

N° d'ordre: 2720

Université de Sciences et Technologies de Lille 1
U.F.R. de Physique

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

en

SCIENCES PHYSIQUES

présentée et soutenue publiquement

par

Alberto BARSELLA

le 28 Fevrier 2000

Dynamique de couplage et
formation de structures
dans les lasers à absorbant saturable

Directeurs de thèse:

Prof. Didier Dangoisse
M.d.C. Catherine Lepers

Membres du jury:

Didier DANGOISSE, *Professeur, Université de Lille 1*
Thomas ERNEUX, *Chercheur Qualifié FNRS, Université Libre de Bruxelles (rapporteur)*
Leone FRONZONI, *Professeur, Université de Pise (rapporteur)*
Pierre GLORIEUX, *Professeur, Université de Lille 1*
Catherine LEPERS, *Maître de Conférences, Université de Lille 1*
Gian Luca LIPPI, *Professeur, Université de Nice*
Majid TAKI, *Maître de Conférences, Université de Lille 1*

Remerciements

Les travaux présentés ici ont été réalisés au Laboratoire de Physique des Atomes, Lasers et Molécules.

Je tiens d'abord à remercier mes directeurs de thèse, Prof. Didier Dangois et M. de C. Catherine Lepers, qui m'ont suivi et ont travaillé avec moi pendant ces trois années de thèse, en m'apportant leur aide sur les plans expérimental et théorique. Enfin, leurs multiples relectures ont permis à ce rapport d'être réellement écrit en langue française.

Un rôle important a aussi été celui joué par Thomas Erneux et Majid Taki, avec lesquels j'ai collaboré pendant ma thèse, qui m'ont appris des nouvelles méthodes d'analyse et qui ont accepté d'être l'un rapporteur et l'autre examinateur lors de l'évaluation de mon travail. Je remercie également Leone Fronzoni et GianLuca Lippi d'avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie Pierre Glorieux, qui m'a accueilli au sein du laboratoire pendant ma thèse et Ennio Arimondo pour m'avoir initié à la dynamique non linéaire lors de ma 'tesi di laurea'.

Un remerciement aux "collègues" : le stagiaire Alfonso Catarino ("oui, l'adaptation d'impédance, c'est important"), aux étudiants de DEA Marc Blusseau ("Windoze sans la souris, c'est plus pratique") et Anas Alkhawwwam ("le nombre de 'w' n'est pas bon, mais tout le monde se plante").

Je veux aussi remercier les autres gens de l'UFR : Bernard Segard et Geraud Bowmans (merci pour le Zip), Jerome Plumecoq ("no, je ne sais pas comment on fait ça en L^AT_EX"), Marc Lefranc ("oui, je sais comment on fait ça en L^AT_EX"), Helene Ward ("le cours de Bois ? c'est très physique !"), Serge Bielawsky ("c'est simple, tu considères une cusp en 4D....."), David Wilkowski (avec lequel on s'est échangé de ville), Daniel Hennequin (qui pense que Scientific Workplace est bien...HA!), Pierre Suret (n ou $n - 1$?), Christophe Swazj ("ne panique pas, mon nom est facile a prononcer"), Ramon Herrero ("comme toujours"), Jean Legrand ("je voudrais installer linux chez-moi"), Philippe Verkerk (et son "bug" de l'an 2000), Andrea di Stefano ("4000 francs maximum pour m'acheter le PC"), Sebastien Marcq - Mk.I ("il fait pas froid aujourd'hui"), Benoit Depret ("on mange au Barrois, j'ai un Tut à 13h30"), Nicole Semmoud ("je t'ai mis un TD à 8 :00 le vendredi, ça te dérange ?").

Un grand merci aussi à toute l'équipe technique, A. Resfa, L. Manet et les mécaniciens, J.M. Lapauw et les électroniciens, le plombier, sans lesquels le travail expérimental aurait été bien difficile ; à l'équipe informatique, Patrick van Ingeland et Maxime Pelerin ; aux services de bibliothèque et secrétariat et aux autres services de l'UFR.

数年来、私のそばで見守ってくれた愛しい陵子に感謝します。

Un merci à Claude Jauffret, mon enseignant d'Aikido et Osamu Mandaii,

mon enseignant de japonais.

Un remerciement aussi à mokulen, mon fidèle Pentium 133, qui m'a bien servi pendant les 3 ans de ma thèse et au graveur (RIP), qui a assuré la sauvegarde de toutes les données.

I also wish to thank the authors of the following software, which I used during this three years : linux, emacs, egcs/gcc, gnuplot, T_EX, L^AT_EX, teTeX, dvips, perl, xv, gimp, pbmplus, xforms, fftw.

.ah, oui, naturellement je remercie aussi tous ceux que j'ai oubliés de remercier ici !

Introduction

Les travaux réalisés ces dernières années en dynamique non linéaire des systèmes optiques ont porté principalement sur le comportement spatio-temporel de ces systèmes et sur la dynamique des oscillateurs couplés. Cette dernière fait l'objet de nombreuses recherches notamment dans les réseaux de diodes. L'objectif premier de ces études est de mieux comprendre les phénomènes de synchronisation entre lasers afin de créer des sources cohérentes de haute puissance. La dynamique de synchronisation est complexe car elle dépend à la fois du type de laser, des paramètres et des mécanismes de couplage. L'analyse de la dynamique de couplage est rendue possible par l'observation de l'évolution des variables des sous-systèmes impliqués. Dans le cas des réseaux de diodes, plusieurs types de couplage sont possibles : un couplage soit local soit global selon qu'un sous-système interagit avec ses proches voisins ou avec la totalité du système [1]. De plus, dans ce cas chaque oscillateur affecte et est affecté par les autres de la même façon. En revanche, dans d'autres systèmes, le couplage peut être asymétrique comme dans la configuration maître/esclave [2, 3]. Des études récentes sur la synchronisation de deux lasers à état solide [4] et à semiconducteur non identiques [5] ont permis de montrer l'existence de régimes de synchronisation localisée. Des régimes chaotiques [6, 7] ont aussi été mis en évidence.

Les études de dynamique spatio-temporelle concernent essentiellement la formation de structures dans les systèmes optiques [8, 9, 10], comme les hexagones [11, 10], les rouleaux [12, 13, 14], les spirales [15], les cristaux et les quasi-cristaux [16]. Elles ont permis d'expliquer plusieurs phénomènes, comme la dynamique des vortex [17], la multi-stabilité [18], les structures localisées [19] et la turbulence optique [20]. Des équations aux amplitudes ont été établies pour les oscillateurs à gain photoréfractif [21] et paramétriques [22]. Elles ont permis de faire l'analogie entre la formation des structures dans les systèmes optiques et les systèmes chimiques et biologiques [23]. Dans le domaine des lasers, la dynamique spatio-temporelle d'un mode longitudinal de résonateur Fabry-Perot en interaction avec un milieu amplificateur à deux niveaux, a été décrite par une équation de Swift-Hohenberg à coef-

ficients complexes [24, 25]. Des solutions homogènes à onde progressive ont été mises en évidence analytiquement au voisinage du seuil [26, 27, 28] en fonction du signe de l'écart en fréquence entre la raie d'émission du milieu amplificateur et la cavité. L'influence de la courbure des miroirs [29] et du pompage inhomogène [30] a depuis été prise en considération.

C'est dans ce contexte que s'inscrit le travail présenté ici. Il traite d'une part du couplage de deux lasers CO₂ partageant le même milieu absorbant intracavité et d'autre part, de la dynamique spatio-temporelle d'un Laser à Absorbant Saturable (LAS). Dans chaque cas, le choix du LAS se justifie par la grande variété de ses régimes dynamiques : impulsions (Q-Switch passif) [31, 32, 33, 34, 35, 36], oscillants voire chaotiques [37, 38].

Notre système couplé se différencie des configurations maître-esclave [2] ou d'injection mutuelle [39]. Il est formé de deux sous-système LAS indépendants à l'exception du milieu absorbant, qui est en commun. Les deux LAS opèrent sur le mode fondamental TEM₀₀ et les deux faisceaux se superposent exactement dans la région de l'absorbant. Le couplage est donc strictement limité au milieu passif que les deux lasers contribuent à saturer de manière coopérative. De plus, l'interaction entre les deux sous-systèmes est réciproque et fortement non linéaire.

Selon la pression de l'absorbant, les lasers atteignent soit des régimes d'impulsions de forte amplitude soit des régimes d'oscillations de faible amplitude sans passage à zéro de l'intensité. Dans le premier cas, le couplage est localisé dans le temps et les phénomènes de synchronisation qui en découlent sont similaires à ceux observés dans les systèmes biologiques [40]. Dans les autres cas, nous rencontrons des régimes de chaos synchronisé, des régimes perturbés et des oscillations en phase ou en antiphase. Une étude numérique permet d'interpréter la dynamique du système couplé en mettant en évidence les régions d'existence des différents régimes ainsi que l'apparition de nouvelles bifurcations dans le système.

L'effet du couplage entre deux LAS opérant sur les modes TEM₁₀ et TEM₀₁ a aussi été étudié, en mettant en évidence la présence d'oscillations en antiphase.

Dans la deuxième partie, nous présentons une étude analytique et numérique de la formation de structures spatiales dans un LAS. Nous le considérons de grande ouverture transverse, dans une situation où une décomposition en modes de la cavité s'avère extrêmement lourde, à cause du fait que plusieurs modes peuvent être instables au seuil. Le développement du champ est donc effectué sur une base de Fourier, ce qui simplifie significativement le traitement analytique. Cette approche est valable pour un système qui présente un nombre de Fresnel élevé ($N > 100$) et une cavité à miroirs plans.

Notre analyse suit la démarche utilisée pour des systèmes de grande ouverture ou spatialement étendus [24, 25]. Le modèle choisi est celui de Zambon [41], avec la prise en compte des effets spatiaux [42]. L'analyse de stabilité linéaire du système au seuil décrit l'effet de l'absorbant sur l'apparition des modes au seuil. L'analyse du régime faiblement non linéaire et la dérivation de l'équation de Swift-Hohenberg, présentés ensuite, étendent la validité de l'étude aux régimes immédiatement au-dessus du seuil. Enfin, l'intégration numérique du modèle de Swift-Hohenberg et du modèle complet permet de déterminer les solutions non linéaires apparaissant au-delà du seuil.

Table des matières

Lasers CO₂ couplés par absorbant saturable	13
1 Modélisation	15
1.1 Régimes du LAS	16
1.2 Modélisation du LAS	16
1.2.1 Modèle de Tachikawa	18
1.2.2 Modèle de Zambon	22
1.3 Comparaison des deux modèles	24
1.4 Modélisation du système	28
1.4.1 Seuils des lasers et régimes impulsionnels	29
1.5 Modèles simplifiés	30
1.5.1 Elimination adiabatique de l'absorbant	30
1.5.2 Modèle du LAS avec signal injecté dans l'absorbant	30
1.6 Modélisation du couplage	31
1.7 Diagramme de stabilité théorique	33
2 Etude expérimentale	37
2.1 Système expérimental	38
2.1.1 Enregistrement de la dynamique spatio-temporelle	40
2.1.2 Détermination des paramètres expérimentaux	42
2.2 Résultats expérimentaux	43
2.3 Régimes fortement pulsés	43
2.3.1 Synchronisation d'impulsions P ⁽⁰⁾	45
2.3.2 Synchronisation d'impulsions P ⁽¹⁾	50
2.3.3 Régimes 1 :2-1 :n	50
2.3.4 Transitions entre régimes 1 :n et 1 :n+1	53
2.4 Autres régimes	60
2.4.1 Perturbation de l'état continu	60
2.4.2 Déplacement des points de bifurcation	60
2.4.3 Perturbation des régimes P ⁽ⁿ⁾ et chaotiques	63
2.5 Régimes non pulsés	67
2.5.1 Oscillations	67

2.5.2	Régimes continus	67
2.5.3	Chaos synchronisé	70
2.5.4	Régimes quasipériodiques	72
2.6	Dynamique des modes TEM_{01} et TEM_{10}	78
2.7	Conclusion	81
Equations aux amplitudes du LAS		85
3	Analyse de stabilité linéaire	87
3.1	Modèle du LAS	88
3.1.1	Changement de repère	89
3.2	Analyse de stabilité linéaire de l'état d'intensité nulle	91
3.3	Création et inhibition de structures	94
3.3.1	Réduction du seuil du laser	102
3.4	Récapitulatif	104
4	Analyse faiblement non linéaire : modèle de Swift-Hohenberg	105
4.1	Analyse en échelles multiples : dérivation des équations aux amplitudes	106
4.1.1	Extension de l'analyse linéaire	106
4.1.2	Dérivation de l'équation de Swift-Hohenberg	106
4.2	Stabilité d'une solution d'intensité non nulle : les rouleaux	110
4.3	Récapitulatif	114
5	Simulations numériques	115
5.1	Simulations du système réduit (S-H)	116
5.1.1	Création et inhibition des structures	117
5.1.2	Sélection non linéaire	118
5.2	Simulations du système complet	120
5.2.1	Création et inhibition des structures	120
5.3	Conclusions	125
Bibliographie		129
A	Détails relatifs à la deuxième partie	135
A.1	Valeurs critiques exprimées en fonction des paramètres d'origine	135
A.2	Dérivation de l'équation de Swift-Hohenberg	136
A.3	Dérivation de l'équation de Cross-Newell	139
B	Publications	143

Lasers CO₂ couplés par absorbant saturable

Introduction

Pour illustrer la dynamique des oscillateurs couplés, notre intérêt se porte sur un système de deux lasers CO_2 partageant le même milieu absorbant intracavité.

Les deux lasers sont alignés pour que les modes de cavité se recouvrent totalement à l'intérieur de la cellule contenant le milieu passif. Ils fonctionnent sur une même raie en coïncidence avec une transition de SF_6 . Les faisceaux ont des polarisations linéaires perpendiculaires afin d'isoler chaque milieu amplificateur du rayonnement issu de l'autre et de limiter spatialement la zone d'interaction à l'absorbant saturable. Les lasers sont donc couplés uniquement par l'absorbant, contrairement à l'expérience menée par Liu *et al.* [39].

En fonction de la pression de l'absorbant, les lasers peuvent fonctionner soit en régimes d'impulsions de forte amplitude soit en régimes d'oscillations de faible amplitude sans passage à zéro. Selon le cas, nous montrons que le couplage est soit localisé dans le temps, soit permanent donnant lieu à différents types de synchronisation.

La première partie résume les différents régimes connus du LAS, introduisant les nomenclatures en usage. Elle est suivie d'une étude comparative des différents modèles décrivant sa dynamique. Cette étude permet d'établir le modèle de notre système couplé. Afin de localiser les différents régimes, nous en réalisons ensuite une analyse théorique et numérique.

Dans la deuxième partie, après la description du banc expérimental, nous présentons les régimes observés expérimentalement, en montrant qu'on peut les classer en deux grandes familles. En régime fortement pulsé, la synchronisation des impulsions est analysée en détail et confrontée au modèle. Dans les autres régimes, la déstabilisation de l'état continu illustre l'effet du couplage sur la position des points de bifurcation du système. L'analyse de plusieurs types de chaos synchronisé [43, 44] met en évidence une synchronisation avec retard [45], typique du couplage symétrique de deux oscillateurs non-identiques.

Enfin, une modification du banc expérimental permet d'analyser le comportement du système (dynamique d'antiphase) dans une configuration bi-mode transverse.

Chapitre 1

Modélisation

1.1 Régimes du LAS

Nous présentons ici une description qualitative des différents régimes du LAS en précisant la nomenclature couramment utilisée pour les identifier.

Pour les introduire dans un ordre significatif, nous allons décrire un diagramme de bifurcation, obtenu en diminuant continûment le paramètre de pompe (qui mesure l'amplification du milieu actif) depuis une valeur pour laquelle le laser émet en régime continu. La figure 1.1 montre le diagramme numérique calculé avec un choix de paramètres mettant en évidence la richesse des régimes dynamiques. Le diagramme fait apparaître différentes régions selon le type de comportement adopté par le système. A l'extrême droite (région "continue"), pour des valeurs de pompe élevées, s'établit une solution d'intensité stable, appelée I_+ . Celle-ci correspond à la situation où l'amplification du milieu actif est suffisante pour saturer l'absorbant et le rendre transparent. Le système se comporte, dans ce cas, comme un laser libre, émettant une intensité stable qui augmente avec le paramètre de pompe.

En diminuant le pompage, le système passe par une bifurcation de Hopf et la solution d'intensité constante se déstabilise pour devenir oscillante (région "T"). Pour des valeurs de la pompe immédiatement en dessous du point de bifurcation, l'oscillation est de faible amplitude et sinusoïdale. Au fur et à mesure que le paramètre de pompe diminue, l'amplitude des oscillations augmente et la partie inférieure des oscillations se déforme en se rapprochant de zéro.

Le système décrit ensuite une cascade de doublements de période jusqu'à ce qu'il adopte une dynamique chaotique (région "chaos"). La périodicité des oscillations augmente en suivant la série 2T, 4T, 8T, etc... La forme du signal est aussi modifiée : les oscillations sinusoïdales de la région "T" ont fait place à un train d'impulsions.

En se rapprochant du seuil de fonctionnement, le laser parcourt successivement les régions "P⁽ⁿ⁾", "P⁽ⁿ⁻¹⁾" "P⁽¹⁾" et "P⁽⁰⁾", émettant des trains d'impulsions périodiques de formes différentes. Dans la région "P⁽ⁿ⁾", les impulsions montrent un premier maximum suivi d'une série de n oscillations : leur nombre diminue avec le paramètre de pompe jusqu'à l'arrivée dans la région "P⁽⁰⁾" où les impulsions n'ont plus de rebond.

1.2 Modélisation du LAS

Plusieurs modèles ont été proposés et étudiés pour le laser CO₂ à absorbant saturable. Ces différents modèles sont capables de reproduire la dynamique du système d'une façon qualitative ou semi-quantitative, avec un

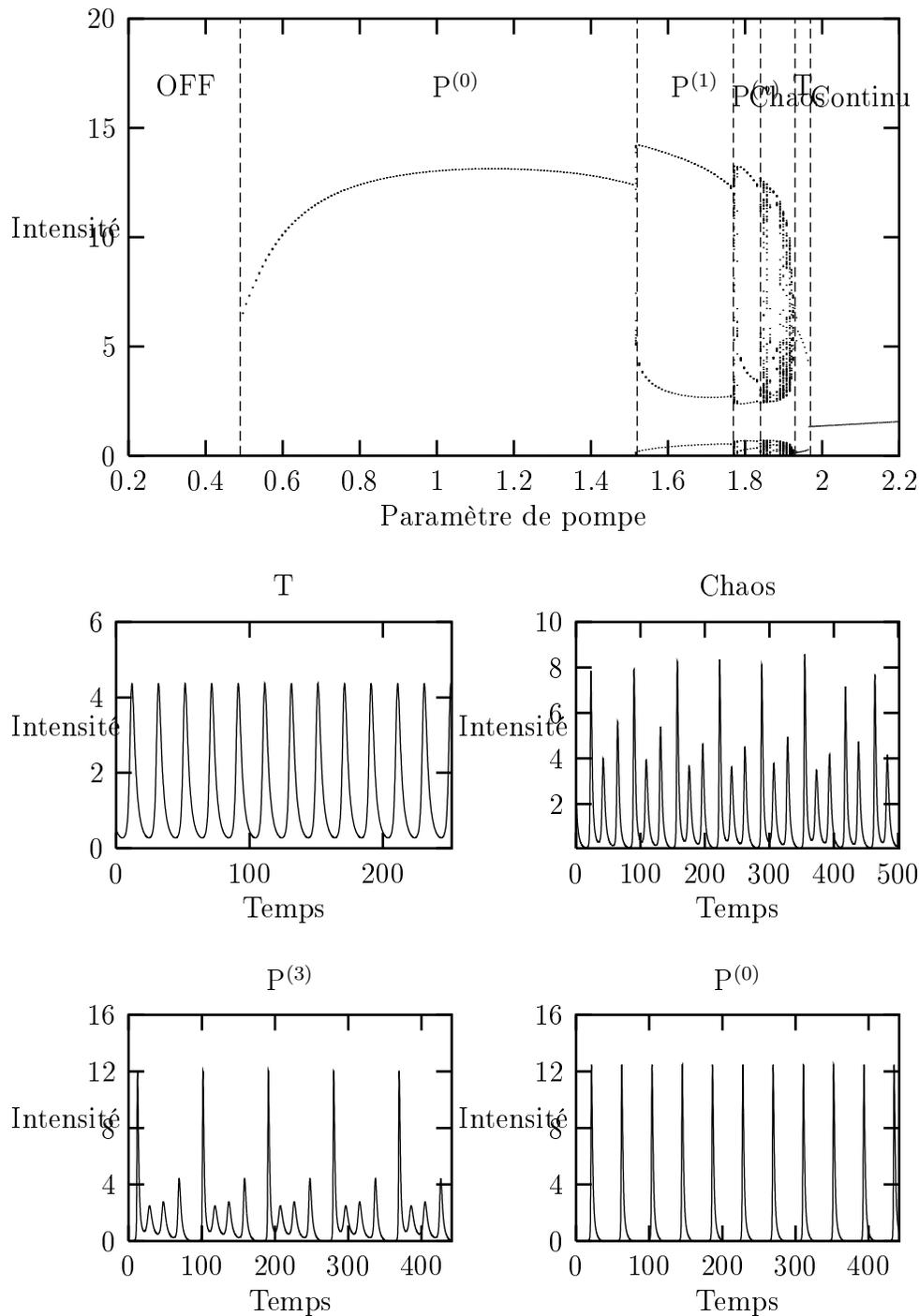


FIGURE 1.1 – Exemple de régimes du LAS. En haut, diagramme de bifurcation du système montrant les maxima et minima d'intensité en fonction du pompage. En bas, exemples de régimes rencontrés dans les différentes régions du diagramme de bifurcation. L'intensité est normalisée par rapport à l'intensité de saturation, le temps par rapport à la durée de vie des photons ($\sim 10^{-7}$ s).

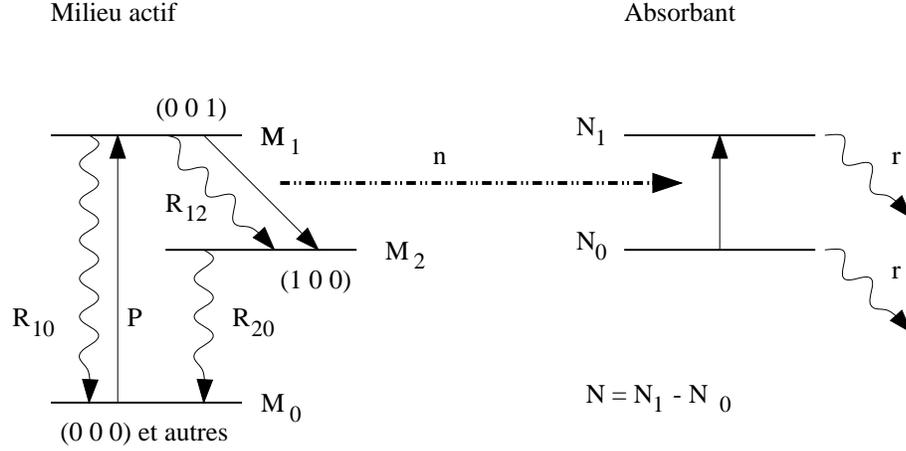


FIGURE 1.2 – Niveaux d'énergie du milieu actif (CO₂) et de l'absorbant (SF₆, CH₃I, CH₃OH) dans le modèle de Tachikawa.

degré de précision qui dépend en particulier du type et de la pression de l'absorbant. Nous comparons ici deux modèles [41, 46] utilisés dans la suite, afin de mettre en évidence leurs principales différences.

L'idée à la base de ces deux modèles est de décrire l'interaction entre le champ électrique, le milieu actif et l'absorbant en utilisant les équations de Maxwell-Bloch, en prenant en compte trois niveaux du milieu actif, ce qui est le minimum requis pour reproduire la dynamique observée expérimentalement ; les modèles à deux niveaux n'étant pas capables de produire des impulsions à structure complexe.

Les deux modèles ont des points communs : en particulier, la polarisation du champ électrique est choisie linéaire pour en permettre une description scalaire. Ceci est en bon accord avec l'expérience, où la polarisation du champ est imposée par l'orientation des composants optiques de la cavité. Le champ est considéré indépendant de z ("approximation du champ moyen") et de type onde plane, c'est-à-dire que toute contribution apportée par la structure transverse (gaussienne dans le cas du mode TEM₀₀) est négligée. La validité de cette approximation a été vérifiée par Horowicz *et al.* [47] qui ont montré que le seul effet induit par la structure gaussienne est de déplacer les points de bifurcation, sans rien ajouter à la dynamique du système.

1.2.1 Modèle de Tachikawa

Le premier modèle que nous décrivons est l'évolution réalisée par Lefranc *et al.* [46] du modèle initialement proposé par Tachikawa *et al.* [35, 36, 48, 49]. Ce modèle néglige toute structure rovibrationnelle des niveaux du CO₂ et de

L	Longueur de la cavité
l_g	Longueur du milieu actif
l_a	Longueur du milieu absorbant
B_g	Section efficace d'émission laser multipliée par c
B_a	Section efficace d'absorption multipliée par c
$f_g(J)$	Fraction de molécules dans le niveau rotationnel de nombre quantique J
κ	Pertes de la cavité
\mathcal{E}	Coefficient d'émission spontanée du niveau (001)
P	Taux de pompage
R_{10}	Taux de relaxation du niveau (001) vers les états non impliqués dans la transition laser
R_{20}	Taux de relaxation du niveau (100) vers les états non impliqués dans la transition laser
R_{12}	Taux de relaxation du niveau (001) vers le niveau (100)
r	Taux de relaxation de l'absorbant
N^*	Différence de population de l'absorbant à l'équilibre

TABLE 1.1 – Paramètres du modèle de Tachikawa.

l'absorbant, en la réduisant à trois pour le milieu actif (les deux niveaux de la transition laser ainsi que le fondamental) et à deux pour l'absorbant.

Les polarisations du milieu actif et de l'absorbant, considérés comme des variables rapides, sont éliminées adiabatiquement.

Les variables du système sont : le nombre de photons n , les populations des niveaux $M_{0,1,2}$ (avec la population totale $M_0 + M_1 + M_2 = M_{\text{tot}}$ constante) et la différence de population dans l'absorbant N . Les équations du modèle s'écrivent :

$$\frac{dn}{dt} = nB_g f_g(J) \frac{l_g}{L} (M_1 - M_2) - nB_a \frac{l_a}{L} N - \kappa n + \mathcal{E} M_1 \quad (1.1a)$$

$$\frac{dM_1}{dt} = -B_g f_g(J) n (M_1 - M_2) + P M_0 - (R_{10} + R_{12}) M_1 \quad (1.1b)$$

$$\frac{dM_2}{dt} = B_g f_g(J) n (M_1 - M_2) + R_{12} M_1 - R_{20} M_2 \quad (1.1c)$$

$$\frac{dM_0}{dt} = R_{10} M_1 + R_{20} M_2 - P M_0 \quad (1.1d)$$

$$\frac{dN}{dt} = -2B_a n N - r(N - N^*) \quad (1.1e)$$

où les paramètres sont définis dans la figure 1.2 et dans le tableau 1.1.

Ce modèle décrit dans la référence [46], a été ré-écrit sous forme adimensionnelle par Lefranc *et al.* En introduisant de nouvelles variables, l'intensité I et l'inversion de population M :

$$I = 2 \frac{B_g f_g(J) n}{\gamma_2}$$

$$M = M_1 - M_2$$

les taux de relaxation :

$$\gamma_1 = \frac{R_{20} - R_{10} - 2R_{12}}{2}$$

$$\gamma_2 = \frac{R_{20} + R_{10} + 2R_{12}}{2}$$

et en utilisant la conservation de la population totale pour éliminer l'équation d'évolution de M_2 , les équations deviennent :

$$\frac{dI}{dt} = I \left[B_g f_g(J) \frac{l_g}{L} M - B_a \frac{l_a}{L} N - \kappa \right] \quad (1.2a)$$

$$\frac{dM}{dt} = -\gamma_2(I - 1)M + PM_0 + \gamma_1(M_{\text{tot}} - M_0) \quad (1.2b)$$

$$\frac{dM_0}{dt} = \gamma_2 M_{\text{tot}} - \gamma_1 M - (\gamma_2 + P)M_0 \quad (1.2c)$$

$$\frac{dN}{dt} = -2B_a n N - r(N - N^*) \quad (1.2d)$$

Elles peuvent être simplifiées en effectuant une renormalisation (U et X) des inversions de population M et N :

$$U = M \frac{l_g}{L} \frac{B_g f_g(J)}{\kappa}$$

$$X = N \frac{l_a}{L} \frac{B_a}{\kappa}$$

et en introduisant de nouveaux paramètres :

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{B_a}{B_g f_g(J)} \frac{\gamma_2}{r} \\
 b &= \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)^2 \\
 \varepsilon &= \frac{\gamma_2}{\kappa} \\
 \varepsilon_x &= \frac{r}{\kappa} \\
 \mathcal{P} &= P(\sqrt{b} + 1) \frac{l_g B_g f_g(J) M_{\text{tot}}}{L \kappa \gamma_2} \\
 X_0 &= \frac{l_g B_a N^*}{L \kappa}
 \end{aligned}$$

On définit alors une nouvelle variable qui remplace M_0 pour décrire le troisième niveau :

$$W = \frac{B_g f_g(J) l_g}{\kappa \gamma_2} \frac{1}{L} [P M_0 + \gamma_1 (M_{\text{tot}} - M_0)] \quad (1.3)$$

Dans l'hypothèse où le terme P/γ_2 est négligeable devant 1 (approximation compatible avec les valeurs des paramètres considérées par Tachikawa [48]), l'équation de W est simplifiée et le système devient :

$$\frac{dI}{d\tau} = I(U - X - 1) \quad (1.4a)$$

$$\frac{dU}{d\tau} = \varepsilon[W - U(1 + I)] \quad (1.4b)$$

$$\frac{dW}{d\tau} = \varepsilon(\mathcal{P} + bU - W) \quad (1.4c)$$

$$\frac{dX}{d\tau} = \varepsilon_x[X_0 - X(1 + aI)] \quad (1.4d)$$

où $\tau = \kappa t$ représente le temps renormalisé par rapport au taux de pertes de la cavité.

L'avantage de cette réécriture est de simplifier énormément les équations en introduisant des paramètres qui représentent mieux les grandeurs physiques du système. Les variables sont très semblables à celles du modèle de Tachikawa : I est l'intensité, U la différence de population des niveaux laser, W représente la population du troisième niveau et X la différence de population dans l'absorbant. Les paramètres définis dans le tableau 1.2 sont accompagnés de leurs valeurs typiques.

τ		Temps normalisé par rapport à la durée de vie des photons dans la cavité
ε	0.137	Taux de relaxation normalisé du milieu actif
ε_x	1.2	Taux de relaxation normalisé de l'absorbant
\mathcal{P}	0.3–2	Paramètre de pompe
b	0.85	Coefficient de couplage du niveau laser avec le troisième niveau
X_0	0–3	Différence de population de l'absorbant à l'équilibre
a	4–10	Rapport entre les intensités de saturation de l'absorbant et du milieu actif

TABLE 1.2 – Définitions et valeurs typiques des paramètres du modèle de Lefranc. Dans notre étude théorique nous choisirons les valeurs des paramètres \mathcal{P} , X_0 et a dans les intervalles précisés ici. Ces valeurs, relatives à l'utilisation de SF₆ comme absorbant, sont extraites de [46].

1.2.2 Modèle de Zambon

Le modèle de Zambon [41] essaie de fournir une description plus complète de la structure du milieu actif et de l'absorbant, en prenant en compte la structure rovibrationnelle des deux milieux. Zambon ne considère pas séparément la contribution de tous les niveaux de la molécule, mais il utilise des “fonctions mémoires” pour représenter la contribution des niveaux non impliqués dans l'effet laser sur l'évolution de la population des deux niveaux laser. Les constantes de temps qui apparaissent ne sont donc pas reliées directement aux taux de relaxation des niveaux.

Les équations de Maxwell-Bloch sont écrites sous la forme :

$$\frac{dE}{dt} = 2\pi i\omega PE - \kappa E \quad (1.5a)$$

$$\frac{dP}{dt} = -[\gamma_{\perp} - i(\omega - \omega_0)]P + i\frac{\mu^2}{\hbar}ED \quad (1.5b)$$

$$\frac{dD}{dt} = -i\frac{(P^*E - E^*P)}{2\hbar} - \int_0^{\infty} K(t')[D(t-t') - D_0]dt' \quad (1.5c)$$

où les variables E , P et D sont respectivement le champ électrique, la polarisation du milieu et l'inversion de population. La fonction K contient l'effet de tous les niveaux, et le produit de convolution figurant dans l'équation de D décrit l'effet de “mémoire” : l'évolution de D ne dépend pas seulement du champ et de la polarisation à l'instant t , mais aussi des valeurs passées de D . La complexité de la fonction K dépend du nombre de niveaux utilisés dans la description de la molécule.

τ		Temps normalisé à la durée de vie des photons dans la cavité
γ_{\parallel}	1.6×10^{-3}	Taux de relaxation normalisé des niveaux du milieu actif
γ_1	0.1	Taux de relaxation normalisé de la variable auxiliaire
c_1	-0.1	Constante de couplage normalisé de la variable auxiliaire
A	1-10	Paramètre de pompe
\overline{A}	0-3	Absorption
a	4-10	Rapport entre les intensités de saturation de l'absorbant et du milieu actif

TABLE 1.3 – Paramètres du modèle de Zambon.

Pour un processus de relaxation décrit par un système de n équations linéaires couplées à la variable D , la fonction mémoire peut être écrite sous forme explicite après une diagonalisation de la matrice du système. La forme générale pour un système de $n + 1$ équations, donnée par Zambon dans [41] est du type :

$$K(t) = c_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^n c_i \gamma_i e^{-\gamma_i t} \quad (1.6)$$

où les c_i et les γ_i représentent les coefficients de couplage et les constantes de temps du système diagonalisé et $\delta(t)$ est la fonction de Dirac.

L'absorbant est introduit en ajoutant deux équations supplémentaires pour sa polarisation et sa différence de population. Ces variables sont couplées avec le champ électrique de la même façon que celles du milieu actif.

Dans l'approximation de l'onde plane, Zambon [50] effectue plusieurs simplifications visant à réduire au minimum le nombre de variables nécessaire pour obtenir les régimes observés expérimentalement dans un LAS. En particulier, il élimine adiabatiquement toutes les variables de l'absorbant : ceci revient à les considérer très rapides, hypothèse vérifiée expérimentalement, pour des pressions importantes de l'absorbant [51]. Il élimine aussi la polarisation du milieu actif. Pour éviter la simulation numérique d'un modèle dans lequel figure un produit de convolution, il réintroduit des variables liées aux populations des niveaux, tout en gardant les simplifications déduites de la diagonalisation de la matrice. L'équation de D est ré-écrite sous la forme :

$$\frac{dD}{d\tau} = -\gamma_{\parallel} [1 + D(1 + |E|^2)] - \sum_{i=1}^n c_i (s_i - D) \quad (1.7a)$$

$$\frac{ds_i}{d\tau} = -\gamma_i (s_i - D), \quad i = 1 \dots n \quad (1.7b)$$

en utilisant le fait qu'à la fin du régime transitoire les variables s_i satisfont :

$$s_i(t) = \gamma_i \int_0^\infty e^{-\gamma_i t'} D(t - t') dt' \quad (1.8)$$

Les variables s_i sont en effet des combinaisons linéaires des populations des niveaux.

Cette écriture qui tire profit de la diagonalisation du système d'équations linéaires reliant les populations des niveaux, permet d'obtenir une description équivalente à celle d'un modèle à $n + 1$ niveaux avec seulement $2n + 1$ coefficients au lieu de $n^2/2$. Pour un seul niveau additionnel, c'est-à-dire un milieu actif à trois niveaux, une seule variable additionnelle est nécessaire, et les équations s'écrivent :

$$\frac{dE}{d\tau} = - \left(AD + \frac{\bar{A}}{1 + a|E|^2} + 1 \right) E \quad (1.9a)$$

$$\frac{dD}{d\tau} = -\gamma_{\parallel} [1 + D(1 + |E|^2)] - c_1(s - D) \quad (1.9b)$$

$$\frac{ds}{d\tau} = -\gamma_1(s - D) \quad (1.9c)$$

où les paramètres et leurs valeurs typiques sont donnés dans le tableau 1.3.

Ce modèle a été étendu pour prendre en compte les effets transverses dans [42, 52] avec un terme de diffraction présent dans l'équation du champ.

Le fait que ce modèle ait déjà été étendu pour prendre en compte les effets transverses ajouté à sa simplicité dans le traitement de l'absorbant le rend bien adapté à l'analyse théorique de la formation de structures présentée dans la deuxième partie.

1.3 Comparaison des deux modèles

Les deux modèles introduits ci-dessus ont plusieurs points communs. Dans les deux cas, il s'agit de modèles à trois niveaux : d'une façon plus classique dans [46] où le troisième niveau est introduit directement et dans [41] en retrouvant cette description par une approximation à une seule variable auxiliaire de la fonction mémoire qui décrit la dynamique du système. Du point de vue dynamique, les deux systèmes sont équivalents. Cette équivalence peut être explicitée en introduisant le changement de variables suivant

dans le modèle de Lefranc [46] :

$$\begin{aligned} J &= \frac{I}{1-b} \\ D &= -\left(\frac{1-b}{\mathcal{P}}\right)U \\ s &= \left(\frac{1-b}{\mathcal{P}}\right)\frac{-W-\mathcal{P}}{b} \end{aligned}$$

qui le ramène à une forme identique à celle du modèle de Zambon :

$$\frac{dJ}{d\tau} = -J\left(\frac{\mathcal{P}D}{1-b} + \frac{X_0}{1+a(1-b)J} + 1\right) \quad (1.10a)$$

$$\frac{dD}{d\tau} = -\varepsilon(1-b)[1 + D(J+1)] + \varepsilon b(s-D) \quad (1.10b)$$

$$\frac{ds}{d\tau} = -\varepsilon(s-D) \quad (1.10c)$$

Nous pouvons alors établir la correspondance suivante entre les paramètres :

$$\begin{aligned} A &\Leftrightarrow \frac{\mathcal{P}}{1-b} \\ \bar{A} &\Leftrightarrow X_0 \\ a &\Leftrightarrow a(a-b) \\ \gamma_{\parallel} &\Leftrightarrow \varepsilon(1-b) \\ c_1 &\Leftrightarrow -\varepsilon b \\ \gamma_1 &\Leftrightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

Notons que l'introduction du troisième niveau donne accès aux régimes d'oscillations $P^{(n)}$, qui ne sont pas reproduits par le modèle à deux niveaux. Le troisième niveau agit donc comme "réservoir" de pompage, qui permet au LAS, après émission d'une impulsion, d'avoir encore assez de gain pour rester proche de la solution continue instable et générer des oscillations.

D'un point de vue plus physique, les deux modèles négligent la contribution à la dynamique d'un niveau intermédiaire (noté 01^10). Le rôle de ce niveau est discuté dans [41], où l'on explique qu'à cause de sa longue durée de vie, il peut servir de "piège" pour les molécules. Ceci revient à dire que la condition $M_0 + M_1 + M_2 = M_{\text{tot}} = \text{constante}$ utilisée dans les deux modèles n'est pas valable, et qu'il faut introduire un quatrième niveau. Le nombre de molécules disponibles pour le pompage $M_0 = M_{\text{tot}} - M_1 - M_2$ est diminué

d'un terme additionnel M_4 . Un modèle qui considère ce niveau a été proposé dans [41], mais il n'a pas été retenu dans [50].

En ce qui concerne l'absorbant, on considère dans les deux cas un système à deux niveaux. Toutefois Zambon effectue immédiatement l'élimination adiabatique de la variable population. Cette approximation est analysée dans la référence [46], où l'on montre que les régimes fortement pulsés n'en sont pas affectés. Le seul effet visible est la réduction de la zone d'existence (voire de l'élimination) du régime d'oscillation périodique T.

Les deux modèles divergent sur le choix des constantes de temps. Dans les deux cas, le temps est renormalisé par rapport à la durée de vie de photons dans la cavité, et nous pouvons donc comparer directement les taux de relaxation de la population du milieu actif. Nous avons d'un côté $\gamma_{\parallel} = 1.6 \times 10^{-3}$ et de l'autre $\varepsilon(1 - b) = 0.137 \times (1 - 0.85) = 2 \times 10^{-2}$. Cette différence provient des différentes valeurs considérées pour les taux de relaxation des niveaux du CO_2 . Zambon prend les constantes de temps de [53, 54] relatives aux raies 10P(20) et 10P(16) à une pression de 19 mTorr, corrigées par des mesures de l'intensité de saturation effectués lors de l'expérience. Ces valeurs sont 2 à 4 fois plus élevées que celles utilisées par Lefranc, tirées de l'article de Tachikawa [48], qui les a obtenues à partir de [55, 56, 57] relativement aux mêmes raies 10P(20) et 10P(16).

Des divergences existent aussi pour le choix des autres paramètres : dans le modèle de Zambon, les régimes significatifs sont reproduits pour des valeurs du paramètre de pompe A complètement incompatibles avec l'expérience. Dans [58], on montre que A ne peut dépasser 2.3, alors que le modèle nécessite des valeurs de 5 à 6 voire 12 pour reproduire l'ensemble des régimes. Ce fait, mentionné aussi dans la conclusion de [50], indique que même si la description à trois équations de Zambon est compatible avec la dynamique observée, il subsiste encore des difficultés dans la détermination des constantes. On rencontre le même type d'inconvénient dans le modèle de Lefranc, où le paramètre $\mathcal{P}/(1 - b)$ varie entre $1 + X_0$ (au seuil) et 14.

Ce même type de problème se pose de façon plus aiguë avec le paramètre a (rapport entre les intensités de saturation de l'absorbant et du milieu actif). Expérimentalement, les valeurs de ce paramètre se situent très haut : pour les paramètres donnés dans [48] nous avons $a > 70$. Zambon utilise a comme paramètre de contrôle et montre dans [50] qu'avec $a > 20$ aucune dynamique chaotique n'est présente, et qu'elle se réduit à des impulsions $P^{(0)}$. Lefranc fixe $a = 4.17$, valeur proche de celle utilisée par Zambon pour pouvoir reproduire des dynamiques complexes.

Le dernier défaut commun aux deux modèles est la non prise en compte des écarts en fréquence entre le champ, la raie d'émission du milieu actif et celle d'absorption de l'absorbant, ce qui revient à considérer les trois raies en

résonance parfaite. Pourtant, dans [58] on montre que l'écart en fréquence peut jouer un rôle important. Ceci apparaît clairement dans le cas où l'absorbant choisi est le tétraoxyde d'osmium (OsO_4). Ce gaz ne possède qu'une seule raie d'absorption intense en quasi-résonance (décalage de 25 MHz) avec la raie P(12) de la branche à $10.6\mu\text{m}$ du CO_2 . Dans notre cas, avec SF_6 mélangé à de l'hélium comme gaz tampon, nous trouvons une dépendance de la fréquence beaucoup moins significative et une meilleure vérification de l'hypothèse selon laquelle l'écart en fréquence ne joue que sur le paramètre de pompe.

1.4 Modélisation du système

Afin de décrire l'évolution de notre système couplé, nous utilisons un modèle dérivé de celui du LAS et introduit dans la section précédente (1.2.1, modèle de Tachikawa/Lefranc). Ce modèle a été étendu au cas de deux LAS couplés de la façon suivante : (i) une duplication des équations pour l'intensité et l'évolution des populations du milieu actif, (ii) une introduction dans l'équation d'évolution de la population de l'absorbant de deux termes de saturation, reliés aux intensités laser. Ceci se justifie par le fait que le couplage dans notre système s'effectue exclusivement dans l'absorbant et donc que la description de la dynamique interne à chaque milieu actif est identique à celle du LAS seul.

Le modèle, constitué de 7 équations, 3 pour chaque laser plus une pour l'absorbant, s'écrit :

$$\frac{dI_1}{dt} = I_1(U_1 - X - 1) \quad (1.11a)$$

$$\frac{dU_1}{dt} = \varepsilon_1(W_1 - U_1 - U_1 I_1) \quad (1.11b)$$

$$\frac{dW_1}{dt} = \varepsilon_1(A_1 + b_1 U_1 - W_1) \quad (1.11c)$$

$$\frac{dX}{dt} = \varepsilon_x[X_0 - X(1 + aI_1 + aCI_2)] \quad (1.11d)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = I_2B(U_2 - DX - 1) \quad (1.11e)$$

$$\frac{dU_2}{dt} = \varepsilon_2(W_2 - U_2 - U_2 I_2) \quad (1.11f)$$

$$\frac{dW_2}{dt} = \varepsilon_2(A_2 + b_2 U_2 - W_2) \quad (1.11g)$$

Les deux lasers (appelés dans la suite L_1 et L_2) ont comme variables dynamiques l'intensité ($I_{1,2}$), l'inversion de population ($U_{1,2}$) et la population du troisième niveau ($W_{1,2}$). La septième variable dynamique est la population de l'absorbant X . Le temps a été renormalisé par rapport à la durée de vie des photons dans la cavité de L_1 et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_x$ représentent les taux de relaxation des populations des deux lasers et de l'absorbant dans cette nouvelle échelle de temps. B est le rapport entre les taux de pertes des deux cavités.

Les paramètres $A_{1,2}$ sont les paramètres de pompe des deux lasers, $b_{1,2}$ les constantes de couplage entre le troisième niveau et les niveaux laser, X_0 est la différence de population de l'absorbant à l'équilibre et a le rapport entre les intensités de saturation de l'absorbant et du milieu actif de L_1 . Les valeurs typiques de ces paramètres sont égaux à ceux du modèle de Lefranc

(cf. tableau 1.2. Les paramètres C et D définissent le couplage et le rapport entre les intensités de saturation du milieu actif de L_2 et L_1 ainsi que le couplage entre l'absorbant et le deuxième laser. Le rôle joué par ces deux paramètres peut être mieux compris en considérant les cas limites suivants :

- si $C = D = 0$, les deux lasers sont découplés : le premier laser est un LAS classique et le deuxième un laser libre (sans absorbant) ;
- si $C \neq 0$ et $D = 0$, nous trouvons une configuration où le deuxième laser (libre) agit sur les pertes du premier via l'absorbant ;
- si $C = 0$ et $D \neq 0$, le premier laser (LAS) agit comme maître pour le deuxième, qui voit l'absorbant comme un modificateur de pertes externe, dont la transparence est modulée par l'intensité du premier ;
- si $C = D = 1$, les deux lasers interagissent avec l'absorbant d'une façon symétrique.

Notons que les valeurs de C et D ne sont pas limitées à 1, des valeurs plus importantes sont possibles, correspondant à une interaction du deuxième laser avec l'absorbant plus importante que celle du premier.

1.4.1 Seuils des lasers et régimes impulsionsnels

Les équations (1.11) admettent des solutions séparées pour les deux lasers : les solutions des Eqs. (1.11a)–(1.11d), considérées pour $I_2 = 0$ et les solutions des équations Eqs. (1.11d)–(1.11g) pour $I_1 = 0$ sont des ensembles distincts de solutions du système. Commençons par déterminer les points de bifurcation des deux LAS séparément. L_1 a une bifurcation de l'état d'intensité nulle pour $A_1 = A_{1\text{th}}$ (seuil de L_1) donnée par :

$$A_{1\text{th}} \equiv (1 - b)(1 + X_0) \quad (1.12)$$

Cette bifurcation est suivie immédiatement par une bifurcation de Hopf vers des oscillations de longue période et de forte amplitude (régime $P^{(0)}$). La bifurcation se situe à $A_1 = A_{1\text{H}}$, très proche du seuil du système : l'analyse de stabilité linéaire de l'état non nul donne $A_{1\text{H}} - A_{1\text{th}} = O(\epsilon(1 - b)) = O(10^{-2})$, et l'intensité maximale des impulsions croît presque verticalement au-delà du point de bifurcation. Nous pouvons donc considérer que dès le franchissement de $A_{1\text{th}}$, le LAS se trouve immédiatement dans le régime $P^{(0)}$. Cette même description est valable pour le deuxième laser, pour lequel :

$$A_{2\text{th}} \equiv (1 - b)(1 + DX_0) \quad (1.13)$$

1.5 Modèles simplifiés

Dans certains cas, il est préférable de ne pas considérer le système complet, mais d'effectuer des simplifications en rapport avec le type de régime ou d'effet que nous voulons étudier.

1.5.1 Elimination adiabatique de l'absorbant

En régime fortement pulsé, nous allons effectuer une élimination adiabatique de la variable représentant l'absorbant : cette simplification est justifiée par le choix des paramètres pour lesquels une simple vérification numérique montre que dans ces régimes, la variable X ne s'écarte pas de sa valeur adiabatique.

Mathématiquement, cette simplification consiste à remplacer X par sa valeur à l'équilibre, c'est-à-dire :

$$X = \frac{X_0}{1 + aI_1 + aCI_2} \quad (1.14)$$

dans les équations 1.11a et 1.11e :

$$\frac{dI_1}{dt} = I_1 \left(U_1 - 1 - \frac{X_0}{1 + aI_1 + aCI_2} \right) \quad (1.15a)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = I_2 B \left(U_2 - 1 - D \frac{X_0}{1 + aI_1 + aCI_2} \right) \quad (1.15b)$$

1.5.2 Modèle du LAS avec signal injecté dans l'absorbant

La deuxième simplification consiste à éliminer complètement l'un des deux lasers et à considérer son intensité comme un signal externe injecté dans l'absorbant de l'autre. Ceci facilite l'étude de l'action de ce signal sur le LAS et nous donne des informations sur les effets du couplage. Il fournit aussi une description des régimes lorsque la dynamique d'un laser n'est pas modifiée d'une façon significative par le deuxième. Le système s'écrit alors :

$$\frac{dI}{dt} = I(U - X - 1) \quad (1.16a)$$

$$\frac{dU}{dt} = \varepsilon(W - U - UI) \quad (1.16b)$$

$$\frac{dW}{dt} = \varepsilon(A + bU - W) \quad (1.16c)$$

$$\frac{dX}{dt} = \varepsilon_x [X_0 - X(1 + aI + aI_{\text{ext}})] \quad (1.16d)$$

1.6 Modélisation du couplage

Avant d'analyser la dynamique de ce système d'équations, il est utile de préciser le mécanisme de couplage. On a déjà remarqué que celui-ci s'effectue exclusivement par l'intermédiaire de l'absorbant (la seule équation qui contient des variables impliquant le premier et le deuxième laser concerne X), mais il y a une autre particularité intéressante que nous mettons en évidence en utilisant la première simplification (section 1.5.1). Dans les équations 1.15, le couplage est présent dans les équations de $I_{1,2}$, qui peuvent être ré-écrites comme équations d'un LAS non couplé dans lesquelles apparaissent des termes de couplage $F_{1,2}(I_1, I_2)$:

$$\frac{dI_1}{dt} = I_1 \left(U_1 - 1 - \frac{X_0}{1 + aI_1} \right) + F_1(I_1, I_2) \quad (1.17a)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = I_2 B \left(U_2 - 1 - D \frac{X_0}{1 + aCI_2} \right) + F_2(I_1, I_2) \quad (1.17b)$$

Les termes de couplage, qui décrivent l'effet d'un laser sur l'autre, ont la même forme et sont :

$$F_1(I_1, I_2) = \frac{aCI_1I_2}{(1 + aI_1 + aCI_2)(1 + aI_1)} \quad (1.18a)$$

$$F_2(I_1, I_2) = \frac{aBDI_1I_2}{(1 + aI_1 + aCI_2)(1 + aCI_2)} \quad (1.18b)$$

La présence de I_1 (I_2) au numérateur de F_1 (F_2) indique que ce terme est non nul si l'intensité du laser L_1 (L_2) est non nulle. Cela signifie que dans les régimes pulsés de type $P^{(0)}$, le couplage ne s'effectue que pendant les impulsions. Nous avons visualisé sur la figure 1.3 la valeur de F_1 en fonction de $I_{1,2}$.

En réalité, les termes de couplage entraînent un deuxième effet, qui dérive de la structure des équations 1.15. Ces équations sont du type :

$$\frac{dI_i}{dt} = I_i P_i(U_i, I_1, I_2) \quad (1.19)$$

où P_i représente le terme entre parenthèses des équations 1.15. Le signe de P_i détermine la stabilité de la solution d'intensité nulle : si P_i est positif, la solution est instable, dans le cas contraire elle est stable.

Considérons, par exemple, le laser L_1 : le terme P_1 dépend de I_1 , qui a ici un rôle de saturation, ce qui fait que P_1 augmente avec I_1 . En fixant I_1 à zéro, nous pouvons déterminer le seuil de L_1 en présence de L_2 en cherchant

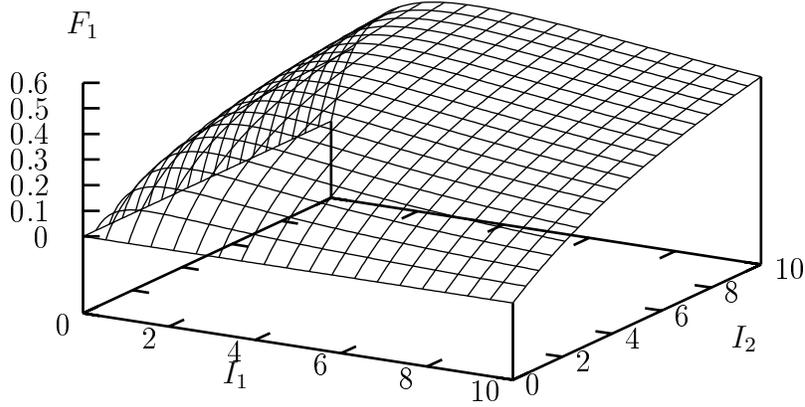


FIGURE 1.3 – Amplitude du terme de couplage $F_1(I_1, I_2)$ en fonction des intensités laser. Tous les paramètres (C, D, a, B) ont été fixés égaux à 1.

les valeurs de U_1 et I_2 qui rendent P_1 positif. $P_1(U_1, 0, I_2)$ vaut :

$$P_1 = \left(U_1 - 1 - \frac{X_0}{1 + aCI_2} \right) \quad (1.20)$$

Le seuil de L_1 est donné par $P_1 = 0$, c'est-à-dire :

$$U_1 = 1 + \frac{X_0}{1 + aCI_2} \quad (1.21)$$

Il doit être comparé au cas du LAS non couplé $U_1 = 1 + X_0$: la présence d'une intensité provenant de L_2 contribue à abaisser le seuil de L_1 . Cet effet montre le caractère coopératif du couplage dans notre système.

L'effet du terme de couplage F_1 sur $P_1(U_i, I_1, I_2)$ est montré dans la figure 1.4, où nous traçons F_1/I_1 en fonction de I_1 et I_2 . Le maximum est atteint sur l'axe $I_1 = 0$ et il tend vers 1 quand I_2 augmente. De nouveau, nous remarquons la particularité du couplage, qui a un effet maximum au voisinage de zéro, pour devenir négligeable une fois l'absorbant complètement saturé. En résumé, lorsqu'un laser est sur la solution nulle, l'influence de l'autre laser sur sa stabilité est maximale.

