

X 50376
2000
172

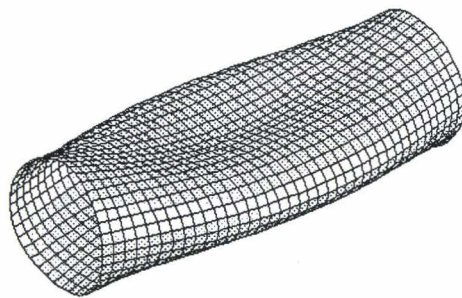
Tanguy MESSAGER

*Ingénieur EUDIL
Doctorant*



**Mémoire de Thèse Doctorale en Mécanique
de l'Université des Sciences et Technique de Lille I**

***" Optimisation d'enceintes
sous-marines composites "***



Version provisoire du ¹¹¹⁷26 mai 2000
destinée à Messieurs les rapporteurs :

VERSION DEFINITIVE NON DÉPOSÉE

Pr. Daniel GAY

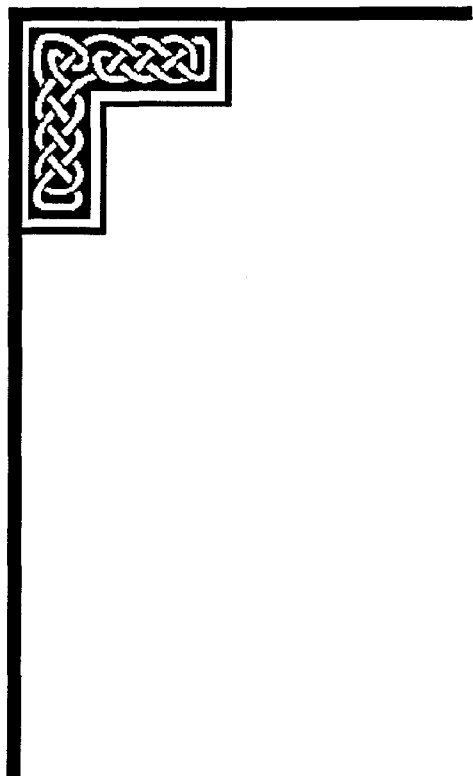
Laboratoire de Génie Mécanique – Toulouse

Pr. Bernard PESEUX

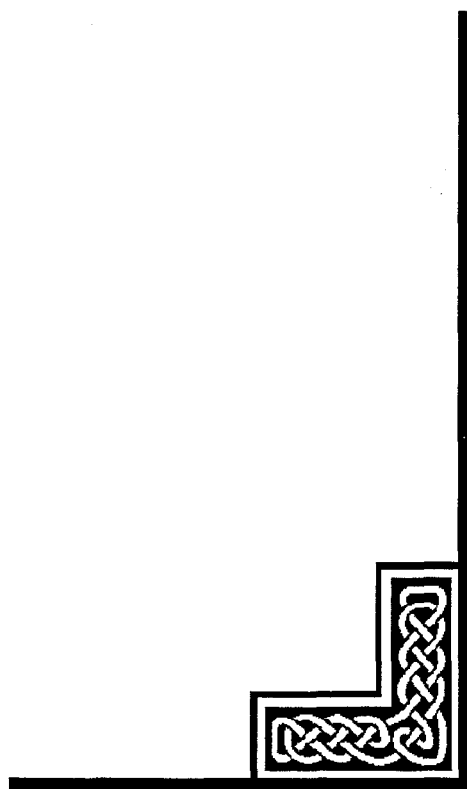
Laboratoire de Mécanique des Structures – Nantes



D 030 177199 2



A mes proches



Avant-propos

Réalisé à Brest, cité maritime s'il en est, ce travail concerne l'optimisation de structures sous-marines développées dans le cadre de projets industriels de la Communauté Européenne. Débuté en octobre 1996 et interrompu en 1997/98 pour cause de service national, cette étude a été menée en partenariat avec l'IFREMER. Elle constitue la première thèse doctorale réalisée au sein de l'axe Structures du Laboratoire de Mécanique et Matériaux de l'Université de Brest. Ce travail a bénéficié du soutien financier du Conseil Régional de Bretagne ainsi que de l'IFREMER dans le cadre du programme MAST de la Commission Européenne.

Je tiens à remercier vivement Monsieur le Professeur Géry DE SAXCE d'avoir accepté la direction de ce travail de thèse. Je suis aussi très reconnaissant à Pierre CHAUCHOT de m'avoir accordé sa confiance. J'associe à ces remerciements les divers membres de l'IFREMER ayant contribué à l'avancement de mes travaux. Je remercie Bernard GINESTE de m'avoir accueilli dans l'axe Structures du Laboratoire de Mécanique et Matériaux ainsi que pour son aide précieuse dans la partie expérimentale de cette étude. Ce travail n'aurait été possible sans les conseils judicieux et les qualités d'encadrement de Mariusz PYRZ.

Mes remerciements s'adressent de plus à Messieurs les Professeurs Daniel GAY, Bernard PESEUX et Olivier ALLIX, m'honorant de leurs participations au jury d'examen.

Enfin et surtout, que toutes les personnes m'ayant témoigné soutien et confiance trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Sommaire

	Pages
Introduction	1
Chapitre I : Sujet et démarche	3
I.1. Contexte	4
I.1.1. Applications concernées	4
I.1.2. Constitution des enceintes	5
<i>I.1.2.1. Corps</i>	5
<i>I.1.2.2. Fermetures et liaisons</i>	7
I.1.3. Etat des connaissances	8
I.2. Problématique	10
I.2.1. Stratifications initiales en $[\pm 55^\circ_N]$	10
I.2.2. Données de la littérature	12
I.2.3. Objectifs et méthodologie de l'étude	13
I.2.4. Moyens	15
Chapitre II : Modélisation	17
II.1. Phénoménologie	18
II.1.1. Aspects généraux du flambage	18
II.1.2. Instabilité des corps d'enceintes composites	20
<i>II.1.2.1. Procédures et moyens d'essais</i>	21
<i>II.1.2.2. Données expérimentales</i>	24
II.2. Modèles analytiques	28
II.2.1. Données de la littérature	28
II.2.2. Repérage et notations principales	30
II.2.3. Relations basiques	32
<i>II.2.3.1. Déformations</i>	32
<i>II.2.3.2. Résultantes de contraintes</i>	33
<i>II.2.3.3. Equations d'équilibre</i>	33
II.2.4. Hypothèses	34
II.2.5. Modèle de type SANDERS	35
<i>II.2.5.1. Champ de déformations</i>	35
<i>II.2.5.2. Approximation des déplacements</i>	37
<i>II.2.5.3. Modélisation des imperfections géométriques</i>	38
<i>II.2.5.4. Résultantes de contraintes</i>	40
<i>II.2.5.5. Problème aux valeurs propres</i>	42
II.2.6. Modèle CT3	44
<i>II.2.6.1. Déplacements et déformations</i>	44
<i>II.2.6.2. Résultantes de contraintes</i>	47

II.2.6.3. <i>Problème aux valeurs propres</i>	47
II.2.7. <i>Modèle LOG</i>	49
II.2.7.1. <i>Déplacements et déformations</i>	49
II.2.7.2. <i>Résultantes de contraintes</i>	49
II.2.7.3. <i>Problème aux valeurs propres</i>	51
II.3. Modèles MEF	52
II.3.1. <i>Principe de l'analyse de stabilité</i>	52
II.3.2. <i>Éléments utilisés</i>	54
II.3.3. <i>Conditions aux limites cinématiques</i>	56
II.4. Tests préliminaires	57
II.4.1. <i>Calculs de stabilité</i>	57
II.4.2. <i>Influence des défauts géométriques</i>	63
II.5. Bilan partiel	64
Chapitre III : Stratégie d'optimisation	65
III.1. Etat de l'art	66
III.1.1. <i>Quelques généralités</i>	66
III.1.1.1. <i>Formulation d'un problème</i>	66
III.1.1.2. <i>Qualités d'une méthode</i>	68
III.1.2. <i>Procédures</i>	68
III.1.2.1. <i>Méthodes directes</i>	68
III.1.2.2. <i>Méthodes de gradients</i>	70
III.1.2.3. <i>Méthodes discrètes classiques</i>	72
III.1.2.4. <i>Procédures stochastiques</i>	72
III.2. Les algorithmes génétiques	74
III.2.1. <i>Principes et caractéristiques</i>	74
III.2.1.1. <i>Analogie biologique</i>	74
III.2.1.2. <i>Algorithmique</i>	74
III.2.1.3. <i>Particularités</i>	76
III.2.2. <i>Applications des AG</i>	77
III.2.3. <i>Exploration et exploitation</i>	78
III.2.3.1. <i>Le dilemme</i>	78
III.2.3.2. <i>Effets de l'initialisation et des opérateurs</i>	79
III.2.3.3. <i>Générateur de nombres aléatoires</i>	79
III.2.4. <i>Opérateurs de sélection</i>	81
III.2.4.1. <i>Pression sélective</i>	81
III.2.4.2. <i>Roue de loterie</i>	81
III.2.4.3. <i>Tournois</i>	82
III.2.4.4. <i>Elitisme</i>	83
III.2.5. <i>AG binaires</i>	83
III.2.5.1. <i>Encodage</i>	83
III.2.5.2. <i>Croisement</i>	83
III.2.5.3. <i>Mutation</i>	85
III.2.5.4. <i>Théorème des schémas</i>	85
III.2.5.5. <i>Principes de représentation</i>	87

III.2.6. AG de type "entier"	88
III.2.6.1. Croisement	88
III.2.6.2. Mutation	89
III.2.6.3. Temps de calcul	90
III.2.7. Tests préliminaires	90
III.2.7.1. Formulation du problème	91
III.2.7.2. Résultats	92
III.3. Bilan partiel	95
Chapitre IV : Applications	97
IV.1. Démarche générale	98
IV.1.1. Enoncé	98
IV.1.2. Structure du code d'optimisation	98
IV.1.3. Mesure des gains	100
IV.2. Optimisation de cylindres en carbone/époxy	100
IV.2.1. Structures considérées	101
IV.2.2. Etude préliminaire	102
IV.2.2.1. Cylindres de référence	102
IV.2.2.2. Solutions de NTUA	103
IV.2.3. Stratifications optimisées par AG	105
IV.2.3.1. Valeurs d'angles	106
IV.2.3.2. Modèle de type SANDERS	106
IV.2.3.3. Modèle CT3	108
IV.2.3.4. Modèle LOG	110
IV.2.3.5. Contrainte de fabrication supplémentaire	112
IV.2.3.6. Nombres de plis réduits	113
IV.2.3.7. Coefficients de rigidités réduits	114
IV.2.3.8. Cylindres en verre/époxy	114
IV.2.3.9. Solutions non contraintes	117
IV.2.3.10. Correspondance des modes de flambage	120
IV.2.3.11. Solutions retenues	120
IV.2.4. Analyse des résultats	121
IV.2.5. Performances de l'AG	127
IV.2.5.1. Optimisation avec angles contraints	127
IV.2.5.2. Optimisation avec angles non contraints	130
IV.2.5.3. Comparaison avec une méthode directe	132
IV.2.5.4. Fiabilité	133
IV.2.6. Robustesse des solutions optimisées	133
IV.2.6.1. Conditions aux limites cinématiques	134
IV.2.6.2. Anti-optimisation	135
IV.2.6.3. Précision des angles	138
IV.2.6.4. Imperfections géométriques	138
IV.2.6.5. Propriétés matériau	141
IV.2.7. Résultats MEF complémentaires	144
IV.2.7.1. Résultats non linéaires SOLVIA	144
IV.2.7.2. Modèles avec tapes	145

IV.2.7.3. Analyse statique	148
IV.2.8. Expérimentation	155
IV.2.9. Bilan partiel	156
IV.3. Expérimentation de cylindres en verre/époxy	158
IV.3.1. Etude numérique préliminaire	158
IV.3.2. Résultats expérimentaux	162
Conclusion	167
Références	169
Annexe I : Comportement d'un pli composite	179
AI.1. Loi constitutive élasto-statique	180
AI.1.1. Comportement dans le repère matériau	180
AI.1.1.1. Notations contractées	180
AI.1.1.2. Loi orthotrope	180
AI.1.1.3. Loi isotrope transverse	181
AI.1.2. Comportement hors axes d'orthotropie	181
AI.1.3. Coefficients de rigidité réduits	183
AI.1.4. Pli équilibré en $\pm\theta$	184
AI.2. Critères de rupture anisotropes	185
AI.2.1. Critère de la contrainte maximale	186
AI.2.2. Critères interactifs	187
Annexe II : Termes matriciels des modèles analytiques	189
AII.1. Rappel : définitions des coefficients de rigidités du stratifié	189
AII.2. Modèle de type SANDERS	190
AII.2.1. Imperfection axisymétrique	190
AII.2.2. Imperfection asymétrique	191
AII.3. Modèle CT3	192
AII.3.1. Imperfection axisymétrique	192
AII.3.2. Imperfection asymétrique	196
AII.4. Modèle LOG	200
Travaux bibliographiques	201
Notations et symboles principaux	204

Introduction

L'exploration sous-marine et l'exploitation des ressources benthiques s'inscrivent, sans conteste, parmi les grands défis du XXI^{ème} siècle. La sévérité de l'environnement est telle qu'elle induit des contraintes et entraves qui ne sont pas sans évoquer les difficultés inhérentes à la conquête spatiale. Aussi, de nombreux travaux scientifiques actuels, initiés par les acteurs de la recherche océanographique ainsi que par les industriels de l'offshore, s'attachent au développement d'engins d'exploration et de maintenance autonomes, proscrivant ainsi tout risque humain, et évoluant en moyenne ou grande profondeur.

Bien qu'encore peu utilisés pour la constitution de structures sous-marines, de nombreux domaines d'applications, dont notamment l'aéronautique, ont démontré les avantages procurés par les matériaux composites : rigidité massique, résistance, durabilité, coût... Soulignons particulièrement la possibilité de "tailler sur mesure" le matériau, ou plus exactement d'optimiser les caractéristiques mécaniques et le comportement structural vis à vis du mode de sollicitation.

Par ailleurs, les performances et capacités informatiques sans cesse croissantes ont conduit, durant ces vingt dernières années, au formidable essor des progiciels de Conception Assistée par Ordinateur. L'utilisation d'algorithmiques novatrices, robustes et fiables, a notamment donné lieu à de nombreux développements récents pour l'élaboration d'outils numériques d'aide à la décision, permettant dès lors de guider le choix du concepteur vers une solution optimale.

Ce travail, réalisé en partenariat avec l'IFREMER (l'Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la MER), s'inscrit dans le cadre de projets de la Communauté Européenne visant au développement d'enceintes sous-marines destinées à l'instrumentation océanographique et à la constitution de robots. Les cylindres composites utilisés, réalisés par enroulement filamentaire, possèdent un mode de stratification classique de type $[\pm 55^\circ_M]$. Ce choix, issu du rapport des résultantes circonférentielle et axiale de chargement, n'intègre pas le risque de flambage structural mis en évidence expérimentalement et numériquement. Aussi, ma proposition a consisté en la recherche de séquences de stratification accroissant les valeurs de pressions externes critiques. La méthodologie adoptée a conduit à la création d'un outil

numérique d'aide à la conception constitué du couplage de modèles analytiques du flambage de cylindres avec une procédure d'optimisation par algorithme génétique. Les résultats déduits ont mis en évidence une allure caractéristique de stratifications optimisées. La confrontation de modèles éléments finis a permis d'apprécier les accroissements de pressions critiques correspondants vis à vis des cylindres de références en $[\pm 55^\circ_M]$. Par ailleurs, une attention particulière a été accordée à l'influence des imperfections géométriques, des tolérances de fabrication et des incertitudes sur les valeurs de caractéristiques mécaniques des matériaux. Enfin, cette approche numérique est complétée par l'étude expérimentale du flambage de cylindres possédant des stratifications en $[\pm 55^\circ_M]$ ainsi que des séquences optimisées.

Ce mémoire est articulé en quatre chapitres. Le premier d'entre eux précise le contexte de l'étude, la constitution des enceintes composites considérées ainsi que l'état des connaissances. La mise en évidence de l'inadéquation du mode de stratification en $[\pm 55^\circ_M]$ initialement utilisé est suivie de la description des objectifs de l'étude et de la méthodologie adoptée. Le chapitre II détaille les différentes formulations analytiques ainsi que les modèles éléments finis développés pour l'étude du phénomène de flambage des cylindres stratifiés. Outre un bilan succinct de l'état de l'art en optimisation, le chapitre III s'attache à la description de la stratégie d'optimisation par algorithme génétique retenue. Les applications numériques et expérimentales réalisées sont, elles, détaillées dans le chapitre IV. La conclusion générale dresse un bilan synthétique des résultats et des perspectives de cette étude.

L'annexe I rappelle les relations classiques décrivant le comportement élasto-statique d'un pli composite ainsi que les expressions des critères de rupture anisotropes. Les expressions des termes matriciels correspondant aux formulations analytiques du flambage de cylindres stratifiés sont, eux, détaillés en annexe II.

Bien que précisés au fil des chapitres et annexes, le lecteur trouvera en dernière page de ce mémoire un récapitulatif des quelques notations et principaux symboles adoptés.

Chapitre I :

Sujet et démarche

Ce chapitre précise le cadre de l'étude et la nature des applications concernées. La description des structures sous-marines composites est suivie d'un bilan de l'état des connaissances et des travaux en cours. Les études numériques et expérimentales antérieures ont notamment mis en évidence le risque de flambage structural, engendré par la sollicitation de pression hydrostatique externe, pour les corps d'enceintes élancés utilisés. Le mode de stratification initialement adopté n'intègre pas ce critère de conception pourtant majeur. Suit alors la description des objectifs ainsi que de la méthodologie de ce travail de thèse.

I.1. Contexte

I.1.1. Applications concernées

Dès les années soixante, des travaux, tels ceux décrits en [COU 69], ont tenté d'évaluer les possibilités d'utilisation des matériaux composites pour la constitution de structures sous-marines immergées en moyenne et grande profondeurs. Les références [VIN 92], [DAV 96] et [DAV 99] dressent un bilan détaillé des études antérieures. Ces travaux ont notamment mis en évidence de nombreux avantages procurés par l'utilisation des matériaux composites pour de telles applications : rigidité massique, coût, flottabilité, furtivité, résistance à la corrosion et durabilité. Cependant, leur intérêt majeur réside dans la faible valeur du ratio masse / déplacement d'eau : cette propriété s'avère en effet capitale pour des engins autonomes dont les réserves énergétiques embarquées s'avèrent généralement fort limitées, ou tout au moins succinctes et précieuses [GRA 95].

Depuis voici une dizaine d'années, les programmes successifs BRITE et MAST (*Marine Science and Technology*) initiés et financés par la Communauté Européenne s'attachent au développement de structures sous-marines. Trois classes d'applications spécifiques sont concernées :

- *Enceintes océanographiques (instrumentation housings)* : ces balises et engins remorqués d'exploration océanographique abritent des capteurs (courantomètres, magnétomètres...) et les enregistreurs associés. Immergées durant une à trois années, elles remontent ensuite en surface afin d'assurer la transmission des mesures [LEB 99].
- *Véhicules sous-marins autonomes* : il s'agit de robots de type *AUV (Autonomous Underwater Vehicle)* et *ROV (Remotely Operated Vehicle)* destinés à la reconnaissance de terrain ainsi qu'à la surveillance et la maintenance des installations de l'industrie offshore [DAV 96].
- *Stations benthiques (benthic landers)* : reposant sur les fonds sous-marins, ces structures sont principalement utilisées lors de travaux de recherche concernant l'exploration océanographique [DAV 99].

Ces structures, déclinées en de multiples versions, sont destinées à des immersions en moyenne et grande profondeurs, à savoir jusqu'à -6000 mètres pour de nombreuses applications océanographiques [DAV 99]. Compte tenu de l'ampleur et de la complexité de tels projets, leur mode d'organisation repose sur l'association des compétences d'universitaires, de divers organismes de recherche et d'industriels. La figure I.1 permet de recenser les principaux partenaires de ces programmes européens dont l'IFREMER est un des acteurs majeurs.

Toutes les applications précédemment citées recourent à l'utilisation de corps d'enceintes étanches destinés à abriter l'appareillage (actionneurs, capteurs et cartes électroniques) embarqué. Le type de conteneur retenu est généralement tubulaire et réalisé en matériaux composites. L'exemple d'application présenté en figure I.2, un sonar acoustique remorqué, illustre ce mode de constitution détaillé dans le paragraphe suivant.

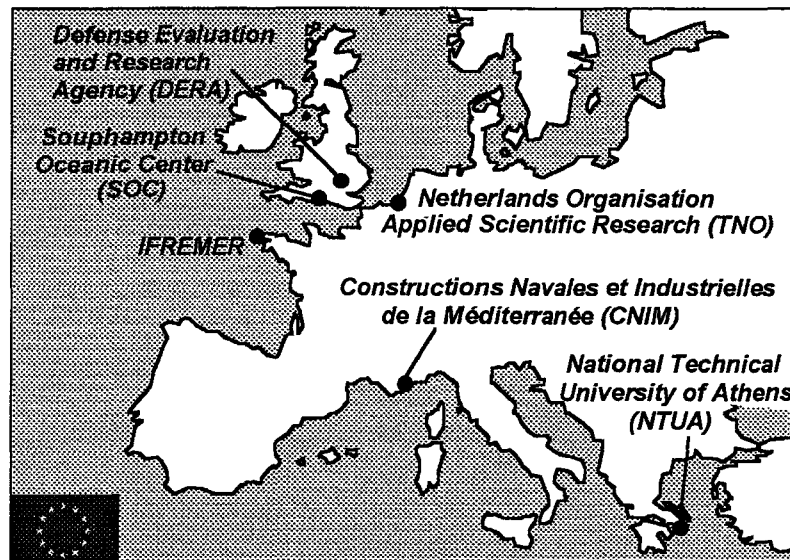


Figure I.1 : partenaires européens

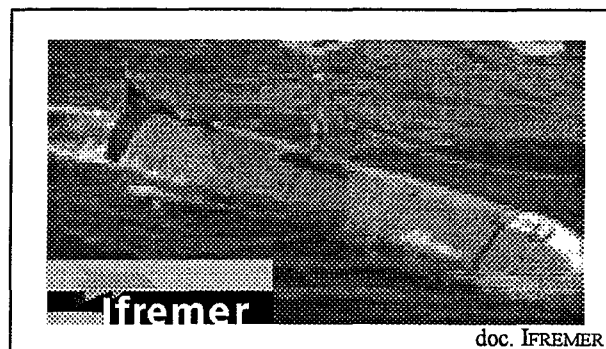


Figure I.2 : exemple d'application

I.1.2. Constitution des enceintes

Les enceintes sous-marines considérées, soumises à la pression hydrostatique externe due à l'immersion, possèdent toutes une constitution analogue à celles schématisées en figure I.3. La nature des composants embarqués ne permet pas de pressuriser ces conteneurs : le volume interne reste ainsi à la pression atmosphérique [LEB 99]. Les vitesses de plongée et de navigation étant faibles, la mise en charge est de type quasi-statique [LEB 99].

I.1.2.1. Corps

Le *corps d'enceinte*, ou *partie courante*, est constitué par un tube composite. Les géométries cylindriques correspondantes, fixées par la nature des applications, sont généralement de type élancées, possédant donc un rapport longueur/rayon moyen supérieur à 4. De plus, le mode de dimensionnement de la paroi (voir § I.1.3) a conduit à l'utilisation de tubes non seulement minces mais aussi semi-épais [DAV 96]. Soulignons que les études menées jusqu'à présent se sont focalisées sur l'emploi de structures non raidies, ni axialement ni circonférentiellement, afin d'en simplifier la fabrication [DAV 99].

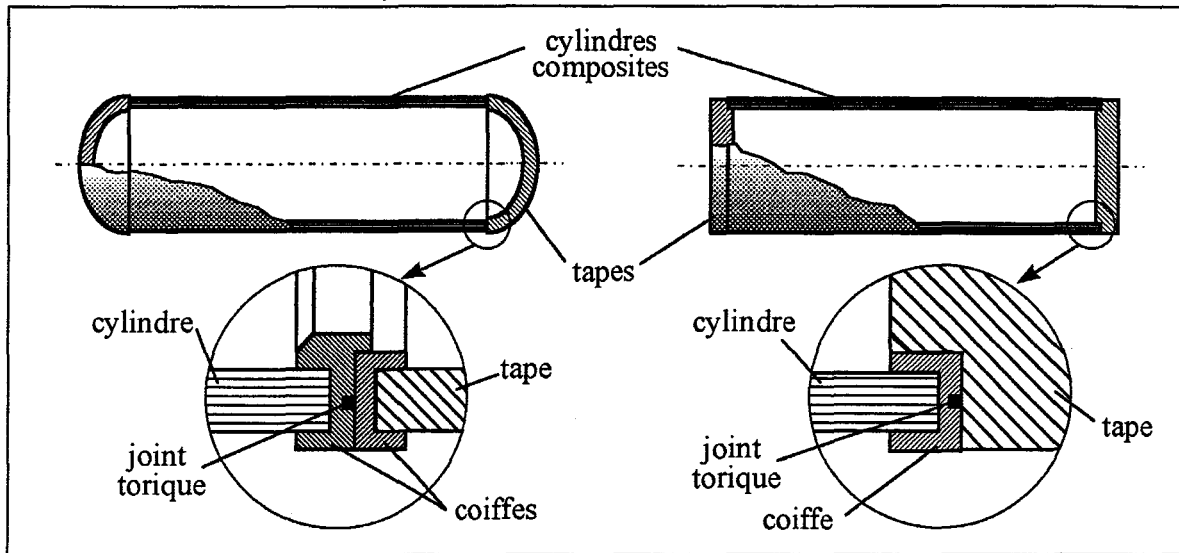


Figure I.3 : constitution des enceintes

Concernant le mode d'obtention, quelques travaux antérieurs ont porté sur des cylindres réalisés par enroulement de matériaux composites tissés [BIG 91]. Cependant, le mode de fabrication actuellement privilégié est de type *enroulement filamentaire* (aussi nommé *enroulement hélicoïdal*). Ce procédé, dont la figure I.4 schématise le principe, concerne de très nombreuses applications en raison de sa simplicité relative et sa possibilité d'automatisation autorisant alors des cadences de production élevées. Il permet de plus l'obtention de structures composites à proportions de renforts très élevées (jusqu'à 80 % de fraction volumique), intérêt majeur pour la réalisation de pièces soumises à des sollicitations mécaniques sévères : canalisations, arbres de transmission, réservoirs, corps de fusées... [BER 92] [GRO 99].

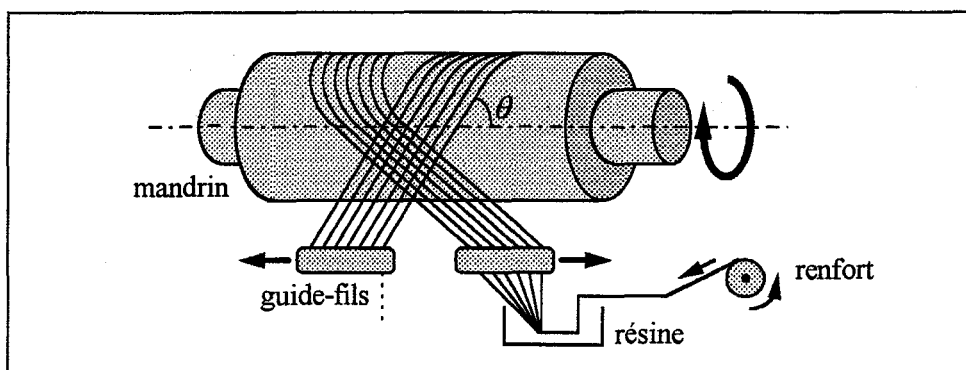


Figure I.4 : principe de l'enroulement filamentaire

Ce mode de fabrication consiste à enrouler des bandes de renforts, composées d'une multitude de filaments, imprégnées de résine catalysée et soumises à une légère tension [DVO 96]. Les mandrins métalliques utilisés possèdent généralement une très faible conicité afin de faciliter l'extraction des tubes réalisés [GRO 99]. Le procédé conduit à la formation de plis successifs, la structure composite créée est de type multicouche permettant ainsi la réalisation de stratifications complexes [DVO 96] [LEB 99] : pour chaque pli, le contrôle des mouvements relatifs de translation du guide-fils et de rotation du mandrin permet en effet la

disposition des fibres selon un angle d'hélice noté θ et mesuré par rapport à l'axe du cylindre (cf. figure I.4). Par ailleurs, chacune de ces couches est constituée de renforts disposés, en proportions identiques, en $+\theta$ et $-\theta$: cet équilibrage des plis (cf. § AI.1.4) est généré soit par un aller-retour des guides-fils, soit par le croisement et l'entrelacement des bandes de renforts en $+\theta$ et $-\theta$ [DVO 96] [ROU 97]. Les réalisations courantes utilisent des valeurs d'angles comprises entre environ 20 et 90° (procédé alors nommé *enroulement circonférentiel* ou *bobinage*). Quelques fabricants proposent néanmoins la réalisation de plis à 0° (*enroulements polaires*) par disposition de *peignes* aux extrémités du mandrin [BER 92]. Au terme du processus d'enroulement, la structure multicouche obtenue est soumise à un cycle de cuisson assurant la polymérisation de la résine thermodurcissable [GRO 99].

En outre, notons que, compte tenu de la tension appliquée au renfort, la résine tend à migrer sur la surface externe du tube, le surplus étant alors généralement évacué manuellement avant cuisson [GRO 99]. La réalisation des enceintes sous-marines recourt de plus à la disposition sur la paroi externe d'un gel imperméabilisant (ou *liner*) assurant l'étanchéité et dont la contribution au comportement mécanique de la structure s'avère négligeable [LEB 99]. Les tubes produits possèdent ainsi une paroi interne lisse et régulière, car "moulée" directement sur le mandrin, la surface externe étant, elle, plus perturbée. En outre, la tension appliquée aux bandes de renforts ainsi que les dilatations et retraites lors des cycles de cuisson induisent des contraintes résiduelles dont l'évaluation s'avère fort délicate [DVO 96] [GRO 99].

Suite aux résultats d'études préliminaires antérieures, deux principaux types de matériaux ont été retenus pour la réalisation des corps d'enceintes [DAV 96] : renforts en fibre de carbone (*Tenax*, *Xenax* ou *T700*) ou fibre de verre (de type *R* ou *E*), les matrices étant elles de type époxy (*MY750* et *F100* pour le carbone, *LY556* et *MY905* pour le verre). Une description détaillée, issue des données fabricant et de résultats d'essais de caractérisation (cf. § I.1.3), des propriétés mécaniques respectives de ces constituants est donnée en [GRO 99].

I.1.2.2. Fermetures et liaisons

Les pièces de fermeture aux extrémités du cylindre, nommées *tapes* et schématisées en figure I.3, sont de formes plates ou hémisphériques (cf. figure I.3) suivant le type d'application. Compte tenu du mode de dimensionnement adopté (voir § IV.2.7.2), leurs épaisseurs s'avèrent généralement très fortes vis à vis de celles des cylindres composites [LEB 99]. Divers matériaux constitutifs ont été employés au cours des travaux antérieurs : acier inoxydable, aluminium, titane, bronze et plus récemment des matériaux composites de type verre/époxy et carbone/époxy [VAN 98].

Par ailleurs, de nombreuses enceintes recourent à l'utilisation d'anneaux métalliques intermédiaires, des *coiffes*, ajustées et collées sur les cylindres composites (cf. figure I.3) [CHA 99b]. Outre la fonction d'étanchéité, ces organes de liaison sont destinés à assurer une répartition d'efforts homogène, sans surcontrainte, afin d'éviter tout matage ou délaminage aux extrémités du tube. L'assemblage avec les *tapes* est de nature variée : boulonnage, rivetage ou encore collage [LEB 99].

I.1.3. Etat des connaissances

Ce paragraphe présente les principaux thèmes de travail abordés par les divers partenaires des projets BRITE et MAST dans le cadre de la conception des enceintes sous-marines. Compte tenu de la multicité et de l'ampleur de ces études, toujours en cours pour certaines d'entre elles, il s'avérerait fort délicat d'en dresser ici un bilan exhaustif et détaillé. De plus, soulignons que, eu égard aux contraintes temporelles de ces projets, de nombreux travaux complémentaires sont menés simultanément.

Un travail considérable a ainsi été entrepris pour caractériser les propriétés élastiques ainsi que les limites à rupture (cf. annexe I) des matériaux composites constituant les corps d'enceintes. Ces études se sont avérées tributaires de trois spécificités majeures :

- Comme précisé en § I.1.2.1, les cylindres composites utilisés sont de types minces et aussi semi-épais. De fait, et afin d'obtenir des données réalistes du comportement global des enceintes notamment pour les études de simulation numérique, le travail de caractérisation requiert non seulement l'identification des propriétés planaires du composite (soit donc E_1 , E_2 , G_{12} et ν_{12} , cf. § A1.1.1.2) mais aussi celle, plus délicate à appréhender, des caractéristiques dans la direction de l'épaisseur, à savoir E_3 , G_{13} , G_{23} , ν_{13} , ν_{23} et des limites à rupture correspondantes [DAV 99].
- Compte tenu des géométries cylindriques considérées et du procédé de fabrication (par enroulement filamentaire) retenu, les essais sur éprouvettes plates sont peu appropriés et peu révélateurs. Aussi, le travail de caractérisation a nécessité la réalisation d'essais "structures", alors effectués sur des tubes complets ou sur des échantillons directement prélevés sur les cylindres composites [DAV 99].
- Les enceintes étant sollicitées en pression hydrostatique externe, les travaux de caractérisation se sont particulièrement attachés à l'identification des propriétés de compression. Les essais correspondants induisent une très grande complexité de mise en œuvre compte tenu des effets de bord, des risques de flambage structural des éprouvettes et de micro-flambage des fibres [DAV 96] [GRO 99].

Ainsi, le travail de caractérisation a recouru à l'emploi de nombreux procédés et montages d'essais tels que ceux présentés en [GRO 99] destinés à la compression d'éprouvettes courbes et de tubes instrumentés à l'aide de jauges de déformations. Des modèles numériques basés sur la méthode des éléments finis (*MEF*) ont notamment été employés pour l'identification des caractéristiques par simulation de ces essais [DAV 99]. Des tests sur anneaux, sollicités en compression diamétrale, en compression hydrostatique ou étudiés en analyse modale, ont aussi été pratiqués [PIL 96]. Citons aussi les essais de compression ainsi que les mesures de vitesses d'ondes ultrasonores sur des cubes usinés prélevés dans les tubes [DAV 96].

Compte tenu notamment des problèmes de mise en œuvre évoqués, ces travaux ont montré la grande difficulté d'accéder à des valeurs de caractéristiques mécaniques "fiables", les résultats issus de différents types d'essais divergeant parfois notablement [PIL 96] [DAV 99]. De plus, le procédé d'enroulement filamentaire conduit à la création d'une véritable "structure

composite" dont les propriétés globales sont délicates à estimer au préalable [ROU 97] : en effet, les caractéristiques mécaniques déduites d'essais sur tubes présentent des différences tangibles avec les résultats de calculs d'homogénéisation périodique réalisés d'après les propriétés mesurées des constituants (caractéristiques de la matrice et des fibres, taux de renforts et de porosités) [DAV 96] [GRO 99]. Enfin, remarquons que toutes ces incertitudes sont aussi à lier avec d'éventuelles variations de paramètres de fabrication et les phénomènes de variabilité précédemment étudiés à l'IFREMER [PIL 96] [CAS 97].

Par ailleurs, diverses procédures de qualification ont été définies pour la réception des corps d'enceintes en provenance des fabricants. L'évaluation des taux de renfort, de matrice et de vide est ainsi réalisée par crémation d'échantillons prélevés sur les tubes composites [GRO 99]. De plus, l'IFREMER dispose d'un système de contrôle ultrasonore destiné à détecter la présence de délaminages, de porosités importantes ou de tout autre défaut macroscopique [RIO 98]. Enfin, ces procédures portent sur le contrôle des valeurs d'angles d'enroulement des fibres ainsi que de la géométrie des cylindres [DAV 96] [GRO 99].

Des études portant sur le vieillissement, la reprise d'eau et le fluage des enceintes ont aussi été menées [DAV 96]. A ce propos, le travail de thèse de LE BRIS [LEB 99] a permis d'établir un modèle de la cinétique d'absorption de l'humidité des matériaux composites unidirectionnels immergés. Le second volet de cette étude a concerné le développement d'approches numériques destinées à simuler la réponse en fluage des enceintes sous-marines.

Concernant toujours l'aspect "matériau", GROHENS [GRO 01] a entrepris depuis septembre 1997 un travail de thèse doctorale portant sur l'identification du comportement statique des cylindres et l'extension du méso-modèle intégré au code de simulation DAM-LAM (développé au Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan – UMR P6/CNRS 7607) pour l'analyse de l'endommagement du composite. L'identification des paramètres du modèle est effectuée par le biais d'essais cyclés de compression axiale et de pression hydrostatique externe sur tubes [GRO 99] [GRO 00].

L'étude numérique menée par l'équipe néerlandaise de TNO (cf. figure I.1), détaillée en [VAN 98], a elle porté sur la conception de dômes de fermetures métalliques et composites. Considérant les possibilités et contraintes de fabrication ainsi qu'un critère de résistance statique, ce travail a permis de définir et de retenir une forme de tape, alors non plus hémisphérique, mais semi-elliptique.

Enfin, on remarquera particulièrement que des campagnes expérimentales menées par l'IFREMER ainsi que DERA (cf. figure I.1) ont mis en évidence un critère de conception primordial pour la conception des corps d'enceintes possédant des géométries élancées. En effet, la mise en charge progressive, quasi-statique, d'enceintes sollicitées en pression hydrostatique externe a révélé un comportement élastique quasi-linéaire suivi d'une ruine brutale et instantanée due au flambage structural des tubes composites [GRA 95] [DAV 99] [CHA 99a]. L'instabilité se manifeste ainsi par l'augmentation brusque de déplacements

radiaux, induisant une modification de forme de la section (formation de *lobes*, cf. figure II.9), dans la partie courante des cylindres. Ce phénomène entraîne alors la rupture, et ceci tant pour les tubes minces que pour ceux semi-épais employés [DAV 96] [LEF 99]. Notons que les cylindres s'avèrent particulièrement sensibles à ce phénomène de flambage car possédant des géométries élancées (cf. § I.1.2.2) [BAR 83]. Rappelons de plus que les enceintes sont destinées à supporter des valeurs élevées de pression externe (-6000 mètres d'immersion, cf. § I.1.1, conduisant à environ 63 MPa [LEB 99]), la sollicitation étant de plus de type *charge suivieuse* (ou *charge vive*) [DUB 95]. En outre, précisons que l'étude numérique réalisée à TNO [VAN 98] a confirmé que les tapes de fermetures n'étaient pas sujettes au risque de flambage, le phénomène d'instabilité se manifestant bien dans la partie courante des enceintes.

Ainsi, et à l'instar de travaux numériques et expérimentaux antérieurs tels que [SUN 86], [MIS 92] ou encore [GAR 95], c'est le risque de flambage structural qui s'avère dimensionnant pour les valeurs d'épaisseurs de parois des corps d'enceintes utilisés [PAP 98] [CHA 99a]. Un travail important a ainsi été entrepris pour tenter d'estimer précisément et au préalable les valeurs de pressions critiques à l'aide de modèles numériques, analytiques et MEF, et ceci afin de permettre la prédétermination de ces épaisseurs [GRA 95] [LEF 99]. Ces études ont notamment donné lieu à la confrontation de divers outils de simulation du flambage de cylindres stratifiés [TSO 96]. Ces divers aspects de la modélisation du flambage de coques ainsi que le mode de prédimensionnement actuellement retenu seront détaillés et discutés ultérieurement dans le chapitre II.

A ce stade du chapitre, il s'avère capital de préciser que toutes les études et développements menés dans le cadre des projets BRITE et MAST se sont focalisés sur l'utilisation exclusive de cylindres composites possédant des séquences de stratification de type $[\pm 55^\circ_N]$. Les motivations de ce choix sont détaillées et discutées dans les paragraphes suivants.

I.2. Problématique

I.2.1. Stratifications initiales en $[\pm 55^\circ_N]$

Les corps d'enceintes sous-marines utilisées jusqu'à présent possèdent ainsi un mode de stratification unique, les renforts étant disposés à $\theta = \pm 55^\circ$ (cf. figure I.4) induisant de fait un comportement global orthotrope (cf. § AI.1). Ce choix est dicté par le rapport de chargement axial et circonférentiel induit par la sollicitation [GAY 97] : considérant les relations classiques de la théorie des enveloppes minces, une structure tubulaire sollicitée par une pression hydrostatique externe P (soit donc une pression latérale avec effet de fond) est alors soumise aux champs de contraintes uniformes dans l'épaisseur suivants (cf. figure I.5) :

$$\sigma_{xx} = -PR/2h \quad ; \quad \sigma_{yy} = -PR/h \quad ; \quad \sigma_{xy} = 0$$

d'où un rapport de contraintes : $\sigma_{yy} / \sigma_{xx} = 2$.

De fait, chaque pli renforcé en $\pm\theta$ est sollicité en compression membranaire biaxiale comme indiqué en figure I.5.

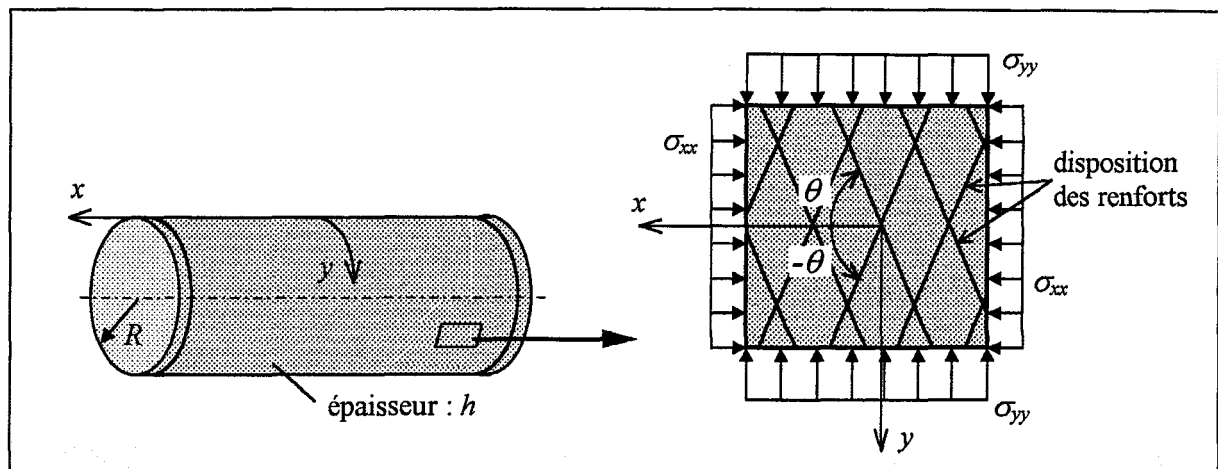


Figure I.5 : portion de coque – sollicitations

Les relations (AI.9) et (AI.10) précisées en annexe I lient les composantes tensorielles de contraintes dans les repères structure et matériau conduisant à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 \\ s^2 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

$$(c = \cos\theta ; s = \sin\theta)$$

L'idée suivante consiste à supposer que seules les fibres supportent la sollicitation, soit donc :

$$\sigma_2 = \sigma_6 = 0$$

d'où l'on tire : $\sigma_{xx} = \sigma_1 c^2$ et $\sigma_{yy} = \sigma_1 s^2$.

On en déduit alors, d'après la valeur du rapport de contrainte : $s^2/c^2 = \tan^2\theta = 2$

ce qui conduit à : $\theta \approx 55^\circ$.

Diverses études expérimentales et numériques ont confirmé que ce mode de stratification orthotrope en $[\pm 55^\circ_M]$ permettait de maximiser la résistance statique de cylindres composites soumis à une pression hydrostatique interne ou externe [GAR 95] [GRO 99]. Il est ainsi usuel notamment pour les canalisations de centrales nucléaires, structures qui ont été l'objet de très nombreuses études au Laboratoire de Mécanique Appliquée (UMR CNRS 6604) de Besançon [ROU 97]. Cependant, ce choix de la stratification n'intègre absolument pas le risque de flambage structural pour des cylindres élancés soumis à une sollicitation de pression externe : comme précisé en § I.1.3, le phénomène d'instabilité, mis en évidence numériquement et expérimentalement [DAV 99], constitue pourtant le critère de conception majeur et dimensionnant pour les corps d'enceintes sous-marines composites.

Ainsi, il s'agit d'une situation classique où la solution de conception retenue s'avère, par manque d'outils d'aide à la décision, peu adaptée aux conditions d'emploi. Soulignons de plus que l'avantage majeur offert par les matériaux composites réside dans la possibilité d'adapter, de "tailler sur mesure", les caractéristiques mécaniques globales suivant la nature de la sollicitation et du mode de ruine. Cet intérêt est d'autant plus flagrant pour les composites à fibres longues de par leur anisotropie particulièrement marquée [BER 92]. De fait, il apparaît particulièrement souhaitable et pertinent pour un tel cas de figure de recourir à un domaine objet de très nombreux développements actuels : l'optimisation, prolongement de la modélisation [LET 96] [MIE 99].

Ainsi, ma proposition vis à vis de l'IFREMER a porté sur l'optimisation des séquences de stratification des cylindres composites afin d'en accroître les valeurs de limites de stabilité. Les objectifs, les limites et la démarche adoptée de l'étude seront détaillés plus avant en § I.2.3. Le paragraphe suivant dresse, au préalable, un bilan des travaux et enseignements de la littérature concernant l'optimisation de coques cylindriques multicouches vis à vis de critères de flambage.

I.2.2. Données de la littérature

A la lecture de recueils tels que [GUT 97a], [BAT 98] ou [BLO 99], on constate que l'optimisation de la stratification de matériaux composites à fibres longues a donné lieu à de nombreux travaux bibliographiques, et ceci pour une multitude de critères uniques ou combinés : résistance statique, maximisation des premières fréquences propres de la structure, stabilité dimensionnelle... La majorité des études s'inscrit dans le cadre de l'*optimisation discrète*, les angles de plis étant choisis parmi des jeux de valeurs données correspondant à des possibilités de fabrication courantes [LER 97b].

Hormis les travaux concernant des structures plaques à l'instar des références [KOG 94] ou [LER 97b], l'étude de la littérature permet de recenser quelques développements portant sur l'optimisation de la stratification de coques composites vis à vis d'un critère "flambage". Citons ainsi les travaux, exclusivement numériques, de HIRANO [HIR 82] et de ONODA [ONO 85] destinés à accroître la charge critique de cylindres minces soumis à une sollicitation de compression axiale. NSHANIAN [NSH 83] a considéré de plus le cas de pression latérale externe. Le travail de thèse de SUN [SUN 86], réalisé à l'Institut Aérospatial de Toronto, a lui porté sur des tubes stratifiés minces soumis à divers modes combinés de sollicitations : compression axiale, torsion et pression latérale externe. L'approche numérique a été suivie de l'étude expérimentale du flambage de cylindres possédant des stratifications optimisées.

L'examen de ces travaux conduit à formuler quatre remarques principales :

- La recherche de stratifications permettant l'accroissement de la limite de stabilité est réalisée numériquement par couplage d'une procédure d'optimisation à des modèles analytiques du flambage de cylindres composites (cf. figure I.6), démarche permettant de limiter les temps de calculs CPU à des valeurs acceptables.

- Les modèles analytiques utilisés sont généralement de type DONNELL [BAR 83] (voir aussi § II.2.1), négligeant donc les effets de cisaillement transverse. Aucune évaluation de la sensibilité des stratifications optimisées à ces effets n'a été entreprise. Le comportement des composites s'avère pourtant affecté par le cisaillement transverse, et ceci particulièrement dans le cas de matériaux fortement anisotropes ainsi que pour les structures semi-épaisses [BER 92] [DES 97].
- Par ailleurs, les procédures d'optimisation utilisées lors de ces travaux sont exclusivement de type *locales*, par calcul de gradients ou directes (voir § III.1.2). Quelles que soit les données initiales (géométrie des cylindres, caractéristiques du matériau, nature des sollicitations), de fortes difficultés de convergence et des problèmes de reproductibilité des résultats des calculs d'optimisation ont été observés [HIR 82] [ONO 85] [SUN 86] [SUN 89]. Comme indiqué dans les références [SOR 96] et [LER 97b], le problème d'optimisation de la stratification de composites s'avère en effet généralement non convexe et multi-modal, l'espace de recherche comportant de nombreux optima locaux. Cet aspect semble ainsi particulièrement marqué pour un critère "stabilité", la modification de la stratification conduisant notamment à des changements brusques du mode de flambage et de la valeur de charge critique correspondante, induisant donc de fortes discontinuités dans l'espace des solutions. L'emploi d'une procédure d'optimisation *globale* (cf. § III.1.2.2 et § III.1.2.4) semble donc particulièrement opportun.
- Enfin et surtout, ces études ont montré numériquement qu'un choix adéquat de la stratification pouvait permettre un accroissement substantiel (plusieurs dizaines de pourcents suivant les données du problème) de la limite de stabilité d'un cylindre vis à vis d'une solution initiale intuitive [NSH 83] [ONO 85] [SUN 86]. Les travaux expérimentaux de SUN [SUN 86] [SUN 88] ont confirmé cet intérêt procuré par une conception pertinente de la stratification du composite.

1.2.3. Objectifs et méthodologie de l'étude

Ce travail de thèse consiste ainsi en la recherche de stratifications optimisées permettant un accroissement des valeurs de pressions critiques des corps d'enceintes sous-marines. Notons qu'il s'agit d'un problème d'optimisation discret, les angles de stratification seront en effet choisis parmi des jeux de valeurs réalistes, conformes aux indications et possibilités des fabricants. Seul le critère "flambage" a été retenu lors de ce travail car constituant le facteur dimensionnant pour les cylindres composites considérés. De plus, les travaux sur le fluage [LEB 99] ou l'endommagement [GRO 01] étant menées en parallèle, seuls des résultats intermédiaires et partiels étaient disponibles pendant le déroulement de cette étude. Aussi, l'aspect "optimisation multi-critère" n'a pas été abordé.

On remarquera d'emblée que, comme exposé dans le chapitre II, la détermination numérique précise des pressions critiques des enceintes s'avère fort délicate, les formulations analytiques ainsi que les modèles MEF tendant systématiquement à surestimer les valeurs de

limites de stabilité [BAR 83] [VIN 92] [DUB 95]. A ce sujet, un travail important de recalage de modèles numériques non linéaires a été réalisé récemment à l'IFREMER. Cette étude, décrite dans les références [CHA 99a] [LEF 99], sera commentée ultérieurement en § II.4.1. Aussi, l'objectif du présent travail de thèse ne consiste pas en l'évaluation précise des pressions critiques. Il s'agit plus précisément de la détermination d'allures caractéristiques, de "motifs", de stratifications optimisées. Les accroissements de pressions critiques correspondants seront évalués et exprimés par comparaison (en terme de *gains*) avec les cylindres de référence stratifiés en $[\pm 55^\circ_M]$.

Afin de procéder à la recherche de séquences de stratification optimisées, un outil numérique d'aide à la conception a été développé. Ce code est constitué du couplage de modèles de flambage de coques cylindriques multicouches avec une procédure d'optimisation. A l'instar des travaux du domaine évoqués en § I.2.2, les modèles utilisés sont de type analytique. En effet, et comme indiqué plus avant en § II.4.1, le couplage de la procédure d'optimisation avec des modèles MEF induirait des temps de calculs rédhibitoires, inexploitable. Le principe général du code d'optimisation est présenté par la figure I.6 suivante, son architecture détaillée sera précisée ultérieurement en figure IV.1.

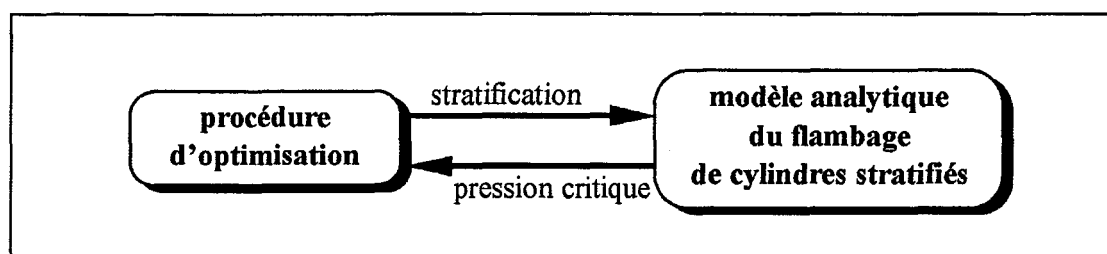


Figure I.6 : principe du code d'optimisation

Trois types de modèles analytiques, dédiés à la modélisation du flambage de coques multicouches minces et aussi semi-épaisses, ont ainsi été utilisés. En outre, et contrairement aux études antérieures évoquées en § I.2.2, ils permettront d'évaluer la sensibilité des résultats d'optimisation aux effets de cisaillement transverse. De plus, un modèle d'imperfections géométriques, basé sur une analogie avec leurs formes réelles, a été développé, le phénomène d'instabilité s'avérant fort sensible à ces défauts (voir § II.1.2.2). Rappelons que ces modèles ne sont pas utilisés pour la détermination précise de valeurs de pressions hydrostatiques critiques. Leur intérêt réside par contre dans leur sensibilité aux paramètres de stratification, permettant ainsi la recherche de séquences procurant des gains de limite de stabilité. Les formulations de ces modèles analytiques seront détaillées dans le chapitre II.

Compte tenu des risques importants de non-convexité et de discontinuité de l'espace des solutions exposés en § I.2.2, le choix de la procédure d'optimisation a porté sur une méthode globale. De par les qualités de cette classe de procédures objet de nombreux développements actuels s'inscrivant dans le cadre de l'optimisation discrète, un algorithme génétique a ainsi été retenu et codé. Le choix du mode de représentation des variables de conception et les opérateurs génétiques adoptés, précisés et discutés dans le chapitre III, ont fait l'objet d'une

étude attentive. Les travaux numériques d'applications détaillés dans le chapitre IV permettront l'analyse circonstanciée des performances de l'algorithme génétique créé.

Le premier volet d'applications (cf. chapitre IV) concerne des corps d'enceintes stratifiés réalisés en carbone/époxy. Des modèles MEF (décrits dans le chapitre II) sont utilisés pour l'appréciation des accroissements de pressions critiques, en terme de gains relatifs, déduits des stratifications optimisées par rapport aux solutions de référence en $[\pm 55^\circ_N]$. De plus, cette analyse est corroborée par la confrontation des résultats issus de divers codes MEF. Soulignons que, compte tenu des coûts relativement élevés de production de cylindres stratifiés, cette étude est essentiellement numérique. Cependant, et afin d'assurer une démarche de conception et d'optimisation réaliste, ce travail a été complété par de nombreuses "précautions numériques" : une attention particulière sera ainsi accordée quant à la sensibilité, ou plus exactement la fiabilité, des allures de stratifications optimisées vis à vis des incertitudes sur les valeurs de caractéristiques mécaniques, des tolérances de fabrication et des imperfections géométriques des cylindres. Enfin, ce travail est suivi par l'étude expérimentale, réalisée à l'aide d'un système d'essais spécifique, de la stabilité de tubes en verre/époxy possédant des stratifications en $[\pm 55^\circ_N]$ ainsi que des séquences optimisées.

Cette étude, débutée en octobre 1996 et interrompue durant l'année 1997-98 pour cause de service national, constitue la première thèse doctorale préparée au sein de l'axe Structures du Laboratoire Mécanique et Matériaux (LMM – EA 940) de l'Université de Brest.

I.2.4. Moyens

Ce travail de thèse a été soutenu par le Conseil Régional de Bretagne. Il a de plus bénéficié de l'appui financier du service Matériaux et Structures du centre IFREMER de Brest (dans le cadre du projet MAS3-CT97-0091 cofinancé par le programme MAST de la Commission Européenne) par le biais des contrats universitaires successifs décrits dans les références [GIN 97], [GIN 98b] et [GIN 99b].

L'ensemble des travaux numériques a été réalisé principalement sur stations de travail SUN SPARCSTATION 10 (100 MHz, 64 Ko RAM) et ULTRASPARC 1 (143 MHz, 128 Ko RAM). La programmation du code d'optimisation schématisé en figure I.6 a recouru à l'utilisation d'un compilateur FORTRAN 90. Les calculs MEF ont, eux, été effectués à l'aide du code SAMCEF (versions 6.1 et 7.1). En outre, précisons dès à présent que tous les temps de calcul CPU indiqués dans ce mémoire correspondent à ceux observés sur ULTRASPARC 1.

Comme indiqué en § I.2.3, les travaux expérimentaux ont été réalisés à l'aide d'un système d'essais spécifique développé au LMM durant l'année 1996/97. Ce dispositif expérimental, permettant la mise en pression externe de tubes composites avec contrôle du phénomène d'instabilité, sera détaillé ultérieurement en § II.1.2.1.

Chapitre II :

Modélisation

En premier lieu, ce chapitre concerne la description phénoménologique du flambage des cylindres composites sollicités en pression hydrostatique externe. Suite à l'étude de la bibliographie, des formulations analytiques du flambage de cylindres composites ont été développées : trois modèles, destinés à la modélisation de coques minces ou semi-épaisses et permettant ou non la prise en compte des effets de cisaillement transverse et d'imperfections géométriques, ont ainsi été retenus. Par ailleurs, des modèles MEF, utilisés dans la suite de l'étude pour l'appréciation des gains déduits de stratifications optimisées, ont été codés. Une étude préliminaire succincte permettra la confrontation de résultats analytiques, MEF et aussi expérimentaux.

II.1. Phénoménologie

II.1.1. Aspects généraux du flambage

De nombreux problèmes de la mécanique des solides s'avèrent gouvernés par des équations d'équilibre traduisant des non-linéarités géométriques. Le flambage, appartenant à cette catégorie, se manifeste par une modification importante de la configuration d'équilibre lors d'un accroissement infime du chargement au-delà d'une valeur dite *charge critique* ou *limite de stabilité* [BAR 83]. Ce phénomène conduit à vaincre la "rigidité de forme", induisant un changement brutal de la géométrie de la structure [TIM 66] [GAL 76]. L'évolution ultérieure, le *post-flambage*, peut alors mener à la ruine complète et instantanée. Aussi, l'instabilité s'avère souvent dimensionnante, l'effondrement survenant pour des valeurs de charges inférieures à la limite de résistance de la structure en configuration non flambée [DUB 95]. Notons que le flambage est non seulement tributaire de la géométrie mais aussi du type de chargement et des lois constitutives inhérentes au matériau. Il est ainsi qualifié de statique, dynamique (ou *flottement*) ou encore thermique, évoluant dans des domaines élastiques ou plastiques et parfois soumis à des non-linéarités matérielles [DUB 95] [WAN 95]. La coexistence de ces différents aspects induit généralement la présence de termes de couplage dans les équations décrivant l'instabilité [DUB 95]. Le flambage peut, de plus, s'avérer très localisé du fait d'éventuelles irrégularités géométriques ou matérielles [BOL 96].

Le flambage statique concerne généralement des structures minces ou élancées, dont la rigidité de flexion est très inférieure à celle de membrane, et soumises à des charges de compression (notées F en figure II.1). Considérant un déplacement caractéristique de la structure noté ξ , il apparaît deux classes principales d'évolutions présentées en figure II.1 [BAR 83] [SAM 95] : le flambage *par point limite* se manifeste ainsi relativement progressivement. Le flambage *par bifurcation* est, lui, caractérisé par une modification brutale de la rigidité de la structure et de sa géométrie.

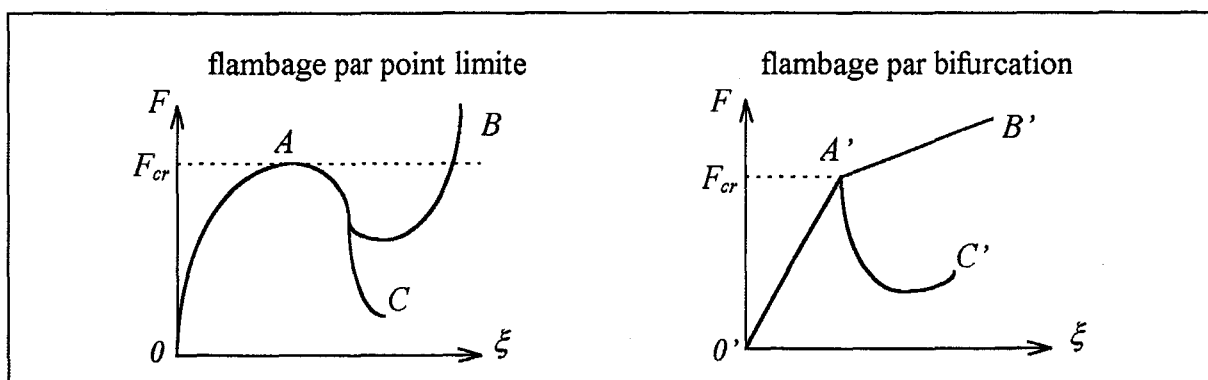


Figure II.1: nature de l'instabilité

Les branches OA et $O'A'$ décrivent ainsi une succession d'états d'équilibre stable. L'accroissement de F jusqu'à la valeur critique F_{cr} conduit ensuite au franchissement des

points limite A et de bifurcation A' . L'évolution OAC peut être illustrée par l'instabilité plastique (striction) d'une éprouvette métallique sollicitée en traction. La branche AB concerne, elle, des cas plus particuliers tels que le retournement (ou *claquage*) d'une calotte hémisphérique sous pression : la modification de la géométrie permet alors de supporter un chargement d'intensité supérieure à la valeur critique. C'est aussi le cas du *flambage par bifurcation sans chute de rigidité* décrit par la branche $A'B'$: l'exemple de la poutre en compression, présenté en figure II.2, où la rigidité de flexion succède à celle de compression de la configuration rectiligne en est une illustration classique. Le *flambage par bifurcation avec chute de la rigidité* (branche $A'C'$) conduit, lui, à une modification substantielle et irréversible de la configuration déformée (alors nommée *configuration adjacente*). Cette nouvelle géométrie ne peut ainsi être maintenue en équilibre que par un retour à un état de chargement inférieur à la valeur critique [BAR 83]. C'est le type de comportement instable observé notamment pour des cylindres soumis à des sollicitations de compression axiale et de pression externe (voir § II.1.2.2).

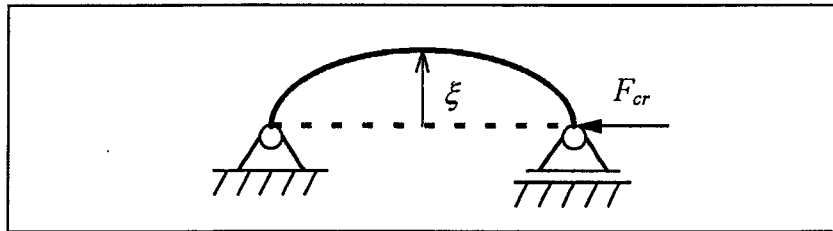


Figure II.2: problème d'EULER

Concernant le mode d'analyse de l'amorce et de l'évolution du flambage, on remarquera en premier lieu, et intuitivement, qu'une structure est stable au voisinage d'un état d'équilibre (nommé *état fondamental*) si elle tend à se maintenir dans cette configuration si on l'en écarte légèrement [DUB 95]. De nombreux travaux, tels que ceux de POINCARÉ (1885), LYAPOUNOV (1892) et SCHMIDE (1908) ont permis d'établir des formulations mathématiques traduisant ce constat. Cependant, leur caractère très général induit une manipulation complexe et délicate, inexploitable pour le concepteur [SAM 95]. Aussi, la détermination du seuil critique recourt à l'introduction de critères de stabilité simples et d'hypothèses simplificatrices [DON 76]. Le *critère de TREFFTZ* conduit ainsi à considérer que la présence d'un minimum local de l'énergie potentielle totale Π du système constitue une condition nécessaire et suffisante de stabilité [BAR 83] [DUB 95] [GAL 76]. En d'autres termes, la stabilité est vérifiée lorsque Π est convexe au voisinage du point d'équilibre. La méthode d'analyse dite *de l'énergie* découle de ce critère et s'énonce :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{-- équilibre pour } \frac{\partial \Pi(\delta \vec{D})}{\partial \vec{D}} \delta \vec{D} = 0 \\ \text{-- stabilité pour } \frac{\partial^2 \Pi(\delta \vec{D})}{\partial \vec{D}^2} \delta \vec{D} > 0 \end{array} \right.$$

avec $\delta \vec{D}$ un champ de déplacements virtuels cinématiquement admissibles.

Notons que ce principe a été étendu par KOITER [KOI 63] à l'étude du comportement post-critique des structures : l'analyse porte sur les signes respectifs des termes de variations d'ordres supérieurs à 2 de l'énergie potentielle, permettant alors de caractériser la nature du seuil de stabilité et l'évolution des déplacements de post-flambage [HUT 67] [BAR 83]. Par ailleurs, et comme précisé ultérieurement en § II.1.2.2, cette démarche a aussi été appliquée pour l'étude de l'influence des imperfections géométriques sur le comportement instable des structures [TEN 71] [SUN 86].

La *méthode de l'équilibre adjacent* est issue d'un constat simple [SAM 95] : pour un état d'équilibre stable, situé au voisinage du seuil d'instabilité et caractérisé par un champ de déplacements pré-critiques \vec{D}_0 , il existe, pour un chargement identique, d'autres configurations d'équilibre très voisines de cet état fondamental. Le champ de déplacements \vec{D} de ces configurations adjacentes peut alors être décrit sous la forme suivante :

$$\vec{D} = \vec{D}_0 + \varepsilon \vec{D}_1$$

avec \vec{D}_1 cinématiquement admissible et ε un scalaire infinitésimal. Ainsi, en introduisant dans les équations d'équilibre, outre les conditions aux limites, une forme algébrique \vec{D}_1 décrivant la géométrie flambée (le *mode de flambage*), on en déduit un système d'équations différentielles linéaire et homogène [SUN 86]. La détermination de la charge critique se résume alors à la recherche de la plus petite solution d'un problème aux valeurs propres. Une simplification classique de cette méthode consiste à utiliser le champ de déplacements pré-critiques \vec{D}_0 issu de la résolution des équations d'équilibre linéarisées : c'est le cadre de la *théorie linéaire du flambage* [GAL 76] [SUN 89] [SAM 95]. De plus, ces déplacements \vec{D}_0 sont souvent négligés dans le cas de petites perturbations [HUT 67] [BAR 83].

II.1.2. Instabilité des corps d'enceintes composites

L'utilisation fréquente de coques dans des domaines très divers (génie civil, aéronautique, construction navale...) a induit, dès le début du siècle, de nombreuses études concernant le flambage structural de telles structures [TIM 66] [BAR 83]. Compte tenu de la multiplicité des géométries, des matériaux constitutifs et des modes de sollicitations étudiés, il s'avérerait fort délicat et fastidieux de dresser un bilan exhaustif de ces travaux. Ainsi, les paragraphes suivants concerneront exclusivement la description, conforme aux enseignements de la littérature et aux travaux antérieurs des projets BRITE et MAST, de la phénoménologie de l'instabilité pour les corps d'enceintes sollicités en pression hydrostatique externe. Précisons que, au préalable, le paragraphe § II.1.2.1 présentera les procédures et moyens utilisés pour l'expérimentation des cylindres composites minces et semi-épais considérés. A ce propos, notons dès à présent que la classification des coques cylindriques utilise généralement les intervalles approximatifs suivants (avec R le rayon moyen et h l'épaisseur de paroi, cf. figure II.12) :

$$\left| \begin{array}{ll} - \text{cylindres minces} & \Leftrightarrow R/h > 10 \\ - \text{cylindres semi-épais} & \Leftrightarrow 5 \leq R/h \leq 10 \end{array} \right.$$

De plus, les tubes sont dits élancés pour un rapport L/R supérieur à 3 (avec L la longueur des tubes) [SIM 96].

II.1.2.1. Moyens et procédures d'essais

Dans le cadre des projets BRITE et MAST, les tests de mise en pression externe de cylindres composites pratiqués par l'IFREMER (ainsi que DERA, cf. § IV.2.8) sont réalisés à l'aide de caissons hyperbares schématisés par la figure II.3 [DAV 96] [WAR 99]. La mise en pression des cylindres équipés de tapes de fermetures est de type quasi-statique et linéaire. Notons que le principe même de ces essais induit un mode de pilotage en pression : de fait, le dépassement du seuil de pression critique conduit irrémédiablement à la ruine brutale (rupture par implosion) des cylindres testés. De plus, on remarquera que de tels dispositifs expérimentaux ne permettent pas la visualisation de la configuration flambée. Aussi, les cylindres sont généralement équipés de jauges de déformations (collées sur leurs surfaces internes) permettant alors de déduire les nombres de demi-ondes caractérisant le mode de flambage (voir [DAV 96] ainsi que la figure IV.39). Les systèmes d'acquisition doivent nécessairement permettre un échantillonnage très rapide, le dépassement du seuil d'instabilité conduisant à une implosion quasi-instantanée comme indiqué précédemment.

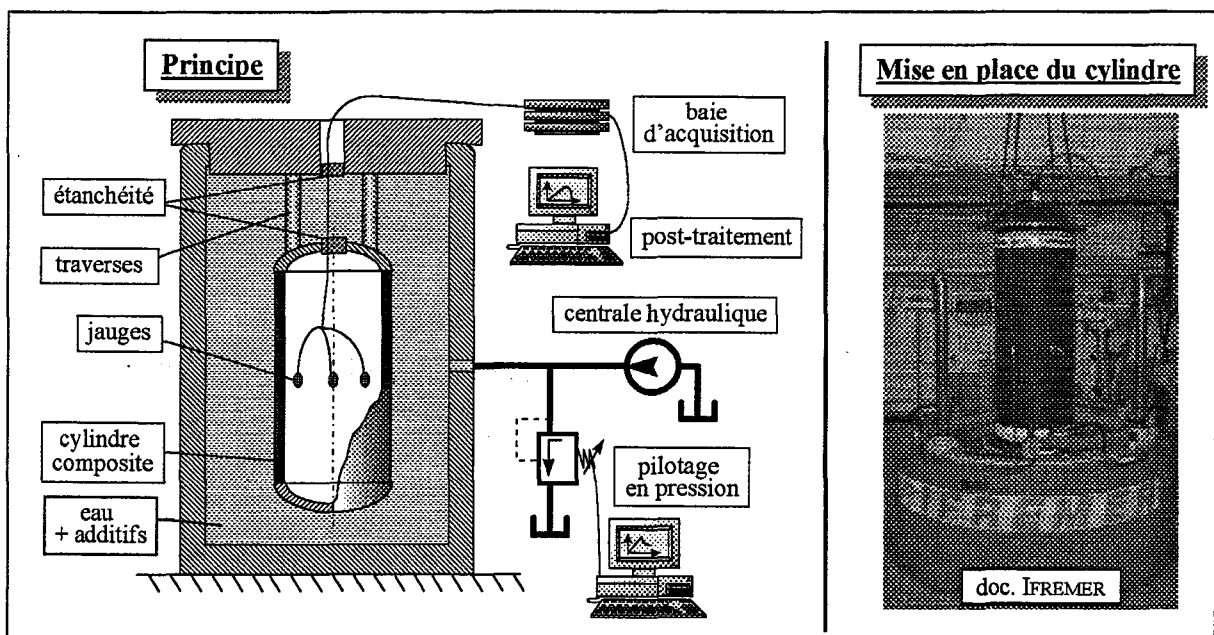


Figure II.3 : caissons hyperbares de l'IFREMER

Par ailleurs, un dispositif expérimental de mise en pression externe de cylindre a aussi été développé au sein de l'axe Structures du Laboratoire Mécanique et Matériaux durant l'année 1996/97. Le travail de conception a été assuré par Bernard GINESTE. Les objectifs ont consisté en la réalisation d'un système permettant le contrôle de l'instabilité ainsi que la visualisation des modes de flambage [GIN 97]. Le principe retenu est détaillé dans les références [GIN 98a] et [GIN 98b]. Ce dispositif, schématisé en figure II.4, est ainsi constitué d'un caisson cylindrique, la mise en pression étant réalisée à l'aide d'un vérin actionné par une machine de

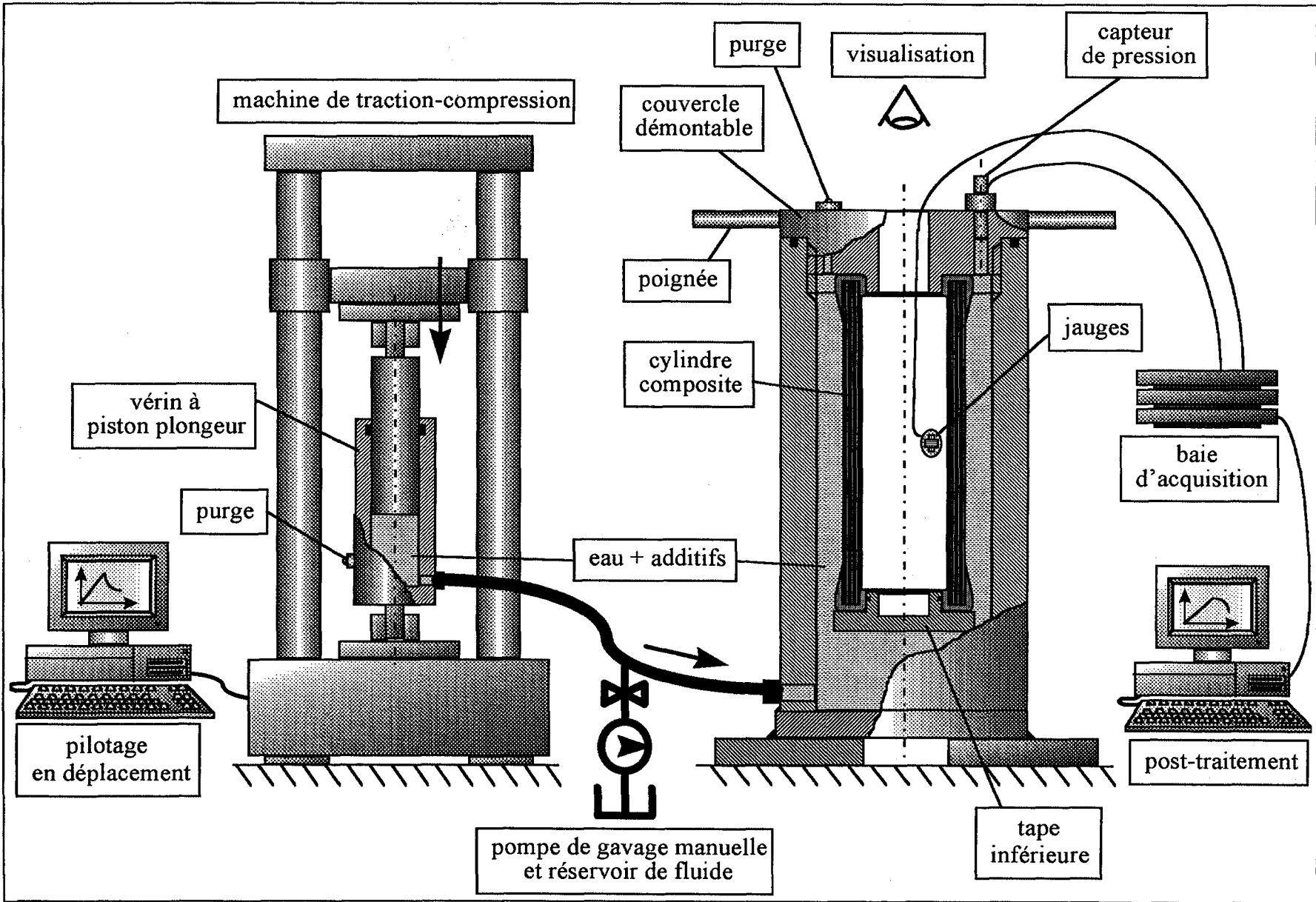


Figure II.4 : schéma de principe du système d'essais du LMM

traction-compression classique. Le pilotage des essais est réalisé en déplacements (ou plus exactement par contrôle du volume de fluide injecté dans le caisson) par contrôle des mouvements de la traverse de la machine d'essais. Ce procédé permet ainsi maîtriser l'amplitude des déplacements post-critiques et maintenir les cylindres dans leurs configurations flambées [GIN 98a]. A titre indicatif, la figure II.5 suivante présente une vue d'ensemble du caisson d'essai démonté. Précisons aussi que ce système a été prévu pour l'expérimentation de tubes de diamètres internes proches de 180 mm, de longueurs inférieures à 800 mm et pour des pressions inférieures à 400 bars. Le diamètre interne du vérin est, lui, égal à 81 mm.

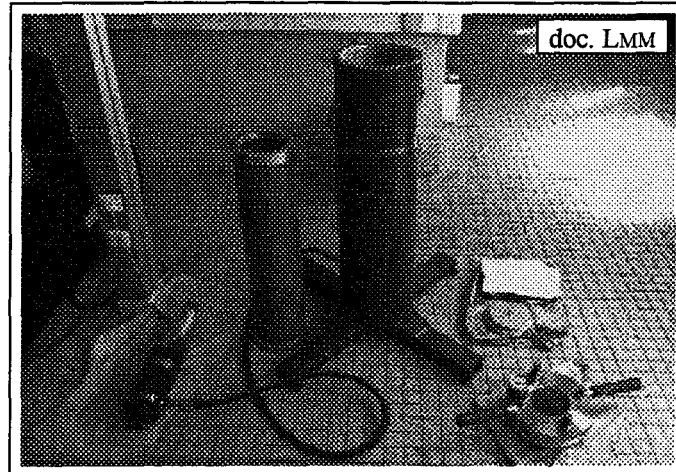


Figure II.5 : vue générale de l'enceinte d'essais

Comme schématisé en figure II.4, les cylindres testés sont obturés par une tige inférieure et par un couvercle ajouré, permettant alors la visualisation directe du mode de flambage à l'instar de l'exemple présenté en figure II.6 (voir aussi la figure IV.44).

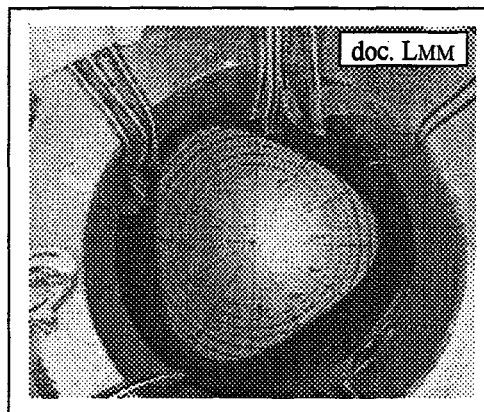


Figure II.6 : exemple de visualisation du mode de flambage

Notons de plus que, comme indiqué en figure II.7, les cylindres testés sont équipés de coiffes collées sur leurs extrémités et réalisées en aluminium (voir aussi la figure IV.42) : ces organes de liaisons, similaires à ceux utilisés pour les enceintes sous-marines (cf. figure I.3) permettent ainsi de proscrire toute surcontrainte et risque de matage des tubes composites [GIN 98a].

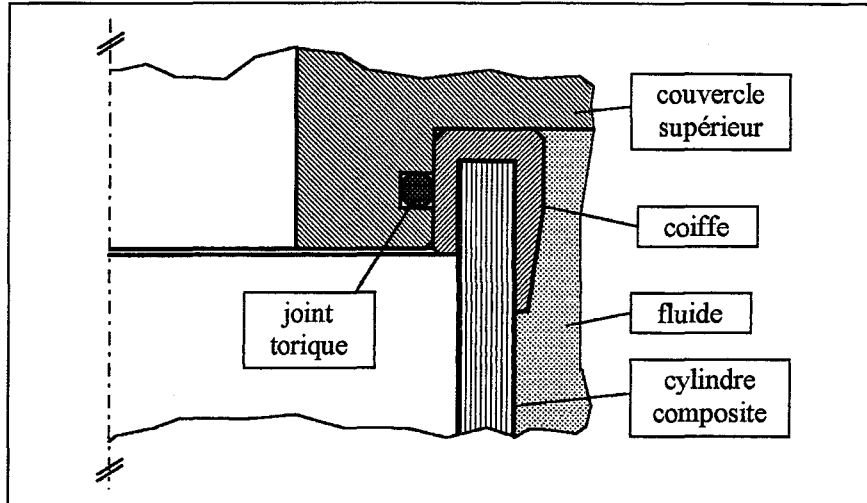


Figure II.7 : liaison aux extrémités des cylindres testés

Enfin, précisons que les tests réalisés à l'aide de ce dispositif ont permis de vérifier sa fiabilité ainsi que la reproductibilité des résultats obtenus (pressions critiques et modes correspondants). Le lecteur trouvera une description détaillée de ces travaux dans les références [GIN 98a] et [GIN 99a].

II.1.2.2. Données expérimentales

Comme précisé précédemment en § II.1.1, les travaux expérimentaux réalisés dans le cadre des projets BRITE et MAST concernant la conception d'enceintes sous-marines ont mis en évidence un phénomène d'instabilité de type flambage structural avec chute de la rigidité [GRA 95] [DAV 96]. La bifurcation (cf. figure II.1) conduit alors à la ruine brutale, la rupture étant généralement localisée à mi-longueur des cylindres composites [GRA 95] [WAR 99]. De plus, on remarquera que ces études ont montré que, quel que soit le type de cylindre considéré, l'évolution des déformations élastiques pré-critiques, mesurées avant d'atteindre le seuil de stabilité, s'avérait quasi-linéaire [DAV 96] [WAR 99] [GIN 99a]. A titre d'illustration, la figure II.8 suivante présente l'allure qualitative d'évolution de la pression pour un essai cyclé (avec incrément du chargement à chaque cycle) sur tube mince réalisé à l'aide du système présenté en figure II.4 [GIN 98a].

A ce propos, remarquons que des essais cyclés effectués au LMM, consistant à réaliser des mises en flambage successives de cylindres minces en verre/époxy, ont montré que les valeurs de pressions critiques n'étaient que peu affectées. Les résultats détaillés de cette étude sont présentés en [GIN 99a]. Aussi, ce travail a permis de vérifier que les tubes composites minces étaient peu sujets à un endommagement qui aurait alors été traduit par un affaissement sensible des limites de stabilité. Par contre, et comme indiqué par la référence [MIS 92], ce risque d'endommagement croît de pair avec la valeur d'épaisseur de paroi : les cylindres semi-épais peuvent ainsi s'avérer enclins à une rupture survenant à des valeurs de pression externe inférieures à la limite de stabilité [GRA 95] [DAV 96]. Notons cependant qu'un tel risque de rupture prématurée est prépondérant principalement pour les cylindres "courts", peu élancés

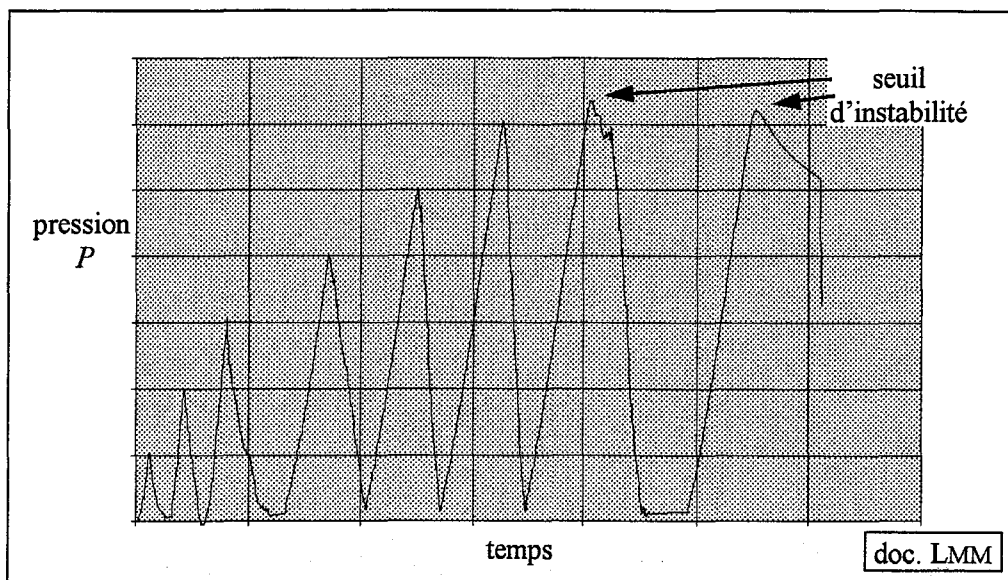


Figure II.8 : allures des résultats d'essais cyclés de mise en pression

[VIN 92] [GRO 00]. Néanmoins, la résistance statique des cylindres optimisés sera évaluée en § IV.2.7.3. Par ailleurs, notons que les campagnes expérimentales effectuées ont permis de vérifier que les coiffes métalliques des cylindres (cf. figures I.3 et II.7) proscrivaient bien tout endommagement localisé aux extrémités des tubes [GIN 98a] [WAR 99]. En outre, signalons dès à présent que les mécanismes de délaminage et de flambages locaux ainsi que le micro-flambage des renforts, souvent observés pour des structures composites à fibres longues sollicitées par des chargements de compression, ne seront pas considérés pour la présente étude compte tenu de la complexité inhérente à la modélisation de tels phénomènes [BOL 96] [DAN 96]. De plus, on notera que les contraintes résiduelles induites par les cycles de polymérisation des tubes composites (cf. § I.1.2.1) [DVO 96] [GRO 99], ayant une influence supposée sur le déclenchement de l'instabilité, ne seront pas prise en compte : en effet, l'examen de la littérature ne permet de recenser que peu de données et de résultats quant à leurs répartitions et leurs niveaux approximatifs.

