

N° d'ordre : 2682

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE**

**LABORATOIRE DE MECANIQUE DE LILLE**  
**EUDIL - Groupe Fiabilité des Structures**

**THESE DE DOCTORAT**  
**LABEL EUROPEEN**

**Spécialité : Mécanique**

Présentée par

**Sidi Mohamed ABOUTAYEB**

**COMPORTEMENT A L'ENDOMMAGEMENT DES MATERIAUX  
METALLIQUES HETEROGENES : SIMULATION ET EXPERIENCE**

**DAMAGE BEHAVIOUR OF HETEROGENEOUS METALLIC  
MATERIALS : SIMULATION AND EXPERIMENT**

Soutenue le 22-12-2000 devant le jury composé de :

Rapporteurs :

M.	J. LEMAITRE	Professeur, LMT-Cachan, Paris
M.	S. SCHMAUDER	Professeur, MPA- Université de Stuttgart
M.	G. GUERLEMENT	Professeur, Faculté Polytechnique de Mons

Président, Examineur :

M.	G. DE SAXCÉ	Professeur, EUDIL- Université de Lille
----	-------------	----------------------------------------

Examineurs :

M.	D. WEICHERT	Professeur, IAM, RWTH Aachen
M.	M. NAIT-ABDELAZIZ	Professeur, EUDIL- Université de Lille

# Résumé

Ce travail est une contribution à l'analyse du comportement à l'endommagement des matériaux hétérogènes. L'endommagement ductile désigne le processus de dégradation progressive des propriétés physiques et mécaniques d'un matériau lorsqu'il subit, sous l'effet d'un chargement et avant rupture, une déformation plastique importante à température ambiante ou peu élevée.

Notre étude s'articule autour de trois axes, théorique, numérique et expérimental. La modélisation de l'endommagement requière la définition de l'échelle au niveau de laquelle se situe l'observation ou la mesure : niveaux atomique ou moléculaire, structural (phases, cavités) ou macroscopique.

A ce titre, nous avons considéré deux types d'approche : l'approche globale où l'endommagement est représenté par une variable interne scalaire au sens de la thermodynamique des processus irréversibles (modèle de Lemaitre) et l'approche locale où les micromécanismes physiques sous-jacents à l'endommagement sont pris en compte (modèle de Rice & Tracey, critère de Gurson, critère de Rousselier).

Les modèles présentés sont implémentés dans un code de calcul par éléments finis. Les calculs sont effectués en grandes déformations en formulation Lagrangienne réactualisée.

L'étude expérimentale a été réalisée sur des éprouvettes axisymétriques entaillées. Elle a pour but d'évaluer les mécanismes de dégradation progressive du matériau (nucléation de cavités, croissance et coalescence) et déterminer, à partir de ces mécanismes, les paramètres constitutifs des modèles d'endommagement. Le couplage du modèle de Thomason avec les autres modèles montre une nouvelle possibilité de représenter le stade de coalescence.

Les résultats obtenus illustrent les complémentarités entre l'approche locale et l'approche globale et la pertinence de cette dernière pour l'étude de l'influence de la triaxialité et de la déformation plastique équivalente sur l'endommagement.

## Mots clés

Plasticité - Endommagement ductile - Approche locale - Approche globale - Identification des paramètres - Matériaux hétérogènes - Eléments finis - Grandes déformations.

# SOMMAIRE

<b>1. INTRODUCTION</b>	<b>9</b>
1.1 Généralités	9
1.2 Approche locale et approche globale	10
1.3 Canevas de la thèse	14
<b>2. ETUDE DE L'ENDOMMAGEMENT DUCTILE</b>	<b>17</b>
<b>2.1 Approche globale</b>	<b>17</b>
2.1.1 Cadre thermodynamique de la modélisation	17
2.1.1.1 Introduction	17
2.1.1.2 Variables d'état	18
2.1.1.3 Lois d'état	18
2.1.1.4 Lois complémentaires	19
2.1.1.5 Conclusion	20
2.1.2 Modèles basés sur l'approche globale	21
2.1.2.1 Introduction	21
2.1.2.2 Notion de la contrainte effective	22
2.1.2.3 Hypothèse de l'équivalence en déformation	23
2.1.2.4 Endommagement plastique ductile	24
2.1.2.5 Etablissement d'un critère d'endommagement	25
2.1.2.6 Introduction du potentiel de dissipation	26
2.1.2.7 Conclusion	29
2.1.3 Modèle de Frémond	30
2.1.3.1 Introduction	30
2.1.3.2 Principe des puissances virtuelles et équations de mouvement	30
2.1.3.3 Exemple d'application	33
2.1.3.4 Conclusion	34
<b>2.2 Approche locale</b>	<b>36</b>
2.2.1 Introduction	36

2.2.2	Modélisation micromécanique de l'endommagement	37
2.2.2.1	Modèle du type Rice & Trace	37
2.2.2.2	Modèle de type Gurson	38
2.2.2.3	Modèle de Rousselier	43
2.2.2.4	Modèle de Perzyna	45
2.2.2.5	Conclusion	49
<b>3.</b>	<b>CALCUL PAR ELEMENTS FINIS</b>	<b>51</b>
3.1	Mise en œuvre du calcul numérique	51
3.1.1	Introduction	51
3.1.2	Principes du calcul par éléments finis	52
3.1.2.1	Définition des configurations	52
3.1.2.2	Principe des travaux virtuels	53
3.1.2.3	Discrétisation du principe des travaux virtuels	53
3.1.2.4	Discrétisation spatiale en éléments finis	54
3.1.2.4.1	Fonctions d'interpolation	54
3.1.2.4.2	Type d'éléments	55
3.1.2.5	Aspect temporel de la discrétisation	56
3.1.2.5.1	Méthodes itératives de résolution	57
3.2	Implémentation du critère de Gurson de calcul Crackan	60
3.2.1	Introduction	60
3.2.2	Lois constitutive	60
3.2.3	Relations incrémentales contraintes-déformations	61
3.2.4	Calcul de la matrice constitutive	62
3.2.5	Implémentation	64
3.2.6	Procédure de calcul	66
3.2.6.1	Schéma numérique du calcul	68
3.2.6.2	Maillage et sortie des résultats	70
3.2.7	Conclusion	71
3.3	Exemple de validation	72
3.3.1	Introduction	72
3.3.2	Illustration de la rupture ductile en fond de fissure	73
3.3.3	Application à l'éprouvette de flexion 3-points	74
3.3.3.1	Le modèle éléments finis	74
3.3.3.2	Calcul	75
3.3.3.3	Les résultats	77
3.3.4	Eprouvette de flexion 3-points avec cavités en fond de fissure	81

3.3.4.1	Introduction	81
3.3.4.2	Géométrie et maillage	82
3.3.4.3	Résultats du calcul	83
3.3.4.4	Conclusion	88
<b>4.</b>	<b>ANALYSE EXPERIMENTALE ET CALIBRAGE DES MODELES D'ENDOMMAGEMENT</b>	<b>89</b>
4.1	Introduction	89
4.2	Matériau	90
4.2.1	Composition chimique et traitements thermiques	90
4.2.2	Analyse de la microstructure	91
4.2.2.1	Composition de la matrice	91
4.2.2.2	Analyse de l'état inclusionnaire du matériau	94
4.2.2.3	Caractéristiques mécaniques du matériau	97
4.2.2.3	a. Dispositif de mesure pour le suivi de l'endommagement	98
4.2.2.3	b. Résultats des mesures de l'endommagement	100
4.2.2.4	Les essais	102
4.2.2.5	Méthode d'identification des paramètres	106
4.2.2.6	Modèle éléments finis	107
4.2.2.7	Nucléation des cavités	108
4.2.2.8	Croissance des cavités	110
4.2.2.9	Stade de coalescence	120
4.2.2.10	Conclusion	133
4.2.2.11	Validation des paramètres choisis	134
4.2.2.12	Modélisation d'autres géométries d'éprouvettes axisymétriques entaillées	138
4.2.2.13	Conclusion	142
<b>5.</b>	<b>CONCLUSION ET PERSPECTIVES</b>	<b>144</b>
<b>6.</b>	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>147</b>
<b>7.</b>	<b>ANNEXE</b>	

# Chapitre 1

## 1.Introduction

---

---

### 1.1 Généralités

La rupture brutale des structures reste l'un des problèmes majeur de la conception technologique moderne. Le souci de *sécuriser* les structures et de *prévenir* les ruptures catastrophiques par un choix judicieux du matériau et de la conception est très ancien [And1]. Le mot *prévention* implique l'essai ou l'expérimentation avant la mise en service de la structure.