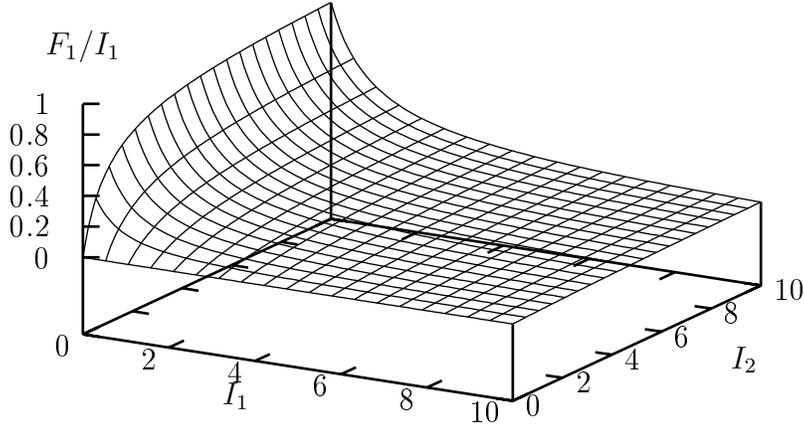


FIGURE 1.4 – Amplitude du terme F_1/I_1 en fonction des intensités lasers. Tous les paramètres (C, D, a, B) ont été fixés égaux à 1.

1.7 Diagramme de stabilité théorique

L'effet du couplage sur la dynamique globale du système transparait dans la comparaison entre les diagrammes de stabilité des LAS seuls et du système couplé. Nous avons donc tracé ces diagrammes dans un cas non symétrique, représentatif de la réalité, ainsi que le diagramme du système couplé. Les paramètres utilisés sont :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2} = 0.137, \quad a = 4.17, \quad b_{1,2} = 0.85, \quad \varepsilon_x = 1.2, \\ X_0 = 2, \quad B = 1, \quad C = D = 0.5 \end{aligned}$$

La figure 1.5 montre les régions de stabilité du plan (A_1, A_2) pour les deux lasers non couplés (nous limitons notre étude à cet espace bidimensionnel sans faire varier les autres paramètres par souci de simplicité). En l'absence de couplage, nous obtenons la composition des deux diagrammes de stabilité du LAS seul. Les points de bifurcation du laser L_1 sont $A_{1th} = 0.45$, $A_{1H} = 0.453$, $A_{1HH} = 1.84$ et $A_{2th} = 0.3$, $A_{2H} = 0.31$, $A_{2HH} = 1.42$ pour L_2 , où A_{iHH} est le second point de bifurcation de Hopf de L_i . Ceci est à comparer avec le diagramme du système couplé de la figure 1.6, obtenu par simulation numérique du système de 7 équations 1.11. La simulation a été effectuée en fixant la valeur de A_2 entre 0.3 et 2.0 et en faisant varier la valeur de A_1 entre 2 et 0.2 par pas de 0.01. On reprend la simulation en faisant varier A_2 par pas de 0.1. Les régimes ont ensuite été analysés et placés sur le diagramme.

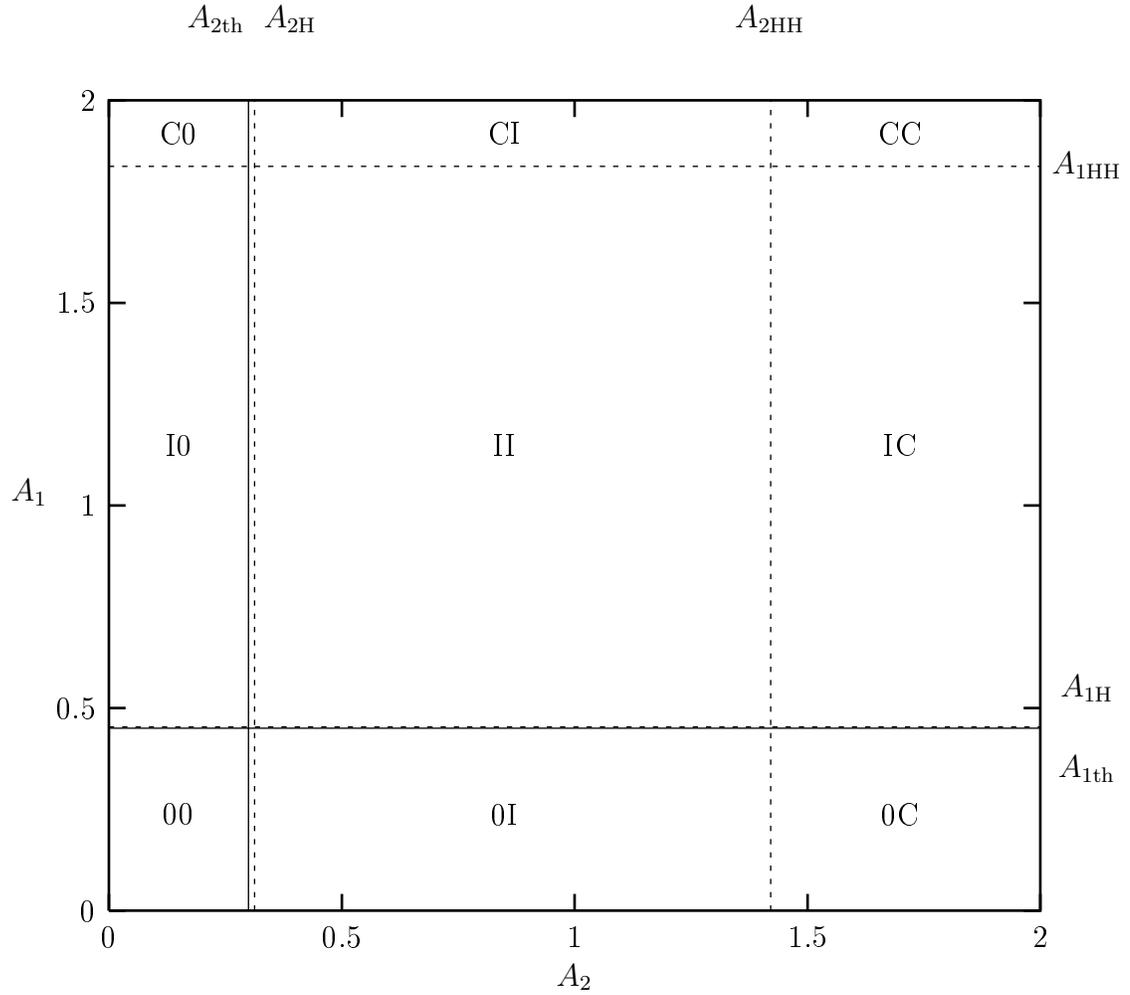


FIGURE 1.5 – Diagramme de stabilité d'un système de deux LAS non couplés. Le long des deux axes A_1 et A_2 nous avons le même comportement décrit dans la section 1.1, caractérisé par un seuil ($A_{i\text{th}}$, trait continu) suivi d'une bifurcation de Hopf (A_{iH}), une région impulsionnelle et une bifurcation de Hopf (A_{iHH}) vers l'état continu (traits pointillés). Dans chaque région est indiqué le type de régime ('0' = éteint, 'I' = impulsionnel, 'C' = continu) des deux lasers. Par exemple : I0 signifie L_1 en régime d'impulsions, L_2 éteint.

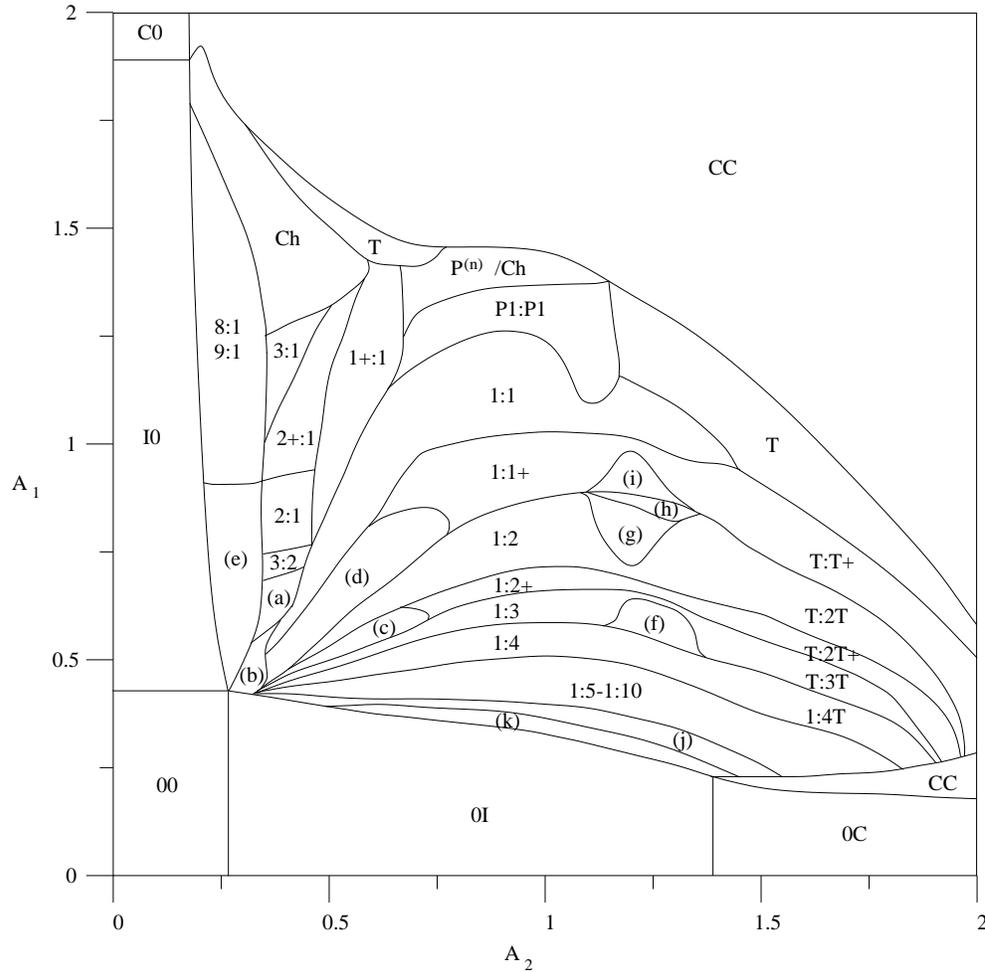


FIGURE 1.6 – Diagramme de phase pour le système de deux LAS couplés. Il est obtenu par intégration numérique du système sur une grille de points A_1, A_2 de résolution différente le long des deux directions (0.01 pour A_1 et 0.1 pour A_2 , ce qui explique la présence de régions plus étroites suivant y). L'intégration est effectuée en fixant la valeur de A_2 et en variant A_1 de haut en bas : les éventuels effets d'hystérésis ne sont pas mis en évidence. Les régions marquées (a)-(k) correspondent aux régimes : (a) $n+1 : n$ ($n > 4$); (b) $n : 1$ ($n > 8$); (c) $2 : 5$; (d) $2 : 3/3 : 4$ et avec synchronisation partielle; (e) $n : 1$, avec impulsions inversées : le maximum secondaire apparaît avant le principal; (f) $1 : 3$ irrégulier; (g) $1 : 2$ irrégulier; (h) $1 : 3$ (i) $1 : T2$; (j) de $1 : 10$ à $1 : 20$ (k) $1 : n$ ($n > 20$).

Les régimes sont classés principalement par leur rapport de synchronisation. Nous donnons ici une description partielle, et présentons de façon plus précise les régimes dans le chapitre suivant. Avec le symbole $n : m$ nous indiquons une synchronisation périodique entre impulsions $P^{(0)}$ des deux lasers et n/m représente le rapport entre nombre d'impulsions (section 2.3.3). La présence d'un "+" indique une transition, ayant pour conséquence une altération de la forme des impulsions (transition périodique, section 2.3.4). Certaines régions ont une double appellation, comme par exemple $1 : 2 / T : 2T$. Ceci provient du passage continu du régime d'oscillation T aux impulsions $P(0)$. Nous avons fixé le critère de façon arbitraire, en appelant $P(0)$ un régime dont l'intensité minimale descend en dessous de 0.01.

La bande correspondant à $0.3 < A_2 < 0.5$ ne montre pas tous les régimes rencontrés : en effet, nous en avons regroupé certains pour rendre le diagramme plus lisible.

Au-delà de la complexité du diagramme, nous pouvons immédiatement noter plusieurs effets. Premièrement, la confirmation de l'effet coopératif du couplage : la région où les deux lasers sont stables (CC) est étendue par rapport au cas précédent. Ceci provient du double effet de saturation imposé à l'absorbant par les lasers. Deuxièmement, les régions $A_1 > A_{1HH}$ ($A_2 > A_{2HH}$), où L_1 (L_2) est continu en absence de couplage présentent maintenant des solutions instables (T ou irrégulier). Ceci suggère un déplacement induit par le couplage du deuxième point de bifurcation de Hopf vers des valeurs plus élevées (section 2.4.2). Enfin, l'apparition d'une région continue immédiatement au-dessus du seuil de fonctionnement de L_1 pour $A_2 > A_{2HH}$. Cette région résulte de l'extension de la région déjà existante en absence de couplage et correspondant à la bande très étroite délimitée par le seuil (A_{1th}) et la première bifurcation de Hopf (A_{1H}) visible dans la figure 1.5.

Chapitre 2

Etude expérimentale

2.1 Système expérimental

Le système expérimental (voir figure 2.1) est constitué de deux lasers L_1 et L_2 qui partagent une même cellule d'absorbant saturable SF_6 . Les deux cavités lasers sont délimitées à gauche par un réseau de diffraction ($G_{1,2}$) utilisé pour sélectionner la raie laser et à droite par un coupleur de sortie (CS) de rayon de courbure 5m et de coefficient de réflectivité 98%. La raie choisie est la P(24) à $10.6\mu m$ du CO_2 , qui présente une amplification importante ainsi qu'une résonance avec l'absorption du SF_6 .

Afin de limiter l'interaction entre les deux lasers au niveau de la cellule de l'absorbant saturable (ABS), nous imposons aux deux faisceaux d'avoir des polarisations linéaires et orthogonales. Elles sont obtenues par l'orientation d'une fenêtre intracavité placée sous incidence de Brewster (CBW). Une surface de cette fenêtre est recouverte d'un film mince, qui agit comme un polariseur en transparence pour L_1 et en réflexion pour L_2 et permet de séparer les faisceaux avant l'entrée dans les milieux actifs (ACT_1 et ACT_2). De plus, les fenêtres sous incidence de Brewster fermant les tubes des milieux actifs et les réseaux de diffraction sont orientés de telle sorte que les deux lasers fonctionnent sur les deux modes de polarisation choisis.

Le traitement de la fenêtre CBW permet d'avoir un rejet de l'une des polarisations de l'ordre de 10^{-4} , ce qui garantit une interaction entre les deux lasers uniquement dans la cellule d'absorbant (ABS) tant que l'écart en fréquence Δ entre les deux lasers reste supérieur à $\sim 100KHz$. Quand Δ

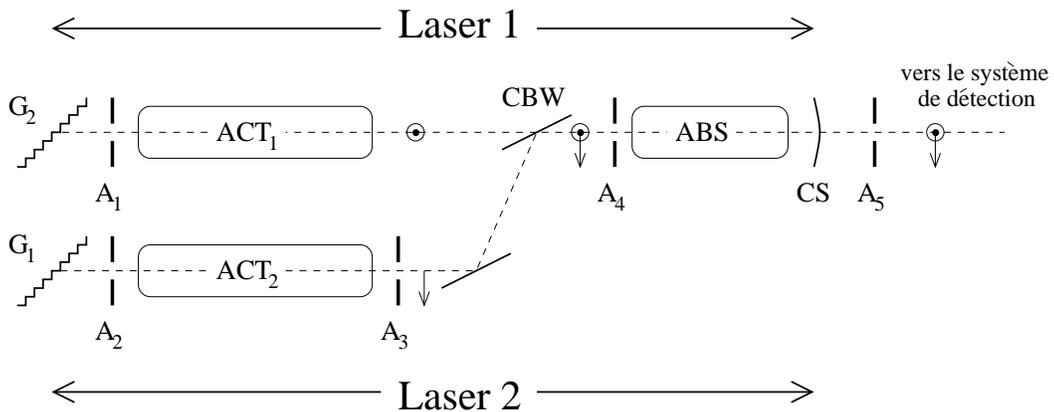


FIGURE 2.1 – Schéma du dispositif expérimental. $ACT_{1,2}$: milieux actifs, ABS : absorbant saturable, $G_{1,2}$: réseaux de diffraction, $A_{1,2}$: diaphragmes de contrôle des modes de la cavité et d'alignement, $A_{3,4,5}$: diaphragmes d'alignement, CBW : fenêtre traitée et placée sous incidence de Brewster, CS : coupleur de sortie.

est proche de zéro, l'interférence du signal de L_2 transmis par CBW avec le milieu actif ACT_1 devient notable. Cet effet ressemble à un retour cohérent qui, même pour une intensité très faible du signal transmis, vient perturber la dynamique de l'ensemble du système. Nous retrouvons la même situation avec L_2 . Pour éviter cet effet nous vérifions systématiquement que l'écart en fréquence Δ reste supérieur à 1 MHz, limite de stabilité du système.

Les diaphragmes $A_{1...5}$ sont utilisés pour l'alignement, critique, dans la cellule d'absorbant. La sélection du mode fondamental TEM_{00} est obtenue en jouant sur l'ouverture des diaphragmes A_1 et A_2 .

La pression totale du milieu actif est fixée à 75 Torr (20% de CO_2 , 45% d'He et 35% de N_2). Les paramètres de contrôle du système sont nombreux : pour modifier les milieux actifs, nous jouons sur les courants de décharge $i_{1,2}$ et les écarts $\delta_{1,2}$ qui mesurent les différences de fréquence entre les champs électriques de $L_{1,2}$ et le centre de la raie d'émission. Ces écarts sont contrôlés en changeant la longueur des cavités à l'aide de deux modules de translation piézoélectriques.

Notons que les écarts $\delta_{1,2}$ jouent également sur le coefficient d'absorption de l'absorbant. Pour une pression de SF_6 de 1-20 mTorr (intervalle d'utilisation de l'absorbant dans notre système), l'élargissement homogène est très faible (de l'ordre de 1 MHz) alors que l'élargissement inhomogène est comparable à celui du milieu actif (de l'ordre de 70 MHz). Nous souhaitons faire varier $\delta_{1,2}$ dans un intervalle de 30-40 MHz : afin d'assurer une absorption quasi-constante dans cet intervalle nous ajoutons de l'hélium comme gaz tampon, pour élargir la raie homogène. Ceci permet aussi de garantir un bon effet de couplage pour des valeurs de Δ de quelques dizaines de MHz. Nous utilisons comme paramètres de contrôle les pressions partielles des deux gaz.

La détection s'effectue à l'aide de trois détecteurs HgCdTe, utilisés pour mesurer les intensités des deux lasers ainsi que leur écart en fréquence Δ (figure 2.2). A la sortie du laser, une partie du faisceau est réfléchi par une lame semi-transparente et envoyée sur une lame à incidence de Brewster orientée à 45° par rapport aux axes de polarisation. Cette dernière effectue un mélange des deux faisceaux. L'intensité résultante est envoyée au détecteur D_3 pour mesurer en temps réel la valeur de Δ .

Le faisceau transmis par le coupleur est séparé à l'aide d'une lame à incidence de Brewster parallèle à celle qui se trouve à l'intérieur de la cavité (CBW). Celle-ci permet de séparer les deux polarisations et d'envoyer les faisceaux réfléchi et transmis sur les détecteurs D_1 et D_2 , afin d'enregistrer l'évolution temporelle des intensités I_1 et I_2 . Cette fenêtre n'étant pas traitée, son rejet en transparence est de quelques pourcents. En plus de I_2 , D_2 reçoit une faible partie du signal de I_1 , mais ceci ne crée pas d'ambiguïté dans l'analyse des signaux.

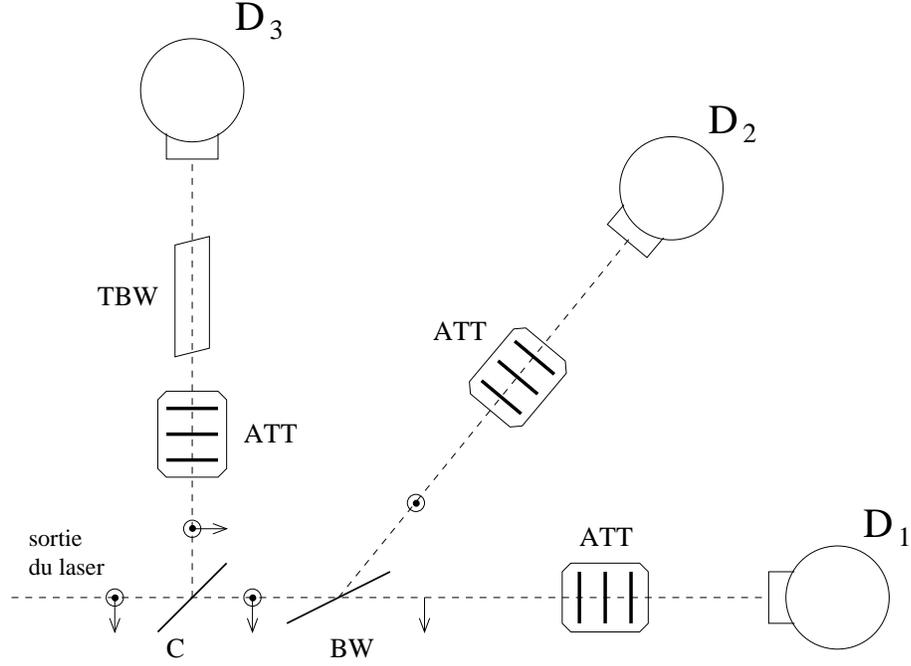


FIGURE 2.2 – Schéma du système de détection. $D_{1,2}$: détecteurs d'intensité des lasers $L_{1,2}$, D_3 : détecteur de l'écart en fréquence, C : coupleur, BW : fenêtre sous incidence de Brewster utilisée pour séparer les deux polarisations, TBW : fenêtre de Brewster orientée à 45° pour mélanger les deux polarisations, ATT : atténuateurs.

Les signaux de sortie des détecteurs sont envoyés à un oscilloscope numérique et/ou à un analyseur de spectre, pour permettre la visualisation en temps réel de la dynamique du système et de la valeur de Δ et de les enregistrer sur un PC relié à l'oscilloscope numérique pour des traitements ultérieurs.

2.1.1 Enregistrement de la dynamique spatio-temporelle

L'étude expérimentale du couplage des deux lasers fonctionnant sur les modes transverses de la famille $q = 1$ (modes TEM_{01} et TEM_{10}), nécessite quelques modifications quant à la géométrie du système. Nous introduisons derrière le diaphragme A_4 une fenêtre traitée antireflet munie au centre d'un point absorbant, pour filtrer le mode TEM_{00} .

De même, le système de détection est adapté pour permettre la mesure des intensités des deux modes des deux lasers. Nous utilisons quatre détecteurs

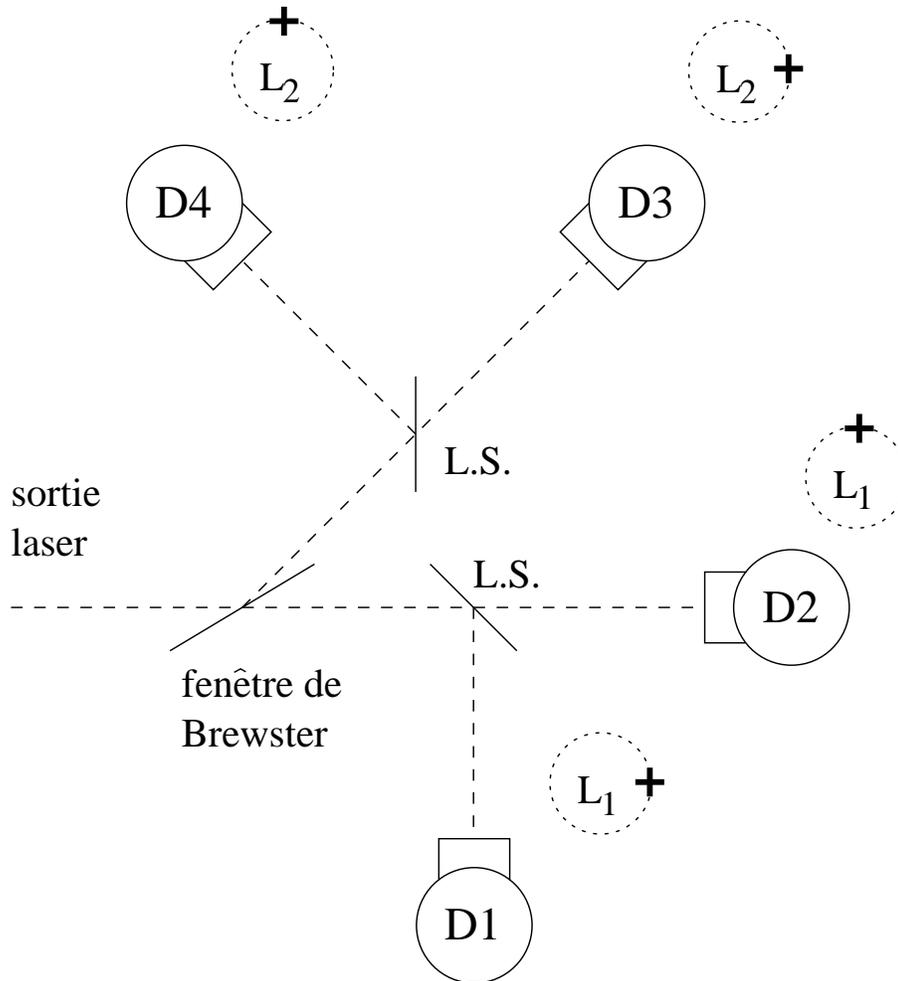


FIGURE 2.3 – Schéma du système de détection des intensités sur les modes transverses TEM_{01} et TEM_{10} . $D_{1,2}$: détecteurs des modes de L_1 , $D_{3,4}$: détecteurs des modes de L_2 , L.S. : lames séparatrices.

HgCdTe, placés sur les maxima des modes (figure 2.3).

2.1.2 Détermination des paramètres expérimentaux

Une bonne connaissance de l'ensemble des paramètres du système est nécessaire pour reproduire au mieux les régimes observés et vérifier la validité du modèle.

L'incertitude la plus importante provient du paramètre de pompe. Le profil de pompe est du type :

$$A = \frac{A_0}{1 + \delta^2} \quad (2.1)$$

où la valeur maximale A_0 de A est imposée par le courant de décharge, et l'écart en fréquence δ est normalisée à la largeur à mi-hauteur de la lorentzienne. En jouant sur δ , A peut descendre en dessous du seuil de fonctionnement. Le courant de décharge des milieux actifs est connu avec une bonne précision, mais nous ne pouvons pas déterminer l'écart en fréquence δ de chaque laser par rapport au centre de la raie d'émission. La mesure de cet écart nécessiterait un laser de référence stabilisé en fréquence.

Cette incertitude sur la détermination du paramètre de pompe se traduit par une localisation qualitative des régimes expérimentaux dans le diagramme (A, I) (cf. section 1.1). Ce diagramme nous permet d'estimer les paramètres de pompe à partir des signaux observés en absence de couplage.

Une deuxième source d'incertitude concerne la durée de vie des photons dans la cavité, c'est-à-dire son taux de pertes κ . Dans la littérature [59, 60] κ est toujours évalué à partir des seules pertes du coupleur de sortie. En réalité les pertes proviennent également de la présence du réseau, des fenêtres et des diaphragmes. Un autre point est à mentionner, à savoir la variation non contrôlée de κ au cours des différentes expériences. Les instabilités mécaniques, le vieillissement du matériel optique et les réaligement successifs, donnent une incertitude sur ce paramètre de l'ordre de 50%.

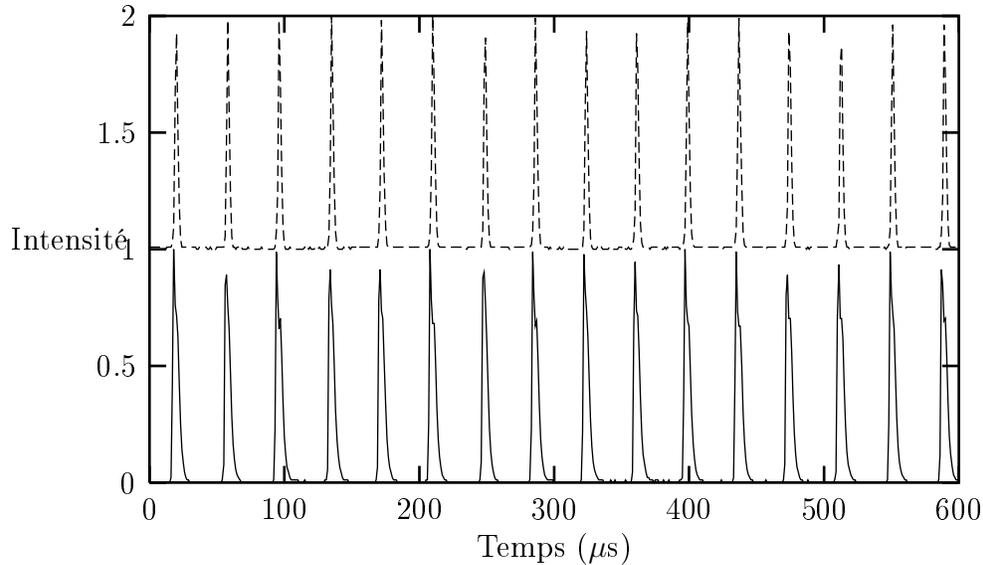


FIGURE 2.4 – Régime de synchronisation 1 :1. L’intensité de L_1 est représentée en trait plein et celle de L_2 en pointillé. Les paramètres expérimentaux sont : $i_1 = i_2 = 12\text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 6 \text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 2 \text{ Torr}$.

2.2 Résultats expérimentaux

Les sections suivantes sont consacrées à la présentation des régimes observés par ordre de complexité. Dans un premier temps, nous étudions des régimes où les deux lasers délivrent des impulsions de forme similaire, puis des régimes initialement stables ou oscillants, perturbés par les impulsions $P^{(0)}$ de l’autre laser et enfin nous présentons des régimes non impulsionnels.

2.3 Régimes fortement pulsés

Nous avons montré dans la section 1.6, que le couplage entre les deux LAS suppose non nulles les intensités émises par les deux lasers. Nous avons donc choisi, dans un premier temps, d’étudier expérimentalement les régimes fortement pulsés : compte tenu de la forme des impulsions, les lasers restent la plupart du temps à intensité nulle, et la dynamique qui en résulte est semblable à celle d’un laser non couplé perturbé périodiquement.

La figure 2.4 montre la synchronisation des impulsions $P^{(0)}$ des deux lasers. Le comportement du système est ici similaire à celui de deux oscillateurs couplés qui se “verrouillent” lorsque leurs fréquences sont suffisamment proches, ils adoptent alors une fréquence commune. Le même effet se produit

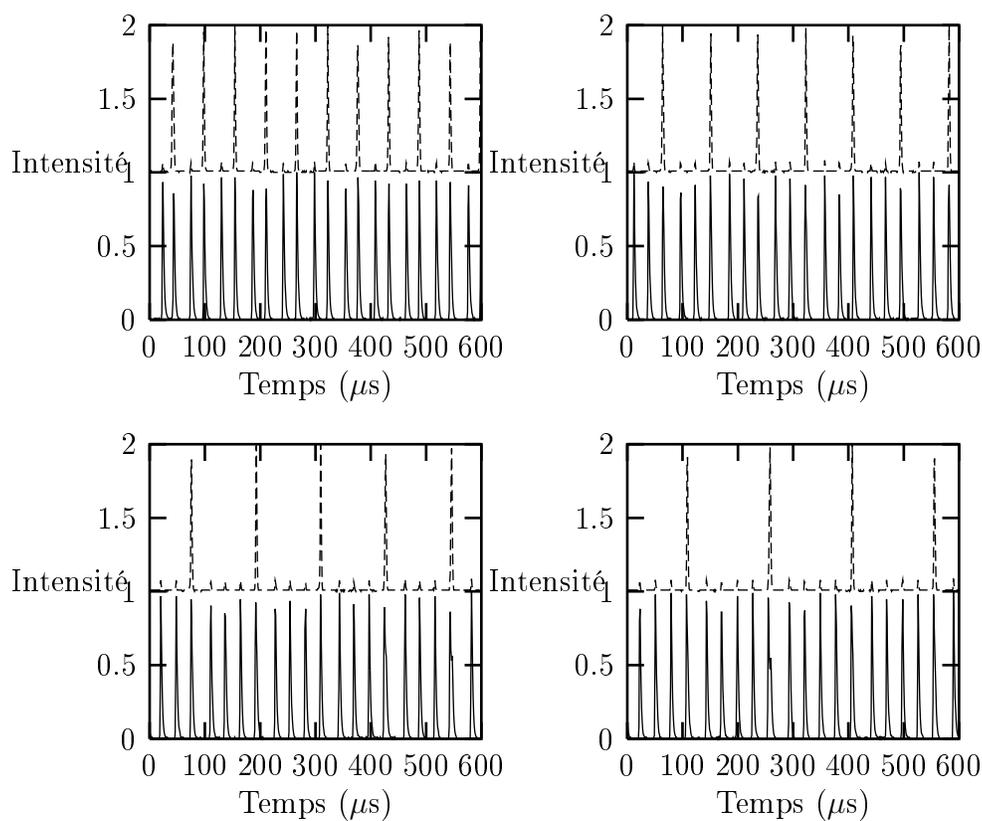


FIGURE 2.5 – Régimes de synchronisation 1 :2, 1 :3, 1 :4 et 1 :5. La transition entre régimes s'effectue en augmentant la période de L_2 (en pointillé), c'est-à-dire en diminuant son paramètre de pompe par variation de sa fréquence optique. Les paramètres expérimentaux sont : $i_1 = i_2 = 12\text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 6\text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 2\text{ Torr}$.

P_1	P_2	P_{12}	
110	85	92	déphasage “+”
108	124	112	en phase
107	146	126	déphasage “-”

TABLE 2.1 – Mesures des périodes (en μs) des régimes non couplés (P_1 , P_2) et couplé (P_{12}).

quand les deux lasers choisissent des fréquences multiples l’une de l’autre : la figure 2.5 montre des exemples de ces régimes. Nous allons identifier ces régimes en fonction du couple $n : m$ qui exprime le rapport entre les nombres de pics : la figure 2.4 illustre le régime 1 :1 alors que la figure 2.5 montre des régimes allant de 1 :2 à 1 :5. Dans toutes les figures, l’intensité de L_1 est représentée en trait plein, celle de L_2 en pointillé. Les détecteurs n’étant pas étalonnés, aucune comparaison quantitative n’est possible entre les intensités. Nous avons donc choisi de les présenter en unités arbitraires. Les petites impulsions présentes sur I_2 résultent du défaut de séparation des deux intensités, déjà mentionné dans la description du banc expérimental (cf. section 2.1).

2.3.1 Synchronisation d’impulsions $P^{(0)}$

Afin de mieux comprendre les mécanismes de synchronisation, nous nous limitons à l’analyse du régime de la figure 2.4 [61]. De l’examen attentif des signaux, il ressort que la synchronisation des impulsions des deux lasers fait apparaître un déphasage, avec un écart entre les maxima de l’ordre de 1 à $2\mu\text{s}$ (approx. 1% de la période des impulsions). Ce régime s’obtient avec une pression de l’absorbant voisine de $P_{\text{ABS}} = 15\text{mTorr}$, un paramètre de pompe initial faible (approx. 20% au-dessus du seuil). Dans cette configuration, les lasers non couplés oscillent en régime $P^{(0)}$. La période des impulsions est contrôlée par l’écart entre les fréquences optiques, c’est-à-dire par le paramètre de pompe. Nous allons montrer que le couplage des lasers modifie cette périodicité.

Le paramètre de pompe de L_1 étant fixé, nous avons fait varier celui de L_2 pour observer son effet sur le délai. Au fur et à mesure que le paramètre de pompe de L_2 diminue, nous observons successivement (figure 2.6) : (i) un régime avec déphasage “+”, où l’impulsion de L_2 précède celle de L_1 . (ii) La mise en phase des impulsions et enfin (iii) un régime avec déphasage “-” symétrique du premier, où l’impulsion de L_1 précède celle de L_2 . Notons que la

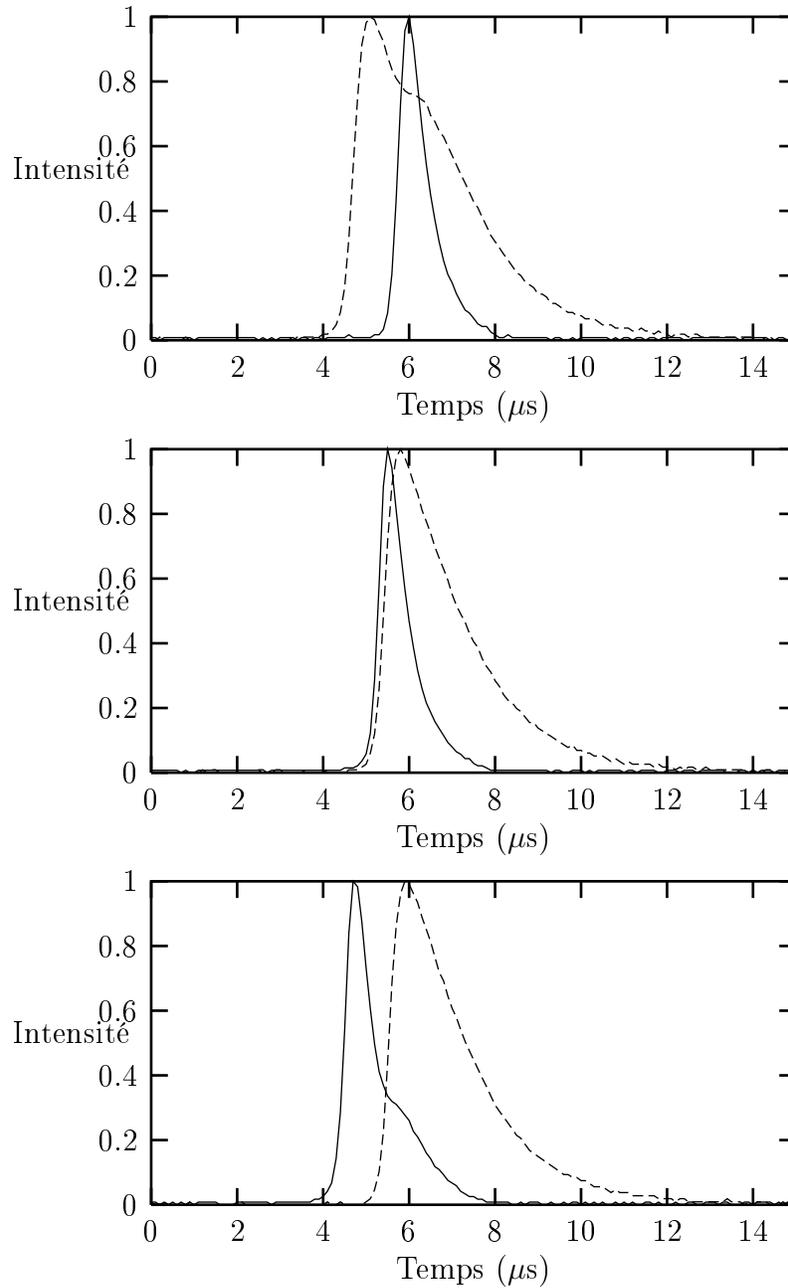


FIGURE 2.6 – Régimes de synchronisation : (a) déphasage “+”, (b) en phase, (c) déphasage “-”. Les courbes montrent l’évolution temporelle des intensités des deux lasers : L_1 (trait continu) et L_2 (en pointillé). L’échelle de l’intensité a été renormalisée, afin d’avoir des signaux de taille comparable, ce qui permet de mieux visualiser le délai. Les paramètres expérimentaux sont : $i_1 = 12\text{mA}$, $i_2 = 16\text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 15\text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 3\text{ Torr}$.

transition entre les trois régimes est continue : le délai observé dans la région (i) se réduit lentement jusqu'à la synchronisation puis ré-augmente dans la région (iii). Dans les trois régimes, nous avons comparé la période du système couplé à celles des lasers indépendants (voir tableau 2.1). Nous avons aussi mesuré le rapport entre les intensités en utilisant le même détecteur pour les deux faisceaux. Dans les trois cas, nous constatons que la perturbation de l'intensité des impulsions est négligeable et que le rapport des maxima, indépendant du couplage, garde une valeur voisine de 2.3. Comme on pouvait s'y attendre, ceci suggère que l'effet du couplage reste limité par la faible durée de la superposition des signaux. Il est intéressant de noter que dans tous les cas, la période du système couplé se situe entre celles des systèmes non couplés.

Nous avons reproduit les régimes expérimentaux par intégration numérique en utilisant le modèle simplifié par l'élimination adiabatique de l'absorbant (cf. section 1.5.1). La figure 2.7 montre les signaux obtenus avec un choix des paramètres identique à celui de [46] et un couplage asymétrique. Avec ces paramètres, les points de bifurcation, introduits dans la section 1.4.1, se situent pour les lasers indépendants à $A_{1\text{th}} = 0.45$, $A_{1\text{H}} \simeq 0.4525$, $A_{2\text{th}} = 0.3$ et $A_{2\text{H}} \simeq 0.312$. La période des oscillations au point de bifurcation est $P_{2\text{H}} \simeq 212$ (en unités de κ).

Nous avons essayé plusieurs valeurs des paramètres de pompe et trouvé que $A_1 = 0.7$ et $A_2 \sim 0.45$ reproduisent qualitativement la séquence obtenue expérimentalement. Ces valeurs situées non loin des seuils correspondent à celles de l'expérience. La différence la plus notable concerne la forme des impulsions, qui dans l'expérience montre une déformation dans la zone de recouvrement, effet non reproduit par le modèle. La présence de cette déformation indique que le modèle surestime la saturation de l'absorbant. En effet, si le premier laser saturait complètement l'absorbant il ne devrait en aucun cas être affecté par le deuxième laser, contrairement à ce que nous observons (augmentation du temps de descente de la première impulsion). Notons que, pour ce jeu de paramètres, les périodes des deux lasers non couplés sont proches ($P_1 = 139$ et $P_2 = 131$, en unités de κ), ce qui implique une résonance 1 :1. Dans le tableau 2.2, nous reportons les différents cas de synchronisation obtenus numériquement.

La figure 2.7 montre la simulation numérique des impulsions : les trois régimes observés sont reproduits pour A_2 valant successivement 0.47, 0.45 et 0.43, avec un maximum d'intensité de L_2 significativement plus faible que celui de L_1 . La synchronisation "+" apparaît pour $A_2 = 0.47$ avec un délai entre les deux maxima voisin de 1.5 unités de temps. Pour $A_2 = 0.45$, les signaux sont en phase, et pour $A_2 = 0.43$ apparaît le régime avec déphasage "-". Ici, l'impulsion de L_2 suit celle de L_1 avec un délai de 2.5 unités de temps.

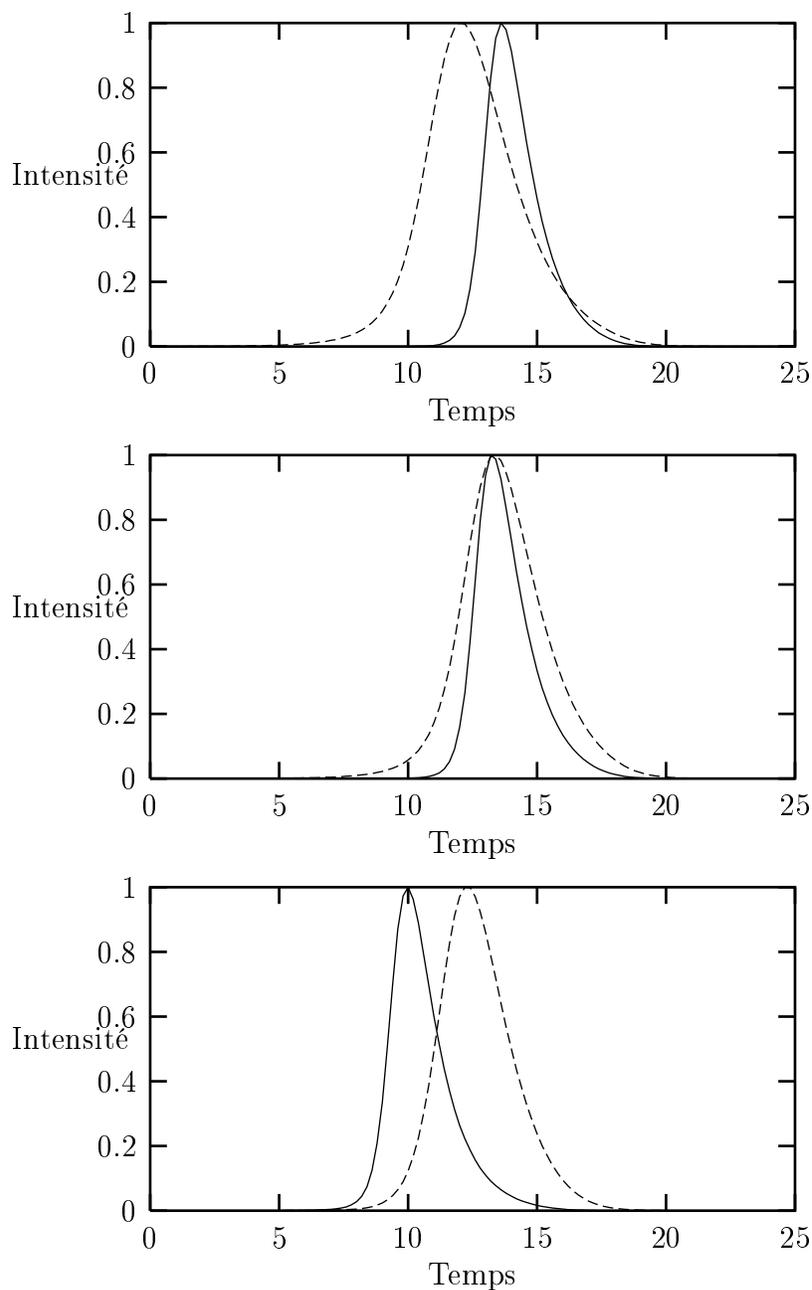


FIGURE 2.7 – Synchronisation des impulsions de L_1 et L_2 , obtenues par intégration numérique du modèle simplifié (cf. section 1.5.1). Le paramètre A_2 prend les valeurs (de haut en bas) 0.47, 0.45 et 0.43. Les autres paramètres sont : $A_1 = 0.7$, $\varepsilon_{1,2} = 0.137$, $a = 4.17$, $b_{1,2} = 0.85$, $\varepsilon_x = 1.2$, $X_0 = 2$, $B = 1$, $C = D = 0.5$.

A_2	P_1	I_{1M}	P_2	I_{2M}	P_{12}	$I_{1M(cpl)}$	$I_{2M(cpl)}$	
0.47	139	11.1	117.4	3.6	131	11.1	3.8	déphasage “+”
0.45	139	11.1	130.5	3.5	141	11.3	4.7	en phase
0.43	139	11.1	147.1	3.3	146	11.1	4.2	déphasage “-”

TABLE 2.2 – Périodes des régimes numériques. P_1 , P_2 sont les périodes des impulsions et I_{1M} , I_{2M} sont les maxima d’intensité en régime non couplé. P_{12} , $I_{1M(cpl)}$ et $I_{2M(cpl)}$ sont la période et les maxima après couplage. Dans les trois simulations A_1 est fixé à 0.7.

En diminuant A_2 en dessous de 0.43, la synchronisation 1 :1 disparaît : les deux lasers oscillent parfois en même temps, parfois indépendamment. Cette synchronisation intermittente, 1 :1 ou 1 :2, est décrite dans la partie suivante.

Notons que les simulations numériques reproduisent bien les expériences pour les trois régimes décrits plus haut avec le même type de relation entre le signe du délai et les périodes des lasers non couplés. Dans le régime “+”, L_2 émet le premier et $P_2 < P_1$, dans le cas opposé $P_2 > P_1$. Comme dans l’expérience, la période du régime couplé est comprise entre les périodes des oscillateurs indépendants, à l’exception de la synchronisation en phase. L’explication de cette anomalie réside dans l’interaction avec le milieu actif : le tableau 2.2 montre que dans le cas de synchronisation en phase l’amplitude des impulsions des deux lasers augmente, ce qui a comme conséquence l’extraction d’une quantité d’énergie plus importante. Le temps nécessaire à la reconstitution de l’inversion de population augmente, ce qui se traduit par un accroissement de la période.

Nous pouvons mieux comprendre le mécanisme de synchronisation en utilisant la description du couplage de la section 1.6. Nous avons montré que l’apport du terme de couplage n’est important que dans les intervalles de temps où les deux intensités sont simultanément différentes de zéro. Dans les régimes impulsions décrits ici, l’effet de couplage est limité par le taux de recouvrement des impulsions. Ceci suggère un couplage faible qui agit principalement sur la phase des cycles limites. En particulier, nous pouvons écrire pour le régime 1 :1 que :

$$I_1 \simeq I_{10}((1 + \delta_1)t + \theta_1) \text{ et } I_2 \simeq I_{20}((1 + \delta_2)t + \theta_2) \quad (2.2)$$

où $I_{10}(t)$ et $I_{20}(t)$ sont les évolutions des intensités des lasers indépendants. Dans l’équation 2.2, δ_1 et δ_2 sont des corrections de phase et θ_1 , θ_2 les phases à l’origine du temps.

2.3.2 Synchronisation d'impulsions $P^{(1)}$

Les propriétés de la synchronisation des impulsions $P^{(0)}$ sont aussi observées dans des régimes plus complexes : des impulsions $P^{(1)}$ peuvent également se synchroniser (figure 2.8). Dans ce cas, le retard entre les deux impulsions peut être tel que le maximum principal des impulsions de L_2 coïncide avec le maximum secondaire de celles de L_1 donnant naissance à un autre type de synchronisation. La transition entre les deux régimes est obtenue en altérant le paramètre de pompe de L_2 . En partant de la synchronisation entre les maxima principaux, le délai augmente continûment avec la diminution du paramètre de pompe de L_2 jusqu'au moment où le système pénètre dans la zone de capture du deuxième régime synchronisé.

2.3.3 Régimes 1 :2–1 :n

Comme nous l'avons indiqué dans la section précédente, plusieurs régimes d'impulsions couplées sont possibles au-delà du cas 1 :1. Si l'écart entre les périodes des lasers non couplés devient très important, nous obtenons une cascade de régimes 1 :n synchronisés (figure 2.5).

Pour chacun de ces régimes, la synchronisation s'effectue d'une façon semblable à celle du régime 1 :1. Les impulsions sont séparées par un délai qui dépend du rapport entre les périodes des oscillateurs indépendants, et il n'y a pas d'autres effets que ceux déjà mentionnés plus haut.

En revanche, deux nouveaux comportements du système méritent d'être signalés : la non équidistance des impulsions de L_1 et la transition entre le régime 1 :n et le suivant 1 :n+1.

Le premier de ces deux effets provient du type de couplage : comme nous l'avons déjà montré dans la section 1.6, le système suit dans les régions d'intensité nulle la dynamique d'un LAS seul. Dans les régimes 1 :n, nous pouvons considérer l'état synchronisé comme un régime pulsé périodique du laser L_1 , de faible période t_0 , perturbé périodiquement par des impulsions de période plus longue $T \approx nt_0$, du laser L_2 . Les régimes sont suffisamment stables pour nous permettre d'effectuer la mesure des intervalles entre les impulsions de 1 :1 à 1 :5. Dans les cinq cas (figure 2.9) nous reportons les positions des impulsions de L_1 à l'intérieur d'une période T en fonction de T . Sans couplage, le régime 1 :5 comporte cinq points espacés de $t_0 = T/5$. Ici, nous observons que le premier point ($t = 36$) s'écarte significativement de la valeur $t_0 = 148.5/5 = 29.7$, les autres se rapprochent progressivement de la période non couplée t_0 . Le système montre donc un transitoire après la perturbation et converge ensuite vers la situation périodique non couplée.

Ce comportement est reproduit par les simulations numériques : en ba-

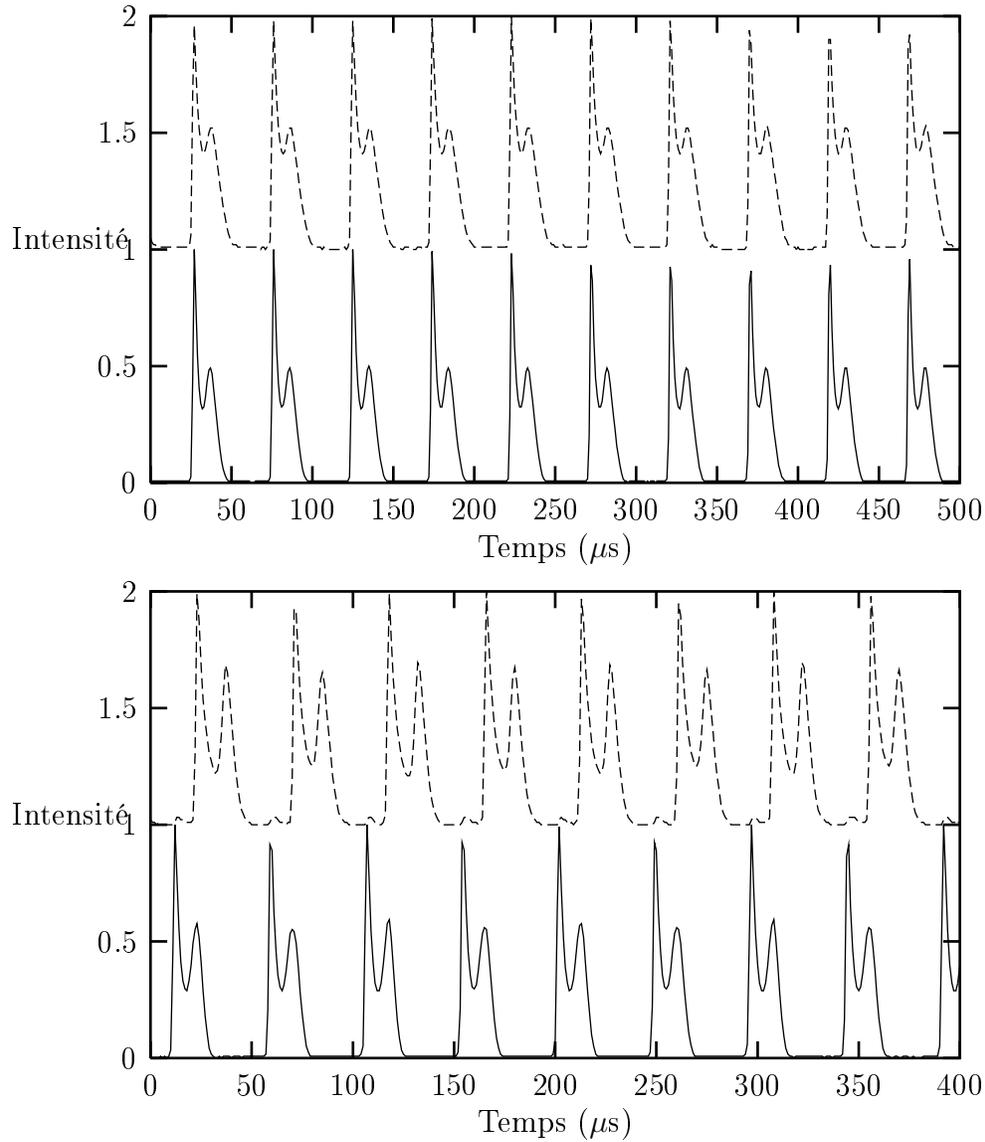


FIGURE 2.8 – Synchronisation entre impulsions $P^{(1)}$. La transition entre les deux régimes (haut et bas) est obtenue en modifiant la fréquence optique de L_2 . Les paramètres expérimentaux sont : $i_1 = i_2 = 16\text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 12\text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 1.5\text{ Torr}$.