Les modes de flambage correspondants, observés tant lors des essais pratiqués par l'IFREMER que ceux réalisés au LMM, se sont avérés correspondre à l'un des deux types suivants [GRA 95] [DAV 96] [GIN 99a] :

$$\left| \begin{array}{l} - m=1 \text{ et } n=2 \quad \Leftrightarrow \text{ mode "à 2 lobes"} \\ - m=1 \text{ et } n=3 \quad \Leftrightarrow \text{ mode "à 3 lobes"} \end{array} \right.$$

avec m et n les nombres de demi-ondes longitudinales et circonférentielles caractérisant les déplacements de la configuration flambée [BAR 83]. La figure II.9, issue de calculs de stabilité par modèles MEF (cf. § II.3), en précise les allures respectives. Notons que ces modes induisent des déplacements radiaux d'amplitudes très supérieures à celles des déplacements axiaux et tangentiels. On remarquera de plus que ces configurations flambées sont intimement liées à la nature de la sollicitation [TIM 66] [SUN 89] [SOL 94] : pour, par exemple, un chargement de compression axiale, les modes de flambage généralement observés sont en effet

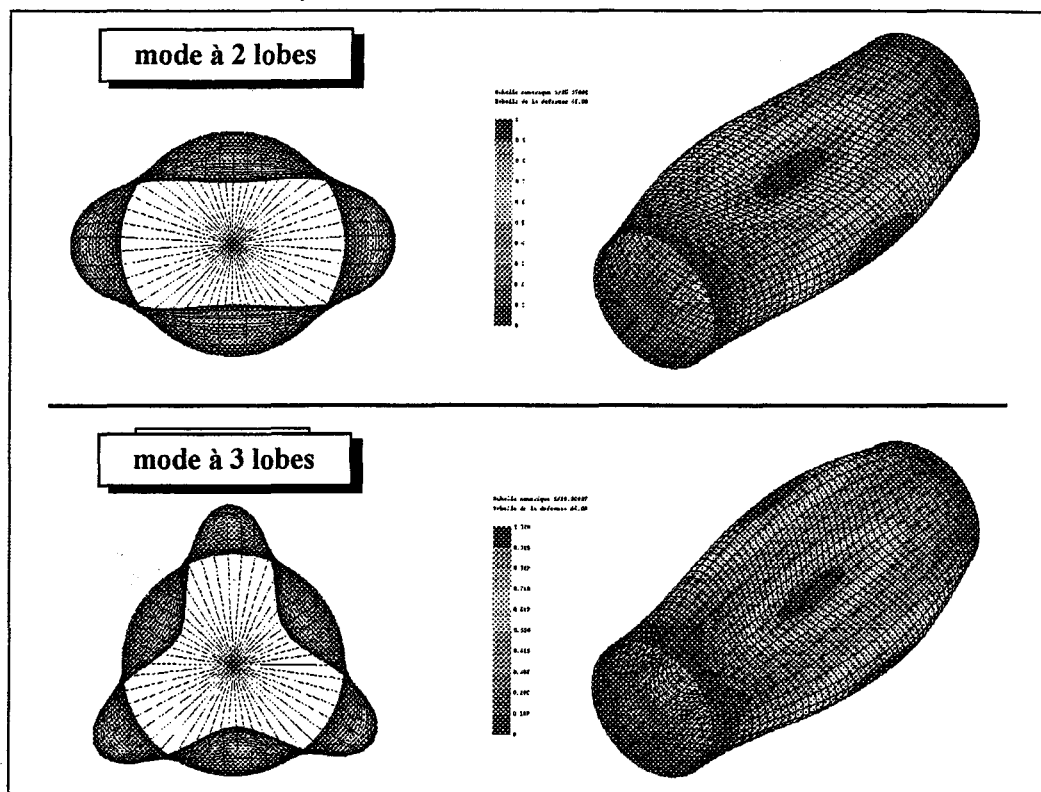


Figure II.9 : modes de flambage observés

de type axisymétrique ou "à damier", à l'instar des illustrations données par la référence [BAR 83]. Par ailleurs, signalons que les résultats expérimentaux, tels ceux présentés en figures II.23 et IV.39 ainsi que par la référence [WAR 99], ont permis de constater que ces modes de flambage apparaissent, "s'amorçait", à des niveaux de pression légèrement inférieurs aux limites de stabilité. Précisons cependant que ce phénomène n'est pas dommageable : en effet, pour de telles structures, les profondeurs d'immersions sont déterminées d'après les valeurs de pressions critiques alors affectées d'un coefficient de sécurité (généralement 1.5).

Les divers travaux expérimentaux réalisés dans le cadre des travaux de conception d'enceintes sous-marines composites ont aussi permis de vérifier un aspect souligné maintes fois, omniprésent, dans la littérature du domaine : les analyses de stabilité réalisées par modélisations numériques, analytiques ou MEF, linéaires ou non, tendent invariablement à surestimer les valeurs de pressions critiques réelles [TIM 66] [BAR 83] [SAM 95]. Ce désaccord expérience - prédiction est illustré par la figure II.10. Les très nombreux résultats bibliographiques permettent en effet de constater des écarts significatifs entre les limites de stabilité expérimentales et numériques, et ceci quel que soit la géométrie, le mode de chargement et le matériau constitutif. Notons ainsi, pour des tubes minces chargés en compression axiale, ces différences peuvent atteindre jusqu'à 60 % [TIM 66] [SAM 95]. Concernant les sollicitations de pression externe, les travaux de OUELLETTE [OUE 86] et de GRAHAM [GRA 95] ont, entre autres, montré que les limites de stabilité numériques s'avéraient jusqu'à deux fois plus élevées que celles mesurées. Aussi, de très nombreux travaux ont tenté d'évaluer les sources de ce désaccord. Les premières études ont concerné l'influence

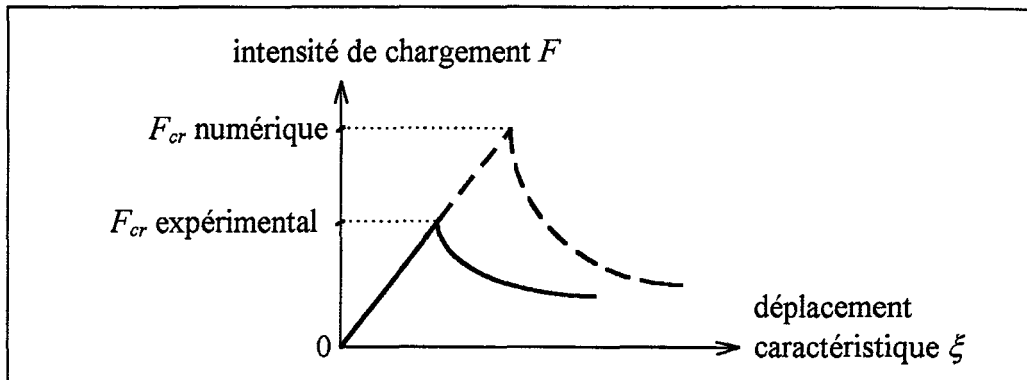


Figure II.10 : confrontation des résultats expérimentaux et numériques

des composantes non linéaires des déformations élastiques pré-critiques [HOF 66] [BAR 83] [WAN 95]. De même, l'aspect "suiveur" des sollicitations de pression (*charge vive* induisant des non-linéarités géométriques) a aussi été considéré [DUB 95]. Cependant, et malgré la prise en compte de tels aspects pour les modèles numériques, ces phénomènes n'ont permis de justifier le désaccord illustré par la figure II.10 [BAR 83]. Aussi, les indications de la littérature conduisent à considérer deux causes principales, détaillées plus avant : la présence d'imperfections géométriques et la nature des conditions aux limites cinématiques. Signalons néanmoins que l'étude des écarts entre les prédictions numériques et les limites de stabilité réelles est un domaine toujours actuel et actif, objet de très nombreux travaux bibliographiques.

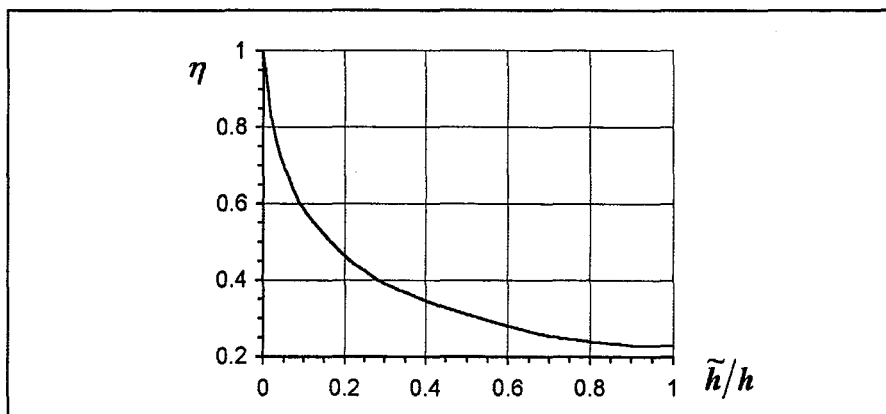


Figure II.11 : influence des imperfections géométriques pour des tubes minces en compression axiale

De très nombreux travaux ont ainsi accordés une attention particulière à l'influence des défauts géométriques des coques cylindriques. L'analyse asymptotique établie par KOITER [KOI 63] [BAR 83] a en effet mis en évidence, analytiquement, la sensibilité importante des valeurs de charges critiques à l'introduction d'une forme algébrique d'imperfections. La figure II.11 présente, à titre indicatif, l'allure qualitative caractéristique de réduction de pression critique de cylindres minces sollicités en compression axiale [BAR 83], et ceci en fonction de l'amplitude équivalente \tilde{h} des défauts (voir § II.2.5.3, h désignant l'épaisseur de paroi). Précisons que la définition du facteur η est précisée par la relation (II.77). De nombreux

auteurs ont ainsi étudié l'influence de diverses classes d'imperfections géométriques. Les développements analytiques correspondants seront discutés dans le paragraphe § II.2.5.3. Par ailleurs, précisons que ces défauts géométriques s'avèrent fort délicats à évaluer pour les corps d'enceintes sous-marines : en effet, comme précisé en § I.1.2.1, la surface externe des cylindres composites utilisés est perturbée, irrégulière et grossière, compte tenu de la migration de la résine et de l'utilisation de gels imperméabilisants [GRO 99]. Un contrôle géométrique classique (par palpation) conduit ainsi à évaluer les défauts d'une couche externe de matériau n'ayant qu'un rôle mécanique négligeable sur le comportement global de la structure. Aussi, précisons que l'influence des défauts sur les résultats d'optimisation (voir § IV.2.6.4) sera évaluée pour des valeurs d'imperfections classiques et issues de la bibliographie [OUE 86] [SUN 86].

Concernant l'influence des conditions aux limites cinématiques sur les limites de stabilité, de nombreux travaux ont notamment concerné les cylindres minces soumis à des sollicitations de compression axiale : citons ainsi les travaux présentés en [ALM 66] qui permettent de constater des écarts proches de 50 % entre les charges critiques de cylindres minces encastres ou simplement soutenus à leurs extrémités. De même, et pour une sollicitation de pression latérale externe, SOBEL [SOB 64] a montré que les limites de stabilité réelles pouvaient varier de plus de 40 % en considérant ces différents types de conditions aux limites cinématiques. Cependant, soulignons que ces travaux ont concerné des cylindres très minces et courts (la longueur étant identique au rayon moyen) et donc très sensibles aux effets de bords [TIM 66] [SOL 94]. Rappelons que les corps d'enceintes ici considérés possèdent des géométries élancées et s'avèrent de type mince et semi-épais. Aussi, et considérant de plus le type de liaison aux extrémités réalisé par coiffes métalliques (cf. figure I.3), la modélisation des conditions aux limites cinématiques sera plus amplement discutée en § II.3.3 dans le cadre de la description des modèles MEF.

II.2. Modèles analytiques

Comme indiqué en § I.2.3, les travaux applicatifs de la présente étude seront réalisés par couplage d'une procédure d'optimisation (cf. chapitre III) avec des modèles analytiques du flambage de cylindres stratifiés sollicités en pression hydrostatique externe (voir les figures I.6 et IV.1). Les paragraphes suivants détaillent ainsi les formulations retenues.

II.2.1. Données de la littérature

Le développement de modèles analytiques du flambage de cylindres isotropes et aussi composites a été l'objet de très nombreux travaux bibliographiques. Précisons que la plupart de ces formulations utilisent des formes de champs de déplacements rapportés à la surface moyenne des tubes [BAR 83] [BAN 96]. Les quelques développements analytiques basés sur une formulation élastique tridimensionnelle présentés dans la littérature, tels ceux détaillés en

[KAR 93] et [SOL 94], concernent la modélisation de cylindres isotropes ou composites orthotropes. De par leur complexité, ces formulations s'avèrent difficilement applicables et généralisables à des modes de stratifications complexes.

Comme précisé en § I.2.2, les travaux antérieurs portant sur l'optimisation de la stratification de cylindres afin d'en accroître les limites de stabilité ont recouru à l'emploi de formulations analytiques négligeant les effets de cisaillement transverse : il s'est notamment agi des modèles de type SANDERS et surtout de type DONNELL [DON 76] [SUN 86] [SAM 95]. A ce propos et comme précisé notamment en [BAN 96] et [SAM 95], soulignons que le modèle de DONNELL est destiné à la modélisation de cylindres courts, l'hypothèse correspondante (précisée à titre indicatif en § II.2.4) consistant à négliger les dérivées partielles des composantes tangentielles de déplacements et la résultante de cisaillement vis à vis de la valeur de rayon moyen. Aussi, ce type de formulation ne sera pas considéré pour la présente étude portant sur l'optimisation de corps d'enceintes élancés.

Compte tenu de la sensibilité des structures composites au cisaillements transverse [GAY 97] [DES 97], quelques auteurs ont proposé des modèles permettant la prise en compte des composantes de déformations et de contraintes correspondantes à l'instar du modèle de plaques de type MINDLIN-REISSNER [BAR 83]. Ces formulations utilisent ainsi des formes algébriques décrivant le champ de déplacements de type linéaires ou cubiques (*TOSD* et *FOSD*, voir § II.2.6.1 et § II.2.7.1) [SOL 92] [SIM 96] [TAB 97].

Par ailleurs, ces modèles intégrant les effets de cisaillement transverse s'avèrent fréquemment utilisés pour la modélisation du flambage de coques semi-épaisses [SIM 96]. Soulignons cependant que, à l'instar des modèles de type SANDERS et DONNELL, les formulations analytiques correspondantes utilisent quasi-systématiquement l'hypothèse classique de coque mince notée H4 en § II.2.4, hypothèse consistant à négliger la valeur de l'épaisseur de paroi vis à vis de celle du rayon moyen. Elle induit de fait des simplifications notoires (voir § II.2.5.1 et § II.2.5.4). Bien que généralement considérée valide pour les coques semi-épaisses [KAR 93] [SOL 94] [SIM 96], il s'avérait néanmoins nécessaire, pour les corps d'enceintes étudiés, d'évaluer l'incidence de cette hypothèse sur les résultats d'optimisation. Précisons que les quelques modèles (généralement de type FLÜGGE [BAR 83] [BAN 96]) de la littérature ne l'intégrant pas utilisent des formulations complexes basées sur des développements asymptotiques. Aussi, un modèle spécifique de cylindres semi-épais a été développé pour la présente étude (voir § II.2.7).

Au vu des travaux présentés dans la littérature, corroborés par les tests préliminaires présentés en § II.4.1, on constate que les formulations analytiques ne permettent généralement qu'une approximation très grossière des limites de stabilité réelles : les charges critiques s'avèrent systématiquement surévaluées, et ceci particulièrement pour les coques semi-épaisses. Aussi, et comme précisé en § I.2.3, l'intérêt de ces modèles analytiques pour la présente étude réside dans leur sensibilité aux paramètres de stratification, permettant de fait la recherche de solutions optimisées accroissant les pressions critiques. Conformément aux

indications de la littérature [BOO 79] [ONO 85] [SUN 89] [BAN 96] [SRI 97], les formulations de type élastiques linéaires et basées sur la méthode de l'équilibre adjacent (cf. § II.1.1) sont bien adaptées pour une telle démarche de travail. Soulignons de plus que ce choix s'avère justifié pour le type de problème étudié, les résultats expérimentaux du flambage de corps d'enceintes ayant mis en évidence des évolutions de déformations pré-critiques quasi-linéaires (cf. § II.1.2.2). De même, le comportement des matériaux composites utilisés sera considéré comme étant élastique et linéaire, et ceci à l'instar des travaux numériques antérieurs des projets BRITE et MAST [TSO 96] [PAP 98] [LEF 99]. Enfin, on remarquera que cette démarche de modélisation analytique du flambage de cylindres dispense d'employer des procédures numériques spécifiques de résolutions de systèmes non linéaires [SUN 88], permettant ainsi de limiter le coût CPU d'utilisation du code d'optimisation créé pour cette étude (cf. figure IV.1).

Pour la présente étude, trois modèles analytiques du flambage de cylindres stratifiés ont ainsi été retenus : le premier est de type SANDERS. Le second, nommé *C73*, permettra d'évaluer l'influence des effets de cisaillement transverse sur les résultats d'optimisation. Enfin, un modèle de cylindres semi-épais (modèle *LOG*), n'intégrant pas l'hypothèse habituelle de coque mince, sera aussi utilisé. Les formulations respectives sont présentées en § II.2.5, § II.2.6 et § II.2.7. Le mode de prise en compte des imperfections géométriques est détaillé en § II.2.5.3. Au préalable, les paragraphes § II.2.2, § II.2.3 et § II.2.4 permettront de préciser les notations adoptées, les relations basiques ainsi que les hypothèses de travail.

II.2.2. Repérage et notations principales

La figure II.12 présente ainsi les principales notations et le mode de repérage qui ont été adoptés pour l'ensemble de cette étude. Les caractéristiques géométriques des cylindres seront nommées comme suit : longueur L , rayon moyen R et épaisseur h . Les coordonnées du repère structure (x, y, z) (cf. figure AI.1), attaché à la surface moyenne Σ des cylindres, sont mesurées dans les directions axiale, circonférentielle et radiale, respectivement. On a ainsi :

$$0 \leq x \leq L \quad ; \quad 0 \leq y \leq 2\pi R \quad ; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}. \quad (\text{II.1})$$

Le champ de déplacements tridimensionnels correspondants est donné par :

$$\{D\} = \left\{ \begin{array}{l} U = U(x, y, z) \\ V = V(x, y, z) \\ W = W(x, y, z) \end{array} \right\}. \quad (\text{II.2})$$

Par ailleurs, on remarquera les axes curvilignes hélicoïdaux \bar{e}_1 et \bar{e}'_1 de la base du repère matériau permettant, pour chaque pli, le repérage de la disposition des renforts en $\pm\theta$ (cf. figure I.4). En outre, P désignant la valeur de pression hydrostatique externe, la limite de stabilité des cylindres sera notée P_{cr} .

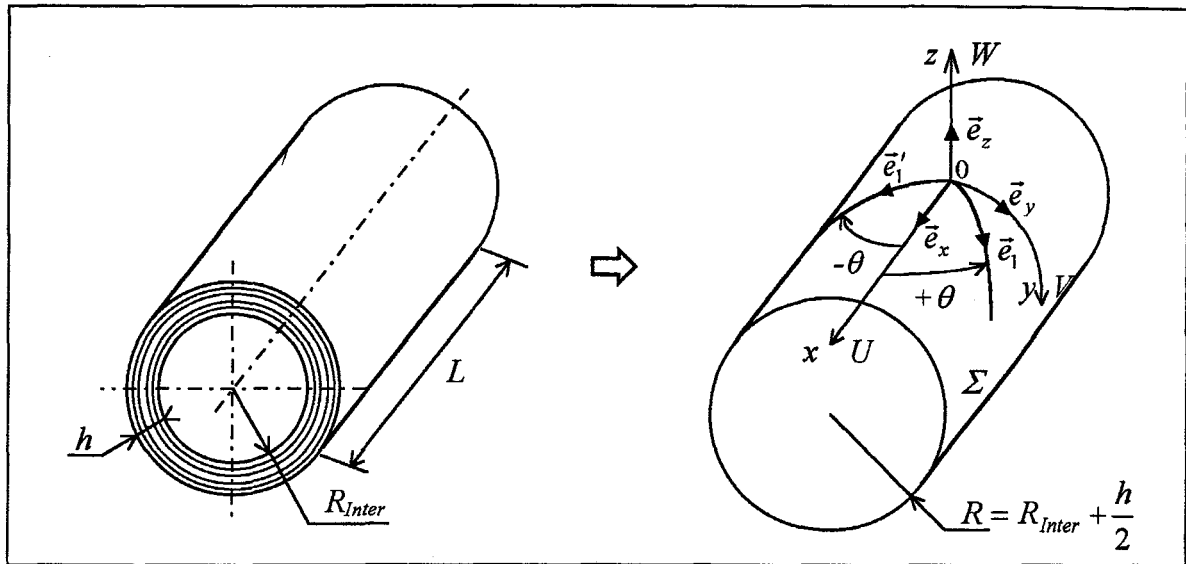


Figure II.12 : géométrie et repérage

Précisons dès à présent que, à l'instar de travaux tels que ceux détaillés en [NSH 83], [SUN 89] et [KAR 93], tout pli sera considéré comme étant de type équilibré en $\pm\theta$ (cf. § AI.1.4) pour les divers modèles analytiques et MEF (cf. § II.3) utilisés lors de cette étude. En effet, rappelons que, considérant le principe d'obtention des corps d'enceintes détaillé en § I.1.2.1, chaque couche comporte des renforts disposés en proportions identiques selon des angles $-\theta$ et $+\theta$ [DVO 96] [ROU 97]. De fait, pour chaque pli en $\pm\theta$, la valeur d'angle de stratification correspondante sera notée θ et exprimée en degrés. Les séquences en $[\pm 55^\circ_N]$ des cylindres de référence initialement utilisés (cf. § I.2.1) seront ainsi notées $[55_N]$ dans la suite de ce mémoire. Par ailleurs, et comme précisé par la figure II.13 suivante, les plis seront numérotés à partir de la surface interne des cylindres. Enfin, signalons que les séquences étudiées dans le chapitre IV utiliseront un type de représentation de type "histogramme" car plus expressif que le mode de notation classique des stratifications : ce type de figure permettra ainsi de visualiser l'allure de la séquence de plis successifs, les valeurs d'angles étant indiquées en ordonnées.

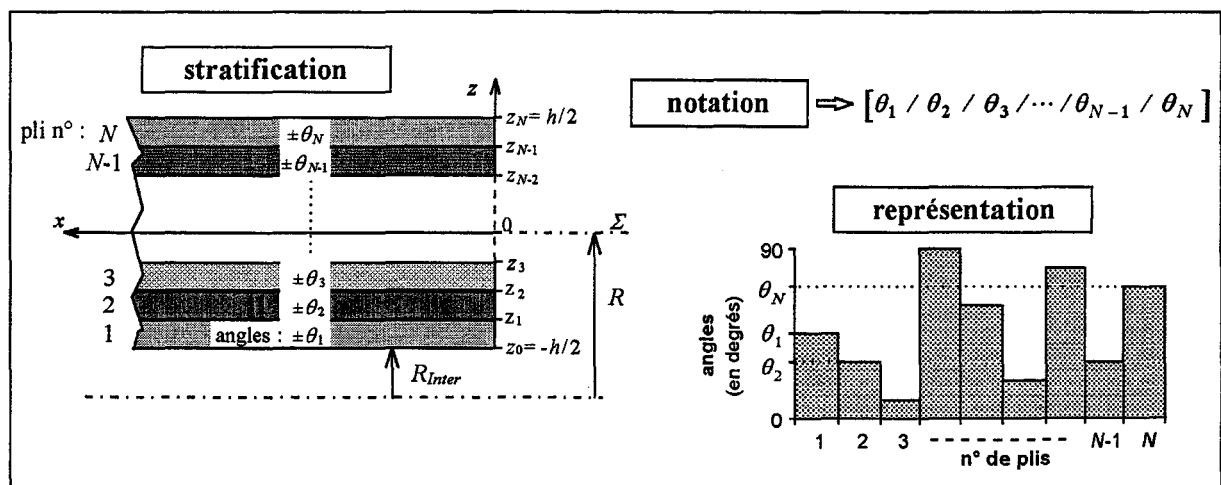


Figure II.13 : notation et représentation des stratifications

II.2.3. Relations basiques

II.2.3.1. Déformations

Considérant la forme du champ de déplacements tridimensionnels précisé par la relation (II.2), le tenseur gradient de déformations (en configuration lagrangienne) a alors pour expression [BOU 92] :

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{1}{1+z/R} \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{1}{1+z/R} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{W}{R} \right) & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{1}{1+z/R} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{V}{R} \right) & \frac{\partial W}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (\text{II.3})$$

Aussi, le tenseur de déformations linéarisées $[\varepsilon]$ est donné par [BAR 83] :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left([F] + [F]^T \right) - [I] \quad (\text{II.4})$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{1+z/R} \frac{\partial U}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ & \frac{1}{1+z/R} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{W}{R} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{1+z/R} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{V}{R} \right) \right) \\ + \text{sym.} & & \frac{\partial W}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

De plus, on remarquera la forme du tenseur antisymétrique de rotations linéarisées [SOL 92] :

$$[\omega] = \begin{bmatrix} \omega_{xx} & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & \omega_{yy} & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & \omega_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left([F] - [F]^T \right) \quad (\text{II.5})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+z/R} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{1+z/R} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{V}{R} \right) \right) \\ + \text{antisym.} & & 0 \end{bmatrix}.$$

II.2.3.2. Résultantes de contraintes

Les expressions des résultantes linéiques de contraintes (efforts membranaires N_i , efforts tranchants T_i et moments linéiques M_i), présentées en figure IV.14 pour une portion de coque cylindrique, sont données par [BAR 83] [BOU 92] :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_{xy} \\ T_x \\ M_x \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ z \sigma_{xx} \\ z \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} N_y \\ N_{yx} \\ T_y \\ M_y \\ M_{yx} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{yy} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{yz} \\ z \sigma_{yy} \\ z \sigma_{yx} \end{Bmatrix} dz. \quad (\text{II.6})$$

Remarquons que, compte tenu de la courbure de la paroi, les efforts et moments tangentiels généralisés (N_{xy} et N_{yx} ainsi que M_{xy} et M_{yx}) ne sont pas réciproques [BOU 92] [BAN 96].

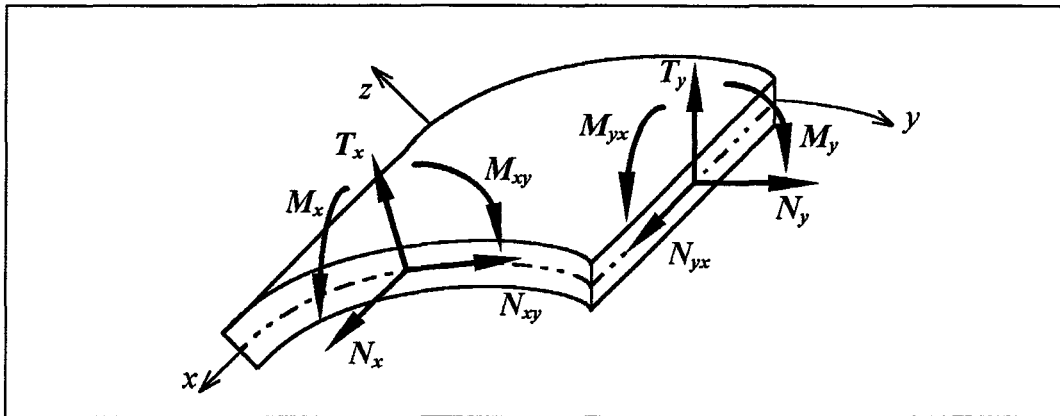


Figure II.14 : résultantes de contraintes

II.2.3.3. Equations d'équilibre

Considérant les équations fondamentales de la mécanique des solides, l'état d'équilibre statique d'un cylindre est exprimé à l'aide des cinq relations suivantes [BOU 92] [SOL 92] :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{T_y}{R} + f_y = 0 \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} - \frac{N_y}{R} + f_z = 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - T_x + m_x = 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - T_y + m_y = 0 \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Pour un chargement de pression externe P , les composantes de sollicitation sont données par [BAR 83] [SUN 86] :

$$f_x = f_y = f_z = 0 \quad (\text{II.9})$$

et :

$$m_x = P k_x \omega_{xz} \quad ; \quad m_y = P k_y \omega_{yz} \quad (\text{II.10})$$

les termes ω_{xz} et ω_{yz} étant précisés en (II.5). Les moments linéiques sont ainsi exprimés à l'aide des coefficients suivants permettant de traduire les effets de la pression externe rapportés à la fibre moyenne Σ :

$$k_x = \left(R + \frac{h}{2} \right)^2 / 2R \quad ; \quad k_y = R + \frac{h}{2}. \quad (\text{II.11})$$

Notons que, pour des problèmes de coques minces, de nombreux auteurs utilisent les formes simplifiées suivantes [TIM 66] [SUN 86] :

$$k_x = R/2 \quad ; \quad k_y = R$$

simplification issue de l'introduction de l'hypothèse notée H4 en § II.2.4.

II.2.4. Hypothèses

La modélisation du flambage des coques recourt à l'introduction de certaines des hypothèses classiques énoncées comme suit.

H1 : 1^{ère} hypothèse de LOVE-KIRCHHOFF

Les déformations de cisaillement transverse sont négligeables, soit donc :

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0.$$

H2 : 2^{ème} hypothèse de LOVE-KIRCHHOFF

Les déformations longitudinales en direction de l'épaisseur des coques s'avèrent négligeables :

$$\varepsilon_{zz} = 0.$$

Remarquons que l'intégration de cette hypothèse ainsi que celle notée H1 conduit à considérer un état plan de déformation.

H3 : 3^{ème} hypothèse de LOVE-KIRCHHOFF

Les contraintes normales dans l'épaisseur des cylindres sont négligeables :

$$\sigma_{zz} = 0.$$

Précisons que cette hypothèse sera discutée ultérieurement en § II.2.5.4.

H4 : hypothèse de coque mince

L'épaisseur de la coque est faible vis à vis de la valeur du rayon moyen, d'où :

$$h/R \ll 1.$$

Enfin, remarquons à titre indicatif l'énoncé de l'hypothèse de DONNELL (cf. § II.2.1) [DON 76] [BAR 83].

H5 : hypothèse de DONNELL

Pour des coques courtes, les termes $\frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial y}$ et $\frac{T_y}{R}$ sont négligeables.

II.2.5. Modèle de type SANDERS

Comme précisé au terme du paragraphe § II.2.1, le premier modèle analytique retenu pour cette étude est basé sur la théorie de coque de SANDERS [SAM 95] (aussi nommé *théorie de type LOVE* par analogie avec les modèles classiques de plaques [BAR 83]). Les paragraphes suivants présentent ainsi la démarche générale de la formulation analytique similaire à celles notamment détaillées en [BAR 83], [SOL 92] ou encore [BAN 96]. Ils permettront de plus de préciser le type de modélisation adoptée pour la prise en compte des imperfections géométriques ainsi que la formulation variationnelle utilisée pour l'obtention de la forme finale du problème aux valeurs propres.

II.2.5.1. Champ de déformations

Le champ de déplacements tridimensionnels (cf. § II.2.2) considéré pour ce type de modèle est une forme linéaire du type :

$$\{D\} = \begin{cases} U(x, y, z) = u(x, y) + z \varphi_x(x, y) \\ V(x, y, z) = v(x, y) + z \varphi_y(x, y) \\ W(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Considérant les termes de déformations linéarisées donnés par la relation (II.4), on en déduit alors :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2 \varepsilon_{yz} \\ 2 \varepsilon_{xz} \\ 2 \varepsilon_{xy} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{1}{1+z/R} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \\ 0 \\ \frac{1}{1+z/R} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R} + \varphi_y \right) \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \\ \frac{1}{1+z/R} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left(\frac{\partial v}{R \partial x} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{z}{R} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \right] \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

On remarquera que, w étant fonction d'uniquement x et y , le champ de déplacements donné en (II.12) permet de satisfaire implicitement à la deuxième hypothèse de LOVE-KIRCHHOFF (hypothèse H2, cf. § II.2.3). L'idée suivante consiste à considérer l'hypothèse de coque mince notée H4. De fait, les déformations linéarisées de la relation (II.13) sont alors données par :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R} + \varphi_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left(\frac{\partial v}{R \partial x} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \end{array} \right\}. \quad (\text{II.14})$$

Considérant ces expressions, l'introduction au problème de la première hypothèse de LOVE-KIRCHHOFF (hypothèse H1), conduisant à négliger les déformations de cisaillement transverse ε_{xz} et ε_{yz} , permet alors d'écrire :

$$\varphi_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{et} \quad \varphi_y = \frac{v}{R} - \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (\text{II.15})$$

Ainsi, le problème est uniquement conditionné par les trois composantes de déplacements u , v et w . Par la suite de cette étude, on considérera donc le champ de déplacements $\{D_\Sigma\}$ rapporté à la surface moyenne :

$$\{D_\Sigma\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}. \quad (\text{II.16})$$

Par ailleurs, remarquons que le champ de déformations linéarisées, comportant désormais uniquement les termes ε_{xx} , ε_{yy} et ε_{xy} , peut être décomposé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} + z \left\{ \begin{array}{l} \frac{-\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v}{R \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \left(\frac{\partial v}{R \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{array} \right\} = \{\varepsilon_m\} + z \{\chi\} \quad (\text{II.17})$$

les déformations de membrane $\{\varepsilon_m\}$ et les courbures $\{\chi\}$ étant alors exprimées en fonction du champ de déplacements $\{D_\Sigma\}$ sous la forme :

$$\{\varepsilon_m\} = [\Gamma_{sm}] \{D_\Sigma\} \quad ; \quad \{\chi\} = [\Gamma_\chi] \{D_\Sigma\} \quad (\text{II.18a})$$

$$\text{avec : } [\Gamma_{sm}] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 1/R \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} ; [\Gamma_x] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\partial^2/\partial x^2 \\ 0 & \partial/R \partial y & -\partial^2/\partial y^2 \\ 0 & 2\partial/R \partial x & -2\partial^2/\partial x \partial y \end{bmatrix} \quad (\text{II.18b})$$

II.2.5.2. Approximation des déplacements

A l'instar de la plupart des travaux de la littérature, l'approximation du champ de déplacements $\{D_\Sigma\}$ est réalisée sous la forme [BAR 83] [SUN 86] [SOL 92] :

$$\{D_\Sigma\} = [\phi] \{a\} = \begin{bmatrix} \phi_u & 0 & 0 \\ 0 & \phi_v & 0 \\ 0 & 0 & \phi_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_u \\ a_v \\ a_w \end{Bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

et ceci à l'aide des fonctions de formes bi-harmoniques suivantes :

$$\begin{cases} \phi_u = \cos(\bar{m}x) \cos(\bar{n}y) \\ \phi_v = \sin(\bar{m}x) \sin(\bar{n}y) \\ \phi_w = \sin(\bar{m}x) \cos(\bar{n}y) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{m} = m\pi/L \\ \bar{n} = n/R \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

Rappelons que les entiers m et n correspondent respectivement aux nombres de demi-ondes longitudinales et circonférentielles caractérisant le mode de flambage (cf. § II.1.2.2). Précisons de plus que les coefficients a_u , a_v et a_w caractérisent les amplitudes relatives et respectives des déplacements longitudinaux, circonférentiels et radiaux de la configuration flambée. On remarquera que les fonctions de forme ϕ_i permettent ainsi d'approximer des modes de flambage asymétriques (semblables à ceux présentés en figure II.9 par exemple) et aussi de type axisymétrique (caractérisés par $n = 0$). La figure II.15 suivante présente ainsi quelques allures de configurations flambées déduites de ce champ de déplacements.

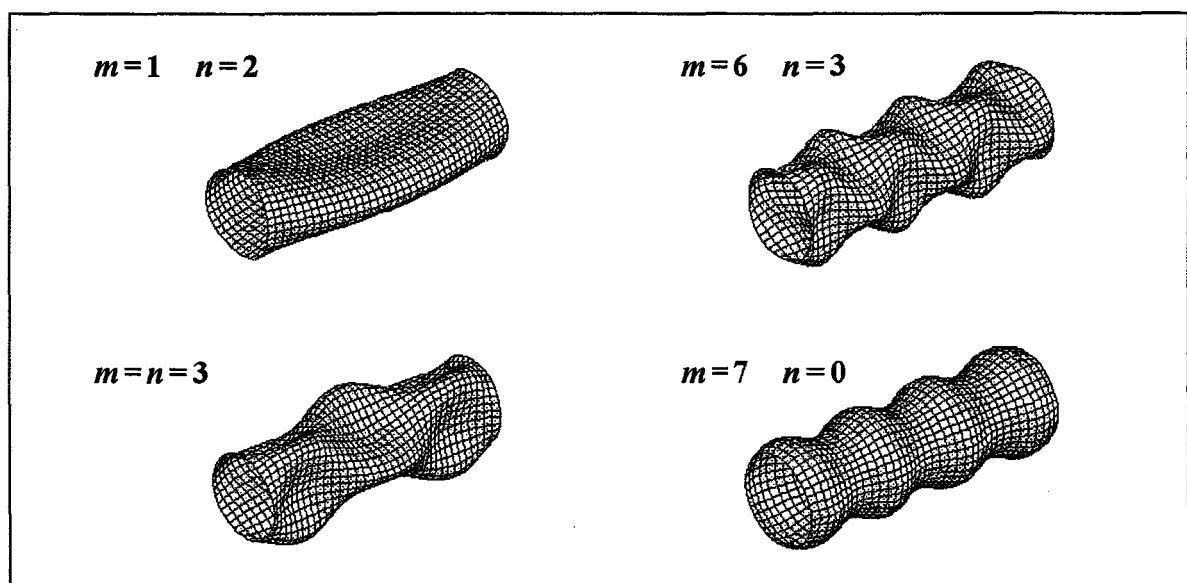


Figure II.15 : exemples d'approximations des modes de flambage

Soulignons que les conditions aux limites cinématiques correspondantes aux extrémités des cylindres s'avèrent alors de type appui simple. En effet, considérant les expressions données en (II.19) et (II.20), il vient, pour $x = 0$ et $x = L$:

$$\begin{cases} v = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \partial v / \partial x \neq 0 \\ \partial w / \partial x \neq 0 \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

Précisons que ce choix s'avère très classique pour l'ensemble des travaux du domaine [BAR 83] [SUN 89] [SOL 92] [SRI 97]. En effet, et comme indiqué notamment en [SOL 94] et discuté en § II.3.3, la sensibilité des résultats numériques à la nature des conditions aux limites cinématiques s'avère relativement faible, les corps d'enceintes considérés étant élancés. Précisons néanmoins que quelques auteurs ont proposé l'utilisation de formes algébriques plus complexes permettant de modéliser des liaisons de type encastrement : citons par exemple [SUN 88] et [TAB 97] qui utilisent des développements en séries de FOURRIER pour l'approximation des déplacements critiques. La résolution du problème aux valeurs propres (cf. § II.2.5.5) correspondant requiert alors l'utilisation de procédures numériques (de type *méthode de la puissance* [CRA 96]) induisant un coût CPU non négligeable. En outre, précisons que la modélisation précise de la liaison aux extrémités des cylindres composites, réalisée par le biais des coiffes schématisées en figure I.3, s'avérerait fort délicate à appréhender (voir § II.3.3). Aussi, l'approximation donnée en (II.20), bien qu'imparfaite et discutable, sera utilisée pour la présente étude.

II.2.5.3. Modélisation des imperfections géométriques

Comme indiqué précédemment en § II.1.2.2, la prise en compte d'imperfections géométriques a donné lieu à de très nombreux développements concernant la modélisation du flambage de cylindres. On remarquera ainsi des travaux permettant la modélisation de répartitions pseudo-aléatoires de défauts de cylindricité par séries de FOURRIER [ARB 91], de variations pseudo-harmoniques d'épaisseur de la paroi [SRI 97]... Cependant, et malgré la diversité de ces développements, on constate que la très grande majorité d'entre eux considère un type unique de défaut : le modèle d'imperfection géométrique généralement adopté consiste ainsi en une déflexion harmonique, axisymétrique ou asymétrique, de la surface moyenne Σ des cylindres [TEN 71] [BOO 79] [SUN 86]. L'épaisseur de paroi est, elle, considérée constante. Signalons que ce type de modèle est issu de travaux antérieurs concernant le flambage de cylindres isotropes [HUT 67] [BAR 83].

Ce type de modèle d'imperfections s'avère peu réaliste pour les structures composites ici considérées : en effet, et comme précisé notamment par les références [OUE 86] [DAV 96], les défauts géométriques observés pour les cylindres obtenus par enroulement filamentaire consistent en une variation d'épaisseur de la paroi. De plus, notons que l'épaisseur de chaque pli composite est généralement sujette à une "pseudo-ondulation" générée par les allers-retours de guides-fils et l'entrelacement des bandes de renforts (cf. § I.1.2.1) [BRI 87] [DVO 96] [ROU 97]. Ce type de défaut est illustré par la figure II.16 (tirée de la référence [GRO 99])

présentant un exemple de micrographie d'un échantillon issu d'une coupe longitudinale effectuée dans l'épaisseur d'un cylindre en verre/époxy stratifié en [55_M]. Les variations d'épaisseurs de plis apparaissent ainsi très nettes et marquées. Précisons à ce propos que, suite à ce type d'observations micrographiques, GROHENS [GRO 99] a montré que ces épaisseurs de couches variaient entre environ 0.28 et 0.51 mm pour de tels cylindres.

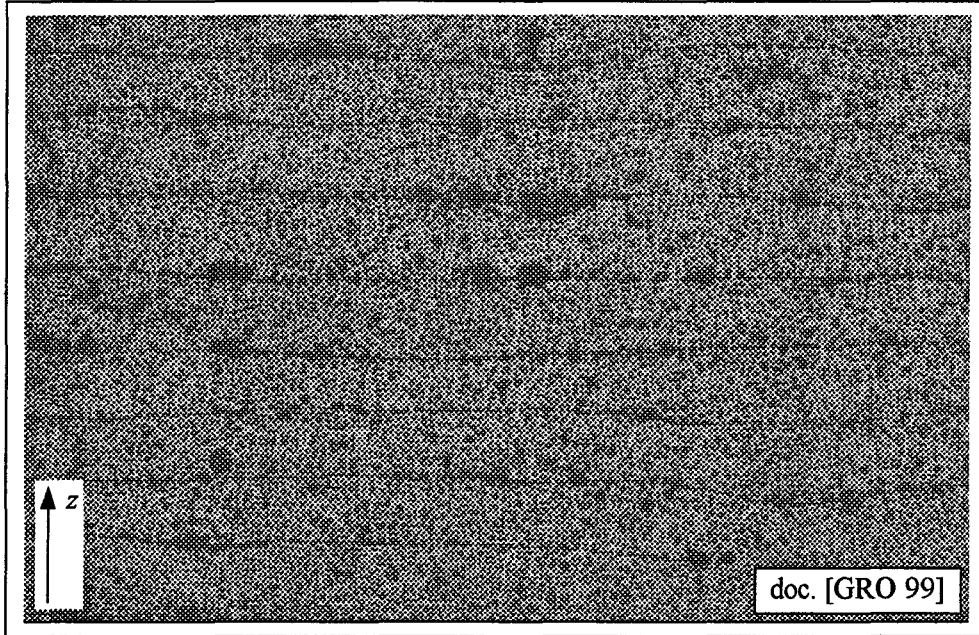


Figure II.16 : micrographie de plis composites

Aussi, un modèle spécifique d'imperfections géométriques a été développé pour la présente étude. Le modèle retenu est basé sur une analogie avec les défauts réels (ondulation et variation d'épaisseur) des plis composites. Les altitudes z_k et z_{k-1} délimitant le $k^{\text{ième}}$ pli du stratifié (cf. figure II.13) seront ainsi remplacées par les formes \tilde{z}_k et \tilde{z}_{k-1} définies par :

$$\begin{cases} \tilde{z}_k = z_k - \tilde{w} \\ \tilde{z}_{k-1} = z_{k-1} + \tilde{w} \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

\tilde{w} caractérisant l'ondulation de l'épaisseur de la couche composite. A l'instar des très nombreux travaux de la littérature considérant une déviation harmonique de la surface moyenne des cylindres, on considérera ici une forme axisymétrique et sinusoïdale [TEN 71] [SUN 86] :

$$\tilde{w} = \tilde{\alpha}_w \cos(\tilde{m}\pi x/L). \quad (\text{II.23})$$

L'allure correspondante du $k^{\text{ième}}$ pli du stratifié est schématisée en figure II.17. Notons que quelques auteurs, dont notamment par HANSEN [HAN 77], ont recommandé de tester diverses formes algébriques pour un même modèle d'imperfections. Aussi, une expression de \tilde{w} similaire à (II.23) mais désormais axisymétrique sera aussi utilisée pour la présente étude :

$$\tilde{w} = \tilde{\alpha}_w \cos(\tilde{m}\pi x/L) \cos(\tilde{n}y/R). \quad (\text{II.24})$$

Le paragraphe § II.4.2 permettra la comparaison des résultats issus de ces deux modèles (axisymétrique et asymétrique) de défauts. Notons que les entiers \tilde{m} et \tilde{n} caractérisant les "formes" des imperfections seront, à l'instar de nombreux travaux de la littérature, liées à la formulation intégrale du problème aux valeurs propres. Les valeurs adoptées seront précisées ultérieurement en § II.2.5.5. Par ailleurs, considérant que l'imperfection géométrique globale des cylindres est générée par la "superposition" des défauts de chacun des N plis du stratifié, l'amplitude nominale $\tilde{\alpha}_w$ est alors donnée par :

$$\tilde{\alpha}_w = \tilde{h}/N \quad (\text{II.25})$$

\tilde{h} étant l'amplitude équivalente *RMS* (*Root Mean Square*) des variations d'épaisseurs des cylindres [SUN 88]. Enfin, soulignons que les modèles de défauts donnés par les relations (II.22), (II.23) et (II.24) seront intégrés aux formulations analytiques lors du calcul des résultantes de contraintes (voir § II.2.5.4 et § II.2.6.2). Les modèles analytiques du flambage de cylindres développé dans le cadre de cette étude seront bien de type linéaire.

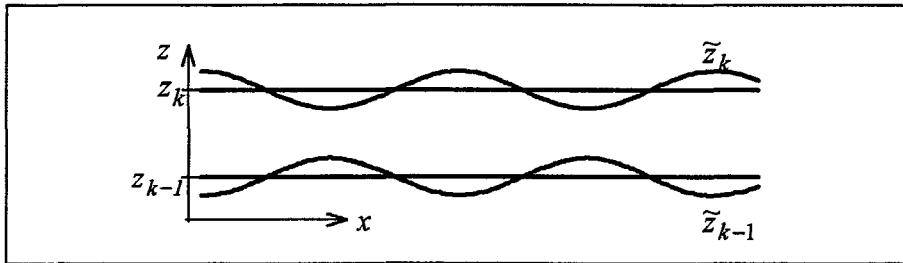


Figure II.17 : modèle d'imperfection du $k^{\text{ième}}$ pli

II.2.5.4. Résultantes de contraintes

Considérant la loi constitutive linéaire détaillée en § AI.1.2 ainsi que les simplifications induites par l'équilibrage des plis en $\pm\theta$ (cf. § AI.1.4), les relations contraintes-déformations pour le $k^{\text{ième}}$ pli du stratifié sont alors données, en fonction des coefficients de rigidités $C^{(k)}_{ij}$ (l'indice k indiquant la correspondance coefficients - numéro de pli), par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & C_{12}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ & & & C_{55}^{(k)} & 0 \\ + \text{sym.} & & & & C_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2 \varepsilon_{yz} \\ 2 \varepsilon_{zx} \\ 2 \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}. \quad (\text{II.26})$$

Remarquons que l'intégration au problème de l'hypothèse classique de coque notée H3 (cf. § II.2.4) conduirait à l'utilisation, à la place de ces termes $C^{(k)}_{ij}$, des coefficients de rigidités réduits $Q^{(k)}_{ij}$ détaillés en § AI.1.3. Cette hypothèse, considérant un niveau de contraintes normales en direction de l'épaisseur quasi-nul, est très souvent employée pour les développements analytiques de la littérature destinés à la modélisation de coques minces soumises à des sollicitations de compression axiale et de torsion [TEN 71] [BAR 83] [SUN

86]. Cependant, et comme noté par SIMITSES [SIM 91] [SIM 96] ainsi que dans les références [KAR 93] et [SOL 94], ce choix s'avère inapproprié pour les structures composites semi-épaisses soumises à des modes de sollicitation induisant de la pression latérale. Précisons à ce sujet que l'évaluation (en analyse statique) des répartitions de contraintes détaillée en § IV.2.7.3 permet de constater que le niveau des contraintes σ_{33} ($=\sigma_{zz}$, cf. figure AI.1) dans l'épaisseur ne s'avère en effet absolument pas négligeable notamment vis à vis des contraintes σ_{22} . Ainsi, l'hypothèse H4 ne sera pas considérée pour cette étude, ce sont les coefficients $C^{(k)}_{ij}$ qui seront utilisés pour les formulations analytiques ici détaillées. L'évaluation de l'incidence de l'emploi des coefficients $Q^{(k)}_{ij}$ sur les allures de stratifications optimisées sera néanmoins réalisée en § IV.2.3.7.

Considérant les expressions (II.6) des résultantes de contraintes, l'introduction de l'hypothèse de coque mince H4, déjà utilisée précédemment en § II.2.5.1, conduit alors à l'égalité des composantes tangentielles (cf. § II.2.3.2). En effet, les efforts et moments résultants sont alors donnés par :

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} = N_{yx} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} d\tilde{z} ; \quad \{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} = M_{yx} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \tilde{z} d\tilde{z}. \quad (\text{II.27})$$

Notons que, compte tenu de l'introduction de l'hypothèse H1 (cf. (II.14)), les résultantes de cisaillement T_x et T_y s'avèrent alors nulles. Remarquons de plus que, compte tenu du type d'imperfection des plis composites schématisé en figure II.17, les termes z des relations (II.6) ont été remplacés par les formes \tilde{z} données en (II.22). Considérant (II.26), l'intégration discrète des termes (II.27), conformément à la théorie classique des stratifiés [GAY 97], conduit alors à :

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\tilde{A}] & [\tilde{B}] \\ [\tilde{B}] & [\tilde{D}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_m\} \\ \{\chi\} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

avec, compte tenu de (II.22) :

$$\tilde{A}_{ij} = A_{ij} \left(1 - \frac{2\tilde{w}}{h}\right) ; \quad \tilde{B}_{ij} = B_{ij} - A'_{ij}\tilde{w} ; \quad \tilde{D}_{ij} = D_{ij} - B'_{ij}\tilde{w} + A'_{ij}\left(\tilde{w}^2 - \frac{2\tilde{w}^3}{3h}\right). \quad (\text{II.29})$$

Ces différents termes matriciels de rigidité sont donnés par :

$$\begin{cases} A_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A'_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k + z_{k-1}) \\ B'_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k^2 + z_{k-1}^2) \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

($i, j = 1, 2, 4, 5, 6$)

On remarquera ainsi que A_{ij} , B_{ij} et D_{ij} correspondent bien aux coefficients de rigidités classiques de la théorie des stratifiés [BER 92] [GAY 97], les coefficients A'_{ij} et B'_{ij} étant, eux, liés au modèle d'imperfection géométrique détaillé précédemment en § II.2.5.3.

II.2.5.5. Problème aux valeurs propres

Considérant les 4^{ème} et 5^{ème} équations d'équilibre (II.7), il vient :

$$\begin{cases} T_x = M_{x,x} + M_{xy,y} + m_x \\ T_y = M_{y,y} + M_{yx,x} + m_y \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Aussi, en injectant (II.31) dans les 2^{ème} et 3^{ème} équations d'équilibre (II.7), on obtient alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + m_y \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{N_y}{R} + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

Notons que ces trois relations (II.32) traduisant l'équilibre du cylindre peuvent ainsi être exprimées sous la forme :

$$[\Gamma_{eq}] \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{m\} \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{II.33})$$

à l'aide de l'opérateur différentiel suivant :

$$[\Gamma_{eq}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{R \partial y} & \frac{\partial}{R \partial x} & 0 & \frac{1}{R} \\ 0 & \frac{-1}{R} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{2 \partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

De plus, précisons que le calcul des moments linéiques (II.10) induits par la sollicitation P conduit à :

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \end{Bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k_x \partial / \partial x \\ 0 & -k_y / R & -k_y \partial / \partial y \end{bmatrix} \{D_\Sigma\} = P [\Gamma_m] \{D_\Sigma\}. \quad (\text{II.35})$$

Aussi, et d'après les relations (II.17), (II.28), (II.33) et (II.35), l'équilibre du cylindre composite stratifié est alors traduit par la relation (II.34) suivante.

$$[\Gamma_{eq}] \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [\tilde{A}] & [\tilde{B}] \\ [\tilde{B}] & [\tilde{D}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Gamma_{\varepsilon^m}\} \\ \{\Gamma_{\varepsilon^z}\} \end{Bmatrix} \\ P[\Gamma_m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [\Gamma] \{D_{\Sigma}\} = 0. \quad (\text{II.36})$$

A l'instar de très nombreux travaux de la littérature tels que ceux détaillés en [HUT 67], [BAR 83], [SUN 86] ou encore [SIM 96], l'obtention de la forme finale du problème aux valeurs propres est réalisée par formulation variationnelle de type GALERKIN. Considérant (II.36), on a alors :

$$\int_V \{\delta D_{\Sigma}\}^T [\Gamma] \{D_{\Sigma}\} dV = 0 \quad (\text{II.37})$$

avec un champ de déplacements virtuels cinématiquement admissibles $\{\delta D_{\Sigma}\}$ utilisant les fonctions de formes données en (II.19) et (II.20) :

$$\{\delta D_{\Sigma}\}^T = \langle \delta a_u \quad \delta a_v \quad \delta a_w \rangle \begin{bmatrix} \phi_u & 0 & 0 \\ 0 & \phi_v & 0 \\ 0 & 0 & \phi_w \end{bmatrix} = \{\delta a\}^T [\phi]. \quad (\text{II.38})$$

Considérant (II.37) et (II.1), il vient donc :

$$\{\delta a\}^T \int_V [\phi] [\Gamma] [\phi] dV \{a\} = \{\delta a\}^T \int_0^L \int_0^{2\pi R} \int_{-h/2}^{h/2} [\phi] [\Gamma] [\phi] dx dy dz \{a\} = 0. \quad (\text{II.39})$$

A l'instar des développements analytiques du flambage de cylindres avec défauts géométriques (cf. § II.2.5.3, [TEN 71], [BAR 83] et [SUN 86]), la formulation variationnelle de type GALERKIN requiert des correspondances entre les nombres de demi-ondes m et n et les ondulations \tilde{m} et \tilde{n} des modèles d'imperfections (II.23) et (II.24). Aussi, et afin d'obtenir un problème aux valeurs propres non trivial, il s'avère nécessaire de considérer les relations suivantes :

$$\tilde{m} = 2m \quad ; \quad \tilde{n} = 2n. \quad (\text{II.40})$$

L'intégration de (II.39) conduit alors au problème aux valeurs propres exprimé sous la forme :

$$[K] + P[L] = 0. \quad (\text{II.41})$$

Les termes correspondants des matrices $[K]$ et $[L]$ sont précisés en § AII.2.1 pour un modèle d'imperfections géométriques de type axisymétrique (cf. (II.23)) et en § AII.2.2 pour le modèle de défauts asymétrique donné en (II.24). La valeur de pression critique P_{cr} est ainsi la plus petite valeur P satisfaisant à (II.41), soit donc (avec $\det =$ déterminant) [SUN 89] :

$$P_{cr} = \min_P \left\{ \det \left([K(m,n)] + P [L(m,n)] \right) = 0 \right\}. \quad (\text{II.42})$$

Aussi, ne connaissant pas a priori le mode de flambage correspondant à P_{cr} , la détermination de cette pression critique requiert le calcul des valeurs P satisfaisant à $\det([K] + P[L]) = 0$, et ceci pour diverses valeurs de m et n (cf. (II.20)) [SUN 86]. Compte tenu des types de modes

observés pour les corps d'enceintes (cf. § II.1.2.2) et suite à de très nombreux tests numériques préliminaires, tous les calculs analytiques de stabilité de cette étude seront réalisés en considérant les diverses valeurs de demi-ondes suivantes :

$$m \in \{1; 2; 3\} \quad ; \quad n \in \{0; 1; 2; 3; 4\} \quad (\text{II.43})$$

soit donc pour $3 \times 5 = 15$ modes de flambage potentiels. Par ailleurs, précisons que, pour un couple de valeur $(m; n)$ et considérant les formes matricielles $[K]$ et $[L]$ données en § AII.2, la valeur de P satisfaisant à $\det ([K] + P [L]) = 0$ est obtenue par résolution de l'équation linéaire du second degré suivante :

$$aP^2 + bP + c = 0 \quad (\text{II.44})$$

$$\text{avec : } \begin{cases} a = K_{11}(L_{22} L_{33} - L_{23}^2) \\ b = K_{11}[K_{22} L_{33} + K_{33} L_{22} - (K_{23} + K_{32}) L_{23}] \\ \quad + K_{21}(K_{13} L_{23} - K_{12} L_{33}) + K_{13}(K_{12} L_{23} - K_{13} L_{22}) \\ c = K_{11}[K_{22} K_{33} - K_{23} K_{32}] + K_{21}(K_{13} K_{32} - K_{12} K_{33}) + K_{13}(K_{12} K_{23} - K_{13} K_{22}) \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

Par ailleurs, on remarquera que le calcul éventuel des amplitudes relatives des déplacements a_u , a_v et a_w (cf. (II.19)) du mode de flambage consiste en la résolution du système d'équations linéaires :

$$([K] + P_{cr} [L]) \{a\} = 0. \quad (\text{II.46})$$

Ainsi, considérant par exemple que l'on norme l'amplitude des déplacements radiaux maximaux (soit donc $a_w = 1$) [CRA 96], on en déduit alors :

$$a_u = \frac{K_{13}(K_{22} + P_{cr} L_{22}) - K_{12}(K_{23} + P_{cr} L_{23})}{K_{12} K_{21} - K_{11}(K_{22} + P_{cr} L_{22})} \quad ; \quad a_v = \frac{K_{11}(K_{23} + P_{cr} L_{23}) - K_{13} K_{21}}{K_{12} K_{21} - K_{11}(K_{22} + P_{cr} L_{22})}. \quad (\text{II.47})$$

II.2.6. Modèle CT3

Ce modèle, utilisant des expressions cubiques pour la description du champ de déplacements et permettant la prise en compte du cisaillement transverse (et donc n'intégrant pas la première hypothèse de LOVE-KIRCHHOFF), sera nommé *CT3* dans la suite de l'étude. Rappelons que la formulation correspondante utilisera l'hypothèse de coque mince H4.

II.2.6.1. Déplacements et déformations

Le champ de déplacements ici considéré, basé sur des expressions cubiques, est de type *TOSD* (*Third Order Shear Deformable Theory*) [SIM 96] :

$$\{D\} = \begin{cases} U(x, y, z) = u(x, y) + z \varphi_x(x, y) + z^2 \zeta_x(x, y) + z^3 \psi_x(x, y) \\ V(x, y, z) = v(x, y) + z \varphi_y(x, y) + z^2 \zeta_y(x, y) + z^3 \psi_y(x, y) \\ W(x, y, z) = w(x, y) \end{cases}. \quad (\text{II.48})$$

Considérant alors la forme générale (II.4) et introduisant l'hypothèse de coque mince H4, le champ de déformations correspondant, satisfaisant là aussi à l'hypothèse H2, est alors :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + z^2 \frac{\partial \zeta_x}{\partial x} + z^3 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + z^2 \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} + z^3 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R} + \varphi_y + 2z\zeta_y + 3z^2\psi_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x + 2z\zeta_x + 3z^2\psi_x \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + z^2 \left(\frac{\partial \zeta_x}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_y}{\partial x} \right) + z^3 \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \end{array} \right\}. \quad (\text{II.49})$$

Compte tenu de la nature de la sollicitation, les contraintes et donc les déformations de cisaillement transverse sont nécessairement nulles sur les surfaces délimitant la paroi cylindrique (en $z = -h/2$ et $z = h/2$) [BER 92] [SIM 96] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xz}(z = -h/2) = \varepsilon_{xz}(z = h/2) = 0 \\ \varepsilon_{yz}(z = -h/2) = \varepsilon_{yz}(z = h/2) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.50})$$

De fait, considérant ces quatre relations et les expressions (II.49), on en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x - h\zeta_x + \frac{3h^2}{4}\psi_x = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x + h\zeta_x + \frac{3h^2}{4}\psi_x = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y - h\zeta_y + \frac{3h^2}{4}\psi_y = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y + h\zeta_y + \frac{3h^2}{4}\psi_y = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.51})$$

d'où l'on tire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_x = 0 \\ \psi_x = \frac{-4}{3h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right) \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \zeta_y = 0 \\ \psi_y = \frac{-4}{3h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.52})$$

Ainsi, le problème est uniquement conditionné par le champ de déplacements précisé par la relation (II.53) suivante.

$$\{D_\Sigma\} = \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{array} \right\}. \quad (\text{II.53})$$

Précisons que la décomposition du champ de déformations linéarisées (II.49) peut être réalisée comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} - \frac{4z^3}{3h^3} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{v_{,y}}{R} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \\ &= \{\varepsilon_m\} + z\{\chi\} + z^3\{\chi^a\} = ([\Gamma_{sm}] + z[\Gamma_\chi] + z^3[\Gamma_{\chi^a}])\{D_\Sigma\} \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

et, pour les déformations de cisaillement transverse :

$$\begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R} + \varphi_y \end{Bmatrix} = \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \{\gamma\} = \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) [\Gamma_\gamma] \{D_\Sigma\}. \quad (\text{II.55})$$

Les opérateurs différentiels correspondants sont donnés par :

$$\begin{aligned} [\Gamma_{sm}] &= \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 1/R & 0 & 0 \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\Gamma_\chi] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/R & \partial x & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \\ [\Gamma_{\chi^a}] &= \frac{-4}{3h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{-\partial}{R} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{-\partial}{R} & \frac{2\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad [\Gamma_\gamma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{R} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

Par analogie avec le développement analytique décrite en [SOL 92], le champ de déplacements $\{D_\Sigma\}$ (cf. (II.53)) est approximé de façon très similaire à celle précisée en § II.2.5.2 :

$$\{D_\Sigma\} = [\phi] \{a\} = \begin{bmatrix} \phi_u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{\varphi x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{\varphi y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_u \\ a_v \\ a_w \\ a_{\varphi x} \\ a_{\varphi y} \end{Bmatrix}. \quad (\text{II.57})$$

Rappelons que les fonctions de forme ϕ_u , ϕ_v et ϕ_w sont données par les relations (II.20). Par ailleurs, on utilisera des expressions similaires pour $\phi_{\varphi x}$ et $\phi_{\varphi y}$:

$$\phi_{\varphi x} = \phi_u \quad ; \quad \phi_{\varphi y} = \phi_v. \quad (\text{II.58})$$

II.2.6.2. Résultantes de contraintes

Considérant l'hypothèse H4 ainsi que les modèles d'imperfections géométriques détaillés précédemment en § II.2.5.3, les efforts et moments résultants sont donnés par les relations (II.27). Les efforts tranchants résultants sont, eux, exprimés par :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} d\tilde{z}. \quad (\text{II.59})$$

Aussi, considérant la loi constitutive (II.26), l'intégration des expressions (II.27) et (II.59) conduit à :

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\tilde{A}] & [\tilde{B}] & [\tilde{B}^a] & 0 \\ [\tilde{B}] & [\tilde{D}] & [\tilde{D}^a] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\tilde{E}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_m\} \\ \{\chi\} \\ \{\chi^a\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix}. \quad (\text{II.60})$$

Rappelons que les termes matriciels de membrane $[\tilde{A}]$, de flexion $[\tilde{D}]$ et de couplage $[\tilde{B}]$ sont précisés par les relations (II.29). Les termes des matrices $[\tilde{B}^a]$, $[\tilde{D}^a]$ et $[\tilde{E}]$ sont, eux, donnés par :

$$\begin{cases} \tilde{B}_{ij}^a = B_{ij}^a - D'_{ij} \tilde{w} + 3 B_{ij} \tilde{w}^2 - A'_{ij} \tilde{w}^3 \\ \tilde{D}_{ij}^a = D_{ij}^a - D''_{ij} \tilde{w} + 6 D_{ij} \tilde{w}^2 - 2 B'_{ij} \tilde{w}^3 + A_{ij} \left(\tilde{w}^4 - \frac{2}{5h} \tilde{w}^5 \right) \\ \tilde{E}_{ij} = \tilde{A}_{ij} - \frac{4}{h^2} \tilde{D}_{ij} \end{cases} \quad (\text{II.61})$$

avec :

$$\begin{cases} D'_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k^3 + z_{k-1}^3) \\ D''_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k^4 + z_{k-1}^4) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B_{ij}^a = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \\ D_{ij}^a = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k^5 - z_{k-1}^5) \end{cases} \quad (\text{II.62})$$

Les coefficients A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} , A'_{ij} et B'_{ij} ont, eux, déjà été précisés par les relations (II.30) et sont de plus rappelés en § AII.1.

II.2.6.3. Problème aux valeurs propres

Les cinq équations d'équilibre (II.7) peuvent être exprimées sous la forme suivante :

$$[\Gamma_{eq}] \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{T\} \\ \{m\} \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{II.63})$$

à l'aide l'opérateur différentiel suivant :

$$[\Gamma_{eq}] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R & 0 & 0 \\ 0 & -1/R & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \partial/\partial y & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.64})$$

Notons que les moments linéiques (II.10) induits par la pression hydrostatique externe P sont donnés par :

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \end{Bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{k_y}{2R} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{k_x}{2} & 0 \\ 0 & \frac{k_y}{2R} & -\frac{k_y}{2} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{k_x}{2} \end{bmatrix} \{D_{\Sigma}\} = P [\Gamma_m] \{D_{\Sigma}\}. \quad (\text{II.65})$$

Aussi, en injectant les relations (II.55), (II.60) et (II.65) dans l'expression (II.63), il vient :

$$[\Gamma_{eq}] \begin{bmatrix} [\tilde{A}] & [\tilde{B}] & [\tilde{B}^a] & 0 \\ [\tilde{B}] & [\tilde{D}] & [\tilde{D}^a] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\tilde{E}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Gamma_{\varepsilon^m}] \\ [\Gamma_x] \\ [\Gamma_{x^a}] \\ [\Gamma_r] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = [\Gamma] \{D_{\Sigma}\} = 0. \quad (\text{II.66})$$

$P[\Gamma_m]$

A l'instar du modèle de type SANDERS, la forme finale (du type $[K] + P[L] = 0$, cf. (II.41)) du problème aux valeurs propres est obtenue par intégration de type GALERKIN (cf. (II.37)), et ceci en considérant les relations (II.41) entre les nombres de demi-ondes et les nombres \tilde{m} et \tilde{n} . Les termes matriciels correspondants sont précisés en § AII.3.1 pour un modèle d'imperfection de type (II.23) et en § AII.3.2 pour les défauts asymétriques (II.24).

La détermination de la limite de stabilité P_{cr} consiste alors en la résolution d'une expression analogue à (II.42), et ceci en considérant les différentes valeurs m et n précisées en (II.43). Notons que, compte tenu des formes de $[K]$ et $[L]$, le calcul de valeurs P satisfaisant à $\det([K] + P[L]) = 0$ consiste ici en la résolution d'une équation linéaire de degré 5. Suite à quelques tests numériques, une procédure de recherche dichotomique classique, fiable pour ce type de problème et induisant un coût CPU relativement faible, a été retenue pour cette résolution.

En outre, notons que les amplitudes relatives des déplacements $a_u, a_v, a_w, a_{\varphi_x}$ et a_{φ_y} (cf. (II.57)) caractérisant l'allure du mode de flambage peuvent être obtenues (après normalisation d'une de ces composantes) par résolution du système de cinq équations linéaires similaire à la forme précisée en (II.46).

II.2.7. Modèle LOG

Notons que le modèle de coque semi-épaisse détaillé ci-après, n'intégrant pas l'hypothèse H4, sera nommé *LOG* dans la suite de l'étude car utilisant des expressions logarithmiques pour les coefficients de rigidité (cf. (II.70)). Par ailleurs, les cylindres semi-épais étant peu sensibles aux imperfections géométriques (cf § II.1.2.2) et compte tenu de la complexité de la formulation ici adoptée, les types de défauts détaillés en § II.2.5.3 n'ont pas été intégrés à ce modèle.

II.2.7.1. Déplacements et déformations

Compte tenu du mode de formulation ici développée et contrairement au modèle CT3, le champ de déplacement retenu est de type linéaire (*FOSD* : *First Order Shear Deformable Theory* [SIM 96]) et identique à celui précisé en (II.12). On considérera ainsi, par la suite, le champ $\{D_{\mathcal{E}}\}$ suivant :

$$\{D_{\mathcal{E}}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix}. \quad (\text{II.67})$$

Comme précisé notamment par les références [SIM 96] et [TAB 97], les résultats des modèles basés sur des champs de type (II.12) sont généralement proches de ceux déduits des développements utilisant des formes TOSD similaires à celles données en (II.48). Notons cependant qu'il s'avère alors nécessaire d'utiliser des facteurs de corrections de cisaillement transverse (voir (II.71)) afin de garantir la validité de ce type modèle [BOU 92] [SIM 96].

Par ailleurs, considérant (II.12), le champ de déformations linéarisées correspondant est celui précisé en (II.13). De plus, précisons que l'approximation de $\{D_{\mathcal{E}}\}$ est réalisée à l'aide des fonctions de formes précédemment décrites en (II.57) et (II.58).

II.2.7.2. Résultantes de contraintes

Compte tenu de la loi constitutive (II.26) et considérant donc des plis sans imperfections géométriques, l'intégration selon z des expressions (II.6) conduit alors à :

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ N_{yx} \end{Bmatrix} = [\Gamma_N] \{D_{\mathcal{E}}\} ; \quad \{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ M_{yx} \end{Bmatrix} = [\Gamma_M] \{D_{\mathcal{E}}\} ; \quad \{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = [\Gamma_T] \{D_{\mathcal{E}}\} \quad (\text{II.68})$$

et ceci à l'aide des opérateurs différentiels précisés par les relations (II.69) suivantes

$$[\Gamma_N] = \begin{bmatrix} \left(A_{11} + \frac{B_{11}}{R}\right) \frac{\partial}{\partial x} & A_{12} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{A_{12}}{R} \left(B_{11} + \frac{D_{11}}{R}\right) \frac{\partial}{\partial x} & B_{12} \frac{\partial}{\partial y} \\ A_{12} \frac{\partial}{\partial x} & \hat{A}_{22} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\hat{A}_{22}}{R} & B_{12} \frac{\partial}{\partial x} & \hat{B}_{22} \frac{\partial}{\partial y} \\ A_{66} \frac{\partial}{\partial y} & \left(A_{66} + \frac{B_{66}}{R}\right) \frac{\partial}{\partial x} & 0 & B_{66} \frac{\partial}{\partial y} & \left(B_{66} + \frac{D_{66}}{R}\right) \frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{A}_{66} \frac{\partial}{\partial y} & A_{66} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \hat{B}_{66} \frac{\partial}{\partial y} & B_{66} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II.69a})$$

$$[\Gamma_M] = \begin{bmatrix} \left(B_{11} + \frac{D_{11}}{R}\right) \frac{\partial}{\partial x} & B_{12} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{B_{12}}{R} \left(D_{11} + \frac{D'_{11}}{R}\right) \frac{\partial}{\partial x} & D_{12} \frac{\partial}{\partial y} \\ B_{12} \frac{\partial}{\partial x} & \hat{B}_{22} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\hat{B}_{22}}{R} & D_{12} \frac{\partial}{\partial x} & \hat{D}_{22} \frac{\partial}{\partial y} \\ B_{66} \frac{\partial}{\partial y} & \left(B_{66} + \frac{D_{66}}{R}\right) \frac{\partial}{\partial x} & 0 & D_{66} \frac{\partial}{\partial y} & \left(D_{66} + \frac{D'_{66}}{R}\right) \frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{B}_{66} \frac{\partial}{\partial y} & B_{66} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \hat{D}_{66} \frac{\partial}{\partial y} & D_{66} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II.69b})$$

$$[\Gamma_T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(A_{55} + \frac{B_{55}}{R}\right) \frac{\partial}{\partial x} & \left(A_{55} + \frac{B_{55}}{R}\right) & 0 \\ 0 & \frac{-\hat{A}_{44}}{R} & \hat{A}_{44} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \hat{A}_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{II.69c})$$

Les coefficients de rigidités \hat{A}_{ij} , \hat{B}_{ij} et \hat{D}_{ij} ont pour expressions (avec $\text{Ln} = \text{logarithme népérien}$) :

$$\hat{A}_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} R \text{Ln} \left(\frac{R + z_k}{R + z_{k-1}} \right); \quad \hat{B}_{ij} = R \left(A_{ij} - \hat{A}_{ij} \right); \quad \hat{D}_{ij} = R \left(B_{ij} - \hat{B}_{ij} \right). \quad (\text{II.70})$$

Rappelons que les coefficients A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} sont, eux, donnés par les relations (II.30).

On remarquera que, à l'instar de travaux similaires de la littérature [SIM 96] [TAB 97], le champ de déformations ici considéré (donné en (II.13)) ne permet pas de satisfaire aux relations (II.50). De fait, et comme recommandé par les références [BOU 92] et [SIM 96], des facteurs classiques de corrections de cisaillement transverse F_{ct} (égaux à 5/6) issus de l'hypothèse de BOLLE [BER 92] sont introduits sous la forme :

$$\begin{cases} A_{ii} = F_{ct} \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \\ \hat{A}_{ii} = F_{ct} \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} R \text{Ln} \left(\frac{R + z_k}{R + z_{k-1}} \right) \end{cases} \quad \text{pour } i = 4, 5 \quad (\text{II.71})$$

II.2.7.3. Problème aux valeurs propres

Considérant les relations (II.68), les équations d'équilibre (II.7) sont alors données par :

$$[\Gamma_{eq}] \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{T\} \\ \{m\} \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{II.72})$$

avec l'opérateur différentiel :

$$[\Gamma_{eq}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.73})$$

Les moments linéiques m_x et m_y (cf. (II.10)) sont, eux, donnés par :

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \end{Bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2R} & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = P [\Gamma_m] \{D_{\Sigma}\}. \quad (\text{II.74})$$

Aussi, considérant les relations (II.68), (II.72) et (II.74), l'équilibre du cylindre est traduit par :

$$[\Gamma_{eq}] \begin{Bmatrix} [\Gamma_N] \\ [\Gamma_M] \\ [\Gamma_T] \\ [\Gamma_m] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = [\Gamma] \{D_{\Sigma}\} = 0. \quad (\text{II.75})$$

Considérant cette expression, et à l'instar des formulations analytiques précédemment détaillées, le problème aux valeurs propres du type $[K] + P[L] = 0$ est obtenu par formulation intégrale de type GALERKIN. Les termes correspondants de $[K]$ et $[L]$ sont détaillés en § AII.4. La détermination de la valeur de pression critique P_{cr} est effectuée de manière identique à celle précisée au terme du paragraphe § II.2.6.3 pour le modèle CT3.

II.3. Modèles MEF

Comme indiqué en § I.2.3, l'appréciation numérique des performances et des gains déduits des solutions optimisées vis à vis de cylindres de références en [55_N] (voir § IV.1.3) sera réalisée par le biais de calculs de stabilité par la MEF. Le mode d'analyse ainsi que les modèles utilisés, codés à l'aide du logiciel SAMCEF, sont décrits par les paragraphes suivants. Par ailleurs, signalons qu'un modèle axisymétrique, utilisé pour l'évaluation de la résistance statique et de la répartition des contraintes, sera présenté en § IV.2.7.3.

II.3.1. Principe de l'analyse de stabilité

Considérant une configuration d'équilibre pré-critique C_0 sollicitée par un chargement F_0 , le calcul de stabilité par la MEF consiste en la détermination du spectre d'intensités de charges critiques $\lambda_{cr} = F / F_0$. Soulignons que ce mode d'analyse, constituant généralement la seule alternative pour le concepteur dans le cas de géométries complexes, discontinues et irrégulières, est toujours l'objet de nombreux développements notamment détaillés et discutés en [DUB 95].

L'*analyse non linéaire* (ou *analyse incrémentale*) de stabilité procède selon un schéma itératif classique [ZIE 79] : il s'agit ainsi d'un calcul statique non linéaire, le chargement étant incrémenté par pas successifs δF . A chaque incrément, le calcul d'équilibre statique est suivi d'une évaluation de la stabilité. Ces deux étapes sont détaillées ci-après :

– Suite à l'accroissement δF de l'intensité de la sollicitation, la détermination de la configuration d'équilibre statique consiste en la résolution d'un système d'équations non linéaires traduisant la condition d'équilibre statique (cf. § II.1.1). Le formalisme variationnel utilisé, détaillé en [DUB 95], est issu du principe des travaux virtuels exprimé en composantes lagrangiennes. La résolution utilise classiquement la méthode itérative de gradient de *Raphson-Newton* [ZIE 79]. De fait, notons que cette phase induit généralement des temps de calculs conséquents ainsi qu'une convergence parfois perturbée pour des configurations situées au voisinage de la singularité que constitue la limite de stabilité [DUB 95]. Soulignons que ce type d'analyse permet ainsi la prise en compte des non-linéarités liées au comportement du matériau. De plus, les non-linéarités géométriques, dont notamment l'aspect suiveur des forces vives de pression (cf. § II.1.2.2), sont implicitement intégrées au problème [DUB 95].

– La stabilité de cet équilibre statique est généralement évaluée selon l'énoncé du critère de TREFFTZ (cf. § II.1.1) [GAL 76]. Le code MEF procède alors à la résolution d'un problème aux valeurs propres du type :

$$[K] + \lambda_{cr} [K_G] = 0.$$

les matrices de rigidité $[K]$ et $[K_G]$ étant identiques à celles utilisées pour l'analyse linéaire détaillée ci-après.

Ainsi, ce processus est réitéré en "affinant" progressivement les valeurs d'incrément δF au voisinage du seuil d'instabilité. En outre, signalons que cette algorithmique est généralisable à l'étude du comportement post-critique [ZIE 79] [DUB 95].

Le principe et le formalisme de l'*analyse linéaire* par la MEF sont issus des hypothèses classiques de la théorie de l'élasticité linéaire [GAL 76]. En effet, pour une configuration d'équilibre C située sur la branche pré-critique et soumise à $F = \lambda F_0$, les champs de déplacements nodaux $\{D\}$ et de contraintes $\{\sigma\}$ correspondants sont alors donnés par :

$$\{D\} = \lambda \{D_0\} \quad \text{et} \quad \{\sigma\} = \lambda \{\sigma_0\}.$$

Aussi, considérant ces relations de linéarité, le calcul de flambage est directement réalisé à l'aide des deux étapes uniques et successives suivantes :

- une analyse linéaire statique préalable consistant en la résolution classique du système $[K]\{D_0\} = \{F_0\}$ suivie du calcul du champ de contraintes $\{\sigma_0\}$ correspondant.
- la résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$[K] + \lambda_{cr} ([K_G] + [K_U] + [K_P]) = 0$$

conduisant à l'obtention du facteur de charge critique λ_{cr} .

Notons que ce mode d'analyse recourt ainsi à l'emploi des diverses matrices de rigidité suivantes :

- matrice de rigidité élastique $[K]$
- $[K_G] = [K_G(\sigma_0)]$ caractérisant la raideur géométrique de la structure
- $[K_U] = [K_U(D_0)]$ traduisant les effets linéaires des rotations initiales
- $[K_P] = [K_P(D_0)]$ permettant la prise en compte des effets de forces suivieuses (forces vives de pression)

Les expressions correspondantes sont détaillées par les références [GAL 76] [DUB 95]. Signalons de plus que, pour la majorité des codes MEF, la résolution du problème aux valeurs propres utilise les méthodes de type *LANCZOS* ou de *multi-itérations* [CRA 96]. Enfin, précisons que, les modes de flambage sont obtenus par résolution d'un système du type [GAL 76] :

$$([K] + \lambda_{cr} ([K_G] + [K_U] + [K_P])) \{D_{cr}\} = 0$$

et ceci après normalisation d'une composante du champ de déplacements critique $\{D_{cr}\}$.

Bien que proscrivant la prise en compte des non-linéarités matérielles et l'analyse du post-flambage, cette algorithmique simple permet l'obtention rapide de valeurs de charges critiques qui, quoique surévaluées, s'avèrent réalistes pour de nombreux problèmes rencontrés en sciences de l'ingénieur [DUB 95]. L'approximation des aspects suivieuses des sollicitations de pression (à l'aide de la matrice $[K_P]$) est généralement satisfaisante [DUB 95]. Soulignons de plus que, pour les corps d'enceintes composites étudiés, les travaux numériques réalisés dans le cadre de cette étude (voir notamment le paragraphe § IV.2.7 ainsi que [PAP 98]) ont

permis de montrer que les pressions critiques "linéaires" s'avéraient très proches (supérieures de 5 à 10 % environ) de celles déterminées par analyses MEF non linéaires. Par ailleurs, et compte tenu des indications de la littérature [GAL 76] [DUB 95], il apparaît que le calcul de flambage linéaire satisfait à une bonne sensibilité aux paramètres géométriques et matériaux du problème considéré. Aussi, l'évaluation préalable des gains relatifs de pression critiques déduits des solutions optimisées, calculés par rapport aux limites de stabilité de cylindres en [55_N], sera réalisée par le biais d'analyses linéaires (voir § IV.2.3). Des calculs de flambage MEF non linéaires permettront ensuite de compléter et de corroborer ces résultats (voir § IV.2.7).

II.3.2. Eléments utilisés

Pour les corps d'enceintes composites considérés, les modes de flambage observés se sont avérés être de type asymétrique (cf. figure II.9). Aussi, il s'avérait nécessaire d'utiliser des modélisations MEF complètes, les modèles axisymétriques étant proscrits. Les cylindres composites étudiés étant de type mince et semi-épais, et compte tenu des éléments finis disponibles dans la bibliothèque du code SAMCEF, deux classes de modèles ont été utilisés : modélisation par éléments coques bidimensionnels et modélisation tridimensionnelle par éléments finis de type coques volumiques. Les maillages adoptés sont constitués d'éléments isométriques. Les allures correspondantes sont présentées par la figure II.18.

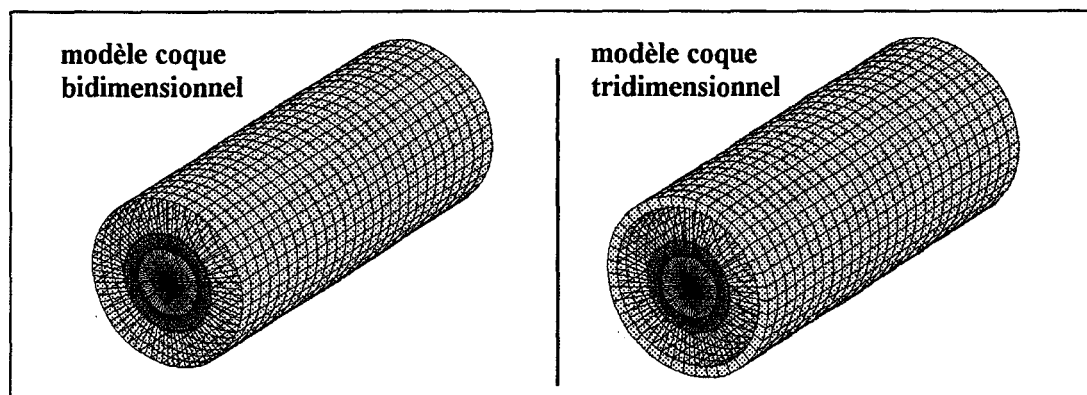


Figure II.18 : allures des modèles MEF

Concernant les éléments finis bidimensionnels de coques stratifiées (décrits en figure II.19), deux types ont été utilisés :

- Élément coque hybride : il s'agit d'un élément quadrangulaire de coque mince. Sa formulation est de type LOVE-KIRCHHOFF (cf. § II.2.4), négligeant donc les effets de cisaillement transverse. Pour la modélisation adoptée, les éléments utilisés possèdent 16 nœuds. Les sommets sont affectés de 3 degrés de liberté (*ddl*) de translation. Pour chaque nœud interface, seule la rotation φ_n du côté correspondant est prise en compte.
- Élément coque Mindlin : ce quadrangle permet, lui, la prise en compte du cisaillement transverse. Chaque sommet est affecté de 6 inconnues nodales correspondant aux 3 *ddl* de translations et aux 3 rotations correspondantes. Les nœuds interfaces n'interviennent qu'uniquement pour définir la géométrie (génération de la courbure).

