N° d'ordre : 3081

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

DISCIPLINE : MATHÉMATIQUES

SPECIALITÉ : PROBABILITÉS

par

Jean-Christophe BRETON

Intégrales stables multiples - propriétés des lois ; principe local d'invariance pour les variables aléatoires stationnaires

soutenue le 20 décembre 2001 devant le jury composé de

Président :	M. YOR,	Université Paris VI
Directeur de Thèse :	Y. A. DAVYDOV,	Université Lille I
Rapporteurs :	M. A. LIFSHITS,	Université de Saint-Petersbourg
	Z. SHI,	Université Paris VI
	M. S. TAQQU,	Université de Boston
Examinateurs :	A. DERMOUNE,	Université Lille I
	C. SUQUET,	Université Lille I

AVERTISSEMENT

Remerciements

De nombreuses personnes ont contribué au bon déroulement de cette thèse. L'occasion m'est offerte ici de leur exprimer ma gratitude.

C'est d'abord pour moi un grand plaisir de remercier Youri Davydov qui a encadré ce travail sur un sujet original avec un dynamisme et un enthousiasme de tous les instants. Sa disponibilité constante, ses nombreux conseils et l'étendue de ses compétences mathématiques sont autant de facteurs qui ont largement contribué à la réalisation de cette thèse.

Je le remercie pour son soutien et sa confiance amicale à tous les stades d'élaboration de ces travaux. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je remercie tout particulièrement Marc Yor pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse et pour l'honneur qu'il m'a fait en le présidant.

J'adresse également mes plus vifs remerciements

- à Michel Lifshits pour avoir accepté d'être rapporteur de ce travail, pour son soutien et ses conseils depuis le début de ma thèse ;
- à Zhan Shi pour avoir accepté ce rôle de rapporteur et pour l'intérêt qu'il a ainsi témoigné pour mon travail ;
- à Murad Taqqu pour avoir manifesté un grand intérêt en rapportant cette thèse et pour les commentaires et remarques utiles qui ont permis d'améliorer le texte.

Je remercie chaleureusement Azzouz Dermoune et Charles Suquet pour l'intérêt qu'ils portent à ce travail, leurs participations à ce jury et leurs lectures attentives du manuscrit de cette thèse.

Je tiens à souligner que cette thèse a largement bénéficié des excellentes conditions de travail qu'offrent le laboratoire de Statistique et Probabilités de Lille. J'en remercie Marie-Claude Viano et à travers elle l'ensemble des membres du laboratoire notamment Anne Philippe et Nelly Hanoune.

J'y associe également l'ensemble de mes camarades doctorants : Mohamedou, Pierre-Yves, David, Octave, Abbas, Frédéric ainsi que ceux du début Bruno, Cristian, Emmanuel, Mohamed, Olivier.

Je remercie l'ensemble du personnel du secrétariat scientifique, de l'imprimerie de l'U.F.R. de Mathématiques et le personnel technique pour avoir répondu à mes demandes avec la gentillesse et l'efficacité dont ils sont coutumiers.

Pour toutes ces années de thèse, je remercie enfin mes amis ainsi que, et surtout, ma famille pour toutes les formes de soutien qu'elle m'a apportées.

Table des matières

Introduction

L'étude des lois de fonctionnelles stochastiques (autrement dit de fonctionnelles définies sur un espace de probabilité) est un problème majeur de la théorie des probabilités. Il est au cœur notamment des théorèmes limites, de la statistique mathématique, des méthodes d'approximations. L'analyse de ces lois par la méthode des fonctions caractéristiques a permis d'obtenir certains résultats essentiellement dans le cas de fonctionnelles linéaires. Par exemple lorsque l'on considère la loi P du mouvement brownien sur l'espace des fonctions continues $C([0,1])$, des calculs explicites ont permis d'étudier avec succès la loi Pf^{-1} pour les fonctionnelles :

$$f(x) = \sup_{t\in[0,1]} x(t), \qquad f(x) = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|, \qquad f(x) = \int_0^1 |x(t)|^p \, dt$$

pour $p = 2$. Néanmoins, les techniques employées sont calculatoires et ne s'adaptent pas, même pour l'étude de fonctionnelles voisines : ainsi pour $p \neq 2$, ni l'existence de la densité pour la troisième fonctionnelle, ni aucune expression explicite n'étaient connues.

Les premiers résultats importants dans ce domaine apparaissent dans les années 1970 lorsque Tsirel'son utilise les propriétés géométriques et analytiques des mesures gaussiennes pour décrire la structure de ces distributions pour une large classe de fonctionnelles. Son approche est liée aux propriétés de convexité des mesures gaussiennes mises en lumière peu après par Borell et Ehrhard. A la même époque Malliavin considère des problèmes hypo elliptiques et étudie de notre point de vue la régularité de la densité de Pf^{-1} pour $f(x) = x(1)$ et P la loi d'un processus de diffusion vérifiant une équation différentielle stochastique d'une certaine espèce. Le type de calcul ainsi développé se révèle très intéressant pour l'étude des propriétés de dérivabilité de ces densités lorsque la mesure P satisfait certaines conditions de régularité.

Pour aborder efficacement ces questions d'absolue continuité et de convergence de fonctionnelles stochastiques pour une large classe de fonctionnelles, Davydov et Lifshits introduisent en 1978 la méthode de stratification puis de superstructure (*cf.* [9, 13]).

En substance, la méthode de stratification consiste en trois étapes principales : étant donnée une mesure P sur un espace métrique complet séparable $\mathcal{X}$, commençons par définir une partition mesurable Γ de $\mathcal{X}$ dont les classes d'équivalence sont de structures géométriques assez simples (les *strates* γ, de dimension finie). La mesure P se voit ainsi comme mélange de mesures conditionnelles P_γ concentrées sur les classes d'équivalence. On étudie alors d'une part la mesure quotient P_Γ puis surtout les distributions conditionnelles $P_\gamma f^{-1}$ qui sont des lois sur un espace de dimension finie pour lesquelles on dispose donc d'outils classiques. On obtient finalement des informations sur Pf^{-1} en utilisant la formule de probabilité totale : pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$Pf^{-1}(A) = \int_{\mathcal{X}/\Gamma} P_\gamma f^{-1}(A)\, P_1(d\gamma).$$

Cette méthode permet aussi de s'intéresser à la convergence forte des lois des fonctionnelles, c'est à dire à la convergence pour la topologie associée à la norme de la variation sur l'espace des mesures signées (voir [8] pour des résultats de ce type, [7, 26, 27] sur l'absolue continuité et la densité). On parle encore de convergence en variation et on la symbolise dans la suite par $\xrightarrow{var}$.

Dans certains problèmes d'absolue continuité ou de convergence forte de lois fonctionnelles, la méthode de stratification exige plus des distributions conditionnelles que ce qui est vraiment nécessaire. Il est alors intéressant d'utiliser la modification suivante de la stratification : cette méthode dite de superstructure consiste à introduire sur un espace élargi des familles auxiliaires de mesures Q_ε et de fonctionnelles F_ε telles que $Q_\varepsilon F_\varepsilon^{-1}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ et $Q_\varepsilon \xrightarrow{var} P$ quand $\varepsilon \to 0$. En pratique, nous disposons souvent d'une famille de transformations $\{G_c\}_{c\in\mathbb{R}^+}$ dont l'action sur P est faible pour c assez proche de 0 :

$$PG_c^{-1} \xrightarrow{var} P, \quad c \to 0.$$

On peut alors facilement mettre en œuvre cette méthode sur l'espace $\mathcal{X} \times [0, \varepsilon]$, avec Q_ε, F_ε construites à partir de P et f. La convergence $Q_\varepsilon \xrightarrow{var} P$ s'obtient facilement à partir de celle de PG_c^{-1} quand $c \to 0$ et l'absolue continuité de $Q_\varepsilon F_\varepsilon^{-1}$ par la méthode de stratification en considérant la partition en strates « parallèles » à $[0, \varepsilon]$. Nous nous ramenons en fait à l'étude des restrictions de f sur les orbites des transformations $\{G_c\}_{c\in\mathbb{R}^+}$.

Avec ces techniques d'analyse des fonctionnelles stochastiques, nous nous intéressons dans ce travail aux problèmes suivants d'absolue continuité et de convergence forte de lois : nous étudions les intégrales stochastiques stables multiples et leur loi qui sont encore assez mal connues, on s'intéresse à leur absolue continuité et à leur continuité par rapport au noyau intégré pour la topologie associée à la variation ; nous étudions également dans une deuxième partie la convergence forte de lois de certaines fonctionnelles de processus classiques, obtenant ainsi des principes locaux d'invariance généralisant les convergences de théorèmes centraux limites fonctionnels.

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux intégrales stochastiques stables multiples.

Initialement les intégrales multiples ont été définies par rapport au mouvement brownien par Wiener (1938) sous forme de chaos polynomial de variables gaussiennes indépendantes puis généralisées par Itô (1951). Elles ont mené à une vaste théorie très riche (*cf.* Major (1981) [31]).

Plusieurs constructions d'intégrales stochastiques multiples pour des processus gaussiens plus généraux ont été proposées (Engel (1982) [16] donne une vue d'ensemble de la théorie L^2 de l'intégration stochastique multiple) mais aussi pour des processus non gaussiens en supposant l'existence de moments élevés (Lin (1981) [29], Surgailis (1981, 1984) [49, 50], Rosiński-Szulga (1982) [41]). Les processus stables ne bénéficient que de pauvres propriétés d'intégrabilité et ne rentrent donc pas dans le cadre de ces travaux.

D'une façon générale, les intégrales stochastiques multiples sont liées à l'étude des formes multilinéaires aléatoires (voir Rosiński-Woyczyński (1984) [38], Krakowiak-Szulga (1986) [21]). Dans le cas stable, les intégrales multiples servent notamment à définir des classes de processus autosimilaires ou encore à identifier des distributions limites de fonctionnelles de sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (voir [50, 1]).

De même que les lois stables généralisent les lois gaussiennes, les intégrales stables multiples apparaissent comme une généralisation naturelle des intégrales multiples de Wiener-Itô. C'est pourquoi, dans cette première partie, nous reprenons l'étude de Davydov (1991) [11] sur l'absolue continuité des lois des intégrales multiples de Wiener-Itô dans le cas des intégrales multiples stables (voir aussi Shigekawa (1980) [47] et Kusuoka (1983) [23] pour des résultats analogues à [11]). Ceci nous a amené à expliciter avant tout la construction de ces intégrales en généralisant une représentation de type LePage, comme Samorodnitsky-Szulga (1989) [43] et Samorodnitsky-Taqqu (1990) [44] mais avec un formalisme plus simple. Cette construction permet alors d'étudier l'absolue continuité des lois jointes de ces intégrales avec la méthode de stratification. Comme les intégrales stables peuvent aussi se voir sous forme d'intégrale de type poissonien (*cf.* [46, th. 3.12.2]), nous nous sommes aussi posés la question de l'absolue continuité des lois de ces intégrales. Avant d'aborder la deuxième partie de notre travail sur la convergence forte des lois de fonctionnelles de processus de sommes partielles, nous avons étudié la continuité forte par rapport au noyau des intégrales stables multiples construites.

Le problème général de la convergence forte des lois de fonctionnelles stochastiques se pose de la façon suivante : étant donnée une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de mesures de probabilité sur un espace métrique complet séparable $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ qui converge faiblement vers une mesure P_∞ et $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle, la question est de trouver des conditions sur f pour avoir la convergence en variation des lois $P_n f^{-1}$ vers $P_\infty f^{-1}$. Lorsque tel est le cas et qu'en plus ces lois sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue λ, comme la convergence en variation devient équivalente à la convergence dans $L^1(\mathbb{R})$ des densités $dP_n f^{-1}/d\lambda$ vers $dP_\infty f^{-1}/d\lambda$, nous obtenons des théorèmes locaux limites. Quand $(P_n)_n$ converge déjà en variation vers P_∞, la convergence forte des lois est immédiatement garantie pour chaque fonctionnelle f, mais cette situation n'est pas fréquente. Au contraire en général, dans les cas intéressants, P_n est la loi d'un processus constant ou affine par morceaux associé à une suite de variables aléatoires. Les mesures P_n sont alors singulières par rapport à la mesure limite P_∞ et c'est cette mutuelle singularité qui explique les difficultés pour l'obtention des convergences fortes des lois de fonctionnelles stochastiques.

La méthode de superstructure permet d'appréhender ce problème. Elle donne des conditions suffisantes pour déduire la convergence forte des lois de fonctionnelles stochastiques à partir de convergences faibles des mesures [13, th. 18.3, 18.4]. Dans le cas de mesures gaussiennes, nous obtenons ainsi des convergences en variation pour une large classe de fonctionnelles ([13, th. 19.4]). C'est en appliquant cette technique qu'on s'intéresse à la *convergence forte* dans des théorèmes centraux limites fonctionnels classiques : étant donnée une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, centrées, de variance finie, on associe des processus constants par morceaux normalisés. Le théorème de Donsker-Prokhorov énonce la convergence faible des lois P_n de ces processus vers celle du mouvement brownien. Nous donnons des conditions pour avoir la convergence forte de $P_n f^{-1}$ pour f dans une large classe de fonctionnelles. Nous nous intéressons ensuite à une généralisation du même type de résultat pour les lois de processus associés à certaines suites de variables aléatoires stationnaires mélangeantes.

L'organisation de ce travail est la suivante :

Dans le chapitre 1, nous commençons par considérer des intégrales stochastiques de type poissonien. Nous rappelons plusieurs approches : à partir d'une mesure aléatoire poissonienne sur un espace mesuré $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ abstrait ou à partir d'un processus de Poisson standard sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \lambda)$. Nous confrontons ces différentes approches puis nous étudions l'absolue continuité des lois des objets probabilistes ainsi construits, en particulier pour des espaces fini-dimensionnels.

Notre étude se porte ensuite dans le chapitre 2 sur les intégrales multiples stables : étant donnée une mesure aléatoire α-stable M de fonction de biais β avec $\alpha \in (0,2)$, $\beta : [0,1] \to [-1,1]$ mesurable, le premier problème est de construire une intégrale multiple par rapport à cette mesure M. Pour cela, à partir du cas des intégrales stables simples qu'on rappelle de [46], nous proposons de généraliser les représentations de type LePage et de construire les intégrales multiples à partir de ces représentations. Soulignons que plusieurs approches *ont été proposées* pour cette construction. On citera notamment celle de Surgailis (1985) [51] qui se ramène à des intégrales multiples de Poisson qu'il définit par un théorème d'interpolation dans les espaces de Lorentz. Dans [39, 24], Rosiński-Woyczyński (1986) puis Kwapień-Woyczyński (1987) construisent des intégrales itérées et obtiennent une condition nécessaire et suffisante pour l'existence des intégrales stables doubles. Krakowiak-Szulga (198[illegible]) [22] définissent une mesure aléatoire stable produit ; et enfin Samorodnitsky, Szulga, Taqqu [43, 44, 45] ont aussi utilisé les représentations de LePage. On s'appuie cependant ici sur un formalisme probabiliste plus simple et on accepte pour $\alpha < 1$ que la mesure M ne soit pas symétrique (i.e. le biais β n'est pas nécessairement nul). La construction permet ainsi de définir l'intégrale α-stable d-multiple $I_d(f)$ pour des noyaux f dans l'espace de type Orlicz

$$L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d) = \left\{ f : [0,1]^d \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_{[0,1]^d} |f|^\alpha (1 + \log_+ |f|)^{d-1} d\lambda^d \right\}$$

pour $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$, $\beta \equiv 0$. De plus cette construction donne une représentation bien adaptée pour l'étude de leur loi : elle permet notamment de décrire précisément la queue de ces lois dans [43, 44] et d'étudier la régularité des trajectoires de processus définis pas ces intégrales (*cf.* [40]). Dans la suite, elle nous permet d'appliquer efficacement la méthode de stratification.

Nous commençons l'étude des lois des intégrales stables multiples au chapitre 3. On prouve l'absolue continuité des lois jointes $(I_{d_1}(f_1), I_{d_2}(f_2), \ldots, I_{d_p}(f_p))$ en supposant vérifiée une condition **(H)** sur les noyaux $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$. Nous commençons par donner quelques cas concrets pour lesquels la condition **(H)** est satisfaite et d'autres où la loi jointe est dégénérée lorsque **(H)** est en défaut ; par exemple dans le cas des lois simples, la non dégénérescence de f (i.e. $f \not\equiv 0$) garantit l'absolue continuité de la loi de $I_d(f)$ (*cf.* [3, 5]). Nous prouvons d'abord le résultat dans le cas des lois simples pour mieux mettre en lumière les idées de la méthode en évitant les difficultés techniques du cas joint. Pour cela, nous utilisons la représentation établie dans le chapitre 2. En introduisant un processus stable de loi P associée à la mesure aléatoire M, l'intégrale stable multiple $I_d(f)$ se voit comme une fonctionnelle sur l'espace de Skorokhod $\mathbb{D}$ des fonctions *cadlag* (continues à droite et avec une limite à gauche) sur $[0, 1]$. On se ramène à l'étude de cette fonctionnelle stochastique. Nous commençons d'abord par réduire et localiser le problème pour utiliser ensuite (localement) la méthode de stratification en définissant une partition à partir de transformations admissibles pour P. Celles-ci, cas particuliers de transformations introduites par Lifshits dans [9], sont définies par des fonctions, appelées dans la suite champs locaux ; elles agissent sur les sauts de $x \in \mathbb{D}$ selon leur module, leur signe et leur localisation. La méthode de stratification ramène ainsi l'étude à celles de fonctionnelles conditionnelles restreintes aux strates de la partition. Nous étudions alors leur non dégénérescence en analysant la non nullité d'un coefficient associé (le coefficient d'un jacobien associé dans le cas joint). La condition **(H)** dans le cas général permet de conclure à la non nullité de ce coefficient et à l'absolue continuité de la loi jointe $(I_{d_1}(f_1), I_{d_2}(f_2), \ldots, I_{d_p}(f_p))$.

Dans le chapitre suivant, notre intérêt se porte sur la continuité forte -ou en variation- des lois des intégrales multiples stables $I_d(f)$ par rapport au noyau f. Après quelques rappels sur la variation des mesures, utilisés aussi dans la suite pour l'étude des convergences fortes, nous prouvons cette continuité en utilisant la représentation du chapitre 2 et ses propriétés. Compte tenu de l'absolue continuité justifiée au chapitre 3, nous obtenons en fait ici la convergence dans $L^1(\mathbb{R})$ des densités des lois des intégrales stochastiques $I_d(f)$.

La deuxième partie de ce travail commence avec le chapitre 5, elle est consacrée à l'étude de convergences fortes des lois de fonctionnelles stochastiques. Nous considérons une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, centrées, de variance finie, on leur associe des processus constants par morceaux en prenant sur chaque intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ les sommes partielles des variables aléatoires normalisées. La convergence faible de ces processus vers le mouvement brownien est bien connue par le théorème de Donsker-Prokhorov ; nous cherchons à renforcer la convergence des lois de fonctionnelles de ces processus. Pour cela, on commence par rappeler les résultats dûs à la méthode de superstructure et notamment le théorème fondamental qui donne des conditions sur les fonctionnelles pour renforcer la convergence faible des lois des fonctionnelles stochastiques. Ces résultats permettent d'obtenir les convergences cherchées lorsque la loi commune des variables est assez régulière (plus précisément l'information de Fisher de la densité doit être finie [13, th. 20.1]). Dans la suite, nous affaiblissons l'hypothèse sur la loi commune en montrant que si elle admet une densité presque partout non nulle sur son support, nous obtenons toujours la convergence forte pour une classe encore assez large de fonctionnelles. L'idée nouvelle par rapport aux résultats précédents est de voir les variables considérées comme des fonctions de variables orthogaussiennes par une transformation quantile. Les partitions utilisées pour la méthode de superstructure sont définies à partir de transformations non linéaires induites par des translations admissibles. L'analyse du comportement asymptotique des lois conditionnelles correspondant devient plus compliquée et demande des outils supplémentaires notamment l'application du théorème de représentation de Skorokhod et d'un résultat de Davydov (1995) [12] sur la convergence en variation de mesures images de dimension 1. En substance, la condition sur les fonctionnelles porte sur une dérivabilité faible pour les directions proches d'une direction admissible de P. Nous achevons ce chapitre en exhibant deux types de fonctionnelles classiques qui vérifient les hypothèses requises pour notre résultat : fonctionnelles de type supremum de fonctions convexes d'une part et de type intégrale par rapport à un noyau d'autre part. On renvoie à [4] pour une description succincte des idées principales mises en jeu dans ce chapitre.

Dans le chapitre 6, nous réemployons les techniques précédentes en partant d'une suite de variables aléatoires dépendantes. Plus précisément, nous considérons une suite de variables aléatoires données par une transformation croissante absolument continue de variables gaussiennes standard mélangeantes et nous nous intéressons à la loi des processus affines associés. On commence par rappeler les outils de dépendance utiles dans cette partie et les théorèmes limites centraux fonctionnels pour des variables dépendantes qui assurent les convergences faibles, point de départ de notre étude. Nous obtenons alors des théorèmes locaux limites sous une condition sur la vitesse de convergence des coefficients de mélange fort de la suite gaussienne et des conditions proches du cas *i.i.d* du chapitre 5 pour la fonctionnelle f. Par exemple, en appliquant ce résultat à la fonctionnelle élémentaire f donnée par $f(x) = x(1)$, on obtient un théorème local limite pour les sommes de variables dépendantes normalisées S_n :

$$\mathcal{L}(S_n) \xrightarrow{var} \mathcal{N}(0,1)$$

Première partie

Intégrales stochastiques multiples

Chapitre 1

Intégrales de Poisson

La première partie de ce travail est consacrée à l'étude d'intégrales stochastiques multiples : leurs constructions, leur loi. Dans le cas de l'intégration multiple par rapport à une mesure gaussienne standard, on obtient les intégrales de Wiener-Itô dont l'absolue continuité des lois est discutée par Shigekawa (1980) [47] en utilisant une variante du calcul de Malliavin, par Kusuoka (1983) [23] avec des arguments algébriques et par Davydov (1991) [11] avec la méthode de stratification. On s'intéresse essentiellement dans cette partie aux intégrales stables qu'il faut d'abord construire (chapitre 2), on discute alors de leur loi : leur absolue continuité (chapitre 3) et la continuité par rapport au noyau pour la topologie associée à la variation (chapitre 4). On commence dans ce premier chapitre par introduire l'étude de l'absolue continuité des lois d'intégrales stochastiques en considérant des intégrales de type poissonien. Le cadre est plus simple car on se restreint aux intégrales simples, mais d'un certain point de vue, il est porteur de plus de généralité : en effet les lois stables peuvent se définir comme des mélanges poissoniens, et on peut ainsi ramener les intégrales stochastiques stables à des intégrales de type poissonien sur un espace plus large (on notera que c'est le type d'approche suivie par Surgailis dans [51], voir aussi [46, section 3.12] pour les intégrales stables simples, ce n'est cependant pas une construction de ce type qu'on propose au chapitre 2).

On commence en section 1.1 par définir l'intégrale poissonienne de façon abstraite (i.e. sur un espace mesuré arbitraire) ou par rapport à un processus de Poisson standard (sur l'espace $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \lambda)$). En comparant ces constructions, on remarque dans la section 1.2 qu'on peut prolonger les intégrales par rapport à la mesure de Poisson centrée en un certain sens. On s'intéresse enfin à l'absolue continuité des lois de ces intégrales en section 1.3 d'abord dans un espace σ-fini puis dans un espace de dimension finie où on donne des conditions plus faibles en utilisant un résultat général d'absolue continuité. On notera dans toute la suite $\mu \ll \nu$ l'absolue continuité de la mesure μ par rapport à ν et $\blacksquare$ désigne la fin d'une démonstration.

1.1 Définition des intégrales par rapport à une mesure de Poisson

1.1.1 Approche abstraite

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, notons $\mathcal{A}^\circ = \{A \in \mathcal{A},\ \mu(A) < +\infty\}$. On commence par rappeler dans cette section des résultats bien connues. On définit d'abord les mesures de Poisson aléatoires subordonnées à la mesure μ :

Définition 1.1.1 (mesure de Poisson aléatoire) *V est une mesure de Poisson aléatoire subordonnée à μ si*

- *pour $A \in \mathcal{A}^\circ$, $V(A)$ a pour loi une loi de Poisson de paramètre $\mu(A)$:*

$$V(A) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{P}(\mu(A))$$

où $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ désigne l'égalité en loi ;

- *pour $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}^\circ$ disjoints, $V(A_1), \ldots, V(A_n)$ sont indépendants et*

$$V\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} V(A_j) \ p.s.$$

Définition 1.1.2 (mesure de Poisson aléatoire centrée) *Étant donnée V une mesure de Poisson aléatoire, on définit V° la mesure centrée associée par :*

$$V^\circ(A) = V(A) - \mu(A) \qquad \forall A \in \mathcal{A}^\circ.$$

On constate facilement que V° est une mesure stochastique orthogonale subordonnée à la mesure μ, c'est à dire vérifiant pour $A,\ B \in \mathcal{A}^\circ$:

$$\begin{aligned}
&E\,V^\circ(A) = 0,\\
&E\,V^\circ(A)^2 < +\infty,\\
&E\,V^\circ(A)V^\circ(B) = \mu(A \cap B).
\end{aligned}$$

On définit alors $\int f\, dV^\circ$ de façon classique comme une intégrale par rapport à une telle mesure stochastique orthogonale pour tout $f \in L^2(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$. On obtient ainsi une isométrie linéaire :

$$\begin{aligned}
L^2(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu) &\longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\\
f &\longmapsto \int f\, dV^\circ
\end{aligned}$$

avec

$$E\left(\int f\, dV^\circ\right)^2 = \int f^2 d\mu \tag{1.1.1}$$

Pour obtenir une écriture explicite de l'intégrale par rapport à une mesure de Poisson aléatoire centrée, rappelons d'abord la notion de mélange poissonien :

Définition 1.1.3 *Un mélange poissonien centré de mesure spectrale G est une loi notée $\overline{\exp}\, G$, de fonction caractéristique*

$$\varphi(x) = \exp\{\int (e^{ilx} - 1 - ilx)\, G(dl)\}.$$

Remarque 1.1.1 Quand la mesure G est finie, on décrit facilement un mélange poissonien : il correspond à une somme de variables indépendantes, identiquement distribuées de loi $G/|G|$, le nombre de termes de la somme suivant une loi $\mathcal{P}(|G|)$. Un mélange poissonien centré correspond alors à la variable aléatoire précédente, centrée.

Proposition 1.1.1 *L'intégrale par rapport à la mesure de Poisson centrée $\int f\, dV^\circ$ a pour loi un mélange poissonien $\overline{\exp}\, G$ de mesure spectrale $G = \mu f^{-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Démonstration : Pour une fonction simple $f = \sum_j c_j \mathbf{1}_{A_j}$, $A_j \in \mathcal{A}^\circ$, $\mathbf{1}_A$ désignant la fonction indicatrice d'un ensemble A mesurable, on a

$$\int f dV^\circ = \sum_j c_j V^\circ(A_j).$$

On en déduit la fonction caractéristique φ de $\int f dV^\circ$:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \exp\{\sum_j (e^{ixc_j} - 1 - ixc_j)\, \mu(A_j)\} \\
&= \exp\{\int (e^{ixf(u)} - 1 - ixf(u))\, \mu(du)\} \\
&= \exp\{\int (e^{ixt} - 1 - ixt)\, \mu f^{-1}(dt)\},
\end{aligned}$$

fonction caractéristique du mélange poissonien de mesure spectrale $G = \mu f^{-1}$.
Pour $f \in L^2(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$, on considère une suite de fonctions simples $(f_n)_n$ qui converge vers f dans $L^2(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$, les intégrales aléatoires de Poisson associées convergent dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ d'après l'isométrie (1.1.1) et a fortiori on a la convergence de leur fonction caractéristique. Il suffit alors de montrer que

$$\int (e^{ixf_n(u)} - ixf_n(u) - 1)\, \mu(du) \longrightarrow \int (e^{ixf(u)} - ixf(u) - 1)\, \mu(du).$$

En notant $v(h) = e^{ih} - 1 - ih$, on a les majorations élémentaires :

$$\begin{aligned}
|v(h)| &\leq h^2/2, \\
|v(xy) - v(xz)| &\leq 2x|y - z|.
\end{aligned}$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $A \in \mathcal{A}^\circ$:

$$\begin{aligned}
&\left| \int \left((e^{ixf_n(u)} - ixf_n(u) - 1) - (e^{ixf(u)} - ixf(u) - 1) \right) \mu(du) \right| \\
&\leq \int_A 2x|f(u) - f_n(u)|\, \mu(du) + \int_{A^c} \left(\frac{x^2}{2} f(u)^2 + \frac{x^2}{2} f_n(u)^2 \right) \mu(du) \\
&\leq 2x\, \mu(A)^{1/2} \|f - f_n\|_2 + \frac{x^2}{2} \left(\int_{A^c} f^2\, \mu(du) + \int_{A^c} f_n^2\, \mu(du) \right).
\end{aligned}$$

Or pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}^\circ$ tel que $\int_{A^c} f^2 \mu(du) \leq \varepsilon$ et donc pour tout entier n assez grand $\int_{A^c} f_n^2 \mu(du) \leq 2\varepsilon$, ce qui garantit pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\overline{\lim_n} \left| \int \left((e^{\imath x f_n(u)} - \imath x f_n(u) - 1) - (e^{\imath x f(u)} - \imath x f(u) - 1) \right) \mu(du) \right| \leq \frac{x^2}{2} 3\,\varepsilon.$$

On achève de prouver la proposition en faisant tendre ε vers 0. ∎

Pour définir l'intégrale $\int f dV$ par rapport à la mesure aléatoire de Poisson non centrée, on n'est plus dans le cadre classique de l'intégration par rapport à une mesure stochastique orthogonale. On commence par définir $\int f dV$ pour f simple du type $f = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{1}_{A_j}$ avec $A_j \in \mathcal{A}^\circ$ par :

$$\int f dV := \sum_{j=1}^n c_j V(A_j).$$

Pour définir l'intégrale pour une classe plus large de fonctions, on utilise le lemme qui suit :

Lemme 1.1.1 *Si $f_n \to f$ μ-presque partout et*

$$A = \{x \in \mathcal{X} \mid |f(x)| + \sum_{n>0} |f_n(x)| > 0\} \in \mathcal{A}^\circ,$$

alors $\int f_n dV$ converge dans $\mathbb{R}$ presque sûrement.

Démonstration : Soient $\varepsilon > 0$, $N > 0$ et

$$B_{N,\varepsilon} := \{x \in \mathcal{X} \mid \sup_{n \geq N} |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \subset A.$$

Pour n, $m \geq N$, on a :

$$\int |f_n - f_m| \, dV = \int_{B_{N,\varepsilon}} |f_n - f_m| \, dV + \int_{\mathcal{X} \setminus B_{N,\varepsilon}} |f_n - f_m| \, dV := I_1 + I_2.$$

On a

$$I_2 = \int_{\mathcal{X} \setminus B_{N,\varepsilon}} |f_n - f_m| \, dV = \int_{A \setminus B_{N,\varepsilon}} |f_n - f_m| \, dV \leq 2\varepsilon\, V(A).$$

Comme $\{I_1 \neq 0\} \subset \{V(B_{N,\varepsilon}) \neq 0\}$, il suit :

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{n,m \geq N} \int |f_n - f_m| \, dV > 2V(A)\varepsilon \right\} \leq \mathbb{P}\{V(B_{N,\varepsilon}) \neq 0\} = 1 - e^{-\mu(B_{N,\varepsilon})}.$$

Par hypothèse $\mu(B_{N,\varepsilon}) \to 0$ quand $N \to +\infty$, on a donc pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left\{ \lim_{N \to +\infty} \sup_{n,m \geq N} \int |f_n - f_m| dV > 2\varepsilon V(A) \right\} = 0$$

$$\mathbb{P}\left\{ \lim_{N \to +\infty} \sup_{n,m \geq N} \int |f_n - f_m| dV > 0 \right\} = 0$$

$$\mathbb{P}\left\{ \lim_{N \to +\infty} \sup_{n,m \geq N} \int |f_n - f_m| dV = 0 \right\} = 1.$$

A fortiori presque sûrement $\int f_n dV$ est une suite de Cauchy réelle donc presque sûrement convergente. ∎

Soit alors f mesurable satisfaisant

$$\mu\{x \in \mathcal{X} \mid f(x) \neq 0\} < +\infty, \tag{1.1.2}$$

en prenant $f_n(x) = \frac{1}{n}[nf(x)]\mathbf{1}_{|f(x)|\leq n}$, où $[x]$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$, on peut appliquer le lemme 1.1.1 pour définir

$$\int f dV := \lim_{n\to+\infty} \int f_n dV \quad \text{p.s.}$$

De plus le principe des sous-suites garantit que $\int f\, dV$ est ainsi bien définie.

Si $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace fini (*i.e.* $\mu(\mathcal{X}) < +\infty$), $\int f dV$ est définie pour toute fonction f mesurable car la condition suffisante (1.1.2) est satisfaite. On décrit dans la section suivante une construction alternative où l'existence de $\int f\, dV$ dans le cas $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ fini est plus naturelle que la condition (1.1.2). Cette approche est liée à la remarque 1.1.1 sur une écriture explicite des mélanges poissoniens.

Si $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace σ-fini, on a $\mathcal{X} = \cup_i \mathcal{X}_i$ avec $\mu(\mathcal{X}_i) < +\infty$ et $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$. Avec f_n approximation simple de f vérifiant (1.1.2), on a :

$$\begin{aligned}
\int f_n dV &= \frac{1}{n}[nf(x)]\, V\{x \mid |f(x)| \leq n\} \\
&= \lim_p \frac{1}{n}[nf(x)]\, V\{x \in \cup_{i\leq p}\mathcal{X}_i \mid |f(x)| \leq n\} \\
&= \lim_p \int_{\cup_{i\leq p}\mathcal{X}_i} f_n dV,
\end{aligned}$$

il suit presque sûrement :

$$\begin{aligned}
\int f dV &= \lim_n \int f_n\, dV = \lim_n \lim_p \int_{\cup_{i\leq p}\mathcal{X}_i} f_n dV \\
&\overset{(*)}{=} \lim_p \lim_n \int_{\cup_{i\leq p}\mathcal{X}_i} f_n\, dV = \lim_p \lim_n \sum_{i\leq p} \int_{\mathcal{X}_i} f_n\, dV \\
&= \lim_p \sum_{i\leq p} \int_{\mathcal{X}_i} f\, dV = \sum_i \int_{\mathcal{X}_i} f\, dV
\end{aligned}$$

où l'interversion $(*)$ se justifie en constatant que dans la preuve du lemme 1.1.1, on vérifierait un critère de Cauchy uniforme en p. On a donc

$$\int f dV = \sum_{i>0} \int_{\mathcal{X}_i} f dV \text{ p.s.} \tag{1.1.3}$$

où chaque terme $\int_{\mathcal{X}_i} f dV$ est défini par le premier cas fini.

1.1.2 Construction alternative

On propose une autre approche de la mesure poissonienne sur un espace mesuré.

Commençons par considérer le cas d'un espace $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ fini :
Soient N une variable aléatoire de Poisson de moyenne $\mu(\mathcal{X})$ et $(\xi_i)_{i>0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\bar{\mu} = \mu/\mu(\mathcal{X})$ et indépendantes de N. En notant δ_a la mesure de Dirac en a, on définit alors pour $A \in \mathcal{A}$, $V(A)$ par :

$$V(A) = \sum_{i=1}^{N} \delta_{\xi_i}(A). \tag{1.1.4}$$

Proposition 1.1.2 *V défini par (1.1.4) vérifie la définition 1.1.1 d'une mesure de Poisson aléatoire.*

Démonstration : Des calculs élémentaires montrent facilement que $V(A) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{P}(\mu(A))$, en effet pour tout entier k :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{V(A) = k\} &= \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{N} \delta_{\xi_i}(A) = k\right\} = E\,\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_A(\xi_i) = k \,\middle|\, N\right\} \\
&= E\, C_N^k \bar{\mu}(A)^k \bar{\mu}(\mathcal{X} \setminus A)^{N-k} \\
&= \frac{\bar{\mu}(A)^k}{k!} \sum_{n\geq k} \frac{n!}{(n-k)!} \bar{\mu}(\mathcal{X} \setminus A)^{n-k} \mu(\mathcal{X})^n \frac{e^{-\mu(\mathcal{X})}}{n!} \\
&= \frac{\mu(A)^k}{k!} \sum_{n\geq k} \frac{1}{(n-k)!} \mu(\mathcal{X} \setminus A)^{n-k} e^{-\mu(\mathcal{X})} \\
&= \frac{\mu(A)^k}{k!} e^{-\mu(A)}.
\end{aligned}$$

De même pour $A \cap B = \emptyset$, on montre que $V(A)$ et $V(B)$ sont indépendantes : pour k, l entiers fixés :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{V(A) = k, V(B) = l\} \\
&= E\,\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_A(\xi_i) = k,\ \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_B(\xi_i) = l \,\middle|\, N\right\} \\
&= E\,\mathbb{P}\{\text{parmi } \xi_1, \ldots, \xi_N,\ k \text{ sont dans } A,\ l \text{ dans } B \mid N\} \\
&= E\, C_N^k \bar{\mu}(A)^k\, C_{N-k}^l \bar{\mu}(B)^l\, \bar{\mu}\{\mathcal{X} \setminus (A \cup B)\}^{N-(k+l)} \\
&= \bar{\mu}(A)^k\, \bar{\mu}(B)^l\, E \frac{N!}{k!\, l!\, (N-k-l)!} \bar{\mu}\{\mathcal{X} \setminus (A \cup B)\}^{N-(k+l)} \\
&= \frac{\bar{\mu}(A)^k\, \bar{\mu}(B)^l}{k!\, l!} \sum_{n\geq k+l} \frac{n!}{(n-k-l)!} \bar{\mu}\{\mathcal{X} \setminus (A \cup B)\}^{n-(k+l)} \frac{\mu(\mathcal{X})^n}{n!} e^{-\mu(\mathcal{X})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu(A)^k\, \mu(B)^l}{k!\, l!} e^{-\mu(A\cup B)} = \frac{\mu(A)^k e^{-\mu(A)}}{k!} \frac{\mu(B)^l e^{-\mu(B)}}{l!} \\ &= \mathbb{P}\{V(A)=k\}\, \mathbb{P}\{V(B)=l\}. \end{aligned}$$

■

Comme $\mathbb{P}$-presque sûrement $N < +\infty$, d'après l'expression (1.1.4) une définition alternative de l'intégrale de Poisson est :

$$\int f dV := \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) \quad \text{p.s.} \tag{1.1.5}$$

Dans le cas d'un espace $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ σ-fini, on considère une partition $(\mathcal{X}_i)_i$ en parties disjointes de mesures μ finies sur lesquelles on utilise le formalisme du cas fini en introduisant N_i, $(\xi_j^{(i)})_j$ des variables aléatoires associées à $\mathcal{X}_i$ comme précédemment et indépendantes pour des indices i distincts :

$$N_i \sim \mathcal{P}(\mu(\mathcal{X}_i)),$$

$$(\xi_j^{(i)})_j \text{ variables aléatoires indépendantes, de loi } \bar{\mu}_i = \frac{1}{\mu(\mathcal{X}_i)} \mu|_{\mathcal{X}_i}. \tag{1.1.6}$$

Pour $A \in \mathcal{A}^\circ$, on définit alors :

$$V(A) = \sum_{i>0} \sum_{j=1}^{N_i} \delta_{\xi_j^{(i)}}(A). \tag{1.1.7}$$

A nouveau, on obtient une mesure de Poisson telle que déjà définie :

Proposition 1.1.3 *V défini par (1.1.7) satisfait à la définition 1.1.1 d'une mesure de Poisson aléatoire.*

Démonstration : Notons V_i la mesure associée à $\mathcal{X}_i$ par

$$V_i(A) = \sum_{j=1}^{N_i} \delta_{\xi_j^{(i)}}(A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

V_i est concentrée sur $\mathcal{X}_i$ et pour $A \in \mathcal{A}^\circ$, on a $V(A) = \sum_i V_i(A)$.
D'après le cas de mesure fini, pour $A \in \mathcal{A}^\circ$, $V_i(A)$ est de loi $\mathcal{P}(\mu_i(A))$; comme de plus les variables aléatoires $(V_i(A))_i$ sont indépendantes, $V(A)$ a pour loi

$$*_i\mathcal{L}(V_i(A)) = \mathcal{P}(\mu_1(A)) * \cdots * \mathcal{P}(\mu_p(A)) * \cdots = \mathcal{P}\left(\sum_i \mu_i(A)\right) = \mathcal{P}(\mu(A)).$$

Puis pour A, $B \in \mathcal{A}^\circ$ disjoints, comme

$$V(A) = \sum_i V_i(A), \qquad V(B) = \sum_i V_i(B),$$

pour j fixé, $V_j(B)$ est indépendant de $V_i(A)$, $i \neq j$ et de $V_j(A)$ car $A \cap B = \emptyset$. On a donc $V_j(B)$ indépendant de $V(A) = \sum_i V_i(A)$. Comme c'est vrai pour j quelconque, on a aussi $V(B) = \sum_j V_j(B)$ indépendant de $V(A)$. Finalement V défini par (1.1.7) satisfait à la définition 1.1.1. ■

Pour f une fonction mesurable quelconque, soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions simples qui converge μ-presque partout vers f avec $|f_n| \leq |f|$. On définit $\int f dV$ comme limite de $\int f_n dV$. Comme f_n est simple, on a :

$$\int f_n dV = \sum_{i>0} \sum_{k=1}^{N_i} f_n(\xi_k^{(i)}).$$

En supposant $\sum_{i>0} \sum_{k=1}^{N_i} |f(\xi_k^{(i)})|$ presque sûrement convergente, on a la convergence normale presque sûre de $\sum_{i>0} \sum_{k=1}^{N_i} f_n(\xi_k^{(i)})$, en passant à la limite dans la somme, on obtient alors presque sûrement :

$$\int f dV = \lim_n \int f_n dV = \sum_{i>0} \sum_{k=1}^{N_i} f(\xi_k^{(i)}). \tag{1.1.8}$$

Étudions maintenant la condition suffisante qui mène à (1.1.8) :

$$\begin{aligned}
E \sum_{i>0} \sum_{k=1}^{N_i} |f(\xi_k^{(i)})| &= \sum_{i>0} E \sum_{k=1}^{N_i} |f(\xi_k^{(i)})| \\
&= \sum_{i>0} \sum_{n_i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{N_i = n_i\} \sum_{k=1}^{n_i} E|f(\xi_k^{(i)})| \\
&= \sum_{i>0} \sum_{n_i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{N_i = n_i\}\, n_i \int |f| d\mu_i \\
&= \sum_{i>0} \left(\sum_{n_i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{N_i = n_i\} n_i \right) \int_{\mathcal{X}_i} |f| d\mu / \mu(\mathcal{X}_i) \\
&= \sum_{i>0} \mu(\mathcal{X}_i) \int_{\mathcal{X}_i} |f| d\mu / \mu(\mathcal{X}_i) \\
&= \int |f| d\mu.
\end{aligned}$$

On a finalement obtenu le résultat suivant :

Proposition 1.1.4 *Pour $f \in L^1(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$, l'intégrale $\int f dV$ est bien définie par (1.1.8), on a de plus $\int f dV \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec l'estimation :*

$$E \left| \int f dV \right| < \int |f| \, d\mu. \tag{1.1.9}$$

1.1.3 Cas classique

On appelle classique le cas $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \lambda)$ dans lequel on se place dans cette section. On dispose alors du processus de Poisson standard et on cherche à définir l'intégrale de Poisson en intégrant par rapport à ce processus. Rappelons pour commencer :

Définition 1.1.4 (Processus de Poisson standard) *Le processus de Poisson standard $\{\pi_t, t \geq 0\}$ est défini par les conditions suivantes :*
- $\mathcal{L}(\pi_t) = \mathcal{P}(t)$;
- $\pi_0 = 0$;
- *les accroissements de $\{\pi_t\}_t$ sont indépendants et homogènes ;*
- *les trajectoires sont cadlag.*

De façon standard, avec $(e_i)_i$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle ($\mathbb{P}\{e_1 \geq x\} = e^{-x}$), on considère les sommes partielles $\Gamma_n = \sum_{j\leq n} e_j$ de loi gamma d'ordre n donnée par la densité $\gamma_{n-1}(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}$, on prend alors comme version du processus de Poisson :

$$\pi_t = \sum_{i>0} \mathbf{1}_{\Gamma_i \leq t}.$$

Avec cette version de π, on définit $\int f d\pi$ par

$$\int f d\pi := \sum_{i>0} f(\Gamma_i). \tag{1.1.10}$$

Remarque 1.1.2 Il est facile de montrer que le processus de Poisson standard correspond à une mesure de Poisson aléatoire comme vue à la définition 1.1.1 sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ définie par $V([0,t]) = \pi_t$ et subordonnée à la mesure de Lebesgue λ.

On peut comparer les intégrales poissoniennes construites par l'approche « alternative » de la section 1.1.2 et dans le cas classique de cette section. Pour cela, rappelons que pour $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \lambda)$:
- par l'approche abstraite (avec la partition de $\mathbb{R}^+$ en $\mathcal{X}_i = [i, i+1[$) :
 $\int f\, dV = \sum_{i>0} \sum_{j=1}^{N_i} f(\xi_j^{(i)})$ avec pour chaque i : $N_i \sim \mathcal{P}(1)$ et $(\xi_j^{(i)})_j$ suite de variables indépendantes uniformes sur $[i, i+1]$;

- par l'approche classique : $\int f d\pi = \sum_{i>0} f(\Gamma_i)$.

On ferait le lien entre les Γ_i et les $\xi_j^{(i)}$ en constatant que les $\xi_j^{(i)}$ après réordonnement correspondent aux sauts $(\Gamma_n)_n$ du processus de Poisson standard.

1.2 Lien entre $\int f\, dV$ et $\int f\, dV^\circ$

On compare les intégrales $\int f\, dV^\circ$ et $\int f\, dV$ par rapport aux mesures de Poisson aléatoires centrée ou non, construites sur l'espace $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$.

Pour $A \in \mathcal{A}^\circ$, par la définition 1.1.2, on a $V^\circ(A) = V(A) - \mu(A)$. Par linéarité pour f simple, il vient immédiatement

$$\int f dV^\circ = \int f dV - \int f d\mu. \tag{1.2.1}$$

On cherche à généraliser la relation (1.2.1)
On sait que les intégrales $\int f\,d\mu$, $\int f\,dV$ sont bien définies pour $f \in L^1(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$ d'après la proposition 1.1.4 et $\int f dV^\circ$ l'est pour $f \in L^2(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$ d'après l'isométrie linéaire en (1.1.1)

Pour $f \in L^1(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu) \cap L^2(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$, les intégrales $\int f dV$, $\int f dV^\circ$, $\int f d\mu$ sont bien définies. Considérons $(f_n)_n$ une suite de fonctions simples qui converge vers f μ-presque partout avec $|f_n| \leq |f|$. Par convergence dominée, on a $f_n \to f$ dans $L^1(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$ et dans $L^2(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$.
On a alors quitte à extraire une sous-suite :

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu, \quad \int f_n dV \to \int f dV \quad \text{et} \quad \int f_n dV^\circ \to \int f dV^\circ \quad \text{p.s.}$$

Comme la relation (1.2.1) est vraie pour les fonctions simples f_n, en passant à la limite, on obtient (1.2.1) pour $f \in L^1(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu) \cap L^2(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$.

Remarque 1.2.1

- Quand on dispose de la relation (1.2.1), les lois de $\int f dV$ et de $\int f dV^\circ$ ne diffèrent que d'une translation, elles ont alors simultanément des densités.
- On a défini l'intégrale $\int f dV^\circ$ pour $f \in L^2(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$ comme élément de $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Comme la relation (1.2.1) est valable pour $f \in L^1(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu) \cap L^2(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$ et que $\int f\,dV$ et $\int f d\mu$ sont bien définies pour $f \in L^1(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$, on peut prolonger la définition de $\int f dV^\circ$ pour $f \in L^1(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$ par :

$$\int f\,dV^\circ := \int f\,dV - \int f\,d\mu.$$

  Les deux définitions coïncident pour $f \in L^1(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu) \cap L^2(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$ d'après la relation (1.2.1).
- Pour prolonger la définition de $\int f dV$ pour $f \in L^2(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$ à partir de (1.2.1), il faut pouvoir définir $\int f d\mu$, ce qui nécessite par exemple que μ soit une mesure finie. Mais alors, on a déjà vu qu'il n'y avait pas de problèmes pour définir $\int f dV$ dans ce cas.
- Pour $f \in L^1(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$, on a défini $\int f dV^\circ := \int f dV - \int f d\mu$. On déduit alors de (1.1.9) que $\int f dV^\circ \in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, on a de plus l'estimation suivante

$$E\left|\int f dV^\circ\right| \leq E\left|\int f dV\right| + \left|\int f d\mu\right| \leq 2\int |f| d\mu.$$

1.3 Absolue continuité des lois des intégrales de Poisson

1.3.1 Cas fini

Lorsque l'espace $(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$ est fini, la loi de l'intégrale de Poisson sur cet espace n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On constate en effet rapidement la présence d'un atome en 0 : avec les notations de la section 1.1.2, on dispose de l'expression (1.1.4) de la mesure aléatoire de Poisson V, les intégrales s'écrivent alors :

$$\int f dV = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k).$$

Il suit facilement

$$\mathbb{P}\left\{\int f dV = 0\right\} \geq \mathbb{P}\{N = 0\} = e^{-\mu(\mathcal{X})} > 0.$$

1.3.2 Cas σ-fini

On suppose maintenant que $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ est σ-fini, on considère la partition $\mathcal{X} = \cup_i \mathcal{X}_i$ en parties disjointes $\mathcal{X}_i$ de mesures μ finies. Pour $f \in L^1(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$, avec les notations de la section 1.1.2, on a :

$$\int f dV = \sum_{i>0} \sum_{k=1}^{N_i} f(\xi_k^{(i)}).$$

D'après le cas fini, la loi de chaque $\sum_{k=1}^{N_i} f(\xi_k^{(i)})$ possède un atome. Comme $\mathbb{P}\{N_i = 0\} = e^{-\mu(\mathcal{X}_i)}$, on a $\mathbb{P}\{N_i = 0\ \forall i\} = e^{-\mu(\mathcal{X})} = 0$, donc presque sûrement, il existe un indice j avec $N_j > 0$.

La loi $\mathcal{L}(\int f dV)$ s'exprime comme mélange de $\mathcal{L}(\int f dV | N_i = n_i \forall i)$. En notant $\bar{N} = (N_i)_i$ et $\bar{n} = (n_i)_i$ une réalisation de $\bar{N}$, on a :

$$\mathcal{L}\left(\int f dV\right) = \int \mathcal{L}\left(\int f dV \,\middle|\, \bar{N} = \bar{n}\right) d\mathbb{P}_{\bar{N}}(\bar{n}).$$

Or il est clair que :

$$\mathcal{L}\left(\int f dV \,\middle|\, \bar{N} = \bar{n}\right) = \mathcal{L}\left(\sum_i \sum_{k=1}^{n_i} f(\xi_k^{(i)})\right).$$

On s'intéresse dès lors à $\sum_{k=1}^{n_i} f(\xi_k^{(i)})$, somme de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées avec $f(\xi_k^{(i)}) \sim \mu_i f^{-1}$.

La condition $\mu f^{-1} \ll \lambda$ sur f est suffisante pour assurer l'absolue continuité par rapport à la mesure de Lebesgue de $\sum_{k=1}^{n_i} f(\xi_k^{(i)})$ et donc celle de $\int f dV$.

Cette condition est naturelle et valable en toute généralité dans un espace σ-fini. Pour affaiblir les conditions garantissant l'absolue continuité , on se place dans un cadre fini-dimensionnel :

$$(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), \mu), \qquad \mu \ll \lambda^m.$$

Avant d'étudier les intégrales de Poisson dans ces espaces, on commence par énoncer un résultat d'absolue continuité en dimension finie.

1.3.3 Résultat d'absolue continuité

Le résultat dont on se sert dans la suite pour l'étude des intégrales de Poisson est la proposition 1.3.1 ci-dessous. Elle repose sur des résultats énoncés par Federer dans [18]. On commence par introduire les notations utilisées dans cette section : on note $\mathcal{H}^m$ la mesure de Hausdorff m-dimensionnelle, λ^m la mesure de Lebesgue m-dimensionnelle, $J_m f$ le jacobien m-dimensionnel de f.

On a d'abord un premier résultat utile :

Théorème 1.3.1 (th. 3.1.8 [18]) *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, $f : A \to \mathbb{R}^k$ avec*

$$\forall a \in A, \quad \limsup_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} < +\infty. \tag{1.3.1}$$

Alors A est réunion d'une famille dénombrable d'ensembles λ^m-mesurables tels que la restriction de f à chacun d'eux est lipschitzienne.

Remarque 1.3.1 Le théorème 3.1.8 de [18] s'applique pour une condition plus faible que (1.3.1) en remplaçant la limite par la limite approximative, notion un peu plus générale introduite en section 2.9.12 de [18]. On obtient alors en plus l'approximative différentiabilité λ^m-presque partout de f sur A. Dans la suite, la condition (1.3.1) telle qu'elle est énoncée suffit

On dispose alors de :

Théorème 1.3.2 (th. 3.2.3, th. 3.2.12 [18]) *Si $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est lipschitzienne alors pour toute fonction $g : \mathbb{R}^m \to \bar{\mathbb{R}}$ λ^m-intégrable ou positive*

- *pour $m \leq k$,*

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x)\, J_m f(x)\, \lambda^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x)\, \mathcal{H}^m(dy),$$

- *pour $m > k$,*

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x)\, J_k f(x)\, \lambda^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^k} \int_{f^{-1}\{y\}} g(x)\, \mathcal{H}^{m-k}(dx)\, \lambda^k(dy).$$

On constate que dans le cas $m = k$, la première partie se réduit à la seconde car $\mathcal{H}^0$ est la mesure de comptage et $\mathcal{H}^k$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$. On utilise ce résultat dans la suite pour $m \geq k$, on obtient ainsi la proposition ci-dessous :

Proposition 1.3.1 *Soit $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ ouvert, $f : \Delta \to \mathbb{R}$ mesurable, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, $B \subset \Delta$. On suppose f λ^m-presque partout Fréchet différentiable sur B. Soit $\mu \ll \lambda^m$ une mesure. Si*

$$\lambda^m\{x \in B \mid Df(x) = 0\} = 0$$

alors $\mu_B f^{-1} \ll \lambda$ et la densité $p = \frac{d\mu_B f^{-1}}{d\lambda}$ est donnée par :

$$p(y) = \int_{f^{-1}\{y\} \cap B} \frac{1}{|Df(x)|} \frac{d\mu}{d\lambda^m}\, \mathcal{H}^{m-1}(dx). \tag{1.3.2}$$

Démonstration : Soit $\bar{B} \subset B$ le sous-ensemble des points de densité de B où f est différentiable. Par hypothèse, on a $\lambda^m\{B \setminus \bar{B}\} = 0$.
Comme on vérifie facilement (1.3.1) sur $\bar{B}$, d'après le théorème 1.3.1, on peut décomposer $\bar{B}$ en une famille dénombrable d'ensembles disjoints $\bar{B} = \cup_n B_n$ tels que la restriction $f_{/B_n}$ de f à B_n est lipschitzienne. On prolonge d'abord $f_{/B_n}$ sur $\bar{B}_n$ et on applique le théorème d'extension de Whitney qui suit pour prolonger $f_{/B_n}$ sur $\mathbb{R}^m$ en une fonction f_n lipschitzienne :

Lemme 1.3.1 (VI §2.2, [48]) *Soit F fermé dans $\mathbb{R}^m$, $f : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lipschitzienne se prolonge en une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}^m$.*

On applique alors le théorème 1.3.2 avec $k = 1$ à $f_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ lipschitzienne :

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x)\, J_1 f_n(x)\, \lambda^m(dx) = \int_{\mathbb{R}} \int_{f_n^{-1}\{y\}} g(x)\, \mathcal{H}^{m-1}(dx)\, \lambda(dy) \tag{1.3.3}$$

avec g intégrable ou positive et $J_1 f_n(x) = ||Df_n(x)||$.

Soit, pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$g_n(x) = \mathbf{1}_{\{f_n^{-1}\{A\} \cap B_n\}}(x)\, \frac{1}{||Df_n(x)||}\, \frac{d\mu}{d\lambda^m}(x),$$

on a :

$$\int_{\mathbb{R}^m} 1_{\{f_n^{-1}\{A\} \cap B_n\}}(x) \frac{d\mu}{d\lambda^m}(x) \lambda^m(dx) = \mu\{f_n^{-1}\{A\} \cap B_n\} = \mu\{f^{-1}\{A\} \cap B_n\} \tag{1.3.4}$$

car $f_{/B_n} = f_{n/B_n}$. D'autre part :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \int_{f_n^{-1}\{y\}} 1_{\{f_n^{-1}\{A\} \cap B_n\}}(x) \frac{1}{||Df_n(x)||} \frac{d\mu}{d\lambda^m}(x)\, \mathcal{H}^{m-1}(dx)\, \lambda(dy) \\ &\qquad = \int_A \int_{f_n^{-1}\{y\} \cap B_n} \frac{1}{||Df_n(x)||} \frac{d\mu}{d\lambda^m}(x)\, \mathcal{H}^{m-1}(dx)\, \lambda(dy). \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

On identifie par (1.3.3) les membres de droite de (1.3.4) et de (1.3.5).
Comme $f_n^{-1}\{y\} \cap B_n = f^{-1}\{y\} \cap B_n$, on déduit :

$$\begin{aligned} \mu_B\{f^{-1}\{A\}\} &= \mu\{f^{-1}\{A\} \cap B\} = \mu\{f^{-1}\{A\} \cap \bar{B}\} \\ &= \sum_n \mu\{f^{-1}\{A\} \cap B_n\} \\ &= \sum_n \int_A \int_{f^{-1}\{y\} \cap B_n} \frac{1}{||Df_n(x)||} \frac{d\mu}{d\lambda^m}(x)\, \mathcal{H}^{m-1}(dx)\, \lambda(dy) \\ &= \int_A \int_{f^{-1}\{y\} \cap B} \frac{1}{||Df(x)||} \frac{d\mu}{d\lambda^m}(x)\, \mathcal{H}^{m-1}(dx)\, \lambda(dy). \end{aligned}$$

On a donc bien $\mu_B f^{-1} \ll \lambda$ avec la densité (1.3.2) annoncée. ∎

1.3.4 Cas fini-dimensionnel $(\mathcal{X}, \mathcal{A}) = ((\mathbb{R}^+)^m, \mathcal{B}((\mathbb{R}^+)^m))$

On rappelle qu'on s'intéresse à l'absolue continuité des lois des intégrales de Poisson. On utilise ici la partition de $\mathcal{X} = (\mathbb{R}^+)^m$ en pavés

$$[i_1, i_1 + 1) \times \cdots \times [i_m, i_m + 1), \quad i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{N}.$$

On les réordonne en $\mathcal{X}_i$. On considère μ mesure de Radon sur $(\mathbb{R}^+)^m$ σ-finie, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ^m. Sur chaque $\mathcal{X}_i$, on considère les variables aléatoires associées comme en (1.1.6) :

$$N_i \sim \mathcal{P}(1),$$

$$(\xi_k^{(i)})_k \text{ suite de variables aléatoires indépendantes de loi } \mu_i = \frac{1}{\mu(\mathcal{X}_i)}\mu|_{\mathcal{X}_i}.$$

Pour $f \in L^1(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$, on dispose de l'expression (1.1.8) de $\int f\,dV$ vue en section 1.1.2. Pour s'intéresser à la loi de l'intégrale de Poisson, on suppose que f est différentiable presque partout et en notant $A_f = \{x \in (\mathbb{R}^+)^m \mid Df(x) = 0\}$, on suppose de plus :

$$\underline{\lim}_{t \to +\infty} \frac{\lambda^m\{A_f \cap [0, t)^m\}}{t^m} > 0 \tag{1.3.6}$$

Cette dernière hypothèse signifie que les points où f est différentiable, de différentielle non dégénérée sont « globalement uniformément présents ». On déduit facilement de cette condition, le résultat suivant :

Lemme 1.3.2 *Soient f satisfaisant à (1.3.6) et*

$$a \in \left(0, \underline{\lim}_{t \to +\infty} \frac{\lambda^m\{A_f \cap [0, t)^m\}}{t^m}\right),$$

on a alors :

$$\forall p, \exists i_p \geq p \text{ avec } \lambda^m\{A_f \cap \mathcal{X}_{i_p}\} > a. \tag{1.3.7}$$

Démonstration : Par l'absurde : sinon il existe un entier k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, on ait $\lambda^m\{A_f \cap \mathcal{X}_k\} \leq a$.
Pour p donné assez grand, il existe $k(p)$ avec $[0, p)^m = \cup_{k=1}^{k(p)} \mathcal{X}_k$ (avec une bonne indexation des pavés $k(p) = p^m$) et

$$\begin{aligned}\lambda^m\{A_f \cap [0, p)^m\} &= \sum_{k=1}^{k_0 - 1} \lambda^m\{A_f \cap \mathcal{X}_k\} + \sum_{k=k_0}^{k(p)} \lambda^m\{A_f \cap \mathcal{X}_k\} \\ &\leq \lambda^m\{\cup_{k=1}^{k_0} \mathcal{X}_k\} + a\,k(p).\end{aligned}$$

Puis

$$\frac{\lambda^m\{A_f \cap [0, p)^m\}}{p^m} \leq \frac{\lambda^m\{\cup_{k=1}^{k_0} \mathcal{X}_k\}}{p^m} + a\frac{k(p)}{p^m}.$$

D'où

$$\overline{\lim}_n \frac{\lambda^m\{A_f \cap [0, p)^m\}}{p^m} \leq a,$$

ce qui nie (1.3.6) et justifie l'existence de la sous-suite indiquée. ∎

Théorème 1.3.3 *Pour f satisfaisant à l'hypothèse (1.3.6), l'intégrale de Poisson $\int f dV$ est de loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Remarque 1.3.2 Pour $m = 1$, dans le cas d'une fonction f dérivable partout, constante sur un intervalle, de dérivée non nulle ailleurs, la condition (1.3.6) est satisfaite mais pas la condition $\mu f^{-1} \ll \lambda$. On a donc une condition plus faible qu'à la fin de section 1.3.2.

Démonstration : Notons $I_1 = \{i_p, p > 0\}$ l'ensemble des indices obtenus par le lemme 1.3.2. Soient alors

$$J_1 = \sum_{i \in I_1} \sum_{k=1}^{N_i} f(\xi_k^{(i)}) \quad \text{et} \quad J_1' = \sum_{i \notin I_1} \sum_{k=1}^{N_i} f(\xi_k^{(i)}).$$

On a alors $\int f dV = J_1 + J_1'$ avec J_1 et J_1' indépendants. L'absolue continuité de la loi de $\int f dV$ suivra de celle de J_1.

Comme $\mathbb{P}\{N_{i_p} > 0\} = 1 - 1/e > 0$, par le lemme de Borel-Cantelli, on a l'existence presque sûre d'une suite croissante d'indice $i_q \in \{i_p, p > 0\} = I_1$ avec $N_{i_q} > 0$. Notons I_2 l'ensemble des indices de cette sous-suite de I_1.
En conditionnant par $\sigma(N_{i_1}, \dots, N_{i_p}, \dots)$ et en notant $\bar{N}' = (N_{i_p})_p$, on a pour $A \in \mathcal{B}((\mathbb{R}^+)^m)$:

$$\mathbb{P}\{J_1 \in A\} = \int \mathbb{P}\left\{\sum_p \sum_{k=1}^{N_{i_p}} f(\xi_k^{(i_p)})\right\} \mathbb{P}_{\bar{N}'}(d\bar{n}).$$

On considère la liste de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivante :

$$\xi_1^{(i_{q_1})}, \dots, \xi_{n_{i_{q_1}}}^{(i_{q_1})}, \xi_1^{(i_{q_2})}, \dots, \xi_{n_{i_{q_2}}}^{(i_{q_2})}, \dots, \xi_1^{(i_{q_k})}, \dots, \xi_{n_{i_{q_k}}}^{(i_{q_k})}, \dots \tag{1.3.8}$$

Comme $\mathbb{P}\left\{\xi_j^{(i_{q_k})} \in A_f\right\} = \lambda^m\{A_f \cap \mathcal{X}_{i_{q_k}}\}$, par choix de $I_2 \subset I_1$ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k>0 \\ j \le n_{i_{q_k}}}} \mathbb{P}\left\{\xi_j^{(i_{q_k})} \in A_f\right\} &= \sum_{k=1}^{+\infty} n_{i_{q_k}} \lambda^m\{A_f \cap \mathcal{X}_{i_{q_k}}\} \\
&\ge \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^m\{A_f \cap \mathcal{X}_{i_{q_k}}\}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{\substack{k>0 \\ j \le n_{i_{q_k}}}} \mathbb{P}\{\xi_j^{(i_{q_k})} \in A_f\} \ge \sum_q \lambda^m\{A_f \cap \mathcal{X}_{i_{q_k}}\} = +\infty.$$

La deuxième partie du lemme de Borel-Cantelli assure que presque sûrement une infinité des variables aléatoires de la liste (1.3.8) sont dans A_f.

Soit

K le minimum des indices k pour lesquels il existe $j \leq n_{i_{q_k}}$ avec $\xi_j^{(i_{q_k})} \in A_f$;

J_K le minimum des indices $j \leq n_{i_{q_K}}$ tels que $\xi_j^{(i_{q_K})} \in A_f$,

autrement dit (K, J_K) est le couple d'indices (k, j) minimal pour l'ordre lexicographique tel que $\xi_j^{(i_{q_k})} \in A_f$

A nouveau pour prouver l'absolue continuité de $\sum_{i \in I_1} \sum_{k=1}^{n_i} f(\xi_k^{(i)})$, on le décompose sous la forme $J_2 + J_2'$, avec J_2 et J_2' indépendants donnés par

$$J_2 = \sum_{i \in I_2} \sum_{k=1}^{n_i} f(\xi_k^{(i)}), \qquad J_2' = \sum_{i \in I_1 \setminus I_2} \sum_{k=1}^{n_i} f(\xi_k^{(i)}).$$

Il suffit alors de montrer l'absolue continuité de la loi de J_2

Comme $\left\{K = k, J_k = j, k \in \mathbb{N}, j \leq n_{i_{q_k}}\right\}$ forme une partition d'un ensemble presque sûr, on a pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de mesure de Lebesgue nulle :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{J_2 \in A\} \\
&= \sum_{k>0} \sum_{j=1}^{n_{i_{q_k}}} \mathbb{P}\left\{\sum_{i \in I_2} \sum_{l=1}^{n_i} f(\xi_l^{(i)}) \in A,\ K = k,\ J_K = j\right\} \\
&= \sum_{k>0} \sum_{j=1}^{n_{i_{q_k}}} \int \mathbf{1}_{\{\sum_{i \in I_2} \sum_{l=1}^{n_i} f(\xi_l^{(i)}) \in A\}} \mathbf{1}_{\{\xi_l^{(i_{q_m})} \notin A_f,\, m<k\}} \mathbf{1}_{\{\xi_l^{(i_{q_k})} \notin A_f,\, l<j\}} \mathbf{1}_{\{\xi_j^{(i_{q_k})} \in A_f\}} d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

En conditionnant par $\xi_l^{(i_{q_m})}$ pour tout $(m, l) \neq (k, j)$ et en notant $R(k, j) = \sum_{(m,l) \neq (k,j)} f(\xi_l^{(i_{q_m})})$, il suit :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{\sum_{i \in I_2} \sum_{l=1}^{n_i} f(\xi_l^{(i)}) \in A, K = k, J_K = j\right\} \\
&= \int \mathbf{1}_{\{\xi_l^{(i_{q_m})} \notin A_f,\, (m,l)<(k,j)\}} \\
&\qquad \mathbb{P}\{f(\xi_j^{(i_{q_k})}) \in A - R(k, j),\ \xi_j^{(i_{q_k})} \in A_f \,|\, \sigma(\xi_r^{(i_{q_s})}, (r, s) \neq (j, i_{q_k}))\}\, d\mathbb{P} \\
&= \int \mathbf{1}_{\{\xi_l^{(i_{q_m})} \notin A_f,\, (m,l)<(k,j)\}} \int_{A_f \cap \mathcal{X}_{i_{q_k}}} \mathbf{1}_{\{f(x) \in A - R(k,j)\}}\, \mu_{i_{q_k}}(dx)\, d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

où $<$ désigne ici l'ordre lexicographique.

Or d'après la proposition 1.3.1, comme $A_f = \{x \mid Df(x) \neq 0\}$, on a $\mu_{A_f} f^{-1} \ll \lambda$. Puis comme $\lambda\{A - R(k, j)\} = \lambda(A) = 0$, il suit

$$\int_{A_f} \mathbf{1}_{\{f(x) \in A - R(k,j)\}}\, \mu_{i_{q_k}}(dx) = \mu_{A_f \cap \mathcal{X}_{i_{q_k}}} f^{-1}\{A - R(k, j)\} / \mu(\mathcal{X}_{i_{q_k}}) = 0.$$

Finalement pour tout k, j,

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{i \in I_2} \sum_{l=1}^{n_i} f(\xi_l^{(i)}) \in A, K = k, J_k = j\right\} = 0.$$

Donc

$$P\left\{\sum_{i\in I_2}\sum_{l=1}^{n_i} f(\xi_l^{(i)}) \in A\right\} = 0.$$

Il suit l'absolue continuité de la loi de J_2 puis celle de J_1 et donc celle de $\int f dV$, ce qui achève de prouver le théorème 1.3.3. ∎

A partir de l'expression explicite (1.1 8) de l'intégrale par rapport à la mesure de Poisson $\int f\, dV$, on obtient facilement lorsque l'espace est σ-fini, une condition générale sur la mesure de contrôle μ de V et la fonction f $(\mu f^{-1} \ll \lambda)$. Dans les espaces de dimension finie, on obtient une condition plus fine, (1.3.6), portant sur la régularité de f, en appliquant un résultat général d'absolue continuité (proposition 1.3.1) obtenu par une formule de Federer (théorème 1.3.2). Quand la relation (1.2.1) entre les intégrales par rapport aux mesures centrées ou non est valable (voir section 1.2), on a directement des résultats d'absolue continuité pour $\int f\, dV^\circ$.