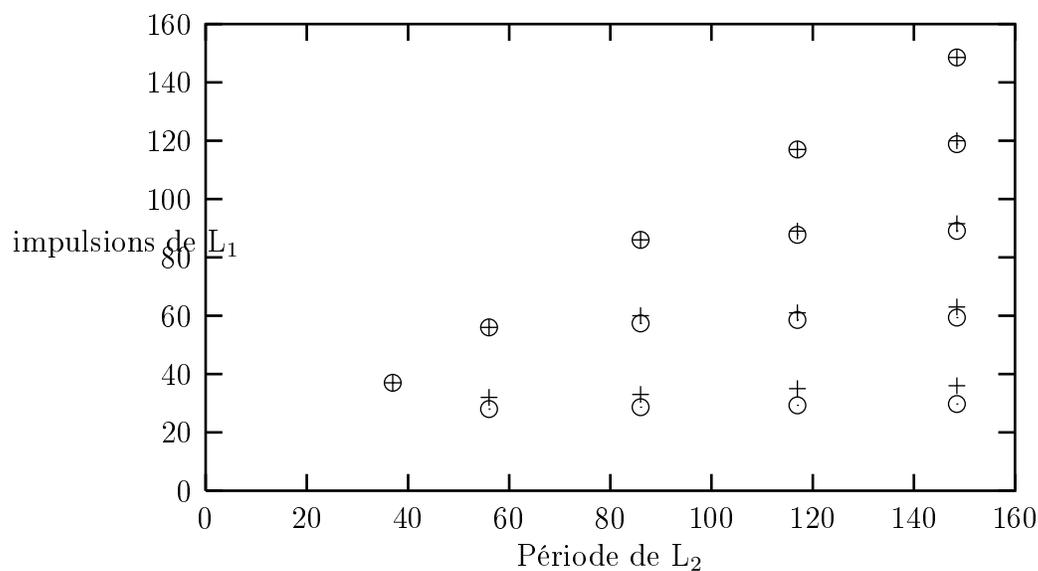


FIGURE 2.9 – Intervalles expérimentaux entre les impulsions de L_1 sur une période dans les régimes 1 :1-1 :5. La mesure est effectuée sur les signaux des figures 2.4 et 2.5. Les \oplus indiquent les points expérimentaux, les \odot les valeurs idéales (T/n).

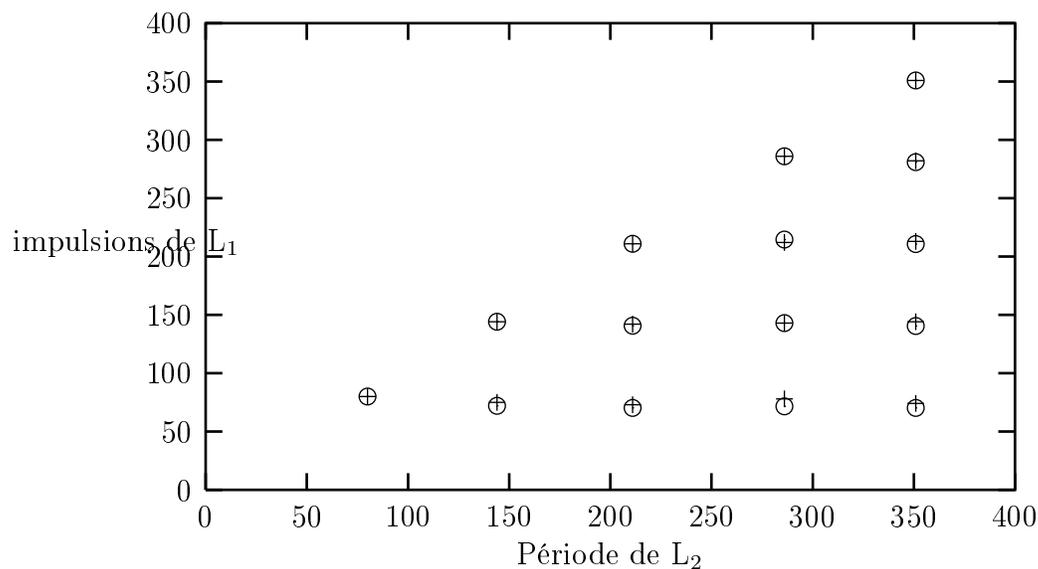


FIGURE 2.10 – Simulation numérique des intervalles entre les impulsions de L_1 dans les régimes 1 :1-1 :5. Les paramètres utilisés sont : $A_2 = 1.0$, $C = D = 1$ et A_1 vaut respectivement 0.88 (1 :1), 0.655 (1 :2), 0.57 (1 :3), 0.52 (1 :4), 0.5 (1 :5).

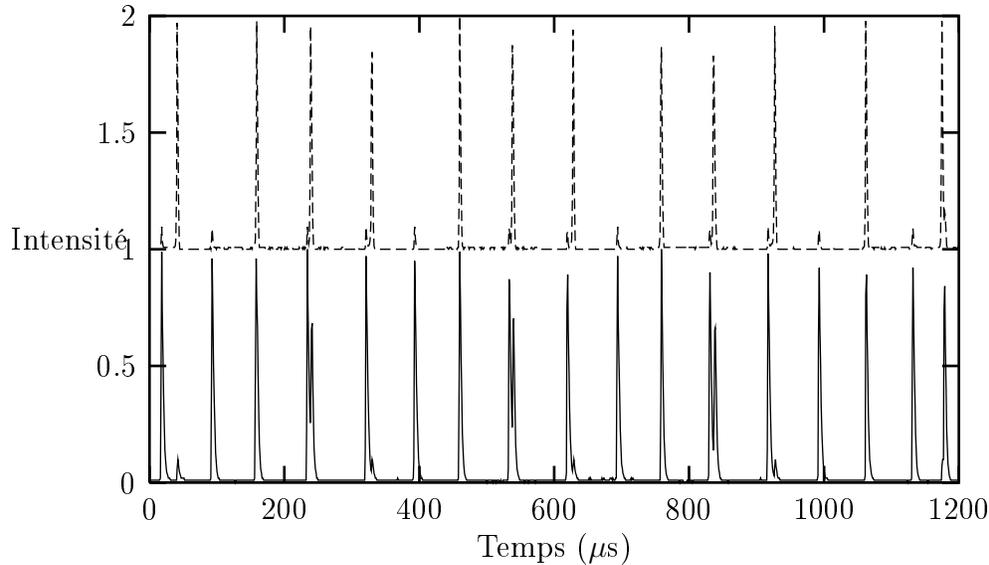


FIGURE 2.11 – Transition aléatoire entre 1 :1 et 1 :2. Les impulsions des deux lasers sont parfois synchronisées, parfois non. Les paramètres expérimentaux sont : $i_1 = i_2 = 16\text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 16\text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 0.5\text{ Torr}$.

layant A_2 , pour les valeurs des paramètres de la figure 2.10, nous observons le même effet, mais avec une perturbation plus faible : la déviation par rapport à la période non couplée t_0 est moins importante.

Si on continue à diminuer le paramètre de pompe de L_2 nous observons une succession de régimes 1 : n avec $n > 5$, ceci même si en absence de couplage L_2 passe sous son seuil de fonctionnement. Nous pouvons donc considérer le régime 1 : n d'un point de vue opposé à celui adopté ci-dessus : les impulsions de L_1 viennent perturber L_2 , éteint. Sous l'effet du couplage, le seuil de L_2 est abaissé, comme nous l'avons montré dans la section 1.6, L_2 adopte un régime impulsionnel. La détermination du seuil couplé de L_2 sera explicitée dans la section 2.4.2.

2.3.4 Transitions entre régimes 1 : n et 1 : $n+1$

En fonction des paramètres expérimentaux (principalement la pression de l'absorbant), trois types de transition 1 : $n \rightarrow 1 :n+1$ apparaissent.

Pour des valeurs de la pression partielle de l'absorbant de l'ordre de 10-20 mTorr, nous observons une synchronisation partielle, c'est-à-dire un mélange aléatoire des deux régimes 1 : n et 1 : $n+1$ (figure 2.11). Une carte de premier retour de la série temporelle non périodique des impulsions de L_2 ne montre

aucune structure, indiquant le caractère aléatoire de la synchronisation, probablement contrôlée par le bruit.

Pour des valeurs plus faibles de la pression partielle de l'absorbant (3-8 mTorr) et une grande quantité d'hélium (1-3 Torr de pression partielle), nous observons deux autres types de transition : périodique ou irrégulière.

La transition périodique, observée avec une réduction du paramètre de pompe de L_2 , s'effectue par un changement continu de la forme des impulsions de L_1 : les impulsions de L_1 de type $P^{(0)}$ synchronisées avec celles de L_2 évoluent vers des impulsions $P^{(1)}$, dont l'oscillation secondaire coïncide avec l'impulsion de L_2 (figure 2.12a). L'intervalle entre le maximum de l'impulsion $P^{(1)}$ et son maximum secondaire augmente au fur et à mesure que la période de L_2 augmente (figure 2.12b), jusqu'au moment où la suroscillation se sépare complètement du maximum principal, en donnant le régime 1 : $n+1$.

La transition irrégulière est observée dans des conditions expérimentales semblables au cas précédent. Toutefois, le paramètre qui varie ici est le pompage de L_1 ; nous l'augmentons pour réduire la périodicité du laser. Cette transition se traduit également par un changement de la forme des impulsions de L_1 . Contrairement au cas précédent, le régime intermédiaire n'est pas périodique mais présente une séquence irrégulière d'impulsions de formes différentes qui ne sont pas toujours synchronisées sur les impulsions de L_2 . La figure 2.13 montre l'évolution de la forme des impulsions pendant la transition 1 : 1 - 1 : 2. Afin d'en déterminer le caractère aléatoire ou déterministe, nous avons effectué pour chaque régime de la figure 2.13 un diagramme de premier retour de l'intensité. Ces diagrammes (figure 2.14) mettent en évidence une transformation continue des diagrammes. Cette évolution passe par une structure bien définie en " ω ", indiquant le caractère déterministe de la transition étudiée. Cependant, la forme de cette structure ne correspond pas à celle d'un LAS seul, mais est représentative du système couplé.

L'analyse numérique permet de reproduire la transition périodique (de $P^{(0)}$ à $P^{(1)}$), avec les paramètres :

$$\varepsilon_{1,2} = 0.137, \quad a = 4.17, \quad b_{1,2} = 0.85, \quad \varepsilon_x = 1.2, \\ X_0 = 2, \quad B = 1, \quad C = D = 1$$

A_2 fixé à 1.0 et A_1 variable entre 1.1 et 0.5. La séquence, en bon accord qualitatif avec les observations expérimentales, correspond à une coupe le long d'un axe vertical du diagramme de stabilité de la figure 1.6.

Un autre type de transition a été rencontré lors d'une coupe suivant l'axe y , pour $A_2 = 0.4$ et A_1 variable entre 0.94 et 0.64. Elle est constituée de régimes synchronisés par intermittence $i : j$ (figure 2.15). Il est probable que

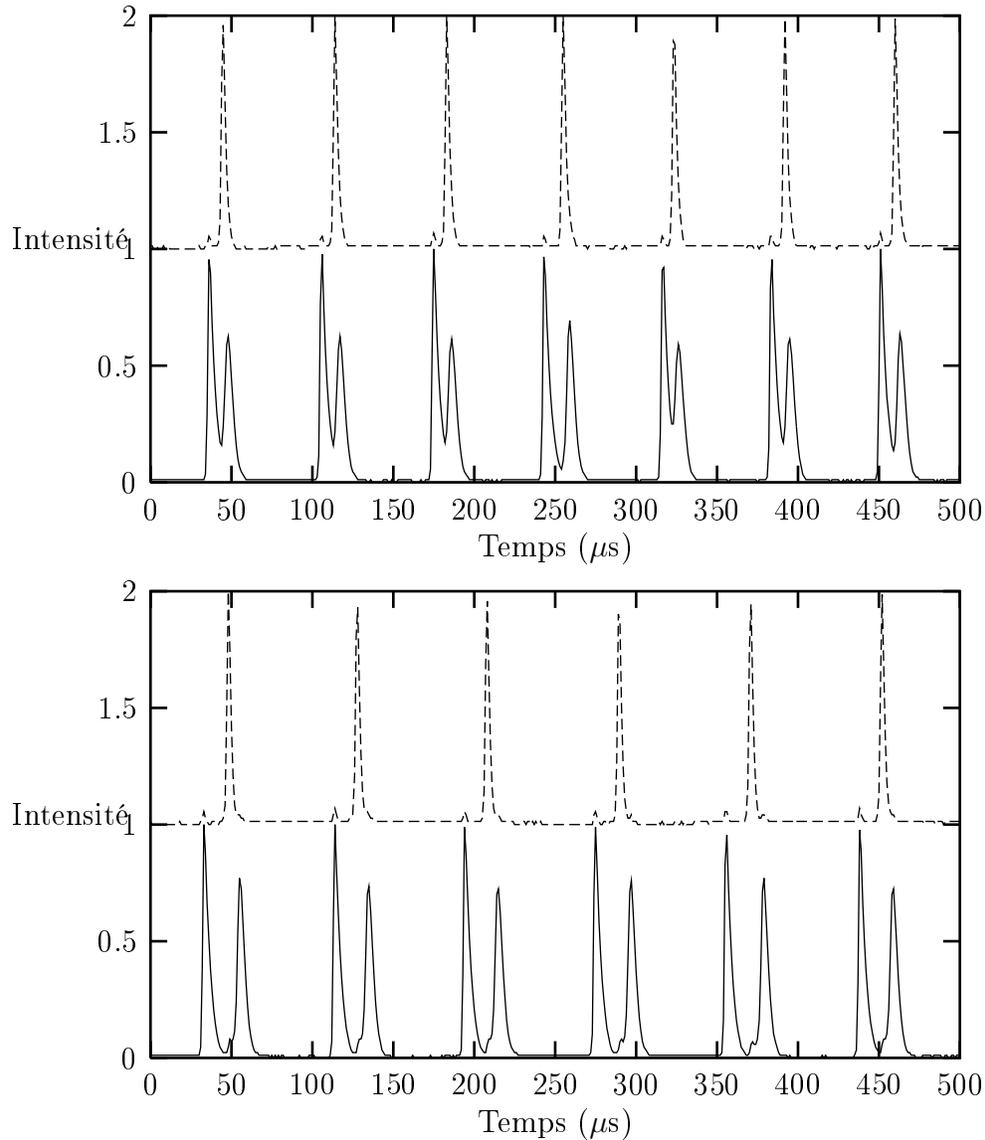


FIGURE 2.12 – Transition périodique entre 1 :1 et 1 :2. Les impulsions de L_1 passent de $P^{(0)}$ à $P^{(1)}$: le maximum secondaire est synchronisé avec les impulsions de L_2 . L'écart entre les maxima des impulsions de L_1 se creuse au fur et à mesure que la période de L_2 augmente pour donner naissance au régime 1 :2. Les paramètres expérimentaux sont : $i_1 = i_2 = 12\text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 5 \text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 2 \text{ Torr}$.

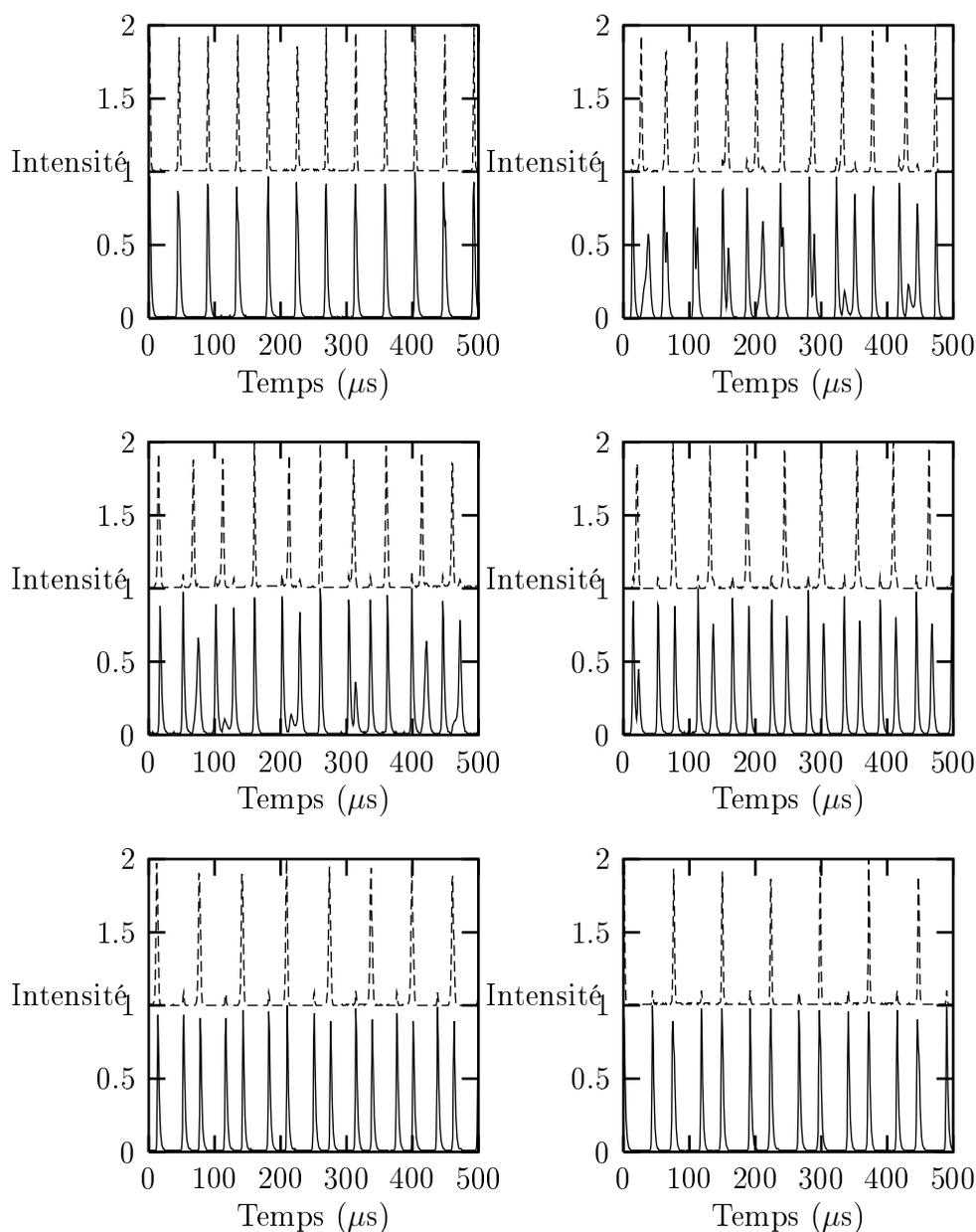


FIGURE 2.13 – Transition irrégulière entre 1 :1 et 1 :2 (L_1 en trait continu, L_2 en pointillé). La séquence (du haut à gauche au bas à droite, dans le sens de la lecture) est obtenue en jouant sur la fréquence de L_1 pour augmenter le paramètre de pompe. Les paramètres de L_2 restent fixes. Les paramètres expérimentaux sont : $i_1 = i_2 = 12\text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 8 \text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 3 \text{ Torr}$.

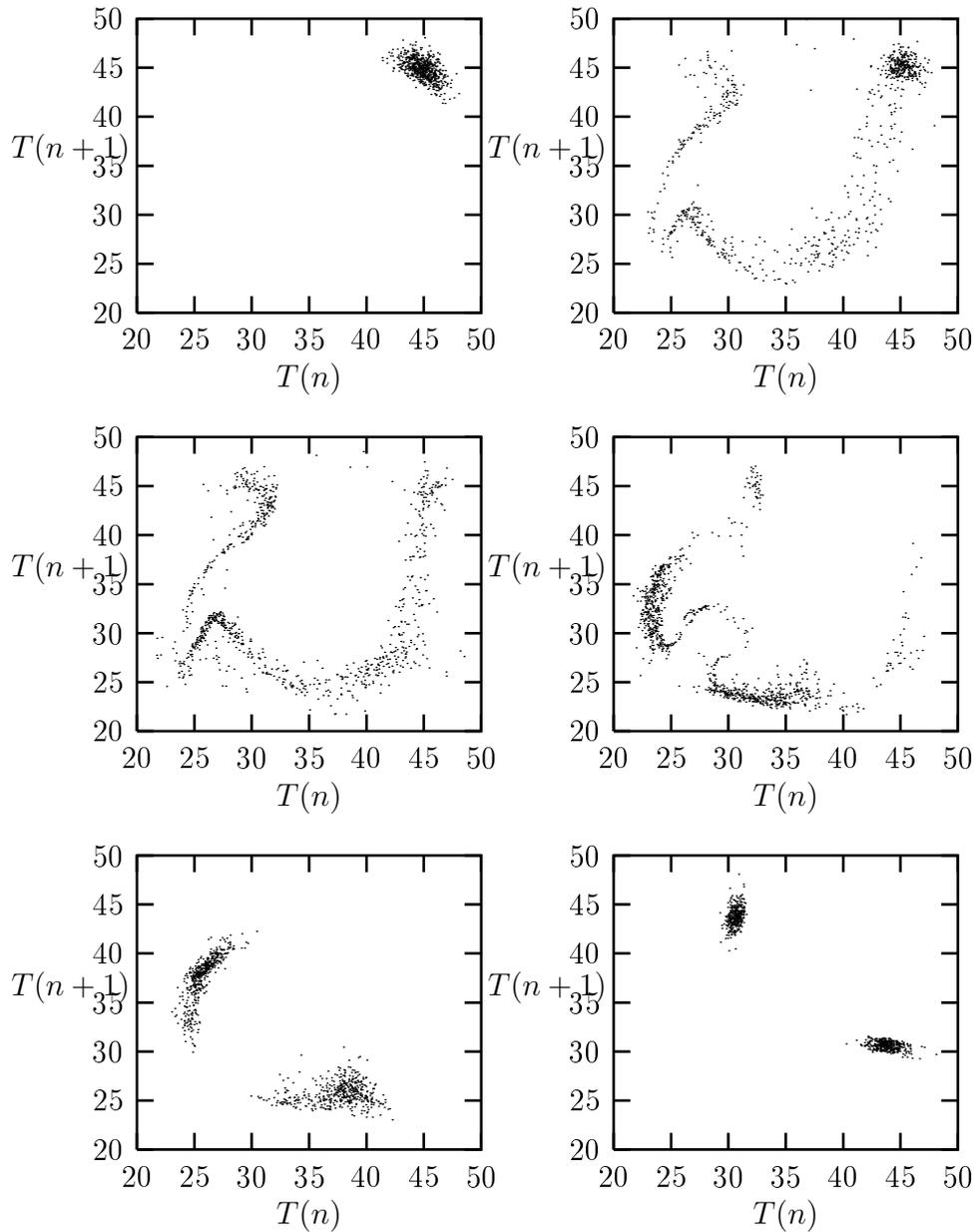


FIGURE 2.14 – Transition irrégulière entre 1 :1 et 1 :2. Les diagrammes de premier retour traduisent la dynamique de L_1 dans les régimes de la figure 2.13. La transition entre les régimes de période T et $2T$ passe par une structure bien définie.

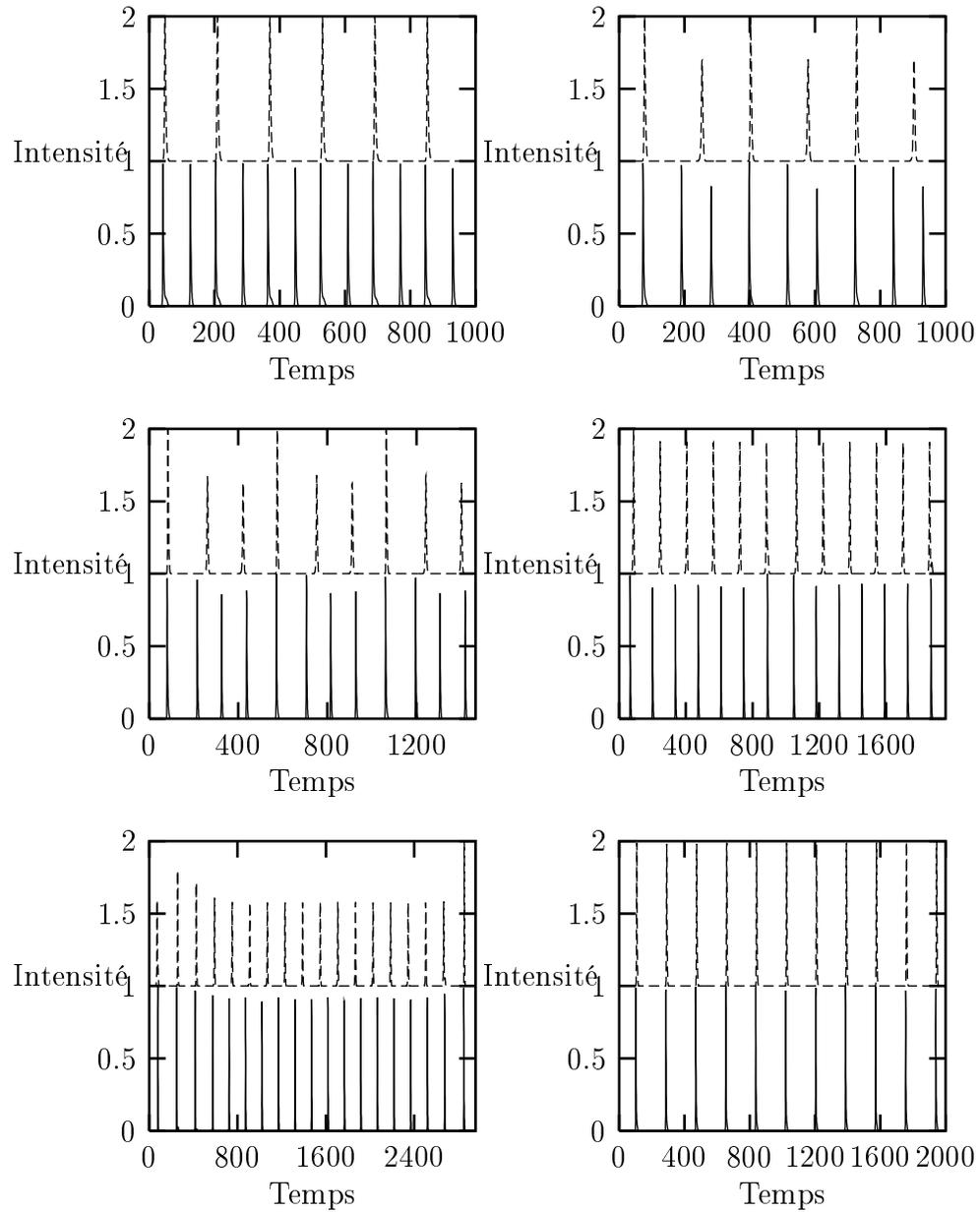


FIGURE 2.15 – Transition de 1 :2 à 1 :1 par régimes de synchronisation intermittente, obtenus pour $A_2 = 0.4$ et (du haut en bas et de gauche à droite) $A_1 = 0.94$ (1 :2), $A_1 = 0.77$ (2 :3), $A_1 = 0.72$ (3 :4), $A_1 = 0.67$ (6 :7), $A_1 = 0.65$ ($n :n+1$), $A_1 = 0.64$ (1 :1).

dans l'expérience ces régimes $i : j$ ne sont pas visibles à cause du caractère aléatoire du bruit.

2.4 Autres régimes

Ci-dessus, nous avons montré que lorsque le rapport des périodes des deux lasers s'écarte notablement de l'unité, nous pouvons considérer la dynamique du système comme le résultat de la perturbation impulsionnelle d'un laser par l'autre. L'interaction est naturellement toujours bidirectionnelle en raison de la symétrie du couplage, ce qui implique un changement dans la périodicité des deux lasers (cf. section 2.3.3).

Nous avons donc couplé un laser en régime impulsionnel au deuxième préparé dans un des différents régimes du LAS décrits dans la section 1.1 : continu, périodique et avec des impulsions de structure complexe.

2.4.1 Perturbation de l'état continu

Nous préparons le système dans l'état suivant : L_1 émet une intensité continue, L_2 des impulsions $P^{(0)}$. Expérimentalement, ceci requiert pour L_1 une fréquence optique voisine du centre de la raie et correspond à un pompage maximal, et une pression partielle faible de l'absorbant (3 mTorr SF₆, 2 Torr He). D'autre part, la fréquence de L_2 est fixée sur un des deux côtés de la raie d'émission, ce qui a pour conséquence un paramètre de pompe proche du seuil, et garantit une dynamique $P^{(0)}$ indépendamment du couplage.

Comme dans le cas de la perturbation des impulsions périodiques, le laser L_1 présente une dynamique de LAS non couplé lorsque L_2 est éteint. Les impulsions de L_2 écartent L_1 de sa solution continue (figure 2.16). Quand L_2 est éteint, L_1 revient sur sa solution continue avec des oscillations de relaxation.

L'effet de L_1 est de réduire la périodicité de L_2 . Ceci s'explique en considérant que L_1 sature l'absorbant, diminue le seuil de L_2 et permet d'augmenter la fréquence des impulsions. La variation de la période de L_2 dépend de son paramètre de pompe : le cas extrême est celui où le couplage fait passer L_2 au-dessus de son seuil de fonctionnement.

Un phénomène analogue a été observé quand L_1 est en régime T (figure 2.17).

2.4.2 Déplacement des points de bifurcation

Le régime de déstabilisation de l'état continu que nous venons de décrire se situe dans la région $A_2 > 1.42$ et $A_1 \sim 0.36$ du diagramme de stabilité de la figure 1.6. Lors du couplage, un des lasers passe d'une solution continue à une solution oscillante. Le couplage a déplacé le deuxième point de bifurcation de Hopf vers des valeurs de A_2 plus élevées.

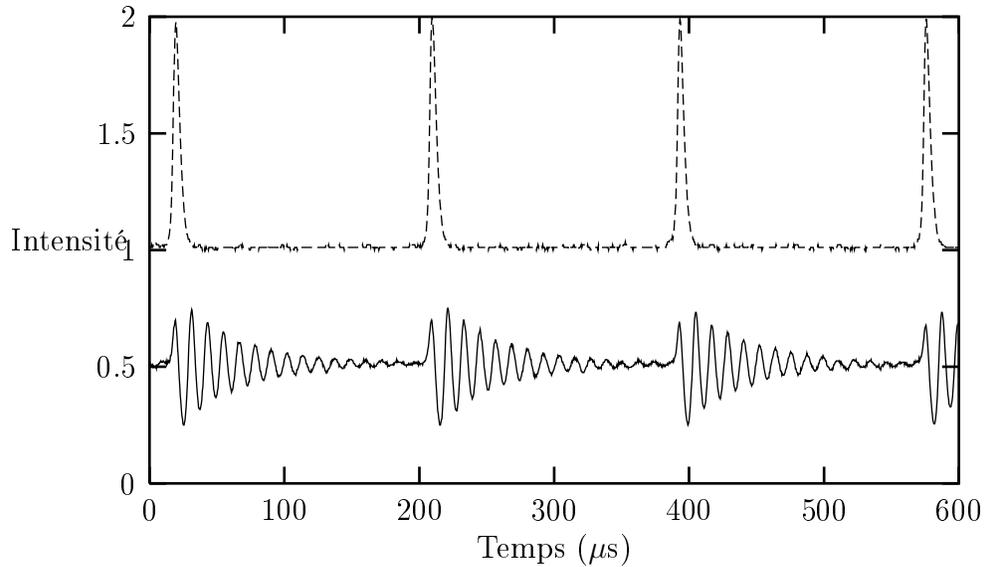


FIGURE 2.16 – Perturbation de l'état continu. La fréquence de relaxation est mesurée à 83 kHz, et la constante d'amortissement vaut $48 \mu\text{s}$. Les paramètres expérimentaux sont : $i_1 = 18\text{mA}$, $i_2 = 12\text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 3 \text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 2 \text{ Torr}$.

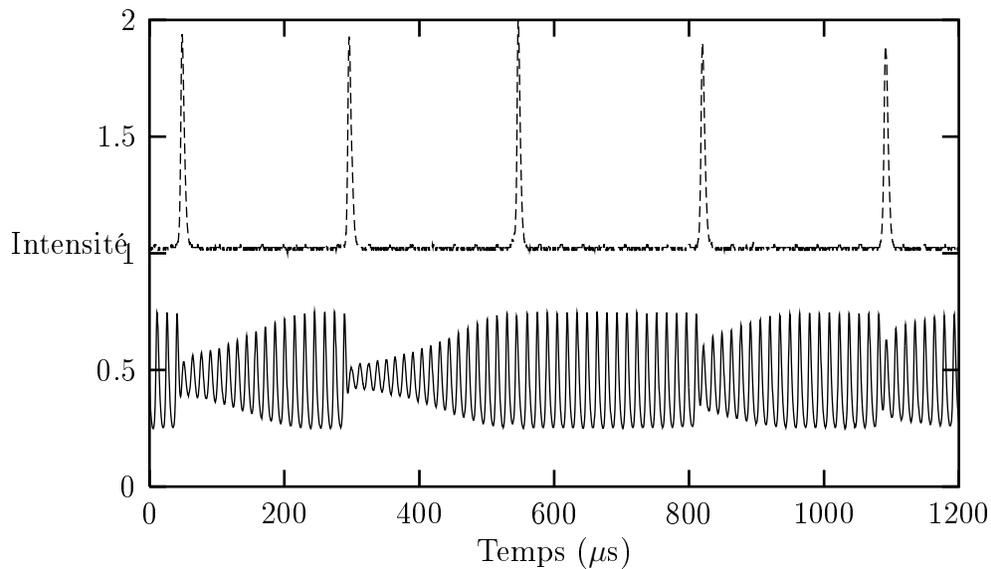


FIGURE 2.17 – Perturbation de l'état T. Les paramètres expérimentaux sont identiques à ceux de la figure 2.16. Seule la fréquence optique de L_1 est modifiée.

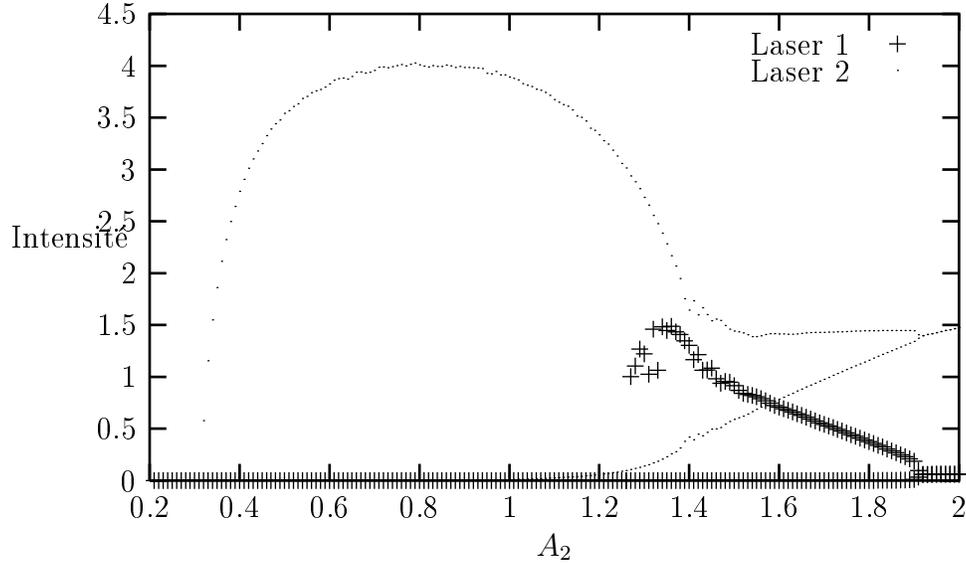


FIGURE 2.18 – Diagramme de bifurcation pour $A_1 = 0.31$ (en dessous du seuil, fixé à 0.45 pour L_1 seul) et $A_2 = 2 \dots 0.2$ correspondant à une coupe horizontale dans le diagramme de stabilité de la figure 1.6. Mise en évidence de la deuxième bifurcation du système pour $A_2 = 1.28$ et du déplacement de la deuxième bifurcation de Hopf de 1.42 à 1.91.

Un diagramme de bifurcation numérique correspondant à une coupe du plan (A_1, A_2) pour $A_1 = 0.31$ permet de retrouver pour $A_2 = 2$ un régime continu, ainsi que visualiser l'effet de l'abaissement du seuil déjà cité. La figure 2.18 montre les maxima et minima absolus des intensités pour un balayage de A_2 de 2 à 0.2 (nous considérons ici uniquement le sens décroissant des valeurs de A_2). Le système, initialement en régime continu, avec l'intensité de L_1 significativement plus faible que celle de L_2 , se déstabilise pour $A_1 = 1.91$ et laisse la place au régime (périodique) de déstabilisation de l'état continu (cf. figure 2.16).

A_2 franchit ensuite le point de bifurcation A_{2HH} et le régime non couplé de L_2 passe de continu à oscillant de période T . Le système couplé subit la déstabilisation du régime T (irrégulier) déjà montré dans la figure 2.17. Quand $A_2 = 1.28$, l'effet de saturation de L_2 ne suffit plus à faire osciller L_1 . L_1 s'éteint et L_2 adopte un régime de type LAS, avec des impulsions périodiques $P^{(0)}$, puis s'éteint à son tour.

Le diagramme de bifurcation montre donc que le système couplé peut subir une deuxième bifurcation pour une valeur de A_2 qui correspond à l'activation de L_1 par L_2 . Dans la section 1.6 nous avons montré comment L_2

continu modifie la stabilité de la solution nulle de L_1 . Lorsque L_2 est pulsé, nous devons prendre en compte son évolution pour déterminer la stabilité de L_1 . Pour $I_1 \simeq 0$, le terme P_1 (cf. équations 1.19 et 1.15) ne dépend que de I_2 et l'évolution de I_1 s'écrit :

$$\frac{dI_1}{dt} = I_1 \left(U_1 - 1 - \frac{X_0}{1 + aCI_2} \right) \quad (2.3)$$

Si en régime continu, la détermination du signe de P_1 est suffisante pour déterminer la stabilité de L_1 , en régime pulsé, nous devons intégrer cette équation sur la période T de L_2 afin de déterminer l'influence de P_1 . L'intégrale de l'équation 2.3 s'écrit :

$$I_1(T) = I_1(0) \exp \left[\int_0^T \left(U_1 - 1 - \frac{X_0}{1 + aCI_2(t)} \right) dt \right] \quad (2.4)$$

où nous considérons que, comme $I_1 \simeq 0$, U_1 est une constante égale à sa valeur asymptotique. La condition d'instabilité est donnée par une valeur de l'intégrale supérieure à 1, ce qui correspond à une amplification d'une petite perturbation de I_1 sur une période d'oscillation de L_2 .

2.4.3 Perturbation des régimes $P^{(n)}$ et chaotiques

Nous venons de montrer que les impulsions $P^{(0)}$ de L_2 forcent L_1 dans un régime transitoire après lequel celui-ci revient sur sa solution non-couplée. Similairement, le même effet se produit lorsque L_1 est en régime $P^{(n)}$, en régime d'oscillation de grande amplitude ou de chaos. Ce sont des situations où le régime transitoire est plus complexe et un diagramme de premier retour montre une structure semblable à celle des régimes chaotiques d'un LAS seul, ce qui indique la présence d'un attracteur instable sous jacent.

La figure 2.19 montre une situation où la période des impulsions $P^{(0)}$ est suffisamment longue pour permettre l'installation du régime permanent : L_1 , qui non-couplé est en régime d'oscillation périodique $2T$, revient sur cette solution après une séquence d'impulsions irrégulières. Le diagramme de premier retour effectué dans ce régime, montre qu'autour des deux points de la solution $2T$, apparaît un nuage de points induit par la perturbation.

Lorsqu'on diminue la période des impulsions $P^{(0)}$, L_1 n'a plus le temps de revenir sur son régime permanent et seule subsiste la séquence d'impulsions irrégulières du régime transitoire. Dans le diagramme de premier retour, les deux points de la structure ne sont plus visibles et celle-ci résulte principalement de la dynamique chaotique, qui reste néanmoins entourée de points aléatoires provenant de la perturbation (figure 2.20).

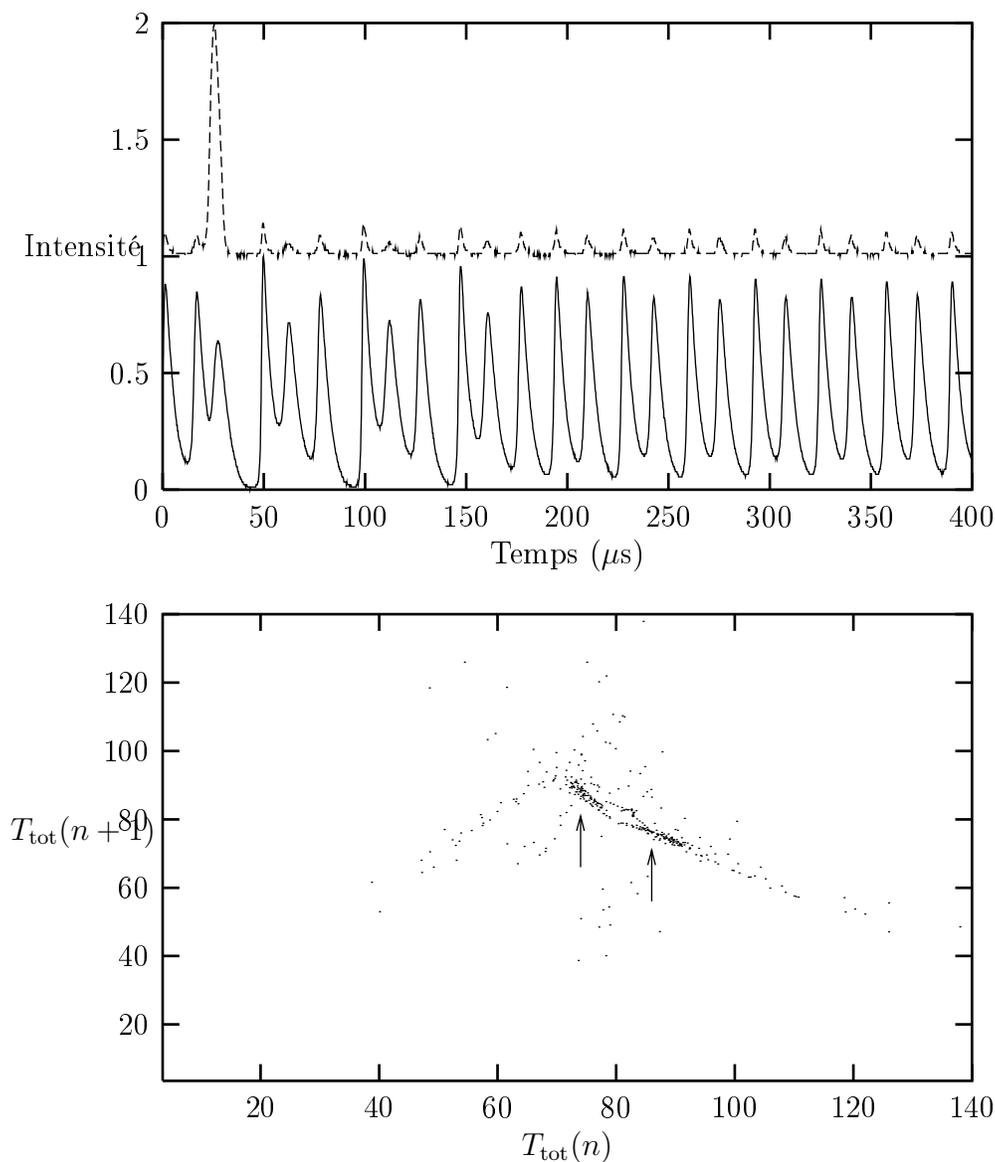


FIGURE 2.19 – Création d'un régime chaotique transitoire en partant d'oscillations 2T. En haut, l'évolution temporelle des intensités, avec le régime permanent 2T. En bas, le diagramme de premier retour de I_2 met en évidence un nuage de points situé autour des deux points (voir flèches) caractéristiques d'un régime 2T. Les paramètres expérimentaux sont : $i_1 = 16\text{mA}$, $i_2 = 12\text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 10 \text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 0.5 \text{ Torr}$.

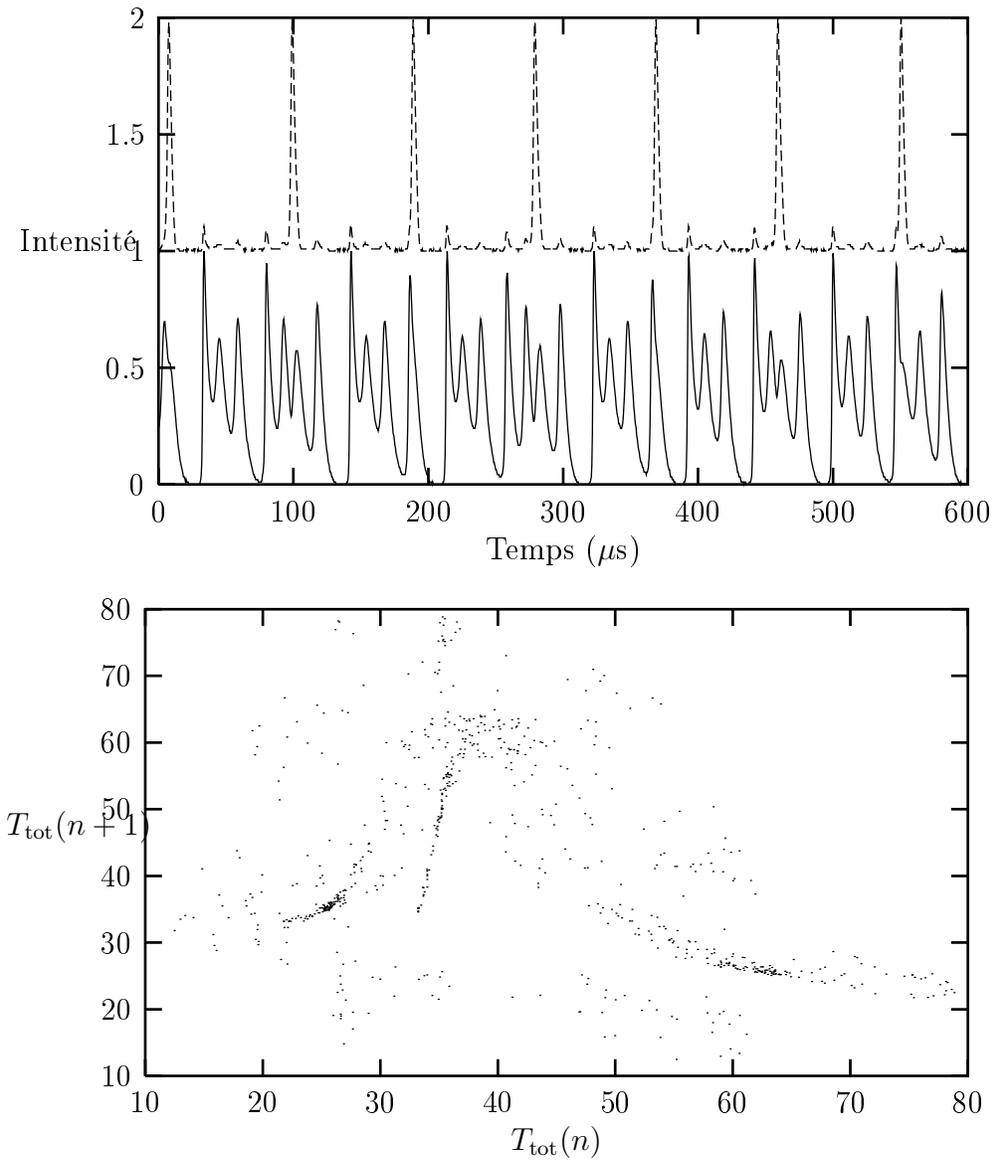


FIGURE 2.20 – Régime chaotique transitoire. La réduction de la période de L_1 empêche L_2 de revenir sur son état non-couplé $2T$. Dans le diagramme de premier retour les deux points ont disparu, seule subsiste la structure en double branche typique du chaos d'un LAS. Les paramètres expérimentaux sont identiques à ceux de la figure 2.19.

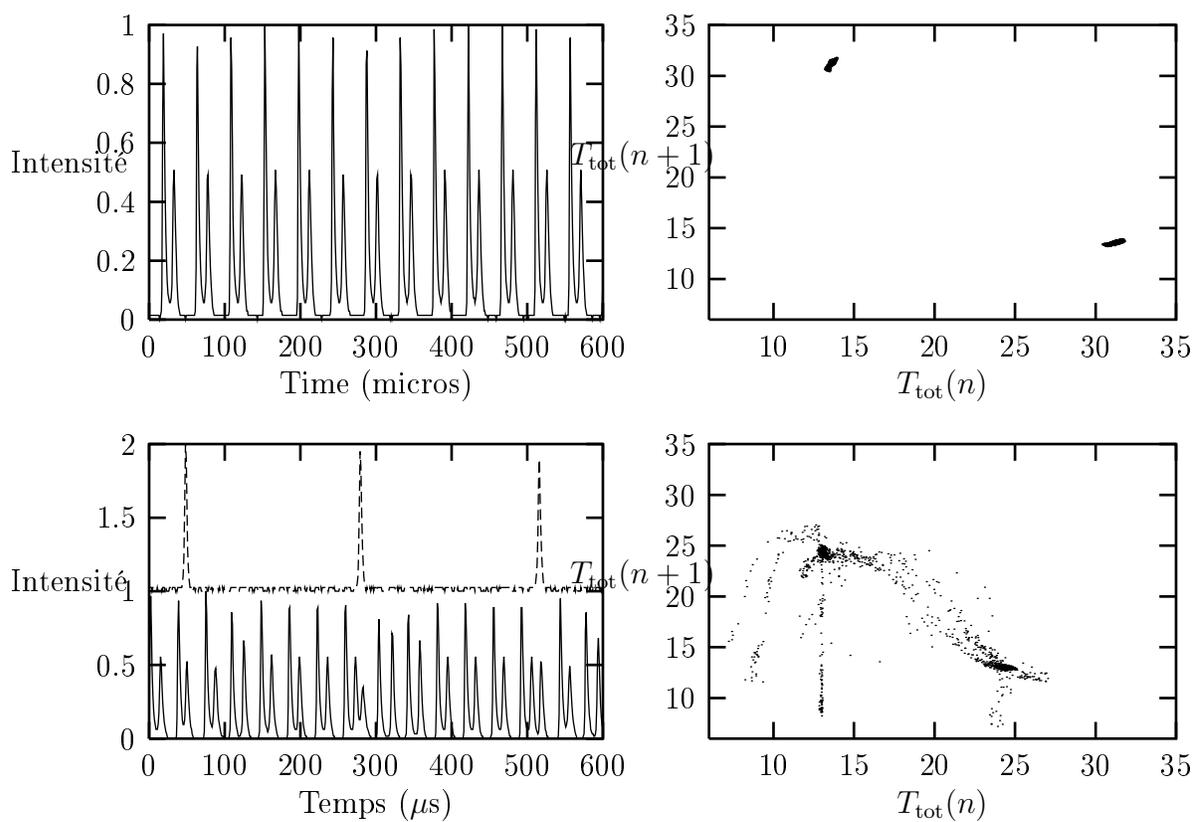


FIGURE 2.21 – Création d'un régime chaotique transitoire à partir d'impulsions périodiques $P^{(1)}$. Comme dans la figure 2.20, les deux points du régime non-couplé coexistent avec la structure en double branche. Les paramètres expérimentaux sont : $i_1 = i_2 = 16\text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 5 \text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 2.5 \text{ Torr}$.

Nous avons retrouvé le même effet en choisissant pour L_1 un régime périodique $P^{(1)}$ (figure 2.21). En absence de couplage, le diagramme de premier retour est composé de deux points, que l'on retrouve dans le système couplé, entouré d'un nuage de points provenant du régime transitoire, qui se situe sur la structure chaotique naissante.

Une troisième expérience effectuée avec L_1 non-couplé en régime chaotique a donné le même type de résultat que dans les cas précédents, c'est-à-dire un diagramme en double branche entouré d'un nuage de points. Toutefois, il est intéressant de noter que l'augmentation du paramètre de pompe du laser impulsionnel L_2 (réduction de sa période) stabilise le régime chaotique en un régime périodique, comme nous l'indique le diagramme de premier retour, formé de points bien isolés (figure 2.22).

2.5 Régimes non pulsés

Nous nous intéressons maintenant aux régimes dans lesquels la dynamique de L_2 s'écarte nettement de la solution $P^{(0)}$ ou $P^{(n)}$.

2.5.1 Oscillations

Les régimes d'oscillations périodiques en phase (figure 2.23) et en opposition de phase (figure 2.24) représentent deux modes classiques du couplage d'oscillateurs faiblement non linéaires. Ils se situent près de la deuxième bifurcation de Hopf des deux lasers. Notons que les oscillations en opposition de phase sont très difficiles à obtenir. Dans le diagramme de stabilité de la figure 1.6, nous n'avons retrouvé numériquement que le régime d'oscillation en phase et non celui en opposition de phase. Il est possible qu'en faisant varier les paramètres, ce régime puisse être reproduit, mais le nombre de paramètres ne permet pas d'en entreprendre une recherche exhaustive.

2.5.2 Régimes continus

Le cas le plus simple est celui de l'interaction des deux lasers en régime continu. Intuitivement, on s'attend à trouver un régime couplé continu, dans lequel les deux lasers coopèrent pour saturer l'absorbant. Même faible, nous nous attendons à une variation des valeurs stationnaires des intensités. Cependant, les mesures expérimentales n'ont montré aucune modification détectable. Ce résultat est à relier à la sous-estimation de la saturabilité de l'absorbant (voir la section 1.3). En réalité, l'absorbant se sature à bas niveau et dès qu'un laser est continu l'autre n'a plus d'effet notable.

