N° d'ordre : 3085

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

DISCIPLINE : MATHÉMATIQUES

SPECIALITÉ : STATISTIQUE ET PROBABILITÉS

par

Mohamedou Ould Mohamed Abdel Haye

THÉORÈMES LIMITES POUR DES PROCESSUS À LONGUE MÉMOIRE SAISONNIÈRE

soutenue le 20 décembre 2001 devant le jury composé de

Président :	P. Doukhan,	Université de Cergy-Pontoise
Directrice de Thèse :	M.-C. Viano,	Université Lille I
Rapporteurs :	E. Moulines,	École Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris
	D. Surgailis,	Université de Vilnius
Examinateurs :	M. A. Lifshits,	Université de Saint-Petersbourg
	A. Philippe,	Université Lille I
	C. Suquet,	Université Lille I
	M. S. Taqqu,	Université de Boston

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier chaleureusement Marie-Claude Viano qui a encadré ce travail avec beaucoup d'enthousiasme et de dynamisme. Ses qualités humaines, son suivi attentif et le soutien qu'elle m'a toujours témoigné m'ont permis de mener à bien cette thèse dans de très bonnes conditions. Qu'elle trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

J'adresse mes vifs remerciements à Paul Doukhan pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury. C'est pour moi l'occasion aussi de le remercier pour son cours de DEA grâce auquel j'ai acquis de bonnes bases sur les variables dépendantes.

Je tiens tout particulièrement à remercier Eric Moulines pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour avoir accepté la lourde tâche de rapporter cette thèse en cette période très prenante de l'année.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Donatas Surgailis pour avoir accepté de rapporter cette thèse malgré ses nombreuses occupations. Je le remercie également pour l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail ainsi que pour les nombreux échanges que j'ai eus avec lui et qui m'ont permis d'améliorer la rédaction de la thèse.

J'adresse également mes vifs remerciements à Michel Lifshits et à Murad Taqqu pour avoir accepté de faire partie du jury et pour les remarques et suggestions très utiles qu'ils ont formulées.

C'est l'occasion pour moi d'exprimer ma reconnaissance à Anne Philippe, non seulement pour avoir accepté d'examiner ce travail, mais aussi pour son concours systématique et le soutien qu'elle m'a constamment témoigné.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement Charles Suquet pour avoir accepté de faire partie du jury et pour sa lecture attentive du manuscrit.

Le bon déroulement de cette thèse doit beaucoup aux excellentes conditions de travail au laboratoire de Statistique et Probabilités de Lille. C'est l'occasion pour moi d'en remercier tous les membres.

Je voudrais remercier l'ensemble des doctorants que j'ai pu côtoyés, en particulier j'adresse un merci très amical à mes collègues Abbas, David, Jean-Christophe, Octave, Pierre-Yves, ainsi que ceux du début, Bruno, Cristian, Emmanuel et Mohamed.

Je remercie également l'ensemble du personnel administratif et technique de l'UFR de Mathématiques, notamment Arlette Lengaigne pour sa gentillesse et son efficacité.

Je voudrais enfin dire merci à tous ceux, famille ou amis, qui m'entourent.

Table des matières

Introduction

1 Longue mémoire

L'accord n'est pas parfait sur ce qu'il convient d'appeler processus à longue mémoire (ou processus fortement dépendant). On peut dire qu'un processus stationnaire au second ordre $(Y_n)_{n\geq 1}$ est à longue mémoire lorsque l'un des phénomènes suivants apparaît.

– *Définition 1 :* La suite des covariances tend vers 0 lentement et de façon régulière, c'est–à–dire
$$\mathrm{Cov}\big(Y_1, Y_{n+1}\big) = n^{-D} L(n), \quad 0 < D < 1, \tag{1.1}$$
où L est une fonction à variation lente à l'infini, i.e. L est bornée sur les intervalles finis et pour tout $t > 0$
$$\frac{L(tx)}{L(x)} \to 1, \quad \text{quand } x \to +\infty.$$
Dans cette situation nous dirons que la longue mémoire est *régulière*.

– *Définition 2 :* La suite des covariances n'est pas sommable, i.e.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big|\mathrm{Cov}\big(Y_1, Y_{n+1}\big)\big| = +\infty. \tag{1.2}$$
C'est la définition la plus fréquemment donnée.

– *Définition 3 :* La densité spectrale f existe et admet une singularité en un point λ_0, i.e.
$$f(\lambda) = |\lambda - \lambda_0|^{D-1} L\Big(\frac{1}{|\lambda - \lambda_0|}\Big), \quad 0 < D < 1, \qquad \lambda \longrightarrow \lambda_0. \tag{1.3}$$
où L est une fonction à variation lente à l'infini.

Ces définitions se recoupent largement mais elles ne sont pas équivalentes. La définition 2 est la plus générale puisque chacune des conditions (1.1) et (1.3) implique (1.2). Par ailleurs, les conditions (1.1) et (1.3) ne sont pas équivalentes. Par exemple la densité spectrale
$$f(\lambda) = |1 + e^{i\lambda}|^{-1/4} \tag{1.4}$$
est bien de la forme (1.3) (avec $\lambda_0 = \pi$). La covariance correspondante est de la forme
$$r(n) = c_1 n^{-3/4} (-1)^n (1 + o(1)) \tag{1.5}$$

qui, évidemment, ne vérifie pas (1.1).
On remarque que la définition 1 n'est pas non plus équivalente à la définition plus restreinte suivante.
Définition 3' : La densité spectrale f existe et admet une singularité en 0, i.e.

$$f(\lambda) = |\lambda|^{D-1} L\Big(\frac{1}{|\lambda|}\Big), \quad 0 < D < 1, \qquad \lambda \longrightarrow 0. \tag{1.6}$$

Par exemple, la densité spectrale

$$f(\lambda) = |1 - e^{2i\lambda}|^{-1/4} \tag{1.7}$$

qui a deux singularités, l'une en 0 et l'autre en π, est bien de la forme (1.6), mais la covariance correspondante est de la forme

$$r(n) = n^{-3/4}\big(c_2 + c_3(-1)^n\big)(1 + o(1)) \tag{1.8}$$

qui ne satisfait pas à (1.1).
Rappelons à ce propos que le résultat de Zygmund ([73], Ch. 5, Théorèmes 2.6 et 2.24) établit que les définitions 1 et 3' sont équivalentes lorsqu'on contraint L à être à variation lente à l'infini au sens de Zygmund et à variation bornée sur les intervalles finis. (La variation lente au sens de Zygmund, qui est une notion plus restrictive que la notion de variation lente, signifie que pour tout $\delta > 0$, $x^{\delta}L(x)$ (resp. $x^{-\delta}L(x)$) est croissante (resp. décroissante) au voisinage de l'infini). Il est clair que dans l'exemple (1.7) la condition de variation bornée n'est pas vérifiée.

Dans les deux exemples (1.4) et (1.7) on remarque que la densité spectrale a une singularité en dehors de $\lambda = 0$, et que simultanément sa covariance n'est pas à variation régulière à l'infini. C'est précisément cette situation qui nous intéresse : le cas où la covariance se comporte à l'infini comme $n^{-D}\beta(n)$ où β est une fonction oscillante. Nous parlons alors de mémoire longue *saisonnière* par opposition à la longue mémoire *régulière* (définition 1).

L'exemple le plus célèbre de processus à mémoire longue est celui des accroissements du mouvement brownien fractionnaire, processus gaussien stationnaire, centré, paramétré par $H \in]0,1[$, dont la fonction de covariance $\mathrm{Cov}\big(\Delta(t+\tau), \Delta(t)\big)$ se comporte comme $|\tau|^{2H-2}$ à l'infini et dont la densité spectrale se comporte comme $|\lambda|^{1-2H}$ en zéro. Le phénomène de longue mémoire apparaît alors quand $H \in]1/2, 1[$. Le mouvement brownien fractionnaire surtout célèbre puisqu'il est auto–semblable en loi, a été introduit en 1968 par Mandelbrot et Van Ness [51] pour modéliser des phénomènes d'hydrologie.

Dix ans après, les économètres ont proposé des modèles à temps discret présentant les mêmes caractéristiques de mémoire. Ces modèles ont petit à petit été étendus pour en arriver aujourd'hui à une réserve de modèles présentant une belle diversité. Pour citer les jalons essentiels et sans garantie d'exhaustivité : Granger et Joyeux [34], Hosking [40], Andel [2], Gray *et al.* [35], Porter-Hudak [60], Hassler [37], Viano *et al.* [72], Giraitis et Leipus [25]. En bref, tous ces modèles sont obtenus par filtrage d'un bruit blanc (suite de variables i.i.d.) centré de L^2 à travers un filtre correspondant à une fonction de transfert de la forme

$$\prod_{j=1}^{m}(1-z\alpha_j)^{d_j}. \tag{1.9}$$

Les processus obtenus ont été baptisés par leurs auteurs de sigles divers : FARIMA, GARMA, ARFISMA, ARUMA etc... On reconnaît, lorsque les exposants sont dans $\mathbb{Z}$ et les α_j hors du disque unité fermé, les processus ARMA (*autoregressive moving average*) tant utilisés dans tous les domaines du signal et de la prévision, processus à mémoire courte dans la mesure où leur covariance tend vers 0 à vitesse géométrique. On voit apparaître une mémoire longue dès qu'à un filtre ARMA $A(z)$ on adjoint le facteur $(1-z)^d$ avec $-1/2 < d < 0$. On parle alors de processus FARIMA(p,d,q) où p et q sont les degrés des polynômes constituant la fraction $A(z)$. La densité spectrale est alors de la forme

$$|1-e^{i\lambda}|^{2d}|A(e^{i\lambda})|^2 \tag{1.10}$$

et la fonction de covariance est de type

$$r(n) = n^{-2d-1}L(n)$$

où L est une fonction à variation lente à l'infini. Ce sont les mêmes comportements que ceux des accroissements du mouvement brownien fractionnaire.

La classe des processus FARIMA englobe l'exemple historique des processus introduits indépendamment en 1980 par Granger et Joyeux [34] et en 1981 par Hosking [40]. Ces processus correspondent à $A(z) \equiv 1$, et peuvent donc être considérés comme des processus FARIMA$(0,d,0)$,

$$X_n = (1-B)^d \varepsilon_n \tag{1.11}$$

où (ε_n) est un bruit blanc et B est l'opérateur retard : $(B\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1})$. Leur densité spectrale est égale à $|1-e^{i\lambda}|^{2d}$.

A partir de l'article de Granger et Joyeux [34] sont apparues diverses variantes saisonnières :

- Hosking [40] : $(1-2uz+z^2)^d A(z)$,
- Porter-Hudak [60] et Jonas [42] : $(1-z^s)^d A(z)$,
- Hassler [37] : $(1-z)^{d_1}(1+z)^{d_2}(1+z^2)^{d_3}A(z)$.

Toutes ces modifications apportées aux FARIMA ont le même effet : apporter une contribution saisonnière à la mémoire, c'est–à–dire remplacer dans la covariance le facteur à décroissance lente par un facteur oscillant ou ce qui revient pratiquement au même, introduire dans la densité spectrale des singularités de type $|\lambda-\lambda_j|^{2d_j}L(1/|\lambda-\lambda_j|)$ en des fréquences λ_j non nulles. Cette dernière propriété montrant d'ailleurs dans le cas gaussien que ces processus ne sont pas mélangeants, (voir Viano *et al.* [72] pour les détails). Des généralisations ont été proposées en 1995 par Giraitis et Leipus [28], Viano *et al.* [72], et récemment par Leipus et Viano [48]. Considérons la famille $\mathcal{G}$ de fonctions G telles que

- il existe $a > 0$ (éventuellement infini) tel que G soit analytique dans le domaine $|z| < a$,

- si $a < +\infty$, G admet sur le cercle $|z| = a$, un nombre fini de points singuliers distincts
$$ae^{i\lambda_1}, \ldots, ae^{i\lambda_m},$$
et à tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, il correspond d_j ($d_j \notin \mathbb{N}$), tel que pour tout z, $|z| < a$,
$$G(z) = \Big(1 - \frac{z}{ae^{i\lambda_j}}\Big)^{d_j} h_j(z),$$
où h_j est analytique dans un voisinage de $ae^{i\lambda_j}$ et ne s'annule pas en ce point.

Parmi les fonctions de ce type figurent toutes celles évoquées plus haut, i.e. les modèles de Hosking [40], Porter-Hudak [60] et Hasler [37]. ainsi que les fonctions de transfert ARMA fractionnaires de Viano *et al.* [72]. Le lemme suivant décrit le comportement des coefficients du développement analytique
$$G(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^j \tag{1.12}$$
pour les fonctions G de $\mathcal{G}$.

Lemme 1.1 (Leipus et Viano [48]) *Pour une fonction G de la famille $\mathcal{G}$, si $a < +\infty$, il existe des constantes c_j non nulles telles que*
$$b_n = a^{-n} n^{-d-1} \Big(\sum_j c_j e^{-in\lambda_j} + o(1)\Big), \tag{1.13}$$
où $d = \min\{d_i | i \in \{1, \ldots, m\}\}$ et la sommation porte sur les j pour lesquels $d_j = d$.

Ce résultat permet de savoir si le processus ainsi construit est à longue mémoire et si la longue mémoire est régulière ou saisonnière. Par exemple la suite b_n est sommable si et seulement si $a > 1$, ou bien $a = 1$ et $d > 0$. La situation $a = 1$, celle où les valeurs singulières de plus petit module sont sur le cercle unité, est la situation critique où le phénomène de longue mémoire pourra se produire. C'est ce que montre le lemme suivant.

Considérons le processus moyenne mobile infini MA_∞ défini par
$$X_n = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \varepsilon_{n-j}, \tag{1.14}$$
où (ε_n) est un bruit blanc centré de L^2.

Lemme 1.2 (Leipus et Viano [48]) *Pour une fonction G de $\mathcal{G}$, si $a < +\infty$, et si la suite b_n est dans $\ell^2(\mathbb{N})$, la fonction de covariance $r(n)$ de X_n satisfait à l'infini*

- *si $a > 1$,*
$$r(n) = O(n^{-d-1} a^{-n})$$

- *si $a = 1$, alors il existe des constantes non nulles $\gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}$ telles que*

$$r(n) = n^{-2d-1}\Big(\sum_j \gamma_1^{(j)} \cos n\lambda_j + \gamma_2^{(j)} \sin n\lambda_j + o(1)\Big), \tag{1.15}$$

  où la sommation porte sur les indices j tels que $d_j = d$.

Pour $a = 1$, la covariance se comporte comme n^{-2d-1} et la densité spectrale $|G(e^{i\lambda})|^2$ admet comme singularités les λ_j correspondant aux singularités de G se trouvant sur le cercle unité. La suite $\sum_j \gamma_j \cos n\lambda_j + o(1)$ apparaissant dans (1.15) est une suite oscillante sauf si la seule singularité sur ce cercle est $z = 1$ auquel cas cette suite est à variation lente ; il s'agit simplement de $1 + o(1)$, et la densité spectrale a une seule singularité, à l'origine. La covariance dans tous les cas est non sommable lorsque $a = 1$ et $d < 0$, c'est–à–dire si parmi les singularités de la densité spectrale il y en a au moins une où elle est infinie.
Une classe particulièrement intéressante de la famille $\mathcal{G}$ est celle des ARMA fractionnaires introduits par Viano *et al.* [72]. Elle est composée des fonctions de transfert de la forme

$$P(z)\prod_{j=1}^{m_1}(1 - z\alpha_j)^{d_j} \prod_{j=m_1+1}^{m_2} (1 - ze^{i\theta_j}/a)^{d_j} \prod_{j=m_2+1}^{m} (1 - ze^{i\theta_j}/a)^{d} \tag{1.16}$$

où P est un polynôme et

$$|\alpha_j| < 1/a \text{ pour } j \text{ entre } 1 \text{ et } m_1, \quad \text{et } d_j > d \text{ pour } j \text{ entre } 1 \text{ et } m_2.$$

On voit d'après le Lemme 1.2 que le dernier produit dans (1.16) est le seul qui intervient dans le comportement asymptotique de b_n et de $r(n)$. Par exemple, prenons

$$G(z) = (1 - z)^2(1 + z)^{1/3}(1 + z/2)^{1/4}(1 + z)^{-1/4}.$$

C'est le terme $(1 + z)^{-1/4}$ qui dicte le comportement asymptotique de b_n et de $r(n)$. On a

$$b_n = Cn^{-3/4}(\cos(n\pi/2 + \pi/4) + o(1))$$

et

$$r(n) = n^{-1/2}(C_1(\cos n\pi/2) + C_2 \sin(n\pi/2) + o(1)).$$

De plus la densité spectrale est de la forme

$$f(\lambda) = \phi(\lambda)|\cos(\lambda/2)|^{2/3}|\cos(\lambda)|^{-1/2},$$

où ϕ est C^∞ sur $]-\pi, \pi[$ et ne s'annule pas sur $[-\pi, \pi]$. On est en présence d'un phénomène de mémoire longue avec effet saisonnier produit par la valeur infinie de la densité spectrale au point $\pi/2$.

2 Théorèmes limites pour les sommes partielles de variables aléatoires réelles : une revue

Si une suite de variables $(Y_n)_{n\geq 1}$ est i.i.d. et si $\mathbb{E}Y_1 = 0$ et $\mathbb{E}Y_1^2 = 1$, le principe d'invariance, connu aussi sous le nom du théorème de Donsker-Prohorov, dit que

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{[Nt]} Y_j \tag{2.1}$$

converge faiblement lorsque N tend vers l'infini dans l'espace de Skohorod $D[0,1]$ muni de la métrique uniforme vers le mouvement brownien standard $W(t)$. Rappelons que l'espace de Skohorod $D[0,1]$ est l'espace des fonctions définies sur $[0,1]$, continues à droite et limitées à gauche. Une variante de ce principe est la convergence dans l'espace $C[0,1]$ des fonctions continues sur $[0,1]$, vers la même limite, des sommes partielles lissées

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\Big(\sum_{j=1}^{[Nt]} Y_j + (Nt - [Nt])Y_{[Nt]+1}\Big). \tag{2.2}$$

En 1961, Rosenblatt [62] a montré que si (X_n) est un processus gaussien stationnaire centré tel que $\mathrm{Cov}\big(X_1, X_n\big) \sim |n|^{-\alpha}$ à l'infini avec $0 < \alpha < 1/2$, alors la loi limite de $N^{-1+\alpha}\sum_{j=1}^{N}\big(X_j^2 - \mathbb{E}X_1^2\big)$ est non gaussienne. Cet exemple célèbre montre que, dans le résultat du théorème de Donsker-Prohorov, la non indépendance peut occasionner à la fois la perte de la normalité asymptotique des sommes partielles et de la normalisation par $\sqrt{N}$.

L'objet de cette section est de passer en revue les principaux résultats connus concernant le principe d'invariance pour des variables dépendantes. Dans la suite, on suppose que les processus considérées sont stationnaires.

On peut distinguer deux notions de dépendance : la dépendance faible et la dépendance forte, connues aussi respectivement sous les noms de courte mémoire et longue mémoire. Nous verrons que dans le premier cas, le principe d'invariance est généralement maintenu, alors qu'il tombe en défaut dans le second cas comme l'a suggéré l'exemple de Rosenblatt.

2.1 Variables faiblement dépendantes

Bien que cette catégorie de variables soit souvent caractérisée par la sommabilité des covariances. on peut dire qu'a l'heure actuelle il n'y a pas d'approche unifiée pour la notion de faible dépendance. Les auteurs ont travaillé notamment sur les familles suivantes de processus :

- les différences de martingales,
- les processus mélangeants,
- les processus associés et les fonctions de gaussiens ou de linéaires.[1]

[1]Cette formulation fait référence aux processus $H(X_n)$, où X_n est un processus gaussien ou linéaire.

Dans ce qui suit nous rappelons la notion d'α–mélange, appelé aussi mélange fort qui, comme son nom ne l'indique pas, est la notion la plus faible. Pour le ϕ–mélange et le principe d'invariance sous ce type de mélange, on peut se référer au livre de Billingsley [8]. Le livre de Doukhan [18] fournit une étude détaillée des différentes sortes de mélange. Nous rappelons aussi la définition de l'association. Nous donnons enfin quelques résultats récents obtenus sous différentes hypothèses de faible dépendance.

2.2 Définitions

Définition 2.1 *On définit le coefficient de l'α– mélange entre deux tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ d'un même espace de probabilité par*

$$\alpha(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \sup_{(A,B)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} |P(A\cap B) - P(A)P(B)|.$$

Si $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité, alors on définit la suite des coefficients de mélange fort α_n par

$$\alpha_n = \sup_{k\geq 1} \alpha\big(\sigma\{Y_j; j\leq k\}, \sigma\{Y_j; j\geq n+k\}\big),$$

où pour tout sous ensemble S de $\mathbb{N}$, $\sigma\{Y_j; j\in S\}$ désigne la tribu engendrée par les variables $(Y_j)_{j\in S}$.
On dit que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est α–mélangeante, si lorsque n tend vers l'infini, α_n tend vers 0.

Il est clair que lorsque deux variables ou deux tribus sont indépendantes, leur coefficient de mélange est nul. Ainsi ce coefficient peut être considéré comme un outil de mesure de la dépendance. Les chaînes de Markov et les processus linéaires sous certaines conditions fournissent quelques exemples de processus α–mélangeants. Cela dit, il est difficile en général d'évaluer les coefficients de mélange α_n.

Définition 2.2 *On dit qu'une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est associée si pour tout entier $m\geq 1$ et pour toutes fonctions f, g de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$ croissantes par coordonnées, on a*

$$\mathrm{Cov}\big(f(Y_1,\ldots,Y_m), h(Y_1,\ldots,Y_m)\big) \geq 0, \tag{2.3}$$

sous réserve que cette covariance existe.

Une propriété fondamentale vérifiée par les suites associées est l'équivalence entre la non corrélation et l'indépendance. Ainsi il est naturel d'espérer que pour ces suites, la dépendance est complètement décrite par la structure des covariances. De plus , il est beaucoup plus simple de vérifier si la condition (2.3) d'association est satisfaite ou non, plutôt que de voir si la suite des coefficients de mélange α_n tend vers 0.
Récemment, Doukhan et Louhichi [20] ont défini la notion suivante de faible dépendance qui permet notamment de traiter le mélange et l'association dans une approche unifiée.

Définition 2.3 *Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. Elle est dite $\big(\theta, \mathcal{H}, \psi\big)$–faiblement dépendante s'il existe une classe de fonctions à valeurs réelles $\mathcal{H}$, une suite de nombres réels $\theta = \big(\theta_n\big)_{n\geq 1}$ décroissant à l'infini vers zéro et une fonction ψ définie sur $\mathcal{H}^2 \times \mathbb{N}^2$ telles que pour tous u–uplets $(i_1, \ldots, i_u)$ et v–uplets $(j_1, \ldots, j_v)$ avec $i_1 \leq \ldots \leq i_u < i_u + r \leq j_1 \leq \ldots \leq j_v$ on ait*

$$\left|\mathrm{Cov}\Big(h\big(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_u}\big), k\big(Y_{j_1}, \ldots, Y_{j_v}\big)\Big)\right| \leq \psi(h, k, u, v)\theta_r, \tag{2.4}$$

pour toutes les fonctions $h, k \in \mathcal{H}$ qui sont définies respectivement sur $\mathbb{R}^u$ et $\mathbb{R}^v$.

2.3 Résultats de convergence

La première extension du principe d'invariance aux variables faiblement dépendantes concerne les différences de martingales. Ces processus constituent une généralisation directe des variables indépendantes puisqu'elles sont non corrélées. On peut formuler cette extension comme suit

Théorème 2.1 (Billingsley [8]) *Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ un processus stationnaire ergodique vérifiant*

$$\mathbb{E}(Y_n|\sigma\{Y_1, \ldots, Y_{n-1}\}) = 0. \tag{2.5}$$

Supposons que $\sigma^2 := \mathbb{E}Y_1^2$ est finie et strictement positive. Alors, lorsque N tend vers l'infini

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{[Nt]} Y_j \overset{D[0,1]}{\Longrightarrow} W(t),$$

où $\overset{D[0,1]}{\Longrightarrow}$ désigne la convergence en loi dans $D[0, 1]$.

La condition (2.5) signifie que la suite $(Y_1 + \cdots + Y_n)_{n\geq 1}$ est une martingale par rapport à sa filtration standard. Cette condition est donc équivalente à l'existence d'une martingale $(X_n)_{n\geq 1}$ telle que $Y_1 = X_1$ et $Y_n = X_n - X_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$ et justifie la dénomination "différences de martingales".

Considérons maintenant un processus stationnaire $(Y_n)_{n\geq 1}$ centré et notons par α_n la suite de ses coefficients de mélange. Posons pour tout réel positif t, $\alpha(t) = \alpha_{[t]}$ et notons par $Q(t)$ la fonction de quantile de $|Y_1|$ définie comme étant la fonction inverse généralisée de la queue de la loi de Y_1, $t \longmapsto P(|Y_1| > t)$, i.e. $Q(t) = \inf\{x; P(|Y_1| > x) \leq t\}$. Notons également par α^{-1} l'inverse généralisée de α. Nous avons alors le théorème suivant

Théorème 2.2 (Doukhan, Massart et Rio [21]) *Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ un processus stationnaire centré α–mélangeant tel que*

$$\int_0^1 \alpha^{-1}(t)(Q(t))^2 dt < +\infty. \tag{2.6}$$

Alors

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |\mathrm{Cov}(Y_1, Y_j)| < +\infty,$$

et si de plus

$$\sigma^2 := \mathbb{E}Y_1^2 + 2\sum_{j=2}^{+\infty} \mathrm{Cov}(Y_1, Y_j) > 0, \tag{2.7}$$

alors, lorsque N tend vers l'infini

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{[Nt]} Y_j \stackrel{D[0,1]}{\Longrightarrow} W(t).$$

Notons que ce théorème est assez optimal dans le sens où pour les processus m–dépendants, la condition (2.6) est équivalente à l'existence du moment d'ordre 2. Par ailleurs, si la condition (2.6) n'est pas vérifiée, on peut construire des contre–exemples pour lesquels le principe d'invariance n'est plus vrai (voir Doukhan *et al.* [21]).

On note $\mathcal{L}$ l'ensemble de toutes les fonctions lipschitziennes définies et bornées sur $\mathbb{R}^u, u \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{L}_1$ le sous espace défini par

$$\mathcal{L}_1 = \big\{h \in \mathcal{L};\ \|h\|_\infty \le 1\big\},$$

où $\|.\|_\infty$ désigne la norme uniforme.

Pour $d \ge 0$, $c \in [0, 2]$ et toutes fonctions lipschitziennes h, k définies respectivement sur $\mathbb{R}^u$ et $\mathbb{R}^v$, on pose

$$\psi(h, k, u, v) = (u + v)^d \big(\mathrm{Lip}(h) + \mathrm{Lip}(k)\big)^c$$

où

$$\mathrm{Lip}(h) = \sup_{x \ne y} \frac{|h(x) - h(y)|}{\|x - y\|_1}, \quad \text{avec } \|(x_1, \ldots, x_u)\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_u|.$$

Nous avons alors le théorème suivant

Théorème 2.3 (Doukhan et Louhichi [20]) *Soit (Y_n) une suite $\big(\theta, \mathcal{L}_1, \psi\big)$–faiblement dépendante telle que $\mathbb{E}\big|Y_1\big|^{4+\delta} < +\infty$, pour un certain $\delta > 0$ et $\theta_r = O\big(r\big)^{-D}$ où $D > d$ et $D \ge 2 + 4(2 - c)/\delta$. Supposons que*

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{E}S_N^2 = +\infty.$$

Alors σ^2 définie dans (2.7) est strictement positive et nous avons lorsque N tend vers l'infini,

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{[Nt]} Y_j \stackrel{D[0,1]}{\Longrightarrow} W(t).$$

Pour les processus à forte structure tels que les processus associés, les processus fonctions de gaussiens ou fonctions de processus linéaires, la sommabilité des covariances (ou des coefficients pour ces derniers) semble suffire pour conclure au principe d'invariance, du moins dans sa version fini–dimensionnelle. Par exemple, nous avons les résultats suivants :

Théorème 2.4 (Newman et Wright [53]) *Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables stationnaires centrées et associées telle que*

$$\sigma^2 := \mathbb{E}Y_1^2 + 2\sum_{j=2}^{+\infty} \mathrm{Cov}(Y_1, Y_j) < +\infty.$$

Supposons que $\sigma^2 > 0$. Alors, lorsque N tend vers l'infini,

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\Big(\sum_{j=1}^{[Nt]} Y_j + (Nt - [Nt])Y_{[Nt]+1}\Big) \stackrel{C[0,1]}{\Longrightarrow} W(t),$$

où $\stackrel{C[0,1]}{\Longrightarrow}$ désigne la convergence en loi dans $C[0,1]$.

Considérons un processus gaussien stationnaire $(X_n)_{n\geq 1}$ centré réduit, c'est–à–dire que $\mathbb{E}X_1 = 0$ et $\mathbb{E}X_1^2 = 1$. Pour tout entier positif k, le polynôme de Hermite de degré k est donné par

$$H_k(x) = (-1)^k e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Toute fonction réelle H qui vérifie $\mathbb{E}H(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}\big(H(X_1)\big)^2 < +\infty$ admet un développement de Hermite dans l'espace $L^2(\mathbb{R}, 1/\sqrt{2\pi}e^{-x^2/2}dx)$, qui est de la forme

$$H(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{J_k}{k!} H_k(x), \quad \text{où} \quad J_k = \mathbb{E}\big(H(X_1)H_k(X_1)\big). \tag{2.8}$$

Définition 2.4 *On appelle rang de Hermite de H et on note τ, le degré du premier polynôme apparaissant dans le développement (2.8), c'est–à–dire $\tau = \inf\{k, J_k \neq 0\}$.*

Le théorème suivant est consacré aux processus fonctions de gaussiens, c'est–à–dire $(H(X_n))_{n\geq 1}$.

Théorème 2.5 (Ben Hariz [6], Breuer et Major [10], Giraitis et Surgailis [30]) *Soit (X_n) un processus gaussien centré réduit, et H une fonction réelle vérifiant $\mathbb{E}H(X_1) = 0$, et $\mathbb{E}\big|H(X_1)\big|^{2+\delta} < +\infty$ pour un certain $\delta > 0$. Notons par $r(j)$ la suite des covariances de (X_n) et par τ le rang de Hermite de H. Supposons que*

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |r(j)|^\tau < +\infty, \tag{2.9}$$

et que

$$\sigma^2 := \sum_{k=\tau}^{+\infty} \frac{J(k)^2}{k!} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \big(r(j)\big)^k > 0. \tag{2.10}$$

Alors, lorsque N tend vers l'infini,

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{[Nt]} H(X_j) \overset{D[0,1]}{\Longrightarrow} W(t). \tag{2.11}$$

La condition (2.9) traduit la faible dépendance car elle est équivalente à

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \big|\mathrm{Cov}\big(H(X_1), H(X_j)\big)\big| < +\infty,$$

(voir Giraitis et Surgailis [30]). Enfin, la variance limite σ^2 dans (2.10) s'écrit aussi

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\big(H(X_1)\big)^2 + 2\sum_{j=2}^{+\infty} \mathrm{Cov}\big(H(X_1), H(X_j)\big).$$

On retrouve la variance limite dans (2.7) obtenue dans le Théorème 2.2.
La convergence des lois fini–dimensionnelles a été établie par Breuer et Major [10], puis étendue par Giraitis et Surgailis [30] à un cadre plus général. Ben Hariz [6] a montré l'équitension. Rappelons que cette dernière avait été prouvée par Csörgő et Mielniczuck [12] sous la condition $\mathbb{E}(H(X_1)^4) < +\infty$ qui est plus forte.
Le Théorème 2.5 reste vrai avec certaines conditions supplémentaires lorsque (X_n) est un processus linéaire, i.e.

$$X_n = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} b_{n-j}\xi_j$$

où (ξ_j) est une suite de variables i.i.d. centrée, de moment d'ordre 2 fini et (b_j) est dans $\ell^2(\mathbb{Z})$, c'est–à–dire

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} b_j^2 < +\infty.$$

Les conditions portent généralement sur la loi de ξ_1 et sur H. On suppose notamment l'existence de tous les moments de ξ_1 ainsi que de toutes les dérivées de H. On peut se référer par exemple à Giraitis [26] et Ho et Hsing [39]. Ces derniers ont beaucoup allégé les conditions de Giraitis [26]. Plus précisément :

Théorème 2.6 (Ho et Hsing [39]) *Considérons un processus linéaire (X_n) défini par*

$$X_n = \sum_{j=1}^{+\infty} b_j\xi_{n-j}, \tag{2.12}$$

et notons pour tous $n, \ell \geq 1$

$$X_{n,\ell} = \sum_{j=1}^{\ell} b_j \xi_{n-j}.$$

Supposons que $\mathbb{E}\xi_0^4 < +\infty$ *et que*

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |b_j| < +\infty.$$

Soit H *une fonction réelle bornée dérivable à dérivée continue et bornée et telle que*

$$\mathbb{E}\Big(H(X_1) - H(X_{1,\ell})\Big)^2 \longrightarrow 0, \quad \textit{lorsque } \ell \longrightarrow +\infty.$$

Supposons de plus que

$$\sigma^2 := \mathbb{E}\big(H(X_1)\big)^2 + 2\sum_{j=2}^{+\infty} \mathrm{Cov}\big(H(X_1), H(X_j)\big) > 0$$

Alors

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} H(X_j).$$

converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne standard.

Notons que la condition de régularité de H peut être remplacée par une condition plus technique qui permet au Théorème 2.6 de s'appliquer au processus empirique (voir Théorème 4.1 de Ho et Hsing [39]).

Remarque : La condition $\sigma^2 > 0$ est de première importance. En effet Giraitis et Surgailis [30] ont donné quelques exemples montrant la perte de la normalité asymptotique des sommes partielles lorsque $\sigma^2 = 0$. L'exemple suivant, emprunté à Giraitis et Surgailis [30], illustre ce phénomène. On considère un processus gaussien stationnaire centré réduit (X_n) admettant une densité spectrale f de la forme suivante

$$f(\lambda) = \begin{cases} |\lambda - \lambda_0|^{-1/2} & \text{si } \lambda \in]\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon[\\ |\lambda - 2\lambda_0|^{-1/2} & \text{si } \lambda \in]2\lambda_0 - \varepsilon, 2\lambda_0[\\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\lambda_0 \in]0, \pi[$ et $\varepsilon > 0$ assez petit. On a au voisinage de l'infini,

$$r(k) \sim \frac{C}{\sqrt{k}}\Big(\sin\big(\frac{\pi}{4} - k\lambda_0\big) + \sin\big(\frac{\pi}{4} + 2k\lambda_0\big)\Big)$$

et donc

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |r(k)|^3 < +\infty.$$

Par conséquent pour les fonctions H de rang de Hermite supérieur ou égal à 3, la mémoire est courte. Cependant, pour $H = H_3$, on obtient $\sigma^2 = 0$ car

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r(k)^3 = 0.$$

D'autre part, lorsque N tend vers l'infini,

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{j=1}^{N} H_3(X_j)\Big) \sim C\sqrt{N}$$

et $N^{-1/4}\sum_{j=1}^{N} H_3(X_j)$ a une limite non gaussienne (voir Giraitis et Surgailis [30], Théorème 9). En résumé, la normalisation par $\sqrt{N}$ et la normalité asymptotique sont toutes deux perdues.

Nous verrons dans la proposition suivante que pour une large classe de processus, en particulier pour tous les processus obtenus à partir d'un bruit blanc gaussien par un filtre du type (1.9), cette situation ne peut pas se produire.

Proposition 2.1 *Soit (X_n) un processus gaussien stationnaire centré réduit admettant une densité spectrale qui vérifie l'une des deux propriétés suivantes*

1. *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que f soit continue sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ et ne s'annule pas sur $0 < |x| < \varepsilon$.*

2. *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que*
$$\inf_{x\in[-\varepsilon,\varepsilon]} f(x) > 0.$$

Soit H une fonction non linéaire telle que $\mathbb{E}H(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}H(X_1)^2 < +\infty$. Supposons que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |r(n)|^\tau < +\infty.$$

Alors

$$\sigma^2 := \sum_{k=\tau}^{+\infty} \frac{J(k)^2}{k!} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \big(r(j)\big)^k > 0.$$

Preuve : Il suffit de démontrer qu'il existe $k \geq \tau$ tel que

$$J(k) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \big(r(j)\big)^k > 0. \tag{2.13}$$

Posons

$$g(x) = f(x)\mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}(x).$$

Il est alors facile de voir que, pour tout entier n et pour tout entier $k \geq 1$,

$$r(n)^k = \int_{\mathbb{R}} e^{inu} g^{*k}(u)du = \int_{-k\pi}^{k\pi} e^{inu} g^{*k}(u)du = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \sum_{j=-\left[\frac{k}{2}\right]}^{\left[\frac{k}{2}\right]} g^{*k}(x+2\pi j)dx.$$

où g^{*k} désigne la $k^{\text{ème}}$ convolution de g.
Puisque $r(n)^\tau$ est sommable, il existe pour tout $k \geq \tau$, une version continue sur $[-\pi,\pi]$, de

$$\sum_{j=-\left[\frac{k}{2}\right]}^{\left[\frac{k}{2}\right]} g^{*k}(x+2\pi j)$$

que nous notons h_k, et telle que pour tout $x \in [-\pi,\pi]$,

$$h_k(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(n)^k e^{inx}.$$

Clairement

$$\inf_{x\in[-\varepsilon/2,\varepsilon/2]} g * g(x) \geq \inf_{x\in[-\varepsilon/2,\varepsilon/2]} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} g(t)g(x-t)dt > 0.$$

De même, nous obtenons par récurrence, que pour tout $k > 1$,

$$\inf_{x\in[-\varepsilon/2,\varepsilon/2]} g^{*k}(x) > 0.$$

Il en sera de même pour h_k et donc

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(n)^k = 2\pi h_k(0) > 0.$$

Soit k le premier entier strictement supérieur à 1 tel que $J(k) \neq 0$. Si $\tau > 1$, on a $k = \tau$, et si $\tau = 1$, k existe car H n'est pas une fonction linéaire. Cet entier k vérifie alors (2.13) $\square$

2.4 Variables fortement dépendantes

A l'exception de deux articles de Rosenblatt [62] et de Giraitis [25] ainsi qu'un article récent d'Arcones [3] qui seront discutés dans la suite de cette thèse, tous les travaux concernant la limite des sommes partielles pour les variables fortement dépendantes sont faits sous l'hypothèse de longue mémoire régulière (1.1). Nous verrons ici que pour cette catégorie de variables, même si parfois la normalité asymptotique des sommes partielles est préservée, la perte de la normalisation par $N^{-1/2}$ et de l'indépendance des accroissements du processus limite sera systématique.

On peut dire que les travaux précurseurs dans ce domaine outre ceux de Rosenblatt (1961), sont ceux de Taqqu (1975) et ceux de Dobrushin et Major (1979) que l'on peut résumer de la façon suivante. Considérons un processus gaussien centré réduit (X_n) et une fonction H dont le développement sur la base de Hermite est donné dans (2.8). Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 2.7 (Taqqu [68], Dobrushin et Major [17]) *Notons par $r(n)$ la fonction de covariance de (X_n), et par τ le rang de Hermite de H. Supposons que*

$$r(n) = n^{-\alpha}L(n), \quad \textit{et} \quad \tau\alpha < 1, \tag{2.14}$$

où L est une fonction à variation lente à l'infini. Posons

$$d_N^2 = N^{2-\tau\alpha}L(N)^\tau.$$

Alors

$$\frac{1}{d_N}\sum_{j=1}^{[Nt]} H(X_j) \quad \textit{et} \quad \frac{J_\tau}{\tau! d_N}\sum_{j=1}^{[Nt]} H_\tau(X_j)$$

convergent dans $D[0,1]$ vers la même limite

$$\frac{J_\tau}{\tau!}K(\tau,\alpha)Z_{\tau,1-\tau\alpha/2}(t)$$

où

$$K(\tau,\alpha) = \sqrt{\frac{\tau!}{(1-\tau\alpha)(1-\tau\alpha/2)}},$$

et

$$\begin{aligned} Z_{\tau,1-\tau\alpha/2}(t) &= (K(\tau,\alpha))^{-1}\big(2\Gamma(\alpha)\cos\alpha\pi/2)\big)^{-\tau/2}\times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^\tau} \frac{e^{it(x_1+\cdots+x_\tau)}-1}{i(x_1+\cdots+x_\tau)} \prod_{j=1}^{\tau} |x_j|^{(\alpha-1)/2} dW(x_j), \end{aligned} \tag{2.15}$$

W étant la mesure aléatoire du bruit blanc gaussien standard.

Ce théorème montre notamment qu'en présence de longue mémoire régulière, le comportement asymptotique des sommes partielles de $H(X_j)$ est dicté par le premier polynôme H_τ apparaissant dans le développement de Hermite de H.

Définition 2.5 *Le processus $Z_{\tau,1-\tau\alpha/2}(t)$ est appelé processus de Hermite d'ordre τ et de paramètre $1-\tau\alpha/2$. Pour $\tau = 1$, on retrouve le mouvement brownien fractionnaire, et pour $\tau = 2$, il s'agit du processus de Rosenblatt.*

Le processus de Hermite $Z_{\tau,1-\tau\alpha/2}(t)$ vérifie les propriétés suivantes.

1. $Z_{\tau,1-\tau\alpha/2}(t)$ est un processus centré réduit.

2. Il est $(1-\tau\alpha/2)$–autosemblable, c'est–à–dire que ses accroissements sont stationnaires et que pour tout entier k, tous réels $t_1,\ldots,t_k$ dans $[0,1]$ et toute constante positive c, les vecteurs

$$\big(Z_{\tau,1-\tau\alpha/2}(ct_1),\ldots,Z_{\tau,1-\tau\alpha/2}(ct_k)\big) \quad \text{et} \quad c^{\tau\alpha/2-1}\big(Z_{\tau,1-\tau\alpha/2}(t_1),\ldots,Z_{\tau,1-\tau\alpha/2}(t_k)\big)$$

ont la même loi.
3. La fonction de covariance de $Z_{\tau,1-\tau\alpha/2}(t)$ est donnée par

$$\operatorname{Cov}\Big(Z_{\tau,1-\tau\alpha/2}(t),Z_{\tau,1-\tau\alpha/2}(s)\Big)=\frac{1}{2}\big(|t|^{2-\tau\alpha}+|s|^{2-\tau\alpha}-|t-s|^{2-\tau\alpha}\big). \tag{2.16}$$

4. Les trajectoires de $Z_{\tau,1-\tau\alpha/2}(t)$ sont continues. Grâce au théorème de continuité de Kolmogorov-Čentsov (voir Karatzas et Shreve [43]), c'est une conséquence de la propriété 3 et de la stationnarité des accroissements.

La comparaison entre les résultats du Théorème 2.7 et ceux obtenus en courte mémoire (Théorèmes 2.3–2.6), met en évidence trois différences essentielles.

- Les accroissements du processus limite ne sont plus indépendants. Cela est dû à la forte dépendance entre les variables de départ $H(X_n)$.
- La vitesse de convergence $N^{\tau\alpha/2}$ de la moyenne arithmétique, est plus faible que la vitesse standard $\sqrt{N}$.
- La perte de la normalité asymptotique lorsque $\tau\geq 2$. En effet seul le processus de Hermite d'ordre 1 est gaussien ; c'est le mouvement brownien fractionnaire comme rappelé dans la définition 2.5.

Comme en courte mémoire, le Théorème 2.7 reste vrai, avec des conditions supplémentaires, lorsque (X_n) est un processus linéaire. Dans le cas particulier où H est l'identité, la convergence des sommes partielles vers le mouvement brownien fractionnaire est déjà connue depuis 1970, Davydov [14]. En dehors de ce cas, la contribution déterminante est celle de Ho et Hsing [39].

Définition 2.6 *On appelle rang d'Appell de H le plus petit des entiers k pour lesquels $H_\infty^{(k)}(0)\neq 0$, où $H_\infty^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k, lorsqu'elle existe, de la fonction*

$$H_\infty(x)=\int_{\mathbb{R}} H(x+y)dF(x).$$

Ce rang coïncide avec celui de Hermite donné dans la définition 2.4 lorsque (X_n) est gaussien.

