèse : Y. DAVYDOV, Université de Lille I
Rapporteurs : J-M. AZAÏS, Université de Toulouse III
S. COHEN, Université de Toulouse III
Examineurs : A. PHILIPPE, Université de Lille I
Z. SHI, Université de Paris VI
Ch. SUQUET, Université de Lille I

Remerciements

De nombreuses personnes ont contribué au bon déroulement de cette thèse. L'occasion m'est offerte ici de leur exprimer ma reconnaissance.

En tout premier lieu je tiens à remercier vivement Youri Davydov qui a dirigé ce travail, pour m'avoir proposé un sujet original et enthousiasmant. La disponibilité, la patience et le dynamisme dont il a fait preuve entretinrent constamment ma motivation. Ses nombreux conseils et les échanges que nous avons eus m'ont permis de progresser tant sur le plan de la thèse que dans mon approche du métier d'enseignant-chercheur.

J'adresse également de vifs remerciements aux autres membres du jury :

- à Michel Roussignol qui a accepté de présider ce jury et dont le polycopié de cours de licence contribua fortement à m'éveiller à la théorie des probabilités et à la statistique.

- à Jean-Marc Azaïs et à Serge Cohen qui ont accepté la lourde tâche de rapporter cette thèse à une époque de l'année particulièrement chargée. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, les questions qu'ils ont posées et les commentaires qu'ils ont émis qui ont permis d'achever la rédaction ainsi que pour les nombreuses pistes qu'ils m'ont fournies qui élargissent le champ des perspectives.

- à Anne Philippe pour avoir accepté de faire partie du jury mais également pour l'aide qu'elle m'a apportée concernant la partie statistique notamment la simulation, pour m'avoir formé à la pratique du logiciel *R* à partir duquel ont été réalisés la plupart des graphiques qui illustrent ce travail et enfin pour le soutien qu'elle m'a régulièrement témoigné.

- à Zhan Shi pour avoir accepté de faire partie du jury, pour avoir manifesté un grand intérêt pour mon travail et m'avoir proposé certaines pistes.

- à Charles Suquet pour avoir accepté de faire partie du jury et pour les nombreux conseils, les nombreuses réponses et les marques de soutien qu'il m'a régulièrement accordés depuis mon arrivée au laboratoire.

Le bon déroulement de cette thèse a été largement favorisé par les excellentes conditions de travail que j'ai rencontrées au laboratoire de Statistique et de Probabilités, j'en remercie Marie-Claude Viano et à travers elle l'ensemble des membres du laboratoire.

Je tiens également à remercier Michel Lifshits pour les précieux conseils qu'il m'a donnés concernant les processus gaussiens et l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

Je remercie aussi l'ensemble des enseignants qui m'ont donné le goût des mathématiques en général, des probabilités et de la statistique en particulier.

Durant la préparation de cette thèse j'ai également eu la chance d'enseigner, notamment à l'université de Lille III. Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Laurence Broze pour avoir guidé mes premiers pas d'enseignant mais aussi pour le soutien constant qu'elle m'a témoigné. Je remercie également toute l'équipe du GREMARS, en particulier Frédéric Jouneau et Olivier Torres pour leur soutien et leur intérêt pour mon travail.

J'aimerais souligner également le rôle des collègues doctorants que j'ai côtoyés durant la préparation de cette thèse. Les réponses des plus anciens et les questions des néophytes me furent très profitables et m'ont permis d'appréhender la vie de thésard dans les meilleures conditions. Un grand merci en particulier à Bruno, Caroline, Christian, Emmanuel, Hervé, Mohamedou et Olivier.

Je remercie l'ensemble du personnel du secrétariat scientifique et de l'imprimerie de l'UFR de mathématiques pour avoir répondu à mes demandes avec la gentillesse et l'efficacité dont ils sont coutumiers.

Enfin je remercie mes parents et mes proches pour toutes les formes de soutien qu'ils ont pu m'apporter.

Table des matières

Introduction	1
Introduction	3
1 Notion de réarrangement convexe	7
1.1 Introduction	7
1.2 Notations	8
1.3 Réarrangements convexes de fonctions	8
1.3.1 Définitions	8
1.3.2 Réarrangements convexes d'une fonction absolument continue	10
1.3.3 Réarrangements convexes d'une somme de deux fonctions	12
1.3.4 Remarque sur le lissage par convolution	14
1.3.5 Relations avec les dérivées	15
1.4 Application aux trajectoires de processus	15
1.4.1 Intérêts	15
1.4.2 Processus à trajectoires absolument continues	16
1.4.3 Mouvement brownien standard	17
1.4.4 Processus strictement α -stables ($1 < \alpha < 2$)	17
1.4.5 Notion de passerelle	19
1.4.6 Remarque sur les statistiques d'ordre	20
2 Cas des processus gaussiens	23
2.1 Introduction	23
2.2 Résultats préliminaires	24
2.2.1 Principe de concentration	24
2.2.2 Quelques lemmes	24
2.3 Convergence des réarrangements convexes	28
2.3.1 Théorème limite presque sûr	28
2.3.2 Conditions suffisantes.	42
2.3.3 Exemples	45
2.3.4 Cas du lissage par convolution	46

3	Cas des processus de Itô-Wiener	49
3.1	Introduction	49
3.2	Résultats préliminaires	50
3.2.1	Une inégalité pour la métrique de Lévy-Prokhorov	50
3.2.2	Inégalité de Burkholder	51
3.2.3	Une inégalité pour les moments de martingales browniennes	51
3.2.4	Convergence presque sûre des variations quadratiques	51
3.3	Convergence des réarrangements convexes	54
3.3.1	Théorème limite presque sûr	54
3.3.2	Cas particuliers	60
3.3.3	Cas du lissage par convolution	61
3.4	Approximation faible de la mesure d'occupation	62
4	Cas des processus multidimensionnels	67
4.1	Introduction	67
4.2	Rappels sur les ensembles convexes	68
4.2.1	Généralités	68
4.2.2	Notion de zonotope	69
4.3	Convergence d'une suite de convexes	70
4.4	Convexification de processus d-dimensionnels	72
4.4.1	Résultat général	72
4.4.2	Identification de la limite dans le cas gaussien	75
5	Estimation de l'exposant de Hölder de processus gaussiens	81
5.1	Introduction	81
5.2	Estimateurs de l'exposant de Hölder	83
5.2.1	Estimateurs fondés sur les moments absolus des accroissements	83
5.2.2	Estimateurs fondés sur les réordonnements des accroissements	85
5.3	Simulation	85
5.3.1	Processus gaussien stationnaire	86
5.3.2	Mouvement brownien fractionnaire standard	90
5.3.3	Conclusion	93
	Perspectives	95
	Annexes	97
	Bibliographie	105
	Index	110

Introduction

L'origine de ce travail est le problème suivant soulevé par Davydov : étant donné $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$, un processus stochastique à valeurs dans \mathbb{R} , défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à trajectoires presque sûrement *càdlàg*, on considère $X_n(t)$, les régularisations des trajectoires par approximations polygonales sur la subdivision uniforme de pas $\frac{1}{n}$ de l'intervalle $[0, 1]$. Si $VX_n(t)$ est la ligne polygonale convexe formée à partir des segments qui composent $X_n(t)$ réordonnés par pente croissante, les questions suivantes se posent alors sur le comportement de la suite $VX_n(t)$, éventuellement normalisée, lorsque n tend vers l'infini :

- Sous quelles conditions sur X obtient-on une limite ?
- Quelle est la normalisation appropriée ?
- Cette limite est-elle la même pour presque chaque trajectoire ?
- Quelles sont les propriétés de cette limite ?

Dans le cas des processus à trajectoires presque sûrement absolument continues, nous montrerons que les réponses sont triviales, en un certain sens. Par contre dans le cas de processus à trajectoires presque sûrement non différentiables l'étude est beaucoup plus complexe et dépend évidemment de la nature même du processus considéré.

Davydov [29] a répondu à ces questions en ce qui concerne le mouvement brownien standard puis les processus α -stables ($1 < \alpha < 2$). Dans chacun de ces deux cas, il obtient, sous normalisations appropriées, une courbe limite convexe déterministe.

Notre objectif principal était donc de poursuivre ces investigations en étudiant le cas d'autres classes de processus : les processus gaussiens et les processus de Itô-Wiener.

Davydov [29] a établi que l'étude de la convergence de VX_n se ramène, en partie, à l'étude de la convergence faible des oscillations du processus X considérées comme des variables aléatoires sur $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$. Ceci nous a amené à faire les liens avec les travaux de Azaïs et Wschebor concernant ce

sujet (cf : [8], [9] et [68]) et à proposer une approximation faible de la mesure d'occupation à partir du nombre de franchissements d'un niveau donné par les approximations polygonales du processus convenablement normalisées.

Au cours de cette étude nous avons également étudié le cas de processus à valeurs dans \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Nous remarquons qu'à partir des accroissements sur la subdivision uniforme de $[0, 1]$, il est possible de construire la somme de Minkowski des segments $[0, X_{nk}]$ avec $X_{nk} = (\frac{1}{n}, \alpha_{nk})$ où $\alpha_{nk} = b_n^{-1}[X(\frac{k+1}{n}) - X(\frac{k}{n})]$, b_n étant une normalisation appropriée. Nous notons Z_n cet objet $(d + 1)$ -dimensionnel qui est lié en un certain sens à l'objet VX_n que nous construisons lorsque le processus est à valeurs dans \mathbb{R} . Nous remarquons que lorsque pour chacune des composantes $X^i(t)$, $i = 1, \dots, d$, nous connaissons le comportement asymptotique de $VX_n^i(t)$ comme élément de \mathbb{R}^2 , il est possible de déduire le comportement asymptotique de Z_n comme élément de \mathbb{R}^{d+1} .

Enfin nous avons exploité certains de ces résultats pour aborder des problèmes d'estimation. Nous avons ainsi construit des estimateurs fortement consistants de l'exposant de Hölder local de processus gaussiens qui caractérise l'irrégularité des trajectoires.

Dans le chapitre 1 nous présentons la notion de réarrangement convexe, en particulier nous définissons l'opérateur V qui permet à partir d'une courbe suffisamment régulière de construire une courbe convexe telle que nous l'avons décrite précédemment puis après avoir établi quelques résultats préliminaires concernant cet opérateur, nous énonçons les résultats précités sur le mouvement brownien et sur les processus strictement α -stables ($1 < \alpha < 2$) à valeurs dans \mathbb{R} . Nous définissons également la notion de passerelle apparentée à la notion de pont (dans le cas du mouvement brownien c'est exactement le pont brownien) d'un processus initial X et montrons que le comportement asymptotique des réarrangements convexes de ce nouveau processus partant et rentrant en 0, est le même que celui du processus initial.

Dans le chapitre 2 nous abordons le cas des processus gaussiens à valeurs dans \mathbb{R} , nous montrons que sous une condition de dépendance faible des accroissements, pour presque chaque trajectoire la suite $VX_n(t)$ converge vers la fonction convexe déterministe $t \mapsto \int_0^t \Phi^{-1}(s) ds$ où Φ est la distribution gaussienne centrée réduite. Pour démontrer ce résultat, nous utilisons des techniques adaptées aux processus gaussiens en particulier nous appliquons le principe de concentration du supremum d'une fonction aléatoire gaussienne autour de ses médianes. Il est à noter qu'au cours de la preuve nous avons établi une loi forte des grands nombres pour certaines fonctions de suites triangulaires de variables aléatoires gaussiennes.

Dans le chapitre 3 nous appliquons ce procédé de “convexification” aux processus de Itô-Wiener (selon la terminologie de Liptser et Shyriaev [50]) à valeurs dans \mathbb{R} , c’est à dire les processus du type $X(t) = \int_0^t b(s) dW_s + \int_0^t a(s) ds$ où *p.s.*, $a \in L^1[0, 1]$ et *p.s.*, $b \in L^2[0, 1]$ est adapté à la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$. Sous une condition un peu plus forte d’intégrabilité du coefficient b nous montrons que pour presque chaque trajectoire $\frac{1}{\sqrt{n}} V X_n(t)$ converge vers $t \mapsto \int_0^t F_b^{-1}(s) ds$ où F_b est un mélange de fonctions de réparations gaussiennes. Soulignons que dans ce cas, à la différence des processus abordés précédemment, la limite est aléatoire puisqu’elle dépend de b . Pour obtenir ce résultat nous utilisons des techniques propres aux martingales de carré intégrable et nous établissons, entre autres, un résultat sur la convergence presque sûre des variations quadratiques de martingales browniennes. Enfin nous retrouvons dans le cas d’approximations polygonales, un résultat de Azaïs et Wschebor concernant l’approximation presque sûre faible de la mesure d’occupation à partir de processus régularisés par convolution. Ceci concerne les martingales browniennes, les processus gaussiens et les processus strictement α -stables étudiés précédemment.

Dans le chapitre 4 nous étendons, en un certain sens, nos résultats aux processus $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d . En reprenant l’idée de Davydov et Vershik [32] nous avons considéré Z_n , les zonotopes $(d + 1)$ -dimensionnels engendrés par les accroissements du processus sur la subdivision uniforme de l’intervalle $[0, 1]$ c’est à dire les sommes de Minkowski des segments $[0, X_{nk}]$ où $X_{nk} = (\frac{1}{n}, \alpha_{nk})$ où $\alpha_{nk} = b_n^{-1}[X(\frac{k+1}{n}) - X(\frac{k}{n})]$, b_n étant une normalisation appropriée. Nous montrons que si les projections orthogonales sur les droites vectorielles de \mathbb{R}^{d+1} de la suite Z_n convergent presque sûrement vers une limite convexe alors Z_n converge vers un zonoïde dans \mathbb{R}^{d+1} que nous identifions dans le cas gaussien.

Enfin le chapitre 5 est consacré à un problème d’estimation connexe avec les résultats du chapitre 2 dans le sens où ces derniers permettent d’exhiber deux classes d’estimateurs consistants de l’exposant de Hölder de processus gaussiens. Soulignons qu’à l’image de nombreux travaux récents concernant ce sujet [10], [40], [45], [47], [58] ces estimateurs sont fondés sur les variations discrètes du processus. La première classe évoquée n’est autre que l’extension à l’ensemble des processus gaussiens auto-similaires en 0 d’un résultat de Peltier et Lévy-Véhel [56] consacré au mouvement brownien fractionnaire. Par contre la méthode employée pour construire la seconde classe d’estimateurs semble novatrice puisqu’elle est basée sur les sommes partielles des accroissements ordonnés par valeurs croissantes. Après avoir explicité ces constructions, nous illustrons ces résultats au moyen de simulations.

Chapitre 1

Notion de réarrangement convexe

1.1 Introduction

Le procédé de réarrangement convexe parfois aussi appelé convexification fut introduit récemment par Davydov et Vershik [32] au cours d'une étude concernant les mesures de probabilité sur l'espace des sous-ensembles convexes de \mathbb{R}^d , $d > 1$. A partir d'une marche aléatoire ils construisent un objet convexe au moyen d'un procédé que nous décrivons brièvement ci-après.

Soit $\{z_i, i \in \mathbb{N}\}$, une suite de variables aléatoires 2-dimensionnelles indépendantes et de même loi commune \mathcal{P} , soit (ρ_i, θ_i) , les coordonnées polaires du vecteur z_i . Enfin on note $\theta_{\pi_1}, \theta_{\pi_2}, \dots, \theta_{\pi_n}$ les angles $\theta_i, i = 1, \dots, n$ appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ et réordonnés dans le sens croissant. Considérons la ligne polygonale L_n dont les sommets sont les points $S_0^*, S_k^* = \sum_{i=1}^k z_{\pi_i}$, cette ligne représente exactement ce qu'on appelle le réarrangement convexe de la marche aléatoire $S_k = \sum_{i=1}^k z_i$.

Davydov et Vershik ont étudié le comportement asymptotique des courbes $\frac{1}{b_n} L_n$ où b_n est une normalisation appropriée et les propriétés de leurs lois limites. Par ailleurs, ils ont remarqué que ce procédé pouvait s'appliquer aux trajectoires régularisées de processus stochastiques et étudié en particulier le cas du mouvement brownien standard sur $[0, 1]$. Ils ont ainsi obtenu un résultat du type loi forte des grands nombres pour des suites engendrées par les réarrangements convexes des approximations polygonales des trajectoires et exhibé une courbe limite convexe déterministe.

Dans la suite de ce chapitre, après avoir fixé quelques notations, nous définirons le procédé de réarrangement convexe d'une courbe et nous présenterons quelques résultats concernant le comportement asymptotique de

suites ainsi construites, puis nous soulignerons les motivations qui nous ont poussé à appliquer ce procédé aux trajectoires de processus stochastiques et nous énoncerons les premiers résultats établis concernant le mouvement brownien standard [32] et les processus α -stables ($1 < \alpha < 2$), [29]. Enfin nous introduirons la notion de passerelle qui transforme un processus initial défini sur l'intervalle $[0, 1]$ en un autre processus prenant la valeur 0 en $t = 0$ et $t = 1$ et nous montrerons que les suites de réarrangements convexes engendrées par le processus initial et par sa passerelle ont le même comportement asymptotique.

1.2 Notations

Nous commençons par préciser quelques indispensables notations qui seront utilisées dans ce chapitre et dans les suivants. D'autres apparaîtront tout au long de cet ouvrage.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ - l'espace probabilisé de base.

\implies - symbole de la convergence faible des lois.

\mathbb{E} - l'espérance mathématique sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

$\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ - égalité en loi.

$\mathbb{1}_A$ - la fonction indicatrice de l'ensemble A .

Φ - la fonction de répartition de la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$.

Φ_σ - la fonction de répartition d'une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

\mathcal{B}_A - la tribu des boréliens de A .

x_+, x_- - respectivement les parties positive et négative de x .

p.s. - presque sûrement.

□ - signe marquant la fin d'une démonstration intermédiaire interne à une preuve.

■ - signe marquant la fin d'une preuve.

1.3 Réarrangements convexes de fonctions

1.3.1 Définitions

Définition 1.1 Soit f une fonction mesurable sur $[0, 1]$, l'unique fonction croissante Tf , càdlàg et équidistribuée avec f ($\lambda f^{-1} = \lambda(Tf)^{-1}$, où λ est la mesure de Lebesgue) est appelée le **réarrangement monotone** de f .

L'opérateur T et ses analogues sont bien connus, il possède différentes propriétés intéressantes et joue un rôle important dans l'analyse et la théorie des processus stochastiques (voir [33] et [46], par exemple).

Nous énonçons maintenant une inégalité concernant l'opérateur T et la norme dans $L^p[0, 1]$.

Théorème 1.2 Soit f et g deux fonctions appartenant à $L^p[0, 1]$ et soit T l'opérateur de réarrangement monotone. Notons $\|\cdot\|_p$, la norme d'un élément de l'espace $L^p[0, 1]$. Nous avons l'inégalité suivante

$$\forall p \geq 1, \quad \|Tf - Tg\|_p \leq \|f - g\|_p.$$

Pour la démonstration nous renvoyons le lecteur au livre de Krein *et al.* [46] ou à la thèse de Zhukova [69].

On introduit ensuite un nouvel outil construit à partir de l'opérateur de réarrangement monotone :

Définition 1.3 Soit \mathcal{E} , l'espace des fonctions $f(t)$, $t \in [0, 1]$ absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. L'opérateur V défini sur l'espace \mathcal{E} par : $Vf(t) = f(0) + \int_0^t T(f')(s) ds$ est appelé **opérateur de réarrangements convexes**.

L'opérateur V , semble-t-il, a été introduit par Davydov, certaines de ses propriétés sont étudiées par Zhukova dans [69].

Remarque 1.4 Il est clair que Vf est convexe et prend les mêmes valeurs que f aux points extrémaux de l'intervalle $[0, 1]$.

Pour procéder à la convexification nous devons considérer des approximations suffisamment lisses des courbes pour obtenir un objet absolument continu. Le type d'approximation que nous considérerons dans cette étude est l'approximation polygonale, néanmoins nous évoquerons aussi le cas des approximations par convolution.

Par abus de langage nous confondrons de temps à autre, réarrangement convexe des courbes avec réarrangement convexe des régularisations des courbes.

Nous décrivons à présent le procédé de convexification d'une courbe. Soit $X(t)$ une fonction mesurable sur $[0, 1]$. On procède par discrétisation de pas $\frac{1}{n}$ et par interpolation linéaire. Ainsi pour chaque n , on considère les approximations polygonales engendrées par la subdivision uniforme $\{\frac{k}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1\}$ de l'intervalle $[0, 1]$:

$$X_n(t) = X\left(\frac{k}{n}\right) + (nt - k)\left[X\left(\frac{k+1}{n}\right) - X\left(\frac{k}{n}\right)\right], \quad (1.1)$$

où $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ et $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Il est clair que $VX_n(t)$ est une fonction convexe et polygonale obtenue par une permutation des segments du graphe de $X_n(t)$, ordonnés par pente croissante. Cela explique la terminologie choisie.

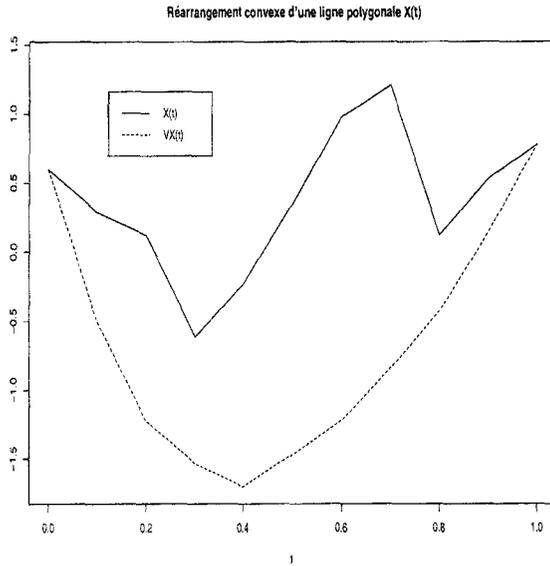


FIG. 1.1 – Exemple de réarrangement convexe

Pour illustrer ce procédé nous avons construit une ligne polygonale formée de 10 segments (traits pleins) puis nous avons représenté le réarrangement convexe de cette ligne (traits pointillés).

1.3.2 Réarrangements convexes d'une fonction absolument continue

Nous allons commencer l'étude des réarrangements convexes en étudiant le cas d'une fonction absolument continue f . D'après la définition de l'opérateur V , nous pouvons définir Vf le réarrangement convexe de f . Si nous considérons f_n , l'approximation polygonale pour la subdivision uniforme de la fonction f nous allons montrer que l'étude du comportement asymptotique de Vf_n est en quelque sorte triviale puisqu'on obtient, sans normalisation, la convergence vers Vf .

Théorème 1.5 Soit $f(t), t \in [0, 1]$, une fonction absolument continue et soit $f_n(t)$, la suite des approximations polygonales de $f(t)$ définie comme en (1.1), nous avons $\forall t \in [0, 1]$,

$$Vf_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Vf(t). \quad (1.2)$$

Preuve : Puisque f est absolument continue, il existe $f' \in L^1[0, 1]$ telle que $f(t) = \int_0^t f'(s) ds + f(0)$, $t \in [0, 1]$.

Par définition nous avons

$$Vf_n(t) = \int_0^t Tf'_n(s) ds + f_n(0), \quad t \in [0, 1].$$

Remarquons d'abord que si $s \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, nous avons

$$\begin{aligned} f'_n(s) &= n \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \\ &= n \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f'(u) du \end{aligned}$$

Soit \mathcal{F}_n , la tribu engendrée par les intervalles $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$. Nous remarquons que $f'_n = E_{\mathcal{F}_n}(f')$, où E désigne l'espérance mathématique sur l'espace probabilisé $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ et $E_{\mathcal{F}_n}$ désigne l'espérance conditionnelle par rapport à \mathcal{F}_n .

Nous ne pouvons pas utiliser directement le théorème de convergence des martingales car \mathcal{F}_n n'est pas croissante, néanmoins nous avons le résultat suivant dû à Lebesgue

Lemme 1.6 *Soit h une fonction mesurable sur $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$. Supposons que $h \in L^1[0, 1]$ et posons $h_n = E_{\mathcal{F}_n}(h)$. Nous avons alors*

$$h_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} h.$$

Preuve du Lemme : Nous avons directement les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \int_0^1 |h_n(x) - h(x)| dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |h_n(x) - h(x)| dx \\ &\leq n \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |h(y) - h(x)| dy dx \\ &\leq n \int_0^1 \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} |h(y) - h(x)| dy \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^1 |h(x + \frac{z}{n}) - h(x)| dz dx \end{aligned}$$

où h est prolongée par 0 à gauche de 0.

L'intégrale de -1 à 1 converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$, car l'opérateur de translation est fortement continu en 0 sur L^1 . On conclut en appliquant un théorème de convergence dominée. \square

Revenons à la preuve du Théorème 1.5. L'application de ce lemme aux fonctions intégrables f' et f'_n entraîne la convergence

$$f'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} f'. \quad (1.3)$$

Par ailleurs le Théorème 1.2. entraîne directement

$$\|Tf'_n - Tf'\|_1 \leq \|f'_n - f'\|_1. \quad (1.4)$$

Comme conséquence des assertions (1.3) et (1.4) nous obtenons

$$Tf'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} Tf'. \quad (1.5)$$

Pour conclure, soulignons que $f_n(0) = f(0)$ et remarquons que pour chaque t de $[0, 1]$ nous avons les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} |Vf_n(t) - Vf(t)| &\leq \left| \int_0^t Tf'_n(s) ds + f_n(0) - \int_0^t Tf'(s) ds - f(0) \right| \\ &\leq \int_0^t |Tf'_n(s) - Tf'(s)| ds \\ &\leq \|Tf'_n - Tf'\|_1. \end{aligned}$$

D'après (1.5), le membre de droite de la dernière inégalité tend vers 0 quand n tend vers l'infini donc la preuve est achevée. ■

Remarque 1.7 1. Le résultat obtenu dans le Théorème 1.5. est encore vrai si la subdivision n'est pas uniforme à condition que le pas tende vers 0 quand n tend vers l'infini.

2. Il est bien connu que si une suite de fonctions convexes h_n définies sur un intervalle borné $[a, b]$ converge simplement vers une fonction h continue sur $[a, b]$ alors cette convergence est uniforme.

Par conséquent la relation (1.2) est équivalente à la convergence uniforme de VX_n vers VX .

1.3.3 Réarrangements convexes d'une somme de deux fonctions

Dans ce paragraphe nous présentons un résultat concernant le comportement asymptotique des suites engendrées par les réarrangements convexes de la somme de deux fonctions dont l'une est suffisamment régulière. Ce résultat appliqué aux trajectoires de processus stochastiques nous permettra de mettre en évidence que lorsque l'on somme un processus dont les réarrangements convexes convergent et un processus plus lisse, le rôle joué par ce dernier en cas de réarrangement convexe de la somme sera négligeable par rapport au poids du premier. Ainsi nous pourrons souvent supposer que les processus que nous étudions sont centrés ou prennent la valeur 0 en $t = 0$ sans perte de généralité.

Théorème 1.8 Soient f et g deux fonctions appartenant à $L^1[0, 1]$, soient f_n et g_n respectivement les suites d'approximations polygonales correspondantes. Supposons qu'il existe une suite b_n et une fonction $l(t)$ telle que

- 1) $\forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{b_n} V f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l(t).$
- 2) $\frac{1}{b_n} \sum_{k=0}^{n-1} |g(\frac{k+1}{n}) - g(\frac{k}{n})| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$

Alors $\forall t \in [0, 1],$

$$\frac{1}{b_n} V(f + g)_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l(t).$$

Preuve : Notons $\|f\|_1$ la norme de f dans l'espace $L^1[0, 1]$. Remarquons d'abord que $(f + g)_n = f_n + g_n$ puisque l'application $f \mapsto f_n$ est linéaire. Par ailleurs il est clair que $\forall g \in L^1[0, 1]$ nous avons

$$\begin{aligned} \|g'_n\|_1 &= \int_0^1 |g'_n(t)| dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} n |g(\frac{k+1}{n}) - g(\frac{k}{n})| dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} |g(\frac{k+1}{n}) - g(\frac{k}{n})|. \end{aligned}$$

De plus, le Théorème 1.2. entraîne que $\|T(f + g) - T f\|_1 \leq \|g\|_1$. Par conséquent $\forall t \in [0, 1],$ nous avons

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b_n} V(f + g)_n(t) - \frac{1}{b_n} V f_n(t) \right| &\leq \frac{1}{b_n} \int_0^t |T(f'_n + g'_n)(s) - T f'_n(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{b_n} \|T(f'_n + g'_n) - T f'_n\|_1 \\ &\leq \frac{1}{b_n} \|g'_n\|_1. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse 2, le terme du membre de droite de la dernière inégalité tend vers 0 quand n tend vers l'infini, ceci achève la preuve. ■

Corollaire 1.9 Soient f et g deux fonctions appartenant à $L^1[0, 1]$, soient f_n et g_n respectivement les suites d'approximations polygonales correspondantes. Supposons qu'il existe une suite b_n et une fonction $l(t)$ telle que $\frac{1}{b_n} V f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l(t)$. Supposons que g soit absolument continue et que $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$, alors $\forall t \in [0, 1],$

$$\frac{1}{b_n} V(f + g)_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l(t).$$

Preuve : L'absolue continuité de g et la condition $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ entraînent directement la condition 2) du Théorème 1.8. ■

1.3.4 Remarque sur le lissage par convolution

Considérons à présent un deuxième type de régularisation : le lissage par convolution. Soit $f(t)$, une fonction mesurable sur $[0, 1]$, soit $\psi \in L^1[0, 1]$, une fonction positive suffisamment dérivable. Notons $f_\epsilon(t)$, la fonction définie par

$$f_\epsilon(t) = (\bar{f} * \psi_\epsilon)(t),$$

où \bar{f} est la fonction définie en prolongeant $f(\cdot)$ par zéro à gauche de $t = 0$ et à droite de $t = 1$ et $\psi_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} \psi(\frac{t}{\epsilon})$ est une approximation de l'unité. Avec ces hypothèses $f_\epsilon(t)$ est de classe C^1 .

