

Consultation
sur place

x 50376
2001
237

N° d'ordre :

ECOLE CENTRALE DE LILLE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

THESE

Présentée en vue
d'obtenir le grade de

DOCTEUR

en

Spécialité : Productique Automatique et Informatique Industrielle

par

YANN BLANCO

**DOCTORAT DELIVRE CONJOINTEMENT PAR L'ECOLE CENTRALE DE LILLE
ET L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE**

STABILISATION DES MODELES TAKAGI-SUGENO ET LEUR USAGE POUR LA COMMANDE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

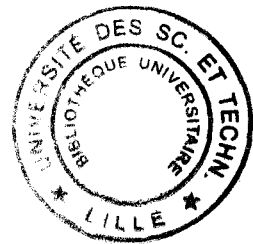
Soutenue le 17 Décembre 2001 devant le jury d'examen :

M. Jean-Pierre RICHARD	<i>Président</i>	Professeur à L'Ecole Centrale de Lille
M. Laurent FOULLOY	<i>Rapporteur</i>	Professeur à l'Université de Savoie
M. Thierry-Marie GUERRA	<i>Rapporteur</i>	Professeur à l'Université de Valenciennes
M. Pierre BORNE	<i>Directeur de thèse</i>	Professeur à L'Ecole Centrale de Lille
M. Wilfrid PERRUQUETTI	<i>Directeur de thèse</i>	Maître de Conférences à L'Ecole Centrale de Lille
M. Abdelkader EL KAMEL	<i>Examineur</i>	Maître de Conférences à L'Ecole Centrale de Lille
M. Marcel STAROSWIECKI	<i>Examineur</i>	Professeur à l'Université de Lille I

Thèse préparée dans le laboratoire d'Automatique et Informatique Industrielle de l'Ecole Centrale de Lille sous la direction conjointe de Pierre Borne et de Wilfrid Perruquetti.



D 030 175997 6





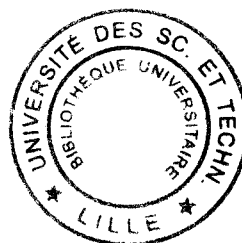


Table des matières

Avant Propos	7
Notations	9
Acronymes	11
Références Personnelles	13
Introduction Générale	16
I Stabilité et Stabilisation des Modèles Takagi-Sugeno	20
1 Les Modèles Takagi-Sugeno	22
1.1 Origine et évolution	22
1.2 Les modèles Takagi-Sugeno et leurs commandes	23
1.2.1 Construction floue	23
1.2.2 Contrôleurs classiques	25
1.2.3 Etat non mesurable : observateurs et système augmenté	28
1.3 Critères de stabilité/stabilisation des modèles Takagi-Sugeno	29
1.3.1 Critères "de Tanaka" en stabilité/stabilisation	29
1.3.2 Critère "de Tanaka" pour le système augmenté	31
1.3.3 Autres approches	33
1.4 Résolution LMI	36
1.4.1 Historique et définitions	36
1.4.2 Exemples de mise en forme LMI d'un problème	37

1.5	Utilisation des modèles Takagi-Sugeno pour l'étude des systèmes non linéaires	39
1.5.1	Théorème de transformation	39
1.5.2	Technique de construction d'un modèle TS	40
1.5.3	Limites de l'approche : théorèmes locaux	44
1.6	Elements majeurs du premier chapitre	48
2	Stabilisation Quadratique des Modèles Takagi-Sugeno	49
2.1	Utilisation des fonctions de pondération	49
2.2	Bases de l'approche	50
2.2.1	Motivations de la classe de conditions retenues	50
2.2.2	Théorème d'équivalence et conditions suffisantes	52
2.2.3	Somme convexe et somme conique	55
2.2.4	Ajout d'une matrice constante	56
2.3	Application des résultats en stabilité/stabilisation	56
2.3.1	Critère de stabilité pour les modèles TS	56
2.3.2	Similitude entre les modèles TS et LTV	59
2.3.3	Conditions de stabilisation pour les modèles TS	60
2.4	Application des résultats en observation	63
2.4.1	Mise en forme du système augmenté	63
2.4.2	Cas 1 : fonctions de pondération mesurables	64
2.4.3	Cas 2 : fonctions de pondération non mesurables	66
2.4.4	Mise en forme LMI des problèmes du deuxième chapitre	68
2.5	Application en simulation : "Pendule Inverse"	71
2.5.1	Modèle de connaissance du système	71
2.5.2	Mise en forme TS du pendule inverse	72
2.5.3	Résultats comparatifs dans le cas observable	74
2.5.4	Simulation en cas non observable	76
2.6	Avancées et limites du deuxième chapitre	78
3	Stabilisation non Quadratique des Modèles Takagi-Sugeno	80
3.1	La commande PDC : quelques réflexions	80
3.2	Construction d'une fonction de Lyapounov non quadratique en continu	81
3.2.1	Choix de la fonction et motivations	81

3.2.2 Majoration du terme quadratique, cas TSC-BO 83

3.2.3 Majoration du terme non quadratique 85

3.3 Critères de stabilité locaux et globaux 88

3.3.1 Stabilité locale de l'origine 88

3.3.2 Stabilité globale du modèle TS 90

3.4 Extension des résultats à la stabilisation 92

3.5 Résultats en discret 93

3.5.1 Stabilité non quadratique des modèles TS discrets 94

3.5.2 Intérêt des critères obtenus 94

3.6 Limites de l'approche non quadratique en continu 96

II Stabilisation Polytopique Takagi-Sugeno 97

4 Stabilisation Polytopique Takagi-Sugeno des Systèmes sous Forme Régulière 99

4.1 Intérêt de la mise en forme régulière 99

4.2 Mise sous forme régulière 100

4.2.1 Cas non perturbé 101

4.2.2 Cas perturbé 104

4.2.3 Système retenu pour ce chapitre 104

4.3 Stabilisation par une commande PDC : intérêt et limites 104

4.4 Stabilisation robuste par mode glissant 106

4.4.1 Principe des modes glissants 106

4.4.2 Choix de la surface 107

4.4.3 Hypothèses, notations et lemmes préliminaires 107

4.4.4 Surfaces linéaires 110

4.4.5 Surfaces non linéaires 114

4.4.6 Attractivité de la surface 115

4.4.7 Choix pratique du type de surface 116

4.5 Application en simulation : "Bille sur Rail" 116

4.5.1 Ecriture TS du système bille sur rail 118

4.5.2 Calcul de la loi de commande 120

4.5.3 Résultats de simulation 120

4.6 Intérêt de l'approche pour l'exploitation de la forme régulière 122

5 Stabilisation Polytopique Takagi-Sugeno des Systèmes non Linéaires à Retard	123
5.1 Brève introduction aux systèmes à retard	123
5.2 Formulation TS d'une classe de systèmes à retard	124
5.2.1 Système retenu pour ce chapitre	124
5.2.2 Critères IOD, DD et à retard variable	125
5.2.3 Transformation TS des modèles de systèmes à retard	125
5.3 Analyse de la stabilité et stabilisation	126
5.3.1 Analyse de la stabilité	127
5.3.2 Extension des résultats à la stabilisation	133
5.3.3 Exemples d'utilisation	138
5.3.4 Bilan de la première méthode proposée	142
5.4 Stabilisation par mode glissant	143
5.4.1 Mode glissant et systèmes à retards	143
5.4.2 Formulation du problème	143
5.4.3 Choix de la surface	144
5.4.4 Attractivité de la surface	145
5.4.5 Théorèmes de stabilisation	146
5.4.6 Obtention des critères de stabilité exponentielle	149
5.4.7 Application en simulation	150
5.5 Quelle commande pour un problème donné?	153
 Conclusions et Perspectives	 156
 Bibliographie	 160

Table des figures

1-1	Illustration du concept PDC	26
1-2	Modèles TS et modèles non linéaires	46
2-1	Illustration de l'hypothèse $C2, H2)$	54
2-2	Illustration de l'hypothèse $C2, H3)$	55
2-3	Schéma du pendule inverse	71
2-4	Pendule inverse : simulation, évolution des variables d'états	78
2-5	Pendule inverse : simulation, évolution de la commande	79
4-1	Schéma du système "Bille sur Rail"	117
4-2	Bille sur Rail : simulation, évolution des variables d'état	121
4-3	Bille sur Rail : simulation, évolution de commande et de $s(z)$	121
5-1	Simulation : comparaison des approches TS et "normes vectorielles"	139
5-2	Simulation : comportement selon la valeur du retard.	140
5-3	Simulation, conditions suffisantes de stabilisabilité en (α, β)	142
5-4	Simulation, comparaison des critères IOD et retard variant	151
5-5	Simulation, évolution de l'état et de la commande	152
5-6	Simulation, évolution de la quantité $s(z)$	152

Avant Propos

- les remerciements seront écrits pour la version finale de ce mémoire -

Notations

Notations générales

- \mathbb{R} (resp. \mathbb{R}^+) : ensemble des nombres réels (resp. réels positifs ou nuls),
- \mathbb{R}^n : espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels,
- $t \in \mathbb{R}^+$: variable temporelle,
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$: vecteur d'état, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \end{bmatrix}^T$,
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$: vecteur de commande,
- $y(t) \in \mathbb{R}^l$: vecteur de sortie,
- $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \hat{y}(t) \in \mathbb{R}^l$: variables estimées de $x(t), y(t)$,
- $\dot{x} = \frac{d(x(t))}{dt}$: dérivée de la variable x par rapport au temps au temps t ,
- $x^+ = x(t+1)$: vecteur d'état au temps $t+1$,
- $\|x\|$: norme 2 ou euclidienne d'un vecteur x de \mathbb{R}^n , $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$,
- $\|A\|$: norme 2 ou euclidienne de la matrice $A \in \mathbb{R}^n$, $\|A\| = \sup_{x: \|x\|=1} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right)$,
- $M < 0$ (resp. $M > 0$) signifie M définie négative (resp. définie positive), pour M une matrice carrée,
- $M < N$ signifie $M - N$ définie négative,
- $\lambda_{\min}(M)$ (resp. $\lambda_{\max}(M)$) : plus petite (resp. plus grande) valeur propre minimale de M , pour $M > 0$ avec $M = M^T$,
- $I^{d \times d}$: matrice identité de $\mathbb{R}^{d \times d}$.
- $\overline{\text{Conv}} \{x_1, \dots, x_p\}$, avec $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$ désigne l'enveloppe convexe des points x_1, \dots, x_p .

Notations relatives aux modèles Takagi-Sugeno

- r : nombre de sous-modèles du modèles Takagi-Sugeno,
- I_k : ensemble des entiers naturels de 1 à k ,
- S_i : $i^{\text{ème}}$ sous-modèle du modèle Takagi-Sugeno.
- $h_i(x)$, utilisé dans le texte, désigne l'ensemble des r fonctions de pondération.
- $\Delta h_i(x)$: gradient de la fonction $h_i(x)$, $\Delta h_i(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x_1} \Big|_x & \dots & \frac{\partial h_i}{\partial x_r} \Big|_x \end{bmatrix}$.

Notations relatives à la forme régulière et au mode glissant

- z : variable d'état dans la nouvelle base, avec le difféomorphisme de changement de base $z = \phi(x)$,
- \mathcal{E}_1 (resp. \mathcal{E}_2) : sous-système réduit (resp. non réduit) de la forme régulière,
- $z_1 \in \mathbb{R}^{n-d}$ (resp. $z_2 \in \mathbb{R}^d$) : variable d'état du système \mathcal{E}_1 (resp. \mathcal{E}_2),
- $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$: surface de glissement.

Notations relatives aux systèmes à retards

- $\tau(t)$: retard variable et borné,
- τ_{\max} (resp. τ_{\min}) : retard maximal (resp. minimal),
- $\mathcal{C}_{n,\tau}$: espace de Banach des fonctions continues de $[-\tau_{\max}, 0]$ dans \mathbb{R}^n ,
- $\|\rho\|_{\mathcal{C}}$: pour $\rho \in \mathcal{C}_{n,\tau}$, norme sur $\mathcal{C}_{n,\tau}$ définie par $\sup_{\theta \in [-\tau_{\max}, 0]} (\|\rho(t)\|)$,
- x : état instantané à l'instant t ,
- x_t : état du système à l'instant t . $x_t = x_t(t, \theta) = x(t + \theta)$ pour $\theta \in [-\tau(t), 0]$,
- $x_{t=0}$: fonction de conditions initiales. $x_{t=0} = x(\theta)$ pour $\theta \in [-\tau_{\max}, 0]$.

Acronymes

- TS : Takagi-Sugeno, page 16,
- TSC : Takagi-Sugeno Continu, page 25,
- TSD : Takagi-Sugeno Discret, page 25,
- RE : Retour d'Etat, page 25,
- PDC : Parallel Distributed Compensation (compensation distribuée parallèle), page 16,
- CDF : Compensation par Division et Fusion, page 27,
- BO : Boucle Ouverte, page 25,
- BF : Boucle Fermée, page 26,
- LMI : Linear Matrix Inequalities (inégalités matricielles linéaires), page 16,
- BMI : Bilinar Matrix Inequalities (inégalités matricielles bilinéaires), page 68,
- LDI : Linear Differential Inclusion (inclusion différentielle linéaire), page 59,
- PLDI : Polytopic Linear Differential Inclusion (inclusion différentielle linéaire polytopique), page 60,
- LTV : Linear Time Varying (linéaire variant dans le temps), page 60,
- IOD : Independant Of the Delay (inépndant du retard), page 125,
- DD : Dependant Of the Delay (dépendant du retard), page 125,
- GAS : Globalement Asymptotiquement Stable, page 29,
- CSP : Convex Sum Property (propriété de somme convexe), page 24,
- NL : Non Linéaire, page 23,
- SPTS : Stabilisation Polytopique Takagi-Sugeno, page 99.

Références Personnelles

- Y. Blanco, P. Borne, T.M. Guerra, W. Perruquetti, “Stabilisation du modèle Takagi-Sugeno à l’aide de fonctions de Lyapounov non quadratiques”, *Proceedings des 8^{ième} Rencontres Francophones de la Logique Floue et ses Applications, LFA ’99*, Valenciennes, France, 1999.
- Y. Blanco, W. Perruquetti, P. Borne, “Stability and Stabilization of Nonlinear Systems and Takagi-Sugeno’s Fuzzy Models”, *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 7, pp 221-210, 2001.
- Y. Blanco, J.P. Richard, “Stability Analysis of Uncertain Nonlinear Time Delay Systems Using Takagi-Sugeno’s Fuzzy Representation”, *IFAC Proceedings on Linear Time Delay Systems, LTDS 2000*, Ancones, Italy, 2000.
- Y. Blanco, W. Perruquetti, P. Borne, “Relaxed Stability Conditions for Takagi-Sugeno’s Fuzzy Models” *Proceedings of the 9th IEEE Conference on Fuzzy Systems*, San Antonio, Etats-Unis, 2000.
- F. Gouaisbaut, Y. Blanco, J.P. Richard, “Robust Control of Nonlinear Time Delay Systems : A Sliding Mode Control Design”, *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, NOLCOS 2001*, Saint Petersburg, Russie, 2001.
- Y. Blanco, W. Perruquetti, P. Borne, “Non Quadratic Stability of Nonlinear Systems in the Takagi-Sugeno Form”, *Proceedings of the European Control Conference*, Porto, Portugal, 2001.
- Y. Blanco, F. Gouaisbaut, W. Perruquetti, P. Borne “Sliding Mode Controller Design Using Polytopic Formulation”, *Proceedings of the 40th Conference on Decision and Control*, Orlando, Etats-Unis, 2001.
- F. Gouaisbaut, Y. Blanco, J.P. Richard, “Robust Sliding Mode Control of Nonlinear Systems with Delays : A Design via Polytopic Formulation”, *International Journal of Control*. (à paraître)
- W. Perruquetti, T.-M. Guerra, Y. Morere, Y. Blanco, “Some Remarks about Output and Feedback Stabilization of Takagi-Sugeno Models”, *Proceedings of the 11th IEEE Conference on Fuzzy Systems*, 2002. (à paraître)

Introduction Générale

La théorie des ensembles flous, introduite dans les années soixante par les travaux Lofti Zadeh [87], a connu rapidement un grand nombre d'applications dans des domaines aussi variés que les systèmes experts, le traitement du signal ou la classification.

Dans le domaine de la commande floue, bien qu'une première expérimentation de régulation floue ait été réalisée par Mamdani en 1974 sur une turbine à vapeur [52], il faut attendre 1987 pour connaître une application industrielle grand public. En effet, le métro de Sendai au Japon, précurseur de nombreuses applications de la commande floue dans ce pays [19], présente un organe de conduite commandé à l'aide d'un régulateur flou rivalisant en terme de performances avec les commandes classiques [54].

Initialement, les régulateurs flous se présentaient sous la forme d'un PID dont les paramètres étaient déterminés [18, 48] sans avoir recours à un modèle explicite du procédé à piloter. Ainsi, l'expertise d'opérateurs humains était largement mise à contribution. L'intérêt principal de cette méthode par rapport aux techniques classiques de régulation résidait dans l'absence de modèle : la difficile et coûteuse phase d'identification du processus n'était pas nécessaire. En revanche, le caractère heuristique de ces régulateurs ne permettait pas de garantir des propriétés dynamiques pour les systèmes bouclés. En particulier, aucune preuve de stabilité n'était envisageable.

L'introduction des modèles flous de type Takagi-Sugeno [71, 70, 73] permit de résoudre ce problème. En effet, ces modèles se présentent sous une forme analytique exacte et compatible avec les outils de l'Automatique classique tels que les fonctions de Lyapounov par exemple. Par conséquent, les modèles Takagi-Sugeno ne sont plus à proprement parler "flous" et forment une classe particulière de modèles non linéaires. En contrepartie, ils requièrent une identification non linéaire du système ; cette phase d'identification peut s'avérer délicate en pratique.

L'intérêt principal des modèles Takagi-Sugeno (TS) réside dans leur structure particulière : ils se présentent sous la forme d'une somme convexe non linéaire de sous-systèmes linéaires. En exploitant cette structure particulière, on réalise la synthèse de régulateurs non linéaires : la commande par PDC (Parallel Distributed Compensation) est la plus couramment utilisée pour les modèles TS [83]. Les critères de stabilité classiques [76] sont basés sur l'utilisation de fonctions de Lyapounov quadratiques ; ces critères sont aujourd'hui écrits sous une forme LMI (Inégalités Matricielles Linéaires) permettant ainsi une résolution à l'aide d'outils numériques d'optimisation convexe [11, 23]. La facilité et le caractère systématique de la mise en oeuvre de ces régulateurs permet leur utilisation pour la stabilisation de systèmes non linéaires [74, 56].

Ce mémoire propose de **développer les techniques de synthèse de contrôleurs** pour les modèles Takagi-Sugeno ainsi que leur **application pour la stabilisation de systèmes non linéaires**. Le double objectif de ce mémoire se traduit dans sa structure en deux parties.

La première partie, intitulée *Stabilité et Stabilisation des Modèles Takagi-Sugeno*, comprend trois chapitres au cours desquels nous nous attacherons à mettre en avant les techniques permettant l'étude de la stabilité et la stabilisation des modèles Takagi-Sugeno.

- **Les Modèles Takagi-Sugeno (Chapitre 1)** : Ce chapitre propose de rappeler brièvement les résultats les plus marquants concernant les modèles TS (Takagi-Sugeno). Après avoir décrit les techniques de construction floue d'un modèle TS, nous introduirons les modèles discrets et continus ainsi que les régulateurs qui leur sont couramment associés. Ayant présenté les critères classiques de stabilité/stabilisation, nous expliciterons au moyen de rappels sur les LMIs, les outils numériques permettant la mise en oeuvre pratique de ces critères. Pour clore ce chapitre, nous montrerons sous quelles conditions un système non linéaire affine en la commande peut s'écrire sous une forme TS. L'écriture obtenue sera exacte. Nous présenterons en outre une méthode générale permettant d'obtenir pratiquement les fonctions de pondération et les matrices d'entrées et de commandes correspondantes.
- **Stabilisation Quadratique des Modèles Takagi-Sugeno (Chapitre 2)** : L'analyse des modèles TS étant principalement réalisée au moyen de fonctions de Lyapounov quadratiques, nous nous attacherons, à l'aide de ce même type de fonctions, à obtenir des critères de stabilité moins conservatifs. Pour ce faire, nous utiliserons notre connaissance des fonctions de pondération. Les résultats sont présentés dans les cas discret et continu, en commande et en observation. Une application en simulation est proposée à partir d'un modèle de pendule inverse.
- **Stabilisation non Quadratique des Modèles Takagi-Sugeno (Chapitre 3)** : Etant bien connu qu'une étude quadratique de la stabilité donne des résultats conservatifs, il est naturel d'utiliser des fonctions de Lyapounov non quadratiques. Les fonctions retenues dans ce chapitre sont construites à partir d'une somme de matrices constantes symétriques définies positives pondérées par les mêmes fonctions de pondération que le modèle TS. En continu, les résultats sont donnés en stabilité et stabilisation. Nous présentons brièvement les résultats obtenus en discret par *Moreire et al.* dans [56].

La deuxième partie, intitulée *Stabilisation Polytopique Takagi-Sugeno des Systèmes Non Linéaires* rassemble les deux derniers chapitres de ce mémoire. Cette partie a pour objet l'utilisation des techniques relatives aux modèles TS pour la stabilisation des systèmes non linéaires.

- **Stabilisation Polytopique Takagi-Sugeno des Systèmes Non Linéaires sous Forme Régulière (Chapitre 4)** : La mise sous forme régulière permet de trouver, sous un certain nombre de conditions, un changement de variables non linéaire transformant une matrice d'entrée quelconque en une matrice constante inversible. Bien qu'il soit alors possible d'utiliser une commande par PDC classique, une commande par mode glissant permet de réduire la dimension du système en assurant une robustesse vis à vis des perturbations exogènes. La mise en forme TS du nouveau système est alors appropriée car elle nous fournit une méthode générale pour le choix de la surface, qu'elle soit linéaire ou non linéaire.

- **Stabilisation Polytopique Takagi-Sugeno des Systèmes Non Linéaires à Retard (Chapitre 5)** : A l'image du cas non retardé, une classe de systèmes non linéaires à retard peut s'écrire sous une forme Takagi-Sugeno. On peut alors combiner les techniques relatives aux modèles TS et celles liées aux systèmes à retard pour obtenir des méthodes simples et générales de stabilisation. En outre, lorsque la matrice d'entrée n'est pas retardée et que le système peut être mis sous forme régulière, on appliquera une commande par mode glissant pour le système retardé.

Tout au long de ce dernier chapitre, diverses typologies de retard seront étudiées.

Pour conclure ce mémoire, nous proposons une synthèse des résultats obtenus. De plus, plusieurs perspectives pour de futures recherches, apparues naturellement au cours des développements de ce mémoire, sont présentées.

Première partie

**Stabilité et Stabilisation des
Modèles Takagi-Sugeno**

Chapitre 1

Les Modèles Takagi-Sugeno

1.1 Origine et évolution

En 1985, Takagi et Sugeno [71] proposèrent une méthodologie générale permettant d'obtenir un modèle flou d'un système. Cette méthode s'appuyait sur des données statistiques concernant les relations entrées/sorties du système. Les implications floues, considérées comme les articulations fonctionnelles du système à modéliser, étaient alors de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{SI} \quad (x_1 \text{ est } A_1) \text{ ET } \dots \text{ ET } (x_k \text{ est } A_k), \\ \text{ALORS} \quad y = g(x_1, \dots, x_k). \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Dans la description de ces variables, on comprend aisément les difficultés à surmonter en terme d'identification. Les variables $\{x_1, \dots, x_k\}$, appelées *variables de prémisses*, sont les variables jugées pertinentes pour le fonctionnement du système. Les $\{A_1, \dots, A_k\}$ sont les sous-ensembles flous associés. Le choix des règles, des variables de prémisses et des sous-ensembles flous relèvent de l'*identification structurelle* du système. La fonction $g(x_1, \dots, x_k)$ est la fonction liant la sortie aux variables de prémisses. Sa détermination pose des problèmes d'*identification paramétrique*. Des relations linéaires, compatibles avec la notion de point de fonctionnement local, sont choisies pour les fonctions g . A chaque règle de type (1.1), on attribue alors un poids ; la sortie du modèle Takagi-Sugeno correspond au barycentre des sorties pondérées de chaque règle.

Les travaux de Sugeno et Kang [72] puis Sugeno et Tanaka [70] s'attachèrent au développement de techniques permettant d'affiner l'identification structurelle et paramétrique des modèles TS. Pourtant, le problème restait entier car il était impossible, de part le formalisme adopté, de prouver des propriétés de stabilité des modèles considérés. Pour remédier à

ce problème, Tanaka et Sugeno mènent dans [73] la première analyse de stabilité au sens de Lyapounov. En effet le modèle dynamique construit dans [73] possède une écriture analytique sous forme de représentation d'état.

L'introduction de cette représentation d'état ouvre de nouvelles perspectives aux modèles Takagi-Sugeno, nommés aussi Takagi-Sugeno-Kang. En effet, ce modèle analytique permet de voir les modèles Takagi-Sugeno comme une classe particulière de systèmes NL (Non Linéaire). Ainsi, l'utilisation des outils classiques de l'Automatique devient possible. Synthèse d'observateurs [76], théorèmes de séparation [51], critères H^∞ [75], outils LMI [11] sont utilisés pour l'étude des modèles TS. En ce sens, la littérature concernant les modèles Takagi-Sugeno se nourrit très largement des avancées en Automatique des systèmes NL ou perturbés.

Il est notable que parallèlement à ce fait, des outils propres à la formulation Takagi-Sugeno se mettent en place : régulateur PDC (Parallel Distributed Compensation) [82], conditions de stabilité relâchées [76] par exemple. En outre, la structure des modèles permet TS d'écrire la majeure partie des systèmes NL sous une forme TS, du moins localement. Il est alors possible d'utiliser les modèles Takagi-Sugeno pour l'étude de la stabilité d'une classe de systèmes NL, comme nous le verrons à la fin de ce chapitre.

1.2 Les modèles Takagi-Sugeno et leurs commandes

1.2.1 Construction floue

Dans un premier temps, nous présentons les modèles TS à la manière dont ils sont introduits dans les articles récents [76].

Les modèles de type TS se présentent sous la forme de r règles de type "SI ALORS". Nous utiliserons les notations suivantes :

$R_i, i \in I_r$ désigne la $i^{\text{ème}}$ règle, r étant le nombre de règles,

$z_j, j \in I_p$, sont les p variables de prémisses (elle dépendent généralement des variables d'état).

$F_j^i, (i, j) \in I_r \times I_p$ désignent les sous-ensembles flous de prémisses.

Construisons le modèle Takagi-Sugeno continu. La $i^{\text{ème}}$ des r règles du modèle continu s'écrit sous la forme :

$$i^{\text{ème}} \text{ règle } (R_i) : \begin{cases} \text{SI} & (z_1 \text{ est } F_1^i) \text{ ET } \dots \text{ ET } (z_p \text{ est } F_p^i), \\ \text{ALORS} & \begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u, \\ y = C_i x, \end{cases} \end{cases} \quad (1.2)$$

où $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l \times n}$.

Les équations dynamiques présentes dans la partie conclusion des règles peuvent être considérées comme des sous-systèmes linéaires. Nous les nommerons les *sous-modèles* S_i :

$$S_i : \begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u, \\ y = C_i x. \end{cases} \quad (1.3)$$

Dans le but de constituer un modèle du système valable en tout point de l'espace d'état, il est nécessaire de déterminer, en un point donné de l'espace d'état, la contribution de chacun des sous-modèles.

Ainsi, à chaque règle R_i est attribué un poids $w_i(z)$. Ce poids est fonction du degré d'appartenance des $z_j, j \in I_p$ aux sous-ensembles flous $F_j^i, (i, j) \in I_r \times I_p$. On notera de poids $F_j^i(z_j)$.

Pour relier les prémisses, il est nécessaire de définir un opérateur multiplicatif ET. L'opérateur retenu par le modèle Takagi-Sugeno est le produit dans \mathbb{R} . D'où

$$w_i(z) = \prod_{j=1}^p F_j^i(z_j), i \in I_r.$$

Comme les $F_j^i(z_j)$ sont des fonctions d'appartenance à valeur dans $[0, 1]$, par construction $w_i(z) \in [0, 1]$.

A ce stade, l'algorithme d'inférence des règles floues utilisé par Takagi-Sugeno est la défuzzification barycentrique. Les dynamiques du modèle Takagi-Sugeno en continu s'écrivent ainsi :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(z) (A_i x + B_i u), \\ y = \sum_{i=1}^r h_i(z) C_i x, \end{cases} \quad (1.4)$$

où $h_i(z) = w_i(z) / \sum_{i=1}^r w_i(z), i \in I_r$. Ces fonctions seront appelées par la suite "fonctions de pondération"; elles vérifient la CSP (propriété de somme convexe, de l'anglais *Convex Sum Property*) :

Définition 1 Soient r fonctions $h_i(z)$ de \mathbb{R}^p à valeur dans \mathbb{R}^+ . Les fonctions $h_i(z)$ vérifient la CSP ssi :

$$\begin{cases} h_i(z) \geq 0, i \in I_r, z \in \mathbb{R}^p, \\ \sum_{i=1}^r h_i(z) = 1, z \in \mathbb{R}^p. \end{cases}$$

Les variables de prémisses étant en général fonctions d'une partie de l'état x , il est possible d'utiliser la notation $h_i(z) = h_i(z(x)) = h_i^*(x)$. Donnons à présent une définition plus large des

systèmes TS en utilisant des fonctions de pondération de type $h_i(x)$:

Définition 2 *Un modèle TSC (Takagi-Sugeno Continu) est un modèle de la forme*

$$(TSC) \quad \begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(x) (A_i x + B_i u), \\ y = \sum_{i=1}^r h_i(x) C_i x. \end{cases} \quad (1.5)$$

avec $h_i(x)$ satisfaisant la CSP.

On définit de même les modèles TSD (Takagi-Sugeno Discrets) :

$$(TSD) \quad \begin{cases} x^+ = \sum_{i=1}^r h_i(x) (A_i x + B_i u), \\ y = \sum_{i=1}^r h_i(x) C_i x. \end{cases} \quad (1.6)$$

En observant les modèles TSC et TSD, on peut constater leur caractère exact : les techniques classiques de l'automatique des systèmes NL peuvent leur être appliquées. La classe de système ainsi définie est plus grande que celle construite par les règles floues.

1.2.2 Contrôleurs classiques

Dans cette partie, nous considérerons que l'état est mesurable : les vecteurs x est par conséquent connu. Dans le cas contraire, il faudra recourir à l'emploi d'un observateur (section 1.2.3 de ce chapitre).

En boucle ouverte

En BO (Boucle Ouverte), i.e. $u \equiv 0$, en réécrivant (1.5), on obtient le système **TSC-BO** (Takagi-Sugeno Continu en Boucle Ouverte) :

$$(TSC-BO) \quad \dot{x} = \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) A_i \right) x. \quad (1.7)$$

Lorsqu'on se place dans le cas de la stabilisation, plusieurs stratégies de commande sont envisageables.

Commande retour d'état :

La commande RE (Retour d'Etat), bien que limitée en terme de performances, possède le double avantage d'être simple d'utilisation et de permettre un placement de pôle à l'origine.

Cette commande s'écrit sous la forme classique suivante :

$$\text{(RE)} \quad u = -K_0 x, \quad K_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (1.8)$$

le modèle correspondant en BF (Boucle Fermée) est :

$$\text{(TSC-RE)} \quad \dot{x} = \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) (A_i - B_i K_0) \right) x. \quad (1.9)$$

L'étude de stabilité d'un tel modèle peut être menée d'une manière similaire à celle de TSC-BO : dans les critères de stabilité valides pour TSC-BO, il suffit de remplacer A_i par $A_i - B_i K_0$. Nous verrons dans le deuxième chapitre que l'étude de la stabilité quadratique des systèmes TS en boucle ouverte ou avec un retour d'état, se place dans un cadre très semblable à celui des LDIs (Linear Differential Inclusions).

Commande PDC

La figure 1-1 introduit le concept de PDC décrit dans [82].

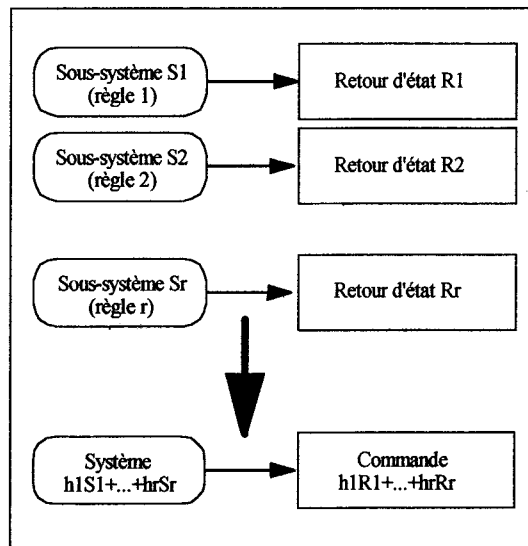


FIG. 1-1: Illustration du concept PDC

A l'inverse de la commande par retour d'état, qui commande de manière unique tous les sous-systèmes S_i , le contrôleur de type PDC (Parallel Distributed Compensation) a pour but de commander chacun de ces sous-systèmes de manière individualisée.

Un prérequis à l'utilisation du PDC est donc que toutes les paires (A_i, B_i) soient stabilisables. En effet, les systèmes S_i dont les dynamiques obéissent à (1.3) sont commandés

par un retour d'état : $u = -K_i x$, $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$. On définit ainsi r contrôleurs.

Pour calculer la commande globale à appliquer au système TSC à partir de ces r commandes, on utilise le même algorithme de défuzzification que celui utilisé pour obtenir le modèle global à partir des r règles, ainsi :

$$\text{(PDC)} \quad u = - \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) K_i \right) x, K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}, i \in I_r. \quad (1.10)$$

Le système commandé par un PDC s'écrit alors :

$$\text{(TSC-PDC)} \quad \dot{x} = \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x) h_j(x) (A_i - B_i K_j) \right) x. \quad (1.11)$$

En vue d'une interprétation de ce système, il est intéressant de mettre en valeur deux composantes particulières de cette dynamique :

$$\dot{x} = \left(\sum_{i=1}^r h_i^2(x) (A_i - B_i K_i) + \sum_{i=1}^r \sum_{j \neq i}^r h_i(x) h_j(x) (A_i - B_i K_j) \right) x.$$

On distingue ici les *termes croisés* (en i et j) et les *termes non croisés* (en i uniquement). L'objet initial du PDC, à savoir la stabilisation individualisée de chaque sous-système, se retrouve dans les termes non croisés. Les termes croisés sont par conséquent des termes non désirés que l'on voudra peu déstabilisants ou le plus petit possible en norme.

Cas B commun et commande CDF (Compensation par Division et Fusion)

Dans certains cas particuliers, les matrices B_i , $i \in I_r$ se présentent sous une forme telle qu'il est possible de simplifier l'écriture du système en boucle fermé (1.11).

Le cas le plus évident est lorsque $B_i = B$, $i \in I_r$ avec B matrice constante de $\mathbb{R}^{n \times m}$. La dynamique du système commandé par un PDC s'écrit alors de manière semblable à (1.9) :

$$\dot{x} = \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) (A_i - B K_i) \right) x. \quad (1.12)$$

L'objectif du PDC est dans ce cas parfaitement rempli : le contrôleur K_i stabilise A_i et uniquement A_i . Nous constatons néanmoins que ceci n'est pas suffisant. En effet, dans le cas de la stabilité quadratique, c'est par une matrice unique de Lyapounov P qu'il faut stabiliser tous les sous-systèmes $(A_i - B K_i)$. Ce problème peut être partiellement évité en ayant recours à des

fonctions de Lyapounov non quadratiques, comme nous le verrons dans le troisième chapitre.

Un autre cas particulier est mis en valeur dans [36]. Lorsque les matrices de commande sont positivement linéairement dépendantes i.e. $\exists B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $k_i > 0, i \in I_r, B_i = k_i B$, alors la commande CDF :

$$\text{(CDF)} \quad u = - \left(\frac{\sum_{i=1}^r h_i(x) K_i}{\sum_{i=1}^r h_i(x) k_i} \right) x, K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}, i \in I_r, \quad (1.13)$$

conduit au système en boucle fermé suivant :

$$\text{(TSC-CDF)} \quad \dot{x} = \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) (A_i - B_i K_i) \right) x. \quad (1.14)$$

Dans ce cas, on commande de manière indépendante chacun des sous systèmes linéaires (A_i, B_i) à l'image du cas B commun.

Dans le quatrième chapitre, nous verrons que l'utilisation d'une forme régulière permet de se ramener, sous certaines conditions, au cas B commun.

Modèles bouclés en discret

Les commandes utilisées pour les modèles Takagi-Sugeno en discret sont les mêmes que celles du continu. Le seul point différenciant, d'un point de vue de l'écriture, les modèles bouclés discrets et continus est l'utilisation de x^+ à la place de \dot{x} . On retrouve ainsi les quatre modèles précédemment cités, en version discrète : TSD-(BO,RE,PDC,CDF).

1.2.3 Etat non mesurable : observateurs et système augmenté

On considère à présent la sortie des modèles Takagi-Sugeno. Les commandes que nous avons décrites jusqu'à présent supposaient que l'on avait accès au vecteur d'état dans son intégralité. Comme il n'est pas toujours possible de mesurer directement toutes ces variables. On a alors recours à l'usage d'un observateur.

Nous présenterons ici l'observateur le plus couramment utilisé dans la littérature des modèles Takagi-Sugeno. Il s'agit de l'observateur flou, semblable en structure à un PDC. On obtient

ainsi OBC, pour OBServateur Continu :

$$(\text{OBC}) \begin{cases} \hat{x} = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) (A_i \hat{x} + B_i u) + \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) L_i (y - \hat{y}), \\ \hat{y} = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) C_i \hat{x}(t), \end{cases} \quad (1.15)$$

avec $L_i \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $i \in I_r$ matrices de gains d'observation.

Il est notable que la structure d'observateur retenue englobe les observateurs linéaires : il suffit de choisir les matrices L_i , $i \in I_r$ toutes égales. Les commandes présentées auparavant conservent la même structure, la variable x étant remplacée par \hat{x} . On obtient ainsi les systèmes continus suivants :

$$(\text{TSC-OBC}) \begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(x) \left(A_i x - B_i \left(\sum_{j=1}^r h_j(\hat{x}) K_j \hat{x} \right) \right), \\ y = \sum_{i=1}^r h_i(x) C_i x. \end{cases} \quad (1.16)$$

1.3 Critères de stabilité/stabilisation des modèles Takagi-Sugeno

1.3.1 Critères “de Tanaka” en stabilité/stabilisation

Dans la littérature concernant les systèmes Takagi-Sugeno, les résultats majeurs de stabilité/stabilisation sont l'oeuvre de *Tanaka et al.* Ces critères, qui présentent l'avantage d'être simples d'écriture et d'utilisation, sont nommés communément “critères de Tanaka”. Dans la section 1.4 de ce chapitre, nous montrerons que ces critères peuvent s'écrire sous une forme d'inégalités matricelles linéaires. On peut alors utiliser des algorithmes de calcul basés sur les techniques d'optimisation convexe [80, 58].

Critère “de Tanaka” en BO

Théorème 1 [74] *Considérons le système continu TSC-BO (resp. TSD-BO). S'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, symétrique définie positive telle que*

$$A_i^T P + P A_i < 0, i \in I_r, \quad (1.17)$$

$$(\text{resp.}) A_i^T P A_i - P < 0, i \in I_r, \quad (1.18)$$

alors l'origine du système TSC-BO (resp. TSD-BO) est GAS (Globalement Asymptotiquement Stable).

La preuve de ce théorème est triviale puisqu'en utilisant la fonction de Lyapunov $V = x^T P x$, on a

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(x) \left[x^T \left(A_i^T P + P A_i \right) x \right] < 0, x \neq 0.$$

La matrice de Lyapunov P est parfois appelée matrice de Lyapunov "commune" aux sous-modèles S_i . En effet, la matrice P permet de prouver la stabilité de l'origine de chacun de ces sous-systèmes.

Critère "de Tanaka" pour la commande RE

Les critères de stabilisation pour les commandes de type retour d'état sont similaires à ceux énoncés ci-dessus : il suffit de reprendre les critères en BO et de remplacer A_i par $A_i - B_i K_i$, $i \in I_r$. Dans le cas de la commande CDF, on remplace A_i par $A_i - B_i K_i$.

La commande de type PDC requiert un traitement particulier dans la mesure où des termes croisés interviennent.

Critère "de Tanaka" pour la commande PDC

Théorème 2 [74] *Considérons le système continu TSC-PDC (resp. TSD-PDC). S'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, symétrique définie positive et des gains $K_i, i \in I_r$ tels que*

$$\begin{cases} G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0, i \in I_r, \\ (G_{ij}^T + G_{ji}^T) P + P (G_{ij} + G_{ji}) < 0, (i, j) \in I_r^2, j > i, \end{cases} \quad (1.19)$$

$$(resp.) \begin{cases} G_{ii}^T P G_{ii} - P < 0, i \in I_r, \\ (G_{ij}^T + G_{ji}^T) P + P (G_{ij} + G_{ji}) - 2P < 0, (i, j) \in I_r^2, j > i, \end{cases} \quad (1.20)$$

avec $G_{ij} = A_i - B_i K_j$, $(i, j) \in I_r^2$ alors l'origine du système TSC-PDC (resp. TSD-PDC) est GAS.

