Sommes d'une fonction entière de certains
espaces de type L^2 à poids

Bruno Brive

16 juin 2000

Table des matières

- 1 Espaces de fonctions entières** **9**
 - 1. Espaces de fonctions entières d'ordre fini 9
 - 2. Espaces L^p à poids 10
 - 3. Noyau d'Aronszajn-Bergman des espaces L^2 à poids 14
 - 4. Les espaces $H(t, \alpha)$ 18

- 2 Opérateurs de translation** **21**
 - 1. Opérateurs continus 21
 - 2. Opérateurs non-bornés 26

- 3 L'équation $f(z + \sigma) - f(z) = g(z)$** **31**
 - 1. Fonctions périodiques 31
 - 2. L'équation $f(z + 1) - f(z) = g(z)$ 33
 - 2.1. Réduction à une inégalité entre séries 34
 - 2.2. Décomposition de l'inégalité 37
 - 2.3. Majoration de $\mathfrak{S}_{(0)}$ 46
 - 2.4. Majoration de $\mathfrak{S}_{(1)}$ 51
 - 2.5. Majoration de $\sum_{k=2}^{+\infty} \mathfrak{S}_{(k)}$ 55
 - 2.6. Conclusion de la démonstration 62
 - 3. L'équation $f(z + \sigma) - f(z) = g(z)$ 63
 - 4. Application à l'équation $f(z + \sigma) - af(z) = g(z)$ 71

NOTATIONS

Les numéros renvoient aux pages.

$\mathcal{E}_{t,\alpha}, \mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}$	espaces de fonctions entières d'ordre fini: 9
$L^p(\Omega, \varphi)$	espace L^p pour le poids φ : 10
$K(z, w)$	noyau d'Aronszajn-Bergman: 15
$H(t, \alpha)$	espace de Hilbert $L^2(\mathbf{C}, t z ^\alpha) \cap \mathcal{O}(\mathbf{C})$: 18
$\ f\ _{t,\alpha}$	norme de $f \in H(t, \alpha)$: 18
γ_n	monôme $z \mapsto z^n$: 16
$(e_n(t, \alpha))_{n \in \mathbf{N}}$	base hilbertienne de $H(t, \alpha)$: 18
τ_a	translation $z \mapsto z + a$: 21
τ	translation $z \mapsto z + 1$: 21
T_a	opérateur de translation $f \mapsto f \circ \tau_a$: 21
T	opérateur de translation $f \mapsto f \circ \tau$: 21
S_a	opérateur $f \mapsto T_a f - f$: 63
S	opérateur $f \mapsto T f - f$: 33
m_μ	multiplication $z \mapsto \mu z$: 68
M_μ	opérateur de multiplication $f \mapsto f \circ m_\mu$: 68
$\lambda_{p,n}$	: 39
$\mathfrak{S}_{(0)}$	: 45
$\mathfrak{S}_{(1)}$	: 45
$\mathfrak{S}_{(k)}$	: 42, 45
$A(h, i)$	: 55
$\tilde{A}(h, i)$	: 56
$B(h, i)$	: 55
$\tilde{B}(h, i)$	: 56
u, v, w	: 57
u', v'	: 57
w'	: 58
U, V, W	: 58
w_h	: 55, 61

Introduction

Soit σ un nombre complexe non nul. Considérons l'équation fonctionnelle

$$(E) \quad f(z + \sigma) - f(z) = g(z), \quad \forall z \in \mathbf{C}$$

où g est la donnée et f l'inconnue.

Lorsque f et g sont deux fonctions entières satisfaisant (E) pour $\sigma = 1$, on dit que f est la *somme* de g . Guichard [6] démontre l'existence d'une fonction entière somme d'une fonction entière donnée. Sa méthode consiste à construire cette somme au moyen d'intégrales à coupures de Hermite.

Supposons g entière.

Donnons-nous $\alpha > 0$ et $s > 0$ et imposons à g une condition de croissance à l'infini de la forme

$$(1) \quad g(z) = O(e^{s|z|^\alpha}).$$

Alors on recherche s'il existe, parmi les solutions de (E), une fonction entière f satisfaisant une condition de croissance analogue, c'est-à-dire

$$(2) \quad f(z) = O(e^{t|z|^\beta}).$$

pour $t > 0$ et $\beta > 0$.