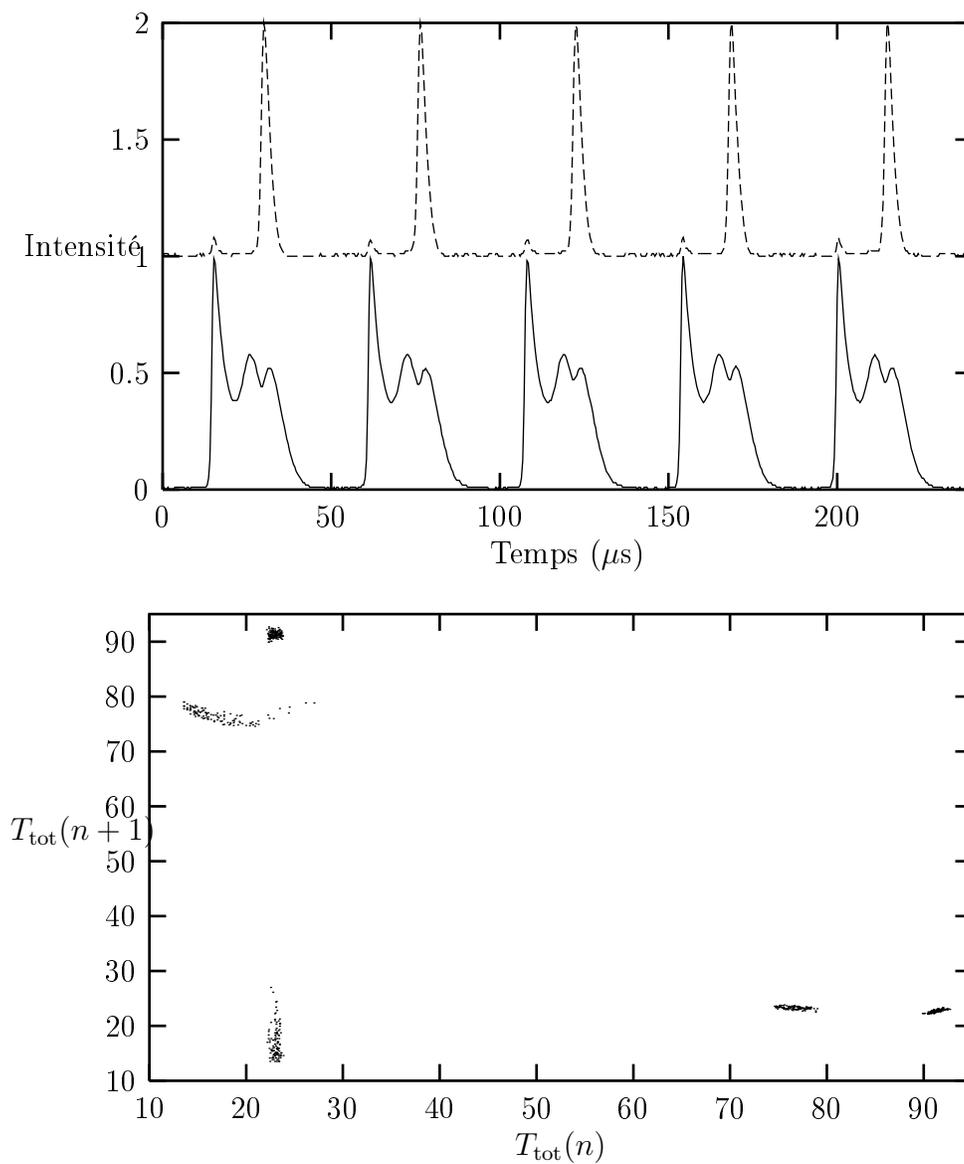


FIGURE 2.22 – Stabilisation par couplage du régime chaotique de L_2 . Les deux lasers se sont synchronisés et la structure chaotique a disparu : le diagramme de premier retour est caractéristique d'un régime périodique. Les paramètres expérimentaux sont : $i_1 = 12\text{mA}$, $i_2 = 16\text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 10 \text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 1 \text{ Torr}$.

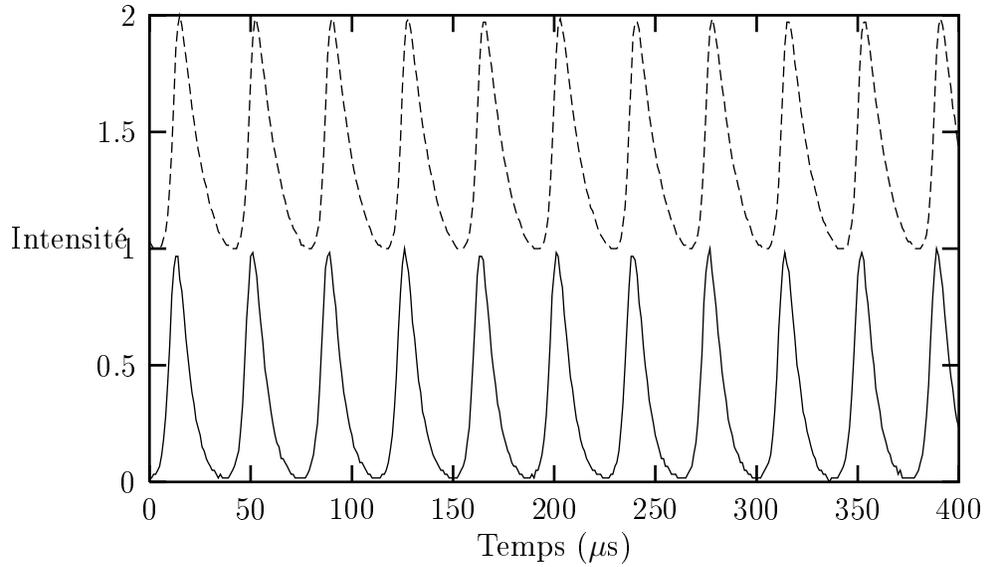


FIGURE 2.23 – Oscillations en phase du système couplé. Ce régime est couramment rencontré dans le couplage d'oscillateurs faiblement non linéaires ($\nu = 26.5\text{kHz}$). Les paramètres expérimentaux sont : $i_1 = 20\text{mA}$, $i_2 = 16\text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 10\text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 1\text{ Torr}$.

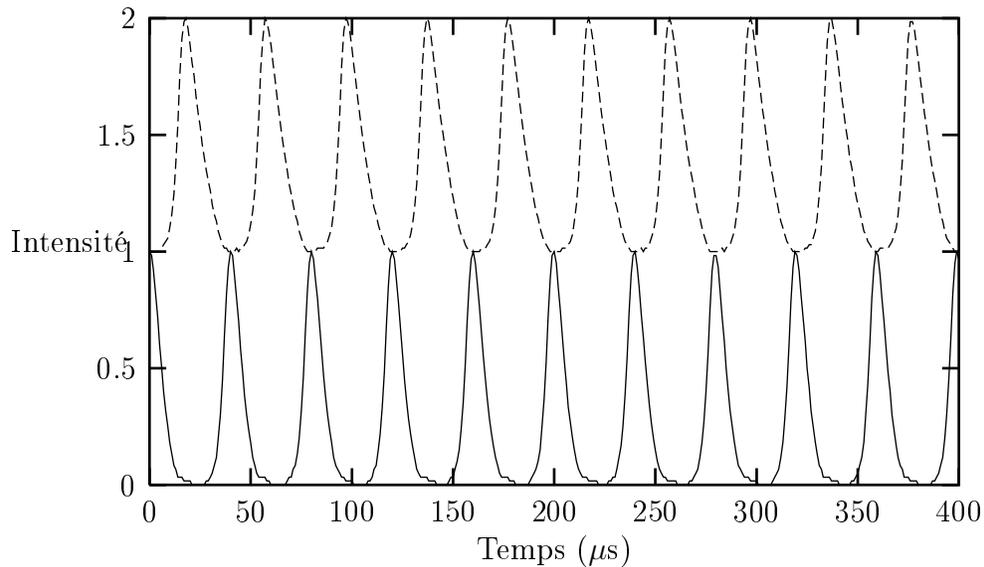


FIGURE 2.24 – Oscillations hors de phase du système couplé. Ce régime est très difficilement obtenu dans notre système ($\nu = 25\text{ kHz}$). Les paramètres expérimentaux sont : $i_1 = i_2 = 16\text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 10\text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 1\text{ Torr}$.

Contrairement à notre intuition, nous avons trouvé, près de la deuxième bifurcation de Hopf, des situations où les deux lasers continus se couplent en donnant naissance à des oscillations. Cet effet montre que notre modélisation du couplage ne reproduit pas toujours l'expérience. En effet, dans les simulations numériques, le couplage des deux lasers en régime continu donne toujours un régime continu (cf. le diagramme de la figure 1.6).

2.5.3 Chaos synchronisé

Un régime souvent rencontré dans le couplage d'oscillateurs non linéaires est celui du chaos synchronisé. Dans notre système, nous avons observé deux types différents de chaos synchronisé (figures 2.25 et 2.27). Le premier a été obtenu pour des paramètres proches de ceux des oscillations en opposition de phase alors que les lasers non couplés émettent en régime continu. Les intensités des deux lasers couplés ont la même évolution temporelle et les diagrammes de premier retour, calculés sur les deux signaux, nous permettent d'identifier un comportement chaotique de chacun des deux lasers. De plus, la synchronisation des deux oscillateurs fait apparaître un délai. Ce type de comportement est caractéristique de la synchronisation de deux oscillateurs non identiques couplés de façon symétrique, appelée "*lag synchronization*", décrite théoriquement et observé dans [45, 62].

Nous introduisons la fonction de similitude $S(\tau)$ comme la mesure de l'écart quadratique moyen entre les deux intensités en fonction du retard τ entre celles-ci et nous cherchons le minimum de cette fonction.

$$S^2(\tau) = \frac{\langle [I_2(t + \tau) - I_1(t)]^2 \rangle}{\sqrt{\langle I_1^2(t) \rangle \langle I_2^2(t) \rangle}} \quad (2.5)$$

Si les deux signaux sont indépendants, leur différence est du même ordre de grandeur que les signaux eux-mêmes, à savoir $S(\tau) \sim 1$ quel que soit τ . Si les deux signaux sont identiques, $S(\tau)$ atteint sa valeur minimale nulle pour $\tau = 0$.

Dans le cas de la figure 2.25, le minimum est atteint pour $\tau = 0.4\mu s$, mettant en évidence un régime de synchronisation retardé. La valeur $S(0.4)$ ne s'annule pas en raison du non étalonnage des détecteurs utilisés dans l'expérience. Nous observons sur $S(\tau)$ des minima secondaires espacés de $54\mu s$, qui correspondent à la période des impulsions $P^{(2)}$, majoritaires dans le régime chaotique.

Le deuxième type de chaos synchronisé correspond au couplage des deux lasers initialement périodiques $P^{(1)}$. Contrairement au cas précédent, les impulsions du régime chaotique ont des trains d'oscillations beaucoup plus longs

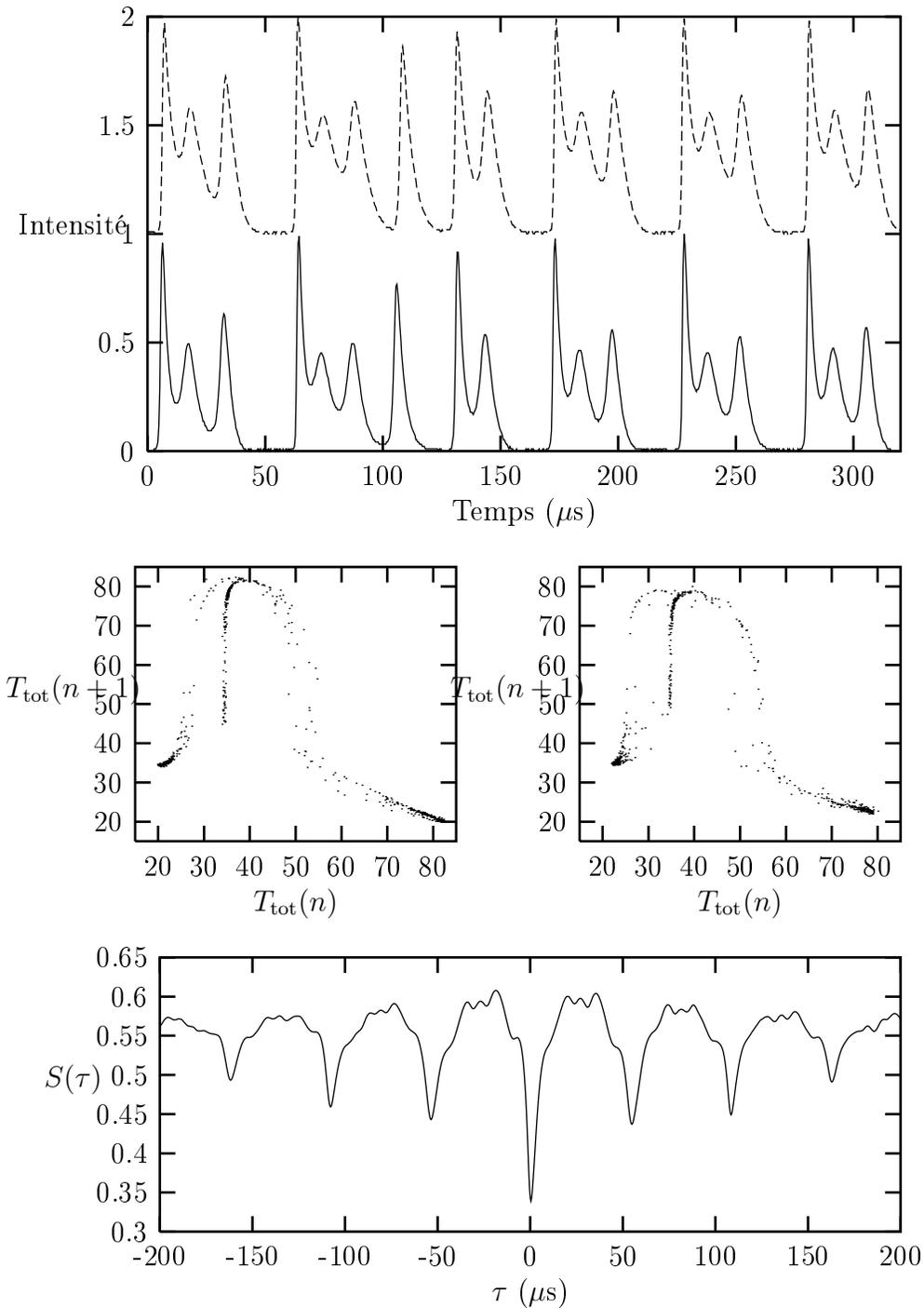


FIGURE 2.25 – Premier type de chaos synchronisé. Evolution temporelle des deux intensités. Diagrammes de premier retour typiques d'un LAS identiques sur les deux intensités. Fonction de similitude mettant en évidence un régime de synchronisation retardé de $\tau = 0.4\mu\text{s}$. Les paramètres expérimentaux sont : $i_1 = 20\text{mA}$, $i_2 = 16\text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 10 \text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 1 \text{ Torr}$.

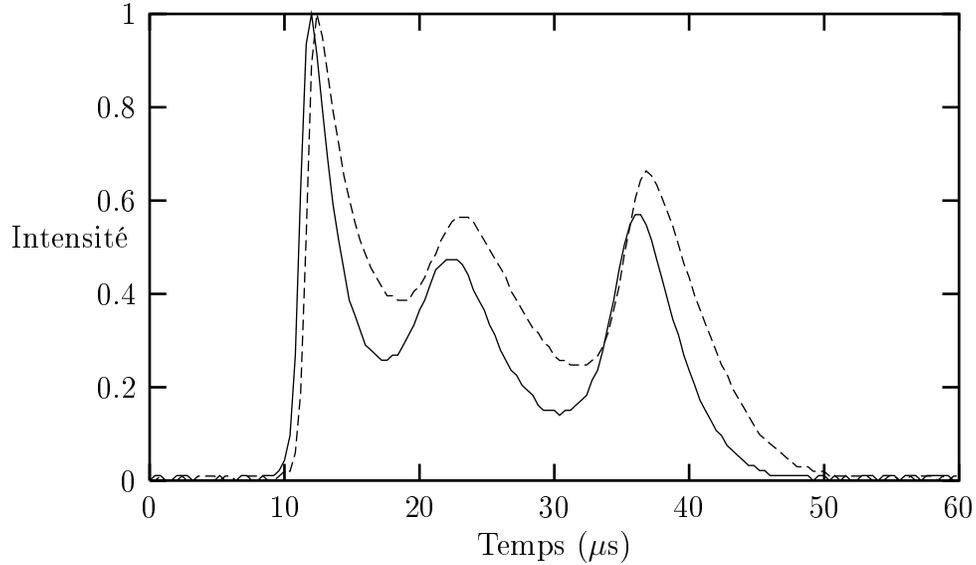


FIGURE 2.26 – Chaos synchronisé : mise en évidence du retard $\tau = 0.4\mu\text{s}$ trouvé par la recherche du minimum de la fonction $S(\tau)$.

($P^{(10)}$ - $P^{(20)}$ au lieu de $P^{(1)}$ - $P^{(3)}$). La fonction de similitude présente des minima secondaires espacés de $16\mu\text{s}$, ce qui correspond à la période des oscillations.

La figure 2.28 montre un autre type de dynamique chaotique, confirmée par les diagrammes de premier retour, dans lequel les deux lasers ne suivent pas la même évolution. L_1 émet des oscillations de faible amplitude, sans jamais s'approcher du plan critique $I_1 = 0$. Cependant, la fonction de similitude, calculée pour ce régime montre un minimum global, de valeur comparable à ceux des deux cas précédents, pour $\tau = -14\mu\text{s}$.

2.5.4 Régimes quasipériodiques

Les figures 2.29 et 2.30 illustrent deux régimes quasipériodiques du système couplé. Le caractère quasipériodique est mis en évidence par les diagrammes de premier retour, qui montrent une structure fermée. Dans les deux cas les lasers ne sont pas entièrement synchronisés : en effet, on retrouve une synchronisation par intermittence analogue à celle de la figure 2.15, avec la différence qu'il ne s'agit pas ici d'impulsions $P^{(0)}$.

Les spectres de Fourier des deux signaux donnent une indication sur le rapport entre les fréquences des deux lasers, qui se situe autour de $2/3$ pour la figure 2.29 et $5/4$ pour la figure 2.30. Ces régimes quasipériodiques existent

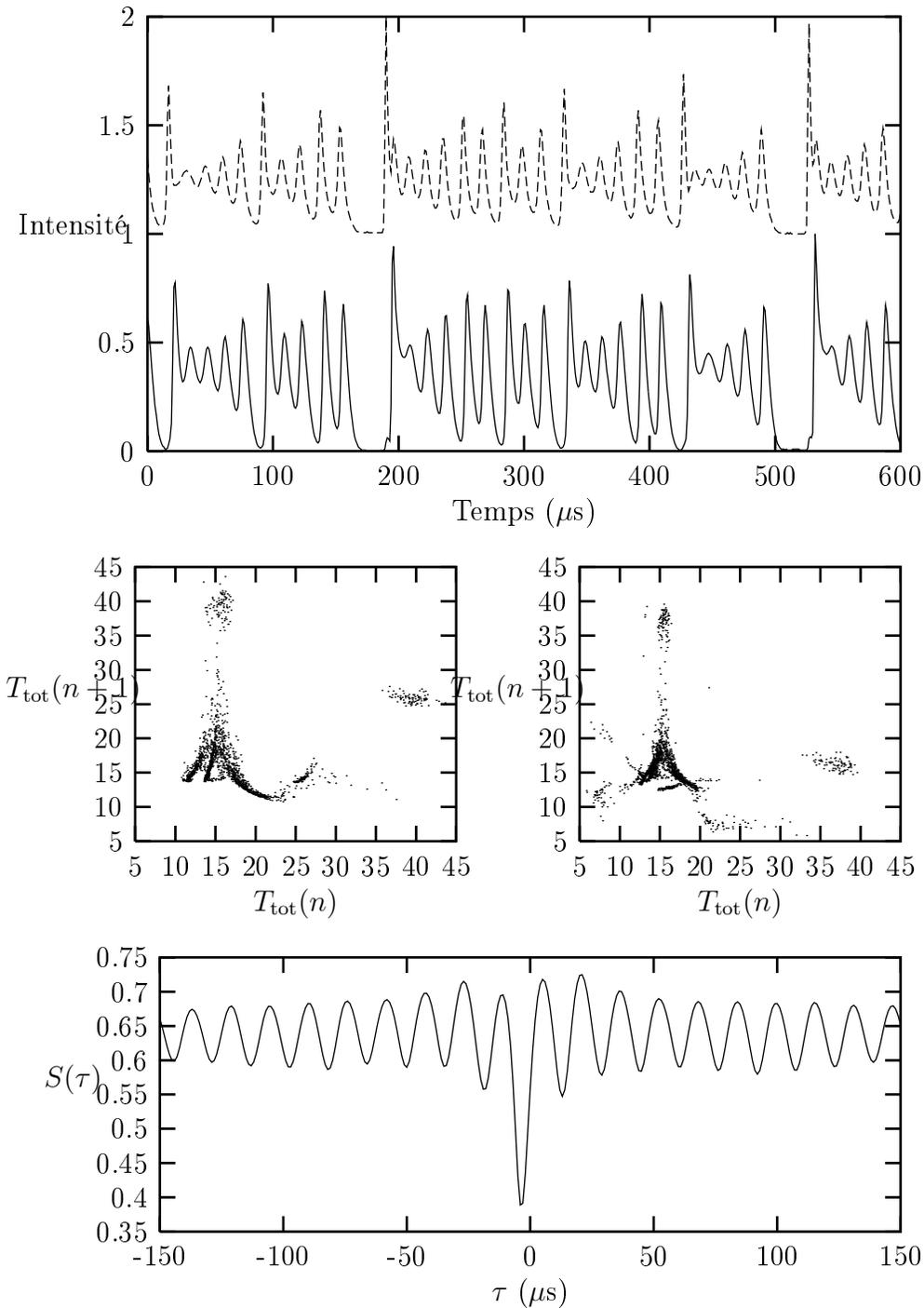


FIGURE 2.27 – Deuxième type de chaos synchronisé. Les diagrammes de premier retour construits à partir des deux signaux sont différents de ceux du premier type. L'étude de la fonction de similitude met en évidence un régime de synchronisation retardé de $\tau = -4\mu\text{s}$. Les paramètres expérimentaux sont : $i_1 = i_2 = 12\text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 15 \text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 0.5 \text{ Torr}$.

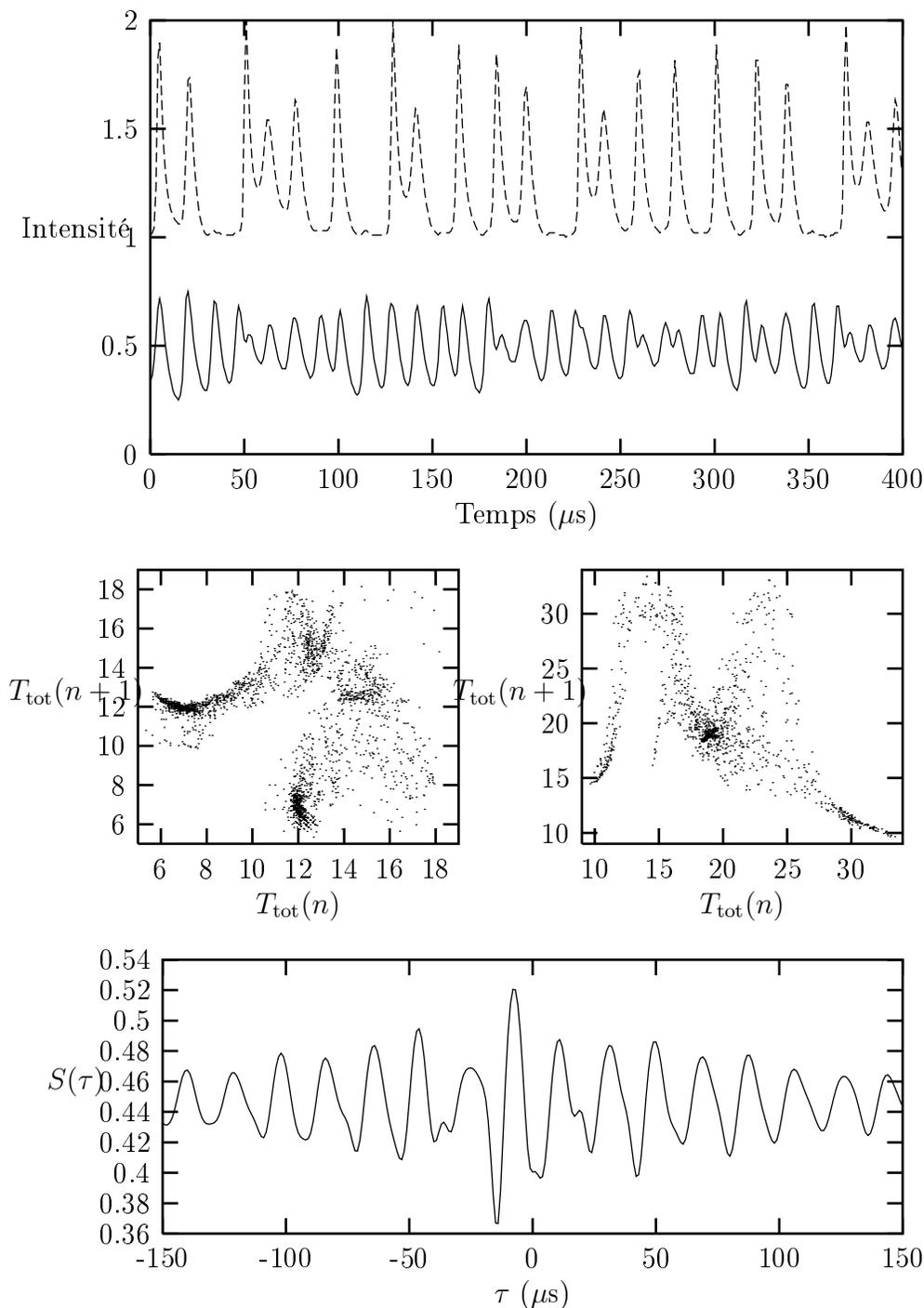


FIGURE 2.28 – Troisième type de chaos synchronisé. Les deux signaux temporels ne suivent pas la même évolution. Leur caractère déterministe est confirmé par les diagrammes de premier retour. La fonction de similitude $S(\tau)$ présente son minimum absolu pour $\tau = -14 \mu\text{s}$. Les paramètres expérimentaux sont : $i_2 = 16 \text{mA}$, $i_2 = 20 \text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 5 \text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 2.5 \text{ Torr}$.

dans une région étroite des paramètres, ce qui en rend difficile l'observation. Ils sont mis en évidence ici pour la première fois dans un système LAS. Nous ne sommes pas arrivés à les reproduire numériquement.

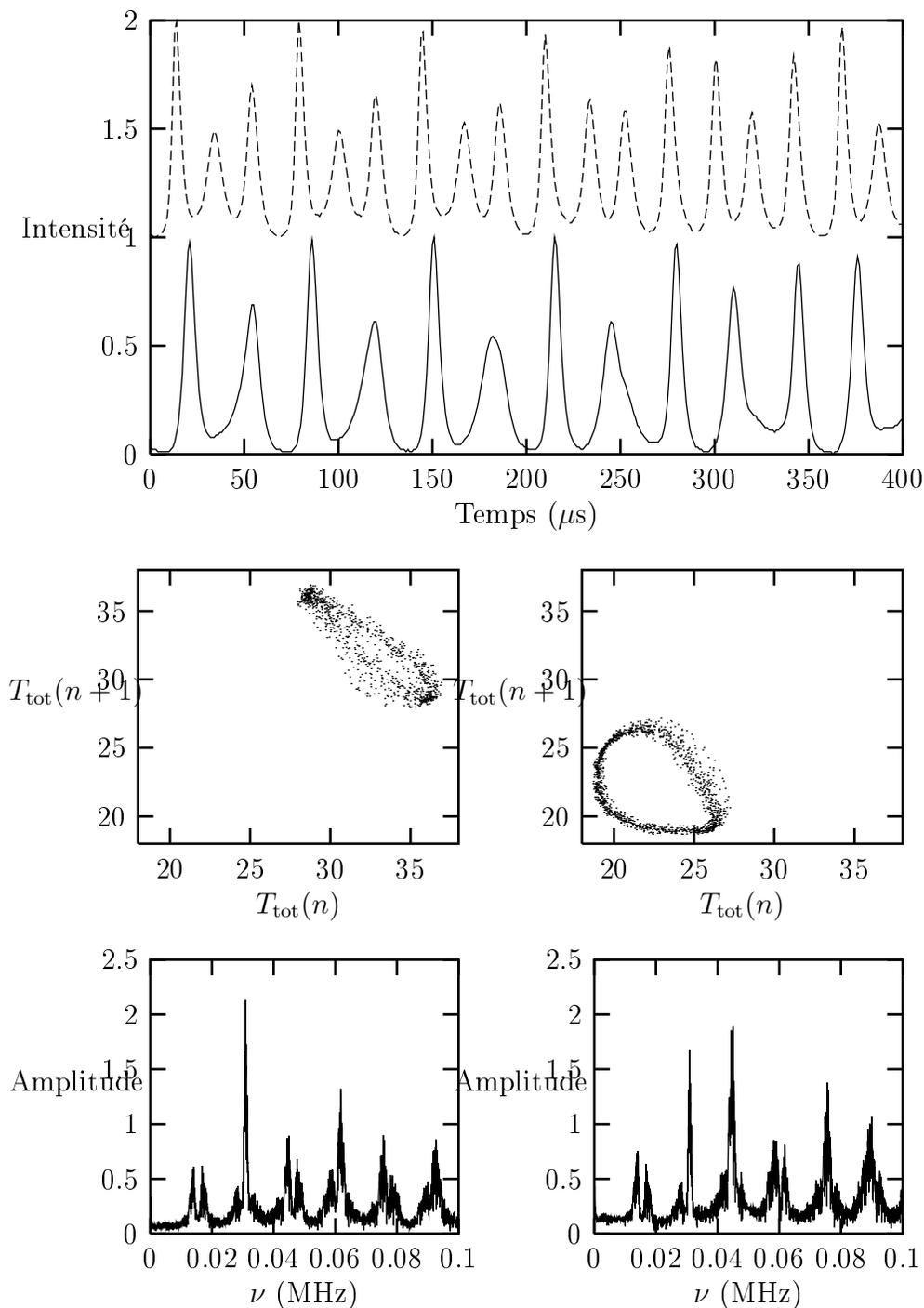


FIGURE 2.29 – Oscillations quasipériodiques 2 :3. Les diagrammes de premier retour montrent une figure fermée, représentative de la quasipériodicité. Les fréquences de pulsation des deux lasers sont visibles sur les spectres de Fourier. Les paramètres expérimentaux sont : $i_1 = i_2 = 15\text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 2\text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 3\text{ Torr}$.

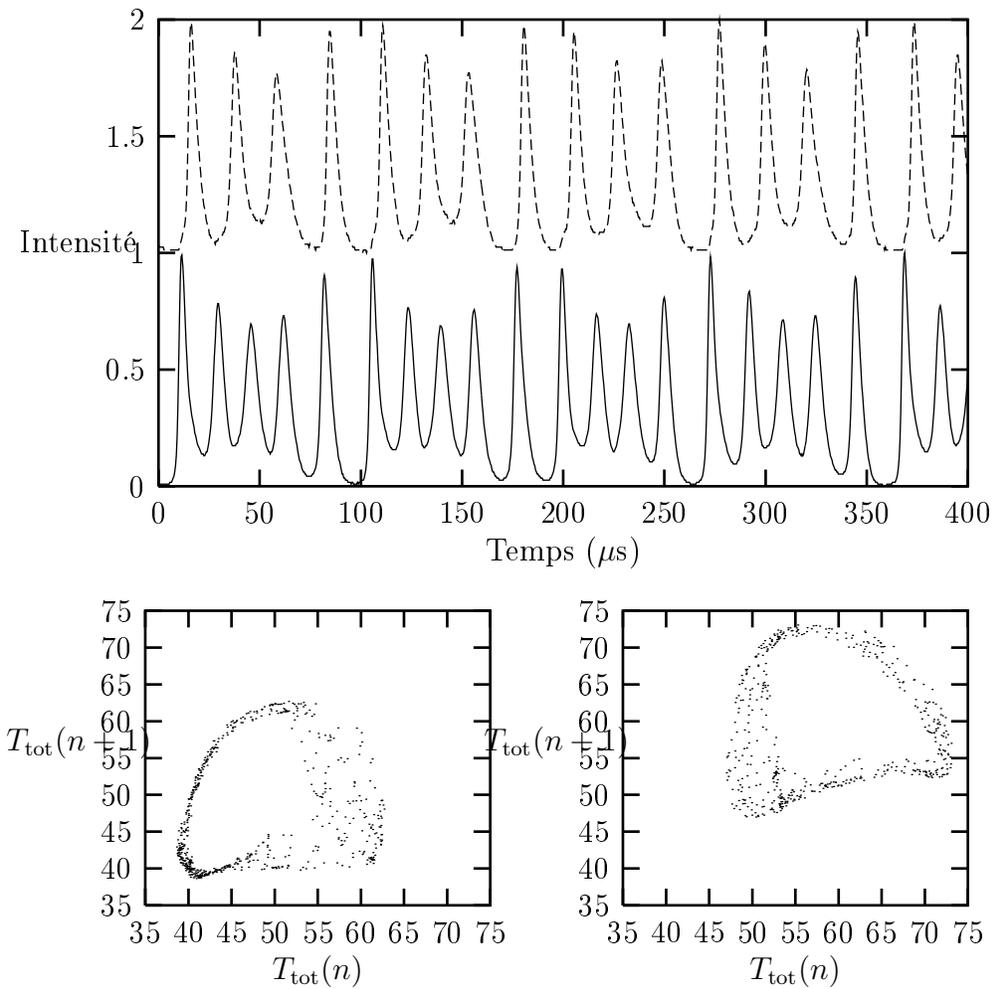


FIGURE 2.30 – Oscillations quasipériodiques 5 :4. Les paramètres expérimentaux sont : $i_1 = i_2 = 12\text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 4 \text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 1.5 \text{ Torr}$.

2.6 Dynamique des modes TEM₀₁ et TEM₁₀

Nous considérons ici le couplage des deux LAS oscillant chacun sur les deux modes transverses de la famille $q = 1$. Dans cette configuration, l'effet du couplage est bien plus complexe que pour les modes fondamentaux. En particulier, nous avons deux types de couplage :

- le couplage coopératif entre les modes TEM₀₁ (ou TEM₁₀) des deux lasers, qui agit de la même façon que dans la configuration précédente.
- le couplage entre les modes TEM₀₁ et TEM₁₀ d'un même LAS. Ici, le couplage dépend du degré de recouvrement des modes et son action repose à présent sur l'absorbant (couplage coopératif) et sur le milieu actif (couplage compétitif). Il est important de noter que même si les modes TEM₀₁ et TEM₁₀ sont orthogonaux, comme les effets de saturation dépendent des intensités, le couplage est non nul.

Dans tous les milieux, nous négligeons les effets éventuels de diffusion moléculaire transverse sur le couplage des modes.

Dans cette configuration, la dynamique est encore plus riche qu'avec les modes fondamentaux. Néanmoins, nous retrouvons des comportements comme la synchronisation d'impulsions déjà rencontrée précédemment. Des régimes nouveaux ont été observés, mais leur complexité associée à l'impossibilité de mesurer complètement leur évolution, nous empêche d'en fournir une analyse exhaustive.

Parmi l'ensemble des régimes observés, l'un d'entre eux a attiré notre attention à cause de sa ressemblance avec la déstabilisation de l'état continu (cf. section 2.4.1). Non couplé, L₂ est en régime continu et L₁ oscille près du seuil, dans un régime appelé P⁽¹⁾A [42], dont les deux maxima sont décalés de 13 μ s. Les levées de dégénérescence entre les modes de chaque laser, respectivement 1.3 MHz pour L₁ et 2.8 MHz pour L₂, sont très différentes de la fréquence de relaxation (~ 70 KHz). En conséquence, la modulation des amplitudes modales à la fréquence de battement est négligeable [63].

Lors du couplage, nous observons sur L₂ des oscillations de relaxation vers l'état stable (figure 2.31). L'irrégularité de l'enveloppe de ces oscillations de fréquence 68 KHz, dérive d'une modulation basse fréquence visible sur les spectres de Fourier (~ 40 KHz), qui provient de l'interaction des deux modes. Cette fréquence est invisible sur la somme des deux signaux (figure 2.32), ce qui indique la présence d'une dynamique d'antiphase, phénomène étudié analytiquement et expérimentalement pour les modes longitudinaux d'autres systèmes [64, 65, 66, 67].

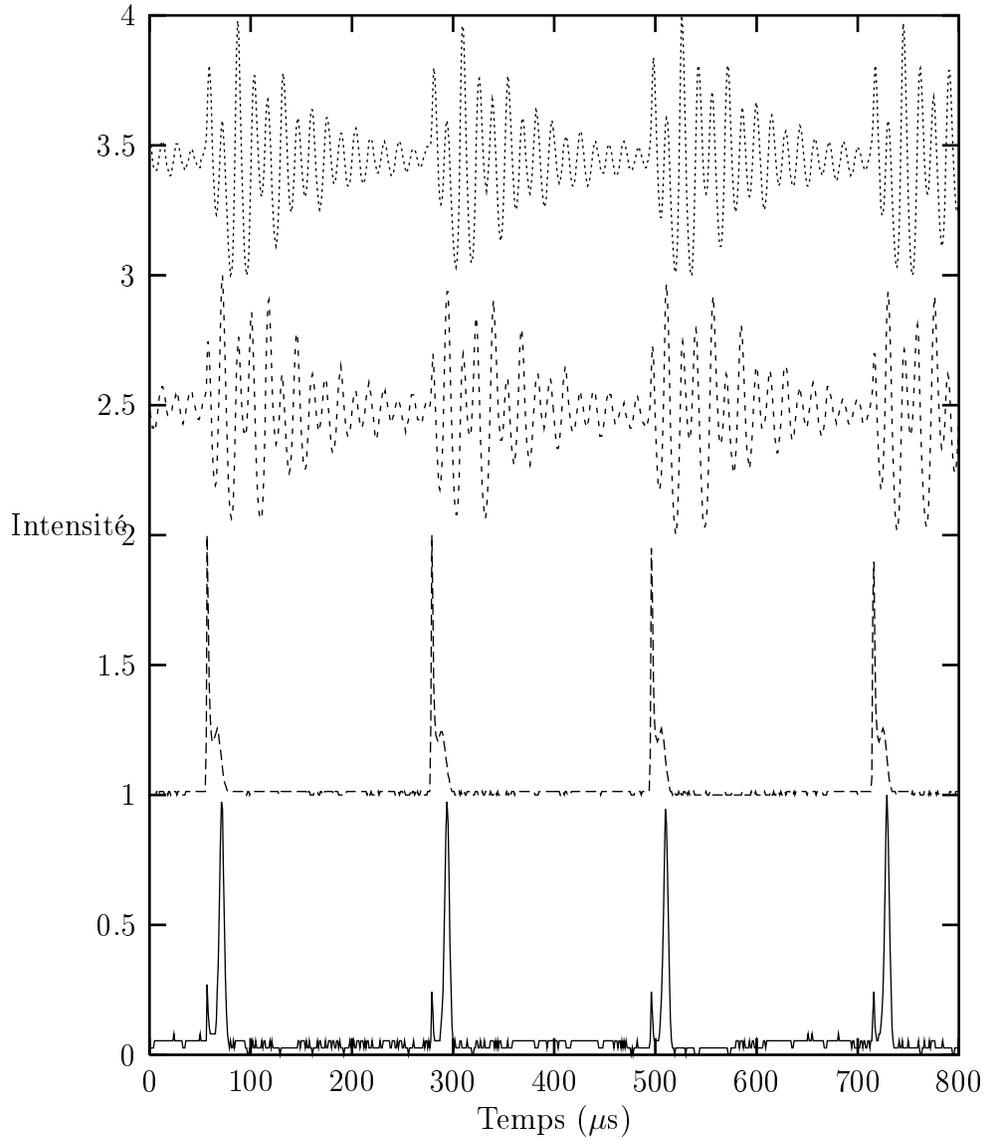


FIGURE 2.31 – Perturbation de l'état continu de L_2 par les impulsions de L_1 . En bas, les impulsions $P^{(0)}$ des modes de L_1 , en haut, les oscillations de relaxation des modes de L_2 vers l'état continu. Les paramètres expérimentaux sont : $i_1 = 12\text{mA}$, $i_2 = 20\text{mA}$, $P(\text{SF}_6) = 5 \text{ mTorr}$ et $P(\text{He}) = 3 \text{ Torr}$.

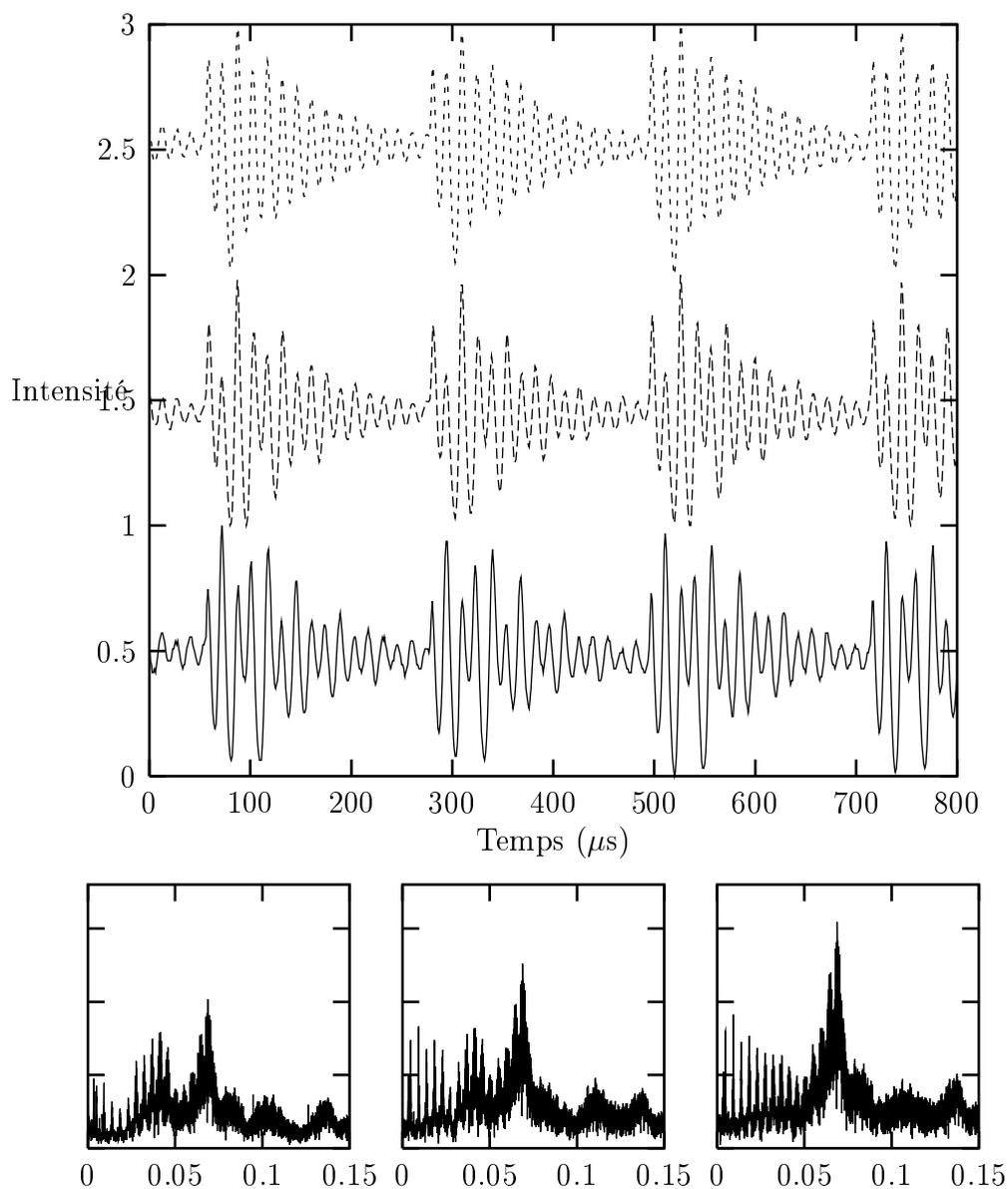


FIGURE 2.32 – Mise en évidence de la dynamique d’antiphase entre les oscillations de L_2 . En haut, la somme des intensités des modes de L_2 , représentées en bas. Les transformées de Fourier des signaux montrent, une dynamique antiphase de basse fréquence, invisible sur la somme des signaux.

2.7 Conclusion

Cette étude expérimentale et numérique, a mis en évidence la particularité du couplage introduite par un absorbant intracavité partagé par deux lasers. La richesse dynamique du LAS nous a permis d'étudier le couplage dans plusieurs cas, en partant de la synchronisation d'impulsions sans structure jusqu'aux régimes plus complexes du LAS : impulsions avec structure et chaos.

L'étude a montré que le couplage est fortement dépendant du temps, et que l'on peut séparer les régimes observés en deux groupes principaux : régimes pulsés, où le couplage ressemble à une perturbation impulsionnelle réciproque entre les deux lasers et régimes oscillants ou quasi-continus, où le couplage est plus classique avec la présence d'oscillations en phase et en opposition de phase. Dans le premier groupe, l'effet de déstabilisation induit par l'interaction offre un moyen de visualiser les régimes transitoires du LAS. Au-delà des simples oscillations de relaxation, nous avons pu observer la naissance d'attracteurs chaotiques.

Une étude de la synchronisation entre les impulsions a montré l'importance du paramètre de pompe dans la phase de synchronisation. Nous avons montré expérimentalement et numériquement qu'une petite variation de ce paramètre peut donner naissance à une synchronisation des régimes périodiques avec déphasage des signaux. Cet effet a aussi été retrouvé dans les régimes chaotiques, comme prévu par les récentes études numériques [45, 62] du couplage de systèmes non identiques.

Les simulations numériques du modèle dérivé des modèles du LAS reproduisent la majorité des régimes observés expérimentalement. Néanmoins, pour reproduire la déstabilisation par couplage de deux régimes continus, nous estimons souhaitable une amélioration de la prise en compte de l'absorbant afin de compléter la description du système.

Equations aux amplitudes du LAS

Introduction

Dans le cadre de l'étude de la dynamique spatio-temporelle, nous présentons une étude analytique et numérique de la formation de structures dans un LAS.

Nous considérons un LAS de grande ouverture transverse, avec une cavité optique de type Fabry-Perot. Quand le nombre de Fresnel devient grand ($N > 100$), nous pouvons abandonner le développement en modes de la cavité et utiliser comme base les modes de Fourier dans le plan transverse. Ceci revient à considérer que notre système a une ouverture infinie, c'est-à-dire à négliger complètement les effets de bord. L'avantage de la base de Fourier réside dans la simplicité qu'elle offre pour exprimer le terme de diffraction (laplacien transverse). Notre analyse suit la démarche utilisée dans d'autres études de systèmes de grande ouverture [24, 25]. Le modèle choisi est celui de Zambon, introduit et décrit dans la section 1.2.2, avec la prise en compte des effets spatiaux [42].

Tout d'abord, nous montrons que l'analyse de stabilité linéaire de la solution nulle décrit l'effet de l'absorbant sur l'apparition des modes au seuil. En particulier, selon le signe de son écart en fréquence, l'absorbant peut inhiber ou favoriser l'apparition des structures. C'est un comportement semblable à celui du laser libre. Puis, une analyse faiblement non linéaire a été effectuée, afin d'étendre la validité des résultats de l'analyse de stabilité linéaire. Nous montrons que le LAS est décrit par une équation de Swift-Hohenberg couplé à une équation pour la population du milieu actif (cf. référence [25]) dans laquelle l'absorbant se manifeste sous forme d'un terme non linéaire additionnel, qui joue sur la stabilité des solutions.

Une comparaison des résultats numériques fournis par le modèle de Swift-Hohenberg et le système complet nous confirme la validité de ce modèle au voisinage du seuil et illustre la sélection effectuée par les termes non linéaires. Dans le cas du système complet, les simulations montrent ainsi la présence d'impulsions 2D progressives.

Chapitre 3

Analyse de stabilité linéaire

3.1 Modèle du LAS

Notre modèle du LAS est basé sur celui que propose Zambon et al. [50] dans le cadre de l'approximation de l'onde plane. Il est présenté dans la section 1.2.2 et utilise une description à trois niveaux pour le milieu actif et à deux pour l'absorbant. La population de l'absorbant est éliminée adiabatiquement en la considérant comme une variable rapide.

Ce modèle a déjà été étendu au cas d'un laser à plusieurs modes dans des travaux précédents [52, 63], en ajoutant dans les équations l'effet de la diffraction. Contrairement à ces travaux, dans lesquels l'équation aux dérivées partielles pour le champ était simplifiée en utilisant un développement en modes de la cavité (Gauss-Laguerre ou Gauss-Hermite), ici nous gardons la dépendance des variables spatiales afin de donner la description la plus complète possible de la dynamique transverse.

Les équations de départ sont :

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = -\kappa \left[\left(1 - i \frac{\mathcal{A}}{8} \nabla_{\perp}^2 + \bar{A} \frac{1 - i\delta}{1 + \delta^2 + a|F|^2} \right) F - AP \right] \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \gamma_{\perp} [FD - (1 + i\Omega)P] \quad (3.1b)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} = \gamma_{\parallel} \left[(\chi - D) - \frac{1}{2}(F^*P + P^*F) \right] - c_1(s - D) \quad (3.1c)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = -\gamma_1(s - D) \quad (3.1d)$$

où les variables F , P , D et s représentent respectivement le champ électrique à l'intérieur de la cavité, la polarisation du milieu actif, son inversion de population et l'effet du troisième niveau. Toutes ces variables dépendent des variables spatiales x, y . La dépendance en z a été éliminée dans l'approximation du champ moyen. L'opérateur ∇_{\perp}^2 est le Laplacien transverse $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

Les paramètres κ , γ_{\perp} , γ_{\parallel} et γ_1 sont respectivement, les taux de relaxation du champ électrique, de la polarisation, de l'inversion de population et de la variable auxiliaire. c_1 est la constante de couplage entre l'inversion de population et la variable auxiliaire. A et \bar{A} sont les coefficients d'amplification du milieu actif et d'absorption de l'absorbant en régime linéaire (c'est-à-dire en absence de saturation). χ est le paramètre de pompe, qui décrit la distribution spatiale du pompage. Dans notre cas, nous considérons un pompage uniforme, et donc un χ indépendant de l'espace. \mathcal{A} est le coefficient de diffraction, Ω et δ sont respectivement les écarts entre la fréquence de la cavité et la fréquence centrale de la transition du milieu actif et entre la cavité et la raie de l'absorbant. Ω et δ ne sont pas indépendants : en réalité

la différence de fréquence Δ entre les transitions est fixée. Nous avons donc une relation entre les écarts en fréquence : $\Delta = \Omega - \delta$.

Afin d'étudier le système d'équations 3.1, il est utile d'effectuer une série de changements de variable, pour présenter le système sous une forme faisant apparaître les équations du laser libre [25] auxquelles s'ajoutent des termes correctifs représentant la contribution de l'absorbant.

3.1.1 Changement de repère

Nous effectuons donc un changement d'échelle sur les variables, en introduisant $F = \sqrt{\gamma_\perp} e$, $P = \sqrt{\gamma_\perp} A^{-1} p$ et une échelle de temps $t = \tau \gamma_\perp$. Les variables du milieu actif D et s sont aussi renormalisées avec l'introduction de $n = (\chi - D)A$ et $m = (s - \chi)A$, ce qui permet d'écrire la solution d'intensité nulle sous la forme $e = p = n = m = 0$. Avec les nouvelles variables e , p , n et m , le système 3.1 devient :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \sigma e = i\mathcal{A}_1 \nabla_\perp^2 e + \sigma p - \sigma \frac{\bar{A}(1 - i\delta)}{1 + \delta^2 + a\gamma_\perp |e|^2} e \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (1 + i\Omega)p = (r - n)e \quad (3.2b)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + bn = \frac{1}{2}(e^* p + p^* e) + c_2(n + m) \quad (3.2c)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + cm = -cn, \quad (3.2d)$$

où nous avons défini $\sigma = \kappa/\gamma_\perp$, $\mathcal{A}_1 = \sigma\mathcal{A}/8$, $b = \gamma_\parallel/\gamma_\perp$, $c = \gamma_1/\gamma_\perp$, $c_2 = c_1/\gamma_\perp < 0$ et $r = A\chi$.

Nous pouvons maintenant introduire de nouveaux paramètres, dépendant de \bar{A} et δ , qui sont $\tilde{A} = \sigma\bar{A}/(1 + \delta^2)$ et $\Omega_{\text{LAS}} = \sigma\bar{A}\delta/(1 + \delta^2)$. Les équations deviennent alors :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \sigma e = i\mathcal{A}_1 \nabla_\perp^2 e + \sigma p \quad (3.3a)$$

$$-(\tilde{A} - i\Omega_{\text{LAS}}) \left(1 - \frac{a\gamma_\perp |e|^2}{1 + \delta^2 + a\gamma_\perp |e|^2} \right) e \quad (3.3b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (1 + i\Omega)p = (r - n)e \quad (3.3c)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + bn = \frac{1}{2}(e^* p + p^* e) + c_2(n + m) \quad (3.3d)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + cm = -cn \quad (3.3e)$$

Nous allons maintenant changer la fréquence de référence et ré-écrire les équations du champ et de la polarisation en fonction des nouvelles variables \tilde{e} et \tilde{p} :

$$\begin{aligned} e &= \tilde{e} e^{i\Omega_{\text{LAS}}t} \\ p &= \tilde{p} e^{i\Omega_{\text{LAS}}t} \end{aligned}$$

En introduisant $\delta_1 = 1 + \bar{A}/(1 + \delta^2)$ et $\Omega_G = \Omega + \Omega_{\text{LAS}}$, les équations deviennent (on a omis le symbole \sim pour alléger l'écriture, dans la mesure où ce changement de variables laisse invariant le module des nombres complexes) :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \sigma\delta_1 e = i\mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2 e + \sigma p \quad (3.4a)$$

$$+(\tilde{A} - i\Omega_{\text{LAS}}) \frac{a\gamma_{\perp} |e|^2}{1 + \delta^2 + a\gamma_{\perp} |e|^2} e \quad (3.4b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + [1 + i\Omega_G]p = (r - n)e \quad (3.4c)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + bn = \frac{1}{2}(e^*p + p^*e) + c_2(n + m) \quad (3.4d)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + cm = -cn \quad (3.4e)$$

Les deux paramètres δ_1 et Ω_G figurant dans 3.4 montrent deux effets importants introduits par l'absorbant :

- δ_1 remplace le terme de pertes (égal à 1 dans le laser libre). Il fait apparaître dans l'équation du champ e un terme supplémentaire \tilde{A} qui représente les pertes induites par l'absorbant. Comme on pouvait s'y attendre, ces pertes se traduisent par une augmentation du seuil de fonctionnement du laser.
- la présence de la fréquence Ω_{LAS} dans le paramètre Ω_G montre l'influence de l'absorbant sur la fréquence de fonctionnement du laser libre Ω . Etant donnée l'importance de Ω dans la formation de structures transverses, on s'attend à ce que l'absorbant joue un rôle dans la sélection de structures qui apparaissent au seuil de fonctionnement du LAS.

3.2 Analyse de stabilité linéaire de l'état d'intensité nulle

La solution du laser éteint, après les changements de variables, correspond au point de coordonnées ($e = p = n = m = 0$). Afin de déterminer le seuil du laser, nous effectuons une analyse de stabilité linéaire : cette analyse revient à approximer l'évolution du système dans le voisinage de la solution nulle par un système d'équations linéaires. Une fois le système linéarisé, nous savons que sa dynamique suivra une loi exponentielle soit convergente (solution stable), soit divergente (solution instable). La situation critique correspond à une solution stationnaire ou oscillante, ni atténuée, ni amplifiée.

Pour obtenir le système linéarisé, nous développons les équations au premier ordre autour de la solution et cherchons par la suite les valeurs des paramètres pour lesquels le système atteint l'état critique. En substituant dans le système la solution perturbée :

$$\begin{pmatrix} e \\ p \\ n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta e \\ \delta p \\ \delta n \\ \delta m \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

et en négligeant les termes non linéaires, nous obtenons :

$$\frac{\partial \delta e}{\partial t} + \sigma \delta_1 \delta e = i \mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2 \delta e + \sigma \delta p \quad (3.6a)$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} + [1 + i \Omega_G] \delta p = r \delta e \quad (3.6b)$$

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + b \delta n = c_2 (\delta n + \delta m) \quad (3.6c)$$

$$\frac{\partial \delta m}{\partial t} + c \delta m = -c \delta n \quad (3.6d)$$

Ces équations montrent que le système se sépare en deux sous-systèmes non couplés. Le premier est formé des équations du champ et de la polarisation, le deuxième des populations des niveaux du milieu actif. Nous traitons donc les deux sous-systèmes séparément. Les deuxième et quatrième équations nous permettent d'exprimer les valeurs de δp et δm , que nous injectons dans les première et troisième équations. Suite à cela, nous obtenons le système suivant :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (1 + i \Omega_G) \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} + \sigma \delta_1 - i \mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2 \right] \delta e = \sigma r \delta e \quad (3.7a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + b - c_2 \right) \delta n = -c_2 c \delta n \quad (3.7b)$$

Pour résoudre ce système, nous choisissons de développer le champ e sous forme d'une série de Fourier. Ce développement est valable dans le cas où les conditions aux bords sont celles de bords non absorbants, c'est-à-dire un laser dont les dimensions transverses sont infinies. Cette approximation est justifiée en considérant que, même en présence de bords absorbants, quand la taille transverse du système est importante par rapport aux longueurs d'onde transverses, l'effet du terme de diffraction loin des bords reste identique, et donc notre système décrit correctement le comportement du laser dans sa région centrale.

