

UNIVERSITÉ DE LILLE I
UFR DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE MÉCANIQUE FONDAMENTALE

THÈSE DE DOCTORAT

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE I

Discipline : MÉCANIQUE

présentée par

Annabelle JOULIN

le 17/12/2001



**INSTABILITÉS CONVECTIVES ET ABSOLUES D'UN MÉLANGE
BINAIRE EN CONVECTION MIXTE DANS UN MILIEU POREUX**

JURY

Mr G. LABROSSE
Mme M.C. NÉEL

UNIVERSITÉ DE PARIS XI
UNIVERSITÉ D'AVIGNON

RAPPORTEUR
RAPPORTEUR

Mr U. EHRENSTEIN
Mr A. MERLEN
Mr P.A. BOIS
Mr M.N. OUARZAZI

UNIVERSITÉ DE NICE
UNIVERSITÉ DE LILLE I
UNIVERSITÉ DE LILLE I
UNIVERSITÉ DE LILLE I

EXAMINATEUR
EXAMINATEUR
DIRECTEUR
CO-DIRECTEUR

Table des matières

Introduction	3
Liste des paramètres	6
1 Présentation du problème physique et formulation	7
1.1 Caractérisation du milieu poreux	7
1.1.1 Définition	8
1.1.2 Paramètres	8
1.2 Phénomène de thermodiffusion - Effet Soret	10
1.3 Convection mixte et travaux antérieurs	13
1.4 Système d'équations de conservation et conditions aux limites	14
1.4.1 Modélisation mathématique	14
1.4.2 Etat de base : solution de conduction	20
1.4.3 Équations simplifiées	20
1.5 Conclusion	23
2 Analyse de stabilité linéaire de la solution de conduction	25
2.1 Analyse temporelle de stabilité linéaire	26
2.1.1 Modèle de parois perméables	27
2.1.2 Modèle de parois imperméables	30
2.1.3 Comparaison des résultats issus des deux modèles	40
2.2 Nature convective ou absolue des instabilités	43
2.2.1 Réponse linéaire du système à une perturbation localisée	45
2.2.2 Evolution du paquet d'ondes dans la région instable	49
2.2.3 Comportement des branches spatiales	51
2.2.4 Instabilités absolues et sélection de la fréquence globale	54
2.2.5 Comparaison avec les prévisions de l'équation de Ginzburg-Landau linéaire	64
2.2.6 Phénomène d'amplification du bruit en régime convectif	67
2.2.7 Spectre de fréquence et détermination du coefficient de Soret	70
2.3 Conclusion	71

3	Dynamique faiblement non linéaire pour $\psi < \psi_{pc}$	73
3.1	Instabilités primaires et non linéarités	73
3.1.1	Sélection non linéaire en régime d'instabilité absolue	73
3.1.2	Intégration numérique de l'équation de Ginzburg-Landau complexe	75
3.1.3	Lois d'échelle d'établissement des modes globaux et détermination du coefficient de Soret	79
3.2	Stabilité des ondes progressives par rapport à une perturbation quelconque	83
3.2.1	Instabilités de Benjamin-Feir	84
3.2.2	Instabilités convectives d'Eckhaus	85
3.2.3	Instabilités convectives ZigZag	86
3.3	Instabilités secondaires absolues	88
3.3.1	Instabilités absolues d'Eckhaus	89
3.3.2	Instabilités absolues Zigzag	90
3.4	Conclusion	90
4	Dynamique faiblement non linéaire pour $\psi > \psi_{pc}$	93
4.1	Nature de la bifurcation	94
4.2	Bifurcation supercritique	96
4.2.1	Lois d'échelle	97
4.2.2	Instabilités secondaires	97
4.3	Bifurcation souscritique	103
4.3.1	Propagation des fronts	103
4.3.2	Cycle d'hystérésis	107
4.3.3	Lois d'échelle et détermination de ψ	109
4.4	Instabilités secondaires : cas d'une bifurcation souscritique	111
4.4.1	Instabilité convective d'Eckhaus	111
4.4.2	Instabilité absolue d'Eckhaus	111
4.5	Conclusion	112
	Conclusion générale et perspectives	115
	Bibliographie	118
A	Détermination d'équations d'amplitude	125
A.1	Parois perméables	125
A.1.1	Cas $\psi > \psi_{pc}$	125
A.1.2	Cas $\psi < \psi_{pc}$	130
A.2	Parois imperméables : Modèle de Lorenz	133

A.2.1	Cas $\psi < \psi_{pc}$	133
A.2.2	Cas $\psi > \psi_{pc}$	138

Introduction

Les instabilités hydrodynamiques telles que la convection de Rayleigh-Bénard jouent un rôle important dans l'étude de la formation des structures dans les systèmes hors équilibre. La convection d'un mélange binaire chauffé par le bas fait partie de ces systèmes dynamiques qui ont été beaucoup étudiés ces dernières années. Le mélange binaire étant constitué de deux fluides miscibles, par exemple eau-alcool ou ^3He ^4He , l'effet Soret introduit en plus du nombre de Rayleigh, un deuxième paramètre de contrôle, à savoir le rapport de séparation ψ qui mesure l'effet stabilisant ($\psi < 0$) ou déstabilisant ($\psi > 0$) du gradient de concentration. Suivant la valeur de ψ , et au-delà d'une différence critique de la température, la convection naissante peut être structurée sous la forme de rouleaux stationnaires ou sous forme d'ondes progressives [67]. La nature de la bifurcation ainsi que les différentes formes de structures convectives ont été étudiées théoriquement [6, 7, 8, 27, 41, 71, 80] et avec une grande précision expérimentale [16, 50, 37, 73]. Cet engouement à étudier la convection naturelle dans les mélanges binaires s'explique largement par la tentative de comprendre la dynamique non linéaire riche et féconde qui caractérise ce système, et que l'on retrouve dans d'autres systèmes physiques bien différents. L'interprétation physico-chimique de l'ensemble de cette dynamique reste tributaire de la connaissance du rapport de séparation ψ caractérisant le mélange binaire concerné. Malheureusement, la mesure expérimentale de ψ demeure une tâche soit totalement inaccomplie, soit partiellement accomplie pour certains types de mélanges binaires, avec confrontation des résultats de différentes équipes dans différents laboratoires ¹. Bou-Ali et Ecenarro [5] proposent une mesure expérimentale du coefficient de Soret pour un mélange toluène et n-heptane en utilisant des colonnes gravitationnelles verticales. On peut aussi le mesurer à l'aide de cellules de thermodiffusion, dans lesquelles le mélange est placé entre deux plaques horizontales maintenues à des températures différentes. Le gradient de concentration résultant est mesuré en absence de convection. Dans cette configuration, des méthodes optiques ont été mises en place, notamment par Kolodner et al [47]. Ils ont employé une technique de déflexion de faisceaux laser pour la mesure du coefficient de Soret pour un mélange

¹À ce sujet, nous renvoyons le lecteur à un ouvrage qui va paraître [44] et qui relate la confrontation de ces résultats.

eau-éthanol. Cette méthode utilise le fait que la diffusion de concentration est plus lente que la diffusion de chaleur, ce rapport étant déterminé par le nombre de Lewis, qui est de l'ordre de 10^{-2} pour les liquides. Les profils de vitesse et de concentration évoluent sur des échelles de temps très différentes et peuvent être mesurés. Le rapport de ces deux gradients donne le coefficient de Soret. Les résultats de Kolodner [47] sont en bon accord avec ceux de Zhang et al [79] qui utilisent aussi des méthodes optiques pour le mélange eau-alcool. Enfin, signalons que certaines équipes réalisent de coûteuses mesures dans l'espace (i.e. en apesanteur) qui visent à déterminer le coefficient de Soret [78].

Toutes ces mesures expérimentales se font en absence de convection. Prigogine est le premier à avoir eu l'idée ingénieuse de se servir de la convection pour la mesure du coefficient de Soret. Son idée repose sur la mesure des caractéristiques critiques liées à la naissance de la convection (nombre de Rayleigh, fréquence, ...) afin d'en déduire la valeur de ψ grâce aux courbes neutres de stabilité obtenues théoriquement. L'équipe de J.K. Platten à Mons en Belgique a développé cette idée durant les quinze dernières années [68]. La thèse de doctorat de Lhost [51] est une bonne référence à ce sujet.

Ce mémoire est consacré à l'étude de la **convection mixte** d'un mélange binaire en milieu poreux. Ce dernier est supposé homogène, isotrope et est infiniment étendu dans le plan horizontal. Le mélange binaire, initialement homogène sature la couche poreuse et est soumis à la fois à un gradient de température vertical et à un gradient de pression horizontal, i.e. un écoulement horizontal de vitesse de filtration constante. Les écoulements de fluide à travers un milieu poreux se rencontrent dans des domaines très variés des sciences et techniques. A titre d'exemple, on peut citer l'industrie pétrolière (dans les problèmes d'extraction du pétrole ou des gaz naturels), les problèmes industriels de la purification de l'eau, les problèmes géophysiques, etc... Malgré la diversité des applications liées aux écoulements dans les milieux poreux, on ne peut que s'étonner du nombre réduit d'études traitant de la convection mixte en milieu poreux. Dans le cas d'**un fluide pur**, citons l'étude expérimentale de référence de M. Combarous [22, 23] et les travaux analytiques et numériques récents de F. Dufour et M.C. Néel [28, 29]. Quant à la convection mixte des **mélanges binaires en milieu poreux**, on ne dispose jusqu'à présent d'aucune référence à ce sujet. Cependant, en **milieu fluide**, de nombreuses études sur la convection mixte ont été accomplies pour un fluide pur [61, 66, 56, 53, 62] et quelques travaux récents pour les mélanges binaires [15, 46].

L'objectif de ce travail est double. D'une part, nous nous attachons à décrire l'évolution spatio-temporelle de toute perturbation générée au sein d'un milieu poreux saturé par un mélange binaire et soumis à la fois à un gradient vertical de température et à un écoulement de débit filtrant non nul. D'autre part, nous pro-

posons à partir des résultats concernant la dynamique linéaire et non linéaire d'un tel système, une alternative permettant la détermination du coefficient de Soret.

Cette thèse comporte quatre chapitres :

- dans un premier chapitre, nous présentons le problème physique et nous proposons une modélisation mathématique qui repose notamment sur la loi phénoménologique de Darcy en tant que loi de conservation de la quantité de mouvement. Après avoir identifié la solution de l'état conductif respectant toutes les symétries du système, les paramètres sans dimension qui caractérisent ce problème sont mis en évidence.
- ce système étant un exemple de systèmes fluides ouverts, la dimension spatiale des instabilités joue alors un rôle déterminant. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de stabilité linéaire de l'état conductif où une distinction est faite entre instabilité convective (i.e. dynamique sensible à la présence du bruit) et instabilité absolue (i.e. dynamique intrinsèque liée au système et indépendante du bruit). La transition du régime d'instabilité convective à un régime d'instabilité absolue est proposée comme un critère pour déterminer le coefficient de Soret.
- le chapitre trois traite de la dynamique faiblement non linéaire des mélanges tels que $\psi < \psi_{pc}$ ². L'évolution spatio-temporelle des modes les plus instables est décrite par deux équations de Ginzburg-Landau complexes couplées. On reporte aussi des résultats récents sur les instabilités secondaires, qui peuvent aussi être à l'origine de structures entretenues par le bruit lorsqu'elles sont de nature convective.
- le chapitre quatre est consacré au cas des mélanges binaires où $\psi > \psi_{pc}$. On montre notamment que la bifurcation de l'état conductif à l'état convectif peut être sous-critique pour certains mélanges. Dans ce cas, l'analyse linéaire menée au chapitre 2 tombe en défaut. La théorie d'instabilité convective et absolue est alors étendue au cas de la bifurcation sous-critique. Un front non linéaire, solution de l'équation de Ginzburg-Landau quintique, relie l'état conductif métastable à l'état convectif stable et d'amplitude finie. La détermination de la vitesse de ce front permet de dégager les caractéristiques critiques non linéaires des instabilités absolues. On reporte aussi des résultats nouveaux concernant les instabilités secondaires en régime sous-critique.

Enfin, les résultats obtenus dans les quatre chapitres sont synthétisés sous forme de conclusion générale avec énoncé de certaines perspectives. L'annexe A est consacrée à la détermination des équations d'amplitude pour les parois perméables et imperméables à la fois pour $\psi > \psi_{pc}$ et $\psi < \psi_{pc}$.

²La valeur de ψ_{pc} est définie au chapitre 2.

Liste des paramètres

ε	porosité
K	perméabilité
D	coefficient de diffusion
$k_T D$	coefficient de thermodiffusion
C	concentration
T	température
μ	viscosité dynamique du fluide
ρ	masse volumique
λ	conductivité thermique du milieu continu
α	coefficient d'expansion thermique
β	coefficient de dilatation du soluté
ρC	chaleur volumique du milieu continu
$(\rho C)_s$	chaleur volumique du solide
$(\rho C)_f$	chaleur volumique du fluide
\vec{V}	vitesse de filtration
\vec{V}_p	vitesse intersticielle
Re	nombre de Reynolds de pore
κ	diffusivité thermique du milieu continu
ψ	rapport de séparation
ψ_{pc}	point de codimension deux
Ra	nombre de Rayleigh de filtration
Pr	nombre de Prandtl du milieu continu
Λ	nombre de Lewis
Da	nombre de Darcy
ω	fréquence en présence du débit
Ω	fréquence à débit nul
Ra^A	nombre de Rayleigh absolu
R_c	nombre de Rayleigh critique
Q	débit
V_g	vitesse de groupe
k	nombre d'onde
σ	taux de croissance spatio-temporelle

Chapitre 1

Présentation du problème physique et formulation

La convection naturelle d'origine thermique correspond à un mouvement du fluide lorsque celui-ci est soumis à un gradient de température. Lorsque le milieu est limité par des plaques imperméables, cette convection intervient si l'écart entre les températures de la paroi inférieure et de la paroi supérieure dépasse une valeur critique. Dans le cas d'un mélange binaire, c'est à dire un mélange de deux fluides miscibles, la présence d'un gradient de température va induire un gradient de concentration qui va jouer un rôle déterminant dans la naissance et le développement de la convection naturelle. Ce couplage entre les gradients de température et de concentration est appelé effet Soret. En revanche, on parle de convection mixte lorsque l'on considère en plus du gradient de température, un débit filtrant horizontal en imposant une pression plus forte à l'amont qu'à l'aval du milieu.

L'objectif de ce travail est l'étude théorique de la convection mixte avec effet Soret dans un milieu poreux. Nous avons par conséquent estimé nécessaire de consacrer une partie de ce premier chapitre à définir les caractéristiques de ces trois ingrédients que l'on retrouve le long de ce mémoire, à savoir la convection mixte, l'effet Soret et les milieux poreux. Ensuite, une formulation mathématique du problème est proposée. Elle repose notamment sur la loi phénoménologique de Darcy pour décrire la filtration d'un fluide dans un milieu poreux. Enfin, nous présenterons les paramètres adimensionnés pertinents du problème susceptibles de jouer un rôle dans l'étude de stabilité de l'état conductif dont nous avons déterminé les propriétés.

1.1 Caractérisation du milieu poreux

Une présentation succincte des différentes grandeurs intervenant dans les milieux poreux est introduite pour rappel, les lecteurs intéressés pourront consulter pour de

plus amples informations l'ouvrage de Nield et Bejan [63].

1.1.1 Définition

Un milieu poreux peut être défini comme un solide dans lequel existent des capillaires (supposés ici parallèles et rectilignes) formant des pores. A l'intérieur de ces pores, l'écoulement peut être constitué d'un ou deux fluides. L'importance du milieu poreux est manifeste puisqu'on le rencontre de façon très répandue dans divers milieux naturels (sables, pierres, bois ...). La distribution des pores dans ces milieux naturels est généralement irrégulière, et à l'échelle du pore, les grandeurs caractéristiques de l'écoulement, telles que la pression, la vitesse, seront elles aussi irrégulières. Pour obtenir les relations gouvernant les variables macroscopiques, il faut moyenner sur des volumes regroupant de nombreux pores. Ainsi, un Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.) est introduit pour élaborer un modèle continu, en supposant que le résultat est indépendant de la taille du V.E.R.

1.1.2 Paramètres

Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.)

Le milieu continu permet de raccorder deux types d'échelles différentes. Il est alors possible de supprimer les fluctuations d'ordre microscopique par intégration spatiale sur un volume suffisamment grand et de supprimer les inhomogénéités d'ordre macroscopique en réduisant convenablement le volume d'intégration (figure 1.1). Ainsi, les grandeurs macroscopiques décrivant le mouvement du fluide dans un milieu poreux sont des moyennes des grandeurs microscopiques correspondantes sur le V.E.R. dont la taille l doit satisfaire la double inégalité suivante :

$$d \quad (\text{taille des pores}) \ll l \ll L \quad (\text{taille caractéristique du milieu}) \quad .$$

On obtient donc les paramètres caractéristiques du milieu poreux en les moyennant sur le V.E.R.. Par la suite, nous définissons de manière macroscopique ces paramètres apparaissant dans les différents modèles empiriques liés aux écoulements dans un milieu poreux.