Chapitre 2

Représentation de LePage et construction des intégrales stochastiques stables multiples

Dans ce chap.'re, nous construisons sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ les intégrales stochastiques α-stables d-multiples dont les lois seront étudiées dans les chapitres 3 et 4.

Les lois α-stables $(0 < \alpha \leq 2)$ sont une généralisation des lois gaussiennes, 2-stables (ce sont exactement les lois possédant un domaine d'attraction, propriété qui généralise le théorème central limite). Les intégrales multiples α-stables apparaissent donc comme des généralisations naturelles des intégrales stochastiques multiples de Wiener-Itô (pour lesquelles on renvoie à [31]). Elles permettent de plus d'identifier la loi de limites de certaines fonctionnelles de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées [1] et sont utiles aussi pour définir par exemple une classe de processus autosimilaires [49].

Soulignons que plusieurs approches de ces intégrales par rapport à une mesure stable M ont été proposées. La première est celle de Szulga-Woyczyński (1983) qui utilise un développement du type Fourier-Haar; Rosiński-Woyczyński (1986) [39] pour $\alpha \in (1, 2)$ puis Kwapień-Woyczyński (1987) [24] pour $\alpha \in (0, 2)$ construisent des intégrales α-stables d-multiples symétriques $I_d(f)$ pour f définie sur le simplexe d-dimensionnel tronqué $\{(t_1, \ldots, t_d) \mid 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_d < T < \infty\}$ en itérant les intégrations :

$$\int_0^T \int_0^{t_d} \cdots \int_0^{t_2} f(t_1, t_2, \ldots, t_d)\, M(dt_1) \cdots M(dt_d).$$

Comme les intégrales α-stables simples sont définies pour des fonctions α-intégrables, ils se ramènent à l'α-intégrabilité de la fonction qui associe la $(d-1)$-intégrale stable de f :

$$t_d \longmapsto \int_0^{t_d} \cdots \int_0^{t_2} f(t_1, t_2, \ldots, t_d)\, M(dt_1) \cdots M(dt_{d-1}),$$

ce qui ne donne pas de conditions explicites sur f sauf pour $d = 2$ où on obtient une condition nécessaire et suffisante sur les noyaux pour que les intégrales doubles existent :

si f satisfait

$$\int_0^T \int_0^s |f(t,s)|^\alpha \left(1 + \log_+ \frac{|f(t,s)|^\alpha}{\int_0^s |f(u,s)|^\alpha\, du \int_t^T |f(t,u)|^\alpha du}\right) dt\, ds \tag{2.0.1}$$

alors l'intégrale stable double de f est bien définie. Signalons qu'une condition nécessaire et suffisante a aussi été obtenue pour les intégrales triples (McConnell (1986) [32]) mais sa formulation est plus compliquée.

Pour $\alpha \in (1,2)$, dans le cas symétrique, Surgailis (1985) [51] commence par exprimer un processus stable comme une intégrale stochastique par rapport à une mesure de Poisson. Il ramène alors l'intégrale multiple par rapport à une mesure α-stable à une intégrale multiple de Poisson sur un espace plus large. En décomposant la mesure de Poisson, il se ramène à des intégrales de Poisson itérées qu'il construit par un théorème d'interpolation dans les espaces de Lorentz.

Krakowiak-Szulga (1988) [22] définissent ces intégrales par une methode de type Dunford-Lebesgue en construisant une mesure aleatoire stable produit.

Soulignons enfin que Samorodnitsky-Szulga (1989) [43] puis Samorodnitsky-Taqqu (1991) [44, 45] ont aussi utilisé les représentations de LePage en définissant notamment les intégrales pour des fonctions à valeurs dans des espaces de Banach. On s'appuie cependant ici sur un formalisme probabiliste plus simple et on accepte pour $\alpha < 1$ que la mesure M ne soit pas symétrique (i.e. la fonction de biais β de la mesure peut être non nulle). La construction permet ainsi de définir l'intégrale α-stable d-multiple $I_d(f)$ pour des noyaux f dans

$$L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d) = \left\{ f : [0,1]^d \to \mathbb{R} : \int_{[0,1]^d} |f|^\alpha (1 + \log_+ |f|)^{d-1} d\lambda^d < +\infty \right\}$$

pour $\alpha < 1$ et $\alpha \geq 1$, $\beta = 0$. De plus cette construction donne une représentation bien adaptée pour utiliser dans les chapitres 3, 4 les méthodes de stratification et superstructure pour étudier la loi de $I_d(f)$.

On commence dans ce chapitre par quelques rappels sur les lois stables et les intégrales stables simples pour fixer les notations utilisées dans la suite. On introduit notamment la représentation de LePage de ces integrales. La section 2.2 est consacrée à la construction des intégrales stables multiples, on passe pour cela par une représentation de type LePage généralisée (théorème 2.2.1). Les sections 2.3 et 2.4 sont réservées aux preuves dans les deux cas $\alpha < 1$ et $\alpha \geq 1$, $\beta = 0$. Bien que les arguments varient dans ces deux cas, le schéma reste globalement le même : on prouve la convergence des séries aléatoires considérées, on montre une propriété de continuité qui permet de passer du cas des fonctions simples, pour lesquelles on se ramène aux intégrales unidimensionnelle, au cas des noyaux généraux. On achève le chapitre en section 2.5 par une brève discussion sur les résultats et une comparaison avec la littérature.

2.1 Rappels et notations

2.1.1 Lois stables

On rappelle dans cette première section les principaux résultats sur les lois stables, on en profite en particulier pour fixer les notations dont on se sert dans la suite. Pour plus de détails ou pour les preuves des résultats cités, on renvoie à l'ouvrage de Samorodnitsky-Taqqu (1994) [46]. Les lois stables ont de nombreuses définitions équivalentes, nous les introduisons par :

Définition 2.1.1 *Une variable aléatoire X suit une loi stable si pour tout entier $n \geq 1$ et des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ copies indépendantes de X, il existe des constantes $c_n > 0$ et δ_n telles que*

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} c_n X + \delta_n.$$

La loi est dite strictement stable si de plus $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_n = \cdots = 0$, symétrique si $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} -X$.

Les lois stables sont en particulier infiniment divisibles et en utilisant la représentation de Lévy-Khinchine des fonctions caractéristiques de ces lois, on déduit celle des lois stables :

Proposition 2.1.1

- *Pour toute loi stable non dégénérée, il existe un unique réel $\alpha \in (0, 2]$, appelé indice de la loi tel que pour tout $n \geq 1$, $c_n = n^{1/\alpha}$ ([46, th. 1.1.2]); on parle ainsi de loi α-stable.*
- *La fonction caractéristique φ d'une loi α-stable s'écrit :*

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \exp\{-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta(\operatorname{sign}\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu\theta\} & si\ \alpha \neq 1, \\ \exp\{-\sigma|\theta|(1 + i\beta\frac{2}{\pi}(\operatorname{sign}\theta)\ln|\theta|) + i\mu\theta\} & si\ \alpha = 1, \end{cases}$$

où $0 < \alpha \leq 2,\quad \sigma \geq 0,\quad -1 \leq \beta \leq 1,\quad \mu \in \mathbb{R}$ *(cf. [46, déf. 1.1.6]).*

Remarque 2.1.1

- Les paramètres $\alpha \in (0, 2]$, $\sigma \geq 0$, $\beta \in [-1, 1]$, $\mu \in \mathbb{R}$ caractérisent la loi ; on notera ainsi dans la suite les lois stables $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$; le paramètre σ est un facteur d'échelle, β témoigne du biais (asymétrie) dans la loi et μ est un paramètre de translation ; on renvoie à [46, 1.2.1-1.2.10] pour les propriétés liées à ces paramètres.

  Une variable dégénérée concentrée en un point a est de loi δ_a stable avec un coefficient $\sigma = 0$; les lois 2-stables sont exactement les lois normales, elles apparaissent donc comme un cas particulier des lois stables ; les lois de Cauchy sont 1-stables, les lois de Lévy sont 1/2-stables.

Définition 2.1.2 *On dit qu'une variable aléatoire X a un domaine d'attraction s'il existe une suite $\{X_n, n \geq 1\}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi ν, une suite $\{a_n, n \geq 1\}$ de réels strictement positifs et une suite $\{b_n, n \geq 1\}$ de réels tels que*

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{a_n} - b_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

L'existence d'un domaine d'attraction est une propriété qui généralise le théorème central limite des lois normales, la proposition suivante montre qu'elle caractérise aussi les lois stables qui généralisent ainsi en ce sens les lois normales :

Proposition 2.1.2 (déf. 1.1.5 [46]) *Une variable aléatoire réelle non dégénérée suit une loi stable si et seulement si elle a un domaine d'attraction.*

Proposition 2.1.3 (prop 1.2.15 [46]) *Soit X une variable aléatoire de loi $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ avec $\alpha \in (0, 2)$, on a*

$$(E|X|^p)^{1/p} < +\infty \quad \text{pour } 0 < p < \alpha,$$
$$(E|X|^p)^{1/p} = +\infty \quad \text{pour } p \geq \alpha.$$

Remarque 2.1.2 Les lois stables ont donc de faibles propriétés d'intégrabilité, en particulier elles n'ont pas de variance si $\alpha < 2$, ceci complique l'intégration par rapport à des mesures stables, objet de ce chapitre.

Définition 2.1.3 (Loi stable de dimension finie, processus stable)
Un vecteur aléatoire réel X de dimension d est stable d'indice α si pour tout entier n, avec $X_1, \ldots, X_n$ des copies indépendantes de X, il existe $V_n \in \mathbb{R}^d$ tel que $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} n^{1/\alpha} X + V_n$;
Un processus $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ est stable si toutes ses lois de dimensions finies le sont.

Proposition 2.1.4 (Propriétés des trajectoires d'un processus stable) *Avec probabilité 1, pour tout $\varepsilon > 0$ un processus de loi stable a un nombre fini de sauts supérieurs en module à ε.*

2.1.2 Intégrale stable simple

On commence par rappeler la définition d'une mesure aléatoire stable sur l'espace $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$

Définition 2.1.4 *Soient α un réel dans $(0, 2)$ et β une fonction mesurable de $[0, 1]$ dans $[-1, 1]$. Une mesure aléatoire α-stable M de fonction de biais β est une fonction σ-additive $M : \mathcal{B}([0, 1]) \longrightarrow L^0(\Omega)$ telle que si $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{B}([0, 1])$ sont disjoints, $M(A_1), \ldots, M(A_k)$ sont indépendants et*

$$M(A) \sim S_\alpha\left(\lambda(A)^{1/\alpha}, \frac{\int_A \beta(s) ds}{\lambda(A)}, 0\right), \quad A \in \mathcal{B}([0, 1]).$$

On construit alors les intégrales simples α-stables $I_1(f) = \int f\, dM$ pour f dans

$$F = \begin{cases} L^\alpha([0,1]) = \{f : [0,1]^d \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \int_{[0,1]^d} |f|^\alpha d\lambda^d < +\infty\} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ L^1([0,1]) \cap \{f \mid \int_{[0,1]} \left|f(x)\beta(x)\log|f(x)|\right| dx < +\infty\} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Pour cela, on les définit d'abord pour les fonctions simples $f = \sum c_j \mathbf{1}_{A_j}$ et on prolonge ensuite la définition dans F. On obtient :

Proposition 2.1.5 (§3.4, [46]) *Les intégrales α-stables simples $I_1(f) = \int_{[0,1]} f\, dM$ sont bien définies pour $f \in F$. De plus, elles ont pour loi des lois stables :*

$$I_1(f) \sim S_\alpha\left(\left(\int_0^1 |f(t)|^\alpha dt\right)^{1/\alpha}, \frac{\int_0^1 |f(t)|^\alpha \mathrm{sign}(f(t))\,\beta(t)\, dt}{\int_0^1 |f(t)|^\alpha dt}, \mu_f\right)$$

où

$$\mu_f = \begin{cases} 0 & si\ \alpha \neq 1\,; \\ -\frac{2}{\pi}\int_0^1 f(t)\beta(t)\log|f(t)|\, dt & si\ \alpha = 1. \end{cases}$$

Remarque 2.1.3 On peut aussi construire ces intégrales stochastiques en considérant $(I_1(f))_{f\in F}$ comme un processus stable indexé par F, on les définit alors en donnant les lois de dimension finie et en vérifiant les conditions de compatibilité pour appliquer le théorème d'extension de Kolmogorov.

A partir de la représentation en série des processus stables (LePage *et al.*, 1981, [25], Marcus - Pisier, 1984, [30] et originalement Ferguson - Klass, 1972, [19]), on dispose d'une écriture intéressante de ces intégrales. Elle souligne en particulier la nature discrète des lois de ces intégrales et nous permettra de généraliser les intégrales stables au cas multiple. Pour énoncer cette représentation en série de type LePage, introduisons les deux suites aléatoires indépendantes suivantes :

- $\{\Gamma_i\}_{i>0}$ suite des temps d'arrivée d'un processus de Poisson avec un taux d'arrivée de 1 : $\Gamma_i = \sum_{k=1}^i e_k$, $(e_k)_{k>0}$ suite indépendante identiquement distribuée de loi exponentielle donnée par $\mathbb{P}\{e_k \leq x\} = 1 - e^{-x}$;
- $\{(V_i, \gamma_i)\}_{i>0}$ suite indépendante identiquement distribuée avec
  - V_i de loi uniforme sur $[0,1]$;
  - γ_i de loi donnée par

$$\mathbb{P}\{\gamma_i = +1 \,|V_i\} = \frac{1+\beta(V_i)}{2}, \quad \mathbb{P}\{\gamma_i = -1 \,|V_i\} = \frac{1-\beta(V_i)}{2}.$$

Le résultat de représentation sous forme de série des intégrales stochastiques stables simples $I(f)$ est alors le suivant :

Théorème 2.1.1 (th. 3.10.1, [46]) *On définit pour $\alpha \in (0,2)$:*

$$S_1(f) = C_\alpha^{1/\alpha} \sum_{i>0}\left(\gamma_i \Gamma_i^{-1/\alpha} f(V_i) - b_i^{(\alpha)} \int_{[0,1]} f(s)\beta(s)\, ds\right) + \theta_f \qquad (2.1.1)$$

avec

$$C_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} x^{-\alpha} \sin x \, dx\right)^{-1} = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos(\pi\alpha/2)} & si\ \alpha \neq 1\ ; \\ 2/\pi & si\ \alpha = 1. \end{cases}$$

$$b_i^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & si\ \alpha < 1\ ; \\ \int_{1/i}^{1/(i-1)} x^{-2} \sin x \, dx & si\ \alpha = 1\ ; \\ \frac{\alpha}{\alpha-1}\left(i^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - (i-1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right) & si\ \alpha > 1\ ; \end{cases} \tag{2.1.2}$$

$$\theta_f = \begin{cases} 0 & si\ \alpha \neq 1\ ; \\ \frac{2}{\pi}\log(\frac{2}{\pi}) \int_0^1 f(s)\beta(s)\, ds & si\ \alpha = 1\ ; \end{cases}$$

On a alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_p \in F$:

$$(I_1(f_1), \ldots, I_1(f_p)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (S_1(f_1), \ldots, S_1(f_p)) \tag{2.1.3}$$

2.2 Intégrales stochastiques stables multiples

On considère sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une mesure aléatoire α-stable M sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ de mesure de contrôle la mesure de Lebesgue λ et de fonction de biais $\beta : [0,1] \longrightarrow [-1,1]$.

Pour un entier $d > 1$, on cherche à définir les intégrales α-stables d-multiples en généralisant la représentation de type LePage des intégrales simples. On notera ces intégrales

$$I_d(f) = \int f \, dM^d.$$

Pour cela, on suppose dans toute la suite que si $\alpha \geq 1$, la mesure M est symétrique, c'est à dire qu'on suppose

$$\alpha < 1 \quad \text{ou} \quad \alpha \geq 1 \text{ et } \beta \equiv 0. \tag{2.2.1}$$

On cherche à construire $I_d(f)$ pour un noyau f dans l'espace de type Orlicz :

$$L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d) = \left\{ f : [0,1]^d \to \mathbb{R} \text{ mesurable tel que } \rho_{\alpha,d}(f) < +\infty \right\}$$

où, avec $\log_+ x = \begin{cases} \log x & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$, $\rho_{\alpha,d}(f)$ est donnée par

$$\rho_{\alpha,d}(f) = \int_{[0,1]^d} |f(t_1, \ldots, t_d)|^\alpha \left(1 + \log_+(|f(t_1, \ldots, t_d)|)\right)^{d-1} dt_1 \cdots dt_d.$$

De façon classique, on commence par définir $I_d(f)$ pour les fonctions f simples par :

$$I_d(1_{\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_d}) = M(\Delta_1) \cdots M(\Delta_d), \qquad \Delta_i \in \mathcal{B}([0,1]), \quad i = 1, \ldots, d$$

et en prolongeant par linéarité.
Pour $f \in L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$, on définit $I_d(f)$ comme la limite en probabilité, si elle existe, de $I_d(f_n)$ avec $(f_n)_{n>0}$ une suite d'approximations simples de f dans l'ensemble $L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$:

$$I_d(f) := \mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty} I_d(f_n). \tag{2.2.2}$$

Considérons

$$\mathrm{Sym}_d(f)(t) = \sum_{\sigma\in\Pi_d} f(\sigma(t))/d!$$

où $\sigma(t) = (t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(d)})$ et Π_d est le groupe des permutations de d éléments.
On constate que pour f simple on a $I_d(\mathrm{Sym}_d(f)) = I_d(f)$, le résultat suit aussi pour f quelconque. Par ailleurs comme $f \in L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$ n'est définie qu'à un ensemble de mesure nulle près, il n'y a aucune restriction à supposer désormais que f est symétrique et nulle sur les « diagonales », c'est à dire :

- $f(t_1, \ldots, t_d) = 0$ s'il existe $i \neq j$ avec $t_i = t_j$;
- $f(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(d)}) = f(t_1, \ldots, t_d)$ pour tout $\sigma \in \Pi_d$.

Pour construire de cette façon les intégrales stochastiques stables multiples, on généralise la représentation de LePage (2.1.1) du théorème 2.1.1. Pour cela, avec les suites aléatoires $\{\Gamma_i\}_{i>0}$ et $\{(V_i, \gamma_i)\}_{i>0}$ introduites précédemment, on considère la série multiple :

$$S_d(f) = C_\alpha^{d/\alpha} \sum_{i_1,\ldots,i_d>0} \gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_d}\Gamma_{i_1}^{-1/\alpha}\cdots\Gamma_{i_d}^{-1/\alpha} f(V_{i_1}, \ldots, V_{i_d}).$$

où on définit la série multiple comme la limite des sommes où les indices sont bornés. De façon à alléger la présentation des résultats liés à cette série, on introduit les notations multi-indicielles suivantes inspirées de [43] :

$$\begin{aligned}
&- \ \mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_d)\,;\\
&- \ [\mathbf{i}] = i_1\, i_2 \cdots i_d\,,\\
&- \ \mathbf{V_i} = (V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_d})\ ;\\
&- \ [\gamma_\mathbf{i}] = \gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_d}\,;\\
&- \ [\mathbf{\Gamma_i}] = \Gamma_{i_1}\Gamma_{i_2}\cdots\Gamma_{i_d}.
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

La série $S_d(f)$ se réécrit alors sous forme plus compacte :

$$S_d(f) = C_\alpha^{d/\alpha} \sum_{\mathbf{i}>0} [\gamma_\mathbf{i}]\,[\Gamma_\mathbf{i}]^{-1/\alpha} f(\mathbf{V_i})\,. \tag{2.2.4}$$

où $\mathbf{i} > 0$ signifie $i_1 > 0, \ldots, i_d > 0$.

Remarque 2.2.1 La série $S_d(f)$ est une généralisation multiple naturelle de $S_1(f)$ donnée en (2.1.1) quand seuls les termes discrets $\gamma_i\Gamma_i^{-1/\alpha}f(V_i)$ sont présents, c'est à dire quand $b_i^{(\alpha)}$ et θ_f sont nuls. C'est la raison pour laquelle on suppose la fonction de biais β nulle quand $\alpha \geq 1$ (si $\alpha < 1$, ces constantes sont automatiquement nulles). Sans cette hypothèse, il faudrait tenir compte de ces termes supplémentaires et définir une série $\tilde{S}_d(f)$ en remplaçant chaque terme de $S_d(f)$ par 2^d termes. On renvoie pour cela à la discussion en section 2.5.

Le résultat principal de ce chapitre qui permet à la fois de définir les intégrales stochastiques stables multiples pour des noyaux dans $L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$ et de donner une représentation discrète de ces intégrales sous forme de développement en série de type LePage est le suivant :

Théorème 2.2.1 *Soit*

$$f \in L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d). \tag{2.2.5}$$

On suppose que la mesure aléatoire stable M satisfait l'une des conditions (2.2.1), alors la série multiple $S_d(f)$ est $\mathbb{P}$-presque sûrement convergente et on a

$$I_d(f) \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_d(f)$$

On renvoie à la section 2.5 pour une discussion sur les liens entre ce résultat et son analogue de [43]

Corollaire 2.2.1 *Soient $p \in \mathbb{N}$ et $f_1, f_2, \ldots, f_p \in L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$, alors*

$$(I_d(f_1), I_d(f_2), \ldots, I_d(f_p)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (S_d(f_1), S_d(f_2), \ldots, S_d(f_p))$$

Le corollaire suit immédiatement du théorème 2.2.1 par linéarité de S_d et I_d. Pour tout $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p \in \mathbb{R}$, on a en effet :

$$\sum_{i=1}^p \theta_i I_d(f_i) = I_d\left(\sum_{i=1}^p \theta_i f_i\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_d\left(\sum_{i=1}^p \theta_i f_i\right) = \sum_{i=1}^p \theta_i S_d(f_i).$$

Ce corollaire justifie que S_d peut se voir comme une définition alternative de l'intégrale stochastique stable multiple.

Cette construction des intégrales stochastiques stables multiples par la représentation de LePage permet en outre d'utiliser (2.2.4) pour étudier la loi de ces intégrales. Ce sera l'objet des chapitres 3 et 4 suivants où on étudie l'absolue continuité des lois et la continuité pour la norme de la variation de ces lois par rapport au noyau.

D'autres résultats sur les lois de ces intégrales s'obtiennent en étudiant leur représentation : Samorodnitsky-Szulga donnent par exemple un équivalent précis des queues de ces lois dans [43], ce résultat est amélioré et généralisé aux fonctions à valeurs dans des Banach par Samorodnitsky-Taqqu dans [44]. Ces représentations permettent aussi d'étudier les propriétés de processus $\{I_d(f_t), t \in T\}$ associé à des intégrales stables multiples. C'est ce que font Rosiński-Samorodnitsky-Taqqu dans [40] en reliant la régularité des trajectoires de $\{I_d(f_t)\}_t$ à celle des intégrants f_t.

Dans la suite, on prouve le cas $\alpha < 1$ du théorème 2.2.1 en section 2.3, le cas $\alpha \geq 1$, $\beta = 0$ en section 2.4. Bien que les arguments diffèrent dans les deux cas, le schéma est globalement le même. On commence par voir que la série $S_d(f)$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement, on modifiant un peu l'argument, on montre une propriété de continuité en probabilité de S_d. A partir de la représentation des intégrales stables simples, on identifie facilement en loi $I_d(f)$ et $S_d(f)$ pour f simple. On conclut pour les noyaux f plus généraux en utilisant la continuité en probabilité.

Dans toute la suite, C désigne une constante positive finie typique qui peut changer de ligne en ligne.

2.3 Preuve du cas $\alpha < 1$

2.3.1 Convergence de la série $S_d(f)$

On étudie la convergence absolue de la série $S_d(f)$ pour $f \in L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$. Comme $\gamma_i = \pm 1$, on s'intéresse à la convergence de

$$\sum_{\mathbf{i}>0} [\Gamma_{\mathbf{i}}]^{-1/\alpha} \, |f(\mathbf{V}_{\mathbf{i}})|.$$

Or on a à disposition :

Lemme 2.3.1 *Soient $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(d)}$, $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(d)}$ des suites à termes positifs et $(u_{i_1,i_2,\dots,i_d})_{i_1,i_2,\dots,i_d}$ une suite positive à multi-indices.*
On suppose que pour tout $1 \leq k \leq d$: $a_i^{(k)} \sim b_i^{(k)}$ quand $i \to +\infty$. Alors les séries multiples

$$\sum_{\mathbf{i}>0} a_{i_1}^{(1)} \cdots a_{i_d}^{(d)} \, u_{i_1,i_2,\dots,i_d} \qquad et \qquad \sum_{\mathbf{i}>0} b_{i_1}^{(1)} \cdots b_{i_d}^{(d)} \, u_{i_1,i_2,\dots,i_d}$$

sont de même nature.

Comme par la loi des grands nombres $\Gamma_i \sim i$ quand $i \to +\infty$ presque sûrement, ce lemme ramène l'étude à celle de

$$\sum_{\mathbf{i}>0} [\mathbf{i}]^{-1/\alpha} \, |f(\mathbf{V}_{\mathbf{i}})|.$$

Pour cela, intéressons nous à :

$$(a_1) := \sum_{\mathbf{i}>0} \mathbb{P}\left\{ |f(\mathbf{V}_{\mathbf{i}})| \, [\mathbf{i}]^{-1/\alpha} > 1 \right\} ;$$

$$(a_2) := E\left(\sum_{\mathbf{i}>0} [\mathbf{i}]^{-1/\alpha} \, |f(\mathbf{V}_{\mathbf{i}})| \mathbf{1}_{|f(\mathbf{V}_{\mathbf{i}})| \, [\mathbf{i}]^{-1/\alpha} \leq 1} \right) ;$$

sous l'hypothèse $f \in L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$.

Étude de (a_1) :

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{i}>0} \mathbb{P}\left\{|f(\mathbf{V_i})|\,|\mathbf{i}|^{-1/\alpha} > 1\right\} &= \sum_{\mathbf{i}>0} \mathbb{P}\{|f(\mathbf{V_i})|^\alpha > |\mathbf{i}|\} \\
&= \sum_{\mathbf{i}>0} \sum_{k \geq |\mathbf{i}|} \mathbb{P}\{k < |f(\mathbf{V_i})|^\alpha \leq k+1\} \\
&= \sum_{k>0} \sum_{\mathbf{i}:|\mathbf{i}| \leq k} \mathbb{P}\{k < |f(\mathbf{V_i})|^\alpha \leq k+1\}.
\end{aligned}$$

Or on dispose de l'estimation (2.6.1) de l'annexe : en notant $\#$ le cardinal d'un ensemble,

$$\#\{\mathbf{i} \mid |\mathbf{i}| \leq k\} \leq C\, k \log^{d-1} k \leq C\, k\,(1 + \log_+ k)^{d-1}.$$

Comme $(V_i)_{i>0}$ est une suite identiquement distribuée, en notant $\mathbf{V_{1,\ldots,d}}$ pour le vecteur $(V_1, \ldots, V_d)$, on a

$$\begin{aligned}
(a_1) &\leq \sum_{k>0} C\, k(1+\log_+ k)^{d-1}\, \mathbb{P}\{k < |f(\mathbf{V_{1,\ldots,d}})|^\alpha \leq k+1\} \\
&\leq \sum_{k>0} E\left(C|f(\mathbf{V_{1,\ldots,d}})|^\alpha (1 + \log_+(|f(\mathbf{V_{1,\ldots,d}})|^\alpha))^{d-1}\, \mathbf{1}_{\{k<|f(\mathbf{V_{1,\ldots,d}})|^\alpha \leq k+1\}}\right) \\
&\leq C\, E\left(|f(\mathbf{V_{1,\ldots,d}})|^\alpha\, (1 + \log_+ |f(\mathbf{V_{1,\ldots,d}})|^\alpha)^{d-1}\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$(a_1) \leq C \rho_{\alpha,d}(f). \tag{2.3.1}$$

Étude de (a_2) :

$$\begin{aligned}
&E\left(\sum_{\mathbf{i}>0} |\mathbf{i}|^{-1/\alpha} |f(\mathbf{V_i})|\, \mathbf{1}_{|f(\mathbf{V_i})|\,|\mathbf{i}|^{-1/\alpha} \leq 1}\right) \\
&\qquad = \sum_{\mathbf{i}>0} |\mathbf{i}|^{-1/\alpha}\, E\left(|f(\mathbf{V_i})|\, \mathbf{1}_{|f(\mathbf{V_i})|^\alpha \leq |\mathbf{i}|}\right) \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}} |x| \sum_{\mathbf{i}>0} |\mathbf{i}|^{-1/\alpha}\, \mathbf{1}_{|\mathbf{i}| \geq |x|^\alpha}\, \mathbb{P}_{f(\mathbf{V_{1,\ldots,d}})}(dx)
\end{aligned}$$

On estime l'intégrant $|x| \sum_{\mathbf{i}>0} |\mathbf{i}|^{-1/\alpha} \mathbf{1}_{|\mathbf{i}| \geq |x|^\alpha}$ avec l'estimation (2.6.1) en annexe en prenant $|t| = |x|^\alpha$, $\gamma = 1/\alpha > 1$, on a alors :

$$|x| \sum_{\mathbf{i}>0} |\mathbf{i}|^{-1/\alpha}\, \mathbf{1}_{|\mathbf{i}| \geq |x|^\alpha} \leq C|x|^\alpha (1 + \log_+ |x|)^{d-1}$$

Il suit

$$\begin{aligned}
(a_2) &\leq C \int |x|^\alpha (1 + \log_+ |x|)^{d-1} P_{f(\mathbf{V_{1,\ldots,d}})}(dx) \\
&\leq C \rho_{\alpha,d}(f).
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Pour $f \in L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$, les finitudes de (a_1), (a_2) découlent de (2.3.1), (2.3.2).

On est maintenant en mesure d'obtenir la convergence absolue de

$$\sum_{\mathbf{i}>0} [\mathbf{i}]^{-1/\alpha} \; |f(\mathbf{V_i})|.$$

Comme (a_1) s'écrit aussi $E\left(\sum_{\mathbf{i}>0} \mathbf{1}_{\{|f(\mathbf{V_i})|>[\mathbf{i}]^{1/\alpha}\}}\right) < +\infty$, on a la finitude presque sûre de $\sum_{\mathbf{i}>0} \mathbf{1}_{\{|f(\mathbf{V_i})|>[\mathbf{i}]^{1/\alpha}\}}$.
Notons

$$I(\omega) = \{\mathbf{i} \mid |f(\mathbf{V_i})| > [\mathbf{i}]^{1/\alpha}\};$$

le cardinal de $I(\omega)$ est alors $\mathbb{P}$-presque sûrement fini.

On distingue maintenant les multi-indices $\mathbf{i} \in I(\omega)$ et $\mathbf{i} \notin I(\omega)$:

$$\sum_{\mathbf{i}>0} [\mathbf{i}]^{-1/\alpha} \; |f(\mathbf{V_i})| = \sum_{\mathbf{i}\in I(\omega)} [\mathbf{i}]^{-1/\alpha} \; |f(\mathbf{V_i})| + \sum_{\mathbf{i}\notin I(\omega)} [\mathbf{i}]^{-1/\alpha} \; |f(\mathbf{V_i})|.$$

La première somme a un nombre fini de terme donc est presque sûrement finie.
Pour la deuxième somme, comme les multi-indices considérés ne sont pas dans $I(\omega)$, elle est égale à

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{i}\notin I(\omega)} [\mathbf{i}]^{-1/\alpha} \; |f(\mathbf{V_i})| \, \mathbf{1}_{|f(\mathbf{V_i})| \, [\mathbf{i}]^{-1/\alpha}\leq 1} \quad &\leq \quad \sum_{\mathbf{i}>0} [\mathbf{i}]^{-1/\alpha} \, |f(\mathbf{V_i})| \mathbf{1}_{|f(\mathbf{V_i})| \, [\mathbf{i}]^{-1/\alpha}\leq 1} \\ &< \quad +\infty \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement,}\end{aligned}$$

d'après l'étude de (a_2). Il suit la finitude presque sûre de $\sum_{\mathbf{i}>0} [\mathbf{i}]^{-1/\alpha} \; |f(\mathbf{V_i})|$ et la convergence presque sûre de la série multiple $\sum_{\mathbf{i}>0} [\Gamma_\mathbf{i}]^{-1/\alpha} \; |f(\mathbf{V_i})|$ donc la convergence absolue de

$$S_d(f) = C_\alpha^{d/\alpha} \sum_{\mathbf{i}>0} [\gamma_\mathbf{i}] \, [\Gamma_\mathbf{i}]^{-1/\alpha} \, f(\mathbf{V_i}).$$

∎

Conclusion de la section 2.3.1 : *Pour $\alpha < 1$, $f \in L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$, $S_d(f)$ est bien définie $\mathbb{P}$-presque sûrement.*

2.3.2 Continuité en probabilité de S_d

On montre dans cette section que pour $f_n \longrightarrow f$ dans $L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$, on a $S_d(f_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} S_d(f)$. Par linéarité et comme $\gamma_\mathbf{i} = \pm 1$, il suffit de montrer que pour $f_n \longrightarrow 0$ dans $L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$:

$$\sum_{\mathbf{i}>0} [\Gamma_\mathbf{i}]^{-1/\alpha} \; |f_n(\mathbf{V_i})| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{2.3.3}$$

Plutôt que de montrer la convergence précédente en probabilité, on se ramène, grâce au résultat classique suivant, à montrer la convergence presque sûre de sous-suites.

Lemme 2.3.2 *Soit X_n une suite de variables aléatoires telle que pour toute sous-suite (n'), il existe (n'') extraite de (n') telle que $X_{n''}$ converge presque sûrement vers X alors X_n converge vers X en probabilité.*

On doit donc montrer que toute sous-suite $(f_{k_n})_n$ de $(f_n)_n$ admet une sous-suite plus fine $(f_{p_{k_n}})_n$ avec la convergence (2.3.3) presque sûre.

Considérons donc une sous-suite $(f_{k_n})_{n>0}$ quelconque de $(f_n)_{n>0}$, on commence par extraire à nouveau $(f_{p_n})_{n>0}$ de $(f_{k_n})_{n>0}$ telle que :

- $f_{p_n} \longrightarrow 0$ λ^d-presque partout sur $[0,1]^d$;
- $\sum_{n>0} \rho_{\alpha,d}(f_{p_n}) < +\infty$.

Considérons (a_1^n), (a_2^n), les analogues de (a_1), (a_2) avec f_n à la place de f. On dispose pour f_n des analogues de (2.3.1) et (2.3.2) :

$$\begin{aligned}(a_1^n) &\le C'\rho_{\alpha,d}(f_n) ;\\ (a_2^n) &\le C\rho_{\alpha,d}(f_n).\end{aligned}$$

Comme $(a_2^n) \to 0$ quand $n \to +\infty$, on peut extraire de $(p_n)_n$ une suite $(q_n)_{n>0}$ pour avoir en plus :

$$\sum_{\mathbf{i}>0} |\mathbf{i}|^{-1/\alpha} |f_{q_n}(\mathbf{V_i})| \mathbf{1}_{|f_{q_n}(\mathbf{V_i})| \le |\mathbf{i}|^{1/\alpha}} \longrightarrow 0 \tag{2.3.4}$$

$\mathbb{P}$-presque sûrement quand $n \to +\infty$. Comme on a supposé $\sum_{n>0} \rho_{\alpha,d}(f_{p_n}) < +\infty$, on a en utilisant (2.3.1) :

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{i}>0} \mathbb{P}\left\{\bigcup_{n>0}\{|f_{p_n}(\mathbf{V_i})|\,|\mathbf{i}|^{-1/\alpha} > 1\}\right\} &\le \sum_{\mathbf{i}>0}\sum_{n>0} \mathbb{P}\left\{|f_{p_n}(\mathbf{V_i})|\,|\mathbf{i}|^{-1/\alpha} > 1\right\}\\ &\le \sum_{n>0}\sum_{\mathbf{i}>0} \mathbb{P}\left\{|f_{p_n}(\mathbf{V_i})| > |\mathbf{i}|^{1/\alpha}\right\}\\ &\le C\sum_{n>0} \rho_{\alpha,d}(f_{p_n}) < +\infty.\end{aligned}$$

On a donc $E\left(\sum_{\mathbf{i}>0} \mathbf{1}_{\cup_n\{|f_{p_n}(\mathbf{V_i})|>|\mathbf{i}|^{1/\alpha}\}}\right) < +\infty$ et en notant

$$I'(\omega) = \left\{\mathbf{i} \mid \exists\, n,\ |f_{p_n}(\mathbf{V_i})| > |\mathbf{i}|^{1/\alpha}\right\},$$

on a $I'(\omega)$ de cardinal fini $\mathbb{P}$-presque sûrement.

On scinde à nouveau la série en deux. En notant

$$\begin{aligned}(a_3^n) &:= \sum_{\mathbf{i}\in I'(\omega)} |\mathbf{i}|^{-1/\alpha} |f_{q_n}(\mathbf{V_i})|,\\ (a_4^n) &:= \sum_{\mathbf{i}\notin I'(\omega)} |\mathbf{i}|^{-1/\alpha} |f_{q_n}(\mathbf{V_i})|,\end{aligned}$$

on a

$$\sum_{\mathbf{i}>0} |\mathbf{i}|^{-1/\alpha}|f_{q_n}(\mathbf{V_i})| = (a_3^n) + (a_4^n).$$

La somme (a_3^n) ne contient qu'un nombre fini de termes et pour chacun d'eux $f_{q_n}(V_{i_1},\dots,V_{i_d}) \longrightarrow 0$ quand $n \to 0$ car $f_{q_n} \to 0$ λ^d-presque partout et $(V_{i_1},\dots,V_{i_d})$ est de loi λ^d sur $[0,1]^d$. Pour le deuxième terme (a_4^n), on a avec (2.3.4) :

$$\begin{aligned}(a_4^n) &= \sum_{\mathbf{i}\notin I'(\omega)} [\mathbf{i}]^{-1/\alpha} |f_{q_n}(\mathbf{V_i})| \mathbf{1}_{|f_{q_n}(\mathbf{V_i})|\le[\mathbf{i}]^{1/\alpha}} \\ &\le \sum_{\mathbf{i}>0} [\mathbf{i}]^{-1/\alpha} |f_{q_n}(\mathbf{V_i})| \mathbf{1}_{|f_{q_n}(\mathbf{V_i})|\le[\mathbf{i}]^{1/\alpha}} \longrightarrow 0, \quad n\to+\infty.\end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{P}$-presque sûrement $(a_3^n) \longrightarrow 0$, $(a_4^n) \longrightarrow 0$ puis

$$\sum_{\mathbf{i}>0} [\mathbf{i}]^{-1/\alpha}|f_{q_n}(\mathbf{V_i})| \longrightarrow 0, \quad n\to\infty.$$

Pour conclure, rappelons que par la loi des grands nombres, on a $\mathbb{P}$-presque sûrement $\Gamma_i \sim i$, on trouve donc pour presque chaque ω, une constante $C(\omega) < +\infty$ telle que $\Gamma_i^{-1/\alpha} \le C(\omega)\, i^{-1/\alpha}$ pour tout i, ce qui assure que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega\in\Omega$:

$$\sum_{\mathbf{i}>0} [\Gamma_\mathbf{i}]^{-1/\alpha} f_{q_n}(\mathbf{V_i}) \longrightarrow 0 \text{ quand } n\to+\infty.$$

Finalement pour toute sous-suite de $(f_n)_{n>0}$, on a trouvé une (sous) sous-suite telle que $S_d(f_{q_n}) \to 0$ presque sûrement quand $n\to+\infty$. Le lemme 2.3.2 s'applique et permet de conclure à la continuité en probabilité de S_d.

2.3.3 Lien entre S_d et I_d

Considérons d'abord $f = \mathbf{1}_{\Delta_1\times\cdots\times\Delta_d}$, on a :

$$\begin{aligned}&S_d(f)\\ &= C_\alpha^{d/\alpha} \sum_{\mathbf{i}>0} (\Gamma_{i_1}\cdots\Gamma_{i_d})^{-1/\alpha}\ \gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_d} \mathbf{1}_{\Delta_1}(V_{i_1})\cdots\mathbf{1}_{\Delta_d}(V_{i_d})\\ &= \left(C_\alpha^{1/\alpha}\sum_{i_1>0}\Gamma_{i_1}^{-1/\alpha}\gamma_{i_1}\mathbf{1}_{\Delta_1}(V_{i_1})\right)\times\cdots\times\left(C_\alpha^{1/\alpha}\sum_{i_d>0}\Gamma_{i_d}^{-1/\alpha}\gamma_{i_d}\mathbf{1}_{\Delta_d}(V_{i_d})\right)\\ &= S_1(\mathbf{1}_{\Delta_1})\times\cdots\times S_1(\mathbf{1}_{\Delta_d}).\end{aligned}$$

D'après le théorème 2.1.1, pour les intégrales stables simples, on a :

$$(I(\mathbf{1}_{\Delta_1}),\dots,I(\mathbf{1}_{\Delta_d})) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (S_1(\mathbf{1}_{\Delta_1}),\dots,S_1(\mathbf{1}_{\Delta_d})).$$

Par continuité de $(x_1,\dots,x_d)\longmapsto x_1\cdots x_d$, on a alors :

$$\begin{aligned}S_d(f) &\stackrel{\mathcal{L}}{=} I_1(\mathbf{1}_{\Delta_1})\times\cdots\times I_1(\mathbf{1}_{\Delta_d})\\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_{[0,1]}\mathbf{1}_{\Delta_1}\,dM\times\cdots\times\int_{[0,1]}\mathbf{1}_{\Delta_d}\,dM\\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_{[0,1]^d}\mathbf{1}_{\Delta_1\times\cdots\times\Delta_d}\,dM^d\\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} I_d(\mathbf{1}_{\Delta_1\times\cdots\times\Delta_d}) = I_d(f).\end{aligned}$$

Plus généralement, de la même façon par linéarité, pour f simple, on a encore $S_d(f) \stackrel{\mathcal{L}}{=} I_d(f)$.

Pour $f \in L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$, on considère $(f_n)_{n>0}$ une suite de fonctions simples qui converge vers f dans $L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$.
La suite $S_d(f_n)$ est convergente en probabilité donc est une suite de Cauchy pour la topologie sur $L^0(\Omega)$ de la convergence en probabilité. Par identification des lois dans le cas des fonctions simples, $I_d(f_n)$ est aussi une suite de Cauchy. On en déduit que $I_d(f_n)$ est convergente en probabilité. On a donc $I_d(f)$ bien défini et comme d'après la section 2.3.2 $S_d(f_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} S_d(f)$, à la limite l'identification des lois de $I_d(f_n)$ et $S_d(f_n)$ donne

$$I_d(f) \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_d(f).$$

Conclusion de la section 2.3 :
Pour $f \in L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$, $S_d(f) = C_\alpha^{d/\alpha} \sum_{\mathbf{i}>0} [\gamma_\mathbf{i}] [\Gamma_\mathbf{i}]^{-1/\alpha} f(\mathbf{V_i})$ est une représentation de l'intégrale stochastique α-stable d-multiple ($\alpha < 1$), ce qui prouve le théorème 2.2.1 pour $\alpha < 1$.

2.4 Preuve du cas $\alpha \geq 1, \beta \equiv 0$

Comme $\alpha \geq 1$, il est vain de chercher la convergence absolue de la série définissant $S_d(f)$ car $\sum_{\mathbf{i}>0} \frac{1}{[\mathbf{i}]^{1/\alpha}}$ diverge. On s'intéresse à la convergence simple de $S_d(f)$ en disant qu'une série multiple

$$\sum_{i_1,\ldots,i_d>0} a_{i_1,\ldots,i_d}$$

converge si

$$\sum_{i_1\leq\cdots\leq i_d\leq n} a_{i_1,\ldots,i_d}$$

a une limite quand $n \to +\infty$. Pour cela, il faut raffiner le raisonnement de la section 2.3 où on passait par l'étude des deux séries intermédiaires (a_1) et (a_2).
On commence par chercher une version du théorème des trois séries de Kolmogorov ([17, p. 317]) pour des tableaux triangulaires d'un type spécial (voir la proposition 2.4.2).

2.4.1 Résultats préliminaires

Proposition 2.4.1 *Soient $(X_i)_{i>0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable telles que, avec $\mathcal{F}^*_{i_k} = \sigma(X_i, i \neq i_k)$ et $\mathbf{X_i} = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}, \ldots, X_{i_d})$, on a :*

$E\left(f(\mathbf{X_i}) | \mathcal{F}^*_{i_k}\right) = 0$;
$\sum_{\mathbf{i}>0} E\left(f(\mathbf{X_i})^2\right) < +\infty$.

Alors la série multiple $\sum_{\mathbf{i}>0} f(\mathbf{X_i})$ converge presque sûrement.

Démonstration :
Notons $Y_k = \sum_{\mathbf{i}, i_1 \vee \cdots \vee i_d \leq k} f(\mathbf{X_i})$ où $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_d)$.
Comme la première hypothèse assure en particulier que $Ef(\mathbf{X_i}) = 0$, pour tout entier k, on a $EY_k = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, considérons $A(\varepsilon) = \{\forall m \in \mathbb{N},\ \exists n > m,\ |Y_m - Y_n| \geq \varepsilon\}$.
L'évènement $\{(Y_k)_{k>0}$ ne converge pas$\}$ est la limite monotone quand $\varepsilon \to 0$ de la famille $A(\varepsilon)$, il suffit donc de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\{A(\varepsilon)\} = 0$.
Or avec $A_m(\varepsilon) = \{\exists\, n > m \mid |Y_m - Y_n| \geq \varepsilon\}$, $A(\varepsilon)$ est la limite décroissante de $A_m(\varepsilon)$.
On est donc ramené à voir $\mathbb{P}\{A_m(\varepsilon)\} \longrightarrow 0$ quand $m \to +\infty$.

Pour m, n fixés, considérons $A_{m,n}(\varepsilon) = \{\exists\, k \in \{m+1, \ldots, n\} \mid |Y_k - Y_m| \geq \varepsilon\}$.
Notons, pour $k > m$, $S'_k = Y_k - Y_m = \sum_{\substack{i_1 \vee \cdots \vee i_d \leq k, \\ \exists i_p > m}} f(\mathbf{X_i})$ et considérons la filtration $\mathcal{G}$ de tribus $\mathcal{G}_k$ définies par :

$$\mathcal{G}_k = \sigma(X_{\mathbf{i}},\ i \leq k).$$

Il est clair que Y_k est $\mathcal{G}_k$-mesurable, puis

$$\begin{aligned} E\left(Y_{k+1} \,|\mathcal{G}_k\right) &= E\Bigg(Y_k + \sum_{\substack{i_1 \vee \cdots \vee i_d \leq k+1, \\ \exists i_p = k+1}} f(\mathbf{X_i}) \,\Big|\, \mathcal{G}_k\Bigg) \\ &= Y_k + \sum_{\substack{i_1 \vee \cdots \vee i_d \leq k+1, \\ \exists i_p = k+1}} E\left(f(\mathbf{X_i}) \mid \mathcal{G}_k\right). \end{aligned}$$

Or pour un multi-indice $\mathbf{i}$ tel que $i_1 \vee \cdots \vee i_d \leq k+1$ et $\exists i_p = k+1$, par hypothèse, on a $E\left(f(\mathbf{X_i}) \,|\mathcal{F}^*_{i_p}\right) = 0$. Comme $\mathcal{G}_k \subset \mathcal{F}^*_{i_p}$ il suit

$$E\left(f(\mathbf{X_i}) \mid \mathcal{G}_k\right) = E\left(E(f(\mathbf{X_i}) \mid \mathcal{F}^*_{i_p}) \mid \mathcal{G}_k\right) = 0.$$

On a donc $E\left(Y_{k+1} \,|\mathcal{G}_k\right) = Y_k$ et finalement $(Y_k)_{k>0}$ est une $\mathcal{G}$-martingale.

L'inégalité de Kolmogorov pour les martingales donne alors :

$$\mathbb{P}\{A_{m,n}(\varepsilon)\} = \mathbb{P}\{\max\{|S'_{m+1}|, \ldots, |S'_n|\} \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\, E{S'_n}^2.$$

Comme par la première hypothèse, pour $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$, on a $Ef(\mathbf{X_i})f(\mathbf{X_j}) = 0$, on déduit facilement :

$$\mathbb{P}\{A_{m,n}(\varepsilon)\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{\substack{i_1 \vee \cdots \vee i_d \leq n, \\ \exists i_p = m+1}} Ef(\mathbf{X_i})^2.$$

Soit $\delta > 0$ fixé, comme par hypothèse $Ef(\mathbf{X_i})^2$ est sommable, il existe $I_\delta \subset \mathbb{N}^d$ fini tel que pour $J \subset \mathbb{N}^d$ fini, disjoint de I_δ, on ait $\sum_{\mathbf{i} \in J} Ef(\mathbf{X_i})^2 \leq \delta$. Pour $m > m_\delta =$

$\max\{i_k,\ \mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d) \in I_\delta\}$, on a alors

$$\sum_{\substack{i_1 \vee \dots \vee i_d \leq n, \\ \exists i_p = m+1}} Ef(\mathbf{X}_\mathbf{i})^2 \leq \delta.$$

Avec $n \longrightarrow +\infty$, on a pour tout $m > m_\delta$, $\mathbb{P}\{A_m(\varepsilon)\} \leq \delta/\varepsilon^2$. On a donc $\mathbb{P}\{A_m(\varepsilon)\} \longrightarrow 0$ quand $m \longrightarrow +\infty$, ce qui prouve la proposition. ■

A partir de la proposition 2.4.1, on obtient le résultat suivant adapté à notre étude :

Proposition 2.4.2 *Soient $(X_i)_{i>0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Considérons*
- $h_\mathbf{i} = h(X_{i_1}, \dots, X_{i_d})$;
- $g_\mathbf{i} = h_\mathbf{i} \mathbf{1}_{|h_\mathbf{i}| \leq 1}$;
- $\mathcal{F}^*_{i_k} = \sigma(X_i,\ i \neq i_k)$.

On suppose les points suivants satisfaits

(i) $\sum_{\mathbf{i}>0} \mathbb{P}\{|h_\mathbf{i}| > 1\} < +\infty$;

(ii) $\sum_{\mathbf{i}>0} \mathrm{Var}\,(g_\mathbf{i}) < +\infty$;

(iii) $E\left(g_\mathbf{i} | \mathcal{F}^*_{i_k}\right) = 0$ *pour tout* $k = 1, \dots, d$.

Alors la série $\sum_{\mathbf{i}>0} h_\mathbf{i}$ converge presque sûrement.

Démonstration :
Les conditions (ii) et (iii) permettent d'appliquer la proposition 2.4.1 à g et donnent ainsi la convergence presque sûre de

$$\sum_{\mathbf{i}>0} g_\mathbf{i} = \sum_{\mathbf{i}>0} h_\mathbf{i} \mathbf{1}_{|h_\mathbf{i}| \leq 1}.$$

Comme (i) s'écrit aussi $E\left(\sum_{\mathbf{i}>0} \mathbf{1}_{|h_\mathbf{i}|>1}\right) < +\infty$, en notant $J(\omega) = \left\{\mathbf{i} \mid |h_\mathbf{i}| > 1\right\}$, pour $\mathbb{P}$-presque chaque ω, on a $\#J(\omega) < +\infty$. Ainsi

$$\sum_{\mathbf{i}>0} h_\mathbf{i} = \sum_{\mathbf{i} \in J(\omega)} h_\mathbf{i} + \sum_{\mathbf{i} \notin J(\omega)} h_\mathbf{i}$$

La première somme a $\mathbb{P}$-presque sûrement un nombre fini de terme fini donc est finie. La seconde somme vaut :

$$\sum_{\mathbf{i} \notin J(\omega)} h_\mathbf{i} = \sum_{\mathbf{i} \notin J(\omega)} h_\mathbf{i} \mathbf{1}_{|h_\mathbf{i}| \leq 1} = \sum_{\mathbf{i} \notin J(\omega)} g_\mathbf{i}$$

qui coïncide à un nombre fini de terme près avec $\sum_{\mathbf{i}>0} g_\mathbf{i}$, série convergente d'après la proposition 2.4.1.
Il suit la convergence $\mathbb{P}$-presque sûre de $\sum_{\mathbf{i}>0} h_\mathbf{i}$ et la proposition est prouvée. ■

2.4.2 Convergence de la série $S_d(f)$

Comme les suites $\{\Gamma_i\}_{i>0}$ et $\{(V_i, \gamma_i)\}_{i>0}$ sont indépendantes, on peut supposer pour simplifier la présentation que l'espace de probabilité est un espace produit $(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes (\Omega', \mathcal{F}', P')$ avec $\mathbb{P} = P \otimes P'$ et $\{(\gamma_i, V_i)\}_{i>0}$, $\{\Gamma_i\}_{i>0}$ ne dépendant respectivement que de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(\Omega', \mathcal{F}', P')$, c'est à dire :

$$\gamma_i(\omega, \omega') = \gamma_i(\omega), \qquad V_i(\omega, \omega') = V_i(\omega), \qquad \Gamma_i(\omega, \omega') = \Gamma_i(\omega').$$

On fera de même au chapitre 4 mais il y sera plus commode d'inverser les notations (*cf.* remarque 4.3.1). On va raisonner ici essentiellement sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ en considérant $\omega' \in \Omega'$ fixé dans l'ensemble P'-presque sûr où $\Gamma_i \sim i$ quand $i \to +\infty$, la suite $\{\Gamma_i\}_{i>0}$ est donc déterminée par rapport à $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et il existe une constante $C_0 = C_0(\omega')$, $1 \leq C_0 < +\infty$, telle que :

$$[\mathbf{i}]/C_0 \leq [\Gamma_\mathbf{i}] \leq C_0\,[\mathbf{i}]. \tag{2.4.1}$$

On considère dans la suite $X_i = (\Gamma_i, V_i, \gamma_i)$, somme $\{\Gamma_i\}_{i>0}$ est fixée, $(X_i)_{i>0}$ est une suite de vecteurs aléatoires indépendants de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dans la suite, les symboles E, P sont relatifs à l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

On applique la proposition 2.4.2 sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (en fixant ω') avec

- $X_i = (\Gamma_i, (V_i, \gamma_i))$;
- $h_\mathbf{i} = [\gamma_\mathbf{i}]\,[\Gamma_\mathbf{i}]^{-1/\alpha} f(\mathbf{V_i})$;
- $g_\mathbf{i} = [\gamma_\mathbf{i}]\,[\Gamma_\mathbf{i}]^{-1/\alpha} f(\mathbf{V_i})\, \mathbf{1}_{|f(\mathbf{V_i})| \leq [\Gamma_\mathbf{i}]^{1/\alpha}}$.

Pour cela, montrons que ses conditions (i), (ii), (iii) sont satisfaites.

Commençons par étudier (iii). On rappelle que, dans toute cette section 2.4, le biais β de la mesure α-stable M est supposé nul. Pour le multi-indice $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_d)$, on a :

$$\begin{aligned}
&E(g_\mathbf{i}\,|\mathcal{F}^*_{i_1}) \\
&= [\Gamma_\mathbf{i}]^{-1/\alpha} E\left([\gamma_\mathbf{i}]\, f(\mathbf{V_i})\, \mathbf{1}_{|f(\mathbf{V_i})| \leq [\Gamma_\mathbf{i}]^{1/\alpha}}\,|\mathcal{F}^*_{i_1}\right) \\
&= [\Gamma_\mathbf{i}]^{-1/\alpha} E\left(E\left(\gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_d}\, f(\mathbf{V_i})\, \mathbf{1}_{|f(\mathbf{V_i})| \leq [\Gamma_\mathbf{i}]^{1/\alpha}}\,|\sigma(\mathcal{F}^*_{i_1} \cup \sigma(V_i, i > 0))\right)\,|\mathcal{F}^*_{i_1}\right) \\
&= [\Gamma_\mathbf{i}]^{-1/\alpha} E\left(E\left(\gamma_{i_1}\,|\sigma(\mathcal{F}^*_{i_1} \cup \sigma(V_i, i > 0))\right) \gamma_{i_2} \cdots \gamma_{i_d} f(\mathbf{V_i})\, \mathbf{1}_{|f(\mathbf{V_i})| \leq [\Gamma_\mathbf{i}]^{1/\alpha}}|\mathcal{F}^*_{i_1}\right).
\end{aligned}$$

Or par indépendance de $\cdot$ de $(V_i)_{i \neq i_1}$, on a :
$E(\gamma_{i_1}\,|\sigma(\mathcal{F}_{i_1} \cup \sigma(V_i, i > 0))) = E(\gamma_{i_1}\,|V_{i_1}) = \beta(V_{i_1}) = 0$ puisque $\beta \equiv 0$.
On obtient alors $E(g_\mathbf{i}\,|\mathcal{F}_{i_1}) = 0$ et plus généralement pour $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_d)$, pour tout entier $k = 1, \ldots, d$, on a $E(g_\mathbf{i}\,|\mathcal{F}^*_{i_k}) = 0$, ce qui justifie (iii).

Pour voir (i), étudions :

$$
\begin{aligned}
(a_5) &:= \sum_{\mathbf{i}>0} P\{|f(\mathbf{V_i})|^\alpha > [\Gamma_\mathbf{i}]\} \\
&= \sum_{\mathbf{i}>0} \sum_{k \geq [\Gamma_\mathbf{i}]} P\{k < |f(\mathbf{V_i})|^\alpha \leq k+1\} \\
&= \sum_{k>0} \sum_{\mathbf{i}\,|\,[\Gamma_\mathbf{i}] \leq k} P\{k < |f(\mathbf{V_i})|^\alpha \leq k+1\}.
\end{aligned}
$$

Comme on a choisit $\omega \in \Omega'$ pour avoir l'encadrement (2.4.1), on a $\{\mathbf{i} \mid [\Gamma_\mathbf{i}] \leq k\} \subset \{\mathbf{i} \mid [\mathbf{i}] \leq C_0\, k\}$
Puis on a l'estimation (2.6.1) en annexe :

$$
\#\{\mathbf{i} \mid [\mathbf{i}] \leq k\} \leq C\, k \log^{d-1} k \leq C\, k\,(1+\log_+ k)^{d-1}.
$$

On a donc

$$
\#\{\mathbf{i} \mid [\Gamma_\mathbf{i}] \leq k\} \leq \#\{\mathbf{i} \mid [\mathbf{i}] \leq C_0\, k\} \leq C\, C_0\, k(1+\log_+(C_0 k))^{d-1}
$$

Il suit

$$
\begin{aligned}
(a_5) &\leq \sum_{k>0} C C_0\, k(1+\log_+(C_0 k))^{d-1} P\{k < |f(\mathbf{V_i})|^\alpha \leq k+1\} \\
&\leq \sum_{k>0} E\left(C C_0 |f(\mathbf{V_1})|^\alpha (1+\log_+(C_0 |f(\mathbf{V_1})|^\alpha))^{d-1} \mathbf{1}_{\{k<|f(\mathbf{V_1})|^\alpha \leq k+1\}}\right) \\
&\leq C C_0\, E\left(|f(\mathbf{V_1})|^\alpha (1+\log_+(C_0 |f(\mathbf{V_1})|^\alpha))^{d-1}\right).
\end{aligned}
$$

Pour (ii), comme la suite $(V_i)_{i>0}$ est identiquement distribuée, on a en notant encore $\mathbf{V}_{1\ldots d} = (V_1, \ldots, V_d)$

$$
\begin{aligned}
(a_6) &= \sum_{\mathbf{i}>0} \mathrm{Var}(h_\mathbf{i}\, \mathbf{1}_{|h_\mathbf{i}| \leq 1}) \\
&= \sum_{\mathbf{i}>0} [\Gamma_\mathbf{i}]^{-2/\alpha} E\left(f(\mathbf{V_i})^2\, \mathbf{1}_{|f(\mathbf{V_i})| \leq [\Gamma_\mathbf{i}]^{1/\alpha}}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} x^2 \sum_{\mathbf{i}>0} [\Gamma_\mathbf{i}]^{-2/\alpha}\, \mathbf{1}_{[\Gamma_\mathbf{i}] \geq |x|^\alpha}\, P_{f(\mathbf{V}_{1\ldots d})}(dx).
\end{aligned}
$$

On commence par étudier l'intégrant $x^2 \sum_{\mathbf{i}>0} [\Gamma_\mathbf{i}]^{-2/\alpha}\, \mathbf{1}_{[\Gamma_\mathbf{i}] \geq |x|^\alpha}$:
Grâce à (2.4.1) on a :

$$
\begin{aligned}
&[\Gamma_\mathbf{i}]^{-2/\alpha} \leq C_0^{2/\alpha} [\mathbf{i}]^{-2/\alpha}\,; \\
&\{\mathbf{i} \mid [\Gamma_\mathbf{i}] \geq |x|^\alpha\} \subset \{\mathbf{i} \mid [\mathbf{i}] \geq C_0^{-1} |x|^\alpha\}
\end{aligned}
$$

Il suit la majoration :

$$x^2 \sum_{\mathbf{i}>0} [\Gamma_{\mathbf{i}}]^{-2/\alpha} \mathbf{1}_{[\Gamma_{\mathbf{i}}]\geq|x|^\alpha} \leq C_0^{2/\alpha} x^2 \sum_{\mathbf{i}>0} [\mathbf{i}]^{-2/\alpha} \mathbf{1}_{[\mathbf{i}]\geq C_0^{-1}|x|^\alpha}.$$

On applique ensuite la majoration (2.6.2) de l'annexe avec $|t| = C_0^{-1}|x|^\alpha$ et $\gamma = 2/\alpha > 1$: on trouve une constante $C < +\infty$ telle que :

$$x^2 \sum_{\mathbf{i}>0} [\Gamma_{\mathbf{i}}]^{-2/\alpha} \mathbf{1}_{[\Gamma_{\mathbf{i}}]\geq|x|^\alpha} \leq C|x|^\alpha(1 + \log_+(C_0^{-1}|x|^\alpha))^{d-1}.$$

Il suit

$$\begin{aligned}
(a_6) &\leq C \int |x|^\alpha(1 + \log_+(C_0^{-1}|x|^\alpha))\, P_{f(\mathbf{V}_{1 \ldots d})}(dx) \\
&\leq C \int_{|x|\leq C_0^{1/\alpha}} |x|^\alpha P_{f(\mathbf{V}_{1 \ldots d})}(dx) \\
&\qquad +C \int_{|x|>C_0^{1/\alpha}} |x|^\alpha(1 + \log C_0^{-1} + \alpha \log|x|)\, P_{f(\mathbf{V}_{1 \ldots d})}(dx).
\end{aligned}$$

Or comme pour tout réel a, $b > 0$, $(a + b\log_+ x) \leq (a \vee b)(1 + \log_+ x)$ et $\log_+(Cx) \leq \log_+ C + \log_+ x$, on obtient :

$$(a_5) \leq C\rho_{\alpha,d}(f) \qquad \text{et} \qquad (a_6) \leq C\rho_{\alpha,d}(f). \tag{2.4.2}$$

Finalement, pour $f \in L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1])$, les expressions (a_5), (a_6) sont finies et les conditions (i), (ii) de la proposition 2.4.2 satisfaites. On a alors la convergence pour P'-presque chaque ω', P-presque sûre de

$$\sum_{\mathbf{i}>0} [\gamma_{\mathbf{i}}]\, [\Gamma_{\mathbf{i}}]\, f(\mathbf{V}_{\mathbf{i}}) = \sum_{i_1,\ldots,i_d>0} \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_d} \Gamma_{i_1}^{-1/\alpha} \cdots \Gamma_{i_d}^{-1/\alpha} f(V_{i_1}, \ldots, V_{i_d}).$$

Conclusion de la section 2.4.2 : *La série multiple $S_d(f)$ est bien définie presque sûrement pour $f \in L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$.*

2.4.3 Continuité en probabilité de S_d

On montre dans cette section que $S_d(f_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} S_d(f)$ quand f_n converge vers f dans $L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$.
Compte tenu de la linéarité de S_d, il suffit de montrer que $S_d(f_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ quand on a $\rho_{\alpha,d}(f_n) \to 0$:

$$\sum_{i_1,\ldots,i_d>0} \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_d} \Gamma_{i_1}^{-1/\alpha} \cdots \Gamma_{i_d}^{-1/\alpha} f_n(V_{i_1}, \ldots, V_{i_d}) \xrightarrow{P} 0.$$

D'après le lemme 2.3.2 sur la convergence en probabilité, il suffit de prouver que toute sous-suite admet une sous-suite plus fine presque sûrement convergente. Pour cela, considérons $(f_{k_n})_{n>0}$ une suite extraite quelconque de $(f_n)_{n>0}$. On commence par extraire à nouveau $(f_{p_n})_{n>0}$ de $(f_{k_n})_{n>0}$ telle que :

- $f_{p_n} \longrightarrow 0$ λ^d-presque partout sur $[0,1]^d$;
- $\sum_{n>0} \rho_{\alpha,d}(f_{p_n}) < +\infty$.

Notons

$$\begin{aligned} S_k^{(p_n)} &= \sum_{|\mathbf{i}| \leq k} [\gamma_{\mathbf{i}}] [\Gamma_{\mathbf{i}}]^{-1/\alpha} f_{p_n}(\mathbf{V}_{\mathbf{i}}) \mathbf{1}_{|f_{p_n}(\mathbf{V}_{\mathbf{i}})| \leq [\Gamma_{\mathbf{i}}]^{1/\alpha}} \\ &= \sum_{|\mathbf{i}| \leq k} g_{\mathbf{i}}^{(p_n)}, \end{aligned}$$

où $g^{(p_n)}$ est l'analogue de g de la section 2.4.2 précédente avec f_{p_n} à la place de f. On a :

$$S_k^{(p_n)2} = \sum_{|\mathbf{i}|, |\mathbf{j}| \leq k} g_{\mathbf{i}}^{(p_n)} g_{\mathbf{j}}^{(p_n)} = \sum_{|\mathbf{i}| \leq k} g_{\mathbf{i}}^{(p_n)2} + \sum_{\substack{|\mathbf{i}|, |\mathbf{j}| \leq k, \\ \mathbf{i} \neq \mathbf{j}}} g_{\mathbf{i}}^{(p_n)} g_{\mathbf{j}}^{(p_n)}$$

Or pour $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$, il existe par exemple $i_1 \notin \{j_1, \ldots, j_d\}$, on a alors :

$$\begin{aligned} E\, g_{\mathbf{i}}^{(p_n)} g_{\mathbf{j}}^{(p_n)} &= E\left(E(g_{\mathbf{i}}^{(p_n)} g_{\mathbf{j}}^{(p_n)} \mid \mathcal{F}_{i_1}^*)\right) \\ &= E\left(E(g_{\mathbf{i}}^{(p_n)} \mid \mathcal{F}_{i_1}^*)\, g_{\mathbf{j}}^{(p_n)}\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $g_{\mathbf{j}}^{(p_n)}$ est $\mathcal{F}_{i_1}^*$-mesurable et $E(g_{\mathbf{i}}^{(p_n)} \mid \mathcal{F}_{i_1}^*) = 0$.
Il suit

$$E\left(S_k^{(p_n)2}\right) \leq \sum_{|\mathbf{i}| \leq k} E\left(g_{\mathbf{i}}^{(p_n)2}\right)$$

De la même façon, on a

$$E\left(\left(S_k^{(p_n)} - S_l^{(p_n)}\right)^2\right) \leq \sum_{k < |\mathbf{i}| \leq l} E\left(g_{\mathbf{i}}^{(p_n)2}\right).$$

Or d'après la condition (ii) de la proposition 2.4.2 vérifiée dans la section 2.4.2, on a la convergence de $\sum_{|\mathbf{i}|>0} E\left(g_{\mathbf{i}}^{(p_n)2}\right)$, on vérifie ainsi le critère de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pour la suite $\left(S_k^{(p_n)}\right)_{k>0}$. En passant à la limite dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pour $k \to +\infty$, on obtient alors avec une estimation de la section précédente

$$\begin{aligned} E S^{(p_n)2} &\leq \sum_{|\mathbf{i}|>0} E\, g_{\mathbf{i}}^{(p_n)2} \\ &\leq C\, E\, |f_{p_n}(\mathbf{V}_{1,\ldots,\mathbf{d}})|^\alpha (1 + \log_+(C_0^{-1/\alpha} |f_{p_n}(\mathbf{V}_{1,\ldots,\mathbf{d}})|))^{d-1}. \end{aligned}$$

On trouve finalement une constante C telle que

$$ES^{(p_n)^2} \leq C\, \rho_{\alpha,d}(f_{p_n}).$$

On peut extraire à nouveau $(q_n)_{n>0}$ de $(p_n)_{n>0}$ de façon à avoir en plus $S^{(q_n)} \longrightarrow 0$ $\mathbb{P}$-presque sûrement quand $n \to +\infty$.