Critère relâché "de Tanaka" pour la commande PDC

Quelques années après ces premiers critères, *Tanaka et al.* en publient une version relâchée, exploitant ainsi de manière plus marquée la propriété de somme convexe des fonctions de pondération.

Théorème 3 [76] *Considérons le système TSC-PDC (resp. TSD-PDC). S'il existe deux matri-*

ces $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, symétriques définies positives et des gains $K_i, i \in I_r$ tels que

$$\begin{cases} G_{ii}^T P + P G_{ii} + (s-1)Q < 0, i \in I_r, \\ (G_{ij}^T + G_{ji}^T)P + P(G_{ij} + G_{ji}) - 2Q < 0, (i, j) \in I_r^2, j > i, \end{cases} \quad (1.21)$$

$$(resp.) \begin{cases} G_{ii}^T P G_{ii} - P + (s-1)Q < 0, i \in I_r, \\ (G_{ij}^T + G_{ji}^T)P + P(G_{ij} + G_{ji}) - 2P - 2Q < 0, (i, j) \in I_r^2, j > i, \end{cases} \quad (1.22)$$

avec $G_{ij} = A_i - B_i K_j, (i, j) \in I_r^2$ et $1 < s \leq r$ alors l'origine du système TSC-PDC (resp. TSD-PDC) est GAS.

La variable s représente la borne supérieure du nombre de règles utilisées à chaque instant. En conséquence, si le nombre de règles utilisées n'est pas connu à tout instant, on peut choisir par défaut $s = r$.

Dans ces conditions relâchées, on retrouve l'idée de soulager la contrainte au niveau des termes croisés pour reporter le problème sur les termes non croisés plus naturellement contrôlables. Nous constaterons toutefois peu de différence en pratique entre ces deux critères.

1.3.2 Critère "de Tanaka" pour le système augmenté

Les résultats de cette section sont présentés uniquement pour le cas continu. La généralisation discrète étant immédiate. On définit ici le vecteur augmenté $x_\alpha = \begin{bmatrix} x & x - \hat{x} \end{bmatrix}$.

En utilisant conjointement les expressions (1.15), (1.16), on obtient :

$$\dot{x}_\alpha = \sum_{i,j,k=1}^r h_i(\hat{x})h_j(\hat{x})h_k(\hat{x})G_{ijk}x_\alpha, \quad (1.23)$$

avec les matrices G_{ijk} définies par

$$\begin{cases} G_{ijk} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_k & B_i K_k \\ N_{ijk} & A_j - L_j C_k + (B_i - B_j)K_k \end{bmatrix}, (i, j, k) \in I_r^3, \\ N_{ijk} = (A_i - A_j) - (B_i - B_j)K_k + L_j(C_i - C_j), (i, j, k) \in I_r^3. \end{cases} \quad (1.24)$$

Cas 1 : Cas général

Tanaka et al. présentent dans [76], le théorème suivant :

Théorème 4 [76] *Considérons le système bouclé continu (1.23). S'il existe une matrice $P \in$*

$\mathbb{R}^{2n \times 2n}$ symétrique définie positive et des gains $K_i, L_i, i \in I_r$ tels que

$$\begin{cases} G_{ijj}^T P + P G_{ijj} < 0, (i, j) \in I_r^2 \\ (G_{ijk}^T + G_{ikj}^T) P + P (G_{ijk} + G_{ikj}) < 0, (i, j, k) \in I_r^2, k > j, \end{cases}$$

avec G_{ijk} définies par (1.24), alors l'origine du système est GAS.

A noter que lorsqu'il existe des triplets (i, j, k) tels que

$$h_i(x)h_j(\hat{x})h_k(\hat{x}) = 0, \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

il est possible de supprimer les équations des termes croisés correspondants.

Cas 2 : la variable de prémisses est mesurable

Lorsque le vecteur $z(t)$ est accessible à la mesure, une simplification des expressions décrites ci-dessus est envisageable. En effet, la nouvelle matrice G ne dépend plus alors que de deux variables. On définit les matrices G_{ij} par

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix}, (i, j) \in I_r^2, \quad (1.25)$$

et les équations d'état se présentent sous la forme :

$$\dot{x}_\alpha = \sum_{i,j=1}^r h_i(x)h_j(x)G_{ij}x_\alpha. \quad (1.26)$$

Théorème 5 [76] *Considérons le système continu (1.26). S'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, symétrique définie positive et des gains $K_i, L_i, i \in I_r$ tels que*

$$\begin{cases} G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0, i \in I_r, \\ (G_{ij}^T + G_{ji}^T) P + P (G_{ij} + G_{ji}) < 0, (i, j) \in I_r^2, j > i, \end{cases}$$

avec G_{ij} définies par (1.25), alors l'origine du système est GAS.

La matrice P à déterminer est par construction de dimension $2n \times 2n$. Les méthodes de résolution actuelle, que nous expliciterons plus en détails dans le paragraphe 1.4, ne permettent pas de déterminer simultanément les trois inconnues introduites ci-dessus. Dans [76], on préconise de déterminer d'abord les K_i, L_i puis de vérifier qu'une matrice P existe. Dans le

but d'éviter cette méthode d'essais successifs, un principe de séparation a été introduit par *Ma et al.* dans [51]. Ainsi, on a une stabilité asymptotique globale de l'origine s'il existe P_0 et P_c matrices symétriques définies positives de $\mathbb{R}^{n \times n}$ telles que :

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^r h_i(x)h_j(x) \left((A_i - B_i K_j)^T P_0 + P_0 (A_i - B_i K_j) \right) < 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \sum_{i,j=1}^r h_i(x)h_j(x) \left((A_i - L_i C_j)^T P_c + P_c (A_i - L_i C_j) \right) < 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.27)$$

On voit bien ici que les variables liées à la stabilité du système commandé (K_i et P_0) et celles de l'observateur (L_i et P_c) sont effectivement séparées.

1.3.3 Autres approches

Approches de type incertitudes

Kim et al. dans [41] considèrent un modèle flou comme un système linéaire avec des incertitudes de modélisation. Toutes les paires (A_i, B_i) sont liées à une paire centrale (A_0, B_0) par

$$A_i = A_0 + \partial A_i, B_i = B_0 + \partial B_i, i \in I_r.$$

Le système flou s'écrit alors (cas discret) :

$$x^+ = (A_0 x + B_0 u) + \sum_{i=1}^r h_i(z) (\partial A_i x + \partial B_i u) \quad (1.28)$$

On choisit de manière naturelle les matrices centrales A_0 et B_0 de telle sorte que les normes maximales des $\partial A_i, \partial B_i, i \in I_r$ soient les plus faibles possibles. Il est bien entendu suffisant que la paire (A_0, B_0) soit commandable (ou stabilisable) afin d'obtenir une solution à l'équation de Lyapunov $A_0^T P A_0 - P = Q$.

Kim et al. énoncent le théorème suivant¹ :

Théorème 6 [41] *Le modèle TS (1.28) autonome ($u \equiv 0$) est asymptotiquement stable si pour une matrice A_0 de Hürwitz, il existe une matrice $Q > 0$ telle que*

$$x^T \left((A_0 + \partial A_i)^T P (A_0 + \partial A_i) - P + Q \right) x < 0, i \in I_r, x \neq 0, x \in \left\{ x, x \in \text{Supp}(F^i) \right\}.$$

¹ $x \in \text{Supp}(F^i)$ signifie que x_j appartient au support de F_j^i pour tout j .

Pour la partie commande le controlleur $u = -Kx$ est utilisé.

Kiriakidis et al. dans [42] se placent dans ce même cadre et analysent le modèle TS comme un modèle linéaire soumis à une classe de perturbations NL et utilisent le formalisme LMI.

Dans [78], utilisant toujours un retour d'état, les auteurs mettent en valeur la similitudes des modèles Takagi-Sugeno avec les modèles LTV (Linéaires Variants dans le Temps). En terme de stabilité, ils ont montrés l'équivalence entre les modèles Takagi-Sugeno et une classe particulière des LTV. Une condition suffisante pour la stabilité asymptotique globale basée sur le système LTV équivalent est donnée. Il n'y a pas de discussion ayant atrait à la commande de ces modèles.

On retrouve dans ces trois approches la même idée : considérer une partie des h_i comme des perturbations pour appliquer des résultats de stabilité quadratique. Ainsi, seules les bornes du systèmes sont considérées et la connaissance exacte des fonctions de pondération n'est pas nécessaire. C'est pourquoi seuls des retours d'état linéaires sont abordés en stabilisation.

Cependant, il est possible d'obtenir de meilleurs résultats en utilisant de manière forte notre connaissance des h_i , comme nous le verrons dans le deuxième chapitre.

Techniques par prise en compte des règles

Marin [53] considère des modèles avec un terme constant dans la partie conclusion, pour la règle i , on a alors le sous-modèle linéaire :

$$\text{Règle } R_i : \text{ Si } x \text{ est } F^i \text{ alors } x^+ = A_i x + b_i. \quad (1.29)$$

En utilisant la connaissance des supports des fonction d'appartenance qui peuvent être décrites par des contraintes de type quadratique :

$$x \in \text{Supp}(F^i) \Leftrightarrow F_j^i(x) = x^T T_j^i x + 2x^T u_j^i + v_j^i \leq 0, j \in I_{n_i}.$$

On peut ainsi définir la P stabilité quadratique d'une règle de la manière suivante :

Définition 3 [53] *La règle R_i est P -quadratiquement stable si et seulement si il existe une matrice symétrique $P > 0$, et un réel $\varepsilon_i > 0$ tel que :*

$$\begin{cases} \Delta^i V(x) \leq -\varepsilon_i \|x\|^2, x \in \text{Supp}(F^i), x \neq 0, \\ \Delta^i V(x=0) = 0, 0 \in \text{Supp}(F^i) \end{cases}$$

avec $V(x) = x^T P x$ et $\Delta^i V(x) = x^T (A_i^T P A_i - P)x + 2x^T A_i^T P b_i + b_i^T P b_i$.

Marin utilise alors la S -procédure décrite dans [11]. Pour mémoire, nous rappelons le lemme suivant :

Lemme 1 [11] Soient F_0, \dots, F_p des fonctions quadratiques de la variable $\zeta \in \mathbb{R}^m$:

$$F_i(\zeta) = \zeta^T T_i \zeta + 2u_i^T \zeta + v_i, i \in I_p,$$

avec $T_i = T_i^T$. La condition $F_0(\zeta) \geq 0$ pour tout ζ tel que $F_i(\zeta) \geq 0, i \in I_p$ est vérifiée s'il existe $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$ tels que

$$\begin{bmatrix} T_0 & u_0 \\ u_0^T & v_0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^p \tau_i \begin{bmatrix} T_i & u_i \\ u_i^T & v_i \end{bmatrix} \geq 0.$$

Marin utilise la S -procédure, Marin déduit les théorèmes suivants :

Théorème 7 [53] S'il existe n_i constantes $\tau_j^i \geq 0, j \in I_{n_i}, \varepsilon_i > 0$ et une matrice P symétrique définie positive telle que

$$\begin{bmatrix} A_i^T P A_i - P + \varepsilon_i P & A_i^T P b_i \\ b_i^T P A_i & b_i^T P b_i \end{bmatrix} - \sum_{j=0}^{n_i} \tau_j^i \begin{bmatrix} T_j^i & u_j^i \\ u_j^{iT} & v_j^i \end{bmatrix} \leq 0.$$

alors la règle R_i est P -quadratiquement stable.

Théorème 8 [53] Le modèle flou décrit par les équations (1.29) est quadratiquement stable si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive P telle que toutes les règles soient P -quadratiquement stables.

Autres lois de commande

Des résultats de nature différente peuvent être obtenus en utilisant de nouvelles commandes. Feng et al. dans [78] souhaitent stabiliser des modèles Takagi-Sugeno continus à l'aide d'une commande qui n'utilise que le sous-modèle dominant, c'est à dire dont la valeur de la fonction d'appartenance $h_i(x), i \in I_r$ est la plus élevée. A chaque instant $u = -K_{i_0} x$ avec $i_0 = \arg(\max_{i \in I_r} \{h_i(x)\})$. Cette commande ne pouvant satisfaire tous les cas, une commande additionnelle est rajoutée. Elle s'apparente à une commande à grand gain qui utilise une division par $\left\| \sum_{i=1}^r h_i(x) B_i^T P x \right\|$, sans garantir que cette loi soit continue quand cette quantité est nulle.

Pour remédier à ce problème, Vermeiren et al. [81] adopte une approche SSF (Stabilisation Simultannée pour modèles flous), se basant sur les travaux de Petersen [62] concernant la stabil-

isation simultanée d'une famille de modèles linéaires MIMO en utilisant une loi de commande par retour d'état NL. On retiendra le principal théorème suivant :

Théorème 9 [81] *Soit le modèle Takagi-Sugeno continu de type SIMO. Supposons qu'il existe une matrice $P > 0$ et un réel $\alpha > 0$ tels qu'il existe des matrices $Q_i > 0, i \in I_r$ et r contrôleurs $K_i, i \in I_r$ vérifiant*

$$\begin{aligned} A_i^T P + P A_i - P B_i K_i - (P B_i K_i)^T + Q_i &\leq 0, i \in I_r, \\ Q_i + P B_i K_j + (P B_i K_j)^T &> \alpha I, (i, j) \in I_r^2, \end{aligned}$$

alors la loi de commande $u(x) = g_1(x) + g_2(x)$ avec

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \min_{i \in I_r} \left(0, \frac{x^T Q_i x - \alpha \|x\|^2}{2 B_i^T P x} - K_i x \right), \forall i \in I_r / 2 B_i^T P x > 0, \\ g_2(x) &= \max_{i \in I_r} \left(0, \frac{x^T Q_i x - \alpha \|x\|^2}{2 B_i^T P x} - K_i x \right), \forall i \in I_r / 2 B_i^T P x < 0, \end{aligned}$$

assure la stabilité asymptotique globale du modèle TSC-BO.

1.4 Résolution LMI

L'objet de cette section est de fournir les éléments de base pour le traitement LMI des équations développées dans ce mémoire. Pour un complément d'information, il est possible de se référer aux ouvrages [11, 23].

1.4.1 Historique et définitions

La célèbre équation de Lyapounov $A^T P + P A = -Q$ avec Q symétrique définie positive, fut la première égalité matricielle linéaire utilisée pour l'analyse de la stabilité de systèmes dynamiques. Cette équation pouvait être résolue analytiquement.

Dans les années soixante-dix, J. C. Willems, lors de ses études en commande optimale [83], est amené à considérer le problème suivant :

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + Q & P B + C^T \\ B^T P + C & R \end{bmatrix} \geq 0, \quad (1.30)$$

pour résoudre ce problème il se ramène à l'étude des solutions symétriques de l'équation de Riccati de la forme $A^T P + P A - (P B + C^T) R^{-1} (B^T P + C) + Q = 0$. Dans [83], Willems affirme au sujet de la LMI (1.30) : (traduit de l'anglais) "L'importance de la LMI (1.30) semble très

largement sous-estimée. Il pourrait être intéressant de voir s'il est possible de l'exploiter dans des algorithmes de résolution, par exemple".

Cette intuition sera largement confirmée dans les années qui suivirent : les LMIs émergent naturellement lors de l'étude des systèmes en Automatique et elles peuvent être résolues à l'aide d'outils d'optimisation convexe.

Aujourd'hui, les outils de résolution LMI sont devenus incontournables en commande optimale ou en commande robuste.

Avant de présenter les théorèmes qui seront utilisés pour la résolution LMI des équations de stabilisation de ce mémoire, considérons les définitions suivantes :

Définition 4 [11] Une inégalité matricielle linéaire (LMI) a la forme

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (1.31)$$

avec $x \in \mathbb{R}^m$, l'inconnue et $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ les données.

Le symbole inégalité dans (1.31) signifie " $F(x)$ est définie positive", i.e., $u^T F(x) u > 0, u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

La LMI (1.31) est équivalente à un ensemble de n inégalités polynomiales en x . Autrement dit, les mineurs principaux de $F(x)$ doivent être positifs.

1.4.2 Exemples de mise en forme LMI d'un problème

Considérons les conditions de stabilisation par un retour d'état du modèle Takagi-Sugeno continu :

$$(A_i - B_i K)^T P + P (A_i - B_i K) < 0, i \in I_r. \quad (1.32)$$

Le système de r inégalités matricielles ci-dessus n'est pas sous forme LMI : les produits $K^T B_i P$ et $P B_i K$ ne sont pas linéaires en les inconnues K et P . Pourtant, il est possible de transformer l'équation (1.32) en un système LMI. Pour cela, nous utilisons successivement deux techniques.

1ère étape : $X = P^{-1}$

Multiplier à gauche et à droite les équations de (1.32) par $P^{-1} = X$, mène au système d'équations suivant :

$$(A_i X + X A_i^T) - B_i K X - (B_i K X)^T < 0, i \in I_r. \quad (1.33)$$

Ce changement de variable est bijectif (P est symétrique définie positive)

2ème étape : $W = KX$

En utilisant ce changement de variables bijectif, l'équation (1.33) devient une LMI en les inconnues W et X .

$$\left(A_i X + X A_i^T \right) - B_i W - (B_i W)^T < 0, i \in I_r. \quad (1.34)$$

Après avoir utilisé des outils de résolution de LMI et déterminé explicitement W et X , on récupère les variables P et K en calculant $P = X^{-1}$ puis $K = WP$.

Dans certaines situations, l'utilisation de cette technique demeure insuffisante pour l'obtention de LMI, on peut alors avoir recours au lemme de Schur (ou complément de Schur) :

Lemme 2 [11] *La LMI décrite par*

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0,$$

avec $Q(x) = Q^T(x)$, $R(x) = R^T(x)$ et $S(x)$ dépendant affinement de x , est équivalente à :

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0.$$

Par exemple, la contrainte matricelle $\|Z(x)\| < 1$ où $Z(x) \in \mathbb{R}^{p \times q}$, dépendant affinement de x , peut être représentée par

$$\begin{bmatrix} I & Z(x) \\ Z^T(x) & I \end{bmatrix} > 0.$$

En effet la contrainte $\|Z(x)\| < 1$ est équivalente à $I - ZZ^T > 0$.

Exemple 1 *Considérons la première partie des conditions de stabilisation par un PDC du modèle Takagi-Sugeno discret :*

$$(A_i - B_i K_i)^T P (A_i - B_i K_i) - P < 0, i \in I_r.$$

Après la transformation $X = P^{-1}$ et $M_i = K_i P^{-1}$, on obtient

$$-(X A_i^T - M_i^T B_i^T) X^{-1} (A_i X - B_i M_i) + X > 0, i \in I_r,$$

qui est toujours bilinéaire.

On utilise alors le lemme de Schur et obtenons la LMI :

$$\begin{bmatrix} X & XA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X - B_i M_i & X \end{bmatrix} \geq 0, i \in I_r.$$

Plusieurs critères de performance peuvent être ajoutés aux conditions de stabilisation des systèmes Takagi-Sugeno, par exemple contraintes sur la commande, sur la sortie ou une spécification du degré de stabilité ([22, 76]).

A titre d'exemple, considérons la LMI définie par (1.33). On souhaite minimiser la norme de la sortie $u(t) = -Kx(t)$ avec les conditions initiales $x(0)$ fixées. On a $\|u(t)\| \leq \mu, t \geq 0$ si les LMIs suivantes sont vérifiées [11] :

$$\begin{bmatrix} 1 & x^T(0) \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} Q & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0.$$

Les toolbox LMIs permettent de résoudre alors un problème de minimisation de la valeur μ^2 .

Toutes les simulations présentées dans ce mémoire ont été réalisées sous l'environnement *Matlab/Simulink* à partir de calculs réalisés grâce à la toolbox LMI du freeware *Scilab*. Il nous a semblé en effet que la Toolbox Scilab offrait plus de souplesse que celle du logiciel *Matlab*.

1.5 Utilisation des modèles Takagi-Sugeno pour l'étude des systèmes non linéaires

1.5.1 Théorème de transformation

Considérons le modèle NL affine en la commande suivant :

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u, \tag{1.35}$$

avec $B(x)$ à valeur dans $\mathbb{R}^{n \times m}$ et $f(x)$ vérifiant l'hypothèse suivante :

C1, H1) $f(x)$ analytique, avec $f(0) = 0$ et $B(x)$ continue.

On peut alors écrire $f(x) = A(x)x$.

Les matrices $A(x)$ et $B(x)$ ne sont pas toujours bornées. On voit alors poindre une contradiction

avec les modèles Takagi-Sugeno. En effet, écrits sous la forme TSC, ils imposent que les matrices d'entrée et de sortie soient bornées. Pourtant, il est possible de lever cette contradiction en considérant un domaine borné D :

Théorème 10 (Blanco et al., [7]) *Considérons le système (1.35) sous l'hypothèse C1, H1). Alors, pour tout domaine borné D entourant l'origine, il existe un nombre fini r de couples de matrices (A_i, B_i) , $i \in I_r$ et des fonctions $h_i(x)$ vérifiant la CSP et tels que :*

$$f(x) + B(x)u = \sum_{i=1}^r h_i(x) (A_i x + B_i u), x \in D. \quad (1.36)$$

Preuve. L'hypothèse C1, H1) nous permet d'affirmer qu'il existe une matrice $A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $B(x)$ telles que :

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u. \quad (1.37)$$

De plus, si $x \in D$ avec D borné alors il existe des domaines $D_A \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ et $D_B \subset \mathbb{R}^{n \times m}$ tels que $A(x) \in D_A$ et $B(x) \in D_B$. En effet, l'image directe par une application continue d'un borné est bornée.

On considère alors $E(x) = \begin{bmatrix} A(x) & B(x) \end{bmatrix}$, cette fonction est à valeur dans \mathbb{R}^{n^2+mn} . La fonction $E(x)$ est elle-même bornée : $E(x) \in D_E$. Ainsi, il existe ainsi un polytope convexe à r sommets tel que tout point de D_E puisse s'écrire sous la forme d'une somme convexe de ces sommets (une méthode non unique de détermination de ce polytope est proposée plus loin). Ces différents r sommets sont notés $\begin{bmatrix} A_i & B_i \end{bmatrix}$, $i \in I_r$. Si l'on considère un point x_0 de l'espace d'état, on peut trouver r coefficients $h_{x_0}^i$, $i \in I_r$ en somme convexe tels que l'on ait :

$$\begin{cases} A(x_0) = \sum_{i=1}^r h_{x_0}^i A_i, \\ B(x_0) = \sum_{i=1}^r h_{x_0}^i B_i. \end{cases}$$

On peut alors construire des fonctions de pondération $h_i(x)$ vérifiant la CSP et telles que (1.36) soit vérifiée. ■

1.5.2 Technique de construction d'un modèle TS

La décomposition Takagi-Sugeno proposée ci-dessus n'est pas unique. Nous allons ici présenter une méthode générale permettant d'écrire le modèle NL (1.37) sous la forme Takagi-Sugeno. Les matrices $A(x)$ et $B(x)$ seront supposées bornées. Nous illustrerons le mode opératoire décrit

ici par un exemple de transformation du système NL suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A(x_1)x + B(x_2)u, x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, \\ A(x_1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \sin x_1 & -3 \end{bmatrix}, \\ B(x_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \cos^2 x_2 \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (1.38)$$

1ère étape : Mise en place des bornes de chaque terme non constant

Pour gérer les termes non constants apparaissant dans $A(x_1)$ et $B(x_2)$, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 3 [55] *Soit f , fonction continue par morceaux et non constante de \mathbb{R} dans $[0, 1]$. Pour tout $x \in D = [b, a]$, il existe deux fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant la CSP et deux réels α et $\beta, \alpha > \beta$ tels que $f(x) = F_1(x)\alpha + F_2(x)\beta$.*

En effet, comme $f(x)$ est continue par morceaux sur D , elle atteint ses bornes. On note $\alpha = \max_{x \in D} (f)$ et $\beta = \min_{x \in D} (f)$. Puisque f n'est pas constante, $\alpha > \beta$ et,

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = F_1(x)\alpha + F_2(x)\beta, \\ F_1(x) = \frac{f(x)-\alpha}{\beta-\alpha}, F_2(x) = \frac{\beta-f(x)}{\beta-\alpha}. \end{array} \right.$$

Exemple 2 *Considérons la non linéarité $\sin x_1$ du système dynamique décrit par (1.38). Pour toute valeur de x_1 , on peut écrire $\sin x_1$ comme somme convexe 1 et -1 :*

$$\sin x_1 = F_1^1(x_1).1 + F_1^2(x_1).(-1).$$

De même, $1 + \cos^2 x_2$ peut s'écrire comme somme de 1 et 2 :

$$1 + \cos^2 x_2 = F_2^1(x_2).2 + F_2^2(x_2).1.$$

On définit les fonctions F_j^i à l'aide du lemme 3 :

$$\begin{cases} F_1^1(x_1) = 0.5(1 + \sin(x_1)), \\ F_1^2(x_1) = 0.5(1 - \sin(x_1)), \\ F_2^1(x_2) = \cos^2 x_2, \\ F_2^2(x_2) = 1 - \cos^2 x_2. \end{cases}$$

2ème étape : Mise en place des bornes de chaque terme non constant

Considérons la matrice $C(x) = \begin{bmatrix} A(x) & B(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (nm)}$.

On note

$$C(x) = [c_{ij}(x)], i \in I_n, j \in I_{nm}.$$

La matrice $C(x)$ présente n_c termes $c_{ij}(x)$ non constants et continus par morceaux. Chacun de ces n_c termes peut être décrits par $F_1^h(x), F_2^h(x), \alpha^h, \beta^h, h \in I_{n_c}$, conformément au lemme 3.

On peut écrire $C(x)$ sous forme d'une somme convexe de 2^{n_c} matrices constantes :

$$C(x) = \sum_{k=1}^{2^{n_c}} h_k(x) C_k,$$

avec $h_k(x)$ et $C_k = [c_{ij}^k]$ définis comme suit :

1. Les $(n^2m - n_c)$ termes constants de $C(x)$ se retrouvent dans les C_k . Ainsi si $c_{ij}(x) = p$, on obtient : $c_{ij}^k = p, k \in I_{2^{n_c}}$.
2. Il reste à présent n_c termes à définir pour chacune des 2^{n_c} matrices C_k .
Pour un terme non constant donné $c_{i_0j_0}(x)$, on a $\alpha^{h_0} \leq c_{i_0j_0}(x) \leq \beta^{h_0}$. Dans les matrices C_k , le terme $c_{i_0j_0}^k$ vaut ainsi soit α^{h_0} soit β^{h_0} .
Comme il y a 2^{n_c} manières de constituer des produits $(\alpha^1 \text{ OU } \beta^1) \times \dots \times (\alpha^{n_c} \text{ OU } \beta^{n_c})$, on peut constituer les 2^{n_c} matrices C_k .
3. Pour calculer h_k correspondant à C_k , on multiplie les n_c fonctions $F_{1 \text{ ou } 2}^h, h \in I_{n_c}$ selon le choix effectué entre α^h ou β^h . Ainsi, les 2^{n_c} fonctions h_i sont constituées de produit de type $F_{1 \text{ ou } 2}^1 \times \dots \times F_{1 \text{ ou } 2}^{n_c}$.
Par exemple, si C_1 n'est constituée que des bornes min α , alors $h_1 = F_1^1 \times \dots \times F_1^{n_c}$.

Exemple 3 On a trouvé précédemment

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \sin x_1 & -3 & 1 + \cos^2 x_2 \end{bmatrix},$$

avec $n_c = 2$ et $\alpha^1 = 1, \beta^1 = -1, \alpha^2 = 2, \beta^2 = 1$.

Le point 1 nous permet de constituer :

$$C_i = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \times & -3 & \times \end{bmatrix}, i \in I_4.$$

Les 4 matrices "extrêmes" $C_i, i \in I_4$ sont déterminées à l'aide du point 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \\ C_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \\ C_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \\ C_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \end{array} \right.$$

et le point 3 donne les fonctions de pondération :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1(x) = F_1^1(x_1)F_2^1(x_2), \\ h_2(x) = F_1^1(x_1)F_2^2(x_2), \\ h_3(x) = F_1^2(x_1)F_2^1(x_2), \\ h_4(x) = F_1^2(x_1)F_2^2(x_2), \end{array} \right.$$

3ème étape : Ecriture du modèle Takagi-Sugeno augmenté

A ce stade, il faut reconstituer les matrices A_i, B_i et calculer l'expression des fonctions de pondération.

Exemple 4 Sur l'exemple développé précédemment, les transformations effectuées permettent

d'affirmer que les dynamiques de (1.38) s'écrivent sous la forme Takagi-Sugeno :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^4 h_i(x) (A_i x + B_i u),$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \\ A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \\ B_1 = B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ B_2 = B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{array} \right.$$

et des fonctions de pondération vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1(x) = 0.5(1 + \sin(x_1)) \cos^2 x_2, \\ h_2(x) = 0.5(1 + \sin(x_1)) (1 - \cos^2 x_2), \\ h_3(x) = 0.5(1 - \sin(x_1)) \cos^2 x_2, \\ h_4(x) = 0.5(1 - \sin(x_1)) (1 - \cos^2 x_2). \end{array} \right.$$

Cette même transformation sera appliquée sur un modèle de pendule inverse à la fin du deuxième chapitre. On notera au travers de cette méthode que si les matrices $A(x)$ et $B(x)$ présentent n_c non linéarités distinctes, on a alors un nombre de modèles $r = 2^{n_c}$. Il est bien évident que cette croissance exponentielle du nombre de modèle peut rendre difficile la résolution numérique.

1.5.3 Limites de l'approche : théorèmes locaux

Dès 1996, dans [75], *Tanaka et al.* étudient la stabilisation d'une classe de système NL à l'aide des modèles Takagi-Sugeno. Les théorèmes de stabilisation sont globaux et valides pour des systèmes à modèle Takagi-Sugeno valable dans tout l'espace d'état. Considérons l'exemple 1 utilisé dans [75]. Le système NL considéré est le suivant

$$\ddot{x} = -0.1\dot{x}^3 - 0.02x - 0.67x^3 + u \quad (1.39)$$

Dans les exemples utilisés dans [75], les systèmes NL ne sont sous forme Takagi-Sugeno que pour un domaine D de l'espace d'état. Ce domaine D est décrit par $x, \dot{x} \in \left[-1.5 \ 1.5 \right]$. Le modèle TS correspondant est alors

$$\begin{cases} z^T = \begin{bmatrix} x & \dot{x} \end{bmatrix}, \\ \dot{z} = \sum_{i=1}^4 h_i(z) (A_i z + B_i u). \end{cases} \quad (1.40)$$

Les valeurs numériques des $h_i(z)$, A_i , B_i sont déterminées à l'aide de la méthode explicitée ci-dessus (elles dépendent du domaine D considéré). Par application des théorèmes énoncés dans l'article, on détermine un contrôleur rendant le système TS GAS. La conclusion de [75] est "le système NL est asymptotiquement stabilisé". Ce type de conclusion manque de précision et peut induire en erreur le lecteur. En effet, bien que le système (1.40), considéré comme valide dans \mathbb{R}^n soit GAS, il n'est pas prouvé que pour l'ensemble de conditions initiales $x, \dot{x} \in \left[-1.5 \ 1.5 \right]$, le système (1.39) soit asymptotiquement stable. Ainsi, le terme "système NL" est ambiguë dans la mesure où il peut désigner à la fois (1.40) et (1.39).

Pour clarifier ce point, nous énonçons le théorème suivant pour le système en boucle ouverte TSC-BO :

Théorème 11 (Blanco et al., [7]) *Considérons le système décrit par*

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.41)$$

avec $f(x)$ vérifiant l'hypothèse C1, H1). On considère un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ entourant l'origine. Dans ce domaine, $f(x)$ présente n_c termes non linéaires. On a alors

$$\dot{x} = f(x) = A(x)x = \left(\sum_{i=1}^{2^{n_c}} h_i(x) A_i \right) x, x \in D.$$

Considérons par ailleurs le système Takagi-Sugeno défini pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = \left(\sum_{i=1}^{2^{n_c}} h_i(x) A_i \right) x. \quad (1.42)$$

S'il existe une matrice P symétrique définie positive vérifiant

$$A_i^T P + P A_i < 0, i \in I_{2^{n_c}}$$

alors l'origine du système (1.42) est GAS.

De plus, l'origine de (1.41) est localement asymptotique stable et la plus grande ellipse $\Gamma = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi^T P \xi \leq 1\}$ incluse dans le domaine D est une estimation du domaine de stabilité asymptotique de (1.41).

Preuve. En appliquant le théorème 10 avec la méthode de construction proposée ci-dessus, on obtient la forme (1.42). On utilise alors la seconde méthode de Lyapunov avec une fonction de type $x^T P x$. ■

Pour déterminer pratiquement cette ellipse à l'aide de LMIs, on peut s'inspirer de la méthode décrite dans [11]. On suppose pour cela que le domaine D est décrits par p points v_i tels que $D = \overline{\text{Conv}}\{v_1, \dots, v_p\}$. Le problème est alors de trouver une matrice P symétrique définie positive vérifiant la minimisation suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser } \log(\det P) \\ & \text{Soumis à } \begin{cases} A_i^T P + P A_i < 0, i \in I_{2nc}, \\ \begin{bmatrix} 1 & v_i^T \\ v_i & P \end{bmatrix} \geq 0, i \in I_p. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.43)$$

La minimisation de $\log(\det P)$ permet d'obtenir le plus grand domaine possible. La figure 1-2 illustre bien notre propos :

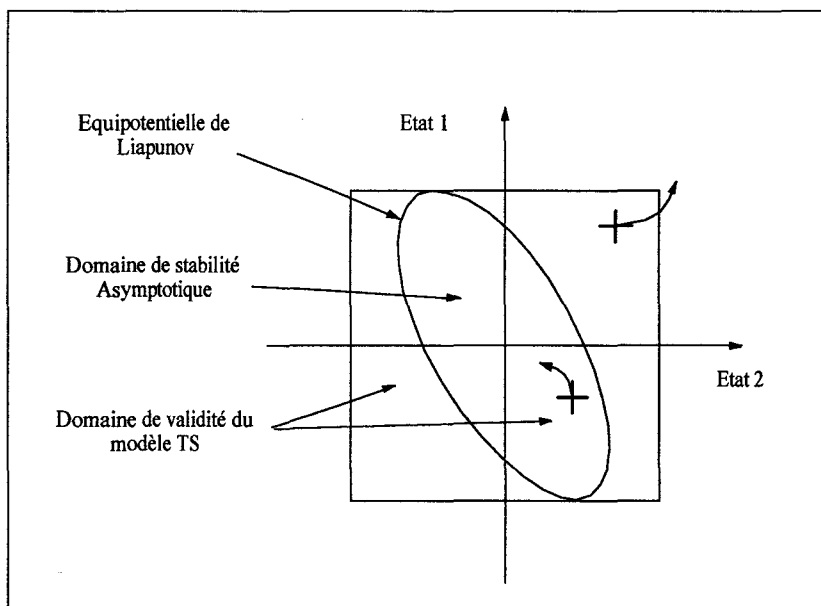


FIG. 1-2: Modèles TS et modèles non linéaires

Exemple 5 *Considérons le système décrit par*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & x_2 \\ x_1 \sin x_1 & -3 \end{bmatrix} x,$$

Soit le domaine $D = \{x \in \mathbb{R}, |x_1| \leq \alpha_1, |x_2| \leq \alpha_2\}$. Dans le domaine D , on peut écrire le système sous la forme Takagi-Sugeno

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^4 h_i(x) A_i x,$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \begin{bmatrix} -1 & \alpha_2 \\ -\alpha_1 & -3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -\alpha_2 \\ -\alpha_1 & -3 \end{bmatrix}, \\ A_3 = \begin{bmatrix} -1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & -3 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -1 & -\alpha_2 \\ \alpha_1 & -3 \end{bmatrix}. \end{array} \right.$$

On peut noter que la connaissance et la détermination des h_i est ici inutile. (Ce point fera l'objet de développement dans le chapitre suivant).

On définit alors les points $v_i, i \in I_4$ par $v_i^T = \begin{bmatrix} \pm\alpha & \pm\beta \end{bmatrix}$.

Chercher, à α et β fixés, le plus ellipsoïde invariant contenu dans D , se ramène à la résolution du problème LMI (1.43). Pour $\alpha = 1.7$ et $\beta = 1.7$, on trouve la matrice de Lyapounov suivante :

$$P = \begin{bmatrix} 5.8 & 0 \\ 0 & 5.8 \end{bmatrix}.$$

1.6 Elements majeurs du premier chapitre

Les modèles Takagi-Sugeno existent depuis une quinzaine d'année et sont à présent communément écrits sous forme analytique. En cela, ils constituent une classe particulière de système NL et les outils de l'automatique classique peuvent leur être appliqués. Les résultats les plus marquants en stabilité et stabilisation sont fondés sur l'utilisation des fonctions de Lyapounov quadratiques de type $V = x^T P x$ avec des commandes par retour d'état ou PDC. Ces critères présentent l'avantage d'être simples d'utilisation (critères LMI) et généraux mais aussi assez conservatifs.

De plus, ces modèles peuvent être utilisés pour étudier la stabilité d'une classe de modèles non linéaires.

Chapitre 2

Stabilisation Quadratique des Modèles Takagi-Sugeno

2.1 Utilisation des fonctions de pondération

Comme nous venons de le voir, la plupart des critères de stabilité et de stabilisation des modèles TS reposent sur l'utilisation de fonctions de Lyapounov quadratiques de type $V = x^T P x$, avec $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique définie positive.

L'utilisation de fonctions de Lyapounov quadratiques introduit naturellement un fort conservatisme. En dépassant cette considération, il est naturel de s'interroger sur la qualité des critères quadratiques existants :

Est-il possible, avec des fonctions de Lyapounov quadratiques, d'obtenir de meilleurs résultats que les critères proposés dans la littérature ?

Au travers de ce chapitre, nous montrerons que les critères de Tanaka sont de très bons critères de stabilité quadratique lorsque les fonctions de pondération sont inconnues. En revanche, si ces fonctions sont connues (par identification d'un modèle NL à un modèle Takagi-Sugeno par exemple), nous montrerons qu'il est possible d'obtenir de meilleurs résultats. Pour ce faire, il faudra consentir à des calculs plus complexes. En ce qui concerne la stabilisation, bien qu'en apparence les contrôleurs classiques de type PDC ou CDF utilisent fortement la connaissance des fonctions $h_i(x)$, il est possible d'aller plus loin en travaillant plus finement avec la majoration de la dérivée de la fonction de Lyapounov obtenue.

Ainsi, dans ce chapitre, nous introduirons une classe d'inégalités matricielles de type $Q(x) < 0$, pertinente pour l'étude de la stabilité/stabilisation quadratique des modèles Takagi-Sugeno. Par rapport à cette classe d'inégalité, nous développerons des théorèmes d'équivalence ou des

conditions suffisantes pour que $Q(x)$ soit définie négative. Ces résultats seront appliqués au modèle TS en BO et en BF, avec et sans observateur PDC. Nous appliquerons ces résultats à un modèle de pendule inverse issu de [81].

2.2 Bases de l'approche

Dans cette section, nous allons étudier des conditions de la forme :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^s \zeta_i(x) Q_i < 0, x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

avec $\zeta_i(x), i \in I_s$ satisfaisant la CSP et Q_i une matrice quelconque symétrique de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Les fonctions $\zeta_i(x), i \in I_s$ sont supposées parfaitement connues.

Les matrices Q_i peuvent dépendre de variables matricielles. Par exemple, si Q_i dépend du contrôleur K et d'une matrice P , nous noterons $Q_i = Q_i(P, K)$.

Remarque 1 Si $Q(x) < 0, x \in \mathbb{R}^n$ alors

$$\begin{cases} x^T Q(x) x < 0, x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \\ x^T Q(x) x = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{cases}$$

Ainsi, les conditions de type (2.1) peuvent permettre une étude de stabilité par fonctions de Lyapounov quadratiques $V = x^T P x$. En effet, en dérivant cette fonction le long des trajectoires du système, on obtient $\dot{V} = x^T Q(x) x$, avec $Q(x)$ de la forme

$$Q(x) = \sum_{i=1}^s \zeta_i(x) Q_i.$$

2.2.1 Motivations de la classe de conditions retenues

Soit un modèle de système continu de la forme :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^s \zeta_i(x) E_i x, \quad (2.2)$$

respectivement en discret

$$x^+ = \sum_{i=1}^s \zeta_i(x) E_i x, \quad (2.3)$$

avec $\zeta_i(x), i \in I_s$ satisfaisant la CSP et $E_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, i \in I_s$.