Théorème 2.8 (Ho et Hsing [39]) *Considérons un processus linéaire défini par (2.12), avec des coefficients b_n de la forme*

$$b_n=n^{-\beta}L(n), \quad \beta\in(1/2,1).$$

Soit H une fonction continue, dérivable et de dérivée bornée et vérifiant $\mathbb{E}H(X_1)=0$. Soit τ le rang d'Appell de H. Supposons que $\tau(2\beta-1)<1$ et $\mathbb{E}\xi_0^{2\tau\vee 8}<+\infty$. Posons

$$d_N^2=N^{2-\tau(2\beta-1)}L(N)^\tau.$$

Alors, lorsque N tend vers l'infini

$$d_N^{-1} \sum_{j=1}^{N} H(X_j) \xrightarrow{d} H_\infty^{(\tau)}(0) K(\tau, (2\beta - 1)) Z_{\tau, 2\beta-1}(1). \tag{2.17}$$

En réalité, le résultat de Ho et Hsing [39] va plus loin que le Théorème 2.8 présenté ici puisqu'il donne un développement de Taylor-Lagrange pour les sommes partielles, avec un reste qui, normalisé par $\sqrt{N}$, converge faiblement vers une loi normale (voir Ho et Hsing [39], Théorème 3.2).

3 Théorèmes limites pour le processus empirique : une revue

Considérant la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{]-\infty,x]}(H(\cdot))$ comme une fonction particulière de X_j, les résultats concernant la limite du processus empirique

$$F_{[Nt]}(x) = \frac{1}{[Nt]} \sum_{j=1}^{[Nt]} \mathbb{1}_{H(X_j) \leq x} \tag{3.1}$$

convenablement renormalisé selon la force de la dépendance entre les variables, sont, pour x fixé, conséquences des théorèmes sur les sommes partielles.
Cependant, en vue de certaines applications, par exemple pour étudier les statistiques de tests de détection de rupture (on peut se référer par exemple aux chapitres 2 et 3 de ce document), il est primordial de considérer le processus empirique comme une suite de fonctions aléatoires dépendant des deux variables $t \in [0, 1]$ et $x \in \mathbb{R}$. L'introduction du deuxième indice x demande une étude d'équitension différente. D'ailleurs certains auteurs se contentent de considérer le processus empirique comme une fonction de la seule variable x.

3.1 Courte mémoire

On sait que pour une suite de variables aléatoires i.i.d. centrées de moment d'ordre 2 fini et de fonction de répartition F, le processus $[Nt]/\sqrt{N}(F_{[Nt]}(x) - F(x))$ converge dans l'espace $D([-\infty, +\infty] \times [0, 1])$ vers un processus de Kiefer, processus gaussien centré ayant comme fonction de covariance $(s \wedge t)(F(x \wedge y) - F(x)F(y))$ (voir e.g. Shorack et Wellner [66]). L'introduction d'une faible dépendance entre les variables laisse intacte la normalité du processus limite et la normalisation, mais elle change la covariance qui devient

$$(s \wedge t)\Big(\mathrm{Var}\big(\mathbb{1}_{X_1 \leq x} \mathbb{1}_{X_1 \leq y}\big) + \sum_{k \geq 2} \big\{\mathrm{Cov}\big(\mathbb{1}_{X_1 \leq x}, \mathbb{1}_{X_k \leq y}\big) + \mathrm{Cov}\big(\mathbb{1}_{X_k \leq x}, \mathbb{1}_{X_1 \leq y}\big)\big\}\Big). \tag{3.2}$$

Sans entrer dans les détails concernant les hypothèses spécifiques à chaque situation, on peut citer Newman [52] ainsi que Doukhan et Louhichi [20] pour les suites associées à covariance sommable, Billingsley [8] pour des suites ϕ-mélangeants, Yoshihara [71] puis Shao et Yu [65] pour des suites α-mélangeantes, Csörgőet Mielniczuk [13] pour les suites fonctions de processus gaussiens à covariance sommable et Doukhan et Surgailis [22] pour les processus linéaires faiblement dépendants. Mis à part Yoshihara [71], ces auteurs considèrent le processus mono-indexé par x. Newman [52] ne traite que les lois fini-dimensionnelles.

3.2 Longue mémoire

La différence entre les résultats en courte et longue mémoire est assez spectaculaire. En longue mémoire, la limite du processus empirique (3.1) convenablement renormalisé est *dégénérée*. Cette limite est le produit d'une fonction déterministe de x et d'un processus indexé par t seul. Cette dégénérescence asymptotique est à l'origine de beaucoup de résultats surprenants en inférence statistique (voir par exemple Beran [7], Dehling et Taqqu [16], Giraitis *et al.* [29], [27], Ho et Hsing [38], Koul [44], Koul et Mukherjee [45], Koul et Surgailis [46], Robinson [61]). Quelques unes de ces études seront reprises dans les chapitres suivants, dans le cadre de la longue mémoire *saisonnière*.
Les premiers résultats datent de 1989 et sont dus à Dehling et Taqqu [15]. Ils concernent les processus fonctions de gaussiens. Si $Y_n = H(X_n)$ où (X_n) est gaussien, centré réduit, la variable

$$\Delta_x(X_j) = \mathbb{1}_{\{H(X_j)\leq x\}} - F(x) \tag{3.3}$$

se développe sur la base de Hermite de la manière suivante

$$\Delta_x(X_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(x)}{k!} H_k(X_j), \qquad \text{où } \forall x, k \quad J_k(x) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{H(X_1)\leq x\}} H_k(X_1)\Big). \tag{3.4}$$

Définition 3.1 *Soit pour tout réel x, $\tau(x)$ le rang de Hermite de $\Delta(x)$. On appelle rang de Hermite de la famille $\big(\Delta_x(.),\, x \in \mathbb{R}\big)$, le plus petit des entiers $\tau(x)$.*

Le résultat de Dehling et Taqqu [15] est le suivant

Théorème 3.1 (Dehling et Taqqu [15]) *Considérons un processus gaussien stationnaire centré réduit X_n de fonction de covariance $r(n)$ vérifiant*

$$r(n) = n^{-\alpha} L(n), \qquad 0 < \tau\alpha < 1, \tag{3.5}$$

où τ est le rang de Hermite de la famille (3.3). Posons

$$d_N^2 = \frac{2\tau!}{(1-\tau\alpha)(2-\tau\alpha)} N^{2-\tau\alpha} L^\tau(N).$$

Alors, lorsque N tend vers l'infini, le processus empirique centré et normalisé

$$d_N^{-1}[Nt]\left(\frac{1}{[Nt]}\sum_{j=1}^{[Nt]} \mathbb{1}_{\{H(X_j)\leq x\}} - F(x)\right)$$

converge dans l'espace $D\big([-\infty,+\infty]\times[0,1]\big)$ *, muni de sa métrique uniforme, vers*

$$\frac{J_\tau(x)}{\tau!} Z_{\tau,1-\tau\alpha/2}(t), \tag{3.6}$$

où $Z_{\tau,1-\tau\alpha/2}(t)$ *est le processus de Hermite d'ordre* τ *et de paramètre* $1-\tau\alpha/2$.

En particulier, si H est l'identité, le processus limite est

$$\phi(x)B_{1-\alpha/2}(t), \tag{3.7}$$

où ϕ est la densité gaussienne standard et $B_{1-\alpha/2}$ le mouvement brownien fractionnaire. Ho et Hsing [38], puis Giraitis et Surgailis [32], ont repris ce travail pour les processus linéaires, dans le cas où H est l'identité. Nous avons notamment le résultat suivant

Théorème 3.2 (Ho et Hsing [38]) *Considérons un processus linéaire*

$$X_n = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \varepsilon_{n-j} \tag{3.8}$$

où ε_n *est une suite i.i.d. centrée admettant un moment d'ordre quatre et dont la fonction de répartition est cinq fois continûment différentiable avec des dérivées bornées et intégrables.*
Supposons que les coefficients b_j *sont de la forme*

$$b_j = j^{-(\theta+1)/2} L^{1/2}(j) \tag{3.9}$$

où L *est une fonction à variation lente à l'infini et où* $0<\theta<1$.
Notons par F *la fonction de répartition de* X_1*. Alors, nous avons la convergence, lorsque* N *tend vers l'infini, dans* $D[-\infty,+\infty]$ *de*

$$N^{\theta/2}L^{-1/2}(N)\big(F_N(x)-F(x)\big)$$

vers $(2/(1-\theta)(2-\theta))^{1/2}F'(x)Z$*, où* Z *est une gaussienne standard.*

Récemment, Koul et Surgailis [47] ont étendu ce résultat aux processus linéaires sans variance avec des innovations appartenant au domaine d'attraction d'une loi symétrique α-stable (SαS), $1<\alpha<2$. La loi de Z obtenue dans ce cas est une loi SαS.
Le théorème de Ho et Hsing [38] qui date de 1996 est plus général que le Théorème 3.2 car il donne un développement de Taylor-Lagrange du processus empirique jusqu'à l'ordre $[1/\theta]$. Depuis, il a subi quelques améliorations apportées notamment par Koul et Surgailis : dans [46] ces auteurs obtiennent la normalité asymptotique du reste du développement et très récemment, dans un travail non encore publié, ils allègent la condition sur les moments.
En fin de compte, résumons ce qu'il faut retenir de ces résultats

1. le processus limite n'est pas nécessairement gaussien (en fait il ne l'est que si le rang de Hermite de la famille des indicatrices est 1),

2. la vitesse de convergence de F_N vers F est toujours inférieure à la vitesse classique $\sqrt{N}$,
3. enfin, et c'est ce qui est nouveau par rapport aux sommes partielles, le processus limite est dégénéré.

Il est à noter que certains auteurs comme Doukhan [19] suggèrent cette dégénérescence de la limite du processus empirique comme définition de la longue mémoire.

4 Contenu de la thèse

Cette thèse est consacrée aux processus à longue mémoire saisonnière. Un article de Rosenblatt [63] et un autre de Giraitis [25] ont marqué l'étude de cette question dans le cas gaussien. Nous reprenons leurs travaux pour les adapter aux processus gaussiens dont la densité spectrale a la forme (1.1.2), puis nous nous consacrons aux processus linéaires dont l'étude n'avait jamais été menée.
Nous étudions les effets inattendus créés par les phénomènes oscillatoires qui accompagnent l'existence de singularités pour des fréquences non nulles dans la densité spectrale d'un processus stationnaire.
Nous nous consacrons à l'étude asymptotique des sommes partielles et du processus empirique. Le but est de distinguer ce qui, dans les résultats brièvement rappelés dans l'introduction de cette thèse, relève spécifiquement du phénomène de longue mémoire et ce qui tient aussi à la régularité asymptotique de la covariance.
Nous trouverons par exemple que la dégénérescence limite du processus empirique est valable dans toutes les situations de longue mémoire que nous avons abordées. En revanche, nous verrons que la forme du processus limite peut être très différente selon que la mémoire est saisonnière ou régulière. Cela tient au fait que, si la mémoire est saisonnière, ce n'est pas toujours le premier polynôme apparaissant dans le développement de Hermite des variables en jeu qui dicte le comportement asymptotique de la somme.
Nous nous sommes attachés à mettre en évidence les conséquences statistiques de nos résultats. Le plan de la thèse est le suivant.

• Au chapitre 1, nous étudions, dans la section 1, la convergence du processus empirique pour des processus fonctions de gaussiens. Dans la deuxième section, nous tirons quelques conséquences statistiques de nos résultats, en particulier en ce qui concerne les U-statistiques et les fonctionnelles de von-Mises. La limite du processus empirique est obtenue en grande partie comme conséquence du comportement asymptotique des lignes de Donsker. Ceci est traité dans la dernière section de ce chapitre.
Ce chapitre a fait l'objet d'un article à paraître dans la revue ESAIM [57].

• Au chapitre 2, nous traitons la convergence du processus empirique associé aux processus linéaires. La preuve de cette convergence s'appuie sur celle des sommes partielles associées aux polynômes d'Appell, que nous étudions dans la première section. Nous donnons ensuite quelques conséquences statistiques sur les questions de détection de rupture et sur l'estimation de la densité marginale.
Ce chapitre a fait l'objet d'un article (co–signé avec Anne Philippe), qui vient d'être

soumis à la revue *Mathematical Methods of Statistics*.

• La première annexe est relative au chapitre 1. Nous y reprenons un travail qui date du début de la thèse. Nous y démontrons le théorème de Rosenblatt sur la convergence des sommes partielles pour certains processus gaussiens à mémoire saisonnière longue. L'intérêt de notre démonstration est que, fondée sur la méthode des fonctions caractéristiques utilisée par Taqqu [68] en longue mémoire régulière, elle n'utilise que des outils rudimentaires sur les séries semi-convergentes. Cette annexe a fait l'objet d'une prépublication [56] en 1999.

• La deuxième annexe complète le chapitre 2. Nous y établissons le développement à l'ordre 2 du processus empirique. Nous nous inspirons abondamment du travail de Ho et Hsing. Mais nous avons dû adapter leur démarche à notre contexte qui diffère légèrement du leur, de part la saisonnalité de la mémoire et la double indexation du processus empirique.

Outre les deux articles qui viennent d'être mentionnés, nous avons publié (en collaboration) deux tours d'horizon sur les processus à longue mémoire saisonnière, l'un dans la revue *Statistical Inference for Stochastic Processes* [54], l'autre dans un livre consacré à la longue mémoire [58].

Chapitre 1

Subordinated Gaussian processes and seasonal long memory

1.1 Introduction

In the literature, three types of seasonal long-memory models appear for stationary L^2 processes.
The first one relies on the asymptotic behavior of the covariances, namely

$$r(n) = n^{-\alpha}\big(a_0 \cos n\lambda_0 + \ldots + a_m \cos n\lambda_m\big)L(n), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{1.1.1}$$

This expression means that the covariance behaves at infinity like an oscillating sequence damped by an hyperbolically decaying one.
The second and third ones rely on the local behavior of the spectral density

$$g(\lambda) = \sum_{j=-m}^{m} s_j L\Big(\frac{1}{|\lambda - \lambda_j|}\Big)|\lambda - \lambda_j|^{\alpha_j - 1}, \tag{1.1.2}$$

or

$$g(\lambda) = h(\lambda)\prod_{j=-m}^{m} |\lambda - \lambda_j|^{\alpha_j - 1}, \tag{1.1.3}$$

with $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_m < \pi$, and

$$0 < \alpha_j < 1, \quad \alpha_j = \alpha_{-j}, \quad s_{-j} = s_j, \quad \lambda_{-j} = -\lambda_j, \quad j \in \{0\ldots, m\},$$

and where h is an even function, continuous on $[0,\pi]$, such that $h(\lambda_j) \neq 0$ for every j.
Conditions (1.1.2) and (1.1.3) are not very different. It easy to prove that if the spectral density g satisfies (1.1.3), it can be written as

$$g(\lambda) = \sum_{j=-m}^{m} s_j L_j\Big(\frac{1}{\lambda - \lambda_j}\Big)|\lambda - \lambda_j|^{\alpha_j - 1}, \quad \text{with } L_j(x) \to 1,\ x \to \infty.$$

Conditions (1.1.2) and (1.1.3) allow the frequencies λ_j to have different contributions to the asymptotic behavior of the covariance sequence. More precisely, when L is slowly varying at infinity in the sense of Zygmund [73], (1.1.2) implies that

$$r(n) = L(n) \sum_{j=1}^{m} a_j n^{-\alpha_j} \cos n\lambda_j.$$

The condition (1.1.3) is more adapted to the context of the two main parametric families of long memory : the generalized fractional ARIMA and the aggregated processes which admit a transfer function of the form (1.9) (see Oppenheim *et al* [54] for a review on seasonal long-memory models). We shall then work with condition (1.1.3) in this chapter 1 and the following.

Recall that there are two basic papers concerning the effects of *seasonal* long memory on the limit theorems. Both concern the convergence of the (suitably normalized) partial sums $\sum_{j=1}^{[nt]} Y_j$ for a zero-mean Gaussian subordinated sequence $(Y_n = H(X_n))_{n\geq 1}$. Rosenblatt [63] assumes that the underlying Gaussian process X_n has a covariance of the form (1.1.1). Giraitis [25] extends the results of Rosenblatt to Gaussian processes having a spectral density of type (1.1.2).

Here we consider a Gaussian subordinated sequence $Y_n = H(X_n)$ and we study the doubly indexed empirical process (3.1) when the spectral density of $(X_n)_{n\geq 1}$ has the form (1.1.3). We prove that the three main features cited in the end of the Introduction, appearing in the *regular* long memory case are preserved in the *seasonal* situation. In particular, the limiting process of $F_{[Nt]}(x) - F(x)$ suitably normalized is still *degenerated* and always has the typical form $J(x)Z(t)$ obtained in (3.6). However, the first Hermite polynomial $H\tau$ in the expansion (3.4) is not necessarily dominant, and the random factor $Z(t)$ can be quite different from $Z_{m,1-m\alpha/2}(t)$ in (3.6). In particular, when $\tau = 1$, as it is the case for instance when $H(x) \equiv x$, $Z(t)$ is not necessarily Gaussian.

The chapter is organized as follows. In section 1.2, we give the limit of the (normalized) doubly indexed empirical process and an outline of the proof of the theorem. In section 1.3, we propose statistical applications. The section 1.4 contains the basic result concerning the limiting law of partial sums under seasonal long-memory and some technical proofs.

1.2 Convergence of the empirical process under seasonal long-memory

1.2.1 Main result and comments

Let $(X_n)_{n\geq 1}$ be a zero-mean stationary Gaussian process such that $\mathbb{E}X_1^2 = 1$ and admitting a spectral density of the form (1.1.3),

$$g(\lambda) = h(\lambda) \prod_{j=-m}^{m} |\lambda - \lambda_j|^{\alpha_j - 1},$$

with $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_m < \pi$, and

$$0 < \alpha_j < 1, \quad \alpha_j = \alpha_{-j}, \quad \lambda_{-j} = -\lambda_j, \quad j \in \{-m, \ldots, m\},$$

and where h is an even function, continuous on $[0, \pi]$, such that $h(\lambda_j) \neq 0$ for every j. Let us denote

$$\alpha = \min\{\alpha_j,\ j \in \{0, \ldots, m\}\}, \quad \text{and} \quad J = \{j,\ \alpha_j = \alpha\} \tag{1.2.1}$$

We know from Giraitis and Leipus [28] that the covariance function of (X_n) has asymptotically the form

$$r(n) = n^{-\alpha}\Big(\sum_{j\in J} a_j \cos n\lambda_j + o(1)\Big). \tag{1.2.2}$$

This covariance is not *regularly* varying as n tends to infinity as soon as there exists $j \neq 0$ such that $\alpha_0 \geq \alpha_j$.
For the sake of comparison with the *regular* long-memory case, we suppose here that, in (3.4), the functions $J_1(x)$ and $J_2(x)$ do not identically vanish. Consequently, the results below are to be compared to (3.6) when the Hermite rank $\tau = 1$.
Let us denote

$$c_j = \big(1 + \delta_{j,0}\big)^{-1} h(\lambda_j) \prod_{i\neq j} |\lambda_i - \lambda_j|^{\alpha_i - 1}, \qquad \forall j = 0, \ldots, m, \tag{1.2.3}$$

where $\delta_{j,0}$ is the Kronecker symbol, and denote

$$C = 8c_0 \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2\alpha_0 - 2} \sin^2(\lambda/2) d\lambda, \quad D = \frac{4\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\pi/2)}{\sqrt{(2-2\alpha)(1-2\alpha)}}. \tag{1.2.4}$$

Theorem 1.2.1 *Assume that J_1 and J_2 do not vanish and that $2\alpha < 1$. Then, with $F_{[Nt]}$ defined in (3.1) and $d_N^2 = N^{2-(\alpha_0\wedge 2\alpha)}$,*

$$d_N^{-1}[Nt]\big(F_{[Nt]}(x) - F(x)\big) \Longrightarrow Z(x,t).$$

- *The convergence takes place in the space $D\big([-\infty, +\infty] \times [0,1]\big)$ endowed with the sup norm and the sigma field generated by the open balls.*
- *The process $Z(x,t)$ is defined by*

$$\begin{aligned}
&i)\ Z(x,t) = J_1(x)B(t) && \text{if} \quad \alpha_0 < 2\alpha,\\
&ii)\ Z(x,t) = J_1(x)B(t) + \frac{J_2(x)}{2}R(t) && \text{if} \quad \alpha_0 = 2\alpha,\\
&iii)\ Z(x,t) = \frac{J_2(x)}{2}R(t) && \text{if} \quad \alpha_0 > 2\alpha,
\end{aligned}$$

where

** $B(t)$ and $R(t)$ are independent,*
** $C^{-1/2}B(t)$ is the fBm with parameter $1-\alpha_0/2$,*
** the process $R(t)$ is defined by*

$$R(t) = D^{-1} \sum_{j \in J} c_j \Big(R_j^{(1)}(t) + R_j^{(2)}(t) \Big). \tag{1.2.5}$$

In (1.2.5), for fixed j, the processes $R_j^{(1)}(t)$ and $R_j^{(2)}(t)$ are independent, except if $j=0$ in which case $R_0^{(1)}(t) = R_0^{(2)}(t)$, and the $(R_j^{(1)}(t), R_j^{(2)}(t))_{j\in J}$ are independent. All the $R_j^{(i)}(t)$, $i=1,2$ and $j \in J$, are Rosenblatt processes with parameter $1-\alpha$, having the representation (2.15) with $\tau=2$.

Firstly, we see that, in all situations, the limiting process is degenerated. Secondly, from (1.2.2), we have $r(n) = O(n^{-\alpha})$. Comparing with (3.6), we remark that, when $\alpha_0 < 2\alpha$, the limit $J_1(x)B(t)$ is exactly the limit obtained in the case of *regular* long-memory (3.5) with $\tau=1$, while the normalizing coefficients which are respectively $N^{1-\alpha_0/2}$ and $N^{1-\alpha}$ are different. In fact, in this case, only the singularity $\lambda_0 = 0$ plays a role in the asymptotic behavior of the empirical process. The situation changes when $\alpha_0 \geq 2\alpha$. In this case, the singularity $\lambda_0 = 0$ is not enough marked so that, due to the presence of the oscillating terms in the covariance, the dominant term in the Hermite expansion (3.4) is H_2. Then, the limiting process is the sum of independent Rosenblatt processes, each one being produced by one of the pairs $(-\lambda_j, \lambda_j)$ corresponding to the minimal exponent α. The normalizing coefficient becomes $N^{1-\alpha}$. In this case, despite the fact that $\tau=1$, the asymptotic behavior of the empirical process is similar to its behavior under *regular* long-memory when $\tau=2$.

1.2.2 Sketch of the proof

First step : reduction of the problem.
Theorem 1.4.1 in section 1.4 implies that, for fixed x, the finite dimensional distributions of the process $d_N^{-1}[Nt]\big(F_{[Nt]}(x) - F(x)\big)$ and those of $J_1(x)X_{N,1}(t) + (J_2(x)/2)X_{N,2}(t)$ have the same limits (see the remark at the end of subsection 4.1). Hence, in the Hermite expansion (3.4), only the two first terms play a role. In order to take account of the parameter x and to reduce tightness of the first process to that of the second one we need, as in Dehling and Taqqu [15], a weak uniform reduction principle. More precisely, there exist $C>0$, $\gamma>0$ such that for every $N \geq 1$ and $\varepsilon \in (0,1]$

$$\begin{aligned} &P\Big\{ \max_{n \leq N} \sup_{-\infty \leq x \leq +\infty} d_N^{-1} \Big| \sum_{j=1}^{n} \Big(\Delta_x(X_j) - J_1(x)H_1(X_j) - \frac{J_2(x)}{2} H_2(X_j) \Big) \Big| > \varepsilon \Big\} \\ &\leq CN^{-\gamma}\big(1+\varepsilon^{-3}\big). \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

This inequality relies on the fact that $r(n) = O(n^{-\alpha})$ which is a consequence of (1.2.2). Its proof follows the same lines as in Dehling and Taqqu [15] and is omitted.

Consider the sequences $\big(X_{N,1}(t)\big)$ and $\big(X_{N,2}(t)\big)$ defined by

$$X_{N,1}(t) = d_N^{-1} \sum_{j=1}^{[Nt]} H_1(X_j) \quad \text{and} \quad X_{N,2}(t) = d_N^{-1} \sum_{j=1}^{[Nt]} H_2(X_j). \tag{1.2.7}$$

From (1.2.6), the proof of Theorem 1.2.1 reduces to the proof of the convergence of $J_1(x)X_{N,1}(t) + (J_2(x)/2)X_{N,2}(t)$ to the process $Z(x,t)$ in the announced space. The finite dimensional convergence is given in Proposition 1.2.1 below. The tightness follows from Lemma 1.2.1 below.

Second step : Variances.

As N tends to infinity,

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{j=1}^{N} H_1(X_j)\Big) \sim C_1 N^{2-\alpha_0} \quad \text{and} \quad \mathrm{Var}\Big(\sum_{j=1}^{N} H_2(X_j)\Big) \sim C_2 N^{2-2\alpha}. \tag{1.2.8}$$

The first equivalence is proved in Leipus and Viano [48]. For the second one, we have from (1.2.2), as N tends to infinity,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\Big(\sum_{j=1}^{N} H_2(X_j)\Big) &= 2\sum_{i,j=1}^{N} r^2(i-j) = 2N + \\
&\quad +2\sum_{i\neq j}\sum_{h,h'\in J} a_h a_{h'} \frac{\big(\cos((i-j)\lambda_h)+o(1)\big)\big(\cos((i-j)\lambda_{h'})+o(1)\big)}{|i-j|^{\alpha_h+\alpha_{h'}}} \\
&\sim 2N + \sum_{i\neq j}\sum_{h\in J} a_h^2 |i-j|^{-2\alpha_h} \sim C_2 N^{2-2\alpha}.
\end{aligned}$$

From (1.2.8), we get, if $\alpha_0 < 2\alpha$ (resp. if $\alpha_0 > 2\alpha$)

$$d_N^{-1}\sum_{j=1}^{N} H_2(X_j) \xrightarrow{L^2} 0, \quad \Big(\text{resp. } d_N^{-1}\sum_{j=1}^{N} H_1(X_j) \xrightarrow{L^2} 0\Big), \tag{1.2.9}$$

and in all cases,

$$\mathrm{Var}(X_{N,1}(t)) + \mathrm{Var}(X_{N,2}(t)) = O(d_N^2). \tag{1.2.10}$$

The convergences (1.2.9) provide a simple explanation to the presence of the zero components in the limit (1.2.11) below, and to the contrast between the two situations $\alpha_0 < 2\alpha$ and $\alpha_0 > 2\alpha$.

Third step : Convergence of the finite-dimensional distributions.

As it is proved in section 1.4, the next Proposition is a corollary of a general result on the partial sums. This result is stated and commented in the section 1.4 (Theorem 1.4.1). Denote by $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ the convergence of the finite–dimensional distributions.

Proposition 1.2.1 *Assume the spectral density has the form (1.1.3). Then, we have*

$$\big(X_{N,1}(t), X_{N,2}(t)\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} \begin{cases} \big(B(t), 0\big) & \text{if } \alpha_0 < 2\alpha, \\ \big(B(t), R(t)\big), & \text{if } \alpha_0 = 2\alpha, \\ \big(0, R(t)\big) & \text{if } \alpha_0 > 2\alpha, \end{cases} \tag{1.2.11}$$

where $B(t)$and $R(t)$ are as in Theorem 1.2.1.

With the reduction principle, Proposition 1.2.1 implies the convergence of the finite dimensional distributions of $d_N^{-1}[Nt]\big(F_{[Nt]}(x) - F(x)\big)$ to those of $Z(x,t)$.
Last step : Convergence in the space $D\big([-\infty, +\infty] \times [0,1]\big)$ endowed with the sup-norm. As this space is not separable, it shall be equipped with the sigma field generated by the open balls instead of the Borel sigma field which is too large for the empirical process to be measurable (see Pollard [59]). From Lemma 2.1 of Taqqu [68] the convergences (1.2.11) and the equivalence (1.2.10) imply that the sequences $X_{N,1}(t)$ and $X_{N,2}(t)$ converge in the space $D[0,1]$ endowed with the Skorohod metric and the induced Borel sigma field. Now, the form of the covariances of $B(t)$ and $R(t)$ given in (2.16), imply, using Kolmogorov-Čentsov Theorem (see Karatzas and Shreve [43]), that the sample paths of the limiting processes are continuous. It follows, (see Billingslay [8]), that the convergence takes place in $D[0,1]$ endowed with the uniform metric and the induced Borel sigma field. This of course yields the convergence in this space equipped with the sigma field $\mathcal{E}$ generated by the open balls. In the sequel, all the spaces are equipped with their sup-norm, which shall always be denoted by $\|.\|$. We need the following lemma where $\overset{D[0,1],\mathcal{E}}{\Longrightarrow}$ denotes the weak convergence in the space $(D[0,1], \mathcal{E})$.

Lemma 1.2.1 *Suppose that*

$$X_n \overset{D[0,1],\mathcal{E}}{\Longrightarrow} X, \quad Y_n \overset{D[0,1],\mathcal{E}}{\Longrightarrow} Y, \quad \text{ and } \ (X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X,Y),$$

and that

$$P\big\{(X,Y) \in C[0,1] \times C[0,1]\big\} = 1.$$

Then (X_n, Y_n) converges to (X,Y) in the space $\Big(D[0,1] \times D[0,1], \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}\Big)$.

The proof is relegated in Section 1.4.
It remains to use this lemma to prove the convergence of $J_1(x)X_{N,1}(t) + (J_2(x)/2)X_{N,2}(t)$ in the space $D\big([-\infty, +\infty] \times [0,1]\big)$ endowed with the sigma field generated by the open balls. For instance suppose that $\alpha_0 = 2\alpha$ (the proof is even simpler in the other cases). The two sequences $X_{N,1}(t)$ and $X_{N,2}(t)$ respectively converge to $B(t)$ and $R(t)$, and hence, using (1.2.11), Lemma 1.2.1 implies that $\big(X_{N,1}(t), X_{N,2}(t)\big)$ converges to $\big(B(t), R(t)\big)$ in the space $\Big(D[0,1] \times D[0,1], \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}\Big)$. Now, from the almost sure representation Theorem of Skorohod and Dudley (see Pollard [59], p. 71), there exist a sequence of vectors $\big(\tilde{X}_{N,1}(t), \tilde{X}_{N,2}(t)\big)$ having the same distribution as $\big(X_{N,1}(t), X_{N,2}(t)\big)$ and a vector $\big(\tilde{B}(t), \tilde{R}(t)\big)$ having the same distribution as $\big(B(t), R(t)\big)$ such that

$$\big\|\big(\tilde{X}_{N,1}(.)\,,\, \tilde{X}_{N,2}(.)\big) - \big(\tilde{B}(.)\,,\, \tilde{R}(.)\big)\big\| \xrightarrow{a.s.} 0.$$

As $J_1(x)$ and $J_2(x)$ are bounded, the sequence $J_1(x)\tilde{X}_{N,1}(t) + (J_2(x)/2)\tilde{X}_{N,2}(t)$ almost surely converges to $J_1(x)\tilde{B}(t)+(J_2(x)/2)\tilde{R}(t)$ in the space $D\big([-\infty,+\infty]\times[0,1]\big)$ endowed with the sigma field generated by the open balls. The convergence of $J_1(x)X_{N,1}(t) + (J_2(x)/2)X_{N,2}(t)$ in this space follows.

1.3 Applications to von-Mises functionals and U-statistics

1.3.1 General case

The context is the same as in Section 1.2. For $k \geq 1$ we consider $U_N(h)$, the (non-normalized) U-statistic defined by

$$U_N(h) = \sum_{\substack{1\leq j_1,\dots,j_k\leq N \\ j_\mu\neq j_\nu\,,\,\mu\neq\nu}} h(Y_{j_1},\dots,Y_{j_k}),$$

where $h : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ is integrable with respect to $\prod_{j=1}^k F(dx_j)$ and invariant with respect to any permutation of the variables. If h satisfies

$$\int_{\mathbb{R}} h(x_1,\dots,x_k)F(dx_1) = 0, \quad \forall\, x_2,\dots,x_k \tag{1.3.1}$$

the U-statistic is called degenerated, and the associated von-Mises functionals defined by

$$V_N(h) = \sum_{1\leq j_1,\dots,j_k\leq N} h(Y_{j_1},\dots,Y_{j_k})$$

writes

$$V_N(h) = N^k \int_{\mathbb{R}^k} h(x_1,\dots,x_k) \prod_{j=1}^{k} \big(F_N(dx_j) - F(dx_j)\big).$$

Moreover, if the total variation of h is bounded, and if h as no common discontinuities with $\prod_{i=1}^k F(x_i)$, then an integration by parts leads to

$$\frac{V_{[Nt]}(h)}{d_N^k} = \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{i=1}^{k} \frac{[Nt]}{d_N}\Big(F_{[Nt]}(x_i) - F(x_i)\Big) h(dx_1,\dots,dx_k). \tag{1.3.2}$$

The application of $D([-\infty,+\infty]\times[0,1])$ into $D[0,1]$ defined by

$$Q \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^k} Q(x_1,t)\cdots Q(x_k,t)h(dx_1,\dots,dx_k),$$

is continuous with respect to the sup–norm. Using (1.3.2) and the convergence of $d_N^{-1}[Nt]\big(F_{[Nt]}(x) - F(x)\big)$, we obtain the convergence of $d_N^{-k}V_{[Nt]}(h)$.
The convergence of $d_N^{-k}U_{[Nt]}(h)$ to the same limiting process is immediate since $V_N(h)-$

$U_N(h) = o(d_N^k)$ (see Taqqu [15]).
These results are collected in the Corollary 1.3.1 below, where $J_1(x)$ and $J_2(x)$ are defined in (3.4).

Corollary 1.3.1 *Assume that J_1 and J_2 do not identically vanish. Let h have bounded total variation and satisfy condition* (1.3.1). *In addition, suppose that $h(x_1, \ldots, x_k)$ has no common discontinuities with $\prod_{i=1}^k F(x_i)$. Then $d_N^{-k} V_{[Nt]}(h)$ and $d_N^{-k} U_{[Nt]}(h)$ converge weakly in the space $D[0,1]$ to*

$$\begin{array}{ll} i)\, C(1)\big(B(t)\big)^k & \text{if } \alpha_0 < 2\alpha, \\ ii)\, \displaystyle\int_{\mathbb{R}^k} h(x_1, \ldots, x_k) \prod_{i=1}^k \big(B(t) dJ_1(x_i) + R(t) \frac{dJ_2(x_i)}{2}\big) & \text{if } \alpha_0 = 2\alpha, \\ iii)\, C(2)(R(t))^k, & \text{if } \alpha_0 > 2\alpha. \end{array}$$

where, for $j = 1, 2$,

$$C(j) = (j!)^{-k} \int_{\mathbb{R}^k} h(x_1, \ldots, x_k) dJ_j(x_1) \cdots dJ_j(x_k).$$

Note that Dehling and Taqqu [15], proved that

$$C(j) = (j!)^{-k} \int_{\mathbb{R}^k} h\big(H(x_1), \ldots, H(x_k)\big) \prod_{i=1}^k H_j(x_i) \phi(x_i)\, dx_1 \cdots dx_k. \tag{1.3.3}$$

This relation shall be used later.

1.3.2 Bivariate case k=2

For applications, the condition of finite total variation is too restrictive. For example, it rules out the polynomial functions. In the particular case $k = 2$, it turns out that the results of Corollary 1.3.1 remain valid for a larger class of locally bounded functions, which allows to obtain the convergence of some standard statistics.
For a locally bounded function h, let μ_h be the measure generated by the increments of h, (for more details, see Dehling and Taqqu [16]). This measure admits a Hahn–Jordan decomposition $\mu_h = \mu_h^+ - \mu_h^-$. Let h^+ and h^- be the functions such that $h^+(c) = h^-(c) = 0$ where c is a median of F and whose increments define respectively the measures μ_h^+ and μ_h^-. Define on $D_L(\mathbb{R}^2)$ the semi–norm $\|.\|_F$ by

$$\|h\|_F = \int_{\mathbb{R}^2} \big(|h^+(x,y)| + |h^-(x,y)|\big) |d\gamma(x)||d\gamma(y)|,$$

where

$$\gamma(x) = \sqrt{F(x)(1 - F(x))} \quad \text{and} \quad |d\gamma(x))| = \left|\frac{d\gamma(x)}{dF(x)}\right| dF(x) \tag{1.3.4}$$

Corollary 1.3.2 *Let h be a locally bounded function such that $\|h\|_F < \infty$ and having no common discontinuities with $F(x)F(y)$. Then the conclusions of Corollary 1.3.1 hold with $k = 2$.*

The proof is similar to that given by Dehling and Taqqu ([16], proof of the Theorem). It consists in approximating h by compactly supported functions for which Corollary 1.3.1 applies. We omit the details.

Example of the empirical variance

Let us compare our results to those obtained by Dehling and Taqqu [16], in the *regular* long–memory setting.
We shall focus on the interesting situation of a weakly marked singularity at 0, that is $\alpha_0 > 2\alpha$ (with the notations of Theorem 1.2.1).

Let $H(x) = \sigma x + \mu$, and $Y_j = H(X_j)$, where, as in Section 1.2, X_j is a standard Gaussian variable. Put

$$S_N^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(Y_j - \overline{Y})^2.$$

In the case of i.i.d. variables it is well known that

$$\sqrt{N}\left(\frac{S_N^2 - \sigma^2}{\sqrt{2}\sigma^2}\right) \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1), \quad \text{as } N \to \infty, \tag{1.3.5}$$

where $\mathcal{N}(0,1)$ is the standard Gaussian law.
In the case of *regular* long memory, i.e. when the covariance of X_n has the form $r(n) = n^{-\alpha}L(n)$, $0 < \alpha < 1$, Dehling and Taqqu [16], proved that as $N \to \infty$

$$\frac{N^\alpha}{L(N)}\left(S_N^2 - \sigma^2\right) \Longrightarrow \sigma^2\Big(\frac{\sqrt{(1-2\alpha)(2-2\alpha)}}{2}Z_2 - \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2}Z_1^2\Big), \tag{1.3.6}$$

where Z_1 and Z_2 are independent, Z_1 is a standard Gaussian variable and Z_2 is a Rosenblatt variable.
In order to study the asymptotic behavior of $S_N^2 - \sigma^2$ under long memory with *seasonal* effects, define the U–statistic

$$U_N = N(N-1)(S_N^2 - \sigma^2),$$

whose Hoeffding–decomposition is

$$U_N = (N-1)\sum_{j=1}^{N}(Y_j - \mu)^2 - \sum_{i \neq j}(Y_i - \mu)(Y_j - \mu) =: U_N^{(1)} + U_N^{(2)}.$$

The first term is

$$U_N^{(1)} = \sigma^2(N-1)\sum_{j=1}^{N} H_2(X_j),$$

and hence,

$$\frac{U_N^{(1)}}{(N-1)d_N} = \sigma^2 X_{N,2}(1),$$

where $X_{N,2}(1)$ is defined in (1.2.7). According to (1.2.11), as N tends to infinity,

$$\frac{U_N^{(1)}}{Nd_N} \Longrightarrow \sigma^2 R(1),$$

where $R(1)$ is the combination of independent Rosenblatt variables defined in (1.2.5). The second term $U_N^{(2)}$ is a degenerated U–statistic with kernel

$$h(x,y) = (x-\mu)(y-\mu).$$

Since h is differentiable, and $F = \Phi$, the standard Gaussian distribution function, we have, with γ defined in (1.3.4),

$$\|h\|_F = \int_{\mathbb{R}^2} \gamma(x)\gamma(y)dxdy = \left(\int_{\mathbb{R}} \Big(\Phi\big(\frac{x-\mu}{\sigma}\big)\big(1-\Phi\big(\frac{x-\mu}{\sigma}\big)\big)\Big)^{1/2} dx\right)^2 < \infty.$$

Hence the conditions of Corollary 1.3.2 are satisfied and, as N goes to infinity,

$$d_N^{-2} U_N^{(2)} \Longrightarrow C(2)R(1)^2.$$

Thus, as N goes to infinity,

$$N^{\alpha-2} U_N^{(2)} \longrightarrow 0$$

in probability.
From this it follows that, as it is the case in the i.i.d. situation, and contrarily to what happens in the *regular* long-memory case, the second component in the Hoeffding-decomposition is negligible with respect to the first one. We obtain

Proposition 1.3.1 *Let X_n be a zero mean stationary Gaussian process with variance σ^2, admitting a spectral density of the form (1.1.3), with $\alpha_0 > 2\alpha$. The empirical variance*

$$S_N^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(X_j - \overline{X})^2$$

satisfies

$$N^\alpha (S_N^2 - \sigma^2) \Longrightarrow \sigma^2 R(1), \tag{1.3.7}$$

where, $R(1)$ is the combination of independent Rosenblatt variables defined in (1.2.5).

Remarks :
as the Rosenblatt process is centered and non-Gaussian, we see from (1.3.5), (1.3.6) and (1.3.7) that the limit of the normalized empirical variance is no more Gaussian for strongly-dependent data, and that in this case, the non Gaussian limit has a zero mean only in the *seasonal* situation. In the next subsection we illustrate these two remarks by some simulations.