Porosité

Les eaux souterraines se trouvent dans les pores des sédiments et des roches. Certains sédiments sont très poreux, comme les sables et les graviers, d'autres très peu, comme les argiles. La porosité ε est définie comme le rapport du volume occupé par l'espace vide au volume total du milieu ; de ce fait $1-\varepsilon$ représente le taux d'espace occupé par le solide :

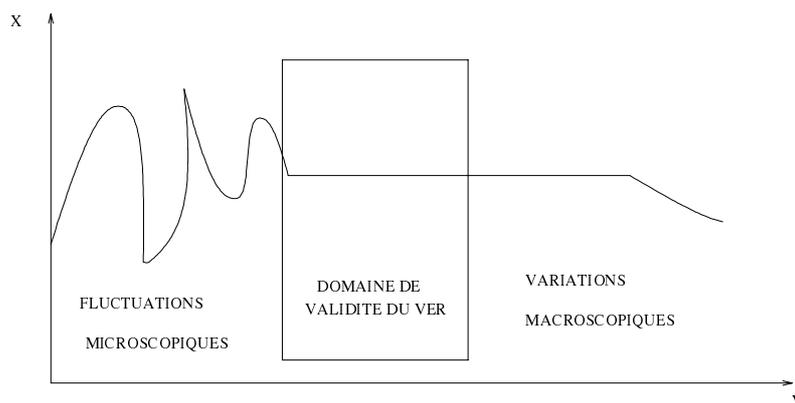


FIG. 1.1: Volume élémentaire représentatif VER sur lequel sont moyennées les grandeurs caractéristiques du problème.

$$\varepsilon = \frac{\text{Volume des pores}}{\text{Volume total du milieu poreux}} \quad (1.1)$$

Si on empile les particules en forme de réseau cubique, l'espace disponible pour le fluide est important, le tassement est lâche. Par contre, si l'empilement se fait de manière rhomboédrique, le tassement est plus serré, il n'y a plus beaucoup d'espace pour le fluide (figure 1.2). Dans la nature, ce type d'empilement est le plus fréquent. Cependant la porosité dépasse rarement 0.6.

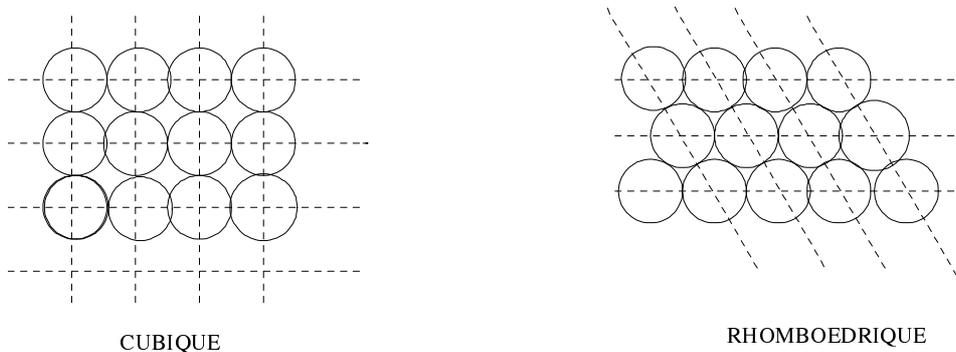


FIG. 1.2: Deux types d'empilement des particules (cubiques et rhomboédriques) rencontrés dans la nature.

Perméabilité

La perméabilité K dépend uniquement de la porosité et de la géométrie de la matrice solide, et est indépendante de la nature du fluide. Elle réfère à la capacité du sédiment ou de la roche à transporter le fluide qui se situe dans les pores. Pour qu'un milieu poreux soit perméable, il faut que les pores soient connectés entre eux. Les

valeurs de la perméabilité varient beaucoup selon les matériaux. Quelques exemples sont donnés dans le livre de Nield et Bejan [63] et couramment ces valeurs se situent entre 10^{-7} et 10^{-10} cm². Il est possible de calculer la perméabilité en fonction des paramètres géométriques du milieu, seulement si celui ci a une forme simple.

Il existe plusieurs évaluations de la perméabilité K , elles dépendent toutes de la modélisation de la géométrie du milieu poreux. K a été déterminé en fonction de ε et d'une dimension caractéristique de la matrice poreuse à l'échelle du pore.

◊ Kozeny-Carman (1937) donnent une estimation de K pour un milieu poreux non consolidé constitué d'éléments identiques de géométrie simple. Cette modélisation donne satisfaction pour des milieux dont les particules ont des formes sphériques et des petites tailles :

$$K = \frac{d^2 \varepsilon^3}{36k_0(1 - \varepsilon)^2} \quad , \quad (1.2)$$

où d est une dimension caractéristique des éléments constituant la matrice poreuse et k_0 une constante dépendant de la forme des grains ($3, 6 < k_0 < 5$).

◊ Si on modélise la matrice poreuse comme un faisceau de tubes capillaires parallèles, K est donnée par :

$$K = \frac{\varepsilon d^2}{32} \quad . \quad (1.3)$$

Si le milieu poreux est anisotrope, le scalaire K doit être remplacé par un tenseur K d'ordre deux.

1.2 Phénomène de thermodiffusion - Effet Soret

On suppose que la composition du fluide est un mélange de deux liquides miscibles. Ce mélange est caractérisé par la concentration C définie comme étant le rapport de la masse de l'un des constituants à la masse totale du fluide contenue dans un élément de volume donné.

La thermodiffusion, appelée effet Soret, est la formation d'un flux de matière induit par un gradient de température appliqué à un mélange binaire initialement homogène. Elle a été découverte il y a un siècle par Ludwig (1856) et Soret (1880). Soret donne son nom à cet effet [72], qui représente le couplage entre la diffusion thermique et la diffusion du soluté. Les applications sont nombreuses et notamment l'effet Soret permet de séparer des constituants au sein du mélange. C'est Klaus Clusius [21] qui a découvert une séparation possible des éléments d'un mélange avec son tube à séparation, processus appelé plus tardivement diffusion thermogravitationnelle. L'effet de séparation est faible et nécessite une cascade de plusieurs étapes,

par exemple 20 pour le néon et plusieurs milliers pour l'uranium.¹

Dans un mélange binaire, la première loi de Fick datant du 19^e siècle, montre que le vecteur flux de diffusion (quantité de matière traversant par seconde une surface d'aire normale au mouvement) est donné en fonction de la chute de concentration. S'il existe en plus un gradient de température, le flux de matière contiendra, à côté du terme provenant de la loi de Fick, un terme traduisant la contribution du gradient de température. Cette contribution est pondérée par un coefficient de diffusion thermique ou coefficient de thermodiffusion $k_T D$. Le flux de diffusion de l'un des constituants du mélange s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{J} = -\rho D \left(\nabla C + \frac{k_T}{T_0} \nabla T \right) . \quad (1.4)$$

où C est la concentration définie par le rapport de la masse d'un constituant du mélange sur la masse totale des constituants, C est par conséquent une grandeur sans dimension, D est le coefficient de diffusion exprimé en m^2/s dépendant des substances diffusantes et de la température, et T_0 est la température moyenne. L'expression de ce flux montre bien que le gradient de température engendre un flux de matière. L'effet contraire, i.e. l'apparition d'un flux thermique sous l'influence d'un gradient de concentration est nommé effet Dufour, présent essentiellement dans les gaz, il sera négligé dans ce travail. A l'état stationnaire, le flux total est nul et on a pour un mélange binaire :

$$\frac{\partial C}{\partial z} = -\frac{k_T}{T_0} \frac{\partial T}{\partial z} .$$

Si l'on suppose que la couche fluide est chauffée par le bas (gradient de température négatif), on voit d'après l'expression du flux à l'état stationnaire que le sens de migration des constituants n'est connu que si le signe du rapport de thermodiffusion k_T est connu. Ainsi si k_T est positif, le constituant de concentration C se déplace vers la paroi froide (gradient de concentration positif) et inversement si le rapport de thermodiffusion k_T est négatif. Si le coefficient de diffusion est toujours positif, le signe du coefficient de thermodiffusion n'est pas déterminé a priori (figure 1.3).

Les mesures du coefficient de thermodiffusion sont rares, dues à de grandes difficultés expérimentales, telles que l'apparition de rouleaux convectifs dans le liquide.

¹L'appareil se compose de deux tubes verticaux coaxiaux (jusqu'à 6 m), fermés en haut et en bas, et chauffé par un fil électrique à l'intérieur. L'espace entre les deux est occupé par un mélange des gaz à séparer. La thermodiffusion concentre la partie la plus légère du mélange à la surface extérieure du tube intérieur, le mélange monte par convection le long du tube intérieur, en bas la composante lourde s'y concentre.

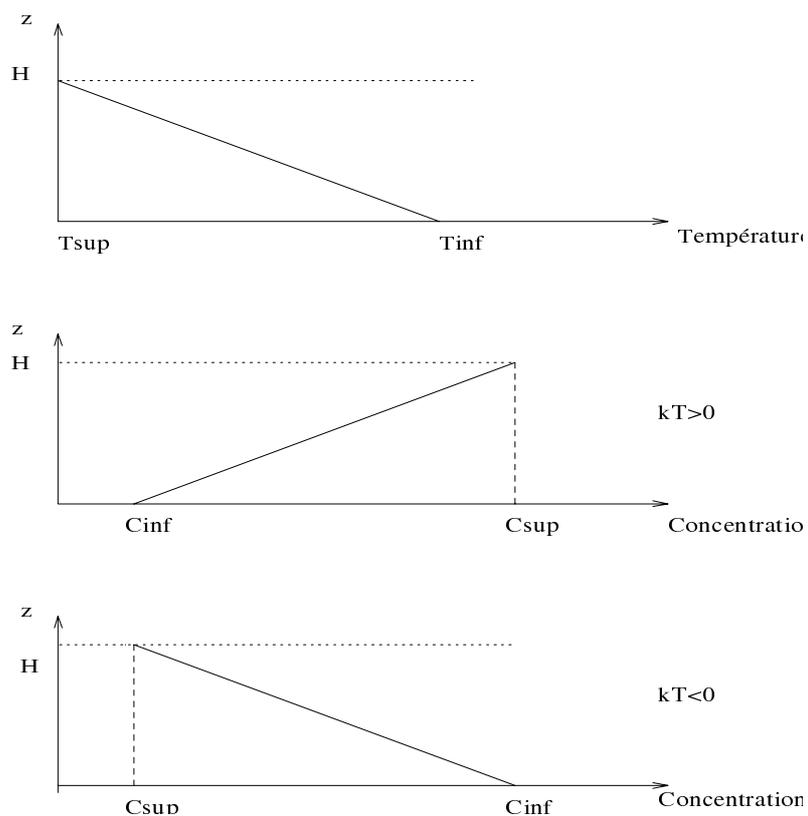


FIG. 1.3: Profils de température où le fluide est chauffé par le bas et profils de concentration correspondants. Ils montrent le déplacement du constituant de concentration C vers la paroi froide (chaude) lorsque k_T est positif (négatif).

1.3 Convection mixte et travaux antérieurs

La conduction résulte d'un transfert de proche en proche par agitation moléculaire à travers une surface d'échange, tandis que la convection a lieu chaque fois qu'un échange de chaleur siège dans un fluide en mouvement. Lorsque la poussée d'Archimède est négligeable, la convection est dite forcée, alors que lorsqu'elle est la cause unique du mouvement, elle est dite libre ou naturelle. Les premiers travaux à traiter de convection naturelle en milieu poreux sont ceux de Horton & Rogers (1945) [38] et Lapwood (1948) [49]. Lorsque les deux mécanismes, forcé et libre, existent, la convection est mixte. La convection mixte représente alors l'ajout d'un écoulement transversal non nul à débit constant Q au fluide saturant la couche poreuse soumise à un gradient de température. La convection mixte d'un fluide pur en milieu fluide a été l'objet d'un nombre important d'études, tant théoriques qu'expérimentales. L'écoulement de Poiseuille-Bénard est un écoulement de convection mixte, puisqu'il est obtenu en superposant un gradient de pression horizontal formant l'écoulement forcé et un gradient de température vertical, source de structures thermoconvectives [61]. Expérimentalement, les deux configurations observées sont l'écoulement stable de Poiseuille et selon la valeur du nombre de Reynolds, des structures longitudinales ou transversales [66]. Des travaux numériques [56] montrent la transition relativement rapide entre ces deux types de structures. Luijkx et al. [53] ont obtenu des résultats concernant l'étude de l'écoulement de Poiseuille-Bénard à la fois pour des milieux d'extension latérale infinie et finie. Une étude numérique plus récente concernant l'écoulement de Poiseuille-Bénard en milieu confiné prend en compte le caractère tridimensionnel de l'écoulement [62].

En ce qui concerne la convection mixte d'un fluide pur en milieu poreux, les expériences en milieu poreux de Combarous [22] montrent que la structure de la convection naissante dépend des valeurs prises par la vitesse débitante. Pour des faibles débits, la convection est structurée sous forme de rouleaux transversaux oscillant avec des fréquences régulières. En revanche, pour des débits élevés, la convection est structurée sous forme de rouleaux longitudinaux fixes. L'étude analytique menée dans la thèse de F. Dufour [29] constitue une étape importante dans la compréhension de cette sélection de structures convectives tributaires des valeurs prises par le débit filtrant. Cette étude a signalé le rôle des forces d'inertie (modélisées par le terme de Forchheimer) et le confinement du milieu poreux dans la direction perpendiculaire au sens de l'écoulement. En se plaçant dans le cas de figure où les valeurs prises par le débit sont faibles, l'étude numérique [28] met en évidence la dynamique non linéaire des rouleaux transversaux propagatifs lorsque l'état conductif se déstabilise.

D'après ce qui précède, il est clair qu'une analogie qualitative peut être faite

entre milieu fluide et milieu poreux concernant le rôle de sélection de structures convectives joué par le nombre de Reynolds (milieu fluide) ou par le débit filtrant (milieu poreux).

Le problème de convection mixte bidimensionnelle d'un mélange binaire en milieu fluide a été traité théoriquement par Jung et al. [46]. Ce travail a pour but notamment d'observer l'influence de l'écoulement de Poiseuille sur la formation des structures dans le mélange. La présence de l'effet Soret entraîne l'apparition de structures différentes de celles observées pour un fluide pur.

Nous étendons le travail de Jung et al. [46] au cas d'un milieu poreux d'extension horizontale infinie. Aucune étude expérimentale ou théorique n'a été menée jusqu'au début de cette thèse.

1.4 Système d'équations de conservation et conditions aux limites

1.4.1 Modélisation mathématique

On considère une couche poreuse homogène et isotrope d'épaisseur uniforme H , de section rectangulaire s'étendant à l'infini dans le plan horizontal. Cette couche poreuse est saturée par un mélange de deux fluides purs soumis à un écoulement forcé dont le débit filtrant est non nul Q . La paroi inférieure est chauffée à la température T_0 , tandis que la paroi supérieure est maintenue à une température $T_1 < T_0$ (figure 1.4).

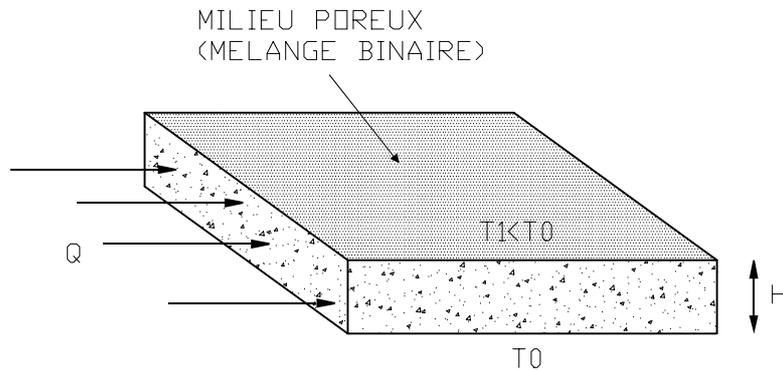


FIG. 1.4: Système physique étudié : une couche poreuse de hauteur verticale H et d'extension horizontale infinie, saturée par un mélange binaire chauffée par le bas et soumise à un écoulement horizontal à débit constant Q .

Hypothèses adoptées

Nous résumons ici les hypothèses adoptées dans toute notre étude :

◊ Le milieu poreux considéré est un milieu poreux saturé par un mélange binaire de chaleur volumique $(\rho C)_f$, de viscosité dynamique μ et de masse volumique ρ . L'ensemble matrice poreuse et fluide interstitiel est assimilé à un milieu continu fictif, homogène et isotrope, de conductivité thermique λ .

◊ La loi de Darcy est utilisée pour décrire l'écoulement du fluide au sein du milieu poreux. Puisque cet écoulement est supposé se faire à faible vitesse, les termes d'inertie et les termes de dissipation visqueuse sont négligés.

◊ Dans les gaz et les liquides, le coefficient d'expansion thermique est très petit ($10^{-3} < \alpha < 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$) ; une simplification peut alors être faite. Cette approximation d'Oberbeck-Boussinesq montre que les variations de la densité du fluide sont négligées excepté dans le terme gravitationnel $\rho \vec{g}$, où elles rendent compte de la poussée d'Archimède. La densité du fluide est alors considérée comme une fonction linéaire de la température et de la concentration :

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0) - \beta(C - C_0)) \quad .$$

α et β sont respectivement le coefficient de la dilatation thermique et le coefficient de la dilatation du soluté. T_0 et C_0 sont la température et la concentration de référence.

Equation de continuité

L'équation de conservation de masse la plus générale s'écrit sous la forme suivante :

$$\varepsilon \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \vec{V}) = 0 \quad .$$

Au regard des hypothèses adoptées et puisque le fluide interstitiel est supposé incompressible, l'équation de conservation de la masse est exprimée par l'équation de l'incompressibilité :

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad . \tag{1.5}$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement

Différents modèles exprimant la conservation de la quantité de mouvement existent en milieu poreux :

i) Loi phénoménologique de DARCY

Henry Darcy dans les années 1850, suite à ses expériences sur des écoulements isothermes permanents dans des colonnes verticales de sable, constata qu'il existe

une proportionnalité entre la vitesse de l'écoulement et la différence de pression. Il proposa une loi qui en présence de la pesanteur et pour un milieu isotrope s'écrit d'une façon générale :

$$\vec{V} = \frac{-K}{\mu}(\nabla P - \rho \vec{g}) \quad , \quad (1.6)$$

où \vec{V} représente la vitesse de filtration du fluide, qui correspond à la vitesse moyenne du fluide prise sur un V.E.R.. Cette vitesse de filtration, vitesse macroscopique n'est pas identique à la vitesse intersticielle, notée \vec{V}_p , qui correspond à une vitesse moyenne du fluide dans les pores. Cette vitesse \vec{V}_p à l'intérieur des pores peut être très grande devant \vec{V} , car seule une partie du volume total du milieu poreux est disponible pour le transport du fluide. Ces deux vitesses sont reliées par la relation de Dupuit-Forchheimer :

$$|\vec{V}_p| = \frac{|\vec{V}|}{\varepsilon} \quad . \quad (1.7)$$

Ainsi, la présence du milieu poreux a un effet stabilisant, car la vitesse de filtration possède une amplitude beaucoup plus faible que la vitesse en milieu fluide.