Les expressions de δe et δn compatibles avec ce type de développement s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\delta e &= e_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}+\lambda t} \\ \delta n &= n_0 e^{\eta t}\end{aligned}$$

où $\vec{k} \equiv (k_x, k_y)$ est le vecteur d'onde de la composante que nous étudions, $\vec{x} \equiv (x, y)$ le vecteur position, et λ et η les valeurs propres du système linéarisé.

En substituant δe et δn dans le système 3.7, nous obtenons les équations caractéristiques suivantes :

$$(\lambda + i\mathcal{A}_1 k^2 + \sigma\delta_1)(\lambda + 1 + i\Omega_G) - r\sigma = 0 \quad (3.8a)$$

$$(\eta + c)(\eta + b - c_2) + c_2 c = 0. \quad (3.8b)$$

Le fait que les racines η_- et η_+ de la deuxième équation soient toujours négatives, car le paramètre c_2 est négatif, ne donne lieu à aucune instabilité :

$$\begin{aligned}\eta_- \eta_+ &= cb > 0 \\ \eta_- + \eta_+ &= c_2 - b - c < 0\end{aligned}$$

Par contre, la première équation (3.8) donne deux relations pour les parties réelle et imaginaire de λ : $\Re(\lambda) = f(k^2, ..p..)$, $\Im(\lambda) = g(k^2, ..p..)$ (où $..p..$ représente tous les paramètres du système). Par la suite, nous fixerons tous les paramètres du système sauf le gain r , qui est choisi comme paramètre de contrôle.

Nous allons maintenant chercher la forme explicite de λ en fonction de k^2 et r : la résolution de l'équation $\Re(\lambda) = 0$ nous donne le seuil de fonctionnement r_c du système en fonction de la composante du vecteur d'onde \vec{k} . Le mode qui se déstabilise en premier est celui qui présente le seuil de fonctionnement r_c le plus faible (seuil de fonctionnement du laser). La résolution de $\Im(\lambda) = 0$ permet de déterminer la fréquence ν_c de chaque mode. Nous

obtenons les expressions analytiques suivantes :

$$r_c = \delta_1 \left[1 + \left(\frac{\mathcal{A}_1 k^2 - \Omega_G}{1 + \sigma \delta_1} \right)^2 \right] \quad (3.9a)$$

$$\nu_c = \frac{\sigma \delta_1 \Omega_G + \mathcal{A}_1 k^2}{1 + \sigma \delta_1} \quad (3.9b)$$

Les expressions de r_c et ν_c en fonction des paramètres du système d'origine sont données dans l'annexe A.1.

3.3 Création et inhibition de structures

Les équations (3.9) montrent que la courbe r_c en fonction de k^2 est une parabole : son minimum est atteint pour une valeur que nous appellerons k_c^2 , qui est le carré du vecteur d'onde associé au mode qui se déstabilise au seuil. Sa valeur est :

$$k_c^2 = \frac{\Omega_G}{\mathcal{A}_1} = \frac{1}{\mathcal{A}_1}[\Omega + \Omega_{\text{LAS}}] = \frac{1}{\mathcal{A}_1} \left[\Omega + \frac{\sigma \bar{A} \delta}{1 + \delta^2} \right] \quad (3.10)$$

Dans le cas limite $\bar{A} = 0$, nous retrouvons l'expression de k_c^2 du laser libre. Il existe alors deux types de solutions, avec ou sans structure au seuil. Le seul paramètre qui contrôle cet effet est l'écart en fréquence Ω : si Ω est positif, nous trouvons une valeur positive de k_c^2 , ce qui indique que le minimum de la courbe d'instabilité de la solution zéro correspond à une solution inhomogène (présence de structures). Par contre, si Ω est négatif, la position du minimum de la courbe est à $k^2 = 0$, et donne au seuil une solution homogène (absence de structures). Les Figures 3.1 et 3.2 sont représentatives des deux cas que nous venons d'exposer. Dans notre système à deux dimensions, les courbes de la Figure 3.1 représentent des coupes de la surface $r_c(k_x, k_y)$ le long d'une direction arbitraire qui passe par l'origine.

En introduisant l'absorbant, l'écart en fréquence Ω est remplacé par une valeur effective Ω_G , qui joue le même rôle que Ω pour le laser libre. La présence de Ω_{LAS} , fonction des paramètres \bar{A} et δ de l'absorbant, modifie la valeur de Ω_G , et permet de changer son signe, au point de faire apparaître ou disparaître les structures transverses.

Afin de comparer le laser libre et le LAS, nous avons étudié les différents cas qui se produisent en fonction des signes de Ω et δ . Premièrement, nous considérons $\Omega > 0$, c'est-à-dire une situation où le laser libre présente une structure transverse.

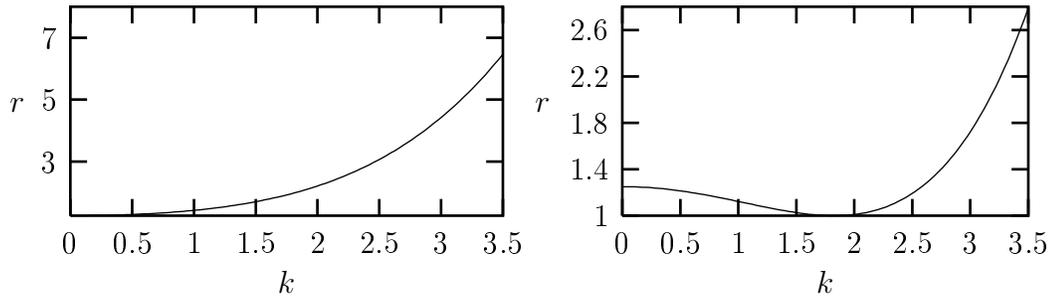


FIGURE 3.1 – Evolution du paramètre de pompe critique r_c en fonction de k , pour $\Omega = -1$ (gauche) et $\Omega = +1$ (droite).

(i) Si $\delta < 0$ (figure 3.3(a)), c'est-à-dire la fréquence du champ située entre celle du milieu actif et celle de l'absorbant, la présence de l'absorbant déplace k_c vers des valeurs de plus en plus faibles au fur et à mesure qu'augmente la valeur de \bar{A} , jusqu'au point où l'écart en fréquence Ω est compensé par δ et la structure disparaît complètement pour donner une solution homogène.

La figure 3.4 montre l'évolution typique des paramètres k_c , r_c , $\nu_c - \Omega_{\text{LAS}}$ et Ω_G en fonction de \bar{A} pour $\Omega = 1.2$ et $\delta = -0.8$. La disparition des structures est évidente dans la figure 3.4 : quand $\bar{A} > 2.5$, k_c s'annule et les structures disparaissent. Dans la partie inférieure de la figure 3.4 nous pouvons observer que le seuil r_c augmente avec \bar{A} , comme on peut s'y attendre dans un LAS. De plus, pour $\bar{A} < 2.5$, Ω_G est positif, et $\nu_c - \Omega_{\text{LAS}}$ est constant et égal à $\Omega = 1.2$ (cette valeur peut être calculée à partir des variables d'origine, cf. annexe A.1). Quand $\bar{A} > 2.5$, $\nu_c - \Omega_{\text{LAS}}$ devient une fonction de \bar{A} .

(ii) Si $\delta = 0$ (figure 3.3(b)), la raie de l'absorbant coïncide avec la fréquence du champ : l'effet sélectif disparaît, et l'absorbant contribue seulement à augmenter le seuil du laser.

(iii) Si $\delta > 0$ (figure 3.3(c)), la fréquence du champ est supérieure à celles du milieu actif et de l'absorbant. Dans ce cas, l'absorbant contribue à la formation de structures, en augmentant la valeur de k_c^2 et donc en favorisant la déstabilisation des modes d'ordre supérieur.

Une vision d'ensemble des différents cas est obtenue en traçant la dépendance de Ω_G ainsi que des paramètres critiques (r_c , ν_c et k_c) en fonction de Δ pour \bar{A} fixée (figure 3.5). Nous traçons l'évolution des paramètres ci-dessus pour des valeurs des paramètres identiques à la figure 3.4 et pour $\bar{A} = 2$. Nous pouvons observer l'effet de l'absorption sur le seuil r_c , qui montre un maximum pour $\Delta = \Omega = 1.2$, c'est-à-dire pour un absorbant résonnant avec le milieu actif. Autour de cette valeur, r_c suit une courbe approximativement lorentzienne.

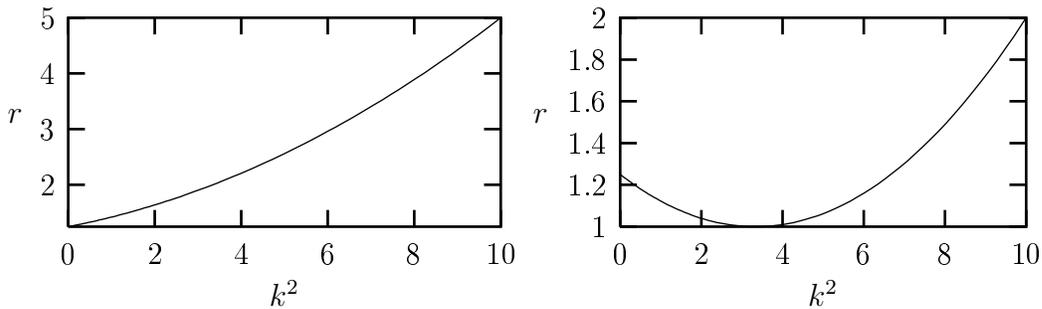


FIGURE 3.2 – Evolution du paramètre de pompe critique r_c en fonction de k^2 , pour $\Omega = -1$ (gauche) et $\Omega = +1$ (droite).

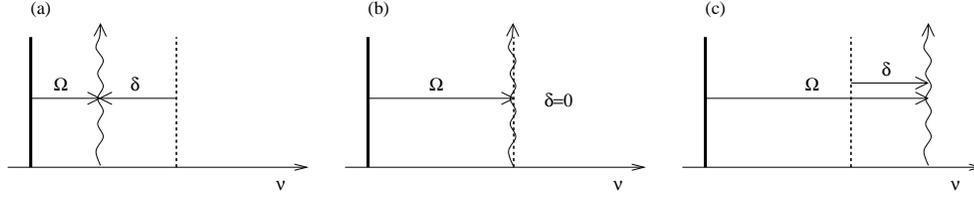


FIGURE 3.3 – Rôle de l'absorbant dans la sélection de la structure. Le trait plein indique la position de la raie du milieu actif, le pointillé la raie de l'absorbant et la flèche ondulée le champ électrique. Les trois cas correspondent à : Ω positif. (a) $\delta < 0$, la fréquence du champ électrique est entre les fréquences centrales du milieu actif et de l'absorbant. C'est une situation où l'absorbant inhibe la présence des structures. (b) $\delta = 0$, la fréquence du champ coïncide avec le centre de la raie de l'absorbant. C'est la situation dégénérée où aucune sélection n'est effectuée. (c) $\delta > 0$, la fréquence du champ est plus élevée que celle de l'absorbant. C'est une situation où l'absorbant favorise la présence de structures.

Les effets de création et d'inhibition sont présents respectivement pour $\Delta < 1.2$ et $\Delta > 1.2$. Les courbes de k_c et Ω_G montrent clairement ces régions : le point $\Omega_G = \Omega = 1.2$ marque la séparation : à gauche k_c a une valeur plus élevée que $k_{\text{theor}} = \sqrt{(\Omega/\mathcal{A}_1)} = 10.95$ (valeur de k_c en absence d'absorbant) et à droite k_c est toujours plus faible que k_{theor} . Nous trouvons aussi une région $\Omega_G < 0$, dans la plage $[1.8, 3.1]$ où les structures sont complètement inhibées ($k_c = 0$).

Considérons maintenant la situation où le laser libre présente une solution homogène au seuil ($\Omega < 0$).

(i) Si $\delta < 0$, l'absorbant n'affecte pas la sélection des structures : seul le seuil r_c augmente avec \bar{A} , mais la solution au seuil reste homogène.

(ii) Si $\delta = 0$, la situation est la même que dans le cas $\Omega > 0$, c'est-à-dire que l'absorbant n'a pas d'effet sur la structure.

(iii) Si $\delta > 0$, des valeurs importantes de \bar{A} donnent naissance à des structures transverses. La figure 3.6, illustre le cas $\delta = 4$ et $\Omega = -2$, pour lequel les évolutions des paramètres k_c et r_c sont représentées en fonction de \bar{A} . Comme dans le cas de l'inhibition, l'écart en fréquence Δ détermine également les intervalles de fréquence dans lesquels la création de structures peut se produire : dans la figure 3.7 nous montrons l'effet que Δ peut avoir sur les valeurs des paramètres au seuil.

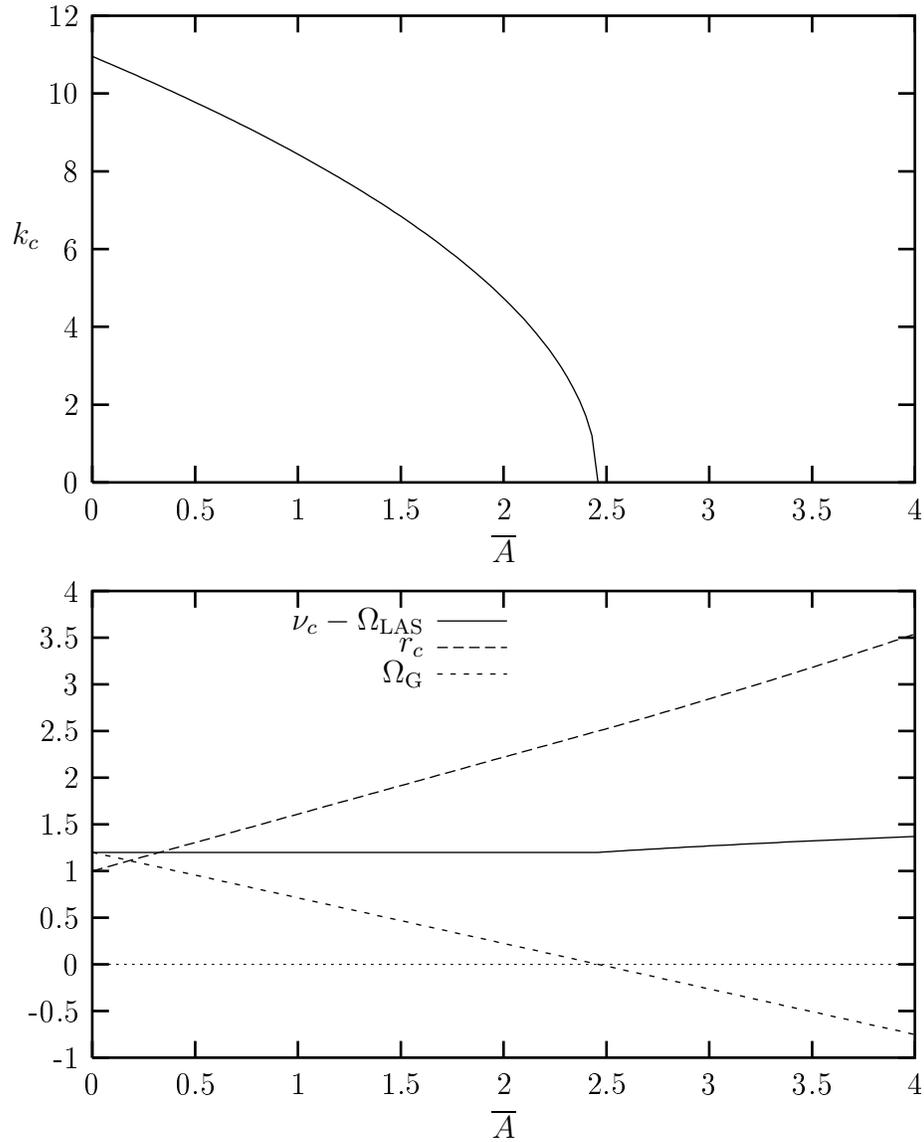


FIGURE 3.4 – Inhibition des structures transverses d'un LAS. En augmentant \bar{A} , la valeur de k_c diminue vers zéro. Ceci montre l'effet d'inhibition exercé par l'absorbant. Les valeurs des paramètres sont : $\sigma = 1$, $\Omega = 1.2$, $\Delta = 2$, $\mathcal{A}_1 = 0.01$.

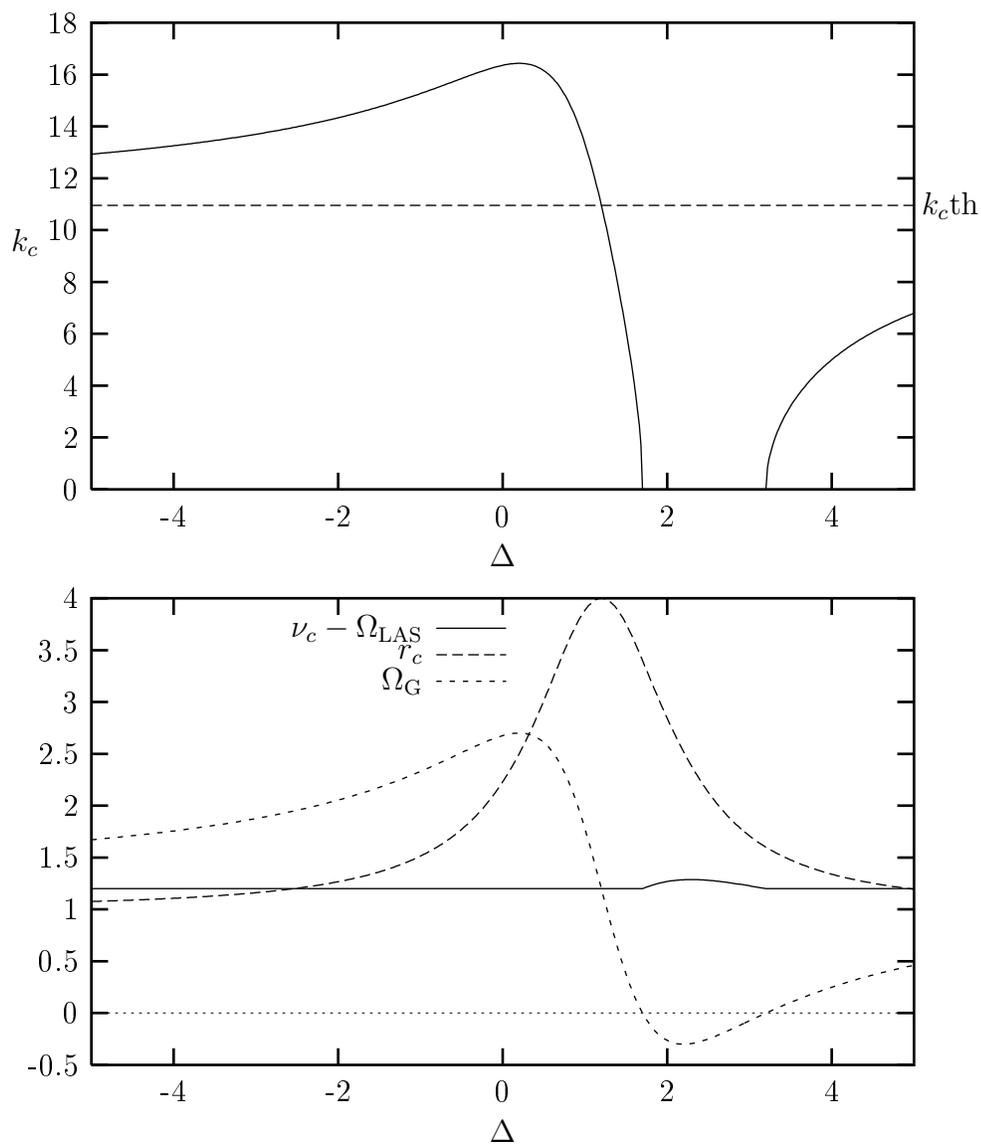


FIGURE 3.5 – Effet de l'écart en fréquence Δ sur la présence des structures. En suivant l'évolution de k_c on constate que l'écart en fréquence de l'absorbant joue un rôle important, permettant de passer d'une situation avec structures transverses à une solution homogène et vice versa. Les valeurs des paramètres sont : $\sigma = 1$, $\Omega = 1.2$, $\bar{A} = 2$, $\mathcal{A}_1 = 0.01$.

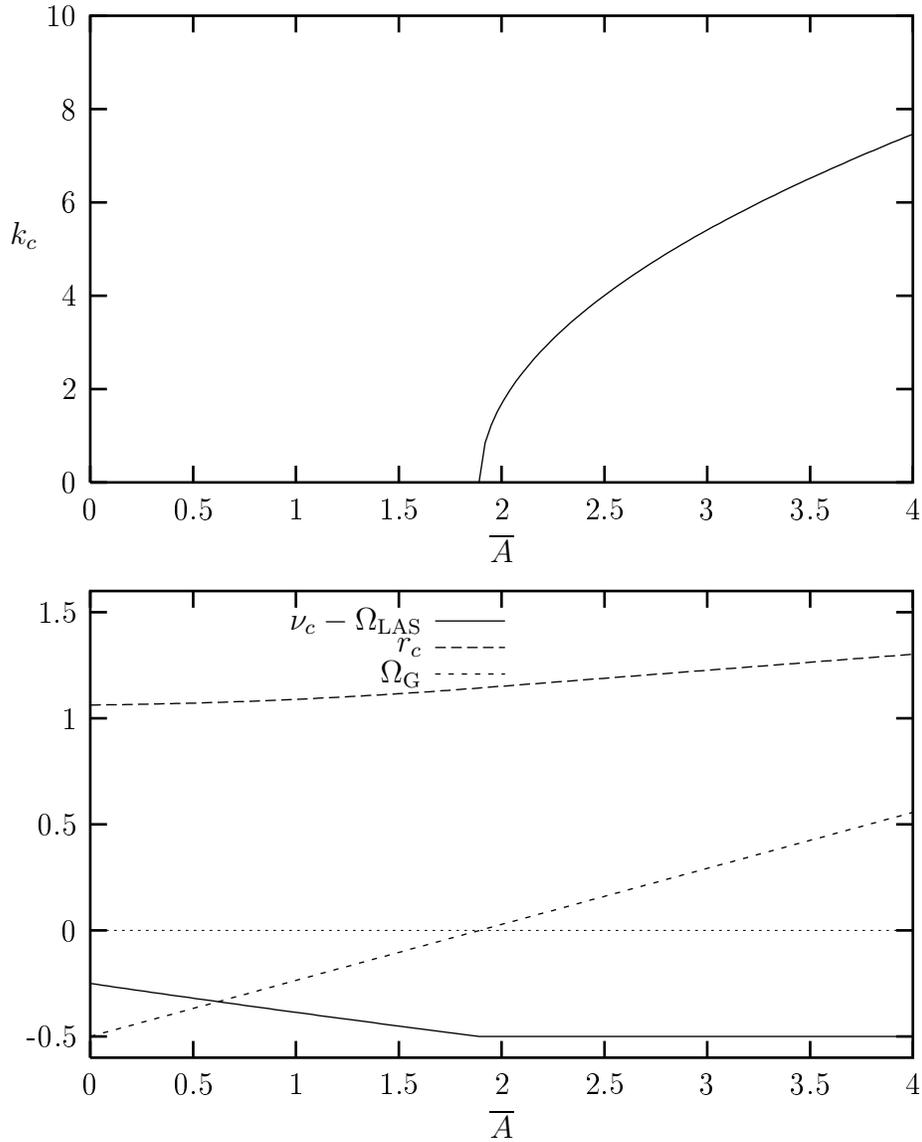


FIGURE 3.6 – Création des structures : on peut observer qu'en fonction de \bar{A} la valeur de k_c passe de zéro à une valeur positive, indication de présence des structures. Les valeurs des paramètres sont : $\sigma = 1$, $\Omega = -0.5$, $\Delta = -4$, $\mathcal{A}_1 = 0.01$.

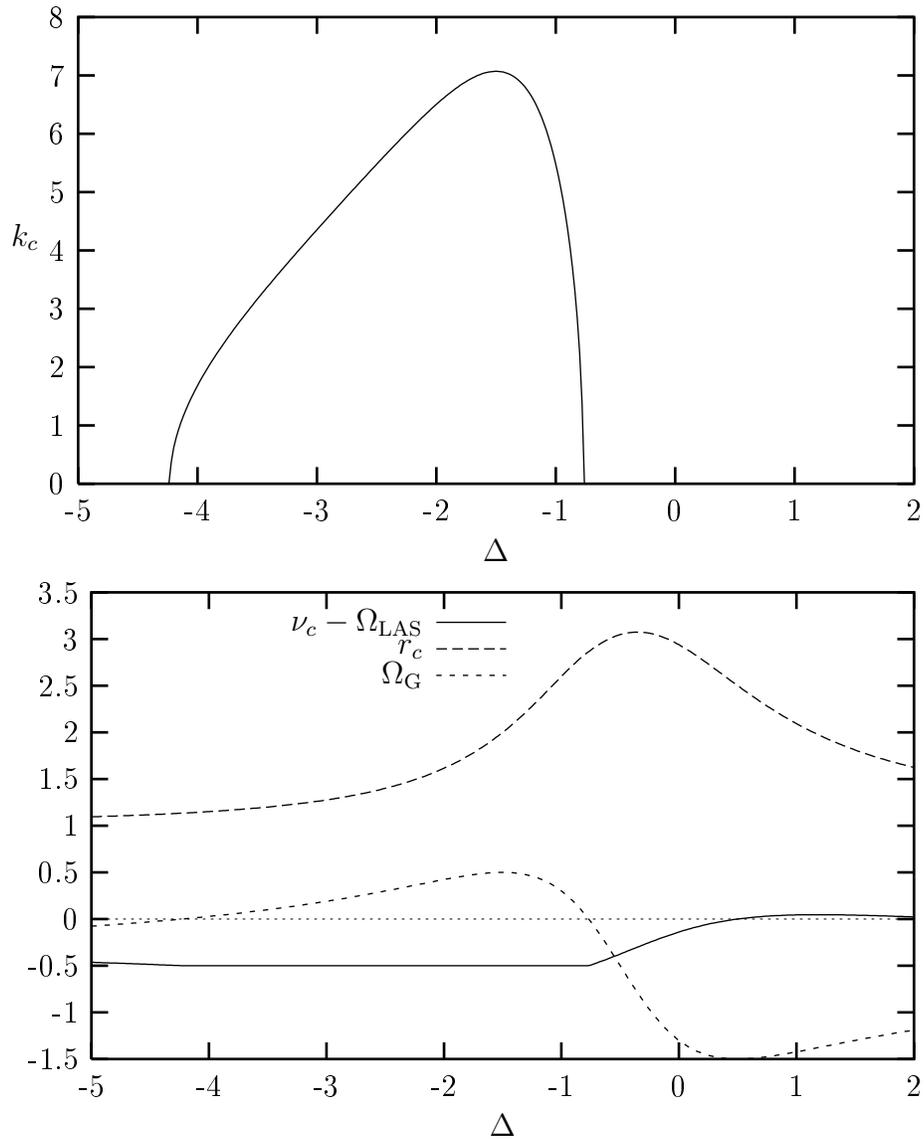


FIGURE 3.7 – Effet de l'écart en fréquence Δ sur la création des structures. Comme dans le cas de la figure 3.5, nous trouvons en fonction de Δ toutes les configurations possibles de création ou d'inhibition de structures. Les valeurs des paramètres sont : $\sigma = 1$, $\Omega = -0.5$, $\bar{A} = 2$, $\mathcal{A}_1 = 0.01$.

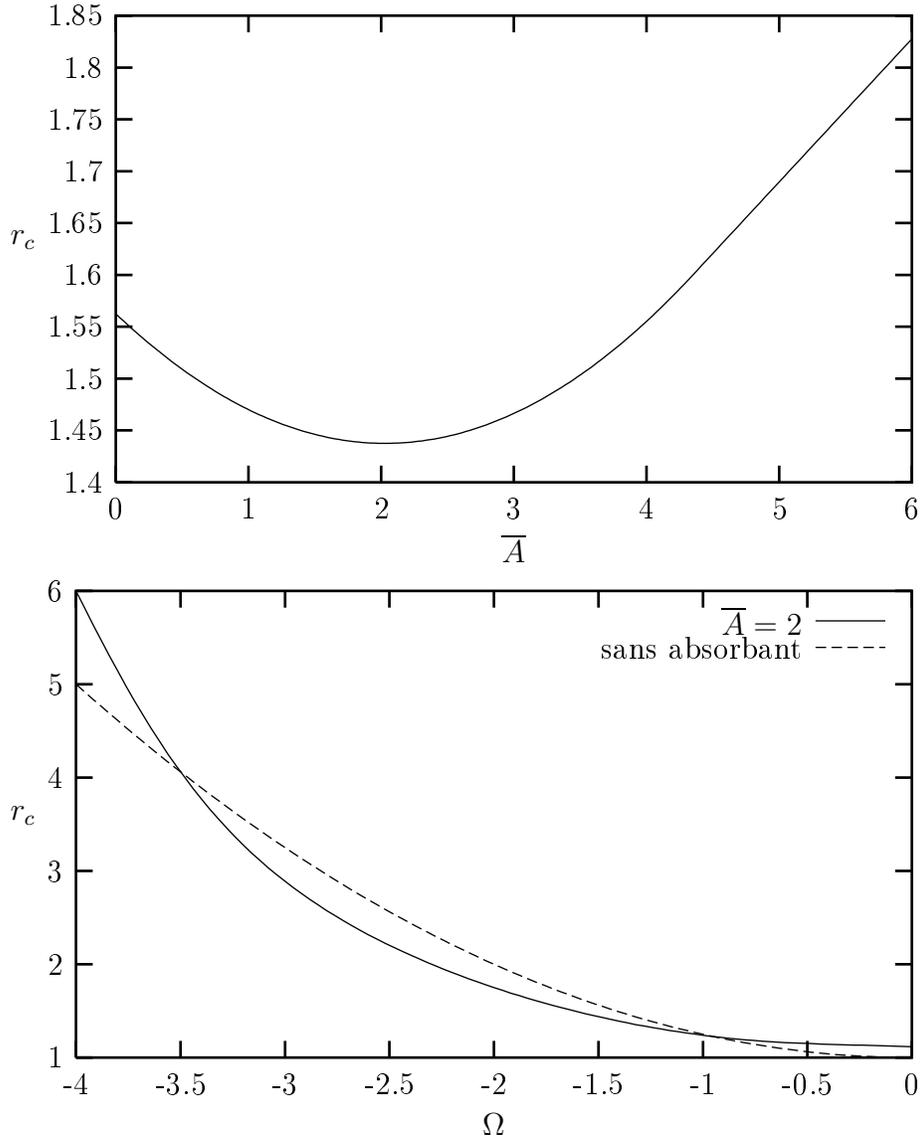


FIGURE 3.8 – Réduction du seuil laser : en haut, évolution de la valeur du seuil r_c en fonction de \bar{A} , avec une valeur minimale pour $\bar{A} = 2$ ($\Omega = -1.5$). En bas, région de Ω $[-3.5, -1]$ dans laquelle se produit le phénomène de réduction du seuil. Les valeurs des paramètres sont : $\sigma = 1.0$, $\Delta = -4$, $\mathcal{A}_1 = 0.01$.

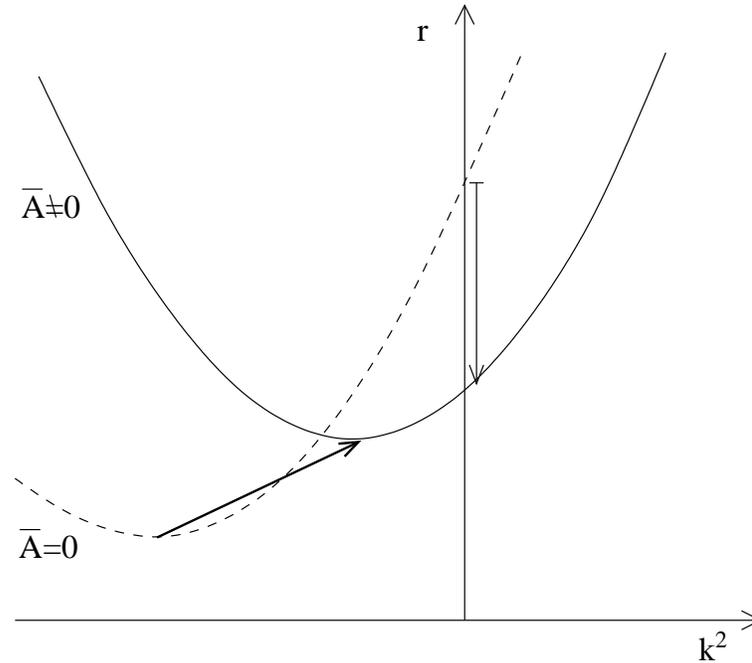


FIGURE 3.9 – Réduction du seuil : la figure montre que l'absorbant peut diminuer la valeur de r_c (à $k^2 = 0$) même si la parabole d'instabilité se déplace vers le haut.

3.3.1 Réduction du seuil du laser

La figure 3.8 montre que le seuil de fonctionnement du laser admet un minimum lorsque \bar{A} augmente depuis la valeur zéro : pour les valeurs choisies des paramètres, ce minimum est atteint pour $\bar{A} = 2$. Ce résultat contre-intuitif peut s'expliquer en analysant l'effet de l'absorbant sur la parabole d'instabilité de la solution zéro (r_c en fonction de k^2). En absence de structure, cette parabole (visualisée sur la figure 3.2) ne présente pas de minimum pour des valeurs de k^2 positives : le minimum correspond à une valeur de k^2 négative, ce qui n'a aucun sens physique. Dans cette situation, le fait d'augmenter la valeur de \bar{A} revient à déplacer la parabole vers le haut (augmentation du seuil dû à l'absorption) et vers la droite (augmentation de Ω_G). Si la pente de la parabole en $k^2 = 0$ est supérieure au rapport entre le déplacement vertical et horizontal, l'effet global conduit à une solution homogène avec un seuil plus faible (figure 3.9).

D'une façon plus physique, nous pouvons expliquer ce phénomène en regardant l'effet de l'absorbant sur la pulsation ν_c qui apparaît au seuil. Dans le cas du laser libre et pour $\Omega > 0$, nous avons montré que cette pulsation correspond exactement à l'écart en fréquence entre la cavité et le milieu actif

($\nu_c = \Omega$), c'est-à-dire quand le laser choisit d'opérer sur un mode qui est en résonance avec le milieu actif, et cette résonance lui permet d'avoir le seuil le plus bas. Pour mieux mettre en évidence cette résonance, nous ré-écrivons les deux premières équations du système (3.1) en utilisant comme fréquence de référence celle du milieu actif et non pas celle de la cavité. Ceci revient à effectuer le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} F &= \tilde{F} e^{-i\Omega\gamma_\perp\tau} \\ P &= \tilde{P} e^{-i\Omega\gamma_\perp\tau} \end{aligned}$$

Les deux premières équations deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} &= -\kappa \left[\left(1 - i\Omega \frac{\gamma_\perp}{\kappa} - i \frac{\mathcal{A}}{8} \nabla_\perp^2 + \bar{A} \frac{1 - i\delta}{1 + \delta^2 + a|\tilde{F}|^2} \right) \tilde{F} - A\tilde{P} \right] \\ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tau} &= \gamma_\perp [\tilde{F}D - \tilde{P}] \end{aligned}$$

les troisième et quatrième équations sont inchangées. Dans les variables \tilde{F} et \tilde{P} , la fréquence de résonance de la polarisation (i.e. celle du milieu actif) est nulle, puisque nous l'avons choisie comme référence. Le champ sera donc en résonance si sa fréquence d'oscillation est nulle, c'est-à-dire si la partie imaginaire du coefficient de \tilde{F} dans la partie droite de son équation d'évolution s'annule.

La partie imaginaire du coefficient vaut :

$$i \left(-\Omega \frac{\gamma_\perp}{\kappa} - \frac{\mathcal{A}}{8} \nabla_\perp^2 - \frac{\bar{A}\delta}{1 + \delta^2 + a|\tilde{F}|^2} \right) \quad (3.11)$$

où l'opérateur ∇_\perp^2 est à remplacer par une expression qui dépend du mode choisi. Pour un développement en onde plane, la condition de résonance s'écrit :

$$-\frac{\Omega}{\sigma} + \frac{\mathcal{A}_1}{8} k^2 - \frac{\bar{A}\delta}{1 + \delta^2 + a|\tilde{F}|^2} = 0 \quad (3.12)$$

Cette relation montre comment la structure spatiale (par l'intermédiaire de la valeur de k^2), peut contribuer à amener le champ électrique en résonance avec le milieu actif. La dépendance du type k^2 , dont la valeur est forcément positive, implique que cette contribution s'effectue seulement dans un sens : le terme spatial peut contribuer à annuler le terme Ω/σ si celui-ci est positif, ce qui implique que les modes transverses n'entrent en jeu que pour $\Omega > 0$.

Au contraire, le terme dépendant de l'absorbant peut contribuer dans les deux sens, selon le signe de δ : si $\delta > 0$, ce terme est négatif, et donc il

s'oppose au terme $-\Omega/\sigma$, en le ramenant vers une situation voisine de celle obtenue pour $\Omega > 0$. Avec les paramètres de la figure 3.8, grâce à l'absorbant le système se rapproche de la résonance et la réduction du seuil qui en découle dépasse l'augmentation de l'absorption.

3.4 Récapitulatif

Dans ce chapitre nous avons montré l'effet d'un absorbant saturable sur la structure de la solution qui apparaît au seuil du laser. Nous avons effectué une analyse de stabilité linéaire de la solution d'intensité nulle, en utilisant des modes à structure d'onde plane afin de déterminer les vecteurs d'onde qui se déstabilisent en premier. L'introduction d'un absorbant saturable conduit à un déplacement du seuil de fonctionnement du laser, qui s'effectue normalement vers des valeurs croissantes, sauf dans un cas particulier, celui de l'absence de structures pour lequel une diminution de seuil est mise en évidence. L'absorbant produit, par ailleurs, une modification de la fréquence du champ électrique, qui se déplace par rapport à celle du laser libre. L'importance de cette fréquence dans la détermination de la structure au seuil fait que ce deuxième effet permet de contrôler la structure qui apparaît au seuil en jouant sur les paramètres de l'absorbant. Nous avons montré qu'il est possible de passer d'une solution homogène à une solution inhomogène et vice versa, ainsi que de contrôler les modes qui se déstabilisent au seuil et, par conséquent, de modifier la structure de la solution du système.

Chapitre 4

Analyse faiblement non linéaire : modèle de Swift-Hohenberg

4.1 Analyse en échelles multiples : dérivation des équations aux amplitudes

4.1.1 Extension de l'analyse linéaire

Dans les sections précédentes, nous avons effectué une analyse linéaire de l'état d'intensité nulle. Elle consiste à identifier le système au voisinage de la solution étudiée à un système linéaire d'équations différentielles dont les variables sont les déviations par rapport à la solution considérée. Avec le système linéarisé, il devient simple d'étudier son évolution dans le temps : ses solutions sont des exponentielles convergente (solution stable) ou divergente (solution instable). La détermination du signe de l'exposant en fonction des paramètres suffit donc à indiquer la stabilité de la solution.

Dans le cas d'une solution instable, tout écart par rapport à cette solution (par exemple, du bruit) est amplifié exponentiellement. La figure 4.1 montre l'évolution de l'amplitude du champ électrique du laser en fonction du temps, partant d'une solution nulle instable. La région (1) correspond à l'amplification exponentielle que nous venons de décrire. Ce régime se produit exclusivement quand la déviation est faible, c'est-à-dire tant que l'état du système reste près de la solution nulle. Sur la figure, nous pouvons noter qu'au-delà d'un certain point, la solution s'écarte de sa forme exponentielle (région (2)) et même devient constante (région (3)). Ceci résulte de la présence de termes non linéaires négligés dans la linéarisation.

Nous pouvons essayer de décrire ces effets en poussant plus loin notre étude : jusqu'ici, nous avons modélisé le système par un système linéaire (une droite - ou un plan - dont l'inclinaison est donnée par la valeur de la dérivée du système en $F = 0$). Maintenant, nous allons effectuer un développement à un ordre supérieur, pour prendre en compte les termes non linéaires dominants. Notons que ce développement est valable dans un voisinage du point plus étendu que celui du développement linéaire d'ordre 1. Ceci signifie que si le système admet une autre solution, voisine de la solution nulle, notre développement sera capable de la décrire. Il nous permettra non seulement de déterminer la façon dont la solution se déstabilise, mais aussi la forme et la stabilité des solutions voisines de la solution nulle lors qu'elle existent.

4.1.2 Dérivation de l'équation de Swift-Hohenberg

Le résultat le plus important de l'analyse linéaire précédente est que l'absorbant saturable peut être utilisé pour choisir le nombre d'onde de la solution transverse la plus instable : en particulier, dans la section 3.3, nous avons montré que la présence ou l'absence de structures dépendait du signe de Ω_G .

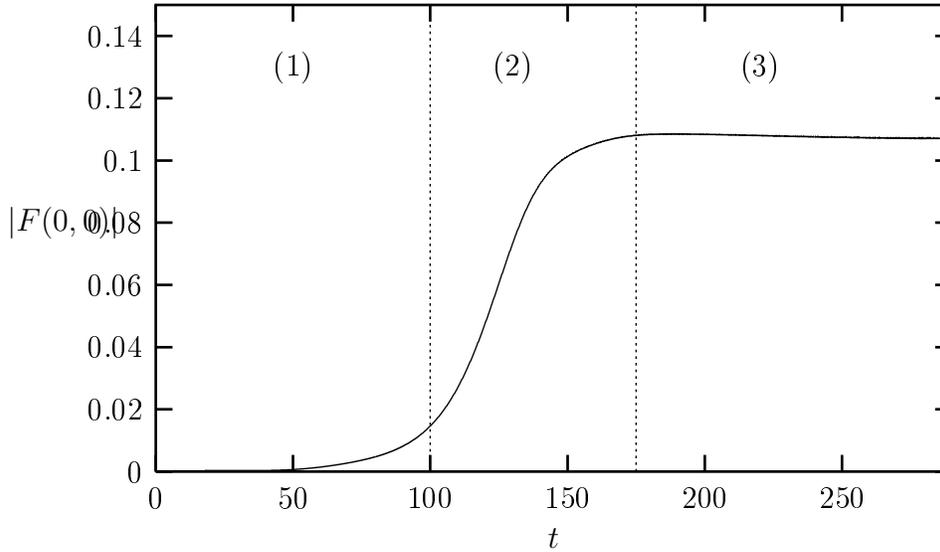


FIGURE 4.1 – Exemple d'évolution de l'amplitude du champ électrique dès que la solution nulle se déstabilise : (1) région linéaire avec une amplification exponentielle de l'intensité ; (2) les effets non linéaires commencent à intervenir, l'amplification s'écarte de la variation exponentielle ; (3) régime de saturation : les effets linéaires sont compensés par les effets non linéaires et l'amplitude reste constante.

Pour obtenir des équations qui soient valables pour des valeurs positives ou négatives de ce paramètre, nous nous plaçons dans les conditions où Ω_G est un petit paramètre centré sur zéro et nous allons établir les équations pour $\Omega_G = \varepsilon \Omega_G^1$. L'approche développée dans le cas de notre système est semblable à l'analyse perturbative proposée par J. Lega *et al.* [25] pour un laser libre. Pour les équations (3.4), nous cherchons des solutions du type :

$$V = \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \dots \quad (4.1)$$

où $V = (e, p, n, m)$ et le petit paramètre ε est défini par l'hypothèse ci-dessus. Pour dériver l'équation d'amplitude de type Swift-Hohenberg, il est nécessaire que les termes de saturation de l'absorbant et du milieu actif interviennent à un ordre supérieur à celui des termes de l'analyse linéaire (diffraction et fréquence). Afin d'atteindre cet objectif, nous effectuons des changements d'échelle spatiale judicieux et des déplacements de paramètres par rapport à leurs valeurs au point critique.

Les équations (3.9) montrent qu'au seuil une bande de vecteurs d'onde k de largeur $(r - \delta_1)^{1/4}$ centrée sur $k_c = 0$ est amplifiée. Spatialement, ceci se

traduit par une variation du champ électrique sur des longueurs caractéristiques de l'ordre de $(r - \delta_1)^{-1/4}$. Nous renormalisons alors l'échelle spatiale de façon à obtenir une nouvelle variable $\vec{X} = (X, Y)$ telle que $\vec{x} = (r - \delta_1)^{-1/4} \vec{X}$. Ceci nous suggère aussi d'essayer un déplacement de r par rapport à sa valeur critique δ_1 d'ordre 2 : $r - \delta_1 = O(\varepsilon^2)$. D'autre part, ce choix est vérifié a posteriori : il permet d'obtenir le même ordre de ε pour l'écart en fréquence Ω_G et pour la diffraction. Nous observons que le Laplacien transverse dans les nouvelles variables X, Y est d'ordre ε ($\partial^2/\partial x^2 = \varepsilon \partial^2/\partial X^2$).

Notre objectif étant de modéliser un laser CO_2 à absorbant saturable (laser de classe B), nous choisissons une valeur faible du taux de relaxation b de la population n . Le choix $b = O(\varepsilon^2)$ permet à l'inversion de population de jouer un rôle dans le terme de saturation non linéaire à l'ordre suivant en ε . En ce qui concerne l'absorbant, notons que la nature de la bifurcation de la solution zéro du champ peut être modifiée par la valeur du paramètre de saturabilité a (qui permet de passer d'une bifurcation de Hopf sous-critique à une bifurcation supercritique [50]). Nous considérons alors $a = a_0 + \varepsilon a_1$.

Nous introduisons maintenant les échelles temporelles que nous utiliserons pour le développement en échelles multiples : $T_j = \varepsilon^j t$, $j = 1, 2$. Ces échelles permettent de séparer la dynamique du système en une partie rapide dépendant de t et une partie lente (T_j). Pour la partie rapide, nous allons retrouver le résultat de l'analyse linéaire, c'est-à-dire une évolution de type exponentielle. Par contre, l'évolution du coefficient de l'exponentielle (lente par rapport à la période d'oscillation) sera donnée par les termes d'ordre plus grand que 1, qui vont donc intervenir sur une échelle de temps plus lente d'un facteur ε , et donc dépendre des échelles T_j . La dérivation des équations aux amplitudes suit une approche classique qui consiste à identifier tous les termes aux différents ordres de ε et à imposer les conditions de solvabilité pour déterminer les relations entre les différentes variables. La dérivation complète est donnée dans l'annexe A.2, et nous reportons ici le résultat final : un système composé d'une équation de type Swift-Hohenberg couplé à une équation pour la population :

$$(1 + \sigma\delta_1) \frac{\partial e}{\partial t} = \sigma(r - \delta_1)e + i\mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2 e - i\sigma\delta_1 \Omega_G e - \sigma n e \quad (4.2a)$$

$$- \frac{\sigma\delta_1}{(1 + \sigma\delta_1)^2} (\Omega_G + \mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2)^2 e + \quad (4.2b)$$

$$+ \left(\frac{\sigma\bar{A}}{1 + \delta^2} - i\Omega_{\text{LAS}} \right) \frac{a_0}{b(1 + \delta^2)} |e|^2 e \quad (4.2c)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{c}{c - c_2} (-bn + \delta_1 |e|^2). \quad (4.2d)$$

Nous allons maintenant examiner l'intervalle des paramètres dans lequel

sont valables les équations ci-dessus. La principale différence entre ces équations et le modèle du laser libre vient de la présence d'un terme cubique non linéaire supplémentaire donné par l'absorbant. Le coefficient de ce terme est le seul à faire apparaître le paramètre a . Suivant la valeur de ce paramètre, nous allons considérer deux cas. Premièrement, si $a_0 = 0$, c'est-à-dire si a est d'ordre $O(\varepsilon)$, le terme non linéaire disparaît, et nous retrouvons un système d'équations similaire à celui du laser libre, qui est valable quelles que soient les valeurs de \bar{A} et δ . La présence du terme non linéaire $-\sigma ne$ nous garantit un effet de saturation qui limite l'amplification linéaire des modes instables : cas d'une bifurcation de Hopf supercritique.

Notons cependant que, même si a est d'ordre $O(\varepsilon)$, les autres coefficients de l'équation sont affectés par la présence de l'absorbant, par les paramètres δ_1 et Ω_G (définis dans l'équation (3.4)).

Deuxièmement, si $a_0 \neq 0$ le terme cubique peut annuler l'effet de saturation provenant de $-\sigma ne$. Pour éviter cet effet, nous imposons que le total des termes non linéaires soit négatif, ce qui permet de déterminer l'intervalle des paramètres dans lequel notre développement reste valable. Pour prendre en compte l'effet de saturation du milieu actif à long terme, nous posons que le milieu actif est à l'équilibre ($\partial n / \partial t = 0$, et donc $n = \delta_1 |e|^2 / b$). Le coefficient du terme de saturation global devient alors :

$$\frac{\bar{A}}{(1 + \delta^2)b} \left[\frac{a_0}{1 + \delta^2} - 1 \right] - \frac{1}{b} \quad (4.3)$$

Une bifurcation supercritique sera obtenue s'il est négatif, ce qui nous donne la condition suivante :

$$a < \left(1 + \frac{1 + \delta^2}{\bar{A}} \right) (1 + \delta^2) \quad (4.4)$$

Elle détermine l'intervalle de validité du modèle réduit du LAS dans le cas où a est d'ordre $O(1)$. Dans le cas où $\delta = 0$, elle devient la condition usuelle $a = 1 + 1/\bar{A}$ [41, 50]. Si toutefois cette condition n'était pas respectée, la bifurcation au seuil deviendrait souscritique et il faudrait continuer le développement jusqu'au cinquième ordre pour obtenir l'effet de saturation nécessaire à la convergence des solutions.

Nous pouvons aussi remarquer que les paramètres c et c_2 , qui avaient été introduits dans le modèle pour pouvoir décrire les régimes PQS et le chaos temporel, jouent un rôle secondaire dans la formation des structures près du seuil. En conséquence, si nous considérons des paramètres de pompe près du seuil du laser, la variable auxiliaire m peut être négligée dans la description du système.

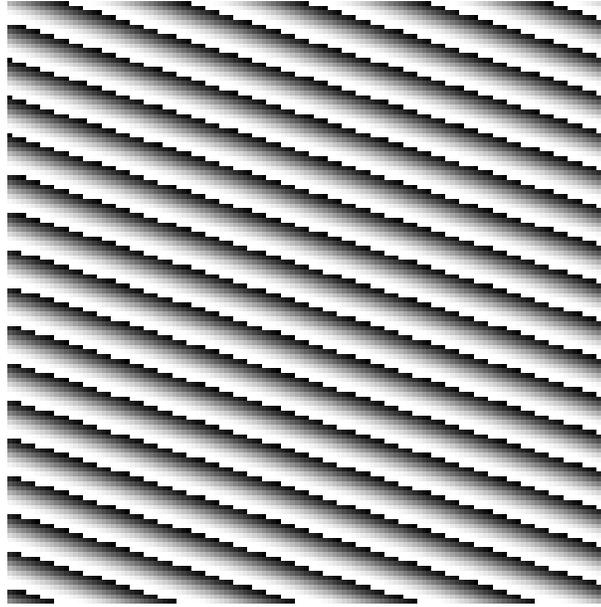


FIGURE 4.2 – Distribution de la phase du champ électrique dans l’espace (x, y) pour une solution en rouleaux.

4.2 Stabilité d’une solution d’intensité non nulle : les rouleaux

Précédemment, nous avons étudié la stabilité linéaire de la solution d’intensité nulle et avons établi les équations qui contrôlent la dynamique faiblement non linéaire de la solution qui apparaît au-delà du seuil. Il est maintenant possible d’utiliser la dérivation de l’équation de type Swift-Hohenberg pour déterminer le type de solution asymptotique qui apparaît au seuil et étudier sa stabilité.

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en évidence que si la solution nulle devient linéairement instable après le franchissement du seuil laser, tous les modes de vecteur \vec{k} dont le module est proche de k_c sont amplifiés. Ceci donne une structure en champ lointain qui ressemble à un anneau, centré sur zéro et de rayon moyen k_c . Après cette phase d’amplification, les termes non linéaires interviennent et effectuent une sélection entre les différents vecteurs \vec{k} . Une des solutions les plus simples est celle “en rouleaux”. Deux types de solution peuvent apparaître suivant la présence de rouleaux dans la phase (onde progressive) ou dans l’intensité (onde stationnaire). La première apparaît, en champ lointain, avec une seule composante \vec{k} , la deuxième avec deux composantes à \vec{k} et $-\vec{k}$, où \vec{k} est un vecteur de module k_c et dont la direction



FIGURE 4.3 – Instabilité de Eckhaus : la naissance de deux composantes dans le champ lointain autour de la composante principale, alignées avec le vecteur \vec{k} , donne naissance à une modulation longitudinale des rouleaux. L'image du champ lointain est un agrandissement centré sur la composante des rouleaux.

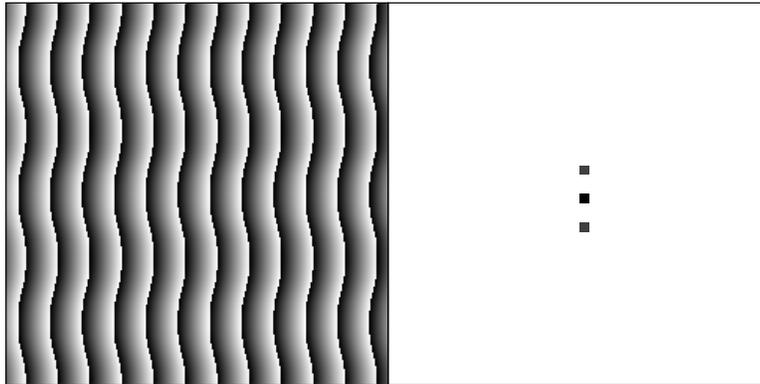


FIGURE 4.4 – Instabilité en zig-zag : les deux composantes dans le champ lointain devenues instables sont alignées avec la direction orthogonale au vecteur \vec{k} et donnent naissance à une modulation transversale des rouleaux. L'image du champ lointain est un agrandissement centré sur la composante des rouleaux.

est fixée par les conditions initiales.

Nous considérons ici la première solution en rouleaux (à onde progressive – *traveling rolls*). Elle présente une distribution transverse du champ de type onde plane :

$$e(\vec{x}, t) = A_0 e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (4.5)$$

où A_0 est l'amplitude du champ électrique. La figure 4.2 montre un exemple d'évolution de la phase dans l'espace (x, y) de cette solution.