Example of the χ^2-goodness of fit test

Let $\{A_\ell,\, \ell = 1, \ldots, M\}$ be a partition of $\mathbb{R}$. For $\ell = 1, \ldots, M$, put $p_\ell = P\{X_1 \in A_\ell\}$, and $p_\ell(N) = (1/N)\#\{j \leq N,\, X_j \in A_\ell\}$.
It is well known that in the case of i.i.d. variables we have

$$N \sum_{\ell=1}^{M} \frac{(p_\ell(N) - p_\ell)^2}{p_\ell} \Longrightarrow \chi^2_{M-1}.$$

For the long range dependence case, put

$$V_N = N^2 \sum_{\ell=1}^{M} \frac{(p_\ell(N) - p_\ell)^2}{p_\ell}. \tag{1.3.8}$$

We can write V_N as a von–Mises variable

$$V_N = \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{M} \frac{1}{p_\ell} \big(\mathbb{I}_{A_\ell}(X_i) - p_\ell\big)\big(\mathbb{I}_{A_\ell}(X_j) - p_\ell\big),$$

which corresponds to the kernel

$$h(x_1, x_2) = \sum_{\ell=1}^{M} \frac{1}{p_\ell} (\mathbb{I}_{A_\ell}(x_1) - p_\ell)(\mathbb{I}_{A_\ell}(x_2) - p_\ell).$$

Since h is bounded and since the Gaussian distribution is continuous, the assumptions of Corollary 1 are satisfied. Assume that there exist $i, j \in \{1, \ldots, M\}$ such that

$$\int_{A_i} H_1(x)\phi(x)dx \neq 0, \; \int_{A_j} H_2(x)\phi(x)dx \neq 0.$$

In the case of *regular* long–memory, i.e. when $r(n) = n^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, Dehling and Taqqu [16], using the von–Mises variable V_N, proved that

$$N^\alpha \sum_{\ell=1}^{M} \frac{(p_\ell(N) - p_\ell)^2}{p_\ell} \Longrightarrow C(1)\chi^2_1,$$

where

$$C(1) = \sum_{\ell=1}^{M} \frac{1}{p_\ell} \left(\int_{A_\ell} u\phi(u)du \right)^2.$$

In the case of *seasonal* long–memory we apply Corollary 1 with $\tau = 2$, with V_N given by (1.3.8) and $d_N = N^{1-\alpha/2}$. We obtain

Proposition 1.3.2 *Let $X_n, n \geq 1$, be a stationary Gaussian process such that $\mathbb{E}X_1 = 0$ and $\mathbb{E}X_1^2 = 1$, admitting a spectral density of the form (1.1.3), such that $\alpha_0 > 2\alpha$. Then we have*

$$N^{2\alpha} \sum_{\ell=1}^{M} \frac{(p_\ell(N) - p_\ell)^2}{p_\ell} \Longrightarrow C(2)(R(1))^2,$$

where

$$C(2) = \frac{1}{4}\sum_{\ell=1}^{M}\frac{1}{p_\ell}\left(\int_{A_\ell} H_2(u)\phi(u)du\right)^2.$$

Cramér-von Mises-Smirnov ω^2 criterion

Let $\omega(x)$ be a non negative weight function, and define

$$\omega_N^2 = \int_{\mathbb{R}} \omega(u)\big(F_N(u) - F(u)\big)^2 dF(u).$$

When the underlying variables are i.i.d, it is well known that under suitable conditions on ω

$$N\omega_N^2 \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \omega(u)B(u)^2 dF(u),$$

where $B(u)$ is the generalized Brownian bridge.
In the case of long range dependence, it is useful to represent $N^2\omega_N^2$ as a von–Mises–functional with kernel

$$h(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \omega(u)(1\!\!1_{x\le u} - F(u))(1\!\!1_{y\le u} - F(u))dF(u).$$

Suppose that the first coefficients $J_1(x)$, $J_2(x)$ in the expansion (3.4) of Δ_x do not identically vanish. According to Dehling and Taqqu [16], we know that $h \in \mathcal{H}_F$ defined in (3.4) if

$$\|h\|_F = \int_{\mathbb{R}} \omega(u)F(u)(1 - F(u))dF(u) < \infty, \tag{1.3.9}$$

in which case we have, in the *regular* long memory context,

$$N^\alpha\omega_N^2 \Longrightarrow C(1)\chi_1^2,$$

where

$$C(1) = \int_{\mathbb{R}} \omega(u)\left(\int_{\{H(x)\le u\}} x\phi(x)dx\right)^2 dF(u).$$

For the *seasonal* case the following holds :

Proposition 1.3.3 *Let $X_n, n \ge 1$, be a zero mean stationary Gaussian process such that $\mathbb{E}X_1^2 = 1$, admitting a spectral density of the form (1.1.3), such that $0 < 2\alpha < \alpha_0$. Consider $Y_n = H(X_n)$, and assume that (1.3.9) holds. Then*

$$N^{2\alpha}\omega_N^2 \Longrightarrow C(2)(R(1))^2,$$

with

$$C(2) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \omega(u)\left(\int_{\{H(x)\le u\}} H_2(x)\phi(x)dx\right)^2 dF(u).$$

1.3.3 Simulations

Here we give some simulations to illustrate the effect of seasonality on the empirical variance in long memory. We consider three different situations :

1. $X_n^{(1)}$ is an i.i.d standard random sequence,
2. $X_n^{(2)}$ is a zero-mean long-memory Gaussian sequence with *regular* long memory, having spectral density
$$f_2(\lambda) = \frac{1}{2\pi}|1 - e^{i\lambda}|^{-0.6}.$$
3. $X_n^{(3)}$ is a zero mean Gaussian process exhibiting *seasonal* long-memory, with spectral density
$$f_3(\lambda) = \frac{1}{2\pi}|1 - e^{i(\lambda+1.4)}|^{-0.6}|1 - e^{i(\lambda-1.4)}|^{-0.6}.$$

For each of the three models above , we have simulated 500 independent sample paths of length $N = 10000$, $\left(X_{1,k}^{(j)}, \cdots, X_{N,k}^{(j)}\right)_{k\in\{1,\cdots,500\}}$. The algorithms for simulating such processes are detailed in Bardet *et al* [5].
From the corresponding sample paths, we have computed the values of the statistics
$$\delta_{N,k}^{(j)} = N^{\alpha_{(j)}}(S_{N,k}^2 - \sigma_j^2)$$
where, according to (1.3.5), (1.3.6) and (1.3.7), $\alpha_{(1)} = \frac{1}{2}$, $\alpha_{(2)} = \alpha_{(3)} = 1 - 0.6 = 0.4$. The variance $\sigma_j^2 = \mathrm{Var}(X_n^{(j)})$ is the integral of the spectral density. We know from Gradshteyn and Ryzhik ([33], p.511) that $\sigma_2^2 = \Gamma(0.4)/(\Gamma(0.7))^2$. A numerical method is used to approximate σ_3^2.

The empirical distributions of the statistics $\delta_N^{(j)}(j = 1, 2, 3)$ are depicted in Figure 1 [top]. We clearly see that the distribution has mean zero only in the *seasonal* and independent cases.

Moreover the lack of symmetry indicates that the limiting distributions of $\delta_N^{(2)}$ and $\delta_N^{(3)}$ are not Gaussian. To display non-Gaussianity, we use the graphical method introduced by Ghosh [24]. This method is based on the properties of the third derivative of the logarithm of the empirical moment generating function (called T_3-function in Ghosh [24]).
$$T_3^{(j)}(t) = \frac{d^3}{dt^3}\ln\left(\frac{1}{500}\sum_{k=1}^{500}\exp(t\delta_{N,k}^{(j)})\right) \quad t \in [-1, 1]$$
Deviation of the curve of the T_3-function from the horizontal zero line indicates a lack of normality. A Central Limit Theorem for the T_3-function provides approximated confidence bands for $t \in [-1, 1]$. We thus reject the normality when the curve of the T_3-function crosses the upper or lower bounds anywhere in the interval $[-1, 1]$. According to this procedure, we reject the normality at significant level 1% and 5% in both cases of long memory processes (see Figure 1 [bottom]). On the opposite, in the i.i.d. case, the curve of the T_3-function is inside the confidence bands in the interval $[-1, 1]$ and thus we accept normality.

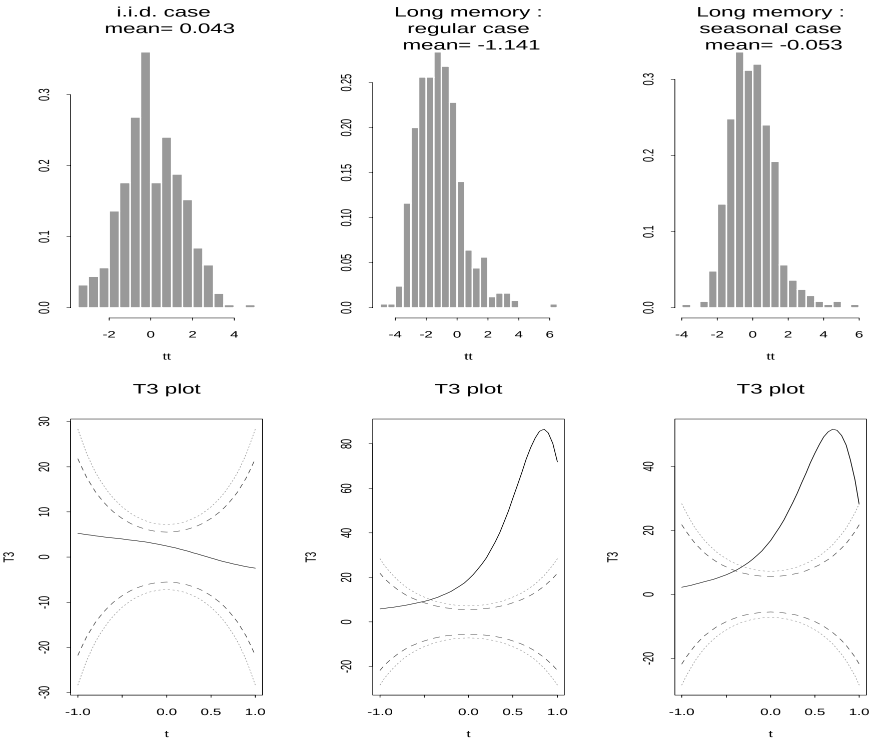

FIG. 1.1 – Estimated distribution of $\delta_N^{(j)}$ *[Top]*. Curve of the T_3- function (plain) with the confidence band at significant level 1% (dots) 5% (dashes) *[Bottom]*. The simulations are based on 500 replications of sample path of length 10000 in the following set-up : i.i.d. [left], *regular* long memory [middle] and *seasonal* long memory [right]

1.4 Convergence of the Donsker lines

1.4.1 General result

In this section we examine the asymptotic behavior of the partial sums in presence of *seasonal* long–memory with effects of type (1.1.3). For a function H satisfying $\mathbb{E}H(X_1) = 0$ and $\mathbb{E}H(X_1)^2 < \infty$, we consider the convergence of the processes $Y_N(t)$, $0 \le t \le 1$ defined by

$$Y_N(t) = d_N^{-1} \sum_{j=1}^{[Nt]} H(X_j),$$

where the normalizing coefficient is defined below. Let

$$H(x) = \sum_{k=\tau}^{\infty} \frac{J_k}{k!} H_k(x) \tag{1.4.1}$$

be the Hermite expansion of H, τ is the Hermite rank of H. The following quantities shall be of central interest :

$$\begin{array}{rcl} \gamma_k & = & \min\{\alpha_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_k} \mid \lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} = 0 \mod 2\pi\} \quad k \ge 1, \\ \gamma & = & \min\{\gamma_k,\ J_k \ne 0\}. \end{array} \tag{1.4.2}$$

Denote

$$d_N = N^{1-\gamma/2}.$$

Theorem 1.4.1 *Let (X_n) be a zero mean Gaussian process with $\mathbb{E}X_1^2 = 1$, having a spectral density of the form (1.1.3). i.e.*

$$g(\lambda) = h(\lambda) \prod_{j=-m}^{m} |\lambda - \lambda_j|^{\alpha_j - 1}.$$

If $\gamma < 1$, we have

$$Y_N(t) \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{k|\gamma_k=\gamma} \frac{J_k}{k!} Y^{t,k} \quad \text{as } N \to \infty, \tag{1.4.3}$$

where

$$Y^{t,k} = \sum\nolimits_k (s_{j_1} \cdots s_{j_k})^{1/2} \int_{\mathbb{R}^k} \frac{e^{it(x_1+\ldots+x_k)} - 1}{i(x_1 + \ldots + x_k)} \prod_{i=1}^{k} |x_i|^{(\alpha_{j_i}-1)/2} W_{j_i}(dx_i),$$

formula in which $\sum_k$ is over all $j_1, \ldots, j_k \in \{-m, \ldots, m\}$ such that $\alpha_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_k} = \gamma_k$ and $\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} = 0\,(mod 2\pi)$, and where $W_{-m}, \ldots, W_0, \ldots, W_m$ are complex random measures with the following properties : W_0 is a spectral measure of a standard Gaussian white noise i.e. W_0 is a Gaussian random measure such that
i) For every interval Δ,

$$W_0(\Delta) = \overline{W_0(-\Delta)} \tag{1.4.4}$$

$$\mathbb{E}|W_0(\Delta)|^2 = \frac{1}{2\pi}|\Delta|.$$

ii) For every positive interval Δ, $Re\,W_0(\Delta)$ and $Im\,W_0(\Delta)$ are zero–mean i.i.d. variables.
iii) For every disjoint intervals $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, $W_0(\Delta_1), \ldots, W_0(\Delta_n)$ are independent.
The others measures $W_{\pm 1}, \ldots, W_{\pm M}$ have the same properties that W_0 except (1.4.4). Instead, they satisfy

$$W_{-j}(\Delta) = \overline{W_j(-\Delta)}, \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Finally the random measures $W_0, W_1, \ldots, W_m$ are independent.

Notice that, contrarily to the setting of *regular* long-memory, the limit process in (1.4.3) is not necessarily dermined by only the first polynomial in the Hermite expansion of H. We must consider the polynomials H_k realizing $\gamma_k = \gamma$. Let us remark firstly the basic role played by the frequencies $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k}$ such that $\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_k} = 0 \mod 2\pi$. The reason of their importance shall be explained in Proposition 1.4.1 below. Roughly speaking, the terms involving the other frequencies asymptotically vanish. Notice that among these sets $(\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k})$, there are sets of the form $(0, \ldots, 0)$, $(\lambda_1, -\lambda_1, 0, \ldots, 0)$, $(\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2, 0, \ldots, 0)$, etc.
This leads to interesting conclusions.

Concusion 1. Suppose that the covariance (1.2.2) is regularly varying at infinity, that is

$$\alpha_0 < \alpha_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Then, $\alpha_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} > k\alpha_0$ for all k, so that $\gamma = \gamma\tau = \tau\alpha_0$, where τ is the Hermite rank of H. Hence, as $r(n) = a_0 n^{-\alpha_0}(1 + o(1))$, condition $\gamma < 1$ is exactly (3.5). This means that condition $\gamma < 1$ extends to the *seasonal* situation the condition of long-memory (3.5).

Concusion 2. Let us now investigate the simple case $J_1 J_2 \neq 0$, (the hermite rank of H is 1 and the second coefficient does not vanish). In this case there are only two possible values for γ, according to the position of α_0. Let α be the parameter defined in (1.2.1). It is easy to check that

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_1 = \alpha_0 \quad & \text{if} \quad \alpha_0 < 2\alpha \\ \gamma = \gamma_2 = 2\alpha \quad & \text{if} \quad \alpha_0 > 2\alpha \\ \gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 2\alpha \quad & \text{if} \quad \alpha_0 = 2\alpha. \end{aligned}$$

As for the set of integers $E = \{k | \gamma_k = \gamma\}$, it is reduced to one single element, respectively $E = \{1\}$ and $E = \{2\}$, in the two first cases. In the situation where $\alpha_0 = 2\alpha$, $E = \{1, 2\}$. This explains the three forms taken by the limiting process in Theorem 1.4.1. Of course, it also proves that the finite dimensional distributions of $d_N^{-1}[Nt]\big(F_{[Nt]}(x) - F(x)\big)$ and those of $J_1(x)X_{N,1}(t) + (J_2(x)/2)X_{N,2}(t)$ are the same.

Concusion 3. Let us consider the general case. The number of chaos appearing in the limit process (1.4.3) is exactly that of indices k such that $\gamma_k = \gamma$, The basic facts to explain this are firstly that $(\gamma_{2k})_k$ and $(\gamma_{2k+1})_k$ are increasing sequences, secondly that $\gamma_{2k} = \min\{\alpha_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_{2k}}\} = 2k\alpha$ in (1.4.2), because it is always possible to satisfy the condition $\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_{2k}} = 0$ by taking pairwise opposite frequencies and thirdly that $\gamma_{2k} < \gamma_{2k+1}$ while it is not always true that $\gamma_{2k+1} < \gamma_{2k+2}$.
Then, the situation is different when the Hermite rank τ is even and when it is odd.
• The Hermite rank τ is even. the asymptotic behavior of $Y_N(t)$ only rely on the Hermite polynomial H_τ. In other words, the limit process in (1.4.3) is simply $(J_\tau/\tau!)Y^{t,\tau}$.
• The Hermte rank $\tau = 2p-1$. Denote by H_{2k} the first even polynomial if any, in the Hermite expansion of H (by convention, we take $2k = \infty$ when H is odd). Then, the limit process in (1.4.3) is given by

$$\begin{cases} \dfrac{J_{2p-1}}{(2p-1)!}Y^{t,2p-1} & \text{if } \gamma_{2p-1} < 2k\alpha \\ \dfrac{J_{2k}}{(2k)!}Y^{t,2k} & \text{if } \gamma_{2p-1} > 2k\alpha \\ \dfrac{J_{2p-1}}{(2p-1)!}Y^{t,2p-1} + \dfrac{J_{2k}}{(2k)!}Y^{t,2k} & \text{if } \gamma_{2p-1} = 2k\alpha. \end{cases}$$

This makes clear the fact that *the number of chaos appearing in the limit process (1.4.3) is never greater than 2.*

1.4.2 Proof of Theorem 1.4.1

Our situation is close to that of Theorem 1.2.1 of Giraitis [25]. However our setting is slightly different : spectral densities of the form (1.1.3) can also be written as

$$g(\lambda) = \sum_{j=-m}^{m} s_j L_j\Big(\frac{1}{\lambda - \lambda_j}\Big)|\lambda - \lambda_j|^{\alpha_j - 1},$$

where

$$s_j = s_{-j} = h(\lambda_j)\prod_{i \neq j}|\lambda_i - \lambda_j|^{\alpha_i - 1}, \quad \forall j = 0, \ldots, m,$$

and $L_j(x) \to 1$ as x goes to infinity.
The main difficulty is (as in Giraitis [25]) to prove the theorem when H is an Hermite polynomial.

Main step, H is an Hermite polynomial

We show that

$$d_N^{-1}\sum_{j=1}^{[Nt]} H_k(X_j) \xrightarrow{\mathcal{D}} Y^{t,k}. \tag{1.4.5}$$

Denoting by $\overset{\mathcal{D}}{=}$ the equality in law, we can write

$$H_k(X_j) \overset{\mathcal{D}}{=} \int_{[-\pi,\pi]^k} e^{ij(x_1+\ldots+x_k)}\big(g(x_1)\cdots g(x_k)\big)^{\frac{1}{2}} Z(dx_1)\cdots Z(dx_k),$$

where Z is the spectral measure of a standard Gaussian white noise.
After the change of variables $x_i = x_i' N^{-1}$, $i = 1,\ldots,k$, we can write

$$\begin{aligned} Y_{N,k}(t) &= d_N^{-1}\sum_{j=1}^{[Nt]} H_k(X_j) \\ &= \frac{1}{d_N N^{k/2}}\int_{[-\pi N,\pi N]^k} \sum_{j=0}^{[Nt]} e^{ij\frac{(x_1+\ldots+x_k)}{N}} \prod_{i=1}^{k} g\Big(\frac{x_i}{N}\Big)^{\frac{1}{2}} Z(dx_i). \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Split the interval $[-\pi N, \pi N]$ into a sequence of disjoint intervals

$$\begin{aligned} A_k &= \big[\frac{\lambda_{k-1}+\lambda_k}{2}N, \frac{\lambda_k+\lambda_{k+1}}{2}N\big), \quad k=-m+1,\ldots,m-1, \\ A_{-m} &= \big[-\pi N, \frac{\lambda_{-m}+\lambda_{-m+1}}{2}N\big), \quad A_m = \big[\frac{\lambda_{M-1}+\lambda_m}{2}N, \pi N\big]. \end{aligned}$$

Now put

$$W_j^N(dx) = 1\!\!\mathrm{I}_{A_j-\lambda_j N}(x)Z(dx) + 1\!\!\mathrm{I}_{\mathbb{R}\setminus A_j-\lambda_j N}(x)Z_j(dx),$$

where $Z_{-m},\ldots,Z_m$ are spectral Gaussian measures as in the Theorem 1.4.1 and independent of Z. It is easy to check that $W_{-m}^N,\ldots,W_m^N$ have the same properties as $W_{-m},\ldots,W_m$ and that

$$1\!\!\mathrm{I}_{A_j}(x)Z(dx) = 1\!\!\mathrm{I}_{A_j}(x)W_j^N(d(x-\lambda_j N)).$$

From this equality we can write

$$1\!\!\mathrm{I}_{[-\pi N,\pi N]}(x)Z(dx) = \sum_{j=-m}^{m} 1\!\!\mathrm{I}_{A_j}(x)W_j^N(d(x-\lambda_j N)).$$

Put $A_j' = A_j - \lambda_j N, \quad j=-m,\ldots,m$. Then we can write (1.4.6) under the form

$$\begin{aligned} Y_{N,k}(t) &= \sum \frac{1}{d_N N^{k/2}}\int_{\mathbb{R}^k} \sum_{j=1}^{[Nt]} e^{ij\frac{x_1+\ldots+x_k}{N}} \prod_{i=1}^{k} g\Big(\frac{x_i}{N}\Big)^{1/2} 1\!\!\mathrm{I}_{A_{j_i}}(x_i)W_{j_i}^N(d(x_i-\lambda_{j_i}N)) \quad (1.4.7) \\ &= \sum \frac{1}{d_N N^{k/2}}\int_{\mathbb{R}^k} \sum_{j=1}^{[Nt]} e^{ij\left(\frac{x_1+\ldots+x_k}{N}+\lambda_{j_1}+\ldots+\lambda_{j_k}\right)} \prod_{i=1}^{k} g\Big(\frac{x_i}{N}+\lambda_{j_i}\Big)^{1/2} 1\!\!\mathrm{I}_{A_{j_i}'}(x_i)W_{j_i}^N(dx_i), \end{aligned}$$

where $\sum$ is over all $(j_1,\ldots,j_k)\in\{-m,\ldots,m\}^k$.
We first recall a useful convergence lemma about finite sums of Ito–Wiener integrals.
We omit the proof of this lemma, which is a particular case of Lemma 1.4.1 proved below.

Lemma 1.4.1 (See Giraitis [25], Proposition 1). *Let $W_{-m}, \ldots, W_m$ be a collection of Gaussian measures as in Theorem 1.4.1 and $W_{-m}^N, \ldots, W_m^N$ some sequences of such measures.*
For every $j_1, \ldots, j_k \in \{-m, \ldots, m\}$ let $g^N_{j_1,\ldots,j_k}$, $N \geq 1$, be a sequence of functions converging in $L^2(\mathbb{R}^k)$ to $g_{j_1,\ldots,j_k}$. Then, as N tends to infinity

$$\int_{\mathbb{R}^k} \sum g^N_{j_1,\ldots,j_k}(x_1,\ldots,x_k) \prod_{i=1}^k W^N_{j_i}(dx_i) \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^k} \sum g_{j_1,\ldots,j_k}(x_1,\ldots,x_k) \prod_{i=1}^k W_{j_i}(dx_i),$$

where the sums are over all $(j_1,\ldots,j_k) \in (\{-m,\ldots,m\})^k$.

In the sequel we shall take

$$\begin{aligned} g^N_{j_1,\ldots,j_k}(x_1,\ldots,x_k) &= \\ &= \frac{1}{d_N N^{k/2}} \sum_{j=1}^{[Nt]} e^{ij\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{N} + \lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k}\right)} \prod_{i=1}^k g\left(\frac{x_i}{N} + \lambda_{j_i}\right)^{1/2} \mathbb{1}_{A'_{j_i}}(x_i). \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

According to Lemma 1.4.1, in order to prove (1.4.5) for every fixed t, it suffices to prove the following Proposition, in which $\|.\|$ means the norm in $L^2(\mathbb{R}^k)$.

Proposition 1.4.1
1) *If $\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} \neq 0\,(mod\,2\pi)$ then for any normalization $d_N = N^\delta, \delta > 1/2$,*

$$\|g^N_{j_1,\ldots,j_k}\| \to 0 \quad \text{as } N \to \infty.$$

2) *When $\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} = 0(mod\,2\pi)$, then*

$$\|g^N_{j_1,\ldots,j_k} - g_{j_1,\ldots,j_k}\| \to 0 \qquad \text{as } N \to \infty,$$

where

$$g_{j_1,\ldots,j_k}(x_1,\ldots,x_k) = \begin{cases} \frac{e^{it(x_1+\ldots+x_k)}-1}{i(x_1+\ldots+x_k)} \prod_{i=1}^k s_{j_i}^{1/2} |x_i|^{(\alpha_{j_i}-1)/2}, & \text{if } \alpha_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_k} = \gamma_k, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof of 1) : We can write

$$g(xN^{-1} + \lambda_j) = s_j N^{1-\alpha_j} |x|^{\alpha_j - 1} L_j(Nx^{-1}), \tag{1.4.9}$$

where

$$s_j = h(\lambda_j) \prod_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|^{\alpha_i - 1}, \quad L_j(u) = \frac{h(\lambda_j + u^{-1})}{h(\lambda_j)} \prod_{i \neq j} \left| 1 + \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_i)u} \right|^{\alpha_i - 1}.$$

It follows that

$$|g^N_{j_1,\dots,j_k}(x_1,\dots,x_k)|^2 =$$
$$= \frac{s_{j_1}\cdots s_{j_k}}{N^{2\delta+\alpha_{j_1}+\ldots+\alpha_{j_k}}}\Big|\sum_{j=1}^{[Nt]} e^{ij\left(\frac{x_1+\ldots+x_k}{N}+\lambda\right)}\Big|^2 \prod_{i=1}^{k} |x_i|^{\alpha_{j_i}-1}\mathbb{I}_{A'_{j_i}}(x_i)L_{j_i}(Nx_i^{-1}),$$

where $\lambda = \lambda_{j_1}+\ldots+\lambda_{j_k}$.
Put

$$Q_N = \frac{1}{N^d}\int \Big|\sum_{j=1}^{[Nt]} e^{ij\left(\frac{x_1+\ldots+x_k}{N}+\lambda\right)}\Big|^2 \prod_{i=1}^{k} |x_i|^{\alpha_{j_i}-1}\mathbb{I}_{A'_{j_i}}(x_i)dx_i,$$

where $d = 2\delta+\alpha_{j_1}+\ldots+\alpha_{j_k}$. It is easy to see that for $i=1,\dots,k$,

$$\mathbb{I}_{A'_{j_i}}(x)L_{j_i}(Nx^{-1})$$

is bounded, uniformly with respect to x and N. Hence in order to show that $\|g^N_{j_1,\dots,j_k}\|$ tends to 0 as N goes to ∞, it suffices to prove that

$$Q_N \to 0, \quad N\to\infty. \tag{1.4.10}$$

Using the inequality

$$|e^{iu}-1| \geq \frac{2}{\pi}|u-2k\pi|, \quad \text{for } |u-2k\pi|\leq \pi,$$

we get for $|\frac{y}{N}| \leq (k+1)\pi$

$$\Big|\sum_{j=0}^{N-1} e^{ij\frac{y}{N}}\Big|^2 = \Big|\frac{e^{iy}-1}{e^{i\frac{y}{N}-1}}\Big|^2 \leq \tag{1.4.11}$$
$$\leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sum_{j=-(k+1)}^{k+1}\Big|\frac{e^{iy}-1}{\frac{y}{N}-2\pi j}\Big|^2 \leq 5\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 N^2 \sum_{j=-(k+1)}^{k+1}\frac{1}{1+(y-2\pi jN)^2}.$$

The last estimate follows from the inequality

$$\Big|\frac{e^{iy}-1}{y}\Big|^2 \leq \frac{5}{1+y^2}.$$

It is easy to check that, if $x_i\in A'_{j_i}, \forall i=1,\dots,k$, then

$$\left|\frac{x_1+\ldots+x_k}{N}+\lambda\right| \leq (k+1)\pi.$$

This yields

$$Q_N \leq$$
$$5\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 N^{2-d}\sum_{j=-(k+1)}^{k+1}\int_{\mathbb{R}^k}\left(1+|x_1+\ldots+x_k+(\lambda-2\pi j)N|^2\right)^{-1}\prod_{i=1}^{k}|x_i|^{\alpha_{j_i}-1}dx_i. \tag{1.4.12}$$

Now, $\delta > 1/2$ implies $d > 1 + \alpha_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_k}$.
In the case where $\alpha_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_k} < 1$, the convergence of Q_N to zero then follows from Lemma 1.4.2, and from the inequality (1.4.12).

Lemma 1.4.2 (See Giraitis [25], Lemma 3).
Let $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ be non negative real numbers such that $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k < 1$. Put

$$J(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \int_{\mathbb{R}^k} \left(1 + |x_1 + \ldots + x_k + aN|^2\right)^{-1} |x_1|^{\alpha_1 - 1} \cdots |x_k|^{\alpha_k - 1} dx_1 \cdots dx_k.$$

Then $J(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) < \infty$, and for $|a| > 0$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad J(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = o\Big(N^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \varepsilon - 1}\Big), \quad \textit{as } N \to \infty.$$

The case $\alpha_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_k} \geq 1$ can be reduced to the previous one by the inequality

$$N^{-\alpha'} |x|^{\alpha - 1} \mathbb{1}_{A'_j}(x) = |xN^{-1}|^{\alpha'} |x|^{\alpha - \alpha' - 1} \mathbb{1}_{A'_j}(x) \leq \pi^{\alpha'} |x|^{\alpha - \alpha' - 1}, \quad 0 < \alpha' < \alpha.$$

In fact, we can chose $\alpha'_{j_1}, \ldots, \alpha'_{j_k}$ sufficiently close to $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_k}$ and apply the previous lemma with $\alpha_{j_1} - \alpha'_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_k} - \alpha'_{j_k}$. Hence (1.4.10) is completely proved.
Proof of 2) : Assume that $\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_k} = 0\,(mod\, 2\pi)$. We have, from (1.4.8) and (1.4.9)

$$g^N_{j_1,\ldots,j_k}(x_1, \ldots, x_k) = \\ N^{-(\alpha_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_k} - \gamma)/2} K_N(x_1 + \cdots + x_k) \prod_{i=1}^{k} s_{j_i}^{1/2} |x_i|^{(\alpha_{j_i} - 1)/2} \big(L_{j_i}(x_i^{-1} N)\big)^{1/2} \mathbb{1}_{A'_{j_i}}(x_i),$$

where

$$K_N(y) = N^{-1} \sum_{j=1}^{[Nt]} e^{ijyN^{-1}}.$$

Tow cases are then possible

$$\begin{aligned} &a)\ \alpha_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} > \gamma, \ \text{ or} \\ &b)\ \alpha_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} = \gamma. \end{aligned}$$

In the case a), from Lemma 1.4.2, we obtain in the same way as in the proof of 1), that $\|g^N_{j_1,\ldots,j_k}\|$ tends to 0 as N goes to infinity.
In the case b), since

$$K_N(y) \to \frac{e^{ity} - 1}{iy}, \quad N \to \infty,$$

one has

$$\|g^N_{j_1,\ldots,j_k} - g_{j_1,\ldots,j_k}\| \to 0, \quad N \to \infty.$$

So we have proved that, for fixed t, $Y_{N,k}(t) \Longrightarrow Y^{t,k}$, as $N \to \infty$.
The proof of the convergence

$$\sum_{j=1}^{n} a_j Y_{N,k}(t_j) \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j Y^{t_j,k}, \quad \text{as } N \to \infty$$

in the case $n > 1$, is exactly the same. This completes the proof of (1.4.5) and hence the Theorem 1.4.1 is proved for $H = H_k$.

End of the proof of Theorem 1.4.1

Suppose now that H has the general form (1.4.1).
From (1.2.2), it follows that, $r(n)$ being the covariance function of (X_n),

$$\sum_{j=1}^{\infty} |r(j)|^{k_0} < \infty,$$

for some k_0. Hence with

$$Y_{N,k}(t) = d_N^{-1} \sum_{j=1}^{[Nt]} H_k(X_j),$$

we have as N tends to infinity,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big(\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{J_k}{k!} Y_{N,k}(t) \Big)^2 &= d_N^{-2} \sum_{k,k' \geq k_0} \frac{J_k}{k!} \frac{J'_k}{k'!} \sum_{i,j=1}^{[Nt]} \mathbb{E}\big(H_k(X_i) H_{k'}(X_j) \big) \\ &= d_N^{-2} \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{J_k^2}{k!} \sum_{i,j=1}^{[Nt]} r^k(i-j) = O\big(d_N^{-2} N\big) \to 0. \end{aligned}$$

So, in fact what is really needed for the end of the proof of Theorem 1.4.1 is that the convergence also holds when H is a linear combination of Hermite polynomials. This can be obtained by the following lemma generalizing Lemma 1.4.1.

Lemma 1.4.3 *For all $j_1, \ldots, j_k \in \{-m, \ldots, m\}$, let $g^N_{j_1}, g^N_{j_1,j_2}, \ldots, g^N_{j_1,\ldots,j_k}$ be sequences of functions respectively converging in $L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}^2), \ldots, L^2(\mathbb{R}^k)$ to $g_{j_1}, g_{j_1,j_2}, \ldots, g_{j_1,\ldots,j_k}$. Then as N tends to infinity,*

$$S^N = \int \sum_{j_1} g^N_{j_1}(x_1) W^N_{j_1}(dx_1) + \cdots + \int \sum_{j_1,\ldots,j_k} g^N_{j_1,\ldots,j_k}(x_1, \ldots, x_k) W^N_{j_1}(dx_1) \cdots W^N_{j_k}(dx_k)$$

converges to

$$S = \int \sum_{j_1} g_{j_1}(x_1) W_{j_1}(dx_1) + \cdots + \int \sum_{j_1,\ldots,j_k} g_{j_1,\ldots,j_k}(x_1, \ldots, x_k) W_{j_1}(dx_1) \cdots W_{j_k}(dx_k),$$

where the sums are over $j_1 \in \{-m, \ldots, m\}, \ldots, (j_1, \ldots, j_k) \in \{-m, \ldots, m\}^k$.

Proof : We have for every $\ell = 1, \ldots, k$ and for every symmetric function $h \in L^2(\mathbb{R}^\ell)$,

$$\mathrm{Var}\left(\int_{\mathbb{R}^\ell} h(x_1, \ldots, x_\ell) W_{j_1}^N(dx_1) \cdots W_{j_\ell}^N(dx_\ell)\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\ell!}\|h\|,$$

and

$$\mathrm{Var}\left(\int_{\mathbb{R}^\ell} h(x_1, \ldots, x_\ell) W_{j_1}(dx_1) \cdots W_{j_\ell}(dx_\ell)\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\ell!}\|h\|.$$

Hence for $\varepsilon > 0$ we can approximate $g_{j_1}^N, \ldots, g_{j_1,\ldots,j_k}^N$, and $g_{j_1}, \ldots, g_{j_1,\ldots,j_k}$ by step functions $g_{j_1}^*, \ldots, g_{j_1,\ldots,j_k}^*$, such that

$$\Big(\mathrm{Var}\big(S^N - S_\Delta^N\big)\Big)^{1/2} \le \sqrt{k!}\Big(\sum_{j_1} \|g_{j_1}^N - g_{j_1}^*\| + \cdots + \sum_{j_1\ldots,j_k} \|g_{j_1\ldots,j_k}^N - g_{j_1,\ldots,j_k}^*\|\Big) \le \varepsilon,$$

and

$$\Big(\mathrm{Var}\big(S_\Delta - S\big)\Big)^{1/2} \le \sqrt{k!}\Big(\sum_{j_1} \|g_{j_1} - g_{j_1}^*\| + \cdots + \sum_{j_1\ldots,j_k} \|g_{j_1\ldots,j_k} - g_{j_1,\ldots,j_k}^*\|\Big) \le \varepsilon.$$

In these formulae

$$S_\Delta^N = \int \sum_{j_1} g_{j_1}^*(x_1) W_{j_1}^N(dx_1) + \cdots + \int \sum_{j_1,\ldots,j_k} g_{j_1,\ldots,j_k}^*(x_1, \ldots, x_k) W_{j_1}^N(dx_1) \cdots W_{j_k}^N(dx_k)$$

and

$$S_\Delta = \int \sum_{j_1} g_{j_1}^*(x_1) W_{j_1}(dx_1) + \cdots + \int \sum_{j_1,\ldots,j_k} g_{j_1,\ldots,j_k}^*(x_1, \ldots, x_k) W_{j_1}(dx_1) \cdots W_{j_k}(dx_k).$$

Now, S_Δ^N is a polynomial function of a finite number of variables $W_j^N(\Delta_{i,j})$ for some $(\Delta_{i,j})$, and in the same way, S_Δ is the same polynomial, but with $Z_j^N(\Delta_{i,j})$ replaced by $W_j(\Delta_{i,j})$. As $W_j^N(\Delta_{i,j})$ and $W_j(\Delta_{i,j})$ have the joint distribution then $S_\Delta^N \stackrel{\mathcal{D}}{=} S_\Delta$. So, we obtain that $S^N \Longrightarrow S$.

1.4.3 Proof of Proposition 1.2.1

From Theorem 1.4.1, we have (1.2.11) with $B(t)$ and $R(t)$ replaced by $Y^{t,1}$ and $Y^{t,2}$ given by

$$Y^{t,1} = \sqrt{s_0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx} - 1}{ix} |x|^{(\alpha_0 - 1)/2} W_0(dx),$$

$$Y^{t,2} = \sum_{j \in J} s_j \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{it(x+y)} - 1}{i(x+y)} |x|^{(\alpha-1)/2} |y|^{(\alpha-1)/2} W_{-j}(dx) W_j(dy),$$

where J is defined in (1.2.1).
These two processes are independent when $\alpha_0 = 2\alpha$, since in this case W_0 does not appear in the construction of $Y^{t,2}$.
It remains to prove that $Y^{t,1}$ and $Y^{t,2}$ have respectively the same distribution as $B(t)$ and $R(t)$ of Theorem 1.2.1.
It is clear that, with C defined in (1.2.4), $\sqrt{C}Y^{t,1}$ is a fractional Brownian motion, with parameter $1-\alpha_0/2$. Let us see why $Y^{t,2}$ has the same distribution as $R(t)$.
For $j = 1, \ldots, m$ and for any interval Δ, put

$$W_j^{(1)}(\Delta) = \frac{W_j(\Delta) + W_{-j}(\Delta)}{\sqrt{2}}, \quad W_j^{(2)}(\Delta) = i\frac{W_j(\Delta) - W_{-j}(\Delta)}{\sqrt{2}}.$$

It is easy to see that $W_j^{(1)}$ and $W_j^{(2)}$ are the random spectral measures of independent Gaussian white noises and that

$$W_j(\Delta)W_{-j}(\Delta') + W_j(\Delta')W_{-j}(\Delta) = W_j^{(1)}(\Delta)W_j^{(1)}(\Delta') + W_j^{(2)}(\Delta)W_j^{(2)}(\Delta'). \quad (1.4.13)$$

Then, define for $i = 1, 2$,

$$R_j^{(i)}(t) = D^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{it(x+y)}-1}{i(x+y)}|x|^{(\alpha_j-1)/2}|y|^{(\alpha_j-1)/2}W_j^{(i)}(dx)W_j^{(i)}(dy),$$

and

$$R_0^{(1)}(t) = R_0^{(2)}(t) = D^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{it(x+y)}-1}{i(x+y)}|x|^{(\alpha_0-1)/2}|y|^{(\alpha_0-1)/2}W_0(dx)W_0(dy).$$

where D is given in (1.2.4).
It is clear, from representation (2.15), that $R_j^{(i)}(t),\ i = 1, 2,\ j \in J$ are Rosenblatt processes with the same parameter $1-\alpha$. Finally, from (1.2.3) and (1.4.13),

$$Y^{t,2} = D\sum_{j\in J} c_j\Big(R_j^{(1)}(t) + R_j^{(2)}(t)\Big) = R(t).$$

This completes the proof of the Proposition 1.2.1□

1.4.4 Proof of Lemma 1.2.1

Let $T = \big\{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t\tau = 1\big\}$ be a subdivision of $[0,1]$. For x in $D[0,1]$, let $A_T x$ denote its piecewise linear approximation built from T. According to Pollard ([59], Theorem 3, p. 92), relative compacity of X_n and of Y_n in the space $(D[0,1], \mathcal{E})$ is equivalent to the fact that, for every $\varepsilon > 0$ and $\delta > 0$ there exist subdivisions T and S such that

$$\limsup_{n\to\infty} P\Big\{\big\|A_T X_n - X_n\big\| > \delta\Big\} \le \varepsilon, \quad \limsup_{n\to\infty} P\Big\{\big\|A_S Y_n - Y_n\big\| > \delta\Big\} \le \varepsilon. \quad (1.4.14)$$

Since the sample paths of X and Y are continuous, there exist subdivisions $T^{'}$ and $S^{'}$ such that

$$P\Big\{\big\|A_{T'}X - X\big\| > \delta\Big\} \le \varepsilon, \quad P\Big\{\big\|A_{S'}Y - Y\big\| > \delta\Big\} \le \varepsilon. \tag{1.4.15}$$

Without loss of generality, we can suppose that all these subdivisions are the same.
We have to prove that, for any bounded uniformly continuous measurable function f on $D[0,1] \times D[0,1]$,

$$\mathbb{E}\big(f(X_n, Y_n)\big) \longrightarrow \mathbb{E}\big(f(X,Y)\big), \quad \text{as } n \to \infty.$$

Since $A_T x$ depends on x continuously through $x(t_0), \dots, x(t\tau)$, we can write

$$f \circ (A_T, A_T) = g \circ (\pi_T, \pi_T)$$

where g is a bounded continuous function on $\mathbb{R}^{2m}$ and π_T is the projection induced by T from $D[0,1]$ on $\mathbb{R}^m$.
As f is uniformly continuous, for $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that for every x, y, x', y' in $D[0,1]$,

$$\|(x,y) - (x',y')\| \le \delta \Longrightarrow |f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon. \tag{1.4.16}$$

Using (1.4.14), (1.4.15), (1.4.16) and the fact that for any Z, $Z^{'}$ in $D[0,1]$,

$$\Big\{\|(Z, Z^{'})\| > \delta\Big\} = \Big\{\max\{\|Z\|, \|Z^{'}\|\} > \delta\Big\} = \Big\{\|Z\| > \delta\Big\} \bigcup \Big\{\|Z^{'}\| > \delta\Big\},$$

we obtain that

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{E}\big(f(X_n, Y_n)\big) - \mathbb{E}\big(f(X,Y)\big)| \\
&\quad \le \ \mathbb{E}|f(X_n,Y_n) - f(A_T X_n, A_T Y_n)| + |\mathbb{E}\big(f(A_T X_n, A_T Y_n)\big) - \mathbb{E}\big(f(A_T X, A_T Y)\big)| \\
&\qquad + \mathbb{E}|f(A_T X, A_T Y) - f(X,Y)| \\
&\quad \le \ \varepsilon + 2\|f\| P\Big\{\big\|(X_n, Y_n) - (A_T X_n, A_T Y_n)\big\| > \delta\Big\} \\
&\qquad + |\mathbb{E}\big(g(\pi_T X_n, \pi_T Y_n)\big) - \mathbb{E}\big(g(\pi_T X, \pi_T Y)\big)| \\
&\qquad + \varepsilon + 2\|f\| P\Big\{\big\|(X,Y) - (A_T X, A_T Y)\big\| > \delta\Big\} \\
&\quad \le \ 2\varepsilon(1 + 4\|f\|) + |\mathbb{E}\big(g(\pi_T X_n, \pi_T Y_n)\big) - \mathbb{E}\big(g(\pi_T X, \pi_T Y)\big)|.
\end{aligned}$$

This last term converges to 0 as $n \to \infty$ because the finite–dimensional distribution convergence of (X_n, Y_n) to $(X,Y)$$\square$

Chapitre 2

Processus linéaires et longue mémoire saisonnière

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des processus linéaires à longue mémoire saisonnière. Nous étudions plus particulièrement les problèmes de convergence de processus liés aux produits d'Appell. Les différents problèmes de convergence présentés ici ont déjà été étudiés, pour différents types de processus, en particulier les processus linéaires, dans un contexte de longue mémoire régulière, i.e. lorsque la suite des covariances tend vers 0 comme une fonction à variation régulière. Nous mettons ici en évidence les modifications induites par la présence de saisonnalité sur les résultats obtenus en longue mémoire régulière.

Les processus linéaires étudiés ici sont définis à partir d'une suite de variables i.i.d. et d'une fonction de transfert. Considérons un bruit blanc i.i.d. (ξ_s) centré de variance finie σ^2, et une fonction de transfert

$$G(z) = g(z) \prod_{j=-m}^{m} \left(1 - e^{i\lambda_j} z\right)^{(\alpha_j - 1)/2}, \quad m \geq 1, \tag{2.1.1}$$

où $g(z)$ est analytique à l'intérieur du disque unité, continue sur le cercle unité, sans zéros sur ce cercle, et où

$$0 < \alpha_j < 1, \quad \alpha_j = \alpha_{-j}, \quad \lambda_{-j} = -\lambda_j, \quad j = 0, \ldots, m, \text{ et}$$

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_m < \pi.$$

Dans la suite, nous verrons qu'il n'est pas nécessaire que $G(e^{i\lambda})$, soit non bornée en 0, c'est–à–dire que nous permettons à α_0 d'être supérieur ou égal à 1.

Il est clair que G admet, au voisinage de 0, le développement

$$G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b(k) z^k, \tag{2.1.2}$$

où $(b(k))$ est une suite dans $\ell^2(\mathbb{N})$. Nous pouvons construire un processus stationnaire centré, linéaire et causal, en posant pour chaque $n \geq 1$,

$$X_n = G(B)\xi_n = \sum_{j=-\infty}^{n} b(n-j)\xi_j \tag{2.1.3}$$

où B est l'opérateur retard, i.e. $B\xi_n = \xi_{n-1}$. Ce processus admet la fonction $(2\pi)^{-1}|G(e^{ix})|^2$ comme densité spectrale et sa variance est égale à

$$\mathrm{Var}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |G(e^{i\lambda})|^2 d\lambda. \tag{2.1.4}$$

De plus, les coefficients $b(s)$ peuvent s'exprimer comme les coefficients de Fourier de la fonction $G(e^{ix})$, i.e.

$$b(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-isx}G(e^{ix})dx, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{2.1.5}$$

Dans la suite nous étendons la définition des coefficients $b(s), s \geq 0$ à tous les entiers $s \in \mathbb{Z}$ en posant pour $s < 0$, $b(s) = 0$, ce qui est conforme à (2.1.5), car d'après (2.1.2), pour $s < 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-isx}G(e^{ix})dx = \sum_{k=0}^{+\infty} b(k)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-s)x}dx = 0. \tag{2.1.6}$$

Le processus X_n s'écrit alors

$$X_n = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} b(n-j)\xi_j. \tag{2.1.7}$$

D'après Giraitis et Leipus [28], les comportement asymptotiques de la fonction de covariance $r(n)$ de ce processus et des coefficients $(b(n))$ sont donnés par

$$r(n) = n^{-\alpha}\sum_{j\in J} a_j\big(\cos n\lambda_j + o(1)\big), \tag{2.1.8}$$

$$b(n) = n^{-(\alpha+1)/2}\sum_{j\in J} a_j\big(\cos n\lambda_j + o(1)\big), \tag{2.1.9}$$

où

$$\alpha = \min\{\alpha_j,\ j = 0,\dots,m\}, \quad J = \{j,\ \alpha_j = \alpha\}. \tag{2.1.10}$$

On remarque que le coefficient α est dans (0,1). La suite des covariances $r(n)$ est donc non sommable et le processus (X_n) a une longue mémoire qui, compte tenu des oscillations (2.1.8) et (2.1.9), est saisonnière.
Nous cherchons à étendre les résultats obtenus dans le chapitre précedent pour les processus gaussiens aux modèles linéaires de type (2.1.3), notamment lorsque la singularité en zéro n'est pas assez prononcée devant les autres (i.e. $\alpha_0 > 2\alpha$, où α est défini dans (2.1.10)). Le chapitre est organisé de la façon suivante : dans la section 2, nous établissons la convergence des produits d'Appell. Ce résultat permet d'obtenir la convergence des processus empiriques étudiés en section 3 et l'étude de l'estimation à noyau de la densité marginale dans la section 4. Les parties plus techniques des différentes démonstrations sont reléguées dans la section 5.