En considérant la somme de deux fonctions intégrables nous obtenons un résultat similaire au Théorème 1.8 mais avec des hypothèses un peu plus fortes :

Théorème 1.10 *Soient f et g , deux fonctions intégrables sur $[0, 1]$ et soient f_ϵ et g_ϵ leurs approximations par convolution avec la fonction ψ_ϵ . Supposons qu'il existe $b_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty$ et une fonction $l(t)$ tels que*

$$1) \quad \forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{b_\epsilon} V f_\epsilon(t) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} l(t),$$

$$2) \quad g \text{ est absolument continue.}$$

Alors $\forall t \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{b_\epsilon} V(f + g)_\epsilon(t) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow \infty} l(t).$$

Preuve : La preuve est analogue à celle du Théorème 1.8.

Comme $(f + g)_\epsilon = f_\epsilon + g_\epsilon$, le Théorème 1.2. nous permet d'obtenir l'inégalité suivante : $\forall t \in [0, 1]$,

$$\left| \frac{1}{b_\epsilon} V(f + g)_\epsilon(t) - \frac{1}{b_\epsilon} V f_\epsilon(t) \right| \leq \frac{1}{b_\epsilon} \|g'_\epsilon\|_1 \quad (1.6)$$

D'autre part, nous avons directement l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \|g'_\epsilon\|_1 &= \|g' * \psi_\epsilon\|_1 \\ &\leq \|g'\|_1 \|\psi_\epsilon\|_1 \\ &= \|g'\|_1 \|\psi\|_1 \end{aligned}$$

L'hypothèse 2) entraîne donc que le membre de droite de l'inégalité (1.6) tend vers zéro quand ϵ tend vers zéro.

L'hypothèse 1) permet alors de conclure. ■

Remarque 1.11 Lorsque l'on étudie le comportement asymptotique des trajectoires d'un processus X , les Théorèmes 1.8. et 1.10. nous permettent de supposer dans certains cas que $X(0) = 0$ ou que $X(t)$ est centré sans perte de généralité. En effet, $X(0)$ est une constante sur $[0, 1]$ donc est absolument continue, de même si $\mathbb{E} X(t)$ est suffisamment régulière, son rôle dans le procédé de réarrangement convexe est négligeable d'après les théorèmes précédents.

1.3.5 Relations avec les dérivées

Ce procédé de réarrangements convexes des trajectoires fut ensuite étudié plus en détails par Davydov ([29]) qui a mis en évidence les relations entre la convergence des réarrangements convexes d'une suite de fonctions absolument continues sur $[0, 1]$ et la convergence faible de la suite de ses dérivées considérées comme des variables aléatoires sur l'espace probabilisé $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$. Ce résultat sera l'un des outils principaux dans l'étude du comportement asymptotique des suites engendrées par les réarrangements convexes des régularisations des trajectoires de processus aléatoires.

Nous précisons d'abord la définition suivante

Définition 1.12 On dit que $(g_n)_{n \geq 1}$, une suite de fonctions mesurables sur $[0, 1]$ converge faiblement (en tant que suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$), vers une fonction g notation : $\xrightarrow{[0,1]}$, si

$$\lambda g_n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda g^{-1}.$$

Le résultat de Davydov est le suivant :

Théorème 1.13 Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions absolument continues sur $[0, 1]$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une fonction convexe f telle que $V f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t), \forall t \in [0, 1]$.
2. La limite $a = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0)$ existe et est finie. De plus, il existe une fonction g telle que :

$$a) f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g,$$

$$b) \int_0^1 (f'_n)_{\pm} d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_{\pm} d\lambda.$$

Dans ce cas, $a = f(0)$ et on peut prendre $g = f'$.

Remarque 1.14 La condition b) ci dessus peut être remplacée par

$$b') f_n(1) - f_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g d\lambda, \int_0^1 |f'_n| d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |g| d\lambda.$$

Il sera parfois plus commode d'établir b') plutôt que b).

Remarque 1.15 Ce résultat ramène en partie l'étude des suites de réarrangements convexes à une étude fine des oscillations de la fonction initiale par la condition 2.a. appliquée aux régularisations de la courbe.

1.4 Application aux trajectoires de processus

1.4.1 Intérêts

Il semble intéressant d'appliquer ce procédé de réarrangement convexe aux trajectoires de processus stochastiques afin d'étudier le comportement asymptotique des suites ainsi construites. Sous quelles conditions obtient-on

une limite convexe? Cette limite est-elle aléatoire ou déterministe? Est-il possible d'utiliser ces résultats pour estimer certains paramètres liés aux processus?

Une motivation supplémentaire est que l'étude des réarrangements convexes d'un processus passe par une étude fine de ses oscillations (voir la remarque 1.15.). Nous pouvons donc espérer obtenir des résultats sur la presque sûre convergence faible des oscillations comme variables aléatoires sur l'espace $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$, du même type que ceux obtenus par Azaïs et Wschebor [8] et en déduire des résultats sur l'approximation presque sûre faible de la mesure d'occupation.

1.4.2 Processus à trajectoires absolument continues

Précisons d'abord que tous les processus considérés dans ce chapitre et dans les suivants sont définis sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Comme corollaire du Théorème 1.5., nous obtenons directement

Théorème 1.16 *Soit $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$, un processus stochastique à trajectoires presque sûrement absolument continues. Alors presque sûrement pour chaque $t \in [0, 1]$,*

$$VX_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} VX(t).$$

Autrement dit, pour presque chaque trajectoire la suite des réarrangements convexes engendrées par les approximations polygonales de cette trajectoire converge sans normalisation vers son réarrangement convexe.

Dans le cas de processus à trajectoires presque sûrement non différentiables, l'étude des convexifications est plus complexe.

Les résultats dépendent évidemment de la nature même du processus et il est nécessaire de normaliser la suite de réarrangements convexes afin d'obtenir une courbe limite de longueur finie sur $[0, 1]$.

Avant de présenter les premiers résultats concernant les réarrangements convexes des trajectoires de processus stochastiques à trajectoires presque sûrement non différentiables, il semble utile de rappeler la définition de l'*inverse généralisée* d'une fonction de répartition au sens de Paul Lévy.

Définition 1.17 *Soit F la fonction de répartition d'une loi de probabilité μ sur \mathbb{R} . Pour tout $u \in]0, 1[$ l'ensemble $\{x : F(x) \geq u\}$ est un intervalle de \mathbb{R} , non borné, admettant un plus petit élément. Si l'on note $F^{-1}(u)$ cet élément minimum, on a :*

$$\{x : F(x) \geq u\} = [F^{-1}(u), +\infty[.$$

On définit de la sorte une application F^{-1} , croissante de $]0, 1[$ dans \mathbb{R} . Cette application coïncide avec l'inverse de F , lorsque F applique bijectivement \mathbb{R}

sur $]0, 1[$. Dans le cas général, on l'appelle *inverse généralisée* au sens de Paul Lévy.

1.4.3 Mouvement brownien standard

Le premier cas étudié ([29], [32]) fut assez naturellement le mouvement brownien standard sur $[0, 1]$. Nous énonçons le résultat obtenu :

Théorème 1.18 *Soit $W = \{W(t), t \in [0, 1]\}$, le processus du mouvement brownien sur $[0, 1]$, soit $\{W_n\}$ la suite des approximations polygonales correspondantes. Alors presque sûrement pour chaque $t \in [0, 1]$,*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} V W_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^t \Phi^{-1}(s) ds,$$

où Φ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire dont la loi est normale centrée réduite.

Remarquons que la limite est une courbe convexe déterministe. Ainsi pour presque chaque trajectoire, la suite des réarrangements convexes normalisée converge vers une fonction convexe non aléatoire.

1.4.4 Processus strictement α -stables ($1 < \alpha < 2$)

Cas des approximations polygonales

Par la suite, Davydov ([29]), a étudié les effets de la convexification sur la classe des processus strictement α -stables d'indice $\alpha \in]1, 2[$ c'est à dire les processus $\xi^{(\alpha)}$ à accroissements indépendants et homogènes tels que $\forall t_1, t_2 \in [0, 1]$, $t_2 > t_1$ nous avons

$$\xi^{(\alpha)}(t_2) - \xi^{(\alpha)}(t_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (t_2 - t_1)^{\frac{1}{\alpha}} \xi^{(\alpha)}(1).$$

Davydov a obtenu le résultat suivant :

Théorème 1.19 *Soit $\xi^{(\alpha)} = \{\xi^{(\alpha)}(t), t \in [0, 1]\}$, un processus strictement α -stable, $\alpha \in]1, 2[$ et soit $\{\xi_n^{(\alpha)}\}$ la suite des approximations polygonales correspondantes. Alors presque sûrement pour chaque $t \in [0, 1]$,*

$$n^{-1+\frac{1}{\alpha}} V \xi_n^{(\alpha)}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^t D_\alpha^{-1}(s) ds,$$

où D_α est la fonction de répartition de la variable aléatoire $\xi^{(\alpha)}(1)$.

Comme dans le cas du mouvement brownien, on obtient une limite convexe déterministe.

Remarque 1.20 Signalons que pour démontrer ce résultat Davydov a établi les relations suivantes

$$p.s., n^{-1+\frac{1}{\alpha}} (\xi_n^{(\alpha)}) \xrightarrow{[0,1]} D_\alpha^{-1}, \quad (1.7)$$

et

$$n^{-1+\frac{1}{\alpha}} \int_0^1 ((\xi_n^\alpha)'(t))_\pm dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbf{E}(\xi^\alpha(1))_\pm \quad (1.8)$$

Le Théorème 1.13. permettant alors de conclure.

Remarque 1.21

- Lorsque $\alpha = 2$ nous retrouvons le mouvement brownien étudié au Théorème 1.16.
- Lorsque $0 < \alpha \leq 1$, l'espérance mathématique de $\xi^\alpha(1)$ n'est pas finie. Nous ne pouvons donc espérer obtenir des résultats du type loi forte des grands nombres tel que le Théorème 1.19.

Soulignons malgré tout qu'il est possible de déduire un résultat de convergence faible dans $C[0, 1]$ lorsque $0 < \alpha < 1$ à partir des résultats de Davydov et Vershik [32], qui prouvent l'existence d'une suite b_n telle que

$$\frac{1}{b_n} V \xi_n^{(\alpha)} \xrightarrow{C[0,1]} \mathcal{Z},$$

où \mathcal{Z} est strictement α -stable en un certain sens.

Cas des approximations par convolution

Considérons $\tilde{\xi}^{(\alpha)}(t)$, $\alpha \in]1, 2[$, la fonction définie sur \mathbb{R} en prolongeant $\xi^{(\alpha)}(t)$ par 0 à gauche et à droite de 1. Soit $\xi_\epsilon^{(\alpha)}$, les approximations par convolution de $\tilde{\xi}^{(\alpha)}(t)$ avec la fonction ψ_ϵ , définie comme en 1.3.5.

Nous avons alors le résultat suivant

Théorème 1.22 *Presque sûrement pour chaque $t \in [0, 1]$, nous avons*

$$\frac{\epsilon^{1-\frac{1}{\alpha}} V \xi_\epsilon^{(\alpha)}(t)}{\|\psi\|_\alpha} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t D_\alpha^{-1}(s) ds,$$

où D_α est la fonction de répartition de la variable aléatoire $\xi^\alpha(1)$.

Preuve : Posons $Z_\epsilon(t) = \|\psi\|_\alpha^{-1} \epsilon^{1-\frac{1}{\alpha}} (\xi_\epsilon^{(\alpha)})'(t)$. Au cours d'une étude sur les oscillations de certains processus stochastiques [8], Azaïs et Wschebor ont prouvé les assertions suivantes

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda\{t \in [0, 1] | Z_\epsilon(t) \leq x\} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{p.s.} \mathbf{IP}\{\xi^{(\alpha)}(1) \leq x\},$
- $\int_0^1 |Z_\epsilon(t)| dt \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{p.s.} \mathbf{E}|\xi^{(\alpha)}(1)|.$

L'assertion *i)* est équivalente à

$$p.s., \quad Z_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{[0,1]} D_\alpha \quad (1.9)$$

L'assertion *ii)* et la relation (1.9) sont les conditions suffisantes exigées par le Théorème 1.13. ■

1.4.5 Notion de passerelle

A partir d'un processus initial nous allons construire un nouveau processus appelé passerelle que nous définirons de la manière suivante

Définition 1.23 Soit $\xi(t)$ un processus stochastique sur $[0, 1]$ on appelle passerelle engendrée par $\xi(t)$, le processus défini par

$$\overset{\circ}{\xi}(t) = [\xi(t) - \xi(0)] - t[\xi(1) - \xi(0)].$$

Remarque 1.24 Il est évident que lorsque ξ est le mouvement brownien standard sur $[0, 1]$, la passerelle $\overset{\circ}{\xi}$ n'est autre que le pont brownien.

Théorème 1.25 Soit $\xi = \{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ un processus stochastique, soit ξ_n la suite de ses approximations polygonales pour la subdivision uniforme de l'intervalle $[0, 1]$. Supposons qu'il existe $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \infty$ et un processus $\{l(t), t \in [0, 1]\}$ tels que p.s., $\forall t \in [0, 1]$, $\frac{1}{b_n} V(\xi_n(t) - \xi_n(0)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l(t)$. Alors p.s., $\forall t \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{b_n} V \overset{\circ}{\xi}_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l(t).$$

Preuve : Ce résultat est un corollaire du Théorème 1.8. En effet, nous pouvons écrire $\overset{\circ}{\xi}(t) = \zeta(t) + \varrho(t)$, avec

$$\zeta(t) = \xi(t) - \xi(0)$$

et

$$\varrho(t) = t[\xi(1) - \xi(0)].$$

Par hypothèse nous avons presque sûrement pour chaque $t \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{b_n} V \zeta_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \eta(t). \quad (1.10)$$

De plus, nous avons $\sum_{k=0}^{n-1} |\varrho(\frac{k+1}{n}) - \varrho(\frac{k}{n})| = (\xi(1) - \xi(0))$.

Ceci entraîne que

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \varrho\left(\frac{k+1}{n}\right) - \varrho\left(\frac{k}{n}\right) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0. \quad (1.11)$$

Le Théorème 1.8. et les relations (1.10) et (1.11) permettent alors de conclure. ■

Remarque 1.26 Il est clair que $(\overset{\circ}{\xi})_n$, la suite des approximations polygonales d'une passerelle et ξ_n la passerelle engendrée par la suite des approximations polygonales coïncident.

A présent nous considérons les régularisations par convolution et nous obtenons un résultat similaire pour les passerelles.

Remarque 1.27 Soulignons que contrairement aux approximations polygonales la convoluée de la passerelle désignée par $(\overset{\circ}{\xi})_\epsilon$ n'est pas égale à la passerelle de la convoluée désignée par $(\xi_\epsilon)^\circ$.

Théorème 1.28 Soit $\xi = \{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ un processus stochastique, soit ξ_ϵ la suite de ses approximations par convolution définie comme précédemment. Supposons qu'il existe $b_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{p.s.} \infty$ et $l(t)$ tel que p.s. $\forall t \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{b_\epsilon} V(\xi_\epsilon(t) - \xi(0)) \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} l(t).$$

Alors p.s. $\forall t \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{b_\epsilon} V(\overset{\circ}{\xi})_\epsilon(t) \xrightarrow[\epsilon \rightarrow \infty]{} \eta(t).$$

Preuve : Ce résultat est un corollaire du Théorème 1.10. puisque nous pouvons écrire $\overset{\circ}{\xi}(t) = \zeta(t) + \varrho(t)$ comme dans la preuve du Théorème 1.26. et nous avons par hypothèse

1. p.s., $\forall t \in [0, 1]$, $\frac{1}{b_\epsilon} V(\xi_\epsilon(t) - \xi(0)) \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} l(t)$.
2. $b_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{p.s.} \infty$ et $\varrho(t)$ est absolument continue.

Ainsi nous pouvons appliquer le Théorème 1.13. et conclure. ■

Remarque 1.29 Lorsque l'on connaît le comportement asymptotique de la suite de réarrangements convexes engendrée par les régularisations du processus initial, on connaît le comportement de celle engendrée par les régularisations de la passerelle car le rôle joué par la partie absolument continue qu'on additionne au processus initial est négligeable (voir les Théorèmes 1.8. et 1.10.).

1.4.6 Remarque sur les statistiques d'ordre

Soit $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$ un processus à valeurs réelles, et soit $X_n = \{X_n(t), t \in [0, 1]\}$, ses approximations polygonales sur la discrétisation uniforme de l'intervalle $[0, 1]$.

Notons $\delta_{ni} = X(\frac{i+1}{n}) - X(\frac{i}{n})$ les accroissements de X , et considérons $\delta_{n(i)}$ les **statistiques d'ordre** engendrées par cette suite de variables aléatoires :

$$\delta_{n(0)} \leq \delta_{n(1)} \leq \dots \leq \delta_{n(n-1)}.$$

D'après la définition de l'opérateur V , $\forall t \in [0, 1]$ nous avons

$$VX_n(t) = X_n(0) + \int_0^t T(X'_n(s)) ds.$$

Ceci s'écrit également

$$VX_n(t) = X(0) + \sum_{i=0}^{[nt]-1} \delta_{n(i)} + (nt - [nt])\delta_{n([nt])}. \quad (1.12)$$

On vérifie aisément à partir de la formule ci-dessus que $VX_n(0) = X(0)$ et $VX_n(1) = X(1)$.

Dans le cas où $X(0) = 0$ et où nt est entier nous obtenons

$$VX_n(t) = \sum_{i=0}^{nt-1} \delta_{n(i)}.$$

Dans ce cas la valeur du réarrangement convexe de X_n au point t s'exprime exactement comme une somme de statistiques d'ordre.

On peut donc voir certains des résultats concernant le comportement asymptotique des suites de réarrangements convexes comme des résultats sur le comportement asymptotique de sommes partielles de statistiques d'ordre. Soulignons que ces objets sont très étudiés (voir par exemple [30]) et que l'intérêt réside surtout dans le fait qu'il s'agit ici d'un tableau triangulaire de variables aléatoires dépendantes.

Chapitre 2

Cas des processus gaussiens

2.1 Introduction

Il nous semblait naturel de consacrer les prochaines investigations aux processus gaussiens puisque ce sont des objets que l'on rencontre fréquemment dans divers problèmes liés à la statistique. Par exemple, il serait intéressant d'obtenir des résultats du même type que ceux obtenus pour les processus strictement α -stables (c'est à dire une limite convexe déterministe), afin de construire des estimateurs du paramètre qui caractérise l'irrégularité des trajectoires : l'exposant de Hölder (ceci fera l'objet du chapitre 5).

Dans ce chapitre nous commençons par donner quelques résultats préliminaires qui serviront d'outils pour les démonstrations, puis nous énonçons un résultat, pour une classe assez large de processus gaussiens à accroissements stationnaires, qui met en évidence la convergence, pour presque chaque trajectoire, de la suite des réarrangements convexes engendrée par les approximations polygonales convenablement normalisée vers la fonction déterministe $t \mapsto \int_0^t \Phi^{-1}(s) ds$, où $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-\frac{s^2}{2}) ds$. Un cas particulier est le mouvement brownien (voir Théorème 1.18.) mais la démonstration est fondée en partie sur l'indépendance des accroissements que nous ne supposons pas ici.

Par ailleurs, nous proposons des conditions suffisantes portant sur la fonction variogramme du processus initial permettant de calculer rapidement la normalisation attendue et de vérifier si la convergence a lieu ou non, puis nous présentons quelques exemples. Enfin, en utilisant un résultat de Azaïs et Wschebor, nous remarquons que l'on obtient des résultats similaires en considérant des régularisations par convolutions au lieu des approximations polygonales.

2.2 Résultats préliminaires

2.2.1 Principe de concentration

Nous commençons par énoncer le principe de concentration du supremum d'une fonction aléatoire gaussienne autour de ses médianes.

Théorème 2.1 Soit $\xi = \{\xi_t, t \in T\}$ une fonction aléatoire gaussienne centrée bornée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\sigma^2 = \sup_T \text{Var } \xi_t$, m une médiane de la distribution de la variable aléatoire $\sup_T \xi_t$ et soit $\nu \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors, $\forall x > 0$ nous avons l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}\left\{\left|\sup_{t \in T} \xi_t - m\right| > x\right\} \leq \mathbb{P}\{\nu > x\}.$$

Pour la preuve et des applications nous renvoyons le lecteur à la section concernant les grandes déviations (chapitre 12) de l'ouvrage de Lifshits [49].

2.2.2 Quelques lemmes

Lemme 2.2 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$, une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{R} telle que X_n converge en probabilité vers une constante $a \in \mathbb{R}$ et soit $(m_n)_{n \geq 1}$ une suite de médianes de X_n alors m_n converge vers a .

Preuve : Nous donnons l'idée de la preuve que l'on peut trouver dans l'ouvrage de Loève [51]. Soit X une variable aléatoire et m une médiane de X , on construit une variable symétrique $X^s = X - X'$ où X' est une copie indépendante de X et on établit que $\forall \epsilon > 0$ et $\forall c \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\frac{1}{2} \mathbb{P}(|X - m| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(|X^s| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(|X - c| \geq \frac{\epsilon}{2}).$$

Ainsi si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires et a un réel tels que $X_n - a$ converge en probabilité vers 0 alors $a - m_n$ converge vers 0.

En effet dans ce cas $\forall \epsilon > 0$ nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|a - m_n| > \epsilon) &\leq \mathbb{P}(|X_n - a| > \frac{\epsilon}{2}) + \mathbb{P}(|X_n - m_n| > \frac{\epsilon}{2}) \\ &\leq \mathbb{P}(|X_n - a| > \frac{\epsilon}{2}) + 2\mathbb{P}(|X_n - a| > \frac{\epsilon}{4}). \end{aligned}$$

D'où la conclusion. ■

Lemme 2.3 Soit (U, V) un vecteur gaussien centré, soient σ_u^2 et σ_v^2 respectivement les variances de U et V et enfin soit $\sigma_{u,v}$ la covariance entre U et V , alors pour tout entier $p \geq 1$, il existe des constantes absolues $C_{p,k}$, $k \in \{1, \dots, p\}$ telles que la relation suivante soit vérifiée

$$\text{Cov}(U^p, V^p) = \sum_{1 \leq k \leq p} C_{p,k} (\sigma_{u,v})^k (\sigma_u \sigma_v)^{p-k}. \quad (2.1)$$

Ce résultat semble être bien connu, cependant faute d'avoir trouvé une référence nous proposons une preuve.

Preuve : Soit Y une variable gaussienne centrée réduite et $H(x)$, une fonction mesurable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant :

$$\mathbb{E}(H(Y)) = 0, \quad \mathbb{E}(H(Y))^2 < \infty, \quad (2.2)$$

et sa décomposition sur la base des polynômes d'Hermite :

$$H(x) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i H_i(x)$$

où H_i est le i -ème polynôme d'Hermite défini par

$$H_i(x) = (-1)^i e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^i}{dx^i} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

et les coefficients a_i vérifient $\sum_{i=k}^{\infty} a_i^2 i! < \infty$, $a_k \neq 0$, où k est l'indice d'Hermite de H , i.e. le plus petit entier tel que a_i soit non nul.

Nous rappelons la formule suivante sur les polynômes d'Hermite qui est un cas particulier de la formule du diagramme ([61]) :

Soient Y et Z deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites de coefficient de corrélation ρ , alors

$$\mathbb{E} H_i(Y) H_j(Z) = \delta(i, j) i! \rho^i, \quad \forall i, j \geq 1,$$

où δ est le symbole de Kronecker.

Pour prouver le lemme nous allons distinguer deux cas suivant la parité de p .

Cas 1 : p est impair, i.e. $p = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$.

La fonction $H(x) = x^p$ vérifie bien les hypothèses (2.2) en partie parce que si Y est une gaussienne centrée réduite, $\mathbb{E}(Y)^{2m+1} = 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Posons $\tilde{U} = \sigma_u^{-1}U$ et $\tilde{V} = \sigma_v^{-1}V$, évidemment nous avons

$$\text{Cov}(\tilde{U}, \tilde{V}) = \frac{\sigma_{u,v}}{\sigma_u \sigma_v}.$$

Dans ce cas il n'est pas difficile de vérifier que l'indice de Hermite est $k = 1$ et par conséquent que $H(x) = \sum_{i=1}^p a_i H_i(x)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(U^p, V^p) &= \sigma_u^p \sigma_v^p \text{Cov}(\tilde{U}^p, \tilde{V}^p) \\
&= (\sigma_u \sigma_v)^p \mathbb{E}(\tilde{U}^p \tilde{V}^p) \\
&= (\sigma_u \sigma_v)^p \mathbb{E}(H(\tilde{U})H(\tilde{V})) \\
&= (\sigma_u \sigma_v)^p \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j \mathbb{E}(H_i(\tilde{U})H_j(\tilde{V})) \\
&= (\sigma_u \sigma_v)^p \sum_{i=1}^p a_i^2 i! [\text{Cov}(\tilde{U}, \tilde{V})]^i \\
&= \sum_{i=1}^p a_i^2 i! \sigma_{u,v}^i (\sigma_u \sigma_v)^{p-i}.
\end{aligned}$$

Il est clair que les coefficients a_i dépendent de p puisqu'ils dépendent de H . Notons les $a_i(p)$. Nous avons donc obtenu la formule (2.1) avec $C_{p,i} = a_i(p)^2 i!$, $i = 1, \dots, p$.

Cas 2 : p est pair, i.e. $p = 2m$, $m \in \mathbb{N}$.

Désignons les moments d'ordre $2m$ d'une variable aléatoire gaussienne centrée réduite par b_{2m} . La fonction $H(x) = x^p - b_{2m}$ vérifie bien les hypothèses (2.2). Il n'est pas difficile de voir que dans ce cas l'indice d'Hermite est $k = 2$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(U^p, V^p) &= \sigma_u^p \sigma_v^p \text{Cov}(\tilde{U}^p, \tilde{V}^p) \\
&= (\sigma_u \sigma_v)^p \mathbb{E}(H(\tilde{U})H(\tilde{V})) \\
&= (\sigma_u \sigma_v)^p \sum_{i=2}^p a_i^2 i! [\text{Cov}(\tilde{U}, \tilde{V})]^i \\
&= \sum_{i=2}^p a_i^2 i! \sigma_{u,v}^i (\sigma_u \sigma_v)^{p-i}.
\end{aligned}$$

Finalement nous obtenons également la formule demandée avec $C_{p,1} = 0$ et $C_{p,i} = a_i(p)^2 i!$ pour $i = 2, \dots, p$. ■

Lemme 2.4 Soit (X_n) , une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit a une constante et soit f une fonction réelle continue.

Supposons que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} a$, alors $f(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} f(a)$.

Preuve : On peut trouver la justification de ce résultat bien connu dans le livre de Billingsley [21]. ■

Lemme 2.5 Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$, une suite de variables aléatoires à valeurs réelles sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $(d_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels. Supposons que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1. $Y_n - d_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0$,
2. $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$.

Alors

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Preuve : L'hypothèse 1. entraîne

$$1'. Y_n - d_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Les assertions 2 et 1' entraînent que $d_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$ c'est à dire $d_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

La conclusion découle alors de l'hypothèse 1. ■

Lemme 2.6 Soient $(X_n)_{n \geq 1}$, une suite de variable aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, (a_n) une suite bornée et f une fonction continue sur \mathbb{R} . Supposons que $X_n - a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0$ alors $f(X_n) - f(a_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0$.

Preuve : Pour presque chaque ω , $X_n(\omega) - a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Comme a_n est bornée, il existe A tel que $a_n \in [-A, A]$ et donc il existe une constante qui dépend de ω notée C_ω telle que $X_n(\omega) \in T_\omega = [-A - C_\omega, A + C_\omega]$.

Définissons $w_f(T_\omega, h) = \sup_{x, y \in T_\omega; |x-y| \leq h} |f(x) - f(y)|$, le module de continuité uniforme de f sur T_ω .

Nous avons

$$|f(X_n(\omega)) - f(a_n)| \leq w_f(T_\omega, h_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

où $h_n = |a_n - X_n(\omega)|$. D'où le résultat. ■

Lemme 2.7 Soit X , une variable aléatoire positive sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit m une médiane de X , alors nous avons l'inégalité suivante

$$\frac{1}{2}m \leq \mathbb{E} X.$$

Preuve : Si $m = 0$, c'est évident puisque X est positive. Si $m \neq 0$, nous avons par définition : $\mathbb{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2} \leq \mathbb{P}(X \leq m)$.