Par l'expérimentation, les ingénieurs et les chercheurs ont appris à connaître les matériaux qu'ils utilisent et à prédire, quand c'est possible, par le calcul, leurs réactions suite aux sollicitations qui leur sont appliquées et compte tenu des défauts métallurgiques qu'ils contiennent ou des traitements thermiques ou mécaniques qu'ils subissent. Cette démarche n'est pas souvent facile pour diverses raisons. La première est que l'expérimentation reste tributaire des moyens qu'elle utilise. Il n'est pas souvent facile d'accéder aux mécanismes physiques d'interaction de la matière au niveau microscopique responsables de son comportement macroscopique ou de les quantifier. La représentation mathématique de ces

mécanismes par des variables constitutives suppose leur connaissance exacte et la possibilité d'y accéder par la mesure. Finalement, même si on suppose que ces mécanismes sont connus, il faut trouver un compromis entre la possibilité d'une représentation correcte du comportement réel et la nécessité de limiter la complexité des modèles en vue de leur utilisation systématique par les codes de calcul par éléments finis.

C'est à l'articulation de ces trois axes, expérimentation, modélisation et calcul que se situe notre travail. Le champ mécanique que nous explorerons concerne les phénomènes de dégradation physique macroscopique (fissuration) et microscopique (endommagement) de la matière dont on essayera de déterminer les paramètres dominants et de comprendre les mécanismes. Dans ce sens, deux méthodes d'analyse sont possibles, l'approche globale et l'approche locale. Ces deux approches sont liées, car, même si les phénomènes qu'elles décrivent se situent à des niveaux d'observation différents, les modèles auxquels la première (c'est à dire l'approche globale) aboutit sont souvent motivés (sans en être nécessairement déduits) par les mécanismes microscopiques que la seconde tente de décrire.

## 1.2 Approche globale et approche locale

La propagation d'une fissure dans une structure donnée a été au début du siècle et jusqu'aux années soixante l'une des causes majeures de ruptures catastrophiques [And1].

Une première approche quantitative de la rupture brutale suite à une propagation de fissure a été développée par Griffith en 1920 [Gri]. Un critère de ruine qui tenait compte de l'existence d'une fissure au sein du matériau fut alors introduit pour la première fois. C'était l'avènement de la "Mécanique Élastique Linéaire de la Rupture" (MELR).

Selon la théorie développée par Griffith, une fissure présente dans une structure devient instable lorsque l'énergie de déformation produite par un incrément de croissance de la fissure devient supérieure à l'énergie de surface du matériau. L'approche de Griffith ne s'appliquera cependant avec succès qu'aux matériaux fragiles. En 1956 Irwin [Irw1] développe une approche basée sur les travaux de Griffith et applicable aux métaux et aux problèmes de l'ingénieur.

Entre temps, Westergaard [Wes] avait proposé une méthode semi-inverse pour caractériser les champs de contraintes et de déplacements en fond de fissure. Utilisant les travaux de Westergaard, Irwin [Irw2] et Williams [Wil] montrent que d'une manière générale, le champ des contraintes peut s'exprimer, dans le cas d'un comportement élastique linéaire, par la relation suivante :

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}(\theta) \quad (1)$$

$\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes,  $f_{ij}$ , une fonction sans dimensions de  $\theta$ ,  $r$  est la distance au front de fissure et  $\theta$  la coordonnée angulaire mesurée dans le sens trigonométrique à partir de l'axe  $ox$  (fig. 1).

Dans l'équation 1,  $K$  est le *facteur d'intensité de contraintes* qui caractérise l'amplitude de la singularité en fond de fissure et qui dépend du chargement et de la géométrie du problème. Pour une valeur donnée de  $K$ , l'état de contraintes et de déformations au voisinage de la fissure dans un matériau de caractéristiques élastiques données est parfaitement connu [Mia]. D'où l'importance de ce facteur dans le calcul de la rupture.

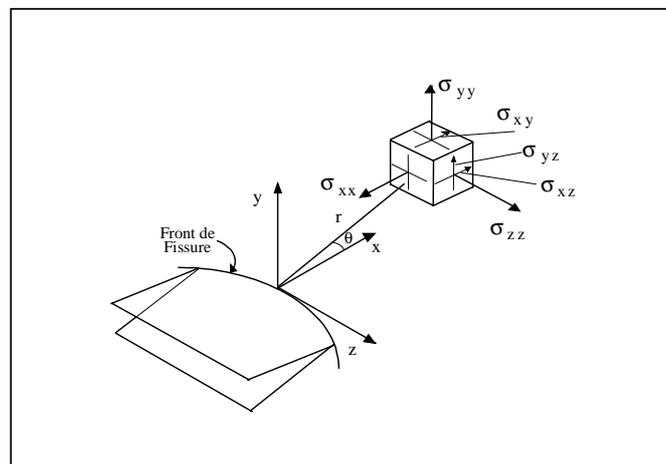


Fig. 1. *Champ de contraintes en fond de fissure*

#### - Facteur d'intensité de contraintes critique

Un matériau se rompt localement lorsque l'état de contraintes atteint une valeur critique au voisinage de la fissure. Puisque cet état de contraintes est totalement décrit par le facteur d'intensité de contraintes  $K$ , on peut dire que la fissure devient instable lorsque celui-ci (en mode I par exemple) atteint une valeur critique notée  $K_C$ . Cette valeur appelée *ténacité* et déterminée par l'expérience, est une caractéristique du matériau dont elle caractérise la résistance à la propagation des fissures. La valeur de  $K_C$  utilisée en tant que critère de rupture permet de connaître le comportement de la fissure à un instant donné. L'extension de la fissure (ou bien la rupture) intervient lorsque  $K \geq K_C$ . Cependant, le critère de rupture basé sur  $K_C$  est, dans la plupart des cas, limité aux déformations planes et chargements en mode I. En contraintes planes,  $K_C$  dépend de l'épaisseur de l'éprouvette.

## - C.T.O.D et Intégrale J

Dans le cas d'un matériau à comportement ductile, l'existence d'une zone plastifiée en fond de fissure perturbe la distribution du champ des contraintes et des déformations et limite ainsi le domaine d'application de la MELR. Pour ce type de matériau, Wells [Wel] a remarqué qu'une fissure initialement aiguë s'é moussse sous l'influence de la déformation plastique et provoque un déplacement noté  $\delta$  en fond de fissure. Il a noté par ailleurs que le degré d'é mousssement de la fissure était proportionnel à la résistance du matériau. En conséquence, Wells a proposé l'ouverture  $\delta$  en fond de fissure comme paramètre de mesure de la résistance à la fissuration. Il a ensuite relié ce paramètre appelé C.T.O.D., Crack Tip Opening Displacement, au facteur d'intensité de contrainte lorsque l'écoulement plastique est limité.

En 1968, Rice [Ric1] introduit un autre paramètre pour caractériser le comportement non linéaire en fond de fissure. Il remplace la déformation plastique par la déformation élastique *non-linéaire* et généralise l'application du concept du taux de l'énergie élastique restituée aux cas des matériaux élastoplastiques. En se basant sur les travaux de Eshelby [Esh3], il montre que ce taux de l'énergie élastique restituée non-linéaire peut être exprimé par une intégrale de contour appelée communément l'intégrale J de Rice et formulée sous la forme suivante :

$$J = \int_{\Gamma} W dn_1 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \quad (2)$$

$\Gamma$  est le contour d'intégration (Fig. 2),  $W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$ , la densité d'énergie de déformation,  $T_i$  et  $u_i$ , respectivement, les composantes du vecteur de traction et de déplacement,  $ds$  est un élément curviligne.

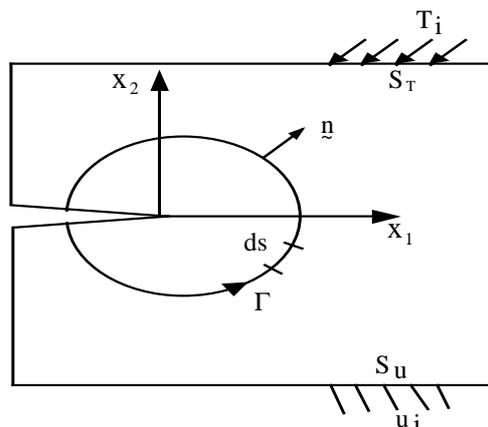


Fig. 2. Contour arbitraire autour du fond de fissure.