2.2 Sommes partielles de polynômes d'Appell

L'objet de cette section est de donner un théorème limite pour les sommes partielles de polynômes d'Appell pour des processus à longue mémoire saisonnière.
Pour τ variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_\tau$ de même loi, notons par $:Y_1 \cdots Y_\tau:$ le produit d'Appell de degré τ, défini comme étant le polynôme en τ variables qui vérifie les deux conditions suivantes

$$\mathbb{E} : Y_1 \cdots Y_\tau := 0,$$

et pour $i = 1, \ldots, \tau$,

$$\frac{\partial}{\partial Y_i} : Y_1 \cdots Y_\tau :=: Y_1 \cdots Y_{i-1} Y_{i+1} \cdots Y_\tau : .$$

On appelle habituellement polynôme d'Appell de degré τ et on note $A_\tau(Y)$, le produit d'Appell $:Y_1 \cdots Y_\tau:$ quand $Y_1 = \ldots = Y_\tau = Y$. Par exemple on a

$$\begin{aligned} A_1(Y) &= Y - \mathbb{E}Y \\ A_2(Y) &= Y^2 - 2Y\mathbb{E}Y + 2(\mathbb{E}Y)^2 - \mathbb{E}Y^2. \end{aligned}$$

Plus généralement, pour une variable réelle Y admettant des moments de tous ordres, l'écriture formelle d'un polynôme d'Appell est donnée par le développement suivant

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} A_k(Y) = \frac{e^{zY}}{\mathbb{E}e^{zY}}.$$

On retrouve ainsi les polynômes de Hermite lorsque Y suit la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$. Pour plus de détails sur les polynômes d'Appell, on peut se référer par exemple à Giraitis et Surgailis [31] et à Avram et Taqqu [4].
Le théorème qui suit donne la limite, au sens des lois fini–dimensionnelles, des sommes partielles renormalisées associées à un polynôme d'Appell A_τ.

Théorème 2.2.1 *Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ le processus défini par (2.1.3) et soit $\tau \geq 1$. Supposons que $\mathbb{E}X_1^{2\tau} < +\infty$. Soit A_τ le polynôme d'Appell de degré τ associé à X_1. Posons*

$$\gamma = \min\{\alpha_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_\tau},\ \textit{tels que}\ \lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_\tau} = 0 \mod 2\pi\},$$

$$h_j = g(e^{i\lambda_j}) \prod_{\ell \neq j} \left(1 - e^{i(\lambda_\ell - \lambda_j)}\right)^{(\alpha_\ell - 1)/2}, \tag{2.2.1}$$

et supposons que $\gamma < 1$, et soit $d_N = N^{1-\gamma/2}$.
Pour $t \in [0,1]$, et $N \in \mathbb{N}^*$, considérons

$$Y_N(t) = d_N^{-1} \sum_{j=1}^{[Nt]} A_\tau(X_j).$$

Alors

$$Y_N(t) \xrightarrow{\mathcal{D}} Y(t) \quad \textit{quand}\ N \to +\infty,$$

où $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ désigne la convergence des lois fini–dimensionnelles, et

$$Y(t) = (2\pi\sigma^2)^{\tau/2}{\sum}'(h_{j_1}\cdots h_{j_\tau})^{1/2}\int_{\mathbb{R}^\tau}\frac{e^{it(x_1+\ldots+x_\tau)}-1}{i(x_1+\ldots+x_\tau)}\prod_{\ell=1}^{\tau}|x_\ell|^{(\alpha_{j_\ell}-1)/2}W_{j_\ell}(dx_\ell), \quad (2.2.2)$$

formule dans laquelle, $\sum'$ est prise sur $(j_1,\ldots,j_\tau)\in\{-m,\ldots,m\}^\tau$ tels que $\alpha_{j_1}+\ldots+\alpha_{j_\tau}=\gamma$ et $\lambda_{j_1}+\ldots+\lambda_{j_\tau}=0 \mod 2\pi$.
Les mesures aléatoires gaussiennes $W_{-m},\ldots,W_0,\ldots,W_m$ apparaissant dans la représentation harmonique du processus limite (2.2.2) sont définies dans le Théorème 1.4.1.

Preuve du Théorème 2.2.1 : grâce à la multilinéarité du produit d'Appell, nous pouvons écrire, avec la convention $b(k)=0$ pour $k<0$, (voir (2.1.6) et (2.1.7)),

$$A_\tau(X_j) = \sum_{(s)_\tau} b(j-s_1)\cdots b(j-s_\tau) : \xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau} : \quad (2.2.3)$$

où, dans (2.2.3), la somme $\sum\limits_{(s)_\tau}$ est étendue à tous les indices $s_1,\ldots,s_\tau$ dans $\mathbb{Z}$.
Posons

$$K_N(u) = \sum_{j=1}^{N} e^{iju} = \begin{cases} e^{iu}\frac{e^{iNu}-1}{e^{iu}-1}, & \text{si } u\neq 0 \\ N, & \text{si } u=0. \end{cases}$$

et

$$H_{N,(s)_\tau}(x_1,\ldots,x_\tau) = e^{-i(s_1x_1+\ldots+s_\tau x_\tau)}K_N(x_1+\ldots+x_\tau)\prod_{\ell=1}^{\tau}G(e^{ix_\ell}).$$

D'après la représentation (2.1.5) des coefficients $b(s)$, nous avons

$$\begin{aligned} Y_N(t) &= d_N^{-1}\sum_{(s)_\tau}\left(\int_{[-\pi,\pi]^\tau} H_{[Nt],(s)_\tau}(x_1,\ldots,x_\tau)dx_1\cdots dx_\tau\right) : \xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau} : \\ &= d_N^{-1}\sum_{(s)_\tau}^{\neq}\left(\int_{[-\pi,\pi]^\tau} H_{[Nt],(s)_\tau}(x_1,\ldots,x_\tau)dx_1\cdots dx_\tau\right) : \xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau} : \quad (2.2.4) \\ &\quad + d_N^{-1}\sum_{(s)_\tau}^{=}\left(\int_{[-\pi,\pi]^\tau} H_{[Nt],(s)_\tau}(x_1,\ldots,x_\tau)dx_1\cdots dx_\tau\right) : \xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau} : (2.2.5) \end{aligned}$$

où $\sum\limits_{(s)_\tau}^{\neq}$ est étendue aux indices $s_1,\ldots,s_\tau$ qui sont tous distincts, et $\sum\limits_{(s)_\tau}^{=}$ est étendue aux indices $s_1,\ldots,s_\tau$ dont deux au moins sont égaux.
Les variables (ξ_j) étant indépendantes, nous avons d'après le lemme de factorisation d'Avram et Taqqu [4], lorsque $s_1,\ldots,s_\tau$ sont tous différents,

$$: \xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau} := \xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau}.$$

Les lemmes suivants donnent la convergence des sommes (2.2.4) et (2.2.5). La preuve du premier est donnée dans la section 2.5. La preuve du Lemme 2.2.2 est la même que celle du Théorème 2 (étape 3) d'Avram et Taqqu [4] : ces auteurs, bien que se plaçant dans l'hypothèse de longue mémoire régulière, n'utilisent en fait dans leur démonstration que la sommabilité de la suite $(b(s)^2)$. D'après (2.1.9) et parce que $\alpha > 0$, cette hypothèse est bien réalisée dans le cadre du Lemme 2.2.2. Donc la preuve de ce lemme sera omise.

Lemme 2.2.1 *Lorsque N tend vers l'infini on a*

$$d_N^{-1}\sum_{(s)_\tau}^{\neq}\left(\int_{[-\pi,\pi]^\tau} H_{[Nt],(s)_\tau}(x_1,\ldots,x_\tau)dx_1\cdots dx_\tau\right)\xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau} \xrightarrow{\mathcal{D}} Y(t)$$

où $Y(t)$ est défini par (2.2.2).

Lemme 2.2.2 *Lorsque N tend vers l'infini*

$$d_N^{-1}\sum_{(s)_\tau}^{=}\left(\int_{[-\pi,\pi]^\tau} H_{N,(s)_\tau}(x_1,\ldots,x_\tau)dx_1\cdots dx_\tau\right) : \xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau} : \xrightarrow{L^2} 0.$$

Ces deux lemmes montrent que, dans le comportement asymptotique de $Y_N(t)$, seul compte le terme (2.2.4), et que la limite trouvée est bien celle annoncée dans le Théorème 2.2.1.

2.3 Convergence du processus empirique

Nous nous intéressons ici au processus empirique centré et renormalisé. Nous nous plaçons dans le contexte où la singularité éventuelle en 0 est très peu marquée devant les autres, ce qui signifie qu'on permet au paramètre α_0 d'être supérieur ou égal à 1 et que le paramètre α est assez petit, i.e. $\alpha < (1 \wedge \alpha_0)/2$.

Théorème 2.3.1 *Considérons le processus (X_n) défini dans (2.1.3) et (2.1.1). Supposons que ξ_0 a un moment d'ordre 4 et que sa fonction de répartition est 5 fois différentiable avec des dérivées continues bornées et intégrables sur $\mathbb{R}$, et que $\alpha < (1 \wedge \alpha_0)/2$. Notons par F la fonction de répartition de X_1 et posons*

$$d_N = N^{1-\alpha}, \quad D = \frac{\sqrt{(2-2\alpha)(1-2\alpha)}}{4\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\pi/2)}.$$

Alors, lorsque N tend vers l'infini

$$d_N^{-1}[Nt]\big(F_{[Nt]}(x) - F(x)\big) \Longrightarrow \frac{F''(x)}{2}R(t), \tag{2.3.1}$$

où le processus $R(t)$ est défini par

$$R(t) = D^{-1}\sum_{j\in J} c_j\left(R_j^{(1)}(t) + R_j^{(2)}(t)\right), \tag{2.3.2}$$

avec $c_0 = h_0/2$ *et* $c_j = h_j$ *si* $j \neq 0$ *(*h_j *est défini par (2.2.1)), et où* $R_j^{(i)}(t)$*,* $i = 1, 2$ *et* $j \in J$ *sont des processus de Rosenblatt de paramètre* $1 - \alpha$*, indépendants, sauf pour* $j = 0$ *auquel cas* $R_0^{(1)}(t) = R_0^{(2)}(t)$*.*
La convergence (2.3.1) est entendue dans l'espace $D\big([0, 1] \times [-\infty, +\infty]\big)$ *muni de la métrique uniforme et de la tribu engendrée par les boules ouvertes.*

Preuve du Théorème 2.3.1 : dans ce qui suit, C désigne une constante qui peut changer d'une ligne à l'autre. La preuve du théorème se fait en deux étapes.
Étape 1. On établit un principe faible de réduction uniforme analogue à celui de Dehling et Taqqu ([15], Théorème 3.1). Posons pour tous entiers $k, r \geq 1$,

$$Y_{k,0} = k, \quad Y_{k,r} = \sum_{n=1}^{k} \sum_{(s)_r}^{\neq} b_{s_1}\xi_{n-s_1} \cdots b_{s_r}\xi_{n-s_r}, \tag{2.3.3}$$

et pour tout entier $p \geq 1$

$$S_{k,p}(x) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{I}_{\{X_j \leq x\}} - \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \frac{F^{(r)}(x)}{r!} Y_{k,r}. \tag{2.3.4}$$

Ainsi

$$S_{k,2}(x) = k\big(F_k(x) - F(x)\big) + F'(x)Y_{k,1} - \frac{F''(x)}{2} Y_{k,2}. \tag{2.3.5}$$

Le principe faible de réduction uniforme est le suivant : il existe des constantes $C, \kappa > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$, nous avons pour tout $N > 0$,

$$P\big\{d_N^{-1} \max_{n \leq N} \sup_{-\infty \leq x \leq \infty} |S_{n,2}(x)| > \varepsilon\big\} \leq CN^{-\kappa}\big(1 + \varepsilon^{-3}\big). \tag{2.3.6}$$

L'inégalité (2.3.6) montre, avec le Lemme 2.2.2, que la limite de

$$d_N^{-1}[Nt]\big(F_{[Nt]}(x) - F(x)\big)$$

est la même que celle de

$$d_N^{-1}\Big(-F'(x)\sum_{j=1}^{[Nt]} X_j + \frac{F''(x)}{2}\sum_{j=1}^{[Nt]}(X_j^2 - \mathbb{E}(X_1^2))\Big).$$

Cette limite sera obtenue dans l'étape 2 de la preuve.
Pour prouver (2.3.6) on établit d'abord qu'il existe $C, \rho > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in (0, 1]$, et pour tout $N > 0$, nous avons pour tout $n \leq N$,

$$P\big\{d_N^{-1} \max_{n \leq N} \sup_{-\infty \leq x \leq \infty} |S_{n,2}(x)| > \varepsilon\big\} \leq CN^{-\rho}\left(\frac{n}{N}\varepsilon^{-3} + \left(\frac{n}{N}\right)^{2-2\alpha}\right). \tag{2.3.7}$$

La preuve de (2.3.7) est très peu différente de celle du Théorème 2.1 de Ho et Hsing [38]. Elle fait l'objet de l'annexe 2. Essentiellement, cette preuve repose sur les hypothèses faites dans le Théorème 2.2.1 sur la loi de ξ_0, et sur les équivalences (lorsque N tend vers l'infini)

$$\mathrm{Var}(Y_{N,2}) \sim \mathrm{Var}\Big(\sum_{j=1}^{N}(X_j^2 - \mathbb{E}(X_1^2))\Big) \sim CN^{2-2\alpha}. \tag{2.3.8}$$

La première équivalence peut être vue par exemple, comme conséquence du Lemme 2.2.2 lorsque $\tau = 2$. Quant à la deuxième, nous savons d'après Giraitis et Surgailis ([26], Théorème 4) que pour un processus linéaire centré (X_n),

$$\mathrm{Var}\big(\sum_{j=1}^{N}(X_j^2 - \mathbb{E}(X_1^2))\big) = 2\sum_{t,s=1}^{N} r^2(t-s) + O(N)$$

et comme $\alpha < 1/2$, nous avons d'après (2.1.8) qui donne la forme de $r(n)$,

$$\mathrm{Var}\big(\sum_{j=1}^{N}(X_j^2 - \mathbb{E}(X_1^2))\big) \sim CN^{2-2\alpha}. \tag{2.3.9}$$

Pour terminer, Dehling et Taqqu ([15]) (p.1781–1782) ont montré que (2.3.6) découle de (2.3.7).

Étape 2. D'après Leipus et Viano [48] on a

$$\mathrm{Var}(Y_{N,1}) = \mathrm{Var}\Big(\sum_{j=1}^{N} X_j\Big) \sim CN^{2-\alpha_0}, \tag{2.3.10}$$

et comme $\alpha_0 > 2\alpha$, nous avons donc lorsque N tend vers l'infini

$$d_N^{-1}\sum_{j=1}^{N} X_j \xrightarrow{L^2} 0.$$

Pour obtenir la convergence (2.3.1) il suffit alors de montrer que lorsque N tend vers l'infini

$$d_N^{-1}\sum_{j=1}^{[Nt]}(X_j^2 - \mathbb{E}(X_1^2)) \xrightarrow{\mathcal{D}} R(t), \tag{2.3.11}$$

puisque (2.3.9) fait de cette dernière convergence une convergence dans $D[0,1]$ (d'après le Théorème 2.1 de Taqqu [68]). Puis comme F' et F'' sont bornées (cela est conséquence des conditions de régularité de la fonction de répartition de ξ_0, voir Ho et Hsing [38], Lemme 6.2), on obtient (2.3.1) via le théorème de représentation presque sûre de Skorohod et Dudley [59].

Le Théorème 2.2.1 assure la convergence (2.3.11). L'égalité en loi entre la limite lorsque $\tau = 2$ et la combinaison de variables de Rosenblatt indépendantes est déjà faite dans le premier chapitre (voir la sous section Fin de la preuve de la Proposition 1.2.1).

2.4 Applications

2.4.1 Problème de détection de rupture

La détection de rupture est l'une des applications immédiates de la convergence du processus empirique doublement indexé par x et t. Il s'agit de tester si un échantillon $X_1, \ldots, X_N$ provient d'une même loi, éventuellement inconnue, ou s'il y a rupture à un instant $[N\theta]+1$ appelé point de rupture. Ceci signifie que les variables $X_1, \ldots, X_{[N\theta]}$ proviennent de la même loi et que les variables $X_{[N\theta]+1}, \ldots, X_N$ proviennent d'une autre loi. Ce problème a été étudié par plusieurs auteurs notamment dans le cas de variables indépendantes. Dans une approche unifiée (aussi bien en courte mémoire qu'en longue mémoire régulière), Giraitis *et al* [29] ont étudié ce problème à partir du processus empirique doublement indexé dès lors que celui–ci, correctement normalisé, converge.

La procédure mise en oeuvre pour tester les ruptures est construite à partir des suites

$$F^*_{N-k} = \frac{1}{N-k} \sum_{j=k+1}^{N} \mathbb{I}_{\{X_j \leq x\}}.$$

En l'absence de rupture, les variables $X_1, \ldots, X_N$ ont même loi. Notons F la fonction de répartition de cette loi commune.
Lorsque F est connue, nous pouvons tester cette absence par la statistique

$$T_N = d_N^{-1} \sup_{t,\,x} |W^*_N(t,x)|,$$

avec

$$W^*_N(t,x) = \big(N - [tN]\big)\big(F^*_{N-[Nt]}(x) - F(x)\big).$$

En général F est inconnue, dans ce cas, nous considérons la statistique $\tilde{T}_N$ définie par

$$\tilde{T}_N = d_N^{-1} \sup_{t,\,x} |V_N(t,x)|,$$

avec

$$V_N(t,x) = \frac{[Nt](N-[Nt])}{N}\big(F_{[Nt]}(x) - F^*_{N-[Nt]}(x)\big).$$

Sous l'hypothèse nulle H_0, correspondant à l'absence de rupture, la région critique du test est de la forme $\{T_N > c_\alpha\}$ (ou $\{\tilde{T}_N > c_\alpha\}$) avec $P\{T_N > c_\alpha\} = \alpha$ (ou $P\{\tilde{T}_N > c_\alpha\} = \alpha$), α étant l'erreur de première espèce ou le risque de rejeter H_0 à tort.
Notons qu'à N fixé, la loi de T_N (ou de $\tilde{T}_N$) n'est pas connue. La proposition suivante donne les lois limites de T_N et de $\tilde{T}_N$ sous H_0.

Proposition 2.4.1 *Supposons que (X_n) vérifie les conditions du Théorème 2.3.1. Alors, s'il n'y a pas de rupture, on a pour tout $c > 0$*

$$\lim_{N\to\infty} P\{T_N > c\} = P\Big\{\sup_t \big|R(t)\big| > 2c\big(\sup_x \big|F''(x)\big|\big)^{-1}\Big\} \tag{2.4.1}$$

et

$$\lim_{N\to\infty} P\{\tilde{T}_N > c\} = P\Big\{\sup_t \big|R(t) - tR(1)\big| > 2c\big(\sup_x \big|F''(x)\big|\big)^{-1}\Big\}. \tag{2.4.2}$$

Preuve :
Preuve de (2.4.1) : on peut écrire

$$W_N^*(t,x) = N\big(F_N(x) - F(x)\big) - [Nt]\big(F_{[Nt]}(x) - F(x)\big).$$

Par conséquent, et en utilisant la convergence établie dans le Théorème 2.3.1,

$$d_N^{-1}[Nt]\big(F_{[Nt]}(x) - F(x)\big) \overset{D([0,1]\times\bar{\mathbb{R}})}{\Longrightarrow} \frac{F''(x)}{2}R(t),$$

nous avons d'après le théorème de l'application continue, lorsque N tend vers l'infini,

$$d_N^{-1}\sup_{t,\,x}|W_N^*(t,x)| \xrightarrow{d} \sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{|F''(x)|}{2}\sup_{t\in[0,1]}|R(1) - R(t)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{|F''(x)|}{2}\sup_{t\in[0,1]}|R(t)|$$

car $R(t)$ est à accroissements stationnaires. Ce qui montre (2.4.1).
Preuve de (2.4.2) : nous avons

$$\begin{aligned}
V_N(t,x) &= \\
&= \big(1 - \frac{[Nt]}{N}\big)[Nt]\big(F_{[Nt]}(x) - F(x)\big) - \frac{[Nt]}{N}(N - [Nt])\big(F^*_{N-[Nt]}(x) - F(x)\big) \\
&= \big(1 - \frac{[Nt]}{N}\big)[Nt]\big(F_{[Nt]}(x) - F(x)\big) \\
&\quad -\frac{[Nt]}{N}\Big(N\big(F_N(x) - F(x)\big) - [Nt]\big(F_{[Nt]}(x) - F(x))\big)\Big).
\end{aligned}$$

Les mêmes arguments de convergence et de continuité utilisés pour prouver (2.4.1) montrent alors que lorsque N tend vers l'infini,

$$d_N^{-1}\sup_{t,\,x}|V_N(t,x)| \xrightarrow{d} \sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{|F''(x)|}{2}\sup_{t\in[0,1]}|R(t) - tR(1)|,$$

ce qui montre (2.4.2).

2.4.2 Estimation de la densité marginale

Considérons l'estimateur à noyau $\hat{f}_N$ de la densité marginale f défini par

$$\hat{f}_N(x) = \frac{1}{Nh_N}\sum_{j=1}^{N}K\big(\frac{x - X_j}{h_N}\big), \tag{2.4.3}$$

où K est un noyau, que nous prenons continu à support compact, et h_N est la largeur de la fenêtre telle que $h_N \to 0$, $Nh_N \to +\infty$, lorsque N tend vers l'infini.
L'égalité

$$\hat{f}_N(x) - \mathbb{E}\hat{f}_N(x) = \frac{1}{h_N}\int_{\mathbb{R}}K\big(\frac{x-u}{h_N}\big)d\big(F_N(u) - F(u)\big) \tag{2.4.4}$$

montre que l'étude de $\hat{f}_N(x)$ est intimement liée à celle du processus empirique $F_N(x)$. Le processus $\hat{f}_N(x)$ est d'ailleurs appelé parfois densité empirique.
Hall et Hart [36] ont étudié la vitesse de convergence de $\hat{f}_N$ vers f au moyen de l'intégrale de l'erreur quadratique (MISE),

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\big(\hat{f}_N(x) - f(x)\big)^2 dx.$$

Ces auteurs ont établi l'équivalence suivante pour une large famille de processus linéaires contenant les processus linéaires à mémoire régulière,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\big(\hat{f}_N(x) - f(x)\big)^2 dx \sim \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_0\big(\hat{f}_N(x) - f(x)\big)^2 dx + \mathrm{Var}(\overline{X}_N) \int_{\mathbb{R}} f'(x)^2 dx \qquad (2.4.5)$$

où l'espérance $\mathbb{E}_0$ est calculée à partir d'un échantillon indépendant de f. En particulier, l'équivalence (2.4.5) montre qu'indépendamment du choix du noyau K et de la largeur h_N, le MISE ne peut pas tendre vers 0 plus vite que la variance de $\overline{X}_N$. En d'autres termes, la vitesse à laquelle la moyenne empirique tend vers 0 constitue une vitesse "plafond" pour tous les estimateurs à noyaux. En considérant l'analogue de la statistique de Kolmogorov–Smirnov pour les densités, i.e.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{f}_N(x) - f(x)|, \qquad (2.4.6)$$

Ho et Hsing [38] ont montré que pour des processus linéaires à longue mémoire régulière, cette vitesse peut être atteinte par la statistique (2.4.6). Renormalisée par cette vitesse, la statistique (2.4.6) converge vers

$$|Z| \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$$

où Z est une gaussienne standard.
Pour les processus à longue mémoire saisonnière, le processus empirique se comporte asymptotiquement comme $N^{-1}\sum_{j=1}^N (X_j^2 - \mathbb{E}(X_1^2))$, comme on l'a vu dans la preuve du Théorème 2.3.1. Il est donc raisonnable de penser que l'équivalence (2.4.5) n'est plus vraie dans ce cas. Cette question est à l'étude, nous ne la développons pas ici.
Nous démontrons simplement que la vitesse avec laquelle $N^{-1}\sum_{j=1}^N (X_j^2 - \mathbb{E}(X_1^2))$ converge vers 0 peut être atteinte par la statistique (2.4.6) pour des noyaux particuliers, et en choisissant bien la largeur h_N. Notons que, d'après (2.3.10) et (2.3.8), cette vitesse est plus petite que celle avec laquelle $\overline{X}_N$ converge vers 0. On se limite ici à une certaine classe de noyaux de Parzen. On dit qu'un noyau K est un noyau de Parzen d'ordre $s \geq 2$ si

$$\int_{\mathbb{R}} K(u)du = 1,$$

et si pour tout $1 \leq j \leq s-1$

$$\int_{\mathbb{R}} u^j K(u)du = 0,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} |u^s||K(u)|du < +\infty.$$

Proposition 2.4.2 *Supposons que les conditions du Théorème 2.3.1 sont satisfaites. Considérons un noyau de Parzen K d'ordre 4 à variation totale bornée. Soit*

$$h_N = N^{-\delta}, \quad \text{où } \frac{\alpha}{4} < \delta < \frac{\alpha}{2}.$$

Alors on a lorsque N tend vers l'infini

$$N^{\alpha} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{f}_N(x) - f(x)| \xrightarrow{d} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{f''(x)}{2}\right| |R(1)|, \tag{2.4.7}$$

où $\xrightarrow{d}$ désigne la convergence en loi. De plus,

$$N^{\alpha}(\hat{f}_N(x) - f(x)) \overset{C_b(\mathbb{R})}{\Longrightarrow} -\frac{f''(x)}{2} R(1), \tag{2.4.8}$$

où $\overset{C_b(\mathbb{R})}{\Longrightarrow}$ désigne la convergence en loi dans $C_b(\mathbb{R})$ espace des fonctions continues bornées.

Preuve Nous avons

$$\begin{aligned}
&\hat{f}_N(x) - f(x) = \hat{f}_N(x) - \mathbb{E}\hat{f}_N(x) + \mathbb{E}\hat{f}_N(x) - f(x)\\
&= \frac{1}{h_N}\int K(u) d\big(F_N(x - h_N u) - F(x - h_N u)\big) + \int \big(f(x - h_N u) - f(x)\big) K(u) du.
\end{aligned}$$

On remplace $F_N - F$ par son expression dans (2.3.5). On effectue une intégration par parties dans la première intégrale, et dans la deuxième, on applique la formule de Taylor–Lagrange. L'écart de $\hat{f}_N$ à f s'écrit alors, avec $|u^* - x| < |h_N u|$,

$$\begin{aligned}
\hat{f}_N(x) - f(x) &= \frac{-1}{Nh_N}\int S_{N,2}(x - h_N u) dK(u) + \frac{Y_{N,1}}{N}\int f'(x - h_N u) K(u) du\\
&\quad - \frac{Y_{N,2}}{N} f''(x) \int K(u) du + \frac{Y_{N,2}}{N} h_N \int f^{(3)}(u^*) u K(u) +\\
&\quad \int \Big(-h_N u f'(x) + \frac{h_N^2 u^2}{2} f''(x) - \frac{h_N^3 u^3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{h_N^4 u^4}{24} f^{(4)}(u^*)\Big) K(u) du\\
&= a_N(x) + b_N(x) + c_N(x) + d_N(x) + e_N(x).
\end{aligned}$$

Maintenant, une démonstration analogue à celle du Théorème 2.2 de Ho et Hsing [38] nous permet d'avoir pour $2\delta < \alpha$, lorsque N tend vers l'infini,

$$N^{\alpha+\delta-1} \sup_{x\in\mathbb{R}} |S_{N,2}(x)| \xrightarrow{p.s.} 0. \tag{2.4.9}$$

Par conséquent, lorsque N tend vers l'infini,

$$N^{\alpha} \sup_{x\in\mathbb{R}} |a_N(x)| \xrightarrow{P} 0, \tag{2.4.10}$$

où $\xrightarrow{P}$ signifie la convergence en probabilité.
Pour les suites $b_N(x)$, $d_N(x)$, $e_N(x)$, on obtient la convergence en probabilité (2.4.10) en

majorant les variances. Pour cela, on part des formules (2.3.10) et (2.3.8) qui donnent les variances de $Y_{N,1}$ et $Y_{N,2}$, et on utilise le fait que K est un noyau de Parzen d'ordre 4 et que toutes les dérivées de f jusqu'à l'ordre 4 existent et sont bornées. On obtient lorsque N tend vers l'infini,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(N^\alpha \sup_{x\in\mathbb{R}}|b_N(x)|) &\leq N^{2\alpha-2}\,\mathrm{Var}\Big(Y_{N,1}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|\int|K(u)|du\Big)\\
&= CN^{2\alpha-2}N^{2-\alpha_0} = CN^{2\alpha-\alpha_0} \to 0,\\
\mathrm{Var}(N^\alpha \sup_{x\in\mathbb{R}}|d_N(x)|) &\leq N^{2\alpha-2}\,\mathrm{Var}\Big(Y_{N,2}h_N\sup_{x\in\mathbb{R}}|f^{(3)}(x)|\int|uK(u)|du\Big)\\
&= CN^{2\alpha-2}N^{2-2\alpha}N^{-\delta} \to 0,
\end{aligned}$$

$$N^\alpha \sup_{x\in\mathbb{R}}|e_N(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}|f^{(4)}(x)|\frac{N^{\alpha-4\delta}}{24}\int u^4|K(u)|du = O(N^{\alpha-4\delta}) \to 0.$$

Par conséquent, lorsque N tend vers l'infini,

$$N^\alpha \sup_{x\in\mathbb{R}}|\hat{f}_N(x)-f(x)| \quad \text{et} \quad N^\alpha \sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)||\frac{Y_{N,2}}{N}| = N^\alpha \sup_{x\in\mathbb{R}}|c_N(x)|$$

ont même limite. D'après le Lemme 2.2.1, cette limite est

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\frac{f''(x)}{2}\Big||R(1)|.$$

Ce qui démontre (2.4.7). On remarque d'après (2.3.8) que la vitesse N^α donnée dans (2.4.7) est bien la vitesse de convergence de $N^{-1}\sum_{j=1}^N(X_j^2-\mathbb{E}(X_1^2))$.
Les convergences lorsque N tend vers l'infini

$$N^\alpha \sup_{x\in\mathbb{R}}\big(\hat{f}_N(x)-f(x)-(-\frac{f''(x)}{2}\frac{Y_{N,2}}{N})\big) \xrightarrow{P} 0$$

et

$$N^\alpha\frac{Y_{N,2}}{N} \xrightarrow{d} R(1)$$

montrent (2.4.8).
Remarques :
1. On a vu au cours de la démonstration que l'utilisation d'un noyau de Parzen permet de rendre négligeable l'effet du biais $\mathbb{E}\hat{f}_N(x)-f(x)$. Si K n'est pas un noyau de Parzen, la contribution de $e_N(x)$, c'est–à–dire du biais, n'est plus négligeable par rapport à celle de $b_N(x)$. Le résultat (2.4.7) n'est donc plus valable. En revanche, il reste valable pour tout noyau standard si $\hat{f}_N(x)-f(x)$ est remplacé par $\hat{f}_N(x)-\mathbb{E}\hat{f}_N(x)$.
2. Le résultat (2.4.7) de la Proposition 2.4.2 peut être utilisé par exemple pour tester si la densité marginale f est égale à une densité donnée f_0.
3. Il ne permet pas de construire des intervalles de confiance pour f, car f'' n'est pas connue. Comme le montre le corllaire suivant, nous pouvons remédier à ce problème en

considérant un noyau K deux fois dérivable, et en remplaçant f'' par son estimateur à noyau défini par

$$\hat{f}''_N(x) = \frac{1}{Nh_N^3} \sum_{j=1}^{N} K''\Big(\frac{x - X_j}{h_N}\Big).$$

Corollaire 2.4.1 *Sous les hypothèses de la Proposition 2.4.2 et si le noyau K est deux fois dérivable, à dérivée K'' continue, alors, nous avons pour tout intervalle $[a, b]$ sur lequel f'' ne s'annule pas,*

$$2N^{\alpha} \sup_{x\in[a,b]} \Big| \frac{\hat{f}_N(x) - f(x)}{\hat{f}''_N(x)} \Big| \xrightarrow{d} |R(1)|. \tag{2.4.11}$$

Autrement dit : lorsque N tend vers l'infini, on a pour tout $t > 0$

$$P\Big\{\hat{f}_N(x) - \frac{t\hat{f}''_N(x)}{2N^{\alpha}} \le f(x) \le \hat{f}_N(x) + \frac{t\hat{f}''_N(x)}{2N^{\alpha}},\ a \le x \le b\Big\} \to P\Big\{|R(1)| < t\Big\}.$$

Nous obtenons ainsi un "tube" de confiance de niveau t fixé pour la densité $f(x)$, valable pour chaque $x \in [a, b]$.

Preuve du Corollaire 2.4.1 : pour montrer (2.4.11), on remarque d'abord que l'application qui à chaque fonction g de $C_b(\mathbb{R})$ associe

$$\sup_{x\in[a,b]} \Big| \frac{g(x)}{f''(x)} \Big|$$

est continue. Il résulte donc de (2.4.8) que lorsque N tend vers l'infini,

$$2N^{\alpha} \sup_{x\in[a,b]} \Big| \frac{\hat{f}_N(x) - f(x)}{f''(x)} \Big| \xrightarrow{d} |R(1)|. \tag{2.4.12}$$

Ensuite, on étudie la différence

$$Y_N(x) := N^{\alpha}\Big(\frac{\hat{f}_N(x) - f(x)}{f''(x)} - \frac{\hat{f}_N(x) - f(x)}{\hat{f}''_N(x)}\Big)$$

et on montre que lorsque N tend vers l'infini,

$$\sup_{x\in[a,b]} |Y_N(x)| \xrightarrow{P} 0.$$

Pour cela, on écrit

$$|Y_N(x)| = N^{\alpha} \Big| \frac{\hat{f}_N(x) - f(x)}{f''(x)} \Big| \Big| \frac{\hat{f}''_N(x) - f''(x)}{\hat{f}''_N(x)} \Big|.$$

D'après (2.4.12), il suffit de montrer que lorsque N tend vers l'infini,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \Big| \frac{\hat{f}''_N(x) - f''(x)}{\hat{f}''_N(x)} \Big| \xrightarrow{P} 0. \tag{2.4.13}$$

Comme

$$\inf_{x \in [a,b]} |f''(x)| > 0,$$

(2.4.13) découlera de

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{f}_N''(x) - f''(x)| \xrightarrow{P} 0 \tag{2.4.14}$$

puisqu'alors, pour ε assez petit

$$P\big\{\inf_{x \in \mathbb{R}} \hat{f}_N''(x) > \varepsilon\big\} \xrightarrow{P} 1.$$

Pour obtenir la convergence (2.4.14), on procède comme dans la preuve de la Proposition 2.4.2, en remplaçant f par f'' et $\hat{f}_N$ par $\hat{f}_N''$, puisque l'écart de $\hat{f}_N''$ à f'' peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\hat{f}_N''(x) - f''(x) = \\
&= \frac{-1}{N h_N^3} \int S_{N,2}(x - h_N u) dK''(u) + \frac{Y_{N,1}}{N} \int f^{(3)}(x - h_N u) K(u) du \\
&\quad - \frac{Y_{N,2}}{N} \int f^{(4)}(x - h_N u) K(u) du + \int \big(f''(x - hu) - f''(x)\big) K(u) du.
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{f}_N''(x) - f''(x)| = O\big(N^{-(2\delta \wedge (1-3\delta))}\big),$$

ce qui termine la preuve puisque $0 < \delta < 1/4$.

2.5 Preuve du Lemme 2.2.1

Nous voulons montrer que

$$d_N^{-1} \sum_{(s)_\tau}^{\neq} \left(\int_{[-\pi,\pi]^\tau} H_{[Nt],(s)_\tau}(x_1, \dots, x_\tau) dx_1 \cdots dx_\tau \right) \xi_{s_1} \cdots \xi_{s_\tau} \xrightarrow{\mathcal{D}} Y(t)$$

où la somme $\sum_{(s)_\tau}^{\neq}$ est étendue aux τ–uplets $(s_1, \dots, s_\tau) \in \mathbb{Z}^\tau$ tels que $s_1, \dots, s_\tau$ sont tous distincts, et $Y(t)$ est défini par (2.2.2).
Décomposons l'intervalle $[-\pi, \pi]$ selon la partition suivante

$$\begin{aligned}
I_k &= \Big[\frac{\lambda_{k-1} + \lambda_k}{2}, \frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2}\Big), \quad k = -m+1, \dots, m-1, \\
I_{-m} &= \Big[-\pi, \frac{\lambda_{-m} + \lambda_{-m+1}}{2}\Big), \qquad I_m = \Big[\frac{\lambda_{m-1} + \lambda_m}{2}, \pi\Big].
\end{aligned}$$

Si on pose, pour $j \in \{-m, \dots, m\}$, $G_j(x) = G(e^{ix}) \mathbb{1}_{I_j}(x)$, G se décompose sous la forme

$$G(e^{ix}) = \sum_{j=-m}^{m} G_j(x), \quad \forall x \in [-\pi, \pi]. \tag{2.5.1}$$

Nous pouvons alors écrire

$$\frac{1}{d_N}\sum_{(s)_\tau}^{\neq}\left(\int_{[-\pi,\pi]^\tau} H_{[Nt],(s)_\tau}(x_1,\ldots,x_\tau)dx_1\cdots dx_\tau\right)\xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau} \tag{2.5.2}$$

$$= \frac{1}{d_N}\sum_{(s)_\tau}^{\neq}\left(\int_{[-\pi,\pi]^\tau} e^{-i(s_1x_1+\ldots+s_\tau x_\tau)}K_{[Nt]}(x_1+\ldots+x_\tau)\prod_{\ell=1}^{\tau}G(e^{ix_\ell})dx_\ell\right)\xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau}$$

$$= \frac{1}{d_N}\sum_{(j)_\tau}{}'\sum_{(s)_\tau}^{\neq}$$

$$\left(\int_{[-\pi,\pi]^\tau} e^{-i(s_1x_1+\ldots+s_\tau x_\tau)}K_{[Nt]}(x_1+\ldots+x_\tau)\prod_{\ell=1}^{\tau}G_{j_\ell}(x_\ell)dx_\ell\right)\xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau}$$

où la somme $\sum_{(j)_\tau}{}'$ est étendue à tous les τ–uplets $(j_1,\ldots,j_\tau)\in\{-m,\ldots,m\}^\tau$. La proposition suivante montre que dans cette somme, seuls les termes correspondant à $\alpha_{j_1}+\ldots+\alpha_{j_\tau}=\gamma$ et $\lambda_{j_1}+\ldots+\lambda_{j_\tau}=0 \mod 2\pi$ contribuent à la limite. Elle constitue l'élément fondamental de la preuve du Lemme 2.2.1.