Considérons la fonction de Lyapounov quadratique suivante :

$$V(x) = x^T P x, \quad (2.4)$$

avec P une matrice symétrique définie positive de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Calculons la dérivée de cette fonction de Lyapounov V le long des trajectoires du système (2.2) :

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x},$$

$$\text{(resp.) } \Delta V(x) = (x^+)^T P x^+ - x^T P x.$$

D'après les résultats de Lyapounov [49], une condition suffisante pour rendre l'origine asymptotiquement stable est

$$\begin{cases} \dot{V}(x) = 0 \iff x = 0, \\ \dot{V}(x) < 0, x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \end{cases} \quad \text{(resp.) } \begin{cases} \Delta V(x) = 0 \iff x = 0, \\ \Delta V(x) < 0, x \in \mathbb{R}^n - \{0\}. \end{cases}$$

En utilisant les expressions des dynamiques de (2.2) et (2.3), $\dot{V}(x)$ et $\Delta V(x)$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{V}(x) = x^T \left(\sum_{i=1}^s \zeta_i(x) (E_i^T P + P E_i) \right) x, \\ \Delta V(x) = x^T \left(\sum_{i,j=1}^s \zeta_i(x) \zeta_j(x) (E_i^T P E_j - P) \right) x. \end{cases}$$

Bien que l'expression de $\Delta V(x)$ ne soit pas directement sous une forme similaire à (2.1), nous montrerons que l'on peut s'y ramener aisément (théorème 17).

L'étude de la stabilité au sens de Lyapounov avec des fonctions de type quadratique nous conduit à nous intéresser à des conditions du type $Q(x) < 0, x \in \mathbb{R}^n$ définies par (2.1).

Exemple 6 *Considérons le système TSC-RE et la fonction de Lyapounov définie par $V = x^T P x$. La dérivée de la fonction de Lyapounov le long des trajectoires de TSC-RE s'écrit :*

$$\dot{V} = x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) \left((A_i - B_i K_0)^T P + P (A_i - B_i K_0) \right) \right) x.$$

Ainsi, si (2.1) est vérifiée avec $s = r$ et $\zeta_i(x) = h_i(x), i \in I_r$ et

$$Q_i = Q_i(P, K_0) = (A_i - B_i K_0)^T P + P (A_i - B_i K_0), i \in I_r,$$

alors l'origine du système TSC-RE est GAS.

2.2.2 Théorème d'équivalence et conditions suffisantes

En utilisant l'expression de (2.1), notre but est de trouver des conditions suffisantes (éventuellement nécessaires et suffisantes) sur $Q_i, i \in I_s$ pour que $Q(x)$ soit définie négative. En effet, pour obtenir des conditions de stabilité exploitables par des algorithmes numériques, il est nécessaire de manipuler des inégalités purement matricielles ; par exemple

$$Q(P, K_0) = (A - BK_0)^T P + P(A - BK_0) < 0,$$

avec comme inconnues K_0 et P .

Remarque 2 De toute évidence (2.1) est une condition suffisante pour que $x^T Q(x)x$ soit définie négative. Par souci de précision, notons qu'il n'y a pas équivalence entre (2.1) et " $x^T Q(x)x$ définie négative". En effet, on peut trouver un certain vecteur x_0 tel que la matrice

$$\zeta_1(x_0)Q_1 + \dots + \zeta_s(x_0)Q_s$$

ait des valeurs propres positives bien que la quantité

$$x_0^T (\zeta_1(x_0)Q_1 + \dots + \zeta_s(x_0)Q_s)x_0$$

soit négative. En revanche, utiliser la condition (2.1) à la place de " $x^T Q(x)x$ définie négative" ne va pas introduire un fort conservatisme.

Nous allons à présent chercher un équivalent à la condition (2.1). Considérons pour ce faire l'hypothèse¹ suivante :

C2, H1) Il existe s points x_i de l'espace d'état tels que $\zeta_i(x_i) = 1, i \in I_s$.

Ainsi,

Théorème 12 (Blanco et al., [6]) Sous l'hypothèse C2, H1), la condition (2.1) est équivalente à $Q_i < 0, i \in I_s$.

¹Notation : C2, H1) désigne l'hypothèse 1 du chapitre 2.

Preuve. En considérant $C2, H1)$, il est évident que

$$(2.1) \implies \sum_{i=1}^s \zeta_i(x_j) Q_i = Q_j < 0, j \in I_s.$$

Inversement, $(Q_i < 0, i \in I_s) \implies (2.1)$ est vrai car les $\zeta_i(x), i \in I_s$ sont positifs et non tous nuls.

■

Nous pouvons en conclure que si la condition $C2, H1)$ n'est pas vérifiée, il est possible de trouver de meilleures conditions suffisantes pour (2.1) que le critère " $Q_i < 0, i \in I_s$ ".

Considérons le vecteur $\zeta(x) \in \mathbb{R}^s$ et son image dans l'espace d'état :

$$\begin{cases} \zeta^T(x) = \begin{bmatrix} \zeta_1(x) & \dots & \zeta_s(x) \end{bmatrix}, \\ D_\zeta = \{\zeta(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}. \end{cases}$$

Comme $0 \leq \zeta_i(x) \leq 1, i \in I_s$, D_ζ est inclus dans le domaine $[0, 1]^s \subset \mathbb{R}^s$. Ceci nous amène à considérer l'hypothèse suivante :

$C2, H2)$ Il existe q points $\Gamma_j \in D_\zeta$ avec $\Gamma_j^T = [\Gamma_{j1}, \dots, \Gamma_{js}]$ tels que tout point de D_ζ puisse s'écrire sous la forme d'une combinaison convexe de ces q points.

L'hypothèse $C2, H2)$ se traduit par

$$\forall \zeta \in D_\zeta, \exists (\theta_1, \dots, \theta_q), \theta_i \geq 0, \theta_1 + \dots + \theta_q = 1, \zeta = \sum_{j=1}^q \theta_j \Gamma_j.$$

L'hypothèse $C2, H2)$ impose une forme de polytope convexe au domaine D_ζ , comme le montre la figure 2-1 :

Théorème 13 (Blanco et al., [6]) *Si les fonctions $\zeta_i(x), i \in I_r$ vérifient $C2, H2)$ alors la condition (2.1) est équivalente à*

$$\sum_{i=1}^s \Gamma_{ji} Q_i < 0, j \in I_q. \quad (2.5)$$

Preuve. $(2.1) \implies (2.5)$: Si tous les éléments de D_ζ vérifient (2.1), alors les points particuliers $\Gamma_j, j \in I_q$, vérifient aussi la condition (2.1) et (2.5) est vraie.

$(2.5) \implies (2.1)$: On considère à présent $x \in \mathbb{R}^n$ et on suppose (2.5) vérifiée. D'après $C2, H2)$,

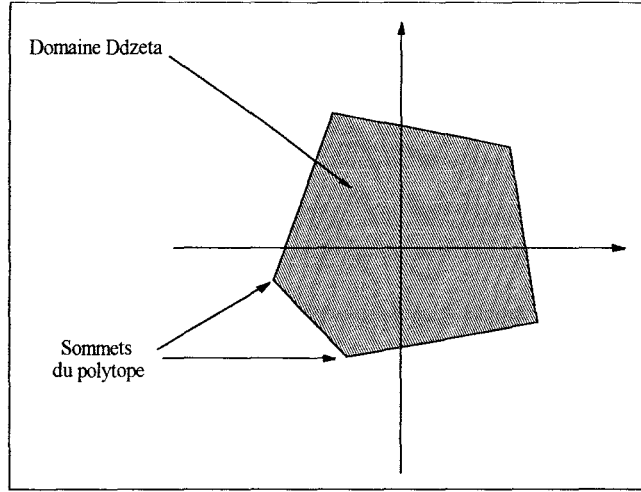


FIG. 2-1: Illustration de l'hypothèse C2, H2)

on peut écrire $\zeta(x)$ comme une combinaison convexe de Γ_j :

$$\zeta(x)^T = \left[\sum_{j=1}^q \theta_j(x) \Gamma_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^q \theta_j(x) \Gamma_{js} \right],$$

avec $\theta_j, j \in I_q$ satisfaisant la CSP. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \zeta_i(x) Q_i &= \sum_{i=1}^s \left(\sum_{j=1}^q \theta_j(x) \Gamma_{ji} \right) Q_i \\ &= \sum_{j=1}^q \theta_j(x) \left(\sum_{i=1}^s \Gamma_{ji} Q_i \right). \end{aligned}$$

Comme les $\theta_j, j \in I_q$ sont positifs et non tous nuls, la condition (2.1) est vérifiée. ■

La majeure partie des fonctions $\zeta(x)$ ne vérifient pas l'hypothèse C2, H2) : l'ensemble D_ζ n'est pas forcément un polytope convexe. Il est alors possible de trouver un polytope convexe *contenant* le domaine D_ζ . Dans ce cas, il est plus intéressant de considérer l'hypothèse suivante :

C2, H3) Il existe k points, $\Gamma_j \in \mathbb{R}^s$ avec $\Gamma_j^T = [\Gamma_{j1}, \dots, \Gamma_{js}]$ tel que tout point de D_ζ puisse être écrit comme combinaison de ces k points.

Comme indiqué sur la figure 2-2, le polytope défini par $\overline{\text{Conv}} \{ \Gamma_1, \dots, \Gamma_s \}$ est appelé *polytope majorant* de D_ζ . On notera que cette décomposition, bien que non unique est toujours valide. Il suffit de considérer les s points $\Gamma_{10}^T = [1, 0, \dots, 0]$, $\Gamma_{20}^T = [0, 1, \dots, 0]$, ..., $\Gamma_{s0}^T = [0, 0, \dots, 1]$. On se base pour cela uniquement sur la CSP. Ainsi tout point de D_ζ peut être obtenu comme somme

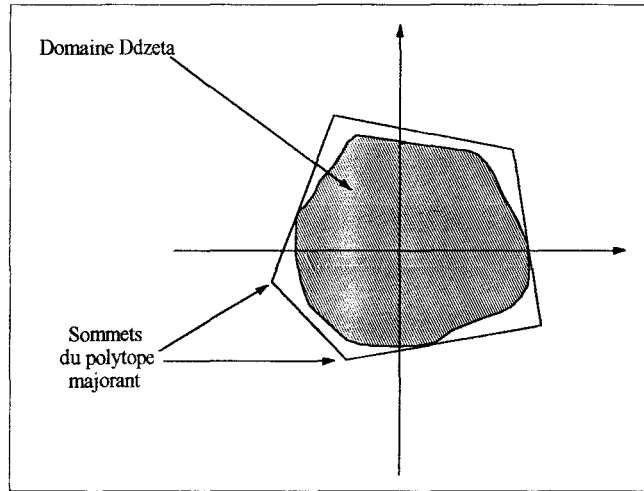


FIG. 2-2: Illustration de l'hypothèse C2, H3)

convexe de $\Gamma_{10}^T, \dots, \Gamma_{s0}^T$:

$$D_\zeta \subset D = \overline{\text{Conv}} \{ \Gamma_{10}, \dots, \Gamma_{s0} \} \subset \mathbb{R}^s \tag{2.6}$$

Ce polytope majorant de D_ζ est basée uniquement sur les bornes des fonctions $\zeta_i(x), i \in I_s$. L'utilisation du polytope convexe D comme polytope majorant de D_ζ conduit à des résultats très conservatifs. On sera ainsi amené à considérer plus que s points Γ_j^T pour obtenir un bon polytope majorant, au détriment de la simplicité des calculs.

Exploitions ces résultats pour transformer la condition (2.1) :

Théorème 14 (Blanco et al., [6]) Soient $\Gamma_j \in \mathbb{R}^s, j \in I_k$ avec $\Gamma_j^T = [\Gamma_{j1}, \dots, \Gamma_{js}]$ les k points tels que les fonctions $\zeta_i(x), i \in I_s$ vérifient C2, H3). Alors, si les matrices $Q_i, i \in I_r$ vérifient

$$\sum_{i=1}^s \Gamma_{ji} Q_i < 0, \forall j \in I_k, \tag{2.7}$$

la condition (2.1) est vérifiée.

Preuve. Identique à la démonstration (2.5) \implies (2.1) du théorème 13. ■

2.2.3 Somme convexe et somme conique

Il est possible de remplacer l'hypothèse C2, H2) par l'hypothèse suivante :

C2, H2') Il existe q points $\Gamma_j \in D_\zeta$ avec $\Gamma_j^T = [\Gamma_{j1}, \dots, \Gamma_{js}]$ tels que tout point de D_ζ puisse s'écrire sous la forme d'une combinaison conique de ces q points.

Cette hypothèse se traduit par

$$\forall \zeta \in D_\zeta, \exists (\theta_1, \dots, \theta_q), \theta_i \geq 0, \theta_1 + \dots + \theta_q > 0, \zeta = \sum_{j=1}^q \theta_j \Gamma_j.$$

Dans ce cas le théorème 13 reste valide en remplaçant $C2, H2)$ par $C2, H2')$. De même, on peut écrire le théorème 14 en considérant une hypothèse de somme conique semblable à $C2, H3)$. Dans la suite de ce chapitre, nous poursuivrons, pour des raisons de concision, en utilisant exclusivement des sommes convexes.

2.2.4 Ajout d'une matrice constante

Considérons la condition suivante :

$$Q_T(x) = \sum_{i=1}^s \zeta_i(x) Q_i + T < 0, x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.8)$$

avec T matrice quelconque de dimension appropriée. A l'aide des hypothèse $C2, H3)$, on a une propriété similaire à celle du théorème 14 :

Théorème 15 (*Blanco et al.*) Soient $\Gamma_j \in \mathbb{R}^s, j \in I_k$ avec $\Gamma_j^T = [\Gamma_{j1}, \dots, \Gamma_{js}]$ les k points tels que les fonctions $\zeta_i(x), i \in I_s$ vérifient $C2, H3)$. Alors, si les matrices $Q_i, i \in I_r$ vérifient

$$\sum_{i=1}^s \Gamma_{ji} Q_i + T < 0, \forall j \in I_k,$$

la condition (2.8) est vérifiée.

Preuve. La propriété $\Gamma_{j1} + \dots + \Gamma_{js} = 1$ permet de remplacer Q_i par $Q_i + T$ dans les équations du théorème 14. ■

2.3 Application des résultats en stabilité/stabilisation

2.3.1 Critère de stabilité pour les modèles TS

Les résultats exposés ci-dessus peuvent être directement appliqués pour l'étude de stabilité des modèles Takagi-Sugeno en discret et en continu :

Théorème 16 (*Blanco et al., [6]*) Considérons le système TSC-BO. Soient $\Gamma_j, j \in I_k$ les k points tels que les fonctions $h_i(x)$ satisfont l'hypothèse $C2, H3)$. S'il existe une matrice $P \in$

$\mathbb{R}^{n \times n}$, symétrique définie positive vérifiant

$$\sum_{i=1}^s \Gamma_{ji}(A_i^T P + P A_i) < 0, j \in I_k,$$

alors l'origine du système est GAS.

Preuve. On applique le théorème 14 avec $s = r, \zeta_i(x) = h_i(x), i \in I_r$ et $Q_i = A_i^T P + P A_i$.

■

Exemple 7 Considérons le modèle TS décrit par les matrices suivantes :

$$\begin{cases} A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \\ h_1(x), h_2(x) \geq 0.2. \end{cases} \quad (2.9)$$

En appliquant le théorème 1, nous sommes amenés à chercher une matrice P de Lyapounov vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} A_1^T P + P A_1 < 0, \\ A_2^T P + P A_2 < 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

En appliquant le théorème 16, on doit résoudre

$$\begin{cases} 0.2(A_1^T P + P A_1) + 0.8(A_2^T P + P A_2) < 0, \\ 0.8(A_1^T P + P A_1) + 0.2(A_2^T P + P A_2) < 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Le système de LMIs (2.11) possède plusieurs matrices de Lyapounov solutions, par exemple $P = I$. En revanche, le système d'équation (2.10) n'a pas de solutions car la matrice A_2 n'est pas une matrice de Hürwitz.

Il est notable même si les deux systèmes ont des solutions, la méthode proposée permet d'obtenir un ensemble de solutions plus large en terme de matrice de Lyapounov. Cet élément se révélera particulièrement intéressant dans le cas de la stabilisation où l'ajout de contraintes de performances peut réduire le champ des matrices de Lyapounov solution du problème. On notera de même, conformément au théorème 12, que si les fonctions $h_i(x)$ satisfont l'hypothèse $C2, H1$), on obtient le même système d'équation par le théorème 16 que les critères du théorème 1 : les points considérés dans pour le polytope de $C2, H3$) sont en effet $\Gamma_{10}^T, \dots, \Gamma_{s0}^T$ définis par (2.6).

L'application de ces résultats au système discret Takagi-Sugeno est moins immédiate :

Théorème 17 (Blanco et al.) *Considérons le système TSD-BO. Soient $\Gamma_j, j \in I_k$ les k points tels que les fonctions $h_i(x)$ satisfont les hypothèses de C2, H3). S'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, symétrique définie positive satisfaisant*

$$\sum_{i=1}^r \Gamma_{ji} (A_i^T P A_i - P) < 0, \forall j \in I_k,$$

alors l'origine du système considéré est GAS.

Preuve. Comme $\Delta V(x) = V_{k+1}(x) - V_k(x) = x^{+T} P x - x^T P x$, nous avons

$$\Delta V(x) = x^T \left(\sum_{i,j=1}^r h_i(x) h_j(x) (A_i^T P A_j - P) \right) x = x^T Q(x) x$$

Considérons par ailleurs la quantité $(A_i - A_j)$. Comme P est une matrice symétrique définie positive, on a $\forall M \in \mathbb{R}^{n \times n}, M^T P M \geq 0$.

Ainsi, $(A_i - A_j)^T P (A_i - A_j) \geq 0$. Et par conséquent, si l'on considère une matrice $R(x)$

$$R(x) = \sum_{i,j=1}^r h_i(x) h_j(x) \left((A_i - A_j)^T P (A_i - A_j) \right),$$

on a alors $R(x) \geq 0$, c'est à dire

$$\sum_{i,j=1}^r h_i(x) h_j(x) \left(A_i^T P A_i - A_j^T P A_i - A_i^T P A_j + A_j^T P A_j \right) \geq 0.$$

On introduit alors la matrice P dans l'expression ci-dessus :

$$\sum_{i=1}^r h_i(x) h_j(x) \left(\begin{array}{c} (A_i^T P A_i - P) - (A_j^T P A_i - P) \\ - (A_i^T P A_j - P) + (A_j^T P A_j - P) \end{array} \right) \geq 0.$$

En développant cette expression, nous voyons apparaître des termes non croisés en $(A_i^T P A_i - P)$ et des termes croisés en $(A_j^T P A_i - P)$. En rassemblant ces termes, nous obtenons :

$$R(x) = 2 \sum_{i=1}^r h_i(x) (A_i^T P A_i - P) - 2 \sum_{i,j=1}^r h_i(x) h_j(x) (A_j^T P A_i - P) \geq 0.$$

Ainsi $Q(x)$ vérifie

$$Q(x) \leq \sum_{i=1}^r h_i(x) (A_i^T P A_i - P).$$

D'après le théorème 14 avec $s = r$, $\zeta_i(x) = h_i(x)$, $i \in I_r$ et $Q_i = A_i^T P A_i - P$, nous avons

$$\sum_{i=1}^r h_i(x) (A_i^T P A_i - P) < 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Nous pouvons alors affirmer que $\Delta V(x)$ est définie négative. ■

2.3.2 Similitude entre les modèles TS et LTV

Avant d'aller plus en avant dans la stabilisation quadratique des modèles TS, il convient de souligner un point important concernant les similitudes entre les inclusions différentielles et les modèles TS.

En effet, si on applique le critère classique de Tanaka " $A_i^T P + P A_i < 0, i \in I_r$ ", l'analyse par fonction de Lyapounov quadratique concernant les modèles TS en boucle ouverte ou avec un contrôleur type retour d'état **ne dépend pas** des fonctions $h_i(x)$. On peut pousser ce raisonnement jusqu'à dire que si les matrices (A_i, B_i) sont identifiées, il est inutile de chercher à déterminer les fonctions $h_i(x)$ dans un objectif d'étude de stabilité ou de stabilisation par retour d'état. Par contre, lorsque des commandes de type CDF ou PDC sont utilisées, la connaissance des fonctions de pondération est alors fondamentale car on ne se place plus dans le cadre d'un contrôle robuste. Pour éclairer notre propos, nous allons faire des rappels sommaires sur les inclusions différentielles linéaires.

Définition 5 [11] Une inclusion différentielle (DI) est décrite par

$$\dot{x} \in F(x(t), t), \quad x(0) = x_0, t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.12)$$

où F est une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ à valeur dans \mathbb{R}^n . Tout $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant (2.12) est appelé trajectoire de l'inclusion différentielle (2.12).

Définition 6 [11] Une inclusion différentielle linéaire (LDI) est définie par

$$\dot{x} \in \Omega x, \quad x(0) = x_0, \quad (2.13)$$

où Ω est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

On peut interpréter la LDI comme décrivant une famille de système LTV (Linear Time Varying) ([11]). En effet, toute trajectoire de la LDI (2.13) satisfait

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(0) = x_0. \quad (2.14)$$

On se place ainsi dans le cadre d'incertitudes. Les modèles TS sont alors des LDI polytopiques (ou PLDI) avec $\Omega = \overline{\text{Conv}} \{A_1, \dots, A_r\}$. En effet, en terme de stabilité, l'utilisation de fonctions de Lyapounov quadratique, conduit au même critère pour le modèle TS et la LDI polytopique. Ce point provient du fait qu'**étudier la stabilité quadratique d'un système, revient à travailler sur les bornes de la matrice d'état du système.**

2.3.3 Conditions de stabilisation pour les modèles TS

Retour d'état et CDF

Quand on utilise une fonction de Lyapounov quadratique, la stabilisation des systèmes TS par un retour d'état ou une CDF conduit à la résolution du problème suivant : Trouver P symétrique définie positive et $K_i, i \in I_r$ satisfaisant les équations :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r h_i(x) \left((A_i - B_i K_i)^T P + P (A_i - B_i K_i) \right) < 0, \text{ (cas continu)} \\ \sum_{i=1}^r h_i(x) \left((A_i - B_i K_i)^T P (A_i - B_i K_i) - P \right) < 0. \text{ (cas discret)} \end{cases}$$

Pour le contrôleur linéaire, on a $K_i = K_0, i \in I_r$. Par application du théorème de stabilité

Théorème 18 (Blanco et al., [6]) *Considérons le système TSC-RE (resp. TSD-RE). Soient $\Gamma_j, j \in I_k$ les k points tels que les fonctions $h_i(x)$ satisfont les hypothèses de C2, H3). S'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, symétrique définie positive satisfaisant*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \Gamma_{ji} \left((A_i - B_i K_0)^T P + P (A_i - B_i K_0) \right) &< 0, j \in I_k, \\ (\text{resp.}) \sum_{i=1}^r \Gamma_{ji} \left((A_i - B_i K_i)^T P + P (A_i - B_i K_i) \right) &< 0, j \in I_k, \end{aligned}$$

alors l'origine du système considéré est GAS.

Preuve. Application directe du théorème 14. ■

Des résultats similaires pourraient être obtenus en discret. Nous noterons, conformément à la section précédente que ces deux théorèmes, bien que similaires en écriture sont de philosophies

opposées. Pour le retour d'état, on obtiendra une commande stabilisante robuste puisqu'elle convient à tout système ayant des fonctions de pondération satisfaisant $C2, H3$). En revanche, pour la CDF, on suppose le modèle exact.

contrôleurs PDC

La forme de la dérivée de la fonction de Lyapounov $x^T P x$ dans le cas de TSC-PDC et TSD-PDC est différente de celle obtenue en BO ou pour les contrôleurs RE et CDF. En effet, on voit l'apparition de double produit $h_i(x)h_j(x)$. Il est alors préférable de se ramener à une condition de type (2.1). On utilise ainsi le théorème suivant :

Théorème 19 (Blanco et al., [6]) *Soit une condition de la forme :*

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^r h_i(x)h_j(x)Q_{ij} < 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.15)$$

avec r^2 matrices symétriques Q_{ij} et des fonctions de pondération $h_i(x)$ satisfaisant la CSP. On peut écrire (2.15) sous la forme (2.1) avec $s = r(r+1)/2$. $\zeta_i(x), i \in I_s$ et $N_i, i \in I_s$ sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \zeta_1(x) = h_1^2(x), & N_1 = Q_{11}, \\ \vdots & \vdots \\ \zeta_r(x) = h_r^2(x), & N_r = Q_{rr}, \\ \zeta_{r+1}(x) = 2h_1(x)h_2(x), & 2N_{r+1} = (Q_{12} + Q_{21}), \\ \vdots & \vdots \\ \zeta_s(x) = 2h_{r-1}(x)h_r(x), & 2N_s = (Q_{(r-1)r} + Q_{r(r-1)}), \end{array} \right.$$

de plus les $\zeta_i(x), i \in I_s$ vérifient la CSP.

Preuve. En regroupant les termes croisés :

$$\sum_{i,j=1}^r h_i(x)h_j(x)Q_{ij} = \sum_{i=1}^r h_i^2(x)Q_{ii} + \sum_{i=1}^r \sum_{j>i}^r 2h_i(x)h_j(x)(Q_{ij} + Q_{ji}),$$

on voit immédiatement

$$\sum_{i,j=1}^r h_i(x)h_j(x)Q_{ij} = \sum_{i=1}^s \zeta_i(x)Q_i.$$

La CSP des fonctions $\zeta_i(x)$ provient de

$$\sum_{i=1}^s \zeta_i(x) = \sum_{i,j=1}^r h_i(x)h_j(x) = 1.$$

■

Cette transformation sera appliquée à un modèle de pendule inverse à deux règles à la fin de ce chapitre.

Dans toute la suite, nous désignerons par $\xi_i(x)$ les fonctions contruites à partir des doubles produits de fonctions de pondération. Dans le cas du PDC, r contrôleurs linéaires sont à définir. Nous noterons $K = \begin{bmatrix} K_1 & \dots & K_r \end{bmatrix}$, le vecteur des gains du PDC. En utilisant encore une fois le théorème 14 :

Théorème 20 (Blanco et al., [6]) *Considérons les systèmes TSC-PDC.*

Soient $\Gamma_j, j \in I_k$ les k points tels que les fonctions $\xi_i(x), i \in I_s$ satisfont les hypothèses de C2, H3).

Soit $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une symétrique définie positive quelconque.

Soient les matrices $N_i(P, K), i \in I_s$ contruites à partir des matrices

$$G_{ij}(P, K) = (A_i - B_i K_j)^T P + P (A_i - B_i K_j), (i, j) \in I_r \quad (2.16)$$

conformément au théorème 19.

S'il existe une matrice P et des gains $K_i, i \in I_r$ satisfaisant

$$\sum_{i=1}^s \Gamma_{ji} N_i(P, K) < 0, j \in I_k,$$

alors l'origine du système est GAS.

Preuve. L'utilisation d'une fonction de Lyapounov quadratique $V = x^T P x$, mène à la condition suffisante de stabilité

$$Q_C(x) = \sum_{i,j=1}^r h_i(x) h_j(x) G_{ij}(P, K) < 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

avec $G_{ij}(P, K)$ définis par (2.16). En utilisant le théorème 19, on obtient les $N_i(P, K), i \in I_s$ avec les fonctions $\xi_i(x), i \in I_s$ correspondantes. On applique alors le théorème 14 pour obtenir la condition

$$\sum_{i=1}^s \Gamma_{ji} N_i(P, K) < 0, \forall j \in I_k.$$

■

Les mêmes résultats sont obtenus pour le système TSD-PDC avec les matrices

$$G_{ij}(P, K) = (A_i - B_i K_j)^T P (A_i - B_i K_j) - P, (i, j) \in I_r^2.$$

2.4 Application des résultats en observation

Par souci de concision, nous présenterons ici uniquement les résultats du continu.

2.4.1 Mise en forme du système augmenté

Considérons ici la stabilisation par commande et observateur PDC.

Définissons le vecteur d'erreur d'observation $e = x - \hat{x}$ ainsi que les fonctions f_i :

$$f_i(x, \hat{x}) = h_i(x) - h_i(\hat{x}), i \in I_r.$$

Ce découpage des fonctions $h_i(\hat{x})$ permet de mettre en avant l'erreur dans l'estimation des fonctions $h_i(x)$. Si les fonctions h_i ne dépendent que d'une partie mesurable de l'état, on aura $f_i(x, \hat{x}) = 0, i \in I_r$.

Utilisons ces expressions pour le développement de TSC-OBC :

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x})(A_i \hat{x} + B_i u) + \left(\sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) L_i \right) \sum_{j=1}^r (h_j(x) C_j x - h_j(\hat{x}) C_j \hat{x}).$$

Après un bouclage par un PDC, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= \sum_{i,j=1}^r h_i(\hat{x}) h_j(\hat{x}) (A_i - B_i K_j) \hat{x} + \left(\sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) L_i \right) \sum_{j=1}^r ((h_j(\hat{x}) + f_j) C_j (e + \hat{x}) - h_j(\hat{x}) C_j \hat{x}), \\ \frac{dx}{dt} &= \sum_{i,j=1}^r h_i(\hat{x}) h_j(\hat{x}) (A_i - B_i K_j) \hat{x} + \left(\sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) L_i \right) \sum_{j=1}^r (f_j C_j (e + \hat{x}) + h_j(\hat{x}) C_j e), \\ \frac{d\hat{x}}{dt} &= \sum_{i,j=1}^r h_i(\hat{x}) h_j(\hat{x}) (A_i - B_i K_j) \hat{x} + \sum_{i,j=1}^r h_i(\hat{x}) (f_j L_i C_j (e + \hat{x}) + h_j(\hat{x}) L_i C_j e) \\ \frac{d\hat{x}}{dt} &= \sum_{i,j=1}^r h_i(\hat{x}) h_j(\hat{x}) (A_i - B_i K_j) \hat{x} + \sum_{i,j=1}^r h_i(\hat{x}) h_j(\hat{x}) L_i C_j e + \sum_{i,j=1}^r f_j h_i(\hat{x}) L_i C_j (e + \hat{x}). \end{aligned}$$

En permutant les indices i et j , on obtient :

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \sum_{i,j=1}^r h_i(\hat{x}) h_j(\hat{x}) (A_i - B_i K_j) \hat{x} + \sum_{i,j=1}^r h_i(\hat{x}) h_j(\hat{x}) L_j C_i e + \sum_{i,j=1}^r f_i h_j(\hat{x}) L_j C_i (e + \hat{x}).$$

Dans le but de former le vecteur augmenté $X^T = \begin{bmatrix} \hat{x} & e \end{bmatrix}$, calculons à présent la dérivée de l'erreur :

$$\frac{de}{dt} = \sum_{i=1}^r h_i(x)(A_i x + B_i u) - \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x})(A_i \hat{x} + B_i u) - \sum_{j=1}^r h_j(\hat{x})L_j(y - \hat{y}).$$

En utilisant la même décomposition de $(y - \hat{y})$ que dans le calcul précédent, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x})A_i e + \sum_{i=1}^r f_i(\cdot)(A_i x + B_i u) - \left(\sum_{i,j=1}^r h_i(\hat{x})h_j(\hat{x})L_i C_j e + \sum_{i,j=1}^r f_j h_i(\hat{x})L_i C_j (e + \hat{x}) \right), \\ \frac{de}{dt} &= \sum_{i,j=1}^r h_i(\hat{x})h_j(\hat{x})(A_i - L_j C_i)e + \sum_{i=1}^r f_i(A_i x + B_i u) - \sum_{i,j=1}^r f_j h_i(\hat{x})L_i C_j (e + \hat{x}) \end{aligned}$$

$$\frac{de}{dt} = \sum_{i,j=1}^r h_i(\hat{x})h_j(\hat{x})(A_i - L_j C_i)e + \sum_{i=1}^r f_i(\cdot)(A_i x + B_i u) - \sum_{i,j=1}^r f_i h_j(\hat{x})L_j C_i (e + \hat{x}).$$

Soit le vecteur augmenté X et la fonction de Lyapounov $V = X^T P X$.

Le long des trajectoires du système, on a :

$$\dot{V}(X) = X^T \left(M^T(\hat{x})P + PM(\hat{x}) \right) X + X^T \left(PW(x, \hat{x}, u) + W^T(x, \hat{x}, u)P \right) X, \quad (2.17)$$

avec

$$\begin{cases} M(\hat{x}) = \sum_{i,j=1}^r h_i(\hat{x})h_j(\hat{x}) \begin{pmatrix} A_i - B_i K_j & L_j C_i \\ 0 & A_i - L_j C_i \end{pmatrix}, \\ W(x, \hat{x}, u) = \sum_{i,j=1}^r f_i h_j(\hat{x}) \begin{pmatrix} L_j C_i x \\ (A_i - L_j C_i)x + B_i u \end{pmatrix}. \end{cases}$$

2.4.2 Cas 1 : fonctions de pondération mesurables

Les fonctions de pondération sont supposées ne dépendre que d'une partie mesurable de l'état, i.e. $f_i = 0, i \in I_r$. Nous noterons $L = \begin{bmatrix} L_1 & \dots & L_r \end{bmatrix}$, le vecteur des gains de l'observateur PDC.

Théorème 21 (Blanco et al.) *Considérons les systèmes TSC-OBC avec l'observateur OBC. Supposons que les fonctions de pondération dépendent d'une partie mesurable de l'état :*

$$h_i(\hat{x}) = h_i(x), i \in I_r.$$

Soient $\Gamma_j, j \in I_k$ les k points tels que les fonctions $\xi_i(x), i \in I_s$ satisfont les hypothèses de $C2, H3$).

Soient P_1, P_2 deux matrices quelconques de $\mathbb{R}^{n \times n}$ symétriques définies positives.

Soient les matrices $N_i(P_1, K), i \in I_s$ contruites à partir des matrices

$$G_{ij}(P_1, K) = (A_i - B_i K_j)^T P_1 + P_1 (A_i - B_i K_j), (i, j) \in I_r^2$$

conformément au théorème 19.

Soient les matrices $S_i(P_2, K), i \in I_s$ contruites à partir des matrices

$$F_{ij}(P_2, K) = (A_i - L_j C_i)^T P_2 + P_2 (A_i - L_j C_i), (i, j) \in I_r^2$$

conformément au théorème 19.

S'il existe deux matrices $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des gains $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}, L_i \in \mathbb{R}^{n \times l}$ satisfaisant

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^s \Gamma_{ji} N_i(P_1, K) < 0, \forall j \in I_k, \\ \sum_{i=1}^s \Gamma_{ji} S_i(P_2, L) < 0, \forall j \in I_k, \end{cases} \quad (2.18)$$

alors l'origine du système considéré est GAS.

Preuve. La preuve est une prolongation du théorème de séparation décrit par *Ma et al.* dans [51]. En effet, *Ma et al.* décrivent deux conditions suffisantes de stabilité du système global :

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^r h_i(x) h_j(x) (A_i - B_i K_j)^T P_1 + P_1 (A_i - B_i K_j) < 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \sum_{i,j=1}^r h_i(x) h_j(x) (A_i - L_j C_j)^T P_2 + P_2 (A_i - L_j C_j) < 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

On a $\xi_i(x) = \xi_i(\hat{x}), i \in I_s$ car $h_i(\hat{x}) = h_i(x), i \in I_r$. En utilisant le théorème 19 pour la première inégalité ci-dessus, on obtient les $N_i(P_1, K), i \in I_s$ avec les fonctions $\xi_i(x), i \in I_s$ correspondantes. On applique alors le théorème 14 pour obtenir la condition

$$\sum_{i=1}^s \Gamma_{ji} N_i(P_1, K) < 0, \forall j \in I_k.$$

En utilisant le théorème 19 pour la deuxième inégalité, on obtient les $S_i(P_2, L), i \in I_s$ avec les fonctions $\xi_i(x), i \in I_s$ correspondantes. On applique alors le théorème 14 pour obtenir la deuxième inégalité de la condition (2.18). ■

2.4.3 Cas 2 : fonctions de pondération non mesurables

Contrairement à l'approche décrite par le théorème 4, nous allons ici discossier la partie connue et la partie inconnue des $h_i(\hat{x})$.

Le terme correspondant à la partie non mesurable de l'état,

$$H(x, \hat{x}, u) = W^T(x, \hat{x}, u)P + PW(x, \hat{x}, u), \quad (2.19)$$

sera majoré le plus finement possible.

Considérons l'hypothèse suivante :

$$C2, H4) \text{ il existe } k_i \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } |f_i| \leq k_i, i \in I_r$$

Lemme 4 (Blanco et al.) Soit le terme $H(x, \hat{x}, u)$ défini par (2.19) avec u défini par

$$u = - \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) K_i \hat{x}.$$

Si C2, H4) est vérifiée, il existe r matrices $T_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ symétriques définies positives telles que

$$- \left(\sum_{i=1}^r k_i T_i \right) \leq H(x, \hat{x}, u) \leq \left(\sum_{i=1}^r k_i T_i \right), \quad (2.20)$$

avec $T_i, i \in I_r$ vérifiant

$$-T_i \leq H_{ijk}^T P + P H_{ijk} \leq T_i, (j, k) \in I_r^2, \quad (2.21)$$

avec

$$H_{ijk} = \begin{pmatrix} L_j C_i & L_j C_i \\ A_i - L_j C_i - B_i K_k & A_i - L_j C_i \end{pmatrix} - H, (i, j, k) \in I_r^3,$$

et $H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$.

Preuve. Cette preuve nous fournit une méthode de construction des $T_i, i \in I_r$.

L'introduction de l'expression du contrôleur dans la fonction $W(x, \hat{x}, u)$ conduit à

$$W(x, \hat{x}, u) = \sum_{i,j=1}^r f_i h_j(\hat{x}) \begin{pmatrix} L_j C_i x \\ (A_i - L_j C_i) x + B_i u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^r f_i h_k(\hat{x}) h_j(\hat{x}) \begin{pmatrix} L_j C_i (e + \hat{x}) \\ ((A_i - L_j C_i)(e + \hat{x}) - B_i K_k \hat{x}) \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^r f_i h_k(\hat{x}) h_j(\hat{x}) H_{ijk} X,
 \end{aligned}$$

Dans le but d'utiliser $f_1 + \dots + f_r = 0$, nous allons introduire une matrice $H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$. On peut alors remplacer H_{ijk} par $H_{ijk} - H$ dans l'expression de $W(x, \hat{x}, u)$. L'objectif de H est de minimiser les valeurs propres des matrices $(H_{ijk} - H)^T P + P(H_{ijk} - H)$. De plus, il existe toujours r matrices $T_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $i \in I_r$ symétriques définies positives telles que (2.21) soit vérifiée pour tout couple (j, k) de I_r^2 . Comme les $h_i(\hat{x})$, $i \in I_r$ sont toujours positives avec une somme égale à 1, on peut écrire :

$$-T_i \leq \sum_{j,k=1}^r h_k(\hat{x}) h_j(\hat{x}) (H_{ijk}^T P + P H_{ijk}) \leq T_i, i \in I_r.$$

Sous l'hypothèse C2, H4), on a aussi

$$-k_i T_i \leq f_i \sum_{j,k=1}^r h_k(\hat{x}) h_j(\hat{x}) (H_{ijk}^T P + P H_{ijk}) \leq k_i T_i, i \in I_r.$$

En faisant la somme sur i de ces inégalités, on obtient effectivement (2.20). ■

Utilisons ce lemme, pour établir le théorème suivant :

Théorème 22 (Blanco et al.) *Considérons le système augmenté TS en continu : TSC-OBC avec l'observateur OBC.*

Supposons que les fonctions $f_i(x, \hat{x}) = h_i(x) - h_i(\hat{x})$ vérifient l'hypothèse C2, H4).

Soient $\Gamma_j, j \in I_k$ les k points tels que les fonctions $\xi_i(\hat{x}), i \in I_s$ vérifient les hypothèses de C2, H3).

Soit $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, symétrique définie positive.

Notons $T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ la matrice $k_1 T_1 + \dots + k_r T_r$, avec $T_i, i \in I_r$ définis grâce au lemme 4.

Soient les matrices $U_i(P, K, L), i \in I_s$ contruites à partir des matrices

$$\begin{cases} M_{ij}^T P + P M_{ij}, (i, j) \in I_r^2 \\ M_{ij} = \begin{pmatrix} A_i - B_i K_j & L_j C_i \\ 0 & A_i - L_j C_i \end{pmatrix}, (i, j) \in I_r^2 \end{cases}$$

conformément au théorème 19.

Supposons qu'il existe des matrices P et $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $L_i \in \mathbb{R}^{n \times l}$ satisfaisant

$$\sum_{i=1}^s \Gamma_{ji} U_i(P, K, L) + T < 0, \forall j \in I_k,$$

alors l'origine du système augmenté est GAS.

Preuve. La dérivée de la fonction de Lyapounov $X^T P X$ du système augmenté est :

$$\dot{V}(X) = X^T \left(M^T(\hat{x})P + PM(\hat{x}) + \sum_{i,j,k=1}^r f_i h_k(\hat{x}) h_j(\hat{x}) \left(H_{ijk}^T P + P H_{ijk} \right) \right) X.$$

Le lemme 4 permet d'obtenir la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}(X) &\leq X^T \left(M^T(\hat{x})P + PM(\hat{x}) + T \right) X, \\ \dot{V}(X) &\leq X^T \left(\sum_{i,j=1}^r h_i(\hat{x}) h_j(\hat{x}) \left(M_{ij}^T P + P M_{ij} + T \right) \right) X. \end{aligned}$$

On a ainsi la condition suffisante de stabilité asymptotique :

$$\sum_{i,j=1}^r h_i(\hat{x}) h_j(\hat{x}) \left(M_{ij}^T P + P M_{ij} + T \right) < 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

En utilisant le théorème 15 avec les $\left(M_{ij}^T P + P M_{ij} + T \right)$, on obtient la condition suffisante de stabilité :

$$\sum_{i=1}^s \Gamma_{ji} U_i(P, K, L) + T < 0, \forall j \in I_k.$$

■

2.4.4 Mise en forme LMI des problèmes du deuxième chapitre

Stabilité/Stabilisation

Au cours du premier chapitre, nous avons donné un certain nombre d'outils pour la formulation LMI de problèmes d'optimisation. Tous ces outils vont s'appliquer ici.