L'application de l'intégrale J comme critère de rupture pour la conception des structures à comportement non-linéaire n'a été effective que lorsque Shih et Hutchinson [Shih] donnent en

1976 un cadre pratique de l'approche de Rice permettant le calcul de l'intégrale J. Une définition d'une valeur critique  $J_{IC}$  (en mode I) qui caractérise le matériau pour une épaisseur donnée et sous des conditions géométriques et de chargement spécifiques fut alors introduite. De nombreux travaux furent consacrés à l'application de l'intégrale J comme critère de rupture. L'intérêt qu'il suscite provient principalement de la possibilité de le déterminer numériquement et son indépendance du contour choisi.

Cependant, il a été montré que l'intégrale J pouvait dépendre du contour lorsque la plasticité n'est pas confinée ou en calcul en grandes déformations [Mcm2]. Des variantes de l'intégrale J initialement proposée par Rice ont été proposées pour étendre son applicabilité aux calculs des matériaux hétérogènes ([Mau], [Wei]). La modélisation d'une fissure tridimensionnelle [Had1, Had2] dans un milieu inhomogène par l'intégrale J ouvre d'autres possibilités d'utilisation de l'intégrale J, notamment en calcul de rupture à une échelle microscopique.

#### - Méthode de calcul des milieux fissurés

Les problèmes liés à la propagation des fissures dans un milieu donné n'ont généralement pas de solutions exactes. D'où l'importance d'utiliser des méthodes de résolution approchées, principalement la méthode de calcul par éléments finis.

L'application de cette méthode permet d'accéder aux champs de contraintes et de déformations *locaux* pour des géométries de structures et des chargements complexes.

Cependant, malgré l'existence de moyens de calcul puissants, le passage de la formulation mathématique des lois de comportement aux *modèles numériques* pour le calcul en éléments finis reste un domaine où la recherche est active. Le couplage, par exemple, d'une loi de comportement élastoplastique avec l'endommagement en calcul en grandes transformations (grandes déformations et/ou grands déplacements) demeure délicat, en particulier en ce qui concerne le choix des dérivées objectives, le calcul de la matrice tangente ou le choix des algorithmes de résolution numérique appropriés.

Sur la plan de la modélisation, une représentation mathématique simplifiée des interactions entre des éléments d'un même volume (inclusions–matrice) à une échelle microscopique ou mésoscopique n'est pas souvent facile. En effet, la texture hétérogène de la quasi totalité des matériaux utilisés est d'autant plus difficile à appréhender qu'à une échelle macroscopique, le matériau apparaît homogène. Il est donc important de connaître le *comportement moyen* d'un tel matériau. Les techniques d'*homogénéisation* permettent de caractériser le comportement global à partir du calcul des champs de contraintes et de déformations au niveau d'un volume de matière soigneusement choisi pour être représentatif de la structure et avec des conditions

aux limites appropriées. C'est en suivant cette méthode que Gurson a établi en 1975 [Gur1] un critère d'écoulement pour un matériau poreux.

En outre, dans le cas de l'endommagement, un modèle unique ne peut à lui seul représenter tous les *microprocessus* qui gouvernent l'altération de la matière. Les modèles à caractère général qui se réfèrent aux cas particuliers ont été d'ailleurs à l'origine de bien des controverses [Kra2]. Les modèles sont donc limités aux mécanismes microscopiques à partir desquels ils ont été construits et ne décrivent, de ce fait, que les phénomènes observés ou mesurés par le modélisateur.

Face à cette approche *micro-macro*, la modélisation du comportement global des matériaux par des variables internes au sens de la thermodynamique des processus irréversibles [Ger1] constitue une autre alternative. L'objet initial de cette approche macroscopique est de proposer une formulation mathématique simplifiée des mécanismes d'endommagement tout en conservant un sens physique aux variables qui le décrivent. Cette simplification vise deux objectifs, le premier concerne la mise en œuvre numérique alors que le second est lié à la possibilité de déterminer par identification les paramètres constitutifs des modèles. Le modèle d'endommagement proposé par Lemaitre et Chaboche [Lem2] s'inscrit dans cette démarche.

Le modèle de Rousselier [Rou1] est situé entre les deux approches. En effet, si la variable qui représente l'endommagement s'inspire des micro-mécanismes d'altération de la matière (germination des cavités, croissance), le modèle ne dérive pas d'une approche micro-macro, mais des concepts de la thermodynamique des processus irréversibles.

Les approches microscopique et macroscopique basées, respectivement, sur l'analyse micro-mécanique de détérioration de la matière et la thermodynamique des processus irréversibles ont chacune des avantages et des inconvénients. Il n'est pas souvent facile de choisir pour la modélisation l'une ou l'autre des deux approches, tant les difficultés de ce choix peuvent être d'ordre théorique, numérique ou expérimental. Dans ce travail, nous avons préféré l'utilisation complémentaire des modèles issus de ces deux approches.

### 1.3 Canevas de la thèse

Ce travail s'articule autour de trois axes principaux. Le premier est consacré à l'étude théorique des lois d'endommagement des matériaux ductiles constitués d'une matrice métallique et d'inclusions. La modélisation de l'endommagement de ces matériaux dépend de l'échelle d'observation. On distingue ainsi les modèles macroscopiques et les modèles microscopiques. Dans le premier cas, on peut citer le modèle de Lemaitre [Lem1] qui, dans le

cadre de la thermodynamique des processus irréversibles et de l'équivalence en déformation, caractérise l'état de détérioration de la matière par une variable interne scalaire liée à la densité surfacique des micro-défauts. Cette approche fait l'objet de la première partie du **chapitre 2**. Dans ce chapitre, nous avons évoqué le modèle de Frémond et Nedjar [Fré] dont la particularité est de tenir compte des *mouvements* microscopiques qui provoquent l'endommagement dans l'expression de la puissance des efforts intérieurs. L'un des résultats importants de ce modèle est de garantir l'indépendance de la solution par rapport au maillage. Dans le cas de l'approche microscopique, on caractérise localement l'endommagement en considérant un volume élémentaire représentatif (VER) qui contient une ou plusieurs cavités de volume équivalent à celui de toutes les micro-cavités et micro-fissures présentes dans la structure réelle. Dans cette direction, nous avons étudié le modèle de Rice & Tracey [Ric5] qui décrit le comportement d'une cavité sphérique dans un milieu infini rigide parfaitement plastique. Ce modèle montre le rôle joué par la triaxialité des contraintes et la déformation plastique équivalente sur la croissance de la cavité.

Au lieu de considérer une cavité isolée, Gurson [Gur1, Gur2] introduit la notion de la fraction volumique de cavités  $f$  pour caractériser la porosité induite dans un matériau par rupture des inclusions ou décohésion au niveau de l'interface matrice-inclusion. Il propose une fonction de charge qui prend en compte la valeur actuelle de l'endommagement ( $f$ ) ainsi que l'influence de la contrainte hydrostatique sur l'écoulement plastique.

En combinant l'approche macroscopique basée sur la thermodynamique des processus irréversibles et l'approche locale qui considère le détail de l'endommagement (à travers la valeur de  $f$ ), Rousselier [Rou1, Rou2] a obtenu un modèle similaire à celui de Gurson mais avec moins de paramètres constitutifs. Le rappel de ces différents modèles relatifs à l'approche locale est effectué dans la seconde partie du **chapitre 2**. Nous étudions dans ce chapitre le modèle de Perzyna ([Per1], [Per2]) qui a proposé une formulation où l'endommagement et l'écoulement viscoplastique sont couplés. L'anisotropie de l'endommagement par une variable du type vecteur est prise en compte, mais le nombre important de paramètres constitutifs du modèle rend son utilisation quelque peu difficile.

Nous avons procédé par la suite à l'implémentation des différents modèles d'endommagement dans le code de calcul par éléments finis Crackan [Gro1, Gro2]. Cette étude numérique constitue le second axe de ce travail et fait l'objet du **chapitre 3**. Des résultats relatifs à l'application du modèle de Gurson au calcul de la propagation d'une fissure et son interaction avec une ou plusieurs cavités situées sur son axe sont également donnés dans ce chapitre.