L'inégalité de Markov entraîne alors

$$\frac{1}{2} \leq \mathbb{P}(X \geq m) \leq \frac{\mathbb{E} X}{m}.$$

D'où le résultat. ■

2.3 Convergence des réarrangements convexes

2.3.1 Théorème limite presque sûr

Soit $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$, un processus gaussien à accroissements stationnaires et soit X_n la suite des approximations polygonales de X déterminée par les subdivisions uniformes de l'intervalle $[0, 1]$. D'après le Théorème 1.8. et la remarque 1.10., nous pouvons, sans perte de généralité, supposer que X est centré.

Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ on note

$$\delta_{ni}(X) = X\left(\frac{i+1}{n}\right) - X\left(\frac{i}{n}\right),$$

les accroissements du processus $X(t)$.

Par ailleurs nous définissons la fonction **variogramme** associée à X de la façon suivante

$$v(t) = \mathbb{E} (X(s+t) - X(s))^2.$$

Enfin nous posons

$$\sigma_n^2 = v\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pour alléger l'écriture nous noterons $\delta_{ni} = \delta_{ni}(X)$ lorsqu'il sera évident que ce sont des accroissements du processus X qu'il s'agit.

Remarque 2.8 Posons $\gamma_{n,j-i} = \text{Cov}(\delta_{ni}, \delta_{nj})$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tels que $i > j$. Nous avons les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \gamma_{n,j-i} &= \mathbb{E} \delta_{ni} \delta_{nj} \\ &= \frac{v\left(\frac{j-i-1}{n}\right) + v\left(\frac{j-i+1}{n}\right)}{2} - v\left(\frac{j-i}{n}\right). \end{aligned}$$

Nous pouvons alors énoncer le résultat principal de ce chapitre concernant la convergence des suites engendrées par les réarrangements convexes des approximations polygonales sur la subdivision uniforme de l'intervalle $[0, 1]$:

Théorème 2.9 Soit $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$ un processus gaussien centré à accroissements stationnaires et soit $X_n = \{X_n(t), t \in [0, 1]\}$ la suite des approximations polygonales de X . Supposons que X vérifie l'une des hypothèses H_1 et H_2 ci-dessous

H_1 : $\exists C > 0, \tau_1 > 0$ tels que $\forall s \in \{1, \dots, n-1\}$

$$\left| \frac{\gamma_{n,s}}{\sigma_n^2} \right| \leq c_s,$$

où $c_s = \min\{1, C(\ln s)^{-1-\tau_1}\}$.

$H_2 : \exists s_0 \in \mathbb{N}^*, C' > 0$ et $\tau_2 > 0$ tels que $\forall s \geq s_0$ on ait

$$\left| \frac{\gamma_{n,s}}{\sigma_n^2} \right| \leq \frac{C'}{(\ln n)^{1+\tau_2}}.$$

Alors nous avons presque sûrement $\forall t \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{b_n} V X_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^t \Phi^{-1}(s) ds, \quad (2.3)$$

où $b_n = n\sigma_n$.

Preuve : Si F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité μ sur \mathbb{R} , il est bien connu qu'en tant que variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue, l'application F^{-1} admet F comme fonction de répartition, donc μ comme loi. D'après le Théorème 1.13., en considérant Φ^{-1} comme une variable aléatoire réelle sur $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ donc de même loi que $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et en remarquant que les distributions de X'_n et de $T X'_n$ coïncident, il nous suffit de vérifier :

$$p.s., \quad \frac{1}{b_n} X'_n \xrightarrow{[0,1]} \Phi^{-1}, \quad (2.4)$$

et

$$\frac{1}{b_n} \int_0^1 (X'_n(t))_{\pm} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}(Z)_{\pm}. \quad (2.5)$$

Nous allons nous attacher dans un premier temps à établir (2.4), cela signifie que nous devons montrer que pour presque chaque trajectoire, $(\frac{1}{b_n} X'_n)_{n \geq 1}$ en tant que suite de variables aléatoires sur $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ converge en loi dans cet espace vers Φ^{-1} . Pour cela nous allons appliquer la méthode des moments, c'est à dire, puisque Φ^{-1} a même loi que Z dans $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ et que les variables aléatoires gaussiennes sont déterminées par leurs moments, nous allons démontrer que pour tout entier positif k , nous avons

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right]^k dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E} Z^k. \quad (2.6)$$

Enfin nous établirons (2.5). Nous allons procéder par étapes en suivant le schéma ci-dessous :

- Étape 1 : Nous établirons d'abord (2.6) pour les moments d'ordres pairs, c'est à dire $k = 2p$ où $p \in \mathbb{N}$.
- Étape 2 : Nous établirons (2.6) pour les moments d'ordres impairs, c'est à dire $k = 2p + 1$ où $p \in \mathbb{N}$.
- Étape 3 : Nous établirons (2.5).

Étape 1 : Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, nous voulons établir

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right]^{2p} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E} |Z|^{2p}.$$

Il est clair que $p.s.$ $\frac{1}{b_n} X'_n(t)$ est bornée donc est un élément de $L^{2p}[0, 1]$. Notons $\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p}$ la norme de $\frac{1}{b_n} X'_n(t)$ dans cet espace.

Remarque 2.10 Il est clair que $\forall p \in \mathbb{N}$, la suite $(\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p})_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et que $\frac{1}{b_n} X'_n(t)$ est une suite de processus gaussiens.

Soit $M_{n,2p}$, une médiane de $\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p}$ pour la mesure de probabilité \mathbb{P} c'est à dire $M_{n,2p}$ est un nombre réel tel que

$$\mathbb{P} \left(\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p} \geq M_{n,2p} \right) \geq \frac{1}{2} \leq \mathbb{P} \left(\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p} \leq M_{n,2p} \right).$$

La stratégie pour franchir l'étape 1 sera la suivante :

1. Nous établirons $\forall p \in \mathbb{N}$, $\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p} - M_{n,2p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0$.
2. Nous montrerons à l'aide du Lemme 2.3. que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E} |Z|^{2p}$.
3. Nous conclurons à l'aide des Lemmes 2.2, 2.4. et 2.5.

Nous allons montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p} - M_{n,2p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0$. Pour cela nous allons appliquer le principe de concentration de la norme d'un vecteur gaussien autour de ses médianes.

D'après le théorème de Hahn-Banach nous avons la représentation suivante de la norme de $\frac{1}{b_n} X'_n$ dans $L^{2p}[0, 1]$

$$\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p} = \sup_{l \in S_1^*} l \left(\frac{1}{b_n} X'_n \right),$$

où S_1^* est la boule unité de $L^q[0, 1]$ avec $q = \frac{2p}{2p-1}$.

Posons

$$V_n^2 = \sup_{l \in S_1^*} \text{Var} \left(l \left(\frac{1}{b_n} X'_n \right) \right).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} l \left(\frac{1}{b_n} X'_n \right) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right) l(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \frac{n}{b_n} \delta_{ni} l(t) dt \\ &= \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{ni} l_i. \end{aligned}$$

où $l_i = \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} l(t) dt$. Donc,

$$\mathbb{E} \left(l \left(\frac{1}{b_n} X'_n \right) \right)^2 = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}(\delta_{ni} \delta_{nj}) l_i l_j.$$

On en déduit

$$V_n^2 \leq \frac{2}{\sigma_n^2} \sum_{s=0}^{n-1} |\gamma_{n,s}| \sum_{i=0}^{n-1-s} \bar{l}_i \bar{l}_{i+s},$$

où $\bar{l}_i = \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} |l(t)| dt$.

En appliquant l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués q et $2p$, nous obtenons

$$\bar{l}_i \leq \left(\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} |l(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} dt \right)^{\frac{1}{2p}},$$

ou encore

$$\bar{l}_i \leq \beta(n) n^{-\frac{1}{2p}}, \quad (2.7)$$

où $\beta(n) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \left(\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} |l(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$.

Remarque 2.11 Il est clair que $\beta(n) \leq 1$ car $l \in S_1^*$. En réalité on peut montrer que $\beta(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ en remarquant que la mesure $d\mu(t) = |l(t)|^q d\lambda(t)$ est absolument continue par rapport à λ car $|l|^q \in L^1(\lambda)$.

Cas I : X vérifie H_1 .

Nous pouvons alors proposer une majoration de V_n^2

$$V_n^2 \leq 2 \sum_{s=0}^{n-1} c_s \sum_{i=0}^{n-1-s} \bar{l}_i \bar{l}_{i+s} \stackrel{def}{=} T. \quad (2.8)$$

Posons $T = T_1 + T_2$ où

$$T_1 = 2 \sum_{0 \leq s \leq n^{1/4p}} c_s \sum_{i=0}^{n-1-s} \bar{l}_i \bar{l}_{i+s},$$

$$T_2 = 2 \sum_{n^{1/4p} \leq s \leq n-1} c_s \sum_{i=0}^{n-1-s} \bar{l}_i \bar{l}_{i+s}.$$

Considérons d'abord T_1

Remarque 2.12 Comme $l \in L^q$ et $q > 1$ nous avons $\forall s \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\sum_{i=0}^{n-1-s} \bar{l}_i = \sum_{i=0}^{n-1-s} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} |l(t)| dt \leq \int_0^1 |l(t)| dt = C_l \leq \|l\|_q \leq 1. \quad (2.9)$$

D'après (2.7) et (2.9) nous avons directement

$$\begin{aligned} T_1 &\leq 2\beta(n)n^{-1/2p} \sum_{s=0}^{n^{1/4p}} \sum_{i=0}^{n-1-s} \bar{l}_i \\ &\leq 2C_l\beta(n)n^{-1/4p}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\bar{T}_1 \leq 2n^{-1/4p}, \quad (2.10)$$

A présent nous considérons T_2 . Comme la suite c_k est décroissante nous avons

$$\begin{aligned} T_2 &\leq 2c_{n^{(4p)-1}} \sum_{s > n^{\frac{1}{4p}}}^{n-1-s} \sum_{i=0} \bar{l}_i \bar{l}_{i+s} \\ &\leq c_{n^{1/4p}} \int_0^1 \int_0^1 |l(t)| |l(s)| dt ds \\ &\leq \frac{C}{(\frac{1}{4p} \ln n)^{1+\tau_1}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$T_2 \leq \frac{C_{p,\tau_1}}{(\ln n)^{1+\tau_1}}. \quad (2.11)$$

où $C_{p,\tau_1} = (4p)^{1+\tau_1}$.

De (2.8), (2.10) et (2.11), nous déduisons

$$V_n^2 \leq \frac{C_{p,\tau_1} + 1}{(\ln n)^{1+\tau_1}}. \quad (2.12)$$

Cas II : X vérifie H_2 .

Nous avons alors

$$V_n^2 \leq 2 \sum_{s=0}^{n-1} \left| \frac{\gamma_{n,s}}{\sigma_n^2} \right| \sum_{i=0}^{n-1-s} \bar{l}_i \bar{l}_{i+s} \stackrel{\text{def}}{=} T'. \quad (2.13)$$

On a $T' = T'_1 + T'_2$ où

$$T'_1 = 2 \sum_{s=s_0}^{n-1} \frac{C'}{(\ln n)^{1+\tau_2}} \sum_{i=0}^{n-1-s} \bar{l}_i \bar{l}_{i+s}.$$

$$T'_2 = 2 \sum_{s=0}^{s_0} \sum_{i=0}^{n-1-s} \bar{l}_i \bar{l}_{i+s}.$$

Directement nous obtenons

$$T'_1 \leq \frac{2C'}{(\ln n)^{1+\tau_2}}. \quad (2.14)$$

$$T'_2 \leq 2s_0 n^{\frac{-1}{2p}}. \quad (2.15)$$

De (2.13), (2.14) et (2.15) nous déduisons,

$$V_n^2 \leq \frac{2C' + 1}{(\ln n)^{1+\tau_2}}, \quad (2.16)$$

c'est à dire le même type d'inégalité que (2.12).

Nous allons à présent, utiliser le principe de concentration pour établir la convergence presque sûre de la suite $(\|\frac{1}{b_n} X'_n\|_{2p} - M_{n,2p})_{n \geq 1}$ vers 0.

Pour cela nous allons appliquer le Théorème 2.1. au processus gaussien $\frac{1}{b_n} X'_n$. Rappelons que

$$\|\frac{1}{b_n} X'_n\|_{2p} = \sup_{l \in S_1^*} l(\frac{1}{b_n} X'_n),$$

d'après le Théorème 2.1., nous avons donc l'inégalité suivante : $\forall u > 0$,

$$\mathbb{P}\{|\|\frac{1}{b_n} X'_n\|_{2p} - M_{n,2p}| > u\} \leq \mathbb{P}\{\nu > u\},$$

où $\nu \sim \mathcal{N}(0, V_n^2)$.

Si X vérifie H_i , $i = 1, 2$, comme conséquence de (2.12) et de (2.16), nous obtenons $\forall u > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|\|\frac{1}{b_n} X'_n\|_{2p} - M_{n,2p}| > u\} &\leq \exp\{-\frac{u^2}{2V_n^2}\} \\ &\leq \exp\{-\ln n (\ln n)^{\tau_1} K_i\}, \end{aligned}$$

où $K_1 = \frac{u^2}{2(C_p, \tau_1 + 1)}$ et $K_2 = \frac{u^2}{2(2C' + 1)}$.

Ainsi, quand n est suffisamment grand, nous avons

$$\max_{i=1,2} ((\ln n)^{\tau_i} K_i) \geq 2.$$

Dans ce cas $\forall u > 0$,

$$\mathbb{P}\{|\|\frac{1}{b_n} X'_n\|_{2p} - M_{n,2p}| > u\} \leq \exp\{-2 \ln n\} = \frac{1}{n^2}.$$

Par conséquent le lemme de Borel-Cantelli nous permet de conclure que

$$\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p} - M_{n,2p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Afin d'appliquer le Lemme 2.2., nous allons maintenant établir que

$$\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p}^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} a_{2p}, \quad (2.17)$$

où a_p désigne le moment d'ordre p de la variable $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Effectuons d'abord le calcul suivant

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p}^{2p} &= \int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)^{2p} dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \frac{n^{2p}}{b_n^{2p}} \delta_{ni}^{2p} dt \\ &= \frac{n^{2p-1}}{b_n^{2p}} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{ni}^{2p} \\ &= \frac{1}{n\sigma_n^{2p}} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{ni}^{2p}. \end{aligned}$$

Remarque 2.13 $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \forall k \in \mathbb{N}$, nous avons $\mathbb{E}(\delta_{ni})^k = \sigma_n^k a_k$.

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p}^{2p} &= \mathbb{E} \left(\frac{1}{n\sigma_n^{2p}} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{ni}^{2p} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_n^{2p}} \mathbb{E}(\delta_{ni}^{2p}) \\ &= \frac{1}{\sigma_n^{2p}} \nu \left(\frac{1}{n} \right)^p a_{2p} \\ &= \frac{1}{\sigma_n^{2p}} \sigma_n^{2p} a_{2p} \\ &= a_{2p}. \end{aligned}$$

Pour obtenir (2.17), nous allons montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\left(\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p}^{2p} \right)_{n \geq 1}$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (et donc en probabilité) vers a_{2p} .

Nous allons établir que

$$\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p}^{2p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\Omega)} a_{2p}.$$

Ceci revient à montrer que

$$\mathbb{E} \left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p}^{4p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_{2p}^2.$$

En effet si on pose $Y_n = \left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p}^{2p}$ de façon évidente, $\mathbb{E} Y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_{2p}$ et $\mathbb{E} Y_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_{2p}^2$ entraînent $\mathbb{E} |Y_n - a_{2p}|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Il est clair que nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p}^{4p} &= \mathbb{E} \left(\int_0^1 \left| \frac{1}{b_n} X'_n(t) \right|^{2p} dt \right)^2 \\ &= \mathbb{E} \int_0^1 \left| \frac{1}{b_n} X'_n(t) \right|^{2p} dt \int_0^1 \left| \frac{1}{b_n} X'_n(s) \right|^{2p} ds \\ &= \frac{n^{4p-2}}{b_n^{4p}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}(\delta_{ni}^{2p} \delta_{nj}^{2p}). \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{E} \left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p}^{4p} = \Sigma_1 + \Sigma_2$, avec

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{n^{4p-2}}{b_n^{4p}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \text{Cov}(\delta_{ni}^{2p}, \delta_{nj}^{2p}). \\ \Sigma_2 &= \frac{n^{4p-2}}{b_n^{4p}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} \delta_{ni}^{2p} \mathbb{E} \delta_{nj}^{2p}. \end{aligned}$$

En tenant compte de la remarque 2.13, il est facile de voir que

$$\Sigma_2 = a_{2p}^2.$$

Pour conclure, il nous suffit donc de montrer que

$$\Sigma_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pour cela nous appliquons le Lemme 2.3. au vecteur gaussien centré $(\delta_{ni}, \delta_{nj})$ ainsi nous obtenons l'existence de constantes absolues $C_{2p,k}$ telles que

$$\text{Cov}(\delta_{ni}^{2p}, \delta_{nj}^{2p}) = \sum_{k=1}^{2p} C_{2p,k} [\text{Cov}(\delta_{ni}, \delta_{nj})]^k \sigma_n^{4p-2k}.$$

Nous avons besoin à présent du résultat technique suivant :

Lemme 2.14 *Pour tout entier r , et $\forall k \in \{1, 2, \dots, r\}$ on a :*

$$S_n(k) := \frac{1}{n^2 \sigma_n^{2k}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} [\text{Cov}(\delta_{ni}, \delta_{nj})]^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Preuve : Par définition, nous avons $\text{Cov}(\delta_{ni}, \delta_{nj}) = \gamma_{n,|i-j|}$ et donc en posant $s = |i - j|$ nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \text{Cov}(\delta_{ni}, \delta_{nj}) = n\gamma_{n,0} + 2 \sum_{s=1}^{n-1} \gamma_{n,s}(n-s).$$

Un calcul élémentaire nous donne alors

$$\begin{aligned} S_n(k) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{\text{Cov}(\delta_{ni}, \delta_{nj})}{\sigma_n^2} \right]^k \\ &= \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{\gamma_{n,j-i}}{\sigma_n^2} \right]^k. \end{aligned}$$

Par définition du coefficient de corrélation $\forall i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, nous avons $\left| \frac{\gamma_{n,j-i}}{\sigma_n^2} \right| \leq 1$. Ainsi $\forall k \in \{1, 2, \dots, 2p\}$ il est évident que

$$\left| \frac{\gamma_{n,s}}{\sigma_n^2} \right|^k \leq \left| \frac{\gamma_{n,s}}{\sigma_n^2} \right|.$$

Par conséquent nous avons

$$\begin{aligned} |S_n(k)| &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{\gamma_{n,j-i}}{\sigma_n^2} \right|^k \\ &\leq \frac{2}{n^2} \sum_{s=0}^{n-1} \left| \frac{\gamma_{n,s}}{\sigma_n^2} \right|^k (n-s). \end{aligned}$$

Nous allons distinguer deux cas suivant que X vérifie H_1 ou bien H_2 ,

Cas 1 : Supposons que X vérifie H_1 . Alors nous avons

$$|S_n(k)| \leq \frac{2}{n} \sum_{s=0}^{n-1} c_s. \quad (2.18)$$

Or $c_s \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$, donc d'après le théorème de Cesàro nous avons

$$n^{-1} \sum_{s=0}^{n-1} c_s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'après l'inégalité (2.18) nous avons donc

$$S_n(k) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0.$$

Cas 2 : Supposons que X vérifie H_2 . Nous avons alors

$$\begin{aligned} |S_n(k)| &\leq \frac{2}{n^2} \sum_{s=0}^{s_0-1} \left| \frac{\gamma_{n,s}}{\sigma_n^2} \right| (n-s) + \frac{2}{n^2} \sum_{s=s_0}^{n-1} \left| \frac{\gamma_{n,s}}{\sigma_n^2} \right| (n-s) \\ &\leq \frac{2s_0 n}{n^2} + \frac{2C}{n^2 (\ln n)^{1+\tau_2}} (n-s_0)^2. \end{aligned}$$

Donc il existe une constante K telle que

$$|S_n(k)| \leq \frac{K}{(\ln n)^{1+\tau_2}}.$$

Par conséquent, $S_n(k) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$ et la preuve est achevée. \square

Revenons à la preuve du théorème. En appliquant le Lemme 2.3. avec $r = 2p$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{n^{4p-2} n^{-1} n^{-1}}{b_n^{4p}} \sum_{i=0} \sum_{j=0} \text{Cov}[(\delta_{ni})^{2p}, (\delta_{nj})^{2p}] \\ &= \sum_{k=1}^{k=2p} C_{2p,k} S_n(k). \end{aligned}$$

Le Lemme 2.14. entraîne alors que

$$\Sigma_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Finalement nous avons bien

$$\mathbb{E} \left(\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p}^{2p} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_{2p}^2.$$

Ceci prouve que

$$\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p}^{2p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\Omega)} a_{2p}^2. \quad (2.19)$$

Le Lemme 2.4. avec $f(u) = u^{\frac{1}{2p}}$ et l'assertion (2.19) entraînent alors

$$\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} a_{2p}^{\frac{1}{2p}}.$$

D'après le Lemme 2.2. nous avons donc

$$M_{n,2p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a_{2p}^{\frac{1}{2p}}.$$

Comme on a établi que

$$\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p} - M_{n,2p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0,$$

on en déduit directement

$$\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} a_{2p}^{\frac{1}{2}}.$$

Le Lemme 2.6. avec $f(t) = t^{2p}$ et $a_n = M_{n,2p}$ entraîne alors

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)^{2p} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} a_{2p}.$$

D'où la convergence presque sûre des moments d'ordre pair de $\frac{1}{b_n} X'_n$ vers les moments d'ordre pair de Z .

L'étape 1 est achevée.

Remarque 2.15 Un résultat récent de Dasgupta et Kallianpur [27] met en évidence cette convergence des moments d'ordre pair dans le cas particulier du mouvement brownien fractionnaire au moyen de techniques complètement différentes fondées sur la décomposition en chaos d'intégrales fractionnaires multiples.

Étape 2 : Nous devons montrer à présent la convergence presque sûre des moments d'ordre impair de la suite $(\frac{1}{b_n} X'_n)_{n \geq 1}$ vers ceux de Z qui sont tous nuls puisque $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, c'est à dire nous devons établir que $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)^{2p+1} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Dans ce cas, on ne peut raisonner directement comme pour les moments d'ordres pairs car l'intégrale $\int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)^{2p+1} dt$ n'est pas égale en général à

$$\left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p+1}^{2p+1}.$$

Par contre, nous pouvons décomposer cette intégrale de la manière suivante : classiquement nous écrivons

$$\frac{1}{b_n} X'_n(t) = \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)_+ - \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)_-,$$

nous avons donc,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)^{2p+1} dt &= \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)_+ - \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)_- \right]^{2p+1} dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)_+^{2p+1} dt - \int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)_-^{2p+1} dt. \end{aligned}$$

La dernière égalité est justifiée par le fait que les supports de $\left\{ \left(b_n^{-1} X'_n(t) \right)_{\pm} \right\}^{2p+1}$ sont disjoints.

D'autre part il est clair que $\left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)_{\pm} \in L^{2p+1}[0, 1]$, ainsi nous pouvons appliquer le théorème de Hahn-Banach car la fonction

$$F(x) = \left[\int_0^1 ([x(t)]_+)^{2p+1} dt \right]^{\frac{1}{2p+1}}, \quad x \in L^{2p+1},$$

est convexe. Ceci nous donne la représentation :

$$\left[\int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)_{\pm}^{2p+1} dt \right]^{\frac{1}{2p+1}} = \sup_{\Theta \in D_1^*(\pm)} \Theta \left(\frac{1}{b_n} X'_n \right),$$

où $D_1^*(\pm)$ sont des sous-ensembles de la boule unité de $L^d[0, 1]$ avec $d = \frac{2p+1}{2p}$.

De la même façon que dans l'étape 1, on considère $(M_{n,2p+1}^{\pm})_n$ des suites de médianes de $\left\| \left(\frac{1}{b_n} X'_n \right)_{\pm} \right\|_{2p+1}$ puis, en utilisant le fait que X vérifie H_1 ou H_2 , on fait une estimation des variances $V_n^{\pm 2} = \sup_{\Theta \in D_1^*(\pm)} \text{Var}[\Theta(\frac{1}{b_n} X'_n)]$ et nous obtenons des inégalités de même type que (2.12) et (2.16). Ainsi nous établissons

$$\left\| \left(\frac{1}{b_n} X'_n \right)_{\pm} \right\|_{2p+1} - M_{n,2p+1}^{\pm} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0. \quad (2.20)$$

Pour appliquer le Lemme 2.6. avec $f(x) = x^{2p+1}$ et $a_n = (M_{n,2p+1}^{\pm})_{n \geq 1}$ il nous faut montrer que $(M_{n,2p+1}^{\pm})_{n \geq 1}$ sont bornées.

Or nous avons les inégalités évidentes :

$$\mathbb{E} \left\| \left(\frac{1}{b_n} X'_n \right)_{\pm} \right\|_{2p+1}^2 \leq \mathbb{E} \left\| \left(\frac{1}{b_n} X'_n \right)_{\pm} \right\|_{2p+2}^2 \leq \mathbb{E} \left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p+2}^2. \quad (2.21)$$

D'après la convergence des moments d'ordres pairs de $\frac{1}{b_n} X'_n$, nous avons presque sûrement $\sup_n \mathbb{E} \left\| \frac{1}{b_n} X'_n \right\|_{2p+2}^2 < \infty$, ainsi de (2.21) découle

$$\sup_n \mathbb{E} \left\| \left(\frac{1}{b_n} X'_n \right)_{\pm} \right\|_{2p+1}^2 < \infty, \quad p.s.$$

Ceci entraîne directement

$$\sup_n \left(\mathbb{E} \left\| \left(\frac{1}{b_n} X'_n \right)_{\pm} \right\|_{2p+1} \right)_{n \geq 1} < \infty, \quad p.s.$$

D'après le Lemme 2.7., presque sûrement

$$\frac{1}{2}M_{n,2p+1}^{\pm} \leq \mathbb{E} \left\| \left(\frac{1}{b_n} X'_n \right)_{\pm} \right\|_{2p+1} < \infty,$$

donc les suites $(M_{n,2p+1}^{\pm})_{n \geq 1}$ sont presque sûrement bornées.

Par conséquent, le Lemme 2.6. et l'assertion (2.20) entraînent

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)_+^{2p+1} dt - (M_{n,2p+1}^+)^{2p+1} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0, \\ \int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)_-^{2p+1} dt - (M_{n,2p+1}^-)^{2p+1} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0. \end{aligned}$$

En faisant la différence nous obtenons

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)^{2p+1} dt - d_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0, \quad (2.22)$$

où $d_n = ((M_{n,2p+1}^+)^{2p+1} - (M_{n,2p+1}^-)^{2p+1})$.

A présent il nous faut établir $\int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)^{2p+1} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$.

Pour cela nous montrerons

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)^{2p+1} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\Omega)} 0.$$

Nous avons

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)^{2p+1} dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)^{2p+1} dt = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left[\frac{n}{b_n} \delta_{ni} \right]^{2p+1}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)^{2p+1} dt \right)^2 &= \mathbb{E} \left[\frac{n^{4p}}{b_n^{4p+2}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (\delta_{ni})^{2p+1} (\delta_{nj})^{2p+1} \right] \\ &= \frac{n^{4p}}{b_n^{4p+2}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \text{Cov}(\delta_{ni}^{2p+1}, \delta_{nj}^{2p+1}), \end{aligned}$$

puisque $\mathbb{E} \delta_{ni}^{2p+1} = \sigma_n^{2p+1} \mathbb{E} Z^{2p+1} = 0$.

D'après le Lemme 2.3. il existe des constantes $C_{2p+1,k}$ telles que

$$\text{Cov}(\delta_{ni}^{2p+1}, \delta_{ni}^{2p+1}) = \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1,k} [\text{Cov}(\delta_{ni}, \delta_{nj})]^k \sigma_n^{4p+2-2k}.$$

En appliquant le lemme 2.14. avec $r = 2p + 1$, nous obtenons

$$C_{2p+1,k} \frac{n^{4p}}{b_n^{4p+2}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} [\text{Cov}(\delta_{ni}, \delta_{nj})]^k \cdot [\sigma_n^2]^{2p+1-k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, 2p+1\}.$$

Ceci entraîne

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)^{2p+1} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\Omega)} 0. \quad (2.23)$$

Puisque les suites $(M_{n,2p+1}^\pm)_{n \geq 1}$ sont bornées, la suite d_n l'est aussi.

Ceci, les relations (2.22) et (2.23) nous permettent d'appliquer le Lemme 2.5. avec $Y_n = \int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)^{2p+1} dt$ et $d_n = ((M_n^+)^{2p+1} - (M_n^-)^{2p+1})$.

Par conséquent nous avons bien

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)^{2p+1} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Ce qui nous donne la convergence presque sûre des moments d'ordre impair de la suite $\frac{1}{b_n} X'_n$ vers les moments d'ordre impair de Z .

L'étape 2 est achevée.