Notons

$$J'(\omega,\omega') = \left\{\mathbf{i} \,\middle|\, \exists\, n,\ |f_{p_n}(\mathbf{V_i})| > \mathbf{i}^{-1/\alpha}\right\}.$$

On a P-presque sûrement $J'(\omega,\omega')$ de cardinal fini, en effet d'après l'estimation de (a_5) en (2.4.2), on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{i}>0} P\Big(\bigcup_n \{|f_{p_n}(\mathbf{V_i})|^\alpha > [\Gamma_\mathbf{i}]\}\Big) &\leq \sum_{\mathbf{i}>0}\sum_{n>0} P\left(|f_{p_n}(\mathbf{V_i})|^\alpha > [\Gamma_\mathbf{i}]\right) \\
&\leq \sum_{n>0}\sum_{\mathbf{i}>0} P\left(|f_{p_n}(\mathbf{V_i})|^\alpha > [\Gamma_\mathbf{i}]\right) \\
&\leq C\sum_{n>0} \rho_{\alpha,d}(f_{p_n}) < +\infty.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\sum_{\mathbf{i}>0} h_\mathbf{i}^{(q_n)} = \sum_{\mathbf{i}>0} [\gamma_\mathbf{i}]\,[\Gamma_\mathbf{i}]^{-1/\alpha} f_{q_n}(\mathbf{V_i}) = \sum_{\mathbf{i}\in J'(\omega,\omega')} h_\mathbf{i}^{(q_n)} + \sum_{\mathbf{i}\notin J'(\omega,\omega')} h_\mathbf{i}^{(q_n)}.$$

La première somme a un nombre fini de termes et comme $f_{q_n} \longrightarrow 0$ λ^d-presque partout sur $[0,1]^d$, on a aussi pour chaque $\mathbf{i}$ fixé $h_\mathbf{i}^{(q_n)} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

La seconde somme est égale à $\sum_{\mathbf{i}\notin J'(\omega,\omega')} g_\mathbf{i}^{(q_n)}$ qui coïncide, aux termes de multi-indice $\mathbf{i} \in J'(\omega,\omega')$ près, avec $\sum_{\mathbf{i}>0} g_\mathbf{i}^{(q_n)}$ qui tend vers 0 car $S^{(q_n)} \longrightarrow 0$, $n \to +\infty$.
Or de même que pour la première somme chaque terme de multi-indice $\mathbf{i} \in J'(\omega,\omega')$ tend vers 0. Il suit :

$$\sum_{\mathbf{i}>0} h_\mathbf{i}^{(q_n)} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

Ainsi pour toute sous-suite de $(f_n)_{n>0}$, il en existe une extraite $(f_{q_n})_{n>0}$ telle que presque sûrement

$$S_d(f_{q_n}) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

On a donc aussi, d'après le lemme 2.3.2 sur la convergence en probabilité :

$$S_d(f_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} S_d(f).$$

2.4.4 Lien entre S_d et I_d

On relie la série multiple $S_d(f)$ à l'intégrale stochastique stable multiple $I_d(f)$ de la même façon que dans le cas $\alpha < 1$ en section 2.3.3 : on constate d'abord facilement que pour $f = \mathbf{1}_{\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_d}$, on a

$$S_d(f) = S_1(\mathbf{1}_{\Delta_1}) \times \cdots \times S_1(\mathbf{1}_{\Delta_d}).$$

Puis d'après le théorème 2.1.1 et la continuité de $(x_1, \ldots, x_d) \longmapsto x_1 \cdots x_d$, on a :

$$S_d(f) \stackrel{\mathcal{L}}{=} I_d(f).$$

On étend facilement cette égalité en loi pour les fonctions simples.
Pour $f \in L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$, on considère $(f_n)_{n>0}$ suite de fonctions simples qui converge vers f dans $L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$. D'après la continuité en probabilité de S_d et l'égalité en loi pour les fonctions simples, on montre que $I_d(f)$ est bien défini et qu'on a encore l'égalité des lois de $I_d(f)$ et $S_d(f)$.

Conclusion :
Pour $f \in L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$, $S_d(f) = C_\alpha^{d/\alpha} \sum_{\mathbf{i}>0} [\boldsymbol{\Gamma}_\mathbf{i}] [\Gamma_\mathbf{i}]^{-1/\alpha} f(\mathbf{V}_\mathbf{i})$ est une représentation de l'intégrale stochastique α-stable d-multiple ($\alpha \geq 1$, $\beta = 0$), ce qui achève de prouver le théorème 2.2.1. ∎

2.5 Discussion

2.5.1 Cas $\alpha \geq 1$, $\beta \neq 0$

Dans le cas où la mesure n'est pas symétrique et $\alpha \geq 1$, comme on l'a souligné à la remarque 2.2.1, la représentation S_d en (2.2.4) ne convient plus car ne tient pas compte des termes supplémentaires dans (2.1.1) qui ne s'annulent plus. On indique ici quelle généralisation semble naturelle à considérer dans ce cas. Introduisons d'abord les notations supplémentaires suivantes :

- $T^d = \left\{\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_d) \in \mathbb{N}^d \mid 0 < i_1 < \cdots < i_d\right\}$;
- pour $k \leq d$, $\mathbf{i}^k = (i_1, \ldots, i_k) \in T^k$, $|\mathbf{i}^k| = i_1 + \cdots + i_k$;
- pour $k < d$, ${}^k\mathbf{i} = (i_{k+1}, \ldots, i_d) \in T^{d-k}$, $|{}^k\mathbf{i}| = i_{k+1} + \cdots + i_d$;
- $C_k(d)$ l'ensemble des choix $a_k(d)$ de k indices $q_1, \ldots, q_k$ parmi $\{1, \ldots, d\}$;
- $C_k(\mathbf{i})$ l'ensemble des choix $a_k(\mathbf{i})$ de k indices $i_{q_1}, \ldots, i_{q_k}$ parmi $\{i_1, \ldots, i_d\}$;
- $\mathcal{F}_i^* = \sigma(V_j, \gamma_j, j \neq i)$, $\mathcal{F}^*_{a_k(\mathbf{i})} = \sigma(V_{i_q}, \gamma_{i_q}, i_q \notin a_k(\mathbf{i}))$

On considère alors la série multiple

$$\tilde{S}_d(f) = C_\alpha^{d/\alpha} \sum_{\mathbf{i}>0} \sum_{k=0}^{d} \sum_{a_k(d) \in C_k(d)} \left(\prod_{q \in a_k(d)} -b_{i_q}^{(\alpha)} \right) \left(\prod_{p \notin a_k(d)} \gamma_{i_p} \Gamma_{i_p}^{-1/\alpha} \right) \times$$
$$\times E\left(f(\mathbf{V}_\mathbf{i}) \prod_{q \in a_k(d)} \beta(V_{i_{q_l}}) \mid \mathcal{F}^*_{a_k(\mathbf{i})} \right). \qquad (2.5.1)$$

Pour $\alpha \in (1,2)$ et $f \in L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$, la série multiple $\tilde{S}_d(f)$ est presque sûrement bien définie, elle permet de donner une construction de l'intégrale stochastique stable multiple $I_d(f)$ dans ce cas avec

$$I_d(f) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \tilde{S}_d(f).$$

On ne donne pas la justification de ce résultat, on se contente d'indiquer qu'en notant $\mathbf{X}_\mathbf{i} = \gamma_\mathbf{i} f(\mathbf{V}_\mathbf{i})$ et $E_i = E(\cdot|\mathcal{F}_i^*)$ l'espérance selon les variables aléatoires d'indice i, considérée comme un opérateur, on transforme formellement la série (2.5.1) en

$$\tilde{S}_d(f) = C_\alpha^{d/\alpha} \sum_{\mathbf{i}>0} \sum_{k=0}^{d} \sum_{a_k(d)\in C_k(d)} \prod_{p \notin a_k(d)} (\Gamma_{i_p}^{-1/\alpha} - b_{i_p}^{(\alpha)}) \prod_{q \in a_k(d)} b_{i_q}^{(\alpha)} (1 - E_{i_q})\, X_\mathbf{i}.$$

Comme le paramètre $b_i^{(\alpha)}$ défini en (2.1.2) admet l'équivalent $b_i^{(\alpha)} \sim i^{-1/\alpha}$ quand $i \to +\infty$, on estime $|\Gamma_i^{-1/\alpha} - b_i^{(\alpha)}|$ à partir de la loi du logarithme itéré :

$$|\Gamma_i^{-1/\alpha} - b_i^{(\alpha)}| \leq C(\omega')\, i^{-1/2-1/\alpha} (\log_2 i)^{1/2}$$

avec $\log_2 = \log \circ \log$ et $i \geq e$. Par symétrie, on se ramène à étudier un seul terme de la somme $\sum_{k=0}^{d}$ dans l'expression précédente de $\tilde{S}_d(f)$. Le schéma serait alors globalement le même qu'en section 2.4 mais avec de nombreux passages techniques supplémentaires.

Dans le cas $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$, on doit tenir compte aussi du terme θ_f. En modifiant un peu la constante $b_i^{(1)}$, on peut raisonner comme pour $\alpha > 1$.

2.5.2 Discussion de l'hypothèse $f \in L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$

On a construit l'intégrale stochastique α-stable d-multiple de f sous la condition d'intégrabilité (2.2.5) de type Orlicz :

$$\int_{[0,1]^d} |f(t_1,\ldots,t_d)|^\alpha \left(1 + \log_+ |f(t_1,\ldots,t_d)|\right)^{d-1} dt_1 \cdots dt_d.$$

On remarque que pour $d = 1$, on retrouve la condition de la définition des intégrales stables simples de la proposition 2.1.5 : l'existence d'un moment absolu d'ordre α pour f. Pour $d = 2$, (2.2.5) se réduit à une hypothèse du même type que la condition nécessaire et suffisante (2.0.1) de Rosiński - Woyczyński et Kwapień - Woyczyński pour les intégrales stables doubles qu'on trouve dans [39, 24].

On remarque aussi que la condition (2.2.5) est analogue à celle exigée dans [51] par l'approche due à Surgailis par un théorème d'interpolation dans les espaces de Lorentz.

Dans [43, 44], Samorodnitsky - Szulga puis Samorodnitsky - Taqqu proposent aussi une construction des intégrales stables multiples par la représentation de LePage avec les mêmes hypothèses sur les intégrants f (pour $d = 2$, cette condition vient de l'amélioration de [44]). Le lien entre ces intégrales et les séries multiples de type LePage s'appuie sur des propriétés générales des formes multilinéaires aléatoires (inégalité de Khinchine généralisée, principe de contraction, limite de telles formes) dues à Krakowiak - Szulga

[21] et rappelée dans [43, th. 1.3]. La convergence des séries multiples qui entrent en jeu s'obtient alors en décomposant les séries en considérant une partition de l'ensemble des indices. Ils raisonnent alors par récurrence en utilisant la prépondérance de certains termes obtenue par les propriétés du produit des temps d'arrivée Γ_i. Ils obtiennent ainsi simultanément une description précise de la queue de la loi de ces intégrales. Cette méthode utilise donc un formalisme probabiliste plus élaboré mais décrit aussi la queue des lois. De plus ces résultats sont généralisés par [44] dans les espaces de Banach de type $p \geq 1$ pour $\alpha < p$. Par contre, ils ne concernent que le cas d'intégrales multiples par rapport à des mesures stables symétriques (i.e. avec un biais nul).

2.6 Annexes

Dans les sections 2.3.1 et 2.4.2, on utilise l'estimation suivante :

$$\#\{(i_1,\dots,i_d) \mid i_1\cdots i_d \leq k\} \leq C\, k \log^{d-1} k \leq C\, k\,(1+\log_+ k)^{d-1}. \tag{2.6.1}$$

Pour $d = 1$, $\#\{i \mid i \leq k\} = k$, on conjecture alors que

$$\#\{(i_1,\dots,i_d) \mid i_1\cdots i_d \leq k\} \leq C\, k \log^{d-1} k.$$

On le suppose établi au rang $d-1$ et on le montre au rang d :

$$\begin{aligned}
\#\{(i_1,\dots,i_d) \mid i_1\cdots i_d \leq k\} &= \sum_{i_d \leq k} \#\{(i_1,\dots,i_{d-1}) \mid i_1\cdots i_{d-1} \leq \left[\frac{k}{i_d}\right]\} \\
&\leq \sum_{i_d \leq k} C \left[\frac{k}{i_d}\right] \log^{d-2}\left[\frac{k}{i_d}\right] \quad \text{par l'hypothèse ;} \\
&\leq \sum_{i_d \leq k} C\, \frac{k}{i_d} \log^{d-2} k \\
&= C\left(\sum_{i_d \leq k} \frac{1}{i_d}\right) k \log^{d-2} k \\
&\leq C\, k \log^{d-1} k
\end{aligned}$$

Il suit alors l'estimation (2.6.1). ∎

On prouve l'estimation suivante, pour $\gamma > 1$, utilisée en sections 2.3.1 et 2.4.2 :

$$|t|^{\gamma} \sum_{\mathbf{i}>0} (i_1\cdots i_d)^{-\gamma}\, \mathbf{1}_{i_1\cdots i_d \geq |t|} \leq C\,|t|\,(1+\log_+|t|)^{d-1}. \tag{2.6.2}$$

• En effet, pour $|t| < 1$:

$$\sum_{\mathbf{i}>0} (i_1\cdots i_d)^{-\gamma}\, \mathbf{1}_{i_1\cdots i_d \geq |t|} = \sum_{\mathbf{i}>0} (i_1\cdots i_d)^{-\gamma} = \left(\sum_{i>0} i^{-\gamma}\right)^d = C.$$

Comme $|t|^\gamma \leq |t|$ et $\log_+|t| = 0$, on a bien (2.6.2) dans ce cas.

• Pour $|t| \geq 1$:
Dans le cas $d = 1$, on a l'équivalence :

$$\sum_{i_1 \geq |t|} \frac{1}{i_1^\gamma} \sim \int_{|t|}^{+\infty} \frac{ds}{s^\gamma} \sim |t|^{1-\gamma}.$$

On conjecture alors la majoration suivante :

$$\sum_{i_1,\dots,i_d>0} (i_1 \cdots i_d)^{-\gamma}\, \mathbf{1}_{i_1\cdots i_d \geq |t|} \leq C\, |t|^{1-\gamma} \log^{d-1}|t|.$$

On procède par récurrence en la supposant acquise au rang $d-1$ et en la montrant au rang d :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1,\dots,i_d>0} (i_1 \cdots i_d)^{-\gamma}\, \mathbf{1}_{i_1\cdots i_d \geq |t|} \\
&\quad = \sum_{i_1,\dots,i_{d-1}>0} (i_1 \cdots i_{d-1})^{-\gamma} \sum_{i_d \geq \sup\left(1, \frac{|t|}{i_1\cdots i_{d-1}}\right)} i_d^{-\gamma} \\
&\quad \leq C \sum_{i_1,\dots,i_{d-1}>0} (i_1 \cdots i_{d-1})^{-\gamma} \sup\left(1, \frac{|t|}{i_1 \cdots i_{d-1}}\right)^{1-\gamma}.
\end{aligned}$$

Or $\sup\left(1, \frac{|t|}{i_1\cdots i_{d-1}}\right) = \frac{|t|}{i_1\cdots i_{d-1}}$ si et seulement si $i_1 \cdots i_{d-1} \leq |t|$.
D'où

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1,\dots,i_d>0} (i_1 \cdots i_d)^{-\gamma}\, \mathbf{1}_{i_1\cdots i_d \geq |t|} \\
&\quad \leq \sum_{i_1\cdots i_{d-1} \leq |t|} \left((i_1 \cdots i_{d-1})^{-\gamma} \frac{|t|^{1-\gamma}}{(i_1 \cdots i_{d-1})^{1-\gamma}} \right) + \sum_{i_1\cdots i_{d-1} > |t|} (i_1 \cdots i_{d-1})^{-\gamma} \\
&\quad \leq \sum_{i_1\cdots i_{d-1} \leq |t|} i_1^{-1} \cdots i_{d-1}^{-1}\, |t|^{1-\gamma} + C\, |t|^{1-\gamma} \log^{d-2}|t| \\
&\quad \leq \left(\sum_{i \leq |t|} i^{-1}\right)^{d-1} |t|^{1-\gamma} + C\, |t|^{1-\gamma} \log^{d-2}|t| \\
&\quad \leq C\, |t|^{1-\gamma} \log^{d-1}|t| \\
&\quad \leq C\, |t|^{1-\gamma} (1 + \log_+|t|)^{d-1}.
\end{aligned}$$

On trouve finalement une constante positive finie C telle que (2.6.2) est vérifiée aussi dans le cas $t \geq 1$. ∎

On utilise cette majoration (2.6.2) en section 2.3.1 avec $\gamma = 1/\alpha > 1$ et $|t| = |x|^\alpha$ et en section 2.4.2 avec $\gamma = 2/\alpha > 1$ et $|t| = |x|^\alpha$.

Chapitre 3

Absolue continuité des lois des intégrales stochastiques stables multiples

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'absolue continuité des lois des intégrales stochastiques stables multiples introduites au chapitre 2. On généralise ainsi des résultats de Davydov (1991) [11] pour des intégrales multiples de Wiener-Itô (des résultats analogues à [11] ont été obtenus par Shigekawa (1980) [47] en utilisant une variante du calcul de Malliavin et par Kusuoka (1983) [23] par des méthodes algébriques).

La représentation de LePage du chapitre 2 est bien adaptée à l'étude des lois de ces intégrales multiples par rapport à une mesure stable M. On renvoie à [43, 44, 40] pour différents résultats liés à ces lois (notamment une description précise de la queue de leur loi). La représentation permet tout d'abord de voir les intégrales comme des fonctionnelles sur l'espace de Skorokhod $\mathbb{D}$ d'un processus stable η de loi P associé à la mesure stable M. L'étude des lois jointes d'intégrales stables multiples $(I_{d_1}(f_1), \dots, I_{d_p}(f_p))$ se ramène ainsi à celles de fonctionnelles multidimensionnelles stochastiques. Pour cela, on applique la méthode de stratification qui consiste à introduire une partition de l'espace et permet de se ramener à l'étude des restrictions des fonctionnelles sur les « strates » liées à la partition. Cette dernière sera définie en considérant des semi-groupes associés à des champs locaux qui engendrent des transformations admissibles de la loi stable P sur $\mathbb{D}$. On montre ainsi que sous une condition **(H)** sur les noyaux $(f_1, \dots, f_p)$, la loi jointe $(I_{d_1}(f_1), \dots, I_{d_p}(f_p))$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue p-dimensionnelle λ^p.

On commence en section 3.1 par décrire la méthode de stratification puis les champs locaux qui permettent d'utiliser cette méthode sur $\mathbb{D}$. On énonce en section 3.2 le résultat principal de ce chapitre (théorème 3.2.1) puis on donne en section 3.3 quelques cas concrets de lois jointes pour lesquelles la condition **(H)** du théorème 3.2.1 est facilement satisfaite. On prouve ensuite le résultat en commençant en section 3.4 par le cas des lois simples ; pour cela, on réduit le problème en se ramenant par le théorème de représentation 2.2.1 du chapitre 2 à l'étude de séries multiples de type LePage. Après localisation, on se ramène à $\mathbb{D}$ sur lequel on met en place le formalisme de la méthode de stratification. Dans le cas général prouvé en section 3.5, la démarche est la même mais avec des difficultés techniques supplémentaires, on conclut cependant sous la condition (H).

3.1 Méthode de stratification

On décrit dans cette section le formalisme général de la méthode de stratification, base de la preuve du théorème 3.2.1 sur l'absolue continuité des lois jointes d'intégrales stables multiples. Cette méthode a été utilisée initialement par Davydov pour l'étude de fonctionnelles gaussiennes (voir [7, 8]) puis améliorée par Lifshits pour des processus plus généraux (à accroissements indépendants, voir [26, 27, 28]). Pour une description complète, on renvoie à [13] et à ses références.

3.1.1 Partitions, mesures conditionnelles.

On considère $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un espace mesurable, P une mesure de probabilité et Γ une partition de $\mathcal{X}$.
On note $\mathcal{X}/\Gamma$ l'espace quotient, $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}/\Gamma$ la surjection canonique. On munit $\mathcal{X}/\Gamma$ de la tribu $\mathcal{B}_{\mathcal{X},\Gamma}$, ensemble des $A \subset \mathcal{X}/\Gamma$ tels que $\pi^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. On considère sur cet espace mesurable la mesure quotient définie par $P_\Gamma(A) = P\{\pi^{-1}(A)\}$. On parlera de partition *mesurable* d'un espace $\mathcal{X}$ métrique, complet, séparable, lorsqu'elle est constituée de préimages de points par une application mesurable de $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ vers un espace métrique, complet, séparable.

Définition 3.1.1 *Un système de probabilités $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ définies sur $\mathcal{B}$ est un système de mesures conditionnelles pour P par rapport à Γ si pour tout $B \in \mathcal{B}$:*
$\gamma \longmapsto P_\gamma(B)$ est $\mathcal{B}_{\mathcal{X},\Gamma}$-mesurable ;
pour tout $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X},\Gamma}$

$$P\{B \cap \pi^{-1}(A)\} = \int_A P_\gamma(B)\, P_\Gamma(d\gamma). \tag{3.1.1}$$

Le résultat suivant montre que pour des partitions mesurables, on a l'existence des mesures conditionnelles (voir [13, th. 3.1]) :

Théorème 3.1.1 (existence et unicité des mesures conditionnelles)
Si Γ est une partition mesurable de $\mathcal{X}$ métrique, complet, séparable et P une mesure de probabilité sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, alors il existe une famille de mesures conditionnelles $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\mathcal{X}/\Gamma}$. De plus P_Γ-presque sûrement, P_γ est concentrée sur $\pi^{-1}(\gamma)$; et si $\{P^1_\gamma\}_\gamma$, $\{P^2_\gamma\}_\gamma$ sont deux familles de mesures conditionnelles pour P par rapport à la partition Γ alors P^1_γ, P^2_γ coïncident pour P_Γ-presque chaque γ.

On retiendra notamment qu'on peut alors décomposer les distributions fonctionnelles de la façon suivante :

Proposition 3.1.1 *Soit $f : (\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}) \longrightarrow (Y, \mathcal{U})$ mesurable, pour $A \in \mathcal{U}$ on a :*

$$Pf^{-1}(A) = \int_{\mathcal{X}/\Gamma} P_\gamma f^{-1}(A)\, P_\Gamma(d\gamma). \tag{3.1.2}$$

De la même façon dans le cas où les densités existent, on peut exprimer la densité de Pf^{-1} comme mélange des densités conditionnelles de $P_\gamma f^{-1}$ ([13, prop. 3.4]).

3.1.2 Semi-groupe admissible

Définition 3.1.2 *Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}, P)$ un espace topologique muni d'une mesure de Borel. Une application mesurable $G : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ est dite admissible si $PG^{-1} \ll P$. Une famille d'applications $\{G_c\}$, $c \in (\mathbb{R}^+)^p$ est un semi-groupe admissible si*

(i) G_0 est l'identité ;

(ii) $G_{c_1} \circ G_{c_2} = G_{c_1+c_2}$;

(iii) pour tout $c \in (\mathbb{R}^+)^p$, G_c est admissible et injective ;

(iv) pour tout $x \in \mathcal{X}$, $c \longmapsto G_c(x)$ est injective.

On associe au semi-groupe la relation d'équivalence $\sim$ donnée par $x_1 \sim x_2$ si et seulement si $G_{c_1}(x_1) = G_{c_2}(x_2)$ pour c_1, $c_2 \in (\mathbb{R}^+)^p$. Les propositions qui suivent donnent une paramétrisation des orbites. Leurs preuves sont faciles et ne sont pas données.

Proposition 3.1.2 *Soient $x_1 \sim x_2$, il existe un unique $c(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^p$ tel que*

$$G_{c_1}(x_1) = G_{c_2}(x_2) \text{ implique } c_1 = c_2 + c(x_1, x_2).$$

Proposition 3.1.3 *Soient $\pi^{-1}(\gamma)$ une orbite de $\{G_c\}_c$ et $x \in \pi^{-1}(\gamma)$.*
Alors $J_x : y \longmapsto c(x, y)$ est une application injective de $\pi^{-1}(\gamma)$ sur un ensemble $C_x \subset \mathbb{R}^p$ mesurable. Cette application intervertit l'action de $\{G_c\}_c$ sur $\pi^{-1}(\gamma)$ avec l'action d'un semi-groupe de translation sur C_x :

$$J_x G_c(y) = J_x(y) + c.$$

En plus des conditions de la définition 3.1.2, on ajoute la condition topologique de continuité suivante : J_x est un homéomorphisme de $\pi^{-1}(\gamma)$ sur C_x si $\pi^{-1}(\gamma)$ est muni de la topologie héritée de $\mathcal{X}$.

Remarque 3.1.1 Le point de référence dans l'orbite n'est pas important, un changement de ce point se traduit par un changement linéaire de J_x et une translation de l'ensemble C_x.

On définit une mesure de Lebesgue sur l'orbite γ :

$$\lambda_\gamma(B) = \lambda^p\{J_x(B \cap \pi^{-1}(\gamma))\}$$

où λ^p est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^p$. On vérifie que λ_γ est bien définie ; de plus λ_γ est G_c-invariante : si $B \subset \mathcal{B}_\gamma$, $c \in (\mathbb{R}^+)^p$ alors $G_c^{-1}(B) \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ avec

$$\lambda_\gamma(B) = \lambda_\gamma\{G_c^{-1}(B)\}.$$

Lorsque l'on considère une partition mesurable définie par un semi-groupe admissible, on dispose du théorème suivant qui complète le théorème 3.1.1 sur l'existence des mesures conditionnelles.

Théorème 3.1.2 (th. 4.1 [13]) *Soit Γ une partition mesurable d'un espace $\mathcal{X}$ métrique, complet, séparable en orbites d'un semi-groupe admissible $\{G_c\}_{c \in (\mathbb{R}^+)^p}$. Alors pour P_Γ-presque chaque γ, les mesures conditionnelles P_γ sont absolument continues par rapport à la mesure invariante λ_γ, de densités données par*

$$\frac{dP_\gamma}{d\lambda_\gamma}(G_u(x)) = K_\gamma\,[p^u(G_u(x))]^{-1}$$

pour P_γ-presque chaque x, avec le facteur de normalisation K_γ constant sur γ et $p^u = \frac{dPG_u^{-1}}{dP}$.

Remarque 3.1.2 On peut remplacer $\mathcal{X}$ par $V \subset \mathcal{X}$ ouvert dans le théorème précédent, pour cela on change la métrique pour que cet ensemble devienne métrique, complet, séparable.

3.1.3 Champ local

Pour appliquer la méthode de stratification sur l'espace $\mathbb{D}$ des fonctions *cadlag* muni de la loi stable P, on définit en section 3.1.4 les semi-groupes admissibles à partir de champs locaux dont on rappelle la définition dans cette section. Notons dans la suite pour $x \in \mathbb{D}$, $\delta_x(t) = x(t) - x(t-)$ le saut de x en $t \in [0,1]$.

Définition 3.1.3 (champ local, voir [13]) *On se donne un entier m, des sous-intervalles disjoints de $[0,1]$ $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$, des réels $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ et $\varepsilon > 0$ appelés paramètres du champ. Pour $s, t \in [0,1]$, on pose*

$$\varphi_s(t) = \sum_{i=1}^{m} \tau_i \mathbf{1}_{\Delta_i}(s) \mathbf{1}_{[s,+\infty)}(t). \tag{3.1.3}$$

On définit alors le champ local $\{l_x, x \in \mathcal{X}\}$ par

$$l_x = \sum_{s \in J_x^+(\varepsilon)} \varphi_s^+ - \sum_{s \in J_x^-(\varepsilon)} \varphi_s^-. \tag{3.1.4}$$

où φ_s^+ et φ_s^- désignent respectivement les parties positive et négative de φ_s, $J_x^+(\varepsilon) = \{s \in [0,1] \mid \delta_x(s) \geq \varepsilon\}$, $J_x^-(\varepsilon) = \{s \in [0,1] \mid \delta_x(s) \leq -\varepsilon\}$

En notant

$$\omega_x(t) = \begin{cases} \tau_i \text{ si } t \in \Delta_i,\ |\delta_x(t)| > \varepsilon,\ \delta_x(t)\,\tau_i > 0, \\ \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases} \tag{3.1.5}$$

on relie facilement les sauts de x et $x + c\,l_x$ par :

$$\delta_{x+c\,l_x}(t) = \delta_x(t) + c\,\omega_x(t). \tag{3.1.6}$$

Notons $\Delta_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, \ldots, m$ les intervalles associés au champ local l puis définissons :

- $A(l)^+$ l'ensemble des $x \in \mathbb{D}$ tels que pour i avec $\tau_i > 0$, x n'a pas de saut de taille ε sur Δ_i, $\delta_x(a_i) < \varepsilon$, $\delta_x(b_i) < \varepsilon$ et x a au moins un saut de taille supérieure à ε sur Δ_i,
- $A(l)^-$ l'ensemble des $x \in \mathbb{D}$ tels que pour i avec $\tau_i < 0$, x n'a pas de saut de taille $-\varepsilon$ sur Δ_i, $\delta_x(a_i) > -\varepsilon$, $\delta_x(b_i) > -\varepsilon$ et x a au moins un saut de taille inférieure à $-\varepsilon$ sur Δ_i,

$$A(l) = A(l)^+ \cap A(l)^-. \tag{3.1.7}$$

Proposition 3.1.4 *L'ensemble $A(l)$ défini en (3.1.7) est un ouvert de $\mathbb{D}$.*

Démonstration : Comme les cas de $A(l)^+$ et $A(l)^-$ sont analogues, pour voir que $A(l)$ est ouvert, il est clair que l'on peut se ramener à $m = 1$ et $A(l) = A(l)^+$.
On suppose donc l défini par un seuil ε, un intervalle $\Delta = (a, b)$ et $\tau > 0$
Soit $x \in A(l)$, notons :

- $\alpha_- = \inf\{s \in (a,b) \mid \delta_x(s) > \varepsilon\}$;
- $\alpha_+ = \sup\{s \in (a,b) \mid \delta_x(s) > \varepsilon\}$;
- $\beta_- = \sup\{s < a \mid \delta_x(s) \geq \varepsilon\}$;
- $\beta_+ = \inf\{s > b \mid \delta_x(s) \geq \varepsilon\}$;
- $\gamma_- = \sup\{\delta_x(s) \mid s \in (\beta_-, \beta_+),\ \delta_x(s) < \varepsilon\}$;
- $\gamma_+ = \inf\{\delta_x(s) \mid s \in (\beta_-, \beta_+),\ \delta_x(s) > \varepsilon\}$.

Comme $\delta_x(a) < \varepsilon$, $\delta_x(b) < \varepsilon$ on a $a < \alpha_- \leq \alpha_+ < b$ car les inf sont des min par finitude du nombre de sauts de modules strictement supérieurs à ε.
De la même façon, on a $\beta_- < a < b < \beta_+$ et $\gamma_- < \varepsilon < \gamma_+$ car les sup et inf sont des max et min. On considère alors

$$r < \frac{1}{2} \min\{\gamma_+ - \varepsilon,\ \varepsilon - \gamma_-,\ a - \beta_-,\ b - \beta_+,\ \alpha_- - a,\ b - \alpha_+\}. \tag{3.1.8}$$

Soit $V(x) = B(x, r)$ un voisinage de x dans $\mathbb{D}$ muni de la topologie de Skorokhod.
Soit $y \in V(x)$, d'après la définition de cette topologie (*cf.* [2, §14]), il existe $\rho \in \Lambda$, l'ensemble des bijections croissantes de $[0, 1]$ tel que

$$\sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(\rho(t))| < r \quad \text{et} \quad \sup_{t\in[0,1]} |\rho(t) - t| < r. \tag{3.1.9}$$

On a

$$\delta_x(t) - 2r < \delta_y(\rho(t)) < \delta_x(t) + 2r.$$

On a $(a,b) \subset \rho\{(a-r,b+r)\}$ en effet :
pour $t \in (a,b)$, comme $|\rho^{-1}(t) - t| < r$, on a $t - r < \rho^{-1}(t) < t + r$ d'où $\rho^{-1}(t) \in (a-r,b+r)$.
On a donc $\rho^{-1}(t) \in (a-r,b+r)$ et $\rho\rho^{-1}(t) = t$.
De la même façon, on a $\{a\} \subset \rho\{(a-r,a+r)\}$, $\{b\} \subset \rho\{(b-r,b+r)\}$.

Pour $t \in (a-r,b+r) \subset (\beta_-,\beta_+)$, on a nécessairement $\delta_x(t) \leq \gamma_-$ ou $\delta_x(t) \geq \gamma_+$

si $\delta_x(t) \leq \gamma_-$, alors $\delta_y(\rho(t)) < \delta_x(t) + 2r \leq \gamma_- + 2r < \varepsilon$,

si $\delta_x(t) \geq \gamma_+$, alors $\delta_y(\rho(t)) > \delta_x(t) - 2r \geq \gamma_+ - 2r > \varepsilon$.

On a donc pour tout $s \in (a,b)$, $\delta_y(s) < \varepsilon$ ou $\delta_y(s) > \varepsilon$.

Pour $t \in (a-r,a+r) \subset (\beta_-,\alpha_-)$, on a $\delta_x(t) < \varepsilon$, par définition de γ_-, on a même $\delta_x(t) \leq \gamma_-$, il suit

$$\delta_y(\rho(t)) < \delta_x(t) + 2r \leq \gamma_- + 2r < \varepsilon.$$

D'où nécessairement $\delta_y(a) < \varepsilon$. De la même façon, on a $\delta_y(b) < \varepsilon$

Soit $t \in (a,b)$ un saut « transformable » de x par l, c'est à dire tel que $\delta_x(t) > \varepsilon$. On a alors compte tenu des définitions de α_-, α_+, $\alpha_- < t < \alpha_+$ et il suit $\rho(t) \in (\alpha_- - r, \alpha_+ + r) \subset (a,b)$. De plus

$$\delta_y(\rho(t)) > \delta_x(t) - 2r \geq \gamma_+ - 2r > \varepsilon$$

En l'instant $\rho(t)$, y a donc un saut « transformable ».

On a donc montré que $y \in A(l)$, on a par conséquent $V(x) \subset A(l)$, l'ensemble $A(l)$ est bien un ouvert de $\mathbb{D}$

Si on a un champ local plus général avec $m > 2$, on commence par définir α^i_-, α^i_+, β^i_-, β^i_+, γ^i_-, γ^i_+ correspondant à chaque sous-intervalle $\Delta_i = (a_i, b_i)$ de la même façon que précédemment. En prenant $\eta < \frac{1}{4}\min_{i \leq m-1} |a_{i+1} - b_i|$, on impose en plus à β^i_-, β^i_+ de vérifier

$$\beta^i_- > a_i - \eta, \quad \beta^i_+ < b_i + \eta.$$

Comme il correspond à chaque Δ_i un $r_i > 0$ donné par (3.1.8), on prend

$$r < \min_{i \leq m}\{r_i, \eta\}$$

Il est facile de voir d'après le cas avec $m = 1$ que pour $x \in A(l)$ défini en (3.1.7), on a toujours $B(x,r) \subset A(l)$ ■

Remarque 3.1.3

- si $\delta_x(t) > \varepsilon$, $t \in \Delta_i$ alors $t \in (\alpha^i_-, \alpha^i_+)$ et $\delta_x(t) \geq \gamma^i_+$ on a donc $\rho(t) \in \Delta_i$, $\delta_y(\rho(t)) > \varepsilon$: y a en $\rho(t)$ un saut transformable ;
- si $\delta_x(t) < \varepsilon$, $t \in (\beta^i_-, \beta^i_+)$ alors $\delta_x(t) \leq \gamma^i_-$, on a alors $\delta_y(\rho(t)) < \varepsilon$: le saut en $\rho(t)$ n'est pas transformable pour y ;

- si $t \notin \cup_i(\beta_-^i, \beta_+^i)$, alors nécessairement, on a $\rho(t) \notin \cup_i \Delta_i$: le saut en $\rho(t)$ n'est pas transformable pour y ;
- si $\delta_x(t) > \varepsilon$ et $t \notin \cup_i \Delta_i$ alors nécessairement, on a $t \notin \cup_i(\beta_-^i, \beta_+^i)$ et donc $\rho(t) \notin \cup_i \Delta_i$ et le saut en $\rho(t)$ n'est pas transformable pour y.

Par symétrie entre les rôles de x, y, il suit qu'on a une bijection entre les sauts transformables de x et de y. Elle est donnée par $\rho \in \Lambda$ qui réalise $d(x, y)$ comme en (3.1.9) où d est ici la distance définissant la topologie de Skorokhod sur $\mathbb{D}$.

Proposition 3.1.5 *Le champ local l est continu sur le voisinage $A(l)$ défini en (3.1.7).*

Démonstration : D'après la définition 3.1.3, l_x est donné par (3.1.4). On a alors avec (3.1.3) :

$$\begin{aligned}
l_x &= \sum_{s \in J_x^+(\varepsilon)} \sum_{i=1}^{m} \tau_i^+ \mathbf{1}_{\Delta_i}(s) \mathbf{1}_{t \geq s} - \sum_{s \in J_x^-(\varepsilon)} \sum_{i=1}^{m} \tau_i^- \mathbf{1}_{\Delta_i}(s) \mathbf{1}_{t \geq s} \\
&= \sum_{s \in J_x^+(\varepsilon)} \sum_{i \mid \tau_i > 0} \tau_i \mathbf{1}_{\Delta_i}(s) \mathbf{1}_{t \geq s} - \sum_{s \in J_x^-(\varepsilon)} \sum_{i \mid \tau_i < 0} \tau_i \mathbf{1}_{\Delta_i}(s) \mathbf{1}_{t \geq s} \\
&= \sum_{i \mid \tau_i > 0} \tau_i \sum_{s \in J_x^+(\varepsilon) \cap \Delta_i} \mathbf{1}_{t \geq s} - \sum_{i \mid \tau_i < 0} \tau_i \sum_{s \in J_x^-(\varepsilon) \cap \Delta_i} \mathbf{1}_{t \geq s}.
\end{aligned}$$

Soient $x \in A(l)$ et $B(x, r) \subset A(l)$ voisinage de x.
Soit $y \in B(x, r)$, il existe $\rho \in \Lambda$ qui réalise $d(x, y) < r$ (c'est à dire pour lequel on a la relation (3.1.9)). La bijection entre les sauts de x transformables par l et ceux de y est donnée par ρ.
Notons $s_1^i, \ldots, s_{p_i}^i$ les sauts transformables de x dans Δ_i, ceux de y sont alors $\rho(s_j^i)$, $j \leq p_i$. On a

$$\begin{aligned}
l_x &= \sum_{i \mid \tau_i > 0} \tau_i \sum_{j \leq p^i} \mathbf{1}_{t \geq s_j^i} - \sum_{i \mid \tau_i < 0} \tau_i \sum_{j \leq p_i} \mathbf{1}_{t \geq s_j^i}, \\
l_y &= \sum_{i \mid \tau_i > 0} \tau_i \sum_{j \leq p_i} \mathbf{1}_{t \geq \rho(s_j^i)} - \sum_{i \mid \tau_i < 0} \tau_i \sum_{j \leq p_i} \mathbf{1}_{t \geq \rho(s_j^i)}.
\end{aligned}$$

Il suit facilement

$$l_y \circ \rho = l_x.$$

D'où

$$d(l_x, l_y) \leq \sup_{t \in [0,1]} |l_x(t) - l_y(\rho(t))| + \sup_{t \in [0,1]} |\rho(t) - t| = \sup_{t \in [0,1]} |\rho(t) - t| \leq r.$$

On a donc : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r = \varepsilon$ tel que pour $y \in B(x, r)$, $d(l_x, l_y) < \varepsilon$. Il suit la continuité de $x \longmapsto l_x$ sur l'ouvert $A(l)$. ∎

3.1.4 Semi-groupe et partition associés aux champs locaux

Pour l'étude des lois jointes $(I_{d_1}(f_1), \dots, I_{d_p}(f_p))$ d'intégrales stochastiques stables multiples, on va se ramener à des fonctionnelles p-dimensionnelles sur $\mathbb{D}$ qu'on analyse par la méthode de stratification sur des « strates » p-dimensionnelles. On introduit pour cela une famille de semi-groupes $\{G_c\}_c$ de paramètres $c \in (\mathbb{R}^+)^p$ qu'on définit avec p champs locaux. Elle correspond à un cas particulier de transformations plus générales introduites par Lifshits [9, 27]. On étudie dans cette section une telle famille de semi-groupes.

Soient donc p champs locaux $l^1, \dots, l^p$ définis par les paramètres suivants :

le seuil ε_i,

$m_i \in \mathbb{N}^*$,

les intervalles Δ_j^i, $j = 1, \dots, m_i$,

les réels non nuls τ_j^i, $j = 1, \dots, m_i$.

On suppose de plus que les paramètres vérifient :

$$\varepsilon_i < \varepsilon_{i+1}, \qquad \left\{\cup_{j\le m_i} \Delta_j^i\right\} \cap \left\{\cup_{j\le m_{i'}} \Delta_j^{i'}\right\} = \emptyset, \quad i \neq i'. \tag{3.1.10}$$

Pour chaque champ local l^i, on associe un ouvert $A(l^i)$ comme en (3.1.7). On considère alors sur l'ouvert $A(l) = \cap_{i=1}^p A(l^i)$, la famille de transformations $\{G_c\}_c$ associée aux p champs locaux :

$$G_c(x) = x + c_1 l_x^1 + \cdots + c_p l_x^p. \tag{3.1.11}$$

En notant ω^i, $i = 1, \dots, p$ les fonctions associées aux l^i comme en (3.1.5), on a pour $c \in (\mathbb{R}^+)^p$:

$$\delta_{G_c(x)}(t) = \delta_x(t) + c_1\, \omega_x^1(t) + \cdots + c_p\, \omega_x^p(t). \tag{3.1.12}$$

Il est facile de voir que G_c est une transformation de $A(l)$.

En effet comme $\delta_{G_c x}(t)$ est donné par (3.1.12), soit pour i fixé $t \in \cup_{j\le m_i} \Delta_j^i$ pour $k \neq i$, on a ω_x^k nulle au voisinage de t, on a alors dans ce voisinage :

$$\delta_{G_c(x)}(t) = \delta_x(t) + c_i\, \omega_x^i(t).$$

Si t est un instant de saut de x transformable pour l^i, il le sera aussi de $G_c x$ car « G_c accentue la transformabilité des sauts transformables et n'agit pas sur les autres ».
Si $x \in A(l^i)$, les conditions d'appartenance à $A(l^i)$ sont donc encore satisfaites pour $G_c x$. Comme i est quelconque, on a bien $G_c x \in A(l)$ pour $x \in A(l)$.

On a alors :

Proposition 3.1.6 *$\{G_c\}_{c\in(\mathbb{R}^+)^p}$ définit un semi-groupe admissible sur $A(l)$ selon la définition 3.1.2.*

Démonstration : On vérifie les points **(i)-(iv)** de la définition 3.1.2.

(i) est clair.

(ii) On veut montrer $G_{c+d}(x) = G_c(G_d(x))$. On a

$$G_c(G_d(x)) = G_d(x) + \sum_{i=1}^p c_i\, l_{G_d(x)}^i.$$

il suffit pour voir le résultat de montrer que $l^i_{G_d(x)} = l^i_x$ pour chaque i car alors

$$G_c(G_d(x)) = x + \sum_{i=1}^{p} d_i\, l^i_x + \sum_{i=1}^{p} c_i\, l^i_x = x + \sum_{i=1}^{p}(c_i + d_i)\, l^i_x = G_{c+d}(x).$$

Montrons plus généralement que s'il existe c, $d \in (\mathbb{R}^+)^p$ tel que $G_c(x) = G_d(y)$ alors $l^i_x = l^i_y$ pour chaque $i = 1, \ldots, p$. Pour cela, associons au $i^{\text{ème}}$ champ local l^i :

$$\begin{aligned} S_i^+(x) &= J_x^+(\varepsilon_i) \cap \{\cup_{j \mid \tau^i_j > 0} \Delta^i_j\}, && (3.1.13)\\ S_i^-(x) &= J_x^-(\varepsilon_i) \cap \{\cup_{j \mid \tau^i_j < 0} \Delta^i_j\}, && (3.1.14)\\ S_i(x) &= S_i^+(x) \cup S_i^-(x). && (3.1.15) \end{aligned}$$

L'ensemble $S_i(x)$ désigne l'ensemble des sauts de x de module supérieur à ε_i dans un intervalle Δ^i_j, de signe le même que celui de τ^i_j associé à Δ^i_j. En quelque sorte, $S_i(x)$ est l'ensemble des « bons » sauts de x pour l^i.

On constate facilement d'après la définition des champs locaux qu'on a

$$\begin{aligned} l^i_x &= \sum_{s \in J_x^+(\varepsilon_i)} (\varphi_{i,s})^+ - \sum_{s \in J_x^-(\varepsilon_i)} (\varphi_{i,s})^- \\ &= \sum_{s \in S_i^+(x)} (\varphi_{i,s})^+ - \sum_{s \in S_i^-(x)} (\varphi_{i,s})^- && (3.1.16) \end{aligned}$$

car d'après les notations de (3.1.3) :
- si $s \notin \cup_j \Delta^i_j$, on a $\varphi_{i,s} \equiv 0$,
- si $s \in \cup_{j \mid \tau^i_j < 0} \Delta^i_j$, alors $\varphi_{i,s} < 0$ et $(\varphi_{i,s})^+ \equiv 0$,
- si $s \in \cup_{j \mid \tau^i_j > 0} \Delta^i_j$, alors $\varphi_{i,s} > 0$ et $(\varphi_{i,s})^- \equiv 0$.

On montre alors que pour x, y avec $G_c(x) = G_d(y)$, on a :

$$S_i^+(x) = S_i^+(y) \qquad (3.1.17)$$

On a :

$$x + c_1 l^1_x + \cdots + c_p l^p_x = y + d_1 l^1_y + \cdots + d_p l^p_y.$$

Soit $s \in S_i^+(x)$, on a par exemple $s \in \Delta^i_j$. Au voisinage de s, il est clair que pour $k \neq i$ et $t \in \cup_{k \neq i} S_k(x)$, $\varphi_{k,t}$ est constante et donc l^k_x, l^k_y sont constantes au voisinage de s pour $k \neq i$. Il suit

$$\delta_{G_d(y)}(s) = \delta_{G_c(x)}(s) = \delta_x(s) + c_i \tau^i_j > \varepsilon_i.$$

On a alors nécessairement $\delta_y(s) > \varepsilon_i$, puis comme $s \in \Delta^i_j$, $\tau^i_j > 0$, on a

$$s \in J_y(\varepsilon_i) \cap \{\cup_{j \mid \tau^i_j > 0} \Delta^i_j\} = S_i^+(y).$$

D'où $S_i^+(x) \subset S_i^+(y)$ puis par symétrie, on a (3.1.17) et de la même façon :

$$S_i^-(x) = S_i^-(y).$$

Finalement compte tenu de l'écriture (3.1.16) de l^i, il suit facilement $l^i_x = l^i_y$ et en particulier $l^i_{G_d(x)} = l^i_x$. On conclut alors que

$$G_c(G_d(x)) = G_{c+d}(x).$$

(iii) Pour $c = (c_1, \dots, c_p)$ fixé, $G_c x = x + c_1 l^1_x + \cdots + c_p l^p_x$ est une transformation du type $x \mapsto x + \tilde{c}\,\tilde{l}_x$ avec $\tilde{l}$ un champ local. On a alors l'admissibilité d'après [13, th. 21.1].
On montre que $x \mapsto G_c(x)$ est injective.
Soient x, y tels que $G_c(x) = G_c(y)$, c'est à dire :

$$x + \sum_{i=1}^{p} c_i l^i_x = y + \sum_{i=1}^{p} c_i l^i_y.$$

Si $t \notin \cup_j \Delta^i_j$, les champs locaux étant constants au voisinage de t, on a :

$$\delta_x(t) = \delta_y(t).$$

Si $t \in \Delta^i_j$,

soit $|\delta_x(t)| > \varepsilon_i$, on a alors

$$|\delta_{G_c(x)}(t)| = |\delta_x(t) + c_i \omega^i_x(t)| > \varepsilon_i$$

D'où $|\delta_{G_c(y)}(t)| > \varepsilon_i$ et nécessairement, $|\delta_y(t)| > \varepsilon_i$, $\delta_y(t)$ du signe de $\delta_x(t)$, on a donc $\delta_{G_c(y)}(t) = \delta_y(t) + c_i \omega^i_y(t)$ avec $\omega^i_x(t) = \omega^i_y(t) = \tau^i_j$ d'où

$$\delta_x(t) = \delta_y(t).$$

Soit $|\delta_x(t)| \leq \varepsilon_i$, les champs locaux sont alors tous constants au voisinage de t et on a

$$\delta_x(t) = \delta_{G_c(x)}(t) = \delta_{G_c(y)}(t) = \delta_y(t)$$

Comme de plus $x(0) = y(0)$, on a finalement $x = y$

(iv) Soit $x \in A(l)$ fixé, on a $c \longmapsto G_c(x)$ injective, en effet :
soient c, d tel que $G_c(x) = G_d(x)$ et $t \in \Delta^i_j$ instant d'un saut de x transformable par l^i (i.e $|\delta_x(t)| > \varepsilon_i$), on a

$$\delta_{G_c(x)}(t) = \delta_x(t) + c_i \omega^i_x(t), \quad \delta_{G_d(x)}(t) = \delta_x(t) + d_i \omega^i_x(t)$$

comme $\omega^i_x(t) = \tau^i_j \neq 0$, il suit $c_i = d_i$
En faisant de même pour chaque $i = 1, \dots, p$, on obtient $c = d$. ■

On associe à cette famille de semi-groupes donnés par (3.1.11) une partition Γ comme en section 3.1.2. On définit la relation d'équivalence $\sim$ par

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists\, c,\ d \in (\mathbb{R}^+)^p \text{ tels que } G_c(x) = G_d(y). \tag{3.1.18}$$

Notons Γ la partition obtenue, $A(l)/\Gamma$ l'espace quotient, $\gamma \in A(l)/\Gamma$, $\pi : A(l) \to A(l)/\Gamma$ la projection canonique. On montre dans le reste de cette section que la partition ainsi définie est mesurable, on pourra alors appliquer le théorème 3.1.2.
Commençons par remarquer qu'on a montré dans la preuve du point **(ii)** de la proposition 3.1.6 le résultat suivant :

Proposition 3.1.7

$$x \sim y \Longrightarrow (l_x^1, \ldots, l_x^p) = (l_y^1, \ldots, l_y^p).$$

Remarque 3.1.4 Bien sûr, on n'a pas l'équivalence $l_x = l_y \Longleftrightarrow x \sim y$.

Notons $i_p(s)$ l'indice parmi $\{1, \ldots, m_p\}$ tel que $s \in \Delta^p_{i_p(s)}$ pour $s \in S_p(x)$ puis introduisons :

$$c_p(x) = \min_{s \in S_p(x)} \left\{ \frac{|\delta_x(s)| - \varepsilon_p}{|\tau^p_{i_p(s)}|} \right\}. \tag{3.1.19}$$

On définit de la même façon $c_1(x), \ldots, c_{p-1}(x)$ et on considère $f : A(l) \longrightarrow \mathbb{D}$ donnée par

$$f(x) = x - c_1(x)\, l_x^1 - \cdots - c_p(x) l_x^p. \tag{3.1.20}$$

La fonction ainsi définie associe à $x \in A(l)$ le « début » de l'orbite de x. On montre que cette fonction engendre la partition Γ :

Proposition 3.1.8

$$x \sim y \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

Démonstration :
1) $x \sim y \Longrightarrow f(x) = f(y)$:
D'après (3.1.20), comme on a vu en proposition 3.1.7 que $x \sim y \Longrightarrow l_x^i = l_y^i$ pour $i \leq p$, il ne reste plus qu'à voir le lien entre $c_i(x)$ et $c_i(y)$. D'après (3.1.17) dans la preuve de la proposition 3.1.6, on a :

$$S_p^-(x) = S_p^-(y), \qquad S_p^+(x) = S_p^+(y).$$

Pour $s \in S_p^+(x) = S_p^+(y)$, au voisinage de s, pour $i < p$, l_x^i, l_y^i sont constants. Soient $c, d \in (\mathbb{R}^+)^p$ tels que $G_c(x) = G_d(y)$. On a :

$$\delta_{G_c x}(s) = \delta_{G_d y}(s) \Longleftrightarrow \delta_x(s) + c_p \tau^p_{i_p(s)} = \delta_y(s) + d_p \tau^p_{i_p(s)}.$$

Il suit

$$\frac{\delta_x(s) - \varepsilon_p}{\tau^p_{i_p(s)}} = \frac{\delta_y(s) + (d_p - c_p)\tau^p_{i_p(s)} - \varepsilon_p}{\tau^p_{i_p(s)}} = \frac{\delta_y(s) - \varepsilon_p}{\tau^p_{i_p(s)}} + d_p - c_p.$$

De la même façon, pour $s \in S_p^-(x)$, on a

$$\frac{|\delta_x(s)| - \varepsilon_p}{|\tau^p_{i_p(s)}|} = \frac{|\delta_y(s)| - \varepsilon_p}{|\tau^p_{i_p(s)}|} + d_p - c_p.$$

En passant au $\min_{s\in S_p(x)}$, comme $S_p^-(x) = S_p^-(y)$, $S_p^+(x) = S_p^+(y)$, on a :

$$\begin{aligned}
c_p(x) &= c_p(y) + d_p - c_p, \\
c_p(x) + c_p &= c_p(y) + d_p.
\end{aligned}$$

En faisant de même par rapport aux autres champs locaux, on a finalement avec le résultat de la proposition 3.1.7 :

$$\begin{aligned}
x \sim y &\iff \exists c, d \in (\mathbb{R}^+)^p \text{ tel que } G_c(x) = G_d(y) \\
&\iff x + c_1 l_x^1 + \cdots + c_p l_x^p = y + d_1 l_y^1 + \cdots + d_p l_x^p \\
&\implies x + (c_1 - d_1)\, l_x^1 + \cdots + (c_p - d_p)\, l_x^p = y \\
&\implies x + (c_1(y) - c_1(x))\, l_x^1 + \cdots + (c_p(y) - c_p(x))\, l_x^p = y \\
&\implies x - c_1(x)\, l_x^1 - \cdots - c_p(x)\, l_x^p = y - c_1(y)\, l_y^1 - \cdots - c_p(y)\, l_y^p \\
&\Rightarrow f(x) = f(y).
\end{aligned}$$

2) $f(x) = f(y) \Longrightarrow x \sim y$

Soit $s \in S_p^+(x)$: $\delta_x(s) > \varepsilon_p$, $s \in \Delta^p_{i_p(s)}$, $\tau^p_{i_p(s)} > 0$.

Au voisinage de s, comme les champs l_x^i, $i \le p-1$ sont constants, on a :

$$\delta_{f(y)}(s) = \delta_{f(x)}(s) = \delta_x(s) - c_p(x)\tau^p_{i_p(s)} \ge \varepsilon_p$$

par définition de $c_p(x)$.

Or au voisinage de $s \in \Delta^p_{i_p(s)}$ on a aussi l_y^i, $i \le p-1$ constants, donc $\delta_{f(y)}(s) = \delta_y(s) - c_p(y)\tau^p_{i_p(s)} \ge \varepsilon_p > 0$ et

$$\delta_y(s) \ge \varepsilon_p + c_p(y)\tau^p_{i_p(s)} > \varepsilon_p$$

Comme $y \in A(l) \subset A(l^p)$, y n'a pas de sauts de taille ε_p sur $\cup_j \Delta_j^p$, on a donc $\delta_y(s) > \varepsilon_p$ puis comme $s \in \Delta^p_{i_p(s)}$ et $\tau^p_{i_p(s)} > 0$, il suit

$$s \in J_y^+(\varepsilon_p) \cap \{\cup_j \Delta_j^p\} = S_p^+(y)$$

On a donc $S_p^+(x) \subset S_p^+(y)$ et par symétrie des rôles de x, y, on a l'égalité.

De la même façon, on a $S_p^-(x) = S_p^-(y)$ et donc $S_p(x) = S_p(y)$. D'après (3.1.16), il suit $l_x^p = l_y^p$ puis en raisonnant pareillement pour $i < p$, on obtient l'égalité $l_x^i = l_y^i$ pour tout $i \le p$. On a alors :

$$\begin{aligned}
f(x) = f(y) &\iff x - c_1(x)\, l_x^1 - \cdots - c_p(x)\, l_x^p = y - c_1(y)\, l_y^1 - \cdots - c_p(y)\, l_y^p \\
&\implies x + c_1(y)\, l_y^1 - \cdots + c_p(y)\, l_y^p = y + c_1(x)\, l_x^1 + \cdots + c_p(x)\, l_x^p \\
&\implies x + c_1(y)\, l_x^1 - \cdots + c_p(y)\, l_x^p = y + c_1(x)\, l_y^1 + \cdots + c_p(x)\, l_y^p \\
&\implies G_{c(y)} x = G_{c(x)}(y) \\
&\Rightarrow x \sim y
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.1.9 *La fonction f définie en (3.1.20) est continue sur $A(l)$.*

Démonstration : On commence par considérer le cas d'une transformation G_c définie en (3.1.11) avec $p = 1$, c'est à dire associée à un seul champ local l. On considère à nouveau $S^+(x)$, $S^-(x)$, $S(x)$ définis comme en (3.1.13), (3.1.14), (3.1.15). Notons, pour $s \in S(x)$, $i(s)$ l'indice tel que $s \in \Delta_{i(s)}$ et introduisons $c(x)$, f définis comme en (3.1.19), (3.1.20).

Soient $x \in A(l)$ et $B(x,r)$ voisinage de x défini comme en section 3.1.3.
Soit $y \in B(x,r)$, $d(x,y) \leq \alpha$, il existe $\rho \in \Lambda$ qui réalise cette distance :

$$\sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(\rho(t))| < \alpha, \qquad \sup_{t\in[0,1]} |\rho(t) - t| < \alpha.$$

On a vu qu'on avait une bijection entre les sauts « transformables » de x et ceux de y dans Δ, donnée par ρ. Soit $s \in S^+(x)$, on a

$$\delta_x(s) - 2\alpha < \delta_y(\rho(s)) < \delta_x(s) + 2\alpha,$$

d'où

$$\frac{|\delta_x(s)| - \varepsilon}{|\tau_{i(s)}|} - \frac{2\alpha}{|\tau_{i(s)}|} < \frac{|\delta_y(\rho(s))| - \varepsilon}{|\tau_{i(s)}|} < \frac{|\delta_x(s)| - \varepsilon}{|\tau_{i(s)}|} + \frac{2\alpha}{|\tau_{i(s)}|}.$$

En faisant de même pour $s \in S^-(x)$, en utilisant la bijection entre $S(x)$ et $S(y)$, en notant $\tau_+ = \max_i |\tau_i|$, $\tau_- = \min_i |\tau_i|$ et en passant au $\min_{s\in S(x)}$, on obtient

$$c(x) - \frac{2\alpha}{\tau_-} < c(y) < c(x) + \frac{2\alpha}{\tau_-}. \tag{3.1.21}$$

On a alors

$$\begin{aligned} &|f(y)(\rho(t)) - f(x)(t)| \\ &\quad = |y(\rho(t)) - c(y)\, l_y(\rho(t)) - x(t) + c(x)\, l_x(t)| \\ &\quad \leq |y(\rho(t)) - x(t)| + |c(y)\, l_y(\rho(t)) - c(y)\, l_x(t)| + |c(y)\, l_x(t) - c(x)\, l_x(t)|. \end{aligned}$$

D'où avec $\|\cdot\|$ la norme uniforme sur $[0,1]$

$$\|f(x) - f(y)\circ\rho\| \leq \|x - y\circ\rho\| + |c(y)|\, \|l_x - l_y\circ\rho\| + \|l_x\|\, |c(y) - c(x)|.$$

Or

$$\|l_x\| \leq \tau_+, \qquad |c(y) - c(x)| \leq 2\alpha/\tau_-, \qquad \|x - y\circ\rho\| \leq \alpha,$$

il suit alors

$$d(f(x), f(y)) \leq (1 + |c(x)| + 2\alpha/\tau_- + 2\alpha\tau_+/\tau_-)\alpha.$$

On a donc pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence de $\alpha > 0$ tel que

$$d(x,y) < \alpha \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Considérons maintenant le cas général où $\{G_c\}_c$ est défini avec p champs locaux $l^1, \dots, l^p$ satisfaisant la condition (3.1.10) :

$$\varepsilon_i < \varepsilon_{i+1}, \qquad \left\{\cup_{j \le m_i} \Delta_j^i\right\} \cap \left\{\cup_{j \le m_{i'}} \Delta_j^{i'}\right\} = \emptyset.$$

Si $x \in A(l^i)$ alors $x + c_i\, l_x^i \in A(l^i)$, mais on a aussi $x + c_j\, l_x^j \in A(l^i)$ en effet : l^j n'agit que sur les sauts de x dans $\cup_{k \le m_j} \Delta_k^j$ et donc les conditions d'appartenance à $A(l^i)$ qui ne concernent que les sauts sur $\cup_{k \le m_i} \Delta_k^i$ ne sont pas modifiées. On a donc $x + c_j l_x^j \in A(l^i)$ pour tout $1 \le j \le p$.

Par la proposition 3.1.5 et (3.1.21), $x \longmapsto c_i(x) l_x^i$ est continue sur $A(l^i)$. On s'intéresse ici à f donnée par

$$f(x) = x - c_1(x)\, l_x^1 - \dots - c_p(x)\, l_x^p.$$

Notons

$$f_i : \begin{cases} A(l^i) & \longrightarrow \mathbb{D} \\ x & \longmapsto x - c_i(x)\, l_x^i. \end{cases}$$

Soit $x \in A(l)$, d'après le cas précédent f_i est continue sur $A(l) \subset A(l^i)$, de plus $f_1(x) = x - c_1(x)\, l_x^1 \in A(l^2)$ car les conditions d'appartenance à $A(l^2)$ ne sont pas modifiées. On a :

$$f_2 \circ f_1(x) = f_1(x) - c_1(f_1(x))\, l^2_{f_1(x)}.$$

Or f_1 n'agit pas sur les sauts qui ne sont pas dans $\cup_{j \le m_1} \Delta_j^1$, on a donc facilement $l^2_{f_1(x)} = l_x^2$. De même

$$c_2(f_1(x)) = \min_{s \in S_2(f_1(x))} \left\{ \frac{|\delta_{f_1(x)}(s)| - \varepsilon_2}{\tau^2_{i(s)}} \right\}.$$

or $S_2(f_1(x)) = S_2(x)$ et pour $s \in S_2(x)$, on a $\delta_{f_1(x)}(s) = \delta_x(s)$, il suit alors $c_2(f_1(x)) = c_2(x)$. D'où finalement

$$f_2 \circ f_1(x) = f_1(x) - c_2(x) l_x^2 = x - c_1(x)\, l_x^1 - c_2(x)\, l_x^2.$$

De plus $f_2 \circ f_1(x) \in A(l^3)$. On montre alors maintenant facilement que

$$f_p \circ \dots \circ f_1(x) = x - c_1(x)\, l_x^1 - \dots - c_p(x)\, l_x^p = f(x).$$

Comme chaque f_i est continue sur $A(l) \subset A(l^i)$ on en déduit la continuité de f sur $A(l)$. ■

Corollaire 3.1.1 *La partition Γ définie par (3.1.18) est mesurable au sens donné en section 3.1.1.*

Démonstration : Comme d'après la proposition 3.1.8, f engendre la partition Γ et que par la proposition 3.1.9 f est continue, on a la mesurabilité de Γ. ■

On peut alors appliquer le théorème 3 1.2 : il donne l'existence des mesures conditionnelles $\{P_\gamma\}_\gamma$ et l'existence de leur densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur l'orbite.

Remarque 3.1.5

- En toute rigueur on applique le théorème 3.1.2 sur l'ouvert $A(l)$ en tenant compte de la remarque 3.1.2 qui suit ce théorème en section 3.1.2. Pour cela, on change momentanément de métrique pour appliquer ce théorème et avoir l'existence des mesures conditionnelles et de leur densité.
- En général, au préalable, on fait une localisation, et pour x donné on travaille avec un/des champs locaux tels que $x \in A(l)$ ouvert associé à ces champs locaux. On considère alors un voisinage $V(x)$ de x dans $A(l)$ sur lequel les transformations G_c associées donnent bien un semi-groupe admissible (vérifiant la proposition 3.1 6 en particulier le point (iv) de cette définition est satisfait parce que les champs locaux sont choisis en fonction de x). On peut ensuite appliquer le formalisme de la méthode de stratification.

3.2 Résultat principal

On en vient à l'objet de ce chapitre, l'étude des lois jointes d'intégrales stochastiques stables multiples. On se donne pour cela p noyaux de dimension respective $d_1, \dots, d_p$:

$$f_1 \in L^\alpha(\log_+)^{d_1-1}([0,1]^{d_1}), \quad \dots, \quad f_p \in L^\alpha(\log_+)^{d_p-1}([0,1]^{d_p}). \tag{3.2.1}$$

Rappelons que les intégrales multiples $I_d(f)$ ont été définies au chapitre 2 en passant par un représentation de type LePage qui permet de les développer en séries $S_d(f)$ donnée en 2.2.4 (*cf.* théorème 2.2.1). Pour pouvoir énoncer le théorème principal, on donne dés maintenant l'ensemble des notations dont on a besoin au cours de la preuve qui va suivre. On pourra ainsi s'y reporter plus facilement.

- pour $i = 1, \dots, p$, $N_i = d_1 + \dots + d_i$, $N = N_p$,
- $a^i = (a_0^i, \dots, a_p^i) \in \mathbb{N}^{p+1}$ une $(p+1)$-partition de d_i :

$$d_i = |a^i| = a_0^i + \dots + a_p^i,$$

- $a = (a^1, \dots, a^p) \in (\mathbb{N}^{p+1})^p$,
- $M_a = (a_j^i)_{1\le i,j\le p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $d_i = \sum_{k=0}^p a_k^i$, $b_k = \sum_{i=1}^p a_k^i$,
- pour $b = (b_1, \dots b_p) \in \mathbb{N}^p$:

$$E(b) = \left\{ a = (a^1, \dots, a^p) \mid |a^i| = d_i, \ \sum_{i=1}^p a_k^i = b_k \text{ pour } k = 1, \dots p \right\},$$

- σ_a la permutation de $\{1, \dots, N\}$ telle que pour

$$j = \sum_{u=1}^{k-1} b_u + \sum_{s=1}^{i-1} a_{s,k} + l, \quad l = 1, \dots, a_{i,k},$$

on a

$$\sigma_a(j) = \sum_{i=1}^{i-1} d_i + \sum_{s=1}^{k-1} a_{i,s} + l, \tag{3.2.2}$$

l'application associée à σ_a, $U_a : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$

$$U_a(t_1, \ldots, t_N) = (t_{\sigma_a(1)}, \ldots, t_{\sigma_a(N)}),$$

$\phi(t) = f_1(t_1, \ldots, t_{N_1}) \cdots f_p(t_{N_{p-1}+1}, \ldots, t_{N_p})$,

$$\phi_b(t) = \sum_{a \in F(b)} \prod_{i=1}^{p} \frac{d_i!}{a_0^i! \cdots a_p^i!} \det M_a \, \phi(U_a(t)).$$

– En notant $\Pi_{b_1,\ldots,b_d}$ le sous-groupe de Π_N constitué des permutations laissant invariants les « b-blocs » suivants : $(1, \ldots, b_1)$, $(b_1+1, \ldots, b_1+b_2)$, $\ldots$, $(b_1+b_2+\cdots b_{p-1}+1, \ldots, b_1+b_2+\cdots b_p = N)$:

$$S_{b_1,\ldots,b_d}\phi(t) = \frac{b_1! \cdots b_d!}{N!} \sum_{\sigma \in \Pi_{b_1,\ldots,b_d}} \phi(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(N)}).$$

$\tilde{\phi}_b = S_{b_1,\ldots,b_d}\phi_b$ symétrisée de ϕ dans chaque « b-blocs ».

Le résultat d'absolue continuité des lois jointes des intégrales stochastiques stables multiples est alors le suivant :

Théorème 3.2.1 *Soient M une mesure aléatoire stable satisfaisant (2.2.1) et $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions vérifiant la condition* (**H**) *suivante :*

$$\begin{aligned} &\textit{il existe } b = (b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{N}^p,\ |b| = N \textit{ avec } \tilde{\phi}_b = S_{b_1,\ldots,b_d}\phi_b \\ &\textit{non presque partout nulle sur } [0,1]^N. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Alors la loi jointe

$$(I_{d_1}(f_1), \ldots, I_{d_p}(f_p)) \tag{3.2.4}$$

est absolument continue par rapport à λ^p, la mesure de Lebesgue p-dimensionnelle.

Remarque 3.2.1

- L'hypothèse (**H**) est à rapprocher de celle, analogue, du théorème 5 de [11] pour l'absolue continuité des lois jointes des intégrales de Wiener-Itô. On renvoie à la section 3.3 pour des exemples où cette condition s'exprime facilement.
- Si $\alpha \geq 1$ et $\beta \neq 0$, on a indiqué en section 2.5.1 au chapitre 2 qu'on pourrait définir $I_d(f)$ par une représentation $\tilde{S}_d(f)$ de type LePage plus générale bénéficiant des mêmes propriétés. La démonstration qui suit s'adapterait facilement pour que le théorème 3.2.1 reste valable dans ce cas (*cf.* remarque 3.5.2).
- Dans le cas de la loi d'une intégrale stable multiple $I_d(f)$, le théorème 3.2.1 s'exprime plus simplement :

Corollaire 3.2.1 *Pour M une mesure aléatoire stable satisfaisant (2.2.1) et f non nulle dans $L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1])$, la loi de l'intégrale stable multiple $I_d(f)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ.*

On commence par proposer d'autres exemples où la condition (**H**) est facilement vérifiable. Pour mieux faire ressortir les étapes principales de la preuve, on débute avec la démonstration du cas plus simple du corollaire 3.2.1 : on évite ainsi les difficultés techniques supplémentaires qu'on réserve pour la section 3.5 où on traite le cas général des lois jointes.

L'idée générale de la preuve donnée en section 3.4 et 3.5 est de commencer par réduire le problème pour se ramener d'abord à l'étude de la série multiple $S_d(f)$, puis passer à l'analyse d'une fonctionnelle associée sur $\mathbb{D}$. Après localisation, on met en place la méthode de stratification décrite précédemment.

3.3 Exemples

Pour appliquer le théorème 3.2.1 aux intégrales stochastiques stables multiples des fonctions $f_1, \dots, f_p$, on doit vérifier la condition suffisante (**H**) énoncée en (3.5.6). On donne dans cette section plusieurs cas où (**H**) s'exprime simplement.