Le troisième axe est consacré à l'étude expérimentale réalisée sur un acier de construction thermomécaniquement traité et faiblement allié (S 460 M) pour quantifier les mécanismes microstructuraux qui gouvernent l'endommagement, valider l'étude numérique, identifier les paramètres des différents modèles et déterminer la sensibilité des modèles à ces paramètres. Cette partie est exposée dans le **chapitre 4**. Une démarche pour caractériser le stade de coalescence est proposée dans ce chapitre.

Nous concluons sur les différentes parties exposées et donnerons quelques perspectives auxquelles ce travail a donné lieu.

# Conclusion et perspectives

## Conclusion générale

---

Dans ce travail nous avons analysé l'endommagement ductile d'un matériau hétérogène constitué d'une matrice métallique et d'inclusions aléatoirement distribuées dans la matrice. L'étude de l'endommagement dans ce cas pose le problème de l'échelle au niveau de laquelle se situe l'observation. Dans notre cas, nous avons distingué le niveau d'hétérogénéité structurale qui concerne les cavités et les inclusions et le niveau macroscopique qu'on représente par l'élément de volume observable au sens de la mécanique des milieux continus. Dans ce sens, nous avons considéré en premier lieu les modèles dits macroscopiques. Ces modèles sont essentiellement basés sur la représentation de l'endommagement par une variable interne scalaire introduite dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. Cette présentation se justifie par le fait que l'endommagement constitue, au même titre que la plasticité, un phénomène dissipatif. Sa dissipativité se traduit par la création de discontinuités au niveau de la matière. Dans ce type d'approche, le matériau est considéré comme une *boîte noire* et l'endommagement qu'il subit ne se manifeste qu'à travers son influence sur ses propriétés physiques ou mécaniques (changement de la densité, variation de la rigidité) dont la mesure, avec les moyens d'expérimentation actuels, n'est pas souvent facile. Cette approche globale, comme nous l'avons signalé dans le dernier chapitre, ne peut être facilement écartée au profit de l'approche dite locale. Car, d'une part, elle a l'avantage d'être simple et intuitive (par sa formulation mathématique et le cadre théorique dont elle

dérive) et d'autre part, elle mène à des résultats pertinents, en particulier, en ce qui concerne l'influence de la triaxialité sur l'endommagement.

Parallèlement à l'approche globale, nous avons étudié les concepts de l'approche locale de l'endommagement. Dans ce cas, le rôle majeur joué par les micro-cavités dans le processus d'endommagement ductile, depuis l'état initial jusqu'à la création d'une macro-fissure a été clairement illustré. Les micro-cavités prennent naissance aussitôt que le champ local des contraintes devient grand et qu'il provoque une rupture des inclusions ou une décohésion au niveau de l'interface matrice-inclusion. Sous l'effet de la déformation plastique, les cavités vont croître en volume et en nombre jusqu'à ce que les ligaments qui les séparent atteignent une valeur critique que nous avons désignée par  $lc$  annonciatrice du stade de la coalescence et de l'apparition d'une fissure macroscopique. Nous avons noté par ailleurs que la caractérisation du stade de la coalescence reste un sujet ouvert.

Dans le cadre de l'approche locale, nous avons utilisé le modèle de Gurson qui prend en compte la présence des cavités et leur évolution dans la formulation du critère de plasticité classique de von Mises qui devient dépendant de la fraction volumique de cavités ainsi que du premier invariant des contraintes. La prise en compte du stade de la coalescence est réalisée en introduisant la modification apportée par Tvergaard & Needleman qui, au stade critique, remplacent le critère de Gurson par une fonction linéaire dépendant de  $f_c$ , du paramètre constitutive  $q_1$  et de la valeur de la fraction volumique de cavités à la rupture  $f_f$ .

Nous avons introduit le modèle de Rousselier, qui, en combinant l'approche globale par l'utilisation du cadre thermodynamique des processus irréversibles et l'approche locale qui tient compte du détail du défaut (la forme, la taille et la distribution) à travers de la fraction volumique de cavité  $f$ , obtient un modèle d'endommagement qualitativement similaire à celui de Gurson, mais dont les avantages sont la simplicité de formulation et un nombre réduit de paramètres constitutifs.

L'implémentation numérique de ces modèles est réalisée dans le cadre d'une formulation en grandes déformations. Le calcul numérique pose certaines questions, notamment en ce qui concerne les algorithmes d'intégration et la sensibilité de la solution au maillage de la structure.

La quantification de l'endommagement ainsi que la détermination des micromécanismes qu'il induit ont été réalisées par l'étude expérimentale sur un acier thermo-mécaniquement traité et faiblement allié (S 460 M). Le suivi de l'évolution de la cinétique de l'endommagement par le comptage, l'évaluation de la taille et de la distribution des cavités pour trois stades de chargement nous a permis d'identifier les différents paramètres constitutifs des modèles

utilisés. La validation des résultats montre le rôle de compétition joué par la triaxialité des contraintes et la déformation plastique au niveau de la section minimale de l'éprouvette ainsi que la pertinence du paramètre  $f(\chi) = 2(1+\nu)/3 + 3(1-2\nu)\chi^2$  inclus dans le modèle macroscopique de Lemaitre.

## Perspectives

---

Les perspectives auxquelles ce travail donne lieu découlent des trois axes sur lesquels la thèse s'est articulée. Sur le plan théorique, il serait intéressant de formuler de manière unifiée les modèles de l'approche locale en intégrant le modèle de Perzyna dans son aspect simplifié pour prendre en compte l'anisotropie de l'endommagement et le changement de forme des cavités tout au long du chargement.

Les modèles de Gurson, de Rousselier ou de Lemaitre que nous avons utilisés ne prennent pas en compte la présence discrète des cavités. Le modèle de Thomason permet cette prise en compte. Le couplage avec les autres modèles nous a montré l'intérêt du facteur limite de striction introduit par Thomason. Les résultats obtenus peuvent être complétés par une analyse expérimentale approfondie du stade de la coalescence en procédant à plusieurs essais interrompus au niveau de ce stade. L'étude de la localisation de la déformation par l'approche non locale est aussi une voie importante pour la compréhension des micro-mécanismes d'endommagement ductile des matériaux multiphases au stade de l'amorçage d'une fissure.

Finalement, le calcul d'endommagement au niveau d'un volume élémentaire représentatif (VER) en 3-D permettrait de confirmer les paramètres identifiés<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Travail en cours, en collaboration avec O. Débordès et S. Bourgeois de l'École Supérieure de Mécanique de Marseille.

---

## 5. BIBLIOGRAPHIE

- [Abo] **ABOUTAYEB S. M; PRAHL U., HADDI A, WEICHERT D.** : "Simulation numérique et expérimentale du comportement à l'endommagement d'un matériau à deux phases", *4ème Congrès de Mécanique, 13-16 Avril 1999, Mohammadia, Maroc.*
- [Ach] **ACHENBACH U.-J.** : "Einfluß des Gefüges auf die Schädigung von Stählen", *Thèse de Doctorat, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule Aachen, Aachen (1999).*
- [And1] **ANDERSON T. L.** : "Fracture mechanics, fundamentals and Applications", *Second Edition, CRC Press, (1995).*
- [And2] **ANDERSSON H.** : "Analysis of model for void growth and coalescence ahead of a moving crack tip", *J. Mech. Phys. Solids, Vol. 25, pp. 217-233, (1977).*
- [Aok1] **AOKI S., KISHIMOTO K., TAKEYA A., SAKATA M.** : "Effects of microvoids on crack blunting and initiation in ductile materials", *Int. J. of Fracture, Vol. 24, pp. 267-278, (1984).*
- [Aok2] **AOKI S., MORIYA Y., KISHIMOTO K., SCHMAUDER S.** : "Finite element fracture analysis of WC-CO alloys", *Engng. Fract. Mech., Vol. 55, No. 2, pp. 275-287, (1996).*
- [Ara1] **ARAVAS N.,** : "On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models", *Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 24, pp. 1395-1416, (1987).*
- [Ara2] **ARAVAS N., McMEEKING R. M.**: "Microvoid growth and failure in the ligament between a hole and a blunt crack tip", *Int. J. of Fracture, Vol. 29, pp. 21-38, (1985).*
- [Arg] **ARGON A. S., IM J., SAFOGLU R.** : "Cavity formation from inclusions in ductile fracture", *Metallurgical Transactions, Vol. 6A, pp. 825. (1975).*
- [Asm] "Standard test methods for determining the average grain size", American Society for Testing and Material, **E112-96e1**, Philadelphia, USA.
- [Bat] **BATHE K. J.** "Finite element procedures in engineering analysis", *Prentice-hall, Englewood Cliffs, NJ, (1982).*