Étape 3 : Il nous reste à montrer

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right)_\pm dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}(Z)_\pm.$$

D'après l'étape 1, nous avons

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{b_n} X'_n(t) \right|^2 dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}|Z|^2,$$

donc nous avons presque sûrement

$$\sup_n \int_0^1 \left| \frac{1}{b_n} X'_n(t) \right|^2 dt < \infty.$$

Ceci entraîne que les suites $\left(\left(\frac{1}{b_n} X'_n \right)_\pm \right)_{n \geq 1}$ sont $p.s.$ uniformément intégrable sur $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$.

De plus d'après les étapes 1 et 2 nous avons presque sûrement

$$\frac{1}{b_n} X'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[0,1]} \Phi^{-1}.$$

Les fonctions $x \mapsto (x)_\pm$ étant continues presque partout sur \mathbb{R} nous avons presque sûrement

$$\left(\frac{1}{b_n} X'_n \right)_\pm \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[0,1]} (\Phi^{-1})_\pm.$$

Or il est bien connu (voir [21], par exemple) que si $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ et Y sont des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que

$$1. Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Y,$$

2. La suite $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable.

$$\text{Alors } \mathbb{E}(Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}(Y).$$

Par conséquent nous avons directement

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{b_n} X'_n(s) \right)_{\pm} ds \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}(Z)_{\pm}. \quad (2.24)$$

Ceci achève l'étape 3 et donc la preuve du Théorème. \blacksquare

Extension : une loi forte des grands nombres Au cours des étapes 1 et 2 de la preuve de ce théorème, nous avons donc établi la convergence presque sûre des moments de $\frac{1}{b_n} X'_n$ en tant que suite de variables aléatoires sur $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ vers les moments d'une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. C'est-à-dire nous avons montré que pour chaque $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{b_n} X'_n(t) \right]^k dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E} Z^k.$$

Autrement dit, en tenant compte de la relation (2.24) que nous venons d'établir, nous avons démontré

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} h(\xi_{ni}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E} h(Z), \quad (2.25)$$

avec $h(t) = (t)_{\pm}$ ou $h(t) = t^k$, $k \in \mathbb{N}$ et $\xi_{ni} = \sigma_n^{-1} \delta_{ni}$, $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Ainsi nous avons établi une loi forte des grands nombres pour certaines fonctionnelles d'une suite triangulaire de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites identiquement distribuées dépendantes. La condition requise dans l'énoncé du Théorème 2.9. (H_1 ou H_2), n'est autre que la décroissance suffisamment rapide des covariances des variables aléatoires $(\xi_{ni})_i$, c'est à dire une dépendance faible.

2.3.2 Conditions suffisantes.

On discute à présent des conditions suffisantes portant sur la fonction $v(t)$ pour que l'une ou l'autre des hypothèses du Théorème 2.9. soit vérifiée.

Proposition 2.16 Soit $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$, un processus gaussien centré à accroissements stationnaires, soit X_n , la suite des approximations polygonales de X .

- 1) Supposons que v soit dérivable et $\exists \alpha \in]0, 1[$ tel que $\omega_{v'}(h) = O(h^\alpha)$ quand $h \rightarrow 0$. Alors
 - a) Si $v'(0) \neq 0$, la condition H_2 est vérifiée.
 - b) Si $v'(0) = 0$ et s'il existe une constante $C_1 > 0$ et $\beta \in [0, \alpha[$ tels que $v'(h) \geq C_1 h^\beta$, la condition H_2 est vérifiée.

- 2) Supposons que pour un $\delta > 0$, v'' existe sur $]0, \delta[$ et qu'il existe $C_2 > 0$ et $\gamma \in]0, 1[$ tels que $v''(h) \sim C_2 h^{-\gamma-1}$ au voisinage de 0 alors la condition H_1 est vérifiée.

Preuve : Effectuons d'abord le calcul suivant

$$\begin{aligned} \gamma_{n,k} &= \frac{v(\frac{k+1}{n}) + v(\frac{k-1}{n})}{2} - v(\frac{k}{n}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} v'(t) dt - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} v'(u) du \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} [v'(t) - v'(t - \frac{1}{n})] dt. \end{aligned}$$

Distinguons les cas suivants :

1. Supposons que v soit dérivable et qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\omega_{v'}(h) = O(h^\alpha)$ quand $h \rightarrow 0$, alors nous pouvons exhiber une constante $C > 0$ telle que

$$|\gamma_{n,k}| \leq \frac{1}{2n} \omega_{v'}(\frac{1}{n}) \leq \frac{C}{n^{1+\alpha}}.$$

D'autre part, nous avons $\sigma_n^2 = v(\frac{1}{n}) \sim \frac{v'(0)}{n}$. Par conséquent,

a) Si $v'(0) = C' \neq 0$, alors

$$\left| \frac{\gamma_{n,k}}{\sigma_n^2} \right| \leq \frac{K}{n^\alpha},$$

où $K = \frac{C'}{C}$.

Ainsi H_2 est vérifiée.

b) Si $v'(0) = 0$ et $v'(h) \geq C_1 h^\beta$, alors $\sigma_n^2 \geq \int_0^{\frac{1}{n}} v'(s) ds \geq \frac{C_1}{n^{\beta+1}}$ pour n suffisamment grand et donc nous avons

$$\left| \frac{\gamma_{n,k}}{\sigma_n^2} \right| \leq \frac{C}{C_1 n^{\alpha-\beta}}.$$

Ainsi H_2 est vérifiée.

2. Si 2) est vraie, à partir de

$$\gamma_{n,k} = - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \int_{t-\frac{1}{n}}^t v''(u) du dt,$$

on montre que

$$|\gamma_{n,k}| \leq \frac{1}{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |v''(u)| du.$$

L'hypothèse $v''(t) \sim C_2 t^{-(\gamma+1)}$ nous donne, par minoration, l'existence d'une constante C_γ telle que

$$\sigma_n^2 = v\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{C_\gamma}{n^{1-\gamma}}. \quad (2.26)$$

Soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit, considérons alors deux cas.

Cas 1 : $1 \leq k \leq n\epsilon$.

Dans ce cas, $\frac{k}{n} \leq \epsilon$, $v''(t)$ existe et par hypothèse $v''(t) \sim C_2 t^{-(\gamma+1)}$. On a alors pour une certaine constante M ,

$$\begin{aligned} |\gamma_{n,k}| &\leq \frac{M}{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k+1}{n}} u^{-\gamma-1} du \\ &\leq \frac{2M}{n^2} \left(\frac{k-1}{n}\right)^{-\gamma-1} \\ &\leq \frac{2M}{n^{1-\gamma}} \frac{1}{(k-1)^{\gamma+1}}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité (2.26) il existe une constante B_1 telle que

$$\left| \frac{\gamma_{n,k}}{\sigma_n^2} \right| \leq \frac{B_1}{(k-1)^{\gamma+1}}.$$

Ainsi H_1 est vérifiée.

Cas 2 : $n\epsilon < k \leq n$.

La fonction $v'(t)$ est bornée sur $[\epsilon, 1]$, on a donc pour une certaine constante C_ϵ ,

$$\begin{aligned} |\gamma_{n,k}| &= \left| \frac{1}{2} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} [v'(t) - v'(t - \frac{1}{n})] dt \right| \\ &\leq \frac{C_\epsilon}{n}. \end{aligned}$$

Donc par (2.26), on établit l'existence d'une constante B_2 telle que

$$\left| \frac{\gamma_{n,k}}{\sigma_n^2} \right| \leq \frac{B_2}{n^\gamma},$$

d'où la condition H_1 . ■

2.3.3 Exemples

Exemple 2.17 On considère le processus du mouvement brownien fractionnaire $W^\alpha(t)$ où $0 < \alpha < 1$ c'est à dire le processus gaussien centré de fonction de covariance

$$K(t, s) = \frac{1}{2}[t^{2\alpha} + s^{2\alpha} - |t - s|^{2\alpha}].$$

$W^\alpha(t)$ est un processus gaussien à accroissements stationnaires et

$$v(t) = \mathbb{E}|W^\alpha(t+s) - W^\alpha(s)|^2 = t^{2\alpha}.$$

D'après la Proposition 2.16,

Cas 1 : Si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, alors $W^\alpha(t)$ vérifie l'hypothèse H_1 .

Cas 2 : Si $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, $W^\alpha(t)$ vérifie l'hypothèse H_2 .

Par conséquent presque sûrement $\forall t \in [0, 1]$

$$\frac{1}{n^{1-\alpha}} V W_n^\alpha(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^t \Phi^{-1}(s) ds.$$

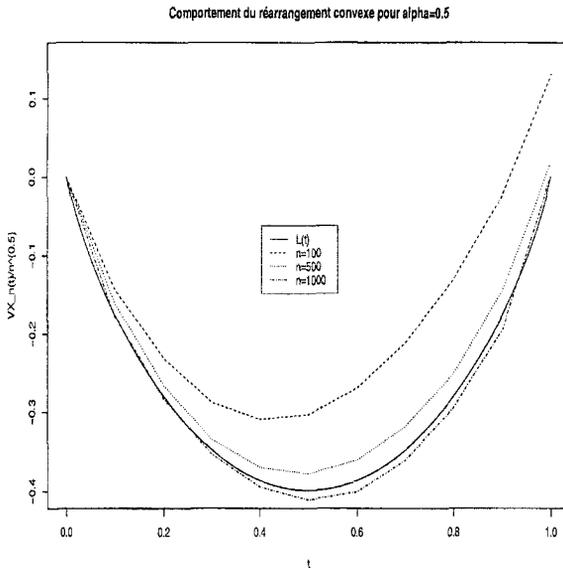


FIG. 2.1 – Réarrangements convexes du mouvement brownien

Pour illustrer cet exemple nous proposons le graphique ci-dessus qui situe la courbe des réarrangements convexes par rapport à la courbe limite

$L(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(s) ds$ pour plusieurs valeurs de n . Nous avons simulé le processus du mouvement brownien ($\alpha = 0.5$) en utilisant la procédure de Levinson disponible sur Scilab (cf Chapitre 5). Nous avons ainsi obtenu des échantillons aléatoires de tailles $n = 100, 500$ et 1000 . Puis nous avons appliqué le procédé de réarrangements convexes à ces trois trajectoires discrétisées. La fonction limite $L(t)$ est tracé en ligne continue sur le dessin, nous constatons la convergence de la suite $\frac{1}{n^{1-\alpha}} V X_n(t)$ vers $L(t)$.

Exemple 2.18 On considère le processus gaussien $\nabla^\alpha(t) = e^{-t\alpha} W_{e^{2t}}^\alpha$ où W^α , $0 < \alpha < 1$, est le mouvement brownien fractionnaire. $\nabla^\alpha(t)$ est un processus stationnaire, de fonction de covariance

$$R(t) = \cosh 2t\alpha - 2^{2\alpha-1} |\sinh t|^{2\alpha}.$$

Remarquons que $\nabla^1(t)$ n'est autre que le processus de Ornstein-Uhlenbeck. D'après la Proposition 2.16.,

Cas 1 : Si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $\nabla^\alpha(t)$ vérifie l'hypothèse H_1 .

Cas 2 : Si $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, $\nabla^\alpha(t)$ vérifie l'hypothèse H_2 .

De plus on vérifie que $2(1 - R(\frac{1}{n})) \sim 2^{2\alpha} n^{-2\alpha}$ d'où presque sûrement pour chaque $t \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{2^\alpha n^{1-\alpha}} V \nabla_n^\alpha(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^t \Phi^{-1}(s) ds.$$

Exemple 2.19 On considère $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$ un processus gaussien stationnaire dont la fonction de covariance est $R(t) = \exp(-C|t|^{2\alpha})$, $\alpha \in]0, 1[$.

Nous avons $v(t) = \mathbb{E}(X(t) - X(0))^2 = 2(1 - R(t)) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2C|t|^{2\alpha}$.

D'après la Proposition 2.16.,

Cas 1 : Si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, alors X vérifie l'hypothèse H_2 .

Cas 2 : Si $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, X vérifie l'hypothèse H_2 .

Finalement nous avons *p.s.*, $\forall t \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{\sqrt{2C} n^{1-\alpha}} V X_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^t \Phi^{-1}(s) ds.$$

2.3.4 Cas du lissage par convolution

Considérons à présent $(X_\epsilon)_\epsilon$, les approximations par convolution d'un processus à accroissements stationnaires X avec la fonction ψ_ϵ définie au cours du chapitre 1. Dans [8], Azaïs et Wschebor établissent la convergence presque sûre faible des dérivées $(X'_\epsilon)_\epsilon$ convenablement normalisées ainsi que la convergence presque sûre de leurs moments en tant que variables aléatoires sur $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$. Ceci est formulé dans le théorème suivant

Théorème 2.20 Soit, $\{X(t), t \in [0, 1]\}$ un processus gaussien à accroissements stationnaires et soit $X_\epsilon = \psi_\epsilon * X$, une régularisation de X par

produit de convolution avec ψ_ϵ approximation de l'unité telle que $\forall \epsilon > 0$, $\psi_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} \psi(\frac{t}{\epsilon})$, ψ étant une fonction fixée à variation bornée, à support compact et vérifiant $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 1$. Supposons que les deux hypothèses suivantes soient vérifiées :

H_3 : La fonction v est deux fois différentiable en dehors de l'origine et il existe une constante $C_1 > 0$, une fonction L_1 décroissante à variation lente en 0 et $\alpha \in]0, 1[$ tels que pour chaque $t \in [0, 1]$, on ait $|v''(t)| \leq C_1 |t|^{2\alpha-2} L_1(t)$;

H_4 : Il existe une constante $C_2 > 0$ et une fonction L_2 à variation lente en 0, bornée tels que $v(\epsilon) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} C_2 \epsilon^{2\alpha} L_2(\epsilon)$.

Alors nous avons

i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 (\frac{\epsilon}{v(\epsilon)} X'_\epsilon(t))^k dt \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{p.s.} \mathbb{E} Z^k$, où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$,

ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\lambda(t \in [0, 1] | \frac{\epsilon}{v(\epsilon)} X'_\epsilon(t) \leq x) \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{p.s.} \mathbb{P}(Z \leq x)$.

Nous déduisons de ce résultat la convergence presque sûre des suites de réarrangements convexes engendrées par le lissage par convolution

Corollaire 2.21 Soit $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$, un processus gaussien à accroissements stationnaires et soit $(X_\epsilon)_\epsilon$, $\epsilon > 0$, la suite de régularisation obtenue par convolution de X avec la fonction ψ_ϵ définie précédemment. Supposons que X vérifie les hypothèses H_3 et H_4 du théorème précédent, alors nous avons presque sûrement pour chaque $t \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{b_\epsilon} V X_\epsilon(t) \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} \int_0^t \Phi^{-1}(s) ds,$$

où $b_\epsilon = v(\epsilon)^{\frac{1}{2}} \epsilon^{-1}$.

Preuve : Le résultat ii) du Théorème 2.20. est équivalent à

$$p.s., \frac{1}{b_\epsilon} X'_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{[0,1]} \Phi^{-1}. \tag{2.27}$$

De plus le résultat i) du Théorème 2.20. entraîne que la suite $(\frac{1}{b_\epsilon} X'_\epsilon)_\epsilon$ est uniformément intégrable sur $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ et de la même façon que dans l'étape 3 de la preuve du Théorème 2.9., nous pouvons en déduire

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{b_\epsilon} X'_\epsilon(t) \right)_\pm dt \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{p.s.} \int_0^1 (\Phi^{-1}(t))_\pm dt. \tag{2.28}$$

D'après le Théorème 1.13., les relations (2.27) et (2.28) sont les deux conditions suffisantes pour conclure. ■

Chapitre 3

Cas des processus de Itô-Wiener

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au comportement asymptotique des suites de réarrangements convexes des approximations polygonales des processus de type diffusion ou processus de Itô-Wiener (dans la terminologie de Liptser et Shyriaev [50]) c'est à dire des martingales browniennes $\int_0^t b(s) dW_s$, b étant un processus presque sûrement de carré intégrable sur $[0, 1]$ adapté à la filtration engendrée par le mouvement brownien W , auquel on ajoute un terme $\int_0^t a(s) ds$ où a est un processus presque sûrement intégrable sur $[0, 1]$.

En utilisant des techniques adaptées aux martingales de carré intégrable, complètement différentes de celles employées pour les processus gaussiens, nous montrerons que sous une hypothèse un peu plus forte d'intégrabilité du coefficient b , ces suites de réarrangements convexes convergent presque sûrement vers les fonctions convexes $t \mapsto \int_0^t F_b^{-1}(s) ds$ avec $F_b(x) = \int_0^1 \Phi_{b(t)}(x) dt$ où $\Phi_{b(t)}$ est la distribution gaussienne centrée de variance $b^2(t)$. A la différence des cas étudiés précédemment, il apparaît que la limite est aléatoire.

Ce chapitre s'ouvre sur des résultats préliminaires (section 2) dont certains sont bien connus et qui seront nécessaires pour démontrer le résultat principal, en particulier nous prouvons un résultat de convergence presque sûre des sommes des variations quadratiques pour des martingales browniennes. La section 3 est consacrée à l'énoncé et à la preuve du résultat concernant la convergence presque sûre des suites de réarrangements convexes de processus de Itô-Wiener, dans le cas d'approximation polygonale et également dans le cas d'approximation par convolution. Enfin nous soulignons les liens de notre étude avec les résultats de Azaïs et Wschebor [8], notam-

ment en ce qui concerne l'approximation presque sûre faible de la mesure d'occupation.

3.2 Résultats préliminaires

Nous présentons une série d'outils que nous utiliserons au cours des démonstrations des principaux résultats.

3.2.1 Une inégalité pour la métrique de Lévy-Prokhorov

Nous rappelons d'abord la définition de la métrique de Lévy-Prokhorov [59] qui métrise la topologie de la convergence faible.

Définition 3.1 Soit (S, d) un espace métrique complet séparable et \mathcal{P} la classe des mesures de probabilités sur (S, d) .

Pour chaque borélien D de (S, d) et $\forall \epsilon > 0$ on pose $D^\epsilon = \{x : d(D, x) < \epsilon\}$. La métrique $\pi(P, Q; \mathcal{D}) = \inf\{\epsilon : P(D) \leq Q(D^\epsilon) + \epsilon, \forall D \in \mathcal{D}\}$ où $P, Q \in \mathcal{P}$ et \mathcal{D} est l'ensemble des boréliens de S , est appelée métrique de Lévy-Prokhorov.

Nous proposons alors le résultat suivant

Lemme 3.2 Soient ξ et ζ deux variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dont les lois de probabilités sont respectivement P_ξ et P_ζ . Supposons que ξ et ζ possèdent des moments d'ordres 2. Alors nous avons l'inégalité suivante

$$\pi(P_\xi, P_\zeta) \leq \sqrt[3]{\mathbb{E}|\xi - \zeta|^2}.$$

Où π est la métrique de Lévy-Prokhorov.

Preuve : Soit $\rho > 0$, et $A \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} P_\xi(A) &= \mathbb{P}\{\xi \in A\} \\ &= \mathbb{P}\{\xi \in A, |\xi - \zeta| < \rho\} + \mathbb{P}\{\xi \in A, |\xi - \zeta| \geq \rho\} \\ &\leq \mathbb{P}\{\zeta \in A^\rho\} + \mathbb{P}\{|\xi - \zeta| \geq \rho\} \\ &\leq \mathbb{P}\{\zeta \in A^\rho\} + \frac{\mathbb{E}|\zeta - \xi|^2}{\rho^2}. \end{aligned}$$

Posons $\rho_0 = \sqrt[3]{\mathbb{E}|\zeta - \xi|^2}$. On a donc

$$P_\xi(A) \leq \mathbb{P}_\zeta(A^{\rho_0}) + \rho_0.$$

Ceci entraîne $\pi(P_\xi, P_\zeta) \leq \rho_0$. ■

3.2.2 Inégalité de Burkholder

Nous énonçons à présent un résultat bien connu concernant les martingales dû à Burkholder [22],

Théorème 3.3 *Soit $f = (f_1, f_2, \dots)$ une martingale sur un espace probabilisé $(A, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $d_1 = f_1, d_2 = f_2 - f_1, \dots$ tels que $f_n = \sum_{k=1}^n d_k, n \geq 1$ et soit $S_n(f) = [\sum_{k=1}^n d_k^2]^{\frac{1}{2}}$. Soit $1 \leq p < \infty$ alors il existe une constante absolue N_p telle que*

$$\mathbb{E}|f_n|^p \leq N_p \mathbb{E} S_n(f)^p.$$

3.2.3 Une inégalité pour les moments de martingales browniennes

Nous énonçons l'inégalité suivante dont on peut trouver une justification dans l'ouvrage de Karatzas-Shreve [48].

Lemme 3.4 *Soit $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$ le mouvement brownien standard unidimensionnel et soit b un processus mesurable adapté à \mathcal{F}_t tel que $\mathbb{E} \int_0^T |b(s)|^{2m} ds < \infty$, où T et $m > 1$ sont des réels. Alors*

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T b(s) dW_s \right)^{2m} \leq m(2m-1)^m T^{m-1} \int_0^T \mathbb{E} |b(s)|^{2m} ds.$$

3.2.4 Convergence presque sûre des variations quadratiques

Pour terminer cette sous-section, nous proposons un résultat sur la convergence presque sûre des sommes de variations quadratiques de martingales browniennes. Parmi les études de ce type, citons le célèbre résultat de Baxter [11] à propos des processus gaussiens et celui de Berman [16] concernant les processus de diffusions.

Lemme 3.5 *Soit $\xi_t = \int_0^t b(s) dW_s, t \in [0, 1]$ une martingale brownienne où b est un processus adapté à la filtration \mathcal{F}_t et il existe $\delta > 0$ tel que $b \in L^{4+\delta}([0, 1] \times \Omega)$. Définissons $V_{n,k}(\xi) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} b(s) dW_s$, nous avons alors*

$$\sum_{k=0}^{n-1} V_{n,k}^2(\xi) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \int_0^1 b^2(s) ds.$$

Preuve : Posons $\alpha_{nk} = \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} b(s) dW_s \right)^2 - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} b^2(s) ds$. Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} V_{n,k}^2(\xi) - \int_0^1 b^2(s) ds &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(V_{n,k}^2(\xi) - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} b^2(s) ds \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk}. \end{aligned}$$

Il nous faut donc montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0. \quad (3.1)$$

Pour établir ce résultat, nous montrerons que $S_{n,m} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^m \alpha_{nk}$ est une $(\mathcal{F}_{\frac{m}{n}}, m = 0, 1, \dots, n-1)$ -martingale où $\mathcal{F}_{\frac{m}{n}} = \sigma(W_u, u \leq \frac{m}{n})$ puis nous appliquerons l'inégalité de Burkholder.

Enfin, nous conclurons par une majoration assez fine de $\mathbb{E} \alpha_{nk}^2$.

Pour montrer que $S_{n,m}$ est une $\mathcal{F}_{\frac{m}{n}}$ -martingale, il faut évidemment établir que

$$\mathbb{E}(S_{n,m+1} | \mathcal{F}_{\frac{m}{n}}) = S_{n,m}.$$

Or il est clair que

$$\mathbb{E}(S_{n,m+1} | \mathcal{F}_{\frac{m}{n}}) = \mathbb{E}(S_{n,m} | \mathcal{F}_{\frac{m}{n}}) + \mathbb{E}(\alpha_{nm} | \mathcal{F}_{\frac{m}{n}}).$$

Comme $S_{n,m}$ est $\mathcal{F}_{\frac{m}{n}}$ -mesurable nous avons $\mathbb{E}(S_{n,m} | \mathcal{F}_{\frac{m}{n}}) = S_{n,m}$. Il reste donc à montrer que

$$\mathbb{E}(\alpha_{nm} | \mathcal{F}_{\frac{m}{n}}) = 0.$$

Nous avons besoin du résultat bien connu suivant :

Lemme 3.6 *Soit b un processus stochastique sur $[0, T]$, $T > 0$, tel que $\forall t \in [0, T]$, $b(t)$ est \mathcal{F}_t -mesurable et p.s. $\int_0^T b^2(t) dt < \infty$ alors $\forall [u, v] \subset [0, T]$ nous avons*

$$i) \mathbb{E} \left[\int_u^v b(t) dW(t) | \mathcal{F}_u \right] = 0,$$

$$ii) \mathbb{E} \left(\left[\int_u^v b(t) dW(t) \right]^2 | \mathcal{F}_u \right) = \int_u^v \mathbb{E}[b^2(t) | \mathcal{F}_u] dt.$$

Preuve : Pour une preuve détaillée, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Ghikman et Skorohod [37]. \square

D'après l'assertion ii) de ce Lemme, nous avons bien

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\alpha_{nm} | \mathcal{F}_{\frac{m}{n}}) &= \mathbb{E} \left[\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} b(s) dW_s \right)^2 - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} b^2(s) ds \mid \mathcal{F}_{nm} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalement pour chaque n fixé, $S_{n,m}$ est bien une $\mathcal{F}_{\frac{m}{n}}$ -martingale.

Appliquons à présent le Théorème 3.3. à la $\mathcal{F}_{\frac{m}{n}}$ -martingale $f_m = S_{n-1,m}$ avec $p = 2 + \delta/2$. Nous obtenons alors l'existence d'une constante $N_{2+\delta/2}$ telle que

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk} \right|^{2+\delta/2} \leq N_{2+\delta/2} \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk}^2 \right)^{1+\delta/4}. \quad (3.2)$$

Rappelons ensuite le résultat suivant

Lemme 3.7 Soit $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$, une suite de nombres positifs et soit $p \geq 1$. Alors nous avons

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_i\right)^p \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n a_i^p.$$

Preuve : C'est une conséquence de la convexité de la fonction $f(x) = x^p$ sur \mathbb{R}^+ . ■

En appliquant ce lemme à la suite $(\alpha_{nk}^2)_k$ avec $p = 1 + \delta/4$, nous obtenons

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk}^2\right)^{1+\delta/4} \leq n^{\delta/4} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_{nk}|^{2+\delta/2}\right). \quad (3.3)$$

De (3.2) et (3.3) nous déduisons alors

$$\mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_{nk}|\right)^{2+\delta/2} \leq N_{2+\delta/2} n^{\delta/4} \mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^n |\alpha_{nk}|^{2+\delta/2}\right). \quad (3.4)$$

Il est bien connu que si $a, b \in \mathbb{R}$ alors $\forall p \geq 1$ il existe une constante A_p telle que $|a - b|^p \leq A_p(|a|^p + |b|^p)$. De ce fait, il est facile d'établir

$$\mathbb{E} |\alpha_{nk}|^{2+\delta/2} \leq A_{2+\delta/2} \left(\mathbb{E} \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} b(s) dW_s \right|^{4+\delta} + \mathbb{E} \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} b^2(s) ds \right|^{2+\delta/2} \right).$$

D'une part le Lemme 3.4. avec $m = 2 + \delta/2$ entraîne directement

$$\mathbb{E} \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} b(s) dW_s \right|^{4+\delta} \leq C_\delta \frac{1}{n^{1+\delta/2}} \mathbb{E} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |b(s)|^{4+\delta} ds,$$

où $C_\delta = (2 + \delta/2)(3 + \delta)^{2+\delta/2}$.

D'autre part en utilisant l'inégalité de Jensen nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} b^2(s) ds \right|^{2+\delta/2} &= \mathbb{E} \left| n \frac{1}{n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} b^2(s) ds \right|^{2+\delta/2} \\ &\leq \frac{1}{n^{1+\delta/2}} \mathbb{E} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |b(s)|^{4+\delta} ds \end{aligned}$$

Ainsi de l'assertion (3.4) on déduit

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk} \right|^{2+\delta/2} \leq \frac{K_\delta}{n^{1+\delta/4}} \mathbb{E} \int_0^1 |b(s)|^{4+\delta} ds,$$

où $K_\delta = A_{2+\delta/2} N_{2+\delta/2} (C_\delta + 1)$.

Le terme $\mathbb{E} \int_0^1 |b(s)|^{4+\delta} ds$ est fini par hypothèse et la convergence presque sûre de $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk}$ découle alors du lemme de Borel-Cantelli.

Finalement (3.1) est établi. ■

3.3 Convergence des réarrangements convexes

3.3.1 Théorème limite presque sûr

Cette étude nous a amené à nous intéresser successivement au cas où le drift est nul puis au cas où b n'est pas aléatoire et enfin au cas général. Nous donnons le résultat sous la forme la plus générale :

Théorème 3.8 Soit $X_t = \int_0^t a(s) ds + \int_0^t b(s) dW_s$, $t \in [0, 1]$, un processus de Itô-Wiener sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tel que

- Presque sûrement $a \in L^1[0, 1]$;
- Le processus b est adapté à la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ et il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{E} \int_0^1 |b(s)|^{4+\delta} dW_s < \infty$.

Soit $X_n = \{X_n(t), t \in [0, 1]\}$, la suite des approximations polygonales de X engendrées par les subdivisions uniformes de $[0, 1]$. Alors presque sûrement pour chaque $t \in [0, 1]$ nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{n}} V X_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^t F_b^{-1}(s) ds, \quad (3.5)$$

où $F_b(x) = \int_0^1 \Phi_{b(t)}(x) dt$, $\Phi_{b(t)}$ étant la fonction de répartition d'une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $b^2(t)$.