Nous noterons toutefois que dans le cas du système augmenté avec variables de prémisses non mesurables, nous obtenons des équations de type BMI (Bilinear Matrix Inequalities).

– Cas continu

Toutes les inégalités matricielles obtenues ici sont du type :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^s q_i \left((A_i - B_i X)^T P + P (A_i - B_i X) \right) < 0, \quad (\text{type 1}) \\ \sum_{i=1}^s q_i \left((A_i - X C_i)^T P + P (A_i - X C_i) \right) < 0, \quad (\text{type 2}) \end{array} \right.$$

avec comme inconnues X et P et des constantes $q_i, i \in I_r$ en somme convexe. Pour les inégalités de type 1, on considère le changement d'inconnues bijectif $S = P^{-1}, W = XS$. L'inégalité de type 1 définie ci-dessus s'écrit alors sous la forme LMI :

$$\sum_{i=1}^s q_i \left(S A_i^T + A_i S - W_i^T B_i - B_i W \right) < 0.$$

Pour les équations de type 2, il suffit de poser $W = XS$ pour obtenir des LMIs.

- Cas discret

Dans le cas discret, l'application du lemme du complément de Schur est nécessaire pour manipuler les expressions du type $(A - BX)^T P (A - BX) - P$. Par exemple, dans le cas de la CDF, les conditions de stabilité s'écrivent, après application du lemme (2) :

$$\sum_{i=1}^r \Gamma_{ji} \left(\begin{array}{cc} P & (A_i - B_i K_i) \\ (A_i - B_i K_i)^T & P \end{array} \right) > 0, j \in I_k.$$

Stabilisation multicritère

Un énoncé précis de l'écriture des contraintes dans chacun des cas développés ici serait trop long. Nous nous contenterons donc de donner les LMIs correspondants à des cas particuliers. Les principes utilisés pour établir les contraintes LMIs suivantes sont exposés dans [11].

1. Contraintes sur la commande

Pour le système TSC-PDC avec les conditions initiales $x(0)$. Soient $S = P^{-1}$ et γ une constante réelle positive. Si les LMIs

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & x(0) \\ x(0)^T & S \end{array} \right) \geq 0, \\ \left(\begin{array}{cc} S & K_i S \\ (K_i S)^T & \gamma^2 I \end{array} \right) \geq 0,$$

sont vérifiées, alors $\|u\|_2 \leq \gamma, t \geq 0$. Il est alors possible d'optimiser le paramètre $\gamma \in \mathbb{R}^+$.

2. Contraintes de sortie

De même, il est possible d'imposer des contraintes sur $\|y\|_2$ avec les conditions initiales $x(0)$. En effet, si les LMIs :

$$\begin{pmatrix} 1 & x(0) \\ x(0)^T & S \end{pmatrix} \geq 0, \\ \begin{pmatrix} S & C_i \\ C_i^T & \lambda^2 I \end{pmatrix} \geq 0,$$

sont vérifiées, alors $\|y\|_2 \leq \lambda, t \geq 0$.

3. Contraintes de stabilité exponentielle

La vitesse de convergence de x vers l'origine peut être exprimée par un degré de stabilité exponentielle $\alpha > 0$. Dans le cas quadratique, on résoud alors des inégalités matricielles du type

$$\dot{V}(x) + \alpha x^T P x < 0.$$

Les conditions de stabilité/stabilisation LMIs sont peu modifiées par l'adjonction du terme αP , la CSP des fonctions $\Gamma_{js}, s \in I_k$ facilite en effet l'incorporation du terme αP dans l'expression de \dot{V} .

On notera que dans la majeure partie des cas, il ne sera pas possible d'exprimer α comme une contrainte LMI. Il sera alors nécessaire de fixer α avant de procéder à la détermination LMI des gains.

Par exemple, considérons le système TSC-CDF. On a une convergence exponentielle en α si les contraintes suivantes sont vérifiées :

$$\sum_{i=1}^r \Gamma_{ji} \left((A_i - B_i K_i)^T P + P (A_i - B_i K_i) + \alpha P \right) < 0, \forall j \in I_k,$$

4. Comportement à l'origine

Il est fréquent qu'un des sous-modèles (A_i, B_i) corresponde au linéarisé tangent du système à l'origine. Dans le cas d'un PDC, comme un gain K_{i0} a pour but de stabiliser le système (A_{i0}, B_{i0}) , il est possible de choisir K_{i0} pour faire un placement de pôle à l'origine. Le gain K_{i0} n'est alors plus une inconnue mais une donnée dans le système de LMIs à résoudre.

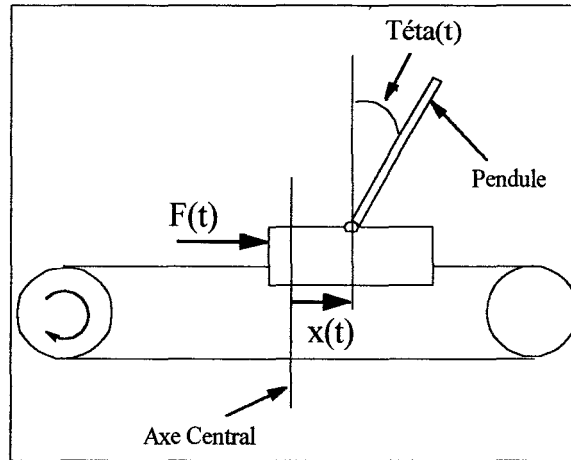


FIG. 2-3: Schéma du pendule inverse

Dans le même ordre d'idée, on peut régler tous les gains pour obtenir un comportement donné des sous-systèmes $(A_i, B_i), i \in I_r$. A l'aide des conditions de stabilité, on vérifie ensuite que le système ainsi défini est stable.

2.5 Application en simulation : "Pendule Inverse"

Pour comparer les critères Tanaka et aux critères développés dans ce chapitre, nous proposons ici un exemple de stabilisation d'un modèle de pendule inversé.

2.5.1 Modèle de connaissance du système

Présentation du pendule :

Un pendule inversé est composé d'un chariot mobile pouvant se déplacer le long d'un rail. Le pendule, libre en rotation dans un plan, est fixé au chariot comme indiqué sur la figure 2-3.

On repère par la variable $\theta(t)$ l'angle que fait le pendule avec l'axe central du chariot. $x(t)$ est la position de l'axe central du chariot par rapport au centre du rail. La force $F(t)$ que l'on exerce sur le rail sera considérée proportionnelle à une tension $u(t)$: $F(t) = Gu(t)$, avec G en NV^{-1} .

Le modèle proposé ci-dessous est tiré des travaux de *Vermeiren et al.* [81], réalisé sur une plateforme d'essai. A partir des équations électriques et mécanique du système et les équations

d'Euler Lagrange [40], et après simplifications, *Vermeiren et al.* obtiennent :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{M}(-f\dot{x} + mg \sin \theta \cos \theta + Gu(t)), \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{LM}(g(M+m) \sin \theta - f \cos \theta \dot{x} + \cos \theta Gu(t)), \end{cases} \quad (2.22)$$

avec les valeurs numériques :

$x(t)$	Position du chariot	m
$\theta(t)$	Angle du pendule	rad
$u(t)$	Tension	V
M	Masse totale du chariot	$20 Kg$
f	Frottements	$150 N.m.rad^{-1}$
m	Masse du pendule	$0.025 Kg$
g	Gravité	$9.81 ms^{-2}$
G	Lien Force/Tension	$50 N.V^{-1}$
L	Demi-Longueur du pendule	$0.1 m$

Objectif à réaliser :

Nous souhaitons déterminer une commande $u(t)$ telle que le vecteur d'état défini par $x(t)^T = \begin{bmatrix} \theta(t) & X(t) & \dot{X}(t) & \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$, tende asymptotiquement vers l'origine pour un domaine le plus grand possible de conditions initiales. Pour obtenir une simulation proche du système physique, on se fixera éventuellement une borne supérieure pour $\|u\|_2$ et une convergence exponentielle.

2.5.2 Mise en forme TS du pendule inverse

Nous allons suivre la méthodologie préconisée dans la section 1.5.2 du premier chapitre. Dans tout domaine $D_{\theta_0} = [-\theta_0, +\theta_0]$, $0 \leq \theta_0 < \pi/2$, nous allons montrer que (2.22) peut être écrit sous forme d'un modèle Takagi-Sugeno continu à 4 sous-modèles :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^4 h_i(x)(A_i x + B_i u), \\ y = Cx, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Ecrivons tout d'abord (2.22) sous la forme $\dot{x} = A(x)x + B(x)u$ avec

$$A(x)x = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \\ -(f/M)\dot{x} + \left((mg/M)\frac{\sin\theta}{\theta} \cos\theta\right) \theta \\ -(f \cos\theta/LM)\dot{x} + \left((g(M+m)/LM)\frac{\sin\theta}{\theta}\right) \theta \end{bmatrix},$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G/M \\ G \cos\theta/LM \end{bmatrix}.$$

Pour une valeur θ_0 donnée, on définit $\alpha = \frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$ et $\beta = \cos(\theta_0)$. Ecrivons $\cos\theta$ comme somme convexe de β et 1, et $\frac{\sin\theta}{\theta}$ comme somme convexe de α et 1 :

$$\begin{cases} \frac{\sin\theta}{\theta} = F_{\sin} \cdot 1 + F'_{\sin} \cdot \frac{\sin\theta_0}{\theta_0}, & F'_{\sin} = 1 - F_{\sin}, \\ \cos\theta = F_{\cos} \cdot 1 + F'_{\cos} \cdot \cos\theta_0, & F'_{\cos} = 1 - F_{\cos}, \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} F_{\sin} = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{\sin\theta}{\theta} - \alpha \right), \\ F'_{\sin} = \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta} \right), \\ F_{\cos} = \frac{1}{1-\beta} (\cos\theta - \beta), \\ F'_{\cos} = \frac{1}{1-\beta} (1 - \cos\theta). \end{cases}$$

L'utilisation de ces expressions dans $\dot{x} = A(x)x + B(x)u$ nous permet d'écrire le système sous la forme (2.23) avec

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G/M \\ G/LM \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G/M \\ G \cos\theta_0/LM \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 5\beta \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (mg/M) & 0 & -(f/M) & 0 \\ (g(M+m)/LM) & 0 & -(f/LM) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0123 & 0 & -7.5 & 0 \\ 98.2 & 0 & -75 & 0 \end{bmatrix}, \\
A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (mg/M) \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} & 0 & -(f/M) & 0 \\ (g(M+m)/LM) \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} & 0 & -(f/LM) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0123\alpha & 0 & -7.5 & 0 \\ 98.2\alpha & 0 & -75 & 0 \end{bmatrix}, \\
A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (mg/M) \cos \theta_0 & 0 & -(f/M) & 0 \\ (g(M+m)/LM) & 0 & -(f/LM) \cos \theta_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0123\beta & 0 & -7.5 & 0 \\ 98.2 & 0 & -75\beta & 0 \end{bmatrix}, \\
A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (mg/M) \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \cos \theta_0 & 0 & -(f/M) & 0 \\ (g(M+m)/LM) \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} & 0 & -(f/LM) \cos \theta_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0123\alpha\beta & 0 & -7.5 & 0 \\ 98.2\alpha & 0 & -75\beta & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Les fonctions de pondération sont alors :

$$\begin{cases} h_1(\theta) = \frac{1}{(1-\beta)(1-\alpha)} (\cos \theta - \beta) \left(\frac{\sin \theta}{\theta} - \alpha \right), \\ h_2(\theta) = \frac{1}{(1-\beta)(1-\alpha)} (\cos \theta - \beta) \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right), \\ h_3(\theta) = \frac{1}{(1-\beta)(1-\alpha)} (1 - \cos \theta) \left(\frac{\sin \theta}{\theta} - \alpha \right), \\ h_4(\theta) = \frac{1}{(1-\beta)(1-\alpha)} (1 - \cos \theta) \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right). \end{cases}$$

2.5.3 Résultats comparatifs dans le cas observable

Dans un but de comparaison, nous considérerons ici l'état complètement mesurable.

Un régulateur de type CDF n'est pas envisageable car les matrices $B_i, i \in I_4$ ne sont pas linéairement dépendantes. On utilisera donc un régulateur PDC. L'application du théorème 21 impose la transformation du système en

$$\dot{x} = \left(\sum_{i=1}^{10} \lambda_i(\theta) G_i \right) x,$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = (h_1(\theta))^2, \dots, \lambda_4 = (h_4(\theta))^2, G_1 = A_1 - B_1K_1, \dots, G_4 = A_4 - B_4K_4, \\ \lambda_5 = 2h_1h_2, G_5 = 0.5((A_1 - B_1K_2) + (A_2 - B_2K_1)), \\ \lambda_6 = 2h_1h_3, G_6 = 0.5((A_1 - B_1K_3) + (A_3 - B_3K_1)), \\ \lambda_7 = 2h_1h_4, G_7 = 0.5((A_1 - B_1K_4) + (A_4 - B_4K_1)), \\ \lambda_8 = 2h_2h_3, G_8 = 0.5((A_2 - B_2K_3) + (A_3 - B_3K_2)), \\ \lambda_9 = 2h_2h_4, G_9 = 0.5((A_2 - B_2K_4) + (A_4 - B_4K_2)), \\ \lambda_{10} = 2h_3h_4, G_{10} = 0.5((A_3 - B_3K_4) + (A_4 - B_4K_3)). \end{array} \right.$$

Le système de LMIs à vérifier est alors

$$\sum_{i=1}^{10} \Gamma_{ji} N_i(P_1, K) < 0, j \in I_k,$$

avec les $N_i, i \in I_{10}$ et $\lambda_i, i \in I_{10}$ construites à partir des $G_i^T P + P G_i, i \in I_{10}$ conformément au théorème 19. Les k points $\Gamma_j, j \in I_k$ sont obtenus par discrétisation du domaine D_{θ_0} . Il est clair que le nombre de points choisis a des conséquences sur les résultats numériques des optimisations LMI. Pour nos simulations, nous nous sommes arrêtés à $k = 200$. En effet, pour $k > 200$, nous n'avons plus constaté de différence sur les valeurs optimales obtenues.

Les valeurs numériques des gains du PDC dépendent des différentes contraintes considérées. Pour démontrer l'intérêt de la prise en compte des valeurs des fonctions de pondération, le tableau suivant présente des résultats comparatifs. "Notre critère" correspond au théorème 20. "Critère de Tanaka" correspond au théorème 2 du premier chapitre. δ représente le taux de convergence exponentielle.

Contraintes	Optimisation	Notre critère	Critère de Tanaka
$\theta_0 = 1.2, \delta = 0$	$\min(u_{\max})$	7.9	10.2
$ u _{\max} = 20, \theta_0 = 1.2$	$\max(\delta)$	6.6	1.8
$ u _{\max} = 10, \delta = 0$	$\max(\theta_0)$	1.27	1.19
$\theta_0 = 1.2, \delta = 2$	$\min(u_{\max})$	10.9	21.9

Nous notons que notre critère donne de biens meilleurs résultats que celui de Tanaka, spécialement pour l'optimisation du taux de convergence. On notera de plus que les conditions relâchées de [76] donnent des résultats quasi équivalents au critère du théorème 2.

2.5.4 Simulation en cas non observable

Comme les fonctions de pondération ne dépendent que d'une partie mesurable de l'état, il est possible d'utiliser le principe de séparation du théorème 21.

Synthèse de l'observateur :

Nous choisirons ici un observateur linéaire. Les résultats valides pour un PDC seront applicables ici avec $L_1 = \dots = L_r = L$, avec le gain L à déterminer. Ainsi l'observateur est décrit par

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = \sum_{i=1}^4 h_i(x)(A_i\hat{x} + B_i u(t)) + L(y - \hat{y}), \\ \hat{y} = C\hat{x}. \end{cases}$$

Pour le choix du gain K , on doit résoudre l'équation

$$\sum_{i=1}^4 h_i(x) \left((A_i - LC)^T P_2 + P_2 (A_i - LC) \right) < 0,$$

avec pour inconnues L et P_2 . Pour une valeur donnée du paramètre $\theta_0 > 0$, les fonctions $h_i(\theta)$ vont atteindre leurs bornes 0 et 1 lors du parcours de la trajectoire. Ainsi, d'après C2, H2) on peut se contenter de la résolution des quatre LMIs suivantes :

$$(A_i - LC)^T P_2 + P_2 (A_i - LC) < 0, i \in I_4.$$

On considère à présent le système augmenté avec $\theta_0 = 1.2$ avec les conditions initiales $[1, 0, 1, -1]$. On souhaite optimiser un taux de convergence exponentiel : maximiser $\alpha > 0$ tel qu'il existe $Z = P_2 L$ et P_2 satisfaisant

$$A_i^T P_2 + P_2 A_i - ZC - (ZC)^T + \alpha P_2 < 0, i \in I_4.$$

Pour éviter tout problème numérique, on contraint les valeurs propres des matrices P_2 :

$\text{spec}(P_2) \in [1, 100]$. On trouve $\alpha = 2.6$ avec

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \begin{bmatrix} -15.9 & 1330 \\ 1320 & -17.5 \\ 22.0 & -104 \\ -494 & 5710 \end{bmatrix}, \\ P_2 = \begin{bmatrix} 91.5 & -1.14 & 7.04 & 5.75 \\ -1.14 & 66.8 & -1.39 & 0.444 \\ 7.04 & -1.39 & 93.5 & 0.115 \\ -5.75 & 0.444 & 0.115 & 1.38 \end{bmatrix}. \end{array} \right.$$

Synthèse du retour de sortie (utilisation de l'état d'observateur) :

On utilise ici un régulateur PDC :

$$u = - \left(\sum_{i=1}^4 h_i(\theta) K_i \right) \hat{x}.$$

Comme nous venons de le voir, le système de LMIs à vérifier est alors

$$\sum_{i=1}^{10} \Gamma_{ji} N_i(P_1, K) < 0, j \in I_k.$$

Pour avoir un comportement donné à l'origine, on se fixe le réglage de K_1 ([81]). Comme A_1 représente le linéarisé du système à l'origine, il est possible de choisir K_1 pour réaliser un placement de pôles de $A_1 - B_1 K_1$. Les valeurs propres de A_1 sont $-9.9, -7.5, 0, 9.9$. On choisit les valeurs propres de $A_1 - B_1 K_1$: $-10, -10, -7.5, -2$. En utilisant la procédure de placement de pôles de *Matlab*, on obtient

$$K_1 = \begin{bmatrix} 8.37 & -3.06 & -4.08 & 0.85 \end{bmatrix}.$$

Pour les autres gains du PDC, on va minimiser la valeur maximale admissible de $|u|$. A l'aide de la procédure LMI de *Scilab*, on détermine les gains suivants $K_2 = K_3 = K_4 = \begin{bmatrix} 32.6 & -14.3 & -12.5 & 3.5 \end{bmatrix}$, avec une valeur optimale $u_{\max} = 30$. La matrice de Lyapounov

obtenue est :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.44 & -0.36 & 0.10 \\ -0.44 & 0.26 & 0.18 & -0.047 \\ -0.36 & 0.18 & 0.19 & -0.038 \\ 0.10 & -0.047 & 0.038 & 0.012 \end{bmatrix}.$$

Les figures 2-4 et 2-5 représentent l'évolution de la commande $u(t)$, des variables d'état et de leur estimation :

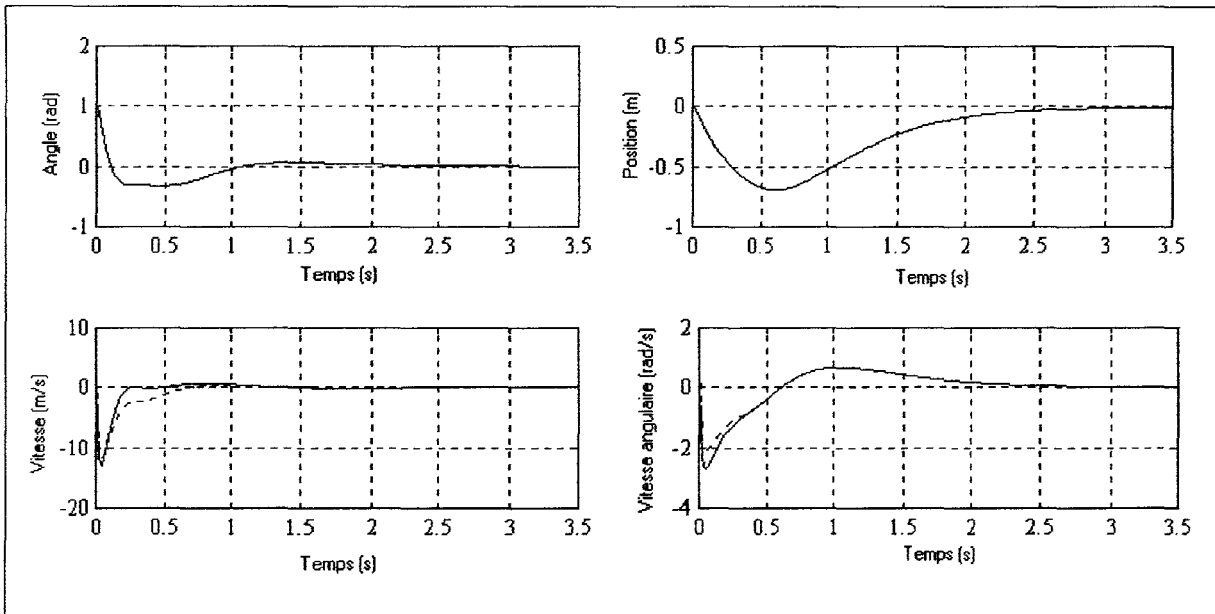


FIG. 2-4: Pendule inverse : simulation, évolution des variables d'états

Comme θ et X sont des valeurs mesurées, il n'y a pas d'erreur d'observation sur la position du chariot et sur l'angle du pendule.

On constate que les estimations de la vitesse angulaire et la vitesse du chariot restent proches des valeurs réelles. Sur ces courbes, on observe une stabilisation rapide du système : le système augmenté est stabilisé à l'origine en approximativement 2 secondes.

2.6 Avancées et limites du deuxième chapitre

Au cours de ce chapitre, nous avons proposé de nouvelles méthodes pour la stabilisation par fonctions de Lyapounov quadratiques des modèles TS, dans les cas discret et continu. Ainsi, nous avons pu mettre en avant les éléments principaux suivants :

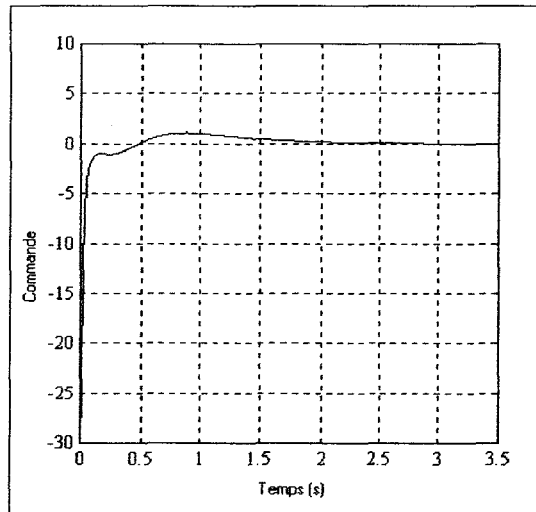


FIG. 2-5: Pendule inverse : simulation, évolution de la commande

- Dans le cas de fonctions de Lyapounov quadratiques, les critères classiques de Tanaka en BO et avec un retour d'état s'apparentent à des problèmes de commande robuste car les valeurs des fonctions de pondération ne sont pas prises en compte dans les conditions de stabilité.
- Il est possible, dans les cas RE et BO, d'utiliser la connaissance des fonctions de pondération pour obtenir de meilleurs résultats.
- Même dans le cas du PDC et des problèmes d'observation, où la connaissance des fonctions de pondération est exploitée dans les contrôleurs, nous avons montré que l'on pouvait en faire une utilisation plus fine pour diminuer le conservatisme des résultats.
- Tous les critères développés dans ce chapitre s'appuient sur une exploitation du domaine de variation des fonctions de pondération. Les résultats obtenus sont meilleurs que ceux de Tanaka en terme de performance mais il faut consentir pour cela à des calculs plus complexes. On notera par ailleurs que nos critères sont plus larges, dans le sens de l'inclusion, que ceux de Tanaka.

Malgré ces avancées en matière de conservatisme, nous restons dans ce chapitre limité par l'usage de fonctions de Lyapounov quadratiques.

Il paraît alors naturel de développer des critères de stabilité basés sur l'utilisation de fonctions de Lyapounov non quadratiques.

Chapitre 3

Stabilisation non Quadratique des Modèles Takagi-Sugeno

3.1 La commande PDC : quelques réflexions

Pour illustrer l'intérêt d'une approche non quadratique d'une étude de stabilité, nous proposons ici quelques réflexions sur le PDC.

L'objectif initial du PDC est de stabiliser de manière individualisée chaque sous-système (A_i, B_i) . Il est donc nécessaire que les paires (A_i, B_i) soient stabilisables. Dans le cas général, le système TSC-PDC s'écrit :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i^2(x) (A_i - B_i K_i) x + \sum_{i=1}^r \sum_{j \neq i}^r h_i(x) h_j(x) (A_i - B_i K_j) x. \quad (3.1)$$

On retrouve l'idée première du PDC dans le premier terme de l'équation (3.1) : le contrôleur K_i a pour but de stabiliser le système (A_i, B_i) . En revanche, le second terme correspond à des éléments non désirés puisque le contrôleur K_j n'est pas réglé pour stabiliser les dynamiques de $(A_i - B_i K_j)$.

Ainsi, le cas où la matrice B est commune est favorable car les dynamiques du système bouclé s'écrivent :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(x) (A_i - B K_i) x. \quad (3.2)$$

L'expression des dynamiques du système en BF se présente ici sous une forme sans termes croisés.

Supposons à présent que les fonctions de pondération atteignent leurs bornes. Dans ce cas,

d'après le théorème 1, on obtient pour le système (3.2) les conditions suffisantes de stabilité asymptotique suivantes :

$$(A_i - BK_i)^T P + P(A_i - BK_i) < 0, i \in I_r. \quad (3.3)$$

Ces conditions demeurent non pleinement satisfaisantes. En effet, en supposant que toutes les paires (A_i, B) sont stabilisables, hypothèse équivalente à l'existence de r matrices P_i telles que

$$(A_i - BK_i)^T P_i + P_i(A_i - BK_i) < 0, i \in I_r,$$

nous n'avons aucune garantie quant à l'existence d'une matrice P commune à tous les modèles, c'est à dire vérifiant (3.3).

Pour remédier à cet inconvénient lié à l'utilisation d'une fonction de Lyapounov quadratique, l'idée d'une fonction non quadratique est naturelle. Naturelle aussi sera sa forme, comme nous allons le voir dans la section suivante.

3.2 Construction d'une fonction de Lyapounov non quadratique en continu

Pour alléger les preuves des théorèmes de stabilité de la section 3.3, nous présentons dans un premier temps la fonction de Lyapounov retenue ainsi que le calcul de sa dérivée le long des trajectoires du système TSC-BO.

3.2.1 Choix de la fonction et motivations

Soit la fonction candidate à Lyapounov suivante :

$$V(x) = x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) P_i \right) x, \quad (3.4)$$

où les matrices $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, symétriques définies positives, sont des matrices de Lyapounov pour les sous-systèmes (A_i, B_i) .

La fonction définie par (3.4) est une fonction définie positive. En effet, il existe deux réels λ_1 et λ_2 de $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ tels que

$$\lambda_1 I \leq P_i \leq \lambda_2 I, i \in I_r$$

La propriété de somme convexe des fonctions $h_i(x)$ nous permet de conclure

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq \lambda_2 \|x\|^2.$$

Ainsi $V(x)$ est bien une fonction de Lyapounov.

Il est intéressant de noter par ailleurs que la structure de cette fonction de Lyapounov nous permet d'englober le cas quadratique : il suffit de choisir $P_i = P, i \in I_r$.

Pour calculer la dérivée de la fonction de Lyapounov (3.4), nous supposons dans tout ce chapitre que les fonctions de pondération vérifient l'hypothèse suivante :

C3, H1) le gradient des fonctions $h_i(x), i \in I_r$ existe.

L'hypothèse *C3, H1*) permet de prouver l'existence de la dérivée temporelle des fonctions $h_i(x(t))$. En effet, on peut décomposer la dérivée temporelle des $h_i(x(t)), i \in I_r$ sous la forme :

$$\frac{dh_i(x(t))}{dt} = \Delta h_i(x) \dot{x}, i \in I_r. \quad (3.5)$$

Pour le gradient $\Delta h_i(x)$ nous utiliserons les conventions de notations classiques données en début de ce mémoire.

Remarque 3 Dans le cas où les fonctions de pondération ne vérifient pas l'hypothèse *C3, H1*), il est possible d'utiliser la notion de gradient généralisé décrite dans [13] en supposant les fonctions $h_i(x)$ lipschitziennes. On considèrera alors l'inclusion différentielle :

$$\Delta h_i(x) \in D(x),$$

avec $D(x)$ un ensemble compact pour tout x fixé. Pour mener les preuves de stabilité de manière classique, il faudra alors prouver que la borne supérieure sur le domaine $D(x)$ de la dérivée de la fonction de Lyapounov est définie négative.

En considérant le système TSC avec les fonctions $h_i(x)$ vérifiant l'hypothèse *C3, H1*), la dérivée de la fonction de Lyapounov (3.4) le long des trajectoires du système s'écrit :

$$\dot{V}(x) = L_1(x) + L_2(x),$$

avec

$$L_1(x) = x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) P_i \right) x + x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) P_i \right) \dot{x}, \quad (3.6)$$

$$L_2(x) = x^T \left(\sum_{i=1}^r \frac{dh_i(x(t))}{dt} P_i \right) x. \quad (3.7)$$

Le terme $L_1(x)$ est appelé “terme quadratique” à l’inverse du terme $L_2(x)$, “terme non quadratique”.

3.2.2 Majoration du terme quadratique, cas TSC-BO

Dans cette partie, notre objectif est d’obtenir la majoration la plus fine possible du terme $L_1(x)$, étant donné un ensemble de r matrices $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétriques définies positives.

On utilise les symétries de l’expression $L_1(x)$ pour écrire :

$$L_1(x) = x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i^2(x) M_{ii} + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j>i}^r h_i(x) h_j(x) \frac{M_{ij} + M_{ji}}{2} \right) x,$$

avec les matrices M_{ij} étant définies par

$$M_{ij} = (A_j^T P_i + P_i A_j), (i, j) \in I_r^2.$$

Soit $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrice “majorante” des $M_{ii}, i \in I_r$, vérifiant

$$A_i^T P_i + P_i A_i \leq S, i \in I_r. \quad (3.8)$$

Le caractère défini négatif de S , bien que logique si l’on suppose que les matrices $A_i, i \in I_r$ sont de Hürwitz, n’est pas forcément nécessaire.

Pour majorer les termes croisés, on utilise la matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par :

$$(A_j^T P_i + P_i A_j) + (A_i^T P_j + P_j A_i) \leq 2M, (i, j) \in I_r^2, j > i. \quad (3.9)$$

Nous pouvons ainsi écrire la majoration du terme $L_1(x)$ suivante :

$$L_1(x) \leq x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(x)^2 S + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j>i}^r h_i(x) h_j(x) M \right) x.$$

Comme on a

$$1 = \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) \right) \left(\sum_{j=1}^r h_j(x) \right) = \sum_{i=1}^r h_i(x)^2 + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j>i}^r h_i(x)h_j(x),$$

on obtient la majoration

$$L_1(x) \leq x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(x)^2 S + \left(1 - \sum_{i=1}^r h_i(x)^2 \right) M \right) x.$$

En définissant le vecteur $h(x) \in \mathbb{R}^r$ par

$$h(x)^T = \left[h_1(x) \quad \dots \quad h_r(x) \right],$$

nous obtenons

$$L_1(x) \leq x^T \left(M + \|h(x)\|^2 (S - M) \right) x. \quad (3.10)$$

Pour assurer la plus grande généralité des théorèmes de stabilité qui vont suivre, nous utiliserons la majoration de $L_1(x)$ décrite par (3.10): Pour pouvoir exploiter numériquement l'inégalité (3.10), on utilise le lemme suivant :

Lemme 5 (Blanco et al., [7]) *On suppose les fonctions de pondération continues. Soit le réel positif γ défini par*

$$\gamma = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \|h(x)\|^2.$$

Si les matrices S et M définies par (3.9) et (3.8) vérifient $S - M \leq 0$, alors une majoration possible de $L_1(x)$ est

$$L_1(x) \leq x^T (M + \gamma(S - M)) x. \quad (3.11)$$

De plus, on a toujours

$$L_1(x) \leq x^T (M + r^{-1}(S - M)) x. \quad (3.12)$$

Preuve. La continuité des fonctions de pondération, nous permet de conclure à la continuité de la fonction $\|h(x)\|^2$. Comme les fonctions de pondérations sont bornées, on a existence de bornes supérieure et inférieure pour $\|h(x)\|^2$ sur \mathbb{R}^n . Ainsi, si l'on nomme γ la borne inférieure, l'hypothèse $S - M \leq 0$ nous permet de conclure (3.11).

Comme les fonctions $h_i(x)$ vérifient la CSP, la borne supérieure de $\|h(x)\|^2$ est égale à 1. Pour

la borne inférieure, on peut écrire $\gamma \geq r^{-1}$. En effet, si nous notons

$$h_i = r^{-1} + \varepsilon_i, i \in I_r,$$

avec $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_r = 0$, alors

$$\begin{aligned} \|h(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^r (r^{-1} + \varepsilon_i)^2 = \sum_{i=1}^r (r^{-2} + 2r^{-1}\varepsilon_i + \varepsilon_i^2), \\ &= r^{-1} + \sum_{i=1}^r \varepsilon_i^2, \\ &\geq r^{-1}. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi la majoration (3.12). ■

Remarque 4 *L'ajout de la contrainte LMI ($S - M \leq 0$) est licite : il est raisonnable de penser que les termes non couplés sont plus définis négatifs que les termes couplés. La majoration (3.10) présente l'avantage de la généralité. L'équation (3.12), pour sa part, est écrite sous une forme directement exploitable en résolution numérique. Pourtant, avec l'accroissement du nombre de modèles, trouver des matrices de Lyapounov telles que (3.12) soit vérifiée, va croissant en complexité. Il est alors plus intéressant de se référer à la majoration (3.11), ayant au préalable déterminé γ .*

3.2.3 Majoration du terme non quadratique

Dans cette partie, notre objectif est d'obtenir la majoration la plus fine possible du terme non quadratique $L_2(x)$, étant donné un ensemble de r matrices $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétriques définies positives. Comme il est a priori impossible de fixer le signe de la dérivée des fonctions $h_i(x(t))$ par rapport au temps que ce soit en BO ou en BF, nous cherchons à majorer $L_2(x)$ par une fonction positive. De plus, pour que les résultats développés ici soient valides à la fois en stabilité et en stabilisation, nous ne développerons pas dans ce paragraphe l'expression du vecteur \dot{x} .

Etape 1 : Utilisation de la somme convexe

Soit P_0 une matrice quelconque de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Comme la somme des fonctions de pondération est toujours égale à 1, on a la propriété :

$$\sum_{i=1}^r \left(\frac{dh_i(x(t))}{dt} \right) = 0.$$

Pour utiliser cette propriété, on remplace les matrices $P_i, i \in I_r$ par les matrices $(P_i - P_0), i \in I_r$ dans l'expression de $L_2(x)$. On obtient alors :

$$L_2(x) = x^T \left(\sum_{i=1}^r \left(\frac{dh_i(x(t))}{dt} \right) (P_i - P_0) \right) x.$$

Pour des questions de résolution numérique, seules les matrices P_0 symétriques sont considérées. Il existe toujours une matrice R symétrique définie positive de $\mathbb{R}^{n \times n}$ satisfaisant :

$$-R \leq P_i - P_0 \leq R, i \in I_r. \quad (3.13)$$

En effet, comme $P_i - P_0, i \in I_r$ est symétrique, il existe une base orthogonale où $P_i - P_0$ est diagonale. Soit λ_i , la plus grande valeur absolue des valeurs propres de cette matrice dans la base. On a ainsi

$$-\lambda_i I \leq P_i - P_0 \leq \lambda_i I, i \in I_r.$$

On considère alors $\lambda = \max \left(\lambda_1, \dots, \lambda_r \right)$ pour prouver l'existence d'une matrice R satisfaisant (3.13). Dans la détermination pratique des variables matricielles R et P_0 , on cherchera à minimiser l'importance des termes $(P_i - P_0), i \in I_r$.

Etape 2 : Majoration par la norme

En majorant $L_2(x)$ par sa norme, on obtient :

$$L_2(x) \leq \sum_{i=1}^r \left| \frac{dh_i(x(t))}{dt} \right| \left| x^T (P_i - P_0) x \right|.$$

L'utilisation de (3.13) nous permet d'écrire

$$L_2(x) \leq x^T f(x) R x,$$

avec

$$f(x) = \sum_{i=1}^r \left| \frac{dh_i(x(t))}{dt} \right| \in \mathbb{R}^+. \quad (3.14)$$

Pour exprimer des résultats globaux, il est nécessaire de considérer la décomposition (3.5) de la dérivée temporelle exprimée sous la forme (3.14) :

$$f(x) = \sum_{i=1}^r |\Delta h_i(x) \dot{x}|.$$

A ce stade, plusieurs options de majoration sont à notre disposition ; en effet, soit x et y deux vecteurs quelconques de \mathbb{R}^n , nous pouvons écrire indifféremment :

$$\begin{cases} x^T y \leq 0.5(x^T x + y^T y), \\ x^T y \leq 0.5(x^T R x + y^T R^{-1} y), R > 0, R = R^T, \\ x^T y \leq \|x\| \|y\|. \end{cases}$$

Pour ne pas donner trop d'importance à la norme du gradient, nous choisirons la troisième option, considérant ainsi

$$G_d(x) = \left(\sum_{i=1}^r \|\Delta h_i(x)\| \right) \in \mathbb{R}^+,$$

pour obtenir une majoration de $L_2(x)$ de la forme

$$L_2(x) \leq G_d(x) \|\dot{x}\| (x^T R x). \quad (3.15)$$

On remarquera qu'il est souvent possible de trouver une majoration par une constante positive des fonctions $f(x)$ ou $G_d(x) \|\dot{x}\|$.

Exemple 8 On considère le système TSC-BO à 2 modèles suivant :

$$\dot{x} = (h_1(x)A_1 + h_2(x)A_2)x,$$

avec

$$\begin{cases} h_1(x) = e^{-\|x\|^2}, \\ h_2(x) = 1 - e^{-\|x\|^2}. \end{cases}$$

On définit la constante positive α comme étant le maximum des normes des matrices $\|A_i\|_2, i \in I_2$. Un calcul des gradients des fonctions de pondération nous donne :

$$\begin{cases} \Delta h_1(x) = -2e^{-\|x\|^2} x^T, \\ \Delta h_2(x) = 2e^{-\|x\|^2} x^T. \end{cases}$$

Donc, dans le cas présent,

$$f(x) = \left| 2e^{-\|x\|^2} x^T A_1 x \right| + \left| 2e^{-\|x\|^2} x^T A_2 x \right|.$$

Par définition de la norme, il existe une constante positive α telle que $x^T A_i x \leq \alpha \|x\|^2$.

$$f(x) \leq 4\alpha \left(\|x\|^2 e^{-\|x\|^2} \right).$$

L'étude de la fonction $g(z) = kz^2 e^{-z^2}$ sur \mathbb{R}^+ , nous permet d'obtenir un maximum pour $z = 1$.

On majore ainsi $f(x)$ par une constante :

$$f(x) \leq \frac{4\alpha}{e}.$$

3.3 Critères de stabilité locaux et globaux

3.3.1 Stabilité locale de l'origine

L'utilisation de fonctions de Lyapounov non quadratiques permet d'étudier la stabilité locale du système TSC-BO :

Théorème 23 (Blanco et al., [7]) Soit le système TSC-BO. S'il existe un ensemble de r matrices symétriques définies positives $P_i, i \in I_r$ de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et deux matrices symétriques $S, M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfaisant :

$$\begin{cases} A_i^T P_i + P_i A_i \leq S, i \in I_r, \\ (A_j^T P_i + P_i A_j) + (A_i^T P_j + P_j A_i) \leq 2M, (i, j) \in I_r^2, j > i, \\ S - M \leq 0, \\ M + r^{-1}(S - M) < 0, x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.16)$$

alors l'origine du système considéré est localement asymptotiquement stable pour toutes formes de fonctions de pondération continues.

