

Université des Sciences et Technologies de Lille

N° d'ordre : 2912

**THESE**



pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE LILLE**

en

**Productique Automatique et Informatique Industrielle**

Présentée par

**Thierry FLOQUET**

Ingénieur Ecole Centrale de Lille

**CONTRIBUTIONS A LA COMMANDE PAR MODES  
GLISSANTS D'ORDRE SUPERIEUR**

Soutenu le 20 Décembre 2000

**Composition du Jury**

M. Michel FLIESS	<i>Président</i>	Directeur de Recherche CNRS au CMLA ENS de Cachan
M Alain GLUMINEAU	<i>Rapporteur</i>	Professeur à l'Ecole Centrale de Nantes
M. Nacer M'SIRDI	<i>Rapporteur</i>	Professeur à l'Université de Versailles Saint-Quentin
M. Jean-Pierre RICHARD	<i>Codirecteur de thèse</i>	Professeur à l'Ecole Centrale de Lille
M. Jean-Pierre BARBOT	<i>Codirecteur de thèse</i>	Professeur à l'ENSEA
M. Wilfrid PERRUQUETTI	<i>Codirecteur de thèse</i>	Maître de Conférence à l'Ecole Centrale de Lille
M. Marcel STAROSWIECKI	<i>Examineur</i>	Professeur à l'EUDIL, USTL
M. Thierry-Marie GUERRA	<i>Examineur</i>	Professeur à l'Université de Valenciennes



# Table des matières

Avant Propos	5
Notations	7
<b>Introduction générale</b>	<b>11</b>
<b>I Formalisme des modes glissants</b>	<b>15</b>
Introduction	17
<b>1 Modes glissants d'ordre un</b>	<b>19</b>
1.1 Généralités . . . . .	19
1.1.1 Définitions . . . . .	19
1.1.2 Condition d'invariance de la surface de glissement . . . . .	21
1.1.3 Dynamiques en régime de glissement idéal . . . . .	24
1.1.4 Exemple . . . . .	24
1.2 Propriétés de robustesse . . . . .	27
1.3 Le phénomène de réticence . . . . .	30
<b>2 Modes glissants d'ordre supérieur</b>	<b>33</b>
2.1 Position du problème . . . . .	33
2.2 Définitions . . . . .	34
2.2.1 Modes glissants sur des variétés . . . . .	34
2.2.2 Modes glissants par rapport à des fonctions contraintes . . . . .	35
2.3 Régimes glissants réels . . . . .	37

2.4	Modes glissants et degré relatif . . . . .	39
2.5	Algorithmes glissants d'ordre supérieur . . . . .	41
2.5.1	Algorithme du twisting . . . . .	45
2.5.2	Algorithme sous-optimal . . . . .	50
2.5.3	Algorithme du Super twisting . . . . .	51
2.6	Réduction de la réticence . . . . .	52
2.7	Cas multi-variables . . . . .	54
<b>Conclusion</b>		<b>56</b>
<b>II Résultats</b>		<b>57</b>
<b>3</b>	<b>Mise en forme</b>	<b>59</b>
3.1	Introduction . . . . .	59
3.2	Forme régulière généralisée . . . . .	60
3.2.1	A propos du rang de la matrice des gains d'entrée . . . . .	60
3.2.2	Existence d'une forme régulière . . . . .	61
3.2.3	Cas perturbé . . . . .	63
3.3	Forme chaînée . . . . .	63
3.3.1	Systèmes non holonomes . . . . .	64
3.3.2	Transformation en une forme chaînée perturbée . . . . .	65
3.4	Forme canonique de commandabilité généralisée . . . . .	69
3.5	Conclusion . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Stabilisation</b>	<b>73</b>
4.1	Introduction . . . . .	73
4.2	Retour d'état . . . . .	74
4.2.1	Utilisation de la forme régulière généralisée . . . . .	74
4.2.2	Stabilisation d'un système non holonome perturbé . . . . .	84
4.2.3	Stabilisation d'un corps rigide sous actionné . . . . .	98
4.3	Retour de sortie pour un système mis sous forme canonique de commandabilité généralisée . . . . .	106

4.3.1	Synthèse de la commande . . . . .	107
4.3.2	Synthèse d'un observateur . . . . .	110
4.3.3	Stabilité en boucle fermée . . . . .	114
4.3.4	D'autres observateurs . . . . .	117
4.4	Conclusion . . . . .	120
<b>5</b>	<b>Application à la machine asynchrone : expériences sur le banc d'essai de l'IRCCyN</b>	<b>123</b>
5.1	Introduction . . . . .	123
5.2	Modèle de la machine asynchrone et position du problème . . . . .	125
5.2.1	Modèle . . . . .	125
5.2.2	Protocole d'expérimentation . . . . .	127
5.3	Synthèse de l'observateur . . . . .	129
5.4	Commande par modes glissants d'ordre deux . . . . .	132
5.5	Résultats de simulation . . . . .	136
5.6	Résultats expérimentaux . . . . .	138
5.6.1	Observateur seul . . . . .	138
5.6.2	Commande avec observateur . . . . .	141
5.7	Conclusion . . . . .	143
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>147</b>
<b>III</b>	<b>Annexes</b>	<b>151</b>
<b>A</b>	<b>Inclusions différentielles et solutions au sens de Filippov</b>	<b>153</b>
A.1	Inclusions Différentielles . . . . .	154
A.2	Notion de solution . . . . .	155
A.3	Existence des solutions . . . . .	155
A.4	Problème de Régularisation : solutions au sens de Filippov . . . . .	157
<b>B</b>	<b>Cas multi-variables</b>	<b>161</b>

C	Preuve du Théorème 20 sur la convergence de l'algorithme du twisting	165
---	--	-----

# Avant Propos

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé dans le cadre du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille (LAIL), à l'Ecole Centrale de Lille, et de l'Equipe Commande des Systèmes (ECS), à l'ENSEA.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Messieurs Jean-Pierre Barbot, Professeur à l'ENSEA, Jean-Pierre Richard, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille et Wilfrid Perquetti, Maître de Conférence à l'Ecole Centrale de Lille, pour avoir accompagné mon travail durant ces deux années de thèse. Les nombreuses discussions fructueuses que nous avons pu avoir, leur très grande disponibilité ainsi que la qualité de leurs rapports humains sont pour beaucoup dans les résultats obtenus lors de ce travail. Je tiens à leur exprimer toute mon amitié et ma reconnaissance.

Je suis très honoré que Monsieur Michel Fliess, Directeur de Recherche CNRS au CMLA de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, ait accepté la présidence du jury de thèse.

Je tiens à remercier très vivement Messieurs Alain Glumineau, Professeur à l'Ecole Centrale de Nantes, et Nacer M'Sirdi, Professeur à l'Université de Versailles Saint-Quentin pour avoir accepté d'être rapporteurs sur ce mémoire. Leurs conseils judicieux et bienveillants ont été une aide précieuse dans sa mise au point définitive.

Qu'il me soit permis de remercier Monsieur Thierry-Marie Guerra, Professeur à l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis pour l'intérêt qu'il porte à ce travail et pour m'avoir fait l'honneur de l'examiner.

Je voudrais également adresser mes remerciements à Monsieur Marcel Staroswiecki, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille et Directeur du LAIL, qui a accepté de juger ce travail malgré ses lourdes tâches.

Mes remerciements s'adressent également à l'ensemble du personnel et des thésards

du LAIL et de l'ECS qui, d'une façon ou d'une autre, m'ont permis de franchir cette nouvelle étape, et plus particulièrement Fred, Yann, Samir et Nicolas. Je voudrais également remercier les membres des laboratoires ou des organismes qui m'ont accueilli lors d'excursions scientifiques extra-muros (IRCCyN, LRP, LAG, Inter GdR Automatique-SDSE).

Enfin, je ne saurais oublier Catherine, Cécile, Anne, Eric, ..., qui m'ont supporté et accueilli chez eux tout au long de mes pérégrinations lilloise et parisienne.

# Notations

- $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{R}^+$ ) : ensemble des nombres réels (resp. réels positifs ou nuls),
- $\mathbb{R}^n$  : espace vectoriel de dimension  $n$  construit sur le corps des réels,
- $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  : espace d'état,
- $T_{S_x}$  : plan tangent à la variété  $S$  au point  $x$ ,
- $t \in \mathbb{R}^+$  : variable temporelle,
- $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathcal{X}$  : vecteur état,
- $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  est la dérivée de la variable  $x$  par rapport au temps,
- $x^{(i)}$  :  $i^{\text{ème}}$  dérivée de  $x$  par rapport au temps,
- $C^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  : ensemble des fonctions  $k$  fois continûment différentiables de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ ,
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  : le produit scalaire de deux champs de vecteurs,
- $\|x\|$  représente toute norme de  $x$  sur  $\mathbb{R}^n$ ,
- soient  $f(x)$  et  $g(x)$  des champs de vecteurs de dimension  $n$ , suffisamment différentiables. Le *produit de Lie* ou *crochet de Lie* de  $f(x)$  et  $g(x)$  et l'opérateur *ad* sont définis par :

$$[f, g](x) \triangleq \frac{\partial g}{\partial x}(x)f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x)g(x),$$

$$ad_f^k g(x) \triangleq [f, ad_f^{k-1} g](x), \quad k \geq 1,$$

avec  $ad_f^0 g(x) = g(x)$ ,

- pour une fonction réelle différentiable  $\lambda(x)$ , on note :  $d\lambda(x) \triangleq \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \right)$ ,

– la dérivée de  $\lambda$  le long de  $f$  est donnée par :

$$L_f \lambda(x) = d\lambda(x).f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}(x) f_i(x)$$

$$L_f^k \lambda(x) = dL_f^{k-1} \lambda(x).f(x)$$

avec  $L_f^0 \lambda(x) = \lambda(x)$ ,

–  $\text{sgn}(\zeta)$  est la fonction signe réelle définie par :

$$\text{sgn}(\zeta) = \begin{cases} -1 & \text{si } \zeta < 0 \\ 1 & \text{si } \zeta > 0 \end{cases},$$

–  $\text{SGN}(z)$  est la fonction signe vectorielle définie de la manière suivante :

$$\text{SGN}(z) = (\text{sgn}(z_1), \dots, \text{sgn}(z_l))^T, z \in \mathbb{R}^l.$$

– L'ensemble  $\text{Vect}\{g_1, \dots, g_m\}$  désigne la distribution engendrée par les champs de vecteurs  $g_1, \dots, g_m$ .

# **Introduction générale**



Dans toute formulation d'un problème de commande, le modèle mathématique développé dans le but d'établir la loi de commande ne reflète pas exactement le processus réel. Ces différences peuvent par exemple être dues à des dynamiques non modélisées, à des variations des paramètres du système ou à l'approximation trop directe de comportements complexes du processus. On doit néanmoins s'assurer que, malgré toutes ces incertitudes, la loi de commande résultante permet d'atteindre les objectifs prédéfinis. Ceci a conduit à un important intérêt pour la synthèse de contrôles dits robustes et capables de pallier à ce problème.

L'approche par des correcteurs linéaires, du type PID, a vite montré ses limites. En effet, ceux-ci sont soumis à la loi de Bode qui veut que les effets d'amplitude et les effets de phase soient couplés et antagonistes. Par exemple, toute avance de phase, qui est l'effet bénéfique recherché, va de pair avec une augmentation du rapport dynamique. De fait, les possibilités de compensation et d'utilisation de gains élevés s'en trouvent réduites.

Les recherches se sont alors tournées vers des techniques non linéaires, telles que les méthodes adaptatives ou de stabilité absolue, mais également la technique des modes glissants. Cette dernière s'inscrit dans la théorie des systèmes à structure variable qui a émergé au milieu de ce siècle en Union Soviétique. Les lois de commande par modes glissants sont réalisées de manière à conduire et contraindre le système à rester dans le voisinage d'une surface de commutation. Il y a deux principaux avantages à une telle approche. Tout d'abord, le comportement dynamique résultant peut être déterminé par le choix d'une surface adéquate. Ensuite, la réponse du système en boucle fermée est totalement insensible à une classe particulière d'incertitudes, ce qui fait de cette méthode une candidate sérieuse dans la perspective de l'élaboration de commandes robustes.

Le thème général des travaux présentés dans ce mémoire est la commande par modes glissants d'ordre supérieur, et notamment dans un but de stabilisation. La démarche a été de privilégier des lois de commande aboutissant à une convergence en temps fini et ayant des propriétés de robustesse. Aussi la majeure partie des résultats développés concerne-t-elle des systèmes soumis à des perturbations. Leurs propriétés structurelles ont en outre été étudiées afin de déterminer sous quelles conditions elles pouvaient être rejetées. De plus, des classes de systèmes représentatives de processus réels ont été prises en compte afin d'associer une dimension pratique à nos lois de commande. Ceci a abouti

à la réalisation d'expériences sur une plateforme dédiée à la machine asynchrone.

L'organisation du mémoire se décompose en deux parties.

La première constitue un état de l'art de la théorie des modes glissants. Afin d'appréhender au mieux les modes glissants d'ordre supérieur, il est nécessaire de se familiariser au préalable avec les modes glissants classiques, c'est-à-dire d'ordre un, dont les principes fondamentaux sont identiques. Aussi le chapitre 1 est-il consacré aux rappels des notions de base des modes glissants d'ordre un. Il y est discuté des conditions d'existence de tels phénomènes, des dynamiques en régime de glissement, de leurs propriétés de robustesse, mais également de leur principal inconvénient : la réticence.

C'est d'ailleurs en vue de résoudre ce problème majeur que les modes glissants d'ordre supérieur ont été introduits. Le chapitre 2 sera l'occasion d'en donner la définition et de les positionner par rapport aux modes glissants d'ordre un, notamment en ce qui concerne la réduction du phénomène de réticence. Nous nous attacherons également à présenter quelques algorithmes permettant de les générer. En particulier, nous donnerons une extension de ceux-ci permettant d'améliorer leur vitesse de convergence.

La deuxième partie est essentiellement constituée des différents résultats auxquels nous avons pu aboutir au cours de cette étude. Le chapitre 3 est une présentation des différentes formes de systèmes sur lesquelles nous nous sommes appuyés pour réaliser des commandes par modes glissants d'ordre supérieur. On pourra observer que celles-ci englobent une large classe de processus réels dans des domaines variés tels que la robotique ou l'électrotechnique.

Les différentes lois de commande par modes glissants d'ordre supérieur que nous avons développées sont détaillées dans le chapitre 4. Elles peuvent être classées en deux types. D'un côté des commandes par retour d'état aboutissant plus particulièrement à la stabilisation de systèmes mis sous forme régulière, non-holonomes et sous-actionnés. Ces contrôleurs nécessitent d'avoir une information sur l'ensemble de l'état du système, ce qui n'est pas le cas dans la pratique. C'est pourquoi nous proposons ensuite la synthèse d'une loi de commande par retour de sortie. Celle-ci s'appuie sur un observateur utilisant lui aussi la théorie des modes glissants. Les problèmes inhérents à la non validité du principe de séparation pour les systèmes non linéaires sont également évoqués.

Le souci d'associer une dimension applicative à notre étude nous a amené à dévelop-

per une commande par modes glissants d'ordre supérieur pour la machine asynchrone et à l'implanter, dans le cadre de l'inter GdR Automatique-SDSE du CNRS, sur un banc d'essai. Celui-ci est situé dans les locaux de l'IRCCyN à Nantes et est dédié à un problème de manutention horizontale. Les résultats de ces expériences sont présentés dans le chapitre 5. Cette fois-ci, il est question de poursuite de trajectoire et la commande est bouclée sur un observateur par modes glissants. Par ces expériences se trouvent justifiées l'utilisation de la technique des modes glissants pour un problème alliant à la fois observation et commande ainsi que la viabilité des ordres supérieurs pour des réalisations pratiques.



## **Première partie**

### **Formalisme des modes glissants**



# Introduction

La théorie des systèmes à structure variable fait l'objet de multiples études depuis une cinquantaine d'années. Les premiers travaux sur ce type de systèmes sont ceux d'Anosov [1], de Tzypkin [157] et d'Emel'yanov [67, 68] dans l'ancienne URSS, ou ceux d'Hamel [96] en France, sur la commande à relais. Ces recherches ont connu un nouvel essor à la fin des années soixante-dix lorsqu'Utkin introduit la théorie des modes glissants [158]. Cette technique de commande et d'observation a reçu un intérêt sans cesse croissant du fait :

- de leur relative simplicité d'élaboration ;
- de leur robustesse vis-à-vis de certaines incertitudes paramétriques et perturbations exogènes ;
- de la large gamme de leurs applications dans des domaines très variés tels que la robotique, la mécanique ou l'électrotechnique : la stabilisation [7, 25, 139], le suivi de trajectoires ([21, 25, 62, 94]) ou de modèles ([87, 164, 169]), l'observation [26, 35, 58, 99, 110, 145, 150],...

Le principe de cette technique est de contraindre le système à atteindre et ensuite rester sur une surface donnée (représentant un ensemble de relations, statiques, entre les variables d'état). La surface considérée est alors désignée comme étant la *surface de glissement* ou de *commutation*. Le comportement dynamique résultant, appelé *régime glissant idéal*, est complètement déterminé par les paramètres et les équations définissant la surface. L'avantage d'obtenir un tel comportement est double : d'un côté, on a une réduction de l'ordre du système, et de l'autre, le régime glissant est insensible aux perturbations intervenant dans les mêmes directions que les entrées (*matching perturbations*). La réalisation se déroule en deux temps. Une surface est déterminée de façon à ce que

le régime glissant ait les propriétés désirées (pas forcément présentes dans le système original), puis une loi de commande discontinue est synthétisée de façon à rendre la surface invariante et (au moins localement) attractive. Cependant, l'introduction de cette action discontinue, agissant sur la première dérivée par rapport au temps de la variable de glissement, ne génère pas un régime glissant idéal. En moyenne, les variables contrôlées peuvent être considérées comme évoluant idéalement sur la surface. En réalité, le mouvement est caractérisé par des oscillations à hautes fréquences dans un voisinage de la surface (dont l'épaisseur est de l'ordre de la période d'échantillonnage ou de commutation). Ce phénomène est connu sous le nom de *réticence* ou *chattering* en anglais et est un des inconvénients majeurs de cette technique. Il peut en outre exciter des dynamiques non modélisées et conduire à l'instabilité.

Dans les années 80, Emel'yanov et al. [69, 70] ont généralisé le concept des modes glissants classiques à ce qui est appelé les *modes glissants d'ordre supérieur*. Ceux-ci sont caractérisés par une commande discontinue agissant sur les dérivées d'ordre supérieur de la variable de glissement. Préservant les principaux avantages de la précédente approche, ils suppriment le phénomène de réticence en garantissant même une meilleure précision de convergence par rapport aux imperfections de modèle ou d'organes de commande. L'ordre de glissement caractérise en particulier le degré de continuité des dynamiques du système au voisinage de la surface et correspond au nombre de dérivées continues de la variable à contraindre. Pour cela, des algorithmes de commande capables de générer des régimes glissants de tout ordre doivent être synthétisés.

Dans le premier chapitre seront donnés les principes de la commande par modes glissants impliquant les notions d'attractivité et d'invariance d'une surface (permettant de définir le contrôle équivalent), les propriétés de robustesse et le phénomène de réticence. Des ouvrages de référence traitant globalement de cette théorie sont ceux d'Utkin [159] et d'Edwards et Spurgeon [63]. Le deuxième chapitre consiste en la présentation des modes glissants d'ordre supérieur, et particulièrement la description d'algorithmes capables de générer des modes glissants d'ordre deux.

# Chapitre 1

## Modes glissants d'ordre un

Dans un souci de simplicité, la classe de systèmes considérée ici sera mono-entrée et affine en l'entrée. Tous les résultats donnés peuvent néanmoins être généralisés à des systèmes de la forme  $\dot{x} = f(x, u)$  (voir [141]) et au cas des systèmes multivariables (traité dans l'Annexe B). Seul le cas des systèmes continus est envisagé mais il faut attirer l'attention sur le fait que, pour les systèmes discrets ou présentant des retards, la situation présente d'autres difficultés. On pourra se référer à [91, 142] (cas discret) et [44, 89, 134] (cas des systèmes retardés) pour plus d'informations à ce sujet.

### 1.1 Généralités

#### 1.1.1 Définitions

Soit le système non-linéaire, affine en l'entrée, défini par

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (1.1)$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  appartient à  $\mathcal{X}$ , qui est soit une variété différentiable, soit un ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  représente l'entrée, qui peut éventuellement dépendre du temps.  $f$  et  $g$  sont des champs de vecteur suffisamment différentiables, définis sur  $\mathcal{X}$ . On définit également  $s$ , une fonction suffisamment différentiable,  $s : \mathcal{X} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

telle que  $\frac{\partial s}{\partial x}$  soit non nulle sur  $\mathcal{X}$ . L'ensemble

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{X} : s(t, x) = 0\} \quad (1.2)$$

représente alors une sous-variété de  $\mathcal{X}$  de dimension  $(n - 1)$ , appelée par la suite *surface de glissement* ou *de commutation* ou encore *contrainte*. La fonction  $s$ , quant à elle, sera dénommée *fonction de glissement* ou *de commutation*.

**Remarque 1** *Les systèmes étudiés ici sont donc régis par des équations différentielles impliquant des termes discontinus. La théorie classique des équations différentielles ordinaires ne permet pas de décrire le comportement des solutions dans de tels cas et il faut alors se reporter à la théorie des inclusions différentielles [5, 6] et aux solutions au sens de Filippov [75] qui sont décrites dans l'Annexe A.*

**Définition 2** [159] *On dit qu'il existe un régime glissant idéal sur  $\mathcal{S}$  s'il existe un temps fini  $t_s$  tel que la solution de (1.1) satisfasse  $s(t, x) = 0$  pour tout  $t \geq t_s$ .*

Des conditions suffisantes permettent de garantir l'existence d'un régime glissant. La surface de glissement doit être localement attractive, ce qui peut se traduire mathématiquement par :

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\partial s}{\partial x} (f + gu) < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{\partial s}{\partial x} (f + gu) > 0 \quad (1.3)$$

Cette condition traduit le fait que, dans un voisinage de la surface de glissement, les vecteurs vitesses des trajectoires du système doivent toujours pointer vers cette surface (voir Figure 1-1).

Ainsi, une fois la surface intersectée, les trajectoires restent dans un  $\varepsilon$ -voisinage de  $\mathcal{S}$ , et on dit que le régime glissant est *idéal* si on a exactement  $s(t, x) = 0$ . La condition (1.3) est plus souvent rencontrée sous la forme :

$$s\dot{s} < 0 \quad (1.4)$$

et est appelée *condition d'attractivité* [103].

La commande  $u$  est construite de façon à ce que les trajectoires du système soient amenées vers la surface de glissement et soient ensuite maintenues dans un voisinage de

celle-ci.  $u$  est une loi de commande à structure variable définie comme suit :

$$u = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } s(t, x) > 0 \\ u^-(x) & \text{si } s(t, x) < 0 \end{cases}, \quad u^+ \neq u^- \quad (1.5)$$

$u^+$  et  $u^-$  étant des fonctions continues. Il est à noter que c'est le caractère discontinu de la loi de commande qui permet d'obtenir une convergence en temps fini sur la surface ainsi que des propriétés de robustesse vis-à-vis de certaines perturbations (cet aspect sera évoqué par la suite).

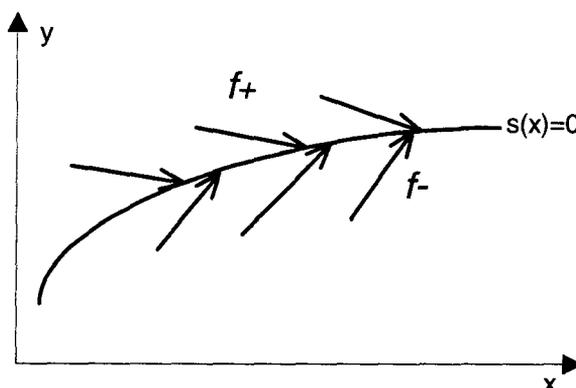


FIG. 1-1: Attractivité de la surface

### 1.1.2 Condition d'invariance de la surface de glissement

La méthode dite de la *commande équivalente*, due à Utkin [159] est un moyen de déterminer le comportement du système lorsqu'il est restreint à la surface  $\{s = 0\}$ . Celui-ci est donné par les conditions d'invariance de la surface :

$$s = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial x} [f(x) + g(x)u_e] = 0.$$

La deuxième équation est obtenue en faisant  $\dot{s} = 0$ .  $u_e$  est appelé *commande équivalente* et s'exprime donc de la façon suivante

$$u_e(x) = - \left[ \frac{\partial s}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} f(x). \quad (1.6)$$

On dit que la commande équivalente est *bien définie* si elle existe et est déterminée de façon unique par les conditions d'invariance.

**Proposition 3** [140] *La commande équivalente est bien définie si et seulement si  $\frac{\partial s}{\partial x}g(x) \neq 0$  sur  $\mathcal{S}$ .*

Cette condition est appelée *condition de transversalité* et ne constitue qu'une condition nécessaire pour l'existence d'un régime glissant. Elle signifie que le champ de vecteur  $g$  ne doit pas être tangent à la surface. En général, elle n'est pas trop restrictive car  $g$  est non nul et  $s$  est une fonction que l'on peut choisir.

La signification physique de la commande équivalente peut s'interpréter de la manière suivante. La loi de commande discontinue  $u$  consiste en la somme d'une composante haute fréquence ( $u_{hf}$ ) et d'une composante basse fréquence ( $u_s$ ) :  $u = u_{hf} + u_s$ .  $u_{hf}$  est filtrée<sup>1</sup> par la bande passante du système et le régime sur  $\mathcal{S}$  n'est affecté que par  $u_s$ , qui peut être vue comme étant la sortie du filtre passe-bas

$$\tau \dot{u}_s + u_s = u, \quad \tau \ll 1.$$

Cela signifie que  $u_e \simeq u_s$  et qu'elle représente la valeur moyenne du signal discontinu  $u$ .

Lors de sa réalisation, la loi de commande à structure variable consiste le plus souvent en une partie continue, qui s'avère être la commande équivalente, et une autre discontinue, assurant la convergence en temps fini vers la surface. Un exemple classique de commande pour le système (1.1) est le suivant :

$$u = u_e - K \left[ \frac{\partial s}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \text{sgn } s$$

où  $K$  est une constante positive et  $\text{sgn}$  est la fonction signe classique. On peut alors vérifier que

$$s\dot{s} = -K |s| < 0$$

et donc qu'un régime glissant s'établit sur  $s = 0$ .

Dans l'Annexe A traitant de la résolution des équations différentielles à second membre

---

<sup>1</sup>la réticence est fonction de la bande passante

discontinu, il est vu que la dynamique équivalente, au sens de Filippov [75], est donnée par :

$$\frac{dx}{dt} = \left[ \frac{\langle ds, f^- \rangle(x)}{\langle ds, f^- - f^+ \rangle(x)} \right] f^+(x) - \left[ \frac{\langle ds, f^+ \rangle(x)}{\langle ds, f^- - f^+ \rangle(x)} \right] f^-(x).$$

Toutefois, les méthodes de Filippov et Utkin ne sont, en général, pas équivalentes ainsi que le montre l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2.1x_2 + 4ux_1 \\ \dot{x}_2 = -1.1x_1 + 4u^2x_1 \end{cases},$$

$$s(x) = x_1 + x_2,$$

$$u = \begin{cases} -1 & \text{si } s(t, x) > 0 \\ 1 & \text{si } s(t, x) < 0 \end{cases}.$$

La méthode de la commande équivalente donne :  $\dot{s} = 0 = (1 + 4u + 4u^2)x_1$ , c'est-à-dire  $u_{eq} = -1/2$  et donc la dynamique de glissement  $\dot{x}_1 = 0.1x_1$  et  $x_1 + x_2 = 0$ . Par contre, par la méthode de Filippov, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha f^+(x) + (1 - \alpha)f^-(x), \\ \alpha &= \left[ \frac{\langle ds, f^- \rangle(x)}{\langle ds, (f^- - f^+) \rangle(x)} \right] = \frac{1}{4x_1} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

soit  $\dot{x}_1 = -2.9x_1$  et  $x_1 + x_2 = 0$  (avec la condition supplémentaire  $x_1 > \frac{1}{4}$  car  $\alpha$  doit être inférieur à 1). Cet exemple pose le problème du choix de la théorie à employer lors de l'étude d'un système différentiel à second membre discontinu. Ces deux méthodes donnent néanmoins des solutions identiques sous certaines conditions (qui ont été développées dans [10]). C'est le cas, entre autres, pour les systèmes linéaires en l'entrée. Ceci justifie le fait de développer les résultats de ce chapitre pour des systèmes de la forme (1.1), d'autant plus que les applications ou exemples détaillés dans l'ensemble du mémoire font partie de cette classe de systèmes.

### 1.1.3 Dynamiques en régime de glissement idéal

D'après l'expression de la commande équivalente, il s'ensuit que le mouvement sur  $\mathcal{S}$  est gouverné par l'équation  $\dot{x}_e = f(x_e) + g(x_e)u_e$ , ou encore

$$\begin{cases} \dot{x}_e = \left[ I - g(x_e) \left[ \frac{\partial s}{\partial x_e} g(x_e) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial x_e} \right] f(x_e) \\ s(t, x_e) = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

$\frac{\partial s}{\partial x}$  étant non nul sur  $\mathcal{X}$ , cela implique que l'on peut exprimer  $m$  états en fonction des  $(n - m)$  autres. Ainsi, en régime glissant, les dynamiques du système évoluent sur un espace d'état réduit dont la dimension est  $(n - m)$ .

### 1.1.4 Exemple

Afin d'illustrer ces propos, prenons un moteur à courant continu pouvant se modéliser sous une forme simplifiée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases} .$$

On définit la surface de glissement suivante (si on veut par exemple que le comportement du moteur en régime glissant soit analogue à un premier ordre de constante de temps  $\tau = \frac{1}{\alpha}$ )

$$s = x_2 + \alpha x_1 = 0, \quad \alpha > 0.$$

Alors,

$$\dot{s} = (\alpha - 1)x_2 + u.$$

Si on choisit une loi de commande de la forme  $u = -k \operatorname{sgn}(s)$ ,  $k > 0$ , il existe un régime glissant dans le domaine

$$\Omega = \{x \in \mathcal{X} : |(\alpha - 1)x_2| < k\}$$

étant donné que

$$s\dot{s} < |s| (|(\alpha - 1)x_2| - k) < 0.$$

Il est intéressant de noter que la condition (1.4) n'est pas suffisante pour assurer une convergence en temps fini vers la surface. En effet, si on reprend le même exemple mais en modifiant l'entrée de commande comme suit :

$$u = (1 - \alpha)x_2 - ks,$$

on obtient

$$\dot{s} = -ks.$$

La condition (1.4) est vérifiée, mais la convergence vers  $s = 0$  n'est qu'asymptotique puisque  $s = s(0)e^{-kt}$ . C'est pourquoi on remplace souvent (1.4) par la condition dite de  $\eta$ -attractivité

$$s\dot{s} \leq -\eta |s| \tag{1.8}$$

qui assure une convergence en temps fini<sup>2</sup> vers  $s = 0$ , étant donné que par intégration

$$|s(t)| - |s(0)| \leq -\eta t,$$

ce qui montre que le temps  $t_e$  requis pour atteindre la surface, partant d'une condition initiale  $s(0)$ , est borné par :

$$t_e \leq \frac{|s(0)|}{\eta}.$$

Cet exemple a été simulé avec la loi de commande suivante où  $\alpha = k = 2$  :

$$u = (1 - \alpha)x_2 - k \operatorname{sgn} s$$

(le terme  $(1 - \alpha)x_2$  représente la commande équivalente puisque  $\dot{s} = 0$  implique  $u + (\alpha - 1)x_2 = 0$ ). Les Figures 1-2 et 1-4 montrent qu'un régime glissant prend place après environ 1.3 sec. A partir de cet instant, le système est gouverné par la dynamique d'ordre

---

<sup>2</sup>d'autres types de convergence en temps fini sont données dans la littérature, voir [132, 168].

réduit

$$\dot{x}_1 = -\alpha x_1 = x_2,$$

et la commande commute à très haute fréquence. La Figure 1-4 illustre la commande équivalente qui, en régime de glissement, représente la valeur moyenne de  $u$ . Le portrait de phase, sur la Figure 1-3, montre les deux étapes du comportement du système : tout d'abord, une trajectoire parabolique avant que la surface ne soit atteinte et, ensuite, le glissement le long de la droite  $x_2 = -\alpha x_1$  (i.e.  $s = 0$ ) jusqu'à l'origine.

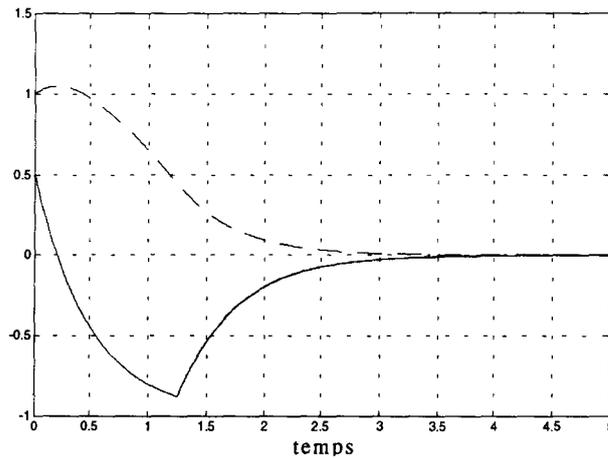


FIG. 1-2:  $x_1$  (---) et  $x_2$  (—)

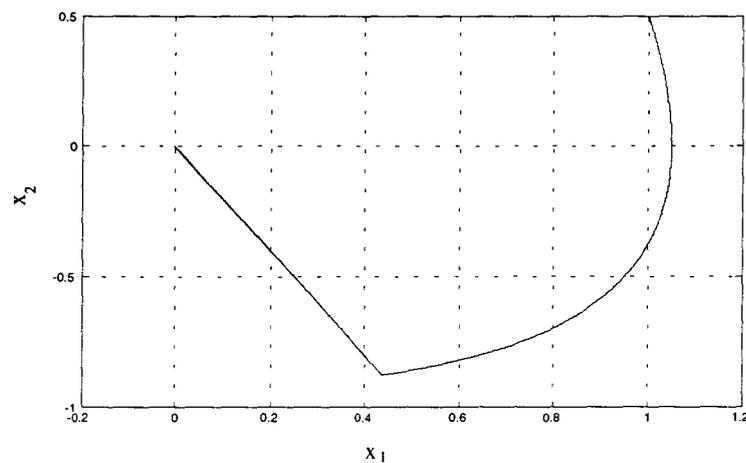


FIG. 1-3: Trajectoires dans le plan de phase

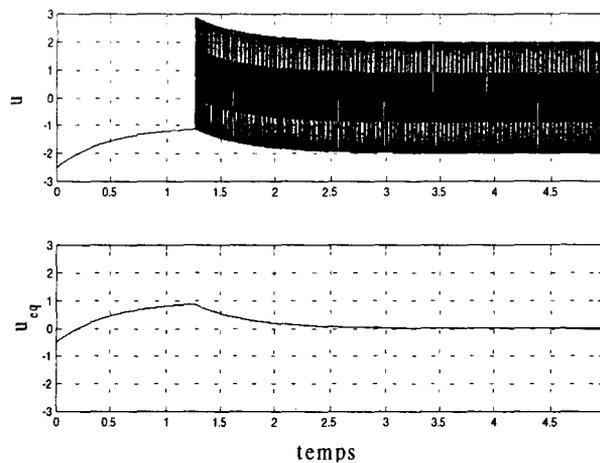


FIG. 1-4: Commande discontinue et commande équivalente

## 1.2 Propriétés de robustesse

De nombreuses techniques de commande ont été développées de façon à être robustes vis-à-vis des incertitudes sur les systèmes considérés. La plupart d'entre elles sont basées sur des méthodes adaptatives, reposant aussi bien sur l'identification ou l'observation, ou sur des méthodes impliquant la stabilité absolue. Bien souvent, elles conduisent à des lois de commande relativement compliquées dont l'implantation se révèle lourde en matière de calculs et de matériels. D'un autre côté, les modes glissants, et ceci peut expliquer l'intérêt croissant pour ces techniques ces dernières années, permettent d'associer qualités de robustesse et réalisation relativement simple.

Reprenons le système (1.1) que l'on suppose maintenant soumis à des perturbations  $p$  pouvant représenter des incertitudes paramétriques sur le terme nominal de dérive  $f$  ou des perturbations externes indépendantes de l'état :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + p. \quad (1.9)$$

Le théorème suivant permet d'avoir une description des incertitudes auxquelles le régime glissant sera insensible et a été donné dans sa forme première par Drazenovic [61].

**Théorème 4** *Un régime glissant sur  $S$ , du système perturbé (1.9), est indépendant du*

signal de perturbation  $p$ , si et seulement si celui-ci vérifie

$$p \in \text{Vect}\{g(x)\}. \quad (1.10)$$

La condition (1.10) est appelée condition de recouvrement ou "matching condition".

Il faut noter que le système est insensible à de telles perturbations seulement en régime glissant, mais qu'il reste affecté pendant le régime transitoire, i.e. avant que la surface de glissement ne soit atteinte.

**Remarque 5** Des généralisations du théorème 4 seront données dans les parties suivantes, concernant notamment les systèmes mis sous forme régulière ou sous forme chaînée (cf systèmes non holonomes).

Afin d'illustrer la robustesse d'une telle technique de commande par rapport à des incertitudes paramétriques, prenons l'exemple d'un système linéaire (par souci de simplicité) mis sous forme canonique de commandabilité :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 - \Delta a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} - \Delta a_{n-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

où les  $\Delta a_i$  sont des incertitudes paramétriques dont on sait qu'elles sont bornées de la manière suivante :

$$\alpha_i^- < |\Delta a_i| < \alpha_i^+.$$

On se définit une surface de glissement

$$s = [c_0, c_1, \dots, c_{n-2}, 1]x = 0$$

(qui correspond à une dynamique de glissement désirée :  $p^{n-1} + c_{n-2}p^{n-2} + \dots + c_0 = 0$ ).

La loi de commande est choisie telle que

$$u = \sum_{i=1}^n k_{i-1} x_i - k_n \operatorname{sgn}(s).$$

La condition de  $\eta$ -attractivité (1.8) peut être satisfaite de deux façons différentes, et ceci malgré les perturbations :

• si on se fixe des gains de commande constants  $k_0 = a_0$ ,  $k_i = a_i - c_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , on obtient :

$$s\dot{s} = \sum_{i=1}^n \Delta a_{i-1} x_i s - k_n |s|,$$

et en posant :

$$k_n > \eta + \sum_{i=1}^n |\Delta a_{i-1} x_i|,$$

la condition (1.8) est satisfaite. L'amplitude de la discontinuité de la commande est fonction de l'état et des incertitudes du système. Cette commande est assez simple d'élaboration mais la discontinuité peut être importante (et par la même occasion le phénomène de réticence).

• une autre solution consiste à utiliser des gains qui commutent. Posant  $k_0 = \tilde{k}_0 + a_0$ ,  $k_i = \tilde{k}_i + a_i - c_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , on a alors

$$s\dot{s} = \sum_{i=1}^n (\tilde{k}_{i-1} - \Delta a_{i-1}) x_i s - k_n |s|,$$

et la condition  $s\dot{s} < -\eta |s|$  peut être satisfaite en choisissant  $k_n = \eta$  relativement peu important et

$$\tilde{k}_{i-1} = \begin{cases} \alpha_{i-1}^- & \text{si } x_i s > 0 \\ \alpha_{i-1}^+ & \text{si } x_i s \leq 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n.$$

La structure de la loi de commande est un peu plus compliquée mais l'amplitude des discontinuités s'en trouve réduite.

### 1.3 Le phénomène de réticence

Dans la pratique, un régime glissant idéal n'existe pas étant donné que cela impliquerait que la commande puisse commuter avec une fréquence infinie. De par la présence d'imperfections ou de limites technologiques et physiques, tels que des retards au niveau des commutations ou de petites constantes de temps au niveau des actionneurs, le caractère discontinu de la commande engendre un comportement dynamique particulier au voisinage de la surface qui est communément appelé *chattering*, en anglais, ou encore *réticence* ou *brouttement*, en français. Celui-ci se caractérise par de fortes oscillations autour de la surface, ainsi qu'il est montré Figure 1-5.

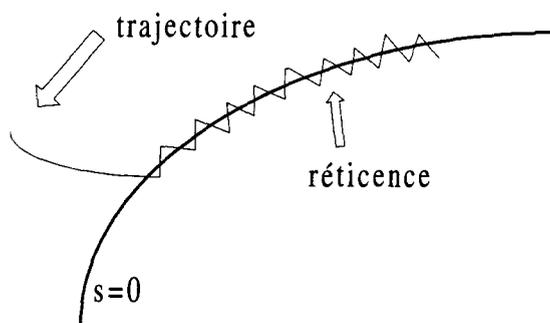


FIG. 1-5: Phénomène de réticence

Ce phénomène constitue un désavantage non négligeable car, même s'il est possible de le filtrer en sortie du processus, il est susceptible d'exciter des modes à haute fréquence qui n'ont pas été pris en compte dans le modèle du système. Ceci peut dégrader les performances et même conduire à l'instabilité [97]. La réticence implique également d'importantes sollicitations mécaniques au niveau des actionneurs, pouvant provoquer leur usure rapide, ainsi que des pertes énergétiques non négligeables au niveau des circuits de puissance électrique. De nombreuses études ont été effectuées dans le but de réduire ou d'éliminer ce phénomène. L'une d'entre elles consiste à remplacer la fonction signe par des approximations continues de type grand gain dans un voisinage de la surface (voir [148]), telles que la fonction de saturation définie par (voir Figure 1-6) :

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} \frac{s}{\varepsilon} & \text{si } |s| \leq \varepsilon \\ \text{sgn}(s) & \text{si } |s| > \varepsilon \end{cases}$$

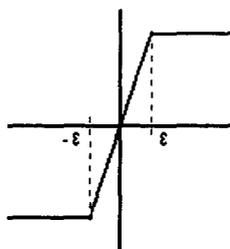


FIG. 1-6: Fonction saturation

Ceci a pour conséquence de filtrer les composantes hautes fréquences dans la région  $B(t) = \{x : |s(x)| \leq \varepsilon\}$ . Le régime glissant qui en résulte est donc confiné dans un  $\varepsilon$ -voisinage de la surface de glissement où seule la commande équivalente agit. D'autres fonctions peuvent être utilisées telles que les fonctions sigmoïdes  $\frac{r^{2n+1}}{1+r^{2n}}$ ,  $\tanh(r)$ ,  $\frac{2}{\pi} \arctan(r)$ ,... avec  $r = \frac{x}{\varepsilon}$  et  $\varepsilon$  l'épaisseur du voisinage de la surface où les composantes haute fréquence sont filtrées.

Dans la littérature, des commandes de la forme  $u = -|s|^\beta \operatorname{sgn}(s)$  sont aussi employées. La commande diminue en amplitude à mesure que l'on s'approche de la surface de glissement (Figure 1-7).

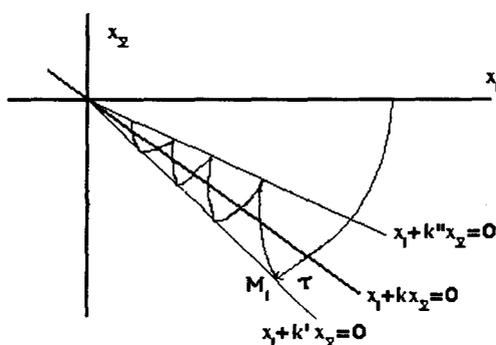


FIG. 1-7: Réticence avec  $u = -|s|^\beta \operatorname{sgn}(s)$

Toutefois, rien ne peut être dit à propos du comportement du système à l'intérieur de ce voisinage. De plus, bien que cela permette d'atténuer le phénomène de réticence, la précision par rapport à l'objectif fixé, la robustesse de la commande et le temps de réponse s'en trouve dépréciés. Des compromis entre l'importance de la réticence et les

performances doivent être faits. Mais, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant, une autre solution, basée sur la théorie des modes glissants d'ordre supérieur, permet de passer outre cet indésirable phénomène.

# Chapitre 2

## Modes glissants d'ordre supérieur

Dès son apparition, la théorie des modes glissants s'est heurtée au problème de la réticence qui s'est avérée être un inconvénient majeur. En particulier, il est difficile dans de telles conditions d'envisager des développements pour des applications pratiques quand leur implantation implique une usure relativement rapide des organes de commande du processus. Pour contourner cet obstacle, des chercheurs russes ont proposé une nouvelle façon de glisser. Ainsi qu'il va être décrit dans ce chapitre, il est alors possible de réduire ou même d'exclure tout phénomène de chattering, tout en conservant les propriétés de robustesse et de convergence en temps fini.

### 2.1 Position du problème

Dans cette partie, nous considérerons un système non linéaire dont la dynamique est décrite par le système différentiel :

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{2.1}$$

$$s = s(t, x) \tag{2.2}$$

où  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathcal{X}$  représente le vecteur état,  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ .  $\mathcal{X}$  est une variété différentiable ou un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . La commande  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$  est une fonction discontinue et bornée dépendant de l'état et du temps.  $f$  est une fonction supposée suffisamment différentiable, mais connue de façon incertaine. Le problème posé est toujours de contraindre

les trajectoires du système à évoluer sur la surface de glissement

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{X} : s(t, x) = 0\}. \quad (2.3)$$

$s : \mathcal{X} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  étant une fonction à valeur réelle suffisamment différentiable telle que ses  $(r - 1)$  premières dérivées par rapport au temps ne sont fonctions que de l'état  $x$  (ce qui signifie qu'elles ne contiennent aucune discontinuité). Par souci de simplicité de l'exposé, nous supposons que  $s \in \mathbb{R}$  et  $u \in \mathbb{R}$ . Le cas multi-variables sera vu dans le paragraphe 2.7.

**Remarque 6** *Le système (2.1) englobe ceux de la forme  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ , qui étaient considérés dans le chapitre précédent.*

Dans le cadre de l'obtention des solutions au sens de Filippov des équations différentielles à second membre discontinu, l'équation (2.1), pour un retour discontinu  $u(x)$ , est remplacée par l'inclusion différentielle<sup>1</sup>

$$\dot{x} \in V(x) \quad (2.4)$$

et toute solution de (2.1) est définie comme une fonction absolument continue  $x(t)$  satisfaisant l'inclusion différentielle presque partout. Les définitions qui suivent proviennent des travaux de Emel'yanov et al. [70] et Levant et al. [90, 112, 113].