1) Cas $p = 1$, $d_1 = 1$ avec $b = 1$.
On a alors $E(b) = \{1\}$ et $\sigma_1 = id$. Il est facile de voir qu'alors $\bar{\phi}(t) = \phi(t) = f(t)$. La condition (**H**) est vérifiée si $f \not\equiv 0$. Ceci est bien connu puisque les intégrales stables simples sont de lois stables

$$S_\alpha\left(\left(\int_0^1 |f(t)|^\alpha\, dt\right)^{1/\alpha}, \frac{\int_0^1 |f(t)|^\alpha \text{sign } (f(t))\, \beta(t)\, dt}{\int_0^1 |f(t)|^\alpha\, dt}, \mu_f\right)$$

données par la proposition 2.1.5 et elles sont non dégénérées si le coefficient d'échelle $\sigma_f = \left(\int_{[0,1]} |f|^\alpha d\lambda\right)^{1/\alpha}$ est non nul, c'est à dire si $f \not\equiv 0$.
Réciproquement dans ce cas, si (**H**) n'est pas satisfaite, la loi de $I_d(f)$ est dégénérée.

2) Cas $p > 1$, $d_1 = \cdots = d_p = 1$ avec $b = (1, \dots, 1)$.
On a

$$E(b) = \left\{ a = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le p} \,\Big|\, \sum_{j=1}^p a_{i,j} = 1\ \forall i,\ \sum_{i=1}^p a_{i,j} = 1\ \forall j \right\}.$$

Il est facile de voir que $\#E(b) = p!$. Pour $\sigma \in \Pi_p$, considérons la matrice $a_\sigma = (a^\sigma_{i,j})_{1 \le i,j \le p}$ associé à σ par

$$a^\sigma_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que $a_\sigma \in E(b)$, de plus $\sigma_{a_\sigma} = \sigma$, en effet d'après (3.2.2), on a

$$\sigma_{a_\sigma}(n) = \sum_{i=1}^{\sigma(n)-1} 1 + \sum_{s=1}^{n-1} a^\sigma_{\sigma(n),s} + 1 = \sigma(n).$$

Il suit $E(b) \sim \Pi_p$. De plus pour chaque $a \in E(b)$, on a $B_a = \prod_{i=1}^{p} B_{a_i} = 1$ et $\det a_\sigma = \epsilon(\sigma)$, en effet

$$\det a_\sigma = \sum_{\varphi \in \Pi_p} \epsilon(\varphi) \prod_{j=1}^{p} a^\sigma_{\varphi(j),j} = \epsilon(\sigma)$$

car par définition de a_σ le seul terme non nul est celui pour lequel $\varphi = \sigma$. On a alors

$$\phi_b(t) = \sum_{\sigma \in \Pi_p} \epsilon(\sigma) \times 1 \times f_1(t_{\sigma(1)}) \cdots f_p(t_{\sigma(p)}) = \det\{f_i(t_j)\}.$$

On a aussi $S_b\phi_b = \phi_b$ et la condition **(H)** est vérifiée si

$$\det\{f_i(t_j)\} \neq 0.$$

Réciproquement, avec le cas particulier $p = 3$ et $f_3 = f_1 + f_2$, on constate facilement que $\det\{f_i(t_j)\} = 0$: la condition **(H)** n'est pas vérifiée. Puis la loi de

$$(I_1(f_1), I_1(f_2), I_1(f_3)) = (I_1(f_1), I_1(f_2), I_1(f_1) + I_1(f_2))$$

n'est pas absolument continue car $(I_1(f_1), I_1(f_2), I_1(f_3))$ est dans l'hyperplan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y - z = 0$ et on a alors

$$\mathbb{P}\{(I_1(f_1), I_1(f_2), I_1(f_3)) \in \mathcal{P}\} = 1, \qquad \lambda^3(\mathcal{P}) = 0$$

3) Cas $p = 1$, $d_1 = d > 1$ avec $b = d$.
On a facilement $E(b) = \{d\}$ et $\sigma_d = id$. Il est facile de voir que $\tilde{\phi}(t) = \phi(t) = f(t)$ car f est symétrique. La condition **(H)** est vérifiée si $f \not\equiv 0$: on retrouve le corollaire 3.2.1 à partir du théorème 3.2.1

4) Cas $p = 2$, $d_1 = d_2 = 2$ avec $b = (2, 2)$.
On trouve facilement que

$$E(b) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Quand le déterminant est non nul (c'est à dire pour la première et troisième matrice), on associe par (3.2.2) respectivement les permutations suivantes :

$$(\,1 \quad 2 \quad 3 \quad 4\,), \qquad (\,3 \quad 4 \quad 1 \quad 2\,)$$

Comme $B_a = 1$, on obtient

$$S_b\phi_b(t) = \phi_b(t) = 4f_1(t_1, t_2)f_2(t_3, t_4) - 4f_1(t_3, t_4)f_2(t_1, t_2).$$

La condition **(H)** est alors vérifiée s'il n'existe pas de réels c_1, c_2 tels que

$$c_1 f_1 = c_2 f_2.$$

Réciproquement, si **(H)** n'est pas satisfaite alors f_1, f_2 sont proportionnelles et nécessairement la loi jointe des intégrales stables doubles associées est dégénérée.

5) Cas $p = 2$, $d_1 = 1$, $d_2 = d$ avec $b = (1, d)$.
On trouve facilement que

$$E(b) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d-1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Les permutations associées sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & \cdots & d \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\phi_b(t) = d\big(f_1(t_1) f_2(t_2, t_3, \ldots, t_{d+1}) - f_1(t_2) f_2(t_1, t_3, \ldots, t_{d+1})\big).$$

D'où

$$S_b\phi_b(t) = d\, f_1(t_1) f_2(t_2, t_3, \ldots, t_{d+1}) - \sum_{i=2}^{d+1} f_1(t_i) \underbrace{f_2(t_2, \ldots, t_{d+1})}_{\substack{\text{avec } t_1 \text{ en} \\ i^{\text{ème}} \text{ position}}}.$$

La condition **(H)** est vérifiée si

$$f_1(t_1) f_2(t_2, t_3, \ldots, t_{d+1}) \not\equiv \frac{1}{d} \sum_{i=2}^{d+1} f_1(t_i) \underbrace{f_2(t_2, \ldots, t_{d+1})}_{\substack{\text{avec } t_1 \text{ en} \\ i^{\text{ème}} \text{ position}}},$$

par exemple pour $d = 2$, **(H)** est satisfaite si

$$f_1(t_1) f_2(t_2, t_3) \not\equiv \frac{1}{2}\big(f_1(t_2) f_2(t_1, t_3) + f_1(t_3) f_2(t_2, t_1)\big).$$

6) Cas $p = 3$, $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$ avec $b = (1, 1, 2)$.
On trouve facilement que

$$E(b) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Les permutations associées sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Après quelques calculs, on trouve que **(H)** est vérifiée si :

$$S_b\phi_b(t) = \begin{vmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & f_3(t_1, t_4) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & f_3(t_2, t_4) \\ f_1(t_3) & f_2(t_3) & f_3(t_3, t_4) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & f_3(t_1, t_3) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & f_3(t_2, t_3) \\ f_1(t_4) & f_2(t_4) & f_3(t_4, t_3) \end{vmatrix} \not\equiv 0.$$

3.4 Preuve du corollaire 3.2.1

On s'intéresse d'abord dans cette section à la loi de $I_d(f)$ pour $f \in L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1])$. Dans ce cas, on a vu dans l'exemple 3 précédent que la condition **(H)** s'exprime simplement par $f \not\equiv 0$. La preuve du corollaire 3.2.1 n'utilise pas le théorème 3.2.1, c'est en revanche une version simplifiée de celle de ce théorème. On commence par la présenter pour faciliter la compréhension dans un cadre moins technique qu'en section 3.5.

3.4.1 Réduction du problème

D'après le théorème 2.2.1 du chapitre 2, on a $I_d(f) \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_d(f)$ où la série multiple $S_d(f)$ est donnée par (2.2.4). Pour cela, considérons $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$F_d(x) = \sum_{t_1, \dots, t_d > 0} \delta_x(t_1) \cdots \delta_x(t_d)\, f(t_1, \dots, t_d) \tag{3.4.1}$$

où $\{t_k\}_k$ est la suite des sauts de $x \in \mathbb{D}$. On considère aussi le processus stable η de loi notée P donné par

$$\eta_t = M([0,t]), \quad t \in [0,1]. \tag{3.4.2}$$

La représentation de LePage dans le cas simple donne des informations sur les sauts du processus η :

V_i sont les instants des sauts du processus stable η ;
$C_\alpha^{1/\alpha}\Gamma_i^{-1/\alpha}$ est le module de ces sauts par ordre décroissant de module ;
γ_i est la direction de ces sauts.

On a alors

$$\begin{aligned} F_d(\eta(\omega)) &= C_\alpha^{d/\alpha} \sum_{k_1, \dots, k_d > 0} (\gamma_{k_1}\Gamma_{k_1}^{-1/\alpha}) \cdots (\gamma_{k_d}\Gamma_{k_d}^{-1/\alpha})\, f(V_{k_1}, \dots, V_{k_d}) \\ &= S_d(f)(\omega). \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

On a donc

$$F_d(\eta(\omega)) = S_d(f)(\omega).$$

D'où $F_d(\eta) \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_d(f)$ et on s'intéresse maintenant à l'absolue continuité de la loi PF_d^{-1}.

Remarque 3.4.1 Soulignons qu'on obtient ainsi une nouvelle représentation de l'intégrale stable multiple en tant que fonctionnelle sur l'espace des trajectoires de η.
Par symétrie et nullité sur les termes « diagonaux » de f, il pourra être commode d'écrire :

$$F_d(x) = d! \sum_{0 < k_1 < \dots < k_d} \delta_x(t_{k_1}) \cdots \delta_x(t_{k_d})\, f(t_{k_1}, \dots, t_{k_d}).$$

Pour étudier PF_d^{-1}, on utilise des méthodes d'approximation, de localisation et de stratification. Grossièrement, l'idée est de se ramener à des ensembles où on pourra montrer l'absolue continuité (*approximation*) en localisant l'étude par séparabilité. On utilise alors localement la méthode de stratification.

Plus précisément, pour montrer $PF_d^{-1} \ll \lambda$, il suffit de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathcal{X}_\varepsilon$ mesurable dans $\mathcal{X} = \mathbb{D}$ avec $P(\mathcal{X}_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ et

$$P_{\mathcal{X}_\varepsilon} F_d^{-1} \ll \lambda. \tag{3.4.4}$$

En effet si tel est le cas, soient $\varepsilon_n \to 0$ et $\mathcal{X}_{\varepsilon_n}$ associé.
On a

$$P\{\mathcal{X}_{\varepsilon_n}^c\} \leq \varepsilon_n$$
$$P\left\{\cap_{n\leq p}\mathcal{X}_{\varepsilon_n}^c\right\} \leq \varepsilon_p \to 0 \quad \text{quand } p \to +\infty.$$

Ainsi $\cup_n \mathcal{X}_{\varepsilon_n}$ est un ensemble F-presque sûr. De plus, pour tout n, on a $P_{\mathcal{X}_{\varepsilon_n}} F_d^{-1} \ll \lambda$.
Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) = 0$; notons $B = F_d^{-1}(A)$.
Comme $P_{\mathcal{X}_{\varepsilon_n}} F_d^{-1} \ll \lambda$, on a $P_{\mathcal{X}_{\varepsilon_n}}(B) = P_{\mathcal{X}_{\varepsilon_n}} F_d^{-1}(A) = 0$.
On a donc pour chaque entier n $P\{B \cap \mathcal{X}_{\varepsilon_n}\} = 0$, il suit alors $P\{B \cap \cup_n \mathcal{X}_{\varepsilon_n}\} = 0$.
D'où

$$PF_d^{-1}(A) = P(B) = 0,$$

ce qui justifie l'absolue continuité de PF_d^{-1}.

Par séparabilité de $\mathcal{X}_\varepsilon$, pour voir (3.4.4), il suffit maintenant de montrer que pour tout $x \in \mathcal{X}_\varepsilon$, il existe $V(x)$ voisinage de x tel que

$$P_{V(x)} F_d^{-1} \ll \lambda.$$

On commence par montrer en section 3.4.2 l'existence de l'approximation $\mathcal{X}_\varepsilon$ et d'un voisinage $V(x)$ pour chaque $x \in \mathcal{X}_\varepsilon$ fixé, puis on utilise la méthode de stratification au voisinage de x en section 3.4.3.

3.4.2 Choix des outils

Par hypothèse $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable est non presque partout nulle. Soit donc $t = (t_1, \dots, t_N)$ un point de Lebesgue de $A_f := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$ de mesure positive. Par hypothèse sur f et par densité de tels points, on peut choisir t avec ses coordonnées toutes distinctes $t_i \neq t_j$, $i \neq j$.
Soit $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $V_\varepsilon = U_1^\varepsilon \times \cdots \times U_d^\varepsilon$ avec

- $U_i^\varepsilon \cap U_j^\varepsilon = \emptyset, \quad i \neq j$;
- $\dfrac{\lambda^d(V_\varepsilon \cap A_f)}{\lambda^d(V_\varepsilon)} \geq 1 - \varepsilon.$

On introduit l'ensemble P-presque sûr suivant :

$$\mathcal{X}_{0,\varepsilon} = \{x \in \mathcal{X} \mid \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, d, \quad x \text{ a au moins un saut en un instant de } U_i^\varepsilon, \text{ le module maximal de ces sauts est atteint une seule fois } \},$$

puis soit :

$$\mathcal{X}_\varepsilon = \{x \in \mathcal{X}_{0,\varepsilon} \mid x \text{ a un unique saut maximal sur chaque } U_i^\varepsilon \text{ en } T_{U_i^\varepsilon}(x) \text{ avec } T_\varepsilon(x) := (T_{U_1^\varepsilon}(x), \ldots T_{U_d^\varepsilon}(x)) \in A_f\}. \tag{3.4.5}$$

On commence par étudier $T_{U_i^\varepsilon}(x)$
Pour ne pas alourdir les notations, supposons $U_i^\varepsilon = (a, b)$.
La représentation de LePage dans le cas unidimensionnel donne :

$$\eta_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} C_\alpha^{1/\alpha} \sum_{k>0} \gamma_k \Gamma_k^{-1/\alpha} \mathbf{1}_{[0,t]}(V_k).$$

Le plus grand saut en module de η sur (a, b) est $C_\alpha^{1/\alpha} \Gamma_p^{-1/\alpha}$ et a lieu en V_p avec $p = \inf\{k, V_k \in (a, b)\}$.
En notant $A_k = \{V_i \notin (a, b) \, \forall i < k, \; V_k \in (a, b)\}$, on a :

$$T_{(a,b)}(\eta) = \sum_{k \geq 1} V_k \mathbf{1}_{A_k}$$

Soit $A \in \mathcal{B}((a, b))$, on a :

$$\begin{aligned}
P\{T_{(a,b)}(\eta) \in A\} &= P\{\sum_{k \geq 1} V_k \mathbf{1}_{A_k} \in A\} \\
&= \sum_{l \geq 1} P\{A_l \cap \{\sum_{k \geq 1} V_k \mathbf{1}_{A_k} \in A\}\} \\
&= \sum_{l \geq 1} P\{A_l, \; V_l \in A\} \\
&= \sum_{l \geq 1} P\{V_i \notin (a, b) \, \forall i < l, \; V_l \in A\} \\
& \sum_{l \geq 1} P\{V_1 \notin (a, b)\}^{l-1} P\{V_l \in A\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l \geq 1} (1 - \lambda(a, b))^{l-1} \lambda(A) \\
&= \frac{\lambda(A)}{\lambda\{(a, b)\}}.
\end{aligned}$$

$T_{(a,b)}(\eta)$ est donc de loi uniforme sur (a, b) et de la même façon $T_{U_i^\varepsilon}(\eta)$ est de loi uniforme sur U_i^ε.

Par indépendance des accroissements de η, les variables aléatoires $T_{U_i^\varepsilon}(\eta)$ et $T_{U_j^\varepsilon}(\eta)$, $i \neq j$, sont indépendantes car $U_i^\varepsilon \cap U_j^\varepsilon = \emptyset$; il suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(T_\varepsilon(\eta)) &= \mathcal{L}(T_{U_1^\varepsilon}(\eta), \ldots, T_{U_d^\varepsilon}(\eta)) \\ &= \bigotimes_{j=1}^{d} \mathcal{L}(T_{U_j^\varepsilon}(\eta)).\end{aligned}$$

La variable aléatoire $T_\varepsilon(\eta)$ est donc de loi uniforme sur le pavé V_ε. On a

$$\begin{aligned}P(\mathcal{X}_\varepsilon) &= P\{x \mid T_\varepsilon(x) \in A_f\} \\ &= P_{\mathcal{X}_{0,\varepsilon}} T_\varepsilon^{-1}(A_f).\end{aligned}$$

Il est clair que $P_{\mathcal{X}_{0,\varepsilon}} T_\varepsilon^{-1}$ est concentrée sur V_ε et est de loi uniforme sur ce pavé, on a en fait :

$$P_{\mathcal{X}_{0,\varepsilon}} T_\varepsilon^{-1}(\cdot) = \frac{\lambda^d(V_\varepsilon \cap \cdot)}{\lambda^d(V_\varepsilon)}.$$

Ainsi

$$P_{\mathcal{X}_{0,\varepsilon}} T_\varepsilon^{-1}(A_f^c) = \frac{\lambda^d(V_\varepsilon \cap A_f^c)}{\lambda^d(V_\varepsilon)} \leq \varepsilon.$$

D'où

$$P(\mathcal{X}_\varepsilon) = P_{\mathcal{X}_{0,\varepsilon}} T_\varepsilon^{-1}(A_f) \geq 1 - \varepsilon.$$

On obtient ainsi une approximation de $\mathcal{X} = \mathbb{D}$ comme cherchée. D'après l'idée générale décrite en section 3.4.1, il suffit de s'intéresser maintenant à l'absolue continuité de $P_{\mathcal{X}_\varepsilon} F^{-1}$ pour chaque $\varepsilon > 0$.

On utilise la séparabilité de $\mathbb{D}$ pour localiser et se ramener à montrer que pour tout $x \in \mathcal{X}_\varepsilon$, il existe $V(x)$ voisinage de x tel que $P_{V(x)} F^{-1} \ll \lambda$.
Soit donc $x \in \mathcal{X}_\varepsilon$ fixé, notons pour $i = 1, \ldots, d$:

- $t_i = T_{U_i^\varepsilon}(x)$ l'instant du plus grand saut en module de x dans U_i^ε ; (3.4.6)
- t_i' l'instant du second plus grand saut de x dans U_i^ε, $|\delta_x(t_i')| < |\delta_x(t_i)|$; (3.4.7)
- $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \min_{i=1,\ldots,d} |\delta_x(t_i)|$. (3.4.8)

Par finitude du nombre de sauts de x en module supérieur à $\varepsilon_0/2$, on choisit $\delta_1 > 0$ tel que t_i soit le seul instant de $\Delta_i' = (t_i - \delta_1, t_i + \delta_1) \subset U_i^\varepsilon$ d'un saut de module supérieur à $\varepsilon_0/2$.
Soient alors

- $\delta_2 < \frac{1}{4} \min\left\{\varepsilon_0, 2\delta_1, \inf_{i=1,\ldots,d} \{|\delta_x(t_i)| - |\delta_x(t_i')|\}\right\}$; (3.4.9)
- $\beta = \delta_1 - \delta_2 \quad (\beta \leq \delta_1)$;
- $\Delta_i = (t_i - \beta, t_i + \beta) \subset \Delta_i' \subset U_i^\varepsilon$.

On est maintenant en mesure d'appliquer la méthode de stratification comme en section 3.1.4. Pour cela, on considère le champ local l défini par les paramètres suivants : $\varepsilon_0 > 0$, l'entier d, les intervalles Δ_i, $i = 1, \ldots, d$ et τ_i de module $\tau > 0$ et de même signe que $\delta_x(t_i)$. On associe à l son ouvert $A(l)$ par (3.1.7), il contient clairement x.

On définit alors le voisinage $V(x)$ de x par :

$$V(x) = B(x, \delta_2) \cap A(l) \cap \mathcal{X}_\varepsilon \tag{3.4.10}$$

On utilise la méthode de stratification dans ce voisinage de x

3.4.3 Stratification

On considère la famille de transformations $\{G_c\}_{c \in \mathbb{R}^+}$ associée au champ local l comme en (3.1.11) : $G_c \; A(l) \longrightarrow A(l)$,

$$G_c x = x + c\, l_x.$$

On définit la partition Γ à partir de la relation d'équivalence $\sim$ sur $A(l)$ donnée comme en (3.1.18) par :

$$x_1 \sim x_2 \text{ si et seulement s'il existe } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \text{ avec } G_{c_1} x_1 = G_{c_2} x_2.$$

Notons à nouveau $\pi : A(l) \to A(l)/\Gamma$ la projection canonique et P_Γ la mesure quotient associées. On appellera orbites les classes d'équivalence $\pi^{-1}(\gamma)$, elles sont unidimensionnelles d'après la proposition 3.1.3 et on les munit d'une mesure de Lebesgue λ_γ. Les strates γ s'écrivent alors :

$$\gamma = \{x + c\, l_x,\quad c \in \mathbb{R}^+\}$$

D'après le corollaire 3.1.1, la partition Γ est mesurable et par le théorème 3.1.2 pour P_Γ presque chaque γ, les mesures conditionnelles P_γ existent et vérifient

$$P_\gamma\{\pi^{-1}(\gamma)\} = 1, \quad P_\gamma \ll \lambda_\gamma$$

La méthode de stratification permet alors d'étudier $P_{V(x)} F_d^{-1}$ en tant que mélange de distributions conditionnelles :

$$P_{V(x)} F_d^{-1} = \int_{V(x)/\Gamma} P_\gamma F_d^{-1} P_\Gamma(d\gamma). \tag{3.4.11}$$

Pour montrer que $P_{V(x)} F_d^{-1} \ll \lambda$, il suffit alors de voir que pour P_Γ-presque chaque γ tel que $\pi^{-1}(\gamma) \cap V(x) \neq \emptyset$, on a $P_\gamma F_d^{-1} \ll \lambda$. Comme $P_\gamma\{\pi^{-1}(\gamma)\} = 1$ et $P_\gamma \ll \lambda_\gamma$ on se ramène à l'étude de la restriction $F_{d,\gamma}$ de F_d sur les traces d'orbites $\pi^{-1}(\gamma) \cap V(x)$ sur le voisinage de x avec $F_{d,\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $F_{d,\gamma}(c) = F_d(x + c\, l_x)$. On a

$$F_{d,\gamma}(c) = \sum_{k_*} \delta_{x+c\,l_x}(t_{k_1}) \cdots \delta_{x+c\,l_x}(t_{k_d}) f(t_{k_1}, \ldots, t_{k_d})$$

où $(t_k)_{k>0}$ est la suite des sauts de $x \in \mathbb{D}$.
D'après (3.1.6), on a :

$$F_{d,\gamma}(c) = \sum_{k_1,\dots,k_d>0} \prod_{i=1}^{d} (\delta_x(t_{k_i}) + c\,\omega_x(t_{k_i}))\, f(t_{k_1},\dots,t_{k_d}).$$

$F_{d,\gamma}$ est donc un polynôme de degré au plus d, le coefficient du monôme de degré d est :

$$C_d(f,x) := \sum_{k_1,\dots,k_d>0} \omega_x(t_{k_1})\cdots\omega_x(t_{k_d})\, f(t_{k_1},\dots,t_{k_d}). \tag{3.4.12}$$

Comme il est indépendant de $x \in \gamma$, on le notera aussi $C_d(f,\gamma) = C_d(f,x)$.

3.4.4 Étude du coefficient $C_d(f,\gamma)$ du monôme de degré d de $F_{d,\gamma}$

Notons $\{t_i\}_{i>d}$ les autres instants de sauts de x.

On a d'après la définition de w_x en (3.1.5) :
- pour $i \leq d$: $\omega_x(t_i) = \tau_i$ car $t_i \in \Delta_i$, $|\delta_x(t_i)| \geq \varepsilon_0$, $\delta_x(t_i)\tau_i > 0$;
- pour $i > d$: $\omega_x(t_i) = 0$ car soit $t_i \notin \cup_{j=1,\dots,d}\Delta_j$, soit $t_i \in \Delta_j$ mais par choix de Δ_j, on a alors $|\delta_x(t_i)| \leq \varepsilon_0/2$.

Il suit

$$\begin{aligned} C_d(f,x) &= \sum_{k_1,\dots,k_d>0} \omega_x(t_{k_1})\cdots\omega_x(t_{k_d})\, f(t_{k_1},\dots,t_{k_d}) \\ &= d!\,\tau_1\cdots\tau_d\, f(t_1,\dots,t_d) \neq 0 \end{aligned}$$

car $x \in \mathcal{X}_\varepsilon$ et $(t_1,\dots,t_d) = T_{d,\varepsilon}(x) \in A_f$.

Soient y dans le voisinage $V(x)$ de x donné en (3.4.10), $(s_k)_{k>0}$ la suite des instants de ses sauts, on étudie :

$$C_d(f,y) = \sum_{k_1,\dots,k_d>0} \omega_y(s_{k_1})\cdots\omega_y(s_{k_d})\, f(s_{k_1},\dots,s_{k_d}).$$

D'après la définition de la topologie de Skorokhod (*cf.* [2, section 14]), il existe $\rho \in \Lambda :=$ $\{\rho : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ bijection croissante$\}$ telle que

$$\sup_{t\in[0,1]} |x(\rho(t)) - y(t)| < \delta_2 \quad \text{et} \quad \sup_{t\in[0,1]} |\rho(t) - t| < \delta_2.$$

On a

$$\begin{aligned} \delta_x(\rho(t)) - 2\delta_2 &< \delta_y(t) < & \delta_x(\rho(t)) + 2\delta_2 \;; \\ |\delta_x(\rho(t))| - 2\delta_2 &< |\delta_y(t)| < & |\delta_x(\rho(t))| + 2\delta_2. \end{aligned}$$

On a $\rho^{-1}(t_i) \in \Delta_i$ en effet $|\rho(t_i) - t_i| < \delta_2$ donc

$$\left.\begin{array}{l} \rho^{-1}(t_i) < t_i + \delta_2 < t_i + \beta \text{ car } \delta_2 < \delta_1/2 \\ \rho^{-1}(t_i) > t_i + \beta \text{ de même} \end{array}\right\} \quad \rho^{-1}(t_i) \in \Delta_i.$$

De plus $|\delta_y(\rho^{-1}(t_i))| > |\delta_x(t_i)| - 2\delta_2 \geq 2\varepsilon_0 - 2\delta_2 > \varepsilon_0$ car $\delta_2 < \varepsilon_0/4$.

Si $t \in \Delta_i \setminus \{\rho^{-1}(t_i)\}$, on a $\rho(t) \in \Delta_i'$, en effet $|\rho(t) - t| < \delta_2$ donc

$$\left.\begin{array}{l} \rho(t) < t + \delta_2 < t_i + \beta + \delta_2 = t_i + \delta_1 \\ \rho(t) > t_i - \delta_1 \text{ de même} \end{array}\right\} \quad \rho(t) \in \Delta_i'$$

D'où $|\delta_y(t)| < |\delta_x(\rho(t))| + 2\delta_2 \leq \varepsilon_0/2 + 2\delta_2 < \varepsilon_0$ car $\rho(t) \in \Delta_i' \setminus \{t_i\}$ et t_i est le seul instant de U_i^ε pour lequel un saut de x est supérieur à $\varepsilon_0/2$.

Finalement pour $t \in \Delta_i$: si $t = \rho^{-1}(t_i)$, on a

$|\delta_y(\rho^{-1}(t_i))| > \varepsilon_0$,

$\rho^{-1}(t_i) \in \Delta_i$,

$\delta_y(\rho^{-1}(t_i))$ est du signe de $\delta_x(t_i)$ donc de τ_i.

sinon $t \neq \rho^{-1}(t_i)$ et alors $|\delta_y(\rho^{-1}(t_i))| < \varepsilon_0$

De plus pour $t \in U_i^\varepsilon$, $t \neq \rho^{-1}(t_i)$, on a :

$$|\delta_y(t)| < |\delta_x(\rho(t))| + 2\delta_2 < |\delta_x(t_i')| + 2\delta_2,$$
$$|\delta_y(\rho^{-1}(t_i))| > |\delta_x(t_i)| - 2\delta_2.$$

Le choix $\delta_2 < \frac{1}{4}(|\delta_x(t_i)| - |\delta_x(t_i')|)$ dans (3.4.9) assure alors $|\delta_y(t)| < |\delta_y(\rho^{-1}(t_i))|$.
$\rho^{-1}(t_i)$ est bien l'instant de plus grand saut en module de y sur U_i^ε, c'est à dire :

$$\rho^{-1}(t_i) = T_{U_i^\varepsilon}(y)$$

Revenons à l'estimation du coefficient $C_d(f,y)$

$(s_i)_{i>0}$ étant la liste des sauts de y, on a :

$\omega_y(s_i) = 0$ si $s_i \notin \cup_{j=1}^d \Delta_j$,

quand $s_i \in \Delta_j$, $\omega_y(s_i) \neq 0$ si et seulement si $s_i = s_{k_j} = \rho^{-1}(t_j)$ d'après la discussion précédente sur les sauts de y

On a donc

$$\begin{aligned} C_d(f,y) &= \sum_{k_1,\dots,k_d>0} \omega_y(s_{k_1})\cdots\omega_y(s_{k_d})\, f(s_{k_1},\dots,s_{k_d}) \\ &= d!\,\tau_1\cdots\tau_d\, f(\rho^{-1}(t_1),\dots,\rho^{-1}(t_d)). \end{aligned}$$

Or $\rho^{-1}(t_i) = T_{U_i^\varepsilon}(y)$ donc comme $y \in X_\varepsilon$, $(\rho^{-1}(t_1),\dots,\rho^{-1}(t_d)) = T_{d,\varepsilon}(y) \in A_f$. Il suit

$$C_d(f,y) \neq 0$$

Pour toute orbite γ avec une trace sur le voisinage $V(x)$, la restriction $F_{d,\gamma}$ de F_d à la strate γ est un polynôme non nul, le coefficient $C_d(f,\gamma)$ du monôme de degré p étant non nul. Comme $P_\gamma \ll \lambda$, il suit l'absolue continuité de $P_\gamma F_d^{-1}$ et de la formule (3.4.11), celle de $P_{V(x)} F_d^{-1}$. Finalement, par localisation et approximation, on a prouvé le corollaire 3.2.1, c'est à dire le théorème 3.2.1 pour les lois simples d'intégrales stables multiples. ■

3.5 Preuve du théorème 3.2.1 dans le cas général

On se donne dans cette section un entier p, des dimensions $d_1, \dots, d_p$ et des noyaux $f_1, \dots, f_p$ par (3.2.1), on discute de l'absolue continuité de la loi jointe de leur intégrale stable multiple (3.2.4).

On suit la même démarche que dans la section 3.4 dans le cas des lois simples : on commence par se ramener, par le théorème 2.2.1, à l'étude des séries associées de LePage (section 3.5.1). On se ramène ensuite à l'étude de fonctionnelles sur $\mathbb{D}$. Pour cela, on approxime, localise (section 3.5.2) pour pouvoir appliquer la méthode de stratification en dimension p (section 3.5.3) en introduisant une famille de transformations à partir de p champs locaux.

3.5.1 Réduction du problème

A nouveau, par le résultat de représentation, on prouve le théorème 3.2.1 pour les lois jointes des séries multiples $S_{d_i}(f_i)$, $i = 1, \dots, p$.

$$\left(S_{d_1}(f_1), \dots, S_{d_p}(f_p)\right) \tag{3.5.1}$$

Ces lois jointes coïncident avec celles des intégrales stables multiples (3.2.4). On montre en effet que pour $\theta_1, \dots \theta_p$ réels, on a l'égalité en loi :

$$\theta_1 S_{d_1}(f_1) + \dots + \theta_p S_{d_p}(f_p) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \theta_1 I_{d_1}(f_1) + \dots + \theta_p I_{d_p}(f_p). \tag{3.5.2}$$

Pour cela, commençons par prendre des fonctions simples :

$$f_1 = \sum_{k=1}^{n_1} a_{1,k} \mathbf{1}_{\Delta_{1,k}}, \quad f_2 = \sum_{k=1}^{n_2} a_{2,k} \mathbf{1}_{\Delta_{2,k}}, \quad \dots, \quad f_p = \sum_{k=1}^{n_p} a_{p,k} \mathbf{1}_{\Delta_{p,k}}$$

avec pour chaque $1 \leq j \leq p$ et $1 \leq k \leq n_j$: $\Delta_{j,k} = \Delta^1_{j,k} \times \dots \times \Delta^{d_j}_{j,k}$. Comme pour $1 \leq j \leq p$ et $1 \leq k \leq n_j$:

$$\begin{aligned} S_{d_j}(\mathbf{1}_{\Delta_{j,k}}) &= C_\alpha^{d_j/\alpha} \sum_{\mathbf{i}>0} [\gamma_{\mathbf{i}}][\Gamma_{\mathbf{i}}]^{-1/\alpha} \mathbf{1}_{\Delta_{j,k}}(\mathbf{V}_{\mathbf{i}}) \\ &= \prod_{l=1}^{d_j} C_\alpha^{1/\alpha} \sum_{i>0} \gamma_i \Gamma_i^{-1/\alpha} \mathbf{1}_{\Delta^l_{j,k}}(V_i) \\ &= \prod_{l=1}^{d_j} S_1(\mathbf{1}_{\Delta^l_{j,k}}). \end{aligned}$$

on a

$$
\begin{aligned}
\theta_1 S_{d_1}(f_1) &+ \cdots + \theta_p S_{d_p}(f_p) \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \theta_1 a_{1,i} S_{d_1}(\mathbf{1}_{\Delta_{1,i}}) + \cdots + \sum_{i=1}^{n_p} \theta_p a_{p,i} S_{d_p}(\mathbf{1}_{\Delta_{p,i}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \theta_1 a_{1,i} \prod_{k=1}^{d_1} S_1(\mathbf{1}_{\Delta^k_{1,i}}) + \cdots + \sum_{i=1}^{n_p} \theta_p a_{p,i} \prod_{k=1}^{d_p} S_1(\mathbf{1}_{\Delta^k_{p,i}})
\end{aligned}
\tag{3.5.3}
$$

Or il est clair qu'on a l'égalité en loi :

$$
\begin{aligned}
\Big(S_1(\mathbf{1}_{\Delta^1_{1,1}}), \ldots, S_1(\mathbf{1}_{\Delta^{d_1}_{1,1}}), \ldots, S_1(\mathbf{1}_{\Delta^1_{1,n_1}}), \ldots, S_1(\mathbf{1}_{\Delta^{d_1}_{1,n_1}}), \ldots \\
S_1(\mathbf{1}_{\Delta^1_{p,n_p}}), \ldots, S_1(\mathbf{1}_{\Delta^{d_p}_{p,n_p}})\Big) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \Big(I_1(\mathbf{1}_{\Delta^1_{1,1}}), \ldots, I_1(\mathbf{1}_{\Delta^{d_1}_{1,1}}), \ldots \\
I_1(\mathbf{1}_{\Delta^1_{1,n_1}}), \ldots, I_1(\mathbf{1}_{\Delta^{d_1}_{1,n_1}}), \ldots, I_1(\mathbf{1}_{\Delta^1_{p,n_p}}), \ldots, I_1(\mathbf{1}_{\Delta^{d_p}_{p,n_p}})\Big).
\end{aligned}
\tag{3.5.4}
$$

Comme la fonction

$$
\begin{aligned}
(x^{(1)}_{1,1}, \ldots, x^{(d_1)}_{1,1}, \ldots, x^{(1)}_{1,n_1}, \ldots, x^{(d_1)}_{1,n_1}, \ldots, x^{(1)}_{p,1}, \ldots, x^{(d_p)}_{p,1}, \ldots, x^{(1)}_{p,n_p}, \ldots, x^{(d_p)}_{p,n_p}) \\
\longmapsto \sum_{i=1}^{n_1} \theta_1\, a_{1,i} \prod_{k=1}^{d_1} x^{(k)}_{1,i} + \cdots + \sum_{i=1}^{n_p} \theta_p\, a_{p,i} \prod_{k=1}^{d_p} x^{(k)}_{p,i}
\end{aligned}
$$

est continue, il suit facilement avec (3.5.4), (3.5.3) et son analogue pour I que :

$$
\begin{aligned}
\theta_1 S_d(f_1) &+ \cdots + \theta_p S_d(f_p) \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \theta_1 a_{1,i} \prod_{k=1}^{d_1} S_1(\mathbf{1}_{\Delta^k_{1,i}}) + \cdots + \sum_{i=1}^{n_p} \theta_p a_{p,i} \prod_{k=1}^{d_p} S_1(\mathbf{1}_{\Delta^k_{p,i}}) \\
&\stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{i=1}^{n_1} \theta_1 a_{1,i} \prod_{k=1}^{d_1} I_1(\mathbf{1}_{\Delta^k_{1,i}}) + \cdots + \sum_{i=1}^{n_p} \theta_p a_{p,i} \prod_{k=1}^{d_p} I_1(\mathbf{1}_{\Delta^k_{p,i}}) \\
&\stackrel{\mathcal{L}}{=} \theta_1 I_d(f_1) + \cdots + \theta_p I_d(f_p).
\end{aligned}
$$

On obtient l'égalité (3.5.2) pour les fonctions simples.
Soient maintenant

$$
f_1 \in L^\alpha(\log_+)^{d_1-1}([0,1]^{d_1}), \quad \ldots, \quad f_p \in L^\alpha(\log_+)^{d_p-1}([0,1]^{d_p}).
$$

Soient pour chaque $i \le p$, $(f_{n,i})_n$ une suite de fonctions simples telles que $f_{n,i} \longrightarrow f_i$ quand $n \to +\infty$ dans les espaces $L^\alpha(\log_+)^{d_i-1}([0,1]^{d_i})$, on a alors

$$
S_{d_i}(f_{n,i}) \xrightarrow{\mathbb{P}} S_{d_i}(f_i), \quad I_{d_i}(f_{n,i}) \xrightarrow{\mathbb{P}} I_{d_i}(f_i)
$$

On a donc

$$\theta_1 S_{d_1}(f_{n,1}) + \cdots + \theta_p S_{d_p}(f_{n,p}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta_1 S_{d_1}(f_1) + \cdots + \theta_p S_{d_p}(f_p),$$

$$\theta_1 I_{d_1}(f_{n,1}) + \cdots + \theta_p I_{d_p}(f_{n,p}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta_1 I_{d_1}(f_1) + \cdots + \theta_p I_{d_p}(f_p),$$

avec de plus l'égalité en loi (3.5.2) pour les suites $f_{n,1}, \dots, f_{n,p}$. On en déduit alors (3.5.2) pour $f_1 \in L^\alpha(\log_+)^{d_1-1}([0,1]^{d_1}), \dots, f_p \in L^\alpha(\log_+)^{d_p-1}([0,1]^{d_p})$.

On s'intéresse donc désormais aux lois de (3.5.1).

Pour cela, considérons $F = (F_1, \dots, F_p)$ avec $F_i : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ associée à f_i comme F_d à f par (3.4.1) en section 3.4. et le processus stable η, de loi notée P, donné (3.4.2). On a alors comme en (3.4.3)

$$F_i(\eta.(\omega)) = S_{d_i}(f_i)(\omega)$$

On a donc

$$\begin{aligned} F(\eta(\omega)) &= (F_1(\eta(\omega)), \dots F_p(\eta(\omega))) \\ &= (S_{d_1}(f_1), \dots, S_{d_p}(f_p))(\omega). \end{aligned}$$

D'où $F(\eta) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (S_{d_1}(f_1), \dots, S_{d_p}(f_p))$ et on s'intéresse maintenant à l'absolue continuité de la loi PF^{-1}.

Pour montrer $PF^{-1} \ll \lambda^p$, il suffit de voir que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathcal{X}_\varepsilon$ mesurable dans $\mathcal{X} = \mathbb{D}$ avec $P(\mathcal{X}_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ et

$$P_{\mathcal{X}_\varepsilon} F^{-1} \ll \lambda^p. \tag{3.5.5}$$

Par séparabilité de $\mathcal{X}_\varepsilon$, pour voir (3.5.5), il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathcal{X}_\varepsilon$, il existe $V(x)$ voisinage de x tel que

$$P_{V(x)} F^{-1} \ll \lambda^p.$$

On commence par montrer en section 3.5.2 l'existence de l'approximation $\mathcal{X}_\varepsilon$ et d'un voisinage $V(x)$ pour chaque $x \in \mathcal{X}_\varepsilon$ fixé, puis on utilise la méthode de stratification au voisinage de x en section 3.5.3.

3.5.2 Choix des outils

D'après l'hypothèse **(H)** du théorème 3.2.1 :

$$\text{il existe } b = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{N}^p, \ |b| = N \text{ avec } \tilde{\phi}_b = S_{b_1,\dots,b_d}\phi_b$$
$$\text{non presque partout nulle sur } [0,1]^N.$$

Pour ce b donné par **(H)**, l'ensemble $A_{\tilde{\phi}_b} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \tilde{\phi}_b(x) \neq 0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est de mesure positive. En considérant $t = (t_1, \dots, t_N)$ un point de Lebesgue de $A_{\tilde{\phi}_b}$ qu'on choisit avec ses coordonnées toutes distinctes ($t_i \neq t_j$, $i \neq j$), pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $V_\varepsilon = U_1^{\varepsilon} \times \cdots \times U_N^{\varepsilon}$ avec

$$- \ U_i^{\varepsilon} \cap U_j^{\varepsilon} = \emptyset, \quad i \neq j\,;$$

$$- \ \frac{\lambda^N(V_\varepsilon \cap A_{\tilde{\phi}_b})}{\lambda^N(V_\varepsilon)} \geq 1 - \varepsilon.$$

On introduit alors l'approximation $\mathcal{X}_\varepsilon$ comme en (3.4.5) en remplaçant l'ensemble A_f par $A_{\tilde{\phi}_b}$. On vérifie de la même façon qu'en section 3.4 : $P(\mathcal{X}_\varepsilon) = P_{X_0}, T_\varepsilon^{-1}(A_{\tilde{\phi}_b}) \geq 1 - \varepsilon$. Comme expliqué précédemment, il suffit maintenant de s'intéresser à l'absolue continuité de $P_{\mathcal{X}_\varepsilon} F^{-1}$ pour chaque $\varepsilon > 0$.

On utilise la séparabilité de $\mathbb{D}$ pour localiser et se ramener à montrer que pour tout $x \in \mathcal{X}_\varepsilon$, il existe $V(x)$ voisinage de x tel que $P_{V(x)} F^{-1} \ll \lambda^p$.
Soit donc $x \in \mathcal{X}_\varepsilon$ fixé, notons pour $i = 1, \ldots, N$ comme en section 3.4 t_i, t_i' les instants de plus grand saut et de second plus grand saut en module sur U_i^{ε} et ε_0 la moitié du minimum des sauts maximaux (*cf.* (3.4.6), (3.4.7), (3.4.8)).

Par finitude du nombre de sauts de x en module supérieur à $\varepsilon_0/2$, on choisit $\delta_1 > 0$ tel que t_i soit le seul instant de $\Delta_i' = (t_i - \delta_1, t_i + \delta_1) \subset U_i^{\varepsilon}$ d'un saut de module supérieur à $\varepsilon_0/2$.
Soient alors

$$- \ \varepsilon_0/2 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \cdots < \varepsilon_p < \varepsilon_0\,; \tag{3.5.6}$$

$$- \ \delta_2 < \frac{1}{4} \min\left\{\varepsilon_0, 2\delta_1, \inf_{i=1,\ldots,N} \{|\delta_x(t_i)| - |\delta_x(t_i')|\}, 2\varepsilon_1 - \varepsilon_0\right\}. \tag{3.5.7}$$

$$- \ \beta = \delta_1 - \delta_2 \quad (\beta < \delta_1)\,;$$

$$- \ \Delta_i = (t_i - \beta, t_i + \beta) \subset \Delta_i' \subset U_i^{\varepsilon}$$

On est maintenant en mesure d'appliquer la méthode de stratification comme en section 3.1.4. Dans le cas des lois simples de la section 3.4, on associait une famille de transformations à un paramètre qui engendrait une partition en strates de dimension 1. Pour s'intéresser aux lois jointes de dimension p, il faut introduire des strates de dimension p et pour cela considérer une famille de transformations à p paramètres. Pour ce faire, on considère p champs locaux l^i et leur ouvert $A(l^i)$ associé par (3.1.7). On les choisit de la façon suivante :

- ε_i donné par (3.5.6),
- $m_i = b_i$, donné par l'hypothèse (**H**).
- $\Delta_j^i = \Delta_{b_1 + \cdots + b_{i-1} + j}$ pour $j = 1, \ldots, b_i$.
- τ_j^i du signe de $\delta_x(t_i)$ de module constant $\tau > 0$.

Il est clair qu'on a bien $x \in A(l) = \cap_{i=1}^p A(l^i)$ ouvert. De plus la condition (3.1.10) de la section 3.1.4 est clairement vérifiée.

On définit alors le voisinage $V(x)$ de x par :

$$V(x) = B(x, \delta_2) \cap A(l) \cap \mathcal{X}_\varepsilon. \tag{3.5.8}$$

On utilise la méthode de stratification dans ce voisinage de x.

3.5.3 Stratification dans $\mathbb{D}$

On associe aux p champs locaux l^i, $i = 1, \ldots, p$ la famille de transformations $\{G_c\}_c$, $c \in (\mathbb{R}^+)^p$ donnée par (3.1.11) :

$$G_{c_1,\ldots,c_p} : \left\{ \begin{array}{lll} A(l) & \longrightarrow & A(l) \\ x & \longmapsto & x + c_1\, l^1_x + \cdots + c_p\, l^p_x. \end{array} \right.$$

On définit la partition Γ à partir de la relation d'équivalence $\sim$ sur $A(l)$ donnée comme en (3.1.18) par :

$$x_1 \sim x_2 \text{ si et seulement s'il existe } c_1, c_2 \in (\mathbb{R}^+)^p \text{ avec } G_{c_1}x_1 = G_{c_2}x_2.$$

Notons à nouveau $\pi : A(l) \longrightarrow A(l)/\Gamma$ la projection canonique et P_Γ la mesure quotient associées. On appellera orbites les classes d'équivalence $\pi^{-1}(\gamma)$, elles sont p-dimensionnelles d'après la proposition 3.1.3 et on les munit d'une mesure de Lebesgue p-dimensionnelle λ^p_γ. Les strates γ s'écrivent alors :

$$\gamma = \left\{ x + \sum_{i=1}^{p} c_i l^i_x, \quad (c_1, \ldots, c_p) \in (\mathbb{R}^+)^p \right\}.$$

D'après le corollaire 3.1.1, la partition Γ est mesurable et par le théorème 3.1.2 pour P_Γ-presque chaque γ, les mesures conditionnelles P_γ existent et vérifient :

$$P_\gamma\{\pi^{-1}(\gamma)\} = 1, \quad P_\gamma \ll \lambda^p_\gamma.$$

La méthode de stratification permet alors d'étudier $P_{V(x)}F^{-1}$ en tant que mélange de distributions conditionnelles :

$$P_{V(x)}F^{-1} = \int_{V(x)/\Gamma} P_\gamma F^{-1} P_\Gamma(d\gamma).$$

Pour montrer que $P_{V(x)}F^{-1} \ll \lambda^p$, il suffit alors de voir que pour P_Γ-presque chaque γ tel que $\pi^{-1}(\gamma) \cap V(x) \neq \emptyset$, on a $P_\gamma F^{-1} \ll \lambda^p_\gamma$. Comme $P_\gamma\{\pi^{-1}(\gamma)\} = 1$ et $P_\gamma \ll \lambda^p_\gamma$, on se ramène à l'étude de la restriction F_γ de F sur les traces d'orbites $\pi^{-1}(\gamma) \cap V(x)$ sur le voisinage de x. $F_\gamma : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est donnée par

$$\begin{aligned} F_\gamma(c) &= (F_{1,\gamma}(c), \ldots, F_{p,\gamma}(c)) \\ &= F(x + c_1 l^1_x + \cdots c_p l^p_x), \quad c = (c_1, \ldots, c_p). \end{aligned}$$

Notons dans la suite :

$$l = (l^1, \ldots, l^p), \qquad < c, l_x > = c_1 l^1_x + \cdots + c_p l^p_x.$$

On réécrit alors

$$\begin{aligned} F_{i,x}(c) &= F_i(x + < c, l_x >) \\ &= \sum_{t_1, \ldots, t_{d_i}} \delta_{x + < c, l_x >}(t_1) \cdots \delta_{x + < c, l_x >}(t_{d_i}) f_i(t_1, \ldots, t_{d_i}) \end{aligned}$$

Comme (3.1.12) se réécrit aussi sous la forme $\delta_{x + < c, l_x >}(t) = \delta_x(t) + < c, \omega_x(t) >$, on a :

$$F_{i,x}(c) = \sum_{t_1, \ldots, t_{d_i}} \left(\prod_{j=1}^{d_i} (\delta_x(t_j) + < c, \omega_x(t_j) >) \right) f_i(t_1, \ldots, t_{d_i}).$$

On obtient un polynôme en $c_1, \ldots, c_p$, on en cherche les coefficients en developpant le produit intérieur :

$$\sum_{\substack{I_0, \ldots, I_p \text{ partition de} \\ \{1, \ldots, d_i\},\ \# I_k = a_k \\ a_0 + \cdots + a_p = d_i}} \left(\prod_{j \in I_0} \delta_x(t_j) \right) \left(\prod_{j \in I_1} \omega^1_x(t_j) \right) \cdots \left(\prod_{j \in I_p} \omega^p_x(t_j) \right) 1^{a_0} c_1^{a_1} \cdots c_p^{a_p}.$$

D'où pour chaque $i = 1, \ldots, p$:

$$\begin{aligned} F_{i,x}(c) = \sum_{t_1, \ldots, t_{d_i}} \sum_{\substack{I_0, \ldots, I_p \text{ partition de} \\ \{1, \ldots, d_i\},\ \# I_k = a_k \\ a_0 + \cdots + a_p = d_i}} \left(\prod_{j \in I_0} \delta_x(t_j) \right) \left(\prod_{j \in I_1} \omega^1_x(t_j) \right) \cdots \\ \left(\prod_{j \in I_p} \omega^p_x(t_j) \right) f_i(t_1, \ldots, t_{d_i}) c_1^{a_1} \cdots c_p^{a_p}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{i,x}(c) = \sum_{\substack{a = (a_0, \ldots, a_p) \\ |a| = d_i}} \sum_{\substack{\{I_k\} \text{ partition de} \\ \{1, \ldots, d_i\},\ \# I_k = a_k}} \sum_{t_1, \ldots, t_{d_i}} \left(\prod_{j \in I_0} \delta_x(t_j) \right) \left(\prod_{j \in I_1} \omega^1_x(t_j) \right) \cdots \\ \left(\prod_{j \in I_p} \omega^p_x(t_j) \right) f_i(t_1, \ldots, t_{d_i}) c_1^{a_1} \cdots c_p^{a_p} \end{aligned}$$

On dispose d'une expression explicite de $F_x(c)$. Comme $P_x \ll \lambda^p_x$, on obtiendra $P_x F^{-1} \ll \lambda^p_x$ en montrant que le jacobien de F_x est non nul. C'est l'objectif de ce suit que de calculer ce jacobien.

$$\frac{\partial F_{i,\gamma}}{\partial c_j}(c) = \sum_{\substack{a=(a_0,\ldots,a_p)\\|a|=d_i}} \sum_{\substack{\{I_k\}\text{ partition de}\\\{1,\ldots,d_i\},\ \#I_k=a_k}} \sum_{t_1,\ldots,t_{d_i}} \left(\prod_{I_0}\cdots\right)\left(\prod_{I_1}\cdots\right)\cdots$$

$$\cdots\left(\prod_{I_p}\cdots\right) f_i(t_1,\ldots,t_{d_i})\, a_j \frac{c_1^{a_1}\cdots c_p^{a_p}}{c_j}.$$

Pour simplifier ces notations (trop) lourdes, posons pour la suite :

- $c^{a^i} = c_1^{a_1^i}\cdots c_p^{a_p^i}$ pour $a^i = (a_1^i,\ldots,a_p^i)$;
- $$B^i_{a^i} = \sum_{\substack{\{I_k\}\text{ partition de}\\\{1,\ldots,d_i\},\ \#I_k=a_k^i}} \sum_{t_1,\ldots,t_{d_i}} \left(\prod_{I_0}\right)\left(\prod_{I_1}\right)\cdots\left(\prod_{I_p}\right) f_i(t_1,\ldots,t_{d_i}).$$

En utilisant ceci, on réécrit plus simplement :

$$\begin{aligned}
F_{i,\gamma}(c) &= \sum_{\substack{a^i=(a_0^i,\ldots,a_p^i)\\|a^i|=d_i}} B^i_{a^i}\, c^{a^i} ;\\
\frac{\partial F_{i,\gamma}}{\partial c_j}(c) &= \sum_{\substack{a^i=(a_0^i,\ldots,a_p^i)\\|a^i|=d_i}} B^i_{a^i}\, a^i_j\, \frac{c^{a^i}}{c_j}.
\end{aligned}$$

On calcule maintenant le jacobien $J_\gamma(c) = \left|\left(\frac{\partial F_{i,\gamma}}{\partial c_j}(c)\right)_{i,j}\right|$:

$$\begin{aligned}
J_\gamma(c) &= \sum_{\sigma\in\Pi_p} \epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{p}\left(\frac{\partial F_{i,\gamma}}{\partial c_{\sigma(i)}}\right)(c)\\
&= \sum_{\sigma\in\Pi_p} \epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{p}\sum_{|a^i|=d_i} B^i_{a^i}\, a^i_{\sigma(i)}\,\frac{c^{a^i}}{c_{\sigma(i)}}\\
&= \sum_{\sigma\in\Pi_p} \epsilon(\sigma)\sum_{\substack{|a^i|=d_i\\ i=1,\ldots,p}}\left(\prod_{i=1}^{p} B^i_{a^i}\right)\left(\prod_{i=1}^{p} a^i_{\sigma(i)}\right)\left(\prod_{i=1}^{p}\frac{c^{a^i}}{c_{\sigma(i)}}\right).
\end{aligned}$$

où $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature d'une permutation $\sigma \in \Pi_p$. Or

$$\prod_{i=1}^{p}\frac{c^{a^i}}{c_{\sigma(i)}} = \frac{\prod_{i=1}^{p} c^{a^i}}{\prod_{i=1}^{p} c_{\sigma(i)}} = \frac{\prod_{i=1}^{p} c^{a^i}}{c_1\cdots c_p} = \prod_{k=1}^{p} c_k^{(\sum_{i=1}^{p} a_k^i)-1}.$$

D'où

$$J_\gamma(c) = \sum_{\substack{|a^i| = d_i \\ i=1,\dots,p}} \left(\prod_{i=1}^{p} B^i_{a^i}\right) \left(\prod_{k=1}^{p} c_k^{(\sum_{i=1}^{p} a^i_k)-1}\right) \sum_{\sigma \in \Pi_p} \epsilon(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{p} a^i_{\sigma(i)}\right).$$

Utilisons les notations supplémentaires suivantes :

soit $a = (a^1, \dots, a^p) \in \mathbb{R}^{p+1} \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^{p+1}$ avec $a^i = (a^i_0, \dots, a^i_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$;
$M_a = (a^i_j)_{1 \le i,j \le p}$ matrice carrée (sans la colonne numéro 0 des a^i_0) ;
$M^0_a = (a^i_j)_{\substack{0 \le i \le p \\ 1 \le j \le p}}$ matrice non carrée (avec la colonne numéro 0 des a^i_0).
$d_i = \sum_{k=0}^{p} a^i_k$ somme de la $i^{ème}$ ligne de M^0_a.
$b_k = \sum_{i=1}^{p} a^i_k$ somme de la $k^{ème}$ colonne de M^0_a ou M_a.

Remarque 3.5.1 On peut imposer dans la suite $b_k \ge 1$ pour $k > 1$, en effet si $b_k = \sum_{i=1}^{p} a^i_k = 0$, M_a a alors une colonne nulle car chaque $a^i_k = 0$, $i = 1, \dots, p$, il suit $\det M_a = 0$ le terme relatif à un tel b_k est alors nul. Il n'y a donc aucune restriction à supposer $b_k \ge 1$

On obtient

$$J_\gamma(c) = \sum_{\substack{|a^i| = d_i \\ i=1,\dots,p}} \left(\prod_{i=1}^{p} B^i_{a^i}\right) \left(\prod_{k=1}^{p} c_k^{b_k - 1}\right) \det M_a$$

Le jacobien est un polynôme en $c_1, \dots, c_p$, on obtiendra sa non nullité si on exhibe au moins un coefficient non nul de ce polynôme.

En notant $b = (b_1, \dots, b_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$, le coefficient relatif au monôme $c_1^{b_1 - 1} \cdots c_p^{b_p - 1}$ est :

$$A_{\gamma,b} = \sum_{a \in E(b)} \left(\prod_{i=1}^{p} B^i_{a^i}\right) \det M_a$$

où

$$E(b) = \left\{ a = (a^1, \dots, a^p) \in (\mathbb{N}^{p+1})^p \quad |a^i| = d_i, \ \sum_{i=1}^{p} a^i_k = b_k \text{ pour } k = 1, \dots, p \right\}.$$

Il suffit de voir qu'un tel coefficient $A_{\gamma,b}$ est non nul.

Pour étudier

$$A_{\gamma,b} =$$

$$\sum_{a \in E(b)} \left(\prod_{i=1}^{p} \sum_{\substack{\{I_k\} \text{ partition de } \{1,\dots,d_i\} \\ \# I_k = a^i_k}} \sum_{t_1,\dots,t_{d_i}} \left(\prod_{I_0}\right)\left(\prod_{I_1}\right) \cdots \left(\prod_{I_p}\right) f_i(t_1, \dots, t_{d_i})\right) \det M_a.$$

on développe le produit $\prod_{i=1}^{p}$ en utilisant au préalable la symétrie des fonctions f_i :

$$\sum_{\substack{\{I_k\} \text{ partition de} \\ \{1,\ldots,d_i\}, \#I_k=a_k^i}} \sum_{t_1,\ldots,t_{d_i}} \left(\prod_{I_0}\right)\left(\prod_{I_1}\right)\cdots\left(\prod_{I_p}\right) f_i(t_1,\ldots,t_{d_i})$$

$$= C(a^i) \sum_{t_1,\ldots,t_{d_i}} \prod_{j=1}^{a_0^i} \delta_x(t_j) \prod_{j=a_0^i+1}^{a_0^i+a_1^i} \omega_x^1(t_j)\cdots \prod_{j=a_0^i+\cdots+a_{p-1}^i+1}^{a_0^i+\cdots+a_p^i} \omega_x^p(t_j)\, f_i(t_1,\ldots,t_{d_i})$$

avec

$$\begin{aligned} C(a^i) &= \#\{\text{partition de } \{1,\ldots,d_i\} \text{ en } \{I_k\}_{k=1,\ldots,p} \text{ avec } \#I_k = a_k^i\} \\ &= C_{d_i}^{a_0^i} C_{d_i-a_0^i}^{a_1^i} C_{d_i-a_0^i-a_1^i}^{a_2^i} \cdots C_{d_i-a_0^i-a_1^i-\cdots-a_{p-1}^i}^{a_p^i} \\ &= \frac{d_i!}{a_0^i!\cdots a_p^i!}. \end{aligned}$$

En notant $\alpha_k^i = \sum_{j\leq k} a_j^i$, le $i^{\text{ème}}$ facteur dans la somme de $A_{\gamma,b}$ s'écrit :

$$\frac{d_i!}{a_0^i!\cdots a_p^i} \sum_{t_1,\ldots,t_{d_i}} \prod_{j=1}^{\alpha_0^i} \delta_x(t_j) \prod_{j=\alpha_0^i+1}^{\alpha_1^i} \omega_x^1(t_j)\cdots \prod_{j=\alpha_{p-1}^i+1}^{\alpha_p^i} \omega_x^p(t_j)\; f_i(t_1,\ldots,t_{d_i}).$$

On considère $N_i = d_1 + \cdots + d_i$, $N = N_p$, on scinde

$$t_1,\ \ldots,\ t_{d_1},\ t_{d_1+1},\ \ldots,\ t_{d_1+d_2},\ \ldots,\ t_{d_1+d_2+\cdots+d_{p-1}+1},\ \ldots,\ t_{d_1+d_2+\cdots+d_p}$$

en blocs de taille N_i :

$$t_{N_{i-1}+1},\ldots,t_{N_i},\quad i = 1,\ldots,p.$$

Dans chacun de ces blocs, on considère la partition en $a_0^i,\ldots,a_p^i$ parties :

$$t_{N_{i-1}+1},\ \ldots,\ t_{N_{i-1}+\alpha_0^i},\ t_{N_{i-1}+\alpha_0^i+1},\ \ldots,\ t_{N_{i-1}+\alpha_1^i},\ \ldots,\ t_{N_{i-1}+\alpha_{p-1}^i+1},\ \ldots,$$
$$t_{N_{i-1}+\alpha_p^i} = t_{N_i}.$$

Notons $k_j^i = N_{i-1}+\alpha_j^i$, $k_p^i = N_{i-1}+\alpha_p^i = N_i$, le $i^{\text{ème}}$ bloc est donc constitué des sous-blocs suivants :

$$\underbrace{t_{k_p^{i-1}+1},\ldots,t_{k_0^i}}_{1^{\text{er}}\text{ sous bloc}},\underbrace{t_{k_0^i+1},\ldots,t_{k_1^i}}_{2^{\text{ème}}\text{ sous bloc}},\underbrace{t_{k_1^i+1},\ldots,t_{k_2^i}}_{3^{\text{ème}}\text{ sous-bloc}},\ldots,\underbrace{t_{k_{p-1}^i+1},\ldots,t_{k_p^i}}_{(p+1)^{\text{ème}}\text{ sous-bloc}}.$$

On en déduit

$$A_{\gamma,b} = \sum_{a\in E(b)} \left(\prod_{i=1}^{p} \frac{d_i!}{a_0^i!\cdots a_p^i!}\right) \det M_a \prod_{i=1}^{p} \sum_{t_{N_{i-1}+1},\ldots,t_{N_i}} \prod_{j=k_p^{i-1}+1}^{k_0^i} \delta_x(t_j)\times$$
$$\times \prod_{j=k_0^i+1}^{k_1^i} \omega_x^1(t_j)\cdots \prod_{j=k_{p-1}^i+1}^{k_p^i} \omega_x^p(t_j)\quad f_i(t_{N_{i-1}+1},\ldots,t_{N_i}).$$

On utilise pour simplifier les notations suivantes :

- $< g_1, \delta_x >= \sum_t \delta_x(t)\, g_1(t)$;
- $< g_1, \omega_x >= \sum_t \omega_x(t)\, g_1(t)$;
- $< g_2, \omega_x^1 \otimes \omega_x^2 >= \sum_{t_1, t_2} \omega_x^1(t_1)\omega_x^2(t_2)\; g_2(t_1, t_2)$.

De cette façon,

$$\sum_{t_{N_{i-1}+1}} \; \prod_{t_{N_i},\, j=k_p^{i-1}+1}^{k_0^i} \delta_x(t_j) \prod_{j=k_0^i+1}^{k_1^i} \omega_x^1(t_j) \cdots \prod_{j=k_{p-1}^i+1}^{k_p^i} \omega_x^p(t_j)\; f_i(t_{N_{i-1}+1}, \ldots, t_{N_i})$$

s'écrit sous la forme compacte

$$< f_i,\ \delta_x^{\otimes a_0^i} \otimes \omega_x^{1\,\otimes a_1^i} \otimes \cdots \otimes \omega_x^{p,\otimes a_p^i} >$$

avec $a_0^i + a_1^i + \cdots + a_p^i = d_i = N_i - N_{i-1}$.

L'étape suivante consiste à faire un changement de variable. Pour cela, on définit pour chaque $a \in E(b)$ une permutation de $\{1, \ldots, N\}$ notée σ_a
pour

$$j = \sum_{u=1}^{k-1} b_u + \sum_{s=1}^{i-1} a_{s,k} + l, \quad l = 1, \ldots, a_{i,k},$$

on pose :

$$\sigma_a(j) = \sum_{v=1}^{i-1} d_v + \sum_{s=1}^{k-1} a_{i,s} + l.$$

On associe à cette permutation l'application $U_a : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ donnée par

$$U_a(t_1, \ldots, t_N) = (t_{\sigma_a(1)}, \ldots, t_{\sigma_a(N)})$$

et on fait ensuite le changement de variable correspondant à U_a. On transforme ainsi

$$A_{x,b} = \sum_{a \in E(b)} \left(\prod_{i=1}^{p} C(a^i)\right) \det M_a \left\langle f_1 \otimes \cdots \otimes f_p, \otimes_{i=1}^{p} \left(\delta_x^{\otimes a_0^i} \otimes \omega_x^{1\,\otimes a_1^i} \otimes \omega_x^{p,\otimes a_p^i}\right)\right\rangle$$

en

$$A_{x,b} = < \phi_b, G_b > \tag{3.5.9}$$

avec

- $\phi(t) = f_1(t_1, \ldots, t_{N_1}) \cdots f_p(t_{N_{p-1}+1}, \ldots, t_{N_p})$;
- $\phi_b(t) = \sum_{a \in E(b)} \prod_{i=1}^{p} C(a^i) \det M_a\, \phi(U_a(t))$;
- $G_b = \delta_x^{\otimes b_0} \otimes \omega_x^{1\,\otimes b_1} \otimes \cdots \otimes \omega_x^{p\,\otimes b_p}$

Comme G_b est une fonction invariante par une permutation conservant chaque bloc $(t_1, \ldots, t_{b_1}), \ldots, (t_{b_1+\cdots+b_{d-1}+1}, \ldots, t_N)$, on peut utiliser au préalable une procédure de symétrisation : pour $b_1, \ldots, b_d \geq 0$ avec $b_1 + \cdots + b_d = N$, on définit :

$$S_{b_1,\ldots,b_d} f(t) = \frac{b_1! \cdots b_d!}{N!} \sum_{\sigma \in \Pi_{b_1,\ldots,b_d}} f(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(N)})$$

avec $\Pi_{b_1,\ldots,b_d}$ sous-groupe de Π_n constitué des permutations laissant invariants les blocs suivants, appelés « b-blocs » :

$$\{1, \ldots, b_1\}, \{b_1 + 1, \ldots, b_1 + b_2\}, \{b_1 + b_2 + \cdots b_{p-1} + 1, \ldots, b_1 + b_2 + \cdots b_p = N\}.$$

Le coefficient étudié en (3.5.9) s'écrit alors aussi

$$A_{\gamma,b} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^d b_i!} < S_{b_1,\ldots,b_d}\phi_b, G_b > . \tag{3.5.10}$$

On se ramène ainsi à considérer $\bar{\phi}_b = S_{b_1,\ldots,b_d}\phi_b$ symétrique dans chaque « b-blocs ». On achève la démonstration en étudiant le coefficient $A_{\gamma,b}$ correspondant à b donné par **(H)**. C'est l'objet de la section suivante.

3.5.4 Étude du coefficient $A_{\gamma,b}$

On étudie la non nullité de

$$\begin{aligned}
&< \bar{\phi}_b, G_b > \\
&=< \bar{\phi}_b, \delta_x^{\otimes b_0} \otimes \omega_x^{1,\otimes b_1} \otimes \cdots \otimes \omega_x^{p,\otimes b_p} > \\
&= \sum_{s_1,\ldots,s_N} \prod_{i=1}^{b_1} \omega_x^1(s_1) \cdots \prod_{i=b_1+\cdots b_{p-1}+1}^{b_1+\cdots b_p} \omega_x^p(s_i)\, \bar{\phi}_b(s_1, \ldots, s_N).
\end{aligned} \tag{3.5.11}$$

Dans la section 3.5.2, $t_1, \ldots, t_N$ désigne des instants de sauts de x dans U_i^ε, $i = 1, \ldots, N$, notons $\{t_k\}_{k>N}$ ses autres instants de sauts.

D'après la définition de w_x^i en (3.1.5), on a :
- $\omega_x^i(t_k) = 0$ si $k > N$ car soit $t_k \notin \cup_j \Delta_i^j$, soit $|\delta_x(t_k)| < \varepsilon_0/2 < \varepsilon_i$;
- $\omega_x^i(t_k) = 0$ si $k \notin \{b_1 + \cdots + b_{i-1} + 1, \ldots, b_1 + \cdots + b_i\}$ $i^{\text{ème}}$ bloc ;
- $\omega_x^i(t_k) = \tau_j^i$ si $t_k = t_i^j = t_{b_1+\cdots+b_{i-1}+j}$ car alors $t_k = t_j^i \in \Delta_j^i$, $|\delta_x(t_k)| > \varepsilon_0 > \varepsilon_i$ et $\delta_x(t_k)$ est du signe de τ_j^i.

D'après cette discussion, il faut alors dans (3.5.11) :
- pour $1 \leq j \leq b_1$, s_j dans le premier bloc ;
- ......
- pour $b_1 + \cdots + b_{p-1} + 1 \leq j \leq b_1 + \cdots + b_p$, s_j dans le $p^{\text{ème}}$ bloc.