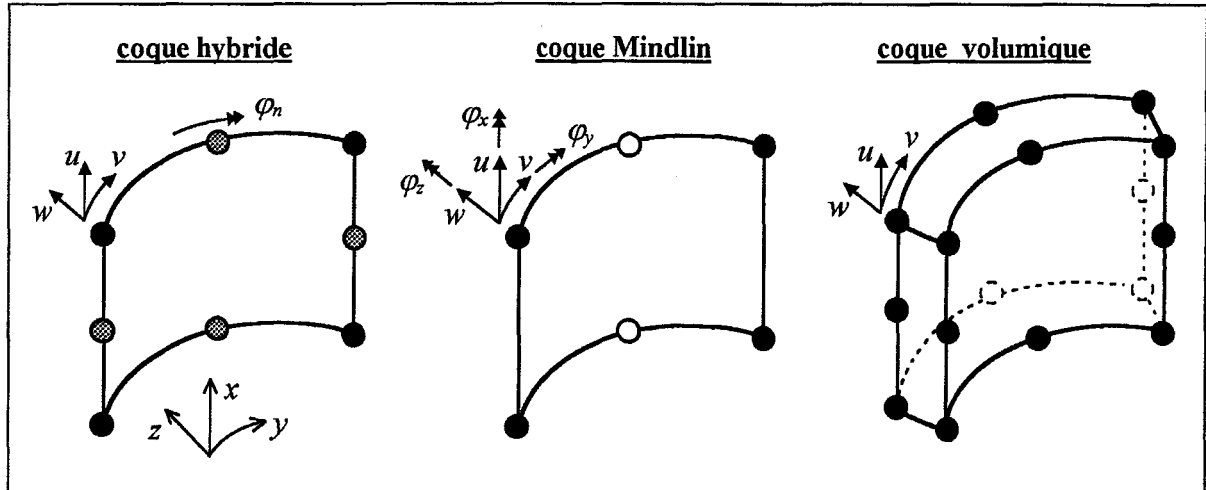


Figure II.19 : éléments finis SAMCEF

La modélisation tridimensionnelle utilise, elle, un élément fini de coque volumique stratifiée : il s'agit d'une "brique" à 8 sommets (et 16 nœuds) de formulation isoparamétrique. Chaque nœuds, sommet ou interface, possède 3 ddl de translation. La prise en compte des effets de cisaillement transverse est implicite.

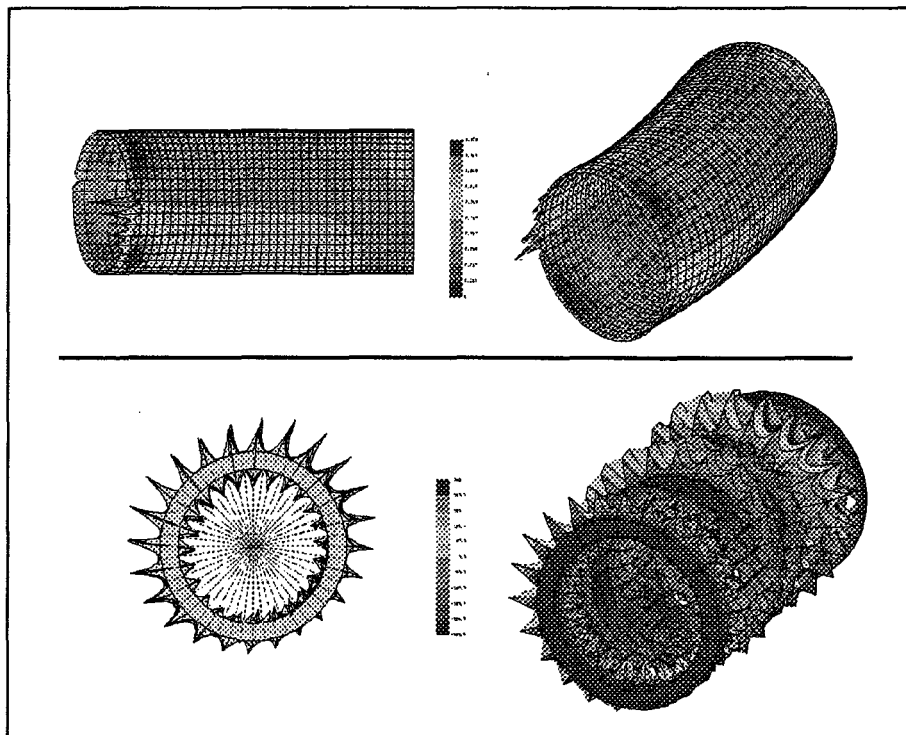


Figure II.20 : exemples de résultats erronés

Les densités de maillages adoptées seront précisées en § II.4.1. A ce propos, notons que, pour les travaux applicatifs de la présente étude, le module d'analyse de stabilité de SAMCEF a parfois conduit à des résultats aberrants : valeurs de pressions critiques négatives ou excédant plusieurs milliers de MPa, les modes correspondants n'ayant aucune signification physique. La

figure II.20 présente ainsi deux exemples de ce type de résultats erronés. On remarquera que ce type de résultats semble induit par des couplages parasites entre les ddl membranaires et transversaux [CRA 96]. Notons que de légères modifications des densités de maillages ont généralement permis de pallier à de tels problèmes.

Soulignons que les éléments de coque hybride s'avèrent peu adaptés pour l'étude de structures composites, donc sensibles aux effets de cisaillement transverse. Pour les travaux applicatifs décrits dans le chapitre IV, des calculs de stabilité seront néanmoins réalisés en utilisant ce type d'élément fini car permettant de fournir un indicateur supplémentaire, certes discutable, quant à l'intérêt et les performances de solutions optimisées (cf. § IV.1.3). Par ailleurs, précisons que seule la formulation de cet élément de coque hybride autorise la prise en compte d'imperfections géométriques : à l'instar de nombreux codes MEF, la modélisation des défauts est réalisée par introduction, suite à un calcul de stabilité préliminaire, d'une déviation modale sur les coordonnées nodales, l'amplitude équivalente d'imperfections (cf. § II.2.5.3) étant fixée au lancement du calcul [DUB 95].

II.3.3. Conditions aux limites cinématiques

Pour les structures considérées, les tapes utilisées d'obturation des corps d'enceintes s'avèrent massives et rigides (voir notamment le paragraphe § IV.2.7.2). Aussi, la très grande majorité des travaux numériques antérieurs ont recouru à l'emploi d'éléments finis de type corps rigides pour la modélisation des liaisons aux extrémités des cylindres composites [GRA 95] [GUG 95] [PAP 98] [LEF 99]. L'allure de tels modèles est présentée en figures II.9 et II.18. La composante de sollicitation induite par la pression externe sur les tapes (effet de fond) est alors modélisée par une force concentrée appliquée au noeud central de l'ensemble corps rigide [PAP 98] [LEF 99]. Soulignons que, comme précisé ci-après, ce type de modèle conduit à l'obtention de valeurs de pressions critiques relativement "grossières", surévaluées. Néanmoins, ce type de modélisation, permettant de réduire sensiblement le coût CPU des analyses MEF, s'est avéré posséder une bonne sensibilité aux paramètres de stratifications [TSO 96] [PAP 98]. Aussi, l'appréciation préliminaire des performances des solutions optimisées sera réalisée à l'aide de tels modèles (voir § IV.2.3). Par ailleurs, notons que, de par l'utilisation des corps rigides, les déplacements radiaux w aux extrémités des corps d'enceintes sont nuls. De plus, le mode de liaison généralement adopté entre les cylindres et les corps rigides est de type appui simple [GRA 95] [PAP 98] [LEF 99], soit donc (cf. § II.2.5.2) :

$$\partial w / \partial x \neq 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } x = L.$$

Les travaux décrits en [GRA 95] ont permis de constater que les valeurs de pressions critiques n'étaient que peu modifiées en considérant un encastrement entre les cylindres composites et les corps rigides. Aussi, et malgré l'influence supposée des conditions aux limites cinématiques (cf. § II.1.2.2), les rotations ne semblent avoir que peu d'incidence sur les limites de stabilité des cylindres élancés considérés. Ce constat permet ainsi de conforter le choix de l'approximation du champ de déplacements pratiqué en § II.2.5.2. Néanmoins, précisons que

des calculs de stabilité complémentaires seront aussi réalisés à l'aide de modèles de type "encastrement" lors des travaux applicatifs (voir § IV.2.6.1).

Des modèles MEF intégrant une modélisation plus réaliste des tapes seront aussi utilisés pour l'appréciation des performances des solutions optimisées. Notons que, considérant le type de liaison par coiffes métalliques aux extrémités des cylindres (cf. figure I.3), la modélisation fidèle et exacte des enceintes sous-marines nécessiterait ainsi une définition géométrique précise ainsi que l'introduction de modèles de jeux et de contact [CRA 96]. De fait, et conformément aux études antérieures réalisées dans le cadre des projets BRITE et MAST [DAV 96] [VAN 98] [CHA 99b], les modèles MEF intégrant la modélisation des fermetures considèrent des liaisons de type encastrement parfait entre les cylindres composites et les tapes. Compte tenu des résultats de ces travaux numériques, une telle démarche de modélisation s'avère en effet satisfaisante, suffisamment représentative pour l'analyse (détermination de P_{cr} et du mode de flambage correspondant) du comportement global des enceintes composites élancées. Notons que l'allure des modèles correspondants est présentée en figure IV.32. Soulignons par ailleurs que la modélisation des tapes induit des différences tangibles quant aux résultats d'analyse de stabilité : comme indiqué en § II.4.1 et en § IV.2.7.2, les valeurs de pressions critiques sont effectivement inférieures (d'environ 10 à 30 %) par rapport à celles calculées à l'aide des modèles MEF avec corps rigides. Néanmoins, malgré ces écarts sur les valeurs de P_{cr} et comme précisé précédemment, l'évaluation préalable de gains relatifs déduits de stratifications optimisées sera réalisée à l'aide des modèles utilisant des corps rigides pour la modélisation des tapes (cf. § II.1.3) car possédant une bonne sensibilité aux paramètres de stratification [PAP 98].

II.4. Tests préliminaires

Les paragraphes suivants détaillent les résultats de tests numériques succincts et préliminaires. Outre la confrontation des résultats déduits des modèles analytiques développés (cf. § II.2) avec ceux issus des modèles codés sur SAMCEF (cf. § II.3), ce travail permettra aussi d'appréhender les divers aspects suivants : convergence et temps de calcul MEF, modes de flambage, influence des mode de modélisation des tapes. Précisons que les quelques travaux ici présentés se sont avérés représentatifs de l'ensemble des tests numériques pratiqués au cours de cette étude. De plus, les applications notamment détaillées en § IV.2 permettront de compléter ces tests. Par ailleurs, les résultats présentés en § II.4.2 concerneront l'évaluation de la validité des modèles d'imperfections adoptés pour les formulations analytiques de type SANDERS et CT3 (cf. § II.2.5 et § II.2.6).

II.4.1. Calculs de stabilité

Pour les tests numériques présentés dans ce paragraphe, on s'intéressera en premier lieu à des corps d'enceintes de rayon moyen $R = 50$ mm. Le matériau composite constitutif est un verre/époxy classique [KAR 93] de caractéristiques isotropes transverses (cf. § AI.1.1.3)

suivantes (les modules étant exprimés en GPa) :

$$E_1 = 57 ; E_2 = E_3 = 14$$

$$G_{12} = G_{13} = 5.7 ; G_{23} = 5$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = 0.277 ; \nu_{23} = 0.4$$

Chaque pli composite possède une épaisseur égale à environ 0.416 mm [KAR 93]. Pour les travaux numériques ici présentés, neuf différents cas d'épaisseur h (détaillés par le tableau II.1) sont abordés, permettant ainsi l'analyse de structures très minces et aussi semi-épaisses (cf. § II.1.2). De plus, trois valeurs (100, 250 et 400 mm) de longueur sont considérées afin d'évaluer l'influence de l'élancement de la coque cylindrique sur sa limite de stabilité. En outre, précisons que les cylindres étudiés possèdent des stratifications de "référence", soit donc de type [55_N] (cf. § I.2.1).

nombre de plis	6	9	12	15	18	21	24	27	30
h (mm)	2.5	3.75	5.0	6.25	7.5	8.75	10.0	11.25	12.5
R/h	20.0	13.3	10.0	8.0	6.7	5.7	5.0	4.4	4.0

Tableau II.1 : caractéristiques géométriques des cylindres

La figure II.21 suivante présente tout d'abord les résultats issus de tests de convergence (analyses linéaires MEF réalisées à l'aide des modèles utilisant des corps rigides pour la modélisation des tapes, cf. § II.3) concernant les cylindres caractérisés par $h = 7.5$ mm et $L = 250$ mm : les évolutions des valeurs de pressions critiques ainsi que les temps de calcul correspondants sont représentés en fonction de la densité de maillage (les nombres M d'éléments des modèles MEF étant indiqués en abscisses et selon une échelle logarithmique). Précisons à ce sujet que, pour tous les travaux de cette étude, les maillages ont été générés de sorte que les dimensions des cotés des éléments finis soient sensiblement identiques (et donc que les éléments soient les plus "carrés" possibles) afin de limiter les risques de problèmes numériques [ZIE 79]. Au vu de ces résultats, on constate ainsi qu'il ne s'avère pas nécessaire de densifier outre mesure les maillages, les valeurs P_{cr} déduites de maillages constitués d'environ 1000 éléments étant très proches de celles issues des modèles très "denses". Aussi, les maillages utilisés pour l'ensemble des travaux applicatifs comporteront environ un millier d'éléments, permettant ainsi de limiter grandement le coût CPU des analyses MEF. Précisons que des tests de convergence similaires réalisés à l'aide de modèles MEF incluant la modélisation des tapes (cf. § II.3.3) ont conduit à des constats identiques, les temps de calcul correspondants étant néanmoins double de ceux indiqués en figure II.21.

A ce propos, on notera que le couplage des modèles MEF avec la procédure d'optimisation décrite dans le chapitre III induirait un coût CPU absolument inexploitable (voir notamment les paragraphes § IV.2.5.2 et § IV.2.5.3). Signalons que les temps de calculs observés pour les modèles analytiques (codés à l'aide d'un compilateur FORTRAN 90, cf. § I.2.4) se sont, eux, toujours avérés très inférieurs à une seconde.

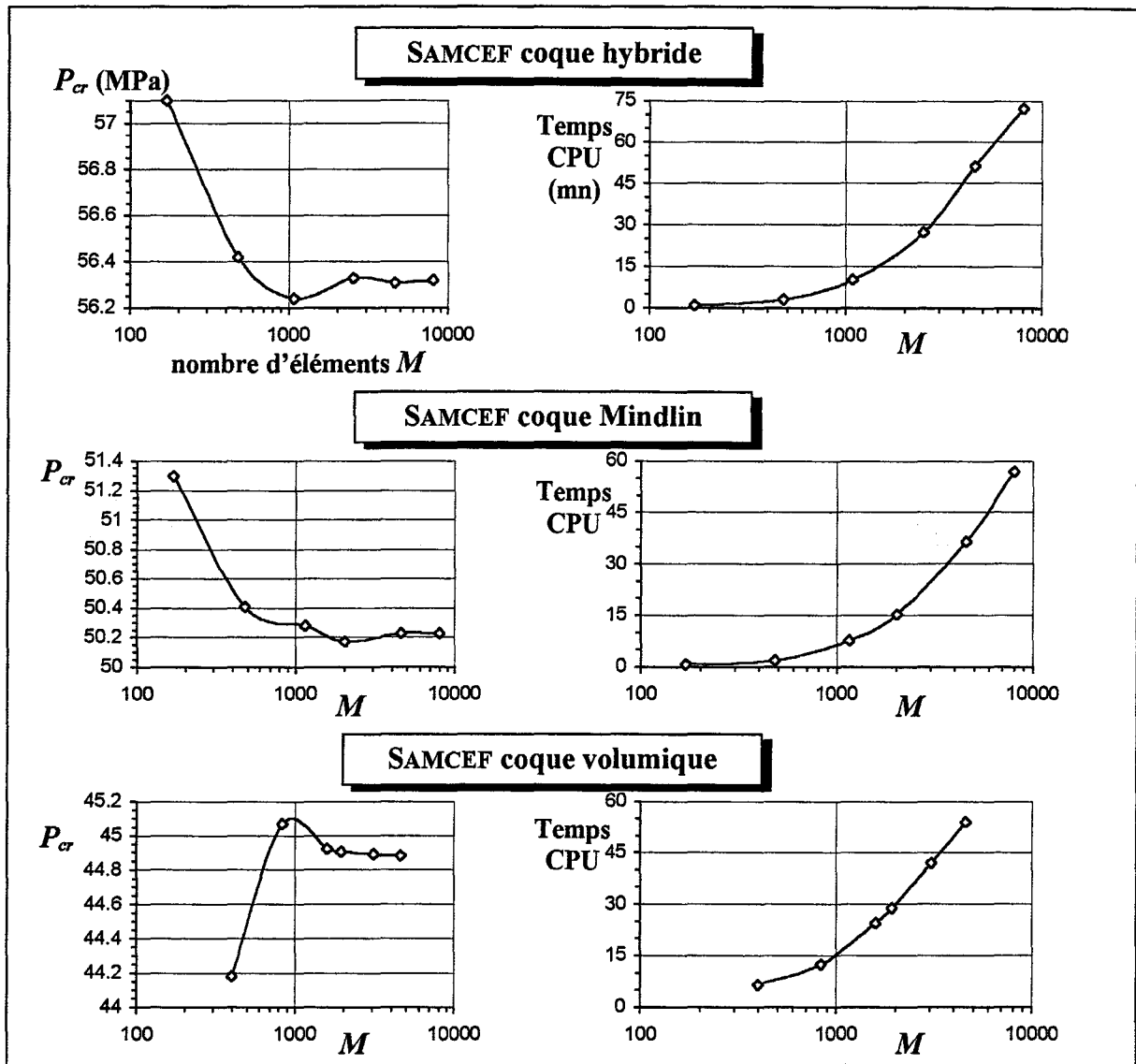


Figure II.21 : convergence des résultats MEF et temps de calculs correspondants

La figure II.22 suivante présente, elle, les évolutions (en fonction de l'épaisseur de paroi h) des limites de stabilité calculées à l'aide des divers modèles MEF (en analyse linéaire) utilisant des corps rigides modélisant les tapes et les modèles analytiques développés pour cette étude, et ceci pour les trois longueurs étudiées. Notons que, tous les modes de flambage déduits de ces analyses étant caractérisés par $m=1$, seul les nombres de demi-ondes circonférentielles n sont indiqués sur les graphiques de la figure II.22. Par ailleurs, précisons que les limites de stabilité sont exprimées sous la forme réduite définie par [KAR 93] :

$$\overline{P_{cr}} = \frac{P_{cr} L R^2}{E_1 h^3}. \quad (\text{II.76})$$

On remarquera premièrement que les résultats déduits des modèles analytiques de type SANDERS (non représentés) et CT3 se sont tous avérés identiques. De même, hormis pour le

cylindre le plus long, les valeurs de P_{cr} issues du modèle LOG sont aussi très semblables. Aussi, soulignons que de tels résultats ne permettent pas d'apprécier les différences relatives des formulations analytiques. Précisons cependant que les travaux d'optimisation permettront, eux, d'évaluer la validité et la sensibilité respectives de ces trois modèles aux paramètres de stratifications, à l'épaisseur de paroi et la validité du mode de prise en compte des effets de cisaillement transverse des formulations CT3 et LOG (voir § IV.2.3 et § IV.2.9).

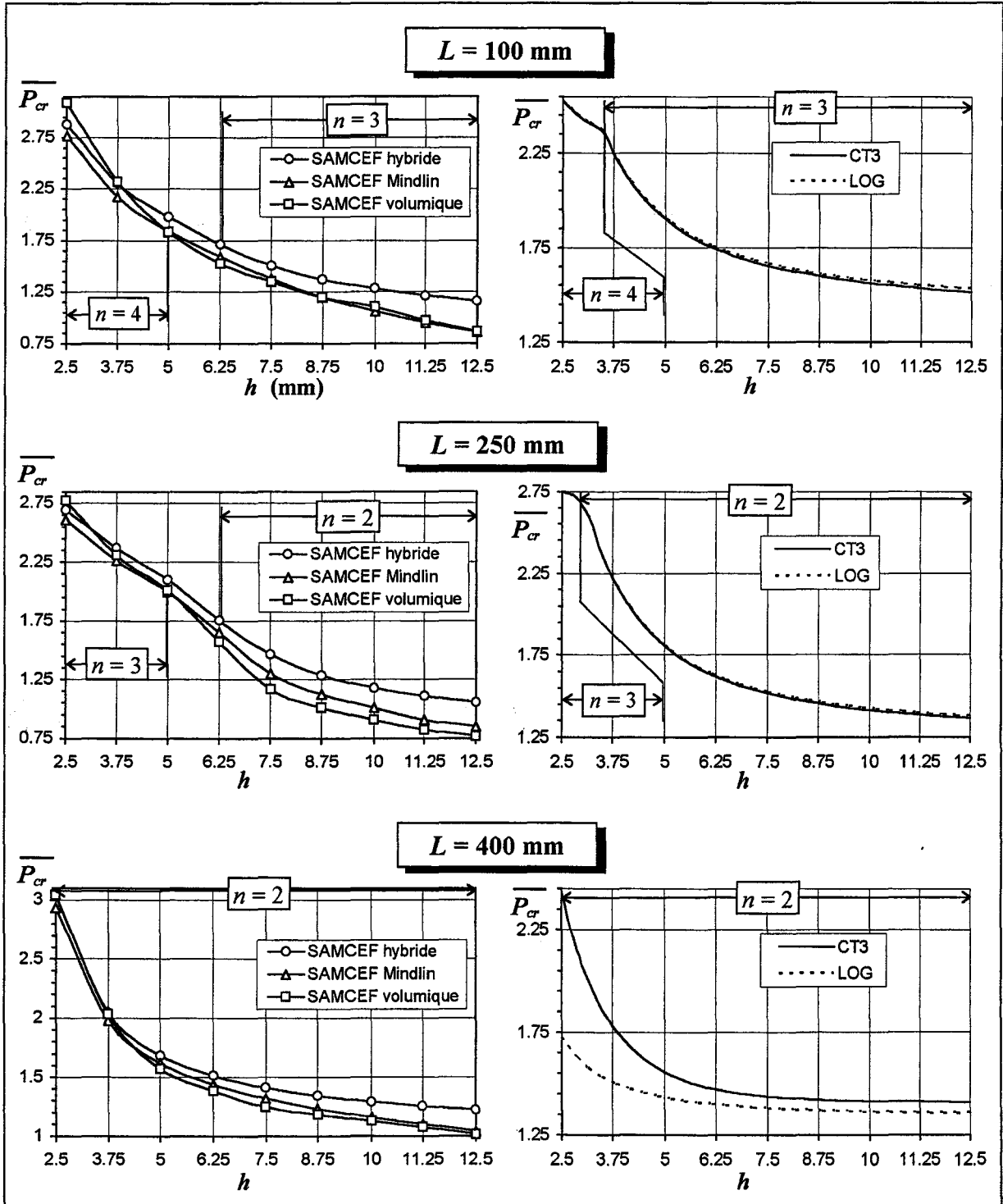


Figure II.22 : évolutions des pressions critiques MEF et analytiques

Par ailleurs, on constate que, pour les cylindres semi-épais, les pressions critiques déduites des modèles analytiques s'avèrent nettement supérieures aux résultats MEF : comme évoqué notamment dans les références [KAR 93] et [BAN 96], les formulations analytiques ne permettent généralement qu'une estimation très "grossière", fortement surévaluées, des limites de stabilité de telles structures. Concernant les calculs MEF, on constate que les résultats SAMCEF Mindlin et coque volumique s'avèrent tous proches. Les valeurs P_{cr} déduites du modèle SAMCEF coque hybride sont, elles, sensiblement plus élevées pour les cylindres semi-épais : en effet, compte tenu du blocage des déformations de cisaillement transverse (cf. § II.3.2), ce modèle est ainsi plus "raide". Enfin, on remarquera que, hormis pour les cylindres minces et courts ($h > 3.75$ mm et $L = 100$ mm) conduisant à $n = 4$, les modes de flambage s'avèrent bien tous correspondre aux allures présentées en figure II.9. Néanmoins, on constate quelques disparités entre les résultats analytiques et MEF : les modèles analytiques conduisent ainsi plus fréquemment à l'obtention de $n = 2$. Signalons que l'incidence de telles différences sur les résultats d'optimisation sera évaluée en § IV.2.3.10.

Les résultats suivants permettront d'illustrer le désaccord, évoqué en § II.1.2.2, entre les estimations numériques de P_{cr} et les limites de stabilité réelles. Considérons en effet le travail expérimental, détaillé par les références [CHA 95] et [DAV 96], concernant l'étude du flambage d'une enceinte sous-marine dont la géométrie est caractérisée par (valeurs en mm) :

$$R = 243 \quad ; \quad L = 1250 \quad ; \quad h = 39$$

Le matériau constitutif du corps d'enceinte semi-épais est un composite carbone/époxy (fibres *TENAX*, résine *MY750*). Les résultats de travaux préliminaires de caractérisation ont conduit à l'obtention des valeurs de propriétés anisotropes suivantes (modules en GPa) [CHA 95]:

$$\begin{aligned} E_1 &= 156 \quad ; \quad E_2 = 9.9 \quad ; \quad E_3 = 9.9 \\ G_{12} &= 5.8 \quad ; \quad G_{13} = 5.7 \quad ; \quad G_{23} = 4.9 \\ \nu_{12} &= 0.231 \quad ; \quad \nu_{13} = 0.232 \quad ; \quad \nu_{23} = 0.351 \end{aligned}$$

Le mode de stratification adopté est de type $[55_N]$. De plus, notons qu'un contrôle géométrique a montré que les variations d'épaisseurs étaient inférieures à 1 mm [CHA 95] : signalons que la prise en compte d'une telle amplitude de défauts géométrique n'a eu aucune incidence sensible sur les résultats numériques. Par ailleurs, des tapes de fermetures hémisphériques, d'épaisseurs égales à 10 mm, ont été utilisées pour cette application. Le matériau utilisé est un titane possédant les caractéristiques isotropes suivantes [CHA 95] :

$$E = 97 \text{ MPa} \quad ; \quad \nu = 0.35$$

L'expérimentation de cette structure, réalisé à l'IFREMER à l'aide des moyens schématisés en figure II.3, a révélé que l'instabilité du corps d'enceintes se manifestait pour une pression hydrostatique environ égale à 61 MPa. Le mode de flambage s'est avéré de type $m = 1$ et $n = 2$ [DAV 96]. La figure II.23 présente, à titre indicatif, les résultats issus de ce travail expérimental (documents tirés de [DAV 96]). Le tableau II.2 présente, lui, les limites de stabilité déduites des formulations analytiques ainsi que des modèles MEF (en analyses

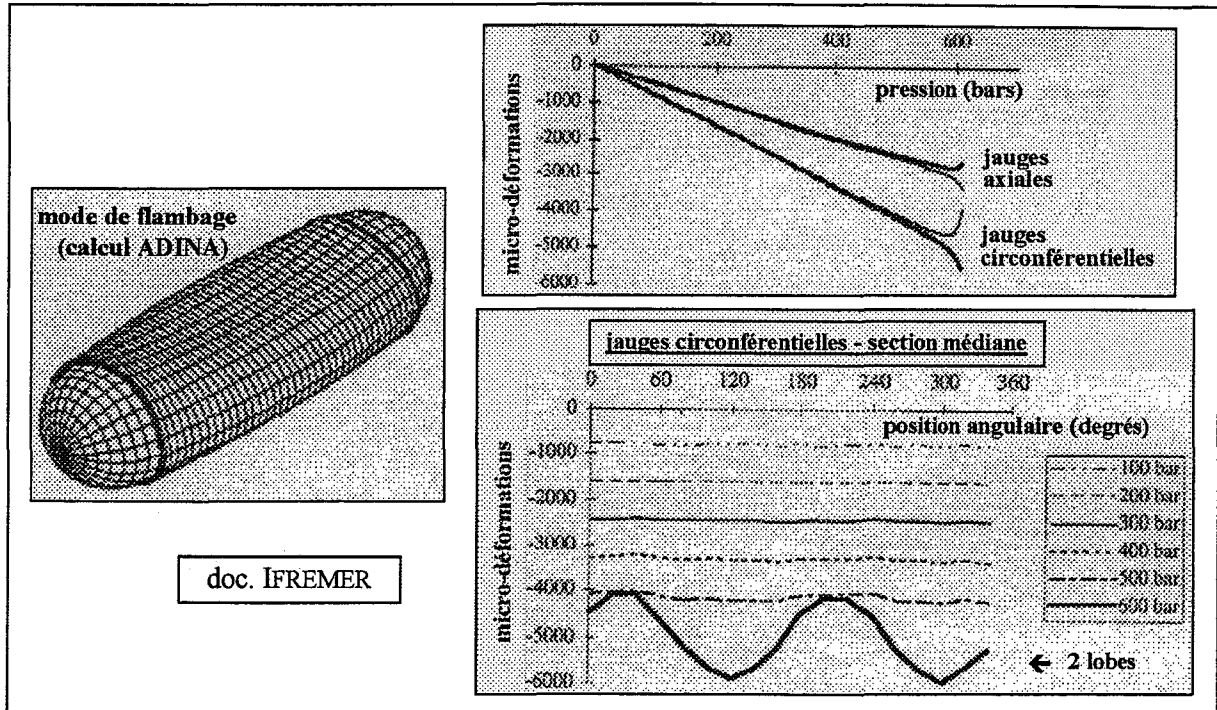


Figure II.23 : résultats expérimentaux

linéaires) utilisant des corps rigides pour la modélisation des tapes. On constate ainsi que ces estimations s'avèrent toutes quasiment doubles de la valeur P_{cr} réelle, les résultats analytiques étant particulièrement surévalués. Précisons néanmoins que tous les modes calculés numériquement se sont bien avérés identiques à celui observé expérimentalement.

modèles	SANDERS	CT3	LOG	SAMCEF coque hybride	SAMCEF coque Mindlin	SAMCEF coque volumique
P_{cr} (MPa)	136.3	136.4	134.2	122.4	106.5	101.2

Tableau II.2 : pressions critiques analytiques et MEF

Des calculs MEF supplémentaires ont aussi été réalisés en modélisant, cette fois, les tapes à l'aide d'éléments de type coque volumique à l'instar du corps composite. Ce modèle, d'allure similaire à celui présenté en figure II.23, a conduit à l'obtention d'une valeur P_{cr} égale à 85 MPa en analyse linéaire. Une analyse non linéaire de stabilité (réalisés pour 30 incréments de chargement) a, elle, conduit à environ 76 MPa. Ces résultats permettent ainsi de constater premièrement que, comme indiqué en § II.3.3, la modélisation des tapes induit une réduction fort sensible (environ 16 %) des valeurs P_{cr} par rapport à celle du tableau II.2. Néanmoins, ce type de modèle conduit aussi à surévaluer tangiblement (de plus de 20 %) la pression critique réelle.

A ce propos, notons qu'un mode de recalage des résultats numériques a été récemment établi par les services de l'IFREMER : les sections centrales des corps d'enceintes modélisées sont alors considérées imparfaites, possédant une forme elliptique. L'amplitude de cette imperfection géométrique est "fictive", déduite de tests numériques successifs comparés à des

résultats expérimentaux [LEF 99]. Un calcul statique, non linéaire géométrique, permet alors la mise en évidence d'une "bifurcation" des déplacements radiaux observés en section centrale, bifurcation alors considérée comme correspondant à la limite de stabilité [CHA 99a]. Soulignons que ce mode de recalage requiert de nombreux tests numériques préliminaires et de résultats expérimentaux. Aussi, ce type de procédé ne sera pas utilisé pour la présente étude : comme indiqué en § I.2.3, ce travail consistera non pas la détermination précise de valeurs P_{cr} mais en la recherche de stratifications permettant l'accroissement des limites de stabilité des enceintes. Comme précisé en § IV.1.3, l'appréciation des performances déduites de ces solutions optimisées sera réalisée essentiellement en termes de gains relatifs à l'aide de modèles MEF décrits en § II.3.

II.4.2. Influence des imperfections

Considérant les cylindres en verre/époxy (de longueurs $L = 250$ mm) précédemment étudié en § II.4.1, des calculs de stabilité supplémentaire ont été réalisés avec introduction de défauts géométriques d'amplitudes équivalentes \tilde{h} . Pour la formulation analytique de type CT3, les modèles d'imperfections de type axisymétrique et aussi asymétrique précisé en § II.2.5.3 ont été considéré. Les calculs MEF (analyses linéaires) ont, eux, été réalisé à l'aide du modèle coque hybride utilisant des corps rigides pour la modélisation des tapes. La figure II.24 présente ainsi les réductions des valeurs de pressions critiques exprimées à l'aide du facteur η :

$$\eta = P_{cr}(\tilde{h}) / P_{cr}(\tilde{h} = 0). \quad (\text{II.77})$$

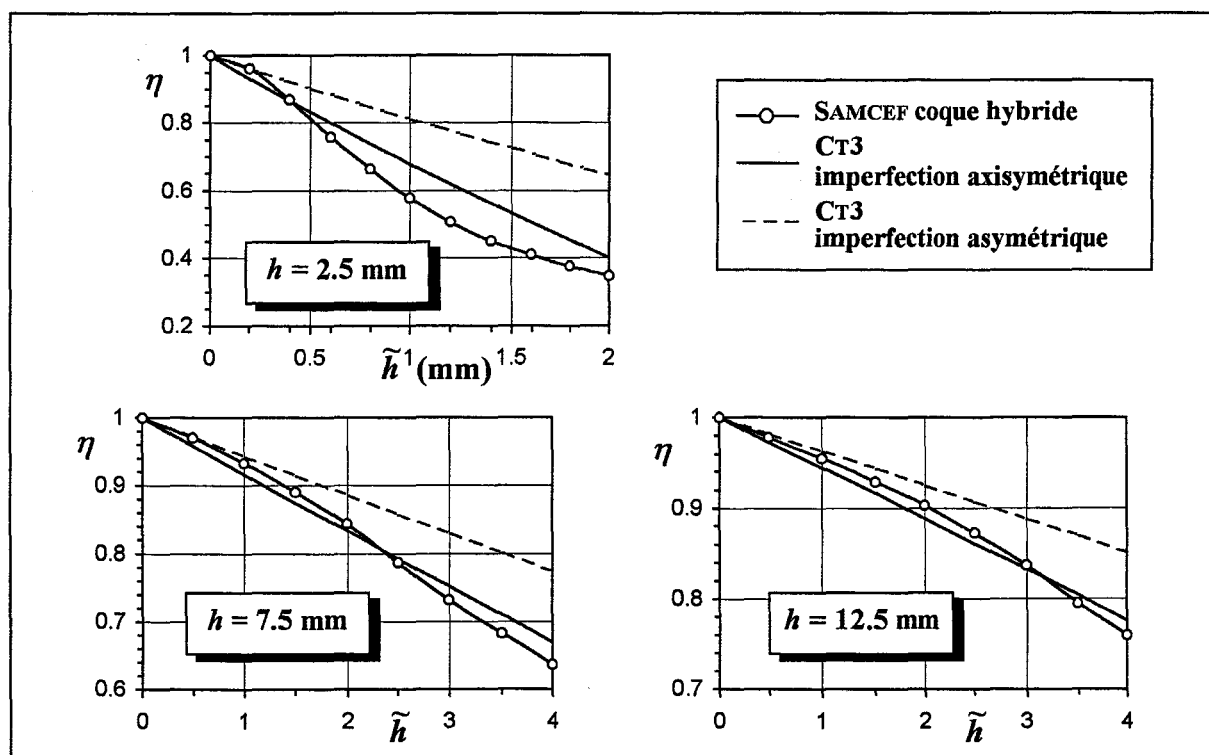


Figure II.24 : évolutions du paramètre η

Précisons que les résultats déduits du modèle de type SANDERS (non représentés) se sont avérés tout à fait similaires à ceux du modèle CT3. Les graphiques présentés en figure II.24 permettent ainsi de vérifier que le mode de prise en compte des imperfections détaillé en § II.2.5.3 conduit à l'obtention d'estimations de η fort analogues à celles calculées par la MEF : en effet, et bien que plus "linéaires", les évolutions déduites du modèle CT3 utilisant le modèle de défauts axisymétriques (cf. (II.23)) s'avèrent très proches des résultats SAMCEF coque hybride. Par contre, le modèle analytique de défauts asymétriques (cf. (II.24)) tend, lui, à sous-estimer les réductions de pressions critiques. Précisons que cette tendance a été observée lors de tous les travaux numériques de cette étude dont notamment ceux détaillés en [MES 99a]. On remarquera que ce constat corrobore explicitement les indications de la littérature : en effet, et comme précisé notamment par les références [TEN 71] [HAN 77], les composantes axisymétriques de défauts s'avèrent généralement les plus dommageables. Néanmoins, et malgré cet écart par rapport aux résultats MEF, le modèle analytique d'imperfections asymétriques sera aussi employé pour l'évaluation l'incidence de ces défauts sur les allures de stratifications optimisées (voir § IV.2.6.4).

II.5. Bilan partiel

Ce chapitre a permis la description de trois modèles analytiques linéaires du flambage de cylindres stratifiés : le premier, de type SANDERS, est similaire à ceux employés lors des travaux antérieurs de la littérature portant sur l'optimisation de tubes multicouches vis à vis de critères de stabilité (cf. § I.2.2). Les deux autres formulations développées, nommées CT3 et LOG, permettront, elles, d'apprécier l'influence des effets de cisaillement transverses ainsi que l'incidence de l'épaisseur de coque sur les résultats d'optimisation. Ces modèles, codés à l'aide d'un compilateur FORTRAN 90, seront ainsi couplés à la procédure d'optimisation décrite dans le chapitre III afin de procéder à la recherche de stratifications accroissant les pressions critiques des corps d'enceintes (voir figure IV.1). Les modèles MEF présentés seront, eux, destinés à l'évaluation des gains relatifs, alors mesurés par rapport aux cylindres de référence stratifiés en [55_N]. Enfin, soulignons que les travaux détaillés dans le chapitre IV permettront d'évaluer la sensibilité respective des modèles analytiques aux paramètres de stratifications et aux effets de cisaillement transverse, complétant ainsi les tests préliminaires ici pratiqués.

Chapitre III :

Stratégie d'optimisation

Ce chapitre dresse tout d'abord un bilan concis de l'état de l'art en optimisation. De par les qualités de fiabilité et de robustesse de ce type de méthode globale, un algorithme génétique a été retenu pour les applications suivantes. Outre la description des fondements et caractéristiques générales de la procédure, une attention particulière est accordée au choix du mode d'encodage des variables de conception ainsi qu'aux différents opérateurs génétiques. L'adoption de principes de représentation, conformément aux indications de la bibliographie, a ainsi conduit à coder une version inhabituelle pour les applications en sciences de l'ingénieur : un algorithme génétique manipulant directement des variables entières et utilisant de plus un mode de sélection élitiste par tournois. Des tests préliminaires et comparatifs de performances ont conforté ces orientations et choix.

III.1. Etat de l'art

III.1.1. Quelques généralités

III.1.1.1. Formulation d'un problème

Pour tout problème d'optimisation, les possibilités de modifications de conception sont décrites par un ensemble de variables : il s'agit par exemple de la description de la géométrie d'une structure (*optimisation de forme* ou *topologique*), soit encore la représentation d'éléments de construction tels que des barres de treillis choisies parmi des valeurs standards de catalogues. Toute variable de conception, notée x_i ($i = 1, 2, \dots, N$), peut ainsi être de nature :

- continue, correspondant par exemple à des dimensions de pièces
- discrète, choisie parmi un jeu de valeurs données.

Une solution de conception sera alors notée sous la forme :

$$\vec{X}_P = \begin{Bmatrix} x_{1P} \\ x_{2P} \\ \vdots \\ x_{NP} \end{Bmatrix}$$

les composantes de ce vecteur correspondant aux coordonnées d'un point P de l'hyper-espace N -dimensionnel nommé *espace des solutions, de conception* ou encore *espace de recherche*. Par ailleurs, dans le cas d'un problème discret, le nombre total de solutions de conception possibles est nommé *cardinalité*.

La sélection d'une solution de conception est réalisée par le biais d'un *critère*, traduction algébrique de l'objectif du concepteur [MIE 99]. Il s'avérerait fort délicat de dresser une liste exhaustive de ceux rencontrés dans les applications en calcul de structures et, plus largement, en sciences de l'ingénieur de par leur multiplicité et leurs spécificités [GUT 97a] [BAT 98] [BLO 99] : minimisation du volume matière d'une structure, maximisation des premières fréquences propres, homogénéité des champs de contraintes, réduction des déplacements induits par une sollicitation statique... Des aspects fiabilistes et probabilistes, voire même des considérations qualitatives ou intuitives, peuvent de plus être adjoints [REN 95]. Le critère retenu est intégré au problème grâce à la *fonction objectif* (ou *fonction coût*) :

$$F = F(\vec{X}_P) = F(x_{1P}, x_{2P}, \dots, x_{NP})$$

décrivant une hyper-surface dans l'espace de recherche. Ainsi, le problème d'optimisation consiste à déterminer la solution conduisant au maximum de F . Notons que, pour l'*optimisation multi-critères*, la fonction objectif est alors généralement constituée de la somme pondérée de fonctions coût traduisant chacune un critère spécifique [JEN 83] : les coefficients de pondération conditionnent l'importance relative de chacun d'entre eux, la solution du problème d'optimisation étant de fait assimilable à un compromis.

L'espace des solutions s'avère souvent limité par les possibilités technologiques, telles l'encombrement ou encore la tenue en endurance des pièces, conduisant à restreindre la recherche au *domaine des solutions admissibles*. Ces limitations sont introduites dans l'énoncé du problème d'optimisation sous deux formes :

– *Contraintes explicites*, concernant les plages de variations de certains paramètres :

$$x_{mi} \leq x_i \leq x_{Mi}$$

Remarquons que ces limitations sont tacites dans le cas de variables discrètes.

– *Contraintes implicites*, intégrées au problème sous forme d'équations ou d'inéquations :

$$\begin{cases} G_j(\vec{X}) = 0 \\ G_k(\vec{X}) \leq 0 \end{cases}$$

A titre d'illustration, la figure III.1 présente un exemple de topologie de l'espace des solutions correspondant à l'énoncé (ou *forme standard de la programmation mathématique*) du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \text{trouver } \vec{OP}_{opt} = \vec{X}_{opt} &= \begin{cases} x_{1opt} \\ x_{2opt} \end{cases} \\ \text{tel que } F(\vec{X}_{opt}) &= \text{Max}_{x_i} \{ F(\vec{X}) \} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{m1} \leq x_{1opt} \leq x_{M1} \\ G_1(\vec{X}_{opt}) = 0 \\ G_2(\vec{X}_{opt}) \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Outre la solution P_{opt} de ce problème, on remarquera la position de la solution optimale P^* non contrainte par G_1 .

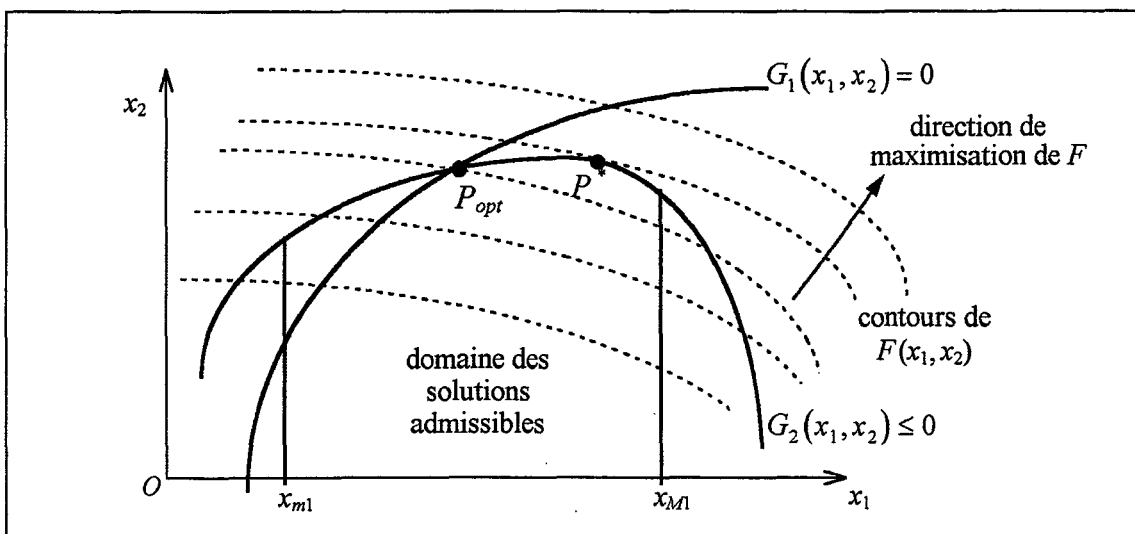


Figure III.1: exemple d'espace des solutions

III.1.1.2. Qualités d'une méthode

Dans un contexte industriel, l'appréciation d'une méthode d'optimisation peut être réalisée par le biais des sept principaux critères de qualité suivants [JEN 83] [REN 95] :

- *Fiabilité* : cette qualité caractérise l'aptitude à fournir un optimum global. La méthode doit en effet proscrire la concentration de la recherche sur un ou plusieurs maxima locaux, conduisant de fait à des solutions sous-optimales.
- *Robustesse* : c'est la capacité de la méthode à traiter des problèmes d'optimisation discrets de cardinalités élevées.
- *Reproductibilité* : les lancements successifs d'un même calcul doivent aboutir à des résultats similaires. Les performances de la méthode en termes de fiabilité et de robustesse ne sont ainsi appréciables qu'en cas de reproductibilité des résultats.
- *Stabilité* : la méthode doit, au terme de sa convergence, conduire à l'obtention d'une solution unique et non pas osciller perpétuellement entre plusieurs solutions.
- *Rapidité* : le temps CPU nécessaire au déroulement de l'algorithmique et à la convergence doit être compatible avec les contraintes temporelles de l'étude ainsi que le matériel informatique disponible.
- *Simplicité d'utilisation* : cette qualité est généralement liée au nombre et à la complexité des paramètres à ajuster lors du lancement de la méthode. Elle conditionne de fait la possibilité d'utilisation de la méthode par un non-spécialiste. Cette qualité s'avère ainsi fondamentale pour un outil d'aide à la conception destiné aux bureaux d'études.
- *Adaptabilité* : c'est la capacité de la méthode à résoudre une grande gamme de problèmes, ces problèmes étant issus d'une même classe d'applications ou non.

III.1.2. Procédures

Les paragraphes suivants dressent un bref aperçu des principales méthodes d'optimisation. Bien que non exhaustif, ce bilan permettra la mise en évidence des limites d'emploi des différentes classes de procédures.

III.1.2.1. Méthodes directes

Ces méthodes, aussi nommées *univariationnelles*, consistent en une recherche effectuée de point en point par modifications successives des paramètres de conception, et ceci à partir d'une solution initiale \vec{X}_0 . La progression est ainsi donnée par :

$$\vec{X}_k = \vec{X}_{k-1} + \lambda_k \vec{x}_k$$

où λ_k et \vec{x}_k représentent respectivement la *longueur* (ou *pas*) et le vecteur unitaire de l'axe correspondant au $k^{\text{ième}}$ paramètre de conception (par permutation circulaire). La figure III.2 présente un exemple de ce mode de cheminement dans le cas d'un problème à deux variables,

la surface décrite par F étant représentée par des contours d'iso-valeurs. Le choix de λ_k doit, de fait, conduire à l'obtention d'une valeur positive de ΔF défini par :

$$\Delta F = F(\bar{X}_k) - F(\bar{X}_{k-1}).$$

La version standard de la méthode utilise une valeur de pas constante. Pour les *méthodes à pas aléatoires (random-walk)* [JEN 83], λ_k est déterminé par tirage aléatoire. De plus, divers auteurs ont proposé de recourir à une optimisation unidimensionnelle locale (procédure de *line-search*) réalisée au voisinage du point courant et permettant l'obtention du pas conduisant à la plus grande valeur positive de ΔF .

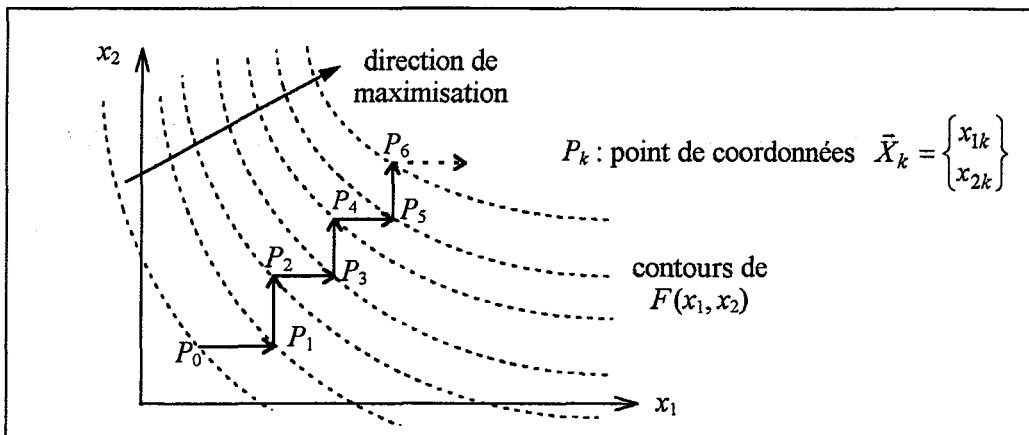


Figure III.2 : progression univariationnelle

Ce processus de recherche a inspiré de nombreux autres schémas de recherche. Citons par exemple la *méthode de POWELL* [POW 64] illustrée en figure III.3 : après chaque cycle de N itérations ayant conduit à modifier successivement chacun des N paramètres de conception, la direction de déplacement est constituée par la somme vectorielle des déplacements précédents [SUN 86]. La *méthode de HOOCKE et JEEVES* ou encore celle de *ROSENBROCK* sont issues de principes algorithmiques fortement similaires [JEN 83].

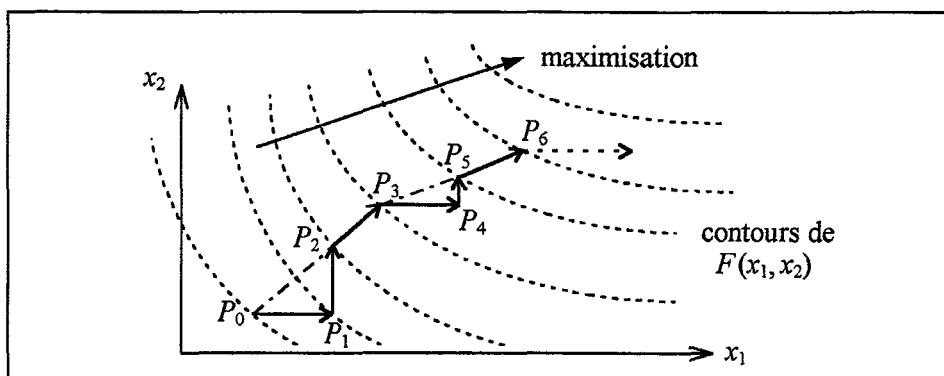


Figure III.3 : méthode de POWELL

Le *simplex séquentiel*, notamment détaillé en [JEN 83], procède par constructions successives de figures dans l'espace de recherche et dont les sommets coïncident avec des

solutions de conception. Le plus "mauvais" sommet, conduisant à la plus faible valeur de F , est remplacé à chaque itération par un nouveau point déterminé à l'aide du centroïde de la figure courante. Le *complex*, de fonctionnement analogue, permet la prise en compte des contraintes implicites [JEN 83].

La fiabilité et les limites de ces méthodes directes, similaires à celles des procédures par gradients, sont discutées dans le paragraphe suivant.

III.1.2.2. Méthodes de gradients

A l'instar des méthodes directes, les *méthodes de gradients* progressent par points uniques et successifs à partir d'une solution initiale. La direction de déplacement est alors déterminée à l'aide du vecteur tangent à l'hyper-surface décrite par F et noté :

$$\vec{\nabla}F(\vec{X}_k) = \begin{Bmatrix} f_1(\vec{X}_k) \\ f_2(\vec{X}_k) \\ \vdots \\ f_N(\vec{X}_k) \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad f_i = \partial F / \partial x_i.$$

Ses composantes sont généralement approximées à l'aide de schémas de différences finies (*calcul des sensibilités*) [LYA 95].

Les *méthodes de 1^{er} ordre* n'utilisent ainsi que les dérivées partielles premières de F . Il s'agit par exemple de la méthode du gradient simple dont la progression est donnée par :

$$\vec{X}_k = \vec{X}_{k-1} + \lambda_k \vec{d}_k \quad \text{avec} \quad \vec{d}_k = \vec{\nabla}F(\vec{X}_{k-1})$$

le pas λ_k étant identique à chaque itération. La *méthode du gradient à pas optimal* procède, elle, au choix de λ_k par line-search [JEN 83]. Citons de plus la *méthode des gradients conjugués* qui consiste, elle, à prendre la direction du déplacement sous forme d'une déviation, soit :

$$\vec{d}_k = \vec{\nabla}F(\vec{X}_{k-1}) + \vec{d}_{k-2} \frac{|\vec{\nabla}F(\vec{X}_{k-1})|^2}{|\vec{\nabla}F(\vec{X}_{k-2})|^2}.$$

Les méthodes de gradients d'ordres supérieurs consistent à remplacer F par une approximation issue d'un développement de Taylor au voisinage du point courant [JEN 83]. La progression des méthodes de type *newtonienne* est ainsi donnée par :

$$\vec{X}_k = \vec{X}_{k-1} + \lambda_k \left[\nabla^2 F(\vec{X}_{k-1}) \right]^{-1} \vec{\nabla}F(\vec{X}_{k-1})$$

avec la matrice hessienne :

$$\left[\nabla^2 F(\vec{X}_{k-1}) \right] = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{X}_{k-1}) \right].$$

Les méthodes quasi-newtoniennes (ou à métrique variable) utilisent, elles, une approximation de cette matrice sous la forme :

$$[\nabla^2 F(\bar{X}_{k-1})]^{-1} \approx [H_k]$$

calculée à chaque itération telle que :

$$[H_k](\bar{\nabla}F(\bar{X}_{k-1}) - \bar{\nabla}F(\bar{X}_{k-2})) = \bar{X}_{k-1} - \bar{X}_{k-2}.$$

Divers auteurs ont proposé des modes de correction [LYA 95] ainsi que des formulations de $[H_P]$ plus complexes à l'instar de la méthode BFGS décrite en [JEN 83].

Pour ces méthodes de gradients, la prise en compte des contraintes est usuellement réalisée par le biais de *procédés de transformations* [LYA 95] : il s'agit par exemple de traiter, après transformations des variables de conception, le problème dual alors non contraint. Une autre approche consiste en la manipulation d'une nouvelle fonction objectif pénalisant les valeurs de F pour les solutions situées hors du domaine des solutions admissibles (*méthode des pénalités*). Les *méthodes lagrangiennes* et du *lagrangien augmenté*, basés sur ces modes de transformations, sont notamment détaillées en [JEN 83].

A l'instar des procédures directes (cf. § III.1.2.1), les méthodes de gradients sont généralement dédiées à la résolution de problèmes d'optimisation continus. De fait, l'arrêt de la progression recourt généralement à un test de convergence conditionnant alors la stabilité et la rapidité du calcul [REN 95].

Le principe même de ces procédures tend à concentrer la progression, et donc la recherche, sur le premier extremum découvert au voisinage de la solution initiale \bar{X}_0 : ce sont des méthodes d'*optimisation locale* [SEB 97]. Le choix de la solution initiale est de fait décisif et requiert généralement des "*connaissances a priori*" quant à la solution du problème traité [REN 95]. Seul le respect des conditions de continuité et de convexité de l'hyper-surface décrite par F permettent de garantir l'optimalité globale des solutions déduites, et donc la fiabilité, de telles procédures déterministes [JEN 83]. La résolution de problèmes conduisant à des espaces de solutions *multi-pics* (ou *multi-modaux*), à l'instar de l'exemple présenté en figure III.4 (voir aussi la figure III.14), ou discontinus peut s'avérer hasardeuse, peu fiable [SEB 97].

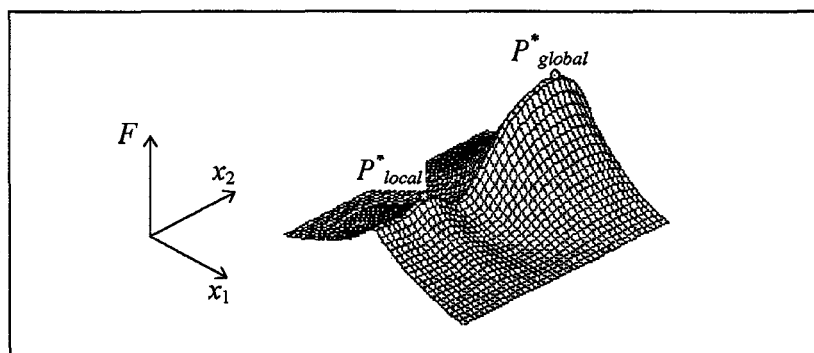


Figure III.4 : exemple de problème non convexe

Notons que quelques auteurs ont tenté de pallier à ces obstacles en générant aléatoirement une multitude de solutions de conception dont la plus intéressante d'entre elles est ensuite utilisée comme point initial de la progression [JEN 83]. Cependant, et au vu des résultats présentés notamment dans les références [SUN 88] et [SUN 89], la reproductibilité des solutions déduites des calculs d'optimisation est incertaine, ce procédé s'avérant là aussi peu fiable dans le cas d'une fonction objectif non convexe.

III.1.2.3. Méthodes discrètes classiques

Concernant les problèmes d'optimisation conditionnés par des variables discrètes, leur résolution est parfois réalisée par l'adaptation, quoi que parfois délicate [LYA 95], des méthodes directes et de gradients précédemment détaillées [REN 95] [GUT 97b]. A ce propos, remarquons les *méthodes de coupes* (ou *de troncatures*), basées sur un artifice de modification de l'énoncé : l'idée consiste à considérer un problème continu mais tributaire d'une multitude de pénalités sur les variables, tronquant ainsi l'espace des solutions. Cependant, l'intégration des coupes à l'énoncé du problème induit souvent une grande complexité de mise en œuvre.

Les *méthodes arborescentes* (ou *énumératives*) manipulent les paramètres d'optimisation par le biais d'un codage binaire. L'algorithme procède alors à une énumération implicite de classes de solutions réparties en arborescence [GUT 97b]. Ce concept nécessite que l'on puisse déterminer en chacun des "nœuds" de cette arborescence une évaluation suffisamment précise et cohérente de F afin de guider la recherche. De fait, cette méthode est fortement tributaire de la régularité, de la monotonie, de la fonction objectif. De plus, et malgré les précautions de mise en œuvre rappelées en [LYA 95], ce type de procédé énumératif engendre généralement des temps de calcul inexploitable pour les problèmes de cardinalités élevées [SEB 97].

Notons par ailleurs que les *méthodes d'homogénéisation* ont été l'objet de très nombreux développements concernant l'optimisation topologique discrète [GUT 97a] [BLO 99]. Le milieu continu étudié est alors assimilé à une structure poreuse (ou constituée d'un bi-matériau) analysée par la MEF. Les variables utilisées, dimensions et orientation des porosités de chaque élément fini, permettent d'énoncer le problème sous la forme d'une analyse des champs de contraintes à micro puis macro-échelle [SIG 98].

III.1.2.4. Procédures stochastiques

Afin de satisfaire aux exigences actuelles des concepteurs, et particulièrement dans un contexte industriel, de nombreux travaux ont visé au développement de méthodes *d'optimisation globale*, souples et bien adaptées aux problèmes rencontrés en sciences de l'ingénieur [LET 96] [SEB 97] [MIE 99]. De tels procédés permettent ainsi d'aborder les situations où la fonction objective s'avère non convexe, multi-pics, et ceci sans requérir de connaissance a priori. Ces méthodes utilisent des principes non plus déterministes mais désormais *stochastiques* [GUT 97a]. On remarquera en outre que ces stratégies d'optimisation sont souvent inspirées de processus naturels.

La *méthode de Monté-Carlo* procède à un "pseudo-calcul" de sensibilités basé sur de nombreux tirages aléatoires [HAM 64]. Les résultats (ou *estimateurs*) obtenus et l'analyse de leur variance permettent de guider la recherche de l'optimum. Notons que ce type de procédé s'avère destiné aux problèmes comportant de faibles nombres de variables [MAG 99].

Le *recuit simulé* est une technique d'optimisation continue utilisant un mode de recherche stochastique dérivé des principes de la thermodynamique [KIR 84] [GUT 97b]. Le problème est alors modélisé par des fonctions de type énergie et température [SZE 93]. A partir d'une configuration (ou solution) initiale, l'algorithme utilise de légères perturbations aléatoires jusqu'à parvenir à un équilibre d'état et donc implicitement à la maximisation de F .

Les *réseaux de neurones* utilisent une algorithmique apparentée aux schémas cognitifs [JOD 94]. Cette approche *connexionniste* permet une sous-structuration des problèmes et donc un partitionnement des solutions conduisant à la mise en évidence implicite de l'optimum [SZE 94]. Quelques travaux ont aussi recouru à ces réseaux pour approximer les valeurs d'une fonction coût suite à un apprentissage effectué sur quelques échantillons [SZE 93] [MAR 96b].

Les *stratégies de calcul évolutif* (aussi nommées *méthodes évolutionnaires*) sont, elles, issues d'une métaphore de l'évolution biologique : la survie et la reproduction des solutions de conception prometteuses. Bien que toutes basées sur des algorithmiques très similaires (voir § III.2.1.2), on en distingue trois types [SEB 96] :

- Les *stratégies d'évolutions* utilisent essentiellement des mécanismes de mutation et sont généralement destinées aux problèmes continus [BAC 93].
- La *programmation évolutive* est une version plus récente et complexe, la procédure possédant une "mémoire" et des opérateurs à fonctionnements adaptatifs [SEB 97].
- Les *algorithmes génétiques* sont, eux, principalement basés sur une combinaison d'opérateurs de sélection et de croisement des solutions de conception [GOL 94].

L'étude des travaux de la bibliographie permet d'apprécier l'intérêt considérable suscité ces dernières années par les algorithmes génétiques [LET 96] [MIE 99]. Ils s'avèrent en effet particulièrement bien adaptés au traitement de problèmes discrets, non convexes, discontinus et de cardinalités élevées rencontrés en sciences de l'ingénieur [MIC 96] [SEB 97]. RENDERS [REN 95] a notamment mis en évidence les grandes qualités de robustesse et de fiabilité de telles procédures par comparaison avec les performances d'un simplex et d'une méthode de gradients. A la lecture de comptes-rendus de congrès récents du domaine tels que [GUT 97a], [BAT 98] et [BLO 99], on constate que les algorithmes génétiques ont été employés pour la création de nombre d'outils d'aide à la décision et ont permis d'aborder, avec succès, de très nombreux problèmes de conception (voir aussi § III.2.2). Compte tenu des risques de non-convexité évoqués en § I.2.2 et n'ayant aucune connaissance a priori quant à la nature des solutions des problèmes abordés dans le cadre de cette étude, une stratégie d'optimisation globale par algorithme génétique a ainsi été retenue pour les applications traitées (cf. chapitre IV). Les paragraphes suivants en précisent l'algorithmique ainsi que la nature des opérateurs adoptés.

III.2. Les algorithmes génétiques

III.2.1. Principes et caractéristiques

III.2.1.1. Analogie biologique

Issus des travaux de HOLLAND [HOL 75] et popularisés par GOLDBERG [GOL 94], les algorithmes génétiques (AG) sont des processus exploratoires utilisant une analogie des mécanismes d'adaptation et de sélection naturels. En effet, le principe général de la méthode est apparenté aux fondements de la théorie évolutionniste développée au XIX^{ème} siècle par le naturaliste Charles DARWIN : dans une population de dimension donnée, les individus les mieux adaptés à leur biotope bénéficient d'une probabilité élevée de survivre et de transmettre leurs caractéristiques à une descendance importante. Ce processus d'évolution simulée permet ainsi, au fil de générations successives, l'échange et le brassage d'informations inhérentes aux patrimoines génétiques d'individus. Des mutations génétiques peuvent de plus apparaître et s'avérer parfois bénéfiques, conférant des caractéristiques accroissant alors la robustesse de certains spécimens.

De fait, générations après générations, la population s'homogénéise. Les individus présentent de nombreuses caractéristiques semblables et sont de mieux en mieux adaptés à leur environnement. La population tend à "converger" vers un type optimal. Cette métaphore biologique a, sans conteste, grandement contribué à la popularisation des AG dans le milieu scientifique.

III.2.1.2. Algorithmique

L'algorithmique d'un AG peut être décrite sous forme d'un réseau adaptatif non linéaire [REN 95]. Ce processus, schématisé en figure III.5, est réalisé en M itérations correspondant aux générations successives. Chacune d'entre elles est constituée de N individus représentant tous, par le biais d'un encodage, un jeu de valeurs associées aux variables de conception. De fait, tout spécimen incarne une solution potentielle du problème d'optimisation. La première génération est initialisée (*apparition spontanée*) au démarrage de l'AG (voir § III.2.3.2).

A chaque génération, tout individu est décodé : il s'agit d'extraire les valeurs des variables de conception qu'il représente. Les paramètres issus sont alors introduit dans la fonction coût F . Cette étape constitue le lien, par interfaçage (cf. figure III.5), entre l'AG en tant que tel et la procédure de calcul de la fonction objectif dont on recherche le maximum [MIC 96]. La valeur correspondante de F est ainsi associée à chaque individu, indiquant son *adaptation* (ou *performance*) au biotope représenté en l'occurrence par l'énoncé du problème d'optimisation. Notons que, pour la majorité des applications, c'est cette phase de calcul d'adaptation qui s'avère la plus coûteuse, induisant la quasi-totalité du temps de calcul [SEB 97] (voir aussi § III.2.6.3).

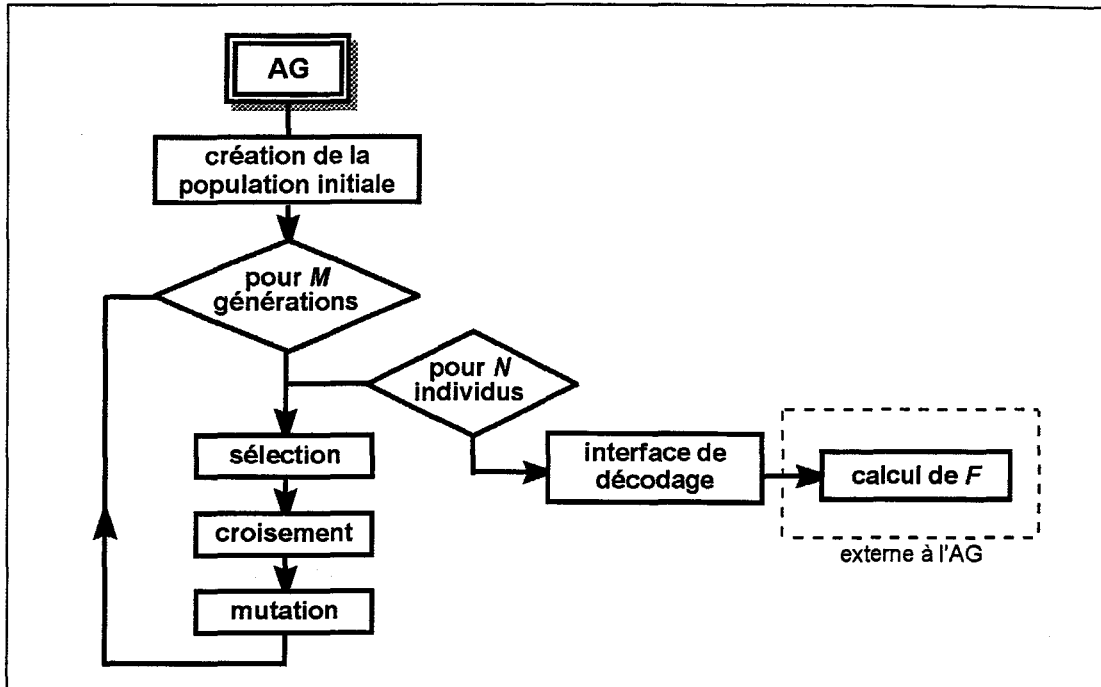


Figure III.5 : schéma d'un AG

L'AG procède ensuite à la phase de reproduction, conduisant à l'apparition d'une nouvelle génération, réalisée à l'aide de trois opérateurs génétiques : *sélection*, *croisement* et *mutation*. Notons dès à présent que le fonctionnement de ces procédures, détaillées dans la suite de ce chapitre, sont basés sur l'utilisation de tirages aléatoires [GOL 94]. Leurs rôles se répartissent comme suit [MIC 96] :

- L'étape de sélection permet de retenir, dans la population courante, les individus *parents* qui contribueront à la naissance d'une nouvelle génération d'*enfants*. Cette procédure confère aux spécimens "les mieux adaptés", possédant des valeurs d'adaptation élevées, une plus grande probabilité d'obtenir une descendance. En outre, un même individu peut être sélectionné plusieurs fois et ainsi obtenir des enfants avec différents partenaires.
- Les spécimens sélectionnés sont assemblés aléatoirement en couples. Pour chacun d'entre eux, un tirage aléatoire comparé à un seuil de probabilité précise si les individus parents seront croisés. Dans la négative, les parents deviennent enfants sans subir d'échanges de caractéristiques. S'il y a croisement, cette procédure conduit à la création d'enfants par brassage des informations des individus parents.
- Enfin, des tirages aléatoires, comparés à un taux de probabilité, déterminent ou non l'apparition de mutations : elles consistent en des modifications aléatoires de caractéristiques des nouveaux individus précédemment obtenus. Il y a ainsi création de quelques "erreurs de la nature".

La population de N enfants constitue alors la nouvelle génération courante. L'AG en évaluera à nouveau les valeurs d'adaptation avant de procéder à une nouvelle phase de reproduction à l'aide des étapes successives de sélection, de croisement et de mutation.

Au terme de ce schéma itératif, l'utilisateur récupère le "meilleur" individu, conduisant à la solution de conception la plus intéressante, rencontré au cours du processus. Notons que le nombre M de générations est généralement fixé par l'utilisateur [GOL 94]. Ainsi, connaissant la durée nécessaire au calcul de l'adaptation d'un spécimen, il s'avère aisé d'estimer a priori le coût CPU de l'AG manipulant un total de $M \times N$ individus. Des critères d'arrêt de la recherche ont aussi été proposés, consistant par exemple à limiter le nombre de générations à compter de la dernière amélioration obtenue [SEB 96]. Cependant, de tels procédés proscrirent alors toute possibilité de contrôle du temps de calcul.

III.2.1.3. Particularités

Les AG présentent des caractéristiques originales, souvent en marge de l'algorithmique d'optimisation classique. Ainsi, à chaque itération, la recherche est réalisée par une population de solutions et non pas en progressant à l'aide d'un point unique. La méthode réalise ainsi une parallélisation implicite de l'information par création d'une base de données évolutive, caractéristique contribuant grandement aux qualités de fiabilité et de robustesse. Un AG est une méthode d'optimisation globale, exploitable dans le cas d'espaces de recherche complexes, multi-modaux et de cardinalités élevées [HAJ 90] [MIC 96] [MIE 99]. L'utilisation d'une multitude de points impose cependant que la détermination des valeurs d'adaptation soit "rapide" afin de limiter les temps de calcul à des valeurs exploitables [SEB 97].

De plus, les AG utilisent la fonction objectif sans exiger de propriétés mathématiques (convexité, continuité ou dérivabilité) et d'opérations particulières (telles que le calcul des sensibilités). Cette particularité confère aux AG une grande adaptabilité, les destinant ainsi à un vaste champ d'applications [REN 95] [MIC 96] [MIE 99].

La recherche de l'optimum utilise des règles de transitions essentiellement probabilistes et non déterministes, les tirages aléatoires constituant un outil primordial des AG. La dynamique des populations est stochastique, générée par l'introduction du hasard dans le processus de reproduction [REN 95] : c'est une méthode *pseudo-aléatoire*. Aussi, l'analyse des solutions de conception et des performances doit être effectuée à partir des résultats issus de plusieurs lancements du calcul (10 au minimum [SEB 97]).

La version basique des AG requiert l'introduction d'uniquement quatre paramètres [GOL 94] : nombres de générations et d'individus, probabilités de croisement et de mutation. L'étude de la bibliographie ne permet pas de recenser de règles strictes régissant le choix de ces valeurs [SEB 97]. Pour la très grande majorité des applications, elles sont fixés par expérience [MIC 96] (voir aussi § III.2.3.2). Le choix des paramètres de population, fonction de la cardinalité du problème considéré, recourt aux indications de la littérature. De plus, remarquerons que les travaux présentés en [COL 96] témoignent de l'influence minime des paramètres probabilistes sur les performances de la recherche. Notons cependant que SEBAG [SEB 96] a proposé une méthode complexe de contrôle et de paramétrage des AG par apprentissage symbolique.

III.2.2. Applications des AG

De par leur fiabilité et leur robustesse soulignées dès les premiers travaux de la littérature, les AG ont suscité un intérêt croissant [LET 96], et ceci particulièrement durant ces dix dernières années. Leur champ d'investigation s'avère actuellement très vaste, varié et concernant des domaines parfois inattendus [GOL 94] : sciences de l'ingénieur, sciences sociales (prévisions économiques et démographiques), imagerie médicale, biologie et génétique... Soulignons de plus que les AG ont donné lieu à de nombreuses applications en intelligence artificielle pour, par exemple, la reconnaissance de formes, le contrôle de processus ainsi qu'en cybernétique [REN 95] [DEG 99] [MIE 99].

Concernant le calcul de structures, les premières applications des AG ont porté sur l'optimisation de treillis. Citons à ce propos les travaux de HAJELA [HAJ 90], JENKINS [JEN 91] et RAJEEV [RAJ 92]. A la lecture de références du domaine telles que [OLH 95], [GUT 97a], [BAT 98], [BLO 99] ou encore [MIE 99], on constate que les AG ont été rapidement popularisés et appliqués à de très nombreuses classes de problèmes. Notons par exemple le développement d'outils numériques dédiés à la conception optimale d'ensembles mécaniques concernant, par exemple, le montage de roulements [GIR 98] ou encore un réducteur de vitesse par train d'engrenages hélicoïdaux [MIS 99]. Les AG ont aussi permis d'aborder divers problèmes d'optimisation de forme : il s'est par exemple agi de définir les renforts de profilés [LYA 95], la constitution de pare-chocs d'automobiles [SAN 92], la topologie de structures planes soumises à différents modes de chargement [MES 98b] ou encore la forme d'un cadre de bicyclette [SCH 97]. Soulignons que de nombreux travaux concernent des problèmes très spécifiques tels que l'identification d'inclusions [SCH 96], la définition d'essais de caractérisation [ARA 97] ou encore l'établissement de modèles rhéologiques et de lois de comportement de polymères [SEB 97]. Aussi, compte tenu de la multicitité et de la spécificité des applications des AG présentées dans la littérature, il s'avérerait fort délicat d'en dresser ici un bilan exhaustif.

A ce propos, la diversité des travaux de MARCELIN témoigne de la grande adaptabilité des AG : une même base algorithmique a ainsi permis de déterminer le mode de prise de pièces en tournage [MAR 95a], l'optimisation multi-critères de l'amortissement de poutres composites [MAR 95b], la CAO d'engrenages [MAR 95c], la création d'un outil d'aide à la conception de skis [MAR 96a] ainsi que l'optimisation de treillis par couplage à un réseau de neurones [MAR 96b].

L'étude de la bibliographie des AG permet aussi de recenser des applications destinées à l'optimisation de structures constituées de matériaux composites [MIE 99] : conception optimale de la constitution du tissage de composites tridimensionnelles pour un critère résistance maximale [TOS 95], optimisation de l'épaisseur de plaques stratifiées en flexion en proscrivant toute rupture de pli [SOR 96], détermination d'un champ optimal d'orientation de fibres pour des plaques afin d'en maximiser la rigidité [COL 98]...

L'application des AG pour la conception de structures composites a aussi consisté en la recherche de séquences de stratifications optimales, la valeur d'angle d'orientation des fibres de chaque pli étant généralement choisie parmi des jeux de valeurs discrètes. Citons par exemple les études portant sur l'optimisation de la résistance d'une console [SOR 96], la conception de structures composites à usage spatial en respectant des exigences de stabilité dimensionnelle [LER 97a] ou encore l'optimisation multi-critère d'ailes d'avions stratifiées [LIU 99]. Remarquons aussi les travaux de LE RICHE [LER 93] [LER 97b] et KOGISO [KOG 94] concernant des plaques soumises à un risque de flambage induit par une sollicitation membranaire de compression biaxiale : les AG utilisés, couplés à des formules analytiques, ont permis la définition de stratifications symétriques conduisant à un accroissement substantiel des limites de stabilité.

Par ailleurs, on remarquera dès à présent que, à l'instar de toutes ces études et quel que soit le domaine d'application, les travaux en sciences de l'ingénieur présentés par la littérature recourent à l'utilisation d'AG de type *binaires*, les paramètres de conception étant codés sous formes de chaînes de bits (cf. § III.2.5). Les procédures de croisement employées sont, elles, à *coupures* (généralement 1X ou 2X, cf. § III.2.5.2). De plus, le mode de sélection adopté est habituellement *proportionnel* (voir § III.2.4.2). Ces choix, effectués "a priori", par habitude [SEB 97], seront amplement discutés dans la suite de ce chapitre.

III.2.3. Exploration et exploitation

Avant de procéder à la description des différents opérateurs génétiques, il s'avère particulièrement intéressant d'en évaluer les effets respectifs vis à vis des objectifs auxquels doit satisfaire le processus de recherche.

III.2.3.1. Le dilemme

La fiabilité et la robustesse de l'optimisation par AG sont le fruit d'un paradoxe. La méthode doit en effet satisfaire à deux objectifs clairement antagonistes : l'*exploration* de zones encore inconnues de l'espace des solutions et l'*exploitation* des "bons" individus de la population courante, c'est à dire des zones prometteuses de l'espace de recherche [GOL 94]. Un compromis adéquat entre ces deux actions est une garantie essentielle pour le succès de l'optimisation par AG, toute hégémonie tendant à perturber le processus de recherche :

- La prédominance de la tâche d'exploitation conduira au risque de convergence prématurée. Les domaines inexplorés de l'espace de conception sont écartés, délaissés. Il y a alors une perte rapide de la diversité génétique de la population. La recherche risque d'être concentrée sur le premier optimum local découvert [MIC 96].
- L'excès d'exploration aboutit à négliger les informations obtenues précédemment au cours du processus. L'AG souffre alors d'une marche quasi-aléatoire. La convergence s'avère très hasardeuse, voire inexistante [SEB 97].

III.2.3.2. Effets de l'initialisation et des opérateurs

L'initialisation de la première population au démarrage de l'AG est une étape destinée à l'exploration seule, les premiers individus étant d'ordinaire créés aléatoirement [GOL 94]. Quelques auteurs ont proposé d'y adjoindre des solutions issues de connaissances a priori de l'utilisateur sur le problème d'optimisation considéré, tendant alors à "forcer" la recherche sur certaines zones de l'espace des solutions [SEB 96]. De fait, ce procédé peut s'avérer fort néfaste et conduire à converger sur des optima locaux, car dépendant de l'intuition de l'utilisateur et limitant les capacités d'exploration de l'AG.

La sélection est, elle, une phase destinée à l'exploitation seule, permettant de retenir des éléments déjà éprouvés et performants. Le croisement est, sans conteste, l'opérateur dont les effets sont les plus délicats à appréhender et à analyser car mêlant à la fois exploitation et exploration par échange et recombinaison de la recherche [REN 95]. De plus et contrairement aux stratégies d'évolution [SEB 97], c'est un outil primordial des AG, affecté d'une probabilité généralement comprise entre 50 et 90 %. Les effets de cette procédure, intimement liés au type d'encodage des variables d'optimisation, seront discutés dans les paragraphes suivants. La mutation, gérant de façon capitale la diversité génétique de la population et contrecarrant l'effet déterministe du croisement, est l'opérateur majeur d'exploration. Son action s'avère pourtant marginale au cours du déroulement de l'AG, la probabilité de mutation étant généralement fixée à des valeurs inférieures à 1 % [GOL 94]. Les travaux de LYAET [LYA 95] montrent néanmoins un affaiblissement très sensible des performances de la recherche, traduit par de fortes difficultés de convergence, en cas de suppression de cette étape.

On remarquera que l'étude de la bibliographie des AG permet de recenser une multitude d'heuristiques et de variantes des opérateurs génétiques destinés à accroître les performances de la méthode en ajustant l'importance relative de l'exploration et de l'exploitation. Les références [GOL 94], [MIC 96] et [MIE 99] en présentent un très large éventail. Cependant, comme le souligne SEBAG [SEB 96], chacun de ces "artifices" est d'ordinaire destiné et adapté à un type d'application donné et s'avère difficilement généralisable et transposable à d'autres problèmes d'optimisation, se révélant même parfois nuisible.

III.2.3.3. Générateur de nombres aléatoires

Rappelons que les tirages aléatoires constituent un outil primordial pour les AG, conditionnant particulièrement leur faculté d'exploration. Aussi, SEBAG [SEB 97] a souligné le risque induit par une répartition gaussienne des valeurs de tirages aléatoires, favorisant l'apparition de valeurs médianes au détriment des valeurs extrêmes. Les capacités d'exploration s'avèrent alors amoindries, l'action des opérateurs génétiques est biaisée. De même, la création aléatoire de la première génération a peu de chance d'aboutir à "saupoudrage uniforme" des individus dans l'espace des solutions, distribution pourtant souhaitable.

Des tests ont été effectués sur le générateur de nombres aléatoires (fournissant des valeurs comprises entre 0 et 1) du compilateur FORTRAN 90 utilisé pour la programmation de la procédure d'optimisation. Il s'est agi d'étudier les répartitions des valeurs issues de 10^9 tirages aléatoires successifs. A l'instar de la figure III.6 présentant les nombres d'échantillons rangés en 10 et 50 classes de valeurs, les allures déduites ne se sont pas avérées correspondre à une distribution tributaire d'une loi normale.

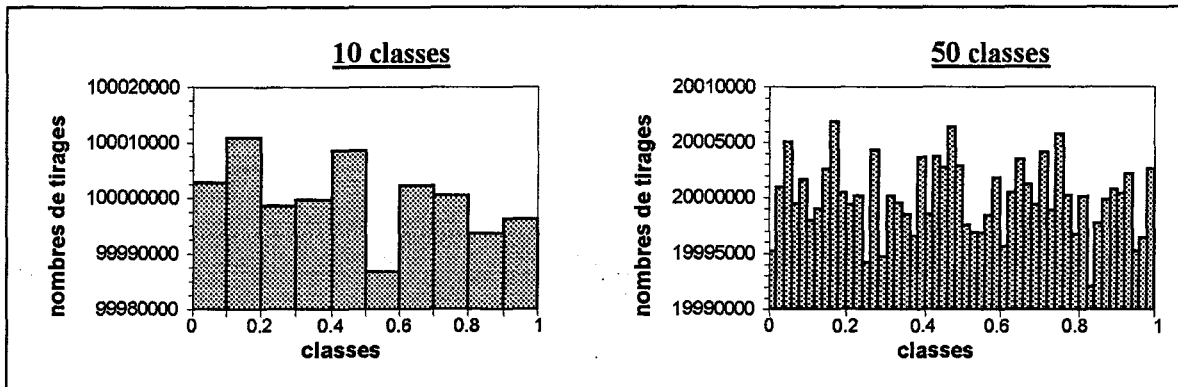


Figure III.6 : exemples de répartitions des échantillons

De plus, un programme de traitement du signal par FFT a permis de vérifier que ce générateur de nombres aléatoires n'induisait aucune périodicité qui conduirait donc à un fonctionnement pseudo-harmonique et non plus stochastique de l'AG. Considérant une suite de tirages comme un "signal" $x(t)$, le calcul de son auto-corrélation (avec T le nombre d'échantillons, soit 10^9 pour ce test) définie par :

$$C(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t - \tau) dt$$

conduit alors à : $C(\tau) \approx 0 \quad \forall \tau > 0$

indiquant ainsi que le spectre issu des tirages est bien effectivement aléatoire. La figure III.7 présente (pour les 5000 premiers échantillons) le résultat du calcul de l'auto-corrélation du signal fournit par le générateur de nombres aléatoires.