Proposition 2.5.1 *Posons pour chaque $(j_1,\ldots,j_\tau)$ dans $\{-m,\ldots,m\}^\tau$,*

$$Y^N_{j_1,\ldots,j_\tau}(t) = \tag{2.5.3}$$
$$\frac{1}{d_N}\sum_{(s)_\tau}^{\neq}\left(\int_{[-\pi,\pi]^\tau} e^{-i(s_1x_1+\ldots+s_\tau x_\tau)}K_{[Nt]}(x_1+\ldots+x_\tau)\prod_{\ell=1}^{\tau}G_{j_\ell}(x_\ell)dx_\ell\right)\xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau}.$$

On a lorsque N tend vers l'infini
i) si $\alpha_{j_1}+\ldots+\alpha_{j_\tau}>\gamma$ ou $\lambda_{j_1}+\ldots+\lambda_{j_\tau}\neq 0 \mod 2\pi$,

$$Y^N_{j_1,\ldots,j_\tau}(t)\xrightarrow{L^2}0,\quad \forall t\in[0,1],$$

ii) si $\alpha_{j_1}+\ldots+\alpha_{j_\tau}=\gamma$ et $\lambda_{j_1}+\ldots+\lambda_{j_\tau}=0 \mod 2\pi$,

$$Y^N_{j_1,\ldots,j_\tau}(t)\xrightarrow{\mathcal{D}}Y_{j_1,\ldots,j_\tau}(t):=$$
$$(2\pi\sigma^2)^{\tau/2}(h_{j_1}\cdots h_{j_\tau})^{1/2}\int_{\mathbb{R}^\tau}\frac{e^{it(x_1+\ldots+x_\tau)}-1}{i(x_1+\ldots+x_\tau)}\prod_{\ell=1}^{\tau}|x_\ell|^{(\alpha_{j_\ell}-1)/2}W_{j_\ell}(dx_\ell). \tag{2.5.4}$$

Preuve de la proposition 2.5.1
Preuve de i) : on suppose ici $t=1$. La démonstration est exactement la même pour les autres valeurs de t. Notons la symétrisée d'une fonction f par

$$\mathrm{sym}f(s_1,\ldots,s_\tau)=\frac{1}{\tau!}\sum_{\pi}f(s_{\pi(1)},\ldots,s_{\pi(\tau)}),$$

où la somme $\sum_{\pi}$ est étendue à toutes les permutations de $\{1,\ldots,\tau\}$. Soit

$$H_N(s_1,\ldots,s_\tau) = \int_{[-\pi,\pi]^\tau} e^{-i(s_1x_1+\ldots+s_\tau x_\tau)} K_N(x_1+\ldots+x_\tau) \prod_{\ell=1}^{\tau} G_{j_\ell}(x_\ell)dx_\ell.$$

Comme le produit $\xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau}$ est invariant par permutation des s_j, nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\frac{1}{d_N}\sum_{(s)_\tau}^{\neq}\xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau}\int_{[-\pi,\pi]^\tau} e^{-i(s_1x_1+\ldots+s_\tau x_\tau)} K_N(x_1+\ldots+x_\tau)\prod_{\ell=1}^{\tau} G_{j_\ell}(x_\ell)dx_\ell\right|^2 \\
&= \mathbb{E}\left|\frac{1}{d_N}\sum_{(s)_\tau}^{\neq}\big(\mathrm{sym}H_N(s_1,\ldots,s_\tau)\big)\xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau}\right|^2 \\
&= \tau!\frac{\sigma^{2\tau}}{d_N^2}\sum_{(s)_\tau}^{\neq}\big|\mathrm{sym}H_N(s_1,\ldots,s_\tau)\big|^2 \le \tau!\frac{\sigma^{2\tau}}{d_N^2}\sum_{(s)_\tau}^{\neq}\big|H_N(s_1,\ldots,s_\tau)\big|^2 \\
&\le \tau!\frac{\sigma^{2\tau}}{d_N^2}\sum_{(s)_\tau}\big|H_N(s_1,\ldots,s_\tau)\big|^2 \\
&= \tau!\frac{\sigma^{2\tau}}{d_N^2}\int_{[-\pi,\pi]^\tau}\big|K_N(x_1+\ldots+x_\tau)\big|^2\prod_{\ell=1}^{\tau}|G_{j_\ell}(x_\ell)|^2dx_\ell
\end{aligned}$$

d'après l'égalité de Parseval. En faisant le changement de variable $x_\ell \mapsto N(x_\ell-\lambda_{j_\ell})$, et en posant $I'_{j_\ell} = N(I_{j_\ell}-\lambda_{j_\ell})$, on trouve que cette dernière quantité est égale à

$$\frac{\tau!\sigma^{2\tau}}{N^\tau d_N^2}\int_{[-\pi,\pi]^\tau}\Big|K_N\Big(\sum_{\ell=1}^{\tau}\big(\frac{x_j}{N}+\lambda_{j_\ell}\big)\Big)\Big|^2\prod_{\ell=1}^{\tau}|G\big(e^{i(\lambda_{j_\ell}+\frac{x_\ell}{N})}\big)|^2\mathbb{I}_{I'_{j_\ell}}(x_\ell)dx_\ell$$

qui, lorsque N tend vers l'infini, tend vers 0 d'après la Proposition 1.4.1 du chapitre 1, si $\lambda_{j_1}+\ldots+\lambda_{j_\tau}\neq 0 \mod 2\pi$ ou si $\lambda_{j_1}+\ldots+\lambda_{j_\tau}=0 \mod 2\pi$ et $\alpha_{j_1}+\ldots+\alpha_{j_\tau}>\gamma$.
Preuve de ii) : nous avons pour $\ell\in\{1,\ldots,\tau\}$,

$$\begin{aligned}
G_{j_\ell}(x_\ell) &= \\
&= \mathbb{I}_{I_{j_\ell}}(x_\ell)\big(1-e^{i(x_\ell-\lambda_{j_\ell})}\big)^{(\alpha_{j_\ell}-1)/2}g(e^{ix_\ell})\prod_{h\neq j_\ell}\big(1-e^{i(x_\ell-\lambda_h)}\big)^{(\alpha_\ell-1)/2} \\
&= \big(1-e^{i(x_\ell-\lambda_{j_\ell})}\big)^{(\alpha_{j_\ell}-1)/2}L_{j_\ell}(x_\ell), \qquad (2.5.5)
\end{aligned}$$

avec $|L_{j_\ell}(x)|^2$ tendant vers h_{j_ℓ} quand x tend vers λ_{j_ℓ}.
En faisant le changement de variable $x_\ell\mapsto x_\ell-\lambda_{j_\ell}$, on peut écrire, d'après (2.5.3), et (2.5.5), et parce que $\lambda_{j_1}+\ldots+\lambda_{j_\tau}=0 \mod 2\pi$,

$$Y^N_{j_1,\ldots,j_\tau}(t) = \frac{1}{d_N}\sum_{(s)_\tau}^{\neq}e^{-i(s_1\lambda_{j_1}+\ldots+s_\tau\lambda_{j_\tau})}\xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau} \qquad (2.5.6)$$

$$\int_{[-\pi,\pi]^\tau}e^{-i(s_1x_1+\ldots+s_\tau x_\tau)}K_{[Nt]}\Big(\sum_{\ell=1}^{\tau}x_\ell\Big)\prod_{\ell=1}^{\tau}\big(1-e^{ix_\ell}\big)^{(\alpha_{j_\ell}-1)/2}L_{j_\ell}(\lambda_{j_\ell}+x_\ell)dx_\ell.$$

Posons

$$Y_{j_1,\ldots,j_\tau}^{N,A}(t) = \frac{1}{d_N} \sum_{(s)_\tau}^{\neq} e^{-i(s_1\lambda_{j_1}+\ldots+s_\tau\lambda_{j_\tau})} \xi_{s_1} \cdots \xi_{s_\tau} \int_{[-A/N,A/N]^\tau}$$

$$e^{-i(s_1x_1+\ldots+s_\tau x_\tau)} K_{[Nt]}(x_1+\ldots+x_\tau) \prod_{\ell=1}^{\tau} \big(1-e^{ix_\ell}\big)^{(\alpha_{j_\ell}-1)/2} L_{j_\ell}(\lambda_{j_\ell}+x_\ell) dx_\ell.$$

Pour $\ell = 1, \ldots, \tau$, notons G_{N,j_ℓ} la mesure de densité

$$G_{N,j_\ell}(dx) = N^{\alpha_{j_\ell}-1} |1-e^{ix/N}|^{\alpha_{j_\ell}-1} |L_{j_\ell}(\lambda_{j_\ell}+x/N)|^2 dx. \tag{2.5.7}$$

Comme $|L_{j_\ell}(\lambda_{j_\ell}+x/N)|^2$ est bornée uniformément en N et converge pour tout x vers la constante h_{j_ℓ} lorsque N tend vers l'infini, alors G_{N,j_ℓ} converge vaguement, quand N tend vers l'infini, vers la mesure G_{0,j_ℓ} de densité

$$G_{0,j_\ell}(dx) = h_{j_\ell} |x|^{\alpha_{j_\ell}-1} dx. \tag{2.5.8}$$

Par ailleurs, nous avons la convergence uniforme sur tout compact $[-A, A]^\tau$ de

$$U_{N,t}(x_1, \ldots, x_\tau) = \frac{1}{N} K_{[Nt]}\big(\frac{x_1+\ldots+x_\tau}{N}\big) \tag{2.5.9}$$

vers

$$U_{0,t}(x_1, \ldots, x_\tau) = \begin{cases} \frac{e^{it(x_1+\ldots x_\tau)}-1}{i(x_1+\ldots x_\tau)} & \text{si } x_1+\ldots+x_\tau \neq 0, \\ t & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.5.10}$$

Dans la suite nous allons nous servir du lemme suivant

Lemme 2.5.1 *Les suites $G_{N,j}, U_{N,t}$ étant définies en (2.5.7) (2.5.8) (2.5.9) et (2.5.10), nous avons uniformément en N*

$$\lim_{A\to\infty} \int_{\mathbb{R}^\tau \setminus [-A,A]^\tau} |U_{N,t}(x_1, \ldots, x_\tau)|^2 G_{N,j_1}(dx_1) \cdots G_{N,j_\tau}(dx_\tau) = 0. \tag{2.5.11}$$

Preuve : Il suffit de montrer que la suite des fonctions définie par

$$\begin{aligned} &\varphi_{N,j_1,\ldots,j_\tau}(u_1, \ldots, u_\tau) \\ &= \int_{\mathbb{R}^\tau} e^{i\frac{1}{N}\big([Nu_1]x_1+\ldots+[Nu_\tau]x_\tau\big)} |U_{N,t}(x_1, \ldots, x_\tau)|^2 G_{N,j_1}(dx_1) \cdots G_{N,j_\tau}(dx_\tau) \end{aligned} \tag{2.5.12}$$

converge en tout point et que sa limite est continue en 0.
En effet, d'après le Lemme 2 de Dobrushin et Major [17], la suite des mesures

$$\mu_{N,j_1,\ldots,j_\tau}(dx_1, \ldots, dx_\tau) = |U_{N,t}(x_1, \ldots, x_\tau)|^2 G_{N,j_1}(dx_1) \cdots G_{N,j_\tau}(dx_\tau)$$

est alors faiblement convergente. Elle est donc tendue, ce qui implique (2.5.11).
Par définition de $U_{N,t}$ et de $G_{N,j}$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\varphi_{N,j_1,\dots,j_\tau}(u_1,\dots,u_\tau)\\
&= N^{\alpha_{j_1}+\dots+\alpha_{j_\tau}-2}\sum_{p,q=1}^{[Nt]}\prod_{\ell=1}^{\tau}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\left([Nu_\ell]+p-q\right)x_\ell}|1-e^{ix_\ell}|^{\alpha_{j_\ell}-1}|L_{j_\ell}(\lambda_{j_\ell}+x_\ell)|^2dx_\ell\\
&:= N^{\alpha_{j_1}+\dots+\alpha_{j_\tau}-2}\sum_{p,q=1}^{[Nt]}\prod_{\ell=1}^{\tau}r_{j_\ell}([Nu_\ell]+p-q)\\
&= N^{\alpha_{j_1}+\dots+\alpha_{j_\tau}-2}\sum_{p=-[Nt]+1}^{[Nt]-1}([Nt]-|p|)r_{j_1}([Nu_1]+p)\cdots r_{j_\tau}([Nu_\tau]+p).
\end{aligned}$$

Puisque la fonction $|1-e^{ix}|^{\alpha_j-1}|L_j(\lambda_j+x)|^2$ est bornée en dehors de 0, alors pour $n\neq 0$,

$$r_j(n)=a_j|n|^{-\alpha_j}(1+o(1)), \tag{2.5.13}$$

où les a_j sont des constantes positives.
La suite est une adaptation de la preuve du Lemme 1 de Dobrushin et Major [17] qui montrent la convergence de $\varphi_{N,j_1,\dots,j_\tau}(u_1,\dots,u_\tau)$ et la continuité en 0 de sa limite lorsque $\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_\tau}$ sont égaux.
Il est clair que

$$\varphi_{N,j_1,\dots,j_\tau}(u_1,\dots,u_\tau)=\int_{-1}^{1}f_{N,j_1,\dots,j_\tau}(u_1,\dots,u_\tau,x)dx, \tag{2.5.14}$$

où

$$f_{N,j_1,\dots,j_\tau}(u_1,\dots,u_\tau,x)=\left(1-\frac{|[Nx]|}{N}\right)\frac{r_{j_1}\left([Nu_1]+[Nx]\right)}{N^{-\alpha_{j_1}}}\cdots\frac{r_{j_\tau}\left([Nu_\tau]+[Nx]\right)}{N^{-\alpha_{j_\tau}}}.$$

Pour tout $\varepsilon>0$, et tous réels $u_1,\dots,u_\tau$, posons

$$A_\varepsilon(u_1,\dots,u_\tau)=\{x\in[-1,1],\ |x+u_\ell|<\varepsilon,\quad \text{pour un certain } \ell,\ \ell\in\{1,\dots,\tau\}.$$

Il est facile de montrer que pour tous réels $K>0$, $\varepsilon>0$,

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{\substack{|u_1|<K,\dots,|u_\tau|<K\\ x\in[-1,1]\setminus A_\varepsilon(u_1,\dots,u_\tau)}}|f_{N,j_1,\dots,j_\tau}(u_1,\dots,u_\tau,x)-f_{j_1,\dots,j_\tau}(u_1,\dots,u_\tau,x)|=0 \tag{2.5.15}$$

où

$$f_{j_1,\dots,j_\tau}(u_1,\dots,u_\tau,x)=(1-|x|)\frac{a_{j_1}}{|x+u_1|^{\alpha_{j_1}}}\cdots\frac{a_{j_\tau}}{|x+u_\tau|^{\alpha_{j_\tau}}}.$$

Il suffit alors pour conclure de montrer que, ε étant fixé, pour chaque $\ell=1,\dots,\tau$, et quelque soient $u_1,\dots,u_\tau\in[-K,K]$, on a

$$\int_{|x+u_\ell|<\varepsilon\cap[-1,1]}|f_{N,j_1,\dots,j_\tau}(u_1,\dots,u_\tau,x)|dx\leq C(\varepsilon), \tag{2.5.16}$$

et

$$\int_{|x+u_\ell|<\varepsilon \cap [-1,1]} |f_{j_1,\dots,j_\tau}(u_1,\dots,u_\tau,x)|dx \le C(\varepsilon), \tag{2.5.17}$$

où $C(\varepsilon)$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0. En effet ceci, avec (2.5.14) et (2.5.15) implique que lorsque N tend vers l'infini,

$$\varphi_{N,j_1,\dots,j_\tau}(u_1,\dots,u_\tau) \longrightarrow \int_{-1}^{1} f_{j_1,\dots,j_\tau}(u_1,\dots,u_\tau,x)dx$$

qui, comme $\alpha_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_\tau} < 1$ est continue à l'origine d'après (2.5.17).
Montrons donc (2.5.16) et (2.5.17). Pour tout $\varepsilon > 0$ et tous réels $u_1,\dots,u_\tau \in [-K,K]$,

$$\begin{aligned}
&\int_{|x+u_\ell|<\varepsilon} (1-|x|) \prod_{i=1}^{\tau} \frac{1}{|x+u_i|^{\alpha_{j_i}}} dx \\
&= \int_{|x+u_\ell|<\varepsilon} (1-|x|) \prod_{\{i,|x+u_i|<\varepsilon\}} \frac{1}{|x+u_i|^{\alpha_{j_i}}} \prod_{\{i,|x+u_i|\ge\varepsilon\}} \frac{1}{|x+u_i|^{\alpha_{j_i}}} dx \\
&\le \prod_{\{i,|x+u_i|\ge\varepsilon\}} 2\varepsilon^{-\alpha_{j_i}} \int \prod_{\{i,|x+u_i|<\varepsilon\}} \frac{1}{|x+u_i|^{\alpha_{j_i}}} dx.
\end{aligned}$$

Sans restreindre la généralité, nous pouvons donc supposer que le domaine d'intégration dans (2.5.16) et dans (2.5.17) est

$$B_\varepsilon(u_1,\dots,u_\tau) = [-1,1] \bigcap \Big(\bigcap_{\ell=1}^{\tau} \{x, |x+u_\ell| < \varepsilon\}.$$

Ensuite, pour montrer (2.5.17), il suffit de montrer que pour tout entier τ et tous réels positifs $\alpha_1,\dots,\alpha_\tau$ tels que $\gamma(\tau) := \alpha_1 + \ldots + \alpha_\tau < 1$, il existe une constante positive C telle que

$$\int_{B_\varepsilon(u_1,\dots,u_\tau)} \frac{1}{|x+u_1|^{\alpha_1}} \cdots \frac{1}{|x+u_\tau|^{\alpha_\tau}} dx \le C\varepsilon^{1-(\alpha_1+\ldots+\alpha_\tau)}. \tag{2.5.18}$$

C'est bien clair lorsque $\tau = 1$. Supposons que c'est vrai pour un entier $\tau \ge 1$, et montrons le pour $\tau + 1$. On a par l'inégalité de Minkowski,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\varepsilon(u_1,\dots,u_{\tau+1})} \frac{1}{|x+u_1|^{\alpha_1}} \cdots \frac{1}{|x+u_{\tau+1}|^{\alpha_{\tau+1}}} dx \\
&\le \Big(\int_{B_\varepsilon(u_1,\dots,u_\tau)} \frac{1}{|x+u_1|^{\alpha_1\gamma(\tau+1)/\gamma(\tau)}} \cdots \frac{1}{|x+u_\tau|^{\alpha_\tau\gamma(\tau+1)/\gamma(\tau)}} \Big)^{\gamma(\tau)/\gamma(\tau+1)} \times \\
&\quad \Big(\int_{B_\varepsilon(u_{\tau+1})} \frac{1}{|x+u_{\tau+1}|^{\alpha_{\tau+1}\gamma(\tau+1)/\alpha_{\tau+1}}} \Big)^{\alpha_{\tau+1}/\gamma(\tau+1)}
\end{aligned}$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\int_{B_\varepsilon(u_1,\dots,u_\tau)} \frac{1}{|x+u_1|^{\alpha_1\gamma(\tau+1)/\gamma(\tau)}} \cdots \frac{1}{|x+u_\tau|^{\alpha_\tau\gamma(\tau+1)/\gamma(\tau)}} \le C\varepsilon^{1-\gamma(\tau+1)},$$

et donc

$$\begin{aligned}&\int_{B_\varepsilon(u_1,\ldots,u_{\tau+1})}\frac{1}{|x+u_1|^{\alpha_1}}\cdots\frac{1}{|x+u_{\tau+1}|^{\alpha_{\tau+1}}}dx\\ \leq\ & C\varepsilon^{(1-\gamma(\tau+1))\gamma(\tau)/\gamma(\tau+1)}\varepsilon^{(1-\gamma(\tau+1))\alpha_{\tau+1}/\gamma(\tau+1)}=C\varepsilon^{1-\gamma(\tau+1)}=C\varepsilon^{1-(\alpha_1+\ldots+\alpha_{\tau+1})},\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de (2.5.18), et par conséquent, celle de (2.5.17).
La preuve de (2.5.16) peut se ramener à celle de (2.5.17) comme suit : puisque $r_j(n) = a_j n^{-\alpha_j}(1+o(1))$, il existe une constante $C>0$ telle que

$$|r_j\big([Nu]+[Nx]\big)|\leq C\big(|[Nu_i]+[Nx]\big)^{-\alpha_j}.$$

Comme lorsque N tend vers l'infini,

$$\frac{[Nx]+[Nu_\ell]}{N}\longrightarrow x+u_\ell,$$

on a si $|x+u_\ell|<\varepsilon$, pour N assez grand, $|[Nx]+[Nu_\ell]|\leq 2\varepsilon N$ et donc, pour certaines constantes $C,C'>0$

$$\begin{aligned}&\int_{|x+u_\ell|<\varepsilon\cap[-1,1]}|f_{N,j_1,\ldots,j_\tau}(u_1,\ldots,u_\tau,x)|dx\\ \leq\ & CN^{-2}\sum_{\substack{p=-[Nt]+1\\ |[Nx]+[Nu_\ell]|<2\varepsilon N}}^{[Nt]+1}\big(N-|p|\big)\prod_{i=1}^{\tau}\Big(\frac{|[Nx]+[Nu_i]|}{N}\Big)^{-\alpha_{j_i}}\\ \leq\ & C'\int_{|x+u_\ell|<2\varepsilon\cap[-1,1]}(1-|x|)\frac{1}{|x+u_1|^{\alpha_{j_1}}}\cdots\frac{1}{|x+u_\tau|^{\alpha_{j_\tau}}}dx.\end{aligned}$$

On applique alors (2.5.17) à cette dernière intégrale. Ce qui achève la démonstration du Lemme 2.5.1.

Suite de la preuve du ii) de la Proposition 2.5.1 : considérons un intervalle fini $[-A,A]$ qu'on décompose en $2K$ intervalles disjoins de même longueur, $\Delta_{-K},\ldots,\Delta_{-1}$, $\Delta_1,\ldots\Delta_K$, tels que pour tout $h\in\{1,\ldots,K\}$, $\Delta_{-h}=-\Delta_h$. On dit qu'une fonction g_A définie sur $\mathbb{R}^\tau$ est simple s'il existe des constantes $g_{\Delta_{i(1)}\ldots\Delta_{i(\tau)}}$ telles que

$$g_A(x_1,\ldots,x_\tau)=\sum\nolimits_{\pm}^{\neq}g_{\Delta_{i(1)}\ldots\Delta_{i(\tau)}}\mathbb{I}_{\Delta_{i(1)}}(x_1)\cdots\mathbb{I}_{\Delta_{i(\tau)}}(x_\tau),\qquad(2.5.19)$$

où $\sum_{\pm}^{\neq}$ est étendue aux indices $i(j)=\pm1,\ldots,\pm K$, $j=1,\ldots,\tau$, tels que $i(h)\neq\pm i(\ell)$ si $h\neq\ell$.
Pour une mesure μ définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\tau)$, tribu borélienne de $\mathbb{R}^\tau$, notons $\overline{H}_\mu^\tau$ le sous espace de $L^2(\mathbb{R}^\tau,\mathcal{B}(\mathbb{R}^\tau),\mu)$ formé des fonctions f qui vérifient $f(-x_1,\ldots,-x_\tau)=\overline{f(x_1,\ldots,x_\tau)}$. Major [50], pp. 28–29, montre que pour toute mesure non atomique μ, l'ensemble des fonctions simples du type (2.5.19) est dense dans $\overline{H}_\mu^\tau$. Par conséquent, la convergence uniforme de $U_{N,t}$ vers $U_{0,t}$, celle de $G_{N,j_\ell}([-A,A])$ vers $G_{0,j_\ell}([-A,A])$, ainsi que le Lemme

2.5.1, permettent de prouver (voir Dobrushin et Major [17]) qu'il existe une famille de fonctions simples $(g_A)_A$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons pour tout $A \geq A(\varepsilon)$,

$$\int_{[-A,A]^\tau} |U_{0,t}(x_1,\ldots,x_\tau) - g_A(x_1,\ldots,x_\tau)|^2 \prod_{\ell=1}^{\tau} dG_{0,j_\ell}(x_\ell) < \varepsilon, \tag{2.5.20}$$

et pour tout $N \geq N(\varepsilon)$,

$$\int_{[-A,A]^\tau} |U_{N,t}(x_1,\ldots,x_\tau) - g_A(x_1,\ldots,x_\tau)|^2 \prod_{\ell=1}^{\tau} dG_{N,j_\ell}(x_\ell) < \varepsilon. \tag{2.5.21}$$

Notons

$$I^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau} = d_N^{-1} \sum_{(s)_\tau}^{\neq} e^{-i(s_1\lambda_{j_1}+\ldots+s_\tau\lambda_{j_\tau})} \int_{[-A/N,A/N]^\tau} e^{-i(s_1x_1+\ldots+s_\tau x_\tau)} \tag{2.5.22}$$
$$N g_A(Nx_1,\ldots,Nx_\tau) \prod_{\ell=1}^{\tau} \big(1-e^{ix_\ell}\big)^{(\alpha_{j_\ell}-1)/2} L_{j_\ell}\big(e^{i(\lambda_{j_\ell}+x_\ell)}\big) dx_\ell \, \xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau}.$$

Nous avons alors

$$Y^N_{j_1,\ldots,j_\tau}(t) = Y^N_{j_1,\ldots,j_\tau}(t) - Y^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau}(t) + Y^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau}(t) - I^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau} + I^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau}. \tag{2.5.23}$$

la suite de la preuve est alors basée sur le résultat suivant dont la démonstration est renvoyée à la fin de cette section.

Proposition 2.5.2 *Pour $j_1,\ldots,j_\tau$ fixés tels que $\alpha_{j_1}+\ldots+\alpha_{j_\tau} = \gamma$ et $\lambda_{j_1}+\ldots+\lambda_{j_\tau} = 0$* mod 2π, *nous avons*

$$a) \qquad \lim_{A\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathrm{Var}\left|Y^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau}(t) - I^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau}\right| = 0,$$

$$b) \quad \lim_{A\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathrm{Var}\left|Y^{N}_{j_1,\ldots,j_\tau}(t) - Y^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau}(t)\right| = 0,$$

c) Pour $A > 0$ fixé, lorsque N tend vers l'infini,

$$I^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau} \xrightarrow{d} I^{A}_{j_1,\ldots,j_\tau},$$

où $I^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau}$ est définie en (2.5.22) et

$$I^{A}_{j_1,\ldots,j_\tau} = (2\pi\sigma^2)^{\tau/2} \sum_{\pm}^{\neq} g_{\Delta_{i(1)}\ldots\Delta_{i(\tau)}} W_{j_1}(\Delta_{i(1)})\cdots W_{j_\tau}(\Delta_{i(\tau)}),$$

où pour chaque $j \in \{-m,\ldots,m\}$, $W_j(\Delta)$ est défini par

$$W_j(\Delta) = \sqrt{h_j} \int_\Delta |x|^{(\alpha_j-1)/2} W_j(dx), \tag{2.5.24}$$

les mesures $W_j, j \in \{-m,\ldots,m\}$ étant définis dans le Théorème 2.2.1.

Fin de la preuve de la Proposition 2.5.1 : puisque

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}|I^A_{j_1,\ldots,j_\tau} - Y_{j_1,\ldots,j_\tau}(t)|^2\\ &\quad = \mathbb{E}\Big|(2\pi\sigma^2)^{\tau/2}\int_{\mathbb{R}^\tau}\big(g_A(x_1,\ldots,x_\tau) - U_{0,t}(x_1,\ldots,x_\tau)\big)W_{j_1}(dx_1)\cdots W_{j_\tau}(dx_\tau)\Big|^2\end{aligned}$$

où $Y_{j_1,\ldots,j_\tau}(t)$ a été définie dans (2.5.4), et puisque W_j sont les mesures aléatoires gaussiennes correspondant à $G_{0,j}$, on a

$$\mathbb{E}|I^A_{j_1,\ldots,j_\tau} - Y_{j_1,\ldots,j_\tau}(t)|^2 = (2\pi\sigma^2)^\tau \int_{\mathbb{R}^\tau} |g_A - U_{0,t}|^2 dG_{0,j_1}\cdots dG_{0,j_\tau},$$

quantité qui tend vers 0 quand A tend vers l'infini, d'après (2.5.20), et donc

$$I^A_{j_1,\ldots,j_\tau} \xrightarrow{d} Y_{j_1,\ldots,j_\tau}(t). \tag{2.5.25}$$

D'après a) et b) de la Proposition 2.5.2, on a

$$\lim_{A\to\infty}\limsup_{N\to\infty} \mathrm{Var}\Big|Y^N_{j_1,\ldots,j_\tau}(t) - I^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau}\Big| = 0. \tag{2.5.26}$$

Ainsi (2.5.25) et (2.5.26) avec c) de la Proposition 2.5.2 nous assure, d'après le Théorème 25.5 de Billingsley [9], la convergence lorsque N tend vers l'infini, pour t fixé,

$$Y^N_{j_1,\ldots,j_\tau}(t) \xrightarrow{d} Y_{j_1,\ldots,j_\tau}(t).$$

La Proposition 2.5.1 est donc démontrée.

Pour la convergence d'une combinaison linéaire $C_1Y_N(t_1)+\ldots+C_nY_N(t_n)$, il suffit d'après i) de la Proposition 2.5.1 de montrer que

$$\sum\nolimits_0'\Big(C_1Y^N_{j_1,\ldots,j_\tau}(t_1) + \ldots + C_nY^N_{j_1,\ldots,j_\tau}(t_n)\Big) \xrightarrow{d} C_1Y(t_1) + \ldots + C_nY(t_n), \tag{2.5.27}$$

où $\sum_0'$ est étendue à tous les τ–uplets $(j_1,\ldots,j_\tau) \in \{-m,\ldots,m\}^\tau$ vérifiant

$$\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_\tau} = 0 \mod 2\pi, \quad \text{et} \quad \alpha_{j_1} + \ldots \alpha_{j_1} = \gamma.$$

Or $C_1Y^N_{j_1,\ldots,j_\tau}(t_1) + \ldots + C_nY^N_{j_1,\ldots,j_\tau}(t_n)$ peut se mettre sous la même forme que $Y_N(t)$ (2.5.6), en remplaçant $K_{[Nt]}$ par $C_1K_{[Nt_1]} + \ldots + C_nK_{[Nt_n]}$. Par conséquent, et puisque

$$C_1U_{N,t_1} + \ldots + C_nU_{N,t_n} \quad \text{et} \quad C_1U_{0,t_1} + \ldots + C_nU_{0,t_n}$$

peuvent être approchées par une même fonction simple g_A, au sens de (2.5.20) et (2.5.21), les parties a) et b) de la Proposition 2.5.2 restent vraies. La convergence

$$\sum\nolimits_0' I^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau} \xrightarrow{d} \sum\nolimits_0' I^A_{j_1,\ldots,j_\tau}$$

se démontre de la même manière que c). Ce qui termine la preuve de (2.5.27), et le Lemme 2.2.1 est démontré.

Preuve de la Proposition 2.5.2.
Preuve du a). On a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\left(Y^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau}(t) - I^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau}\right) = \\
&\qquad \mathbb{E}\Big|d_N^{-1}\sum_{(s)_\tau}^{\neq} e^{-i(s_1\lambda_{j_1}+\ldots+s_\tau\lambda_{j_\tau})}B_N(s_1,\ldots,s_\tau)\xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau}\Big|^2,
\end{aligned} \tag{2.5.28}$$

où

$$\begin{aligned}
B_N(s_1,\ldots,s_\tau) &= \int_{[-A/N,A/N]^\tau} e^{-i(s_1x_1+\ldots+s_\tau x_\tau)}\times \\
&\Big(K_{[Nt]}(x_1+\ldots+x_\tau) - Ng_A(Nx_1,\ldots,Nx_\tau)\Big)\prod_{\ell=1}^{\tau}\big(1-e^{ix_\ell}\big)^{\frac{\alpha_{j_\ell}-1}{2}}L_{j_\ell}(\lambda_{j_\ell}+x_\ell)dx_\ell
\end{aligned} \tag{2.5.29}$$

Comme

$$\begin{aligned}
&\sum_{(s)_\tau}^{\neq} e^{-i(s_1\lambda_{j_1}+\ldots+s_\tau\lambda_{j_\tau})}B_N(s_1,\ldots,s_\tau)\xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau} \\
&\quad = \sum_{(s)_\tau}^{\neq}\mathrm{sym}\,\Big(e^{-i(s_1\lambda_{j_1}+\ldots+s_\tau\lambda_{j_\tau})}B_N(s_1,\ldots,s_\tau)\Big)\xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau},
\end{aligned} \tag{2.5.30}$$

on déduit de (2.5.28)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\left|I^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau} - Y^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau}(t)\right| \\
&= d_N^{-2}\sum_{(s)_\tau}^{\neq}\mathbb{E}\Big|\mathrm{sym}\,\Big(e^{-i(s_1\lambda_{j_1}+\ldots+s_\tau\lambda_{j_\tau})}B_N(s_1,\ldots,s_\tau)\Big)\xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau}\Big|^2 \\
&= d_N^{-2}\tau!\sigma^{2\tau}\sum_{(s)_\tau}^{\neq}\big|\mathrm{sym}B_N(s_1,\ldots,s_\tau)\big|^2 \\
&\le d_N^{-2}\tau!\sigma^{2\tau}\sum_{(s)_\tau}^{\neq}\big|B_N(s_1,\ldots,s_\tau)\big|^2 \le d_N^{-2}\tau!\sigma^{2\tau}\sum_{(s)_\tau}\big|B_N(s_1,\ldots,s_\tau)\big|^2.
\end{aligned} \tag{2.5.31}$$

D'après l'égalité de Parseval et (2.5.29), ce dernier terme est égal à

$$\begin{aligned}
&d_N^{-2}\tau!\sigma^{2\tau}\int_{[-A/N,A/N]^\tau}\big|K_{[Nt]}(x_1+\ldots+x_\tau) - Ng_A(Nx_1,\ldots,Nx_\tau)\big)\big|^2\times \\
&\prod_{\ell=1}^{\tau}\big|1-e^{ix_\ell}\big|^{\alpha_{j_\ell}-1}\big|L_{j_\ell}(\lambda_{j_\ell}+x_\ell)\big|^2dx_\ell,
\end{aligned} \tag{2.5.32}$$

Puisque

$$d_N^2 = N^{2-(\alpha_{j_1}+\ldots+\alpha_{j_\tau})},$$

(2.5.32) devient, après le changement de variable $x_\ell \mapsto N x_\ell$,

$$\begin{aligned}
&\tau!\sigma^{2\tau}\int_{[-A,A]^\tau}\big|U_{N,t}(x_1,\ldots,x_\tau)-g_A(x_1,\ldots,x_\tau)\big|^2\times\\
&\qquad\prod_{\ell=1}^{\tau}N^{\alpha_{j_\ell}-1}\big|1-e^{ix_\ell/N}\big|^{\alpha_{j_\ell}-1}\big|L_{j_\ell}(\lambda_{j_\ell}+x_\ell/N)\big|^2dx_\ell\\
&= \tau!\sigma^{2\tau}\int_{[-A,A]^\tau}\big|U_{N,t}(x_1,\ldots,x_\tau)-g_A(x_1,\ldots,x_\tau)\big|^2 dG_{N,j_1}(x_1)\cdots dG_{N,j_\tau}(x_\tau).
\end{aligned}$$

Ce qui, d'après (2.5.21), termine la preuve de a).

Preuve du b). De la même façon on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\Big(Y^N_{j_1,\ldots,j_\tau}(t)-Y^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau}(t)\Big)\\
&= \mathbb{E}\Big|d_N^{-1}\sum_{(s)_\tau}^{\neq}e^{-i(s_1\lambda_{j_1}+\ldots+s_\tau\lambda_{j_\tau})}\widetilde{B}_N(s_1,\ldots,s_\tau)\xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau}\Big|^2\\
&\le \frac{\sigma^{2\tau}\tau!}{d_N^2}\sum_{(s)_\tau}\big|\widetilde{B}_N(s_1,\ldots,s_\tau)\big|^2,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\widetilde{B}_N(s_1,\ldots,s_\tau) &= \int_{[-\pi,\pi]^\tau\setminus[-A/N,A/N]^\tau}e^{-i(s_1x_1+\ldots+s_\tau x_\tau)}\times\\
&\quad K_{[Nt]}(x_1+\ldots+x_\tau)\prod_{\ell=1}^{\tau}\big(1-e^{ix_\ell}\big)^{\frac{\alpha_{j_\ell}-1}{2}}L_{j_\ell}(\lambda_{j_\ell}+x_\ell)dx_\ell.
\end{aligned}$$

Donc, par l'égalité de Parseval,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\Big(Y^N_{j_1,\ldots,j_\tau}(t)-Y^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau}(t)\Big)\\
&\le \frac{(2\pi\sigma^2)^\tau\tau!}{d_N^2}\times\\
&\quad\int_{[-\pi,\pi]^\tau\setminus[-A/N,A/N]^\tau}|K_{[Nt]}(x_1+\ldots+x_\tau)|^2\prod_{\ell=1}^{\tau}\big|1-e^{ix_\ell}\big|^{\alpha_{j_\ell}-1}|L_{j_\ell}(\lambda_{j_\ell}+x_\ell)|^2dx_\ell\\
&= (2\pi\sigma^2)^\tau\tau!\int_{\mathbb{R}^\tau\setminus[-A,A]^\tau}|U_{N,t}(x_1,\ldots,x_\tau)|^2dG_{N,j_1}(x_1)\cdots dG_{N,j_\tau}(x_\tau).
\end{aligned}$$

D'après (2.5.11), cette dernière quantité converge vers 0, uniformément en N, quand A tend vers l'infini. Donc b) est prouvée.

Preuve du c). Soit Δ un intervalle borné. Posons pour chaque N et chaque j_ℓ

$$\begin{aligned}
a_{\Delta,j_\ell}(s,N) &= e^{-is\lambda_{j_\ell}}\int_{\Delta/N}e^{-isx}\big(1-e^{ix}\big)^{\frac{\alpha_{j_\ell}-1}{2}}L_{j_\ell}(\lambda_{j_\ell}+x)dx\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}e^{-isu}\big(1-e^{i(u-\lambda_{j_\ell})}\big)^{\frac{\alpha_{j_\ell}-1}{2}}L_{j_\ell}(u)\mathbb{I}_{\lambda_{j_\ell}+\Delta/N}(u)du. \qquad (2.5.33)
\end{aligned}$$

Pour chaque $N \geq 1$, la suite $a_{\Delta,j_\ell}(s,N)$ est dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. Définissons

$$W_{N,j_\ell}(\Delta) = N^{\alpha_{j_\ell}/2} \sum_s a_{\Delta,j_\ell}(s,N)\xi_s. \qquad (2.5.34)$$

La série

$$\sum_{|s|\leq m} a_{\Delta,j_\ell}(s,N)e^{-isu}$$

converge dans L^2 vers

$$\big(1 - e^{i(u-\lambda_{j_\ell})}\big)^{\frac{\alpha_{j_\ell}-1}{2}} L_{j_\ell}(u)\mathbb{I}_{\lambda_{j_\ell}+\Delta/N}(u)$$

et, en utilisant la représentation spectrale de ξ_s, (voir par exemple Brockwell et Davis [11], Théorème 4.10.1), on obtient

$$\begin{aligned} W_{N,j_\ell}(\Delta) &= N^{\alpha_{j_\ell}/2}\int_{-\pi}^{\pi}\big(1 - e^{i(u-\lambda_{j_\ell})}\big)^{\frac{\alpha_{j_\ell}-1}{2}} L_{j_\ell}(u)\mathbb{I}_{\lambda_{j_\ell}+\Delta/N}(u)W_\xi(du) \\ &= 2\pi N^{\alpha_{j_\ell}/2}\int_{\Delta/N}\big(1 - e^{ix}\big)^{\frac{\alpha_{j_\ell}-1}{2}} L_{j_\ell}(\lambda_{j_\ell}+x)W_\xi(dx) \qquad (2.5.35)\end{aligned}$$

où $W_\xi(dx)$ est la mesure spectrale du bruit blanc (ξ_s). Sa densité spectrale est donnée par

$$\mathbb{E}\big(|W_\xi(dx)|^2\big) = \frac{\sigma^2}{2\pi}dx.$$

Comme $L_{j_\ell}(\lambda_{j_\ell} - x) = \overline{L_{-j_\ell}(\lambda_{-j_\ell} + x)}$ (voir (2.5.5)), et compte tenu de (2.5.35), les variables W_{N,j_ℓ} vérifient les propriétés suivantes :
i) pour tout intervalle Δ, $W_{N,j_\ell}(-\Delta) = \overline{W_{N,-j_\ell}(\Delta)}$.
ii) pour tout intervalle Δ tel que $\Delta \cap -\Delta = \emptyset$, $\mathrm{Re}W_{N,j_\ell}(\Delta)$ et $\mathrm{Im}W_{N,j_\ell}(\Delta)$ sont centrées, non corrélées, et de même variance égale à $\pi\sigma^2 G_{N,j_l}(\Delta)$,
iii) si $\pm\Delta_1,\ldots,\pm\Delta_\tau$ sont disjoints, $W_{N,j_1}(\Delta_1),\ldots,W_{N,j_\tau}(\Delta_\tau)$ sont non corrélées,
iv) si $j_l \neq \pm j_h$, pour N assez grand, $W_{N,j_l}(\Delta)$ et $W_{N,j_h}(\Delta')$ sont non corrélées.
Ces propriétés vont se répercuter sur les limites des $W_{N,j}$.
Nous allons montrer que pour tous $\Delta_1,\ldots,\Delta_\tau$ tels que $\pm\Delta_1,\ldots,\pm\Delta_\tau$ sont disjoints, nous avons, lorsque N tend vers l'infini,

$$\big(W_{N,j_1}(\Delta_1),\ldots,W_{N,j_\tau}(\Delta_\tau)\big) \xrightarrow{d} (2\pi\sigma^2)^{1/2}\big(W_{j_1}(\Delta_1),\ldots,W_{j_\tau}(\Delta_\tau)\big) \qquad (2.5.36)$$

où les mesures W_j ont été définies dans (2.5.24).
Pour établir (2.5.36), puisque d'après la définition des $W_j(\Delta)$ donnée dans (2.5.24), les $W_{j_i}(\Delta_i)$, $i = 1,\ldots,\tau$, sont des variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes dont les parties réelles et imaginaires sont indépendantes et de même variance égale à $\pi\sigma^2 G_{0,j_i}(\Delta_i)$, il suffit alors de montrer que

$$\begin{aligned} &A_1\mathrm{Re}W_{N,j_1}(\Delta_1) + B_1\mathrm{Im}W_{N,j_1}(\Delta_1) + \ldots + A_\tau\mathrm{Re}W_{N,j_\tau}(\Delta_\tau) + B_\tau\mathrm{Im}W_{N,j_\tau}(\Delta_\tau) \\ &\xrightarrow{d} \mathcal{N}\Big(0, (A_1^2+B_1^2)\pi\sigma^2 G_{0,j_1}(\Delta_1) + \ldots + (A_\tau^2+B_\tau^2)\pi\sigma^2 G_{0,j_\tau}(\Delta_\tau)\Big). \qquad (2.5.37)\end{aligned}$$

Nous nous contentons de montrer que pour tout intervalle fini Δ et pour tout j dans $\{-m, \dots, m\}$, on a

$$\mathrm{Re} W_{N,j}(\Delta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0, \pi\sigma^2 G_{0,j}(\Delta)\big), \tag{2.5.38}$$

puisque (2.5.37) se démontre de façon similaire, en utilisant les propriétés de non corrélation ii) et iii).
Pour chaque N fixé, nous avons d'après ii)

$$\begin{aligned}\sigma^2 N^{\alpha_j} \lim_{k\to\infty} \sum_{|s|\le k} \big(\mathrm{Re}\, a_{\Delta,j}(s,N)\big)^2 &= \sigma^2 N^{\alpha_j} \sum_{s} \big(\mathrm{Re}\, a_{\Delta,j}(s,N)\big)^2 \\ &= \mathbb{E}|\mathrm{Re}\, W_{N,j}(\Delta)|^2 = \pi\sigma^2 G_{N,j}(\Delta).\end{aligned}$$

Donc pour toute suite positive (ε_N) tendant vers 0, il existe une suite $r(N)$ telle que pour tout $N \ge 1$

$$\sum_{|s|>r(N)} \big(\mathrm{Re}\, a_{\Delta,j}(s,N)\big)^2 < N^{-\alpha_j}\varepsilon_N.$$

Et par conséquent

$$\lim_{N\to\infty} N^{\alpha_j} \sum_{|s|>r(N)} \big(\mathrm{Re}\, a_{\Delta,j}(s,N)\big)^2 = 0. \tag{2.5.39}$$

Écrivons $\mathrm{Re} W_{N,j}(\Delta)$ comme

$$\mathrm{Re} W_{N,j}(\Delta) = N^{\alpha_j/2} \sum_{|s|\le r(N)} \mathrm{Re}\, a_{\Delta,j}(s,N)\xi_s + N^{\alpha_j/2} \sum_{|s|>r(N)} \mathrm{Re}\, a_{\Delta,j}(s,N)\xi_s.$$

D'après (2.5.39), le dernier terme à droite converge vers 0 dans L^2. Pour montrer (2.5.38), il suffit alors de montrer que lorsque N tend vers l'infini

$$N^{\alpha_j/2} \sum_{|s|\le r(N)} \mathrm{Re}\, a_{\Delta,j}(s,N)\xi_s \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0, \pi\sigma^2 G_{0,j}(\Delta)\big). \tag{2.5.40}$$

Pour ce faire nous montrons que la condition de Lindeberg est vérifiée (voir Billingslay [9], Théorème 27.2).
Posons

$$b(s,N) = N^{\alpha_j/2}\mathrm{Re}\, a_{\Delta,j}(s,N), \quad \text{et} \quad s_N^2 = \sigma^2 \sum_{|s|\le r(N)} b^2(s,N).$$

Il s'agit de montrer que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{s_N^2} \sum_{|s|\le r(N)} b^2(s,N)\mathbb{E}\big(\xi_s^2 \mathbb{1}_{b^2(s,N)\xi_s^2 \ge \varepsilon^2 s_N^2}\big) = 0. \tag{2.5.41}$$

Puisque

$$\mathbb{1}_{\xi_s^2 \ge \varepsilon^2 s_N^2/b^2(s,N)} \le \mathbb{1}_{\max\limits_{|s|\le N} b^2(s,N)\xi_s^2 \ge \varepsilon^2 s_N^2},$$

on a

$$\frac{1}{s_N^2}\sum_{|s|\le r(N)} b^2(s,N)\mathbb{E}\big(\xi_s^2 \mathbb{I}_{b^2(s,N)\xi_s^2\ge\varepsilon^2 s_N^2}\big) \le \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}\big(\xi_0^2 \mathbb{I}_{\max_{|s|\le N} b^2(s,N)\xi_0^2\ge\varepsilon^2 s_N^2}\big).$$

Pour montrer que cette dernière espérance converge vers 0, il suffit, puisque le moment d'ordre 2 de ξ_0 existe, de montrer que

$$\max_{|s|\le N} b^2(s,N) = o(s_N^2). \tag{2.5.42}$$

En conséquence, lorsque N tend vers l'infini,

$$\sum_{|s|\le r(N)} \frac{b(s,N)}{s_N}\xi_s \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Puis pour conclure à (2.5.40) il suffit de remarquer que lorsque N tend vers l'infini,

$$s_N^2 = \pi\sigma^2 G_{N,j}(\Delta) - N^{\alpha_j}\sigma^2 \sum_{|s|\ge r(N)} \Big(\mathrm{Re}\, a_{\Delta,j}(s,N)\Big)^2 \longrightarrow \pi\sigma^2 G_{0,j}(\Delta) \tag{2.5.43}$$

d'après (2.5.39) et la convergence vague de $G_{N,j}$ vers $G_{0,j}$.
Il reste donc à montrer (2.5.42). En utilisant l'inégalité de Schwarz on obtient

$$\begin{aligned}
\max_s b(s,N)^2 &\le N^{\alpha_j}\max_s |a_{\Delta,j}(s,N)|^2 \\
&= N^{\alpha_j}\max_s \left| e^{-is\lambda_j}\int_{\Delta/N} e^{-isx}\big(1-e^{ix}\big)^{\frac{\alpha_j-1}{2}} L_j(\lambda_j+x)dx\right|^2 \\
&\le N^{\alpha_j}\left(\int_{\Delta/N}\big|1-e^{ix}\big|^{\alpha_j-1}\big|L_j(\lambda_j+x)\big|^2 dx\right)\left(\int_{\Delta/N} dx\right) \\
&= G_{N,j}(\Delta)\frac{|\Delta|}{N} = o(1),
\end{aligned} \tag{2.5.44}$$

car Δ est fini et $G_{N,j}(\Delta)$ converge. Ce qui d'après (2.5.43), termine la preuve de (2.5.42).