## 2.2 Définitions

### 2.2.1 Modes glissants sur des variétés

**Définition 7** *Soit  $\mathcal{S}$  une variété analytique. L'ensemble  $\mathcal{S}$ , lui-même, est appelé ensemble de glissement du premier ordre par rapport à  $\mathcal{S}$ . L'ensemble de glissement du deuxième ordre est défini pour le système (2.4) comme l'ensemble des points  $x \in \mathcal{S}$ , où  $V(x)$  est entièrement inclus dans le plan tangent  $T_{\mathcal{S}_x}$  à la variété  $\mathcal{S}$  au point  $x$ .*

**Définition 8** *On dit qu'il existe un mode glissant du premier (ou deuxième) ordre sur*

---

<sup>1</sup>voir Annexe A.

la variété  $S$  au voisinage d'un point de glissement du premier (ou deuxième) ordre  $x$ , si au voisinage du point  $x$ , l'ensemble de glissement du premier (ou deuxième) ordre est un ensemble intégral, i.e. composé de trajectoires au sens de Filippov.

Notons maintenant  $\mathcal{S}_1 = S$  et  $\mathcal{S}_2$  l'ensemble des points de glissement du second ordre par rapport à la variété  $\mathcal{S}$ . On suppose que  $\mathcal{S}_2$  est une variété suffisamment régulière. La même construction peut être effectuée par rapport à  $\mathcal{S}_2$ . Définissant  $\mathcal{S}_3$  comme étant l'ensemble des points de glissement du second ordre par rapport à la variété  $\mathcal{S}_2$ ,  $\mathcal{S}_3$  est appelé ensemble des points de glissement du troisième ordre par rapport à la variété  $\mathcal{S}$ . On peut ainsi définir par récurrence des ensembles de glissement d'ordre quelconque.

**Définition 9** *On dit qu'il existe un mode glissant d'ordre  $r$  sur la variété  $\mathcal{S}$  au voisinage d'un point de glissement d'ordre  $r$ ,  $x \in \mathcal{S}_r$ , si au voisinage du point  $x$  l'ensemble de glissement d'ordre  $r$ ,  $\mathcal{S}_r$  est un ensemble intégral, i.e. composé de trajectoires au sens de Filippov.*

## 2.2.2 Modes glissants par rapport à des fonctions contraintes

Nous donnons ci-dessous une vision plus concrète du problème en termes de fonction de contrainte. L'ensemble de glissement d'ordre  $r$  par rapport à la fonction contrainte  $s$  est défini par :

$$\mathcal{S}_r = \{x \in \mathcal{X} : s = \dot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0\} \quad (2.5)$$

Nous définissons de cette manière, un ensemble de dimension  $n - r$  (si la condition de régularité est vérifiée).

**Définition 10** *Soit  $\mathcal{S}_r$  l'ensemble de glissement d'ordre  $r$  (2.5), considéré non vide, et supposons qu'il définisse localement un ensemble intégral au sens de Filippov. Alors la dynamique satisfaisant (2.5) est appelée mode glissant d'ordre  $r$  par rapport à la fonction contrainte  $s$ .*

Si, à présent, nous supposons que  $s, \dot{s}, \dots, s^{(r-2)}$  sont des fonctions différentiables par rapport à  $x$  et que, localement :

$$\text{rang} \left[ \frac{\partial}{\partial x} s, \frac{\partial}{\partial x} \dot{s}, \dots, \frac{\partial}{\partial x} s^{(r-2)} \right] = r - 1 \quad (2.6)$$

alors les définitions 9 et 10 sont équivalentes. L'équation (2.6) est appelée *condition de régularité faible du glissement*.

Si de plus,  $\mathcal{S}_r$  est une variété différentiable et si pour tout  $i = 1, \dots, r - 1$ , les  $\mathcal{S}_i$  sont des variétés régulières, alors la précédente condition peut être étendue à ce qui est appelé la *condition de régularité du glissement* :

$$\text{rang} \left[ \frac{\partial}{\partial x} s, \frac{\partial}{\partial x} \dot{s}, \dots, \frac{\partial}{\partial x} s^{(r-1)} \right] = r. \quad (2.7)$$

**Proposition 11** *Supposons la condition de régularité (2.7) vérifiée et la variété de glissement d'ordre  $r$  (2.5) non vide. Alors un mode glissant d'ordre  $r$  par rapport à la contrainte  $s$  existe si et seulement si l'intersection du champ de vecteurs au sens de Filippov avec l'espace tangent à la variété (2.5) n'est vide pour aucun point de glissement d'ordre  $r$ .*

**Définition 12** *On dit que la loi de commande  $u$  est un algorithme glissant idéal d'ordre  $r$  par rapport à  $\mathcal{S}$  si elle génère un mode glissant d'ordre  $r$  sur  $\mathcal{S}$ , i.e.*

$$s = \dot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0.$$

Comme pour un mode glissant classique, on peut considérer qu'en régime glissant le système est régi par la dynamique équivalente

$$\dot{x} = f(t, x, u_e)$$

où  $u_e$  est la commande équivalente qui est obtenue en résolvant l'équation, supposée avoir une solution unique, et pour une fonction de glissement  $s$  de degré relatif égal à  $p \leq r$

$$s^{(p)}(t, x, u_e) = 0.$$

**Remarque 13** *Les définitions précédentes peuvent être étendues au cas d'une fonction contrainte de dimension  $m > 1$  :  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $s = [s_1, \dots, s_m]^T$ .*

*Supposons que les  $(r_i - 1)$  premières dérivées par rapport au temps de chaque compo-*

sante de  $s$  soient continues et que chaque ensemble défini par

$$\left\{ s_i = \dot{s}_i = \dots = s_i^{(r_i-1)} = 0, i = 1, \dots, m \right\}, \quad (2.8)$$

soit localement un ensemble intégral au sens de Filippov. Alors la dynamique satisfaisant ces égalités est appelée régime glissant de vecteur d'ordre  $r$  par rapport au vecteur contrainte  $s$ .

La condition de régularité du glissement correspondante est la suivante :

$$\text{rang} \left[ \frac{\partial}{\partial x} s_i, \frac{\partial}{\partial x} \dot{s}_i, \dots, \frac{\partial}{\partial x} s_i^{(r_i-1)} \right]_{i=1, \dots, m} = r_1 + \dots + r_m.$$

## 2.3 Régimes glissants réels

Dans toutes les définitions données précédemment, il est supposé que l'ensemble de glissement d'ordre  $r$

$$s = \dot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0$$

est atteint exactement. Un tel régime glissant est qualifié d'idéal et il est notamment supposé que les organes de commande commutent à une fréquence infinie. Toutefois, ce n'est pas le cas en pratique étant données les imperfections de ces derniers et de ce fait, le régime glissant ne prend place que dans un proche voisinage de la surface considérée. Ce comportement est qualifié de *régime glissant réel*. Le cas idéal, quant à lui, doit être interprété comme les trajectoires limites lorsque les imperfections deviennent inexistantes et lorsque la fréquence de commutation tend vers l'infini. Les définitions suivantes introduisent :

- la notion de précision des modes glissants réels ;
- un outil permettant de comparer les différents algorithmes de contrôle générant des modes glissants d'ordre supérieur.

**Définition 14** Soit  $\gamma : \mathbb{R}^\lambda \rightarrow \mathbb{R}^{\lambda'}$  une fonction telle que  $\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Un algorithme de commande réel (i.e. conduisant à un régime glissant réel) sur la contrainte  $s = 0$  est dit d'ordre  $r$  ( $r > 0$ ) par rapport à  $\gamma(\varepsilon)$  si pour tout ensemble local de conditions

initiales il existe un temps  $t_1$  et une constante  $C$  tels que,  $\forall t > t_1$ , l'inégalité suivante soit satisfaite

$$|s| \leq C|\gamma(\varepsilon)|^r.$$

Cette définition implique en outre que l'inégalité ci-dessus est vérifiée en temps fini. Lorsque  $\gamma(\varepsilon)$  est le plus petit intervalle de continuité de la commande, les mots “par rapport à  $\gamma$ ” sont en général omis.

La définition suivante est une extension aux algorithmes concernant des lois de commande discontinues et des fréquences de commutations bornées.

**Définition 15** Soit un algorithme, dépendant d'un paramètre  $\varepsilon \in \mathbb{R}^\lambda$ , générant un régime glissant sur la surface  $S$ , et dont l'action est continue par morceau par rapport au temps, avec des intervalles de continuité pas plus petits que  $\tau(\varepsilon) > 0$ , où  $\tau(\varepsilon) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Si cet algorithme est d'ordre  $r$  par rapport à  $\tau$ , on dit alors que c'est un algorithme par modes glissants réel d'ordre  $r$  par rapport à la surface  $S$ .

**Proposition 16** Supposons que la  $r^{\text{ième}}$  dérivée totale par rapport au temps de  $s$ ,  $s^{(r)}$ , soit bornée. Alors il existe des constantes  $c_1, c_2, \dots, c_{r-1}$  telles que, en régime établi,

$$|\dot{s}| \leq c_1\tau^{r-1}, \quad |\ddot{s}| \leq c_2\tau^{r-2}, \quad \dots, \quad |s^{(r-1)}| \leq c_{r-1}\tau.$$

Il résulte de ces définitions qu'un algorithme d'ordre  $r$  permettra, si la méthode d'intégration est à pas variable majoré par  $\tau$ , d'obtenir la précision de convergence suivante :

$$\begin{aligned} |s| &= O(\tau^r), \\ |\dot{s}| &= O(\tau^{r-1}), \\ &\vdots \\ |s^{(r-1)}| &= O(\tau). \end{aligned}$$

On dit alors qu'on a un régime glissant réel d'ordre  $r$  par rapport à  $S$ .

Ainsi, obtenir une bonne précision de convergence d'un mode glissant requiert non seulement de maintenir la fonction contrainte à zéro, mais également ses dérivées successives. Ceci donne un argument supplémentaire aux modes glissants d'ordre supérieur.

En effet, le développement précédent nous indique que pour un mode glissant classique, la précision de la convergence est de l'ordre de  $\tau$ , alors qu'elle est de  $\tau^r$  pour un mode glissant d'ordre  $r$ .

## 2.4 Modes glissants et degré relatif

Considérons ici la fonction contrainte  $s$  comme une des sorties du système (2.1). Le but de ce paragraphe est d'exhiber le lien pouvant exister entre les modes glissants et le degré relatif de ce système par rapport à la sortie  $y = s(t, x)$ . La définition de cette notion est donnée dans le livre d'Isidori sur les systèmes non linéaires [102]. Le degré relatif d'un système est en fait le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la sortie, par rapport au temps, pour y voir apparaître l'entrée de manière explicite. Cette notion tient une place importante dans le cadre de l'analyse des systèmes non linéaires, notamment parce qu'elle donne le moyen de définir des difféomorphismes locaux permettant de linéariser le système.

**Proposition 17** *Supposons que le système (2.1) soit de degré relatif  $p$  au point  $x_0$ . Posons*

$$\phi_i(x) = L_f^{i-1} s(t, x), \quad i = 1, \dots, p \quad (2.9)$$

et choisissons des fonctions  $\phi_{p+j}(x)$ ,  $j = 1, \dots, n - p$ , indépendantes des  $p$  premières fonctions et vérifiant  $L_{\frac{\partial}{\partial u}} \phi_{p+j} = 0$  quel que soit  $j$  (ceci est possible grâce au théorème de Froebenius, voir [102]).  $\Phi(x) = [\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)]$  définit un difféomorphisme local sur un voisinage de  $x_0$  et en posant le changement de coordonnées  $z = \Phi(x)$ , le système (2.1) devient, dans un voisinage de  $z_0 = \Phi(x_0)$

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, p-1 \\ \dot{z}_p &= L_f^p \sigma(\Phi^{-1}(z), u) \\ \dot{z}_{p+j} &= q_j(z), \quad j = 1, \dots, n-p \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Le système (2.10) est dit sous forme normale.

La dynamique des zéros, correspondant au régime glissant d'ordre 1 idéal  $y = s(x) = 0$ , est en général supposée asymptotiquement stable en un point d'équilibre de la surface  $\mathcal{S}$ . Cela signifie que le système est à minimum de phase par rapport à la sortie  $y = s(t, x)$ .

**Théorème 18** [140] *Un régime glissant d'ordre un existe sur la surface  $\mathcal{S}$  si et seulement si le système (2.1) est de degré relatif égal à un.*

D'après les résultats énoncés dans [34], cette propriété, associée au fait que le système est à minimum de phase par rapport à la sortie  $y = s(t, x)$ , implique que celle-ci est une sortie passive. Dans [147], Sira-Ramirez exploite cette propriété pour développer une forme canonique pour la commande par modes glissants des systèmes non linéaires. Cette forme exhibe les composantes conservative, dissipative et déstabilisante du champs de vecteur de dérive de la dynamique du système, permettant la synthèse d'une commande par retour d'état qui prend en compte les "bonnes non linéarités" du système et ainsi nécessite moins d'effort.

D'après le théorème précédent, si le système est de degré relatif  $p$  strictement supérieur à un, il n'existe pas de régime glissant d'ordre un sur la surface  $\mathcal{S}$ . Une alternative est alors d'utiliser la sortie auxiliaire définie par :

$$\bar{y} = \bar{s}(t, x) = \sum_{i=1}^p c_{i-1} L_f^{i-1} s(t, x), \quad c_{p-1} = 1$$

ou, en utilisant les coordonnées de la forme normale :

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^p c_{i-1} z_i.$$

Le calcul donne  $L_{\frac{\partial f}{\partial u}} \bar{s}(t, x_0) \neq 0$ , ce qui indique que le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), \\ \bar{y} &= \bar{s}(t, x), \end{aligned}$$

est de degré relatif un par rapport à  $\bar{s}$ . Ainsi peut-on forcer un régime glissant, en temps fini, sur la surface  $\bar{s} = 0$ , ou  $\sum_{i=1}^p c_{i-1} z_i = 0$ . Si les coefficients  $c_i$  ont été choisis tels que le polynôme associé  $P(q) = \sum_{i=1}^p c_{i-1} q^i$  soit de Hurwitz, on obtient une dynamique

asymptotiquement stable pour chacun des  $z_i$ , et donc en particulier pour  $z_1 = s(t, x)$ , i.e. on vient converger sur la surface  $\mathcal{S}$  de manière asymptotique.

Il faut noter que cette méthode fait apparaître deux cas différents de modes glissants : le premier est un régime glissant classique d'ordre un sur la surface  $\bar{s}(t, x) = 0$ , alors que le second est un ordre  $p$ , asymptotiquement stable, par rapport à la surface  $\mathcal{S}$ , puisqu'en fait on contraint le système à évoluer sur la variété de glissement d'ordre  $p$

$$s = \dot{s} = \dots = s^{(p-1)} = 0.$$

Un des inconvénients de cette méthode est qu'il est nécessaire d'avoir une information, croissante avec le degré relatif du système, sur une partie de l'état. Ceci montre d'autre part que, pour un système de degré relatif strictement supérieur à un, il n'est pas possible d'obtenir une convergence en temps fini sur une surface  $\mathcal{S}$  par un mode glissant d'ordre un. Pour avoir un tel résultat, l'utilisation d'un algorithme de contrôle d'ordre supérieur s'avère alors nécessaire. En effet, si le système est de degré relatif  $r$  par rapport à la fonction contrainte  $s$ , un algorithme par mode glissant d'ordre  $r$  permettra d'obtenir une convergence en temps fini sur la surface  $s(t, x) = 0$ .

## 2.5 Algorithmes glissants d'ordre supérieur

Comme nous l'avons vu, générer des régimes glissants qui soient asymptotiquement stables ne présente pas de difficultés majeures. Ainsi peut-on trouver dans la littérature des exemples de modes glissants de n'importe quel ordre ([65, 69, 70, 71, 90, 112, 143, 144]). Ce n'est pas tout à fait le cas lorsque l'on désire obtenir un régime glissant en temps fini. De tels algorithmes ne sont essentiellement connus que pour  $r = 1$ ,  $r = 2$  et  $r = 3$ , et de plus pour des cas scalaires (la surface considérée est de dimension  $(n - 1)$ ). Des travaux sont en cours afin de développer des algorithmes de commande garantissant un régime glissant d'ordre quelconque en temps fini, mais cela nécessite de nouvelles investigations [115]. Ainsi qu'il a été observé, on peut distinguer les algorithmes idéaux des algorithmes réels. En ce qui concerne le premier type, l'un des problèmes majeurs pour l'implantation est que le nombre d'informations nécessaires augmente régulièrement

avec l'ordre de ce régime glissant. D'une manière générale, si on utilise un algorithme de glissement d'ordre  $r$  par rapport à  $s = 0$ , on aura besoin de la connaissance de  $s, \dot{s}, \dots, s^{(r-1)}$ . La seule exception est le "super-twisting" [112] qui est un algorithme d'ordre deux qui ne requiert que l'information sur  $s$ .

D'un autre côté, les algorithmes de glissement réels ne requièrent que les mesures de  $s, \dot{s}, \dots, s^{(r-2)}$ . Ceci ne résoud le problème que partiellement mais constitue une bonne solution pour les modes glissants du second ordre (seule l'information sur la surface est nécessaire). En général, ces algorithmes consistent en la discrétisation des algorithmes idéaux correspondants [9, 28, 69, 70, 112, 116], sauf celui construit par Su et al. [154] et le "Drift algorithme" [69]. Très récemment, Bartolini et al. ont donné un algorithme réel d'ordre trois qui ne s'appuie que sur la connaissance de  $s$  [19].

Nous allons maintenant décrire plus en détails ces algorithmes, qui seront essentiellement d'ordre deux (ce sont ceux utilisés en majorité dans la littérature). Il est supposé ici que  $f$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  par rapport à chacune de ses variables et que  $s$  est  $\mathcal{C}^2$ . Le but est de générer un régime glissant d'ordre deux sur une surface choisie  $s = 0$ , et plus précisément d'obtenir en temps fini

$$s = \dot{s} = 0.$$

On peut observer qu'aux points de glissement d'ordre deux l'ensemble de Filippov des trajectoires admissibles est inclus dans l'espace tangent à la surface  $\mathcal{S}$ , ainsi qu'il est décrit Figure 2-1.

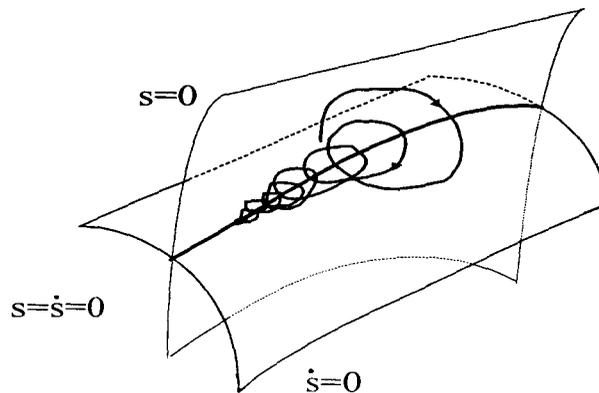


FIG. 2-1: Ensemble de glissement d'ordre deux

Dans la suite sera considéré l'opérateur suivant :

$$L_u z(t, x, u) = \frac{\partial z}{\partial t}(t, x, u) + \frac{\partial z}{\partial x}(t, x, u) f(t, x, u)$$

qui représente la dérivée de la fonction différentiable  $z$  par rapport au temps, le long de (2.1) et pour une entrée  $u$  constante. Formulons également les hypothèses suivantes :

1.  $\mathcal{U} = \{u : |u| < U_M\}$ , où  $U_M$  est une constante réelle telle que  $u$  est une fonction bornée et discontinue du temps; de plus, l'équation différentielle (2.1) à second membre discontinu est supposée admettre des solutions au sens de Filippov sur la variété glissante d'ordre deux  $s = \dot{s} = 0$  pour tout  $t$ .
2. Il existe  $u_1 \in ]0, U_M[$  telle que pour toute fonction continue  $u \in \mathcal{U}$  avec  $|u| > u_1$ , il existe  $t_1$  tel que  $u > 0$  pour tout  $t > t_1$ . Ainsi, la commande  $u = -U_M \operatorname{sgn}[\dot{s}(t_0)]$ , où  $t_0$  est l'instant initial, assure la convergence en temps fini sur  $\dot{s} = 0$ .
3. Il existe des constantes positives  $s_0, K_m, K_M$  telles que, dans un voisinage  $|s(t, x)| < s_0$ ,

$$0 < K_m \leq \left| \frac{\partial \dot{s}}{\partial u} \right| \leq K_M.$$

Le fait que le terme  $\frac{\partial \dot{s}}{\partial u}$  ne doive pas s'annuler est nécessaire pour l'existence de la commande équivalente en régime glissant. L'ensemble  $\{t, x : |s(t, x)| < s_0\}$  est appelé région de linéarité.

4. A l'intérieur de la région de linéarité et pour tout  $t, x, u$ , il existe une constante  $C_0$  telle que :

$$|L_u L_u s(t, x)| < C_0.$$

Supposons que le système soit de degré relatif deux par rapport à la fonction  $s$ . En dérivant deux fois cette dernière, nous obtenons

$$\ddot{s} = L_u L_u s(t, x) + \frac{\partial \dot{s}}{\partial u} u$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\ddot{s} = \zeta(t, x) + \chi(t, x, u)u \tag{2.11}$$

avec

$$0 < K_m \leq \chi(t, x, u) \leq K_M. \quad (2.12)$$

$$|\zeta(t, x)| < C_0. \quad (2.13)$$

Toute solution de (2.11) doit satisfaire l'inclusion différentielle,

$$\ddot{s} \in [-C_0, C_0] + [K_m, K_M] u.$$

La condition 2 permet d'établir que, partant de n'importe quel point de l'espace d'état, il est possible de définir une commande amenant la fonction contrainte dans la zone de linéarité. Les conditions 3 et 4 impliquent que la dérivée deuxième de  $s$  est uniformément bornée dans un certain domaine, pour l'entrée considérée. D'après le théorème des fonctions implicites, si  $\frac{\partial \dot{s}}{\partial u}$  est non nulle, il existe une fonction  $u_e(t, x)$  satisfaisant la relation  $\ddot{s} = 0$  et qui peut être considéré comme la commande équivalente assurant l'invariance de la surface  $\{s = \dot{s} = 0\}$ .

Posant  $y_1 = s$ ,  $y_2 = \dot{s}$ , le problème posé revient à la stabilisation en temps fini du système auxiliaire du second ordre modélisé par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \zeta(t, y) + \chi(t, y, u)u \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $\chi$  et  $\zeta$  sont des fonctions mal connues, mais dont on sait que

$$0 < K_m \leq \chi(t, y, u) \leq K_M, \quad (2.15)$$

$$|\zeta(t, y)| < C_0. \quad (2.16)$$

**Remarque 19** *Si le système est de degré relatif un par rapport à la fonction  $s$ , la dérivée seconde de cette dernière est de la forme*

$$\ddot{s} = \tilde{\zeta}(t, x, u) + \tilde{\chi}(t, x, u)\dot{u} \quad (2.17)$$

et  $\dot{u}$  est alors considéré comme la nouvelle entrée du système.

Dans la suite, nous faisons un inventaire (non exhaustif) des principaux algorithmes du second ordre, en détaillant plus particulièrement l'*algorithme du twisting* que nous utiliserons majoritairement par la suite. Chacun de ces contrôleurs est caractérisé par peu de paramètres. Ces paramètres doivent être réglés, suivant le but de commande, pour la classe de processus et la fonction de glissement considérées en fonction des constantes  $C_0$ ,  $K_m$ ,  $K_M$  et  $s_0$ . De tels algorithmes sont insensibles aux perturbations et incertitudes paramétriques. Dans la pratique, les conditions de convergence sont seulement suffisantes et non nécessaires et il est souvent plus approprié de régler les contrôleurs de manière heuristique, tout en gardant un coefficient de sécurité.

### 2.5.1 Algorithme du twisting

La convergence en temps fini vers l'origine du plan de phase  $(s, \dot{s})$  est obtenue grâce à la commutation de l'amplitude de la commande entre deux valeurs, de telle façon que l'abscisse et l'ordonnée soient croisées de plus en plus près de l'origine.

#### Cas idéal

**Théorème 20** [112] *Considérant le système (2.1) et la surface de glissement  $S$ , la loi de commande*

$$u = \begin{cases} -\lambda_m \operatorname{sgn}(y_1), & \text{si } y_1 y_2 \leq 0, \\ -\lambda_M \operatorname{sgn}(y_1), & \text{si } y_1 y_2 > 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

où  $\lambda_m$  et  $\lambda_M$  vérifient

$$\begin{aligned} \lambda_m &> 4 \frac{K_M}{\sigma_0}, \\ \lambda_m &> \frac{C_0}{K_m} \\ K_m \lambda_M - C_0 &> K_M \lambda_m + C_0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

est un algorithme glissant d'ordre deux par rapport à  $S$ .

La preuve de ce théorème est donnée dans l'Annexe C. La borne supérieure du temps de convergence peut être précisée, et ceci quel que soit le quadrant du plan de phase

$(y_1, y_2)$  où se situent les conditions initiales :

$$T_{tw_\infty} \leq t_{M_1} + \Theta_{tw} \frac{1}{1 - \theta_{tw}} \sqrt{|y_{1M_1}|}.$$

$y_{1M_1}$  représente la valeur de  $y_1$  la première fois que l'axe des abscisses dans le plan  $(y_1, y_2)$  est traversé,  $t_{M_1}$  étant l'instant correspondant.  $\Theta_{tw}$  et  $\theta_{tw}$  sont donnés par les relations

$$\begin{aligned} \Theta_{tw} &= \sqrt{2} \frac{K_m \lambda_M + K_M \lambda_m}{(K_m \lambda_M - C_0) \sqrt{K_M \lambda_m + C_0}}, \\ \theta_{tw} &= \sqrt{\frac{(\lambda_m K_M + C_0)}{(\lambda_M K_m - C_0)}}. \end{aligned}$$

Dans le cas où le système est de degré relatif un, la loi de commande, appliquée au système (2.17)

$$\dot{u} = \begin{cases} -u & |u| > |u_e| \\ -\lambda_m \operatorname{sgn}(s) & \text{si } s\dot{s} \leq 0, |u| \leq |u_e|, \\ -\lambda_M \operatorname{sgn}(s) & \text{si } s\dot{s} > 0, |u| \leq |u_e| \end{cases}, \quad (2.20)$$

permet d'aboutir au même résultat, i.e. la convergence en temps fini vers l'ensemble  $\{s = \dot{s} = 0\}$ .

### Cas réel

Nous présentons ici la version réelle de l'algorithme du twisting. L'intérêt de cette forme est qu'elle ne requiert pas d'information sur la dérivée de la surface considérée et qu'elle prend en compte des contraintes d'ordre pratique telles que l'échantillonnage des mesures et de la loi de commande. Pour des raisons de simplification, la période d'échantillonnage (notée  $\tau$ ) considérée est la même pour la prise de mesures et la commande. Définissons alors la loi de commande suivante :

$$u = \begin{cases} -\lambda_m \operatorname{sgn}(s), & \text{si } s\Delta_s \leq 0, \\ -\lambda_M \operatorname{sgn}(s), & \text{si } s\Delta_s > 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

avec

$$\Delta_s \triangleq \begin{cases} 0, & k = 0 \\ (s(k\tau) - s((k-1)\tau)), & k \geq 1 \end{cases}$$

et  $\lambda_m$  et  $\lambda_M$  vérifiant les conditions (2.19).

**Théorème 21** [112] *Sous les hypothèses (2.15), (2.16) et les conditions (2.19), la loi de commande (2.21) est un algorithme glissant du second ordre pour le système (2.1) par rapport à la période d'échantillonnage  $\tau$ , et est appelé algorithme du twisting réel.*

Après un temps fini  $t_0$ , les trajectoires du système convergent vers l'ensemble de glissement défini par :

$$\begin{aligned} |\sigma| &= O(\tau^2), \\ |\dot{\sigma}| &= O(\tau^1). \end{aligned}$$

Une version discrète de cet algorithme peut également être trouvée dans la littérature [54].

### Amélioration de la vitesse de convergence

Reprenons le système (2.14) en notant maintenant l'état  $(x_1, x_2)$ ,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u + p(x, t) \end{cases} \quad (2.22)$$

**Théorème 22** (Floquet et al. [86]) *En définissant la loi de commande par :*

$$u = -\alpha^2 x_1 - 2\alpha x_2 - \begin{cases} \lambda_m \operatorname{sgn}(x_1), & \text{si } x_1 x_2 \leq 0 \\ \lambda_M \operatorname{sgn}(x_1), & \text{si } x_1 x_2 > 0 \end{cases}, \quad \alpha > 0, \quad (2.23)$$

la convergence, en temps fini, du système (2.1) vers la surface  $s = \dot{s} = 0$  est plus rapide que pour l'algorithme du twisting classique. De plus, à chaque commutation de la commande,  $\|x\| \leq \|y\|$ .

**Preuve.** Montrons que cette loi de commande permet d'accélérer la convergence du système vers l'origine par rapport à la précédente (2.18). Pour cela, les trajectoires limites sont une nouvelle fois prises en considération (voir Annexe C) et elles sont solutions du

système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha^2 x_1 - 2\alpha x_2 + V_{ss} \end{cases}$$

où  $V_{ss} = \pm(\lambda_m K_M + C_0)$  ou  $V_{ss} = \pm(\lambda_M K_m - C_0)$  (selon le quadrant du plan de phase  $(x_1, x_2)$  où l'on se situe). La solution générale de ce système d'équations différentielles est, entre chaque instant de commutation :

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{V_{ss}}{\alpha^2} (1 - (1 + \alpha t) \exp(-\alpha t)) + (x_{20} + \alpha x_{10}) t \exp(-\alpha t) + x_{10} \exp(-\alpha t) \\ x_2(t) = t \exp(-\alpha t) (V_{ss} - \alpha (x_{20} + \alpha x_{10})) + x_{20} \exp(-\alpha t) \end{cases} \quad (2.24)$$

$x_{20}$  et  $x_{10}$  étant les conditions initiales de  $x_1$  et  $x_2$  après chaque commutation.

De même que dans l'Annexe C, on peut prendre, sans perte de généralité,  $x_{10} = 0^+$ ,  $x_{20} = \delta > 0$ . Ainsi  $V_{ss} = -\lambda_M K_m + C_0$  et (2.24) devient :

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{-\lambda_M K_m + C_0}{\alpha^2} (1 - \exp(-\alpha t)) + (\delta + \frac{\lambda_M K_m - C_0}{\alpha}) t \exp(-\alpha t) \\ x_2(t) = \exp(-\alpha t) [\delta - (\lambda_M K_m - C_0 + \alpha \delta) t] \end{cases}$$

Un simple calcul montre que  $x_2$  décroît jusque zéro pour

$$\bar{t}_1 = \frac{\delta}{\lambda_M K_m - C_0 + \alpha \delta},$$

et que  $x_1$  croît jusqu'à la valeur

$$x_1(\bar{t}_1) = \frac{-\lambda_M K_m + C_0}{\alpha^2} (1 - \exp(-\alpha \bar{t}_1)) + \frac{\delta}{\alpha} \exp(-\alpha \bar{t}_1).$$

De ceci peuvent être déduits les résultats suivants : partant des mêmes conditions initiales,  $(0^+, \delta)$ ,

$$\bar{t}_1 < t_1,$$

$t_1$  étant défini dans l'Annexe C, et

$$\frac{x_1(\bar{t}_1)}{y_1(t_1)} = 2 \frac{1 - \alpha \bar{t}_1}{(\alpha \bar{t}_1)^2} (\exp(-\alpha \bar{t}_1) + \alpha \bar{t}_1 - 1) \leq 1$$

puisque  $\alpha \bar{t}_1 \leq 1$ .

A partir de  $\bar{t}_1$ ,  $x_2$  devient négatif et  $V_{ss} = -(\lambda_m K_M + C_0)$ . La solution est donc maintenant :

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{\lambda_m K_M + C_0}{\alpha^2} + (x_1(t_1) + \frac{\lambda_m K_M + C_0}{\alpha^2}) \exp(-\alpha t)(1 + \alpha t) \\ x_2(t) = -t \exp(-\alpha t) (\lambda_m K_M + C_0 + \alpha^2 x_1(t_1)) \end{cases}$$

$x_2$  reste toujours négatif et  $x_1$  décroît et s'annule à l'instant  $\bar{t}_2$  qui vérifie l'équation :

$$\exp(-\alpha \bar{t}_2)(1 + \alpha \bar{t}_2) = \frac{\lambda_m K_M + C_0}{\lambda_m K_M + C_0 + \alpha^2 x_1(\bar{t}_1)}.$$

Il est possible de fixer  $\alpha$  tel que

$$\exp(-\alpha t_2)(1 + \alpha t_2) \leq \frac{\lambda_m K_M + C_0}{\lambda_m K_M + C_0 + \alpha^2 x_1(\bar{t}_1)} \quad (2.25)$$

puisque  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \exp(-\alpha t_2)(1 + \alpha t_2) = 0$ . Le terme  $\exp(-\alpha t_2)$  montre qu'il n'est pas nécessaire que  $\alpha$  soit très important pour que l'inégalité (2.25) soit satisfaite. Ainsi,

$$\exp(-\alpha t_2)(1 + \alpha t_2) \leq \exp(-\alpha \bar{t}_2)(1 + \alpha \bar{t}_2)$$

ce qui prouve que  $\bar{t}_2 < t_2$  puisque la fonction  $x \mapsto \exp(-x)(1 + x)$  est décroissante. De plus,

$$x_2(\bar{t}_1 + \bar{t}_2) = -\frac{\lambda_m K_M + C_0}{1 + \alpha \bar{t}_2} \bar{t}_2 \leq y_2(t_1 + t_2) = -(\lambda_m K_M + C_0) t_2.$$

Par symétrie, les mêmes résultats peuvent être obtenus pour les deux derniers quadrants du plan de phase. ■

On peut remarquer que le taux de convergence peut être réglé par le paramètre  $\alpha$ .

Les simulations suivantes, où les paramètres ont été fixés à  $\lambda_m = 1$ ,  $\lambda_M = 4$  et  $\alpha = 1$ , illustrent ce résultat. Les trajectoires correspondant au twisting algorithm classique sont en pointillés et celles avec accélération de convergence sont en trait plein. On observe bien que, avec le nouvel algorithme, l'amplitude des trajectoires et le temps de convergence sont diminués. Sur la Figure 2-2, on peut observer en particulier les spirales décrites dans le plan de phase  $(s, \dot{s})$ , c'est-à-dire  $(y_1, y_2)$  (cf (2.14)).

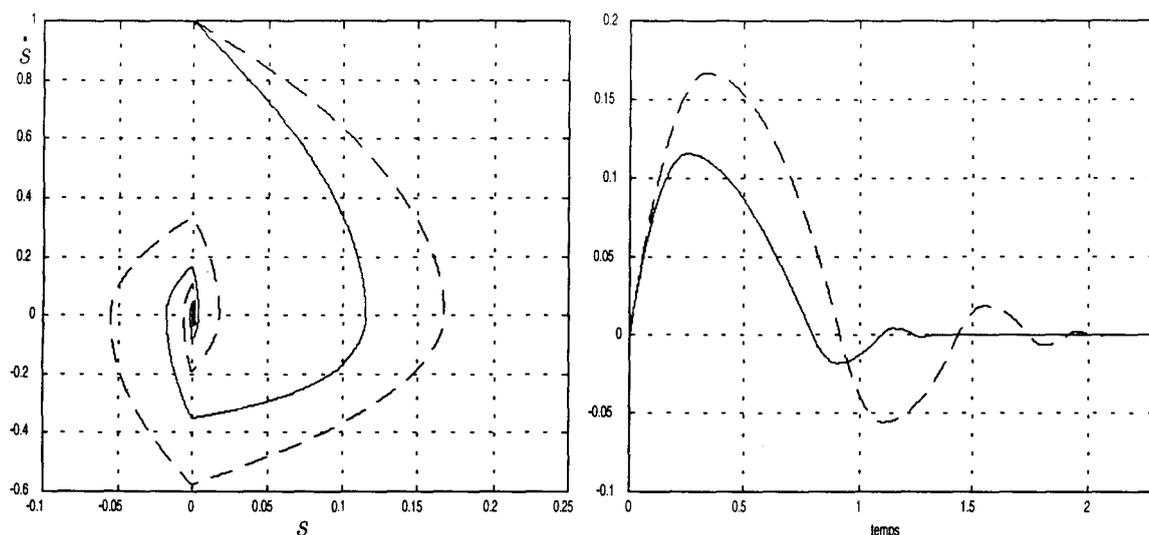


FIG. 2-2: Plan de phase  $(s, \dot{s})$  et allure des fonctions contraintes  $s$  par rapport au temps

## 2.5.2 Algorithme sous-optimal

Loi de commande [13, 15] :

$$u(t) = -\alpha(t)\lambda_M \operatorname{sgn}(y_1(t) - \frac{1}{2}y_{1M}), \quad (2.26)$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha^* & \text{si } [y_1(t) - \frac{1}{2}y_{1M}] [y_{1M} - y_1(t)] > 0 \\ 1 & \text{si } [y_1(t) - \frac{1}{2}y_{1M}] [y_{1M} - y_1(t)] \leq 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

où  $y_{1M}$  représente la valeur de  $y_1$  au dernier instant d'annulation de  $y_2$  (i.e. la dernière valeur singulière de la fonction  $y_1(t)$ ).

Conditions suffisantes de convergence :

$$\alpha^* \in ]0, 1] \cap \left] 0, \frac{3K_m}{K_M} \right[ , \quad (2.28)$$

$$\lambda_M > \max \left( \frac{C_0}{\alpha^* K_m}, \frac{4C_0}{3K_m - \alpha^* K_M} \right) \quad (2.29)$$

Borne supérieure du temps de convergence :

$$T_{so\infty} \leq t_{M_1} + \Theta_{so} \frac{1}{1 - \theta_{so}} \sqrt{|y_{1M_1}|}$$

où  $y_{1M_1}$ ,  $t_{M_1}$  sont définis comme pour l'algorithme du twisting et

$$\begin{aligned}\Theta_{so} &= \frac{(K_m + \alpha^* K_M) \lambda_M}{(K_m \lambda_M - C_0) \sqrt{\alpha^* K_M \lambda_M + C_0}}, \\ \theta_{so} &= \sqrt{\frac{(\alpha^* K_M - K_m) \lambda_M + 2C_0}{2(K_m \lambda_M - C_0)}}.\end{aligned}$$

Intérêt : la connaissance de la valeur de  $y_2$  n'est pas nécessaire.

Inconvénient : il faut tout de même avoir une estimation assez précise de la dernière valeur singulière de  $y_1$ , et ceci relativement souvent.

Il a été prouvé dans [15] que, dans le cas d'un gain unitaire  $\chi = 1$ , la loi de commande pouvait être simplifiée en posant  $\alpha = 1$  et en choisissant  $V_M > 2C_0$ . Bartolini et al. ont récemment développé des extensions de cet algorithme à des classes plus larges de systèmes avec incertitudes [17] et ont également donné une version discrète de l'algorithme [18]. La preuve de convergence de cet algorithme, ainsi que l'évaluation du temps de convergence est disponible dans [15].

**Remarque 23** *Cet algorithme, ainsi que le terme sous-optimal employé ici, sont inspirés de la commande bang-bang qui génère des trajectoires optimales (en temps minimum) pour un double intégrateur ( $\zeta(t, y) = 0$ ,  $\chi(t, y, u) = 1$ ) mais dont le défaut est d'utiliser  $y_2$ , dont on n'a pas forcément la mesure.*

### 2.5.3 Algorithme du Super twisting

Loi de commande (voir [112]) :

$$\begin{aligned}u &= u_1(t) + u_2(t) \\ u_1 &= \begin{cases} -u & \text{si } |u| > |u_e| \\ -W \operatorname{sgn}(y_1) & \text{si } |u| \leq |u_e| \end{cases}, \\ u_2 &= \begin{cases} -\lambda s_0^\rho \operatorname{sgn}(y_1) & \text{si } |s| > s_0 \\ -\lambda |y_1|^\rho \operatorname{sgn}(y_1) & \text{si } |s| \leq s_0 \end{cases}.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Conditions suffisantes de convergence :

$$\begin{aligned}\lambda_m &> 4\frac{K_M}{\sigma_0}, \\ \lambda_m &> \frac{C_0}{K_m} \\ K_m\lambda_M - C_0 &> K_M\lambda_m + C_0,\end{aligned}\tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}W &> \frac{C_0}{K_m} \\ \lambda^2 &\geq \frac{4C_0 K_M (W + C_0)}{K_m^2 K_m (W - C_0)} \\ 0 &< \rho \leq 0.5\end{aligned}$$

Intérêt : la loi de commande est continue et ne requiert aucune information sur la dérivée de  $s$  ; bonnes propriétés de robustesse (a été utilisée pour réaliser un dérivateur robuste en temps réel [114]).

## 2.6 Réduction de la réticence

A l'origine, Emel'yanov et al. [69, 70] ont introduit les modes glissants d'ordre supérieur afin de réduire le phénomène de réticence dans les commandes par modes glissants d'ordre un. Afin d'illustrer cette propriété, considérons le système (2.1) et dérivons 2 fois la fonction de glissement :

$$\dot{s} = L_u s(t, x) = \frac{\partial s}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial s}{\partial x}(t, x) [f(x) + g(x)u],$$

$$\ddot{s} = \frac{\partial \dot{s}}{\partial t}(t, x, u) + \frac{\partial \dot{s}}{\partial x}(t, x, u) f(t, x, u) + \frac{\partial \dot{s}}{\partial u}(t, x, u) \dot{u}(t).$$

Suivant le degré relatif du système, différents cas doivent être considérés :

1. le degré relatif est  $p = 1$ , c'est-à-dire  $\frac{\partial \dot{s}}{\partial u} \neq 0$ ,
2. le degré relatif est  $p \geq 2$ , c'est-à-dire  $\frac{\partial s^{(i)}}{\partial u} = 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, p - 1$ ),  $\frac{\partial s^{(p)}}{\partial u} \neq 0$ .

Dans le premier cas, une commande par modes glissants d'ordre un résoud notre

problème, c'est-à-dire forcer le système à évoluer au bout d'un temps fini sur la surface  $\mathcal{S}$ . Néanmoins, l'utilisation d'un mode glissant d'ordre deux permet d'éviter le phénomène de réticence. En utilisant une telle stratégie, la commande  $u$  se trouve alors être la sortie d'un système dynamique du premier ordre. Les algorithmes discontinus sont appliqués en fait à la dérivée par rapport au temps  $\dot{u}$ , qui devient la nouvelle variable de commande du système considéré et conduit à l'obtention d'un régime glissant d'ordre deux sur la surface  $\mathcal{S}$ . De cette façon, l'entrée  $u$  du système est maintenant continue et permet d'éviter le phénomène de réticence [12, 15].

Dans le second cas, du fait des incertitudes affectant le système considéré et de la connaissance partielle (le plus souvent) de l'état, une approche par un mode glissant d'ordre  $r$ , avec  $r \geq p$ , apparaît être la méthode de commande la plus appropriée. L'application d'un algorithme glissant d'ordre  $p + 1$  sur  $\dot{u}$  est une solution pour venir converger sur  $\mathcal{S}$  tout en éludant les problèmes de réticence et en restant robuste par rapport aux incertitudes du système.

Schématiquement, lorsqu'un algorithme d'ordre supérieur est utilisé, la surface est atteinte de manière plus douce ainsi qu'il est montré sur la figure suivante.

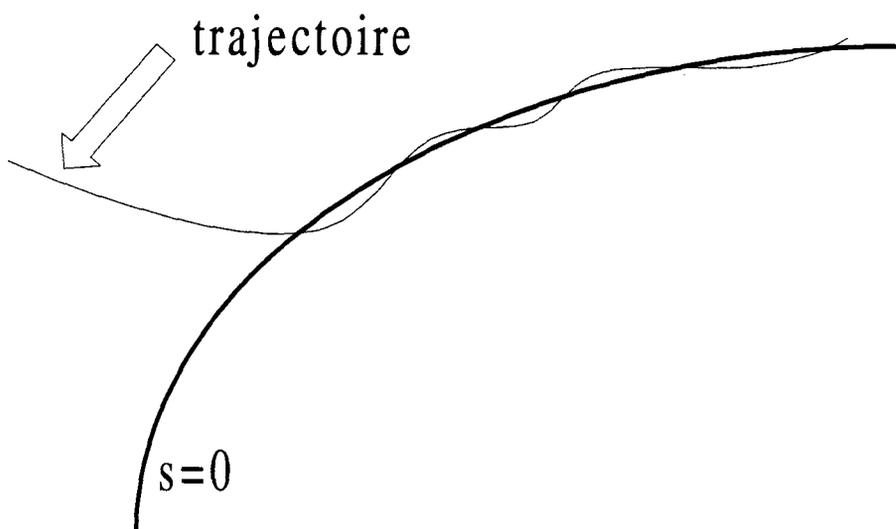


FIG. 2-3: Allure du régime glissant pour les ordres supérieurs

## 2.7 Cas multi-variables

A l'instar de la commande par modes glissants classique, le cas multi-variables pose ici de nombreux problèmes. Il existe très peu de résultats dans la littérature quant à la génération de modes glissants d'ordre supérieur pour des systèmes comportant plusieurs entrées, principalement à cause du phénomène de couplage entre les différentes entrées du système et les surfaces considérées. Des résultats permettent cependant de contourner cet obstacle mais restent sujets à des conditions relativement restrictives.

Soit le système

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (2.32)$$

$$s = s(t, x) \quad (2.33)$$

où les hypothèses de continuité sur  $f$  et  $s$  sont les mêmes que pour le système (2.1), mais où  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  et  $s \in \mathbb{R}^{n+1}$ . L'objectif de commande est d'amener les trajectoires du système sur la surface  $s = 0$  en temps fini. L'approche par les modes glissants d'ordre deux permet la stabilisation en temps fini de la variable  $s$  et de sa dérivée  $\dot{s}$  en définissant une loi de commande discontinue adaptée qui peut être l'entrée réelle du système ou sa dérivée par rapport au temps, selon le degré relatif de (2.32). Nous allons voir ici sous quelles conditions des algorithmes glissants du second ordre permettent d'atteindre cette objectif. Par analogie avec le cas mono-entrée, on peut se ramener au problème de la stabilisation du système :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \Psi(t, y) + \Theta(t, y, v)v \end{cases}, \quad (2.34)$$

où  $y_1 = s$ ,  $y_2 = \dot{s}$ ,  $y^T = [y_1^T, y_2^T]^T$ ,  $y \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{2m}$  et  $\Psi$  et  $\Theta$  sont respectivement un champ de vecteur et une matrice connus de façon incertaine tels que :

$$\begin{aligned} |\Psi(t, y)| &< \bar{\Psi}_i \\ 0 &< \Theta_{ii_m} \leq \Theta(t, y, v) \leq \Theta_{ii_M}, \quad i = 1, \dots, m \\ |\Theta(t, y, v)| &\leq \Theta_{ij_M}, \quad j \neq i \end{aligned} \quad (2.35)$$

chaque composante de  $v$  étant soit l'entrée réelle du système, soit sa dérivée, selon le degré relatif par rapport au vecteur de sortie  $y_1 = s$ .  $\mathcal{W}$  est un ensemble compact à l'intérieur duquel la bornitude des dynamiques de glissement est assurée.