- 
- [Baz] **BAZANT Z. P., PIJAUDIER-CABOT G.** : "Measurement of characteristic length of non local continuum", *J. Engng. Mech., ASCE, Vol. 115, pp. 755-767, (1989).*
- [Bec] **BECKER R., NEEDLEMAN A., RICHMOND O., TVERGAARD V.** : "Void growth and failure in notched bars", *J. Mech. Ph. Solids. Vol. 36, No 36, pp. 317-351, (1988).*
- [Bel] **BELYTSCHKO T., FISH J., BAYLISS A.** : "The spectral overlay on finite elements problems with high gradients", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 81, pp. 71-89, (1990).*
- [Bena] **BENALLAL A., BILLARDON R., DOGHRI I.** : "An integration algorithm and the corresponding consistent tangent operator for fully coupled elastoplastic and damaged equations", *Communication in Appl. Num. Meth., Vol. 4, pp. 731-740, (1989).*
- [Benn] **BENNANI B., PICART P., OUDIN J.**: "Some basic finite element analysis of micro-void nucleation, growth and coalescence", *Engng. Comp., Vol. 10, pp.409-421, (1993).*
- [Benz] **BENZERGA A. A., BESSON J., PINEAU A.** : "Coalescence-controlled anisotropic ductile fracture", *J. of Engng. Mat. & Tech., ASME. Vol. 121, No. 2, pp. 221-, (1999).*
- [Bet] **BETTEN J.** : "Damage tensors in continuum mechanics", *J. de Mécanique Théorique et Appliquée, Vol. 2, No. 1, pp. 13-32, (1983).*
- [Ber] **BEREMIN F: M.** : "Cavity formation from inclusions in ductile fracture of A 508 steel", *Metall. Transc., Vol. 12A, pp. 723-731, (1981).*
- [Berg] **BERG C. A.**, "Plastic dilatation and void interaction", *In Inelastic Behavior of Materials, Ed. Kanninen et al., Mc. Graw-Hill, New-York, pp. 171-209, (1970).*
- [Bil] **BILLARDON R., DOGHRI I.** : "Prévision de l'amorçage d'une macro-fissure par localisation de l'endommagement", *C. R. A. S., t. 308, Série II, pp. 347-352, (1989).*
- [Bis] **BISHOP J. F., HILL R.** : "A theory of the plastic distortion of polycrystalline Aggregate under combined stresses", *Phil. Mag., Vol. 42, pp. 414-427, (1951).*
- [Bol] **BOLOTIN V. V., LEBEDEV V. L.** : "Analytical model of fatigue crack growth retardation due to overloading", *Int. J. solids struct. Vol. 33, No. 9, pp. 1229-1242, (1996).*
- [Bon1] **BONORA N.** : "A nonlinear CDM model for ductile failure", *Engng. Fract. Mech., Vol. 58, No. 1-2, pp. 11-28, (1997).*
- [Bon2] **BONORA N.** : "Identification and measurement of ductile damage parameters", *J. Str. Anal. Eng. Design, Vol. 34, pp.463-478, (1999).*

- 
- [Bou] **BOURCIER R. J., KOSS D. A., SMESLER R. E., RICHMOND O.:** "The influence of porosity on the deformation and fracture of alloys", *Acta metall.* Vol. 12, pp. 2443-2453, (1986).
- [Bro] **BROWN L. M., EMBURY J. D. :** "The initiation and growth of voids at second phase particles", Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Conf. On Strength of metals and Alloys, Institute of Metals, London (1973).
- [Bud] **BUDIANSKY B., HUTCHINSON J., SLUTSKY S.:** "Void growth and collapse in viscous solids", *In Mech. of Solids, Ed. Hopkins H. G., Pergamon Press, 13-14, (1981).*
- [Ces] **CESSOTTO S., CHARLIER R. :** " Numerical simulation of elasto-visco-plastic large strain of metals at high temperature", *In Proc. 8<sup>th</sup> Conf. On SMIRT, B8/10, Brussels, Vol. B, pp. 333-338, (1985).*
- [Cha] **CHANDRAKANTH S., PANDEY P. C. :** "An isotropic damage model for ductile material", *Engng. Fract. Mech., Vol. 50, No. 4, pp. 457-465, (1995).*
- [Cho] **CHOW C. L., WANG J. :** "An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture", *Engng. Fract. Mech., Vol.27, pp. 547-558, (1987).*
- [Chi] **CHIHAB A. :** "Solution approchée de champs de vitesses en milieu élastoplastique contenant des cavités elliptiques: application à l'analyse de l'évolution de l'endommagement", *Thèse de Doctorat de l'Université de Poitiers, (1984).*
- [Chu] **CHU C. C., NEEDLEMAN A. :** "Void nucleation effects in biaxially stretched Sheets", *J. Of Engng. Mat. & Technology, Vol.102, pp.249-256, (1986).*
- [Cox] **COX T. B., LOW J. R.:** "An investigation of the plastic fracture of AISI 4340 and 18 Ni-200 Grade Maragin steel", *Metall. Transactions, Vol. 5, pp. 1457-1470, (1974).*
- [Des] **DESOYER T.:** "Etude numérique et expérimentale de l'évolution de cavités autour d'inclusions en milieu élastoplastique Quasi-Périodique. Relation avec un modèle d'endommagement Ductile", *Thèse de Doctorat de l'Université de Poitiers, (1984).*
- [DIN1] "Warmgewalzte Erzeugnisse aus schweißgeeigneten Feinkornbaustählen", *CEN, Brüssel, (1993).*
- [DIN2] "Prüfung metallischer Werkstoffe Zugversuch", Normausschuß Materialprüfung im DIN Deutsches Institut für Normung e. V., (1986).
- [DIN3] "Ermittlung von Ferrit- und Austenitkorngröße von Stahl- und Eisenwerkstoffen", *DIN, Berlin, (1985).*

- 
- [Dra] **DRAGON A.**: "Plasticity and ductile fracture damage: study of growth in metals", *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 21, No4, pp.875-885, (1985).
- [Dus] **DUSZEK M., PERZYNA P.**: "Plasticity of damaged solids and band localisation", *Ingenieur-Archiv.*, Vol. 58, pp. 380-392, (1988).
- [Esh1] **ESHELBY J. D.**: "The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problem", *Proc. Roy. Soc., London*, Vol. A241, pp. 376-396, (1957).
- [Esh2] **ESHELBY J. D.**: "Elastic inclusion and inhomogeneities", In *Progress in Solids Mechanics*, Sneddon I. N. & Hill R. (eds), North-Holland, Amsterdam, Vol. II, pp. 87-140, (1961).
- [Esh3] **ESHELBY J. D.**: "Energy relations and the energy-momentum tensor in continuous mechanics", *Inelastic Behavior of Solids*, McGraw-Hill, pp. 77-115, (1965).
- [Fea] **FEAUGAS X., HELBERT A. L., CLAVEL M.**: "Effects of microstructural parameters and back stress on damage mechanisms in  $\alpha/\beta$  titanium alloys ", *Acta Materialia*, Vol. 46, No. 3, pp. 939–945, 1998
- [Fré] **FRÉMOND M., NEDJAR B.**: "Damage, gradient of damage and principle of virtual power", *Int. J. Solids Structures*. Vol. 33, No. 8, pp. 1083-1103, (1996).
- [Get] **GHETREFF T.**: "Modélisation du comportement élasto-viscoplastique en grandes déformations", *Thèse de Doctorat de l'Université de Lille1*, (1999).
- [Ger1] **GERMAIN P.**: "Cours de Mécanique des Milieux Continus", *Masson, Paris* (1973).
- [Ger2] **GERMAIN P., NGUYEN Q.S., SUQUET P.**: "Continuum thermodynamics", *Transaction of ASME*. Vol. 50, pp. 1010-1020, (1983).
- [Gho] **GHOSAL A. K., NARASIMHAN R.**: "Numerical simulations of hole growth and ductile fracture initiation under mixed-mode loading", *Int. J. of Fracture*, Vol. 77, pp. 281-304, (1996).
- [Goo] **GOODS S. H., BROWN L. M.**: "The nucleation of cavity by plastic deformation", *Acta Metall.* Vol., 27, pp. 1-15, (1979).
- [Gre] **GREEN R.G.**: "A Plasticity theory for porous solids", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 14, pp. 215-224, (1972).
- [Gri] **GRIFFITH, A. A.**: "The phenomena of fracture and flow in solids", *Philosophical Transactions, Series A*, Vol. 221, pp 163-198,(1920).