A une permutation près dans chaque « b-bloc », il faut

$$(s_1, \dots, s_N) = (t_1, \dots, t_N),$$

puis comme ϕ_b est invariante par permutation conservant les « b-blocs », on obtient

$$A_{\gamma, x, b} = \pm \frac{N!}{\prod_{i=1}^{d} b_i!} \tau^N \bar{\phi}_b(t_1, \dots, t_N) \neq 0$$

car par choix des t_i, $i \leq N$, en section 3.5.2, on a

$$(t_1, \dots, t_N) = T_i(x) \in A_{\phi_b} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \phi_b \neq 0\}.$$

On étudie maintenant $A_{\gamma, b}$ pour une orbite γ telle que $\pi^{-1}(\gamma) \cap V(x) \neq \emptyset$ où on rappelle que $V(x)$ est le voisinage de x fixé, donné par (3.5.8)
Soient $y \in V(x)$ représentant de $\gamma := \gamma_y$, $(s_k)_{k>0}$ la liste des instants des sauts de y. D'après la définition de la topologie de Skorokhod, soit $\rho \in \Lambda = \{\rho : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ bijection croissante$\}$ telle que

$$\sup_{t \in [0,1]} |x(\rho(t)) - y(t)| < \delta_2 \quad \text{et} \quad \sup_{t \in [0,1]} |\rho(t) - t| < \delta_2$$

avec δ_2 donné par (3.5.7). On a alors

$$\delta_x(\rho(t)) - 2\delta_2 < \delta_y(t) < \delta_x(\rho(t)) + 2\delta_2 ;$$
$$|\delta_x(\rho(t))| - 2\delta_2 < |\delta_y(t)| < |\delta_x(\rho(t))| + 2\delta_2.$$

On constate que $\rho^{-1}(t_i) \in \Delta_i$: en effet, comme $|\rho(t_i) - t_i| < \delta_2$, on a facilement

$$\left.\begin{array}{l} \rho^{-1}(t_i) < t_i + \delta_2 < t_i + \beta \text{ car } \delta_2 < \delta_1/2 \\ \rho^{-1}(t_i) > t_i - \beta \text{ de même} \end{array}\right\} \text{ il suit : } \rho^{-1}(t_i) \in \Delta_i = (t_i - \beta, t_i + \beta).$$

De plus $|\delta_y(\rho^{-1}(t_i))| > |\delta_x(t_i)| - 2\delta_2 \geq 2\varepsilon_0 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 = \frac{3}{2}\varepsilon_0 > \varepsilon_0 > \varepsilon_i$

Si $t \in \Delta_i \setminus \{\rho^{-1}(t_i)\}$, on a aussi $\rho(t) \in \Delta_i'$: en effet, comme $|\rho(t) - t| < \delta_2$, on a

$$\left.\begin{array}{l} \rho(t) < t + \delta_2 < t_i + \beta + \delta_2 = t_i + \delta_1 \\ \rho(t) > t_i - \delta_1 \text{ de même} \end{array}\right\} \text{ il suit : } \rho(t) \in \Delta_i'.$$

D'où, comme
$|\delta_x(\rho(t))| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ car $\rho(t) \neq t_i$ seul instant de Δ_i' pour lequel un saut de x est supérieur à $\varepsilon_0/2$,
$2\delta_2 < \varepsilon_1 - \varepsilon_0/2$ par le choix (3.5.7) de δ_2,
on a

$$|\delta_y(t)| < |\delta_x(\rho(t))| + 2\delta_2 \leq \frac{\varepsilon_0}{2} + 2\delta_2 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_i$$

Conséquence : pour $t \in \Delta_i$,

- si $t = \rho^{-1}(t_i)$ alors $t \in \Delta_i$, $|\delta_y(t)| > \varepsilon_i$, $\delta_y(t)$ est du signe de $\delta_x(t_i)$,
- si $t \neq \rho^{-1}(t_i)$ alors $|\delta_y(t)| < \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_i$.

Remarquons par ailleurs que pour $t \in U_i^\varepsilon$, $t \neq \rho^{-1}(t_i)$, on a

-
$$|\delta_y(t)| \leq |\delta_x(\rho^{-1}(t))| + 2\delta_2 < |\delta_x(t_i')| + 2\delta_2 \tag{3.5.12}$$
car $\rho^{-1}(t) \neq t_i$ donc $|\delta_x(\rho^{-1}(t))| < |\delta_x(t_i')|$,

-
$$|\delta_y(\rho^{-1}(t_i))| > |\delta_x(t_i)| - 2\delta_2, \tag{3.5.13}$$

comme par choix de δ_2 en (3.5.7) :

$$\delta_2 < \frac{1}{4} \inf_{i=1,\ldots,N} \{|\delta_x(t_i)| - |\delta_x(t_i')|\},$$

on déduit de (3.5.12), (3.5.13) qu'on a $|\delta_y(t)| < |\delta_y(\rho^{-1}(t_i))|$.
On a donc $\rho^{-1}(t_i) = T_{U_i^\varepsilon}(y)$ et

$$(\rho^{-1}(t_1), \ldots, \rho^{-1}(t_N)) = T_\varepsilon(y).$$

Finalement en notant $(s_i)_{i>0}$ les instants des sauts de y, on a d'après l'étude sur ces sauts :

- $\omega_y^i(s_k) = 0 \quad$ si $s_k \notin \cup_{j=1}^{b_i} \Delta_j^i$;
- $\omega_y^i(s_k) \neq 0 \quad$ si $s_k \in \cup_{j=1}^{b_i} \Delta_j^i$ et $s_k = \rho^{-1}(t_j^i)$.

On peut maintenant estimer le coefficient $A_{\gamma_y, b}$ pour $y \in V(x)$ représentant de l'orbite $\gamma = \gamma_y$ telle que $\pi^{-1}(\gamma_y) \cap V(x) \neq \emptyset$. Il est donné par :

$$\sum_{s_1,\ldots,s_N} \prod_{i=1}^{b_1} \omega_y^1(s_i) \cdots \prod_{i=b_1+\cdots b_{p-1}}^{b_1+\cdots b_p} \omega_y^p(s_i)\, \bar{\phi}_b(s_1, \ldots, s_N)$$

les sauts $s_1, \ldots, s_N$ doivent être à une permutation près dans les « b-blocs » égaux à $\rho^{-1}(t_1), \ldots, \rho^{-1}(t_N)$; comme $\bar{\phi}_b$ est symétrique par permutation dans ces « b-blocs », on obtient :

$$A_{\gamma_y, b} = \pm \frac{N!}{\prod_{i=1}^d b_i!} \tau^N \bar{\phi}_b(s_1, \ldots, s_N) \neq 0$$

car $(s_1, \ldots, s_N) = T_\varepsilon(y) \in A_{\bar{\phi}_b}$ et $y \in \mathcal{X}_\varepsilon$. Le coefficient $A_{\gamma_y, b}$ est donc non nul.

On a donc pour tout γ avec $\pi^{-1}(\gamma) \cap V(x) \neq \emptyset$, la restriction $F_{\gamma, V(x)}$ de F aux traces d'orbites $\pi^{-1}(\gamma) \cap V(x)$, est de jacobien un polynôme non nul car un de ses coefficients est non nul. Comme $P_\gamma \ll \lambda_\gamma^p$, on a finalement :

$$P_{\gamma, V(x)} F^{-1} \ll \lambda^p.$$

D'où en enchaînant les arguments :

$$
\begin{aligned}
& P_{V(r)}F^{-1} \ll \lambda^p \\
& \overset{localisation}{\Longrightarrow} P_{X_\epsilon}F^{-1} \ll \lambda^p \\
& \overset{approximation}{\Longrightarrow} PF^{-1} \ll \lambda^p.
\end{aligned}
$$

On obtient l'absolue continuité de $\mathcal{L}(S_{d_1}(f_1), \ldots, S_{d_p}(f_p))$ par rapport à λ^p et donc celles des lois $\mathcal{L}\left(I_{d_1}(f_1), \ldots, I_{d_p}(f_p)\right)$ aussi par le théorème de représentation, ce qui achève de prouver le théorème 3.2.1. ∎

Remarque 3.5.2 Lorsque $\alpha \geq 1$ et $\beta \neq 0$, la preuve s'adapterait facilement. On doit tenir compte de termes supplémentaires dans la représentation $\tilde{S}_d(f)$ mais les termes prépondérants qui permettent de conclure ne changent pas. En effet, on suit la même démarche, le jacobien $\tilde{J}_\gamma(c)$ qu'on considère est toujours un polynôme à plusieurs indéterminées mais il n'est plus homogène. Cela ne change pas l'étude du coefficient $A_{\gamma,b}$ qui reste non nul sous la même hypothèse **(H)**.

Chapitre 4

Convergence en variation des lois des intégrales stochastiques stables multiples

On s'intéresse dans ce chapitre à la continuité forte par rapport au noyau f des lois des intégrales stables multiples $I_d(f)$. La continuité forte considérée est la continuité par rapport à la topologie induite par la norme de la variation sur $\mathcal{Z}(\mathbb{R})$, l'ensemble des mesures signées sur $\mathbb{R}$, de variation totale finie. Notons que compte tenu de l'absolue continuité des lois des intégrales stochastiques stables multiples établie au chapitre 3 précédent, on obtient en fait la convergence dans $L^1(\mathbb{R})$ des densités des lois de ces intégrales.

On commence en section 4.1 par des rappels utiles aussi aux chapitres 5 et 6 sur la variation d'une mesure et une description de la méthode de superstructure (voir [13] pour plus de détails), variante de la stratification utilisée précédemment. On prouve ensuite la continuité à partir de la représentation de LePage du chapitre 2, on utilise en particulier l'indépendance des deux suites intervenant dans la représentation puis le caractère markovien de l'une d'elles pour se ramener par conditionnements à la convergence de coefficients qu'on étudie en utilisant la représentation de LePage et ses propriétés.

4.1 Rappels

4.1.1 Variation des mesures

Définition 4.1.1 *Soient $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_\mathcal{X})$ un espace mesurable, μ une mesure finie signée sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_\mathcal{X})$. On appelle variation de μ la mesure positive $|\mu|$ définie par la relation :*

$$|\mu|(A) = \sup_{(A_n)} \sum_n |\mu(A_n)|,$$

où le supremum est pris sur les partitions dénombrables mesurables $(A_n)_n$ de $A \in \mathcal{B}_\mathcal{X}$. On parle de variation totale de μ pour $\|\mu\| = |\mu|(\mathcal{X})$.

Proposition 4.1.1 *L'espace $Z(\mathcal{X})$ des mesures signées sur $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$, de variation totale finie, muni de la norme $\|\cdot\|$ est un espace de Banach.*

Définition 4.1.2 *La convergence pour la topologie associée à la norme de cet espace est la convergence en variation ou convergence forte, on la symbolise par $\xrightarrow{var}$.*

On rappelle quelques propriétés de base sur la variation pour lesquelles on renvoie à [13]. On les utilisera dans la suite sans les citer à nouveau.

Proposition 4.1.2 (§2, [13])

Si la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure ν et si $h = d\mu/d\nu$ est la dérivée de Radon-Nikodym alors

$$\|\mu\| = \int_{\mathcal{X}} |h|\, d\nu = \|h\|_{L^1(\mathcal{X},\nu)};$$

en particulier, si $\mu_n \ll \nu$, $\mu \ll \nu$, la convergence $\mu_n \xrightarrow{var} \mu$ est équivalente à la convergence des densités $h_n = d\mu_n/d\nu$ vers $h = d\mu/d\nu$ dans le sens de $L^1(\mathcal{X},\nu)$

Pour $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ mesurable, on a $\|\mu f^{-1}\| \leq \|\mu\|$.

Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mu) = (\mathcal{X}_1, \mathcal{U}_1, \mu_1) \times (\mathcal{X}_2, \mathcal{U}_2, \mu_2)$, alors $\|\mu\| = \|\mu_1\| \cdot \|\mu_2\|$.

Soit $\{\mu_n\}_n$ une suite de mesures telles que $\mu_n \ll \nu$ et $\mu_n \xrightarrow{var} \mu_\infty$, alors $\mu_\infty \ll \nu$.

Définition 4.1.3 (mélange de mesures) *Soient $(\mathcal{Y}, \mathcal{V}, \nu)$ un espace mesuré et $\{\mu_y\}_{y\in\mathcal{Y}}$ une famille de mesures signées sur $(\mathcal{X}, \mathcal{U})$ telles que pour $A \in \mathcal{U}$ la fonction $y \longmapsto \mu_y(A)$ est mesurable. La mesure*

$$\mu(A) = \int_{\mathcal{Y}} \mu_y(A)\, \nu(dy)$$

est appelée le mélange des mesures $\{\mu_y\}$ par rapport à la mesure ν. On a de plus l'estimation suivante de sa variation totale

$$\|\mu\| \leq \int_{\mathcal{Y}} \|\mu_y\|\, \nu(dy)$$

La convergence forte, comme la terminologie l'indique, implique la convergence faible. Bien que la réciproque soit fausse, on a (voir [13, th. 2.7]) :

Proposition 4.1.3 *Soient $P_n \Longrightarrow P$ et $Q_n \Longrightarrow Q$. Alors*

$$\|P - Q\| \leq \overline{\lim_n} \|P_n - Q_n\|.$$

4.1.2 Méthode de superstructure

On considère une mesure de probabilité P et une fonctionnelle f sur un espace $\mathcal{X}$. Pour étudier l'absolue continuité de Pf^{-1} ou une convergence forte comme dans ce chapitre, l'idée de la méthode de superstructure (due à Davydov *cf.* [10, 13]) est d'introduire une famille auxiliaire de mesures Q_ε et de fonctionnelles F_ε sur un espace plus large telles que

- $Q_\varepsilon F_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{var} Pf^{-1}$ quand $\varepsilon \to 0$;
- les mesures $Q_\varepsilon F_\varepsilon^{-1}$ s'étudient assez facilement, en général en appliquant la méthode de stratification.

Développons l'idée de la méthode dans un cas simple souvent utilisé : on se donne une famille $\{G_c,\ c \in [0,a]\}$ de transformations de $\mathcal{X}$ telles que l'action de ces transformations sur P est faible pour les paramètres assez proches de 0 :

$$PG_c^{-1} \xrightarrow{var} P \text{ quand } c \to 0.$$

On considère sur l'espace produit

$$(Y_\varepsilon, \eta_\varepsilon) = ([0,\varepsilon],\ \mathcal{B}_{[0,\varepsilon]}) \otimes (\mathcal{X}, \mathcal{U}), \quad \varepsilon \in [0,a],$$

la famille de mesures $\{Q_\varepsilon\}$ données par :

$$Q_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\lambda|_{[0,\varepsilon]} \times P,$$

et de fonctionnelles $F_\varepsilon : Y_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F_\varepsilon(c,x) = f(G_c x).$$

On remarque que $\{x \mid (c,x) \in F_\varepsilon^{-1}(A)\} = G_c^{-1}\{f^{-1}(A)\}$, on a alors pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$Q_\varepsilon F_\varepsilon^{-1}(A) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\lambda|_{[0,\varepsilon]} \times P\right)\{F_\varepsilon^{-1}(A)\} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon P\{G_c^{-1}(f^{-1}(A))\}\, dc. \tag{4.1.1}$$

Il suit

$$\begin{aligned} \|Pf^{-1} - Q_\varepsilon F_\varepsilon^{-1}\| &= \left\|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon (Pf^{-1} - PG_c^{-1}f^{-1})\, dc\right\| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \|P - PG_c^{-1}\|\, dc \longrightarrow 0 \quad \text{quand } \varepsilon \to 0. \end{aligned}$$

On a bien $Q_\varepsilon F_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{var} Pf^{-1}$. Pour étudier $Q_\varepsilon F_\varepsilon^{-1}$, on applique maintenant la méthode de stratification avec la partition de $\mathcal{Y}_\varepsilon$ en « strates » parallèles à l'espace produit $[0,\varepsilon]$. Avec $\varphi_x(c) = f(G_c x)$, $c \in [0,\varepsilon]$, on a

$$Q_\varepsilon F_\varepsilon^{-1} = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathcal{X}} \lambda\varphi_x^{-1}\, P(dx). \tag{4.1.2}$$

On peut alors utiliser les propriétés sur les mélanges et la proposition 1.3.1 pour analyser l'absolue continuité de $Q_\varepsilon F_\varepsilon^{-1}$ puis de Pf^{-1}. Essentiellement, on se ramène à étudier les restrictions de f sur les orbites de $\{G_c\}_c$.

4.2 Continuité en variation de $\mathcal{L}(I_d(f))$

Comme aux chapitres précédents, on considère sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, une mesure aléatoire α-stable M sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ de mesure de contrôle λ et de fonction de biais $\beta : [0,1] \longrightarrow [-1,1]$. On se place dans le cas où la mesure M est générale si $\alpha < 1$ et symétrique si $\alpha \geq 1$, c'est à dire vérifiant l'hypothese (2.2.1) :

$$0 < \alpha < 1 \quad \text{ou} \quad 1 \leq \alpha < 2, \ \beta \equiv 0.$$

Pour $f \in L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$, le théorème 2.2.1 du chapitre 2 donne une représentation des intégrales stochastiques stables multiples $I_d(f) = \int_{[0,1]^d} f dM^d$ en séries de type LePage. Rappelons qu'avec les notations du chapitre 2, on a

$$I_d(f) \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_d(f) \tag{4.2.1}$$

avec $S_d(f)$ donné par (2.2.4) :

$$S_d(f) := C_\alpha^{d/\alpha} \sum_{\mathbf{i} > 0} [\gamma_\mathbf{i}] [\Gamma_\mathbf{i}]^{-1/\alpha} f(\mathbf{V}_\mathbf{i}).$$

On s'intéresse à la continuité pour la topologie associée à la variation des lois des intégrales $I_d(f)$ par rapport au noyau f. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Théorème 4.2.1 *Soit M mesure stable vérifiant (2.2.1), quand f_n converge vers f dans $L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$, f non nulle, on a*

$$\mathcal{L}(I_d(f_n)) \xrightarrow{var} \mathcal{L}(I_d(f)) \tag{4.2.2}$$

Remarque 4.2.1

D'après le théorème 2.2.1 du chapitre 2, comme les lois de $S_d(f)$ et $I_d(f)$ sont les mêmes, on s'intéresse dans la suite aux représentations $S_d(f_n)$, $S_d(f)$ de $I_d(f_n)$, $I_d(f)$ respectivement pour prouver la convergence (4.2.2). On note μ_n et μ ces lois dans ce chapitre.

D'après le théorème 3.2.1 du chapitre 3, μ_n, μ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, donc d'apres la proposition 4.1.2, le théorème 4.2.1 s'énonce aussi sous la forme d'un théorème local limite :

Corollaire 4.2.1 *Avec les mêmes notations et hypothèses que dans le théorème 4.2.1, on a la convergence des densités de $\mu_n = \mathcal{L}(I_d(f_n))$ vers $\mu = \mathcal{L}(I_d(f))$ dans $L^1(\mathbb{R})$*

$$\frac{d\mu_n}{d\lambda} \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} \frac{d\mu}{d\lambda}$$

La preuve du théorème 4.2.1 consiste en plusieurs étapes dont les principales sont les suivantes : en conditionnant, on commence par découpler les variables (γ_i, V_i) et Γ_i, on se sert ensuite du caractere markovien de la suite (Γ_i), pour découpler les espérances entre « passé » et « futur » conditionnellement au « present ». On peut alors appliquer la méthode de superstructure et se ramener à des polynômes à plusieurs indéterminées qu'on étudie en se servant des propriétés de la représentation de type LePage.

4.3 Preuve du théorème de continuité

Pour prouver la convergence (4.2.2), il suffit de montrer que toute sous-suite de $(f_n)_{n>0}$ admet une autre sous-suite $(f_{n_p})_{p>0}$ vérifiant cette convergence. Il n'y a donc pas de restriction à supposer que la convergence $f_n \to f$ a lieu à la fois λ^d-presque partout dans $[0,1]^d$ et dans $L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$.

Il n'y a aucune restriction à supposer f symétrique et nulle sur les termes diagonaux. Notons à nouveau $T^d := \{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^d, 0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_d\}$ l'ensemble des multi-indices non diagonaux et $A_f := \{x \in [0,1]^d \mid f(x) \neq 0\}$. Comme par hypothèse $f \not\equiv 0$, on a $\lambda^d(A_f) > 0$, on montre facilement par le lemme de Borel-Cantelli, l'existence presque sûre d'un multi-indice $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^d$ tel que $\mathbf{V_i} \in A_f$.
On définit ensuite $\mathbf{i}^*$ le multi-indice $\mathbf{i}$ tel que $\mathbf{V_i} \in A_f$ et qui réalise par ordre de préférence :

$$\min i_d, \quad \min i_{d-1}, \ldots, \quad \min i_2, \quad \min i_1. \tag{4.3.1}$$

c'est à dire parmi les multi-indices qui conviennent, on choisit celui qui a le plus petit indice maximal, puis le plus petit deuxième indice maximal... $\mathbf{i}^*$ est ainsi uniquement déterminé et minimal en un certain sens.
La loi de $\mathbf{V_{i^*}}$ est absolument continue, en effet pour $A \in \mathcal{B}([0,1]^d)$ avec $\lambda^d(A) = 0$, on a :

$$\mathbb{P}\{\mathbf{V_{i^*}} \in A\} = \sum_{\mathbf{i}>0} \mathbb{P}\{\mathbf{V_i} \in A,\ \mathbf{i}^* = \mathbf{i}\} \leq \sum_{\mathbf{i}>0} \mathbb{P}\{\mathbf{V_i} \in A\}.$$

Or pour tout $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbb{P}\{\mathbf{V_i} \in A\} = \lambda^d(A) = 0$. Il suit

$$\mathcal{L}(\mathbf{V_{i^*}}) \ll \lambda^d.$$

Comme par hypothèse, on a $\lambda^d\{x \in [0,1]^d \mid f_n(x) \to f(x)\} = 1$, on a aussi

$$\mathbb{P}\{f_n(\mathbf{V_{i^*}}) \to f(\mathbf{V_{i^*}})\} = 1 \tag{4.3.2}$$

avec $f(\mathbf{V_{i^*}}) \neq 0$ par choix de $\mathbf{i}^*$.

4.3.1 Conditionnement par $(\gamma_i, V_i)_{i>0}$

Comme les suites $(\gamma_i, V_i)_{i>0}$ et $(\Gamma_i)_{i>0}$ sont indépendantes, on supposera pour simplifier la présentation que l'espace de probabilité est un espace produit $(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes (\Omega', \mathcal{F}', P')$, avec $\mathbb{P} = P \otimes P'$ et $(\Gamma_i)_{i>0}$, $(\gamma_i, V_i)_{i>0}$ ne dépendant respectivement que de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(\Omega', \mathcal{F}', P')$, c'est à dire :

$$\Gamma_i(\omega, \omega') = \Gamma_i(\omega), \qquad \gamma_i(\omega, \omega') = \gamma_i(\omega'), \qquad V_i(\omega, \omega') = V_i(\omega').$$

Aussi le conditionnement par rapport à $\sigma\{(\gamma_i, V_i)_i,\ i > 0\}$ n'affecte pas la loi de $(\Gamma_i)_i$.

Remarque 4.3.1 De la même façon qu'au chapitre 2, on considère que l'espace est un espace produit sur les facteurs duquel les variables aléatoires sont définies. On souligne cependant que pour ne pas alourdir les notations dans ce chapitre, on a échangé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ par rapport au chapitre 2.

Notons dans la suite $Y = (\gamma_i, V_i)_{i>0}$ la suite aléatoire de $(\{+1,-1\},[0,1])^{\mathbb{N}}$ ne dépendant que de l'espace facteur $(\Omega', \mathcal{F}', P')$. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\mu(A) = \mathbb{P}\{S_d(f) \in A\} = \int \mathbb{P}\{S_d(f) \in A \mid Y = y\}\, \mathbb{P}_Y(dy).$$

Notons $\mu_y = \mathcal{L}(S_d(f) \mid Y = y)$. μ est alors mélange des μ_y, $y \in (\{+1,-1\},[0,1])^{\mathbb{N}}$.
En introduisant de la même façon $\mu_{n,y}$, on déduit immédiatement des rappels sur la variation en section 4.1.1 que :

$$\|\mu - \mu_n\| \le \int \|\mu_y - \mu_{n,y}\|\, P'_Y(dy).$$

On est ramené à l'étude pour P'_Y-presque chaque $y \in (\{+1,-1\},[0,1])^{\mathbb{N}}$ de $\|\mu_y - \mu_{n,y}\|$.
En posant $y = (\varepsilon, u)$ avec $\varepsilon \in \{+1,-1\}^{\mathbb{N}}$ et $u \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, on constate facilement que

$$\begin{aligned}
\mu_y &= \mathcal{L}\left(C_\alpha^{d/\alpha} \sum_{\mathbf{i}>0} [\varepsilon_{\mathbf{i}}][\Gamma_{\mathbf{i}}]^{-1/\alpha} f(\mathbf{u}_{\mathbf{i}})\right), \\
\mu_{n,y} &= \mathcal{L}\left(C_\alpha^{d/\alpha} \sum_{\mathbf{i}>0} [\varepsilon_{\mathbf{i}}][\Gamma_{\mathbf{i}}]^{-1/\alpha} f_n(\mathbf{u}_{\mathbf{i}})\right)
\end{aligned}$$

Pour alléger les notations, posons encore :

$$A_{\mathbf{i}}(y) = d!\, C_\alpha^{d/\alpha} [\varepsilon_{\mathbf{i}}]\, f(\mathbf{u}_{\mathbf{i}}), \qquad A_{n,\mathbf{i}}(y) = d!\, C_\alpha^{d/\alpha} [\varepsilon_{\mathbf{i}}]\, f_n(\mathbf{u}_{\mathbf{i}}). \tag{4.3.3}$$

Notons que par choix de $\mathbf{i}^*$, $A_{\mathbf{i}^*}(y) \neq 0$ pour P'_Y-presque chaque y. Il suit :

$$\mu_y = \mathcal{L}\left(\sum_{\mathbf{i} \in T^d} A_{\mathbf{i}}(y) [\Gamma_{\mathbf{i}}]^{-1/\alpha}\right), \qquad \mu_{n,y} = \mathcal{L}\left(\sum_{\mathbf{i} \in T^d} A_{n,\mathbf{i}}(y) [\Gamma_{\mathbf{i}}]^{-1/\alpha}\right).$$

On sait que pour P'_Y-presque chaque y, il existe $\mathbf{i}^* \in T^d$ minimal selon (4.3.1). Comme $A_{\mathbf{i}}(\cdot)$ et $\mathbf{i}^*$ sont $\sigma(Y)$-mesurables, en fixant y, on fixe aussi $A_{\mathbf{i}}(y)$ et $\mathbf{i}^*$.

Considérons sur $(\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ la fonctionnelle définie par :

$$F_y(x) = \sum_{\mathbf{i} \in T^d} A_{\mathbf{i}}(y)\, x_{i_1} \cdots x_{i_d} \tag{4.3.4}$$

On a

$$\mathcal{L}(S_d(f) \mid Y = y) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{\mathbf{i} \in T^d} A_{\mathbf{i}}(y)\, [\Gamma_{\mathbf{i}}]^{-1/\alpha} = F_y(\Gamma^{-1/\alpha}).$$

On introduit de la même façon qu'en (4.3.4) la fonctionnelle $F_{n,y}$ qui permet d'avoir

$$\mathcal{L}(S_d(f_n) \mid Y = y) \stackrel{\mathcal{L}}{=} F_{n,y}(\Gamma^{-1/\alpha})$$

4.3.2 Utilisation du caractère markovien de la suite Γ

Pour P'_Y-presque chaque y fixé, on dispose de $\mathbf{i}^* = (i_1^*, \ldots, i_d^*) \in T^d$ satisfaisant (4.3.1), notons dans la suite pour alléger $p = i_d^*$.
On utilise l'indépendance entre passé et futur conditionnellement au présent de $(\Gamma_i)_{i>0}$, suite à accroissements indépendants donc markovienne : les vecteurs $\{\Gamma_1^{-1/\alpha}, \ldots, \Gamma_p^{-1/\alpha}\}$, $\{\Gamma_i^{-1/\alpha},\ i > p+1\}$ sont indépendants conditionnellement à Γ_{p+1}. Notons :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^-_{t_{p+1}} &= \mathcal{L}\left(\left(\Gamma_1^{-1/\alpha}, \ldots, \Gamma_p^{-1/\alpha}\right) \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\right), \\ \mathcal{P}^+_{t_{p+1}} &= \mathcal{L}\left(\left(\Gamma_k^{-1/\alpha}\right)_{k \geq p+2} \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\right). \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

La loi $\mathcal{P}^-_{t_{p+1}}$ est de densité connue, donnée par :

$$p_{\Gamma_1^{-1/\alpha}, \ldots, \Gamma_p^{-1/\alpha} | \Gamma_{p+1}}(s_1, \ldots, s_p; t_{p+1}) = p! \, \frac{\alpha^p s_{p+1}^{p\alpha}}{(s_1 \cdots s_p)^{1+\alpha}} \, \mathbf{1}_{\{0 \leq s_{p+1} \leq s_p \leq \cdots \leq s_1\}} \tag{4.3.6}$$

où on note $s_{p+1} = t_{p+1}^{-1/\alpha}$. On a pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\mu_y(A) &= \mathbb{P}\{S_d(f) \in A \mid Y = y\} \\ &= P\{F_y(\Gamma^{-1/\alpha}) \in A\} \\ &= \int P\{F_y(\Gamma^{-1/\alpha}) \in A \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\} \, P_{\Gamma_{p+1}}(dt_{p+1}).\end{aligned}$$

De même

$$\mu_{n,y}(A) = \int P\{F_{n,y}(\Gamma^{-1/\alpha}) \in A \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\} \, P_{\Gamma_{p+1}}(dt_{p+1}).$$

Pour une suite $t = (t_i)_{i>0}$, on utilise les notations suivantes pour les suites tronquées :

$$t_{\leq j} = (t_i)_{i \leq j} \quad \text{et} \quad t_{\geq j} = (t_i)_{i \geq j}. \tag{4.3.7}$$

Soit

$$\begin{aligned}\mu_{y,t_{p+1}} &= \mathcal{L}\left(F_y(\Gamma^{-1/\alpha}) \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\right), \\ \mu_{n,y,t_{p+1}} &= \mathcal{L}\left(F_{n,y}(\Gamma^{-1/\alpha}) \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\right),\end{aligned}$$

on a alors facilement

$$\|\mu_y - \mu_{n,y}\| \leq \int \|\mu_{y,t_{p+1}} - \mu_{n,y,t_{p+1}}\| \, P_{\Gamma_{p+1}}(dt_{p+1}).$$

On utilise maintenant l'indépendance entre passé et futur conditionnellement au présent :

$$\begin{aligned}&P\{F_y(\Gamma^{-1/\alpha}) \in A \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\} \\ &\quad = E\{\mathbf{1}_{\{F_y(\Gamma^{-1/\alpha}) \in A\}} \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\} \\ &\quad = E\{\mathbf{1}_{\{F_y(\Gamma_{\leq p}^{-1/\alpha}, t_{p+1}, \Gamma_{\geq p+2}^{-1/\alpha}) \in A\}} \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\} \\ &\quad = E\left\{E\{\mathbf{1}_{\{F_y(\Gamma_{\leq p}^{-1/\alpha}, t_{p+1}, \cdot) \in A\}} \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\}(\Gamma_{\geq p+2}^{-1/\alpha}) \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\right\} \\ &\quad = E\left\{\psi_{y,t_{p+1}}(\Gamma_{\geq p+2}) \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\right\}\end{aligned}$$

avec

$$v_{y,t_{p+1}}(t_{\geq p+2}) = P\left\{F_y(\Gamma_{\leq p}^{-1/\alpha}, t_{\geq p+1}^{-1/\alpha}) \in A \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\right\}.$$

De la même façon, on introduit $v_{n,y,t_{p+1}}$. On a alors :

$$\begin{aligned} & P\{F_y(\Gamma^{-1/\alpha}) \in A \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\} - P\{F_{n,y}(\Gamma^{-1/\alpha}) \in A \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\} \\ &= E\left[v_{y,t_{p+1}}(\Gamma_{\geq p+2}) - v_{n,y,t_{p+1}}(\Gamma_{\geq p+2}) \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\right] \\ &= \int \left[v_{y,t_{p+1}}(t_{\geq p+2}) - v_{n,y,t_{p+1}}(t_{\geq p+2})\right] \mathcal{P}^*_{t_{p+1}}(dt_{\geq p+2}) \end{aligned}$$

On en déduit pour la variation totale qu'avec :

$$\begin{aligned} \mu_{y,t_{\geq p+1}} &= \mathcal{L}\left(F_y(\Gamma_{\leq p}^{-1/\alpha}, t_{\geq p+1}^{-1/\alpha}) \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\right), \\ \mu_{n,y,t_{\geq p+1}} &= \mathcal{L}\left(F_{n,y}(\Gamma_{\leq p}^{-1/\alpha}, t_{\geq p+1}^{-1/\alpha}) \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\right), \end{aligned}$$

on a :

$$\|\mu_{y,t_{p+1}} - \mu_{n,y,t_{p+1}}\| \leq \int \|\mu_{y,t_{\geq p+1}} - \mu_{n,y,t_{\geq p+1}}\| \mathcal{P}^*_{t_{p+1}}(dt_{\geq p+2}).$$

On se ramène ainsi maintenant à montrer que pour P'_Y-presque chaque y, $P_{\Gamma_{p+1}}$-presque chaque t_{p+1}, $\mathcal{P}^*_{t_{p+1}}$-presque chaque $t_{\geq p+2}$:

$$\mathcal{L}\left(F_{n,y}\left(\Gamma_{\leq p}^{-1/\alpha}, t_{\geq p+1}^{-1/\alpha}\right) \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\right) \xrightarrow{var} \mathcal{L}\left(F_y\left(\Gamma_{\leq p}^{-1/\alpha}, t_{\geq p+1}^{-1/\alpha}\right) \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\right). \quad (4.3.8)$$

D'après la définition de F_y en (4.3.1), on observe facilement que $F_y(\Gamma_{\leq p}^{-1/\alpha}, t_{\geq p+1}^{-1/\alpha})$ est un polynôme en $\Gamma_1^{-1/\alpha}, \ldots, \Gamma_p^{-1/\alpha}$, on le note $R_{y,t}$. On associe de même le polynôme $R_{n,y,t}$ à $F_{n,y}$ de façon que

$$\begin{aligned} F_y\left(\Gamma_{\leq p}^{-1/\alpha}, t_{\geq p+1}^{-1/\alpha}\right) &= R_{y,t}\left(\Gamma_1^{-1/\alpha}, \ldots, \Gamma_p^{-1/\alpha}\right), \\ F_{n,y}\left(\Gamma_{\leq p}^{-1/\alpha}, t_{\geq p+1}^{-1/\alpha}\right) &= R_{n,y,t}\left(\Gamma_1^{-1/\alpha}, \ldots, \Gamma_p^{-1/\alpha}\right). \end{aligned}$$

4.3.3 Superstructure

On considère la loi $\mathcal{P}_{t_{p+1}} = \mathcal{L}\left(\left(\Gamma_1^{-1/\alpha}, \ldots, \Gamma_p^{-1/\alpha}\right) \mid \Gamma_{p+1} = t_{p+1}\right)$ sur $(\mathbb{R}^+)^p$, elle est donnée par la densité (4.3.6).
Par choix de $\mathbf{i}^*$, le coefficient du monôme $X_{i_1^*}X_{i_2^*}\cdots X_{i_d^*}$ dans le polynôme $R_{y,t}$ est $A_{\mathbf{i}^*}(y) \neq 0$. Il s'agit donc d'un polynôme non nul pour lequel on peut fixer $v \in \mathbb{R}^p$ tel que $R_{y,t}(v) \neq 0$.

On considère alors la famille de transformations de $(\mathbb{R}^+)^p$ données par :

$$G_c \begin{cases} (\mathbb{R}^+)^p & \longrightarrow (\mathbb{R}^+)^p \\ x & \longmapsto x + cv = (x_1 + cv_1, \ldots, x_p + cv_p). \end{cases}$$

Comme $\mathcal{P}^-_{t_{p+1}}$ est une loi dans $L^1((\mathbb{R}^+)^p)$, la convergence en variation de la translatée par G_c de $\mathcal{P}^-_{t_{p+1}}$ vers $\mathcal{P}^-_{t_{p+1}}$ est équivalente à la convergence dans $L^1((\mathbb{R}^+)^p)$ des densités. Comme celle-ci est due à la continuité de l'opérateur de translation G_c, on a quand $c \to 0$:

$$\mathcal{P}^-_{t_{p+1}} G_c^{-1} \xrightarrow{var} \mathcal{P}^-_{t_{p+1}}. \tag{4.3.9}$$

On applique maintenant la méthode de superstructure dont on a décrit le principe en section 4.1.2.

On définit sur $\mathcal{Y}_\varepsilon = ([0,\varepsilon], \mathcal{B}([0,\varepsilon])) \otimes ((\mathbb{R}^+)^p, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)^p)$ les familles de mesures et fonctionnelles auxiliaires suivantes :

$$\mathcal{Q}^\varepsilon_{t_{p+1}} = \frac{1}{\varepsilon}\lambda|_{[0,\varepsilon]} \times \mathcal{P}^-_{t_{p+1}}, \qquad F_\varepsilon(c,x) = R_{y,t}(x+cv).$$

En exprimant $\mathcal{Q}^\varepsilon_{t_{p+1}} F^{-1}_{n,\varepsilon}$ de la même façon qu'en (4.1.1), on déduit de (4.3.9) quand $\varepsilon \to 0$ la convergence suivante, uniforme en n :

$$\|\mathcal{P}^-_{t_{p+1}} R^{-1}_{n,y,t} - \mathcal{Q}^\varepsilon_{t_{p+1}} F^{-1}_{n,\varepsilon}\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \|\mathcal{P}^-_{t_{p+1}} - \mathcal{P}^-_{t_p} G_c^{-1}\|\, dc \longrightarrow 0.$$

De la même façon $\|\mathcal{P}^-_{t_{p+1}} R^{-1}_{y,t} - \mathcal{Q}^\varepsilon_{t_{p+1}} F_\varepsilon^{-1}\| \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \to 0$.
Or

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{P}^-_{t_{p+1}} R^{-1}_{y,t} - \mathcal{P}^-_{t_{p+1}} R^{-1}_{n,y,t}\| \\
&\leq \|\mathcal{P}^-_{t_{p+1}} R^{-1}_{y,t} - \mathcal{Q}^\varepsilon_{t_{p+1}} F_\varepsilon^{-1}\| + \|\mathcal{Q}^\varepsilon_{t_{p+1}} F_\varepsilon^{-1} - \mathcal{Q}^\varepsilon_{t_{p+1}} F^{-1}_{n,\varepsilon}\| \\
&\qquad + \|\mathcal{Q}^\varepsilon_{t_{p+1}} F^{-1}_{n,\varepsilon} - \mathcal{P}^-_{t_{p+1}} R^{-1}_{n,y,t}\|.
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Quand $\varepsilon \to 0$ les premier et troisième termes du membre de droite de (4.3.10) tendent vers 0. En fixant $\delta > 0$, on trouve $\varepsilon > 0$ tel que ces deux termes sont majorés chacun par $\delta/3$. On s'intéresse dès lors au terme restant

$$\|\mathcal{Q}^\varepsilon_{t_{p+1}} F_\varepsilon^{-1} - \mathcal{Q}^\varepsilon_{t_{p+1}} F^{-1}_{n,\varepsilon}\|.$$

D'après (4.1.2), en notant $\varphi_{n,x}(c) = R_{n,y,t}(x+cv)$, on a :

$$\mathcal{Q}^\varepsilon_{t_{p+1}} F^{-1}_{n,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\int_{(\mathbb{R}^+)^p} \lambda\varphi^{-1}_{n,x}\, \mathcal{P}^-_{t_{p+1}}(dx).$$

En introduisant les mêmes notations pour $\mathcal{Q}^\varepsilon_{t_{p+1}} F_\varepsilon^{-1}$, on déduit que :

$$\|\mathcal{Q}^\varepsilon_{t_{p+1}} F_\varepsilon^{-1} - \mathcal{Q}^\varepsilon_{t_{p+1}} F^{-1}_{n,\varepsilon}\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{(\mathbb{R}^+)^p} \|\lambda\varphi_x^{-1} - \lambda\varphi^{-1}_{n,x}\|\, \mathcal{P}^-_{t_{p+1}}(dx). \tag{4.3.11}$$

On est ramené à montrer que quand $n \to +\infty$, pour $\mathcal{P}^-_{t_{p+1}}$-presque chaque x :

$$\|\lambda\varphi_x^{-1} - \lambda\varphi^{-1}_{n,x}\| \longrightarrow 0. \tag{4.3.12}$$

Pour voir (4.3.12), on étudie la convergence des coefficients du polynôme $\varphi_{n,x}(c)$: $c \mapsto R_{n,y,t}(x+cv)$ vers les coefficients correspondants du polynôme $\varphi_x(c) : c \mapsto R_{y,t}(x+cv)$. On pourra alors appliquer un résultat sur distance en variation de distributions fonctionnelles (*cf.* proposition 4.3.1).

4.3.4 Étude des coefficients des polynômes $\varphi_{n,x}$

Les coefficients de $c \mapsto R_{y,t}(x+cv)$ sont des combinaisons linéaires des coefficients du polynôme à p indéterminées $R_{y,t}$, les coefficients des combinaisons étant des polynômes en x et v fixés. De la même façon, ceux de $c \mapsto R_{n,y,t}(x+cv)$ en sont de ceux de $R_{n,y,t}$, les coefficients des combinaisons linéaires étant les mêmes polynômes en x, v. Il suffit donc de voir la convergence des coefficients de $R_{n,y,t}$ vers ceux de $R_{y,t}$ pour $\mathcal{P}^*_{t_{p+1}}$-presque chaque $t_{>p+2}$, $P_{t_{p+1}}$-presque chaque t_{p+1} et P'_Y-presque chaque y. Rappelons que

$$R_{y,t}(X_1,\dots,X_p) = F_y(X_1,\dots,X_p,t_{>p+1}^{-1/\alpha}),$$
$$R_{n,y,t}(X_1,\dots,X_p) = F_{n,y}(X_1,\dots,X_p,t_{>p+1}^{-1/\alpha}).$$

En fait, compte tenu des notations utilisées, on étudie les coefficients aléatoires du polynôme

$$d!\,C_\alpha^{d/\alpha}\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le i_d^*<i_{k+1}<\dots<i_d}[\gamma_{\mathbf{i}}]f_n(\mathbf{V}_{\mathbf{i}})X_{i_1}\cdots X_{i_k}\Gamma_{i_{k+1}}^{-1/\alpha}\cdots\Gamma_{i_d}^{-1/\alpha}$$

Soit $\mathbf{j}\in T^d$ avec $j_1<j_2<\dots<j_k\le i_d^*<j_{k+1}$, le coefficient du monôme $X_{j_1}\cdots X_{j_k}$ associé à ce multi-indice est

$$d!\,C_\alpha^{d/\alpha}\sum_{\substack{1\le i_d^*<i_{k+1}<\dots<i_d\\ i_1=j_1,\dots,i_k=j_k}}[\gamma_{\mathbf{i}}]f_n(\mathbf{V}_{\mathbf{i}})\Gamma_{i_{k+1}}^{-1/\alpha}\cdots\Gamma_{i_d}^{-1/\alpha}. \tag{4.3.13}$$

On étudie la convergence de ces coefficients (4.3.13) vers :

$$d!\,C_\alpha^{d/\alpha}\sum_{\substack{1\le i_d^*<i_{k+1}<\dots<i_d\\ i_1=j_1,\dots,i_k=j_k}}[\gamma_{\mathbf{i}}]f(\mathbf{V}_{\mathbf{i}})\Gamma_{i_{k+1}}^{-1/\alpha}\cdots\Gamma_{i_d}^{-1/\alpha}. \tag{4.3.14}$$

Pour cela, on utilise l'étude de la continuité en probabilité de S_d faite au chapitre 2, sections 2.3, 2.4 dans les deux cas $0<\alpha<1$ et $1\le\alpha<2$, $\beta=0$ pour lesquels on travaille.

On conditionne par $i_d^*=p$: comme les vecteurs (V_i,γ_i) sont indépendants, la loi de ces vecteurs reste inchangée pour $i>p$ (notons que i_d^* est un temps d'arrêt pour $(\sigma(V_1,\dots,V_k))_k$ donc $\{i_d^*=p\}\in\sigma(V_1,\dots,V_p)$ est indépendant de $(V_i,\gamma_i)_{i>p}$). L'étude de (4.3.13) se ramène à celle d'une série $(d-k)$-multiple.

Remarque sur la notation : Jusqu'à maintenant p était une écriture moins lourde de i_d^* pour alléger un peu les notations, désormais p est la valeur de i_d^* obtenue par conditionnement.

Comme

la convergence $f_n\to f$ dans $L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$ garantit celle dans $L^\alpha(\log_+)^{d-k-1}([0,1]^{d-k})$,

les vecteurs (γ_i,V_i), $i>p$ sont indépendants entre eux et avec la suite $(\Gamma_i)_{i>0}$, une lecture attentive des justifications des sections 2.3.2, 2.4.3 du chapitre 2 montre qu'elles s'appliquent avec la restriction $p < i_{k+1} < \cdots < i_d$ sur les multi-indices, la pre_ e de la continuité en probabilité de S_{d-k} donne alors :

$$\sum_{\substack{\mathbf{i} \mid p<i_{k+1}<\cdots<i_d \\ i_1=j_1,\ldots,i_k=j_k}} [\gamma_{\mathbf{i}}] f_n(\mathbf{V}_{\mathbf{i}}) \, \Gamma_{i_{k+1}}^{-1/\alpha} \cdots \Gamma_{i_d}^{-1/\alpha} \xrightarrow{\mathbb{P}} \sum_{\substack{\mathbf{i} \mid p<i_{k+1}<\cdots<i_d \\ i_1=j_1,\ldots,i_k=j_k}} [\gamma_{\mathbf{i}}] f(\mathbf{V}_{\mathbf{i}}) \, \Gamma_{i_{k+1}}^{-1/\alpha} \cdots \Gamma_{i_d}^{-1/\alpha}.$$

On en déduit la convergence en probabilité de (4.3.13) vers (4.3.14) et quitte à extraire une sous-suite, la convergence presque sûre de (4.3.13) vers (4.3.14). On a finalement pour P'_Y-presque chaque y, pour $P_{\Gamma_{p+1}}$-presque chaque t_{p+1} et $\mathcal{P}^+_{t_{p+1}}$-presque chaque $t_{\geq p+1}$ la convergence :

$$\sum_{\substack{\mathbf{i} \mid p<i_{k+1}<\cdots<i_d \\ i_1=j_1,\ldots,i_k=j_k}} A_{n,\mathbf{i}}(y) \, t_{i_{k+1}}^{-1/\alpha} \cdots t_{i_d}^{-1/\alpha} \longrightarrow \sum_{\substack{\mathbf{i} \mid p<i_{k+1}<\cdots<i_d \\ i_1=j_1,\ldots,i_k=j_k}} A_{\mathbf{i}}(y) \, t_{i_{k+1}}^{-1/\alpha} \cdots t_{i_d}^{-1/\alpha}. \tag{4.3.15}$$

On obtient alors la convergence dans le même sens des coefficients des polynômes $R_{n,y,t}$ vers ceux de $R_{y,t}$ et il en est de même pour les coefficients des polynômes $c \longmapsto R_{n,y,t}(x + cv)$ vers ceux de $c \longmapsto R_{y,t}(x + cv)$.

4.3.5 Conclusion

Comme $\varphi_{n,x}$, φ_x sont des polynômes dont les coefficients des uns convergent vers ceux de l'autre dans le sens vu, on constate facilement que :

$$\|\varphi_x - \varphi_{n,x}\|_1 := \sup_{[0,\epsilon]} \left(|\varphi_x - \varphi_{n,x}| + |\varphi'_x - \varphi'_{n,x}| \right) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

On dispose du résultat suivant (*cf.* [13, th. 4.5]) :

Proposition 4.3.1 *Soit $\mathcal{P}$ une famille de mesures sur la σ-algèbre $\mathcal{B}(\Delta)$ telle que les densités des mes ıres $\mu \in \mathcal{P}$ sont équicontinues. Soit $f \in C^1(\Delta)$ avec $f' \not\equiv 0$ presque partout. Alors*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\mu \in \mathcal{P}} \left\{ \|\mu f^{-1} - \mu g^{-1}\| \;\middle|\; \|f - g\|_1 \leq \delta \right\} = 0.$$

Avec $\mathcal{P} = \{\lambda|_{[0,\epsilon]}\}$, cette proposition assure que pour chaque x fixé, quand $n \to +\infty$:

$$\|\lambda\varphi_x^{-1} - \lambda\varphi_{n,x}^{-1}\| \longrightarrow 0.$$

Finalement comme $\|\lambda\varphi_{n,x}^{-1}\| \leq \|\lambda|_{[0,\epsilon]}\| < +\infty$, par convergence dominée, on déduit de (4.3.11) que quand $n \to +\infty$:

$$\|Q^\epsilon_{t_{p+1}} F_\epsilon^{-1} - Q^\epsilon_{t_{p+1}} F_{n,\epsilon}^{-1}\| \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{(\mathbb{R}^+)^p} \|\lambda\varphi_x^{-1} - \lambda\varphi_{n,x}^{-1}\| \, \mathcal{P}_{t_{p+1}}(dx) \to 0$$

$\mathcal{P}^+_{t_{p+1}}$-presque sûrement, pour $P_{\Gamma_{p+1}}$-presque chaque t_{p+1}, P'_Y-presque chaque y
En revenant au raisonnement de la méthode de superstructure de la section 4.3.3, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$:

$$\|Q^\varepsilon_{t_{p+1}} F_\varepsilon^{-1} - Q^\varepsilon_{t_{p+1}} F_{n,\varepsilon}^{-1}\| \leq \delta/3.$$

De (4.3.10), il suit que pour tout $n \geq n_0$ et ε fixé comme précédemment en section 4.3.3 :

$$\|\mathcal{P}_{t_{p+1}} R_{y,t}^{-1} - \mathcal{P}_{t_{p+1}} R_{n,y,t}^{-1}\| \leq \delta/3 + \delta/3 + \dots$$

D'où

$$\mathcal{P}_{t_{p+1}} R_{n,y,t}^{-1} \xrightarrow{var} \mathcal{P}_{t_{p+1}} R_{y,t}^{-1} \tag{4.3.16}$$

$\mathcal{P}^+_{t_{p+1}}$-presque sûrement pour $P_{\Gamma_{p+1}}$-presque chaque t_{p+1}, on a donc la convergence (4.3.8)
On a obtenu $\mu_{n,y,t_{>p+1}} \xrightarrow{var} \mu_{y,t_{>p+1}}$ $\mathcal{P}_{t_{>p+1}}$-presque sûrement P'_Y-presque sûrement, il suit alors en remontant les étapes du raisonnement :

$$\mu_{n,y,t_{p+1}} \xrightarrow{var} \mu_{y,t_{p+1}} \quad P_{\Gamma_{p+1}}\text{-presque sûrement}, \quad P'_Y\text{-presque sûrement},$$
$$\mu_{n,y} \xrightarrow{var} \mu_y \quad P'_Y\text{-presque sûrement},$$
$$\mu_n \xrightarrow{var} \mu,$$

soit

$$\mathcal{L}(S_d(f_n)) \xrightarrow{var} \mathcal{L}(S_d(f)).$$

Finalement quand $f_n \to f$ dans $L^\alpha(\log_+)^{d-1}([0,1]^d)$ toute sous-suite de $(f_n)_{n>0}$ admet une autre sous-suite f_{n_p} avec $\mathcal{L}(S_d(f_{n_p})) \xrightarrow{var} \mathcal{L}(S_d(f))$ ce qui garantit la convergence (4.2.2) pour $\mathcal{L}(S_d(f_n))$ et achève la preuve du théorème 4.2.1. ■

Remarque 4.3.2

On pourrait adapter la méthode de conditionnements successifs utilisée dans ce chapitre pour l'appliquer à la preuve de l'absolue continuité des lois des intégrales stables multiples vue au chapitre 3. Par conditionnements, on se ramènerait à étudier une fonction vectorielle polynomiale à plusieurs variables. On discuterait alors sa non dégénérescence en étudiant un jacobien associé.
Dans le cas $\alpha > 1$, $\beta \neq 0$, on a mentionné en section 2.5.1 au chapitre 2 l'existence d'une représentation de type LePage plus générale bénéficiant des mêmes propriétés. Le résultat du théorème 4.2.1 resterait valable en tenant compte dans la preuve des termes supplémentaires de la représentation $S_d(f)$ dans ce cas.

Deuxième partie

Principe local d'invariance

Chapitre 5

Principe local d'invariance pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées

L'objet de ce chapitre est de s'intéresser à une convergence forte (c'est à dire convergence en variation) dans le théorème limite fonctionnel de Donsker-Prokhorov. Rappelons que pour une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées centrées de variance finie, la suite des lois P_n des sommes partielles normalisées associées converge faiblement vers la loi P du mouvement brownien. On cherche alors à renforcer la convergence $P_n f^{-1} \Longrightarrow Pf^{-1}$, valable pour une f fonctionnelle P-presque partout continue en $P_n f^{-1} \xrightarrow{var} Pf^{-1}$. En cas d'existence des densités, on obtient la convergence de ces densités dans $L^1(\mathbb{R})$, c'est à dire un vrai principe local d'invariance (ce sont ces applications utiles qui justifient la terminologie dans le titre de ce chapitre). Obtenir des convergences fortes de ce type ou même des renseignements sur la loi Pf^{-1} a longtemps été un problème qui ne trouvait de réponses que pour quelques fonctionnelles et avec des techniques calculatoires *ad hoc*.

Pour obtenir ces convergences fortes pour une large classe de fonctionnelles, on utilise la méthode de superstructure due à Davydov et Lifshits [13] et déjà décrite au chapitre 4, section 4.1.2. Celle-ci donne des résultats généraux qui proposent des conditions pour obtenir des convergences en variation à partir de convergences faibles.

On commence par rappeler ces résultats en section 5.1, notamment le théorème clef (théorème 5.1.2) qui sera utilisé dans toute la suite. On s'intéresse en section 5.2 au cas de la convergence donnée par le théorème de Donsker-Prokhorov. On la renforce dans le théorème 5.2.2. Par rapport aux résultats précédents, essentiellement on affaiblit substantiellement les hypothèses sur la loi commune des variables de départ au prix d'un léger renforcement sur l'existence des moments de ces variables et d'une légère restriction de la classe des fonctionnelles pour lesquelles on a la convergence en variation. On donne la preuve du théorème 5.2.2 en section 5.3, l'idée nouvelle est de voir les variables considérées comme des fonctions de variables orthogaussiennes en utilisant une transformation quantile. Les partitions utilisées pour la méthode de superstructure sont définies à partir de transformations désormais non linéaires qui sont induites par des translations admissibles de P. L'analyse du comportement asymptotique des lois conditionnelles utile au théorème 5.1.2 devient plus compliquée et demande des outils supplémentaires. La section 5.4 est consacrée à deux types d'exemples classiques qui satisfont aux conditions du théorème 5.2.2 : les fonctionnelles de type *sup* et celles de type *intégrale*. On renvoie à [4] pour une description rapide des idées de ce chapitre.

5.1 Résultats de convergence en variation

On commence par rappeler des résultats généraux sur la convergence en variation de fonctionnelles stochastiques. On considère un espace métrique, complet, séparable $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ et une suite de mesures de probabilité P_n qui converge faiblement vers P_∞.

Étant donnée une fonctionnelle $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, on cherche des conditions pour avoir $P_n f^{-1} \xrightarrow{var} P_\infty f^{-1}$. Si $P_n f^{-1}$ et $P_\infty f^{-1}$ sont absolument continues, la convergence en variation précédente est équivalente à la convergence dans $L^1(\mathbb{R})$ des dérivées de Radon-Nikodym. Si on a $P_n \xrightarrow{var} P_\infty$, il suit immédiatement que pour toute fonctionnelle f $P_n f^{-1} \xrightarrow{var} P_\infty f^{-1}$ (cf la proposition 4.1.2). Cependant une hypothèse aussi forte est rarement vérifiée en pratique, au contraire en général P_n et P_∞ sont des mesures singulières. Aussi commence-t-on par donner des conditions plus faibles assurant les convergences cherchées.

Étant données les mesures P_n et une partition Γ de $\mathcal{X}$, rappelons qu'on note $P_{n,\Gamma}$ la mesure quotient et $\{P_{n,\gamma}, \gamma \in \mathcal{X}/\Gamma\}$ le système de mesures conditionnelles de P_n par rapport à Γ.

On dispose d'un premier résultat qui donne des conditions pour avoir la convergence forte des lois de fonctionnelles stochastiques.

Théorème 5.1.1 (th. 18.3 [13]) *Soient $P_n \Rightarrow P_\infty$, $\{f_n, n \in \bar{\mathbb{N}}\}$ une suite de fonctionnelles et Γ une partition. On suppose que :*

(i) $\int_{\mathcal{X}/\Gamma} \| P_{n,\gamma} f_n^{-1} - P_{\infty,\gamma} f_\infty^{-1} \| P_{n,\Gamma}(d\gamma) \longrightarrow 0, \quad n \to +\infty$

(ii) l'application $\gamma \mapsto P_{\infty,\gamma} f_\infty^{-1}$ de $\mathcal{X}/\Gamma$ dans $\mathcal{Z}(\mathbb{R})$ est $P_{\infty,\Gamma}$ presque sûrement continue.

Alors $P_n f_n^{-1} \xrightarrow{var} P_\infty f_\infty^{-1}$.

La vérification du point *(i)* du théorème 5.1.1 sur la distance en variation des distributions fonctionnelles conditionnelles est difficile en pratique. En utilisant la méthode de superstructure décrite au chapitre 4, on obtient le théorème fondamental suivant [13, th. 18.4] qui se révèle efficace dans les problèmes de convergences fortes de fonctionnelles. Dans la suite $\lambda_{a,b}$ désignera la mesure de Lebesgue sur $[a, b]$ et λ la mesure normalisée associée.

Théorème 5.1.2 ([13]) *On considère une suite de probabilités $\{P_n, n \in \bar{\mathbb{N}}\}$ définies sur la σ-algèbre borélienne $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ d'un espace métrique, complet, séparable $(\mathcal{X}, d)$. On suppose que $P_n \Rightarrow P_\infty$ et que pour P_∞-presque chaque x, il existe une boule ouverte V*

centrée en x, un réel $\varepsilon > 0$ et une famille $\{G_{n,c},\ n \in \overline{\mathbb{N}},\ c \in (0,\varepsilon]\}$ de transformations mesurables de $\mathcal{X}$ telle que :

(i) *pour tout $c \in (0,\varepsilon)$, on a $G_{n,c} \longrightarrow G_{\infty,c}$ dans le sens de la mesure P_n quand $n \to +\infty$, c'est à dire pour tout $\alpha > 0$,*

$$P_n\{x \mid d(G_{n,c}x, G_{\infty,c}x) \geq \alpha\} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty;$$

(ii) *pour tout $c \in (0,\varepsilon)$, l'application $G_{\infty,c}$ est P_∞-presque partout continue ; de plus $\rho(S,c) = \sup_{z\in S} d(z, G_{\infty,c}z) \to 0$ quand $c \to 0$, pour toute boule ouverte S ;*

(iii) $\lim_{c\to 0} \overline{\lim}_{n\to+\infty} \|P_n G_{n,c}^{-1} - P_n\| = 0$;

(iv) *pour tout $\delta \in (0,\varepsilon)$, on a*

$$\int_V \|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{n,z}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1}\| \; P_n(dz) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \to +\infty$$

où pour $n \in \overline{\mathbb{N}}$, $c \in (0,\varepsilon]$, $\varphi_{n,z}(c) = f(G_{n,c}z)$;

(v) *pour tout $\delta \in (0,\varepsilon)$, l'application $z \longmapsto \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1}$ de V dans $\mathcal{Z}(\mathbb{R})$, l'espace des mesures signées sur $\mathbb{R}$, est P_∞-presque partout continue.*

Alors

$$P_n f^{-1} \xrightarrow{var} P_\infty f^{-1}.$$

Remarque 5.1.1

- La condition (ii) dit que la transformation limite $G_{\infty,c}$ est proche de l'identité sur les ensembles bornés pour c assez petit.
- La condition (iii) demande aux transformations $G_{n,c}$ de perturber uniformément faiblement les mesures P_n pour c petit.
- On vérifie la condition (iv) en montrant que pour P_∞-presque chaque z la convergence $z_n \to z$ implique

$$\|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{n,z_n}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1}\| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

- Pour (iv), (v), on peut utiliser des outils classiques pour les mesures en dimension finie.
- Dans la méthode de superstructure décrite en section 4.1.2 au chapitre 4, on utilise en général une famille de transformation $\{G_c\}_c$ telle que $PG_c^{-1} \xrightarrow{var} P$. Une telle famille s'obtient en considérant des translations dans les directions admissibles pour P. On a remarqué lors de la description de cette méthode qu'on se ramenait ensuite à l'étude des restrictions des fonctionnelles sur les orbites de $\{G_c\}_c$. Cela justifie que pour appliquer le théorème 5.1.2, on prendra pour $\{G_{\infty,c}\}_c$ une famille de translations admissibles pour la mesure de probabilité limite P_∞ et que les classes de fonctionnelles qu'on considérera assureront un bon comportement de leur restriction dans une direction admissible (voir définition 5.2.1).

On cite également le résultat suivant sur la convergence forte de mesures images de dimension 1, il sera utilisé dans la suite :

Proposition 5.1.1 (corollaire 2 [12]) *Soient pour $n \in \bar{\mathbb{N}}$, $g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que*

1. *g_n est absolument continue pour tout $n \in \bar{\mathbb{N}}$,*
2. *$g_n(0) \longrightarrow g_\infty(0)$ quand $n \to +\infty$,*
3. *$g_n(1) \longrightarrow g_\infty(1)$ quand $n \to +\infty$,*
4. *$g_n'(x) > 0$ presque partout pour tout $n \in \bar{\mathbb{N}}$,*
5. *$g_n'(x) \longrightarrow g_\infty'(x)$ presque partout quand $n \to +\infty$*

alors $\lambda g_n^{-1} \xrightarrow{var} \lambda g^{-1}$.

5.2 Théorème de Donsker-Prokhorov et convergence en variation

5.2.1 Le problème

Soit $\{\xi_n, n \in N\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, centrées et de variance 1, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On associe à cette suite le processus constant par morceaux :

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} \xi_i, \quad t \in [0,1] \tag{5.2.1}$$

Il est bien connu par le principe d'invariance de Donsker-Prokhorov que

$$S_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W, \quad n \to +\infty \tag{5.2.2}$$

où W est le processus du mouvement brownien standard et $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ désigne la convergence faible dans $\mathbb{D}$, espace de Skorokhod des fonctions *cadlag* sur l'intervalle $[0,1]$.

En désignant respectivement par P_n, P les lois de S_n et W, il est clair que pour toute fonctionnelle P-presque sûrement continue $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, on a aussi la convergence faible des distributions fonctionnelles :

$$P_n f^{-1} \Longrightarrow P f^{-1} \tag{5.2.3}$$

On tente de renforcer ce type de convergence faible en des convergence fortes -ou en variation- pour une classe assez large de fonctionnelles f.

Si les lois $P_n f^{-1}$, $P f^{-1}$ sont absolument continues, la convergence en variation est équivalente à la convergence des densités $\frac{dP_n f^{-1}}{d\lambda}$ vers $\frac{dP f^{-1}}{d\lambda}$ pour la métrique de $L^1(\mathbb{R})$. Autrement dit, il s'agit de théorèmes locaux limites pour les lois des fonctionnelles stochastiques $f(S_n(\cdot))$.

La difficulté du problème réside dans le fait que les mesures P_n et P sont mutuellement singulières pour tout n (c'est à dire concentrées sur des espaces disjoints).

Un premier résultat qui renforce la convergence (5.2.3) en une convergence en variation est dû à Davydov (1985) [9] (voir aussi [13, th. 20.1]). Pour cela, on impose la finitude de l'information de Fisher $I_p = \int_{\mathbb{R}} \frac{p'^2}{p} d\lambda$ de la densité p des variables ξ_n et on prend la fonctionnelle f dans une classe notée $\mathcal{M}_P$ qu'on décrit ci-après.

Théorème 5.2.1 ([9, 13]) *Soient $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ indépendantes identiquement distribuées, centrées et de variance 1. On suppose que la loi commune F des variables aléatoires ξ_n est de densité absolument continue p. Alors si l'information de Fisher I_p est finie, on a :*

$$P_n f^{-1} \xrightarrow{var} P f^{-1} \tag{5.2.4}$$

pour toute fonctionnelle f appartenant à $\mathcal{M}_P$.

Précisons d'abord quelques notations : on désigne par H_P le noyau de la loi P, c'est à dire l'ensemble des directions l admissibles pour P (par définition l est admissible pour P si pour tout c, $PT_{cl}^{-1} \ll P$ où T_{cl} est la translation selon cl). Comme P est la loi du mouvement brownien, H_P coïncide avec l'espace de Cameron-Martin (*cf.* par exemple [13, th. 7.4])

$$H_P = \{f \in \mathbb{C}([0,1]) \mid f(0) = 0,\ f' \in L^2[0,1]\}.$$

Notons pour des segments $\Delta_n = \{z_n + cl_n, c \in [0, a_n]\}$, $\Delta_n \longrightarrow \Delta$ la convergence des segments (i.e. $z_n \to z_\infty$, $l_n \to l_\infty$, $a_n \to a_\infty$) et $f_\Delta(c) = f(z + cl)$ la restriction de f à un segment Δ. On décrit alors la classe $\mathcal{M}_P$ de la façon suivante : $f \in \mathcal{M}_P$ si pour P-presque chaque x, il existe $l \in H_P$ et V voisinage de x tel que pour P-presque chaque $y \in V$ et $\Delta = \{y + cl, c \in [0,a]\} \subset V$ alors la convergence $\Delta_n \longrightarrow \Delta$ implique $\lambda f_{\Delta_n}^{-1} \xrightarrow{var} \lambda f_\Delta^{-1}$ (*cf.* [13, ğ19]).

Le but de ce chapitre est d'affaiblir la condition sur la loi commune des variables aléatoires ξ_n. Pour cela, on introduit ci-dessous dans la définition 5.2.1 la classe de fonctionnelles $\mathcal{M}_P^{(1)}$, un peu plus étroite que $\mathcal{M}_P$. Remarquons d'abord que comme l'espace $\mathbb{D}$ n'est pas séparable pour la topologie associée à la norme uniforme sur $[0,1]$, pour pouvoir appliquer le théorème 5.1.2 on considère dans la suite le sous-espace $\mathbb{E}$ de $\mathbb{D}$, fermeture pour cette norme de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{D}$ qui ont un nombre fini de sauts en des points rationnels de $[0,1]$. Muni de la norme uniforme, $\mathbb{E}$ est un espace de Banach séparable pour lequel la convergence (5.2.2) reste valable (voir [13, §20]). Notons aussi S_1 la boule unité de $\mathbb{E}$.

Définition 5.2.1 *$\mathcal{M}_P^{(1)}$ est l'ensemble des fonctionnelles f localement lipschitziennes telles que pour P-presque chaque x, il existe un voisinage $V(x)$ de x et $l \in H_P$ tels que*
- *la dérivée $D_l f(x)$ de f en x existe et est non nulle ;*
- *en notant $S_y = \{h \in S_1,$ telle que $D_h f(y)$ existe$\}$ et $A = \cup_{y \in V(x)} \{y\} \times S_y$, on a $(y, h) \in A \longmapsto D_h f(y)$ bornée et continue.*

5.2.2 Résultat principal

Théorème 5.2.2 *Soit $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, centrées et de variance 1.*
Notons $t_- = \sup\{t \mid F(t) = 0\}$, $t_+ = \inf\{t \mid F(t) = 1\}$ les bords du support de la fonction de répartition F des ξ_n. On suppose qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $\xi_1 \in L^{2+\gamma}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et que ξ_1 admet une densité p presque partout non nulle sur $[t_-, t_+]$. Alors pour toute fonctionnelle $f \in \mathcal{M}_P^{(1)}$, on a la convergence en variation (5.2.4).

Par rapport au théorème 5.2.1 de [13], on a sensiblement affaibli l'hypothèse sur la distribution F des ξ_n. Le prix à payer n'est pas très élevé : l'existence d'un moment d'ordre supérieur à 2 de ξ_1 et une *restriction* légère de la classe des fonctionnelles.

On ne remarque cette restriction de la classe qu'au niveau formel : en effet, les fonctionnelles concrètes appartiennent à $\mathcal{M}_p^{(1)}$ sous des hypothèses très proches de celles utilisées dans le cas de la classe $\mathcal{M}_p$. Par exemple d'après la définition 5.2.1, les fonctionnelles différentiables conviennent ainsi que celles du type *supremum* ou *intégrale* comme on le voit en section 5.4.

La démonstration du théorème 5.2.2 repose sur la méthode dite de *superstructure* décrite au chapitre 4 : on applique un découpage de l'espace pour exprimer les distributions fonctionnelles comme mélange de distributions conditionnelles qu'on analyse avec le théorème 5.1.2. La nouveauté principale de la preuve du théorème 5.2.2, qui a permis d'affaiblir les hypothèses sur la loi de ξ_1, consiste à représenter les variables aléatoires initiales ξ_n comme des fonctions de variables η_n orthogaussiennes par une transformation quantile

$$\xi_n = U(\eta_n).$$

On considère alors les processus $S_n(t)$ en fonction des processus analogues définis par $(\eta_n)_n$. Cela implique qu'à la place des translations admissibles de $S_n(t)$, utilisées dans la preuve du théorème 5.2.1, on se sert de transformations non linéaires induites par des translations admissibles de W. L'analyse du comportement asymptotique des lois conditionnelles devient plus compliquée et demande des outils supplémentaires.

On remarque enfin que la preuve qui suit s'adapte sans problème pour que le théorème 5.2.2 s'applique avec P_n' les lois des processus S_n' affines par morceaux définis par

$$S_n'(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} \xi_i + \frac{nt - [nt]}{\sqrt{n}}\, \xi_{[nt]+1} \tag{5.2.5}$$

à la place des processus S_n donnés par (5.2.1).