Le système (2.34) peut être réécrit composante par composante :

$$\dot{y}_{2i} = \Psi_i(t, y) + \Theta_{ii}(t, y, v)v_i + \sum_{j=1, j \neq i}^m \Theta_{ij}(t, y, v)v_j.$$

Supposons alors que la matrice  $\Theta$  soit à diagonale dominante, c'est-à-dire :

$$\sum_{j=1, j \neq i}^m |\Theta_{ij}| < \Theta_{ii}, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.36)$$

Cette condition permet de découpler suffisamment les entrées. Ceci fait que les algorithmes d'ordre deux présentés précédemment (pour les systèmes mono-entrée) à chaque entrée  $v_i$  peuvent être appliqués afin de résoudre le problème posé. Par exemple, les conditions de convergence relatives à l'algorithme sous-optimal sont données dans [20].

La condition (2.36) est assez restrictive car dans de nombreux cas pratiques, la matrice  $\Theta$  est seulement définie positive, comme par exemple la matrice d'inertie des systèmes lagrangiens. Pour ces systèmes, une solution a été donnée dans [20], mais la convergence vers la surface n'est qu'asymptotique. Dans le Chapitre 4, nous donnerons une autre solution pour ce problème, s'appuyant sur la forme régulière.

# Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté les idées clés de la commande par modes glissants. Pour différentes raisons, l'exposé sur les modes glissants d'ordre un a été restreint à des systèmes mono-entrée et affine en l'entrée mais l'ensemble des résultats peut s'appliquer, sous certaines conditions, à des systèmes d'ordre plus général. Les principes ont été donnés dans le cas des régimes glissants classiques (d'ordre un) : notions de surface invariante et de commande équivalente, conditions d'existence, propriétés de robustesse. L'inconvénient majeur de cette méthode, en l'occurrence le phénomène de réticence, peut être contourné par l'introduction des modes glissants d'ordre supérieur. Ceux-ci semblent être des outils efficaces pour commander des systèmes soumis à des incertitudes tout en obtenant une meilleure précision de convergence par rapport au mode glissant réel d'ordre un. Des exemples d'algorithmes générant des modes glissants d'ordre deux ont été présentés, en donnant pour chacun d'entre eux les conditions suffisantes de convergence et il a été vu que ces techniques résultent en l'élaboration de lois de commande relativement simples. Il a toutefois été implicitement supposé que toutes les variables d'état étaient disponibles, ce qui n'est pas forcément le cas en pratique. C'est pourquoi de nombreux travaux, axés sur le développement de surfaces de glissement et de commandes uniquement basées sur les signaux de sorties ou sur l'utilisation d'observateurs impliquant les concepts des systèmes à structures variables ont été entrepris. Des exemples seront développés dans les Chapitres 4 (Stabilisation) et 5 (Application à la machine asynchrone). Dans ce qui suit maintenant, nous allons nous pencher sur la définition et sur les conditions d'obtention de formes de systèmes particulièrement adaptées à la synthèse de commande par modes glissants.

## **Deuxième partie**

### **Résultats**



# Chapitre 3

## Mise en forme

### 3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de montrer comment des classes de systèmes non linéaires peuvent, par l'intermédiaire de changements de coordonnées locaux dans l'espace d'état, être mis sous des formes adéquates pour la synthèse de lois de commande ou d'observateurs par modes glissants. Trois formes, ainsi que leurs conditions d'obtention, sont présentées ici :

- une forme régulière généralisée, qui permet de décomposer le système donné en deux sous-systèmes : dans l'un d'entre eux interviennent les entrées, et l'autre est autonome ;
- une forme chaînée qui est représentative de nombreux systèmes non holonomes et sujette à de nombreuses études du point de vue commande ;
- la forme canonique de commandabilité généralisée de Fliess dont la principale différence avec la théorie standard est que les dérivées de l'entrée interviennent dans la transformation.

Les deux premiers changements de coordonnées mettent en oeuvre des notions de géométrie différentielle [102], et on suppose également que le système est soumis à des perturbations. A propos de ces dernières, des hypothèses seront émises pour qu'elles apparaissent dans la forme résultante de telle manière à pouvoir être rejetées par des commandes robustes. En ce qui concerne la forme de Fliess, elle est obtenue sous des

considérations d'algèbre différentielle.

## 3.2 Forme régulière généralisée

Dans cette section seront considérés des systèmes multi-entrées et multi-sorties de la forme :

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u + p(x) \quad (3.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur état,  $u \in \mathbb{R}^m$  est la commande ( $m$  entrées).  $p(x)$  est une perturbation additive,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un champ de vecteurs suffisamment différentiable,  $G(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$  est une  $(n \times m)$ -matrice où les  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des champs de vecteurs suffisamment différentiables.  $g_{ij}(x)$  est le gain de commande de la  $j^{\text{ème}}$  entrée agissant sur la  $i^{\text{ème}}$  variable d'état. Si on considère le système (3.1) sans perturbations ( $p(x) \equiv 0$ ), des conditions nécessaires et suffisantes ont été données pour le transformer en une forme régulière généralisée [130]. Dans ce qui suit, nous verrons sous quelles conditions (3.1) peut être transformé en la forme régulière perturbée suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f_1^R(z_1, z_2) + G^R(z_1, z_2)u + p^R(z), \\ \dot{z}_2 = f_2^R(z_1, z_2), \\ z_1 \in \mathbb{R}^d, z_2 \in \mathbb{R}^{(n-d)} \end{cases} \quad (3.2)$$

### 3.2.1 A propos du rang de la matrice des gains d'entrée

Dans [117], une hypothèse fondamentale repose sur le fait que le rang de la matrice  $G(x)$  doit être maximal ( $m$ ). Le théorème suivant montre, s'il y a plus d'entrées que le rang de  $G$ , comment retrouver l'hypothèse classique en utilisant un retour d'état statique.

**Théorème 24** *Si  $\text{rang}(G(x_0)) = r$ , alors il existe un retour d'état statique (pas forcément unique)*

$$u = W(x)(v^T, 0, \dots, 0)^T, v \in \mathbb{R}^r, \quad (3.3)$$

avec  $W$  régulière dans un voisinage  $\mathcal{N}(x_0)$  de  $x_0$ , tel que :

$$G(x)W(x) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} X & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \end{matrix}}^r & \overbrace{\begin{matrix} X & 0 & \dots & 0 \\ X & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}^{m-r} \end{pmatrix} .$$

Ce théorème permet de considérer que, dorénavant,  $\text{rang}(G(x_0)) = m$ . Si cela n'est pas le cas ( $\text{rang}(G(x_0)) = r < m$ ), on considérera le système (3.1), avec le retour statique (3.3), c'est-à-dire :

$$\dot{x} = f(x) + G'(x)v + p(x), \tag{3.4}$$

où  $v \in \mathbb{R}^r$  est le nouveau vecteur de commande et  $G'(x)$  est une matrice ( $n \times r$ ) et de rang plein  $r$ .

### 3.2.2 Existence d'une forme régulière

Dans un premier temps, le but est de trouver un difféomorphisme  $z = \phi(x)$  tel que le système non perturbé

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \tag{3.5}$$

soit transformé en

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f_1^R(z_1, z_2) + G^R(z_1, z_2)u \\ \dot{z}_2 = f_2^R(z_1, z_2) \\ z_1 \in \mathbb{R}^d, z_2 \in \mathbb{R}^{(n-d)} \end{cases} . \tag{3.6}$$

Les conditions d'existence d'une telle transformation ont été originellement données par Luk'yanov et Utkin dans [117], dans le cas où  $d = m$ . Une généralisation de ce résultat, où  $d$  peut être supérieur ou inférieur au nombre d'entrées  $m$ , a été établie dans [130].

**Théorème 25** [130] Soit  $\Delta$  une distribution telle que :

H1)  $\Delta$  est non singulière au point  $x_0$  (i.e. de dimension constante  $\dim \Delta = d_\Delta \leq n$ ) :

H2)  $\Delta$  est involutive, c'est-à-dire :

$$\forall \tau_1 \in \Delta, \forall \tau_2 \in \Delta : [\tau_1, \tau_2] \in \Delta ; \quad (3.7)$$

H3)  $\text{Vect} \{g_1(x), \dots, g_m(x)\} \subset \Delta$ .

Alors, il existe un voisinage  $\mathcal{N}(x_0)$  de  $x_0$  et un difféomorphisme local  $z = \phi(x)$  défini sur  $\mathcal{N}(x_0)$ , tel que (3.5) est transformé en (3.6) avec  $d = d_\Delta \leq n$ . De plus, si  $d_\Delta < n$ , la conclusion est valable pour  $n \geq d \geq d_\Delta$ . ■

**Remarque 26** Pour les systèmes à entrée scalaire,  $G \equiv g$  est un champ de vecteur continu. Si  $g(x_0) \neq 0$ , la distribution  $\Delta = \text{Vect} \{g(x)\}$  ( $\dim \Delta = d_\Delta = 1$ ) est involutive et le système (3.5) peut se mettre sous la forme (3.6) avec  $d = d_\Delta = 1$ .

Une distribution candidate à la construction du difféomorphisme (dont la description est donnée dans [130]) transformant (3.5) en (3.6) est obtenue par l'intermédiaire de la fermeture involutive (voir [102]) de la distribution engendrée par les vecteurs colonnes de la matrice des gains d'entrées  $G(x)$ . L'algorithme de construction se présente ainsi :

**1<sup>ère</sup> étape** : Soit  $\Delta_1 = \text{Vect} \{g_1(x), \dots, g_m(x)\}$  et  $\dim \Delta_1 = d_1$ . Prenons  $d_1$  champs de vecteurs indépendants de  $\Delta_1$  (notés  $\tau_i$ ), soit :  $\Delta_1 = \text{Vect} \{\tau_1(x), \dots, \tau_{d_1}(x)\}$ .

**2<sup>ème</sup> étape** :  $\forall \tau_i \in \Delta_1, \forall \tau_j \in \Delta_1$ , on calcule chaque  $[\tau_i, \tau_j]$  et on regarde s'il appartient à  $\Delta_1$  : si ce n'est pas le cas, on ajoute ces nouveaux champs de vecteurs à  $\Delta_1$  ce qui nous donne une nouvelle distribution  $\Delta_2$ .

**k<sup>ième</sup> étape** : Soit  $\Delta_k = \Delta_{k-1} \oplus \text{Vect} \{[\tau_i, \tau_j] : \tau_i \in \Delta_{k-1}, \tau_j \in \Delta_{k-1} \text{ et } [\tau_i, \tau_j] \notin \Delta_{k-1}\}$ . On a  $\Delta_{k-1} \subset \Delta_k$  et  $d_{\Delta_k} > d_{\Delta_{k-1}} = \dim \Delta_{k-1}$ .

**Dernière étape** : Elle est déterminée lorsque  $[\tau_i, \tau_j] \in \Delta_k, \forall \tau_i \in \Delta_k, \forall \tau_j \in \Delta_k$ . L'entier  $k$  associé sera noté  $k_{\text{fin}}$ . Alors  $\Delta_{k_{\text{fin}}+1} = \Delta_{k_{\text{fin}}}$  et  $\Delta_k = \Delta_{k_{\text{fin}}}$  pour  $k > k_{\text{fin}}$ . La distribution  $\Delta_G$  obtenue est la plus petite distribution involutive contenant  $\Delta_1$ , et est connue comme étant la fermeture involutive de  $\Delta_1$ .

**Remarque 27** Si, dans le théorème précédent, la distribution candidate est

$$\Delta = \text{Vect} \{g_1(x), \dots, g_m(x)\},$$

on obtient le résultat classique de [117] ( $d = d_\Delta = m$ ). Ici,  $d$  n'est pas forcément égal à  $m$ .

**Remarque 28** Notons que  $\Delta_G$ , la plus petite distribution involutive contenant  $\Delta_1$ , peut également être obtenue par :

$$\Delta_G = \text{Vect} \{ Ad_{g_i}^k g_j(x) : i \in \{1..m\}, j \in \{1..m\}, k \in \{0..\infty\} \}.$$

### 3.2.3 Cas perturbé

On prend maintenant en compte la perturbation  $p(x)$ .

**Théorème 29** (Floquet et al. [80]) Supposons que :

$$H0) p \in \Delta_G = \text{Vect} \{ Ad_{g_i}^k g_j(x) : i \in \{1..m\}, j \in \{1..m\}, k \in \{0..\infty\} \};$$

$$H'0) \Delta_G \text{ est non singulière en } x_0 \text{ (i.e. de dimension constante } \dim \Delta_G = d_{\Delta_G} \leq n).$$

Alors il existe un voisinage  $\mathcal{N}(x_0)$  de  $x_0$  et un difféomorphisme local  $z = \phi(x)$  défini sur  $\mathcal{N}(x_0)$ , tels que (3.1) est transformé en (3.2) avec  $d = d_{\Delta_G}$ .

**Preuve.** Puisque  $p \in \Delta_G$ ,  $\forall \omega^* \in \Delta_G^\perp : \langle \omega^*, p \rangle = 0$ , et par le difféomorphisme  $\phi(x)$  défini dans le Théorème 2 présenté dans [130], on obtient le résultat désiré. ■

**Remarque 30** Si  $\Delta_G = \text{Vect} \{ g_1(x), \dots, g_m(x) \}$  est involutive, alors l'hypothèse H0) correspond à la classique "matching condition" (voir [61]). Dans ce cas, il est connu que le régime en mode glissant est insensible à ce type de perturbations.

## 3.3 Forme chaînée

Ces dernières années, les robots mobiles ont pris une place très importante dans l'industrie comme moyen de transport, d'inspection et d'intervention dans des milieux hostiles. Ceux-ci appartiennent à la classe des systèmes non holonomes, qui comprend également les véhicules articulés ou les robots sauteurs, et qui a reçu un intérêt croissant de la part des communautés automatiques et robotiques. Ceci peut s'expliquer par le fait que ces systèmes se heurtent à l'obstruction de Brockett [30] (ils ne peuvent pas être asymptotiquement stabilisés par un retour d'état autonome au moins continûment différentiable) et il faut donc souvent faire appel à de nouvelles techniques pour résoudre

ce problème. Bon nombre d'entre eux peuvent être mis sous une forme particulière, dite *chaînée*, et c'est pour cette raison que nous nous intéressons à celle-ci. Mais faisons avant tout quelques rappels sur les systèmes non holonomes.

### 3.3.1 Systèmes non holonomes

Un grand nombre de systèmes en robotique et en mécanique peuvent être modélisés par des contraintes dites de Pfaff et de la forme :

$$W(x)\dot{x} = 0 \quad (3.8)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $W(x) = [\omega^1(x), \dots, \omega^k(x)]^T$  est une matrice de dimension  $(k \times n)$ . Ces contraintes sont dites non holonomes si elles ne sont pas intégrables. Les  $k$  covecteurs  $\omega^i$  sont supposés être linéairement indépendants (si cela n'est pas le cas, les contraintes qui sont liées peuvent être éliminées) de telle façon que  $W(x)$  est une matrice de rang plein pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Afin d'étudier ce type de système d'un point de vue du comportement des variables d'état et non plus des contraintes, on peut montrer qu'il est possible de trouver une base de vecteurs  $g_j(x) \in \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, \dots, n - k$  appartenant à l'annulateur de la distribution engendrée par les contraintes telles que les trajectoires du système soient solutions de [125] :

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + \dots + g_{n-k}(x)u_{n-k} \quad (3.9)$$

où  $u_1, \dots, u_{n-k}$  sont des entrées de commande choisies de façon appropriée. Un bon nombre d'exemples tels que les robots mobiles, les véhicules articulés, le robot sauteur ou encore le modèle académique appelé "knife edges" [125] possèdent deux entrées, et donc beaucoup de résultats dans la littérature concernant la classe de systèmes (3.9) pour  $n - k = 2$  i.e. :

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2. \quad (3.10)$$

Dans [127], il a été montré que, par difféomorphisme et retour d'état (et sous certaines conditions), le système (3.10) pouvait être transformé en ce qui s'appelle une forme

chaînée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = v_1 \\ \dot{z}_2 = v_2 \\ \dot{z}_3 = z_2 v_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n = z_{n-1} v_1 \end{array} \right. , \quad (3.11)$$

où  $z \in \mathbb{R}^n$  est le nouveau vecteur d'état et  $v_1, v_2$  les nouvelles entrées.

Les deux obstacles majeurs en ce qui concerne la commande des systèmes non holonomes sont :

1. la non commandabilité de leur approximation linéaire ;
2. la non adéquation avec la condition nécessaire de Brockett [30] pour l'existence d'un retour d'état, continu et indépendant du temps, stabilisant le système.

Toutefois, afin de surmonter ces difficultés, des méthodes variées ont été envisagées : des retours d'état homogènes ou dépendant du temps [133, 135], des commandes sinusoïdales et polynômiales [126, 156], des commandes continues par morceaux [101, 123], des méthodes basées sur la platitude [79] ou encore des approches par rétro-itération (backstepping) [106, 105, 121]. Il est important de noter que peu de commandes assurent à la fois une convergence rapide et des propriétés de robustesse.

### 3.3.2 Transformation en une forme chaînée perturbée

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à un système non holonome à deux entrées, soumis à des perturbations  $p$  dépendant de l'état et/ou du temps :

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 + p(x, t) \quad (3.12)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$  sont les deux entrées de commande,  $g_1(x), g_2(x)$  sont des champs de vecteurs suffisamment différentiables et linéairement indépendants et  $p(x, t) \in \mathbb{R}^n$  est une perturbation additive. Il s'agit de déterminer sous

quelles conditions le système (3.12) peut se mettre sous la forme chaînée suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v_1 + p^1(z, t) \\ \dot{z}_2 = v_2 + p^2(z, t) \\ \dot{z}_3 = z_2(v_1 + p^1(z, t)) \\ \vdots \\ \dot{z}_n = z_{n-1}(v_1 + p^1(z, t)) \end{cases}, \quad (3.13)$$

avec  $p^1$  et  $p^2$ , des perturbations après changement de coordonnées et éventuellement retour d'état.

Définissons tout d'abord les distributions suivantes :

$$\Delta_0 = \text{Vect} \{g_1, g_2, ad_{g_1}g_2, \dots, ad_{g_1}^{n-2}g_2\}, \quad (3.14)$$

$$\Delta_1 = \text{Vect} \{g_2, ad_{g_1}g_2, \dots, ad_{g_1}^{n-2}g_2\}, \quad (3.15)$$

$$\Delta_2 = \text{Vect} \{g_2, ad_{g_1}g_2, \dots, ad_{g_1}^{n-3}g_2\}. \quad (3.16)$$

et rappelons les conditions suffisantes données dans [125] permettant de transformer le système (3.10) en (3.11).

**Théorème 31** [125] *Si le système (3.10) satisfait les hypothèses suivantes :*

A1)  $\text{rang } \Delta_0(x) = n$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

A2)  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont involutives,

A3) il existe une fonction  $h_1(x)$  telle que  $dh_1 \cdot \Delta_1 = 0$  et  $dh_1 \cdot g_1 = 1$ ,

alors le système (3.10) peut être transformé en (3.11) en utilisant le difféomorphisme

$$z = \phi(x) = [h_1(x), L_{g_1}^{n-2}h_2(x), \dots, L_{g_1}h_2(x), h_2(x)]^T, \quad (3.17)$$

et le retour d'état

$$u = \psi(x)v = \frac{1}{L_{g_2}L_{g_1}^{n-2}h_2(x)} \begin{pmatrix} L_{g_2}L_{g_1}^{n-2}h_2(x) & 0 \\ -L_{g_1}^{n-1}h_2(x) & 1 \end{pmatrix} v, \quad (3.18)$$

où  $h_2$  est une fonction indépendante de  $h_1$  telle que

$$dh_2 \cdot \Delta_2 = 0. \quad (3.19)$$

**Remarque 32** L'existence de  $h_2$  est assurée par le théorème de Frobenius [102] étant donné que  $\Delta_2 \subset \Delta_1$  sont toutes deux involutives. Sous l'hypothèse A2 et (3.19),  $L_{g_2} L_{g_1}^{n-2} h_2(x) \neq 0$  (voir [125]).

Bushnell et al. [32] ont généralisé ce résultat dans le cas où le nombre d'entrées est supérieur à deux. Dans [29], Boutat et Barbot ont relaxé les hypothèses sur l'involativité des distributions  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , et obtiennent une forme chaînée avec des termes résiduels au moins d'ordre trois.

Utilisant le même difféomorphisme et le même retour d'état, une condition nécessaire et suffisante sur la perturbation est maintenant donnée afin de mettre le système (3.12) sous la forme chaînée perturbée (3.13).

**Théorème 33** (Floquet et al. [81]) Soit le système perturbé (3.12). Sous les hypothèses A1-A3, (3.12) peut être transformé en la forme chaînée (3.13) si et seulement si pour tout  $t$

$$p(x, t) \in \text{Vect} \{g_1(x), g_2(x)\}.$$

**Preuve.**  $\diamond$  Condition suffisante : puisque  $p(x, t) \in \text{Vect} \{g_1(x), g_2(x)\}$ , on peut écrire :

$$p(x, t) = \alpha(x, t)g_1(x) + \beta(x, t)g_2(x).$$

De (3.17) et (3.18), on tire que :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v_1 + \alpha(x, t) \\ \dot{z}_2 = v_2 + \alpha(x, t)L_{g_1}^{n-1}h_2(x) + \beta(x, t)L_{g_2}L_{g_1}^{n-2}h_2(x) \\ \dot{z}_3 = L_{g_1}^{n-2}h_2(v_1 + \alpha(x, t)) \\ \vdots \\ \dot{z}_n = L_{g_1}h_2(v_1 + \alpha(x, t)) \end{cases}$$

Et en posant

$$p^1(z, t) = [\alpha(x, t)]_{x=\phi^{-1}(z)},$$

$$p^2(z, t) = [\alpha(x, t)L_{g_1}^{n-1}h_2(x) + \beta(x, t)L_{g_2}L_{g_1}^{n-2}h_2(x)]_{x=\phi^{-1}(z)},$$

on obtient le système (3.13).

◇ Condition nécessaire : en appliquant le difféomorphisme (3.17) et le retour d'état (3.18) au système (3.12) :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v_1 + dh_1.p \\ \dot{z}_2 = v_2 + dL_{g_1}^{n-2}h_2.p \\ \dot{z}_3 = z_2v_1 + dL_{g_1}^{n-3}h_2.p \\ \vdots \\ \dot{z}_n = z_{n-1}v_1 + dh_2.p \end{cases} \quad (3.20)$$

Puisque  $\text{rang } \Delta_0(x) = n$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , la perturbation peut s'écrire comme une combinaison linéaire de  $n$  champs de vecteurs indépendants engendrant  $\Delta_0(x)$ , c'est-à-dire :

$$p(x, t) = \alpha_1(x, t)g_1(x) + \alpha_2(x, t)g_2(x) + \sum_{i=3}^n \alpha_i(x, t)ad_{g_1}^{i-2}g_2.$$

Alors,  $dh_1.p = \alpha_1$ , et  $\dot{z}_1 = v_1 + p^1(z)$ , avec  $\alpha_1 = p^1$ .

Puisque  $dh_2.\Delta_2 = 0$  et  $dh_2.g_1(x) = L_{g_1}h_2(x) = z_{n-1}$ , on a :

$$dh_2.p = \alpha_1 z_{n-1} + \alpha_n dh_2.ad_{g_1}^{n-2}g_2.$$

Comme  $dh_2.ad_{g_1}^{n-2}g_2 \neq 0$ ,  $\alpha_n$  doit être nul pour avoir  $\dot{z}_n = z_{n-1}(v_1 + p^1(z))$ . Ainsi obtient-on

$$dL_{g_1}h_2.p = \alpha_1 z_{n-2} + \sum_{i=3}^{n-1} \alpha_i dL_{g_1}h_2.ad_{g_1}^{i-2}g_2.$$

Sachant que

$$dL_{g_1}h_2.ad_{g_1}^{i-2}g_2 = dh_2.ad_{g_1}^{i-1}g_2 + L_{g_1}(dh_2.ad_{g_1}^{i-2}g_2)$$

et puisque  $dh_2.ad_{g_1}^jg_2 = 0$  pour  $j = 1, \dots, n-3$  ( $dh_2.\Delta_2 = 0$ ), on a :

$$dL_{g_1}h_2.p = \alpha_1 z_{n-2} + \alpha_{n-1} dh_2.ad_{g_1}^{n-2}g_2$$

ce qui implique que  $\alpha_{n-1} = 0$ .

De la même manière, pour  $k = 2$  à  $n - 3$ ,

$$dL_{g_1}^k h_2.p = \alpha_1 z_{n-k-1} + \alpha_{n-k} dh_2.ad_{g_1}^{n-2} g_2,$$

Ainsi  $\alpha_{n-k} = 0$  pour  $k = 2$  à  $n - 3$  et (3.20) est équivalent à (3.13) si

$$\alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0,$$

ce qui signifie que  $p(x, t) \in \text{Vect} \{g_1(x), g_2(x)\}$  pour tout  $t$ . ■

### 3.4 Forme canonique de commandabilité généralisée

Sous certaines considérations issues de l'algèbre différentielle, il est possible d'obtenir, pour une large classe de systèmes non linéaires, une généralisation directe de la forme canonique de commandabilité, qui joue un rôle proéminent dans le domaine de la stabilisation par retour d'état :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \end{array} \right. , \quad y = x_1. \quad (3.21)$$

Cette forme a été introduite par Fliess dans [76] et la transformation d'état permettant d'aboutir à celle-ci comprend la variable d'entrée et un nombre fini de ses dérivées :  $u, \dot{u}, \dots, u^{(\beta)}$ . Toutefois, elle ne s'applique pas aux systèmes linéaires multivariables et stationnaires, ni aux systèmes autonomes.

On note que la dynamique des zéros est donnée par  $f(0, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = 0$ . Le système (3.21) est alors dit localement/globalement à minimum de phase si le point d'équilibre  $u = 0, \dot{u} = 0, \dots, u^{(\alpha-1)} = 0$  de  $f(0, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = 0$  est localement/globalement asymptotiquement stable. Si  $f$  est suffisamment continue, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un champ de vecteur  $g$  de même degré de continuité que  $f$  tel

que :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\alpha-1} = \xi_\alpha \\ \dot{\xi}_\alpha = g(\xi) \end{cases}, \quad u = \xi_1. \quad (3.22)$$

Le système (3.21) est alors dit localement/globalement à minimum de phase si (3.22) est localement/globalement asymptotiquement stable. De part le retour d'état statique  $v + \sum_{i=1}^{\alpha} c_i \xi_i = g(\xi)$  tel que  $p^\alpha + \sum_{i=1}^{\alpha} \left( c_i - \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi=0} \right) p^{i-1}$  soit un polynôme de Hurwitz, le système résultant est alors localement/globalement à minimum de phase (la commande  $u$  reste bornée).

**Exemple :** (tiré de [76]) Soit le système

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + u \\ \dot{z}_2 = z_2 z_3 \\ \dot{z}_3 = u z_1 \end{cases}$$

Cette dynamique n'est pas linéarisable par retour d'état statique, mais on peut la mettre sous la forme canonique de commandabilité généralisée.  $z_1$  étant un élément primitif, en posant le changement de coordonnées  $z_1 = x_1$ ,  $z_2 = \dot{x}_1$ ,  $z_3 = \ddot{x}_1$ , on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u x_1 x_2 - u^2 x_1 + \frac{x_3 - \dot{u}^2}{x_2 - u} + \ddot{u} \end{cases}.$$

La loi de commande définie par

$$u x_1 x_2 - u^2 x_1 + \frac{x_3 - \dot{u}^2}{x_2 - u} + \ddot{u} = \sum_{i=1}^3 a_i x_i + v$$

est alors un retour d'état dynamique linéarisant, dans le sens où elle peut être vue comme une équation différentielle en  $u$ .

La forme présentée ici est d'un intérêt particulier dans le cadre de commandes dis-

continues, et donc pour notre propos général.

### **3.5 Conclusion**

Ce bref chapitre a été l'occasion d'introduire des formes de systèmes qui nous seront particulièrement utiles par la suite en ce qui concerne l'aspect commande. Des conditions originales ont également été données sur les perturbations susceptibles d'intervenir sur le système. Le chapitre suivant est dédié à la stabilisation. Partant de chacune des ces formes, une loi de commande par modes glissants est réalisée de façon à maintenir le système considéré en un de ses points d'équilibre.



# Chapitre 4

## Stabilisation

### 4.1 Introduction

Pour un système très général de la forme  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x_e$  est un point d'équilibre si  $f(t, x_e) = 0$ ,  $t \geq 0$ . Sans perte de généralités, nous considérerons que le point d'équilibre  $x_e$  est l'origine, une simple translation  $\tilde{x} = x - x_e$  permettant de s'y ramener. Un équilibre est dit stable si, après avoir été écarté faiblement de sa position, le système considéré prend une position peu différente. Il est dit asymptotiquement stable si, dans les mêmes conditions, il rejoint sa position d'origine. De nombreuses études ont été développées utilisant et généralisant les notions de stabilité définies par Lyapunov, qui consistent à étudier le comportement des solutions d'un système d'équations différentielles, sans la connaissance explicite de celles-ci. Un tour d'horizon complet sur cette question peut être trouvé dans les ouvrages de Hahn [95], et plus récemment de Khalil [107].

Dans le cadre plus général des systèmes commandés  $\dot{x} = f(t, x, u)$ , le problème de la stabilité d'un point d'équilibre doit être étendu à celui de la poursuite d'une trajectoire de référence  $x_r(t)$ . Il s'agit alors de générer une commande  $u(t)$  fonction de l'état  $x(t)$  et de la référence  $x_r(t)$  et d'évaluer qualitativement ou quantitativement la convergence de l'écart  $e(t) = x(t) - x_r(t)$ . Une des questions fréquemment rencontrées est celle de la stabilisation, c'est-à-dire trouver une commande telle que l'état  $x = 0$  soit asymptotiquement stable. Dans ce type de stabilisation, les trajectoires du système se rapproche infiniment près du point d'équilibre, mais sans jamais l'atteindre. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons également à la stabilisation en temps fini, c'est-à-dire à amener les trajectoires exactement

au point d'équilibre au bout d'un certain temps, et à y rester ensuite.

Ce chapitre s'articule de la façon suivante. Dans un premier temps, des méthodes de stabilisation par des commandes par modes glissants seront étudiées pour une forme régulière et une forme chaînée, toutes deux perturbées, ainsi que pour un corps rigide sous-actionné. A travers ces résultats, l'intérêt des commandes par modes glissants d'ordre supérieur, lorsque l'on a pour objectif d'obtenir des convergences en temps fini et robuste par rapport à certaines perturbations, sera souligné. Etant donné que dans la plupart des cas, il n'est pas possible d'avoir une mesure de l'ensemble des variables d'état, la synthèse d'une commande stabilisante par retour de sortie, pour un système mis sous la forme canonique de commandabilité de Fliess, sera détaillée dans la deuxième partie du chapitre. La commande, basée sur les modes glissants classiques, est bouclée sur un observateur, lui-même par modes glissants. Comme il n'existe pas de principe de séparation pour les systèmes non linéaires, la stabilité du système en boucle fermée sur l'observateur sera démontrée.

## 4.2 Retour d'état

### 4.2.1 Utilisation de la forme régulière généralisée

Reprenons le système multi-entrées et multi-sorties de la forme :

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u + p(x), \quad (4.1)$$

et on suppose désormais que  $\dim \Delta_G = m = \text{rang}(G(x))$ , c'est-à-dire qu'il existe un difféomorphisme qui transforme (4.1) en (3.2) avec  $d = m$ . Ceci implique également que l'on peut mettre le système (3.2) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v + p^R(z), \\ \dot{z}_2 = f_2^R(z_1, z_2), \\ z_1 \in \mathbb{R}^m, z_2 \in \mathbb{R}^{(n-m)} \end{cases}, \quad (4.2)$$

avec le retour statique  $u = [G_r^R(z)]^{-1} (-f_1^R(z) + v)$ , qui est bien défini puisque par hypothèse  $G_r^R(z)$  est de rang plein. Notre objectif est ici de synthétiser des commandes

par modes glissants stabilisant le système considéré. La procédure consiste à amener le premier sous-système, dont la variable est  $z_1$ , à évoluer sur une surface où le deuxième sous-système est asymptotiquement stable. Cette idée a été utilisée la première fois dans [117], sous des considérations de stabilité globale. Nous proposons ici d'élargir ce résultat avec des surfaces de glissement d'ordre plus général impliquant des notions de stabilité locale et de rejet de perturbations. Enfin, une commande par modes glissants d'ordre supérieur est réalisée afin de réduire les phénomènes de réticence. Faisons les hypothèses suivantes :

H1)  $k_{\text{fin}}$  est fini (i.e.  $\Delta_G$  existe) ;

H2)  $\dim \Delta_G = m = \text{rang}(G(x))$  ;

H3) la perturbation  $p(x)$  satisfait l'hypothèse H0) du Théorème 29 et  $\|p^R(x)\| \leq \pi_{p^R} + \pi'_{p^R} \|x\|$ , pour n'importe quelle norme de  $\mathbb{R}^n$  ;

H4) l'origine  $0_2 \in \mathbb{R}^{(n-m)}$  du système :

$$\dot{z}_2 = f_2^R(a(z_2), z_2), \quad (4.3)$$

est localement asymptotiquement stable ;

H5) la surface de glissement est définie par  $s = z_1 - a(z_2)$ , avec  $a(z_2) \in C^1(\mathbb{R}^{(n-m)}; \mathbb{R}^m)$ ,  $a(0_2) = 0_1 \in \mathbb{R}^r$  ;

H6)  $f_2^R$  est au moins  $C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{(n-m)})$  et est lipschitzienne en  $z_1$  de constante  $L$ .

### Commande par modes glissants d'ordre un

Dans ce paragraphe, une commande par modes glissants d'ordre un permet d'énoncer le théorème suivant :

**Théorème 34** (Floquet et al. [80]) *Sous les conditions H1 à H6 :*

1) *il existe un gain  $k(x)$  tel que le système (4.1) soit localement asymptotiquement stable, par l'intermédiaire de la commande :*

$$u = (G_r^R(z))^{-1} (-f_1^R(z) + v), \quad (4.4)$$

$$v = -k(x) \text{SGN}(s) + \frac{\partial a(z_2)}{\partial z_2} f_2^R(z), \quad (4.5)$$

$$k(x) = k'(x) + \frac{L}{\alpha} \left\| \frac{\partial V_2}{\partial z_2} \right\|_1, \quad (4.6)$$

$k'(x) > 0$ , avec  $k'(x) > \|p^R\|_1$  et pouvant être constant ou non ;

2) Si l'origine  $0_2$  de (4.3) est globalement asymptotiquement stable, alors l'origine de (4.1) est globalement asymptotiquement stable avec la commande  $u$  définie par (4.4), (4.5).

**Preuve.** Démontrons tout d'abord le second point du théorème. Puisque l'origine  $0_2$  du système (4.3) est globalement asymptotiquement stable, il existe une fonction de Lyapunov  $V_2(z_2)$  telle que  $\dot{V}_2 < 0$  le long des trajectoires de (4.3). Posons  $V(z) = \frac{\alpha}{2} s^\top s + V_2(z_2)$ , avec  $\alpha > 0$ , qui donne :

$$\dot{V} = \alpha s^\top \dot{s} + \frac{\partial V_2}{\partial z_2} [f_2^R(z_1, z_2) - f_2^R(a(z_2), z_2) + f_2^R(a(z_2), z_2)].$$

La fonction  $f_2^R$  étant uniformément lipschitzienne de constante  $L$ , on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \alpha [\|p^R\|_1 - k(x)] s^\top \text{SGN}(s) + \frac{\partial V_2}{\partial z_2} f_2^R(a(z_2), z_2) \\ & + L \left\| \frac{\partial V_2}{\partial z_2} \right\|_1 s^\top \text{SGN}(s). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Le choix du gain (4.6) assure alors la stabilité asymptotique et globale de l'origine (en utilisant une généralisation du théorème de Lyapunov donnée dans [75]).

Prouvons maintenant la première assertion du théorème. De la même manière que dans [130], en utilisant la réciproque du théorème de Lyapunov (voir [95]), il existe une fonction de Lyapunov  $V_2(z_2)$  (continûment différentiable) et une constante  $\rho_2$  telle que  $\dot{V}_2$  est définie négative le long des trajectoires de (4.3) pour toute évolution partant initialement de l'ensemble  $S_2(\rho_2) = \{z_2 \in \mathbb{R}^{(n-m)} : V_2(z_2) \leq \rho_2\}$ . Considérons alors des conditions initiales dans l'ensemble défini par  $S(\rho_2) = \{z \in \mathbb{R}^n : V(z_1, z_2) \leq \rho_2\}$ . Le membre de droite de (4.7) avec le gain (4.6) est toujours négatif et ceci implique la stabilité asymptotique de l'origine du système (4.1). ■

**Remarque 35** Si, en plus de l'expression (4.6), on a les conditions  $\lim_{z_2 \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial V_2}{\partial z_2} \right\| = \lim_{z \rightarrow 0} k'(z) = 0$  et  $\pi_{p^R} = 0$ , alors la réticence s'atténue progressivement jusqu'à devenir nulle lorsque l'état du système tend vers l'origine. La première condition n'est pas vraiment restrictive

car, dans la plupart des cas, les fonctions de Lyapunov sont localement au moins quadratiques. On peut également remarquer qu'au lieu de la fonction signe, il est possible d'utiliser n'importe quelle fonction sigmoïde nulle à l'origine.

### Commande par modes glissants d'ordre deux

Dans le but de réduire les phénomènes de réticence, nous allons maintenant stabiliser le système avec une commande par modes glissants d'ordre supérieur. Pour cela, quelques hypothèses supplémentaires sont nécessaires :

H'3) il existe  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$  tels que pour tout  $z \in \Omega_\sigma = \{z \in \mathbb{R}^n / |z_1| < \sigma_1 \text{ et } |z_2| < \sigma_2\}$  on a :

$$\|p^R\|_1 < \pi_1, \quad (4.8)$$

$$\|\dot{p}^R\|_1 < \pi_2, \quad (4.9)$$

$$\left\| \frac{\partial a(z_2)}{\partial z_2} f_2^R(z) \right\|_1 < C_1, \quad (4.10)$$

H'6)  $f_2^R$  est au moins  $C^3$  en  $z$  ce qui nous permet d'écrire

$$f_2^R(z_1, z_2) = f_2^R(a(z_2), z_2) + B(s, z_2)s, \quad (4.11)$$

où  $s = (s_1, \dots, s_m)^T = (z_1 - a(z_2))$  et  $B$  est une matrice de dimension appropriée.

En ajoutant des intégrateurs avant chaque entrée et en définissant le pré-retour statique suivant :

$$u = (G_r^R(z))^{-1} \left[ -f_1^R(z) + \xi + \frac{\partial a(z_2)}{\partial z_2} f_2^R(z) - B^T(s, z_2) \left( \frac{\partial V_2}{\partial z_2} \right)^T \right],$$

on peut mettre le système (3.2) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \xi + p^R + \frac{\partial a(z_2)}{\partial z_2} f_2^R(z) - B^T(s, z_2) \left( \frac{\partial V_2}{\partial z_2} \right)^T \\ \dot{z}_2 = f_2^R(z_1, z_2) \\ \dot{\xi} = v \text{ si } |\xi| < b \text{ et } \dot{\xi} = -\xi \text{ sinon} \\ z_1 \in \mathbb{R}^m, z_2 \in \mathbb{R}^{(n-m)}, \xi \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (4.12)$$

D'après H'3) et H'6), et puisque  $\xi$  est borné, il existe des constantes positives  $K_1$  et  $K_2$  telles que :

$$\left\| B^T(s, z_2) \left( \frac{\partial V_2}{\partial z_2} \right)^T \right\|_1 < K_1$$

$$\left\| \frac{d}{dt} (B^T(s, z_2) \left( \frac{\partial V_2}{\partial z_2} \right)^T) \right\|_1 < K_2$$

**Théorème 36** *Sous les hypothèses H0), H1), H2), H'3), H4) et H'6), on peut trouver des gains  $\lambda_{m_i}, \lambda_{M_i}, i \in \{1, \dots, m\}$  tels que l'origine de (3.2) soit localement asymptotiquement stable sous l'effet de la commande :*

$$u = (G^R(z))^{-1} \left[ -f_1^R(z) + \xi + \frac{\partial a(z_2)}{\partial z_2} f_2^R(z) - B^T(s, z_2) \left( \frac{\partial V_2}{\partial z_2} \right)^T \right], \quad (4.13)$$

$$\dot{\xi}_i = \begin{cases} -\xi_i & \text{si } |\xi_i| > b \\ -\lambda_{m_i} \operatorname{sgn}(s_i), & \text{si } s_i \dot{s}_i \leq 0, |\xi_i| < b \\ -\lambda_{M_i} \operatorname{sgn}(s_i), & \text{si } s_i \dot{s}_i > 0, |\xi_i| < b \end{cases} \quad (4.14)$$

et en prenant

$$\lambda_{m_i} > K_2 + \pi_2 \quad (4.15)$$

$$\lambda_{M_i} > 2(K_2 + \pi_2) + \lambda_{m_i} \quad (4.16)$$

$$b > K_1 + \pi_1 + C_1 \quad (4.17)$$

**Preuve.** Etudions, dans un premier temps, le comportement de  $s$  et  $\dot{s}$ . Le théorème indique qu'on applique l'algorithme du twisting par rapport à  $s = 0$ . L'expression de la dérivée seconde de la fonction de commutation est donnée par :

$$\ddot{s} = v + \dot{p}^R - \frac{d}{dt} (B^T(s, z_2) \left( \frac{\partial V_2}{\partial z_2} \right)^T).$$

On sait (voir la preuve de convergence de l'algorithme du twisting dans l'Annexe C) que chacune des composantes  $s_i$  de la fonction de glissement  $s$  décrit, dans le plan de phase  $(s_i, \dot{s}_i)$ , une courbe s'enroulant infiniment sur elle-même, tout en convergeant en temps fini vers l'origine  $s = \dot{s} = 0$ , et inscrite à l'intérieur d'une trajectoire limite. Celle-ci est

une spirale de pseudo-période  $T_{k_i} = r_i^k T_{0_i}$ ,  $k \in [0, +\infty[$  où

$$T_{0_i} = \frac{1}{\lambda_{M_i} - \alpha} (1 + \sqrt{r_i}) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{r_i}} \right) \dot{s}_i(0)$$

$$r_i = \frac{(\lambda_{m_i} + \alpha)}{(\lambda_{M_i} - \alpha)}$$

$$\alpha = \pi_2 + K_2.$$

Dans ce qui suit, nous noterons  $s_d$  la composante dont la pseudo-période  $T_{0_d} = T_0 \dot{s}_d(0)$  est la plus longue. A chaque  $k^{\text{ième}}$  tour, les demi-axes positifs du plan de phase sont croisés aux points

$$A = \begin{cases} s_d(\tilde{t}_k) = 0 \\ \dot{s}_d(\tilde{t}_k) = r_d^k \dot{s}_d(0) \end{cases}$$

et

$$B = \begin{cases} s_d(\tilde{t}_k + r_d^k t_1) = r_d^{2k} s_d(t_1) \\ \dot{s}_d(\tilde{t}_k + r_d^k t_1) = 0 \end{cases}$$

$\tilde{t}_k$  représentant l'instant où la surface de Poincaré  $\{s_d = 0, \dot{s}_d > 0\}$  est traversée pour la  $k^{\text{ième}}$  fois (la définition de  $t_1$  est donnée dans l'Annexe C).