Nous allons maintenant terminer la preuve de c). D'après (2.5.19), (2.5.22) et (2.5.33),

$$I^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau} = N^{\frac{\alpha_{j_1}+\ldots+\alpha_{j_\tau}}{2}} \sum_{(s)_\tau}^{\neq}\sum_{\pm}^{\neq} g_{\Delta_{i(1)},\ldots,\Delta_{i(\tau)}} a_{\Delta_{i(1)},j_1}(s_1,N)\cdots a_{\Delta_{i(\tau)},j_\tau}(s_\tau,N)\xi_{s_1}\cdots\xi_{s_\tau}.$$

Formellement nous avons

$$\sum_{(s)_\tau}^{\neq} = \sum_{(s)_\tau} - \sum_{(s)_\tau}^{=}.$$

D'où on déduit

$$\begin{aligned}
I^{N,A}_{j_1,\ldots,j_\tau} &= \sum_{\pm}^{\neq} g_{\Delta_{i(1)},\ldots,\Delta_{i(\tau)}} W_{N,j_1}(\Delta_{i(1)})\cdots W_{N,j_\tau}(\Delta_{i(\tau)}) \\
&\quad - \sum_{\pm}^{\neq}\sum_{\mathcal{P}} g_{\Delta_{i(1)},\ldots,\Delta_{i(\tau)}} \Gamma\big(\mathcal{P},\Delta_{i(1)},\ldots,\Delta_{i(\tau)},N\big),
\end{aligned} \tag{2.5.45}$$

où la somme $\sum\limits_{\mathcal{P}}$ est étendue à tout $\ell \in \{1, \ldots, \tau - 1\}$ et à toutes les partitions $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_\ell)$ de $\{1, \ldots, \tau\}$ telles que $|\mathcal{P}| = \ell < \tau$, et où

$$\Gamma\big(\mathcal{P}, \Delta_{i(1)}, \ldots, \Delta_{i(\tau)}, N\big) = \sum_{(s)_\ell}^{\neq} p_{V_1}(s_1, N) \cdots p_{V_\ell}(s_\ell, N) \xi_{s_1}^{|V_1|} \cdots \xi_{s_\ell}^{|V_\ell|}, \tag{2.5.46}$$

où pour chaque $h = 1, \ldots, \ell$,

$$p_{V_h}(s_h, N) = \prod_{r \in V_h} q_{\Delta_{i(r)}}(s_r, N),$$

avec pour chaque $r = 1, \ldots, \tau$,

$$q_{\Delta_{i(r)}}(s, N) = N^{\alpha_{j_r}/2} a_{\Delta_{i(r)}, j_r}(s, N).$$

Le premier terme à droite dans (2.5.45) est un polynôme en $W_{N,j_1}(\Delta_{i(1)}), \ldots,$
$W_{N,j_\tau}(\Delta_{i(\tau)})$. Comme $\pm\Delta_{i(r)}$, $r = 1, \ldots, \tau$ sont disjoints, d'après (2.5.36), ce terme converge, lorsque N tend vers l'infini, vers

$$(2\pi\sigma^2)^{\tau/2} \sum\nolimits_{\pm}^{\neq} g_{\Delta_{i(1)}, \ldots, \Delta_{i(\tau)}} W_{j_1}(\Delta_{i(1)}) \cdots W_{j_\tau}(\Delta_{i(\tau)}) = I^A_{j_1, \ldots, j_\tau}.$$

Pour terminer la preuve de c), montrons que le deuxième terme à droite dans (2.5.45) converge vers 0 dans L^2 lorsque N tend vers l'infini.
Pour cela il suffit de montrer que pour toute partition $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_\ell)$ avec $\ell < \tau$, on a lorsque N tend vers l'infini

$$\mathrm{Var}\Big(\Gamma\big(\mathcal{P}, \Delta_{i(1)}, \ldots, \Delta_{i(\tau)}, N\big)\Big) \longrightarrow 0,$$

ce qui est conséquence du lemme plus général suivant

Lemme 2.5.2 *Soit $(\xi_s)_{s \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables i.i.d. centrée. Supposons que $\mathbb{E}\xi_0^{2\tau} < +\infty$. Soit pour tout $n \geq 1$, P_n un polynôme de degré n à coefficients réels, et soit $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_\ell)$, $\ell < \tau$ une partition de $\{1, \ldots, \tau\}$. Supposons que $\mathbb{E}P_1(\xi_0) = 0$. Nous avons lorsque N tend vers l'infini*

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{(s)_\ell}^{\neq} p_{V_1}(s_1, N) \cdots p_{V_\ell}(s_\ell, N) P_{|V_1|}(\xi_{s_1}) \cdots P_{|V_\ell|}(\xi_{s_\ell})\Big) \longrightarrow 0. \tag{2.5.47}$$

Preuve : elle est largement inspirée de la preuve de la Proposition 4.7 de Giraitis et Surgailis [26]. Pour montrer (2.5.47), il suffit de prouver que lorsque N tend vers l'infini,

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{(s)_\ell}^{\neq} p_{V_1}(s_1, N) \cdots p_{V_\ell}(s_\ell, N) P_{|V_1|}(\xi_{s_1}) \cdots P_{|V_\ell|}(\xi_{s_\ell})\Big|^2 \longrightarrow 0. \tag{2.5.48}$$

Le premier membre de (2.5.48) s'écrit

$$\sum_{(s)_\ell}^{\neq} \sum_{(s')_\ell}^{\neq} p_{V_1}(s_1, N) \cdots p_{V_\ell}(s_\ell, N) \overline{p_{V_1}(s'_1, N)} \cdots \overline{p_{V_\ell}(s'_\ell, N)} \mu\big(\mathcal{P}, (s)_\ell, (s')_\ell\big) \tag{2.5.49}$$

où

$$\mu\big(\mathcal{P},(s)_\ell,(s')_\ell\big) = \mathbb{E}\big(P_{|V_1|}(\xi_{s_1})\cdots P_{|V_\ell|}(\xi_{s_\ell})P_{|V_1|}(\xi_{s'_1})\cdots P_{|V_\ell|}(\xi_{s'_\ell})\big).$$

Puisque les variables ξ_s sont indépendantes, et puisque $\mathbb{E}P_1(\xi_0)=0$, seuls comptent dans (2.5.49) les indices $s_1,\dots,s_\ell$ et $s'_1,\dots,s'_\ell$ qui vérifient

$$\{s_h,\ |V_h|=1\} = \{s'_h,\ |V_h|=1\},$$

car les autres sont nuls.
Rappelons que d'après (2.5.44), on a pour tout $r=1,\dots,\tau$, lorsque N tend vers l'infini

$$\max_s |q_{\Delta_{i(r)}}(s,N)| \longrightarrow 0. \tag{2.5.50}$$

D'autre part, (2.5.34), (2.5.35), la propriété ii) de $W_{N,j}$, et la convergence vague de $G_{N,j}$ vers $G_{0,j}$, impliquent que

$$\begin{aligned}\sum_s |q_{\Delta_{i(r)}}(s,N)|^2 &= \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}\big(W_{N,j_r}(\Delta_{i(r)})\overline{W_{N,j_r}(\Delta_{i(r)})}\big) \\ &= \frac{2\pi}{\sigma^2}G_{N,j_r}(\Delta_{i(r)}) \longrightarrow \frac{2\pi}{\sigma^2}G_{0,j_r}(\Delta_{i(r)}), \quad N\to+\infty.\end{aligned} \tag{2.5.51}$$

Enfin si $n\neq k$, nous avons par la préservation du produit scalaire,

$$\begin{aligned}&\sum_s q_{\Delta_{i(n)}}(s,N)\overline{q_{\Delta_{i(k)}}(s,N)} = \mathbb{E}\big(W_{N,j_n}\Delta_{i(n)})\overline{W_{N,j_k}(\Delta_{i(k)})}\big) = \\ &\int_{-\pi}^{\pi}(1-e^{ix})^{\frac{\alpha_{j_n-1}}{2}}L_{j_n}(\lambda_{j_n}+x)(1-e^{-ix})^{\frac{\alpha_{j_k-1}}{2}}\overline{L_{j_k}(\lambda_{j_k}+x)}\mathbb{I}_{\Delta_{i(n)}\cap\Delta_{i(k)}}(Nx)dx = 0\end{aligned} \tag{2.5.52}$$

car $\Delta_{i(n)}\cap\Delta_{i(k)}=\phi$.
Par conséquent on a pour tout $V\subset\{1,\dots,\tau\}$,

$$\sum_s p_V(s,N) = 0, \qquad \text{pour tout } N\geq 1, \qquad \text{si } |V|=2. \tag{2.5.53}$$

D'après (2.5.51) il existe une constante $C>0$ telle que pour tout N,

$$\sum_s |p_V(s,N)|^2 \leq C. \tag{2.5.54}$$

On en déduit que, pour tout N,

$$\sum_s |p_V(s,N)| \leq C, \quad \text{si } |V|\geq 2. \tag{2.5.55}$$

En effet, si $V=V'\cup V''$, on a

$$\sum_s |p_V(s,N)| \leq \Big(\sum_s |p_{V'}(s,N)|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_s |p_{V''}(s,N)|^2\Big)^{1/2}.$$

De (2.5.50) et (2.5.51) on déduit que

$$\sum_s |p_V(s,N)|^2 \longrightarrow 0 \text{ lorsque } N \to +\infty, \text{ si } |V| \geq 2. \tag{2.5.56}$$

Enfin

$$\sum_s |p_V(s,N)| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } N \to +\infty, \text{ si } |V| \geq 3 \tag{2.5.57}$$

se déduit facilement de (2.5.50) et de (2.5.55).
D'après l'hypothèse sur la partition $\mathcal{P}$, il existe $j \in \{1,\dots,\ell\}$ tel que $|V_j| \geq 2$. Supposons par exemple que $|V_1| \geq 2$. Écrivons alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{(s)_\ell}^{\neq}\sum_{(s')_\ell}^{\neq} p_{V_1}(s_1,N)\cdots p_{V_\ell}(s_\ell,N)\overline{p_{V_1}(s'_1,N)}\cdots\overline{p_{V_\ell}(s'_\ell,N)}\mu\big(\mathcal{P},(s)_\ell,(s')_\ell\big) \qquad (2.5.58)\\
&\quad= \sum_{j=0}^{\ell}\sum_{(j)'}^{1} p_{V_1}(s_1,N)\cdots p_{V_\ell}(s_\ell,N)\overline{p_{V_1}(s'_1,N)}\cdots\overline{p_{V_\ell}(s'_\ell,N)}\mu\big(\mathcal{P},(s)_\ell,(s')_\ell\big)
\end{aligned}$$

où pour chaque $j = 0,\dots,\ell$, la somme $\sum_{(j)'}^{1}$ est étendue aux indices $(s)_\ell$ et $(s')_\ell$ tels que $s_1,\dots,s_\ell$ sont distincts, ainsi que $s'_1,\dots,s'_\ell$, et tels que

$$\{s_h,\ |V_h| = 1\} = \{s'_h,\ |V_h| = 1\}.$$

De plus, dans $\sum_{(0)'}^{1}$, s_1 doit vérifier $s_1 \neq s'_1,\dots,s_1 \neq s'_\ell$, et pour $j = 1,\dots,\ell$, dans $\sum_{(j)'}^{1}$, $s_1 = s'_j$.
Dans ce qui suit, pour simplifier, pour toutes suites $\alpha(s,N)$, $\beta(s,N)$, pour tous entiers $k,n \leq \ell$, et tous sous ensembles $\{i(1),\dots,i(k)\}$, $\{j(1),\dots,j(n)\}$ de $\{1,\dots,\ell\}$, la somme

$$\sum_{(s)_k}^{\neq}\sum_{(s')_n}^{\neq} \alpha(s_{i(1)},N)\cdots\alpha(s_{i(k)},N)\beta(s'_{j(1)},N)\cdots\beta(s'_{j(n)},N)$$

est étendue à tous les $k+n$–uplets $(s_{i(1)},\dots,s_{i(k)},s'_{j(1)},\dots,s'_{j(n)})$ dans $\mathbb{Z}^{k+n}$ tels que $s_{i(1)},\dots,s_{i(k)}$ sont tous distincts, ainsi que $s'_{j(1)},\dots,s'_{j(n)}$.
En utilisant l'indépendance des ξ_s, et en posant pour tout $j \in \{1,\dots,\ell\}$,

$$\begin{aligned}
&\mu\big(\mathcal{P},\ell+j,(s)_{\ell-1},(s')_{\ell-1}\big) = \\
&\quad \mathbb{E}\big(P_{|V_2|}(\xi_{s_2})\cdots P_{|V_\ell|}(\xi_{s_\ell})P_{|V_1|}(\xi_{s'_1})\cdots P_{|V_{j-1}|}(\xi_{s'_{j-1}})P_{|V_{j+1}|}(\xi_{s'_{j+1}})\cdots P_{|V_\ell|}(\xi_{s'_\ell})\big),
\end{aligned}$$

nous obtenons pour tout $j = 1,\dots,\ell$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{(j)'}^{1}\big|p_{V_1}(s_1,N)\cdots p_{V_\ell}(s_\ell,N)\overline{p_{V_1}(s'_1)}\cdots\overline{p_{V_\ell}(s'_\ell,N)}\mu\big(\mathcal{P},(s)_\ell,(s')_\ell\big)\big| \qquad (2.5.59)\\
&\quad= \big|\mathbb{E}\big(P_{|V_1|}(\xi_0)P_{|V_j|}(\xi_0)\big|\big)\sum_{s_1}|p_{V_1}(s_1,N)p_{V_j}(s_1,N)| \times \\
&\qquad \sum_{(s)_{\ell-1}}^{\neq}\sum_{(s')_{\ell-1}}^{\neq}\big|\mu\big(\mathcal{P},\ell+j,(s)_{\ell-1},(s')_{\ell-1}\big)\big| \times \\
&\qquad |p_{V_2}(s_2,N)\cdots p_{V_\ell}(s_\ell,N)\overline{p_{V_1}(s'_1,N)}\cdots p_{V_{j-1}}(s'_{j-1},N)\,p_{V_{j+1}}(s'_{j+1},N)\cdots p_{V_\ell}(s'_\ell,N)|.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et puisque les variables $\xi_{s_2},\ldots,\xi_{s_\ell}$ sont indépendantes et les variables $\xi_{s'_1},\ldots,\xi_{s'_{j-1}},\xi_{s'_{j+1}},\ldots,\xi_{s'_\ell}$ sont indépendantes, nous avons

$$|\mu\big(\mathcal{P},\ell+j,(s)_{\ell-1},(s')_{\ell-1}\big)| \leq \Big(\mathbb{E}\big(P_{|V_2|}(\xi_0)\big)^2\cdots\mathbb{E}\big(P_{|V_\ell|}(\xi_0)\big)^2\Big)^{1/2}\times \\ \Big(\mathbb{E}\big(P_{|V_1|}(\xi_0)\big)^2\mathbb{E}\big(P_{|V_{j-1}|}(\xi_0)\big)^2\mathbb{E}\big(P_{|V_{j+1}|}(\xi_0)\big)^2\mathbb{E}\big(P_{|V_\ell|}(\xi_0)\big)^2\Big)^{1/2}. \qquad (2.5.60)$$

Par conséquent, nous avons

$$\sum_{(j)'}^{1}\Big|p_{V_1}(s_1,N)\cdots p_{V_\ell}(s_\ell,N)\overline{p_{V_1}(s'_1,N)}\cdots\overline{p_{V_\ell}(s'_\ell,N)}\mu\big(\mathcal{P},(s)_\ell,(s')_\ell\big)\Big| \\ \leq C\sum_{s_1}|p_{V_1}(s_1,N)p_{V_j}(s_1,N)|\times \\ \prod_{\{h,|V_h|=1\}}\prod_{\{i,|V_i|=1\}}\Big(\sum_s|p_{V_h}(s,N)p_{V_i}(s,N)|\Big)\prod_{\{h,|V_h|\geq 2\}}\Big(\sum_s|p_{V_h}(s,N)|\Big)^2.$$

Le dernier produit est majoré uniformément en N d'après (2.5.55). Et comme pour tous $h,i\in\{1,\ldots,\ell\}$,

$$\sum_s|p_{V_h}(s,N)p_{V_i}(s,N)| \leq \Big(\sum_s|p_{V_h}(s,N)|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_s|p_{V_i}(s,N)|^2\Big)^{1/2},$$

quantité qui, d'après (2.5.54), est majorée uniformément en N, il existe alors une constante positive C telle que

$$\sum_{(j)'}^{1}\Big|p_{V_1}(s_1,N)\cdots p_{V_\ell}(s_\ell,N)\overline{p_{V_1}(s'_1,N)}\cdots\overline{p_{V_\ell}(s'_\ell,N)}\mu\big(\mathcal{P},(s)_\ell,(s')_\ell\big)\Big| \leq C\sqrt{\sum_s|p_{V_1}(s,N)|^2}.$$

Puisque $|V_1|\geq 2$, lorsque N tend vers l'infini, ce dernier terme tend vers 0 d'après (2.5.56).
Il ne reste plus qu'à traiter le terme $\sum\limits_{(0)'}^{1}$ dans (2.5.58). Posons

$$\mu\big(\mathcal{P},(s)_{\ell-1},(s')_\ell\big) = \mathbb{E}\big(P_{|V_2|}(\xi_{s_2})\cdots P_{|V_\ell|}(\xi_{s_\ell})P_{|V_1|}(\xi_{s'_1})\cdots P_{|V_\ell|}(\xi_{s'_\ell})\big),$$

et pour $j=1,\ldots,\ell$,

$$\mu\big(\mathcal{P},j,(s)_{\ell-1},(s')_\ell\big) = \\ \mathbb{E}\big(P_{|V_2|}(\xi_{s_2})\cdots P_{|V_{j-1}|}(\xi_{s_{j-1}})P_{|V_{j+1}|}(\xi_{s_{j+1}})\cdots P_{|V_\ell|}(\xi_{s_\ell})P_{|V_1|}(\xi_{s'_1})\cdots P_{|V_\ell|}(\xi_{s'_\ell})\big),$$

et pour $h=2\ldots,\ell$ et $j=1,\ldots,\ell$,

$$\mu\big(\mathcal{P},h,j+\ell,(s)_{\ell-2},(s')_{\ell-1}\big) = \mathbb{E}\Big(P_{|V_2|}(\xi_{s_2})\cdots P_{|V_{h-1}|}(\xi_{s_{h-1}}) \\ P_{|V_{h+1}|}(\xi_{s_{h+1}})\cdots P_{|V_\ell|}(\xi_\ell)\,P_{|V_1|}(\xi_{s'_1})\cdots P_{|V_{j-1}|}(\xi_{s'_{j-1}}P_{|V_{j+1}|}(\xi_{s'_{j+1}})\cdots P_{|V_\ell}(\xi_{s'_\ell})\Big).$$

Pour $h = 2, \dots, \ell$, on définit $\sum_{(h)}^{1}$ comme $\sum_{(h)'}^{1}$, mais avec $s_1 = s_h$ au lieu de $s_1 = s'_h$. De même, pour $h = 2, \dots, \ell$ et $j = 1, \dots, \ell$, $\sum_{(h),(j)'}^{1}$ désigne la somme sur tous les indices $s_1, \dots, s_\ell$ et $s'_1, \dots, s'_\ell$ tels que $s_2, \dots, s_\ell$ sont distincts ainsi que $s'_1, \dots, s'_\ell$, et $s_1 = s_h = s'_j$. Nous avons alors

$$\sum_{(0)'}^{1} p_{V_1}(s_1, N) \cdots p_{V_\ell}(s_\ell, N) \overline{p_{V_1}(s'_1, N)} \cdots \overline{p_{V_\ell}(s'_\ell, N)} \mu\big(\mathcal{P}, (s)_\ell, (s')_\ell\big) =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\big(P_{|V_1|}(\xi_0)\big) \sum_{s_1} p_{V_1}(s_1, N) \times \\
&\quad \sum_{(s)_{\ell-1}}^{\neq} \sum_{(s')_\ell}^{\neq} \mu\big(\mathcal{P}, (s)_{\ell-1}, (s')_\ell\big) p_{V_2}(s_2, N) \cdots p_{V_\ell}(s_\ell, N) \overline{p_{V_1}(s'_1, N)} \cdots \overline{p_{V_\ell}(s'_\ell, N)} \\
&\quad - \sum_{h=2}^{\ell} \sum_{(h)}^{1} \mathbb{E}\big(P_{|V_1|}(\xi_0) P_{|V_h|}(\xi_0)\big) \mu\big(\mathcal{P}, h, (s)_{\ell-1}, (s')_\ell\big) \\
&\quad p_{V_2}(s_2, N) \cdots p_\ell(s_\ell) \overline{p_{V_1}(s'_1, N)} \cdots \overline{p_{V_\ell}(s'_\ell, N)} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{(j)'}^{1} \mathbb{E}\big(P_{|V_1|}(\xi_0) P_{|V_j|}(\xi_0)\big) p_{V_1}(s_1, N) \cdots p_{V_\ell}(s_\ell, N) \overline{p_{V_1}(s'_1, N)} \cdots \overline{p_{V_\ell}(s'_\ell, N)} \\
&\quad + \sum_{h=2}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{(h),(j)'}^{1} \mathbb{E}\big(P_{|V_1|}(\xi_0)\big) P_{|V_h|}(\xi_0) P_{|V_j|}(\xi_0)\big) \mu\big(\mathcal{P}, h, j+\ell, (s)_{\ell-2}, (s')_{\ell-1}\big) \times \\
&\quad p_{V_2}(s_2, N) \cdots p_{V_\ell}(s_\ell, N) \overline{p_{V_1}(s'_1, N)} \cdots \overline{p_{V_\ell}(s'_\ell, N)} \\
&= \sum\nolimits_1 - \sum\nolimits_2 - \sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4 .
\end{aligned}$$

On a vu en (2.5.60) que $\mu\big(\mathcal{P}, \ell + j, (s)_{\ell-1}, (s')_{\ell-1}\big)$ est bornée uniformément en $(s)_{\ell-1}$ et $(s')_{\ell-1}$. De la même façon, on peut vérifier que $\mu\big(\mathcal{P}, (s)_{\ell-1}, (s')_\ell\big)$, $\mu\big(\mathcal{P}, j, (s)_{\ell-1}, (s')_\ell\big)$ et $\mu\big(\mathcal{P}, h, j+\ell, (s)_{\ell-2}, (s')_{\ell-1}\big)$ sont bornées uniformément en $(s)_{\ell-2}$ $(s)_{\ell-1}$, $(s')_{\ell-1}$ et $(s')_\ell$. Les trois dernières sommes $\sum_2$, $\sum_3$ et $\sum_4$ se traitent alors comme (2.5.59). Pour la première somme $\sum_1$, le raisonnement utilisé pour traiter (2.5.59) montre que

$$\sum_{(s)_{\ell-1}}^{\neq} \sum_{(s')_\ell}^{\neq} \left|\mu\big(\mathcal{P}, (s)_{\ell-1}, (s')_\ell\big) p_{V_2}(s_2, N) \cdots p_{V_\ell}(s_\ell, N) \overline{p_{V_1}(s'_1, N)} \cdots \overline{p_{V_\ell}(s'_\ell, N)}\right|$$

est majoré uniformément en N. D'après (2.5.53),

$$\sum_s p_{V_1}(s, N) = 0 \quad \text{si } |V_1| = 2,$$

et d'après (2.5.57), lorsque N tend vers l'infini,

$$\sum_s |p_{V_1}(s, N)| \longrightarrow 0, \quad \text{si } |V_1| \geq 3.$$

On en déduit que lorsque N tend vers l'infini,

$$\sum_{s_1} p_{V_1}(s_1, N)\times$$
$$\sum_{(s)_{\ell-1}}^{\neq}\sum_{(s')_\ell}^{\neq} \mu\big(\mathcal{P}, (s)_{\ell-1}, (s')_\ell\big) p_{V_2}(s_2, N)\cdots p_{V_\ell}(s_\ell, N)\overline{p_{V_1}(s'_1, N)}\cdots\overline{p_{V_\ell}(s'_\ell, N)}$$

tend vers 0. Donc $\sum_1$ converge vers 0. Ce qui termine la preuve de (2.5.48) et du Lemme 2.5.2.

Annexe A

Longue mémoire saisonnière et convergence vers le processus de Rosenblatt : méthode de la fonction caractéristique

A.1 Introduction

Dans cette annexe nous reprenons l'article [63] de Rosenblatt. Nous considérons des processus gaussiens stationnaires (X_n) dont covariance est de la forme (1.1.1),

$$r(n) = n^{-\alpha}\big(a_0 \cos n\lambda_0 + \ldots + a_m \cos n\lambda_m\big).$$

Les covariances des processus GARMA introduits par Gray *et al.* [35] sont exactement de cette forme.
Étant donnée une fonction H telle que $H(X_1)$ est dans L^2 et centrée, nous étudions la limite des sommes partielles $\sum_{j=1}^{[Nt]} H(X_j)$ correctement normalisées lorsque le rang de Hermite τ de H et le paramètre α sont liés par la relation

$$0 < \alpha\tau < 1, \tag{A.1.1}$$

c'est à dire lorsque la mémoire est longue.
Bien entendu, les résultats eux mêmes ne sont pas surprenants. Ils sont tout à fait conformes à ceux qui ont été obtenus au chapitre 1 dans la situation légèrement différente où la densité spectrale a la forme (1.1.2). C'est plutôt la démonstration qui fait la particularité de cette annexe. Nous avons écrit cet article à une époque où nous ne connaissions pas l'article de Rosenblatt. Nous avons eu recours à la méthode des fonctions caractéristiques utilisée par Taqqu [68], qui s'est trouvée tout à fait adaptable au cas saisonnier (1.1.1) au simple prix de résultats élémentaires sur les suites semi convergentes. Notre travail a fait l'objet en 1999 d'une prépublication [56]. Il faut remarquer qu'en 2000, Arcones a publié un article [3] où il traite la convergence des sommes partielles

en utilisant comme nous les techniques des fonctions caractéristiques. Il met comme hypothèses sur les processus les conclusions de notre lemme technique A.5.1.
L'inconvénient de la présente approche est qu'on ne voit pas comment la généraliser au cas où le rang de Hermite est supérieur à 2. Il est clair que la bonne démarche est celle de Rosenblatt et Giraitis que nous avons reprise dans le chapitre 1

A.2 Résultats principaux

Le premier théorème traite du cas où le rang de Hermite de H est 2. On y voit que les limites sont des combinaisons linéaires de processus de Rosenblatt indépendants.

Théorème A.2.1 *Supposons que la fonction H est de rang de Hermite $\tau = 2$ et que $r(n)$ vérifie les conditions de longue mémoire saisonnière* (1.1.1) *et* (A.1.1). *Alors la suite des sommes partielles normalisées*

$$Z_N(t) = N^{\alpha-1} L^{-1}(N) \sum_{j=1}^{[Nt]} H(X_j)\,, \quad 0 \leq t \leq 1$$

converge dans $D[0,1]$ vers le processus $Z(t)$ défini par

$$Z(t) = \frac{J_2}{\sqrt{(1-2\alpha)(2-2\alpha)}} \Big(\gamma_1 \bar{Z}_1(t) + \cdots + \gamma_m \bar{Z}_m(t) \Big) \tag{A.2.1}$$

avec

$$\bar{Z}_1(t) = \frac{\bar{Z}_1^{(1)}(t) + \bar{Z}_1^{(2)}(t)}{2}\,, \cdots, \bar{Z}_m(t) = \frac{\bar{Z}_m^{(1)}(t) + \bar{Z}_m^{(2)}(t)}{2}$$

où $\bar{Z}_1^{(1)}(t)\,, \bar{Z}_1^{(2)}(t)\,, \cdots, \bar{Z}_m^{(1)}(t)\,, \bar{Z}_m^{(2)}(t)$ sont des processus de Rosenblatt de même paramètre $1-\alpha$, indépendants (sauf éventuellement si $\lambda_0 = 0$, alors $\bar{Z}_1^{(1)}(t) = \bar{Z}_1^{(2)}(t)$, ou si $\lambda_m = \pi$, alors $\bar{Z}_m^{(1)}(t) = \bar{Z}_m^{(2)}(t)$).

De façon schématique on peut dire que les diverses fréquences λ_j dans (1.1.1) contribuent de façon indépendante à la limite des sommes partielles et que leurs contributions sont toutes des moyennes arithmétiques de deux processus de Rosenblatt identiques ou indépendants selon qu'il s'agit de fréquences égales ou non à 0 ou à π.

Le second théorème traite notamment du cas où le rang de Hermite de H est $\tau = 1$. On se place sous l'hypothèse de longue mémoire $\sum |r(k)| = \infty$. Il s'avère que la limite peut être selon le cas, un mouvement brownien fractionnaire ou une combinaison linéaire de processus de Rosenblatt.

Théorème A.2.2 *Supposons que la fonction de covariance $r(n)$ du processus $(X_n)_{n\geq 1}$ s'écrit sous la forme*

$$r(n) = \Big(\frac{1}{n^{\alpha'}} + \frac{\beta(n)}{n^{\alpha}} \Big) L(n), \qquad 0 < \alpha \leq \alpha' < 1,$$

où $L(n)$ est une fonction à variation lente à l'infini, et où

$$\beta(n) = \gamma_1 \cos n\lambda_0 + \cdots + \gamma_m \cos n\lambda_m, \quad 0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_m \leq \pi.$$

Alors
i) Si $\tau = 1$ et si $\alpha' < 2\alpha$, nous avons

$$A_N^{-1} \sum_{j=1}^{[Nt]} H(X_j) \overset{D[0,1]}{\longrightarrow} J_1 B_{1-\alpha'/2}(t),$$

où

$$A_N = \frac{N^{1-\alpha'/2}}{\big((1-\alpha')(1-\alpha'/2)\big)^{1/2}} L^{1/2}(N)$$

et $B_{1-\alpha'/2}(t)$ est le mouvement brownien fractionnaire de paramètre $1-\alpha'/2$.
ii) Si J_2, cœfficient de Hermite d'ordre 2 de H, n'est pas nul, et si $\alpha' > 2\alpha$, alors la suite des sommes partielles normalisées

$$Z_N(t) = N^{\alpha-1} L^{-1}(N) \sum_{j=1}^{[Nt]} H(X_j)\,, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

converge dans $D[0,1]$ vers le même processus limite $Z(t)$ défini par (A.2.1) dans le Théorème A.2.1.

On voit que, si dans la covariance, la composante à variation régulière $n^{-\alpha'}$ est suffisamment prononcée (c'est à dire si $\alpha' < 2\alpha$), la limite est celle que l'on aurait obtenue si seule cette composante était présente. Par contre si cette composante est peu marquée (c'est à dire si $\alpha' > 2\alpha$), la limite est dictée par la composante saisonnière et se trouve être la même que pour une fonction H de rang de Hermite $\tau = 2$.

A.3 Démonstration du Théorème A.2.2

Il s'agit de trouver le polynôme de Hermite dominant dans la décomposition (2.8).
Preuve de *i*). Tout d'abord, il est facile de voir que lorsque N tend vers l'infini, nous avons

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{j=1}^{N} H_1(X_j)\Big) \sim A_N^2$$

et donc d'après Taqqu ([68], Lemme 5.1),

$$A_N^{-1} \sum_{j=1}^{[Nt]} X_j \overset{D[0,1]}{\longrightarrow} B_{1-\alpha'/2}(t). \tag{A.3.1}$$

Deux cas se présentent alors : $\alpha \geq 1/2$ ou $\alpha < 1/2$.
Si $\alpha \geq 1/2$ on a

$$\sum_{k=1}^{N} r^2(k) \sim L_1(N),$$

où $L_1(N)$ est une fonction à variation lente à l'infini. Donc le processus $\big(H_1^*(X_j)\big)_{j\geq 1}$ obtenu à partir de la fonction $H_1^*(x) = H(x) - x$ dont le rang de Hermite est au moins 2, est à mémoire courte. On sait alors d'après Breuer et Major [10] (Théorème 1') que

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{j=1}^{N} H_1^*(X_j)\Big) = O\big(NL_1(N)\big), \tag{A.3.2}$$

d'où il résulte que le polynôme H_1 domine le reste du développement de Hermite de H.
Si $\alpha < 1/2$, on a directement lorsque N tend vers l'infini

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{j=1}^{N} H_2(X_j)\Big)= N^{2-2\alpha}L_2(N) = o\big(A_N^2\big),$$

où $L_2(N)$ est une fonction à variation lente à l'infini. Par ailleurs, on verra dans la section 5 de cette annexe que dans ce cas, en posant

$$H^*(x) = \sum_{q=3}^{+\infty} \frac{J_q}{q!} H_q(x),$$

on a

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{j=1}^{N} H^*(X_j)\Big) = o\Big(\mathrm{Var}\Big(\sum_{j=1}^{N} H_2(X_j)\Big)\Big), \tag{A.3.3}$$

ce qui prouve que le polynôme H_1 domine dans ce cas aussi. Dans les deux cas la conclusion découle alors de la convergence (A.3.1).
Preuve de *ii*). Si $\alpha' > 2\alpha$, l'inégalité $\alpha < 1/2$ est vérifiée et de ce fait on a

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{j=1}^{N} H_2(X_j)\Big) = N^{2-2\alpha}L_2(N).$$

Il en résulte que

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{j=1}^{N} H_1(X_j)\Big) \;\sim\; A_N^2(N) \;=\; o\Big(\mathrm{Var}\Big(\sum_{j=1}^{N} H_2(X_j)\Big)\Big),$$

ce qui prouve, en utilisant à nouveau (A.3.3), que H_2 est le polynôme dominant. Pour le reste, on peut appliquer le Théorème A.2.1, puisque le Lemme A.5.1 qui est à la base de la démonstration de ce théorème reste valable : en effet, si $\alpha < \alpha'$, par un raisonnement analogue à celui fait dans la première étape de la démonstration du Lemme A.5.1 (voir section 5), on montre que la contribution de $L(N)/N^{\alpha'}$ est négligeable dans l'évaluation de la limite dans ce lemme $\square$

Remarque : Le Théorème A.2.2 a été énoncé ainsi par souci d'homogénéité. Il reste vrai si on remplace la condition sur $r(n)$ par les deux hypothèses suivantes :

$$r(n) = \frac{\beta(n)}{n^\alpha} L(n), \text{ et } \qquad f(\lambda) = |\lambda|^{2\gamma} \phi(\lambda),$$

où f est la densité spectrale de $(X_n)_{n\geq 1}$ et où ϕ est une fonction continue en 0, $\phi(0) \neq 0$ et $\gamma \in]-1/2, 1/2[$.

Il faut alors remplacer d'une part $i)$ du Théorème A.2.2 par

$i')$ Si $\tau = 1$ et si $\gamma < \min\{0, \alpha - 1/2\}$ alors

$$N^{\gamma-1/2} \sum_{j=1}^{[Nt]} H(X_j) \overset{D[0,1]}{\longrightarrow} J_1 \sqrt{K}\, B_{1/2-\gamma}(t),$$

où

$$K = 4\phi(0) \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2\gamma-2} \sin^2(\lambda/2) d\lambda, \tag{A.3.4}$$

et d'autre part, remplacer dans $ii)$ du Théorème A.2.2 la condition $\alpha' > 2\alpha$ par $\alpha < 1/2$ et $\gamma > \alpha - 1/2$.

A.4 Comparaison du Théorème A.2.1 et des résultats de Rosenblatt

Dans [63], Rosenblatt considère la suite des processus $\left(Y_n^N(\beta)\right)_{N\geq 1}$ définie par

$$Y_n^N(\beta) = N^{\alpha\tau/2-1} L(N)^{-\tau/2} \sum_{j=N(n-1)}^{Nn-1} H(X_j) e^{-ij\beta}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

où β est un paramètre donné et la covariance de $(X_n)_{n\geq 1}$ est de la forme

$$r(n) = |n|^{-\alpha} L(|n|) \sum_{j=0}^{m} s_j \cos n\lambda_j, \quad s_j > 0, \quad 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_m.$$

Il démontre que si $\tau\alpha < 1$, les lois fini–dimensionnelles du processus $\left(Y_n^N(\beta)\right)_{N\geq 1}$ convergent lorsque N tend vers l'infini, vers celles d'un processus $Y_n^*(\beta)$, défini par

$$\begin{aligned} Y_n^*(\beta) = C^{-\frac{\tau}{2}} \frac{J_\tau}{\tau!} \int_{[-\pi,\pi]^\tau} & f_\tau^{(n)}(x_1, \ldots, x_\tau) \\ & {\sum}' \left(s_{j_1} \frac{1+\delta_{0,j_1}}{2} \cdots s_{j_\tau} \frac{1+\delta_{0,j_\tau}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} W_{j_1}(dx_1) \cdots W_{j_\tau}(dx_\tau), \end{aligned} \tag{A.4.1}$$

expression dans laquelle

$$\delta_{0,j} = 1 \text{ si } j = 0, \text{ et } 0 \text{ sinon}, \quad s_{-j} = s_j, \quad \text{et} \quad C = 2\Gamma(\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2},$$

et les fonctions $f_\tau^{(n)}$ sont définies par

$$f_\tau^{(n)}(x_1, \cdots, x_\tau) = e^{in(x_1+\cdots+x_\tau)} \frac{e^{i(x_1+\cdots+x_\tau)} - 1}{i(x_1 + \cdots + x_\tau)} |x_1|^{\frac{\alpha-1}{2}} \cdots |x_\tau|^{\frac{\alpha-1}{2}}.$$

La somme $\sum'$ est étendue à tous les τ–uplets $(j_1, \ldots, j_\tau) \in \{-m, \ldots, m\}^\tau$ vérifiant $\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} = \beta \mod 2\pi$, avec $\lambda_{-j} = -\lambda_j$.
Les mesures aléatoires W_j par rapport auxquelles on intègre dans (A.4.1) sont celles définies dans le chapitre 1.

Si on se restreint à notre situation où $\tau = 2$ et $\beta = 0$, on trouve que

$$\begin{aligned} Y_n^*(0) &= C^{-1}\frac{J_2}{2}\int f_2^{(n)}(x,y) \\ &\quad \sum{}' \left(s_{j_1}\frac{1+\delta_{0,j_1}}{2} s_{j_2}\frac{1+\delta_{0,j_2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} W_{j_1}(dx)W_{j_2}(dy). \end{aligned} \tag{A.4.2}$$

L'adéquation du Théorème A.2.1 au résultat de Rosenblatt dans ce cas a déjà été démontrée dans la section 1.4.3 du premier chapitre, car nous savons que la convergence des sommes partielles normalisées vers un processus de Rosenblatt est assurée dès que $Y_n^N(0)$ converge vers

$$Y_n = C^{-1}\int f_2^{(n)}(x,y)W(dx)W(dy), \tag{A.4.3}$$

où W est une mesure aléatoire du bruit blanc gaussien standard, (voir Dobrushin [17], Théorème 2).

A.5 Démonstration du Théorème A.2.1

Elle suit les mêmes lignes que celle du Théorème 6.1. de Taqqu [68]. Elle est faite en deux parties.

Dans la première partie nous montrons la possibilité de ramener le problème à $H = H_2$, en montrant au passage l'équitension de $(Z_N(t))_{N\geq 1}$ dans $D[0,1]$.
Dans la deuxième partie nous faisons la preuve pour $H = H_2$. L'outil utilisé dans cette dernière partie est le lemme technique suivant, qui nous permet d'adapter la démonstration de la Proposition 6.1. de Taqqu [68]. La preuve de ce lemme est faite à la fin de cette annexe.

Lemme A.5.1 *Supposons que*

$$r(n) = \frac{\gamma_1\cos n\lambda_1 + \cdots + \gamma_m\cos n\lambda_m}{n^\alpha}L(n)$$

où $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_m < \pi$ *et* $0 < \alpha < 1/2$.
Alors, quand N *tend vers l'infini, pour tout* $k \geq 2$

$$\sum_{i_1=1}^{[Na_1]} \cdots \sum_{i_k=1}^{[Na_k]} r(i_1 - i_2) \cdots r(i_k - i_1) \sim 2^{1-k}\big(\gamma_1^k + \cdots + \gamma_m^k\big) S_\alpha(a^{(k)}) n^{k(1-\alpha)} L^k(n),$$

où $S_\alpha(a^{(k)})$ *est une constante définie ultérieurement dans* (A.5.8).
L'équivalence précédente reste valable même si $\lambda_1 = 0$, *(resp.* $\lambda_m = \pi$*), mais il faut remplacer dans le second membre* γ_1^k *par* $2^{k-1}\gamma_1^k$, *(resp.* γ_m^k *par* $2^{k-1}\gamma_m^k$*).*

Première partie : réduction du problème et équitension. Nous savons (voir Rozanov [64]) que pour tous i, j, k, ℓ

$$\mathrm{Var}\big(H_k(X_i)H_\ell(X_j)\big) = k!\delta_{k,\ell} r^k(i-j), \quad \text{où } \delta_{k,\ell} = 1 \text{ si } k = \ell, \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

En appliquant le lemme précédent avec $k = 2$, on trouve alors que lorsque N tend vers l'infini

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{N} H_2(X_j)\right) \sim C(1,m) N^{2(1-\alpha)} L^2(N), \tag{A.5.1}$$

où $C(1,m)$ est une constante non nulle qui prend des valeurs différentes selon que $\lambda_1 = 0$ ou non, et selon que $\lambda_m = \pi$, ou non.
Posons maintenant

$$H^*(x) = \sum_{q=3}^{+\infty} \frac{J(q)}{q!} H_q(x)\,.$$

Dans [68] (démonstration du Théorème 3.1), Taqqu a prouvé que

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{N} H^*(X_j)\right) = o(N^{2(1-\alpha)}), \quad N \to +\infty\,. \tag{A.5.2}$$

Sa démonstration repose sur l'équivalence (A.5.1) que nous venons d'établir et sur le fait que $r(k)$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini. Son résultat est donc valable ici, et nous ne le démontrons pas.