Remarque 3.9 Nous remarquons immédiatement que la courbe limite est aléatoire ou pas suivant que b l'est ou non. Ceci différencie considérablement ce résultat de ceux obtenus dans le cas des processus stables ou gaussiens. En particulier il semble plus difficile d'utiliser ces résultats dans les problèmes d'estimation.

Preuve : Pour la preuve nous supposons dans un premier temps que $a = 0$, c'est à dire nous commençons par étudier le comportement asymptotique des convexifications du processus $X_t = \int_0^t b(s) dW_s$ puis nous étendrons le résultat au cas où *p.s.* $a \in L^1[0, 1]$ en utilisant le Théorème 1.8.

Comme dans la preuve du Théorème 2.9., notre démonstration sera basée sur le Théorème 1.13., c'est-à-dire que nous chercherons à établir les deux conditions suffisantes pour conclure à la convergence des suites de réarrangements convexes (3.3). Ces conditions s'écrivent :

$$p.s., \quad \frac{1}{\sqrt{n}} X'_n \xrightarrow{[0,1]} F_b^{-1}, \quad (3.6)$$

et

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} X'_n(t) \right)_\pm dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \int_0^1 (F_b^{-1}(t))_\pm dt. \quad (3.7)$$

La démonstration de (3.6) se fera en trois étapes :

- 1 Cas où b est constante sur $[0, 1]$.
- 2 Cas où b est élémentaire.
- 3 Cas général : $\exists \delta > 0$ tel que $b \in L^{4+\delta}([0, 1] \times \Omega)$.

Nous étudierons chacun de ces cas pour établir (3.6), puis nous montrerons (3.7).

1. b est constante Supposons que $b(t) = \beta$, $t \in [c, d]$ où c, d sont des réels tels que $c < d$ et supposons que β est \mathcal{F}_c -mesurable. Alors nous avons

$$X(t) = \int_c^t b(s) dW_s = \beta[W(t) - W(c)].$$

Ceci entraîne évidemment que $\frac{1}{\sqrt{n}} X'_n = \frac{\beta}{\sqrt{n}} W'_n$.

Remarque 3.10 De la preuve du Théorème 2.9. nous pouvons déduire que pour chaque intervalle $[c, d] \subset [0, 1]$, nous avons presque sûrement

$$\lambda_{[c,d]} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} W'_n \mathbb{I}_{[c,d]} \right)^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (d-c)\gamma,$$

où γ est la mesure gaussienne standard.

D'après cette remarque et le fait que β et $W'_n(t)$, $t \in [c, d]$, sont indépendantes nous déduisons par le théorème de Fubini que presque sûrement

$$\lambda_{[c,d]} \left(\frac{\beta}{\sqrt{n}} W'_n \mathbb{I}_{[c,d]} \right)^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (d-c)\gamma_\beta, \quad (3.8)$$

où γ_β est la mesure gaussienne associée à $\mathcal{N}(0, \beta^2)$.

Ainsi nous avons presque sûrement

$$\frac{1}{\sqrt{n}} X'_n \xrightarrow{[c,d]} (d-c)F_\beta^{-1}.$$

Lorsque $c = 0$ et $d = 1$, nous avons bien (3.6).

2. b élémentaire On considère b_N une fonction aléatoire élémentaire sur $[0, 1]$ c'est à dire

$$b_N(s) = \beta_0 \mathbb{I}_{\{0\}} + \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j \mathbb{I}_{[t_j, t_{j+1}[}(s)$$

où $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$ sont des points de l'intervalle $[0, 1]$ et β_j , $j \in \{0, \dots, N\}$, sont des variables aléatoires \mathcal{F}_{t_j} -mesurables.

Soit $X^N(t) = \int_0^t b_N(s) dW_s$ et soit $X_n^N(t)$ la suite de ses approximations

polygonaux engendrées par les subdivisions uniformes.

Posons $\Delta_{N,j} = [t_j, t_{j+1}[$, il est clair que nous avons

$$\lambda_{[0,1]} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} (X_n^N)' \right)^{-1} = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_{\Delta_{N,j}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} (X_n^N)' \right)^{-1}.$$

La difficulté dans ce cas consiste à prendre en compte que généralement les points t_j ne coïncident pas avec les points de la partition uniforme de l'intervalle $[0, 1]$. C'est pourquoi nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.11 *Soient (f_n) et (g_n) des suites de fonctions réelles définies sur un intervalle $\Delta = [c, d]$ où c, d sont deux réels tels que $c < d$.*

Supposons que $f_n(t) = g_n(t)$ pour $t \in \Delta_n$ où $\Delta_n \subset \Delta$, $\Delta_n = [c_n, d_n]$. S'il existe une mesure finie μ telle que $\lambda_{[c,d]} f_n^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu$ et si $c_n \rightarrow c$, $d_n \rightarrow d$,

alors $\lambda_{[c,d]} g_n^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu$.

Preuve du Lemme : Introduisons la distance en variation totale,

Définition 3.12 *Soit μ une mesure signée sur (Ω, \mathcal{A}) . La variation totale de la mesure μ , notée $\|\mu\|_{var}$, est la quantité définie par*

$$\|\mu\|_{var} = \sup_{(A_n)} \sum_n |\mu(A_n)|,$$

le sup étant pris sur les partitions finies de Ω .

Il est bien connu que la convergence en variation totale implique la convergence faible. Ainsi le lemme sera démontré dès que nous aurons établi

$$\|\lambda_{\Delta} g_n^{-1} - \mu\|_{var} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Or nous avons

$$\begin{aligned} \|\lambda_{\Delta} f_n^{-1} - \lambda_{\Delta} g_n^{-1}\|_{var} &= \|\lambda_{\Delta_n} f_n^{-1} + \lambda_{\Delta \setminus \Delta_n} f_n^{-1} - \lambda_{\Delta_n} g_n^{-1} - \lambda_{\Delta \setminus \Delta_n} g_n^{-1}\|_{var} \\ &\leq \|\lambda_{\Delta \setminus \Delta_n} f_n^{-1}\|_{var} + \|\lambda_{\Delta \setminus \Delta_n} g_n^{-1}\|_{var} \\ &= (d - c) - (d_n - c_n). \end{aligned}$$

Il est clair que le membre de droite de la dernière inégalité tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ceci achève la preuve du lemme. \square

Considérons alors l'intervalle $\Delta_{N,j}$, $j \in \{0, \dots, N\}$. La subdivision de l'intervalle $[0, 1]$ induit une subdivision de l'intervalle Δ_j et l'existence de suites $c_n(j)$ et $d_n(j)$ telles que $c_n(j) \rightarrow t_j$ et $d_n(j) \rightarrow t_{j+1}$ et $[c_n(j), d_n(j)] \subset \Delta_{N,j}$. Nous appliquons le lemme précédent aux fonctions $(X^N \mathbb{I}_{\Delta_{N,j}})_N$ et X_n^N qui

coïncident sur l'intervalle $[c_n(j), d_n(j)]$. Le cas **1** nous permet donc d'affirmer que $\forall j \in \{0, 1, \dots, N\}$ presque sûrement

$$\lambda_{\Delta_{N,j}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} (X_n^N)' \right)^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} |\Delta_{N,j}| \gamma_{|\beta_j|}.$$

Par conséquent nous avons presque sûrement

$$\lambda_{[0,1]} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} (X_n^N)' \right)^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sum_{j=0}^{N-1} |\Delta_{N,j}| \gamma_{|\beta_j|} = \int_0^1 \gamma_{b_N(s)} ds. \quad (3.9)$$

La fonction de répartition F_{b_N} du mélange $\int_0^1 \gamma_{b_N(s)} ds$, où $\gamma_{b_N(s)}$ est la mesure gaussienne associée à la distribution $\mathcal{N}(0, b_N^2)$, est un mélange de fonctions de répartition gaussiennes, $F_{b_N}(x) = \int_0^1 \Phi_{b_N(s)}(x) ds$.

Ainsi (3.9) est équivalent à la relation suivante :

$$p.s., \quad \frac{1}{\sqrt{n}} (X_n^N)' \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F_{b_N}^{-1}. \quad (3.10)$$

Par conséquent la relation (3.6) est vérifiée dans le cas 2.

3. Soit b un processus stochastique sur $[0, 1]$ et $\delta > 0$ tels que b soit adapté à la filtration \mathcal{F}_t et $b \in L^{4+\delta}([0, 1] \times \Omega)$. Un argument de densité des fonctions élémentaires nous permet d'affirmer qu'il existe une suite de fonctions élémentaires $(b_N)_{N \geq 1}$ telle que $\|b - b_N\|_{4+\delta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Posons $\xi_n = \frac{1}{\sqrt{n}} X_n'$. Nous devons montrer

$$p.s., \quad \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F_b^{-1}. \quad (3.11)$$

On considère la métrique π sur $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ et pour simplifier l'écriture nous posons $\eta_b = F_b^{-1}$. Il est clair que (3.11) est équivalent à

$$\pi(\xi_n, \eta_b) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (3.12)$$

Évidemment nous avons

$$\pi(\xi_n, \eta_b) \leq \pi(\xi_n, \xi_n^N) + \pi(\xi_n^N, \eta_{b_N}) + \pi(\eta_{b_N}, \eta_b),$$

où $\xi_n^N = (\frac{1}{\sqrt{n}} X_n^N)'$ et $\eta_{b_N} = F_{b_N}^{-1}$.

Ainsi (3.11) sera démontré dès que nous aurons établi les assertions suivantes :

- i) $\pi(\xi_n, \xi_n^N) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \delta(N)$, où $\delta(N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$.
- ii) $\pi(\xi_n^N, \eta_{b_N}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, uniformément en N .

iii) $\pi(\eta_{b_N}, \eta_b) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} 0$.

Nous remarquons d'abord que ii) est une conséquence directe de la relation (3.10) du cas 2.

D'autre part, l'assertion i) est une conséquence des Lemmes 3.2 et 3.5. En effet, par définition nous avons

$$\int_0^1 |\xi_n(t) - \xi_n^N(t)|^2 dt = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} [b(t) - b_N(t)] dW_t \right|^2.$$

Par ailleurs d'après le lemme 3.2 nous avons l'inégalité suivante

$$\pi(\xi_n, \xi_n^N) \leq \sqrt[3]{\int_0^1 |\xi_n(t) - \xi_n^N(t)|^2 dt}. \quad (3.13)$$

De plus le Lemme 3.5 entraîne

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (b(t) - b_N(t)) dW_s \right|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \|b - b_N\|_2^2. \quad (3.14)$$

Par hypothèse $\|b - b_N\|_2^2$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Par conséquent, les relations (3.13) et (3.14) entraînent i).

Enfin pour établir iii), nous allons montrer, de façon équivalente, que presque sûrement

$$\eta_{b_N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{[0,1]} \eta_b. \quad (3.15)$$

C'est pourquoi nous avons besoin du résultat suivant :

Lemme 3.13 Soient $b, (b_n)_{n \geq 1}$ des suites de fonctions positives réelles définies sur $[0, 1]$. Nous notons $\mathcal{P}, \mathcal{P}_n$ les mesures de probabilités associées aux fonctions de répartition $G(x) = \int_0^1 \Phi_b(t)(x) dt$, $G_n(x) = \int_0^1 \Phi_{b_n(t)}(x) dt$, $x \in \mathbb{R}$. Supposons que

$$b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2[0,1]} b,$$

alors

$$\mathcal{P}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{P}.$$

Preuve : Cas particulier : Supposons que $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.p.} b$, alors pour chaque fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous assure que

$$\int_{\mathbb{R}} f dG_n = \int_0^1 (f f d\Phi_{b_n(t)}) dt \longrightarrow \int_0^1 (f f d\Phi_b(t)) dt = \int_{\mathbb{R}} f dG.$$

Ceci entraîne

$$\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}.$$

Cas général : Il suffit de prouver que chaque sous-suite $(n_k) \subset \mathbb{N}$ contient une sous-suite $(n_{k_i}) \subset (n_k)$ telle que

$$\mathcal{P}_{(n_{k_i})} \implies \mathcal{P}, \quad i \longrightarrow \infty.$$

Par hypothèse nous avons $b_{n_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2[0,1]} b$, donc il existe une sous-suite $(n_{k_i}) \subset (n_k)$ pour laquelle

$$b_{n_{k_i}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.p.} b.$$

D'après le cas particulier, nous avons donc $\mathcal{P}_{n_{k_i}} \implies \mathcal{P}$ et la preuve du lemme est achevée. \square

Nous pouvons appliquer directement ce lemme, il est clair que (3.15) (et donc iii)) est une conséquence directe de ce résultat.

Finalement nous avons bien établi (3.11), donc nous pouvons conclure que (3.6) est vrai pour $b \in L^{4+\delta}([0, 1] \times \Omega)$.

Pour conclure il reste à démontrer(3.7).

Il est évident que

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{n}} X'_n(t) \right|^2 dt = \sum_{k=0}^{n-1} V_{n,k}^2(X).$$

D'après le Lemme 3.5.,

$$\sum_{k=0}^{n-1} V_{n,k}^2(X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \int_0^1 b^2(s) ds.$$

Par hypothèse nous avons presque sûrement $\int_0^1 b^2(s) ds < \infty$, car presque sûrement $b \in L^2[0, 1]$.

Ceci entraîne que presque sûrement,

$$\sup_n \int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{n}} X'_n(t) \right|^2 dt \leq \infty.$$

Donc les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} X'_n \right)_\pm$ sont presque sûrement uniformément intégrables.

Nous raisonnons alors comme dans l'étape 3 de la preuve du Théorème 2.9. et nous déduisons (3.7) de la convergence presque sûre faible (3.6). Ceci achève la preuve du Théorème dans le cas où $a = 0$.

Étudions à présent le cas plus général où presque sûrement $a \in L^1[0, 1]$. Par définition nous pouvons écrire le processus X comme la somme de deux processus ζ et $\tilde{\zeta}$ où

$$\zeta(t) = \int_0^t b(s) dW(s)$$

et

$$\tilde{\zeta}(t) = \int_0^t a(s) ds.$$

D'après la démonstration du cas $a = 0$, nous avons donc

$$p.s. \quad \forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{\sqrt{n}} V\zeta_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^t F_b^{-1}(s) ds. \quad (3.16)$$

D'autre part nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \tilde{\zeta}\left(\frac{k+1}{n}\right) - \tilde{\zeta}\left(\frac{k}{n}\right) \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |a(s)| ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \|a\|_1. \end{aligned}$$

Le membre de droite de l'inégalité tend presque sûrement vers 0 quand n tend vers l'infini puisque $p.s.$, $a \in L^1[0, 1]$. Donc nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \tilde{\zeta}\left(\frac{k+1}{n}\right) - \tilde{\zeta}\left(\frac{k}{n}\right) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0. \quad (3.17)$$

Directement les assertions (3.16) et (3.17) permettent d'appliquer le Théorème 1.8. et donc de conclure que

$$p.s., \quad \forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{\sqrt{n}} VX_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^t F_b^{-1}(s) ds.$$

Ainsi la preuve du Théorème 3.8. est achevée. ■

3.3.2 Cas particuliers

Remarque 3.14 (Mouvement Brownien) Le mouvement brownien est un exemple simple de processus de Itô-Wiener, puisque c'est le cas pour lequel $a = 0$ et $b = 1$ sur $[0, 1]$. Le résultat concernant la convergence presque sûre des convexifications engendrées par ses approximations polygonales vers la fonction convexe déterministe $t \mapsto \int_0^t \Phi^{-1}(s) ds$ (Théorème 1.18.) est tout à fait compatible avec le Théorème 3.8.

Remarque 3.15 (Mouvement brownien changé de temps) Considérons à présent le cas où b est déterministe et constant (i.e. b ne dépend ni de ω ni de t) et $a = 0$. Dans ce cas $X_t = \int_0^t b(s) dW(s)$ est un processus gaussien dont la fonction de covariance est $R(t, s) = \int_0^{\min\{t,s\}} b^2(s) ds$. On peut voir X_t comme un mouvement brownien changé de temps c'est-à-dire que l'on peut l'écrire sous la forme $X_t = W(F(t))$ où $F(t) = \int_0^t b^2 d\lambda$. Sous l'hypothèse un peu plus forte où $\forall p < \infty, b \in L^p[0, 1]$, il est possible de démontrer la convergence presque sûre des moments des accroissements normalisés du processus X_t et d'en déduire la convergence presque sûre pour chaque t de la suite $\frac{1}{\sqrt{n}} V X_n(t)$ vers $\int_0^t \Phi^{-1}(s) ds$ en employant la méthode suivie pour les processus gaussiens dans le chapitre 2.

3.3.3 Cas du lissage par convolution

Dans [8], Azaïs et Wschebor étudient au moyen des approximations par convolution, les oscillations des processus du type $X(t) = \int_0^t b(s) dW(s)$ avec b adapté à la tribu engendrée par le mouvement brownien et *p.s.*, $b \in L^\infty[0, 1]$.

Soit $X_\epsilon = \psi_\epsilon * X$ une régularisation de X par produit de convolution avec ψ_ϵ approximation de l'unité telle que $\psi_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} \psi(\frac{t}{\epsilon}), \epsilon > 0$ où ψ est une fonction fixée à variation bornée et à support compact telle que $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 1$. Azaïs et Wschebor ont établi, entre autres, le résultat suivant

Théorème 3.16 *Soit X un processus du type décrit ci-dessus, soit X_ϵ le processus obtenu par convolution avec ψ_ϵ comme ci-dessus. Nous avons les relations suivantes :*

$$p.s., \quad \sqrt{\epsilon} X'_\epsilon(t) \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{[0,1]} F_b^{-1}, \tag{3.18}$$

et

$$\int_0^1 |\sqrt{\epsilon} X'_\epsilon(t)| dt \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{p.s.} \int_0^1 |F_b^{-1}(s)| ds. \tag{3.19}$$

Nous pouvons en déduire le résultat suivant.

Corollaire 3.17 *Soit X un processus de Itô-Wiener tel que $X_t = \int_0^t a(s) ds + \int_0^t b(s) dW(s)$, où b est un processus adapté à la filtration (\mathcal{F}_t) où $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ tel que presque sûrement $b \in L^\infty([0, 1])$ et presque sûrement $a \in L^1[0, 1]$. Alors nous avons presque sûrement pour chaque $t \in [0, 1]$,*

$$\sqrt{\epsilon} V X_\epsilon(t) \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} \int_0^t F_b^{-1}(s) ds,$$

où $F_b(x) = \int_0^1 \Phi_{b(t)}(x) dt$.

Preuve : Par définition on peut écrire le processus X comme la somme de deux processus $\tilde{\xi}$ et $\hat{\xi}$ où

$$\tilde{\xi}(t) = \int_0^t b(s) dW(s)$$

et

$$\hat{\xi}(t) = \int_0^t a(s) ds.$$

L'assertion (3.18) nous permet de vérifier la condition 2.a du Théorème 1.13., tandis que l'assertion (3.19) et le fait que $\sqrt{\epsilon}(X_\epsilon(1) - X_\epsilon(0)) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$ entraînent que la condition 2.b' du Théorème 1.13. est vérifiée.

Par conséquent nous avons

$$p.s. \forall t \in [0, 1], \quad \sqrt{\epsilon} V \tilde{\xi}_\epsilon(t) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t F_b^{-1}(s) ds. \quad (3.20)$$

De plus l'hypothèse *p.s.* $a \in L^1[0, 1]$ entraîne que

$$\sqrt{\epsilon} \|\hat{\xi}_\epsilon\|_1 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0. \quad (3.21)$$

En effet dans ce cas $\hat{\xi}'(t) = a(t)$ ce qui entraîne $\|\hat{\xi}'\|_1 = \|a\|_1$. Les relations (3.20) et (3.21) permettent d'appliquer le Théorème 1.10. et de conclure. ■

3.4 Approximation presque sûre faible de la mesure d'occupation

Dans cette section nous exploitons l'ensemble des résultats précédents (1.7), (2.4) et (3.6) qui concernent la convergence presque sûre faible des oscillations en tant que variables aléatoires sur $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ pour proposer une approximation presque sûre faible de la mesure d'occupation à partir du nombre de franchissements. Wschebor dans le cas du mouvement brownien [67] puis Azaïs et Wschebor pour une large classe de processus gaussiens, les processus α -stables ($1 < \alpha < 2$) et les martingales browniennes [8] déduisent de leurs résultats concernant les oscillations, une approximation presque sûre faible de la mesure d'occupation en utilisant le nombre de franchissements de niveaux par des processus régularisés par convolution. Il est à noter que le résultat concernant les martingales browniennes a été étendu, en un certain sens, par les mêmes auteurs à l'ensemble des martingales continues [9].

En reprenant les arguments utilisés dans les travaux précités, nous allons déduire le même type d'approximation pour la mesure d'occupation mais avec des processus régularisés par approximations polygonales sur la subdivision uniforme au lieu de régularisations par convolution.

3.4. APPROXIMATION FAIBLE DE LA MESURE D'OCCUPATION 63

Soit $g(t)$, une fonction réelle sur un intervalle I . La **mesure d'occupation** de la fonction g est définie par

$$\mu_{g,I}(B) = \lambda\{t \in I, g(t) \in B\},$$

où B est un borélien de \mathbb{R} . De plus le **nombre de franchissements** d'un niveau $u \in \mathbb{R}$ par la fonction g est défini par

$$N_u^g(I) = \#\{t \in I, g(t) = u\}.$$

Si X est un processus stochastique sur I , lorsque μ_X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, la dérivée de Radon-Nikodym de μ_X au point u n'est autre que le **temps local** $L^X(u, I)$ (ou densité d'occupation).

De nombreux travaux ([4], [6], [7], [18]) traitent déjà de l'approximation du temps local $L^X(u, \cdot)$ de tels processus stochastiques X par le nombre de franchissements convenablement normalisé $N^{X_\varepsilon}(u, \cdot)$ des régularisations X_ε et mettent en évidence la convergence dans les espaces $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ pour chaque niveau du processus. Les résultats obtenus sur la mesure d'occupation par Azaïs et Wschebor [8] dans le cas d'approximations par convolution, que nous retrouvons ici dans le cas d'approximations polygonales, ont l'avantage d'être presque sûrs et de ne pas nécessiter l'existence du temps local, par contre nous n'obtenons que la convergence faible des mesures au lieu de la convergence pour chaque niveau.

Si X désigne un processus α -stable d'indice $1 < \alpha < 2$, un processus gaussien à accroissements stationnaires vérifiant l'une des hypothèses H_1 et H_2 du chapitre 2 ou un processus de Itô-Wiener tel que nous l'avons défini dans l'énoncé du Théorème 3.8. et si X_n désigne sa régularisation par approximation polygonale sur la subdivision uniforme, nous pouvons établir le résultat suivant :

Théorème 3.18 *En reprenant les hypothèses des théorèmes 1.15., 2.9. et 3.8., presque sûrement pour toute fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nous avons*

$$\frac{C}{r_n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) N_u^{X_n}([0, 1]) du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) |b(t)| \mu_X(dt, du), \quad (3.22)$$

avec

- $r_n = n^{-\frac{1}{2}} (\mathbb{E} |X(\frac{1}{n}) - X(0)|^2)^{\frac{1}{2}}$, $C = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $b(t) = 1$ dans le cas où X est un processus gaussien,
- $r_n = \sqrt{n}$, $C = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et b est le coefficient de l'intégrale stochastique dans le cas où X est une martingale brownienne,
- $r_n = n^{1-\frac{1}{\alpha}}$, $C = \mathbb{E} |X(1)|^{-1}$ et $b(t) = 1$ dans le cas où X est un processus α -stable, $1 < \alpha < 2$.

Preuve : Soulignons que la preuve est due à Azais et Wschebor [8] puisque nous reprenons leur démonstration étape par étape, notre contribution étant réduite aux résultats sur la convergence faible des dérivées des régularisations par approximation polygonale normalisées :

$$\frac{1}{r_n} X'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[0,1]} f^{-1},$$

où $f = \Phi, F_b$ ou D_α selon que X est un processus gaussien, une martingale brownienne ou un processus α -stable avec r_n valant respectivement $n^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{E}|X(\frac{1}{n}) - X(0)|^2)^{\frac{1}{2}}, \sqrt{n}, n^{1-\frac{1}{\alpha}}$.

Pour la démonstration nous utilisons l'égalité suivante due à Nualart et Wschebor [55] :

Pour tout intervalle borné I de \mathbb{R} , pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, C^1$, nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) N_u^g(I) du = \int_I f[g(t)] |g'(t)| dt.$$

Cette inégalité entraîne que pour toute fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nous avons

$$\begin{aligned} \frac{C}{r_n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) N_{X_n}^g([0, 1]) du &= \frac{C}{r_n} \int_0^1 f[X_n(t)] |X'_n(t)| dt \\ &= \frac{C}{r_n} \int_0^1 [f(X_n(t)) - f(X(t))] |X'_n(t)| dt \\ &+ \frac{C}{r_n} \int_0^1 f[X_n(t)] |X'_n(t)| dt. \end{aligned}$$

D'après les relations (1.8), (2.5) et (3.5), $\frac{C}{r_n} \int_0^1 |X'_n(t)| dt$ est presque sûrement borné pour chacune des trois classes de processus.

La continuité de f , le fait que X et de X_n soient presque sûrement uniformément bornés et le fait que presque sûrement, $\frac{C}{r_n} \int_0^1 |X'_n(t)| dt$ soit borné entraînent que presque sûrement le premier terme du membre de droite de la dernière égalité tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

D'autre part, des relations (1.8), (2.5) et (3.7) on peut déduire que presque sûrement pour chaque intervalle $I \subset [0, 1]$, nous avons

$$\int_I \left| \frac{1}{r_n} X'_n(t) \right| dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{C} \int_I |b(t)| dt.$$

Par conséquent pour toute fonction $g(t)$ qui est limite uniforme de combinaisons linéaires d'indicatrices, nous avons presque sûrement

$$C \int_0^1 g(t) \left| \frac{1}{r_n} X'_n(t) \right| dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 g(t) |b(t)| dt.$$

En particulier, c'est le cas de la fonction $g(t) = f(X(t))$ puisque f est continue et que $X(t)$ est presque sûrement càdlàg.

Par conséquent le second membre de l'égalité tend vers $\int_0^1 f(X(t))|b(t)| dt$ qui, par définition, est égal à $\int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)|b(t)| \mu_X(dt, du)$. ■

Chapitre 4

Cas des processus multidimensionnels

4.1 Introduction

Au cours des chapitres précédents, nous avons établi la convergence presque sûre de suites de courbes convexes aléatoires formées à partir des approximations polygonales des trajectoires de processus à valeurs dans \mathbb{R} . Dans ce chapitre nous étendons, en un certain sens, la notion de réarrangement convexe aux processus à valeurs dans \mathbb{R}^d , $d \geq 1$.

Dans cette optique nous reprenons l'idée de Davydov et Vershik [32] qui ont établi les liens du procédé de convexification avec l'étude des zotonopes dans le cas des marches aléatoires d -dimensionnelles. Nous précisons la nature de ces liens dans la suite du chapitre. Nous remarquons que pour presque chaque trajectoire la suite de zotonopes aléatoires engendrée par les accroissements normalisés du processus X c'est à dire les sommes de Minkowski des segments $[0, X_{nk}]$, avec $X_{nk} = (\frac{1}{n}, \beta_{nk}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ où $\beta_{nk} = [X(\frac{k+1}{n}) - X(\frac{k}{n})]b_n^{-1}$ sont des variables aléatoires d -dimensionnelles convenablement normalisées, converge au sens de Hausdorff vers un zonoïde. Cette limite conserve en quelque sorte certaines propriétés remarquées dans le cas uni-dimensionnel. En particulier dans le cas gaussien ou strictement α -stable ce zonoïde n'est pas aléatoire.

Dans la section 2 nous présentons quelques outils concernant la théorie des ensembles convexes afin de formuler le problème puis, dans la section 3, nous établissons un résultat sur la convergence de suites de tels ensembles, sous la métrique de Hausdorff. Enfin dans la section 4 nous appliquons ce résultat aux suites de zotonopes engendrées par les X_{nk} et nous en déduisons un théorème limite presque sûr, puis nous abordons le problème d'identification de la limite dans le cas gaussien.

4.2 Rappels sur les ensembles convexes

4.2.1 Généralités

Nous poursuivons par quelques indispensables rappels sur les ensembles convexes en nous inspirant assez largement de l'ouvrage de Schneider [62] et de l'article de Vitale [65] auxquels nous renvoyons le lecteur pour les différentes preuves.

Dans tout ce qui suit, nous nous plaçons dans l'espace \mathbb{R}^q , $q > 1$ muni du produit scalaire euclidien $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit (\mathcal{K}, ρ) l'espace des sous-ensembles convexes compacts de \mathbb{R}^q muni de la métrique de Hausdorff :

$$\rho(K_1, K_2) = \max\left\{ \sup_{x_1 \in K_1} \inf_{x_2 \in K_2} |x_1 - x_2|, \sup_{x_2 \in K_2} \inf_{x_1 \in K_1} |x_1 - x_2| \right\},$$

pour tout couple (K_1, K_2) d'éléments de \mathcal{K} .