J.M.Whittaker [12] démontre que toute fonction entière d'ordre fini donné admet une somme de même ordre. Il construit d'abord une série convergente de polynômes d'interpolation, les polynômes de Bernoulli, dont la somme soit la fonction cherchée. Il raisonne ensuite sur l'ordre de la somme de cette série à partir de ses coefficients.

Abordons la résolution de (E) du point de vue de l'Analyse Fonctionnelle. Considérons le premier membre de (E) comme la valeur au point $z \in \mathbf{C}$ de l'image de f par un opérateur S_σ agissant sur les fonctions entières. Il s'agit alors de construire deux espaces de fonctions X et Y tels que

- (i) toute fonction g vérifiant (1) appartient à Y ,
- (ii) toute fonction f appartenant à X vérifie (2),

(iii) S_σ induit un opérateur *surjectif*: $\text{dom}(S_\sigma) \subset X \rightarrow Y$.

Dans les rôles de X et de Y , nous considérons des espaces de type L^2 à poids sur $\mathbf{C}$. Nous substituons à la condition de croissance (1) la condition d'intégrabilité

$$(3) \quad \int_{\mathbf{C}} |g(z)|^2 e^{-s|z|^\alpha} d\lambda(z) < +\infty.$$

L'ensemble des fonctions entières g satisfaisant (3) forme un espace de Hilbert que nous notons $H(s, \alpha)$.

Les espaces de type $H(s, \alpha)$ servent donc de cadre à la résolution de (E). Nous précisons (proposition 3) le lien entre les conditions (1) et (3) pour une fonction entière g .

Nous démontrons d'abord le théorème suivant, qui résout l'équation (E) pour $\sigma = 1$ et $g \in H(1, \alpha)$ avec $\alpha \leq 1$.

Théorème 1 *Soit τ la translation $z \mapsto z + 1$ de $\mathbf{C}$ dans lui-même et S l'opérateur $f \mapsto f \circ \tau - f$ de $\mathcal{O}(\mathbf{C})$ dans lui-même. Soit $\alpha \leq 1$.*

(i) *Pour tout $\beta > \alpha$ et tout $t > 0$, S induit un opérateur non-borné, fermé, de domaine dense et surjectif de $H(t, \beta)$ dans $H(1, \alpha)$.*

(ii) *Il existe t_0 tel que pour tout $t > t_0$, S induise un opérateur non-borné, fermé, de domaine dense et surjectif de $H(t, \alpha)$ dans $H(1, \alpha)$.*

Pour démontrer que l'opérateur S est surjectif, nous utilisons une méthode d'estimations *a priori*, c'est-à-dire que nous démontrons l'existence d'une constante $C > 0$ telle que l'inégalité

$$\|g\| \leq C \cdot \|S^*g\|$$

ait lieu pour toute fonction g du domaine de l'opérateur adjoint S^* . Comme on le verra, l'intérêt des espaces $H(s, \alpha)$ est de ramener cette inégalité à une inégalité entre séries, dont les termes dérivent des coefficients de Taylor des fonctions. A la différence des méthodes de Guichard et de Whittaker citées ci-dessus, notre approche n'est pas constructive. On peut cependant espérer que la portée en soit plus générale. Elle fournit aussi des inégalités précises sur les valeurs des constantes qui interviennent dans les conditions de croissance des fonctions considérées.

Nous généralisons ensuite le résultat du théorème 1 à tous les $\sigma \in \mathbf{C}^*$ et $g \in H(s, \alpha)$, pour $s > 0$ et $\alpha < 1$, et à certaines valeurs de σ et de s pour $\alpha = 1$. De façon précise, nous démontrons:

Théorème 2 *Soit $\alpha \leq 1$. Soit $s > 0$. Soit $\sigma \in \mathbf{C}^*$.*

(1) *Si $\alpha < 1$, il existe $t' > 0$ tel que pour tout $t > t'$, S_σ induise un opérateur non-borné, fermé, de domaine dense et surjectif de $H(t, \alpha)$ sur $H(s, \alpha)$.*

- (2) Si $s|\sigma| < \sqrt{2\pi}$, il existe $t' > 0$ tel que pour tout $t > t'$, S_σ induise un opérateur non-borné, fermé, de domaine dense et surjectif de $H(t,1)$ sur $H(s,1)$.