- 
- [Gro1] **GROSS-WEEGE A., WEICHERT D., BROECKMANN C.:** "Numerical simulation of the fracture behaviour of hard two-phase materials on the meso-level", *Proceedings ICIAM/GAMM 1995, ZAMM, Vol. 76, sup., pp. T181-T182, (1996).*
- [Gro2] **GROSS-WEEGE A :** "Comportement et endommagement de composites renforcés à matrice métallique. prévisions numériques à l'échelle micro-et macroscopique", *Thèse de Doctorat de Mécanique de L'Université de Lille1, Lille, (1996).*
- [Gui] **GUILLEMER-NEEL C. :** "Comportement mécanique et endommagement de la fonte GS", *Thèse de Doctorat de de L'Université de Technologie de compiègne.(1998).*
- [Gurl] **GURLAND J.:** "Observations on the fracture of cementite particles in a spheroidized 1.05%C steel deformed at room temperature", *Acta Metall., Vol. 20, pp. 735-741, (1979).*
- [Gur1] **GURSON A.L.:** "Plastic flow and fracture behaviour of ductile materials incorporating void nucleation, growth and interaction", *Ph. D. Thesis, Brown University (1975).*
- [Gur2] **GURSON A.L. :** "Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I- Yield criteria and flow rules for porous ductile media", *Trans. A.S.M.E., J. Engng. Mat. and Technology, No.99, pp.2-15, (1977).*
- [Gur3] **GURSON A. L.:** "Porous rigid-plastic materials containing rigid inclusions: yield function, plastic potential and void nucleation", *In Proc. Int. Conf. Fract., Vol. 2A, pp.357-364, (1977).*
- [Had1] **HADDI A. :** "Formulation tridimensionnelle d'un critère de propagation de fissure dans les matériaux inhomogènes", *Thèse de Doctorat de Mécanique, Université de Lille 1, Lille, (1995).*
- [Had2] **HADDI A. WEICHERT D. :** "Three-dimensional interaction between a crack front and particles", *Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 42, pp. 1463-1476, (1998).*
- [Hai] **HAIOUN E. A. :** "Application de l'approche locale de la rupture à l'étude de la Transition ductile-fragile dans l'acier 16MND5", *Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, (1986).*
- [Hal] **HALPHEN B., NGUYEN Q. S. :** "Sur les matériaux standards généralisés", *J. de Mécanique, Vol. 14, No. 1, pp. 39-63, (1975).*
- [Han] **HANCOCK J. W., MACKENZIE A. C. :** "On the mechanics of ductile failure in high strength steels subjected to multi-axial stress-states", *J. Mech. Phys. Solids, Vol. 14, pp. 147-169, (1977).*

- 
- [Hay] **HAYAKAMA K., MURAKAMI S., LIU Y.** : "An irreversible thermodynamics theory for elastic-plastic-damage materials", *Eur. J. Mech. A/Solids*, Vol. 17, pp. 13-32, (1998).
- [Hib1] **HIBBIT H. D., MARCAL P. V, RICE J. R.** : "A finite element formulation for problems of large strain and large displacement", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 6, pp. 1069-1086, (1970).
- [Hib2] **HIBBIT, KARLSSON, SORENSON, INC., ABAQUS**, *Users's Manual, Version 4.8*, Providence, (1990).
- [Hil] **HILL R.** : "Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 7, pp. 209-259, (1959).
- [Hor1] **HORSTEMEYER M. F., GOKHAL A. M.** : "A void-crack nucleation model for ductile metals", *Int. J. of S. & Stuct.*, Vol. 36, pp. 5029-5055, (1999).
- [Hor2] **HORSTEMEYER M. F., MATALANIS M. M., SIEBER A. M., BOTOS M. L.** : "Micromechanical finite element calculations of temperature and void configuration effects on void growth and coalescence", *Int. J. of Plasticity*, Vol. 16, pp.979-1015, (2000).
- [Hut] **HUTCHINSON J. W.** : "Singular behaviour at the end of a tensile crack tip in a hardening material", *J. of Mech. & Phys. of Solids*, Vol. 16, pp.13-31, (1968).
- [Ide] **I-DEAS Master Series**, Version 5.3, SDRC, (1998).
- [Irw1] **IRWIN, G.R.** : "Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminium alloys", *Sagamore Res. Conf. Proc.*, Vol. 2, pp 289-305, (1956).
- [Irw2] **IRWIN G. R.** : "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate", *J. of Appl. Mech.*, Vol. 24, pp.361-364, (1957).
- [Irw3] **IRWIN G. R.** : "Plastic zone near a crack and fracture toughness", *Sagamore Res. Conf. Proc.*, Vol. 4, (1961).
- [Ju] **JU J. W.** : "On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspect", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 25, n0. 7, pp. 803-833, (1989).
- [Jun1] **JUN S.** : "Effect of stress triaxiality on micro-mechanisms of void coalescence and micro-fracture ductility of materials", *Engng. Fract. Mech.* Vol. 39, pp. 799-805, (1991).
- [Jun2] **JUN S., JIE D.Z., JING T.M.**: "Effect of stress triaxiality levels in crack tip regions on the characteristics of void growth and fracture criteria", *Engng. Fract. Mech.*, Vol.39, No.6, pp.1051-1060, (1991).

- 
- [Kac] **KACHANOV L. M.** : "Time of the rupture process under creep conditions", *IVZ Akd. Nauk., S.S.R., Otd., Tech. Nauk., No. 8, pp. 26-31, (1958).*
- [Kai] **KAILASAM M., PONTE CASTANEDA P., WILLIS J.** : "The effect of particle size, shape, distribution and their evolution on the constitutive response of nonlinear composites- I Theory", *Proc. R. Soc., London, vol. 355, pp. 1835-1852, (1997).*
- [Kle] **KLEIBER M.** : "On localisation and failure in plane strain and round void containing tensile bars", *Int. J. of Plasticity, Vol. 2, pp. 205-221, (1986).*
- [Kra1] **KRAJČINOVIC D.** : "Continuous damage mechanics revisited; basic concepts and definitions", *J. Appl. Mech., Vol. 52, pp.829-834, (1985).*
- [Kra2] **KRAJČINOVIC D.** : "Selection of damage parameter – Art or science?", *Mechanics of materials, Vol. 28, pp. 165-179, (1998).*
- [Lad] **LADEVÈZE P.** "Nonlinear computational structural mechanics, New Approaches and non-incremental methods of calculation", *Springer-Verlag New York, Inc., (1999).*
- [Lau] **LAUTRIDOU J. C., PINEAU A.** : "Crack initiation and stable crack growth resistance in A508 steels in relation to inclusion distribution", *Engng. Fract. Mech., vol. 15, pp. 57-71, (1981).*
- [Leb] **LEBLOND J. B., PERRIN G., DEVAUX J.** : "Bifurcation effects in ductile metals with damage localisation", *J. of Appl. Mech., Vol. 61, pp. 236-242, (1994).*
- [Lec] **LECKIE F. A., ONAT E. T.** : "Tensorial nature of damage measuring internal variables", *Hult J. & Lemaitre J. (Eds.), Phys. Nonl. in Struct. Anal., Springer, Berlin, pp. 140-155, (1981).*
- [Lem1] **LEMAITRE J.** : "A continuous damage mechanics model for ductile fracture", *J. of Engng. Mat. and Technology. Vol. 107, pp. 83-89, (1983).*
- [Lem2] **LEMAITRE J., CHABOCHE J. L.** : "Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement", *J. de Mécanique appliquée. Vol. 2, No 3, pp. 316-365, (1978).*
- [Lem3] **LEMAITRE J., CHABOCHE J. L.** : "Mécanique des matériaux solides", *Dunod, (1985), "Mechanics of solid materials", Springer-Verlag, (1987).*
- [Lem4] **LEMAITRE J., SERMAGE J. P.** : "One damage law for different mechanisms", *Comp. Mech., Vol. 20, No. 2, pp. 84-88, (1997).*
- [Lem5] **LEMAITRE J., DESMORAT R., SAUZAY M.** : "Anisotropic damage law of evolution", *Europ. J. of Mech. – A, Vol. 19, T. 2, pp. 187-208, (2000).*