5.3 Démonstration

Essentiellement la preuve consiste en l'analyse des conditions (i) – (v) du théorème 5.1.2. Pour pouvoir l'appliquer, il faut préciser au préalable les voisinages et familles de transformations qu'on utilise. C'est l'objet de la section 5.3.1. On mène ensuite l'étude des points (i) – (v) dans les sections 5.3.2 - 5.3.9. Les plus difficiles seront (i) et (iv). Pour (iv), on passe par l'étude de deux suites g_n, h_n qu'on étudie par la proposition 5.1.1 sur la convergence en variation de mesures images de dimension 1.

5.3.1 Préliminaires

L'espace métrique complet séparable qu'on considère pour appliquer le théorème 5.1.2 est Ξ muni de la norme uniforme notée $\|\cdot\|$. On a bien la convergence faible (5.2.2) qui nous sert de point de départ.

On définit le voisinage qu'on considère pour P-presque chaque $x \in \mathbb{E}$: d'après la définition de $\mathcal{M}_P^{(1)}$, pour P-presque chaque x, on dispose d'un voisinage $V_1(x) = B(x, r_1)$ et d'une direction l à partir de laquelle on construit les familles de transformations $\{G_{n,c}\}_c$.

Comme par hypothèse $D_l f(x) \neq 0$, quitte à changer l en $-l$, on peut supposer $D_l f(x) > 0$. Par continuité de $D_. f(\cdot)$ en $(x, l/\|l\|) \in A$, il existe un voisinage $B(x, r_2) \times B(l/\|l\|, r_2') \cap A$ tel que $B(x, r_2) \subset B(x, r_1)$, f est lipschitzienne sur $B(x, r_2)$ et pour tout (y, h) dans ce voisinage de $(x, l/\|l\|)$ on a

$$D_h f(y) \geq 1/2 \, D_{l/\|l\|} f(x) > 0. \tag{5.3.1}$$

On considère alors le voisinage $V = B(x, r_3)$ de x avec $r_3 \leq r_2/5$ et $\varepsilon < r_2/a\|l\|$. On supposera de plus, quitte à diminuer ce voisinage, que $P\{\partial V(x)\} = 0$.

On définit maintenant la famille de transformations $\{G_{n,c}\}_c$ associées en se ramenant à des translations dans $\mathbb{R}^n$ définies à partir de $l \in H_P$. Pour cela, notons

$$\mathbb{E}_n = \left\{x \in \mathbb{E} \mid x \text{ constante par morceaux sur } [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}),\ k = 0, \dots, n-1, \text{ nulle en } 0\right\}$$

et considérons $\Pi_n : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}_n$ la surjection canonique donnée par :

$$\Pi_n(x)(t) = \sum_{k=0}^{[nt]} x(\frac{k}{n}) \mathbf{1}_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[} + x(1)\mathbf{1}_{\{1\}}$$

et $J_n : \mathbb{E}_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'isomorphisme naturel donné par :

$$J_n(x)_k = \sqrt{n} \left(x(\frac{k}{n}) - x(\frac{k-1}{n}) \right).$$

Notons aussi F^{-1} l'inverse de la fonction de répartition F donné par

$$F^{-1}(y) = \inf\{ x \in \mathrm{supp}(F) \mid F(x) \geq y\}$$

et Φ la fonction de répartition de la loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$.

Soient $U_n = F(\xi_n)$ des variables indépendantes identiquement distribuées uniformes et $\eta_n = \Phi^{-1}(U_n)$ des variables aléatoires orthogaussiennes, on a alors $\xi_n = F^{-1} \circ \Phi(\eta_n)$.

Introduisons les fonctions

$$U(x) = F^{-1} \circ \Phi(x), \qquad V(x) = \Phi^{-1} \circ F(x),$$

et définissons les trois transformations suivantes de $\mathbb{R}^n$:

$$\varphi(\bar{x}) = \big(V(x_1), \dots, V(x_n)\big), \quad \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \; ;$$
$$\psi(\bar{x}) = \big(U(x_1), \dots, U(x_n)\big),$$
$$\bar{G}_{n,c}(\bar{x}) = \bar{x} + c\bar{l}_n,$$

où $l_n = J_n \circ \Pi_n(l) = (l_{n,1}, l_{n,2}, \ldots, l_{n,n})$ avec

$$l_{n,i} = \sqrt{n}\left(l(\frac{i}{n}) - l(\frac{i-1}{n})\right), \quad i = 1, \ldots, n \tag{5.3.2}$$

et l est donné par la définition de $\mathcal{M}_p^{(1)}$.
On définit alors pour chaque $n \in \overline{\mathbb{N}}$ la famille de transformations $\{G_{n,c}\}_c$ qu'on utilise dans le théorème 5.1.2 par

$$\begin{aligned} G_{n,c} &= \iota_n \circ J_n^{-1} \circ \zeta' \circ \tilde{G}_{n,c} \circ \zeta \circ J_n \circ \Pi_n ; \\ G_{\infty,c} &= x + cal \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

avec $\iota_n : \mathbb{E}_n \hookrightarrow \mathbb{E}$ l'injection canonique et

$$a = \int U''(x)\, q(x)\, dx. \tag{5.3.4}$$

On résume ces définitions par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{E} & & \xrightarrow{G_{n,c}} & & \mathbb{E} \\ \Pi_n \downarrow & & & & \uparrow \iota_n \\ \mathbb{E}_n & & & & \mathbb{E}_n \\ J_n \downarrow & & & & \uparrow J_n^{-1} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\zeta} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{G}_n} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\zeta'} \mathbb{R}^n \end{array} \tag{5.3.5}$$

Remarques 1

- Pour $n < +\infty$, une expression explicite de $G_{n,c}$ est donnée par :

$$G_{n,c}x(t) = \sum_{k \le [nt]} \frac{U'(V'(\sqrt{n}(x(\frac{k}{n}) - x(\frac{k-1}{n}))) + cl_{n,k})}{\sqrt{n}} \tag{5.3.6}$$

- La fonction $U' = F^{-1} \circ \Phi$ est absolument continue sur tout intervalle fini $[a, b]$: en effet la fonction F étant de dérivée $p > 0$ presque partout il est facile de voir d'après la proposition 1.3.1 du chapitre 1 que $\lambda_{a,b} F^{-1} \ll \lambda$. On montre alors facilement l'absolue continuité de F^{-1} sur $[F(a), F(b)]$, celle de U' sur les intervalles finis suit.
En particulier U' est dérivable presque partout et pour f une fonction dU'-intégrable, on montre facilement que

$$\int f(t)\, U''(t)\, dt = \int f(t)\, dU'(t)$$

- D'après l'annexe 5.5.2, a est bien défini par l'expression (5.3.4)
- Comme $l \in H_P$ espace de Cameron-Martin, d'après (5.3.2) on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n l_{n,i}^2 &= n \sum_{i=1}^n \left(l(\frac{i}{n}) - l(\frac{i-1}{n})\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} l'(s)\, ds\right)^2 \\ &\le \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} l'(s)^2\, ds = \|l'\|_2^2 ; \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}|l_{n,i}| &\leq \sum_{i=1}^{n}|l(\frac{i}{n})-l(\frac{i-1}{n})| \leq \sum_{i=1}^{n}\int_{(i-1)/n}^{i/n}|l'(s)|\,ds \\
&\leq \int_0^1 |l'(s)|\,ds\,; \qquad (5.3.8)
\end{aligned}$$

$$\max_{i\leq n}|l_{n,i}| = \sqrt{n}\left|\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} l'(s)\,ds\right| \leq \left(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} l'(s)^2\,ds\right)^{1/2} \longrightarrow 0, \qquad (5.3.9)$$

quand $n \to +\infty$ car $l' \in L^2([0,1])$.
Dans la suite, notons h un majorant de $\{l_{n,i},\ i \leq n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

• Comme le résultat cherché concerne la convergence des lois $(P_n)_n$, il n'y a aucune restriction à appliquer le théorème de représentation de Skorokhod :

Théorème 5.3.1 (th. 6.7 [2]) *Supposons $P_n \Longrightarrow P$ et P a un support séparable. Alors il existe des variables aléatoires X_n, X définies sur un même espace de probabilité, de lois respectivement P_n, P et telles que pour tout ω*

$$X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega), \quad n \to +\infty.$$

On suppose alors qu'on travaille avec un espace $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ et $\tilde{S}_n$, $\tilde{W}$ sur cet espace tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \tilde{S}_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_n,\quad \tilde{W} \stackrel{\mathcal{L}}{=} W,\quad \tilde{S}_n \longrightarrow \tilde{W}\quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-presque sûrement} \qquad (5.3.10)$$

De la même façon on aura $\tilde{S}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i\leq[nt]}\tilde{\xi}_i^n$ avec $\tilde{\xi}_i^n$, $i \leq n$ variables indépendantes, de même loi que ξ_1, donc de densité p et avec $(\tilde{\xi}_i^n)_{i\leq n} = (U(\tilde{\eta}_i^n))_{i\leq n}$, où $\tilde{\eta}_i^n$, $i \leq n$ sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Pour ne pas alourdir les notations, on continuera à noter dans la suite S_n et W pour $\tilde{S}_n$, $\tilde{W}$ en se rappelant cependant que pour chaque n, les familles $(\tilde{\xi}_i^n)_{i\leq n}$, $(\tilde{\eta}_i^n)_{i\leq n}$ changent.

On a défini tous les outils nécessaires au théorème 5.1.2, on en vient à l'analyse de ses conditions.

5.3.2 Étude de (i)

Dans cette section, il s'agit de voir que pour tout $c \in (0,\varepsilon)$, on a :

$$G_{n,c} \xrightarrow{P_n} G_{\infty,c}, \quad n \to +\infty,$$

c'est à dire pour $\alpha > 0$, montrer que quand $n \to +\infty$:

$$P_n\{x \mid |G_{n,c}x - G_{\infty,c}x| \geq \alpha\} = \mathbb{P}\{|G_{n,c}S_n - G_{\infty,c}S_n| \geq \alpha\} \longrightarrow 0. \qquad (5.3.11)$$

Or pour $x = S_n$, (5.3.6) s'écrit :

$$G_{n,c}S_n(\cdot) = \sum_{k\le[n\cdot]} \frac{U(V(\sqrt{n}(S_n(\frac{k}{n}) - S_n(\frac{k-1}{n}))) + cl_{n,k})}{\sqrt{n}},$$

puis comme $\sqrt{n}\,(S_n(\frac{k}{n}) - S_n(\frac{k-1}{n})) = \xi_k^n$, $V(\xi_k^n) = \eta_k^n$ avec $(\eta_k^n)_{k\le n}$ variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a

$$G_{n,c}S_n(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i\le[n\cdot]} U(\eta_i^n + cl_{n,i}). \tag{5.3.12}$$

Par ailleurs $G_{\infty,c}S_n(\cdot) = (S_n + cal)(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i\le[n\cdot]} U(\eta_i^n) + cal(\cdot)$, on a alors

$$G_{n,c}S_n(\cdot) - G_{\infty,c}S_n(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i\le[n\cdot]} \left(U(\eta_i^n + cl_{n,i}) - U(\eta_i^n) - cal_{n,i}\right)$$
$$+ca\,(l([n\cdot]/n) - l(\cdot)).$$

Comme $l' \in L^2([0,1])$, on a facilement

$$\begin{aligned}
\left\| l(\frac{[n\cdot]}{n}) - l(\cdot) \right\| &= \sup_{t\in[0,1]} \left| \int_t^{[nt]/n} l'(s)\,ds \right| \\
&\le \sup_{t\in[0,1]} ([nt]/n - t)^{1/2} \left(\int_0^1 l'(s)^2\,ds \right)^{1/2} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_0^1 l'(s)^2\,ds \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

D'où

$$\left\| l(\frac{[n\cdot]}{n}) - l(\cdot) \right\| \to 0, \quad n \to +\infty \tag{5.3.13}$$

On se ramène alors à l'étude de

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i\le[n\cdot]} U(\eta_i^n + cl_{n,i}) - U(\eta_i^n) - cal_{n,i} \right\| \xrightarrow{P} 0 \tag{5.3.14}$$

En notant, pour simplifier la présentation

$$\tau_{n,i} = U(\eta_i^n + cl_{n,i}) - U(\eta_i^n) - cal_{n,i}, \qquad S_{n,k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\tau_{n,i}}{\sqrt{n}},$$

on a

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i\le[n\cdot]} U(\eta_i^n + cl_{n,i}) - U(\eta_i^n) - cal_{n,i} \right\| \\
&= \max_{k\le n} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i\le k} U(\eta_i^n + cl_{n,i}) - U(\eta_i^n) - cal_{n,i} \right| \\
&= \max_{k\le n} |S_{n,k}|
\end{aligned} \tag{5.3.15}$$

On commence par :

Étude de $\max_{k\leq n}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{k} E\tau_{n,i}\right|$.

D'après les définitions de $\tau_{n,i}$ et a, en notant q la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et en supposant $l_{n,i} \geq 0$ pour faciliter l'écriture des intervalles $[x, x + cl_{n,i}]$ (ce qui n'impose aucune véritable restriction), on a :

$$\begin{aligned}
E\tau_{n,i} &= \int \big(U(x + cl_{n,i}) - U(x)\big)\, q(x)\, dx \; - cal_{n,i} \\
&= \int\int_{[x,x+cl_{n,i}]} U'(s)\, ds\, q(x)\, dx \; - cal_{n,i} \\
&= \int\int_{[s-cl_{n,i},s]} q(x)\, dx\, U'(s)\, ds \; - cl_{n,i}\int q(s)U'(s)\, ds \\
&= \int\int_{[s-cl_{n,i},s]} \big(q(x) - q(s)\big)\, dx\, U'(s)\, ds.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\max_{k\leq n}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{k} E\tau_{n,i}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\int\left|\int_{[s-cl_{n,i},s]}\big(q(x) - q(s)\big)\, dx\right| U'(s)\, ds. \tag{5.3.16}$$

Comme

- h est un majorant de $\{l_{n,i},\ i \leq n,\ n \in \mathbb{N}\}$,
- les intégrales
$$\int U'(s)e^{-s^2/2}\, ds, \quad \int U'(s)e^{-(|s|-\varepsilon h)^2/2}\, ds$$
sont convergentes par les annexes 5.5.2 et 5.5.3,

en fixant $\alpha > 0$ arbitraire, on peut choisir $M \geq \varepsilon h$ tel que les deux intégrales

$$\int_{|s|\geq M} U'(s)e^{-s^2/2}\, ds, \quad \int_{|s|\geq M} U'(s)e^{-(|s| \qquad /2}\, ds \tag{5.3.17}$$

soient majorées par

$$\frac{\sqrt{2\pi}\,\alpha}{2\varepsilon\int_0^1 |l'(s)|\, ds}.$$

On étudie alors le membre de droite de (5.3.16) en scindant l'intégrale extérieure en deux : $(a_7) := \int_{|s|>M}$, $(a_8) := \int_{|s|\leq M}$.

Étude de (a_7).

$$\begin{aligned}
(a_7) &= \int_{|s|>M} \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{[s-cl_{n,i},s]}\big(q(x) - q(s)\big)\, dx\right| U'(s)\, ds \\
&\leq \int_{|s|>M}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{[s-cl_{n,i},s]} q(x)\, dx\right| + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} c|l_{n,i}|q(s)\right) U'(s)\, ds.
\end{aligned}$$

ur $x \in [s - cl_{n,i}, s]$, $c \in (0, \varepsilon)$, on a $|x| \geq |s| - \varepsilon h$, d'où

$$q(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi} \leq e^{-(|s|-\varepsilon h)^2/2}/\sqrt{2\pi}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{[s-cl_{n,i},s]} q(x)\,dx \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{i=1}^{n} c|l_{n,i}|\, e^{-(|s|-\varepsilon h)^2/2} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 |l'(s)|\,ds\; e^{-(|s|-\varepsilon h)^2/2}
\end{aligned}$$

la dernière inégalité est due à (5.3.8). Par choix (5.3.17) de M, il suit alors facilement $) \leq \alpha$.

ude de (a_8) $\int_{|s|<M} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{[s-cl_{n,i},s]} (q(x) - q(s))\,dx \right| U''(s)\,ds$

a

$$\begin{aligned}
\int_{[s-cl_{n,i},s]} (q(x) - q(s))\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[s-cl_{n,i},s]} (e^{-x^2/2} - e^{-s^2/2})\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{cl_{n,i}} (e^{-(s-y)^2/2} - e^{-s^2/2})\,dy \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2} \int_0^{cl_{n,i}} (e^{sy-y^2/2} - 1)\,dy
\end{aligned}$$

mme $s \in [-M, M]$, $|y| \leq cl_{n,i} < \varepsilon h$, avec K borne de l'exponentielle sur $(M + \varepsilon h/2)\varepsilon h]$, on a $|e^x - 1| \leq K|x|$ pour x dans cet intervalle. Il suit

$$\begin{aligned}
\left| \int_{[s-cl_{n,i},s]} (q(x) - q(s))\,dx \right| &\leq \frac{Ke^{-s^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_0^{cl_{n,i}} (|sy| + y^2/2)\,dy \right| \\
&\leq K\frac{e^{-s^2/2}}{\sqrt{8\pi}} \varepsilon^2 l_{n,i}^2 (|s| + \varepsilon h/3)
\end{aligned}$$

mme $|s| \leq M$, avec (5.3.7) on obtient

$$\begin{aligned}
(a_8) &\leq \int_{|s|<M} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} l_{n,i}^2 \frac{K\varepsilon^2}{\sqrt{8\pi}} (M + \varepsilon h/3) e^{-s^2/2} U''(s)\,ds \\
&\leq \frac{K\varepsilon^2}{\sqrt{8\pi n}} (M + \varepsilon h/3) \|l'\|_2^2 \int e^{-s^2/2} U''(s)\,ds \\
&= O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

nalement comme pour tout $\alpha > 0$,

$$\max_{k<n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{i=1}^{k} E\tau_{n,i} \right| < (a_7) + (a_8) \leq \alpha + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

on a alors avec $n \to +\infty$ puis $\alpha \to 0$:

$$\overline{\lim_n} \max_{k \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{i=1}^{k} E\tau_{n,i} \right| = 0. \tag{5.3.18}$$

Compte tenu de (5.3.18), l'étude de (5.3.15) se ramène maintenant à celle de

$$\max_{k \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{i=1}^{k} \tau_{n,i} - E\tau_{n,i} \right|.$$

Comme $(\tau_{n,i} - E\tau_{n,i})_{i \leq n}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes centrées et de variances finies par l'hypothèse $\xi_1 \in L^{2+\gamma}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\gamma > 0$, la suite des valeurs absolues des sommes partielles est une sous-martingale positive par rapport à la filtration canonique, l'inégalité maximale de Doob donne alors :

$$\begin{aligned}
E\left(\max_{k \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{i=1}^{k} \tau_{n,i} - E\tau_{n,i} \right| \right)^2 &= \frac{1}{n} E \max_{k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} \tau_{n,i} - E\tau_{n,i} \right|^2 \\
&\leq \frac{4}{n} E\Big(\sum_{i=1}^{n} \tau_{n,i} - E\tau_{n,i}\Big)^2 \\
&\leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n} E(U(\eta_i^n + cl_{n,i}) - U(\eta_i^n))^2
\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

en utilisant l'indépendance de la suite $(\eta_i^n)_{i \leq n}$ dans la dernière inégalité. Plusieurs utilisation du théorème de Fubini donnent :

$$\begin{aligned}
E(U(\eta_i^n + cl_{n,i}) - U(\eta_i^n))^2 &= \int \big(U(x + cl_{n,i}) - U(x)\big)^2 q(x)\, dx \\
&= \int \left(\int_{[x, x+cl_{n,i}]} U'(s)\, ds \right)^2 q(x)\, dx \\
&= \int \int_{\mathbb{R}^2} U'(s)\, U'(t) \mathbf{1}_{[x,x+cl_{n,i}]}(s) \mathbf{1}_{[x,x+cl_{n,i}]}(t)\, ds\, dt\, q(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} U'(s)\, U'(t) \int \mathbf{1}_{[s-cl_{n,i},s] \cap [t-cl_{n,i},t]}(x)\, q(x)\, dx\, dt\, ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} U'(s) \int_{[s-cl_{n,i}, s+cl_{n,i}]} U'(t) \int \mathbf{1}_{I(s,t,cl_{n,i})}(x) q(x)\, dx\, dt\, ds
\end{aligned}$$

où $I(s, t, cl_{n,i}) = [s - cl_{n,i}, s] \cap [t - cl_{n,i}, t]$ est un intervalle de longueur inférieure à $cl_{n,i}$. On scinde à nouveau l'intégrale extérieure en deux :

$$(a_9) =: \int_{|s| \leq \varepsilon h}, \qquad (a_{10}) := \int_{|s| > \varepsilon h}.$$

Étude de (a_9).

Comme $q(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, on a $\int_{I(s,t,cl_{n,1})} q(x)\,dx \leq c\frac{|l_{n,1}|}{\sqrt{2\pi}}$. Il suit

$$(a_9) \leq \varepsilon\frac{|l_{n,1}|}{\sqrt{2\pi}} \int_{|s|\leq \varepsilon h} U''(s) \int_{[s-cl_{n,1},s+cl_{n,1}]} U''(t)\,dt\,ds.$$

Puis comme on intègre des fonctions intégrables sur des domaines bornés, on a l'existence d'une constante $K_9 < +\infty$ telle que :

$$(a_9) \leq K_9\,\varepsilon|l_{n,1}|. \tag{5.3.20}$$

Étude de (a_{10}).

$$(a_{10}) = \int_{|s|\geq \varepsilon h} U''(s) \int_{[s-cl_{n,1},s+cl_{n,1}]} U''(t) \int \mathbf{1}_{I(s,t,cl_{n,1})}(x)\,q(x)\,dx\,dt\,ds.$$

Pour $x \in I(s,t,cl_{n,1})$, on a $|x| \geq |s| - \varepsilon h$ et par monotonie de q :

$$\int_{I(s,t,cl_{n,1})} q(x)\,dx \leq c\frac{|l_{n,1}|}{\sqrt{2\pi}}\,q(|s| - \varepsilon h)$$

et

$$\begin{aligned}(a_{10}) &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|s|\geq \varepsilon h} U''(s)\,c|l_{n,1}|\,q(|s| - \varepsilon h) \int_{[s-cl_{n,1},s+cl_{n,1}]} U''(t)\,dt\,ds \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|s|\geq \varepsilon h} U''(s)\,c|l_{n,1}|\,q(|s| - \varepsilon h)\big(U'(s+\varepsilon h) - U'(s-\varepsilon h)\big)\,ds.\end{aligned} \tag{5.3.21}$$

Pour voir la convergence de cette dernière intégrale, montrons plus généralement la convergence pour tout $h \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ de

$$\int_{|s|\geq\mu} U''(s)\,q(|s| - \mu)\,U'(s+h)\,ds. \tag{5.3.22}$$

On montre la convergence en $+\infty$, on ferait de même en $-\infty$.

D'après l'annexe 5.5.1, on a $U'(s) = o\left(\left(\frac{s}{q(s)}\right)^{1/(2+\gamma)}\right)$ quand $s \to +\infty$ et

$$\begin{aligned}&q(|s| - \mu)\left(\frac{s+h}{q(s+h)}\right)^{1/(2+\gamma)} \\ &= C(s+h)^{1/(2+\gamma)}\exp\left\{-\frac{s^2 - 2|s|\mu + \mu^2}{2}\right\}\exp\left\{\frac{s^2 + 2sh + h^2}{2(2+\gamma)}\right\} \\ &= C(s+h)^{1/(2+\gamma)}\exp\left\{-\frac{1+\gamma}{2(2+\gamma)}s^2\right\}\exp\left\{\frac{h}{2+\gamma}s + |s|\mu + h^2\frac{1}{2(2+\gamma)} - \frac{\mu^2}{2}\right\} \\ &= o\left(\exp\left\{-\frac{4+3\gamma}{8(2+\gamma)}s^2\right\}\right).\end{aligned}$$

On se ramène donc à voir la convergence en $+\infty$ de $\int U'(s)\exp\{-\frac{4+3\gamma}{4(2+\gamma)}s^2\}\,ds$. Pour cela, on compare l'intégrale à une série :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} U'(s)\exp\{-\frac{4+3\gamma}{8(2+\gamma)}s^2\}\,ds &\leq \sum_{n=0}^{+\infty}\exp\{-\frac{4+3\gamma}{8(2+\gamma)}n^2\}\,(U(n+1)-U(n)) \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty}\exp\{-\frac{4+3\gamma}{8(2+\gamma)}n^2\}\,U(n+1).\end{aligned}$$

Or $\exp\{-\frac{4+3\gamma}{8(2+\gamma)}n^2\}\,U(n+1) = o\Big(\exp\{-\frac{\gamma}{8(2+\gamma)}n^2\}\Big)$ terme général d'une série convergente. D'où la convergence de l'intégrale $\int^{+\infty} U'(s)\,\exp\{-\frac{4+3\gamma}{8(2+\gamma)}s^2\}\,ds$ et donc celles des intégrales (5.3.22) et (5.3.21), ce qui prouve l'existence d'une constante $K_{10} < +\infty$ telle que

$$(a_{10}) \leq K_{10}\,\varepsilon|l_{n,i}|. \tag{5.3.23}$$

De (5.3.19), (5.3.20), (5.3.23), il suit avec (5.3.8) :

$$\begin{aligned}E\left(\max_{k\leq n}\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{i=1}^{k}\tau_{n,i} - E\tau_{n,i}\right|\right)^2 &\leq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}(K_9+K_{10})\,\varepsilon|l_{n,i}| \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{n}}(K_9+K_{10})\,\varepsilon\int_0^1|l'(s)|\,ds.\end{aligned} \tag{5.3.24}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}E\max_{k\leq n}|S_{n,k}| &\leq E\left(\max_{k\leq n}\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{i=1}^{k}\tau_{n,i} - E\tau_{n,i}\right|\right) + \max_{k\leq n}\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{i=1}^{k}E\tau_{n,i}\right| \\ &\leq \left(E\left(\max_{k\leq n}\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{i=1}^{k}\tau_{n,i} - E\tau_{n,i}\right|\right)^2\right)^{1/2} + \max_{k\leq n}\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{i=1}^{k}E\tau_{n,i}\right|.\end{aligned}$$

Les équations (5.3.18), (5.3.24) assurent facilement (5.3.14) et prouvent ainsi (5.3.11). Le point (i) du théorème 5.1.2 se trouve ainsi satisfait.

5.3.3 Étude de (ii)

Dans cette section, il s'agit de voir que pour tout $c \in (0,\varepsilon)$, $G_{\infty,c}$ est P-presque sûrement continue et que pour toute boule ouverte B, on a quand $c \to 0$:

$$\sup_{z\in B} d_\infty(z, G_{\infty,c}z) \longrightarrow 0 \tag{5.3.25}$$

où d_∞ est la distance associée à la norme uniforme.
Or il est clair que $G_{\infty,c} : x \longmapsto x + cal$ est continue pour tout $c \in (0,\varepsilon)$. Avec $B = B(x,r)$, on a $d_\infty(z, G_{\infty,c}z) = ca\|l\|$ donc (5.3.25) est satisfaite et le point (ii) est facilement vérifié.

5.3.4 Étude de *(iii)*

Dans cette section, il s'agit de montrer

$$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n}}\|P_nG_{n,c}^{-1} - P_n\| = 0. \tag{5.3.26}$$

Rappelons que

$$S_n(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[n\cdot]}\xi_i^n = J_n^{-1}(\xi_1^n,\dots,\xi_n^n)$$

et qu'avec $\eta^n = (\eta_1^n,\dots,\eta_n^n)$ de loi notée $\mathcal{P}_n$, on a $(\xi_1^n,\dots,\xi_n^n) = \psi(\tilde\eta^n)$. Comme $S_n = J_n^{-1}\circ\psi(\tilde\eta^n)$, on a

$$P_n = \mathbb{P}S_n^{-1} = \mathbb{P}(J_n^{-1}\circ\psi(\tilde\eta^n))^{-1} = \mathcal{P}_n(J_n^{-1}\circ\psi)^{-1}$$

D'après la définition de $G_{n,c}$ donnée en (5.3.3), il est facile de voir, en utilisant les notations introduites en section 5.3.1, que :

$$G_{n,c}S_n = J_n^{-1}\circ\psi(\tilde G_{n,c}\tilde\eta^n)$$

D'où

$$P_nG_{n,c}^{-1} = \mathbb{P}(G_{n,c}S_n)^{-1} = \mathbb{P}(J_n^{-1}\circ\psi\circ\tilde G_{n,c}(\tilde\eta^n))^{-1} = \mathcal{P}_n\tilde G_{n,c}^{-1}(J_n^{-1}\circ\psi)^{-1}$$

Il suit

$$\begin{aligned}\|P_nG_{n,c}^{-1} - P_n\| &= \|\mathcal{P}_n\tilde G_{n,c}^{-1}(J_n^{-1}\circ\psi)^{-1} - \mathcal{P}_n(J_n^{-1}\circ\psi)^{-1}\|\\ &\le \|\mathcal{P}_n\tilde G_{n,c}^{-1} - \mathcal{P}_n\|.\end{aligned} \tag{5.3.27}$$

Comme $\mathcal{P}_n = \mathcal{L}(\eta^n)$ est la loi normale standard de dimension n, et que la quantité de Fisher de q, densité de $\mathcal{N}(0,1)$, est $I_q = \int_{\mathbb{R}}\frac{q'^2}{q}d\lambda = 1$, on peut estimer $\|\mathcal{P}_n\tilde G_{n,c}^{-1} - \mathcal{P}_n\|$ à l'aide du lemme 20.1 de [13] :

$$\|\mathcal{P}_n\tilde G_{n,c}^{-1} - \mathcal{P}_n\| \le c\,\|U\|_2 \tag{5.3.28}$$

De (5.3.27), (5.3.28), on déduit facilement (5.3.26) et donc le point *(iii)* du théorème 5.1.2.

Remarque 5.3.1 C'est pour la vérification de ce point que la condition $I_p < +\infty$ sur l'information de Fisher est supposée satisfaite dans le théorème 5.2.1. C'est cette étape qui a motivé l'introduction de la famille de transformations définies en (5.3.3), en effet son intérêt réside dans l'expression (5.3.12) qui montre que ces transformations agissent en fait sur la suite orthogaussienne $(\eta_i^n)_{i\le n}$. Elle permet ainsi de se ramener par (5.3.27) à des estimations sur les lois normales standards de dimension n et de se dispenser de la condition sur l'information de Fisher

5.3.5 Étude de (v)

Avant de s'intéresser à la longue vérification du point (iv) dans les sections 5.3.6–5.3.9, on étudie d'abord (v).
Il s'agit de montrer que pour tout $\delta \in (0,\varepsilon)$, avec $\varphi_{\infty,z}(c) = f(G_{\infty,c}z)$, l'application $z \longmapsto \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1}$ de V dans $\mathcal{Z}(\mathbb{R})$, espace des mesures signées sur $\mathbb{R}$, est P-presque sûrement continue.

Pour cela, on montre que pour P-presque chaque $z \in V$, la convergence $z_n \longrightarrow z$ entraîne

$$\|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z_n}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1}\| \longrightarrow 0. \tag{5.3.29}$$

Soient $\Delta_n = \{z_n + cal,\ c \in [0,\delta]\}$, $\Delta = \{z + cal,\ c \in [0,\delta]\}$ des segments, comme $z_n \longrightarrow z$, on a la convergence des segments $\Delta_n \longrightarrow \Delta$ quand $n \to +\infty$ (par convergence des segments, on entend la convergence de leur direction, longueur et point de référence). Comme z_n, $z \in B(x,r_3)$ et $c \le \delta \le \varepsilon \le \frac{r_3}{a\|l\|}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta_n,\ \Delta \subset B(x,2r_3) \subset B(x,r_2).$$

Par choix des voisinages, f est lipschitzienne sur $B(x,r_2)$ et $Df(\cdot)$ est continue sur $B(x,r_2) \times B(l/\|l\|,r_2') \cap A$.

Notons f_{Δ_n}, f_Δ les restrictions de f aux segments Δ_n, Δ, on a alors

$$\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z_n}^{-1} = \lambda f_{\Delta_n}^{-1}, \qquad \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1} = \lambda f_{\Delta}^{-1}.$$

On étudie $\lambda f_{\Delta_n}^{-1} \xrightarrow{var} \lambda f_{\Delta}^{-1}$ en vérifiant les conditions $1-5$ de la proposition 5.1.1 sur la convergence en variation de mesures images.

1. L'absolue continuité de f_{Δ_n}, f_Δ s'obtient par le lemme 5.3.1 suivant car $c \longmapsto z_n + cal$, $c \longmapsto z + cal$ sont absolument continues et sont à valeurs dans $B(x,r_2)$ où f est lipschitzienne.

Lemme 5.3.1 (annexe 5.5.4) *Soient $(f_1,\dots,f_p) : [a,b] \longrightarrow V \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ une application de composantes absolument continues, $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne. Alors $G = F(f_1,\dots,f_p)$ est absolument continue.*

2. $f_{\Delta_n}(0) = f(z_n)$, $f_\Delta(0) = f(z)$, comme $z_n \longrightarrow z$ et f est continue en $z \in B(x,r_2)$, on a bien $f_{\Delta_n}(0) \longrightarrow f_\Delta(0)$.

3. $f_{\Delta_n}(\delta) = f(z_n + \delta al)$, $f_\Delta(\delta) = f(z + \delta al)$, comme $z_n + \delta al \longrightarrow z + \delta al \in B(x,r_2)$ où f est continue, on a bien $f_{\Delta_n}(\delta) \longrightarrow f_\Delta(\delta)$.

4. On a $f'_{\Delta_n}(c) = D_{al}f(z_n + cal)$, $f'_\Delta(c) = D_{al}f(z + cal)$. Comme

$$(z_n + cal, l/\|l\|),\quad (z + cal, l/\|l\|) \in B(x,r_2) \times B(l/\|l\|,r_2') \cap A, \tag{5.3.30}$$

de (5.3.1), on déduit $D_lf(z_n + cal)$, $D_lf(z + cal) > 0$, c'est à dire

$$f'_{\Delta_n}(c),\quad f'_\Delta(c) > 0 \quad \text{presque partout.}$$

5. D'après (5.3.30), $Df(\ )$ est continue sur ce voisinage produit et $z_n+cal \longrightarrow z+cal$, on a quand $n \to +\infty$

$$f'_{\Delta_n}(c) = D_{al}f(z_n + cal) \longrightarrow f'_{\Delta}(c) = D_{al}f(z + cal) \quad \text{presque partout.}$$

Finalement, la proposition 5.1.1 s'applique et donne (5.3.29), ce qui assure le point (v) du théorème 5.1.2

5.3.6 Étude de (iv)

Il s'agit de montrer qu'avec pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}}$, $\varphi_{n,z} : c \mapsto f(G_{n,c}z)$, on a :

$$\overline{\lim_n} \int_V \|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{n,z}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1}\| P_n(dz) = 0. \tag{5.3.31}$$

Pour cela, on étudie les deux suites auxiliaires ci-dessous

$$\begin{aligned} - \quad g_n(\omega, c) &= f(G_{n,c}S_n), \quad g_\infty(\omega, c) = f(G_{\infty,c}W), \\ h_n(\omega, c) &= f(G_{\infty,c}S_n), \quad h_\infty = g_\infty \end{aligned}$$

Rappelons qu'on travaille avec un espace probabilisé dû au théorème de représentation de Skorokhod 5.3.1 et pour lequel on a la convergence (5.3.10) $\mathbb{P}$-presque sûre : $S_n \longrightarrow W$

Étude de la suite $(h_n)_n$

On vérifie pour la suite $h_n(\omega, c) = f(S_n + cal)$ les points 1 – 5 de la proposition suivante justifiée en annexe 5.5.6 à partir de la proposition 5.1.1

Proposition 5.3.1 *Soient pour $n \in \overline{\mathbb{N}}$, $f_n : (\Omega \times [0,\delta], \mathcal{F} \times \mathcal{B}([0,\delta]), \mathbb{P} \otimes \lambda) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega^* \in \mathcal{F}$ tels que*

1. $\forall \omega \in \Omega^*$, $\exists N_1(\omega)$, $\forall n > N_1(\omega)$, $f_n(\omega, \cdot)$ *est absolument continue ;*
2. $f_n(\omega, 0) \xrightarrow{\mathbb{P}} f_\infty(\omega, 0)$ *sur* Ω^* ,
3. $f_n(\omega, \delta) \xrightarrow{\mathbb{P}} f_\infty(\omega, \delta)$ *sur* Ω^* ,
4. $\forall \omega \in \Omega^*$, $\exists N_4(\omega)$, $\forall n > N_4(\omega)$, $\frac{\partial}{\partial c} f_n(\omega, c) > 0$ *λ-presque partout pour* $c \in (0,\delta)$,
5. $\frac{\partial}{\partial c} f_n(\omega, c) \xrightarrow{\mathbb{P}\otimes\lambda} \frac{\partial}{\partial c} f_\infty(\omega, c)$ *sur* Ω^* .

alors

$$\|\lambda_{[0,\delta]} f_n(\omega, \cdot)^{-1} - \lambda_{[0,\delta]} f_\infty(\omega, \cdot)^{-1}\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \ \textit{sur}\ \Omega^*$$

1. Pour $\omega \in W^{-1}(V)$, il existe un entier $N_1(\omega)$ tel que pour tout $n \geq N_1(\omega)$, $\|S_n - W\| \leq r_3$, on a donc pour $n \geq N_1(\omega)$, $c \leq \delta \leq r_3/a\|l\|$,

$$S_n + cal \in B(x, 3r_3) \subset B(x, r_2)$$

où f est lipschitzienne. L'absolue continuité de $h_n(\omega, \cdot)$ pour tout $n \geq N_1(\omega)$ suit alors du lemme 5.3.1.

2, 3. $h_n(\omega, c) = f(G_{\infty,c}S_n)$, $h_\infty(\omega, c) = f(G_{\infty,c}W)$.
Pour c fixé, quand $n \to +\infty$, on a $S_n + cal \longrightarrow W + cal \in B(x, r_2)$ où f est continue. D'où la convergence presque sûre et donc en probabilité de $f(S_n + cal)$ vers $f(W + cal)$, soit

$$h_n(\omega, c) \xrightarrow{\mathbb{P}} h_\infty(\omega, c).$$

Avec $c = 0$, $c = \delta$, on obtient **2, 3**.

4. Étude de $\frac{\partial}{\partial c}h_n(\omega, c)$, $n \in \overline{\mathbb{N}}$.
Comme $W + cal \in B(x, r_2)$ où f est lipschitzienne, $h_\infty(\omega, \cdot)$ est dérivable presque partout sur $[0, \delta]$ avec

$$\frac{\partial}{\partial c}h_\infty(\omega, c) = D_{al}f(G_{\infty,c}W). \tag{5.3.32}$$

Comme

$$(G_{\infty,c}W, l/\|l\|) \in B(x, r_2) \times B(l/\|l\|, r_2') \cap A$$

où $D.f(\cdot) > 0$, on a pour tout $\omega \in W^{-1}(V)$, $\frac{\partial}{\partial c}h_\infty(\omega, c) > 0$ presque partout

Comme pour $n \geq N_1(\omega)$, $S_n + cal \in B(x, r_2)$ où f est lipschitzienne, de la même façon, pour tout $\omega \in W^{-1}(V)$, $h_n(\omega, \cdot)$ est dérivable presque partout sur $[0, \delta]$ avec

$$\frac{\partial}{\partial c}h_n(\omega, c) = D_{al}f(G_{\infty,c}S_n) > 0. \tag{5.3.33}$$

On a donc pour tout $\omega \in W^{-1}(V)$, presque partout :

$$\frac{\partial}{\partial c}h_n(\omega, c) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial c}h_\infty(\omega, c) > 0.$$

5. Étude de $\frac{\partial}{\partial c}h_n(\omega, c) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{\partial}{\partial c}h_\infty(\omega, c)$.
D'après **4**, pour chaque $\omega \in W^{-1}(V)$, les dérivées de $h_n(\omega, \cdot)$, $h_\infty(\omega, \cdot)$ sont données presque partout par (5.3.33), (5.3.32).
Or $S_n + cal \longrightarrow W + cal$ $\mathbb{P}$-presque sûrement et $(S_n + cal, l/\|l\|) \in B(x, r_2) \times B(l/\|l\|, r_2') \cap A$ où $D.f(\cdot)$ est continue, il suit la convergence

$$D_{al}f(G_{\infty,c}S_n) \longrightarrow D_{al}f(G_{\infty,c}W).$$

Ainsi $\mathbb{P}$-presque sûrement pour $\omega \in W^{-1}(V)$, pour $\breve{\lambda}$-presque chaque $c \in [0, \delta]$, on a

$$\frac{\partial}{\partial c}h_n(\omega, c) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial c}h_\infty(\omega, c).$$

La proposition 5.3.1 s'applique pour la suite $(h_n)_n$ et donne : $\forall \alpha > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left\{\omega \in W^{-1}(V)\,,\ \|\lambda_{[0,\delta]}h_n(\omega, \cdot)^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}h_\infty(\omega, \cdot)^{-1}\| > \alpha\right\} = 0. \tag{5.3.34}$$

Étude de la suite $(g_n)_n$

On utilise pour $(g_n)_n$ une autre version de la proposition 5.3.1 dérivée d'un corollaire de la proposition 5.1.1 (*cf* annexe 5.5.6) :

Proposition 5.3.2 *Soient pour $n \in \overline{\mathbb{N}}$, $f_n : (\Omega \times [0,\delta], \mathcal{F} \times \mathcal{B}([0,\delta]), \mathbb{P} \otimes \bar{\lambda}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega^* \in \mathcal{F}$ tels que*

1. $\forall \omega \in \Omega^*, \quad \exists N_1(\omega), \quad \forall n \geq N_1(\omega), \quad f_n(\omega, \cdot)$ *est absolument continue ;*
2. $f_n(\omega, 0) \xrightarrow{\mathbb{P}} f_\infty(\omega, 0)$ *sur* Ω^* ;
3. $\forall \omega \in \Omega^*, \quad \frac{\partial}{\partial c} f_\infty(\omega, c) > 0$ *λ-presque partout pour $c \in (0, \delta)$;*
4. $\left\| \frac{\partial}{\partial c} f_n(\omega, c) - \frac{\partial}{\partial c} f_\infty(\omega, c) \right\|_{L^1} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ *sur* Ω^* ;

alors

$$\|\lambda_{[0,\delta]} f_n(\omega, \cdot)^{-1} - \lambda_{[0,\delta]} f_\infty(\omega, \cdot)^{-1}\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \text{ sur } \Omega^*$$

La vérification des hypothèses de cette proposition pour la suite $(g_n)_n$ nécessite une étude préalable d'un vecteur tangent à la trajectoire. On la donne en section 5.3.7, on vérifie ensuite les hypothèses de la proposition en section 5.3.8.

5.3.7 Étude du vecteur tangent

On étudie ici le vecteur tangent noté $L_{n,S_n,c}$ à la trajectoire $\{G_{n,c}S_n\}_c$ en c.
On rappelle (5.3.12) :

$$G_{n,c}S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leq [n\cdot]} U'(\eta_i^n + c l_{n,i}), \qquad G_{\infty,c}W = W + cal.$$

Par dérivabilité presque partout de U', pour chaque $t \in [0,1]$, on a pour $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ fixés presque partout en c :

$$\frac{\partial}{\partial c}(G_{n,c}S_n(t)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} l_{n,i} U''(\eta_i^n + c l_{n,i}) \tag{5.3.35}$$

On montre que (5.3.35) est valable aussi dans $\mathbb{E}$ pour presque chaque $c \in [0,\delta]$: par dérivabilité presque partout de U', pour chaque ω, n fixés, pour tout $\varepsilon > 0$, pour presque chaque c, il existe $\alpha(\omega, n, c)$ tel que pour $|\delta'| \leq \alpha(\omega, n, c)$ et $i = 1, \ldots, n$, on a :

$$\left| \frac{U'(\eta_i^n + c l_{n,i} + \delta') - U'(\eta_i^n + c l_{n,i}) - \delta' U''(\eta_i^n + c l_{n,i})}{\delta'} \right| \leq \varepsilon \tag{5.3.36}$$

Comme $|l_{n,i}| \leq h$ pour tout $i \leq n$, pour $|\delta| \leq \alpha(\omega, n, c)/h$, (5.3.36) avec $\delta' = \delta l_{n,i}$ donne :

$$
\begin{aligned}
&\left\| G_{n,c+\delta} S_n - G_{n,c} S_n - \frac{\delta}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[n\cdot]} l_{n,i} U'(\eta_i^n + c l_{n,i}) \right\| \\
&\leq \sup_{t \in [0,1]} \sum_{i=1}^{[nt]} \left| \frac{U(\eta_i^n + c l_{n,i} + \delta l_{n,i}) - U(\eta_i^n + c l_{n,i}) - \delta l_{n,i} U'(\eta_i^n + c l_{n,i})}{\sqrt{n}} \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \delta |l_{n,i}| \\
&\leq \varepsilon \delta \int_0^1 |l'(s)| \, ds.
\end{aligned}
$$

Finalement pour tout $\omega \in \Omega$, il existe $A(\omega) \in \mathcal{B}([0, \delta])$, $\lambda\{A(\omega)\} = 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c \notin A(w)$, on a la dérivabilité en c :

$$
L_{n,S_n,c} := \frac{\partial}{\partial c}(G_{n,c} S_n)(c) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[n\cdot]} l_{n,i} \, U'(\eta_i^n + c l_{n,i}). \tag{5.3.37}
$$

Comme il est facile de voir que $\{(\omega, c), \, G_{n,c} S_n$ est dérivable en $c\} \in \mathcal{F} \otimes B$, par le théorème de Fubini, pour presque chaque $c \in [0, \delta]$, on a
$\mathbb{P}\{\omega \mid G_{n,c} S_n$ est dérivable en $c\} = 1$.

Pour $n = +\infty$, il est clair que le vecteur tangent à la trajectoire limite $\{G_{\infty,c} W\}_c$ est al.

Étude d'une convergence de $L_{n,S_n,c}$ vers al

On montre la convergence de $L_{n,S_n,c}$ vers al dans le [illegible] suivant :

$$
\frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \| L_{n,S_n,c} - al \| \, dc \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \tag{5.3.38}
$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme uniforme dans l'espace $\mathbb{E}$ dans lequel vivent les fonctions $L_{n,S_n,c}$ et al.
On a

$$
\begin{aligned}
\| L_{n,S_n,c} - al \| &= \| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[n\cdot]} l_{n,i} \, U'(\eta_i^n + c l_{n,i}) - al \| \\
&\leq \| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[n\cdot]} l_{n,i} \, (U'(\eta_i^n + c l_{n,i}) - a) \| + a \| l - l([n\cdot]/n) \|.
\end{aligned}
$$

Comme par (5.3.13), $\| l - l(\frac{[n\cdot]}{n}) \| \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$, pour voir (5.3.38), il suffit d'étudier la convergence de

$$
\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[n\cdot]} l_{n,i} \, (U'(\eta_i^n + c l_{n,i}) - a) \right\| = \max_{k \leq n} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k} l_{n,i} \, (U'(\eta_i^n + c l_{n,i}) - a) \right|. \tag{5.3.39}
$$

Pour cela on utilise les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
&- \ \dot{l}_{n,i} = l_{n,i}/\sqrt{n}\,;\\
&\ \ \ h(x) = l''(x) - a\,;\\
&\ \ \ \zeta_{n,i}(c) = h(\eta_i^n + c\dot{l}_{n,i})\,;\\
&- \ \zeta_{n,i}^s(c) = \zeta_{n,i}(c)\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(c)| \le s},\ s > 0.
\end{aligned} \tag{5.3.40}$$

Remarquons que par l'annexe 5.5.3, les variables $\zeta_{n,i}(c)$, $i \le n$ sont intégrables et pour $c = 0$, $\zeta_{n,i}(0)$, $i \le n$ sont des variables aléatoires, de même loi, intégrables, centrées. Par convergence dominée, on a facilement les convergences :

$$E(|\zeta_{1,1}(0)|\mathbf{1}_{|\zeta_{1,1}(0)|>s}) \longrightarrow 0, \qquad E\zeta_{1,1}^s(0) \longrightarrow 0, \qquad s \to +\infty \tag{5.3.41}$$

On décompose alors $\zeta_{n,i}(c)$ de la façon suivante

$$\zeta_{n,i}(c) = (\zeta_{n,i}^s(c) - E\zeta_{n,i}^s(c)) + \zeta_{n,i}(c)\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(c)|>s} + E\zeta_{n,i}^s(c).$$

On étudie les sommes correspondant à chacun des trois termes précédents

$$\begin{aligned}
(a_{11}) &:= \zeta_{n,i}^s(c) - E\zeta_{n,i}^s(c),\\
(a_{12}) &:= E\zeta_{n,i}^s(c),\\
(a_{13}) &:= \zeta_{n,i}(c)\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(c)|>s}.
\end{aligned}$$

Étude de (a_{11})

On s'intéresse à $\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \max_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^k \dot{l}_{n,i}(\zeta_{n,i}^s(c) - E\zeta_{n,i}^s(c))\right| dc$. Par le théorème de Fubini et l'inégalité maximale de Doob, on a :

$$\begin{aligned}
&E\left(\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \max_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^k \dot{l}_{n,i}(\zeta_{n,i}^s(c) - E\zeta_{n,i}^s(c))\right| dc\right)^2\\
&\le E\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \max_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^k \dot{l}_{n,i}(\zeta_{n,i}^s(c) - E\zeta_{n,i}^s(c))\right|^2 dc\\
&\le \frac{1}{\delta}\int_0^\delta E\max_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^k \dot{l}_{n,i}(\zeta_{n,i}^s(c) - E\zeta_{n,i}^s(c))\right|^2 dc\\
&\le \frac{4}{\delta}\int_0^\delta E\left(\sum_{i=1}^n \dot{l}_{n,i}(\zeta_{n,i}^s(c) - E\zeta_{n,i}^s(c))\right)^2 dc\\
&\le \frac{4}{\delta}\int_0^\delta \sum_{i=1}^n \dot{l}_{n,i}^2\, E(\zeta_{n,i}^s(c) - E\zeta_{n,i}^s(c))^2\, dc\\
&\le \frac{4s^2}{n}\|l'\|_2^2
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité s'obtient par la majoration (5.3.7). Il suit quand $n \to +\infty$:

$$E\left(\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \max_{k\leq n}\left|\sum_{i=1}^k \hat{l}_{n,i}(\zeta^s_{n,i}(c) - E\zeta^s_{n,i}(c))\right| dc\right)^2 \longrightarrow 0. \qquad (5.3.42)$$

Étude de (a_{12})
On montre ici que .

$$\lim_{s\to+\infty}\overline{\lim_n}\int_0^\delta \max_{k\leq n}\left|\sum_{i=1}^k \hat{l}_{n,i}E\zeta^s_{n,i}(c)\right| dc = 0. \qquad (5.3.43)$$

Pour cela, on a $\max_{k\leq n}\left|\sum_{i=1}^k \hat{l}_{n,i}E\zeta^s_{n,i}(c)\right| \leq \sum_{i=1}^n |\hat{l}_{n,i}|\,|E\zeta^s_{n,i}(c)|$.
Montrons que

$$\sup_{i\leq n,\,c\in[0,\delta]} |E\zeta^s_{n,i}(c) - E\zeta^s_{n,i}(0)| \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n\to +\infty. \qquad (5.3.44)$$

On a

$$\begin{aligned}
&\sup_{i\leq n,\,c\in[0,\delta]} |E\zeta^s_{n,i}(c) - E\zeta^s_{n,i}(0)| \\
&= \sup_{i\leq n,\,c\in[0,\delta]}\left|\int h(x+cl_{n,i})\mathbf{1}_{|h(x+cl_{n,i})|\leq s}\, q(x)\,dx - \int h(x)\mathbf{1}_{|h(x)|\leq s}\, q(x)\,dx\right| \\
&= \sup_{i\leq n,\,c\in[0,\delta]}\left|\int h(x)\mathbf{1}_{|h(x)|\leq s}\left(q(x-cl_{n,i}) - q(x)\right)dx\right| \\
&\leq \sup_{i\leq n,\,c\in[0,\delta]} s\int |q(x-cl_{n,i}) - q(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

Or comme q est intégrable, par continuité de l'opérateur de translation dans L^1, on obtient facilement la limite (5.3.44).

Finalement, comme les variables $(\zeta^s_{\cdot,i}(0))_{i\leq n}$ sont identiquement distribuées, avec (5.3.8) :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n |\hat{l}_{n,i}|\,|E\zeta^s_{n,i}(c)| \\
&\leq \sum_{i=1}^n |\hat{l}_{n,i}|\,|E\zeta^s_{n,i}(0)| + \sum_{i=1}^n |\hat{l}_{n,i}|\,|E\zeta^s_{n,i}(c) - E\zeta^s_{n,i}(0)| \\
&\leq \int_0^1 |l'(s)|\,ds\left(|E\zeta^s_{1,1}(0)| + \sup_{i\leq n,c\in[0,\delta]}|E\zeta^s_{n,i}(c) - E\zeta^s_{n,i}(0)|\right).
\end{aligned}$$

Il suit

$$\int_0^\delta \max_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}\dot l_{n,i}E\zeta^s_{n,i}(c)\right|dc$$
$$\le \delta\int_0^1 |l'(s)|\,ds\left(|E\zeta^s_{1,1}(0)| + \sup_{i\le n,\,c\in[0,\delta]}|E\zeta^s_{n,i}(c) - E\zeta^s_{n,i}(0)|\right).$$

En utilisant (5.3.44) quand $n\to+\infty$ puis $E\zeta^s_{1,1}(0)\longrightarrow 0$ quand $s\to+\infty$ obtenue par la convergence dominée (5.3.41), on déduit de la majoration précédente la limite (5.3.43) pour la somme correspondant à (a_{12}).

Étude de (a_{13}). On a facilement

$$\max_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}\dot l_{n,i}\zeta_{n,i}(c)\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(c)|>s}\right| \le \sum_{i=1}^{n}|\dot l_{n,i}|\,|\zeta_{n,i}(c)|\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(c)|>s}$$

Par un changement de variable, on a

$$E|\zeta_{n,i}(c)|\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(c)|>s} = \int |h(x)|\mathbf{1}_{|h(x)|>s}\,q(x - c\dot l_{n,i})\,dx,$$

puis :

$$\sup_{\substack{i\le n\\ c\in[0,\delta]}}\left|E|\zeta_{n,i}(c)|\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(c)|>s} - E|\zeta_{n,i}(0)|\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(0)|>s}\right|$$
$$= \sup_{\substack{i\le n\\ c\in[0,\delta]}}\left|\int |h(x)|\,\mathbf{1}_{|h(x)|>s}\,q(x - c\dot l_{n,i})\,dx - \int |h(x)|\mathbf{1}_{|h(x)|>s}\,q(x)\,dx\right|$$
$$\le \int |h(x)|\,\mathbf{1}_{|h(x)|>s}\sup_{\substack{i\le n\\ c\in[0,\delta]}}|q(x - c\dot l_{n,i}) - q(x)|\,dx$$

Or, on a :

- $|h(x)\mathbf{1}_{|h(x)|>s}| \le a + U''(x)$ fonction intégrable sur les compacts,
- $$\int |h(x)|\mathbf{1}_{|h(x)|>s}\,q(|x|+\lambda)\,dx \le \int a\,q(|x|+\lambda)dx + \int U''(x)\,q(|x|+\lambda)\,dx < +\infty$$

où la finitude de la dernière intégrale est due au résultat suivant (cf. annexe 5.5.5)

Lemme 5.3.2 *Pour tout $\lambda>0$, en notant q la densité de $\mathcal{N}(0,1)$, on a :*

$$\int U''(x)q(|x|+\lambda)\,dx < +\infty$$

Le lemme 5.3.3 qui suit s'applique et comme $\sup_{i\leq n,\, c\in[0,\delta]} |c l_{n,i}| \longrightarrow 0$, il donne

$$\sup_{\substack{i\leq n\\ c\in[0,\delta]}} \left| E|\zeta_{n,i}(c)|\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(c)|>s} - E|\zeta_{n,i}(0)|\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(0)|>s} \right| \longrightarrow 0, \quad n \to +\infty. \tag{5.3.45}$$

Lemme 5.3.3 (annexe 5.5.5) *Soit f intégrable sur les compacts telle que pour θ assez petit on a :*

$$\int |f(t)|\, q(|t| + \theta)\, dt < +\infty.$$

Alors

$$\int \sup_{|\theta|\leq l} |q(t) - q(t+\theta)|\, |f(t)|\, dt \longrightarrow 0 \quad \textit{quand } l \to 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
E\int_0^\delta \max_{k\leq n} \left|\sum_{i=1}^k \hat{l}_{n,i}\zeta_{n,i}(c)\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(c)|>s}\right| &= \int_0^\delta E\max_{k\leq n}\left|\sum_{i=1}^k \hat{l}_{n,i}\zeta_{n,i}(c)\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(c)|>s}\right| dc \\
&\leq \sum_{i=1}^n |\hat{l}_{n,i}| \int_0^\delta E|\zeta_{n,i}(c)|\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(c)|>s}\, dc \\
&\leq \sum_{i=1}^n |\hat{l}_{n,i}| \int_0^\delta \left|E|\zeta_{n,i}(c)|\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(c)|>s} - E|\zeta_{n,i}(0)|\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(0)|>s}\right| dc \\
&\qquad + \sum_{i=1}^n |\hat{l}_{n,i}| \int_0^\delta E|\zeta_{1,1}(0)|\mathbf{1}_{|\zeta_{1,1}(0)|>s}\, dc \\
&\leq \delta \int_0^1 |l'(s)|\, ds\, \Big(\sup_{\substack{i\leq n\\ c\in[0,\delta]}} \left|E|\zeta_{n,i}(c)|\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(c)|>s} - E|\zeta_{n,i}(0)|\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(0)|>s}\right| \\
&\qquad + E|\zeta_{1,1}(0)|\mathbf{1}_{|\zeta_{1,1}(0)|>s}\Big)
\end{aligned}$$

par la majoration (5.3.8). Avec $n \to +\infty$, puis $s \to +\infty$, il suit alors des estimations (5.3.45) et (5.3.41) :

$$\lim_{s\to+\infty} \overline{\lim_n}\, E\int_0^\delta \max_{k\leq n}\left|\sum_{i=1}^k \hat{l}_{n,i}\zeta_{n,i}(c)\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(c)|>s}\right| dc = 0. \tag{5.3.46}$$

D'après (5.3.42), (5.3.43), (5.3.46), comme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \left\|\sum_{i=1}^{[n\cdot]} \hat{l}_{n,i}\zeta_{n,i}(c)\right\| dc &\leq \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \left\|\sum_{i=1}^{[n\cdot]} \hat{l}_{n,i}(\zeta^s_{n,i}(c) - E\zeta^s_{n,i}(c))\right\| dc \\
&+ \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \left\|\sum_{i=1}^{[n\cdot]} \hat{l}_{n,i}\zeta_{n,i}(c)\mathbf{1}_{|\zeta_{n,i}(c)|>s}\right\| dc + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \left\|\sum_{i=1}^{[n\cdot]} \hat{l}_{n,i}E\zeta^s_{n,i}(c)\right\| dc,
\end{aligned}$$

on obtient facilement :

$$\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \Big\|\sum_{i=1}^{[n]} l_{n,i}\zeta_{n,i}(c)\Big\|\,dc \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

c'est à dire la convergence (5.3.38) pour $L_{n,S_n,\cdot}$.

Il est facile de voir qu'on a aussi pour chaque $c \in [0,\delta]$ fixé, la convergence en probabilité de $L_{n,S_n,c}$ vers al :

$$L_{n,S_n,c} \xrightarrow{\mathbb{P}} al. \tag{5.3.47}$$

Il suffit en effet de voir la convergence en probabilité vers de 0 de l'expression (5.3.39). Pour cela, on reprend l'étude des sommes correspondants à (a_{11}), (a_{12}) et (a_{13}) comme précédemment mais sans intégrer par rapport a $c \in [0,\delta]$.

5.3.8 Vérification des hypothèses de la proposition 5.3.2 pour la suite $(g_n)_n$

1. Absolue continuité de $g_n(\omega,\cdot)$, $n \in \overline{\mathbb{N}}$.

On se sert ici du caractère local lipschitzien de f. L'absolue continuité de $g_\infty(\omega,\cdot) = h_\infty(\omega,\cdot)$ a déjà été vue lors de l'étude de h_n en section 5.3.6. Étudions $g_n(\omega,\cdot) = f(G_{n,c}S_n)$.

Notons $u^{(n)} : c \longmapsto (u_1^{(n)}(c), u_2^{(n)}(c), \dots, u_n^{(n)}(c))$ avec

$$u_i^{(n)}(c) = \frac{1}{\sqrt{n}}V(\eta_i^n + cl_{n,i})$$

Comme pour chaque $\omega \in \Omega$ fixé, $\eta_i^n + cl_{n,i}$ reste dans un compact, $u_i^{(n)}$ est absolument continue. On utilise alors le lemme 5.3.1. Pour cela, soit $\theta_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{E}$, donnée par

$$\theta_n(x)(t) = \sum_{i=1}^{[nt]} x_i, \quad t \in [0,1].$$

L'application θ_n est clairement lipschitzienne. De plus

$$\theta_n(u^{(n)}(c)) = G_{n,c}S_n.$$

Pour ω, n, c fixés, il existe un voisinage ouvert convexe $V(G_{n,c}S_n)$ de $G_{n,c}S_n$ sur lequel f est lipschitzienne. Il est clair que $G_{n,s}S_n \to G_{n,c}S_n$ quand $s \to c$, il existe alors $I_c(\omega,n)$ voisinage de c dans $[0,\delta]$ tel que pour $s \in I_c(\omega,n)$,

$$G_{n,s}S_n = \theta_n(u^{(n)}(s)) \in V(G_{n,c}S_n)$$

Comme θ_n est linéaire et $V(G_{n,c}S_n)$ est un ouvert convexe, on a

$$u^{(n)}(s) \in \theta_n^{-1}(V(G_{n,c}S_n))$$

On a alors

- $f \circ \theta_n$ lipschitzienne sur $\theta_n^{-1}(V(G_{n,c}S_n))$;
- $u^{(n)}(s) \in \theta_n^{-1}(V(G_{n,c}S_n))$ pour $s \in I_c(\omega, n)$ et $u^{(n)}$ est à composantes absolument continues.

Le lemme 5.3.1 donne alors $f \circ \theta_n \circ u^{(n)} = f(G_{n,\cdot}S_n) = g_n(\omega, \cdot)$ est absolument continue sur $I_c(\omega, n)$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $c \in [0, \delta]$, la fonction $g_n(\omega, \cdot)$ est absolument continue au voisinage $I_c(\omega, n)$. En extrayant une couverture finie de $[0, \delta]$ par des $I_{c_k}(\omega, n)$, on obtient l'absolue continuité de $g_n(\omega, \cdot)\, \forall \omega$, $\forall n$.

2. On a $g_n(\omega, 0) \xrightarrow{\mathbb{P}} g_\infty(\omega, 0)$ en effet cette convergence se réduit à celle de $f(S_n)$ vers $f(W)$ qui a été vue en section 5.3.6 lors de l'étude de h_n.

3. Il s'agit ici de vérifier que $g_n(\omega, \delta) \xrightarrow{\mathbb{P}} g_\infty(\omega, \delta)$ c'est à dire

$$f(G_{n,\delta}S_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(G_{\infty,\delta}W).$$

Il est facile de voir par le point (i), déjà vérifié, du théorème 5.1.2 et par la convergence (5.3.10) due au théorème de représentation de Skorokhod que

$$G_{n,\delta}S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} G_{\infty,\delta}W, \quad n \to +\infty.$$

Soit alors (n') une sous-suite quelconque et $(n'') \subset (n')$ celle que pour presque chaque $\omega \in W^{-1}(V)$, on a $G_{n'',\delta}S_{n''} \longrightarrow G_{\infty,\delta}W$. On a $W + \delta a l \in B(x, 2r_3)$ où f est continue, on a donc $f(G_{n'',\delta}S_{n''}) \longrightarrow f(G_{\infty,\delta}W)$ $\mathbb{P}$-presque sûrement.
D'où pour $\omega \in W^{-1}(V)$:

$$f(G_{n,\delta}S_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(G_{\infty,\delta}W) \quad \text{soit} \quad g_n(\omega, \delta) \xrightarrow{\mathbb{P}} g_\infty(\omega, \delta).$$

4. Étude de $\frac{\partial}{\partial c} g_n(\omega, c)$, $n \in \overline{\mathbb{N}}$.
On a vu en 1 l'absolue continuité pour chaque ω, n fixés de $g_n(\omega, \cdot)$, $g_\infty(\omega, \cdot)$. Les dérivées $\frac{\partial}{\partial c} g_n(\omega, c)$, $\frac{\partial}{\partial c} g_\infty(\omega, c)$ sont donc définies sur le complémentaire d'un ensemble $\tilde{A}(\omega) \in \mathcal{B}([0, \delta])$, $\lambda\{\tilde{A}(\omega)\} = 0$.
Comme $g_\infty = h_\infty$, (5.3.32) donne déjà que pour tout $\omega \in W^{-1}(V)$, pour presque chaque c :

$$\frac{\partial}{\partial c} g_\infty(\omega, c) = D_{al} f(G_{\infty,c}W).$$

Soient ω, n fixés, on montre que f est dérivable selon $L_{n,S_n,c}$ en $G_{n,c}S_n$. On rappelle que $L_{n,S_n,c}$ est le vecteur tangent à la trajectoire $\{G_{n,c}S_n\}_c$ et qu'il est donné par (5.3.37).
On a pour presque chaque c, quand $h \to 0$:

$$\frac{f(G_{n,c+h}S_n) - f(G_{n,c}S_n)}{h} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial c} g_n(\omega, c).$$

On montre alors

$$\frac{\partial}{\partial c} g_n(\omega, c) = D_{L_{n,S_n,c}} f(G_{n,c}S_n) \tag{5.3.48}$$

en montrant que

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{f(G_{n,c}S_n + hL_{n,S_n,c}) - f(G_{n,c}S_n)}{h} - \frac{f(G_{n,c+h}S_n) - f(G_{n,c}S_n)}{h}\right\| = 0.$$

Comme pour h assez petit, $G_{n,c}S_n + hL_{n,S_n,c}$ et $G_{n,c+h}S_n$ sont dans un voisinage de $G_{n,c}S_n$ où f est lipschitzienne

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{f(G_{n,c}S_n + hL_{n,S_n,c}) - f(G_{n,c+h}S_n)}{h}\right\| \\ &\qquad \leq \frac{C(\omega, n, c)}{h}\|G_{n,c}S_n + hL_{n,S_n,c} - G_{n,c+h}S_n\|\end{aligned}$$

Or pour presque chaque c, l'existence du vecteur tangent $L_{n,S_n,c}$ s'écrit

$$\frac{G_{n,c}S_n + hL_{n,S_n,c} - G_{n,c+h}S_n}{h} \longrightarrow 0, \quad h \to 0$$

On a donc (5.3.48) pour presque chaque $c \in [0,\delta]$.
On trouve ainsi pour chaque $\omega \in W^{-1}(V)$, un ensemble $\tilde{A}'(\omega) \in \mathcal{B}([0,\delta])$ négligeable tel que sur son complémentaire, λ-presque sûrement

$$\frac{\partial}{\partial c}g_n(\omega, c) = D_{L_{n,S_n,c}}f(G_{n,c}S_n), \qquad \frac{\partial}{\partial c}g_\infty(\omega, c) = D_{al}f(G_{\infty,c}W). \tag{5.3.49}$$

5. Comme $g_\infty = h_\infty$, on a $\frac{\partial}{\partial c}g_\infty(\omega, c) > 0$ presque partout pour $\omega \in W^{-1}(V)$ d'après l'étude de h_∞ en section 5.3.6.