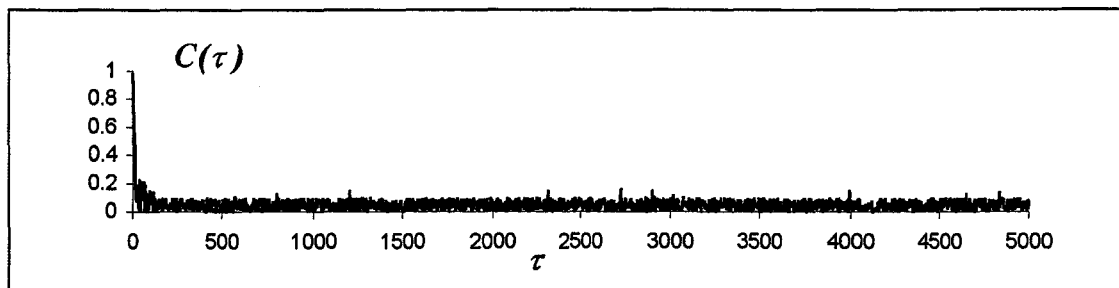


Figure III.7 : auto-corrélation des tirages aléatoires

III.2.4. Opérateurs de sélection

Contrairement aux stratégies d'évolution qui utilisent des procédés déterministes, la phase de sélection des AG est réalisée de façon stochastique [SEB 97]. Elle est par ailleurs indépendante du mode d'encodage des variables d'optimisation. Les deux techniques principales éprouvées dans les divers travaux de la littérature diffèrent tangiblement, tant dans leurs principes que dans leurs effets.

III.2.4.1. Pression sélective

La *pression sélective*, définie en [SEB 97] et correspondant à l'espérance pour le meilleur individu de la population courante d'être retenu, permet d'apprécier les effets et la sévérité de la phase de sélection : une valeur de pression égale à 1 indique que tous les individus de la population bénéficient de chances identiques d'être retenus. La procédure n'a alors aucun effet sélectif. A l'opposé, une valeur de pression sélective très élevée conduit à ne sélectionner qu'uniquement le meilleur individu, entraînant un risque de convergence prématurée par excès d'exploitation et, donc, perte de diversité génétique [YAN 97].

Les auteurs de la littérature ayant étudié l'influence de cette pression sélective recommandent ordinairement de fixer sa valeur à 2 [MIC 96]. Ce précepte est totalement empirique et, bien que vérifié lors de nombreuses applications des AG, aucune démonstration ne l'a corroboré [SEB 97].

III.2.4.2. Roue de loterie

Comme souligné en § III.2.2, la très grande majorité des applications rencontrées dans la bibliographie des AG recourt à la procédure *par roue de loterie*, aussi nommée *sélection proportionnelle* [GOL 94]. Elle consiste à créer une roue de loterie divisée en N secteurs de tailles proportionnelles aux valeurs d'adaptation des N individus de la population courante. Des tirages aléatoires successifs déterminent ensuite des positions angulaires sur le contour et, de fait, la sélection des individus correspondants. Les individus performants bénéficient ainsi de chances accrues d'être retenus. A titre d'illustration, la figure III.8 présente un exemple de constitution d'une roue de loterie pour une population comportant quatre individus.

Au vu de ce principe, on constate aisément que le nombre d'individus présents dans la population influence grandement les effets de cette étape de sélection [SEB 97]. Un individu performant bénéficiera en effet de secteurs de roue de loterie de tailles très différentes : il sera "noyé dans la masse" au sein d'une population très fournie. Par, contre, il occupera une portion prédominante de la roue associée à une population de faible taille et induira un risque de convergence prématurée par excès d'exploitation. Cet aspect de la sélection proportionnelle interagit étroitement avec une seconde caractéristique majeure : ce mode de sélection est en effet très sensible aux variations relatives et à l'échelle des valeurs d'adaptation de la population courante [REN 95]. La présence de "super-individus", de performances très

supérieures à celles de leurs congénères, induira une convergence prématurée [MIC 96]. A l'opposé, la roue de loterie produira un effet sélectif quasi-nul pour une population d'individus possédant des adaptations toutes très proches.

Ces constats peuvent être traduits en d'autres termes : la valeur de la pression sélective n'est pas constante au cours du processus, elle varie à chaque génération [MIC 96]. Aussi, de nombreux auteurs ont vivement recommandé d'associer une *mise à l'échelle* des valeurs d'adaptation [SEB 97] : l'adaptation de chaque individu est alors une fonction polynomiale de F dont l'AG ajuste, à chaque génération, les valeurs des coefficients afin d'obtenir la pression sélective souhaitée par l'utilisateur. Une autre version, moins coûteuse mais ne permettant pas de contrôler précisément la pression sélective, consiste à utiliser une *sélection par le rang* : les tailles de secteurs de la roue de loterie correspondent aux valeurs de rang des individus alors classés du plus performant au moins adapté [SEB 96] [GIR 98].

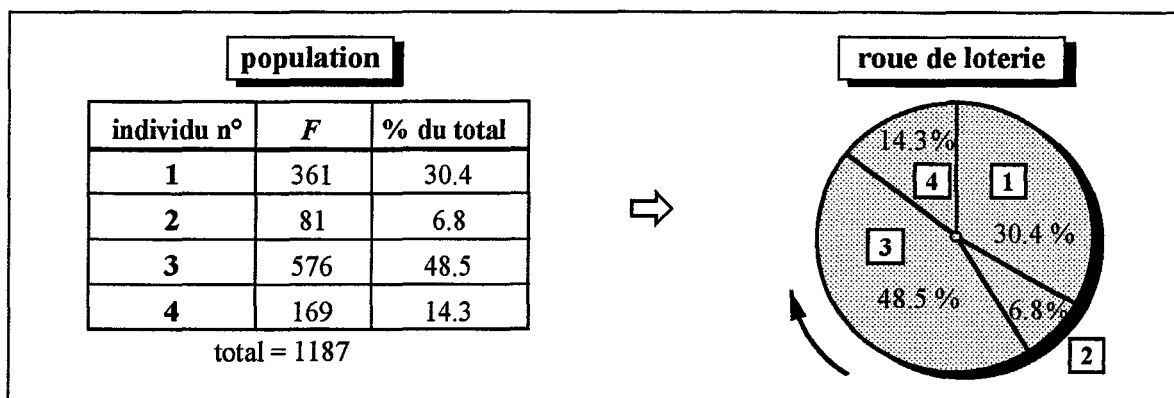


Figure III.8 : exemple de roue de loterie

III.2.4.3. Tournois

La procédure de sélection par *tournois* (ou *duels*) opère différemment [GOL 94] : des couples d'adversaires sont déterminés aléatoirement parmi la population courante. Pour chacun d'entre eux, le spécimen possédant la plus forte valeur d'adaptation remporte le duel et est sélectionné. On remarquera que, contrairement à la sélection proportionnelle, cette technique permet d'aborder les problèmes décrits par une fonction objectif conduisant à des valeurs parfois négatives.

Ce mode de sélection induit une valeur de pression sélective constante au fil des générations et égale à 2, permettant de s'affranchir des problèmes d'échelle et de taille de population inhérents à l'utilisation d'une roue de loterie [MIC 96]. L'effet sélectif et, par conséquent, l'action d'exploitation de l'opérateur sont ainsi maîtrisés [MIL 95]. Quoique encore peu répandue pour les applications des AG en sciences de l'ingénieur, cette technique s'est avérée permettre une amélioration substantielle de l'efficacité de la recherche lors des quelques travaux présentés dans la littérature tels que ceux des références [LAI 93], [YAN 97] et [MES 98b].

III.2.4.4. Elitisme

Quelle que soit la technique retenue, la phase de sélection peut de plus être *élitiste*: le premier individu sélectionné est alors, d'emblée, le chromosome affecté de la valeur d'adaptation la plus élevée [GOL 94]. Ce procédé permet de garantir que le meilleur individu de la population courante sera présent au moins une fois pour participer à la naissance de la génération suivante afin de régulariser la convergence [MES 98b]. Notons que l'examen de la littérature permet de recenser quelques versions plus élaborées, telles que *l'élitisme multiple* ou *l'élitisme variable* consistant à retenir pour la génération suivante une sous-population d'individus performants [SOR 96].

III.2.5. AG binaires

Les paragraphes suivants détaillent le mode d'encodage et les opérateurs des AG de type binaires utilisés dans la quasi-totalité des applications (cf. III.2.2). Notons que la convergence et les performances de la méthode, amplement vérifiées par la multitude des applications de la littérature, ne bénéficient pas à ce jour de démonstration stricte et convaincante [SEB 97]. Seul le *théorème des schémas* propose une interprétation des effets des opérateurs sur la propagation de caractères génétiques [GOL 94]. L'adoption de *principes de représentation* conduira en fait à la remise en cause du codage binaire des variables d'optimisation.

III.2.5.1. Encodage

Les AG binaires ne manipulent pas les paramètres de conception tels quels mais représentés sous forme de *chromosomes* [GOL 94] : il s'agit de chaînes binaires codant, généralement par blocs, les valeurs des différentes variables d'optimisation. Chaque bit est nommé *gène* par analogie biologique. Ces chromosomes sont de tailles fixes, fonction des amplitudes de variation des paramètres de conception. Ce mode d'encodage destine naturellement les AG à l'analyse de problèmes d'optimisation discrets. A ce propos, notons que les problèmes sont couramment formulés de sorte à être décrit par des variables de conception entières, variant par pas de 1, et dont les valeurs minimales sont égales à 0 [GOL 94]. L'exemple présenté en figure III.9 permet d'illustrer le mode de choix de l'encodage ainsi que la représentation en chromosome d'une solution potentielle du problème d'optimisation.

III.2.5.2. Croisement

Pour chaque couple d'individus parents sélectionnés, la procédure de croisement binaire consiste à créer des enfants par échanges de leurs gènes. L'étude des travaux antérieurs de la littérature permet de distinguer quatre principaux modes de croisement. Les exemples présentés en figure III.10 illustrent le fonctionnement. Le contenu des six gènes binaires constituant chaque chromosome est alors noté à l'aide d'un caractère alphabétique afin de faciliter la compréhension.

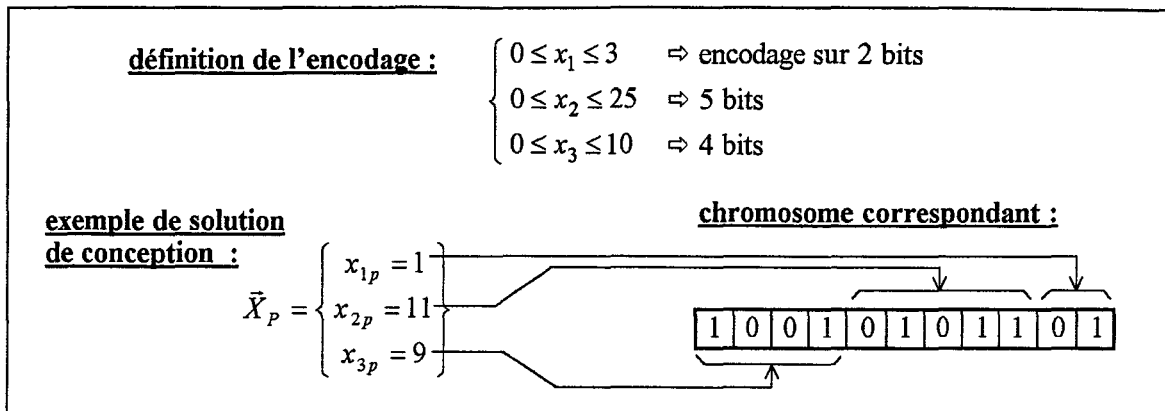


Figure III.9 : exemple d'encodage binaire

type de croisement	parents	enfants
1X	parent 1: A B C D E F parent 2: A B C D E F point de coupure: ↑	enfant 1: A B C D E F enfant 2: A B C D E F
2X	A B C D E F A B C D E F points de coupures: ↑ ↑	A B C D E F A B C D E F
RX	A B C D E F A B C D E F points de coupures: ↑ ↑	A D C B E F A D C B E F
UX	A B C D E F A B C D E F masque aléatoire: 0 0 1 0 1 1	A B C D E F A B C D E F

Figure III.10 : croisements binaires

Les modes de croisement les plus simples et courants, utilisés dans la très grande majorité des applications des AG, consistent en l'échange des segments de chromosomes parents situés de part et d'autres de points de coupures déterminés par tirages aléatoires. Il s'agit ainsi du *croisement à 1 point de coupure (1X)* et du *croisement à 2 points de coupures (2X)*. Le *croisement avec renversement (RX)* en est une version plus atypique : il procède à une inversion de l'ordre des gènes pour les parties centrales de chaînes échangées. La procédure de *croisement par masque*, ou *croisement uniforme (UX)*, utilise, elle, une chaîne générée aléatoirement. Les caractères égaux à 1 induisent alors l'échange des gènes correspondants des individus parents.

III.2.5.3. Mutation

Pour tout individu, la mutation binaire procède communément par altérations de gènes : au cours de cette phase, chaque valeur de bit égale à 0 est remplacée par 1, et inversement [GOL 94]. La fréquence de ces événements étant tributaire de la probabilité fixée par l'utilisateur, on parle alors de taux de *probabilité de mutation par gènes*.

III.2.5.4. Théorème des schémas

L'interprétation de la convergence de la recherche par AG binaires recourt généralement au *théorème des schémas* détaillé par GOLDBERG [GOL 94]. Il consiste en l'étude de la propagation au fil des générations de motifs de similarités, nommés *schémas*, constituant les chromosomes : il s'agit de chaînes binaires comprenant quelques caractères (*positions fixes*), le contenu des autres gènes (notés : •) étant libre, indifférent. Un schéma est ainsi défini par son nombre de positions fixes, son *ordre*, et la distance entre les positions fixes extrêmes, sa *longueur*. Le tableau I.1 présente quelques exemples relatifs à des chromosomes constitués de six gènes.

schéma	ordre	longueur
1 • • 1 0 •	3	5
• 1 • • • 0	2	5
• • • 0 0 •	2	2

Tableau I.1 : exemples de schémas

L'analyse probabiliste détaillée en [GOL 94] permet d'établir que la propagation, au fil des générations, des schémas performants de longueurs et d'ordres faibles est exponentielle dans la population : c'est le *théorème fondamental des AG*. De plus, la diffusion de ces quelques schémas, baptisés *briques élémentaires*, est facilitée par l'adoption d'un alphabet de codage restreint justifiant ainsi le choix binaire [MIC 96]. Itération après itération, la population de chromosomes, alors composés de quelques combinaisons des briques élémentaires, s'homogénéise induisant la convergence de la méthode. Il n'y a pas de programmation explicite de ce mécanisme de diffusion uniquement provoqué par les propriétés d'auto-organisation de l'évolutionnisme [REN 95]. Il résulte plus précisément de l'interaction "forte" et non linéaire entre quelques gènes, phénomène nommé *épistasie* [MIC 96]. SEBAG [SEB 96] souligne enfin que, compte tenu de l'énoncé de ce théorème fondamental, les solutions optimales doivent logiquement être constituées par l'intersection des briques élémentaires.

L'interprétation de ce théorème peut être réalisée comme suit : au cours du processus, la sélection permet de retenir les schémas conduisant aux valeurs de F les plus élevées. Ensuite, les procédures de croisement à coupures (opérateurs 1X, 2X et RX) risquent de détruire les

schémas longs et d'ordres élevés. En effet, compte tenu du mode de fonctionnement de ces opérateurs détaillés en § III.2.5.2, l'exemple suivant :

• • • 1 0 •

bénéficiera de chances accrues d'être préservé tel quel par rapport aux schémas :

1 • • • • 0 ou • 0 1 1 0 1

dont les positions fixes pâtissent d'un risque plus important d'être séparées lors des échanges de segments parents. A ce propos, SEBAG [SEB 97] a souligné l'effet destructeur du croisement RX car modifiant l'ordre des positions fixes par renversement (cf. figure III.10). On notera par ailleurs que les effets du croisement UX sur un schéma sont insensibles à la longueur : cet opérateur est en effet indifférent au positionnement relatif des gènes dans le chromosome [MIC 96].

Ainsi, il apparaît que le mode d'encodage binaire influence grandement la propagation des schémas, la constitution de briques élémentaires et donc la convergence de la recherche par AG. Il est ainsi nécessaire de compacter l'information contenue par les schémas performants afin d'obtenir des valeurs d'ordres faibles [SEB 97]. De plus, l'utilisation des croisements à coupures requiert une disposition attentive des gènes. SCHOENAUER [SCH 96] suggère d'expérimenter différents modes de codages binaires et d'adapter les opérateurs génétiques afin d'obtenir une représentation moins "aveugle" du problème traité. La référence [SCH 96] présente ainsi la confrontation de divers modes de codages binaires bidimensionnels et d'opérateurs correspondants destinés à l'identification d'inclusions. Une telle démarche nécessite toutefois de disposer d'informations a priori sur le problème ou de procéder à une expérimentation contraignante et nuisant à l'adaptabilité et à la simplicité d'utilisation de la procédure.

Ces divers constats et recommandations sont intimement liés au principe même du théorème des schémas. De nombreux spécialistes du domaine ont pourtant souligné récemment que son énoncé était insatisfaisant : il s'avère en effet souvent mis en défaut par l'expérience à l'instar des travaux présentés en [REN 95]. MICHALEWICZ [MIC 96] a ainsi montré par le biais de nombreux exemples que la combinaison de briques élémentaires peut conduire à de "mauvaises" solutions. Selon SEBAG [SEB 97], ce théorème ne constituerait qu'une interprétation "naïve" et biaisée de la convergence de la recherche par AG. RENDERS [REN 95] souligne lui que ce théorème est valable uniquement lors des premières générations, lorsque la distribution des schémas dans la population est encore suffisamment uniforme. De fait, au lieu de procéder au choix du codage des variables à partir d'un théorème somme toute très discutable, SEBAG [SEB 96] souligne l'intérêt de recourir à des *principes de représentation* stricts et énoncés en tant que conditions essentielles pour le succès de la méthode.

III.2.5.5. Principes de représentation

Suite à une étude approfondie des propriétés et du comportement des AG, RADCLIFFE [RAD 91] a établi six principes généraux d'encodage conduisant au succès de la méthode. Ils recourent à la notion de *forme* (ou *formæ*), similaire à celle de schéma mais désormais généralisée aux espaces de représentation quelconques. Ces principes sont énoncés comme suit [SEB 97] :

- *Redondance minimale* : le mode de représentation adopté, le *génotype*, doit être le plus proche possible de la nature réelle des variables de conception (*espace phénotypique*).
- *Corrélation* : des formes "petites", très localisées, et proches doivent comporter des individus de performances proches.
- *Fermeture* : l'intersection de deux formes doit, si elle existe, être une forme.
- *Respect* : si deux individus appartiennent à une même forme, les enfants issus de leur croisement doivent eux aussi appartenir à cette forme.
- *Assortiment constructif* : considérons les individus \bar{X}_1 et \bar{X}_2 appartenant respectivement aux formes Ω_1 et Ω_2 . Si l'intersection $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Omega$ est une forme non nulle, alors il existe nécessairement un croisement de \bar{X}_1 et \bar{X}_2 produisant un enfant appartenant à Ω .
- *Ergodicité* : toute zone de l'espace des solutions doit, en théorie, pouvoir être atteinte durant le déroulement de l'AG.

Les cinq premiers principes conduisent à faire coïncider plus étroitement les individus manipulés par l'AG avec la nature réelle et intrinsèque (phénotypique) des paramètres d'optimisation [MIC 96] : des solutions contiguës dans l'espace de conception s'avéreront aussi très proches en termes de constitutions génétiques. Les formes correspondent ainsi à des sous-domaines de l'espace des solutions. La propriété de corrélation est, de fait, à rapprocher de la notion d'optimum local. De plus, les conditions de respect et d'assortiment constructif impose l'utilisation de modes de croisements localisés, produisant des enfants situés au voisinage des parents. Par ailleurs, la mutation permet à elle seule de satisfaire à la condition d'ergodicité caractérisant la faculté d'exploration de l'AG.

La correspondance entre génotype et phénotype conduit à restreindre considérablement l'emploi d'AG de type binaire. Cet encodage apparaît en effet bien adapté pour des problèmes tels que l'optimisation topologique de structures discrétisées, tout chromosome représentant alors une "carte" de la distribution de matériau [MES 98b]. Par contre, toute transformation de variables d'optimisation entières en chaînes de bits ne permet pas de satisfaire à la condition de redondance minimale. MICHALEWICZ [MIC 96] a proposé et expérimenté l'utilisation du code *binaire réfléchi* (ou *code GRAY*) qui permet une représentation plus proche de la position réelle des variables et solutions correspondantes dans l'espace de conception [GIR 98]. Néanmoins, cette solution n'est que partiellement satisfaisante [MIC 96] et ne résout pas les difficultés liées

aux conditions de respect et d'assortiment constructif : compte tenu du principe des croisements binaires, les enfants obtenus ont peu de chances d'être situés au voisinage des parents. Seule l'adjonction d'heuristiques, telles que le *croisement restreint* ou le *partage* [SEB 96], permettent de limiter ce problème. Elles conduisent alors à réaliser plusieurs calculs d'optimisation locale en parallèle, chacun concernant une sous-population (ou *niche écologique* [REN 95]) localisées sur quelques zones de l'espace des solutions.

De fait, les principes de représentations et ces diverses remarques conduisent à la remise en cause de l'encodage binaire pourtant utilisé dans la très grande majorité des applications en sciences de l'ingénieur. Aussi, quelques références du domaine, dont [REN 95], [MIC 96] et [SEB 97], proposent l'utilisation d'AG manipulant directement les variables d'optimisation telles quelles. Parmi les rares applications de tels AG, citons celle présentée par MICHALEWICZ [MIC 96] concernant un problème de contrôle dynamique : les résultats ont confirmé que cette démarche s'avérait plus rapide, fiable et robuste que l'approche binaire.

III.2.6. AG de type "entier"

Un AG manipulant directement des solutions de conception sous forme de vecteurs \vec{X}_P a ainsi été codé. Compte tenu du type d'applications traitées (cf. chapitre IV), la version retenue et détaillée ci-après sera nommée *AG entier* car destinée à la résolution de problèmes décrits par des variables d'optimisation discrètes et entières.

III.2.6.1. Croisement

Le mode de croisement proposé dans la littérature et permettant de satisfaire aux principes de respect et d'assortiment constructif (cf. § III.2.5.5) est de type *barycentrique* (aussi nommé *arithmétique*) [MIC 96]. Considérant deux individus parents \vec{X}_P et \vec{X}_Q , cet opérateur conduit à la naissance des enfants \vec{X}'_P et \vec{X}'_Q alors définis par :

$$\begin{cases} \vec{X}'_P = \rho \vec{X}_P + (1-\rho) \vec{X}_Q \\ \vec{X}'_Q = \rho \vec{X}_Q + (1-\rho) \vec{X}_P \end{cases} \quad \text{avec : } \rho = \text{lieu de croisement.}$$

Aussi, dans le cas de problèmes régis par des variables d'optimisation discrètes et entières, seules les parties entières des composantes seront retenues, à l'instar de l'exemple présenté en figure III.11.

Le lieu de croisement ρ est déterminé aléatoirement. Une valeur comprise entre 0 et 1 garantira de fait que tout enfant soit situé sur le segment formé par les points parents dans l'espace de conception, les conditions de respect et d'assortiment constructif étant ainsi satisfaites. Afin d'obtenir un compromis plus intéressant entre les effets d'exploitation et d'exploration du croisement, MICHALEWICZ [MIC 96] préconise cependant de prendre :

$$0 \leq \rho \leq 1.5$$

$$\vec{X}_P = \begin{Bmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ \vdots \\ x_{Np} \end{Bmatrix} ; \vec{X}_Q = \begin{Bmatrix} x_{1q} \\ x_{2q} \\ \vdots \\ x_{Nq} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{X}'_P = \begin{Bmatrix} x'_{1p} = \text{Int}[\rho x_{1p} + (1-\rho)x_{1q}] \\ x'_{2p} = \text{Int}[\rho x_{2p} + (1-\rho)x_{2q}] \\ \vdots \\ x'_{Np} = \text{Int}[\rho x_{Np} + (1-\rho)x_{Nq}] \end{Bmatrix} \\ \vec{X}'_Q = \begin{Bmatrix} x'_{1q} = \text{Int}[\rho x_{1q} + (1-\rho)x_{1p}] \\ x'_{2q} = \text{Int}[\rho x_{2q} + (1-\rho)x_{2p}] \\ \vdots \\ x'_{Nq} = \text{Int}[\rho x_{Nq} + (1-\rho)x_{Np}] \end{Bmatrix} \end{cases}$$

avec : Int = "partie entière"

Figure III.11 : croisement barycentrique entier

permettant ainsi d'aboutir dans des zones situées au-delà, mais néanmoins situées à proximité, du "segment parent". Les individus enfants sont alors susceptibles de franchir les limites du domaine des solutions admissibles. Dans ce cas, ils seront corrigés selon la technique de *rebond sur les frontières* [JEN 83] : considérons par exemple l'enfant \vec{X}'_P de la figure III.11 précédente. S'il correspond à un point P' de l'espace de conception situé hors frontière, ses coordonnées seront modifiées suivant le principe schématisé en figure III.12. L'enfant retenu coïncidera alors avec le point P'' .

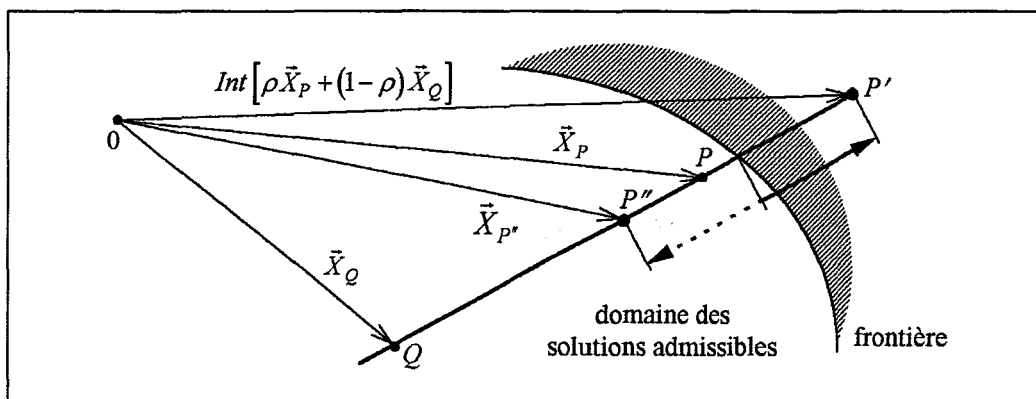


Figure III.12 : rebond sur une frontière

III.2.6.2. Mutation

Le mode de mutation canonique préconisé par la littérature est de type *uniforme*. Son fonctionnement s'avère très similaire à celui de la mutation binaire (cf. § III.2.5.3) bien que n'intervenant non plus gène par gène mais en distinguant les différentes variables de conception. Toute composante d'un individu est ainsi susceptible, selon le taux de probabilité fixée par l'utilisateur, d'être régénérée aléatoirement. Notons que quelques versions plus complexes (mutation sur frontières, mutation par perturbation gaussienne...) mais peu éprouvées sont proposées dans les références [MIC 96] et [SEB 96].

III.2.6.3. Temps de calculs

Afin de procéder à des tests préliminaires de performances (voir § III.2.7), deux AG, l'un binaire et l'autre de type entier, ont été codés. Au cours de ce travail de programmation (code FORTRAN 90), l'AG entier s'est avéré bénéficier d'une algorithmique nettement plus simple. Le nombre d'opérations élémentaires est en effet bien moindre [SEB 96]. L'évaluation des temps de calcul intrinsèques de ces AG, ne tenant pas compte du calcul des valeurs d'adaptation, est particulièrement révélatrice. Les résultats obtenus, pour différentes valeurs classiques [GOL 94] de nombres de générations et d'individus, sont présentés en figure III.13. Notons qu'ils correspondent aux temps CPU d'AG utilisant une sélection élitiste par tournois (ainsi qu'un croisement UX pour l'AG binaire) mais ne varient pas sensiblement par l'emploi d'une roue de loterie. L'AG entier s'avère ainsi environ deux fois plus rapide que son homologue binaire. On constate de plus que ces temps sont minimales : le coût d'un AG est bien essentiellement induit par le calcul des valeurs d'adaptations [SEB 97].

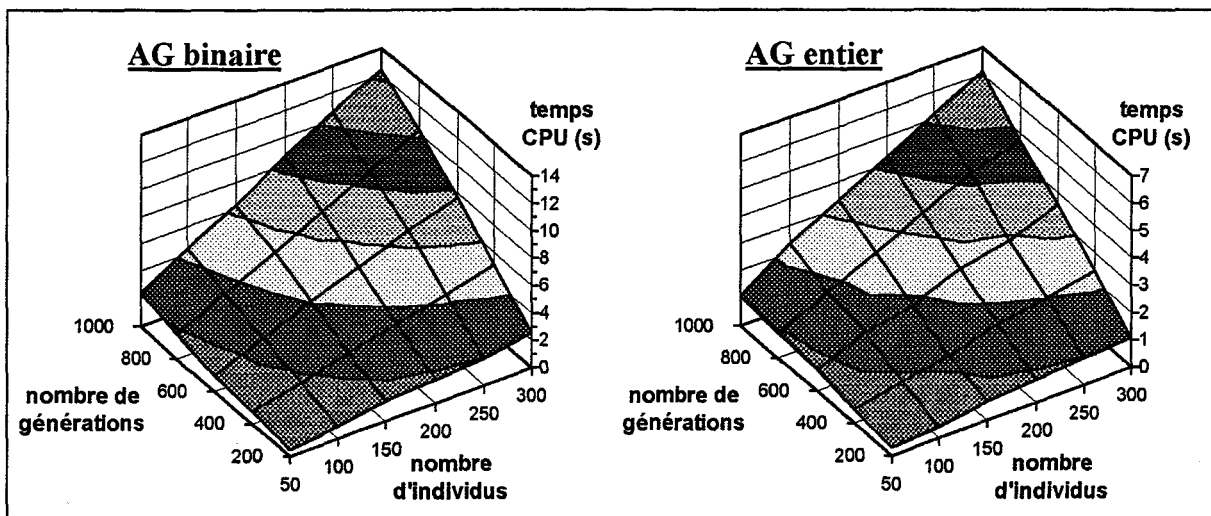


Figure III.13 : temps de calcul intrinsèques

III.2.7. Tests préliminaires

Cette partie présente les résultats d'une évaluation préalable des performances (qualité et reproductibilité des résultats, rapidité de la convergence) sur un problème discret. Un AG de type entier est confronté à des AG binaires utilisant les croisements 1X, 2X, RX et UX (cf. § III.2.5.2). De plus, une attention particulière est accordée à l'influence des différentes combinaisons d'opérateurs de sélection (cf. § III.2.4) : par roue de loterie, par tournois, élitiste ou non.

III.2.7.1. Formulation du problème

Le problème considéré, tiré de la référence [MIC 96], consiste en la recherche de la valeur maximale de la fonction harmonique suivante :

$$F(x, y) = 21.5 + x \sin(4\pi x) + y \sin(20\pi y) \quad \text{avec : } \begin{cases} -3 \leq x \leq 12.1 \\ 4.1 \leq y \leq 5.8 \end{cases}$$

La surface correspondante, représentée en figure III.14, s'avère non convexe, multi-pics et fortement perturbée. Les extremums sont donnés par :

$$F_{Maxi} = F(x = 11.625, y = 5.725) = 38.85$$

et, pour information : $F_{mini} = F(x = 11.875, y = 5.775) = 3.85$

soit des valeurs limites situées dans un proche voisinage dans l'espace de recherche.

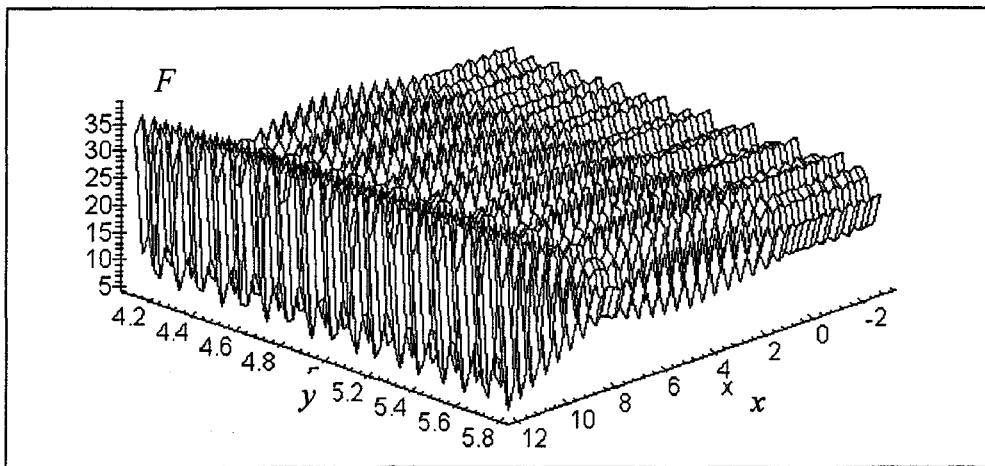


Figure III.14 : fonction test

L'encodage des variables x et y recourt, pour les AG de type binaires, à des chromosomes composés d'un total de 33 gènes repartis comme suit [MIC 96] :

$$\left| \begin{array}{l} - 18 \text{ gènes pour } x, \text{ soit une discrétisation par pas de } \frac{12.1 + 3}{2^{18} - 1} \approx 5.76 \cdot 10^{-5} \\ - 15 \text{ gènes pour } y, \text{ soit une discrétisation par pas de } \frac{5.8 - 4.1}{2^{15} - 1} \approx 5.19 \cdot 10^{-5} \end{array} \right.$$

De fait, la cardinalité du problème a pour valeur $2^{33} \approx 8.59 \cdot 10^9$.

Par correspondance, et afin de procéder à des comparaisons rationnelles, l'AG de type entier manipule, lui, un vecteur d'entiers défini par :

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad \text{avec } \begin{cases} 0 \leq X \leq 2^{18} \\ 0 \leq Y \leq 2^{15} \end{cases}$$

induisant ainsi une cardinalité identique. La correspondance entre les couples de variables (x, y) et (X, Y) est donnée par :

$$\begin{cases} x = -3 + X(12.1+3)/2^{18} \\ y = 4.1 + Y(5.8 - 4.1)/2^{15} \end{cases}$$

Compte tenu de la cardinalité du problème et des indications de la littérature [GOL 94], les paramètres de population et probabilistes d'AG sont fixés aux valeurs classiques suivantes :

- nombre de générations = 200
- taille de la population = 50
- probabilité de croisement = 80 %
- probabilité de mutation = 0.8 %.

Afin de procéder à une analyse statistique des performances sur un échantillonnage vaste, 10^4 calculs d'optimisation successifs (requérant alors environ 100 minutes CPU) ont été réalisés pour chaque type d'AG.

III.2.7.2. Résultats

La figure III.15 présente les résultats obtenus par l'AG de type entier et par l'AG binaire utilisant le croisement UX. Il s'agit :

- des nombres d'obtentions de l'optimum (conduisant à $F = 38.85$) au terme des 10^4 lancements successifs d'AG
- des valeurs d'adaptation moyennes (et des écarts-types correspondants) des meilleurs individus obtenus au terme de chacun de ces calculs par AG
- des nombres de générations moyens (et écarts-types) nécessaires à l'obtention de ces meilleurs individus, caractérisant la rapidité de convergence

et ceci pour chaque combinaison d'opérateurs de sélection. Remarquons que les valeurs d'écart-types des générations d'apparitions des meilleurs sont élevées de par le caractère pseudo-aléatoire de la méthode. Par ailleurs, les résultats déduits des AG binaires utilisant les croisements 1X, 2X et RX se sont avérés tout à fait similaires à ceux obtenus par croisements UX. Seuls les nombres de générations nécessaires à l'obtention des meilleurs individus apparaissent nettement plus élevés pour le croisement de type RX (cf. figure III.17).

L'examen des résultats de la figure III.15 conduit à formuler les commentaires suivants :

- L'AG de type entier bénéficie d'un niveau de performances très supérieur à celui de son homologue binaire : les meilleurs individus possèdent des valeurs d'adaptation plus élevées, l'optimum est obtenu dans de plus nombreux cas. Ces solutions sont obtenues très rapidement. Ces résultats confortent le choix d'un AG respectant les principes de représentation et permettant de s'affranchir des problèmes inhérents au codage binaire (cf. § III.2.5.4 et III.2.5.5).
- La procédure de sélection par tournois induit, tant pour l'AG entier que binaire, une amélioration fort substantielle des valeurs d'adaptation des solutions.

- L'influence de l'élitisme sur les performances s'avère moins marquée. Cette technique apparaît néanmoins permettre, elle aussi, d'accroître sensiblement les valeurs d'adaptation des meilleurs individus obtenus ainsi que la rapidité de convergence.

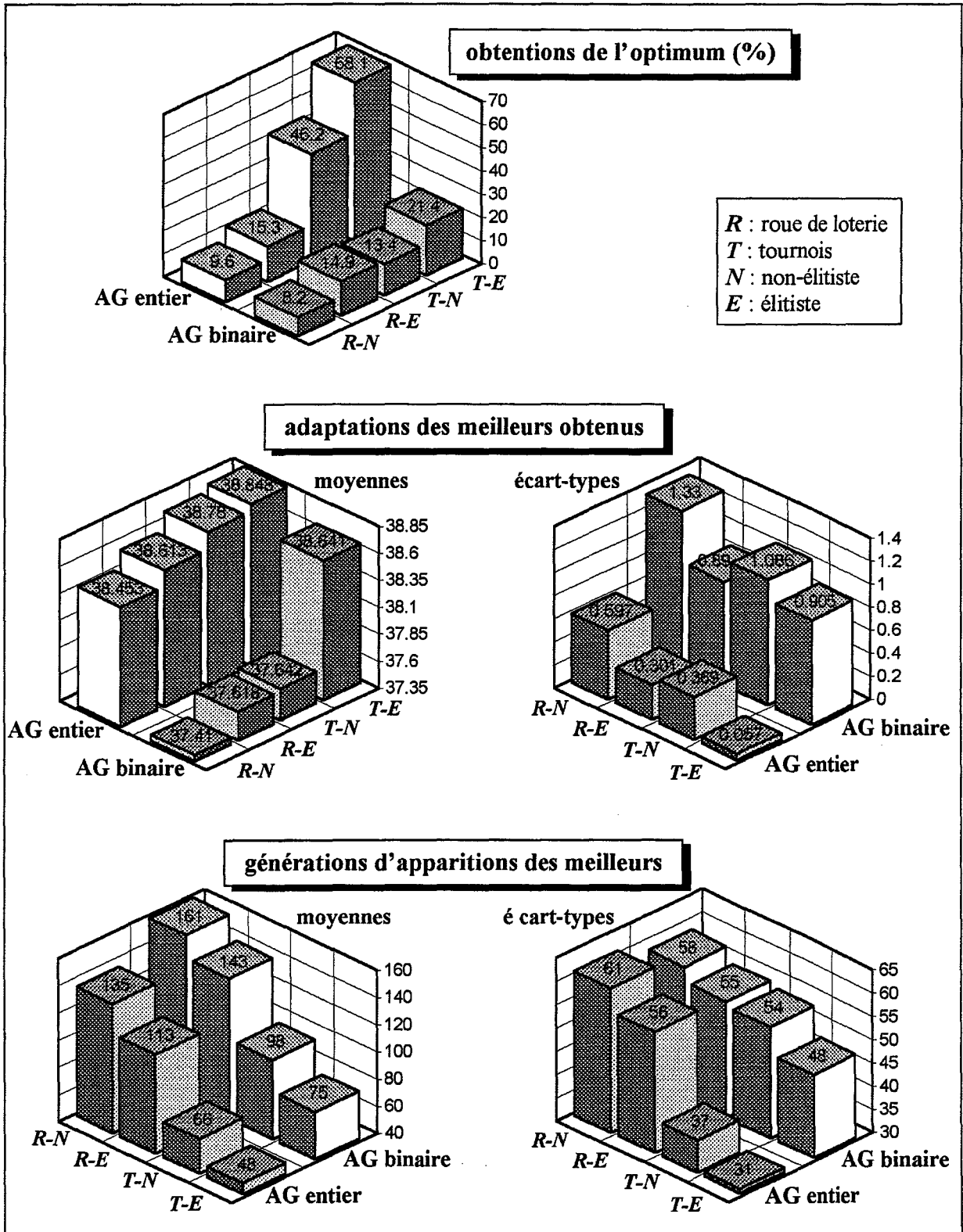


Figure III.15 : résultats des tests de performances

En outre, notons que l'AG entier utilisant une sélection élitiste par tournois a permis l'obtention de solutions toutes quasi ($F = 38.848$ en moyenne) ou effectivement optimales (pour plus de 68 % des calculs effectués), la méthode bénéficiant d'un très bon niveau de reproductibilité. De plus, ces solutions ont été obtenues au terme de (en moyenne) moins de 50 générations soit, la population comprenant 50 individus et la cardinalité étant égale à 2^{33} , en évaluant moins de $50 \cdot 50 / 2^{33} \approx 2.9 \cdot 10^{-5}$ % des solutions possibles. Ce *ratio d'exploration*, éloquent de par la nature très perturbée de F , confirme la robustesse de la méthode. Compte tenu du bon niveau de fiabilité, les problèmes de convergence prématurée semblent écartés.

L'analyse des évolutions des populations d'AG corrobore explicitement certaines des remarques précédentes. Les progressions des valeurs d'adaptation moyennes et maximales (les valeurs minimales étant peu révélatrices de par le caractère pseudo-aléatoire de la méthode) des populations au fil des générations permettent en effet l'appréciation de la convergence du calcul. Les exemples présentés en figure III.16 sont issus de calculs par AG binaire utilisant le croisement 2X. Les évolutions déduites des AG utilisant les croisements 1X et UX ainsi que pour l'AG de type entier s'avèrent tout à fait similaires.

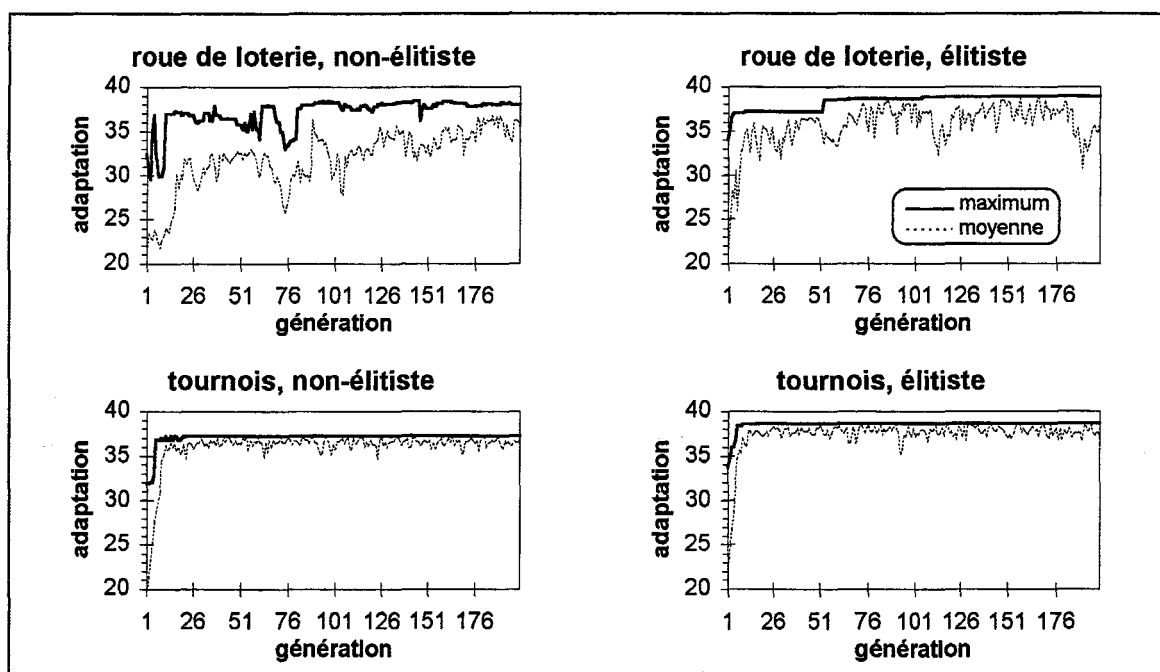


Figure III.16 : exemples d'évolutions par croisement 2X

On constate ainsi que l'utilisation de la sélection par roue de loterie conduit à des évolutions irrégulières, perturbées. Les courbes de valeurs d'adaptation moyennes sont distantes de celles des valeurs maximales. Le caractère pseudo-aléatoire de l'AG s'avère ainsi très marqué, les populations étant hétérogènes au terme de 200 générations. Par contre, la sélection par tournois induit une grande régularité et rapidité de convergence, confirmant ainsi l'intérêt du contrôle de la pression sélective. L'élitisme permet, lui, l'obtention d'évolutions stables, monotones.

Remarquons que les évolutions issues des calculs par AG binaire utilisant le croisement RX s'avèrent, elles, très différentes (cf. figure III.17) : le renversement des segments de chromosomes échangés engendre un comportement perturbé (cf. § III.2.5.4), l'hétérogénéité des populations est très marquée. Les meilleurs individus sont, de fait, obtenus tardivement. Là encore, la sélection par tournois et l'élitisme permettent néanmoins de régulariser quelque peu la convergence.

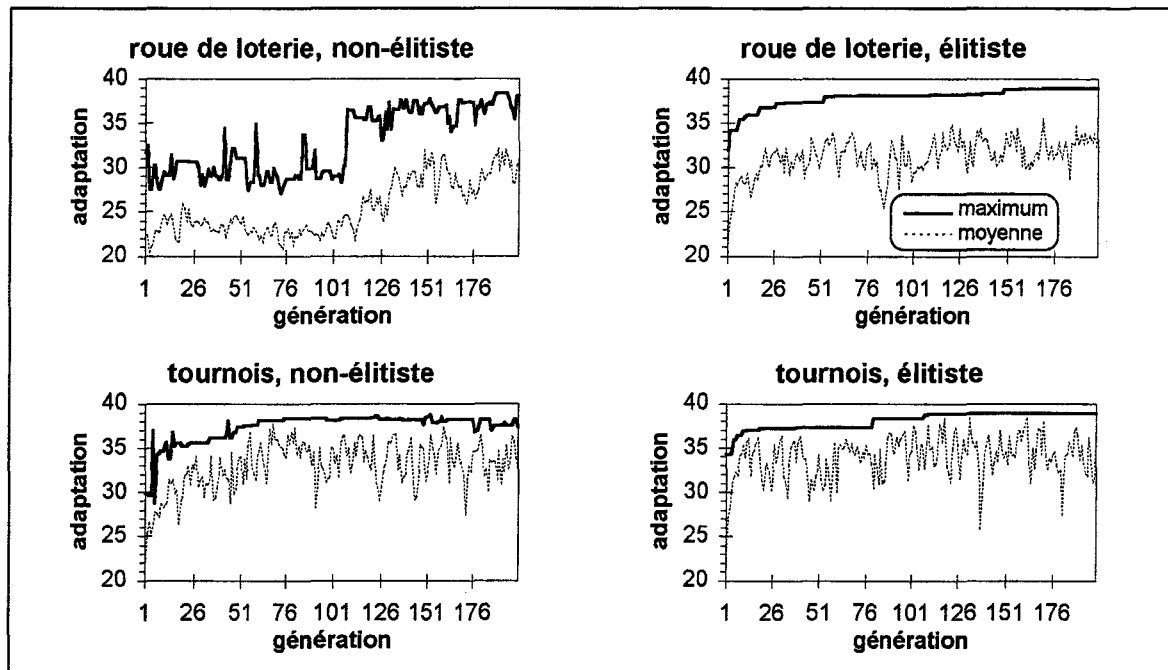


Figure III.17 : exemples d'évolutions par croisement RX

III.3. Bilan partiel

Compte tenu des risques de non-convexité évoqués en § I.2.2, le choix de la stratégie d'optimisation a porté sur une méthode globale, bien adaptée au traitement de problèmes discrets de cardinalités élevées. Ces orientations seront justifiées a posteriori (voir § IV.2.5.3). Les AG, objet de très nombreux développements actuels visant à la création d'outils d'aide à la conception, s'avèrent particulièrement bien adaptés à de telles exigences.

La version canonique des AG, utilisée pour les applications en sciences de l'ingénieur, recourt à l'encodage binaire des variables de conception. Cependant, l'étude attentive de la bibliographie, conduisant à l'adoption de principes de représentation stricts, a abouti à coder une version inhabituelle, l'AG alors considéré manipulant directement des variables de conception entières. De plus, le choix du mode de sélection a privilégié une technique élitiste par duels.

Des tests préliminaires ont confirmé l'efficacité d'une telle version d'AG, permettant une amélioration substantielle des performances en termes de rapidité de convergence, de qualité et de reproductibilité des solutions. Soulignons cependant que les résultats obtenus, issus d'un problème test bien spécifique, ne permettent pas en tant que tels d'affirmer et de garantir la supériorité de cet AG de type entier pour toute application. Néanmoins, ils corroborent les remarques de la bibliographie précisées dans ce chapitre. Par ailleurs, cet AG entier s'est aussi avéré très efficace, robuste et fiable, dans le cadre d'autres études portant sur la conception optimale de treillis ainsi que l'optimisation géométrique d'un mécanisme de suspension de véhicule automobile. Ces travaux, détaillés dans les références [MES 98a] et [MES 99b], ont de plus confirmé la faculté d'adaptabilité de la méthode.

Aussi, cet AG de type entier, utilisant une sélection élitiste par tournois, sera retenu pour les applications traitées dans le cadre de cette étude.

Chapitre IV :

Applications

Outre une brève description de la démarche générale adoptée, ce chapitre détaille les développements et les travaux d'optimisation réalisés. La première étude porte sur l'optimisation de six cylindres en carbone/époxy actuellement étudiés à l'IFREMER. La description, suivie de l'analyse, des résultats issus du code d'optimisation a permis la mise en évidence d'une allure caractéristique de stratification optimisée. Pour cette étude numérique, l'appréciation des accroissements de pressions critiques est réalisée, à l'aide de modèles MEF, en terme de gains calculés par rapport aux cylindres de référence stratifiés en [55_N]. Par ailleurs, une attention particulière sera accordée à la robustesse des solutions obtenues vis à vis des tolérances de fabrications, des incertitudes sur les valeurs de caractéristiques du matériau constitutif et des imperfections géométriques des cylindres. En outre, ce travail permettra l'analyse des performances de la procédure d'optimisation par algorithme génétique. Le deuxième volet d'applications concerne, lui, l'étude expérimentale du flambage de cylindres réalisée à l'aide du système d'essais décrit en figure II.4. Ce travail, portant sur des tubes en verre/époxy possédant des stratifications non seulement de type [55_N] mais aussi optimisées, permettra de corroborer les résultats numériques.

IV.1. Démarche générale

IV.1.1. Énoncé

Comme indiqué en § I.2.3, les problèmes d'optimisation abordés lors de cette étude porte uniquement sur un critère "flambage". La fonction objectif alors adoptée, que l'on cherchera à maximiser, est égale à la valeur de pression critique. Par ailleurs, les problèmes considérés sont de type discret : les valeurs d'angles seront en effet choisies parmi des jeux de valeurs discrètes Θ_i (précisées ultérieurement) correspondant à des possibilités réalistes de fabrication. L'énoncé général des problèmes d'optimisation traités est alors donné par :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser} \quad & F = P_{cr}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_N) \\ \text{avec} \quad & \theta_i \in \{\Theta_1; \Theta_2; \Theta_3; \dots; \Theta_M\}. \end{aligned}$$

Rappelons que toutes les valeurs d'angles seront indiquées en degrés. A l'instar de la plupart des travaux de la littérature, les composantes vectorielles j (alors entières et non pas codées en binaire) des individus manipulés par l'AG (cf. figure III.11) correspondent à la numérotation des différentes valeurs Θ_j , soit donc $j \in \{1; 2; \dots; M\}$ [SOR 96] [COL 98] [MIE 99]. On remarquera en outre que, pour une séquence de stratification comportant N plis, le problème d'optimisation discret correspondant possède alors une cardinalité (ou nombre total de solutions de conception, cf. § III.1.1.1) alors égale à M^N .

IV.1.2. Structure du code d'optimisation

L'architecture générale du code d'optimisation créé pour cette étude est détaillée en figure IV.1. Comme précisé précédemment (voir notamment la figure I.6), son fonctionnement est basé sur le couplage de l'algorithme génétique de type entier (retenu au terme de l'étude bibliographique et de la discussion menées dans le chapitre III) avec un modèle analytique du flambage de cylindres stratifiés. Aussi, ce code d'optimisation est décliné en trois versions correspondant respectivement à l'utilisation du modèle de type SANDERS, du modèle CT3 et du modèle LOG. Rappelons par ailleurs que les formulations analytiques adoptées sont précisés en § II.2.5, § II.2.6 et § II.2.7, le schéma algorithmique de l'AG étant, lui, détaillé en figure III.5.

Les données initiales introduites par l'utilisateur au lancement d'un calcul sont scindées en deux volets, le premier concernant le problème mécanique considéré : les propriétés orthotropes du composite (exprimées dans le repère matériau, cf. figure AI.1), les caractéristiques géométriques (rayon moyen, longueur et épaisseur de paroi) et d'éventuelles imperfections géométriques (amplitude équivalente et type de modèle) seront ainsi précisées. Par ailleurs, considérant des épaisseurs de plis toutes égales, l'utilisateur indiquera uniquement le nombre de plis constituant le stratifié. Notons qu'une modification rapide du code d'optimisation permettrait de traiter d'éventuelles applications où l'on préciserait l'épaisseur respective de chaque couche.

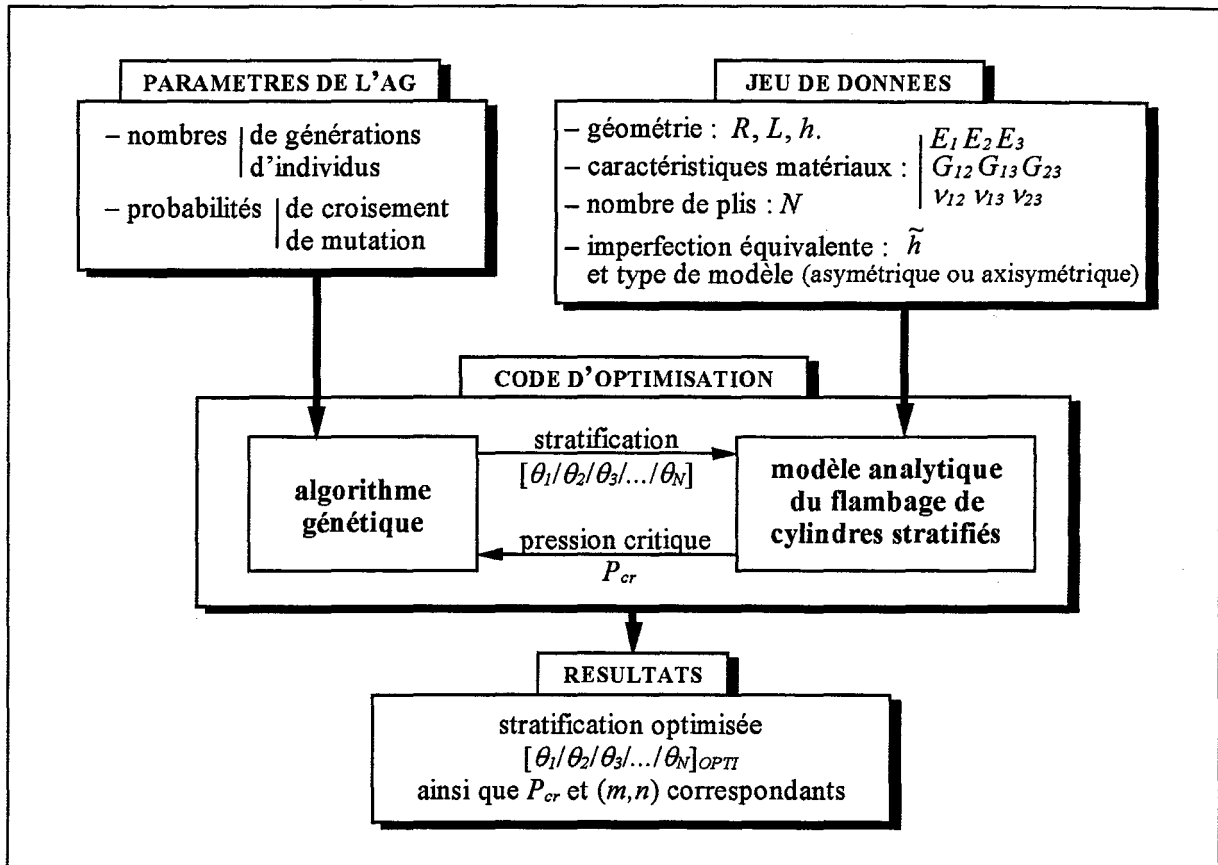


Figure IV.1 : structure du code d'optimisation

De plus, les paramètres propres au fonctionnement de l'AG (cf. § III.2.1.3) seront précisés au démarrage d'un calcul. Notons dès à présent que, à l'instar des tests préliminaires de performances détaillés en § III.2.7, les paramètres probabilistes de la procédure d'optimisation seront, pour toutes les applications abordées dans ce chapitre, fixés aux valeurs classiques suivantes [GOL 94] :

- probabilité de croisement = 80 %
- probabilité de mutation = 0.8 %.

Comme indiqué en § III.2.1.3, le choix des paramètres de population de l'AG (nombres d'individus et de générations) n'est pas tributaire de règles strictes. Aussi, et à l'instar de la très grande majorité des applications de la littérature, ils seront fixés de façon quasi-empirique, considérant néanmoins les valeurs utilisées lors de travaux antérieurs de la bibliographie ainsi que la cardinalité du problème traité. De plus, quelques calculs préliminaires permettront de vérifier que les choix adoptés permettent bien la convergence de l'AG. Pour chaque application, les valeurs retenues pour ces paramètres de population seront précisées.

Concernant la récupération des résultats, le code d'optimisation renvoie finalement à l'utilisateur une séquence de stratification optimisée (notée $[\theta_1 / \theta_2 / \dots / \theta_N]_{OPTI}$, cf. figure IV.1) correspondant au meilleur individu rencontré au cours du déroulement de l'AG. De plus, la valeur de pression critique ainsi que le mode de flambage (caractérisé par les nombres de demi-ondes m et n) correspondants sont indiqués.

Signalons enfin que, comme précisé en § III.2.1.3, le caractère pseudo-aléatoire de l'AG requiert de réaliser plusieurs lancements du calcul afin de permettre une analyse réaliste des solutions de conception et des performances de la méthode [SEB 97] : aussi, pour chaque cas abordé lors de cette étude, 20 calculs d'optimisation successifs seront effectués.

IV.1.3. Mesure des gains

Comme précisé dès le paragraphe § I.2.3, l'appréciation de l'accroissement de pression critique déduit d'une solution optimisée sera effectuée à l'aide des modèles analytiques et MEF par comparaison avec la limite de stabilité du cylindre de référence, stratifié en [55_N], correspondant. Ainsi, pour l'ensemble des travaux détaillés dans ce chapitre, deux facteurs seront utilisés. Il s'agit tout d'abord du gain G défini par :

$$G = P_{cr}([\theta_1 / \theta_2 / \dots / \theta_N]_{OPTI}) - P_{cr}([55_N]).$$

Une autre mesure de gain, relative elle, sera réalisée par le biais du facteur γ :

$$\gamma = G / P_{cr}([55_N]).$$

Rappelons enfin que l'estimation numérique de ces gains sera effectuée principalement par analyses linéaires de stabilité, et ceci à l'aide des modèles MEF (code SAMCEF) utilisant des corps rigides pour la modélisation des tapes et induisant des conditions aux limites cinématiques de type appui simple aux extrémités des cylindres (cf. § II.3.3). Par ailleurs, outre l'utilisation des éléments finis de type coque Mindlin et volumique, des calculs par modèle SAMCEF coque hybride seront aussi réalisés à titre indicatif bien que ce type de modélisation s'avère peu approprié pour les problèmes considérés car négligeant les effets de cisaillement transverse (cf. § II.3.2).

IV.2. Optimisation de cylindres en carbone/époxy

Ce premier volet d'applications concerne six corps d'enceintes sous-marines, réalisés en carbone/époxy, étudiés à l'IFREMER dans le cadre du projet MAS3-3-CT97-0091 financé par le programme MAST de la Communauté Européenne [PAP 98]. Cette étude est menée en collaboration avec (cf. figure I.1) NTUA, DERA ainsi que la société CNIM, fabricant partenaire de l'IFREMER chargé de la fabrication finale des cylindres composites. Compte tenu des objectifs du projet MAS3-3-CT97-0091 et de l'avancement des divers aspects de l'étude, les travaux ici détaillés sont essentiellement numériques. La détermination de "motifs" de stratifications optimisées et l'évaluation des gains correspondants sera complétée par l'analyse de la robustesse des solutions retenues. Afin de confirmer l'intérêt des solutions optimisées, ce travail a notamment donné lieu à la confrontation des résultats issus de diverses analyses MEF. Par ailleurs, les performances de la procédure d'optimisation par AG seront discutées.

IV.2.1. Structures considérées

Pour ces applications, et compte tenu des résultats d'études antérieures, le matériau constitutif retenu est de type carbone/époxy, à savoir fibre *T700* et résine de type *F100* [PAP 98] [VAN 98] [CHA 99b]. Comme indiqué en § I.1.3, un travail expérimental de caractérisation considérable a été précédemment réalisé, utilisant notamment divers essais sur cylindres [GRO 99]. Ces résultats ont été complétés par des calculs d'homogénéisation périodique effectués en considérant, d'après les indications de CNIM et les mesures réalisées, une fraction volumique de fibre égale à environ 65 % et un taux de vide estimé à 10 % [CHA 99b] [LEF 99]. Suite à ces divers travaux, les valeurs de caractéristiques mécaniques orthotropes alors retenues par les différents partenaires européens du projet MAS3-3-CT97-0091 sont données par (modules en GPa) [PAP 98] [LEF 99] :

$$\begin{aligned} E_1 &= 156 & ; & & E_2 &= 9.65 & ; & & E_3 &= 6.57 \\ G_{12} &= 5.47 & ; & & G_{13} &= 2.8 & ; & & G_{23} &= 3.925 \\ \nu_{12} &= 0.27 & ; & & \nu_{13} &= 0.34 & ; & & \nu_{23} &= 0.492 \end{aligned}$$

On remarquera la valeur du rapport E_1/E_2 , caractérisant l'anisotropie de ce matériau dans le plan des plis composites, alors égale à 16.2. Par ailleurs, et d'après les indications de CNIM, l'épaisseur nominale de tout pli sera considérée égale à environ 0.625 mm.

Les géométries considérées sont, elles, caractérisées par (rayon interne et longueur exprimés en mm) [PAP 98] :

$$R_{Inter} = 87.5 \quad \text{et} \quad L = 400.$$

Signalons que cette valeur de R_{Inter} correspond au rayon d'un mandrin standard de CNIM. Six différents cas d'épaisseur seront abordés [PAP 98]. Le tableau IV.1 présente les caractéristiques géométriques (cf. figure II.12) des six cylindres correspondants ainsi que la numérotation qui sera adoptée pour la suite de cette étude.

cylindre n°	1	2	3	4	5	6
nombre de plis	10	13	16	19	26	32
h (mm)	6.2	8.1	10.0	11.9	16.2	20
R (mm)	90.6	91.6	92.5	93.4	95.6	97.5
R/h	14.6	11.3	9.3	7.8	5.9	4.9

Tableau IV.1 : numérotation et géométries des cylindres

Considérant les valeurs du rapport R/h indiquées ci-dessous, on constate que cette étude portera ainsi sur l'optimisation de structures multicouches non seulement de type coque mince (cylindres n° 1 et 2) mais aussi semi-épaisse (cylindres n° 3, 4, 5 et 6). Par ailleurs, et comme indiqué en § I.1.2.1, ces corps d'enceintes sont de type élancé, le rapport R/L étant toujours supérieur à 4.

IV.2.2. Etude préliminaire

Avant de procéder, pour chacun des six cylindres considérés, à la recherche de stratifications optimisées à l'aide du code décrit en figure IV.1, divers calculs préliminaires ont été réalisés. Soulignons que la motivation de cette étude initiale a été double :

- Tout d'abord, il s'est agi de déterminer numériquement les pressions critiques des cylindres de références stratifiés en $[55_N]$ afin de procéder, par la suite, au calcul des gains définis en § IV.1.3.
- Les travaux antérieurs de la littérature, décrits en § I.2.2, portant sur l'optimisation de cylindres vis à vis de critères de stabilité ont montré qu'un choix adéquat de la stratification pouvait permettre des augmentations de charges critiques substantielles. Néanmoins, il s'avérait fort intéressant d'évaluer, pour des stratifications optimisées de façon intuitive, si des gains significatifs étaient a priori possibles pour les structures ici étudiées. Ces travaux préliminaires tenteront ainsi de confirmer au préalable l'intérêt de la présente étude.

En outre, notons que ce travail a permis la confrontation, complétant de fait les tests pratiqués dans le chapitre II, de résultats issus des divers modèles analytiques et MEF utilisés dans la suite de l'étude.

IV.2.2.1. Cylindres de référence

Les valeurs de pressions critiques P_{cr} ainsi que les modes correspondants des cylindres de référence (stratifiés en $[55_N]$), déterminés à l'aide des différents modèles analytiques et SAMCEF (cf. § IV.1.3), sont indiqués par le tableau IV.2. Des calculs utilisant le code MEF SOLVIA, en analyse de stabilité linéaire, ont de plus été réalisés par l'équipe de NTUA : ce modèle utilise un élément fini de coque bidimensionnel négligeant, à l'instar du modèle SAMCEF coque hybride, les effets de cisaillement transverse [PAP 98]. Les limites de stabilité de ces cylindres de référence ont aussi été évaluées, par analyses linéaires, à l'IFREMER à l'aide du code MEF ADINA et pour un élément fini de coque bidimensionnelle avec prise en compte du cisaillement transverse [LEF 99]. Pour ces calculs, et à l'instar des modèles SAMCEF utilisés, des éléments de type corps rigides, induisant des conditions aux limites cinématiques de type appui simple, modélisent les liaisons aux extrémités des cylindres.

Ces résultats corroborent l'étude préliminaire décrite en § II.4 : on constate ainsi la sensibilité des valeurs de pressions critiques vis à vis du cisaillement transverse, les modèles négligeant ces effets (SOLVIA et SAMCEF coque hybride) conduisant à des limites de stabilité supérieures à celles déduites des calculs SAMCEF coques Mindlin et volumique. Ces écarts s'avèrent, logiquement, d'autant plus marqués lorsque l'épaisseur de paroi croît. Par ailleurs, les modèles analytiques conduisent à des pressions critiques très supérieures aux résultats MEF pour les cylindres les plus épais (n° 5 et 6), induisant des écarts fort sensibles (jusqu'à environ 50 %). En outre, on remarquera quelques différences sur les modes de flambage calculés, bien que toujours de type à deux ou trois lobes comme présenté en figure II.9. Notons en particulier

cylindre n°		1	2	3	4	5	6
P_{cr} (MPa) (m,n)	SANDERS	17.0 (1,2)	31.1 (1,2)	51.2 (1,2)	78.5 (1,2)	173.3 (1,2)	295.5 (1,2)
	CT3	17.0 (1,2)	31.1 (1,2)	51.4 (1,2)	78.9 (1,2)	174.3 (1,2)	297.1 (1,2)
	LOG	17.1 (1,2)	31.3 (1,2)	51.8 (1,2)	79.4 (1,2)	175.9 (1,2)	300.2 (1,2)
	SAMCEF coque hybride	20.0 (1,3)	41.7 (1,3)	65.4 (1,3)	91.3 (1,2)	175.3 (1,2)	275.8 (1,2)
	SAMCEF coque Mindlin	18.4 (1,3)	35.2 (1,3)	57.5 (1,3)	83.4 (1,2)	145.1 (1,2)	207.5 (1,2)
	SAMCEF coque volumique	18.5 (1,3)	35.6 (1,3)	59.8 (1,3)	75.8 (1,2)	133.6 (1,2)	195.2 (1,2)
	SOLVIA	19.0 (1,3)	38.6 (1,3)	65.8 (1,3)	99.2 (1,3)	×	258.6 (1,2)
	ADINA	21.3 (1,3)	41.4 (1,3)	68.2 (1,3)	102.0 (1,3)	×	×

Tableau IV.2 : pressions critiques et modes des cylindres en [55_M]

que les modèles analytiques ont conduit invariablement à $n=2$ pour les cylindres les plus minces (n° 1, 2 et 3) contrairement aux divers résultats MEF. Ces différences, ainsi que leur influence sur les résultats d'optimisation, seront discutées en § IV.2.3.10.

IV.2.2.2. Solutions de NTUA

Le risque d'instabilité des corps d'enceintes ayant été mis en évidence lors de travaux antérieurs au projet MAS3-3-CT97-0091 (cf. § I.1.3), une étude préliminaire (n'incluant pas le cylindre n° 5) portant sur la recherche de stratifications accroissant les pressions critiques des cylindres considérés a été menée par l'équipe de NTUA. Soulignons que cette démarche d'optimisation a été réalisée de façon quasi-intuitive. Trois différents types de stratifications ont ainsi été étudiés :

$$[\theta_N] \quad ; \quad [(90/\theta)_N] \quad ; \quad [90_{N2}/\theta_{N2}]$$

et ceci pour les six valeurs d'angles θ_i suivantes :

$$\theta_i \in \{15; 30; 45; 55; 60; 75\}.$$

Les différentes solutions de conception correspondantes ont ainsi été évaluées à l'aide du modèle MEF SOLVIA (cf. § IV.2.2.1). L'étude complète est détaillée par la référence [PAP 98]. Les séquences retenues, ayant conduit aux pressions critiques les plus élevées, se sont toutes avérées être de type $[90_{N2}/\theta_{N2}]$ et sont présentées par le tableau IV.3.

cylindre n°	1	2	3	4	6
stratification	$[90_5/60_5]$	$[90_7/60_6]$	$[90_8/55_8]$	$[90_{10}/55_9]$	$[90_{16}/45_{16}]$

Tableau IV.3 : stratifications proposées par NTUA

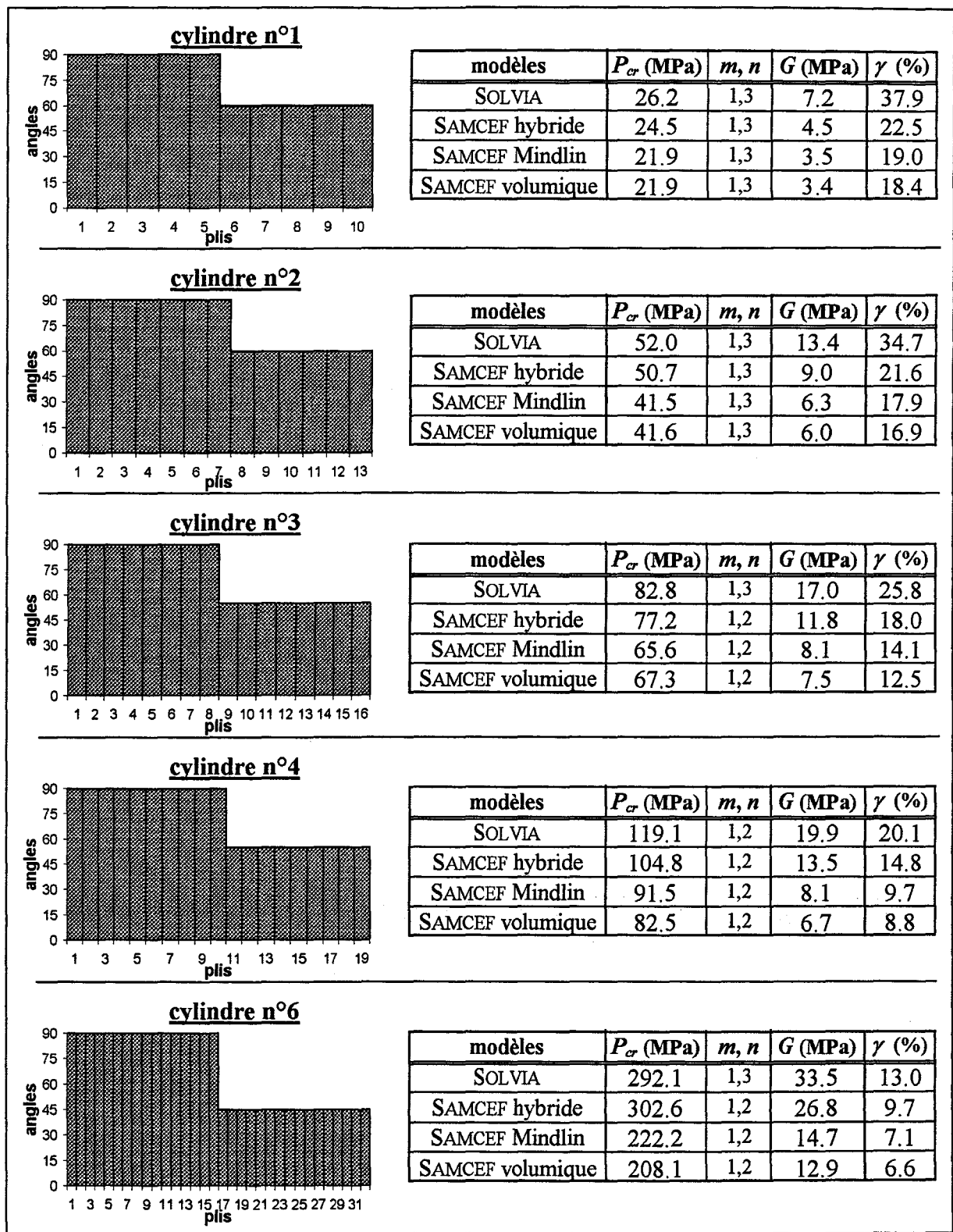


Figure IV.2 : allures, pressions critiques et gains des stratifications proposées par NTUA

Les allures de ces stratifications (utilisant le mode de représentation exposé en figure II.13), les valeurs de pressions critiques, les modes de flambage et les gains correspondants sont détaillés en figure IV.2. Outre les résultats fournis par NTUA (code SOLVIA), les valeurs

issues de calculs réalisés à l'aide des modèles SAMCEF sont aussi précisées. Rappelons que les valeurs G et γ sont, pour chaque modèle, calculées d'après les valeurs du tableau IV.2.

On remarquera en premier lieu que les gains absolus G ainsi que les valeurs relatives γ évalués à l'aide des modèles MEF négligeant les effets de cisaillement transverse (SOLVIA et SAMCEF coque hybride) s'avèrent nettement plus élevés, plus "optimistes". L'ensemble des résultats conduit cependant à constater que les valeurs γ sont substantielles, supérieures à 10 %, pour les cylindres les plus minces. Par contre, ces valeurs s'affaiblissent notablement lorsque l'épaisseur de paroi augmente. L'intérêt de ces stratifications semble néanmoins sensible même pour les cylindres semi-épais : les gains intrinsèques s'avèrent en effet manifestes, les valeurs de G étant, par exemple, supérieures à 10 MPa pour le cylindre n° 6. Ainsi, cette étude numérique préliminaire a permis de vérifier, au préalable, qu'il existait potentiellement des modes de stratification conduisant à des limites de stabilité supérieures à celles de solutions classiques en [55_N]. Par ailleurs, précisons que ces résultats "d'optimisation intuitive" seront aussi utilisés en § IV.2.7.1 comme base comparative pour l'appréciation de la qualité des solutions optimisées par AG.

A titre indicatif, notons que des calculs de stabilité non linéaires ont été réalisés par l'équipe de NTUA, toujours à l'aide du modèle SOLVIA, pour certaines des solutions optimisées. On remarquera ainsi que les résultats obtenus (cf. tableau IV.4) s'avèrent très proches des valeurs P_{cr} issues d'analyses linéaires présentées en figure IV.2, les écarts observés étant inférieurs à 7 %.

cylindre n°	stratification	P_{cr} (MPa)
1	[90 ₅ /60 ₅]	24.5
2	[90 ₇ /60 ₆]	48.5
4	[90 ₁₀ /55 ₉]	115.0

Tableau IV.4 : calculs de stabilité non linéaires – code SOLVIA

IV.2.3. Stratifications optimisées par AG

Les paragraphes suivants détaillent les résultats de calculs d'optimisation réalisés à l'aide du code créé pour cette étude (cf. figure IV.1). Ce travail tentera ainsi, par confrontation des stratifications obtenues à l'aide des divers modèles analytiques (SANDERS, CT3 et LOG) et aussi par comparaison avec celles proposées par NTUA, de mettre en évidence et de retenir des solutions optimisées pour la suite de l'étude. A l'instar de l'étude préliminaire précédente, l'évaluation des gains sera réalisée à l'aide d'analyses MEF de stabilité linéaires, et ceci à l'aide des modèles SAMCEF utilisant des corps rigides modélisant les tapes. Par ailleurs, l'influence de contraintes de fabrication sur les résultats d'optimisation sera, entre autres, évaluée. Notons que la cardinalité de chaque problème traité, les valeurs des paramètres de populations de l'AG (nombres d'individus et de générations) et les temps de calculs CPU observés seront détaillés ultérieurement en § IV.2.5.

IV.2.3.1. Valeurs d'angles

Précisons en premier lieu que, compte tenu des possibilités de fabrication et des indications du fabricant CNIM, cinq valeurs d'angles (comprises entre 30 et 90° et variant par pas de 15°) seront considérées dans la suite de l'étude :

$$\theta_i \in \{30; 45; 60; 75; 90\}.$$

L'influence des tolérances admises sur ces valeurs sera évaluée ultérieurement lors de l'étude de la robustesse des stratifications optimisées retenues (cf. § IV.2.6).

IV.2.3.2. Modèle de type SANDERS

Ce paragraphe détaille les résultats des calculs d'optimisation par AG réalisés en utilisant le modèle analytique de type SANDERS. Rappelons que, comme précisé en § IV.1.2, chaque cas traité a donné lieu à 20 calculs successifs. Pour chaque cylindre, l'allure de stratification correspondant à la meilleure solution déduite de ces 20 calculs est représentée en figure IV.3. A l'instar de la figure IV.2, les tableaux joints détaillent les résultats issus des analyses MEF réalisées. A titre indicatif, les valeurs issues des modèles analytiques SANDERS et aussi CT3 sont aussi précisées. Rappelons que le calcul des gains est, là encore, effectué vis à vis des limites de stabilité des tubes de référence (cf. tableau IV.2).

Il apparaît clairement que les solutions optimisées par AG sont toutes très similaires : quel que soit le cylindre considéré, l'allure de stratification est invariablement de type $[90_{N1}/\Psi_1/30_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$, Ψ_1 et Ψ_2 symbolisant d'éventuelles zones de transition où les plis possèdent des valeurs d'angles autres que 30 et 90°. Par ailleurs, les résultats MEF permettent de constater d'emblée l'intérêt des solutions optimisées par AG par rapport à celles proposées par NTUA : en effet, les valeurs de pressions critiques s'avèrent très nettement supérieures à celles indiquées en figure IV.2, et ce quel que soit le modèle SAMCEF. Les valeurs des gains relatifs γ sont ainsi comprises entre 11 et plus de 40 %. A ce sujet, on remarquera que, là encore, plus les cylindres sont minces, plus ces valeurs de gains relatifs sont élevées. En outre, notons que, comme observé en § IV.2.2.2, les gains calculés par le modèle SAMCEF coque hybride s'avèrent plus optimistes que ceux déduits des modèles MEF tenant compte des effets de cisaillement transverse. A ce propos, les valeurs de gains issues des modèles analytiques semblent, quel que soit le type de formulation (SANDERS ou CT3), surestimées par comparaison avec les résultats MEF. Enfin, on remarquera les différences, déjà soulignées en § IV.2.2.1, sur les valeurs de nombres n de demi-ondes circonférentielles entre les résultats analytiques et MEF, et ceci pour les cylindres les plus minces (n° 1, 2 et 3).

Des calculs de stabilité linéaires comparatifs ont été effectués à l'IFREMER, à l'aide du modèle MEF (code ADINA) décrit en § IV.2.2.1, et ceci pour les stratifications optimisées des cylindres n° 1, 2, 3 et 4 représentées en figure IV.3. Les résultats, détaillés par le tableau IV.5, conduisent ainsi à des valeurs de G (calculées par rapport aux valeurs du tableau IV.2) quasi-identiques à celles déduites du modèle SAMCEF coque Mindlin. Remarquons que les valeurs γ ,

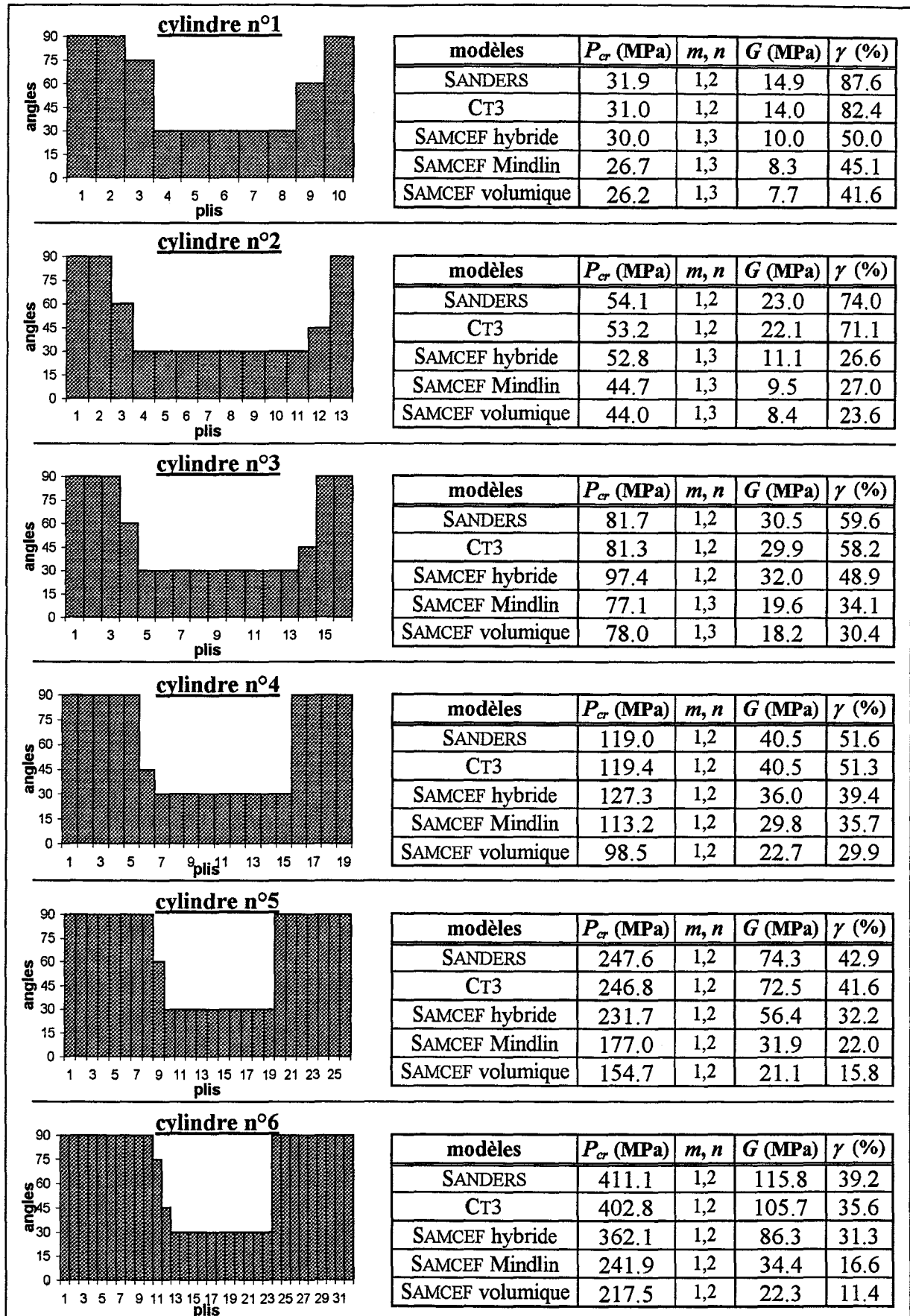


Figure IV.3 : stratifications optimisées par AG – modèle de type SANDERS

quoique toujours substantielles, s'avèrent cependant plus faibles. A ce stade de l'étude, ces résultats issus de ADINA ont ainsi permis une confirmation supplémentaire de l'intérêt procuré par les stratifications optimisées par l'outil numérique schématisé en figure IV.1.

cylindre n°	P_{σ} (MPa)	m, n	G (MPa)	γ (%)
1	29.8	1,3	8.5	39.9
2	50.8	1,3	9.4	22.7
3	87.8	1,3	19.6	28.7
4	131.4	1,3	29.4	28.8

Tableau IV.5 : résultats ADINA

IV.2.3.3. Modèle CT3

Les meilleures solutions déduites des calculs d'optimisation par AG utilisant le modèle CT3 sont, elles, présentées en figure IV.4. On constate ainsi que, malgré les différences entre la formulation de ce modèle analytique et celui de type SANDERS, les stratifications obtenues présentent une similitude très marquée avec les solutions exposées en § IV.2.3.2. Là encore, l'allure caractéristique de stratification notée $[90_{N1}/\Psi_1/30_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$ apparaît très distinctement. Soulignons que, par rapport aux stratifications présentées en figure IV.3, les modifications observées concernent les zones de transition notées Ψ_1 : les valeurs d'angles présents dans ces zones diffèrent ainsi pour les cylindres n° 1 et 2. De plus, pour les solutions issues du modèle CT3 concernant les tubes semi-épais (n° 3, 4, 5 et 6), ces zones Ψ_1 sont constituées par de plus nombreux plis. La transition entre les plis à 90° situé sur la paroi interne et les plis à 30° est alors plus progressive que pour les solutions déduites du modèle SANDERS. Enfin, on remarquera que, pour de telles stratifications en $[90_{N1}/\Psi_1/30_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$ et à l'instar des solutions de la figure IV.3, il s'avérerait délicat d'établir une relation générale entre les nombres de plis notés $N1$, $N2$ et $N3$.