- 
- [Lod] **LODE W.** : "Versuche über den Einfluss der mitt leren Hauptspannung auf das Fliessen der Metalle Eisen Kupfer und Nickel", *Zeitschrift für Physik*, Vol. 36, pp. 913-939, (1926).
- [Lor] **LORENTZ E., ANDRIEUX S.** : "A variational formulation for nonlocal damage models", *Int. J. of Plasticity*, Vol. 15, pp. 119-138, (1999).
- [Man] **MANDEL J.** : "Equations constitutive et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 9, pp. 725-740, (1973).
- [Mar] **MARINI B., MUDRY F., PINEAU A.** : "Experimental study of cavity growth in ductile rupture", *Engng. Fract. Mech.*, vol. 22, pp. 989-996, (1985).
- [Mau] **MAUGIN G. A.** : "Eshelby stress in elastoplasticity and ductile fracture", *Int. J. of Plasticity*, Vol. 10, pp. 393-408 (1994).
- [Maz1] **MAZARS J., WALTER D.** : "Endommagement Mécanique du Béton", *Rapport D.G.R.S.T., No 7872697 et 7872698*, (1980) :
- [Maz2] **MAZARS J., PIJAUDIER-CABOT G.** : "From damage to fracture mechanics and conversely : A combined approach", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 33, No. 20-22, pp. 3327-3342, (1996).
- [McC] **McCLINTOCK F. A.**: "A Criterion for Ductile Fracture by the Growth of Holes", *J. of Appl. Mech.*, Vol. 35, pp. 363-371, (1968).
- [Mcm1] **McMEEKING R. M., RICE J. R.** : "Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation", *Int. J. Solids Structures*. Vol. 11, pp. 601-616, (1975).
- [Mcm2] **McMEEKING R. M.** : "Finite deformation analysis of crack-tip opening in elastic-plastic materials and implications for fracture", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 25, pp. 357-381, (1977).
- [Mia] **MIANNAY D. P.** : "Fracture mechanics", *Mech. Engng. Series*, (Ling F. F. Ed.), Springer-Verlag, Berlin, (1997).
- [Mic1] **MICHEL J. C.** : "Homogénéisation de matériaux élastoplastiques avec cavités". *Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie.-Paris 6-*. (1984).
- [Mic2] **MICHEL J. C, MOULINEC H., SUQUET P.** : "Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 172, pp. 109-143, (1999).
- [Mis] **MISHNAEVSKY L.L., LIPPMANN N., SCHMAUDER S., GUMBSCH P.** : "In-situ observation of damage evolution and fracture in AlSi7Mg0.3 cast alloys", *Engng. Fract. Mech* Vol. 63, Nr. 4, S. 395 –411, (1999).

- 
- [Mou] **MOUSSY F.** : "Microstructure, endommagement et rupture ductile", *Mémoires et Etudes Scientifiques, Revue de Métallurgie-I.R.S.I.D., St-Germain-en-Laye, pp.205-222, Avril (1987).*
- [Mud] **MUDRY F.** : "Etude de la rupture ductile et de la rupture par clivage d'aciers faiblement alliés", *Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Technologie de Compiègne, (1982).*
- [Mur] **MURAKAMI S., OHNO N.**: "A continuum theory of creep and creep damage", *Proc. of the 3<sup>rd</sup> IUTAM Symp. Creep in Structures, pp. 422-444, (1980).*
- [Nar1] **NARASIMHAN R.** : "A numerical study of fracture initiation in a ductile material containing a dual population of second-phase particles-I- static loading", *Engng. Fract. Mech., Vol. 47, No.6, pp.919-934, (1994).*
- [Nar2] **NARASIMHAN R., ROSAKIS A. J., MORAN B.**: "A three-dimensional numerical investigation of fracture initiation by ductile failure mechanisms in a 4340 steel", *Int. J. of Fract., Vol. 56, pp. 1-24, (1992).*
- [Nay] **NAYAK C. G., ZIENKIEWICZ O. C.** : "Convenient form of stress invariants for plasticity", *J. of the Struct., Div. Proc. Of A.S.M.E., pp.949-953, (1972).*
- [Nee] **NEEDLEMAN A., RICE J. R.** : "Limits to ductility set by plastic flow localisation", *Mechanics of sheet metal forming, Plenum Press, New York, pp. 237-267, (1978).*
- [Ned] **NEDJAR B.** : "Mécanique de l'endommagement . Théorie du premier gradient et application au Béton", *Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. L. C. P. C. Paris, (1995).*
- [Ogd] **OGDEN R. W.** : "On Eulerian and Lagrangean objectivity in continuum mechanics", *Arch. Mech., Vol. 36, pp. 207-218, (1984).*
- [Ort1] **ORTIZ M., SIMO J. C.** : "An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations", *Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 23, pp. 353-366, (1986).*
- [Ort2] **ORTIZ M., LEROY Y., NEEDLEMAN A.** : "A finite element method for localized failure analysis", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 61, pp. 189-214, (1987).*
- [Owe1] **OWEN D. R. J., HINTON E.** : "Engineering fracture mechanics : numerical methods and applications", *Pineridge Press Ltd. Swansea, U. K., (1982).*
- [Owe2] **OWEN D. R. J., HINTON E.** : "Finite Elements in plasticity: Theory and Practice", *Pineridge Press Limited, Swansea, (1986).*

- 
- [Per1] **PERZYNA P.** : "Constitutive modelling of dissipative solids for postcritical behaviour and fracture", *ASME J. Eng. Mat. & Technology*, Vol. 106, pp. 410-419, (1986).
- [Per2] **PERZYNA P., DRABIK A.** : "Influence of thermal effects on micro-damage mechanism in dynamic processes.", *ZAMM.*, 71, 4, pp.374-378, (1991).
- [Pij] **PIJAUDIER-CABOT G., BAZANT Z. P.,** : "Nonlocal damage theory", *J. Engng. Mech., ASCE*, Vol. 113, pp. 1512-1533, (1987).
- [Pin] **PINEAU A.** : "Review of fracture micromechanisms and a local approach to predicting crack resistance in low strength steels", In *Advances in Fracture Research*, François D. (Ed), Pergamon Press, Vol. 2, pp. 553-577, (1981).
- [Pon1] **PONTE CASTANEDA P.** : "The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 39, pp. 45-71, (1991).
- [Pon2] **PONTE CASTANEDA P.** : "New variational principles in plasticity and their application to composite materials", *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 40, pp. 1757-1788, (1992).
- [Pont] **PONTHOT J. P.** : " Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis", *Thèse de Doctorat, Université de Liège*, (1997).
- [Rab] **RABOTNOV Y. N.** : "Creep rupture", *Proc. of the 12th Int. Cong. of Appl. Mech., Stanford. Springer-Verlag, Berlin*, pp342-349, (1969).
- [Ric1] **RICE J. R.** "A Path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks". *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, pp.379-386, (1968).
- [Ric2] **RICE J. R.** : "Inelastic constitutive relation for solids: an internal variable theory and its application to metal plasticity", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 19, pp. 433-455, (1971).
- [Ric3] **RICE J. R.** : "In mechanics and mechanisms of crack growth", *M. J. May, (ed.) British Steel Corp. Ph. Metall. Centre publication, Sheffield, England*, pp. 14-39, (1975).
- [Ric4] **RICE J. R.** : "The localisation of plastic deformation", *Int. J. Solids Structures*(Ed. Koiter W. T.). North-Holland, Amsterdam, pp. 207-220, (1976).
- [Ric5] **RICE J. R., TRACEY D. M.** : "On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 17, pp. 201-217, (1969).
- [Ric6] **RICE J. R., JOHNSON M. A.** : "The role of large crack tip geometry changes in plane strain fracture", In *Inelastic behavior of solids*, Kanninen & al. (Eds), McGraw-Hill, New-York, pp. 641-672, (1970).