Montrons maintenant la convergence de l'ensemble du système. Etant donné que l'origine  $0_2$  du système (4.3) est localement asymptotiquement stable, nous considérons une nouvelle fois l'ensemble  $S_2(\rho_2)$ , où  $\dot{V}_2 < 0$  le long des trajectoires de (4.3). Posons alors

$$V(z, \xi) = s^T s + \sum_{i=1, i \neq d}^m \dot{s}_i^2 + \gamma \dot{s}_d^2 + V_2(z_2),$$

et l'ensemble de conditions initiales  $\Omega(\rho_2) = \{z \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R} : V(z, \xi) \leq \rho_2\}$ . Par dérivation :

$$\dot{V} = 2(\xi + p^R)^T s + 2 \sum_{i=1, i \neq d}^m \dot{s}_i \ddot{s}_i + 2\gamma \dot{s}_d \ddot{s}_d + \frac{\partial V_2}{\partial z_2} f_2^R(a(z_2), z_2).$$

Discrétisons cette équation chaque fois que la trajectoire de l'état a traversé  $n$  fois la surface de Poincaré  $\{s_d = 0, \dot{s}_d > 0\}$  (ce qui est justifié d'après l'évolution des trajectoires

lorsque l'on utilise l'algorithme du twisting ) :

$$\begin{aligned}
\Delta V &= V(\tilde{t}_{k+n}) - V(\tilde{t}_k) \\
&= \int_{\tilde{t}_k}^{\tilde{t}_{k+n}} \left[ 2(\xi + p^R)^T s + 2 \sum_{i=1, i \neq d}^m \dot{s}_i \ddot{s}_i + 2\gamma \dot{s}_d \ddot{s}_d + \dot{V}_2|_{z_1=a(z_2)} \right] dt \\
&= 2 \int_{\tilde{t}_k}^{\tilde{t}_{k+n}} \left[ \dot{s}^T + \left( \frac{\partial V_2}{\partial z_2} \right) B(s, z_2) \right] s dt + 2 \sum_{i=1, i \neq d}^m \int_{\tilde{t}_k}^{\tilde{t}_{k+n}} \dot{s}_i \ddot{s}_i dt + 2\gamma \int_{\tilde{t}_k}^{\tilde{t}_{k+n}} \dot{s}_d \ddot{s}_d dt + \Delta V_2|_{z_1=a(z_2)} \\
&= \sum_{i=1, i \neq d}^m \left[ (s_i^2(\tilde{t}_{k+n}) - s_i^2(\tilde{t}_k)) + (\dot{s}_i^2(\tilde{t}_{k+n}) - \dot{s}_i^2(\tilde{t}_k)) \right] + \gamma \left[ \dot{s}_d^2(\tilde{t}_{k+n}) - \dot{s}_d^2(\tilde{t}_k) \right] \\
&\quad + 2 \int_{\tilde{t}_k}^{\tilde{t}_{k+1}} \left( \frac{\partial V_2}{\partial z_2} \right) B(s, z_2) s dt + \Delta V_2|_{z_1=a(z_2)} \\
&= \Delta W + \Delta V_2|_{z_1=a(z_2)}
\end{aligned}$$

Pour tout  $k$  et pour des  $\lambda_{m_i}$  suffisamment grands :

$$\max_{t \in [\tilde{t}_k, \tilde{t}_{k+1}]} |s_i| \leq \frac{\dot{s}_i^2(\tilde{t}_k)}{\lambda_{m_i} - \alpha} + |s_i(\tilde{t}_k)| \leq \sqrt{\dot{s}_i^2(\tilde{t}_k) + s_i^2(\tilde{t}_k)},$$

donc

$$\int_{\tilde{t}_k}^{\tilde{t}_{k+1}} \left( \frac{\partial V_2}{\partial z_2} \right) B(s, z_2) s dt \leq m K_1 \Delta t \max_{i \in \{1, m\}} \sqrt{\dot{s}_i^2(\tilde{t}_k) + s_i^2(\tilde{t}_k)},$$

où

$$\Delta t = \tilde{t}_{k+n} - \tilde{t}_k = T_0 \frac{1 - r_d^n}{1 - r_d} \dot{s}_d(\tilde{t}_k).$$

Pour  $n$  assez grand, il existe  $\alpha_n \in ]0, 1[$  tel que :

$$[\dot{s}_i^2(\tilde{t}_{k+n}) + s_i^2(\tilde{t}_{k+n})] = \alpha_n [\dot{s}_i^2(\tilde{t}_k) + s_i^2(\tilde{t}_k)], \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

De plus, nous savons que  $[\dot{s}_d^2(\tilde{t}_{k+n}) - \dot{s}_d^2(\tilde{t}_k)] = (r_d^{2n} - 1) \dot{s}_d^2(\tilde{t}_k)$ . Ainsi en posant :

$$\begin{aligned}
X_1 &= \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \sqrt{\dot{s}_i^2(\tilde{t}_k) + s_i^2(\tilde{t}_k)} \\
X_2 &= \dot{s}_d(\tilde{t}_k),
\end{aligned}$$

on obtient :

$$\Delta W \leq (m-1)(\alpha_n-1)X_1^2 + 2mK_1T_0\frac{1-r_d^n}{1-r_d}X_1X_2 + \gamma(r_d^{2n}-1)X_2^2.$$

$\Delta W$  est définie négative si :

$$\left(mK_1T_0\frac{1-r_d^n}{1-r_d}\right)^2 - \gamma(m-1)(\alpha_n-1)(r_d^{2n}-1) < 0$$

ou

$$\left(m\frac{K_1T_0}{1-r_d}\right)^2 (1-r_d^n) + \gamma(m-1)(\alpha_n-1)(r_d^n+1) < 0 \quad (4.18)$$

L'inégalité (4.18) est vérifiée par un choix judicieux de  $\gamma$ , ce qui implique la convergence vers l'origine de tout  $z$  appartenant à l'ensemble  $\Omega(\rho_2) \cap \Omega_\sigma$ . ■

**Remarque 37** 1) Pour de larges valeurs de  $\lambda_{M_d}$ ,  $\frac{T_0}{1-r_d}$  est équivalent à  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_{M_d}}}$ , ce qui signifie que l'on peut fixer  $\gamma$  aussi bien que  $\lambda_{M_d}$  tels que (4.18) soit vraie, tout en sachant qu'augmenter  $\gamma$  restreint le domaine des conditions initiales alors que choisir  $\lambda_{M_d}$  plus important conduit à des gains de commande plus grands.

2) Afin d'utiliser la dérivée de  $s$  dans l'algorithme du twisting, qui est fonction de la perturbation, nous introduisons le système dynamique auxiliaire suivant, qui est un estimateur de cette perturbation :

$$\dot{\hat{z}}_1 = \xi + \frac{\partial a(z_2)}{\partial z_2} f_2^R(z) - B^T(s, z_2) \left(\frac{\partial V_2}{\partial z_2}\right)^T + \Gamma \text{SGN}(z_1 - \hat{z}_1).$$

avec  $\Gamma > 0$ . La dynamique de l'erreur est :

$$\dot{e} = (\dot{z}_1 - \dot{\hat{z}}_1) = p^R - \Gamma \text{SGN}(e)$$

En choisissant  $\Gamma > \pi_1$ , le vecteur équivalent nous donne une estimation de la perturbation :

$$p^R = \Gamma \text{SGN}_{eq}(e)$$

où  $\text{SGN}_{eq}(e)$  est obtenu grâce à un filtre passe-bas et on dérive le signal filtré. En procédant de cette façon, on génère quelques approximations qui sont toutefois négligeables si le

filtre est bien choisi. Une autre solution pour obtenir  $\dot{p}^R$  est d'utiliser un observateur par modes glissants d'ordre supérieur ([28]). Dans la pratique, posséder une information sur la perturbation n'est pas indispensable si on utilise un algorithme uniquement basé sur la connaissance de  $s$  (tel que le twisting algorithme réel).

3) Dans la démarche précédente, il a été supposé que l'on avait une bonne connaissance de la matrice  $G$  des entrées du système (4.1); tel est le cas pour certains systèmes lagrangiens. Par contre, si  $G$  n'est connue que de façon incertaine, la démonstration précédente peut être adaptée en supposant que cette matrice est à diagonale fortement dominante (ou bien définie positive) et en appliquant l'algorithme d'ordre deux présenté dans [20] pour le cas multivariable et qui a été décrit dans le chapitre 2.

### Exemple

Des simulations ont été effectuées dans le cas d'un système mono-entrée :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u + p_1(x) \\ \dot{x}_2 = x_3 - x_1 + 2x_1u + p_2(x) \\ \dot{x}_3 = -x_1^2 - x_1 + x_2 + u + p_3(x) \end{cases}, \quad (4.19)$$

où  $p = [p_1, p_2, p_3]^T$  est une perturbation sinusoïdale qui satisfait l'hypothèse H0. En définissant le difféomorphisme global :

$$\zeta = \phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1^2 - x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix},$$

le système se met sous la forme régulière :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = u + p_1(\zeta) \\ \dot{\zeta}_2 = \zeta_3 \\ \dot{\zeta}_3 = \zeta_1 + \zeta_2 \end{cases}.$$

La surface de glissement choisie est  $s = \zeta_1 + 2\zeta_2 + 2\zeta_3$  et la fonction de Lyapunov  $V_2(\zeta_2, \zeta_3)$  est :

$$V_2(\zeta_2, \zeta_3) = \frac{1}{2} (\zeta_2^2 + \zeta_2\zeta_3 + \zeta_3^2).$$

La loi de commande  $v$  est d'ordre un, ainsi qu'elle a été définie dans (4.5), avec  $k = 10$ , et une simulation faite dans ce cas-ci est donnée Figure 4-1 (l'unité de temps est la seconde).

La Figure 4-2 illustre les résultats lorsque  $\xi$  est la commande par modes glissants d'ordre deux (4.14) avec  $\lambda_m = 10$  et  $\lambda_M = 35$ . Chacun des états converge en temps fini et on peut observer que la réticence sur la commande  $\xi$  est diminuée par rapport au régime glissant classique. La précision obtenue sur  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  est en  $O(T^2)$  pour le second ordre alors qu'elle est en  $O(T)$  pour le premier ordre ( $T$  est la période d'échantillonnage).

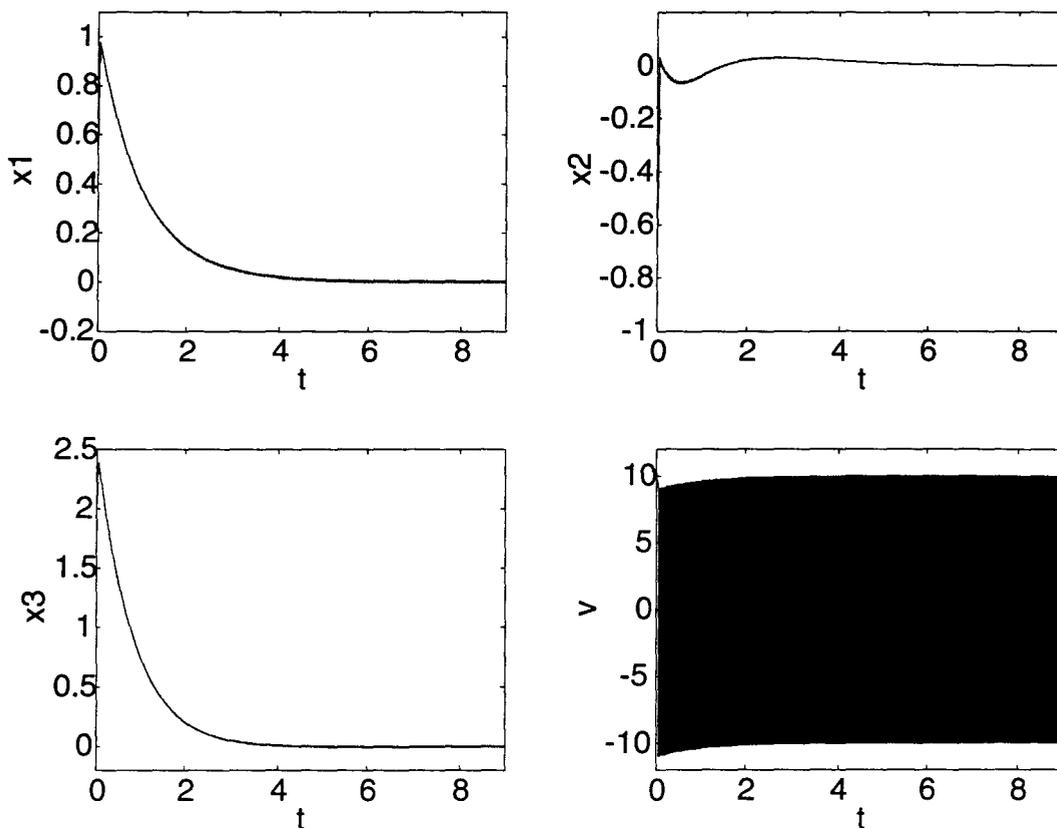


FIG. 4-1: Stabilisation de (4.19) par un ordre un avec  $x_{10} = 0.5$ ,  $x_{20} = -0.75$ ,  $x_{30} = 2$

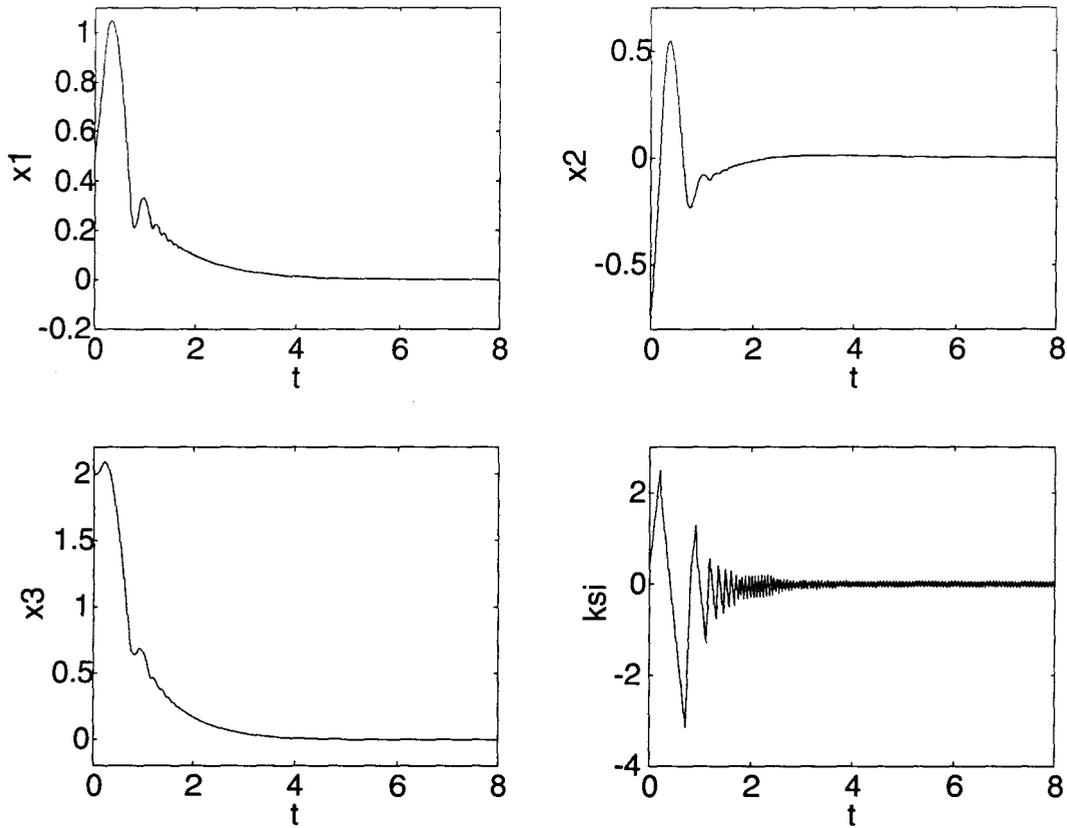


FIG. 4-2: Stabilisation de (4.19) par un ordre deux avec  $x_{10} = 0.5$ ,  $x_{20} = -0.75$ ,  $x_{30} = 2$  et  $\xi_0 = 0$

### 4.2.2 Stabilisation d'un système non holonome perturbé

Ces dernières années, le problème concernant la stabilisation des systèmes non holonomes a été très largement étudié (voir [109] pour un état de l'art ou par exemple [101, 104, 105, 122, 123, 125, 126, 135]). Dans ce chapitre, nous nous intéressons à stabiliser un système non holonome à deux entrées, soumis à des perturbations  $p$  :

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 + p(x, t), \quad (4.20)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$  sont les deux entrées de commande,  $g_1(x), g_2(x)$  sont des champs de vecteurs suffisamment différentiables et linéairement indépendants et  $p(x, t) \in \mathbb{R}^n$  est une perturbation additive. Dans le chapitre 3, des conditions permettant d'écrire le système (4.20) sous la forme chaînée suivante ont été

données :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = v_1 + p^1(z, t) \\ \dot{z}_2 = v_2 + p^2(z, t) \\ \dot{z}_3 = z_2(v_1 + p^1(z, t)) \\ \vdots \\ \dot{z}_n = z_{n-1}(v_1 + p^1(z, t)) \end{array} \right. , \quad (4.21)$$

où  $p^1$  et  $p^2$  symbolisent les perturbations après changement de coordonnées et retour d'état. La technique des modes glissants, du fait de leurs propriétés de robustesse et leur caractère discontinu (permettant de contourner l'obstruction de Brockett), apparaît être une bonne solution pour stabiliser le système non holonome perturbé (4.20). De plus, ainsi que nous allons le voir, ils s'avèrent relativement adéquats à la forme chaînée choisie.

### Stabilisation pratique par mode glissant d'ordre un

Le terme "pratique" employé ici signifie que l'état du système pourra être rendu arbitrairement petit au bout d'un temps que l'on aura fixé par avance. Dans ce qui suit, nous considérons le cas particulier où  $n = 3$  (représentatif de nombreux systèmes réels), c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = v_1 + p^1(z, t) \\ \dot{z}_2 = v_2 + p^2(z, t) \\ \dot{z}_3 = z_2(v_1 + p^1(z, t)) \end{array} \right. . \quad (4.22)$$

Dans le cadre de cette étude, certaines hypothèses sont nécessaires :

H1) sous les conditions (3.17) et (3.18), (4.20) (où  $n = 3$ ) peut être transformé en (4.22) sur un ensemble ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

H2) il est supposé que :

$$|p^1(z, t)| \leq \pi_1 + \pi'_1(z),$$

$$|p^2(z, t)| \leq \pi_2 + \pi'_2(z),$$

pour tout  $z \in \Omega$  et pour tout  $t > 0$ . Ces conditions impliquent qu'il n'est pas nécessaire que la perturbation s'annule lorsque l'état atteint l'origine.  $\pi_i$  ( $i = 1, 2$ ) est une constante positive connue (pas nécessairement nulle) et  $\pi'_i(z)$  est une fonction positive de l'état.

Les surfaces de glissement sur lesquelles nous voulons restreindre le mouvement du système sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} s_1 &= z_1 + C \int_0^t f(\tau) z_3(\tau) d\tau, \\ s_2 &= z_2 - Cg(t), \end{aligned}$$

$C = \text{sgn}(z_{20})$  étant une constante. Les deux fonctions continues et dépendantes du temps  $f$  et  $g$  doivent avoir les propriétés suivantes :

- p1)  $f$  et  $g$  sont positives pour tout  $t > 0$ ,
- p2)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$ ,
- p3)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f(\tau)g(\tau)d\tau = +\infty$ ,
- p4)  $|f(t)| < K, \forall t < +\infty$ .

**Théorème 38** (Floquet et al. [81]) *Par le biais de la commande par modes glissants*

$$\begin{cases} v_1 = -k_1 \text{sgn} \left[ z_1 + C \int_0^t f(\tau) z_3(\tau) d\tau \right], & t \leq t_2 \\ v_1 = -k_1 \text{sgn} z_1, & t > t_2 \\ v_2 = -k_2 \text{sgn} [z_2 - Cg(t)], & t \leq t_1 \\ v_2 = -k_2 \text{sgn} z_2, & t > t_1 \end{cases}, \quad (4.23)$$

où  $k_1(z) > \pi_1 + \pi'_1(z) + K + k'_1$ ,  $k_2(z) > \pi_2 + \pi'_2(z) + \sup_t |g| + k'_2$ ,  $t_1$  étant l'instant où  $\{s_1 = s_2 = 0$  et  $|z_3| \leq \varepsilon\}$  et  $t_2$  le premier instant tel que  $z_2(t_2) = 0$ , l'état de (4.22) converge en temps fini à l'intérieur de l'ensemble défini par  $\Omega_\varepsilon = \{z_1 = z_2 = 0, |z_3| < \varepsilon\}$ .

**Preuve.** De part les gains  $k_1, k_2$  choisis,  $s_i \dot{s}_i < -k'_i |s_i|$ ,  $i = 1, 2$ . En effet,

$$s_1 \dot{s}_1 = s_1 \left( -k_1 \text{sgn}(s_1) + p^1(z) + Cf(\tau)z_3 \right) < -k'_1 |s_1|$$

puisque  $k_1(z) > \pi_1 + \pi'_1(z) + K + k'_1$ . On obtient  $s_2 \dot{s}_2 < -k'_2 |s_2|$  par des considérations similaires. Alors (voir [159]), pour  $t \geq t_0$ , un régime glissant s'installe sur la surface  $s_1 = s_2 = 0$ . Notons que  $\text{sgn}(z_2) = \text{sgn}(Cg(t))$ , et donc  $z_2(t)$  atteint la surface  $z_2 = Cg(t)$  sans avoir traversé l'axe  $z_2 = 0$  avant  $t_0$ . Ceci est indispensable car sinon le contrôle  $v_1$  commute vers  $v_1 = -k_1 \text{sgn} z_1$  et la convergence de  $z_3$  vers l'origine est alors impossible.

Une fois les surfaces de glissement atteintes :

$$\begin{aligned} z_1 &= -C \int_0^t f(\tau) z_3(\tau) d\tau, \\ z_2 &= Cg(t). \end{aligned}$$

L'égalité  $\dot{s}_1 = 0$  nous donne l'expression de la commande équivalente :

$$(v_1 + p^1(z, t))_{eq} = -Cf(t)z_3,$$

et finalement le comportement de  $z_3$  en régime glissant (pour  $t > t_0$ ) :  $\dot{z}_3 = -f(t)g(t)z_3$ .

Par intégration :

$$z_3 = z_3(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t f(\tau)g(\tau)d\tau\right).$$

et  $z_3$  tend vers zéro car, par hypothèse,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t f(\tau)g(\tau)d\tau = +\infty$ .  $z_2$  s'annule aussi du fait des propriétés de la fonction  $g$ . Il existe donc  $t_1 \geq t_0$  tel que pour  $t \geq t_1$ ,  $|z_3| \leq \varepsilon$ . Après cet instant,  $v_2 = -k_2 \operatorname{sgn} z_2$  et  $z_2$  atteint la surface  $z_2 = 0$  en un temps fini  $t_2$ . Pour  $t \geq t_2$ ,  $z_3$  reste inférieur à  $\varepsilon$  car  $\dot{z}_3 = z_2(v_1 + p^1(z))$  et  $z_2 = 0$ .

Après  $t_2$ , la commande  $v_1$  commute vers  $v_1 = -k_1 \operatorname{sgn} z_1$  ce qui force  $z_1$  à s'annuler en temps fini. ■

Partant de tout ensemble compact  $K_r = \{z \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \leq r\}$ , on peut aisément avoir une borne supérieure de la valeur de l'instant  $t_2$  en fonction de  $r$ ,  $K$  et des gains  $k_i$  de la commande. Ceci se révèle intéressant si l'on s'impose des contraintes sur le temps de convergence du système, qu'il sera alors possible de fixer en réglant ces différents gains.

### Stabilisation en temps fini

Dans la littérature, peu de résultats concernant la stabilisation des systèmes non holonomes allient à la fois robustesse et performances au niveau de la précision de convergence. La plupart des lois de commande assurant une convergence exponentielle ou en temps fini (voir [122], [123], ...) se révèlent être sensibles vis-à-vis des perturbations ou des erreurs de modélisation. D'un autre côté, les contrôles supposés être peu sensibles aux perturbations, comme par exemple les retours d'états continus dépendants du temps

[135], implique une convergence assez lente. De plus, peu de résultats traitent de l'aspect robustesse. Dans [23] et [100] est proposée une stabilisation robuste qui n'assure qu'une convergence asymptotique. Dans [37], Canudas et Khenouf ont utilisé une approche par les modes glissants mais pour un système dont seulement une entrée est sujette à des perturbations. A notre connaissance, seul Jiang [104] a proposé un contrôleur robuste pour la stabilisation exponentielle d'un système non holonome. Celui-ci est soumis à des perturbations non linéaires qui ne vérifient pas forcément la condition de recouvrement, mais qui doivent toutefois être "vanishing" et satisfaire une condition de triangularité.

Il est réalisé ici une loi de commande qui permet d'obtenir une stabilisation en temps fini malgré des perturbations exogènes. Par là même, il est montré que les modes glissants d'ordre supérieur ont une structure particulièrement bien adaptée à la stabilisation d'une forme chaînée et qu'ils se révèlent utiles pour obtenir un bon compromis performance / robustesse. L'objectif de commande est donc de rallier l'origine du système (4.21) en temps fini malgré les perturbations,  $p^1(z, t)$  et  $p^2(z, t)$ , qui sont maintenant supposées vérifier :

$$\left| \frac{\partial^i p^1}{\partial z^i}(z, t) \right| \leq \Delta_i^z, \quad i = 0, \dots, n-2, \quad (4.24)$$

$$\left| \frac{\partial^i p^1}{\partial t^i}(z, t) \right| \leq \Delta_i^t, \quad i = 0, \dots, n-2, \quad (4.25)$$

$$|p^2(z, t)| \leq \pi_2, \quad (4.26)$$

pour tout  $z$  et  $t$ , avec  $\Delta_i^z$ ,  $\Delta_i^t$  et  $\pi_2$  des constantes positives. Introduisons également l'extension dynamique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = \xi_1 + p^1(z, t) \\ \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{n-3} = \xi_{n-2} \\ \dot{\xi}_{n-2} = w \\ \dot{z}_2 = v_2 + p^2(z, t) \\ \dot{z}_3 = z_2(\xi_1 + p^1(z, t)) \\ \vdots \\ \dot{z}_n = z_{n-1}(\xi_1 + p^1(z, t)) \end{array} \right. \quad (4.27)$$

Les conditions (4.24), (4.25), (4.26) et l'addition de  $(n - 2)$  integrateurs avant l'entrée  $v_1$  sont nécessaires si on veut utiliser des modes glissants d'ordre supérieur. Ceci apparaîtra clairement dans l'exemple à venir où une commande par modes glissants d'ordre deux sera donnée explicitement pour un système de dimension trois.

La stabilisation du système s'effectue en trois étapes.

**Première étape :** La commande  $w$  est choisie comme étant un algorithme glissant d'ordre  $(n - 1)$  par rapport à la surface  $s_1 = z_1 - at = 0$ ,  $a > 0$ . Celui-ci assure que les trajectoires atteignent la surface  $s_1 = 0$  au bout d'un temps fini  $T_1$  et y évolue après cet instant. Pour  $t \geq T_1$ , la dynamique équivalente, obtenue lorsque  $s_1 = \dot{s}_1 = \ddot{s}_1 = \dots = s_1^{(n-2)} = 0$ , implique que  $(\xi_1 + p^1(z, t))_{eq} = a$  qui, réinjecté dans le système (4.27), donne :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a \\ \dot{z}_2 = v_2 + p^2(z, t) \\ \dot{z}_3 = az_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n = az_{n-1} \end{cases}, \quad (4.28)$$

**Deuxième étape :**

Pour les instants supérieurs à  $T_1$ , appliquons un algorithme glissant d'ordre  $(n - 1)$  par rapport à  $z_n = 0$  sur l'entrée  $v_2$ . Ainsi a-t-on génération d'une trajectoire de glissement d'ordre  $(n - 1)$  et l'établissement des équations suivantes au bout d'un temps fini  $T_2$  :

$$z_n = z_{n-1} = \dots = z_2 = 0.$$

**Troisième étape :**

Après  $t = T_1 + T_2$ , les deux commandes commutent en

$$v_1 = -k_1(z) \operatorname{sgn}(z_1)$$

$$v_2 = -k_2(z) \operatorname{sgn}(z_2)$$

où  $k_1(z) = k'_1 + \pi_1 + \pi'_1(z)$  et  $k_2(z) = k'_2 + \pi_2 + \pi'_2(z)$ . Le choix de tels paramètres permet de maintenir  $z_2$  à zéro (et donc  $z_3 = z_4 = \dots = z_n = 0$ ), et finalement d'atteindre  $z_1 = 0$ ,

aboutissant à la stabilisation du système (4.21) en un temps fini  $T_3$ .

Ces résultats sont synthétisés dans le théorème suivant :

**Théorème 39** (Floquet et al. [86]) Grâce au contrôle défini par :

$$v_1 = \begin{cases} \text{algorithme glissant d'ordre } (n-1) \text{ par rapport à } s_1 = 0, & t \leq T_1 + T_2 \\ -k_1(z) \operatorname{sgn}(z_1), & t > T_1 + T_2 \end{cases} \quad (4.29)$$

$$v_2 = \begin{cases} \text{algorithme glissant d'ordre } (n-1) \text{ par rapport à } z_n = 0, & T_1 \leq t \leq T_1 + T_2 \\ -k_2(z) \operatorname{sgn}(z_2), & t > T_1 + T_2 \end{cases} \quad (4.30)$$

avec  $s_1$ ,  $k_2$ ,  $k_1$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  définis précédemment, le système (4.21) est stabilisé à l'origine en temps fini.

### Application à un robot mobile

Afin d'illustrer les résultats précédents, considérons un robot mobile dont le schéma est donné Figure 4-3.

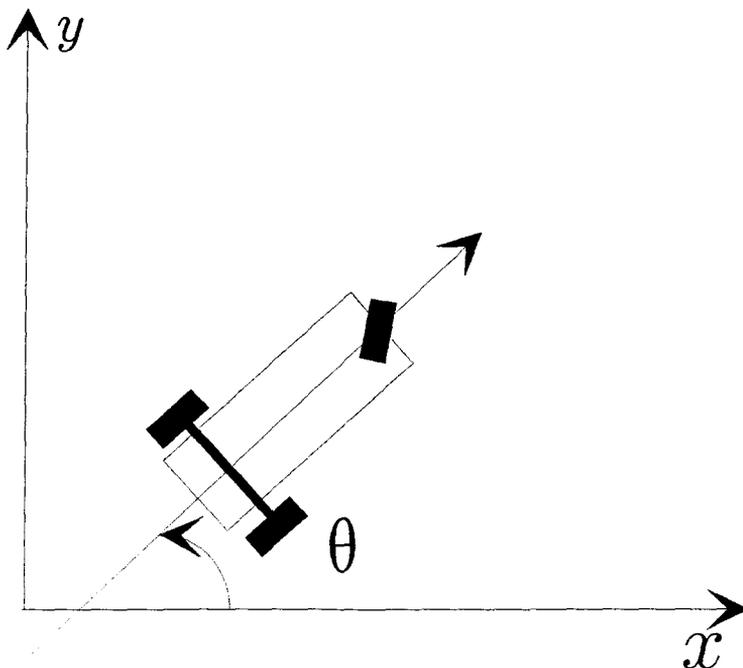


FIG. 4-3: Robot mobile de type unicycle

Son comportement peut être décrit par :

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + g_2(q)u_2 + P(q, t),$$

où  $q = [x, y, \theta]^T$ ,  $g_1(q) = [0, 0, 1]^T$ ,  $g_2(q) = [\cos \theta, \sin \theta, 0]^T$ , et  $P$  est une perturbation telle que  $P(q, t) \in \text{Vect} \{g_1(q), g_2(q)\}$  pour tout  $t$ .  $x$  et  $y$  sont les coordonnées du centre de gravité du robot,  $\theta$  est l'orientation du véhicule par rapport à l'axe des  $x$ , et  $u_1$ ,  $u_2$  représentent respectivement les vitesses angulaire et linéaire. Les deux roues arrière, motrices, du robot sont actionnées par deux moteurs indépendants. Le robot va en ligne droite ou tourne suivant que la vitesse des deux roues est la même ou non. La roue avant est une roue folle uniquement destiné à stabiliser l'ensemble. Il est supposé que le roulement se fait sans glissement (i.e. le vecteur vitesse du centre de gravité est orthogonal à la direction de l'essieu arrière). Ceci impose une contrainte non holonomique sur le mouvement du robot :

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0.$$

En choisissant

$$\begin{cases} h_1 = \theta \\ h_2 = x \sin \theta - y \cos \theta \end{cases},$$

et en utilisant le difféomorphisme

$$z = \phi(q) = [h_1(q), L_{g_1} h_2(q), h_2(q)]^T,$$

le système est transformé en (voir Théorème 31) :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v_1 + p^1(z, t) \\ \dot{z}_2 = v_2 + p^2(z, t) \\ \dot{z}_3 = z_2(v_1 + p^1(z, t)) \end{cases}. \quad (4.31)$$

**Stabilisation pratique** Les fonctions intervenant dans les surfaces de glissement sont choisies telles que :

$$\begin{cases} f(t) = (t^2 + 10) \\ g(t) = \frac{1}{t^2 + 10} \end{cases}.$$

Les gains de la commande sont  $k_1 = 20$ ,  $k_2 = 10$ . La perturbation est un bruit blanc et la période d'échantillonnage est choisie égale à  $\tau = 0.005\text{sec}$ . Les résultats de la simulation sont donnés Figure 4-4. On peut observer que  $z_3$  tend vers zéro ( $\approx 3\text{sec}$ ) plus rapidement que  $z_2$  ( $\approx 4\text{sec}$ ). Une fois que  $z_2 = 0$ ,  $v_1 = -k_1 \text{sgn } z_1$  et  $z_1$  s'annule en temps fini (7sec). Le plan de phase  $(x, y)$  est également représenté afin de montrer la trajectoire du centre de gravité.

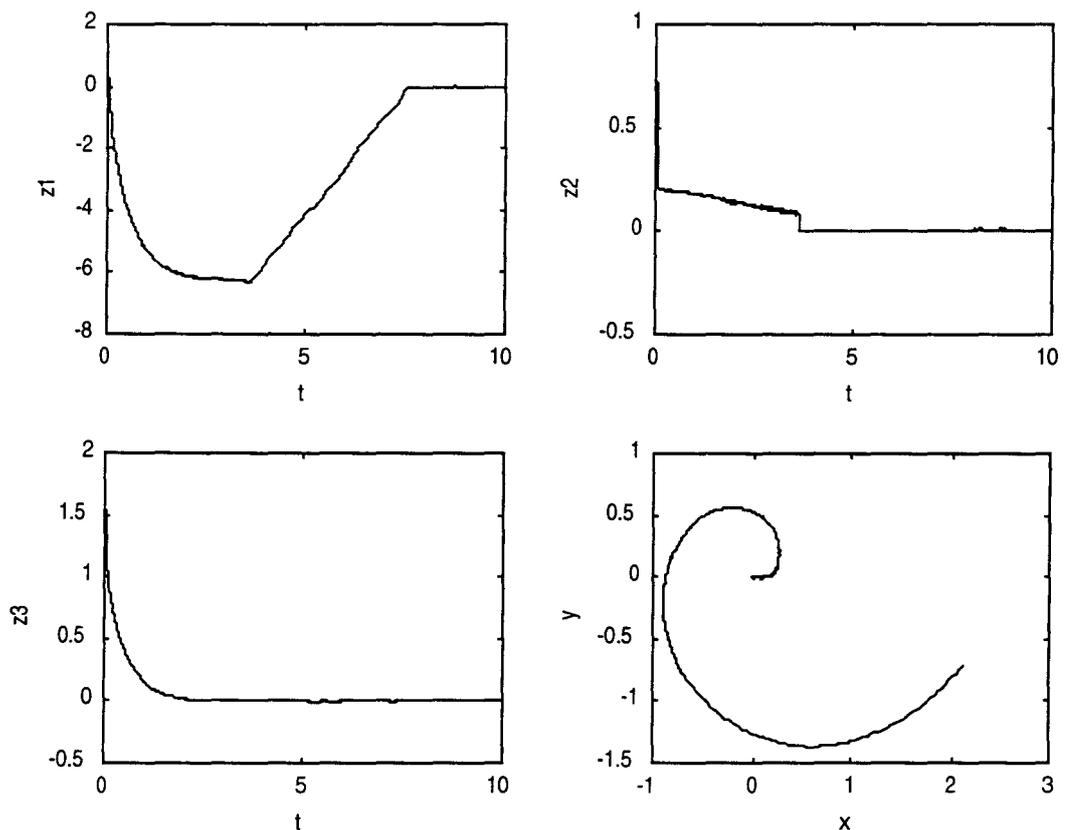


FIG. 4-4: Stabilisation de (4.31) pour  $z_{10} = \frac{\pi}{4}$ ,  $z_{20} = 1$  et  $z_{30} = 2$

Dans le but de prendre en compte la dynamique des actionneurs, et pour tester la robustesse de la commande vis-à-vis des erreurs de modélisation, le système suivant a également été simulé :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = w_1 + p^1(z, t) \\ \dot{z}_2 = w_2 + p^2(z, t) \\ \dot{z}_3 = z_2(w_1 + p^1(z, t)) \end{cases}, \quad (4.32)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = -10w_1 + 9.5v_1 \\ \dot{w}_2 = -10w_2 + 10.5v_2 \end{cases}, \quad (4.33)$$

où (4.33) modélise la dynamique d'un actionneur de constante de temps  $0.1\text{sec}$  et de gains proches de 1. La convergence (voir Figure 4-5) est relativement similaire à la première simulation ce qui montre que le système n'est pas affecté par l'actionneur.

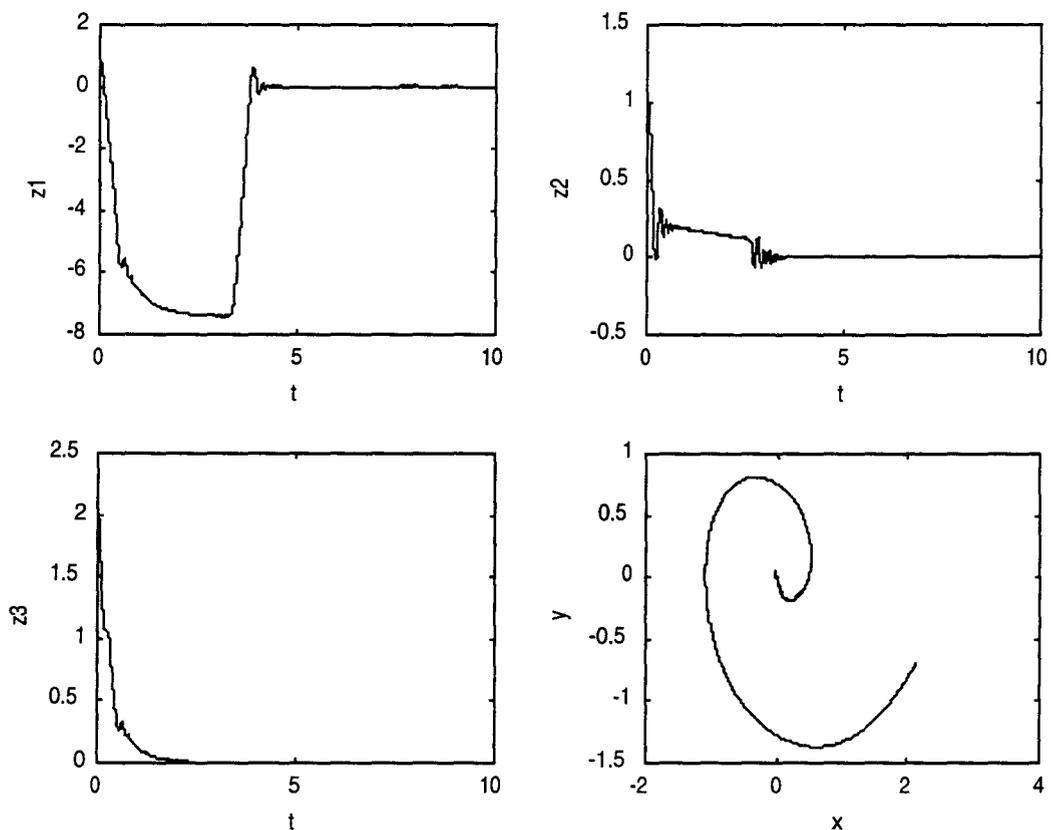


FIG. 4-5: Stabilisation de (4.32-4.33) pour  $z_{10} = \frac{\pi}{4}$ ,  $z_{20} = 1$  et  $z_{30} = 2$  en prenant en compte la dynamique des actionneurs

**Stabilisation en temps fini** Ici, la loi de commande d'ordre supérieur est appliquée sur le même exemple du robot mobile, décrit par un système de dimension trois. Une commande par modes glissants d'ordre deux doit donc être utilisée. L'algorithme choisi est la version modifiée de l'algorithme du twisting [86] (cf Chapitre 2), qui permet d'avoir une convergence plus rapide. Pour cette application, une extension dynamique est introduite dans le système (4.31). Ceci est nécessaire pour utiliser un algorithme glissant d'ordre

deux dans la première étape de l'élaboration de la commande.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_4 + p^1(z, t) \\ \dot{z}_2 = v_2 + p^2(z, t) \\ \dot{z}_3 = z_2(z_4 + p^1(z, t)) \\ \dot{z}_4 = w \end{cases}, \quad (4.34)$$

Les trois étapes de la stabilisation deviennent :

**Première étape :**

$$w = -\alpha^2 s_1 - 2\alpha \dot{s}_1 + \begin{cases} -\rho_m \operatorname{sgn}(s_1), & \text{si } s_1 \dot{s}_1 \leq 0 \\ -\rho_M \operatorname{sgn}(s_1), & \text{si } s_1 \dot{s}_1 > 0 \end{cases},$$

où  $s_1 = z_1 - 3t$ , et  $\alpha = 4$ ,  $\rho_m = 4$ ,  $\rho_M = 40$ .

**Deuxième étape :** pour  $t \geq T_1$ , une fois la surface  $\{s_1 = 0\}$  atteinte, les trajectoires évoluent suivant le système réduit :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 3 \\ \dot{z}_2 = v_2 + p^2(z, t) \\ \dot{z}_3 = 3z_2 \end{cases}.$$

L'algorithme du twisting accéléré

$$v_2 = -\beta^2 z_3 - 2\beta \dot{z}_3 + \begin{cases} -\lambda_m \operatorname{sgn}(z_3), & \text{si } z_3 \dot{z}_3 \leq 0 \\ -\lambda_M \operatorname{sgn}(z_3), & \text{si } z_3 \dot{z}_3 > 0 \end{cases}$$

est appliqué. Par dérivation de  $\dot{z}_3$ , on a

$$\ddot{z}_3 = 3(v_2 + p^2(z, t)),$$

ce qui détermine les conditions ( $\lambda_m > \pi_2$  et  $\lambda_M > \lambda_m + 2\pi_2$ ) de convergence sur la surface  $z_3 = z_2 = 0$  en un temps fini  $T_2$ .

Troisième étape :

Après  $t = T_1 + T_2$ , les deux lois de commande commutent en

$$v_1 = -k_1(z) \operatorname{sgn}(z_1)$$

$$v_2 = -k_2(z) \operatorname{sgn}(z_2)$$

$$k_1(z) = 10 \text{ et } k_2(z) = 5.$$

En procédant de cette façon, l'état du système rejoint l'origine en temps fini, comme illustré sur la Figure 4-6. On peut y observer le comportement des différentes variables au cours des trois étapes. La surface  $s_1 = 0$  ( $z_1 = 3t$ ) ayant été atteinte, l'algorithme glissant du second ordre de la deuxième étape entraîne la convergence de  $z_2$  et  $z_3$  vers zéro. Ceci réalisé, la variable  $z_1$  converge également vers l'origine grâce à la commande par modes glissants donnée dans la troisième étape.

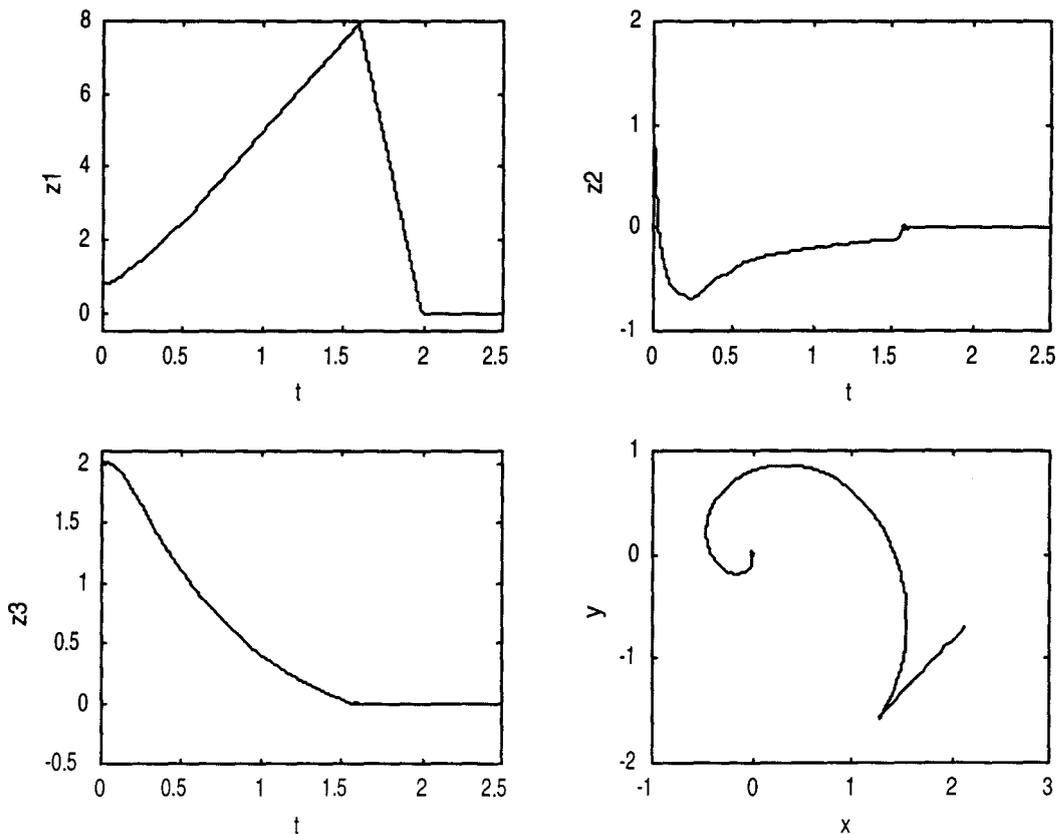


FIG. 4-6: Stabilisation de (4.34) par modes glissants d'ordre deux pour  $z_{10} = \frac{\pi}{4}$ ,  $z_{20} = 1$  et  $z_{30} = 2$

Partant d'un compact  $K_r = \{z \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \leq r\}$ , les instants  $T_1$  et  $T_2$  peuvent être évalués (voir la description de l'algorithme du twisting dans le chapitre 2) en fonction de  $r$ , des gains de la commande et des bornes des perturbations et le temps de convergence peut, par conséquent, être fixé.

Dans la première étape, on peut remarquer que si on utilisait un mode glissant classique, la surface  $s_1 = 0$  serait également atteinte en temps fini, et ceci sans avoir à rajouter d'extension dynamique. L'intérêt d'utiliser ici des modes glissants d'ordre supérieur est qu'après cette première phase, la dynamique équivalente réinjectée dans le reste du système est d'autant plus précise que l'ordre de l'algorithme est important. Dans le cas présent, en ayant choisi un ordre deux, la surface  $s_1 = 0$  est atteinte avec une précision en  $O(\tau^2)$ , ce qui donne :

$$\dot{z}_3 = z_2(a + O(\tau)).$$

alors que par un mode glissant classique, on a :

$$\dot{z}_3 = z_2(a + O(1)),$$

Cette expression doit de plus être une nouvelle fois dérivée dans la deuxième étape introduisant des perturbations additionnelles encore plus importantes et qui ne sont pas prises en compte dans la réalisation de la commande d'ordre deux. La convergence vers la surface  $z_3 = z_2 = 0$  s'en trouve donc dépréciée.

La Figure 4-7 illustre cette remarque où une commande d'ordre un

$$v_1 = -k_1(z) \operatorname{sgn}(z_1 - 3t), \quad k_1(z) = 6$$

agit dans la première étape. Les autres étapes restent inchangées et l'état est stabilisé une nouvelle fois en temps fini, mais avec plus de bruit sur chacune des variables.