En rassemblant (A.5.1) et (A.5.2) on trouve que, lorsque N tend vers l'infini,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{N} H(X_j)\right) &\sim \mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{J_2}{2} H_2(X_j)\right) \\ &\sim \left(\frac{J_2}{2}\right)^2 C(1,m) N^{2(1-\alpha)}.\end{aligned} \tag{A.5.3}$$

On peut conclure d'une part, d'après le Lemme 2.1 de Taqqu [68] et la dernière équivalence (A.5.3) que la suite $(Z_N(t))_{N\geq 1}$ est équitendue dans $D[0,1]$ quelque soient

$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ dans $[0,\pi]$.
D'autre part, (A.5.2) nous montre que pour tous $t_1,\ldots,t_p$ dans $[0,1]$,

$$N^{\alpha-1}\Big(\sum_{j=1}^{[Nt_1]} H^*(X_j),\ldots,\sum_{j=1}^{[Nt_p]} H^*(X_j)\Big)$$

converge dans L^2 (et donc en probabilité) vers 0.
Pour établir la convergence des lois fini-dimensionnelles de $(Z_N(t))_{N\geq 1}$ vers celles de

$$\frac{J_2}{2}\Big(\gamma_1\frac{\bar{Z}_1^{(1)}(t)+\bar{Z}_1^{(2)}(t)}{2}+\cdots+\gamma_m\frac{\bar{Z}_m^{(1)}(t)+\bar{Z}_m^{(2)}(t)}{2}\Big),$$

il suffit alors de montrer la convergence des lois fini-dimensionnelles de

$$Z_{N,2}(t)=N^{\alpha-1}L^{-1}(N)\sum_{j=1}^{[Nt]}H_2(X_j)$$

vers celles de

$$\xi(t)=\gamma_1\frac{\bar{Z}_1^{(1)}(t)+\bar{Z}_1^{(2)}(t)}{2}+\cdots+\gamma_m\frac{\bar{Z}_m^{(1)}(t)+\bar{Z}_m^{(2)}(t)}{2}.$$

Deuxième partie : convergence des lois fini-dimensionnelles de $(Z_{N,2}(t))_{N\geq 1}$ vers celles de $\xi(t)$: Nous adoptons ici l'essentiel des notations du Théorème 6.1. de Taqqu [68] :
si $t^{(p)}=(t_1,\ldots,t_p)$ avec $0<t_1\leq\ldots\leq t_p\leq 1$, et $p\geq 1$, et si $s^{(p)}=(s_1,\ldots,s_p)$ où $s_1,\ldots,s_p$ sont des entiers strictement positifs, on pose

$$a^{(k)} = (a_1,\ldots,a_k) \qquad \text{pour} \quad k=s_1+\ldots+s_p \tag{A.5.4}$$

où

$$\begin{cases} a_1 & =\cdots = a_{s_1} & = t_1 \\ a_{s_1+1} & =\cdots = a_{s_1+s_2} & = t_2 \\ \vdots & & \\ a_{s_1+\cdots+s_{p-1}+1} & =\cdots = a_k & = t_p\,. \end{cases} \tag{A.5.5}$$

Nous voulons montrer que pour tous réels $u_1,\ldots,u_p$, lorsque N tend vers l'infini,

$$\sum_{\ell=1}^{p} u_\ell Z_{N,2}(t_\ell) \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{\ell=1}^{p} u_\ell \xi(t_\ell). \tag{A.5.6}$$

Nous savons d'après Taqqu [68] (fin de la preuve de la Proposition 6.1) que si $\bar{Z}(t)$ est un processus de Rosenblatt de paramètre $1-\alpha$, la fonction caractéristique ψ de

$$\sum_{\ell=1}^{p} u_\ell \bar{Z}(t_\ell)$$

est analytique dans un voisinage de l'origine (dépendant de $u_1, \ldots, u_p$) et admet, dans ce voisinage une représentation de la forme

$$\psi(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(2iz)^k}{k} \sum\nolimits_k u_1^{s_1} \ldots u_p^{s_p} S_\alpha(a^{(k)}) \right\} \tag{A.5.7}$$

où $\sum_k$ est étendue à tous les p-uplets $(s_1, \ldots, s_p)$ vérifiant $s_1, \ldots, s_p \geq 0$ et $s_1 + \cdots + s_p = k$, où $a^{(k)}$ est défini par (A.5.4) et (A.5.5), et

$$S_\alpha(a^{(k)}) = \int_0^{a_1} \ldots \int_0^{a_k} dx_1 \ldots dx_k \, |x_1 - x_2|^{-\alpha} \ldots |x_k - x_1|^{-\alpha} . \tag{A.5.8}$$

Soit

$$\psi_N(z) = \mathbb{E} \exp\left\{ iz \sum_{\ell=1}^{p} u_\ell Z_{N,2}(t_\ell) \right\} .$$

En procédant comme dans Taqqu [68] (démonstration de la Proposition 6.1) et en utilisant le Lemme A.5.1, on montre aisément qu'il existe un voisinage de l'origine dans lequel

$$\psi_N(z) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \psi^2\Big(\frac{\gamma_1}{2} z\Big) \cdots \psi^2\Big(\frac{\gamma_m}{2} z\Big) , \quad \text{si } 0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_m < \pi . \tag{A.5.9}$$

En réalité il faut montrer aussi les trois convergences suivantes

$$\psi_n(z) \overset{N \to \infty}{\longrightarrow} \psi(\gamma_1 z) \psi^2\Big(\frac{\gamma_2}{2} z\Big) \cdots \psi^2\Big(\frac{\gamma_m}{2} z\Big) , \quad \text{si } \lambda_1 = 0 ,$$

$$\psi_N(z) \overset{N \to \infty}{\longrightarrow} \psi^2\Big(\frac{\gamma_1}{2} z\Big) \cdots \psi^2\Big(\frac{\gamma_{M-1}}{2} z\Big) \psi(\gamma_m z), \quad \text{si } \lambda_m = \pi ,$$

$$\psi_N(z) \overset{N \to \infty}{\longrightarrow} \psi(\gamma_1 z) \psi^2\Big(\frac{\gamma_2}{2} z\Big) \cdots \psi^2\Big(\frac{\gamma_{M-1}}{2} z\Big) \psi(\gamma_m z) , \text{ si } \lambda_1 = 0 , \text{ et } \lambda_m = \pi ,$$

mais elles s'obtiennent de la même façon car $\cos 0 = \cos^2 \pi = 1$.
Il en résulte, par application du Théorème 7.1.1. de Lukacs [49], que les sous-suites convergentes de la suite $\left(\sum_{\ell=1}^{p} u_\ell Z_{n,2}(t_\ell) \right)_{n \geq 1}$ ont la même limite $\sum_{\ell=1}^{p} u_\ell \xi(t_\ell)$ puisque ψ est analytique dans un voisinage de 0.
La suite $\left(\sum_{\ell=1}^{p} u_\ell Z_{N,2}(t_\ell) \right)_{N \geq 1}$ étant tendue, (A.5.6) est alors démontrée.

A.6 Démonstration du Lemme A.5.1

Tout d'abord, nous donnons un lemme qui sera utile par la suite, et qui est une conséquence du théorème de Karamata (voir Ibragimov et Linnik [41]).

Lemme A.6.1 *Soient $\alpha > 0$, et $L(t)$ une fonction à variation lente. Alors il existe deux fonctions $L_1(t)$ et $L_2(t)$ à variation lente telles que $L(t) = L_1(t) + L_2(t)$ et*

$$L_2(t) = o\big(L_1(t)\big)$$

et $n^{-\alpha} L_1(n)$ est une fonction décroissante.

Première étape : Nous montrons tout d'abord qu'il suffit de remplacer L par la fonction L_1 du Lemme A.6.1.
Posons par commodité

$$\rho(n) = n^\alpha \text{ si } n > 0 \text{ et } \rho(0) = 1$$

Nous avons alors d'après le Lemme A.6.1, et pour tout $k \geq 2$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1=1}^{[Na_1]} \cdots \sum_{i_k=1}^{[Na_k]} r(i_1 - i_2) \cdots r(i_k - i_1) = \\
&\quad \sum_{i_1=1}^{[Na_1]} \cdots \sum_{i_k=1}^{[Na_k]} \frac{\beta\big(i_1 - i_2\big)}{\rho\big(|i_1 - i_2|\big)} L_1\big(|i_1 - i_2|\big) \cdots \frac{\beta\big(i_k - i_1\big)}{\rho\big(|i_k - i_1|\big)} L_1\big(|i_k - i_1|\big) + \\
&\quad \sum_{i_1=1}^{[Na_1]} \cdots \sum_{i_k=1}^{[Na_k]} \sum_{J,J'} \prod_{(j,j')\in J\times J'} \frac{\beta\big(i_j - i_{j+1}\big)}{\rho\big(|i_j - i_{j+1}|\big)} L_1\big(|i_j - i_{j+1}|\big) o\Big(L_1\big(|i_{j'} - i_{j'+1}|\big)\Big)
\end{aligned} \tag{A.6.1}$$

où, dans le dernier terme, la somme $\sum_{J,J'}$ est étendue à tous les sous–ensembles complémentaires J, J' dans $\{1, \cdots, k\}$ avec $J' \neq \phi$. Comme la somme sur les indices $i_1, \ldots, i_k$ dont deux sont à distance constante est négligeable (lorsque N tend vers l'infini) devant la somme sur tous les indices, le dernier terme de droite dans (A.6.1)) est donc négligeable devant

$$\sum_{i_1=1}^{[Na_1]} \cdots \sum_{i_k=1}^{[Na_k]} \frac{L_1\big(|i_1 - i_2|\big)}{\rho\big(|i_1 - i_2|\big)} \cdots \frac{L_1\big(|i_k - i_1|\big)}{\rho\big(|i_k - i_1|\big)} \sim S_\alpha\big(a^{(k)}\big) N^{k(1-\alpha)} L^k(N)$$

qui est précisement, à un cœfficient près, l'équivalent annoncé dans le Lemme A.5.1. Par exemple, en prenant $J' = \{1\}$, comme pour tout $\varepsilon > 0$ il existe M tel que pour tout $h \geq M$, $o\big(L_1(h)\big) \geq \varepsilon L_1(h)$, on peut écrire pour un ε donné

$$\begin{aligned}
&\sum o\Big(\frac{L_1\big(|i_1 - i_2|\big)}{\rho\big(|i_1 - i_2|\big)}\Big) \frac{L_1\big(|i_2 - i_3|\big)}{\rho\big(|i_2 - i_3|\big)} \cdots \frac{L_1\big(|i_k - i_1|\big)}{\rho\big(|i_k - i_1|\big)} \\
&\quad \leq \;\; C \sum_{|i_1 - i_2| \leq M} \frac{L_1\big(|i_2 - i_3|\big)}{\rho\big(|i_2 - i_3|\big)} \cdots \frac{L_1\big(|i_k - i_1|\big)}{\rho\big(|i_k - i_1|\big)} + \varepsilon \sum \frac{L_1\big(|i_1 - i_2|\big)}{\rho\big(|i_1 - i_2|\big)} \cdots \frac{L_1\big(|i_k - i_1|\big)}{\rho\big(|i_k - i_1|\big)}
\end{aligned}$$

où C est une constante.
La première somme dans le second membre est majorée par

$$\sum_{|\gamma| \leq M} \sum_{i_1 - i_2 = \gamma} \frac{L_1\big(|i_2 - i_3|\big)}{\rho\big(|i_2 - i_3|\big)} \cdots \frac{L_1\big(|i_k - i_1|\big)}{\rho\big(|i_k - i_1|\big)}.$$

Or nous savons d'après les propriétés des sommes de Riemann que lorsque N tend vers l'infini,

$$\sum_{i_1-i_2=\gamma}\frac{L_1\big(|i_2-i_3|\big)}{\rho\big(|i_2-i_3|\big)}\cdots\frac{L_1\big(|i_k-i_1|\big)}{\rho\big(|i_k-i_1|\big)}=\sum_{i_2,\dots,i_k}\frac{L_1\big(|i_2-i_3|\big)}{\rho\big(|i_2-i_3|\big)}\cdots\frac{L_1\big(|i_k-i_2-\gamma|\big)}{\rho\big(|i_k-i_2-\gamma|\big)}$$
$$\sim\ n^{(k-1)(1-\alpha)}L^{k-1}(n)\int_{[-1,1]^{k-1}}|x_2-x_3|^{-\alpha}\cdots\Big|x_k-x_2-\frac{\gamma}{n}\Big|^{-\alpha}dx_2\cdots dx_k.$$

Par ailleurs, il est facile de voir que pour tout γ, la limite supérieure de l'intégrale précédente est majorée par

$$\left(\int_{-1}^{1}|y|^{-2\alpha}\,dy\right)^{\frac{k-1}{2}}.$$

Notons au passage que nous avons en même temps démontré que

$$\sum\nolimits_{\neq}\frac{L_1(|i_1-i_2|)}{\rho(|i_1-i_2|)}\cdots\frac{L_1(|i_k-i_1|)}{\rho(|i_k-i_1|)}\sim S_\alpha(a^{(k)})n^{k(1-\alpha)}L^k(n)\,, \qquad \text{(A.6.2)}$$

formule dans laquelle $\sum_{\neq}$ est étendue aux indices $i_1,\dots,i_k$ tous différents, et variant respectivement dans $\{1,\dots,[Na_1]\},\dots,\{1,\dots,[Na_k]\}$, et qui sera utile par la suite.

Nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme A.6.2 *Pour tous $\lambda_1,\dots,\lambda_k$, $k\ge 1$, on a*

$$\cos\lambda_1\dots\cos\lambda_k=2^{-k}\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k}\cos\Big(\sum_{j=1}^{k}(-1)^{\varepsilon_j}\lambda_j\Big)\,, \qquad \text{(A.6.3)}$$

la somme étant étendue à tous les k-uplets $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)$ tels que $\varepsilon_j=0$ ou 1 pour $j=1,\dots,k$.

Lemme A.6.3 *Si $(a_j)_{j\ge1}$ est une suite décroissante de nombres réels positifs alors on a pour tous a dans $\mathbb{R}$, N dans $\mathbb{N}^*$, λ dans $]0,\pi[$*

$$\Big|\sum_{j=1}^{n}a_j\cos(j\lambda+a)\Big|\le\frac{2a_1}{\sin\lambda/2}\,. \qquad \text{(A.6.4)}$$

Le Lemme A.6.2 se démontre facilement par récurrence.
Pour la démonstration du Lemme A.6.3, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}a_j\cos j\lambda\ =\\ &\qquad(a_1-a_2)\cos\lambda+\cdots+(a_{n-1}-a_n)\big(\cos\lambda+\cdots+\cos(n-1)\lambda\big)\\ &\qquad+a_n\big(\cos\lambda+\cdots+\cos n\lambda\big)\,,\end{aligned}$$

et de voir que pour tout $\tau \geq 1$,

$$\Big|\sum_{j=1}^{\tau} \cos j\lambda\Big| \leq \frac{1}{\sin \lambda/2},$$

ainsi qu'un résultat analogue où cosinus est remplacé par sinus. □
Nous avons lorsque $M \geq 2$

$$\begin{aligned} & r(i_1 - i_2)\cdots r(i_k - i_1) = \\ & \quad \gamma_1^k \cos(i_1 - i_2)\lambda_1 \cdots \cos(i_k - i_1)\lambda_1 + \cdots + \gamma_m^k \cos(i_1 - i_2)\lambda_m \cdots \cos(i_k - i_1)\lambda_m \\ & \quad + \sum_{J_1,\cdots,J_m} \gamma_1^{\# J_1} \cdots \gamma_m^{\# J_m} \prod_{j_1 \in J_1} \cdots \prod_{j_m \in J_m} \cos(i_{j_1} - i_{j_1+1})\lambda_1 \cdots \cos(i_{j_m} - i_{j_m+1})\lambda_m, \end{aligned}$$

où $\# J_1, \cdots, \# J_m$ sont les cardinaux respectifs de $J_1, \cdots, J_m$, qui sont disjoints, inclus strictement dans $\{1, \cdots, k\}$ et $J_1 \bigcup \cdots \bigcup J_m = \{1, \cdots, k\}$.
Le procédé que nous allons utiliser maintenant peut s'adapter facilement pour montrer que pour $J_1, \cdots, J_m$ donnés, la contribution de

$$\prod_{j_1 \in J_1} \cdots \prod_{j_m \in J_m} \cos(i_{j_1} - i_{j_1+1})\lambda_1 \cdots \cos(i_{j_m} - i_{j_m+1})\lambda_m$$

sera négligeable dans l'évaluation de

$$\sum\nolimits_{\neq} r(i_1 - i_2) \cdots r(i_k - i_1)\,.$$

D'après (A.6.3) nous pouvons écrire pour un λ donné dans $]0, \pi[$

$$\begin{aligned} & \sum\nolimits_{\neq} \frac{L_1(|i_1 - i_2|)}{\rho(|i_1 - i_2|)} \cos(i_1 - i_2)\lambda \cdots \frac{L_1(|i_k - i_1|)}{\rho(|i_k - i_1|)} \cos(i_k - i_1)\lambda = \\ & \quad 2^{-k} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k} \sum\nolimits_{\neq} \frac{L_1(|i_1 - i_2|)}{\rho(|i_1 - i_2|)} \cdots \frac{L_1(|i_k - i_1|)}{\rho(|i_k - i_1|)} \cos\Big(\sum_{j=1}^{k} (-1)^{\varepsilon_j}(i_j - i_{j+1})\Big)\lambda \end{aligned}$$

où par convention $i_{k+1} = i_1$.

Nous avons, dans $\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}$ deux catégories de termes : 1) les deux termes égaux correspondant à $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_k$ ($= 0$ ou 1) et qui nous donnent, en affectant à λ respectivement les valeurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, et en utilisant l'équivalence (A.6.2), la quantité à droite dans le Lemme A.5.1.
2) Les termes pour lesquels $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ ne sont pas tous égaux. Le but de la 2e étape est de démontrer que ces derniers termes sont négligeables.

Deuxième étape : fixons $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k$ non tous égaux. On va montrer que

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_{\neq} \frac{L_1(|i_1 - i_2|)}{\rho(|i_1 - i_2|)} \cdots \frac{L_1(|i_k - i_1|)}{\rho(|i_k - i_1|)} \cos\Big(\sum_{j=1}^{k} (-1)^{\varepsilon_j}(i_j - i_{j+1})\Big)\lambda & \\ = O(n^{(k-1)(1-\alpha)}). & \qquad \text{(A.6.5)} \end{aligned}$$

Nous pouvons décomposer $\sum_{\neq}$ comme suit

$$\sum\nolimits_{\neq} = \sum_{\pi \in \mathcal{P}} \sum\nolimits_{\pi}$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, k\}$ et où pour une permutation π de $\{1, \ldots, k\}$, $\sum_{\pi}$ est étendue à tous les indices $i_1, \ldots, i_k$ tels que

$$i_{\pi(1)} > \ldots > i_{\pi(k)} .$$

Soit π une permutation de $\{1, \ldots, k\}$. Comme $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ ne sont pas tous égaux, il est clair qu'il existe un sous-ensemble (non vide) J de $\{1, \ldots, k-1\}$ tel que l'on a (au signe près) :

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{\varepsilon_j} (i_j - i_{j+1}) = 2 \sum_{j \in J} (i_j - i_{j+1}) .$$

Il existe un entier positif $\tau < k/2$, et des entiers $j_1, \ldots, j_\tau$, $j'_1, \ldots, j'_\tau$ tous différents dans $\{1, \ldots, k\}$ tels que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} (i_j - i_{j+1}) &= \sum_{h=1}^{\tau} (i_{j_h} - i_{j'_h}) \\ &= \sum_{h=1}^{\tau} \Big(i_{\pi(\pi^{-1}(j_h))} - i_{\pi(\pi^{-1}(j'_h))} \Big) . \end{aligned}$$

Nous pouvons noter $\pi^{-1}(j_1), \ldots, \pi^{-1}(j_\tau)$, après les avoir mis dans un ordre croissant, $q_1, \ldots, q_\tau$, et par $q'_1, \ldots, q'_\tau$ de la même façon $\pi^{-1}(j'_1), \ldots, \pi^{-1}(j'_\tau)$.
Nous avons alors $q_1 < \ldots < q_\tau$, et $q'_1 < \ldots < q'_\tau$ et

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{\varepsilon_j} (i_j - i_{j+1}) = 2 \sum_{h=1}^{\tau} \big(i_{\pi(q_h)} - i_{\pi(q'_h)} \big) .$$

Posons $q = \min(q_1, q'_1)$, $q' = \max(q_1, q'_1)$. On a

$$i_{\pi(q)} - i_{\pi(q')} = i_{\pi(q)} - i_{\pi(q+1)} + \cdots + i_{\pi(q'-1)} - i_{\pi(q')} .$$

On peut développer de la même façon les autres différences $i_{\pi(q_h)} - i_{\pi(q'_h)}$, $h = 2, \ldots, m$, et on constate qu'elles ne font pas intervenir $i_{\pi(q)} - i_{\pi(q+1)}$.
Si on pose pour chaque $j = 1, \ldots, k-1$, $s_j = i_{\pi(j)} - i_{\pi(j+1)}$, on trouve que

$$\cos\Bigg(\sum_{j=1}^{k} (-1)^{\varepsilon_j} (i_j - i_{j+1}) \Bigg) \lambda = \cos 2(s_q + A_q)\lambda , \tag{A.6.6}$$

où A_q est une combinaison de $s_1, \ldots, s_{q-1}$, $s_{q+1}, \ldots, s_{k-1}$.
D'autre part, il est clair que nous pouvons écrire pour tout $j = 1, \ldots, k$

$$|i_j - i_{j+1}| = \sum_{h=\pi^{-1}(j) \wedge \pi^{-1}(j+1)}^{\pi^{-1}(j) \vee \pi^{-1}(j+1) - 1} s_h \;=:\; \Delta_j . \tag{A.6.7}$$

Le domaine de sommation de $\sum_\pi$ défini auparavant par $i_{\pi(1)} > \cdots > i_{\pi(k)}$ et $1 \leq i_j \leq [Na_j]$ pour tout $j = 1, \ldots, k$, peut aussi être défini par $s_1, \ldots, s_{k-1}$ et $i_{\pi(k)}$ avec les conditions suivantes :

$$\forall h, \ell, \quad 1 \leq h \leq \ell \leq k-1, \quad 0 < s_h + \cdots + s_\ell < [Na_{\pi(h)}]. \tag{A.6.8}$$

$$1 \leq i_{\pi(k)} \leq \min\left([N_a \pi(k)], \min_{1\leq h\leq k-1}([N_a \pi(h)] - (s_h + \cdots + s_{k-1}))\right). \tag{A.6.9}$$

Fixons donc λ dans $]0, \pi[$. On a alors

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_\pi &= \frac{L_1(|i_1 - i_2|)}{\rho(|i_1 - i_2|)} \cdots \frac{L_1(|i_k - i_1|)}{\rho(|i_k - i_1|)} \cos\left(\sum_{j=1}^{k} (-1)^{\varepsilon_j}(i_j - i_{j+1})\right)\lambda \\ &= \sum_{s_1, \cdots, s_{k-1}} \sum_{i_{\pi(k)}} \frac{L_1(\Delta_1) \cdots L_1(\Delta_k)}{\rho(\Delta_1) \cdots \rho(\Delta_k)} \cos 2(s_q + A_q)\lambda\end{aligned}$$

où les deux dernières sommes sont étendues respectivement à tous les $(k-1)$–uplets $(s_1, \cdots, s_{k-1})$ vérifiant (A.6.8), et $i_{\pi(k)}$ vérifiant(A.6.9).
Comme $i_{\pi(k)}$ n'apparaît pas dans les quantités à sommer, on a alors :

$$\sum_{i_{\pi(k)}} \frac{L_1(\Delta_1) \cdots L_1(\Delta_k)}{\rho(\Delta_1) \cdots \rho(\Delta_k)} \cos 2(s_q + A_q)\lambda = a(s_1, \ldots, s_{k-1}) \cos 2(s_q + A_q)\lambda \tag{A.6.10}$$

où

$$\begin{aligned}&a(s_1, \ldots, s_{k-1}) = \\ &\quad \frac{L_1(\Delta_1) \cdots L_1(\Delta_k)}{\rho(\Delta_1) \cdots \rho(\Delta_k)} \min\left([N_a \pi(k)], \min_{1\leq h\leq k-1}\left([Na_{\pi(h)}] - (s_h + \cdots + s_{k-1})\right)\right).\end{aligned}$$

Soit $(s_1, \ldots, s_{q-1}, s_{q+1} \ldots, s_{k-1})$ un $(k-2)$-uplet d'entiers positifs.
Notons par $\mathcal{A}_q$ l'ensemble des entiers $s_q > 0$ tels que
$(s_1, \ldots, s_{q-1}, s_q, s_{q+1}, \ldots, s_{k-1})$ vérifie (A.6.8). Il est clair que $\mathcal{A}_q$ est un intervalle d'entiers (éventuellement vide).
On peut alors écrire :

$$\sum_{s_1, \ldots, s_{k-1}} \sum_{i_{\pi(k)}} = \sum\nolimits_q \sum_{s_q \in \mathcal{A}_q} a(s_1, \ldots, s_{k-1}) \cos 2(s_q + A_q)\lambda$$

où $\sum_q$ est étendue à tous les $(k-2)$-uplets $(s_1, \ldots, s_{q-1}, s_{q+1}, \ldots, s_{k-1})$ pour lesquels $\mathcal{A}_q$ n'est pas vide. Nous avons alors

$$\left|\sum\nolimits_\pi\right| \leq \sum\nolimits_q \left|\sum_{s_q \in \mathcal{A}_q}\right|.$$

Pour $(s_1, \ldots, s_{q-1}, s_{q+1}, \ldots, s_{k-1})$ fixé, $\left(a(s_1, \ldots, s_{k-1})\right)_{s_q \in \mathcal{A}_q}$ est une suite décroissante en s_q.

A ce stade nous pouvons appliquer l'inégalité (A.6.4) du Lemme A.6.2. Nous obtenons alors, et en remplaçant ensuite $\min \mathcal{A}_q$ (qui est égal à 1 quand $\mathcal{A}_q$ n'est pas vide) par 0,

$$\Big|\sum_{s_q\in\mathcal{A}_q}\Big|$$
$$\leq \frac{2}{\sin\lambda}\frac{L_1(\Delta_1)\cdots L_1(\Delta_k)}{\rho(\Delta_1)\cdots\rho(\Delta_k)}\min\Big([Na_{\pi(k)}],\min_{1\leq h\leq k-1}\big([Na_{\pi(h)}]-(s_h+\cdots+s_{k-1})\big)\Big),$$

en remplaçant par 0, dans le membre de droite, s_q, quand il apparaît.
Nous pouvons alors, en remplaçant $a_1,\dots,a_k$ par 1, le majorer par

$$\frac{2}{\sin\lambda}\frac{L_1(\Delta_1)\cdots L_1(\Delta_k)}{\rho(\Delta_1)\cdots\rho(\Delta_k)}\big(n-(s_1+\cdots+s_{q-1}+s_{q+1}+\cdots s_{k-1})\big)$$

(avec toujours 0 à la place de s_q quand il apparaît dans l'une des sommes $\Delta_1,\dots,\Delta_k$).

Maintenant pour finir, nous pouvons écrire (comme dans (A.6.10), et par ce que le domaine (A.6.9) de variation de $i_{\pi(k)}$ est simplifié avec $a_1=\cdots=a_k=1$)

$$\frac{L_1(\Delta_1)\cdots L_1(\Delta_k)}{\rho(\Delta_1)\cdots\rho(\Delta_k)}\big(n-(s_1+\cdots s_{q-1}+s_{q+1}+\cdots+s_k)\big)=\sum_{i_{\pi(k)}}\frac{L_1(\Delta_1)\cdots L_1(\Delta_k)}{\rho(\Delta_1)\cdots\rho(\Delta_k)}$$

avec $i_{\pi(k)}$ variant entre 1 et $n-(s_1+\cdots+s_{q-1}+s_{q+1}+\cdots+s_k)$.
Ensuite nous faisons le changement de variables inverse qui consiste à passer de $s_1,\dots,s_{k-1}$, $i_{\pi(k)}$, à $i_1\dots,i_k$. Nous trouvons alors en remplaçant $\Delta_1,\dots,\Delta_k$ par $|i_1-i_2|,\dots,|i_k-i_1|$ (comme dans (A.6.7)).

$$\sum\nolimits_q\Big|\sum_{s_q\in\mathcal{A}_q}\Big|\leq\frac{2}{\sin\lambda}\sum\nolimits_{\neq,q}\frac{L_1(|i_1-i_2|)\cdots L_1(|i_k-i_1|)}{\rho(|i_1-i_2|)\cdots\rho(|i_k-i_1|)}$$

où $\sum_{\neq,q}$ est étendue à tous les k-uplets $(i_1,\dots,i_k)$ dans $\{1,\dots,N\}^k$ vérifiant $i_{\pi(1)}>\cdots>i_{\pi(q)}=i_{\pi(q+1)}>\cdots>i_{\pi(k)}$.

Ainsi, en reprenant le même type de raisonnement fait dans la première étape de cette démonstration, et puisque nous sommons sur des indices $i_1,\dots,i_k$ dans {1,...,N} dont deux sont égaux, nous obtenons

$$\sum\nolimits_{\neq,q}=O\big(n^{(k-1)(1-\alpha)}\big)\,,$$

et il en est donc de même pour $\sum_\pi$. Ce qui termine la démonstration de (A.6.5).

Annexe B

Développement au second ordre du processus empirique pour des processus linéaires à longue mémoire saisonnière

L'objet de cette annexe est le principe faible de réduction uniforme pour le processus empirique doublement indexé associé aux processus linéaires à longue mémoire *saisonnière*. En longue mémoire *régulière*, ce principe a été obtenu pour la première fois en 1989 par Dehling et Taqqu [15] dans le cas gaussien. Pour le processus empirique à un seul paramètre, Ho et Hsing [38] l'ont obtenu pour les processus linéaires en 1996.

B.1 Résultat principal

Nous considérons ici un processus linéaire (X_n) défini à partir d'une suite (ξ_n) de variables i.i.d. centrées de variance finie σ^2 et d'une fonction de transfert

$$G(z) = g(z) \prod_{j=-m}^{m} \left(1 - e^{i\lambda_j} z\right)^{(\alpha_j - 1)/2}, \quad m \geq 1, \tag{B.1.1}$$

où $g(z)$ est une fonction analytique sur le disque $|z| < 1$, continue sur $|z| \leq 1$, sans zéros sur le cercle unité, et où

$$0 < \alpha_j < 1, \quad \alpha_j = \alpha_{-j}, \quad \lambda_{-j} = -\lambda_j, \quad j = 0, \ldots, m, \text{ et}$$

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_m < \pi.$$

Le processus (X_n) est alors défini par

$$X_n = G(B)\xi_n = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \xi_{n-j}, \tag{B.1.2}$$

B désignant l'opérateur retard i.e. $B\xi_n = \xi_{n-1}$, et b_j les coefficients du développement au voisinage de 0 de $G(z)$.

Nous savons d'après Giraitis et Leipus [28] que

$$b_n = n^{-(\alpha+1)/2} \sum_{j\in J} a_j \big(\cos n\lambda_j + o(1)\big), \tag{B.1.3}$$

où a_j sont des constantes positives, et

$$\alpha = \min\{\alpha_j,\ j = 0, \dots, m\}, \quad J = \{j,\ \alpha_j = \alpha\}. \tag{B.1.4}$$

Tout au long de cette section on suppose que $\alpha \in (0, 1/2)$.
Posons pour tout $n \geq 1$,

$$Y_{n,0} = n, \quad Y_{n,1} = \sum_{\ell=1}^{n} X_\ell, \quad Y_{n,2} = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{1<i<j} b_i b_j \xi_{\ell-i}\xi_{\ell-j},$$

et notons

$$\sigma_{n,2}^2 = \mathrm{Var}\big(Y_{n,2}\big), \quad \sigma_{n,1}^2 = \mathrm{Var}\big(Y_{n,1}\big), \quad d_n = n^{1-\alpha}. \tag{B.1.5}$$

Soit pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n(x) = \sum_{\ell=1}^{n} \Big(\mathbb{I}_{\{X_\ell \leq x\}} - F(x)\Big) - \Big(-F'(x)Y_{n,1} + F''(x)Y_{n,2}\Big),$$

où F est la fonction de répartition de X_1.
L'objectif de cette annexe est de prouver le théorème suivant

Théorème B.1.1 *Soit Ψ la fonction de répartition de ξ_0. Supposons que Ψ est 5 fois différentiable avec des dérivées continues bornées et intégrables, et que $\mathbb{E}\xi_0^4 < \infty$. Alors, il existe des constantes $C, \rho > 0$ telles que pour tout $\epsilon \in (0, 1]$ et tous $n, N > 0$, tels que $n \leq N$,*

$$P\left\{\sup_{-\infty\leq x\leq\infty} d_N^{-1}\big|S_n(x)\big| > \epsilon\right\} \leq CN^{-\rho}\left(\frac{n}{N}\epsilon^{-3} + \left(\frac{n}{N}\right)^{2-2\alpha}\right). \tag{B.1.6}$$

Ce théorème donne une évaluation de la vitesse de convergence en probabilité vers 0 du reste du développement à l'ordre 2 de la fonction de répartition empirique autour de la fonction de répartition F.
C'est grâce à ce théorème qu'on obtient dans le chapitre 2 le principe faible de réduction uniforme 2.3.6 qui permet de déduire la limite du processus empirique centré et renormalisé donnée dans le Théorème 2.3.1.
Dans [38], Ho et Hsing (Théorème 2.1) établissent (B.1.6) lorsque $n = N$ et pour des processus à longue mémoire régulière.
Un examen attentif de leur preuve montre qu'elle repose non pas sur les propriétés des coefficients b_n mais sur celles de leurs carrés. Grâce à quoi leur résultat est aussi valable pour les processus à longue mémoire saisonnière que nous traitons ici. Quant à l'introduction de l'indice $n \leq N$, utile pour traiter le processus empirique comme une fonction à double indice, elle n'implique que des difficultés techniques minimes.
Par souci d'exhaustivité, nous présentons ici les détails de la démonstration du Théorème B.1.1.

B.2 Démonstration du Théorème B.1.1

L'essentiel de la preuve repose sur un développement orthogonal de $\mathbb{1}_{\{X_n \le x\}} - F(x)$ énoncé dans le Lemme B.2.2. Dans le cas gaussien le développement naturel de $\mathbb{1}_{\{X_n \le x\}} - F(x)$ se fait sur la base de Hermite (voir par exemple Taqqu [15]). En dehors du cas gaussien, on pourrait penser à utiliser les polynômes d'Appell (pour des détails sur ces polynômes, voir Giraitis et Surgailis [31], ou Avram et Taqqu [4]). Malheureusement ils ne fournissent pas un développement orthogonal. Celui proposé dans le Lemme B.2.2, dû à Ho et Hsing, repose sur des différences de martingales.
Pour tout $n \ge 1$ et pour tout $j \ge 0$, posons

$$X_{n,j} = \sum_{i=0}^{j} b_i \xi_{n-i}, \quad \text{et} \quad \tilde{X}_{n,j} = \sum_{i=j+1}^{+\infty} b_i \xi_{n-i},$$

et notons par F_j la fonction de répartition de $X_{1,j}$.
Dans tout ce qui suit C désigne une constante qui peut changer de valeur d'une ligne à l'autre.
Les trois lemmes suivants sont démontrés dans Ho et Hsing [38].

Lemme B.2.1 *Sous les hypothèses du Théorème B.1.1, pour tout $j \ge 1$ F_j est 5 fois différentiable avec des dérivées continues bornées et intégrables.*
Il en est de même pour F, fonction de répartition de X_1.
De plus, pour tout $i = 1, \ldots, 5$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left| F_j^{(i)}(x) \right| dx \right)_{j \ge 1}$$

est une suite décroissante.

Lemme B.2.2 *Soit (X_n) un processus linéaire défini par (2.1.3). Alors pour tout $n \ge 1$, nous avons presque sûrement et dans L^2,*

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\{X_n \le x\}} - F(x) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \Big(\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{X_n \le x\}} \big| \mathcal{F}_{n-j+1}\big) - \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{X_n \le x\}} \big| \mathcal{F}_{n-j}\big) \Big) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \Big(F_{j-1}\big(x - \tilde{X}_{n,j-1}\big) - F_j\big(x - \tilde{X}_{n,j}\big) \Big), \end{aligned} \tag{B.2.1}$$

où pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_k = \sigma\big(\xi_j; j < k\big)$, la tribu engendrée par les variables $\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots$,
De plus, pour tous réels x, x' et pour tous entiers n, j, n', j' tels que $n - j \ne n' - j'$,

$$\mathrm{Cov}\Big(F_{j-1}\big(x - \tilde{X}_{n,j-1}\big) - F_j\big(x - \tilde{X}_{n,j}\big), F_{j'-1}\big(x' - \tilde{X}_{n',j'-1}\big) - F_{j'}\big(x' - \tilde{X}_{n',j'}\big) \Big) = 0,$$

et

$$\mathrm{Cov}\Big(F_{j-1}\big(x - \tilde{X}_{n,j-1}\big) - F_j\big(x - \tilde{X}_{n,j}\big), F'_{j'-1}\big(x' - \tilde{X}_{n',j'}\big)\xi_{n'-j'} \Big) = 0.$$

Lemme B.2.3 *Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_t \geq 1/2$, $t \geq 1$. il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier $\ell \geq 1$,*

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_t} \prod_{s=1}^{t} \big[j_s(\ell + j_s)\big]^{-\gamma_s} &\leq C \sum_{j=1}^{+\infty} \big[j(\ell + j)\big]^{-\gamma} \\ &\leq \begin{cases} C\ell^{2\gamma+1}, & si\ \gamma \in (\frac{1}{2}, 1), \\ C\frac{\ln \ell}{\ell}, & si\ \gamma = 1, \\ C\ell^{-\gamma}, & si\ \gamma > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

où

$$\gamma = \sum_{s=1}^{t} \gamma_s - \frac{t-1}{2}.$$

La variable $Y_{n,2}$ peut s'écrire

$$Y_{n,2} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{n} \big(X_\ell^2 - \mathbb{E}X_1^2\big) - \sum_{\ell=1}^{n} \big(\sum_{i=1}^{+\infty} b_i^2 \xi_{\ell-i}^2\big).$$

D'après Giraitis et Surgailis [26], au voisinage de l'infini, on a

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{\ell=1}^{n} \big(X_\ell^2 - \mathbb{E}X_1^2\big)\Big) \sim Cn^{2-2\alpha}.$$

Or d'après (2.1.9),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 < +\infty,$$

et donc nous avons au voisinage de l'infini.

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{\ell=1}^{n} \big(\sum_{i=1}^{+\infty} b_i^2 \xi_{\ell-i}^2\big)\Big) = O(n).$$

Par conséquent, comme $2\alpha < 1$,

$$\mathrm{Var}\big(Y_{n,2}\big) \sim Cn^{2-2\alpha}. \tag{B.2.2}$$

Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, nous allons noter

$$f(x, y) = f(y) - f(x).$$

Posons pour tout réel y,

$$\Lambda(y) = \int_{-\infty}^{y} \Big(\big|F'(u)\big| + \big|F''(u)\big| + \big|F^{(3)}(u)\big|\Big) du.$$

Grâce au Lemme B.2.1 on montre facilement que Λ est continue, croissante et bornée. Dans la suite on note

$$\Lambda(+\infty) = \lim_{y\to+\infty} \Lambda(y).$$

Posons pour tout entier k et tout $i \in \{0, \ldots, 2^k\}$,

$$y_i(k) = \Lambda^{-1}\Big(\Lambda(+\infty)\frac{i}{2^k}\Big),$$

où Λ^{-1} désigne la fonction inverse généralisée. Par convention on prend $y_0(k) = -\infty$ et $y_{2^k}(k) = +\infty$. Il est alors clair que pour tout entier $k \geq 0$, $\big(y_0(k), \ldots, y_{2^k}(k)\big)$ forme une subdivision de $\overline{\mathbb{R}}$. Par conséquent, pour tout réel x et tout entier $k \geq 0$, il existe un entier $i_k(x) \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ tel que

$$y_{i_k(x)}(k) \leq x < y_{i_k(x)+1}(k).$$

Nous avons alors pour tout réel x et tout entier $K \geq 1$, le chaînage suivant

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{K-1} S_n\big(y_{i_k(x)}(k), y_{i_{k+1}(x)}(k+1)\big) + S_n\big(y_{i_K(x)}(K), x\big).$$

Si $S_n(y_{i_K(x)}, x) \geq 0$ alors

$$\begin{aligned}
0 &\leq S_n\big(y_{i_K(x)}(K), x\big)\\
&\leq \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{1}_{\{y_{i_K(x)} \leq X_\ell \leq y_{i_K(x)+1}\}}\\
&= S_n\big(y_{i_K(x)}(K), y_{i_K(x)+1}(K)\big) + \sum_{r=0}^{2} (-1)^r F^{(r)}\big(y_{i_K(x)}(K), y_{i_K(x)+1}(K)\big) Y_{n,r}
\end{aligned}$$

et si $S_n(y_{i_K(x)}, x) \leq 0$ alors

$$0 \leq -S_n\big(y_{i_K(x)}(K), x\big) \leq \sum_{r=0}^{2} (-1)^r F^{(r)}\big(y_{i_K(x)}(K), x\big) Y_{n,r}.$$

Ainsi nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{d_N}|S_n(x)| \qquad\qquad (B.2.3)\\
&\leq \frac{1}{d_N}\left|\sum_{k=0}^{K-1} S_n\big(y_{i_k(x)}(k), y_{i_{k+1}(x)}(k+1)\big)\right|\\
&\quad + \frac{1}{d_N}\big|S_n(\big(y_{i_K(x)}(K), y_{i_K(x)+1}(K)\big)\big| + \frac{n}{d_N} F\big(y_{i_K(x)}(K), y_{i_K(x)+1}(K)\big)\\
&\quad + \Big(\big|F'(x) - F'\big(y_{i_K(x)}(K)\big)\big| + \big|F'(x) - F'\big(y_{i_K(x)+1}(K)\big)\big|\frac{1}{d_N}\big|\Big)\big|Y_{n,1}\big|\\
&\quad + \Big(\big|F''(x) - F''\big(y_{i_K(x)}(K)\big)\big| + \big|F''(x) - F''\big(y_{i_K(x)+1}(K)\big)\big|\frac{1}{d_N}\big|\Big)\big|Y_{n,2}\big|.
\end{aligned}$$

Puisque les fonctions $F(x,y)$, $F'(x,y)$ et $F''(x,y)$ sont bornées par $|\Lambda(x,y)|$, nous avons

$$\sup_{-\infty\le x\le\infty} F\big(y_{i_K(x)}(K), y_{i_K(x)+1}(K)\big) \le \frac{\Lambda(+\infty)}{2^K}, \tag{B.2.4}$$

et pour $h=1,2$,

$$\sup_x \Big(\big|F^{(h)}(x) - F^{(h)}\big(y_{i_K}(x)(K)\big)\big| + \big|F^{(h)}(x) - F^{(h)}\big(y_{i_K(x)+1}(K)\big)\big|\Big) \le 2\frac{\Lambda(+\infty)}{2^K}. \tag{B.2.5}$$

Soit $\beta > 0$ assez grand tel que

$$\Lambda(+\infty)\frac{N^{1-\beta}}{d_N} \le \frac{1}{4}. \tag{B.2.6}$$

On prend désormais

$$K = \Big[\ln_2\Big(\frac{N^\beta}{\epsilon}\Big)\Big] + 1. \tag{B.2.7}$$

Nous avons alors d'après (B.2.3), (B.2.4), (B.2.5) et (B.2.6),

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\frac{1}{d_N}|S_n(x)| > \epsilon\Big\} \\
&\le \quad P\Big\{\frac{1}{d_N}\sup_{-\infty\le x\le\infty}\Big(\Big|\sum_{k=0}^{K-1} S_n\big(y_{i_k(x)}(k), y_{i_{k+1}(x)}(k+1)\big)\Big| \\
&\qquad + \big|S_n\big(y_{i_K}(x)(K), y_{i_K(x)+1}(K)\big)\big|\Big) > \frac{\epsilon}{4}\Big\} + 16^2\Lambda^2(+\infty)N^{-2\beta}\frac{\sigma_{n,1}^2 + \sigma_{n,2}^2}{d_N^2},
\end{aligned}$$

où $\sigma_{n,1}^2$ et $\sigma_{n,2}^2$ sont définies dans (B.1.5). Puisqu'au voisinage de l'infini,

$$\sigma_{n,1}^2 \sim Cn^{2-\alpha_0}$$

et

$$\sigma_{n,2}^2 \sim Cn^{2-2\alpha},$$

il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout N et tout $n \le N$,

$$16^2\Lambda^2(+\infty)\frac{\sigma_{n,1}^2 + \sigma_{n,2}^2}{d_N^2} \le C\Big(\frac{n}{N}\Big)^{2-2\alpha}. \tag{B.2.8}$$

L'inégalité (B.2.8) et la proposition suivante terminent la preuve du Théorème B.1.1.