Si l'écoulement se fait à faible vitesse, en régime stationnaire, les gradients de pression sont proportionnels à la vitesse d'écoulement du fluide dans les pores. Cette relation de proportionnalité valable pour chaque pore est conservée quand on prend la moyenne sur un volume grand devant la taille des pores. La loi de Darcy dans laquelle un terme instationnaire a été introduit en respectant la relation de Dupuit-Forchheimer, est la suivante :

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P - (\alpha(T - T_0) - \beta(C - C_0)) \vec{g} - \frac{\mu}{\rho_0 K} \vec{V} \quad . \quad (1.8)$$

La loi de Darcy a été vérifiée de nombreuses fois expérimentalement. Son domaine de validité peut être relié au nombre de Reynolds. Celui-ci est défini pour des écoulements en milieu poreux, et il est basé sur la vitesse intersticielle du fluide ainsi que sur une longueur d caractéristique de la dimension d'un pore :

$$Re = V_p \frac{d}{\nu} \quad ,$$

où ν désigne la viscosité cinématique du fluide.

Selon Bear (1972) [2] trois types de régime d'écoulement sont à distinguer en fonction de la valeur du nombre de Reynolds de pore :

◇ Pour des nombres de Reynolds de pore inférieurs à 1, le régime est laminaire, les forces de viscosité sont grandes devant les forces d'inertie et la loi de Darcy est valable.

◇ Pour $1 < Re < 10$, des couches limites se développent au niveau des parois solides. En dehors de cette couche limite, les forces d'inertie sont prépondérantes, et il n'existe plus de proportionnalité entre le gradient de pression et la vitesse de filtration : la loi de Darcy n'est plus applicable. Ce régime d'écoulement stationnaire laminaire persiste jusqu'à un nombre de Reynolds de pore de 150 environ.

◇ Pour $150 < Re < 300$, un régime d'écoulement instationnaire prend place, puis au delà de 300, il devient chaotique, et on est en présence d'un écoulement turbulent. Plusieurs autres modèles empiriques ont été proposés comme des extensions de la loi de Darcy.

ii) Modèle empirique de FORCHHEIMER

La vitesse de filtration est reliée linéairement au gradient de pression dans l'équation de Darcy. Elle a été rigoureusement prouvée par des théories d'homogénéisation, celle à double échelle d'énergie développée par Sanchez-Palencia (1980) [70], et de l'énergie introduite par Tartar en 1980 [74], en faisant dans les deux cas l'hypothèse de la périodicité du milieu et une hypothèse sur l'écoulement (Stokes). Lorsque la vitesse de filtration devient importante, les forces d'inertie ne sont plus négligeables. Ceci est très bien montré dans l'article de Beckermann (1987) [3] qui traite le problème de la convection forcée en milieu poreux, avec prise en compte des termes d'inertie. La comparaison des profils de vitesse et de température avec ceux obtenus lorsque les effets d'inertie sont négligés, montre une divergence dans les résultats quand le nombre de Reynolds est grand. La question de la forme exacte des effets non linéaires a été soulevée par Forchheimer en 1901 [32] et n'a pas obtenu de réponse correcte et universelle jusqu'à présent. Pour prendre en compte ces forces d'inertie, Forchheimer proposa de modifier la loi de Darcy empiriquement en reliant le gradient de pression et la vitesse de filtration V par une équation non linéaire du second ordre :

$$\frac{dP}{dx} = aV + bV^2 \quad . \quad (1.9)$$

a et b sont des constantes. Le terme aV correspond aux pertes par frottement visqueux sur les parois de la matrice poreuse et bV^2 correspond aux pertes inertielles du fluide.

Nous écrivons ici la relation de Darcy-Forchheimer la plus utilisée [63] :

$$\nabla P = \rho \vec{g} - \frac{\mu}{K} \vec{V} - \frac{\rho b}{K^{1/2}} |\vec{V}| \vec{V} \quad , \quad (1.10)$$

où b est le paramètre de Forchheimer, caractéristique de la géométrie du milieu poreux.

De nombreuses autres relations non linéaires analytiques ont été suggérées pour la description d'un écoulement en milieu poreux. Ainsi, Muskat en 1946 [59] propose

une représentation qui semble avoir été introduite en premier par Lindquist en 1930. Dans ce modèle, Muskat distingue trois zones ; la première est la zone de Darcy où les corrections non linéaires sont petites et la loi de Darcy est applicable, la limite de cette zone est floue et dépend des choix des échelles sur lesquelles le nombre de Reynolds est construit. La troisième zone correspond à des écoulements à haut nombre de Reynolds, les effets non linéaires sont dominants et les expériences de Lindquist suggèrent que la correction de Darcy est linéaire selon Re et quadratique en terme de vitesse de filtration. La seconde zone correspond à la transition entre ces deux zones. Firdaouss et al. [31] ont montré que la première et la seconde zones définies par Muskat sont regroupées en une même zone correspondant au comportement asymptotique lorsque le nombre de Reynolds tend vers zéro. Ils montrent que la correction non linéaire de la loi de Darcy est quadratique avec le nombre de Reynolds et cubique selon la vitesse de filtration, ce qui est en juste accord avec les expériences de Chauveteau [18]. Mei et Auriault (1991) [55] ont appliqué la théorie de l'homogénéisation pour déduire la loi de Darcy dans un milieu poreux rigide. Si ce milieu est homogène et isotrope, les effets d'inertie entraînent un terme correctif cubique dans l'expression de la vitesse, lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à 1. Alors, les effets d'inertie, même faibles, ont plus d'importance localement que globalement, c'est à dire macroscopiquement.

iii) Modèle empirique de BRINKMAN

Pour tenir compte des effets visqueux, un terme supplémentaire est ajouté, analogue au terme laplacien apparaissant dans l'équation de Navier Stokes ; l'équation contient alors deux termes visqueux avec des viscosités sensiblement égales dans la pratique. En 1947, Brinkman a proposé une modification de la loi de Darcy en s'inspirant de la formule de Stokes [13]. Il y a ajouté le terme $\mu' \nabla^2 \vec{V}$, où μ' désigne la viscosité effective du milieu poreux, qui représente l'extension de Brinkman.

$$\nabla P = \rho \vec{g} - \frac{\mu}{K} \vec{V} + \mu' \nabla^2 \vec{V} \quad . \quad (1.11)$$

La viscosité effective pour un écoulement permanent en milieu poreux borné par des plaques rigides peut être déterminée expérimentalement (Givler 1994) [34] à partir de valeurs mesurées de perméabilité et du profil de vitesse de filtration in situ. Ces auteurs trouvent que μ' est environ dix fois supérieure à μ . Dans le cas où la perméabilité devient grande, l'équation se réduit à l'équation de Stokes où la viscosité effective est égale à la viscosité dynamique du fluide $\mu = \mu'$.

Equation de l'énergie

Pour décrire la transmission de chaleur en milieu poreux, on peut identifier le milieu poreux hétérogène à un milieu fictif continu, dans lequel l'équation de chaleur

est similaire à celle utilisée dans un fluide homogène. Cette équivalence est correcte si les vitesses de filtration et la taille des grains sont petites. Les caractéristiques thermiques du milieu poreux sont prises en compte par deux paramètres : la chaleur volumique (ρC) et la conductivité thermique λ .

$$(\rho C) \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho C_p)_f \vec{V} \cdot \nabla T = \lambda \nabla^2 T \quad ,$$

où $(\rho C_p)_f$ est la chaleur volumique du mélange fluide considéré. A pression constante, on a la relation suivante : $(\rho C_p) = (1 - \varepsilon) (\rho C)_s + \varepsilon (\rho C_p)_f$, où $(\rho C)_s$ est la chaleur volumique de la matrice solide. En divisant par $(\rho C_p)_f$, on obtient finalement l'expression de l'équation de la chaleur, où κ est la diffusivité thermique du milieu :

$$\frac{\rho C_p}{(\rho C_p)_f} \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T = \kappa \Delta T \quad . \quad (1.12)$$

Pour les liquides,

$$\frac{\rho C_p}{(\rho C_p)_f} \approx 1 \quad .$$

Equation de la diffusion moléculaire

Elle détermine la distribution de la concentration dans le fluide et le transport d'un des constituants du fluide dans le milieu poreux. Elle s'écrit :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla C = D \Delta C + \frac{k_T}{T_0} D \Delta T \quad , \quad (1.13)$$

où D est le coefficient de diffusion qui détermine le flux de diffusion déterminé par le gradient de concentration. Quant au flux de diffusion dû au gradient de température, il est déterminé par le coefficient de thermodiffusion $k_T D$. Le coefficient de Soret est défini par le rapport de ces deux coefficients de diffusion.

Dans ce qui suit, nous considérons que le milieu poreux est de hauteur H et d'extension illimitée dans le plan horizontal (x, y) .

Conditions aux limites

◇ La température est imposée à la fois sur la plaque inférieure en $z = 0$ et sur la plaque supérieure en $z = H$:

$$T = T_0 \text{ en } z = 0 \text{ et } T = T_1 \text{ en } z = H \quad . \quad (1.14)$$

◇ La condition aux limites sur la concentration traduit que la composante normale du flux de diffusion doit s'annuler aux bords imperméables à la matière :

$$\frac{\partial C}{\partial z} = -\frac{k_T}{T_0} \frac{\partial T}{\partial z} \text{ en } z = 0 \text{ et en } z = H \quad . \quad (1.15)$$

◊ La composante normale de la vitesse de filtration doit s'annuler sur les parois imperméables :

$$\vec{V} \cdot \vec{e}_z = 0 \quad \text{en } z = 0, H \quad . \quad (1.16)$$

◊ Le débit imposé est horizontal :

$$Q = \int_0^H \vec{V} \cdot \vec{e}_x dz \quad .$$

1.4.2 Etat de base : solution de conduction

Le système (1.5,1.16) est fermé et admet une solution appelée solution de base. Elle est obtenue en supposant que le fluide est au repos et que la température, la concentration et la pression dépendent de la coordonnée verticale z . Cherchons des solutions des équations sous la forme $T_S(z)$ et $C_S(z)$. A l'état de base, le gradient de température vertical induit par effet Soret un gradient de concentration vertical et la vitesse est horizontale et proportionnelle au débit filtrant Q .

$$\begin{aligned} \vec{u}_S &= \frac{Q}{H} \vec{e}_x \\ T_S &= T_0 - \frac{T_0 - T_1}{H} z \\ C_S &= C_0 + \frac{k_T T_0 - T_1}{T_0 H} z \\ P(x, z) &= -\frac{\nu \rho_0}{\kappa H} Q x - \rho_0 g \frac{T_0 - T_1}{2H} \left(\alpha - \beta \frac{k_T}{T_0} \right) z^2 \end{aligned}$$

Cette solution du système est aussi appelée solution de conduction pure, puisque le transfert de chaleur s'effectue sans changement macroscopique, l'énergie thermique se propageant grâce à des chocs non élastiques entre les molécules.

1.4.3 Équations simplifiées

Toutes les grandeurs physiques du problème peuvent être exprimées à l'aide de quatre grandeurs fondamentales : la longueur [m], la masse [kg], la température [K] et le temps [s]. Les longueurs dans notre problème de convection peuvent être rendues adimensionnelles en utilisant l'échelle de référence H . Comme la diffusion de la chaleur est plus rapide que la diffusion de la concentration, le temps caractéristique pris en compte est celui concernant la diffusion de la température. L'échelle de référence pour le temps est donc $t_0 = \frac{H^2}{\kappa}$. On déduit alors que l'échelle de référence pour la vitesse est $V_0 = \frac{\kappa}{H}$. Il s'en suit que l'échelle de référence pour la température est $T_0 = \frac{\nu \kappa}{\alpha g K H}$.

Les variables adimensionnelles sont alors :

$$V' = \frac{V}{V_0}, \quad t' = \frac{t}{t_0} \quad \text{et} \quad T' = \frac{T}{T_0}$$

La concentration C est une grandeur adimensionnée. L'équation de diffusion moléculaire adimensionnée fait apparaître un coefficient $\frac{\nu k_T \kappa}{\alpha T_0 g K H}$. Pour obtenir une forme plus simple de cette équation, on normalise la concentration par ce coefficient.

On définit une nouvelle variable ξ telle que $\xi = C - \theta$ et le débit par unité de largeur est donné par : $Q = \int_0^H \vec{V} \cdot \vec{e}_x dz$.

En prenant deux fois le rotationnel de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et en tenant compte de l'équation de continuité ($\nabla \cdot \vec{V} = 0$), on obtient, en projetant sur l'axe vertical z , le système d'équations non linéaires suivant :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V} &= 0 \\ (1 + \frac{Da}{\varepsilon Pr} \frac{\partial}{\partial t}) \Delta W - (1 + \psi) \Delta_h \theta - \psi \Delta_h \xi &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + Q \frac{\partial \theta}{\partial x} + \vec{V} \cdot \nabla \theta - \Delta \theta - Ra W &= 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + Q \frac{\partial \xi}{\partial x} + \vec{V} \cdot \nabla \xi - \Lambda \Delta \xi + \Delta \theta &= 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

avec le laplacien horizontal :

$$\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad .$$

Cinq nombres sans dimension, caractéristiques de la thermodiffusion en milieu poreux, apparaissent dans ces équations du mouvement :

– Rapport de séparation

ψ est le rapport de séparation, qui représente la contribution relative de l'effet de thermodiffusion au gradient de densité à l'état stationnaire, c'est à dire le couplage des champs de température et de concentration via la thermodiffusivité k_T .

$$\psi = \frac{\partial \rho}{\partial C} \nabla C / \frac{\partial \rho}{\partial T} \nabla T = -\frac{\beta k_T}{\alpha T_0} \quad .$$

Si le fluide est pur, alors $\psi = 0$.

– Nombre de Rayleigh de filtration

Ra est le nombre de Rayleigh de filtration. Si l'on considère le cas de la convection naturelle dans une couche horizontale de fluide : la particule de fluide au cours de son mouvement coupe des isothermes ; sa température varie. La diffusion thermique est stabilisante et le temps caractéristique qui lui est associé s'écrit : H^2/κ . La

viscosité est toujours stabilisante et le temps caractéristique qui lui est associé est : K/ν , ce qui nous donne : $t_{stabilisation}^2 = \frac{H^2 K}{\nu \kappa}$. Considérons la force qui s'exerce sur une particule de volume δV sous l'effet de la variation de la masse volumique : $|\delta F| = (\rho - \rho_0)\delta V g = \alpha \rho_0 (T_0 - T_1)\delta V g$. Le temps caractéristique associé à la déstabilisation de la particule de fluide est : $t_{déstabilisation}^2 = \frac{H}{\alpha(T_0 - T_1)g}$. Nous en déduisons l'expression du nombre de Rayleigh de filtration :

$$Ra = \frac{t_{stabilisation}^2}{t_{déstabilisation}^2} = \frac{\alpha(T_0 - T_1)gKH}{\nu \kappa} .$$

Il permet de comparer les effets thermiques et visqueux et les effets d'Archimède pour la convection libre.

– Nombre de Prandtl dépendant du milieu poreux

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} = \frac{\nu}{\kappa_f} \left(\frac{\kappa_f}{\kappa} \right) = (Pr)_f \frac{\kappa_f}{\kappa}$$

La diffusivité thermique et la viscosité cinématique ayant même dimension, leur rapport définit une grandeur sans dimension Pr nommée nombre de Prandtl. Pr permet d'évaluer l'efficacité relative du transport de chaleur et de quantité de mouvement. Ce nombre est défini comme le rapport entre les temps caractéristiques de diffusion des fluctuations de température et de vitesse. Dans le cas des gaz, Pr est de l'ordre de l'unité et pour les liquides de 10^{-2} pour le Mercure à 10^3 pour des huiles très visqueuses. La comparaison des effets diffusifs visqueux et thermiques détermine ce nombre. Si $(Pr)_f \ll 1$, alors les effets de conduction thermique se manifestent au sein du système et sont prépondérants par rapport aux effets de diffusion visqueuse. On favorise ainsi un haut niveau de transfert thermique tout en minimisant les pertes d'énergie par viscosité (métaux liquides). Les perturbations en température sont alors amorties par conduction². Si $(Pr)_f \gg 1$, cette fois ce sont les effets de diffusion visqueuse qui sont prépondérants par rapport aux effets thermiques. Les huiles de silicone sont par exemple utilisées pour la lubrification de pièces de températures différentes avec réduction du transfert thermique entre elles.

– Nombre de Lewis

Λ est le nombre de Lewis, encore noté Le :

$$\Lambda = \frac{D}{\kappa} .$$

²L'indice f se rapporte au fluide

De manière similaire au nombre de Prandtl, le nombre de Lewis représente le rapport entre les temps de diffusion thermique et massique. Pour les gaz, le nombre de Lewis est aussi de l'ordre de l'unité. Dans la suite du travail, seuls les liquides seront étudiés, ce qui équivaut à prendre en compte un nombre de Lewis de plus faible valeur de l'ordre de 10^{-2} : $\Lambda = 10^{-2}$.