Preuve. Pour toutes fonctions de pondération, le linéarisé du système à l'origine s'écrit :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(0) A_i x = A_L x.$$

Soit la matrice de Lyapounov P_L définie par :

$$P_L = \left(\sum_{i=1}^r h_i(0) P_i \right) > 0.$$

Les résultats de la section 3.2 nous permettent d'affirmer que si les conditions (3.16) sont vérifiées, alors

$$A_L^T P_L + P_L A_L < 0.$$

Prouvant ainsi que la matrice A_L est de Hürwitz. D'après le premier théorème de Lyapounov, l'origine du système est alors localement asymptotiquement stable. ■

On notera que les conditions (3.16) sont exprimées sous la forme de LMIs d'inconnues M, S et $P_i, i \in I_r$.

Exemple 9 *Considérons le système défini par*

$$\begin{cases} \dot{x} = (h_1(x)A_1(a) + h_2(x)A_2(a, b)) x, \\ A_1(a) = \begin{pmatrix} -0.5 & 5 \\ a & -1 \end{pmatrix}, \\ A_2(a, b) = \begin{pmatrix} -0.5 & 5 \\ a + b & -1 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (3.17)$$

avec a et b deux constantes réelles et $h_i(x), i \in I_2$ deux fonctions inconnues satisfaisant la CSP. Une condition nécessaire et suffisante pour que les matrices A_1 et A_2 soient de Hürwitz est

$$\begin{cases} a < 0.1, \\ a + b < 0.1. \end{cases} \quad (3.18)$$

Il existe de nombreuses paires (a, b) satisfaisant (3.18) et pour lesquelles il n'existe pas de matrice P commune à A_1 et A_2 .

Dans ce cas, on peut utiliser le théorème 23 pour prouver la stabilité asymptotique locale de l'origine. Par exemple, pour $(a_1, b_1) = (0, -5)$ ou $(a_2, b_2) = (-1, -10)$, le théorème 23 assure la stabilité locale de l'origine pour tout type de fonctions de pondération. Pour la première paire, on trouve à l'aide de Scilab les solutions LMIs suivantes :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 185 & 413 \\ 413 & 3392 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 2417 & 68 \\ 68 & 6320 \end{bmatrix}, \\ M = \begin{bmatrix} 14.6 & 9.3 \\ 9.3 & -202 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 94 & -191 \\ -191 & 1738 \end{bmatrix}.$$

3.3.2 Stabilité globale du modèle TS

Théorème 24 (Blanco et al., [7]) Soit le système TSC-BO. Soit un réel positif α satisfaisant

$$A_i^T A_i - \alpha^2 I \leq 0, i \in I_r. \quad (3.19)$$

S'il existe un ensemble de $r + 1$ matrices symétriques définies positives $P_i, i \in I_r$ et R de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et trois matrices symétriques $S, M, P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a. } A_i^T P_i + P_i A_i \leq S, i \in I_r, \\ \text{b. } (A_j^T P_i + P_i A_j) + (A_i^T P_j + P_j A_i) \leq 2M, (i, j) \in I_r^2, j > i, \\ \text{c. } S - M \leq 0, \\ \text{d. } -R \leq P_i - P_0 \leq R, i \in I_r, \\ \text{e. } M + \|h(x)\|^2 (S - M) + \alpha \|x\| G_d(x) R < 0. \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Alors l'origine du système considéré est GAS.

Preuve. Dans le cas TSC-BO, \dot{x} est exprimé par

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(x) A_i x.$$

En utilisant la CSP :

$$\|\dot{x}\| \leq \left(\max_{i \in I_r} \|A_i\| \right) \|x\|.$$

Comme il existe un réel α vérifiant (3.19) et par définition de la norme 2

$$\|A_i\|^2 \leq \alpha^2, i \in I_r,$$

et ainsi

$$\|\dot{x}\| \leq \alpha \|x\|.$$

Les conditions (3.20) nous permettent alors de prouver que la dérivée de la fonction de Lyapounov (3.4) est définie négative. Ceci nous permet de conclure à la stabilité asymptotique globale de l'origine [49]. ■

Obtention de LMIs

Les conditions (3.20), permettent de définir les inconnues P_i, R, S, M, P_0 . Les conditions a,b,c,d sont sous la forme LMI. Le paramètre α est pour sa part non variable et sera déterminé

par

$$\alpha = \left(\sup_{i \in I_r} \|A_i\| \right).$$

Pour l'inégalité e, on peut remplacer $\|h(x)\|^2$ par un réel γ tel que $\gamma \geq \|h(x)\|^2$. En outre, comme nous l'avons vu dans l'exemple 8, il est possible pour certaines formes de fonctions de pondération de majorer le terme $\|x\| G_d(x)$ par une constante. Ainsi, on se ramèra souvent à la recherche d'un majorant $\delta > 0$ de la fonction $\|x\| G_d(x), x \in \mathbb{R}^n$. Ainsi l'inégalité 5 sera écrite sous la forme LMI :

$$M + \gamma(S - M) + \alpha\delta R < 0,$$

avec les inconnues matricielles M, S, R .

“Inclusion algorithmique” de notre critère

Soit le système TSC-BO. En supposant qu'il existe une matrice symétrique définie positive P telle que

$$A_i^T P + P A_i < 0, i \in I_r.$$

Alors, dans l'application des conditions de stabilité (3.20), une solution possible à notre problème est

$$\begin{cases} P_1 = \dots = P_r = P, \\ P_0 = R = 0, \\ S = M = \max_{i \in I_r} (\lambda_{\max}(A_i^T P + P A_i)) I. \end{cases}$$

On voit ainsi que si le problème de stabilité quadratique possède une solution P alors cette solution est aussi valide pour le critère non quadratique présenté. Dans ce cas, le théorème 24 permet d'ajouter a priori des contraintes supérieures sur les solutions P .

Exemple 10 On considère le système défini par (3.17) avec a et b deux constantes réelles et $h_i(x), i \in I_2$ satisfaisant la CSP.

Nous souhaitons prouver la stabilité asymptotique globale de l'origine.

Le théorème 1 dépend des propriétés structurelles des matrices A_1 et A_2 . Par contre, le théorème 24 dépend des valeurs numériques des fonctions de pondération. Pour les paires $m_1 = (0, -5)$ ou $m_2 = (-1, -10)$, aucune matrice P commune à A_1 et A_2 existent. Par application du théorème 24, on peut définir une condition suffisante de stabilité asymptotique globale (GAS) de l'origine

dépendant des fonctions de pondération :

$$\begin{cases} m_1 = (0, -5), G_d(x) \|\dot{x}\| < 0.23 \implies GAS, \\ m_2 = (-1, -10), G_d(x) \|\dot{x}\| < 0.9 \implies GAS, \end{cases}$$

Ceci est vérifié par exemple pour les fonctions de pondération $h_1(z) = 1 - h_2(z) = \frac{\text{Arc tan}(25z)}{25}$, avec $z = \|x\|$.

3.4 Extension des résultats à la stabilisation

Les résultats du théorème 24 vont être très peu modifiés en stabilisation : la fonction de Lyapounov retenue est toujours de la forme (3.4). La grande différence se situe au niveau de la résolution numérique : les critères de stabilité obtenus ne sont plus sous la forme de LMIs mais sous forme d'inégalités matricielles bilinéaires (BMI). En effet, la condition b du théorème 24 n'est pas transformable en LMI par les méthodes classiques.

Les systèmes Takagi-Sugeno bouclés avec des contrôleurs RE et CDF ont une écriture similaire à TSC-BO. Dans le cas du retour d'état, il faut remplacer A_i par $A_i - B_i K_0$; pour la CDF, A_i devient $A_i - B_i K_i$. On utilise alors les conditions de stabilité (3.20) en procédant à ces changements.

En ce qui concerne le PDC, on obtient aussi des conditions de stabilité BMI. Dans le but de compléter notre étude, nous énoncerons le théorème suivant :

Théorème 25 (Blanco et al., [7]) Soit le système TSC-PDC. Soit un réel positif α satisfaisant :

$$(A_i - B_i K_j)^T (A_i - B_i K_j) - \alpha^2 I \leq 0, (i, j) \in I_r^2. \quad (3.21)$$

S'il existe un ensemble de $r + 1$ matrices $P_i, i \in I_r$ et R de $\mathbb{R}^{n \times n}$ symétriques définies positives ainsi que trois matrices symétriques $S, M, P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des gains $K_i, i \in I_r$ satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a. \quad M_{iii} < S, i \in I_r, \\ b. \quad M_{iji} + M_{iij} + M_{jii} \leq 3M \quad \forall (i, j) \in I_r^2, j \neq i, \\ c. \quad M_{ijk} + M_{ikj} + M_{jki} + M_{jik} + M_{kij} + M_{kji} \leq 6M, (i, j, k) \in I_r^3, i \neq j \neq k. \\ d. \quad S - M \leq 0, \\ e. \quad -R \leq P_i - P_0 \leq R, i \in I_r, \\ f. \quad M + \left(\sum_{i=1}^r h_i^3(x) \right) (S - M) + \alpha \|x\| G_d(x) R < 0. \end{array} \right.$$

avec

$$M_{ijk} = (A_i - B_i K_j)^T P_k + P_k (A_i - B_i K_j), (i, j, k) \in I_r^3,$$

alors l'origine du système considéré est GAS.

Preuve. Dans le cas TSC-PDC, \dot{x} est exprimé par

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(x) h_j(x) (A_i - B_i K_j) x.$$

En utilisant la CSP :

$$\|\dot{x}\| \leq \left(\max_{(i,j) \in I_r^2} \|A_i - B_i K_j\| \right) \|x\|.$$

Comme il existe un réel α vérifiant (3.21) et par définition de la norme 2, on obtient

$$\|A_i - B_i K_j\|^2 \leq \alpha^2, (i, j) \in I_r^2,$$

et ainsi

$$\|\dot{x}\| \leq \alpha \|x\|.$$

Soit la dérivée de la fonction de Lyapounov (3.4) le long des trajectoires de TSC-PDC. Le terme $L_2(x)$ s'écrit sous la même forme que celui obtenu pour TSC-BO avec le paramètre α déterminé ci-dessus. Pour la majoration du terme quadratique, on utilise les symétries de l'expression :

$$\dot{x} = \sum_{i,j,k=1}^r h_i(x) h_j(x) h_k(x) \left((A_i - B_i K_j)^T P_k + P_k (A_i - B_i K_j) \right).$$

Il est évident que si il existe des matrices $P_i, i \in I_r$ et des gains $K_i, i \in I_r$ tels que les conditions a,b,c sont vérifiées alors une majoration possible du terme $L_1(x)$ est :

$$L_1(x) \leq M + \left(\sum_{i=1}^r h_i^3(x) \right) (S - M).$$

Ainsi, la somme des majorants de $L_1(x)$ et $L_2(x)$ est définie négative si la condition f du théorème 25 est vérifiée. ■

3.5 Résultats en discret

L'étude de la stabilité non quadratique en discret est due à *Morère et al.* [55, 56]. Nous nous proposons ici, pour illustrer les principes qu'ils utilisent, de donner les résultats obtenus

en stabilité.

3.5.1 Stabilité non quadratique des modèles TS discrets

La fonction de Lyapounov utilisée est semblable à celle utilisée dans le cas quadratique :

$$V = x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) P_i \right) x. \quad (3.22)$$

Nous avons vu que cette fonction était effectivement définie positive.

Afin d'obtenir les conditions de stabilité, le lemme suivant est nécessaire :

Lemme 6 [55] Soient P_i, P_j, P_k trois matrices définies positives de $\mathbb{R}^{n \times n}$ vérifiant :

$$\begin{cases} A_j^T P_i A_j - P_j < 0, \\ A_k^T P_i A_k - P_k < 0, \end{cases}$$

avec A_j et A_k deux matrices quelconques de $\mathbb{R}^{n \times n}$. On a dans ce cas :

$$A_j^T P_i A_k + A_k^T P_i A_j - P_j - P_k < 0,$$

Ce lemme peut être utilisé pour trouver des conditions de stabilité du système TSD-BO :

Théorème 26 [56] Considérons le modèle TSD-BO. S'il existe un ensemble de r matrices $P_i, i \in I_r$ symétriques définies positives de $\mathbb{R}^{n \times n}$ vérifiant :

$$A_j^T P_i A_j - P_j < 0, (i, j) \in I_r^2, \quad (3.23)$$

alors le système considéré est GAS.

3.5.2 Intérêt des critères obtenus

Il est évident que le critère mis en avant dans le théorème 26 inclut le critère du théorème 1 décrit par

$$A_i^T P A_i - P < 0, i \in I_r.$$

En effet, s'il existe une matrice P commune à tous les modèles $A_i, i \in I_r$, la résolution numérique de (3.23) nous fournira un ensemble de matrices de Lyapounov $P_i = P, i \in I_r$. En revanche, et c'est là que réside l'intérêt de la méthode, il est possible de trouver un ensemble de matrice $P_i, i \in$

I_r satisfaisant (3.23) sans qu'il existe une matrice P définie positive vérifiant les conditions du théorème 1.

Exemple 11 Soit le système discret décrit par

$$x^+ = (h_1 A_1 + h_2 A_2) x.$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ 0 & -0.85 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.36 & 0 \\ 1 & -0.8 \end{bmatrix}.$$

Les conditions de stabilité du théorème 1 ne sont pas applicables ici. En revanche, la résolution des conditions (3.23), nous permet de prouver la stabilité asymptotique globale du système avec les matrices de Lyapounov

$$P_1 = \begin{bmatrix} 4.348 & 0.043 \\ 0.043 & 1.611 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 2.885 & -0.932 \\ -0.932 & 1.828 \end{bmatrix}.$$

Pour obtenir les résultats en stabilisation et en observation, le lecteur pourra se référer à [56].

3.6 Limites de l'approche non quadratique en continu

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté une méthode de stabilisation non quadratique des modèles Takagi-Sugeno. Nous avons aussi montré que les critères proposés ici étaient plus généraux que les critères classiques. L'usage de fonctions non quadratiques pour prouver la stabilité locale des modèles TSC s'est révélée à cet égard tout à fait intéressant.

Toutefois, pour l'étude de la stabilité globale, nous remarquons de grandes différences en terme de qualité entre les résultats en discret et en continu, et ce pour un même type de fonction de Lyapounov. En effet, la majeure partie des résultats de stabilisation en discret sont sous forme LMI alors que le même type d'étude donne des BMI en continu. De plus, les calculs requis pour les systèmes continus sont beaucoup plus complexes puisqu'il faut avoir recours à l'étude du gradient des fonctions de pondération.

Ainsi, nous pouvons conclure ce chapitre en constatant que si des fonctions de Lyapounov quadratiques permettent d'obtenir des résultats convainquants en continu, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à des critères basés sur des fonctions non quadratiques.

Ainsi, afin d'obtenir dans la suite de ce mémoire des résultats permettant une résolution numérique rapide, nous nous bornerons à l'utilisation de fonctions de Lyapounov quadratiques.

Deuxième partie

Stabilisation Polytopique

Takagi-Sugeno

Chapitre 4

Stabilisation Polytopique

Takagi-Sugeno des Systèmes sous Forme Régulière

4.1 Intérêt de la mise en forme régulière

Comme nous l'avons vu précédemment, les modèles TS ont été conçus initialement pour étudier des systèmes complexes modélisés par des techniques multimodèles.

L'aspect analytique des modèles TS nous permet d'étendre les résultats valides pour les systèmes multimodèles à l'étude de stabilité et la stabilisation d'une classe de systèmes NL affines en l'entrée :

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u,$$

avec $f(x)$ analytique et $f(0) = 0$, c'est-à-dire pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = A(x)x$.

Pour mener une étude de stabilité rigoureuse utilisant les modèles TS, il est nécessaire de supposer en outre que $A(x)$ et $B(x)$ sont deux matrices bornées de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathbb{R}^{m \times n}$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. (voir premier chapitre)

Dans ce chapitre, nous nous placerons dans ce même cadre, considérant ici les systèmes multi-entrées et multi-sorties perturbés de la forme

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u + p(x, t), \tag{4.1}$$

où $p(x, t)$ est une perturbation additive. $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champs de vecteurs suffisam-

ment différentiable, $B(x) = (b_1(x), \dots, b_m(x))$ est une $(n \times m)$ -matrice où les $b_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des champs de vecteurs suffisamment différentiables. $b_{ij}(x)$ est le gain de commande de la $j^{\text{ème}}$ entrée agissant sur la $i^{\text{ème}}$ variable d'état. On supposera l'état mesurable.

Les études menées dans les chapitres précédents portaient sur l'amélioration des critères de stabilité existants pour les modèles TS avec les commandes classiques (PDC, CDF, RE). Nous avons vu le grand intérêt d'une commande PDC dans le cas de l'existence d'une matrice de commande B commune à tous les sous-modèles $S_i, i \in I_r$. Il est aussi notable qu'un PDC se confond avec une CDF dans ce cas particulier.

Cette considération s'avère extrêmement intéressante lorsque l'on songe à la transformation en forme régulière décrite dans [50, 61]. Ainsi il s'avère possible, sous certaines conditions que nous nous attacherons à mettre en avant (section 4.2), de reformuler le système (4.1) pour le décomposer en un sous-système \mathcal{E}_1 libre et un sous-système \mathcal{E}_2 où interviennent les entrées. Une fois cette forme régulière établie, deux options sont à notre disposition :

- En l'absence de perturbations, procéder à la synthèse d'une commande de type PDC. (section 4.3)
- Avec une perturbation $p(z, t)$, commander le système à l'aide d'un mode glissant (section 4.4). Il est ainsi possible de régler les dynamiques du sous-système \mathcal{E}_1 en utilisant z_2 , variable d'état de \mathcal{E}_2 , comme nouvelle commande du système \mathcal{E}_1 . Selon la nature de surface considérée, on pourra prendre en compte des perturbations sur le sous-système \mathcal{E}_1 .

4.2 Mise sous forme régulière

Le but de cette section est de montrer brièvement comment certains systèmes NL peuvent être mis sous une forme adéquate pour la synthèse de lois de commande. Pour ce faire, nous utiliserons un changement de coordonnées global dans l'espace d'état menant à une mise sous forme régulière.

Le changement de coordonnées utilisé met en oeuvre des notions de géométrie différentielle [39].

La forme régulière obtenue permet de décomposer le système donné en deux sous-systèmes.

Dans ce qui suit, nous verrons sous quelles conditions (4.1) peut être transformé en la forme

régulière perturbée suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f^1(z), \\ \dot{z}_2 = f^2(z) + B^R(z)u + p^R(z, t), \\ z_1 \in \mathbb{R}^{(n-d)}, z_2 \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (4.2)$$

avec $d \leq m$ et $B^R(z)$ carrée et inversible.

En l'absence de perturbations ($p(x, t) \equiv 0$), et pour $d = m$, la mise sous forme régulière a été développée dans [50]. [61] donne une généralisation des résultats de [50] dans le cas $d \neq m$.

4.2.1 Cas non perturbé

Obtention d'une matrice d'entrée de rang plein

Dans [50], une hypothèse fondamentale repose sur le fait que le rang de la matrice $B(x)$ doit être maximal ($\text{rang}(B) = m$). Le théorème suivant montre, s'il y a plus d'entrées que le rang de B , comment retrouver l'hypothèse classique en utilisant un retour d'état statique.

Théorème 27 [61] *Si $\text{rang}(B(x)) = r < m, x \in \mathbb{R}^n$ alors il existe un retour d'état statique (non forcément unique)*

$$u = W(x)(v^T, 0, \dots, 0)^T, v \in \mathbb{R}^r, \quad (4.3)$$

avec W régulière telle que :

$$B(x)W(x) = \begin{pmatrix} B' & 0 \end{pmatrix},$$

avec $B' \in \mathbb{R}^{r \times r}$.

Ainsi, si la matrice d'entrée ne vérifie pas $\text{rang}(B(x)) = m, x \in \mathbb{R}^n$ mais $\text{rang}(B(x)) = r < m, x \in \mathbb{R}^n$, on considérera le système (4.1), avec le retour statique (4.3), c'est-à-dire :

$$\dot{x} = f(x) + B'(x)v + p(x, t), \quad (4.4)$$

où $v \in \mathbb{R}^r$ est le nouveau vecteur de commande et $B'(x)$ est une matrice $(n \times r)$ et de rang plein r .

Nous pouvons donc poursuivre notre étude en considérant le système (4.1) avec $B(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, une matrice de rang plein m et appliquer les résultats classiques de [50].

Conditions d'existence d'une forme régulière

Le but est de trouver un difféomorphisme $z = \phi(x)$ tel que le système non perturbé

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u, \quad (4.5)$$

soit transformé en

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f^1(z_1, z_2), \\ \dot{z}_2 = f^2(z_1, z_2) + B^R(z_1, z_2)u, \\ z_1 \in \mathbb{R}^{(n-d)}, z_2 \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (4.6)$$

Nous supposons à présent, et pour tout ce chapitre, $d = \text{rang}(B(x)) = m, x \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 28 [50] Soit Δ_1 la distribution définie par :

$$\Delta_1 = \text{Vect} \{b_1(x), \dots, b_m(x)\}.$$

Si Δ_1 vérifie les hypothèses suivantes :

C4, H0) Δ est non singulière en tout point de l'espace d'état. (i.e. $\dim \Delta_1 = m$);

C4, H1) Δ est involutive, c'est-à-dire :

$$\forall \tau_1 \in \Delta, \forall \tau_2 \in \Delta : [\tau_1, \tau_2] \in \Delta ;$$

alors, il existe un difféomorphisme global $z = \phi(x)$, tel que (4.5) est transformé en (4.6) avec $d = m$.

Construction du difféomorphisme à partir de la distribution Δ_1

On souhaite construire le difféomorphisme $\phi(x) = \begin{bmatrix} \lambda_1(x) & \dots & \lambda_{n-d}(x) & \dots & \lambda_n(x) \end{bmatrix}^T$ réalisant le changement de variables. D'après le Théorème de Frobénius [39], il existe $(n-d)$ fonctions $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n-d}(x)$ formant une base de l'annulateur de Δ_1 . Ces fonctions vérifient :

$$\langle d\lambda_i(x), g_j(x) \rangle = 0, (i, j) \in I_{(n-d)} \times I_d.$$

Les d autres fonctions $\lambda_{n-d+1}(x), \dots, \lambda_n(x)$ sont déterminées de manière à compléter la base de fonctions.

Exemple 12 Soit le système à une entrée décrit par

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x)x + B(x)u, \\ A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & (-x_3 + 2x_1) \\ (-x_1 - 1) & 1 & 0 \end{bmatrix}, B(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x_1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (4.7)$$

La procédure classique de mise en forme Takagi-Sugeno reviendrait à la prise en compte des quatre termes non constants. On obtiendrait alors 2^4 sous-modèles.

Le nombre élevé de sous-modèles à prendre en considération nous incite à l'utilisation de la forme régulière.

Soit $\Delta_1 = \text{Vect}(B(x))$. Cette distribution vérifie les hypothèses du théorème 28. Comme $\text{rang}(B(x)) = 1 = d$, une distribution Δ satisfaisante est :

$$\Delta = \text{Vect}(B(x)).$$

Soit $\phi(x) = \begin{bmatrix} \lambda_1(x) & \lambda_2(x) & \lambda_3(x) \end{bmatrix}$ le changement de base non linéaire.

Puisque $\dim(\Delta_1) = 1$, on a $\dim(\Delta_1^\perp) = 2$. On cherche ainsi deux fonctions $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ vérifiant :

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1} + 2x_1 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_2} + \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_3} = 0, i \in I_2.$$

$\lambda_1(x) = x_1 - x_3$ et $\lambda_2(x) = x_1^2 - x_2$ sont deux solutions évidentes distinctes.

Pour compléter $\phi(x)$, on choisit $\lambda_3(x) = x_1$, choix licite car la jacobienne de ϕ est alors non nulle. On obtient ainsi le difféomorphisme global :

$$z = \phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_1^2 - x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

En appliquant cette transformation, on obtient le système :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z_1 + z_2 \\ z_3^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

On peut alors utiliser la mise en forme Takagi-Sugeno avec seulement deux sous-modèles.

Au travers de l'exemple ci-dessus, nous remarquons que l'utilisation de la forme régulière peut permettre non seulement d'obtenir une matrice de commande constante mais aussi de diminuer le nombre de sous-modèles du modèle Takagi-Sugeno.

4.2.2 Cas perturbé

Pour prendre en compte des perturbations ($p(x, t) \neq 0$), nous ferons l'hypothèse suivante :

$$C4, H2) \quad p(x, t) \in \Delta_1.$$

Il s'agit de la classique "matching condition" (voir [17] pour le théorème linéaire). La transformation par le difféomorphisme $z = \phi(x)$ de $p(x, t)$ permet alors d'écrire le système perturbé sous la forme (4.2).

On notera que si $C4, H2)$ n'est pas valide, il est toujours possible de décomposer les perturbations en une partie matching et une partie non matching :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f^1(z) + p^1(z, t), \\ \dot{z}_2 = f^2(z) + B^R(z)u + p^R(z, t), \\ z_1 \in \mathbb{R}^{(n-d)}, z_2 \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (4.8)$$

4.2.3 Système retenu pour ce chapitre

Dans toute la suite de ce chapitre, nous proposerons des techniques pour stabiliser (4.2) et éventuellement (4.8), avec $B^R(z) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ carrée et inversible.

Le vecteur de perturbation $p^R(z, t)$ est supposé borné en norme par une fonction connue $\Psi(z)$:

$$C4, H3) \quad \|p^R(z, t)\| < \Psi(z), \Psi \in \mathbb{R}^+,$$

4.3 Stabilisation par une commande PDC : intérêt et limites

La synthèse PDC ne nous permettant pas de prendre en compte les perturbations, nous considérerons dans cette section le système (4.2) avec $p(z, t) \equiv 0$. Soit l'hypothèse complémentaire

suiivante :

C4, H4) Il existe $A_i^1, A_i^2, h_i(z), i \in I_r$ tels que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} f^1(z) = \sum_{i=1}^r h_i(z) A_i^1 z, \\ f^2(z) = \sum_{i=1}^r h_i(z) A_i^2 z, \end{cases}$$

En s'inspirant du théorème 1, on peut écrire :

Théorème 29 (Blanco et al.) Soit le système (4.2) sous les hypothèses $p(z, t) \equiv 0$ et C4, H4).

Soit la commande décrite par

$$u(z) = -B^{-1}(z) \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) K_i \right) z. \quad (4.9)$$

S'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique définie positive et r contrôleurs $K_i \in \mathbb{R}^{d \times n}, i \in I_r$ tels que

$$\left(\left(\begin{bmatrix} A_i^1 \\ A_i^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ I^{d \times d} \end{bmatrix} K_i \right)^T P + P \left(\begin{bmatrix} A_i^1 \\ A_i^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ I^{d \times d} \end{bmatrix} K_i \right) < 0, i \in I_r \quad (4.10)$$

alors l'origine du système bouclé par (4.9) est GAS.

Preuve. Sous les hypothèses du théorème, les dynamiques du système (4.2) commandé par (4.9) s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) A_i^1 \right) z, \\ \dot{z}_2 = \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) (A_i^2 - K_i) \right) z, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) \begin{bmatrix} A_i^1 \\ A_i^2 \end{bmatrix} \right) z - \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) \begin{bmatrix} 0 \\ I^{d \times d} \end{bmatrix} K_i \right) z, \\ \dot{z} &= \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) \left(\begin{bmatrix} A_i^1 \\ A_i^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ I^{d \times d} \end{bmatrix} K_i \right) \right) z. \end{aligned}$$

Soit la fonction de Lyapounov définie par $V = z^T P z$. D'après le théorème 1, si (4.10) est vérifiée alors l'origine du système bouclé est GAS. ■

Nous avons ici atteint l'objectif décrit dans l'introduction qui était de réaliser une synthèse PDC dans une base où la matrice d'entrée $B(x)$ serait constante.

Pourtant, la commande PDC présente des inconvénients majeurs auxquels nous remédierons dans la section suivante :

1. L'hypothèse $C4, H4$) requiert la mise sous forme TS du sous-système \mathcal{E}_2 . Ce point n'est pas nécessaire car le caractère inversible de $B^R(z)$ permet le réglage complet des dynamiques de \mathcal{E}_2 .
2. La méthode de synthèse proposée n'est pas a priori robuste, ni vis à vis de perturbations exogènes ni vis à vis d'incertitudes paramétriques pour $f^1(z)$.
3. Nous ne contrôlons pas très efficacement le comportement du système réduit.

4.4 Stabilisation robuste par mode glissant

L'utilisation d'une commande par mode glissant sur le système (4.2) va nous permettre de remédier aux trois désavantages de la commande établie par le théorème 29.

Dans cette section, après une introduction sommaire aux modes glissants, nous donnerons des méthodes de stabilisation basées sur l'utilisation de surfaces linéaires et non linéaires.

4.4.1 Principe des modes glissants

La théorie des systèmes à structure variable a fait l'objet de multiples études depuis une cinquantaine d'années. Les premiers travaux sur ce type de systèmes sont ceux d'Anosov [1], Tzypkin [77] et d'Emel'yanov [24, 25] dans l'ancienne URSS. Ces recherches ont connu un nouvel essor à la fin des années soixante-dix lorsqu'Utkin introduisit la théorie des modes glissants [79]. Cette technique de commande et d'observation a reçu un intérêt sans cesse croissant du fait :

- de sa relative simplicité d'élaboration ;
- de sa robustesse vis-à-vis de certaines incertitudes paramétriques et perturbations exogènes ;
- de la large gamme de ses applications dans des domaines très variés tels que la robotique, la mécanique ou l'électrotechnique : la stabilisation [9, 65], le suivi de trajectoires [2, 21, 37] ou de modèles [84, 87].

Le principe de cette technique est de contraindre le système à atteindre et ensuite rester sur une surface donnée (représentant un ensemble de relations statiques entre les variables d'état). La surface considérée est alors désignée comme étant la *surface de glissement*. Le comportement dynamique résultant, appelé *régime glissant idéal*, est complètement déterminé par les paramètres et les équations définissant la surface.

La réalisation d'un mode glissant sur le système se déroule en deux temps. Une surface est déterminée de façon à ce que le régime glissant ait les propriétés désirées (pas forcément présentes dans le système original), puis une loi de commande discontinue est synthétisée de façon à rendre la surface invariante et (au moins localement) attractive.

4.4.2 Choix de la surface

Le choix de cette surface est lié au problème de stabilisation : il s'agit à la fois de choisir la structure de la surface de glissement (linéaire ou NL) et de régler numériquement les paramètres pour obtenir des propriétés de convergence et/ou de stabilité. La forme régulière est très souvent utilisée dans les méthodes classiques [27, 61, 69] et [50, 67]. L'avantage de notre méthode est de proposer des techniques systématiques et simples d'utilisation pour le réglage des dynamiques du système réduit.

Ainsi, nous procéderons de manière similaire à la section précédente :

- Si le système réduit présente des incertitudes ou si nous désirons une synthèse simple d'écriture, nous opterons pour une surface linéaire.
- En l'absence de perturbation sur le système réduit, si la synthèse par surface linéaire n'est pas possible ou satisfaisante, nous choisirons une surface NL.

4.4.3 Hypothèses, notations et lemmes préliminaires

Formulation TS du système réduit

Considérons les hypothèses suivantes :

$C4, H5$) Il existe $A_i^{11}, A_i^{12}, h_i(x), i \in I_r$ tels que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$:

$$f^1(z) = \sum_{i=1}^r h_i(z) (A_i^{11} z_1 + A_i^{12} z_2),$$

$C4, H'5$) Il existe $A_i^{11}, A_i^{12}, h_i(t), i \in I_r$ tels que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$:

$$f^1(z, t) = \sum_{i=1}^r h_i(t) (A_i^{11} z_1 + A_i^{12} z_2),$$

avec $A_i^{11} \in \mathbb{R}^{(n-d) \times (n-d)}, A_i^{12} \in \mathbb{R}^{(n-d) \times d}, h_i(t)$ et $h_i(x)$ satisfont la CSP. La différence entre ces deux hypothèses est que l'on autorise des incertitudes pour $C4, H'5$). On se place alors dans le cas où la matching condition $C3, H2$) n'est pas vérifiée. Cette dernière hypothèse pourrait

être écrite en utilisant le formalisme des LDI :

$$\begin{cases} f^1(z, t) \in \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} z, \\ \Omega_1 = \overline{\text{Conv}} \{A_i^{11}, i \in I_r\} \subset \mathbb{R}^{(n-d) \times (n-d)}, \\ \Omega_2 = \overline{\text{Conv}} \{A_i^{12}, i \in I_r\} \subset \mathbb{R}^{(n-d) \times d}. \end{cases}$$

Lemmes de stabilité des systèmes réduits

Dans la section 4.5, nous serons amenés à considérer des problèmes de stabilisation du système réduit. Ces problèmes auront de forte similitudes avec les problèmes de stabilisation des systèmes TSC avec des commandes de type RE ou PDC. Enonçons les deux lemmes suivants :

Lemme 7 (Blanco et al., [8]) Soit le système défini par

$$\dot{z}_1 = \sum_{i=1}^r f_i(z, t) \left(A_i^{11} - A_i^{12} K \right) z_1.$$

S'il existe une matrice $R \in \mathbb{R}^{(n-d) \times (n-d)}$ symétrique définie positive et un gain $K \in \mathbb{R}^{d \times (n-d)}$ vérifiant

$$\left(A_i^{11} - A_i^{12} K \right)^T R + R \left(A_i^{11} - A_i^{12} K \right) < 0, i \in I_r, \quad (4.11)$$

alors l'origine du système considéré est GAS pour toute fonction $f_i(z, t)$ satisfaisant la CSP

Preuve. Preuve similaire à celle du théorème 1 en considérant $A_i^{11} - A_i^{12} K$ à la place des matrices A_i . ■

Lemme 8 (Blanco et al., [8]) Soit le système défini par

$$\dot{z}_1 = \sum_{i,j=1}^r h_i(z) h_j(z) \left(A_i^{11} - A_i^{12} K_j \right) z_1.$$

S'il existe une matrice symétrique définie positive $R \in \mathbb{R}^{(n-d) \times (n-d)}$ et r matrices de gain $K_i \in \mathbb{R}^{d \times (n-d)}, i \in I_r$ telles que

$$\begin{cases} G_{ii} < 0, i \in I_r \\ G_{ij} + G_{ji} < 0, (i, j) \in I_r^2, \\ G_{ij} = \left(A_i^{11} - A_i^{12} K_j \right)^T R + R \left(A_i^{11} - A_i^{12} K_j \right), (i, j) \in I_r^2 \end{cases} \quad (4.12)$$

alors l'origine du système considéré est GAS pour toutes fonctions $h_i(z), i \in I_r$ satisfaisant la CSP.

Preuve. Preuve similaire à celle du théorème 2. ■

Ces deux lemmes nous fourniront des méthodes pour régler les gains définis dans la suite de ce chapitre.

Système réduit et LMIs

Les techniques LMI explicitées dans le premier chapitre nous permettent de remplacer le système d'inégalités matricielles

$$(A_i^{11} - A_i^{12}K)^T R + R(A_i^{11} - A_i^{12}K) < 0, i \in I_r,$$

d'inconnues R et K , par le système d'inégalités équivalent

$$S(A_i^{11})^T + A_i^{11}S - (A_i^{12}U) - (A_i^{12}U)^T < 0, i \in I_r,$$

avec le changement de variables bijectif $R = S^{-1}, U = KS$.

Si des propriétés de stabilité exponentielle de degré α sont requises, on pourra remplacer cette dernière inégalité par

$$S(A_i^{11})^T + A_i^{11}S - (A_i^{12}U) - (A_i^{12}U)^T + 2\alpha S < 0, i \in I_r,$$

Les conditions (4.12) peuvent être aisément transformées en un ensemble de LMIs : on utilise le changement de variables bijectif classique $S = R^{-1}, U_i = K_i S$, pour obtenir

$$\begin{cases} A_i^{11}S + S(A_i^{11})^T - (A_i^{12}U_i)^T - (A_i^{12}U_i) < 0, i \in I_r. \\ 2(A_i^{11}S + S(A_i^{11})^T) - (A_i^{12}U_j)^T - (A_i^{12}U_j) \\ - (A_i^{12}U_j)^T - (A_i^{12}U_j) < 0, i > j, (i, j) \in I_r^2. \end{cases}$$

En outre, de la même manière qu'au deuxième chapitre, il est possible de choisir le gain correspondant au linéarisé à l'origine dans le but de réaliser un placement de pôles. Les autres gains sont alors choisis pour assurer la stabilité du système.

Notations relatives au gradient

Dans la suite, nous calculerons les quantités $\dot{h}_i(x)$, $i \in I_r$; pour assurer l'existence de telles quantités, comme au troisième chapitre, nous supposerons que

C4, H6) Les gradients $\Delta h_i(z)$, $i \in I_r$ des fonctions de pondération existent.

Nous utiliserons les conventions classiques suivantes :

$$\Delta h_i(z) = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial h_i}{\partial z_{11}} \Big|_z & \cdots & \frac{\partial h_i}{\partial z_{1(n-d)}} \Big|_z & \frac{\partial h_i}{\partial z_{21}} \Big|_z & \cdots & \frac{\partial h_i}{\partial z_{2d}} \Big|_z \end{array} \right], i \in I_r.$$

Nous décomposerons la dérivée temporelle des $h_i(x)$ en deux termes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{h}_i(z) = \Delta h_i^1(z) \dot{z}_1 + \Delta h_i^2(z) \dot{z}_2, i \in I_r, \\ \Delta h_i^1(z) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial h_i}{\partial z_{11}} \Big|_z & \cdots & \frac{\partial h_i}{\partial z_{1(n-d)}} \Big|_z \end{array} \right], i \in I_r, \\ \Delta h_i^2(z) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial h_i}{\partial z_{21}} \Big|_z & \cdots & \frac{\partial h_i}{\partial z_{2d}} \Big|_z \end{array} \right], i \in I_r. \end{array} \right.$$

L'hypothèse

$$C4, H7) \Delta h_i^2(z) = 0, i \in I_r, z \in \mathbb{R}^n,$$

sera nécessaire à l'utilisation de surfaces non linéaires. A noter que cette hypothèse revient à supposer que les fonctions de pondération ne dépendent que de z_1 .

4.4.4 Surfaces linéaires

Dans cette section, nous retiendrons la quantité suivante :

$$s(z) = z_2 + K z_1,$$

avec K une matrice constante de $\mathbb{R}^{d \times (n-d)}$. Nous appellerons *surface de glissement* ou *surface*, l'ensemble $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$ décrit par

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{R}^n, s(z) = 0\}.$$

Pour la clarté des écritures, considérons la quantité $\xi(z)$:

$$\xi(z) = f^2(z) + K f^1(z).$$

Pour une valeur de K donnée, on peut définir la commande :

$$\begin{cases} u(z) = - \left(B^R(z) \right)^{-1} \left(\xi(z) - \Lambda s + m(z) \frac{Ps}{\|Ps\|} \right), \\ m(z) = m_1 + \Psi(z), m_1 > 0, \Psi(z) > \|p^R(z, t)\|. \end{cases} \quad (4.13)$$

avec $\Lambda \in \mathbb{R}^{d \times d}$ de Hürwitz et P symétrique définie positive vérifiant $\Lambda^T P + P \Lambda < 0$.

Cette commande a pour but d'amener le système sur la surface \mathcal{S} , c'est à dire d'utiliser $z_2 = -Kz_1$ comme nouvelle commande sur le système réduit. Vérifions ainsi l'attractivité en temps fini et l'invariance de la surface \mathcal{S} .

Attractivité en temps fini de la surface

En utilisant l'expression des dynamiques de (4.2) sous l'hypothèse $C4, H5$), on obtient la dérivée de $s(z)$ suivante :

$$\begin{aligned} \dot{s}(z) &= \xi(z) + B^R(z)u + p^R(z, t), \\ &= \Lambda s - m_1 \frac{Ps}{\|Ps\|} - \Psi(z) \frac{Ps}{\|Ps\|} + p^R(z, t), \end{aligned}$$

On peut alors établir le lemme :

Lemme 9 (Blanco et al., [8]) Soit K une matrice quelconque de $\mathbb{R}^{d \times (n-d)}$. La commande définie par (4.13) rend la surface $s(z) = z_2 + Kz_1 = 0$ stable et globalement attractive en temps fini pour le système (4.2) sous l'hypothèse $C4, H5$).

Preuve. Soit la fonction

$$V(z) = s^T(z)Ps(z).$$

La dérivée de cette fonction le long des trajectoires de (4.2) commandé par (4.13) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{s}^T Ps + s^T P \dot{s}, \\ &= s^T \left(\Lambda^T P + P \Lambda \right) s - 2m_1 \left(\frac{s^T P Ps}{\|Ps\|} \right) + 2s^T P \left(p^R(z, t) - \Psi(z) \frac{Ps}{\|Ps\|} \right), \\ &< -2m_1 \left(\frac{s^T P Ps}{\|Ps\|} \right), \\ &< -2m_1 \sqrt{\lambda_{\min}(P)} \sqrt{V}. \end{aligned}$$

D'après [79], cette dernière inégalité prouve la convergence en temps fini du système (4.2) vers la surface \mathcal{S} ainsi que l'invariance de cette surface. ■

Enoncé du théorème de stabilisation

Théorème 30 (Blanco et al., [8]) *Considérons le système (4.2) sous l'hypothèse C4, H5).*

Soit Λ une matrice de Hürwitz et m_1 une constante strictement positive. Soit P une matrice symétrique définie positive vérifiant $\Lambda^T P + P \Lambda < 0$.