L'examen des résultats MEF permet de constater que les limites de stabilité calculées à l'aide des modèles SAMCEF coque Mindlin et volumique s'avèrent notablement plus élevées que celles des solutions présentées en figure IV.3. Cette différence est particulièrement marquée pour les cylindres semi-épais (n° 3, 4, 5 et 6), les valeurs de gains relatifs γ étant, par exemple, désormais très supérieures à 10 % pour le cylindre n° 6. Pourtant, comme indiqué précédemment, les seules modifications remarquables concernent la constitution des zones de transition notées Ψ_1 . Ainsi, la prise en compte des effets de cisaillement transverse, modélisés par le modèle CT3, produit une influence certes relativement peu marquée sur les allures de stratifications optimisées mais réellement très sensible pour les valeurs de pressions critiques correspondantes. On notera que les résultats SAMCEF coque hybride, négligeant pourtant les effets de cisaillement transverse, s'avèrent eux aussi plus élevés pour les cylindres semi-épais que ceux indiqués en figure IV.3. Par ailleurs, remarquons que, logiquement, les gains calculés par modèle CT3 sont bien supérieurs (et inversement pour les valeurs déduites du modèle SANDERS) à ceux des solutions de la figure IV.3.

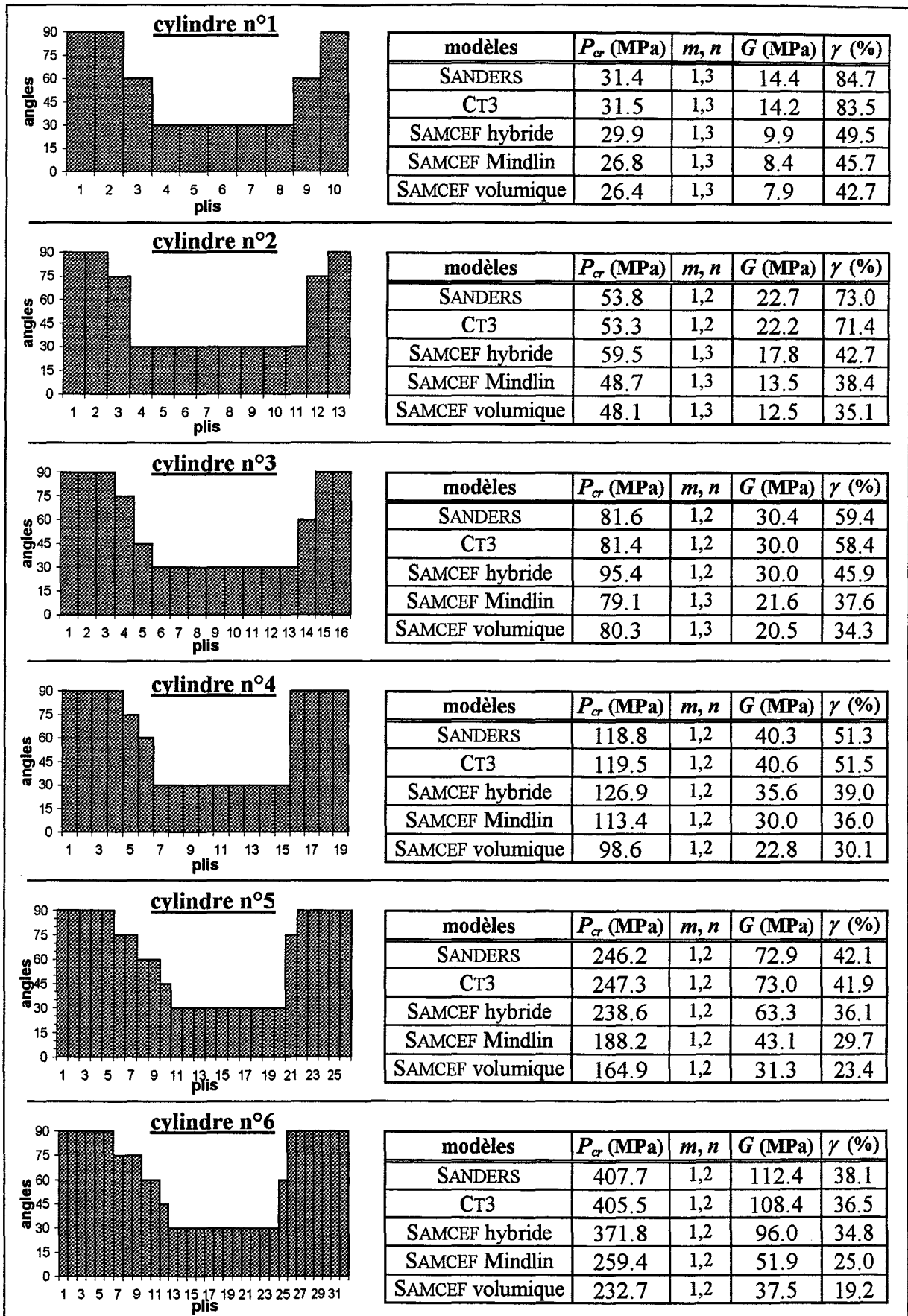


Figure IV.4 : stratifications optimisées par AG – modèle CT3

Les constats précédents permettent, de fait, de formuler une remarque majeure complétant l'étude menée en § II.4.1 : en effet, les tests numériques pratiqués dans le chapitre II ainsi que les résultats du tableau IV.2 ont montré que les valeurs de pressions critiques calculées par les divers modèles analytiques ne présentaient pas de différences tangibles. Aussi, ces résultats n'avaient permis d'analyser l'adéquation et la validité de la modélisation des effets de cisaillement transverse adopté pour les formulations CT3 et LOG. Par contre, on constate ici (ainsi qu'en § IV.2.3.4) que l'influence de la modélisation du cisaillement transverse sur l'optimisation des stratifications est bien réelle et sensible. La tendance observée pour les résultats issus des modèles SAMCEF coque Mindlin et volumique confirme la validité des formulations analytiques CT3 et LOG.

Pour ces solutions optimisées, des calculs linéaires de stabilité ont, là encore, été réalisés, à l'aide des modèles MEF ADINA et aussi SOLVIA (cf. § IV.2.2.1). Au vu des valeurs du tableau IV.6, on remarquera tout d'abord que les résultats ADINA confirment l'intérêt des solutions données en figure IV.4 par rapport à celles optimisées à l'aide du modèle de type SANDERS : les gains déduits s'avèrent en effet très nettement supérieurs à ceux du tableau IV.5. Les valeurs calculées par modèle SOLVIA, quoique plus optimistes à l'instar du modèle SAMCEF coque hybride, confirment l'ordre de grandeur des pressions critiques et des gains déduits. De surcroît, ces résultats attestent de la qualité des stratifications optimisées par AG vis à vis des solutions étudiées en § IV.2.2.2, les limites de stabilité issues de SOLVIA s'avérant très supérieures à celles précisées en figure IV.2.

cylindre n°	modèle MEF	P_{cr} (MPa)	m, n	G (MPa)	γ (%)
1	ADINA	30.0	1,3	8.7	40.8
	SOLVIA	29.1	1,3	10.1	53.2
2	ADINA	54.7	1,3	13.3	32.1
	SOLVIA	56.4	1,3	17.8	46.1
3	ADINA	89.6	1,3	21.4	31.4
	SOLVIA	95.6	1,3	29.8	45.3
4	ADINA	133.4	1,3	31.4	30.8
	SOLVIA	145.0	1,3	45.8	46.2

Tableau IV.6 : résultats ADINA et SOLVIA

IV.2.3.4. Modèle LOG

La figure IV.5 présente les résultats des calculs d'optimisation par AG réalisés en utilisant le modèle LOG. Précisons que les solutions obtenues pour les cylindres n° 1 et 2 ne sont pas indiquées car identiques à celles déduites du modèle CT3. On remarquera d'ailleurs que toutes ces solutions, là encore invariablement basées sur une allure de type $[90_{N1}/\Psi_1/30_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$, s'avèrent très proches de celles présentées en figure IV.4. Les zones de transition Ψ_1 sont ainsi beaucoup plus marquées et progressives que celles des solutions de

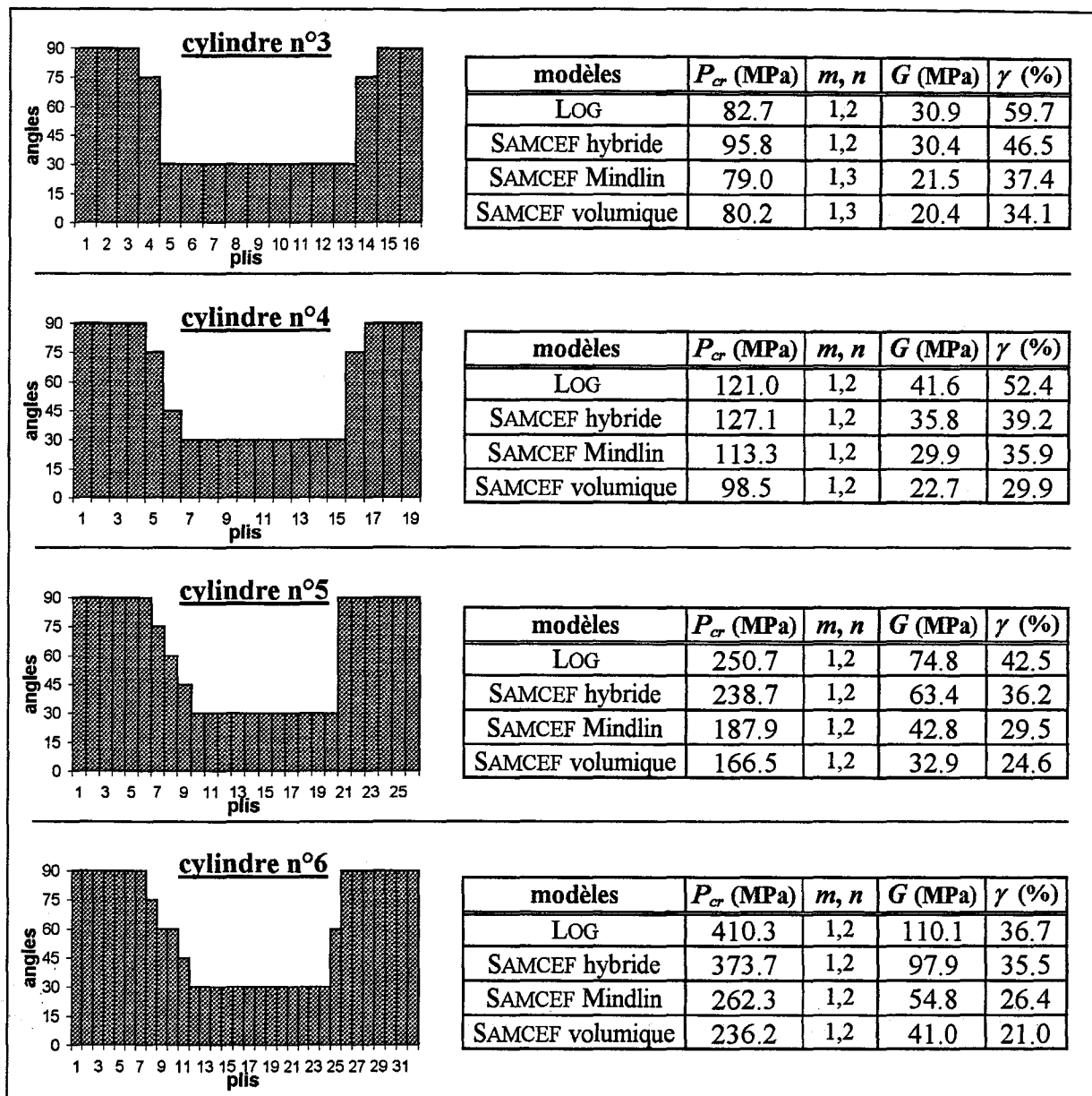


Figure IV.5 : stratifications optimisées par AG – modèle LOG

la figure IV.3. Les valeurs de pressions critiques sont, elles aussi, très proches de celles indiquées en figure IV.4. De fait, on constate, là encore et malgré les différences de formulation entre les modèles CT3 et LOG, l'intérêt procuré par la prise en compte du cisaillement transverse pour l'optimisation des stratifications. En outre, notons que seule la solution obtenue pour le cylindre n° 6 conduit à des valeurs de gains supérieures à celles calculées en § IV.2.3.3. Cette remarque ne permet pas, à elle seule, d'affirmer que la formulation du modèle LOG est mieux adaptée les coques de fortes épaisseurs que celle du modèle CT3. Néanmoins, ce constat corrobore la discussion menée en § II.2.1.

IV.2.3.5. Contrainte de fabrication supplémentaire

Des calculs additionnels ont par ailleurs été réalisés à la demande de CNIM. Compte tenu de la valeur élevée de l'épaisseur du cylindre n° 6, il s'avérait en effet intéressant d'évaluer l'influence d'enroulements circonférentiels, repartis régulièrement dans l'épaisseur, sur l'allure des stratifications optimisées et sur les valeurs de pressions critiques : ce type de contrainte de fabrication est destiné au compactage de la résine au cours du processus, permettant ainsi de régulariser le taux de fibre dans l'épaisseur du cylindre. Suite aux indications de CNIM, cette contrainte supplémentaire a ainsi été introduite dans le code d'optimisation sous la forme suivante : toute série de 5 plis dont les valeurs d'angles sont inférieures à 75° doit être immédiatement suivie d'un pli à 90°. Plus concrètement, le respect de cette contrainte a été réalisé, dans le déroulement de l'AG, par examen et correction systématique des composantes de chaque individu au démarrage d'une nouvelle génération, avant calcul de l'adaptation (cf. figure III.4). Les résultats obtenus en utilisant les modèles SANDERS et CT3 sont présentés en figure IV.6. Remarquons que, à l'instar des, ces solutions conduisent à des allures de stratifications très proches des solutions en $[90_{N1}/\Psi_1/30_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$ des paragraphes précédents. Là encore, les zones de transition Ψ_1 et Ψ_2 sont nettement plus marquées pour la stratification issue du modèle CT3. Par ailleurs, les pressions critiques s'avèrent très proches de celles exposés en figures IV.3 et IV.4, et ceci malgré la présence de plis à 90° dans la partie centrale des séquences de stratifications. De fait, les valeurs de gains γ sont peu affectées (moins de 2 %). Précisons que ces stratifications ne seront pas étudiées dans la suite de ce travail, ces résultats n'ayant, à ce stade de l'avancement du projet MAS3-3-CT97-0091, qu'un rôle uniquement indicatif notamment pour CNIM.

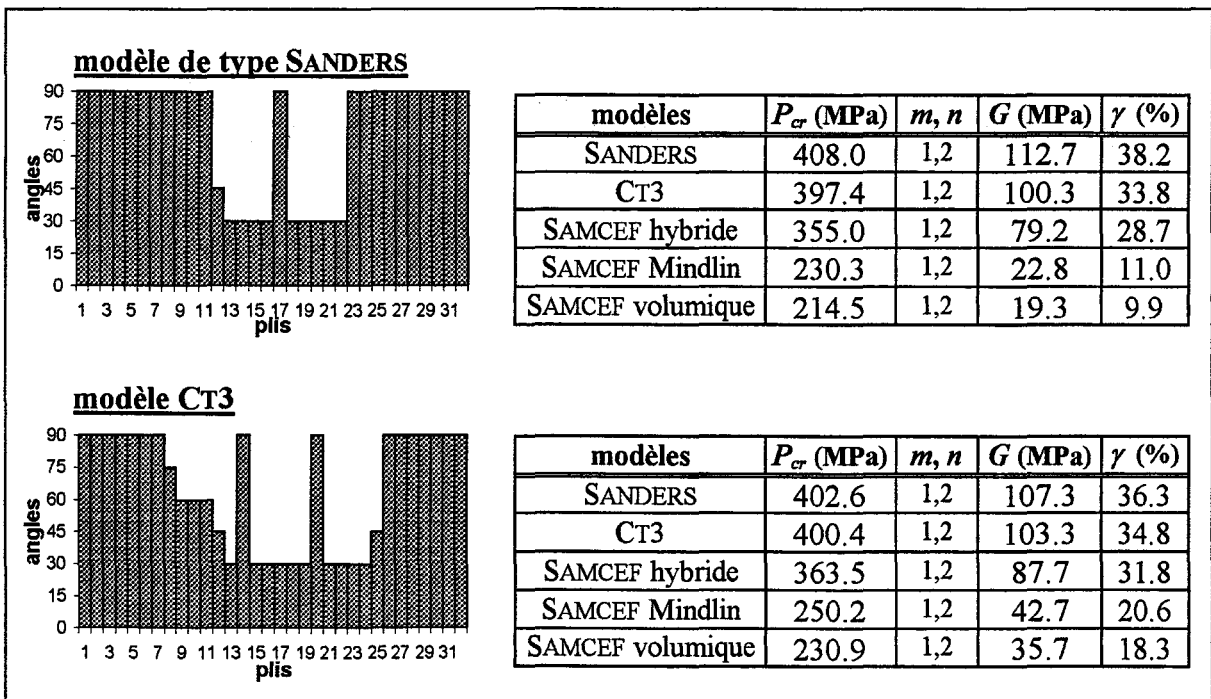


Figure IV.6 : contraintes de fabrication supplémentaire – résultats

IV.2.3.6. Nombres de plis réduits

A titre indicatif, on remarquera que le code d'optimisation créé pour cette étude permet un autre mode d'utilisation, en considérant alors des nombres de plis "fictifs". Il s'agit plus exactement de définir des zones, des groupes de plis d'angles identiques, à optimiser. La valeur d'épaisseur de paroi du cylindre n'est, bien entendu, pas modifiée. L'utilisateur du code peut ainsi rapidement, la cardinalité du problème d'optimisation étant donc réduite, estimer l'allure "grossière" d'une stratification optimisée.

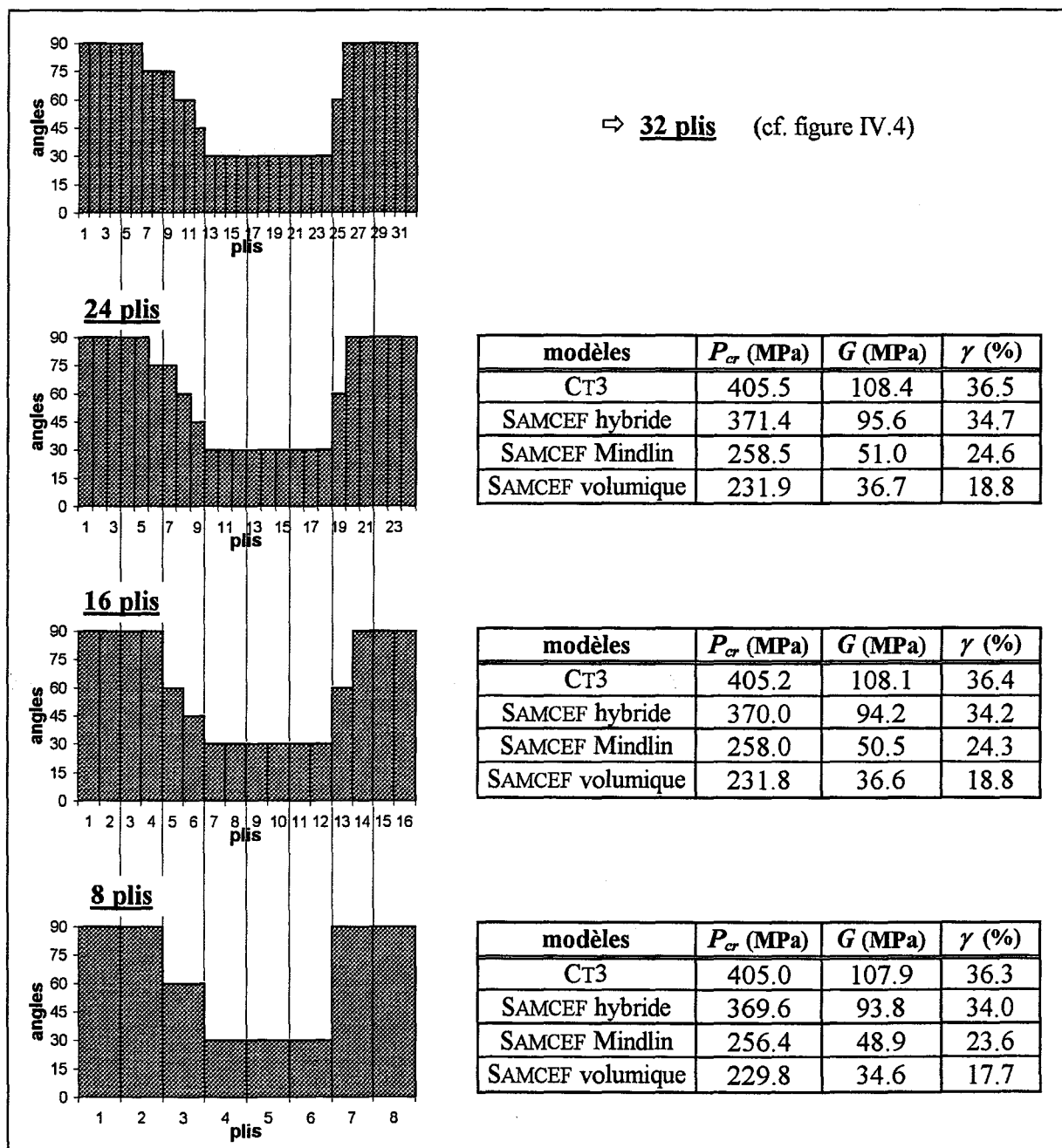


Figure IV.7 : résultats pour des nombres de plis réduits – modèle CT3

La figure IV.7 précédente présente ainsi les stratifications optimisées (déduites du modèle CT3) et les gains correspondants pour le cylindre n° 6 alors considéré comme étant composé de 24, 16 et 8 plis. La solution obtenue précédemment en § IV.2.3.3 (pour 32 plis) est aussi représentée pour comparaison. On remarquera que l'allure de stratification caractéristique en $[90_{N1}/\Psi_1/30_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$ est préservée, les valeurs de pressions critiques n'étant que peu affectées.

IV.2.3.7. Coefficients de rigidités réduits

Comme précisé en § II.2.5.4, les formulations analytiques adoptées pour cette étude ont utilisé les coefficients de rigidités précisés en (AI.14) et non pas les termes Q_{ij} donnés en § AI.1.3. Aussi, il s'avérait intéressant à ce stade de l'étude d'évaluer l'incidence produite par l'utilisation de coefficients réduits. Des calculs d'optimisation par AG supplémentaires ont ainsi été réalisés. Les stratifications alors obtenues, en utilisant les modèles de type SANDERS et CT3 avec coefficients de rigidités réduits, sont exposées en figures IV.8 et IV.9. Soulignons que certaines de ces solutions ne sont pas représentées car identiques à celles des figure IV.3 et IV.4. Par ailleurs, le tableau IV.7 suivant présente, à titre indicatif, les valeurs de pressions critiques correspondantes des cylindres de référence en $[55_N]$.

cylindre n°		1	2	3	4	5	6
P_{cr} (MPa)	SANDERS	16.5	30.1	49.8	76.4	168.9	288.0
	CT3	16.5	30.2	50.0	76.7	169.9	289.7

Tableau IV.7 : pressions critiques des cylindres en $[55_N]$
– coefficients de rigidités réduits

Ce travail d'optimisation permet ainsi de constater que l'adoption de coefficients de rigidités réduits n'induit pas de modification sensible. Les résultats sont en effet quasi-identiques à ceux obtenus précédemment en § IV.2.3.2 et § IV.2.3.3, et ceci tant au niveau des allures de stratification que pour les valeurs de pressions critiques et de gains. Compte tenu de la discussion menée en § II.2.5.4 (voir aussi § IV.2.7.3), ces solutions ici étudiées à titre indicatif ne seront pas retenues pour la suite de ce travail.

IV.2.3.8. Cylindres en verre/époxy

Comme indiqué en § I.1.2.1, les travaux antérieurs menés dans le cadre des projets européens BRITE et MAST ont aussi conduit à retenir, pour certaines applications, des matériaux composites de type verre/époxy pour la réalisation des corps d'enceintes. Aussi, il s'avérait fort intéressant d'évaluer l'allure des stratifications optimisées par AG (ainsi que les accroissements de pressions critiques correspondants) de six cylindres de géométries identiques à celles précisées en § IV.2.1 mais désormais constitués par ce type de matériau. On considérera ici un verre E /résine époxy $MY 750$ dont les propriétés (isotropes transverses, cf. § AI.1.1.3), déduites d'une campagne d'essais de caractérisation sur cylindres réalisée

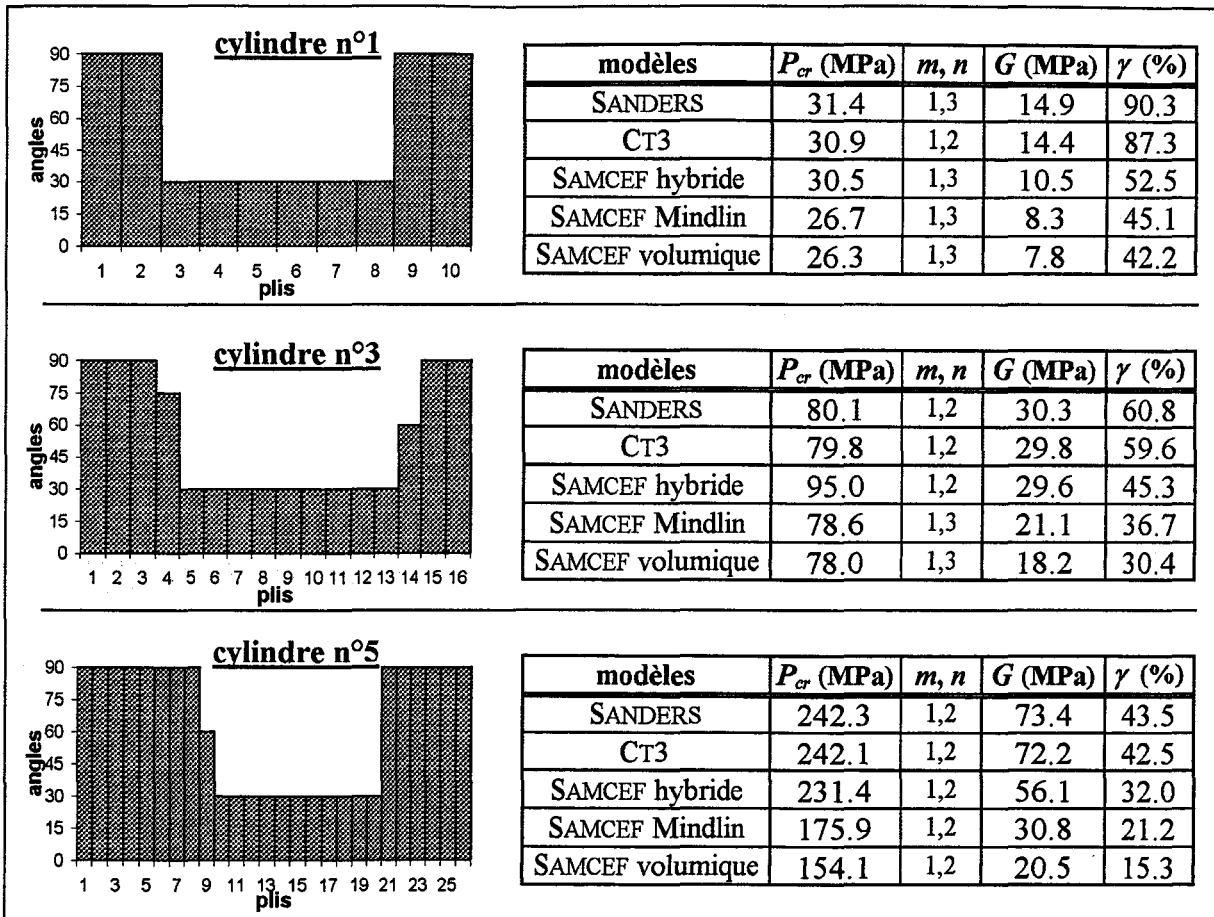


Figure IV.8 : solutions du modèle de type SANDERS avec coefficients de rigidités réduits

par DERA [SOD 98], sont les suivantes (modules en GPa) :

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 45.6 & ; & & E_2 &= 16.2 & ; & & E_3 &= 16.2 \\
 G_{12} &= 5.83 & ; & & G_{13} &= 5.83 & ; & & G_{23} &= 5.78 \\
 \nu_{12} &= 0.278 & ; & & \nu_{13} &= 0.278 & ; & & \nu_{23} &= 0.4
 \end{aligned}$$

Le rapport d'anisotropie E_1/E_2 est alors désormais égal à 2.8, soit donc très inférieur à celui du carbone/époxy (cf. § IV.2.1). Par ailleurs, et bien que cela puisse s'avérer peu réaliste, on supposera que les épaisseurs de plis de stratification sont identiques à celles en carbone/époxy : les six cylindres ici considérés possèdent donc des nombres de plis et des épaisseurs de parois identiques à ceux du tableau IV.1.

Le tableau IV.8 présente ainsi les stratifications optimisées par AG en utilisant le modèle CT3, les charges critiques correspondantes (ainsi que celles de cylindres de référence stratifiés en $[55_N]$) calculées à l'aide du modèle SAMCEF coque Mindlin et les gains déduits. Les modes de flambage observés sont, à l'instar des cylindres en carbone/époxy, de type $m = 1$ et $n = 3$ (pour les cylindres les plus minces) ou $n = 2$. On constate ainsi que les stratifications optimisées sont, là encore, toutes invariablement basées sur une allure caractéristique en $[90_{N1}/\Psi_1/30_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$. Les valeurs de gains relatifs γ sont nettement plus réduites que celles

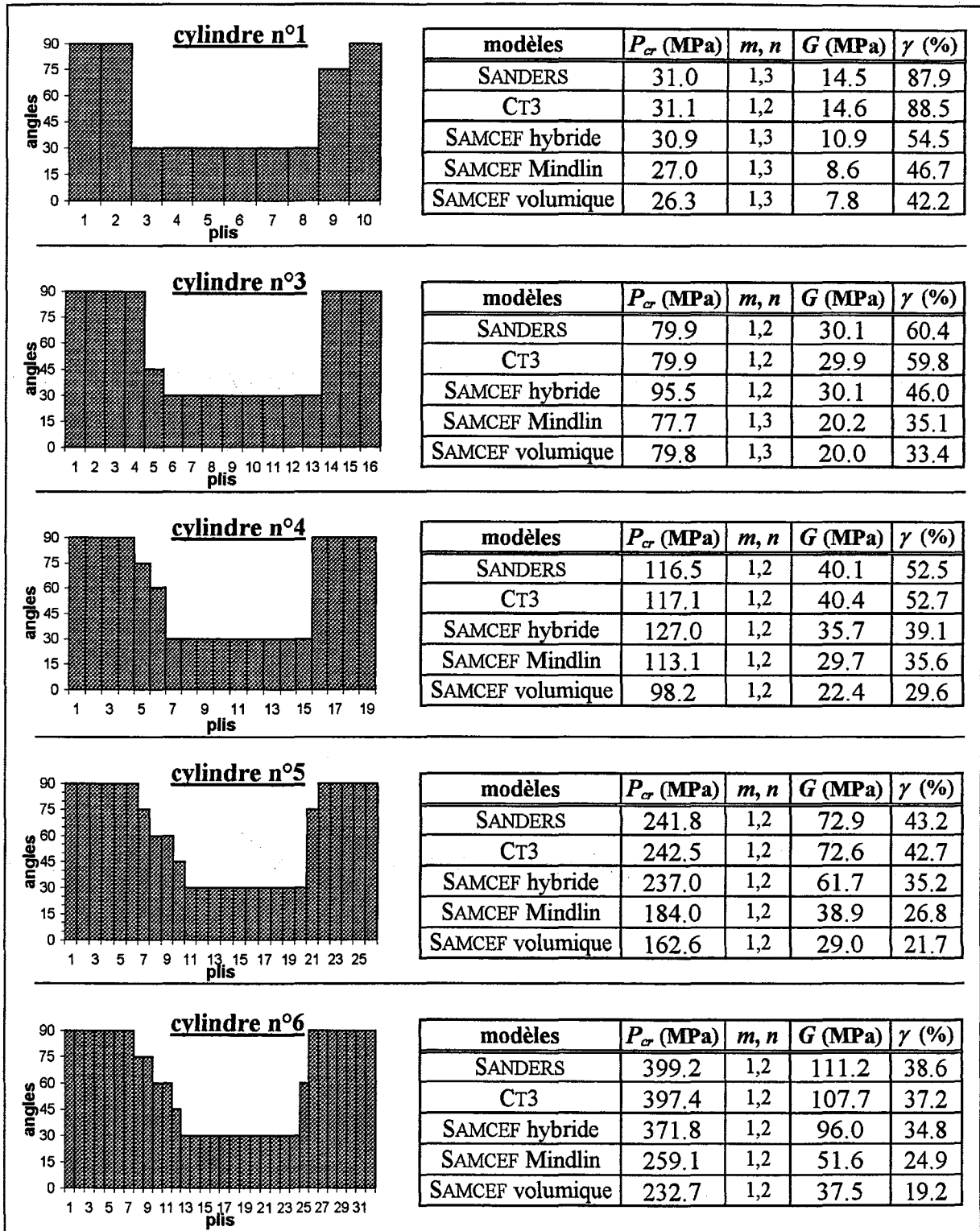


Figure IV.9 : solutions du modèle CT3 avec coefficients de rigidités réduits

observées dans le cas de cylindres en carbone/époxy (cf. figure IV.4) mais restent cependant significatives et substantielles, conduisant par exemple à plus de 13 % pour le cylindre n° 6. On peut, intuitivement mais néanmoins assez logiquement, attribuer cette baisse des gains à la faible anisotropie du verre/époxy ici considéré.

cylindre n°	$[\theta_1/\theta_2/\dots/\theta_N]_{OPTI}$	P_{cr} ($[\theta_1/\dots/\theta_N]_{OPTI}$) en MPa	P_{cr} ($[55_N]$) en MPa	G (MPa)	γ (%)
1	$[90_4/30_2/45/90_3]$	11.0	8.5	2.5	29.4
2	$[90_3/60/30_7/45/90]$	19.4	15.5	3.9	25.2
3	$[90_4/45/30_9/90_2]$	33.9	28.0	5.9	21.1
4	$[90_5/60/30_{10}/90_3]$	52.2	43.2	9.0	20.8
5	$[90_8/60/45/30_{10}/90_6]$	100.1	85.9	14.2	16.5
6	$[90_{10}/75/60/45/30_{10}/90_9]$	143.5	126.2	17.3	13.7

Tableau IV.8 : résultats d'optimisation des cylindres en verre/époxy

IV.2.3.9. Optimisation avec angles non contraints

A ce stade de l'étude, il s'avérait aussi particulièrement intéressant d'évaluer l'influence des contraintes de fabrication précisées en § IV.2.3.1. Il s'agissait notamment d'évaluer si l'allure caractéristique en $[90_{N1}/\Psi_1/30_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$, précédemment mise en évidence, s'avérait induite ou non par ces prescriptions sur les valeurs d'angles. De plus, des solutions optimisées continues et non contraintes conduiraient, logiquement, à des valeurs de pressions critiques supérieures à celles, par exemple, des solutions exposées en § IV.2.3.2 et § IV.2.3.3 : l'évaluation de cet écart sur les valeurs P_{cr} s'avérait, de fait, fort instructive quant à l'incidence des prescriptions données en § IV.2.3.1 sur la qualité des résultats et des gains procurés par l'optimisation. Aussi, des calculs supplémentaires ont été réalisés pour la détermination de stratifications optimisées pour des valeurs d'angles non contraintes. Le code d'optimisation discrète par AG a été adapté afin de procéder à des calculs "pseudo-continus", les valeurs d'angles étant alors choisies entre 0 et 90° par pas de 1°, soit donc parmi 91 valeurs :

$$\theta_i \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 89; 90\}.$$

Précisons là aussi que les cardinalités correspondantes et les paramètres de population adoptés pour les calculs d'optimisation par AG seront précisés ultérieurement en § IV.2.5.2. Les solutions obtenues en utilisant les modèles de type SANDERS et CT3 sont, elles, présentées par les figures IV.10 et IV.11.

Ces résultats permettent de vérifier, en premier lieu, que les allures de stratification déduites sont invariablement basées sur un motif en $[90_{N1}/\Psi_1/0_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$. On constate ainsi une similitude très marquée avec les solutions en $[90_{N1}/\Psi_1/30_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$ obtenues précédemment. Ainsi, ce type de motif de stratification caractéristique ne semble pas être induit par les contraintes angulaires prescrites en § IV.2.3.1.

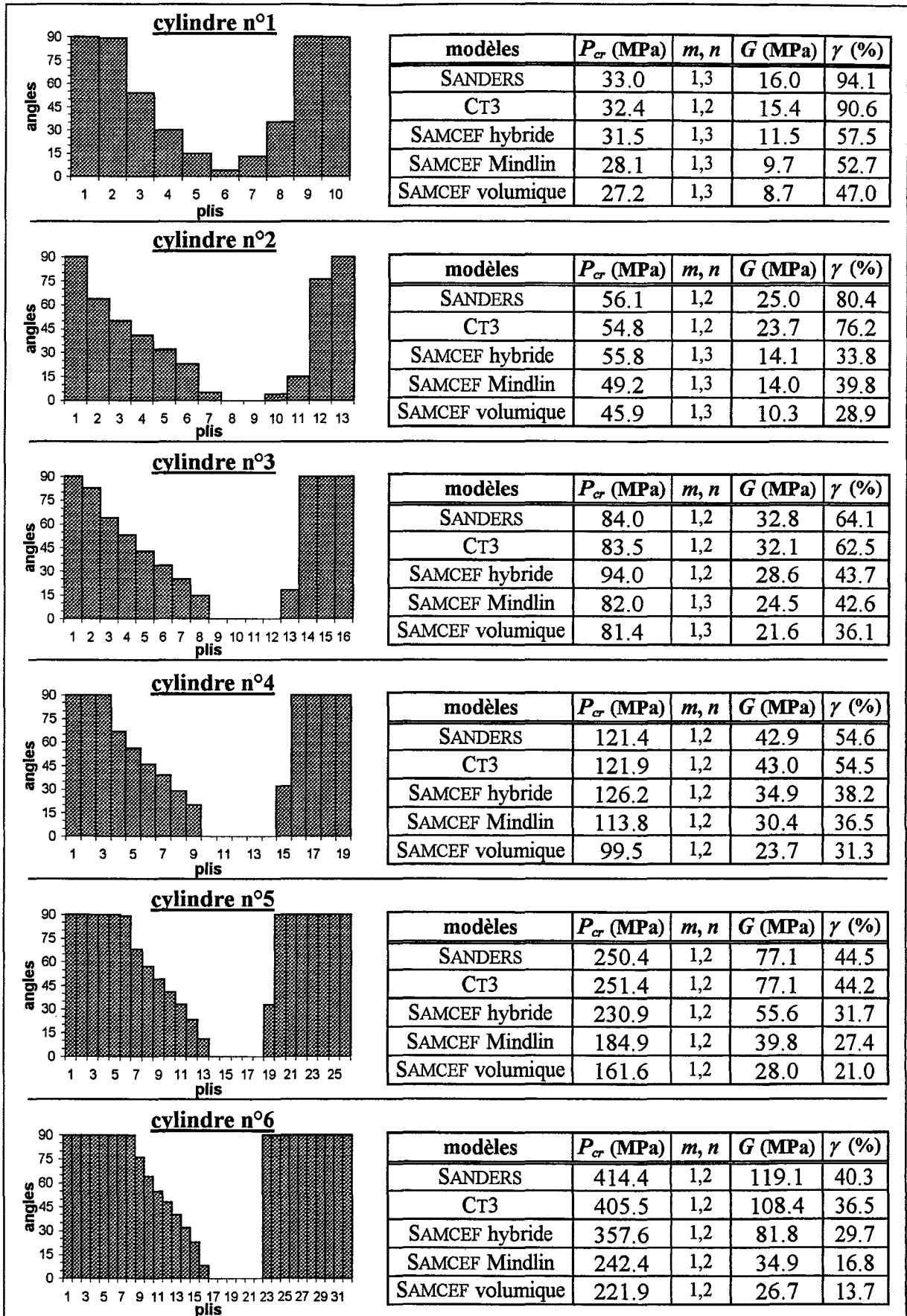


Figure IV.10 : stratifications optimisées avec angles non contraints – modèle de type SANDERS

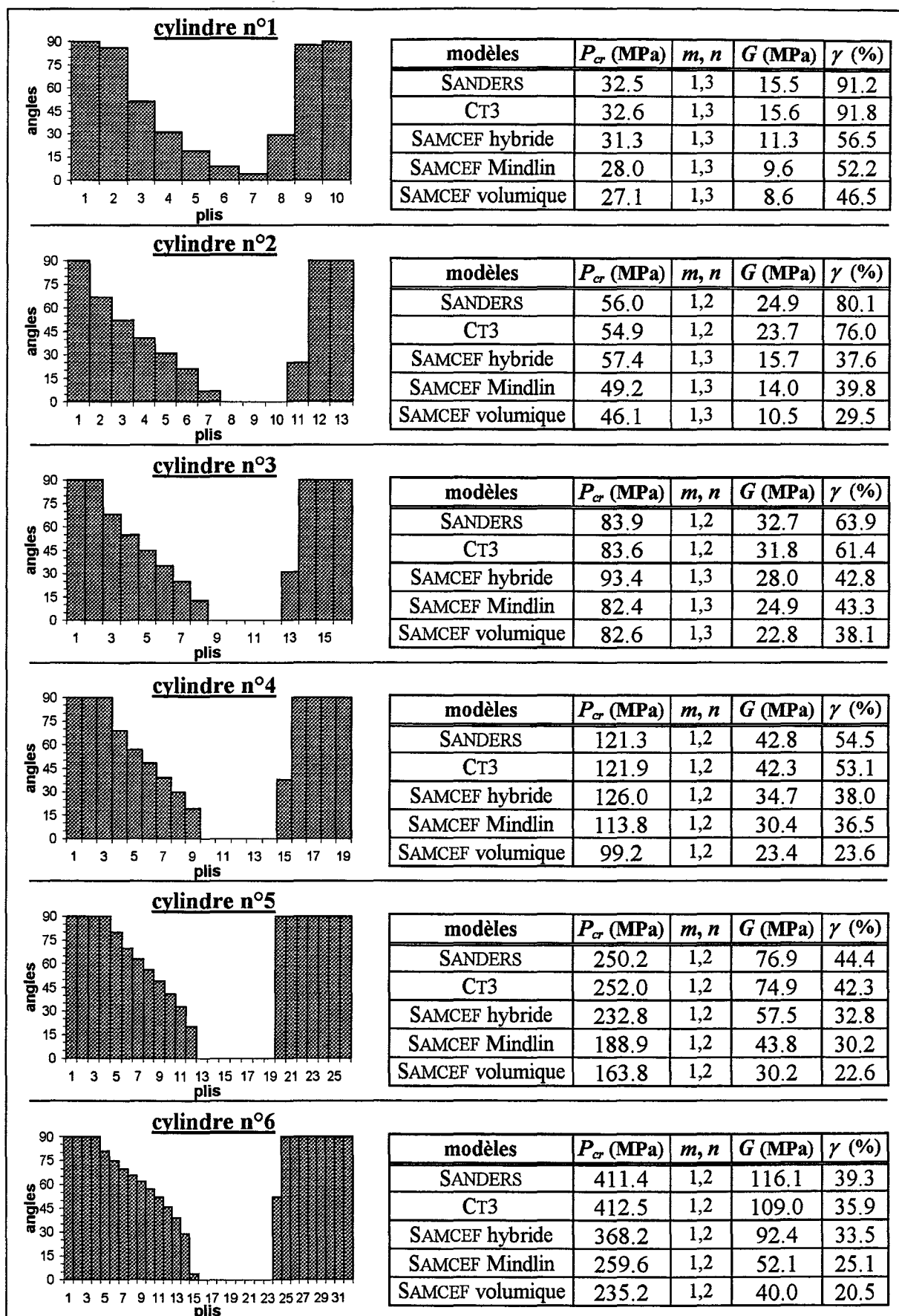


Figure IV.11 : stratifications optimisées avec angles non contraints – modèle CT3

Par ailleurs, les résultats des figures IV.10 et IV.11 corroborent tout à fait les remarques notamment établies en § IV.2.3.3 : les solutions issues du modèle CT3, intégrant les effets de cisaillement transverse, conduisent à des gains nettement plus marqués pour les cylindres semi-épais. De même, les zones de transition Ψ_1 sont plus prononcées. Remarquons en outre que les limites de stabilité s'avèrent, en toute logique, plus élevées mais sont néanmoins relativement proches de celles précisées en figures IV.3 et IV.4.

IV.2.3.10. Correspondance des modes de flambage

Comme indiqué dès le paragraphe § IV.2.2.1, et au vu des résultats d'optimisation présentés dans les paragraphes précédents, on constate que les modes de flambage déterminés par les différents modèles analytiques se sont avérés, pour les cylindres les plus minces (n° 1, 2 et 3), toujours caractérisés par $m = 1$ et $n = 2$. Les calculs MEF conduisent, eux, à des modes de type $m = 1$ et $n = 3$. De fait, il s'avérait souhaitable d'évaluer l'influence de ces différences sur la qualité des solutions optimisées, et ceci pour les corps d'enceintes n° 1, 2 et 3. Aussi, des calculs d'optimisation ont été effectués en contraignant les modes de flambage aux valeurs de demi-ondes suivantes : $m = 1$ et $n = 3$. Les résultats obtenus à l'aide du modèle CT3 sont représentés en figure IV.12. On constate ainsi que stratifications déduites, quoique toujours basées sur un motif en $[90_{N1}/\Psi_1/30_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$, s'avèrent nettement différentes de celles obtenues précédemment. On notera surtout que les pressions critiques correspondantes sont, quel que soit le modèle SAMCEF (seuls les résultats SAMCEF Mindlin étant indiqués en figure IV.12), inférieures à celles calculées pour, par exemple, les solutions présentées en figure IV.4. Ainsi, il n'apparaît pas souhaitable d'assurer une correspondance exacte entre les modes calculés par la MEF et ceux des modèles analytiques couplés à l'AG.

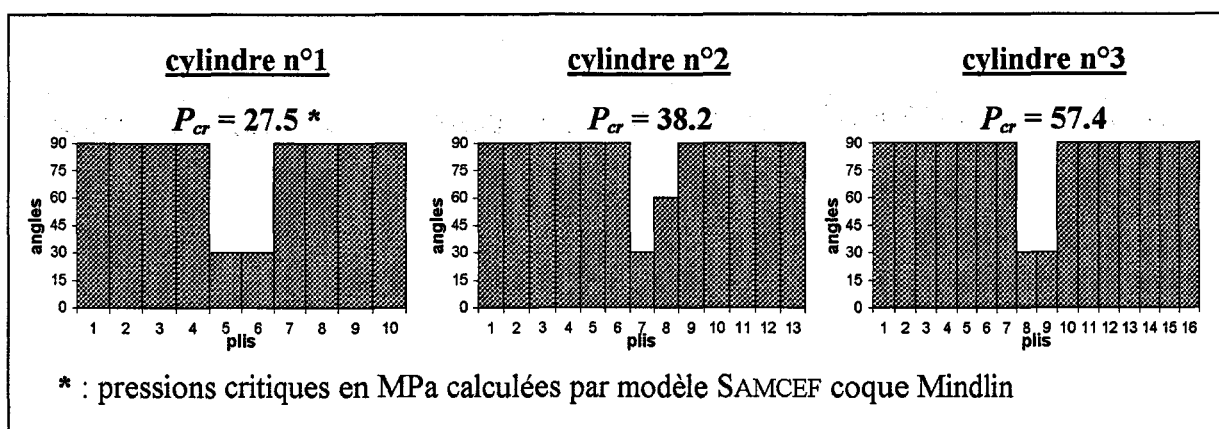


Figure IV.12 : stratifications optimisées avec modes de flambage imposés

IV.2.3.11. Solutions retenues

Considérant les résultats des paragraphes § IV.2.3.2, § IV.2.3.3 et § IV.2.3.4, on retiendra, pour la suite de cette étude, les stratifications optimisées (notées $[\theta_1/\theta_2/\dots/\theta_N]_{OPTI}$) données par le tableau IV.9 suivant. Rappelons que ces "meilleures" solutions sont issues des calculs réalisés en utilisant le modèle CT3 hormis pour le cylindre n° 6 où le résultat issu du

modèle LOG s'est avéré plus intéressant. Les valeurs de pressions critiques, calculées à l'aide des modèles SAMCEF Mindlin et volumique, ainsi que les gains relatifs sont eux aussi précisés. La robustesse de ces solutions sera évaluée en § IV.2.6. Des analyses MEF complémentaires seront réalisées en § IV.2.7. Les paragraphes § IV.2.4 et § IV.2.5 concerneront, au préalable, l'analyse des résultats ainsi que l'étude des performances de la procédure d'optimisation.

cylindre n°	stratification optimisée [$\theta_1/\theta_2/\dots/\theta_N$] _{OPTI}	SAMCEF Mindlin		SAMCEF volumique	
		P_{cr} (MPa)	γ (%)	P_{cr} (MPa)	γ (%)
1	[90 ₂ /60/30 ₃ /60/90]	26.8	45.7	26.4	42.7
2	[90 ₂ /75/30 ₈ /75/90]	48.7	38.4	48.1	35.1
3	[90 ₃ /75/45/30 ₈ /60/90 ₂]	79.1	37.6	80.3	34.3
4	[90 ₄ /75/60/30 ₉ /90 ₄]	113.4	36.0	98.6	30.1
5	[90 ₆ /75/60 ₂ /45/30 ₁₀ /75/90 ₅]	188.2	29.7	164.9	23.4
6	[90 ₇ /75/60 ₂ /45/30 ₁₃ /60/90 ₇]	262.3	26.4	236.2	21.0

Tableau IV.9 : solutions optimisées retenues

IV.2.4. Analyse des résultats

Les travaux numériques exposés précédemment en § IV.2.3 ont ainsi conduit à mettre en évidence une allure de stratification optimisée caractéristique en $[90_{N1}/\Psi_1/(\Theta_{\text{mini}})_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$, Ψ_1 et Ψ_2 dénotant des zones de transition et Θ_{mini} symbolisant la valeur d'angle minimale (soit donc 30° pour les valeurs indiquées en § IV.2.3.1 et 0° pour les calculs exposés en § IV.2.3.9). Ce mode de stratification a été obtenu invariablement, quel que soit l'épaisseur de paroi considérée, quel que soit le modèle analytique utilisé et même pour l'utilisation d'un matériau de type verre/époxy (cf. § IV.2.3.8). Soulignons que cette allure caractéristique diffère fondamentalement de celles optimisées pour des plaques composites en flambage [LER 97b] ou pour des cylindres soumis à des modes de sollicitation autres que la pression hydrostatique externe [NSH 83] [ONO 85] [SUN 86] (voir § I.2.2). Par ailleurs, quelques calculs supplémentaires ont montré que cette allure de stratification n'était pas liée à la longueur des cylindres étudiés. La figure IV.13 présente ainsi, à titre indicatif, quelques solutions optimisées (obtenues par utilisation du modèle CT3) pour diverses longueurs.

On remarquera d'emblée et intuitivement que cette allure en $[90_{N1}/\Psi_1/(\Theta_{\text{mini}})_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$ présente une analogie certaine avec une poutre de section en I, (similitude illustrée par la figure IV.14) ou encore avec une structure de type *sandwich* [BER 92] [GAY 97]. Poursuivant ce raisonnement, il apparaît alors qu'un tel mode de stratification tendrait à augmenter la rigidité de flexion circonférentielle (selon (y,z)) des cylindres, les plis circonférentiels (à 90°) étant disposés sur les surfaces externes et internes de parois. Ce type de stratification peut ainsi paraître agir comme un raidissage circonférentiel des enceintes permettant d'en accroître les valeurs de pressions critiques. Par ailleurs, et comme précisé en § IV.2.3.3, notons qu'il s'avère délicat, au vu des allures de stratifications en $[90_{N1}/\Psi_1/(\Theta_{\text{mini}})_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$ obtenues en § IV.2.3, d'établir un lien entre les valeurs de nombres de plis notés $N1$, $N2$ et $N3$.

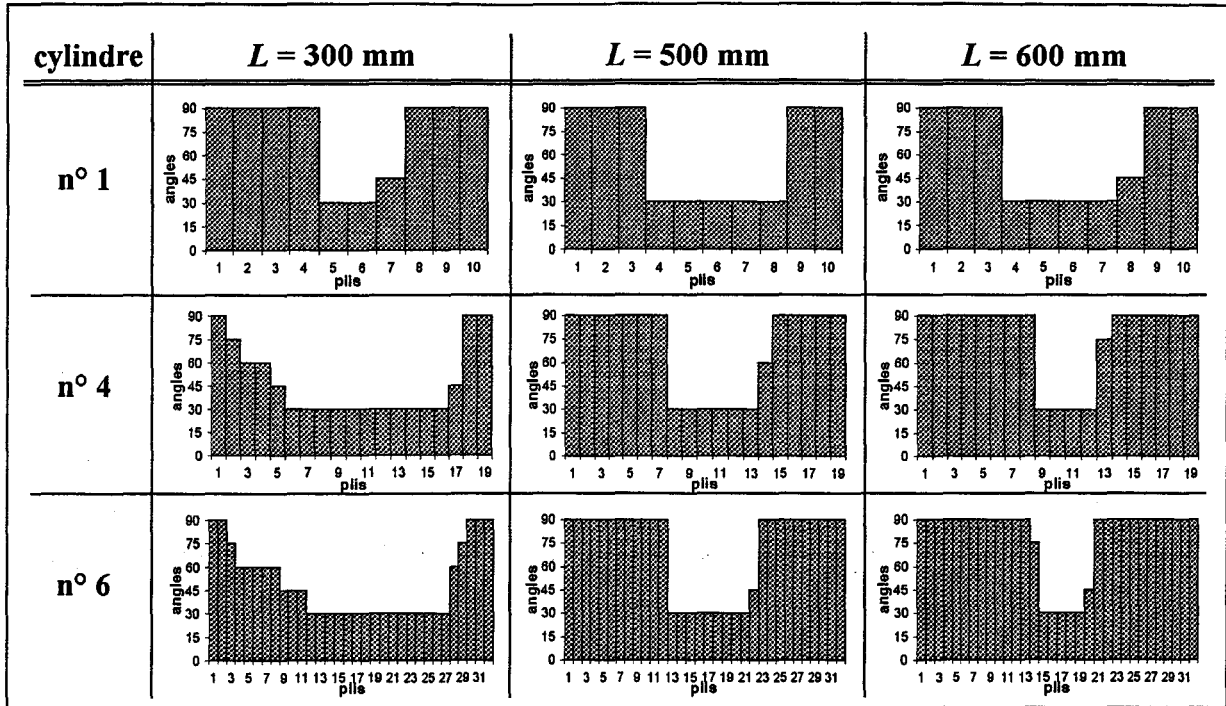


Figure IV.13 : stratifications optimisées pour diverses longueurs

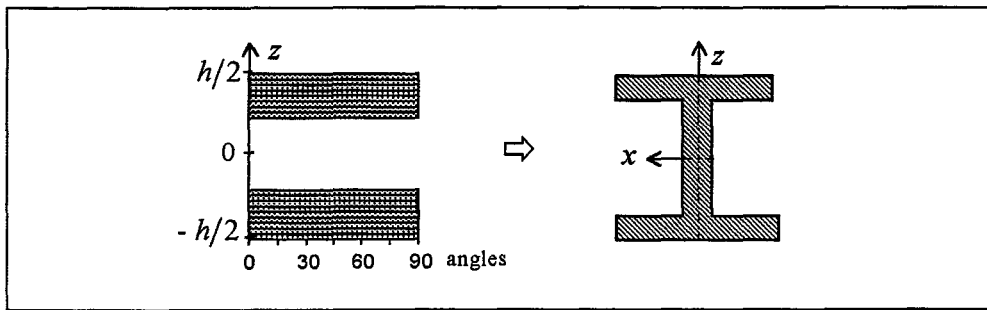


Figure IV.14 : analogie avec une poutre de section en I

Les gains G déduits des solutions optimisées croissent logiquement lorsque l'épaisseur de paroi (et donc la limite de stabilité) augmente. Cependant, il s'est avéré que les valeurs de gains relatifs γ , elles, s'amenuisaient notablement à mesure que l'épaisseur augmentait : généralement évaluées à plus de 40 % par la MEF pour le cylindre n° 1, elles sont de l'ordre de 20 % pour le tube optimisé n° 6. Ce phénomène, s'apparentant à un "effet d'échelle" [REZ 96] fonction du facteur R/h , est sans doute à lier avec la plus grande sensibilité des cylindres minces à la flexion circonférentielle de la paroi évoquée précédemment. De fait, le "raidissage circonférentiel" induit par les stratifications optimisées produirait alors des améliorations, des accroissements de rigidités, plus sensibles. Néanmoins, aucun élément explicatif strict n'a été mis en évidence. En outre, et bien que l'intérêt des stratifications apparaisse plus explicitement pour les cylindres minces au vu des valeurs γ , cet intérêt est aussi manifeste pour les corps d'enceintes semi-épais, les valeurs correspondantes de gains G s'avérant en effet substantielles.

Par ailleurs, le rôle des zones d'angles de transition notées Ψ_1 ne s'avère absolument pas anodin quant à la qualité des solutions optimisées des cylindres semi-épais. En effet, rappelons que, comme précisé en § IV.2.3.3, la prise en compte des effets de cisaillement transverse (modèles CT3 et LOG) n'influence qu'uniquement les zones Ψ_1 , alors plus amples et progressives que pour les solutions issues du modèle de type SANDERS (cf. figure IV.3). Cependant, de telles modifications produisent des écarts forts sensibles sur les valeurs de pressions critiques. Quelques calculs de stabilité complémentaires ont été effectués pour des stratifications similaires à celles données par le tableau IV.9 mais désormais de type $[90_{N1}/30_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$ et $[90_{N1}/\Psi_1/30_{N2}/90_{N3}]$: pour les cylindres semi-épais, la suppression des zones Ψ_1 a conduit, quel que soit le modèle analytique ou SAMCEF utilisé, à des valeurs P_{cr} inférieures, les gains G étant réduits de 10 à 20 %. Par contre, l'incidence de la suppression des zones Ψ_2 s'est avérée quasi-imperceptible. Signalons que les limites de stabilité des cylindres minces ($n^\circ 1$ et 2) n'ont, elles, pas été affectées par ces suppressions.

L'étude des coefficients de rigidités correspondant aux stratifications de référence et optimisées (telles que celles données par le tableau IV.9) corrobore certains commentaires précédents. Notons que l'on étudiera ici ces coefficients sous formes addimensionnées, indépendantes de la valeur d'épaisseur, définies par [SUN 86] :

$$\bar{A}_{ij} = A_{ij}/(E_1 h) \quad ; \quad \bar{B}_{ij} = B_{ij}/(E_1 h^2) \quad ; \quad \bar{D}_{ij} = D_{ij}/(E_1 h^3).$$

Rappelons que, pour des stratifications orthotropes, les coefficients de couplage B_{ij} sont nuls. Les coefficients des stratifications de référence en $[55_N]$ sont ainsi représentés en figure IV.15. Par comparaison, les valeurs moyennes (et écarts-types correspondants) des coefficients des solutions optimisées données par le tableau IV.9 sont indiquées en figure IV.16. La figure IV.17 présente, à titre d'exemple, les valeurs issue de la stratification retenue (cf. § IV.2.3.11) pour le cylindre $n^\circ 6$. Précisons que seuls les coefficients \bar{B}_{22} se sont avérés négatifs.

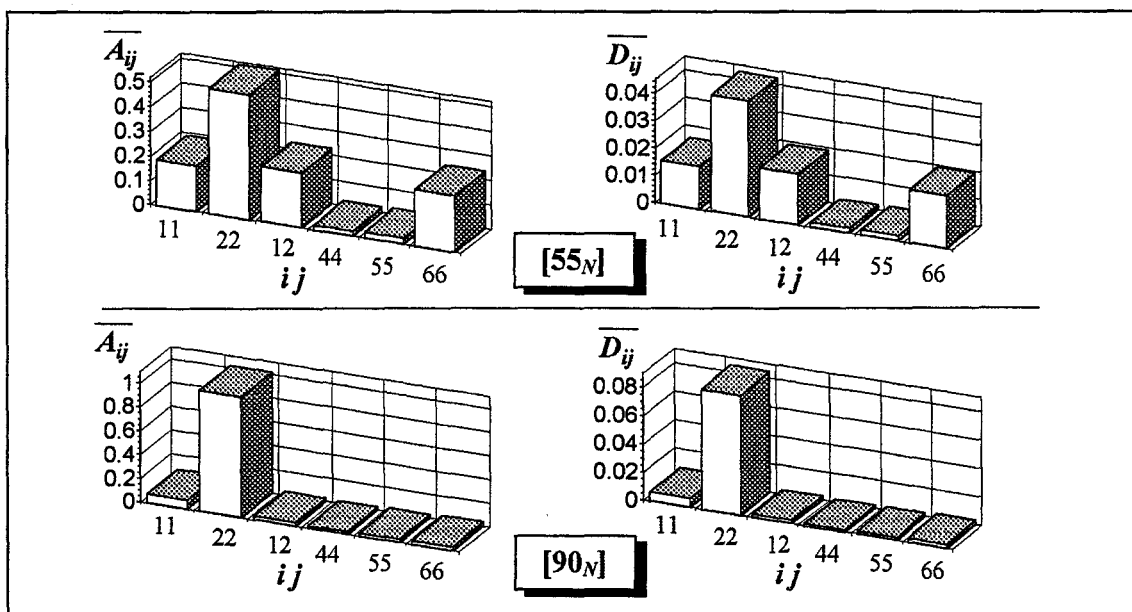


Figure IV.15 : coefficients de rigidités addimensionnés – stratifications en $[55_N]$ et $[90_N]$

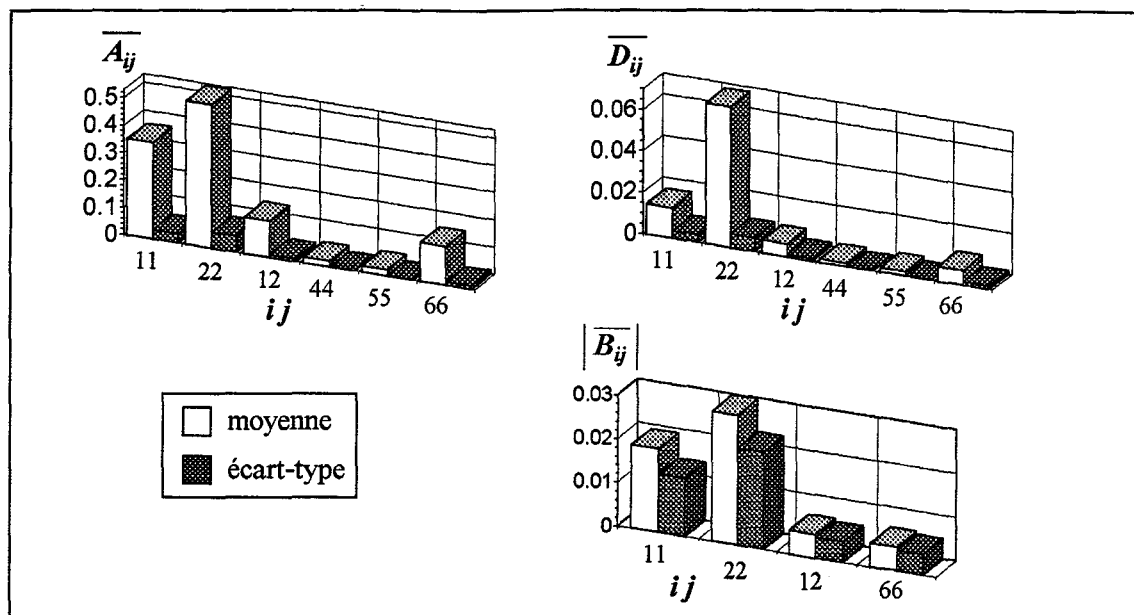


Figure IV.16 : coefficients de rigidités addimensionnés – stratifications optimisées

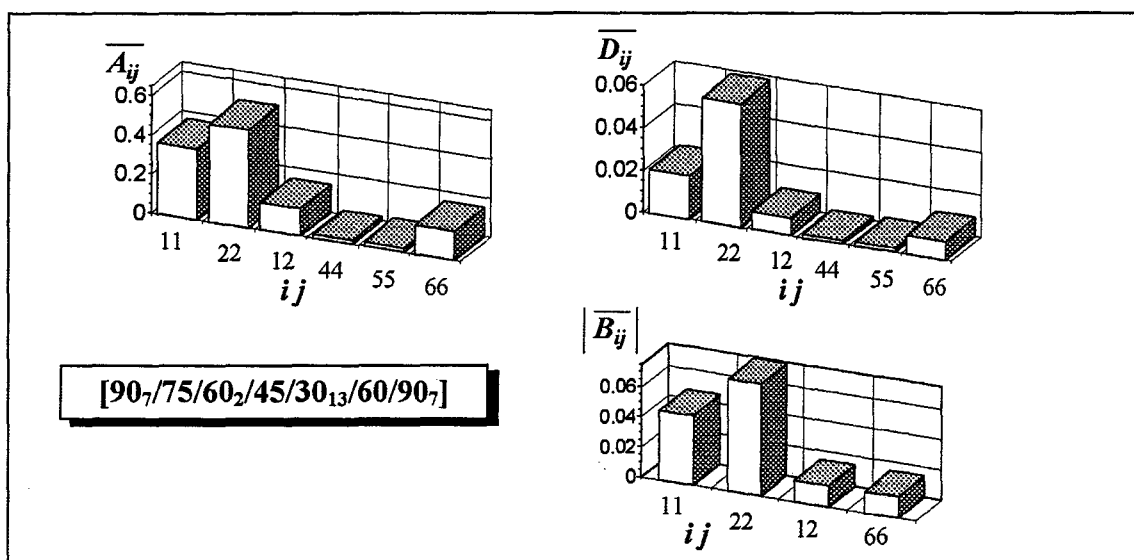


Figure IV.17 : coefficients de rigidités addimensionnés – stratification optimisée du cylindre n° 6

Ainsi, au vu de ces différentes figures, on constate que les solutions optimisées conduisent à un accroissement sensible des valeurs de coefficients $\overline{D_{22}}$ vis à vis des solutions en $[55_M]$: ce constat confirme bien l'augmentation, discutée précédemment, de la rigidité de flexion circonférentielle induite par les stratifications optimisées. Cependant, cette augmentation de $\overline{D_{22}}$ ne permet pas, à elle seul, d'appréhender et d'expliquer des accroissements de pressions critiques : en effet, les solutions conduisant aux plus fortes valeurs de $\overline{D_{22}}$ sont, logiquement, de type $[90_M]$ (coefficients représentés en figure IV.15). De telles stratifications conduisent pourtant à des valeurs de pressions critiques (calculées par modèle SAMCEF Mindlin et indiquées par le tableau IV.10) inférieures non seulement à celles des solutions optimisées mais aussi à celles des cylindres de référence en $[55_M]$ (cf. tableau IV.2).

Ainsi, et malgré quelques tentatives, l'optimisation de la stratification en utilisant pour fonction objectif une forme algébrique uniquement basée sur les valeurs des coefficients de rigidités n'a permis l'obtention de solutions accroissant sensiblement les limites de stabilité des cylindres.

cylindre n°	1	2	3	4	5	6
P_{cr} (MPa)	18.1	30.9	47.4	67.1	121.9	174.0

Tableau IV.10 : Pressions critiques des cylindres en $[90_N]$

Par ailleurs, l'évaluation de l'influence respective des composantes de la sollicitation de pression hydrostatique externe constitue un indicateur intéressant pour l'analyse des résultats d'optimisation : des calculs d'optimisation supplémentaires ont ainsi été réalisés en considérant alors soit un chargement de type pression latérale externe, soit de type compression axiale. Les allures des stratifications déduites (par utilisation du modèle CT3) sont présentées en figures IV.18 et IV.19. Ces résultats amènent aux constats suivants :

- Les solutions optimisées en pression latérale sont toutes basées, elles aussi, sur un motif de stratification unique en $[90_{N1}/\Psi_1/30_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$. De plus, les valeurs de pressions critiques (ainsi que celles de cylindres de référence en $[55_N]$), indiquées par le tableau IV.11 et calculées par modèle SAMCEF Mindlin, s'avèrent supérieures mais néanmoins proches de celles obtenues pour une sollicitation de pression hydrostatique externe (cf. tableau IV.2 et figure IV.4). De même, les modes de flambage calculés sont invariablement de type $(m=1 ; n=2)$ ou $(m=1 ; n=3)$. Les gains correspondants sont, eux aussi, proches des valeurs indiquées en figure IV.4, quoique sensiblement plus faibles pour les cylindres les plus épais.
- Par contre, les stratifications optimisées en compression axiale s'avèrent, elles, totalement différentes, ne présentant aucune similitude avec les résultats obtenus pour une sollicitation de pression hydrostatique externe. De plus, les solutions déduites ne permettent aucunement la mise en évidence d'un mode de stratification caractéristique. Les valeurs de pressions critiques correspondantes sont très élevées, conduisant à, par exemple, plus de 200 MPa pour le cylindre n° 1 et plus de 1200 MPa pour le cylindre n° 6. De plus, les modes de flambage calculés s'avèrent généralement axisymétriques.

cylindre n°	$[\theta_1/\theta_2/ \dots / \theta_N]_{OPTI}$	P_{cr} ($[\theta_1/ \dots / \theta_N]_{OPTI}$) en MPa	P_{cr} ($[55_N]$) en MPa	G (MPa)	γ (%)
1	$[90_2/75/30_5/75/90]$	28.7	19.1	9.6	50.3
2	$[90_3/30_8/90_2]$	51.3	36.7	14.6	39.8
3	$[90_4/30_9/90_3]$	84.0	60.0	24.0	40.0
4	$[90_5/60/30_9/90_4]$	122.2	88.3	33.9	38.4
5	$[90_8/60/30_{10}/90_7]$	201.7	167.7	34.0	20.3
6	$[90_{10}/75/45/30_{10}/45/90_9]$	286.4	243.3	41.3	17.7

Tableau IV.11 : stabilité et gains des solutions optimisées
– sollicitation de pression latérale externe

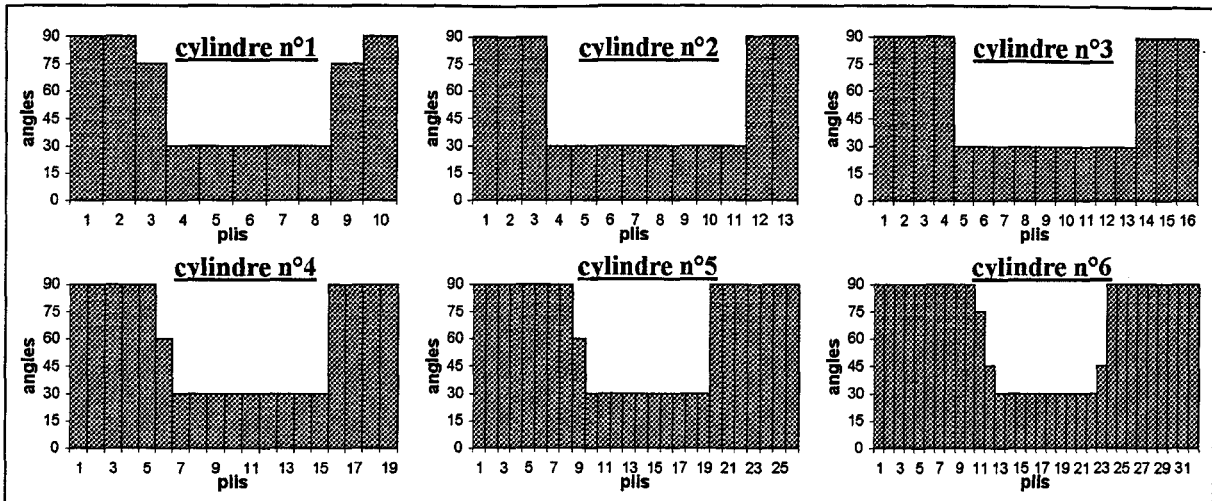


Figure IV.18 : solutions optimisées – sollicitation de pression latérale externe

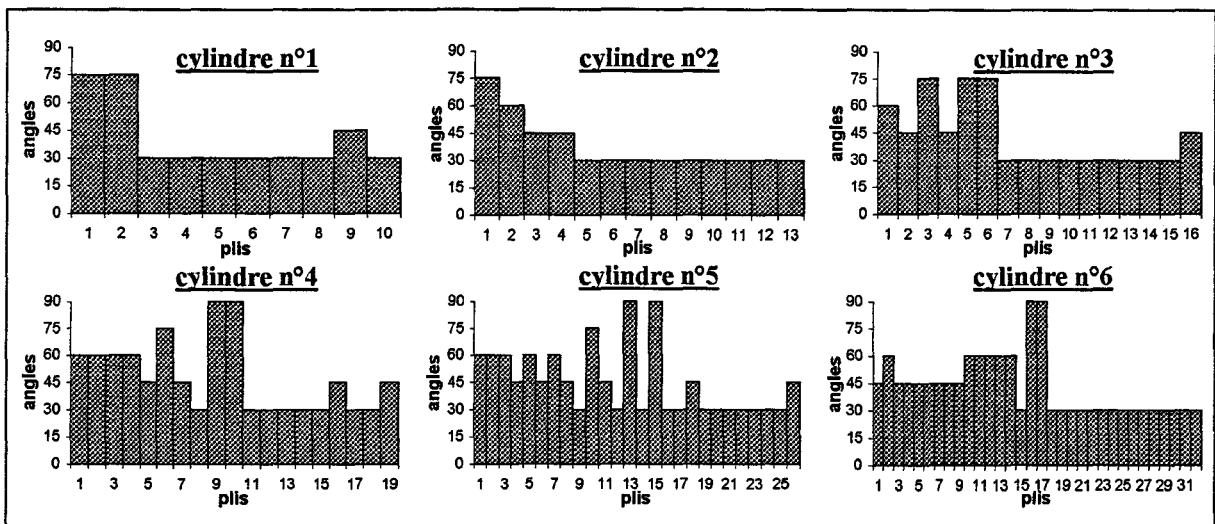


Figure IV.19 : solutions optimisées – sollicitation de compression axiale

Compte tenu de la discussion menée dans ce paragraphe, il apparaît que l'analyse des résultats d'optimisation s'avère assez délicate. Néanmoins, elle a permis de mettre en évidence quelques aspects majeurs :

- Pour les cylindres semi-épais, l'amplitude des zones de transition notées Ψ_1 joue un rôle prédominant sur la qualité des résultats.
- Les stratifications optimisées confèrent un "raidissage circonférentiel" des cylindres.
- C'est la composante circonférentielle (pression latérale) du chargement de pression hydrostatique externe qui "pilote" le mode de flambage [SOL 94]. Les allures caractéristiques de stratifications optimisées obtenues sont induites par cette composante de sollicitation.

Considérant ces deux dernières remarques, il apparaît que c'est la flexion circonférentielle de la paroi du cylindre due à la pression latérale externe qui initie, qui "amorçe", le phénomène d'instabilité. Soulignons que ce constat s'avérerait primordial pour la conception d'enceintes sous-marines raidies.

IV.2.5. Performances de l'AG

Comme souligné au terme du chapitre III, l'étude de performances de la procédure d'optimisation présentée en § III.2.7 s'avérait partielle et uniquement destinée à conforter les choix du type d'AG et de ses opérateurs génétiques. En effet, ces tests préliminaires ont porté sur une fonction sans lien avec la nature des problèmes abordés au cours de ce travail. Aussi, les paragraphes suivants concernent eux l'analyse des performances de la procédure d'optimisation, et ceci pour les calculs de conception optimale de la stratification de cylindres décrits en § IV.2.3. Outre les temps CPU observés, une grande attention est accordée quant à la robustesse de l'AG créé ainsi qu'à la reproductibilité des solutions optimisées déduites. L'approche est statistique : rappelons en effet que chaque cas étudié a donné lieu à 20 calculs successifs (cf. § IV.1.2). Des calculs comparatifs ont de plus été réalisés à l'aide d'une méthode d'optimisation locale. Enfin, la fiabilité de l'AG sera discutée.

IV.2.5.1. Optimisation avec angles contraints

Les résultats ici analysés concernent les calculs d'optimisation réalisés dans le cas où les angles sont choisis parmi les 5 valeurs prescrites par le fabricant (cf. § IV.2.3.2, § IV.2.3.3, § IV.2.3.4). Le tableau IV.12 présente ainsi, pour chacun des six cylindres étudiés, la cardinalité du problème d'optimisation ainsi que les paramètres de populations de l'AG (nombres d'individus et de générations) employés. Le nombre d'évaluations correspond de fait au nombre total d'individus, et donc de solutions de conception, évalués au cours du déroulement du calcul d'optimisation. Remarquons la colonne intitulée "exploration" indiquant, elle, la valeur du ratio d'exploration (cf. § III.2.7.2) correspondant au rapport entre ce nombre d'évaluations et la cardinalité du problème. Enfin, précisons que les temps de calculs indiqués correspondent au déroulement d'un calcul d'optimisation utilisant le modèle CT3. Les durées des calculs par modèle LOG se sont avérées très similaires à ces valeurs, l'utilisation du modèle de type SANDERS conduisant elle à des temps bien moindres, à savoir moins de 10 minutes quel que soit le cylindre étudié.

cylindre n°	cardinalité	nombre d'individus	nombre de générations	nombre d'évaluations	exploration (%)	temps CPU (mn)
1	$5^{10} \approx 9.77 \cdot 10^6$	50	200	10^4	0.102	9
2	$5^{13} \approx 1.22 \cdot 10^9$	60	300	$1.8 \cdot 10^4$	$1.47 \cdot 10^{-3}$	18
3	$5^{16} \approx 1.53 \cdot 10^{11}$	70	400	$2.8 \cdot 10^4$	$1.84 \cdot 10^{-5}$	31
4	$5^{19} \approx 1.91 \cdot 10^{13}$	80	500	$4 \cdot 10^4$	$2.10 \cdot 10^{-7}$	46
5	$5^{26} \approx 1.49 \cdot 10^{18}$	90	600	$5.4 \cdot 10^4$	$3.62 \cdot 10^{-12}$	64
6	$5^{32} \approx 2.33 \cdot 10^{22}$	100	800	$8 \cdot 10^4$	$3.44 \cdot 10^{-16}$	98

Tableau IV.12 : caractéristiques des problème d'optimisation – angles contraints

On remarquera ainsi les très faibles valeurs du ratio d'exploration : l'optimisation du cylindre n° 6 a, par exemple, été réalisée en explorant moins de $3.5 \cdot 10^{-16}$ % de l'espace des

solutions. On remarquera de plus que les temps CPU nécessaires au déroulement de l'AG s'avèrent tout à fait exploitables, conduisant "au pire" à environ 100 minutes (cylindre n° 6). A ce propos et à titre comparatif, considérant les valeurs de cardinalité et les temps CPU observés, il s'avère fort explicite d'estimer les temps de calculs nécessaires pour une exploration exhaustive, c'est à dire l'évaluation de toutes les solutions de conception d'un problème d'optimisation. Rappelons en effet que les temps de calcul d'AG sont essentiellement induits par les calculs d'adaptations (cf. § III.2.6.3). Aussi, le calcul de 10^4 solutions requérant 9 minutes pour le cylindre n° 1, l'évaluation de l'ensemble des 5^{10} solutions de conception différentes induirait alors environ $9 \cdot 5^{10} / 10^4 \approx 8.8 \cdot 10^4$ minutes, soit donc 146 heures. On remarquera de même que le temps CPU nécessaire à l'exploration exhaustive des solutions pour le cylindre n°6 peut être estimé à $4.8 \cdot 10^{17}$ heures, soit donc plus de $5.4 \cdot 10^{11}$ siècles (!), chiffre particulièrement éloquent notamment vis à vis des durées indiquées par le tableau IV.12.

Concernant l'analyse de la reproductibilité des solutions obtenues par AG, le tableau IV.13 présente, pour chaque cylindre étudié, les valeurs moyennes (et écarts-types correspondants) des adaptations des 20 meilleurs individus déduits des 20 lancements successifs d'AG. De plus, les nombres de générations moyens d'apparition de ces meilleurs individus sont présentés à titre indicatif. A l'instar des résultats présentés en § III.2.7.2, on notera que les valeurs d'écarts-types correspondants s'avèrent élevées compte tenu du caractère pseudo-aléatoire de la méthode. La colonne intitulée "obtention du meilleur" indique, elle, le nombre d'obtention des solutions les plus intéressantes présentées en figure IV.4 : précisons en effet que toutes les valeurs présentées par ce tableau IV.13 sont issues des calculs réalisés en utilisant le modèle CT3 (cf. § IV.2.3.3). Néanmoins, les calculs d'optimisation utilisant les modèles de type SANDERS et LOG (cf. § IV.2.3.2 et § IV.2.3.4) ont conduit à des résultats tout à fait similaires.

cylindre n°	obtention du meilleur (%)	adaptations		générations d'apparitions	
		moyenne	écart-type	moyenne	écart-type
1	90	31.46	0.14	79	42
2	95	53.21	0.18	85	35
3	70	80.95	0.66	102	48
4	55	118.70	0.95	219	78
5	60	246.41	1.02	336	93
6	40	404.52	1.07	515	81

Tableau IV.13 : résultats statistiques des calculs d'optimisation – angles contraints

Au vu de ces résultats, on constate un très bon niveau de reproductibilité des résultats : les valeurs moyennes d'adaptation s'avèrent en effet très proches de celles indiquées en figure IV.4, les écarts-types correspondants sont, eux, très faibles. Cependant, on pourrait par exemple déplorer que, pour l'ensemble des 20 lancements d'AG concernant le cylindre n° 6, la stratification la plus intéressante (présentée en figure IV.4) n'a été obtenue que dans 40 % des cas. Aussi, et compte tenu de la nature du problème d'optimisation, il s'avère plus adéquat

d'étudier la reproductibilité des résultats non plus en termes de valeurs d'adaptation mais désormais en analysant les allures des séquences de stratification obtenues. La figure IV.20 présente ainsi, pour chaque cylindre, les valeurs d'angles moyennes (et écarts-types correspondants) des 20 solutions optimisées déduites des 20 lancements d'AG. Les résultats concernant les cylindres n° 1 et 2 ne sont pas représentés car peu significatifs : en effet, comme indiqué dans le tableau IV.13, les calculs d'optimisation ont conduit quasi-invariablement (pour 90 et 95 % des cas) à l'obtention de solutions optimisées identiques (cf. figure IV.4).