6. Vérification du point (iv) de la proposition 5.3.2 pour la suite g_n

Il s'agit de conclure la vérification de (iv) pour la suite $(g_n)_n$ et de montrer que quand $n \to +\infty$,

$$\left\|\frac{\partial}{\partial c}g_n(\omega,\cdot) - \frac{\partial}{\partial c}g_\infty(\omega,\cdot)\right\|_{L^1(0,\delta)} \xrightarrow{?} 0 \tag{5.3.50}$$

Pour cela, on utilise la convergence (5.3.38) de $L_{n,S_n,c}$ vers al.
D'abord, comme $G_{n,c}S_n(t)$ est absolument continue, on a

$$G_{n,c}S_n(t) = S_n(t) + \int_0^c L_{n,S_n,s}(t)\,ds, \qquad G_{\infty,c}W(t) = W(t) + cal.$$

Il suit

$$\begin{aligned}\|G_{n,c}S_n - G_{\infty,c}W\| &\leq \|S_n - W\| + \sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^c L_{n,S_n,s}(t) - al(t)\,ds\right| \\ &\leq \|S_n - W\| + \int_0^\delta \|L_{n,S_n,s} - al\|\,ds\end{aligned}$$

Des convergences (5.3.38), (5.3.10), on déduit alors :

$$\sup_{c\in[0,\delta]} \|G_{n,c}S_n - G_{\infty,c}W\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \to +\infty. \tag{5.3.51}$$

On a vu en (5.3.47), $L_{n,S_n,c} \xrightarrow{\mathbb{P}} al$ pour tout $c \in [0,\delta]$ avec $L_{n,S_n,c}$ donné par l'expression (5.3.37). En constatant que $(\omega, c) \longmapsto L_{n,S_n,c}$ est $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$-mesurable, par le théorème de Fubini, on peut renforcer la convergence précédente en

$$L_{n,S_n,c} \xrightarrow{\mathbb{P}\otimes\bar{\lambda}} al. \tag{5.3.52}$$

De la même façon, on pourrait renforcer $G_{n,c}S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} G_{\infty,c}W$ pour tout c, en raison de la convergence (5.3.10) et au point (i) déjà satisfait du théorème 5.1.2 en

$$G_{n,c}S_n \xrightarrow{\mathbb{P}\otimes\bar{\lambda}} G_{\infty,c}W.$$

Considérons (n') une sous-suite quelconque, on commence par extraire $(n'') \subset (n')$ pour obtenir des convergences presque sûres des convergences (5.3.38), (5.3.51). Soit ω dans cet ensemble presque sûr, rappelons que pour $\bar{\lambda}$-presque chaque $c \in [0,\delta]$, on a

$$\frac{\partial}{\partial c} g_{n''}(\omega, c) = D_{L_{n'',S_{n''},c}} f(G_{n'',c}S_{n''}), \qquad \frac{\partial}{\partial c} g_{\infty}(\omega, c) = D_{al} f(G_{\infty,c}W).$$

D'après ce qui précède, il existe $N(\omega)$ tel que pour tout $n'' \geq N(\omega)$, pour tout $c \in [0,\delta]$, on a $G_{n'',c}S_{n''} \in B(x, r_2)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{\partial}{\partial c} g_{n''}(\omega,\cdot) - \frac{\partial}{\partial c} g_{\infty}(\omega,\cdot) \right\|_{L^1([0,\delta])} \\
&= \int_{[0,\delta]} \left| D_{L_{n'',S_{n''},c}} f(G_{n'',c}S_{n''}) - D_{al} f(G_{\infty,c}W) \right| dc \\
&= \int_{[0,\delta]} \left| D_{\frac{L_{n'',S_{n''},c}}{\|L_{n'',S_{n''},c}\|}} f(G_{n'',c}S_{n''}) \|L_{n'',S_{n''},c}\| - D_{l/\|l\|} f(G_{\infty,c}W) a\|l\| \right| dc \\
&\leq \int_{[0,\delta]} \left| D_{\frac{L_{n'',S_{n''},c}}{\|L_{n'',S_{n''},c}\|}} f(G_{n'',c}S_{n''}) \right| \left| \|L_{n'',S_{n''},c}\| - a\|l\| \right| dc \\
&\qquad + a\|l\| \int_{[0,\delta]} \left| D_{\frac{L_{n'',S_{n''},c}}{\|L_{n'',S_{n''},c}\|}} f(G_{n'',c}S_{n''}) - D_{l/\|l\|} f(G_{\infty,c}W) \right| dc.
\end{aligned}$$

Comme $\left(G_{n'',c}S_{n''}, \frac{L_{n'',S_{n''},c}}{\|L_{n'',S_{n''},c}\|}\right) \in A$, où l'ensemble A est défini dans la définition 5.2.1 de la classe $\mathcal{M}_p^{(1)}$, le premier terme se majore par

$$K \int_{[0,\delta]} \|L_{n'',S_{n''},c} - al\| \, dc$$

qui tend vers 0 quand $n'' \to +\infty$.

Comme $\left(G_{n''}, S_{n''}, \frac{L_{n''}, S_{n''}, \epsilon}{\|L_{n''}, S_{n''}, \epsilon\|}\right), (G_\infty, W, l/\|l\|) \in A$, et pour presque tout ϵ

$$G_{n''}, S_{n''} \longrightarrow G_\infty, W, \quad \frac{L_{n''}, S_{n''}, \epsilon}{\|L_{n''}, S_{n''}, \epsilon\|} \longrightarrow l/\|l\|,$$

on a

$$D_{\frac{L_{n''}, S_{n''}, \epsilon}{\|L_{n''}, S_{n''}, \epsilon\|}} f(G_{n''}, S_{n''}) \longrightarrow D_{l/\|l\|} f(G_\infty, W), \quad n'' \to \infty.$$

Comme de plus la suite est bornée, par convergence dominée, il suit la convergence vers 0 du deuxième terme. D'où finalement pour toute sous-suite (n'), l'existence de $(n'') \subset (n')$ telle que presque sûrement on a la convergence cherchée. On obtient donc la convergence (5.3.50) et le point (iv) de la proposition 5.3.2 pour la suite $(g_n)_n$.

Conclusion pour la suite g_n

On a vérifié les conditions de la proposition 5.3.2, elle s'applique et donne

$$\forall \alpha > 0, \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left\{\omega \in W^{-1}(V) \mid \|\lambda_{[0,\delta]} g_n(\omega, \cdot)^{-1} - \lambda_{[0,\delta]} g_\infty(\omega, \cdot)^{-1}\| > \alpha\right\} = 0. \quad (5.3.53)$$

5.3.9 Vérification finale du point (iv) du théorème 5.1.2

Comme $h_\infty = g_\infty$, on a

$$\begin{aligned}
&\|\lambda_{[0,\delta]} g_n(\omega, \cdot)^{-1} - \lambda_{[0,\delta]} h_n(\omega, \cdot)^{-1}\| \\
&\leq \|\lambda_{[0,\delta]} g_n(\omega, \cdot)^{-1} - \lambda_{[0,\delta]} g_\infty(\omega, \cdot)^{-1}\| + \|\lambda_{[0,\delta]} h_n(\omega, \cdot)^{-1} - \lambda_{[0,\delta]} h_\infty(\omega, \cdot)^{-1}\|.
\end{aligned}$$

On déduit alors des études de h_n et g_n des sections précédentes menant respectivement à (5.3.34) et (5.3.53) que pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left\{\omega \in W^{-1}(V) \mid \|\lambda_{[0,\delta]} g_n(\omega, \cdot)^{-1} - \lambda_{[0,\delta]} h_n(\omega, \cdot)^{-1}\| > \alpha\right\} = 0.$$

Comme $\lambda_{[0,\delta]} g_n(\omega, \cdot)^{-1} = \lambda_{[0,\delta]} \hat{r}_{n, S_n}^{-1}$ et $\lambda_{[0,\delta]} h_n(\omega, \cdot)^{-1} = \lambda_{[0,\delta]} \hat{r}_{\infty, S_n}^{-1}$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{\omega \in S_n^{-1}(V) \mid \|\lambda_{[0,\delta]} \hat{r}_{n, S_n}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]} \hat{r}_{\infty, S_n}^{-1}\| > \alpha\right\} \\
&\leq \mathbb{P}\left\{\omega \in W^{-1}(V) \mid \|\lambda_{[0,\delta]} \hat{r}_{n, S_n}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]} \hat{r}_{\infty, S_n}^{-1}\| > \alpha\right\} + \mathbb{P}\{S_n^{-1}(V) \setminus W^{-1}(V)\}.
\end{aligned}$$

Puisque $S_n \longrightarrow W$ et $P(\partial V) = 0$, on a $\mathbb{P}\{S_n \in V, W \notin V\} \to 0$ et il suit

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in S_n^{-1}(V) \mid \|\lambda_{[0,\delta]} \hat{r}_{n, S_n}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]} \hat{r}_{\infty, S_n}^{-1}\| > \alpha\right\} \longrightarrow 0,$$

soit

$$\lim_{n \to \infty} P_n\left\{z \in V \mid \|\lambda_{[0,\delta]} \hat{r}_{n,z}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]} \hat{r}_{\infty,z}^{-1}\| > \alpha\right\} = 0. \quad (5.3.54)$$

On a alors en notant pour simplifier $A_{n,\alpha} = \{z \mid \|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{n,z}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1}\| > \alpha\}$:

$$\begin{aligned}
&\int_V \|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{n,z}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1}\| \, P_n(dz) \\
&= \int_{V\cap A_{n,\alpha}} \|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{n,z}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1}\| P_n(dz) + \int_{V\cap A_{n,\alpha}^c} \|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{n,z}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1}\| \, P_n(dz) \\
&\leq 2P_n\left\{z \in V \,\middle|\, \|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{n,z}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1}\| > \alpha\right\} + \alpha \int_{V\cap A_{n,\alpha}^c} P_n(dz).
\end{aligned}$$

D'après (5.3.54), quand $n \to \infty$, on a

$$\overline{\lim_n} \int_V \|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{n,z}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1}\| \, P_n(dz) \leq \alpha.$$

Avec $\alpha \to 0$, on obtient

$$\overline{\lim_n} \int_V \|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{n,z}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1}\| \, P_n(dz) = 0.$$

5.3.10 Conclusion

On a finalement vérifié toutes les hypothèses du théorème 5.1.2, il s'applique et prouve la conclusion (5.2.4) pour le théorème 5.2.2.

5.4 Exemples de fonctionnelles de $\mathcal{M}_P^{(1)}$

On donne dans cette section deux types de fonctionnelles de $C([0,1])$ de type *sup* ou *intégrale*, pour lesquelles on a la convergence (5.2.4) du théorème 5.2.2 :

- $x \longmapsto \sup_{t\in[0,1]} \varphi(x(t))$ où φ est convexe, de dérivée non nulle presque partout (i.e. le graphe de φ n'a pas de palier minimum) ;
- $x \longmapsto \int_0^1 q(x(t))\,dt$ où q est lipschitzienne sur les compacts et telle qu'il existe S, $\lambda(S^c) = 0$ où q' existe, est continue et non nulle.

On explique en section 5.4.3 qu'en renforçant légèrement les conditions sur les fonctions φ et q précédentes, les fonctionnelles proposées sont dans $\mathcal{M}_P^{(1)}$ (voir la proposition 5.4.2).

On commence par une propriété de la classe $\mathcal{M}_P^{(1)}$ dont on disposait déjà pour la classe $\mathcal{M}_P^{(a)}$ du théorème 5.2.1 de [13] :

Proposition 5.4.1 *Pour $f \in \mathcal{M}_P^{(1)}$, on a $Pf^{-1} \ll \lambda$.*

Démonstration : On commence par remarquer que les conditions définissant $\mathcal{M}_P^{(1)}$ permettent d'appliquer le lemme qui suit, garantissant l'appartenance à $\mathcal{M}_P^{(a)}$ classe de fonctions définie dans [13, §19] dont on rappelle la propriété essentielle suivante : si $f \in \mathcal{M}_P^{(a)}$ pour P-presque chaque x, il existe un voisinage V tel que pour P-presque chaque $y \in V$ et $\Delta \subset V$, $\Delta = \{y + cl,\ c \in [0, a]\}$ segment selon l, avec $f_\Delta(c) = f(y + cal)$ la restriction de f à Δ, on a

$$\lambda f_\Delta^{-1} \ll \lambda \tag{5.4.1}$$

Lemme 5.4.1 (th. 19.1, [13]) *Supposons les conditions suivantes satisfaites pour P-presque chaque x*

la dérivée $Df(x)$ est faiblement continue en x ;

$Df(x)(H_P) \neq \{0\}$.

Alors $f \in \mathcal{M}_P^{(a)}$

Soient alors x dans l'ensemble P presque sûr donné par la propriété rappelée et V, $l \in H_P$ les voisinage de x et direction admissible associés. On considère la partition Γ en lignes parallèles à l. En notant P_Γ la mesure quotient, γ les strates associées à la partition, pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$P_V f^{-1}(A) = \int_{V/\Gamma} P_\gamma f^{-1}(A)\, P_\Gamma(d\gamma) \tag{5.4.2}$$

Comme d'après le théorème 3.1.2 du chapitre 3, pour P_Γ-presque chaque strate γ, P_γ est absolument continue par rapport à λ_γ mesure de Lebesgue sur la strate γ et $\lambda_\gamma f^{-1} = \lambda f_\Delta^{-1}$ pour un segment $\Delta \subset V$, (5.4.1), (5.4.2) donnent $P_V f^{-1} \ll \lambda$. On conclut alors facilement par séparabilité ∎

Remarque 5.4.1 Cette proposition est importante pour les applications intéressantes des convergences fortes (5.2.4). Rappelons que dans le cas où $P_n f^{-1} \ll \lambda$ et $P f^{-1} \ll \lambda$, (5.2.4) est équivalente à la convergence dans $L^1(\mathbb{R})$ des densités de ces lois.

5.4.1 Étude de la fonctionnelle du type *sup*

On considère la fonctionnelle $g : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$g(x) = \sup_{t \in [0,1]} \varphi(x(t)) \tag{5.4.3}$$

où φ est convexe, de dérivée presque partout non nulle.
En particulier, φ est lipschitzienne sur tout compact et il existe $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(S^c) = 0$ tel que φ' existe, est continue et est non nulle sur S.

Notons $M_x = \{t \in [0, 1] \mid g(x) = \varphi(x(t))\}$ et rappelons que P est la loi du processus du mouvement brownien. On a alors

Lemme 5.4.2 *Pour P-presque chaque $x \in C([0, 1])$, $\# M_x = 1$.*

Démonstration : Comme φ est convexe, $\sup_{t \in [0,1]} \varphi(W(t))$ est atteint en au plus deux points

$$t_- = \operatorname{argmin}_{t \in [0,1]} W(t), \qquad t_+ = \operatorname{argmax}_{t \in [0,1]} W(t)$$

presque sûrement uniques (*cf.* [20, 8.16]).
Comme $\left(\sup_{t\in[0,1]} W(t),\ \inf_{t\in[0,1]} W(t)\right)$ a une densité (*cf.* [2, section 11]), il est facile de voir par convexité de φ :

$$\mathbb{P}\left(\varphi(\sup_{t\in[0,1]} W(t)) = \varphi(\inf_{t\in[0,1]} W(t))\right) = 0.$$

D'où $\mathbb{P}$-presque sûrement, $\#M_W = 1$. ∎

On note dans la suite $t_x = \mathrm{argmax}_{t\in[0,1]}\varphi(x(t))$, le lemme 5.4.2 justifie cette notation pour P-presque chaque x.

Lemme 5.4.3 *Pour P-presque chaque x, on a $x(t_x) \in S$.*

Démonstration : Avec les notations t_-, t_+ de la preuve du lemme 5.4.2, posons

$$E^- = \{\varphi(W(t_+)) < \varphi(W(t_-))\}, \qquad E^+ = \{\varphi(W(t_-)) < \varphi(W(t_+))\}.$$

Comme d'après le lemme 5.4.2, $E^+ \cup E^-$ est un ensemble presque sûr, avec $B \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(B) = 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{W(t_W) \in B\} \\
&= P\left(\{\sup_{t\in[0,1]} W(t) \in B\} \cap E^+\right) + P\left(\{\inf_{t\in[0,1]} W(t) \in B\} \cap E^-\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} W(t) \in B\right) + \mathbb{P}\left(\inf_{t\in[0,1]} W(t) \in B\right) = 0
\end{aligned}$$

car $\sup_{t\in[0,1]} W(t)$ et $\inf_{t\in[0,1]} W(t)$ sont de lois absolument continues.
On a ainsi montré l'absolue continuité de la loi de $W(T_W)$; comme $\lambda(S^c) = 0$, le résultat suit facilement. ∎

On note $B_0 = \{x \in C([0,1]) \mid x(t_x) \in S\}$, d'après le lemme 5.4.3, on a : $\mathbb{P}\{W \in B_0\} = 1$. On a alors le résultat suivant de dérivabilité :

Lemme 5.4.4 *Pour tout $x \in B_0$ et $l \in C([0,1])$, g est dérivable en x selon l, avec :*

$$D_l g(x) = \varphi'(x(t_x))\, l(t_x). \tag{5.4.4}$$

Démonstration : Notons φ'_g, φ'_d les dérivées respectivement à gauche et à droite de φ. Le graphe de φ convexe étant au dessus de toute droite d'appui, pour tout $m \in [\varphi'_g(x), \varphi'_d(x)]$ on a :

$$\varphi(x) + m\, y \leq \varphi(x+y).$$

Soit $x \in B_0$, t_x est alors bien défini et $x(t_x) \in S$ (en particulier φ est dérivable en $x(t_x)$). Il suit

$$\varphi(x(t_x)) + \varphi'(x(t_x))\, c\, l(t_x) \leq \varphi(x(t_x) + c\, l(t_x)) \leq g(x + c\, l).$$

Comme $\varphi(x(t_x)) = g(x)$, on a $\varphi'(x(t_x))\, c\, l(t_x) \le g(x + c\,l) - g(x)$

Par ailleurs pour c réel, notons t'_c un point de M_{x+cl} et

$$m(t'_c) \in [\varphi'_g(x(t'_c) + c\, l(t'_c)),\ \varphi'_d(x(t'_c) + c\, l(t'_c))],$$

on a alors :

$$\begin{aligned} g(x + c\,l) = \varphi(x(t'_c) + c\, l(t'_c)) &\le \varphi(x(t'_c)) + m(t'_c)\, c\, l(t'_c) \\ &\le g(x) + m(t'_c)\, c\, l(t'_c). \end{aligned}$$

D'où

$$\varphi'(x(t_x))\, c\, l(t_x) \le g(x + c\,l) - g(x) \le m(t'_c)\, c\, l(t'_c) \qquad (5.4.5)$$

Soit $(c_n)_n$ une suite positive avec $c_n \to 0$, notons $t_n = t'_{c_n} \in M_{x+c_n l}$.
On montre facilement que $t_n \to t_x$ en extrayant de toute sous-suite une plus fine qui converge vers t_x : en effet $\forall (n') \subset (n)$, par compacité de $[0,1]$, il existe (n'') telle que $t_{n''} \to t_\infty$, comme $x + c_{n''} l \to x$, on a $g(x + c_{n''} l) \to g(x)$, c'est à dire

$$\varphi(x(t_{n''}) + c_{n''} l(t_{n''})) \to \varphi(x(t_x)).$$

or comme $x(t_{n''}) + c_{n''} l(t_{n''}) \to x(t_\infty)$, par continuité de φ, on a

$$\varphi(x(t_{n''}) + c_{n''} l(t_{n''})) \to \varphi(x(t_\infty)).$$

On obtient donc $\varphi(x(t_\infty)) = h(x) = \varphi(x(t_x))$, soit $t_\infty \in M_x = \{t_x\}$
Comme $x \in B_0$, φ' est continue en $x(t_x)$, on a alors

$$\begin{aligned} l(t_n) &\longrightarrow l(t_x) \\ \varphi'_g(x(t_n) + c_n l(t_n)) &\longrightarrow \varphi'(x(t_x)), \\ \varphi'_d(x(t_n) + c_n l(t_n)) &\longrightarrow \varphi'(x(t_x)) \end{aligned}$$

En passant à la limite dans la double inégalité (5.4.5), on a :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(x + c_n l) - g(x)}{c_n} = \varphi'(x(t_x))\, l(t_x)$$

On obtient donc

$$D^+_l g(x) = \varphi'(x(t_x))\, l(t_x)$$

On peut faire un calcul identique qui mène à la dérivabilité à gauche avec la même dérivée, d'où finalement l'existence de la dérivée et son expression (5.4.4). ■

Vérification des hypothèses

Soit x fixé dans B_0 ensemble de mesure P pleine d'après le lemme 5.4.3, en particulier $t_x = \mathrm{argmax}_{[0,1]}\varphi(x)$ est bien défini. Considérons le voisinage $B(x, 1)$ de x.

1. On note $M = \|x\| + 1$, comme φ convexe est lipschitzienne sur tout compact, en notant K_M sa constante de Lipschitz sur $[-M, M]$, on a :

$$|g(y) - g(x)| \leq \sup_{t\in[0,1]} \left|\varphi(x(t)) - \varphi(y(t))\right| \leq K_M \|x - y\|.$$

2. D'après le lemme 5.4.4, on a $D_l g(x) = \varphi'(x(t_x))\, l(t_x)$.
Comme t_x réalise $\sup_{t\in[0,1]} \varphi(x(t))$, par convexité de φ, on a $\varphi'(x(t_x)) \neq 0$. On peut alors facilement choisir $l \in H_P$ tel que $D_l g(x) \neq 0$.

3. Rappelons que $A = \{(y, l) \mid \|l\| = 1,\ D_l g(y) \text{ définie } \}$.

Remarque 5.4.2 Dans la preuve du théorème 5.2.2, on travaille avec $y = G_{n,c}S_n$ fonction affine par morceaux définie par

$$G_{n,c}S_n\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k} U(\eta_i^n + c\, l_{n,i}), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Il est clair que $\sup_{t\in[0,1]} \varphi(G_{n,c}S_n)$ est réalisé en un point $\frac{k}{n}$. Comme U est dérivable presque partout de dérivée $U' = \frac{g}{p\circ U}$ presque partout non nulle,

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k} U(x_i + c\, l_{n,i})\right)_{1\leq k\leq n}$$

est de jacobien $n^{-n/2} \prod_{i=1}^n U'(x_i + c\, l_{n,i})$ qui est presque partout non nul. On dispose alors du résultat suivant (*cf.* proposition 1.3.1 du chapitre 1) :

Lemme 5.4.5 *Soit $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ mesurable différentiable sur un ensemble $B \subset \Delta$. Soit $\mu \ll \lambda^n$, si $\lambda^n\{x \in B \mid \det Df(x) = 0\} = 0$ alors $\mu_B f^{-1} \ll \lambda^n$.*

On déduit de ce lemme que le vecteur

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k} U(\eta_i^n + c\, l_{n,i})\right)_{1\leq k\leq n}$$

est de loi absolument continue. On en déduit que $\mathbb{P}$-presque sûrement,
$\sup_{t\in[0,1]} \varphi(G_{n,c}S_n)$ est réalisé en un unique point k_0/n avec

$$G_{n,c}S_n(k_0/n) \in S.$$

On a donc $G_{n,c}S_n \in B_0$ avec la dérivée de g en $G_{n,c}S_n$ selon $l \in C([0,1])$ donnée par l'expression (5.4.4).

Comme la propriété de continuité et de bornitude de $D\, f(\cdot)$ est utilisée dans la preuve du théorème 5.2.2 pour $y = G_{n,c}S_n$, on peut considérer par la remarque 5.4.2 que $D_l g(y) = \varphi'(y(t))\, l(t)$ avec $t \in M_y$.

On a alors $|D_l g(y)| \leq \sup_{[-M,M]} |\varphi'| \, \|l\| = K_M$, l'application $(y,l) \longmapsto D_l g(y)$ est donc bornée.

Soit $(y_n, l_n) \to (y, l)$ avec $y \in B_0$, ensemble P-presque sûr.
Comme $y_n \to y$, on montre comme dans la preuve du lemme 5.4.4 en passant par des sous-suites qu'avec $t_n \in M_{y_n}$, on a $t_n \to t_y$.

On a $y_n(t_n) \to y(t_y)$ puis comme $y \in B_0$, par continuité de φ' en $y(t_y) \in S$, on a $\varphi'(y_n(t_n)) \to \varphi'(y(t_y))$.
Comme $t_n \to t_y$, $l_n \to l$, on a aussi $l_n(t_n) \to l(t_y)$, on obtient finalement :
$\varphi'(y_n(t_n))\, l_n(t_n) \to \varphi'(y(t_y))\, l(t_y)$, c'est à dire :

$$D_{l_n} g(y_n) \longrightarrow D_l g(y).$$

On vérifie pour les fonctionnelles (5.4.3) de type *sup* les conditions utilisées dans la preuve du théorème 5.2.2, on ne vérifie cependant qu'une version affaiblie du point 3 pour l'appartenance à $\mathcal{M}_P^{(1)}$. Avec des conditions légèrement renforcées, on explique en section 5.4.3 qu'on peut satisfaire pleinement la définition 5.2.1 de cette classe de fonctionnelles.

5.4.2 Étude de la fonctionnelle du type *intégrale*

On considère la fonctionnelle $h : C([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$h(x) = \int_0^1 q(x(t))\, dt \tag{5.4.6}$$

où q est lipschitzienne sur tout compact et telle qu'il existe $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(S^c) = 0$ où q' est défine, non nulle et continue.

Lemme 5.4.6 *Soit $B_0 = \{x \in C([0,1]) \mid \lambda\{t \mid x(t) \in S\} = 1\}$, on a $P(B_0) = 1$*

Lemme 5.4.7 *Pour $x \in B_0$ et $l \in C([0,1])$, on a*

$$D_l h(x) = \int_0^1 q'(x(t))\, l(t)\, dt \tag{5.4.7}$$

Démonstration : Soit $x \in B_0$, on a

$$\begin{aligned} &h(x + c\,l) - h(x) - c \int_0^1 q'(x(t))\, l(t)\, dt \\ &= \int_0^1 \big(q(x(t) + c\,l(t)) - q(x(t)) - c\,l(t)\, q'(x(t))\big)\, dt. \end{aligned}$$

Comme $x \in B_0$ pour presque chaque $t \in [0,1]$, q est dérivable en $x(t) \in S$, on a pour $|c| \le \delta$:

$$\frac{q(x(t)+c\,l(t)) - q(x(t)) - c\,l(t)\,q'(x(t))}{c} \to 0 \text{ pour } \lambda\text{-presque chaque } t \in [0,1],$$

$$\left|\frac{q(x(t)+c\,l(t)) - q(x(t))}{c}\right| \le K_{\|x\|+\delta\|l\|} \frac{|x(t)+c\,l(t) - x(t)|}{|c|} \le K_{\|x\|+\delta\|l\|}\|l\|,$$

$$|q'(x(t))\,l(t)| \le K_{\|x\|}\|l\|,$$

où on a noté K_M la constante de Lipschitz de q sur $[-M, M]$.
On a alors par convergence dominée

$$h(x+c\,l) - h(x) - c\int_0^1 q'(x(t))\,l(t)\,dt = o(c).$$

On obtient donc la dérivabilité de h avec l'expression (5.4.7). ∎

Vérification des hypothèses

Soit $x \in B_0$ ensemble de mesure P pleine d'après le lemme 5.4.6. Considérons le voisinage $B(x,1)$ de x.

1. Notons $M = \|x\| + 1$, on a alors :

$$|h(x) - h(y)| \le \int_0^1 |q(x(t)) - q(y(t))|\,dt \le K_M \int_0^1 |x(t) - y(t)|\,dt \le K_M\|x-y\|.$$

2. Comme $x \in B_0$, $D_l h(x)$ est donnée par (5.4.7). De plus $q'(x(t)) \ne 0$ pour presque tout $t \in [0,1]$, il existe donc $l \in C([0,1])$ tel que $D_l h(x) \ne 0$. Par densité de H_P dans $C([0,1])$, on trouve alors l, direction admissible pour W, tel que $D_l h(x) \ne 0$.

3. La même remarque 5.4.2 qu'au point **3** de la section 5.4.1 justifie qu'on peut supposer $D_l h(y)$ donnée par l'expression (5.4.7) (car c'est le cas pour $G_{n,c}S_n$ pour lequel on applique cette hypothèse dans la preuve du théorème 5.2.2).
On a alors pour tout $(y,l) \in A$, $\|D_l h(y)\| \le K_M$ donc bornée sur A.
Si $(y_n, l_n) \to (y, l)$, on a :

$$\begin{aligned}
|D_{l_n}h(y_n) - D_l h(y)| &\le \int_0^1 |q'(y_n(t))\,l_n(t) - q'(y(t))\,l_n(t)|\,dt \\
&\quad + \int_0^1 |q'(y(t))\,l_n(t) - q'(y(t))\,l(t)|\,dt \\
&\le (\|l\|+1)\int |q'(y_n(t)) - q'(y(t))|\,dt + K_M\|l_n - l\|.
\end{aligned}$$

Comme le premier terme tend vers 0 par convergence dominée (q' bornée par K_M), on a quand $n \to \infty$:

$$D_{l_n}h(y_n) \longrightarrow D_l h(y).$$

On vérifie pour les fonctionnelles (5.4.6) de type *intégrale* les conditions utilisées dans la preuve du théorème 5.2.2, on ne vérifie cependant qu'une version affaiblie du point **3** pour l'appartenance à $\mathcal{M}_p^{(1)}$. Avec des conditions légèrement renforcées, on explique dans la section 5.4.3 suivante qu'on peut satisfaire pleinement la définition 5.2.1 de cette classe de fonctionnelles.

5.4.3 Remarque sur l'appartenance à $\mathcal{M}_p^{(1)}$.

On montre qu'en renforçant légèrement les hypothèses des fonctionnelles définies en (5.4.3), (5.4.6), on vérifie pleinement les conditions d'appartenance à la classe $\mathcal{M}_p^{(1)}$ de la définition 5.2.1

Proposition 5.4.2 *Les fonctionnelles définies en (5.4.3) et (5.4.6) avec respectivement φ fonction convexe de classe C^1, q de classe C^1 et toutes les deux de dérivées φ', q' presque partout non nulles, sont dans la classe $\mathcal{M}_p^{(1)}$.*

Retour aux fonctionnelles de type *sup* **:**
Considerons la fonctionnelle de type *sup* définie en (5.4.3) avec φ une fonction convexe C^1 de dérivée presque partout non nulle.
Notons $\tilde{T}(x) = \{t \in [0,1] \mid \varphi(x(t)) = \sup_{s\in[0,1]} \varphi(x(s))\}$ ensemble compact.
Pour $t \in \tilde{T}(x)$, par convexité de φ, il est clair que $\varphi'(x(t)) \neq 0$. A la place du lemme 5.4.4, on a maintenant

Lemme 5.4.8 *Soient x, $l \in C([0,1])$, on a :*

$$D_l^- g(x) = \inf_{t\in\tilde{T}} \varphi(x(t)), \qquad D_l^+ g(x) = \sup_{t\in\tilde{T}} \varphi(x(t)) \tag{5.4.8}$$

Démonstration : C'est une variation de la preuve du lemme 5.1.1. A nouveau comme pour φ convexe, on a $\varphi(x) + y\,\varphi'(x) \leq \varphi(x+y)$, pour $t \in \tilde{T}(x)$ et $t_c \in \tilde{T}(x+c\,l)$ avec $c > 0$, on a

$$\varphi'(x(t))\,c\,l(t) \leq g(x+c\,l) - g(x) \leq \varphi'(x(t_c) + c\,l(t_c))\,c\,l(t)$$

Soit $(c_n)_n$ une suite positive convergeant vers 0. On note $t_n = t_{c_n} \in \tilde{T}(x + c_n l)$
Pour toute sous-suite $(n') \subset (n)$, par compacité de $[0,1]$, il existe $(n'') \subset (n')$ telle que $t_{n''} \longrightarrow t_\infty$. Comme

$$g(x + c_{n''} l) = \varphi(x(t_{n''}) + c_{n''} l(t_{n''}))$$

et

$$g(x + c_{n''} l) \longrightarrow g(x), \qquad \varphi(x(t_{n''}) + c_{n''} l(t_{n''})) \longrightarrow \varphi(x(t_\infty))$$

on en déduit $\varphi(x(t_\infty)) = g(x)$, c'est à dire $t_\infty \in \tilde{T}(x)$
Comme l, x, φ' sont continues, on a quand $n'' \to \infty$:

$$\begin{aligned} l(t_{n''}) &\longrightarrow l(t_\infty), \\ x(t_{n''}) + c_{n''} l(t_{n''}) &\longrightarrow x(t_\infty), \\ \varphi'(x(t_{n''}) + c_{n''} l(t_{n''})) &\longrightarrow \varphi'(x(t_\infty)). \end{aligned}$$

il suit

$$\begin{aligned}\varphi'(x(t))\, l(t) &\leq \underline{\lim}_{n''} \tfrac{g(x+c_{n''}l)-g(x)}{c_{n''}} \\ &\leq \overline{\lim}_{n''} \tfrac{g(x+c_{n''}l)-g(x)}{c_{n''}} \quad \leq \varphi'(x(t_\infty))\, l(t_\infty).\end{aligned}$$

Finalement en prenant le sup pour $t \in \widetilde{T}(x)$, on déduit facilement

$$\lim_{n''\to\infty} \frac{g(x + c_{n''}l) - g(x)}{c_{n''}} = \sup_{t\in\widetilde{T}(x)} \varphi'(x(t))\, l(t). \tag{5.4.9}$$

De toute sous-suite, on en a extrait une avec la limite (5.4.9) précédente, on a donc la première partie de (5.4.8) :

$$D_l^+ g(x) = \sup_{t\in\widetilde{T}(x)} \varphi'(x(t))\, l(t).$$

Un calcul analogue mène à la dérivée faible à gauche $D_l^- g(x)$ annoncée. ■

On prouve ensuite $g \in \mathcal{M}_p^{(1)}$ de la même façon qu'on l'a fait en section 5.4.1 avec la fonctionnelle de type *sup* plus générale. Le point dont on n'avait montré qu'une version affaiblie suffisante pour être utilisée dans la preuve du théorème 5.2.2 est le **3**. On peut maintenant le vérifier effectivement avec les hypothèses renforcées sur g : pour $(y, l) \in A$, l'existence de $D_l g(y)$ donne la coïncidence des dérivées faibles à droite et à gauche. Avec le lemme 5.4.8, on a alors :

$$D_l g(y) = \varphi'(y(t))\, l(t) \text{ pour tout } t \in \widetilde{T}(y).$$

La suite de la vérification reste inchangée.

Retour aux fonctionnelles de type *intégrale* :
Soit h la fonctionnelle de type *intégrale* donnée par (5.4.6) avec q une fonction C^1 de dérivée presque partout non nulle. On utilise le résultat suivant à la place du lemme 5.4.7 :

Lemme 5.4.9

$$D_l h(x) = \int q'(x(t))\, l(t)\, dt.$$

Démonstration : La preuve du lemme 5.4.7 vue pour la fonctionnelle plus générale s'applique, q étant maintenant dérivable en tout $x(t)$. ■

La vérification de l'appartenance à la classe $\mathcal{M}_p^{(1)}$ est alors la même, sauf que dans ce cas pour $(y, l) \in A$, on a effectivement par le lemme 5.4.9 $D_l h(y) = \int q'(y(t))\, l(t)\, dt$.

5.5 Annexes

5.5.1 Estimation asymptotique de U

On donne une estimation utile de U en $\pm\infty$

Proposition 5.5.1 *Si ξ, variable aléatoire de fonction de répartition F, est dans l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors on dispose de l'estimation suivante de $U = F^{-1} \circ \Phi$*

$$U(x) = \pm\, o\left(\left(\frac{|x|}{q(x)}\right)^{1/p}\right) \quad en \ \pm\infty \tag{5.5.1}$$

où Φ, q sont respectivement la fonction de répartition et la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Démonstration : On utilise pour cela le résultat élémentaire suivant

Lemme 5.5.1 *Soit $g :]0,1] \to \mathbb{R}^+$ décroissante telle que $\int_0^1 g(t)\,dt < \infty$, alors quand $t \to 0$, $g(t) = o(1/t)$*

Comme ξ de fonction de répartition F est dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on a

$$E\xi^p = \int_0^1 F^{-1}(t)^p\,dt < \infty$$

Par décroissance de $t \longmapsto F^{-1}(1-t)^p$ et positivité pour t assez proche de 0, le lemme 5.5.1 donne

$$F^{-1}(t) = o(1/(1-t)^{1/p}),\ t \to 1$$

Comme $U(x) = F^{-1} \circ \Phi(x)$, $\Phi(x) \to 1$ quand $x \to +\infty$ et $1 - \Phi(x) \sim q(x)/x$ en $+\infty$, on a facilement (5.5.1) en $+\infty$ et de la même façon, on le montre en $-\infty$.

5.5.2 Convergence de a

Pour montrer la convergence de l'intégrale $a = \int U'(x)q(x)dx$ en $+\infty$, on la compare à une série (on ferait de même en $-\infty$). On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} U'(x)q(x)\,dx &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} q(n)\,(U(n+1) - U(n)) \\
&\leq \sum_{n=0}^{p-1} q(n)\,(U(n+1) - U(n)) + \sum_{n=p}^{+\infty} q(n)\,U(n+1) \quad (5.5.2)
\end{aligned}$$

où p est tel que $U(x) \geq 0$ pour $x \geq p$. Le premier terme du membre de gauche de (5.5.2) est fini car la somme est finie ; pour le second terme, comme $\xi_1 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'équivalent (5.5.1) de la proposition 5.5.1 donne

$$q(n)\,U(n+1) = q(n)\,o\left(\sqrt{\frac{n+1}{q(n+1)}}\right) = o(\sqrt{n}e^{-n^2/5}),$$

terme général d'une série convergente. L'intégrale a est donc bien définie (en n'utilisant que les moments d'ordre 2 de ξ_1).

5.5.3 Moment d'ordre 2 de $U(\eta + h)$

Soient η une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $h \in \mathbb{R}$, on montre la convergence de

$$EU(\eta + h)^2 = \int U(x+h)^2 q(x)\,dx$$

avec l'hypothèse $E|\xi_1|^{2+\gamma} < +\infty$ pour $\gamma > 0$.

Soit $\alpha = \frac{2+\gamma}{2} > 1$ et β son conjugué ($\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$), par l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}
&\int U(x+h)^2 q(x)\,dx \\
&= \int U(y)^2 \exp\{-y^2/2 + yh - h^2/2\}\,dy \\
&= \int U(y)^2 \exp\{-\frac{y^2}{2\alpha}\} \exp\{-\frac{y^2}{2\beta} + yh - h^2/2\}\,dy \\
&= \left(\int U(y)^{2\alpha} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\right)^{1/\alpha} \left(\int \exp\{-\frac{y^2}{2} + yh\beta - h^2\beta/2\}\,dy\right)^{1/\beta} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

On a donc $EU(\eta + h)^2 < \infty$.

5.5.4 Résultat d'absolue continuité

Lemme 5.3.1 *Soient $(f_1, \ldots, f_p) : [a,b] \longrightarrow V \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ une application de composantes absolument continues, $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne. Alors $G = F(f_1, \ldots, f_p)$ est absolument continue.*

Démonstration : Rappelons que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $\cup_k(\alpha_k, \beta_k)$

$$\sum_k (\beta_k - \alpha_k) \leq \delta \Longrightarrow \sum_k |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| \leq \varepsilon.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ qui vérifie la définition précédente de l'absolue continuité pour $f_1, \ldots, f_p$. Soient $\cup_k(\alpha_k, \beta_k)$ avec $\sum_k(\beta_k - \alpha_k) \leq \delta$. En notant K la constante de Lipschitz de F :

$$\begin{aligned}
|G(\beta_k) - G(\alpha_k)| &= |F(f_1(\beta_k), \ldots, f_p(\beta_k)) - F(f_1(\alpha_k), \ldots, f_p(\alpha_k))| \\
&\leq K\|(f_1(\beta_k), \ldots, f_p(\beta_k)) - (f_1(\alpha_k), \ldots, f_p(\alpha_k))\| \\
&\leq K \sum_{i=1}^{p} |f_i(\beta_k) - f_i(\alpha_k)|.
\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_k |G(\beta_k) - G(\alpha_k)| \leq K \sum_{i=1}^{p} \sum_k |f_i(\beta_k) - f_i(\alpha_k)| \leq pK\varepsilon.$$

On obtient l'absolue continuité de la fonction $G = F(f_1, \ldots, f_p)$. ■

5.5.5 Lemmes techniques

On rappelle qu'on désigne par q la densité de la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$.

Proposition (lemme 5.3.3) *Soit f intégrable sur les compacts telle que pour h assez petit on a*

$$\int |f(t)|\, q(|t| + h)\, dt < \infty \tag{5.5.3}$$

Alors

$$\int \sup_{|h| \le l} |q(t) - q(t+h)|\, |f(t)|\, dt \longrightarrow 0 \quad \textit{quand } l \to 0$$

Démonstration :

On étudie $\int \sup_{|h|<l} |f(t)q(t) - f(t)q(t+h)|\, dt$ en scindant l'intégrale en deux $\int_{|t|\le 1} + \int_{|t|>1}$.

Pour $\int_{|t|\le 1} \sup_{|h|<l} |f(t)q(t) - f(t)q(t+h)|\, dt$:

- $\sup_{|h|\le l} |f(t)q(t) - f(t)q(t+h)| \le \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} |f(t)|$ intégrable sur $\{|t| \le 1\}$;
- $\sup_{|h|\le l} |q(t) - q(t+h)| \longrightarrow 0, \quad l \to 0$ par continuité de q

Par convergence dominée, il suit

$$\int_{|t|\le 1} \sup_{|h|\le l} |f(t)q(t) - f(t)q(t+h)|\, dt \longrightarrow 0, \quad l \to 0. \tag{5.5.4}$$

Pour $\int_{|t|>1} \sup_{|h|<l} |f(t)q(t) - f(t)q(t+h)|\, dt$, soit $l_0 > 0$ fixé

comme $|t| > 1$, $l < l_0$, on a $|t+h| > |t| - l_0$, et

$$q(t),\ q(t+h) \le q(|t| - l_0),$$

d'où

$$\sup_{|h|<l} |f(t)q(t) - f(t)q(t+h)| \le 2|f(t)|\, q(|t| - l_0)$$

intégrable par l'hypothèse (5.5.3) ;

$\sup_{|h|<l} |q(t) - q(t+h)| \to 0$, $l \to 0$ par continuité de q

Par convergence dominée, il suit

$$\int_{|t|>1} \sup_{|h|<l} |f(t)q(t) - f(t)q(t+h)|\, dt \longrightarrow 0, \quad l \to 0 \tag{5.5.5}$$

On conclut facilement de (5.5.4), (5.5.5) la proposition ■

On justifie maintenant le lemme 5.3.2 utile à l'étude de (a_{13}) en section 5.3.7.

Proposition (lemme 5.3.2) *Pour tout* $\lambda > 0$, *on a* $\int U'(x)\, q(|x| - \lambda)\, dx < \infty$.

Démonstration : On a

$$\int U'(x)q(|x| - \lambda)\, dx = \int_{|x|\leq|\lambda|} + \int_{|x|>|\lambda|} . \tag{5.5.6}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leq|\lambda|} U'(x)\, q(|x| - \lambda)\, dx &\leq \int_{|x|\leq|\lambda|} U'(x)\, dx \leq U(\lambda) - U(-\lambda) < \infty, \\
\int_{|x|>|\lambda|} U'(x)\, q(|x| - \lambda)\, dx &\leq \int_{|x|>|\lambda|} U'(x) q(|x| - \lambda)\, dx \\
&\leq \int_{|x|>|\lambda|} q(|x| - |\lambda|)\, dU(x).
\end{aligned}$$

On montre la convergence de cette dernière intégrale par exemple en $+\infty$ en la comparant à une série :

$$\begin{aligned}
\int_{|x|>|\lambda|} q(|x| - |\lambda|)\, dU(x) &\leq \sum_{n\geq|\lambda|} q(n - |\lambda|)(U(n+1) - U(n)) \\
&\leq \sum_{n\geq|\lambda|} q(n - |\lambda|)U(n+1).
\end{aligned} \tag{5.5.7}$$

Or d'après l'annexe 5.5.1

$$U(n+1) = o\left(\sqrt{\frac{n+1}{e^{-(n+1)^2/2}}}\right),$$

il suit la convergence de la série en (5.5.7) et finalement celle de l'intégrale (5.5.6). ■

5.5.6 Proposition clef

Proposition (proposition 5.3.1) *Soient pour* $n \in \overline{\mathbb{N}}$, $f_n : (\Omega \times [0, \delta], \mathcal{F} \times \mathcal{B}([0, \delta]), \mathbb{P} \otimes \bar{\lambda}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega^* \in \mathcal{F}$ *tels que*

1. $\forall \omega \in \Omega^*$, $\exists N_1(\omega)$, $\forall n \geq N_1(\omega)$, $f_n(\omega, \cdot)$ *est absolument continue ;*
2. $f_n(\omega, 0) \xrightarrow{\mathbb{P}} f_\infty(\omega, 0)$ *sur* Ω^* ;
3. $f_n(\omega, \delta) \xrightarrow{\mathbb{P}} f_\infty(\omega, \delta)$ *sur* Ω^* ;
4. $\forall \omega \in \Omega^*$, $\exists N_4(\omega)$, $\forall n \geq N_4(\omega)$, $\frac{\partial}{\partial c} f_n(\omega, c) > 0$ λ*-presque partout pour* $c \in (0, \delta)$;
5. $\frac{\partial}{\partial c} f_n(\omega, c) \xrightarrow{\mathbb{P}\otimes\bar{\lambda}} \frac{\partial}{\partial c} f_\infty(\omega, c)$ *sur* Ω^*.

Alors sur Ω^*

$$\|\lambda_{[0,\delta]} f_n(\omega,\cdot)^{-1} - \lambda_{[0,\delta]} f_\infty(\omega,\cdot)^{-1}\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Démonstration : Il s'agit d'utiliser la proposition 5.1.1 de la page 110 concernant la convergence forte de mesures images.
Soit (n') une sous-suite. On montre qu'il existe $(n'') \subset (n')$ avec

$$\delta_{n''}(\omega) = \|\lambda_{[0,\delta]} f_{n''}(\omega,\cdot)^{-1} - \lambda_{[0,\delta]} f_\infty(\omega,\cdot)^{-1}\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n'' \to \infty \tag{5.5.8}$$

pour presque chaque $\omega \in \Omega^*$, le critère classique de la convergence en probabilité donnera :

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega^* \mid \|\lambda_{[0,\delta]} f_n(\omega,\cdot)^{-1} - \lambda_{[0,\delta]} f_\infty(\omega,\cdot)^{-1}\| > \alpha\} = 0 \tag{5.5.9}$$

Les hypothèses 2, 3, 5 donnent une sous-suite $(n'') \subset (n')$ telle que

$$\begin{aligned}
&- \ f_{n''}(\omega,0) \longrightarrow f_\infty(\omega,0) \quad \forall \omega \in \Omega_2^*, \quad \mathbb{P}(\Omega_2^*) = \mathbb{P}(\Omega^*)\,;\\
&- \ f_{n''}(\omega,\delta) \longrightarrow f_\infty(\omega,\delta) \quad \forall \omega \in \Omega_3^*, \quad \mathbb{P}(\Omega_3^*) = \mathbb{P}(\Omega^*)\,;\\
&- \ \frac{\partial}{\partial c} f_{n''}(\omega,c) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial c} f_\infty(\omega,c) \quad \forall (\omega,c) \in E_5^* \subset \Omega^* \otimes [0,\delta],\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad P \otimes \lambda(E_5^*) = P(\Omega^*).
\end{aligned}$$

Soit $\Omega_4^* \subset \Omega^*$, $\mathbb{P}(\Omega_4^*) = \mathbb{P}(\Omega^*)$ tel que pour tout $\omega \in \Omega_4^*$ et $n \geq N_4(\omega)$,

$$\frac{\partial}{\partial c} f_{n''}(\omega,c) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial c} f_\infty(\omega,c) > 0 \quad \lambda\text{-presque partout}$$

Par le théorème de Fubini, il existe $\Omega_5^* \subset \Omega^*$, $\mathbb{P}(\Omega_5^*) = \mathbb{P}(\Omega^*)$ tel que

$$\forall \omega \in \Omega_5^*, \quad \frac{\partial}{\partial c} f_{n''}(\omega,c) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial c} f_\infty(\omega,c) \quad \lambda\text{-presque partout pour } c \in [0,\delta].$$

Soit alors

$$\Omega_0^* = \Omega_2^* \cap \Omega_3^* \cap \Omega_4^* \cap \Omega_5^* \subset \Omega^*, \qquad \mathbb{P}(\Omega_0^*) = \mathbb{P}(\Omega^*)$$

Pour tout $\omega \in \Omega_0^*$ et $n \geq \max(N_1(\omega), N_4(\omega))$ la fonctionnelle $c \longmapsto f_{n''}(\omega,c)$ vérifient les hypothèses de la proposition 5.1.1. Celle-ci donne la convergence (5.5.8) et le résultat (5.5.9) annoncé par le critère de la convergence en probabilité ■

Une autre version de la proposition 5.3.1 due au corollaire 1 de [12] de la même façon que la proposition 5.3.1.1 est du corollaire 2 de [12], est

Proposition (proposition 5.3.2) *Soit pour* $n \in \overline{\mathbb{N}}$, $f_n : (\Omega \times [0,\delta], \mathcal{F} \times \mathcal{B}([0,\delta]), \mathbb{P} \otimes \lambda) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega^* \in \mathcal{F}$ *tels que*

1. $\forall \omega \in \Omega^*$, $\exists N_1(\omega)$, $\forall n \geq N_1(\omega)$, $f_n(\omega,\cdot)$ ***est absolument continue.***

2. $f_n(\omega, 0) \xrightarrow{\mathbb{P}} f_\infty(\omega, 0)$ *sur* Ω^* ;
3. $\forall \omega \in \Omega^*, \quad \frac{\partial}{\partial c} f_\infty(\omega, c) > 0$ λ*-presque partout pour* $c \in (0, \delta)$;
4. $\left\| \frac{\partial}{\partial c} f_n(\omega, c) - \frac{\partial}{\partial c} f_\infty(\omega, c) \right\|_{L^1} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ *sur* Ω^*.

Alors $\|\lambda_{[0,\delta]} f_n(\omega, \cdot)^{-1} - \lambda_{[0,\delta]} f_\infty(\omega, \cdot)^{-1}\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ *sur* Ω^*.

Chapitre 6

Principe local d'invariance pour une suite stationnaire dépendante

On reprend dans ce chapitre le problème du chapitre précédent en partant d'une suite stationnaire mélangeante de variables aléatoires $(\xi_n)_{n>0}$ obtenue par une transformation croissante absolument continue U d'une suite stationnaire mélangeante de variables gaussiennes standard $(\eta_n)_{n>0}$. On commence en section 6.1 par rappeler les théorèmes limites assurant la convergence faible de la suite P_n des lois des processus $\mathfrak{S}_n$ constants par morceaux, normalisés associés à la suite $(\xi_n)_{n>0}$; cette convergence constitue notre point de départ. On rappelle également les outils de dépendance qu'on utilise dans ce chapitre. On énonce en section 6.2 le théorème 6.2.1, analogue pour le cas mélangeant du théorème 5.2.2 obtenu pour une suite de v.a.i.i.d. : on obtient la convergence forte $P_n f^{-1} \xrightarrow{var} Pf^{-1}$ avec une condition sur la vitesse de convergence du coefficient de mélange fort de la suite $(\eta_n)_{n>0}$ et f vérifiant des conditions proches du cas i.i.d. Dans le cas particulier où on prend la fonctionnelle donnée par $f(x) = x(1)$, on obtient par exemple directement du théorème 6.2.1 la convergence

$$\mathcal{L}(S_n) \xrightarrow{var} \mathcal{N}(0,1),$$

c'est à dire un théorème local limite pour des variables dépendantes, ce qui semble nouveau. La preuve est donnée en section 6.4 en reprenant dans celle du théorème 5.2.2 les passages où l'indépendance ne peut plus être utilisée.

6.1 Théorèmes limites pour des variables aléatoires dépendantes

Pour une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, le théorème de Donsker-Prokhorov donne la convergence faible des processus constants par morceaux normalisés associés à cette suite vers le processus du mouvement brownien W. On a renforcé la convergence de fonctionnelles de ces processus pour une large classe de fonctionnelles notée $\mathcal{M}_p^{(1)}$ (*cf.* théorème 5.2.2).

On se propose d'étudier un principe local d'invariance pour certaines variables dépendantes. On utilise la notion de dépendance associée au coefficient de mélange fort introduit par Rosenblatt. On commence par le rappeler.

6.1.1 Variables aléatoires mélangeantes

Définition 6.1.1 *On définit le coefficient de mélange fort entre deux tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ par*

$$\alpha(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \sup\{\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),\ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$$

Si $(X_i)_{i>0}$ est une suite aléatoire en notant $\mathcal{M}_{a,b} = \sigma(X_i,\ a \leq i \leq b)$, on définit pour $p < q$, $\alpha_X(p,q) = \alpha(\mathcal{M}_{-\infty,p}, \mathcal{M}_{q,+\infty})$.
Si de plus la suite $(X_i)_{i>0}$ est stationnaire, on notera $\alpha_X(n) = \alpha_X(i, i+n)$. On écrira même α_n lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Pour pouvoir contrôler les variances de sommes de variables aléatoires mélangeantes, on utilise dans la suite

Proposition 6.1.1 ([6]) *Soient X, Y des variables réelles centrées de variances finies. Pour $p, q, r \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, on a :*

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq 8\,\alpha(X,Y)^{1/p}\,(E|X|^q)^{1/q}(E|Y|^r)^{1/r}. \tag{6.1.1}$$

Dans le cas de variables indépendantes, on peut estimer la probabilité du maximum des sommes partielles par le maximum des probabilités des sommes partielles par l'inégalité d'Ottaviani. Dans le cas avec mélange, on dispose de l'analogue suivant :

Proposition 6.1.2 *Soit $(X_i^n)_{i\leq n}$ un tableau triangulaire de variables aléatoires centrées telles qu'il existe $\gamma > 0$ pour lequel les moments d'ordre $2+\gamma$ de X_i^n sont bornés. On suppose*

$$\alpha(X_i^n, X_j^n) \leq \alpha(|i-j|)$$

avec pour $r > 2(2+\gamma)/\gamma$

$$\alpha_n = O(n^{-r}) \tag{6.1.2}$$

Soient $S_k^n = X_1^n + \cdots + X_k^n$ et σ_n^2 la variance de S_n^n, d'équivalent $\sigma_n^2 \sim nh(n)$ avec h une fonction à variation lente.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t > 0$, $C(\varepsilon) < +\infty$ tels qu'avec

$$a_n = \max_{k\leq n} \mathbb{P}\{|S_n^n - S_k^n| > \varepsilon\sigma_n/2\}$$

on a :

$$(1/2 - a_n)\,\mathbb{P}\left\{\max_{k\leq n}|S_k^n| > \sigma_n\varepsilon\right\} \leq \mathbb{P}\{|S_n^n| > \varepsilon\sigma_n/2\} + C(\varepsilon)\,n^{-t} \tag{6.1.3}$$

Ce résultat est donné dans [14, section 1.4.3] sous une forme moins générale. Une lecture attentive de la preuve de [14] montre qu'on l'adapte sans difficulté à notre situation de la façon suivante :

Démonstration :

Soient $\theta > 1$, $0 < t < \frac{\gamma r - 2(2+\gamma)}{2(2+\gamma+\theta r)}$.

Soient

$$\beta = \frac{\gamma - 2\theta t}{2(2+\gamma)} > 0, \quad m = [n^{\beta}], \quad s = \frac{1+t}{\beta}.$$

Il est facile de constater que $2 + 4/\gamma < s < r$.

Considérons

$$C(\varepsilon) = 4 \max \left\{ (8/\varepsilon)^{2+\gamma} \sup_{\substack{i \leq n \\ n > 0}} E|X_i^n|^{2+\gamma} \, \frac{n^{1+t+\gamma/2-\theta t}}{\sigma_n^{2+\gamma}}, \; \alpha_m n^{\beta s} \right\}. \tag{6.1.4}$$

Comme

- $\sup_{\substack{i \leq n \\ n > 0}} E|X_i^n|^{2+\gamma} < +\infty$,
- $\frac{n^{1+t+\gamma/2-\theta t}}{\sigma_n^{2+\gamma}} \sim \frac{n^{1+t+\gamma/2-\theta t}}{n^{1+\gamma/2} h(n)^{1+\gamma/2}} = n^{(1-\theta)t}/h(n)^{1+\gamma/2} \to 0, \quad n \to +\infty,$
- $\alpha_m \, n^{\beta s} = O(n^{-\beta(r-s)}) \to 0, \quad n \to +\infty,$

on a bien $C(\varepsilon) < +\infty$.

Prouvons maintenant l'inégalité maximale (6.1.3) :

Soient

$$A_{k,n} = \{|S_1^n| \leq \sigma_n \varepsilon, \ldots, |S_{k-1}^n| \leq \sigma_n \varepsilon < |S_k^n|\}$$

et

$$\mathcal{K}_n = \left\{ k \in \{1, \ldots, n\} \mid \mathbb{P}(A_{k,n}) > C(\varepsilon) n^{-(1+t)} \right\}.$$

On a

$$\mathbb{P}\{\max_{k \leq n} |S_k^n| > \varepsilon \sigma_n\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{k,n}) \leq C(\varepsilon) n^{-t} + \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \mathbb{P}(A_{k,n}). \tag{6.1.5}$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{P}\{|S_n^n| > \varepsilon \sigma_n / 2\} \geq \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \mathbb{P}(\{|S_n^n| > \varepsilon \sigma_n / 2\} \cap A_{k,n}).$$

Il est facile de voir que

$$\{|S_n^n - S_k^n| \leq \varepsilon \sigma_n / 2\} \cap A_{k,n} \subset \{|S_n^n| > \varepsilon \sigma_n / 2\} \cap A_{k,n},$$

on a donc

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\{|S_n^n| > \varepsilon\sigma_n/2\}
&\geq \sum_{k\in\mathcal{K}_n} \mathbb{P}\{A_{k,n} \cap \{|S_n^n - S_k^n| \leq \varepsilon\sigma_n/2\}\} \\
&\geq \sum_{k\in\mathcal{K}_n} \mathbb{P}(A_{k,n}) - \mathbb{P}(\{|S_n^n - S_k^n| > \varepsilon\sigma_n/2\} \cap A_{k,n})
\end{aligned}
\tag{6.1.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \sum_{k\in\mathcal{K}_n} \mathbb{P}(A_{k,n})\left(1 - \mathbb{P}\left\{|S_n^n - S_k^n| > \varepsilon\sigma_n/2 \mid A_{k,n}\right\}\right) \\
&\geq \left(1 - \max_{k\in\mathcal{K}_n} \mathbb{P}\{|S_n^n - S_k^n| > \varepsilon\sigma_n/2 \mid A_{k,n}\}\right) \sum_{k\in\mathcal{K}_n} \mathbb{P}(A_{k,n}).
\end{aligned}
\tag{6.1.7}
$$

Avec (6.1.7), on déduit alors facilement (6.1.3) de (6.1.5) si on montre que

$$
\max_{k\in\mathcal{K}_n} \mathbb{P}\{|S_n^n - S_k^n| > \varepsilon\sigma_n/2 \mid A_{k,n}\} \leq 1/2 + a_n. \tag{6.1.8}
$$

Pour $k \leq n - m$, il est clair que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\{|S_n^n - S_k^n| > \varepsilon\sigma_n/2 \mid A_{k,n}\} \leq\ & \mathbb{P}\{|S_n^n - S_{k+m}^n| > \varepsilon\sigma_n/4 \mid A_{k,n}\} \\
&+ \mathbb{P}\{|S_{k+m}^n - S_k^n| > \varepsilon\sigma_n/4 \mid A_{k,n}\}
\end{aligned}
$$

On a d'abord, avec $k \in \mathcal{K}_n$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\{|S_{k+m}^n - S_k^n| > \varepsilon\sigma_n/4 \mid A_{k,n}\} &\leq \frac{\mathbb{P}\{|S_{k+m}^n - S_k^n| > \varepsilon\sigma_n/4\}}{\mathbb{P}(A_{k,n})} \\
&< \frac{C(\varepsilon)^{-1} n^{1+t}}{(\frac{\varepsilon}{4}\sigma_n)^{2+\gamma}} E|S_k^n - S_{k+m}^n|^{2+\gamma} \\
&\leq \frac{C(\varepsilon)^{-1} n^{1+t}}{(\frac{\varepsilon}{4}\sigma_n)^{2+\gamma}} m^{2+\gamma} \sup_{i\leq n,n} E|X_i^n|^{2+\gamma}
\end{aligned}
\tag{6.1.9}
$$

car

$$
\begin{aligned}
E|S_k^n - S_{k+m}^n|^{2+\gamma} &= E\left|\sum_{i=k+1}^{k+m} X_i^n\right|^{2+\gamma} \leq m^{1+\gamma} \sum_{i=k+1}^{k+m} E|X_i^n|^{2+\gamma} \\
&\leq m^{2+\gamma} \sup_{i\leq n,n} E|X_i^n|^{2+\gamma}.
\end{aligned}
$$

Comme $m = [n^\beta]$, $\beta = \frac{\gamma - 2\theta t}{2(2+\gamma)}$, on a $m^{2+\gamma} \leq n^{\gamma/2 - \theta t}$. Par choix de $C(\varepsilon)$, il suit alors de (6.1.9)

$$
\mathbb{P}\{|S_{k+m}^n - S_k^n| > \varepsilon\sigma_n/4 \mid A_{k,n}\} \leq 1/4
$$

On a ensuite toujours pour $k \in \mathcal{K}_n$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|S_n^n - S_{k+m}^n| > \varepsilon\sigma_n/4 \mid A_{k,n}\} &= \frac{\mathbb{P}\left\{\{|S_n^n - S_{k+m}^n| > \varepsilon\sigma_n/4\} \cap A_{k,n}\right\}}{\mathbb{P}(A_{k,n})} \\ &\leq \mathbb{P}\{|S_n^n - S_{k+m}^n| > \varepsilon\sigma_n/4\} + \frac{\alpha_m}{\mathbb{P}(A_{k,n})} \\ &\leq a_n + 1/4\end{aligned}$$

car $\mathbb{P}(A_{k,n}) \geq C(\varepsilon)\, n^{-(1+\iota)}$ et par choix de $C(\varepsilon)$.
On obtient alors la majoration (6.1.8) qui permet de conclure à (6.1.3).

Pour $n - m < k \leq n$, on montre $\mathbb{P}\{|S_k^n - S_n^n| > \varepsilon\sigma_n/4 \mid A_{k,n}\} \leq 1/4$ de la même façon qu'on l'a fait précédemment pour $|S_{k+m}^n - S_k^n|$, $k \leq n - m$ car $n - k \leq m$.
On a donc à nouveau (6.1.8), ce qui achève la preuve de l'inégalité maximale (6.1.3). ∎

6.1.2 Théorème limite fonctionnel pour des variables mélangeantes

On dispose dans le cadre dépendant d'analogues au théorème de Donsker-Prokhorov : on considère sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $(\xi_n)_{n>0}$ une suite stationnaire de variables aléatoires centrées, de variances 1, de suite de coefficients de mélange fort $(\alpha_n)_n$. En notant $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(\xi_1 + \cdots + \xi_n)$, on associe à $(\xi_n)_{n>0}$ le processus constant par morceaux :

$$S_n(t) = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{[nt]} \xi_i, \quad t \in [0,1]. \tag{6.1.10}$$

On dispose alors du résultat suivant qu'on trouve dans [33] :

Théorème 6.1.1 *Soit $(\xi_r)_{n>0}$ une suite stationnaire fortement mélangeante de variables centrées. On suppose qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $E|\xi_1|^{2+\gamma} < +\infty$ et*

$$n\,\alpha_n^{\gamma/(2+\gamma)} \longrightarrow 0, \quad n \to +\infty \tag{6.1.11}$$

Alors $\sigma^2 := \lim_{n\to+\infty} \sigma_n^2/n$ existe, $0 \leq \sigma^2 < +\infty$. Si de plus

$$\sigma^2 > 0 \tag{6.1.12}$$

alors en notant P_n et P respectivement les lois des processus S_n et du mouvement brownien W, on a

$$P_n \Longrightarrow P. \tag{6.1.13}$$

Remarque 6.1.1

1. Ce résultat repose sur l'étude de la fonction quantile inverse

$$Q_{|\xi_1|}(u) := \inf\{t \geq 0 \mid P(|\xi_1| > t) \leq u\}$$

dont l'intérêt dans ce genre de problème a été mis en évidence dans [15]. Compte tenu des hypothèses supplémentaires nécessaires (*cf.* (6.2.4)), on pourrait se contenter de résultats plus stricts en remplaçant (6.1.11) par $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^{\gamma/(2+\gamma)} < +\infty$ (*cf.* [36]).

2. Pour f P-presque partout continue, on a une version fonctionnelle de (6.1.13)

$$f(S_n) \Longrightarrow f(W). \tag{6.1.14}$$

c'est ce type de convergence qu'on renforce dans le théorème 6.2.1 à venir.

6.2 Principe local d'invariance

On s'intéresse dans la suite à des variables obtenues par transformation croissante de variables aléatoires gaussiennes sous-jacentes. Soient $(\eta_n)_{n>0}$ une suite stationnaire de variables gaussiennes centrées réduites de densité q, de coefficient de mélange fort α_n, $n \in \mathbb{N}$ et U une fonction croissante absolument continue de dérivée U' presque partout non nulle. On suppose que $\int U(x)^2 q(x)dx < +\infty$. On considère alors la suite de variables aléatoires données par

$$\xi_n = U(\eta_n). \tag{6.2.1}$$

La suite $(\xi_n)_{n>0}$ est stationnaire et de coefficients de mélange fort majorés par α_n. Quitte à prendre une transformation affine de U, on supposera de plus que ξ_n est centrée et de variance 1. On considère alors le processus (6.1.10) associé à $(\xi_n)_{n>0}$ ainsi que le processus affine par morceaux suivant associé à la suite gaussienne sous-jacente $(\eta_n)_{n>0}$:

$$Y_n(t) := \frac{1}{\tilde{\sigma}_n} \sum_{i=1}^{[nt]} \eta_i + (nt - [nt])\, \eta_{[nt]+1}, \quad t \in [0,1] \tag{6.2.2}$$

avec $\tilde{\sigma}_n^2 = \operatorname{Var}(\eta_1 + \cdots + \eta_n)$.

Le but de ce chapitre est de renforcer la convergence (6.1.14) en une convergence en variation comme on l'a fait au chapitre précédent pour des fonctionnelles dans $\mathcal{M}_P^{(1)}$. On propose ce résultat pour une classe de fonctionnelles légèrement restreinte : on définit $\mathcal{M}_P^{(2)} \subset \mathcal{M}_P^{(1)}$ en remplaçant dans la définition 5.2.1 de $\mathcal{M}_P^{(1)}$ le noyau H_P de P (qui coïncide avec l'espace de Cameron-Martin) par $H_P^0 \subset H_P$ donné par :

$$H_P^0 = \{f \text{ absolument continue, de dérivée } f(0) = 0,\ f' \text{ à variation bornée}\} \tag{6.2.3}$$

On montre en section 6.3.2 que le sous-espace H_P^0 est dense dans H_P.

Définition 6.2.1 *$\mathcal{M}_P^{(2)}$ est l'ensemble des fonctionnelles f localement lipschitziennes telles que pour P-presque chaque x, il existe un voisinage $V(x)$ de x, $l \in H_P^0$ tels que*

- *$D_l f(x)$ existe et est non nul ;*
- *en notant $S_y = \{h \in S$ telle que $D_h f(y)$ existe$\}$ et $A = \cup_{y \in V(x)} \{y\} \times S_y$, on a $(y,h) \in A \longrightarrow D_h f(y)$ bornée et continue.*

La classe $\mathcal{M}_P^{(2)}$ est formellement plus petite que $\mathcal{M}_P^{(1)}$. Cependant dans les cas concrets, les fonctionnelles de $\mathcal{M}_P^{(1)}$ sont déjà dans $\mathcal{M}_P^{(2)}$. Par exemple, les exemples du chapitre 5 appartiennent également à $\mathcal{M}_P^{(2)}$.

On dispose alors du résultat suivant de convergence en variation, analogue du théorème 5.2.2 pour des variables indépendantes et identiquement distribuées.

Théorème 6.2.1 *Soit $(\eta_n)_{n>0}$ une suite stationnaire de variables gaussiennes centrées, de variances 1 et de suite de coefficients de mélange fort $(\alpha_n)_{n>0}$.*
Soit U une fonction croissante absolument continue de dérivée U' presque partout non nulle et telle que $\int U(x)^2 q(x)\,dx < +\infty$.
On considère $\xi_n = U(\eta_n)$ qu'on suppose centrée, de variance 1. On suppose de plus qu'il existe
- *$\gamma > 0$ tel que ξ_1 a un moment d'ordre $2+\gamma$;*
- *$r > 2(2+\gamma)/\gamma$ tel que :*

$$\alpha_n = O(n^{-r}). \tag{6.2.4}$$

Si

$$\sigma := \lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma_n^2}{n} > 0, \qquad \tilde{\sigma} := \lim_{n\to+\infty} \frac{\tilde{\sigma}_n^2}{n} > 0 \tag{6.2.5}$$

alors pour toute fonctionnelle $f \in \mathcal{M}_P^{(2)}$, on a la convergence en variation :

$$P_n f^{-1} \xrightarrow{var} P f^{-1}. \tag{6.2.6}$$

Remarque 6.2.1

1. Dans le cadre du théorème 6.2.1, la condition suffisante (6.1.11) pour avoir $P_n \Rightarrow P$ s'écrit
$$n\,\alpha_n^{\gamma/(2+\gamma)} = o(1/n) \longrightarrow 0, \quad n \to +\infty.$$
Elle est donc clairement vérifiée et on peut estimer ce qu'on demande en plus dans ce théorème par rapport à ce qu'on exige pour assurer la convergence (6.1.13). On suppose que cette dernière tient dans $\mathbb{E}$ l'espace fermeture pour la norme uniforme de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{D}$ qui ont un nombre fini de sauts en des points rationnels.
2. Compte tenu de (6.2.4), d'après le théorème 6.1.1 les limites dans (6.2.5) existent et on demande seulement qu'elles soient non nulles pour avoir la conclusion (6.1.13) du théorème 6.1.1. La condition $\sigma > 0$ est une condition de non dégénérescence du processus S_n, la condition $\tilde{\sigma} > 0$ est liée à un autre processus Y_n qui intervient dans la preuve (on renvoie à la remarque 6.4.1 au sujet de cette condition).
3. La condition (6.2.4) avec $r > 2(2+\gamma)/\gamma$ est nécessaire pour appliquer la proposition 6.1.2, dans le reste, on constate en (6.3.15), (6.4.11), (6.4.20) qu'il suffit de supposer qu'il existe $\delta < (2+\gamma)/\gamma$ tel que :
$$\sum_{n>0} \alpha_n^{\delta} < +\infty.$$
On a bien alors la condition (6.1.11) qui permet d'appliquer le théorème 6.1.1.

Dans le cas très particulier où on prend la fonctionnelle f donnée par $f(x) = x(1)$, on obtient directement du théorème 6.2.1 le résultat suivant :

Corollaire 6.2.1 *Avec les notations précédentes et les hypothèses (6.2.4), (6.2.5), on a*

$$\mathcal{L}(S_n) \xrightarrow{var} \mathcal{N}(0,1)$$

Il est facile de constater que les exemples de fonctionnelles pour lesquelles on a la convergence (5.2.4) du théorème 5.2.2 conviennent à nouveau pour obtenir la convergence (6.2.6) du théorème 6.2.1.