S'il existe une matrice $R \in \mathbb{R}^{(n-d) \times (n-d)}$ symétrique définie positive et un gain $K \in \mathbb{R}^{d \times (n-d)}$ vérifiant

$$\left(A_i^{11} - A_i^{12} K \right)^T R + R \left(A_i^{11} - A_i^{12} K \right) < 0, i \in I_r,$$

alors la commande décrite par

$$\begin{cases} u(z) = - \left(B^R(z) \right)^{-1} \left(f^2(z) + K f^1(z) - \Lambda s + m(z) \frac{P s}{\|P s\|} \right), \\ m(z) = m_1 + \Psi(z), m_1 > 0, \Psi(z) > \|p^R(z, t)\|, \\ s(z) = z_2 + K z_1, \end{cases}$$

rend l'origine du système considéré GAS.

Preuve. Le lemme 9 nous permet d'affirmer que la commande décrite ci-dessus rend la surface \mathcal{S} attractive en temps fini et stable.

De plus, durant la phase d'approche de la surface, le système bouclé décrit par :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f^1(z) = \sum_{i=1}^r h_i(z) A_i^1 z, \\ \dot{z}_2 = -K f_1(z) - \Lambda s + m(z) \frac{P s}{\|P s\|}, \end{cases} \quad (4.14)$$

reste borné. En effet, les trajectoires du système (4.14) vérifient :

$$z(t) = z(t=0) + \int_0^t H(z(\theta)) d\theta,$$

avec

$$H(z(\theta)) = \begin{bmatrix} f^1(z(\theta)) \\ -K f_1(z(\theta)) - \Lambda s(\theta) + m(z(\theta)) \frac{P s}{\|P s\|} \end{bmatrix}.$$

Donc,

$$\|z(t)\| \leq \|z(t=0)\| + \int_0^t \|H(z(\theta))\| d\theta.$$

La fonction $H(z)$ est par construction localement Lipschitzienne, donc il existe $\beta(z)$ telles que :

$$\|H(z)\| \leq \beta(z) \|z\|,$$

avec $\beta(z)$ continue positive. On a ainsi la majoration de $\|z(t)\|$ suivante :

$$\begin{aligned} \|z(t)\| &\leq \|z_0\| + \int_0^t \beta(z(\theta)) \|z(\theta)\| d\theta. \\ &\leq \|z_0\| + \int_0^t \beta(z(\theta)) \|z(\theta)\| d\theta. \end{aligned}$$

Cette dernière majoration prouve que $\|z(t)\|$ est bornée si $t < \infty$: les variables $z_1(t)$ et $z_2(t)$ restent ainsi bornées lors de la phase d'atteinte de la surface.

On utilise alors le lemme 7, pour prouver la stabilité asymptotique de l'origine du système réduit. Comme la surface $s(z) = 0$ est invariante, on a par extension stabilité asymptotique de l'origine du système. ■

Prise en compte des incertitudes “non matching”

Une commande similaire à (4.13) peut être utilisée pour stabiliser le système (4.2) soumis à des incertitudes sur le système libre :

Théorème 31 (Blanco et al.) *Considérons le système (4.2) sous l'hypothèse C4, H'5).*

Soit Λ une matrice de Hurwitz et m_1 une constante strictement positive. Soit P une matrice symétrique définie positive vérifiant $\Lambda^T P + P \Lambda < 0$.

S'il existe une matrice $R \in \mathbb{R}^{(n-d) \times (n-d)}$ symétrique définie positive et un gain $K \in \mathbb{R}^{d \times (n-d)}$ vérifiant

$$\left(A_i^{11} - A_i^{12} K \right)^T R + R \left(A_i^{11} - A_i^{12} K \right) < 0, i \in I_r,$$

alors la commande décrite par

$$\begin{cases} u = - \left(B^R(z) \right)^{-1} \left(f^2(z) - \Lambda s + m(z) \frac{Ps}{\|Ps\|} \right), \\ m(z) = m_1 + \Psi(z) + m_2(z), \\ m_2(z) = \max_{i \in I_r} \| K A_i^{11} z_1 + K A_i^{12} z_2 \| \end{cases} \quad (4.15)$$

rend l'origine du système considéré GAS.

Preuve. Avec la commande (4.15), les dynamiques de \mathcal{E}_2 vérifient :

$$\dot{z}_2 = \Lambda s - m(z) \frac{Ps}{\|Ps\|} + p^R(z, t),$$

d'où

$$\dot{s}(z) = \Lambda s - m(z) \frac{Ps}{\|Ps\|} + K f^1(z, t) + p^R(z, t).$$

Soit la fonction $V(z) = s^T(z)Ps(z)$. On a

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{s}^T P s + s^T P \dot{s}, \\
&= s^T (\Lambda^T P + P \Lambda) s - 2m_1 \left(\frac{s^T P P s}{\|P s\|} \right) \\
&\quad + 2s^T P \left(-(\Psi(z) + m_2(z)) \frac{P s}{\|P s\|} + K f^1(z, t) + p^R(z, t) \right), \\
&< s^T (\Lambda^T P + P \Lambda) s - 2m_1 \left(\frac{s^T P P s}{\|P s\|} \right), \\
&< -2m_1 \sqrt{\lambda_{\min}(P)} \sqrt{V}.
\end{aligned}$$

Dans le coefficient $m(z)$, $\Psi(z)$ sert à absorber $p^R(z, t)$ et $m_2(z) = \max_{i \in I_r} \|K A_i^{11} z_1 + K A_i^{12} z_2\|$ absorbe $K f^1(z)$.

On a donc attractivité en temps fini et stabilité de \mathcal{S} . Le comportement sur la surface est régi par :

$$\dot{z}_1 = \sum_{i=1}^r h_i(t) (A_i^{11} - A_i^{12} K) z_1,$$

En appliquant le lemme 7, on peut conclure à la stabilité asymptotique de l'origine. Par ailleurs, durant la phase d'atteinte de la surface, le système réduit reste borné (même preuve que pour le théorème 30). ■

Un exemple d'application de ce théorème est donné dans la section 4.5.

4.4.5 Surfaces non linéaires

Pour la synthèse d'une surface de glissement NL, la connaissance des fonctions de pondération est primordiale. La surface NL est construite à partir de la quantité :

$$s(z) = z_2 + \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) K_i \right) z_1, \quad (4.16)$$

avec $K_i, i \in I_r$ des matrices constantes de $\mathbb{R}^{d \times (n-d)}$.

Pour la synthèse de la commande, le calcul de la dérivée de $s(z)$, impose l'hypothèse C4, H5) : Nous définissons ainsi le système réduit par

$$z_1 = \sum_{i,j=1}^r h_i(z) h_j(z) (A_i^{11} - A_i^{12} K_j) z_1 \quad (4.17)$$

et la dérivée temporelle de $s(z)$:

$$\begin{cases} \dot{s}(z) = \xi(z) + \left(\sum_{i=1}^r \dot{h}_i(z) K_i \right) z_1 + B^R(z)u + p^R(z, t), \\ \xi(z) = f^2(z) + \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) K_i \right) f^1(z). \end{cases} \quad (4.18)$$

4.4.6 Attractivité de la surface

Comme pour la surface linéaire, on considère les matrices $\Lambda \in \mathbb{R}^{d \times d}$ de Hürwitz et P symétrique définie positive vérifiant $\Lambda^T P + P \Lambda < 0$.

Supposons que les fonctions de pondération vérifient l'hypothèse $C4, H7$). Bien que cette hypothèse n'influe pas sur le comportement du système sur la surface $s(z) = 0$, elle est en revanche d'une grande importance dans la phase où S est atteinte. En effet, le terme $\Delta h_i^2(z) \dot{z}_2$ dépend de u .

Notons $\Theta_1(z)$ la quantité connue suivante :

$$\Theta_1(z) = \left(\sum_{i=1}^r (\Delta h_i^1(z) \dot{z}_1) K_i \right) z_1,$$

On obtient l'expression suivante pour $\dot{s}(z)$:

$$\dot{s}(z) = \xi(z) + \Theta_1(z) + B^R(z)u + p^R(z, t),$$

Nous considérerons ainsi une commande similaire à celle utilisée dans le cas linéaire :

$$\begin{cases} u(z) = - \left(B^R(z) \right)^{-1} \left(\xi(z) + \Theta_1(z) - \Lambda s + m(z) \frac{P_s}{\|P_s\|} \right), \\ m(z) = m_1 + \Psi(z), m_1 > 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Enonçons à présent le théorème de stabilisation du système (4.2) :

Théorème 32 (Blanco et al., [8]) *Considérons le système (4.2) sous les hypothèses $C4, H5$), $C4, H6$) et $C4, H7$).*

Soit Λ une matrice de Hürwitz et m_1 une constante strictement positive. Soit P une matrice symétrique définie positive vérifiant $\Lambda^T P + P \Lambda < 0$.

S'il existe une matrice $R \in \mathbb{R}^{(n-d) \times (n-d)}$ symétrique définie positive et des gains $K_i, i \in I_r \in \mathbb{R}^{d \times (n-d)}$ vérifiant

$$\begin{cases} G_{ii} < 0, i \in I_r \\ G_{ij} + G_{ji} < 0, i > j, (i, j) \in I_r^2, \\ G_{ij} = (A_i^{11} - A_i^{12} K_j)^T R + R (A_i^{11} - A_i^{12} K_j), (i, j) \in I_r^2 \end{cases} \quad (4.20)$$

alors la commande décrite par

$$\begin{cases} u(z) = -\left(B^R(z)\right)^{-1} \left(\xi(z) + \Theta_1(z) - \Lambda s + m(z) \frac{P_s}{\|P_s\|}\right), \\ m(z) = m_1 + \Psi(z), \\ s(z) = z_2 + \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) K_i\right) z_1, \\ \xi(z) = f^2(z) + \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) K_i\right) f^1(z). \\ \Theta_1(z) = \left(\sum_{i=1}^r (\Delta h_i^1(z) z_1) K_i\right) z_1, \end{cases}$$

stabilise asymptotiquement l'origine du système considéré.

Preuve. On prouve l'attractivité en temps fini et la stabilité de la surface d'une manière similaire à celle utilisée pour le lemme 9, avec la commande (4.19) et la surface $s(z) = z_2 + \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) K_i\right) z_1$. La stabilité du système réduit se prouve en appliquant le théorème 2 au système réduit, on obtient alors les conditions (4.20). ■

A noter que dans le cas où $K_1 = \dots = K_r = K, i \in I_r$ est une solution de notre problème, le théorème 30 est identique au théorème 32 car $\Delta h_i^1(z) + \dots + \Delta h_i^r(z) = 0$.

Si l'hypothèse $C4, H7$) n'est pas valide, il est préférable d'opter pour une surface linéaire.

4.4.7 Choix pratique du type de surface

Nous avons décrit ci-dessus trois théorèmes permettant de faire une commande par mode glissant pour le système (4.2). Les hypothèses valides pour le système particulier à commander orienteront le choix du type de surface retenue :

- Si le système présente à la fois des incertitudes “matching” et “non matching” (hypothèse $C4, H'5$)), il est nécessaire d'appliquer le théorème 31. Dans le cas contraire (hypothèse $C4, H5$)), on se référera aux deux cas suivants.
- Si le système vérifie $C4, H6$) et $C4, H7$), bien que la surface linéaire donnée par le théorème 30 soit utilisable, le théorème 32 nous permettra une plus grande latitude de réglage du comportement du système sur la surface.
- Si le système ne vérifie pas $C4, H7$), nous préconisons l'usage de du théorème 30.

4.5 Application en simulation : “Bille sur Rail”

On considère un système composé d'une bille sur rail représenté par la figure 4-1.

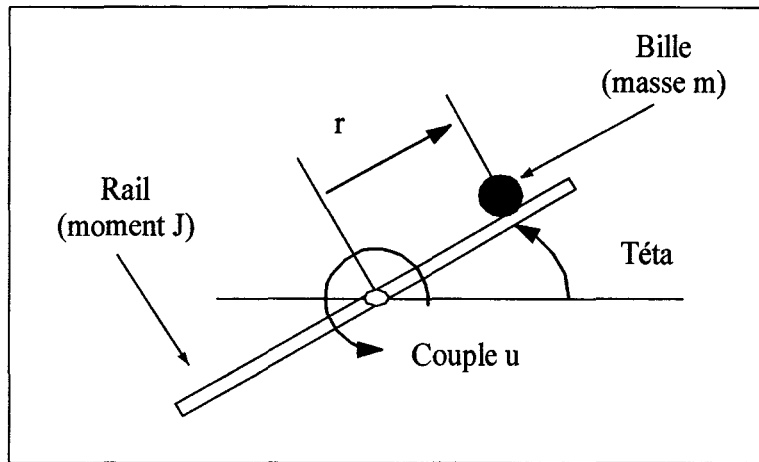


FIG. 4-1: Schéma du système "Bille sur Rail"

Conformément au schéma, on note par r la position de la bille et par θ l'angle que fait le rail avec l'axe horizontal. La bille a une masse m_b , un rayon R et un moment d'inertie J_B . En notant J le moment d'inertie du rail et u le couple appliqué sur l'axe de rotation du rail, on obtient le modèle suivant :

$$\begin{cases} \left(m_b + \frac{J_B}{R^2}\right) \ddot{r} = m_b r \dot{\theta}^2 - m_b g \sin(\theta) + k(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} \\ (m_b r^2 + J + J_B) \ddot{\theta} + 2m_b r \dot{r} \dot{\theta} + m_b g r \cos(\theta) = u, \end{cases} \quad (4.21)$$

avec $k(\theta, \dot{\theta})$ représentant un coefficient de frottement.

On a les valeurs numériques suivantes

r	Position de la bille	m
θ	Angle du rail	rad
u	Couple	N m
m_b	Masse de la bille	0.11 kg
R	Rayon de la bille	0.015 m
$J_B = \frac{2}{5} m_b R^2$	Moment d'inertie de la bille	$9.9 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2$
g	Accélération gravitationnelle	9.81 m s^{-2}
J	Moment d'inertie du rail	0.5 kg m^2
$k(\cdot)$	Coefficient de frottement	kg s^{-1}

La physique du système impose $r \in [-1 \quad 1]$ (rail de longueur 2 m) et $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2}\right]$.

Notre objectif ici est de stabiliser asymptotiquement la bille autour du point d'équilibre instable

$r = 0, \theta = 0$ pour le plus grand domaine de conditions initiales possibles.

4.5.1 Ecriture TS du système bille sur rail

Soit le vecteur d'état, supposé mesurable, est défini par $x = \begin{bmatrix} r & \dot{r} & \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T$, les dynamiques du système s'écrivent :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{7}\dot{\theta}^2 & 0 & -\frac{5}{7}g\frac{\sin(\theta)}{\theta} & \frac{5}{7}k(\cdot) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m_b g \cos(\theta)}{(m_b r^2 + J)} & \frac{-2m_b r \dot{\theta}}{(v r^2 + J)} & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{(m_b r^2 + J)} \end{bmatrix} u + p(x, t), \quad (4.22)$$

où $p(t)$ représente des perturbations liées à des erreurs de modélisation (ex. masse de la bille) .

Le moment J_B est négligable par rapport à J et ne se retrouve pas dans l'expression de $\ddot{\theta}$.

Pour les incertitudes, nous donnerons les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} p(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & p^R(x, t) \end{bmatrix}^T, \|p^R(x, t)\| < 1, \\ \|k(\cdot)\| < 0.2. \end{cases}$$

Pour les simulations dans l'environnement *Simulink*, nous prendrons des variables quelconque continues et bornées pour $p^R(x, t)$ et $k(\cdot)$.

On note que le système (4.22) est déjà écrit sous forme régulière généralisée (4.2) avec

$$\begin{cases} d = m = 1, \\ B^R(z) = 1/(m_b r^2 + J), \\ z = x, \\ z_1 = \begin{bmatrix} r & \dot{r} & \theta \end{bmatrix}^T, \\ z_2 = \dot{\theta}. \\ \Psi(z) = 1, \\ f^2(z) = -(m_b r^2 + J)^{-1} (2m_b r \dot{r} \dot{\theta} + m_b g r \cos \theta), \\ f^1(z, t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{7}\dot{\theta}^2 & 0 & -\frac{5}{7}g\frac{\sin(\theta)}{\theta} & \frac{5}{7}k(\cdot) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} z. \end{cases}$$

Comme le système (4.22) présente à la fois des perturbations "matching" (dûes à p) et "non matching" (dûes à $k(\cdot)$), nous aurons recours à une surface linéaire. Il sera donc inutile de

déterminer les valeurs des fonctions de pondération dans la formulation TS du système.

Soit le domaine $D_\gamma \subset \mathbb{R}^4$ défini par

$$D_\gamma = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \dot{\theta} \in [-\gamma, \gamma], \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}.$$

Conformément au théorème 10, dans tout domaine D_γ , il est possible d'écrire exactement le système réduit sous la forme TS avec 2^3 sous-modèles linéaires car la matrice $A_1(z, t)$ définie par $f^1(z, t) = A_1(z, t)z$ présente 3 termes non constants. En mettant en avant les bornes de ces termes :

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{5}{7}\dot{\theta}^2 \leq \frac{5}{7}\gamma^2, \\ -\frac{5}{7}g \leq -\frac{5}{7}g \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq -\frac{10}{7\pi}g, \\ -\frac{1}{7} \leq \frac{5}{7}k(t) \leq \frac{1}{7}, \end{cases}$$

on obtient le modèle TS :

$$\dot{z}_1 = f^1(z) = \sum_{i=1}^8 h_i(z) (A_i^{11}z_1 + A_i^{12}z_2),$$

avec

$$\begin{cases} A_i^{12} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}^T, i \in I_4, \\ A_{i+4}^{12} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}^T, i \in I_4, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A_1^{11} &= A_5^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{7}g \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2^{11} = A_6^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{7\pi}g \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_3^{11} &= A_7^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{7}\gamma^2 & 0 & -\frac{5}{7}g \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_4^{11} = A_8^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{7}\gamma^2 & 0 & -\frac{10}{7\pi}g \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4.5.2 Calcul de la loi de commande

D'après le théorème 31, le contrôleur s'exprime par :

$$\begin{cases} u(z) = - \left(B^R(z) \right)^{-1} \left(f^2(z) - \Lambda s + m(z) \frac{P_s}{\|P_s\|} \right), \\ m(z) = m_1 + \Psi(z) + m_2(z), \\ m_2(z) = \max_{i \in I_r} \|K A_i^{11} z_1 + K A_i^{12} z_2\|, \\ s(z) = z_2 - K z_1. \end{cases}$$

En développant cette expression, on obtient :

$$\begin{cases} u = 2mrr\dot{\theta} + mgr \cos(\theta) + (J + mr^2) \left(\Lambda s - m(z) \frac{P_s}{\|P_s\|} \right), \\ m(z) = m_1 + 1 + \max_{i \in I_r} \|K A_i^{11} z_1 + K A_i^{12} z_2\|, \\ s(z) = z_2 + K z_1, \end{cases} \quad (4.23)$$

avec le gain K à déterminer pour régler les dynamiques sur la surface.

4.5.3 Résultats de simulation

Le gain de commande K est déterminé de telle manière à placer les pôles du système réduit en supposant $k(\cdot) = 0$. A l'aide de la procédure de *Matlab*, on obtient $K = \begin{bmatrix} -18.94 & -11.14 & 15.3 \end{bmatrix}$. Le gain K vérifie les conditions du théorème 31 pour un coefficient γ inférieur ou égal à 2.6. On choisit alors $m_1 = 2$ et $\Lambda = -4$ pour assurer une convergence rapide sur la surface. Nous choisisons un pas de simulation fixe de 5 ms et l'algorithme Ode5 (Runge Kutta d'ordre 5).

On part des conditions initiales $x(0) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}^T$. L'évolution temporelle de l'état est représentée sur la figure 4-2.

Les évolutions de la quantité $s(z) = z_2 + K z_1$ et de la commande sont représentées sur la figure 4-3

On remarque sur la commande un chattering d'amplitude 4. En effet, quand on est proche de l'origine les perturbations $p^R(x, t)$ agissent directement sur \dot{z}_2 avec cette même amplitude. La surface est atteinte en environ 0.7 s et l'état met encore environ 1.3 s pour se stabiliser. On a ainsi stabilisé asymptotiquement l'origine en présence des perturbations $k(\cdot)$ et $p^R(x, t)$ en environ 2 s. Lors de l'évolution du système, la commande ne dépasse pas 5 N m.

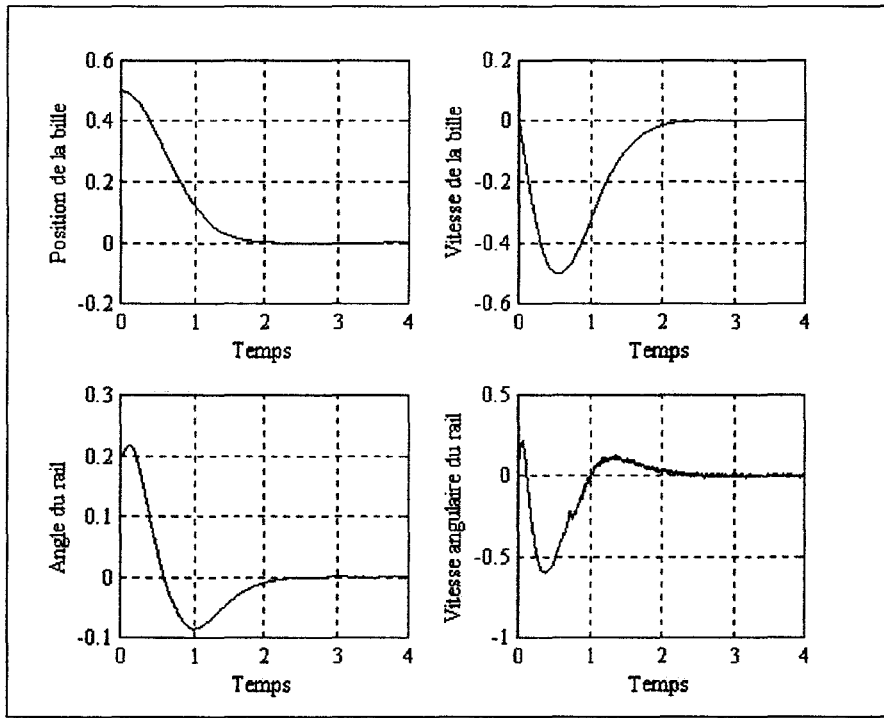


FIG. 4-2: Bille sur Rail : simulation, évolution des variables d'état

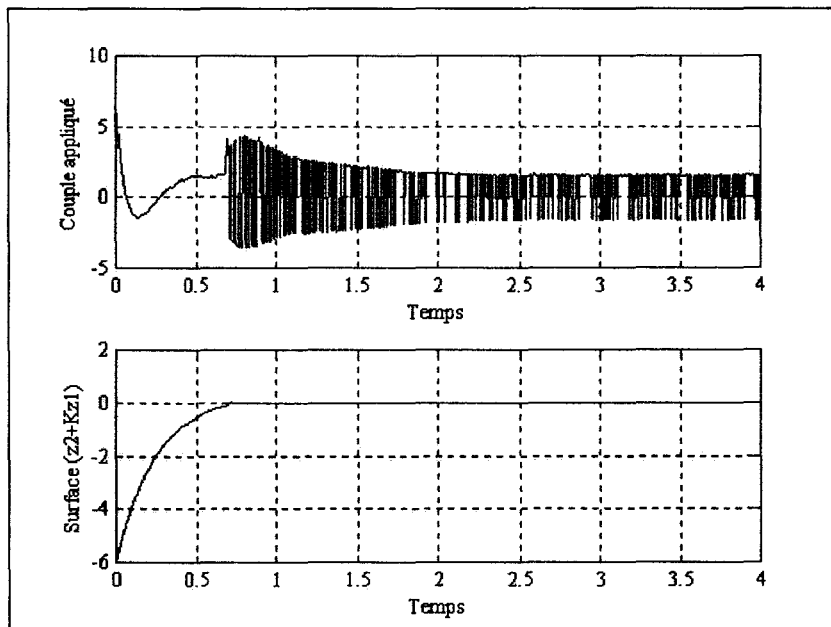


FIG. 4-3: Bille sur Rail : simulation, évolution de commande et de $s(z)$

4.6 Intérêt de l'approche pour l'exploitation de la forme régulière

Dans ce chapitre, nous avons montré que la mise en forme régulière couplée à une remise en forme Takagi-Sugeno du système réduit pouvait permettre de donner des résultats simples d'utilisation pour la stabilisation de systèmes NL.

En effet, partant de la forme régulière généralisée, deux options sont possibles :

- En l'absence de perturbation et après une remise en forme TS du système global, il est possible d'effectuer une synthèse par une loi de commande de type PDC. L'inconvénient principal de cette commande est qu'elle ne permet pas de réglage des dynamiques du système réduit.
- En présence de perturbations, éventuellement "non-matching", un mode glissant permet d'atteindre robustement une surface sur laquelle les techniques relatives aux modèles TS permettent d'assurer la stabilité asymptotique de l'origine avec des dynamiques réglées.

Il est clair que les techniques développées dans ce chapitre sont non seulement intéressantes pour les modèles TS mais aussi pour l'amélioration des synthèses de commandes par mode glissant. En effet, d'une part les résultats présentés permettent la prise en compte d'incertitudes non-matching ; d'autre part, nous proposons ici des méthodes systématiques pour le réglage des dynamiques du système réduit.

De la même manière, comme nous pourrons le voir dans le chapitre suivant, l'écriture TS d'une classe de *systèmes non linéaires à retard* peut permettre d'obtenir de nouvelles techniques de stabilité/stabilisation de ces systèmes.

Chapitre 5

Stabilisation Polytopique

Takagi-Sugeno des Systèmes non Linéaires à Retard

5.1 Brève introduction aux systèmes à retard

Les systèmes à retard, définis comme des systèmes dont les dynamiques obéissent à des équations différentielles faisant intervenir des arguments de temps différents, servent à modéliser un grand nombre de phénomènes [30, 38, 43].

La formulation et l'étude de la stabilité des systèmes à retard a commencé dans les années trente avec Krasovskii puis Myshkis. Au cours de ces dernières années, la stabilisation robuste des systèmes à retard a fait l'objet de nombreux travaux, en particulier pour les systèmes linéaires à *incertitudes paramétriques*. On se référera à [44, 60] pour les approches utilisant des fonctionnelles de Lyapounov-Krasovskii avec formulation LMI et à [16] pour celles basées sur le principe de comparaison. La majeure partie des commandes développées sont de type retour d'état continu et sans mémoire (voir [20] pour un état de l'art). Les résultats concernant la robustesse vis-à-vis des *perturbations externes* reposent sur des méthodes de synthèse H_∞ [33, 59] ou sur des approches structurelles [14].

En revanche, dans le cas NL, peu d'études ont été menées. Dans [35], le principe de comparaison par normes vectorielles, bien qu'intéressant pour l'étude de la stabilité demeurent quelque peu conservatif. Dans [68], les résultats basés sur la passivité ont été étendus au cas des systèmes NL à retard. Récemment, des approches utilisant la linéarisation entrée-sortie ont

aussi été utilisées pour stabiliser des systèmes NL à retard [57] ; il est alors nécessaire d'avoir des modèles parfaitement définis.

A l'image de ce que nous avons fait au chapitre 4 pour stabiliser des systèmes sous forme régulière, nous nous attacherons ici à reformuler sous forme TS les systèmes à retard considérés dans un but de stabilisation. L'écriture TS des modèles NL nous permettra d'élaborer des stratégies de contrôle à la fois systématiques et simples à mettre en oeuvre. Deux approches seront envisagées ici :

- Après une transformation TS du système complet, on utilise des régulateurs de type RE et PDC. Ces régulateurs dépendront éventuellement d'une partie retardée de l'état.
- Dans le cas où la matrice d'entrée du système ne dépend pas du retard, il est possible, sous certaines conditions, de mettre le système sous une forme régulière. On utilise alors des techniques de commande par mode glissant à l'image de ce qui a été réalisé au quatrième chapitre.

5.2 Formulation TS d'une classe de systèmes à retard

5.2.1 Système retenu pour ce chapitre

En utilisant les notations données au début de ce mémoire, on considère le système décrit par

$$\dot{x} = f(x_t) + B(x_t)u + p(x_t, t), \quad (5.1)$$

avec f un champ de vecteurs éventuellement perturbé dépendant de la fonction x_t et $B(x_t) = \begin{bmatrix} b_1(x_t) & \dots & b_m(x_t) \end{bmatrix}$. Le vecteur $p(x_t, t)$ représente les dynamiques négligées ou à des perturbations exogènes. La fonction x_t , représentant l'état du système à l'instant t , est supposée continue par morceaux. Conformément aux notations données au début de ce mémoire, on a

$$x_t = x_t(t, \theta) = x(t + \theta), \theta \in [-\tau(t), 0].$$

On notera qu'ici f n'est plus une fonction mais une fonctionnelle.

La mise en oeuvre des techniques de commande développées dans les sections 3 et 4 nécessitera des hypothèses additionnelles, réduisant ainsi la classe de systèmes considérés.

5.2.2 Critères IOD, DD et à retard variable

Au cours de ce chapitre, nous nous attacherons à la stabilité du système décrit par (5.1). Les critères développés ici permettront de stabiliser des systèmes présentant les trois types de retard suivants :

- Le retard τ est constant mais n'est pas connu. On appliquera alors des critères *indépendants du retard* ou IOD. (de l'anglais "Independant Of the Delay")
- Le retard τ est constant et connu. On exploitera alors cette connaissance à l'aide de critères de stabilité *dépendants du retard* ou DD. (de l'anglais "Dependant Of the Delay")
- Le retard $\tau(t)$ est variable dans le temps avec des bornes de variations connues. Les critères sont alors dits à *retard variant*. Les bornes du retard sont notées τ_{\min} et τ_{\max} , donc $\tau(t) \in [\tau_{\min}; \tau_{\max}]$.

5.2.3 Transformation TS des modèles de systèmes à retard

Le théorème suivant découle des résultats du premier chapitre.

Théorème 33 (Blanco et al., [5]) *Soit le système défini par :*

$$\dot{x} = A(x_t)x + A^d(x_t)x(t - \tau) + B(x_t)u, \tag{5.2}$$

avec $x_t \in C_{n,\tau}$, $A(x_t), A^d(x_t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B(x_t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Supposons qu'il existe un domaine $D \in \mathbb{R}^{n \times (2n+m)}$ borné tel que

$$\left[A(x_t(t + \theta)) \quad A^d(x_t(t + \theta)) \quad B(x_t(t + \theta)) \right] \subset D, \quad t \in \mathbb{R}^+, \theta \in [-\tau_{\max}, 0].$$

Alors il existe r matrices A_i, A_i^d et $B_i, i \in I_r$, telles que

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(x_t) (A_i x + A_i^d x(t - h) + B_i u), \tag{5.3}$$

avec des fonctions $h_i(x_t)$ vérifiant la CSP.

Preuve. Il suffit de transposer les résultats du premier chapitre. ■

La méthode de construction présentée au premier chapitre nous permet d'obtenir concrètement les matrices A_i, A_i^d et B_i dans le cas où $A(x_t), A^d(x_t)$ et $B(x_t)$ présentent p termes non

constants pour x_t . On obtient alors $r = 2^p$.

On notera que l'état entre les instants $-\tau_{\max}$ et 0 doit être pris en compte dans le modèle TS.

L'exemple suivant présente une illustration du théorème 33.

Exemple 13 Soit le système décrit par

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x_1(t - \tau_1))x + A^d(x_2)x(t - \tau), \\ A(x_1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \sin x_1(t - \tau_1) & -3 \end{bmatrix}, \\ A^d(x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ \cos^2 x_2 & -1 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

avec $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, $\tau_1 < \tau$ et les conditions initiales $x_t(0) \in \mathcal{C}_{n,\tau}$. Comme la matrice formée par $\begin{bmatrix} A(x_t) & A^d(x_t) \end{bmatrix}$ présente deux termes non constants et bornés pour $x_t \in \mathbb{R}^n$, il est possible d'obtenir un modèle Takagi-Sugeno à quatre sous-modèles. En effet, $\cos^2 x_2$ (resp. $\sin x_1(t - \tau_1)$) s'écrit comme somme convexe de 0 et 1 (resp. -1 et 1) :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^4 h_i(x_t) (A_i x + A_i^d x(t - \tau)),$$

$$\begin{aligned} A_1 = A_3 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, A_1^d = A_2^d = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ A_2 = A_4 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, A_3^d = A_4^d = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} h_1(x_t) = 0.5 \cos^2 x_2 (1 - \sin x_1(t - \tau_1)), \\ h_2(x_t) = 0.5 \cos^2 x_2 (1 + \sin x_1(t - \tau_1)), \\ h_3(x_t) = 0.5 (1 - \cos^2 x_2) (1 - \sin x_1(t - \tau_1)), \\ h_4(x_t) = 0.5 (1 - \cos^2 x_2) (1 + \sin x_1(t - \tau_1)). \end{cases}$$

5.3 Analyse de la stabilité et stabilisation

La section 5.4 présentera des résultats pour des systèmes de type (5.1) mis sous forme régulière. En supposant qu'une telle transformation n'existe pas, on peut mener l'étude de la stabilité et la stabilisation à partir de la formulation non perturbée du théorème 33. Ainsi, le

système considéré dans cette section est de la forme :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(x_t) \left(A_i x + A_i^d x(t-h) + B_i u \right). \quad (5.4)$$

Pour alléger les démonstrations des théorèmes, on utilisera aussi les notations :

$$\begin{cases} A(x_t) = \sum_{i=1}^r h_i(x_t) A_i, \\ A^d(x_t) = \sum_{i=1}^r h_i(x_t) A_i^d. \end{cases}$$

5.3.1 Analyse de la stabilité

L'utilisation de fonctions de Lyapounov classiques étant impossible en présence de retard, nous utiliserons selon le type de retard :

- des fonctionnelles de Lyapounov-Krassovskii's [46] pour des critères IOD et DD.
- des fonctions de Razumikhin [63] pour des critères à retard variant.

Pour la réécriture LMI de nos conditions de stabilité, nous procéderons d'une manière semblable à [44].

Critères IOD de stabilité

Théorème 34 (Blanco et al., [5]) *Soit le système (5.4) en BO (i.e. $u \equiv 0$) avec les conditions initiales $x_t(0)$. S'il existe deux matrices symétriques définies positives $P, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que :*

$$M_i = \begin{pmatrix} A_i^T P + P A_i + S & P A_i^d \\ A_i^{dT} P & -S \end{pmatrix} < 0, i \in I_r, \quad (5.5)$$

alors l'origine du système considéré est GAS pour tout retard constant τ .

Preuve. Nous utiliserons la fonctionnelle de Lyapounov-Krasovkii $V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t)$:

$$\begin{cases} V_1(x_t) = x(t)^T P x(t), \\ V_2(x_t) = \int_{t-\tau}^t x(\theta)^T S x(\theta) d\theta, \end{cases}$$

avec $P = P^T, P > 0$ et $S = S^T, S > 0$. On a

$$\beta_1 \|x_t\|_c^2 \leq V(x_t) \leq \beta_2 \|x_t\|_c^2,$$

avec $\beta_1 = \lambda_{\min}(P)$, $\beta_2 = \lambda_{\max}(P) + \tau \lambda_{\max}(S)$. Calculons à présent la dérivée $V(x_t)$ le long des trajectoires du système :

$$\dot{V}_2(x_t) = x^T S x - x(t - \tau)^T S x(t - \tau),$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x_t) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(x_t) (A_i^T P + P A_i) \right) x + 2x(t - \tau)^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(x_t) A_i^{dT} P \right) x \\ &\quad + 2x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(x_t) P A_i^d \right) x(t - \tau). \end{aligned}$$

En définissant le vecteur augmenté $X = \begin{bmatrix} x & x(t - \tau) \end{bmatrix}^T$, on a $\dot{V}(x_t) = X^T M(x_t) X$ avec

$$M(x_t) = \sum_{i=1}^r h_i(x_t) M_i,$$

avec M_i définis par (5.5). Une condition suffisante pour que $\dot{V}(x_t)$ soit définie négative est ainsi $M_i < 0, i \in I_r$ car les fonctions $h_i(x_t)$ vérifient la CSP. D'après le théorème de Krasovskii [46], l'origine du système considéré est GAS. ■

Exemple 14 Soit le système de l'exemple (13) dans lequel on remplace $A^d(x_2)$ par $\alpha A^d(x_2)$, avec α une constante positive :

$$\dot{x}(t) = A(x_1(t - \tau_1))x + \alpha A^d(x_2)x(t - \tau).$$

La résolution LMI du critère (5.5) du théorème 34, nous permet d'affirmer que si $\alpha \leq 0.47$, l'origine du système est GAS pour tout retard fixé IOD. Les matrices P et S obtenues sont :

$$P = \begin{bmatrix} 2.62 & 0.57 \\ 0.57 & 1.05 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1.87 & -0.38 \\ -0.38 & 2.39 \end{bmatrix}.$$

Pour comparer ces résultats avec ceux obtenus en utilisant les normes vectorielles, on notera que le coefficient maximal obtenu dans [15] est $\alpha \leq 0.38$.

Critères à retard variant

Théorème 35 (Blanco et al.) Soit le système (5.4) en BO avec les conditions initiales $x_t(0)$ et $\tau = \tau(t)$. S'il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que :

$$M_i = \begin{pmatrix} A_i^T P + P A_i + P & P A_i^d \\ A_i^{dT} P & -P \end{pmatrix} < 0, i \in I_\tau, \tag{5.6}$$

alors l'origine du système considéré est GAS pour tout retard $\tau(t)$ borné.

Preuve. Nous choisissons la fonction de Razumikhin suivante :

$$V(z) = z^T P z, \tag{5.7}$$

avec P une matrice symétrique définie positive de $\mathbb{R}^{(n-d) \times (n-d)}$.

Conformément au principe de la méthode de Lyapunov-Razumikhin [63], on suppose qu'il existe une classe de fonctionnelles ϕ telles que :

$$\|V(\phi(t-s))\| < q \|V(\phi)\|, s \in [0, \tau_{max}], \tag{5.8}$$

avec $q > 1$. Alors, on a l'inégalité suivante :

$$\phi(t-s)^T P \phi(t-s) < q \phi^T P \phi. \tag{5.9}$$

La dérivée temporelle de ϕ_t est soumise à :

$$\dot{\phi} = \sum_{i=1}^r h_i(\phi_t) (A_i \phi + A_i^d \phi(t-\tau)).$$

En notant :

$$\begin{cases} A(\phi_t) = \sum_{i=1}^r h_i(\phi_t) A_i, \\ A^d(\phi_t) = \sum_{i=1}^r h_i(\phi_t) A_i^d, \end{cases}$$

on a

$$\dot{\phi} = A(\phi_t) \phi + A^d(\phi_t) \phi(t-\tau).$$

Donc

$$\dot{V}(\phi) = \phi^T P \dot{\phi} + \dot{\phi}^T P \phi$$

$$= \phi^T \left(A^T(\phi_t)P + PA(\phi_t) \right) \phi + 2\phi^T PA^d(\phi_t)\phi(t - \tau).$$

En utilisant l'inégalité $2x^T y \leq x^T P^{-1}x + y^T P y$ avec $x = A^d(\phi_t)^T P \phi$ et $y = \phi(t - \tau)$, on obtient :

$$\dot{V}(\phi) \leq \phi^T \left(A^T(\phi_t)P + PA(\phi_t) + PA^d(\phi_t)P^{-1}A^d(\phi_t)^T P \right) \phi + \phi^T (t - \tau)P\phi(t - \tau).$$

En utilisant la propriété (5.8), nous obtenons :

$$\dot{V}(\phi) \leq \phi^T \left(A^T(\phi_t)P + PA(\phi_t) + PA^d(\phi_t)P^{-1}A^d(\phi_t)^T P + qP \right) \phi.$$

Cette expression peut être réécrite en utilisant les $h_i(x_t)$:

$$\dot{V}(\phi) \leq \sum_{i=1}^r h_i(\phi_t) \left(\phi^T \left(A_i^T P + PA_i + PA_i^d P^{-1} A_i^{dT} P + qP \right) \phi \right).$$

Si le critère (5.6) est vérifié, alors il existe un réel $q > 1$ tel que toutes les matrices

$$A_i^T P + PA_i + PA_i^d P^{-1} A_i^{dT} P + qP,$$

sont définies négatives. On peut alors conclure à l'existence d'une constante q satisfaisante pour $V(\phi)$, ce qui prouve que l'origine du système est asymptotiquement stable. ■

Critères DD de stabilité

Théorème 36 (Blanco et al., [5]) Soit le système (5.4) en BO avec les conditions initiales $x_t(0)$. S'il existe cinq matrices symétriques définies positives P, R_1, R_2, M_1, M_2 de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et une constante positive τ_{\max} telle que :

$$\begin{cases} Q_i(\tau_{\max}) = \begin{bmatrix} N_i(\tau_{\max}) & \tau_{\max} P A_i^d & \tau_{\max} P A_i^d \\ \tau_{\max} A_i^{dT} P & -\tau_{\max} M_1 & 0 \\ \tau_{\max} A_i^{dT} P & 0 & -\tau_{\max} M_2 \end{bmatrix} < 0, i \in I_r, \\ N_i(\tau_{\max}) = (A_i + A_i^d)^T P + P (A_i + A_i^d) + \tau_{\max} (R_1 + R_2), \end{cases} \quad (5.10)$$

et

$$\begin{bmatrix} M_2 & M_2 A_i^d \\ A_i^d M_2 & R_2 \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} M_1 & M_1 A_i \\ A_i^T M_1 & R_1 \end{bmatrix} > 0, i \in I_r,$$

alors l'origine du système considéré est GAS pour tout retard fixé $\tau \leq \tau_{\max}$.

