

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

THÈSE

présentée par

Alexis DEBUT

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université



DANS LA SPÉCIALITÉ: LASERS, MOLÉCULES ET RAYONNEMENT
ATMOSPHERIQUE

COHÉRENCE TEMPORELLE DES LASERS BRILLOUIN À
FIBRE OPTIQUE

Soutenue le 28 septembre 2000 devant le jury composé de :

Bruno MACKÉ	Président du jury
David J. WEBB	Rapporteur
Carlos MONTES	Rapporteur
Jean-Pierre HUIGNARD	Examineur (Thomson CSF)
Jaouad ZEMMOURI	Directeur de thèse
Stéphane RANDOUX	Directeur de thèse

A mes parents.

*“Entre
Ce que je pense,
Ce que je veux dire,
Ce que je crois dire,
Ce que je dis,
Ce que vous avez envie d’entendre,
Ce que vous croyez entendre,
Ce que vous entendez,
Ce que vous avez envie de comprendre,
Ce que vous comprenez,
Il y a dix possibilités qu’on ait des difficultés à communiquer.
Mais essayons quand même...”*

Edmond Wells

Table des matières

Introduction	7
1 Notions fondamentales sur les propriétés spectrales des lasers et sur la diffusion Brillouin	11
1.1 Notions générales...	13
1.1.1 La relation de Schawlow-Townes	13
1.1.2 Le modèle de diffusion de phase	17
1.1.2.1 Propriétés statistiques de la phase du champ	17
1.1.2.2 Caractérisation du champ et calcul du spectre de puissance d'un laser continu	21
1.1.3 Influence du bruit d'amplitude	24
1.1.4 Influence du bruit de pompage	27
1.2 Généralités sur les lasers Brillouin	30
1.2.1 Généralités sur la diffusion Brillouin	30
1.2.1.1 Diffusion Brillouin spontanée	30
1.2.1.2 Diffusion Brillouin stimulée	32
1.2.1.2.1 Mécanisme de la diffusion Brillouin stimulée	32
1.2.1.2.2 Quelques ordres de grandeur	34
1.2.2 Modèle cohérent à trois ondes de la diffusion Brillouin dans les fibres monomodes	36
1.2.2.1 Equation d'évolution de l'onde électromagnétique	36
1.2.2.2 Equation d'évolution de l'onde matérielle	37
1.2.2.3 Modèle cohérent à trois ondes	38
1.2.3 Rappels sur la dynamique du générateur Brillouin, la modélisation et la dynamique du laser Brillouin	40
1.2.3.1 Le générateur Brillouin	40

1.2.3.2	Conditions aux bords caractéristiques du laser Brillouin	40
1.2.3.3	Solutions stationnaires et valeur du seuil	42
1.2.3.4	Principaux comportements dynamiques des lasers Brillouin à fibre optique	45
1.2.3.5	Cohérence temporelle des lasers Brillouin	47
1.2.4	Comparaison entre les différentes sources de bruit dans les lasers Brillouin et les lasers à inversion de population	50
1.3	Conclusion	53
2	Etude théorique et expérimentale de la cohérence temporelle des lasers Brillouin	55
	Linewidth narrowing in Brillouin lasers: Theoretical analysis	57
	Experimental and theoretical study of linewidth narrowing in Brillouin fiber ring lasers	71
2.0.1	Mesure par le principe d'hétérodynage	109
2.0.2	Mesure par un interféromètre de Mach-Zehnder	110
2.0.3	Influence du bruit technique	113
2.1	Complément II: Influence du désaccord en fréquence	116
2.1.1	Ordre de grandeur de la largeur ultime des lasers Brillouin . .	121
2.1.2	Calcul analytique de la largeur ultime d'un laser Brillouin . .	124
3	Dynamique et propriétés spectrales des lasers Brillouin injectés op- tiquement	131
	Dynamical and spectral properties of an optically injected Brillouin fiber laser	132
	Conclusion	147
	Bibliographie	149

Introduction

En 1958, Schawlow et Townes prévoient l'apparition de nouvelles sources cohérentes dans le domaine optique. Ces sources seront bientôt appelées LASER, et elles conduiront à une révolution de la physique fondamentale en donnant naissance à de nouvelles branches de recherche comme la physique des lasers ou l'optique non linéaire. Cette révolution s'est aussi accompagnée de profonds bouleversements dans le domaine des applications, et on trouve couramment ces sources lumineuses dans notre quotidien. On peut citer comme exemple les lecteurs CD ou les DVD. Elles représentent de nos jours des outils indispensables dans de nombreux secteurs comme les télécommunications (internet, liaison téléphonique intercontinentale), la biologie moléculaire (séquençage ADN), la chimie (étude de la dynamique des réactions) ou encore le nucléaire. Dans leur article de référence, Schawlow et Townes établissent la relation donnant la largeur spectrale ultime de ce type de source. Cette propriété fondamentale des lasers est certainement ce qui leur a valu un tel intérêt. Dès la création des premiers lasers en 1960 [Siegman 86], de nombreuses études tant théoriques qu'expérimentales ont porté et portent encore actuellement sur l'étude des propriétés spectrales des lasers. Ces travaux ont donné naissance à une des branches les plus dynamiques de la physique des lasers.

Avec l'apparition des lasers semi-conducteurs, on s'est alors très rapidement intéressé à caractériser l'influence de nombreux paramètres sur la relation de Schawlow-Townes. Des effets de nature plus subtile ont été pris en compte de manière à corriger et "affiner" la compréhension du spectre des lasers; citons par exemple les effets de la saturation du gain ou des fluctuations d'intensité du laser. La relation de Schawlow-Townes est établie pour les lasers conventionnels, fonctionnant sur le principe d'inversion de population. Les lasers conventionnels émettent un rayonne-

ment cohérent grâce au processus d'émission stimulée. Cette relation ne peut donc pas s'appliquer aux lasers Brillouin. En effet, les lasers Brillouin possèdent un mode de fonctionnement différent de celui des lasers classiques. Dans les lasers Brillouin, c'est un processus de diffusion stimulée qui permet l'émission laser. Leur comportement dynamique a fait l'objet de nombreuses études théoriques et expérimentales, et celle-ci est à présent bien cernée. Bien que le premier laser Brillouin ait été réalisé en 1976 par l'équipe de K. O. Hill, aucun travail n'a cependant été encore entrepris pour étudier les propriétés spectrales des lasers Brillouin. Une simple analogie avec les lasers conventionnels ne peut être envisagée puisque ces deux types de laser ne fonctionnent pas suivant des processus identiques. A notre connaissance, une seule "étude" expérimentale a permis de montrer qualitativement que le laser Brillouin pouvait émettre un rayonnement d'une largeur spectrale de quelques dizaines de Hz seulement. Cette observation se trouve encore de nos jours sans aucune explication théorique. C'est dans un contexte encore vierge que s'inscrit notre étude de la cohérence temporelle des lasers Brillouin à fibre optique.

Le premier chapitre de cette thèse a pour objectif d'effectuer quelques rappels sur les propriétés spectrales des lasers. Nous commencerons par décrire la relation de Schawlow-Townes. Cette description sera suivie de la présentation du modèle de diffusion de phase permettant de calculer la largeur spectrale d'un laser conventionnel. L'influence du bruit d'amplitude du laser et du bruit de pompage sur le spectre du laser sera ensuite développée. Dans un deuxième temps, le modèle de la diffusion Brillouin sera établi. Quelques notions de base concernant la dynamique des lasers Brillouin seront alors abordées. Enfin, nous terminerons par une comparaison des différentes sources de bruit existant dans les lasers Brillouin et les lasers conventionnels.

Le second chapitre traitera l'étude théorique et expérimentale de la cohérence temporelle des lasers Brillouin à fibre. Il est essentiellement constitué de deux publications. La première présente des résultats théoriques. Nous établirons une relation analytique liant la largeur spectrale du laser de pompe à celle du laser Brillouin. L'étude expérimentale sera développée dans le deuxième article. Ceci nous permettra de valider la relation analytique calculée dans notre étude théorique. L'aspect théorique y sera aussi développé de façon plus approfondie. Pour conclure ce cha-

pitre, quelques annexes viendront préciser certains points évoqués brièvement dans les deux publications.

Le troisième chapitre sera consacré à une étude de la dynamique et des propriétés spectrales d'un laser Brillouin injecté par une source laser extérieure. Celle-ci s'appuiera sur les résultats théoriques exposés dans les deux précédents chapitres. Une comparaison entre les lasers injectés et les lasers Brillouin injectés sera effectuée. Pour comprendre la dynamique observée, l'étude des propriétés spectrales du laser Brillouin injecté à l'aide des modèles utilisés au cours de ce mémoire terminera ce chapitre.

Chapitre 1

Notions fondamentales sur les propriétés spectrales des lasers et sur la diffusion Brillouin

Introduction

Ce premier chapitre est divisé en deux grandes parties. La première d'entre elles rappellera quelques notions générales sur les propriétés spectrales des lasers. Nous commencerons par évoquer la relation de Schawlow-Townes, qui fixe la largeur spectrale ultime des lasers conventionnels. Les propriétés statistiques de la phase du champ laser seront ensuite présentées. Pour décrire l'évolution temporelle de la phase, nous introduirons le modèle de diffusion de phase pour en arriver naturellement au calcul du spectre de puissance du champ laser. L'étude de l'influence du bruit d'amplitude et du bruit de pompage sur le spectre de puissance d'un laser conclura cette première partie.

Une fois ces généralités sur les propriétés spectrales des lasers exposées, nous aborderons quelques concepts sur la diffusion Brillouin. Nous présenterons succinctement les étapes essentielles de calcul permettant l'établissement du modèle cohérent décrivant la diffusion Brillouin. Dans un second temps, nous effectuerons quelques rappels sur la dynamique des lasers Brillouin. Nous parlerons alors de leur faible largeur spectrale observée expérimentalement. Cette propriété remarquable demeure

sans explication théorique. Afin de poser le cadre de l'étude, nous présenterons une analyse des sources de bruit communes aux lasers Brillouin et aux lasers conventionnels. Celle-ci permettra d'introduire le chapitre suivant consacré à l'analyse de l'influence du bruit de phase du laser de pompe sur la cohérence temporelle des lasers Brillouin.

1.1 Notions générales sur les propriétés spectrales des lasers

1.1.1 La relation de Schawlow-Townes

Un laser est constitué d'une cavité optique dans laquelle est inséré un milieu amplificateur formé d'atomes ou de molécules en état d'inversion de population. L'émission stimulée responsable de l'amplification de la lumière s'accompagne nécessairement d'une faible part d'émission spontanée. Cet effet vient perturber la phase du rayonnement émis suivant un mécanisme que l'on peut aisément comprendre à partir du schéma représenté sur la figure 1.1. On se place pour cela dans le repère complexe tournant à la pulsation ω_0 du rayonnement optique émis par le laser. La figure 1.1 représente pour une valeur de phase donnée $\phi(t)$, le champ complexe \vec{E}_{ω_0} de l'onde dans ce repère :

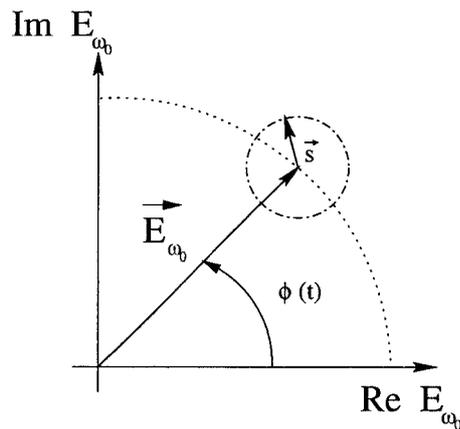


FIG. 1.1 – Représentation graphique de l'influence de l'émission spontanée sur la phase du champ

L'intensité du laser est proportionnelle au carré de l'amplitude du vecteur \vec{E}_{ω_0} ou encore au nombre de photons générés par émission stimulée. Le processus d'émission spontanée est représenté par le vecteur \vec{s} de direction et d'amplitude aléatoire, qui vient perturber l'amplitude et la phase du champ. La composante de \vec{s} parallèle à \vec{E}_{ω_0} entraîne une variation de l'amplitude. Celle-ci est en grande partie corrigée par le mécanisme de saturation du gain du milieu actif : tout accroissement de l'ampli-

tude de l'onde provoque en effet une diminution du gain, ce qui en retour a pour conséquence de diminuer l'amplitude de l'onde. Il en résulte un amortissement des fluctuations d'amplitude de l'onde laser. Ces fluctuations sont donc perturbatives et elles sont habituellement négligées. Par contre, la composante de \vec{s} perpendiculaire à \vec{E}_{ω_0} conduit à une modification de la phase du champ. Comme il n'existe aucun "mécanisme de rappel" pour les fluctuations de la phase, la perturbation apportée va altérer $\phi(t)$. L'accumulation de ces perturbations va faire évoluer la phase du champ de manière appréciable. Ce sont ces fluctuations de phase qui sont à l'origine de l'existence d'une limite ultime à la largeur spectrale des lasers. L'expression de cette limite fut formulée phénoménologiquement en 1958 par analogie avec le fonctionnement du maser [Schawlow et Townes 58]. Elle est donnée par la relation de Schawlow-Townes :

$$\Delta\nu_{S.T.} = \frac{h\nu \cdot \Gamma^2}{4\pi \cdot P_{sortie}}, \quad (1.1)$$

où $\Gamma = -\frac{c}{2L} \ln(R_1 R_2)$ représente le taux de pertes de la cavité. c est la vitesse de la lumière, L la longueur de la cavité et (R_1, R_2) sont les coefficients de réflexion en champ des deux miroirs formant la cavité. P_{sortie} est la puissance de sortie du laser, et $h\nu$ correspond à l'énergie d'un photon émis. Le domaine de validité de cette relation est fixé par un certain nombre de critères. Tout d'abord, l'émission laser doit être de type monomode longitudinal et transverse. La fréquence d'émission du laser doit être située au centre d'une courbe de gain élargie de manière homogène, et les profils du gain et du champ sont supposés être spatialement uniformes dans le milieu. Ceci implique que le produit $R_1 R_2$ doit être de l'ordre de 1, ce qui limite le domaine de validité au cas des faibles couplages extérieurs.

Dans un laser, les conditions précédentes sont rarement vérifiées. Dès que l'on s'écarte des conditions de validité, il faut corriger la relation de Schawlow-Townes. De nombreuses études ont été menées à cette fin, chacune d'elle prenant en compte l'influence d'un paramètre donné. La littérature est trop vaste sur ce sujet pour que nous puissions citer la totalité des travaux effectués. A titre d'exemple, citons l'étude de l'influence de paramètres tels que les larges couplages extérieurs [van Exter *et al.* 95, Goldberg *et al.* 91a, Kuppens *et al.* 94, Hamel et Woerdman 90], la saturation du gain [Goldberg *et al.* 91b, Hamel *et al.* 92] ou les fluctuations d'intensité du la-

ser [Vahala et Yariv 83a] sur la limite ultime de la largeur spectrale des lasers.

Pour donner un ordre de grandeur de la largeur spectrale ultime donnée par la relation de Schawlow-Townes, nous considérerons deux types de laser : le laser à gaz et le laser à semi-conducteur. Pour un laser à gaz de type He-Ne, $\Delta\nu_{S.T.}$ est de l'ordre de la dizaine de mHz [Yariv 87]. Cette valeur n'est pas celle généralement mesurée dans les laboratoires. En effet, différents bruits extérieurs comme les vibrations mécaniques ou les fluctuations thermiques viennent perturber le laser et ils contribuent à modifier de manière significative sa largeur spectrale. Des largeurs de l'ordre de quelques MHz sont alors plutôt obtenues. Ceci rend impossible la mesure de la limite ultime donnée par la relation de Schawlow-Townes. Actuellement, pour réduire ces bruits, on stabilise le laser [Yariv 87, Salomon *et al.* 88] à l'aide de cavités Pérot-Fabry et grâce à des systèmes de contre-réaction. Récemment, la stabilisation sur une durée de quelques dizaines de secondes d'une source laser possédant une largeur spectrale de l'ordre du Hertz a été réalisée et a ainsi permis de se rapprocher de la limite théorique donnée par la relation de Schawlow-Townes [Salomon *et al.* 88, Young *et al.* 99]. Cependant, de tels montages restent encore fort complexes et sont développés dans l'objectif d'obtenir de nouveaux standards métrologiques. Notons toutefois qu'il est possible, dans certaines conditions particulières, de mesurer la largeur ultime de certains lasers à gaz. Il faut pour cela utiliser une cavité de finesse modérée, ce qui revient à imposer à Γ une valeur comparable ou plus grande que la valeur du taux de relaxation de polarisation γ_{\perp} . Dans ce cas précis, Kuppens, Van Exter et Woerdman [Kuppens *et al.* 94] ont mesuré une largeur spectrale de $80 Hz$ pour un laser He-Ne fonctionnant à la longueur d'onde $3.39 \mu m$.

La véritable révolution dans l'étude des propriétés spectrales des lasers s'est déroulée avec l'apparition des lasers à semi-conducteurs. Pour ce type de laser, la longueur de la cavité est de l'ordre de quelques dizaines à quelques centaines de micromètres. La largeur ultime est alors de plusieurs dizaines de MHz . Les effets de bruit thermique ou mécanique sont de ce fait totalement masqués par l'émission spontanée, ce qui rend possible la mesure de la largeur ultime [Vahala et Yariv 83a, Vahala *et al.* 83, Henry 82, van Exter *et al.* 91].

Nous avons décrit l'émission spontanée comme étant un mécanisme perturbant la phase du champ laser \vec{E}_{ω_0} . Pour décrire mathématiquement l'évolution temporelle de cette variable, on utilise couramment le modèle de diffusion de phase [Lax 67, Henry 82] que nous allons maintenant présenter.

1.1.2 Le modèle de diffusion de phase

1.1.2.1 Propriétés statistiques de la phase du champ

Dans notre étude, nous traitons le cas d'un laser de type monomode longitudinal et transverse, polarisé linéairement. On considère aussi que son intensité est stable dans le temps. Le champ électrique émis s'exprime alors sous la forme :

$$E(t) = \frac{1}{2} E_0 \cdot e^{i(\omega_0 t + \phi(t))} + C.C. \quad (1.2)$$

E_0 , ω_0 et $\phi(t)$ sont respectivement l'amplitude, la pulsation et la phase du champ. Pour modéliser l'évolution temporelle de la phase, on s'appuie sur la représentation donnée par la figure 1.1. A chaque instant, la phase $\phi(t)$ augmente d'une quantité aléatoire donnée par la projection du vecteur \vec{s} suivant l'axe perpendiculaire à \vec{E}_{ω_0} . Si on répète un grand nombre de fois ce processus, la phase peut diffuser d'une grande quantité. Elle suit alors une marche au hasard, comme le présente la figure 1.2. Le temps moyen mis par la phase pour diffuser d'une quantité égale à 1 radian

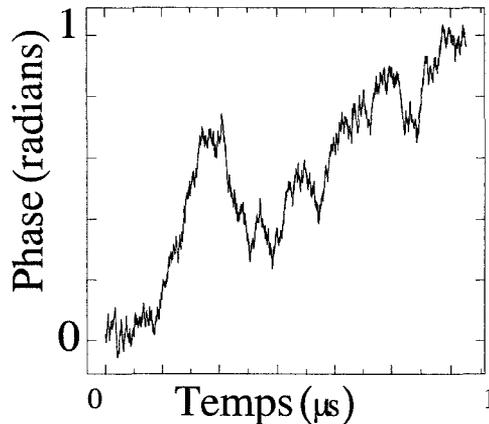


FIG. 1.2 – Exemple d'évolution temporelle de la phase

est appelé le temps de cohérence [van Exter *et al.* 92b]. Par définition, ce temps de cohérence τ_c est lié à la largeur spectrale $\Delta\nu$ de la source par la relation suivante [van Exter *et al.* 92b]:

$$\tau_c \cdot \Delta\nu = \frac{1}{2\pi} \quad (1.3)$$

Ce temps de cohérence peut être mesuré par exemple à l'aide d'un interféromètre de Mach-Zender. Il correspond au temps de retard maximum que l'on peut fixer à l'un des bras de l'interféromètre tout en maintenant observable le phénomène d'interférences. Ce temps de cohérence est donc une mesure de la corrélation temporelle existant entre les deux champs issus de chacun des deux bras de l'interféromètre.

Comme nous l'avons déjà évoqué, l'évolution présentée sur la figure 1.2 est caractéristique d'une marche au hasard, ou processus de Wiener. Ce processus de Wiener suppose que chaque nouvel événement est indépendant du précédent. L'évolution de la variable aléatoire $\phi(t)$ est dans ce cas gouvernée par l'équation de Langevin [Mandel et Wolf 95, Lax 67] qui s'écrit :

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = q(t) \quad (1.4)$$

où $q(t)$ représente un processus aléatoire. Dans le cas d'un laser, $q(t)$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle, ce qui s'écrit :

$$\langle q(t) \rangle = 0 \quad (1.5)$$

Pour rendre compte de l'indépendance des perturbations associées à l'émission spontanée, on introduit la fonction d'autocorrélation de la variable aléatoire $q(t)$. Celle-ci prend la forme suivante :

$$\langle q(t) \cdot q(t') \rangle = Q \cdot \delta(t - t') \quad (1.6)$$

Q décrit l'intensité des fluctuations, et $\delta(t - t')$ est la fonction de Dirac. Comme toute variable aléatoire, la phase $\phi(t)$ se caractérise par une densité de probabilité normalisée $p(\phi)$. $p(\phi)d\phi$ donne la probabilité pour que ϕ se trouve dans l'intervalle $[\phi; \phi+d\phi]$. La connaissance de $p(\phi, t)$ permet d'appréhender les propriétés statistiques de $\phi(t)$. Pour obtenir l'équation de mouvement de la densité de probabilité $p(\phi, t)$, on utilise le formalisme de Fokker-Planck. Dans le cas du processus de Wiener on obtient [Mandel et Wolf 95] :

$$\frac{\partial p(\phi, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 p(\phi, t)}{\partial \phi^2} \quad (1.7)$$

Cette équation est une équation de diffusion, identique dans sa forme à l'équation de la diffusion de la chaleur où la variable $p(\phi, t)$ est simplement remplacée par la

variable température [Mathieu *et al.* 91]. La solution de l'équation 1.7 s'écrit [Mandel et Wolf 95] :

$$p(\phi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{\phi^2}{2Dt}} \quad (1.8)$$

Ceci correspond à une distribution de probabilité gaussienne, de moyenne nulle et d'aire unité (normalisée), dont la largeur et l'amplitude maximale évoluent dans le temps. D est appelé coefficient de diffusion ; c'est le paramètre fixant la vitesse à laquelle la gaussienne s'étale dans le temps. La figure 1.3 représente l'allure de la densité de probabilité pour deux temps donnés t_1 et t_2 , t_1 étant inférieur à t_2 .

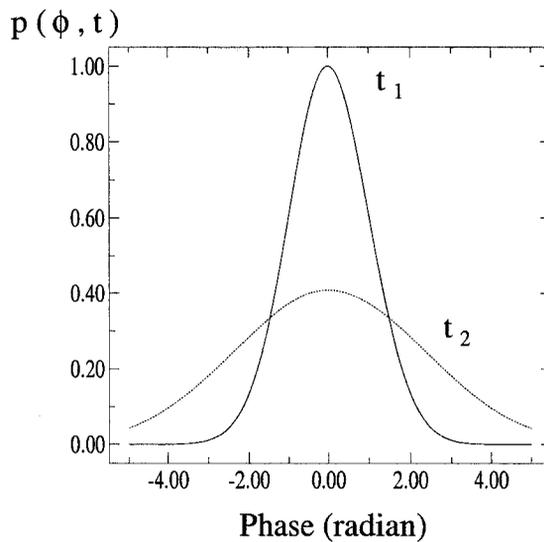


FIG. 1.3 – Tracé des densités de probabilité $p(\phi, t)$ pour $t_1 < t_2$

La distribution de probabilité dépendant du temps, le processus aléatoire $\phi(t)$ est non stationnaire. Pour caractériser $\phi(t)$, il est nécessaire de recourir à un traitement statistique. La moyenne est alors définie par :

$$\langle \phi(t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi^{(n)}(t) \quad (1.9)$$

où les $\phi^{(n)}(t)$ sont les différentes réalisations possibles de la variable aléatoire $\phi(t)$. La figure 1.4 donne trois exemples de réalisations de $\phi(t)$. Comme la phase suit un processus de diffusion, la moyenne temporelle de chacune des réalisations est différente. Par contre, la moyenne statistique de ces réalisations (relation 1.9) est

nulle. La moyenne temporelle étant différente de la moyenne statistique, le processus aléatoire est non stationnaire. Une autre caractéristique de la densité de probabilité est sa variance, ou moment d'ordre deux. Elle mesure la dispersion de ϕ autour de sa valeur moyenne.

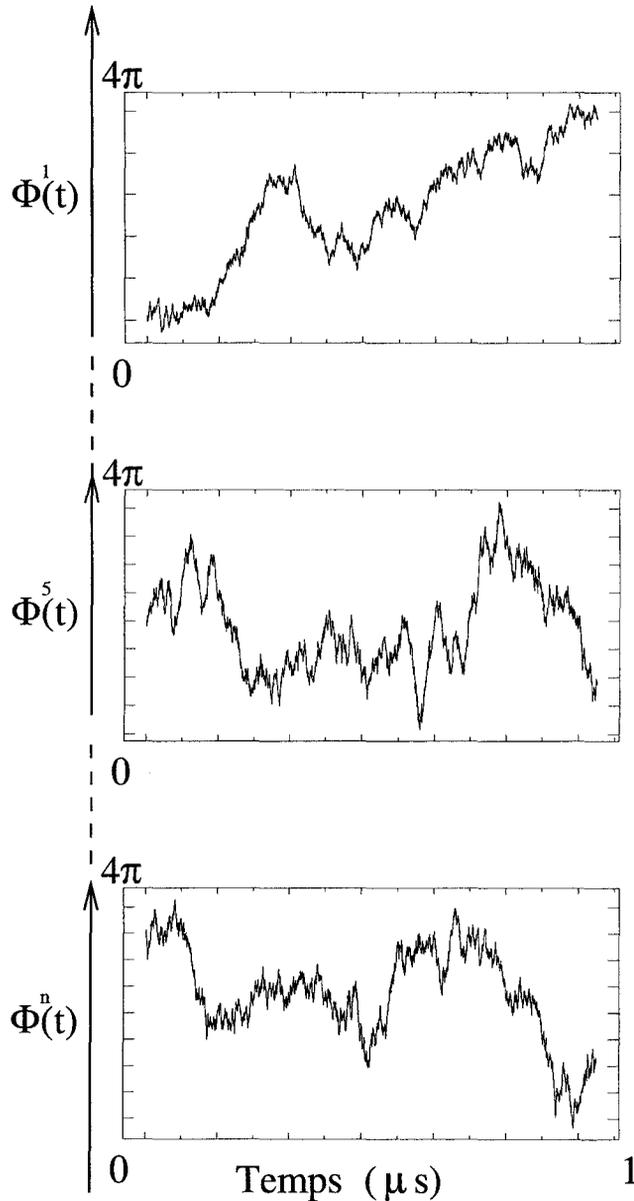


FIG. 1.4 – Exemple d'un ensemble de réalisations de $\phi(t)$

Elle est également obtenue de manière statistique et s'écrit :

$$\langle (\phi(t) - \phi(0))^2 \rangle = \langle (\Delta\phi)^2 \rangle = Dt \quad (1.10)$$

Dans le cas d'un processus de diffusion comme celui de la phase d'un laser, la va-

riance évolue linéairement dans le temps. La variation de la dispersion au cours du temps est clairement mise en évidence sur la figure 1.3. Elle se caractérise par une augmentation de la largeur à mi-hauteur de $p(\phi, t)$. Maintenant que nous avons défini les propriétés statistiques de $\phi(t)$, nous allons étudier en quoi ses fluctuations affectent le champ $E(t)$.

1.1.2.2 Caractérisation du champ et calcul du spectre de puissance d'un laser continu

En présence de fluctuations de phase, on caractérise le champ par sa fonction d'autocorrélation : $C_E(\tau)$, définie par :

$$C_E(\tau) = \langle E(t)E(t+\tau) \rangle \quad (1.11)$$

On remplace le champ $E(t)$ par son expression donnée par l'équation 1.2, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} C_E(\tau) &= \frac{E_0^2}{4} \langle e^{-i\omega_0\tau + i[\phi(t) - \phi(t+\tau)]} + C.C. \rangle \\ &= \frac{E_0^2}{4} \langle e^{i\Delta\phi(t,\tau)} + C.C. \rangle \cdot e^{-i\omega_0\tau} \end{aligned} \quad (1.12)$$

où

$$\Delta\phi(t,\tau) = \phi(t) - \phi(t+\tau) \quad (1.13)$$

Pour connaître $C_E(\tau)$, il faut utiliser l'expression analytique 1.8 de la densité de probabilité $p(\phi, t)$. Ceci nous amène à [Yariv 87] :

$$\langle e^{i\Delta\phi(t,\tau)} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(\Delta\phi(t,\tau)) \cdot e^{i\Delta\phi(t,\tau)} d(\Delta\phi) \quad (1.14)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\langle \Delta\phi(t,\tau)^2 \rangle} \quad (1.15)$$

Or, la valeur de $\langle \Delta\phi(t,\tau)^2 \rangle$ n'est autre que la variance de la densité de probabilité $p(\phi, t)$ calculée précédemment. En remplaçant la valeur trouvée dans l'équation 1.10, la fonction d'autocorrélation prend la forme :

$$C_E(\tau) = \frac{E_0^2}{2} e^{-\frac{1}{2}D|\tau|} \cos \omega_0\tau \quad (1.16)$$

De cette expression, on déduit la densité spectrale de puissance du champ optique en utilisant le théorème de Wiener-Khintchine [Mandel et Wolf 95, Yariv 87]. En effet, la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation d'un processus stationnaire (ici le champ $E(t)$ [Cohen et Lenstra 89]) représente la densité spectrale de puissance du champ. Nous obtenons :

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_E(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (1.17)$$

$$= \frac{E_0^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad (1.18)$$

La densité spectrale de puissance d'un laser possède donc une forme lorentzienne (voir figure 1.5). Celle-ci se caractérise par sa pleine largeur à mi-hauteur $\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi$, donnée par :

$$\Delta\nu = \frac{D}{2\pi} \quad (1.19)$$

La largeur spectrale du champ optique est donc proportionnelle au coefficient de

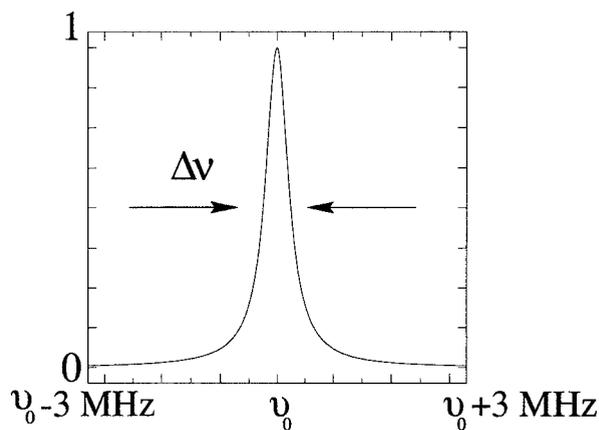


FIG. 1.5 – Densité spectrale de puissance normalisée d'une source laser de largeur spectrale de 500 kHz

diffusion D . Nous rappelons que cette relation n'est valable que dans le cas où les fluctuations d'amplitude dues à l'émission spontanée ne sont pas prises en considération.

Pour décrire le spectre de puissance d'un laser de type monomode longitudinal et transverse nous avons utilisé le modèle de diffusion de phase. Nous avons montré que

la phase est la variable aléatoire clef du modèle. Elle est caractérisée par une loi de probabilité de distribution gaussienne. La largeur à mi-hauteur de cette distribution de probabilité augmente linéairement dans le temps. Plus sa vitesse d'évolution est importante, plus le coefficient de diffusion D est élevé. En calculant la fonction d'autocorrélation du champ $E(t)$ nous en avons déduit le spectre de puissance d'un laser. La forme prise par la densité spectrale de puissance est alors lorentzienne, et sa largeur à mi-hauteur est proportionnelle au coefficient de diffusion D . Actuellement, il existe d'autres théories permettant de modéliser le spectre de puissance de diverses sources de lumière. A titre d'exemple, nous citerons le modèle dit "en champ gaussien complexe" qui décrit le comportement d'une source thermique [Walser et Zoller 94]. Dans le cadre du modèle de diffusion de phase, nous avons aussi considéré que les fluctuations d'amplitude étaient inexistantes. Or, dans la réalité, l'intensité du laser fluctue. Nous allons maintenant chercher à caractériser l'influence des fluctuations d'intensité sur les propriétés spectrales du rayonnement émis par le laser.

1.1.3 Influence du bruit d'amplitude

Dans le modèle de diffusion de phase, nous avons négligé les fluctuations d'amplitude du laser. Même si l'influence de l'émission spontanée sur l'amplitude du champ est compensée par un mécanisme de relaxation dû à la saturation du gain du milieu actif, il se trouve que cet effet perturbatif est observé expérimentalement sur le spectre de puissance de certains lasers. C'est notamment le cas pour les lasers à semi-conducteurs. Du fait des fortes non linéarités présentes au sein du milieu, la perturbation amenée par les fluctuations d'amplitude est amplifiée, ce qui vient modifier de façon conséquente le spectre de puissance du laser. Pour expliquer l'influence de ces fluctuations d'amplitude sur la densité spectrale de puissance, il faut permettre à l'amplitude du champ de fluctuer dans l'équation 1.2. On pose alors :

$$E(t) = \frac{1}{2}(E_0 + \varepsilon(t))e^{i(\omega_0 t + \phi(t))} + C.C. \quad (1.20)$$

où $\varepsilon(t)$ est une variable aléatoire de moyenne nulle représentant les fluctuations d'amplitude. Comme pour la phase, $\varepsilon(t)$ est caractérisée par sa fonction d'autocorrélation. Elle s'écrit [Vahala et Yariv 83a] :

$$\langle \varepsilon(t)\varepsilon(t + \tau) \rangle = W \cdot e^{-2\pi\nu_1|\tau|} \quad (1.21)$$

où W représente l'intensité des fluctuations et ν_1 la fréquence de relaxation du laser. Cette fréquence est propre à chaque laser, et dans le cas des lasers à semi-conducteurs elle vaut en général quelques GHz [van Tarjwijk 94]. Pour calculer l'influence de $\varepsilon(t)$ sur le spectre de puissance d'un laser, on procède de la manière déjà décrite dans le paragraphe précédent. Dans un premier temps, on calcule la variance de la phase, pour ensuite en déduire la fonction d'autocorrélation du champ $C_E(\tau)$. Comme pour le modèle de diffusion de phase, on trouve alors que la variance est composée d'un terme évoluant linéairement dans le temps. Toutefois, on y ajoute maintenant une fonction $f(t)$ oscillant de manière amortie à la fréquence ν_1 [Vahala et Yariv 83b], si bien que :

$$\langle \Delta\phi(t)^2 \rangle = D(t + f(t)) \quad (1.22)$$

La figure 1.6 donne un exemple de l'évolution de la variance dans un cas où la fréquence de relaxation est de $1.6 GHz$.

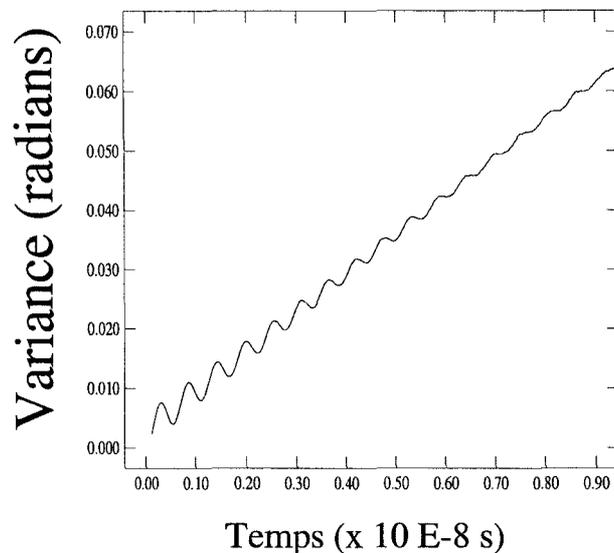


FIG. 1.6 – Variance de la phase dans le cas où la fréquence de relaxation du laser est de 1.6 GHz

De l'expression 1.22, on déduit la fonction d'autocorrélation du champ [Vahala et Yariv 83b] et on trouve alors le spectre de puissance en appliquant le théorème de Wiener-Khintchine. En toute logique, celui-ci n'est pas profondément modifié par la présence de ces fluctuations d'amplitude. Comme le montre la figure 1.7, la densité spectrale de puissance du laser est simplement la superposition de la lorentzienne et de pics dus à la présence des oscillations de relaxation.