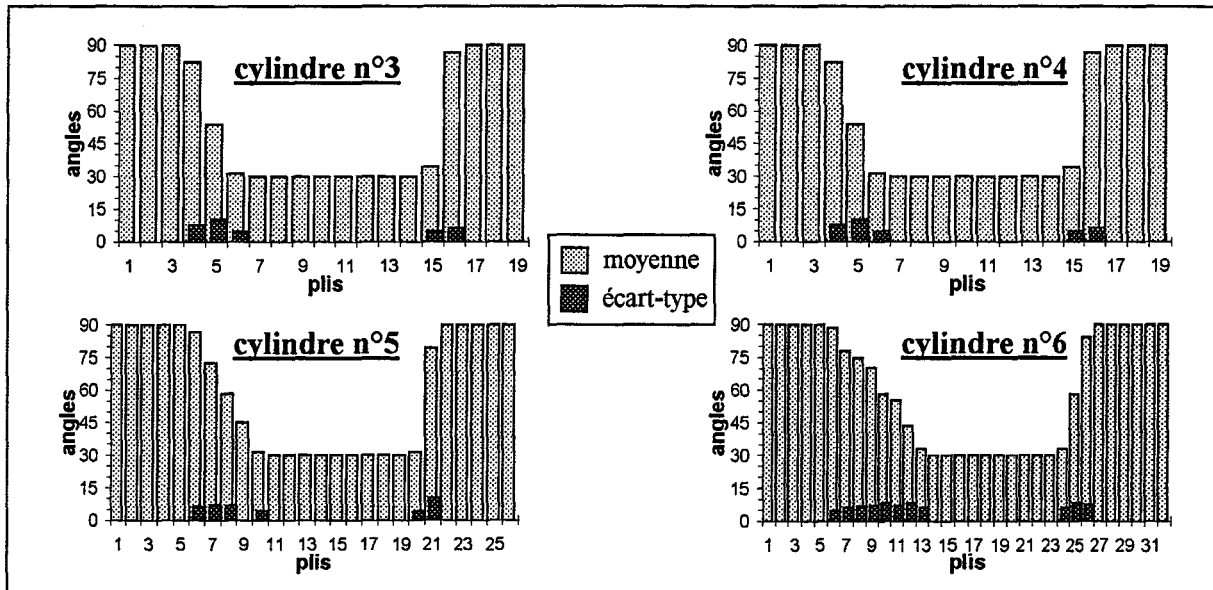


Figure IV.20 : reproductibilité des stratifications – angles contraints

La figure IV.20 permet ainsi de constater que, pour chaque cylindre étudié, chacun des 20 calculs d'optimisation a conduit invariablement à l'obtention d'une solution caractéristique de type $[90_{N1}/\Psi_1/30_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$, les variations observées étant en effet situées uniquement dans les zones de transition Ψ_1 et Ψ_2 . Aussi, considérant ces résultats ainsi que les adaptations moyennes (et écarts-types correspondants) du tableau IV.13, il apparaît que les calculs par AG ont conduit, quel que soit le cylindre étudié, à des stratifications très similaires et conduisant à des valeurs de pressions critiques très proches. De fait, on peut conclure au très bon niveau de reproductibilité des solutions optimisées, respectant les contraintes du fabricant données en § IV.2.3.1, obtenues par AG.

Enfin, et à titre indicatif, on remarquera que les évolutions des valeurs d'adaptations maximales et moyennes observées au cours du déroulement des calculs d'optimisation par AG s'avèrent là encore fort régulières à l'instar de celles exposées en figure III.16. La figure IV.21 en présente quelques exemples représentatifs.

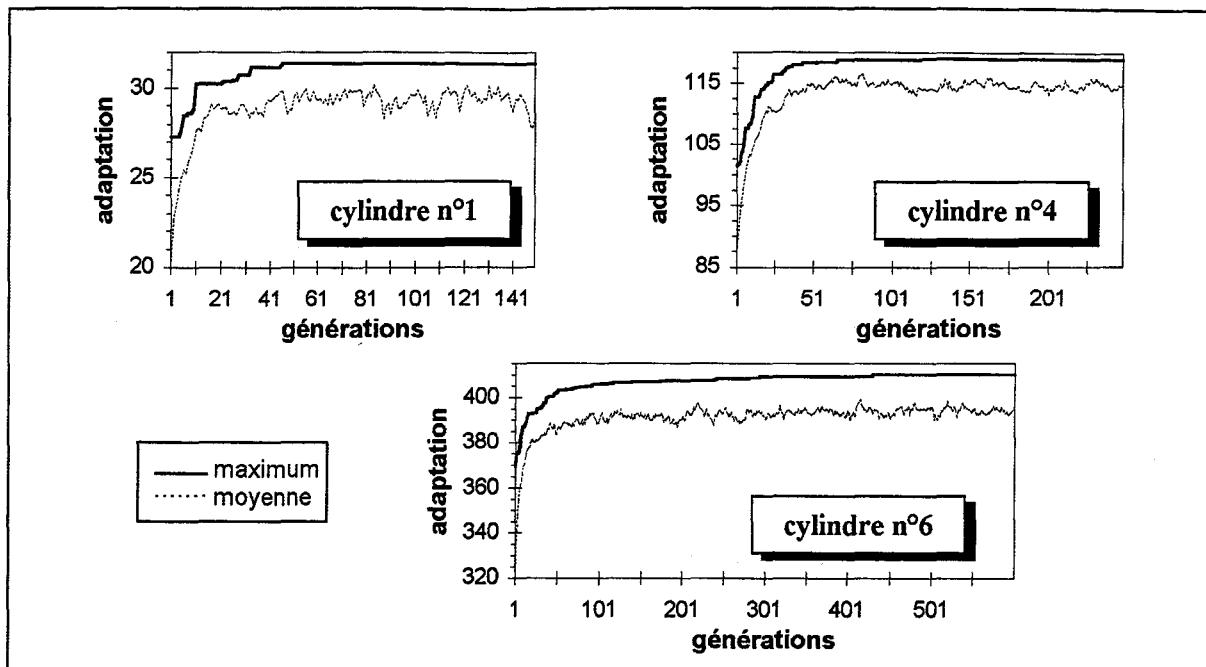


Figure IV.21 : exemples d'évolutions des valeurs d'adaptation

IV.2.5.2. Optimisation avec angles non contraints

Les calculs décrits en § IV.2.3.9, réalisés pour des valeurs d'angles variant entre 0 et 90° par pas de 1°, permettent de plus l'analyse de la reproductibilité des solutions optimisées dans le cas de problèmes tributaires de cardinalités alors très élevées. Les caractéristiques des problèmes et les paramètres de population de l'AG sont précisés par le tableau IV.14. Là encore, les temps de calculs sont ceux observés lors de l'utilisation du modèle CT3 : ces durées (exprimées en heures) s'avèrent désormais relativement substantielles. Cependant, compte tenu des valeurs de cardinalité très élevées, ces durées sont là encore sans commune mesure avec le coût CPU effroyable qu'induirait une exploration exhaustive de l'espace des solutions. On notera par ailleurs, qu'un calcul utilisant le modèle de type SANDERS requiert, dans les mêmes conditions, moins de 100 minutes CPU pour le cylindre n°6.

cylindre n°	cardinalité	nombre d'individus	nombre de générations	nombre d'évaluations	exploration (%)	temps CPU (h)
1	$91^{10} \approx 3.89 \cdot 10^{19}$	80	1000	$8 \cdot 10^4$	$2.05 \cdot 10^{-13}$	1.1
2	$91^{13} \approx 2.93 \cdot 10^{25}$	90	1200	$1.08 \cdot 10^5$	$3.68 \cdot 10^{-19}$	1.7
3	$91^{16} \approx 2.21 \cdot 10^{31}$	100	1400	$1.4 \cdot 10^5$	$6.33 \cdot 10^{-25}$	2.6
4	$91^{19} \approx 1.67 \cdot 10^{37}$	120	1600	$1.92 \cdot 10^5$	$1.15 \cdot 10^{-30}$	3.6
5	$91^{26} \approx 8.61 \cdot 10^{50}$	160	1800	$2.88 \cdot 10^5$	$3.34 \cdot 10^{-44}$	5.6
6	$91^{32} \approx 4.89 \cdot 10^{62}$	200	2000	$4 \cdot 10^5$	$8.18 \cdot 10^{-56}$	8.1

Tableau IV.14 : caractéristiques problème d'optimisation – angles non contraints

Les résultats statistiques issus des solutions obtenues au terme des 20 lancements successifs d'AG sont, eux, indiqués par le tableau IV.15. On notera que les "nombres d'obtentions des meilleurs" (cf. tableau IV.13) ne sont pas précisés, les solutions présentées en figures IV.10 et IV.11 n'ayant été obtenues que pour un seul des 20 calculs successifs d'optimisation. Cependant, quel que soit le cylindre étudié, les 20 solutions déduites se sont avérées toutes très similaires à celles présentées en § IV.2.3.9 : la figure IV.22 présente ainsi, à l'instar de la figure IV.20, les valeurs moyennes (et écarts-types correspondants) des valeurs d'angles de ces solutions issues des 20 lancements d'AG. Ces résultats permettent, là encore et à l'instar des calculs avec angles contraints, de vérifier le très bon niveau de reproductibilité des résultats de l'AG, les solutions obtenues conduisant de plus à des valeurs de charges critiques très proches au vu des résultats du tableau IV.15.

cylindre n°	adaptations		générations d'apparitions	
	moyenne	écart-type	moyenne	écart-type
1	32.02	0.27	753	103
2	54.31	0.11	711	88
3	83.12	0.19	923	122
4	120.96	0.28	919	112
5	250.87	0.27	1058	110
6	410.92	0.31	1348	94

Tableau IV.15 : résultats statistiques des calculs d'optimisation – angles non contraints

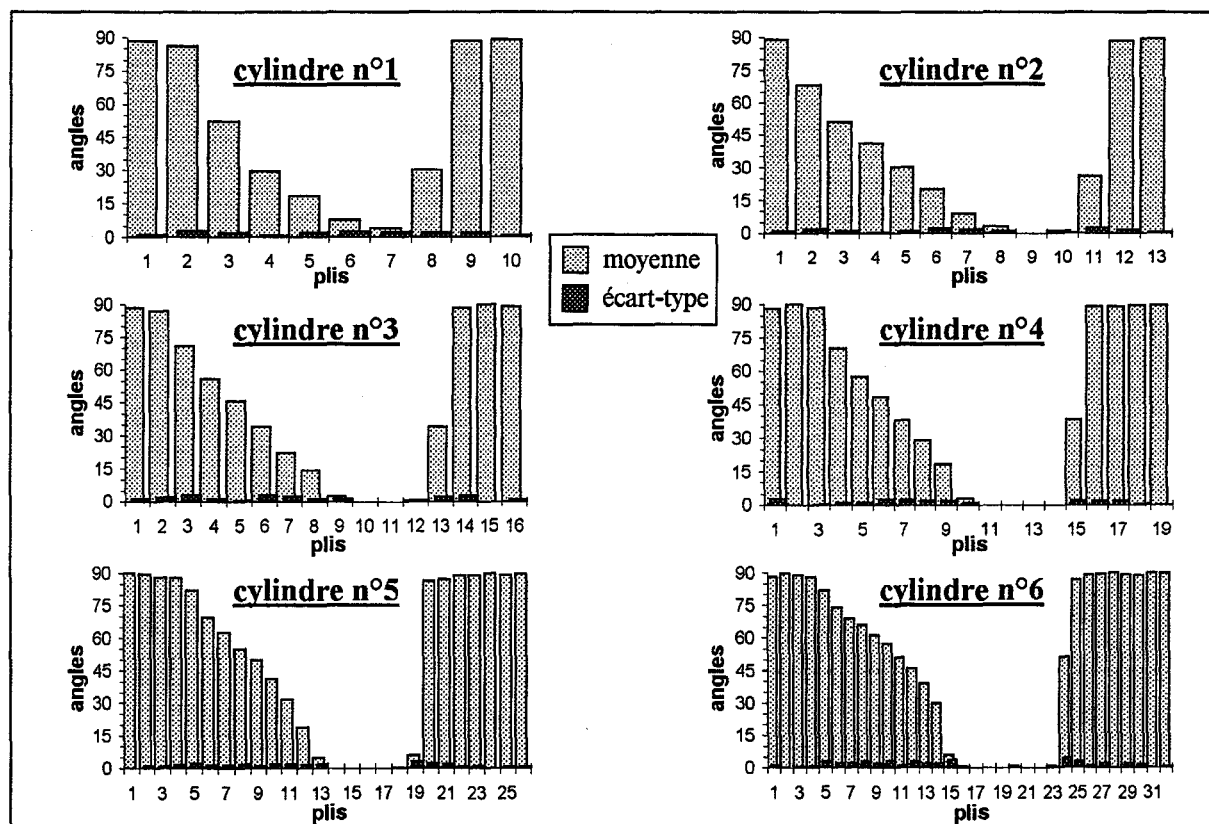


Figure IV.22 : reproductibilité des stratifications – angles non contraints

IV.2.5.3. Comparaison avec une méthode directe

Comme indiqué en § I.2.2, les travaux antérieurs de la littérature portant sur l'optimisation de cylindres stratifiés vis à vis de critères de stabilité ont montré que ce type de problème s'avérait généralement non convexe : les méthodes locales utilisées lors de ces études ont conduit à de fortes difficultés de convergence, la reproductibilité des solutions s'avérant de plus souvent impossible indiquant de fait la présence d'optima locaux. Cet enseignement bibliographique majeur a, pour le présent travail, conduit à retenir d'une méthode d'optimisation globale (cf. § I.2.3 et § III.1.2.4), en l'occurrence par AG. A ce stade de l'étude, il s'avérait donc fort intéressant d'évaluer le comportement d'une méthode locale appliquée aux problèmes traités en § IV.2.3. Des calculs d'optimisation similaires ont ainsi été réalisés en couplant une méthode directe aux modèles analytiques du flambage de cylindres stratifiés. Le choix a porté sur la méthode de POWELL [POW 64], la solution initiale de démarrage de la recherche (cf. figure III.3) étant générée de façon aléatoire à l'instar des travaux réalisés par SUN [SUN 86] [SUN 89].

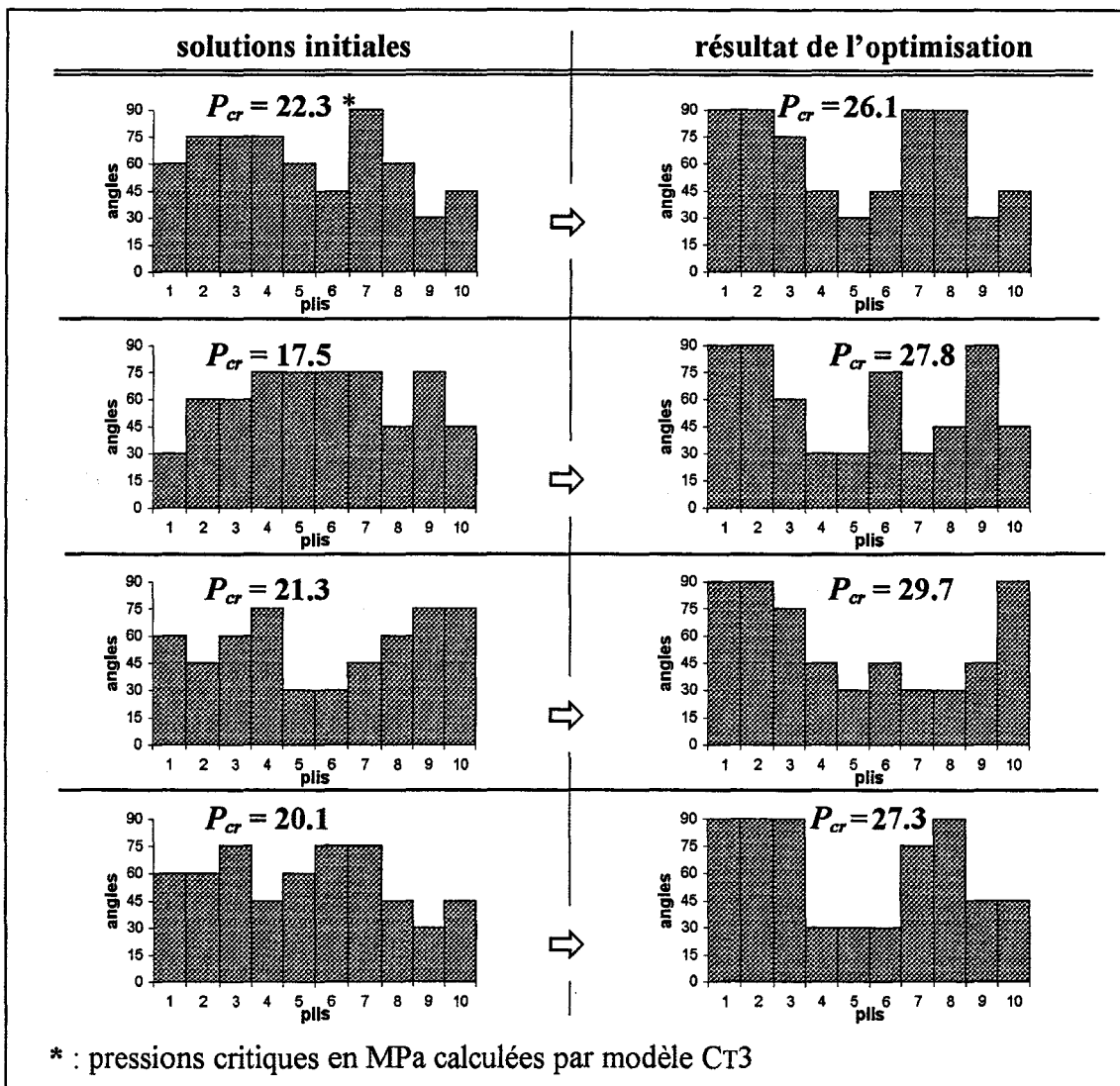


Figure IV.23 : résultats obtenus par méthode de POWELL

Cette procédure d'optimisation locale s'est avérée tout à fait inadaptée pour les problèmes étudiés, les solutions optimisées déduites conduisant, quel que soit le cylindre étudié et le modèle analytique utilisés, à des valeurs de pressions critiques très inférieures à celles obtenues précédemment par AG. De plus, on constate que ces résultats, manifestement issus de convergences sur des optima locaux, ne sont absolument pas reproductibles. La figure IV.23 illustre cette inadéquation : elle présente ainsi quatre résultats de calculs d'optimisation de la stratification du cylindre n°1 (avec angles contraints, cf. § IV.2.3.1) réalisés en utilisant le modèle CT3. Les solutions de départ de la recherche, déterminées aléatoirement, sont aussi précisées. De fait, et à l'instar des travaux antérieurs de la littérature, ces observations confirment la nécessité d'utiliser une méthode d'optimisation globale pour les problèmes d'optimisation ici abordés.

IV.2.5.4. Fiabilité de l'AG

Concernant la fiabilité de la procédure d'optimisation, soulignons qu'aucun élément ne permet d'affirmer ou de garantir que les solutions obtenues par AG correspondent bel et bien à des optima globaux. Seule l'exploration exhaustive des espaces des solutions autoriserait en effet la mise en évidence stricte de ces optima. Cependant, et comme exposé en § IV.2.5.1, une telle évaluation s'avère irréalisable pour les problèmes ici abordés, le calcul de toutes les solutions de conception induirait des temps CPU faramineux. Néanmoins, le très bon niveau de reproductibilité des résultats issus des calculs d'optimisation par AG, analysé lors des paragraphes précédents, permet de supposer l'optimalité de ces solutions procurant des accroissements de pressions critiques substantiels. Soulignons de plus que cette reproductibilité et la qualité des résultats des calculs par AG contrastent considérablement avec le comportement d'une méthode d'optimisation directe (cf. § IV.2.5.3) dont les solutions s'avèrent, elles, sans conteste locales.

IV.2.6. Robustesse des solutions optimisées

Les travaux exposés en § IV.2.3 ont permis d'établir une allure caractéristique de stratification optimisée. Cependant, et notamment avant de procéder à des analyses MEF complémentaires (cf. § IV.2.7), il s'avérait nécessaire d'évaluer la robustesse des solutions retenues données par le tableau IV.9 : plus précisément, il s'est agi d'étudier l'influence (sur les valeurs de pressions critiques ainsi que sur les allures de stratifications optimisées) de paramètres tels que les tolérances de fabrication, les incertitudes sur les caractéristiques du matériau ou encore les défauts géométriques. La plupart des travaux en optimisation de structures n'intègre pas ce type d'analyse. Citons néanmoins les études présentées en [ABE 95], [LER 97a] et [DIN 99] portant sur la sensibilité du comportement mécanique de pièces vis à vis d'incertitudes de fabrication et de la variabilité des matériaux. Dans le cadre d'une démarche de conception et d'optimisation réaliste, une telle analyse s'avère en effet primordiale afin d'appréhender le comportement effectif des solutions retenues. Ce travail concerne ainsi les "précautions numériques" préalables évoquées en § I.2.3.

IV.2.6.1. Conditions aux limites cinématiques

Comme précisé en § IV.2.2.1 et § IV.2.3, les calculs de stabilité ont été, jusqu'à ce stade de l'étude, réalisés à l'aide de modèles MEF induisant des conditions aux limites cinématiques de type appui simple aux extrémités des cylindres. Aussi, et avant de procéder à une modélisation plus réaliste des tapes de fermetures (voir § IV.2.7), il s'avérait intéressant de procéder à des calculs complémentaires en considérant alors des liaisons de type encastrement entre les cylindres et les corps rigides modélisant ces tapes. Ce travail consiste ainsi à étudier l'éventuelle influence du mode de modélisation des liaisons aux extrémités sur l'évaluation de la qualité (pressions critiques et gains correspondants) des stratifications optimisées.

Le tableau IV.16 présente ainsi les valeurs de pressions critiques et les gains correspondants alors calculés par modèles SAMCEF (coque Mindlin et volumique) induisant des liaisons de type encastrement aux extrémités. Rappelons que les stratifications notées $[\theta_1/\dots/\theta_N]_{OPTI}$ sont détaillées en § IV.2.3.11. Les valeurs de pressions critiques s'avèrent ainsi légèrement supérieures mais néanmoins très proches (moins de 10 % de différence) de celles du tableau IV.9. De même, les gains correspondants sont tout à fait similaires à ceux calculés précédemment. Ces résultats permettent ainsi de vérifier que, comme indiqué en § II.3.3, le type de conditions aux limites cinématiques adopté pour les modèles MEF utilisant des corps rigides n'influence que peu les résultats d'analyses de stabilité, les géométries des enceintes considérées étant de type élancé. En outre, soulignons que ce paragraphe ne concerne pas littéralement l'étude de la robustesse des solutions vis à vis de paramètres de production mais permet néanmoins de compléter l'étude menée en § IV.2.3, fournissant ainsi une confirmation supplémentaire de l'intérêt des stratifications retenues.

cylindre n°	modèles SAMCEF	P_{cr} ($[\theta_1/\dots/\theta_N]_{OPTI}$) en MPa	P_{cr} ([55N]) en MPa	G (MPa)	γ (%)
1	coque Mindlin	27.2	18.7	8.5	45.5
	coque volumique	27.0	19.0	8.0	42.1
2	coque Mindlin	49.9	36.0	13.9	38.6
	coque volumique	50.2	36.7	13.5	36.8
3	coque Mindlin	80.8	58.8	22.0	37.4
	coque volumique	84.6	63.5	21.1	33.2
4	coque Mindlin	116.6	85.8	30.8	35.9
	coque volumique	111.6	83.1	28.5	34.3
5	coque Mindlin	193.1	149.7	43.3	29.0
	coque volumique	183.0	143.7	39.3	27.3
6	coque Mindlin	266.7	214.5	52.2	24.3
	coque volumique	256.8	210.0	46.8	22.3

Tableau IV.16 : pressions critiques et gains relatifs
– liaisons de type encastrement aux extrémités

IV.2.6.2. Anti-optimisation

Une étape essentielle pour l'analyse de la robustesse des solutions optimisées a consisté en la recherche des stratifications conduisant aux pressions critiques les plus faibles. De tels calculs "d'anti-optimisation" sont en effet destinés à mettre en évidence une éventuelle similitude entre les séquences optimisées (cf. tableau IV.9) et les plus mauvaises solutions. Plus concrètement, considérons à titre d'exemple le cylindre n° 1 : la stratification retenue est $[90_2/60/30_3/60/90]$. Si d'aventure la séquence conduisant à la plus faible pression critique s'avérait par exemple être $[90_2/62/30_3/60/90]$, l'utilisation de la solution optimisée induirait un risque sérieux, compte tenu notamment des tolérances de fabrication sur les valeurs d'angles (voir aussi § IV.2.5.3). En d'autres termes, cette phase d'anti-optimisation a consisté à évaluer la proximité, dans l'hyper-espace des solutions, des solutions optimisées retenues avec les cas les plus défavorables.

La recherche des stratifications conduisant aux limites de stabilité les plus faibles a été réalisée pour chacun des 6 cylindres étudiés. Dans ce cas, la procédure d'optimisation par AG étant destinée à la recherche du maximum d'une fonction objectif (cf. § III.2.1.2), les adaptations considérées ont été les valeurs inverses de pressions critiques. Par ailleurs, ces calculs ont été réalisés de façon "pseudo-continue", chaque angle pouvant varier de 0 à 90° par pas de 1° à l'instar des travaux exposés en § IV.2.3.9. L'énoncé du problème d'optimisation considéré est alors :

$$\begin{aligned} & \text{Maximiser } F = 1/P_{cr}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_N) \\ & \text{avec } \theta_i \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 89; 90\}. \end{aligned}$$

Les cardinalités correspondantes et les paramètres de population d'AG utilisés pour ces calculs et sont identiques à ceux présentés par le tableau IV.14.

Quel que soit le modèle analytique (SANDERS, CT3 OU LOG) utilisé, ces calculs ont invariablement conduit à l'obtention de stratifications orthotropes de type $[0_N]$, et ceci quel que soit le cylindre considéré. Le tableau IV.17 présente les valeurs de pressions critiques correspondantes déduites des modèles SAMCEF et, à titre indicatif, du modèle CT3. Notons de plus que les modes de flambage déduits pour ces solutions en $[0_N]$ sont invariablement de type $m = 1$ et $n = 3$.

cylindre n°		1	2	3	4	5	6
P_{cr} (MPa)	CT3	4.9	9.1	15.1	23.1	51.2	87.1
	SAMCEF coque Mindlin	4.7	8.1	13.0	19.3	39.6	63.4
	SAMCEF coque volumique	4.6	8.0	12.8	19.2	39.8	63.9

Tableau IV.17 : pressions critiques des cylindres en $[0_N]$

Compte tenu de ces résultats, tout risque de proximité entre les "plus mauvaises" stratifications et les solutions retenues (cf. tableau IV.9) semble ainsi écarté. De plus, ces résultats d'anti-optimisation corroborent partiellement l'interprétation des résultats présentée

en § IV.2.4. En effet, les stratifications en $[0_N]$, correspondant aux cas où les renforts sont uniquement disposés selon l'axe des cylindres, conduisent logiquement aux valeurs de rigidité de flexion circonférentielle minimales et, par contre, maximale dans le plan (x, z) des cylindres : par comparaison avec les valeurs indiquées en figures IV.16 et IV.17, on constate que les coefficients de rigidités (représentés en figure IV.24) de flexion \bar{D}_{11} sont ainsi maximisés, et ceci au détriment des valeurs de \bar{D}_{22} .

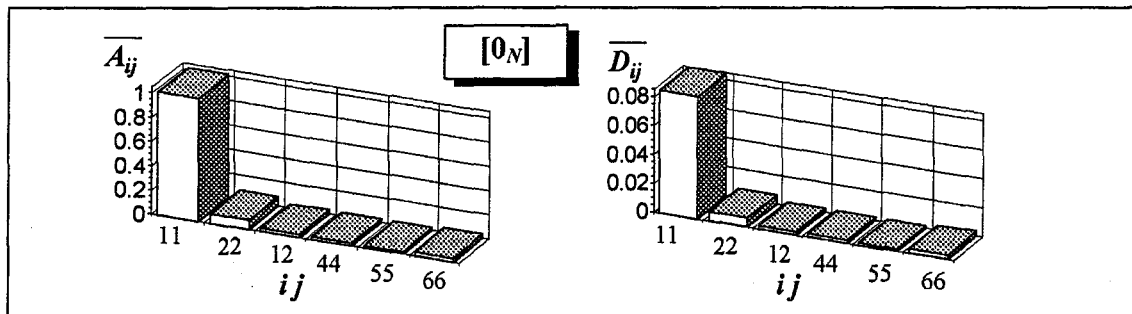


Figure IV.24 : coefficients de rigidités addimensionnés – stratifications en $[0_N]$

On remarquera par ailleurs que ces "plus mauvaises" stratifications ont été obtenues très rapidement par rapport aux calculs pratiqués en § IV.2.3.9. La figure IV.25 suivante présente ainsi des exemples (issus des calculs concernant les cylindres n° 1, 4 et 6) d'évolutions des valeurs maximales et moyennes de chaque génération : les valeurs de générations d'apparition des "meilleurs" individus s'avèrent nettement inférieures à celles du tableau IV.15. Cette rapidité de convergence est aussi illustrée par la figure IV.26 présentant des exemples d'évolutions (issus de calculs concernant les cylindres n° 1 et 6) des valeurs d'angles du meilleur individu présent à chaque génération : dès les premières itérations de l'AG, ces valeurs tendent invariablement vers 0° .

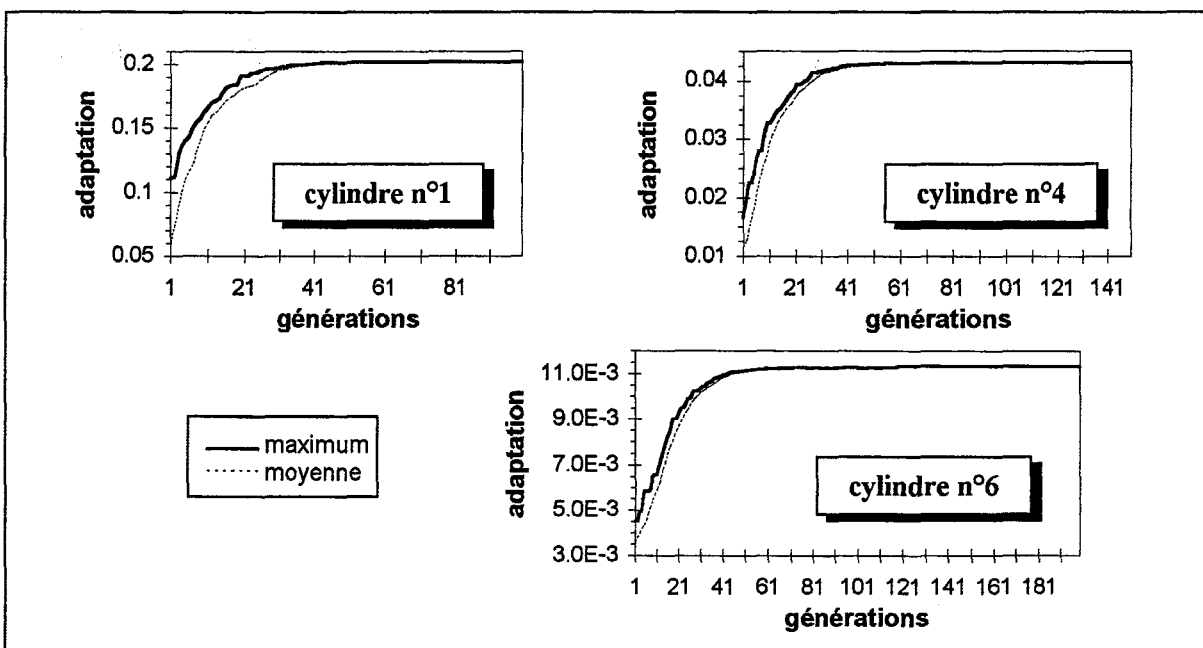


Figure IV.25 : évolutions de l'adaptation – calculs d'anti-optimisation

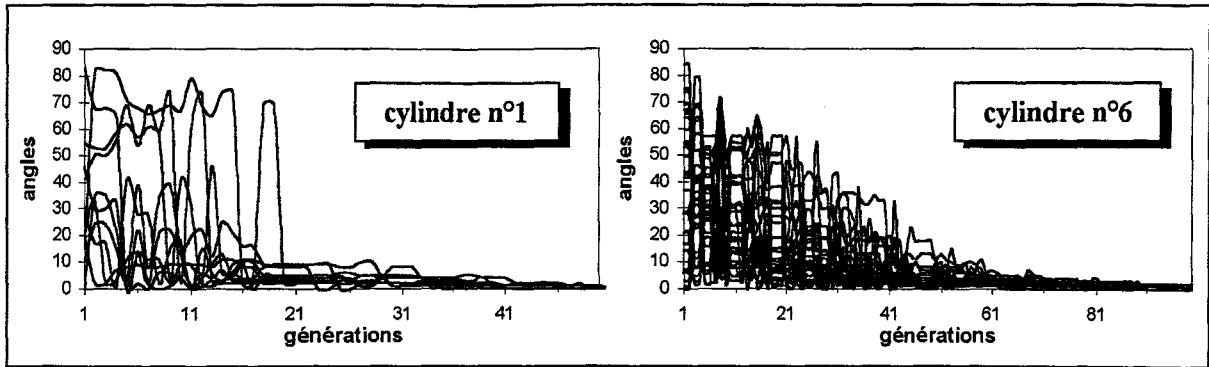


Figure IV.26 : évolutions des valeurs d'angles – calculs d'anti-optimisation

Connaissant désormais les limites de stabilité minimales (cf. tableau IV.17), on peut donc utiliser, pour les solutions optimisées retenues (cf. § IV.2.3.11), un autre mode d'appréciation des accroissements de pression critique que celui défini en § IV.1.3. Ces nouveaux indices de mesure de gains, permettant alors d'évaluer l'amplitude totale de variation de pressions critiques par modification de la stratification, sont ainsi définis par :

$$G' = P_{cr}([\theta_1 / \theta_2 / \dots / \theta_N]_{OPTI}) - P_{cr}([0_N])$$

et, pour le gain relatif, par :

$$\gamma' = \frac{G'}{P_{cr}([0_N])}$$

Le tableau IV.18 présente les valeurs de ces gains, ainsi mesurés par rapport aux "plus mauvaises" solutions, calculés à l'aide des modèles SAMCEF coque Mindlin et volumique. On constate ainsi que les amplitudes totales de variation de P_{cr} (paramètre γ') s'avèrent supérieures à 300 %. Ces résultats confirment de surcroît l'intérêt d'une conception pertinente, et donc optimisée, de la stratification des corps d'enceintes sous-marines.

cylindre n°	modèles SAMCEF	G' (MPa)	γ' (%)
1	coque Mindlin	22.1	470.2
	coque volumique	21.8	473.9
2	coque Mindlin	40.6	501.2
	coque volumique	40.1	501.3
3	coque Mindlin	66.1	508.5
	coque volumique	67.5	527.3
4	coque Mindlin	94.1	487.6
	coque volumique	79.4	413.5
5	coque Mindlin	148.6	375.3
	coque volumique	125.1	314.3
6	coque Mindlin	198.9	313.7
	coque volumique	172.3	269.6

Tableau IV.18 : gains G' et γ' des solutions optimisées

IV.2.6.3. Précision des angles

De plus, il s'avérait nécessaire d'analyser la robustesse des solutions retenues vis à vis des imprécisions, inévitables malgré les recalages angulaires réalisés au cours du processus de fabrication [GRO 99], sur les valeurs d'angles d'enroulement des renforts. Ce travail complète ainsi celui mené en § IV.2.6.2 destiné à la recherche d'éventuelles "mauvaises" solutions au "voisinage" des stratifications optimisées. Les indications du fabricant CNIM ont conduit à considérer un intervalle de tolérance égal à $\pm 5^\circ$ pour chaque valeur d'angle donnée en § IV.2.3.1. Aussi, et afin d'évaluer l'influence de telles imprécisions sur les limites de stabilité des stratifications optimisées, 5000 calculs successifs de flambage ont été effectués à l'aide du modèle CT3 pour chacune des six solutions retenues, et ceci en générant des perturbations angulaires de façon stochastique : à chaque calcul, tout angle de stratification a ainsi été choisi aléatoirement dans un intervalle de $\pm 5^\circ$ par rapport à sa valeur nominale (donnée par le tableau IV.9). Le tableau IV.19 présente les pressions critiques moyennes, alors très proches de celles calculées pour des valeurs d'angles nominales, déduits de ces calculs. Les écarts-types correspondants sont très faibles. Ainsi, ces imprécisions angulaires s'avèrent très peu influentes. De même, quelques calculs MEF, réalisés en perturbant là aussi les valeurs d'angles de stratification dans un intervalle de $\pm 5^\circ$, ont permis de vérifier que ces tolérances angulaires n'incidaient que très peu sur les valeurs de P_{cr} données par le tableau IV.9.

cylindre n°		1	2	3	4	5	6
P_{cr}	moyenne	31.22	81.36	53.03	119.23	247.11	404.96
(MPa)	écart-type	0.25	0.28	0.27	0.32	0.48	0.57

Tableau IV.19 : influence des tolérances angulaires

Précisons que des calculs similaires ont été réalisés pour l'analyse de l'influence de la précision dimensionnelle des cylindres. Les valeurs classiques de tolérances adoptées (soit quelques millimètres pour la longueur et quelques dixièmes de millimètres sur les valeurs d'épaisseurs de paroi et de rayon interne) ont alors conduit à des variations de pressions critiques quasi-imperceptibles, les écarts-types étant encore bien moindres que ceux indiqués par le tableau IV.19. Là aussi, quelques calculs MEF ont confirmé que de telles imprécisions n'avaient qu'une influence minimale sur les limites de stabilité des solutions optimisées.

IV.2.6.4. Imperfections géométriques

Concernant l'influence des imperfections géométriques sur les limites de stabilité des cylindres en carbone/époxy, les tendances s'avèrent tout à fait similaires à celles observées en § II.4.2. La figure IV.27 présente ainsi, à titre indicatif, les réductions de pressions critiques (paramètre η , cf. relation (II.77)) des cylindres n° 1, 2 et 3 possédant les stratifications optimisées (cf. tableau IV.9) pour diverses valeurs d'amplitude équivalente d'imperfection \tilde{h} . On constate, là encore, la proximité des valeurs issues de la modélisation analytique de type axisymétrique des imperfections avec les résultats MEF. Notons que, pour le cylindre n° 2, le

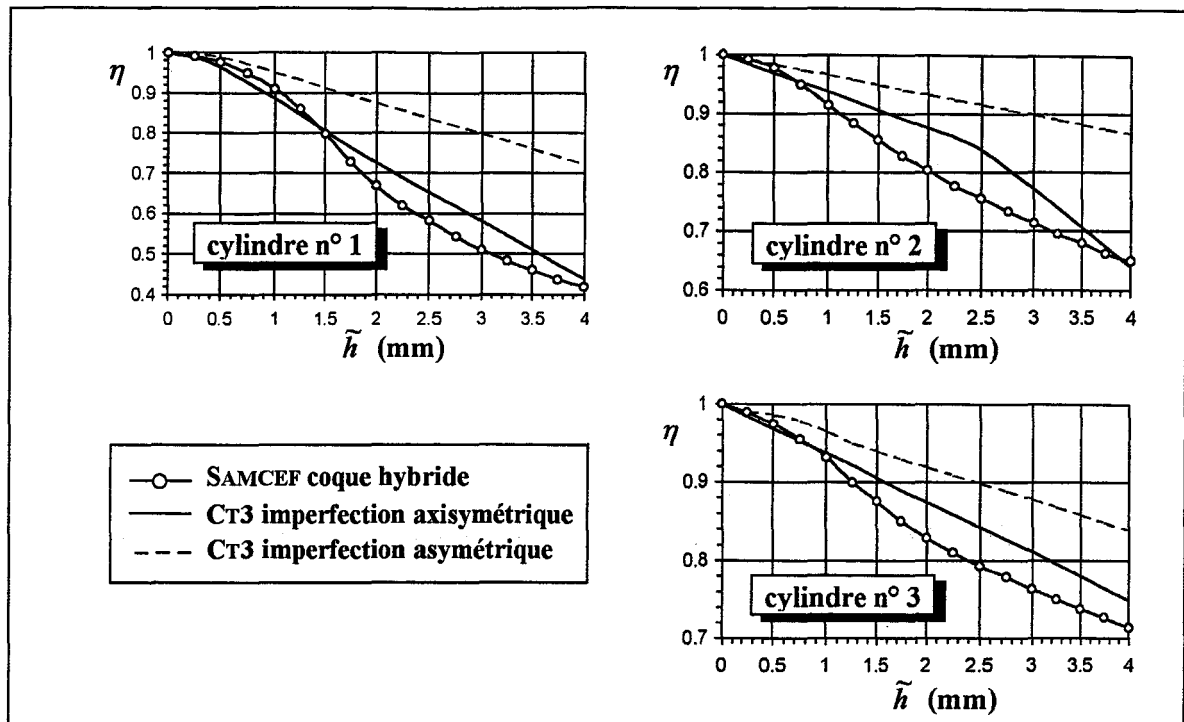


Figure IV.27 : réductions des pressions critiques des cylindres optimisés

changement de pente des résultats du modèle CT3 avec imperfection axisymétrique est lié à une modification de mode de flambage, initialement en $(m=1; n=2)$ puis en $(m=1; n=3)$. Précisons que les évolutions de η concernant sont très semblables pour les cylindres de référence en [55_N], les pressions critiques issues des stratifications optimisées ne s'avérant ainsi pas davantage affectées par d'éventuels défauts géométriques. Ainsi, considérant une valeur de \tilde{h} identique pour les cylindres optimisés et ceux de référence, les gains relatifs γ déduits des calculs de stabilité analytiques et MEF ne sont pas sensiblement modifiés par rapport aux valeurs calculées pour des tubes sans imperfections. En outre, signalons que les résultats analytiques et MEF ont montré que, pour des valeurs de \tilde{h} identiques à celles de la figure IV.27, les limites de stabilité des cylindres n° 4, 5 et 6 n'étaient que très peu réduites.

Des calculs d'optimisation ont aussi été réalisés afin de déterminer les allures de stratifications optimisées en présence d'imperfections. Les résultats, obtenus par utilisation du modèle CT3 avec modélisation axisymétrique et asymétrique des imperfections et pour des valeurs \tilde{h} égales à 0.5, 1 et 2 mm, sont présentés par les figures IV.28 et IV.29. Au vu de ces résultats, on constate une fois de plus que les solutions optimisées sont basées sur des motifs en $[90_{N1}/\Psi_1/30_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$ très similaires à ceux du tableau IV.9, les modifications observées concernant les zones de transition Ψ_1 et Ψ_2 . Notons que des calculs d'optimisation similaires, concernant cette fois les cylindres n° 3, 4, 5 et 6, ont montré que la prise en compte de ces imperfections géométriques n'avait aucune incidence, les stratifications données en § IV.2.3.11 ayant été obtenues quasi-invariablement.

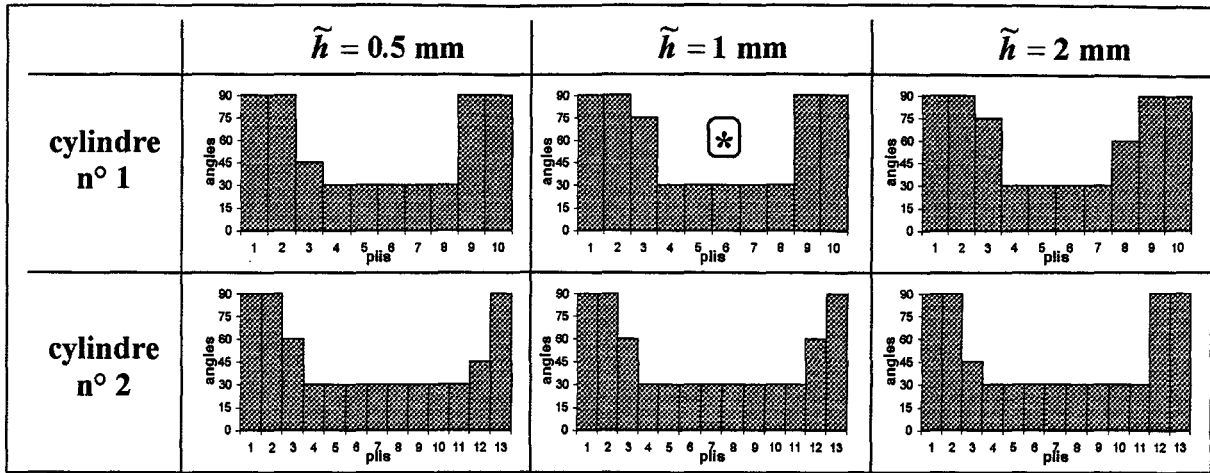


Figure IV.28 : optimisation avec imperfections géométriques – modèle axisymétrique

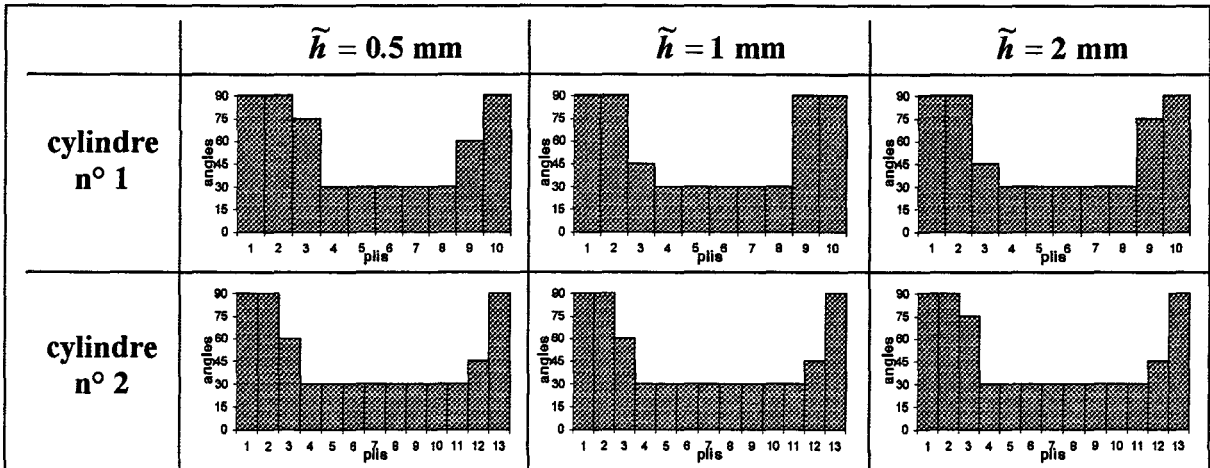


Figure IV.29 : optimisation avec imperfections géométriques – modèle asymétrique

On notera que, pour une valeur d'amplitude équivalente d'imperfection donnée, les valeurs de pressions critiques des solutions données en figure IV.28 et IV.29 ne diffèrent que très peu de celles des stratifications optimisées du tableau IV.9. A titre d'exemple, considérons ainsi, pour le cylindre n° 1, la stratification optimisée initiale en $[90_2/60/30_5/60/90]$ (cf. § IV.2.3.11) et celle en $[90_2/75/30_5/90_2]$, optimisée pour $\tilde{h} = 1 \text{ mm}$ et notée * en figure IV.28. Les valeurs de pressions critiques (calculées par modèle SAMCEF hybride) pour une valeur \tilde{h} égale à 1 mm sont ainsi les suivantes (en MPa) :

$$\left| \begin{array}{l} P_{cr}([90_2/60/30_5/60/90]) = 27.2 \\ P_{cr}([90_2/75/30_5/90_2]) = 27.8 \end{array} \right.$$

soit donc un "gain" égal à : $\frac{27.8 - 27.2}{27.2} \approx 2 \%$.

Aussi, et pour l'ensemble des solutions présentées en figure IV.28 et IV.29, les améliorations déduites pour des tubes géométriquement imparfaits ne sont que peu sensibles. Par ailleurs,

précisons que toutes ces stratifications conduisent, quel que soit le modèle SAMCEF utilisé, à des valeurs de pressions critiques très proches (inférieures de seulement 1 à 4 %) de celles des solutions optimisées du tableau IV.9 lorsque l'on considère des cylindres sans imperfections (soit donc $\tilde{h} = 0$).

IV.2.6.5. Propriétés matériau

Comme précisé dès le paragraphe § I.1.3, les très nombreux travaux de caractérisation menés dans le cadre des projets BRITE et MAST ont conduit à souligner la difficulté d'accéder aux propriétés élastiques exactes des matériaux composites constituant les corps d'encreintes. De plus, les nombreux essais et contrôles réalisés sur des cylindres composites ont notamment montré la variabilité, liée aux inévitables imprécisions du processus industriel de fabrication, du taux de renforts. En outre, des écarts tangibles ont été constatés entre diverses mesures expérimentales du module d'élasticité longitudinal des fibres carbone. Compte tenu des résultats de ces études, des calculs d'homogénéisation périodique ont été réalisés par l'IFREMER afin d'estimer la plage de variation de chacune des neuf caractéristiques orthotropes du carbone/époxy : ces calculs ont été effectués, d'après les propriétés mécaniques propres des constituants, pour une fraction volumique de fibres variant entre 55 % et 65 % et en considérant un taux de vide égal à 10 % [LEF 99]. De plus, une réduction maximale de 25 % de la valeur nominale (fournie par le fabricant) du module longitudinal des fibres T700 a été considérée [CHA 99b]. Les résultats obtenus ont conduit aux encadrements suivants (modules en GPa) :

$$\begin{aligned} 102.9 \leq E_1 \leq 156 & \quad ; \quad 8.44 \leq E_2 \leq 9.65 & \quad ; \quad 5.93 \leq E_3 \leq 6.57 \\ 5.33 \leq G_{12} \leq 5.473 & \quad ; \quad 2.31 \leq G_{13} \leq 2.8 & \quad ; \quad 2.11 \leq G_{23} \leq 3.925 \\ 0.27 \leq \nu_{12} \leq 0.277 & \quad ; \quad 0.295 \leq \nu_{13} \leq 0.34 & \quad ; \quad 0.471 \leq \nu_{23} \leq 0.492. \end{aligned}$$

On remarquera que les valeurs maximales des modules correspondent à celles données en § IV.2.1. En effet, suite aux résultats expérimentaux, les caractéristiques mécaniques initialement considérées par les différents partenaires du projet MAS3-3-CT97-0091 se sont avérées "optimistes", surévaluées [CHA 99b] [LEF 99]. On notera ainsi la réduction considérable, supérieure à 30 %, de la valeur du module E_1 .

Afin d'étudier l'influence de telles variations des caractéristiques mécaniques, une démarche classique aurait consisté à réaliser des séries de calculs de stabilité des cylindres en [55_N] et optimisés en considérant, à chaque fois, le jeu complet des neuf propriétés orthotropes issues d'un calcul d'homogénéisation réalisé par l'IFREMER. Ainsi, ce travail aurait permis d'évaluer les gains déduits des stratifications optimisées pour divers taux de renforts donnés et pour diverses valeurs de module des fibres carbone. Cependant, et comme souligné en § I.1.3, les propriétés des tubes réalisés par enroulement filamentaire sont fort délicates à appréhender par les méthodes classiques d'homogénéisation périodique. Ce travail aurait aussi pu recourir à un calcul de sensibilités (cf. § III.1.2.2), par évaluation numérique des dérivées partielles ($\partial P_{cr} / \partial E_1$, $\partial P_{cr} / \partial G_{12}$, $\partial P_{cr} / \partial \nu_{12}$... etc). Cependant une telle démarche nécessiterait, afin d'apprécier l'influence de l'interaction des divers paramètres matériau, le calcul fastidieux de

dérivées d'ordres supérieures (telles que, par exemple, $\partial^2 P_{cr} / \partial E_1 \partial E_2$). De fait, l'évaluation de l'incidence des "incertitudes matériau" sur les résultats d'optimisation a été effectuée, pour chacun des six cylindres considérés, sur un mode stochastique similaire à celui adopté en § IV.2.6.3. La figure IV.30 illustre le principe de ces calculs : pour chacun d'entre eux, il s'est agi de générer aléatoirement un jeu de caractéristiques mécaniques (situées dans les intervalles précédemment indiqués), de déterminer les limites de stabilité correspondantes des cylindres en $[55_N]$ et optimisé (cf. § IV.2.3.11) et d'en déduire les valeurs de gains. On remarquera la sévérité d'un tel procédé : en effet, il peut conduire à l'obtention d'un jeu de propriétés matériau où l'on aurait, par exemple, $E_1 = 102.9$ GPa et $E_2 = 9.65$ GPa. Le rapport d'anisotropie E_1/E_2 (cf. § IV.2.1) peut ainsi varier dans l'intervalle suivant :

$$\frac{102.9}{9.65} \approx 10.7 \leq \frac{E_1}{E_2} \leq \frac{156}{8.44} \approx 18.5$$

On tend ainsi à surestimer grandement les variations potentielles des caractéristiques mécaniques du composite.

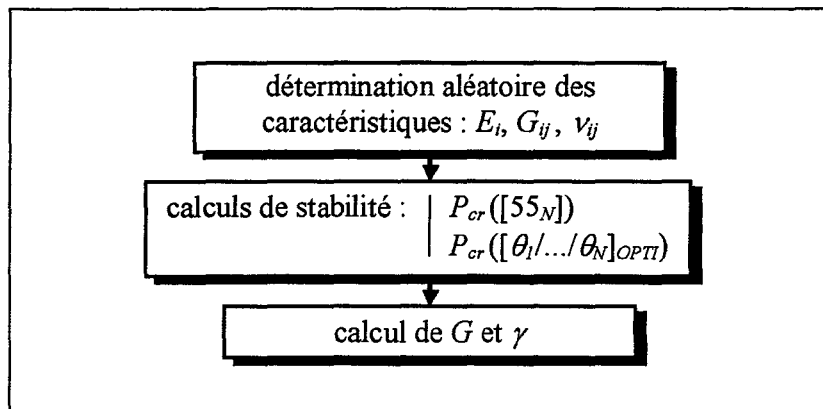


Figure IV.30 : calculs de stabilité et de gains avec perturbations aléatoires des propriétés matériaux

Pour chaque cylindre considéré, 5000 calculs successifs, basés sur le schéma de la figure IV.30, ont alors été réalisés à l'aide du modèle CT3. Les valeurs moyennes (et écarts-types correspondants, indiqués en italique) déduites de ces séries de calculs sont détaillées par le tableau IV.20. On constate ainsi que les limites de stabilité ont subi des variations ostensibles : les valeurs moyennes sont en effet nettement inférieures à celles données par les figures IV.4 et IV.5, les valeurs d'écarts-types étant, de plus, relativement élevées. Cependant, et malgré de telles variations, les valeurs de gains s'avèrent très similaires à celles calculées analytiquement en § IV.2.3.3 pour les diverses solutions retenues. Les écarts-types correspondants, très faibles, témoignent eux aussi de la robustesse des solutions optimisées vis à vis de variations des propriétés élastiques du carbone/époxy. Rappelons que les gains calculés analytiquement sont très "optimistes", surévaluées. Aussi, et à l'instar de l'étude menée en § IV.2.6.3, quelques calculs MEF ont été réalisés et ont permis de vérifier que les valeurs de gains du tableau IV.9 n'étaient pas sensiblement affectées par la modification des propriétés matériau.

cylindre n°		1	2	3	4	5	6
P_{cr} (MPa)	[55 _N]	* 15.07 1.04	27.09 2.10	44.33 3.74	68.12 5.97	149.09 14.24	254.13 24.63
	$[\theta_1/.../\theta_N]_{OPTI}$	26.38 2.93	44.65 4.57	68.31 7.16	100.97 10.54	208.54 22.36	342.28 35.82
G (MPa)		11.31 1.89	17.56 2.47	23.97 3.42	32.85 4.57	59.45 8.12	88.16 11.21
γ (%)		74.6 7.50	64.52 4.17	53.81 3.19	48.0 2.56	39.72 1.68	34.72 1.08

Tableau IV.20 : influence des perturbations aléatoires des propriétés matériau

* : moyenne
écart-type

Par ailleurs, et afin de compléter l'étude menée dans ce paragraphe, il s'avérait particulièrement intéressant d'évaluer les allures de stratifications optimisées pour différents jeux de caractéristiques anisotropes. Pour chaque cylindre étudié, 50 calculs successifs d'optimisation ont ainsi été réalisés en générant aléatoirement, au démarrage de chacun d'entre eux à l'instar du schéma de calcul de la figure IV.30, un jeu de propriétés matériau appartenant aux intervalles précédemment indiqués. Ces calculs ont été réalisés à l'aide du modèle CT3 hormis pour le cylindre n° 6 où le modèle LOG a été employé. La figure IV.31 présente les valeurs moyennes (et écarts-types correspondants) d'angles de stratification des 50 solutions optimisées obtenues au terme de ces 50 lancements successifs d'AG.

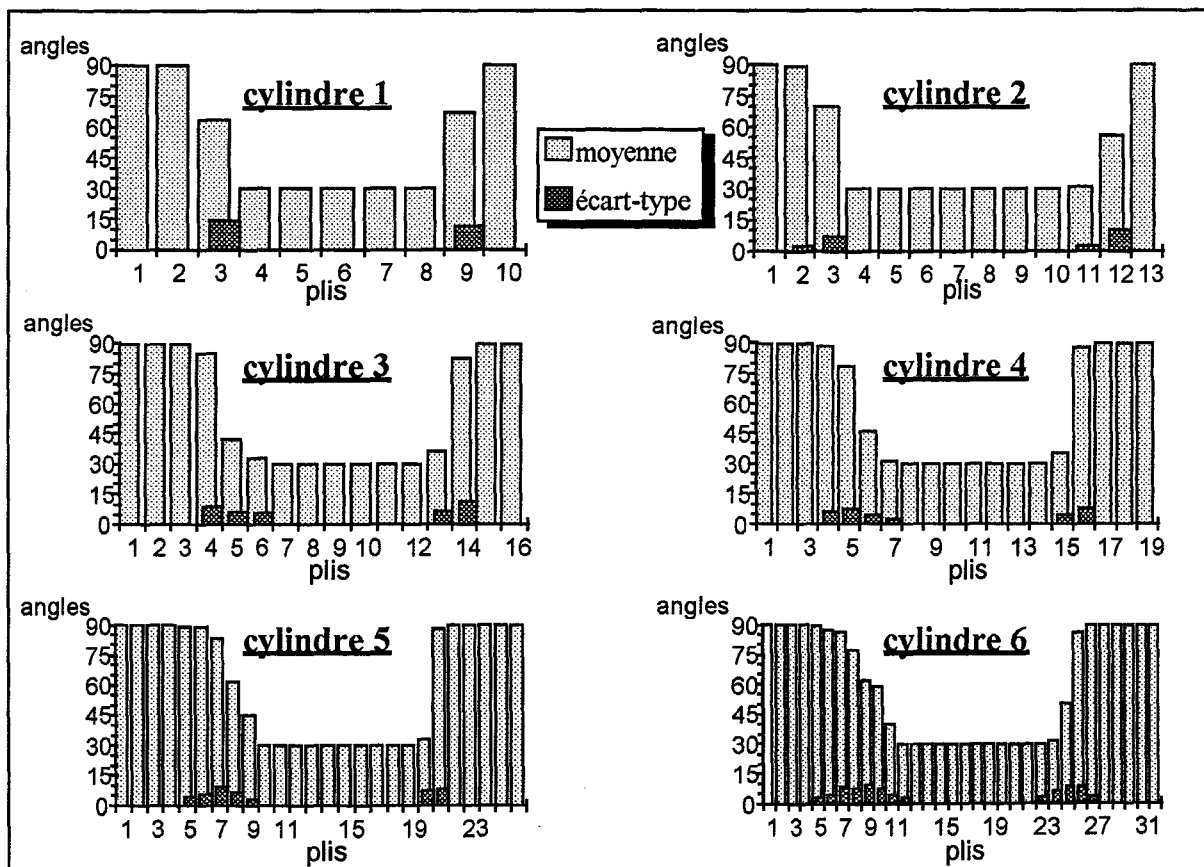


Figure IV.31 : stratifications optimisées avec perturbations aléatoires des propriétés matériau

Les résultats de la figure IV.31 sont particulièrement remarquables, confirmant la robustesse des solutions optimisées : en effet, les valeurs moyennes d'angles sont toutes similaires à celles données par le tableau IV.9. De plus, les écarts-types sont très proches de ceux indiqués en figure IV.20 liés à la reproductibilité de la méthode d'optimisation. On peut ainsi considérer que, quel que soit les propriétés du carbone/époxy (appartenant aux intervalles précédemment indiqués) et l'anisotropie correspondante, les allures de stratification en $[90_{N1}/\Psi_1/30_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$ retenues restent optimales. Rappelons que l'optimisation de cylindres en verre/époxy menée en § IV.2.3.8 avait, elle aussi, conduit à l'obtention de séquences de stratification fort analogues à celles des tubes en carbone/époxy. Aussi, considérant l'ensemble des résultats de ce paragraphe, il s'avère que la recherche de stratifications optimales est peu sensible aux "incertitudes matériau" : ainsi, ce travail peut, en quelque sorte, "s'affranchir" de la connaissance des valeurs exactes des caractéristiques élastiques du carbone/époxy employé. De plus, et à l'instar de l'ensemble des travaux présentés en § IV.2.6, on constate que d'éventuelles variations ou incertitudes, concernant ici les propriétés matériau, n'ont que peu d'influence sur les performances des solutions optimisées données en § IV.2.3.11.

IV.2.7. Résultats MEF complémentaires

Afin de compléter et de corroborer les résultats numériques précédents, des calculs de stabilité MEF complémentaires, en analyses linéaires et non linéaires, ont été réalisés : il s'avérait notamment primordial de vérifier les performances (en termes de gains) des solutions optimisées retenues (cf. § IV.2.3.11) à l'aide de modèles MEF incluant la modélisation des tapes de fermeture. De plus, la résistance statique des cylindres optimisées a été évaluée.

Par ailleurs, rappelons que, comme précisé en § IV.2.6.5 et malgré de nombreuses études de caractérisation, les propriétés du carbone/époxy employé sont sujettes à de nombreuses incertitudes. Cependant, compte tenu de l'état des travaux du projet MAS3-3-CT97-0091, il s'avérait fort délicat d'accéder à un jeu de caractéristiques élastiques relativement "fiabiles". Aussi, et dans un souci de cohérence avec les partenaires de ce projet, les calculs détaillés par les paragraphes suivants ont été réalisés en considérant les caractéristiques élastiques initiales données en § IV.2.1.

IV.2.7.1. Résultats non linéaires SOLVIA

Au préalable, des calculs de stabilité non linéaires ont été réalisés par l'équipe de NTUA à l'aide du modèle MEF SOLVIA décrit en § IV.2.2.1. Les limites de stabilité obtenues pour les cylindres optimisés n° 1, 2 et 4 sont ainsi présentées par le tableau IV.21. A titre indicatif, et pour comparer les valeurs de pressions critiques avec celles déduites des solutions de NTUA données par le tableau IV.4, les deux facteurs de gains suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} G'' = P_{cr}([\theta_1/\dots/\theta_N]_{OPTI}) - P_{cr}([\theta_1/\dots/\theta_N]_{NTUA}) \\ \gamma'' = G'' / P_{cr}([\theta_1/\dots/\theta_N]_{NTUA}) \end{array} \right.$$

sont précisés. Les stratifications notées $[\theta_1/\dots/\theta_N]_{OPTI}$ et $[\theta_1/\dots/\theta_N]_{NTUA}$ correspondent respectivement aux solutions du tableau IV.9 et à celles présentées en figure IV.3. On remarquera que les valeurs de pressions critiques du tableau IV.21 présentent peu d'écart (moins de 5 %) avec les résultats SOLVIA linéaires détaillés par le tableau IV.6. Soulignons que, le modèle SOLVIA négligeant les effets de cisaillement transverse, ces limites de stabilité sont là encore nettement supérieures à celles du tableau IV.9. Par ailleurs, l'intérêt des solutions optimisées par AG est une fois de plus confirmé, les valeurs de γ'' s'avérant supérieures à 10 %.

cylindre n°	P_{cr} ($[\theta_1/\dots/\theta_N]_{OPTI}$) en MPa	G'' (MPa)	γ'' (%)
1	28.5	4.0	16.3
2	55.0	6.5	13.4
4	140.0	25.0	21.7

Tableau IV.21 : résultats non linéaires SOLVIA

IV.2.7.2. Modèles avec tapes

Conformément aux indications de l'IFREMER, les pièces de fermeture retenues pour les six cylindres étudiés sont de type tape plate (cf. figure I.3). Le matériau constitutif considéré, utilisé lors de travaux antérieurs [DAV 99], est un aluminium 7075T6 dont les propriétés mécaniques sont (données IFREMER) :

$$E = 72 \text{ GPa} \quad ; \quad \nu = 0.32$$

et dont la contrainte limite élastique est : $\sigma_{Max} = 495 \text{ MPa}$.

Pour de telles tapes d'extrémités, le mode de dimensionnement des épaisseurs (notées h_T) pratiqué à l'IFREMER recourt à l'utilisation de la relation semi-empirique suivante donnée par [YOU 89] :

$$h_T = \left(R + \frac{h}{2} \right) \sqrt{\frac{4.5 \nu P_{cr}}{8 \sigma_{Max}} \left(\frac{3}{\nu} + 1 \right)}$$

La valeur de pression critique alors utilisée est obtenue par analyse linéaire de stabilité à l'aide de modèles MEF utilisant des éléments de corps rigides aux extrémités des cylindres. Aussi, considérant les valeurs P_{cr} issues des modèles SAMCEF (coque Mindlin et volumique) données par le tableau IV.2 pour les tubes de référence et en § IV.2.3.11 pour les cylindres optimisés, le calcul des épaisseurs de tapes a conduit aux résultats du tableau IV.22 suivant.

cylindre n°	1	2	3	4	5	6
h_T stratifications en [55 _N]	25	35	45	56	77	95
(mm) stratifications optimisées	30	41	53	65	87	107

Tableau IV.22 : épaisseurs de tapes

Considérant ces valeurs h_T , élevées vis à vis des épaisseurs de parois des cylindres composites, la modélisation des tapes a été réalisée par éléments finis de type coque volumique. Compte tenu des géométries, ces calculs ont été effectués à l'aide d'éléments SAMCEF coque Mindlin hormis pour les cylindres n° 5 et 6 où la modélisation du corps d'enceinte a été effectuée par éléments volumiques. La figure IV.32 présente l'allure générale du modèle MEF correspondant ainsi qu'un exemple de configuration flambée. Rappelons que la modélisation fidèle et scrupuleuse de la liaison entre les coiffes métalliques des cylindres et les tapes (cf. figure I.3) nécessiterait l'introduction d'un modèle de contact dans le calcul MEF. Cependant, et compte tenu de la discussion menée en § II.3.3, les coiffes ne seront pas prise en compte. Les corps d'enceintes sont ici supposés être parfaitement encastrés avec les tapes de fermetures à l'instar des travaux présentés en [DAV 96] et [VAN 98], ce type de modélisation s'avérant suffisamment représentative pour l'étude du comportement global des enceintes. Par ailleurs, les calculs ici présentés ont été effectués sans prise en compte d'imperfections géométriques car ne disposant pas, à ce jour, de données concernant les valeurs courantes des amplitudes réelles de tels défauts (cf. § II.1.2.2).

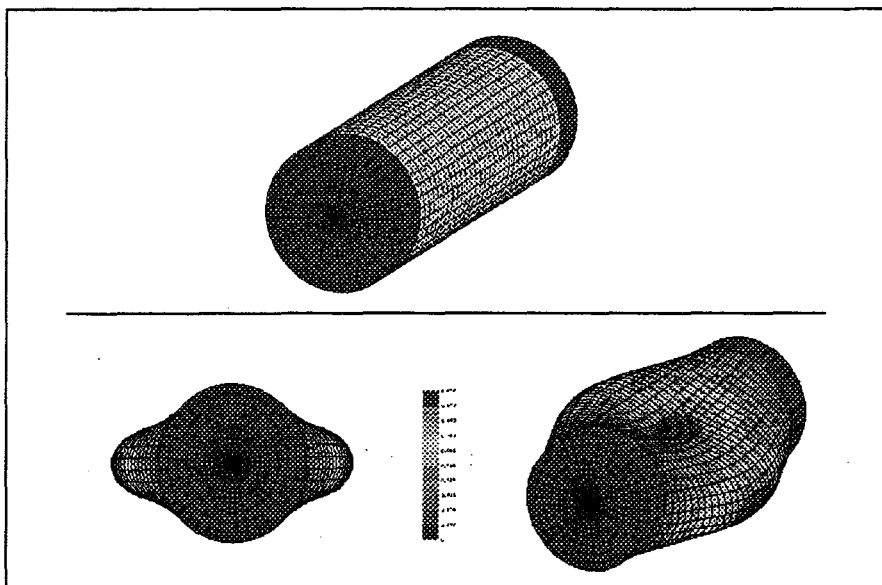


Figure IV.32 : modèle SAMCEF avec tapes de fermeture

Les valeurs de pressions critiques, calculées par analyses linéaires, des cylindres de référence et optimisés sont indiquées par le tableau IV.23. D'emblée, on remarquera que ces valeurs P_{cr} s'avèrent nettement inférieures à celles obtenues par les modèles MEF utilisant des éléments de corps rigides pour modéliser les tapes (cf. tableaux IV.2 et IV.9) : les limites de stabilité des cylindres minces n° 1 et 2 sont ainsi affectées d'une chute d'environ 20 %, les pressions critiques des cylindres les plus épais (n° 5 et 6) étant, elles, réduites d'environ 10 %. Ainsi, et comme déjà souligné en § II.4.1, les tapes de fermetures induisent une réduction tangible des valeurs P_{cr} . Précisons que les déplacements radiaux statiques de pré-flambage aux extrémités des cylindres composites se sont tous avérés être inférieurs à 0.16 mm.

cylindre n°	P_{cr} ([55 N]) en MPa	P_{cr} ($[\theta_1/.../\theta_N]_{OPTI}$) en MPa	G (MPa)	γ (%)
1	14.9	23.4	8.5	57.0
2	27.5	40.4	12.9	46.9
3	46.8	65.4	18.6	39.7
4	69.0	95.3	26.3	38.1
5	120.6	153.7	33.1	27.4
6	178.5	222.4	43.9	24.6

Tableau IV.23 : résultats SAMCEF linéaires avec tapes

Cependant, et malgré cette réduction des valeurs P_{cr} , on constate que les gains relatifs γ ne sont absolument pas affectés par la présence des tapes : les valeurs indiquées par le tableau IV.23 s'avèrent même légèrement supérieures (d'environ 5 %) à celles du tableau IV.9, conduisant à quasiment 60 % pour le cylindre n° 1 et 25 % pour le tube n° 6. L'intérêt des stratifications optimisées, ainsi que la démarche de conception et d'optimisation adoptée pour cette étude, sont donc bel est bien confirmés par ces résultats MEF incluant la modélisation des tapes de fermetures.

Afin de compléter et confirmer les résultats précédents, des calculs non linéaires de stabilité ont aussi été réalisés à l'aide des modèles SAMCEF avec tapes de fermeture. A l'instar des calculs pratiqués en § II.4.1, 30 incréments successifs de chargement ont été considérés pour chaque cas étudié, les temps de calcul observés étant alors de l'ordre de 40 minutes CPU. Les valeurs de pressions critiques déduites ainsi que les gains correspondants sont détaillés par le tableau IV.24. On remarquera que, à l'instar des résultats SOLVIA (cf. § IV.2.7.1), les limites de stabilité s'avèrent proches de celles obtenues précédemment en analyses linéaires : les valeurs de P_{cr} sont en effet réduites d'environ 5 à 10 % par rapport à celles du tableau IV.23. On vérifie ainsi, comme indiqué dans le chapitre II, que les analyses linéaires de stabilité permettent une estimation réaliste des pressions critiques des enceintes sous-marines. Par ailleurs, on remarquera que les gains relatifs γ s'avèrent, là encore, fort substantiels, confirmant une fois de plus les performances déduites des stratifications optimisées.

cylindre n°	P_{cr} ([55 N]) en MPa	P_{cr} ($[\theta_1/.../\theta_N]_{OPTI}$) en MPa	G (MPa)	γ (%)
1	14.2	22.5	8.3	58.5
2	26.2	38.4	12.2	46.6
3	44.5	62.3	17.8	40.0
4	65.1	90.3	25.2	38.7
5	109.2	141.5	32.3	29.6
6	161.0	202.1	41.1	25.6

Tableau IV.24 : résultats SAMCEF non linéaires avec tapes

Par ailleurs, on notera que les calculs présentés dans ce paragraphe ont permis de vérifier, à l'instar de l'étude numérique décrite en [VAN 98], que les tapes de fermetures n'étaient pas sujettes à un risque de flambage : comme précisé en § I.1.3, le phénomène d'instabilité concerne uniquement les corps d'enceintes composites (voir figure IV.32). Précisons enfin que, pour tous les calculs de stabilité présentés dans ce paragraphe, les modes de flambage observés se sont avérés tout à fait identiques à ceux indiqués par le tableau IV.9.

IV.2.7.3. Analyse statique

Malgré le risque prépondérant de flambage dû aux géométries élancées des corps d'enceintes, il s'avérait nécessaire d'évaluer l'incidence des motifs de stratifications optimisées sur la résistance statique des cylindres composites et sur la répartition des champs de contraintes (cf. § II.1.2.2). Les valeurs de contraintes limites du carbone/époxy employé, évaluées lors de travaux expérimentaux antérieurs, ont été fournies par l'IFREMER. Les contraintes longitudinales limites de traction et de compression (cf. § AI.2) considérées sont alors (en MPa) :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{1T} &= 2220 & ; & \quad \bar{\sigma}_{2T} = 33 & \quad ; & \quad \bar{\sigma}_{3T} = 17 \\ \bar{\sigma}_{1C} &= -1270 & ; & \quad \bar{\sigma}_{2C} = -133 & \quad ; & \quad \bar{\sigma}_{3C} = -124 \end{aligned}$$

Les valeurs des limites en cisaillement sont, elles, les suivantes :

$$\bar{\sigma}_4 = 35 \quad ; \quad \bar{\sigma}_5 = 35 \quad ; \quad \bar{\sigma}_6 = 70$$

Précisons, que comme indiqué par les services de l'IFREMER, ces valeurs sont, à ce jour, sujettes à de nombreuses incertitudes : en effet, et à l'instar des propriétés élastiques, la détermination expérimentale de ces limites s'avère fort délicate.

Compte tenu des symétries de la structure, du mode de sollicitation et de la déformée statique, un modèle MEF axisymétrique a été retenu pour cette étude. Toujours de par les symétries du problème, l'enceinte n'a été modélisée que sur une demi-longueur. La figure IV.33 présente l'allure du modèle correspondant codé sur SAMCEF.

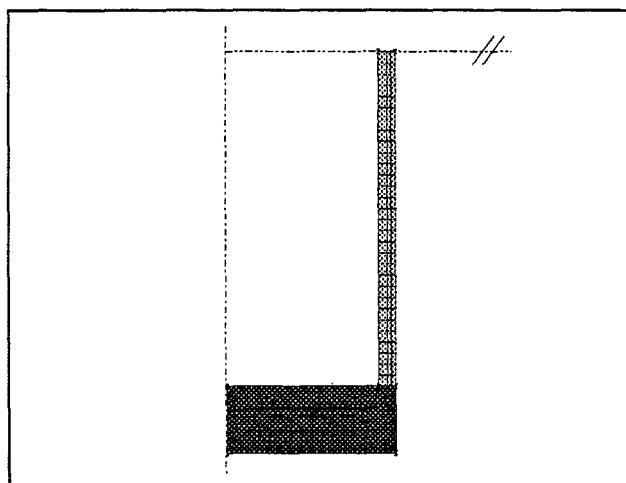


Figure IV.33 : modèle MEF axisymétrique

Afin de tenir compte des effets suiveurs de la sollicitation de pression hydrostatique externe (cf. § II.3.1), ces calculs statiques ont été effectués en analyses non linéaires, en considérant environ 30 incréments successifs de chargement. Notons que le modèle axisymétrique utilisé a permis de réduire considérablement les temps de calculs (alors égaux à environ 35 minutes CPU) vis à vis d'un modèle tridimensionnel complet (requérant plusieurs heures de calcul). Les valeurs finales de pressions considérées sont celles indiquées par le tableau IV.24 : ces calculs ont ainsi été réalisés à la limite de stabilité des cylindres. Ce choix induit une grande sévérité, les profondeurs d'immersion des enceintes étant affectées d'un coefficient de sécurité par rapport au niveau de pression critique (cf. § II.1.2.2). Par ailleurs, précisons que, comme pratiqué précédemment en § IV.2.7.2, les coiffes d'extrémités des cylindres et leurs liaisons par contact avec les tapes n'ont pas été prise en compte (cf. figure IV.33) : en effet, l'étude des répartitions de contraintes aux extrémités des cylindres composites sera réalisée ultérieurement par les services de l'IFREMER, et ceci afin de définir des géométries de coiffes permettant de proscrire tout risque d'endommagement. Aussi, tous les résultats détaillés dans ce paragraphe concernent la partie courante des enceintes : à ce sujet, précisons que les champs de contraintes s'avèrent en effet quasi-uniformes au-delà des extrémités. Signalons que tous les résultats seront exprimés en fonction de la coordonnée selon l'épaisseur notée z' ($0 \leq z' \leq h$) et définie en figure IV.34.

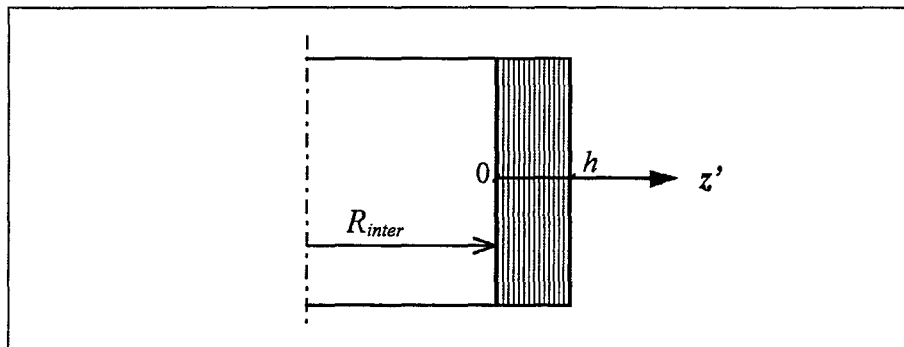


Figure IV.34 : coordonnée z'

Ces calculs ont permis l'évaluation de la résistance du stratifié à l'aide du critère interactif de TSAI-WU (cf. § AI.2.2). Les résultats sont exprimés par le biais de la marge de sécurité ϖ définie, par rapport à la relation (AI.30), par :

$$f = \varpi \sum_{i=1}^3 F_i \sigma_i + \varpi^2 \left(\sum_{i=1}^6 F_{ii} \sigma_i^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 2F_{13} \sigma_1 \sigma_3 \right).$$

Cette marge correspond donc au facteur par lequel le niveau de chargement peut être multiplié avant d'atteindre la rupture (correspondant alors à $\varpi = 1$). Le tableau IV.25 présente ainsi les valeurs minimales de marges relevées dans la partie courante des cylindres de référence et optimisés (cf. tableau IV.9). Les évolutions de ϖ dans l'épaisseur des cylindres, notées en fonction de z' ($0 \leq z' \leq h$, exprimé en mm en abscisse des graphiques), issues du module de post-traitement de SAMCEF sont présentées en figure IV.35.

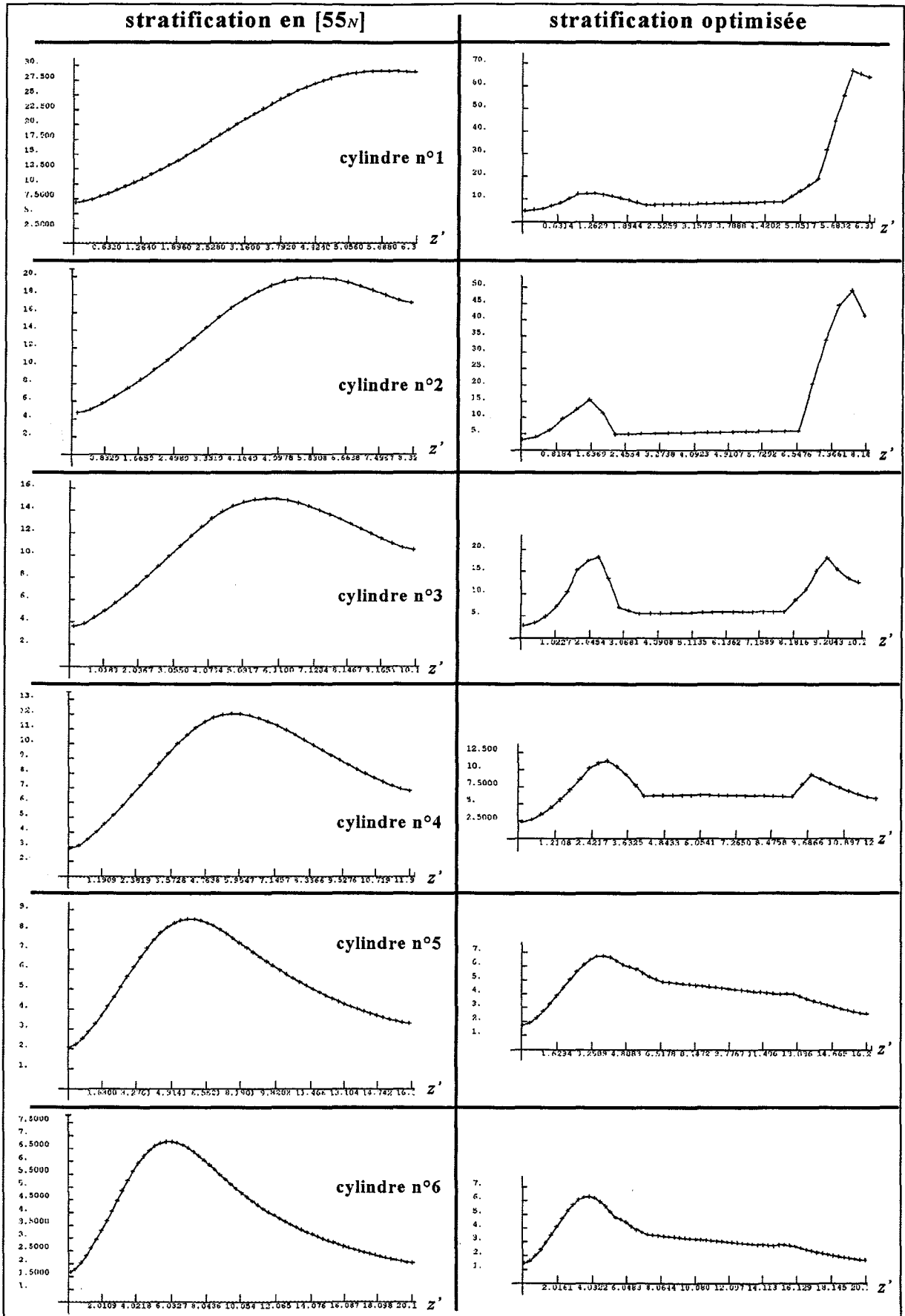


Figure IV.35 : marge de sécurité ω

cyindre n°	1	2	3	4	5	6
[55 _N]	6.9	4.7	3.7	2.9	2.1	1.6
[θ ₁ /θ ₂ /.../θ _N]	5.3	4.1	3.4	2.5	1.8	1.4

Tableau IV.25 : marges de sécurité ϖ minimales

De fait, il apparaît que la résistance statique des cylindres est donc assurée pour des valeurs de pressions hydrostatiques externes égales aux valeurs P_{cr} du tableau IV.24 : les marges indiquées par le tableau IV.25 s'avèrent en effet toutes supérieures à 1. Cependant, on remarquera que ces valeurs de ϖ décroissent sensiblement lorsque l'épaisseur de paroi des cylindres augmente. On vérifie bien que, comme indiqué en § II.1.2.2, les cylindres semi-épais sont plus sensibles à un risque d'endommagement pour des niveaux de pressions avoisinant les limites de stabilités. De plus, soulignons que les valeurs déduites des stratifications optimisées conduisent à des niveaux légèrement inférieurs à ceux des cylindres en [55_N] : rappelons néanmoins que les valeurs de pressions considérées pour les tubes optimisés lors de ces calculs statiques sont nettement supérieurs à ceux des cylindres de référence (cf. tableau IV.24). Par ailleurs, on constate au vu des graphiques de la figure IV.35 que les plis critiques, conduisant aux plus faibles valeurs de ϖ (données par le tableau IV.25), sont ceux situés sur la paroi interne (pour $z' = 0$), et ceci quel que soit le cylindre et le mode de stratification. En outre, notons les discontinuités des évolutions de ϖ pour les corps d'enceintes optimisées, discontinuités liées aux changements d'angles des plis.