Preuve. Soit le système (5.4) écrit sous la forme

$$\dot{x} = A(x_t)x + A^d(x_t)x(t - \tau).$$

Considérons la fonctionnelle de Lyapounov-Krasovskii définie par $V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t)$:

$$\begin{cases} V_1(x_t) = x^T P x, \\ V_2(x_t) = \int_{-\tau}^0 \left(\int_{t+\theta}^t x(\xi)^T R_1 x(\xi) d\xi \right) d\theta + \int_{-2\tau}^{-\tau} \left(\int_{t+\theta}^t x^T(\xi) R_2 x(\xi) d\xi \right) d\theta, \end{cases} \quad (5.11)$$

avec P, R_1, R_2 symétriques définies positives. On a

$$\beta_1 \|x_t\|_c^2 \leq V(x_t) \leq \beta_2 \|x_t\|_c^2$$

avec

$$\begin{cases} \beta_1 = \lambda_{\min}(P), \\ \beta_2 = \lambda_{\max}(P) + \tau \lambda_{\max}(R_1) + \tau \lambda_{\max}(R_2). \end{cases}$$

En utilisant la transformation

$$x(t - \tau) = - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(\theta) d\theta + x,$$

on peut réécrire (5.4) sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \left(A(x_t) + A^d(x_t) \right) x - A^d(x_t) \int_{-\tau}^0 \begin{pmatrix} A(x_t(t + \theta))x(t + \theta) + \\ A^d(x_t(t + \theta))x(t + \theta - \tau) \end{pmatrix} d\theta$$

On calcule à présent la dérivée de $V(x_t)$ le long des trajectoires de (5.4). On a

$$\dot{V}_2(x_t) = \tau x^T (R_1 + R_2) x - \int_{-\tau}^0 x(t + \theta)^T R_1 x(t + \theta) d\theta - \int_{-2\tau}^{-\tau} x(t + \theta)^T R_2 x(t + \theta) d\theta$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x_t) = x^T \left(\begin{pmatrix} \left(A(x_t) + A^d(x_t) \right)^T P \\ + P \left(A(x_t) + A^d(x_t) \right) \end{pmatrix} x - 2 \int_{-\tau}^0 x^T P A^d(x_t) A(x_t(t + \theta)) x(t + \theta) d\theta \right. \\ \left. - 2 \int_{-\tau}^0 x^T P A^d(x_t) A^d(x_t(t + \theta)) x(t + \theta - \tau) d\theta \right) \end{aligned}$$

Comme l'inégalité $-2u^T v \leq u^T R u + v^T R^{-1} v$ est vraie pour tous vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ et toute matrice R symétrique définie positive, on a

$$-2 \int_{-\tau}^0 x^T P A^d(x_t) A(x_t(t+\theta)) x(t+\theta) d\theta \leq x^T P A^d(x_t) \left(\int_{-\tau}^0 H_1(t, \theta) d\theta \right) \left(A^d(x_t) \right)^T P x + \int_{-\tau}^0 x(t+\theta)^T R_1 x(t+\theta) d\theta,$$

$$-2 \int_{-\tau}^0 x^T P A^d(x_t) A^d(x_t(t+\theta)) x(t+\theta-\tau) d\theta \leq x^T P A^d(x_t) \left(\int_{-\tau}^0 H_2(t, \theta) d\theta \right) \left(A^d(x_t) \right)^T P x + \int_{-\tau}^{-2\tau} x(t+\theta)^T R_2 x(t+\theta) d\theta,$$

avec

$$\begin{cases} H_1(t, \theta) = A(x_t(t+\theta)) R_2^{-1} A(x_t(t+\theta))^T, \\ H_2(t, \theta) = A^d(x_t(t+\theta)) R_2^{-1} A^d(x_t(t+\theta))^T. \end{cases}$$

Définissons

$$\begin{cases} I_1(\tau) = X^T \int_{-\tau}^0 H_1(t, \theta) X d\theta, \\ I_2(\tau) = X^T \int_{-\tau}^0 H_2(t, \theta) X d\theta, \end{cases}$$

avec $X = A^d(x_t)^T P x$.

Définissons également

$$\begin{cases} M_1^{-1} \leq \max_{i \in I_r} (A_i R_1^{-1} A_i^T), \\ M_2^{-1} \leq \max_{i \in I_r} (A_i^d R_2^{-1} A_i^{dT}). \end{cases} \quad (5.12)$$

On notera qu'il est possible d'écrire (5.12) sous la forme de LMIs.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} M_2 & M_2 A_i^d \\ A_i^{dT} M_2 & R_2 \end{pmatrix} > 0, i \in I_r, \\ \begin{pmatrix} M_1 & M_1 A_i \\ A_i M_1 & R_1 \end{pmatrix} > 0, i \in I_r. \end{cases}$$

En utilisant ces notations, on obtient les équations simples suivantes

$$\begin{cases} I_1(t, \tau) \leq \tau X^T M_1^{-1} X, \\ I_2(t, \tau) \leq \tau X^T M_2^{-1} X. \end{cases} \quad (5.13)$$

Pour ce calcul, on utilise les propriétés de somme convexe des $h_i(x_t)$ ainsi que l'inégalité $2u^T Rv \leq (u^T Ru + v^T Rv)$. Alors,

$$\dot{V}(x_t) \leq x^T \begin{pmatrix} (A(x_t) + A^d(x_t))^T P + \\ P(A(x_t) + A^d(x_t)) \\ + \tau(R_1 + R_2) \end{pmatrix} x + \tau x^T P A^d(x_t) (M_1^{-1} + M_2^{-1}) A^d(x_t)^T P x.$$

En utilisant le lemme de Schur deux fois, on obtient la condition suffisante pour que $\dot{V}(x_t)$ soit définie négative

$$\begin{pmatrix} N(\tau) & \tau P A^d(x_t) & \tau P A^d(x_t) \\ \tau A^d(x_t)^T P & -\tau M_1 & 0 \\ \tau A^d(x_t)^T P & 0 & -\tau M_2 \end{pmatrix} < 0,$$

avec

$$N(\tau) = (A(x_t) + A^d(x_t))^T P + P(A(x_t) + A^d(x_t)) + \tau(R_1 + R_2). \quad (5.14)$$

A ce stade, on décompose cette expression sous la forme TS pour prouver la stabilité asymptotique globale de l'origine sous les hypothèses du théorème 36. On notera que si une solution en termes de P, R_1, R_2, M_1, M_2 est trouvée pour un certain τ_{\max} , alors ces cinq matrices sont aussi solution du problème pour tout $\tau \leq \tau_m$. ■

5.3.2 Extension des résultats à la stabilisation

Type de commande utilisée

Dans tout le paragraphe 5.3.2, nous opérons pour la structure de commande générale :

$$u(x_t) = - \sum_{i=1}^r h_i(x_t) \left(K_i x + K_i^d x(t - \tau) \right). \quad (5.15)$$

Cette commande est semblable à un PDC. On notera que dans le cas d'une commande retardée d'un temps τ (i.e. $u = u(t - \tau)$), nous serons contraints de fixer $K_i = 0, i \in I_r$.

En appliquant la commande (5.15) au système (5.4), on obtiendra le nouveau modèle :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x_t) h_j(x_t) \left((A_i - B_i K_i) x + (A_i^d - B_i K_i^d) x(t - \tau) \right).$$

Si l'on souhaite utiliser des commandes de la forme générale

$$u(x_t) = - \left(Kx + K^d x(t - \tau) \right),$$

on utilisera les théorèmes de la section précédente en effectuant les modifications suivantes :

1. Commande $u = -Kx$, on applique directement les résultats de stabilité IOD, DD et à retard variant en remplaçant A_i par $(A_i - B_i K)$.
2. Commande $u = -K^d x(t - \tau)$, on applique directement les résultats de stabilité IOD, DD et à retard variant en remplaçant A_i^d par $(A_i^d - B_i K^d)$.
3. Commande $u = -Kx - K^d x(t - \tau)$, on applique directement les résultats de stabilité IOD, DD et à retard variant en remplaçant A_i par $A_i - B_i K$ et A_i^d par $(A_i^d - B_i K^d)$.

Ces contrôleurs présentent l'avantage de la robustesse car ils sont valables pour tout type d'évolution des $h_i(x_t)$, $i \in I_r$ comme nous l'avons souligné au cours du deuxième chapitre. Pour la résolution numérique, une réécriture LMI sera nécessaire.

Critère IOD de stabilisation

Théorème 37 (Blanco et al.) Soit le système (5.4) avec les conditions initiales $x_t(0)$ et commandé par (5.15). S'il existe deux matrices symétriques définies positives $P, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que :

$$\begin{cases} M_{ii} < 0, i \in I_r, \\ M_{ij} + M_{ji} < 0, j < i, (i, j) \in I_r^2, \end{cases}$$

avec $M_{ij}, (i, j) \in I_r^2$ définies par

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} (A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) + S & P(A_i^d - B_i K_j^d) \\ (A_i^d - B_i K_j^d)^T P & -S \end{pmatrix} < 0, i \in I_r,$$

alors l'origine du système considéré est GAS pour tout retard τ constant.

Preuve. Evidente au regard de la preuve du théorème 34 et en utilisant les résultats classiques de stabilisation via PDC. ■

Critère DD de stabilisation

Théorème 38 (Blanco et al.) Soit le système (5.4) avec les conditions initiales $x_t(0)$ et commandé par (5.15). S'il existe cinq matrices symétriques définies positives P, R_1, R_2, M_1, M_2

de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et une constante positive τ_{\max} telle que

$$\begin{cases} Q_{ii} < 0, i \in I_r, \\ Q_{ij} + Q_{ji} < 0, j < i, (i, j) \in I_r^2, \end{cases}$$

avec $Q_{ij}, (i, j) \in I_r^2$ définies par :

$$\begin{cases} Q_{ij}(\tau_{\max}) = \begin{pmatrix} N_{ij}(\tau_{\max}) & \tau_{\max} P E_{ij}^d & \tau_{\max} P E_{ij}^d \\ \tau_{\max} (E_{ij}^d)^T P & -\tau_{\max} M_1 & 0 \\ \tau_{\max} (E_{ij}^d)^T P & 0 & -\tau_{\max} M_2 \end{pmatrix}, \\ N_{ij}(\tau_{\max}) = (E_{ij} + E_{ij}^d)^T P + P (E_{ij} + E_{ij}^d) + \tau_{\max} (R_1 + R_2), \\ E_{ij}^d = (A_i^d - B_i K_j^d), E_{ij} = (A_i - B_i K_j), \end{cases}$$

et

$$\begin{bmatrix} M_2 & M_2 E_{ij}^d \\ (E_{ij}^d)^T M_2 & R_2 \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} M_1 & M_1 E_{ij} \\ (E_{ij})^T M_1 & R_1 \end{bmatrix} > 0, (i, j) \in I_r^2$$

alors l'origine du système considéré est GAS pour tout retard fixé $\tau \leq \tau_{\max}$.

Preuve. La preuve ici reste identique à celle du théorème (36) en considérant

$$\begin{cases} M_1^{-1} \leq \max_{(i,j) \in I_r^2} (E_{ij} R_1^{-1} (E_{ij})^T), \\ M_2^{-1} \leq \max_{(i,j) \in I_r^2} (E_{ij}^d R_2^{-1} (E_{ij}^d)^T), \end{cases}$$

et en utilisant les résultats classiques de stabilisation via PDC. ■

Critère à retard variant

Pour ce théorème, on suppose le retard variable mais connu. Dans le cas contraire, on fixera dans la commande (5.15), $K_i^d = 0, i \in I_r$.

Théorème 39 (Blanco et al.) Soit le système (5.4) avec les conditions initiales $x_t(0)$ et commandé par (5.15). S'il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que :

$$\begin{cases} M_{ii} < 0, i \in I_r, \\ M_{ij} + M_{ji} < 0, j < i, (i, j) \in I_r^2, \end{cases}$$

avec les $M_{ij}, (i, j) \in I_r^2$ définis par

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} (A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) + P & P(A_i^d - B_i K_j^d) \\ (A_i^d - B_i K_j^d)^T P & -P \end{pmatrix} < 0, i \in I_r,$$

alors l'origine du système considéré est GAS pour tout retard $\tau(t)$ borné.

Preuve. Evidente au regard de la preuve du théorème 35 et en utilisant les résultats classiques de stabilisation via PDC. ■

Cas $A(x_t), B(x_t)$ connues et $A^d(x_t)$ "inconnue"

On considère $A(x_t), B(x_t)$ connues et $A^d(x_t)$ partiellement inconnue¹. Il n'est pas dans ce cas possible de modéliser le système par (5.4). On utilise alors l'écriture :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r_1} h_i(x_t) A_i x + \sum_{k=1}^{r_2} g_k(x_t) A_k^d x(t - \tau) + \left(\sum_{i=1}^{r_1} h_i(x_t) B_i \right) u, \quad (5.16)$$

avec les $h_i(x_t)$ connues et les $g_k(x_t)$ inconnues mais vérifiant la CSP. Le contrôleur u est alors donné par

$$u(x_t) = - \left(\sum_{j=1}^{r_1} h_j(x_t) K_j \right) x - K^d x(t - \tau).$$

Bien entendu, quand le retard est inconnu, on fixera $K_d = 0$. On énonce les théorèmes suivants :

Théorème 40 (Blanco et al.) Soit le système (5.16) commandé par

$$u(x_t) = - \left(\sum_{j=1}^{r_1} h_j(x_t) K_j \right) x - K^d x(t - \tau),$$

avec les conditions initiales $x_t(0)$. S'il existe deux matrices symétriques définies positives $P, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que :

$$\begin{cases} M_{iik} < 0, i \in I_r, k \in I_{r_2}. \\ M_{ijk} + M_{jik} < 0, j < i, (i, j) \in I_{r_1}^2, k \in I_{r_2}. \end{cases}$$

avec les matrices M_{ijk} définies par

$$M_{ijk} = \begin{pmatrix} (A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) + S & P(A_k^d - B_i K^d) \\ (A_k^d - B_i K^d)^T P & -S \end{pmatrix}, (i, j, k) \in I_{r_1}^2 \times I_{r_2},$$

¹Une matrice $C(x_t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est considérée comme "inconnue" si on ne connaît que ses bornes dans $\mathbb{R}^{n \times n}$. Il est possible d'écrire $C(x_t)$ sous forme TS mais les fonctions de pondérations sont inconnues.

alors l'origine du système considéré est GAS pour tout retard constant τ .

Preuve. Les dynamiques du système bouclé sont soumises à :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sum_{i=1}^{r_1} h_i(x_t) A_i x + \sum_{k=1}^{r_2} g_k(x_t) A_k^d x(t-\tau) + \left(\sum_{i=1}^{r_1} h_i(x_t) B_i \right) \left(- \sum_{j=1}^{r_1} h_j(x_t) K_j x - K^d x(t-\tau) \right), \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^{r_1} h_i(x_t) h_j(x_t) (A_i - B_i K_j) \right) x + \left(\sum_{i=1}^{r_1} \sum_{k=1}^{r_2} g_k(x_t) h_i(x_t) (A_k^d - B_i K^d) \right) x(t-\tau).\end{aligned}$$

On pose ainsi

$$\begin{cases} A(x_t) = \sum_{i,j=1}^{r_1} h_i(x_t) h_j(x_t) (A_i - B_i K_j), \\ A^d(x_t) = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{k=1}^{r_2} g_k(x_t) h_i(x_t) (A_k^d - B_i K^d). \end{cases}$$

L'usage de la fonctionnelle de Lyapounov-Krasovskii : $V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t)$ avec $V_1(x_t)$ et $V_2(x_t)$ définies par (5.11), nous conduit à la condition suffisante de stabilité suivante :

$$M(x_t) = \begin{pmatrix} A(x_t)^T P + P A(x_t) + S & P A^d(x_t) \\ (A^d(x_t))^T P & -S \end{pmatrix} < 0.$$

En utilisant la définition de M_{ijk} , on peut écrire :

$$M(x_t) < 0 \iff \sum_{i,j=1}^{r_1} \sum_{k=1}^{r_2} h_i(x_t) h_j(x_t) g_k(x_t) M_{ijk} < 0.$$

Donc une condition suffisante de stabilité asymptotique est :

$$\sum_{i,j=1}^{r_1} h_i(x_t) h_j(x_t) M_{ijk} < 0, k \in I_{r_2}.$$

En symétrisant les termes en i et j , on obtient ainsi les conditions de stabilité de l'énoncé. ■

On obtient le critère à retard variable en remplaçant dans le théorème précédent S par P .

Théorème 41 (Blanco et al.) Soit le système (5.16) commandé par

$$u(x_t) = - \sum_{j=1}^{r_1} h_j(x_t) K_j x - K^d x(t-\tau),$$

avec les conditions initiales $x_t(0)$. S'il existe cinq matrices symétriques définies positives $P, R_1,$

$R_2, M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une constante positive τ_{\max} telle que

$$\begin{cases} M_{iik} < 0, i \in I_{r_1}, k \in I_{r_2}, \\ M_{ijk} + M_{jik} < 0, j < i, (i, j) \in I_{r_1}^2, k \in I_{r_2}, \end{cases} \quad (5.17)$$

avec M_{ijk} définis par :

$$\begin{cases} M_{ijk}(\tau_{\max}) = \begin{pmatrix} N_{ijk}(\tau_{\max}) & \tau_{\max} P E_{ijk}^d & \tau_{\max} P E_{ijk}^d \\ \tau_{\max} (E_{ijk}^d)^T P & -\tau_{\max} M_1 & 0 \\ \tau_{\max} (E_{ijk}^d)^T P & 0 & -\tau_{\max} M_2 \end{pmatrix}, (i, j, k) \in I_{r_1}^2 \times I_{r_2}, \\ N_{ijk}(\tau_{\max}) = (E_{ijk} + E_{ijk}^d)^T P + P (E_{ijk} + E_{ijk}^d) + \tau_{\max} (R_1 + R_2), \\ E_{ijk}^d = (A_i^d - B_i K^d), E_{ijk} = (A_i - B_i K_j), \end{cases}$$

et

$$\begin{bmatrix} M_2 & M_2 E_{ijk}^d \\ (E_{ijk}^d)^T M_2 & R_2 \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} M_1 & M_1 E_{ijk} \\ (E_{ijk})^T M_1 & R_1 \end{bmatrix} > 0, (i, j, k) \in I_{r_1}^2 \times I_{r_2}, \quad (5.18)$$

alors l'origine du système considéré est GAS pour tout retard constant $\tau \leq \tau_{\max}$.

Preuve. Identique à celle du théorème précédent. ■

On aurait pu procéder à l'identique avec $A^d(x_t), B(x_t)$ connues et $A(x_t)$ inconnue, bien que l'on puisse supposer que dans ce cas la stabilisation sera plus délicate. On notera que si $B(x_t)$ est inconnue, nous sommes contraints à l'usage d'un retour d'état, éventuellement avec mémoire.

5.3.3 Exemples d'utilisation

Exemple 1 : Stabilité dépendante du retard

Soit l'équation différentielle :

$$y''(t) - a_1(\cdot)\dot{y}(t) = u(t),$$

y et u étant respectivement l'entrée et la sortie du système, avec $1.5 \leq a_1(\cdot) \leq 2$, continue par morceaux, dépendant de l'état, du temps et de perturbations. Aucun contrôleur du type $u(t) = -ky(t)$ ne stabilise le système. On souhaite ainsi utiliser un contrôleur de type $u(t) = -k_1\dot{y}(t)$. Comme $\dot{y}(t)$ n'est pas nécessairement mesurable, une valeur reconstruite $\dot{y}(t - \tau)$ est utilisée, avec τ une constante positive. Avec le vecteur défini par $x = \begin{bmatrix} y & \dot{y} \end{bmatrix}^T$, le système bouclé par

$u(t) = -k_1 \dot{y}(t - \tau)$ s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x_t)x(t) + A^d(x_t)x(t - \tau), \\ A(x_t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a_1(.) \end{bmatrix}, A^d(x_t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

avec $1.5 \leq a_1(.) \leq 2$. On a une représentation TS à deux modèles :

$$\begin{cases} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1.5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \\ B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

avec des valeurs inconnues pour les fonctions $h_1(.)$ et $h_2(.)$.

Par application du théorème 36, on obtient des solutions exprimées en terme de couples admissibles (τ, k_1) . Les valeurs admissibles sont données par la figure 5-1; sur cette figure, la courbe en pointillé correspond aux résultats obtenus à l'aide des critères utilisant les normes vectorielles [34].

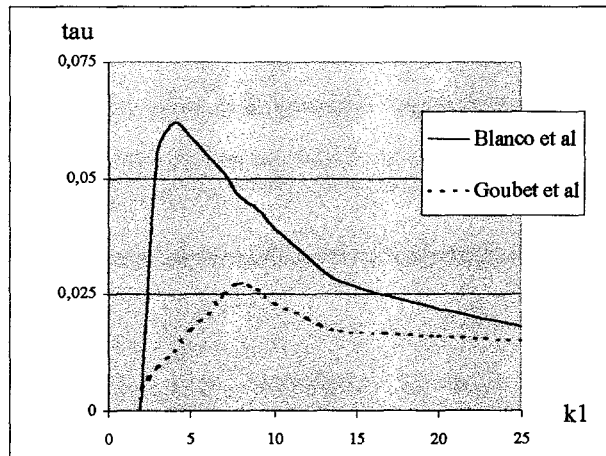


FIG. 5-1: Simulation : comparaison des approches TS et “normes vectorielles”

D'après ces résultats, si $k_1 > 2$, le système est stabilisé par un contrôleur $u(x_t) = -k_1 \dot{y}(t - \tau)$ pour une petite valeur du retard τ . Si l'on choisit $\tau = 0.05$ seconde, il est possible d'avoir la plage de réglage pour k_1 : $k_1 \in [3, 7]$. Le théorème 36 assure en effet la stabilité asymptotique globale du système.

La première courbe de la figure 5-2, représente les résultats de simulation avec $\tau = 0.05s$, $k_1 = 5$, des conditions initiales $x_t^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ et les perturbations vérifiant $a_1(\cdot) = 1.75 + 0.25 \cos(t)$. On constate que la sortie converge asymptotiquement.

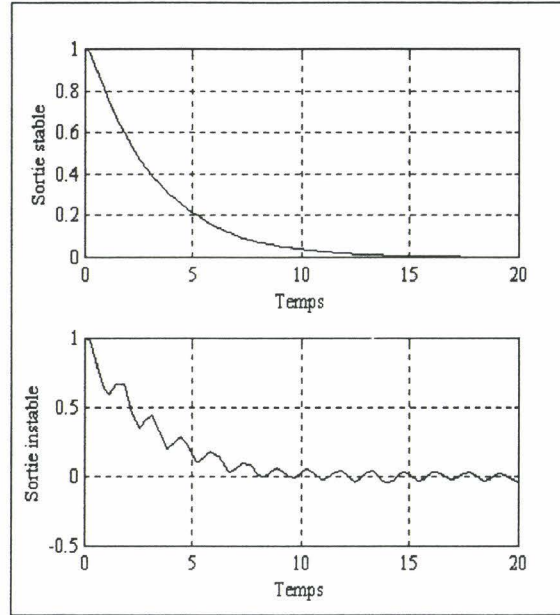


FIG. 5-2: Simulation : comportement selon la valeur du retard.

Sur la deuxième courbe, on a augmenté le retard à $\tau = 0.27s$; on constate la non convergence asymptotique de l'état. On notera qu'il est possible d'accélérer la vitesse de convergence en augmentant le gain k_1 , au prix d'une diminution du retard admissible.

Exemple 2 : Stabilisation dépendante du retard avec matrice $A^d(x_t)$ en partie inconnue

Soit le système suivant :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 - e^{-|x_3(t-\tau_2)|} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & k_1(x_t) \\ k_2(x_t) & -1 & 4 \end{bmatrix} x(t-\tau) \quad (5.19)$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \cos^2 x(t-\tau_1) \\ 3 \end{bmatrix} u,$$

avec $\|k_1(x_t)\| < \alpha$ et $\|k_2(x_t)\| < \beta$, et $\tau_2, \tau_1 \leq \tau$ avec des retards connus.

Nous pouvons exprimer le système (5.19) sous la forme (5.16) avec $r_1 = r_2 = 4$. Nous procédons en 3 étapes.

1. Pour la matrice $A^d(x_t)$, il n'est pas nécessaire de calculer les fonctions $g_k(x_t)$; seules les matrices extrêmes sont utiles :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1^d = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \alpha \\ \beta & -1 & 4 \end{bmatrix}, A_2^d = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \alpha \\ -\beta & -1 & 4 \end{bmatrix}, \\ A_3^d = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -\alpha \\ \beta & -1 & 4 \end{bmatrix}, A_4^d = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -\alpha \\ -\beta & -1 & 4 \end{bmatrix}. \end{array} \right.$$

2. Pour les matrices $A(x_t)$ et $B(x_t)$, on a la décomposition :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_1 = B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T, B_2 = B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T. \end{array} \right.$$

et les fonctions de pondération

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1(x_t) = (1 - e^{-|x_3(t-\tau_2)|}) (1 - \cos^2 x(t - \tau_1)), \\ h_2(x_t) = (1 - e^{-|x_3(t-\tau_2)|}) \cos^2 x(t - \tau_1), \\ h_3(x_t) = e^{-|x_3(t-\tau_2)|} (1 - \cos^2 x(t - \tau_1)), \\ h_4(x_t) = e^{-|x_3(t-\tau_2)|} \cos^2 x(t - \tau_1). \end{array} \right.$$

3. Notre contrôleur est donné par

$$u(x_t) = - \sum_{j=1}^4 h_j(x_t) K_j x - K^d x(t - \tau), \tag{5.20}$$

avec $K_i, i \in I_4$ et K^d à déterminer à l'aide du théorème 40.

Le critère donné dans ce théorème s'écrit sous forme LMI en multipliant à gauche et à droite par

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix},$$

et utilisant le changement de variable bijectif $P = T^{-1}$, $S = R^{-1}$, $U_i = K_i S$, et $U^d = K^d S$. La figure 5-3 représente les valeurs de (α, β) pour lesquelles il existe un contrôleur de type (5.20) stabilisant le système.

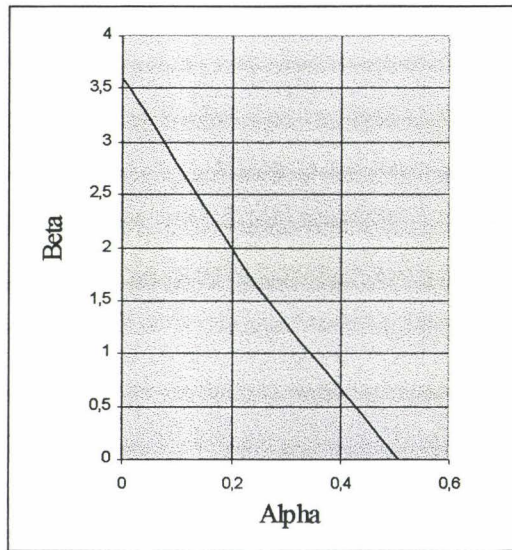


FIG. 5-3: Simulation, conditions suffisantes de stabilisabilité en (α, β)

Du fait de la convexité de notre mise en forme, il est clair que si un couple (α_0, β_0) est solution du problème, tout couple de type (α, β) avec $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ et $0 \leq \beta \leq \beta_0$ sera aussi solution du problème.

5.3.4 Bilan de la première méthode proposée

La mise en forme Takagi-Sugeno des systèmes à retard NL permet de déterminer la structure des contrôleurs à mettre en oeuvre. Outre ce fait, notre méthode offre la possibilité d'obtenir des critères dans le cas de matrices d'entrée dépendant du retard.

Pourtant notre méthodologie reste limitée en terme de robustesse, en effet les perturbations exogènes de type $p(x_t, t)$ agissant directement sur la dérivée de la variable d'état ne sont pas prises en compte dans le modèle. Pour remédier à ce problème, il est naturel de considérer des commandes par mode glissant.

5.4 Stabilisation par mode glissant

5.4.1 Mode glissant et systèmes à retards

L'utilisation des commandes par mode glissant est rendue délicate par la présence de phénomènes de retard (voir par exemple [29] ou [64] pour un état de l'art). En effet, si une commande par mode glissant est mise en oeuvre sans tenir compte du retard, on obtient des comportements instables, chaotiques ou encore des phénomènes de chattering très importants. Même si le formalisme général des inclusions différentielles pour les systèmes à retard a été décrit dans [43], les propositions de lois de commande concrètes restent encore peu nombreuses [10, 12, 31, 45]. En outre, les références présentées ne permettent pas de prendre en compte les systèmes NL à retard.

L'objectif de cette section est d'étendre les résultats de commande par mode glissant de systèmes retardés linéaires au cas NL. Comme au quatrième chapitre, l'outil utilisé pour le passage au NL est la transformation Takagi-Sugeno du modèle. Pour la synthèse des commandes, le système sera reformulé sous une forme régulière ; il est ainsi nécessaire que la matrice d'entrée ne dépende que de l'état instantané à l'instant t . Deux formes de retard seront traitées ici :

- Retards constants : on utilisera des fonctionnelles de Lyapounov-Krasovskii pour obtenir des critères IOD.
- Retards variables dans le temps ($\tau(t)$) : on utilisera une approche de type Razumikhin.

A la fin de cette section, nous proposons un exemple d'utilisation des méthodes proposées pour les deux catégories de retard.

5.4.2 Formulation du problème

Les techniques et hypothèses à vérifier pour écrire un système de la forme

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u + p(x, t),$$

sous la forme régulière

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f^1(z), \\ \dot{z}_2 = f^2(z) + G^R(z)u + p^R(z, t), \end{cases}$$

ont été explicitées au quatrième chapitre.

Ces conditions portent exclusivement sur la forme de la matrice $B(x)$. Ainsi, la transformation

du système retardé (5.1) en un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f^1(z_t), \\ \dot{z}_2 = f^2(z_t) + G^R(z)u + p^R(z_t, t), \end{cases} \quad (5.21)$$

avec le vecteur de perturbations vérifiant

$$\|p^R\| < \Psi(z_t),$$

présuppose les mêmes conditions sur la matrice $B(x)$ que celles explicitées au quatrième chapitre.

Ainsi, c'est à partir de la formulation (5.21) que les théorèmes de cette section seront développés.

Pour la mise en forme TS du système réduit \mathcal{E}_1 , nous considèrerons les deux hypothèses :

$$\begin{aligned} C5, H1) \quad \dot{z}_1 &= \sum_{i=1}^r h_i(z_t) \left(\begin{bmatrix} A_i^{11} \\ A_i^{12} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} A_i^{d11} \\ A_i^{d12} \end{bmatrix} z(t - \tau) \right), \text{ avec } h_i(z_t) \text{ connues.} \\ C5, H2) \quad \dot{z}_1 &= \sum_{i=1}^r h_i(z_t) \left(\begin{bmatrix} A_i^{11} \\ A_i^{12} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} A_i^{d11} \\ A_i^{d12} \end{bmatrix} z(t - \tau) \right), \text{ avec } h_i(z_t) \text{ inconnues.} \end{aligned}$$

5.4.3 Choix de la surface

Les études menées dans ce chapitre suggèrent la structure de surface très générale :

$$\mathcal{S}_{nl} = \left\{ s(z) = z_2 + \left(\sum_{i=1}^r h_i(x_t) K_i \right) z_1 + \left(\sum_{i=1}^r h_i(x_t) K_i^d \right) z_1(t - \tau) = 0, z \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Comme nous l'avons vu au quatrième chapitre, l'utilisation de surface NL augmente considérablement la complexité des contrôleurs. Ainsi, en fixant $K_i^d = 0, i \in I_r$ et $K_i = K, i \in I_r$, nous nous travaillerons plus modestement avec une surface linéaire non retardée du type :

$$\mathcal{S} = \{s(z) = z_2 + K z_1 = 0, z \in \mathbb{R}^n\}. \quad (5.22)$$

Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent ce choix revient à commander le système réduit via la variable z_2 avec un contrôleur de type linéaire : $u = -K z_1$.

Sur la surface les dynamiques du système réduit obéissent à :

$$\dot{z}_1 = \sum_{i=1}^r h_i(z_t) (A_{i11} - A_{i12}K) z_1(t) + (A_{di11} - A_{di12}K) z_1(t - \tau), \quad (5.23)$$

Les critères de stabilité asymptotique du système réduit (5.23) différeront selon les types de stabilité recherchée (IOD, DD ou à retard variant). Par contre, ils ne dépendront pas des fonctions de pondération $h_i(z_t)$ car notre contrôleur est linéaire. A l'inverse, dans la phase d'atteinte de la surface, la structure du contrôleur u ne sera pas la même selon que les fonctions de pondération sont connues ou inconnues.

5.4.4 Attractivité de la surface

La dérivée, le long des trajectoires du système (5.21), de la quantité $s(z)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{s}(z) &= \dot{z}_2 + K\dot{z}_1, \\ &= f^2(z_t) + Kf^1(x_t) + G^R(z)u + p^R(z_t, t). \end{aligned}$$

Cas des fonctions de pondération connues

Lemme 10 (Gouaisbaut, Blanco, Richard, [32]) Soit K une matrice quelconque de $\mathbb{R}^{d \times (n-d)}$, m_1 une constante positive. Soit $\Lambda \in \mathbb{R}^{d \times d}$ une matrice de Hürwitz et P_{surf} une matrice symétrique définie positive de $\mathbb{R}^{d \times d}$ avec $\Lambda^T P_{surf} + P_{surf} \Lambda < 0$. Supposons que le système (5.21) vérifie C5, H1). La commande définie par

$$\begin{aligned} u(z_t) &= - \left(G^R(z) \right)^{-1} \left(\xi(z_t) - \Lambda s + m(z_t) \frac{P_{surf} s}{\|P_{surf} s\|} \right), \\ m(z_t) &= m_1 + \Psi(z_t), \\ \xi(z_t) &= f^2(z_t) + K f^1(z_t), \end{aligned} \tag{5.24}$$

rend la surface $s(z) = z_2 + Kz_1 = 0$ stable et globalement attractive en temps fini.

Preuve. Identique à celle présentée au quatrième chapitre. ■

Cas des fonctions de pondération inconnues

Bien que les résultats de la partie 5.4.5 soient écrits en considérant l'hypothèse C5, H1) et donc le lemme 10, on peut envisager une loi de commande permettant de stabiliser la surface sous l'hypothèse C5, H2) :

Lemme 11 (Gouaisbaut, Blanco, Richard, [32]) Soit K une matrice quelconque de $\mathbb{R}^{d \times (n-d)}$, m_1 une constante positive. Soit $\Lambda \in \mathbb{R}^{d \times d}$ une matrice de Hürwitz et P_{surf} une matrice symétrique définie positive de $\mathbb{R}^{d \times d}$ avec $\Lambda^T P_{surf} + P_{surf} \Lambda < 0$. Supposons que le système

(5.21) vérifie C5, H2). La commande définie par

$$\begin{aligned} u(t) &= -G^R(z)^{-1} \left(f^2(z_t) - \Lambda s + m(z_t) \frac{P_{surf} s}{\|P_{surf} s\|} \right), \\ m(z_t) &= m_1 + \Psi(z_t) + m_2(z_t), \\ m_2(z_t) &= \max_{i \in I_r} \left\| K \left(\begin{bmatrix} A_i^{11} \\ A_i^{12} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} A_i^{d11} \\ A_i^{d12} \end{bmatrix} z(t - \tau) \right) \right\| \end{aligned} \quad (5.25)$$

rend la surface $s(z) = z_2 + Kz_1 = 0$ stable et globalement attractive en temps fini.

Preuve. Identique à celle présentée au quatrième chapitre. ■

5.4.5 Théorèmes de stabilisation

Retard connu et constant : critère IOD

Théorème 42 (Gouaisbaut, Blanco, Richard, [32]) *Considérons le système (5.21) sous l'hypothèse C5, H1).*

Soit Λ une matrice de Hurwitz et m_1 une constante strictement positive. Soit P_{surf} une matrice symétrique définie positive vérifiant $\Lambda^T P_{surf} + P_{surf} \Lambda < 0$.

S'il existe deux matrices $S, P \in \mathbb{R}^{(n-d) \times (n-d)}$ symétriques définies positives et un gain $K \in \mathbb{R}^{d \times (n-d)}$ vérifiant

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} E_i^T P + P E_i + S & P E_i^d \\ (E_i^d)^T P & -S \end{bmatrix} < 0, \\ E_i = (A_i^{11} - A_i^{12} K), E_i^d = (A_i^{d11} - A_i^{d12} K), i \in I_r, \end{cases} \quad (5.26)$$

alors la commande décrite par (5.24) rend GAS l'origine du système considéré pour tout retard τ constant et connu.

Preuve. Pour l'attractivité en temps fini et la stabilité de la surface, on applique le lemme 10. Pour le système réduit, on applique le théorème 34 en remplaçant A_i par $E_i = (A_i^{11} - A_i^{12} K)$ et A_i^d par $E_i^d = (A_i^{d11} - A_i^{d12} K)$.

Reste à prouver que $\|z_1\|$ ne devient pas infini lors de l'approche de la surface. On utilise la fonctionnelle de Lyapouov décrite dans la preuve de 34. La dérivée de cette fonctionnelle le long des trajectoires du système s'écrit de la manière suivante :

$$\dot{V} = Z_1^T(t) M Z_1(t) + 2z_1^T P \sum_{i=1}^r h_i(z_t) \left(A_i^{12} s(z(t)) + A_i^{d12} s(z(t - \tau)) \right),$$

avec $M < 0$ définie dans la preuve de 34, $Z_1^T(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) & z_1(t - \tau) \end{bmatrix}$. Nous pouvons majorer \dot{V} de la manière suivante :

$$\dot{V} \leq 2z_1^T P \left(\sum_{i=1}^r h_i(z_t) \left(A_i^{12} s(z(t)) + A_i^{d12} s(z(t - \tau)) \right) \right),$$

c'est-à-dire

$$\dot{V} \leq 2 \left\| P \sum_{i=1}^r h_i(z_t) A_i^{12} \right\| \|z_1(t)\| \|s(z(t))\| + \left\| P \sum_{i=1}^r h_i(z_t) A_i^{d12} \right\| \|z_1(t)\| \|s(z(t - \tau))\|.$$

Comme les $h_i(z_t)$ vérifient la CSP, nous pouvons trouver δ et η , deux constantes positives non dépendantes de l'état telles que :

$$\dot{V} \leq \delta \|z_1(t)\| \|s(z(t))\| + \eta \|z_1(t)\| \|s(z(t - \tau))\|.$$

Or il existe μ un réel positif tel que $\|z_1(t)\| \leq \mu V_1^{\frac{1}{2}}$ et, puisque $V_1 < V$, nous obtenons l'inégalité :

$$\dot{V} \leq \delta \mu V_1^{\frac{1}{2}} \|s(z(t))\| + \eta \mu V_1^{\frac{1}{2}} \|s(z(t - \tau))\|.$$

Comme s converge vers 0 en temps fini, sa norme peut être majorée par une constante s_0 . L'évolution de \dot{V} peut être majorée par la fonction W qui vérifie :

$$\dot{W} = (\delta + \mu) \mu s_0 W^{\frac{1}{2}}.$$

En intégrant cette équation, il est aisé de montrer que W ne peut s'échapper en temps fini, ce qui termine cette démonstration.

■

Pour écrire le critère (5.26) sous forme LMI, on multiplie à gauche et à droite par

$$\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix},$$

avec $S = P^{-1}$, puis on effectue le changement de variable $W = KS$ and $R = SQS$.

Retard connu et constant : critère DD

Si les conditions du théorème 42 ne sont pas vérifiées, il est possible d'adopter une démarche DD :

Théorème 43 (Blanco et al.) *Considérons le système (5.21) sous l'hypothèse C5, H1).*

Soit Λ une matrice de Hürwitz et m_1 une constante strictement positive. Soit P_{surf} une matrice symétrique définie positive vérifiant $\Lambda^T P_{surf} + P_{surf} \Lambda < 0$. S'il existe cinq matrices symétriques définies positives $P, R_1, R_2, M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une constante positive τ_{max} telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_i(\tau_{max}) = \begin{bmatrix} N_i(\tau_{max}) & \tau_{max} P E_i^d & \tau_{max} P E_i^d \\ \tau_{max} (E_i^d)^T P & -\tau_{max} M_1 & 0 \\ \tau_{max} (E_i^d)^T P & 0 & -\tau_{max} M_2 \end{bmatrix} < 0, i \in I_r, \\ N_i(\tau_{max}) = (E_i + E_i^d)^T P + P (E_i + E_i^d) + \tau_{max} (R_1 + R_2), \\ E_i = (A_i^{11} - A_i^{12} K), E_i^d = (A_i^{d11} - A_i^{d12} K), i \in I_r, \end{array} \right.$$

et

$$\left[\begin{array}{cc} M_2 & M_2 E_i^d \\ (E_i^d)^T M_2 & R_2 \end{array} \right] > 0, \left[\begin{array}{cc} M_1 & M_1 E_i \\ E_i^T M_1 & R_1 \end{array} \right] > 0, i \in I_r,$$

alors la commande décrite par (5.24) rend GAS l'origine du système considéré pour tout retard τ constant et connu inférieur à τ_{max} .