L'apparition de pics de relaxation dans le spectre de puissance d'un laser [Vahala *et al.* 83, Yariv et Caton 74, van Exter *et al.* 92a] traduit donc l'effet des fluctuations d'amplitude. Cet effet n'est en général observé que dans les lasers à semi-conducteurs. Par ailleurs, les non linéarités du milieu amplificateur sont généralement responsables de l'existence d'un fort couplage entre les fluctuations d'amplitude et de phase du laser. Cet effet n'a pas été pris en compte dans la description succincte précédemment effectuée. Il est en fait responsable de l'apparition d'une dissymétrie du poids des pics de relaxation du spectre présenté sur la figure 1.7 [Vahala *et al.* 83, van Exter *et al.* 92a].

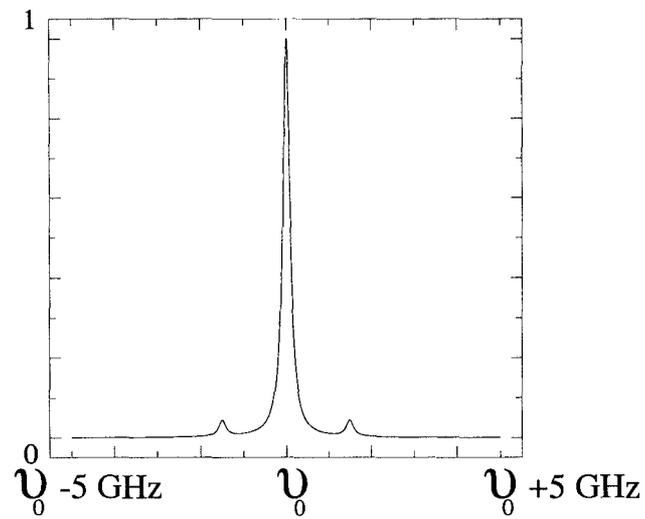


FIG. 1.7 – *Spectre de puissance normalisé d'un laser à semi-conducteur.*

Nous venons de décrire l'influence du bruit d'amplitude sur la cohérence temporelle des lasers. Il nous reste à considérer l'influence du bruit du mécanisme de pompage sur les caractéristiques spectrales du rayonnement émis.

1.1.4 Influence du bruit de pompage

Avant d'évoquer l'influence du bruit de pompage sur la cohérence temporelle des lasers conventionnels, commençons par rappeler brièvement les différents mécanismes utilisés pour inverser la population du milieu actif. Actuellement quatre grands types de pompage sont couramment utilisés pour réaliser l'inversion de population et ainsi permettre l'émission laser.

Les méthodes de pompage fonctionnant sur le principe de la décharge électrique dans un gaz constituent la première catégorie. Lorsque les atomes actifs sont neutres ou ionisés, le pompage réalise l'inversion de population entre deux niveaux électroniques et la transition est généralement située dans l'ultra-violet, le visible ou encore le proche infra-rouge. Les gaz généralement utilisés sont les gaz rares. On peut citer par exemple les lasers à Hélium-Néon et à Argon ionisé. Dans ce type de pompage, le rendement est assez faible, il varie généralement entre 0.1% et 5%. La puissance de sortie de ces lasers varie de quelques mW (pour $He - Ne$ par exemple) à 25 W pour le laser à argon ionisé (Ar^+), et les régimes de fonctionnement peuvent être continus ou pulsés.

L'inversion de population réalisée par courant électrique constitue une autre catégorie. Le pompage électrique est essentiellement utilisé dans les lasers à semi-conducteurs. La gamme spectrale d'émission s'étend entre $0.3 \mu m$ et $3 \mu m$, et la longueur d'onde d'émission dépend du type de matériau utilisé. Les rendements peuvent atteindre 80%, et une puissance de quelques watts dans l'infra-rouge peut ainsi être obtenue.

La catégorie suivante englobe le pompage optique incohérent. C'est le cas des lasers utilisant des lampes flash. Dans le cas du laser $Nd^{3+} : YAG$ par exemple, le rendement atteint généralement quelques pour cent, pour une puissance de sortie de quelques kW en régime d'émission continue.

Finalement, la dernière catégorie concerne le pompage réalisé par des sources optiques cohérentes comme les lasers. On l'utilise pour les lasers à colorants, les lasers solides ($Ti^{3+} : Al_2O_3$, $Nd^{3+} : YAG$), et les rendements sont généralement nettement

supérieurs à ceux réalisés par les autres types de pompage. Par exemple, pour un laser $Nd^{3+} : YAG$, le rendement passe de 1% avec un pompage par lampe flash, à 50% avec un pompage par un laser à semi-conducteur.

Tous ces mécanismes de pompage servent à réaliser et à entretenir l'inversion de population. Ce sont inévitablement des processus bruyants dont on modélise l'influence en ajoutant simplement une source de bruit au paramètre de pompe [Zhu 93]. Pour expliquer qualitativement l'influence du bruit de pompage sur la phase de l'émission laser, nous utiliserons un modèle de laser à quatre niveaux pompé optiquement. Dans la représentation 1.8, le pompage va permettre de réaliser l'inversion

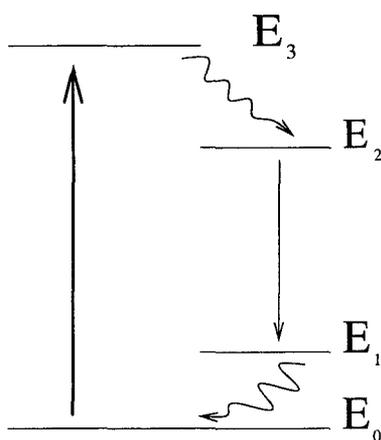


FIG. 1.8 – Représentation schématique d'un modèle à quatre niveaux ($E_0 < E_1 < E_2 < E_3$).

de population entre les niveaux E_1 et E_2 . Le rôle des photons de pompe d'énergie $h\nu_p$ est de faire passer les atomes d'un niveau d'énergie E_0 à un niveau d'énergie E_3 . Habituellement, dans les lasers à inversion de population, il y a désexcitation des atomes vers un niveau E_2 par un mécanisme de relaxation non radiative, c'est à dire sans émission de photons (il peut s'agir par exemple d'une désexcitation par collisions). Cette relaxation non radiative s'effectue spontanément des niveaux d'énergie E_3 vers E_2 . Dans ces conditions, on comprend aisément qu'il n'y ait pas de corrélation entre la phase du rayonnement de pompe et celle du rayonnement créé par émission stimulée entre les niveaux E_2 vers E_1 . Cette description très schématique permet d'expliquer de manière simple l'absence de relation entre la phase du laser de pompe et celle du rayonnement émis. Ceci est d'ailleurs conforté par la vaste lit-

térature traitant de ce sujet. En effet, un traitement semi-classique du laser pompé optiquement montre qu'il n'y a pas de lien de phase entre le champ émis et le champ de pompe [Benkert *et al.* 90, Fox *et al.* 84]. Par contre, il n'en va pas de même pour les fluctuations d'intensité du laser. Les fluctuations d'intensité du pompage vont induire des variations du gain du milieu actif, ce qui se traduira par des fluctuations de l'intensité laser.

Tous ces rappels sur la cohérence temporelle des lasers, et l'influence de divers bruits sur celle-ci, vont permettre de mieux appréhender notre travail consacré à l'étude de la cohérence temporelle des lasers Brillouin. Avant d'étudier les propriétés spectrales des lasers Brillouin, nous rappellerons quelques généralités sur la diffusion Brillouin. Une analyse des sources de bruits communes aux lasers conventionnels et aux lasers Brillouin terminera ce chapitre.

1.2 Généralités sur les lasers Brillouin

1.2.1 Généralités sur la diffusion Brillouin

1.2.1.1 Diffusion Brillouin spontanée

Lorsqu'un faisceau lumineux dit faisceau de pompe traverse un milieu diélectrique, une faible part de celui-ci est diffusée dans toutes les directions. Si l'intensité du faisceau de pompe est très faible, le régime de diffusion est dit spontané. Cette diffusion provient des fluctuations thermiques de l'indice de réfraction du milieu. L'origine de ces fluctuations peut résulter des vibrations moléculaires, des fluctuations d'entropie du milieu (collisions, frictions, transports de chaleur), des fluctuations d'orientation des molécules ou des ondes acoustiques se propageant dans le milieu. Tous les processus se situant à l'origine des fluctuations d'entropie se produisant localement au sein du milieu contribuent au mécanisme de diffusion Rayleigh. Les vibrations des molécules génèrent l'apparition de la diffusion Raman. La propagation des ondes acoustiques au sein du milieu induit quant à elle l'apparition de la diffusion Brillouin.

Dans ce travail, nous nous limitons à une configuration dans laquelle le milieu diélectrique transparent est constitué d'une fibre optique monomode à maintien de polarisation. Compte tenu des longueurs de propagation qui peuvent atteindre plusieurs kilomètres, les fibres optiques sont des systèmes dans lesquels on observe facilement de la diffusion Brillouin. De plus, les fibres optiques permettent un important confinement du champ, ce qui a pour effet d'augmenter la densité d'énergie optique et de favoriser l'apparition des effets non linéaires. La propagation des ondes s'effectuant dans la structure guidante, la diffusion Brillouin n'apparaît que dans la direction de propagation de l'onde de pompe. On peut décrire la diffusion Brillouin spontanée de la façon suivante. Dans la fibre optique des ondes acoustiques se propagent à l'équilibre thermique. Lorsque l'onde de pompe interagit avec une onde acoustique se propageant dans le même sens qu'elle, il y a création d'une onde Stokes. Quand les sens de propagation de l'onde de pompe et de l'onde acoustique sont opposés, le processus de diffusion donne naissance à une onde anti-Stokes (voir figure 1.9).

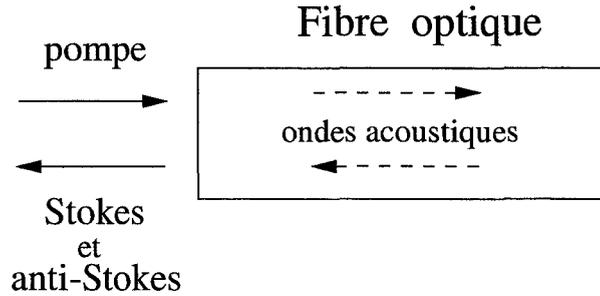


FIG. 1.9 – Diffusion Brillouin spontanée dans une fibre optique

La diffusion Brillouin est soumise à une condition de résonance et une condition d'adaptation des vitesses de phase. Celles-ci s'expriment pour l'onde Stokes par les égalités suivantes :

$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_a \quad (1.23)$$

$$\nu_p = \nu_s + \nu_a \quad (1.24)$$

où les vecteurs \vec{k}_i ($i = p, a, s$) sont respectivement les vecteurs d'ondes de l'onde de pompe, de l'onde acoustique et de l'onde Stokes. Les ν_i ($i = p, a, s$) représentent les fréquences respectives des ondes de pompe, acoustique et Stokes. A une longueur d'onde de 800 nm , la fréquence de l'onde Stokes est inférieure de 20 GHz à celle de l'onde de pompe. La fréquence de l'onde anti-Stokes est supérieure à celle de l'onde de pompe de la même valeur.

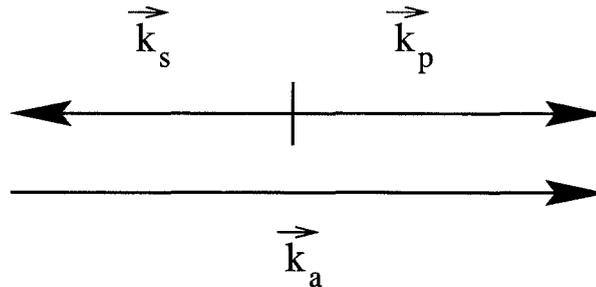


FIG. 1.10 – Diagramme de conservation de l'impulsion dans une fibre optique, dans le cas où l'onde de pompe et l'onde acoustique se propagent dans le même sens. Sur ce schéma, on se limite à une description prenant en compte uniquement l'onde Stokes.

La raie de diffusion présente en fait une certaine largeur spectrale dont l'existence est liée à un amortissement de l'onde matérielle mise en jeu. Dans le cas de la diffusion Brillouin, cet amortissement est exponentiel. Si son temps caractéristique est noté τ , la raie correspondante présente une forme lorentzienne dont la largeur à mi-hauteur vaut :

$$\Delta\nu_B = \frac{1}{\pi\tau} \quad (1.25)$$

Dans une fibre optique, la largeur du spectre de la lumière diffusée vaut généralement une centaine de MHz . Elle dépend de nombreux paramètres extérieurs comme la température ou la contrainte appliquée à la fibre. Cette dépendance est couramment exploitée dans les capteurs de température et de contrainte à fibre [Lecoeuche *et al.* 98].

Finalement, la section efficace différentielle de diffusion par unité d'angle solide représente également une des caractéristiques essentielles de la diffusion Brillouin. Celle-ci traduit l'efficacité du processus de diffusion spontanée et conduit à un coefficient d'atténuation lié à la diffusion de $10^{-6}cm^{-1}$. Autrement dit, après propagation au travers d'un centimètre de milieu diffuseur, seul un millionième de l'énergie incidente aura été diffusée. Comme nous allons maintenant le voir, il est cependant possible de stimuler ce processus de diffusion et de le rendre ainsi beaucoup plus efficace.

1.2.1.2 Diffusion Brillouin stimulée

1.2.1.2.1 Mécanisme de la diffusion Brillouin stimulée

Lorsque le faisceau de pompe devient intense, les variations d'indice du milieu sont induites par le rayonnement lumineux lui-même, et le processus de diffusion Brillouin devient stimulé. Le processus de diffusion Brillouin stimulé s'amorce grâce aux fluctuations d'origine thermique de la densité du matériau.

Le mécanisme fondamental régissant l'interaction couplant les deux ondes optiques et l'onde acoustique est l'électrostriction. C'est un effet qui tend à faire mi-

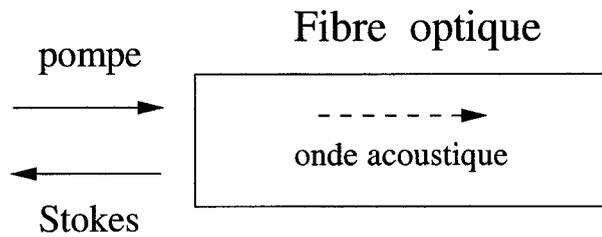


FIG. 1.11 – *Diffusion Brillouin stimulée dans une fibre optique*

grer la matière électriquement neutre, des régions de champ électrique faible vers les régions de champ intense. Dans les fibres, il est à l'origine des variations de densité de matière induites localement par les champs optiques et donc, de la création des ondes Stokes et acoustique. L'électrostriction est généralement couplée à des effets thermiques [Shen 84] résultant d'une part de l'absorption des rayonnements optiques et d'autre part, de l'atténuation des ondes acoustiques. Toutefois, dans les fibres optiques, on considère généralement que l'interaction rayonnement-matière s'accompagne de variations adiabatiques de la densité du coeur de la fibre [Randoux 95] et les effets thermiques peuvent ainsi être négligés. Dans ces conditions, les variations de la constante diélectrique ε de la silice sont uniquement liées aux variations de densité du matériau.

En régime stimulé, l'efficacité de conversion du rayonnement de pompe en rayonnement Stokes peut atteindre plusieurs dizaines de pour cent. Elle est maximale lorsque les conditions d'accord de phase 1.23 et de résonance 1.24 sont vérifiées. Pour illustrer ceci, on peut envisager une situation dans laquelle on introduit dans la fibre une onde de pompe à la fréquence ν_p et une onde de sonde à une fréquence voisine de la fréquence centrale ν_s de la bande de gain Brillouin. On réalise ainsi un amplificateur Brillouin. Dans ce type de configuration "pompe-sonde" (voir figure 1.12), une partie de l'énergie de l'onde de pompe est transférée à l'onde sonde. L'efficacité de conversion est généralement importante et peut atteindre plus de 90%.

Cette efficacité dépend du coefficient de gain g_B qui vaut typiquement $4 \cdot 10^{-11} m/W$ dans un matériau comme la silice. Ce transfert d'énergie du rayonnement de pompe vers le rayonnement de sonde est d'autant plus important que la longueur de la fibre est grande.

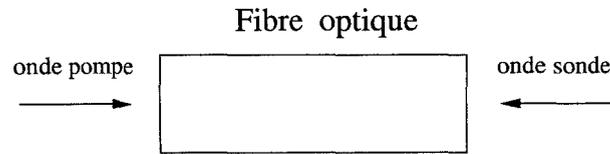


FIG. 1.12 – Exemple d'une configuration pompe-sonde

1.2.1.2.2 Quelques ordres de grandeur

En travaillant avec un faisceau de pompe à la longueur d'onde de 800 nm , longueur d'onde utilisée dans nos expériences, le décalage en fréquence de la raie Stokes vaut 21 GHz . Ce décalage évolue avec la longueur d'onde de pompe, et il vaut par exemple 11 GHz à $1.55\text{ }\mu\text{m}$ (longueur d'onde utilisée dans les télécommunications). La vitesse de propagation de l'onde acoustique dans une fibre en silice est de 5960 m/s .

La largeur à mi-hauteur de la courbe de gain $\Delta\nu_B$ dépend de la composition de la fibre et de la longueur d'onde du faisceau de pompe [Heiman *et al.* 79]. Avec les fibres que nous utilisons pour nos expériences, cette largeur a été estimée à :

$$\Delta\nu_B = 60\text{ MHz} \quad (1.26)$$

Une fois cette valeur connue, on peut déterminer le temps de relaxation τ des phonons dans le matériau. En utilisant la relation 1.25, on trouve que celle-ci est d'environ 6 ns .

Dans cette partie, nous avons considéré que la diffusion Brillouin était le processus de diffusion possédant le gain le plus important. Nous avons négligé les processus de type Rayleigh et Raman. Pour que ceci soit effectivement justifié, il faut que la largeur spectrale $\Delta\nu_p$ du rayonnement de pompe soit faible en comparaison à la largeur $\Delta\nu_B$ de la raie Stokes. Si tel n'est pas le cas, la valeur du gain Brillouin diminue considérablement [Lichtman et Friesem 87]. Pour une largeur de la courbe de gain de 60 MHz , la largeur spectrale du rayonnement de pompe doit être inférieure au MHz . Ceci correspond à nos conditions expérimentales, dans lesquelles le laser de

pompe est un laser Saphir-Titane monomode longitudinal et transverse présentant une largeur spectrale de l'ordre de 500 *kHz*.

1.2.2 Modèle cohérent à trois ondes de la diffusion Brillouin dans les fibres monomodes

Pour établir le modèle de la diffusion Brillouin stimulée dans les fibres, nous allons dans un premier temps rappeler succinctement l'équation d'évolution de l'onde électromagnétique se propageant au sein de la fibre, puis celle de l'onde matérielle. Pour cela nous utiliserons la démarche habituelle qui consiste à supposer qu'une seule onde Stokes est générée lors de l'interaction. Nous aboutirons alors au modèle cohérent à trois ondes.

1.2.2.1 Equation d'évolution de l'onde électromagnétique

Une fibre optique est un milieu diélectrique non magnétique libre de toute charge et de tout courant. Les équations de Maxwell régissent l'évolution des ondes électromagnétiques se propageant dans la fibre. L'équation d'évolution du champ électrique total \vec{E} s'écrit :

$$\nabla \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (1.27)$$

où c est la vitesse de la lumière, et n l'indice du milieu. \vec{P} représente la polarisation du milieu et on peut l'écrire :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \delta\chi \vec{E} \quad (1.28)$$

où ε_0 est la permittivité du vide et $\delta\chi$ représente les variations de la susceptibilité du milieu induites par l'onde acoustique. En supposant que les variations de densité du matériau $\rho'(t)$ ($\rho'(t) = \rho(t) - \rho_0$) sont suffisamment faibles, on écrit que la variation de susceptibilité est proportionnelle aux variations de densité :

$$\delta\chi = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T \delta\rho. \quad (1.29)$$

ρ_0 représente la densité du matériau non perturbé. Nous utilisons maintenant le fait que nous travaillons dans une fibre monomode où la propagation ne s'effectue que dans une seule direction. Les ondes optiques guidées seront assimilées à des ondes planes se propageant suivant l'axe z de la fibre. On néglige donc les termes d'évolution transverses. L'équation d'évolution du champ électrique total s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{2n^2 \gamma_e}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\varepsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T \frac{\partial^2 \rho' \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1.30)$$

Nous y avons introduit phénoménologiquement le terme d'amortissement

$$\frac{2n^2\gamma_e}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

rendant compte de l'atténuation de la fibre. γ_e représente le taux d'amortissement du champ électromagnétique.

1.2.2.2 Equation d'évolution de l'onde matérielle

Pour décrire l'équation d'évolution de l'onde matérielle, on assimile la silice du coeur de la fibre à un fluide visqueux et compressible. Celui-ci est alors soumis à une force électrostrictive $\vec{F}(\vec{r}, t)$ due à l'action de l'onde de pompe. En supposant que la contrainte agissant sur le matériau est de nature élastique, on utilise l'équation fondamentale de la dynamique des fluides. Cette équation gouverne l'évolution des déplacements de matière, et elle s'écrit :

$$\rho(\vec{r}, t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, t) - \overrightarrow{grad} \mathcal{P}(\vec{r}, t) + \eta \nabla^2 \vec{v} - \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \overrightarrow{grad}(\text{div } \vec{v}) \quad (1.31)$$

où \vec{v} représente la vitesse de mouvement d'un élément infinitésimal de matière repéré par la position \vec{r} . ζ et ν sont respectivement les coefficients de viscosité et de cisaillement de Navier, et $\mathcal{P}(\vec{r}, t)$ est la pression locale interne. A partir de considérations énergétiques, on montre que la force électrostrictive est proportionnelle au gradient de l'intensité du champ électrique [Lorrain et Corson 79]:

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T \overrightarrow{grad} (E^2(\vec{r}, t)) \quad (1.32)$$

En négligeant les variations transverses de densité devant celles qui se produisent suivant l'axe de propagation ($\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 \rho'}{\partial z^2}$), et en supposant que le profil transverse des champs électromagnétiques reste inchangé, l'équation d'évolution de l'onde matérielle prend la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \rho'(z, t)}{\partial t^2} - \frac{3\zeta + 4\eta}{3\rho_0} \frac{\partial^3 \rho'(z, t)}{\partial t \partial z^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \rho'(z, t)}{\partial z^2} = -\frac{\varepsilon_0 \rho_0}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T \frac{\partial^2 E^2(z, t)}{\partial z^2} + \tilde{f}(z, t) \quad (1.33)$$

où $\tilde{f}(z, t)$ est un terme source de bruit introduit phénoménologiquement. Il représente les fluctuations de densité du milieu à l'équilibre thermique [Gaeta et Boyd

91]. Dans la plupart des études, ce terme sert d'initiateur à la diffusion Brillouin stimulée, et il traduit physiquement l'effet de la diffusion spontanée. Son influence est déterminante dans la dynamique des générateurs Brillouin. Gaeta et Boyd [Gaeta et Boyd 91] ont montré que ce bruit de Langevin était réparti spatialement et que cette répartition jouait un rôle prédominant dans les instabilités d'intensité du rayonnement Stokes délivré par un générateur Brillouin. Nous aurons l'occasion de parler de l'importance de ce terme de façon plus approfondie dans la suite de ce chapitre.

1.2.2.3 Modèle cohérent à trois ondes

Dans le cadre de la description à trois ondes de la diffusion Brillouin stimulée, on considère que le champ électrique total est la somme du champ de pompe et du champ Stokes, soit :

$$E(z,t) = \frac{1}{2} (E_p(z,t)e^{-i(\omega_p t - k_p z)} + E_s(z,t)e^{-i(\omega_s t + k_s z)} + C.C.) \quad (1.34)$$

et la variation de densité s'exprime :

$$\rho'(z,t) = \frac{1}{2} (\rho(z,t)e^{-i(\omega_a t - k_a z)} + C.C.) \quad (1.35)$$

On introduit les deux expressions précédentes dans les équations 1.33 et 1.30 puis on effectue l'approximation usuelle des enveloppes lentement variables, qui consiste à considérer que l'enveloppe du champ varie peu pendant une période relative aux oscillations rapides de la porteuse. Pour simplifier l'étude théorique, on normalise le système d'équations obtenu. En utilisant la normalisation développée dans la thèse de Stéphane Randoux [Randoux 95, Randoux *et al.* 95b], le modèle cohérent s'écrit :

$$\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \zeta} + \frac{\beta}{2} \varepsilon_p = -gB\varepsilon_s \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \zeta} + \frac{\beta}{2} \varepsilon_s = gB^* \varepsilon_p \quad (1.37)$$

$$\frac{1}{\beta_a} \frac{\partial B}{\partial \tau} + B = \varepsilon_s^* \varepsilon_p + f(\tau, \zeta) \quad (1.38)$$

où ε_p , ε_s et B sont respectivement les amplitudes complexes des ondes pompe, Stokes et acoustique. Ces amplitudes complexes sont normalisées par rapport à la valeur maximale du champ de pompe E_0 à l'extrémité d'entrée de la fibre. β est

l'atténuation optique du milieu. Les variables de temps et d'espace sont normalisées de la manière suivante :

$$\tau = \frac{c \cdot t}{nL} \quad (1.39)$$

$$\zeta = \frac{z}{L} \quad (1.40)$$

où c est la vitesse de la lumière, n est l'indice de la fibre de longueur L . Le temps est donc normalisé par rapport au temps de transit des photons dans la fibre. $\beta_a = \pi \Delta\nu_B \frac{nL}{c}$ est proportionnel à la largeur à mi-hauteur de la courbe de gain Brillouin en régime spontané ($\Delta\nu_B$). g est un paramètre réduit et il est relié au coefficient de gain de la diffusion Brillouin g_B par la relation :

$$g = g_B \cdot \frac{L}{4} \cdot \varepsilon_0 c |E_0|^2 \quad (1.41)$$

avec $\varepsilon_0 c |E_0|^2$ l'intensité d'une onde plane progressive.

1.2.3 Rappels sur la dynamique du générateur Brillouin, la modélisation et la dynamique du laser Brillouin

Nous allons à présent effectuer quelques rappels sur la dynamique des générateurs Brillouin, avant de continuer sur une description de la dynamique et des propriétés spectrales des lasers Brillouin. Pour terminer une comparaison entre les différentes sources de bruit dans les lasers Brillouin et les lasers à inversion de population sera développée.

1.2.3.1 Le générateur Brillouin

Pour réaliser un générateur Brillouin, il faut prendre certaines précautions dans le protocole expérimental. L'onde Stokes rétrodiffusée pouvant venir perturber le fonctionnement du laser de pompe, celui-ci doit être isolé de la fibre. De plus, les interfaces air-verre situées à l'entrée et la sortie de la fibre conduisent à des réflexions de Fresnel. Elles ne sont pas négligeables car elles donnent lieu à la création d'un résonateur Fabry-Pérot. Pour s'affranchir d'un tel problème, on peut cliver la fibre selon un angle oblique, ou alors plonger les interfaces dans un liquide réalisant l'adaptation d'indice. En utilisant une fibre optique d'une centaine de mètres, et un laser émettant un rayonnement continu de largeur spectrale de l'ordre du MHz , la diffusion Brillouin stimulée apparaît pour une puissance de pompe injectée de quelques dizaines de mW . Dans ces conditions, Gaeta et al [Boyd *et al.* 90] ont observé des fluctuations de grande amplitude de l'intensité de l'onde Stokes. Ils ont montré que celles-ci étaient de nature purement stochastique et ont attribué leur existence au bruit acoustique régnant dans la fibre à l'équilibre thermique. Les fluctuations d'intensité du rayonnement Stokes résultent alors des fluctuations décrites par le terme $f(\zeta, \tau)$ de l'équation 1.38

1.2.3.2 Conditions aux bords caractéristiques du laser Brillouin

En plaçant la fibre à l'intérieur d'un résonateur optique, on réalise un laser Brillouin. Le schéma de principe est identique à celui d'un laser classique, où un milieu amplificateur est aussi inséré dans une cavité optique. Par contre, le mécanisme permettant l'obtention du gain est différent dans les deux types de laser. L'amplification s'effectue par inversion de population dans les lasers classiques, tan-

dis qu'elle est réalisée par le processus de diffusion Brillouin stimulée dans le cas du laser Brillouin. Pour modéliser un laser Brillouin, on complète le modèle cohérent par des conditions de bouclage. Pour un résonateur en anneau tel que celui présenté sur la figure 1.13, elles sont données par :

$$\varepsilon_p(\zeta = 0, \tau) = \mu + R_p e^{-i\delta_p} \varepsilon_p(\zeta = 1, \tau) \quad (1.42)$$

$$\varepsilon_s(\zeta = 1, \tau) = R_s e^{-i\delta_s} \varepsilon_s(\zeta = 0, \tau) \quad (1.43)$$

μ joue le rôle de paramètre de pompe. R_p et R_s sont les taux de réinjection en

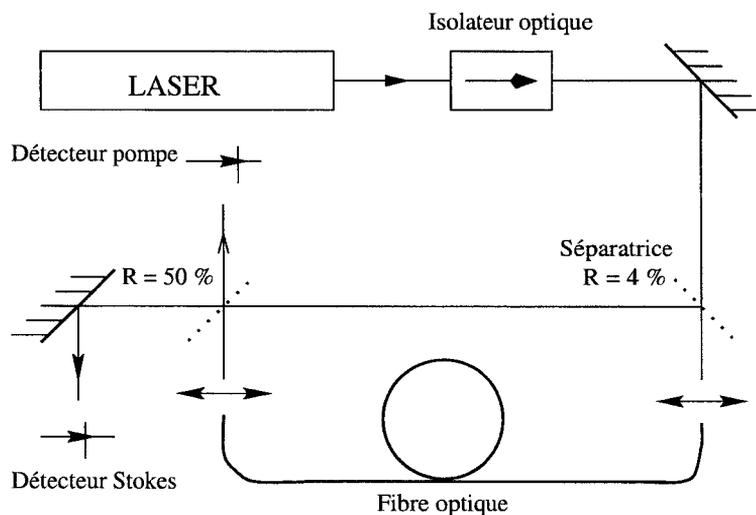


FIG. 1.13 – Schéma de principe d'un laser Brillouin en anneau dont la cavité comporte un bras aérien d'après K. O. Hill [Hill et al. '76].

amplitude de l'onde pompe et de l'onde Stokes. δ_p et δ_s représentent les déphasages subis par les ondes de pompe et Stokes au cours d'un tour de cavité. Discutons maintenant de l'influence et de l'importance de ces termes sur la dynamique des lasers Brillouin.

En annulant le terme R_p , on supprime le recouplage de l'onde de pompe dans la cavité. Pour réaliser cette condition expérimentalement, on place un élément unidirectionnel dans la cavité, un isolateur optique par exemple. Ceci ne change pas de manière significative le comportement dynamique du laser Brillouin [Lecoeuche 96]. Le seul effet de ce recouplage de l'onde de pompe, est de modifier l'énergie intracavité.

Le résonateur optique possède ses fréquences propres, qui vont porter l'oscillation Stokes. Or, si la fréquence ν_c^n d'un mode de cavité ne coïncide pas avec le centre ν_s de la courbe de gain Brillouin, un compromis va s'établir, et la fréquence ν_L du laser se situera alors entre ces deux fréquences. Lorsque la fréquence du laser ν_L n'est pas égale à la fréquence centrale de la courbe de gain Brillouin, le système est dit non résonant (voir figure 1.14), et des effets de tirage en fréquence apparaissent alors. Ceci peut être décrit en ajoutant le terme de déphasage δ_s à la condition de

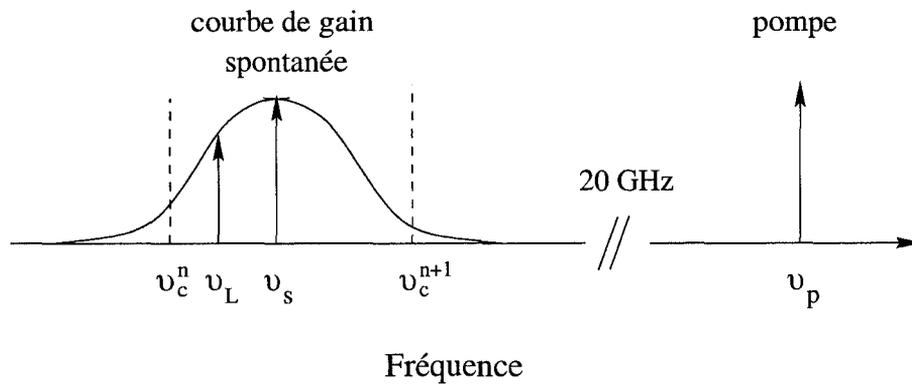


FIG. 1.14 – Disposition des fréquences de pompe ν_p , laser ν_L , maximum de gain spontané ν_s et des modes de cavité ν_c^n et ν_c^{n+1} dans le cas général.

bouclage sur l'onde Stokes. Ceci a pour conséquence d'induire un changement de la fréquence d'émission Stokes qui se décale ainsi de la valeur ν_s à la valeur ν_L . Cet effet ne change pas de manière significative la dynamique des lasers Brillouin. Il n'affecte que l'étendue des zones de stabilité et d'instabilité. On adopte dans la suite $\delta_s = 0$.

1.2.3.3 Solutions stationnaires et valeur du seuil

En utilisant le modèle résonant, la recherche des solutions caractérisant l'état stationnaire passe par une réécriture de l'enveloppe des champs sous la forme :

$$\varepsilon_i = A_i(\zeta, \tau) e^{i\phi_i(\zeta, \tau)} \quad (1.44)$$

où les $A_i(\zeta, \tau)$ ($i = p, s, a$) représentent les amplitudes réelles des ondes pompe, Stokes et acoustique. Les $\phi_i(\zeta, \tau)$ représentent les phases de ces ondes, ce sont des variables réelles. En négligeant l'atténuation de la fibre, on arrive alors au jeu suivant de 6

équations :

$$\partial_\tau A_p + \partial_\zeta A_p = -g A_a A_s \cos \theta \quad (1.45)$$

$$\partial_\tau A_s - \partial_\zeta A_s = g A_a A_p \cos \theta \quad (1.46)$$

$$(1/\beta_A)\partial_\tau A_a + A_a = A_p A_s \cos \theta \quad (1.47)$$

$$\partial_\tau \phi_p + \partial_\zeta \phi_p = -g(A_a A_s / A_p) \sin \theta \quad (1.48)$$

$$\partial_\tau \phi_s - \partial_\zeta \phi_s = -g(A_a A_p / A_s) \sin \theta \quad (1.49)$$

$$(1/\beta_A)\partial_\tau \phi_a = -(A_p A_s / A_a) \sin \theta \quad (1.50)$$

avec $\theta(\zeta, \tau) = \phi_s(\zeta, \tau) + \phi_a(\zeta, \tau) - \phi_p(\zeta, \tau)$. Les conditions de bouclage prennent la forme suivante :

$$A_p(\zeta = 0, \tau) = \mu \quad (1.51)$$

$$A_s(\zeta = 1, \tau) = R A_s(\zeta = 0, \tau) \quad (1.52)$$

$$\phi_p(\zeta = 0, \tau) = \phi_0(\tau) \quad (1.53)$$

$$\phi_s(\zeta = 1, \tau) = \phi_s(\zeta = 0, \tau) \quad (1.54)$$

où $\phi_0(\tau)$ représente la phase du laser de pompe. Dans notre étude, le rebouclage de l'onde de pompe dans la cavité est supprimé. A l'état stationnaire, on considère que les amplitudes et les phases des champs n'évoluent pas dans le temps, ce qui revient à annuler toutes les dérivées par rapport au temps. Dans le cas où l'on néglige l'atténuation de la fibre ($\beta = 0$), on se ramène au système :

$$\partial_\zeta A_p = -A_p A_s^2 \quad (1.55)$$

$$\partial_\zeta A_s = -A_p^2 A_s \quad (1.56)$$

$$\partial_\zeta \phi_p = 0 \quad (1.57)$$

$$\partial_\zeta \phi_s = 0 \quad (1.58)$$

L'expression analytique du seuil laser s'écrit [Randoux 95] :

$$\mu_s = \sqrt{\frac{-\ln R}{g}} \quad (1.59)$$

avec $R = R_s$. Dès que la valeur de seuil est atteinte, toute l'énergie supplémentaire apportée par le faisceau de pompe est transférée à l'onde Stokes. Ceci signifie que l'énergie intra-cavité de l'onde de pompe est constante. On remarquera que plus la

valeur de R est proche de 1, plus le seuil est bas. Ainsi, dans des cavités de finesse élevée, des puissances inférieures au mW suffisent à générer l'onde Stokes [Stokes *et al.* 82].