– Nombre de Darcy

Le nombre de Darcy Da est caractéristique de la finesse du milieu poreux. Pour les milieux poreux de faible granulométrie, le nombre de Darcy prend de très faibles valeurs comprises entre 10^{-6} et 10^{-8} , aussi le terme transitoire de l'équation de quantité de mouvement devient négligeable devant les autres termes. Si H est la longueur caractéristique appropriée, le rapport des derniers termes de l'équation de quantité de mouvement avec l'extension de Brinkman (1.11) représente le nombre de Darcy, si on suppose que $\mu \approx \mu'$:

$$Da = \frac{\kappa}{H^2} \quad .$$

Conditions aux limites

Les parois sont imperméables :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial z} &= 0 & \text{en} & \quad z = 0; 1 \\ \theta &= 0 & \text{en} & \quad z = 0; 1 \\ W &= 0 & \text{en} & \quad z = 0; 1 \quad . \end{aligned} \tag{1.18}$$

1.5 Conclusion

Ce premier chapitre nous a permis de présenter le problème physique et une modélisation analytique adaptée. Il s'agit d'un milieu poreux saturé d'un mélange binaire, chauffé par le bas et soumis à un écoulement horizontal de débit Q , correspondant dès lors au problème de convection mixte. Nous nous restreignons aux milieux poreux de faible granulométrie, ce qui signifie que le nombre de Darcy est faible. Le milieu, constitué de deux phases, l'une fluide (elle-même composée de deux liquides miscibles), l'autre solide, est assimilé à un fluide fictif, continu et unique. Si on suppose que le fluide vérifie l'hypothèse de Boussinesq, ce problème physique est régi par les équations adimensionnées du mouvement (1.17) où l'équation de quantité de mouvement est exprimée sous la forme de la loi de Darcy. Cette loi n'est valable que pour des débits très faibles. Ce système admet une solution dite solution conductive où la température dépend linéairement de z . La prise en compte de l'effet

Soret montre que la présence de ce gradient vertical de température va induire une distribution linéaire en z de la concentration. De même, la présence d'un gradient horizontal de la pression, est à l'origine d'un écoulement horizontal à débit filtrant non nul. Cette solution de conduction thermodiffusive n'est stable que si le nombre de Rayleigh ne dépasse pas une certaine valeur. Les conditions de sa déstabilisation, à la fois vis à vis de perturbations périodiques que par rapport à des perturbations localisées feront l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Analyse de stabilité linéaire de la solution de conduction

Ce chapitre est consacré à l'étude linéaire des instabilités apparaissant lorsque l'état de conduction se déstabilise. La solution des équations du mouvement ne peut être observée physiquement que si elle est stable par rapport aux petites perturbations du système qui doivent de ce fait s'amortir au cours du temps. Au contraire, si ces perturbations de faible amplitude se développent, la solution est dite linéairement instable; le système est alors capable de bifurquer vers un autre état. Des études théoriques et expérimentales concernant les mélanges binaires ont été menées en milieu fluide en absence d'écoulement horizontal ([50], [57]) et s'avèrent être plus riches du point de vue du comportement dynamique que dans le cas du fluide pur, notamment, différents types de bifurcation peuvent exister. On étudie l'influence du débit horizontal sur le comportement temporel et spatio-temporel du système hors-équilibre étudié. Celui-ci est un milieu ouvert, et on doit alors tenir compte de la nature convective ou absolue des instabilités. L'écoulement peut être ainsi classé en deux catégories. Si le régime est convectif, le système se comporte comme un amplificateur de bruit d'entrée, i.e. la dynamique de l'écoulement est sensible au bruit, et si le régime est absolu, il se comporte comme un oscillateur auto-entretenu, i.e. la dynamique est intrinsèque à l'écoulement [26]. Le système étudié est un système infiniment étendu dans les directions horizontales (x, y) pour lequel deux types de conditions aux limites sont considérés : réalistes pour l'expérience — imperméables — et idéalisées — perméables —. Le seuil d'apparition des structures convectives est affecté par ces conditions aux bords. Des méthodes analytiques et numériques classiques sont proposées pour décrire les caractéristiques linéaires du système au seuil selon le type de conditions aux limites.

2.1 Analyse temporelle de stabilité linéaire

Notons que l'analyse de stabilité linéaire qui correspond à l'étude de l'évolution de perturbations infinitésimales, donne une *condition suffisante* d'instabilité. En effet, même si un écoulement peut être stable vis à vis de perturbations infinitésimales, il sera instable si l'on considère des perturbations d'amplitudes finies. D'autre part, l'analyse de stabilité linéaire permet d'obtenir les seuils d'instabilités primaires, les nombres d'onde et les fréquences, mais ne renseigne pas sur la forme des structures loin du seuil d'instabilité.

L'analyse en modes normaux est désormais classique pour une étude de stabilité linéaire et est plus amplement détaillée dans certains ouvrages tels que [80] pour les mélanges binaires.

Pour notre problème, celle-ci consiste à chercher des solutions écrites en modes de Fourier, dits modes normaux, des équations du mouvement (1.17). Ces solutions sont développées sur une base de fonctions adaptées à la géométrie du système. Le mélange binaire étant confiné dans un milieu poreux d'extension illimitée latéralement, on développe les perturbations en fonctions périodiques de x et de y :

$$\begin{aligned} W(x, y, z, t) &= W^*(z)e^{i(k_x x + k_y y) - i\omega t} \\ \theta(x, y, z, t) &= \theta^*(z)e^{i(k_x x + k_y y) - i\omega t} \\ \xi(x, y, z, t) &= \xi^*(z)e^{i(k_x x + k_y y) - i\omega t} . \end{aligned} \quad (2.1)$$

Les composantes horizontales du nombre d'onde k_x et k_y sont des nombres réels caractéristiques de la périodicité de la solution selon x et y . Cette hypothèse signifie qu'on étudie une perturbation périodique qui s'étend indéfiniment dans l'espace. Les solutions proposées représentent alors des ondes qui se déplacent à la vitesse de phase $\vec{V}_\phi = \left(\frac{\omega_r}{k_x}, \frac{\omega_r}{k_y} \right)$ et s'accroissent ou s'amortissent avec un taux de croissance temporelle $\omega_i(k_x, k_y)$. L'écoulement est linéairement instable si au moins une perturbation est amplifiée, c'est à dire s'il existe un nombre d'onde pour lequel $\omega_i > 0$. Par contre, lorsque tous les modes temporels sont amortis, l'écoulement est linéairement stable. Dans le plan (Ra, k) , la courbe délimitant les régions où les perturbations sont amplifiées ou amorties est la courbe neutre de stabilité ($\omega_i = 0$). Le point correspondant au minimum de la fonction $Ra(k)$ définit le point critique au-dessous duquel l'écoulement est linéairement stable.

Les études théoriques antérieures ([6], [8], [7], [64], [65]) sur la convection naturelle d'un mélange binaire en milieu poreux ont été réalisées en tenant compte de conditions aux limites irréalistes pour l'expérience : des parois horizontales perméables à la matière. Dans ce cas, on annule la concentration sur les bords horizontaux ($\xi = 0$), au lieu d'annuler la composante verticale du flux de matière

$\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \text{ pour } z = 0; 1\right)$. Cette simplification permet le découplage entre les perturbations de la température et de la concentration. Il s'en suit un traitement mathématique simple qui donne des solutions analytiques exactes. La question immédiate que l'on doit se poser est de savoir si **ces simplifications et idéalizations du modèle mathématique n'ont pas des retombées fâcheuses qui trahissent la réalité physique que l'on cherche à analyser**. Dans le souci de répondre à cette question, on considère au long de ce travail, les deux types de conditions aux limites : celles relatives aux parois imperméables et celles relatives aux parois perméables. Une comparaison qualitative et quantitative des résultats émanant des deux cas de figure sera proposée.

2.1.1 Modèle de parois perméables

Les conditions aux limites pour des parois perméables $W = \theta = \xi = 0$ pour $z = 0$ et $z = 1$ sont identiquement satisfaites lorsque l'on prend :

$$\begin{aligned} W^*(z) &= \bar{W}_0 \sin(\pi z) \\ \theta^*(z) &= \bar{\theta}_0 \sin(\pi z) \\ \xi^*(z) &= \bar{\xi}_0 \sin(\pi z) \end{aligned} \quad (2.2)$$

En introduisant (2.1, 2.2) dans le système (1.17) linéarisé, où l'on pose $Da = 0$, on obtient le système suivant :

$$L_0 \begin{Bmatrix} \bar{W}_0 \\ \bar{\theta}_0 \\ \bar{\xi}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

avec :

$$L_0 = \begin{bmatrix} -(k^2 + \pi^2) & (1 + \psi)k^2 & \psi k^2 \\ 0 & -(k^2 + \pi^2) & -i\omega + iQk_x + \Lambda(k^2 + \pi^2) \\ -Ra & -i\omega + iQk_x + (k^2 + \pi^2) & 0 \end{bmatrix}$$

Pour que le système admette une solution non triviale, il faut que le déterminant de L_0 s'annule. Cette condition mène à l'équation de dispersion reliant la fréquence complexe ω au vecteur d'onde réel \vec{k} (k_x, k_y) qui s'écrit :

$$D(k_x, k^2, \omega) = -(-\omega + Qk_x)^2 + ia_1(k^2)(-\omega + Qk_x) + a_0(k^2) = 0 \quad (2.3)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_1(k^2) &= -\frac{Ra(1 + \psi)k^2}{(k^2 + \pi^2)} + (1 + \Lambda)(k^2 + \pi^2) \\ a_0(k^2) &= -Ra(1 + \psi)k^2\Lambda - Ra\psi k^2 + \Lambda(k^2 + \pi^2)^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

La stabilité marginale est atteinte pour $\omega_i = 0$. Alors, trois cas de figure peuvent se présenter :

- i) $a_0 = 0$ avec $a_1 > 0$
- ii) $a_1 = 0$ avec $a_0 > 0$
- iii) $a_0 = a_1 = 0$; dans ce dernier cas, la valeur propre est double et on parle de point de codimension deux (ψ_{pc}, Ra_{pc}) .

a) Naissance de la convection pour $\psi > \psi_{pc}$ ($\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$ avec $\mathbf{a}_1 > \mathbf{0}$)

Dans ce cas, le système oscille avec une fréquence :

$$\omega = Qk_x \quad ,$$

et

$$Ra(k) = \frac{\Lambda(k^2 + \pi^2)^2}{[\psi k^2 + \Lambda(1 + \psi)k^2]} \quad .$$

Le paramètre de contrôle est ici le nombre de Rayleigh Ra , dépendant explicitement du nombre de Lewis Λ , du module du nombre d'onde k , et du rapport de séparation ψ , mais indépendant de l'écoulement horizontal Q .

Pour déterminer le mode qui se déstabilise en premier (mode le plus instable), on doit calculer le nombre d'onde qui minimise le paramètre de contrôle Ra . On obtient ainsi le mode critique (k_c, ω_c, R_c) , au-delà duquel l'écoulement cesse d'être stable et fait place à la convection. La valeur du seuil critique d'instabilité R_c est obtenue en imposant :

$$\left. \frac{\partial Ra}{\partial k} \right|_{k=k_c} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial^2 Ra}{\partial k^2} \right|_{k=k_c} > 0 \quad .$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} k_c^2 &= \pi^2 \\ R_c &= \frac{4\pi^2\Lambda}{[\Lambda + \psi + \psi\Lambda]} \quad . \end{aligned}$$

En ce qui concerne le vecteur d'onde, on ne connaît que son module k_c . L'orientation de \vec{k} est totalement arbitraire car le système est étendu latéralement, (figure 2.1).

Cette absence de direction privilégiée rend infini le nombre de structures convectives tridimensionnelles pouvant naître dans le système, ainsi le vecteur d'onde décrit un cercle de rayon $\|\vec{k}_c\|$. On remarque que pour un fluide pur $\psi = 0$, le nombre d'onde est $k_c^2 = \pi^2$ et le nombre de Rayleigh critique est $R_c = 4\pi^2$. On retrouve le problème de Horton-Rogers-Lapwood, similaire au problème de Rayleigh-Bénard en milieu poreux avec des parois rigides [38].

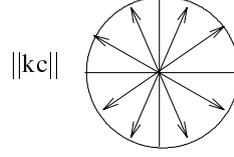


FIG. 2.1: Toutes les structures convectives peuvent exister dans le système, il n'y a pas d'orientation particulière du nombre d'onde.

b) Naissance de la convection pour $\psi < \psi_{pc}$ ($\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$ avec $\mathbf{a}_0 > \mathbf{0}$)

Le système passe, par bifurcation de Hopf, d'un état stable à un état périodique comportant deux fréquences différentes :

$$\begin{aligned}\omega_+ &= Qk_x + \Omega(Q = 0) \\ \omega_- &= Qk_x - \Omega(Q = 0) \quad ,\end{aligned}$$

où Ω est la fréquence du système sans débit. Sa valeur critique est :

$$\Omega_c^2 = -\frac{4\pi^4}{(1 + \psi)}(\psi + \Lambda(\psi + \Lambda\psi + \Lambda)) \quad . \quad (2.5)$$

$$Ra(k) = \frac{(1 + \Lambda)(k^2 + \pi^2)^2}{(1 + \psi)k^2}$$

Le nombre de Rayleigh critique R_c et le nombre d'onde critique k_c pour cette instabilité oscillatoire sont :

$$\begin{aligned}R_c &= \frac{4\pi^2(1 + \Lambda)}{1 + \psi} \\ k_c^2 &= \pi^2 \quad .\end{aligned} \quad (2.6)$$

c) Point de codimension deux ($a_1 = a_0 = 0$)

Pour le cas des parois perméables, les deux seuils de stabilité $R_c = f(\psi)$ se croisent en un point unique ψ_{pc} , négatif et très petit pour $\Lambda = O(10^{-2})$. Le rapport de séparation ψ_{pc} pour lequel les deux nombres de Rayleigh critiques sont égaux est :

$$\psi_{pc} = -\frac{\Lambda^2 k^4}{\left(\Lambda^2 + \frac{8\Lambda}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\right)k^4 + 8(\Lambda + 2)k^2 + 8\pi^2} \simeq 10^{-4} \quad . \quad (2.7)$$

2.1.2 Modèle de parois imperméables

A) Intégration numérique

Lorsque les parois sont perméables, la solution trouvée ci-dessus par un développement en modes normaux, avec prise en compte des modes fondamentaux, est exacte. Par contre dans le cas des parois imperméables, (cas correspondant à des conditions aux limites physiques), le découplage dans les équations du mouvement des perturbations de la concentration et de la température n'est pas possible. La solution analytique n'est plus une solution exacte et par conséquent le problème de stabilité linéaire temporelle doit être résolu numériquement à l'aide d'une adaptation de la méthode du tir [71],[46]. Pour déterminer la stabilité linéaire de l'état de base, on se sert uniquement des parties linéaires des équations (1.17). En introduisant les nouvelles fonctions :

$$\begin{pmatrix} W(x, z, t) \\ \theta(x, z, t) \\ \xi(x, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_0(z) \\ \theta_0(z) \\ \xi_0(z) \end{pmatrix} e^{ikx} e^{-i(k_x Q + \Omega)t} \quad ,$$

un système d'équations différentielles est obtenu avec : $f' = df/dz$ et $f'' = d^2 f/dz^2$:

$$\begin{aligned} W_0'' &= k^2 W_0 - (1 + \psi)k^2 \theta_0 - \psi k^2 \xi_0 & (2.8) \\ \theta_0'' &= -Ra W_0 + (-i\Omega + k^2)\theta_0 \\ \xi_0'' &= -\frac{Ra}{\Lambda} W_0 + \frac{-i\Omega}{\Lambda} \theta_0 + \left(\frac{-i\Omega}{\Lambda} + k^2 \right) \xi_0 \quad . \end{aligned}$$

De nouvelles fonctions sont définies dans le but de réécrire un nouveau système d'équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{aligned} y^1 &= W_0, \quad y^2 = \theta_0, \quad y^3 = \xi_0, \quad y^4 = W_0', \quad y^5 = \theta_0', \quad y^6 = \xi_0' \\ y^{1'} &= y^4 & (2.9) \\ y^{2'} &= y^5 \\ y^{3'} &= y^6 \\ y^{4'} &= k^2 y^1 - (1 + \psi)k^2 y^2 - \psi k^2 y^3 \\ y^{5'} &= -Ra y^1 + (-i\Omega + k^2)y^2 \\ y^{6'} &= -\frac{Ra}{\Lambda} y^1 + \frac{-i\Omega}{\Lambda} y^2 + \left(\frac{-i\Omega}{\Lambda} + k^2 \right) y^3 \quad , \end{aligned}$$

les conditions aux limites sont :

$$y^1 = y^6 = y^2 = 0 \text{ en } z = 0; 1$$

On note y le vecteur $(y^1(z), y^2(z), \dots, y^6(z))$, et on développe ce vecteur comme suit :

$$\mathbf{y}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^6 \alpha_i \Phi_i(\mathbf{z}) \quad ,$$

où $\{\Phi_i\}$ est une base de fonctions vectorielles de z , telle que $\Phi_i(0) = e_i$, avec $\{e_i\}$ la base canonique de \mathbb{R}^6 . Les conditions aux limites en $z = 0$ conduisent à : $\alpha_1 = \alpha_6 = \alpha_2 = 0$, on a alors :

$$\mathbf{y}(z) = \sum_{i=3}^5 \alpha_i \Phi_i(z) \quad . \quad (2.10)$$

Il reste à déterminer les fonctions Φ_3, Φ_4, Φ_5 . Comme $y^j = \alpha_3 \Phi_3^j + \alpha_4 \Phi_4^j + \alpha_5 \Phi_5^j$, $1 \leq j \leq 6$ et comme le système d'équations (2.9) est linéaire en y^j , les composantes des fonctions Φ_i vérifient ce système, soit :

$$\begin{aligned} \Phi_i^{1'} &= \Phi_i^4 \\ \Phi_i^{2'} &= \Phi_i^5 \\ \Phi_i^{3'} &= \Phi_i^6 \\ \Phi_i^{4'} &= k^2 \Phi_i^1 - (1 + \psi)k^2 \Phi_i^2 - \psi k^2 \Phi_i^3 \\ \Phi_i^{5'} &= -Ra \Phi_i^1 + (-i\Omega + k^2)\Phi_i^2 \\ \Phi_i^{6'} &= -\frac{Ra}{\Lambda} \Phi_i^1 + \frac{-i\Omega}{\Lambda} \Phi_i^2 + \left(\frac{-i\Omega}{\Lambda} + k^2 \right) \Phi_i^3 \quad , \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec $3 \leq i \leq 5$. La condition aux limites en $z = 0$ s'écrit : $\Phi_i^j(0) = \delta_i^j$ avec $1 \leq j \leq 6$ et $3 \leq i \leq 5$:

$$\begin{aligned} \Phi_3^3(0) &= 1 \\ \Phi_4^4(0) &= 1 \\ \Phi_5^5(0) &= 1 \quad , \end{aligned}$$

et les conditions aux limites en $z = 1$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} y^1(1) &= \alpha_3 \Phi_3^1(1) + \alpha_4 \Phi_4^1(1) + \alpha_5 \Phi_5^1(1) = 0 \\ y^2(1) &= \alpha_3 \Phi_3^2(1) + \alpha_4 \Phi_4^2(1) + \alpha_5 \Phi_5^2(1) = 0 \\ y^6(1) &= \alpha_3 \Phi_3^6(1) + \alpha_4 \Phi_4^6(1) + \alpha_5 \Phi_5^6(1) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Une intégration numérique (Runge-Kutta d'ordre 4 avec pas adaptatif) donne

$$\Phi_3(1), \Phi_4(1), \Phi_5(1).$$

Les trois paramètres α_i sont choisis de telle sorte que les conditions aux limites en $z = 1$ soient satisfaites. On arrive à un système d'équations linéaires homogènes pour les α_i :

$$\begin{pmatrix} \Phi_3^1(1) & \Phi_4^1(1) & \Phi_5^1(1) \\ \Phi_3^2(1) & \Phi_4^2(1) & \Phi_5^2(1) \\ \Phi_3^6(1) & \Phi_4^6(1) & \Phi_5^6(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = 0$$

avec la condition de solvabilité que le déterminant de la matrice s'annule. Ce déterminant est une fonction implicite, dépendant de $-i\Omega, k, Ra, \Lambda$ et ψ . Cette condition permet de déterminer, par exemple par une méthode de dichotomie, le nombre de Rayleigh Ra en fonction de k , les autres paramètres étant fixés. Elle peut aussi fournir la valeur minimale du nombre de Rayleigh en fonction du rapport de séparation ψ , laquelle correspond à la valeur critique R_c . Les résultats de l'intégration numérique ont été obtenus en imposant au déterminant ci-dessus d'être inférieur à 10^{-8} . Ils sont illustrés sur les figures (2.2, 2.3, 2.4) pour $\psi > \psi_{pc}$ et pour $\psi < \psi_{pc}$, sur les figures (2.5, 2.7 et 2.8), qui seront détaillées dans la prochaine section.