La démonstration du théorème 6.2.1 est analogue à celle du théorème 5.2.2 : elle consiste en la vérification des conditions du théorème 5.1.2 obtenu par la méthode de superstructure. On commence en section 6.3 par mettre en place les outils dont on a besoin et à donner des propriétés utiles dans la suite. On prouve ensuite en section 6.4 le théorème en reprenant les points de la preuve du théorème 5.2.2 de la section 5.3 pour lesquels l'indépendance ne peut plus être utilisée.

6.3 Préliminaires

6.3.1 Mise en place des outils

Comme au chapitre 5, on applique le théorème 5.1.2 avec l'espace métrique complet séparable $\mathbb{E}$ muni de la norme uniforme notée $\|\cdot\|$ et la suite de mesures de probabilités $(P_n)_n$ qui converge faiblement vers P d'après (6.1.13).

On associe à P-presque chaque x le voisinage V, la direction $l \in H_P^0$ et $\varepsilon > 0$ à partir de la définition 6.2.1 de $\mathcal{M}_P^{(2)}$ de la même façon qu'en section 5.3.1. On considère $(l_n)_n$ une approximation de l qu'on définit par (6.3.6) en section 6.3.2.

On introduit les mêmes applications Π_n, J_n, φ, ψ en remplaçant si besoin est la normalisation $\sqrt{n}$ par σ_n. Par contre, on définit maintenant $\hat{G}_{n,\varepsilon}$ transformations de $\mathbb{R}^n$ par

$$\hat{G}_{n,\varepsilon}(x) = x + \varepsilon \hat{l}_n, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

à partir de $\hat{l}_n = J_n \circ \Pi_n(l_n) = (l_{n,i})_{1 \le i \le n}$ donné par

$$l_{n,i} = \sigma_n\left(l_n\left(\frac{i}{n}\right) - l_n\left(\frac{i-1}{n}\right)\right) \tag{6.3.1}$$

où l_n est l'approximation de l donnée en (6.3.6). Dans le cas d'une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées du chapitre 5, on avait $\hat{l}_n = J_n \circ \Pi_n(l)$, on est obligé de passer ici par une approximation l_n de façon à pouvoir vérifier le point (iii) du théorème 5.1.2 (voir à ce sujet la remarque 6.4.1 à la fin de la vérification de (iii)).

A nouveau, on applique le théorème 5.1.2 avec la famille de transformations $\{G_{n,\varepsilon}\}$, donnée par

$$G_{n,\varepsilon} = i_n \circ J_n^{-1} \circ \psi \circ \hat{G}_{n,\varepsilon} \circ \varphi \circ J_n \circ \Pi_n,$$
$$G_{\infty,\varepsilon} = x + \varepsilon l.$$

où

$$a = \int U'(x)\, q(x)\, dx.$$

Comme le résultat cherché concerne la convergence des lois $(P_n)_n$ de S_n, on applique comme précédemment le théorème de représentation de Skorokhod 5.3.1. Il n'y a alors aucune restriction à supposer que $S_n \longrightarrow \tilde{W}$ $\mathbb{P}$-presque sûrement avec $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leq [nt]} \xi_i^n$ et

$$\xi_i^n = U(\eta_i^n), \quad \alpha(\eta_i^n, \eta_j^n) \leq \alpha_{|i-j|}.$$

On souligne qu'alors pour chaque n, la famille $(\xi_i^n)_{i \leq n}$ change.

6.3.2 Définition de la suite $(l_n)_n$

Considérons le processus affine par morceaux $(Y_n)_n$ défini en (6.2.2). D'après les hypothèses (6.2.4), (6.2.5), le théorème 6.1.1 s'applique et donne la convergence faible :

$$Y_n \Longrightarrow W. \tag{6.3.2}$$

Notons

$$Q_n = \mathcal{L}(Y_n), \qquad Q_\infty = P = \mathcal{L}(W).$$

Ce sont des lois gaussiennes sur l'espace $C([0,1])$ de dual :

$$\mathcal{M}([0,1]) = \{\mu \text{ mesure signée sur } [0,1] \text{ de variation finie}\}.$$

Leur opérateur de covariance K_n, K_∞ sont des opérateurs de $\mathcal{M}([0,1])$ dans $C([0,1])$ donnés respectivement par

$$K_n(\mu)(t) = \int_{[0,1]} \mathrm{Cov}(Y_n(t), Y_n(s))\, \mu(ds), \quad \mu \in \mathcal{M}([0,1]), \quad t \in [0,1],$$
$$K_\infty(\mu)(t) = \int_{[0,1]} t \wedge s\, \mu(ds).$$

Avant de définir la suite $(l_n)_{n>0}$, remarquons que l'ensemble H_P^0 utilisé dans la définition 6.2.1 peut se définir en terme d'opérateur de covariance K_∞.

Proposition 6.3.1 *Le sous-ensemble H_P^0 de H_P défini en (6.2.3) coïncide avec*

$$\{l = K_\infty(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}([0,1])\}. \tag{6.3.3}$$

Démonstration : Il s'agit de montrer la coïncidence des expressions (6.2.3) et (6.3.3) de H_P^0. Soit $J : L^2([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ l'opérateur donné par :

$$Jf(t) = \int_0^t f(s)\, ds.$$

Son adjoint J^* $\mathcal{M}([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$ a pour expression $J^*\mu(t) = \mu([t,1])$. Il est facile de constater que $JJ^* = K_\infty$, opérateur de covariance de P. C'est ainsi qu'on obtient $H_P = J(L^2([0,1]))$, l'espace de Cameron-Martin (en utilisant un théorème de factorisation de l'opérateur de covariance, *cf.* [13, th 7.3]). On a aussi

$$\{K_\infty\mu,\ \mu \in \mathcal{M}([0,1])\} = K_\infty\mathcal{M}([0,1]) = J(J^*(\mathcal{M}([0,1]))) \tag{6.3.4}$$

On a facilement l'identification suivante (par exemple avec [42, th 8.14])

$$\begin{aligned} J^*(\mathcal{M}([0,1])) &= \{t \mapsto \mu([t,1]),\ \mu \in \mathcal{M}([0,1])\} \\ &= \{f \text{ à variation bornée, continue à gauche}\} \end{aligned} \tag{6.3.5}$$

Comme on ne change pas la valeur de $Jf(t)$ en modifiant f sur un ensemble dénombrable, on peut se dispenser de la continuité à gauche et déduire de (6.3.4), (6.3.5) la coïncidence des expressions (6.2.3) et (6.3.3) de H_P^0. ∎

Remarquons que d'après la définition (6.3.3), l'ensemble H_P^0 est dense dans H_P pour la norme uniforme $\|\cdot\|$ de $C([0,1])$ et pour celle de H_P (*cf.* [13, p 155]).
Étant donné $l = K_\infty(\mu) \in H_P^0$, on considère la suite donnée par

$$l_n = K_n(\mu) \in H_{Q_n}^0 \tag{6.3.6}$$

A partir de l, direction admissible pour P, on peut partitionner l'espace en lignes parallèles à l. La mesure P est alors mélange de mesures conditionnelles P_c concentrées sur les classes d'équivalences c de la partition. Ces mesures sont gaussiennes de variance commune notée $\sigma_P(l)$, appelée mesure d'admissibilité de la translation l (*cf* [13, p 39]). L'intérêt de cette approximation $(l_n)_{n>0}$ réside dans les convergences suivantes qui sont dues au théorème 19.6 de [13]

$$\|l_n - l\| \longrightarrow 0, \quad n \to +\infty, \tag{6.3.7}$$

$$\sigma_{Q_n}(l_n) \longrightarrow \sigma_P(l), \quad n \to +\infty \tag{6.3.8}$$

Au chapitre 5, on avait sans difficulté les propriétés (5.3.7), (5.3.8) et (5.3.9) des coordonnées $l_{n,i}$ de l_n utiles dans l'analyse des points (i) - (v) du théorème 5.1.2. La proposition suivante montre qu'elles sont toujours vraies, leur justification deviennent cependant beaucoup plus compliquées

Proposition 6.3.2

1. $\max_{i\le n} |l_{n,i}| \longrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow +\infty$.
2. $\sum_{i=1}^n \frac{|l_{n,i}|}{\sigma_n}$ *est borné*.
3. $\sum_{i=1}^n l_{n,i}^2$ *est borné*.

Dans la suite, nous noterons à nouveau h un majorant de $\{l_{n,i},\ i \le n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et K un majorant des suites $\left(\sum_{i=1}^n \frac{l_{n,i}}{\sigma_n}\right)_{n>0}$ et $\left(\sum_{i=1}^n l_{n,i}^2\right)_{n>0}$

Démonstration :

Rappelons que

$$l_{n,i} = \sigma_n \left(l_n(\frac{i}{n}) - l_n(\frac{i-1}{n}) \right)$$

On commence par donner une expression de $l_{n,i}$, $i = 1, \ldots, n$ qui permettra de mener les calculs pour vérifier **1**, **2**, **3**. D'après (6.3.6),

$$l_n(t) = K_n(\mu)(t) = \int_{[0,1]} \mathrm{Cov}(Y_n(t), Y_n(s))\, \mu(ds).$$

Notons $\{x\} := x - [x]$ la partie fractionnaire de x, $\rho(n) = E\eta_{k+n}\eta_k$. On exprime $K_n(\mu)(t)$ en développant $\mathrm{Cov}(Y_n(t), Y_n(s))$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 K_n(t) &= \int_{[0,1]} \sum_{\substack{1\le i\le [nt]\\ 1\le j\le [ns]}} \rho(i-j) + \{ns\} \sum_{1\le i\le [nt]} \rho(i-1-[ns]) \quad \mu(ds)\\ &+ \int_{[0,1]} \{nt\} \sum_{1\le j\le [ns]} \rho(i-1-[nt]) + \{nt\}\{ns\}\, \rho([nt]-[ns]) \quad \mu(ds). \qquad (6.3.9)\end{aligned}$$

Comme on ne considère dans la suite que $t = p/n$, on a d'abord pour $p = 0$, $l_n(0) = K_n(\mu)(0) = 0$ puis pour $p \ge 1$:

$$\sigma_n^2 K_n\left(\frac{p}{n}\right) = \int_{[0,1]} \Bigg(\sum_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le [ns]}} \rho(i-j) + \{ns\} \sum_{1\le i\le p} \rho(i-1-[ns]) \Bigg) \mu(ds). \qquad (6.3.10)$$

On étudie les deux termes de l'intégrale précédente.

Étude de $\int_{[0,1]} \sum_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le [ns]}} \rho(i-j)\, \mu(ds)$.

Comme pour $k \in [1-[ns], p-1]$

$$\begin{aligned} I_{p,ns}(k) &:= \#\{(i,j) \mid 1 \le i \le p,\ 1 \le j \le [ns],\ i - j = k\}\\ &= ((p-k) \wedge [ns]) - 1 \vee (1-k) + 1\\ &= ((p-k) \wedge [ns]) - k_-, \end{aligned}$$

avec $k_- = 0 \vee (-k)$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le [ns]}} \rho(i-j) &= \sum_{1-[ns]\le k\le p-1} \rho(k)\, I_{p,ns}(k)\\ &= \sum_{1-[ns]\le k\le p-1} \rho(k)\big(((p-k) \wedge [ns]) - k_-\big). \end{aligned}$$

Notons que

$$(p-k) \wedge [ns] = p-k \iff p-k \le [ns] \le ns \iff s \ge \frac{p-k}{n},$$

$$1-k \le [ns] \iff s \ge \frac{1-k}{n}.$$

On a alors

$$\int_{[0,1]} \sum_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le [ns]}} \rho(i-j)\,\mu(ds) = \int_{[0,1]} \sum_{1-[ns]\le k\le p-1} \rho(k)\,(((p-k)\wedge [ns]) - k_-)\,\mu(ds)$$

$$= \sum_{1-n\le k\le p-1} \rho(k) \int_{[0,1]} 1_{\{-k\le [ns]\}}(((p-k)\wedge [ns]) - k_-)\,\mu(ds)$$

$$= \sum_{1-n\le k\le p-1} \rho(k) \int_{[0\vee\frac{-k}{n},1]} (((p-k)\wedge [ns]) - k_-)\,\mu(ds)$$

$$= \sum_{1-n\le k\le p-1} \rho(k) \int_{[0\vee\frac{-k}{n},1\wedge\frac{p-k}{n}[} ([ns] - k_-)\,\mu(ds) +$$

$$\rho(k)(p-k-k_-)\,\mu\left(\left]\frac{p-k}{n}\wedge 1,1\right]\right).$$

Étude de $\int_{[0,1]}\left(\{ns\}\sum_{1\le i\le p}\rho(i-1-[ns])\right)\mu(ds)$.

$$\int_{[0,1]}\left(\{ns\}\sum_{1\le i\le p}\rho(i-1-[ns])\right)\mu(ds)$$

$$= \int_{[0,1]}\left(\{ns\}\sum_{-[ns]\le k\le p-1-[ns]}\rho(k)\right)\mu(ds)$$

$$= \sum_{-n\le k\le p-1}\rho(k)\int_{[0,1]}(\{ns\}1_{\{-k\le [ns]\le p-1-k\}})\,\mu(ds)$$

$$= \sum_{-n\le k\le p-1}\rho(k)\int_{[0,1]}\left(\{ns\}1_{[\frac{-k}{n},\frac{p-k}{n}[}(s)\right)\mu(ds)$$

$$= \sum_{-n\le k\le p-1}\rho(k)\int_{[0\vee\frac{-k}{n},\frac{p-k}{n}\wedge 1]}\{ns\}\,\mu(ds)$$

A partir de (6.3.9), (6.3.10), on obtient que $l_n(\frac{p}{n}) - K_n(\mu)(\frac{p}{n})$ est égal à :

$$\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{1-n\le k\le p-1}\rho(k)\int_{[0\vee\frac{-k}{n},\frac{p-k}{n}\wedge 1[}([ns]-k_-)\,\mu(ds)$$

$$+\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{1-n\le k\le p-1}\rho(k)(p-k-k_-)\,\mu\left(\left]\frac{p-k}{n}\wedge 1,1\right]\right)$$

$$+\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{-n\le k\le p-1}\rho(k)\int_{[0\vee\frac{-k}{n},\frac{p-k}{n}\wedge 1]}\{ns\}\,\mu(ds)$$

Expression de $l_n(\frac{i}{n}) - l_n(\frac{i-1}{n})$ pour $i=1,\dots,n$.

On peut maintenant en donner une expression à partir du calcul précédent. On considère d'abord le cas $i \geq 2$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma_n^2}\rho(i-1)\int_{[0\vee\frac{2-i}{n},\frac{1}{n}\wedge 1]}[ns]-(i-1)^-\ \mu(ds)\\
&+\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{1-n\leq k\leq i-2}\rho(k)\int_{]\frac{i-1-k}{n}\wedge 1,\frac{i-k}{n}\wedge 1]}([ns]-k_-)\ \mu(ds)\\
&+\ \frac{1}{\sigma_n^2}\rho(i-1)\times 1\times\mu\left(\left]\frac{1}{n},1\right]\right)-\frac{1}{\sigma_n^2}\rho(i-n)(i-1)\ \mu\left(\left]\frac{1}{n},1\right]\right)\\
&+\ \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i-n+1\leq k\leq i-2}\rho(k)\left((i-k-k_-)\mu\left(\left]\frac{i-k}{n},1\right]\right)\right.\\
&\left.-(i-1-k-k_-)\ \mu\left(\left]\frac{i-1-k}{n},1\right]\right)\right)+\ \frac{1}{\sigma_n^2}\rho(i-1)\int_{[0,\frac{1}{n}[}\{ns\}\ \mu(ds)\\
&+\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i-n\leq k\leq i-2}\rho(k)\int_{[\frac{i-1-k}{n}\wedge 1,\frac{i-k}{n}\wedge 1[}\{ns\}\ \mu(ds)
\end{aligned}
$$

$$=$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma_n^2}\rho(i-1)\mu(\{\frac{1}{n}\})+\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i-n\leq k\leq i-2}\rho(k)\int_{]\frac{i-1-k}{n},\frac{i-k}{n}]}([ns]-k_-)\ \mu(ds) \qquad (6.3.11)\\
&+\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i-n+1\leq k\leq i-1}\rho(k)\ \mu\left(\left]\frac{i-k}{n},1\right]\right)\\
&-\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i-n\leq k\leq i-2}\rho(k)(i-1-k-k_-)\ \mu(\left]\frac{i-1-k}{n},\frac{i-k}{n}\right])\\
&+\frac{1}{\sigma_n^2}\rho(i-1)\int_{[0,\frac{1}{n}[}\{ns\}\mu(ds)+\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i-n\leq k\leq i-2}\rho(k)\int_{[\frac{i-1-k}{n},\frac{i-k}{n}[}\{ns\}\ \mu(ds)
\end{aligned}
$$

$$=$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma_n^2}\rho(i-n)\mu(\{1\})+\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i-n+1\leq k\leq i-1}\rho(k)\ \mu\left(\left[\frac{i-k}{n},1\right]\right)\\
&+\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i-n\leq k\leq i-1}\rho(k)\int_{[\frac{i-1-k}{n},\frac{i-k}{n}[}\{ns\}\ \mu(ds)
\end{aligned}
$$

car (6.3.11) se réécrit

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma_n^2}\rho(i-1)\mu(\{\tfrac{1}{n}\}) + \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i-n\le k<i-2}\rho(k)\int_{]\frac{i-1-k}{n},\frac{i-k}{n}[}([ns]-k_-)\ \mu(ds) \\
&\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i-n<k<i-2}\rho(k)(i-1-k-k_-)\ \mu\left(\left]\frac{i-1-k}{n},\frac{i-k}{n}\right]\right) \\
&+\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i-n<k<i-1}\rho(k)\ \mu\left(\{\frac{i-k}{n}\}\right).
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi pour $l_n(\frac{i}{n}) - l_n(\frac{i-1}{n})$, $i\ge 2$

$$
\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i-n<k<i-1}\rho(k)\left(\mu\left(\left[\frac{i-k}{n},1\right]\right) + \int_{]\frac{i-1-k}{n},\frac{i-k}{n}[}\{ns\}\ \mu(ds)\right). \tag{6.3.12}
$$

Pour $i=1$, comme $l_n(0)=0$ et $k_-=-k$ pour $k\le 0$, on a

$$
\begin{aligned}
l_n\left(\frac{1}{n}\right) &= \\
&\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{1-n<k<0}\rho(k)\int_{]\frac{-k}{n},\frac{1-k}{n}[}[ns]+k\ \mu(ds) + \rho(k)(1-k+k)\ \mu\left(\left]\frac{1-k}{n},1\right]\right) \\
&+\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{-n<k<0}\rho(k)\int_{]\frac{-k}{n},\frac{1-k}{n}[}\{ns\}\ \mu(ds)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{1-n<k<0}\rho(k)\int_{]\frac{-k}{n},\frac{1-k}{n}[}(1-k+k)\ \mu(ds) + \rho(k)\ \mu\left(\left]\frac{1-k}{n},1\right]\right) \qquad (6.3.13)\\
&+\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{1-n<k<0}\rho(k)\int_{]\frac{-k}{n},\frac{1-k}{n}[}\{ns\}\ \mu(ds)
\end{aligned}
$$

Comme (6.3.13) se réécrit

$$
\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{1-n<k<0}\rho(k)\ \mu\left(\left[\frac{1-k}{n},1\right]\right),
$$

on retrouve l'expression (6.3.12) pour $i=1$.

On a donc avec $\mu\in\mathcal{M}([0,1])$

$$
l_{n,i} = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i-n<k<i-1}\rho(k)\left(\mu\left(\left[\frac{i-k}{n},1\right]\right) + \int_{]\frac{i-1-k}{n},\frac{i-k}{n}[}\{ns\}\ \mu(ds)\right). \tag{6.3.14}
$$

On vérifie maintenant les assertions **1**, **2**, **3** de la proposition 6.3.2.

Pour **1**, comme

$$\left|\mu\left(\left[\frac{i-k}{n},1\right]\right)\right| \leq \|\mu\|, \quad \left|\int_{\left[\frac{i-1-k}{n},\frac{i-k}{n}\right[}\{ns\}\,\mu(ds)\right| \leq \|\mu\|,$$

on a

$$l_{n,i} \leq \frac{2\|\mu\|}{\sigma_n} \sum_{i-n\leq k\leq i-1} |\rho(k)|.$$

Or $0 \leq i-1 \leq n-1$, $1-n \leq i-n \leq 0$ donc

$$\sum_{i-n\leq k\leq i-1} |\rho(k)| \leq 2 \sum_{0\leq k\leq n-1} |\rho(k)|.$$

Or $\sum_{0\leq k\leq n} |\rho(k)|$ converge : en effet on trouve $p \geq 1, q \geq 1$, $\frac{1}{p}+\frac{2}{q}=1$ tels qu'avec l'inégalité (6.1.1), on a :

$$|\rho(k)| \leq 8\,\alpha_k^{1/p}\,(E|\eta_1|^q)^{2/q}. \tag{6.3.15}$$

Comme d'après (6.2.4), $\alpha_n = O(n^{-r})$, avec $r > 2+4/\gamma$, on a bien la convergence de $\sum_{k>0}|\rho(k)|$. On a alors

$$\max_{i\leq n}|l_{n,i}| \leq \frac{2\|\mu\|\,O(1)}{\sigma_n} \longrightarrow 0, \quad n\to+\infty.$$

Pour **2**, comme

$$\begin{aligned}
\sum_{i\leq n}\frac{|l_{n,i}|}{\sigma_n} &\leq \frac{2\|\mu\|}{\sigma_n^2}\sum_{i\leq n}\sum_{i-n\leq k\leq i-1}|\rho(k)| \\
&\leq \frac{2\|\mu\|}{\sigma_n^2}\sum_{1-n\leq k\leq n-1}|\rho(k)|\ \#\{i, i-n\leq k\leq i-1\} \\
&\leq \frac{2\|\mu\|}{\sigma_n^2}2(n-1)\sum_{0\leq k\leq n-1}|\rho(k)|.
\end{aligned}$$

On a donc $\sum_{i\leq n}\frac{|l_{n,i}|}{\sigma_n}$ bornée car $\sigma_n^2 \sim n$ et $\sum_{k>0}|\rho(k)|$ converge.

Pour **3**, comme

$$\begin{aligned}
\sum_{i\leq n} l_{n,i}^2 &\leq \sum_{i\leq n}\left(\frac{2\|\mu\|}{\sigma_n}\sum_{i-n\leq k\leq i-1}|\rho(k)|\right)^2 \\
&\leq \sum_{i\leq n}\left(\frac{4\|\mu\|}{\sigma_n}\sum_{0\leq k\leq n-1}|\rho(k)|\right)^2,
\end{aligned}$$

on a

$$\sup_{i\leq n}\sum_{i\leq n} l_{n,i}^2 \leq \frac{K}{\sigma_n^2}n.$$

D'où $\sum_{i\leq n} l_{n,i}^2$ est bornée, et finalement le point **3** est vérifié, ce qui achève de prouver les propriétés de $l_{n,i}$ énoncées dans la proposition 6.3.2. ∎

6.4 Adaptation de la preuve du chapitre 5

On étudie maintenant les cinq points du théorème 5.1.2 de la section 5.1. On obtiendra alors en l'appliquant la convergence (6.2.6) cherchée.

Par hypothèse, il existe $\gamma' > 0$ tel que

$$E|\xi_1|^{2+\gamma'} < +\infty. \tag{6.4.1}$$

Fixons $\gamma < \gamma'$ (par souci d'allègement des notations, on réserve la notation γ pour le paramètre qui sera utilisé le plus fréquemment dans la suite).

6.4.1 Étude de (i)

Rappelons qu'avec les transformations données, on a

$$G_{n,c}S_n = \sum_{i=1}^{[n \cdot]} \frac{U(\eta_i^n + cl_{n,i})}{\sigma_n}, \quad G_{\infty,c}S_n = S_n + cal$$

On a à nouveau $\|l_n(\frac{[n \cdot]}{n}) - l\| \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$, en effet

$$\left\| l_n(\frac{[n \cdot]}{n}) - l \right\| \leq \|l_n - l\| + \left\| l(\frac{[n \cdot]}{n}) - l \right\| \tag{6.4.2}$$

le premier terme tend vers 0 d'après (6.3.7), le second par (5.3.13) car $l' \in L^2$.

Pour montrer le point (i) : $\forall c \in (0, \varepsilon)$, $G_{n,c} \xrightarrow{P_n} G_{\infty,c}$ quand $n \to +\infty$, on se ramène donc à l'étude de la convergence en probabilité vers 0 de

$$\left\| \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i \leq n} U(\eta_i^n + cl_{n,i}) - U(\eta_i^n) - cal_{n,i} \right\|.$$

Comme le sup d'une fonction en escalier est un max, on cherche à montrer :

$$\max_{k \leq n} \left| \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i \leq k} U(\eta_i^n + cl_{n,i}) - U(\eta_i^n) - cal_{n,i} \right| \xrightarrow{P} 0$$

Pour simplifier les notations, posons à nouveau

$$\tau_{n,i} = U(\eta_i^n + cl_{n,i}) - U(\eta_i^n) - cal_{n,i}, \quad S_{n,k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\tau_{n,i}}{\sigma_n}.$$

On commence par s'intéresser à $\max_{k \leq n} \left|\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=k}^n E\tau_{n,i}\right|$ pour se ramener à des variables centrées et appliquer l'inégalité maximale (6.1.3).

L'étude de $\max_{k \leq n} \left|\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=k}^n E\tau_{n,i}\right|$ est identique à celle du cas d'une suite de v.a.i.i.d.

du chapitre 5 car ne concerne pas les lois jointes donc la dépendance n'intervient pas. De la même façon que pour (5.3.18), on a donc :

$$\max_{k\leq n}\left|\frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=k}^{n} E\tau_{n,i}\right| \longrightarrow 0, \quad n\to+\infty. \tag{6.4.3}$$

Vérifions que les hypothèses de la proposition 6.1.2 sont satisfaites. On a

$$\sigma_n^2 \sim n\sigma^2,$$

puis

$$\sup_{i\leq n,\, n} E\big|U(\eta_i^n + cl_{n,i})\big|^{2+\gamma} < +\infty, \tag{6.4.4}$$

en effet :

$$\begin{aligned}
\sup_{i\leq n,\, n} E|U(\eta_i^n + cl_{n,i})|^{2+\gamma} &= \sup_{i\leq n,\, n}\int |U(x+cl_{n,i})|^{2+\gamma} q(x)\,dx \\
&= \sup_{i\leq n,\, n}\int |U(x)|^{2+\gamma} q(x)\, e^{cxl_{n,i}-c^2l_{n,i}^2/2}\,dx \\
&\leq \int |U(x)|^{2+\gamma} q(x)\, e^{c|x|h}\,dx.
\end{aligned}$$

La finitude de cette dernière intégrale est due à l'existence d'un moment d'ordre $2+\gamma'$, $\gamma'>\gamma$ pour $\xi_1^1 = U(\eta_1^1)$: en effet soit $\alpha = \frac{2+\gamma'}{2+\gamma} > 1$, β son conjugué, on a alors :

$$\begin{aligned}
&\int |U(x)|^{2+\gamma} q(x)\, e^{c|x|h}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int |U(x)|^{2+\gamma}\exp\{-x^2/(2\alpha) - x^2/(2\beta)\}\ \exp\{c|x|h\}\,dx \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int |U(x)|^{(2+\gamma)\alpha} e^{-x^2/2}dx\right)^{1/\alpha}\left(\int \exp\{-x^2/2 + \beta ch\,|x|\}\,dx\right)^{1/\beta} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int |U(x)|^{2+\gamma'} q(x)\,dx\right)^{1/\alpha}\left(\int \exp\{-x^2/2 + \beta|x|c\,h\}\,dx\right)^{1/\beta} \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

On a donc (6.4.4). Il suit alors en utilisant la proposition 6.3.2 :

$$\begin{aligned}
&\sup_{i\leq n,\, n} E|\tau_{n,i}|^{2+\gamma} \\
&\leq 3^{1+\gamma}\sup_{i\leq n,\, n}\left(E|U(\eta_i^n + cal_{n,i})|^{2+\gamma} + E|U(\eta_i^n)|^{2+\gamma} + (ca)^{2+\gamma}|l_{n,i}|^{2+\gamma}\right) \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Comme le coefficient de mélange fort vérifie par hypothèse (6.2.4), la proposition 6.1.2 s'applique et on s'intéresse dès lors pour tout $\delta > 0$ à

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{k\leq n}\mathbb{P}\left\{\left|\sum_{i=k}^{n}\frac{\tau_{n,i}-E\tau_{n,i}}{\sigma_n}\right| > \delta\right\} = 0. \tag{6.4.5}$$

Or

$$\mathbb{P}\left\{\left|\sum_{i=k}^{n}\frac{\tau_{n,i}-E\tau_{n,i}}{\sigma_n}\right|>\delta\right\}$$
$$\leq \frac{1}{\delta^2\sigma_n^2}E\left(\sum_{i=k}^{n}\tau_{n,i}-E\tau_{n,i}\right)^2$$
$$\leq \frac{1}{\delta^2\sigma_n^2}\left(\sum_{i=k}^{n}E(\tau_{n,i}-E\tau_{n,i})^2+\sum_{\substack{i,j=k\\ i\neq j}}^{n}E(\tau_{n,i}-E\tau_{n,i})(\tau_{n,j}-E\tau_{n,j})\right)$$

On a donc

$$\max_{k\leq n}\mathbb{P}\left\{\left|\sum_{i=k}^{n}\frac{\tau_{n,i}-E\tau_{n,i}}{\sigma_n}\right|>\delta\right\}$$
$$\leq \frac{1}{\delta^2\sigma_n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}E(\tau_{n,i}-E\tau_{n,i})^2+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left|\mathrm{Cov}(\tau_{n,i},\tau_{n,j})\right|\right). \tag{6.4.6}$$

La même étude que pour le cas avec une suite de v.a.i.i.d. donne pour la première partie du membre de droite de (6.4.6) :

$$E(\tau_{n,i}-E\tau_{n,i})^2 \leq E(U(\eta_i^n+d_{n,i})-U(\eta_i^n))^2 \leq C\varepsilon d_{n,i}.$$

Il suit d'après la proposition 6.3.2

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{E(\tau_{n,i}-E\tau_{n,i})^2}{\delta^2\sigma_n^2}\leq C\varepsilon\frac{1}{\delta^2\sigma_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{d_{n,i}}{\sigma_n}\leq\frac{KC\varepsilon}{\delta^2\sigma_n}\longrightarrow 0,\quad n\to+\infty \tag{6.4.7}$$

D'autre part avec $q=2+\gamma$, $p=\frac{q}{q-2}=1+2/\gamma$ donné par $\frac{1}{p}+\frac{2}{q}=1$, d'après l'inégalité (6.1.1)

$$|\mathrm{Cov}(\tau_{n,i},\tau_{n,j})|\leq 8\,\alpha(\tau_{n,i},\tau_{n,j})^{1/p}\|\tau_{n,i}-E\tau_{n,i}\|_q\|\tau_{n,j}-E\tau_{n,j}\|_q \tag{6.4.8}$$

Or on a :

$$\alpha(\tau_{n,i},\tau_{n,j})\leq\alpha(\eta_{n,i},\eta_{n,j})\leq\alpha_{|i-j|},$$
$$\Longrightarrow \sup_{i\leq n}\|\tau_{n,i}-E\tau_{n,i}\|_q\to 0\quad\text{quand } n\to+\infty.$$

en effet

$$\begin{aligned}\|\tau_{n,i}-E\tau_{n,i}\|_q &= \|U(\eta_i^n+c\,d_{n,i})-U(\eta_i^n)-(EU(\eta_i^n+c\,d_{n,i})-EU(\eta_i^n))\|_q\\ &\leq 2\|U(\eta_i^n+c\,d_{n,i})-U(\eta_i^n)\|_q\\ &\leq 2\left(\int|U(x+c\,d_{n,i})-U(x)|^q g(x)\,dx\right)^{1/q}\end{aligned} \tag{6.4.9}$$

Comme par la proposition 6.3.2, pour $c \in (0, \varepsilon)$, $|cl_{n,i}| \le \varepsilon \max_{i \le n} |l_{n,i}| \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$, par continuité de U, on a

$$\sup_{\substack{i \le n, \\ c \in [0,\delta]}} |U(x + cl_{n,i}) - U(x)| \longrightarrow 0, \quad n \to +\infty.$$

Puis comme $2 + \gamma > 1$, par convexité :

$$\sup_{\substack{i \le n, n \in \mathbb{N} \\ c \in [0,\delta]}} |U(x + cl_{n,i}) - U(x)|^{2+\gamma} \le 2^{1+\gamma} \Bigg(\sup_{\substack{i \le n, n \in \mathbb{N} \\ c \in [0,\delta]}} |U(x + cl_{n,i})|^{2+\gamma} + |U(x)|^{2+\gamma} \Bigg).$$

On a $\int |U(x)|^{2+\gamma} q(x) dx < +\infty$ car ξ_1 admet des moments d'ordre $2 + \gamma$ d'après l'hypothèse (6.4.1).
Comme U est croissante, il existe x_0 tel que

$$U(x) \le 0 \quad \forall x \le x_0, \qquad U(x) \ge 0 \quad \forall x \ge x_0,$$

puis $\sup_{\substack{i \le n, n \in \mathbb{N} \\ c \in [0,\delta]}} c|l_{n,i}| \le \varepsilon h$.
On a alors pour $x \ge x_0 + \varepsilon h$,

$$\sup_{\substack{i \le n, n \in \mathbb{N} \\ c \in [0,\delta]}} |U(x + cl_{n,i})|^{2+\gamma} \le U(x + \varepsilon h)^{2+\gamma}.$$

On a donc

$$\int_{x \ge x_0 + \varepsilon h} \sup_{\substack{i \le n, n \in \mathbb{N} \\ c \in [0,\delta]}} |U(x + cl_{n,i})|^{2+\gamma} q(x)\, dx \le \int_{x \ge x_0} \text{[illegible]} + \varepsilon h)^{2+\gamma} q(x)\, dx < +\infty,$$

où la finitude de cette dernière intégrale est due à l'existence d'un moment d'ordre $2+\gamma'$, $\gamma' > \gamma$ pour $\xi_i^n = U(\eta_i^n)$ en appliquant l'inégalité de Hölder de la même façon que pour le calcul menant à (6.4.4). De même, on a

$$\int_{x \le x_0 - \varepsilon h} \sup_{\substack{i \le n, n \in \mathbb{N} \\ c \in [0,\delta]}} |U(x + cl_{n,i})|^{2+\gamma} q(x)\, dx \le \int_{x \le x_0 - 2\varepsilon h} |U(x)|^{2+\gamma} q(x + \varepsilon h)\, dx < +\infty.$$

Comme

$$\int_{x_0 - \varepsilon h \le x \le x_0 + \varepsilon h} \sup_{\substack{i \le n, n \in \mathbb{N} \\ c \in [0,\delta]}} |U(x + cl_{n,i})|^{2+\gamma} q(x)\, dx < +\infty,$$

on a finalement l'intégrabilité de

$$\sup_{\substack{i \le n, n \in \mathbb{N} \\ c \in [0,\delta]}} \Big| U(x + cl_{n,i}) - U(x) \Big|^{2+\gamma} q(x),$$

et donc par convergence dominée et par la majoration (6.4.9), on obtient

$$K_n = \sup_{\substack{i \le n, \\ \epsilon \in]0,\delta]}} \left(E|\tau_{n,i} - E\tau_{n,i}|^{2+\gamma}\right)^{1/(2+\gamma)} \longrightarrow 0, \quad n \to +\infty \tag{6.4.10}$$

On déduit de (6.4.8) avec $p = \frac{q}{q-2} = 1 + 2/\gamma$, l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} |\mathrm{Cov}(\tau_{n,i}, \tau_{n,j})| &\le 8K_n^2 \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} \alpha_{i-j}^{1/p} \\
&\le 16K_n^2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\alpha_k^{1/p} \\
&\le 16K_n^2\, n \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{1/p}
\end{aligned} \tag{6.4.11}$$

Or avec $\alpha_k^{1/p} = O(k^{-r/p})$, on a $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{1/p} = O(1)$ car d'après (6.2.4), on a $r > 2 + 4/\gamma > p = 1 + 2/\gamma$. Il suit

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} |\mathrm{Cov}(\tau_{n,i}, \tau_{n,j})| = \frac{n}{\sigma_n^2} K_n\, O(1)$$

Comme $\sigma_n^2 \sim \sigma^2 n$ et $K_n \to 0$ par (6.4.10) quand $n \to +\infty$, on obtient

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} |\mathrm{Cov}(\tau_{n,i}, \tau_{n,j})| \longrightarrow 0 \tag{6.4.12}$$

Finalement d'après (6.4.6), (6.4.7), (6.4.12), la conclusion (6.4.5) est satisfaite, ce qui donne d'après l'inégalité maximale (6.1.3) la justification du point (i) du théorème 5.1.2.

6.4.2 Étude de (ii)

Le point (ii) ne concerne que la loi limite P de W ; il est donc vérifié de la même façon qu'en section 5.3.3 au chapitre 5 pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

6.4.3 Étude de (iii)

Dans cette section, il s'agit de montrer

$$\lim_{\epsilon \to 0} \overline{\lim_{n}}\, \|P_n G_{n,\epsilon} - P_n\| = 0. \tag{6.4.13}$$

A nouveau de la même façon qu'en section 5.3.4, on se ramène d'abord facilement à :

$$\|P_n G_{n,\epsilon}^{1} - P_n\| \le \|P_n \bar{G}_{n,\epsilon}^{1} - P_n\| \tag{6.4.14}$$

où $\mathcal{P}_n$ est la loi du vecteur gaussien $\bar{\eta}^n = (\eta_1^n, \ldots, \eta_n^n)$ et

$$\bar{G}_{n,c} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \bar{x} & \longmapsto \bar{G}_{n,c}\bar{x} = \bar{x} + c\bar{l}_n \end{cases},$$

$$\bar{l}_n = \left(\ldots, \sigma_n\left(l_n(\frac{k}{n}) - l_n(\frac{k-1}{n})\right), \ldots\right).$$

Notons $\mathbb{E}_n$ l'ensemble des fonctions constantes par morceaux sur les intervalles $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$, $k = 0, \ldots, n-1$, nulles en 0. On dispose de l'isomorphisme suivant de $\mathbb{E}_n$ sur $\mathbb{R}^n$:

$$\bar{J}_n(x)_k = \bar{\sigma}_n\left(x(\frac{k}{n}) - x(\frac{k-1}{n})\right), \quad k = 1, \ldots, n$$

Avec Y_n le processus à trajectoires affines par morceaux de loi Q_n introduit en (6.2.2), on a $\bar{J}_n Y_n = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, d'où

$$\mathcal{P}_n = Q_n \bar{J}_n^{-1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_n\bar{G}_{n,c}^{-1}\| &= \|Q_n\bar{J}_n^{-1} - Q_n\bar{J}_n^{-1}\bar{G}_{n,c}^{-1}\bar{J}_n\bar{J}_n^{-1}\| \\ &= \|Q_n\bar{J}_n^{-1} - Q_n(\bar{J}_n^{-1}\bar{G}_{n,c}\bar{J}_n)^{-1}\bar{J}_n^{-1}\| \\ &\leq \|Q_n - Q_n(\bar{J}_n^{-1}\bar{G}_{n,c}\bar{J}_n)^{-1}\|. \end{aligned}$$

Notons

$$\tilde{G}_{n,c} = \bar{J}_n^{-1}\bar{G}_{n,c}\bar{J}_n : \begin{cases} \mathbb{E}_n & \rightarrow \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{E}_n \\ x & \mapsto \bar{x} = \bar{J}_n(x) & \mapsto \bar{x} + c\bar{l}_n & \mapsto x + c\bar{J}_n^{-1}(\bar{l}_n). \end{cases}$$

Comme avec nos notations, l_n s'écrit $l_n = K_n\mu$, affine par morceaux sur les intervalles $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$, on a

$$\bar{J}_n^{-1}(\bar{l}_n) = \bar{J}_n^{-1} \circ J_n \circ \Pi_n(l_n) = \frac{\sigma_n}{\bar{\sigma}_n} l_n.$$

On estime maintenant facilement la distance en variation entre une loi gaussienne et sa translatée dans une direction admissible : l'inégalité (19.6) de [13] donne, en désignant par $\sigma_Q(l)$ l'admissibilité de la translation l donnée en page 162 :

$$\|Q_n - Q_n\tilde{G}_{n,c}\| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, c\, \frac{\sigma_n}{\bar{\sigma}_n} \frac{1}{\sigma_{Q_n}(l_n)}.$$

Or d'après (6.3.8), on a $\sigma_{Q_n}(l_n) \rightarrow \sigma_P(l) \neq 0$.
De plus, on a les équivalents $\sigma_n^2 \sim \sigma n$, $\bar{\sigma}_n^2 \sim \bar{\sigma} n$, il suit alors compte tenu de (6.4.14) :

$$\overline{\lim_n} \|P_n G_{n,c}^{-1} - P_n\| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, c\frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \frac{1}{\sigma_P(l)}.$$

On obtient facilement la limite (6.4.13) et donc le point (*iii*) du théorème 5.1.2.

Remarque 6.4.1
La plupart des légères restrictions par rapport au cas d'une suite de v.a.i.i.d. sont dues à cette partie. Dans le cas d'une suite de v.a.i.i.d., le membre de droite de (6.4.14) se majore à l'aide du lemme 20.1 de [13] car $\mathcal{P}_1$ est alors une loi normale standard de dimension n (*cf.* (5.3.28)). Un tel raisonnement n'est plus possible ici.

A la place, on se ramène à la distance en variation entre les mesures gaussiennes Q_n et leur translatée $Q_n G_{l_n}^{-1}$. On majore cette distance à l'aide de $\sigma_{Q_n}(l_n)$ qu'on peut contrôler par le théorème 19.6 de [13] si on définit $\tilde{l}_n$ en prenant dans (6.3.1) $l_n = K_n\mu$ une approximation de $l = K_\infty \mu$. C'est la raison pour laquelle, on doit prendre $l \in H_P^0$ (c'est à dire de la forme $l = K_\infty \mu$) et introduire cette approximation. De plus comme l'étude de (6.4.14) passe par la loi Q_n de Y_n, on doit imposer la condition de non-dégénérescence $\bar{\sigma}^2 = \lim \sigma_n^2/n > 0$ pour que la majoration aboutisse.

6.4.4 Étude de (v)

Cette partie ne dépend que des propriétés de la fonctionnelle f et de la loi limite P. Comme celles-ci restent inchangées par rapport au cas d'une suite de v.a.i.i.d. étudié au chapitre 5, (v) est vérifié comme en section 5.3.5.

6.4.5 Étude de (iv)

La longue vérification de ce point ne se trouve modifiée que dans les passages où la dépendance ne permet pas de majorer aussi facilement qu'au chapitre 5. On reprend les grandes lignes de la justification des sections 5.3.6–5.3.9 en ne revoyant que les points à réviser.

Rappelons qu'on note $\varphi_{n,z}(c) = f(G_{n,c}z)$ et que pour voir

$$\overline{\lim_n} \int_{\mathbb{R}^\infty} \|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{n,z}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1}\| \, P_n(dz) = 0 \tag{6.4.15}$$

comme $\|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{n,z}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{\infty,z}^{-1}\| \leq 2$, on montre la convergence en probabilité P_n vers 0 de l'intégrant. Pour cela, on rappelle qu'on dispose de

Proposition 6.4.1 *Soient pour* $n \in \overline{\mathbb{N}}$, $f_n : (\Omega \times [0,\delta], \mathcal{F} \times \mathcal{B}([0,\delta]), \mathbb{P} \otimes \lambda) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega^* \in \mathcal{F}$ *tels que*

1. $\forall \omega \in \Omega^*$, $\exists N_1(\omega)$, $\forall n \geq N_1(\omega)$, $f_n(\omega, \cdot)$ *est absolument continue*,
2. $f_n(\cdot, 0) \xrightarrow{\mathbb{P}} f_\infty(\omega, 0)$ *sur* Ω^*,
3. $\forall \omega \in \Omega^*$, $\frac{\partial}{\partial c} f_\infty(\omega, c) > 0$ λ*-presque partout pour* $c \in (0, \delta)$,
4. $$\left\|\frac{\partial}{\partial c} f_n(\omega, c) - \frac{\partial}{\partial c} f_\infty(\omega, c)\right\|_{L_1} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \ (\omega \in \Omega^*),$$

alors pour tout $\alpha > 0$, *quand* $n \to +\infty$

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega^* : \|\lambda_{[0,\delta]} f_n(\omega, \cdot)^{-1} - \lambda_{[0,\delta]} f_\infty(\omega, \cdot)^{-1}\| \geq \alpha\right\} \to 0.$$

On applique ce résultat aux deux suites données par

- $g_n(\omega, c) = f(G_{n,c}S_n)$, $g_\infty(\omega, c) = f(G_{\infty,c}W)$;
- $h_n(\omega, c) = f(G_{\infty,c}S_n)$, $h_\infty = g_\infty$.

L'étude de la suite $(h_n)_n$ reste inchangée. On renvoie pour cela à la section 5.3.6.

La vérification des points $1-4$ pour la suite $(g_n)_n$ ne se trouve modifiée que pour le point 4. L'existence de $L_{n,S_n,c}$ vecteur tangent à $(G_{n,c}S_n)_c$ se justifie comme en section 5.3.7. L'essentiel du point 4 de la proposition 5.3.2 repose sur la convergence de $L_{n,S_n,c}$ vers al dans le sens suivant :

$$\int_{[0,\delta]} \|L_{n,S_n,c} - al\| \, dc \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \tag{6.4.16}$$

où la norme $\|\cdot\|$ est la norme de l'espace $\mathbb{E}$ dans lequel vivent les fonctions $L_{n,S_n,c}$ et al. Comme on a

$$\|L_{n,S_n,c} - al\| = \left\| \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{[n\cdot]} l_{n,i}\, U'(\eta_i^n + cl_{n,i}) \; - al \right\|,$$

et $\|l - l_n(\frac{[n\cdot]}{n})\| \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$ par (6.4.2), on s'intéresse en fait à

$$\left\| \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{[n\cdot]} l_{n,i} \left(U'(\eta_i^n + cl_{n,i}) - a\right) \right\| = \max_{k\leq n} \left| \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{k} l_{n,i} \left(U'(\eta_i^n + cl_{n,i}) - a\right) \right|.$$

Rappelons les notations 5.3.40 utilisées au chapitre 5

$$\begin{aligned}
&\hat{l}_{n,i} = l_{n,i}/\sigma_n \;; \\
&h(x) = U'(x) - a \;; \\
&\zeta_i^n(c) = h(\eta_i^n + cl_{n,i}) \;; \\
&\zeta_{n,i}^s(c) = \zeta_{n,i}(c) \mathbf{1}_{\{|\zeta_{n,i}(c)| \leq s\}}, \quad s > 0.
\end{aligned}$$

On décompose alors $\zeta_{n,i}(c)$ en :

$$\zeta_{n,i}(c) = \left(\zeta_{n,i}^s(c) - E\zeta_{n,i}^s(c)\right) \; + \; \zeta_{n,i}(c)\mathbf{1}_{\{|\zeta_{n,i}(c)| > s\}} \; + \; E\zeta_{n,i}^s(c)$$

et on étudie les sommes correspondants à chacun des trois termes

$$\begin{aligned}
&(a_{14}) := \zeta_{n,i}^s(c) - E\zeta_{n,i}^s(c), \\
&(a_{15}) := \zeta_{n,i}(c)\mathbf{1}_{\{|\zeta_{n,i}(c)| > s\}}, \\
&(a_{16}) := E\zeta_{n,i}^s(c).
\end{aligned}$$

Étude de (a_{14})

On s'intéresse à $\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \max_{k\leq n} \left|\sum_{i=1}^k \hat{l}_{n,i}(\zeta_{n,i}^s(c) - E\zeta_{n,i}^s(c))\right| dc$, en utilisant le théorème de

Fubini

$$\begin{aligned}
E\int_0^{\delta}\frac{1}{\delta}\max_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} l_{n,i}(\zeta_{n,i}^s(c)-E\zeta_{n,i}^s(c))\right|dc
&= \int_0^{\delta}\frac{1}{\delta}E\max_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} l_{n,i}(\zeta_{n,i}^s(c)-E\zeta_{n,i}^s(c))\right|dc\\
&\le \frac{1}{\delta}\sup_{c\in[0,\delta]}E\max_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} l_{n,i}(\zeta_{n,i}^s(c)-E\zeta_{n,i}^s(c))\right|.
\end{aligned}$$

Notons $Y_n(c) = \max_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} l_{n,i}(\zeta_{n,i}^s(c)-E\zeta_{n,i}^s(c))\right|$. On a en utilisant la proposition 6.3.2 :

$$Y_n(c)\le\sum_{i=1}^{n}|l_{n,i}|\,|\zeta_{n,i}^s(c)-E\zeta_{n,i}^s(c)|\le 2s\sum_{i=1}^{n}|l_{n,i}|\le 2s\,K$$

Soit $\varepsilon>0$ fixé.

$$\begin{aligned}
E|Y_n(c)| &= E|Y_n(c)|\mathbf{1}_{\{|Y_n(c)|\le\varepsilon\}}+E|Y_n(c)|\mathbf{1}_{\{|Y_n(c)|>\varepsilon\}}\\
&\le \varepsilon+2sK\,\mathbb{P}\{|Y_n(c)|>\varepsilon\}.
\end{aligned}$$

D'où

$$E\int_0^{\delta}\max_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} l_{n,i}(\zeta_{n,i}^s(c)-E\zeta_{n,i}^s(c))\right|dc/\delta\le\varepsilon+2s\,K\sup_{c\in[0,\delta]}\mathbb{P}\{|Y_n(c)|>\varepsilon\}. \qquad (6.4.17)$$

On étudie donc $\sup_{c\in[0,\delta]}\mathbb{P}\{|Y_n(c)|>\varepsilon\}$. Pour cela, on utilise la proposition 6.1.2 et on se ramène à montrer que pour tout $\varepsilon>0$

$$\sup_{c\in[0,\delta]}\max_{k\le n}\mathbb{P}\left\{\left|\sum_{i=k}^{n} l_{n,i}(\zeta_{n,i}^s(c)-E\zeta_{n,i}^s(c))\right|>\varepsilon\right\}\longrightarrow 0,\quad n\to+\infty. \qquad (6.4.18)$$

Or en notant $\tilde\zeta_{n,i}^s(c)=\zeta_{n,i}^s(c)-E\zeta_{n,i}^s(c)$, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{\left|\sum_{i=k}^{n} l_{n,i}(\zeta_{n,i}^s(c)-E\zeta_{n,i}^s(c))\right|>\varepsilon\right\}\\
&\quad\le\frac{1}{\varepsilon^2}E\left(\sum_{i=k}^{n} l_{n,i}\tilde\zeta_{n,i}^s(c)\right)^2\\
&\quad\le\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=k}^{n} l_{n,i}^2E\tilde\zeta_{n,i}^s(c)^2+\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{\substack{i,j=k,\\ i\ne j}}^{n} l_{n,i}l_{n,j}\,E(\tilde\zeta_{n,i}^s(c)\tilde\zeta_{n,j}^s(c)).
\end{aligned} \qquad (6.4.19)$$

En utilisant la proposition 6.3.2, la première somme se majore par

$$\frac{2s^2}{\varepsilon^2}\frac{K}{\sigma_n^2}.$$

Pour la deuxième somme, en utilisant l'inégalité (6.1.1) avec $p \geq 1$, $q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{2}{q} = 1$ qu'on précise ci-dessous, on a

$$\begin{aligned} |\operatorname{Cov}(\zeta_{n,i}^s(c), \zeta_j^n(c))| &\leq 8\,\alpha(\zeta_{n,i}^s(c), \zeta_j^n(c))^{1/p}(E|\zeta_{n,i}^s(c)|^q)^{1/q}(E|\zeta_j^n(c)|^q)^{1/q} \\ &\leq 8\,s^2\,\alpha(\eta_i^n, \eta_j^n)^{1/p} \\ &\leq 8\,s^2\,\alpha(i-j)^{1/p}. \end{aligned}$$

On en déduit la majoration du deuxième terme par :

$$\frac{8s^2}{\sigma_n^2}(\max_{i\leq n}|l_{n,i}|)^2 \sum_{i,j=1,i\neq j}^{n} \alpha_{|i-j|}^{1/p} \leq \frac{16s^2 n}{\sigma_n^2}(\max_{i\leq n}|l_{n,i}|)^2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{1/p}. \qquad (6.4.20)$$

Comme p est donné par $\frac{1}{p} + \frac{2}{q} = 1$ avec q arbitrairement grand (car $\zeta_{n,i}^s(c)$ est bornée), on peut supposer p aussi proche de 1 par valeurs supérieures qu'on le veut. Or $\alpha_k = O(k^{-r})$ donc $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{1/p} = 0(1)$ dés que $r > 1$ a fortiori avec l'hypothèse (6.2.4).
Comme $\sigma_n^2 \sim \sigma^2 n$ et $\max_{i\leq n}|l_{n,i}| \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$ d'après la proposition 6.3.2, on obtient la convergence vers 0 du deuxième terme de (6.4.19).
Avec (6.4.19), on déduit alors (6.4.18) puis on obtient avec (6.4.17)

$$E\left(\int_0^\delta \max_{k\leq n}\left|\sum_{i=1}^{k} \hat{l}_{n,i}(\zeta_{n,i}^s(c) - E\zeta_{n,i}^s(c))\right| dc/\delta\right) \longrightarrow 0, \quad n \to +\infty. \qquad (6.4.21)$$

Étude de (a_{15}). On s'intéresse à

$$\max_{k\leq n}\left|\sum_{i=1}^{k} \hat{l}_{n,i} E\zeta_{n,i}^s(c)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\hat{l}_{n,i}|\,|E\zeta_{n,i}^s(c)|.$$

L'étude est identique à celle du cas du chapitre 5, on montre d'abord que

$$\sup_{i\leq n, c\in[0,\delta]} |E\zeta_{n,i}^s(c) - E\zeta_{n,i}^s(0)| \longrightarrow 0, \quad n \to +\infty.$$

Il suit

$$\int_0^\delta \max_{k\leq n}\left|\sum_{i=1}^{k} \hat{l}_{n,i} E\zeta_{n,i}^s(c)\right| dc \leq \delta K\left(|E\zeta_{1,1}^s(0)| + \sup_{i\leq n, c\in[0,\delta]} |E\zeta_{n,i}^s(c) - E\zeta_{n,i}^s(0)|\right).$$

Comme $\sup_{i\leq n, c\in[0,\delta]} |E\zeta_{n,i}^s(c) - E\zeta_{n,i}^s(0)| \to 0$ et que par convergence dominée $E\zeta_{1,1}^s(0) = \int h(x)\mathbf{1}_{\{|h(x)|\leq s\}}\, q(x)\, dx \longrightarrow 0$ quand $s \to +\infty$, on obtient :

$$\lim_{s\to+\infty} \overline{\lim_{n}} \int_0^\delta \max_{k\leq n}\left|\sum_{i=1}^{k} \hat{l}_{n,i} E\zeta_{n,i}^s(c)\right| dc = 0. \qquad (6.4.22)$$

Étude de (a_{16}). On s'intéresse enfin à :

$$\max_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} \dot{l}_{n,i}\zeta_{n,i}(c)\mathbf{1}_{\{|\zeta_{n,i}(c)|>s\}}\right| \le \sum_{i=1}^{n} |\dot{l}_{n,i}|\,|\zeta_{n,i}(c)|\,\mathbf{1}_{\{|\zeta_{n,i}(c)|>s\}}.$$

L'étude est identique au cas d'une suite de v.a.i.i.d., on commence par voir :

$$\sup_{i\le n,c\in[0,\delta]}\left|E|\zeta_{n,i}(c)|\mathbf{1}_{\{|\zeta_{n,i}(c)|>s\}} - E|\zeta_{n,i}(0)|\mathbf{1}_{\{|\zeta_{n,i}(0)|>s\}}\right| \longrightarrow 0 \text{ quand } n\to+\infty. \quad (6.4.23)$$

Puis on obtient facilement pour (a_{16}) que :

$$\lim_{s\to+\infty}\overline{\lim_{n}}\, E\int_0^\delta \max_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}\dot{l}_{n,i}\zeta_{n,i}(c)\mathbf{1}_{\{|\zeta_{n,i}(c)|>s\}}\right|dc = 0 \quad (6.4.24)$$

D'après (6.4.21), (6.4.22), (6.4.24), on déduit maintenant que :

$$\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \left\|\sum_{i=1}^{[n\cdot]}\dot{l}_{n,i}\zeta_{n,i}(c)\right\| dc \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \text{ quand } n\to+\infty,$$

c'est à dire la convergence (6.4.16) du vecteur tangent $L_{n,S_n,c}$ vers al.

Remarquons qu'à nouveau, on pourrait montrer comme pour (6.4.16), la convergence en probabilité pour chaque c fixé de $L_{n,S_n,c}$ vers al en probabilité

$$\|L_{n,S_n,c} - al\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \text{ quand } n\to+\infty.$$

Cette convergence est utile dans la vérification de l'étape 3 de la proposition 5.3.2. On conclut maintenant facilement la vérification du point (iv) de cette proposition pour la suite $(g_n)_n$ comme au chapitre 5. La proposition s'applique et donne pour tout $\alpha>0$:

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left\{\omega\in W^{-1}(V)\,\middle|\, \|\lambda_{0,\delta}g_n(\omega,\cdot)^{-1} - \lambda_{0,\delta}g_\infty(\omega,\cdot)^{-1}\| > \alpha\right\} = 0.$$

La vérification finale du point (iv) du théorème 5.1.2 reste inchangée. Finalement ce résultat s'applique et prouve la convergence en variation (6.2.6) cherchée. ∎

Perspectives

Le travail effectué au cours de cette thèse est consacré à deux thèmes principaux : l'étude d'intégrales stochastiques de type poissonien ou multiples par rapport à des mesures stables (constructions, propriétés des lois) et la recherche de principes locaux d'invariance. Les résultats proposés offrent plusieurs possibilités de développement.

Après avoir construit les intégrales stochastiques stables multiples au chapitre 2, nous nous sommes intéressés à leurs lois aux chapitres 3 et 4. L'existence des densité de ces intégrales prouvée au chapitre 3 suggère d'aller plus loin dans l'étude de leurs lois en analysant les propriétés de régularité des densités. La représentation de LePage s'est révélée un outil bien adapté pour étudier ce type d'intégrale (voir aussi [40, 43, 44] où elle est utilisée dans ce cadre). Cette représentation permettra donc sans doute d'approfondir l'analyse des lois de ces intégrales.

On pourra également utiliser ces résultats sur la représentation de LePage pour proposer des applications statistiques pour l'évaluation des coefficients caractéristiques des lois stables.

Les principes locaux d'invariance proposés aux chapitres 5 et 6 sont susceptibles de nombreux développements qui sont autant d'objectifs.

Les perspectives prioritaires pour ce thème sont les suivantes :
- affaiblir encore davantage les hypothèses sur la densité de la loi commune des variables indépendantes et identiquement distribuées ξ_i pour lesquelles on énonce le théorème 5.2.2 ;
- généraliser les hypothèses de dépendance dans le cas non indépendant du chapitre 6 : c'est à dire aussi bien affaiblir les hypothèses de mélange fort du théorème 6.2.1 que d'étudier d'autres formes de dépendance pour les variables initiales ξ_i (autre type de mélange, association, longue mémoire).

Par ailleurs, d'autres généralisations naturelles seraient très intéressantes :
- proposer d'abord un principe local d'invariance du type 5.2.2 pour des variables aléatoires dans le domaine d'attraction d'une loi stable ;
- étudier deux classes de processus importants dans ce cadre : les processus empiriques et les processus ponctuels.

Pour ce deuxième type de processus, on s'attachera également à faire le lien entre les ocessus ponctuels poissoniens et la représentation de LePage dont on se sert pour l'étude des intégrales stables multiples au chapitre 2. Ce type de préoccupation prolonge aussi celles du chapitre 1.

Un objectif supplémentaire concerne les méthodes générales utilisées tout au long de la thèse : une approche efficace a en effet été de se ramener à l'étude de fonctionnelles stochastiques pour appliquer des méthodes adaptées pour ce type d'analyse, les méthodes de *stratification* et de *superstructure* décrites respectivement aux chapitres 3 et 4. Un objectif intéressant concernant ces outils est alors d'étudier leurs liens avec les techniques de calcul stochastique de Malliavin.

Cette liste de perspectives n'est pas exhaustive, ce[illegible] remarques pouvant également faire l'objet de recherches plus précises.

Bibliographie

[1] A. ASTRAUSKAS, *Limit theorems for quadratic forms of linear processes*, Lith. Math. J., vol. 23, 1983, p. 355–361.

[2] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures*, Wiley, 1968, 2d ed.

[3] J.-C. BRETON, *Intégrales stables multiples : représentation, absolue continuité de leur loi*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., vol. 331, 2000, p. 717–720.

[4] J.-C. BRETON, Y. A. DAVYDOV, *Principe local d'invariance pour des variables aléatoires i.i.d.*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., vol. 333, 2001, p. 673–676.

[5] J.-C. BRETON, *Absolue continuité des lois jointes des intégrales stables multiples*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., vol. 334, 2002.

[6] Y. A. DAVYDOV, *The invariance principle for stationary processes*, Theory Probab. Appl., vol. 15, 1970, p. 487–498.

[7] Y. A. DAVYDOV, *On the absolute continuity of distributions of functionals of random processes*, Theory Probab. Appl., vol. 23, 1978, p. 218–219.

[8] Y. A. DAVYDOV, *On strong convergence of distributions of functionals of random processes I, II*, Theory Probab. Appl., vol. 25, 1980, p. 772–789, vol. 26, 1981, p. 258–278.

[9] Y. A. DAVYDOV, M. A. LIFSHITS, *Stratification method in some probability problems*, J. Soviet. Math., vol. 31, no. 2, 1985, p. 2796–2858.

[10] Y. A. DAVYDOV, *On the absolute continuity of images of measures*, J. Soviet. Math. vol. 36, no. 4, 1987, p. 468–473.

[11] Y. A. DAVYDOV, *On distributions of multiple Wiener-Itô integrals*, Theory Probab. Appl., vol. 35, no. 1, 1991, p. 27–37.

[12] Y. A. DAVYDOV, *On convergence in variation of one-dimensional image measures*, J. Math. Sciences, vol. 75, no. 5, 1995, p. 1903–1909.

[13] Y. A. DAVYDOV, M. A. LIFSHITS, N. V. SMORODINA, *Local properties of distributions of stochastic functionals*, American Mathematical Society, 1998.

[14] P. DOUKHAN, *Mixing : properties and examples*, Lect. Notes in Stat., no. 85, 1994.

[15] P. DOUKHAN, P. MASSART, E. RIO, *The functional central limit theorem for strongly mixing processes*, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 30, no. 1, 1994, p. 63–82.

[16] D. D. ENGEL, *The multiple stochastic integral*, Mem. Amer. Math. Soc., no. 28, 1982.

[17] W. FELLER, *An introduction to probability theory and its applications, volume II*, Wiley, 1965

[18] H. FEDERER, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[19] T. FERGUSON, M. KLASS, *A representation theorem of independent increment processes without Gaussian component*, Ann. Math. Stat., vol. 43, 1972, p. 1634–1643.

[20] I. KARATZAS, S. E. SHREVE, *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer-Verlag, no. 113, 1988.

[21] W. KRAKOWIAK, J. SZULGA, *Random multilinear forms*, Ann. Probab., vol. 14, no. 3, 1986, p. 957–973.

[22] W. KRAKOWIAK, J. SZULGA, *A multiple stochastic integral with respect to a p-strictly stable random measure*, Ann. Probab., vol. 16, no. 2, 1988, p. 764–777.

[23] S. KUSUOKA, *On the absolute continuity of the law of a system of multiple Wiener-Itô integrals*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., vol. 30, 1983, p. 191–197.

[24] S. KWAPIEŃ, W. A. WOYCZYŃSKI, *Double stochastic integrals, random quadratic forms and random series in Orlicz spaces*, Ann. Probab., vol. 15, 1987, p. 1072–1096.

[25] R. LEPAGE, M. WOODROOFE, J. ZINN, *Convergence to a stable distribution via order statistics*, Ann. Probab., vol. 9, no. 4, 1981, p. 624–632.

[26] M. A. LIFSHITS, *The fiber method and its application to the study of functionals of stochastic processes*, Theory Probab. Appl., vol. 27, no. 1, 1982, p. 69–83.

[27] M. A. LIFSHITS, *An application of the stratification method to the study of functionals of processes with independent increments*, Theory Probab. Appl., vol. 29, no. 4, 1984, p. 753–765.

[28] M. A. LIFSHITS, *Stratification method for processes with independent increments*, J. Soviet Math., vol. 27, 1984, p. 3241–3251.

[29] T. F. LIN, *Multiple integrals of a homogeneous process with independent increments*, Ann. Probab. Appl., vol. 9, 1981, p. 529–532.

[30] M. B. MARCUS, G. PISIER, *Characterization of almost surely continuous p-stable random Fourier series and strongly stationary processes*, Acta Math., vol. 152, 1984, p. 245–301.

[31] P. MAJOR, *Multiple Wiener-Itô integrals*, Lect. Notes in Maths., no. 849, Springer-Verlag, 1981.

[32] T. R. MCCONNELL, *On the triple integration with respect to stable measure*, Preprint, 1986.

[33] F. MERLEVÈDE, M. PELIGRAD, *The functional central limit theorem under the strong mixing conditions*, Ann. Probab., vol. 28, no. 3, 2000, p. 1336–1352.

[34] C. NOQUET, *Principe d'invariance local pour les chaînes de Markov*, Thèse de Doctorat, Université Lille 1, 1997.

[35] E. NOWAK, *Mesures translatées et distance en variation application à l'absolue continuité et à un principe d'invariance local pour des champs aléatoires gibbsiens*, Thèse de Doctorat, Université Lille 1, 1998.

[36] H. OODAIRA, K. YOSHIHARA, *Functional central limit theorems for strictly stationary processes satisfying the strong mixing conditions*, Kodai Math. Sem. Rep., vol. 24, 1972, p. 259-269.

[37] D. REVUZ, M. YOR, *Continuous martingales and Brownian motion*, vol. 293, Springer, 1990.

[38] J. ROSIŃSKI, W. A. WOYCZYŃSKI, *Products of random measures, multilinear random forms and multiple stochastic integrals*, in Proc. Measure Theory Conference, Oberwolfach 1983, Lect. Notes in Math., no. 1089, 1984, p. 294–315.

[39] J. ROSIŃSKI, W. A. WOYCZYŃSKI, *On Itô stochastic integration with respect to stable motion : inner clock, integrability of sample paths, double and multiple integrals*, Ann. Probab., vol. 14, no. 1, 1986, p. 271-286.

[40] J. ROSIŃSKI, G. SAMORODNITSKY, M. S. TAQQU, *Sample path properties of stochastic processes represented as multiple stable integrals*, J. Multivariate Anal., vol. 37, 1991, p. 115–134.

[41] J. ROSIŃSKI, J. SZULGA, *Product random measures and double stochastic integrals*, Martingale Theory in Harmonic Analysis and Banach Spaces, Lect. Notes in Math., no. 939, 1982, p. 181–198.

[42] W. RUDIN, *Real and complex analysis*, MacGraw-Hill, 1966.

[43] G. SAMORODNITSKY, J. SZULGA, *An asymptotic evaluation of the tail of a multiple symmetric α-stable integral*, Ann. Probab., vol. 17, 1989, p. 1503-1520.

[44] G. SAMORODNITSKY, M. S. TAQQU, *Multiple stable integrals of Banach-valued function*, J. Theoret. Probab., vol. 3, 1990, p. 267–287.

[45] G. SAMORODNITSKY, M. S. TAQQU, *Construction of multiple stable integrals using LePage representation* in *Stable processes and related topics* (G. Samorodnitsky, S. Cambanis, M. S. Taqqu, Ed.), Birkhäuser, Boston, 1991.

[46] G. SAMORODNITSKY, M. S. TAQQU, *Stable non-Gaussian random processes*, Chapman and Hall, 1994.

[47] I. SHIGEKAWA, *Derivative of Wiener functionals and absolute continuity of induced measures*, J. Math. Kyoto Univ., vol. 20, 1980, p. 263–289.

[48] E. STEIN, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, New Jersey, 1970.

[49] D. SURGAILIS, *On L^2 and non-L^2 multiple stochastic integration*, Lect. Notes in Control and Info. Sci., vol. 36, 1981, p. 212-226.

[50] D. SURGAILIS, *On multiple Poisson stochastic integrals and associated Markov semigroups*, Probab. Math. Statist., vol. 3, 1984, p. 217–339.

[51] D. SURGAILIS, *On the multiple stable integral*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete, vol. 70, 1985, p. 621–632.

Abstract

In the first part, we study the laws of some stochastic integrals. After the introducing case of Poisson integrals for which we study the absolute continuity, we construct multiple stable integrals for functions in an Orlicz type space. To this way, we use a generalization of LePage representation. This representation is suitable to apply the stratification method and to study the laws of these integrals. We find in particular a condition ensuring absolute continuity of joint laws of multiple stable integrals with respect to the Lebesgue measure. We prove also from this representation the continuity for total variation norm of the laws of these integrals with respect to integrated functions.

In the second part, we are interested in strong convergence of laws of stochastic functionals. We first consider a sequence $(\xi_n)_n$ of *i.i.d.* random variables and we associate processes of normalized partial sums. We get then interested in the convergence in variation of the laws of functionals of these processes to th[illegible] functionals of Wiener process. This type of convergence strengthens the ones of functional central limit theorem and allows to obtain local invariance principle. We prove such a convergence for a large class of functionals under hypothesis on the common law of the ξ_n's weaker than those of the former results. We give real examples of such functionals for which these convergence holds. We show, to conclude, a similar result starting from some sequence of strongly dependent random variables. We obtain in this way, for example, a result of convergence in variation of the laws of normalized sums of dependent variables.

Key words : Absolute continuity, LePage representation, local invariance principle, multiple stochastic integrals, stable laws, stratification method, strongly dependent process, total variation.