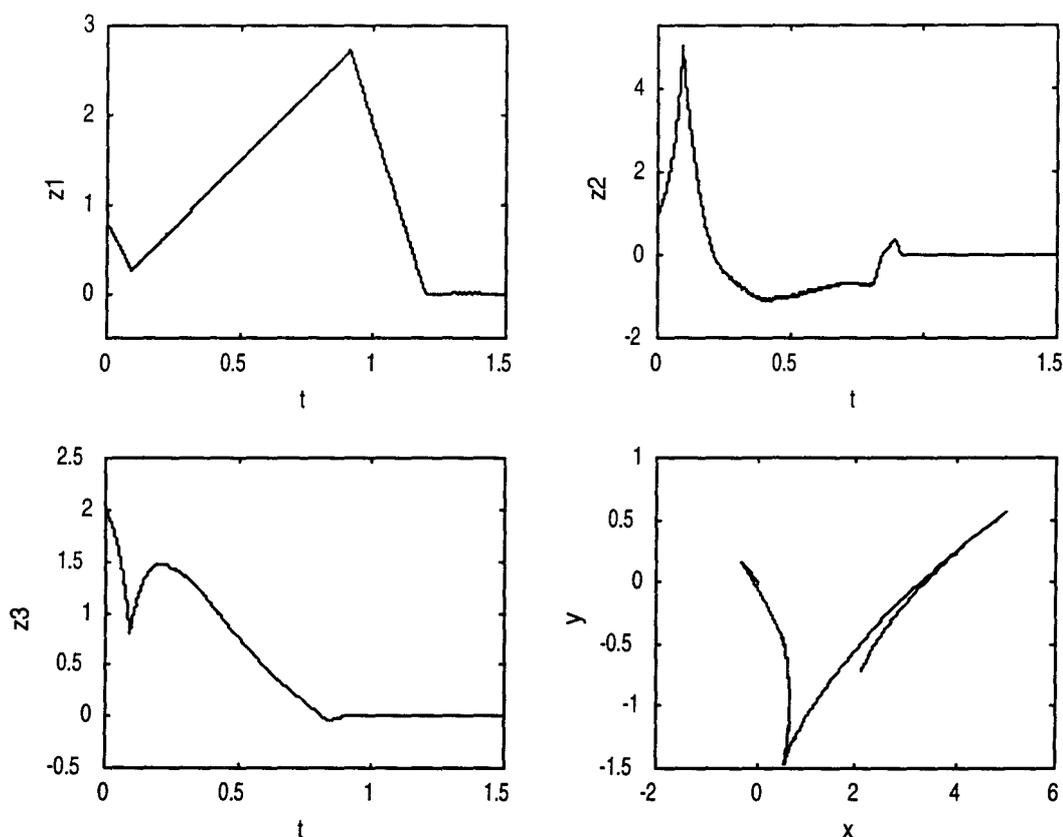


FIG. 4-7: Stabilisation de (4.34) pour  $z_{10} = \frac{\pi}{4}$ ,  $z_{20} = 1$  et  $z_{30} = 2$  en utilisant un seul algorithme d'ordre deux

### Remarques générales :

◇ Au lieu de la version idéale de l'algorithme du twisting, l'utilisation d'algorithmes uniquement basés sur la mesure de  $s$  ([19, 28]) aboutirait au même résultat et doit être adoptée dans la pratique où on ne dispose pas toujours de l'information sur  $\dot{s}$ .

◇ La commutation de  $v_2$  dans la troisième étape est nécessaire car les conditions sur la convergence de l'algorithme du twisting ne sont plus valides lorsque  $z_1$  tend vers zéro. En effet, comme  $\dot{z}_3 = z_2(v_1 + p^1(z, t))$ , les gains  $\lambda_m$  et  $\lambda_M$  ne sont plus suffisamment importants pour maintenir  $(z_2, z_3)$  à  $(0, 0)$ .

◇ Cette stratégie de commande peut très bien s'appliquer au problème, traité dans [100, 104], où il s'agit de garer un unicycle soumis à des incertitudes paramétriques. Elle

peut également être élargie à un système de la forme (exemple traité dans [104]) :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v_1 \\ \dot{z}_2 = v_2 \\ \dot{z}_3 = z_2 v_1 + d_1(t) z_3 + d_2(t) z_3^2 \end{cases}, \quad (4.35)$$

pourvu que  $d_1(t)$ ,  $d_2(t)$  et leur dérivée soient bornées, même si elles ne satisfont pas aux conditions (4.24), (4.25) et (4.26).

### 4.2.3 Stabilisation d'un corps rigide sous actionné

La stabilisation d'un corps rigide a été largement étudiée depuis plusieurs années. Le problème particulier d'un satellite muni de seulement un ou deux couples d'entrée a reçu une attention plus spéciale. Certains de ces travaux prennent en compte la totalité de la dynamique (impliquant les variables de positions et de vitesses) (voir [33, 45, 124]) et il a été prouvé que le système ne peut pas être stabilisé par retour d'état continu (il ne satisfait pas la condition de Brockett [30]). Les résultats [2, 128, 129] se rapportent à la stabilisation de la seule vitesse angulaire, qui, dans ce cas, peut être stabilisée asymptotiquement par retour d'état continu, même avec un seul couple d'entrée [3, 4, 152]. L'article [2] est dédié au cas perturbé. Ici, élargissant la classe de perturbations admissibles qui y est donnée, nous parvenons à des résultats de stabilité asymptotique mais aussi en temps fini, pourvu que la commande réalisée soit à structure variable. Le choix d'utiliser la technique des modes glissants, hormis pour leurs propriétés de robustesse, réside dans le fait que, par exemple, les satellites sont généralement commandés par des actionneurs "gas jet", dont l'action est discontinue puisqu'ils délivrent des séquences d'impulsions (en fait une étude plus fine des actionneurs nous conduirait à une analyse de type système hybride).

#### Modèle du corps rigide

Considérons un corps rigide de masse constante et actionné par trois couples d'amplitude  $\|b_i\| \tau_i$  agissant dans la direction  $b_i \in \mathbb{R}^3$ . Sans pertes de généralités, on peut faire l'hypothèse que ces couples sont appliqués dans la direction des axes principaux

d'inertie (les résultats peuvent être étendus à toute autre localisation des actionneurs, pour lesquels le système est commandable, après un changement d'état et de variables de commande adéquat). La matrice d'inertie du système s'écrit alors  $J = \text{diag}(j_1, j_2, j_3)$  avec  $j_i > 0$  et le modèle est donné par [128] :

$$\dot{\omega}(t) = f(\omega) + G\tau, \quad (4.36)$$

où  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T \in \mathbb{R}^3$  est la vitesse angulaire à l'instant  $t$  et

$$f = \left( \omega_3 \omega_2 \frac{(j_2 - j_3)}{j_1}, \omega_1 \omega_3 \frac{(j_3 - j_1)}{j_2}, \omega_2 \omega_1 \frac{(j_1 - j_2)}{j_3} \right)^T,$$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{b_{1k}}{j_k} \end{pmatrix}.$$

Le but est de maintenir une vitesse constante au système considéré, même si un des actionneurs tombe en panne (i.e.  $u_3 = 0$ ). Par la suite, il est supposé que  $j_1 \neq j_2$ , ce qui entraîne que le système soit commandable. De plus, celui-ci est soumis à des perturbations  $p_1$  et  $p_2$  satisfaisant la condition de recouvrement [61]. Dans ce cas, le système devient :

$$\begin{cases} j_1 \dot{\omega}_1(t) = \omega_3 \omega_2 (j_2 - j_3) + u_1 + p_1(t, \omega), \\ j_2 \dot{\omega}_2(t) = \omega_1 \omega_3 (j_3 - j_1) + u_2 + p_2(t, \omega), \\ j_3 \dot{\omega}_3(t) = \omega_2 \omega_1 (j_1 - j_2). \end{cases} \quad (4.37)$$

Le terme de perturbation  $p^*(t, \omega) = [p_1(t, \omega), p_2(t, \omega)]^T$  est supposé satisfaire la condition :

$$\|p^*(t, \omega)\|_1 \leq \pi + \pi'(\omega),$$

où  $\pi, \pi'(\omega)$  sont respectivement une constante et une fonction positives connues.

### Stabilisation asymptotique

De part une stratégie de commande basée sur les modes glissants, nous désirons contraindre le système à évoluer sur une surface où la convergence de  $\omega_3$  vers zéro (stabilité asymptotique) est assurée.

◇ On notera  $u^* = [u_1, u_2]^T, v^* = [v_1, v_2]^T$  ;

◇ La surface est définie par :

$$s = \begin{bmatrix} \omega_1 + a\omega_3^2 \\ \omega_2 - \omega_3 \end{bmatrix}$$

avec  $a = (j_1 - j_2)$ .

◇ On peut noter que :  $j_3\dot{\omega}_3(t) = a\omega_2\omega_1 = -a^2\omega_3^3 + L(\omega)s$  où  $L(\omega)$  est le vecteur ligne  $L(\omega) = a[\omega_3 \ \omega_1]$ .

Sous ces conditions, il peut être affirmé que :

**Théorème 40** (Floquet et al. [82]) *Il existe un gain  $k(\omega)$  assurant une stabilisation globale et asymptotique de l'origine de (4.37), par l'utilisation de la loi de commande :*

$$u^* = v^* - \omega_3 L^T(\omega) - \begin{bmatrix} (j_2 - j_3)\omega_2\omega_3 + 2\frac{j_1 a^2}{j_3}\omega_1\omega_2\omega_3 \\ (j_3 - j_1)\omega_1\omega_3 - \frac{j_2 a}{j_3}\omega_1\omega_2 \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

avec

$$v^* = -k(\omega) \text{SGN}(s), \quad (4.39)$$

et  $k(\omega) = k' + \pi + \pi'(\omega)$  où  $k'$  est une constante positive.

**Preuve.** Soit la fonction de Lyapunov :

$$V(\omega) = \frac{1}{2}(j_1 s_1^2 + j_2 s_2^2 + j_3 \omega_3^2),$$

dont l'expression de la dérivée, en tenant compte de (4.38), est :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^\top [v^* - \omega_3 L^T + p^*] + a\omega_1\omega_2\omega_3 \\ &= s^\top [v^* + p^*] + \omega_3 (a\omega_1\omega_2 - Ls) \\ &\leq \|s\|_1 \|p(\omega)\|_1 - k(\omega) s^\top \text{SGN}(s) - a^2\omega_3^4 \\ &\leq -k' \|s\|_1 - a^2\omega_3^4. \end{aligned}$$

Par conséquent  $\dot{V}$  est définie strictement négative (car  $a \neq 0$  puisque  $j_1 \neq j_2$ ) et ceci justifie le théorème. ■

Le désavantage de ce contrôleur est que la vitesse de convergence est relativement lente

puisqu'elle est en  $o(1/\sqrt{t})$  (sur la surface de glissement  $j_3\dot{\omega}_3(t) = -a^2\omega_3^3$ ). Pour pallier à ce problème, une seconde commande est développée, utilisant des modes glissants d'ordre deux.

### Stabilisation en temps fini

Une stabilisation semi-globale<sup>1</sup> et en temps fini est obtenue dans ce paragraphe. Posons  $K_\alpha = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} \leq \alpha\}$  un ensemble compact avec  $\alpha > |\frac{1}{a}|$  et définissons le retour statique suivant :

$$u^* = v^* - \begin{bmatrix} (j_2 - j_3)\omega_2\omega_3 \\ (j_3 - j_1)\omega_1\omega_3 \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

tel que le système (4.37) soit régi par les équations :

$$\begin{cases} j_1\dot{\omega}_1 = v_1 + p_1 \\ j_2\dot{\omega}_2 = v_2 + p_2 \\ j_3\dot{\omega}_3 = a\omega_1\omega_2 \end{cases} \quad (4.41)$$

**Théorème 41** (Floquet et al. [85]) *La commande  $v^*$  est définie par :*

- $0 \leq t < T_1$

$$v_1 = -\gamma\omega_1 \quad (4.42)$$

$$v_2 = -k_2(\omega) \operatorname{sgn}(\omega_2 - \frac{1}{a}) \quad (4.43)$$

- $T_1 \leq t < T_2$

$$v_1 = \begin{cases} -\omega_1 - \lambda_m \operatorname{sgn}(\omega_1), & \text{si } |\omega_1| > b \\ -j_1\lambda_m \operatorname{sgn}(\omega_3), & \text{si } \omega_3\omega_1 \leq 0, |\omega_1| < b \\ -j_1\lambda_M \operatorname{sgn}(\omega_3), & \text{si } \omega_3\omega_1 > 0, |\omega_1| < b \end{cases} \quad (4.44)$$

<sup>1</sup>Le terme "semi-globale" signifie que l'ensemble fini des conditions initiales peut être choisi arbitrairement grand pour des gains adéquats.

$$v_2 = -k_2(\omega) \operatorname{sgn}\left(\omega_2 - \frac{1}{a}\right) \quad (4.45)$$

•  $t \geq T_2$

$$v_1 = -\omega_1 - k_1 \operatorname{sgn}(\omega_1) \quad (4.46)$$

$$v_2 = -k_2(\omega) \operatorname{sgn}(\omega_2) \quad (4.47)$$

où la constante positive  $b$  et les gains  $k_1$ ,  $k_2(\omega)$ ,  $\lambda_m$ ,  $\lambda_M$  satisfont les relations :

$$\Pi = \frac{\pi_1}{j_1} \quad (4.48)$$

$$b > \Pi \quad (4.49)$$

$$k_1 = k'_1 + \Pi, \quad k'_1 > 0 \quad (4.50)$$

$$\lambda_m > \Pi \quad (4.51)$$

$$\lambda_M > \lambda_m + 2\Pi \quad (4.52)$$

$$k_2(\omega) = k'_2 + \pi_2 + \pi'_2(\omega), \quad k'_2 > 0. \quad (4.53)$$

Les instants  $T_1$  et  $T_2$  sont donnés par :

$$T_1 = j_2 \frac{\alpha + \left|\frac{1}{a}\right|}{k'_2}, \quad (4.54)$$

$$T_2 = T_1 + T_0 \left(\frac{1}{1-r}\right) \alpha, \quad (4.55)$$

où

$$T_0 = \frac{1}{\lambda_M - \Pi} (1 + \sqrt{r}) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{r}}\right)$$

et

$$r = \frac{(\lambda_m + \Pi)}{(\lambda_M - \Pi)}.$$

Pour  $\alpha$  et un instant  $T_3 = T_2 + \frac{j_2}{|a|k'_2}$  donnés, il est possible de choisir  $\lambda_m$ ,  $\lambda_M$ ,  $k'_2$  tels que pour toutes conditions initiales dans  $K_\alpha$ , la commande (4.40) avec  $v^*$  définie par (4.42)-(4.47) conduise à la convergence du système vers l'origine, au bout du temps  $T_3$

préalablement fixé.

**Preuve. Première étape :** soit  $s_2 = \omega_2 - \frac{1}{a}$ . Sous la commande (4.43), et malgré la perturbation  $p_2$ , la surface

$$\omega_2 = \frac{1}{a} \quad (4.56)$$

est atteinte au bout d'un temps fini  $t_1$  puisque  $s_2 \dot{s}_2 < -\frac{k_2'}{j_2} |s_2|$ .  $t_1$  est tel que

$$t_1 < T_1 = j_2 \frac{\alpha + \left|\frac{1}{a}\right|}{k_2'}.$$

( $\omega_2 \leq -\frac{k_2'}{j_2} t + \omega_2(0)$  si  $\omega_2(0) > \frac{1}{a}$  et  $\omega_2 \geq -\frac{k_2'}{j_2} t + \omega_2(0)$  si  $\omega_2(0) < \frac{1}{a}$ ).

Notons que, grâce à (4.42), l'ensemble de l'état reste borné durant cette phase car pour  $t < T_1$ ,

$$\begin{aligned} |\omega_1(t)| &\leq \alpha \exp\left(-\frac{\gamma}{j_1} t\right) + \Pi, \\ |\omega_3(t)| &\leq \alpha \left[ 1 + \frac{|a| \alpha j_1}{j_3 \gamma} (1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{j_1} t\right)) + \frac{|a|}{j_3} \Pi t \right]. \end{aligned}$$

**Deuxième étape :** une fois que les trajectoires du système évoluent sur la surface (4.56), la dynamique équivalente est :

$$\begin{cases} j_1 \dot{\omega}_1 = v_1 + p_1 \\ j_3 \dot{\omega}_3 = \omega_1 \end{cases} \quad (4.57)$$

On applique alors (4.44) (algorithme du twisting) au sous-système (4.57) et la surface  $\omega_3 = \omega_1 = 0$  est atteinte au bout d'un temps fini  $t_2 \leq T_2$ . A cet instant :

$$\begin{aligned} \omega_1(t_2) &= \omega_3(t_2) = 0, \\ \omega_2(t_2) &= \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

**Troisième étape :** après  $T_2$ ,  $v_2$  commute vers  $v_2 = -k_2(\omega) \operatorname{sgn}(\omega_2)$ , et  $\omega_2 = 0$  au bout d'un temps fini  $t_3 \leq \frac{j_2}{k_2 |a|}$ . Puisque la commande  $v_1 = -\omega_1 - k_1 \operatorname{sgn}(\omega_1)$  maintient  $\omega_1$  égal à 0 (et donc  $\omega_3 = 0$ ), malgré  $p_1$ , tout l'état est stabilisé en un temps fini inférieur à  $T_3 = T_2 + \frac{j_2}{|a| k_2'}$ . ■

Cette stratégie de commande mérite quelques remarques :

◇ Dans la troisième étape,  $v_1$  doit commuter vers  $v_1 = -\omega_1 - k_1 \operatorname{sgn}(\omega_1)$  pour la même raison que dans la stabilisation en temps fini de la forme chaînée (4.34).

◇ Dans la première étape, une commande par modes glissants d'ordre deux pourrait également être choisie, à condition d'introduire une extension dynamique.

◇ On peut remarquer qu'après  $T_3$ ,  $\dot{\omega}_3$  n'est en réalité pas nul mais est en  $O(\tau^2)$  (si la commande est réalisée par un bloqueur à la fréquence d'échantillonnage  $\tau$ ). Il en résulte une légère dérive de la vitesse angulaire  $\omega_3$  qui pourrait s'avérer non négligeable dans une application réelle. La solution serait alors d'appliquer à cet instant le contrôleur à structure variable dont la convergence est lente (voir le paragraphe précédent sur la stabilisation asymptotique), mais qui assignerait  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$  d'une façon plus robuste.

L'ensemble de ces résultats théoriques sont maintenant illustrés par un exemple et des simulations.

### Exemple

Prenons  $j_i = i$  et les conditions initiales suivantes :  $\omega_1(0) = 1, \omega_2(0) = 1, \omega_3(0) = -2$ .

La Figure 4-8 présente les résultats pour le premier contrôleur :

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_3^2 + \omega_2\omega_3 - \frac{2}{3}\omega_1\omega_2\omega_3 - 5 \operatorname{sgn}(\omega_1 - \omega_3^2), \\ u_2 &= -\omega_1\omega_3 - \frac{2}{3}\omega_1\omega_2 - 5 \operatorname{sgn}(\omega_2 - \omega_3). \end{aligned}$$

Les perturbations sont des bruits blancs. Une fois que la surface  $s = 0$  a été atteinte, la vitesse angulaire  $\omega_3$  rejoint l'origine suivant la dynamique  $j_3\dot{\omega}_3(t) = -a^2\omega_3^3$  qui, comme on peut l'observer, est relativement lente. Au bout de 20 secondes, le satellite n'a toujours pas retrouvé sa vitesse de croisière.

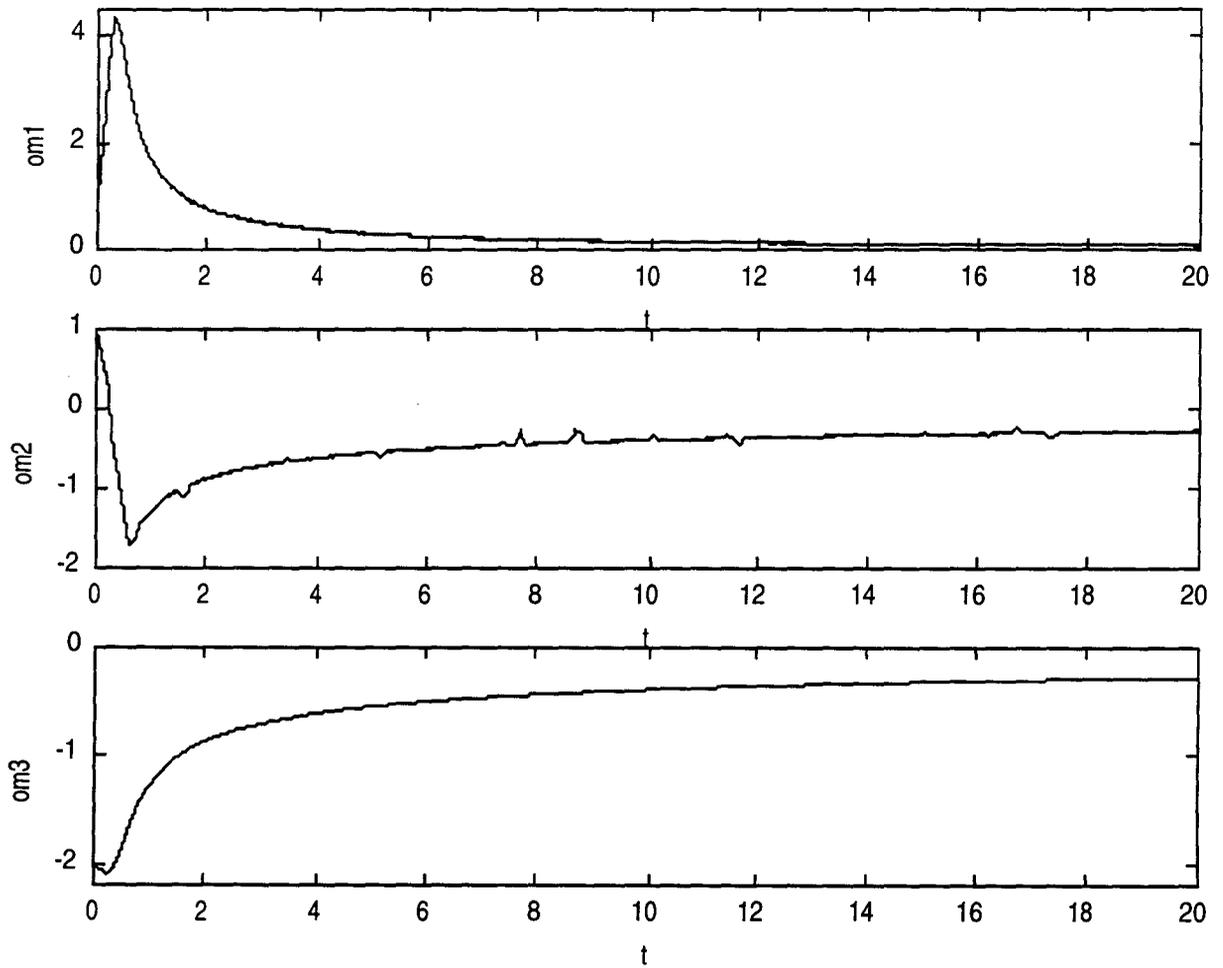


FIG. 4-8: Stabilisation asymptotique de la vitesse angulaire

La Figure 4-9 concerne la commande stabilisant le système en temps fini. La perturbation  $p_1$  est une sinusoïde d'amplitude égale à un et  $p_2$  est un bruit blanc. Les gains sont :  $k_1 = k_2(\omega) = 10$ ,  $\lambda_m = 2$  et  $\lambda_M = 8$ . On s'est fixé un temps de convergence de 5 secondes après lequel le mouvement des variables d'état est confiné dans une bande d'épaisseur  $10^{-3}$  (qui est la période d'échantillonnage).

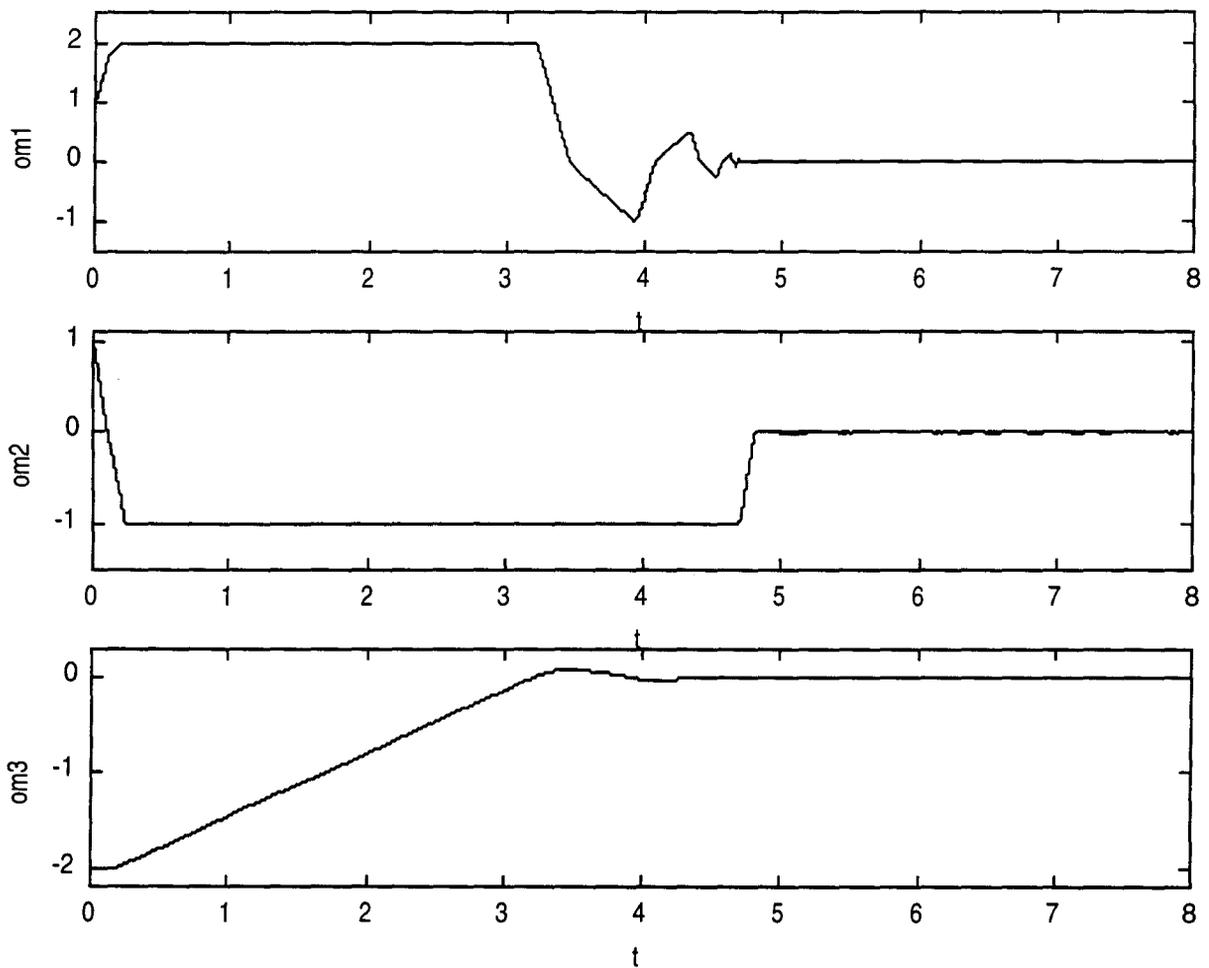


FIG. 4-9: Stabilisation de la vitesse angulaire en temps fini

### 4.3 Retour de sortie pour un système mis sous forme canonique de commandabilité généralisée

Pour un système donné, et pour des raisons techniques ou économiques (construction, positionnement et coût des capteurs), il n'est pas possible en général d'accéder à la totalité des composantes du vecteur d'état par des dispositifs de mesure. Or, dans beaucoup de cas, la commande d'un système nécessite de s'assurer de la connaissance à chaque instant de ce vecteur d'état. Si le système est observable, la solution consiste alors en la synthèse d'un observateur, grâce auquel il est possible d'estimer tout ou une partie de l'état par l'intermédiaire des grandeurs connues du système.

L'observateur utilisé ici s'appuie sur les modes glissants. Ce type d'observateurs se

révèle être très intéressant pour des raisons assez similaires à l'aspect commande. Les dynamiques de l'erreur d'observation évoluent sur des variétés de dimension réduite et leurs non linéarités sont "écrasées" par le terme de correction, qui est discontinu. Ces observateurs peuvent de plus être appliqués à des systèmes soumis à des discontinuités, des perturbations ou des incertitudes paramétriques. Enfin, point très important, les variables observées convergent en temps fini vers l'état réel du système. Cependant, il faut également ici faire face au problème de la réticence, qui peut être résolu par l'intermédiaire de méthodes vues dans la Partie 1 (fonctions lissées au voisinage de la surface, modes glissants d'ordre supérieur).

Partant d'un système mis sous la forme canonique de commandabilité généralisée [76], nous allons montrer que l'approche par les modes glissants se prête à combiner des observateurs et des commandes de ce type (d'autres exemples de ce genre sont disponibles dans [62, 136]). Cette analyse est aussi l'occasion de discuter du problème de la stabilité en boucle fermée pour les systèmes non linéaires. Il n'existe pas de méthode globale pour résoudre ce problème qu'il faut généralement traiter au cas par cas suivant la forme du système et les techniques de commande et d'observation considérées. Les résultats présentés par la suite sont issus de [131].

### 4.3.1 Synthèse de la commande

Pour le système

$$(CP) \equiv \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \end{cases}, \quad y = x_1 \quad (4.58)$$

il est possible d'utiliser une commande dynamique telle que

$$f(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) = - \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

mais les perturbations peuvent détruire l'effet linéarisant du retour dynamique. C'est pourquoi une commande par modes glissants a été introduite dans [77]. Toutefois, afin d'obtenir une stabilisation globale et asymptotique, et éventuellement associer ensuite cette commande avec un observateur par modes glissants, nous donnons le résultat suivant :

**Théorème 42** *Soit la surface de glissement suivante :*

$$s(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0, \quad a_n = 1, \quad (4.59)$$

telle que  $\sum_{i=1}^n a_i \lambda^i$  soit un polynôme de Hurwitz et que la commande  $u$  soit solution (pas forcément unique) de :

$$f(x, u, \dots, u^{(\alpha)}) = - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i+1} - k(\cdot) \text{sign}(s), \quad (4.60)$$

$$k(\cdot) = k' + \left| \sum_{i=1}^{n-1} p_{ni}^c x_i \right|, \quad (4.61)$$

où les  $p_{ni}^c$  sont les coefficients de la dernière colonne de la matrice définie positive  $P^c$ , solution de l'équation de Lyapunov

$$A^{c\top} P^c + P^c A^c = -Q, \quad (4.62)$$

$$A^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

Alors l'origine de (4.58) est globalement asymptotiquement stable.

**Preuve.** Choisissons pour fonction de Lyapunov :  $V^c = \frac{1}{2}s^2 + B(\tilde{x})$ , avec  $B(\tilde{x}) = \frac{1}{2}\tilde{x}^\top P^c \tilde{x}$ ,  $\tilde{x}^\top = (x_1, \dots, x_{n-1})$ . Par dérivation, en utilisant (4.58), (4.59) et (4.60) :

$$\dot{V}^c = -k(\cdot)|s| + \dot{B}(\tilde{x}).$$

Etant donné que :

$$\begin{aligned} \dot{B}(\tilde{x}) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} (\dot{x}_i p_{ij}^c x_j + x_i p_{ij}^c \dot{x}_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n-2} x_{i+1} p_{ij}^c x_j + \sum_{i=1}^{n-1} x_n p_{ni}^c x_i, \end{aligned}$$

et que  $x_n = s - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i$ , (4.59) et (4.62) donnent :

$$\dot{B}(\tilde{x}) = -\frac{1}{2} \tilde{x}^\top Q \tilde{x} + s \sum_{i=1}^{n-1} p_{ni}^c x_i.$$

En considérant (4.61),  $\dot{V}^c < -k' |s| - \frac{1}{2} \tilde{x}^\top Q \tilde{x}$ , qui est définie négative. ■

**Remarque 43** *D'après la preuve, la stabilisation asymptotique peut également être obtenue si on prend  $m'' |s|$  au lieu de  $m'$  (cette option à l'avantage de réduire la réticence).*

**Exemple :** Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 + u + \dot{u} \end{cases}, \quad y = x_1 \quad (4.64)$$

Fixons la dynamique de glissement à  $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$ , c'est-à-dire  $s(x) = x_3 + 2x_2 + x_1$ .

Ceci conduit à :

$$P^c = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et à la loi de commande vérifiant  $\dot{u} + u = f$ , où

$$f = -2x_3 - x_2 - x_1 x_2 - (k' + \frac{1}{2} |x_1 - x_2|) \text{sign}(s(x)),$$

soit

$$u(t) = -e^{-t} \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (4.65)$$

Dans la Figure 4-10, le système est stabilisé avec  $k' = 10$ . On peut noter que la commande  $u$  est continue car les dérivées de l'entrée interviennent dans la forme canonique

généralisée. La réticence, qui apparaît dans la Figure 4-10, peut être réduite en utilisant  $k' = 10 |s(x)|$  (c'est à dire une commande avec modulation) avec le terme de correction  $\frac{1}{2} |x_1 - x_2|$  venant de  $|\sum_{i=1}^{n-1} p_{ni}^c x_i|$ .

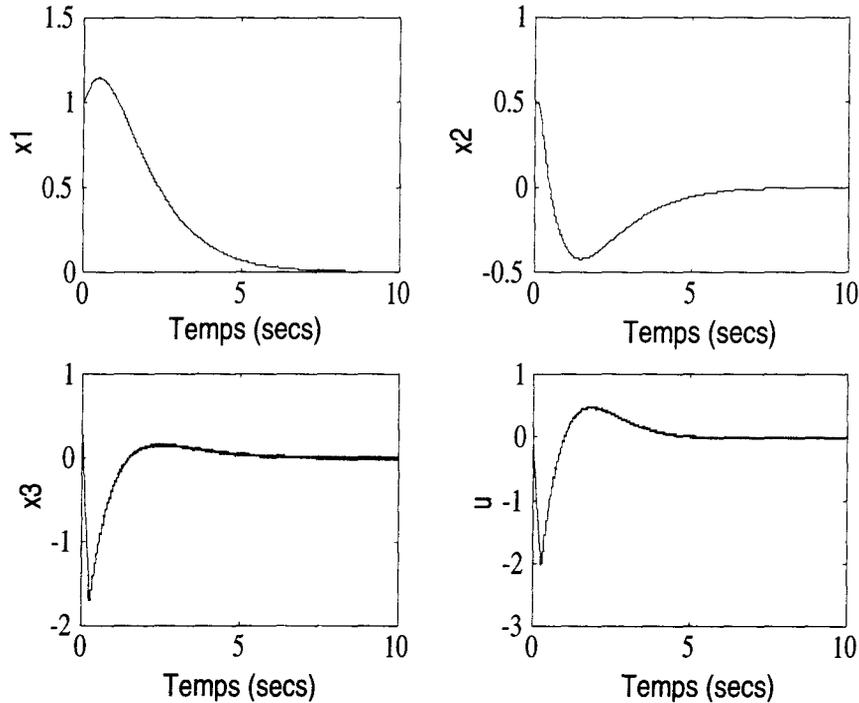


FIG. 4-10: Stabilisation de (4.64) avec (4.65) et  $k' = 10$

### 4.3.2 Synthèse d'un observateur

Introduisons l'observateur glissant suivant :

$$(O) \equiv \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + \lambda_1 \text{sign1}(x_1 - z_1) \\ \dot{z}_2 = z_3 + \frac{\lambda_2}{\gamma} \text{sign1}(x_1 - z_1) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n + \frac{\lambda_{n-1}}{\gamma^{n-2}} \text{sign1}(x_1 - z_1) \\ \dot{z}_n = f(z, u, \dots, u^{(\alpha)}) + \frac{\lambda_n}{\gamma^{n-1}} \text{sign1}(x_1 - z_1) \end{cases}, \quad (4.66)$$

où  $\gamma \in ]0, 1[$ .  $\text{sign1} = 0$  avant la convergence sur la surface  $x_1 = z_1$  et  $\text{sign1} = \text{sign}$  ensuite. La commande appliquée à (4.58) et (4.66) est solution de (4.60) mais en remplaçant la variable  $x$  par l'état observé  $z$ .

Définissons l'erreur d'observation  $De = x - z$  où  $D$  est la matrice :

$$D = \text{diag}[\gamma^{n-1}, \dots, \gamma, 1] = \begin{pmatrix} \gamma^{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prouver que  $z$  tend vers  $x$  pour  $t \geq T$  revient à montrer que  $e$  tend vers 0 pour  $t \geq T$ .

La dynamique de l'erreur d'observation est :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \frac{1}{\gamma} e_2 - \frac{\lambda_1}{\gamma^{n-1}} \text{signl}(e_1) \\ \vdots \\ \dot{e}_i = \frac{1}{\gamma} e_{i+1} - \frac{\lambda_i}{\gamma^{n-1}} \text{signl}(e_i), \quad i = 2, \dots, n-1 \\ \vdots \\ \dot{e}_n = \Delta_f(\cdot) - \frac{\lambda_n}{\gamma^{n-1}} \text{signl}(e_1) \end{cases} \quad (4.67)$$

$$\Delta_f(\cdot) = f(x, u, \dots, u^{(\alpha)}) - f(z, u, \dots, u^{(\alpha)}).$$

**Théorème 44** Soit le système (4.58) muni de la commande définie dans le Théorème 42, auquel on associe l'observateur (4.66). Supposons que  $f$  est globalement lipschitzienne par rapport à son premier argument i.e. :

$$|f(x, u, \dots, u^{(\alpha)}) - f(z, u, \dots, u^{(\alpha)})| \leq C \|x - z\|,$$

et soit  $P^o$ , la solution de l'équation de Lyapunov :

$$A^{oT} P^o + P^o A^o = -Q, \quad (4.68)$$

$$A^o = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_1} & 0 & \ddots & 1 \\ -\frac{\lambda_n}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

les  $\lambda_i$  étant choisis tels que  $A^o$  est Hurwitz.

Alors, pour toutes conditions initiales  $(x(0), z(0))$ , l'état  $z$  de l'observateur (4.66)

converge asymptotiquement vers l'état  $x$  du système (4.58).

**Preuve.** Les considérations classiques à propos des observateurs glissants (voir [8], [60]) nous amènent une nouvelle fois à considérer la fonction de Lyapunov  $v_1 = \frac{1}{2}e_1^2$ , conduisant à  $\dot{v}_1 = e_1(\frac{1}{\gamma}e_2 - \frac{\lambda_1}{\gamma^{n-1}} \text{sign}(e_1))$ , et la condition nécessaire de convergence en temps fini  $t_{c1}$  sur  $e_1 = 0$  :

$$\lambda_1 > \gamma^{n-2} |e_2|_{\max}. \quad (4.69)$$

La dynamique équivalente s'écrit alors :  $\text{sign}(e_1)_{\text{eq}} = \frac{\gamma^{n-2}}{\lambda_1} e_2$ ,  $\forall t \geq t_{c1}$ . Et donc, pour  $t \geq t_{c1}$ , le système (4.67) est donné par :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = 0 \\ \vdots \\ \dot{e}_i = \frac{1}{\gamma}(e_{i+1} - \frac{\lambda_i}{\lambda_1} e_2) & i = 2, \dots, n-1 \\ \vdots \\ \dot{e}_n = \Delta_f(\cdot) - \frac{1}{\gamma} \frac{\lambda_n}{\lambda_1} e_2 \end{cases} \quad (4.70)$$

que l'on réécrit sous la forme :

$$\frac{d\tilde{e}}{dt} = \frac{1}{\gamma} A^o \tilde{e} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta_f(\cdot) \end{pmatrix}, \quad (4.71)$$

où  $\tilde{e} = [e_2, \dots, e_n]^T$ . Posons  $V^o = \tilde{e}^T P^o \tilde{e}$  :

$$\dot{V}^o = -\frac{1}{\gamma} \tilde{e}^T Q \tilde{e} + 2\tilde{e}^T P^o \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta_f(\cdot) \end{pmatrix}, \quad (4.72)$$

$$\dot{V}^o \leq -\frac{\rho_{\min}(Q)}{\gamma} \|\tilde{e}\|^2 + 2 \|\tilde{e}\| \|P_n^o\| (|\Delta_f(\cdot)|). \quad (4.73)$$

où  $\rho_{\min}(Q)$  est la plus petite valeur propre de la matrice  $Q$  ( $\rho_{\min}(Q) > 0$  puisque  $Q$  est définie positive) et où  $P_n^o$  est la  $n^{\text{ième}}$  colonne de  $P^o$ . Comme  $f$  est supposée être

lipschitzienne par rapport à son premier argument :

$$|\Delta_f(\cdot)| \leq C \|x - z\|$$

avec

$$\|x - z\| = \|De\| \leq \|D\| \|e\|$$

et si on choisit la norme euclidienne :

$$\|D\|_2 = \sqrt{\text{trace}(D^T D)} = \sqrt{1 + \gamma^2 + \dots + \gamma^{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{1 - \gamma^{2n}}{1 - \gamma^2}},$$

ce qui implique

$$\dot{V}^o \leq -\|\tilde{e}\|^2 \left( \frac{\rho_{\min}(Q)}{\gamma} - 2C \|P_n^o\| \sqrt{\frac{1 - \gamma^{2n}}{1 - \gamma^2}} \right).$$

Prouvons maintenant que  $\dot{V}^o < 0$ , ce qui équivaut à montrer que :

$$h(\gamma) = \frac{1}{\gamma} - \frac{2C \|P_n^o\|}{\rho_{\min}(Q)} \sqrt{\frac{1 - \gamma^{2n}}{1 - \gamma^2}} > 0.$$

Soit  $M = \frac{2C \|P_n^o\|}{\rho_{\min}(Q)} = \text{constante}$  et étudions la fonction :

$$h(\gamma) = \frac{1}{\gamma} - M \sqrt{\frac{1 - \gamma^{2n}}{1 - \gamma^2}}$$

Il est aisé de voir que  $h'(\gamma) < 0$  pour tout  $\gamma \in ]0, 1[$ . De plus,

$$h(\gamma) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\gamma}$$

donc

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} h(\gamma) = +\infty$$

Il est donc possible de trouver  $\gamma$  tel que  $\dot{V} < 0$  et ceci assure que  $\tilde{e}$  décroît asymptotiquement vers zéro. ■

La fonction  $\text{signl}(e_1)$  représente la fonction signe usuelle mais appliquée après un filtre passe-bas sur la variable  $e_1$  [60] et une structure anti-pic [27, 155]. Cette structure

est basée sur l'idée de n'injecter l'information sur l'erreur d'observation que lorsque la surface de glissement en relation avec cette erreur a été atteinte. Par cette méthode, il est possible d'éviter le phénomène de grand gain (voir l'équivalence entre le mode glissant et la méthode des grands gains [119]) introduit par la fonction signe sur la dynamique de  $e_2$  avant d'atteindre la surface de glissement : la condition (4.69) ne serait alors plus vérifiée et la surface  $e_1 = 0$  ne serait plus attractive. De cette façon, on se retrouve avec un "grand gain" qui est de dimension un, ce qui implique qu'il n'apparaît pas de phénomène de pics (comme il est démontré dans [155]).

### 4.3.3 Stabilité en boucle fermée

Un des grands problèmes que rencontre la commande des systèmes non linéaires par retour d'état est la non validité en général du principe de séparation. Cela signifie que, contrairement au cas linéaire, on ne peut pas découpler le problème de la commande de celui de l'observation. Ainsi, une commande stabilisante se basant sur une connaissance fictive de tout l'état pourra perdre sa propriété de stabilisation si on y remplace les variables non mesurées par les sorties d'un observateur convergeant tout de même vers les variables réelles.

Il a été vu ici que la commande et l'observateur, chacun de leur côté, permettaient de stabiliser l'état du système et l'erreur d'observation. Maintenant, il faut déterminer si cette stabilité est conservée lorsque l'on boucle l'observateur ( $O$ ) sur la commande ( $CP$ ). Ceci peut être établi en deux étapes, mais avant cela, donnons une version modifiée du lemme de Gronwall (voir [107] page 63) :

**Lemme 45** *Si  $x(t)$  est une fonction à valeur positive définie sur un intervalle  $\mathcal{I} \supset [0, t[$  telle que  $\|x(t)\| \leq y(t) = c + \int_0^t [L \|x(\tau)\| + \alpha] d\tau$ , avec  $\alpha, L, c$  des constantes positives, alors  $\|x(t)\| \leq c \exp(Lt) + \frac{\alpha}{L}(\exp(Lt) - 1)$ . ■*

**Preuve.**  $\dot{y}(t) \stackrel{\text{a.e}}{\leq} Ly(t) + \alpha$ . Soit  $z(t) = y(t) \exp(-Lt) + \frac{\alpha}{L}(\exp(-Lt) - 1)$ , ce qui donne  $\dot{z}(t) = (\dot{y}(t) - Ly(t) - \alpha) \exp(-Lt) \stackrel{\text{a.e}}{\leq} 0$ . Alors  $z(t) \leq z(0) = c$  et  $\|x(t)\| \leq y(t) \leq c \exp(Lt) + \frac{\alpha}{L}(\exp(Lt) - 1)$ . ■

**Première étape :** bornitude de  $(CP + O)$  en temps fini.

Notons  $\zeta = (x, e)$  et considérons le système :

$$(CP + O) \equiv \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(x, \bar{u}, \dots, \bar{u}^{(\alpha)}) \\ \dot{e}_1 = \frac{1}{\gamma} e_2 - \frac{\lambda_1}{\gamma^{n-1}} \text{sign}(e_1) \\ \vdots \\ \dot{e}_i = \frac{1}{\gamma} e_{i+1} - \frac{\lambda_i}{\gamma^{n-1}} \text{sign}(e_i), \quad i = 2, \dots, n-1 \\ \vdots \\ \dot{e}_n = \Delta_f(\cdot) - \frac{\lambda_n}{\gamma^{n-1}} \text{sign}(e_1) \end{cases}$$

où  $\bar{u}$  représente la commande basée sur l'état estimé  $z$ .

Réécrivant  $f(x, \bar{u}, \dots, \bar{u}^{(\alpha)}) = f(z, \bar{u}, \dots, \bar{u}^{(\alpha)}) + [f(x, \bar{u}, \dots, \bar{u}^{(\alpha)}) - f(z, \bar{u}, \dots, \bar{u}^{(\alpha)})]$ , on obtient que  $\|\dot{\zeta}\| \stackrel{\text{a.e.}}{\leq} L \|\zeta\| + m$ ,  $m = \max(\max_i(\frac{\lambda_i}{\gamma^{n-1}}, k')$ . Comme  $\dot{\zeta}$  est absolument continue, on a  $\|\zeta(t)\| \leq \|\zeta(0)\| + \int_0^t [L \|\zeta(\tau)\| + m]$ .