B) Equation de dispersion approchée

Pour déterminer une solution approchée de l'équation de dispersion dans le cas de conditions aux limites réalistes (1.18), on utilise la méthode de Galerkin en développant les perturbations de vitesse, température et concentration en modes de Fourier de la façon suivante :

$$\begin{aligned} W &= \sum_{n=1}^N W_n(t) \sin(n\pi z) \\ \theta &= \sum_{n=1}^N \theta_n(t) \sin(n\pi z) \\ \xi &= \sum_{n=0}^{N-1} \xi_n(t) \cos(n\pi z) \quad . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Les résultats issus de cette méthode de Galerkin sont obtenus pour un développement à l'ordre $N = 1$ [52]. Contrairement au cas des parois perméables, l'équation de dispersion est ici une solution approchée des équations du mouvement, l'approximation étant due à la troncature au premier mode dans l'expansion de Galerkin. Cette méthode est utilisée notamment par Carrière et al. [17] dans le cadre de leur récente étude de stabilité de l'écoulement de Rayleigh-Bénard-Poiseuille. En tenant compte uniquement du **premier mode**, celle-ci permet de retrouver avec une **très grande précision** les résultats acquis par voie numérique.

L'introduction de ce développement dans les équations du mouvement (1.17) fournit l'équation de dispersion approchée, obtenue à partir de l'annulation du déterminant du système L_0 :

$$L_0 \begin{Bmatrix} W \\ \theta \\ \xi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

avec :

$$L_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(k^2 + \pi^2) & \frac{1}{2}(1 + \psi)k^2 & \frac{2}{\pi}\psi k^2 \\ 0 & -\frac{2}{\pi}(k^2 + \pi^2) & -i\omega + ik_x Q + \Lambda k^2 \\ -Ra & -i\omega + iQk_x + (k^2 + \pi^2) & 0 \end{bmatrix},$$

et $a_1(k^2), a_0(k^2) \in \mathbb{R}$:

$$D(k_x, k^2, \omega) = -(-\omega + Qk_x)^2 + ia_1(k^2)(-\omega + Qk_x) + a_0(k^2) = 0 \quad (2.13)$$

$$a_1(k^2) = (\Lambda + 1)k^2 + \pi^2 - \frac{(1 + \psi)k^2 Ra}{k^2 + \pi^2} \quad (2.14)$$

$$a_0(k^2) = \Lambda k^2(k^2 + \pi^2) - \frac{8Ra\psi k^2}{\pi^2} - \frac{\Lambda(1 + \psi)k^4 Ra}{k^2 + \pi^2}.$$

Dans ce qui suit, les résultats concernant la stabilité temporelle du système aux parois horizontales imperméables sont présentés comme suit. Le premier cas est consacré aux rapports de séparation supérieurs au point de codimension deux ($\psi > \psi_{pc}$), où la bifurcation du système est alors stationnaire si le débit est nul comme dans le cas des parois perméables. Le second cas traite de la naissance oscillatoire de la convection, c'est à dire lorsque la bifurcation est de type Hopf.

a) Naissance de la convection pour $\psi > \psi_{pc}$

Dans ce cas, le système oscille avec une fréquence :

$$\omega = Qk_x.$$

La courbe neutre de stabilité $Ra(k)$ correspondant à la stabilité marginale :

$$Ra(k) = \frac{\Lambda(k^2 + \pi^2)^2}{\left[\frac{8}{\pi^2}\psi(k^2 + \pi^2) + \Lambda(1 + \psi)k^2 \right]}.$$

Les grandeurs critiques sont :

$$k_c^2 = \frac{\pi^2 \left(\Lambda + \Lambda\psi - \frac{8\psi}{\pi^2} \right)}{\Lambda + \Lambda\psi + \frac{8\psi}{\pi^2}} \quad (2.15)$$

$$R_c = \frac{4\pi^2 \Lambda^2 (1 + \psi)}{\left(\Lambda + \Lambda\psi + \frac{8\psi}{\pi^2} \right)^2}. \quad (2.16)$$

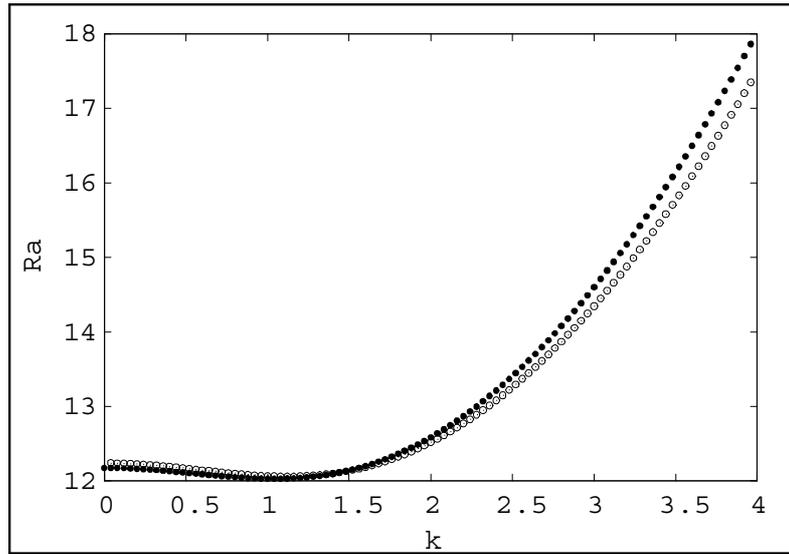


FIG. 2.2: Solution approchée (cercles pleins) et solution numérique (cercles) dans le plan $(Ra - k)$, pour un rapport de séparation $\psi = 0.01$ et $\Lambda = 0.01$.

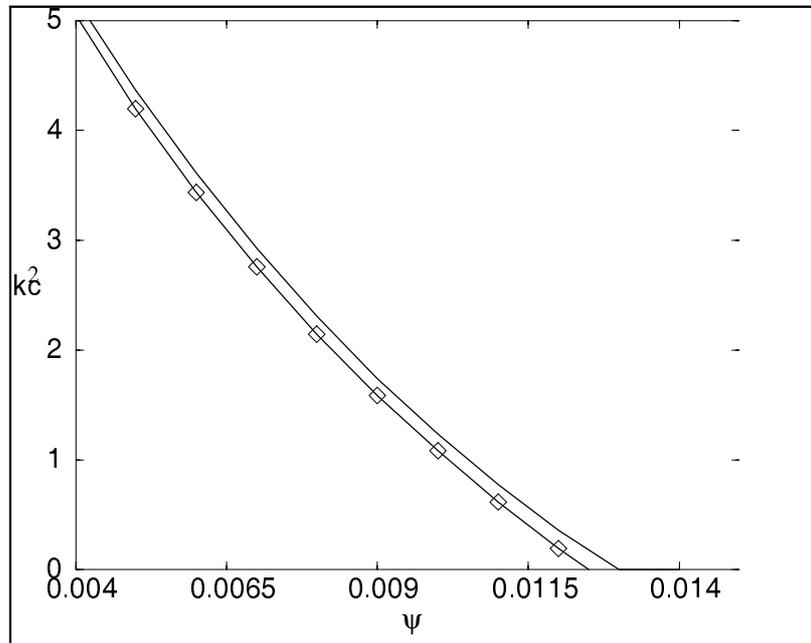


FIG. 2.3: Carré du nombre d'onde critique k_c^2 en fonction du rapport de séparation ψ pour des parois imperméables. Après une certaine valeur de ψ , les structures spatiales n'existent plus. Trait plein : solution numérique et trait avec symboles carrés : courbe analytique obtenue à partir de l'équation de dispersion approchée.

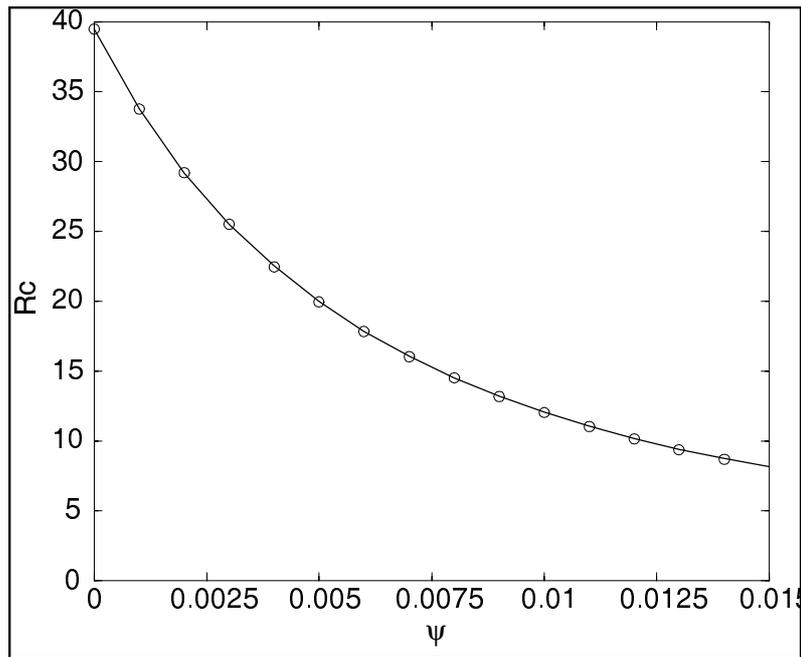


FIG. 2.4: Nombre de Rayleigh critique en fonction du rapport de séparation ψ ; solution numérique (cercle) et solution approchée (trait).

Les caractéristiques du système obtenues à partir de l'équation de dispersion approchée sont en très bon accord avec les résultats numériques. Les figures (2.2, 2.3 et 2.4) représentant respectivement la courbe de stabilité neutre, le nombre d'onde critique et le seuil critique en fonction du rapport de séparation, le montrent très bien.

La figure (2.3) représente le carré du nombre d'onde critique en fonction de ψ . **Le seuil obtenu numériquement par la précédente méthode conforte bien le résultat analytique issu de l'équation de dispersion approchée.** L'annulation de ce nombre d'onde se produit pour une faible valeur de ψ , notée ψ_0 . **Au-delà de ce point, les structures spatiales disparaissent, la longueur d'onde devenant infinie. En absence du débit,** et pour une expérience de convection menée dans une cellule de dimensions finies, l'annulation du nombre d'onde critique signifie l'établissement d'un **régime convectif monocellulaire**.

Les valeurs de ψ_0 obtenues numériquement et analytiquement sont très voisines ¹ :

$$\begin{aligned}\psi_0^N &= 0.013 \\ \psi_0^D &= 0.0125\end{aligned}$$

L'erreur relative est faible, de l'ordre de 3 %.

¹L'exposant N désigne la valeur numérique de ψ_0 , tandis que l'exposant D désigne la valeur issue de l'équation de dispersion approchée.

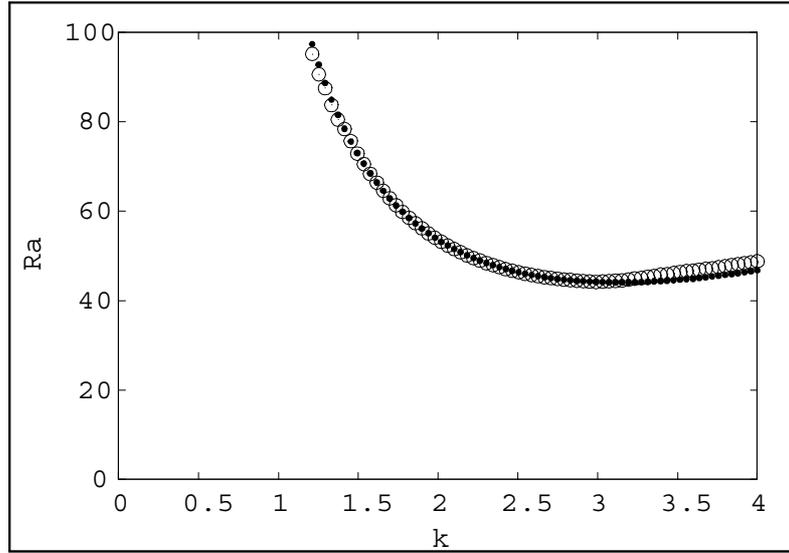


FIG. 2.5: Solution approchée (cercles pleins) et solution numérique (cercles) dans le plan $(Ra - k)$, pour un rapport de séparation $\psi = -0.1$.

b) Naissance de la convection pour $\psi < \psi_{pc}$

La bifurcation est une bifurcation de Hopf et elle comporte deux modes couplés pour :

$$\omega_{\pm} = Qk_x \pm \Omega(Q = 0) \quad ,$$

$$Ra(k) = \frac{(k^2 + \pi^2)((\Lambda + 1)k^2 + \pi^2)}{(1 + \psi)k^2} \quad . \quad (2.17)$$

La fréquence ainsi que les nombres d'onde et de Rayleigh critiques sont les suivants où k_c **est indépendant de ψ** , tandis que R_c en dépend avec un effet stabilisant par rapport au fluide pur ($\psi = 0$) :

$$k_c^2 = \frac{\pi^2}{\sqrt{(\Lambda + 1)}} \quad , \quad (2.18)$$

$$\Omega_c^2 = -\frac{8\pi^2\psi}{1 + \psi} \left[\Lambda + 2 + 2\sqrt{(\Lambda + 1)} \right] - \frac{\Lambda^2\pi^4}{2} \quad (2.19)$$

$$R_c = \frac{\left[\Lambda + 2 + 2\sqrt{(\Lambda + 1)} \right] \pi^2}{1 + \psi} \quad . \quad (2.20)$$

On montre que **la solution approchée issue de la méthode de Galerkin constitue une très bonne approximation**. En effet, la solution trouvée au préalable numériquement est comparée à la solution approchée de l'équation de dispersion sur les figures (2.5, 2.7 et 2.8). Sur celles-ci, on remarque en effet que

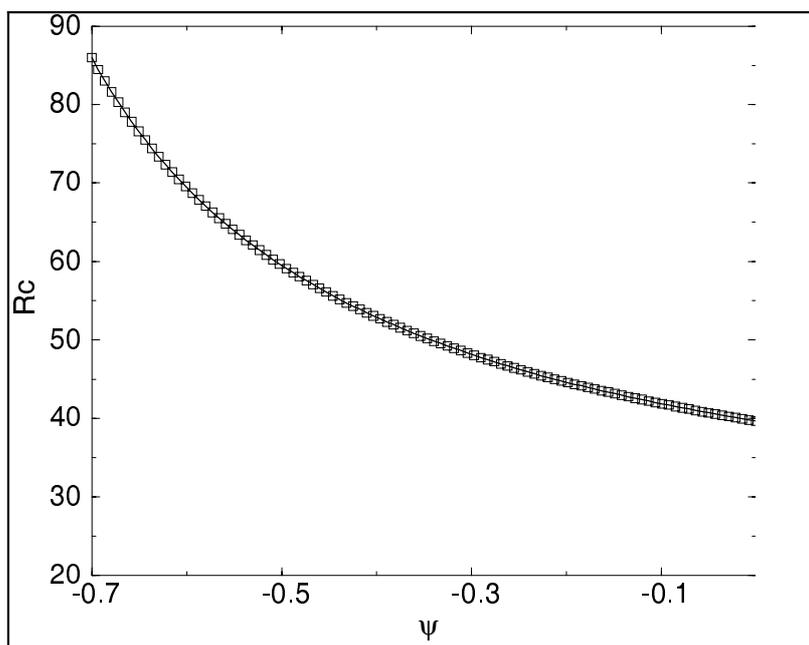


FIG. 2.6: Nombre de Rayleigh critique en fonction de ψ . En trait plein, la solution numérique et le trait avec des symboles carrés représente la solution approchée.