Définition 4.1 La somme de Minkowski (ou somme vectorielle) de deux ensembles quelconques A et B de \mathbb{R}^q est définie par

$$A + B = \{z \mid z = x + y, x \in A, y \in B\}.$$

Définition 4.2 Soit K un ensemble convexe compact de \mathbb{R}^q . La fonction support de K est définie par

$$h_K(u) = \sup\{\langle x, u \rangle \mid x \in K\}, \quad u \in \mathbb{R}^q \setminus \{0\}.$$

Pour chaque élément K de \mathcal{K} on note $M_K(\cdot)$, la restriction de la fonction support $h_K(\cdot)$ à la sphère unité S^{q-1} . Cette fonction $M_K(\cdot)$ est appelée **fonction de Minkowski** de l'ensemble K .

Remarque 4.3 Soit K un ensemble convexe compact de \mathbb{R}^q et $h_K(\cdot)$ sa fonction support alors K vérifie :

$$K = \{x \mid \langle x, u \rangle \leq h_K(u), \forall u \in \mathbb{R}^q \setminus \{0\}\}.$$

Ainsi un ensemble convexe compact est complètement déterminé par sa fonction support. De sorte qu'on peut exprimer la somme de Minkowski de tels ensembles par leurs fonctions supports.

Pour tout élément K de (\mathcal{K}, ρ) , notons $\|K\| = \rho(K, \{0\})$.

Proposition 4.4 La fonction support vérifie les propriétés suivantes :

1. $K \subseteq L \iff h_K \leq h_L$.
2. $K = L \iff h_K = h_L$.
3. $h_{\alpha K} = \alpha h_K$, $\alpha \geq 0$.
4. $h_{K+L} = h_K + h_L$.

La fonction de Minkowski possède les propriétés supplémentaires suivantes :

5. $|M_K(u) - M_K(u')| \leq \|K\| \|u - u'\|$, $u, u' \in S^{d-1}$.
6. $\rho(K, L) = \sup_{u \in S^{d-1}} \{|M_K(u) - M_L(u)|\}$.
7. $K_n \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} K$ si et seulement si M_{K_n} converge uniformément vers M_K .

Enfin nous énonçons le théorème de Blaschke (voir [62]) sur les suites d'élément de \mathcal{K} .

Théorème 4.5 *De toute suite bornée d'ensemble convexes, on peut extraire une sous-suite convergeant vers un ensemble convexe.*

4.2.2 Notion de zonotope

Nous allons introduire à présent l'outil principal que nous utilisons pour étudier la convexification en dimension q : le zonotope.

Avant de définir cet objet, il nous semble utile de rappeler la définition d'un polytope.

Définition 4.6 *Un polytope est une partie de \mathbb{R}^q qui est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points.*

De façon équivalente, un polytope est défini comme une partie bornée de \mathbb{R}^q , intersection de demi-espaces fermés.

Énonçons à présent la définition du zonotope.

Définition 4.7 *Un zonotope est un polytope défini par la somme de Minkowski de segments de droites fermés.*

Ces polytopes ont fait l'objet de nombreuses études particulièrement les zonotopes de dimension 2 et 3 appelés respectivement zonogones et zonoèdres (voir [24], par exemple).

Remarque 4.8 Les zonotopes apparaissent dans des domaines d'applications tels que :

- l'économie où les productions possibles d'un groupe d'entreprise sont modélisés par un zonotope (voir [41], par exemple)
- le problème de pavage (voir [24], par exemple).

Définition 4.9 *Un zonoïde dans \mathbb{R}^q est la limite, sous la métrique de Hausdorff, d'une suite de zonotopes de \mathbb{R}^q .*

Définition 4.10 *Le segment de bornes 0 et z de \mathbb{R}^q est définie par*

$$[0, z] = \{x \mid x = \beta z, 0 \leq \beta \leq 1\}.$$

Définition 4.11 *Soient $x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{R}^d$. Le zonotope associé à ces éléments s'écrit :*

$$Z(x_1, x_2, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^n |0, x_i|,$$

où la somme est prise au sens de Minkowski.

Proposition 4.12 *Un zonotope est un polytope à symétrie centrale dont toutes les faces sont à symétrie centrale.*

Preuve : Voir [63].

Corollaire 4.13 *Tout polygone (en dimension 2) à symétrie centrale est un zonotope.*

4.3 Convergence d'une suite de convexes

Dans un premier temps nous proposons un résultat purement géométrique concernant la convergence de suites d'ensembles convexes que nous appliquerons dans la section suivante aux zonotopes engendrés par les accroissements de processus à valeurs dans \mathbb{R}^d , $d > 1$.

Notations *Pour commencer, nous introduisons quelques notations supplémentaires :*

Π_E - la projection orthogonale d'un élément de \mathbb{R}^d sur E , sous-espace de \mathbb{R}^d .

$\xrightarrow{\rho}$ - la convergence sous la métrique de Hausdorff.

Nous introduisons également les ensembles

$$\mathcal{E}_{d,k} = \{E \mid E \text{ sous-espace de } \mathbb{R}^d, \dim E = k, k = 1, \dots, d\}.$$

Le résultat suivant met en évidence que la convergence d'une suite compacte d'ensembles convexes $(V_n)_n$ est caractérisée par la convergence des suites formées par les projections orthogonales des ensembles V_n sur les sous-espaces de dimension 1 de \mathbb{R}^d .

Théorème 4.14 *Soit $(V_n)_{n \geq 1}$, une suite d'ensembles convexes compacts de \mathbb{R}^d tels que $\sup_n \|V_n\| < \infty$. Supposons qu'il existe un ensemble $V \subset \mathbb{R}^d$ tel que pour chaque $E \in \mathcal{E}_{d,1}$ l'ensemble $\Pi_E(V)$ soit convexe et vérifie*

$$\Pi_E(V_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rho} \Pi_E(V), \quad (4.1)$$

alors nous avons

$$V_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rho} \text{conv}V,$$

où $\text{conv}V$ désigne l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble V .

Preuve : Par hypothèse $\sup \|V_n\| < \infty$, ceci entraîne que la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ est compacte. Soit W un point limite de cette suite, c'est-à-dire il existe une sous-suite $(V_{n_i})_i$ qui converge vers W . Le Théorème 4.5. nous assure que W est convexe.

Les projections orthogonales sur les sous-espaces de dimension 1 étant continues, nous obtenons pour chaque $E \in \mathcal{E}_{d,1}$,

$$\Pi_E(V_{n_i}) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \Pi_E(W). \quad (4.2)$$

D'après l'hypothèse (4.1) pour chaque $E \in \mathcal{E}_{d,1}$ nous avons

$$\Pi_E(V_{n_i}) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \Pi_E(V). \quad (4.3)$$

Par hypothèse $\Pi_E(V)$ est convexe, c'est donc un segment. Il est clair que la projection orthogonale sur une droite vectorielle et le passage à l'enveloppe convexe commutent par conséquent si $\text{conv}V$ désigne l'enveloppe convexe fermée de V , pour chaque $E \in \mathcal{E}_{d,1}$ nous avons $\Pi_E(\text{conv}V) = \Pi_E(V)$. Ainsi les relations (4.2) et (4.3) entraînent que pour chaque $E \in \mathcal{E}_{d,1}$,

$$M_{\Pi_E(W)} = M_{\Pi_E(\text{conv}V)}. \quad (4.4)$$

Pour chaque $\theta \in S^{d-1}$, considérons alors $E_\theta = \text{Span}\{\theta\}$, le sous-espace de dimension 1 engendré par θ . D'après la relation (4.4) nous obtenons pour chaque $\theta \in S^{d-1}$,

$$M_{\Pi_{E_\theta}(\text{conv}V)}(\theta) = M_{\Pi_{E_\theta}(W)}(\theta).$$

Remarquons que pour chaque ensemble convexe $K \in \mathbb{R}^d$, nous avons

$$\begin{aligned} M_{\Pi_{E_\theta}(K)}(\theta) &= \sup\{\langle x, \theta \rangle \mid x \in \Pi_{E_\theta}(K)\} \\ &= \sup\{\langle \Pi_{E_\theta}(y), \theta \rangle \mid y \in K\} \\ &= \sup\{\langle y, \theta \rangle \mid y \in K\} \\ &= M_K(\theta). \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$M_W(\theta) = M_{\text{conv}V}(\theta), \quad \theta \in S^{d-1}.$$

Par conséquent nous avons $\text{conv}V = W$ et donc

$$V_{n_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \text{conv}V. \quad (4.5)$$

Le point limite W étant arbitraire nous en déduisons que V_n converge vers $\text{conv}V$ sous la métrique de Hausdorff. ■

Du Théorème 4.14. on déduit immédiatement le

Corollaire 4.15 *Soit $(V_n)_{n \geq 1}$ une suite d'ensembles convexes de \mathbb{R}^d tels que $\sup_n \|V_n\| < \infty$. Supposons qu'il existe $k, 1 \leq k \leq d$, et qu'il existe un ensemble $V \subset \mathbb{R}^d$ tel que pour chaque sous-espace $F \in \mathcal{E}_{d,k}$ l'ensemble $\Pi_F(V)$ soit convexe et vérifie*

$$\Pi_F(V_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Pi_F(V), \quad (4.6)$$

alors nous avons

$$V_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{conv}V.$$

Preuve : Le cas $k = 1$ est traité dans le théorème précédent tandis que si $k = d$, l'hypothèse (4.6) donne immédiatement le résultat. Les cas plus intéressants sont donc $1 < k < d$. Soit E un sous-espace de dimension 1 de F , la continuité des projections et l'hypothèse (4.6) entraînent

$$\Pi_E \Pi_F(V_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rho} \Pi_E \Pi_F(V).$$

D'autre part, il est clair que la composition des projections orthogonales respectivement sur E et sur F donne la projection orthogonale sur E . Ainsi pour chaque E sous-espace de dimension 1 de F nous avons

$$\Pi_E(V_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rho} \Pi_E(V).$$

Si F décrit $\mathcal{E}_{d,k}$ pour k fixé alors E décrit $\mathcal{E}_{d,1}$. ■

4.4 Convexification de processus d-dimensionnels

4.4.1 Résultat général

Pour comprendre les liaisons du problème initial avec l'addition de Minkowski, étudions d'abord le cas où le processus est à valeurs dans \mathbb{R} . Pour

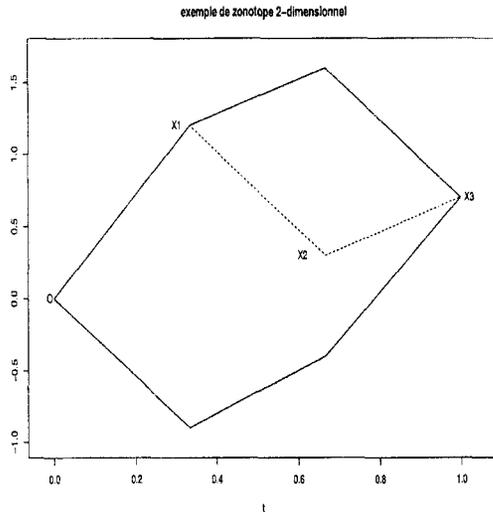


FIG. 4.1 – Exemple de zonotope

fixer les idées nous proposons le graphe précédent (Figure 4.1). Considérons la

ligne polygonale X (en pointillés sur la figure) partant de 0 et passant successivement par les points X_1, X_2 , et X_3 et le zonotope $Z = \sum_{i=0}^2 [0, X_{i+1} - X_i]$ où $X_0 = 0$. Dans ce cas, Z est l'hexagone délimité par les lignes pleines sur la figure 3. Soit L la frontière de Z , il est clair que la partie inférieure de L (sous la droite (OX_3)) coïncide avec VX , le réarrangement convexe de X .

Plus généralement on remarque, en relation avec l'article [32], que le réarrangement convexe d'une ligne polygonale formée de n segments coïncide avec la partie inférieure de la frontière du zonotope construit sur le modèle précédent. Ceci peut se démontrer en faisant une récurrence sur le nombre n de segments, lorsque $n = 2$ c'est évident et le passage de n à $n + 1$ se fait en décomposant le zonotope à $n + 1$ segments comme le zonotope à n segments auquel on ajoute un vecteur, au sens de Minkowski.

A présent X désigne un processus stochastique à valeurs dans \mathbb{R} et $X_{nk} = (\frac{1}{n}, \beta_{nk})$ où $\beta_{nk} = [X(\frac{k+1}{n}) - X(\frac{k}{n})]b_n^{-1}$ sont les variations normalisées de X sur la discrétisation uniforme de l'intervalle $[0, 1]$.

Remarque 4.16 Soulignons que si X est à valeurs dans \mathbb{R}^d , les zonotopes engendrés par les variations de X sont de dimension $d + 1$.

Considérons les ensembles convexes $Z_n = \sum_{k=0}^{n-1} [0, X_{nk}]$ et leurs frontières dans \mathbb{R}^2 que nous notons L_n . Il est facile de comprendre que la partie inférieure de L_n que nous notons L_n^- correspond exactement aux réarrangements convexes normalisés $\frac{1}{b_n} VX_n(t)$ sur $[0, 1]$. Par ailleurs, la partie supérieure L_n^+ n'est autre que l'image de L_n^- par symétrie centrale. Ainsi, si nous savons que presque sûrement L_n^- converge vers une courbe que nous notons L^- , nous connaissons également la limite L^+ de L_n^+ et nous pouvons déterminer la limite de L_n (et donc de Z_n) par recollement puis en déduire la limite des projections de Z_n sur les sous-espaces de dimensions 1.

Dans le but de formuler notre résultat sur les convexifications de processus multidimensionnels, nous introduisons (e_1, e_2, \dots, e_d) une base orthonormée de \mathbb{R}^d et notons e_0 le vecteur unitaire tel que $S = Span\{e_0\}$, où S est l'axe du paramètre t . Ainsi nous décrivons \mathbb{R}^{d+1} comme le produit $S \times \mathbb{R}^d$. Un élément de \mathbb{R}^d rapporté à la base orthonormée $e = (e_1, \dots, e_d)$ est noté (x_1, x_2, \dots, x_d) . Soit également $P_J(\cdot)$ la projection orthogonale des ensembles convexes de \mathbb{R}^{d+1} sur le sous-espace J de \mathbb{R}^{d+1} . Enfin si E est un élément de $\mathcal{E}_{d,1}$, nous notons \tilde{E} le sous-espace de dimension 2 défini par $S \times E$.

Quand X est à valeurs dans \mathbb{R}^d , si nous pouvons identifier les limites des frontières de chacune des projections de Z_n sur les \tilde{E} nous pouvons identifier le zonoïde limite en utilisant le Théorème 4.14. Donc pour étudier le comportement asymptotique de L_n , il suffit d'effectuer l'étude de Z_n et réciproquement.

Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant

Théorème 4.17 Soit $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$, un processus aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d , soit $\beta_{nk} = [X(\frac{k+1}{n}) - X(\frac{k}{n})]b_n^{-1}$ les accroissements de X sur la subdivision uniforme de l'intervalle $[0, 1]$ convenablement normalisés et soit $X_{nk} = (\frac{1}{n}, \beta_{nk}) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Soit $Z_n = \sum_{k=0}^{n-1} [0, X_{nk}]$ la suite de zonoïdes aléatoires engendrée par les X_{nk} . Supposons que pour chaque $E \in \mathcal{E}_{d,1}$ il existe L^E , un ensemble convexe dans \mathbb{R}^2 tel que

$$p.s., P_{\bar{E}}(Z_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rho} L^E, \quad (4.7)$$

alors il existe un zonoïde Z caractérisé par les L^E tel que

$$p.s., Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rho} Z.$$

Preuve : Dans le but d'appliquer le Théorème 4.14., il nous faut d'abord établir que presque sûrement $\sup_n \|Z_n\| < \infty$. Introduisons $G_i = \text{Span}\{e_0, e_i\}$, $i = 1, \dots, d$, le sous-espace de dimension 2 engendré par e_0 et e_i . L'hypothèse (4.7) du Théorème entraîne que presque sûrement

$$\sup_n \|P_{G_i}(Z_n)\| < \infty, \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

Par conséquent pour chaque i la projection orthogonale sur G_i est contenue dans un rectangle, nous pouvons donc constituer un pavé P dans \mathbb{R}^{d+1} , tel que $\forall n \geq 1, Z_n \subset P$ mais ceci implique que

$$p.s., \sup_n \|Z_n\| < \infty. \quad (4.8)$$

D'autre part il est clair que $\forall E \in \mathcal{E}_{d,1}$ l'ensemble $P_{\bar{E}}(L^E)$ est convexe puisque c'est un segment comme projection orthogonale d'un convexe sur une droite vectorielle. De plus les mêmes arguments que dans la preuve du Corollaire 4.15. nous assurent que $\forall E \in \mathcal{E}_{d,1}$ nous avons *p.s.*

$$P_E(Z_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rho} P_E(L^E).$$

Le Théorème 4.14 nous assure alors de l'existence d'un zonoïde limite Z tel que $\forall E \in \mathcal{E}_{d,1}, P_{\bar{E}}(Z) = P_{\bar{E}}(L^E)$. ■

Remarque 4.18 Si $X(t)$ est un processus d -dimensionnel strictement α -stable ($1 < \alpha < 2$), gaussien ou de Itô-Wiener et dont les composantes vérifient respectivement les conditions des Théorèmes 1.19., 2.9. ou 3.8., il est clair que le Théorème 4.17. s'applique. Le problème qui se pose concerne alors l'identification du zonoïde limite Z . Dans le paragraphe suivant nous proposons l'étude du cas gaussien.

4.4.2 Identification de la limite dans le cas gaussien

Soit $X(t) = (X^1(t), X^2(t), \dots, X^d(t))$, $t \in [0, 1]$ un processus gaussien centré à valeurs dans \mathbb{R}^d . Soit $V(h) = v_{ij}(h)$, $i, j \in \{1, \dots, d\}$, la matrice de covariance de $X(h) - X(0)$, c'est à dire

$$v_{ij}(h) = \mathbb{E} (X^i(h) - X^i(0)) (X^j(h) - X^j(0)).$$

On fait les hypothèses suivantes sur $V(h)$:

$V(h) \sim Rh^{2\alpha}$, $h \rightarrow 0$, $\alpha \in]0, 1[$, où R est évidemment une matrice $d \times d$ symétrique définie positive. De plus

- Si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ on fait l'hypothèse supplémentaire qu'il existe une constante C_1 telle que au voisinage de 0, $V''(h) \sim C_1 Rh^{2\alpha-2}$.
- Si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ on fait l'hypothèse supplémentaire qu'il existe $0 \leq \beta \leq 2\alpha - 1$ et une constante C_2 tels que $V'(h) \sim C_2 Rh^\beta$ à droite de 0.

Les éléments de la diagonale de R sont notés σ_i^2 , $i = 1, \dots, d$ sont supposés tous non nuls. Posons $\beta_{nk} = n^{\alpha-1} (X(\frac{k+1}{n}) - X(\frac{k}{n}))$.

Théorème 4.19 *Sous les hypothèses précédentes, si $Z_n = \sum_{k=0}^{n-1} [0, X_{nk}]$ où $X_{nk} = (\frac{1}{n}, \beta_{nk})$, nous avons*

$$p.s., Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} Z,$$

où

$$Z = \{(t, \bar{x}) \mid t \in [0, 1], \bar{x} \in \mathbb{R}^d, \langle R^{-1}\bar{x}, \bar{x} \rangle \leq L^2(t)\},$$

avec $L(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(s) ds$ où Φ est la distribution gaussienne centrée réduite.

Remarque 4.20 Evidemment l'ensemble Z n'est pas aléatoire. De plus si nous posons $H_t = \{t\} \times \mathbb{R}^d$ et $V_t = Z \cap H_t$, les sections V_t forment une famille d'ellipsoïdes homothétiques définies par :

$$V_t = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle R^{-1}\bar{x}, \bar{x} \rangle \leq L^2(t)\}.$$

Dans le cas où la matrice R est diagonale, les sections sont exactement

$$V_t = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \leq L^2(t)\}.$$

Preuve : La première étape consiste à établir la convergence de Z_n et donc l'existence de Z . D'après le Théorème 4.17., il suffit pour cela de montrer que la condition (4.7) est vérifiée. Pour chaque $\theta \in S^{d-1}$ nous posons

$$E_\theta = \text{Span}\{\theta\}.$$

Nous avons alors $X^{E_\theta}(h) \stackrel{\text{def}}{=} P_{E_\theta} X(h) = \langle X(h), \theta \rangle$ donc

$$\begin{aligned} v_\theta^E(h) &= \mathbb{E} |X^{E_\theta}(h) - X^{E_\theta}(0)|^2 \\ &= \mathbb{E} \langle X(h) - X(0), \theta \rangle^2 \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^d \theta_i (X^i(h) - X^i(0)) \right)^2. \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses faites sur $V(h)$ il est clair que $v_\theta^E(h)$ vérifie les hypothèses de la Proposition 2.16. ceci entraîne que X^{E_θ} vérifie l'une des hypothèse H_1 et H_2 du Théorème 2.9. Par conséquent pour chaque θ nous avons presque sûrement pour chaque $t \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{n^{1-\alpha}} V X_n^{E_\theta}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \langle R\theta, \theta \rangle^{\frac{1}{2}} L(t), \tag{4.9}$$

où $L(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(s) ds$.

La figure ci-dessous représente une projection orthogonale 2-dimensionnelle de Z sur un sous-espace \tilde{E}_θ (avec $\langle R\theta, \theta \rangle = 1$).

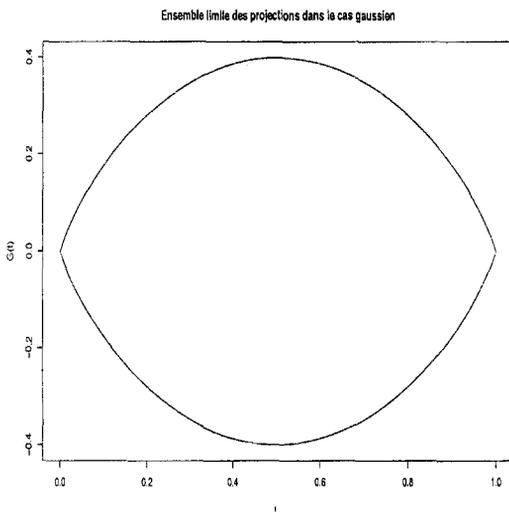


FIG. 4.2 – Ensemble limite des projections

Si $Z_n = \sum_{k=0}^{n-1} [0, X_{nk}]$ où $X_{nk} = \left(\frac{1}{n}, n^{\alpha-1} (X(\frac{k+1}{n}) - X(\frac{k}{n})) \right)$, alors nous connaissons le comportement asymptotique des projections orthogonales de

Z_n sur les sous-espaces $\widetilde{E}_\theta = S \times E_\theta$. En effet dans ce cas nous avons presque sûrement

$$P_{\widetilde{E}_\theta}(Z_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rho} \mathcal{L}_{E_\theta},$$

où \mathcal{L}_{E_θ} est un ensemble convexe dont la frontière est symétrique par rapport à S . La partie inférieure de la frontière de \mathcal{L}_{E_θ} est la courbe $\langle R\theta, \theta \rangle^{\frac{1}{2}} L(t)$ tandis que la partie supérieure est la courbe $-\langle R\theta, \theta \rangle^{\frac{1}{2}} L(t)$. Nous pouvons donc appliquer le Théorème 4.17. et affirmer l'existence d'un zonoïde limite Z .

La seconde étape de la preuve consiste à montrer que Z est bien l'ensemble décrit dans l'énoncé du théorème. Nous allons distinguer deux cas suivant que la matrice R est ou non la matrice identité $d \times d$.

Cas 1 Nous supposons que $R = I$ où I est la matrice identité $d \times d$. Les notations matricielles semblent bien adaptées pour le calcul des covariances, rappelons notamment que si U et V sont deux vecteurs aléatoires centrés à valeurs dans \mathbb{R}^d et si A est la matrice $d \times d$ associée à une application linéaire $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, alors nous avons $\text{Cov}(A(U), A(V)) = A \text{Cov}(U, V) A^T$. Nous considérons à présent une rotation arbitraire de centre 0 notée $\mathcal{O} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et O la matrice $d \times d$ qui lui est associée et nous posons

$$Y(t) = O(X(t)).$$

Si $Z_n^{X,1}$ désigne la suite de zonotopes engendrée par les accroissements de X d'après la première partie de la preuve, il existe un zonoïde Z^1 tel que p.s.,

$$Z_n^{X,1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rho} Z^1. \tag{4.10}$$

D'autre part, nous avons

$$\text{Cov}(Y(h) - Y(0), Y(h) - Y(0)) = O^T \text{Cov}(X(h) - X(0), X(h) - X(0)) O.$$

Par conséquent $\text{Cov}(Y(h) - Y(0), Y(h) - Y(0)) \sim O^T R O h^{2\alpha}$, $h \rightarrow 0$. Evidemment $O^T R O = I$ et donc $\text{Cov}(Y(h) - Y(0), Y(h) - Y(0))$ a le même comportement que $V(h)$ au voisinage de 0. Ainsi si $Z_n^{Y,1}$ est la suite de zonotopes engendrée par les accroissements du processus Y , nous obtenons presque sûrement

$$Z_n^{Y,1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rho} Z^1.$$

Introduisons alors $\widetilde{\mathcal{O}} : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ telle que

$$\widetilde{\mathcal{O}}(x_0, x_1, \dots, x_d) = (x_0, \mathcal{O}(x_1, \dots, x_d)).$$

Autrement dit $\widetilde{\mathcal{O}}$ est une rotation dans \mathbb{R}^{d+1} d'axe S .

Par continuité la relation (4.10) entraîne p.s., $\widetilde{\mathcal{O}}(Z_n^{X,1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \widetilde{\mathcal{O}}(Z^1)$. Or il est clair que $\widetilde{\mathcal{O}}(Z_n^{X,1}) = Z_n^{Y,1}$ et donc

$$\widetilde{\mathcal{O}}(Z^1) = Z^1.$$

Par conséquent Z^1 est invariant par rotation autour de S .

Finalement Z^1 est un ensemble convexe dans \mathbb{R}^{d+1} invariant par les rotations d'axe S et tel que pour chaque $\theta \in S^{d-1}$, sa projection orthogonale sur le sous-espace \tilde{E}_θ est l'ensemble convexe symétrique par rapport à S , noté \mathcal{C} , dont la partie inférieure de la frontière \mathcal{L}_θ est exactement la courbe $L(t)$. Ainsi Z^1 est l'ensemble obtenu en faisant "tourner" l'ensemble \mathcal{C} autour de S . Les sections de Z^1 par les hyperplans V_t sont bien les sphères de centre t et de rayon $|L(t)|$, c'est à dire $Z^1 = \{(t, \bar{x}) \mid t \in [0, 1], \bar{x} \in \mathbb{R}^d, \sum_{i=1}^d x_i^2 \leq L^2(t)\}$. Evidemment si $\sigma_i^2 = \sigma^2$, $i = 1, \dots, d$, le même raisonnement nous conduit à une limite Z^σ dont les sections sont des sphères de rayons $|\sigma L(t)|$.

Cas 2 Nous considérons à présent le cas général où R est une matrice symétrique définie positive dont les éléments de la diagonale sont notés σ_i^2 , $i = 1, \dots, d$. D'après la première partie de la preuve, si $Z_n^{X,2}$ désigne la suite de zotopes engendrée par les accroissements du processus X dans ce cas, il existe un zonoïde Z^2 tel que *p.s.*,

$$Z_n^{X,2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rho} Z^2. \quad (4.11)$$

Soulignons que d'après les hypothèse R est diagonalisable, *i.e.* il existe une matrice unitaire U telle que $U^T R U = \tilde{R}$ soit diagonale. Soit $\mathcal{U} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une rotation de centre 0 ayant U pour matrice associée.

Nous introduisons à présent la dilatation $\mathcal{D} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que $\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{D}(x_1, \dots, x_d) = \left(\frac{1}{\sigma_1} x_1, \frac{1}{\sigma_2} x_2, \dots, \frac{1}{\sigma_d} x_d \right).$$

Soit D la matrice diagonale $d \times d$ associée à \mathcal{D} .

Soit enfin $\mathcal{S} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ la similitude telle que $\mathcal{S} = \mathcal{U} \circ \mathcal{D}$. Posons

$$Y(t) = U D(X(t)).$$

Nous avons alors

$$\text{Cov}(Y(h) - Y(0), Y(h) - Y(0)) = D^T U^T V(h) U D.$$

Par conséquent $\text{Cov}(Y(h) - Y(0), Y(h) - Y(0)) \sim D^T U^T R U D h^{2\alpha}$, $h \rightarrow 0$. Nous obtenons évidemment

$$\text{Cov}(Y(h) - Y(0), Y(h) - Y(0)) \sim I h^{2\alpha}, \quad h \rightarrow 0.$$

Ceci entraîne que $Z_n^{Y,2}$, la suite de zonotopes engendrée par les accroissements du processus Y , a le même comportement asymptotique que $Z_n^{X,1}$, i.e. presque sûrement,

$$Z_n^{Y,2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rho} Z^1.$$

Introduisons à présent $\tilde{\mathcal{S}} : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ telle que

$$\tilde{\mathcal{S}}(x_0, x_1, \dots, x_d) = (x_0, \mathcal{S}(x_1, \dots, x_d)).$$

Par continuité (4.11) entraîne que presque sûrement

$$\tilde{\mathcal{S}}(Z_n^{X,2}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rho} \tilde{\mathcal{S}}(Z^2).$$

Or il est clair que *p.s.*, $\tilde{\mathcal{S}}(Z_n^{X,2}) = Z_n^{Y,2}$ mais d'après (4.11) ceci entraîne que $\tilde{\mathcal{S}}(Z^2) = Z^1$. L'application $\tilde{\mathcal{S}}$ étant inversible nous obtenons $Z^2 = \tilde{\mathcal{S}}^{-1}(Z^1)$. Par conséquent Z^2 est bien l'ensemble Z décrit dans l'énoncé du théorème. ■

Chapitre 5

Application à l'estimation de l'exposant de Hölder local de processus gaussiens

5.1 Introduction

La théorie fractale étudie des objets dont la forme présente des irrégularités importantes ce qui est le cas entre autres, des trajectoires de certains processus stochastiques. Ainsi, le degré d'irrégularité de ces courbes est caractérisé par un paramètre $D \in]1, 2[$ appelé dimension fractale de la courbe. Pratiquement, plus D est proche de 2 plus la trajectoire est irrégulière (voir figure 5).