En appliquant le lemme précédent à la fonction  $\zeta(t)$

$$\|\zeta(t)\| \leq \|\zeta(0)\| \exp(Lt) + \frac{m}{L} (\exp(Lt) - 1). \quad (4.74)$$

En particulier, l'inéquation (4.74) implique que  $e$  est bornée pour  $t \geq 0$ .

**Deuxième étape :** stabilité asymptotique de l'origine du système bouclé  $(CP + O)$ .

Considérant  $V = V^c + v_1 + V^o$  et l'hypothèse sur le caractère lipschitzien de la fonction  $f$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq (-k' |s(x)| - \frac{1}{2} \tilde{x}^\top Q \tilde{x} + C |s(x)| \|e\|) + e_1 (e_2 - \lambda_1 \text{sign}(e_1)) \\ &\quad - \|\tilde{e}\|^2 \left( \frac{\rho_{\min}(Q)}{\gamma} - 2C \|P_n^o\| \sqrt{\frac{1 - \gamma^{2n}}{1 - \gamma^2}} \right). \end{aligned}$$

$\dot{v}_1 = e_1 (e_2 - \lambda_1 \text{sign}(e_1)) < 0$  car  $\lambda_1 > |e_2|_{\max}$  et  $\dot{V}^o = -\|\tilde{e}\|^2 \left( \frac{\rho_{\min}(Q)}{\gamma} - 2C \|P_n^o\| \sqrt{\frac{1 - \gamma^{2n}}{1 - \gamma^2}} \right)$  est définie négative ainsi qu'il a été montré précédemment.

En choisissant  $k' > C \|e\|_{\max}$ , on a finalement  $\dot{V} < 0$  pour tout  $\zeta \in \mathbb{R}^{2n}$ , ce qui

prouve que l'origine de  $(CP + O)$  est asymptotiquement stable.

**Exemple :** Reprenons le même exemple que pour la commande, et construisons l'observateur :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + \lambda_1 \text{sign}(x_1 - z_1) \\ \dot{z}_2 = z_3 + \frac{\lambda_2}{\gamma} \text{sign}(x_1 - z_1) \\ \dot{z}_3 = z_1 z_2 + u + \dot{u} + \frac{\lambda_3}{\gamma^2} \text{sign}(x_1 - z_1) \end{cases},$$

que nous bouclons sur la commande. Les gains ont été fixés à  $\lambda_1 = 10$ ,  $\lambda_2 = 40$ ,  $\lambda_3 = 40$ . Dans la simulation donnée Figure 4-11, une version lissée de la fonction sign a été utilisée afin de réduire la réticence :  $\frac{2}{\pi} \arctan(r)$ ,  $\varepsilon = 0.1$ .

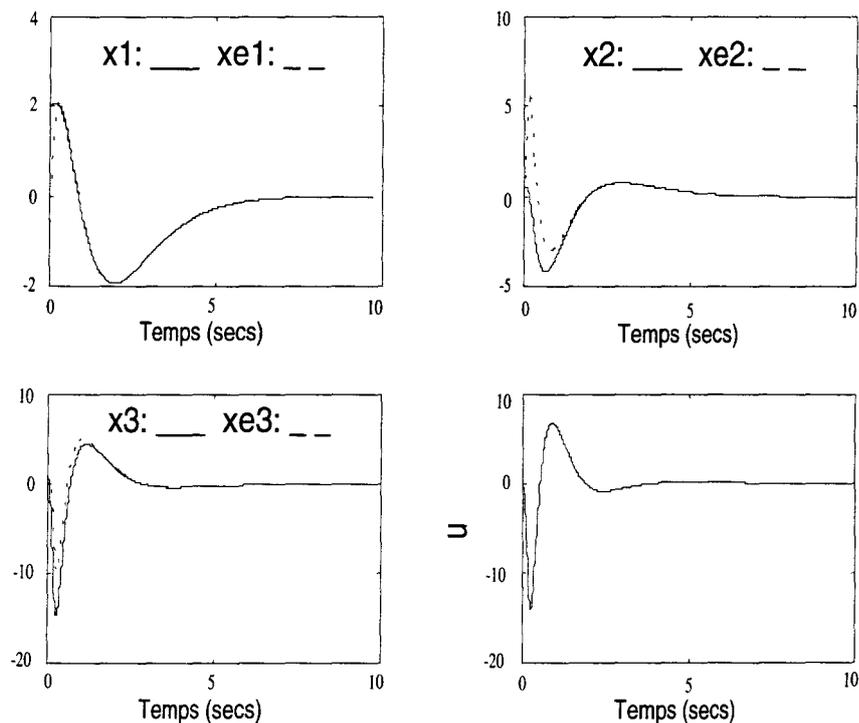


FIG. 4-11: Etat réel et état observé du système (4.64)

Dans le but de réduire le phénomène de pic, une version modifiée de la fonction sign1 a également été utilisée ici (via  $\frac{2}{\pi} \arctan(r)$ ), avec les mêmes gains que précédemment. Les résultats de simulation sont donnés Figure 4-12.

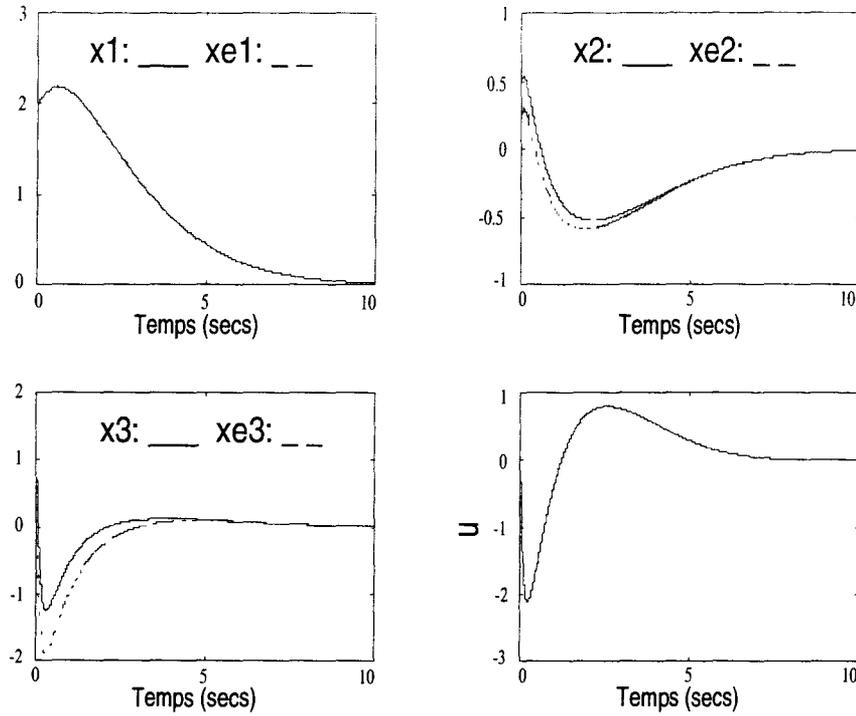


FIG. 4-12: Etat réel et état estimé du système (4.64) avec une fonction sign1 lissée

### 4.3.4 D'autres observateurs

Modifions quelque peu maintenant la forme de l'observateur où un terme de correction linéaire a été rajouté :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + l_1 e_1 + \lambda_1 \text{sign}(e_1) \\ \dot{z}_2 = z_3 + l_2 e_1 + \frac{\lambda_2}{\gamma} \text{sign}(e_1) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n + l_{n-1} e_1 + \frac{\lambda_{n-1}}{\gamma^{n-2}} \text{sign}(e_1) \\ \dot{z}_n = f(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) + l_n e_1 + \frac{\lambda_n}{\gamma^{n-1}} \text{sign}(e_1) \end{cases}, \quad (4.75)$$

avec  $\gamma \in ]0, 1[$ ,  $l_i > 0$  et  $\lambda_i > 0 \quad i \in \{1, \dots, n\}$ . La dynamique de l'erreur ( $De = x - z$ ) est :

$$\dot{e} = (F - LC)e + \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1}{\gamma^{n-1}} \text{sign}(e_1) \\ \vdots \\ -\frac{\lambda_{n-1}}{\gamma^{n-1}} \text{sign}(e_1) \\ \Delta_f(\cdot) - \frac{\lambda_n}{\gamma^{n-1}} \text{sign}(e_1) \end{pmatrix},$$

où

$$(F - LC) = \begin{pmatrix} -\frac{l_1}{\gamma^{n-1}} & \frac{1}{\gamma} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{l_{n-1}}{\gamma} & 0 & \cdots & \frac{1}{\gamma} \\ -l_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On peut évidemment fixer la valeur de  $L$  telle que  $(F - LC)$  soit asymptotiquement stable. En désignant par  $P^o$  la matrice définie positive solution de l'équation de Lyapunov  $(F - LC)^T P^o + P^o (F - LC) = -Q$  et  $V^o = e^T P^o e$ , nous obtenons :

$$\dot{V}^o = -e^T Q e + 2e^T P^o \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1}{\gamma^{n-1}} \text{sign}(e_1) \\ \vdots \\ \Delta_f(\cdot) - \frac{\lambda_n}{\gamma^{n-1}} \text{sign}(e_1) \end{pmatrix}.$$

Les paramètres  $\lambda_i$  sont alors choisis de façon à écraser les non linéarités de  $\Delta_f(\cdot)$  et obtenir la convergence asymptotique de  $e$  vers l'origine. En procédant comme pour l'observateur précédent, la stabilité en boucle fermée du système, lorsque la commande utilise les variables estimées grâce à cet observateur, peut être montrée. Le fait de rajouter ici des gains d'observation linéaires par l'intermédiaire de  $L$  (type Luenberger) a un effet stabilisant et permet de réduire l'amplitude des gains sur la partie discontinue de l'observateur.

Dans les deux cas précédents, la convergence de l'erreur était asymptotique. En utilisant le même type d'observateur que pour la forme triangulaire introduite dans [27], une stratégie de convergence étape par étape sur différentes surfaces de glissement et assurant la convergence de l'erreur d'observation en temps fini vers zéro est réalisable.

Cet observateur se présente sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 + l_1 e_1 + \lambda_{11} \text{sign}(e_1) \\ \dot{z}_2 = z_3 + l_2 e_1 + \lambda_{21} \text{sign}(e_1) + \lambda_{22} \text{sign}(\lambda_{11} \text{sign}(e_1)) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n + l_{n-1} e_1 \\ + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{n-1,j} \text{sign}(\lambda_{n-2,j-1} \text{sign}(\cdots (\lambda_{11} \text{sign}(e_1))) \\ \dot{z}_n = f(z, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) + l_n e_1 \\ + \sum_{j=1}^n \lambda_{nj} \text{sign}(\lambda_{n-1,j-1} \text{sign}(\cdots (\lambda_{11} \text{sign}(e_1))) \end{array} \right.$$

Par un bon choix de  $\lambda_{11}$ , un régime glissant est imposé sur la surface  $e_1 = 0$  en un temps fini  $t_{c1}$ . A partir de cet instant,  $\text{sign}(e_1) = \frac{1}{\lambda_{11}} e_2$ , et la dynamique de l'erreur devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = 0, \dot{e}_1 = 0 \\ \vdots \\ \dot{e}_i = e_{i+1} - \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}} e_2 - \lambda_{22} \text{sign}(e_2), \quad i = 2, \dots, n-1 \\ \vdots \\ \dot{e}_n = \Delta_f(\cdot) - \frac{\lambda_{n1}}{\lambda_{11}} e_2 \\ - \sum_{j=2}^n \lambda_{nj} \text{sign}(\lambda_{n-1,j-1} \text{sign}(\cdots (\lambda_{22} \text{sign}(e_2))) \end{array} \right.$$

L'opération est répétée jusqu'à l'étape  $(n-1)$  où l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = 0, \dot{e}_1 = 0, \dots, e_{n-2} = 0, \dot{e}_{n-2} = 0, \\ \dot{e}_{n-1} = e_n - \frac{\lambda_{n-1,n-2}}{\lambda_{n-2,n-2}} e_{n-1} - \lambda_{n-1,n-1} \text{sign}(e_{n-1}) \\ \dot{e}_n = \Delta_f(\cdot) - \frac{\lambda_{nn-2}}{\lambda_{n-2,n-2}} e_{n-1} - \lambda_{nn-1} \text{sign}(e_{n-1}) \\ - \lambda_{nn} \text{sign}(\lambda_{n-1,n-1} \text{sign}(e_{n-1})) \end{array} \right.,$$

Enfin,

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = 0, \dot{e}_1 = 0, \dots, e_{n-1} = 0, \dot{e}_{n-1} = 0, \\ \dot{e}_n = \Delta_f(\cdot) - \frac{\lambda_{nn-1}}{\lambda_{n-1,n-1}} e_n - \lambda_{nn} \text{sign}(e_n) \end{array} \right.$$

A ce niveau, étant donné que par hypothèse  $|\Delta_f(\cdot)| = |f(x, u, \dots, u^{(\alpha)}) - f(z, u, \dots, u^{(\alpha)})| \leq k |e_n|$ ,  $\lambda_{nn-1}$  et  $\lambda_{nn}$  peuvent être choisis afin de stabiliser  $e_n$ .

**Exemple :** Toujours sur le même exemple, appliquons le dernier observateur :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + \lambda_{11} \text{sign}(e_1) \\ \dot{z}_2 = z_3 + \lambda_{21} \text{sign}(e_1) + \lambda_{22} \text{sign}(\lambda_{11} \text{sign}(e_1)) \\ \dot{z}_3 = z_1 z_2 + u + \dot{u} + \lambda_{31} \text{sign}(e_1) \\ \quad + \lambda_{32} \text{sign}(\lambda_{11} \text{sign}(e_1)) \\ \quad + \lambda_{33} \text{sign}(\lambda_{22} \text{sign}(\lambda_{11} \text{sign}(e_1))) \end{cases}$$

les gains sont fixés à  $\lambda_{11} = 10, \lambda_{21} = 40, \lambda_{22} = 10, \lambda_{31} = 40, \lambda_{32} = 20, \lambda_{33} = 10$  et la fonction signe a été lissée en la remplaçant par  $\frac{2}{\pi} \arctan(10e)$  (Figure 4-13).

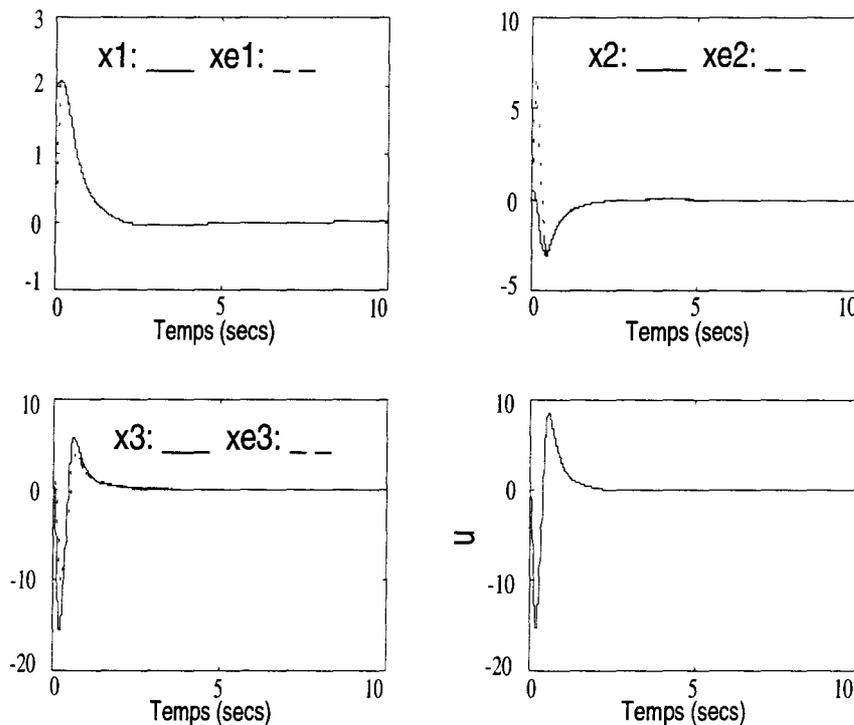


FIG. 4-13: Etat réel et état estimé du système (4.64) en utilisant des fonctions signes “lissées”

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre ont été vues différentes façon de stabiliser un système par le biais de commandes par modes glissants. Différentes formes de systèmes, soumis à des perturbations extérieures et dont la structure s’adaptait à la synthèse de ces commandes à

structure variable, ont été envisagées. Deux sortes de retour d'information ont été prises en compte. Tout d'abord, des commandes par retour d'état qui impliquent une connaissance totale des différentes variables du système. Cela a permis la stabilisation, tout en rejetant les perturbations :

- d'un système mis sous forme régulière et possédant plusieurs entrées. Des applications se situent dans le domaine des systèmes à structure variable tels que les convertisseurs statiques ou les robots à pattes ;
- d'un système non holonome mis sous forme chaînée. En commutant entre des commandes par modes glissants classiques et par ordre supérieur, il a été montré que l'on pouvait obtenir une stabilisation robuste et en temps fini. Des simulations sur l'exemple d'un robot mobile ont illustré ces performances ;
- de la vitesse angulaire d'un corps rigide sous-actionné. Dans l'avenir, il est envisagé de stabiliser également la position d'un tel système, toujours en temps fini, en supposant que des perturbations interviennent sur l'ensemble des variables.

Dans les deux derniers cas, en particulier, l'intérêt des modes glissants d'ordre supérieur a été mis en avant en montrant qu'il permettait d'obtenir une convergence en temps fini, tout en étant robuste. Cette technique semble également être efficace pour prendre en compte des perturbations qui ne sont pas forcément matching comme dans l'exemple du système non holonome (4.35).

Afin de prendre en considération que, dans la plupart des cas, l'ensemble des variables ne sont pas mesurables, une commande par retour de sortie, pour un système mis sous la forme canonique de commandabilité généralisée de Fliess, a été développée. L'observateur et la commande sont basés sur des modes glissants d'ordre un. La stabilité en boucle fermée a été montrée car, dans le cas des systèmes non linéaires, le principe de séparation ne s'applique pas. Dans le chapitre suivant, une autre commande par retour de sortie est réalisée pour la machine asynchrone, avec cette fois ci un objectif de poursuite.



# Chapitre 5

## Application à la machine asynchrone : expériences sur le banc d'essai de l'IRCCyN

### 5.1 Introduction

De part ses performances, mais également pour des raisons économiques de coût et de maintenance, la machine asynchrone est maintenant très largement utilisée dans l'industrie. Pendant longtemps, le moteur à courant continu a été préféré à tout autre type de moteur électrique du fait de sa simplicité de commande. Cette tendance s'est inversée avec les progrès dans les domaines du contrôle des systèmes non linéaires, des microprocesseurs et de l'électronique de puissance. Ceux-ci ont alors permis de réaliser des lois de commande pour la machine asynchrone dans de multiples applications (régulation ou poursuite de la vitesse, du couple et du flux). Dans ce chapitre, nous nous intéresserons au suivi d'une vitesse de référence et à la régulation du flux. Pour mémoire, les nombreux types de commandes développés dans la littérature reposent sur diverses démarches théoriques :

- linéarisation entrée-sortie combinée avec des commandes robustes linéaires ([50]) ;
- commande adaptative ([120], ...)
- "field oriented control" (FOC) (voir [24], [111], [160]) qui est équivalente à la com-

mande basée sur la passivité ([118]) ;

- “direct torque control” (DTC) (voir [51], [160]), qui peut être vu comme une commande à structure variable (voir [72]) ;
- commande par modes glissants ([93]) ;
- etc...

Lors de leur réalisation, ces commandes doivent faire face à quatre difficultés :

1. le processus est non linéaire (même si l’on suppose que les circuits magnétiques sont non saturés, cf expression du couple électromagnétique) ;
2. ses paramètres physiques, en général, ne peuvent pas être connus précisément et leur valeur peut significativement changer avec la température et au cours du temps ;
3. les flux rotoriques ne sont pas mesurables ;
4. l’entrée réelle est à caractère discontinu (du fait des convertisseurs) et n’est souvent qu’approximativement connue (à cause des zones mortes, des ondulations de la tension de bus, etc...) ;

Du fait de ses propriétés de robustesse vis-à-vis des perturbations et des incertitudes paramétriques, la technique des mode glissants s’avère être une bonne solution pour contourner les difficultés (1–3). Dans le cadre de l’action Inter-GDR Automatique-SDSE, les auteurs de [93] ont implanté une commande par modes glissants d’ordre un sur le banc d’essai “Manutention horizontale” de l’IRCCyN à Nantes. Dans ce chapitre, nous proposons le développement d’une loi de commande par modes glissants d’ordre supérieur ainsi que les résultats de son implantation sur le même banc d’essai. Les motivations pour utiliser ici une telle commande sont le fait qu’il n’est pas possible, avec une commande par modes glissants classique et étant données les variables de sortie considérées, d’obtenir une convergence en temps fini pour un système de degré relatif égal à deux (i.e. il faut dériver deux fois la sortie pour voir apparaître l’entrée). De plus, ceci permet de réduire le phénomène de “chattering” (oscillations de la commande à hautes fréquences autour de la surface) et d’obtenir une meilleure précision de convergence. Dans le paragraphe suivant, le modèle de la machine asynchrone sera présenté, ainsi que le cahier des charges imposé pour les expériences sur la plate-forme. Prenant en compte que seuls les courants statoriques et la vitesse rotorique sont mesurables, un observateur (par modes glissants)

est synthétisé, dans le paragraphe 5.3, afin d'observer le flux. Dans le paragraphe 5.4, la commande, basée sur les variables estimées, est élaborée, avec l'objectif de suivre des trajectoires de référence en flux et en vitesse, puis la stabilité de l'ensemble en boucle fermée est démontrée. Enfin, les résultats obtenus sur le banc d'essai de Nantes sont donnés dans le paragraphe 5.6.

## 5.2 Modèle de la machine asynchrone et position du problème

### 5.2.1 Modèle

Nous donnons ici brièvement le modèle de Park de la machine asynchrone dans le plan  $(\alpha, \beta)$ . De plus amples informations sur la modélisation et la commande des machines asynchrones peuvent être trouvées dans [38], [47], [49], [111], [120], [160], ..., pour des versions anglaises, et [39], [40], [41], [138], ..., pour des versions françaises.

Sous l'hypothèse de circuits magnétiques non saturés, le modèle de la machine asynchrone est non linéaire d'ordre cinq et se décompose en :

- une équation mécanique

$$J \frac{d\omega}{dt} = p \frac{L_m}{L_r} [i_{\beta,s} \phi_{\alpha,r} - i_{\alpha,s} \phi_{\beta,r}] - C_l + f_v \omega. \quad (5.1)$$

obtenue d'après l'expression du couple électromagnétique

$$T_e = p \frac{L_m}{L_r} [i_{\beta,s} \phi_{\alpha,r} - i_{\alpha,s} \phi_{\beta,r}] \quad (5.2)$$

$J$  est l'inertie de la machine,  $p$  est le nombre de pôles,  $C_l$  représente le couple de charge et  $f_v$  est un coefficient de frottement.

- et quatre équations électriques

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi_{\alpha,r}}{dt} = -b\phi_{\alpha,r} + ai_{\alpha,s} - \omega p\phi_{\beta,r} \\ \frac{d\phi_{\beta,r}}{dt} = -b\phi_{\beta,r} + ai_{\beta,s} + \omega p\phi_{\alpha,r} \\ \frac{di_{\alpha,s}}{dt} = \gamma_4 V_{\alpha,s} - \gamma_1 i_{\alpha,s} - \gamma_2 \phi_{\alpha,r} + \gamma_3 \omega \phi_{\beta,r} \\ \frac{di_{\beta,s}}{dt} = \gamma_4 V_{\beta,s} - \gamma_1 i_{\beta,s} - \gamma_2 \phi_{\beta,r} - \gamma_3 \omega \phi_{\alpha,r} \end{array} \right.$$

où  $\omega$  est la vitesse angulaire rotorique,  $i_{s\alpha}, i_{s\beta}$  les courants statoriques et  $\phi_{r\alpha}, \phi_{r\beta}$  les flux rotoriques.

$$\begin{aligned} \sigma &= 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}, & \gamma_1 &= \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r L_m^2}{\sigma L_s L_r^2} \\ \gamma_2 &= \frac{L_m R_r}{\sigma L_s L_r^2} & \gamma_3 &= \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} p & \gamma_4 &= \frac{1}{\sigma L_s} \\ b &= \frac{R_r}{L_r}, & a &= \frac{R_r}{L_r} L_m, \end{aligned}$$

sont des paramètres dépendant des caractéristiques de la machine (résistances, inductances, nombre de pôles).

Réécrivons les équations précédentes sous la forme :

$$\Sigma \equiv \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \alpha_1(x_2 x_5 - x_3 x_4) - \alpha_2 C_l - \alpha_3 x_1 \\ \dot{x}_2 = ax_4 - bx_2 - px_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = ax_5 - bx_3 + px_1 x_2 \\ \dot{x}_4 = -\gamma_1 x_4 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_1 x_3 + \gamma_4 u_1 \\ \dot{x}_5 = -\gamma_1 x_5 + \gamma_2 x_3 - \gamma_3 x_1 x_2 + \gamma_4 u_2 \end{array} \right. \quad (5.3)$$

avec  $\alpha_1 = p \frac{L_m}{J L_r}$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{J}$ , et  $\alpha_3 = \frac{f_v}{J}$ .

$x^T = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T = [\omega, \phi_{r\alpha}, \phi_{r\beta}, i_{s\alpha}, i_{s\beta}]^T$  représente l'état. Les seules sorties supposées mesurables ici sont la vitesse angulaire et les courants statoriques, alors que les flux rotoriques seront obtenus à l'aide d'un observateur. On disposera donc de tout l'état pour réaliser notre loi de commande dont les variables sont données par  $u = [u_1, u_2]^T \triangleq [V_{s\alpha}, V_{s\beta}]^T$ , qui sont les tensions diphasées liées au stator. Le couple de charge est considéré ici comme une perturbation bornée, ainsi que sa dérivée  $\dot{C}_l$ . Le choix des sorties du système est lié aux objectifs de commande. De manière générale, ces sorties sont la vitesse

mécanique  $h_1(x) = \frac{x_1}{p} = w_m$  et le couple électromagnétique  $h_2(x) = T_e = p \frac{L_m}{L_r} [x_2 x_5 - x_3 x_4]$  (on pourrait également choisir des sorties plates). Le cadre de notre propos sera ici différent car les variables contrôlées correspondront au cahier des charges de la plateforme de Nantes.

## 5.2.2 Protocole d'expérimentation

Dans le cadre de l'Inter-GdR "Automatique-SDSE" du CNRS, plusieurs problèmes de commande concernant la machine asynchrone ont été spécifiés. L'un d'entre eux concerne la réalisation d'une commande adaptée à la manutention horizontale, à laquelle le banc d'essai de l'IRCCyN à Nantes est dédié.

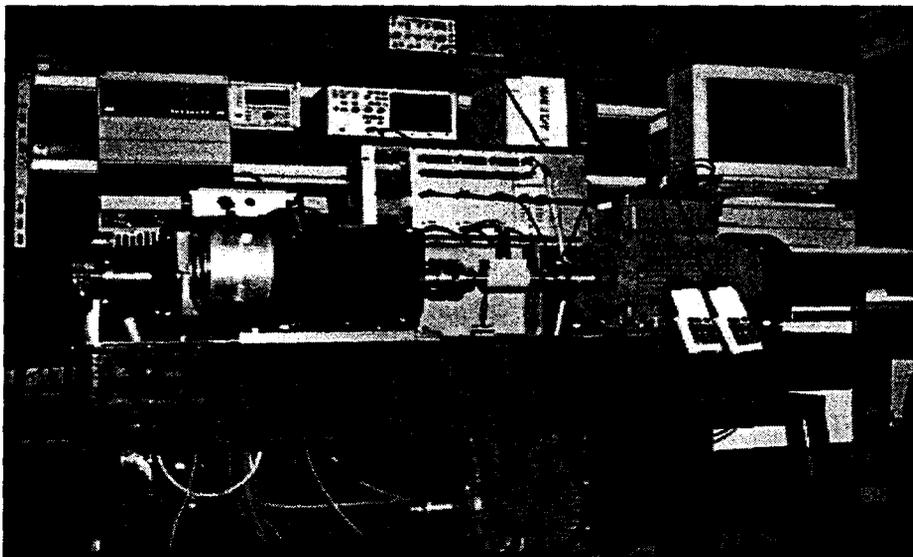


FIG. 5-1: Plateforme de l'IRCCyN

Le cahier des charges impose de suivre une trajectoire de vitesse et de minimiser l'énergie en gardant la norme du flux au carré constante. Les variables à contrôler sont donc la vitesse angulaire  $x_1$  et le carré de la norme du flux  $\phi^2 = x_2^2 + x_3^2$ . La valeur de référence du flux est fixée à  $\phi_{ref} = 0.595Wb$ , (donc  $\phi_{ref}^2 = 0.354$ ), alors que l'on désire que la vitesse  $\omega_{ref}$  se comporte comme indiqué Figure 5-2 (la vitesse maximale, de  $1430tr/s/min$ , correspondant à la vitesse nominale du moteur). Les paramètres physiques de la machine sont  $R_s = 1.633\Omega$ ,  $R_r = 0.93\Omega$ ,  $L_s = 0.142H$ ,  $L_r = 0.076H$ ,  $J = 0.029Nm/rad/s^2$ , et le nombre de paires de poles est  $p = 2$ . Le couple de charge  $C_l$

se comporte comme indiqué Figure 5-3. Ceci simule les différents problèmes pouvant survenir lors d'une manutention horizontale, i.e., jusqu'à 4 secondes, un convoyeur soumis à de brusques contraintes de couple lors de la prise ou la dépose de charges (type tapis roulant), puis une application de pont roulant avec freinage électrique et des oscillations de la charge.

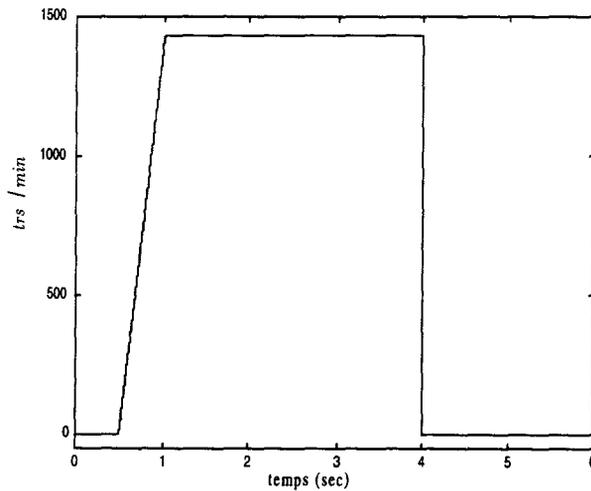


FIG. 5-2: Vitesse rotorique de référence en  $trs/min$

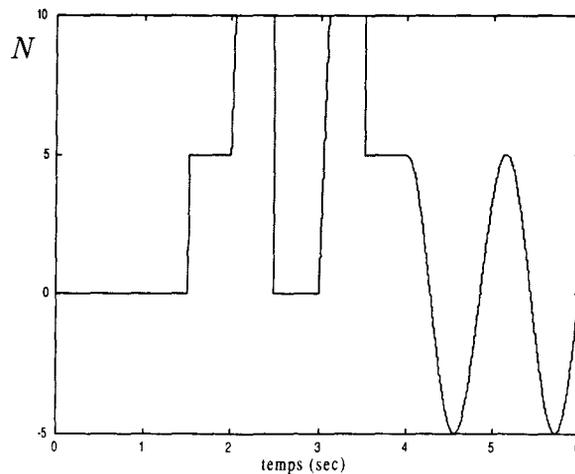


FIG. 5-3: Couple de charge en  $N$

### 5.3 Synthèse de l'observateur

Le flux rotorique n'étant pas observable, la connaissance de celui-ci, nécessaire ici car c'est une variable à contrôler, est généralement obtenue par un observateur approprié ([22, 120, 137, 161], ...). L'observateur choisi est celui développé par Djemaï et al. [55] et qui a déjà été implanté sur le banc d'essai nantais avec succès. Celui-ci est basé sur la technique des modes glissants, en tenant compte que seuls la vitesse angulaire  $x_1$  et les courants  $x_4$  et  $x_5$  sont directement mesurables. Par conséquent, les variables d'état disponibles sont différentes des sorties considérées.

En notant  $z_i$ , la variable observée relative à  $x_i$ , le système d'équations de l'observateur  $\Sigma_o$  est une recopie du système original  $\Sigma$ , plus un terme de correction discontinu :

$$\Sigma_o \equiv \begin{cases} \dot{z}_1 = \alpha_1(z_2x_5 - z_3x_4) - \alpha_3x_1 + \Lambda_1I_s + q_1(x_1 - z_1) \\ \dot{z}_2 = ax_4 - bz_2 - px_1z_3 + \Lambda_2I_s \\ \dot{z}_3 = ax_5 - bz_3 + px_1z_2 + \Lambda_3I_s \\ \dot{z}_4 = -\gamma_1x_4 + \gamma_2z_2 + \gamma_3x_1z_3 + \gamma_4u_1 + \Lambda_4I_s \\ \dot{z}_5 = -\gamma_1x_5 + \gamma_2z_3 - \gamma_3x_1z_2 + \gamma_4u_2 + \Lambda_5I_s \end{cases} \quad (5.4)$$

où  $\Lambda_1 = (\lambda_{11}, \lambda_{12})$ ,  $\Lambda_2 = (\lambda_{21}, \lambda_{22})$ ,  $\Lambda_3 = (\lambda_{31}, \lambda_{32})$ ,  $\Lambda_4 = (\lambda_{41}, \lambda_{42})$ ,  $\Lambda_5 = (\lambda_{51}, \lambda_{52})$ , et  $q_1 > 0$  sont les gains d'observation.

La surface de glissement  $S_{obs}$  est définie par :

$$S_{obs} = M \begin{bmatrix} x_4 - z_4 \\ x_5 - z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{obs1} \\ s_{obs2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec :  $M^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_2 & \gamma_3x_1 \\ -\gamma_3x_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}$ ;  $I_s = \begin{bmatrix} \text{sgn}(s_{obs1}) \\ \text{sgn}(s_{obs2}) \end{bmatrix}$ . Cette surface a été déterminée afin d'obtenir un vecteur équivalent simple et une linéarisation de l'erreur d'observation en régime de glissement.

**Remarque 46** Avec une technique par mode glissant, la dynamique  $\dot{z}_1$  n'est pas forcément nécessaire pour la reconstruction de  $x_2$  et  $x_3$  si la valeur de  $x_1$  est mesurée par un capteur de vitesse suffisamment précis.

Posons  $e_i = x_i - z_i$  pour  $i \in \{1, \dots, 5\}$ . La dynamique de l'erreur d'observation, obtenue

en soustrayant  $\Sigma_o$  à  $\Sigma$ , est :

$$\Sigma_{eo} \equiv \begin{cases} \dot{e}_1 = \alpha_1(x_5 e_2 - e_3 x_4) - \Lambda_1 I_S - q_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = -b e_2 - p x_1 e_3 - \Lambda_2 I_S \\ \dot{e}_3 = p x_1 e_2 - b e_3 - \Lambda_3 I_S \\ \dot{e}_4 = \gamma_2 e_2 + \gamma_3 x_1 e_3 - \Lambda_4 I_S \\ \dot{e}_5 = \gamma_2 e_3 - \gamma_3 x_1 e_2 - \Lambda_5 I_S \end{cases} \quad (5.5)$$

avec  $\Lambda_j = \lambda_{1j} \text{sign}(s_{obs1}) + \lambda_{2j} \text{sign}(s_{obs2})$ . L'analyse de la stabilité de  $\Sigma_{eo}$  se déroule en deux temps. Tout d'abord,  $\Lambda_4$  et  $\Lambda_5$  sont déterminés tels que la surface  $S_{obs} = 0$  soit attractive. Ensuite, on calcule  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ ,  $\Lambda_3$  et  $q_1$  de façon à ce que le système réduit, obtenu quand  $S_{obs} \equiv 0$ , soit localement stable.

**Proposition 47** *Considérons la fonction  $V = \frac{S_{obs}^T S_{obs}}{2}$  avec  $S_{obs} = M(e_4, e_5)^T = (s_{obs1}, s_{obs2})^T$  où  $M$  est une matrice régulière telle que  $(S_{obs} = 0 \implies e_4 = e_5 = 0)$ . Posons*

$$\begin{bmatrix} \Lambda_4 \\ \Lambda_5 \end{bmatrix} = M^{-1} \Delta; \quad \Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

avec  $\delta_1, \delta_2 > 0$ . Les conditions d'attractivité de la surface de glissement  $S_{obs} = 0$  sont alors données par :

$$\begin{aligned} \delta_1 &> |e_2|_{max} \\ \delta_2 &> |e_3|_{max} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$|e_2|_{max}$  et  $|e_3|_{max}$  étant les bornes supérieures sur les erreurs en flux.

**Preuve.** En dérivant la fonction  $V$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S_{obs}^T \frac{\partial S_{obs}}{\partial t} \\ &= S_{obs}^T M W + S_{obs}^T \dot{M} e \end{aligned}$$

où

$$W = M^{-1} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_{41} & \lambda_{42} \\ \lambda_{51} & \lambda_{52} \end{pmatrix} I_S.$$

D'après la théorie des perturbations singulières, la dynamique de la vitesse angulaire  $\omega$

peut être supposée constante (c'est une variable lente par rapport aux dynamiques des courants et des flux (voir [108])). On peut ainsi estimer que  $\dot{M} = 0$ . Le choix de la surface et des gains permet d'avoir des conditions d'attractivité parfaitement découplées entre  $s_{obs1}, e_2$  et  $s_{obs2}, e_3$  car :

$$\dot{V} = s_{obs1}(e_2 - \delta_1 \text{sign}(s_{obs1})) + s_{obs2}(e_3 - \delta_2 \text{sign}(s_{obs2})) + \underbrace{S_{obs}^T \dot{M} e}_{=0}$$

et, d'après (5.7),  $\dot{V}$  est alors définie négative. Ceci assure l'existence d'un régime glissant sur la surface  $S_{obs} = 0$  au bout d'un temps fini  $t_0$ . ■

La proposition suivante indique que, par un choix judicieux des gains  $\Lambda_1, \Lambda_2$  et  $\Lambda_3$ , l'erreur d'observation du système (5.5) converge asymptotiquement vers l'origine.

**Proposition 48** *Sous les hypothèses de la Proposition 47 et en choisissant des gains vérifiant :*

$$\Lambda_1 = \alpha_1 \begin{bmatrix} \delta_1 x_5 & -\delta_2 x_4 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b + q_2 & -px_1 \\ px_1 & -b + q_3 \end{bmatrix} \Delta \quad (5.9)$$

où  $\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}$  et où  $q_1, q_3, \delta_1$  et  $\delta_2$  sont des constantes positives, l'erreur d'observation converge asymptotiquement vers zéro, et ceci indépendamment de l'entrée considérée.

**Preuve.** Après  $t_0$ , les conditions d'invariance de la surface, données par  $s_{obs1} = 0$  et  $s_{obs2} = 0$ , impliquent que  $\dot{e}_4 = \dot{e}_5 = 0$ . On obtient l'équation algébrique suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = M^{-1} \left[ \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} - \Delta I_S \right].$$

Donc, sur la surface de glissement, le vecteur équivalent  $I_S \triangleq \tilde{I}_S$  s'écrit :

$$\tilde{I}_S = \begin{pmatrix} \frac{e_2}{\delta_1} \\ \frac{e_3}{\delta_2} \end{pmatrix},$$

et la dynamique de l'erreur d'observation est régie par le système différentiel d'ordre

réduit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \alpha_1(x_5 e_2 - e_3 x_4) - \Lambda_1 \tilde{I}_S - q_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = -b e_2 - p x_1 e_3 - \Lambda_2 \tilde{I}_S \\ \dot{e}_3 = p x_1 e_2 - b e_3 - \Lambda_3 \tilde{I}_S \end{cases}$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{e}_1 = \alpha_1(x_5 e_2 - e_3 x_4) - \Lambda_1 \Delta^{-1} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} - q_1 e_1$$

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} = \left[ H - \begin{pmatrix} \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \end{pmatrix} \Delta^{-1} \right] \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

avec  $H = \begin{pmatrix} -b & -p x_1 \\ p x_1 & -b \end{pmatrix}$ . D'après l'expression des gains (5.8) et (5.9) :

$$\dot{e}_i = -q_i e_i$$

pour  $i = 1, \dots, 3$ , et en choisissant

$$q_1, q_2, q_3 > 0,$$

l'erreur d'observation est asymptotiquement stable, avec une vitesse de convergence qu'il nous est possible de régler. ■

## 5.4 Commande par modes glissants d'ordre deux

Outre ses propriétés de robustesse et de précision de convergence, une motivation pour appliquer une commande par modes glissants d'ordre deux réside dans les propriétés structurelles mêmes de la machine. Les sorties choisies sont la vitesse et la norme au carré du flux rotorique que l'on veut forcer à suivre une trajectoire de référence. Le but de la commande est donc d'annuler la fonction contrainte  $S$  qui est définie par

$$S = \begin{pmatrix} s_1 = \omega - \omega_{ref} \\ s_2 = \phi^2 - \phi_{ref}^2 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

( $\omega_{ref}$  et  $\phi_{ref}$  correspondant aux trajectoires de références définies plus haut).

Or, le système (5.3) est de degré relatif deux par rapport à la variable de sortie  $S$  et ceci implique, comme il a été vu dans la première partie de ce mémoire, qu'un mode glissant d'ordre strictement supérieur à un est nécessaire si on veut obtenir une convergence en temps fini vers les trajectoires désirées. Un algorithme d'ordre deux (l'algorithme du twisting dans le cas présent) forcera les trajectoires du système à évoluer au bout d'un temps fini sur la surface  $S = 0$ . La commande étant un retour de sortie, nous montrerons également la stabilité en boucle fermée de l'ensemble du système observateur-contrôleur.

Pour différentes raisons, la surface de glissement sera exprimée en fonction des variables observées. Ainsi aura-t-on  $s_1 = z_1 - \omega_{ref}$  car l'algorithme de commande utilisé nécessite la connaissance de la dérivée seconde de  $s_1$ , en l'occurrence l'accélération angulaire, qui n'est pas accessible (sinon par le biais d'un capteur ou d'un reconstituteur, ce qui signifie coût ou temps de calcul supplémentaire). De la même manière, l'erreur sur la poursuite en flux sera définie par  $s_2 = (z_2^2 + z_3^2) - \phi_{ref}^2$  étant donné que le flux réel n'est pas disponible.

Par dérivations successives de  $s_1$  (erreur sur la vitesse)

$$\ddot{s}_1 = A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + B_1e_2 + C_1e_3 + D_1 - \frac{d\Lambda_1 I_s}{dt} + \alpha_2\alpha_3 C_l - \alpha_2 \dot{C}_l$$

avec

$$A_{11} = -\alpha_1\gamma_4z_3$$

$$A_{12} = \alpha_1\gamma_4z_2$$

$$B_1 = -\alpha_1(\gamma_3x_1z_2 + \gamma_2z_3 - (q_1 - \alpha_3)x_5)$$

$$C_1 = -\alpha_1(\gamma_3x_1z_3 - \gamma_2z_2 + (q_1 - \alpha_3)x_4)$$

$$D_1 = -\alpha_1(b + \gamma_1 + \alpha_3)(z_2x_5 - z_3x_4) - \alpha_1px_1(x_2x_4 + x_3x_5)$$

$$-\alpha_1\gamma_3x_1\hat{\phi}^2 + \alpha_3^2x_1 - (q_1\Lambda_1 - \alpha_1x_5\Lambda_2 + \alpha_1x_4\Lambda_3)I_s$$

Sachant que la convergence de l'observateur est arbitrairement rapide, on peut initialement considérer la dynamique équivalente lorsque l'on est sur la surface  $S_{obs} = 0$ , i.e. :

$$(\Lambda_1 I_s)_{eq} = \alpha_1(e_2x_5 - e_3x_4)$$

d'où

$$\frac{d(\Lambda_1 I_s)_{eq}}{dt} = \alpha_1(-q_2 e_2 x_5 + q_3 e_3 x_4 + e_2 \dot{x}_5 - e_3 \dot{x}_4)$$

et finalement

$$\ddot{s}_1 = A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + \tilde{B}_1 e_2 + \tilde{C}_1 e_3 + D_1 + \alpha_2 (\alpha_3 C_l - \dot{C}_l)$$

où

$$\tilde{B}_1 = -\alpha_1 (\gamma_3 x_1 z_2 + \gamma_2 z_3 - (q_1 + q_2 - \alpha_3)x_5 - \dot{x}_5)$$

$$\tilde{C}_1 = -\alpha_1 (\gamma_3 x_1 z_3 - \gamma_2 z_2 + (q_1 + q_3 - \alpha_3)x_4 + \dot{x}_4).$$

En dérivant deux fois  $s_2$  (erreur sur le module du flux au carré) :

$$\ddot{s}_2 = A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + B_2 e_2 + C_2 e_3 + D_2 + 2 \left( z_2 \frac{d\Lambda_2 I_s}{dt} + z_3 \frac{d\Lambda_3 I_s}{dt} \right)$$

avec

$$A_{21} = 2a\gamma_4 z_2$$

$$A_{22} = 2a\gamma_4 z_3$$

$$B_2 = 2(a\gamma_2 z_2 - a\gamma_3 x_1 z_3)$$

$$C_2 = 2(a\gamma_2 z_3 + a\gamma_3 x_1 z_2)$$

$$D_2 = -2a(3b + \gamma_1)(z_2 x_4 + z_3 x_5) + (4b^2 + 2a\gamma_2)\hat{\phi}^2 + 2a^2(x_4^2 + x_5^2) + 2apx_1(z_2 x_5 - z_3 x_4) \\ + 4a(x_4 \Lambda_2 + x_5 \Lambda_3)I_s - 6b(z_2 \Lambda_2 + z_3 \Lambda_3)I_s + 2px_1(z_2 \Lambda_3 - z_3 \Lambda_2)I_s + 2(\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2)$$

On utilise alors la dynamique équivalente sur la surface  $S_{obs} = 0$  :

$$(\Lambda_2 I_s)_{eq} = (q_2 - b)e_2 - px_1 e_3$$

$$(\Lambda_3 I_s)_{eq} = (q_3 - b)e_3 + px_1 e_2$$

d'où

$$\frac{d(\Lambda_2 I_s)_{eq}}{dt} = -q_2(q_2 - b)e_2 + q_3 px_1 e_3 - p\dot{x}_1 e_3$$

$$\frac{d(\Lambda_3 I_s)_{eq}}{dt} = -q_3(q_3 - b)e_3 - q_2 px_1 e_2 + p\dot{x}_1 e_2$$

ce qui donne

$$\ddot{s}_2 = A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + \tilde{B}_2e_2 + \tilde{C}_2e_3 + D_2$$

avec

$$\tilde{B}_2 = 2((a\gamma_2 - q_2(q_2 - b))z_2 - (a\gamma_3 + q_2p)x_1z_3 + p\dot{x}_1)$$

$$\tilde{C}_2 = 2((a\gamma_2 - q_3(q_3 - b))z_3 + (a\gamma_3 + q_3p)x_1z_2 - p\dot{x}_1).$$

Définissant le retour statique :

$$u = A^{-1} \begin{bmatrix} -D_1 + v_1 \\ -D_2 + v_2 \end{bmatrix}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

et  $v = [v_1, v_2]^T$  est la nouvelle commande, on obtient :

$$\ddot{s}_1 = v_1 + \tilde{B}_1e_2 + \tilde{C}_1e_3 - \alpha_2\dot{C}_l + \alpha_3\alpha_2C_l$$

$$\ddot{s}_2 = v_2 + \tilde{B}_2e_2 + \tilde{C}_2e_3$$

$C_l$  et  $\dot{C}_l$  ayant été supposées bornées, et puisque  $e_2$  et  $e_3$  tendent asymptotiquement vers zéro indépendamment de la commande, il existe un temps  $t_0$  tel que  $\forall t \geq t_0$  :

$$\left| \tilde{B}_1e_2 + \tilde{C}_1e_3 - \alpha_2\dot{C}_l + \alpha_3\alpha_2C_l \right| \leq K_1 \quad (5.11)$$

$$\left| \tilde{B}_2e_2 + \tilde{C}_2e_3 \right| \leq K_2 \quad (5.12)$$

Dans ces conditions, il est possible d'appliquer l'algorithme du twisting. La commande  $v$  est alors définie par :

$$v_i = \begin{cases} -\lambda_{m_i} \operatorname{sgn}(s_i), & \text{si } s_i\dot{s}_i \leq 0 \\ -\lambda_{M_i} \operatorname{sgn}(s_i), & \text{si } s_i\dot{s}_i > 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2$$

les conditions sur les gains étant :

$$\lambda_{M_i} > \lambda_{m_i}$$

$$\lambda_{m_i} > K_i$$

$$\lambda_{M_i} > \lambda_{m_i} + 2K_i,$$

et les  $K_i$  étant définis par (5.11) et (5.12). Un régime glissant prend alors place sur  $S = 0$  et la vitesse et le flux du moteur rejoignent les trajectoires de références prédéfinies.