En intégrant les équations précédentes, il est possible de déterminer le profil longitudinal des intensités des champs de pompe et Stokes à l'état stationnaire. Cette solution analytique s'écrit pour le champ de pompe et le champ Stokes [Randoux *et al.* 95b]:

$$A_p^2(\zeta) = \frac{\Omega}{1 - \Delta e^{-2g\Omega\zeta}} \quad (1.60)$$

$$\Omega = A_p^2(\zeta) - A_s^2(\zeta) \quad (1.61)$$

avec $\Delta = \frac{R^2 - e^{-2g\Omega}}{(R^2 - 1)e^{-2g\Omega}}$. Sur la figure 1.15 nous avons tracé l'évolution longitudinale de l'amplitude des champs pompe et Stokes dans le cas d'une cavité de faible et de bon coefficient de qualité. Dans une cavité de faible coefficient de qualité, la dépen-

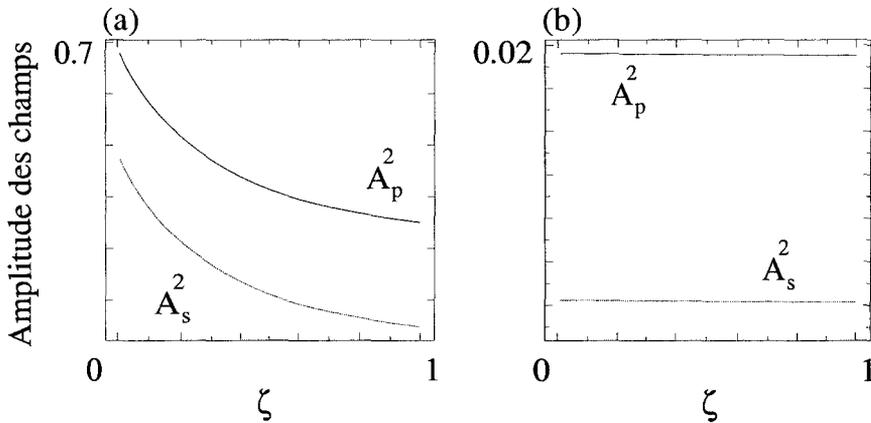


FIG. 1.15 – Evolution longitudinale de l'amplitude des champs pompe et Stokes pour une cavité de faible finesse (a) et de grande finesse (b).

dance spatiale de l'amplitude des champs est très prononcée. Par contre, pour une cavité de bonne finesse, l'amplitude des champs est quasiment uniforme. Cela signifie qu'il est possible dans ce cas particulier d'approximer la fonction $A_p(\zeta)$ par $A_p(0)$.

1.2.3.4 Principaux comportements dynamiques des lasers Brillouin à fibre optique

C'est en 1976 que fut réalisé pour la première fois un laser Brillouin à fibre optique. Les études expérimentales ont montré que l'intensité de l'onde Stokes émise était instable dès le seuil de fonctionnement du laser. Toutes les études de la dynamique ont été généralement effectuées dans des cavités de longueur supérieure à 50 m. Ceci avait pour effet de diminuer la valeur du seuil laser, ce qui permettait de réaliser des lasers Brillouin avec une source de pompage de puissance relativement faible. En augmentant la puissance de pompe, l'intensité du rayonnement Stokes devient stable ce qui correspond au régime de "miroir Brillouin". Depuis 1990, Montes et son équipe ont montré par une analyse de stabilité linéaire basée sur le modèle cohérent à trois ondes qu'il existait une bifurcation de Hopf délimitant les comportements instables et le régime de "miroir Brillouin" observé [Montes *et al.* 94b, Montes *et al.* 94a]. Ceci a permis par exemple de mieux comprendre les mécanismes qui gouvernent l'évolution d'impulsions de structure solitonique [Picholle *et al.* 91]. Plus récemment, certaines études ont montré que la longueur de fibre utilisée exerçait une influence déterminante sur le comportement dynamique des lasers Brillouin [Randoux *et al.* 95a]. Pour une longueur de fibre L inférieure à une certaine longueur critique L_c , le régime observé est le "miroir Brillouin" quelle que soit la puissance de pompe.

L'intervalle spectral libre fixe le nombre N de modes de cavité présents sous la courbe de gain Brillouin. La longueur L de la fibre étant fixée, N est égal à :

$$N = \frac{\Delta\nu_B n L}{c} \quad (1.62)$$

On montre en effectuant une analyse modale de l'émission que ce nombre de modes N est un facteur primordial pour la dynamique [Lecoeuche *et al.* 96] du système. L'élargissement de la bande de gain Brillouin étant de nature homogène, l'émission laser impliquera un unique mode si N est suffisamment faible ($N \simeq 2 - 5$). Dans ces conditions, l'intensité du rayonnement Stokes émis est indépendante du temps et le régime de fonctionnement du laser Brillouin est appelé le "miroir Brillouin" [Picholle *et al.* 91]. Par contre, si le nombre de modes N devient élevé, la compétition entre modes devient importante. En fait, des régimes plus complexes [Lecoeuche *et al.* 96]

apparaissent lorsque N devient supérieur à un nombre critique N_c correspondant à une certaine longueur critique L_c . Les différents régimes observés peuvent être périodiques et quasi-périodiques. Dans ce cas, la fréquence fondamentale des instabilités est voisine de l'intervalle spectral libre. Dans des conditions bien particulières les régimes peuvent aussi évoluer vers du chaos de type Ruelle-Takens [Lecoeuche 96]. La figure 1.16 donne une illustration des domaines d'instabilités et des régimes que l'on obtient dans le cas où $\Delta = \delta_s = \delta_p = R_p = 0$ et que $R_s^2 = 1\%$.

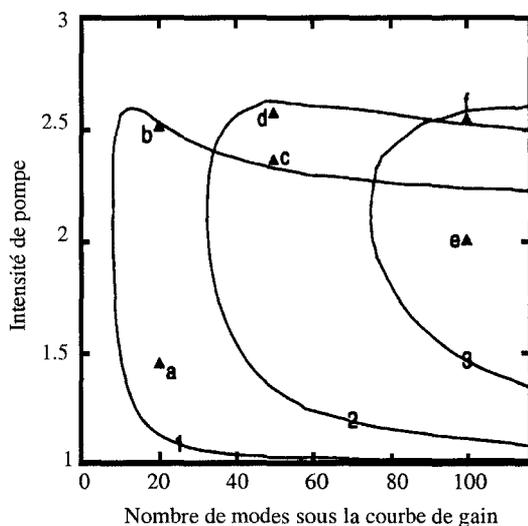


FIG. 1.16 – Carte de stabilité d'un laser Brillouin pour les paramètres suivants : $\Delta = \delta_s = \delta_p = R_p = 0$ et $R_s^2 = 1\%$. Les régimes (a) à (f) sont des régimes impulsifs dont les fréquences en unité FSR apparaissant dans le signal sont les suivantes : (a) = 0.981, (b) = 1.035, (c) = 1.051 et 2.014, (d) = 1.055 et 2.022, (e) = 1.00, (f) = 1.058 et 2.04 et 3.019. [Lecoeuche et al. 96]

Notons finalement que la fibre constitue un guide d'ondes acoustiques multimode. Il est possible sous certaines conditions d'observer la diffusion Brillouin par plusieurs modes acoustiques. Cet effet est connu sous le nom "G.A.W.B.S." pour "Guided Acoustic Wave Brillouin Scattering". Il a été observé expérimentalement par Picholle et Picozzi [Picholle et Picozzi 97] lorsque le laser Brillouin fonctionnait en régime impulsif. Toutefois, cet effet n'a pas encore été observé lorsque le laser Brillouin opérait en régime de "miroir Brillouin". De ce fait, nous négligerons complètement par la suite l'aspect de propagation multimode de l'onde acoustique.

1.2.3.5 Cohérence temporelle des lasers Brillouin

Après avoir rappelé les différents régimes de fonctionnement d'un laser Brillouin, nous allons maintenant nous intéresser à ses propriétés spectrales. En mode de fonctionnement impulsionnel, le nombre de modes de cavité impliqués est généralement bien supérieur à dix. Notons que l'équipe du laboratoire de Physique de la Matière Condensée de l'Université de Nice dirigée par Carlos Montes a établi un résultat intéressant sur ce type de régime. Par des simulations numériques, ils ont montré que l'évolution temporelle de la phase de l'onde Stokes n'était pas perturbée par d'éventuels saut aléatoires de la phase du laser de pompe [Picholle *et al.* 91]. Toutefois, le laser Brillouin émettant alors des impulsions, sa largeur spectrale est plus importante que celle du laser de pompe. Il en va par contre tout autrement du régime de miroir Brillouin. En effet, Zarinetchi, Ezekiel et Smith ont mis en évidence expérimentalement en 1991 [Smith *et al.* 91] une propriété remarquable des lasers Brillouin. En régime d'émission continue, la largeur spectrale du rayonnement émis par le laser Brillouin peut être de plusieurs ordres de grandeur inférieure à celle du laser de pompe. Ils ont pour cela réalisé deux lasers Brillouin indépendants. Ils ont injecté deux faisceaux de pompe de longueur d'onde 632.8 nm dans le même résonateur. De ce fait, les effets des fluctuations techniques sur l'émission laser, sont identiques pour les deux faisceaux Stokes émis (voir graphique 1.17). Pour obtenir un ordre de grandeur de la largeur à mi-hauteur du spectre de puissance de chacun des lasers Brillouin, ils ont utilisé une méthode d'hétérodynage. En effectuant le battement de deux faisceaux indépendants, la transformée de Fourier du signal détecté est le produit de convolution du spectre de chacun des faisceaux. Comme chacun des lasers possède approximativement la même largeur spectrale dans leur expérience, la largeur à mi-hauteur du spectre du battement donne un ordre de grandeur de la largeur spectrale de chacun des faisceaux. La méthode de mesure est décrite de manière plus approfondie dans le complément 2.1 du chapitre suivant. En effectuant la mesure pour les deux lasers de pompe, ils ont montré que la largeur du battement était de 120 kHz . Ceci signifie que la largeur spectrale intrinsèque de ces deux sources est de l'ordre de 100 kHz . Le battement des deux lasers Brillouin a permis de montrer que la largeur spectrale intrinsèque de ceux-ci était plus faible que 30 Hz . Le rapport entre les largeurs spectrales du laser de pompe et du laser Brillouin est alors de 10^4 , ce qui représente une réduction de 4 ordres de grandeurs

de la largeur spectrale. Cet effet spectaculaire demeure actuellement sans explication théorique.

L'un des objectifs de ce mémoire est de proposer une explication théorique à cette propriété remarquable, d'autant plus que celle-ci est couramment utilisée dans des systèmes comme les gyroscopes [Zarinetchi *et al.* 91] ou les capteurs de contrainte et de température [Lecoecue *et al.* 98]. Plus généralement, notre objectif est d'analyser l'effet des différentes sources de bruit sur la cohérence temporelle du laser Brillouin. Nous étudierons en particulier l'influence du bruit de phase du laser de pompe et de la diffusion spontanée.

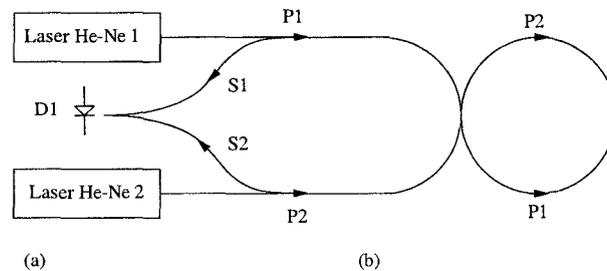


FIG. 1.17 – Schéma du dispositif expérimental employé lors de la mesure de la largeur spectrale de l'onde Stokes dans l'expérience de Zarinetchi *et al.* Allure des spectres mesurés lors du battement pompe-pompe (a) et Stokes-Stokes (b).

Les conditions dans lesquelles se situe l'analyse théorique présentée dans la suite de ce mémoire sont les suivantes. Tout d'abord, nous nous plaçons dans le cadre du modèle à trois ondes, où l'onde de pompe n'est pas rebouclée dans la cavité ($R_p = 0$). Le régime de fonctionnement étudié est celui où l'émission laser est monomode longitudinale, ce qui correspond au régime de "miroir Brillouin". Nous supposons ensuite que la cavité est accordée de façon à ce que l'émission du laser se situe au

centre de la courbe de gain ($\delta_s = 0$). Pour comprendre l'origine de la cohérence temporelle de l'émission Stokes en régime d'émission continue monomode longitudinal, il faut connaître l'importance des différentes sources de bruit. Pour cela, nous allons dans un premier temps comparer le fonctionnement d'un laser Brillouin à celui d'un laser classique. Puis, nous comparerons l'origine et l'influence des diverses sources de bruit dans les deux systèmes.

1.2.4 Comparaison entre les différentes sources de bruit dans les lasers Brillouin et les lasers à inversion de population

Les lasers Brillouin possèdent un mode de fonctionnement différent de celui des lasers classiques. L'amplification dans les lasers classiques est basée sur l'inversion de population, et la création du rayonnement laser est liée à l'émission stimulée. Pour les lasers Brillouin, le mécanisme de gain et l'émission de l'onde Stokes sont par contre liés au processus de diffusion stimulée. Il est cependant possible de réaliser une analogie entre ces deux classes de laser. Celle-ci repose sur leur schéma de construction qui est identique. Les lasers Brillouin comme les lasers conventionnels sont constitués d'un milieu amplificateur placé dans un résonateur optique.

Le point primordial abordé est relatif à l'influence des différentes sources de bruits dans ces deux types de laser. Nous allons discuter de leurs rôles respectifs sur la cohérence temporelle de l'émission laser.

La première source de bruit provient du processus de pompage. Dans les lasers à inversion de population optiquement pompés, nous avons montré qualitativement dans le paragraphe 1.1.4 que le bruit de phase du laser de pompe ne perturbe pas la phase du rayonnement laser émis. La diffusion Brillouin stimulée étant un processus d'interaction à trois ondes, il existe une relation entre les pulsations des trois ondes, et plus particulièrement entre l'onde de pompe et l'onde Stokes. Ce type de relation n'existe pas dans les lasers à inversion de population. Elle s'écrit :

$$\omega_p = \omega_s + \omega_a \quad (1.63)$$

Ceci implique un couplage entre les phases des trois ondes. Dans le cas d'un laser Brillouin, ceci signifie que la moindre variation de la phase de l'onde de pompe affectera l'évolution des deux autres phases. Il existe naturellement dans notre système un lien entre la phase de l'onde de pompe et celle de l'onde Stokes. Dans les paragraphes précédents, nous avons montré que l'évolution temporelle de la phase permet de déterminer la largeur spectrale de l'onde. Chercher une relation entre les phases des ondes ou entre les largeurs spectrales des rayonnements de pompe et

Stokes est équivalent.

La deuxième source de bruit est présente dans tous les types de laser. Il s'agit du bruit technique. Le bruit technique est lié aux fluctuations de paramètres expérimentaux difficilement contrôlables [Salomon *et al.* 88, Young *et al.* 99]. Il s'agit notamment des fluctuations de longueur de la cavité, des vibrations des miroirs, des effets thermiques ou des bruits acoustiques. Ces bruits d'origines diverses viennent perturber le spectre de puissance des lasers. Ils sont traduits mathématiquement par l'apparition d'un terme de déphasage bruyant dans les conditions de bouclage du laser Brillouin. Concrètement, on écrit alors :

$$\varepsilon_s(\zeta = 1, \tau) = R \cdot \varepsilon_s(\zeta = 0, \tau) \cdot e^{i\eta} \quad (1.64)$$

où η est le terme de bruit responsable de dérives de la fréquence du laser. Afin de connaître l'influence de ces dérives de fréquence sur le spectre de puissance, on effectue le battement de la source avec un autre laser stabilisé en fréquence. On s'aperçoit que ces fluctuations techniques évoluent sur un temps caractéristique de l'ordre de la centième de seconde dans des cavités stabilisées. Lorsque l'on effectue une mesure de la largeur spectrale d'une source laser, on intègre aussi dans le spectre le bruit technique. Si l'écart en fréquence engendré par le bruit technique est supérieur ou égal à la largeur spectrale intrinsèque du laser, il devient impossible de discerner du spectre observé la largeur intrinsèque du bruit technique. En quelque sorte, la largeur spectrale intrinsèque du laser est noyée dans le bruit de fréquence engendré par les fluctuations techniques.

La dernière source de bruit correspond au terme de diffusion spontanée dans le laser Brillouin. L'amplitude de ce bruit est beaucoup plus faible que celle des autres termes de bruit précédemment décrits. $f(\zeta, \tau)$ représente le terme de diffusion spontanée. C'est une source de bruit de Langevin, dont on modélise le rôle par un bruit gaussien de valeur moyenne nulle et caractérisé par la fonction d'autocorrélation :

$$\langle f(\zeta, \tau) f(\zeta', \tau') \rangle = Q \cdot \delta(\tau - \tau') \delta(\zeta - \zeta') \quad (1.65)$$

Le paramètre Q fixe l'intensité des fluctuations de densité du matériau, donc l'intensité du bruit présent au sein du milieu diélectrique. Dans notre normalisation, $f(\zeta, \tau)$

est de l'ordre de 10^{-6} . Cette fonction est ajoutée à l'équation d'évolution de l'onde acoustique. C'est un terme perturbatif car les termes $|\varepsilon_p|$ et $|\varepsilon_s|$ prennent des valeurs proches de l'unité. De plus, $f(\zeta, \tau)$ n'a pas une action directe sur l'onde Stokes. En effet, la fonction $f(\zeta, \tau)$ est incluse dans l'équation de l'onde acoustique. Ceci signifie que cette fonction de bruit de Langevin va en premier lieu perturber l'évolution de l'onde acoustique. Puis, du fait de l'interaction non linéaire, son influence va se reporter sur l'onde Stokes. Cette situation contraste avec celle caractérisant les lasers à inversion de population, dans lesquels l'émission spontanée agit directement sur la phase du champ laser. Par analogie avec l'émission spontanée des lasers classiques, la fonction $f(\zeta, \tau)$ sera donc responsable de l'existence d'une limite ultime à la largeur spectrale du laser Brillouin. Nous montrerons dans le prochain chapitre que cette largeur ultime est de l'ordre de la dizaine de mHz . Cette valeur est du même ordre de grandeur que la largeur ultime typique des lasers à gaz ou solide.

Pour résumer, le bruit technique provoque des dérives de la fréquence d'émission du laser. Il ne contribue pas à la largeur spectrale intrinsèque des lasers Brillouin, et nous le négligerons. Le bruit de diffusion spontanée représente la source de bruit la plus faible en amplitude. Il est responsable de la largeur ultime du rayonnement Stokes, soit une largeur de quelques dizaines de mHz , et nous le négligerons aussi dans un premier temps. Le bruit de phase est quant à lui à prendre en considération, et dans le chapitre suivant nous étudierons son influence sur la cohérence temporelle du laser Brillouin.

1.3 Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre nous avons rappelé quelques généralités concernant les propriétés spectrales des lasers. Nous avons montré que pour modéliser la largeur spectrale d'un laser, on utilisait le processus de diffusion de phase. La phase de l'onde laser est une variable aléatoire, dont les différentes réalisations suivent une marche au hasard. Le spectre de puissance du laser se déduit de la fonction d'autocorrélation du champ. Dans le cas d'un processus de diffusion de phase, ce spectre de puissance prend la forme d'une lorentzienne, caractérisée par sa largeur à mi-hauteur $\Delta\nu$. Nous avons ensuite étudié l'influence de diverses sources de bruit sur la cohérence temporelle de l'émission laser. Ces différentes sources de bruit sont le bruit d'amplitude et le bruit de phase du laser de pompe. Nous avons montré que le bruit d'amplitude affecte le spectre de puissance en donnant lieu à l'apparition de pics de relaxation. Puis, nous avons montré qualitativement que le bruit de phase du champ laser émis n'était pas lié au bruit de phase du laser de pompe. Dans la deuxième partie de ce chapitre, quelques généralités ont été développées sur la diffusion Brillouin. Dans un premier temps, nous avons rappelé quelques généralités sur la diffusion Brillouin, et nous avons ensuite rappelé le modèle cohérent à trois ondes décrivant ce processus d'interaction. Puis, des rappels sur la dynamique du générateur et du laser Brillouin ont été présentés. A l'issue de ces rappels, nous avons présenté une expérience mettant en évidence la grande cohérence temporelle du laser Brillouin. Pour terminer, nous avons développé une comparaison des différentes sources de bruit entre les lasers Brillouin et les lasers à inversion de population. Cette comparaison nous a permis d'identifier la source de bruit à prendre d'abord en compte pour étudier les propriétés de cohérence temporelle du laser Brillouin.

Le but du chapitre suivant sera d'expliquer l'origine de la grande cohérence temporelle de l'émission Stokes. Pour cela nous utiliserons le modèle cohérent à trois ondes. Nous établirons une relation analytique liant la phase de l'onde de pompe à celle de l'onde Stokes. Cette démonstration sera confirmée par des simulations numériques puis validée expérimentalement. Ce chapitre est constitué de deux articles, ainsi que de plusieurs compléments permettant de préciser certains points abordés succinctement dans les articles. L'un d'entre eux est consacré à l'étude de l'influence

du terme de diffusion spontanée $f(\zeta, \tau)$ sur la cohérence temporelle du laser Brillouin.

Chapitre 2

Etude théorique et expérimentale de la cohérence temporelle des lasers Brillouin

Ce chapitre est consacré à l'étude expérimentale et théorique des propriétés de cohérence temporelle des lasers Brillouin. Il est essentiellement composé de deux publications. La première est parue dans "Physical Review A" au mois d'août 2000. La seconde est soumise à publication dans "Journal of the Optical Society of America B". Elles regroupent une partie des travaux effectués pendant ma thèse, et traitent de la connection existant entre la largeur spectrale du laser Brillouin et celle du laser de pompe.

Le premier des deux articles est théorique. L'origine et la nature des différentes sources de bruit présentes dans les lasers Brillouin y sont rappelées. L'importance relative de ces différentes sources de bruit étant caractérisée, nous étudions le lien existant entre le bruit de phase du laser Brillouin et celui du laser de pompe. Après une série successive d'approximations, nous calculons analytiquement une relation liant la phase du laser de pompe à celle du rayonnement Stokes émis. Nous montrons que le bruit de phase du laser de pompe est transféré à l'onde Stokes émise après avoir été filtré par l'association de deux systèmes linéaires. Le premier est un filtre de type passe-bas qui permet d'une part de filtrer les fluctuations de hautes fréquences, et d'autre part de réduire l'amplitude des fluctuations. Le deuxième moyenne les

fluctuations sur un temps égal au temps de transit des photons dans la cavité. De ce filtrage et moyennage résulte une réduction du coefficient de diffusion de phase, ce qui se caractérise par une plus grande cohérence de l'onde Stokes. Le rapport entre les largeurs spectrales à mi-hauteur est alors donné par un facteur K^2 . La valeur de ce facteur est indépendante de la puissance de pompe. La relation entre les deux largeurs spectrales s'écrit :

$$\Delta\nu_s = \frac{\Delta\nu_p}{K^2} \quad (2.1)$$

$\Delta\nu_p$ et $\Delta\nu_s$ sont les largeurs spectrales respectives du laser de pompe et du laser Brillouin. Le facteur K est donné par la relation :

$$K = 1 + \frac{\gamma_a}{\Gamma_c} \quad (2.2)$$

où $\gamma_a = \pi\Delta\nu_B$ et $\Gamma_c = -c \ln R/nL$ sont respectivement le taux d'amortissement de l'onde acoustique et le taux de pertes de la cavité. Enfin, nous établissons dans quelle mesure cette analyse reste valide. Nous insistons sur l'importance du bruit acoustique, et par analogie avec l'émission spontanée dans les lasers conventionnels, nous donnons un ordre de grandeur de son influence sur la largeur spectrale de l'émission Stokes. Ceci nous permet de préciser les conditions à partir desquelles ce bruit acoustique est à prendre en considération et de préciser le domaine de validité de la relation 2.1.

Le deuxième article vient approfondir et préciser certains points du premier article. Une expérience venant valider nos résultats théoriques y est également présentée. Une comparaison entre les sources de bruit caractérisant les lasers classiques et les lasers Brillouin est d'abord réalisée. L'analyse théorique du premier article est ensuite développée. Nous insistons plus particulièrement sur les approximations effectuées. Les différentes relations analytiques liant les largeurs spectrales des ondes de pompe, Stokes et acoustique sont ensuite établies. Cette analyse est suivie par la présentation d'un protocole expérimental ayant pour objectif la détermination de la valeur du facteur K^2 caractérisant un laser Brillouin opérant dans une cavité en anneau de faible finesse. Cette vérification n'est pas effectuée en mesurant séparément la largeur spectrale du laser de pompe puis celle du laser Brillouin. Pour ce faire, nous utilisons le fait qu'il existe un lien entre la phase des ondes pompe et Stokes.

Dans notre expérience, nous enregistrons la réponse d'un laser Brillouin à une modulation de fréquence de l'onde de pompe. Notre cavité possédant une faible finesse, le rapport entre l'indice de modulation de l'onde de pompe et de l'onde Stokes est de l'ordre de 10. Le résultat obtenu expérimentalement est ensuite comparé à la valeur théorique donnée par le calcul analytique.

Quelques compléments terminent ce chapitre. Ils permettent de préciser certains points évoqués brièvement dans les deux articles. Les méthodes de mesure de la largeur spectrale d'une source laser γ sont notamment détaillées. Nous expliquons plus en détail l'impossibilité d'effectuer une mesure directe de la largeur spectrale des ondes pompe et Stokes dans notre configuration expérimentale.

Les compléments suivants viennent développer certains points théoriques. L'un d'eux est consacré au cas non résonant où la fréquence centrale de la courbe de gain Brillouin ne coïncide pas avec l'un des modes de la cavité. L'influence du recouplage de l'onde de pompe est traité dans un autre complément. Pour conclure, nous calculons la largeur spectrale ultime des lasers Brillouin. Nous établissons alors une relation analytique analogue à la relation de Schawlow-Townes des lasers à inversion de population.

Linewidth narrowing in Brillouin lasers: Theoretical analysis

Alexis Debut, Stéphane Randoux and Jaouad Zemmouri

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, UMR 8523

Centre d'Études et de Recherches Lasers et Applications,

Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France)

Volume 62, 023803 (2000)

Abstract

The linewidth narrowing observed in Brillouin fiber ring lasers is studied within the framework of the usual three-wave model of stimulated Brillouin scattering. We show that the phase noise of the pump laser is transferred to the emitted Stokes wave after being strongly reduced and smoothed under the combined influence of the acoustic damping and the cavity feedback. We then derive a simple analytical relation connecting the FWHM of the Stokes linewidth to that of the pump laser.

42.25.Kb,42.65.Es,42.55.-f

The Brillouin fiber ring laser is a highly coherent light source. Experiments have shown that the linewidth of the Stokes radiation emitted by this laser can be several orders of magnitude narrower than that of the incident beam used to pump it¹. Although this effect is commonly used in many applications such as gyroscopes² or temperature sensors³, it is not clearly understood. In fact, the questions related to the noise properties or to the temporal coherence of Brillouin lasers have not yet been attentively examined from the theoretical point of view. Brillouin lasers and conventional lasers have common noise sources. For instance, fluctuations of the pumping mechanism or of the cavity length alter the spectral purity of the emitted wave in both systems. However, contrary to lasers with population inversion, it is not spontaneous emission but spontaneous scattering that fundamentally limits the degree of monochromaticity of the Stokes radiation. The aim of this paper is to analyze the role of the different noise sources existing in Brillouin fiber ring lasers and to characterize their influence on the temporal coherence of the laser. In particular, we will show that the phase noise of the pump laser is the predominant noise source and we will study in detail the connection between the linewidth of the Brillouin laser and that of its pump laser.

Our theoretical study enters within the framework of the usual three-wave model of stimulated Brillouin scattering (SBS). This model reproduces properly most of the dynamical behaviors experimentally observed in Brillouin generators⁴ or lasers⁵. It reads

$$\partial_\tau \varepsilon_p + \partial_\zeta \varepsilon_p = -gB\varepsilon_s, \tag{1a}$$

$$\partial_\tau \varepsilon_s - \partial_\zeta \varepsilon_s = gB^* \varepsilon_p, \tag{1b}$$

$$(1/\beta_A)\partial_\tau B + B = \varepsilon_p \varepsilon_s^* + f(\zeta, \tau), \tag{1c}$$

where ε_p , ε_s , B represent respectively the complex amplitudes of the pump, Stokes and acoustic waves. These equations in dimensionless form have been obtained by neglecting the weak attenuation of the fiber. The time τ is normalized to the transit time of the light

inside the fiber. ζ is the space coordinate that is normalized to the fiber length. The fields ε_p and ε_s are measured in units of the maximum pump field available at the entrance end of the fiber. g is the SBS coupling constant and β_A represents the normalized damping rate of the acoustic wave. $f(\zeta, \tau)$ is a Langevin noise term describing the random thermal fluctuations of density (i.e. spontaneous scattering) occurring inside the fiber⁶. This noise is a zero-mean Gaussian process and it is δ -correlated both in space and time. In the chosen normalization, f is of the order of 10^{-6} whereas the amplitude of the optical fields is of the order of unity ($|\varepsilon_p|, |\varepsilon_s| \simeq 1$). Despite its weak relative importance, spontaneous scattering plays a determining role in Brillouin generators by inducing a stochastic dynamics⁴. In Brillouin lasers, spontaneous scattering is usually considered as the effect that is responsible for the initiation of the SBS process.

As in ref.⁵ and⁷, we study a Brillouin fiber ring laser in which pump recoupling is avoided by an intracavity isolator. The boundary conditions characterizing this system read

$$\varepsilon_p(\zeta = 0, \tau) = \mu e^{i\phi_0(\tau)}, \quad (2a)$$

$$\varepsilon_s(\zeta = 1, \tau) = R e^{i\delta_s} \varepsilon_s(\zeta = 0, \tau). \quad (2b)$$

R is the amplitude feedback parameter and δ_s is a detuning term expressing the fact that the cavity is not necessarily resonant. In an all-fiber laser, the fluctuations of the fiber length can be reduced by stabilization techniques and the fluctuations of δ_s are then weak. Moreover, the use of couplers offers a great stability of the power feedback parameter R^2 . This is not the case for Brillouin fiber lasers operating in low-finesse resonators. In these systems including an aerial arm, the relative fluctuations of R^2 can be of the order of 20% and the fluctuations of the resonator length can exceed the optical wavelength. The variations of δ_s are then greater than 2π and mode hops are observed⁷. All these fluctuations in the cavity characteristics arise from mechanical and thermal noise and their bandwidth is typically of the order of 100 Hz. These technical noise sources are responsible for slow drifts of the frequency of the Brillouin laser but they do not contribute to the intrinsic linewidth of the emitted Stokes radiation.

In Eq. (2a), μ is a dimensionless pump parameter and ϕ_0 represents the phase of the pump laser. For well-stabilized single-mode lasers usually used to pump Brillouin fiber lasers, the amplitude noise can be neglected so that only the phase is a randomly fluctuating quantity. In the phase diffusion model commonly used to describe the field emitted by a single-mode laser, μ is time independent whereas the phase $\phi_0(\tau)$ performs a random walk governed by the stochastic Langevin equation

$$\frac{d\phi_0(\tau)}{d\tau} = q(\tau), \quad (3)$$

in which $q(\tau)$ is a δ -correlated Gaussian noise of zero-mean⁸. The field spectrum of the pump laser is then a Lorentzian with a full width at half maximum (FWHM) $\Delta\nu_p$ in units of cavity free spectral range (FSR)⁹.

In most of the experiments, the linewidth of the pump laser is of the order of a few tens of kHz. Apart from spontaneous scattering, the phase noise of the pump laser is the noise source presenting the wider spectrum. We are now going to analyze its influence on the noise characteristics of the emitted Stokes radiation. To that effect, we will ignore the influence of the low frequency noise sources previously mentioned. As they only induce slow variations of R and δ_s , we can consider that these two parameters do not drift on the short timescale on which we analyze the influence of the pump phase noise. In particular, we will assume that the cavity is resonant for the Stokes wave ($\delta_s = 0$). Frequency pulling effects that are discussed in ref.⁷ do not play an important role and can thus be ignored. In our analysis, we will also neglect the influence of the weak Langevin term $f(\zeta, \tau)$ describing spontaneous scattering. As spontaneous emission in a conventional laser, this term will be responsible for the existence of a lower limit to the Stokes linewidth. We will show at the end of this paper that this limit ranges in the sub-Hertz domain. Let us finally mention that we only consider situations in which the FSR of the ring laser is comparable to the width of the Brillouin gain curve. The intensity of the backscattered Stokes wave is then time independent¹¹ and the corresponding operating regime is called the “Brillouin mirror”⁵.

The first step of our theoretical analysis consists in transforming the complex amplitudes

to modulus-phase form. We then obtain

$$\partial_\tau A_p + \partial_\zeta A_p = -g A_a A_s \cos \theta, \quad (4a)$$

$$\partial_\tau A_s - \partial_\zeta A_s = g A_a A_p \cos \theta, \quad (4b)$$

$$(1/\beta_A)\partial_\tau A_a + A_a = A_p A_s \cos \theta, \quad (4c)$$

$$\partial_\tau \phi_p + \partial_\zeta \phi_p = -g(A_a A_s/A_p) \sin \theta, \quad (4d)$$

$$\partial_\tau \phi_s - \partial_\zeta \phi_s = -g(A_a A_p/A_s) \sin \theta, \quad (4e)$$

$$(1/\beta_A)\partial_\tau \phi_a = -(A_p A_s/A_a) \sin \theta, \quad (4f)$$

where $\theta(\zeta, \tau) = \phi_s(\zeta, \tau) + \phi_a(\zeta, \tau) - \phi_p(\zeta, \tau)$. A_i and ϕ_i ($i = p, s, a$) represent respectively the amplitudes and phases of the pump, Stokes and acoustic waves. The SBS interaction is submitted to resonance and phase matching conditions imposing that θ is necessarily a weakly fluctuating variable. As the cavity is resonant, its average value is zero. This is illustrated by numerical simulations in which Eqs (4) and (2) are integrated in the presence of phase noise generated by Eq. (3). The numerical procedure used is based on the method of characteristics described in ref.¹⁰. As shown in Fig. 1-a and 1-b, the phase of the acoustic wave nearly follows the same temporal evolution than the phase of the pump laser. The phase fluctuations of the Stokes wave are strongly correlated to that of the pump laser but they are also much weaker. In these conditions, the variable $\theta(\zeta = 0, \tau)$ oscillates slightly around 0 [Fig. 1-b]. The trigonometric functions appearing in Eqs. (4) can thus be expanded to the lowest order in θ . The equations for the amplitudes then become independent from that governing the evolution of the phases. The amplitude μ of the incident pump field being time independent, we can cancel all the time derivatives appearing in Eqs. (4a), (4b), (4c) and the field amplitudes then depend only on ζ . This is confirmed by numerical simulations

that show that the phase fluctuations of the pump source do not modify significantly the amplitudes of the three waves involved in the interaction. They always remain very close to the stationary longitudinal profiles presented in Fig. 1-c. With these approximations, the equations governing the spatiotemporal evolution of the phases finally become

$$\partial_\tau \phi_p + \partial_\zeta \phi_p = -gA_s^2(\zeta)\theta, \quad (5a)$$

$$\partial_\tau \phi_s - \partial_\zeta \phi_s = -gA_p^2(\zeta)\theta, \quad (5b)$$

$$\partial_\tau \phi_a = -\beta_A \theta. \quad (5c)$$

The terms appearing in the right-hand sides of Eqs. (5a) and (5b) are weak and comparable. However they do not play the same role in the two equations. Eq. (5a) must satisfy the boundary condition $\phi_p(\zeta = 0, \tau) = \phi_0(\tau)$. $\phi_0(\tau)$ acts as a source term inducing strong spatiotemporal variations of ϕ_p [see Fig. 1-a and 1-d].

In these conditions, the term $gA_s^2\theta$ is only perturbative and our last approximation consists in neglecting its influence. This means that the phase of the pump wave remains undisturbed in the interaction so that the solution of Eq. (5a) simply reads

$$\phi_p(\zeta, \tau) = \phi_0(\tau - \zeta). \quad (6)$$

On the other hand, no source term appears in the boundary condition verified by the Stokes phase [$\phi_s(\zeta = 1, \tau) = \phi_s(\zeta = 0, \tau)$] and the term $gA_p^2\theta$ is the source inducing the spatiotemporal variations of ϕ_s .