A ce sujet, il s'avérait intéressant d'analyser l'influence des discontinuités d'angles des stratifications optimisées sur l'évolution des contraintes dans la paroi des tubes. Les figures IV.36 et IV.37 présentent ainsi la répartition des contraintes (exprimées pour chaque pli dans le repère matériau, cf. § AI.1.1) dans l'épaisseur de la partie courante des cylindres n° 1 de référence et optimisé. On constate ainsi que la séquence [90₂/60/30₅/60/90] induit bien des évolutions des contraintes normales atypiques vis à vis du tube en [55_N]. Néanmoins, et compte tenu des valeurs de contraintes limites considérées, les valeurs correspondantes s'avèrent acceptables. Notons que les évolutions des contraintes σ_{33} s'avèrent quasi-linéaires dans l'épaisseur des cylindres. Ainsi, et même à mi-épaisseur des tubes, les valeurs correspondantes ne sont absolument pas négligeables notamment vis à vis des niveaux de σ_{22} . Soulignons que ce constat conforte ainsi la discussion menée en § II.2.5.4. On remarquera aussi que, contrairement au cylindre de référence, la stratification optimisée comporte deux "pics" de contraintes de cisaillement σ_{12} dont la position correspond aux zones de transitions (constituées de deux plis à 60°) notées Ψ_1 et Ψ_2 (cf. § IV.2.4). Néanmoins, les valeurs induites, environ 6 MPa, s'avèrent admissibles. Les composantes σ_{13} et σ_{23} sont, elles aussi, réduites (moins de 5 MPa). Signalons que, quel que soit le cylindre en [55_N] et optimisé étudiés, les allures de répartitions se sont toutes avérées similaires à celles des figures IV.36 et IV.37, respectivement. La figure IV.38 présente, à titre indicatif, les résultats concernant le cylindre optimisé n° 6. On remarquera que le niveau des "pics" de contraintes σ_{12} s'avère quasi-identique à ceux de la figure IV.37, les cylindres optimisés semi-épais n'étant en effet pas davantage sollicités en cisaillement par rapport aux tubes optimisés minces.

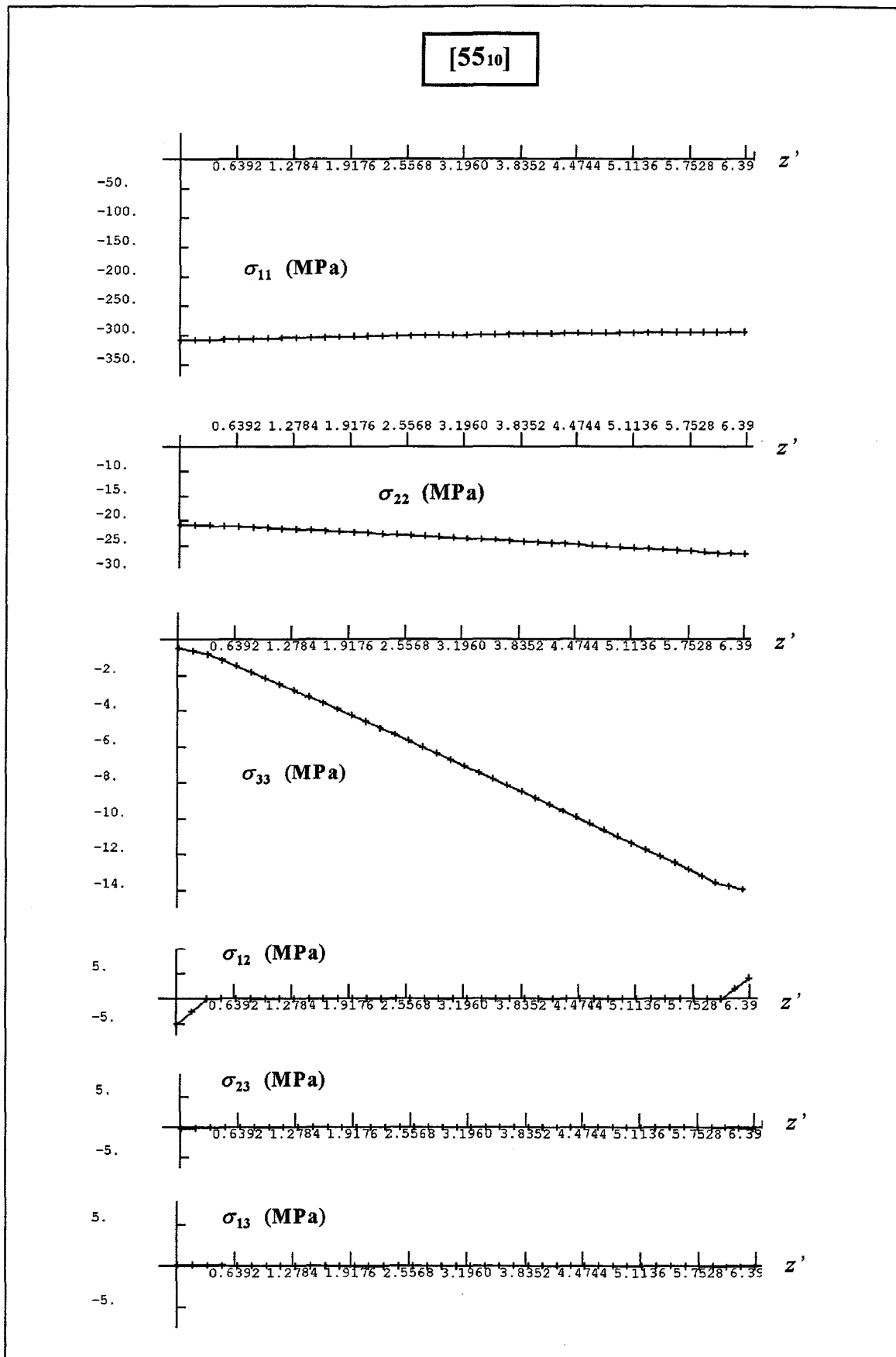


Figure IV.36 : répartition de contraintes – tube de référence n° 1

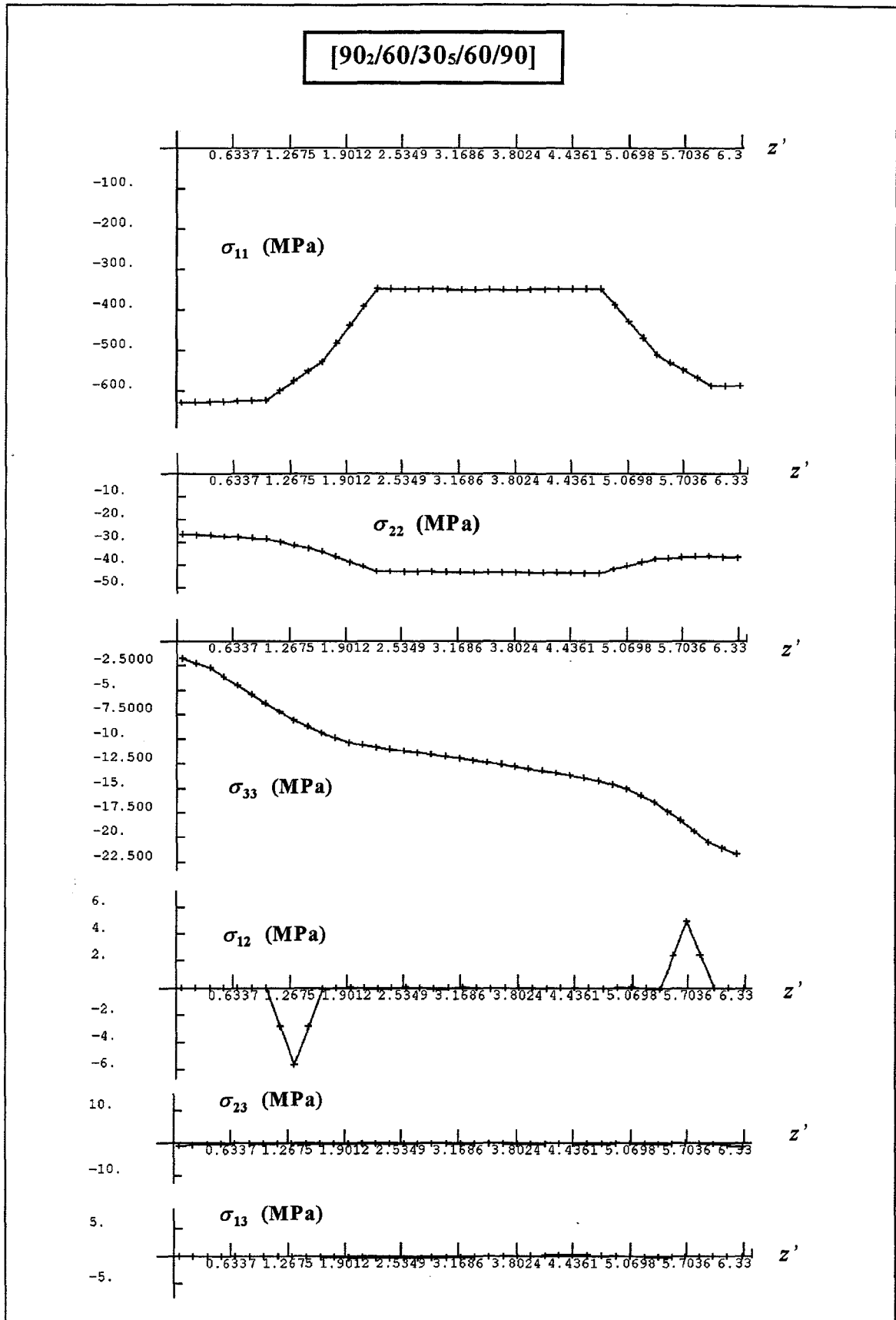


Figure IV.37 : répartition de contraintes – tube optimisé n° 1

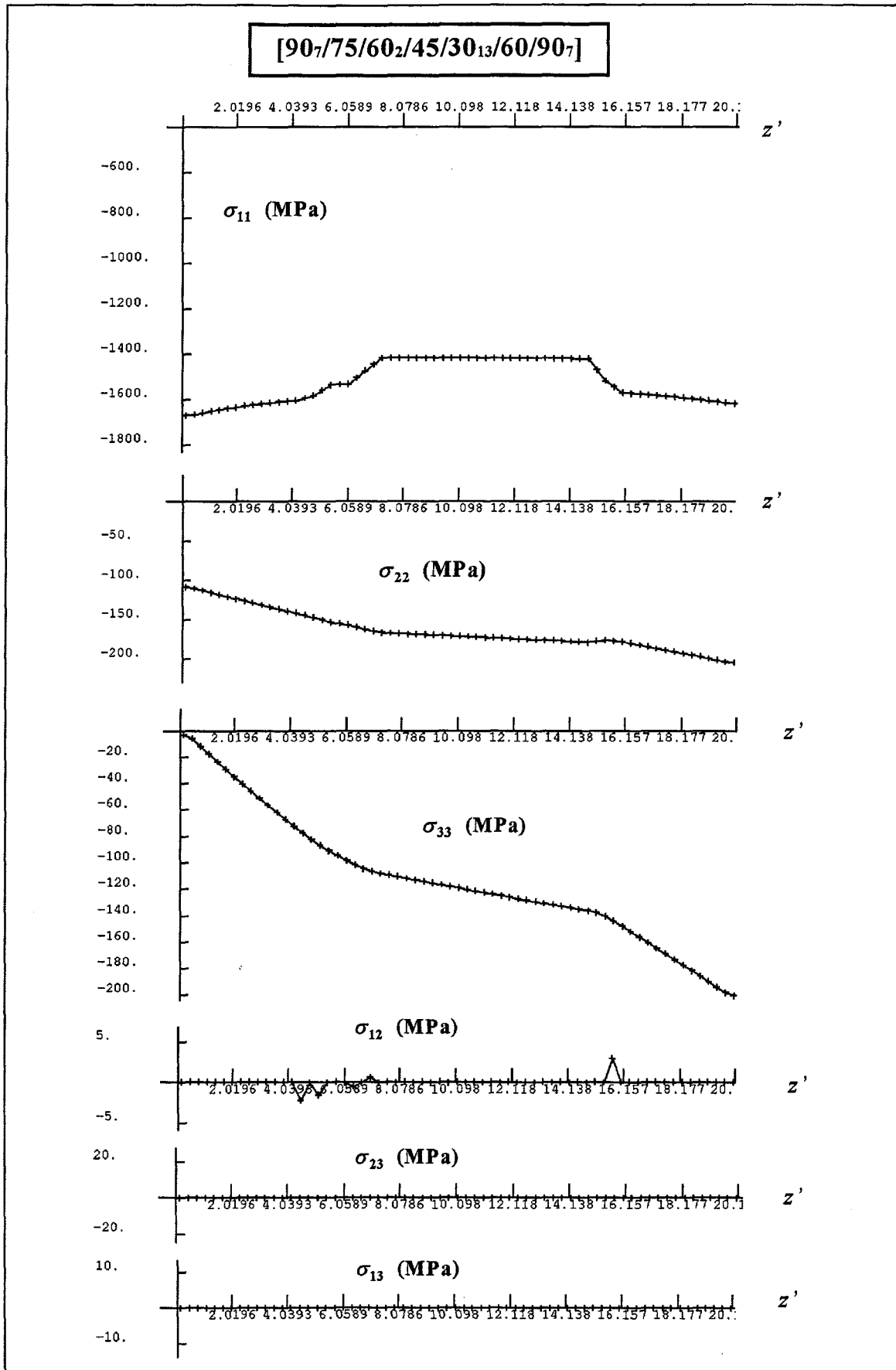


Figure IV.38 : répartition de contraintes – tube optimisé n° 6

Compte tenu de l'ensemble des résultats de ce paragraphe, il apparaît ainsi que les stratifications optimisées ne semblent pas être sujettes à un endommagement prématuré (se produisant avant le phénomène d'instabilité), et ceci même pour les cylindres semi-épais pourtant plus sensibles à de tels risques. Signalons que ce travail sera complété ultérieurement par l'étude de la géométrie des coiffes réalisée par les services de l'IFREMER ainsi que par le travail de GROHENS [GRO 99] [GRO 01] concernant l'identification du comportement endommageable non linéaire de tels stratifiés.

IV.2.8. Expérimentation

Compte tenu des résultats numériques issus de ce travail d'optimisation, les divers membres du projet MAS3-3-CT97-0091 ont alors convenu de procéder à des tests de mise en pression hydrostatique externe pour les six corps d'enceintes composites possédant les stratifications précisées par le tableau IV.9. A ce jour, le seul résultat disponible concerne l'expérimentation du tube n° 1 stratifié en $[90_2/60/30_3/60/90]$ et fabriqué par CNIM. Précisons qu'un contrôle ultrasonore, qui s'est avéré vierge, du cylindre composite a été réalisé au préalable par l'IFREMER afin de détecter tout éventuel défaut (porosité, délaminage...) résultant de l'élaboration (cf. § I.1.3). L'expérimentation a été réalisée par l'équipe anglaise de DERA (cf. figure I.1) à l'aide d'un caisson hyperbare similaire à ceux utilisés par l'IFREMER et schématisés en figure II.3. Rappelons que ce mode de test en flambage du corps d'enceinte équipé de tapes ne permet pas le contrôle du phénomène d'instabilité : lors de la mise en pression hydrostatique externe réalisée de façon progressive et lente (quasi-statique), le franchissement du niveau de pression critique conduit irrémédiablement à la ruine brutale du cylindre.

Ce test de mise en pression hydrostatique externe a mis en évidence le flambage du cylindre composite selon un mode caractérisé par les nombres de demi-ondes suivants : $m=1$ et $n=3$. Ce résultat s'avère ainsi tout à fait en accord avec les résultats MEF issus de l'étude détaillée par les paragraphes précédents (voir § IV.2.7.2). A ce propos, la figure IV.39 présente les mesures effectuées à l'aide de jauges de déformation circonférentielles réparties, à mi-longueur, sur la surface interne du tube. Ces résultats sont donnés pour cinq niveaux successifs de pression hydrostatique. On vérifie ainsi la présence de trois lobes circonférentiels (cf. figure II.9). Par ailleurs, et comme déjà souligné en § II.1.2.2, on constate que la formation de ces lobes est progressive et débute à un niveau de pression certes proche mais néanmoins légèrement inférieur à la valeur critique. Enfin, notons que la rupture du cylindre composite s'est produite dans la partie courante et à proximité du 2^{ème} lobe du mode de flambage (situé à environ 210° sur la circonférence, cf. figure IV.39).

Lors de ce test de mise en flambage du cylindre optimisé n° 1, le niveau de pression critique s'est avéré être égal à 21.7 MPa. Ce résultat est particulièrement remarquable : en effet, les calculs non linéaires SAMCEF ont conduit à une valeur de P_{cr} égale à 22.5 MPa (cf. tableau IV.24), soit moins de 1 MPa (et donc moins de 5 %) de différence. Rappelons de plus

que ces calculs non linéaires de stabilité présentés en § IV.2.7 ont été réalisées en considérant, pour le carbone/époxy employé, les valeurs de caractéristiques élastiques maximales (cf. § IV.2.6.5). Aussi, et malgré ces incertitudes sur les valeurs des propriétés matériau, la pression critique expérimentale s'avère réellement très proche de celle calculée par la MEF. A ce propos, précisons que, à ce jour, aucune étude de recalage des propriétés matériau et de modèles MEF n'a été entreprise par les partenaires du projet MAS3-3-CT97-0091 suite à ce travail expérimental. Par ailleurs, on regrettera que cette étude n'ait pas été complétée par l'expérimentation d'un cylindre similaire mais stratifié en [55_N] : en effet, la valeur expérimentale P_{cr} du tube de référence, issu du même processus et de conditions identiques de fabrication, aurait ainsi permis l'appréciation des valeurs de gains G et γ réels. On notera néanmoins que la pression critique mesurée (21.7 MPa) s'avère nettement supérieure à celles calculée par la MEF pour le cylindre de référence n° 1 stratifié en [55_N] (soit 14.2 MPa, cf. tableau IV.24).

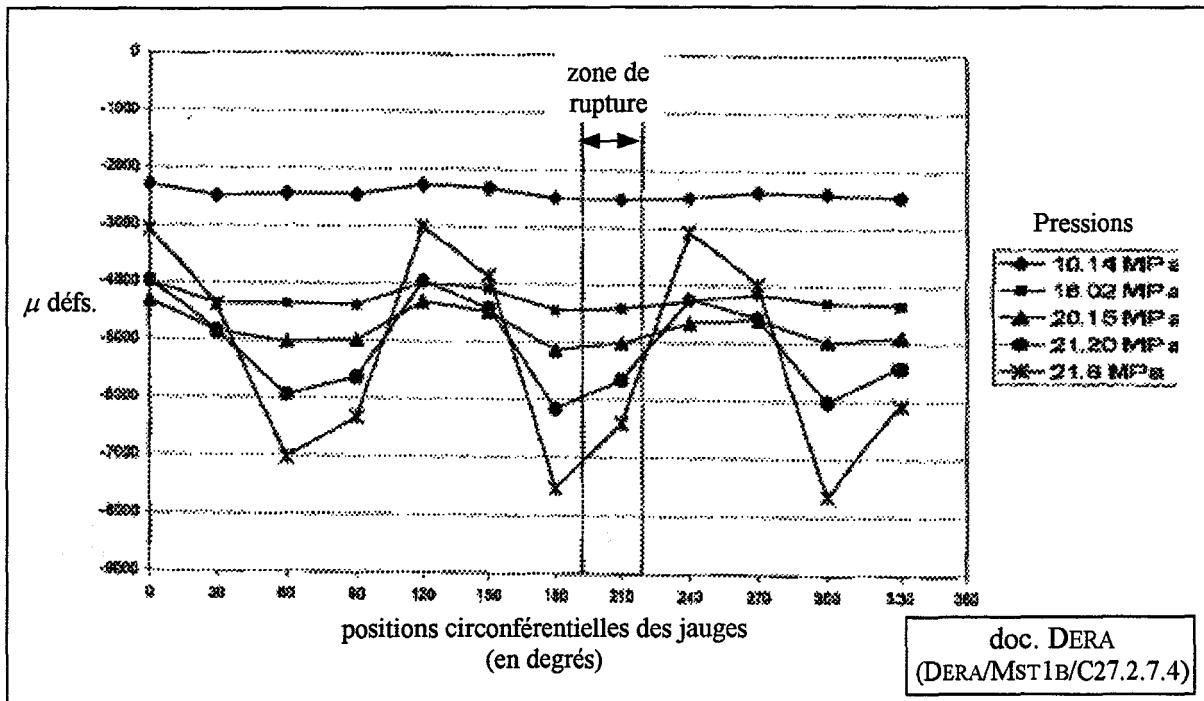


Figure IV.39 : résultats des mesures de jauges circonférentielles

IV.2.9. Bilan partiel

Ce travail d'optimisation de la stratification de six cylindres en carbone/époxy a ainsi mis en évidence une allure caractéristique en [90_{N1}/Ψ₁/30_{N2}/Ψ₂/90_{N3}]. Ce motif de stratification optimisé a été obtenu quel que soit le modèle analytique utilisé et quel que soit l'épaisseur de paroi considérée. Les modèles SAMCEF ont montré que les solutions optimisées conduisaient à des gains (en termes de pressions critiques) substantiels vis à vis des tubes de référence stratifiés en [55_N] : les valeurs relatives γ se sont avérées comprises entre plus de 20 % et quasiment 60 %.

Les gains G correspondants sont, eux, apparus supérieurs à 8 MPa pour le cylindre n° 1 et excédant 40 MPa pour le tube n° 6 (cf. tableau IV.24). La confrontation des résultats issus d'autres code de calculs (ADINA et SOLVIA) a, de plus, confirmé l'intérêt des stratifications optimisées. L'évaluation de la robustesse des solutions retenues a notamment montré que les inévitables imprécisions sur les valeurs d'angles et d'éventuelles imperfections géométriques n'étaient que très peu influentes sur leurs performances. De plus, il est apparu que, malgré des perturbations et variations importantes des propriétés matériau, les gains relatifs et même les allures de stratifications optimisées n'étaient que très peu affectées ou modifiées. Ce travail a ainsi permis de constater et de vérifier qu'il existait des solutions de conception autres que les séquences classiques en $[55_M]$ mieux adaptées à la nature de la sollicitation et au risque inhérent d'instabilité.

Les divers résultats MEF ont permis de vérifier que les modèles analytiques utilisés possédaient une bonne sensibilité aux paramètres de stratifications, permettant la détermination de solutions procurant l'accroissement sensible des pressions critiques. De plus, pour les solutions issues des modèles CT3 et LOG, les gains calculés par les modèles SAMCEF Mindlin et volumique se sont avérés nettement supérieurs (particulièrement pour les tubes semi-épais) à ceux des solutions déduites du modèle de type SANDERS. Ces résultats confirment ainsi la validité de la modélisation des effets de cisaillement transverse adoptée pour les formulations CT3 et LOG. Compte tenu de la sensibilité des structures composites et semi-épaisses à ces effets, il s'avère ainsi particulièrement opportun de recourir à l'utilisation de modèles permettant la prise en compte de ces effets, et ceci contrairement aux travaux antérieurs de la littérature (cf. § I.2.3). En outre, c'est la solution optimisée issue du modèle LOG qui est apparue la plus intéressante pour le cylindre le plus épais (n° 6) : bien que n'attestant pas à lui seul de la validité de la formulation LOG, ce résultat conforte la discussion et l'étude menées en § II.2.1 et confirme l'intérêt de ce modèle pour l'optimisation des tubes de fortes épaisseurs. Par ailleurs, l'analyse des performances de l'AG a permis d'apprécier sa robustesse et le très bon niveau de reproductibilité des solutions, et ceci même pour des problèmes induisant des cardinalités très élevées. Les temps de calculs observés se sont avérés tout à fait exploitables, et ceci même dans un contexte industriel.

L'expérimentation du tube n° 1 avec stratification optimisée s'est avérée tout à fait en accord avec les résultats numériques, la valeur de charge critique relevée étant très proche de celle calculée par la MEF. Ce résultat, certes remarquable, ne permet néanmoins pas à lui seul de valider l'ensemble de l'étude numérique précédemment détaillée. Rappelons à ce propos que l'expérimentation des cinq autres cylindres optimisés sera réalisée ultérieurement dans le cadre du projet MAS3-3-CT97-0091. Les tests des cylindres les plus épais (n° 5 et 6) permettront notamment l'évaluation expérimentale des risques d'endommagement prématuré évoqués en § II.1.2.2 et en § IV.2.7.3.

IV.3. Expérimentation de cylindres en verre/époxy

Afin de compléter l'étude numérique précédente concernant des corps d'enceintes en carbone/époxy, l'évaluation expérimentale des performances déduites de cylindres optimisés a été réalisée. Ce travail a été intégralement effectué au sein de l'axe Structures du Laboratoire Mécanique et Matériaux, démarche permettant ainsi de s'affranchir des délais inhérents à la campagne expérimentale prévue dans le cadre du projet MAS3-3-CT97-0091 (cf. § IV.2.8 et § IV.2.9). De plus, cette étude a consisté en l'évaluation des pressions critiques de tubes possédant des stratifications optimisées et aussi de cylindres de référence en [55_M] produits dans des conditions de fabrication identiques : ce travail a ainsi permis l'appréciation des gains G et γ expérimentaux contrairement aux résultats présentés en § IV.2.8. Les tests de mise en pression hydrostatique externe ont été réalisés à l'aide du système d'essais spécifique présenté en figure II.4. Notons que, compte tenu des performances de ce dispositif et afin de limiter le coût de fabrication des tubes testés, cette étude expérimentale a concerné des cylindres minces réalisés en verre/époxy. Enfin, précisons que ce travail a été réalisé en collaboration avec la société STRAGLEN (située à S^T Laurent en Gâtines – 37), fabricant ayant déjà produit des corps d'enceintes composites en verre/époxy destinés aux applications sous-marines de l'IFREMER.

IV.3.1. Etude numérique préliminaire

Considérant les possibilités et les coûts de fabrication ainsi que les performances du système d'essais développé au LMM (dimension et pression maximale du caisson, cf. § II.1.2.1), un travail d'avant-projet a conduit à retenir les caractéristiques géométriques suivantes (rayon interne et longueur exprimés en mm) :

$$R_{Inter} = 76.2 \quad ; \quad L = 400.$$

Précisons que cette valeur de R_{Inter} correspond au rayon d'un mandrin standard de STRAGLEN.

Afin de limiter le coût de production des cylindres, un verre E / époxy (fibre VETROTEX, résine MY750) a été retenu. Signalons que ce matériau constitutif a été précédemment utilisé pour la réalisation d'applications sous-marines [GRO 99]. Des travaux antérieurs de caractérisation menés par l'IFREMER ont permis de vérifier que ce composite était très semblable, tant au niveau des propriétés propres des constituants, de la fraction volumique de renforts (sensiblement égale à 60 %) que des caractéristiques orthotropes d'un pli, au verre / époxy caractérisé par DERA [SOD 98] et présenté précédemment en § IV.2.3.8. Aussi, lors de cette étude numérique, ce sont les valeurs suivantes de propriétés élastiques anisotropes qui ont été utilisées (modules en GPa) :

$$\begin{aligned} E_1 &= 45.6 \quad ; \quad E_2 = 16.2 \quad ; \quad E_3 = 16.2 \\ G_{12} &= 5.83 \quad ; \quad G_{13} = 5.83 \quad ; \quad G_{23} = 5.78 \\ \nu_{12} &= 0.278 \quad ; \quad \nu_{13} = 0.278 \quad ; \quad \nu_{23} = 0.4 \end{aligned}$$

Précisons dès à présent que ces valeurs de caractéristiques matériau ont été retenues pour l'ensemble de l'étude ici décrite. En effet, un travail complet de caractérisation et de recalage des neuf propriétés anisotropes aurait imposé l'emploi des très nombreux moyens expérimentaux évoqués en § I.1.3 : essais sur anneaux, sur cubes prélevés dans des tubes, mesures de vitesses d'ondes ultrasonores... Une telle démarche aurait notamment nécessité, à l'instar des travaux décrits en [GRO 00], des essais de compression axiale alors fort délicats à réaliser pour des tubes minces et élancés de par le risque d'instabilité. Aussi, et considérant les résultats de travaux antérieurs effectués dans le cadre des projets BRITE et MAST [SOD 98] [VAN 98] [GRO 99], le jeu de caractéristiques précédemment détaillé a été considéré comme étant suffisamment fiable et réaliste pour l'analyse du comportement mécanique global des cylindres en verre/époxy. Par ailleurs, soulignons que l'objectif premier et l'intérêt principal de la présente étude a consisté en l'appréciation expérimentale du gain relatif γ procuré par une stratification optimisée et non pas en la détermination numérique exacte des limites de stabilité. A ce propos, on remarquera que l'évaluation numérique de l'influence de "perturbations" sur les caractéristiques matériau (présentée plus avant dans ce paragraphe) a permis de montrer que ce gain relatif n'était pas sensiblement affecté de telles modifications des propriétés anisotropes, et ceci à l'instar du travail présenté en § IV.2.6.5.

Concernant les angles de stratification admissibles, six valeurs (comprises entre 15 et 90° et variant par pas de 15°) ont été retenues conformément aux indications de STRAGLEN :

$$\theta_i \in \{15; 30; 45; 60; 75; 90\}.$$

L'épaisseur nominale de tout pli est sensiblement égale à 0.7 mm. Considérant toujours les caractéristiques du système d'essais et les possibilités de production, une séquence de stratification comportant 7 plis a été retenue. L'épaisseur de paroi h des tubes étudiés est donc égale à environ 4.9 mm, le rayon moyen R avoisinant, lui, 78.7 mm. On remarquera la valeur du ratio R/h , alors supérieur à 16, ainsi que le rapport d'élancement L/R environ égal à 5. Cette géométrie tubulaire mince et élancée ayant été définie, un travail d'optimisation de la stratification a ainsi été entrepris selon une démarche identique à celle détaillée pour les six cylindres en carbone/époxy précédemment étudiés. Aussi, il s'avérerait fastidieux de détailler l'ensemble de cette étude numérique, ce paragraphe se limitera à la présentation des principaux résultats.

Des calculs d'optimisation par AG ont ainsi été réalisés par utilisation des modèles de type SANDERS et CT3. Précisons que, le stratifié considéré comportant 7 plis et compte tenu des prescriptions angulaires, la cardinalité correspondante du problème d'optimisation est alors égale à 6^7 , soit donc environ $2.8 \cdot 10^5$ solutions de conception différentes. Quel que soit le modèle analytique employé, ces calculs ont conduit à l'obtention d'une séquence de stratification optimisée constituée par la séquence angulaire $[90_3/15_2/90_2]$ dont l'allure est représentée en figure IV.40. Comme déjà précisé en § IV.2.3.8, on soulignera, là encore, la similitude de cette séquence avec celles obtenues pour les cylindres en carbone/époxy.

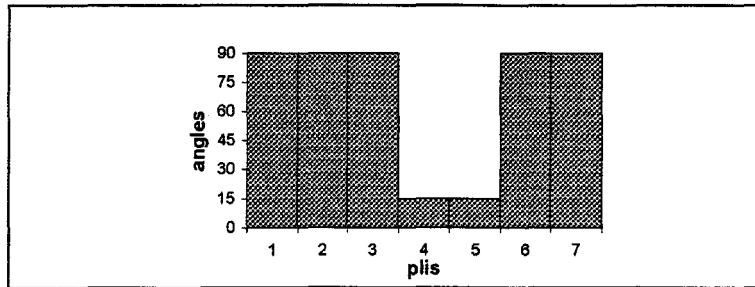


Figure IV.40 : séquence de stratification optimisée

Le tableau IV.26 détaille les résultats de calculs linéaires de stabilité effectués à l'aide des modèles SAMCEF hybride et Mindlin. Notons que, considérant le mode de maintien et d'obturation des tubes composites dans le système d'essais réalisée à l'aide de pièces massives, très rigides (cf. § II.1.2.1), la modélisation des liaisons aux extrémités a été réalisée par utilisation d'éléments de type corps rigides. Compte tenu de l'ordre de grandeur des pressions critiques, ces résultats sont exprimés en bars. Notons que les valeurs P_{cr} déduites des modèles SAMCEF hybride et Mindlin sont relativement proches : de par la faible épaisseur de paroi des cylindres, les effets de cisaillement transverse s'avèrent en effet relativement peu sensibles. On remarquera de plus les valeurs de gain relatif γ , toutes proches de 40 %. Par ailleurs, les résultats issus du modèle CT3 (quasi-identiques aux valeurs déduites du modèle de type SANDERS) sont aussi précisés. A ce propos, on constate que les valeurs analytiques de gains s'avèrent nettement inférieures à celles calculées par la MEF contrairement à la tendance observée lors de l'étude des cylindres en carbone/époxy (cf. § IV.2.3). Cet écart est ici lié à une différence sur les modes de flambage : en effet, considérant à l'instar de la MEF un mode de type ($m = 1 ; n = 3$) pour la stratification optimisée, la pression critique calculée par le modèle CT3 est alors environ égale à 100 bars, la valeur correspondante de γ étant de fait proche de 50 %. Précisons aussi que des calculs d'optimisation ont été réalisés en contraignant les modes de flambage calculés analytiquement : à l'instar du travail décrit en § IV.2.3.10, cette démarche a conduit à l'obtention de solutions optimisées nettement moins performantes que la séquence en $[90_3/15_2/90_2]$.

modèles	[55 ₇]		[90 ₃ /15 ₂ /90 ₂]		G (bars)	γ (%)
	P_{cr} (bars)	m, n	P_{cr} (bars)	m, n		
CT3	66.5	1,3	83.1	1,2	16.6	25.0
SAMCEF hybride	66.2	1,3	93.5	1,3	27.3	41.2
SAMCEF Mindlin	64.3	1,3	90.0	1,3	25.7	40.0

Tableau IV.26 : résultats des calculs de stabilité

Des calculs complémentaires ont aussi été effectués à l'aide du modèle SAMCEF Mindlin : il s'est ainsi agi de déterminer les limites de stabilité (et gains correspondants) pour des conditions aux limites de type encastrement à l'instar du travail présenté en § IV.2.6.1. De plus, un calcul de stabilité non linéaire a été réalisé. Les résultats obtenus, précisés par le tableau IV.27, permettent de constater que les valeurs P_{cr} déduites s'avèrent très proches de

celles du tableau IV.26. Les valeurs de gains sont, de fait, elles aussi très similaires. Précisons enfin qu'il n'a pas été jugé nécessaire de procéder à l'évaluation de la résistance statique des cylindres : en effet, comme précisé en § II.1.2.2 et compte tenu des résultats de travaux expérimentaux antérieurs tels que ceux décrits en [GIN 98a], [GIN 98b] et [GIN 99a], le risque d'instabilité est prépondérant et se manifeste très "rapidement", à des niveaux de sollicitation faibles, pour de telles géométries tubulaires minces et élancées. Ainsi, et comme observé en § IV.2.7.3 pour les cylindres minces, le niveau des contraintes de pré-flambage est très inférieur aux valeurs des limites élastiques, les marges de sécurité étant de fait très élevées.

modèles	[55 ₇]		[90 ₃ /15 ₂ /90 ₂]		G (bars)	γ (%)
	P _{cr} (bars)	m, n	P _{cr} (bars)	m, n		
encastrement	65.7	1,3	92.3	1,3	26.6	40.5
analyse non linéaire	61.9	1,3	86.9	1,3	25.0	40.4

Tableau IV.27 : résultats complémentaires – modèle SAMCEF Mindlin

A l'instar de l'étude détaillée en § IV.2.6, des calculs complémentaires ont été réalisés afin d'évaluer la robustesse de la stratification optimisée en [90₃/15₂/90₂]. Les résultats obtenus ont montré que les imprécisions (pour un intervalle de tolérance égal à ±5° conformément aux indications du fabricant) sur les valeurs d'angles et les imperfections géométriques n'avaient qu'une incidence minime sur les valeurs de gains et les allures de stratifications optimisées. Par ailleurs, et afin d'évaluer l'influence de perturbations des propriétés élastiques du verre/époxy sur l'allure de stratification optimisée, des calculs d'optimisation similaires à ceux pratiqués en § IV.2.6.5 ont été effectués. Pour ce travail, les caractéristiques ont ainsi été déterminées aléatoirement dans les intervalles suivants (modules en GPa) :

$$\begin{aligned}
 46 \leq E_1 \leq 58 & \quad ; \quad 16 \leq E_2 \leq 24 & \quad ; \quad 16 \leq E_3 \leq 24 \\
 5.5 \leq G_{12} \leq 9 & \quad ; \quad 5.5 \leq G_{13} \leq 9 & \quad ; \quad 5.8 \leq G_{23} \leq 7.5 \\
 0.28 \leq \nu_{12} \leq 0.32 & \quad ; \quad 0.28 \leq \nu_{13} \leq 0.32
 \end{aligned}$$

Précisons que ces valeurs d'encadrement ont été fournies par l'IFREMER : elles sont issues de nombreux essais de caractérisation complétés par des calculs d'homogénéisation périodique réalisés, d'après les propriétés mécaniques propres des constituants, pour une fraction volumique de fibres variant entre 54 % et 71 %. Notons que le coefficient ν_{23} ne varie pas sensiblement et a été considérée égal à sa valeur initiale, soit donc 0.4. Le rapport d'anisotropie E_1/E_2 (cf. § IV.2.1) est ainsi situé dans l'intervalle suivant :

$$\frac{46}{24} \approx 1.92 \leq \frac{E_1}{E_2} \leq \frac{58}{16} \approx 3.63$$

Ainsi, 200 calculs successifs d'optimisation ont été réalisés (à l'aide du modèle CT3) en générant aléatoirement, au démarrage de chacun d'entre eux, un jeu de caractéristiques anisotropes appartenant aux intervalles précédemment précisés. La figure IV.41 présente les résultats statistiques issus de ces calculs. Ainsi, ce travail a permis de conforter le choix d'une

séquence de stratification optimisée de type $[90_3/15_2/90_2]$. Par ailleurs, précisons que quelques analyses MEF (modèle SAMCEF Mindlin) ont été réalisées en utilisant des jeux de propriétés matériau "perturbées", générés aléatoirement dans les intervalles précédemment précisés. A l'instar du travail présenté en § IV.2.6.5, ces calculs ont permis de vérifier que le gain relatif γ déduit de la séquence $[90_3/15_2/90_2]$ n'était pas sensiblement modifié par ces perturbations, les valeurs calculées avoisinant toujours 40 %.

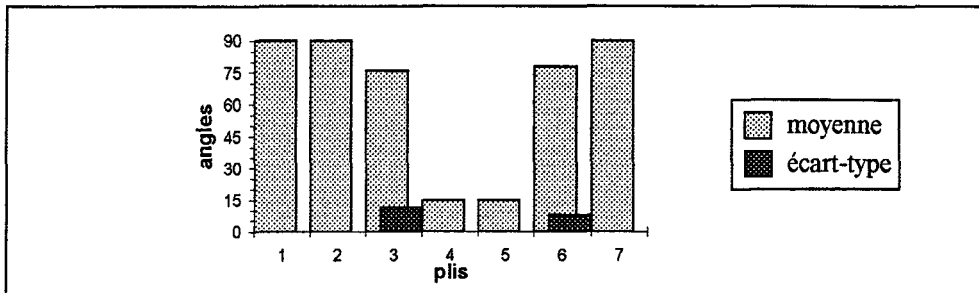


Figure IV.41 : optimisation avec perturbations aléatoires des propriétés matériau

IV.3.2. Résultats expérimentaux

Suite à l'étude numérique précédente, deux tubes composites, l'un stratifié en $[55_7]$ et l'autre en $[90_3/15_2/90_2]$, ont été réalisés par STRAGLEN, et ceci dans des conditions de fabrication par enroulement filamentaire semblables. Un contrôle géométrique succinct a permis de vérifier que l'épaisseur de ces cylindres était bien environ égale à 5 mm. Précisons que ces tubes ont été produits pour des longueurs avoisinant 1 mètre. Il a ainsi été possible de procéder à deux séries d'essais : pour chacune de ces séries, un cylindre stratifié en $[55_7]$ et un tube en $[90_3/15_2/90_2]$ (de longueurs égales à 400 mm) ont été testés successivement, et donc dans des conditions d'essais (réglages de la machine d'essais, étalonnage du capteur de pression, température ambiante...) identiques. Notons à ce sujet que le déplacement de la traverse de la machine de traction-compression (cf. figure II.4) a été fixée à 10 mm/mn, vitesse conduisant à une mise en pression de type quasi-statique [GIN 98b]. La figure IV.42 suivante présente, à titre indicatif, deux cylindres équipés de leurs coiffes métalliques (cf. figure II.7).

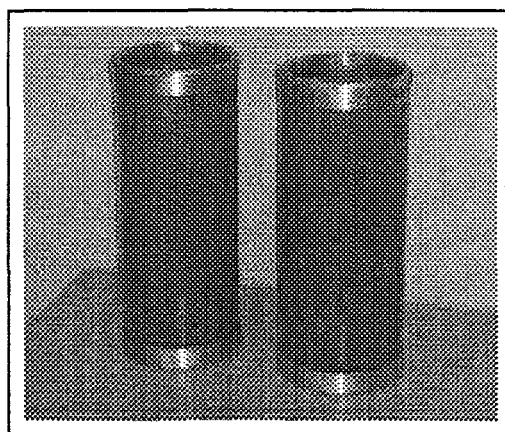


Figure IV.42 : tubes testés

La figure IV.43 présente les évolutions des valeurs de pression, mesurées à l'aide du capteur de pression, en fonction du déplacement de la traverse de la machine de traction-compression (et donc du piston générateur, cf. figure II.4). Précisons que ces résultats sont issus de la première série d'essai, les allures qualitatives déduites de la seconde série étant néanmoins quasi-identiques. On remarquera que, comme déjà précisé en § II.1.2.2, les évolutions de pré-flambage s'avèrent quasi-linéaires au-delà d'environ 10 bars (valeur correspondant à la pression nécessaire à la compression initiale des joints d'étanchéité du système). Par ailleurs, les seuils d'instabilité apparaissent très distinctement.

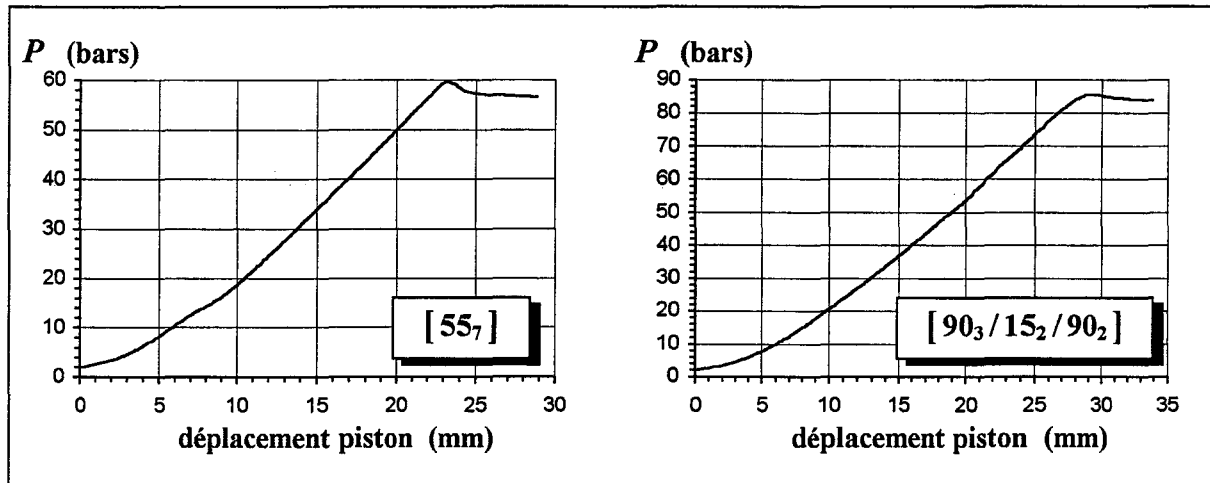


Figure IV.43 : évolutions des pressions – série d'essais n° 1

Les valeurs des pressions critiques des cylindres de référence et optimisés relevées lors des deux séries d'essais sont indiquées par le tableau IV.28. On remarquera premièrement que les valeurs P_{cr} des cylindres de référence sont quasi-identiques, environ égales à 60 bars. Il existe par contre un écart de 3 bars entre les deux valeurs de pression critiques des cylindres stratifiés en [90₃/15₂/90₂]. Soulignons que ces résultats s'avèrent néanmoins tous très proches de ceux calculés par la MEF : les pressions critiques des cylindres de référence diffèrent ainsi d'environ 2 bars (soit donc un écart inférieur à 4 %) avec la valeur calculée par analyse non linéaire (égale à 61.9 bars, cf. tableau IV.27). De même, les écarts entre les valeurs P_{cr} calculée par la MEF et celles expérimentales sont inférieurs à 5 % pour les cylindres stratifiés en [90₃/15₂/90₂]. Notons que ces résultats, remarquables, tendent ainsi à confirmer la fiabilité du jeu de caractéristiques élastiques orthotropes considéré pour l'étude numérique préliminaire (cf. § IV.3.1).

série d'essais	P_{cr} ([557]) en bars	P_{cr} ([90 ₃ /15 ₂ /90 ₂]) en bars	G (bars)	γ (%)
n° 1	59.6	85.8	26.2	44.0
n° 2	59.7	82.7	23.0	38.5

Tableau IV.28 : pressions critiques expérimentales et gains correspondants

Concernant l'appréciation des performances procurées par la stratification optimisée en [90₃/15₂/90₂], les résultats expérimentaux s'avèrent, là aussi, remarquables : les valeurs de gain relatif précisées par le tableau IV.28 sont, en effet, très proches de 40 % à l'instar de l'ensemble des résultats déduits des calculs MEF. On remarquera néanmoins une différence de 5.5 % sur ces valeurs expérimentales γ , écart bien entendu lié à la différence entre les valeurs P_{cr} des cylindres optimisés. Soulignons qu'un nombre important d'essais aurait permis une analyse statistique des valeurs de pressions critiques et des gains correspondants. Cependant, une telle démarche s'avérait incompatible avec les contraintes temporelles et budgétaires de cette étude. De plus, et malgré cet écart sur les valeurs expérimentales γ , l'accroissement de pression critique déduit de la séquence [90₃/15₂/90₂] s'est bien avéré substantiel, marqué et très net lors des deux séries d'essais. Ainsi, les résultats de cette étude expérimentale, complétant avantageusement l'ensemble des travaux numériques détaillés en § IV.2, permettent de confirmer l'intérêt procuré par une conception optimisée de la stratification des corps d'enceintes sous-marines.

Par ailleurs, précisons que les modes de flambage observés lors de ces séries d'essais, tant pour les cylindres en [55₇] que pour ceux optimisés, se sont tous bien avérés être caractérisés par $m = 1$ et $n = 3$ à l'instar des résultats MEF (cf. tableaux IV.26 et IV.27). La figure IV.44 présente ainsi deux photographies issues de cette étude expérimentale et illustrant les observations effectuées.

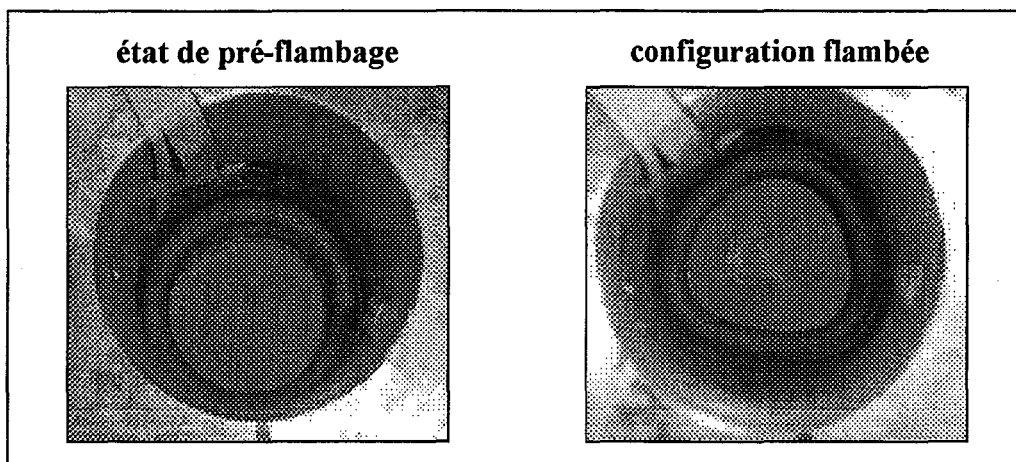


Figure IV.44 : visualisation des modes de flambage

Enfin, précisons qu'un contrôle ultrasonore des cylindres ici étudiés a été réalisé par les services de l'IFREMER [RIO 98] : ce travail a, en premier lieu et avant de procéder aux tests de flambage, permis de vérifier que les tubes ne comportaient pas de défauts macroscopiques (délaminages, porosités...) résultants de l'élaboration. Notons de plus que les cartographies des surfaces des tubes de référence et optimisés se sont avérées tout à fait similaires. Par ailleurs, des contrôles ultrasonores identiques mais effectués après essais ont révélé que, malgré l'amplitude importante des déplacements de post-flambage autorisés lors de l'expérimentation (cf. figure IV.44), les tests de flambage en pression externe n'avaient absolument pas généré de défaut et d'endommagement macroscopiques perceptibles. La figure

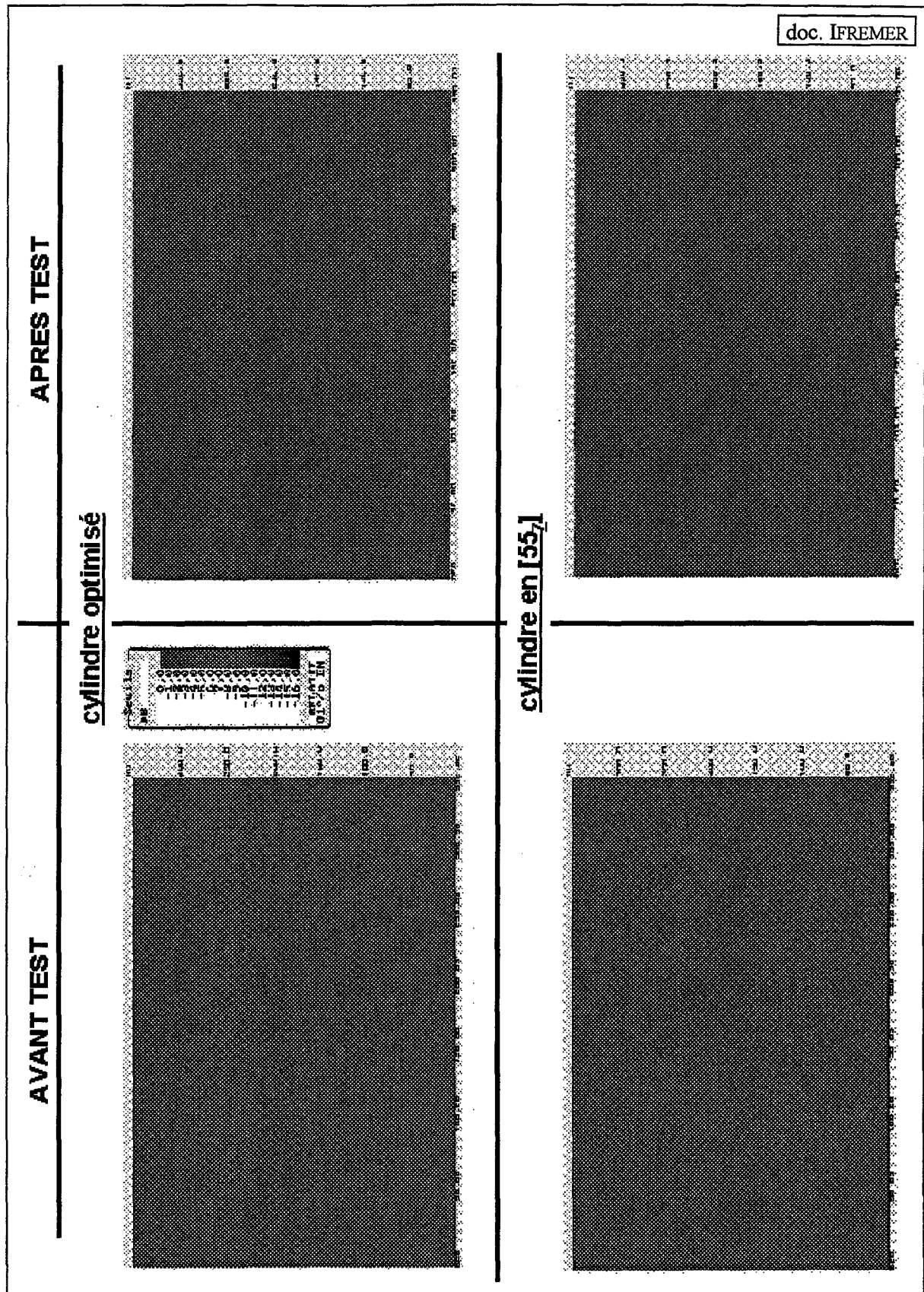


Figure IV.45 : cartographies ultrasonores des cylindres

IV.45 présente ainsi, à titre indicatif, les résultats de contrôles des deux cylindres (en [55-7] et optimisé) testés lors de la seconde série d'essais. Notons que chacune de ces cartographies représente la surface cylindrique développée (circonférence en abscisse et longueur des tubes en ordonnée). On constate ainsi, qualitativement, que le test de flambage n'a généré, pour aucun des deux tubes, de délaminages qui seraient alors repérés par des modifications sensibles de motifs et de couleurs [RIO 98]. Ainsi, ce travail a permis de vérifier que les cylindres testés n'étaient pas sujets à un risque d'endommagement prématuré, se manifestant à des niveaux de chargement inférieurs aux limites de stabilité.

Conclusion

Ce travail de thèse doctorale a concerné l'optimisation d'enceintes sous-marines composites développées dans le cadre de projets industriels de la Communauté Européenne. Le mode de stratification initial en [55_N] des cylindres composites considérés s'avérait peu justifié compte tenu du risque de flambage structural, critère dimensionnant pour de telles structures immergées en grandes profondeurs. Afin de procéder à la recherche de stratifications accroissant les limites de stabilité des corps d'enceintes, ce travail a ainsi donné lieu à la création d'un outil numérique d'aide à la conception constitué du couplage de modèles analytiques du flambage de cylindres stratifiés avec une procédure d'optimisation. Trois formulations analytiques ont été développées, destinées à la modélisation de tubes minces ou semi-épais et permettant ou non la prise en compte du cisaillement transverse. Compte tenu de la nature non convexe des problèmes abordés, le choix de la stratégie d'optimisation discrète a porté sur une méthode globale : un algorithme génétique spécifique, manipulant directement des paramètres entiers et utilisant une sélection élitiste par tournois, a ainsi été codé.

Les travaux d'optimisation ont conduit à mettre en évidence un motif caractéristique de stratification en $[90_{N1}/\Psi_1/(\Theta_{\text{mini}})_{N2}/\Psi_2/90_{N3}]$, Ψ_1 et Ψ_2 indiquant d'éventuelles zones angulaires de transitions et Θ_{mini} correspondant à la valeur minimale d'angle d'enroulement. Ce type de solution a été obtenu invariablement tant pour les tubes minces que semi-épais. De plus, les nombreux tests numériques pratiqués ont montré que la prise en compte de tolérances de fabrication et d'imperfections géométriques n'avaient qu'une incidence infime sur ces résultats. Soulignons en particulier que ce travail a pu s'affranchir des incertitudes liées aux difficultés de caractérisation de telles structures composites, l'influence de perturbations sur les valeurs des propriétés élastiques anisotropes s'avérant minime. Les résultats d'analyses MEF ont montré que les gains déduits de ces stratifications optimisées étaient significatifs, substantiels : les limites de stabilité correspondantes sont apparues supérieures d'environ 20 à 50 % à celles des cylindres stratifiés en [55_N]. Les essais pratiqués sur des tubes minces en verre/époxy ont corroboré ces résultats : les accroissements de pressions critiques se sont avérés très nets, quasi-identiques à ceux évalués par modèles MEF. L'expérimentation de cylindres optimisés semi-épais, réalisée prochainement dans le cadre du projet MAS3-3-CT97-0091, permettra de compléter cette étude.

On remarquera que les solutions de conception sont apparues sensibles au type de modélisation adoptée : la prise en compte des effets de cisaillement transverse, omise lors des travaux antérieurs de la littérature, s'est notamment avérée primordiale quant aux performances déduites des séquences de stratification optimisées. En outre, et à l'instar des développements actuels dédiés à la création d'outils d'aide à la conception, cette étude a aussi permis d'apprécier l'aptitude des AG pour le traitement de problèmes d'optimisation discrets, non convexes et de cardinalités élevées : la procédure créée s'est avérée robuste, garantissant un très bon niveau de reproductibilité des résultats et induisant des temps de calculs tout à fait admissibles et exploitables.

Malgré la diversité des thèmes d'étude abordés dans le cadre des projets européens BRITE et MAST, de nombreuses incertitudes subsistent quant au comportement des enceintes sous-marines : les phénomènes de micro-flambage des fibres et l'incidence des contraintes résiduelles de fabrication s'avèrent ainsi particulièrement délicats à appréhender. Par ailleurs, l'influence sur les résultats d'optimisation du mode de liaison entre les cylindres composites élancés et les tapes de fermetures n'a été que partiellement évaluée. Cependant, et malgré sa perfectibilité, ce travail de thèse aura permis de vérifier l'intérêt d'une méthodologie de conception optimisée rationnelle et fiable. L'algorithmique développée s'avère notamment transposable au traitement de problèmes d'optimisation multi-critères, intégrant alors les enseignements issus des travaux en cours concernant le fluage, la reprise en eau et l'endommagement des matériaux composites utilisés. Signalons enfin qu'une très prochaine étude consistera à étendre la démarche ici adoptée à la conception d'enceintes sous-marines composites dotées de raidisseurs.

Références

– A –

- [ABE 95] ABERNATHY E. & MC MANUS H.L., « *Effects of Material and Manufacturing Variations on Dimensionally Stable Composite Structures* », proceedings of the American Society for Composite 10th Technical Conference, pp.3-11, 1995, Santa Monica.
- [ALM 66] ALMROTH B.O., « *Influence of Edge Conditions on the Stability of Axially Compressed Cylindrical Shells* », AIAA Journal, Vol.4, n°1, pp.134-140, 1966.
- [ARA 97] ARAFEH M.H., KNOPF-LENOIR C. & ROUGER F., « *Conception d'essai optimal* », Journée CSMA, 3 octobre 1997, Ecole Polytechnique, Palaiseau.
- [ARB 91] ARBOCZ J. & HOL J.M., « *Collapse of Axially Compressed Cylindrical Shells with Random Imperfections* », AIAA Journal, Vol.29, n°12, pp.2247-2256, December 1991.

– B –

- [BAC 93] Bäck T. & Schwefel H.P., « *An overview of evolutionnary algorithms for parameter optimization* », Evolutionnary Computation, Vol.1, 1993.
- [BAN 96] BANKS H.T., SMITH R.C. & WANG Y., « *Smart material structures – modeling, estimation and control* », Masson eds, 1996.
- [BAR 83] BARBE J., « *Structures coques – équations générales et stabilité* », Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, 1983.
- [BAT 98] BATOZ J.L. & ORSERO P., « *Proceedings of the Second International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering (IDMME'98)* », GIR eds, 1998.
- [BER 92] BERTHELOT J.M., « *Matériaux composites – comportement mécanique et analyse des structures* », Masson eds, 1992.
- [BIG 91] BIGOURDAN B., CHAUCHOT P., HASSIM A. & LENE F., « *Homogenization for the Design of Cylindrical Containers made of Composite Materials* », in : "Mechanics and Mechanisms of Damage in Composites and Multi-Materials", pp.203-212, Mechanical Engineering Pub., 1991.
- [BLO 99] BLOEBAUM C.L., LEWIS R.W. & MAYNE R.W., « *Proceedings (cd-rom) of the Third World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSSMO'3)* », State University of New-York at Buffalo, 1999.

- [BOL 96] BOLOTIN V.V., « *Delaminations in composite structures : its origin, buckling, growth and stability* », Composites Structures, Vol.27b, pp.129-145, Elsevier eds, 1996.
- [BOO 79] BOOTON M. & TENNYSON R.C., « *Buckling of Imperfect Anisotropic Circular Cylinders under Combined Loading* », AIAA Journal, Vol.17, n°3, pp.278-287, March 1979.
- [BOU 92] BOUABDALLAH M.S., « *Modélisation de coques cylindriques raidies, isotropes et composites* », Thèse Doctorale, Université de Technologie de Compiègne, 1992.
- [BRI 87] BRITO F.M., « *Influence of interwoven configuration on mechanical properties of crossed helicoidal filament winding composites* », proceedings of the 6th International Conference on Composite Materials (ICCM'6), pp.1183-1189, July 1987, London.

– C –

- [CAS 97] CASARI P., « *Analyse de la variabilité du comportement de stratifiés à usage marin : approche probabilisée à l'échelle du pli* », Thèse Doctorale, Université de Paris VI, janvier 1997.
- [CHA 95] CHAUCHOT P., CHOQUEUSE D., ROLIN J.F. & WARNIER P., « *Large scale AUV cylinder test* », rapport IFREMER DITI/GO/SOM 95.266, doc. MASTII-MAS2/CT/92-0028, 1995.
- [CHA 99a] CHAUCHOT P., « *Guidelines for medium thick composite shells (task 6)* », rapport IFREMER DITI/GO/MSG 99.35, doc. DEVILS-WP18.OK/IFR(6), 1999.
- [CHA 99b] CHAUCHOT P., LE FLOUR D. & WARIN M., « *Numerical study of a scaled-down version of an Autonomous Underwater Vehicle* », rapport IFREMER DITI/GO/MSG 99.46, doc. DEVILS-WP17.OK/IFR(5), 1999.
- [COL 96] COLOOS J., « *Optimisation des plaques multicouches* », mémoire de DEA de Mécanique, Université de Lille I, juillet 1996.
- [COL 98] COLOOS J., PYRZ M. & MESSENGER T., « *Orientation optimale des fibres dans les plaques composites multicouches* », Revue Européenne des Eléments Finis, Vol.7, n°7, pp.811-824, Hermès eds, novembre 1998.
- [COU 69] COUCH W.P., WARD G.P. & BLUMENBERG W.F., « *Investigation of filament-reinforced plastic deep submergence pressure hulls – July 1966 to March 1969* », Naval Ship Research Development Center, Washington, 1969.
- [CRA 96] CRAVEUR J.C., « *Modélisation des structures – calcul par éléments finis* », Masson eds, 1996.

– D –

- [DAN 96] DANIEL I.M., HSIAO H.M. & WOOH S.C., « *Failure mechanisms in thick composites under compressive loading* », Composites Structures, Vol.27b, pp.543-552, Elsevier eds, 1996.
- [DAV 96] DAVIES P., CHOQUEUSE D., RIOU L., WARNIER P., JEGOU P., ROLIN J.F., BIGOURDAN B. & CHAUCHOT P., « *Matériaux composites pour véhicule sous-marin 6000 mètres* », comptes-rendus des 10^{ème} Journées Nationales Composites (JNC10), Vol.I, pp.525-535, AMAC, 29-31 octobre 1996, Paris.

- [DAV 99] DAVIES P. & CHAUCHOT P., « *Composites for marine applications – part 2 : underwater structures* », in : "Mechanics of Composite Materials and Structures", pp.249-260, Kluwer Academic Pub., 1999.
- [DEG 99] DE GARIS H., « *Le XXI^e siècle sera dominé par des machines massivement intelligentes* », Le Monde, 9 novembre 1999 (propos recueillis par H. KEMPF).
- [DES 97] DE SAXCE G., « *Introduction aux matériaux composites* », Université des Sciences et Techniques de Lille I, 1997.
- [DIN 99] DINIZ A., THOUVEREZ F. & JEZEQUEL L., « *Application de la double synthèse modale à des structures non-déterministes* », actes (cd-rom) du 14^{ème} Congrès Français de Mécanique, AUM-AFM, 30 août - 3 septembre 1999, Toulouse.
- [DON 76] DONNELL L.H., « *Beams, plates and shells* », Mc Graw-Hill eds, 1976.
- [DUB 95] DUBOIS M., « *Les méthodes numériques applicables au dimensionnement vis à vis du flambement* », in : "Dimensionnement au flambement – calculs et règles pour les applications industrielles", pp.1-53, CETIM Publications, novembre 1995.
- [DVO 96] DVORAK G.J. & PROCHAZKA P., « *Thick-walled composites cylinders with optimal fiber prestress* », Composite Structures, Vol.27b, pp.643-649, Elsevier eds, 1996.

– G –

- [GAL 76] GALLAGHER R.H., « *Introduction aux éléments finis* », Pluralis eds, 1976.
- [GAR 95] GARGIULO C., IKONOMOPOULOS G. & MARCHETTI M., « *Influence de l'angle d'enroulement sur la résistance de coquilles cylindriques en composite soumises à des charges biaxiales* », in : "Annales des Composites – Vol.3 : essais multiaxiaux et composites", pp.87-102, AMAC, 1995.
- [GAY 97] GAY D., « *Matériaux composites* », 4^{ème} édition revue et augmentée, Hermès eds, 1997.
- [GIN 97] GINESTE B., MESSEGER T. & GROHENS A., « *Rapport d'activité 1997 – Contrat LMM-IFREMER (contrat universitaire n°96 2 32 0319 du 15 décembre 1996)* », Laboratoire de Mécanique et Matériaux, Université de Brest, décembre 1997.
- [GIN 98a] GINESTE B., CASARI P., GROHENS A., MESSEGER T., NADOT Y. & SOHIER L., « *Un système d'essais de tubes composites sous pression externe* », comptes-rendus des 11^{ème} Journées Nationales Composites (JNC11), Vol.II, pp.823-831, AMAC, 18-20 novembre 1998, Arcachon.
- [GIN 98b] GINESTE B., MESSEGER T. & GROHENS A., « *Rapport d'activité 1998 – Contrat LMM-IFREMER (contrat universitaire n°97 2 32 0445 du 15 décembre 1997)* », Laboratoire de Mécanique et Matériaux, Université de Brest, décembre 1998.
- [GIN 99a] GINESTE B., GROHENS A. & MESSEGER T., « *Essais en flambage de tubes composites sous pression externe* », actes (cd-rom) du 14^{ème} Congrès Français de Mécanique, AUM-AFM, 30 août - 3 septembre 1999, Toulouse.
- [GIN 99b] GINESTE B., MESSEGER T. & GROHENS A., « *Rapport d'activité 1999 – Contrat LMM-IFREMER (contrat universitaire n°98 2 32 0265 du 15 décembre 1998)* », Laboratoire de Mécanique et Matériaux, Université de Brest, décembre 1999.

- [GIR 98] GIRAUD L. & LAFON P., « *Optimization of mechanical design problems with genetic algorithms* », 2nd international conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering (IDMME'98), Vol.I, pp.83-90, May 27-29 1998, Compiègne, GIR eds.
- [GOL 94] GOLDBERG D.E., « *Algorithmes génétiques, exploration, optimisation et apprentissage automatique* », Addison-Wesley eds, 1994.
- [GRA 95] GRAHAM D., « *Composite pressure hulls for deep ocean submersibles* », Composites Structures, Vol.32, pp.331-343, Elsevier eds, 1995.
- [GRO 99] GROHENS A. & ALLIX O., « *Endommagement d'enceintes composites réalisées par enroulement filamentaire sous compression axiale – rapport d'activités* », 116 pages, Laboratoire de Mécanique et Matériaux, Université de Brest, mai 1999.
- [GRO 00] GROHENS A., ALLIX O. DAVIES P. & GINESTE B., « *Identification du comportement non-linéaire en compression d'un composite verre-époxyde à partir d'essais sur tubes* », 12^{ème} Journées Nationales Composites (JNC12), AMAC, 15-17 novembre 2000, ENS de Cachan – accepté, à paraître.
- [GRO 01] GROHENS A., « *Etude de l'endommagement de tubes composites réalisés par enroulement filamentaire sous compression biaxiale* », Thèse Doctorale, Université de Brest, soutenance prévue en 2001.
- [GUT 97a] GUTKOWSKI W. & MROZ Z. eds, « *Proceedings of the Second World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO'2)* », Polish Academy of Sciences, 1997.
- [GUG 95] GUGGENBERGER W., « *Buckling and Postbuckling of Imperfect Cylindrical Shells Under External Pressure* », Thin-Walled Structures, Vol.23, pp.351-366, 1995.
- [GUT 97b] GUTKOWSKI W., « *Discrete Structural Optimization* », CISM courses and lectures n°373, Springer Wien New York eds, 1997.

– H –

- [HAJ 90] HAJELA P., « *Genetic Search – an Approach to the Nonconvex Optimization Problems* », AIAA Journal, Vol.26, pp.1205-1210, 1990.
- [HAM 64] HAMMERSLEY J.M. & HANDSCOMB D.C., « *Monte-Carlo Methods* », Methuen and co. ltd, 1964.
- [HAN 77] HANSEN J.S., « *General Random Imperfections in the Buckling of Axially Loaded Cylindrical Shells* », AIAA Journal, Vol.15, n°9, pp.1250-1256, September 1977.
- [HIR 82] HIRANO Y., « *Optimization of laminated composite plate and shells* », in : "Mechanics of composite materials – recent advanced", pp.355-365, Pergamon Press, 1982.
- [HOF 66] HOFF N.J., MADSEN W.A. & MAYERS J., « *Postbuckling Equilibrium of Axially Compressed Circular Cylindrical Shells* », AIAA Journal, Vol.4, n°1, January 1966.
- [HOF 67] HOFFMAN O., « *The brittle strength of orthotropic materials* », Composite Materials, Vol.1, pp.200-206, 1967.

- [HOL 75] HOLLAND J.H., « *Adaptation in natural and artificial systems* », Ann Arbor, University of Michigan Press, 1975 (and MIT Press, Cambridge, 1992).
- [HUT 67] HUTCHINSON J.W. & AMAZIGO J.C., « *Imperfection-Sensitivity of Eccentrically Stiffened Cylindrical Shells* », AIAA Journal, Vol.5, n°3, pp.392-401, 1967.

- J -

- [JEN 83] JENDO S., « *Applications of optimization methods in structural design* », Universität Essen Gesamthochschule, 1983.
- [JEN 91] JENKINS W.M., « *Towards structural optimization via genetic algorithm* », Composites Structures, Vol.40, n°5, pp.1321-1327, Elsevier eds, 1991.
- [JOD 94] JODOUIN J.F., « *Les réseaux neuromimétiques* », Hermès eds, 1994.

- K -

- [KAR 93] KARDOMATEAS G.A., « *Buckling of Thick Orthotropic Cylindrical Shells Under External Pressure* », Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol.60, pp.195- 201, March 1993.
- [KIR 84] KIRKPATRICK S., « *Optimization by simulated annealing* », Journal of Statistical Physics, Vol.34, pp.173-177, 1984.
- [KOG 94] KOGISO N., WATSON L.T., GURDAL Z. & HAFTKA R.T., « *Genetic algorithm with local improvement for composite laminate design* », Structural Optimization, Vol.7, pp.207-218, Springer-Verlag eds, 1994.
- [KOI 63] KOITER W.T., « *Elastic stability and post-buckling behaviour* », University of Wisconsin, Madison Press, 1963.

- L -

- [LAI 93] LAI T.C. & LAU T.C., « *Determination of elastic constants of a generally orthotropic plate by modal analysis* », International Journal of Analytical and Experimental Model Analysis, Vol.8, pp.15-33, 1993.
- [LEB 99] LE BRIS N., « *Modélisation du comportement à long terme des matériaux composites : propagation de l'humidité et fluage d'enceintes cylindriques* », Thèse Doctorale, Université de Paris VI, 1999.
- [LEF 99] LE FLOUR D., WARIN M. & CHAUCHOT P., « *Buckling analysis of small scale carbon epoxy cylinders under external hydrostatic pressure : numerical simulation of buckling tests (subtask 3.2) and validation of numerical models (subtask 3.3)* », rapport IFREMER DITI/GO/MSG 99.25, doc. DEVILS - WP16.OK/IFR(3), 1999.
- [LER 93] LE RICHE R. & HAFTKA R.T., « *Optimization of Laminate Stacking Sequences for Buckling Load Maximization by Genetic Algorithm* », AIAA Journal, Vol.31, n°5, pp.951-957, 1993.
- [LER 97a] LE RICHE R., GAUDIN J. & RENARD J., « *Optimisation de composites à haute stabilité dimensionnelle par algorithmes évolutionnistes* », actes du 3^{ème} Colloque National en Calcul des Structures (Giens'97), Vol.II, pp.811-816, 20-23 mai 1997, Giens.

- [LER 97b] LE RICHE R., « *Optimisation Evolutionniste en Mécanique et en Conception* », Journée CSMA, 3 octobre 1997, Ecole Polytechnique, Palaiseau.
- [LET 96] LE TALLEC P., « *Editorial* », Revue Européenne des Eléments Finis, Vol.5, n°5-6, Hermès eds, 1996.
- [LIU 99] LIU B., HAFTKA R.T. & AKGÜN M.A., « *Composite Wing Structural optimization by Genetic Algorithms, Responses Surfaces and Rounding* », proceedings (cd-rom) of the 3rd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO'3), May 17-21 1999, Niagara Falls - Amherst, New-York.
- [LYA 95] LYAET P., « *Exploration des méthodes d'optimisation pour déterminer la topologie et la forme de renforts plaques* », Thèse Doctorale, Université de Technologie de Compiègne, 1995.

– M –

- [MAG 99] MAGNIN V., « *Optimisation d'un dispositif* », <http://www.eudil.fr/~eudil/vinman/optimisation.html>, 1999.
- [MAR 95a] MARCELIN J.L., « *Optimisation des conditions aux frontières par algorithmes génétiques* », Revue Européenne des Eléments Finis, Vol.4, n°3, pp.361-373, Hermès eds, 1995.
- [MAR 95b] MARCELIN J.L. & TROMPETTE P., « *Optimization of composite beam structures using a genetic algorithm* », Structural Optimization, Vol.9, pp.236-244, Springer-Verlag eds, 1995.
- [MAR 95c] MARCELIN J.L., « *CAO d'engrenages par algorithmes génétiques* », Revue de CFAO et d'Informatique Graphique, Vol.10, n°5, pp.485-498, Hermès eds, 1995.
- [MAR 96a] MARCELIN J.L. & KALLASSY A., « *Vers une optimisation intégrée des structures ou des systèmes mécaniques* », Revue de CFAO et d'Informatique Graphique, Vol.11, n°3, pp.289-306, Hermès eds, 1996.
- [MAR 96b] MARCELIN J.L. & KALLASSY A., « *Approximations de calculs éléments finis par réseaux neuronaux : quelques applications en optimisation* », Revue Européenne des Eléments Finis, Vol.5, n°4, pp.443-460, Hermès eds, 1996.
- [MES 98a] MESSENGER T., « *Rapport d'activité* », 28 pages, Département d'Enseignement et Recherche Mécanique, Ecole Nationale Supérieure des Ingénieurs des Etudes et Techniques d'Armement, Brest, juillet 1998.
- [MES 98b] MESSENGER T., PYRZ M. & COLOOS J., « *Optimisation topologique de plaques par algorithme génétique* », Revue Européenne des Eléments Finis, Vol.7, n°7, pp.793-810, Hermès eds, novembre 1998.
- [MES 99a] MESSENGER T., « *Etude de l'endommagement de structures en matériaux composites sous sollicitations transverses ~ optimisation d'enceintes sous-marines composites - rapport 1999* », 77 pages, Laboratoire de Mécanique et Matériaux (Université de Brest), août 1999.
- [MES 99b] MESSENGER T., PYRZ M., GOURMELEN P. & CHAUCHOT P., « *Optimisation discrète de structures par algorithme génétique* », actes (cd-rom) du 14^{ème} Congrès Français de Mécanique, AUM-AFM, 30 août - 3 septembre 1999, Toulouse.

- [MIC 96] MICHALEWICZ Z., « *Genetic algorithms + data structures = evolution programs* », third revised and extended edition, Springer Verlag eds, Berlin, 1996.
- [MIE 99] MIETTINEN K., NEITTAANMÄKI P., MÄKELÄ M.M. & PERIAUX J., « *Evolutionary Algorithms in Engineering and Computer Science* », John Wiley eds, 1999.
- [MIL 95] MILLER B.L. & GOLDBERG D.E., « *Genetic Algorithms, Tournament Selection, and the Effects of Noise* », Complex Systems, Vol.9, pp.193-212, 1995.
- [MIS 92] MISTRY L., GIBSON A.G. & WU Y.S., « *Failure of composite cylinders under combined external pressure and axial loading* », Composite Structures, Vol.22, pp.193-200, Elsevier eds, 1992.
- [MIS 99] MISSOUM S., HERNANDEZ P. & GÜRDAL Z., « *Optimization of a Gearbox using mathematical Programming and Genetic Algorithms* », proceedings (cd-rom) of the 3rd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO'3), May 17-21 1999, Niagara Falls - Amherst, New-York.

– N –

- [NSH 83] NSHANIAN Y.S. & PAPPAS M., « *Optimal Laminated Composite Shells for Buckling and Vibration* », AIAA Journal, Vol.21, n°3, March 1983.

– O –

- [OLH 95] OLHOFF N. & ROZVANY G.I.N., « *Proceedings of the First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO'1)* », Elsevier eds, 1995.
- [ONO 85] ONODA J., « *Optimal Laminate Configurations of Cylindrical Shells for Axial Buckling* », AIAA Journal, Vol.23, n°7, July 1985.
- [OUE 86] OUELLETTE P., HOA S.V. & SANKAR T.S., « *Buckling of Composite Cylinders Under External Pressure* », Polymer Composites, Vol.7, n°5, pp.363-374, 1986.

– P –

- [PAP 98] PAPAZOGLU V.J., TSOUVALIS N.G., ZAPHIRATOU A.A., « *Parametric study of small scale cylinders under hydrostatic load: flat rigid end closures* », MAS3-CT97-0091 MAST project, report STL-073-F-98, National Technical University of Athens, July 1998.
- [PIL 96] PILLOT F., « *Tests sur anneaux composites – essais en compression diamétrale* », Rapport de travail de fin d'études, Ecole Nationale Supérieure des Mines de S^t Etienne et IFREMER Brest, juin 1996.
- [POW 64] POWELL M.J.D., « *An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives* », Computer Journal, Vol.7, n°4, pp.303-307, 1964.

– R –

- [RAD 91] RADCLIFFE N.J., « *Equivalence class of genetic algorithms* », Complex Systems, pp.183-220, 1991.

- [RAJ 92] RAJEEV S. & KRISHNAMOORTHY C.S., « *Discrete optimization of structures using genetic algorithms* », Journal of Structural Engineering, Vol.118, n°5, pp.1233-1250, 1992.
- [REN 95] RENDERS J.M., « *Algorithmes génétiques et réseaux de neurones* », Hermès eds, 1995.
- [REZ 96] REZAEEPASHAND J., SIMITSES G.J. & STARNES J.H., « *Scale models for laminated cylindrical shells subjected to axial compression* », Composites Structures, Vol.34, pp.371-379, Elsevier eds, 1996.
- [RIO 98] RIOU L. & CHOQUEUSE D., « *Ultrasonic Inspection of the scaled-down version of an Autonomous Underwater Vehicle* », rapport IFREMER DITI/GO/MM 98-025, 1998.
- [ROU 97] ROUSSEAU J., PERREUX D. & VERDIERE N., « *Motifs d'enroulement et endommagement dans les tubes composites verre/époxy* », Mécanique Industrielle et Matériaux, Vol.5, n°3, pp.155-158, septembre 1997.

– S –

- [SAM 95] SAMMARI A., « *Fambage par fluage de coques cylindriques sous pression latérale externe* », Thèse Doctorale, INSA Lyon, 1995.
- [SAN 92] SANDGREN E. & JENSEN E., « *Automotive structural design employing a genetic optimization algorithm* », proceedings of the International Congress and Exhibition of SAE, Vol.2, 1992.
- [SCH 96] SCHOENAUER M., KALLEL L. & JOUVE F., « *Mechanical inclusions identification by evolutionary computation* », Revue Européenne des Eléments Finis, Vol.5, n°5-6, pp.619-648, Hermès eds, 1996.
- [SCH 97] SCHOENAUER M., « *Représentations évolutionnaires en mécanique des structures* », Journée CSMA, 3 octobre 1997, Ecole Polytechnique, Palaiseau.
- [SEB 96] SEBAG M. & SCHOENAUER M., « *Contrôle d'un algorithme génétique* », Revue d'Intelligence Artificielle, Vol.10, n°2-3, pp.389-428, Hermès eds, 1996.
- [SEB 97] SEBAG M. & SCHOENAUER M., « *Algorithmes d'Evolution pour la Mécanique : Guide de Route* », Journée CSMA, 3 octobre 1997, Ecole Polytechnique, Palaiseau.
- [SIG 98] SIGMUND O., « *Topology optimization site* », <http://www.topopt.dtu.dk>, 1998.
- [SIM 91] SIMITSES G.J. & ANASTASIADIS J.S., « *Buckling of axially-loaded, moderately-thick cylindrical laminated shells* », Composites Engineering, Vol.1, n°6, pp.375-391, Pergamon Press, 1991.
- [SIM 96] SIMITSES G.J., « *Buckling of moderately thick laminated cylindrical shells : a review* », Composites Structures, Vol.27b, pp.581-587, 1996.
- [SOB 64] SOBEL L.H., « *Effects of Boundary Conditions on the Stability of Cylinders Subjected to Lateral Pressure* », AIAA Journal, Vol.2, pp.1437-1440, 1964.
- [SOD 98] SODEN P.D., HINTON M.J. & KADDOUR A.S., « *Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates* », Composite Science and Technology, Vol.58, n°7, pp.1011-1022, Elsevier eds, 1998.

- [SOL 92] SOLDATOS K.P., « *Nonlinear Analysis of Transverse Shear Deformable Laminated Composite Cylindrical Shells* », Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME, Vol.114, pp.105-114, February 1992.
- [SOL 94] SOLDATOS K.P. & YE J.Q., « *Three-dimensional static, dynamic, thermoelastic and buckling analysis of homogeneous and laminated composite cylinders* », Composite Structures, Vol.29, pp.131-143, Elsevier eds, 1994.
- [SOR 96] SOREMEKUN G., GÜRDAL Z., HAFTKA R.T. & WATSON L.T., « *Improving genetic algorithm efficiency and reliability in the design and optimization of composite structures* », proceedings of the 6th AIAA/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization (SMAO'6), Vol.1, pp.372-383, 4-6 September 1996, Bellevue.
- [SRI 97] SRIDHARAN S. & KASAGI A., « *On the buckling and collapse of moderately thick composite cylinders under hydrostatic pressure* », Composites Structures, Vol.28b, pp.583-596, Elsevier eds, 1997.
- [SUN 86] SUN G., « *Optimization of laminated cylinders for buckling* », Doctoral Thesis, Institute for Aerospace Studies, University of Toronto, 1986.
- [SUN 88] SUN G. & HANSEN J.S., « *Optimal Design of Laminated Composite Circular-Cylindrical Shells Subjected to Combined Loads* », Journal of Applied Mechanics, Vol.55, pp.136-142, Transactions of the ASME, March 1988.
- [SUN 89] SUN G., « *A Practical Approach to Optimal Design of Laminated Cylindrical Shells for Buckling* », Composites Science and Technology, Vol.36, pp.243-253, 1989.
- [SZE 93] SZEWCZYK Z. & HAJELA P., « *Neural network approximations in a simulated annealing based optimal structural design* », Structural Optimization, Vol.5, pp.159-165, Springer-Verlag eds, 1993.
- [SZE 94] SZEWCZYK Z.P. & HAJELA P., « *Neurocomputing strategies in structural design – decomposition based optimization* », Structural Optimization, Vol.8, pp.242-250, Springer-Verlag eds, 1994.