Proposition B.2.1 *Sous les hypothèses du Théorème B.1.1 il existe des constantes $C, \rho > 0$ telles que pour tout $\epsilon \in (0,1]$ et tous $n, N > 0$, tels que $n \le N$,*

$$\begin{aligned}
P\Big\{\frac{1}{d_N}\sup_{-\infty\le x\le\infty}\Big(\Big|\sum_{k=0}^{K-1} S_n\big(y_{i_k(x)}(k), y_{i_{k+1}(x)}(k+1)\big)\Big| \\
+ \big|S_n\big(y_{i_K(x)}(K), y_{i_K(x)+1}(K)\big)\big|\Big) > \frac{\epsilon}{4}\Big\} \le CN^{-\rho}\frac{n}{N}\epsilon^{-3}.
\end{aligned}$$

Preuve : Posons

$$T_{n,1}(x) = \sum_{\ell=1}^{n}\Big(\mathbb{1}_{\{X_\ell \le x\}} - F(x)\Big) + F'(x)\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{2\le i} b_i\xi_{\ell-i} - \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{2\le i<j} b_i\xi_{\ell-i}b_j\xi_{\ell-j}F''_{j-1}(x-\tilde{X}_{\ell,j}),$$

$$T_{n,2}(x) = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{2\le i<j} b_i\xi_{\ell-i}b_j\xi_{\ell-j}\Big(F''_{j-1}(x-\tilde{X}_{\ell,j}) - F''(x)\Big),$$

et

$$T_{n,3}(x) = \sum_{\ell=1}^{n}\Big(F'(x)b_1\xi_{\ell-1} - F''(x)b_1\xi_{\ell-1}\sum_{2\le j} b_j\xi_{\ell-j}\Big).$$

Il est alors facile de voir que

$$S_n(x) = T_{n,1}(x) + T_{n,2}(x) + T_{n,3}(x).$$

Par conséquent, il suffit d'établir le résultat de la Proposition B.2.1 pour chacun des $T_{n,h}, (h = 1, 2, 3)$ à la place de S_n.
Nous avons pour chaque $T_{n,h}$,

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{-\infty\le x\le+\infty}\Big(\Big|\sum_{k=0}^{K-1} T_{n,h}\big(y_{i_k(x)}(k), y_{i_k(x)+1}(k+1)\big)\Big| \\
&\qquad + \Big|T_{n,h}\big(y_{i_K(x)}(K), y_{i_K(x)+1}(K)\big)\Big|\Big) > \epsilon\Big\} \\
\le\ & \sum_{k=0}^{K-1} P\Big\{\sup_{-\infty\le x\le+\infty}\Big|\sum_{k=0}^{K-1} T_{n,h}\big(y_{i_k(x)}(k), y_{i_k(x)+1}(k+1)\big)\Big| > \frac{\epsilon}{(k+3)^2}\Big\} \\
&\qquad + P\Big\{\sup_{-\infty\le x\le+\infty}\Big|T_{n,h}\big(y_{i_K(x)}(K), y_{i_K(x)+1}(K)\big)\Big| > \frac{\epsilon}{(K+3)^2}\Big\}.
\end{aligned} \tag{B.2.9}$$

Comme pour chaque $k < K$, $y_{i_k(x)}(k)$ et $y_{i_k(x)+1}(k+1)$ sont deux points voisins dans la subdivision $y_0(k+1), \ldots, y_{2^{k+1}}(k+1)$, on a pour tout $k < K$,

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{-\infty\le x\le+\infty}\Big|T_{n,h}\big(y_{i_k(x)}(k), y_{i_k(x)+1}(k+1)\big)\Big| > \frac{\epsilon}{(k+3)^2}\Big\} \\
&\le \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} P\Big\{\Big|T_{n,h}\big(y_i(k+1), y_{i+1}(k+1)\big)\Big| > \frac{\epsilon}{(k+3)^2}\Big\} \\
&\le \frac{(k+3)^4}{\epsilon^2}\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\mathrm{Var}\Big(T_{n,h}\big(y_i(k+1), y_{i+1}(k+1)\big)\Big).
\end{aligned}$$

La dernière probabilité dans (B.2.9) peut être majorée de la même façon et le raisonnement qui suit s'applique de la même manière pour ce terme.

D'après la définition de K en fonction de N donnée en (B.2.7), pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{k=0}^{K-1}(k+3)^4 \leq C\epsilon^{-1}N^{\delta}$$

et donc pour $h \in \{1,2,3\}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{K-1} P\Big\{\sup_{-\infty\leq x\leq +\infty}\Big|\sum_{k=0}^{K-1} T_{n,h}\big(y_{i_k(x)}(k), y_{i_{k(x)}+1}(k+1)\big)\Big| > \frac{\epsilon}{(k+3)^2}\Big\} \\
\leq\ & C d_N^{-2}\epsilon^{-3}N^{\delta}\max_{k\leq K-1}\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\mathrm{Var}\Big(T_{n,h}\big(y_i(k+1), y_{i+1}(k+1)\big)\Big) \\
=\ & C N^{2\alpha+\delta-1}\epsilon^{-3}N^{-1}\max_{k\leq K-1}\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\mathrm{Var}\Big(T_{n,h}\big(y_i(k+1), y_{i+1}(k+1)\big)\Big).
\end{aligned}$$

Pour alléger les notations, dans la suite, nous notons simplement y_i au lieu de $y_i(k+1)$. Pour finir la preuve de la Proposition B.2.1 il suffit maintenant de montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $k \leq K-1$ et tout $n \leq N$, nous avons

$$\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\mathrm{Var}\Big(T_{n,1}\big(y_i, y_{i+1}\big)\Big) \leq Cn, \tag{B.2.10}$$

$$\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\mathrm{Var}\Big(T_{n,3}\big(y_i, y_{i+1}\big)\Big) \leq Cn, \tag{B.2.11}$$

et enfin

$$\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\mathrm{Var}\Big(T_{n,2}\big(y_i, y_{i+1}\big)\Big) \leq C\big(n \vee n^{2-3\alpha}\big). \tag{B.2.12}$$

Ho et Hsing [38] ont montré ces trois inégalités pour $n = N$. Bien que K dépende de N (voir (B.2.7)), nous allons voir que leur méthode s'applique directement pour avoir les inégalités précédentes pour chaque $n \leq N$.

Preuve de (B.2.11) : puisque les variables ξ_j sont indépendantes,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\Big(T_{n,3}\big(y_i, y_{i+1}\big)\Big) = \\
&\Big(F'\big(y_i, y_{i+1}\big)\Big)^2 n\sigma^2 b_1^2 + \Big(F''\big(y_i, y_{i+1}\big)\Big)^2 n\sigma^2 b_1^2\sum_{j=2}^{+\infty} b_j^2.
\end{aligned}$$

Comme pour $r = 1, 2$

$$\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\big|F^{(r)}\big(y_i, y_{i+1}\big)\big| = \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\Big|\int_{y_i}^{y_{i+1}} F^{(r-1)}(u)du\Big| \leq \int_{-\infty}^{+\infty}\big|F^{(r-1)}(u)\big|du < +\infty,$$

et

$$\sum_{j=1}^{+\infty} b_j^2 < +\infty,$$

l'inégalité (B.2.11) est vérifiée.

Preuve de (B.2.10) : pour cela, nous montrons tout d'abord que

$$\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} \mathrm{Var}\Big(T_{n,1}^{(1)}\big(y_i, y_{i+1}\big)\Big) \leq Cn, \tag{B.2.13}$$

où

$$T_{n,1}^{(1)}(x) = \sum_{\ell=1}^{n}\Big(1\!\!1_{\{X_\ell \leq x\}} - F(x)\Big) - \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{+\infty} b_j \xi_{\ell-j} F'_{j-1}(x - \tilde{X}_{\ell,j}).$$

D'après le Lemme B.2.2, on peut écrire

$$1\!\!1_{\{y_i < X_\ell \leq y_{i+1}\}} - F\big(y_i, y_{i+1}\big) = \\ \sum_{j=1}^{+\infty}\bigg(F_{j-1}\Big(y_i - \tilde{X}_{\ell,j-1}, y_{i+1} - \tilde{X}_{\ell,j-1}\Big) - F_j\Big(y_i - \tilde{X}_{\ell,j}, y_{i+1} - \tilde{X}_{\ell,j}\Big).$$

Par conséquent,

$$T_{n,1}^{(1)}\big(y_i, y_{i+1}\big) = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{+\infty} R_{\ell,j}\big(y_i, y_{i+1}\big),$$

où

$$R_{\ell,j}(x) = F_{j-1}\big(x - \tilde{X}_{\ell,j-1}\big) - F_j\big(x - \tilde{X}_{\ell,j}\big) + 1\!\!1_{\{j\geq 2\}} F'_{j-1}\big(x - \tilde{X}_{\ell,j}\big) b_j \xi_{\ell-j}. \tag{B.2.14}$$

D'après le Lemme B.2.2, $R_{\ell,j}\big(y_i, y_{i+1}\big)$ et $R_{\ell',j'}\big(y_i, y_{i+1}\big)$ sont non corrélées si $\ell - j \neq \ell' - j'$, et donc avec $j' = \ell' - \ell + j$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} \mathrm{Var}\Big(T_{n,1}^{(1)}\big(y_i, y_{i+1}\big)\Big) \\
&\leq 2\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\sum_{\ell=j}^{n}\sum_{\ell'=\ell}^{n}\sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{Cov}\Big(R_{\ell,j}\big(y_i, y_{i+1}\big), R_{\ell',j'}\big(y_i, y_{i+1}\big)\Big) \\
&= 2\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{\ell'=\ell}^{n} \mathrm{Cov}\Big(R_{\ell,1}\big(y_i, y_{i+1}\big), R_{\ell',j'}\big(y_i, y_{i+1}\big)\Big) \qquad \text{(B.2.15)} \\
&\quad +2\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{\ell'=\ell}^{n}\sum_{j=2}^{+\infty} \mathrm{Cov}\Big(R_{\ell,j}\big(y_i, y_{i+1}\big), R_{\ell',j'}\big(y_i, y_{i+1}\big)\Big) \qquad \text{(B.2.16)}
\end{aligned}$$

Commençons par étudier la dernière somme (B.2.16).
Nous savons que si deux variables X et Y sont indépendantes, de fonctions de répartition respectives F_X et F_Y alors la fonction de répartition de leur somme est donnée par

$$F_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} F_X(x-u)F_Y(du). \tag{B.2.17}$$

Cela nous permet d'écrire, puisque les ξ_j sont indépendantes, pour tout j,

$$F_j(x) = \int_{\mathbb{R}} F_{j-1}(x - b_j u)\Psi(du).$$

Par conséquent, et puisque

$$\int_{\mathbb{R}} u\Psi(du) = 0,$$

nous avons d'après la formule de Taylor-Lagrange,

$$\begin{aligned} &F_{j-1}\big(x - \tilde{X}_{\ell,j-1}\big) - F_j\big(x - \tilde{X}_{\ell,j}\big) \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}} \Big(F_{j-1}\big(x - \tilde{X}_{\ell,j-1}\big) - F_{j-1}\big(x - \tilde{X}_{\ell,j-1} + b_j(\xi_{\ell-j} - u)\big)\Big)\Psi(du) \\ &\quad = -b_j\xi_{\ell-j}F'_{j-1}\big(x - \tilde{X}_{\ell,j-1}\big) + \frac{b_j^2}{2}\int_{\mathbb{R}} (\xi_{\ell-j} - u)^2 F''_{j-1}\big(x - \tilde{X}_{\ell,j-1} + \mu(u)\big)\Psi(du), \end{aligned}$$

où $|\mu(u)| \leq |b_j(\xi_{\ell-j} - u)|$. De même, nous avons

$$F'_{j-1}\big(x - \tilde{X}_{\ell,j-1}\big) - F'_{j-1}\big(x - \tilde{X}_{\ell,j}\big) = -b_j\xi_{\ell-j}F''_{j-1}\big(x - \tilde{X}_{\ell,j-1} + \nu(u)\big),$$

où $|\nu(u)| \leq |b_j\xi_{\ell-j}|$.
Or d'après (B.2.14), nous avons pour $j \geq 2$,

$$\begin{aligned} R_{\ell,j}\big(y_i, y_{i+1}\big) \;=\; & F_{j-1}\big(y_i - \tilde{X}_{\ell,j-1}, y_{i+1} - \tilde{X}_{\ell,j-1}\big) - F_j\big(y_i - \tilde{X}_{\ell,j}, y_{i+1} - \tilde{X}_{\ell,j}\big) \\ & + b_j\xi_{\ell-j}F'_{j-1}\big(y_i - \tilde{X}_{\ell,j}, y_{i+1} - \tilde{X}_{\ell,j}\big), \end{aligned} \tag{B.2.18}$$

et donc, en appliquant la formule de Taylor-Lagrange à toute la somme $\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}$, successivement avec $R_{\ell,j}\big(y_i, y_{i+1}\big)$ et $R_{\ell',j'}\big(y_i, y_{i+1}\big)$, on obtient pour $\ell' \geq \ell \geq 1$, $j \geq 2$ et $j' = j + \ell' - \ell$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} \operatorname{Cov}\Big(R_{\ell,j}\big(y_i,y_{i+1}\big), R_{\ell',j'}\big(y_i,y_{i+1}\big)\Big) \\
&= \mathbb{E}\Bigg[\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\Bigg(F_{j-1}\big(y_i-\tilde X_{\ell,j-1}, y_{i+1}-\tilde X_{\ell,j-1}\big) - F_j\big(y_i-\tilde X_{\ell,j}, y_{i+1}-\tilde X_{\ell,j}\big) \\
&\quad +b_j\xi_{\ell-j}F'_{j-1}\big(y_i-\tilde X_{\ell,j}, y_{i+1}-\tilde X_{\ell,j}\big)\Bigg)R_{\ell',j'}\big(y_i,y_{i+1}\big)\Bigg] \\
&= \mathbb{E}\Bigg[\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} R_{\ell',j'}\big(y_i,y_{i+1}\big)\Bigg(b_j^2\xi_{\ell-j}^2F''\big(y_i-\tilde X_{\ell,j-1}+\nu_{\ell,j}, y_{i+1}-\tilde X_{\ell,j+1}+\nu_{\ell,j}\big) + \\
&\quad \frac{b_j^2}{2}\int_{\mathbb{R}}(\xi_{\ell-j}-u)^2F''_{j-1}\big(y_i-\tilde X_{\ell,,j-1}+\mu_{\ell,j}(u), y_{i+1}-\tilde X_{\ell,j-1}+\mu_{\ell,j}(u)\big)\Psi(du)\Bigg)\Bigg] \\
&= \mathbb{E}\Bigg[\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\Bigg(b_j^2\xi_{\ell-j}^2F''\big(y_i-\tilde X_{\ell,j-1}+\nu_{\ell,j}, y_{i+1}-\tilde X_{\ell,j+1}+\nu_{\ell,j}\big) + \\
&\quad \frac{b_j^2}{2}\int_{\mathbb{R}}(\xi_{\ell-j}-u)^2F''_{j-1}\big(y_i-\tilde X_{\ell,,j-1}+\mu_{\ell,j}(u), y_{i+1}-\tilde X_{\ell,j-1}+\mu_{\ell,j}(u)\big)\Psi(du)\Bigg)\times \\
&\quad \Bigg(b_{j'}^2\xi_{\ell-j}^2F''\big(y_i-\tilde X_{\ell',j'-1}+\nu'_{\ell',j'}, y_{i+1}-\tilde X_{\ell',j'+1}+\nu'_{\ell',j'}\big) + \\
&\quad \frac{b_{j'}^2}{2}\int_{\mathbb{R}}(\xi_{\ell-j}-u')^2F''_{j'-1}\big(y_i-\tilde X_{\ell',j'-1}+\mu'_{\ell',j'}(u'), y_{i+1}-\tilde X_{\ell',j'-1}+\mu'_{\ell',j'}(u')\big)\Psi(du')\Bigg)\Bigg].
\end{aligned}$$

Soit donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} \operatorname{Cov}\Big(R_{\ell,j}\big(y_i,y_{i+1}\big), R_{\ell',j'}\big(y_i,y_{i+1}\big)\Big) \qquad\qquad \text{(B.2.19)}\\
&= \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\mathbb{E}\Bigg[\Bigg(b_j^2\xi_{\ell-j}^2F''\big(y_i-\tilde X_{\ell,j-1}+\nu_{\ell,j}, y_{i+1}-\tilde X_{\ell,j+1}+\nu_{\ell,j}\big) + \\
&\quad \frac{b_j^2}{2}\int_{\mathbb{R}}(\xi_{\ell-j}-u)^2F''_{j-1}\big(y_i-\tilde X_{\ell,,j-1}+\mu_{\ell,j}(u), y_{i+1}-\tilde X_{\ell,j-1}+\mu_{\ell,j}(u)\big)\Psi(du)\Bigg)\times \\
&\quad \Bigg(b_{j'}^2\xi_{\ell-j}^2F''\big(y_i-\tilde X_{\ell',j'-1}+\nu'_{\ell',j'}, y_{i+1}-\tilde X_{\ell',j'+1}+\nu'_{\ell',j'}\big) + \\
&\quad \frac{b_{j'}^2}{2}\int_{\mathbb{R}}(\xi_{\ell-j}-u')^2F''_{j'-1}\big(y_i-\tilde X_{\ell',j'-1}+\mu'_{\ell',j'}(u'), y_{i+1}-\tilde X_{\ell',j'-1}+\mu'_{\ell',j'}(u')\big)\Psi(du')\Bigg)\Bigg].
\end{aligned}$$

Or, $\mathbb{E}\xi_0^4 < +\infty$, et nous avons d'après le Lemme B.2.1,

$$\sup_{j\geq 1}\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|F''_{j-1}(x)\right| < +\infty$$

et

$$\sup_{j\geq 1}\sup_{-\infty<x<+\infty}\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\left|F''_{j-1}\big(y_i+y, y_{i+1}+y\big)\right| \leq \max_{j\geq 1}\int_{\mathbb{R}}\left|F^{(3)}_{j-1}(u)\right|du < +\infty.$$

Cela montre qu'il existe une constante $C>0$ telle que pour tous $\ell' \geq \ell \geq 1$, $j\geq 2$ et $j' = \ell' - \ell + j$

$$\Big|\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\mathrm{Cov}\Big(R_{\ell,j}\big(y_i,y_{i+1}\big), R_{\ell',j'}\big(y_i,y_{i+1}\big)\Big)\Big| \leq Cb_j^2 b_{j'}^2.$$

D'après (2.1.9),

$$\sum_{j=1}^{+\infty} b_j^2 < +\infty$$

et donc il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $k<K$,

$$\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{\ell'=\ell}^{n}\sum_{j=2}^{+\infty}\mathrm{Cov}\Big(R_{\ell,j}\big(y_i,y_{i+1}\big), R_{\ell',j'}\big(y_i,y_{i+1}\big)\Big) < Cn.$$

Regardons maintenant la somme (B.2.15). Pour $j=1$ et $\ell'=\ell$, on a $j'=1$ et

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\mathrm{Cov}\Big(R_{\ell,1}\big(y_i,y_{i+1}\big), R_{\ell,1}\big(y_i,y_{i+1}\big)\Big)\\
&\leq \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\mathbb{E}R_{\ell,1}^2\big(y_i,y_{i+1}\big)\\
&\leq \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\mathbb{E}\Big(F\big(y_i-\tilde{X}_{\ell,j}, y_{i+1}-\tilde{X}_{\ell,j}\big) - F_1\big(y_i-\tilde{X}_{\ell,j}, y_{i+1}-\tilde{X}_{\ell,j}\big)\Big)^2\\
&\leq \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}F\big(y_i-\tilde{X}_{\ell,j}, y_{i+1}-\tilde{X}_{\ell,j}\big) + \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}F_1\big(y_i-\tilde{X}_{\ell,j}, y_{i+1}-\tilde{X}_{\ell,j}\big)\right)\\
&= 2,
\end{aligned}$$

car F et F_1 sont des fonctions de répartition.
Lorsque $j=1$ et $\ell'>\ell$, on applique (B.2.18) à j' qui est nécessairement supérieur à 1, et on obtient, avec un calcul similaire à (B.2.19),

$$\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\Big|\mathrm{Cov}\Big(R_{\ell,1}\big(y_i,y_{i+1}\big), R_{\ell',j'}\big(y_i,y_{i+1}\big)\Big)\Big| \leq Cb_{j'}^2.$$

Dans tous les cas nous avons donc

$$\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{\ell'=\ell}^{n}\sum_{j=2}^{+\infty}\mathrm{Cov}\Big(R_{\ell,1}\big(y_i,y_{i+1}\big),R_{\ell',j'}\big(y_i,y_{i+1}\big)\Big)\leq Cn.$$

Donc (B.2.13) est démontrée. Nous allons maintenant finir la preuve de (B.2.10). Posons

$$\begin{aligned}
&Z_n(x)\\
&= T_{n,1}(x)-T_{n,1}^{(1)}(x)\\
&= -\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{2\leq i}b_i\xi_{\ell-i}\Big(F'_{i-1}\big(x-\tilde{X}_{\ell,i}\big)-F'(x)\Big)-\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{2\leq i<j}\big(b_i\xi_{\ell-i}b_j\xi_{\ell-j}\big)F''_{j-1}\big(x-\tilde{X}_{\ell,j}\big).
\end{aligned}$$

Il suffit alors de montrer qu'il existe une constante $C>0$ telle que

$$\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\mathrm{Var}\Big(Z_n\big(y_i,y_{i+1}\big)\Big)\leq Cn. \tag{B.2.20}$$

Or il est clair que pour tout entier i,

$$F'_{i-1}\big(x-\tilde{X}_{\ell,i}\big)-F'(x)=\lim_{T\to\infty}\sum_{j=i+1}^{T}F'_{j-2}\big(x-\tilde{X}_{\ell,j-1}\big)-F'_{j-1}\big(x-\tilde{X}_{\ell,j}\big)$$

et donc nous pouvons écrire

$$Z_n(x)=\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{2\leq i<j}b_i\xi_{\ell-i}H_{\ell,j}(x)$$

où

$$H_{\ell,j}(x)=-\Big(F'_{j-2}\big(x-\tilde{X}_{\ell,j-1}\big)-F'_{j-1}\big(x-\tilde{X}_{\ell,j}\big)\Big)-b_j\xi_{\ell-j}F''_{j-1}\big(x-\tilde{X}_{\ell,j}\big),$$

Comme dans le Lemme B.2.2, lorsque $\ell-i\neq\ell'-i'$ ou $\ell-j\neq\ell'-j'$ nous avons

$$\mathrm{Cov}\Big(b_i\xi_{\ell-i}H_{\ell,j}(x),b'_i\xi_{\ell'-i'}H_{\ell',j'}(x'),$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\mathrm{Var}\Big(Z_n\big(y_i,y_{i+1}\big)\Big) &= \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\sum_{\ell,\ell'=1}^{n}\sum_{2\leq j_1,j_2}b_{j_1}b_{j'_1}\mathbb{E}\Big(H_{\ell,j_2}\big(y_i,y_{i+1}\big),H_{\ell',j'_2}\big(y_i,y_{i+1}\big)\Big)\\
&\leq 2\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{\ell'=\ell}^{n}\sum_{2\leq j_1,j_2}b_{j_1}b_{j'_1}\mathbb{E}\Big(H_{\ell,j_2}\big(y_i,y_{i+1}\big),H_{\ell',j'_2}\big(y_i,y_{i+1}\big)\Big)
\end{aligned}$$

où $j_1' = \ell - \ell' + j_1$ et $j_2' = \ell - \ell' + j_2$. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 2 aux fonctions F' et F'', on obtient

$$\begin{aligned} H_{\ell,j}(x) &= -b_j b_{\ell-j}\Big(F''_{j-2}\big(x-\tilde{X}_{\ell,j-1}\big) - F''_{j-1}\big(x-\tilde{X}_{\ell,j}\big)\Big) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \frac{(b_j\xi_{\ell-j} - b_{j-1}u)^2}{2} F^{(3)}_{j-2}\big(x-\tilde{X}_{\ell,j-1}+\mu(u)\big)\Psi(du) \\ &= (b_j\xi_{\ell-j})^2 F''_{j-2}\big(x-\tilde{X}_{\ell,,j-1}\big) + \int_{\mathbb{R}} \frac{(b_j\xi_{\ell-j} - b_{j-1}u)^2}{2} F^{(3)}_{j-2}\big(x-\tilde{X}_{\ell,j-1}+\mu(u)\big)\Psi(du) \\ &\quad -b_j\xi_{\ell-j}\int_{\mathbb{R}} \frac{(b_j\xi_{\ell-j} - b_{j-1}u)^2}{2} F^{(4)}_{j-2}\big(x-\tilde{X}_{\ell,j-1}+\nu(u)\big)\Psi(du), \end{aligned}$$

où $|\mu(u)| \le |b_j\xi_{\ell-j} - b_{j-1}u|$ et $\nu(u)| \le |b_j\xi_{\ell-j} - b_{j-1}u|$. Cela avec les hypothèses

$$\sup_{j,x}\big|F_j^{(3)}(x)\big| < +\infty, \quad \sup_{j,x}\big|F_j^{(4)}\big| < +\infty$$

et

$$\sup_{j,x}\int_{\mathbb{R}}\big|F_j^{(3)}(x)\big|dx < +\infty, \quad \sup_{j,x}\int_{\mathbb{R}}\big|F_j^{(4)}\big|dx < +\infty,$$

on trouve que

$$\Big|\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\mathbb{E}\Big(H_{\ell,j_2}\big(y_i,y_{i+1}\big), H_{\ell',j_2'}\big(y_i,y_{i+1}\big)\Big)\Big| \le Cb_{j_2}b_{j_2'}$$

Par conséquent,

$$\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\mathrm{Var}\Big(Z_n\big(y_i,y_{i+1}\big)\Big) \le C\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{\ell'=\ell}\sum_{2\le j_1}|b_{j_1}b_{j_1'}|\sum_{j_2>j_1}b_{j_2}^2 b_{j_2'}^2.$$

Or d'après (2.1.9), il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|b_j| \le Cj^{-(\alpha+1)/2},$$

et donc

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\mathrm{Var}\Big(Z_n\big(y_i,y_{i+1}\big)\Big) \\ &\quad \le Cn\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{2\le j_1}\big(j_1(\ell+j_1)\big)^{-(\alpha+1)/2}\sum_{j_2>j_1}\big(j_2(\ell+j_2)\big)^{-(\alpha+1)} \\ &\quad \le Cn\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{j_1=1}^{+\infty}j_1^{-(\alpha+1)}\ell^{-(1+\alpha)}\sum_{j_2=1}^{+\infty}j_2^{-(\alpha+1)} \\ &\quad \le Cn. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve de (B.2.20), et achève celle de (B.2.10).
Preuve de (B.2.12) : Soit

$$\Psi_{\ell,j} = F''(x) - F''_{j-1}\big(x - \tilde{X}_{\ell,j}\big).$$

Comme dans le Lemme B.2.2, si $n - j_s \neq n' - j'_s$ pour $s = 1$ ou $s = 2$ alors

$$\mathrm{Cov}\Big(\xi_{\ell-j_1}\xi_{\ell-j_2}\Psi_{\ell,j_2}, \xi_{\ell'-j'_1}\xi_{\ell'-j'_2}\Psi_{\ell',j'_2}\Big) = 0,$$

et donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} \mathrm{Var}\Big(T_{n,2}\big(y_i, y_{i+1}\big)\Big) \\
&\qquad \leq 2 \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{\ell'=\ell}^{n} \sum_{2\leq j_1<j_2} b_{j_1}b_{j'_1}b_{j_2}b_{j'_2}\mathrm{Cov}\Big(\Psi_{\ell,j_2}(y_i, y_{i+1}), \Psi_{\ell',j'_2}(y_i, y_{i+1})\Big),
\end{aligned}$$

où $j'_1 = \ell' - \ell + j_1$ et $j'_2 = \ell' - \ell + j_2$.
Si on note par $\tilde{F}_{j-1}$ la fonction de répartition de $\tilde{X}_{1,j-1}$ on peut écrire, à l'aide de l'égalité (B.2.17), et en dérivant sous l'intégrale,

$$\begin{aligned}
\Psi_{\ell,j}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \Big(F''_{j-1}(x-u) - F''\big(x - \tilde{X}_{\ell,j}\big)\Big)\tilde{F}_{j-1}(du) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \big(\tilde{X}_{\ell,j} - u\big)F^{(3)}_{j-1}(x - \delta_{\ell,j}(u))\tilde{F}_{j-1}(du),
\end{aligned}$$

où $\delta_{\ell,j}(u)$ est entre u et $\tilde{X}_{\ell,j}$. Donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} \mathrm{Cov}\Big(\Psi_{\ell,j}(y_i, y_{i+1}), \Psi_{\ell',j'}(y_i, y_{i+1})\Big) \\
&\leq \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} \mathbb{E}\Bigg(\int_{\mathbb{R}} \big(\big|\tilde{X}_{\ell,j}\big| + |u|\big)\big|F^{(3)}_{j-1}\big(y_i - \delta(u), y_{i+1} - \delta_{\ell,j}(u)\big)\big|\tilde{F}_{j-1}(du) \times \\
&\qquad \int_{\mathbb{R}} \big(\big|\tilde{X}_{\ell',j'}\big| + |u'|\big)\big|F^{(3)}_{j'-1}\big(y_i - \delta(u'), y_{i+1} - \delta_{\ell',j'}(u')\big)\big|\tilde{F}_{j'-1}(du')\Bigg) \\
&\leq C \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} \sup_{y\in\mathbb{R}}\big|F^{(3)}_{j-1}\big(y_i - y, y_{i+1} - y\big)\big|\mathbb{E}\Big[\Big(\big|\tilde{X}_{\ell,j}\big| + \mathbb{E}\big|\tilde{X}_{\ell,j-1}\big|\Big)\Big(\big|\tilde{X}_{\ell',j'}\big| + \mathbb{E}\big|\tilde{X}_{\ell',j'-1}\big|\Big)\Big] \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} \big|F^{(4)}_{j-1}(u)\big|du \times \\
&\qquad \Big(\mathbb{E}\big|\tilde{X}_{\ell,j}\tilde{X}_{\ell',j'}\big| + \mathbb{E}\big|\tilde{X}_{\ell,j}\big|\mathbb{E}\big|\tilde{X}_{\ell',j'-1}\big| + \mathbb{E}\big|\tilde{X}_{\ell,j-1}\big|\mathbb{E}\big|\tilde{X}_{\ell',j'}\big| + \mathbb{E}\big|\tilde{X}_{\ell,j-1}\big|\mathbb{E}\big|\tilde{X}_{\ell',j'-1}\big|\Big).
\end{aligned}$$

Or nous avons pour tous $j, j' \geq 1$,

$$\mathbb{E}\big|\tilde{X}_{\ell,j}\tilde{X}_{\ell',j'}\big| \leq \mathbb{E}\big(\tilde{X}^2_{\ell,j}\big)^{1/2}\mathbb{E}\big(\tilde{X}^2_{\ell',j'}\big)^{1/2},$$

$$\mathbb{E}\big|\tilde{X}_{\ell,j}\big|\mathbb{E}\big|\tilde{X}_{\ell',j'}\big| \leq \mathbb{E}\big(\tilde{X}_{\ell,j}^2\big)^{1/2}\mathbb{E}\big(\tilde{X}_{\ell',j'}^2\big)^{1/2},$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\tilde{X}_{\ell,j}^2\big)^{1/2} &\leq C\sum_{i=j+1}^{+\infty} i^{-(1+\alpha)}\\ &\leq Cj^{-\alpha/2}\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\mathrm{Var}\Big(T_{n,2}\big(y_i,y_{i+1}\big)\Big)\\ &\quad\leq C\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{\ell'=\ell}^{n}\sum_{2\leq j_1<j_2}\big(b_{j_1}b_{j_1'}b_{j_2}b_{j_2'}\big)\big(j_2j_2'\big)^{-\alpha/2}\\ &\quad\leq Cn\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{2\leq j_1<j_2}\big(j_1(\ell+j_1)j_2(\ell+j_2)\big)^{-(\alpha+1)/2}\big(j_2(\ell+j_2)\big)^{-\alpha/2}.\end{aligned}$$

Or d'après le Lemme B.2.3, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq j_1<j_2}\big(j_1(\ell+j_1)j_2(\ell+j_2)\big)^{-(\alpha+1)/2}\big(j_2(\ell+j_2)\big)^{-\alpha/2} &\leq C\sum_{j=1}^{+\infty}\big[j(\ell+j)\big]^{-(3\alpha+1)/2}\\ &\leq \begin{cases}C\ell^{-3\alpha}, & \text{si } \frac{3\alpha+1}{2}\in(\frac{1}{2},1),\\ C\frac{\ln\ell}{\ell}, & \text{si } \frac{3\alpha+1}{2}=1,\\ C\ell^{-(3\alpha+1)/2}, & \text{si } \frac{3\alpha+1}{2}>1.\end{cases}\end{aligned}$$

Ce qui montre bien que

$$\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}\mathrm{Var}\Big(T_{n,2}\big(y_i,y_{i+1}\big)\Big) \leq C\big(n\vee n^{2-3\alpha}\big),$$

et termine la preuve de la Proposition B.2.1.

Bibliographie

[1] ADENSTEDT, R. (1974). *On large-sample estimation for the mean of stationary random sequence.* Ann. Statist. 2, 1095–1107.

[2] ANDEL, J. (1986). Long-memory time series models. Kybernetika. 22, 105–123.

[3] ARCONES, M. A. (2000). *Distributional limit theorems over a stationary Gaussian sequence of random vectors.* Stoch. Proc. and their Appl. 88, 135–159.

[4] AVRAM, F., TAQQU, M. S. (1987). *Noncentral limit theorems and Appell polynomials.* Ann. Probab. 15, 767–775.

[5] BARDET, J.-M., LANG, G., OPPENHEIM, G., PHILIPPE, A., TAQQU, M. S. (2001). *Generators of long-range processes : A survey.* In Long range dependence : theory and applications, Eds : P. Doukhan, G. Oppenheim, M. S. Taqqu. (A paraître à Birkhäuser).

[6] BEN HARIZ, S. (1999). *Théorèmes limites pour des processus faiblement ou fortement dépendants. Applications Statistiques.* Thèse. Université Paris–Sud.

[7] BERAN, J. (1991). *M-estimators of location for data with slowly decaying correlations.* J. Ammer. Statist. Assoc. 86, 704–708.

[8] BILLINGSLEY, P. (1968). *Convergence of Probability measures.* Wiley.

[9] BILLINGSLEY, P. (1994). Probability and measure. New York : Wiley, 3rd edition.

[10] BREUER, P., MAJOR, P. (1983). *Central limit theorem for non–linear functionals of gaussian fields.* J. Multv. Anal. 13, 425–441.

[11] BROCKWELL, P. J., DAVIS, R. A. (1987). *Time series : Theory and methods.* Springer. Berlin Heidlberg New York.

[12] CSÖRGŐ, S., MIELNICZUCK, J. (1995). *Close short–range dependent sums and regression estimation.* Acta. Sci. Math. 60, 177–196.

[13] CSÖRGŐ, S., MIELNICZUC K, J. (1996). *The empirical process of a short–range dependent stationary sequence under Gaussian subordination.* Probab. Theory and related Fields 104, 15–25.

[14] DAVYDOV, YU. (1970). The invariance principle for stationary processes. Theor. of Probab. and Appl. 15, 487–498.

[15] DEHLING, H., TAQQU, M. S. (1989). *The empirical process of some long–range dependent sequences with an application to U–statistics.* Ann. statist. 4, 1767–1783.

[16] Dehling, H., Taqqu, M. S. (1991). *Bivariate symmetric statistics of long–range dependent observations.* J. of statist. plann. and Inf. 28, 153–165.

[17] Dobrushin, R. L., Major, P. (1979). *Non central limit theorems for non-linear functionals of gaussian fields.* Z. Wahrsch. verw. Geb. 50, 27–52.

[18] Doukhan, P. (1994). *Mixing : Properties and Examples.* Lecture notes in Statistics. 85, Springer Verlag.

[19] Doukhan, P. (2001). *Limit Theorems for dependent stationary sequences.* In Long range dependence : theory and applications, Eds : P. Doukhan, G. Oppenheim, M. S. Taqqu. (A paraître à Birkhäuser).

[20] Doukhan, P. Louhichi, S. (1999). *A new weak dependence condition and applications to moment inequalities.* Stoch. Proc. and their Appl. 84, 313–342.

[21] Doukhan, P., Massart, P., Rio, E. (1994). *The functional central limit theorem for strongly mixing process.* Ann. Inst. Henri Poincaré. 30, 63–82.

[22] Doukhan, P., Surgailis, D. (1997). *Functional central limit theorem for the empirical process of short memory linear processes.* C.R. Acad. Sci. Paris. 326. Ser. I. 87–92.

[23] Feller, W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications.* Volume II. 2nd ed. New York : Wiley.

[24] Ghosh, J. (1996). *A new graphical tool to detect non normality.* J. Royal Statist. Soc. (Ser B), 58, 691-702.

[25] Giraitis, L. (1983). *Convergence of certain nonlinear transformations of a Gaussian sequence to self–similar process.* Lithuanian Math. J. 23, 1, 58–68.

[26] Giraitis, L. (1985). *Central limit theorem for functionals of a linear process.* Lithuanian Math. J. 25, 25–35.

[27] Giraitis, L., Koul, H. L., Surgailis, D. (1996). *Assymptotic normality of regression estimators with long memory erros.* Statist. Probab. Lett. 29, 317–335.

[28] Giraitis, L., Leipus, R. (1995). *A generalized fractionally differencing approach in long-memory modeling.* Lithuanian Math. J. 35, 65–81.

[29] Giraitis, L., Leipus, R., Surgalis, D. (1996). *The change-point problem for dependent observations.* J. Statist. Plan. Infer. 53, 297–310.

[30] Giraitis, L., Surgailis, D. (1985). *CLT and other limit theorems for functionals of gaussian processes.* Z. Wahrsch. vew. Geb. 70, 191–212.

[31] Giraitis, L., Surgailis, D. (1986). *Multivariate Appell polynomials and the central limit theorem.* In Dependence in Probability and Statistics (E. Eberlein and M. S. Taqqu, Eds). 21–71. Birkhäuser, Boston.

[32] Giraitis, L., Surgailis, D. (1999). *Central limit theorem for the empirical process of a linear sequence with long memory.* J. of stat. plann. and Inf. 80, 81–93.

[33] Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M. (1994). *Table of integrals, series and products.* Jeffrey A. 5th edition, Academic Press.

[34] Granger, C. W., Joyeux, R. (1980). *An introduction to long-memory time series models and fractional differencing.* J.Time Series Anal. 1, 15–29.

[35] Gray, H. L., Zhang, N.-F., Woodward, W. A. (1989). *On generalized fractional processes.* J. Time Ser. Anal. 10, 223–257.

[36] Hall, P., Hart, J. D. (1990). *Convergence rates in density estimation for data from infinite-order moving average processes.* Probab. Th. Rel. Fields 87, 253–274.

[37] Hassler, U. (1994). *(Mis)specification of long–memory in seasonal time series.* J. time Ser. Anal. 15, 19–30.

[38] Ho, H. C., Hsing, T. (1996). *On the asymptotic expansion of the empirical process of long memory moving averages.* Ann. Statist. 24, 992–1024.

[39] Ho, H. C., Hsing, T. (1997). *Limit theorems for functionals of moving averages.* Ann. Statist. 25, 1636–1669.

[40] Hosking, J. R. M. (1981). Fractional differencing. Biometrika 68, 165–176.

[41] Ibragimov, I. A., Linnik, J. V. (1971). *Independent and stationary sequences of random variables.* Groningen : Walters-Noordoff.

[42] Jonas, A. (1981). *Long memory self similar time series models.* unpublished manuscript, Harvard University, Dept. of Statistics.

[43] Karatzas, I., Shreve, S. E. (1988). *Brownian motion and stochastic calculus.* Springer-Verlag, New York.

[44] Koul, H. L.(1992). *M-estimators in linear models with long range dependent errors.* Statist. Probab. Lett. 14, 153–164.

[45] Koul, H. L., Mukherejee, K. (1993). *Assymptotics of R-, MD- and LAD-estimators in linear regression models with long range dependent errors.* Probab. Theory Rel. fields. 95, 535–553.

[46] Koul, H. L., Surgailis, D. (1997). *Asymptotic expension of M-estimators with long memory errors.* Ann. Statist. 25, 818–850.

[47] Koul, H. L., Surgailis, D. (2001). *Asymptotics of empirical processes of long memory moving averages with infinite variance.* Stochastic processes and their applications. 91, 309–336.

[48] Leipus, R., Viano, M.-C. (2000). *Modeling long memory time series with finite or infinite variance : a general approach.* J. of Time Ser. An. 21. N^{o} 1, 61–74.

[49] Lukacs, E. (1970). *Characteristic functions.* 2nd edition, New York : Hafner.

[50] Major, P. (1981). *Multiple Wiener–Itô Integrals.* Lecture Notes in Mathematics. 849. Spinger–Verlag. Berlin Heidelberg New York.

[51] Mandelbrot, B. B., Van Ness, J. W. (1968). *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications.* SIAM *Review* 10, 422–437.

[52] Newman, C. (1984). *Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables.* IMS Lecture Notes-Monographs. Series 5, 127–140.

[53] Newman, C. M., Wright, A. L. (1981). *An invariance principle for certain dependent sequences.* Ann. of Probab. 9, 671–675.

[54] Oppenheim, G., Ould Haye, M., Viano, M.-C. (2000). *Long memory with seasonal effects.* Statist. Inf. Stoch. Proc. 3, 53–68.

[55] Oppenheim, G., Viano, M.-C. (1999). *Obtaining long–memory by aggregating random coefficients discrete and continuous time simple short memory processes.* Pub. IRMA. Lille 49-V.

[56] Ould Haye, M. (1999). *Longue mémoire saisonnière et convergence vers le processus de Rosenblatt.* Pub. IRMA. Lille. 50-VIII.

[57] Ould Haye, M. (2001). *Asymptotic behavior of the empirical process for seasonal long-memory data.* A paraître dans ESAIM.

[58] Ould Haye, M., Viano, M.-C. (2001). *Limit theorems under seasonal long-memory.* In Long range dependence : theory and applications, Eds : P. Doukhan, G. Oppenheim, M. S. Taqqu. (A paraître à Birkhäuser).

[59] Pollard, D. W. (1984). *Convergence of Stochastic Processes.* Springer, New York.

[60] Porter–Hudak, S. (1990). *An application of seasonal fractionally differenced model to the monetary aggregates.* JASA. 85, 338–344.

[61] Robinson, P. (1994). *Semiparametric analysis of long-memory time series.* Ann. Statist. 22, 515–539.

[62] Rosenblatt, M. (1961). *Independence and dependence.* Proc.4$^{\text{th}}$ Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab. 411–443. Berkeley : Univ. Calif. Press.

[63] Rosenblatt, M. (1981). *Limit theorems for Fourier transform of functional of Gaussian sequences.* Z. Wahrsch. verw. Geb. 55, Vol. 2, 123–132.

[64] Rozanov, Y. A. (1967). *Stationary random sequences.* Holden-Day, San Francisco, CA.

[65] Shao Q., Yu, H. (1996). *Weak convergence for weighted empirical process of dependent sequences.* Ann. Probab. 24, 2094–2127.

[66] Shorack, G. R., Wellner, J. A. (1986). *Empirical Processes with Applications to Statistics.* Wiley, New–York.

[67] Surgailis, D. (1982). *Zones of attraction of self similar multiple integrals.* Lithuanian Math. J. 22, 327–340.

[68] Taqqu, M. S. (1975). *Weak convergence to fractional Brownian motion and to the Rosenblatt process.* Z. Wahrsch. verw. Geb. 31, 287–302.

[69] Taqqu, M. S. (1979). *Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank.* Z. Wahrsch. verw. Geb. 50, 53–83.

[70] Terrin, N., Taqqu, M. S. (1991). *Convergence in distribution of sums of bivariate Appell polynomials with long–range dependence.* Probab. Th. Rel. Fields 90, 57–81.

[71] Yoshihara, K. (1975). *Billingsley's theorems on empirical processes of strong mixing sequences* Yokohama Math. J. 23, 1–7.

[72] VIANO, M.-C., DENIAU, C., OPPENHEIM, G. (1995). *Long range dependence and mixing for discrete time fractional processes.* J. Time Ser. Anal. 16, 323–338.

[73] ZYGMUND, A. *Trigonometric Series,* Oxford Univ. Press.

Résumé

Nous étudions le comportement asymptotique de statistiques ou fonctionnelles liées à des processus à longue mémoire saisonnière.
Nous nous concentrons sur les lignes de Donsker et sur le processus empirique. Les suites considérées sont de la forme $G(X_n)$ où (X_n) est un processus gaussien ou linéaire.
Nous montrons que les résultats que Taqqu ainsi que Dobrushin et Major ont obtenus pour des processus à longue mémoire dont la covariance est à variation régulière à l'infini peuvent être en défaut en présence d'effets saisonniers. Les différences portent aussi bien sur le coefficient de normalisation que sur la nature du processus limite. Notamment nous montrons que la limite du processus empirique bi–indexé, bien que restant dégénérée, n'est plus déterminée par le degré de Hermite de la fonction de répartition des données. En particulier, lorsque ce degré est égal à 1, la limite n'est plus nécessairement gaussienne. Par exemple on peut obtenir une combinaison de processus de Rosenblatt indépendants.
Ces résultats sont appliqués à quelques problèmes statistiques comme le comportement asymptotique des U-statistiques, l'estimation de la densité et la détection de rupture.

Mots clés : Détection de rupture ; Estimation à noyaux ; Effets saisonniers ; Fonctionnelles de von-Mises ; Longue mémoire ; Polynômes d'Appell ; Polynômes de Hermite ; Processus de Rosenblatt ; Processus empirique ; Processus gaussiens ; Processus linéaires ; U-statistiques.