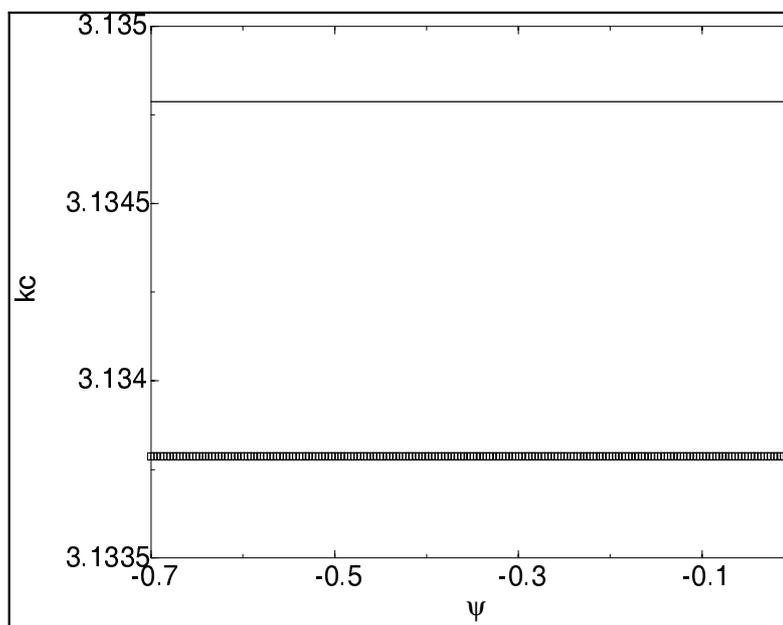


FIG. 2.7: Nombre d'onde critique en fonction de ψ . La solution numérique est représentée en trait plein et la solution approchée est indiquée par des carrés.

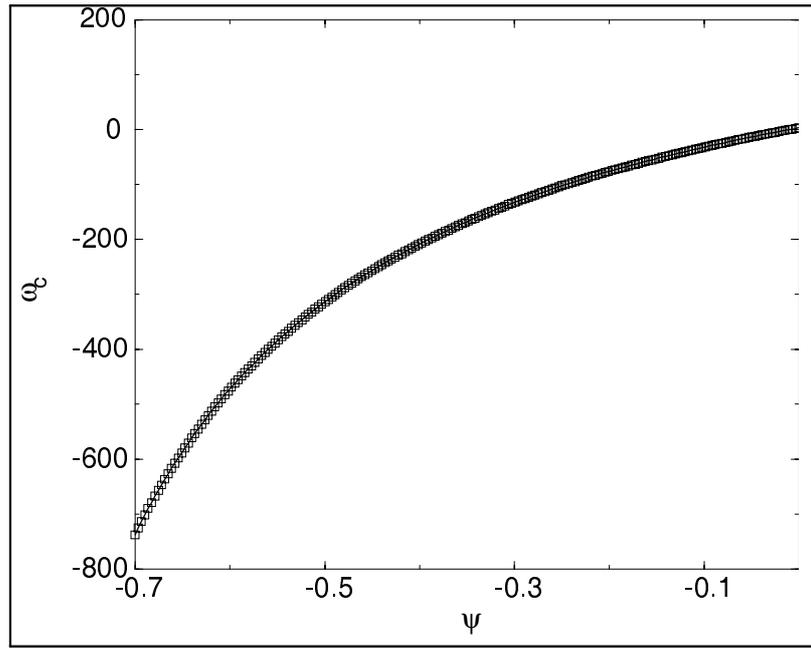


FIG. 2.8: Fréquence critique issue du calcul numérique sur les équations du mouvement (trait plein), et issue de l'approximation de l'équation de dispersion (carrés) avec $Q = 1$.

les caractéristiques d'apparition des instabilités, (i.e. le seuil, le nombre d'onde et la fréquence critiques), issues du calcul numérique, coïncident parfaitement avec les caractéristiques obtenues à partir de l'équation de dispersion approchée, l'écart étant de l'ordre de 10^{-6} .

c) Point de codimension deux

Lorsqu'il s'agit de parois imperméables, les deux courbes de stabilité se rencontrent en un point, mais leurs fréquences ne sont pas identiques. Le nombre d'onde critique change avec le rapport de séparation ψ . Il existe alors une valeur du rapport de séparation ψ_1 pour laquelle la convection intervient de manière oscillante soit avec une fréquence $\omega = Qk_x$ pour ($\psi > \psi_{pc}$), soit à la fréquence : $\omega^\pm = Qk_x \pm \Omega(Q = 0)$ pour ($\psi < \psi_{pc}$).

$$\psi_1 = \frac{\Lambda(1 - \sqrt{1 + \Lambda})}{\Lambda\sqrt{1 + \Lambda} + \frac{8}{\pi^2}\Lambda - \Lambda + \frac{8}{\pi^2}}$$

Il existe une autre valeur ψ_2 , très proche de ψ_1 , pour laquelle R_c pour $\psi > \psi_{pc}$ est différente de R_c pour $\psi < \psi_{pc}$, et où les valeurs des fréquences sont les mêmes.

$$\psi_2 = \frac{\Lambda(1 - \sqrt{1 + \Lambda})}{\left(\Lambda + \frac{8}{\pi^2}\right)(1 + \sqrt{1 + \Lambda}) - 2\Lambda}$$

En conséquence, dans le cas de parois imperméables, le point de codimension deux n'existe pas en toute rigueur. Toutefois, nous utilisons le terme "point de codimension deux" pour la valeur ψ_1 du rapport de séparation. Cet abus de langage correspond à un terme couramment utilisé par la communauté qui traite des mélanges binaires.

d) Résonance

Lorsque le débit est non nul, les deux fréquences ω_+ et ω_- sont différentes et prennent des valeurs non égales à celles du problème sans débit. Ainsi, un phénomène de résonance peut prendre place dans le système.

On étudie la résonance dans le cas où $\psi < \psi_{pc}$. Les structures apparaissant sont des structures transversales ($k_y = 0$ et $k_x = k_c$). On parle de résonance forte si :

$$n\omega_+ + m\omega_- = 0 \quad \text{avec} \quad |n + m| \leq 4 \quad . \quad (2.21)$$

n et m sont des entiers relatifs. On trouve une relation entre le débit Q et le rapport de séparation ψ :

$$Q = \frac{(m - n) \Omega(Q = 0)}{(m + n)\pi} \quad . \quad (2.22)$$

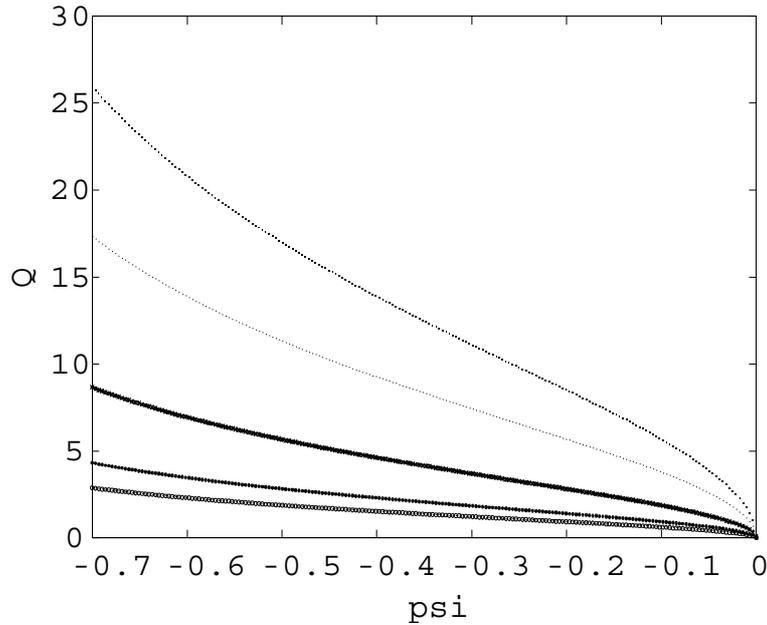


FIG. 2.9: Courbe de résonance $n\omega_+ + m\omega_- = 0$ avec $|n + m| < 4$, et du bas vers le haut ($n = 1, m = 3$); ($n = 1, m = 2$); ($n = 1, m = -3$) et ($n = 1, m = -2$).

Lorsque le système se déstabilise (i.e. $Ra = R_c$), la figure (2.9) montre des courbes reliant Q à ψ le long desquelles le phénomène de résonance se produit pour différentes valeurs de m et de n .

2.1.3 Comparaison des résultats issus des deux modèles

Ce paragraphe est destiné à comparer les résultats linéaires de stabilité temporelle issus des deux types de conditions aux limites étudiés. On analyse ces comportements en fonction du paramètre ψ .

a) $\psi < \psi_{pc}$

La courbe suivante (2.10) représente la dépendance du nombre de Rayleigh Ra selon le nombre d'onde k . Pour un tel rapport de séparation ψ , la courbe de stabilité neutre est quasiment la même pour les deux types de conditions aux limites (perméables et imperméables). Par conséquent, en ce qui concerne l'apparition des instabilités, les seuils critiques sont presque confondus (figure 2.11). Quant aux nombres

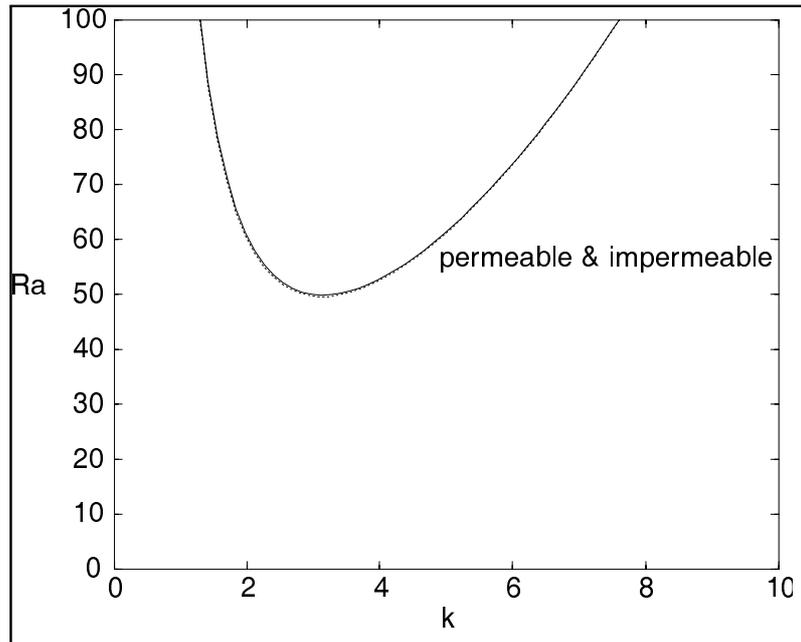


FIG. 2.10: Stabilité neutre Ra en fonction de k , pour un rapport de séparation négatif $\psi = -0.2$.

d'onde, ils sont constants et presque égaux ².

En conclusion pour $\psi < \psi_{pc}$, les caractéristiques linéaires du système au seuil critique ne sont quasiment pas influencées par le type de parois

² $k_c^2 = \pi^2$ (parois perméables) et $k_c^2 = \frac{\pi^2}{\sqrt{\Lambda + 1}}$ (parois imperméables)

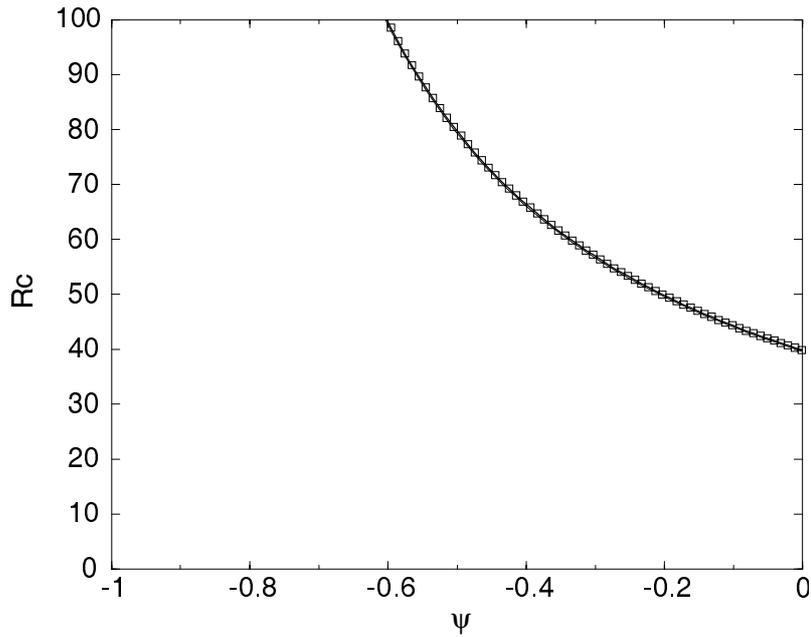


FIG. 2.11: Nombre de Rayleigh critique R_c en fonction du rapport de séparation ψ . Les deux seuils sont confondus (parois perméables \square , et parois imperméables —) lorsque $\psi < \psi_{pc}$.

(imperméables et perméables).

b) $\psi > \psi_{pc}$

Contrairement au cas précédent, il existe une forte divergence dans les résultats de stabilité linéaire entre les parois perméables et imperméables. Tout d'abord, les seuils de stabilité marginale sont très différents et l'écart est d'autant plus important que le nombre d'onde k est petit, ce qui est montré sur la figure (2.12). La figure (2.13) montre une forte différence entre les parois perméables et imperméables en ce qui concerne les seuils critiques.

La différence majeure entre les deux modèles réside dans le fait que **le nombre d'onde dépend du rapport de séparation ψ dans le cas réaliste**, alors que les résultats issus du modèle de parois perméables prédisent un nombre d'onde critique constant $k_c = \pi$.

c) Point de codimension deux

Il existe un point de codimension deux, noté ψ_{pc} , séparant deux zones bien distinctes du point de vue dynamique. A gauche de ce point, la bifurcation est, comme nous l'avons vu précédemment, une bifurcation de Hopf, et à droite de ce point, la bifurcation est de type fourche. En ce point précis, les deux nombres de Rayleigh

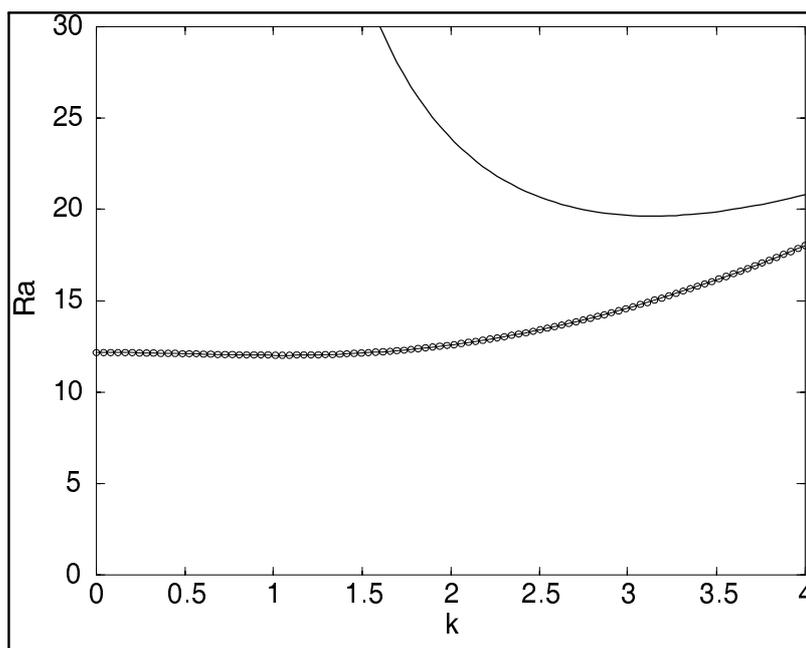


FIG. 2.12: Courbe de stabilité neutre Ra en fonction de k pour des parois perméables (trait) et imperméables (cercles) pour un rapport de separation $\psi = 0.01$.

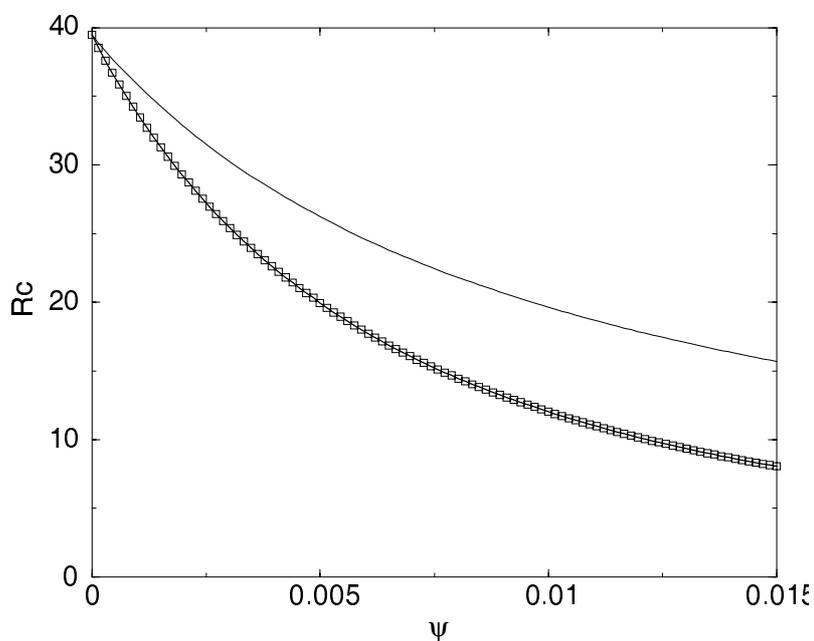


FIG. 2.13: Nombre de Rayleigh critique en fonction de ψ pour $\psi > \psi_{pc}$, les deux seuils sont très différents pour des parois perméables (trait plein) et imperméables (\square).

critiques sont égaux. Avec l'hypothèse de parois perméables sur les bords horizontaux, ce point existe et est unique ; sa valeur a été déterminée. Par contre, lorsque les parois sont imperméables, il n'est plus exact de parler de point de codimension deux puisque les valeurs des nombres d'onde et des fréquences sont différentes en ce point.