On en déduit:

Théorème 3 Soit $\sigma \in \mathbf{C}^*$. Soit $\alpha \leq 1$, soit $s > 0$.

- (1) Si $\alpha < 1$, il existe $t' > 0$ tel que:

Pour tout $t > t'$ et pour toute fonction entière g vérifiant

$$g(z) = O(e^{s|z|^\alpha})$$

au voisinage de $|z| \rightarrow +\infty$, il existe une fonction entière f vérifiant

(i) $f(z + \sigma) - f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \mathbf{C}$,

(ii) $f(z) = O(|z|^{\alpha-1} e^{t|z|^\alpha})$ au voisinage de $|z| \rightarrow +\infty$.

- (2) Si $s|\sigma| < \sqrt{2\pi}$, il existe $t' > 0$ tel que:

Pour tout $t > t'$ et pour toute fonction entière g vérifiant

$$g(z) = O(e^{s|z|})$$

au voisinage de $|z| \rightarrow +\infty$, il existe une fonction entière f vérifiant

(i) $f(z + \sigma) - f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \mathbf{C}$,

(ii) $f(z) = O(e^{t|z|})$ au voisinage de $|z| \rightarrow +\infty$.

Le chapitre 1 présente plusieurs espaces de fonctions entières. On y trouve la définition des espaces $H(s,\alpha)$ et leur relation avec les ensembles de fonctions entières d'ordre fini. L'étude concerne d'abord des espaces de type L^p à poids pour $1 < p < +\infty$.

Nous exposons la théorie du noyau reproduisant d'Aronszajn-Bergman dans le cadre des espaces L^2 à poids généraux. Comme dans le cas classique sans poids, ce noyau permet de calculer la projection orthogonale sur le sous-espace fermé des fonctions holomorphes. Nous donnons une expression du noyau reproduisant d'Aronszajn-Bergman pour une classe d'espaces plus large que celle des $H(s,\alpha)$.

Le chapitre 2 introduit les opérateurs de translation $T_a f(z) = f(z + a)$ pour $a \in \mathbf{C}$. On étudie leur action sur les espaces de fonctions définis au chapitre 1.

Enfin le chapitre 3 est essentiellement consacré à la démonstration des théorèmes cités plus haut. Il commence par la détermination des fonctions périodiques des espaces $H(s, \alpha)$ et se termine par une application à la résolution de l'équation $f(z + \sigma) - af(z) = g(z)$ où $a \in \mathbf{C}^*$.

Bibliographie

- [1] **R.P. Boas.** *Entire functions.* Academic Press, 1954.
- [2] **L. Comtet.** *Analyse combinatoire.* P.U.F., 1970.
- [3] **J.B. Conway.** *A course in functional analysis.* Springer-Verlag, 2nd edition, 1990.
- [4] **J. Dieudonné.** *Calcul Infinitésimal.* Hermann, 2ième edition, 1980.
- [5] **B. Epstein.** *Orthogonal families of analytic functions.* Macmillan Mathematics Paperbacks, 1965.
- [6] **C. Guichard.** Sur la résolution de l'équation aux différences finies

$$g(x + 1) - g(x) = h(x).$$

. *Annales Sci.de l'École Normale*, 4:361–380, 1887.

- [7] **L. Hörmander.** *An introduction to complex analysis in several variables.* North-Holland, 3rd edition, 1990.
- [8] **Kato.** *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag, 1966.
- [9] **S.G. Krantz.** *Function theory of several complex variables.* Wadsworth-Brooks/Cole, 2nd edition, 1992.
- [10] **A.I. Markushevich.** *Theory of functions of a complex variable.* Prentice-Hall, 1965.
- [11] **L.M. Milne-Thomson.** *The calculus of finite differences.* Chelsea, 1981.
- [12] **J.M. Whittaker.** *Interpolatory function theory.* Cambridge University Press, 1935.
- [13] **K. Yosida.** *Functional analysis.* Springer-Verlag, 1980.