FIGURES

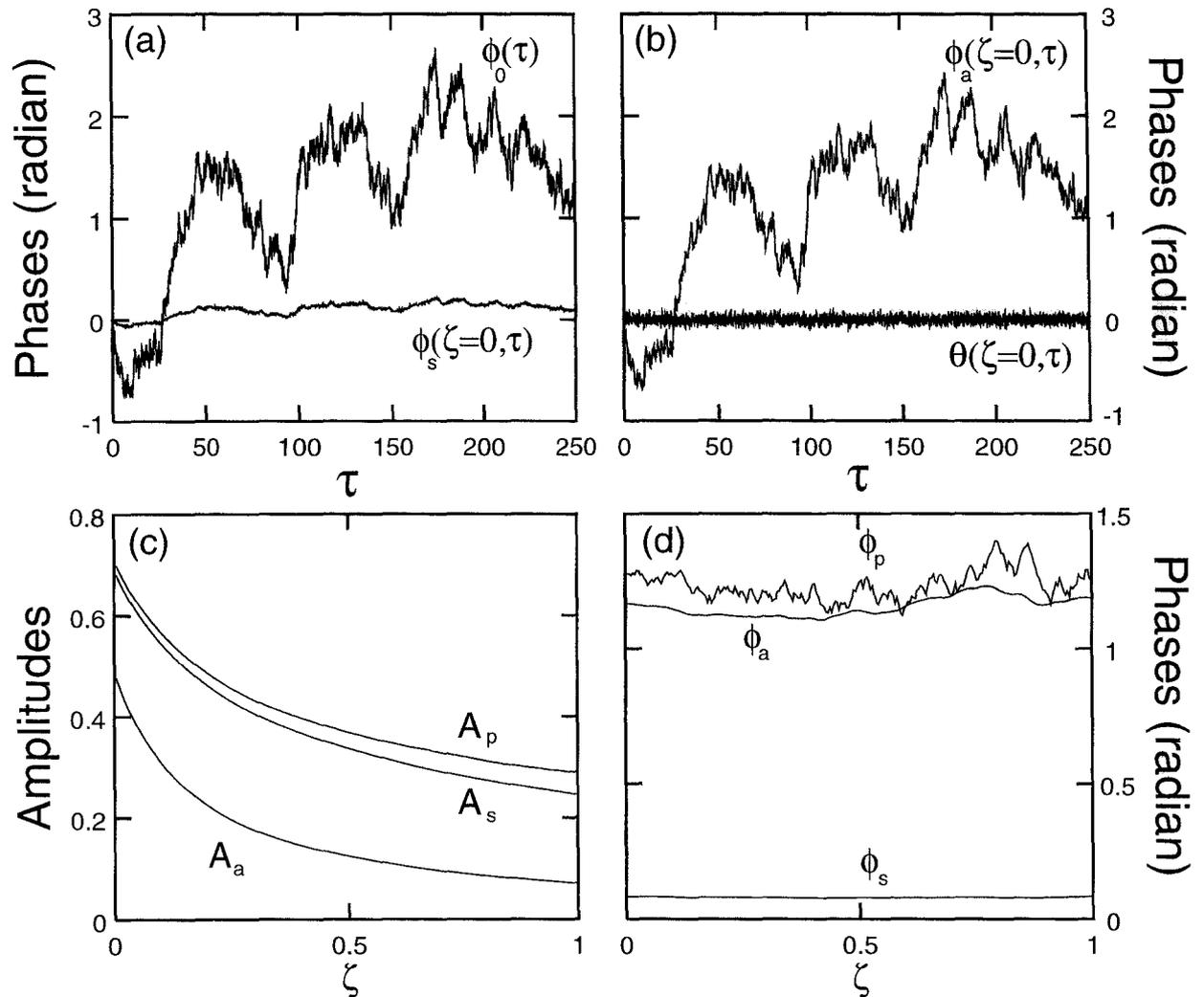


Fig. 1. Spatial profiles and temporal evolutions of the various phases and amplitudes (see text). The parameters used in the simulations are those describing the laser of ref.¹² ($g = 6.04$, $\beta_A = 10.93$, $R = 0.36$, $\mu = 0.7$).

By taking into account the previous result [Eq. (6)] that has been verified by numerical simulations, our problem is reduced to the resolution of Eqs. (5b) and (5c) in the presence of the boundary condition characterizing the cavity resonance [$\phi_s(\zeta = 1, \tau) = \phi_s(\zeta = 0, \tau)$]. It can be solved analytically for any value of μ and therefore for any shape of the pump profile $A_p(\zeta)$. However, for the sake of simplicity and in order to get some insight on the physical

mechanisms responsible for the effects presented in Fig. 1, we are first going to assume that the Brillouin laser does not operate very far from its threshold. In these conditions, the pump depletion effect can be neglected and the function A_p^2 can be approximated to $(-\ln R)/g^{12}$. Owing to the spatial periodicity imposed by the boundary condition $\phi_s(\zeta = 1, \tau) = \phi_s(\zeta = 0, \tau)$, the function $\phi_s(\zeta, \tau)$ can be decomposed as

$$\phi_s(\zeta, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n(\tau) e^{ik_n \zeta} \quad (7)$$

with $k_n = 2\pi n$ and $S_n^*(\tau) = S_{-n}(\tau)$. The problem is then solved by Fourier analysis and by using the orthonormality condition $\int_0^1 e^{ik_n \zeta} e^{-ik_m \zeta} d\zeta = \delta_{nm}$, it can be shown that

$$\tilde{S}_0(\nu) = \frac{-\ln R}{\beta_A - \ln R + i2\pi\nu} \frac{e^{-i\pi\nu} \sin \pi\nu}{\pi\nu} \tilde{\phi}_0(\nu), \quad (8)$$

where $\tilde{\phi}_0(\nu)$ and $\tilde{S}_0(\nu)$ respectively represent the Fourier transforms of $\phi_0(\tau)$ and $S_0(\tau)$. Eq. (8) shows that the incident phase noise is filtered by the association of two linear systems¹⁴. The first one is a low-pass filter that reduces the amplitude of the pump fluctuations by a factor $K = (\beta_A - \ln R)/(-\ln R)$ over a bandwidth equal to $(\beta_A - \ln R)/2\pi$ in units of cavity FSR. The second one is a system that smoothes the fluctuations by averaging them over a time interval $\Delta\tau = 1$. As shown in Fig. 1-d, the function $\phi_s(\zeta = 0, \tau)$ can be well approximated to $S_0(\tau)$ and although it has been established by neglecting the pump depletion, Eq. (8) describes qualitatively well the behavior reported in Fig. 1-a. The fluctuations of the Stokes phase are indeed much weaker than the phase fluctuations of the pump laser and the high frequencies found in $\phi_0(\tau)$ do not appear in $\phi_s(0, \tau)$. The optical coherence time, defined as the time it takes to the phase to diffuse over one radian on the average¹³, is much greater for the Brillouin laser than for the pump laser.

If pump depletion is taken into account, $\tilde{S}_0(\nu)$ and $\tilde{\phi}_0(\nu)$ are no longer connected by a term that can be factorized into two parts. This term can be calculated by taking into account the expression of $A_p^2(\zeta)$ given in ref.¹² but contrary to Eq. (8), the averaging effect does not clearly appear in its complicated analytical expression. However this term shows that the amplitude of the pump fluctuations is reduced by the factor K not only near the

threshold but whatever the value of μ . As we are now going to see it, this is the most important consideration for the evaluation of the Stokes linewidth.

The quantities of interest for the determination of the linewidths are the variances $\sigma_p^2(\tau) = \langle [\phi_0(\tau) - \phi_0(0)]^2 \rangle$ and $\sigma_s^2(\tau) = \langle [\phi_s(0, \tau) - \phi_s(0, 0)]^2 \rangle^9$. The phase noise being not a stationary process, the brackets denote an ensemble average performed at the time τ . In our phase diffusing model, $\sigma_p^2(\tau)$ is a linear function of time ($\sigma_p^2(\tau) = 2\pi\Delta\nu_p\tau$) that measures the evolution of the dispersion of the values taken by the pump phase. As the phase fluctuations of the Stokes wave are much weaker than that of the pump wave, their dispersion is also much weaker. In fact, σ_p^2 and σ_s^2 are simply connected through the relation $\sigma_p^2 = K^2\sigma_s^2$. Whatever the incident pump power, the FWHM of the Stokes spectrum is therefore given by

$$\Delta\nu_s = \frac{\Delta\nu_p}{K^2}. \quad (9)$$

By returning to the physical variables¹², one can easily show that $K = 1 + \gamma_A/\Gamma_c$ where γ_A and Γ_c respectively represent the damping rate of the acoustic wave and the cavity loss rate. γ_A is equal to $\pi\Delta\nu_B$ where $\Delta\nu_B$ represents the FWHM of the Brillouin gain curve. Γ_c is equal to $-c \ln R/nL$ where c/n is the light velocity in the fiber of length L . Eq. (9) represents the main result of this paper and the previous expression of the coefficient K clearly shows that the narrowing effect observed in Brillouin lasers is due to the combined influence of the acoustic damping and of the cavity feedback.

The analytical result given by Eq. (9) has been verified by the numerical integration of Eqs. (4) and (2) over an ensemble of 50000 realizations of the random process $\phi_0(\tau)$. Such a statistical treatment permits to determine the variances σ_p^2 and σ_s^2 at different times. The data thus obtained are then fitted to straight lines [see Fig. 2] and the ratio between the two slopes gives the numerical value of the coefficient K^2 . For parameter values characterizing a Brillouin laser operating in a low-finesse resonator^{7,11,12}, the value of K^2 given by the analytical relation is 137 and that deduced from numerical simulations presented in Fig. 2 is 144. The slight relative difference between the two values arises from the fact that the

function $\phi_s(\zeta, \tau)$ has been approximated to $S_0(\tau)$ and that the influence of the terms $S_n(\tau)$ ($n \neq 0$) has been neglected.

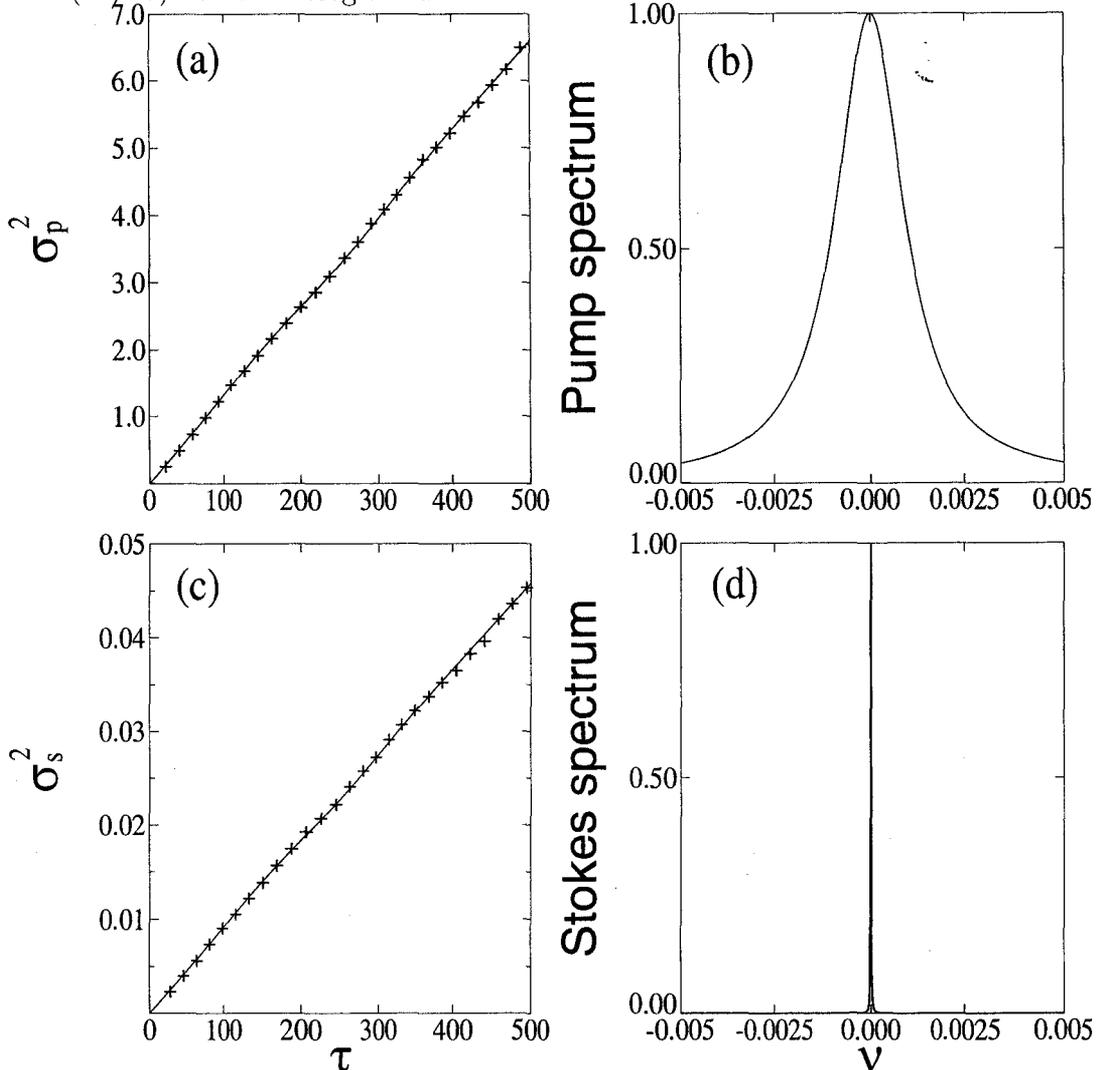


Fig. 2. Same parameters than in Fig. 1. Temporal evolution of the variance of the phase noise (diffusion process) and corresponding normalized Lorentzian spectrum of the (a), (b) incident pump field, (c), (d) Stokes field.

If the linewidth of the pump laser is of the order of several tens of kHz, a Brillouin laser operating in a low finesse cavity will emit a Stokes radiation with a linewidth of several hundreds of Hz. In an all-fiber ring resonator, a finesse greater than 100 can be easily achieved and the ratio γ_A/Γ_c is then typically of the order of 100. This means that the Stokes linewidth is at least 10^4 times narrower than the linewidth of the pump laser. This

order of magnitude is effectively the one that has been experimentally measured in that kind of laser¹. In these conditions, the linewidth of the Stokes radiation becomes of the order of a few Hz and the approximation that consists in neglecting spontaneous scattering must be questioned. Before analyzing the importance of this effect, let us first recall that spontaneous emission can be seen as a process that randomly perturbs the amplitude and the phase of the optical field emitted by a conventional laser¹⁵. By analogy with that description, spontaneous scattering can be considered as an effect perturbing the amplitude and the phase of the acoustic wave. In particular, it will lead to a diffusion of the phase of the acoustic wave. The influence of this diffusion process will become noticeable when it will be comparable to the diffusion process induced by the pump laser. As the phase of the acoustic wave nearly follows the same evolution than the phase of the pump laser [see Fig. 1-a and 1-b], spontaneous scattering cannot be neglected if $q(\tau)$ is of the same order of magnitude than the Langevin term $f(\zeta, \tau)$. The pump spectrum of Fig. 2-b has been obtained for a value of $q(\tau)$ of the order of 10^{-2} ($\langle q^2 \rangle \simeq 10^{-4}$) and its dimensionless FWHM is 0.002. This corresponds to a pump linewidth of 40 kHz for a Brillouin laser characterized by a FSR of 20 MHz. As $f(\zeta, \tau)$ is of the order of 10^{-6} , spontaneous scattering is then effectively negligible. This is no longer the case for pump linewidths as narrow as 10 Hz and Stokes linewidths that fall in the sub-Hertz domain. Obviously, the previous analysis just allows us to give an idea of the order of magnitude of the effect. Additional studies must be undertaken to precisely characterize the influence of spontaneous scattering on the linewidth of the Brillouin laser.

The Centre d'Etudes et de Recherches Lasers et Applications (CERLA) is supported by the Ministère chargé de la Recherche, the Région Nord/Pas de Calais and the Fonds Européen de Développement Economique des Régions. This work was partially supported by the European contract "Intereg II Nord-Pas de Calais/Kent".

REFERENCES

1. S. P. Smith, F. Zarinetchi, and S. Ezekiel, *Opt. Lett.* **16**, 393 (1991).
2. F. Zarinetchi, S. P. Smith, and S. Ezekiel, *Opt. Lett.* **16**, 229 (1991).
3. P. A. Nicati, K. Toyama, S. Huang, and H. J. Shaw, *Opt. Lett.* **18**, 2123 (1993).
4. A. L. Gaeta and R. W. Boyd, *Phys. Rev. A* **44**, 3205 (1991).
5. C. Montes, A. Mamhoud, and E. Picholle, *Phys. Rev. A* **49**, 1344 (1994).
6. R. W. Boyd, K. Rzażewski, and P. Narum, *Phys. Rev. A* **42**, 5514 (1990).
7. V. Lecoecuche, S. Randoux, B. Ségard, and J. Zemmouri, *Phys. Rev. A* **53**, 2822 (1996).
8. L. Mandel and E. Wolf, *Optical coherence and quantum optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
9. A. Yariv, *Quantum Electronics, Third Edition* (Wiley, New York, 1988).
10. V. Babin, A. Mocofanescu, V. I. Vlad, and M. J. Damzen, *J. Opt. Soc. Am. B* **16**, 155 (1999).
11. S. Randoux, V. Lecoecuche, B. Ségard, and J. Zemmouri, *Phys. Rev. A* **51**, R4345 (1995).
12. S. Randoux, V. Lecoecuche, B. Ségard, and J. Zemmouri, *Phys. Rev. A* **52**, 2327 (1995).
13. M. P. van Exter, S. J. M. Kuppens, and J. P. Woerdman, *IEEE J. Quantum. Electron.* **QE28**, 580 (1992).
14. A. Papoulis, *Signal Analysis* (McGraw-Hill International Editions, New York, 1984).
15. M. P. van Exter, W. A. Hamel, and J. P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **43**, 6241 (1991).

Experimental and theoretical study of linewidth narrowing in Brillouin fiber ring lasers

Alexis Debut, Stéphane Randoux and Jaouad Zemmouri

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, UMR 8523

Centre d'Études et de Recherches Lasers et Applications,

Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France)

Submitted to Journal of Optical Society of America B

Abstract

In Brillouin fiber lasers, the phase fluctuations of the pump laser are transferred to the emitted Stokes field after being strongly reduced. This results in a linewidth narrowing that is studied both experimentally and theoretically in this paper. We derive simple expressions connecting the linewidths of the waves interacting in the fiber and we show that the magnitude of the narrowing effect only depends on the acoustic damping rate and the cavity loss rate. These theoretical predictions are successfully confronted with experimental results obtained by recording the response of a Brillouin fiber ring laser to a frequency modulation of the pump field.

1. Introduction

In the 1970's, the realization of low-loss fibers has led to the advent of the field of nonlinear fiber optics.¹ Owing to its low threshold, stimulated Brillouin scattering (SBS) was among the first nonlinear effects observed in optical fibers. As it manifests through the appearance of a backward-propagating Stokes wave carrying most of the input power, it is considered as an effect limiting the performance of optical transmission systems.² However, SBS in fibers is not only detrimental and the gain of the interaction can be used to advantage in amplifiers or lasers.^{3,4} The properties of these systems have been extensively studied during the two past decades. In particular, the Brillouin fiber laser is a light source whose behavior is now well characterized. Its spatiotemporal dynamics is correctly described by a three-wave coherent model and all its operating regimes are clearly listed and delimited.^{5,6} The cw regime is of particular interest for practical applications because the Brillouin laser then emits a radiation much more coherent than that of the pump laser. For instance, this can be exploited for sensing purposes and systems such as Brillouin fiber-optic gyroscopes are well-known for their high sensitivity.⁷

Experimentally evidenced in 1991,⁸ the fact that the Stokes linewidth can be several orders of magnitude narrower than the linewidth of the pump laser has been the object of theoretical investigations presented in a recent paper.⁹ This linewidth narrowing has been studied within the framework of the usual three-wave model of SBS. It has been shown that the phase noise of the pump laser is transferred to the emitted Stokes wave after being strongly reduced and smoothed under the combined influence of the acoustic damping and the cavity feedback. Moreover, the magnitude of the narrowing effect has been precisely quantified by the derivation of an analytical relation connecting the FWHM of the Stokes linewidth to that of the pump laser.

In the present paper we supplement the previous work by presenting additional experimental and theoretical results about the narrowing effect in Brillouin lasers. In Section 2 we compare the nature of noise sources in Brillouin lasers with that of conventional lasers.

This question is of importance to place our theoretical results in relation with the many works devoted to the study of the influence of noise on the spectral properties of lasers. The role of the different noise sources being characterized, a detailed theoretical analysis of linewidth narrowing is presented in Section 3. In Subsection 3 A the coherent three-wave model of SBS is recalled and the context of our study is defined. The approximations performed are presented and discussed in Subsection 3 B. The expressions connecting the field phases are established in Subsection 3 C and the analytical relations between the widths of the field spectra are deduced in Subsection 3 D. Additional results related to the spectral properties of the three waves interacting in the laser are also given. In Section 4 our theoretical predictions are confronted with experimental results. As already mentioned in ref.⁹, the narrowing effect is so strong that the Stokes linewidth can be 10^4 times narrower than the pump linewidth. In fact, this order of magnitude is already comparable to the one measured in experiments performed in an all-fiber Brillouin laser.⁸ To briefly summarize this experimental work, the beat spectrum of two Brillouin lasers that oscillate independently is compared with the beat spectrum of their pump lasers. Although it permits a comparison between the magnitude of the frequency jitters characterizing the pump and Brillouin lasers, this method does not give a precise measurement of the intrinsic linewidth of each laser. Therefore, the ratio between the FWHM of the Stokes and pump linewidths is not precisely determined. Moreover, in the experiments presented in ref.⁸, the Stokes linewidth was so narrow that the measurement of the beat between the Brillouin lasers was limited by the instrumental resolution. In the experiments presented in Section 4 we measure the magnitude of the narrowing effect characterizing a Brillouin fiber ring laser operating in a low-finesse resonator. This is not achieved by measuring separately each linewidth but by taking into account the fact that the evolution of the phase of the Stokes wave is deeply connected to that of the pump laser.⁹ In our experiments we record the response of a Brillouin fiber ring laser to a frequency modulation of the pump beam. The ratio between the two linewidths is simply deduced from the ratio between the modulation indexes characterizing the Stokes and pump waves. The experimental value thus obtained is then compared to the theoretical

value describing the experimental setup used. Finally, Section 5 is devoted to a conclusion in which we summarize our work and outline its main perspectives.

2. Noise processes in conventional lasers and in Brillouin lasers

Since the advent of lasers, the problems related to the influence of noise processes on the spectral properties of the emitted light have been carefully examined and a large body of literature has been devoted to this subject. Obviously the aim of this section is not to present a review of this considerable work. We will rather try to summarize the main results in order to emphasize the essential differences between the nature of noise processes occurring in conventional lasers and in Brillouin lasers.

In conventional lasers, light amplification is obtained from the inversion of an atomic or a molecular population. Spontaneous emission that inevitably occurs in the gain medium acts as a quantum-noise source that is responsible for the existence of a lower limit to the laser linewidth. For a single-mode low-loss fully-inverted laser tuned to the center of a homogeneously broadened gain profile, this quantum-limited linewidth has been originally calculated by Schawlow and Townes.¹⁰ It is of the order of several tens of MHz for semiconductor lasers and it falls in the sub-Hertz domain for gas lasers. In this last case, it is obviously drowned by “technical noise” due to environmental perturbations (i.e. mechanical and thermal noise). Nowadays the expression for the laser linewidth has been generalized to include the influence of many effects such as intensity fluctuations,¹¹ large output coupling,^{12–15} population and polarization dynamics.^{16,17} Quantum mechanical treatments of the laser linewidth are available^{18–20} but semi-classical formalisms have also been developed to deal with this problem. In this case, the effects of spontaneous emission are phenomenologically included by adding Langevin noise terms in the laser equations of motion.^{15,22}

Several models are available to describe the spectral properties of lasers.²³ In the particular case of single-mode lasers, the phase diffusion model is commonly used.^{12,24} One considers that the light generated through spontaneous emission disturbs both the amplitude and

phase of the intracavity field generated by stimulated emission. Except for semiconductor lasers,^{25–27} the amplitude fluctuations are usually neglected so that only the phase of the optical field is significantly perturbed by spontaneous emission. In fact, it undergoes a random walk characterized by a diffusion constant D . The field spectrum is then a Lorentzian with a FWHM equal to $D/2\pi$.²¹

Spontaneous emission is not the only source of noise in conventional lasers. The noise characteristics of the outgoing radiation also depend on the fluctuations of the pump mechanism. In fact, the intensity noise of a conventional laser is strongly related to the noise of the pumping process.²⁸ Recently this property has been carefully examined because a reduction of the output intensity fluctuations below the shot-noise limit can be achieved by suppressing the pump noise.^{29–33} On the other hand, the fluctuations of the pumping process have no influence on the phase of the electromagnetic field emitted by a conventional laser.^{34,35} In the particular case of optically pumped lasers, the phase noise of the pump light does not contribute to the output field noise of the laser.³⁶ As explained in ref.⁹, the situation is drastically different for Brillouin lasers in which there is a strong correlation between the phase of the emitted wave and that of the pump laser. But the Brillouin laser is not the only light source that is affected by fluctuations of the pump phase. It is also the case of lasers without inversion that may exhibit a linewidth below the Schawlow-Townes limit.^{37–41} Their linewidth strongly depends on the pump bandwidth and pump phase fluctuations can even lead to a transition from a lasing without inversion to a lasing with inversion.^{42,43} The optical parametric oscillator (OPO) is another kind of light source that is inherently sensitive to the phase noise of the pump laser.³⁶ In that system, the maximum attainable squeezing is indeed dependent on the input laser bandwidth.^{44,45}

After this brief summary about the influence of noise in conventional lasers, let us now consider the case of Brillouin lasers. First of all, these lasers can only be optically pumped by light sources presenting a linewidth much narrower than the SBS gain profile. As the Brillouin gain curve is typically 100 MHz wide in silica fibers, the pump sources usually used are single-mode lasers. The pump beam does not generate a population inversion but

induces density variations inside the fiber through electrostriction. This gives birth to a backscattered Stokes wave and an acoustic wave that grow from the acoustic noise existing inside the fiber at thermal equilibrium.^{46,47} The optical fiber can then be considered as a gain medium amplifying the light around the Stokes frequency and the Brillouin laser is simply made by enclosing it within a resonator. In that system, three waves are involved in a nonlinear interaction that strongly couples their amplitudes and phases. The noise characteristics of the emitted Stokes light are therefore deeply connected to that of the pump laser. In particular the phase noise of the Brillouin laser is strongly related to the phase noise of the pump laser. This has been studied in a recent theoretical paper in which we have shown that the phase fluctuations of the pump laser are transferred to the emitted Stokes wave after being reduced and smoothed.⁹ This effect is due to the combined influence of the acoustic damping and of the cavity feedback. By using the phase diffusion model previously described and by comparing the diffusion constants characterizing the pump laser and the Stokes wave, we have shown that the Stokes linewidth is much narrower than the pump linewidth. The magnitude of the narrowing effect has been precisely quantified by the derivation of an analytical relation connecting the FWHM of the Stokes linewidth to that of the pump laser. It shows that the ratio between the pump and Stokes linewidths is around 100 in a low-finesse cavity and of the order of 10000 in a high-finesse cavity.

In most of the experiments, the linewidth of the pump laser is of the order of a few tens of kHz. The relation previously mentioned shows that the linewidth of the Stokes radiation can be of the order of a few Hz. This linewidth being very narrow, the validity of the approximations leading to this result must be questioned. In fact, the theoretical relation of ref.⁹ has been established by assuming that the phase noise of the pump laser is the predominant noise source. However, other noise sources are also able to alter the spectral properties of the Brillouin laser. For instance, the cavity length and the feedback efficiency are fluctuating parameters whose influence must be analyzed. The fluctuations of the cavity characteristics arise from mechanical and thermal noise and their bandwidth is typically of the order of 100 Hz. They are responsible for slow variations of the laser intensity and for

slow drifts of the Stokes frequency but they do not contribute to the intrinsic linewidth of the emitted radiation. If the field spectrum is recorded by beating the Brillouin laser against a stable reference laser,⁴⁸ the mean frequency of the beat spectrum drifts on a timescale of the order of 0.01 s. The maximum frequency deviation then depends on the mechanical and thermal stability of the resonator. Brillouin fiber lasers operating in low-finesse resonators usually include an aerial arm yielding noticeable feedback and length fluctuations. In that kind of system the magnitude of the frequency jitters is comparable to the free spectral range (FSR) of the resonator (i.e. typically of the order of 10 MHz). In all-fiber Brillouin lasers, the use of couplers offers a good stability of the feedback efficiency and stabilization techniques permit to reduce the magnitude of frequency jitters well below the cavity FSR.

Another kind of noise source also affects the temporal coherence of Brillouin lasers. Slight random fluctuations of density indeed occur all along the fiber at thermal equilibrium. This acoustic noise is responsible for the initiation of the SBS process but it can also give rise to a stochastic dynamics in Brillouin generators where care is taken to eliminate feedback from the fiber ends.⁴⁶ Its influence is taken into account in the three-wave model by adding a Langevin noise term in the equation governing the evolution of the acoustic wave.⁴⁷ As it expresses the effect of spontaneous scattering, the relative importance of this noise term is much weaker than that of the term representing stimulated scattering. However, one cannot consider spontaneous scattering as a process that only initiates SBS. As previously mentioned, its role is indeed determining in Brillouin generators in which gain narrowing of the Stokes spectrum is observed.⁴⁶ The acoustic noise also affects the behavior of highly multimode Brillouin fiber lasers by perturbing the stability of their pulsed emission.⁴ In single-mode Brillouin lasers, the acoustic noise plays a role analogous to that of spontaneous emission in conventional lasers. Therefore, it will be responsible for the existence of a lower limit to the Stokes linewidth. This point has been studied with different approaches in ref.⁴⁹ and in ref.⁹.

In ref.⁴⁹, the authors observe of the light spectrum backscattered by a Brillouin generator. In the absence of any feedback from the fiber ends, the width of this spectrum is of the

order of the SBS gain bandwidth. The authors then show that even a small amount of feedback from the fiber ends is sufficient to induce a considerable narrowing of the Stokes spectrum. This behavior is analyzed within the framework of the usual three-wave model of SBS. By neglecting the influence of pump noise, the authors establish an analytical relation giving the Stokes power spectrum in the limit of an undepleted pump field. The spectrum characteristics depend on the strength of the acoustic noise but also on parameters such as the interaction length and the boundary reflectivities. Numerical calculations performed with parameter values representative of Brillouin lasers commonly found show that the width of this spectrum always falls in the sub-Hertz domain.

The approach adopted in ref.⁹ is much more qualitative. By analogy with spontaneous emission, spontaneous scattering is considered as an effect that slightly perturbs the amplitude and the phase of the acoustic wave. In particular, it leads to a diffusion of the phase of the acoustic wave. The influence of this diffusion process is no longer negligible when it becomes comparable to the diffusion process induced by the phase fluctuations of the pump laser. By applying this analysis it is possible to show that spontaneous scattering is no longer negligible for pump linewidths as narrow as 10 Hz and Stokes linewidths that fall in the sub-Hertz domain.⁹ As for the Schawlow-Townes limit in conventional lasers, the fundamental linewidth of a Brillouin laser is very narrow. In the following theoretical analysis, we will consider that the noise due to spontaneous scattering does not contribute noticeably to the intrinsic linewidth of the Brillouin laser. It is drowned by other noise sources and in particular by the phase noise induced by the phase fluctuations of the pump laser.

3. Theoretical Analysis

A. Model

Our theoretical analysis of linewidth narrowing enters within the framework of the usual three-wave model of SBS. In this model, the single-mode fiber is considered as an unidimensional medium in which two linearly-polarized optical waves and an acoustic wave are coupled through electrostriction. SBS being a narrow bandwidth process, each of these waves can be regarded as being composed of a high frequency carrier that is modulated (both in amplitude and phase) by a slowly varying envelope. By neglecting the perturbative influence of the optical Kerr effect and the weak attenuation of the fiber, the dimensionless equations that govern the spatiotemporal dynamics of the slowly-varying envelopes read

$$\partial_\tau \varepsilon_p + \partial_\zeta \varepsilon_p = -gB\varepsilon_s, \quad (1a)$$

$$\partial_\tau \varepsilon_s - \partial_\zeta \varepsilon_s = gB^* \varepsilon_p, \quad (1b)$$

$$(1/\beta_A)\partial_\tau B + B = \varepsilon_p \varepsilon_s^*. \quad (1c)$$

ε_p , ε_s , B represent respectively the complex amplitudes of the pump, Stokes and acoustic waves. The time τ is normalized to the transit time of the light inside the fiber. ζ is the space coordinate that is normalized to the fiber length. The fields ε_p and ε_s are measured in units of the maximum pump field available at the entrance end of the fiber. g is the SBS coupling constant and β_A represents the normalized damping rate of the acoustic wave. Following the discussion of Section 2, the weak term describing spontaneous Brillouin scattering has been neglected in Eq. 1c. Transforming the complex amplitudes to modulus-phase form yields the following equations:

$$\partial_\tau A_p + \partial_\zeta A_p = -gA_a A_s \cos \theta, \quad (2a)$$

$$\partial_\tau A_s - \partial_\zeta A_s = gA_a A_p \cos \theta, \quad (2b)$$

$$(1/\beta_A)\partial_\tau A_a + A_a = A_p A_s \cos \theta, \quad (2c)$$

$$\partial_\tau \phi_p + \partial_\zeta \phi_p = -g(A_a A_s / A_p) \sin \theta, \quad (2d)$$

$$\partial_\tau \phi_s - \partial_\zeta \phi_s = -g(A_a A_p / A_s) \sin \theta, \quad (2e)$$

$$(1/\beta_A)\partial_\tau \phi_a = -(A_p A_s / A_a) \sin \theta, \quad (2f)$$

where $\theta(\zeta, \tau) = \phi_s(\zeta, \tau) + \phi_a(\zeta, \tau) - \phi_p(\zeta, \tau)$. A_i and ϕ_i ($i = p, s, a$) are real functions that represent respectively the amplitudes and phases of the pump, Stokes and acoustic waves.

The equations governing the SBS interaction being recalled, let us now precisely define the context of our analysis of linewidth narrowing. We only consider Brillouin fiber ring lasers operating in a single longitudinal mode. This condition is satisfied when the FSR of the ring cavity is of the same order of magnitude than the FWHM $\Delta\nu_B$ of the Brillouin gain curve. The laser operates in the ‘‘Brillouin mirror’’ regime and the intensity of the backscattered Stokes wave is time independent.^{5,50} It is then possible to study how the phase fluctuations of the pump laser are transferred to the Stokes wave or in other words, to compare the field spectrum of the Brillouin laser to that of the pump laser. If the FSR of the ring cavity is much narrower than $\Delta\nu_B$, the Stokes emission becomes pulsed^{4,6} and the width of the field spectrum is then comparable to $\Delta\nu_B$. In our study, we only consider Brillouin fiber ring lasers in which pump recoupling is avoided by an intracavity isolator. In these conditions, Eqs. (2) must be completed by the boundary conditions:

$$A_p(\zeta = 0, \tau) = \mu, \quad (3a)$$

$$A_s(\zeta = 1, \tau) = R A_s(\zeta = 0, \tau), \quad (3b)$$

$$\phi_p(\zeta = 0, \tau) = \phi_0(\tau), \quad (3c)$$

$$\phi_s(\zeta = 1, \tau) = \phi_s(\zeta = 0, \tau). \quad (3d)$$

μ is a dimensionless pump parameter and $\phi_0(\tau)$ represents the phase of the incident pump field. R is the amplitude feedback parameter characterizing the ring cavity. As already mentioned in Section 2, Brillouin fiber ring lasers are usually pumped by well-stabilized single-mode lasers. In the phase diffusion model commonly used to describe the field emitted by this kind of laser, the amplitude noise is neglected and the phase is a fluctuating variable that undergoes a random walk. With our notations, μ is time independent whereas the evolution of ϕ_0 is governed by the stochastic Langevin equation

$$\frac{d\phi_0(\tau)}{d\tau} = q(\tau), \quad (4)$$

in which $q(\tau)$ is a δ -correlated Gaussian noise of zero-mean.²¹

B. Approximations

To describe the Brillouin mirror regime, we can first assume that the field amplitudes are rigorously time independent. In these conditions, the time derivatives can be eliminated from Eqs. (2a), (2b), (2c) and θ becomes a time-independent variable that is only function of the stationary amplitudes. However, the coupling between the field phases is then lost (see Eqs. (2d), (2e), (2f)) and we can conclude that the previous approximation is too rough. Although the pump parameter μ is time independent, we shall rather consider that the phase fluctuations of the incident pump field can induce slight variations of the various amplitudes around their steady states. In concrete terms, let us write Eq. (2c) under the form:

$$\frac{1}{\beta_A} \frac{1}{A_a} \frac{\partial A_a}{\partial \tau} + 1 = \frac{A_p A_s}{A_a} \cos \theta. \quad (5)$$

To describe the Brillouin mirror, we are going to consider that:

$$\left| \frac{1}{\beta_A} \frac{1}{A_a} \frac{\partial A_a}{\partial \tau} \right| \ll 1. \quad (6)$$

This first means that the relative fluctuations of the amplitude of the acoustic wave must be very weak. Moreover, the bandwidth characteristic of these fluctuations must be narrower than the Brillouin bandwidth. If the Brillouin laser is pumped by a single-mode laser with

a linewidth much narrower than the Brillouin bandwidth, the two previous conditions are clearly always verified. This is confirmed by numerical simulations in which Eqs. 2 and 3 are integrated in the presence of phase noise generated by Eq. 4. For instance, the numerical results presented in Fig. 1 of ref.⁹ are typical and they show that the value of the term $|(\beta_A A_a)^{-1} \partial A_a / \partial \tau|$ never exceeds 10^{-4} . By taking into account Eqs. (5) and (6), we obtain a good approximation for the amplitude of the acoustic wave which is in fact very close to its steady state profile $A_a(\zeta)$:

$$A_a(\zeta, \tau) \simeq A_a(\zeta) \simeq A_p(\zeta, \tau) A_s(\zeta, \tau) \cos \theta(\zeta, \tau). \quad (7)$$

Let us emphasize that in this expression, the functions $A_p(\zeta, \tau)$, $A_s(\zeta, \tau)$ slightly fluctuate themselves around the steady state. The SBS interaction being submitted to precise resonance and phase-matching conditions, $\theta(\zeta, \tau)$ is also a weakly fluctuating variable. By injecting Eq. (7) into Eqs. (2d), (2e) and (2f), we obtain:

$$\partial_\tau \phi_p + \partial_\zeta \phi_p = -(g/2) A_s^2(\zeta, \tau) \sin(2\theta(\zeta, \tau)), \quad (8a)$$

$$\partial_\tau \phi_s - \partial_\zeta \phi_s = -(g/2) A_p^2(\zeta, \tau) \sin(2\theta(\zeta, \tau)), \quad (8b)$$

$$(1/\beta_A) \partial_\tau \phi_a = -(1/2) \sin(2\theta(\zeta, \tau)). \quad (8c)$$

Eq. (3d) indicates that the cavity is resonant for the Stokes wave. This means that the center of the Brillouin gain curve coincides with one of the resonator eigenfrequencies so that frequency pulling effects are ignored.⁵⁰ In these conditions, the variable $\theta(\zeta, \tau)$ fluctuates around a stationary value which is uniformly equal to zero. As these fluctuations are weak, the sine functions can be developed to the lowest order in θ . The relative fluctuations of the amplitudes $A_s(\zeta, \tau)$ and $A_p(\zeta, \tau)$ being weak, the temporal evolution of the right-hand sides of Eqs. (8a) and (8b) is governed by the fluctuations of the variable θ . Therefore, the amplitudes $A_s(\zeta, \tau)$ and $A_p(\zeta, \tau)$ can be very well approximated to their steady state

values $A_s(\zeta)$ and $A_p(\zeta)$. Finally, the equations governing the spatiotemporal evolution of the phases can be written as:

$$\partial_\tau \phi_p + \partial_\zeta \phi_p = -gA_s^2(\zeta)\theta, \quad (9a)$$

$$\partial_\tau \phi_s - \partial_\zeta \phi_s = -gA_p^2(\zeta)\theta, \quad (9b)$$

$$\partial_\tau \phi_a = -\beta_A \theta. \quad (9c)$$

If the ring cavity is not resonant, a detuning term must be added to the right-hand side of Eq. (3d). The variable $\theta(\zeta, \tau)$ then slightly oscillates around a constant value θ_0 that depends on the detuning term, the cavity loss rate and the acoustic damping.⁵⁰ The previous treatment can be performed but the sine functions must be linearized around θ_0 . The right-hand side of Eqs. (8) then consists of the sum of a time-independent term and a weakly fluctuating term. If the time-independent term is only taken into account, the phases linearly vary with time. This term just describes the fact that the fields no longer evolve in the rotating frame used to derive the three-wave model and that their frequencies are shifted by pulling effects. The narrowing effect is only linked to the weakly fluctuating term and it can therefore be studied in a rotating frame permitting to ignore frequency pulling effects (Eqs. (9)).