Notre objectif est de déterminer, pour une valeur donnée de \vec{k} , l'amplitude de la solution et sa pulsation temporelle ω , ainsi que son intervalle de stabilité en fonction des paramètres du système. La déstabilisation de la solution en rouleaux se produit au niveau de la phase de deux façons différentes [25] : la première par une modulation de la phase suivant le vecteur d'onde \vec{k} de la solution (instabilité d'Eckhaus, figure 4.3) ; la deuxième par une modulation de la phase dans la direction orthogonale à \vec{k} (instabilité zig-zag, figure 4.4). Pour étudier le problème de stabilité de la solution dans sa globalité, nous la ré-écrivons sous la forme suivante :

$$e = Ae^{i\theta} \quad (4.6)$$

où A et θ sont des séries lentement variables de l'espace et du temps développées en fonction des puissances successives du petit paramètre ε . Etant donnée la déstabilisation de la solution sur une échelle de temps et d'espace lentement variable, d'ordre $O(\varepsilon)$, nous effectuons un changement d'échelle dans l'espace et dans le temps du type :

$$X = \varepsilon x \quad (4.7)$$

$$Y = \varepsilon y \quad (4.8)$$

$$T = \varepsilon t \quad (4.9)$$

Nous introduisons aussi une nouvelle variable de phase $\Theta = \varepsilon\theta$, qui vérifie :

$$\nabla_X \Theta = \nabla_x \theta = \vec{k} \quad (4.10)$$

où ∇_X est calculé dans l'espace X, Y et ∇_x (noté ∇ dans la suite) dans l'espace x, y .

A l'ordre $O(\varepsilon)$, nous trouvons, en fonction du vecteur d'onde choisi \vec{k} , l'amplitude de la solution en rouleaux A_0 et sa pulsation caractéristique ω :

$$A_0^2 = b \frac{(r - \delta_1) - \frac{\delta_1}{(1 + \sigma\delta_1)^2} (\Omega_G - \mathcal{A}_1 k^2)^2}{\delta_1 - \frac{a_0 \bar{A}}{(1 + \delta^2)^2}}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial T} = \omega = -\frac{\sigma\delta_1 \Omega_G}{1 + \sigma\delta_1} - \frac{\mathcal{A}_1 k^2}{1 + \sigma\delta_1} - \frac{a_0 \sigma \bar{A} \delta A_0^2}{(1 + \sigma\delta_1)b - (1 + \delta^2)^2} \quad (4.11)$$

A l'ordre suivant, nous obtenons l'évolution de la correction d'ordre ε de cette solution. La stabilité de cette solution est déterminée par le signe des coefficients de diffusion le long des directions parallèle et orthogonale

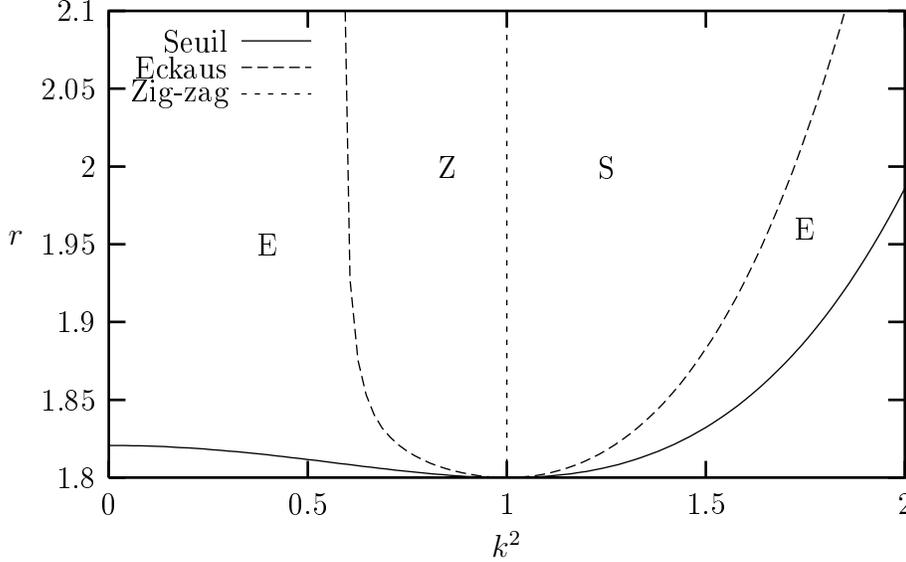


FIGURE 4.5 – Stabilité de la solution en rouleaux : au-delà du seuil de fonctionnement du laser (en trait continu), existent différentes régions de stabilité. En trait pointillé, les seuils d'instabilité d'Eckaus (zig-zag), définissent la région stable (S) et les régions instables d'Eckaus (E) et zig-zag (Z). Les valeurs des paramètres sont : $\Omega = 0.5$, $\Delta = 2$, $\sigma = 1$, $\bar{A} = 1$, $\mathcal{A}_1 = 0.002$, avec $\Omega_G = 0.385$.

à \vec{k} . Dans le cas particulier où $\vec{k} = (k, 0)$, comme nous l'avons choisi dans l'annexe A.3, ces coefficients deviennent :

$$D_{\text{Eckaus}} = -\frac{2\mathcal{A}_1\sigma\delta_1}{(1+\sigma\delta_1)^3} \left[\Omega_G - 3\mathcal{A}_1k^2 + \frac{k}{A_0^2} \frac{\partial(A_0^2)}{\partial k} (\Omega_G - \mathcal{A}_1k^2) \right]$$

$$D_{\text{zig-zag}} = -\frac{2\mathcal{A}_1\sigma\delta_1}{(1+\sigma\delta_1)^3} [\Omega_G - \mathcal{A}_1k^2]$$

Notons qu'à cause de l'invariance par rotation du modèle de Swift-Hohenberg, ce résultat peut être généralisé à n'importe quel vecteur d'onde.

La région de stabilité de la solution est celle où ces deux coefficients sont négatifs, ce qui se traduit par des perturbations de phase qui disparaissent dans le temps. Dans la figure 4.5 nous montrons l'allure de la région de stabilité de la solution en rouleaux, dans le cas où le système présente une structure au seuil ($k_c > 0$).

4.3 Récapitulatif

Dans ce chapitre, nous avons complété l'analyse linéaire avec la dérivation des équations aux amplitudes pour le LAS. Suite à cette dérivation, nous avons déterminé l'intervalle de validité de ces équations, en montrant qu'elles restent valables dans la région des paramètres qui correspond à une bifurcation supercritique au seuil.

Les équations aux amplitudes décrivent la dynamique du système au voisinage du seuil et permettent de déterminer non seulement les modes qui vont se déstabiliser, mais aussi les solutions possibles du système. Nous les avons utilisées pour étudier la stabilité de la solution la plus simple, dite "en rouleaux", et déterminer l'intervalle des paramètres dans lequel cette solution peut exister.

Chapitre 5

Simulations numériques

Pour confirmer les résultats de l'étude analytique décrite dans les chapitres 3 et 4, nous avons intégré numériquement le système réduit du LAS (4.2) (équation de type Swift-Hohenberg) ainsi que le système complet (3.1) pour différentes valeurs des paramètres. L'intégration numérique de ces deux systèmes a nécessité la transformation des équations aux dérivées partielles en x, y (plan transverse) et t (temps) en équations ordinaires en t en développant les variables sur une grille de points de l'espace $\vec{x} = (x, y)$. Ceci nous permet de ré-écrire les systèmes sous la forme standard :

$$\vec{Z}' = \vec{F}(\vec{Z}, t) \quad (5.1)$$

où le vecteur \vec{Z} a pour composantes l'ensemble des variables dynamiques. Cette transformation nous autorise à utiliser un algorithme classique du type Runge–Kutta d'ordre 4 pour l'intégration dans le temps.

En ce qui concerne les termes locaux (c'est-à-dire les termes dépendant exclusivement des variables définies en un même point de l'espace), cette transformation ne pose aucun problème. Par contre, pour les termes non locaux (c'est-à-dire les termes du Laplacien) nous avons utilisé une méthode spectrale, qui consiste à effectuer une transformée de Fourier afin de passer dans l'espace \vec{k} . Dans cet espace, l'opérateur Laplacien est localement défini. En effet, prendre le Laplacien d'une fonction dans l'espace \vec{x} revient à la multiplier par $-k^2$ dans l'espace \vec{k} . Ensuite, nous réalisons une transformée de Fourier inverse pour revenir dans l'espace \vec{x} .

Une fois le temps t fixé, le calcul de la fonction F en chaque point de la grille, identifié par les indices i, j , se décompose en deux parties :

$$\begin{aligned} F_{ij}(\vec{x}, t) &= F_{ij}^{\text{loc}}(\vec{x}, t) + F_{ij}^{\text{nonloc}}(\vec{x}, t) \\ &= F_{ij}^{\text{loc}}(x_{ij}, t) + \text{FFT}^{-1}(\{\dots, F_{ij}^{\text{nonloc}}(\text{FFT}(\vec{x})_{ij}, t), \dots\})_{ij} \end{aligned}$$

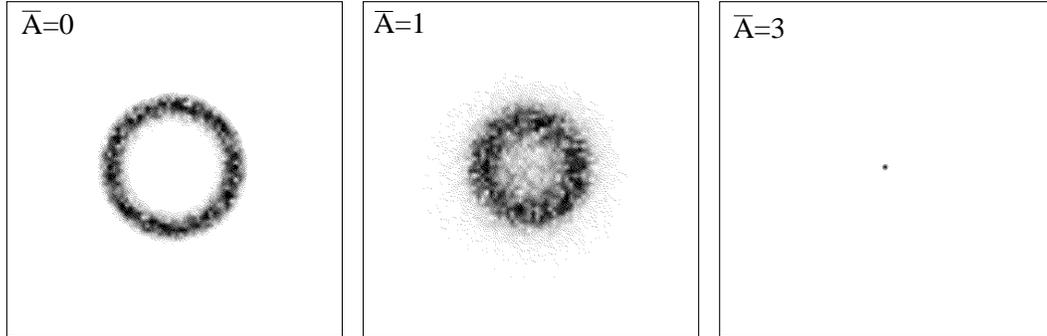


FIGURE 5.1 – Inhibition de structures : les figures montrent la distribution du champ électrique dans l’espace de Fourier \vec{k} (champ lointain). La zone blanche (noire) correspond à des valeurs nulles (positives) de l’amplitude. Les figures sont centrées sur $(0, 0)$ et correspondent à des valeurs différentes de \bar{A} : $\bar{A} = 0$ ($k_c^2 = 2.4$ et $\Omega_G = 1.2$) ; $\bar{A} = 1$ ($k_c^2 = 1.42$ et $\Omega_G = 0.71$) ; $\bar{A} = 3$ ($k_c^2 = 0$ et $\Omega_G = -0.26$).

L’utilisation d’une transformée de Fourier implique un choix de conditions périodiques aux bords. Nous avons vérifié lors de chaque simulation que la solution dans l’espace \vec{k} ne se rapproche pas des bords, ce qui engendrerait des recouvrements des différents spectres des solutions harmoniques.

Nous avons utilisé une grille de 128x128 points pour les simulations, et avons fait des tests avec des grilles plus fines (192x192 et 256x256 points) pour nous assurer de la convergence des solutions. La dimension physique de la grille est variable selon la simulation : par la suite, nous donnerons dans chaque cas la taille de la région (L_x, L_y) considérée, choisie afin d’éviter les problèmes de recouvrement cités ci-dessus.

5.1 Simulations du système réduit (S-H)

Dans la section 3.3, nous avons discuté plusieurs résultats relatifs à l’effet de l’absorbant sur la présence ou l’absence de structures. Ces résultats, obtenus en considérant exclusivement la partie linéaire de l’évolution du système, représentent la dynamique en régime transitoire près de la solution zéro du modèle réduit. Dans un premier temps, nous avons effectué des simulations dans les mêmes régions de paramètres que celles explorées dans la section 3.3 et comparé les résultats avec ceux de l’analyse linéaire.

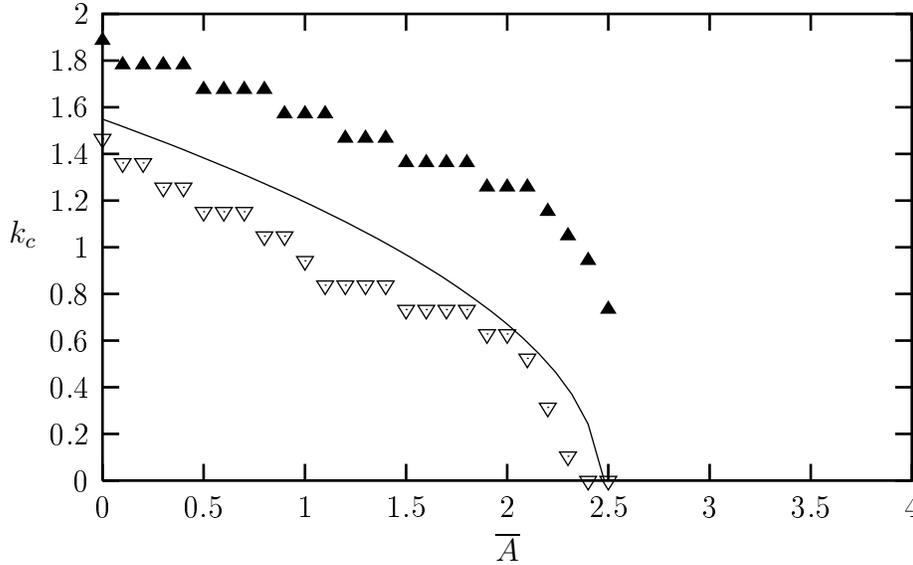


FIGURE 5.2 – Comparaison entre les valeurs de k_c obtenus par l'analyse de stabilité linéaire (en trait continu) et l'intégration numérique. Etant donnée la largeur de l'anneau, figurent sur le graphique les intervalles k_{minimum} (triangles vides), k_{maximum} (triangles pleins) qui correspondent aux rayons intérieur et extérieur de l'anneau.

5.1.1 Création et inhibition des structures

La figure 5.1 décrit l'effet d'inhibition de structures, obtenu pour les paramètres $\sigma = 1$, $\delta = -0.8$, $\Omega = 1.2$, $\mathcal{A}_1 = 0.01$, $r = 1.15 \times r_c$ et $L_x = L_y = 16.0$. Les conditions initiales sont un bruit blanc, dont l'amplitude crête est choisie très faible (10^{-3}) afin de s'assurer qu'au démarrage de la simulation, les termes non linéaires ne jouent aucun rôle. La figure 5.1 montre que l'augmentation de \bar{A} entraîne une disparition des structures dans le système.

De même, nous avons observé la création de structures en fonction de \bar{A} croissant, pour des paramètres différents ($\sigma = 1$, $\delta = 1$, $\Omega = -1$, $\mathcal{A}_1 = 0.01$ et $r = 1.15 \times r_c$), conformément à l'analyse linéaire.

La figure 5.2 est une synthèse des résultats de plusieurs simulations effectuées en faisant varier \bar{A} . Nous mettons en évidence un bon accord entre les différentes valeurs numériques possibles de k des solutions qui apparaissent et celles trouvées par l'analyse de stabilité linéaire (courbe en trait continu). Nous avons reporté sur la figure 5.2, les valeurs de k qui correspondent aux rayons intérieur et extérieur des anneaux (ex. figure 5.1). La largeur de l'intervalle de k provient du fait que nous n'effectuons pas les simulations exactement au seuil, mais 15% au-dessus, ce qui donne une bande de valeurs de

k excitées autour de k_c .

5.1.2 Sélection non linéaire

Pour mettre en évidence la sélection non linéaire des structures, nous augmentons la durée d'intégration du système d'équations : après l'amplification exponentielle de l'amplitude du champ donnée par les termes linéaires dans le régime transitoire, les contributions linéaire et non linéaire deviennent comparables et la sélection modale est effectuée par l'ensemble des termes. L'ordre de grandeur de l'intervalle de temps nécessaire pour atteindre la solution asymptotique est estimé en partant du développement effectué pour obtenir le modèle de S-H. L'échelle temporelle la plus lente utilisée correspond à $\varepsilon^2 t$: étant donné que $r - r_c$ (d'ordre ε^2) est de l'ordre de quelques pourcent, nous nous fixons une échelle de l'ordre de 100 unités de temps. Nous considérons que si la solution ne montre pas de variation significative sur un intervalle 10 fois supérieur (1000 unités), le système a convergé sur sa solution asymptotique.

Pour des valeurs de paramètres fixées à : $\sigma = 1.0$, $\Omega = 1.2$, $\Delta = 2.0$, $\bar{A} = 0.5$, $\mathcal{A}_1 = 0.5$, $a = 0.3$, $b = 0.1$, $r = 1.02 \times r_c$, il existe plusieurs solutions possibles, qui dépendent des conditions initiales. Près du seuil du laser où $k \simeq k_c$, nous avons mis en évidence une solution en rouleaux soit à onde progressive (cf. section 4.2, figure 4.2) soit à onde stationnaire. Nous avons également découvert une solution à quatre composantes. Loin du seuil, le système présente des régimes non stationnaires voire chaotiques.

La figure 5.3 montre l'allure de la solution en rouleaux à onde stationnaire dans les espaces \vec{x} et \vec{k} . La solution du champ est caractérisée par deux ondes planes contrapropagatives d'amplitude égale et de différence de phase constante, qui donnent naissance à une onde stationnaire. Les conditions initiales fixent la direction de l'onde. Mathématiquement, toutes les directions sont possibles en raison de la symétrie axiale du système. En revanche, dans la simulation numérique, la discrétisation de la solution sur une grille rectangulaire a pour effet de favoriser certaines directions. Notons que le système n'a pas convergé complètement sur la solution à onde stationnaire : la sélection des modes n'est pas achevée. Cela vient du fait que la solution asymptotique est approchée exponentiellement, avec une constante de temps qui dépend de la stabilité de la solution. Toutes les solutions convergent de la même manière, mais ici la solution est plus proche de sa limite de stabilité, ce qui induit une certaine difficulté à la reproduire numériquement.

La figure 5.4 illustre la solution à 4 vecteurs d'onde. Cette solution a déjà été trouvée dans d'autres systèmes [68, 69]. Elle apparaît dans la même région de paramètres que la solution en rouleaux. Elle est caractérisée en

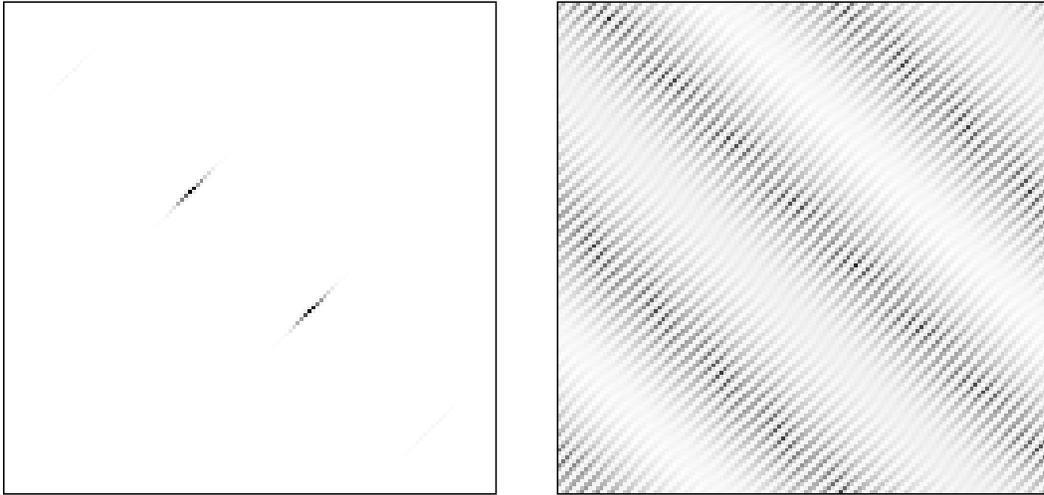


FIGURE 5.3 – Solution en rouleaux à onde stationnaire : à gauche, la distribution du champ électrique dans l'espace de Fourier ; à droite, la distribution du champ dans l'espace x, y . Les paramètres sont : $\sigma = 1.0$, $\Omega = 1.2$, $\Delta = 2.0$, $\bar{A} = 0.5$, $\mathcal{A}_1 = 0.5$, $a = 0.3$, $b = 0.1$, $r = 1.02 \times r_c$, et la solution est obtenue après 40000 unités de temps.

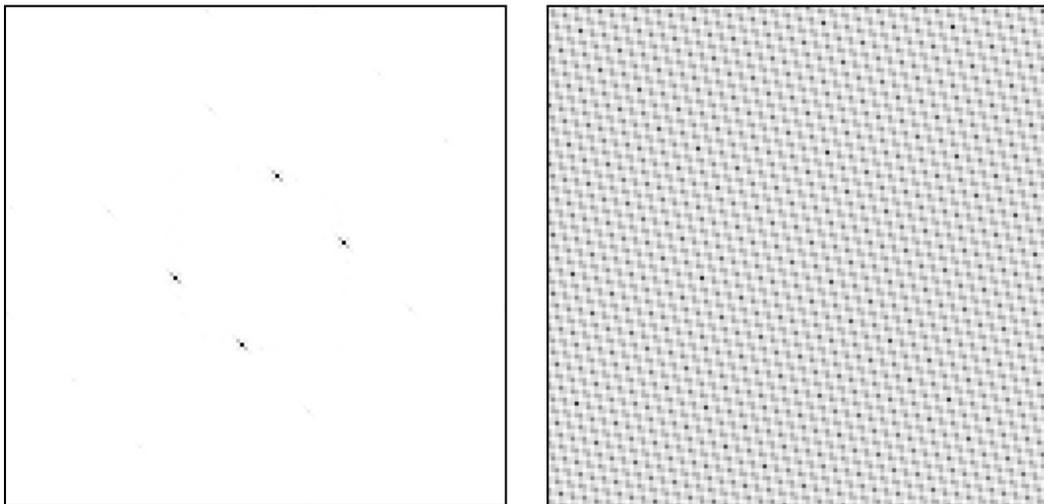


FIGURE 5.4 – Solution à 4k : à gauche, la distribution du champ électrique dans l'espace de Fourier ; à droite, la distribution du champ dans l'espace x, y . Les paramètres sont : $\sigma = 1.0$, $\Omega = 1.2$, $\Delta = 2.0$, $\bar{A} = 0.5$, $\mathcal{A}_1 = 0.5$, $a = 0.3$, $b = 0.1$, $r = 1.02 \times r_c$, et la solution est obtenue après 10000 unités de temps.

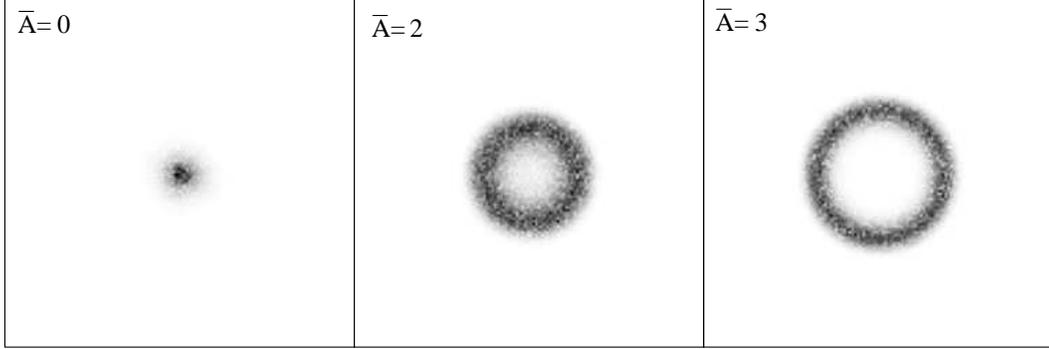


FIGURE 5.5 – Création de structures dans le modèle complet du LAS. Les figures montrent la distribution du champ électrique dans l’espace de Fourier, et correspondent à différentes valeurs de \bar{A} : $\bar{A} = 0.0$ qui donne $k_c^2 = 0$ et $\Omega_G = -0.2$; $\bar{A} = 2.0$ qui donne $k_c^2 = 29.22$ et $\Omega_G = 0.2922$; $\bar{A} = 3.0$ qui donne $k_c^2 = 53.83$ et $\Omega_G = 0.5383$.

champ lointain par deux couples de vecteurs d’onde similaires à ceux des rouleaux à onde stationnaire. Dans l’espace \vec{x} , cette solution donne une figure d’interférences entre les deux ondes stationnaires, ce qui forme un échiquier dont la structure est plus ou moins carrée suivant l’angle entre les deux fronts d’onde.

5.2 Simulations du système complet

Après avoir reproduit numériquement les résultats de l’analyse de stabilité linéaire et étudié le système réduit de S-H, nous avons effectué des simulations sur le système complet. Ceci permet de prendre en compte la dynamique globale des équations, mais, contrairement au système réduit, seules des simulations numériques sont concevables.

5.2.1 Création et inhibition des structures

La figure 5.5 montre l’effet de création de structures en fonction du paramètre \bar{A} . Les simulations ont été effectuées pour les paramètres : $\mathcal{A} = 0.08$, $\delta = 3.8$, $a = 4.17$, $r = 1.01 \times r_c$, $\gamma_\perp = 1.0$, $\Omega = -0.2$, $\gamma_\parallel = 0.1$, $c_1 = -0.7$, $\gamma_1 = 0.7$. Les conditions initiales sont aléatoires et le temps d’enregistrement est fixé à 50 unités afin d’observer la partie linéaire de l’évolution du système.

Le même effet de création est visible en comparant les deux courbes k_c en fonction de Ω de la figure 5.6 obtenues pour deux valeurs de \bar{A} . Nous observons que, pour une valeur donnée de Ω , la valeur de k_c augmente en

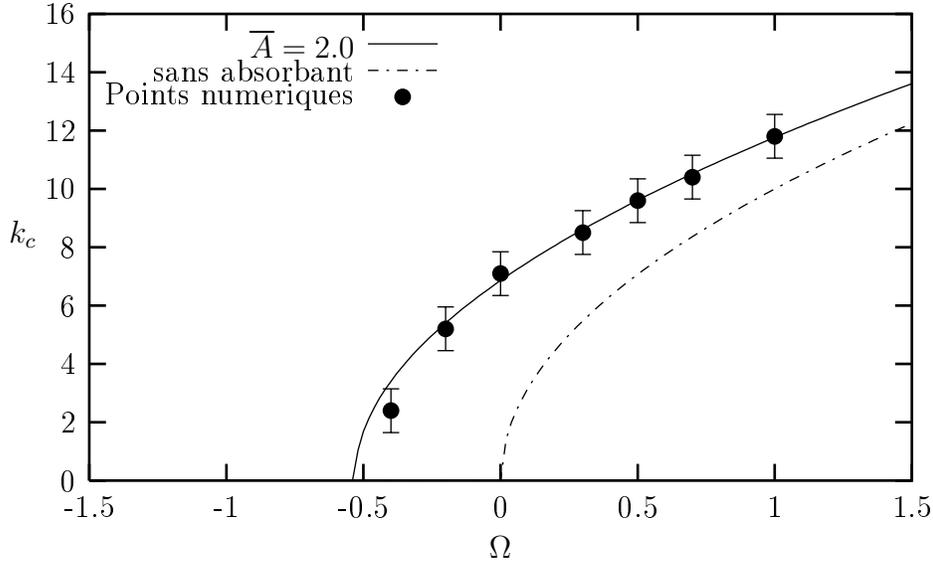


FIGURE 5.6 – Comparaison entre la valeur de k_c théorique de l’analyse linéaire (trait continu) et les valeurs déterminées par l’intégration du système complet. Quels que soient les paramètres considérés, nous cherchons une solution asymptotique en rouleaux afin de pouvoir comparer directement les vecteurs k obtenus.

fonction de \bar{A} , ce qui correspond à une apparition de structures. Nous avons effectué plusieurs simulations pour déterminer les différentes valeurs de k de la solution asymptotique en rouleaux, reportées sur la figure 5.6. L’écart entre les points calculés numériquement et la courbe théorique est significatif uniquement dans la partie la plus proche de la solution homogène. Ceci peut s’expliquer par l’allure de la surface $r_c(k)$, une quartique, qui devient de plus en plus plate lorsque le lieu des minima se rapproche de $\vec{k} = 0$.

Nous avons aussi constaté l’effet d’inhibition avec des simulations sur le système complet.

Pour vérifier l’effet de réduction du seuil décrit dans la section 3.3 de l’analyse de stabilité linéaire sur le système complet, nous avons effectué deux simulations, en fixant $A = 1.5$ (figure 3.8). Cette valeur de A est sous le seuil pour $\bar{A} = 0$, mais au-dessus pour des valeurs de \bar{A} comprises dans l’intervalle calculé $[0.63, 3.45]$. La première simulation, pour $\bar{A} = 0$, nous donne une solution qui décroît exponentiellement vers zéro, ce qui indique que le système se trouve sous le seuil. La deuxième simulation (figure 5.7), pour $\bar{A} = 2.0$, montre une solution uniforme d’amplitude constante, avec une pulsation $\nu = 5.56$, qui correspond à $\nu_{\text{cth}} = 5.51$ déterminée par l’analyse

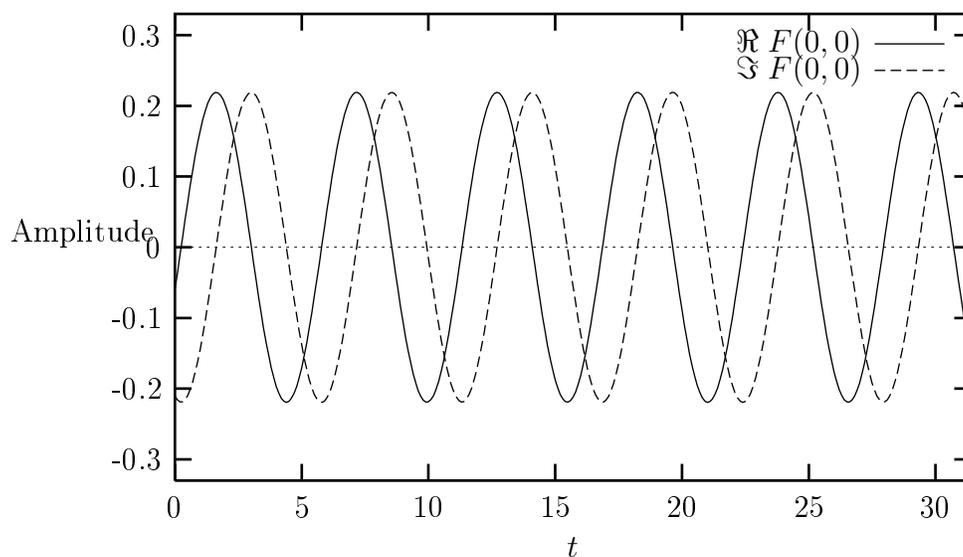


FIGURE 5.7 – Evolution temporelle du champ électrique dans les cas de réduction du seuil : oscillations des parties réelle et imaginaire du champ au point $(0, 0)$ de la solution asymptotique.

linéaire.

Un résultat intéressant apparaît concernant la solution homogène : elle est instable, et pour des temps suffisamment longs présente une dynamique d'impulsions semblable à celle d'un LAS purement temporel (figure 5.8). Pour déterminer si l'impulsion provient d'une oscillation synchrone du champ dans tout l'espace, nous avons analysé la dynamique spatiale sur une période de pulsation. La figure 5.9 montre que l'évolution spatiale est celle d'une onde qui se propage dans une direction déterminée.

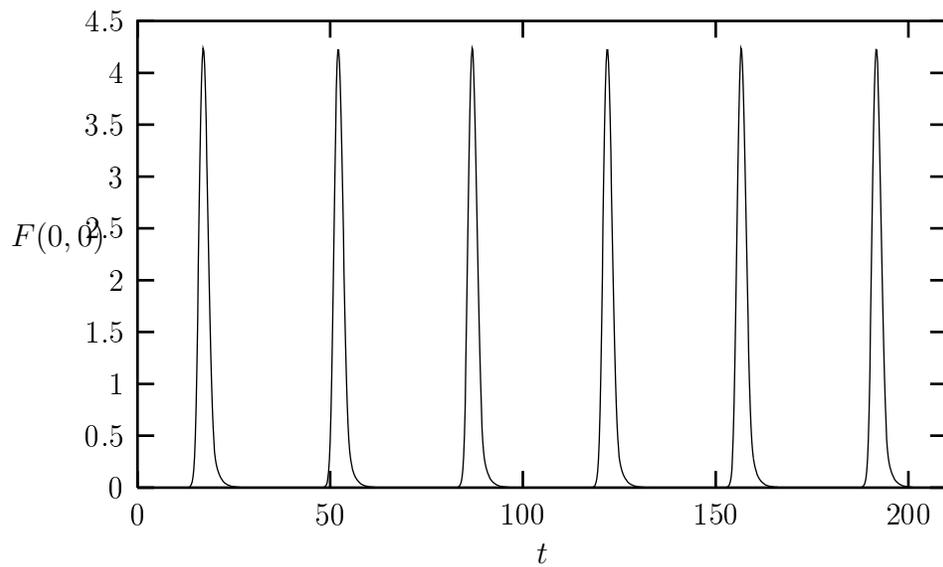


FIGURE 5.8 – Evolution temporelle de l'intensité du champ dans le point $(0, 0)$. La forme est typique des impulsions $P^{(0)}$ du LAS temporel.

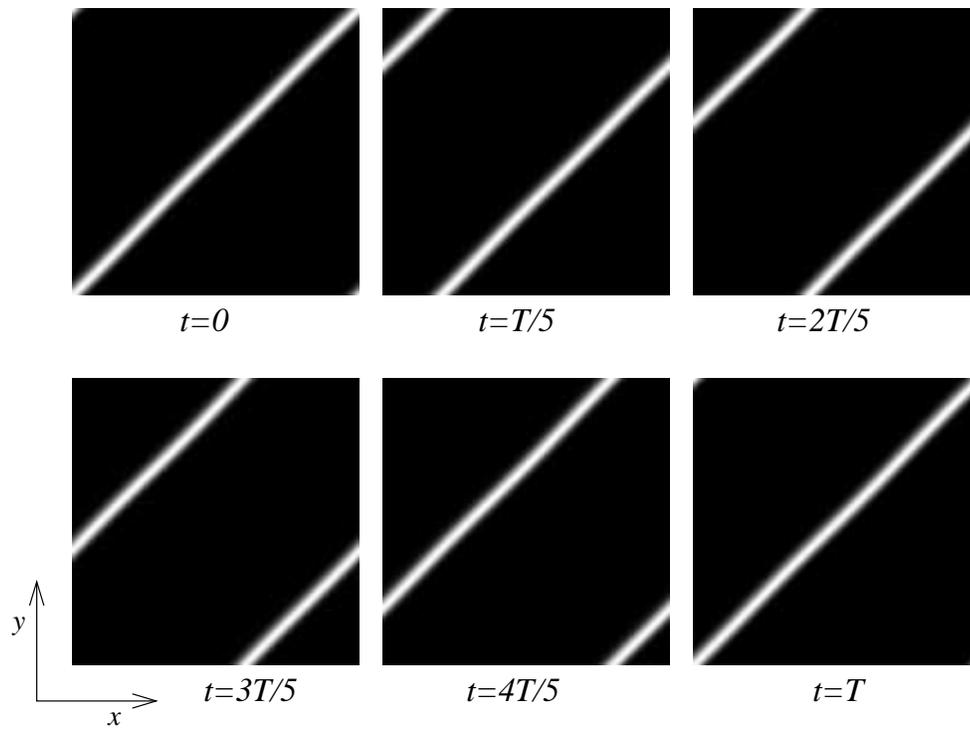


FIGURE 5.9 – Evolution spatiale de l'intensité du champ en six points distribués sur une période d'oscillation, en montrant qu'il s'agit d'une onde progressive.

5.3 Conclusions

Dans cette partie, nous avons montré qu'au voisinage du seuil de fonctionnement d'un LAS les structures peuvent être sélectionnées à l'aide des paramètres de l'absorbant saturable. En particulier, nous avons montré le rôle que peut jouer l'écart en fréquence entre les raies du milieu actif et de l'absorbant, qui, en fonction de son signe, positif ou négatif, contribue respectivement à faire exister ou non la solution homogène. De plus, en présence de structures, l'absorbant peut contrôler le vecteur d'onde le plus instable de la solution qui apparaît. Nous avons mis en évidence que la force de l'effet de l'absorbant dépend directement du paramètre d'absorption.

Un développement faiblement non linéaire, effectué au seuil, a mis en évidence que le LAS est décrit par une équation d'amplitude du type Swift-Hohenberg pour le champ électrique, couplé à une équation pour la population du milieu actif [70]. Cette description n'est pas limitée au laser CO₂, mais reste valable pour tout laser de classe B. Comme dans le cas de l'approximation de l'onde plane, le paramètre de saturabilité de l'absorbant joue un rôle important, en donnant deux régions principales. La première, correspondant à un paramètre faible, rend le modèle de Swift-Hohenberg assimilable à celui d'un laser libre. La deuxième, correspondant à un effet additionnel de saturation, peut déstabiliser le système au voisinage du seuil : dans ce cas, le modèle reste valable pour une région plus étroite du paramètre d'absorption, à l'extérieur de laquelle un développement plus avancé est nécessaire.

Les simulations numériques effectuées sur le modèle de Swift-Hohenberg ainsi que sur le modèle complet ont permis de pousser l'analyse aux régions fortement non linéaires, en mettant en évidence des solutions périodiques à un, deux ou quatre vecteurs d'onde. Dans le cas d'inhibition de structures, les simulations ont montré l'existence de solutions à onde progressive avec un profil spatial semblable à la forme des impulsions PQS du LAS monomode. Au delà du seuil, les simulations ont montré l'existence de solutions irrégulières dans l'espace et le temps.

Afin de mieux cerner l'expérience, une extension au cas du pompage inhomogène ainsi que d'un résonateur avec miroirs sphériques est envisageable.

Conclusion

Ce travail a permis l'étude de la dynamique non linéaire de deux systèmes Laser à Absorbant Saturable. Le rôle particulièrement important de l'absorbant y a été souligné.

Dans une première partie, une étude expérimentale a été menée sur le couplage de deux lasers CO₂ par un absorbant saturable commun. La forte non linéarité de l'absorbant saturable, élément du couplage, et le caractère impulsionnel de certains régimes du LAS donnent naissance à une dynamique où le couplage est localisé dans le temps. D'autre part l'étude du couplage perturbatif d'un laser par les impulsions de l'autre a permis la visualisation de régimes transitoires du LAS et la mise en évidence de nouvelles bifurcations de solutions introduites par le couplage.

En ce qui concerne les régimes non impulsionnels, le couplage intervient dans la synchronisation de régimes quasipériodiques et chaotiques ("*lag synchronisation*"). De plus, des régimes d'oscillation en phase et en antiphase ont été observés au voisinage de la bifurcation vers l'état continu, région où les effets de saturation limitent l'intensité du couplage faiblement non linéaire.

Dans une deuxième partie, une étude théorique et numérique a porté sur le comportement spatio-temporel d'un LAS spatialement étendu. L'analyse de stabilité linéaire de la solution nulle a montré que les paramètres de l'absorbant contrôlent la longueur d'onde critique des modes qui se déstabilisent au seuil. La création ou l'inhibition des structures a été analysée suivant l'écart en fréquence de l'absorbant. Un résultat contre-intuitif rencontré dans cette analyse est l'abaissement du seuil du laser, dans une certaine plage de paramètres.

Une analyse faiblement non linéaire au seuil a montré que le système était décrit par une équation de Swift-Hohenberg pour le champ, couplée à une équation pour la population. Certaines de ces solutions, déjà connues, décrivent le comportement de systèmes présentant des analogies avec celui-ci. Les simulations numériques ont ainsi pu mettre en évidence des solutions à ondes progressives, à ondes stationnaires et en échiquier (4 vecteurs d'onde). Les simulations sur le système complet ont permis de vérifier la validité du

modèle de Swift-Hohenberg tout en faisant apparaître des régimes plus fortement non linéaires, comme des impulsions 2D progressives caractérisées par une évolution temporelle semblable à celle des impulsions $P^{(0)}$. Une analyse de l'influence des paramètres (diffraction en particulier) sur le profil des ces impulsions est prévue.

En conclusion, dans cette thèse, le rôle de l'absorbant saturable a été souligné en tant qu'élément de couplage dans la première partie et de contrôle de structures dans la deuxième. L'absorbant saturable, grâce à sa forte non linéarité et à son intégration aisée dans les systèmes, tels que les oscillateurs paramétriques optiques pulsés et les micro-lasers Nd :YAG, rencontre actuellement un regain d'intérêt en optique non linéaire. Une poursuite de notre travail est tout à fait envisageable sur ces dispositifs.

Bibliographie

- [1] T.L. Carroll, J. Heagy, and L.M. Pecora. « Synchronization and desynchronization in pulse coupled relaxation oscillators ». *Physics Letters A* **186**, 225–229 (1994).
- [2] T. Sugawara, M. Tachikawa, T. Tsukamoto, and T. Shimizu. « Observation of Synchronization in Laser Chaos ». *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3502–3505 (1994).
- [3] T. Tsukamoto, M. Tachikawa, T. Hirano, T. Kuga, and T. Shimizu. « Synchronization of a chaotic laser pulsation with its prerecorded history ». *Phys. Rev. E* **54**, 4476–4479 (1996).
- [4] R. Kuske and T. Erneux. « Localized synchronization of two coupled solid state lasers ». *Opt. Commun.* **139**, 125–131 (1997).
- [5] A. Hohl, A. Gavrielides, T. Erneux, and V. Kovanis. « Localized Synchronization in Two Coupled Non-Identical Semiconductor Lasers ». *Phys. Rev. A* **59**, 3941–3949 (1999).
- [6] S.S. Wang and H.G. Winful. « Dynamics of phase-locked semiconductor laser arrays ». *Appl. Phys. Lett.* **52**, 1774–1776 (1988).
- [7] A.V. Bondarenko, A.F. Glova, S.N. Kozlov, F.V. Lebedev, V.V. Likhanskii, A.P. Napartovich, V.D. Pis'mennyi, and V.P. Yartsev. « Bifurcation and chaos in a system of optically coupled CO₂ lasers ». *Sov. Phys. JETP* **68**, 461–466 (1989).
- [8] L.A. Lugiato. « Spatio-temporal structures. I ». *Phys. Rep.* **219**, 293–310 (1992).
- [9] C.O. Weiss. « Spatio-temporal structures. II : Vortices and defects in lasers ». *Phys. Rep.* **219**, 311–338 (1992).
- [10] L.A. Lugiato and M.S. El Naschie, editors. *special issue on "Nonlinear Optical Structures, Patterns, Chaos"*. 1994.
- [11] A.J. Scroggie, W.J. Firth, G.S. McDonald, M. Tlidi, R. Lefever, and L.A. Lugiato. *Chaos Solitons & Fractals* **4**, 1323 (1994).

- [12] G. Grynberg. « Mirrorless four-wave mixing oscillation in atomic vapors ». *Opt. Commun.* **66**, 321–324 (1988).
- [13] W.J. Firth and C. Paré. « Transverse modulational instabilities for counterpropagating beams in Kerr media ». *Opt. Lett.* **13**, 1096–1098 (1988).
- [14] G. Grynberg, E. Le Bihan, P. Verkerk, P. Simoneau, J.R.R. Leite, D. Bloch, S. Le Boiteux, and M. Ducloy. « Observation of instabilities due to mirrorless four-wave mixing oscillation in sodium ». *Opt. Commun.* **67**, 363–366 (1989).
- [15] L. Gil, K. Emilsson, and G.L. Oppo. « Dynamics of spiral waves in a spatially inhomogeneous Hopf bifurcation ». *Phys. Rev. A* **45**, 567–570 (1992).
- [16] M.A. Vorontsov, N.I. Zheleznykh, and V.Y. Ivanov. « Transverse interactions in 2-D feedback non-linear optical systems ». *Opt. Quant. Electron.* **22**, 501–515 (1990).
- [17] P. Couillet, L. Gil, and F. Rocca. « Optical Vortices ». *Opt. Commun.* **73**, 403–408 (1989).
- [18] D. Wilkowski, D. Hennequin, D. Dangoisse, and P. Glorieux. *Chaos, Solitons & Fractals* **4**, 1683 (1994).
- [19] M. Tlidi, P. Mandel, and R. Lefever. « Localized structures and localized patterns in optical bistability ». *Phys. Rev. Lett.* **73**, 640–643 (1994).
- [20] F.T. Arecchi, G. Giacomelli, P.L. Ramazza, and S. Residori. « Experimental evidence of chaotic itinerancy and spatiotemporal chaos in optics ». *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2531–2534 (1990).
- [21] K. Staliunas, F.H. Tarroja M, G. Sleky, C.O. Weiss, and L. Dambly. « Analogy between photorefractive oscillators and class-A lasers ». *Phys. Rev. A* **51**, 4140–4151 (1995).
- [22] S. Longhi. « Traveling-wave states and secondary instabilities in optical parametric oscillators ». *Phys. Rev. A* **53**, 4488–4499 (1996).
- [23] M.C. Cross and P.C. Hohenberg. « Pattern formation outside of equilibrium ». *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851–1112 (1993).
- [24] K. Staliunas. « Laser Ginzburg-Landau equation and laser hydrodynamics ». *Phys. Rev. A* **48**, 1573–1581 (1993).
- [25] J. Lega, J.V. Moloney, and A.C. Newell. « Universal description of laser dynamics near threshold ». *Physica D* **83**, 478–498 (1995).
- [26] P.K. Jakobsen, J.V. Moloney, A.C. Newell, and R. Indik. « Space-time dynamics of wide-gain-section lasers ». *Phys. Rev. A* **45**, 8129–8137 (1992).

- [27] P.K. Jakobsen, J. Lega, Q. Fenk, M. Staley, J.V. Moloney, and A.C. Newell. « Nonlinear transverse modes of large-aspect-ratio homogeneously broadened lasers. I : analysis and numerical simulation ». *Phys. Rev. A* **49**, 4189–4200 (1994).
- [28] J. Lega, P.K. Jakobsen, J.V. Moloney, and A.C. Newell. « Nonlinear transverse modes of large-aspect-ratio homogeneously broadened lasers. II : pattern analysis near and beyond threshold ». *Phys. Rev. A* **49**, 4201–4212 (1994).
- [29] G.J. de Valcárcel. « Order-parameter equations for transverse pattern formation in nonlinear optical systems with nonplanar resonators ». *Phys. Rev. A* **56**, 1542–1547 (1997).
- [30] M.N. Ouarzazi, P.A. Bois, and M. Taki. « Global-stability analysis of transverse modes in laser systems under inhomogeneous pumping ». *Phys. Rev. A* **53**, 4408–4419 (1996).
- [31] O.R. Wood and S.E. Schwarz. « Passive Q-Switching of a CO₂ laser ». *Appl. Phys. Lett.* **11**, 88–89 (1967).
- [32] P.L. Hanst, J.A. Morreal, and W.J. Henson. « Repetitive pulsing of the CO₂ laser by means of CO₂ gas and other absorbers ». *Appl. Phys. Lett.* **12**, 58–61 (1968).
- [33] E. Arimondo, F. Casagrande, L. Lugiato, and P. Glorieux. « Repetitive passive Q-switching and bistability in lasers with saturable absorber ». *Appl. Phys. B* **30**, 57–77 (1983).
- [34] E. Arimondo and E. Menchi. « Analysis of Q-switch in a CO₂ laser with saturable absorber ». *Appl. Phys. B* **37**, 55–61 (1985).
- [35] M. Tachikawa, K. Tanji, M. Kajita, and T. Shimizu. « Undamped Undulation Superposed on the Passive Q-Switching Pulse of a CO₂ laser ». *Appl. Phys. B* **39**, 83–90 (1986).
- [36] K. Tanii, M. Tachikawa, M. Kajita, and T. Shimizu. « Sinusoidal self-modulation in the output of a CO₂ laser with an intracavity saturable absorber ». *J. Opt. Soc. Am. B* **5**, 24–28 (1988).
- [37] D. Dangoisse, A. Bekkali, F. Papoff, and P. Glorieux. « Shil'nikov dynamics in a passive Q-switching laser ». *Europhys. Lett.* **6**, 335–340 (1988).
- [38] M. Tachikawa, K. Tanii, and T. Shimizu. « Laser instability and chaotic pulsation in a CO₂ laser with intracavity saturable absorber ». *J. Opt. Soc. Am. B* **5**, 1077–1082 (1988).
- [39] Y. Liu, P.C. de Oliveira, M.B. Danailov, and J.R. Rios Leite. « Chaotic and periodic passive Q-switching in coupled CO₂ lasers with a saturable absorber ». *Phys. Rev. A* **50**, 3464–3470 (1994).

- [40] S. Bottani. « Pulse-coupled relaxation oscillators : from biological synchronization to self-organized criticality ». *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4189–4192 (1995).
- [41] B. Zambon, F. De Tomasi, D. Hennequin, and E. Arimondo. « Investigations of models and experimental studies of a stationary regime for a laser with a saturable absorber ». *Phys. Rev. A* **40**, 3782–3795 (1989).
- [42] A. Barsella, Jr. P. Alcantara, E. Arimondo, M. Brambilla, and F. Prati. « Dynamics of transverse patterns in a laser with saturable absorber : model and numerical analysis ». *Chaos, Fractals and Solitons* **4**, 1665 (1994).
- [43] L.M. Pecora and T.L. Carroll. « Synchronization in chaotic systems ». *Phys. Rev. Lett.* **64**, 821–824 (1990).
- [44] L.M. Pecora and T.L. Carroll. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **38**, 453 (1991).
- [45] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, and Jürgen Kurths. « From Phase to Lag Synchronization in Coupled Chaotic Oscillators ». *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4193–4196 (1997).
- [46] M. Lefranc, D. Hennequin, and D. Dangoisse. « Homoclinic chaos in a laser containing a saturable absorber ». *J. Opt. Soc. Am. B* **8**, 239–249 (1991).
- [47] R.J. Horowicz, L.A. Lugiato, and G. Strini. *Z. Phys. B* **58**, 71 (1984).
- [48] M. Tachikawa, K. Tanii, and T. Shimizu. « Comprehensive interpretation of passive Q switching and optical bistability in a CO₂ laser with an intracavity saturable absorber ». *J. Opt. Soc. Am B* **4**, 387–395 (1987).
- [49] M. Tachikawa, F.L. Hon, K. Tanii, and T. Shimizu. « Deterministic chaos in passive Q-switching pulsation of a CO₂ laser with saturable absorber ». *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2266–2268 (1988).
- [50] B. Zambon. « Theoretical investigations of models for the laser with saturable absorber : A case of homoclinic tangency to a periodic orbit ». *Phys. Rev. A* **44**, 688–701 (1991).
- [51] P.C. Oliveira, M.B. Danailov, Y. Liu, and J.R. Rios Leite. « Experimental dynamical variables of a chaotic CO₂ laser with saturable absorber ». *Phys. Rev. A* **55**, 2463–2466 (1997).
- [52] A. Barsella. « Effetti Trasversi nella Dinamica di un Laser con Assorbitore Saturabile ». Master's thesis, Università degli studi di Pisa, 1994.
- [53] C. Dang, J. Reid, and B.K. Garside. « Dynamics of the CO₂ upper laser level as measured with a tunable diode laser ». *J. Quantum Electron.* **QE-19**, 755–764 (1983).

- [54] J.J. Degnan. *Appl. Phys.* **11**, 1 (1976).
- [55] H. Statz, C.L. Tang, and G.F. Koster. « Transition probabilities between laser states in carbon dioxide ». *J. Appl. Phys.* **37**, 4278–4284 (1966).
- [56] C. Dang, J. Reid, and B.K. Garside. « Dynamics of the CO₂ laser levels as measured with a tunable diode laser ». *Appl. Phys B* **31**, 163–172 (1983).
- [57] P.K. Cheo. « *Lasers 3* », pages 111–267. Dekker, New York, 1971.
- [58] Alcántara P., Jr., L. Guidoni, A. Barsella, A. Fioretti, and E. Arimondo. « Frequency tuning of homoclinic chaos in an infrared laser with an osmium tetroxide intracavity saturable absorber ». *J. Opt. Soc. Am. B* **12**, 1326–1333 (1995).
- [59] H. Haken. *Light*, volume 2. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [60] A. Siegman. *Lasers*. University Science Books, Mill Valley CA, 1986.
- [61] A. Barsella, C. Lepers, D. Dangoisse, P. Glorieux, and T. Erneux. « Synchronization of two strongly pulsating CO₂ lasers ». *Opt. Commun.* **165**, 251–259 (1999).
- [62] S. Taherion and Y. C. Lai. « Observability of lag synchronization of coupled chaotic oscillators ». *Phys. Rev. E* **59**, R6247–R6250 (1999).
- [63] C. Lepers, V. Zehnlé, D. Hennequin, D. Dangoisse, P. Glorieux, A. Barsella, and E. Arimondo. « Reconstruction of the transverse dynamics of a bimode CO₂ laser ». *Opt. Commun.* **135**, 121–127 (1997).
- [64] P. Hadley and M.R. Beasley. « Dynamical states and stability of linear arrays of Josephson junctions ». *Appl. Phys. Lett.* **50**, 621–623 (1987).
- [65] K. Wiesenfeld, C. Bracikowski, G. James, and R. Roy. « Observation of antiphase states in a multimode laser ». *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1749–1752 (1990).
- [66] K. Otsuka. « Winner-takes-all dynamics and antiphase states in modulated multimode lasers ». *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1090–1093 (1991).
- [67] P. Mandel, M. Georgiou, K. Otsuka, and D. Pieroux. « Transient and modulation dynamics of a multimode Fabry-Pérot laser ». *Opt. Commun.* **100**, 341–350 (1993).
- [68] M. Silber, H. Reicke, and L. Kramer. « Symmetry-breaking Hopf bifurcation in anisotropic systems ». *Physica D* **61**, 260–278 (1992).
- [69] N.L. Komarova, B.A. Malomed, J.V. Moloney, and A.C. Newell. « Resonant quasiperiodic patterns in a three-dimensional lasing medium ». *Phys. Rev. A* **56**, 803–813 (1997).

- [70] A. Barsella, C. Lepers, M. Taki, and P. Glorieux. « Swift-Hohenberg model of a CO₂ laser with saturable absorber ». *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.* **1**, 64–69 (1999).
- [71] J. Lega, J.V. Moloney, and A.C. Newell. « Swift-Hohenberg equation for lasers ». *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2978–2981 (1994).

Annexe A

Détails relatifs à la deuxième partie

A.1 Valeurs critiques exprimées en fonction des paramètres d'origine

Nous établissons ici les expressions des valeurs critiques du paramètre de pompe r et du vecteur d'onde le plus instable en fonction des paramètres d'origine du système. Le point de départ sont les équations (3.9), que nous reportons ici :

$$\nu_c = \frac{\sigma\delta_1\Omega_G + \mathcal{A}_1k^2}{1 + \sigma\delta_1} \quad (\text{A.1a})$$

$$r_c = \delta_1 \left[1 + \left(\frac{\mathcal{A}_1k^2 - \Omega_G}{1 + \sigma\delta_1} \right)^2 \right] \quad (\text{A.1b})$$

Dans le cas de la solution homogène (c'est-à-dire $k_c = 0$), qui correspond à une valeur de $\Omega_G < 0$, le développement de ν_c et r_c donne :

$$\nu_c = \sigma \left(1 + \frac{\bar{A}}{1 + \delta^2} \right) \left[\frac{\Omega(1 + \delta^2) + \sigma\bar{A}\delta}{(\sigma + 1)(1 + \delta^2) + \sigma\bar{A}} \right] \quad (\text{A.2a})$$

$$r_c = \left(1 + \frac{\bar{A}}{1 + \delta^2} \right) \left[1 + \left(\frac{\Omega(1 + \delta^2) + \sigma\bar{A}\delta}{(\sigma + 1)(1 + \delta^2) + \sigma\bar{A}} \right)^2 \right] \quad (\text{A.2b})$$

Par contre, si k_c est différent de zéro, les expressions se simplifient :

$$r_c = \delta_1 = 1 + \frac{\bar{A}}{1 + \delta^2} \quad (\text{A.3a})$$

$$\nu_c = \frac{\delta_1\sigma\Omega_G + \Omega_G}{1 + \sigma\delta_1} = \Omega_G = \Omega + \frac{\sigma\bar{A}\delta}{1 + \delta^2} \quad (\text{A.3b})$$

Notons que la valeur de ν_c de l'équation A.3 diffère notablement de celle qui est déduite de l'analyse linéaire. Ceci découle du changement de repère effectué sur le système et qui déplace la fréquence de référence d'une valeur égale à Ω_{LSA} . La relation entre les deux valeurs est donc $\nu_c^{\text{original}} = \nu_c - \Omega_{\text{LSA}} = \Omega$.