Preuve. Pour l'attractivité en temps fini et la stabilité de la surface, on applique le lemme 10. Pour le système réduit, on applique le théorème 36 en remplaçant A_i par $(A_i^{11} - A_i^{12} K)$ et A_i^d par $(A_i^{d11} - A_i^{d12} K)$. ■

Retard inconnu, variant mais borné

Théorème 44 (Gouaisbaut, Blanco, Richard) *Considérons le système (5.21) sous l'hypothèse C5, H1).*

Soit Λ une matrice de Hürwitz et m_1 une constante strictement positive. Soit P_{surf} une matrice symétrique définie positive vérifiant $\Lambda^T P_{surf} + P_{surf} \Lambda < 0$.

S'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{(n-d) \times (n-d)}$ symétrique définie positive et un gain $K \in \mathbb{R}^{d \times (n-d)}$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} E_i^T P + P E_i + P & P E_i^d \\ (E_i^d)^T P & -P \end{array} \right] < 0, i \in I_r, \\ E_i = (A_i^{11} - A_i^{12} K), E_i^d = (A_i^{d11} - A_i^{d12} K), i \in I_r, \end{array} \right. \quad (5.27)$$

alors la commande

$$\begin{cases} u(z_t) = -G^R(z)^{-1} \left(-\Lambda s + m(z_t) \frac{P_{surfs}}{\|P_{surfs}\|} \right), \\ m(z_t) = m_1 + \sup_{w \in [\tau_{min}, \tau_{suo}]} (\Psi(z_t(w))) + m_2(z_t), \\ m_2(z_t) = \sup_{w \in [\tau_{min}, \tau_{suo}]} \|\xi(z_t(w))\|, \end{cases} \quad (5.28)$$

rend GAS l'origine du système considéré pour tout retard $\tau = \tau(t) \in [\tau_{min}; \tau_{max}] \cdot \tau > 0$.

Preuve. En utilisant le gain $m_2(z_t)$, on vient compenser le terme $f^2(z_t) + Kf^1(z_t)$ qui est inconnu du fait du retard variable. Pour la stabilité du système réduit, on utilise les résultats obtenus en stabilité. ■

On notera que la preuve précédente porte essentiellement sur le comportement du système réduit ; la différence majeure entre le critère IOD (5.26) et le critère à retard variant (5.27) est la présence d'une matrice S : en retard variant, on a un degré de liberté en moins car on doit fixer $S = P$. De plus, il faut absorber dans le gain $m(z_t)$ du contrôleur $u(z_t)$ les composantes inconnues de la quantité $f^2(z_t) + Kf^1(z_t)$.

Le théorème 44 utilise une majoration qui se veut la plus générale possible du type :

$$f^2(z_t) + Kf^1(z_t) < \|\xi(z_t(w))\| < \sup_{w \in [\tau_{min}, \tau_{max}]} \|\xi(z_t(w))\|.$$

Selon la forme de la quantité $f^2(z_t) + Kf^1(z_t)$, il est possible d'obtenir une meilleure commande.

Par exemple, si

$$f^2(z_t) + Kf^1(z_t) = (f^{21}(z) + Kf^{11}(z))z + (f^{d21}(z) + Kf^{d11}(z))z(t - \tau(t)),$$

on opéra pour la commande

$$\begin{cases} u(z_t) = -G^R(z)^{-1} \left((f^{21}(z) + Kf^{11}(z))z - \Lambda s + m(z_t) \frac{P_{surfs}}{\|P_{surfs}\|} \right), \\ m(z_t) = m_1 + \sup_{w \in [\tau_{min}, \tau_{suo}]} (\Psi(z_t(w))) + m_2(z_t), \\ m_2(z_t) = \sup_{w \in [\tau_{min}, \tau_{suo}]} \left\| (f^{d21}(z) + Kf^{d11}(z))z(t - \tau(t)) \right\|. \end{cases}$$

5.4.6 Obtention des critères de stabilité exponentielle

Nous nous attachons à présent à l'obtention d'une stabilité exponentielle de degré α pour le système réduit. Notre objectif est ici de trouver le plus grand coefficient α tel que le système

$y_1(t) = e^{\alpha t} z_1(t)$ converge asymptotiquement vers le point d'équilibre $z = 0$. A partir d'un système obéissant à

$$\dot{z}_1 = \sum_{i=1}^r h_i(z_t) \left(E_i z_1(t) + E_i^d z_1(t - \tau) \right),$$

les dynamiques de y_1 vérifient :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \alpha e^{\alpha t} z_1(t) + e^{\alpha t} \dot{z}_1, \\ &= \alpha y_1 + \left(\sum_{i=1}^r h_i(z_t) E_i \right) y_1(t) + \left(\sum_{i=1}^r h_i(z_t) E_i^d \right) \left(e^{\alpha t} z_1(t - \tau) \right). \end{aligned}$$

Comme $e^{\alpha t} = e^{\alpha \tau} e^{\alpha(t-\tau)}$, on a

$$\dot{y}_1 = \sum_{i=1}^r h_i(z_t) \left((E_i + \alpha I^{d \times d}) y_1 + e^{\alpha \tau} E_i^d y_1(t - \tau) \right). \quad (5.29)$$

On modifiera en conséquence tous les théorèmes de stabilité et de stabilisation par PDC et mode glissant en remplaçant A_i par $A_i + \alpha I^{d \times d}$ et A_i^d par $e^{\alpha \tau} A_i^d$.

5.4.7 Application en simulation

Considérons le modèle suivant avec des perturbations $\beta(t)$ et $f(t)$ inconnues mais bornées :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 + \sin(x_3(t)) & 1 \\ 1 & 1 & (x_2(t))^2 + 1 \end{bmatrix} x(t) \\ &+ \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2 \\ -0.2 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} x(t - \tau) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \beta(t)x_1(t) \\ -0.5\beta(t)x_1(t - \tau) \\ f(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

avec $0 \leq \beta(t) \leq 2$. $f(t) \in [-1, 1]$ est une fonction représentant des perturbations ($f(t) = \cos(100t)$ dans la simulation).

Pour mettre le système le système sous forme TS, on utilise les matrices :

$$\begin{aligned}
 A_{12}^i &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_{12}^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \\
 A_{d11}^1 &= A_{d11}^3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 A_{d11}^2 &= A_{d11}^4 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\
 A_{11}^1 &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_{11}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \\
 A_{11}^3 &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, A_{11}^4 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

La condition initiale est définie par $x(t) = [1, 1, -1]^T$ pour $t \in [-\tau, 0]$.

Sur la figure 5-4, on a représenté la relation entre le retard maximal admissible τ_{max} et le coefficient α . Les résultats sont obtenus par une optimisation LMI des critères IOD et à retard variant des théorèmes 44 et 42.

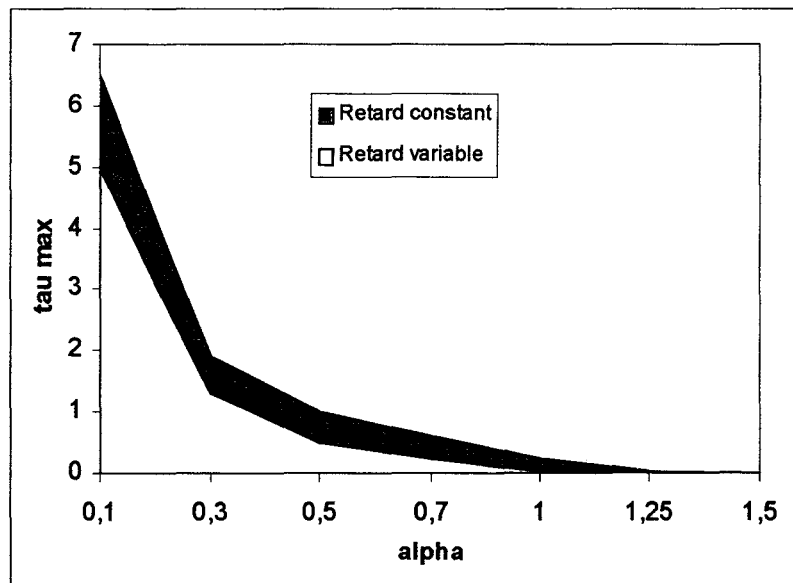


FIG. 5-4: Simulation, comparaison des critères IOD et retard variant

Pour les simulations temporelles, on se fixe $\alpha = 0.5$ et on suppose que le retard est inconnu et constant. Comme le système est sous forme régulière, on peut appliquer directement les

méthodes de type mode glissant. On applique la commande définie par (5.27). On utilise le théorème 44, prouvant ainsi que le système (5.30) est asymptotiquement stable si $\tau \leq \tau_{\max} = 0.9$. Par résolution LMI, on trouve le gain de surface

$$K = \begin{bmatrix} 0.496 & 3.04 \end{bmatrix}.$$

Les résultats sont décrits par les figures 5-5 et 5-6.

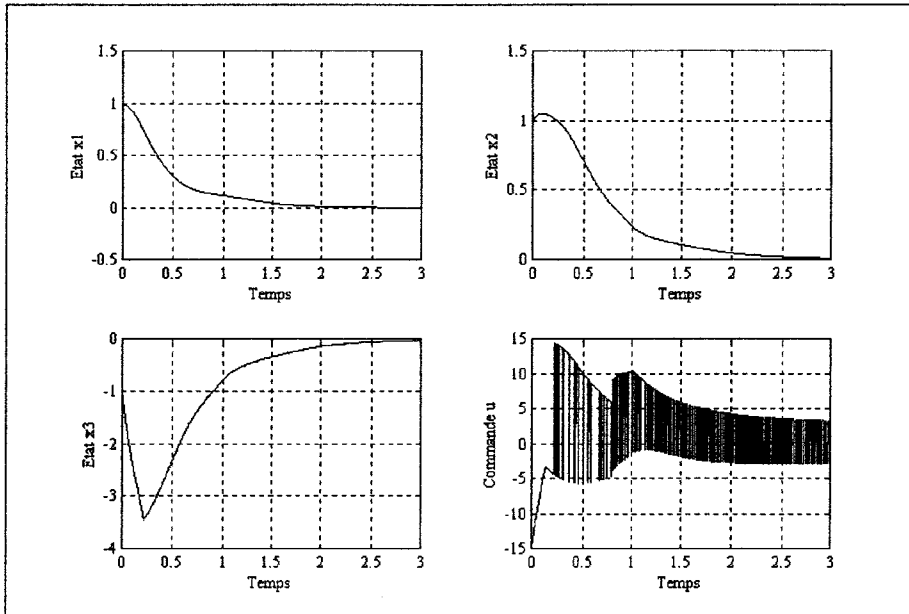


FIG. 5-5: Simulation, évolution de l'état et de la commande

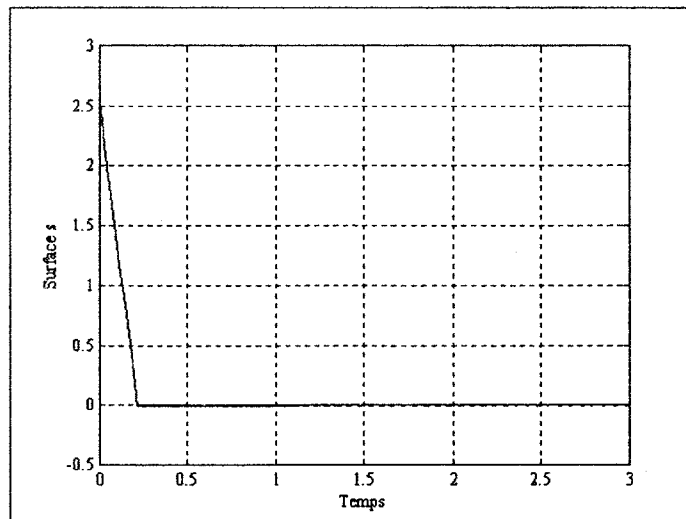


FIG. 5-6: Simulation, évolution de la quantité $s(z)$

Les simulations présentées ici sont obtenues avec l'algorithme *Simulink* Ode5 (Runge-Kutta d'ordre 5) avec un pas fixe de $0.001s$. On a choisi de plus $\Lambda = -1$, $m_1 = 2$ et $\tau = 0.8$. La surface est atteinte en environ 0.25 secondes. Sur la surface, le système réduit atteint son point d'équilibre en environ 2.5 secondes, ce qui correspond au choix pré-specified $\alpha = 0.5$.

Les résultats globaux sont bons car il ne faut pas plus de $\simeq 3$ secondes pour stabiliser le système présentant un retard est 0.8 secondes.

On notera que pour le choix $m_1 = 2$, on obtient un phénomène de chattering important sur la commande. Ce phénomène peut être réduit en effectuant une approximation continue de la quantité $\frac{Ps}{\|Ps\|}$.

5.5 Quelle commande pour un problème donné ?

L'intérêt des techniques introduites ayant été démontré tout au long de ce dernier chapitre, nous nous attacherons ici à récapituler la logique de sélection des nombreuses commandes en fonction de la structure du système à retard proposé :

- Si le système présente une matrice $B(x_t)$ ne dépendant pas du retard, il est judicieux d'utiliser les techniques modes glissant quand le système est sous forme régulière. Si le retard est variant, on applique le théorème 44. Dans le cas contraire, les critères IOD et DD sont possibles avec la commande (5.24), si la matrice $A^1(z_t)$ n'est pas perturbée et la commande (5.25) sinon.
- Si la matrice $B(x_t)$ dépend du retard ou si le système n'est pas transformable en forme régulière, la stabilisation par un PDC est nécessaire. Si les matrices $A(x_t)$, $A^d(x_t)$, $B(x)$ sont perturbées, on utilise un contrôleur de type $u = -Kx$ et éventuellement $u = -Kx - K^d x(t - \tau)$. Dans le cas contraire, la commande de type (5.15) est recommandée. Le type de retard nous indiquera alors les critères à choisir (IOD, DD ou à retard variant).

Conclusions et Perspectives

Tout au long de ce mémoire de thèse, notre objectif a été double : nous nous sommes attachés à la fois au développement des techniques de synthèse de contrôleurs pour les modèles TS mais aussi à leur application pour la stabilisation de certaines classes de systèmes non linéaires.

Pour effectuer une synthèse concise des résultats, réflexions et développements menés dans ce mémoire, nous proposons ici des réponses aux interrogations qui ont orienté notre recherche.

Les critères “de Tanaka” sont-ils de bons critères de stabilité ?

Le deuxième chapitre a montré que les critères développés par *Tanaka et al.* [76] sont de bons critères de stabilité quadratique, spécialement lorsque les fonctions de pondération atteignent leurs bornes (i.e. 0 et 1). En matière de stabilisation par une commande PDC, les critères peuvent être améliorés en tenant compte de notre connaissance des fonctions de pondération. Les résultats obtenus, présentés sous forme LMI, sont moins conservatifs que les résultats de [76] mais ils requièrent une étude précise des fonctions de pondération.

Est-il possible de recourir à des critères non quadratiques pour la stabilisation des modèles TS ?

Au cours du troisième chapitre, nous avons développé des critères de stabilité/stabilisation fondés sur l'utilisation de fonctions de Lyapounov non quadratiques. Ces fonctions étaient naturellement construites comme des sommes convexes non linéaires de fonctions quadratiques. Ces sommes étaient pondérées par les mêmes fonctions que les sous-systèmes du modèle TS. Les résultats de stabilité/stabilisation locaux conséquemment obtenus se révèlent meilleurs que les résultats basés sur des approches quadratiques tout en demeurant simples d'utilisation. En revanche, en matière de stabilité globale en continu, l'apparition du gradient des fonctions de pondération rend l'application des résultats relativement complexe. Nous noterons qu'en discret, la même fonction de Lyapounov fournit des résultats de stabilité globale plus simples d'utilisation.

Est-il nécessaire de recourir à des critères plus coûteux en calcul que les critères “de Tanaka” pour stabiliser les modèles TS ?

L'ensemble de la première partie de ce mémoire suggère que l'intérêt même des modèles Takagi-Sugeno réside dans la simplicité des critères de stabilisation qui leurs sont associés. En

conséquence, si les critères classiques fournissent des résultats probants, il n'est pas nécessaire en pratique de recourir à des critères plus sophistiqués et coûteux en calcul. Ainsi, dans la seconde partie de ce mémoire, nous nous sommes limités à l'utilisation des critères classiques [76].

Les commandes classiques (RE, PDC, CDF) sont-elles de bonnes commandes pour les modèles TS ?

Comme nous l'avons souligné dans le deuxième chapitre, lorsqu'une commande de type retour d'état est utilisée dans un contexte de stabilité quadratique, elle est stabilisante pour tout type de fonctions de pondération et par conséquent robuste. A l'inverse, comme le PDC et la CDF utilisent explicitement les fonctions de pondération, ces commandes ne sont valides que pour un modèle donné et sont a priori peu robustes. Lors du quatrième chapitre, nous avons vu qu'après une mise en forme régulière d'un système, l'utilisation d'une commande par PDC restait d'un potentiel très limité. En effet, sous cette forme, l'utilisation d'une commande par mode glissant est nettement plus intéressante car elle permet de garantir la robustesse du système bouclé vis à vis de perturbations exogènes. En s'appuyant sur cette considération particulière, nous pouvons raisonnablement penser que d'une manière générale, lorsque le système se présente sous une forme favorable pour l'utilisation des techniques classiques de l'Automatique, une commande de type PDC va se révéler comparativement moins performante.

Quelles sont les perspectives offertes par la mise en forme TS des systèmes non linéaires ?

La constatation énoncée ci-dessus ne remet pas en cause l'intérêt des modèles TS pour la stabilisation des systèmes non linéaires, comme en témoignent les chapitres 4 et 5 de ce mémoire. En effet, pour un système quelconque mis sous forme régulière, la reformulation TS du système réduit nous fournit une méthode générale de choix de la surface (chapitre 4). A ce stade, des surfaces linéaires ou non linéaires sont possibles. Quand nous optons pour une surface linéaire, nous avons une stabilisation robuste vis à vis des perturbations exogènes et de celles influant le système réduit. En outre, la reformulation TS d'une classe de systèmes NL à retard permet, comme nous l'avons montré lors du chapitre 5, de fournir des méthodes générales de stabilisation. Pour ce dernier chapitre, nous noterons que nous avons opté, selon la forme de la matrice d'entrée, pour des commandes proches d'un point de vue structurel soit d'un PDC soit d'un mode glissant.

Ces deux chapitres nous ont montré l'intérêt de la reformulation TS de certains systèmes non

linéaires.

L'ensemble des résultats et des considérations exprimées dans ce mémoire nous laisse envisager plusieurs extensions possibles de notre travail :

- En stabilité non quadratique, l'utilisation de nouvelles fonctions de Lyapounov pourrait permettre d'améliorer les critères actuels. Les fonctions du type

$$V(x) = x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) P_i \right) x,$$

ayant été largement étudiées dans ce mémoire, d'autres structures devront être recherchées.

Des fonctions du type

$$V(x) = \max_{i \in I_r} (x^T P_i x),$$

faisant intervenir la notion d'inclusion différentielle, pourraient être utilisées.

- La méthode de stabilisation par PDC proposée au deuxième chapitre, bien que meilleure que les techniques classiques, reste difficilement applicable quand les fonctions de pondération dépendent de plus d'une ou deux variables d'état. Le développement d'un algorithme numérique permettant de trouver, à partir de l'expression des fonctions $h_i(x)$, le polytope vérifiant $C2, H3$) serait d'un grand intérêt pour la méthode proposée.
- Pour les systèmes à retards, les techniques proposées peuvent être rapidement étendues aux systèmes non linéaires à retards multiples

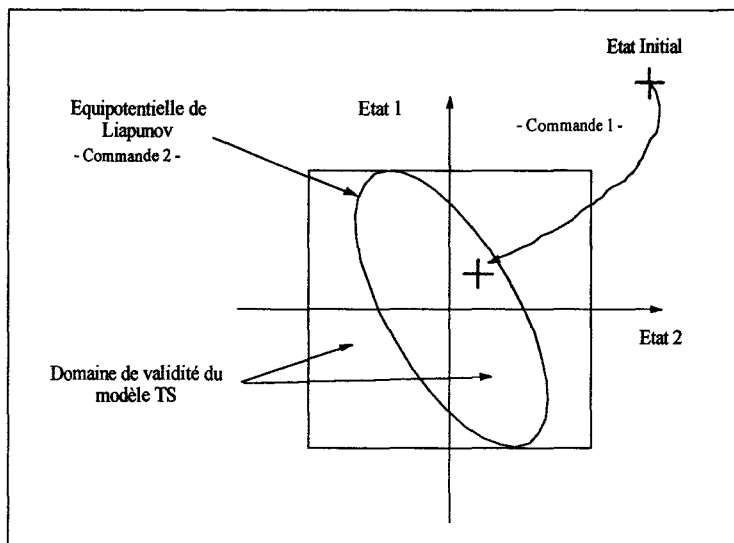
$$\dot{x} = A(x_t)x + \sum_{i=1}^k A_i^d(x_t)x(t - \tau_i),$$

ou distribués :

$$\dot{x} = A(x_t)x + \int_{-\tau}^0 A^d(\theta)x(t + \theta)d\theta.$$

En outre, il pourrait être intéressant de trouver un moyen de mettre sous forme régulière des systèmes où la matrice d'entrée $B(x_t)$ dépend du retard.

- Comme nous l'avons vu au premier chapitre, l'utilisation rigoureuse des modèles TS pour la stabilisation globale de modèles non linéaires affines en la commande requiert de poser des hypothèses du type " $A(x)$ et $B(x)$ bornés pour $x \in \mathbb{R}^n$ ". Il serait souhaitable de remplacer cette hypothèse contraignante par " $A(x)$ et $B(x)$ continues par morceaux" : on considérerait alors une représentation TS valide dans un domaine D borné entourant l'origine. Le contrôleur à synthétiser dans ce cas réaliserait une stabilisation globale en deux temps, comme décrit sur la figure suivante :



La première commande (de type retour d'état par exemple) ramènerait alors le système dans un ensemble de type $x^T P x < K, K \in \mathbb{R}^+$ inclus dans le domaine D .

La deuxième commande, valide dans cet ensemble serait de structure PDC. Le réglage des coefficients de ce PDC serait effectué à l'aide de la fonction de Lyapounov $x^T P x$ de manière à stabiliser le système TS dans le domaine D .

Par l'utilisation d'une telle commande, on prouverait que le système non linéaire bouclé est effectivement globalement asymptotiquement stable.

Comme nous venons de le montrer, bien que les modèles Takagi-Sugeno aient acquis en une dizaine d'années une certaine maturité, de multiples axes de recherche sont encore ouverts. A l'avenir, il s'agira peut-être moins d'étudier de manière stricte la stabilité/stabilisation des modèles Takagi-Sugeno, que de développer leur utilisation comme représentations locales de systèmes non linéaires.

Bibliographie

- [1] D.V. Anosov, "On stability of equilibrium points of relay systems", *Automation and remote control*, vol. 2, pp. 135-149, 1959.
- [2] S. Behtash, "Robust output tracking for non-linear systems", *International Journal of Control*, vol. 51(6), pp. 1381-1407, 1990.
- [3] Y. Blanco, P. Borne, T.M. Guerra, W. Perruquetti, "Stabilisation du modèle Takagi-Sugeno à l'aide de fonctions de Lyapounov non quadratiques", *Proceedings des 8^{ième} Rencontres Francophones de la Logique Floue et ses Applications, LFA '99*, Valenciennes, France, 1999.
- [4] Y. Blanco, W. Perruquetti, P. Borne, "Relaxed Stability Conditions for Takagi-Sugeno's Fuzzy Models", *Proceedings of the 9th IEEE Conference on Fuzzy Systems*, San Antonio, Etats-Unis, 2000.
- [5] Y. Blanco, J.P. Richard, "Stability Analysis of Uncertain Nonlinear Time Delay Systems Using Takagi-Sugeno's Fuzzy Representation", *IFAC Proceedings on Linear Time Delay Systems, LTDS 2000*, Ancones, Italy, 2000.
- [6] Y. Blanco, W. Perruquetti, P. Borne, "Stability and Stabilization of Nonlinear Systems and Takagi-Sugeno's Fuzzy Models", *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 7, pp. 221-240, 2001.
- [7] Y. Blanco, W. Perruquetti, P. Borne, "Non Quadratic Stability of Nonlinear Systems in the Takagi-Sugeno Form", *Proceedings of the European Control Conference*, Porto, Portugal, 2001.
- [8] Y. Blanco, F. Gouaisbaut, W. Perruquetti, P. Borne "Sliding Mode Controller Design Using Polytopic Formulation" *Proceedings of the 40th Conference on Decision and Control*, Orlando, Etats-Unis, 2001.
- [9] A. Bloch et S. Drakunov, "Stabilization and tracking in the nonholonomic integrator via sliding mode", *Systems and Control Letters*, vol. 29, pp. 91-99, 1996.

- [10] C. Bonnet, J. Partington et M. Sorine, "Robust control and tracking in L_∞ of delay systems equipped with a relay sensor", *Proceeding the 8th IFAC Conference on Large Scale Systems*, Patras, 1998.
- [11] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron et V. Balakrishnan. "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory". SIAM, Philadelphia, 1994.
- [12] H. Choi, "An LMI approach to sliding mode control design for a class of uncertain time delay systems", *Proceeding the European Control Conference*, Karlsruhe, Allemagne, 1999.
- [13] F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, R.J. Stern et P.R. Wolenski, "Non Smooth Analysis and Control Theory" *Graduate Texts in Mathematics* 178, Springer-Verlag, New-York, 1988.
- [14] G. Conte et A.M. Perdon, "The disturbance decoupling problem for systems of a ring", SIAM, vol. 33(3), 1995.
- [15] M. Dambrine et J.P. Richard, "Stability Analysis of time delay systems", *Dynamic Systems and Applications*, vol. 2, pp. 405-414, 1993.
- [16] M. Dambrine, J.P. Richard et P. Borne, "Feedback control of time-delay systems", *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 1, pp. 77-87, 1995.
- [17] B. Drazenovic, "The Invariance Conditions in Variable Structure Systems", *Automatica*, vol. 5(3), pp. 287-295, 1969.
- [18] D. Driankov, H. Hellendoorn et M. Reinfrank, "An introduction to fuzzy control", Springer, Berlin Heidelberg, 1993.
- [19] D. Dubois et H. Prade, "La logique du flou et du très possible", *La Recherche*, vol. 22, pp. 1308-1315, 1991.
- [20] L. Dugard et E.I. Verriest, "Stability and control of time-delay systems", *Lecture Notes in Control and Information Sciences* No 228, Springer Verlag, 1997.
- [21] C. Edwards et S. Spurgeon, "Robust output tracking using a sliding mode controller/observer scheme", *International Journal of Control*, vol. 64(5), pp. 967-983, 1996.
- [22] L. El Ghaoui. "LMI approach to Control : an Introduction". *Control Summer School Grenoble, robust identification and control : LMI approach*, pp. 1-25, 1997.
- [23] L. El Ghaoui et S.I. Niculescu. "Advances in Linear Matrix Inequality in Control". SIAM, Philadelphia, 2000.
- [24] S.V. Emel'yanov, "On peculiarities of variable structure control systems with discontinuous switching functions", *Doklady ANSSR*, vol. 153, pp. 776-778, 1963.

- [25] S.V. Emel'yanov, "Variable structure control systems", *Nauka*, 1967.
- [26] G. Feng, S.G. Cao, N.W. Rees et C.K. Chack, "Design of Fuzzy Control Systems with Guaranteed Stability", *Fuzzy sets and systems*, pp. 1-10, 1997.
- [27] M. Fliess et F. Messenger, "Sur la Commande en Régime Glissant", C.R. Académie des Sciences de Paris, t.313, Série I, pp. 951-956, 1992.
- [28] T. Floquet, J.P. Barbot, W. Perruquetti et J.P. Richard, "First and second order sliding mode stabilizing controller for a perturbed regular form", *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, Phoenix, USA, 1999.
- [29] L. Fridman, E. Fridman et E. Shustin, "Steady modes and sliding modes in the relay control systems with time delay", *Proceeding the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4601-4606. Kobe, Japon, 1996.
- [30] K. Gopalsamy, "Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics", *Mathematics and Applications*, vol. 74, Kluwer Academic Publisher, 1992.
- [31] F. Gouaisbaut, W. Perruquetti et J.P. Richard, "A sliding mode control for linear systems with input and state delays", *Proceeding the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, Etats-Unis, 1999.
- [32] F. Gouaisbaut, Y. Blanco, J.P. Richard, "Robust Control of Nonlinear Time Delay Systems : A Sliding Mode Control Design", *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, NOLCOS 2001*, Saint Petersburg, Russie, 2001.
- [33] X. Li et C. De Souza, "Robust stabilization and H^∞ control of uncertain linear time-delay systems", *Proceedings of the 13th IFAC World Congress*, vol. H, pp. 113-118, San Francisco, Etats-Unis, 1996.
- [34] A. Goubet , M. Dambrine et J.P. Richard, "An extension of stability criteria for linear and non linear systems", *Proceedings IFAC SSC'95*, pp. 278-283, 1995.
- [35] A. Goubet , M. Dambrine et J.P. Richard, "Stability of perturbed systems with time-varying delay", *Systems and Control Letters*, vol. 31, pp. 115-163, 1997.
- [36] T.M. Guerra et L. Vermeiren, "Control Laws for Continuous Fuzzy Systems", *Proceedings of Advanced Computer Systems*, pp. 368-375, Szczecin, Pologne, 1998.
- [37] J. Guldner et V.I. Utkin, "Tracking the gradient of artificial potential fields : sliding mode control for mobile robots", *International Journal of Control*, vol. 63(3), pp. 417-432, 1996.
- [38] J. K. Hale, "Theory of fonctionnal differential equations", *Applied Mathematical Sciences*, vol. 3, Springer Verlag, New York, 1977.

- [39] A. Isidori, "Nonlinear Control Systems", *Communication and Control Engineering Series, Third edition*. Springer-Verlag, 1995.
- [40] A. Kandel, L. Li et Z. Cao, "Fuzzy inference and its applicability to control systems", *Fuzzy sets and Systems*, vol. 48, pp. 99-111, 1993.
- [41] W.C. Kim, S.C. Ahn et W.H. Kwon, "Stability Analysis and Stabilization of State Space Models", *Fuzzy sets and Systems*, vol. 71, pp. 131-142, 1995.
- [42] K. Kiriakidis, A. Grivas et A. Tzes, "Quadratic Stability analysis of the Takagi-Sugeno fuzzy Model". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 98, pp. 1-14, 1998.
- [43] V.B.Kolmanovskii et A. Myshkis, "Applied theory of fonctionnal differential equations", Kluwer Academic Publisher, 1992.
- [44] V. Kolmanovskii, S. Niculescu et J.P. Richard, "On the Lyapounov-Krasovskii fonctionnals for stability analysis of linear delay systems", *International Journal of Control*, vol. 72(4), pp. 374-384, 1999.
- [45] A. Koshkouei, "Sliding mode control of time-delay systems", *Proceeding the international conference on Variable Structure Systems*, pp. 97-101, Tokyo, Japon, 1996.
- [46] N.N. Krasovskii, "Stability of motion : Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay", Stanford University Press, Stanford, 1963.
- [47] M. Ksour-Lahmari, "Contributions à la commande multimodèle des processus complexes", Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1999.
- [48] C.C. Lee, "Fuzzy logic in control systems : fuzzy logic controller", *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, pp. 404-435, 1990.
- [49] A.M. Lyapunov, "Problème général de la stabilité du mouvement" *Annals of Mathematics Studies*, vol. 17, Princeton University Press, Princeton, 1947.
- [50] A.G. Luk'yanov et V.I. Utkin, "Methods of Reducing Equations for Dynamic Systems to a Regular Form", *Automation and Remote Control*, vol. 42(4), pp. 413-420, 1980.
- [51] X. Ma et Z. Sun, "Analysis and Design of Fuzzy Controller and Fuzzy Observer", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6(1), pp. 41-50, 1998.
- [52] E.H. Mamdani, "Applications of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant", *IEEE Proceeding*, vol. 121, pp. 1585-1588, 1974.
- [53] J. P. Marin, "Outils pour l'Analyse de la Stabilité des Systèmes Bouclés par Contrôleur Flous", C.N.R.S., *Rapport de G.R. Automatique 95-1 - Projet CS&N*, 1995.

- [54] S. Miyamoto, S. Yasunobu et K. Ihara, "Predictive fuzzy control and its application to automatic train operation systems", *Analysis of Fuzzy Information*, CRC Press, New York, 1987.
- [55] Y. Morère, T.M. Guerra, L. Vermeiren, A. Kamoun, "Non Quadratic Stability and Stabilisation of Discrete Fuzzy Models", *Proceedings of the IEEE Conference ACIDCA '2000*, Monastir Tunisie, 2000.
- [56] Y. Morère, "Mise en oeuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno", Thèse de doctorat, Université de Valenciennes, Janvier 2001.
- [57] C. Moog, M. Velasco Villa et L. Marquez-Martinez, "The disturbance decoupling problem for time-delay systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45(5), pp. 572-575, 2000.
- [58] Y. Nesterov et A. Nemirovsky, "Interior-point Polynomial Methods in Convex Programming", *Studies in Applied Mathematics*, vol. 13, SIAM, Philadelphia, 1994.
- [59] S.I. Niculescu, " H_∞ memoryless control with an α -stability constraint for time delays systems : an LMI approach" , *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43(5), pp. 739-743, 1998.
- [60] S.I. Niculescu, C. De Souza, L. Dugard et J. Dion, "Robust exponential stability of uncertain systems with time-varying delay", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43(5), pp. 743-748, 1998.
- [61] W. Perruquetti, J.P. Richard et P. Borne, "A Generalized Regular Form for Sliding Mode Stabilization of MIMO Systems", *Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*, 1997.
- [62] I.R. Petersen, "A Procedure for Simultaneous Stabilizing a Collection of Single Input Linear Systems Using Non-Linear State Feedback Control", *Automatica*, vol. 28(1), pp. 33-40, 1987.
- [63] B.S. Razumikhin, "The applications of Lyapunov's method to problems in the stability of systems with delay", *Automat i Telem.*, vol. 21(6), pp. 740-748, 1963.
- [64] J.P. Richard, M. Dambrine, F. Gouaisbaut et W. Perruquetti, "Systems with delays : an overview of some recent advances", *SACTA special issue on stability and optimal control of difference and differential equations with delay*, vol. 3(1), 2000.
- [65] O. Seungrohk et H. Khalil, "Output feedback stabilization using variable structure control", *International Journal of Control*, vol. 62(4), pp. 831-848, 1995.

- [66] K. Shyu et J. Yan, "Robust stability of uncertain time-delay systems and its stabilization by variable structure control", *International Journal of Control*, vol. 57, pp. 237-246, 1993.
- [67] H. Sira-Ramirez, "Differential Geometric Methods in Variable-Structure Control", *International Journal of Control*, vol. 48(4), pp. 1359-1390, 1988.
- [68] H. Sira-Ramirez et M. Angulo-Nunez, "On passivity based regulation of a class of delay differential systems", *Proceeding the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 297-298. Tampa, Floride, 1998.
- [69] J.J.E. Slotine, "Sliding controller design for non-linear systems", *International Journal of Control*, vol. 40(2), pp. 421-434, 1984.
- [70] M. Sugeno and K. Tanaka, "Successive Identification of a Fuzzy Model and its Applications to Prediction of a Complex Systems", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 42, pp. 315-334, 1991
- [71] T. Takagi et M. Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and its Applications to Modelling and Control", *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, vol. 15, pp. 116-132, 1985.
- [72] M. Takagi et G.T. Kang, "Structure Identification of Fuzzy Model", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 28, pp. 329-346, 1988.
- [73] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, pp. 135-156, 1992.
- [74] K. Tanaka et M. Sano, "A Robust Stabilization Problem of Fuzzy Control Systems and its Applications to Backing-up Control of a Truck-trailer", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 2(2), pp. 119-134, 1994.
- [75] K. Tanaka, T. Ikeda et H.O. Wang. "Robust stabilization of a Class of Uncertain Nonlinear Systems via Fuzzy Control : Quadratic Stabilizability, H^∞ Control Theory, and Linear Matrix Inequalities", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4(1), pp. 1-13, 1996.
- [76] K. Tanaka, T. Ikeda et H. Wang, "Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers Design : Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Design", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6(2), pp. 14-23, 1998.
- [77] Y. Z. Tzypkin, "Theory of control relay systems", *Moscow : Gostekhizdat*, 1955. (en Russe)
- [78] M.A.L. Thathachar et P. Viswanath, "On the Stability of Fuzzy Systems", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 15(1), pp. 145-151, 1997.
- [79] V.I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22(2), pp 212-222, 1977.

- [80] S. A. Vavasis. "Nonlinear Optimization : Complexity Issues". Oxford University Press, New York, 1994.
- [81] L. Vermeiren. "Proposition de Lois de Commande pour la Stabilisation de Modèles Flous". Thèse de doctorat, Université de Valenciennes, Décembre 1998.
- [82] H. Wang, K. Tanaka et M. Griffin, "An Approach to Fuzzy Control of Non Linear Systems : Stability and Design Issues", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4(1), 1996.
- [83] J. C. Willems, "Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 16(6), pp. 621-634, 1971.
- [84] K.K.D. Young, "Asymptotic stability of model reference systems with variable structure control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, pp. 279-281, 1977.
- [85] L. Yu et J. Chu, "An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems", *Automatica*, vol. 35, pp. 1155-1159, 1999
- [86] L. A. Zadeh, "Information and Control", *Fuzzy Sets*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- [87] A.S.I. Zinober, O.M.E. El-Ghezawi et S.A. Billings, "Multivariable-structure adaptative model-following control systems", *Proceedings of IEEE*, Vol. 129, pp. 6-12, 1982.



STABILISATION DES MODELES TAKAGI-SUGENO ET LEUR USAGE POUR LA COMMANDE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Résumé

Les modèles Takagi-Sugeno (TS), bien qu'initialement introduits dans le contexte de la méthodologie floue, se présentent aujourd'hui sous une forme analytique. En effet, ils s'écrivent comme une somme convexe de sous-systèmes linéaires pondérés par des fonctions non linéaires. Cette écriture exacte rend possible l'utilisation des outils classiques de l'Automatique pour l'étude de la stabilité et la stabilisation des modèles TS : la majeure partie des critères existants découle de l'utilisation de fonctions de Liapunov quadratiques.

Ce mémoire propose, dans un premier temps, d'établir des critères de stabilité / stabilisation quadratiques en utilisant le plus finement possible notre connaissance des fonctions de pondérations. Cette connaissance est ensuite mise à contribution au travers de fonctions de Liapunov non quadratiques. Ces fonctions sont construites comme sommes convexes non linéaires de fonctions de Liapunov quadratiques.

Dans un second temps, nous exploitons les différentes techniques de commande des modèles TS pour la stabilisation de systèmes non linéaires. Ainsi, la réécriture TS des systèmes sous forme régulière commandés en mode glissant permet l'utilisation de méthodes générales pour le choix de la surface de glissement. En outre, en étendant la formulation TS à une classe de systèmes non linéaires à retard, nous obtenons des méthodes systématiques de synthèse de contrôleurs.

Tout au long de ce mémoire, dans le but d'obtenir des résultats facilement exploitables numériquement, une importance particulière est donnée à la formulation LMI (Inégalités Matricielles Linéaires) des critères développés.

Enfin, à la lumière des présents travaux, de nombreuses perspectives pour de futures recherches sont proposées.

Mots Clés : Modèles Takagi-Sugeno, systèmes non linéaires, synthèse Liapunov, stabilité quadratique, stabilité non quadratique, forme régulière, mode glissant, système non linéaire à retards, LMI.

STABILIZATION OF TAKAGI-SUGENO'S MODELS AND THEIR USE FOR THE CONTROL OF NONLINEAR SYSTEMS

Abstract

Even if Takagi-Sugeno's (TS) models were first introduced in the context of fuzzy methodology, they are now presented in an analytic formulation. They are indeed written as a convex sum of linear subsystems with non linear weighting functions. This formulation allows us to use the classical tools of Automatic Control for the stability analysis and the stabilization of TS models : most of the usual criteria found in the literature are based on the use of quadratic Liapunov functions.

In a first part, this thesis proposes quadratic stability / stabilization criteria involving our precise knowledge of the weighting functions. This knowledge is then used through non quadratic Liapunov functions built as a non linear convex sum of quadratic ones.

In a second part, different control techniques of TS models are used for the stabilization of non linear systems. For systems under the regular form with a sliding mode controller, we show that the TS formulation provides general techniques for the choice of the sliding surface. Moreover, having extended the TS writing to non linear time delay systems, we derive systematic methods for the controller synthesis.

All along this thesis, the LMI (Linear Matrix Inequalities) formulation of the proposed criteria is emphasized for an easy computation of the results.

At last, based on the studies of this thesis, a lot of tracks are proposed for future research.

Keywords : Takagi-Sugeno's models, non linear systems, Liapunov design, quadratic stability, non quadratic stability, regular form, sliding mode, non linear time-delay systems, LMI.