When the Brillouin laser operates well-above threshold, the functions $A_p^2(\zeta)$ and $A_s^2(\zeta)$ do not strongly differ [see Fig. 1-c of ref.⁹] so that the weak terms appearing in the right-hand sides of Eqs. (9a) and (9b) are of the same order of magnitude. However, they do not play the same role in the two equations. In Eq. (9a) the influence of the term $gA_s^2(\zeta)\theta$ is only perturbative. On the other hand the term $gA_p^2(\zeta)\theta$ plays a determining role in Eq. (9b). To explain this point, let us describe the mechanism of linewidth narrowing in a simple way. As already mentioned, the linewidth of the light sources used to pump Brillouin fiber lasers is typically of the order of 100 kHz. This means that the time it takes to the phase

to diffuse over one radian on the average (i.e. the optical coherence time⁵¹) is of the order of 10 μs . The phase fluctuations of the pump source are first seen by the acoustic wave whose response time is of the order of 10 ns. Therefore the acoustic phase nearly follows adiabatically the spatiotemporal evolution imposed by the pump laser [see also Fig. 1 of ref.⁹]. As already mentioned, the resonance and phase-matching relations impose that θ is a weakly fluctuating variable. In these conditions, the spatiotemporal variations of the Stokes phase are necessarily much weaker than the spatiotemporal variations of the pump and acoustic phases. In other words, the coherence time of the Brillouin laser is much greater than the coherence time of the pump laser.

After these qualitative considerations, we can now analyze the role of the terms appearing in the right-hand sides of Eqs. (9a) and (9b). Eq. (9a) must satisfy the boundary condition given by Eq. (3c). In this last equation $\phi_0(\tau)$ is a source term inducing strong spatiotemporal variations of ϕ_p . The weak term $gA_s^2(\zeta)\theta$ is only perturbative and its influence can be neglected. On the other hand, the boundary condition verified by the Stokes phase (Eq. (3d)) does not contain a source term. The spatiotemporal evolution of the Stokes phase is governed by the weak term $gA_p^2(\zeta)\theta$ whose influence cannot be neglected. By considering that the phase of the pump wave remains undisturbed in the interaction, the solution of Eq. (9a) simply reads

$$\phi_p(\zeta, \tau) = \phi_0(\tau - \zeta). \quad (10)$$

Let us note that the previous result has been validated by numerical simulations that clearly yield similar results either for the three-wave model (Eqs. (2)) or for the integration of Eqs. (9b), (9c) and (10).

By taking into account the analytical expression of $A_p^2(\zeta)$ (Eq. (7a) of ref.⁵²), our problem is finally reduced to the resolution of the set of equations

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \phi_s}{\partial \zeta} = \frac{-g\Omega}{1 - \Delta \exp(-2g\Omega\zeta)} (\phi_s + \phi_a - \phi_p), \quad (11a)$$

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial \tau} = -\beta_A (\phi_s + \phi_a - \phi_p) \quad (11b)$$

where ϕ_p is given by Eq. (10). In Eq. (11a), $\Omega = A_p^2(\zeta = 0) - A_s^2(\zeta = 0)$ and the constant Δ reads

$$\Delta = \frac{R^2 - \exp(-2g\Omega)}{(R^2 - 1)\exp(-2g\Omega)}. \quad (12)$$

C. Analytical determination of the relations between the field phases

According to the boundary condition given by Eq. (3d), we must seek a solution for $\phi_s(\zeta, \tau)$ that writes under the form:

$$\phi_s(\zeta, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n(\tau) e^{ik_n\zeta} \quad (13)$$

with $k_n = 2\pi n$ and $S_n^*(\tau) = S_{-n}(\tau)$. After a Fourier transformation of Eqs. (10), (11) and (13) and by using the orthonormality condition $\int_0^1 e^{ik_n\zeta} e^{-ik_m\zeta} d\zeta = \delta_{nm}$, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\beta_A + i2\pi\nu}{g\Omega} (\nu - m) \tilde{S}_m(\nu) &= \nu \tilde{\phi}_0(\nu) \int_0^1 \frac{\exp -i(k_m + 2\pi\nu)\zeta}{1 - \Delta \exp(-2g\Omega\zeta)} d\zeta \\ &- \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{S}_n(\nu) \nu \int_0^1 \frac{\exp i(k_n - k_m)\zeta}{1 - \Delta \exp(-2g\Omega\zeta)} d\zeta. \end{aligned} \quad (14)$$

$\tilde{\phi}_0(\nu)$ and $\tilde{S}_m(\nu)$ respectively represent the Fourier transforms of $\phi_0(\tau)$ and $S_m(\tau)$. The phase of the Stokes wave being weakly fluctuating, its spatial profile is almost independent of ζ [see also Fig. 1-d of ref.⁹] and $\phi_s(\zeta, \tau)$ can be very well approximated to $S_0(\tau)$. The influence of the components of index $n \neq 0$ can thus be neglected in the discrete sum and Eq. (14) simply yields

$$\tilde{S}_0(\nu) = \frac{g \int_0^1 \frac{\Omega \exp(-i2\pi\nu\zeta) d\zeta}{1 - \Delta \exp(-2g\Omega\zeta)}}{g \int_0^1 \frac{\Omega d\zeta}{1 - \Delta \exp(-2g\Omega\zeta)} + \beta_A + i2\pi\nu} \tilde{\phi}_0(\nu). \quad (15)$$

Eq. (15) shows that the phase of the emitted Stokes wave is directly connected to the phase of the pump laser. The expression found is obviously much more complicated than the relation derived in ref.⁹. In that case, we have considered that the laser does not operate very far from its threshold so that pump depletion is negligible. The function $A_p^2(\zeta)$ can thus be approximated to $-\ln(R)/g$ and the analytical calculation is then greatly simplified.

However the result given in ref.⁹ can also be found directly from Eq. (15). To that effect, we only assume that $A_s^2(\zeta) \simeq 0$. With this condition Ω is equal to $-\ln(R)/g$ and Δ is equal to zero. Elementary calculations then directly yield the relation already found in ref.⁹:

$$\tilde{S}_0(\nu) = \frac{-\ln R}{\beta_A - \ln R + i2\pi\nu} \frac{e^{-i\pi\nu} \sin \pi\nu}{\pi\nu} \tilde{\phi}_0(\nu). \quad (16)$$

Contrary to Eq. (15), the term connecting $\tilde{S}_0(\nu)$ to $\tilde{\phi}_0(\nu)$ in Eq. (16) can be factorized into two parts. The first part shows that the phase fluctuations of the pump laser are filtered and reduced before being transferred to the emitted Stokes wave. The ratio K between the amplitudes of the fluctuations characterizing the pump and Stokes phases is simply equal to $(\beta_A - \ln R)/(-\ln R)$. The second part of the term shows that a smoothing effect also occurs during the transfer of the phase noises. In Eq. (15), it is not possible to separate the two effects (filtering and smoothing) by a simple factorization. However, we can determine the ratio between the amplitude of the phase fluctuations. This quantity is indeed of direct interest for the determination of the ratio between the FWHM of the pump and Stokes linewidths. We are now going to show that it is equal to the value of K previously given not only near the threshold but also whatever the value of μ .

Let us recall that the bandwidth characteristic of the phase fluctuations of the pump laser is typically of the order of 100 kHz. This value is approximately 100 times smaller than the cavity FSR . For values of ν much lower than unity, we are going to calculate an asymptotic expansion of the function $\tilde{S}_0(\nu)/\tilde{\phi}_0(\nu)$. The integral appearing at the numerator of Eq. (15) can first be simplified by considering that the term $e^{-i2\pi\nu\zeta}$ is equal to unity on the interval of integration. Moreover, the term $i2\pi\nu$ of the denominator can be neglected with respect to β_A . Lengthy but elementary calculations then show that the integral $\int_0^1 \frac{\Omega d\zeta}{1 - \Delta \exp(-2g\Omega\zeta)}$ is simply equal to $-\ln(R)/g$. Finally, we find that the ratio K between the amplitudes of the pump and Stokes fluctuations is equal to $(\beta_A - \ln R)/(-\ln R)$ not only near threshold but also whatever the incident pump power. This important result can be explained by the fact that the function $\phi_s(\zeta, \tau)$ has been approximated to $S_0(\tau)$. As shown in Eqs. (14) and (15), the problem is then greatly simplified. The integration with respect to ζ simply leads

to the appearance of the previous integral that represents in fact the mean value of the pump intensity inside the fiber: $\int_0^1 A_p^2(\zeta) d\zeta$. When the laser oscillation is initiated, all the input energy is transferred from the pump wave to the Stokes wave. In these conditions, the mean value of the pump intensity inside the fiber always remains the one required to initiate the laser oscillation and is equal to $-\ln(R)/g$. The ratio K only depends on this mean value and is therefore independent of the incident pump power. If the influence of a few functions $S_n(\tau)$ of order $n \neq 0$ was taken into account, the problem would not consist in the treatment of only one equation but of a set of equations. Moreover, the determination of the coupling coefficients between the functions S_n would require the calculation of complicated integrals (see Eq. (14)). Fortunately, the components $S_{\pm 1}$ become comparable to S_0 only if the bandwidth characteristic of the fluctuations of the pump laser becomes of the order of the cavity FSR. Therefore, the approach that consists in approximating $\phi_s(\zeta, \tau)$ to $S_0(\tau)$ is suitable for most of the lasers operating in the Brillouin mirror regime.

The previous result can now be used to determine the ratio K' between the amplitude of the fluctuations of $\phi_0(\tau)$ and $\phi_a(\zeta = 0, \tau)$. A Fourier transformation of Eq. (11b) is first performed and Eq. (15) is simply injected in the obtained relation. By using a method analogous to that already applied, we easily find that K' is equal to $(\beta_A - \ln R)/\beta_A$. If L and c/n are respectively the fiber length and the phase velocity of the light inside the fiber, β_A is equal to $\pi\Delta\nu_B nL/c$. By using this last expression one can easily return to physical variables and show that:

$$K = 1 + \frac{\gamma_A}{\Gamma_c}, \quad (17a)$$

$$K' = 1 + \frac{\Gamma_c}{\gamma_A}, \quad (17b)$$

where γ_A and Γ_c represent respectively the damping rate of the acoustic wave and the cavity loss rate ($\gamma_A = \pi\Delta\nu_B$, $\Gamma_c = -c \ln R/nL$).

D. Field spectra

If the model used to describe the spectral properties of the pump laser is the phase diffusion model, the relevant quantity for the determination of the pump linewidth is the variance $\sigma_p^2(\tau) = \langle [\phi_0(\tau) - \phi_0(0)]^2 \rangle$ that measures the evolution of the dispersion of the values taken by the pump phase. $\sigma_p^2(\tau)$ is a linear function of time that directly yields the FWHM $\Delta\nu_p$ of the Lorentzian pump spectrum ($\sigma_p^2(\tau) = 2\pi\Delta\nu_p\tau$).⁵³ Similar functions can obviously be introduced to characterize the acoustic and Stokes phase noises ($\sigma_s^2(\tau) = \langle [\phi_s(0, \tau) - \phi_s(0, 0)]^2 \rangle$, $\sigma_a^2(\tau) = \langle [\phi_a(0, \tau) - \phi_a(0, 0)]^2 \rangle$). The phase fluctuations of the Stokes and acoustic waves being weaker than that of the pump wave, their dispersions are also weaker and are respectively given by : $\sigma_s^2 = \sigma_p^2/K^2$ and $\sigma_a^2 = \sigma_p^2/K'^2$. The FWHM $\Delta\nu_s$ and $\Delta\nu_a$ of the Stokes and acoustic spectra are then related to $\Delta\nu_p$ through the expressions:

$$\Delta\nu_s = \frac{\Delta\nu_p}{K^2}, \quad (18a)$$

$$\Delta\nu_a = \frac{\Delta\nu_p}{K'^2}. \quad (18b)$$

This analytical result has been verified by numerical simulations already presented in ref.⁹. They are based on a statistical treatment in which Eqs. (2) and (3) are integrated over an ensemble of 50000 realizations of the random process $\phi_0(\tau)$. The variances characteristic of the various noises are evaluated at different times and the FWHM of the various spectra are deduced from the obtained data. Only a slight relative difference (of the order of a few percents) between numerical and analytical results has thus been found. The origin of this discrepancy has already been discussed in ref.⁹. It arises from the fact that the influence of the terms $S_n(\tau)$ ($n \neq 0$) has been neglected in the analytical treatment.

The pump and Stokes spectra presented in ref.⁹ were plotted on a linear scale. Moreover, their maximum amplitude was normalized to unity. This kind of representation clearly evidences the difference between the FWHM of the two spectra. However, its main disadvantage is to occult the difference between the amplitudes of the field spectra. Let us

recall that the field spectrum is defined as the Fourier transform of the field autocorrelation function $C(t)$.^{21,53} As all the amplitudes are time-independent, this function reads

$$C(t) = A_i^2 \langle e^{i[\phi_i(\tau+t) - \phi_i(\tau)]} \rangle \quad (19)$$

where A_i and ϕ_i represent respectively the amplitude and the phase of any of the three waves ($i = p, s, a$). By performing a calculation usually found in the literature for phase diffusing fields,^{21,53} one easily derive the expression of the corresponding Lorentzian field spectrum:

$$S_i(\nu) = A_i^2 \frac{2\pi \Delta\nu_i}{(\pi \Delta\nu_i)^2 + 4\pi^2 \nu^2}. \quad (20)$$

For values of $\Delta\nu_i$ deduced from the numerical simulations presented in ref.⁹, the three field spectra are now presented with logarithmic scales in Fig. 1-a. The values used for the field amplitudes are those measured at $\zeta = 0$ [see Fig. 1-c of ref.⁹]. Three vertical lines plotted in Fig. 1-a permit to easily locate the HWHM of each spectrum. As K'^2 is equal to 1.19, the widths of the pump and acoustic spectra do not strongly differ. On the other hand, the Stokes spectrum is clearly much narrower ($K^2 = 144$) and its maximum amplitude is much greater than that of the pump spectrum. In fact, as the amplitude of the pump field is nearly equal to the amplitude of the Stokes field at $\zeta = 0$, the ratio between the maximum amplitudes of the two spectra is nearly equal to K^2 (see Eq. 20).

FIGURES

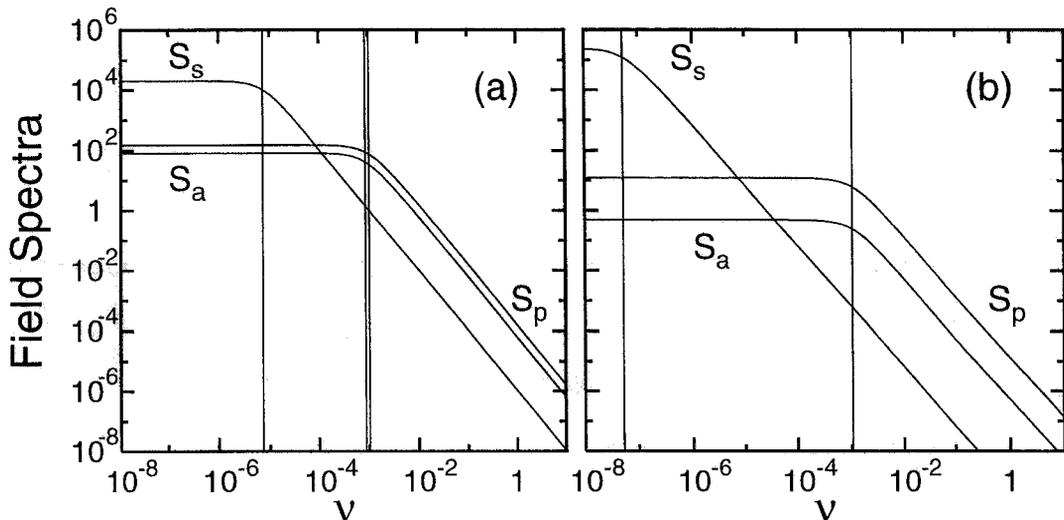


Fig. 1. Field spectra of the pump, Stokes and acoustic waves: (a) $g = 6.04$, $\beta_A = 10.93$, $R = 0.36$, $K^2 = 144$, $K'^2 = 1.19$ (b) $g = 0.77$, $\beta_A = 3.64$, $R = 0.974$, $K^2 = 2.10^4$, $K'^2 = 1.015$. The frequencies are measured in units of cavity FSR.

We can now adopt a simplified approach and see the Brillouin fiber ring laser as a system in which the incident pump field and the emitted Stokes field represent respectively the input and output quantities. In these conditions, the laser acts as a system that “squeeze” the width and “stretch” the peak amplitude of the field spectra. If the input and output fields have the same amplitude, the “squeezing and stretching factors” are identical and equal to K^2 . As shown in Fig. 1-b, the narrowing effect becomes very strong when a good cavity is used ($R = 0.974$). The coefficient K^2 being then of 2.10^4 , the Stokes linewidth is much narrower than the pump and acoustic linewidths that are almost identical ($K'^2 \simeq 1$). If the FWHM of the pump linewidth is of the order of 100 kHz, the linewidth of such a Brillouin laser is as narrow as a few Hertz. A value of this order of magnitude has been effectively measured in ref.⁵⁴ by beating the two first order Stokes components emitted by an all-fiber Brillouin laser.

4. Experiments

This section is devoted to the presentation of experiments in which we measure the coefficient K characterizing the narrowing effect in a Brillouin fiber ring laser operating in a low-finesse cavity. The principle of the experiment is based on the existence of the deterministic connection between the pump and Stokes phases (Eqs. (15) and (16)). If a modulation is applied on the phase of the pump laser, it is transferred to the phase of the emitted Stokes wave and the ratio between the two modulation amplitudes is simply equal to K . This is illustrated in Fig. 2 by numerical simulations in which a sinusoidal modulation is applied to the phase ϕ_0 of the pump laser.

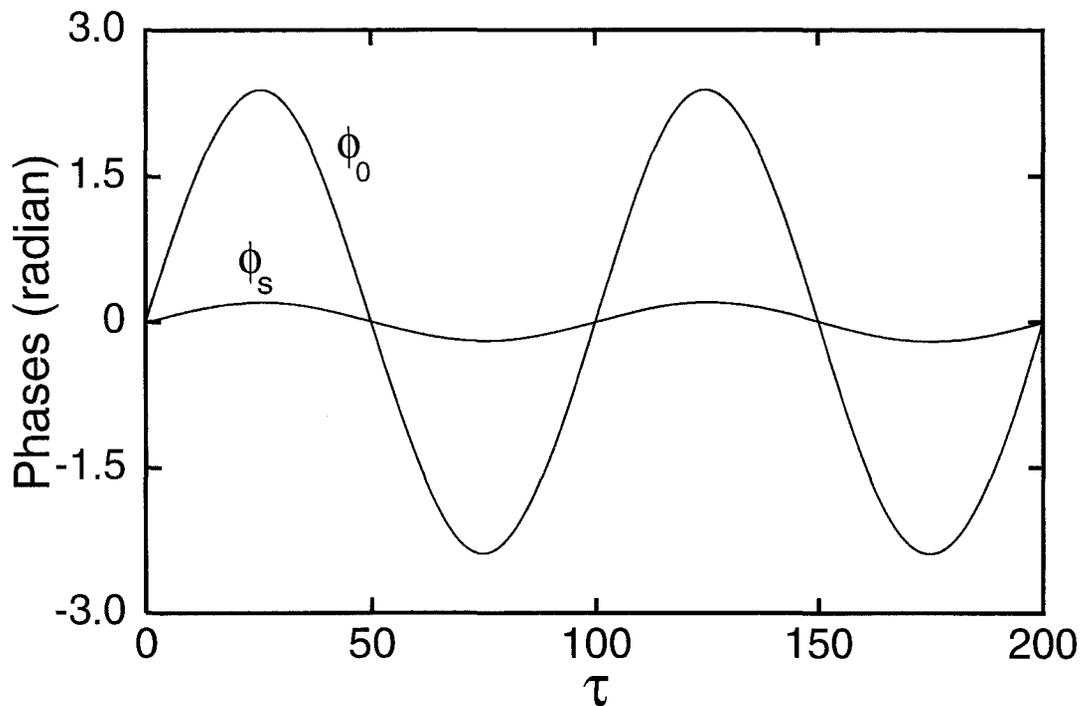


Fig. 2. Numerical simulations: response of the Brillouin fiber ring laser to a sinusoidal modulation of the phase ϕ_0 of the pump laser ($g = 6.04$, $\beta_A = 10.93$, $R = 0.36$). ϕ_s is the phase of the emitted Stokes wave and the time τ is normalized to the transit time of the light inside the fiber.

The integrated equations are Eqs. (2) and (3) and the numerical values of the parameters describing the Brillouin laser are identical to those used in ref.⁹. The ratio between the

amplitudes of the two sine functions presented in Fig. 2 is equal to 12.01 whereas that deduced from Eq. 17a is 11.70. The origin of this slight difference has already been mentioned in Section 3D and in ref.⁹. It arises from the fact that the analytical relation has been derived by assuming that the spatial profile characterizing the phase of the Stokes wave is perfectly uniform. This approximation is very well justified when the characteristic frequency associated to the evolution of the pump phase is much weaker than the cavity FSR. In Fig. 2, this frequency is 100 times lower than the cavity FSR but this is not yet sufficient to ensure that the phase profile of the Stokes wave does not slightly deviate from uniformity. This explains the difference between the numerical and analytical values.

In our experiments, the method previously depicted is used: the frequency of the pump laser is modulated and the modulation index characterizing the Stokes wave is compared to that of the pump laser. This is achieved by using the experimental setup presented in Fig. 3. The pump source is a titanium-sapphire laser emitting a linearly polarized beam at 810 nm. Its output power is 2.4 W and it is optically isolated from the Brillouin laser by a Faraday isolator. Frequency modulation of the pump beam is ensured by a waveform generator, a voltage controlled oscillator (VCO) and an acousto-optic modulator (AOM). When a sinusoidal voltage is applied to the VCO, it generates a constant amplitude, frequency-modulated RF signal. After amplification, this RF signal oscillating around $\nu_{RF} = 181.7$ MHz is applied to the AOM that diffracts the incident beam. The transmitted beam passes through the AOM without any deviation and it carries most of the incident power (1.3 W). The transmitted optical field is neither amplitude-modulated nor frequency-modulated and it simply reads

$$E_{p0}(t) = E_{p0} \sin(2\pi\nu_p t) \quad (21)$$

where ν_p is the frequency of the pump laser. The orientation of the AOM is adjusted so that the power of the diffracted beam is around 900 mW. The diffracted field is frequency-modulated and reads

$$E_{p1}(t) = E_{p1} \sin\left(2\pi(\nu_p + \nu_{RF})t + \frac{\delta\nu_p}{f} \sin(2\pi ft)\right). \quad (22)$$

f is the frequency of modulation and $\delta\nu_p$ is the maximum frequency deviation. These two parameters are controlled respectively by the frequency and the amplitude of the sinusoidal signal delivered by the waveform generator. As the frequency of the RF signal that is fed to the AOM varies, we should note that the diffraction angle between the transmitted and diffracted beams also varies.⁵⁵ However, this effect will be neglected in our experiments because $\delta\nu_p$ will remain always much lower than ν_{RF} .

After a reflection on a beam splitter (BS2), the diffracted beam is focused into the fiber through a 20X microscope objective. The reflectivity of the beam splitter being of 30% and the coupling efficiency being around 40%, the power injected into the fiber is approximately of 110 mW. Before being coupled into the fiber, the other beam is successively reflected and transmitted by the two beam splitters BS1 and BS2. The characteristics of the two beam splitters being identical (reflection coefficient: 30%, transmission coefficient: 70%), the optical power injected is again around 110 mW. Let us emphasize that the input end of the polarization maintaining fiber is adjusted so that one of its main axes is parallel to the polarization direction common to the two incident beams. The output end of the fiber is then rotated so that the polarization direction of the output light becomes parallel to the polarization direction at the input end. In the ring resonator thus constructed, the light remains always linearly polarized. This avoids the appearance of polarization instabilities⁵⁶ and permits the introduction of a Faraday isolator inside the cavity. In these conditions, pump recoupling is not possible and the confrontation with theory is greatly simplified.

In summary, two pump fields are injected into the fiber. Their amplitudes are time independent and nearly identical. One of them is frequency-modulated and the mean frequency difference between the two fields is equal to ν_{RF} . At the working wavelength, ν_{RF} is approximately three times greater than $\Delta\nu_B$, the FWHM of the homogeneously broadened Brillouin gain curve. Therefore, the gain profiles associated with the two pump fields do not significantly overlap each other. In these conditions, each of the two pump fields will interact with its own Stokes wave and its own acoustic wave. In other words, two independent Brillouin lasers will operate in the same ring cavity. In the experiments presented in ref.⁸,

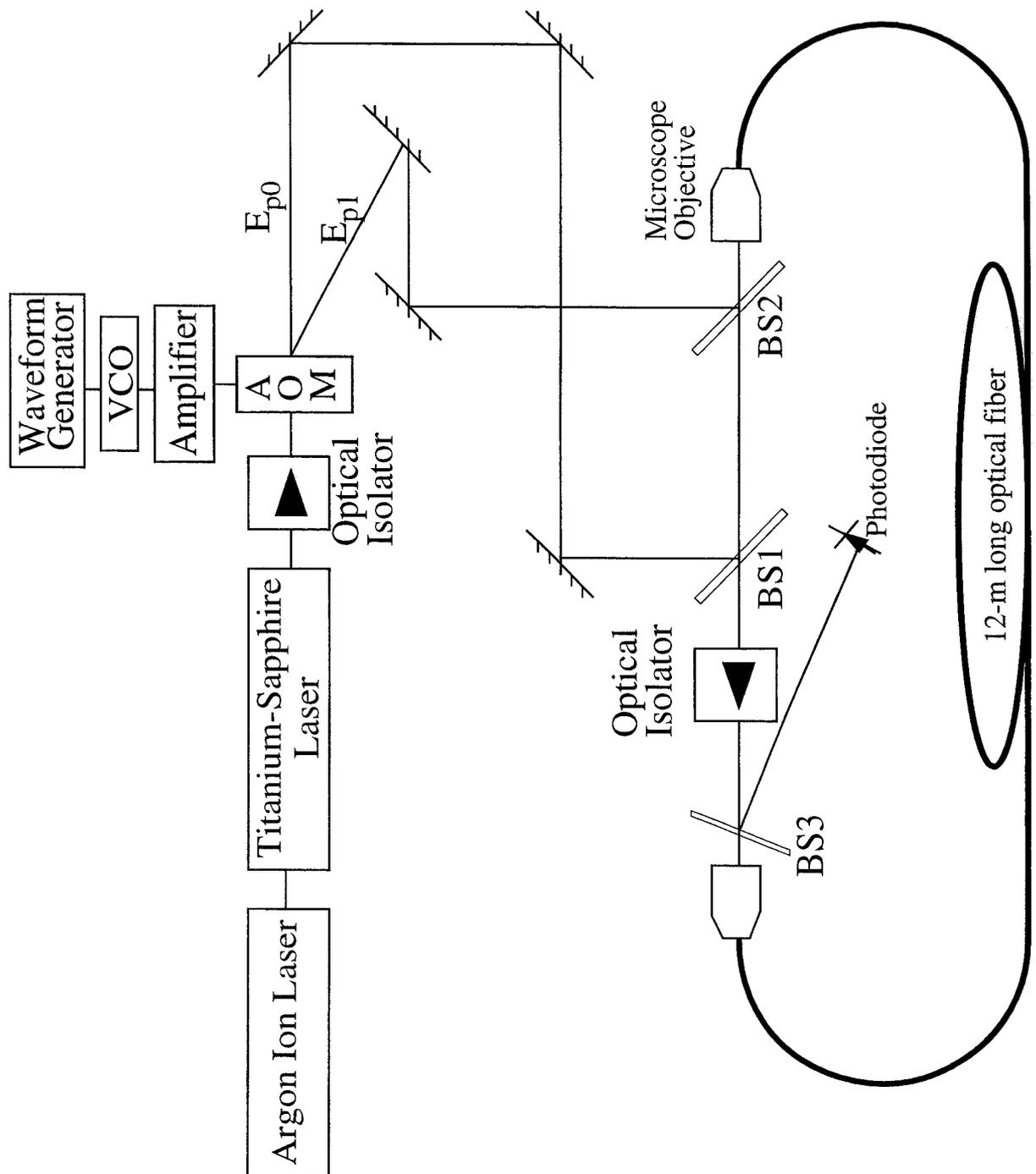


Fig. 3. Schematic representation of the experimental setup.

an analogous method had also been used but in that case, two different lasers have been used to pump the same ring cavity and none of them was frequency-modulated. The main

interest of the method lies in the fact that the two Brillouin lasers are subject to identical fluctuations of the fiber length. Therefore, their beat frequency does not strongly drift.

The single-mode fiber used being 12 m long, the FSR of the ring cavity is approximately 17 MHz. This value is of the same order of magnitude than $\Delta\nu_B$ ($\simeq 60$ MHz at 810 nm) and the homogeneously broadened Brillouin line then restricts the Stokes oscillation to a single longitudinal mode.⁵ In these conditions, the intensity of each Stokes field is time independent and it can be monitored by a silicium photodiode. As the photodiode bandwidth is 200 MHz, its connection to the RF spectrum analyzer will also allow us to record the beat spectrum between the two Brillouin lasers around ν_{RF} . Before describing the spectra typically observed, let us add an important comment about the experimental setup. A small part (4%) of the pump power focused at the input end of the fiber undergoes a Fresnel reflection. In the aerial arm of the resonator, two weak pump fields co-propagate with the two Stokes waves. They are also reflected by the beam splitter BS3 (reflection coefficient: 4%) and detected by the photodiode. Therefore the beat spectra between the Brillouin lasers and between the pump beams are simultaneously recorded on the RF spectrum analyzer. This is illustrated in Fig. 4 which clearly shows that two separate spectra are observed on each recording. The beat spectrum between the pump fields can be easily identified. Its peak power is approximately 20 dB below the peak power of the Stokes beat. Before detailing the other differences between the two spectra, we are first going to explain why the beat frequency of the Brillouin lasers slightly differs ($\simeq 2$ MHz) from the beat frequency of the two pump fields.

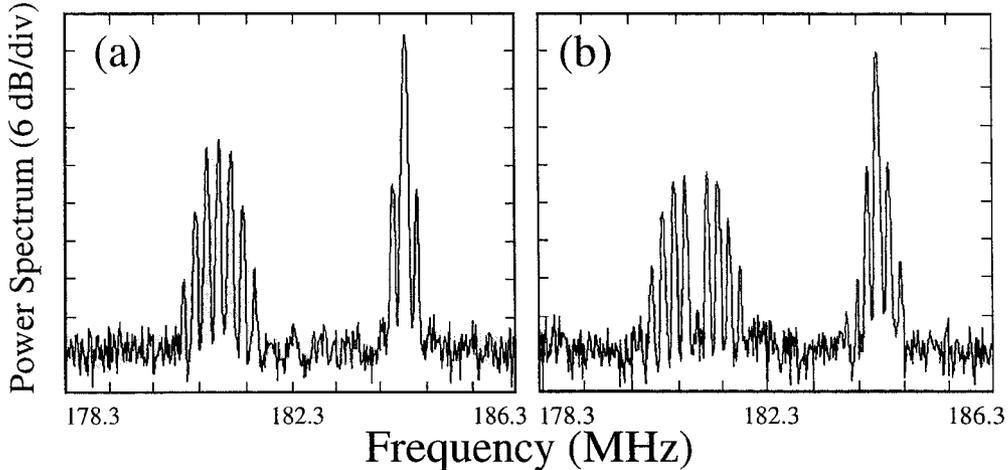


Fig. 4. On each of these experimental figures, the left spectrum is the beat spectrum between the pump fields and the right spectrum is the beat spectrum between the Stokes fields. (a): The modulation index of the pump field is $m_p = 1.25$ whereas that of the Stokes field is only $m_s = 0.12$ ($m_p/m_s = 10.4$). (b): The suppression of the central component of the pump spectrum corresponds to an index m_p equal to 2.4. The corresponding value of m_s is then equal to 0.25 ($m_p/m_s = 9.6$).

First of all, a simple comparison between relations (21) and (22) shows that the beat spectrum between the pump fields is precisely centered around ν_{RF} . In fact, the recorded power spectrum $S_p(\nu)$ is composed of discrete frequency components symmetrically distributed around ν_{RF} and it can be written as:

$$S_p(\nu) = \alpha_p \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |J_n(m_p)|^2 \delta(\nu - \nu_{RF} - nf) \quad (23)$$

where J_n represents the Bessel function of order n ^{57,58}. α_p is a coefficient proportional to the photodiode efficiency and to the fields E_{p0} and E_{p1} . $m_p = \delta\nu_p/f$ is a dimensionless parameter defined as the modulation index of the pump field. As illustrated in Fig. 5, the pump field E_{p0} generates a gain bandwidth downshifted by the acoustic frequency ν_a ($\simeq 20$ GHz at 810 nm) and centered around ν_s . For the sake of simplicity, let us assume that ν_s coincides with one of the resonator eigenfrequencies. In these conditions, frequency pulling effects do not exist in the corresponding Brillouin laser.⁵⁰ However, as ν_{RF} is not a whole multiple of the resonator FSR, the center ν'_s of the other gain bandwidth does not coincide

with one of the resonator eigenfrequencies. Therefore, the second Brillouin laser oscillates at a mean frequency ν_L comprised between ν'_s and the frequency of the closest eigenmode (see Fig. 5). The central frequency of the beat spectrum between the Brillouin lasers is then slightly different from ν_{RF} . In the results presented in Fig. 4, it is slightly greater than ν_{RF} but the situation can be inverted as well if ν_{RF} is modified by an amount of the order of 10 MHz or if the pump wavelength is slightly shifted.