**Remarque 49** On peut observer que l'on s'est attaché à réaliser une commande qui conduit à une convergence en temps fini des variables, mais que l'observateur est seulement asymptotiquement stable. Pour rester en adéquation avec notre stratégie de commande, et avoir une convergence en temps fini de l'ensemble du système, un observateur dit "step-by-step" [8] ou par modes glissants d'ordre supérieur [9] pourront être développés ultérieurement.

## 5.5 Résultats de simulation

Afin de valider cette loi de commande, et avant d'en réaliser l'implantation sur le banc d'essai de Nantes, des simulations, prenant en compte le modèle du moteur tel qu'il a été identifié, ainsi que l'ensemble des contraintes auxquelles il est soumis, ont été réalisées (voir Figure 5-4). Cette démarche de valider en simulation la commande est un passage obligé et formateur pour une implantation sur les bancs du GdR.

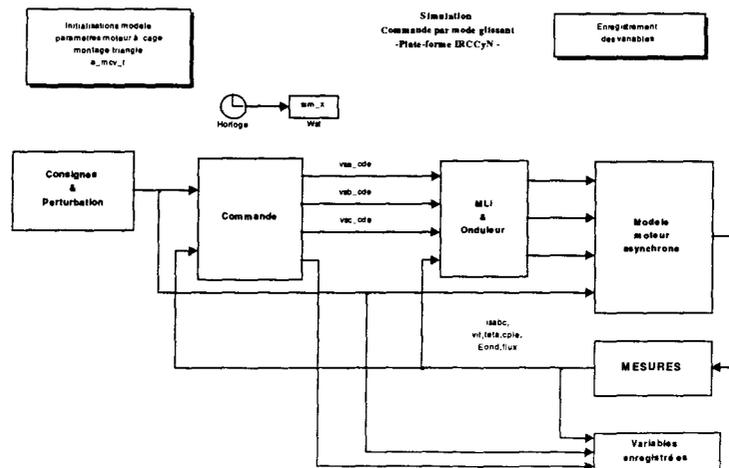


FIG. 5-4: Schéma Simulink de la plate-forme

Les paramètres de l'observateur sont  $\delta_1 = \delta_2 = 5$ ,  $q_1 = q_2 = q_3 = 15$ , et ceux de la commande par mode glissant  $\lambda_{M_1} = 5000$ ,  $\lambda_{m_1} = 1000$ ,  $\lambda_{M_2} = 500$ ,  $\lambda_{m_2} = 100$ . Les résultats obtenus sont les suivants. La Figure 5-5 montre une très bonne réponse en poursuite de la vitesse malgré les perturbations dues au couple de charge. L'allure de la vitesse de référence est lissée car celle-ci a été filtrée afin de limiter l'amplitude des commandes et des courants pendant le transitoire.

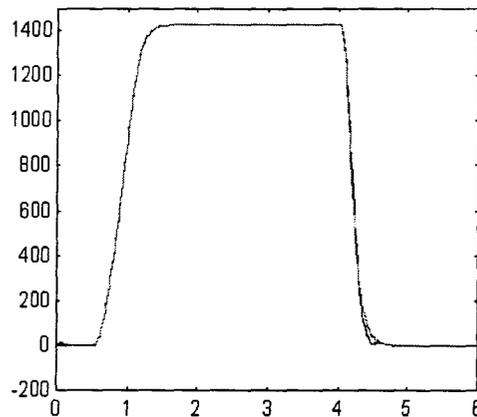


FIG. 5-5: Vitesse de référence filtrée (en grisé) et vitesse du moteur (en noir) en *trs/min*

La Figure 5-6 montre l'évolution du flux au carré qui suit bien la valeur de référence désirée.

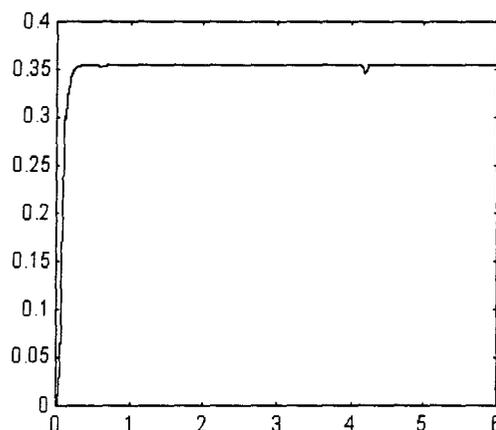


FIG. 5-6: Flux réel au carré du moteur en  $Wb^2$

Il est à noter, d'autre part que ces grandeurs sont très peu affectées par le phénomène de réticence inhérent au mode glissant. Les fonctions de commutation utilisées ici sont

des fonctions signes classiques, mais on peut aisément les remplacer par des fonctions signes avec des zones mortes ou des fonctions sigmoïdes, afin d'améliorer les résultats, et plus spécialement réduire les sollicitations au niveau des actionneurs (cela sera fait lors de l'implantation).

## 5.6 Résultats expérimentaux

L'implantation de la loi de commande, bouclée sur l'observateur, a été effectuée sur le banc d'essai "Manutention Horizontale" situé dans les locaux de l'IRCCyN à Nantes et dirigé par Alain Glumineau et Robert Boisliveau ([http://www.ircyn.prd.fr/Banc\\_Essai](http://www.ircyn.prd.fr/Banc_Essai)). La grande convivialité de la plateforme et la compétence des personnes gérant le site permet au visiteur d'en appréhender rapidement le fonctionnement. Nous présentons tout d'abord les résultats obtenus pour l'observateur seul avant de donner ceux concernant la commande par modes glissants d'ordre deux.

### 5.6.1 Observateur seul

La validation de l'observateur a été effectuée par Djemaï et al. [55] sur une plateforme utilisant la version Matlab 4 et une carte DSPACE (TMS320C31). Le test a été fait en boucle ouverte, associé avec une commande U/F destinée à de la poursuite de trajectoires. Les signaux provenant du capteur de vitesse et les équations de la commande sont échantillonnés à la même période qui est de  $250\mu s$ .

Pour réduire le phénomène de réticence, les fonctions signes ont été remplacées par des approximations continues dans un voisinage de la surface de glissement (Figure 5-7).

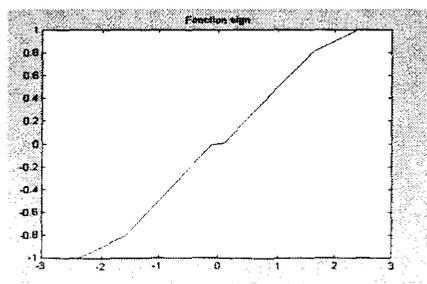


FIG. 5-7: La fonction signe modifiée

Les Figures 5-8 et 5-9 représentent les profils de la vitesse de référence et du couple de charge correspondant au cahier des charges du benchmark "Observateur", dédié à la validation d'observateurs.

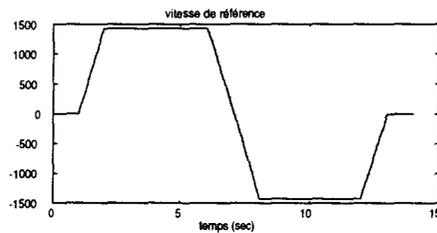


FIG. 5-8: Vitesse de référence pour le test de l'observateur

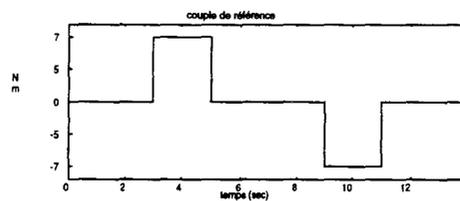


FIG. 5-9: Couple de charge pour le test de l'observateur

Les Figures 5-10 et 5-11 illustrent les comportements des courants mesurés et des courants observés  $i_{s,\alpha}$ ,  $\hat{i}_{s,\alpha}$  et  $i_{s,\beta}$ ,  $\hat{i}_{s,\beta}$ .

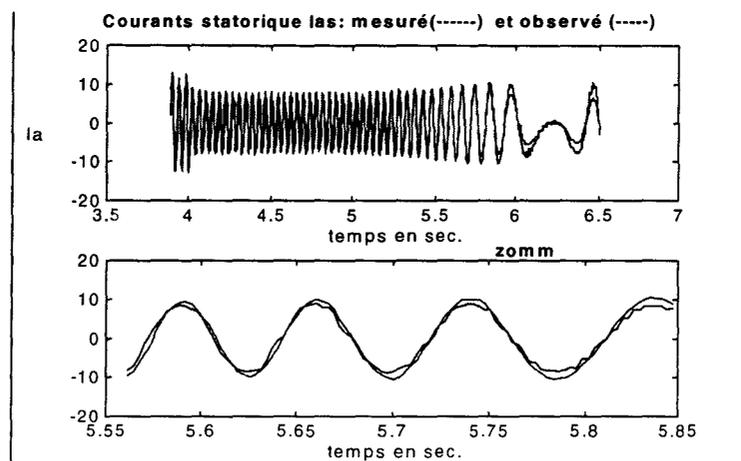
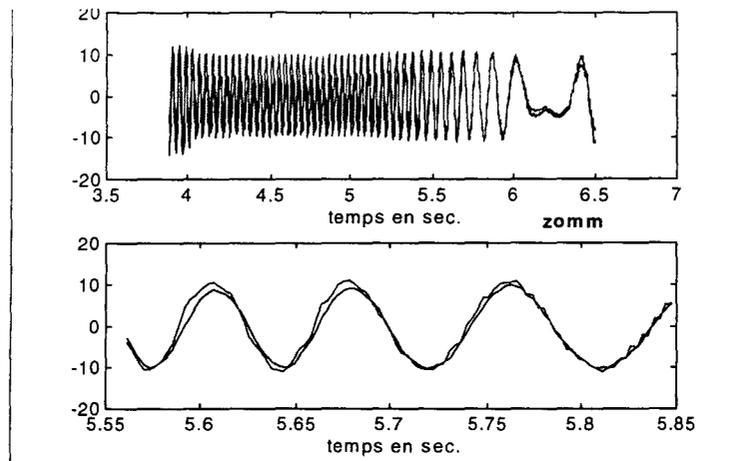


FIG. 5-10: Courants statoriques observé et mesuré  $i_{s,\alpha}$

FIG. 5-11: Courants statoriques observé et mesuré  $i_{s,\beta}$ 

La Figure 5-12 donne l'allure du module du flux rotorique  $\phi = \sqrt{\phi_{r,\alpha}^2 + \phi_{r,\beta}^2}$  obtenue par l'intermédiaire de l'observateur glissant, ainsi qu'une estimation de celui-ci basée sur la mesure des courants et des tensions d'entrée  $V_{s,\alpha}$ ,  $V_{s,\beta}$ .

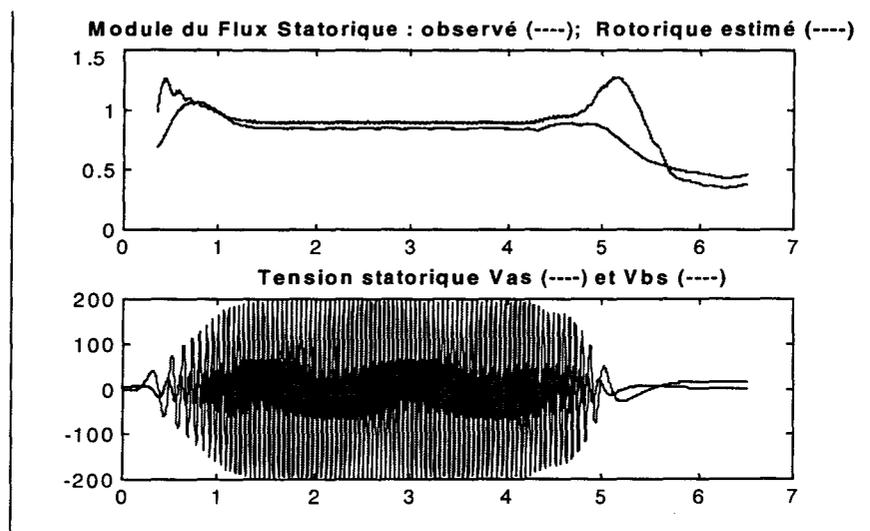


FIG. 5-12: Flux, observé et estimé, et tensions statoriques

### 5.6.2 Commande avec observateur

Les expériences concernant la commande ont été réalisées juste après la mise en place d'un tout nouveau système DSPACE 1103 (Power PC 333 MHz, 20 entrées analogiques) permettant de travailler avec Matlab 5.3 et Simulink 3. Avant d'implanter notre commande, il a donc fallu revalider l'observateur sur le nouveau banc, dont les paramètres n'ont été que peu modifiés. Le nouveau matériel permet de baisser la période d'échantillonnage à  $125\mu s$  et d'avoir plus de possibilités de visualisation des signaux durant l'expérience.

Les résultats obtenus lors des deux campagnes d'expérimentations peuvent être trouvés dans [83] et [84] et sont synthétisés ici. Les Figures 5-13 et 5-14 montrent les réponses du courant mesuré et de la vitesse. La vitesse du moteur est déphasée par rapport à la référence car cette dernière a été filtrée. La Figure 5-13 concerne un test où le palier de la vitesse de référence est égal à la moitié de la vitesse nominale du moteur. Les réponses fournies sont très correctes.

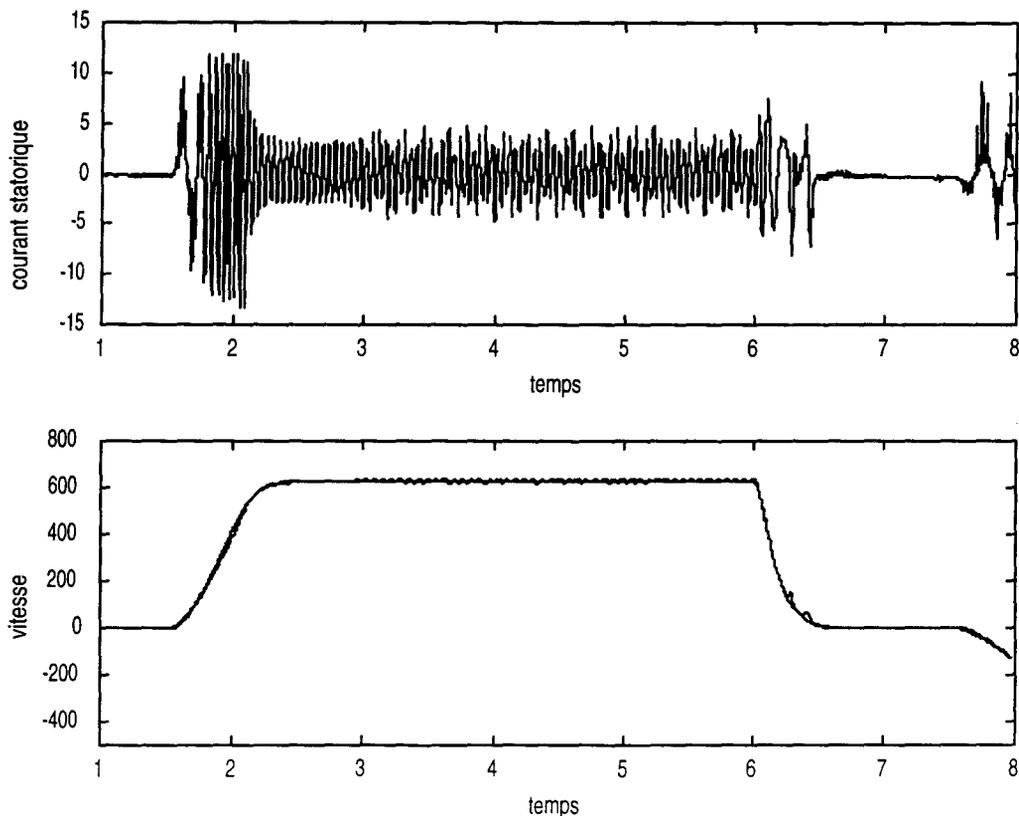


FIG. 5-13: Courant statorique et vitesse rotorique pour  $V_{ref_{max}} = V_{nom}/2$

Dans la Figure 5-14, la vitesse de référence a un profil en accord avec les spécifications du banc d'essai.

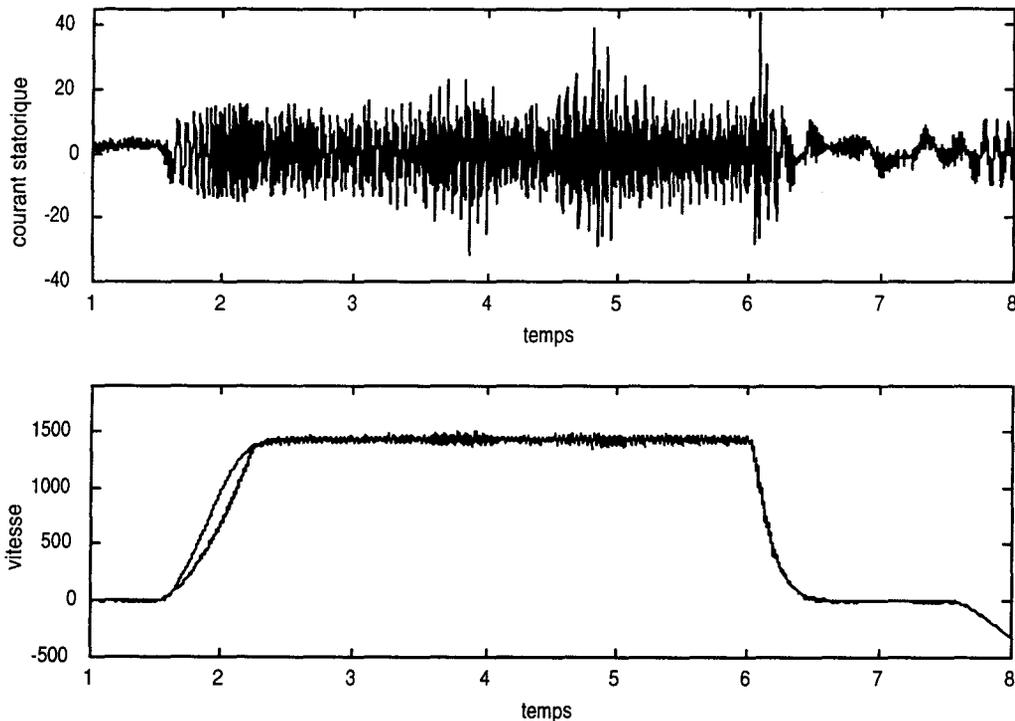


FIG. 5-14: Courant statorique et vitesse rotorique pour  $V_{ref_{max}} = V_{nom}$

La poursuite en vitesse est acceptable malgré les perturbations significatives introduites par le couple de charge, ce qui illustre le caractère robuste de la loi de commande. On peut observer un faible retard de la réponse en vitesse, lors du démarrage au bout de 1.5 secondes. Ceci peut être dû à la saturation des convertisseurs. Des solutions existent dans la littérature (voir [66]) pour résoudre ce problème, notamment en équilibrant, au démarrage, les actions de chacune des tensions statoriques dans le plan en  $(\alpha, \beta)$  par le biais de gains homothétiques. A l'arrêt du moteur, on peut observer un pic de courant. Ces pointes de courants peuvent être atténuées en ajustant les filtres ou bien en diminuant les gains du contrôle discontinu. Le problème le plus significatif sont les oscillations apparaissant autour de la vitesse nominale. Ceci provient du fait que la synthèse de l'observateur est basée sur un mode glissant d'ordre un. Puisque la commande d'ordre deux est bouclée sur les variables estimées, la réticence introduite par l'observateur s'y réper-

cute. Afin d'éliminer cet effet indésirable, on pourra implanter par la suite un observateur par modes glissants d'ordre deux, qui pourra de plus assurer une convergence en temps fini des variables estimées vers les variables réelles, et donc de l'ensemble du système. Dans de prochaines expériences, il est également prévu d'optimiser les constantes de temps des filtres et les valeurs des différents gains de façon à améliorer le temps de réponse. Enfin, ces tests seront aussi l'occasion d'étudier la robustesse de la commande vis-à-vis des incertitudes paramétriques telles que l'échauffement des résistances du moteur.

L'ensemble de ces expériences montre la viabilité d'une telle loi de commande et de très bons résultats si on prend en compte les contraintes de temps pour son implantation.

## 5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une commande par modes glissants d'ordre deux pour la machine asynchrone. Etant donné que l'on suppose que les seules variables mesurables sont les courants statoriques et la vitesse rotorique, un observateur par modes glissants a été construit afin d'estimer le flux. La commande a alors été élaborée en prenant en compte les informations fournies par cet observateur. On peut remarquer que cette méthode ne nécessite aucune estimation du couple et que de part le choix des surfaces de glissement, on peut même envisager un dispositif sans capteur de vitesse (aux singularités d'observabilité près).



## **Conclusion et perspectives**



Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés au problème de la commande par modes glissants d'ordre supérieur. Notre première démarche a été d'en donner les fondements théoriques sans essayer d'en couvrir tout le domaine. Nous nous sommes donc attachés à exposer leurs notions essentielles telles que l'attractivité des surfaces, la commande équivalente, la dynamique en régime de glissement ou encore la réticence. Cette approche peut constituer une base non négligeable dans l'optique de mieux appréhender l'ensemble des nombreux développements qu'a connu et que connaît encore à l'heure actuelle cette technique dans les problèmes de régulation, de poursuite de trajectoire ou de modèles et ceci dans des domaines applicatifs englobant la mécanique, la robotique ou l'électrotechnique. D'autre part, il a été vu que les modes glissants d'ordre supérieur étaient en étroite relation avec le degré relatif du système considéré, notamment en ce qui concerne les problèmes de convergence en temps fini sur la surface choisie ou la réduction du phénomène de réticence. Dans la présentation des algorithmes permettant de générer des régimes glissants d'ordre supérieur, nous avons montré que la convergence pouvait être accélérée par l'addition de termes linéaires adéquats.

La deuxième partie du mémoire contient l'essentiel des autres contributions propres à ce travail. Elles sont principalement axées sur la stabilisation de systèmes non linéaires soumis à des perturbations, que ce soit par retour d'état ou retour de sortie. Le principe général est de contraindre le système à évoluer sur des surfaces définies de manière à ce que son comportement y soit stable et à ce que ce phénomène de stabilité soit de préférence obtenu en temps fini. L'un des intérêts des ordres supérieurs est que la dynamique équivalente réinjectée dans le système en régime glissant est d'autant plus précise que l'ordre est important. Nous avons pu également montrer que les modes glissants d'ordre supérieur représentaient une bonne solution lorsqu'il s'agit d'obtenir un compromis satisfaisant entre les performances (au niveau de la vitesse de convergence) et la robustesse de la commande. On pourra noter que l'ensemble des démonstrations s'appuient sur l'utilisation de l'algorithme du *twisting*. Néanmoins, la prise en compte de tout autre algorithme glissant d'ordre deux permettrait d'aboutir aux mêmes résultats en établissant des conditions adaptées sur les gains de commande. Il faut toutefois préciser que, dans la pratique, il serait préférable d'implanter la version discrétisée de ces algorithmes ou d'autres s'appuyant uniquement sur la connaissance de la fonction de commutation  $s$  (et

non de ses dérivées successives) tels que l'algorithme du super-twisting.

Le dernier chapitre constitue la réalisation de ces résultats théoriques sur une plateforme expérimentale dédiée à la machine asynchrone : il y est montré l'efficacité et la robustesse de commandes basées sur cette technique.

Ces expériences ont d'autre part soulevé certains problèmes auxquels il serait intéressant de réfléchir par la suite. Au vu des difficultés rencontrées lors de ces expériences, il semble tout d'abord que lors de l'association d'un observateur et d'une commande par modes glissants, l'ordre de glissement du premier doit prendre en compte explicitement la construction de la seconde, si l'on veut éviter de réinjecter des discontinuités dans la boucle fermée. Deuxièmement, il apparaît important d'apporter des solutions afin de régler des gains de commande qui soient adaptés aux contraintes du processus telles que les zones mortes ou les phénomènes de saturation. Outre ces améliorations envisagées sur la commande de la machine asynchrone, il nous apparaît également intéressant de tester ces lois de commandes d'ordre supérieur sur des systèmes liés à la robotique, tels que les robots mobiles.

Au niveau purement théorique, cette étude ouvre la porte à d'autres perspectives. Ainsi qu'il a été vu, la littérature actuelle ne propose des algorithmes glissants que pour des ordres deux voire trois. Il serait intéressant de pouvoir générer des régimes glissants d'ordre plus important. D'une part, ceci permettrait d'obtenir des convergences sur les surfaces de glissement de plus en plus précises, permettant ainsi d'éviter de réinjecter des erreurs trop grandes dans les dynamiques équivalentes. D'autre part, nous pourrions généraliser notre résultat concernant la stabilisation robuste et en temps fini des systèmes mis sous forme chaînée à des modèles dont la dimension est quelconque (et non plus limitée à  $n = 3$ ).

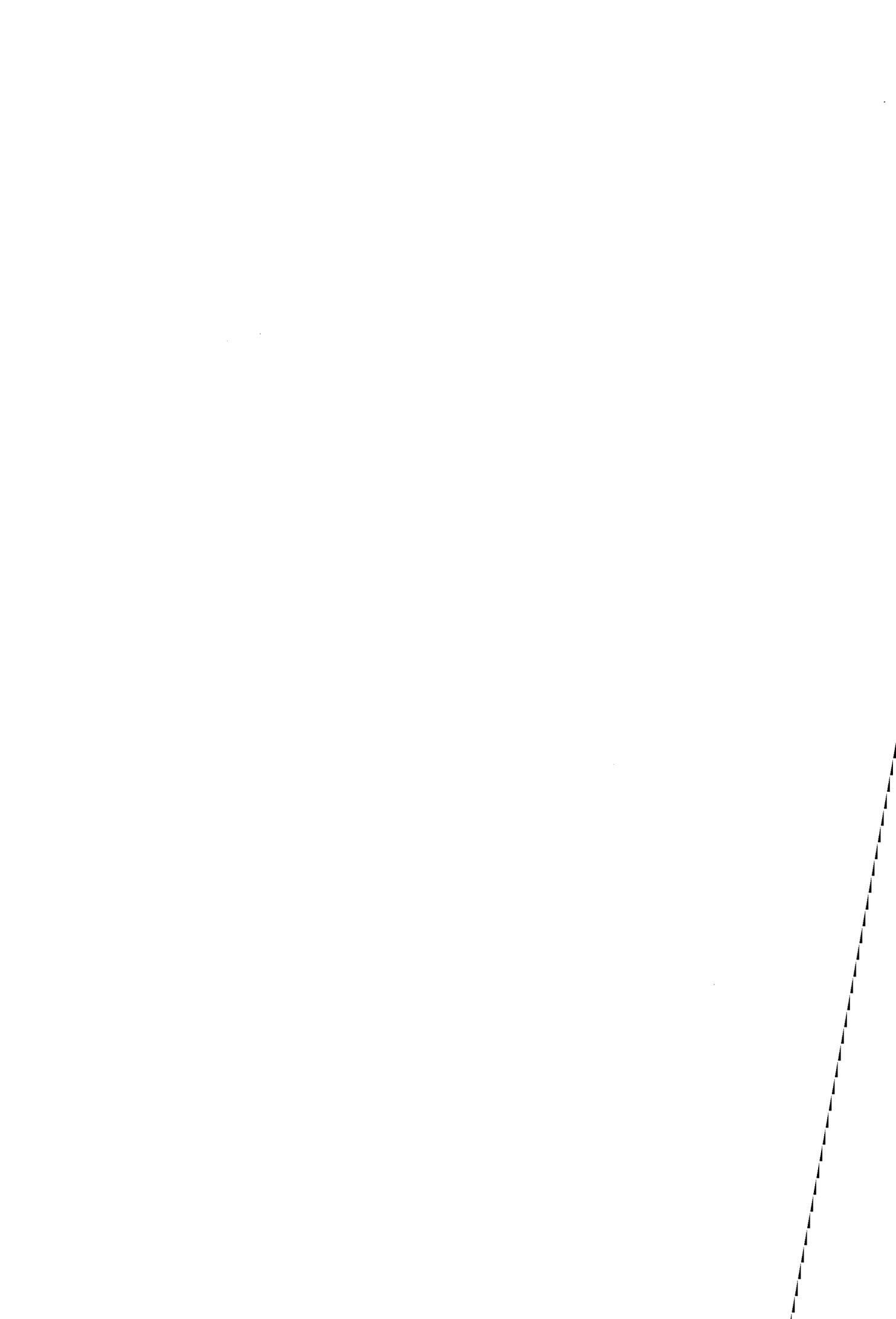
Un deuxième point à approfondir reste la prise en compte des perturbations. Dans le chapitre 4 et dans chacun des problèmes posés, nous avons vu que, afin d'être rejetées, les perturbations devaient intervenir dans la chaîne des entrées. Ceci a d'ailleurs été supposé lorsque le cas d'un système non holonome a été traité. Toutefois, un simple exemple a aussi permis de s'apercevoir que ce n'est pas une condition nécessaire en vue de l'application de notre méthode. De manière générale, les modes glissants d'ordre supérieur sont susceptibles d'être une solution pour rejeter des incertitudes qui ne remplissent pas

forcément la condition de recouvrement. Certes, la nature de ces perturbations resterait assujettie à certaines conditions, mais celles-ci pourraient se révéler être moins restrictives que celles introduites par Drazenovic. L'un des objectifs est de pouvoir prendre en compte les phénomènes de patinage au niveau des robots mobiles, ou encore les couples magnétiques et aérodynamiques dans l'étude de la commande des satellites.



## Troisième partie

### Annexes



# Annexe A

## Inclusions différentielles et solutions au sens de Filippov

De nombreux systèmes physiques sont régis par des équations différentielles impliquant des termes discontinus. C'est le cas par exemple dans les circuits électriques, électromagnétiques et électromécaniques : nous pouvons ainsi citer sans souci d'exhaustivité les convertisseurs statiques (où les nombreuses commutations des composants à semi-conducteur produisent des discontinuités dans les équations différentielles représentant le système), les frottements secs, les triggers, les redresseurs, les saturations des amplificateurs opérationnels, etc... Parmi ces cas, il faut distinguer les systèmes discontinus par nature de ceux dont la discontinuité est apportée par la commande, telle la commande par modes glissants.

La théorie classique des équations différentielles ordinaires ne permet pas de décrire le comportement des solutions dans de tels cas. C'est pourquoi des approches alternatives, mettant en cause de nouveaux outils mathématiques, ont été introduites. Citons la théorie des inclusions différentielles [5, 6], les travaux de Filippov [75], sur le vecteur équivalent et la résolution des équations différentielles discontinues, et les travaux de F.H. Clarke et al. [43] sur l'analyse des dynamiques discontinues.

## A.1 Inclusions Différentielles

Le problème de Cauchy suivant :

$$\dot{x} = -\frac{x}{|x|} \text{ si } x \neq 0, \quad (\text{A.1})$$

$$x(0) = 0. \quad (\text{A.2})$$

n'admet pas de solution au sens classique puisque  $\dot{x}(0)$  n'est pas défini. Une généralisation du concept de solution est donc nécessaire. La façon la plus naturelle est de prolonger en  $x = 0$  le membre de droite de (A.1). Ceci nous amène à considérer la multi-fonction<sup>1</sup>

$$F(x) = \left\{ -\frac{x}{|x|} \right\} \text{ si } x \neq 0, F(0) = [-1, 1],$$

et on vérifie que  $x(t) = 0$  satisfait la relation  $\frac{dx}{dt} \in F(x)$  pour tout  $t$ . De la même façon, le problème de Cauchy associé à la condition initiale  $x(0) = x_0$  (quelconque) admet une solution.

Dans un cadre plus général, pour étudier une équation différentielle ordinaire à second membre discontinu (systèmes à structure variable, hacheur, phénomène de friction, etc. . .) de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x \in \mathcal{X}, \quad (\text{A.3})$$

où  $f(t, x)$  est définie et continue sur  $\mathcal{I} \times (\mathcal{X}_p \setminus \mathcal{M})$  ( $\mathcal{X}_p$  étant une partition de  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{M}$  un ensemble de mesure nulle<sup>2</sup>), il apparaît intéressant de la remplacer par l'inclusion différentielle suivante

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x), \quad (\text{A.4})$$

où  $F(t, x)$  est un ensemble, dont nous verrons une construction, tel que pour  $(t, x) \in \mathcal{I} \times \mathcal{X}_p \setminus \mathcal{M} : F(t, x) = \{f(t, x)\}$ . Cette inclusion doit permettre de "capturer" les comportements de (A.3).

---

<sup>1</sup>cet être mathématique appelé "multi-fonction" est une "application" qui à un point associe un ensemble de points (en anglais "set-valued map")

<sup>2</sup>au sens de Lebesgue

## A.2 Notion de solution

On s'intéresse au problème de Cauchy (PC) suivant : "existe-t-il une fonction  $\phi$  telle que  $\frac{d\phi}{dt} \in F(t, \phi(t))$  presque partout (p.p)<sup>3</sup> et  $\phi(t_0) = x_0$  ?"

**Définition 50** On appelle solution de (A.4) passant par  $x_0$  à  $t_0$ , toute fonction  $\phi$  absolument continue<sup>4</sup> définie sur un intervalle non vide  $(\mathcal{I}(t_0, x_0) \subset \mathcal{I} \subset \mathbb{R})$  contenant  $t_0$  :

$$\begin{aligned} \phi & : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto \phi(t; t_0, x_0), \end{aligned}$$

notée plus simplement  $\phi(t)$  vérifiant  $\frac{d\phi}{dt} \in F(t, \phi(t))$  presque partout sur  $\mathcal{I}(t_0, x_0)$  et telle que  $\phi(t_0) = x_0$ .

Si  $\phi(t)$  est une fonction absolument continue, il existe  $\chi(u)$  une fonction (Lebesgue intégrable) qui soit presque partout égale à la dérivée de  $\phi$  :  $\phi(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^t \chi(u) du$ . Si de plus  $\frac{d\phi}{dt} \in F(t, \phi(t))$  p.p. :  $\chi(u) \in F(u, \phi(u))$  et donc on obtient la représentation intégrale suivante

$$\phi(t) \in \phi(t_0) + \int_{t_0}^t F(u, \phi(u)) du.$$

La réciproque n'est vraie que si la multi-fonction vérifie certaines hypothèses de régularité (compacte, convexe, semi-continue supérieurement).

## A.3 Existence des solutions

Dans le cas où  $F(t, x) = \{f(t, x)\}$  et  $\mathcal{X}_p = \mathcal{X}$  (le membre de droite de (A.3) pouvant ne pas être défini pour des instants appartenant à un ensemble de mesure nulle), on retrouve les résultats classiques sur les équations différentielles ordinaires (Carathéodory et Péano). L'existence de solutions est notamment garantie par la continuité de la fonction. Pour les multi-fonctions, une notion de substitution est la semi-continuité supérieure, que les différentes définitions qui suivent permettent de caractériser.

<sup>3</sup>sauf sur un ensemble de mesure nulle

<sup>4</sup> $\phi : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}^n$  est **absolument continue** si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \{\alpha_i, \beta_i\}_{i \in \{1..n\}}, \alpha_i, \beta_i \in [\alpha, \beta], \sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \|\phi(\beta_i) - \phi(\alpha_i)\| \leq \varepsilon$ .

**Définition 51** Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux ensembles. Une multi-fonction  $F$  est définie par une relation entre les éléments de  $E_1$  et ceux de  $\mathcal{P}(E_2)$  : on la note  $F : E_1 \rightrightarrows E_2$  et elle associe à un point  $x$  de  $E_1$  un sous ensemble  $F(x)$  de  $E_2$ . On définit le **domaine** de  $F$  :  $\text{dom}(F) \triangleq \{x \in E_1 : F(x) \neq \emptyset\}$ , son **graphe** :  $\text{graph}(F) \triangleq \{(x, y) \in E_1 \times E_2 : x \in \text{dom}(F) \text{ et } y \in F(x)\}$ , son **image** :  $\text{image}(F) \triangleq \{y \in E_2 : \exists x \in \text{dom}(F) \text{ tel que } y \in F(x)\} = \bigcup_{x \in E_1} F(x) \subset E_2$ .

De ce que nous venons de voir, nous en déduisons que **les propriétés des multi-fonctions sont les propriétés des graphes qui leurs sont associés**. Ainsi, une multi-fonction est convexe si son graphe associé est convexe. De même, nous pouvons définir des propriétés uniquement sur l'image de la multi-fonction.

**Définition 52** Une multi-fonction  $F$  est convexe (respectivement fermée, bornée) si son image est convexe (respectivement fermée, bornée).

**Définition 53** Une multi-fonction  $F : E_1 \rightrightarrows E_2$  ( $E_1$  et  $E_2$  sont des espaces topologiques de Hausdorff) est **semi-continue supérieurement** en  $x \in \text{dom}(F)$  si pour tout voisinage  $V \subset E_2$  de  $F(x)$  il existe  $W$  un voisinage de  $x$  tel que  $F(W) \subset V$ . Une multi-fonction  $F$  est **semi-continue supérieurement** si elle est semi-continue supérieurement en tout point de son domaine  $\text{dom}(F)$ .

De même nous pouvons définir la semi-continuité inférieure :

**Définition 54** Une multi-fonction  $F : E_1 \rightrightarrows E_2$  ( $E_1$  et  $E_2$  sont des espaces topologiques de Hausdorff) est **semi-continue inférieurement** en  $x \in \text{dom}(F)$ , si pour tout  $y \in F(x)$  et toute suite  $x_n \in \text{dom}(F)$  convergeant vers  $x$ , il existe une suite  $y_n \in F(x_n)$  convergeant vers  $y$ . Une multi-fonction  $F$  est **semi-continue inférieurement** si elle est semi-continue inférieurement en tout point de son domaine  $\text{dom}(F)$ .

Il est évident que pour des multi-fonctions associant à tout élément de  $E_1$  au plus un point de  $E_2$ , ces définitions sont équivalentes et elles sont des réécritures directes de la définition classique de continuité d'une fonction. Ainsi, nous remarquons que la multi-fonction définie par son graphe  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |y| \leq |x|\}$  est semi-continue inférieurement et supérieurement. Par contre, la multi-fonction définie par son graphe  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |y| \leq 1 \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } y = 0 \text{ pour } x = 0\}$  est semi-continue inférieurement mais pas supérieurement en 0. De même une multi-fonction définie par son

graphe  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 0 \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } |y| \leq 1 \text{ pour } x = 0\}$  est semi-continue supérieurement mais pas inférieurement en 0.

De ceci nous pouvons donner une définition de la continuité pour les multi-fonctions :

**Définition 55** Une multi-fonction  $F : E_1 \rightrightarrows E_2$  (ou  $E_1$  et  $E_2$  sont des espaces topologiques de Hausdorff) est continue en  $x \in \text{dom}(F)$ , si elle est semi-continue inférieurement et supérieurement en  $x$ . Elle est dite continue si elle est continue en tout point de son domaine  $\text{dom}(F)$ .

**Théorème 56** Supposons que  $F$  soit définie, convexe, semi-continue supérieurement sur le tonneau

$$\mathcal{T} = \{(t, x) \in \mathcal{I} \times \mathcal{X} : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}, \quad (\text{A.5})$$

avec  $\mathcal{T} \subset \text{dom}(F)$  et  $\forall (t, x) \in \mathcal{T}, \|y\| \leq K$  pour tout  $y \in F(t, x) \neq \emptyset$ . Alors il existe une solution au PC définie sur au moins un intervalle  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ ,  $\alpha = \min(a, \frac{b}{K})$ . ■

**Théorème 57** Soit  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  semi-continue supérieurement :

- si  $\forall (t, x), F(t, x)$  est un compact convexe non vide alors il existe une solution au PC définie sur un ouvert de l'instant initial,
- si de plus il existe deux constantes positives  $c_1$  et  $c_2 : \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \|y\| \leq c_1 \|x\| + c_2$ , pour tout  $y \in F(t, x) \neq \emptyset$ , alors il existe une solution au PC définie sur  $\mathbb{R}$ . ■

## A.4 Problème de Régularisation : solutions au sens de Filippov

Dans de nombreux cas,  $f(t, x)$ , le second membre de (A.3), est défini sur une partition  $\mathcal{X}_p$  de l'espace d'état privé de points d'un ensemble de mesure nulle  $\mathcal{M}$ . Si  $f(t, x)$  est continue sur  $\mathcal{X}_p \setminus \mathcal{M}$ , il est intéressant de considérer la multi-fonction définie par<sup>5</sup>

$$F(t, x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{conv}}(f(t, B_\varepsilon(x) - \mathcal{M})), \quad (\text{A.6})$$

<sup>5</sup>l'intersection de tous les ensembles convexes (respectivement convexes fermés) contenant  $A$  est le plus petit convexe (respectivement convexe fermé) contenant  $A$  : on le note  $\text{conv}(A)$  (respectivement  $\overline{\text{conv}}(A)$ ).

qui est convexe, semi-continue supérieurement et vérifie pour tout  $t$  et tout  $x \in \mathcal{X}_p \setminus \mathcal{M}$  :  
 $F(t, x) = \{f(t, x)\}$ . Une alternative à (A.6) est

$$F(t, x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\text{mes}(\mathcal{N})=0} \overline{\text{conv}}(f(t, B_\varepsilon(x) - \mathcal{N})). \quad (\text{A.7})$$

Dans le cadre des systèmes à structure variable (par exemple commande par modes glissants), la fonction  $f$  n'est pas définie sur une variété  $\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{X} : s(x) = 0\}$  :

$$f(t, x) = \begin{cases} f^+(t, x), & \text{si } s(x) > 0 \\ f^-(t, x), & \text{si } s(x) < 0 \end{cases},$$

ainsi est-on amené à considérer (A.6) qui se construit en utilisant :

$$F(t, x) = \begin{cases} f(t, x), & \text{si } s(x) \neq 0 \\ \overline{\text{conv}}\left(\lim_{x \rightarrow x^* \in \mathcal{S}} f(t, x)\right) = \overline{\text{conv}}\{f^+(t, x), f^-(t, x)\}, & \text{si } s(x) = 0 \end{cases}$$

Dans ce cadre, en notant

$$\mathcal{X} = \begin{cases} \mathcal{X}^+ & \text{si } s(x) > 0 \\ \mathcal{X}^- & \text{si } s(x) < 0 \end{cases},$$

et en définissant  $\text{Pr}_{\text{normal}}$  la projection sur la normale à la surface  $s(x) = 0$  orientée de  $\mathcal{X}^-$  vers  $\mathcal{X}^+$  et les projections des champs de vecteurs  $f^+(t, x)$  et  $f^-(t, x)$  :

$$f_n^+(t, x) = \text{Pr}_{\text{normal}} \lim_{s \rightarrow 0^+} f^+(t, x), \quad (\text{A.8})$$

$$f_n^-(t, x) = \text{Pr}_{\text{normal}} \lim_{s \rightarrow 0^-} f^-(t, x), \quad (\text{A.9})$$

on obtient le résultat d'existence de solution dû à A.F. Filippov [75] :

**Théorème 58** *Soit le système décrit par (A.3), avec  $\mathcal{X} = \mathcal{X}^+ \cup \mathcal{X}^- \cup \mathcal{S}$  et  $\mathcal{M} = \mathcal{S}$ . Supposons qu'il satisfasse :*

$$\exists k \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathcal{X}^+ \cup \mathcal{X}^-, \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq k, (i, j = 1 \dots n).$$

*Soit une fonction  $s$  deux fois différentiable, telle que  $f_n^+$  et  $f_n^-$  soient continues par rapport à  $x$  et  $t$ , pour  $x$  solution de  $s(x) = 0$ . Soit  $h = f_n^+ - f_n^-$  continûment différentiable.*

Si en chaque point de la surface,  $s(x) = 0$ , les inégalités  $f_n^+ < 0$  ou  $f_n^- > 0$  sont vérifiées, alors, dans le domaine  $\mathcal{X}$ , il existe une solution unique (à droite)  $x(t)$  du système (A.3), qui dépend des conditions initiales de façon unique. ■

Pour les inclusions différentielles l'unicité des solutions n'a pas de sens, dans le théorème précédent "solution unique (à droite)" signifie que si à  $t_0$  deux solutions coïncident alors elles coïncideront pour tout  $t \geq t_0$  où elles sont définies.