A.2 Dérivation de l'équation de Swift-Hohenberg

Nous présentons ici le détail de la dérivation de l'équation de Swift-Hohenberg, dont le résultat final est l'équation (4.2). Considérons les équations du modèle (3.4) :

$$e_t + \sigma\delta_1 e = i\mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2 e + \sigma p + N(e) \quad (\text{A.4a})$$

$$p_t + (1 + i\Omega_G)p = (r - n)e \quad (\text{A.4b})$$

$$n_t + bn = \frac{1}{2}(e^*p + ep^*) + c_2(n + m) \quad (\text{A.4c})$$

$$m_t + cm = -cn \quad (\text{A.4d})$$

où $N(e)$ est la partie non linéaire de l'équation du champ électrique de (3.4), δ_1 et Ω_G sont définis dans la même équation. Nous considérons une petite perturbation de la solution zéro et analysons, à l'aide d'un développement en échelles multiples, l'évolution faiblement non linéaire des variables du système. Pour cela, nous introduisons un petit paramètre ε avec lequel nous effectuerons notre développement et choisissons pour les paramètres du système les échelles suivantes :

$$\begin{aligned} \Omega_G &= \varepsilon\Omega_1 \\ b &= \varepsilon^2 b_2 \\ a &= a_0 + \varepsilon a_1 \\ r &= \delta_1 + \varepsilon^2 r_2 \end{aligned}$$

où Ω_1 , b_2 et r_2 sont d'ordre 1. Les échelles à utiliser dans l'espace et le temps afin d'obtenir une interaction entre les différents termes sont :

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\varepsilon}x \\ Y &= \sqrt{\varepsilon}y \\ T_1 &= \varepsilon t \\ T_2 &= \varepsilon^2 t \end{aligned}$$

Nous cherchons une solution de la forme :

$$\begin{pmatrix} e \\ p \\ n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 \\ p_0 \\ n_0 \\ m_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} e_1 \\ p_1 \\ n_1 \\ m_1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} e_2 \\ p_2 \\ n_2 \\ m_2 \end{pmatrix} + \dots \quad (\text{A.5})$$

Etant donné qu'au seuil $n = -m = |e|^2 \delta_1 / b = r - \delta_1 \simeq r_2 \varepsilon^2 = O(\varepsilon^2)$, nous nous attendons à ce que la première contribution de n et de e soit d'ordre ε^2 .

Le terme non linéaire $N(e)$ décrit l'effet de l'absorbant :

$$N(e) = \left[\left(\frac{\sigma \bar{A}}{1 + \delta^2} - i\Omega_{\text{LSA}} \right) \frac{(a/b)|e|^2}{1 + \delta^2 + (a/b)|e|^2} \right] e \quad (\text{A.6})$$

Nous introduisons ici $\hat{A} = \sigma \bar{A} / (1 + \delta^2) - i\Omega_{\text{LSA}}$ et nous développons en série de ε . Compte tenu de l'expression du paramètre de saturabilité $a = a_0 + \varepsilon a_1$, il existe deux cas possibles pour le développement de $N(e)$ suivant la valeur de a_0 . Si $a_0 = 0$:

$$N(e) = \hat{A} \left[\frac{a_1}{b_2(1 + \delta^2)} |e_2|^2 e_2 \varepsilon^5 + O(\varepsilon^6) \right] \quad (\text{A.7})$$

ne contribue au développement qu'à l'ordre ε^5 . Dans ce cas la dérivation de l'équation de S-H est donc identique à celle du laser libre. L'effet de l'absorbant n'est présent que dans les coefficients de l'équation.

Si $a_0 \neq 0$, la contribution est d'ordre ε^4 :

$$N(e) = \hat{A} \left[\frac{a_0}{b_2(1 + \delta^2)} |e_2|^2 e_2 \varepsilon^4 + O(\varepsilon^5) \right] \quad (\text{A.8})$$

Compte tenu de ce qui précède, nous pouvons regrouper les termes correspondants aux différents ordres de ε pour déterminer les équations qui définissent l'évolution du système. A l'ordre zéro du développement, toutes les équations sont nulles, grâce au changement de variable opéré sur D au début du chapitre 3.

A l'ordre ε , nous choisissons d'annuler toutes les variables. Ce choix est cohérent avec la valeur de b d'ordre ε et a comme objectif de garantir que toutes les variables dynamiques interagissent au seuil. Ce choix est identique à celui effectué par J. Lega *et al.* [71] dans le cas d'un laser CO_2 seul.

A l'ordre ε^2 , nous avons les relations suivantes entre les variables :

$$p_2 = \delta_1 e_2 \quad (\text{A.9a})$$

$$n_2 = -m_2. \quad (\text{A.9b})$$

A l'ordre ε^3 le système devient :

$$\frac{\partial e_2}{\partial T_1} + \sigma \delta_1 e_3 = i \mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2 e_2 + \sigma p_3 \quad (\text{A.10a})$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial T_1} + i \Omega_1 p_2 = -p_3 + \delta_1 e_3 \quad (\text{A.10b})$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial T_1} = c_2 (m_3 + n_3) \quad (\text{A.10c})$$

$$\frac{\partial m_2}{\partial T_1} = -c (n_3 + m_3). \quad (\text{A.10d})$$

Nous observons que les première et deuxième équations sont découplées des troisième et quatrième. Pour les deux premières équations, la condition de solvabilité nous donne :

$$(1 + \sigma \delta_1) \frac{\partial e}{\partial T_1} = -i \sigma \delta_1 \Omega_1 e + i \mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2 e \quad (\text{A.11a})$$

$$p_3 = -\delta_1 \left(\frac{\partial}{\partial T_1} + i \Omega_1 \right) e \quad (\text{A.11b})$$

Les deux dernières équations conduisent à $n_3 = -m_3$. Nous avons choisi la valeur $e_3 = 0$ pour déterminer cette dernière relation.

A l'ordre ε^4 , nous obtenons un système d'équations similaires à (A.10) et (A.11). De la même façon, la relation $n_4 = -m_4$ est obtenue en choisissant la valeur $e_4 = 0$. Les équations aux amplitudes sont obtenues en regroupant les relations entre les différents ordres des variables. Pour e et n , nous obtenons le système d'équations suivant (écrit pour les variables d'origine) :

$$(1 + \sigma \delta_1) \frac{\partial e}{\partial t} = \sigma (r - \delta_1) e + i \mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2 e - i \sigma \delta_1 \Omega_G e - \sigma n e \quad (\text{A.12a})$$

$$-\frac{\sigma \delta_1}{(1 + \sigma \delta_1)^2} (\Omega_G + \mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2)^2 e + \beta \quad (\text{A.12b})$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{c}{c - c_2} (-bn + \delta_1 |e|^2) \quad (\text{A.12c})$$

le coefficient β nous permet d'introduire l'effet non linéaire de l'absorbant : le cas où $a_0 = 0$ correspond à $\beta = 0$. Si, par contre, $a_0 \neq 0$, la valeur de β est donnée par :

$$\beta = \left(\frac{\sigma \bar{A}}{1 + \delta^2} - i \Omega_{\text{LSA}} \right) \frac{a_0}{b(1 + \delta^2)} |e|^2 e \quad (\text{A.13})$$

Les deux variables p et m sont obtenues en fonction de e et n suivant les relations :

$$\begin{aligned}
p &= \delta_1 e - \frac{\delta_1}{(1 + \sigma\delta_1)} (\Omega_1 + \mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2) e \\
&\quad - \frac{\delta_1}{(1 + \sigma\delta_1)^3} (\Omega_1 + \mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2)^2 e \\
&\quad + \frac{\delta_1}{(1 + \sigma\delta_1)} e - \frac{1}{(1 + \sigma\delta_1)} n e \tag{A.14a}
\end{aligned}$$

$$m = -n. \tag{A.14b}$$

A.3 Dérivation de l'équation de Cross-Newell

La dérivation de l'équation de Cross-Newell pour la solution en rouleaux est obtenue en cherchant la stabilité d'une solution du type :

$$e = Ae^{i\theta} \tag{A.15}$$

Elle est ici présentée avec tous les détails de calcul, en partant du modèle de Swift-Hohenberg établi dans la section précédente.

Pour simplifier les calculs, écrivons l'équation de S-H sous une forme générique du type :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial t} &= C_a \psi + iC_b \nabla^2 \psi + C_c n \psi \\
&\quad + C_d |\psi|^2 \psi + C_e (C_f + C_g \nabla^2)^2 \psi \tag{A.16a}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = C_h + C_j |\psi|^2 \tag{A.16b}$$

où nous avons remplacé les coefficients par des symboles ($C_{a\dots j}$), afin de simplifier les expressions. La relation entre les anciens coefficients et les nouveaux

est donnée par :

$$\begin{aligned}
C_a &= \frac{\sigma(r - \delta_1)}{1 + \sigma\delta_1} - i \frac{\sigma\delta_1\Omega_G}{1 + \sigma\delta_1} \\
C_b &= \frac{\mathcal{A}_1}{1 + \sigma\delta_1} \\
C_c &= -\frac{\sigma}{1 + \sigma\delta_1} \\
C_d &= \frac{a_0}{(1 + \sigma\delta_1)b(1 + \delta^2)} \left[\frac{\sigma\bar{A}}{(1 + \delta^2)} - i \frac{\sigma\bar{A}\delta}{(1 + \delta^2)} \right] \\
C_e &= -\frac{\sigma\delta_1}{(1 + \sigma\delta_1)^3} \\
C_f &= \Omega_G \\
C_g &= \mathcal{A}_1 \\
C_h &= -\frac{c}{c - c_2} b \\
C_j &= \frac{c}{c - c_2} \delta_1
\end{aligned}$$

Avec le changement de variables explicité dans 4.7 et 4.10, la solution s'écrit :

$$\psi = A(\vec{X}, T) e^{i\Theta(\vec{X}, T)} \quad (\text{A.17})$$

Considérons d'abord l'expression des opérateurs de dérivation en tenant compte des nouvelles variables. La partie $\exp(i\theta)$ est conservée parce qu'elle est présente dans tous les termes, mais disparaît au moment où nous les injectons dans l'équation de S-H :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \left(\varepsilon \frac{\partial A}{\partial T} + Ai \frac{\partial\Theta}{\partial T} \right) e^{i\theta} \\
\nabla\psi &= \left(\varepsilon \nabla_X A + iA \frac{\partial\Theta}{\partial T} \right) e^{i\theta} = (\varepsilon \nabla_X + i\vec{k}) A e^{i\theta} \\
\nabla^2\psi &= \left(\varepsilon \nabla_X + i\vec{k} \right)^2 A e^{i\theta} = \left[-k^2 A + i \frac{\varepsilon}{A} \vec{\nabla}_X \cdot (\vec{k} A^2) + O(\varepsilon^2) \right] e^{i\theta} \\
\nabla^4\psi &= \left[k^4 A - \right. \\
&\quad \left. i\varepsilon \left(\vec{k} \cdot \vec{\nabla}_X (k^2 A) + \frac{k^2}{A} \vec{\nabla}_X \cdot (\vec{k} A^2) + \vec{\nabla}_X \cdot (\vec{k} k^2 A) \right) + O(\varepsilon^2) \right] e^{i\theta}
\end{aligned}$$

Le terme de S-H avec le laplacien au carré devient donc :

$$\begin{aligned}
(C_f + C_g \nabla^2)^2 \psi &= \left[(C_f - C_g k^2)^2 A + \right. \\
&\quad \left. \varepsilon \frac{2iC_g}{A} \vec{\nabla}_X \cdot \left((C_f - C_g k^2) \vec{k} A^2 \right) \right] e^{i\theta} + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

En introduisant ces expressions dans l'équation A.16, nous pouvons simplifier le terme $\exp(i\theta)$. L'équation peut être séparée en deux parties si nous considérons A réel et nous obtenons :

$$\varepsilon \frac{\partial A}{\partial T} = \Re(C_a)A - \frac{\varepsilon C_b}{A} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{k}A^2) + C_c nA + \Re(C_d)A^3 + C_e(C_f - C_g k^2)A + O(\varepsilon^2) \quad (\text{A.18a})$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial T} A = \Im(C_a)A - bk^2 A + \Im(C_d)A^3 + \frac{2C_g C_e}{A} \vec{\nabla} \cdot [(C_f - C_g k^2) \vec{k} A^2] \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (\text{A.18b})$$

En considérant l'ordre zéro en ε , nous pouvons déterminer la solution :

$$A_0^2 = \frac{\Re(C_a) + C_e(C_f - C_g k^2)^2}{\frac{C_c C_j}{C_h} - \Re(C_d)} \quad (\text{A.19a})$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial T} = \omega = \Im(C_a) - iC_b k^2 + \Im(C_d)A_0^2 \quad (\text{A.19b})$$

Le signe du terme d'ordre ε dans l'équation (A.18b) s'il est négatif conduit à une solution stable. En utilisant la relation (4.10), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{k}u) &= \left(u + k_x \frac{\partial u}{\partial k_x} \right) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \\ &\quad \left(k_x \frac{\partial u}{\partial k_y} + k_y \frac{\partial u}{\partial k_x} \right) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X \partial Y} + \left(u + k_y \frac{\partial u}{\partial k_y} \right) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \end{aligned}$$

où la fonction u est :

$$u = A_0^2(C_f - C_g k^2) \quad (\text{A.20})$$

Pour étudier la stabilité de la phase nous pouvons considérer, sans perte de généralité, que le vecteur \vec{k} est aligné suivant l'axe x : $\vec{k} = (k, 0)$, ce qui permet de simplifier l'expression ci-dessus et nous donne :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial T} = \omega + \varepsilon \frac{2C_g C_e}{A_0^2} \left[\left(u + k \frac{\partial u}{\partial k} \right) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + u \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{A.21})$$

Le signe du coefficient de $\partial^2 \Theta / \partial X^2$ nous renseigne sur la stabilité de la solution le long de l'axe x , (direction du vecteur d'onde). La courbe (r, k) pour laquelle il s'annule, nous donne la limite de la région de stabilité de

Eckaus :

$$\begin{aligned}
D_{\text{Eckaus}} &= \frac{2C_g C_e}{A_0^2} \left[A_0^2 (C_f - C_g k^2) + k \frac{\partial [A_0^2 (C_f - C_g k^2)]}{\partial k} \right] \\
&= \frac{2C_g C_e}{A_0^2} \left(A_0^2 (C_f - C_g k^2) + k \frac{\partial (A_0^2)}{\partial k} (C_f - C_g k^2) - A_0^2 2k^2 C_g \right) \\
&= -\frac{2\mathcal{A}_1 \sigma \delta_1}{(1 + \sigma \delta_1)^3} \left[\Omega_G - 3\mathcal{A}_1 k^2 + \frac{k}{A_0^2} \frac{\partial (A_0^2)}{\partial k} (\Omega_G - \mathcal{A}_1 k^2) \right] \quad (\text{A.22})
\end{aligned}$$

Par contre, le signe du coefficient de $\partial^2 \Theta / \partial Y^2$ nous informe sur la stabilité le long de la direction orthogonale, et la courbe (r, k) pour laquelle il s'annule, correspond à la limite de la région de stabilité zig-zag :

$$\begin{aligned}
D_{\text{zig-zag}} &= \frac{2C_g C_e}{A_0^2} [A_0^2 (C_f - C_g k^2)] \\
&= -\frac{2\mathcal{A}_1 \sigma \delta_1}{(1 + \sigma \delta_1)^3} [\Omega_G - \mathcal{A}_1 k^2] \quad (\text{A.23})
\end{aligned}$$

Annexe B

Publications



ELSEVIER

15 July 1999

OPTICS
COMMUNICATIONS

Optics Communications 165 (1999) 251–259

www.elsevier.com/locate/optcom

Synchronization of two strongly pulsating CO₂ lasers

A. Barsella^a, C. Lepers^{a,*}, D. Dangoisse^a, P. Glorieux^a, T. Erneux^b^a *Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molecules, associé au CNRS, Centre d'Etudes et de Recherches sur les Lasers et Applications, Université des Sciences et Technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*^b *Université Libre de Bruxelles, Optique Nonlinéaire Théorique, Campus Plaine, C.P. 231, 1050 Brussels, Belgium*

Received 17 February 1999; accepted 13 May 1999

Abstract

The response of two CO₂ lasers sharing a common saturable absorber when both lasers are strongly pulsating was studied. Both of the lasers behave as strongly nonlinear limit-cycle oscillators exhibiting different amplitudes but similar periods. Since coupling through the saturable absorber is highly nonlinear, communication between lasers occurs only during short periods of time and when they are pulsating at about the same time. Nevertheless, we show experimentally and numerically that in-phase and out-of-phase oscillations are possible modes of synchronization. © 1999 Published by Elsevier Science B.V. All rights reserved.

PACS: 42.55.-f; 42.60.Mi

Keywords: Passive Q-switching; Coupled limit-cycle oscillators; Nonlinear coupling

1. Introduction

Coupled laser arrays are promising devices for applications that require high optical power from a compact source. High power and high coherence can be achieved only if the lasers are perfectly synchronized but stability and numerical studies of simple model systems suggest that laser arrays have a natural tendency to antiphasing. The synchronization of lasers can be a complex dynamic phenomenon which depends on the type of laser (semiconductor, solid state or gas laser), the coupling mechanism (mutual injection, overlap of the individual fields), as well as the individual laser parameters (optical frequencies,

pump parameters). Synchronized lasers may exhibit steady state intensities or various forms of pulsating intensities from in-phase equal-intensity regimes to out-of-phase non-equal intensity regimes. Direct experimental observations of the coupled lasers intensities are desirable and have motivated the recent experimental [1–4] and theoretical [5–8] interest for simple two coupled lasers systems.

In this paper, we examine the synchronization between two CO₂ lasers coupled through a common intracavity saturable absorber (LCSA) [9]. This system has been studied previously but mainly in a master–slave configuration where one strongly oscillating laser entrains the other laser. Here we concentrate on a case where both lasers are strongly pulsating and synchronization into a common period is not

* Corresponding author.

obvious. Furthermore, two important differences between our two coupled CO₂ lasers system and recently studied two coupled solid state or semiconductor lasers [2–4] motivate a renewed interest for this system. First, a time-periodic state of a laser with a saturable absorber (LSA) generally consists of strongly pulsating limit-cycle oscillations (called passive Q-switching), while single mode solid state or semiconductor lasers only show damped relaxation oscillations. Second, the coupling of our lasers through a common saturable absorber is highly nonlinear, which contrasts to the linear coupling of the fields considered in earlier studies of two coupled lasers. These two properties of our laser system give rise to a peculiar kind of coupling, i.e., a coupling which is strongly localized in time and whose strength evolves in time in a non-trivial way.

Our LCSA problem can be examined mathematically as two coupled limit-cycle oscillators. Synchronization is then possible provided that their individual frequencies are sufficiently close [10]. However, there is an important feature in our laser problem which has not been examined in the applied mathematical literature. As we shall demonstrate, the two lasers may synchronize with drastically different amplitudes. Most mathematical studies have concentrated on weakly coupled oscillators exhibiting slightly different periods but identical amplitudes. An elementary theory of two weakly coupled harmonic limit-cycle oscillators exhibiting distinct amplitudes R_1 and R_2 and frequencies ω_1 and ω_2 leads to the following locking condition (see Appendix A):

$$|\omega_2 - \omega_1| < \eta \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} \right), \quad (1)$$

where $\eta \ll 1$ measures the weak coupling.

Keeping the detuning $\omega_2 - \omega_1$ and R_1 fixed, we note that Eq. (1) is best satisfied if either $R_2/R_1 \ll 1$ or $R_2/R_1 \gg 1$, i.e., as the two lasers oscillate with different amplitudes. Equivalently, we may say that synchronization is realized for a larger domain of $\omega_2 - \omega_1$ if the two oscillators are oscillating with different amplitudes. This is exactly what we observe with our LCSA system when the two lasers operate above their individual thresholds. Understanding how the individual lasers interact is then the key problem

for successful synchronization. Note that we consider a problem of dynamical synchronization where the self-pulsing frequencies ($\sim 10^4$ Hz) of each subsystem lock to each other. This should not be confused with the problem of optical synchronization or mode-locking between two optical frequencies ($\sim 10^{14}$ Hz).

The plan of the paper is as follows. In Section 2, we summarize the main results of our experiments showing that both in-phase and out-of-phase synchronizations are possible. We also introduce our model equations for the CO₂ LSA and identify the necessary conditions for synchronization. These conditions are obtained by determining the bifurcation diagrams of the individual lasers. In Section 3, we show that the nonlinear coupling can be considered as a small perturbation of two uncoupled LSAs. We discuss the consequences of this observation and numerically determine in-phase and out-of-phase solutions similar to the experimental regimes. Section 4 summarize and discuss the main points of our combined experimental and theoretical analysis.

2. Results and model equations

A schematic representation of the experimental system is given in Fig. 1, which is composed of two laser cavities (L_1 : G1-OM and L_2 : G2-M-CBW-OM) with two separate active media (AM1 and AM2). A coated Brewster window (CBW) is used as a transmitting polarizer for L_1 and reflecting polarizer for L_2 ; this ensures that the two lasers operate on orthogonal polarization states and allows the interaction to happen only in the absorber cell (ABS), where the two beams are superimposed. Mirror OM is partially transparent and serves as an output cou-

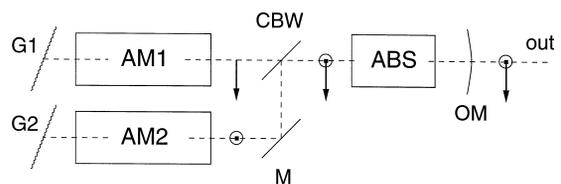


Fig. 1. Schematic representation of the experimental set-up. AM1, AM2 active media, ABS absorber, G1, G2 diffraction gratings, CBW coated Brewster window, M mirror, OM partly transparent output mirror.

pler to monitor the laser intensities, I_1 and I_2 . The detection stage exploits the orthogonality of the polarization states by using another Brewster window to separate the two intensities. A slight misalignment of this window allows a small fraction of I_2 to pass and be detected on the same detector as I_1 . This allows us to determine the presence of a delay between intensity pulses without having to take into account any delay introduced by the difference in the detectors and electronics. The system control parameters are the active media discharge currents and cavity frequency detunings (which act on the gains of the two subsystems) and the pressure of the absorber (which controls the absorption parameters).

The uncoupled LSA exhibits a wide range of dynamical regimes ranging from periodic to multi-periodic and chaotic intensity outputs (see e.g. Refs. [11–13]). The introduction of the coupling introduces additional complexity in the system, leading to numerous kinds of coupled laser dynamics [9]. However, a full analysis of those regimes is beyond the scope of this paper, whose main objective is to understand the synchronization between two strongly pulsating lasers. For this purpose we will restrict our analysis to a simple case where the system is above threshold and emits periodic high-intensity pulses. In order to obtain this regime, we selected a partial pressure of the absorber $P_{\text{ABS}} = 20$ mTorr and discharge currents $i_1 = i_2 = 20$ mA. We then used the laser frequencies to control the pump parameters. Both frequencies were tuned near the edge of the gain curve allowing periodic pulsing in the regime called $P^{(0)}$. For the investigation of the coupling dynamics, we fixed the frequency of one laser (L_1) and varied the frequency of the other one (L_2) over a range of few megahertz, going from higher to lower pump values. The typical range we used was about 6–7 MHz, which is to be compared to the amplifier line width of approximately 80 MHz. The absorber line width was assumed very large, on the basis that we added a large amount of buffer gas (He, 2–4 Torr) in the cell to increase the homogeneous line width. A large line width improves coupling.

As the pump parameter of L_2 was varied, we typically found several regimes from 1:1 synchronization to $m:n$ and partial synchronization states. We concentrated on the 1:1 synchronization region, as shown in Fig. 2. Going from a high to a low value

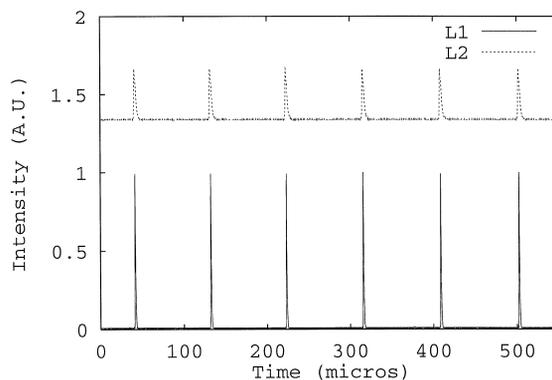


Fig. 2. Experimental recording of the synchronization regime, showing a 1:1 train of pulses.

of the pump of L_2 , we observed successively: (i) out-of-phase(+) pulsation of L_1 and L_2 with the pulses from L_2 occurring before those of L_1 ; (ii) in-phase pulsation; and (iii) out-of-phase(−) pulsation symmetrical to the previously observed one, i.e., the pulses from L_1 occurred before those of L_2 . The transition from one regime to the subsequent one occurred smoothly: the phase difference between the pulses reduced gradually from positive to negative values as a function of the pump parameter. For those three regimes, we measured the periods of both uncoupled LSAs to compare these values with that observed in the coupled case. Furthermore, we also measured the ratio between the two laser intensities. In all cases, we found that the perturbation in the pulse intensity induced by the coupling was negligible, and the intensity ratio remained identical to the uncoupled case (about 2.3), which suggests that the effect of coupling is weak. Fig. 3 shows the three experimental conditions observed, with the temporal evolution of the two laser intensities: L_1 (continuous line) and L_2 (dashed line). The intensity scale was renormalized to have the same maximum on the two channels, which facilitates the determination of the delay between the pulses. In all the three cases, we had a perfect 1:1 synchronization between the two lasers. The comparison of the different periods is given in Table 1. The P_1 and P_2 columns represent the periods for the uncoupled lasers, while P_{12} represents the period of the coupled system. All values are given in microseconds. It is interesting to note that in all cases the period of the coupled regime was between those of the uncoupled lasers.

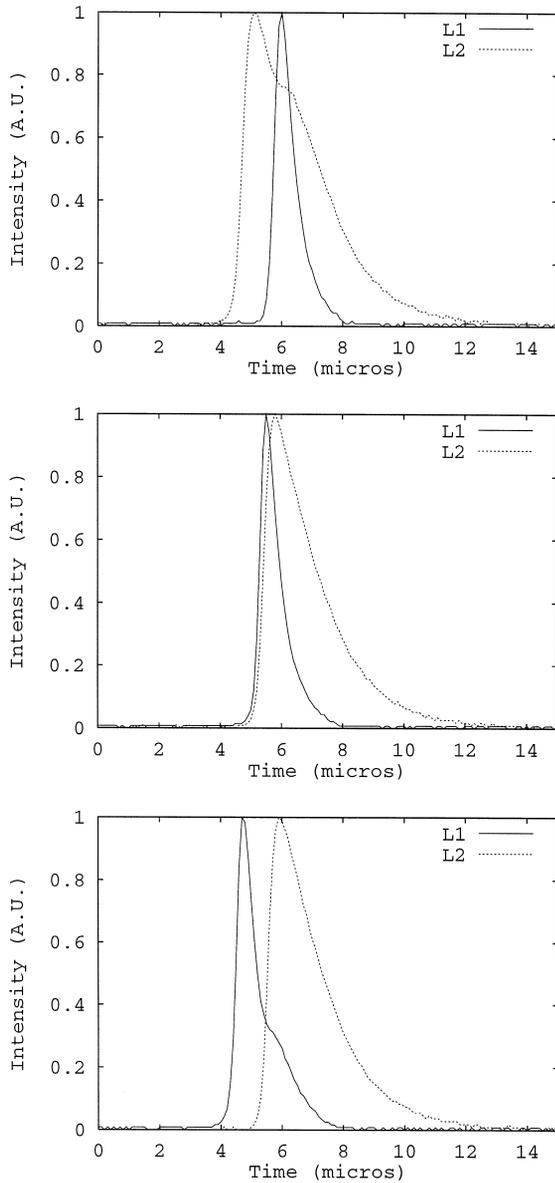


Fig. 3. Experimental recording of the coupled lasers synchronization regimes. From top to bottom: (a) out-of-phase synchronization where the pulse of L_2 appears before the pulse of L_1 ; (b) in-phase synchronization where both the L_1 and L_2 pulses appear together; (c) out-of-phase synchronization where the pulse of L_2 appears after the pulse of L_1 . Note that the two pulses are not drawn on the same scale. The pulse of L_2 is typically 1/3 to 1/2 of the pulse of L_1 .

The model used to describe the evolution of the intensities I_1 and I_2 is based on the work by

Tachikawa et al. [11,12] and consists of a 3 + 2 level model for the CO_2 laser with a saturable absorber. Each laser is described by its intensity I_j and by two inversions of population variables U_j and W_j ($j=1,2$). The common absorber is described by the population difference X . The rate equations use the dimensionless formulation of Lefranc et al. [13] for a single LSA and are given by:

$$\frac{dI_1}{dt} = I_1(U_1 - X - 1), \quad (2)$$

$$\frac{dU_1}{dt} = \epsilon[W_1 - U_1(1 + I_1)],$$

$$\frac{dW_1}{dt} = \epsilon(A_1 + bU_1 - W_1), \quad (3)$$

$$\frac{dX}{dt} = \epsilon_x[X_0 - X(1 + aI_1) + aCI_2], \quad (4)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = I_2(U_2 - DX - 1), \quad (5)$$

$$\frac{dU_2}{dt} = \epsilon[W_2 - U_2(1 + I_2)],$$

$$\frac{dW_2}{dt} = \epsilon(A_2 + bU_2 - W_2). \quad (6)$$

In these equations, ϵ and ϵ_x represent the relaxation rates of the populations of the two active media and the absorber in units of the cavity constant κ , respectively. κ is assumed to be identical for the two lasers and is taken as time unit to simplify the equations. The ratio between the different absorptions for the two laser beams is given by D . A_1 and A_2 are the pump parameters of the active media 1 and 2, respectively, X_0 corresponds to the difference of population in the absorber without saturation, b denotes the dependence of W_1 or W_2 relative to ϵ ,

Table 1

Experimental periods of the uncoupled (P_1 , P_2) and coupled (P_{12}) lasers in microseconds

P_1	P_2	P_{12}	
110	85	92	out-of-phase(+)
108	124	112	in phase
107	146	126	out-of-phase(-)

the coefficient a is defined as the saturability parameter of the absorber relatively to the active medium 1, and C is the ratio of the parameters of saturation of the first and second active media. The coupling between the two lasers is determined by the parameters C and D , which control the effect of the L_2 beam on the absorber and the effect of the absorber on L_2 , respectively. The values of the fixed parameters are:

$$\begin{aligned} \epsilon &= 0.137, a = 4.17, b = 0.85, \epsilon_x = 1.2, \\ X_0 &= 2, C = D = 0.5. \end{aligned} \tag{7}$$

These parameter values are for a typical CO₂ LSA system [13]. The choice of $C = D = 0.5$ is justified by the assumption that the two lasers are operating with different detuning compared to the absorber line, leading then to different absorption as well as different saturability. All our bifurcation studies were done without addition of noise to the laser equations and using a conventional variable time step Runge–Kutta method.

Eqs. (2)–(6) admit the solutions of each individual laser. More precisely, the solutions of Eqs. (2)–(4) with $I_2 = 0$ and the solutions Eqs. (4)–(6) with $I_1 = 0$ are separate families of solutions of Eqs. (2)–(6). Consequently, we first investigate the bifurcation diagram of each individual laser before examining the effect of coupling. L_1 admits a steady bifurcation from the zero intensity solution at $A_1 = A_{1th}$ (L_1 first threshold) defined by:

$$A_{1th} \equiv (1 - b)(1 + X_0). \tag{8}$$

This bifurcation is immediately followed by a Hopf bifurcation to high intensity and large period pulsating oscillations. This Hopf bifurcation at $A_1 = A_{1H}$ is located very close to A_{1th} (from the linear stability analysis of the non-zero steady state, we find $A_{1H} - A_{1th} = O(\epsilon(1 - b)) = O(10^{-2})$) and the branch of the periodic solutions is almost vertical at that point. We thus consider A_{1th} as a good estimate of the threshold for the limit cycle oscillations. Similarly, we find a Hopf bifurcation to intense pulsating oscillations for L_2 which is located close to its first threshold at $A_2 = A_{2th}$ defined by:

$$A_{2th} \equiv (1 - b)(1 + DX_0). \tag{9}$$

Close to these thresholds, L_1 and L_2 exhibit strongly pulsating oscillations consisting of short and

intense pulses separated by long periods where the intensity is almost zero. The interaction through the common saturable absorber is modeled by Eq. (4) which allows both lasers to operate as independent LSAs except if they are pulsating at about the same time. This implies a resonance condition of the form $P_2 \sim P_1$ or, more generally:

$$nP_2 \sim mP_1, \tag{10}$$

where P_1 and P_2 denote the periods of L_1 and L_2 , respectively, and n, m are integers. In the next section, we consider A_1 to be fixed and analyze the conditions for a successful periodic synchronization in terms of A_2 .

3. Reduced model

In this section, we first take advantage of the values of the parameters and reduce the number of equations. We then investigate the reduced equations numerically. A numerical study of Eqs. (2)–(6) using Eq. (7) indicates that X remains close to its slow manifold

$$X = \frac{X_0}{1 + aI_1 + aCI_2}, \tag{11}$$

which allows a simplification of the laser Eqs. (2)–(6). It also allows us to visualize the effect of the saturable absorber in the equations for the intensities. Indeed, inserting Eq. (11) into Eqs. (2)–(6), we obtain the same equations for U_j and W_j ($j = 1, 2$) but new equations for I_1 and I_2 given by:

$$\frac{dI_1}{dt} = I_1 \left(U_1 - \frac{X_0}{1 + aI_1 + aCI_2} - 1 \right), \tag{12}$$

$$\frac{dI_2}{dt} = I_2 \left(U_2 - \frac{DX_0}{1 + aI_1 + aCI_2} - 1 \right). \tag{13}$$

Both equations exhibit the nonlinear coupling term (Eq. (11)) which is clearly effective only if either I_1 or I_2 are different from zero, i.e., when lasers are pulsating. Fig. 4 represents the bifurcation diagrams of the uncoupled L_1 and L_2 limit-cycles. The L_2 limit-cycles are the periodic solutions of Eq. (13) with $I_1 = 0$ and Eq. (6). The bifurcation points have been determined from a linear stability analysis of the steady states. We find that $A_{2th} = 0.3$ is the laser first threshold and $A_{2H} \approx 0.312$ is a Hopf bifurcation point from a non-zero intensity steady state. The

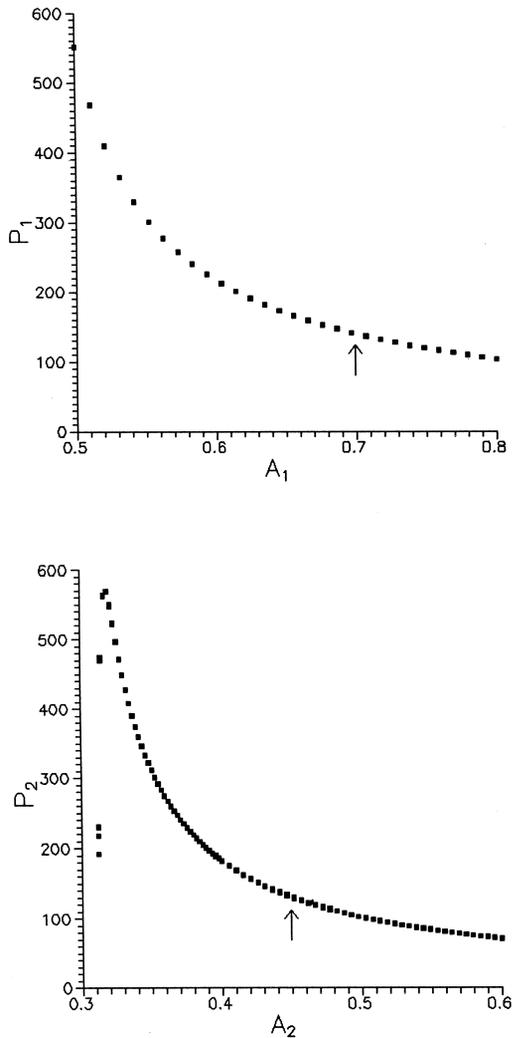


Fig. 4. Bifurcation diagrams of the uncoupled lasers. We show the period P_1 of the limit-cycle oscillations of L_1 as a function of A_1 and the period P_2 of the limit-cycle oscillations of L_2 as a function of A_2 . The two Hopf bifurcation points at which these solutions appear are $A_{1H} \approx 0.4525$ and $A_{2H} \approx 0.312$. The two arrows indicate the values of $A_1 = 0.7$ and $A_2 = 0.45$ used in our simulations of the coupled laser system.

period of the oscillations at the Hopf point is $P_{2H} \approx 212$. The bifurcation diagram of L_1 is similar to the bifurcation diagram of L_2 except that the branch of limit-cycles is much sharper near the Hopf bifurcation point. The L_1 limit-cycles are the solutions of Eq. (12) with $I_2 = 0$ and Eq. (3). The laser first threshold and the Hopf bifurcation point are located at $A_{1th} = 0.45$ and $A_{1H} \approx 0.4525$, respectively.

We next examine the coupled lasers problem for $A_1 = 0.7$ and three different values of A_2 close to $A_2 = 0.45$ ($A_1 = 0.7$ and $A_2 = 0.45$ are indicated by arrows in Fig. 4). From Fig. 4, we note that the period of the uncoupled L_1 and L_2 oscillations are $P_1 = 139$ and $P_2 = 131$, respectively, suggesting nearly 1:1 resonance conditions. Each value of A_2 illustrates a different form of synchronization. The values of A_2 , the properties of the free L_1 and L_2 oscillations (P_1, I_{1M}, P_2, I_{2M}) and the synchronization result ($P_{12}, I_{1M(coupl)}, I_{2M(coupl)}$) are summarized in Table 2.

We discuss each case. Out-of-phase(+) periodic synchronization is observed at $A_2 = 0.47$ and is characterized by an intensity pulse of L_2 which appears before the intensity pulse of L_1 and with a smaller amplitude (Fig. 5(a)). The difference between the maxima is $t_{m1} - t_{m2} = 3.5$. At $A_2 = 0.45$, the two lasers oscillate in-phase (Fig. 5(b)). At $A_2 = 0.43$, we observe out-of-phase(-) synchronization where the pulse of L_2 appears after the pulse of L_1 ($t_{m2} - t_{m1} = 5.5$, Fig. 5(c)). For lower values of A_2 , the pulses are no more synchronized and the two lasers oscillate independently except at the occasional times when they may pulse together. We do not consider these cases of partial synchronization. Note that the positions of the intensity pulses for the two out-of-phase regimes are in agreement with the periods of the individual lasers: we observe that $t_{m2} < t_{m1}$ in the first case ($A_2 = 0.47$) and $P_2 < P_1$, while $t_{m2} > t_{m1}$ in the second case ($A_2 = 0.43$) and $P_2 > P_1$. This is exactly like in the experiments (see Table 1). Furthermore, we find that the period of the synchronized regime is between the periods of the two individual lasers except for the case of in-phase synchronization.

Table 2

Numerical periods P_1 and P_2 (resp. P_{12}) and intensity maxima I_{1M} and I_{2M} (resp. $I_{1M(coupl)}$, $I_{2M(coupl)}$) for the free LSAs (respectively the coupled LSAs) for different values of A_2

A_2	P_1	I_{1M}	P_2	I_{2M}	P_{12}	$I_{1M(coupl)}$	$I_{2M(coupl)}$	
0.47	139	11.1	117.4	3.6	131	11.1	3.8	out-of-phase(+)
0.45	139	11.1	130.5	3.5	141	11.3	4.7	in-phase
0.43	139	11.1	147.1	3.3	146	11.1	4.2	out-of-phase(-)

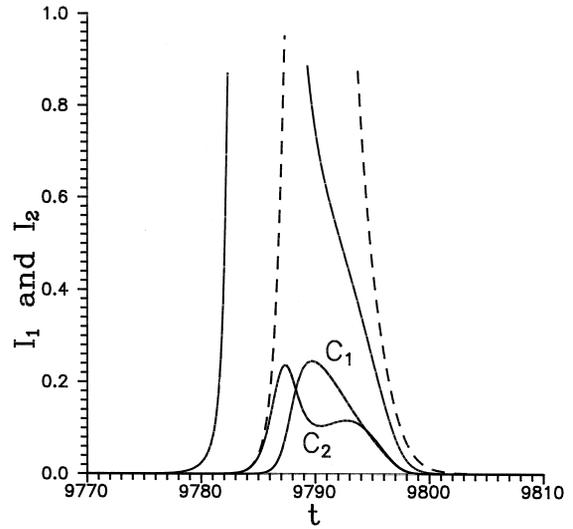
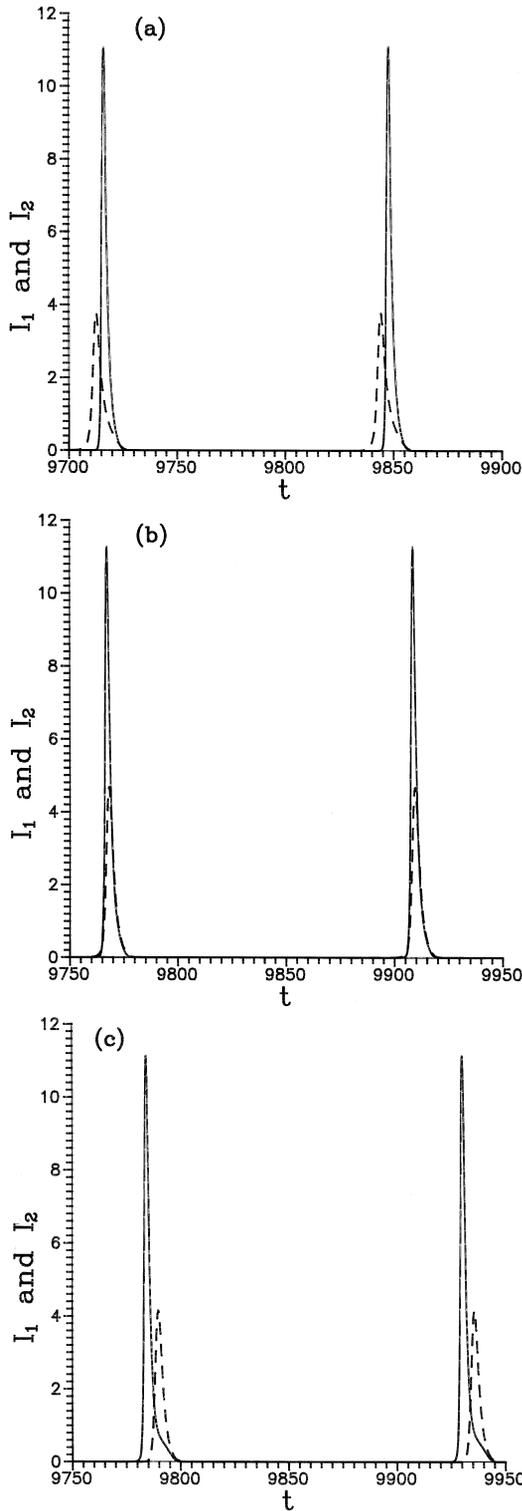


Fig. 6. Coupling functions. The functions $C_1(I_1, I_2)$ and $C_2(I_1, I_2)$ are shown together with the pulses I_1 and I_2 for the out-of-phase synchronization regime as $A_1 = 0.7$ and $A_2 = 0.43$. Note that these two functions are localized in the regions where both intensity pulses appear. Moreover, their maximum amplitudes are relatively small compared to the maximum intensities.

We may understand the synchronization problem better if we reformulate the intensity Eqs. (12) and (13) as the equations of two uncoupled LSAs plus a coupling term. These equations are given by:

$$\frac{dI_1}{dt} = I_1 \left(U_1 - \frac{X_0}{1 + aI_1} - 1 \right) + C_1(I_1, I_2), \quad (14)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = I_2 \left(U_2 - \frac{DX_0}{1 + aCI_2} - 1 \right) + C_2(I_1, I_2), \quad (15)$$

where the coupling terms C_1 and C_2 are defined by

$$C_1 \equiv X_0 a C \frac{I_1 I_2}{(1 + aI_1)(1 + aI_1 + aCI_2)}, \quad (16)$$

$$C_2 \equiv X_0 a D \frac{I_1 I_2}{(1 + aCI_2)(1 + aI_1 + aCI_2)}. \quad (17)$$

Because of the product $I_1 I_2$, C_1 and C_2 are numerically significant only during the short interval

Fig. 5. Possible synchronization regimes. (a) out-of-phase synchronization where the pulse of L_2 appears before the pulse of L_1 ($A_1 = 0.7$ and $A_2 = 0.47$); (b) in-phase synchronization where the L_1 and L_2 appear together ($A_1 = 0.7$ and $A_2 = 0.45$); (c) out-of-phase synchronization where the pulse of L_2 now appear after the pulse of L_1 ($A_1 = 0.7$ and $A_2 = 0.43$).

of time where the $I_1(t)$ and $I_2(t)$ pulses overlap (see Fig. 6). Note the relative small amplitudes of the maximum of C_1 or C_2 compared to the maximum of I_1 or I_2 . This suggests that the coupling between the two lasers is weak and we expect that its main contribution will be on the phases of each limit-cycle. More specifically, we expect that

$$\begin{aligned} I_1 &\approx I_{10}((1 + \delta_1)t + \theta_1) \text{ and} \\ I_2 &\approx I_{20}((1 + \delta_2)t + \theta_2), \end{aligned} \quad (18)$$

where $I_{10}(t)$ and $I_{20}(t)$ denote the intensities of the free L_1 and L_2 oscillations. In (18), δ_1 , δ_2 are the small frequency corrections and θ_1 , θ_2 are constant phases. Indeed, we note from Table 2 that I_{1M} and I_{2M} do not change very much as the two lasers are coupled although the change of I_{2M} is more significant (7–34%) when synchronization is in-phase.

4. Discussion

In this paper, we considered the synchronization between two strongly pulsating CO_2 lasers. Although coupling through a saturable absorber is highly nonlinear, we show that its global effect is relatively small. This results from the fact that the coupling function is almost zero except during the short periods of time where the two lasers are pulsating almost simultaneously. It also explains the observed small window of resonance: if the time interval between the intensity maxima increases (out-of-phase synchronization), the amplitude of the coupling function decreases. Outside our specific 1:1 window of resonance, the coupled laser system may exhibit a more complicated response until locking into a different $m:n$ resonance is observed. These different situations will be discussed elsewhere [9] and are similar to the locking regime of the bimode LSA [14].

We observed, both experimentally and numerically, that the amplitude of the oscillations and their waveforms are little modified when the lasers are coupled. This follows from the relatively small effective coupling compared to the maximum intensities. We also found that the history of the laser pulse for each laser is accurately described by the 3 + 2 level model Eqs. (2)–(6). On the other hand, coupling has a strong effect on the oscillatory phases of each

laser. The transition from out-of-phase to in-phase synchronization is smooth and does not depend on the details of the model used for an individual LSA. We verified this property by eliminating adiabatically X , W_1 and W_2 in Eqs. (2)–(6) and by numerically solving the remaining four equations.

Acknowledgements

The research of T.E. was supported by the US Air Force Office of Scientific Research grant AFOSR F49620-95-0065, the National Science Foundation grant DMS-9625843, NATO Collaborative Research Grant 961113, the Fonds National de la Recherche Scientifique (Belgium) and the InterUniversity Attraction Pole of the Belgian government. The Centre d'Etudes et de Recherches sur les Lasers et Applications is supported by the Ministère de la Recherche, the FEDER and the Region Nord-Pas de Calais. One of the authors (A.B.) has a grant of the University of Pisa, Italy.

Appendix A

In this appendix, we analyze an elementary model of two coupled limit-cycle oscillators exhibiting different amplitudes. Specifically, we consider two linearly coupled limit-cycle oscillators modelled by the following equations:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \lambda_1 x_1 + \omega_1 y_1 - x_1(x_1^2 + y_1^2) + \eta(x_2 - x_1) \\ \frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 - \omega_1 x_1 - y_1(x_1^2 + y_1^2) + \eta(y_2 - y_1) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \lambda_2 x_2 + \omega_2 y_2 - x_2(x_2^2 + y_2^2) + \eta(x_1 - x_2) \\ \frac{dy_2}{dt} &= \lambda_2 y_2 - \omega_2 x_2 - y_2(x_2^2 + y_2^2) + \eta(y_1 - y_2), \end{aligned} \quad (19)$$

where $\eta \ll 1$ measures the weak coupling. This system has been studied by Aronson et al. [15,16] as a canonical model for coupled oscillations in biological and chemical systems. However, a significant assumption in Ref. [15] as well as other studies is the fact that $\lambda_1 = \lambda_2$. Coupled lasers exhibit distinct

parameters (such as distinct pump parameters) and motivate the analysis of the case $\lambda_1 \neq \lambda_2$. In Ref. [17], we examined the case $\lambda_1 = O(1)$ and $|\lambda_2| \ll 1$. In this appendix, we derive an asymptotic theory for λ_1 and λ_2 arbitrary. The equations in Eq. (19) are best analyzed in polar coordinates. Introducing $R_j \exp(i\phi_j) = x_j + iy_j (j = 1, 2)$, these equations can be rewritten as:

$$\begin{aligned} \frac{dR_1}{dt} &= \lambda_1 R_1 - R_1^3 + \eta(R_2 \cos(\psi) - R_1) \\ \frac{dR_2}{dt} &= \lambda_2 R_2 - R_2^3 + \eta(R_1 \cos(\psi) - R_2) \\ \frac{d\psi}{dt} &= -(\omega_2 - \omega_1) - \eta \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} \right) \sin(\psi), \end{aligned} \quad (20)$$

where $\psi \equiv \phi_2 - \phi_1$. Assuming now:

$$|\omega_2 - \omega_1| = O(\eta) \text{ and } \lambda_j > 0, \quad (21)$$

the long time solution approaches the limit:

$$R_j = \sqrt{\lambda_j} + O(\eta) \quad (22)$$

and the phase difference ψ satisfies Eq. (21) with constant coefficients. Locking then implies that:

$$|\omega_2 - \omega_1| < \eta \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} \right). \quad (23)$$

Assuming $|\omega_2 - \omega_1|$ and R_1 are fixed and analyzing the right hand side of the inequality in terms of R_2 , we find that this condition is best satisfied in the limits $R_2/R_1 \rightarrow 0$ or $R_2/R_1 \rightarrow \infty$.

References

- [1] L. Fabiny, P. Colet, R. Roy, D. Lenstra, Coherence and phase dynamics of spatially coupled solid-state lasers, *Phys. Rev. A* 47 (1993) 4287–4296.
- [2] K.S. Thornburg Jr., M. Möller, R. Roy, T.W. Carr, R.-D. Li, T. Erneux, Chaos and coherence in coupled lasers, *Phys. Rev. E* 55 (1997) 3865–3869.
- [3] M. Möller, B. Forsmann, W. Lange, Instabilities in coupled Nd:YVO₄ microchip lasers, *Quantum Semiclass. Opt.* 10 (1998) 839–848.
- [4] A. Hohl, A. Gavrielides, T. Erneux, V. Kovanis, Localized synchronization in two coupled nonidentical semiconductor lasers, *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997) 4745–4748.
- [5] S.S. Wang, H.G. Winful, Dynamics of phase-locked semiconductor arrays, *Appl. Phys. Lett.* 52 (1988) 1774–1776.
- [6] J. Mercier, M. McCall, Stability and dynamics of an injection-locked semiconductor laser array, *Opt. Commun.* 138 (1997) 200–210.
- [7] R. Kuske, T. Erneux, Localized synchronization of two coupled solid state lasers, *Opt. Commun.* 139 (1997) 125–131.
- [8] A.I. Khibnik, Y. Braiman, T.A.B. Kennedy, K. Wiesenfeld, Phase model analysis of two lasers with injected field, *Physica D* 111 (1998) 295–310.
- [9] A. Barsella, C. Lepers, D. Dangoisse, P. Glorieux, A. Kotomtseva, Coupling dynamics of two lasers with common saturable absorber, in preparation.
- [10] J.D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, Berlin, 1989, p. 215.
- [11] M. Tachikawa, F.L. Hon, K. Tanii, T. Shimizu, Deterministic chaos in passive Q-switching pulsation of a CO₂ laser with saturable absorber, *Phys. Rev. Lett.* 60 (1988) 2266.
- [12] M. Tachikawa, K. Tanii, T. Shimizu, Laser instability and chaotic pulsation in a CO₂ laser with intracavity saturable absorber, *J. Opt. Soc. Am. B* 5 (1988) 1077–1082.
- [13] M. Lefranc, D. Hennequin, D. Dangoisse, Homoclinic chaos in a laser containing a saturable absorber, *J. Opt. Soc. Am. B* 8 (1991) 239–249.
- [14] D. Hennequin, D. Dangoisse, P. Glorieux, Farey hierarchy in a bimode CO₂ laser with a saturable absorber, *Phys. Rev. A* 42 (1990) 6966–6968.
- [15] D.G. Aronson, E.J. Doedel, H.G. Othmer, An analytical and numerical study of the bifurcations in a system of linearly coupled oscillators, *Physica D* 25 (1987) 20–104.
- [16] D.G. Aronson, G.B. Ermentrout, N. Kopell, Amplitude response of coupled oscillators, *Physica D* 41 (1990) 403–449.
- [17] R. Kuske, T. Erneux, Bifurcation to localized oscillations, *Eur. J. Appl. Math.* 8 (1997) 389–402.

Swift–Hohenberg model of a CO₂ laser with saturable absorber

A Barsella, C Lepers, M Taki† and P Glorieux

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne, Centre d'Etudes et de Recherches Lasers et Applications, Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

Received 3 July 1998, in final form 14 October 1998

Abstract. The spatiotemporal dynamics of the bifurcating transverse modes of a CO₂ laser with saturable absorber is demonstrated to be governed by a complex Swift–Hohenberg equation for the laser field coupled to an ordinary differential equation. Numerical investigations are reported to illustrate the nonlinear spatiotemporal evolution near and beyond threshold.

Keywords: Saturable absorber, laser dynamics, Swift–Hohenberg, transverse instabilities

1. Introduction

In the last few years, the interest in pattern formation in nonlinear optical systems has increased considerably [1]. As far as lasers are concerned, the spatiotemporal dynamics of single longitudinal mode, two-level lasers with flat end reflectors has been shown to be described by a complex Swift–Hohenberg (SH) equation [2, 3]. Homogeneous oscillations and travelling wave solutions have been predicted to appear above the lasing threshold [5] depending on the sign of the detuning between the atomic and cavity frequencies.