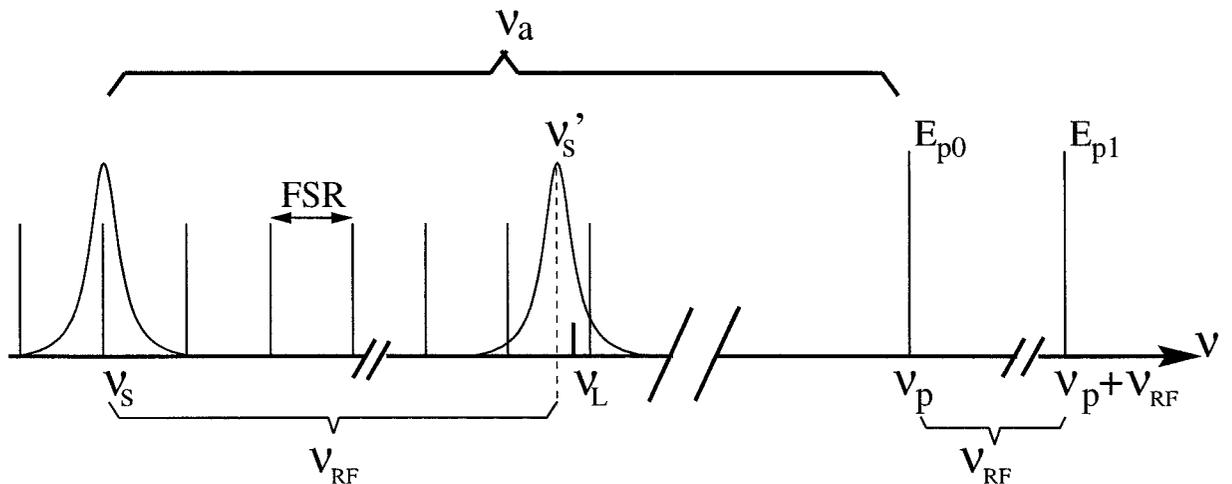


Fig. 5. Schematic representation of the various spectral components involved in the experiment (see text).

The frequency of modulation f is the frequency difference between two peaks of a given spectrum (Fig. 4). In our experiments, it is equal to 200 kHz, a value which is approximately 100 times lower than the cavity FSR. Experimental conditions are thus very close to those used for numerical simulations presented in Fig. 2. As for the pump fields, the beat spectrum between the two Brillouin lasers is composed of discrete components. This indicates that the frequency modulation applied to one of the pump fields is effectively transferred to the corresponding Stokes field. However, the beat spectrum between the Brillouin lasers is narrower than the beat spectrum between the pump fields. This shows qualitatively that the maximum frequency deviation $\delta\nu_s$ of the modulated Stokes field is lower than $\delta\nu_p$. It is possible to become more quantitative by writing the power spectrum $S_B(\nu)$ of the Stokes

beat in a form comparable to $S_p(\nu)$:

$$S_B(\nu) = \alpha_B \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |J_n(m_s)|^2 \delta(\nu - \nu_B - nf). \quad (24)$$

α_B is a constant proportional to the Stokes fields and to the photodiode efficiency. ν_B is the central frequency of the beat spectrum between the Brillouin lasers. $m_s = \delta\nu_s/f$ is the modulation index of the Stokes field. As the weights of the spectral components are given by the values taken by Bessel functions, the modulation indexes m_p and m_s are easily deduced from the recorded spectra. In the particular case of Fig. 4-b, the central component of the pump spectrum is suppressed. The corresponding modulation index m_p is the first zero of the Bessel function J_0 and is equal to 2.4.⁵⁸ For the beat spectrum between the Brillouin lasers, the first harmonic is 18 dB below the fundamental component and the corresponding value of m_s is 0.25. The ratio $K_{exp} = \delta\nu_p/\delta\nu_s$ between the frequency deviations is then equal to 9.6. Despite all the precautions taken, the characteristics of the ring laser (mainly the reinjection rate) inevitably drift during the experiments. From one recording to the other, the weight of the various spectral components slightly varies and the measurement of K_{exp} is never rigorously reproducible. In the particular case of Fig. 4-a, the values of m_p has been changed to 1.25 and the measured value of m_s is 0.12. The corresponding value of K_{exp} is slightly different from that previously found and is equal to 10.4. For values of m_p ranging from 0.5 to 3.8 (3.8 corresponds to a suppression of the first harmonic), the value of K_{exp} has been measured 14 times in a few minutes. The obtained data are dispersed around a mean value \overline{K}_{exp} of 10.37. The standard deviation characterizing the dispersion of the measurements is of 1.94. Student's law is then used to determine a confidence interval for K_{exp} and we finally find that it lies inside the range [8.8; 11.9] with a probability of 99%.⁵⁸

Let us now compare this experimental result with the theoretical prediction. The expression of K previously found (Eq. (17a)) can be reformulated in such a way that the parameters characterizing the experimental setup clearly appear (see Section 3C). This yields:

$$K = 1 - \frac{2\pi\Delta\nu_B n L}{c \ln(R^2)} \quad (25)$$

where c is the velocity of light in vacuum. The refractive index n of the fiber of length $L = 12$ m is equal to 1.45. These two parameters are known with a good accuracy. The main origin of the uncertainty on the value of K arises from the imprecision on the other parameters: the FWHM $\Delta\nu_B$ of the Brillouin gain curve and the power feedback efficiency R^2 characterizing the ring cavity. In all our previous works, we have considered that $\Delta\nu_B$ is equal to 60 MHz at 810 nm. This value is obtained by interpolation from a measurement performed at 514 nm in bulk silica.⁵⁹ In fibers, the inclusion of GeO_2 in the core can alter the Brillouin bandwidth³ and we estimate that the relative uncertainty on the previous value of $\Delta\nu_B$ is of 10%. The value of R^2 systematically used to describe our experimental setup is 0.13 ($R = 0.36$).^{9,50,52,56} However it has been estimated by assuming that only one beam splitter was inserted inside the cavity. It must be re-evaluated by including the losses brought by the second beam splitter. The value of R^2 describing the experimental setup of Fig. 3 is then of 0.09 ($R = 0.3$). As previously mentioned, the feedback efficiency inevitably drifts during the experiments and we estimate that the relative uncertainty on the value of R^2 is 20%. Following the previous estimations, we can reasonably consider that the theoretical parameter K describing our setup lies inside the range [8.1;12.1]. Therefore, there is a strong overlap between the uncertainty intervals characterizing the measured value and the theoretically estimated value. Despite a relative uncertainty of 20% on the value of K , the agreement between theoretical and experimental results is correct. It could be improved in further experiments performed in an all-fiber laser characterized by a well-defined feedback efficiency. However the value of the feedback efficiency should not be too high. If the narrowing effect becomes too strong, it will be indeed difficult to observe the weak spectral components corresponding to the frequency modulation of the Stokes field.

5. Conclusion

The linewidth narrowing in Brillouin fiber ring lasers has been studied both experimentally and theoretically. First of all, we have compared the nature of noise sources in Brillouin lasers

with that of conventional lasers. Contrary to lasers with population inversion, the Brillouin laser is a light source that is very sensitive to the phase noise of the pump laser. This property is also found in systems such as OPO's and can be attributed to the strong coupling between the phases and the amplitudes of the three waves involved in the interaction. In Brillouin fiber lasers, the acoustic response time is much shorter than the characteristic time of the pump laser fluctuations. In these conditions the phase fluctuations of the acoustic wave are nearly identical to the phase fluctuations of the pump laser. Because of the phase-matching and resonance conditions governing the SBS interaction, the phase noise of the Stokes wave is much weaker than that of the pump laser. This has been studied within the framework of the usual three-wave model of SBS. In particular, analytical relations connecting the linewidths of the three waves involved have been derived. The ratio between the pump and the Stokes linewidths has then been measured in a Brillouin laser operating in a low-finesse resonator. The principle of the experiment consists in recording the response of the Brillouin laser to a frequency modulation of the pump beam. The coefficient K characterizing the magnitude of the narrowing effect is equal to the ratio between the modulation indexes measured for the Stokes and pump waves. In our experiments, a quantitative agreement to within 20% has thus been found between the measured value and the value theoretically estimated. Obviously, this could be improved in further experiments performed in an all-fiber Brillouin laser characterized by parameters that weakly drift.

In this work, we have neglected the influence of the acoustic noise due to fluctuations of fiber density occurring inside the fiber at thermal equilibrium. As spontaneous emission in a conventional laser, this acoustic noise will be responsible for the existence of a lower limit to the linewidth of a single-mode Brillouin laser. As already mentioned in Section 2 this fundamental linewidth has been calculated in ref.⁴⁹ by neglecting the pump phase noise and the pump depletion. Theoretical studies are currently in progress to analyze the respective influence of spontaneous scattering and pump phase noise on the temporal coherence of the Brillouin laser. This will permit to precisely delimit the domain of validity of Eqs.18.

Our study shows that the Brillouin laser can be used as a system that “squeezes” the

field spectrum of an incoming radiation. To that effect, we have considered that the phase of this radiation underwent a random walk. However, the Brillouin laser is not sensitive to the nature of the noise process. As long as the characteristic frequencies of this noise are lower than the laser FSR, it will emit a Stokes field whose phase fluctuations are much weaker than that of the pump field. This can be very useful to reduce the “technical noise” of a light source and it may be of particular interest for metrological applications in which very narrow linewidths are required.⁶⁰ However, a careful stabilization of the fiber length is then necessary to avoid mode hops of the Brillouin laser.^{5,50} Therefore, additional studies have also to be undertaken to precisely characterize the influence of jitters of the fiber length on the laser linewidth.

ACKNOWLEDGMENTS

The Centre d’Etudes et de Recherches Lasers et Applications (CERLA) is supported by the Ministère chargé de la Recherche, the Région Nord/Pas de Calais and the Fonds Européen de Développement Economique des Régions. This work was partially supported by the European contract “Intereg II Nord-Pas de Calais/Kent”.

REFERENCES

1. G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic, New York, 1989).
2. D. Cotter, “Stimulated Brillouin Scattering in monomode optical fiber,” *J. Opt. Commun.* **4**, 10–19 (1983).
3. M. Niklès, L. Thévenaz, and P. A. Robert, “Brillouin gain spectrum characterization in single mode optical fibers,” *J. Lightwave Technol.* **15**, 1842–1851 (1997) and references therein.
4. C. Montes, D. Bahloul, I. Bongrand, J. Botineau, G. Cheval, A. Mamhoud, E. Picholle, and A. Picozzi, “Self-pulsing and dynamic bistability in cw-pumped Brillouin fiber ring lasers,” *J. Opt. Soc. Am. B* **16**, 932–951 (1999) and references therein.
5. S. Randoux, V. Lecoecuche, B. Ségard, and J. Zemmouri, “Dynamical analysis of Brillouin fiber lasers: An experimental approach,” *Phys. Rev. A* **51**, 4345–4348 (1995).
6. C. Montes, A. Mamhoud, and E. Picholle, “Bifurcation in a cw-pumped Brillouin fiber-ring laser: Coherent soliton morphogenesis,” *Phys. Rev. A* **49**, 1344–1349 (1994).
7. Y. Tanaka and K. Hotate, “Analysis of fiber Brillouin ring laser composed of single-polarization single-mode fiber,” *J. Lightwave Technol.* **15**, 838–844 (1997) and references therein.
8. S. P. Smith, F. Zarinetchi, and S. Ezekiel, “Narrow-linewidth stimulated Brillouin fiber laser and applications,” *Opt. Lett.* **16**, 393–395 (1991).
9. A. Debut, S. Randoux and J. Zemmouri, “Linewidth narrowing in Brillouin lasers: Theoretical analysis,” to be published in *Phys. Rev. A*
10. A. L. Schawlow and C. H. Townes, “Infrared and Optical Masers,” *Phys. Rev.* **112**, 1940–1949 (1958).
11. N. Lu, “Effect of laser intensity fluctuations on laser linewidth,” *Phys. Rev. A* **47**,

- 4322–4330 (1993).
12. M. P. van Exter, W. A. Hamel, and J. P. Woerdman, “Nonuniform phase diffusion in a laser,” *Phys. Rev. A* **43**, 6241–6246 (1991).
 13. S. Prasad, “Theory of a homogeneously broadened laser with arbitrary mirror outcoupling: Intrinsic linewidth and phase diffusion,” *Phys. Rev. A* **46**, 1540–1559 (1992).
 14. S. J. M. Kuppens, M. P. van Exter, and J. P. Woerdman, “Quantum-limited linewidth of a bad-cavity laser,” *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3815–3818 (1994).
 15. M. P. van Exter, S. J. M. Kuppens, and J. P. Woerdman, “Theory for the linewidth of a bad-cavity laser,” *Phys. Rev. A* **51**, 809–816 (1995).
 16. C. Benkert, M. O. Scully, and G. Süssmann, “Memory correlation effects on quantum noise in lasers and masers,” *Phys. Rev. A* **41**, 6119–6128 (1990).
 17. M. I. Kolobov, L. Davidovitch, E. Giacobino, and C. Fabre, “Role of pumping statistics and dynamics of atomic polarization in quantum fluctuations of laser sources,” *Phys. Rev. A* **47**, 1431–1446 (1993).
 18. M. Sargent III, M. O. Scully, and W. E. Lamb, Jr., *Laser Physics* Chapt. 17 (Addison-Wesley, Reading, 1974).
 19. P. Goldberg, P. W. Milonni, and B. Sundaram, “Theory of the fundamental laser linewidth,” *Phys. Rev. A* **44**, 1969–1985 (1991);
 20. P. Goldberg, P. W. Milonni, and B. Sundaram, “Theory of the fundamental laser linewidth. II,” *Phys. Rev. A* **44**, 4556–4563 (1991).
 21. L. Mandel and E. Wolf, *Optical coherence and quantum optics* Chapt. 2 (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
 22. C. H. Henry, “Phase noise in semiconductor lasers,” *J. Lightwave Technol.* **4**, 298–311 (1986).

23. R. Walser and P. Zoller, “Laser-noise-induced polarization fluctuations as a spectroscopic tool,” *Phys. Rev. A* **49**, 5067–5077 (1994).
24. C. H. Henry, “Theory of the linewidth of semiconductor lasers,” *IEEE J. Quantum. Electron.* **QE-18**, 259–264 (1982).
25. K. Vahala and A. Yariv, “Semiclassical theory of noise in semiconductor lasers-Part I,” *IEEE J. Quantum. Electron.* **QE-19**, 1096–1101 (1983);
26. K. Vahala and A. Yariv, “Semiclassical theory of noise in semiconductor lasers-Part II,” *IEEE J. Quantum. Electron.* **QE-19**, 1102–1109 (1983).
27. M. P. van Exter, W. A. Hamel, J. P. Woerdman, and B. R. P. Zeijlmans, “Spectral signature of relaxation oscillations in semiconductor lasers,” *IEEE J. Quantum. Electron.* **QE-28**, 1470–1478 (1992).
28. C. Zhu, “Statistics of nonclassical lasers generated via pump-noise suppression,” *Phys. Rev. A* **48**, 3930–3946 (1993).
29. S. Machida, Y. Yamamoto, and Y. Itaya, “Observation of amplitude squeezing in a constant-current-driven semiconductor laser,” *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1000–1003 (1987).
30. M. A. M. Marte and P. Zoller, “Lasers with sub-Poissonian pump,” *Phys. Rev. A* **40**, 5774–5782 (1989).
31. H. Ritsch, P. Zoller, C. W. Gardiner and D. F. Walls, “Sub-Poissonian laser light by dynamic pump-noise suppression,” *Phys. Rev. A* **44**, 3361–3364 (1991).
32. H. Ritsch and P. Zoller, “Dynamic quantum-noise reduction in multilevel-laser systems,” *Phys. Rev. A* **45**, 1881–1892 (1992).
33. C. Becher and K. Boller, “Low-intensity-noise operation of Nd:YVO₄ microchip lasers by pump noise suppression,” *J. Opt. Soc. Am. B* **16**, 286–295 (1999).
34. J. Bergou, L. Davidovitch, M. Orszag, C. Benkert, M. Hillery, and M. O. Scully, “Role

- of pumping statistics in maser and laser dynamics: Density-matrix approach,” *Phys. Rev. A* **40**, 5073–5080 (1989).
35. C. Benkert, M. O. Scully, J. Bergou, L. Davidovitch, M. Hillery, and M. Orszag, “Role of pumping statistics in laser dynamics: Quantum Langevin approach,” *Phys. Rev. A* **41**, 2756–2765 (1990).
 36. Y. Yamamoto, S. Machida, and O. Nilsson, “Amplitude squeezing in a pump-noise-suppressed laser oscillator,” *Phys. Rev. A* **34**, 4025–4042 (1986).
 37. G. S. Agarwal, “Inhibition of spontaneous emission noise in lasers without inversion,” *Phys. Rev. Lett.* **67**, 980–982 (1991).
 38. H. Ritsch, M. A. M. Marte, and P. Zoller, “Quantum noise reduction in Raman lasers,” *Europhys. Lett.* **19**, 7–12 (1992).
 39. H. Ritsch and M. A. M. Marte, “Quantum noise in Raman lasers: Effects of pump bandwidth and super- and sub-Poissonian pumping,” *Phys. Rev. A* **47**, 2354–2365 (1993).
 40. M. Fleischhauer, M. D. Lukin, D. E. Nikonov, and M. O. Scully, “Influence of pump-field phase diffusion on laser gain in a double- Λ non-inversion laser,” *Opt. Comm.* **110**, 351–357 (1994).
 41. K. M. Gheri, D. F. Walls, and M. A. Marte, “Systematic description of laser phase by linearized Ito equations,” *Phys. Rev. A* **46**, 6002–6009 (1992).
 42. S. Gong, Z. Xu, Z. Zhang, and S. Pan, “Change from an inversion laser to a noninversion laser due to a phase-fluctuation effect,” *Phys. Rev. A* **52**, 4787–4790 (1995).
 43. X. Hu and J. Peng, “Effects of pump phase noise on the linewidth of a Λ -laser without inversion: Linewidth reduction,” *Chin. Phys. Lett.* **15**, 571–573 (1998).
 44. S. Prasad, “Quantum noise and squeezing in an optical parametric oscillator with arbitrary output-mirror coupling. III. Effect of pump amplitude and phase fluctuations,”

- Phys. Rev. A **49**, 1406–1426 (1994) and references therein.
45. P. D. Drummond and M. D. Reid, “Laser bandwidth effects on squeezing in intracavity parametric oscillation,” Phys. Rev. A **37**, 1806–1808 (1988).
 46. A. L. Gaeta and R. W. Boyd, “Stochastic dynamics of stimulated Brillouin scattering in an optical fiber,” Phys. Rev. A **44**, 3205–3209 (1991).
 47. R. W. Boyd, K. Rzażewski, and P. Narum, “Noise initiation of stimulated Brillouin scattering,” Phys. Rev. A **42**, 5514–5521 (1990).
 48. A. Yariv and W. M. Caton, “Frequency, intensity, and field fluctuations in laser oscillators,” IEEE J. Quantum. Electron. **QE-10**, 509–515 (1974).
 49. A. L. Gaeta and R. W. Boyd, “Stimulated Brillouin scattering in the presence of external feedback,” Int. J. Nonlinear Opt. Phys. **1**, 581–594 (1992).
 50. V. Lecoecue, S. Randoux, B. Ségard, and J. Zemmouri, “Dynamics of a Brillouin fiber ring laser: Off-resonant case,” Phys. Rev. A **53**, 2822–2828 (1996).
 51. M. P. van Exter, S. J. M. Kuppens, and J. P. Woerdman “Excess phase noise in self-heterodyne detection,” IEEE J. Quantum. Electron. **QE-28**, 580–584 (1992).
 52. S. Randoux, V. Lecoecue, B. Ségard, and J. Zemmouri, “Dynamical behavior of a Brillouin fiber ring laser emitting two Stokes components,” Phys. Rev. A **52**, 2327–2334 (1995).
 53. A. Yariv, *Quantum Electronics, Third Edition* Chapt. 21 (Wiley, New York, 1988).
 54. J. Boschung, L. Thévenaz, and P. A. Robert, “High-accuracy measurement of the linewidth of a Brillouin fibre ring laser,” Electron. Lett. **30**, 1488–1489 (1994).
 55. R. W. Boyd, *Nonlinear Optics* Chapt. 7 (Academic, San Diego, 1992).
 56. S. Randoux and J. Zemmouri, “Polarization dynamics of a Brillouin fiber ring laser,”

Phys. Rev. A **59**, 1644–1653 (1999).

57. A. Papoulis, *Signal Analysis* Chapt. 8 (McGraw-Hill International Editions, New York, 1984).
58. *Standard mathematical tables and formulae, 30th edition* (CRC Press, New York, 1996).
59. D. Heiman, D. S. Hamilton, and R. W. Hellwarth, “Brillouin scattering measurements on optical glasses,” Phys. Rev. B **19**, 6583–6592 (1979).
60. B. C. Young, F. C. Cruz, W. M. Itano, and J. C. Bergquist, “Visible lasers with subhertz linewidths,” Phys. Rev. Lett. **82**, 3799–3802 (1999).

Complément I : Mesure expérimentale de la largeur spectrale d'un laser

Il existe actuellement deux méthodes donnant accès directement au spectre de puissance d'une source optique monomode longitudinale et transverse. Ces méthodes sont basées soit sur le principe d'hétérodynage (mélange à deux sources), soit sur le principe d'homodynage (une unique source). Nous allons à présent les décrire et montrer que dans le cas de notre configuration expérimentale, ces méthodes ne sont pas adaptées à notre étude.

2.0.1 Mesure par le principe d'hétérodynage

La première méthode consiste à effectuer le battement du faisceau dont on veut connaître la largeur spectrale avec un faisceau de référence dont les caractéristiques spectrales sont connues. Le schéma de l'expérience correspondante est présenté sur la figure 2.1. En considérant que l'amplitude des deux ondes est constante, et que leurs champs s'écrivent :

$$E_i(t) = A_i \cdot e^{i(\omega_i + \phi_i(t))} \quad (2.3)$$

avec $i = 0, 1$. L'indice 1 repère le faisceau de référence et l'indice 0 repère le faisceau à caractériser. L'intensité du courant délivré par le détecteur s'écrit :

$$I_{Détéc.}(t) = \langle E_0(t) * E_0^*(t) + E_1(t) * E_1^*(t) + E_0(t) * E_1^*(t) + C.C. \rangle \quad (2.4)$$

$$I_{Détéc.}(t) = \langle A_0^2 + A_1^2 + A_0 A_1 * e^{i((\omega_0 - \omega_1)t + \phi_0(t) - \phi_1(t))} + C.C. \rangle \quad (2.5)$$

L'intensité détectée est la somme d'un terme indépendant du temps et d'un terme oscillant à la fréquence du battement $(\omega_0 - \omega_1)/2\pi$ des deux lasers. Le terme indépendant du temps est la somme des intensités de chacun des deux lasers. Le terme de battement s'écrit :

$$I_{Détéc.}(t) = A^2 \cdot \langle \cos((\omega_0 - \omega_1)t + \phi_0(t) - \phi_1(t)) \rangle \quad (2.6)$$

Ce terme contient la différence de phase entre les deux lasers. L'expérience de battement permet donc d'accéder à la différence de phase entre les deux sources. Grâce

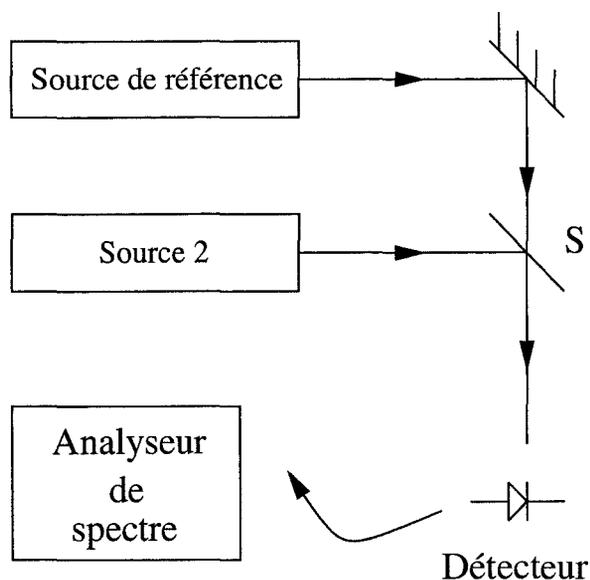


FIG. 2.1 – Schéma expérimental du battement de deux sources lasers pour la mesure de la largeur spectrale d'une des sources. S = séparatrice.

à ce dispositif, les variations de phase seront converties en variations d'intensité, autour de la fréquence $(\omega_0 - \omega_1)/2\pi$. En effectuant la transformée de Fourier du signal détecté, on obtient le spectre de puissance du battement. La largeur à mi-hauteur de la courbe observée sur l'analyseur de spectre est directement liée aux largeurs spectrales des deux sources. Dans le cas idéal où la source de référence est monochromatique, l'expérience donne accès directement au spectre du laser étudié.

En général, la source de référence n'est jamais réellement monochromatique et on observe la convolution des spectres des deux sources. Le spectre obtenu est une bonne approximation du spectre du laser étudié si la largeur spectrale du laser de référence est très inférieure à celle du laser à caractériser. Si les deux lasers ont des largeurs spectrales comparables, il faut déconvoluer le spectre obtenu afin d'obtenir le spectre du laser étudié.

2.0.2 Mesure par un interféromètre de Mach-Zehnder

Pour mesurer la largeur spectrale d'un laser monomode longitudinal et transverse, on peut s'affranchir de l'utilisation de la source de référence en se servant

uniquement du laser à étudier [Nazarathy *et al.* 89, Richter *et al.* 86, Ludvigsen et Bodtker 94]. Le principe de cette méthode est basé sur l'emploi d'un interféromètre de Mach-Zehnder tel que celui présenté sur la figure 2.2.

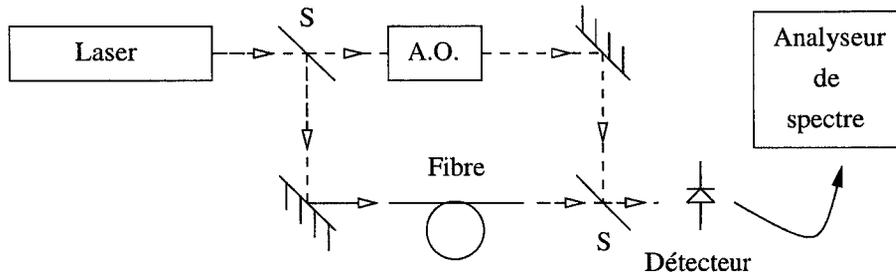


FIG. 2.2 – Schéma de principe d'une expérience dans laquelle on mesure la largeur spectrale d'un laser à l'aide d'un interféromètre de Mach-Zehnder.

Dans cet interféromètre, le faisceau émis par le laser est divisé en deux bras au moyen d'une séparatrice. Ces deux bras possèdent des longueurs différentes. L'un des deux faisceaux se propage dans une ligne à retard constituée d'une fibre optique, et l'autre faisceau traverse un modulateur acousto-optique. Celui-ci est alimenté par un générateur radio-fréquence délivrant un signal sinusoïdal à la fréquence $\omega_m/2\pi$ permettant de décaler la fréquence du faisceau laser traversant le modulateur acousto-optique. La fréquence de l'onde optique est alors décalée de la fréquence de modulation appliquée par le générateur. L'onde qui s'est propagée dans le bras le plus long acquiert un temps de retard τ_d par rapport au temps de propagation dans l'autre bras de l'interféromètre. Les deux faisceaux sont ensuite recombinés et leur battement est détecté par une photodiode reliée à un analyseur de spectre. L'intensité détectée par la photodiode oscille à la fréquence du battement, c'est à dire à la fréquence du décalage introduit par l'acousto-optique : $\omega_m/2\pi$. Ceci permet d'éviter le bruit basse fréquence de la chaîne de mesure. Comme la méthode précédente, l'intensité détectée autour de la fréquence $\omega_m/2\pi$ est proportionnelle à la différence de phase entre les deux ondes, soit :

$$I_{\text{Détéc.}}(t) = A^2 \cdot \langle \cos(\omega_m t + \phi(t) - \phi(t - \tau_d)) \rangle \quad (2.7)$$

Pour écrire cette équation, nous supposons que l'amplitude des deux ondes dans chacun des bras de l'interféromètre est identique et indépendante du temps. L'intensité détectée est directement proportionnelle à la fonction d'autocorrélation du champ.

La transformée de Fourier de cette expression donne accès au spectre de puissance de l'onde. Ce calcul est établi dans de nombreux articles, et notamment dans ceux de Van Exter, Kuppens, Woerdman [van Exter *et al.* 92b] et Gallion, Debarge [Gallion et Debarge 84]. Lorsque la phase $\phi(t)$ est une variable aléatoire de distribution gaussienne, ils montrent que la densité spectrale de puissance $S_E(\omega)$ du champ en sortie de l'interféromètre de Mach-Zehnder prend la forme :

$$S_E(\omega) = 2A^2 e^{-\frac{\tau_d}{\tau_c}} \delta(\omega - \omega_m) + \frac{2A^2 \tau_c}{\pi (1 - (\omega - \omega_m)^2 \tau_c^2)} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\tau_d}{\tau_c}} \left[\cos(\omega - \omega_m) \tau_d + \frac{\sin(\omega - \omega_m) \tau_d}{(\omega - \omega_m) \tau_c} \right] \right) \quad (2.8)$$

Dans cette relation, c'est le rapport entre le temps de retard τ_d et le temps de cohérence τ_c qui fixe l'allure du spectre observé.

Lorsque $\tau_d \gg \tau_c$, le spectre obtenu présente une forme lorentzienne. Sa largeur à mi-hauteur est double de celle du spectre du laser étudié [van Exter *et al.* 92b]. Comme le temps de retard est plus long que le temps de cohérence, la phase de l'onde sortant de la fibre optique n'est plus corrélée à celle de l'onde émergeant du modulateur acousto-optique. Le spectre de puissance du battement est alors la convolution des densités spectrales de puissance de chacune des ondes, ce qui explique la largeur double.

Si $\tau_d \ll \tau_c$, le signal se réduit à un pic de Dirac à la pulsation ω_m . En effet, les faisceaux qui se recombinent sont fortement corrélés, et la différence de phase entre les rayonnements issus des deux bras de l'interféromètre est parfaitement définie et indépendante du temps. Cette configuration ne présente de ce fait aucun réel intérêt, contrairement au cas intermédiaire où τ_d est du même ordre de grandeur que τ_c . Le spectre de puissance est alors plus complexe et devient la superposition de plusieurs fonctions, dont l'importance relative dépend du rapport τ_d/τ_c . Le spectre observé est typiquement une lorentzienne dont les ailes sont déformées par des lobes comme indiqué sur la figure 2.3. Le temps τ_d fixe la périodicité des minima et des maxima du spectre, et le temps τ_c affecte l'amplitude de ces lobes. Dans ce type d'expérience, la valeur de τ_d est connue, et la valeur de τ_c est obtenue en ajustant la forme du spectre théorique (équation 2.8) à celle observée expérimentalement. Cette méthode est couramment utilisée lors de l'étude des propriétés spectrales des lasers à semi-conducteurs et des diodes lasers injectées [van Exter *et al.* 92b].

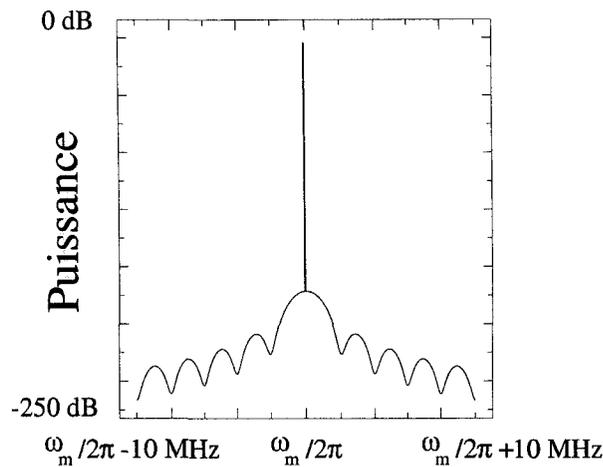


FIG. 2.3 – Densité spectrale de puissance d'un champ laser à la sortie d'un interféromètre de Mach-Zehnder. $\tau_d = 5.10^{-7} s$ (longueur de fibre : 100 m), $\Delta\nu = 75 kHz$.

Nous venons de décrire brièvement deux dispositifs de mesure de la largeur spectrale d'un laser. Ces deux protocoles expérimentaux ne peuvent cependant pas être mis en oeuvre dans notre étude de la cohérence temporelle des lasers Brillouin. Le bruit technique vient en effet nous interdire l'utilisation de ces méthodes.

2.0.3 Influence du bruit technique

Dans un système expérimental, il existe des paramètres difficilement contrôlables, comme le bruit acoustique et thermique. Ces différentes sources de bruit font parties d'une catégorie de bruit plus générale, que l'on regroupe sous l'appellation bruit technique. Nous allons montrer que cette source de bruit rend caduque l'utilisation des méthodes précédentes de mesure de la largeur spectrale des lasers continus utilisés dans nos expériences. Dans tous les lasers, le bruit technique vient principalement agir sur la longueur de la cavité, ce qui vient perturber considérablement le spectre de puissance du laser.

La fluctuation de la fréquence d'émission de l'onde laser est la conséquence du

bruit technique. Par exemple, dans un laser à fibre de longueur $L = 10\text{ m}$, l'intervalle spectral libre est d'environ 20 MHz . Ceci signifie qu'une variation de L aussi faible qu'une longueur d'onde (800 nm nos expériences) correspondra approximativement à un changement de fréquence du laser de l'ordre de l'intervalle spectral libre (I.S.L.). Ce changement ne sera pas strictement égal à l'I.S.L., car il faut prendre en compte les effets de tirage de fréquence. Dans ces conditions, l'allure du spectre de battement va dépendre fortement du temps d'acquisition de l'analyseur de spectre. Si ce temps d'acquisition est plus long que la vitesse d'évolution des fluctuations techniques, le spectre mesuré s'étendra sur une bande spectrale de l'ordre de l'intervalle spectral libre. Le spectre observé est alors révélateur des effets de dérive de fréquence liés aux fluctuations techniques, mais il n'est pas du tout lié aux sources intrinsèques (bruit du laser de pompe et bruit acoustique). Par exemple, la largeur spectrale intrinsèque du laser Saphir-Titane que nous utilisons dans nos expériences, est de quelques dizaines de mHz . En mesurant son spectre de puissance avec un interféromètre de Mach-Zehnder sur un temps d'acquisition de 20 ms , celui-ci s'étend sur 500 kHz . Cet élargissement est lié aux fluctuations techniques et il ne possède aucun lien avec la largeur de Schawlow-Townes.

Que l'on utilise la méthode d'homodynage ou d'hétérodyne, il est de ce fait impossible d'avoir accès à la largeur spectrale du laser Brillouin. Qui plus est, il faut aussi tenir compte du bruit technique de l'interféromètre qui, lui aussi, est soumis au bruit thermique et acoustique. De ce fait, le bruit technique du laser Brillouin et de l'interféromètre se cumulent, ce qui vient accentuer les dérives de fréquence. Pour vérifier expérimentalement nos résultats théoriques, il nous fallait une méthode permettant de nous affranchir de ces fluctuations techniques. C'est pour cette raison que les deux lasers Brillouin que nous avons réalisés oscillent dans le même résonateur. Les deux faisceaux de pompe de fréquences voisines engendreront leur propre onde Stokes. L'écart en fréquence entre les deux ondes de pompe est toutefois choisi de façon à ce que les deux lasers Brillouin n'interagissent pas. Autrement dit, les courbes de gain Brillouin associées aux deux faisceaux de pompe ne se recouvrent pas. De cette manière, deux faisceaux Stokes indépendants sont engendrés dans une même cavité. Ils subissent des effets de dérive identiques lors des fluctuations techniques de la longueur de la cavité, et leur fréquence de battement ne dérive pas.

Cette méthode permet de s'affranchir des problèmes liés aux fluctuations techniques.

2.1 Complément II : Influence du désaccord en fréquence

L'étude théorique présentée dans les articles a été effectuée dans le cadre du modèle résonant. Nous allons à présent nous intéresser à l'influence des effets de désaccord en fréquence sur la cohérence temporelle de l'onde Stokes. Nous verrons au cours de notre analyse que ceux-ci n'affectent en rien les résultats obtenus dans le cadre du modèle résonant.

Lorsque la cavité est résonante, la fréquence du laser Brillouin coïncide avec un mode de la cavité qui coïncide lui même avec le centre de bande de gain Brillouin. Lorsque la cavité n'est plus résonante, il faut ajouter un terme de désaccord en fréquence aux conditions de bouclage sur l'onde Stokes. La condition de bouclage sur la phase de l'onde Stokes s'écrit alors :

$$\phi_s(1, \tau) = \phi_s(0, \tau) + \delta_s \quad (2.9)$$

où δ_s représente le terme de désaccord en fréquence. Ce terme amène la fréquence d'émission du laser Brillouin de la valeur ν_s , qui est la fréquence du centre de la courbe de gain Brillouin, à la valeur ν_L . L'onde Stokes n'oscillant plus à la fréquence ν_s utilisée pour décrire le modèle résonant, la phase de l'onde Stokes évolue alors linéairement. La courbe (a) de la figure 2.4 représente l'évolution de la phase de l'onde Stokes lorsque la phase du laser de pompe ne diffuse pas. Lorsque l'on prend en compte le processus de diffusion sur la phase de l'onde de pompe, on obtient le résultat présenté sur la partie (b) de cette figure. En effectuant la différence entre ces deux évolutions, on trouve le résultat présenté sur la partie (c). La figure (d) donne quant à elle l'évolution de la phase de l'onde Stokes obtenue dans le cadre du modèle résonant. En comparant les schémas (c) et (d), on s'aperçoit nettement que l'évolution de la phase de l'onde Stokes est identique. Autrement dit, le désaccord en fréquence ne change que la fréquence de l'onde Stokes et n'affecte pas le caractère bruyant de l'évolution de la phase.