2.2 Nature convective ou absolue des instabilités

La réponse linéaire du système à une perturbation localisée permet d'étudier sa stabilité linéaire et constitue un critère local d'instabilité. Le système est stable si toute perturbation décroît dans le temps. Dans le cas où la perturbation n'est ni amplifiée ni atténuée, la stabilité est dite marginale. En complément à cette étude, il est important de distinguer les instabilités convectives des instabilités absolues lorsque l'invariance Galiléenne est brisée à cause de l'advection.

Les notions d'instabilités convectives et absolues apparaissent pour la première fois dans un contexte général dans un article de Twiss en 1952 [75], puis de Landau et Lifshitz [48] et Briggs [12]. Ces notions ont été aussi introduites par les physiciens des plasmas, puis ont été appliqués par Huerre et Monkewitz [39] aux écoulements cisailés ouverts, tels que les jets, les couches de mélange ou les sillages. La théorie de stabilité temporelle linéaire est très bonne pour prédire un grand nombre de comportements d'écoulements. Le nombre d'onde k est réel, et l'objectif de cette étude est de déterminer une fréquence complexe ω fonction de k . Cette théorie temporelle est utilisée notamment dans les études de Taylor-Couette et de Rayleigh-Bénard. Toutefois, pour l'étude d'instabilités dans des écoulements parallèles tels que les couches limites, le mécanisme d'instabilité est très souvent contrôlé par un forçage périodique de l'écoulement à une certaine fréquence. Il faut distinguer l'analyse spatiale de l'analyse temporelle. Dans cette dernière, les perturbations évoluent temporellement à partir d'une perturbation spatiale initiale. Les résultats expérimentaux semblent être plus en accord avec une théorie spatiale, où l'on considère le nombre d'onde complexe et la fréquence réelle, qu'avec une théorie temporelle. L'évolution des perturbations localisées en régime linéaire est décrite en termes d'instabilité convective et d'instabilité absolue. Ces notions sont définies pour des écoulements idéalisés (parallèles et infinis), par la réponse du système à une impulsion initiale localisée.

Le régime de conduction pure est **convectivement instable** (C) quand la perturbation, apparaissant en (t_0, x_0) , s'amplifie dans un repère mobile, tout en s'atténuant en chaque point du domaine pour des temps asymptotiquement grands ; ainsi, le système retourne à son état de base non perturbé en absence de bruit. L'effet de cette instabilité est donc temporaire. Physiquement, puisqu'en régime instable, les

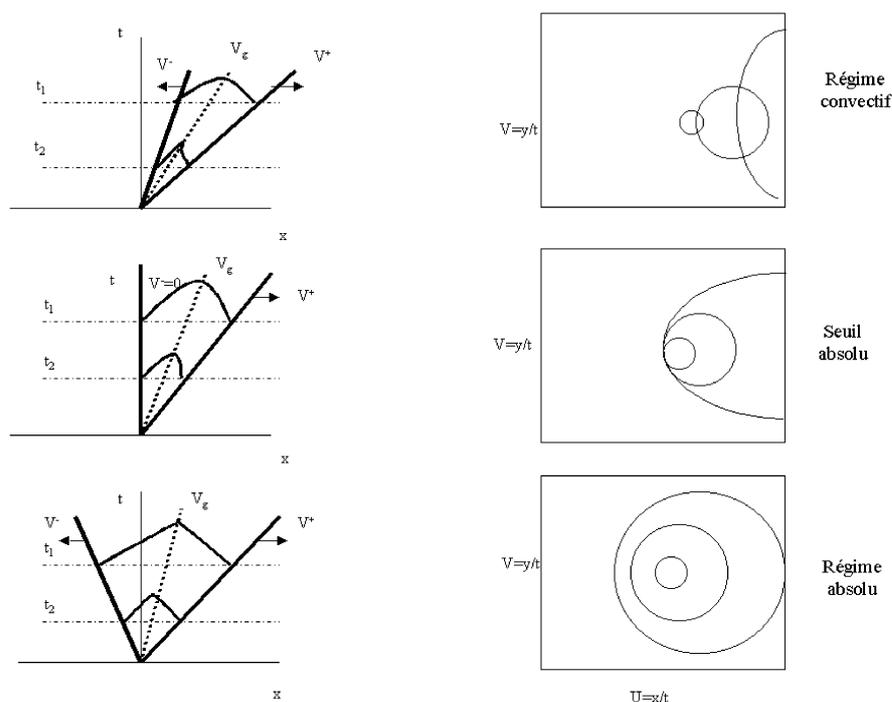


FIG. 2.14: Les figures situées à gauche représentent l'évolution 1D d'un paquet d'ondes instable au cours du temps. Les figures situées à droite représentent l'évolution de l'enveloppe d'un paquet d'ondes 2D instable dans le plan des vitesses de front pour différents temps. V_g est la vitesse de groupe. V^- et V^+ sont les vitesses des ailes du front. La vitesse la plus déstabilisante au sens absolu est la vitesse la plus lente du paquet d'ondes V^- . De haut en bas, les figures schématisent le régime convectif, puis le seuil absolu et enfin le régime absolu. En régime convectif, les vitesses des ailes du front sont de même signe, entraînant l'advection des perturbations croissantes. En régime absolu, les vitesses des ailes du front sont de signe contraire; le paquet d'ondes est amplifié localement et envahit le domaine. Exactement au seuil absolu, la vitesse lente de l'aile du front s'annule.

perturbations croissent spatio-temporellement sous la forme de paquets d'ondes ; les deux fronts possédant un taux d'accroissement nul, se propagent dans la même direction, c'est à dire dans la direction du centre du paquet d'ondes (figure 2.14). Si le système est soumis à un bruit microscopique continu dû à l'expérience par exemple, des structures macroscopiques se créent et sont entretenues par le bruit.

Le régime est **absolument instable** (A) quand la perturbation est amplifiée à la fois à l'aval et à l'amont. Elle grossit et envahit totalement le domaine d'étude jusqu'à saturation et formation des structures. Ainsi, le paquet d'ondes se répand aussi bien dans la direction du mouvement, que dans la direction opposée [36]. Ici, le bruit est amplifié mais ne modifie pas les structures macroscopiques propres à la dynamique du système i.e. ces structures sont dites auto-entretenuées. Par exemple, l'instabilité primaire en convection de Rayleigh-Bénard est absolue, tandis que l'écoulement de Poiseuille plan est convectif. Le comportement asymptotique de la réponse du système à une impulsion, comme a calculé Gaster [33] dans les couches limites en 3D, a fourni une description de l'évolution des paquets d'ondes en régime linéaire. La distinction entre le point de vue temporel et spatial est importante lorsque l'invariance Galiléenne est rompue de part la localisation des perturbations et des conditions aux limites spatiales. En général, l'analyse spatiale est correcte pour décrire les instabilités convectives, tandis qu'une étude spatio-temporelle est recommandée pour les instabilités absolues, en prenant à la fois un nombre d'onde et une fréquence complexes.

2.2.1 Réponse linéaire du système à une perturbation localisée

L'étude de stabilité linéaire fait intervenir le développement en temps et en espace de perturbations infinitésimales autour de l'état de base, représenté par la solution de conduction. Le problème peut être ramené à un problème aux valeurs propres dans lequel ω et k sont reliés par l'équation de dispersion : $D(k, \omega, \Phi) = 0$ avec $\Phi = \{Ra, Q, \psi, \Lambda\}$. La réponse impulsionnelle, d'après le système (1.17) satisfait les équations linéaires suivantes :

$$\begin{aligned}
 \Delta W - (1 + \psi)\Delta_h \theta - \psi \Delta_h \xi &= \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0)\delta(t) \\
 \frac{\partial \theta}{\partial t} + Q \frac{\partial \theta}{\partial x} - \Delta \theta - Ra W &= \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0)\delta(t) \\
 \frac{\partial \xi}{\partial t} + Q \frac{\partial \xi}{\partial x} - \Lambda \Delta \xi + \Delta \theta &= \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0)\delta(t) \quad .
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

On applique les transformées de Fourier en espace et de Laplace en temps selon la définition ci-dessous pour W (on fera de même pour θ et ξ) :

$$\hat{W}(k_x, k_y, z, \omega; z_0) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, y, z, t; z_0) \exp(-ik_x x - ik_y y + i\omega t) dx dy dt \quad , \quad (2.24)$$

et on obtient l'équation forcée (2.25), avec $\hat{G} = (\hat{W}, \hat{\theta}, \hat{\xi})^T$ et l'exposant T désigne la transposée :

$$(L_1 - i\omega L_2)\hat{G}(k_x, k_y, \omega) = (1, 1, 1)^T \delta(z - z_0) \quad . \quad (2.25)$$

Les deux opérateurs linéaires L_1 et L_2 de l'équation (2.25) sont définis par :

$$L_1 = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dz^2} - k^2 & (1 + \psi)k^2 & \psi k^2 \\ -Ra & iQk_x + (k^2 - \frac{d^2}{dz^2}) & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dz^2} - k^2 & iQk_x - \Lambda \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \end{bmatrix} \quad ,$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

On peut écrire l'équation (2.25) sans second membre sous la forme d'un problème aux valeurs propres :

$$L_1 \hat{G}_n(k_x, k_y, \omega_n) = i\omega_n L_2 \hat{G}_n(k_x, k_y, \omega_n) \quad (2.26)$$

Nous appelons "abusivement" $i\omega_n$ et \hat{G}_n , valeurs propres et fonctions propres du problème (2.26). Plus exactement les valeurs $i\omega_n$ sont choisies de telle sorte que le noyau de l'opérateur $(L_1 - i\omega_n L_2)$ ne soit pas réduit à zéro. Pour cela, la condition nécessaire et suffisante à imposer à ω_n est $Det(L_1 - i\omega_n L_2) = 0$.

Les \hat{G}_n représentent alors un nombre infini de fonctions propres correspondant à une infinité de valeurs propres ω_n dépendant des valeurs prises par k_x et k_y . On développe $(\hat{W}, \hat{\theta}, \hat{\xi})$ en une série de fonctions propres $(\hat{W}_n, \hat{\theta}_n, \hat{\xi}_n)$ comme cela a été fait par Carrière et Monkewitz [17] :

$$\hat{G} = \sum_n A_n(k_x, k_y, \omega, z_0) \hat{G}_n(k_x, k_y, \omega_n, z) \quad . \quad (2.27)$$

En injectant (2.27) dans l'équation (2.25) et en tenant compte du fait que les fonctions \widehat{G}_n sont les fonctions propres du problème homogène, on obtient :

$$-i \sum_n (\omega - \omega_n) A_n L_2 \left(\widehat{G}_n \right) = (1, 1, 1)^T \delta(z - z_0) \quad . \quad (2.28)$$

Si on définit le produit scalaire comme suit :

$$\left\langle \widehat{G}_n, \widehat{G}_m \right\rangle = \int_0^1 \widehat{G}_n \cdot \overline{\widehat{G}_m} dz = \int_0^1 \left(\overline{\widehat{W}_n} \cdot \widehat{W}_m + \overline{\widehat{\theta}_n} \cdot \widehat{\theta}_m + \overline{\widehat{\xi}_n} \cdot \widehat{\xi}_m \right) dz \quad ,$$

où la barre représente la quantité complexe conjuguée, et en multipliant (2.28) de la droite par \widehat{G}_m^* , on obtient :

$$-i \sum_n (\omega - \omega_n) A_n \left\langle L_2 \widehat{G}_n, \widehat{G}_m^* \right\rangle = (1, 1, 1)^T \overline{\widehat{G}_m^*} (k_x, k_y, z_0) \quad , \quad (2.29)$$

avec \widehat{G}_m^* les fonctions propres de l'adjoint de l'opérateur $(L_1 - i\omega_n L_2)$. Afin d'évaluer $\left\langle L_2 \widehat{G}_n, \widehat{G}_m^* \right\rangle$, remarquons que :

$$L_1 \widehat{G}_n = i\omega_n L_2 \widehat{G}_n \quad (2.30)$$

et

$$L_1^* \widehat{G}_m^* = -i\omega_m L_2 \widehat{G}_m^* \quad , \quad (2.31)$$

avec $L_2 = L_2^*$. En multipliant (2.30) de la droite par $\overline{\widehat{G}_m^*}$ et en multipliant le complexe conjugué de (2.31) de la gauche par \widehat{G}_n , on obtient :

$$\left\langle L_1 \widehat{G}_n, \widehat{G}_m^* \right\rangle = i\omega_n \left\langle L_2 \widehat{G}_n, \widehat{G}_m^* \right\rangle \quad (2.32)$$

$$\left\langle \widehat{G}_n, L_1^* \widehat{G}_m^* \right\rangle = i\omega_m \left\langle \widehat{G}_n, L_2 \widehat{G}_m^* \right\rangle \quad . \quad (2.33)$$

Rappelons qu'un opérateur adjoint L^* de L vérifie :

$$\langle LX, Y \rangle = \langle X, L^*Y \rangle \quad .$$

De ce fait, la différence de (2.32) et de (2.33) montre que :

$$\left\langle L_2 \widehat{G}_n, \widehat{G}_m^* \right\rangle = 0 \quad \text{pour } n \neq m \quad .$$

L'équation (2.29) donne alors les coefficients A_n :

$$A_n = \frac{\overline{\widehat{W}_n} * (k_x, k_y, z_0) + \overline{\widehat{\theta}_n} * (k_x, k_y, z_0) + \overline{\widehat{\xi}_n} * (k_x, k_y, z_0)}{i(\omega_n - \omega) \left\langle L_2 \widehat{G}_n, \widehat{G}_n^* \right\rangle} \quad .$$

On peut imposer la condition de normalisation, c'est à dire que $\langle L_2 \widehat{G}_n, \widehat{G}_n^* \rangle = 1$, et on arrive à :

$$A_n = \frac{Z_n(k_x, k_y, z_0)}{i(\omega_n - \omega)} ,$$

avec $Z_n(k_x, k_y, z_0) = \overline{W}_n^*(k_x, k_y, z_0) + \overline{\theta}_n^*(k_x, k_y, z_0) + \overline{\xi}_n^*(k_x, k_y, z_0)$.

Après avoir résolu le problème dans l'espace de Fourier, on revient à l'espace physique (x, y, t) . La transformée inverse de Fourier doit être évaluée en utilisant la méthode des résidus.

$$G(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Z_n(k_x, k_y) \widehat{G}_n(k_x, k_y, z) e^{(-i(\omega_n(k_x, k_y)t - k_x x - k_y y))} dk_x dk_y . \quad (2.34)$$

L'intégrale de Fourier sur tous les nombres d'ondes k peut être évaluée pour des temps grands en appliquant la méthode du col deux fois, c'est à dire dans le plan k_x et le plan k_y , en notant que les deux contours d'intégration dans les deux plans sont couplés [11]. Les intégrations sont effectuées le long du contour L (contour de Laplace) dans le plan des ω complexes et le long du contour F (contour de Fourier) dans le plan des k complexes. Les deux contours appartiennent à des domaines de convergence absolue. Le choix de ces domaines doit respecter le principe de causalité, où tous les champs sont nuls $G(x, y, z, t) = 0$ quand $t < 0$ et la convergence de l'intégrale doit être vérifiée. En général, le domaine de convergence dans le plan ω complexe est une fraction du demi-plan supérieur ; il est situé au-dessus de l'axe ω réel. Le domaine dans le plan k correspond à une bande contenant l'axe des k réels (les perturbations ont une extension finie en x). Le contour L se referme par un demi-cercle à l'infini supérieur pour $t < 0$ et inférieur pour $t > 0$. Il est situé au-dessus des branches temporelles, pour satisfaire la condition de causalité. Sur chaque droite ($x/t = \text{const}$, $y/t = \text{const}$), seul le mode avec la vitesse de groupe $(x/t, y/t)$ sera présent lorsque $t \rightarrow \infty$ [40].

La partie dominante de la solution de l'intégrale (2.34) est obtenue par la méthode du col et s'écrit :

$$G(x, y, z, t) \sim \frac{-i}{2\pi t^{1/2}} \sum_n \left[\frac{\partial^2 \omega_n(k_x^{(0)}, k_y^{(0)})}{\partial k_y^2} \frac{\partial^2 \omega_n(k_x^{(0)}, k_y^{(0)})}{\partial k_x^2} \right]^{-1/2} Z_n(k_x^{(0)}, k_y^{(0)}) \times \widehat{G}(k_x^{(0)}, k_y^{(0)}) \exp - i \left[\omega_n(k_x^{(0)}, k_y^{(0)}) - k_x^{(0)} \frac{x}{t} - k_y^{(0)} \frac{y}{t} \right] t .$$

Le point $(k_x^{(0)}, k_y^{(0)})$ est le point col défini dans les plans complexes k_x et k_y par :

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial k_x}(k_x^{(0)}, k_y^{(0)}) = \frac{x}{t} = U \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial k_y}(k_x^{(0)}, k_y^{(0)}) = \frac{y}{t} = V . \quad (2.36)$$

Soit $\omega^{(0)}$ la fréquence complexe telle que $U = V = 0$.

Les critères permettant la détermination de la nature de l'instabilité sont rassemblés dans le tableau ci-dessous, selon les signes des taux d'accroissement temporels maximum et les taux d'accroissement absolus.