– T –

- [TAB 97] TABIEI A. & SIMITSES G., « *Imperfections sensitivity of shear deformable moderately thick laminated cylindrical shells* », Computers & Structures, Vol.62, n°1, pp.165-174, 1997.
- [TEN 71] TENNYSON R.C., CHAN K.H. & MUGGERIDGE D.B., « *The Effect of Axisymmetric Shape Imperfections on the Buckling of Laminated Anisotropic Circular Cylinders* », CASI Transactions, Vol.4, n°2, pp.131-139, 1971.
- [TIM 66] TIMOSHENKO S.P., « *Théorie de la stabilité élastique* », Dunod eds, 1966.
- [TOS 95] TOSHIHIKO O., ATSUSHI Y., KANEHIRO N. & ZENICHIRO M., « *Optimum design of weaving structure of 3-D woven fabric composites by using genetic algorithms* », Composite Structures, Vol.32, pp.417-426, Elsevier eds, 1995.
- [TSA 71] TSAI S.W. & WU E.M., « *A general theory of strength of anisotropic materials* », Composite Materials, Vol.5, pp.58-80, 1971.

- [TSO 96] TSOUVALIS N.G, PAPAZOGLOU V.J. & PSIAKIS J., « *Comparative study of all sub-task 3.1 benchmark study results* », BRITE-EURAM project BE-7550, report WP04, National Technical University of Athens, April 1996.

– V –

- [VAN 98] VAN TOOREN-ANTONELLI V., « *Conceptual Design of End-Domes* », MAS3-CT97-0091 MAST project, report CLC98, Netherlands Organisation for Applied Scientific Research, Delft Institute of Industrial Technology, 1998.
- [VIN 92] VINSON J.R., « *The Behavior of Shells Composed of Isotropic and Composite Materials* », Kluwer Academic Pub., 1992.

– W –

- [WAN 95] WANG S.S., SRINIVASAN S., HU H.T. & HAJALI R., « *Effect of material nonlinearity on buckling and postbuckling of fiber composite laminated plates and cylindrical shells* », Composites Structures, Vol.33, pp. 7-15, Elsevier eds, 1995.
- [WAR 99] WARNIER P., PERSON E. & LE ROY J.J., « *Scaled-down version of an Autonomous Underwater Vehicle – Test under external pressure* », rapport IFREMER DITI/GO/QE 99.021, doc. DEVILS -WP16.OK/IFR(5), 1999.

– Y –

- [YAN 97] YAN J. & KIONG S.C., « *Structural optimization by genetic algorithm with tournament selection* », Journal of Computing in Civil Engineering, pp.195-200, July 1997.
- [YOU 89] YOUNG W.C., « *Roark's formulas for stress and strain* », 6th edition, Mc Graw Hill eds, 1989.

– Z –

- [ZIE 79] ZIENCKIEWICZ O.C., « *La méthode des éléments finis* », traduit de la 3^{ème} édition anglaise, Mc Graw-Hill eds, 1979.

Annexe I :

Comportement d'un pli composite

Cette annexe présente les relations classiques, détaillées notamment dans les références [BER 92] et [GAY 97], décrivant le comportement d'un pli composite à fibres longues. Elle précise de fait les notations utilisées. Outre la loi constitutive élasto-statique, ces rappels portent sur la détermination de l'état de ruine.

Considérons un pli à renforts unidirectionnels schématisé par la figure suivante :

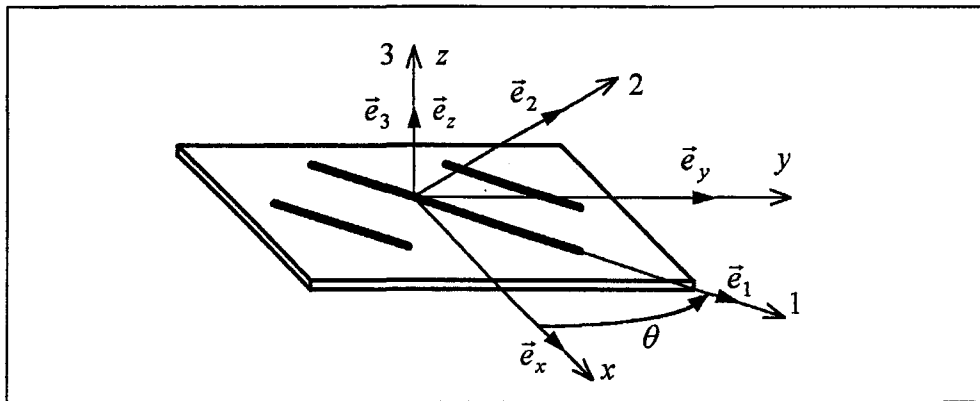


Figure AI.1 : pli unidirectionnel – repérage

Le repérage utilise les deux bases orthonormées directes suivantes :

- $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: base du *repère structure*, lié à la géométrie de la pièce
- $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: base du repère d'ortotropie ou d'anisotropie, appelé *repère matériau*.

Le passage de l'une à l'autre est réalisé par une rotation d'angle θ déterminé par la disposition des renforts sur la surface $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. \vec{e}_z et \vec{e}_3 sont, eux, confondus et perpendiculaires à cette surface du pli.

AI.1. Loi constitutive élasto-statique

AI.1.1. Comportement dans le repère matériau

AI.1.1.1. Notations contractées

Dans, le repère matériau, les notations tensorielles sont usuellement remplacées par les *notations contractées* dites *de l'ingénieur*. Il s'agit, pour les composantes des tenseurs de contraintes de CAUCHY et de déformations linéarisées, de :

$$\{\hat{\sigma}\} = \{\sigma\}_{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\hat{\varepsilon}\} = \{\varepsilon\}_{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}. \quad (\text{AI.1})$$

AI.1.1.2. Loi orthotrope

Pour un matériau possédant trois plans de symétries orthogonaux, la loi orthotrope linéaire est exprimée par :

$$\{\hat{\varepsilon}\} = [\hat{S}]\{\hat{\sigma}\} \quad (\text{AI.2})$$

avec : $[\hat{S}] = [\hat{S}_{ij}]_{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}$ = matrice constitutive de souplesse dans le repère matériau

$$= \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{AI.3})$$

L'inversion de (AI.2) conduit à : $\{\hat{\sigma}\} = [\hat{C}]\{\hat{\varepsilon}\} \quad (\text{AI.4})$

avec : $[\hat{C}] = [\hat{C}_{ij}]_{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} = [\hat{S}]^{-1}$ = matrice constitutive de rigidité dans le repère matériau

$$= \frac{1}{k} \begin{bmatrix} E_1(1 - \nu_{23} \nu_{32}) & E_1(\nu_{21} + \nu_{23} \nu_{31}) & E_1(\nu_{31} + \nu_{32} \nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ E_2(\nu_{12} + \nu_{13} \nu_{32}) & E_2(1 - \nu_{13} \nu_{31}) & E_2(\nu_{32} + \nu_{31} \nu_{12}) & 0 & 0 & 0 \\ E_3(\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}) & E_3(\nu_{23} + \nu_{21} \nu_{13}) & E_3(1 - \nu_{12} \nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} k \end{bmatrix} \quad (\text{AI.5})$$

$$\text{et : } k = 1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{13} \nu_{31} - 2 \nu_{12} \nu_{23} \nu_{31}.$$

L'énergie de déformation élastique :
$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_V \{\hat{\sigma}\}^T [\hat{C}] \{\hat{\sigma}\} dV$$

étant une forme bilinéaire quadratique définie positive, les matrices constitutives de souplesse et de rigidité sont nécessairement symétriques. De fait, on en déduit :

$$E_i \nu_{ji} = E_j \nu_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (\text{AI.6})$$

Le comportement élasto-statique du pli peut ainsi être décrit par le biais d'uniquement neuf caractéristiques mécaniques, à savoir :

- les modules d'élasticité longitudinale E_1 , E_2 et E_3
- les modules de cisaillement transversal G_{12} , G_{23} et G_{13}
- les coefficients de contraction latérale ν_{12} , ν_{23} et ν_{13} .

Notons que, pour un coefficient ν_{ij} , i correspond à la direction de sollicitation et l'indice j à la direction de contraction orthogonale correspondante.

AI.1.1.3. Loi isotrope transverse

Le *comportement isotrope transverse*, cas particulier de l'orthotropie, concerne les matériaux présentant une symétrie de révolution des caractéristiques mécaniques par rapport à la direction \vec{e}_1 des renforts :

$$E_3 = E_2 \quad ; \quad G_{13} = G_{12} \quad ; \quad \nu_{13} = \nu_{12}. \quad (\text{AI.7})$$

De fait, le composite possède un caractère isotrope dans le plan (\vec{e}_2, \vec{e}_3) , d'où la relation :

$$G_{23} = E_2 / 2(1 + \nu_{23}). \quad (\text{AI.8})$$

Le matériau constituant le pli est alors caractérisé par uniquement cinq paramètres : E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12} , et ν_{23} . Dans la suite de cette annexe, les relations se réfèrent au comportement général orthotrope décrit dans le paragraphe précédent.

AI.1.2. Comportement hors axes d'orthotropie

Les composantes tensorielles exprimées dans le repère matériau sont liées aux composantes correspondantes dans le repère structure par les relations de changement de base suivantes :

$$\{\sigma\} = \{\sigma\}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [T_\theta] \{\hat{\sigma}\} \quad ; \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [T_\theta]^{-T} \{\hat{\varepsilon}\} \quad (\text{AI.9})$$

$$\text{avec : } [T_\theta]^{-T} = \left([T_\theta]^{-1} \right)^T.$$

Les expressions des matrices de transformations sont données par :

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 2cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ cs & -cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} ; [T_\theta]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -cs & cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{AI.10})$$

avec : $\begin{cases} c = \cos \theta \\ s = \sin \theta \end{cases}$

La loi constitutive dans le repère structure est alors exprimée par :

$$\{\varepsilon\} = [T_\theta]^{-T} [\hat{S}] [T_\theta]^{-1} \{\sigma\} = [S] \{\sigma\} \quad (\text{AI.11})$$

avec la matrice de souplesse correspondante :

$$[S] = [S_{ij}]_{(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{54} & S_{55} & 0 \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{AI.12})$$

De même, l'expression en rigidité de la loi constitutive dans le repère structure est donnée par :

$$\{\sigma\} = [T_\theta] [\hat{C}] [T_\theta]^T \{\varepsilon\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (\text{AI.13})$$

avec la matrice de rigidité :

$$[C] = [C_{ij}]_{(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{AI.14})$$

ayant pour termes :

$$\begin{cases} C_{11} = \hat{C}_{11} c^4 + \hat{C}_{22} s^4 + 2(\hat{C}_{12} + 2\hat{C}_{66}) c^2 s^2 \\ C_{22} = \hat{C}_{11} s^4 + \hat{C}_{22} c^4 + 2(\hat{C}_{12} + 2\hat{C}_{66}) c^2 s^2 \\ C_{33} = \hat{C}_{33} \\ C_{44} = \hat{C}_{44} c^2 + \hat{C}_{55} s^2 \\ C_{55} = \hat{C}_{44} s^2 + \hat{C}_{55} c^2 \\ C_{66} = (\hat{C}_{11} + \hat{C}_{22} - 2\hat{C}_{12}) c^2 s^2 + \hat{C}_{66} (c^2 - s^2)^2 \end{cases} \quad (\text{AI.15a})$$

$$\text{et : } \begin{cases} C_{12} = C_{21} = (\hat{C}_{11} + \hat{C}_{22} - 4\hat{C}_{66})c^2s^2 + \hat{C}_{12}(c^4 + s^4) \\ C_{13} = C_{31} = \hat{C}_{13}c^2 + \hat{C}_{23}s^2 \\ C_{16} = C_{61} = (\hat{C}_{11} - \hat{C}_{12} - 2\hat{C}_{66})c^3s + (\hat{C}_{12} - \hat{C}_{22} + 2\hat{C}_{66})cs^3 \\ C_{23} = C_{32} = \hat{C}_{13}s^2 + \hat{C}_{23}c^2 \\ C_{26} = C_{62} = (\hat{C}_{11} - \hat{C}_{12} - 2\hat{C}_{66})cs^3 + (\hat{C}_{12} - \hat{C}_{22} + 2\hat{C}_{66})c^3s \\ C_{36} = C_{63} = (\hat{C}_{13} - \hat{C}_{23})cs \\ C_{45} = C_{54} = (\hat{C}_{55} - \hat{C}_{44})cs \end{cases} \quad (\text{AI.15b})$$

Notons la présence, dans les relations (AI.12) et (AI.14), des termes suivants :

- S_{i6} et C_{i6} ($i=1,2,3$) induisant des couplages entre les contraintes et déformations normales et de cisaillement dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y)
- S_{45} et C_{45} induisant des couplages entre les différentes contraintes et déformations de cisaillement transverse dans l'épaisseur du pli.

AI.1.3. Coefficients de rigidité réduits

La loi constitutive orthotrope exprimée dans le repère matériau (AI.4) peut aussi être exprimée sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{Q}_{21} & \hat{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{Q}_{44} = \hat{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{Q}_{55} = \hat{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{Q}_{66} = \hat{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} + \sigma_3 \begin{Bmatrix} \hat{R}_1 \\ \hat{R}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{AI.16})$$

à l'aide des *coefficients de rigidités réduits* suivants :

$$\begin{cases} \hat{Q}_{ij} = \hat{Q}_{ji} = \hat{C}_{ij} - \frac{\hat{C}_{i3}\hat{C}_{j3}}{\hat{C}_{33}} & (i, j = 1, 2). \\ \hat{R}_i = \hat{C}_{i3}/\hat{C}_{33} \end{cases} \quad (\text{AI.17})$$

Considérant les termes détaillés en (AI.5), on en déduit :

$$\begin{cases} \hat{Q}_{11} = E_1/k' \\ \hat{Q}_{22} = E_2/k' \\ \hat{Q}_{12} = \hat{Q}_{21} = E_1\nu_{21}/k' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \hat{R}_1 = (\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})/k' \\ \hat{R}_2 = (\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21})/k' \end{cases} \quad (\text{AI.18})$$

$$\text{avec : } k' = 1 - \nu_{12}\nu_{21}.$$

De même, dans le repère structure, la relation équivalente à (AI.16) possède une forme similaire :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & Q_{26} \\ 0 & 0 & Q_{44} = C_{44} & Q_{45} = C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{54} = C_{54} & Q_{55} = C_{55} & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} + \sigma_{zz} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \\ R_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{AI.19})$$

avec dans ce cas :

$$\begin{cases} Q_{ij} = Q_{ji} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} & (i, j = 1, 2, 6). \\ R_i = C_{i3}/C_{33} \end{cases} \quad (\text{AI.20})$$

On constate, là encore, la présence de termes de couplages, en l'occurrence Q_{i6} ($i, j = 1, 2$), Q_{45} et R_6 .

A l'instar des expressions (AI.15), les coefficients de rigidité réduits sont liés par les relations de *changement de base* suivantes :

$$\begin{cases} Q_{11} = \hat{Q}_{11}c^4 + \hat{Q}_{22}s^4 + 2(\hat{Q}_{12} + 2\hat{Q}_{66})c^2s^2 \\ Q_{12} = Q_{21} = (\hat{Q}_{11} + \hat{Q}_{22} - 4\hat{Q}_{66})c^2s^2 + \hat{Q}_{12}(c^4 + s^4) \\ Q_{16} = Q_{61} = (\hat{Q}_{11} - \hat{Q}_{12} - 2\hat{Q}_{66})c^3s + (\hat{Q}_{12} - \hat{Q}_{22} + 2\hat{Q}_{66})cs^3 \\ Q_{22} = \hat{Q}_{11}s^4 + \hat{Q}_{22}c^4 + 2(\hat{Q}_{12} + 2\hat{Q}_{66})c^2s^2 \\ Q_{26} = Q_{62} = (\hat{Q}_{11} - \hat{Q}_{12} - 2\hat{Q}_{66})cs^3 + (\hat{Q}_{12} - \hat{Q}_{22} + 2\hat{Q}_{66})c^3s \\ Q_{66} = (\hat{Q}_{11} + \hat{Q}_{22} - 2\hat{Q}_{12})c^2s^2 + \hat{Q}_{66}(c^2 - s^2)^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} R_1 = \hat{R}_1c^2 + \hat{R}_2s^2 \\ R_2 = \hat{R}_1s^2 + \hat{R}_2c^2 \\ R_6 = (\hat{R}_1 - \hat{R}_2)cs \end{cases} \quad (\text{AI.21})$$

AI.1.4. Pli équilibré en $\pm\theta$

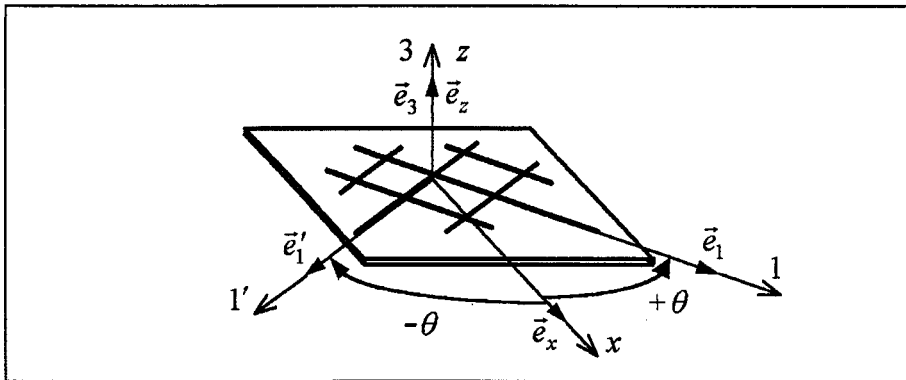


Figure AI.2 : pli équilibré en $\pm\theta$

Considérons un pli constitué par une "superposition" de deux plis identiques mais d'angles opposés, les renforts étant répartis en proportions identiques suivant les angles $+\theta$ et $-\theta$ (cf. figure AI.2). Ainsi, compte tenu de cette superposition et des relations de changement de base (AI.11) et (AI.13), les coefficients de souplesse et de rigidité d'évolutions harmoniques en \sin et \sin^3 des expressions (AI.15) disparaissent :

$$\begin{cases} S_{16} = S_{26} = S_{36} = S_{45} = 0 \\ C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0 \end{cases} \quad (\text{AI.22})$$

De même, on en déduit pour les coefficients de rigidité réduits (AI.20) :

$$Q_{16} = Q_{26} = R_6 = 0. \quad (\text{AI.23})$$

Ainsi, le comportement n'est plus tributaire des couplages, évoqués dans le paragraphe AI.1.2, entre les contraintes et déformations normales et de cisaillement dans le plan du pli ainsi qu'entre les différents termes de cisaillement transverse.

AI.2. Critères de rupture anisotropes

L'analyse rigoureuse et approfondie de la rupture des stratifiés requiert une attention particulière aux mécanismes régissant l'endommagement [BER 92]. En effet, la détérioration des matériaux composites à fibres longues, initiée par des discontinuités locales (micro-fissures, porosités, ... défauts résultants de l'élaboration), est liée à l'hétérogénéité et aux dimensions de leurs constituants [DES 97]. La détermination du scénario d'endommagement d'un stratifié consiste ainsi en l'étude des différents mécanismes élémentaires suivants :

- rupture des fibres
- rupture longitudinale et transversale de la matrice
- décohésion de l'interface fibre-matrice
- rupture à l'interface de plis (délaminage)

généralisés par la propagation macroscopique de fissurations. Ces modes d'endommagement sont généralement coexistants, couplés et, de plus, sensibles aux directions de sollicitation de par l'anisotropie structurale. Par ailleurs, l'endommagement s'avère fortement unilatéral, l'ouverture et la fermeture des fissures induisant des différences tangibles entre les résistances en traction et en compression [BER 92].

Cet aspect micro-mécanique de la rupture des stratifiés s'avère complexe et délicat à traduire sous forme de règles de dimensionnement destinées au concepteur. *Les critères de rupture anisotropes macroscopiques* permettent, eux, une évaluation globale de la résistance d'un multicouche. Ils consistent en une estimation macroscopique de l'état de détérioration de

chaque pli. Pour le plus restrictif d'entre eux [DES 97], nommé *critère de premier endommagement*, la ruine du stratifié est admise dès la rupture d'une couche.

Pour de tels critères, l'état de détérioration de chaque pli est alors exprimé par f :

$$f(\sigma_i, \bar{\sigma}_{i\alpha}) \geq 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, 6 \\ \alpha = C, T \end{cases} \quad (\text{AI.24})$$

en fonction des composantes de contraintes σ_i dans le repère d'anisotropie du pli (en notations contractées, cf. § AI.1.1) et des limites élastiques correspondantes, déduites d'essais mécaniques, en distinguant :

$$\begin{cases} - \text{la limite en traction } \bar{\sigma}_{iT} (> 0) \\ - \text{la limite en compression } \bar{\sigma}_{iC} (< 0). \end{cases} \quad (\text{AI.25})$$

Notons que, concernant le comportement en cisaillement, ces limites sont bilatérales :

$$\bar{\sigma}_{iT} = -\bar{\sigma}_{iC} = \bar{\sigma}_i \quad (i = 4, 5, 6). \quad (\text{AI.26})$$

La rupture du pli est admise pour : $f = 1$. (AI.27)

Notons que ces critères peuvent aussi être exprimés en fonction des composantes de contraintes dans le repère structure à l'aide des relations de changement de base (AI.9).

AI.2.1. Critère de la contrainte maximale

C'est un *critère non interactif*, qui ne prend donc pas en compte les couplages entre les différentes directions de chargement. La rupture du pli est admise dès qu'une valeur de contrainte atteint la limite élastique correspondante, soit sous forme algébrique :

$$f = 1 - \prod_{i=1}^6 \left(1 - \frac{\sigma_i}{\bar{\sigma}_{i\alpha}} \right) \quad (\alpha \text{ étant déterminé par le signe de } \sigma_i). \quad (\text{AI.28})$$

Le *critère de la déformation maximale* en est une version analogue basée sur les valeurs de déformations ε_i et des limites à rupture correspondantes $\bar{\varepsilon}_{iC}$ et $\bar{\varepsilon}_{iT}$:

$$f = 1 - \prod_{i=1}^6 \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\bar{\varepsilon}_{i\alpha}} \right). \quad (\text{AI.29})$$

Une étude comparative de ces deux critères est détaillée en [BER 92], présentant notamment les relations liant les limites $\bar{\sigma}_{i\alpha}$ et $\bar{\varepsilon}_{i\alpha}$.

AI.2.2. Critères interactifs

Ils sont issus d'extensions du critère isotrope de VON MISES, établi à partir de considérations énergétiques (seuil de plasticité lié à l'énergie de cisaillement, incompressibilité plastique). Leurs expressions quadratiques traduisent les interactions des différentes sollicitations. Ces critères ont ainsi pour forme générale :

$$f = \sum_{i=1}^3 F_i \sigma_i + \sum_{i=1}^6 F_{ii} \sigma_i^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 2F_{13} \sigma_1 \sigma_3. \quad (\text{AI.30})$$

Dans l'hyper-espace des contraintes σ_i , l'enveloppe de rupture correspondante est nécessairement convexe (hyper-ellipsoïde fermée), proscrivant les cas de résistances infinies. Cette convexité est traduite par les trois conditions algébriques suivantes [DES 97] :

$$\begin{cases} F_{11}F_{22} - F_{12}^2 > 0 \\ F_{22}F_{33} - F_{23}^2 > 0 \\ F_{11}F_{33} - F_{13}^2 > 0 \end{cases} \quad (\text{AI.31})$$

La caractérisation précise des coefficients de couplage F_{12} , F_{23} et F_{13} nécessite des essais biaxiaux complexes effectués en contrôlant précisément le rapport des contraintes longitudinales [BER 92]. Aussi, on recourt généralement des relations semi-empiriques uniquement fonction des limites élastiques $\bar{\sigma}_{i\alpha}$ déterminées par essais longitudinaux et de cisaillement [DES 97].

Le premier critère interactif anisotrope est dû à HILL [DES 97]. HOFFMAN [HOF 67] en a proposé une généralisation intégrant directement les différences entre les limites élastiques en traction et en compression. Ce critère est identique aux coefficients de couplages près à celui de TSAI-WU [TSA 71], issu d'un formalisme tensoriel. Le tableau AI.1 récapitule les expressions respectives des termes utilisés pour ces trois critères.

critère :	HILL	HOFFMAN	TSAI-WU
F_i	0	$\frac{1}{\bar{\sigma}_{iC}} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{iT}}$	$\frac{1}{\bar{\sigma}_{iC}} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{iT}}$
F_{ii}	$\frac{1}{(\bar{\sigma}_{i\alpha})^2}$	$\frac{-1}{\bar{\sigma}_{iC} \bar{\sigma}_{iT}}$	$\frac{-1}{\bar{\sigma}_{iC} \bar{\sigma}_{iT}}$
F_{12}	$-\frac{1}{2}(F_{11} + F_{22} - F_{33})$	$-\frac{1}{2}(F_{11} + F_{22} - F_{33})$	$-\frac{1}{2}\sqrt{F_{11}F_{22}}$
F_{23}	$-\frac{1}{2}(F_{22} + F_{33} - F_{11})$	$-\frac{1}{2}(F_{22} + F_{33} - F_{11})$	$-\frac{1}{2}\sqrt{F_{22}F_{33}}$
F_{13}	$-\frac{1}{2}(F_{11} + F_{33} - F_{22})$	$-\frac{1}{2}(F_{11} + F_{33} - F_{22})$	$-\frac{1}{2}\sqrt{F_{11}F_{33}}$

Tableau AI.1 : coefficients des critères interactifs

Annexe II :

Termes matriciels des modèles analytiques

Cette annexe précise les expressions des termes matriciels respectifs des trois modèles analytiques du flambage de cylindres stratifiés présentés dans le chapitre II.

II.1. Rappel : définitions des coefficients de rigidités du stratifié

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \\ B_{ij}^a = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \\ D_{ij}^a = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k^5 - z_{k-1}^5) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A'_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k + z_{k-1}) \\ B'_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k^2 + z_{k-1}^2) \\ D'_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k^3 + z_{k-1}^3) \\ D''_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k^4 + z_{k-1}^4) \\ \hat{A}_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} R \operatorname{Ln} \left(\frac{R+z_k}{R+z_{k-1}} \right) \\ \hat{B}_{ij} = R (A_{ij} - \hat{A}_{ij}) \\ \hat{D}_{ij} = R (D_{ij} - \hat{D}_{ij}) \end{array} \right.$$

NB: voir § II.2.7.2 pour les facteurs de correction de cisaillement transverse

III.2. Modèle de type SANDERS

III.2.1. Imperfection axisymétrique

$$K_{11} = A_{11} \bar{m}^2 \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) + A_{66} \bar{n}^2 \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right)$$

$$K_{12} = \left[A_{12} \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{h} - 1 \right) - A_{66} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) - \frac{B_{12} + 2B_{66}}{R} + \frac{\tilde{\alpha}_w}{2R} (A'_{12} - 2A'_{66}) \right] \bar{m} \bar{n}$$

$$K_{13} = K_{31} = \frac{A_{12} \bar{m}}{R} \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{h} - 1 \right) - B_{11} \bar{m}^3 - (B_{12} + 2B_{66}) \bar{m} \bar{n}^2 \\ + \frac{\tilde{\alpha}_w}{2} \left[A'_{11} \bar{m}^3 + (A'_{12} - 2A'_{66}) \bar{m} \bar{n}^2 \right]$$

$$K_{21} = \left[A_{12} \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{h} - 1 \right) - A_{66} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) - \frac{B_{12} + B_{66}}{R} + \frac{\tilde{\alpha}_w}{2R} (A'_{12} - A'_{66}) \right] \bar{m} \bar{n}$$

$$K_{22} = A_{22} \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) \bar{n}^2 + A_{66} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) \bar{m}^2 + \frac{1}{R} \left(2B_{22} \bar{n}^2 + 3B_{66} \bar{m}^2 + \frac{D_{22} \bar{n}^2 + 2D_{66} \bar{m}^2}{R} \right) \\ - \frac{\tilde{\alpha}_w}{2R} \left(2A'_{22} \bar{n}^2 - 3A'_{66} \bar{m}^2 + \frac{B'_{22} \bar{n}^2 - 2B'_{66} \bar{m}^2}{R} \right) \\ + \frac{A_{22} \bar{n}^2}{2R^2} \left(\tilde{\alpha}_w^2 - \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{2h} \right) + \frac{A_{66} \bar{m}^2}{R^2} \left(\tilde{\alpha}_w^2 + \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{2h} \right)$$

$$K_{23} = \frac{A_{22} \bar{n}}{R} \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) + B_{22} \left(\bar{n}^3 + \frac{\bar{n}}{R^2} \right) + (B_{12} + 2B_{66}) \bar{m}^2 \bar{n} + \frac{D_{22} \bar{n}^3 + (D_{12} + 2D_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}}{R} \\ - \frac{\tilde{\alpha}_w}{2} \left[A'_{22} \left(\bar{n}^3 + \frac{\bar{n}}{R^2} \right) + (A'_{12} + 2A'_{66}) \bar{m}^2 \bar{n} + \frac{B'_{22} \bar{n}^3 + (B'_{12} + 2B'_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}}{R} \right] \\ + \frac{A_{22} \bar{n}^3 + A_{12} \bar{m}^2 \bar{n}}{2R} \left(\tilde{\alpha}_w^2 - \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{2h} \right) + \frac{A_{66} \bar{m}^2 \bar{n}}{2R} \left(\tilde{\alpha}_w^2 + \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{2h} \right)$$

$$K_{32} = \frac{A_{22} \bar{n}}{R} \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) + B_{22} \left(\bar{n}^3 + \frac{\bar{n}}{R^2} \right) + (B_{12} + 2B_{66}) \bar{m}^2 \bar{n} + \frac{D_{22} \bar{n}^3 + (D_{12} + 4D_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}}{R} \\ - \frac{\tilde{\alpha}_w}{2} \left[A'_{22} \left(\bar{n}^3 + \frac{\bar{n}}{R^2} \right) + (A'_{12} + 2A'_{66}) \bar{m}^2 \bar{n} + \frac{B'_{22} \bar{n}^3 + (B'_{12} + 4B'_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}}{R} \right] \\ + \frac{A_{22} \bar{n}^3 + A_{12} \bar{m}^2 \bar{n}}{2R} \left(\tilde{\alpha}_w^2 - \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{2h} \right) + \frac{A_{66} \bar{m}^2 \bar{n}}{2R} \left(\tilde{\alpha}_w^2 + \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{2h} \right)$$

$$\begin{aligned}
 K_{33} = & \frac{A_{22}}{R^2} \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) + \frac{2}{R} (B_{12} \bar{m}^2 + B_{22} \bar{n}^2) + D_{11} \bar{m}^4 + D_{22} \bar{n}^4 + 2 (D_{12} + 2D_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}^2 \\
 & - \frac{\tilde{\alpha}_w}{2} \left(\frac{2}{R} (A'_{12} \bar{m}^2 + A'_{22} \bar{n}^2) + B'_{11} \bar{m}^4 + B'_{22} \bar{n}^4 + 2 (B'_{12} - 2B'_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}^2 \right) \\
 & + \frac{A_{11} \bar{m}^4 + A_{22} \bar{n}^4 + 2A_{12} \bar{m}^2 \bar{n}^2}{2} \left(\tilde{\alpha}_w^2 - \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{2h} \right) + \frac{A_{66} \bar{m}^2 \bar{n}^2}{2} \left(\tilde{\alpha}_w^2 + \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{2h} \right)
 \end{aligned}$$

$$L_{11} = L_{12} = L_{13} = L_{21} = L_{31} = 0$$

$$L_{22} = -k_y / R^2 \quad ; \quad L_{23} = L_{32} = -k_y \bar{n} / R \quad ; \quad L_{33} = -(k_x \bar{m}^2 + k_y \bar{n}^2)$$

AII.2.2. Imperfection asymétrique

$$K_{11} = (A_{11} \bar{m}^2 + A_{66} \bar{n}^2) \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right)$$

$$K_{12} = \left[(A_{12} + A_{66}) \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} - 1 \right) - \frac{B_{12} + 2B_{66}}{R} + \frac{\tilde{\alpha}_w}{4R} (A'_{12} + 2A'_{66}) \right] \bar{m} \bar{n}$$

$$\begin{aligned}
 K_{13} = K_{31} = & \frac{A_{12} \bar{m}}{R} \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} - 1 \right) - B_{11} \bar{m}^3 - (B_{12} + 2B_{66}) \bar{m} \bar{n}^2 \\
 & + \frac{\tilde{\alpha}_w}{4} \left[A'_{11} \bar{m}^3 + (A'_{12} + 2A'_{66}) \bar{m} \bar{n}^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$K_{21} = \left[(A_{12} + A_{66}) \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} - 1 \right) - \frac{B_{12} + B_{66}}{R} + \frac{\tilde{\alpha}_w}{4R} (A'_{12} + A'_{66}) \right] \bar{m} \bar{n}$$

$$\begin{aligned}
 K_{22} = & (A_{22} \bar{n}^2 + A_{66} \bar{m}^2) \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) + \frac{1}{R} \left(2B_{22} \bar{n}^2 + 3B_{66} \bar{m}^2 + \frac{D_{22} \bar{n}^2 + 2D_{66} \bar{m}^2}{R} \right) \\
 & - \frac{\tilde{\alpha}_w}{4R} \left(2A'_{22} \bar{n}^2 + 3A'_{66} \bar{m}^2 + \frac{B'_{22} \bar{n}^2 + 2B'_{66} \bar{m}^2}{R} \right) + \frac{A_{22} \bar{n}^2 + 2A_{66} \bar{m}^2}{4R^2} \left(\tilde{\alpha}_w^2 - \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{8h} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{23} = & \frac{A_{22} \bar{n}}{R} \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) + B_{22} \left(\bar{n}^3 + \frac{\bar{n}}{R^2} \right) + (B_{12} + 2B_{66}) \bar{m}^2 \bar{n} + \frac{D_{22} \bar{n}^3 + (D_{12} + 2D_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}}{R} \\
 & - \frac{\tilde{\alpha}_w}{4} \left[A'_{22} \left(\bar{n}^3 + \frac{\bar{n}}{R^2} \right) + (A'_{12} + 2A'_{66}) \bar{m}^2 \bar{n} + \frac{B'_{22} \bar{n}^3 + (B'_{12} + 2B'_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}}{R} \right] \\
 & + \frac{A_{22} \bar{n}^3 + (A_{12} + 2A_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}}{4R} \left(\tilde{\alpha}_w^2 - \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{8h} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{32} = & \frac{A_{22} \bar{n}}{R} \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) + B_{22} \left(\bar{n}^3 + \frac{\bar{n}}{R^2} \right) + (B_{12} + 2B_{66}) \bar{m}^2 \bar{n} + \frac{D_{22} \bar{n}^3 + (D_{12} + 4D_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}}{R} \\
 & - \frac{\tilde{\alpha}_w}{4} \left[A'_{22} \left(\bar{n}^3 + \frac{\bar{n}}{R^2} \right) + (A'_{12} + 2A'_{66}) \bar{m}^2 \bar{n} + \frac{B'_{22} \bar{n}^3 + (B'_{12} + 4B'_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}}{R} \right] \\
 & + \frac{A_{22} \bar{n}^3 + (A_{12} + 4A_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}}{4R} \left(\tilde{\alpha}_w^2 - \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{8h} \right)
 \end{aligned}$$

$$K_{33} = \frac{A_{22}}{R^2} \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) + \frac{2}{R} (B_{12} \bar{m}^2 + B_{22} \bar{n}^2) + D_{11} \bar{m}^4 + D_{22} \bar{n}^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}^2$$

$$- \frac{\tilde{\alpha}_w}{4} \left(\frac{2}{R} (A'_{12} \bar{m}^2 + A'_{22} \bar{n}^2) + B'_{11} \bar{m}^4 + B'_{22} \bar{n}^4 + 2(B'_{12} + 2B'_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}^2 \right)$$

$$+ \frac{A_{11} \bar{m}^4 + A_{22} \bar{n}^4 + 2(A_{12} + 2A_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}^2}{4} \left(\tilde{\alpha}_w^2 - \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{8h} \right)$$

$$L_{11} = L_{12} = L_{13} = L_{21} = L_{31} = 0$$

$$L_{22} = -k_y / R^2 \quad ; \quad L_{23} = L_{32} = -k_y \bar{n} / R \quad ; \quad L_{33} = -(k_x \bar{m}^2 + k_y \bar{n}^2)$$

III.3. Modèle CT3

III.3.1. Imperfection axisymétrique

$$K_{11} = A_{11} \bar{m}^2 \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) + A_{66} \bar{n}^2 \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right)$$

$$K_{12} = \left[A_{12} \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{h} - 1 \right) - A_{66} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) - \frac{1}{R} \left(B_{66} + \frac{A'_{66} \tilde{\alpha}_w}{2} \right) - \frac{4}{3Rh^2} (B_{12}^a + B_{66}^a) \right. \\ \left. + \frac{2\tilde{\alpha}_w}{3Rh^2} (D'_{12} - D'_{66}) - \frac{2\tilde{\alpha}_w^2}{Rh^2} (B_{12} + B_{66}) + \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{2Rh^2} (A'_{12} - A'_{66}) \right] \bar{m} \bar{n}$$

$$K_{13} = \frac{A_{12} \bar{m}}{R} \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{h} - 1 \right) - \frac{4}{3h^2} \left[B_{11}^a \bar{m}^3 + (B_{12}^a + 2B_{66}^a) \bar{m} \bar{n}^2 \right]$$

$$+ \frac{2\tilde{\alpha}_w}{3h^2} \left[D'_{11} \bar{m}^3 + (D'_{12} - 2D'_{66}) \bar{m} \bar{n}^2 \right] - \frac{2\tilde{\alpha}_w^2}{h^2} \left[B_{11} \bar{m}^3 + (B_{12} + 2B_{66}) \bar{m} \bar{n}^2 \right]$$

$$+ \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{2h^2} \left[A'_{11} \bar{m}^3 + (A'_{12} - 2A'_{66}) \bar{m} \bar{n}^2 \right]$$

$$K_{14} = B_{11} \bar{m}^2 + B_{66} \bar{n}^2 - \frac{4}{3h^2} (B_{11}^a \bar{m}^2 + B_{66}^a \bar{n}^2)$$

$$- \tilde{\alpha}_w \left(\frac{A'_{11} \bar{m}^2 + A'_{66} \bar{n}^2}{2} - \frac{2}{3} (D'_{11} \bar{m}^2 + D'_{66} \bar{n}^2) \right) - \frac{2\tilde{\alpha}_w^2}{h^2} (B_{11} \bar{m}^2 + B_{66} \bar{n}^2)$$

$$+ \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{2} (A'_{11} \bar{m}^2 + A'_{66} \bar{n}^2)$$

$$K_{15} = K_{24} = - \left[B_{12} + B_{66} - \frac{4}{3h^2} (B_{12}^a + B_{66}^a) - \tilde{\alpha}_w \left(\frac{A'_{12} - A'_{66}}{2} - \frac{2}{3} (D'_{12} - D'_{66}) \right) \right. \\ \left. - \frac{2\tilde{\alpha}_w^2}{h^2} (B_{12} + B_{66}) + \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{2h^2} (A'_{12} - A'_{66}) \right] \bar{m} \bar{n}$$

$$K_{21} = \left[A_{12} \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{h} - 1 \right) - A_{66} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) \right] \bar{m} \bar{n}$$

$$\begin{aligned}
 K_{22} = & A_{22} \bar{n}^2 \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) + A_{66} \bar{m}^2 \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) + \frac{A_{44}}{R^2} \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) - \frac{4D_{44}}{R^2 h^2} + \frac{B_{66} \bar{m}^2}{R} \\
 & + \frac{4}{3Rh^2} \left(B_{22}^a \bar{n}^2 + B_{66}^a \bar{m}^2 \right) + \frac{\tilde{\alpha}_w}{R} \left(\frac{A'_{66} \bar{m}^2}{2} + \frac{2B'_{44}}{Rh^2} - \frac{2}{3h^2} \left(D'_{22} \bar{n}^2 - D'_{66} \bar{m}^2 \right) \right) \\
 & + \frac{2\tilde{\alpha}_w^2}{Rh^2} \left(B_{22} \bar{n}^2 + B_{66} \bar{m}^2 - \frac{A_{44}}{R} \right) - \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{2Rh^2} \left(A'_{22} \bar{n}^2 - A'_{66} \bar{m}^2 - \frac{2A_{44}}{Rh} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{23} = & \left[(A_{22} + A_{44}) \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) - \frac{4D_{44}}{h^2} \right] \frac{\bar{n}}{R} + \frac{4}{3h^2} \left[B_{22}^a \bar{n}^3 + (B_{12}^a + 2B_{66}^a) \bar{m}^2 \bar{n} \right] \\
 & + 2\tilde{\alpha}_w \left(\frac{B'_{44} \bar{n}}{Rh^2} - \frac{D'_{22} \bar{n}^3 + (D'_{12} - 2D'_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}}{3} \right) \\
 & - \frac{2\tilde{\alpha}_w^2}{h^2} \left(\frac{A_{44} \bar{n}}{R} - B_{22} \bar{n}^3 - (B_{12} + 2B_{66}) \bar{m}^2 \bar{n} \right) \\
 & + \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{2h^2} \left(\frac{2A_{44} \bar{n}}{Rh} - A'_{22} \bar{n}^3 - (A'_{12} - 2A'_{66}) \bar{m}^2 \bar{n} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{25} = & -\frac{A_{44}}{R} \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) + \frac{4D_{44}}{Rh^2} + B_{22} \bar{n}^2 + B_{66} \bar{m}^2 - \frac{4}{3h^2} \left(B_{22}^a \bar{n}^2 + B_{66}^a \bar{m}^2 \right) \\
 & - \tilde{\alpha}_w \left(\frac{2B'_{44}}{Rh^2} + \frac{A'_{22} \bar{n}^2 - A'_{66} \bar{m}^2}{2} - \frac{2}{3} \left(D'_{22} \bar{n}^2 - D'_{66} \bar{m}^2 \right) \right) \\
 & + \frac{2\tilde{\alpha}_w^2}{h^2} \left(\frac{A_{44}}{R} - B_{22} \bar{n}^2 - B_{66} \bar{m}^2 \right) - \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{2h^2} \left(\frac{2A_{44}}{Rh} - A'_{22} \bar{n}^2 + A'_{66} \bar{m}^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$K_{31} = \frac{A_{12} \bar{m}}{R} \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{h} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 K_{32} = & \left[(A_{22} + A_{44}) \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) - \frac{4D_{44}}{h^2} + \frac{4B_{22}^a \bar{n}}{3Rh^2} + \frac{2\tilde{\alpha}_w}{h^2} \left(B'_{44} - \frac{D'_{22}}{3R} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{2\tilde{\alpha}_w^2}{h^2} \left(A_{44} - \frac{B_{22}}{R} \right) + \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{2h^2} \left(\frac{2A_{44}}{h} + \frac{A'_{22}}{R} \right) \right] \frac{\bar{n}}{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{33} = & \left(\frac{A_{22}}{R^2} + A_{44} \bar{n}^2 \right) \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) + A_{55} \bar{m}^2 \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) - \frac{4}{h^2} \left(D_{44} \bar{n}^2 + D_{55} \bar{m}^2 \right) \\
 & + \frac{4}{3Rh^2} \left(B_{12}^a \bar{m}^2 + B_{22}^a \bar{n}^2 \right) + \frac{2\tilde{\alpha}_w}{h^2} \left(B'_{44} \bar{n}^2 - B'_{55} \bar{m}^2 - \frac{D'_{12} \bar{m}^2 + D'_{22} \bar{n}^2}{3R} \right) \\
 & - \frac{2\tilde{\alpha}_w^2}{h^2} \left(A_{44} \bar{n}^2 + A_{55} \bar{m}^2 - \frac{B_{12} \bar{m}^2 + B_{22} \bar{n}^2}{R} \right) \\
 & + \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{2Rh^2} \left(\frac{2}{h} \left(A_{44} \bar{n}^2 - A_{55} \bar{m}^2 \right) - A'_{12} \bar{m}^2 - A'_{22} \bar{n}^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$K_{34} = \left[A_{55} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) - \frac{4D_{55}}{h^2} - \frac{B_{12}}{R} + \frac{4B_{12}^a}{3Rh^2} + 2\tilde{\alpha}_w \left(\frac{A'_{12}}{4R} - \frac{B'_{55}}{h^2} - \frac{D'_{12}}{3Rh^2} \right) - \frac{2\tilde{\alpha}_w^2}{h^2} \left(A_{55} - \frac{B_{12}}{R} \right) - \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{2h^2} \left(\frac{2A_{55}}{h} + \frac{A'_{12}}{R} \right) \right] \bar{m}$$

$$K_{35} = \left[-A_{44} \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) + \frac{4D_{44}}{h^2} + \frac{B_{22}}{R} - \frac{4B_{22}^a}{3Rh^2} - 2\tilde{\alpha}_w \left(\frac{B'_{44}}{h^2} + \frac{A'_{22}}{4R} - \frac{D'_{22}}{3Rh^2} \right) + \frac{2\tilde{\alpha}_w^2}{h^2} \left(A_{44} - \frac{B_{22}}{R} \right) - \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{2h^2} \left(2A_{44} - \frac{A'_{22}}{R} \right) \right] \bar{n}$$

$$K_{41} = B_{11}\bar{m}^2 + B_{66}\bar{n}^2 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{2} (A'_{11}\bar{m}^2 - A'_{66}\bar{n}^2)$$

$$K_{42} = \left[-B_{12} - B_{66} - \frac{D_{66}}{R} - \frac{4}{3Rh^2} (D_{12}^a + D_{66}^a) + \tilde{\alpha}_w \left(\frac{A'_{12} - A'_{66}}{2} - \frac{B'_{66}}{2R} + \frac{2}{3Rh^2} (D'_{12} - D'_{66}) \right) - \frac{\tilde{\alpha}_w^2}{R} \left(\frac{A_{66}}{2} + \frac{4}{h^2} (D_{12} + D_{66}) \right) + \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{4Rh} \left(A_{66} + \frac{4}{h} (B'_{12} + B'_{66}) \right) - \frac{A_{12}}{2Rh^2} \left(\tilde{\alpha}_w^4 - \frac{\tilde{\alpha}_w^5}{3h} \right) - \frac{A_{66}}{2Rh^2} \left(\tilde{\alpha}_w^4 + \frac{\tilde{\alpha}_w^5}{3h} \right) \right] \bar{m}\bar{n}$$

$$K_{43} = A_{55} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) \bar{m} - \frac{4D_{55}\bar{m}}{h^2} - \frac{B_{12}\bar{m}}{R} - \frac{4}{3h^2} \left[D_{11}^a\bar{m}^3 + (D_{12}^a + 2D_{66}^a)\bar{m}\bar{n}^2 \right] + \frac{2\tilde{\alpha}_w}{h^2} \left(\frac{A'_{12}\bar{m}}{2R} - B'_{55}\bar{m} + \frac{1}{3} \left[D_{11}^n\bar{m}^3 + (D_{12}^n - 2D_{66}^n)\bar{m}\bar{n}^2 \right] \right) - \frac{2\tilde{\alpha}_w^2}{h^2} \left[A_{55}\bar{m} + 2(D_{11}\bar{m}^3 + (D_{12} + 2D_{66})\bar{m}\bar{n}^2) \right] + \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{h^2} \left(-\frac{A_{55}\bar{m}}{h} + B'_{11}\bar{m}^3 + (B'_{12} - 2B'_{66})\bar{m}\bar{n}^2 \right) - \frac{A_{11}\bar{m}^3 + A_{12}\bar{m}\bar{n}^2}{3h^2} \left(\tilde{\alpha}_w^4 - \frac{\tilde{\alpha}_w^5}{2h} \right) - \frac{2A_{66}\bar{m}\bar{n}^2}{3h^2} \left(\tilde{\alpha}_w^4 + \frac{\tilde{\alpha}_w^5}{2h} \right)$$

$$K_{44} = A_{55} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) - \frac{4D_{55}}{h^2} + D_{11}\bar{m}^2 + D_{66}\bar{n}^2 - \frac{4}{3h^2} (D_{11}^a\bar{m}^2 + D_{66}^a\bar{n}^2) - 2\tilde{\alpha}_w \left(\frac{B'_{55}}{h^2} + \frac{B'_{11}\bar{m}^2 - B'_{66}\bar{n}^2}{4} - \frac{D_{11}^n\bar{m}^2 - D_{66}^n\bar{n}^2}{3h^2} \right) - 2\tilde{\alpha}_w^2 \left(\frac{A_{55}}{h^2} - \frac{A_{11}\bar{m}^2 + A_{66}\bar{n}^2}{4} + \frac{2}{h^2} (D_{11}\bar{m}^2 + D_{66}\bar{n}^2) \right) - \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{4h} \left(\frac{4A_{55}}{h} + A_{11}\bar{m}^2 - A_{66}\bar{n}^2 - \frac{4}{h} (B'_{11}\bar{m}^2 - B'_{66}\bar{n}^2) \right) - \frac{A_{11}\bar{m}^2}{2h^2} \left(\tilde{\alpha}_w^4 - \frac{\tilde{\alpha}_w^5}{3h} \right) - \frac{A_{66}\bar{n}^2}{2h^2} \left(\tilde{\alpha}_w^4 + \frac{\tilde{\alpha}_w^5}{3h} \right)$$

$$\begin{aligned}
 K_{45} = K_{54} = & \left[-D_{12} - D_{66} + \frac{4}{3h^2} (D_{12}^a + D_{66}^a) + \tilde{\alpha}_w \left(\frac{B'_{12} - B'_{66}}{2} - \frac{2}{3h^2} (D_{12}'' - D_{66}'') \right) \right. \\
 & + \tilde{\alpha}_w^2 \left(\frac{A_{12} + A_{66}}{2} - \frac{4}{h^2} (D_{12} + D_{66}) \right) + \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{h} \left(\frac{A_{12} - A_{66}}{4} - \frac{B'_{12} - B'_{66}}{h} \right) \\
 & \left. + \frac{A_{12}}{2h^2} \left(\tilde{\alpha}_w^4 - \frac{\tilde{\alpha}_w^5}{3h} \right) + \frac{A_{66}}{2h^2} \left(\tilde{\alpha}_w^4 + \frac{\tilde{\alpha}_w^5}{3h} \right) \right] \bar{m} \bar{n}
 \end{aligned}$$

$$K_{51} = \left(-B_{12} - B_{66} + \frac{\tilde{\alpha}_w}{2} (A'_{12} - A'_{66}) \right) \bar{m} \bar{n}$$

$$\begin{aligned}
 K_{52} = & -\frac{A_{44}}{R} \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) + \frac{4D_{44}}{Rh^2} + B_{22}\bar{n}^2 + B_{66}\bar{m}^2 + \frac{D_{66}\bar{m}^2}{R} + \frac{4}{3Rh^2} (D_{22}^a\bar{n}^2 + D_{66}^a\bar{m}^2) \\
 & - 2\tilde{\alpha}_w \left(\frac{B'_{44}}{Rh^2} + \frac{A'_{22}\bar{n}^2 - A'_{66}\bar{m}^2}{4} - \frac{B'_{66}\bar{m}^2}{4R} + \frac{D_{22}''\bar{n}^2 - D_{66}''\bar{m}^2}{3Rh^2} \right) \\
 & + \frac{2\tilde{\alpha}_w^2}{R} \left(\frac{A_{44}}{h^2} + \frac{A_{66}\bar{m}^2}{4} - \frac{2}{h^2} (D_{22}\bar{n}^2 + D_{66}\bar{m}^2) \right) \\
 & + \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{Rh} \left(\frac{A_{44}}{h^2} - \frac{A_{66}\bar{m}^2}{4} - \frac{B'_{22}\bar{n}^2 + B'_{66}\bar{m}^2}{h} \right) + \frac{A_{22}\bar{n}^2 + A_{66}\bar{m}^2}{16Rh^2} \left(3\tilde{\alpha}_w^4 - \frac{5\tilde{\alpha}_w^5}{6h} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{53} = & -A_{44}\bar{n} \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) + \frac{4D_{44}\bar{n}}{h^2} + \frac{B_{22}\bar{n}}{R} + \frac{4}{3h^2} \left[D_{22}^a\bar{n}^3 + (D_{12}^a + 2D_{66}^a)\bar{m}^2\bar{n} \right] \\
 & - 2\tilde{\alpha}_w \left(\frac{B'_{44}\bar{n}}{h^2} + \frac{A'_{22}\bar{n}}{4R} + \frac{D_{22}''\bar{n}^3 + (D_{12}'' - 2D_{66}'')\bar{m}^2\bar{n}}{3h^2} \right) \\
 & + \frac{2\tilde{\alpha}_w^2}{h^2} \left[A_{44}\bar{n} + 2D_{22}\bar{n}^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\bar{m}^2\bar{n} \right] \\
 & - \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{h^2} \left(\frac{A_{44}\bar{n}}{h} + B'_{22}\bar{n}^3 + (B'_{12} - 2B'_{66})\bar{m}^2\bar{n} \right) \\
 & + \frac{A_{22}\bar{n}^3 + A_{12}\bar{m}^2\bar{n}}{2h^2} \left(\tilde{\alpha}_w^4 - \frac{\tilde{\alpha}_w^5}{3h^3} \right) + \frac{A_{66}\bar{m}^2\bar{n}}{h^2} \left(\tilde{\alpha}_w^4 + \frac{\tilde{\alpha}_w^5}{3h^3} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{55} = & A_{44} \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right) - \frac{4D_{44}}{h^2} + D_{22}\bar{n}^2 + D_{66}\bar{m}^2 - \frac{4}{3h^2} (D_{22}^a\bar{n}^2 + D_{66}^a\bar{m}^2) \\
 & + 2\tilde{\alpha}_w \left(\frac{B'_{44}}{h^2} - \frac{B'_{22}\bar{n}^2 - B'_{66}\bar{m}^2}{4} + \frac{D_{22}''\bar{n}^2 - D_{66}''\bar{m}^2}{3h^2} \right) \\
 & - 2\tilde{\alpha}_w^2 \left(\frac{A_{44}}{h^2} - \frac{A_{22}\bar{n}^2 + A_{66}\bar{m}^2}{4} + \frac{2}{h^2} (D_{22}\bar{n}^2 + D_{66}\bar{m}^2) \right) \\
 & - \frac{\tilde{\alpha}_w^3}{h} \left(\frac{A_{44}}{h^2} + \frac{A_{22}\bar{n}^2 - A_{66}\bar{m}^2}{4} - \frac{B'_{22}\bar{n}^2 - B'_{66}\bar{m}^2}{h} \right) \\
 & - \frac{A_{22}\bar{n}^2}{2h^2} \left(\tilde{\alpha}_w^4 - \frac{\tilde{\alpha}_w^5}{3h} \right) - \frac{A_{66}\bar{m}^2}{2h^2} \left(\tilde{\alpha}_w^4 + \frac{\tilde{\alpha}_w^5}{3h} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{11} = L_{12} = L_{13} = L_{14} = L_{15} = L_{21} = L_{22} = L_{23} = L_{24} = L_{25} \\
 = L_{31} = L_{32} = L_{33} = L_{34} = L_{35} = L_{41} = L_{42} = L_{45} = L_{51} = L_{54} = 0 \\
 L_{43} = k_x \bar{m}/2 \quad ; \quad L_{44} = -k_x/2 \quad ; \quad L_{52} = -k_y/2R \quad ; \quad L_{53} = -k_y \bar{n}/2R \quad ; \quad L_{55} = -k_y/2
 \end{aligned}$$

III.3.2. Imperfection asymétrique

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= (A_{11} \bar{m}^2 + A_{66} \bar{n}^2) \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h}\right) \\
 K_{12} &= \left[(A_{12} + A_{66}) \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} - 1\right) + \frac{1}{R} \left(\frac{A'_{66} \tilde{\alpha}_w}{4} - B_{66}\right) - \frac{4}{3Rh^2} (B_{12}^a + B_{66}^a) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tilde{\alpha}_w}{3Rh^2} (D'_{12} + D'_{66}) - \frac{\tilde{\alpha}_w^2}{Rh^2} (B_{12} + B_{66}) + \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{16Rh^2} (A'_{12} + A'_{66}) \right] \bar{m} \bar{n} \\
 K_{13} &= \frac{A_{12} \bar{m}}{R} \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} - 1\right) - \frac{4}{3h^2} [B_{11}^a \bar{m}^3 + (B_{12}^a + 2B_{66}^a) \bar{m} \bar{n}^2] \\
 &\quad + \frac{\tilde{\alpha}_w}{3h^2} [D'_{11} \bar{m}^3 + (D'_{12} + 2D'_{66}) \bar{m} \bar{n}^2] - \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{h}\right)^2 [B_{11} \bar{m}^3 + (B_{12} + 2B_{66}) \bar{m} \bar{n}^2] \\
 &\quad + \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{16h^2} [A'_{11} \bar{m}^3 + (A'_{12} + 2A'_{66}) \bar{m} \bar{n}^2] \\
 K_{14} &= B_{11} \bar{m}^2 + B_{66} \bar{n}^2 - \frac{4}{3h^2} (B_{11}^a \bar{m}^2 + B_{66}^a \bar{n}^2) \\
 &\quad - \tilde{\alpha}_w \left(\frac{A'_{11} \bar{m}^2 + A'_{66} \bar{n}^2}{4} - \frac{D'_{11} \bar{m}^2 + D'_{66} \bar{n}^2}{3}\right) \\
 &\quad - \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{h}\right)^2 (B_{11} \bar{m}^2 + B_{66} \bar{n}^2) + \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{16} (A'_{11} \bar{m}^2 + A'_{66} \bar{n}^2) \\
 K_{15} = K_{24} &= \left[-B_{12} - B_{66} + \frac{4}{3h^2} (B_{12}^a + B_{66}^a) + \tilde{\alpha}_w \left(\frac{A'_{12} + A'_{66}}{4} - \frac{D'_{12} + D'_{66}}{3}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{h}\right)^2 (B_{12} + B_{66}) - \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{16h^2} (A'_{12} + A'_{66}) \right] \bar{m} \bar{n} \\
 K_{21} &= (A_{12} + A_{66}) \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} - 1\right) \bar{m} \bar{n} \\
 K_{22} &= (A_{22} \bar{n}^2 + A_{66} \bar{m}^2) \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h}\right) + \frac{A_{44}}{R^2} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h}\right) - \frac{4D_{44}}{R^2 h^2} + \frac{B_{66} \bar{m}^2}{R} \\
 &\quad + \frac{4}{3Rh^2} (B_{22}^a \bar{n}^2 + B_{66}^a \bar{m}^2) - \frac{\tilde{\alpha}_w}{R} \left(\frac{A'_{66} \bar{m}^2}{4} + \frac{B'_{44}}{Rh^2} + \frac{D'_{22} \bar{n}^2 + D'_{66} \bar{m}^2}{3h^2}\right) \\
 &\quad + \frac{\tilde{\alpha}_w^2}{Rh^2} \left(B_{22} \bar{n}^2 + B_{66} \bar{m}^2 - \frac{A_{44}}{R}\right) - \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{16Rh^2} \left(A'_{22} \bar{n}^2 + A'_{66} \bar{m}^2 + \frac{2A_{44}}{Rh}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{23} = & \left[A_{22} \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) + A_{44} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) - \frac{4D_{44}}{h^2} \right] \frac{\bar{n}}{R} + \frac{4}{3h^2} \left[B_{22}^a \bar{n}^3 + (B_{12}^a + 2B_{66}^a) \bar{m}^2 \bar{n} \right] \\
 & - \tilde{\alpha}_w \left[\frac{B'_{44} \bar{n}}{R h^2} + \frac{D'_{22} \bar{n}^3 + (D'_{12} + 2D'_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}}{3} \right] \\
 & - \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right)^2 \left[\frac{A_{44} \bar{n}}{R} - B_{22} \bar{n}^3 - (B_{12} + 2B_{66}) \bar{m}^2 \bar{n} \right] \\
 & - \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{16h^2} \left[\frac{2A_{44} \bar{n}}{R h} + A'_{22} \bar{n}^3 + (A'_{12} + 2A'_{66}) \bar{m}^2 \bar{n} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{25} = & -\frac{A_{44}}{R} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) + \frac{4D_{44}}{R h^2} + B_{22} \bar{n}^2 + B_{66} \bar{m}^2 - \frac{4}{3h^2} (B_{22}^a \bar{n}^2 + B_{66}^a \bar{m}^2) \\
 & + \tilde{\alpha}_w \left(\frac{B'_{44}}{R h^2} - \frac{A'_{22} \bar{n}^2 + A'_{66} \bar{m}^2}{4} + \frac{D'_{22} \bar{n}^2 + D'_{66} \bar{m}^2}{3} \right) \\
 & + \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right)^2 \left(\frac{A_{44}}{R} - B_{22} \bar{n}^2 - B_{66} \bar{m}^2 \right) + \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{16h^2} \left(\frac{2A_{44}}{R h} + A'_{22} \bar{n}^2 + A'_{66} \bar{m}^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$K_{31} = \frac{A_{12} \bar{m}}{R} \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 K_{32} = & \left[A_{22} \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) + A_{44} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) - \frac{4D_{44}}{h^2} + \frac{4B_{22}^a \bar{n}}{3R h^2} - \frac{\tilde{\alpha}_w}{h^2} \left(B'_{44} + \frac{D'_{22}}{3R} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{\tilde{\alpha}_w^2}{h^2} \left(A_{44} - \frac{B_{22}}{R} \right) - \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{16h^2} \left(\frac{2A_{44}}{h} + \frac{A'_{22}}{R} \right) \right] \frac{\bar{n}}{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{33} = & \frac{A_{22}}{R^2} \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) + (A_{44} \bar{n}^2 + A_{55} \bar{m}^2) \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) - \frac{4}{h^2} (D_{44} \bar{n}^2 + D_{55} \bar{m}^2) \\
 & + \frac{4}{3R h^2} (B_{12}^a \bar{m}^2 + B_{22}^a \bar{n}^2) - \frac{\tilde{\alpha}_w}{h^2} \left(B'_{44} \bar{n}^2 + B'_{55} \bar{m}^2 + \frac{D'_{12} \bar{m}^2 + D'_{22} \bar{n}^2}{3R} \right) \\
 & - \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right)^2 \left(A_{44} \bar{n}^2 + A_{55} \bar{m}^2 - \frac{B_{12} \bar{m}^2 + B_{22} \bar{n}^2}{R} \right) \\
 & - \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{16R h^2} \left(\frac{2}{h} (A_{44} \bar{n}^2 + A_{55} \bar{m}^2) + A'_{12} \bar{m}^2 + A'_{22} \bar{n}^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{34} = & \left[A_{55} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) - \frac{4D_{55}}{h^2} - \frac{B_{12}}{R} + \frac{4B_{12}^a}{3R h^2} + \tilde{\alpha}_w \left(\frac{A'_{12}}{4R} - \frac{B'_{55}}{h^2} - \frac{D'_{12}}{3R h^2} \right) \right. \\
 & \left. - \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right)^2 \left(A_{55} - \frac{B_{12}}{R} \right) - \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{16h^2} \left(\frac{2A_{55}}{h} + \frac{A'_{12}}{R} \right) \right] \bar{m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{35} = & \left[-A_{44} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) + \frac{4D_{44}}{h^2} + \frac{B_{22}}{R} - \frac{4B_{22}^a}{3R h^2} + \tilde{\alpha}_w \left(\frac{B'_{44}}{h^2} - \frac{A'_{22}}{4R} + \frac{D'_{22}}{3R h^2} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right)^2 \left(A_{44} - \frac{B_{22}}{R} \right) + \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{16h^2} \left(2A_{44} + \frac{A'_{22}}{R} \right) \right] \bar{n}
 \end{aligned}$$

$$K_{41} = B_{11}\bar{m}^2 + B_{66}\bar{n}^2 - \frac{\tilde{\alpha}_w}{4}(A'_{11}\bar{m}^2 + A'_{66}\bar{n}^2)$$

$$K_{42} = \left[-B_{12} - B_{66} - \frac{D_{66}}{R} - \frac{4}{3Rh^2}(D_{12}^a + D_{66}^a) + \tilde{\alpha}_w \left(\frac{A'_{12} + A'_{66}}{4} + \frac{B'_{66}}{4R} + \frac{D'_{12} + D'_{66}}{3Rh^2} \right) \right. \\ \left. - \frac{\tilde{\alpha}_w^2}{R} \left(\frac{A_{66}}{4} + \frac{2}{h^2}(D_{12} + D_{66}) \right) + \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{32Rh} \left(A_{66} + \frac{4}{h}(B'_{12} + B'_{66}) \right) \right. \\ \left. - \frac{A_{12} + A_{66}}{16Rh^2} \left(3\tilde{\alpha}_w^4 - \frac{5\tilde{\alpha}_w^5}{6h} \right) \right] \bar{m}\bar{n}$$

$$K_{43} = A_{55} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) \bar{m} - \frac{4D_{55}\bar{m}}{h^2} - \frac{B_{12}\bar{m}}{R} - \frac{4}{3h^2} \left[D_{11}^a \bar{m}^3 + (D_{12}^a + 2D_{66}^a) \bar{m}\bar{n}^2 \right] \\ + \frac{\tilde{\alpha}_w}{h^2} \left(\frac{A'_{12}\bar{m}}{4R} - B'_{55}\bar{m} + \frac{1}{3} \left[D_{11}^n \bar{m}^3 + (D_{12}^n + 2D_{66}^n) \bar{m}\bar{n}^2 \right] \right) \\ - \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right)^2 \left[A_{55}\bar{m} + 2(D_{11}\bar{m}^3 + (D_{12} + 2D_{66})\bar{m}\bar{n}^2) \right] \\ + \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{8h^2} \left(\frac{A_{55}\bar{m}}{h} - B'_{11}\bar{m}^3 - (B'_{12} + 2B'_{66})\bar{m}\bar{n}^2 \right) \\ - \frac{A_{11}\bar{m}^3 + (A_{12} + 2A_{66})\bar{m}\bar{n}^2}{16h^2} \left(3\tilde{\alpha}_w^4 - \frac{5\tilde{\alpha}_w^5}{6h} \right)$$

$$K_{44} = A_{55} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) - \frac{4D_{55}}{h^2} + D_{11}\bar{m}^2 + D_{66}\bar{n}^2 - \frac{4}{3h^2} (D_{11}^a \bar{m}^2 + D_{66}^a \bar{n}^2) \\ - \tilde{\alpha}_w \left(\frac{B'_{55}}{h^2} + \frac{B'_{11}\bar{m}^2 + B'_{66}\bar{n}^2}{4} - \frac{D'_{11}\bar{m}^2 + D'_{66}\bar{n}^2}{3h^2} \right) \\ - \tilde{\alpha}_w^2 \left(\frac{A_{55}}{h^2} - \frac{A_{11}\bar{m}^2 + A_{66}\bar{n}^2}{4} + \frac{2}{h^2} (D_{11}\bar{m}^2 + D_{66}\bar{n}^2) \right) \\ - \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{32h} \left(\frac{4A_{55}}{h} + A_{11}\bar{m}^2 + A_{66}\bar{n}^2 - \frac{4}{h} (B'_{11}\bar{m}^2 + B'_{66}\bar{n}^2) \right) \\ - \frac{A_{11}\bar{m}^2 + A_{66}\bar{n}^2}{16h^2} \left(3\tilde{\alpha}_w^4 - \frac{5\tilde{\alpha}_w^5}{6h} \right)$$

$$K_{45} = K_{54} = \left[-D_{12} - D_{66} + \frac{4}{3h^2} (D_{12}^a + D_{66}^a) + \tilde{\alpha}_w \left(\frac{B'_{12} + B'_{66}}{4} - \frac{D'_{12} + D'_{66}}{3h^2} \right) \right. \\ \left. + \tilde{\alpha}_w^2 \left(\frac{A_{12} + A_{66}}{4} - \frac{2(D_{12} + D_{66})}{h^2} \right) + \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{32h} \left(A_{12} + A_{66} - \frac{4(B'_{12} + B'_{66})}{h} \right) \right. \\ \left. + \frac{A_{12} + A_{66}}{16h^2} \left(3\tilde{\alpha}_w^4 - \frac{5\tilde{\alpha}_w^5}{6h} \right) \right] \bar{m}\bar{n}$$

$$K_{51} = \left(-B_{12} - B_{66} + \frac{\tilde{\alpha}_w}{4} (A'_{11} + A'_{66}) \right) \bar{m}^2 \bar{n}^2$$

$$\begin{aligned}
 K_{52} = & -\frac{A_{44}}{R} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) + \frac{4D_{44}}{Rh^2} + B_{22}\bar{n}^2 + B_{66}\bar{m}^2 + \frac{D_{66}\bar{m}^2}{R} + \frac{4}{3Rh^2} (D_{22}^a\bar{n}^2 + D_{66}^a\bar{m}^2) \\
 & + \tilde{\alpha}_w \left(\frac{B'_{44}}{Rh^2} - \frac{A'_{22}\bar{n}^2 + A'_{66}\bar{m}^2}{4} - \frac{B'_{66}\bar{m}^2}{4R} - \frac{D'_{22}\bar{n}^2 + D'_{66}\bar{m}^2}{3Rh^2} \right) \\
 & + \frac{\tilde{\alpha}_w^2}{R} \left(\frac{A_{44}}{h^2} + \frac{A_{66}\bar{m}^2}{4} - \frac{2}{h^2} (D_{22}\bar{n}^2 + D_{66}\bar{m}^2) \right) \\
 & + \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{32Rh} \left(\frac{4A_{44}}{h^2} - A_{66}\bar{m}^2 - \frac{4}{h} (B'_{22}\bar{n}^2 + B'_{66}\bar{m}^2) \right) + \frac{A_{22}\bar{n}^2 + A_{66}\bar{m}^2}{16Rh^2} \left(3\tilde{\alpha}_w^4 - \frac{5\tilde{\alpha}_w^5}{6h} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{53} = & -A_{44} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) \bar{n} + \frac{4D_{44}\bar{n}}{h^2} + \frac{B_{22}\bar{n}}{R} + \frac{4}{3h^2} \left[D_{22}^a\bar{n}^3 + (D_{12}^a + 2D_{66}^a)\bar{m}^2\bar{n} \right] \\
 & + \tilde{\alpha}_w \left(\frac{B'_{44}\bar{n}}{h^2} - \frac{A'_{22}\bar{n}}{4R} - \frac{D'_{22}\bar{n}^3 + (D'_{12} + 2D'_{66})\bar{m}^2\bar{n}}{3h^2} \right) \\
 & + \left(\frac{\tilde{\alpha}_w}{h} \right)^2 \left[A_{44}\bar{n} + 2D_{22}\bar{n}^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\bar{m}^2\bar{n} \right] \\
 & + \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{8h^2} \left(\frac{A_{44}\bar{n}}{h} - B'_{22}\bar{n}^3 - (B'_{12} + 2B'_{66})\bar{m}^2\bar{n} \right) \\
 & + \frac{A_{22}\bar{n}^3 + (A_{12} + 2A_{66})\bar{m}^2\bar{n}}{16h^2} \left(3\tilde{\alpha}_w^4 - \frac{5\tilde{\alpha}_w^5}{6h^3} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{55} = & A_{44} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_w}{2h} \right) - \frac{4D_{44}}{h^2} + D_{22}\bar{n}^2 + D_{66}\bar{m}^2 - \frac{4}{3h^2} (D_{22}^a\bar{n}^2 + D_{66}^a\bar{m}^2) \\
 & - \tilde{\alpha}_w \left(\frac{B'_{44}}{h^2} + \frac{B'_{22}\bar{n}^2 + B'_{66}\bar{m}^2}{4} - \frac{D'_{22}\bar{n}^2 + D'_{66}\bar{m}^2}{3h^2} \right) \\
 & - \tilde{\alpha}_w^2 \left(\frac{A_{44}}{h^2} - \frac{A_{22}\bar{n}^2 + A_{66}\bar{m}^2}{4} + \frac{2}{h^2} (D_{22}\bar{n}^2 + D_{66}\bar{m}^2) \right) \\
 & - \frac{3\tilde{\alpha}_w^3}{32h} \left(\frac{4A_{44}}{h^2} + A_{22}\bar{n}^2 + A_{66}\bar{m}^2 - \frac{4}{h} (B'_{22}\bar{n}^2 + B'_{66}\bar{m}^2) \right) \\
 & - \frac{A_{22}\bar{n}^2 + A_{66}\bar{m}^2}{16h^2} \left(3\tilde{\alpha}_w^4 - \frac{5\tilde{\alpha}_w^5}{6h} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{11} = L_{12} = L_{13} = L_{14} = L_{15} = L_{21} = L_{22} = L_{23} = L_{24} = L_{25} \\
 = L_{31} = L_{32} = L_{33} = L_{34} = L_{35} = L_{41} = L_{42} = L_{45} = L_{51} = L_{54} = 0
 \end{aligned}$$

$$L_{43} = k_x \bar{m}/2 ; L_{44} = -k_x/2 ; L_{52} = -k_y/2R ; L_{53} = -k_y \bar{n}/2R ; L_{55} = -k_y/2$$

III.4. Modèle LOG

$$K_{11} = \left(A_{11} + \frac{B_{11}}{R} \right) \bar{m}^2 + \hat{A}_{66} \bar{n}^2$$

$$K_{12} = K_{21} = -(A_{12} + A_{66}) \bar{m} \bar{n}$$

$$K_{13} = K_{31} = -A_{12} \bar{m} / R$$

$$K_{14} = K_{41} = \left(B_{11} + \frac{D_{11}}{R} \right) \bar{m}^2 + \hat{B}_{66} \bar{n}^2$$

$$K_{15} = K_{24} = K_{42} = K_{51} = -(B_{12} + B_{66}) \bar{m} \bar{n}$$

$$K_{22} = \hat{A}_{22} \bar{n}^2 + \frac{\hat{A}_{44}}{R^2} + \left(A_{66} + \frac{B_{66}}{R} \right) \bar{m}^2$$

$$K_{23} = K_{32} = \left(\hat{A}_{22} + \hat{A}_{44} \right) \frac{\bar{n}}{R}$$

$$K_{25} = K_{52} = -\frac{\hat{A}_{44}}{R} + \hat{B}_{22} \bar{n}^2 + \left(B_{66} + \frac{D_{66}}{R} \right) \bar{m}^2$$

$$K_{33} = \hat{A}_{44} \bar{n}^2 + \left(A_{55} + \frac{B_{55}}{R} \right) \bar{m}^2 + \frac{\hat{A}_{22}}{R^2}$$

$$K_{34} = K_{43} = \left(A_{55} + \frac{B_{55} - B_{12}}{R} \right) \bar{m}$$

$$K_{35} = K_{53} = \left(\frac{\hat{B}_{22}}{R} - \hat{A}_{44} \right) \bar{n}$$

$$K_{44} = A_{55} + \frac{B_{55}}{R} + \left(D_{11} + \frac{B_{11}^a}{R} \right) \bar{m}^2 + \hat{D}_{66} \bar{n}^2$$

$$K_{45} = K_{54} = -(D_{12} + D_{66}) \bar{m} \bar{n}$$

$$K_{55} = \hat{A}_{44} + \left(D_{66} + \frac{B_{66}^a}{R} \right) \bar{m}^2 + \hat{D}_{22} \bar{n}^2$$

$$L_{11} = L_{12} = L_{13} = L_{14} = L_{15} = L_{21} = L_{22} = L_{23} = L_{24} = L_{25} \\ = L_{31} = L_{32} = L_{33} = L_{34} = L_{35} = L_{41} = L_{42} = L_{45} = L_{51} = L_{54} = 0$$

$$L_{43} = k_x \bar{m} / 2 \quad ; \quad L_{44} = -k_x / 2 \quad ; \quad L_{52} = -k_y / 2 R \quad ; \quad L_{53} = -k_y \bar{n} / 2 \quad ; \quad L_{55} = -k_y / 2$$

Travaux Bibliographiques

Publications

- MESSAGER T., PYRZ M. & CHAUCHOT M., « *Optimized laminations for submarine composite hulls* », Revue Européenne des Eléments Finis, Vol.9, n°1-2-3, pp.199-215, Hermès eds, mars 2000.
- MESSAGER T., « *Buckling of Imperfect Laminated Cylinders under Hydrostatic Pressure* », Engineering Transactions, Polish Scientific Pub. – soumis à publication, février 2000.
- COLOOS J., PYRZ M. & MESSAGER T., « *Orientation optimale des fibres dans les plaques composites multicouches* », Revue Européenne des Eléments Finis, Vol.7, n°7, pp.811-824, Hermès eds, novembre 1998.
- MESSAGER T., PYRZ M. & COLOOS J., « *Optimisation topologique de plaques par algorithme génétique* », Revue Européenne des Eléments Finis, Vol.7, n°7, pp.793-810, Hermès eds, novembre 1998.

Communications

- MESSAGER T., PYRZ M. & DE SAXCE G., « *Buckling Model for Imperfect Laminated Submarine Cylinders* », 4th European Solid Mechanics Conference (ESMC'4), June 26-30 2000, Metz – accepté.
- MESSAGER T., PYRZ M., GOURMELEN P. & CHAUCHOT P., « *Optimisation discrète de structures par algorithme génétique* », actes (cd-rom) du 14^{ème} Congrès Français de Mécanique, AUM-AFM, 30 août-3 septembre 1999, Toulouse.
- GINESTE B., GROHENS A. & MESSAGER T., « *Essais en flambage de tubes composites sous pression externe* », actes (cd-rom) du 14^{ème} Congrès Français de Mécanique, AUM-AFM, 30 août-3 septembre 1999, Toulouse.

- MESSAGER T., PYRZ M. & CHAUCHOT P., « *ptimization of composite submersible hulls subjected to buckling* », proceedings (cd-rom) of the 3rd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (3rd WCSMO), May 17-21 1999, Niagara Falls - Amherst, New-York.
- MESSAGER T., CHAUCHOT P. & PYRZ M., « *Optimisation au flambage d'enceintes sous-marines composites* », actes du 4^{ème} Colloque National en Calcul des Structures (Giens' 99), Vol.I, pp.413-418, 18-21 mai 1999, Giens.
- PYRZ M. & MESSAGER T., « *Optimisation discrète de Treillis et Coques Composites par Algorithmes Génétiques* », actes du 4^{ème} Séminaire Scientifique Franco-Polonais ("Modélisation et Simulation des Systèmes Physiques et Structures"), pp.55-60, 11 mai 1999, Varsovie.
- GINESTE B., CASARI P., GROHENS A., MESSAGER T., NADOT Y. & SOHIER L., « *Un système d'essais de tubes composites sous pression externe* », actes des 11^{ème} Journées Nationales sur les Composites (JNC11), Vol.II, pp.823-831, AMAC, 18-20 novembre 1998, Arcachon.
- PYRZ M., MESSAGER T. & COLOOS J., « *Optimal design of plate structures using genetic algorithm* », proceedings of the 2nd international conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering (IDMME'98), Vol.I, pp.51-58, May 27-29 1998, Compiègne.

Rapports

- GINESTE B., MESSAGER T. & GROHENS A., « *Rapport d'activité, année 1999 – Contrat LMM-IFREMER (contrat universitaire n°98 2 32 0265 du 15 décembre 1998)* », 28 pages, Laboratoire de Mécanique et Matériaux, Université de Brest, décembre 1999.
- MESSAGER T., « *Etude de l'endommagement de structures en matériaux composites sous sollicitations transverses ~ optimisation d'enceintes sous-marines composites - rapport 1999* », 77 pages, Laboratoire de Mécanique et Matériaux (Université de Brest) et Conseil Régional de Bretagne (Service de la Recherche et de l'Innovation), août 1999.
- GINESTE B., MESSAGER T. & GROHENS A., « *Rapport d'activité, année 1998 – Contrat LMM-IFREMER (contrat universitaire n°97 2 32 0445 du 15 décembre 1997)* », 27 pages, Laboratoire de Mécanique et Matériaux, Université de Brest, décembre 1998.
- MESSAGER T., « *Rapport d'activité* », 28 pages, Département d'Enseignement et Recherche Mécanique, Ecole Nationale Supérieure des Ingénieurs des Etudes et Techniques d'Armement (ENSIETA), Brest, juillet 1998.
- MESSAGER T., « *Etude de l'endommagement de structures en matériaux composites sous sollicitations transverses ~ optimisation d'enceintes sous-marines composites - rapport 1997* », 67 pages, Laboratoire de Mécanique et Matériaux, Université de Brest, et Conseil Régional de Bretagne (Service de la Recherche et de l'Innovation), juillet 1997.

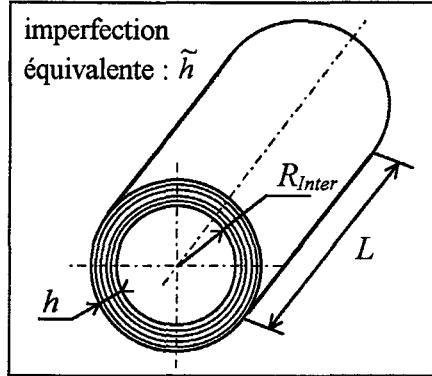
GINESTE B., MESSEGER T. & GROHENS A., « *Rapport d'activité, année 1997 – Contrat LMM-IFREMER (contrat universitaire n°96 2 32 0319 du 15 décembre 1996)* », 24 pages, Laboratoire de Mécanique et Matériaux, Université de Brest, décembre 1997.

MESSEGER T., « *Optimisation de structures par algorithmes génétiques* », 106 pages, mémoire de DEA de Mécanique, Université de Lille I, juillet 1996.

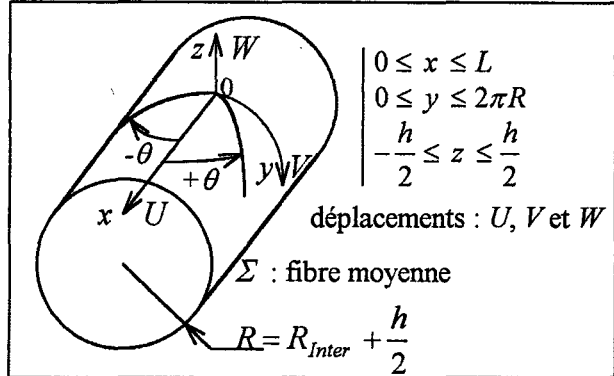
MESSEGER T., « *Avant-projet d'une vessie de régulation pour refroidissement bi-phasique de moteurs automobiles* », 74 pages, Société Le Joint Français, Service Recherche & Développement, S^t Brieuc, octobre 1995.

Notations et symboles principaux

Coque cylindrique



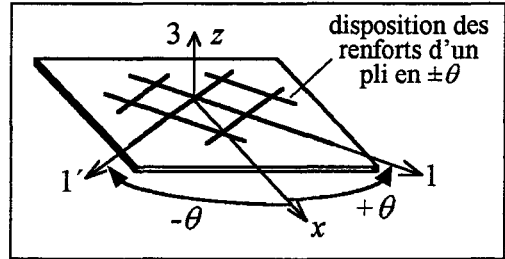
Géométrie



Repérage

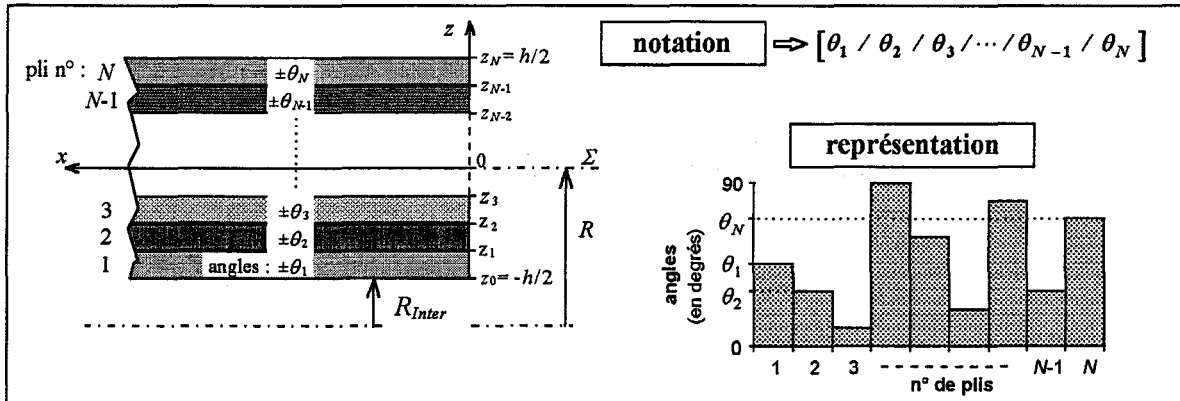
Caractéristiques matériau

- modules d'élasticité longitudinale : E_1, E_2, E_3
- modules de cisaillement transversal : G_{12}, G_{23}, G_{13}
- coefficients de contraction latérale : $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}$



Repère matériau

Stratification



Flambage

- P_{cr} = pression critique
- m, n = nombres de demi-ondes (longitudinales et circonférentielles) caractérisant le mode de flambage
- $G = P_{cr}([\theta_1 / \dots / \theta_N]) - P_{cr}([55_N])$ = gain absolu
- $\gamma = G / P_{cr}([55_N])$ = gain relatif