Lasers with intra-cavity saturable absorber (LSAs) have been shown to display very rich dynamics. The introduction of an intra-cavity saturable absorber widely extends the variety of dynamical regimes observed in standard monomode class B lasers (e.g. CO₂, YAG:Nd³⁺). Bistability, self-oscillations, chaos of different types including Shilnikov chaos have been observed and theoretically interpreted in monomode CO₂ laser with saturable absorbers such as SF₆ or CH₃I [6]. Multimode dynamics of these lasers also reveals a rich variety of phenomena and their spatiotemporal dynamics has recently been considered. When the transverse dimensions are increased and/or the mode frequency spacing decreased, competition between a large number of modes may lead to multistable regimes in which the LSA selects one among the many modes allowed to oscillate [7]. In view of these previous investigations, it is expected that large area LSAs will display rich spatiotemporal dynamics. We follow the same procedure as most recent studies of wide aperture laser systems [2, 3] and consider a single longitudinal mode laser with flat end mirrors and homogeneous pumping. The analytical analysis has been made on the 3-2 level model for a LSA [8], including diffraction effects, as derived by Barsella *et al* [9]. Throughout this paper we present an investigation of pattern formation in LSAs in the approach of amplitude

equations. In the next section we first recall the extension of the 3-2 model suitable for describing large aperture CO₂ LSAs. Then the amplitude equation of the LSA is derived and numerical simulations are performed to obtain the structures emerging well above the threshold and illustrate the nonlinear saturation effects.

2. Description of the theoretical model

This section provides a theoretical analysis of a single LSA model including transverse effects. We start from the 3-2 model for the CO₂ LSA without adiabatic elimination of the active medium polarization and derive its adimensional form in the case of large absorber linewidth. The model used to describe the dynamics of the CO₂ LSA system is derived from that developed by Zambon *et al* [8] in the plane-wave approximation. The present model is based on the representation of the active medium by three variables, namely, the population inversion between the lasing levels (D), an auxiliary variable (s) to include the dynamics of a third level and the polarization (P) of the active medium. This last quantity was adiabatically eliminated in the plane-wave theory and has been reintroduced here since the addition of the diffraction effect in the model does not allow for the adiabatic elimination of this variable. The field (F) equation is the same as for the free-running laser, except for the introduction of an additional term to describe the absorber contribution. The model uses the classical adiabatic elimination of the absorber variables, successfully used in previous LSA studies, which is equivalent to the assumption of an absorber with very large homogeneous linewidth. The validity of this approximation has been recently confirmed experimentally for high absorber pressures by Oliveira *et al* [10]. In the present model this approximation is valid if we restrict the analysis to the case of laser field frequency close to the amplifier gain line and far from the absorber line, which

† E-mail address: taki@lsh.univ-lille1.fr

corresponds to the simplest situation to reach experimentally. After elimination of absorber variables the model reads:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \tau} &= -\kappa \left[\left(1 - i \frac{\mathcal{A}}{8} \nabla_{\perp}^2 + \bar{A} \frac{1 - i\delta}{1 + \delta^2 + a \|F\|^2} \right) F - AP \right] \\ \frac{\partial P}{\partial \tau} &= \gamma_{\perp} [FD - (1 + i\Omega)P] \\ \frac{\partial D}{\partial \tau} &= \gamma_{\parallel} \left[(\chi - D) - \frac{1}{2} (F^*P + P^*F) \right] - c_1(s - D) \\ \frac{\partial s}{\partial \tau} &= -\gamma_1(s - D)\end{aligned}\quad (1)$$

where κ , γ_{\perp} , γ_{\parallel} and γ_1 are the cavity damping time, and the relaxation times for polarization, population inversion and the auxiliary variable, respectively. c_1 is the coupling constant between the auxiliary variable and the population inversion, \mathcal{A} is the diffraction coefficient. We stress here that the transfer from the population of the third level towards the lasing level requires $c_1 < 0$. Ω (respectively δ) is the frequency detuning between the field and active medium (respectively absorber). A (\bar{A}) is the unsaturated amplification (absorption) of the active medium (absorber). a is the relative saturability of the absorber. χ is the pump parameter, assumed homogeneous and therefore independent of the spatial variables. In contrast, the dynamical variables F , P , D and s depend on the transverse coordinates. Before going further in the analysis, it is convenient to introduce the new scaling by setting $F = \sqrt{\gamma_{\perp}/\gamma_{\parallel}}e$, $P = \sqrt{\gamma_{\perp}/\gamma_{\parallel}}A^{-1}p$ and $t = \tau\gamma_{\perp}$ together with the change of variables $n = (\chi - D)A$, $m = (s - \chi)A$. Going to the rotating frame by introducing $e = \tilde{e}e^{i\Omega_{\text{LSA}}t}$ and $p = \tilde{p}e^{i\Omega_{\text{LSA}}t}$ with $\Omega_{\text{LSA}} = \sigma\bar{A}\delta/(1 + \delta^2)$, equations (1) read, in the new variables (we dropped the tildes):

$$\begin{aligned}\frac{\partial e}{\partial t} - i\mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2 e &= -\sigma\delta_1 e + \sigma p + (\sigma\bar{A}/(1 + \delta^2) - i\Omega_{\text{LSA}}) \\ &\times \frac{(a/b)|e|^2}{1 + \delta^2 + (a/b)|e|^2} e \\ \frac{\partial p}{\partial t} + [1 + i\Omega_G]p &= (r - n)e \\ \frac{\partial n}{\partial t} + bn &= \frac{1}{2}(e^*p + p^*e) + c_2(n + m) \\ \frac{\partial m}{\partial t} + cm &= -cn\end{aligned}\quad (2)$$

where we have set $\delta_1 = 1 + \bar{A}/(1 + \delta^2)$ and $\Omega_G = \Omega + \Omega_{\text{LSA}}$. The remaining parameters are: $\sigma = \kappa/\gamma_{\perp}$, $\mathcal{A}_1 = \sigma\mathcal{A}/8$, $b = \gamma_{\parallel}/\gamma_{\perp}$, $c = \gamma_1/\gamma_{\perp}$, $c_2 = c_1/\gamma_{\perp} < 0$, $r = A\chi$.

From this it appears that (i) the saturable absorber increases the dissipative term in the field equation by a factor δ_1 leading to an increase of the lasing threshold as expected from the introduction of an absorber inside the laser cavity, and (ii) the field natural reference frame is rotating at a frequency taking into account the frequency pulling effect due to the absorber and written in terms of the physical parameters $\Omega_{\text{LSA}} = \kappa\bar{A}\delta/[\gamma_{\perp}(1 + \delta^2)]$. Writing the field equation in this reference frame eliminates the complicated mathematical formulae and leads to a form more convenient for analytical as well as for numerical investigations.

3. Derivation of the Swift–Hohenberg model for the LSA

3.1. Amplitude equations

The nonlinear dynamics of CO₂ LSA equations can be captured analytically by deriving amplitude equations for the system. As we wish to describe the evolution for both signs of the effective detuning, it is sufficient to consider Ω_G as a small parameter since we are interested only in the parameter domain of vanishing Ω_G . This situation is similar to that of free-running laser systems for which a complex order parameter description has been proposed [3]. Here we will extend this procedure to LSA systems. For this purpose we look for solutions of the LSA equations (equations (2)) in the form:

$$V = \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \dots \quad (3)$$

where $V = (e, p, n, m)$ and ε is defined by setting $\Omega_G = \varepsilon\Omega_G^1$. From the linear stability analysis of the zero intensity solution we obtain at the threshold of the instability:

$$\begin{aligned}v_c &= \frac{\sigma\delta_1\Omega_G + \mathcal{A}_1 k^2}{1 + \sigma\delta_1} \\ r_c &= \delta_1 \left[1 + \left(\frac{\mathcal{A}_1 k^2 - \Omega_G}{1 + \sigma\delta_1} \right)^2 \right].\end{aligned}\quad (4)$$

In the (r, Ω_G) plane, at the transition point ($r = r_c = \delta_1$, $\Omega_G = 0$) where the zero intensity becomes unstable, the homogeneous and the inhomogeneous solutions coexist. This point is analogous with the Lifshitz point encountered in the phase diagrams of some magnetic systems [4]. The study of the particular range of the parameters where this point may present a codimension two bifurcation is out of the scope of this paper.

From the above equation it is clear that a band of wavevectors k of width $(r - \delta_1)^{1/4}$ centred around $k_c = 0$ is experiencing growth. Thus the right scalings for slow spatial variables are $X = (r - \delta_1)^{1/4}x$ and $Y = (r - \delta_1)^{1/4}y$. In order that terms involving detuning parameter and diffraction in LSA equations have the same order of magnitude we assume $r - \delta_1 = \varepsilon^2 r_2$. Since, in addition, we are interested in a CO₂ laser, the relative (with respect to polarization relaxation rate) relaxation rate parameter b in equations (2) is a small parameter. Let us set $b = \varepsilon^2 b_2$, then the variable n of the active medium plays a significant role in the dynamics at the onset of instability. However, the whole procedure of derivation of the amplitude equations depends on the nature of the bifurcation from the non-lasing to the lasing state at threshold. It is well known from the temporal instability analysis that a bistability phenomenon may appear in the LSA system, depending upon the saturability parameter a and the absorption parameter \bar{A} . In order to take into account the saturation effects in the model we set the saturability parameter $a = a_0 + \varepsilon a_1$. Finally to achieve all conditions for the multi-scale expansion, two slow time variables $T_j = \varepsilon^j t$, $j = 1, 2$ are needed. The derivation of amplitude equations follows the classical approach of identifying the coefficients of the powers of ε at each order and using

solvability conditions. Starting from the model equations (equations (2)), we look for a solution in the form:

$$\begin{pmatrix} e \\ p \\ n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 \\ p_0 \\ n_0 \\ m_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} e_1 \\ p_1 \\ n_1 \\ m_1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} e_2 \\ p_2 \\ n_2 \\ m_2 \end{pmatrix} + \dots \quad (5)$$

Since at threshold $n = -m = |e|^2 \delta_1 / b = r - \delta_1 \simeq r_2 \varepsilon^2 = O(\varepsilon^2)$ we expect n and e to be of order ε^2 .

We separate the nonlinear term of the e variable in equations (2) in order to better describe the effect of the nonlinearity for varying values of a_0 and a_1 . We will then indicate with $N(e)$ the nonlinear term which contains the effect induced by the absorber and it can be expanded as:

$$N(e) = \left[\left(\frac{\sigma \bar{A}}{1 + \delta^2} - i\Omega_{\text{LSA}} \right) \frac{(a/b)|e|^2}{1 + \delta^2 + (a/b)|e|^2} \right] e. \quad (6)$$

Defining $\hat{A} = \sigma \bar{A} / (1 + \delta^2) - i\Omega_{\text{LSA}}$, and taking into account the definition of $a = a_0 + \varepsilon a_1$, we can perform the development of $N(e)$ in different cases. For low values of a we expect the saturation of the absorber to be negligible. In fact, in the case of $a_0 = 0$ we obtain:

$$N(e) = \hat{A} \left[\frac{a_1}{b_2(1 + \delta^2)} |e_2|^2 e_2 \varepsilon^5 + O(\varepsilon^6) \right] \quad (7)$$

whose contribution only appears at order five in ε . The SH derivation is that of the free-running laser with a modification in the coefficients induced by the absorber.

If the saturability becomes more significant, i.e. $a_0 \neq 0$, we have a fourth-order contribution which we must consider in the derivation:

$$N(e) = \hat{A} \left[\frac{a_0}{b_2(1 + \delta^2)} |e_2|^2 e_2 \varepsilon^4 + O(\varepsilon^5) \right]. \quad (8)$$

We can now perform the derivation in the different powers of ε . At order zero in the development in ε all equations are null since we performed a variable change from D to n to have the solution coincident with the zero point.

At $O(\varepsilon)$ we choose all variables equal to zero. This choice is consistent with b of order ε^2 and is required for all the variables to interact at threshold. Note that the same choice has already been done in a CO_2 laser system by Lega *et al* [11].

At $O(\varepsilon^2)$, after collecting the relevant terms, we get the following relations:

$$\begin{aligned} p_2 &= \delta_1 e_2 \\ n_2 &= -m_2. \end{aligned} \quad (9)$$

At $O(\varepsilon^3)$ the system is:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_2}{\partial T_1} - i\mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2 e_2 &= -\sigma \delta_1 e_3 + \sigma p_3 \\ \frac{\partial p_2}{\partial T_1} + i\Omega_1 p_2 &= -p_3 + \delta_1 e_3 \\ \frac{\partial n_2}{\partial T_1} &= c_2(m_3 + n_3) \\ \frac{\partial m_2}{\partial T_1} &= -c(n_3 + m_3). \end{aligned} \quad (10)$$

We can see that the first and second equations are decoupled from the third and fourth. The solvability conditions for the first two equations are:

$$\begin{aligned} (1 + \sigma \delta_1) \frac{\partial e}{\partial T_1} &= -i\sigma \delta_1 \Omega_1 e + i\mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2 e \\ p_3 &= -\delta_1 \left(\frac{\partial}{\partial T_1} + i\Omega_1 \right) e \end{aligned} \quad (11)$$

while for the third and fourth we get $n_3 = -m_3$. Note that we have set $e_2 = e$ and the arbitrary value of $e_3 = 0$ to obtain these last equations.

At $O(\varepsilon^4)$ we obtain a set of equations similar to equations (10) and (11). Again we have $n_4 = -m_4$ and set the arbitrary value of e_4 to zero. After grouping the results and substituting the coefficients to obtain the amplitude equations for e and n we have the following system of equations, written in the original variables:

$$\begin{aligned} (1 + \sigma \delta_1) \frac{\partial e}{\partial t} &= \sigma(r - \delta_1)e + i\mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2 e - i\sigma \delta_1 \Omega_G e \\ &\quad - \frac{\sigma \delta_1}{(1 + \sigma \delta_1)^2} (\Omega_G + \mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2)^2 e - \sigma n e \\ &\quad + \left(\frac{\sigma \bar{A}}{1 + \delta^2} - i\Omega_{\text{LSA}} \right) \frac{a_0}{b(1 + \delta^2)} |e|^2 e \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{c}{c - c_2} (-bn + \delta_1 |e|^2).$$

The two variables m and p are linked to the evolving ones by the relations:

$$\begin{aligned} p &= \delta_1 e - \frac{\delta_1}{(1 + \sigma \delta_1)} (\Omega_1 + \mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2) e \\ &\quad - \frac{\delta_1}{(1 + \sigma \delta_1)^3} (\Omega_1 + \mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2)^2 e + \frac{\delta_1}{(1 + \sigma \delta_1)} e \\ &\quad - \frac{1}{(1 + \sigma \delta_1)} n e \end{aligned} \quad (13)$$

$$m = -n.$$

At this stage, it is interesting to discuss the parameters validity domain of the above equations. In fact, the expression of equation (12) shows that only nonlinear terms can limit the validity domain of the model. Indeed the last nonlinear term of equation (12) characterizes the saturability of the absorber leading to the main difference between free-running lasers and LSA systems. Note that its coefficient is the only coefficient of a SH equation where the saturability parameter appears in addition to the two absorber parameters \bar{A} and δ . This coefficient becomes zero if $a_0 = 0$ which reduces the validity domain of the model to vanishing saturability parameter a , in accordance with the above expansion $a = a_0 + \varepsilon a_1$. The remaining nonlinear term ($-\sigma n e$) ensures (since it is negative) the saturation of the linear amplification of the unstable modes. The model is then valid irrespective of all the other parameter values since the Hopf bifurcation is supercritical. When $a_0 \neq 0$, the nonlinear term (i.e. the two last terms in equation (12)) should ensure the saturation of linear amplification of unstable modes. By setting $\partial n / \partial t = 0$ (then $n = \delta_1 / b |e|^2$) the nonlinear

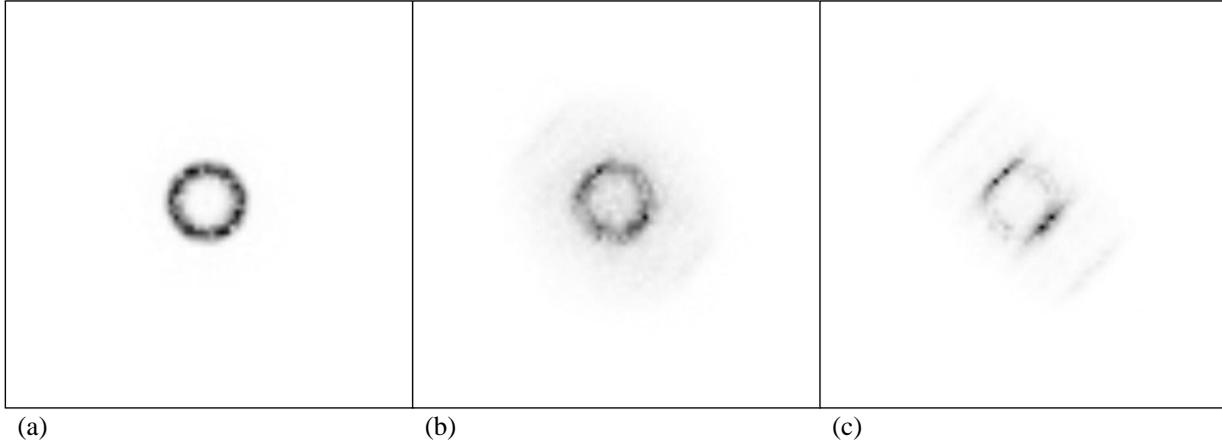


Figure 1. Breaking of the far-field ring corresponding to active modes as saturation effects become significant and nonlinear evolution becomes dominant in the case of low pumping rate ($r = 1.15 \times r_c$) with random phase initial conditions. (a) ($t = 140$) Symmetric ring resulting from the linear evolution. (b) and (c) ($t = 770$ and $t = 1190$) Transition to the nonlinear regime. The three diagrams show the amplitude of the Fourier components, with white being zero and black the maximum.

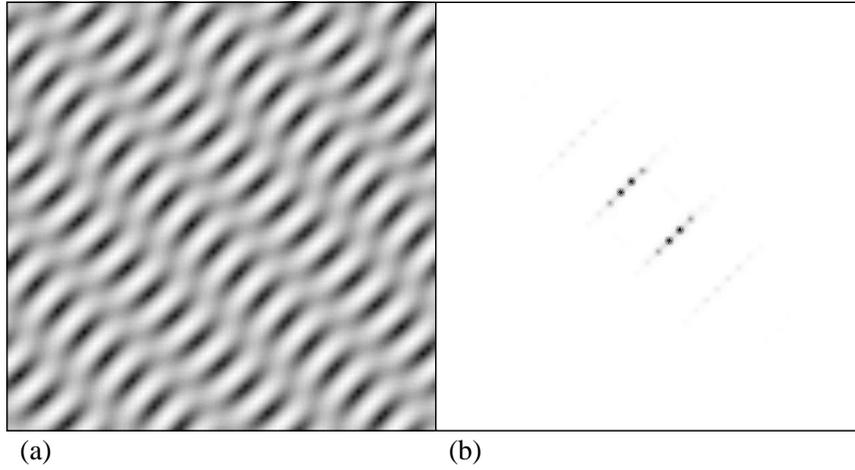


Figure 2. Asymptotic states ($t = 2450$) corresponding to figure 1. (a) Field modulus, with black being zero and white the maximum amplitude. (b) Amplitude of the Fourier components, with white being zero and black the maximum.

coefficient is:

$$\frac{\bar{A}}{(1 + \delta^2)b} \left[\frac{a_0}{1 + \delta^2} - 1 \right] - \frac{1}{b} \quad (14)$$

which we take negative in order to deal with a supercritical Hopf bifurcation. Hence, the following condition:

$$a < \left(1 + \frac{1 + \delta^2}{\bar{A}} \right) (1 + \delta^2) \quad (15)$$

sets the validity of our reduced model for LSA systems with nonvanishing saturability parameter a . Note that we recover easily the usual bistability condition $a = 1 + 1/\bar{A}$ obtained when $\delta = 0$ [8].

If the condition of equation (15) is not verified then a subcritical Hopf bifurcation occurs with appearance of bistability [12]; saturation effects are then captured by quintic terms. This case requires a specific analysis and will be published later.

Notice that even in the case of $a_0 = 0$ all the coefficients in the laser field SH equation are affected by the presence of

the absorber via the parameters δ_1 and Ω_G (the parameters are defined in equation (2)), except the diffraction coefficient. The second equation is characteristic of the stiffness (b is a small parameter) of class B lasers. Therefore the above system of equations is a generalization of the amplitude equations for class A and C lasers (eliminate the last equation by setting $\partial n / \partial t = 0$) [2, 3], class B lasers and CO₂ lasers with or without any saturable absorber ($\bar{A} = 0$). Also note that the parameters c and c_2 , originally introduced to describe the time self-pulsing and temporal chaos, are less significant for the pattern formation at the threshold of lasing even though they have a crucial role in the spatiotemporal complexity far from the onset of lasing. In fact, as far as moderate pumping values are considered (not far from threshold) the effects of the auxiliary variable m describing the dynamics of the third level may be neglected [8].

3.2. Numerical simulations

We now have two sets of governing equations for the LSA, one of which is strictly valid near threshold. The

original theoretical model for CO₂ LSA (equations (1)), and amplitude equations in terms of a SH equation for the laser field coupled to an equation for the active medium. The difficulty of handling mathematically the original theoretical model, leading to the lack of analytical results, makes relevant the use of amplitude equations. Although they are valid near threshold, their validity qualitatively extends far above this limit. Therefore, in addition to generic phenomena usually captured by order-parameter equations such as diffraction, diffusion or dispersion and nonlinear saturation, they can give more insight into the basic features of the nonlinear CO₂ LSA dynamics, especially when we take advantage of numerical simulations. Indeed, we have performed numerical integrations of equations (10) in 2D transverse coordinates, using the split-step method with a square grid of 80×80 points associated to a computational box length approximately eight times the critical wavelength $\lambda_c = 2\pi/k_c$, in order to avoid numerical instabilities. The nonlinear terms are added by computing them in the real space and then transforming them with a FFT algorithm. The effects of initial conditions on the spatiotemporal behaviour are taken into account by considering several different initial conditions including random phase, localized and uniform initial conditions.

3.2.1. Saturation effects and laser nonlinear pattern.

Numerical simulations allow one to determine the patterns which asymptotically appear in the laser. To this purpose we ran longer simulations with different values of the pump parameter r . Two qualitatively different nonlinear behaviours develop beyond the laser threshold and strongly depend on the sign of Ω_G . When $\Omega_G < 0$, no structure can exist at threshold leading to a homogeneous solution, in agreement with the last of equations (4), irrespective of the nature of the initial conditions. For instance, when the starting condition is a Gaussian profile with a peak of small amplitude at the origin, then the trajectory tends to a limit cycle which confirms the presence of a supercritical Hopf bifurcation.

When Ω_G is positive, however, there exists a nonlinear competition between all transverse linearly unstable modes. In figures 1 and 2 we have set the parameters slightly above threshold, namely $\sigma = 1$, $c = -c_2 = 0.1$, $\Omega_G = 1.2$, $\bar{A} = 0.5$, $r_c = 1.5$ and $r = 1.15 \times r_c$. Figure 1(a) displays the short-term linear mode selection, exhibiting the normal ring structure corresponding to all active modes whose wavenumbers $|k| = k_c$, as predicted by the last relation of equations (4). As time progresses, the nonlinear terms become significant leading to saturation effects, which cause a symmetry breaking of the ring. This effect is visible in figures 1(b) and (c), which show the evolution of the far field, where some k components are selected.

The asymptotic pattern after 2450 units of reduced time is depicted in figure 2(a) which corresponds to a regular periodic pattern. In figure 2(b), the far field is shown to be composed of four main k components of equal amplitude which point to the corners of a rectangular shape rotated around the origin. The additional low-amplitude k components which are visible on the figure are harmonics of the four fundamental k vectors. We noticed

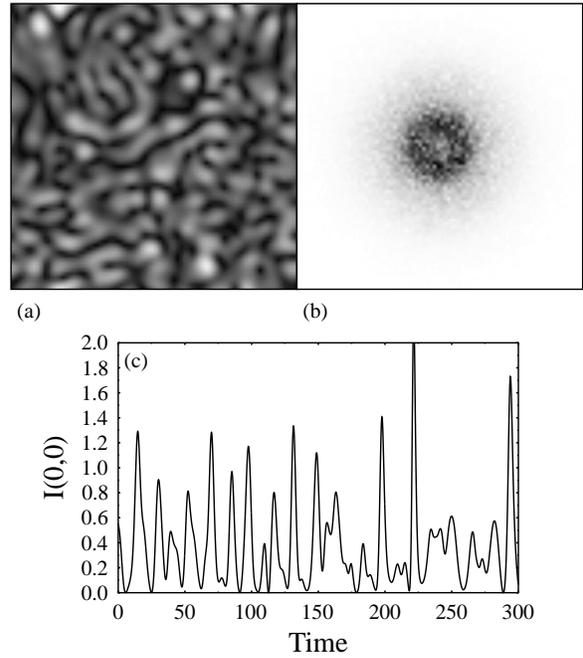


Figure 3. Nonlinear evolution of the field pattern in the case of high pumping rate ($r = 4 \times r_c$). (a) Field modulus, with black being zero and white the maximum amplitude. (b) Amplitude of the Fourier components, with white being zero and black the maximum. (c) Time evolution of the (0, 0) point intensity.

that this four-component pattern is similar to those reported in hydrodynamics by Silber *et al* [13] and recently by Komarova *et al* [14]. Although the four-component patterns with equal amplitude are stable as pointed out in the above references, we have observed numerically that the final state is sensitive to the width of the transverse square domain.

We have also investigated numerically the far-from-threshold region of high values of r ($r = 4 \times r_c$) to show the effect of high pumping on the selection of structures. A typical situation is depicted in figure 3 where the parameters of the simulation are the same as in figure 2 except for the r value. We have observed that the ring distribution of the Fourier components only appears in the transient regime ($t < 70$) and evolves at longer times to a disc shape (figure 3(b)). The transverse intensity profile (figure 3(a)) displays peaks with different brightness irregularly distributed in space. The time evolution of the intensity of the (0, 0) point is shown in figure 3(c) where we can observe chaotic oscillations originating from a nonlinear interaction of a large number of transverse modes. The details of the transition between regular and irregular patterns are beyond the scope of this paper.

4. Concluding remarks

In this paper we have shown that beyond the threshold and by considering nonlinear effects, the spatiotemporal evolution of transverse structures is described by a SH equation for the laser field coupled to an equation describing the active medium not only relevant for CO₂ laser but also for class B lasers. The former appears similar to that for the free-running laser except that the saturable absorber effects are captured

in the coefficients of the different terms. The numerical simulations performed in 2D transverse coordinates allowed us to investigate the behaviour of the system beyond the linear regime. They showed the laser transverse patterns resulting from the nonlinear selection mechanism at and beyond threshold, ranging from stable periodic cellular patterns to more complex spatiotemporal states displaying peaks irregularly distributed in space with a temporal chaotic evolution. Extension of this work by taking into account curved mirrors for the cavity and/or the inhomogeneous pumping is in progress.

Acknowledgments

The Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne is ‘Unité de Recherche Associée au CNRS’. The Centre d’Etudes et de Recherches Lasers et Applications (CERLA) is supported by the Ministère chargée de la Recherche, the Région Nord/Pas de Calais and the Fonds Européen de Développement Economique des Régions. AB has a grant from the University of Pisa, Italy.

References

- [1] Firth W J and Paré C 1988 *Opt. Lett.* **13** 1096
 Grynberg G, Lebihan E, Verkerk P, Simoneau P, Leite J R, Bloch D, Le Boiteux S and Ducloy M 1989 *Opt. Commun.* **67** 363
 Lugiato L A 1992 *Phys. Rep.* **219** 293
 Weiss C O 1992 *Phys. Rep.* **219** 311
 Gil L, Emilsson K and Oppo G L 1992 *Phys. Rev. A* **45** 567
 Tlidi M, Georgiou M and Mandel P 1993 *Phys. Rev.* **48** 4605
 Scroggie A J, Firth W J, McDonald G S, Tlidi M, Lefever R and Lugiato L A 1994 *Chaos Solitons Fractals* **4** 1323 (special issue on Nonlinear Optical Structures, Patterns, Chaos ed L A Lugiato and M S El Naschie)
 Longhi S 1998 *Opt. Lett.* **23** 346
- [2] Staliunas K 1993 *Phys. Rev. A* **48** 1573
 Mandel P, Georgiou M and Erneux T 1993 *Phys. Rev. A* **47** 4277
- [3] Lega J, Moloney J V and Newell A C 1995 *Physica D* **83** 478
- [4] Hornreich R M, Luban M and Shtrikman S 1975 *Phys. Rev. Lett.* **35** 1678
 Michelson A 1977 *Phys. Rev. B* **16** 577
- [5] Jakobsen P K, Moloney J V, Newell A C and Indik R 1992 *Phys. Rev. A* **45** 8129
 Jakobsen P K, Lega J, Fenk Q, Staley M, Moloney J V and Newell A C 1994 *Phys. Rev. A* **49** 4189
 Lega J, Jakobsen P K, Moloney J V and Newell A C 1994 *Phys. Rev. A* **49** 4201
- [6] Tachikawa M, Tanii K and Shimizu T 1987 *J. Opt. Soc. Am. B* **4** 387
 Hennequin D, de Tomasi F, Zambon B and Arimondo E 1989 *Phys. Rev. A* **40** 3782
 Lefranc M, Hennequin D and Dangoisse D 1991 *J. Opt. Soc. Am. B* **8** 239
- [7] Wilkowski D, Hennequin D, Dangoisse D and Glorieux P 1994 *Chaos Solitons Fractals* **4** 1683 (special issue on Nonlinear Optical Structures, Patterns, Chaos ed L A Lugiato and M S El Naschie)
- [8] Zambon B, De Tomasi F, Hennequin D and Arimondo E 1989 *Phys. Rev. A* **40** 3782
 Zambon B 1991 *Phys. Rev. A* **44** 688
- [9] Barsella A, Alcantara P Jr, Arimondo E, Brambilla M and Prati F 1994 *Chaos Solitons Fractals* **4** 1665 (special issue on Nonlinear Optical Structures, Patterns, Chaos ed L A Lugiato and M S El Naschie)
- [10] Oliveira P C, Danailov M B, Liu Y and Rios Leite J R 1997 *Phys. Rev. A* **55** 2463
- [11] Lega J, Moloney J V and Newell A C 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 2978
- [12] Abraham N B, Mandel P and Narducci L M 1998 *Progress in Optics* vol 25, ed E Wolf (Amsterdam: North-Holland)
 See Mandel P 1997 LSA system *Theoretical Problems in Cavity Nonlinear Optics* (Cambridge: Cambridge University Press) pp 104–35
- [13] Silber M, Reicke H and Kramer L 1992 *Physica D* **61** 260
- [14] Komarova N L, Malomed B A, Moloney J V and Newell A C 1997 *Phys. Rev. A* **56** 803



ELSEVIER

15 July 2000

Optics Communications 181 (2000) 401–406

OPTICS
COMMUNICATIONS

www.elsevier.com/locate/optcom

Transverse wave number selection and propagation of 2D-pulses in lasers with saturable absorber

A. Barsella, C. Lepers, M. Taki*

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules CNRS UMR 8523, Centre d'Etudes et de Recherches Lasers et Applications, Université des Sciences et Technologies de Lille, UFR de Physique Bât. P5, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

Received 19 January 2000; received in revised form 28 April 2000; accepted 18 May 2000

Abstract

Selection of transverse patterns in laser systems with an intra-cavity saturable absorber is shown to be tuned by the absorber. The wavelength of the selected pattern is theoretically predicted, and the prediction is in a good agreement with the results of the numerical solutions of the governing equations for a 2-level laser model. An interesting feature is that the presence of a saturable absorber leads to the formation of transverse patterns in regimes where the free-running laser exhibits only a stable homogeneous state, via a frequency-pulling phenomenon. A surprising threshold reduction effect may also be observed in this case. We also show that when the absorber inhibits structure formation, transverse propagating pulses may appear. © 2000 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

PACS: 42.65.-k; 42.65.Sf; 47.54.+r; 42.65.Tg

Transverse pattern formation has been an active field of investigation in many nonlinear optical systems [1], including free-running lasers [2] and optical parametric oscillators [3]. A most common feature of all these spatially extended systems is that they undergo symmetry-breaking bifurcations and the resulting pattern may be either homogeneous (no structures) or spatially periodic. The subsequent dynamics is then closely related to the nature of the emerging pattern. However, the selection and the control of these patterns, which constitute a necessary requirement for spatially extended optical devices to be regarded as promising sources for potential applica-

tions in laser systems, are still open problems. Lasers with a Saturable Absorber (LSA) have also been investigated since the introduction of an intra-cavity Saturable Absorber (SA) gives rise to a very rich transverse dynamics with respect to free-running lasers. Pattern formation has been experimentally observed [4] in a CO₂ LSA. We have shown, very recently in a previous work [5], that the spatiotemporal evolution of transverse structures is described by a Swift–Hohenberg equation for the laser field coupled to an equation describing the active medium relevant for CO₂ lasers. The laser transverse patterns range from stable periodic cellular patterns to more complex spatiotemporal states displaying peaks irregularly distributed in space with a temporal chaotic evolution.

* Corresponding author. E-mail: taki@lsh.univ-lille1.fr

Here we show that the SA may play a leading role, in a certain range of parameters, for selecting and controlling the formation of patterns at laser emission. Analytical investigations reveal the key role played by an ‘effective’ detuning parameter which may control both the emergence and the inhibition of patterns and their wavelengths. More precisely, depending on the SA parameters a transverse pattern can appear in regimes where the free-running laser exhibits only a stable homogeneous state. In this case a counter-intuitive result is found, i.e. the lowering of the laser threshold stemming from a frequency-pulling phenomenon induced by the SA. Alternatively, SA may also inhibit the free-running laser pattern formation. Here, the resulting homogeneous state is unstable, leading to a spatial pulse which propagates in an arbitrary direction of the transverse plane depending on the initial conditions.

The equations describing the LSA with a large transverse section where the absorber variables are adiabatically [6] eliminated are [5,7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \tau} &= -\kappa \left[\left(1 - i \frac{\mathcal{A}}{8} \nabla_{\perp}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{A} \frac{1 - i\bar{\delta}}{1 + \bar{\delta}^2 + a|F|^2} \right) F - AP \right], \\ \frac{\partial P}{\partial \tau} &= \gamma_{\perp} [FD - (1 + i\Omega)P], \\ \frac{\partial D}{\partial \tau} &= \gamma_{\parallel} \left[(\chi - D) - \frac{1}{2}(F^*P + P^*F) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

where F is the envelope of the laser field, D the population inversion between the lasing levels and P the polarization of the active medium. κ , γ_{\perp} and γ_{\parallel} are the cavity decay rate, the relaxation times for polarization and population inversion and \mathcal{A} is the diffraction coefficient. Ω (resp. $\bar{\delta}$) is the difference between the frequency of amplifier (resp. absorber) line and that of the longitudinal cavity mode. A (\bar{A}) is the unsaturated amplification (absorption) of the active medium (absorber), a is the relative saturability of the absorber and χ is the pump parameter assumed homogeneous. After writing the above equations in complex Lorenz notation (see Eqs. (2)

in Ref. [5]), the linearized system around the trivial zero solution reads as:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta e}{\partial t} - i\mathcal{A}_1 \nabla_{\perp}^2 \delta e &= -\sigma \delta_1 \delta e + \sigma \delta p, \\ \frac{\partial \delta p}{\partial t} + [1 + i\Omega_G] \delta p &= r \delta e, \quad \frac{\partial \delta n}{\partial t} + b \delta n = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

where $t = \tau \gamma_{\perp}$ and $\delta(e, p) = \sqrt{b} \exp(-i\Omega_{\text{LSA}} t) \delta(F, AP)$, $\delta n = (\chi - \delta D)A$ are small variations with respect to the non-lasing state values. We have set $\delta_1 = 1 + \sigma \bar{A} / (1 + \bar{\delta}^2)$ and $\Omega_G = \Omega + \Omega_{\text{LSA}}$ where $\Omega_{\text{LSA}} = \sigma \bar{A} \bar{\delta} / (1 + \bar{\delta}^2)$. The dimensionless parameters are: $\sigma = \kappa / \gamma_{\perp}$, $\mathcal{A}_1 = \sigma \mathcal{A} / 8$, $b = \gamma_{\parallel} / \gamma_{\perp}$ and $r = A \chi$.

From these equations, we notice that the dynamics of the field and the polarization is decoupled from that of the active medium population. By substituting δp from the second equation into the first, we got two decoupled equations, one for the field and the other for the active medium. By considering a sufficiently large transverse section, the general solutions are a linear combination of plane-wave solutions of the form $\delta e = e_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \lambda t)$, $\delta p = p_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \lambda t)$ and $\delta n = n_0 \exp(\eta t)$, where \mathbf{k} is the transverse wave vector, $\mathbf{x} = (x, y)$, λ and η are the eigenvalues of the linear problem. The threshold of marginal instability in terms of gain parameter r (r_c) and laser frequency ν (ν_c) is given by $\text{Re}(\lambda) = 0$ and $\text{Im}(\lambda) = \nu_c$:

$$\begin{aligned} r_c &= \delta_1 \left[1 + \left(\frac{\mathcal{A}_1 k^2 - \Omega_G}{1 + \sigma \delta_1} \right)^2 \right], \\ \nu_c &= \frac{\sigma \delta_1 \Omega_G + \mathcal{A}_1 k^2}{1 + \sigma \delta_1}. \end{aligned} \quad (3)$$

In Fig. 1(a) we show the structure creation induced by the SA. The graph reports the modulus of the critical wavevector k_c as a function of the laser detuning Ω . The lines are the analytical result from the linear stability analysis: the dashed one represents the free-running laser, with the transition from focusing to defocusing case occurring at $\Omega = 0$. The continuous line shows the effect of the absorber: the

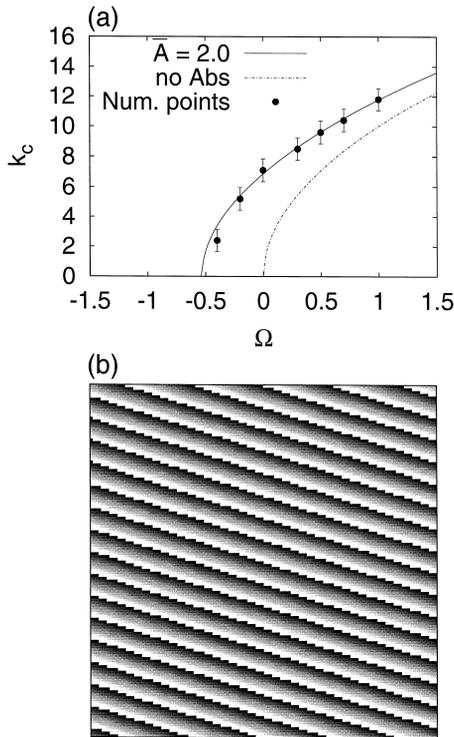


Fig. 1. Creation of structures, $\Omega - \bar{\delta} = -4$, $\mathcal{A} = 0.08$, $\bar{A} = 2.0$, $a = 4.17$, A is 1% above threshold, $\gamma_{\perp} / \kappa = 1.0$, $\gamma_{\parallel} / \kappa = 0.1$. (a) comparison between predicted wavevector of the pattern (with and without absorber) and wavevector of the asymptotic traveling wave selected in the numerical solutions of Eqs. (1). (b) an example (for $\Omega = 0$) of SA induced traveling wave. Its intensity is uniform and the figure shows the real part of the field in the transverse (x, y) plane.

transition point has been displaced and now occurs at approximately $\Omega = -0.5$ for this set of param-

eters. In the interval $-0.5 < \Omega < 0$ the frequency pushing induced by the absorber allows the resonance to occur for $k > 0$, and thus giving rise to a transverse structure. In the region of $\Omega > 0$ the effect is simply to shift the resonance, thus selecting the most unstable mode, with an increase in k_c proportional to the absorption coefficient \bar{A} .

The numerical points (black circles on Fig. 1(a)) are the values of the wavevector as obtained from numerical solutions (traveling wave of Fig. 1(b)) of the governing Eqs. (1), with random phase initial conditions. After the transient (linear) phase, characterized by the amplification of a band of wavevectors centered around k_c , the nonlinear selection brings the system into a traveling wave solution. For the integration, we used a variable-step 4th order Runge–Kutta algorithm, with variables developed on a 128×128 spatial grid, performing the diffraction term calculation by the means of a FFT transformation into k space and back.

Fig. 2 shows the structure inhibition effect. This effect is the opposite case of structure creation: here an increasing absorption (\bar{A}) leads the system towards a structureless solution, as shown by the far-field images of Fig. 2. The images are obtained by numerical integration: in this case the existing spatial resonance has been destroyed by the absorber, leading the system towards a homogeneous solution at laser threshold.

We can physically explain the key role of the SA in pattern selection by examining its effect on the laser operating frequency. It has been predicted [8] and later experimentally demonstrated [9] that, for

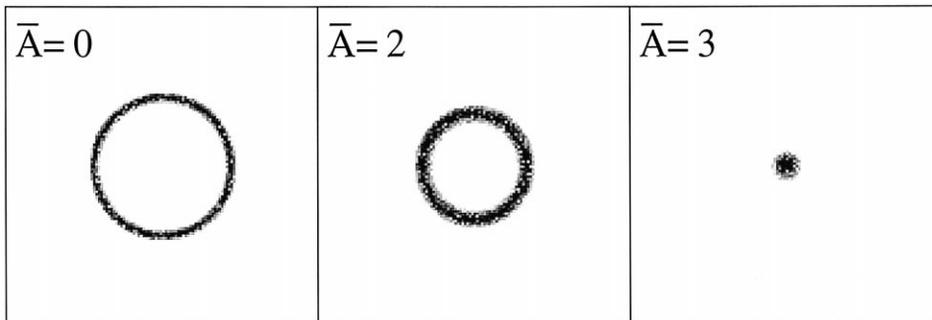


Fig. 2. Inhibition of structures, parameters as in Fig. 1 except $\bar{\delta} = -0.8$, $\Omega = 1.2$. The three images show the far field image of the solution of Eqs. (1) during the linear transient (the nonlinear saturation effects are not taken into account), with white being zero and black indicating high intensity. The transition to the structureless solution is obtained by increasing \bar{A} . The critical value can be obtained from Eq. (3) by requiring $\Omega_G = 0$: $\bar{A}_{tr} = -\Omega(1 + \bar{\delta}^2) / \sigma \bar{\delta} = 2.46$.

the laser without saturable absorber, the pattern selection results from the system trying to minimize its free energy, which is obtained when the field resonates with (or is closest to) the active medium transition. For $\Omega > 0$ a set of modes exists that is able to bring the field in resonance, and thus the system exhibits structures. On the opposite, when $\Omega < 0$ the system is unable to reach perfect resonance, remaining in a uniform spatial solution leading to an increase in the laser threshold emission (when $\Omega > 0$, $r_c = 1$ however for $\Omega < 0$, $r_c = 1 + [\Omega/(1 + \sigma)]^2$; see Eq. (3)).

Eqs. (1) are written in their usual form, where the carrier frequency of the field and polarization envelopes (F and P) is the cavity resonance, giving rise to phase modulation terms in the equations for field (diffraction effect) and polarization (active media detuning). In this frame, resonance is achieved for a field oscillating at frequency Ω . In absence of the absorber, the only contribution to the detuning of the field originates from the choice of the mode. Since the spatial (diffractive) term is of the form k^2 , this contribution can only be positive, meaning that only for positive values of Ω the system can achieve

perfect resonance. For $\Omega < 0$ resonance can be approached with the $k^2 = 0$ mode.

When the SA is present ($\bar{A} \neq 0$) the absorber term can cooperate in reaching the resonance, depending on the sign of $\bar{\delta}$. If $\bar{\delta} < 0$, the absorber effect can prevent the spatial resonance, forcing k^2 towards lower values, favoring long wavelength instabilities: the absorber acts to inhibit structure formation. This means that if the laser presents structures, the introduction of a SA and an increasing \bar{A} value can destroy them, bringing the system to an homogeneous state. However in a certain range of parameters, these solutions are unstable and the LSA exhibits 2D-pulses propagating in a fixed direction in the transverse plane (Fig. 3). We have numerically observed that this direction depends on the initial conditions. These pulses which correspond to localized spatial solutions are similar to the ones recently reported in Ref. [10].

When $\bar{\delta} > 0$, we get the opposite effect: the absorber term cooperates with the spatial term, favoring the onset of a spatial resonance for a specified $k \neq 0$ transverse mode. This allows, even for values of $\Omega < 0$, to reach situations where the system

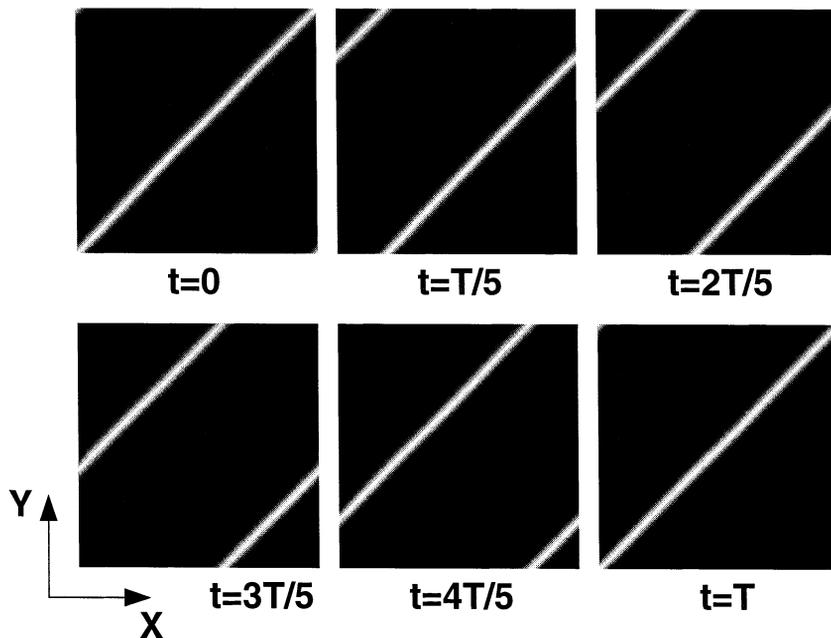


Fig. 3. Traveling pulse solution, parameters are as in Fig. 1 except $\Omega = 1.2$, $\bar{\delta} = -0.8$ and $\bar{A} = 3$. Spatial evolution of the field intensity during one period. The resulting wave propagates in a fixed direction.

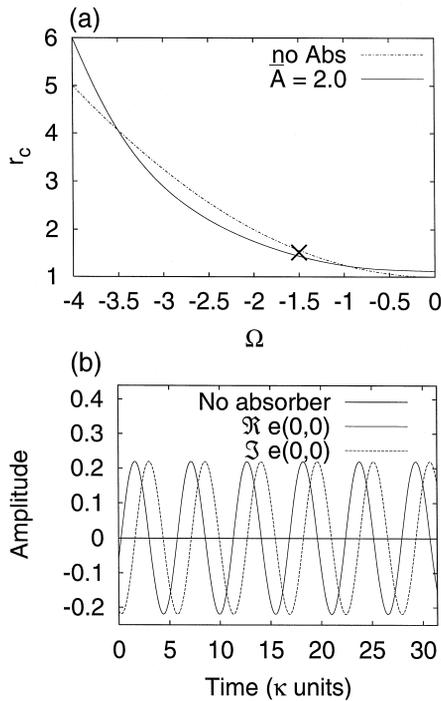


Fig. 4. Threshold reduction effect. (a) evolution of the laser threshold r_c as a function of the detuning Ω . The region where the continuous line is located below the dashed one corresponds to the range of Ω where the effect is present. (b) oscillations of the real and imaginary parts of the solution for $\Omega = -1.5$, showing a frequency $\nu_c = 5.56$ ($\nu_c^{\text{th}} = 5.51$).

chooses a spatially periodic solution at the onset of lasing. It is also possible, for a certain range of parameters which we will describe below, that the threshold reduction resulting from being closer to resonance can overcome the threshold increase given by the absorption, resulting in a net lower threshold for the laser. This striking feature arising typically from the spatial instabilities introduced by the SA and which constitutes a counter-intuitive result can physically be understood as follows; in the presence of a SA the transverse instabilities lead to new spatial resonances which optimize the LSA gain with respect to the free-running laser case, where they can never be obtained, as explained above. As a consequence a part of the LSA gain is spent in overcoming the losses introduced by the SA (as it should be) and the rest is responsible of the threshold lowering. To be more concrete we have plotted in Fig. 4(a) the lasing threshold (r_c) as a function of the laser detun-

ing (Ω) with (solid line) and without (dashed line) absorber. As can be seen from the figure there exists a large interval of Ω values (where the solid curve is below the dashed one) for which the threshold is lowered. To confirm this we have numerically integrated Eqs. (1) governing the LSA device with the parameters values corresponding to the cross point of Fig. 4(a). The laser amplitude oscillations are shown in Fig. 4(b) and the values of the amplitude and frequency are in a good agreement with the analytically predicted ones. We have also verified, for the same conditions, that in the absence of SA no laser oscillations are reached and the system, after a transient, returns back to the zero state (see Fig. 4(b)).

In conclusion we have shown that pattern formation (threshold and wave numbers) in LSA may be controlled by the intra-cavity SA parameters. The selection ranges from the absence of any transverse structure, which corresponds to homogeneous solutions, to the creation of transverse structures with selected wave numbers and propagating pulses. The transverse structure inhibition effect can be considered in parallel to the longitudinal mode suppression in semiconductor device [11]. The implementation of a SA into the device resonator could be used to eliminate undesired spatial modulations.

Acknowledgements

The authors wish to thank P. Glorieux, for the interesting discussions and suggestions throughout the realization of this work. The Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules is 'Unité Mixte de Recherche du CNRS'. The Centre d'Etudes et de Recherches Lasers et Applications (CERLA) is supported by the Ministère chargée de la Recherche, the Région Nord/Pas de Calais and the Fonds Européen de Développement Economique des Régions. One of the authors (A.B.) has a grant of the University of Pisa, Italy.

References

- [1] L.A. Lugiato, M. Brambilla, A. Gatti, Optical Pattern Formation, in: *Advances in Atomic Molecular and Optical Physics*, B. Bederson, H. Walther (Eds.), Academic Press, September 1998, and references quoted therein.

- [2] M.N. Ouarzazi, M. Taki, P.A. Bois, *Phys. Rev. E* 53 (1996) 4408, and references quoted therein.
- [3] H. Ward, M.N. Ouarzazi, M. Taki, P. Glorieux, *Eur. Phys. Jour. D* 3 (1998) 275, and references quoted therein.
- [4] D. Wilkowski, D. Hennequin, D. Dangoisse, P. Glorieux, in: L.A. Lugiato, M. El Naschie (Eds.), *Chaos Solitons and Fractals* 4, special issue on Nonlinear Optical Structures, Patterns, Chaos, 1683, 1994.
- [5] A. Barsella, C. Lepers, M. Taki, P. Glorieux, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* 1 (1999) 64.
- [6] P.C. Oliveira, M.B. Danailov, Y. Liu, J.R. Rios Leite, *Phys. Rev. A* 55 (1997) 2463.
- [7] B. Zambon, F. De Tomasi, D. Hennequin, E. Arimondo, *Phys. Rev. A* 40 (1989) 3782; B. Zambon, *Phys. Rev. A* 44 (1991) 688.
- [8] P.K. Jakobsen, J.V. Moloney, A.C. Newell, R. Indik, *Phys. Rev. A* 45 (1992) 8129; J. Lega, J.V. Moloney, A.C. Newell, *Physica D* 83 (1995) 478.
- [9] S.P. Hegarty, G. Huyet, J.G. McInerney, K.D. Choquette, *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999) 1434.
- [10] N.N. Rosanov, V.E. Semenov, N.V. Vyssotina, invited paper in the Second European Conference on Trend in Optical Nonlinear Dynamics Physical Problems and Applications, Control of Complex Behaviour in Optical Systems and Applications, Munster (D), 7–10 October 1999; Semenov et al., *JETP* 116, (1999).
- [11] R. Wessel, K. Rochhausen, H. Suche, W. Sohler, *Proc. European Quantum Electronics Conference*, Glasgow, Scotland (UK), 14–18 September 1998.

Le couplage d'oscillateurs non linéaires et la formation de structures spatiales sont deux domaines particulièrement importants de l'étude de la dynamique non linéaire des systèmes optiques. C'est dans ce contexte que s'inscrit ce travail de thèse.

La première partie est consacrée à l'étude expérimentale du couplage de deux lasers CO₂ monomode partageant un même absorbant saturable. La forte non linéarité de l'absorbant et le caractère impulsif de certains régimes du système donnent naissance à une dynamique de couplage localisé dans le temps. Les phénomènes de synchronisation des impulsions de chaque laser ainsi que la perturbation des régimes d'un laser par les impulsions de l'autre sont analysés. En ce qui concerne les régimes non impulsifs, le couplage non localisé intervient dans la synchronisation de régimes quasipériodiques et chaotiques. L'extension au cas bimode transverse se traduit par l'apparition d'une dynamique d'antiphase. Les simulations numériques effectuées reproduisent les régimes dynamiques observés et mettent en évidence de nouvelles bifurcations introduites par le couplage.

La deuxième partie présente une étude théorique et numérique du comportement spatio-temporel d'un laser à absorbant saturable. L'analyse de stabilité linéaire de la solution nulle montre que l'absorbant contrôle la longueur d'onde critique des modes qui se déstabilisent au seuil. La création ou l'inhibition des structures est analysée suivant l'écart en fréquence de l'absorbant. Une analyse faiblement non linéaire au seuil montre que le système est décrit par une équation de Swift-Hohenberg. Les simulations numériques mettent en évidence des solutions à ondes progressives, à ondes stationnaires et en échiquier. Enfin, les simulations sur le système complet permettent de vérifier la validité du modèle de Swift-Hohenberg tout en donnant aussi des régimes plus fortement non linéaires, comme des impulsions 2D progressives.

COUPLING DYNAMICS AND STRUCTURE FORMATION IN LASERS WITH SATURABLE ABSORBER

The coupling of nonlinear oscillators and the formation of spatial structures are two important branches of the research in the nonlinear dynamics of optical systems. This is the framework of this Ph.D. thesis. The first part focuses on the experimental investigation of the coupling dynamics of two monomode CO₂ lasers sharing a common intracavity absorber. The strong nonlinearity of the absorber together with the presence of pulsed regimes gives rise to an interaction localized in time. We studied the phenomena of synchronization of the two pulsed lasers and the interaction between a pulsed laser and a non-pulsed one. We also show synchronized non-pulsed coupled regimes such as quasiperiodic oscillations and chaos. The work is then extended to the transverse bimode case, which shows the presence of antiphase dynamics. The numerical simulations reproduce the observed behaviour and allow us to localize new bifurcation points of the system resulting from the coupling effect.

The second part is composed of a theoretical and numerical study of the spatio-temporal behaviour of a wide-aperture laser with saturable absorber. The linear stability analysis of the zero intensity state shows that the presence of the absorber affects the critical wavenumber of the modes at threshold. Creation and inhibition of structures are found depending on the absorber detuning. A weakly nonlinear analysis shows that near threshold the system is described by a complex Swift-Hohenberg equation. The numerical simulations reveal the presence of traveling and standing wave solutions as well as a checkerboard pattern. Finally, numerical integration of the complete set of equations confirms the validity of the Swift-Hohenberg model and provides insight on strongly nonlinear regimes, such as 2D traveling pulses.

Discipline: Sciences Physiques

Keywords: lasers, nonlinear optics, pattern formation, lasers with saturable absorber, coupled lasers

Laboratoire PhLAM (Physique des Lasers, Atomes et Molecules)
U.F.R. de Physique
Université des Sciences et Technologies de Lille 1
F-59655 Villeneuve D'Ascq CEDEX
France