- 
- [Rou1] **ROUSSELIER G.** : "Contribution à l'étude de la rupture dans le domaine de l'élastoplasticité", *Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences Physiques de L'Université Pierre et Marie Curie.-Paris 6-*, (1979).
- [Rou2] **ROUSSELIER G.** : "Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture", *Nuclear Engng. and Design*, Vol. 105, pp. 97-111, (1987).
- [Rou3] **ROUSSELIER G, BARBIER G.** : "Analytical modelling of the shear mode and opening mode of ductile fracture", *Recent Adv. in Fract. (Ed. Mahidhara R. K.), The Minerals, Metals & Materials Society*, pp. 195-204, (1997).
- [Rud] **RUDNICKI J. W., RICE J. R.** : "Conditions of localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 371-394, (1975).
- [Saj] **SAJE. M., PAN J., NEEDLEMAN A.** : "Void nucleation effects on shear localisation in porous plastic solids", *Int. J. of Fract.*, Vol. 19, pp. 163-182, (1982).
- [San] **SANCHEZ-PALANCIA E.** : "Non-homogeneous media and vibration", *Springer-Verlag, Berlin*, (1980).
- [Schl] **SCHLÜTER N.** : "Einfluß der Beanspruchung und des Gefüges auf die lokale Schädigung beim Gleitbruch von Baustählen", *Thèse de Doctorat, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule (RWTH) Aachen, Aachen* (1997).
- [Schm] **SCHMAUDER S., MISHNAEVSKY L. L.** : "Damage evolution and localisation in heterogeneous materials under dynamical loading: stochastic modelling", *Comp. Mech.-Int. J. Then Res. J.*, Vol. 20, No. 1/2, S. 89 –94 (1997)
- [Schw] **SCHWALBE K.H.** : "On the influence of micro-structure on crack propagation mechanisms and fracture toughness of metallic materials", *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 9, pp.795-832, (1977).
- [Shi] **SHI Y.W., CHENG J.X., CHEN B.Y.**: "The effect of stress state on the ductility and the critical extent of void growth in nodular cast iron", *Mat. Sc. Engng.*, Vol. A149, pp. 195-202, (1992).
- [Shic] **SHICHUN W., HUA L.** : "A kinetic equation for ductile damage at large plastic strain", *J. of Mat. Proc. Tech.*, Vol. 21, pp. 295-302, (1990).
- [Shih] **SHIH C.F., HUTCHINSON J.W.** : "Fully plastic solutions and large-scale yielding estimates for plane stress crack problems", *J. of Engng. Mat. & Technology*, Vol. 98, pp. 289-295, (1976).
- [Sid] **SIDOROFF F.** "Formulations élastoplastiques en grandes déformations", *Rapport G.R.E.C.O.*, No. 29 (1981).

- 
- [Sih] **SIH G. C., LIEBOWITZ H.** : "Mathematical theories of brittle fracture", *Academic Press, New York, Vol. 2, pp. 289-295, (1968).*
- [Sim1] **SIMO J.C., JU J.W.** : "Strain and stress based continuum damage models I: formulation", *I. J. S. Str., Vol.23, No.7, pp.821-840, (1987).*
- [Sim2] **SIMO J.C., JU J.W.** : "Strain and stress based continuum damage models II: Computational aspects", *I. J. S. Str., Vol.23, No.7, pp.841-869, (1987).*
- [Sim3] **SIMO J.C., HUGHES T. J. R.** : "Computational inelasticity", *Springer-Verlag New-York, Inc., (1997).*
- [Sim4] **SIMO J.C., ORTIZ M.** : "A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations", *Comp. Meth. Appl. Eng., Vol. 49, pp. 221-245, (1985).*
- [Sim5] **SIMO J.C., TAYLOR R. L.** : "Consistent tangent operators for rate independent elastoplasticity", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 48, pp. 101-118, (1985).*
- [Sim6] **SIMO J.C., TAYLOR R. L.** : "A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity", *Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 22, pp. 649-670, (1986).*
- [Slo] **SLOAN S. W.** : "Substepping schemes for the numerical integration of elastoplastic stress-strain relations", *Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 24, pp. 893-911, (1987).*
- [Spi] **SPITZIG W. A., SMELSER R. E., RICHMOND O.** : "The evolution of damage and fracture in iron compacts with various initial porosities", *Acta Metall., Vol. pp. 36, No 5, 1201-1211, (1988).*
- [Suq] **SUQUET P.**: "Approach by homogenization of some linear and nonlinear problems in solid mechanics", *In: Proc. Coll. Inter. du CNRS, pp. 77-117, (1985).*
- [Tah] **TAHER S. E.- D. F., BALUCH M. H., AL-GADHIB A. H.** : "Towards a canonical elastoplastic damage Model", *Engng. Fract. Mech., Vol. 48, No. 2, pp. 151-166, (1994).*
- [Tai] **TAI W. H., YANG B. X.** : "A new microvoid-damage model for ductile fracture", *Engng. Fract. Mech., Vol. 25, No. 3, pp. 377-384, (1986).*
- [Tho1] **THOMASON P. F.**: "Three-dimensional models for the plastic limit-loads at incipient failure of the intervoid matrix in ductile porous solids", *Acta Metall., Vol. 33, pp. 1079-1085, (1985).*
- [Tho2] **THOMASON P. F.**: "A three-dimensional model for ductile fracture by the growth and coalescence of microvoids", *Acta Metall., Vol. 33, pp. 1087-1095, (1985).*

- 
- [Tho3] **THOMASON P. F.:** "A view on ductile fracture modelling", *Fat. & Fract. of Engng. Mat. & str.*, Vol. 21, pp. 1105-1122, (1998).
- [Tho4] **THOMASON P. F.:** "The use of pure aluminium as an analogue for the history of plastic flow, in studies of ductile fracture criteria in steel compression specimens", *Int. J. of Mech. Sciences*, Vol.10, No.6, pp.501-518, (1968).
- [Tve1] **TVERGAARD V.:** "Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions", *Int. J. Fracture*, Vol. 17, pp. 389-407, (1981).
- [Tve2] **TVERGAARD V.:** "On localisation in ductile materials containing spherical voids", *Int. J. Of Fract.*, Vol.18, No.4, (1982).
- [Tve3] **TVERGAARD V., NEEDLEMAN A.:** "Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar", *Acta Metll.*, Vol.32,No.1, pp.157-169, (1984).
- [Tve4] **TVERGAARD V., NEEDLEMAN A.:** "Nonlocal effects on localization in a void-sheet", *I. J. Solids Structures*, Vol. 34, No. 18, pp. 2221-2238,(1997).
- [Wan] **WANG J. :** "An anisotropic damage mechanics model for fatigue failure", *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 45, No. 3, pp. 349-355, (1993).
- [Wei] **WEICHERT.D., SCHULZ M. :** "J-integral concept for multi-phase materials", *Comp. Mat. Science*, Vol. 1, pp. 241-248, (1993).
- [Wel] **WELLS A. A. :** "Unstable crack propagation in metals: cleavage and fast fracture", *Proc. of the Crack Propagation Symp.*, Vol. 1, Paper 84, Cranfield, UK, (1961).
- [Wes] **WESTERGAARD, H. M. :** "Bearing pressures and cracks". *J. of Appl. Mech.*, Vol. 2, pp. 49-53,( 1939).
- [Wil] **WILLIAMS M. L. :** "On the stress distribution at the base of stationary crack", *J. of Appl. Mech.*, Vol. 24, pp.109-114, (1957).
- [Yam] **YAMAMOTO H. :** "Conditions for shear localization in the ductile fracture of void-containing materials", *Int. J. of fracture*, Vol. 14, No. 4, (1978).
- [Yi] **YI SUN :** "Influence of void nucleation and growth on deformation localisation in tensile sheet specimen", *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 51, No 3, pp. 381-389, (1995).
- [Zha1] **ZHANG Z. L. :** "Explicit consistent tangent moduli with a return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplasticity models", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 21, pp. 29-44, (1995).

- 
- [Zha2]      **ZHANG Z. L., NIEMI E.** : "A class of generalized mid-point algorithms for the Gurson-Tvergaard material model", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 38, pp. 2033-2053, (1995).
- [Zhu]      **ZHU Y. Y.** : "Contribution to the local approach fracture in solid dynamics", *Thèse de Doctorat en Sciences Appliquées, Université de Liège.* (1992).
- [Zie]      **ZIENKIEWICZ O. C.** : "Finite elements and approximation", *Pineridge press, Swansea,* (1983).