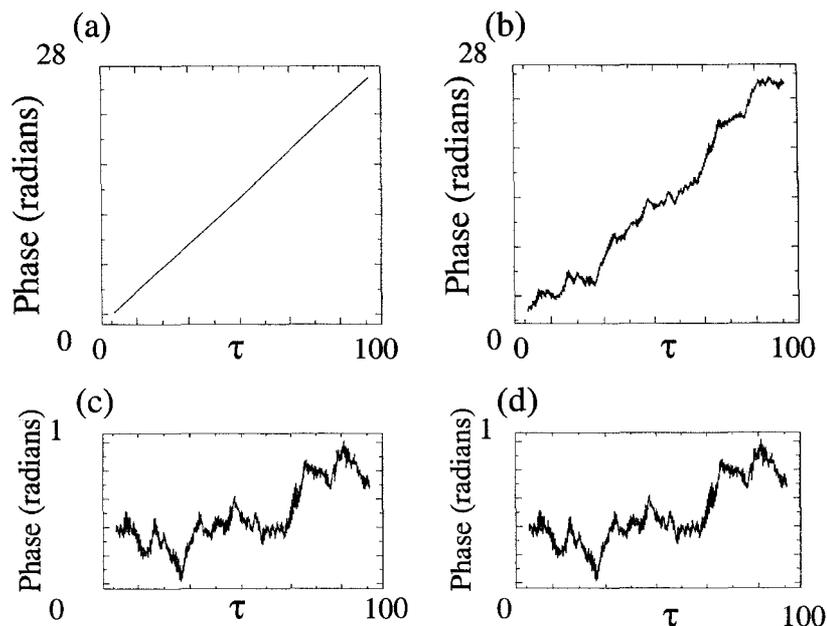


FIG. 2.4 – Evolution de la phase $\phi_s(0, \tau)$ en présence d'un terme de désaccord en fréquence. (a) La phase de l'onde de pompe ne diffuse pas. (b) La phase de l'onde de pompe diffuse. (c) Différence entre la courbe (a) et (b). (d) Evolution de la phase de l'onde Stokes sans terme désaccord en fréquence.

Le terme δ_s modifie aussi la variable θ , qui est une combinaison linéaire des phases des trois ondes. La nouvelle valeur θ_0 de θ dans le cas non résonant est donnée par [Lecoeuche 96]:

$$\tan \theta_0 = -\Delta_1 \quad (2.10)$$

où Δ_1 est le désaccord en fréquence normalisé. L'évolution de θ s'effectue désormais autour d'une nouvelle valeur stationnaire ce que nous montre la figure 2.5.

Le désaccord en fréquence ne vient donc en aucune manière modifier nos résultats théoriques. Il ne fait que décaler la fréquence d'émission du laser Brillouin, et changer la valeur stationnaire de la variable θ . Dans ce cas, on linéarise θ autour de la nouvelle valeur stationnaire θ_0 , et l'analyse théorique effectuée dans le cadre du modèle résonant peut à nouveau être réalisée. Les termes relatifs à θ se décomposent en deux parties. L'un d'eux est indépendant du temps (l'ordre 0 de la linéarisation) et il est responsable de l'évolution linéaire de la phase que nous

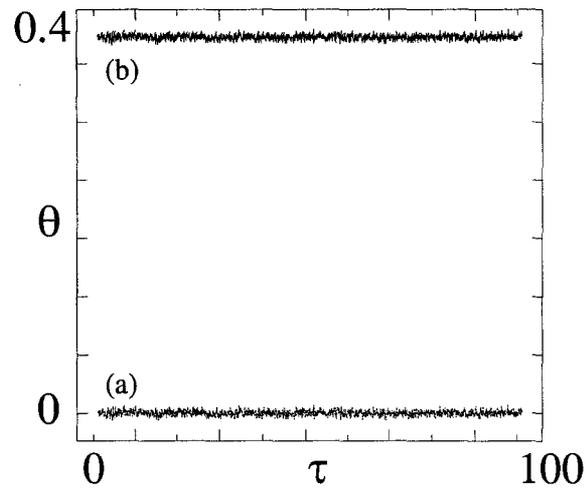


FIG. 2.5 - Evolution de la variable θ (a) dans le cas du modèle résonant ($\theta \simeq 0$, $\Delta_1 = 0$) et (b) en présence d'un terme de désaccord en fréquence ($\theta \simeq 0.4$, $\Delta_1 = -0.38$).

avons décrite précédemment. Le deuxième terme issu de la linéarisation est le terme perturbatif permettant d'aboutir à la relation liant les largeurs spectrales du laser de pompe et du laser Brillouin.

Complément III : Influence du bouclage du faisceau de pompe

Dans l'étude théorique présentée dans les deux articles, nous avons négligé le recouplage du faisceau de pompe dans la cavité. Le terme R_p de l'équation 1.42 était donc nul. Si l'on veut prendre en compte ce terme de recouplage dans l'étude de la cohérence temporelle des lasers Brillouin, il faut utiliser la condition de bouclage que nous avons écrite au chapitre précédent :

$$\varepsilon_p(\zeta = 0, \tau) = \mu + R_p e^{-i\delta_p} \varepsilon_p(\zeta = 1, \tau) \quad (2.11)$$

Pour caractériser l'effet du terme du bouclage du faisceau de pompe, nous nous sommes appuyés sur des résultats numériques. Sur un échantillon statistique donné, les figures 2.6 et 2.7 montrent l'évolution de la phase de l'onde de pompe et de l'onde Stokes en sortie de cavité. Ces figures mettent en évidence le fait que les phases de l'onde de pompe et de l'onde Stokes ne sont globalement pas affectées par le recouplage de l'onde de pompe dans la cavité optique. Pour s'assurer que ce recouplage ne change pas la largeur spectrale de l'onde Stokes et l'onde de pompe en sortie de cavité, on calcule la valeur du coefficient K . On la compare ensuite à la valeur trouvée dans le cas où l'onde de pompe n'est pas recouplée dans la cavité. On trouve alors le même résultat avec ou sans recouplage du faisceau de pompe dans la cavité. Ceci reste valable quel que soit le coefficient de qualité de la cavité. Le recouplage de l'onde de pompe n'a qu'une incidence négligeable sur l'évolution de la phase de l'onde Stokes.

Pour expliquer qualitativement ce résultat, il faut se demander quel est l'effet du recouplage de l'onde de pompe sur le laser Brillouin. Le recouplage de l'onde de pompe modifie essentiellement l'énergie intra-cavité. En effet, l'onde de pompe passe maintenant dans un résonateur, et celui-ci n'affecte que l'énergie de pompe présente au sein de la fibre. On comprend aisément qu'il n'y a aucune raison pour que ce terme vienne modifier la cohérence temporelle de l'onde Stokes.

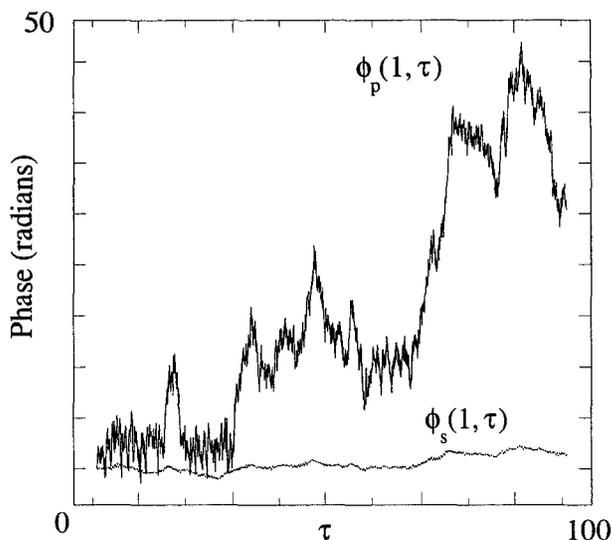


FIG. 2.6 – Evolution temporelle de la phase de l'onde de pompe et de l'onde Stokes en sortie de cavité sur un échantillon statistique, sans recouvreage de l'onde de pompe.

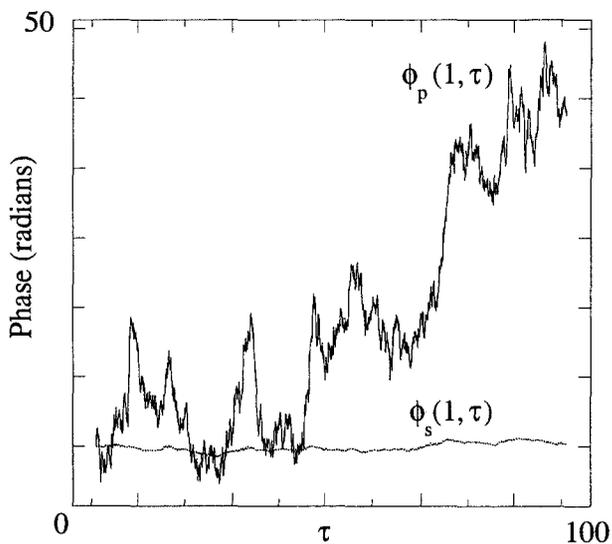


FIG. 2.7 – Evolution temporelle de la phase de l'onde de pompe et de l'onde Stokes en sortie de cavité sur un échantillon statistique, avec recouvreage de l'onde de pompe.

Complément IV : Influence du bruit acoustique sur la cohérence temporelle de l'onde Stokes

Nous allons à présent nous intéresser à la largeur ultime des lasers Brillouin. Dans les deux articles précédents, l'unique source de bruit prise en compte était le bruit de phase du laser de pompe. Ceci nous a permis de comprendre l'origine de la faible largeur spectrale des lasers Brillouin en régime d'émission continue. Pour cela, nous avons négligé l'influence du bruit acoustique dû aux fluctuations de densité au sein de la fibre à l'équilibre thermique. Tout comme l'émission spontanée dans les lasers conventionnels, ce bruit acoustique sera responsable de la limite finie (ou ultime) de la largeur spectrale des lasers Brillouin. Ce bruit acoustique est représenté par la fonction $f(\zeta, \tau)$ introduite dans le premier chapitre. Avant d'établir une relation similaire à celle de Schawlow-Townes dans les lasers Brillouin, il est intéressant de connaître l'ordre de grandeur de cette largeur spectrale. Pour cela, nous allons dans un premier temps utiliser une démarche qualitative basée sur l'étude effectuée précédemment, puis nous comparerons notre résultat avec celui obtenu par une approche plus mathématique par Boyd et Gaeta [Gaeta et Boyd 92].

2.1.1 Ordre de grandeur de la largeur ultime des lasers Brillouin

Pour trouver un ordre de grandeur de la limite ultime de la largeur spectrale du laser Brillouin, nous allons effectuer une analyse basée sur le modèle cohérent. Pour prendre en compte le bruit acoustique, nous ajoutons à l'équation d'évolution de l'onde acoustique le bruit de Langevin $f(\zeta, \tau)$ le caractérisant. Dans notre système, nous possédons alors deux sources de bruit : la première est le bruit de phase du laser de pompe et la deuxième est liée au processus de diffusion spontanée. L'équation d'évolution de l'onde acoustique s'écrit alors :

$$\frac{1}{\beta_a} \frac{\partial B}{\partial \tau} + B = \varepsilon_p \varepsilon_s^* + f(\zeta, \tau) \quad (2.12)$$

où B représente l'amplitude complexe de l'onde acoustique. Le bruit acoustique est défini par sa fonction d'autocorrélation :

$$\langle f(\zeta, \tau) f(\zeta', \tau') \rangle = Q \cdot \delta(\tau - \tau') \delta(\zeta - \zeta') \quad (2.13)$$

où le paramètre Q fixe l'intensité des fluctuations de densité du matériau, donc l'intensité du bruit présent au sein du milieu diélectrique. Dans notre normalisation, $f(\zeta, \tau)$ est de l'ordre de 10^{-6} et la valeur de Q vaut approximativement 10^{-12} m.s. Ce bruit acoustique ou bruit de diffusion spontanée n'agit pas directement sur la phase de l'onde Stokes. C'est une différence fondamentale avec les lasers à inversion de population, dans lesquels le bruit de Langevin modélisant le bruit d'émission spontanée agit directement sur la phase de l'onde émise. Cependant, on peut procéder par analogie avec les lasers conventionnels, et considérer que la diffusion spontanée agit sur l'amplitude et la phase de l'onde acoustique. Pour en déduire l'ordre de grandeur de la largeur ultime des lasers Brillouin, on utilise de ce fait une description graphique analogue à celle adoptée au premier chapitre pour décrire le processus de diffusion de phase.

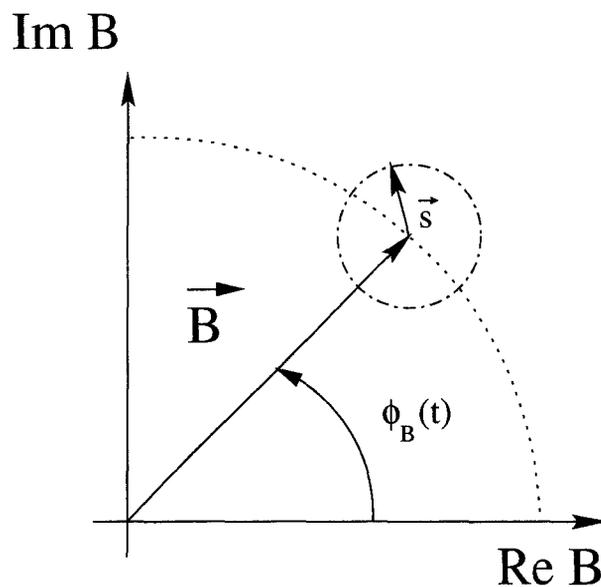


FIG. 2.8 – Représentation graphique de l'influence de la diffusion spontanée sur le champ acoustique.

Le processus de diffusion spontanée est représenté par le vecteur \vec{s} de direction et d'amplitude aléatoire. Son amplitude est donnée par la fonction $f(\zeta, \tau)$, qui agit sur l'amplitude et la phase du champ acoustique. Son influence sera perceptible dès lors qu'elle sera comparable au processus de diffusion induit par le laser de pompe. Comme la phase de l'onde acoustique suit approximativement la même évolution que celle du laser de pompe (voir figure 2.9), cette influence sera à prendre en

considération dès que l'amplitude du bruit de la phase du laser de pompe devient du même ordre de grandeur que l'amplitude de $f(\zeta, \tau)$. Dans notre modèle, l'évolution

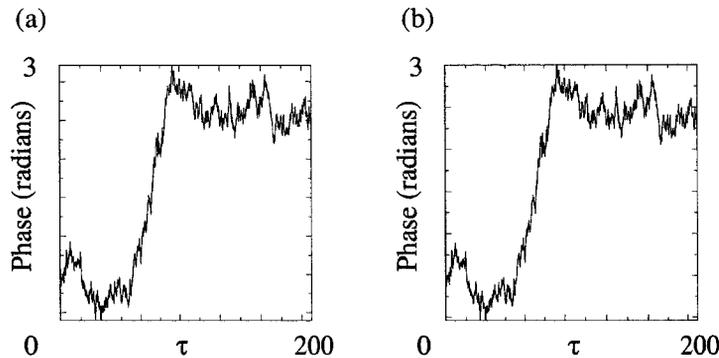


FIG. 2.9 – Evolution temporelle de la phase (a) de l'onde de pompe et (b) de l'onde acoustique.

du bruit de phase du laser de pompe est gouvernée par l'équation de Langevin :

$$\frac{d\phi_0}{d\tau} = q \quad (2.14)$$

où ϕ_0 représente la phase du laser de pompe. L'amplitude des fluctuations de la phase est donnée par q . Elle fixe alors la vitesse d'évolution de la phase, donc la largeur spectrale du laser de pompe $\Delta\nu_p$. Pour obtenir le spectre de puissance présenté dans le premier article de ce chapitre, les fluctuations de q sont de l'ordre de 10^{-2} , ce qui nous donne un $\Delta\nu_p$ de 40 kHz . Notre étude n'est plus valide dès que les variations relatives de q atteignent celles de $f(\zeta, \tau)$, soit 10^{-6} . Dans ce cas, il faut prendre en considération l'influence du bruit acoustique. En d'autres termes, tant que la largeur spectrale du laser de pompe est supérieure à 4 Hz , la relation 2.1 liant les largeurs spectrales du laser de pompe à celle du laser Brillouin reste valide. Cette valeur de 4 Hz est obtenue en divisant 40 kHz par le rapport des amplitudes de q et $f(\zeta, \tau)$, soit 10^4 .

Nous allons maintenant en déduire la largeur spectrale ultime du laser Brillouin. Notre analyse théorique effectuée dans ce chapitre deux est valide tant que $\Delta\nu_p$ est supérieure à 4 Hz . Dans ce cas extrême, la largeur spectrale du laser Brillouin est approximativement de 40 mHz . Pour obtenir ce résultat, on divise simplement $\Delta\nu_p$ par K^2 . Dans notre étude présentée dans les articles, la valeur de K^2 vaut environ 100. Cette largeur spectrale de 40 mHz peut être considérée comme la largeur ultime du

laser Brillouin. Autrement dit, la largeur ultime d'un laser Brillouin est comparable à celle d'un laser à inversion de population.

Pour obtenir ce résultat, on peut utiliser une autre approche. Gaeta et Boyd dans leur article "Stimulated Brillouin scattering in the presence of external feedback" (1992), ont calculé analytiquement la largeur du spectre de puissance de l'onde Stokes. Leur objectif était de déterminer d'une part la forme de raie de l'émission Stokes, et d'autre part de connaître la largeur du spectre de puissance de l'onde Stokes en régime de "miroir Brillouin". Pour effectuer leur calcul, ils ont supposé d'une part que la déplétion de pompe est négligeable, et d'autre part que l'onde de pompe est monochromatique. Ces deux conditions drastiques signifient que le laser fonctionne au niveau du seuil, et que l'on néglige l'effet du processus de diffusion de la phase du laser de pompe. Le seul bruit pris en considération est de ce fait le bruit acoustique. La formule analytique qu'ils ont trouvée leur permis de calculer la largeur à mi-hauteur de ce spectre en régime d'émission continue.

En utilisant leur formule, on trouve comme valeur pour cette largeur ultime :

$$\Delta\nu_{S.T.} = 15 \text{ mHz} \quad (2.15)$$

Cette valeur de la dizaine de mHz est du même ordre de grandeur que la valeur donnée par la relation de Schawlow-Townes dans les lasers à inversion de population. Elle concorde avec la valeur calculée dans notre analyse précédente.

Maintenant que nous connaissons l'ordre de grandeur de cette largeur ultime pour un laser Brillouin, nous allons à présent nous intéresser au calcul théorique de cette largeur.

2.1.2 Calcul analytique de la largeur ultime d'un laser Brillouin

Les résultats présentés dans la suite de ce complément sont actuellement en cours d'étude. Nous insistons donc sur le fait qu'ils ne sont pas définitifs et qu'ils restent à confirmer.

Pour calculer l'influence du bruit acoustique sur la cohérence temporelle de l'onde Stokes, on utilise la méthode présentée dans l'article de Goldberg, Milonni et Sundaram [Goldberg *et al.* 91a]. Le calcul étant long, nous ne présenterons que ses grandes étapes. La première étape de calcul consiste à prendre le complexe conjugué de l'équation 2.12. En sommant cette équation et son complexe conjugué, nous obtenons l'équation d'évolution de l'amplitude de l'onde acoustique. En effectuant à présent la différence, nous obtenons l'équation d'évolution de la phase de l'onde acoustique. Ces deux équations prennent la forme :

$$\frac{1}{\beta_a} \frac{\partial A_a}{\partial \tau} + A_a = A_p A_s \cos \theta + \frac{1}{2} (f e^{-i\phi_a} + f^* e^{i\phi_a}) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial \tau} = -\beta_a \frac{A_p A_s}{A_a} \sin \theta + i \frac{\beta_a}{2A_a} (f^* e^{i\phi_a} - f e^{-i\phi_a}) \quad (2.17)$$

En effectuant la même approximation que dans les articles, c'est à dire en considérant que l'amplitude relative des fluctuations de l'onde acoustique reste faible, on est alors en mesure d'écrire $\sin \theta = \theta$. Les équations d'évolution de la phase des ondes Stokes et acoustique s'écrivent :

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \phi_s}{\partial \zeta} = -g A_p^2 \theta \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial \tau} = -\beta_a \theta + i \frac{\beta_a}{2A_a} (f^* e^{i\phi_a} - f e^{-i\phi_a}) \quad (2.19)$$

En décomposant en série de Fourier la fonction représentant la phase de l'onde Stokes, et en se limitant à une approche au premier ordre, tout comme dans les calculs analytiques effectués dans les deux articles, l'équation d'évolution de la phase de l'onde acoustique prend la forme :

$$\frac{d\psi_a}{d\tau} = \frac{\beta_a}{g A_p^2} \frac{dS_0}{d\tau} + i \frac{\beta_a}{2A_a} \int_0^1 (f^* e^{i\phi_a} - f e^{-i\phi_a}) d\zeta \quad (2.20)$$

avec

$$\psi_a(\tau) = \int_0^1 \phi_a(\zeta, \tau) d\zeta, \quad (2.21)$$

S_0 représentant la composante d'ordre 0 de la décomposition en série de Fourier de la phase de l'onde Stokes. Pour écrire cette équation nous supposons que le terme $g A_p^2 \theta$ de l'équation d'évolution de la phase de l'onde de pompe est négligeable. Cette approximation signifie que le bruit acoustique ne perturbe pas la phase de l'onde de pompe. Ceci est une conséquence de notre approche perturbative. Cette hypothèse est validée numériquement (voir figure 2.10).

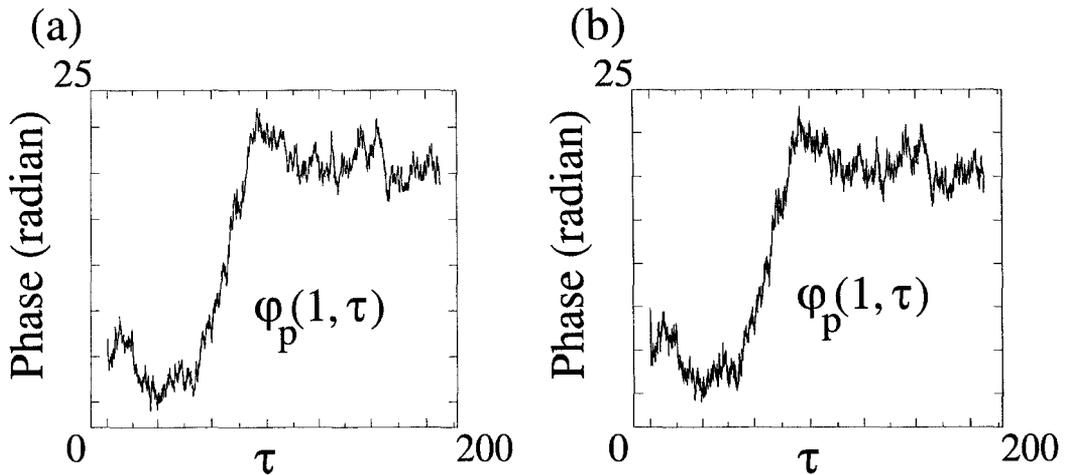


FIG. 2.10 – Evolution de la phase de l'onde de pompe en sortie de fibre sans le terme de bruit acoustique (a), et avec le bruit acoustique (b). Dans le cas où le bruit acoustique est présent, nous avons multiplié par 4 ordres de grandeur son amplitude de façon à observer une légère modification dans l'évolution de la phase de l'onde de pompe.

La deuxième hypothèse effectuée pour écrire les équations précédentes concerne l'amplitude des trois ondes. Elles sont supposées indépendantes de ζ , ce qui est justifié lorsque le laser fonctionne dans une cavité de finesse élevée.

L'étape de calcul suivante consiste à intégrer la phase de l'onde acoustique par rapport à τ entre t et $t + \tau$. Le membre de gauche de l'équation 2.20 donne alors accès à $\phi_a(t + \tau) - \phi_a(t)$. Or, comme nous l'avons rappelé dans le premier chapitre, la moyenne du carré de cette expression est reliée à la largeur spectrale de l'onde. Ceci s'écrit :

$$\langle [\phi_a(t + \tau) - \phi_a(t)]^2 \rangle = 2\pi\Delta\nu_a\tau \quad (2.22)$$

En élevant au carré l'intégrale précédemment décrite, on trouve finalement :

$$\begin{aligned}
\langle [S_0(t + \tau) - S_0(t)]^2 \rangle &= \left(\frac{gA_p^2}{\beta_a} \right)^2 \langle [\psi_a(t + \tau) - \psi_a(t)]^2 \rangle \\
&\quad - \left(\frac{gA_p^2}{2A_a} \right)^2 \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t+\tau} dt'' \int_0^1 d\zeta' \int_0^1 d\zeta'' \\
&\quad \langle (f^*(\zeta', t') e^{i\phi_a(\zeta', t')} - f(\zeta', t') e^{-i\phi_a(\zeta', t')}) \\
&\quad (f^*(\zeta'', t'') e^{i\phi_a(\zeta'', t'')} - f(\zeta'', t'') e^{-i\phi_a(\zeta'', t'')}) \rangle \\
&\quad - i \frac{g^2 A_p^4}{\beta_a A_a} [\psi_a(t + \tau) - \psi_a(t)] \int_t^{t+\tau} dt' \int_0^1 d\zeta' \cdot \\
&\quad \langle f^*(\zeta', t') e^{i\phi_a(\zeta', t')} - f(\zeta', t') e^{-i\phi_a(\zeta', t')} \rangle \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Cette équation est constituée dans sa partie de droite de la somme de trois membres T_1 , T_2 et T_3 . Le membre de gauche de l'équation 2.23 est la variance de la phase de l'onde Stokes, il est donc relié à sa largeur spectrale. Il nous reste à déterminer la signification de chacun des trois termes du membre de droite de cette équation. Le premier terme T_1 est évident, il est relié directement à la largeur spectrale de l'onde acoustique. Le terme gA_p^2/β_a est égal à KK' . Les valeurs de K et K' sont établies dans le deuxième article, et nous les rappelons pour mémoire :

$$K = 1 + \frac{\gamma_a}{\Gamma_c} \quad (2.24)$$

$$K' = 1 + \frac{\Gamma_c}{\gamma_a}. \quad (2.25)$$

Or, la valeur de K' est généralement de l'ordre de 1. Le terme gA_p^2/β_a vaut donc approximativement K . Pour déterminer l'expression KK' , on remplace A_p^2 par sa valeur au seuil, soit $A_p^2 = -\ln R/g$. On retrouve donc le résultat établi dans le chapitre 2, où le rapport de la largeur spectrale du laser de pompe sur la largeur spectrale du laser Brillouin est égal au facteur K .

Le deuxième terme T_2 est, quant à lui, très intéressant. Il représente l'influence du bruit acoustique sur la largeur spectrale de l'onde Stokes. Il est possible de simplifier son expression. Pour cela on utilise les propriétés statistiques du bruit de Langevin de cette fonction :

$$\langle f(t')f(t'') \rangle = 0 \quad (2.26)$$

$$\langle f^*(t')f(t'') \rangle = Q \cdot \delta(t' - t'') \quad (2.27)$$

On trouve alors que ce terme T_2 est égal à :

$$\left(\frac{gA_p^2}{A_a}\right)^2 \frac{Q}{2} \cdot \tau \quad (2.28)$$

Il est proportionnel à l'intensité des fluctuations de densité du matériau, ce qui se traduit par l'apparition du terme Q . Cette expression est aussi dépendante de l'intensité de l'onde de pompe, c'est à dire du terme A_p^2 . Cette relation donne la largeur ultime de notre laser Brillouin. Dans notre configuration expérimentale, la valeur de $g\frac{A_p^2}{A_a}$ vaut approximativement 100. La valeur de Q étant de 10^{-12} , la valeur de l'expression $\left(\frac{gA_p^2}{A_a}\right)^2 \frac{Q}{2}$ est alors de l'ordre de 10^{-8} . Nous pouvons dès lors en déduire la largeur ultime du laser Brillouin. Pour cela, nous nous servons des paramètres utilisés dans le premier article de ce chapitre. Le coefficient de diffusion de la variance de la phase de l'onde Stokes est de l'ordre de 10^{-4} et correspond à une largeur spectrale du laser Brillouin d'environ 400 Hz. Le rapport de ce coefficient de diffusion sur celui donné par le bruit acoustique nous permet de calculer la largeur ultime du laser Brillouin. Le rapport de ces deux coefficients de diffusion vaut 10^{-4} . En divisant la largeur spectrale du laser de pompe par ce rapport, on obtient 40 mHz. Ceci correspond à la largeur ultime du laser Brillouin. Notre relation est similaire à celle de Schawlow-Townes, dans le sens où elle nous donne accès à la largeur spectrale ultime du laser Brillouin.

Il reste le troisième terme. Nous avons vérifié numériquement que celui-ci était négligeable par rapport à la relation donnée par le terme T_2 . On peut toutefois donner une explication qualitative permettant de justifier ce résultat. La moyenne statistique $\langle f^*(\zeta', t')e^{i\phi_a(\zeta', t')} - f(\zeta', t')e^{-i\phi_a(\zeta', t')} \rangle$ contenue dans le terme T_3 peut être réécrite sous la forme suivante :

$$2 \left\langle \text{Im} \left(f^*(\zeta', t')e^{i\phi_a(\zeta', t')} \right) \right\rangle \quad (2.29)$$

Dans cette expression, nous avons deux variables qui représentent des sources de bruits indépendantes. A un instant t' , $\phi_a(\zeta', t')$ est décorrélé de $f(\zeta', t')$. La moyenne statistique du produit de ces deux fonctions doit donc être nulle, annulant ainsi le terme T_3 .

Dans ce complément, nous avons présenté les premiers résultats de notre recherche de l'influence du bruit acoustique sur la cohérence temporelle de l'émission

Stokes. Nous avons établi une relation entre la largeur spectrale du laser Brillouin et de l'onde acoustique. Dans cette relation apparaît un terme lié au bruit acoustique. Cette relation donne la largeur ultime du laser Brillouin. Ces résultats préliminaires sont confirmés par des simulations numériques, et même s'ils ne sont pas encore définitifs, ils restent prometteurs.

Chapitre 3

Dynamique et propriétés spectrales des lasers Brillouin injectés optiquement

Dans ce dernier chapitre nous allons nous intéresser au comportement d'un laser Brillouin injecté par une source optique. Nous étudierons d'une part sa dynamique et d'autre part ses propriétés spectrales. Ce chapitre est constitué d'un article qui sera soumis pour publication en septembre 2000 dans le périodique "Optics Communications". Il est donc présenté sous sa forme quasi définitive.

Nous commencerons dans un premier temps par un bref rappel du comportement dynamique des lasers conventionnels injectés optiquement. L'injection d'une source optique extérieure permet sous certaines conditions d'obtenir généralement des sources lasers de plus faible largeur spectrale. Nous effectuerons alors une comparaison avec les lasers Brillouin, qui eux aussi permettent d'obtenir des sources de grande cohérence temporelle. Ensuite, nous développerons le modèle cohérent de la diffusion Brillouin, et nous présenterons les conditions de bouclage permettant d'obtenir le système d'équations caractérisant le comportement du laser Brillouin injecté. Nous décrirons le comportement dynamique du laser Brillouin injecté lorsque celui-ci opère d'abord en régime de "miroir Brillouin" puis en régime instable. Nous vérifierons alors que le laser Brillouin injecté émet un rayonnement d'intensité stable. Nous expliquerons ce comportement en analysant l'évolution temporelle de la phase

de l'onde émise. Nous montrerons que celle-ci suit celle de la phase de la source laser extérieure. Finalement, nous confronterons ces résultats théoriques à l'expérience.

Dynamical and spectral properties of an optically injected Brillouin fiber laser

A. Debut, S. Randoux, J. Zemmouri

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, UMR 8523

Centre d'Études et de Recherches Lasers et Applications,

Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France)

September 6, 2000

Abstract

We study both theoretically and experimentally the dynamical and spectral properties of an optically injected Brillouin fiber laser. Contrary to a classical injected laser, we show that this laser remains always stable, whatever the frequency detuning and the amplitude of the probe field. To explain that behavior, we study the phase evolution of the emitted beam. We then show that the phase of the injected Brillouin laser follows that of the laser used to realize the injection. These theoretical predictions are then successfully confronted to experimental results.

1. Introduction

Due to their rich dynamical behavior, lasers with optical injection have been at the center of a main fundamental research since their introduction at the end of the 1960's. In their first use, these systems have been useful for realizing monomode emission of Doppler broadened lasers and for obtaining lasers with narrow linewidths¹⁻⁴. Since the development of semiconductor lasers and their increasing importance in nonlinear dynamics and in optical communication, the interest has been focused on injected lasers. From a fundamental point of view, semiconductor lasers and classical lasers (gaz,dye) exhibit globally the same dynamics when they are optically injected. The nonlinear dynamics induced by an external optical injection in these lasers lead to several regimes. Chaotic behavior through intermittency or period doubling bifurcation was reported ; pulsing regimes were also observed^{3,5,6}. All this operating regimes are clearly listed and delimited, both theoretically and experimentally^{3,7-13}. Relevant parameters in such a system are the power of the injected signal and the detuning between the two oscillators. Another key point is their spectral properties. Optical injection allows to obtain narrow linewidth and phase locking for a particular domain of parameters^{12,14,15}.

Narrow linewidth could also be achieved with other systems like Brillouin lasers. They are considered as highly coherent sources. In this system the linewidth of the emitted Stokes wave could be several orders of magnitude narrower than that of the laser used to pump it^{16,17}. Recently, this spectral narrowing has been the object of a theoretical and experimental analysis^{17,18}, and an analytical relation connecting the FWHM of the Stokes linewidth to that of the pump laser has been found. The aim of this paper is to study both theoretically and experimentally the dynamical behavior of an optically injected Brillouin fiber laser, and then to compare its dynamics with the usual behavior of an optically injected laser. In section 2 we treat the theory of such a Brillouin laser. In section 3, experimental results are compared with the theoretical predictions.

2. Theory

Stimulated Brillouin scattering is a nonlinear interaction that involves two optical waves (the pump and the backscattered Stokes beam) and an acoustic wave through the electrostriction phenomenon. The phases and amplitudes of these three waves are strongly coupled. The profusion of the dynamical regimes depends on the configuration used to realize the Brillouin laser. Two cavity configurations are conceivable ; on one hand the P erot-Fabry cavity, and on the other hand the ring cavity. However, both of them lead globally to the same dynamics²¹. Therefore, for sake of simplicity, we limit our study to the ring laser. Then, the set of equations describing the three-wave interaction is given by²⁰ :

$$\frac{\partial E_p}{\partial \tau} + \frac{\partial E_p}{\partial \zeta} = -g \cdot E_s \cdot E_a \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_s}{\partial \tau} - \frac{\partial E_s}{\partial \zeta} = g \cdot E_p \cdot E_a^* \quad (2)$$

$$\frac{1}{\beta_a} \frac{\partial E_a}{\partial \tau} + E_a = E_p \cdot E_s^* \quad (3)$$

These equations in dimensionless form have been obtained by neglecting the weak attenuation of the fiber. The time τ is normalized to the transit time of the light inside the fiber. ζ is the space coordinate that is normalized to the fiber length. g is the SBS coupling constant. $\beta_a = \pi \cdot \Delta\nu_B \cdot \frac{nL}{c}$ is the acoustic wave damping coefficient, L the fiber length, c the velocity of light, and n the fiber refractive index. $\Delta\nu_B$ is the width of the Brillouin gain curve, and its value is approximately 80 MHz at a wavelength of 850 nm. To realize a Brillouin fiber ring laser in which pump recoupling is avoided by an intracavity isolator, one needs to explicit the boundary conditions that read :

$$E_p(0, \tau) = \mu \quad (4)$$

$$E_s(1, \tau) = R \cdot \exp(-i \cdot \delta_s) \cdot E_s(0, \tau) \quad (5)$$

μ is the dimensionless pump parameter and is equal to $\sqrt{-\ln(R)/g}$ when the laser threshold is reached¹⁹. R is the reinjection rate of the Stokes field. δ_s is the accumulated phase difference per round trip for the Stokes field. The length of the cavity plays an important

FIGURES

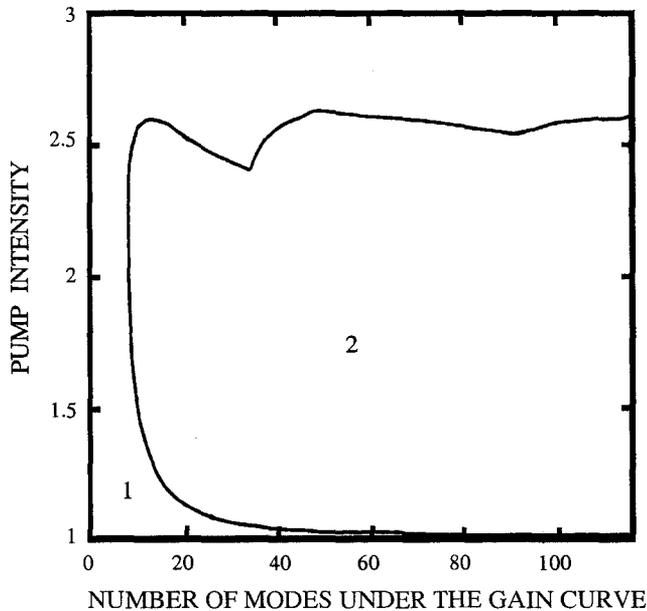


Fig. 1. Domain of instability of a Brillouin laser ($R^2 = 1\%$). (1) and (2) represent the stable and unstable domains, respectively.

role in the dynamical behavior of the laser^{19,20}. The fiber length L determines the number of modes N under the gain curve which is equal to $\Delta\nu_B/F$. F is the free spectral range of the cavity. We define N_c as being the maximum number of modes above which the emission is always stable. For a number of modes N greater than N_c , the laser emission is unstable as soon as the threshold is reached¹⁹. Fig. 1 gives an example which summarizes the stable and unstable domains of the Brillouin ring laser for the relevant parameters (μ, N) . In that case, we took the Stokes intensity feedback as 1%.