En ce qui concerne les processus gaussiens à accroissements stationnaires $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$ tels que

$$\mathbb{E}|X(t+h) - X(t)|^2 \sim C_\alpha h^{2\alpha}, \quad h \rightarrow 0, \quad (5.1)$$

où $\alpha \in]0, 1[$, il est bien connu (voir [1] ou [42]) que α caractérise l'irrégularité des trajectoires de X , en particulier nous avons

$$D = 2 - \alpha.$$

Dans ce cas α est appelé **exposant de Hölder** du processus X .

Définition 5.1 Les processus qui vérifient la relation (5.1) sont dits **localement auto-similaires** en 0.

Remarque 5.2 Le mouvement brownien fractionnaire W^α est l'unique processus gaussien à accroissements stationnaires **auto-similaire**, c'est-à-dire vérifiant $\mathbb{E}|W^\alpha(t) - W^\alpha(s)|^2 = C_\alpha |t - s|^{2\alpha}$, $\forall s, t \in [0, 1]$. En particulier W^α vérifie la relation (5.1)

Certains phénomènes à longue mémoire sont modélisés par ce type de processus gaussiens en particulier dans le domaine de l'analyse des séries chronologiques financières, certains cours boursiers notamment sont modélisés par le mouvement brownien fractionnaire de paramètre α . Le problème d'identification se pose alors. Aussi l'estimation de α a fait l'objet de nombreux travaux. Parmi les approches proposées citons, sans exhaustivité, la méthode fondée sur le nombre de franchissements d'un niveau donné utilisée dans Azaïs [4] ou Feuerverger *et al* [34], ou la méthode de Whittle basée sur le maximum de vraisemblance utilisée dans Fox et Taqqu [36].

Récemment plusieurs estimateurs furent construits à partir des variations discrètes, d'abord Higuchi [40] propose une méthode basée sur les moments absolus d'ordre 1 tandis que Poggi et Viano [58], Bardet [10], Istas et Lang [45] ou Kent et Wood [47] exhibent des estimateurs basés sur les variations quadratiques. Enfin, en se restreignant au mouvement brownien fractionnaire standard (c'est à dire $C_\alpha = 1$ et X est auto-similaire) Peltier et Lévy-Véhel estiment les moments absolus d'ordre p des accroissements pour obtenir un estimateur fortement consistant. Soulignons que Coeurjolly [23] étend cette dernière méthode au mouvement brownien fractionnaire non standard ($C_\alpha \neq 1$) dans un cadre beaucoup plus général puisqu'il considère des filtrages du processus X . Signalons enfin que Taqqu et Teverosky [64] décrivent et comparent un certain nombre des méthodes utilisées pour estimer ce paramètre.

Nous allons mettre à profit les résultats du chapitre 2 en exhibant deux classes d'estimateurs fortement consistants de α basés sur les accroissements. Dans un premier temps, à l'aide de la convergence des moments des accroissements (relation (2.6)), prouvée dans la démonstration du Théorème 2.9., nous étendons le résultat de Peltier et Lévy-Véhel [56] à l'ensemble des processus gaussiens localement auto-similaires en 0 (*i.e.* qui vérifient la relation (5.1)). En particulier nous proposons une classe d'estimateurs consistants fondés sur les moments absolus des accroissements. Ensuite nous proposons une nouvelle approche basée sur les accroissements ordonnés à partir des résultats concernant la convergence des réarrangements convexes des approximations polygonales du processus qui nous conduit à une seconde classe d'estimateurs consistants. Pour finir, nous illustrons ces résultats, étudions la qualité de ces estimateurs et les comparons au moyen de simulations.

Remarque 5.3 Nous nous intéressons ici aux courbes présentant partout la même singularité ce qui restreint sensiblement le domaine d'application à des données réelles. En effet, il est illusoire de supposer que les côtes anglaises, pour reprendre un exemple de Mandelbrot ([52], [53]) présentent partout les mêmes aspérités sans prendre en compte le phénomène d'érosion. En réalité il est plus raisonnable de considérer que le degré d'irrégularité varie au cours

du temps. Cette remarque a conduit indépendamment Peltier et Lévy-Véhel [57] d'une part et Benassi, Jaffard et Istas [14] d'autre part à introduire le mouvement brownien multifractionnaire (mbmf) qui généralise le mouvement brownien fractionnaire en substituant au paramètre α , une fonction de Hölder $\alpha(t)$, $0 < t < 1$ (voir [57]). Mais dans ce cas nous perdons la stationnarité des accroissements, largement utilisée dans la construction de nos estimateurs. Pour un t_0 fixé, Peltier et Lévy-Véhel ont proposé des estimateurs pour $\alpha(t_0)$ en considérant des voisinages de t_0 sur lesquels la fonction α est constante et en se ramenant ainsi à des estimateurs analogues à ceux qu'il proposent dans le cas du mouvement brownien fractionnaire standard. Soulignons que Benassi, Cohen et Istas [13] ont introduit récemment la définition de processus gaussiens multifractionnaires qui généralise à son tour celle de mbmf et exhibent également une classe d'estimateur fortement consistant de $\alpha(t_0)$ en se ramenant à un voisinage de t_0 sur lequel $\alpha(\cdot)$ ne varie pas trop. Cela suppose une certaine régularité de la fonction $\alpha(t)$ et restreint toujours le champ des applications. C'est pourquoi récemment Ayache et Lévy-Véhel [3] ont introduit le mouvement brownien multifractionnaire généralisé qui possède une régularité hölderienne $\alpha(t)$ pouvant être très irrégulière. Le problème d'estimation dans ce cas a été abordé récemment par Benassi, Bertrand, Cohen et Istas [12].

5.2 Estimateurs de l'exposant de Hölder

Dans cette section, $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$ désigne un processus gaussien à accroissements stationnaires tel que

1. $v(t) \sim C_\alpha |h|^{2\alpha}$, $h \rightarrow 0$.
2. $v(t)$ vérifie les hypothèses de la Proposition 2.16.

5.2.1 Estimateurs fondés sur les moments absolus des accroissements

Nous reprenons ici la méthode suivie par Peltier et Lévy-Véhel dans [56] pour estimer α dans le cas particulier du processus du mouvement brownien fractionnaire standard. Cette méthode est basée sur la convergence des moments absolus des variations discrètes sur $\{\frac{k}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1\}$. Nous étendons ce résultat à l'ensemble des processus gaussiens qui vérifient la relation (5.1).

Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, considérons

$$R_n(p) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| X\left(\frac{k+1}{n}\right) - X\left(\frac{k}{n}\right) \right|^p,$$

le p -ième moment absolu des accroissements sur la discrétisation uniforme de l'intervalle $[0, 1]$ considérés comme variables aléatoires sur $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$.

Posons

$$\widehat{\alpha}_1(n, p) = -\frac{\log[\sqrt{\pi}R_n(p)/(2^{\frac{p}{2}}C^{\frac{p}{2}}\Gamma(\frac{p+1}{2}))]}{p \log n}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Nous obtenons alors le résultat suivant,

Proposition 5.4 *Pour tout entier positif p , nous avons*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\alpha}_1(n, p) = \alpha \quad p.s.$$

Preuve : Au cours de la démonstration du Théorème 2.9., nous avons établi que

$$\frac{1}{b_n} X'_n \xrightarrow{[0,1]} \Phi^{-1}, \quad (5.2)$$

où $b_n = n\sigma_n$.

De plus, nous avons mis en évidence que $(\frac{1}{b_n} X'_n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable sur $[0, 1]$. Comme la fonction $h(x) = |x|$ est continue sur \mathbb{R} , $(|\frac{1}{b_n} X'_n|)_{n \geq 1}$ est également uniformément intégrable et nous pouvons déduire de ce qui précède la relation suivante : $\forall p \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{b_n} X'_n(t) \right|^p dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E} |Z|^p. \quad (5.3)$$

Il est clair que $\forall p \in \mathbb{N}$, nous avons également

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \frac{1}{b_n} X'_n(t) \right|^p dt &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{X\left(\frac{i+1}{n}\right) - X\left(\frac{i}{n}\right)}{\sigma_n} \right|^p \\ &= \frac{1}{\sigma_n^p} R_n(p). \end{aligned}$$

Il nous reste à rappeler que

$$\mathbb{E} |Z|^p = \frac{2^{\frac{p}{2}} \Gamma(\frac{p+1}{2})}{\sqrt{\pi}}$$

et à remarquer que nous avons

$$\sigma_n^2 = v\left(\frac{1}{n}\right) \sim Cn^{-2\alpha}, \quad n \rightarrow \infty,$$

pour déduire

$$\frac{1}{C^{\frac{p}{2}} n^{-p\alpha}} R_n(p) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \frac{2^{\frac{p}{2}} \Gamma(\frac{p+1}{2})}{\sqrt{\pi}}.$$

L'équivalence des logarithmes permet alors de conclure. ■

5.2.2 Estimateurs fondés sur les réordonnements des accroissements

Nous présentons une deuxième classe d'estimateurs consistants du paramètre α en utilisant la convergence presque sûre des réarrangements convexes de X vers la fonction convexe non aléatoire $L(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \Phi^{-1}(s) ds$. En particulier ceci illustre l'intérêt d'avoir obtenu une limite déterministe.

Posons

$$\hat{\alpha}_2(n, t_0) = 1 - \frac{\log |VX_n(t_0)/(C^{\frac{1}{2}}L(t_0))|}{\log n}, \quad t_0 \in]0, 1[.$$

Le Théorème 2.9. nous alors permet d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 5.5 *Pour chaque $t_0 \in]0, 1[$ nous avons*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\alpha}_2(n, t_0) = \alpha \quad p.s.$$

Preuve : C'est une conséquence directe du Théorème 2.9. puisque si nous l'appliquons aux processus considérés dans cette partie nous obtenons en fixant t_0 dans l'intervalle $]0, 1[$,

$$\frac{1}{C^{\frac{1}{2}}n^{1-\alpha}} VX_n(t_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} L(t_0). \quad (5.4)$$

La fonction $VX_n(t)$ n'étant pas nécessairement à valeurs positives, nous devons considérer une fonction continue sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R}^+ afin de pouvoir passer aux logarithmes. Nous avons choisi la fonction $x \mapsto |x|$ car celle ci permet de ne pas modifier le facteur $C^{\frac{1}{2}}n^{\alpha-1}$ de la relation (5.4). L'équivalence en l'infini des logarithmes des deux termes nous permet alors de conclure. ■

Remarque 5.6 Comme nous l'avons déjà remarqué lors du chapitre 1 en 1.4.6., $VX_n(t_0)$ n'est autre qu'une somme partielle des statistiques d'ordre des accroissements de X . Ainsi l'estimateur $\hat{\alpha}_2(n, t_0)$ est une fonction non linéaire de cette somme.

5.3 Simulation

Nous allons illustrer les résultats précédents en simulant

- un processus gaussien stationnaire dont la fonction de covariance est $R(t) = \exp\{-C|t|^{2\alpha}\}$, où C est une constante connue.
- le processus du mouvement brownien fractionnaire standard.

5.3.1 Processus gaussien stationnaire

Afin de mettre en évidence que la classe d'estimateur $\widehat{\alpha}_1(n, p)$ n'est pas uniquement valable pour le mouvement brownien fractionnaire standard, nous simulons un processus gaussien stationnaire $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$ dont la fonction de covariance est

$$R(t) = \exp\{-|t|^{2\alpha}\}.$$

Par commodité nous avons fixé $C = 1$. Un tel processus vérifie bien les conditions requises puisque dans ce cas $v(t)$ vérifie les hypothèses de la Proposition 2.16. et

$$v(t) = 2(1 - R(t)) \sim t^{2\alpha}, \quad t \rightarrow 0.$$

Pour simuler ce processus nous utilisons un algorithme dû à Chan et Wood (voir [26]) construit à partir d'une méthode introduite par Davies et Harte [28], reprise par Beran [15] et améliorée par Wood et Chan [66] qui consiste à extraire la matrice d'auto-covariance du processus en plongeant cette dernière dans une matrice circulante facilement diagonalisable.

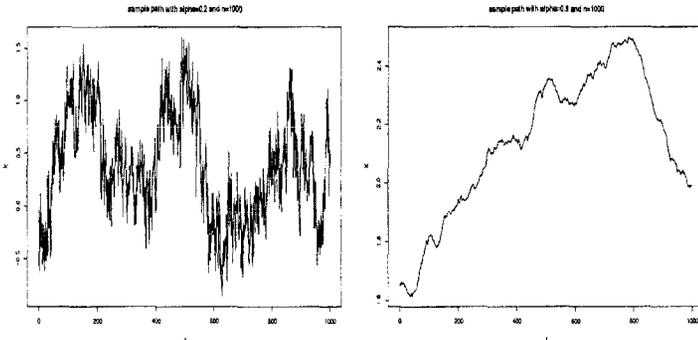


FIG. 5.1 – Exemples de trajectoires

Pour commencer, nous proposons deux trajectoires simulées ($n = 100$) afin d'illustrer le fait que α caractérise le degré d'irrégularité des trajectoires (figure 5.1). L'augmentation de l'indice fractal se visualise graphiquement : pour $\alpha = 0.2$, la trajectoire est visiblement très irrégulière tandis que pour $\alpha = 0.8$, on s'approche, au sens où α s'approche de 1, de la régularité.

Qualités des estimateurs

Afin de comparer nos deux estimateurs, nous considérons 2 critères classiques : le biais et l'erreur quadratique moyenne (MSE) définis de la façon suivante :

$$\text{biais} = \mathbb{E}(\hat{\alpha} - \alpha),$$

$$\text{MSE} = \mathbb{E}(\hat{\alpha} - \alpha)^2.$$

Le biais et le MSE sont estimés à partir de 100 trajectoires de taille $n = 100$, en fixant $p = 1$ et $t_0 = 0.5$. Soient $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_{100}$ les valeurs de l'estimateur obtenues pour chaque trajectoire.

Le biais et le MSE sont estimés par la moyenne empirique c'est à dire $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{100} (\hat{\alpha}_i - \alpha)$ pour le biais et $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{100} (\hat{\alpha}_i - \alpha)^2$ pour le MSE.

		$\hat{\alpha}_1(100, 1)$	$\hat{\alpha}_2(100, 0.5)$
$\alpha = 0.1$	biais	1.116e-02	1.257e-02
	MSE	4.187e-04	4.762e-04
$\alpha = 0.5$	biais	3.775e-03	7.089e-03
	MSE	2.695e-04	9.803e-04
$\alpha = 0.9$	biais	9.171e-03	1.846e-02
	MSE	2.317e-03	8.475e-03

TAB. 5.1 – Comparaison des estimateurs

Pour compléter le tableau précédent et mettre en évidence que la vitesse de convergence dépend de la valeur de α , nous proposons les figures suivantes qui représentent les MSE pour $\alpha = 0.1, \dots, 0.9$ et ceci pour chacun des deux estimateurs avec $p = 1$ et $t_0 = 0.5$.

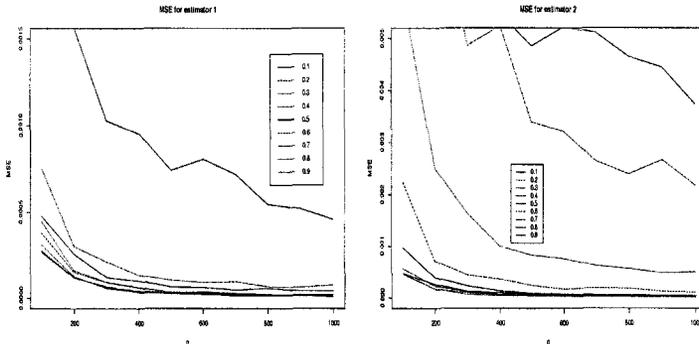


FIG. 5.2 – MSE

Les comportements des MSE semblent être très proches pour les petites valeurs de α , notamment pour $\alpha < 0.5$.

Lorsque α s'approche de 1, la vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\alpha}_2$ semble être plus lente que celle de $\hat{\alpha}_1$.

Comportement de $\hat{\alpha}_1(n, p)$ en fonction de p

Nous proposons à présent un tableau numérique regroupant les MSE obtenus pour l'estimateur $\hat{\alpha}_1$ en faisant varier p . Nous remarquons ainsi que la valeur $p = 2$ semble être la meilleure dans le sens où l'erreur quadratique est minimale. Soulignons que Coeurjolly a prouvé que $p = 2$ est bien la valeur

		$\hat{\alpha}_1(100, 1)$	$\hat{\alpha}_1(100, 2)$	$\hat{\alpha}_1(100, 10)$
$\alpha = 0.1$	biais	1.116e-02	1.108e-02	1.230e-02
	MSE	4.187e-04	3.814e-04	1.230e-03
$\alpha = 0.5$	biais	3.775e-03	2.960e-03	1.875e-02
	MSE	2.695e-04	2.235e-04	9.209e-04
$\alpha = 0.9$	biais	9.171e-03	1.243e-02	3.876e-02
	MSE	2.317e-03	2.006e-03	2.912e-03

TAB. 5.2 – Comportement de $\hat{\alpha}_1$ en fonction de p

optimale (dans le sens où elle donne une variance minimale) dans le cas du mouvement brownien fractionnaire [23].

Comportement de $\hat{\alpha}_2(n, t_0)$ en fonction de t_0

		$\hat{\alpha}_2(100, 0.1)$	$\hat{\alpha}_2(100, 0.5)$	$\hat{\alpha}_2(100, 0.9)$
$\alpha = 0.1$	biais	1.369e-02	1.257e-02	3.104e-03
	MSE	6.047e-04	4.762e-04	1.947e-03
$\alpha = 0.5$	biais	7.135e-03	7.089e-03	5.464e-02
	MSE	6.373e-04	9.803e-04	2.288e-02
$\alpha = 0.9$	biais	3.978e-02	1.846e-02	-1.356e-01
	MSE	4.891e-03	8.475e-03	4.308e-02

TAB. 5.3 – Comportement de $\hat{\alpha}_2$ en fonction de t_0

De la même façon nous présentons ici les MSE obtenus pour l'estimateur $\hat{\alpha}_2$ lorsque t_0 varie. En se référant aux résultats numériques, il semble difficile

d'avancer une hypothèse raisonnable en ce qui concerne la valeur optimale de t_0 puisqu'il semble que cette valeur varie avec α . Ceci n'a pas fait l'objet d'une étude théorique approfondie.

Box-plots pour différentes valeurs de α

Dans ce paragraphe, nous simulons 200 trajectoires de taille $n = 100$ ce qui nous donne 200 valeurs estimées pour $\alpha = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$. Nous présentons les diagrammes box-plots obtenus pour chacun des estimateurs.

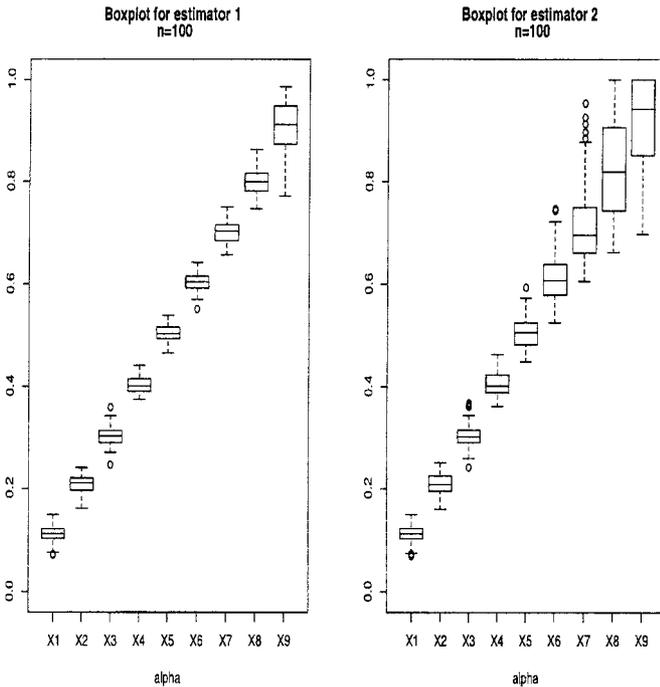


FIG. 5.3 – Box-plots

Considérons d'abord les diagrammes de façon indépendantes, nous constatons que la dispersion des valeurs estimées est beaucoup plus importante pour les grandes valeurs de α , en particulier $\alpha = 0.9$.

Si l'on compare à présent les deux diagrammes, nous notons une similitude des box-plots pour les petites valeurs de α , (0.1 ou 0.2) par contre, lorsque α est supérieur à 0.5, l'estimateur $\hat{\alpha}_2$ nous donne une dispersion beaucoup

plus importante que $\hat{\alpha}_1$ et des valeurs aberrantes.

5.3.2 Mouvement brownien fractionnaire standard

Dans cette sous-section, nous simulons le processus du mouvement brownien fractionnaire standard W^α , sur l'intervalle $[0, 1]$. Nous utilisons un algorithme, disponible sur Scilab, construit à partir de la méthode de Levinson. Comme pour le processus gaussien stationnaire, nous commençons par illustrer cette simulation par deux trajectoires, l'une très irrégulière ($\alpha = 0.1$) et l'autre "proche" de la régularité ($\alpha = 0.9$).

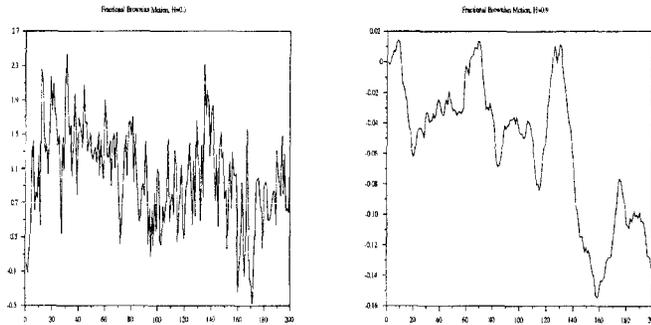


FIG. 5.4 – Exemples de trajectoires de FBM

Qualité des estimateurs

		$\hat{\alpha}_1(100, 2)$	$\hat{\alpha}_2(100, 0.5)$
$\alpha = 0.1$	biais	1.851e-03	2.342e-03
	MSE	2.944e-04	3.209e-04
$\alpha = 0.5$	biais	7.973e-05	2.946e-03
	MSE	2.761e-04	1.205e-03
$\alpha = 0.9$	biais	2.330e-02	1.680e-02
	MSE	3.056e-03	7.916e-03

TAB. 5.4 – Comparaison des estimateurs

Nous proposons un tableau analogue au tableau 1 qui rassemble des valeurs numériques obtenues pour les deux estimateurs. Ce tableau confirme que $\hat{\alpha}_1$ est un meilleur estimateur dans le sens où l'erreur quadratique moyenne est moins importante.

Intervalles de confiance

Dans ce paragraphe, nous proposons des intervalles de confiances à 95% pour $\alpha \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$ et pour chacun des deux estimateurs avec $p = 1$ et $t_0 = 0.5$. Pour obtenir ces intervalles nous avons simulé 200 trajectoires de taille $n = 100$, pour chaque valeur de α nous avons calculé les 200 valeurs estimées et nous avons ordonné ces valeurs par ordre croissant. La sixième valeur et la cent quatre-vingt quinzeième sont les bornes de nos intervalles de confiances. Notons que ces représentations confirment les résultats pré-

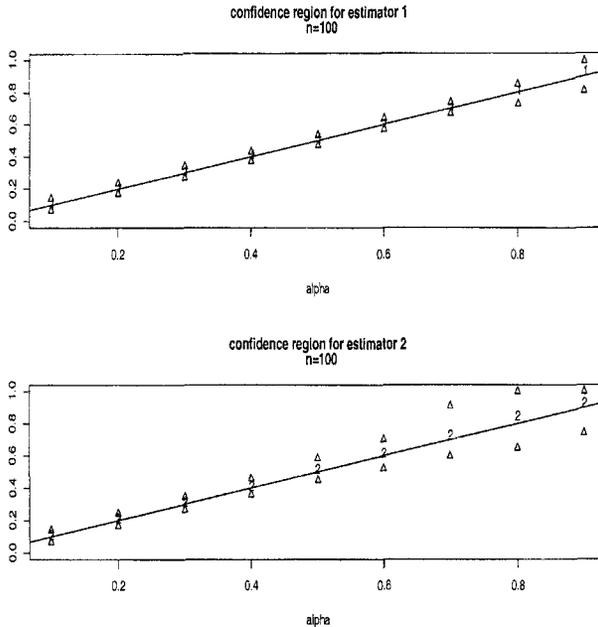


FIG. 5.5 – Intervalles de confiance

sentés sous forme de box-plots (figure 5.3) dans le cas du processus gaussien stationnaire. Nous avons tronqué l'estimateur $\hat{\alpha}_2$ car il donnait des valeurs aberrantes supérieures à 1 quand $\alpha = 0.9$, ceci explique pourquoi l'intervalle de confiance de $\alpha = 0.9$ est moins large que celui de $\alpha = 0.8$.

Comportement de $\hat{\alpha}_1(n, p)$ en fonction de p

Nous présentons à nouveau les résultats numériques obtenus pour le biais et le MSE de l'estimateur $\hat{\alpha}_1$, lorsque nous faisons varier p . Ces résultats confirment ceux présentés dans le tableau 2.

		$\hat{\alpha}_1(100, 1)$	$\hat{\alpha}_1(100, 2)$	$\hat{\alpha}_1(100, 10)$
$\alpha = 0.1$	biais	1.851e-03	1.858e-03	2.171e-02
	MSE	2.944e-04	2.557e-04	1.131e-03
$\alpha = 0.5$	biais	7.973e-05	9.210e-04	2.208e-02
	MSE	2.761e-04	2.463e-04	1.279e-03
$\alpha = 0.9$	biais	2.330e-02	2.664e-02	5.384e-02
	MSE	3.056e-03	2.879e-03	4.741e-03

TAB. 5.5 – Comportement de $\hat{\alpha}_1$ en fonction de p **Comportement de $\hat{\alpha}_2(n, t_0)$ en fonction de t_0**

Nous proposons un tableau numérique regroupant les valeurs obtenus pour $\hat{\alpha}_2$ quand t_0 varie.

		$\hat{\alpha}_2(100, 0.1)$	$\hat{\alpha}_2(100, 0.5)$	$\hat{\alpha}_2(100, 0.9)$
$\alpha = 0.1$	biais	4.718e-03	2.342e-03	1.875e-02
	MSE	4.329e-04	3.209e-04	1.213e-03
$\alpha = 0.5$	biais	2.506e-03	2.946e-03	5.187e-02
	MSE	6.161e-04	1.205e-03	2.525e-02
$\alpha = 0.9$	biais	4.353e-02	1.680e-02	-1.256e-01
	MSE	5.135e-03	7.916e-03	4.134e-02

TAB. 5.6 – Comportement de $\hat{\alpha}_2$ en fonction de t_0

Ces résultats confirment ceux présentés dans le tableau 3 à savoir qu'il est difficile d'avancer une hypothèse raisonnable concernant la valeur de t_0 qui nous donnerait une erreur minimale.

Estimateur $\hat{\alpha}_2$

Pour terminer nous proposons le document suivant qui présente les moyennes, variances et boxplots de l'estimateurs $\hat{\alpha}_2$ pour $t = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ et obtenus en simulant 100 trajectoires de taille $n = 10000$.

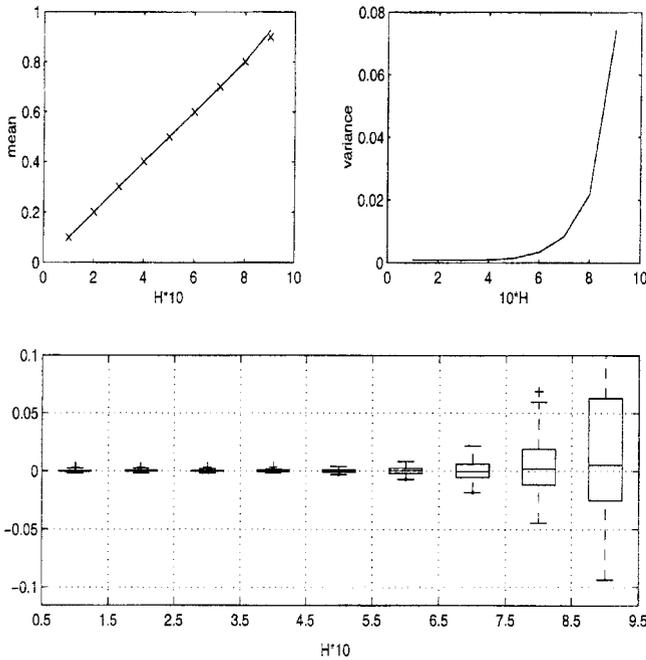


FIG. 5.6 - $n=10000$

5.3.3 Conclusion

Il est clair que le sujet abordé dans ce chapitre est très vaste comme le prouvent les nombreux travaux sur ce thème existant dans la littérature. La modeste contribution constituée par les deux classes d'estimateurs exhibées n'a d'autre but que de proposer un exemple d'utilisation des résultats concernant les réarrangements convexes.