Ce résultat (similaire aux Théorèmes précédents) a un intérêt pratique immédiat : en effet, lorsque  $f_n^+ < 0$  et  $f_n^- > 0$  la solution du problème (A.3), pour  $x \in \mathcal{S}$  est définie par :

$$\begin{cases} x \in \mathcal{S} \\ \dot{x} = f_0(t, x) \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

avec  $f_0(t, x) \in \overline{\text{conv}} \{f^+(t, x), f^-(t, x)\} \cap T_x \mathcal{S}$ .

La dynamique (dite de "glissement") est alors donnée par :

$$\frac{dx}{dt} = \left[ \frac{\langle ds, f^- \rangle}{\langle ds, f^- - f^+ \rangle} \right] f^+ - \left[ \frac{\langle ds, f^+ \rangle}{\langle ds, f^- - f^+ \rangle} \right] f^-. \quad (\text{A.11})$$

En effet la "convexification" du champ de vecteur s'exprime par  $f_0(x, t) = \alpha f^+(t, x) + (1 - \alpha)f^-(t, x)$  et  $f_0 \in T_x \mathcal{S} \iff \langle ds, f_0 \rangle = 0$ , ce qui conduit à  $\alpha = \left[ \frac{\langle ds, f^-(t, x) \rangle}{\langle ds, (f^-(t, x) - f^+(t, x)) \rangle} \right]$ .

Enfin, notons que

$$\begin{cases} f_n^+(t, x) < 0 \\ f_n^-(t, x) > 0 \end{cases} \iff s\dot{s} < 0. \quad (\text{A.12})$$

Cette dernière condition est connue sous le nom de condition de glissement (voir [103]).



# Annexe B

## Cas multi-variables

Considérons ici un système possédant plusieurs entrées mis sous la forme :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i = f(x) + G(x)u, \quad (\text{B.1})$$

où  $f$  et les  $g_i$  sont des champs de vecteur suffisamment différentiables, définis sur  $\mathcal{X}$ .

La surface de glissement est maintenant définie par l'intersection de  $m$  variétés suffisamment différentiables et de dimension  $(n - 1)$ , notées  $\mathcal{S}_i$

$$\mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{S}_i = \bigcap_{i=1}^m \{x \in \mathcal{X} : s_i(x) = 0\} = \{x \in \mathcal{X} : s(x) = 0\}$$

où  $s = (s_1(x), \dots, s_m(x))^T$ ,  $s_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , dont les gradients  $\frac{\partial s_i}{\partial x}$  sont fonctionnellement indépendants.  $\mathcal{S}$  est alors une sous-variété de  $\mathcal{X}$ , de rang constant et de dimension  $(n - m)$ .

La loi de commande à structure variable est définie composante par composante par

$$u_i(x) = \begin{cases} u_i^+(x) & \text{si } s_i(x) > 0 \\ u_i^-(x) & \text{si } s_i(x) < 0 \end{cases}.$$

On peut définir de plusieurs façons le régime glissant pour les systèmes possédant plusieurs entrées. D'un côté, on peut considérer qu'un régime glissant apparaît sur chaque surface  $\mathcal{S}_i$  sous l'action de la  $i^{\text{ème}}$  entrée correspondante et, ainsi, sur leur intersection  $\mathcal{S}$ . De façon similaire au cas mono-entrée, on dira alors qu'il existe un *régime glissant* sur  $\mathcal{S}_i$

si pour  $u_i$  et tout  $u_j$  ( $j \neq i$ ) :

$$\lim_{s_i \rightarrow 0^+} \frac{\partial s_i}{\partial x} (f + Gu) < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{s_i \rightarrow 0^-} \frac{\partial s_i}{\partial x} (f + Gu) > 0 . \quad (\text{B.2})$$

Toutefois, la classe de système pour laquelle un régime glissant peut être généré sur chaque surface est très restrictive [159] et, contrairement au cas mono-entrée, la condition (B.2) est seulement suffisante : un régime glissant peut exister sur  $\mathcal{S}$ , et donc sur  $\mathcal{S}_i$ , sans qu'elle soit nécessairement vérifiée. Pour cette raison, plusieurs possibilités pour définir l'existence d'un régime glissant sur  $\mathcal{S}$  peuvent être envisagées.

Les conditions d'invariance de la surface ainsi que les propriétés en régime glissant restent néanmoins les mêmes que pour un système mono-entrée. Ainsi, les conditions d'invariance sont :

$$\begin{cases} s_i = 0 \\ \frac{\partial s_i}{\partial x} [f + Gu_e] = 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m$$

ce qui permet de définir la commande équivalente

$$u_e(x) = - \left[ \frac{\partial s}{\partial x} G(x) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} f(x),$$

qui, dans ce cas, est bien définie si  $\frac{\partial s}{\partial x} G(x)$  est régulière.

Les dynamiques de glissement idéal sont alors données par :

$$\dot{x}_e = \left[ I - G(x) \left[ \frac{\partial s}{\partial x} G(x) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} \right] f(x).$$

Pour les systèmes multi-entrées, la construction des lois de commande assurant l'existence d'un régime glissant s'avère donc plus compliquée puisqu'il faut venir glisser sur l'intersection de  $m$  surfaces alors qu'il existe une interaction entre les différentes commandes pour chaque surface. Cette interaction est déterminée par la structure de  $\frac{\partial s}{\partial x} G$  puisque

$$\dot{s}(x) = \frac{\partial s}{\partial x} f + \left( \frac{\partial s}{\partial x} G \right) u.$$

Il en résulte un conflit d'objectifs, chaque commande essayant d'amener à zéro sa surface respective.

Schématiquement, suivant les propriétés structurelles du système envisagé, plusieurs stratégies peuvent être appliquées [56, 57, 153].

- La première est la méthode dite de hiérarchisation des contrôles, proposée par Utkin [158, 159], qui consiste à amener graduellement le système à l'intersection de toutes les surfaces. Partant d'une condition initiale quelconque, on suppose qu'un régime glissant peut être généré sur  $S_i$  par l'intermédiaire de  $u_i$ , et ceci quelle que soit l'action des autres commandes, qui sont alors vues comme des perturbations. Une fois qu'on a convergé sur  $S_i$ , une autre commande  $u_j$  est supposée diriger les trajectoires vers une autre surface  $S_j$ , qui intersecte  $S_i$ , toujours indépendamment des autres commandes (ceci n'affecte pas le régime glissant sur  $S_i$ ). On réalise la même procédure ainsi de suite jusqu'à obtenir la convergence sur l'intersection des  $m$  surfaces de glissement (Figure B-1);

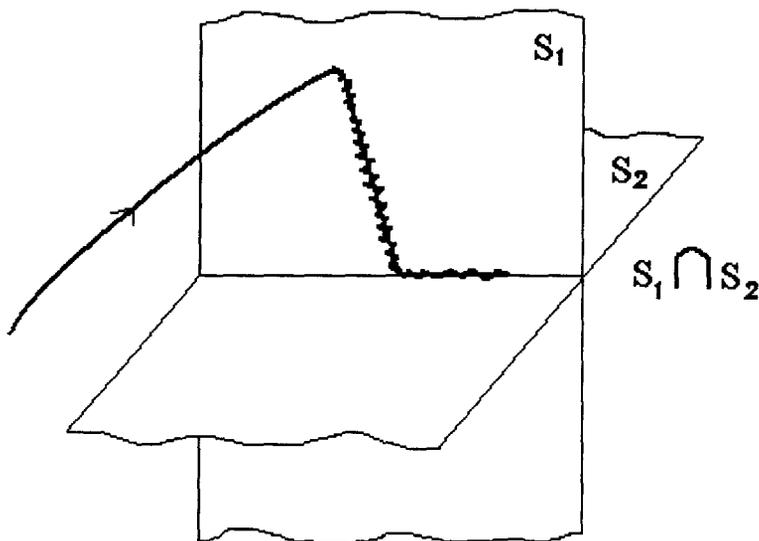


FIG. B-1:

- une autre solution est envisageable lorsque, par un retour d'état, on peut rendre diagonale la matrice  $\frac{\partial s}{\partial x}G$ . Les dérivées de chaque surface s'expriment alors de la façon suivante

$$\dot{s}_i(x) = \alpha_i(x) + \beta_{ii}(x)u_i,$$

ce qui signifie que l'évolution de chaque surface est découplée vis-à-vis des com-

mandes. De cette façon, on est ramené au cas de  $m$  sous-systèmes mono-entrée sur lesquels on sait générer un régime glissant, indépendamment les uns des autres.

Ces deux stratégies conduisent à des procédures relativement simples si le système s'y prête bien. Toutefois, cela implique une forte sollicitation des actionneurs étant donné que la commande commute autour de beaucoup plus de points que ceux constituant la surface de glissement  $\mathcal{S}$ . De plus, il existe des situations où, lors d'étapes intermédiaires, une des commandes éloigne les trajectoires du système de l'objectif prédéfini (en l'occurrence  $\mathcal{S}$ ) en imposant un mode glissant sur d'autres sous-ensembles de surfaces ;

- Un moyen d'éviter ces problèmes est de forcer le régime glissant à n'apparaître qu'à l'intersection de l'ensemble des surfaces. La loi de commande est continue sur les surfaces, prises individuellement, et seulement discontinue à leur intersection. Dans cette optique, la loi de commande suivante, appelée *unit vector approach*, a été proposée par Spurgeon et al. [63, 153], pour un système linéaire avec  $s = Cx$  :

$$u = u_e - \frac{\rho Cx}{\|Cx\|}$$

ou

$$u = u_e - \frac{\rho Mx}{\|Nx\|},$$

où les matrices  $M$  et  $N$  sont telles que

$$\ker M = \ker N = \ker C.$$

# Annexe C

## Preuve du Théorème 20 sur la convergence de l'algorithme du twisting

Grâce aux hypothèses sur les gains  $\lambda_m$  et  $\lambda_M$ , on peut montrer que les trajectoires du système (2.14) dans le plan de phase  $(y_1, y_2)$  sont inscrites à l'intérieur de deux trajectoires limites définies par les bornes des fonctions  $\chi$  et  $\zeta$  ( $\pm C_0$ ,  $K_m$  et  $K_M$ ) et qui convergent toutes deux en temps fini vers l'origine (voir Figure C-1).

Montrons que, dans le cas de la limite extérieure, le système converge en temps fini vers l'origine.

Sans perte de généralité, on peut considérer que  $y_1(0) = 0^+$ ,  $y_2(0) > 0$ . Considérant (2.18), le système devient

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\lambda_M K_m + C_0 \end{cases},$$

ce qui donne par intégration

$$\begin{cases} y_2 = (-\lambda_M K_m + C_0) t + y_2(0) \\ y_1 = (-\lambda_M K_m + C_0) \frac{t^2}{2} + y_2(0)t \end{cases}.$$

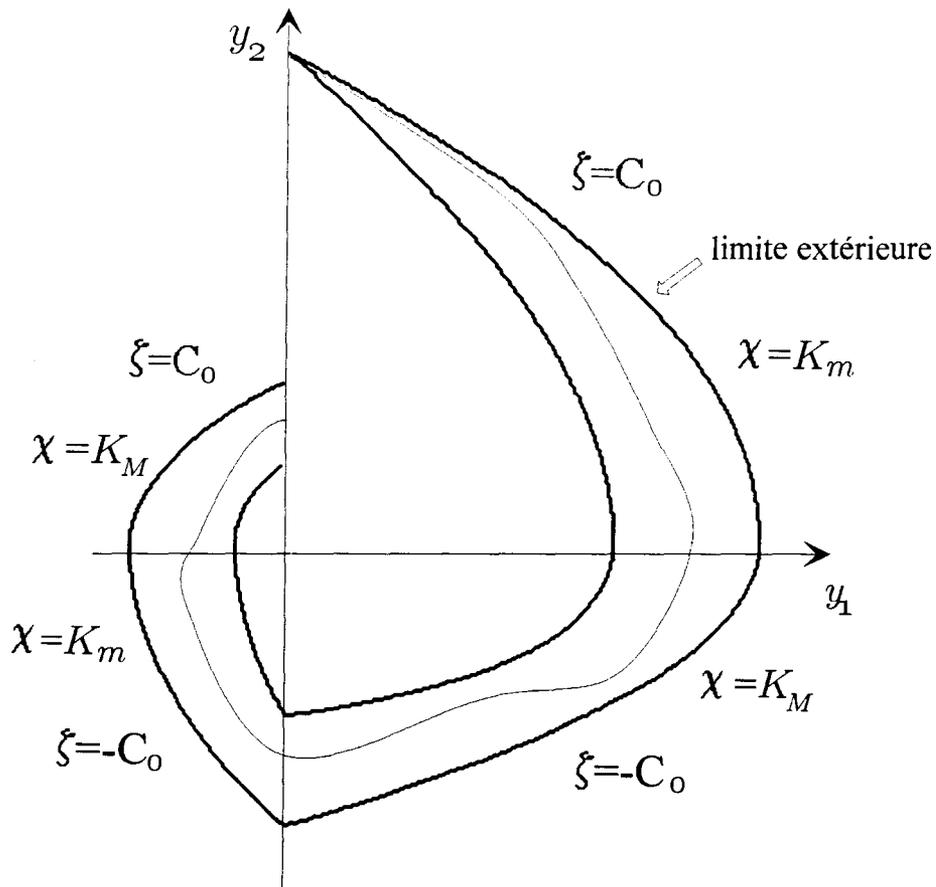


FIG. C-1: Trajectoires limites (en trait plein)

Puisque, par hypothèse,  $\lambda_M > \frac{C_0}{K_m}$ ,  $y_2$  décroît et s'annule pour

$$t_1 = \frac{y_2(0)}{\lambda_M K_m - C_0},$$

où

$$y_1(t_1) = \frac{y_2^2(0)}{2(\lambda_M K_m - C_0)}.$$

La commande commute alors étant donné que  $y_1 y_2$  change de signe. On a maintenant  $y_1(0) > 0$ ,  $y_2(0) = 0^-$  et le comportement du système est donné par les équations

$$\begin{cases} y_2 = -(\lambda_m K_M + C_0) t \\ y_1 = -(\lambda_m K_M + C_0) \frac{t^2}{2} + \frac{y_2(0)}{2(\lambda_M K_m - C_0)} \end{cases}$$

$y_1$  et  $y_2$  décroissent et la surface  $y_1 = 0$  est atteinte pour le temps

$$t_2 = \sqrt{\frac{1}{(\lambda_M K_m - C_0)(\lambda_m K_M + C_0)}} y_2(0),$$

où l'on a

$$y_2(t_1 + t_2) = -\sqrt{\frac{(\lambda_m K_M + C_0)}{(\lambda_M K_m - C_0)}} y_2(0).$$

$u$  commute alors une nouvelle fois et le système évolue dans la partie du plan  $y_1(0) < 0$ ,  $y_2(0) < 0$  jusqu'au nouvel instant de commutation donné par

$$t_3 = \frac{1}{\lambda_M K_m - C_0} \sqrt{\frac{(\lambda_m K_M + C_0)}{(\lambda_M K_m - C_0)}} y_2(0),$$

et

$$y_2(t_1 + t_2 + t_3) = 0$$

$$y_1(t_1 + t_2 + t_3) = -\frac{1}{2} \frac{(\lambda_m K_M + C_0)}{(\lambda_M K_m - C_0)^2} y_2^2(0).$$

Le dernier quadrant du plan de phase est alors parcouru et, en procédant comme précédemment, on obtient que la loi de commande commute après un temps

$$t_4 = \frac{\omega_1(0)}{(\lambda_M - \Pi)},$$

où l'état a pour valeur

$$y_1(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = 0$$

$$y_2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = \frac{(\lambda_m K_M + C_0)}{(\lambda_M K_m - C_0)} y_2(0).$$

A ce stade, on peut remarquer qu'on est revenu au même point dans le plan de phase qu'au début de l'algorithme, si ce n'est que la condition initiale sur  $y_2$  est maintenant donnée par

$$y_2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = r y_2(0)$$

avec

$$r = \frac{(\lambda_m K_M + C_0)}{(\lambda_M K_m - C_0)},$$

qui est inférieur à un puisque par hypothèse,  $K_m \lambda_M - C_0 > K_M \lambda_m + C_0$ . Le temps total mis pour effectuer cette rotation est de

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{1}{\lambda_M - \Pi} (1 + \sqrt{r}) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{r}}\right) \omega_1(0),$$

soit

$$T = \frac{1}{\lambda_M K_m - C_0} (1 + \sqrt{r}) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{r}}\right) y_2(0).$$

Il apparaît donc que, dans le plan de phase  $(y_1, y_2)$ , les trajectoires décrivent un nombre infini de spirales tout en convergeant en temps fini vers l'origine. En effet, la surface de Poincaré  $\{y_1 = 0, y_2 > 0\}$  est traversée à chaque  $k^{\text{ième}}$  rotation à l'instant  $\tilde{t}_k = \sum_{i=0}^{k-1} T_i$  où  $T_i = r^i T$ , et on peut montrer facilement que  $y_2(\tilde{t}_k) = r^k y_2(0)$  et  $y_1(\tilde{t}_k + r^k t_1) = r^{2k} y_1(t_1)$ . Donc, les fonctions  $y_1$  et  $y_2$  décroissent avec une progression géométrique et atteignent la surface de glissement  $y_1 = y_2 = 0$  dans un temps fini égal à

$$\tilde{t}_\infty = \sum_0^\infty T_i = T \left( \frac{1}{1-r} \right).$$

**Remarque 59** *L'hypothèse de considérer des conditions initiales appartenant à la surface  $\{y_1 = 0, y_2 > 0\}$  apparaît justifiée car il a été montré que celle-ci était traversée périodiquement.*





# Bibliographie

- [1] D.V. Anosov, "On stability of equilibrium points of relay systems", *Automation and remote control*, Vol. 2, pp. 135-149, 1959.
- [2] A. Astolfi et A. Rapaport, "Robust stabilization of the angular velocity of a rigid body", *Systems & Control Letters*, Vol. 34, pp. 257-267, 1998.
- [3] D. Aeyels, "Stabilization by smooth feedback of the angular velocity of a rigid body", *Systems & Control Letters*, Vol. 5, pp. 59-63, 1985.
- [4] D. Aeyels et M. Szafranski, "Comments on the stability of the angular velocity of a rigid body", *Systems & Control Letters*, Vol. 10, pp. 35-39, 1988.
- [5] J-P. Aubin et A. Cellina, "Differential Inclusions", dans la collection *Grundlehren der math. Wissenschaften 264*, Editeur Springer-Verlag, 1984.
- [6] J-P. Aubin et H. Frankowska, "Set-Valued Analysis", dans la collection *System & Control : Foundations & Applications*, Editeur Birkhauser, 1990.
- [7] S. K. Bag, S. K. Spurgeon et C. Edwards, "Dynamic Output Feedback Sliding Mode Design for Linear Uncertain Systems", *Proceedings of the 35<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, December 1996.
- [8] J.P. Barbot, T. Boukhobza et M. Djemaï, "Sliding mode observer for triangular input form", *Proceedings of the 35<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, December 1996.
- [9] J.-P. Barbot "Discretization issues", *Sliding mode in Automatic Control*, International School in Automatic Control of Lille, Lille, 1999.
- [10] G. Bartolini et T. Zolezzi, "Control of nonlinear variable structure systems", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 118, pp. 42-62, 1986.

- [11] G. Bartolini et T. Zolezzi, "Dynamic output feedback for observed variable-structure control systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 7, pp. 189–193, 1986.
- [12] G. Bartolini et P. Pydynowski, "An improved, chattering free, V.S.C. scheme for uncertain dynamical systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, pp. 1220-1226, 1996.
- [13] G. Bartolini, A. Ferrara et E. Usai, "Applications of a sub-optimal discontinuous control algorithm for uncertain second order systems", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 7, No 4, pp. 299-310, 1997.
- [14] G. Bartoloni and A. Ferrara, "Real-time output derivatives estimation by means of higher order sliding modes", Tunisia, 1998.
- [15] G. Bartolini, A. Ferrara et E. Usai, "Chattering Avoidance by Second-Order Sliding Mode Control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No 2, pp. 241-246, 1998.
- [16] G. Bartolini, A. Pisano et E. Usai, "Digital second order sliding mode control of SISO uncertain nonlinear systems", *Proceedings of the 1998 American Control Conference ACC98*, pp. 119-124, 1998.
- [17] G. Bartolini, A. Ferrara, A. Levant et E. Usai, "On second order sliding mode controllers", *Proceedings of the 5<sup>th</sup> Int. Workshop on VSS*, Longboat Key, Florida, 1998.
- [18] G. Bartolini, A. Pisano et E. Usai, "A digital 2-sliding control algorithm for a class of uncertain nonlinear plants", *Proceedings of the ECC*, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [19] G. Bartolini, A. Levant, A. Pisano et E. Usai, "2-sliding mode with adaptation", *Proceedings of the 7<sup>th</sup> IEEE Mediterranean Conference on Control and systems*, Haifa, Israel, 1999.
- [20] G. Bartolini, A. Ferrara et E. Usai, "On multi-input second order sliding mode control of nonlinear systems with uncertainty", *Proceedings of the 38<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Phoenix, USA, December 1999.
- [21] S. Behtash. "Robust output tracking for non-linear systems", *International Journal of Control*, Vol. 51, No.6, pp. 1381-1407, 1990.

- [22] A. Bellini, G. Figalli et G. Ulivi, "Analysis and design of microcomputer-based observer for an induction motor", *Automatica*, Vol. 24, No 4, pp. 549-555, 1988.
- [23] M. Bennani et P. Rouchon, "Robust stabilization of flat and chained systems", *Proceedings of the European Control Conference*, Rome, Italy, 1995.
- [24] F. Blashke, "The principle of field orientation as applied to the new transvector closed-loop control system for rotated-field machines", *Siemens Review*, 1972.
- [25] A. Bloch et S. Drakunov, "Stabilization and tracking in the nonholonomic integrator via sliding mode", *Systems and Control Letters*, Vol. 29, pp. 91-99, 1996.
- [26] T. Boukhobza, M. Djemai et J-P. Barbot, "Nonlinear sliding observer for systems in output and output derivative injection form", *Proceedings of IFAC World Congress*, Vol. E, pp. 299-305, 1996
- [27] T. Boukhobza, "Contribution aux formes d'observabilité pour les observateurs à modes glissants et étude des commandes par ordres supérieurs", Thèse de Doctorat, Université de Paris Sud, Orsay, 1997.
- [28] T. Boukhobza et J-P. Barbot, "High order sliding mode observer", *Proceedings of the 37<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Tampa, USA, 1998.
- [29] D. Boutat et J.-P. Barbot, "Characteristic numbers and normal form for a class of driftless systems in a one-dimension submanifold neighbourhood", *Proceedings of the 38<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Phoenix, USA, December 1999.
- [30] R.W. Brockett, "Asymptotic stability and feedback stabilization", *Differential Geometric Control Theory*, R.W. Brockett, R.S. Millman and H.J. Sussmann, Eds., Birkhauser, 1983.
- [31] K. Busawon H. Hammouri, A. Yahoui et G. Grellet, "A nonlinear observer for induction motors", *Electric Machines and Power Systems*, 1999.
- [32] L. Bushnell, D. Tilbury et S.S. Sastry, "Steering three-input chained form non-holonomic systems using sinusoids : The fire truck example", *Proceedings of the European Control Conference*, 1993.
- [33] Byrnes, C.I. et Isidori, A., "On the stabilization of rigid spacecraft", *Automatica*, Vol. 27, pp. 87-95, 1991.

- [34] C. Byrnes, A. Isidori et J.C. Willems, "Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, pp. 1228-1240, 1991.
- [35] C. Canudas de Wit et J.J.E. Slotine, "Sliding observers in robot manipulators", *Automatica*, Vol. 27, No 5, pp. 859-864, 1991.
- [36] C. Canudas de Wit, N. Fixot et K.J. Astrom, "Trajectory tracking in robot manipulators via nonlinear estimated state feedback", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 8, No 1, pp. 138-144, 1992.
- [37] C. Canudas de Wit et H. Khenouf, "Quasi continuous stabilizing controllers for nonholonomic systems : design and robustness considerations", *Proceedings of the European Control Conference*, Rome, Italy, 1995.
- [38] C. Canudas de Wit, R. Ortega et I. Mareels, "Indirect Field-oriented Control of Induction Motors is Robustly Globally Stable", *Automatica*, Vol. 32, No 10, pp. 1393-1402, 1996.
- [39] C. Canudas de Wit, "Commande des machines asynchrones", Vol. II, Optimisation, Discrétisation, et Observateurs, Ed. Hermès, 2000
- [40] J.-P. Caron et J.-P. Hautier, "Modélisation et commande de la machine asynchrone", *Editions Technip*, 1995.
- [41] Y. Chapuis, D. Roye et S. Courtine, "Commande directe du couple d'une machine asynchrone par le contrôle direct de son flux statorique", *Journal de Physique III*, pp. 863-880, 1995.
- [42] F.H. Clarke, "Optimization and Nonsmooth Analysis", *Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts*, Editeur Wiley-Interscience, 1983.
- [43] F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, R.J. Stern et P.R. Wolenski, "Nonsmooth analysis and control theory", *Graduate Texts in Mathematics 178*, Springer Verlag, New-York, 1988.
- [44] E. Cheres, S. Gutman et Z.J. Palmor, "Stabilization of uncertain dynamic systems including state delay", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 11, p. 1199-1203, 1989.

- [45] J.M. Coron et E. Kerai, "Explicit feedbacks stabilizing the attitude of a rigid spacecraft with two control torques", *Automatica*, Vol. 32, pp. 669-677, 1996.
- [46] A. Damiano, G. Gatto, I. Marongiu, A. Pisano et E. Usai, "Rotor speed estimation in electrical drives via digital second order sliding differentiator", *Proceedings of the European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [47] D. M. Dawson, J. Hu et T.C. Burg, "Nonlinear control of electric machinery", *Marcel Dekker, Inc* 1998.
- [48] R.A. De Carlo, S.H. Żak et G.P. Matthews, "Variable structure control of nonlinear variable systems : a tutorial", *Proceedings of IEEE*, Vol. 76, pp. 212-232, 1988.
- [49] I. El Hassan, X. Roboam, B. Defornel et E.V. Westerholt, "Torque dynamic behaviour of the induction motor. DTC in four quadrants operation", *IEEE ISIE 97 Conf.*, Guimaraes, July 1997.
- [50] A. De Luca et G. Ulivi, "Design of exact nonlinear controllers for induction motors", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No 12, pp. 1304-1307, 1989.
- [51] M. Depenbrock, "Direct self-control (dsc) of inverted-field induction machine", *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol. 3, No 4, 1988.
- [52] M. Djemaï, J. Hernandez et J-P. Barbot, "Nonlinear control with flux observer for a singularly perturbed induction motor", *Proceedings of the 32<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, San Antonio, USA, pp. 3391-3396, 1993.
- [53] M. Djemaï, T. Boukhobza, J-P. Barbot, J-L. Thomas et S. Poullain, "Rotor speed and flux nonlinear observer for speed sensorless induction motor", *Proceedings of the 37<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Tampa, USA, 1998.
- [54] M. Djemaï, J.P. Barbot et T. Boukhobza, "Some comments on higher order sliding modes", *Proceedings of the European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [55] M. Djemaï, J.P. Barbot, A. Glumineau et R. Boisliveau, "Nonlinear flux sliding mode observer", *Proceedings of the IEEE CSCC99*, IMACS, Athens, Greece, 1999.
- [56] C.M. Dorling et A.S.I. Zinober, "Robust hyperplane design in multivariable structure control systems", *International Journal of Control*, Vol. 43, No 5, pp. 2043-2054, 1988.

- [57] S. Drakunov, D. Izosimov, A. Luk'yanov, V. Utkin et V. Utkin, "Block control principle I&II", *Avtomatika i Telemekhanika*, No 5, pp. 38-47, 1990, No 6, pp. 20-31, 1990.
- [58] S. Drakunov, "Sliding mode observer based on equivalent control method", *Proceedings of the 31<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2368-2369, 1992.
- [59] S.V. Drakunov, V.I. Utkin, "Sliding mode control in dynamic systems", *International Journal of Control*, Vol. 55, No 4, pp. 1029-1037, 1992.
- [60] S. Drakunov et V. Utkin, "Sliding mode observers. Tutorial", *Proceedings of the 34<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, New-Orleans, USA, 1995.
- [61] B. Drazenovic, "The Invariance Conditions in Variable Structure Systems", *Automatica*, Vol. 5, No 3, pp. 287-295, 1969.
- [62] C. Edwards et S. Spurgeon, "Robust output tracking using a sliding mode controller/observer scheme", *International Journal of Control*, Vol. 64, No 5, pp. 967-983, 1996.
- [63] C. Edwards et S. Spurgeon, "Sliding mode control : theory and applications", Taylor and Francis Eds, 1998.
- [64] O.M.E. El-Ghezawi, A.S.I. Zinober et S.A. Billings, "Analysis and Design of Variable Structure Systems using a Geometric Approach", *International Journal of Control*, Vol. 38, No 3, pp. 657-671, 1983.
- [65] H. Elmali et N. Olgac, "Robust output tracking control of nonlinear MIMO systems via sliding mode technique", *Automatica*, Vol. 28, No 1, pp 145-151, 1992.
- [66] C. El Moucary, "Contribution à l'étude de commandes directes du couple et du flux de la machine à induction", Thèse de doctorat de l'Université Paris XI, Spécialité Génie Electrique, 27 Septembre 2000.
- [67] S.V. Emel'yanov, "On peculiarities of variable structure control systems with discontinuous switching functions", *Doklady ANSSR*, Vol. 153, pp. 776-778, 1963.
- [68] S.V. Emel'yanov, "Variable structure control systems", *Nauka*, 1967.

- [69] S.V. Emel'yanov, S.V. Korovin et L.V. Levantovsky, "Drift algorithm in control of uncertain processes", *Problems of Control and Information Theory*, Vol 15, No 6, pp.425-438, 1986.
- [70] S.V. Emel'yanov, S.V. Korovin et L.V. Levantovsky, "Higher Order Sliding Modes in the Binary Control System", *Soviet Physics*, Vol. 31, No 4, pp. 291-293, 1986.
- [71] S.V. Emel'yanov, S.V. Korovin et L.V. Levantovsky, "Higher Order Sliding Modes in Control Systems", *Differential Equations*, Vol. 29, No 11, pp. 1627-1647, 1993.
- [72] G. Escobar, "On nonlinear control of switching power electronics systems", PH. D Thesis, Université de Paris-Sud, Orsay, Mai 1999.
- [73] F. Esfandiari et H.K. Khalil, "Stability Analysis of a Continuous Implementation of Variable Structure Control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, No 5, pp. 616-620, 1991.
- [74] C.M. Falkner et B. Heck, "Variable structure control with output feedback for nonlinear systems", *Proceedings of the 35<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, 1996.
- [75] A.G. Filippov, "Differential equations with discontinuous right hand-sides. Mathematics and its applications", Kluwer Ac. Pub, 1983.
- [76] M. Fliess, "Generalized Controller Canonical Forms for Linear and Nonlinear Dynamics", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No 9, pp. 994-1000, 1990.
- [77] M. Fliess et F. Messenger, "Sur la Commande en Régime Glissant", *Compte Rendu Académie des Sciences de Paris*, t.313, Série I, pp. 951-956, 1992.
- [78] M. Fliess et H. Sira-Ramirez, "Régime glissants, structures variables linéaires et modules", *Compte Rendu Académie des Sciences de Paris*, t.317, Série I, pp. 703-706, 1993.
- [79] M. Fliess, J. Levine, P. Martin et P. Rouchon, "Flatness and defect of non-linear systems : Introductory theory and examples", *International Journal on Control*, Vol. 61, No 6, pp. 1327-1361, 1995.

- [80] T. Floquet, J.P. Barbot, W. Perruquetti et J.P. Richard, "First and second order sliding mode stabilizing controller for a perturbed regular form", *Proceedings of the 38<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Phoenix, USA, 1999.
- [81] T. Floquet, J.P. Barbot et W. Perruquetti, "One-chained form and sliding mode stabilisation for a nonholonomic perturbed system", *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago, USA, 2000.
- [82] T. Floquet, W. Perruquetti et J.P. Barbot, "Sliding mode stabilization of the angular velocity of a rigid body", *Proceedings of the MTNS*, Perpignan, France, 2000.
- [83] T. Floquet et W. Perruquetti, "Commande par mode glissant d'ordre deux pour la machine asynchrone", *Proceedings of the Conférence Internationale F en Automatique*, Lille, France, 2000.
- [84] T. Floquet, J.P. Barbot et W. Perruquetti, "Second order sliding mode control for induction motor", *Proceedings of the 39<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, 2000.
- [85] T. Floquet, W. Perruquetti et J.P. Barbot, "Angular velocity stabilization of a rigid body via VSS control", *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 122, December 2000.
- [86] T. Floquet, J.P. Barbot et W. Perruquetti, "Higher order sliding mode stabilization for a class of nonholonomic perturbed system", soumis à *Automatica*.
- [87] A.J. Fossard, "Commande à structure variable : poursuite approchée du modèle. Application à l'hélicoptère", *Rapport Technique DERA 167/91*, Décembre 1991.
- [88] A. J. Fossard et T. Floquet, "An Introduction to sliding mode control", in *Sliding Mode Control in Engineering*, Editeurs : W. Perruquetti et J.P. Barbot , Marcel Dekker (à paraître).
- [89] L.M. Fridman, E. Fridman et E.I. Shustin, "Steady modes in an autonomous system with break and delay", *Journal of Differential Equations*, Vol. 29, No 8, 1993.
- [90] L. Fridman et A. Levant, "Sliding modes of higher order as a natural phenomenon in control theory", F. Garofalo, L. Glielmo (Eds), *Robust Control via Variable Structure and Lyapunov Techniques, Lecture Notes in Control and Information Sciences 217*, Springer Verlag, pp. 107-133, 1996.

- [91] K. Furuta, "Sliding mode control of a discrete system", *Systems and Control Letters*, Vol. 14, pp.145-152, 1990.
- [92] A. Glumineau, M. Hamy, C. Lanier et C. H. Moog, "Robust Control of a Brushless Servo Motor via Sliding Modes Techniques", *International Journal of Control*, Vol. 58, No 5, pp. 979-990, 1993.
- [93] A. Glumineau, L. C. De Souza Marques et R. Boisliveau, "Sliding modes control of the induction motor : a benchmark experimental test", *Sliding mode in Automatic Control*, International School in Automatic Control of Lille, Lille, 1999.
- [94] J. Guldner et V.I. Utkin, "Tracking the gradient of artificial potential fields : sliding mode control for mobile robots", *International Journal of Control*, Vol. 63, No 3, pp. 417-432, 1996.
- [95] W. Hahn, "Theory and Application of Liapunovs direct Method", Prentice-Hall inc., Englewood Cliffs, N.Y 1963.
- [96] B. Hamel, "Contribution à l'étude mathématique des systèmes de réglage par tout ou rien", 1949.
- [97] B. Heck, "Sliding mode control for singularly perturbed systems", *International Journal of Control*, Vol. 53, pp. 985-1001, 1991.
- [98] R. Hermann et A.J.Krener, "Nonlinear controllability and observability", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 22, pp. 728-740, 1977.
- [99] J. Hernandez et J-P. Barbot, "Sliding observer-based feedback control for flexible joints manipulator", *Automatica*, Vol. 32, No 9, pp. 1243-1254, 1996.
- [100] J. P. Hespanha, S. Liberzon et A. S. Morse, "Towards the supervisory control of uncertain nonholonomic system", Preprint, 1998.
- [101] J. P. Hespanha et A. S. Morse, "Stabilization of nonholonomic integrators via logic-based switching", *Automatica*, Vol. 35, pp. 385-393, 1999.
- [102] A. Isidori, "Nonlinear Control Systems", *Communication and Control Engineering Series, Third edition*. Springer-Verlag, 1995.
- [103] U. Itkis, "Control systems of variable structure", Wiley, New-York, 1976.
- [104] Z.P. Jiang, "Robust exponential regulation of nonholonomic systems with uncertainties", *Automatica*, Vol. 36, pp. 189-209, 2000.

- [105] Z.P. Jiang et H. Nijmeijer, "A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No 2, pp. 265-279, 1999.
- [106] Z.P. Jiang et J.B. Pomet, "Backstepping-based adaptative controllers for uncertain nonholonomic systems", *Proceedings of the 34<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, New-Orleans, USA, 1995.
- [107] H.K. Khalil, "Nonlinear systems", MacMillan Publishing Company, 1992.
- [108] P.V. Kokotovic, H.K. Khalil et J. O'Reilly, "Singular perturbation methods in control : analysis and design", Academic Press, London, 1986.
- [109] I. Kolmanovsky et N.H. McClamroch, "Developments in nonholonomic control problems", *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 15, No 6, pp. 20-36, 1995.
- [110] A. J. Koshkouei et A. S. I. Zinober, "Sliding Mode State Observers for Linear Multivariable Systems", *Proceedings of the 34<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, New-Orleans, LA , December 1995.
- [111] W. Leonhard, "Control of electrical drives", *Springer-Verlag*, Berlin, 1985.
- [112] A. Levant, "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control", *International Journal of Control*, Vol. 58, No. 6, pp. 1247-1263, 1993.
- [113] A. Levant, "Higher order sliding : collection of design tools", *Proceedings of the 4<sup>th</sup> European Control Conference*, Bruxelles, Belgique, 1997.
- [114] A. Levant, "Robust exact differentiation via sliding mode technique", *Automatica*, Vol. 34, No 3, pp. 379-384, 1998.
- [115] A. Levant, "Arbitrary-order sliding modes with finite time convergence", *Proceedings of the 6th IEEE Mediterranean Conference on Control and Systems*, Alghero, Italy, 1998.
- [116] A. Levant, "Controlling output variable via higher order sliding modes", *Proceedings of the European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [117] A.G. Luk'yanov et V.I. Utkin, "Methods of Reducing Equations for Dynamic Systems to a Regular Form", *Automation and Remote Control*, Vol. 42, No 4, pp. 413-420, 1980.

- [118] H. Ludvigsen, R. Ortega, P. Albertos et O. Egeland, "On hybrid control of nonlinear systems under slow sampling : application to induction machines", *Proceedings of the 4<sup>th</sup> IFAC NOLCOS*, Twente, The Netherlands, 1998.
- [119] R. Marino, "High-gain feedback in non-linear control systems", *International Journal of Control*, Vol. 42, No 6, pp. 1369-1385, 1985.
- [120] R. Marino, S. Persada et P. Valigi, "Adaptative Input-Output Linearizing Control of Induction Motors", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No 2, pp. 208-221, 1993.
- [121] R. Mahony, "Non-smooth time-varying control for Lyapunov stabilization of the posture of the unicycle mobile robots", *Proceedings of European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [122] R. M'Closkey et R. Murray, "Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, pp. 614-628, 1997.
- [123] S. Monaco et D. Normand-Cyrot, "An introduction to motion planning under multi-rate digital control", *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Tucson, USA, pp. 1780-1785, 1992.
- [124] P. Morin et C. Samson, "Time-varying exponential stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with two controls", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, pp. 528-534, 1997.
- [125] R. Murray, Z. Li, et S. Sastry, "A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation", *CRC Press, Inc.*, Florida, USA, 1994..
- [126] R. Murray et S. Sastry, "Grasping and manipulation using multifingered robot hands", *Robotics : Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, Ed. R.W. Brockett. American Mathematical Society, 41, pp. 91-128, 1990.
- [127] R. Murray et S. Sastry, "Nonholonomic motion planning : steering using sinusoids", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, pp. 700-716, 1993.
- [128] H. Nijmeijer et A. Van Der Schaft, "Nonlinear dynamical control systems", Springer-Verlag, New-York, 1990.

- [129] R. Outbib et G. Sallet, "Stabilization of the angular velocity of a rigid body revisited", *Systems & Control Letters*, Vol. 18, pp. 93-98, 1992.
- [130] W. Perruquetti, J.P. Richard et P. Borne, "A Generalized Regular Form for Sliding Mode Stabilization of MIMO Systems", *Proceedings of the 36<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, 1997.
- [131] W. Perruquetti, T. Floquet et P. Borne, "A note on sliding observer and controller for generalized canonical forms", *Proceedings of the 37<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Tampa, USA, 1998.
- [132] W. Perruquetti et S. Drakunov, "Finite time stability and stabilization", *Proceedings of the 39<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, 2000.
- [133] J. Pomet, "Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift", *Systems and Control Letters*, Vol. 18, pp. 147-158, 1992.
- [134] J.-P. Richard, M. Dambrine, F. Gouaisbaut, W. Perruquetti, "Sliding control for delay systems : a survey", *numéro spécial Kybernetika : Advances in the analysis and control of time-delay systems*, Editeurs : J.-M. Dion, L. Dugard, S. I. Niculescu (à paraître 2001).
- [135] C. Samson, "Control of chained systems : Application to path following and time varying point-stabilization of mobile robots", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No 1, pp. 64-77, 1995.
- [136] R. Sanchis et H. Nijmeijer, "Sliding controller-sliding observer design for nonlinear systems", *Workshop on Nonlinear and Adaptive Control*, Grenoble, France, 1996.
- [137] S. Sangwongwanich, T. Yonemoto, T. Furuhashi et S. Okuma, "Design of sliding observer for estimation of rotor flux induction motors", *Electrical Engineering in Japan*, Volume 110, No 6, pp. 279-288, 1988.
- [138] B. Lemaire-Semail, F. Bouillault et A. Razek, "Modélisation et commande vectorielle d'un moteur asynchrone saturé avec contrôle dynamique du flux" *Journal de Physique III*, pp. 1509-1528, France, 1991.
- [139] O. Seungrohk et H. Khalil, "Output feedback stabilization using variable structure control", *International Journal of Control*, Vol. 62, No 4, pp. 831-848, 1995.

- [140] H. Sira-Ramirez, "Differential geometric methods in variable-structure control", *International Journal of Control*, Vol. 48, No 4, pp. 1359-1390, 1988.
- [141] H. Sira-Ramirez, "Sliding regimes in general non-linear systems : a relative degree approach", *International Journal of Control*, Vol. 50, No 4, pp. 1487-1506, 1989.
- [142] H. Sira-Ramirez, "Non-linear discrete variable structure systems in quasi sliding mode", *International Journal of Control*, Vol. 54, No 5, pp. 1171-1187, 1989.
- [143] H. Sira-Ramirez, "On the sliding mode control of nonlinear systems", *Systems and Control Letters*, Vol.19. pp. 303-312, 1992.
- [144] H. Sira Ramirez, "On the dynamical sliding mode control of nonlinear systems", *International Journal of Control*, Vol. 57, No 5, pp. 1039-1061, 1993.
- [145] H. Sira Ramirez et S.K. Spurgeon, "On the robust design of sliding observers for linear systems", *Systems and Control Letters*, Vol. 23, pp. 9-14, 1994.
- [146] H. Sira-Ramirez et S. K. Spurgeon, "Robust Sliding Mode Control Using Measured Outputs", *Journal of Math. Systems, Estimation and Control*, Vol. 6, No. 3, pp. 359-362, 1996.
- [147] H. Sira-Ramirez, "A general canonical form for sliding mode control of nonlinear systems", *Proceedings of the European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [148] J-J. Slotine et S.S. Sastry, "Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulator", *International Journal of Control*, Vol. 38, No 2, 1983.
- [149] J.J.E. Slotine, "Sliding controller design for non-linear systems", *International Journal of Control*, Vol. 40, No 2, pp. 421-434, 1984.
- [150] J.J.E. Slotine, J.K. Hedrick et E.A. Misawa, "Nonlinear state estimation using sliding observers", *Proceedings of the 25<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Athens, Greece, 1986.
- [151] J.J.E. Slotine et W. Li, "Applied nonlinear control", Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 1991.
- [152] E.D. Sontag, et H.J. Sussmann, "Further comments on the stability of the angular velocity of a rigid body", *Systems & Control Letters*, Vol. 12, pp. 213-217, 1989.

- [153] S. K. Spurgeon, "Choice of discontinuous control component for robust sliding mode performance", *International Journal of Control*, Vol. 53, No 1, pp. 163-179, 1991.
- [154] W.-C. Su, S. Drakunov et U. Ozguner, "Implementation of variable structure control for sampled data systems", *Proceedings of the IEEE Workshop on Robust Control via Variable Structure and Lyapunov Techniques*, Benevento, Italy, pp. 166-173, 1994.
- [155] H.J. Sussman et P.V. Kokotovic, "The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, No 4, pp. 424-440, 1991.
- [156] D. Tilbury, R. Murray et S. Sastry, "Trajectory generation for the N-trailer problem using Goursat normal form", *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, San Antonio, Texas, pp. 971-977, 1993.
- [157] Y. Z. Tzypkin, "Theory of control relay systems", Moscow : Gostekhizdat, 1955 (en Russe).
- [158] V.I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 22, No 2, pp 212-222, 1977.
- [159] V.I. Utkin, "Sliding Modes in Control Optimization", *Communication and Control Engineering Series*, Springer-Verlag, 1992.
- [160] P. Vas, "Electrical machines and drives : a space-vector theory approach", *Oxford Science Publication*, Clarendon Press, 1992.
- [161] G.C. Verghese et S. Sanders, "Observers for Flux Estimation in Induction Machines", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 35, No 1, pp. 85-94, 1988.
- [162] G. Walsh et L. Bushnell, "Stabilization of multiple input chained form control systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 25, pp. 139-145, 1995.
- [163] E. Yaz et A. Azemi, "Variable structure with a boundary-layer for correlated noise/disturbance models and disturbance minimisation", *International Journal of Control*, Vol 57, No 5, 1993.
- [164] K.K.D. Young, "Asymptotic stability of model reference systems with variable structure control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 22, pp. 279-281, 1977.

- [165] K.D. Young, U. Ozguner et J-X. Xu, "Variable structure control of flexible manipulators", *Variable Structure Control for Robotics and Aerospace Applications*, K.D. Young Editor, New York, Elsevier, pp. 247-277, 1993.
- [166] K.D. Young, V.I. Utkin et U. Ozguner, "A control Engineer's guide to sliding mode control", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 7, No 3, pp. 328-342, 1999.
- [167] M. Zak, "Terminal attractors for addressable memory in neural network", *Physics Letters A*, Vol. 133, pp. 18-22, 1988.
- [168] M. Zhihong et X. H. Yu, "Terminal sliding mode control of MIMO linear systems", *Proceedings of the 35<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, December 1996.
- [169] A.S.I. Zinober, O.M.E. El-Ghezawi et S.A. Billings, "Multivariable-structure adaptive model-following control systems", *Proceedings of IEE*, Vol. 129, pp. 6-12, 1982.
- [170] A.S.I. Zinober, "Variable Structure and Lyapunov Control", London, UK, Springer-Verlag, 1993.