Thus, the increasing number of modes N in the unstable domain allows varied regimes to be observed²³. Note that the critical number of modes N_c increases with R and becomes higher as R approaches one. In a good cavity (i.e. $R \simeq 1$), the Brillouin laser emission is always monomode whatever the fiber length is.

With this in mind, we are going to tackle the study of the temporal behavior of the optically injected Brillouin fiber ring laser (I.B.L.). Our first analysis is devoted to the stable

Brillouin laser state. In the CW state the Brillouin laser oscillates in a single longitudinal mode. By taking into account the optical injection, the boundary conditions (4) and (5) become :

$$E_p(0, \tau) = \mu \quad (6)$$

$$E_s(1, \tau) = R \cdot \exp(-i \cdot \delta_s) \cdot E_s(0, \tau) + E_{inj}(1, \tau) \cdot \exp(-i \cdot \Delta\omega \cdot \tau) \quad (7)$$

E_{inj} is the injected field, and $\Delta\omega/2\pi$ represents the frequency detuning between this field and the Stokes wave. We do the numerical integration of eq. (1) to eq. (3) by using the boundary conditions (6) and (7). We first let time for the system to evolve to its stationary state by using the boundary conditions (4,5) and then we apply the injected field.

First of all, when the probe frequency $\omega_{inj}/2\pi$ is far from the frequency of the Brillouin laser, the Stokes field remains unchanged and we have not observed phase locking whatever the amplitude of the injected field. As one can expect, the Brillouin laser is not sensitive to the injected field when $\Delta\omega/2\pi$ is higher than a few times $\Delta\nu_B$.

When the frequency $\omega_{inj}/2\pi$ is close to the frequency of the Brillouin laser (i.e. $\omega_s/2\pi$), we observe numerically that the system always remains stable, on a large range of frequency domain around $\omega_s/2\pi$. For a lower injection rate, typically $10 \mu W$, the phase of the Stokes field is locked on the phase of the injected field. The width of the locking range is several times the bandwidth of the Brillouin gain curve $\Delta\nu_B$. This locking range increases with the pump power. As far as the injected power is greater than the noise level, the I.B.L. is phase locked. This kind of dynamical behavior contrasts with that observed in conventional optically injected laser where one can observe period doubling, limit-cycle oscillation, period quadrupling and chaos^{7,12}.

Let us come back to the initially unstable regime. In that case the number of modes N under the Brillouin gain curve is higher than N_c , and the Brillouin laser emission is unstable. As soon as the injection is realized, the injected Brillouin laser emission becomes stable. This result is shown in Fig. 2. The part (a) and (b) of this figure represent the intensity and phase evolution of the I.B.L, respectively. Before the injection point A , the

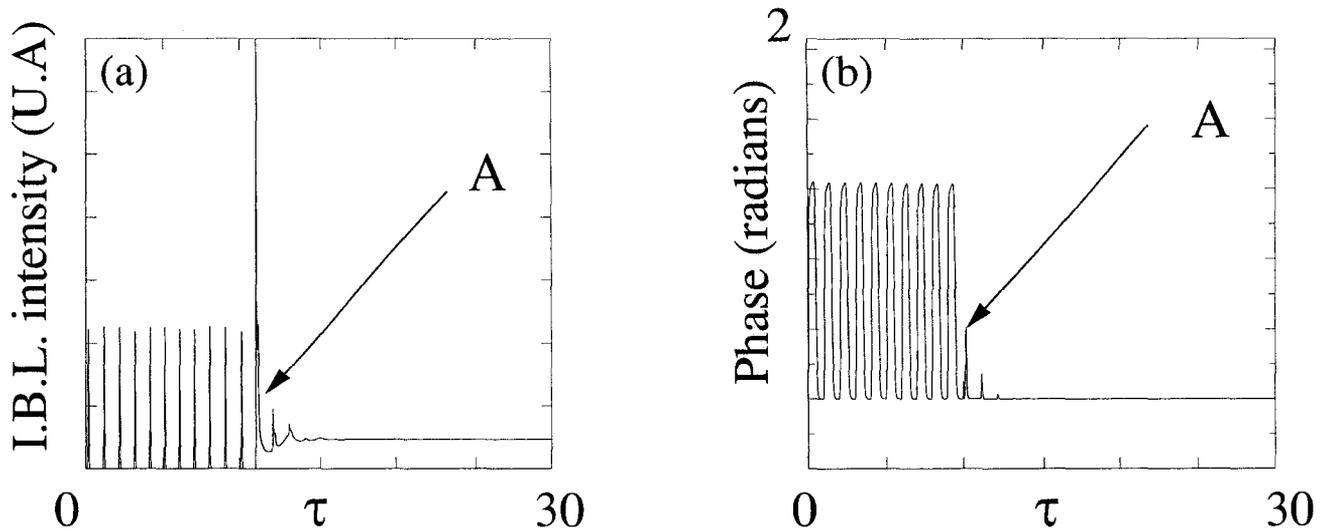


Fig. 2. (a) Intensity and (b) phase evolution of the I.B.L. when the Brillouin laser is initially unstable. The A point shows the time the injection occurs. The IBL intensity is normalized to the injected laser intensity.

emission is unstable, and the frequency of the instabilities is nearly equal to the F.S.R. (Free Spectral Range) of the cavity. After this A point, the intensity of the I.B.L. is stable. In the same way, the figure 2b represents the phase evolution of the I.B.L. The phase of the I.B.L. does not oscillate after the A point, which means that the phase is locked.

Looking from a realistic case, the phases of each field are now fluctuating quantities. The phase diffusion model²² describes these evolutions. In figure 3, we depict this phase evolution, and we can see that at the injection point, the phase of the I.B.L. follows that of the probe field. We can conclude that the linewidth of the I.B.L. is that of the probe beam, and the phase of the I.B.L. is locked on the phase of the probe beam. This result is the same as in classical injected laser in the locking range. The I.B.L. is then equivalent to a master-slave system. Nevertheless, there is a fundamental difference between this two kinds of injected lasers : the I.B.L. is never destabilized by the probe beam. This result is valid in

any place in the unstable domain of the Brillouin laser. Finally, the value of injected power does not change the behavior of the I.B.L. as in the stable case.

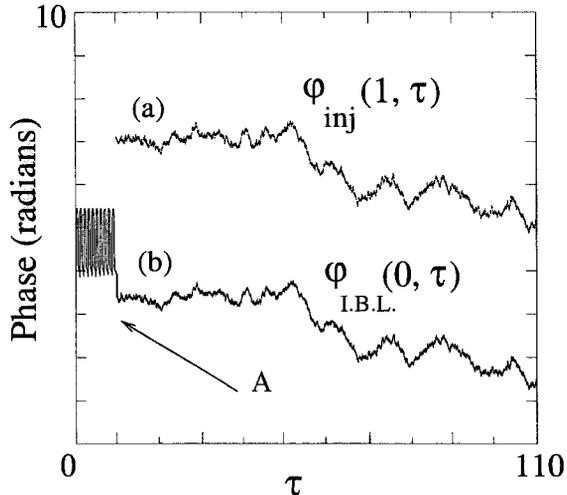


Fig. 3. Phase evolution of the I.B.L. including the phase diffusion model.

To summarize, the I.B.L. always remains stable whatever the cavity length is. Nevertheless, in the unstable domain of the Brillouin laser, the stable regime is only obtained when the frequency detuning enters in the Brillouin gain curve. To show that property in a clear manner, we sweep the frequency of the probe with a fixed value of injected power for a Brillouin laser in the unstable case (figure 4). We clearly see two different domains. One is situated outside the Brillouin amplification curve, and the dynamical behavior is unstable. The other area is stable, and represents the locking range domain. When the phase of the I.B.L. is locked on that of the probe beam, we can see on figure 4 that this locking range is larger than $\Delta\nu_B$ which is 80 MHz in our experiments.

Finally, note that on one hand we have considered the influence of the pump reinjection rate. This parameter does not play a significant role on the I.B.L. behavior. On the other hand, we obtain the same result in the P erot-Fabry cavity setup.

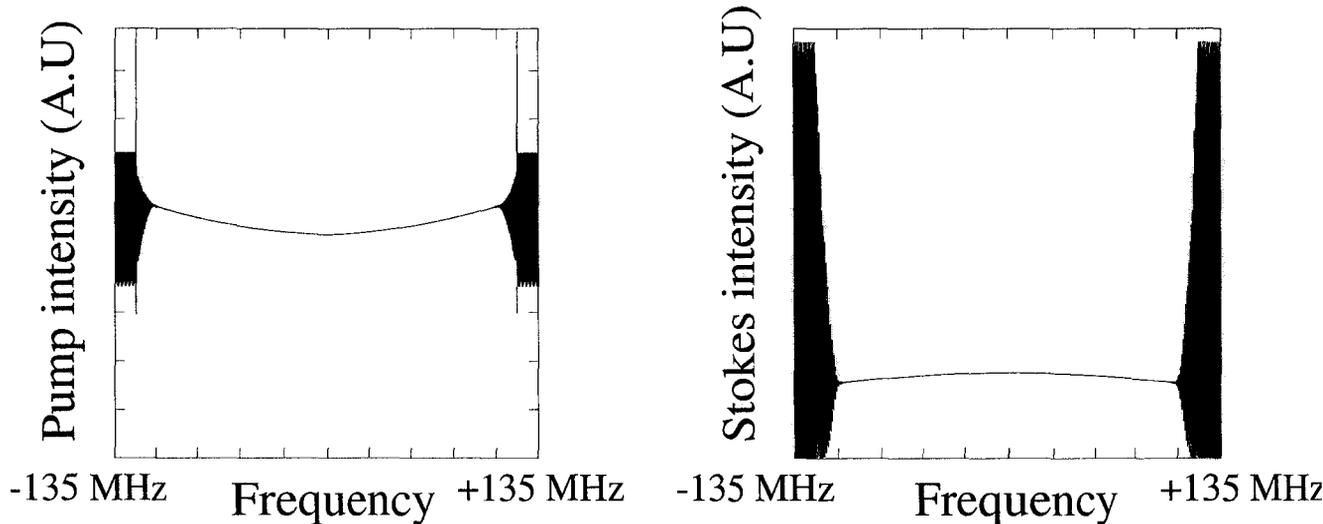


Fig. 4. Numerical simulations. Response of the I.B.L. to a frequency sweeping of the probe laser.

3. Experiments

The experimental setup is presented in figure 5. The CW emission of a Ti-Sapphire laser operating at 351721 GHz , is used as a pump source. This laser has a 500 kHz linewidth and its frequency can be linearly swept over a range adjustable from 10 MHz to 30 GHz . It is optically isolated from the fibre used to realize the Brillouin laser. The Brillouin laser is made with a 100 m long piece of polarization-preserving optical fibre. The fibre core diameter is $4.0 \text{ }\mu\text{m}$, the cut-off wavelength for monomode propagation is 630 nm , and the resonator is made with the fiber end Fresnel reflexions. C1 is a 95/5 coupler. It allows us to detect the emitted Stokes wave without being perturbed by the Fresnel reflexion of the pump beam at the end of the fibre. The end of path 4 of the coupler is plunged into an index liquid, so no reflexions can occur to perturb our measurements. In the path 3 of C1, we inject the beam of a stabilized diode laser to realize the optical injection of the Brillouin laser. That diode laser is externally injected with a Littrow setup. It is temperature

and frequency controlled. That diode is frequency overcome on the $D1$ ($6S_{1/2} - > 6D_{1/2}$) absorption line of Cesium. That allows us to realize a frequency stabilized laser diode at 351741 GHz. A 5 mW total output power is used, and a 70 kHz linewidth is measured by using a Mach-Zehnder interferometer. The laser diode is linearly polarized. Two Faraday isolators (40 dB and 20 dB isolation) are put after the laser diode in order to preserve feedback effect. Finally, in that experimental setup, we used a lambdameter in order to control the Ti-Sapphire laser frequency, and to know the exact frequency difference between this laser and the diode laser. In that way, it allows us to know the exact frequency shift between the pump and the Stokes beam.

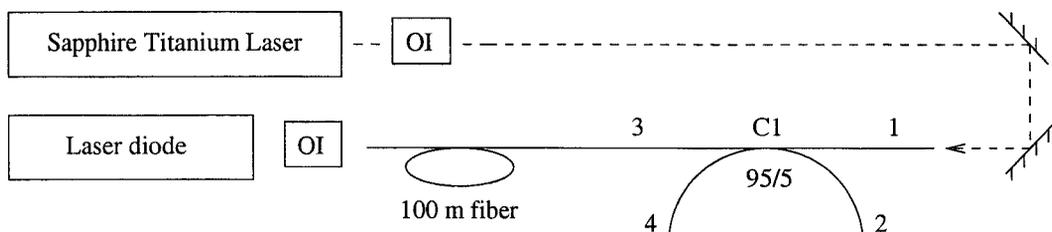


Fig. 5. Schematic representation of the experimental setup. C1 is a 95/5 coupler. O1 and O2 are Faraday isolator.

To validate our numerical results, we treat the case the Brillouin laser is unstable. We launch 200 mW pump power through the path one of the C1 coupler. Then, we obtain a pulsed regime and the frequency of the oscillations is around the FSR. To realize the injected Brillouin laser, we inject the laser diode into the path 3 of C1. Due to the fact that the laser diode is frequency stabilized on an absorption line, we are not able to shift its frequency. So, in order to quantify the role of the frequency detuning $\Delta\omega/2\pi$, we have performed a sweeping of the frequency of the pump laser at constant power. This frequency sweeping entails a displacement of the Brillouin gain curve leading to the sweeping of $\Delta\omega$. The figure 6 presents the pump and Stokes intensity. The Brillouin laser is unstable when the laser diode frequency is outside the amplification curve. As the probe frequency enters in that gain curve, the Brillouin laser is stable. Different values of injected power were applied and

we obtained the same result. We were able to realize that experiment with a $10 \mu W$ coupled laser diode intensity, and the intensity of the Brillouin laser remains always stable. In the second part of our experiment, we increased the pump power. We observed a broadening of the locking range without any destabilization of the I.B.L. Finally, we increased R in order to obtain the stable domain of the Brillouin laser. Whatever the offset frequency $\Delta\omega$ and the amplitude of the probe field, the behavior of the I.B.L. was always remaining stable.

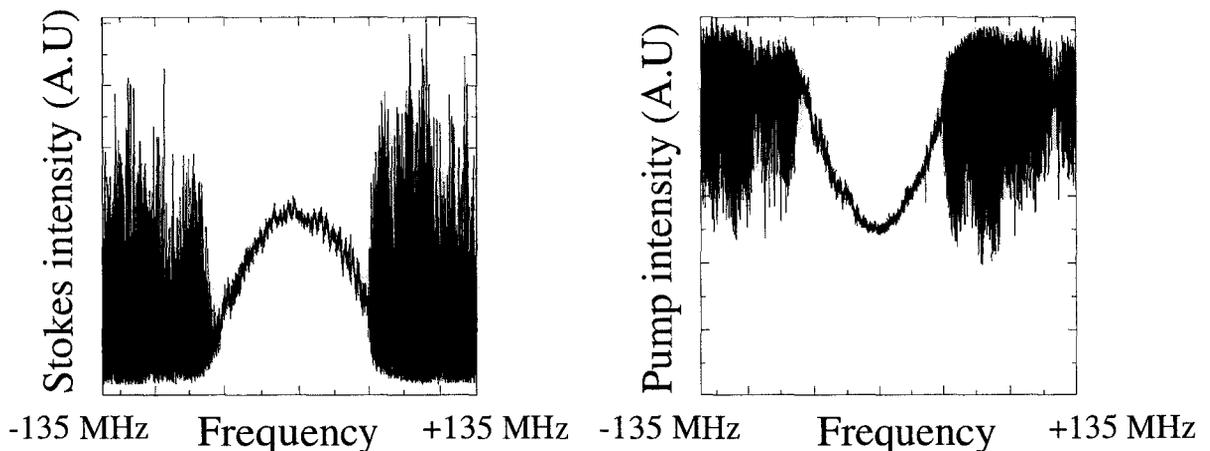


Fig. 6. Experimental response of the I.B.L. to a frequency sweeping of the pump laser. (a) Pump intensity. (b) Stokes intensity.

In conclusion, we have analyzed both theoretically and experimentally the temporal behavior of an optically injected Brillouin laser. The study shows a locking range between the frequency of the injected field and that of the Brillouin laser, leading to a stabilization of the Brillouin laser in its unstable behavior. No destabilization was observed in the locking range by sweeping the amplitude of the injected field. This strongly contrasts with the behavior of a classical injected laser where more complex behaviors are observed. To understand that result, we studied the temporal evolution of the phase of the emitted Stokes wave. We then observed that the phase of the injected laser drives the temporal evolution of the phase of the Brillouin laser. This implies the laser to be stable.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Pascal Sznitgiser for his great help in the frequency stabilization of the laser diode. The Centre d'Etudes et de Recherches Lasers et Applications (CERLA) is supported by the Ministère chargé de la Recherche, the Région Nord/Pas de Calais and the Fonds Européen de Développement Economique des Régions. This work was partially supported by the European contract "Intereg II Nord-Pas de Calais/Kent".

REFERENCES

1. H. L. Stover and W. H. Steier, *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 8, N. 4, 91 (1966)
2. R. W. Dunn, S. T. Hendow, W. W. Chow and J. G. Small, *Opt. Lett.*, Vol. 8, N. 6, 319 (1983) and reference therein
3. J. R. Tredicce, F. T. Arecchi, G. L. Lippi and G. P. Puccioni, *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol. 2, N. 1, 173 (1985)
4. P. Burlamacchi and R. Salimbeni, *Opt. Com.*, Vol. 17, N. 1, 6 (1976)
5. L. A. Lugiato, L. M. Narducci, D. K. Bandy and C. A. Pennise, *Opt. Com.*, Vol. 46, N. 1, 64 (1983)
6. H. J. Scholz, T. Yamada, H. Brand and R. Graham, *Phys. Lett*, Vol. 82A, N. 7, 321 (1981)
7. T. B. Simpson, J. M. Liu, K. F. Huang and K. Tai, *Quantum Semiclass. Opt.*, Vol. 9, 765 (1997)
8. T. B. Simpson, J. M. Liu, A. Gavrielides, V. Kovanis and P. M. Alsing, *Phys. Rev. A*, Vol. 51, N. 5, 4181, (1995)
9. V. Kovanis, A. Gavrielides, T. B. Simpson and J. M. Liu, *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 67, N. 19, 2780 (1995)
10. T. B. Simpson, J. M. Liu and A. Gavrielides, *IEEE Journ. Quant. Elec.*, Vol. 32, N. 8, 1456 (1996)
11. B. Krauskopf, W. A. van der Graff and D. Lenstra, *Quantum Semiclass. Opt.*, Vol. 9, 797 (1997)
12. G. H. M. van Tartwijk and D. Lenstra, *Quantum Semiclass. Opt.*, Vol. 7, 87 (1995)
13. D. K. Bandy, L. M. Narducci and L. A. Lugiato, *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol. 2, N. 1, 148

(1985)

14. Y. K. Park, G. Giuliani and R. L. Byer, *Opt. Lett.*, Vol. 5, N. 3, 96 (1980)
15. T. Kunii, Y. Matsui, *Opt. Quantum. Elec.*, Vol. 24, 719 (1992) and reference therein
16. S. P. Smith, F. Zarinetchi and S. Ezechieli, *Opt. Lett.*, Vol. 16, 393 (1991)
17. A. Debut, S. Randoux and J. Zemmouri, *Phys. Rev. A*, Vol. 62 (2000)
18. A. Debut, S. Randoux and J. Zemmouri, submitted to *J. Opt. Soc. Am. A*
19. S. Randoux, V. Lecoecuche, B. Segard and J. Zemmouri, *Phys. Rev. A*, Vol. 51, N. 6, R4345 (1995)
20. V. Lecoecuche, S. Randoux, B. Segard and J. Zemmouri, *Quantum Semiclass. Opt.*, Vol. 8, 1 (1996)
21. V. Lecoecuche, B. Ségard and J. Zemmouri, *Opt. Comm.*, Vol. 172, 335-345 (1999)
22. L. Mandel and E. Wolf, *Optical coherence and quantum optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
23. C. Montes, D. Bahloul, I. Bongrand, J. Botineau, G. Cheval, A. Mamhoud, E. Picholle and A. Picozzi, *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol. 16, No. 6, 932-951 (1999)

Conclusion

L'objectif de notre travail était de comprendre et de caractériser les propriétés spectrales des lasers Brillouin. Pour cela, nous avons commencé par définir la notion de largeur spectrale. La première partie de ce mémoire a été consacrée à la présentation du modèle de diffusion de phase. Celui-ci permet de caractériser l'évolution temporelle de la phase d'un champ laser, la largeur spectrale se déduisant alors du calcul de la fonction d'autocorrélation du champ. Nous avons ensuite présenté succinctement l'influence du bruit d'amplitude et du bruit de pompage sur le spectre de puissance d'un laser à inversion de population. L'ensemble des rappels sur la diffusion Brillouin puis sur les lasers Brillouin a été l'occasion de présenter l'expérience de Zarinetchi réalisée en 1991. Celle-ci donne un ordre de grandeur de la largeur spectrale du laser Brillouin en régime d'émission continu. Elle met en avant le fait que la largeur spectrale du laser Brillouin peut être 10000 fois moins grande que celle du laser de pompe. Pour comprendre ce résultat, nous avons commencé par effectuer une analyse basée sur une comparaison entre les différentes sources de bruit dans les lasers Brillouin et les lasers à inversion de population. En particulier, nous en avons déduit que le bruit de phase du laser de pompe devait être la source de bruit à prendre en considération. En utilisant le modèle cohérent à trois ondes décrivant la dynamique des lasers Brillouin, nous avons ensuite établi une relation simple liant la phase de l'onde de pompe à celle de l'onde Stokes, résultat confirmé par des simulations numériques. Nous avons montré que le bruit de phase du laser de pompe était transféré à l'onde Stokes émise après avoir été filtré par l'association de deux systèmes linéaires. L'un vient filtrer les fluctuations et réduire l'amplitude des fluctuations, et l'autre moyenne les fluctuations sur un temps égal au temps de transit des photons dans la cavité. Le rapport entre les largeurs spectrales des deux ondes est finalement et simplement donné par une relation faisant intervenir

uniquement le taux d'amortissement de l'onde acoustique et le taux de pertes de la cavité. Pour confronter ces résultats théoriques à l'expérience, nous avons mis en place un protocole expérimental dans lequel nous enregistrons la réponse du laser Brillouin à une modulation de fréquence de l'onde de pompe. Dans notre expérience, nous obtenons un rapport entre l'indice de modulation de l'onde de pompe et de l'onde Stokes de 10. Ce résultat est alors comparé à la valeur théorique. Les résultats expérimentaux obtenus concordent avec ceux prévus par les prédictions théoriques.

Cette étude a été complétée en prenant en compte le bruit acoustique. En effet, ce bruit est à l'origine d'une limite pour la largeur spectrale d'un laser Brillouin, et nous avons par une approche analytique établi une relation similaire à celle de Schawlow-Townes des lasers à inversion de population. Néanmoins, même si certains de ces résultats analytiques sont validés numériquement, il reste encore à confirmer toutes nos hypothèses de calcul. Cependant, étant donné la faible influence du bruit acoustique sur la largeur spectrale du laser Brillouin, nous ne sommes pas actuellement en mesure de la mesurer expérimentalement. Pour vérifier nos résultats expérimentalement, nous devons nous affranchir du bruit technique qui vient masquer les effets du bruit acoustique. L'utilisation de lasers à semi-conducteurs est sans aucun doute le meilleur moyen de parvenir à étudier l'influence du bruit acoustique sur la cohérence temporelle de l'émission Stokes.

Pour terminer, nous avons appliqué nos méthodes d'analyse à l'étude d'un laser Brillouin injecté optiquement. Nous avons vérifié tant expérimentalement que théoriquement que celui-ci émettait un rayonnement d'intensité stable quel que soit le régime de fonctionnement du laser Brillouin. Ce résultat est comparé à ceux obtenus dans les lasers classiques injectés, dans lesquels on observe une grande diversité de comportements dynamiques. Pour comprendre ce résultat, nous avons étudié l'évolution temporelle de la phase de l'onde émise. Nous avons alors observé que la phase du laser réalisant l'injection dominait l'évolution temporelle de la phase de l'onde émise par le laser Brillouin. De ce fait, l'intensité du laser est toujours stable.

Bibliographie

- [Benkert *et al.* 90] C. Benkert, M. O. Scully, J. Bergou, L. Davidovich, M. Hillery et M. Orszag. – *Role of pumping statistics in laser dynamics: Quantum Langevin approach.* Phys. Rev. A, **41**, 2756 (1990).
- [Boyd *et al.* 90] R. W. Boyd, K. Rzazewski et P. Narum. – *Noise initiation of stimulated Brillouin scattering.* Phys. Rev. A, **42**, 5514 (1990).
- [Cohen et Lenstra 89] J. S. Cohen et D. Lenstra. – *Spectral properties of the coherence collapsed state of a semiconductor laser with delayed optical feedback.* IEEE J. Quantum Electron., **25**, 1143 (1989).
- [Fox *et al.* 84] R. F. Fox, G. E. James et R. Roy. – *Stochastic pump effects in lasers.* Phys. Rev. A, **30**, 2482 (1984).
- [Gaeta et Boyd 91] A. L. Gaeta et R. W. Boyd. – *Stochastic dynamics of stimulated Brillouin scattering in an optical fiber.* Phys. Rev. A, **44**, 3205 (1991).
- [Gaeta et Boyd 92] A. L. Gaeta et R. W. Boyd. – *Stimulated Brillouin scattering in the presence of external feedback.* International Journal of Nonlinear Optical Physics, **1**, 581 (1992).
- [Gallion et Debarge 84] P. B. Gallion et G. Debarge. – *Quantum Phase Noise and Field Correlation in Single Frequency Semiconductor Laser Systems.* IEEE J. Quantum Electron., **QE-20**, 343 (1984).
- [Goldberg *et al.* 91a] P. Goldberg, P. W. Milonni et B. Sundaram. – *Theory of the fundamental laser linewidth.* Phys. Rev. A, **44**, 1969 (1991).
- [Goldberg *et al.* 91b] Philip Goldberg, P. W. Milonni et B. Sundaram. – *Theory of the fundamental laser linewidth. II.* Phys. Rev. A, **44**, 4556 (1991).
- [Hamel *et al.* 92] W. A. Hamel, M. P. van Exter, K. A. Shore et J. P. Woerdman. – *Numerical study of the linewidth of a semiconductor lasers: Effect of saturation.* Phys. Rev. A, **45**, 4864 (1992).

- [Hamel et Woerdman 90] W. A. Hamel et J. P. Woerdman. – *Observation of Enhanced Fundamental Linewidth of a Laser Due to Nonorthogonality of Its Longitudinal Eigenmodes*. Phys. Rev. Lett., **64**, 1506 (1990).
- [Heiman et al. 79] D. Heiman, D. S. Hamilton et R. W. Hellwarth. – *Brillouin scattering measurements on optical glasses*. Phys. Rev. B, **19**, 6583 (1979).
- [Henry 82] C. H. Henry. – *Theory of the Linewidth of Semiconductor Lasers*. IEEE J. Quantum Electron., **QE-18**, 259 (1982).
- [Hill et al. 76] K. O. Hill, B. S. Kawasaki et D. C. Johnson. – *CW Brillouin laser*. Appl. Phys. Lett., **28**, 608 (1976).
- [Kuppens et al. 94] S. J. M. Kuppens, M. P. van Exter et J. P. Woerdman. – *Quantum-Limited Linewidth of a Bad-Cavity Laser*. Phys. Rev. Lett., **72**, 3815 (1994).
- [Lax 67] M. Lax. – *Classical Noise. V. Noise in Self-Sustained Oscillators*. Phys. Rev., **160**, 290 (1967).
- [Lecoeuche 96] Vincent Lecoeuche. – *Thèse de doctorat: Stabilité et comportements dynamiques génériques des lasers Brillouin à fibre*. Université des Sciences et Technologies de Lille, France (1996).
- [Lecoeuche et al. 96] V. Lecoeuche, S. Randoux, B. Ségard et J. Zemmouri. – *Dynamics of stimulated Brillouin scattering with feedback*. Quantum Semiclass. Opt., **8**, 1 (1996).
- [Lecoeuche et al. 98] V. Lecoeuche, D. J. Webb, C. N. Pannell et D. A. Jackson. – *Brillouin based distributed fibre sensor incorporating a mode-locked Brillouin fiber ring laser*. Opt. Commun., **152**, 263 (1998).
- [Lichtman et Friesem 87] E. Lichtman et A. A. Friesem. – *Stimulated Brillouin scattering excited by a multimode laser in single-mode optical fibers*. Opt. Commun., **64**, 544 (1987).
- [Lorrain et Corson 79] P. Lorrain et D. R. Corson. – *Champs et ondes électromagnétiques*. – Librairie Armand Collin (1979).
- [Ludvigsen et Bodtker 94] H. Ludvigsen et E. Bodtker. – *New method for self-homodyne laser linewidth measurements with a short delay fiber*. Opt. Commun., **110**, 595 (1994).

- [Mandel et Wolf 95] L. Mandel et E. Wolf. – *Optical Coherence and Quantum Optics*. – Cambridge University Press (1995).
- [Mathieu et al. 91] J. P. Mathieu, A. Kastler et P. Fleury. – *Dictionnaire de physique*. – Eyrolles (1991).
- [Montes et al. 94a] C. Montes, A. Mahmoud, J. Botineau et E. Picholle. – *Three-wave soliton morphogenesis in a CW-pumped Brillouin fiber ring laser*. Fluctuation Phenomena: disorder and nonlinearity, Madrid Ed., 397 (1994).
- [Montes et al. 94b] C. Montes, A. Mamhoud et E. Picholle. – *Bifurcation in a CW-pumped Brillouin fiber-ring laser: coherent soliton morphogenesis*. Phys. Rev. A, **49**, 1344 (1994).
- [Nazarathy et al. 89] M. Nazarathy, W. V. Sorin, D. M. Baney et S. A. Newton. – *Spectral Analysis of Optical Mixing Measurements*. J. Lightwave Technol., **7**, 1083 (1989).
- [Picholle et al. 91] E. Picholle, C. Montes, C. Leycuras, O. Legrand et J. Botineau. – *Observation of dissipative superluminous solitons in a Brillouin fiber ring laser*. Phys. Rev. Lett., **66**, 1454 (1991).
- [Picholle et Picozzi 97] E. Picholle et A. Picozzi. – *Guided-acoustic-wave resonances in the dynamics of a stimulated Brillouin fiber ring laser*. Opt. Commun., 327 (1997).
- [Randoux 95] Stéphane Randoux. – *Thèse de doctorat: Etude expérimentale et théorique de la dynamique de lasers Brillouin à fibre optique*. Université des Sciences et Technologies de Lille, France (1995).
- [Randoux et al. 95a] S. Randoux, V. Lecoecuche, B. Ségard et J. Zemmouri. – *Dynamical analysis of Brillouin fiber lasers: an experimental approach*. Phys. Rev. A, **51**, R4345 (1995).
- [Randoux et al. 95b] S. Randoux, V. Lecoecuche, B. Ségard et J. Zemmouri. – *Dynamical behavior of a Brillouin fiber ring laser emitting two Stokes components*. Phys. Rev. A, **52**, 221 (1995).
- [Richter et al. 86] L. E. Richter, H. I. Mandelberg, M. S. Kruger et P. A. McGrath. – *Linewidth Determination from Self-Heterodyne Measurements with Subcoherence Delay Times*. IEEE J. Quantum Electron., **QE-22**, 2070 (1986).

- [Salomon *et al.* 88] Ch. Salomon, , D. Hills et J. L. Hall. – *Laser stabilization at the millihertz level*. J. Opt. Soc. Am. B, **5**, 1576 (1988).
- [Schawlow et Townes 58] A. L. Schawlow et C. H. Townes. – *Infrared and Optical Masers*. Phys. Rev., **112**, 1940 (1958).
- [Shen 84] Y. R. Shen. – *The principles of nonlinear optics*. – John Wiley (1984).
- [Siegman 86] Siegman. – *Lasers*. – University Science Books (1986).
- [Smith *et al.* 91] S. P. Smith, F. Zarinetchi et S. Ezekiel. – *Narrow-linewidth stimulated Brillouin fiber laser and applications*. Opt. Lett., **16**, 393 (1991).
- [Stokes *et al.* 82] L. F. Stokes, M. Chodorow et H. J. Shaw. – *All-fiber stimulated Brillouin ring laser with submilliwatt pump threshold*. Opt. Lett., **7**, 509 (1982).
- [Vahala *et al.* 83] K. Vahala, C. Harder et A. Yariv. – *Observation of relaxation resonance effects in the field spectrum of semiconductor lasers*. Appl. Phys. Lett., **42**, 211 (1983).
- [Vahala et Yariv 83a] K. Vahala et A. Yariv. – *Semiclassical Theory of Noise in Semiconductor Lasers - Part I*. IEEE J. Quantum Electron., **QE-19**, 1096 (1983).
- [Vahala et Yariv 83b] K. Vahala et A. Yariv. – *Semiclassical Theory of Noise in Semiconductor Lasers - Part II*. IEEE J. Quantum Electron., **QE-19**, 1102 (1983).
- [van Exter *et al.* 91] M. P. van Exter, W. A. Hamel et J. P. Woerdman. – *Nonuniform phase diffusion in a laser*. Phys. Rev. A, **43**, 6241 (1991).
- [van Exter *et al.* 92a] M. P. van Exter, W. A. Hamel, J. P. Woerdman et B. R. P. Zeijlmans. – *Spectral signature of relaxation oscillations in semiconductor lasers*. IEEE J. Quantum Electron., **28**, 1470 (1992).
- [van Exter *et al.* 92b] M. P. van Exter, S. J. M. Kuppens et J. P. Woerdman. – *Excess Phase Noise in Self-Heterodyne Detection*. IEEE J. Quantum Electron., **28**, 580 (1992).
- [van Exter *et al.* 95] M. P. van Exter, S. J. M. Kuppens et J. P. Woerdman. – *Theory for the linewidth of a bad-cavity laser*. Phys. Rev. A, **51**, 809 (1995).
- [van Tarjwijk 94] G. van Tarjwijk. – *Semiconductor Laser Dynamics with Optical Injection and Feedback*. – Vrije Universiteit (1994).

- [Walser et Zoller 94] R. Walser et P. Zoller. – *Laser noise induced polarization fluctuations as a spectroscopy tool*. Phys. Rev. A, **49**, 5067 (1994).
- [Yariv 87] A. Yariv. – *Quantum Electronics*. – John Wiley and Sons (1987).
- [Yariv et Caton 74] A. Yariv et W. M. Caton. – *Frequency, intensity and field fluctuations in laser oscillators*. IEEE J. Quantum Electron., **QE-10**, 509 (1974).
- [Young *et al.* 99] B. C. Young, F. C. Cruz, W. M. Itano et J. C. Bergquist. – *Visible Lasers with Subhertz Linewidths*. Phys. Rev. Lett., **82**, 3799 (1999).
- [Zarinetchi *et al.* 91] F. Zarinetchi, S. P. Smith et S. Ezekiel. – *Stimulated Brillouin fiber-optic laser gyroscope*. Opt. Lett., **16**, 229 (1991).
- [Zhu 93] C. Zhu. – *Statistics of nonclassical lasers generated via pump-noise suppression*. Phys. Rev. A, **48**, 3930 (1993).