En procédant comme pour la construction de $\hat{\alpha}_2$, il doit être possible de construire un estimateur de l'indice d'un processus strictement α -stable, ($1 < \alpha < 2$) en utilisant le Théorème 1.19.

Par ailleurs, plusieurs questions non abordées concernant nos estimateurs mériteraient une réponse :

- Quelles sont les vitesses de convergences de nos estimateurs ?
- Existe-t-il une valeur de t_0 optimale pour la seconde classe ?
- Si $\widehat{\alpha}_1$ est meilleur (au sens où l'erreur quadratique moyenne est plus faible) que $\widehat{\alpha}_2$ pour $\alpha \geq 0.5$, peut-on espérer que $\widehat{\alpha}_2$ soit meilleur pour certaines (petites) valeurs de α ?
- Quelles comparaisons peut-on faire entre nos estimateurs et ceux existant déjà dans la littérature ?

Perspectives

Si cette étude nous a permis de répondre à un certain nombre de questions notamment parmi celles que nous avons formulées dans l'introduction, elle soulève néanmoins de nouveaux problèmes ou autres questions ouvertes auxquels nous consacrerons naturellement une partie de nos prochaines études.

En effet, après le processus du mouvement brownien, les processus α -stables ($1 < \alpha < 2$), les processus gaussiens et les processus de Itô-Wiener successivement évoqués au cours de cet ouvrage, d'autres classes de processus mériteraient d'être étudiées. Ainsi les résultats de Wschebor concernant les accroissements de processus de Lévy [67] nous laissent espérer un résultat sur la convergence des suites de réarrangements convexes engendrées par des régularisations de certains processus de Lévy qui élargirait le résultat énoncé lors du chapitre 1 concernant les processus α -stables. De même, les résultats de Azaïs et Wschebor concernant les martingales continues [9] motivent une étude qui pourrait nous permettre d'étendre le résultat du chapitre 3 concernant les processus de Itô-Wiener.

Remarquons d'autre part que si nous avons établi des résultats du type loi forte des grands nombres : presque sûrement pour chaque t

$$\frac{1}{b_n} V X_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l(t),$$

il est naturel de se demander s'il est possible d'obtenir des résultats du type théorème central limite en étudiant la convergence en loi de

$$\sqrt{b_n} \left(\frac{1}{b_n} V X_n(t) - l(t) \right).$$

Enfin nous avons déjà évoqué au cours du chapitre 5, les nombreuses questions relatives aux deux classes d'estimateurs de l'indice fractal que nous avons exhibées, concernant notamment les vitesses de convergence.

Néanmoins l'utilisation de nos résultats pour les problèmes d'estimations ne semble pas se limiter au paramètre fractal, il existe peut-être d'autres questions qui pourraient nous permettre d'exploiter les convergences des suites de réarrangements convexes, notamment dans les cas où nous obtenons une

limite déterministe.

Il est clair que cette liste n'est pas exhaustive, certaines remarques méritant peut-être quelques développements supplémentaires.

Annexes

Nous proposons en annexe le programme en Fortran qui nous a permis de simuler le processus gaussien stationnaire. Soulignons que ce programme est dû en grande partie à Chan et Wood [66] et nécessite l'accès à la NAG library.

```
C      File name: example1.f

C      Example program to simulate 1 dimension Gaussian
C      process, which has covariance function
C          exp(-c|t|^alpha)
C      where c = 100 and alpha = 1 as defined in a DOUBLE
C      PRECISION FUNCTION COV1, using the two subroutines,
C      EIGEN1 and SIMSGF1.

C      Set upper bound for m to be 2^20 = 1048576
      INTEGER MAXSIZE
      PARAMETER (MAXSIZE = 1048576)
      EXTERNAL EIGEN1, SIMSGF1, COV1
      DOUBLE PRECISION COV1
      DOUBLE PRECISION LAM(MAXSIZE), X(MAXSIZE), RHO,
      SIGMA, EIG(3) INTEGER N, M, G, MAXG, ICORR, IFALT,
      ICOUNT CHARACTER ANS

C      Timing parameters
      DOUBLE PRECISION TIMEARRAY(2), TIMEDIFF

      WRITE(*,*) 'SIMULATE ONE 1-DIMENSIONAL
      GAUSSIAN PROCESS'
      WRITE(*,*) 'PLEASE ENTER THE REQUIRED
      LENGTH OF THE PROCESS:'
      READ(*,*) N
      RHO = DLOG(2D0*DBLE(N - 1))/DLOG(2D0)
      G = IDINT(RHO)
      IF (DBLE(G) .LT. RHO) THEN
        G = G + 1
```

```

ENDIF
WRITE(*,*) 'THE DEFAULT INITIAL VALUE OF G IS', G, '.'
WRITE(*,*) 'DO YOU WANT TO SET A HIGHER
INITIAL VALUE? (Y/N)'
READ(*,*) ANS
IF ((ANS .EQ. 'Y') .or. (ANS .EQ. 'y')) THEN
  WRITE(*,*) 'PLEASE ENTER THE NEW INTEGER
  INITIAL VALUE:'
  READ(*,*) G
ENDIF
WRITE(*,*) 'THE DEFAULT MAXIMUM VALUE OF G IS 20.'
WRITE(*,*) 'DO YOU WANT TO SET A LOWER
MAXIMUM VALUE? (Y/N)'
READ(*,*) ANS
IF ((ANS .EQ. 'Y') .or. (ANS .EQ. 'y')) THEN
  WRITE(*,*) 'PLEASE ENTER THE NEW INTEGER
  MAXIMUM VALUE:'
  READ(*,*) MAXG
ELSE
  MAXG = 20
ENDIF
TIMEDIFF = DTIME(TIMEARRAY)
CALL EIGEN1(LAM, COV1, N, M, G, MAXG,
ICORR, RHO, SIGMA,
&   EIG, ICOUNT, IFAULT)
TIMEDIFF = DTIME(TIMEARRAY)
WRITE(*,9) TIMEDIFF
TIMEDIFF = DTIME(TIMEARRAY)
CALL SIMSGF1(X, N, M, LAM, RHO)
TIMEDIFF = DTIME(TIMEARRAY)
WRITE(*,9) TIMEDIFF
c   WRITE(*,9) (X(I), I = 1, N)
9   WRITE(*,99) G, RHO, SIGMA, EIG, ICOUNT, IFAULT
99  FORMAT(F20.15)
END

C   EXAMPLE COVARIANCE FUNCTION
DOUBLE PRECISION FUNCTION COV1(T)
DOUBLE PRECISION T, C, ALPHA
DOUBLE PRECISION DUMMY

ALPHA = 1D0
C = 1D2

```

```

IF (DABS(T) .LE. ODO) THEN
  COV1 = 1DO
ELSE
  DUMMY = C*DEXP(ALPHA*DLOG(T))
  IF (DUMMY .LE. 1.2D2) THEN
    COV1 = DEXP(-DUMMY)
  ELSE
    COV1 = ODO
  ENDIF
ENDIF
RETURN
END

```



C File name: eigen1.f

C Find g to satisfy all constraints in the preliminary
C step and return eigenvalues and other information
C to simulate the required Gaussian process

C Auxiliary Algorithms

C (i) COV1, user supplies covariance function
C (ii) Need to link with NAG library:
C CO6ECF - Computes single 1-dimensional
C complex discrete Fourier transform

```

SUBROUTINE EIGEN1(LAM, COV1, N, M, G, MAXG, ICORR, RHO,
& SIGMA, EIG, ICOUNT, IFAULT)
  INTEGER MAXSIZE
  PARAMETER (MAXSIZE = 1048576)
  DOUBLE PRECISION COV1
  EXTERNAL COV1
C Subroutine from NAG library
  EXTERNAL CO6ECF
  DOUBLE PRECISION LAM(MAXSIZE), RHO, SUM, Y(MAXSIZE)
  INTEGER M, N, G, MAXG, IFAULT
  INTEGER GTEMP, MHALF, IAGAIN, I, J
C Parameter used only in calling subroutine
  from NAG library
  INTEGER IFAIL
C Parameter used only if IFAULT = 1
  DOUBLE PRECISION SIGMA, EIG(3)
  INTEGER ICORR, ICOUNT

```

```

C      If there is no initial value for g, it is set
C      to be the smallest g such that  $2^g \geq 2(n - 1)$ .
      IF (G .EQ. 0) THEN
          RHO = DLOG(2DO*DBLE(N - 1))/DLOG(2DO)
          GTEMP = IDINT(RHO)
          IF (DBLE(GTEMP) .LT. RHO) THEN
              GTEMP = GTEMP + 1
          ENDIF
      ELSE
          GTEMP = G
      ENDIF
C      If there is no maximum value for g, it is set to be 20.
      IF (MAXG .EQ. 0) THEN
          MAXG = 20
      ENDIF
C      Check GTEMP before starting the loop
      IF (GTEMP .GT. MAXG) THEN
          IFAULT = 2
          GOTO 5
      ENDIF
      IAGAIN = 1
      IFAULT = 0
      RHO = 1DO
      DO 1 I = 1, 3
          EIG(I) = ODO
1      CONTINUE
C      Start the loop with either the user specified
C      initial value or the smallest possible g as above.
      DO 2 WHILE ((IAGAIN .EQ. 1) .AND. (GTEMP .LE. MAXG))
          SUM = ODO
          M = IDNINT(DEXP(DBLE(GTEMP)*DLOG(DBLE(2))))
          MHALF = IDINT(DBLE(M)/2DO)
C      Compute the eigenvalues of C, i.e. the discrete Fourier
C      transform of the first row of the embedding matrix
          DO 3 I = 0, M - 1
              J = I + 1
              IF (I .LE. MHALF) THEN
                  LAM(J) = COV1(DBLE(I)/DBLE(N))
              ELSE
                  LAM(J) = LAM(M-I+1)
              ENDIF
              Y(J) = ODO
3      CONTINUE
C      Call subroutine C06ECF from NAG library

```

```

to compute the DFT
CALL CO6ECF(LAM, Y, M, IFAIL)
C Check if all eigenvalues are non-negative
ICOUNT = 0
DO 4 I = 1, M
  SUM = SUM + LAM(I)
  IF (LAM(I) .LT. ODO) THEN
    IF (GTEMP .LT. MAXG) THEN
      GTEMP = GTEMP + 1
      GOTO 2
    ELSE
      IF (LAM(I) .LT. EIG(1)) THEN
        EIG(1) = LAM(I)
      ENDIF
      EIG(2) = EIG(2) + DEXP(2DO*DLOG(-LAM(I)))
      EIG(3) = EIG(3) - LAM(I)
      ICOUNT = ICOUNT + 1
      LAM(I) = ODO
      IFAULT = 1
    ENDIF
  ELSE
    LAM(I) = DSQRT(DBLE(M))*LAM(I)
  ENDIF
4 CONTINUE
IAGAIN = 0
G = GTEMP
2 CONTINUE
5 IF (IFAILT .EQ. 1) THEN
C Approximation takes place
EIG(2) = DSQRT(EIG(2))
IF (ICORR .EQ. 0) THEN
  RHO = SUM/(SUM + EIG(3))
ELSEIF (ICORR .EQ. 1) THEN
  RHO = DSQRT(SUM/(SUM + EIG(3)))
ENDIF
SIGMA = DSQRT((DEXP(2DO*DLOG(1 - RHO))*SUM +
& DEXP(2DO*DLOG(RHO))*EIG(3))/DBLE(M))
ELSEIF (IFAILT .EQ. 2) THEN
  STOP
ENDIF
RETURN
END

```

```

C      File name: simsgf1.f

C      Simulate the required 1 dimension Gaussian process.

C      Auxiliary Algorithms
C      Need to link with NAG library:
C      CO6ECF - computes single 1-dimension complex
C      discrete Fourier transform
C      G05CCF - Initialises random number generating
C      routines to give non-repeatable sequence
C      G05FDF - Generates a vector of random numbers from
C      a Normal distribution

SUBROUTINE SIMSGF1(X, N, M, LAM, RHO)
INTEGER MAXSIZE
PARAMETER (MAXSIZE = 1048576)
C      subroutines from NAG library
EXTERNAL G05CCF, G05FDF, CO6ECF
DOUBLE PRECISION X(MAXSIZE), LAM(MAXSIZE), RHO,
U(MAXSIZE) DOUBLE PRECISION ARE(MAXSIZE),
AIM(MAXSIZE) INTEGER N, M
INTEGER I, INDEX, J
C      Parameter used only in calling subroutine from
NAG library INTEGER IFAIL

IFAIL = 0
MHALF = IDINT(DBLE(M)/2D0)
C      Call subroutines G05CCF and G05FDF from
C      NAG library to generate non-repeatable standard
Normal random numbers CALL G05CCF
CALL G05FDF(ODO, 1D0, M, U)
ARE(1) = DSQRT(LAM(1))*U(1)/DSQRT(DBLE(M))
AIM(1) = ODO
J = MHALF + 1
ARE(J) = DSQRT(LAM(J))*U(2)/DSQRT(DBLE(M))
AIM(J) = ODO
INDEX = 3
DO 1 I = 1, MHALF - 1
  J = I + 1
  ARE(J) = DSQRT(LAM(J))*U(INDEX)/DSQRT(2D0*DBLE(M))
  AIM(J) = DSQRT(LAM(J))*U(INDEX+1)/DSQRT(2D0*DBLE(M))
  ARE(M-I+1) = ARE(J)
  AIM(M-I+1) = -AIM(J)
  INDEX = INDEX + 2

```

```
1    CONTINUE
C    Call subroutine C06ECF from NAG library
C    to compute DFT
    CALL C06ECF(ARE, AIM, M, IFAIL)
    DO 2 I = 1, N
        X(I) = RHO*DSQRT(DBLE(M))*ARE(I)
2    CONTINUE
    RETURN
    END
```


Bibliographie

- [1] ADLER R.J., *Geometry of Random Fields*, Wiley New-York, (1981).
- [2] ARTSTEIN Z., VITALE A., *A strong law of large numbers for random compact sets*, Ann. Probab., Vol.3, p. 879-882, (1975).
- [3] AYACHE A., LÉVY-VÉHEL J., *Generalized Multifractal Brownian Motion : Definition and Preliminary Results*, Fractals - Theory and Applications in Engineering, Springer Verlag, (1999).
- [4] AZAÏS J-M., *Conditions for convergence of number of crossings to the local time. application to stable processes with independent increments and to Gaussian processes*, Probab. Math. Stat. Vol. 11, p. 19-36, (1990).
- [5] AZAÏS J-M., *Convergence presque sûre du nombre de franchissements normalisés vers le temps local*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 312, Série I, p. 689-694, (1991).
- [6] AZAÏS J-M., *Approximation des trajectoires et temps local des diffusions*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 25, p. 175-194, (1989).
- [7] AZAÏS J-M., FLORENS-ZMIROU D., *Approximation du temps local des processus gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires*, Probab. Th. Rel. Fields. Vol. 76, p. 121-132, (1987).
- [8] AZAÏS J-M., WSCHEBOR M., *Almost sure oscillation of certain random processes*, Bernoulli, Vol. 2, No.3, p. 257-270, (1996).
- [9] AZAÏS J-M., WSCHEBOR M., *Oscillation presque sûre de martingales continues*, Séminaire de Probabilités XXXI, Berlin : Springer. Lect. Notes Math. 1655, p. 69-76 (1997).
- [10] BARDET J-M., *Test d'autosimilarité des processus gaussiens. Dimension fractale et dimension de corrélation*, Thèse présentée à l'Université de Paris-Sud, (1997).
- [11] BAXTER G., *A strong limit theorem for Gaussian processes*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol 7, p 522-525, (1956).
- [12] BENASSI A., BERTRAND F., COHEN S., ISTAS J., *Identification d'un processus gaussien multifractionnaire avec des ruptures sur la fonction d'échelle*, à paraître au C. R. Acad. Sci. Paris, (1999).

- [13] BENASSI A., COHEN S., ISTAS J., *Identifying the multifractional function of a Gaussian process*, Statistics and Probability Letters, Vol. 39, p. 337-345, (1998).
- [14] BENASSI A., JAFFARD S., ROUX D., *Gaussian processes and Pseudodifferential Elliptic operators*, Revista Mathematica Iberoamericana, Vol. 13, p. 19-89, (1997).
- [15] BERAN J., *Statistics for long memory processes*, Chapman and Hall, (1994).
- [16] BERMAN S.M., *Oscillation of sample functions in diffusion processes*, Z. Wharsch., verw. Geb., Vol. 1, p. 247-250, 1963.
- [17] BERTOIN J., *Levy processes*, Cambridge University Press, (1996).
- [18] BERZIN C., *Approximation du temps local des champs aléatoires gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 306, Série I, p. 291-294, (1988).
- [19] BOULEAU N., *Processus stochastiques et applications*, Hermann, (1988).
- [20] BOURGAIN J., LINDENSTRAUSS J., MILMAN V., *Approximation of zonoids by zonotopes*, Acta Math, 162, p. 73-145, (1989).
- [21] BILLINGSLEY P., *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New-York, 1968.
- [22] BURKHOLDER D.L., *Martingales transforms*, Ann. Math. Statist., 37, p. 1494-1504, (1966).
- [23] COEURJOLLY J-F., *Identification du mouvement Brownien fractionnaire par variations discrètes*, Rapport de Recherche 1016-M, IMAG Grenoble, (1999).
- [24] COXETER H.S., *The classification of zonohedra by means of projective diagrams*, Jour. de Math, tome XLI, Fasc. 2, (1962).
- [25] CHAN G, P. HALL, D.S. POSKITT, *Periodogram-based estimators of fractal properties*, The Annals of Statistics, Vol. 23, No. 5, p. 1684-1710 (1995).
- [26] CHAN G, WOOD A.T.A., *An algorithm for simulating stationary Gaussian random fields*, Applied Statistics, 46, p. 171-181, (1997).
- [27] DASGUPTA A., KALLIANPUR G., *Chaos decomposition of multiple fractionals integrals and applications*, Probab. Theory Relat. Fields Vol 115, p. 527-548, (1999).
- [28] DAVIES B., *Tests for Hurst effect*, Biometrika, Vol. 74, p. 95-101, (1987).
- [29] DAVYDOV Y., *Convex Rearrangements of Stable Processes*, J. of Math. Sciences, Vol 92, p. 4010-4016, (1998).

- [30] DAVYDOV Y., EGOROV V., *Functional limit theorems for induced order statistics*, IRMA, Lille, Vol 44, No III, (1998).
- [31] DAVYDOV Y., THILLY E., *Réarrangements convexes des processus stochastiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, p. 1087-1090 (1999).
- [32] DAVYDOV Y., VERSHIK A.M., *Réarrangements convexes des marches aléatoires.*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol 34, p. 73-95, (1998).
- [33] EGOROV V.A., *Functional law of the iterated logarithm for rearranged sums*, Theory of probability and its applications, Vol 35, p. 342-347, (1990).
- [34] FEUERGERVEER A., HALL P., WOOD A.T.A., *Estimation of fractal index and fractal dimension of Gaussian process by counting the number of level crossings*. Journal of Times Series Analysis, Vol 15, p. 587-606, (1994).
- [35] FELLER W., *An introduction to probability theory and its applications*, Vol 2, Wiley, (1966).
- [36] FOX R., TAQQU M. S., *Large sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series*, Ann. Stat. Vol. 14, p. 517-532, (1986).
- [37] GHIKMAN I.I. and SKOROHOD A.V., *Stochastic differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, (1972).
- [38] GLADYSHEV E., *A new limit theorem for stochastic processes with gaussian increments*, Theory of probability and its applications, Vol 6, p. 52-61, (1961).
- [39] GNEDENKO B.V., KOLMOGOROV A.N., *Limit distributions for sums of independent random variables*, Addison-Weisley Publishing Company, INC, (1954).
- [40] HIGUCHI T., *Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory*, Physica D, Vol. 31, p. 277-283, (1988).
- [41] HILDENBRANDT W., *Short-run production based on Microdata*, Econometrica, Vol. 49, p. 1095-1125, (1981).
- [42] HALL P., ROY R., *On the relationship between fractal dimension and fractal index for stationary stochastic processes*, Annals of Probability, Vol 4, p. 241-253, (1994).
- [43] HALL P., WOOD A.T.A., *On the performance of box counting estimators of fractal dimension*, Biometrika, Vol 80, p. 246-252, (1993).
- [44] IBRAGIMOV I.A., LINNIK Y.V., *Independent and stationary sequences of random variables*, Wolters-Noordhoff, Groningen, (1977).
- [45] ISTAS J., LANG G., *Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of Gaussian process*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 33, p. 407-436, (1997).

- [46] KREIN S.G., PETUNIN Y.I., SEMENOV E.M., *Interpolation of linear operators* Translations of mathematical monographs, 54, A.M.S. Providence, (1982).
- [47] KENT J.T., WOOD A.T.A., *Estimating the fractal dimension of a locally self-similar Gaussian process by using increments* Journal of the Royal Statistic Society. B, Vol 59, n°3, p. 679-699, (1997).
- [48] KARATZAS I., SHREVE S., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer Verlag, (1988).
- [49] LIFSHITS M., *Gaussian Random Functions*, Kluwer, Academic Publishers, (1995).
- [50] LIPTSER R.S., SHIRAYEV A.N., *Statistics of random processes*, Springer Verlag, (1977).
- [51] LOEVE M., *Probability Theory I*, Springer Verlag, New-York Heidelberg Berlin, (1963).
- [52] MANDELBROT B., *The fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Company, New York, (1983).
- [53] MANDELBROT B., *Les Objets fractals*, Flammarion, (1987).
- [54] MEYER P., *Martingales and stochastic Integrals I*, Lectures Notes in Math. 284, Springer, (1972).
- [55] NUALART D., WSCHEBOR M., *Intégration par parties dans l'espace de Wiener et approximation du temps local*, Probab. Th. Rel. Fields 90, p. 83-109, (1991).
- [56] PELTIER R-F., LÉVY-VÉHEL J., *A new method for estimating the parameter of fractional Brownian motion*, INRIA Report, No. 2396, (1994).
- [57] PELTIER R-F., LÉVY-VÉHEL J., *Multifractional Brownian motion : definition and preliminary results*, INRIA Report, No. 2645, (1995).
- [58] POGGI J-M., VIANO M-C., *An estimate of the fractal index using multiscale aggregates*, Journal of Times Series Analysis, Vol 19, p. 221-233, (1998).
- [59] PROKHOROV Y.V., *Convergence of random processes*, Theory of probability and its applications, Vol 1, p. 158-214, (1956).
- [60] REVUZ D., YOR M., *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer Verlag, (1991).
- [61] ROSENBLATT M., *Stationary sequences and random fields*, Birkhauser, (1985).
- [62] SCHNEIDER R., *Convex bodies : The Brunn-Minkowski Theory*, University Press, Cambridge, (1993).

- [63] SHEPARD G.C., *Polytopes with centrally symmetric faces*, Can. J. Math., Vol. 19, p. 1206-1213. (1967).
- [64] TAQQU M.S., TEVEROSKY V., *On estimating the Intensity of Long-Range Dependence in Finite and Infinite Variance Time Series*, A practical guide to heavy tails. Statisticals techniques and applications, p. 177-236, (1998).
- [65] VITALE R.A., *Expected absolute random determinants and zonoids*, Ann. of Applied. Probability, Vol. 1, No. 2, p. 293-300, (1991).
- [66] WOOD A.T.A., CHAN G., *Simulation of stationary Gaussian processes in $[0, 1]^d$* , J. Comput. Graph. Stat, Vol 3, p. 409-432 (1994).
- [67] WSCHEBOR M., *Almost sure weak convergence of the increments of Levy processes*, Stochastic processes and their applications, Vol 55, p. 253-270, (1995).
- [68] WSCHEBOR M., *Sur les accroissements du processus de Wiener*, C. R. Acad. Sci., Paris, t. 315, série I, p. 1293-1296, (1992).
- [69] ZHUKOVA E.E., *Monotone and convex rearrangements of functions and stochastic processes*, Phd, Saint-Petersburg University, Russia, (1995).
- [70] ZOLOTAREV V.M., *One-dimensional stable distributions*, AMS, Translation of mathematical monographs, (1986).

Index



approximations polygonales, 9
auto-similaire, 79

brownien fractionnaire, 45
brownien multifractionnaire, 81

convexifications, 9
convolution, 14

fonction de Minkowski, 66

intervalles de confiance, 88

loi forte, 41

mesure d'occupation, 62
mouvement brownien standard, 17

passerelle, 19
principe de concentration, 24
processus α -stables, 17
processus de Itô-Wiener, 49
processus gaussiens, 23

réarrangement convexe, 7
réarrangement monotone, 9

simulation, 83
statistiques d'ordre, 20

temps local, 62

variations quadratiques, 51
variogramme, 42

zonotopes, 65

Convex rearrangements of stochastic processes

Abstract

We consider $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$ a stochastic process with real values and almost surely càdlàg sample path. We construct polygonal approximations $X_n = \{X_n(t), t \in [0, 1]\}$ by regularization of X . By using convex rearrangements we obtain from X_n a new process VX_n with almost surely convex sample path. We study asymptotic behaviour of VX_n and we characterize the limit. Two classes are considered: Gaussian processes and Itô processes. For Gaussian processes, we prove the almost surely convergence of convexifications to a non random limit curve. This result, extending Davydov's for Brownian motion, is a kind of strong law of large numbers. One of our main tools in Gaussian case is the concentration principle. For Itô processes we also prove the almost surely convergence of convexifications but the limit convex curve is random in this case. We extend these investigations to some processes with values in \mathbb{R}^d , $d > 1$ by considering Minkowski sums of $[0, X_{nk}]$ where $X_{nk} = (\frac{1}{b_n}, b_n^{-1}[X(\frac{k+1}{n}) - X(\frac{k}{n})]) \in \mathbb{R}^{d+1}$, b_n being a convenient normalization. We show that this sequence of random zonotopes converge almost surely in \mathbb{R}^{d+1} under the Hausdorff metric to a zonoid which we identify in the Gaussian case. Finally we use some of previous results to construct two new consistent estimators of the local Hölder exponent of Gaussian processes and we illustrate it by simulating fractional Brownian motion and some stationary Gaussian process.

Key words: stochastic processes, convex rearrangements, almost surely convergence, Gaussian processes, Itô processes, oscillations, zonotopes, estimation, Hölder exponent.

AMS Classification: 60F15, 60G07, 60G15, 60G18, 60H05, 62L20, 68U20.

Résumé

A partir d'un processus stochastique initial $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$ à valeurs dans \mathbb{R} et dont les trajectoires sont presque sûrement càdlàg, nous construisons la suite de processus $X_n = \{X_n(t), t \in [0, 1]\}$ au moyen d'un lissage polygonale des trajectoires de X . Au moyen d'un procédé de réarrangement convexe que nous définissons nous transformons X_n en une suite de processus VX_n dont les trajectoires sont presque sûrement convexes. Nous étudions la convergence presque sûre de VX_n , en particulier pour les deux classes suivantes : les processus gaussiens et les processus de Itô-Wiener et nous attachons à caractériser les limites. Dans le premier cas nous obtenons une courbe limite convexe déterministe tandis que dans le second cas la limite est un processus aléatoire à trajectoires presque sûrement convexes. Nous étendons, en un certain sens, les investigations de ce type aux processus X de mêmes natures à valeurs dans \mathbb{R}^d , $d > 1$ en considérant les sommes de Minkowski des segments $[0, X_{nk}]$ où $X_{nk} = (\frac{1}{b_n}, b_n^{-1}[X(\frac{k+1}{n}) - X(\frac{k}{n})]) \in \mathbb{R}^{d+1}$, b_n étant une normalisation appropriée. Nous montrons que cette suite de zonotopes aléatoires converge presque sûrement dans \mathbb{R}^{d+1} au sens de Hausdorff vers un zonoïde limite que nous identifions dans le cas gaussien. Enfin nous utilisons certains des résultats précédents pour construire deux classes d'estimateurs fortement consistants de l'exposant de Hölder local de processus gaussiens et nous illustrons les comportements asymptotiques des estimateurs au moyen de simulations du mouvement brownien fractionnaire et d'un processus gaussien stationnaire.

Mots clés : processus stochastiques, réarrangements convexes, convergence presque sûre, processus gaussiens, processus de Itô, oscillations, zonotopes, estimation, exposant de Hölder.

Classification AMS : 60F15, 60G07, 60G15, 60G18, 60H05, 62L20, 68U20.