$\omega_{i,max} > 0$	$\omega_{0,i} > 0$	Absolu
$\omega_{i,max} > 0$	$\omega_{0,i} < 0$	Convectif
$\omega_{i,max} < 0$	$\omega_{0,i} < 0$	Stable

Ainsi, on cherche les caractéristiques des structures correspondant à une instabilité absolue en résolvant le système :

$$\begin{aligned}
 D(\omega^\pm, k_x, k^2) &= 0 \\
 \frac{\partial \omega^\pm}{\partial k_x} = Q \pm 2k_x^{(0)} \frac{\partial \Omega(Q=0)}{\partial k^2} &= 0 \quad \text{en } (k_x^{(0)}, k_y^{(0)}) \\
 \frac{\partial \omega^\pm}{\partial k_y} = 2k_y^{(0)} \frac{\partial \Omega(Q=0)}{\partial k^2} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Comme on peut le constater à partir de ces équations, deux solutions sont possibles pour annuler les deux vitesses de groupe $(U, V) = (0, 0)$. La première consiste à prendre dans la dernière équation $\frac{\partial \Omega(Q=0)}{\partial k^2} = 0$, or ceci implique que le débit s'annule d'après la deuxième équation : ce qui n'est pas intéressant puisque l'originalité du problème se situe dans l'effet de l'écoulement horizontal à débit constant et non nul. La deuxième possibilité (celle que l'on retiendra) consiste à prendre $k_y^{(0)} = 0$, ce qui signifie que **le système sélectionne au seuil absolu les ondes progressives structurées sous forme de rouleaux transversaux se propageant dans la direction de l'écoulement (x) parmi une infinité de modes instables**. Les rouleaux transversaux sont les premiers à devenir absolument instables dans le système; il s'opère donc une sélection du nombre d'onde, contrairement au premier seuil (critique) où toutes les structures tridimensionnelles sont linéairement instables. C'est la présence de l'écoulement horizontal qui mène à cette sélection particulière, puisqu'en son absence, il n'existe pas de direction privilégiée de propagation des structures du fait de l'invariance rotationnelle du système.

2.2.2 Evolution du paquet d'ondes dans la région instable

Dans le régime instable, les perturbations localisées croissent spatio-temporellement sous la forme de paquets d'ondes. Leur taux d'accroissement ³ est $\sigma = \Im(\omega) - \Im(k_x)U - \Im(k_y)V$. On rappelle que si le taux de croissance temporelle σ est positif, alors le système est linéairement instable ($\sigma > 0$) et linéairement stable dans le cas

³La partie imaginaire de la grandeur complexe X est représentée par $\Im(X)$.

contraire. Le taux d'accroissement σ tient compte en plus du terme d'accroissement temporel $\Im(\omega)$, des termes de contribution spatiale où la vitesse de propagation ($\frac{x}{t} = U, \frac{y}{t} = V$) du paquet d'ondes a un rôle important dans la région instable.

Afin d'illustrer l'évolution du paquet d'ondes dans la région instable ($\sigma \geq 0$), on est amené à intégrer numériquement à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson le système (2.38) :

$$\begin{aligned}\omega &= \omega(k_x, k_y, Ra, Q, \psi, \Lambda) \\ \frac{\partial \omega}{\partial k_x} &= U \quad \text{et} \quad \frac{\partial \omega}{\partial k_y} = V \\ \sigma &= \Im(\omega) - \Im(k_x) \frac{x}{t} - \Im(k_y) \frac{y}{t}\end{aligned}\tag{2.38}$$

où $\omega(k_x, k_y, Ra, Q, \psi)$ est donnée par l'équation de dispersion approchée (2.13). Le taux d'amplification σ appartient à l'intervalle $[0, \sigma_{\max}]$ où σ_{\max} est le taux d'amplification temporel du mode le plus instable défini par son nombre d'onde $(k_x^c, k_y^c) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{aligned}U_c &= \left. \frac{\partial \omega_r}{\partial k_x} \right|_c \\ V_c &= \left. \frac{\partial \omega_r}{\partial k_y} \right|_c \\ \left. \frac{\partial \omega_i}{\partial k_x} \right|_c &= \left. \frac{\partial \omega_i}{\partial k_y} \right|_c = 0\end{aligned}\tag{2.39}$$

L'évolution des paquets d'ondes dans le plan des vitesses (U, V) est étudiée pour le cas $\psi > \psi_{pc}$, le cas $\psi < \psi_{pc}$ étant qualitativement similaire.

L'intégration numérique de (2.38) pour $\psi > \psi_{pc}$ est illustrée sur la figure (2.15) pour trois valeurs de Rayleigh supérieures à R_c . Les vitesses des différents modes instables décrivent un disque centré sur le mode de taux d'amplification σ_{\max} et délimité par un cercle correspondant à des modes de taux d'amplification nul ($\sigma = 0$). On remarque que la position du centre est la même pour les trois valeurs de Ra et sa vitesse est d'après (2.39) :

$$\begin{aligned}U_c &= Q \\ V_c &= 0\end{aligned}\tag{2.40}$$

Pour $R_c < Ra = 15.5 < Ra^A$, on remarque que l'origine $(U, V) = (0, 0)$ est à l'extérieur du disque. Cela signifie que le paquet d'ondes instable est convecté vers l'aval et finit par quitter le milieu.

Lorsque $Ra = Ra^A = 16.32$ (courbe du milieu de la figure (2.15)), un seul mode va s'amplifier localement $(U, V) = (0, 0)$, et tous les autres vont finir par quitter le milieu. Ce mode sélectionné au seuil d'instabilité absolue correspond d'après ce que

l'on a vu précédemment, à des rouleaux transversaux propagatifs dans la direction de l'écoulement.

Dès que Ra dépasse Ra^A (sur la figure (2.15), $Ra = 17.5$), le paquet d'ondes se propage à la fois vers l'amont et vers l'aval, et l'instabilité envahit alors tout le domaine physique considéré.

En ce qui concerne le cas $\psi < \psi_{pc}$, non exposé dans le but d'alléger la rédaction, c'est aussi le paquet d'ondes centré sur le mode critique le plus lent qui va "envahir" l'origine $(U, V) = (0, 0)$ en premier.

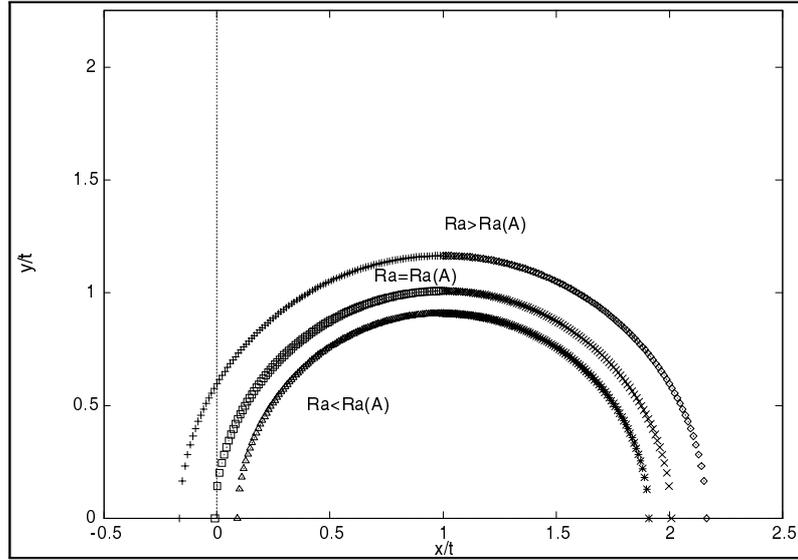


FIG. 2.15: Evolution du paquet d'ondes instable dans le plan des vitesses U et V . Le rapport de séparation $\psi = 0.1$ et $U_c = Q = 1$ $Ra = 15.5$ ($\Delta, *$), $Ra = 16.32$ (\square, \times) et $Ra = 17.5$ ($+, \diamond$).

2.2.3 Comportement des branches spatiales

On a vu que la *condition nécessaire et non suffisante* pour que l'instabilité soit absolue est qu'il existe un point col $(k_x^{(0)}, k_y^{(0)})$ dans les plans complexes k_x et k_y reliés à une fréquence complexe $\omega^{(0)}$ telle que $\Im(\omega^{(0)}) > 0$ et que $\frac{\partial \omega^\pm}{\partial k_x} = U = 0$ et $\frac{\partial \omega^\pm}{\partial k_y} = V = 0$.

De plus, pour avoir la *condition suffisante*, il faut que les branches spatiales ⁴ dans chaque plan complexe k_x et k_y solutions de l'équation de dispersion suivent un certain "processus de pincement" décrit ci-après. Nous avons vu précédemment que la condition nécessaire pour que l'instabilité soit absolue est que $k_y = 0$. De ce fait, l'équation de dispersion approchée (très voisine de la solution exacte) est

⁴ $k \in \mathbb{C}$ et $\omega \in \mathbb{R}$

alors développée sous la forme d'un polynôme de degré 6 en $k = k_x$. Cette équation est alors résolue par une méthode numérique de résolution polynômiale de Gauss-Laguerre dans le plan complexe k . Pour des valeurs fixées de ψ et du nombre de Rayleigh proches du point col, les solutions de l'équation de dispersion forment 6 branches dans le plan (k_r, k_i) et vérifient les équations algébriques suivantes .

• Parois perméables

$$\begin{aligned} & k^6 (\Lambda) + k^5 (-iQ(1 + \Lambda)) + k^4 (i\omega(1 + \Lambda) - Ra(\psi + \Lambda\psi + \Lambda) - Q^2 + 3\Lambda\pi^2) \\ & + k^3 (2Q\omega + iRa(1 + \psi)Q - 2(1 + \Lambda)iQ\pi^2) \\ & + k^2 (-\omega^2 - i\omega Ra(1 + \psi) + 2i\omega(1 + \Lambda)\pi^2 - Ra\pi^2(\psi + \Lambda\psi + \Lambda) - Q^2\pi^2 + 3\Lambda\pi^4) + \\ & k (2Q\omega\pi^2 - iQ\pi^4(1 + \Lambda)) - \omega^2\pi^2 + i\omega(1 + \Lambda)\pi^4 + \Lambda\pi^6 = 0 \end{aligned}$$

• Parois imperméables

$$\begin{aligned} & k^6 (\Lambda) + k^5 (iQ(1 + \Lambda)) + k^4 (-i\omega(1 + \Lambda) - (\Lambda)(1 + \psi)Ra - Q^2 - (8\psi/\pi^2)Ra + 2\Lambda\pi^2) \\ & + k^3 (2Q\omega - iRa(1 + \psi)Q + (1 + \Lambda)iQ\pi^2 + iQ\pi^2) + k^2 (\Lambda\pi^4 - 8Ra\psi - i\omega\pi^2 - \\ & i\omega\pi^2(1 + \Lambda) - Q^2\pi^2 - \omega^2 + i\omega(1 + \psi)Ra) + k (iQ\pi^4 + 2\omega Q\pi^2) - \omega^2\pi^2 - i\omega\pi^4 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, les branches spatiales sont représentées par les courbes définies par $[k \in \mathbb{C}/D(k, \omega^\pm(k), Ra) = 0, \omega_r^\pm \in \mathbb{R}]$, où ces $k(\omega)$ représentent des ondes s'amplifiant ou décroissant dans l'espace. En effet, au dessous du seuil, les deux branches spatiales concernées par le processus de pincement émanent bien de part et d'autre de l'axe des nombres d'ondes réels k_r . En fixant le taux d'accroissement absolu $\omega_{0,i} = 0$ et en augmentant le paramètre de contrôle (Ra) près du point col, on peut suivre le processus de pincement dans le plan complexe k_x . Lorsque l'on augmente le nombre de Rayleigh tout en restant au-dessous du seuil absolu, les branches spatiales se déforment (figure 2.16). Le système devient convectivement instable (C) lorsque l'une des branches spatiales traverse l'axe réel. Exactement au seuil absolu, (figure 2.17), les branches se pincent au dessous de l'axe réel k_x , le système est absolument instable (A). Le point de rencontre est un point col de $\omega(k)$, où la vitesse de groupe s'annule et la fréquence absolue correspondante est un point de branchement de $k(\omega)$. Au delà du seuil absolu, figure (2.18), les branches se séparent et s'éloignent l'une de l'autre lorsqu'on fait croître le nombre de Rayleigh. Un exemple est donné sur les figures (2.16, 2.17, 2.18) pour un rapport de séparation $\psi = 0.001$ et $Q = 0.1$.

Pour chaque valeur de Q et de ψ , la vérification que tous les points constituant les seuils absolus sont bien des points cols, est une tâche monumentale. Ainsi, seulement quelques points ont été vérifiés.

Aussi longtemps que l'écoulement est convectivement instable, c'est à dire pour $Ra < Ra^A$ où Ra^A désigne le seuil absolu, les perturbations de faible amplitude à l'entrée vont générer des paquets d'ondes instables convectés vers l'aval, saturés

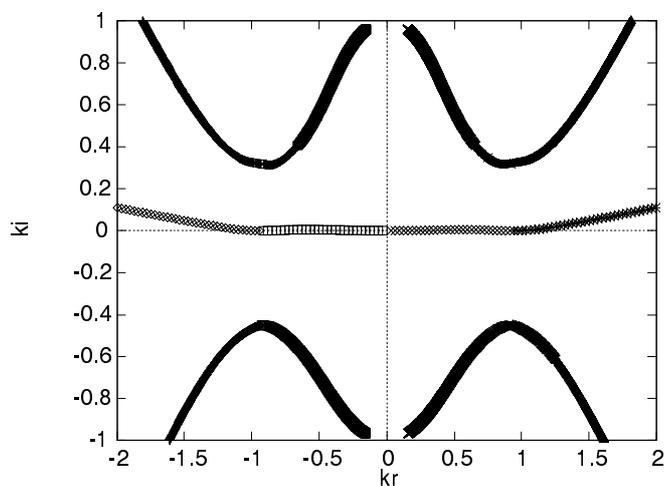


FIG. 2.16: Branches spatiales de la relation de dispersion dans le plan (\hat{k}_r, \hat{k}_i) normalisé par π avec $Ra = 24.7 < Ra^A$

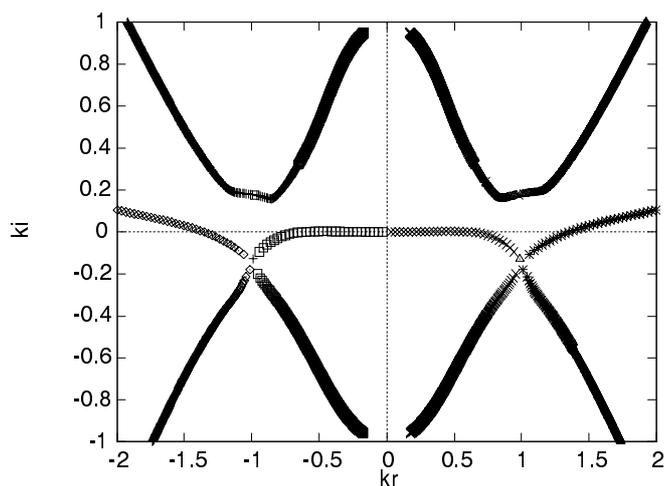


FIG. 2.17: Branches spatiales dans le plan (\hat{k}_r, \hat{k}_i) normalisé par π pour $Ra = 34.54 = Ra^A$.

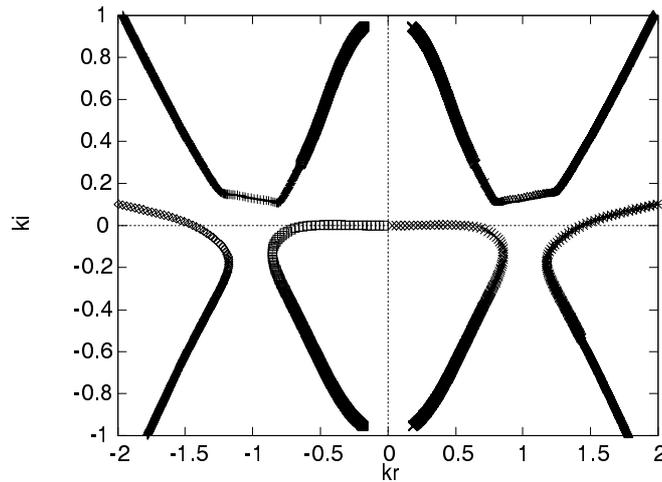


FIG. 2.18: Branches spatiales dans le plan (k_r, k_i) normalisé par π pour $Ra = 36.52 > Ra^A$.

par les effets non linéaires. Si le nombre de Rayleigh dépasse sa valeur absolue Ra^A les paquets d'ondes vont se répandre et s'accroître à la fois vers l'amont et vers l'aval et les rouleaux transversaux apparaîtront dans l'écoulement de façon continue. Les résultats expérimentaux en milieu fluide concernant l'apparition de la convection sous la forme de structures bien définies (rouleaux transversaux ou longitudinaux) sont en excellent accord avec cette théorie spatio-temporelle et les seuils expérimentaux de transition des structures naissantes sont plus proches des seuils absolus que des seuils critiques obtenus à partir d'une théorie linéaire de l'écoulement [66].

Pour déterminer ces seuils absolus, les équations (2.37), avec la condition $\Im(\omega^{(0)}) = 0$, ont été résolues par un algorithme de Newton-Raphson, très sensible aux conditions initiales, en imposant le nombre d'onde k complexe.

2.2.4 Instabilités absolues et sélection de la fréquence globale

a) $\psi < \psi_{pc}$

Lorsque le rapport de séparation est inférieur au point de codimension deux ψ_{pc} , deux ondes progressives, l'une des deux étant capable en régime absolu de remonter l'écoulement, sont sélectionnées à des nombres de Rayleigh absolus différents. Ce résultat est porté sur le graphe (2.19) pour deux valeurs distinctes de ψ ; $\psi = -0.1$ et $\psi = -0.25$ dans le plan des paramètres $(Ra - Q)$. Cette figure montre la transition d'un régime d'instabilités convectives (C) à un régime d'instabilités absolues (A). Dans la zone instable ($Ra > Rc$), le seuil absolu (Ra^A) délimite

ces deux régions, au dessous du seuil, on a un régime (C) et au dessus on a un régime (A). On voit que plus le rapport de séparation diminue, plus le nombre de Rayleigh absolu augmente à un débit Q fixé. Sur ce graphe, il apparaît clairement que lorsque le débit est encore nul ($Q = 0$), les deux modes que l'on appellera S^+ (correspondant à la fréquence ω^+) et S^- (correspondant à la fréquence ω^-), deviennent absolument instables simultanément. Puis, quand le débit augmente, le mode S^- est le premier à se déstabiliser et à devenir absolument instable. **Le mode S^- possède un comportement particulier vis à vis du débit Q . Ce dernier diminue la région d'instabilités convectives jusqu'à l'annuler au point d'abscisse Q_c correspondant au minimum du seuil du mode S^- qui n'est autre que le seuil critique (R_c, Q_c) , voir figure (2.20).** Ce qui signifie

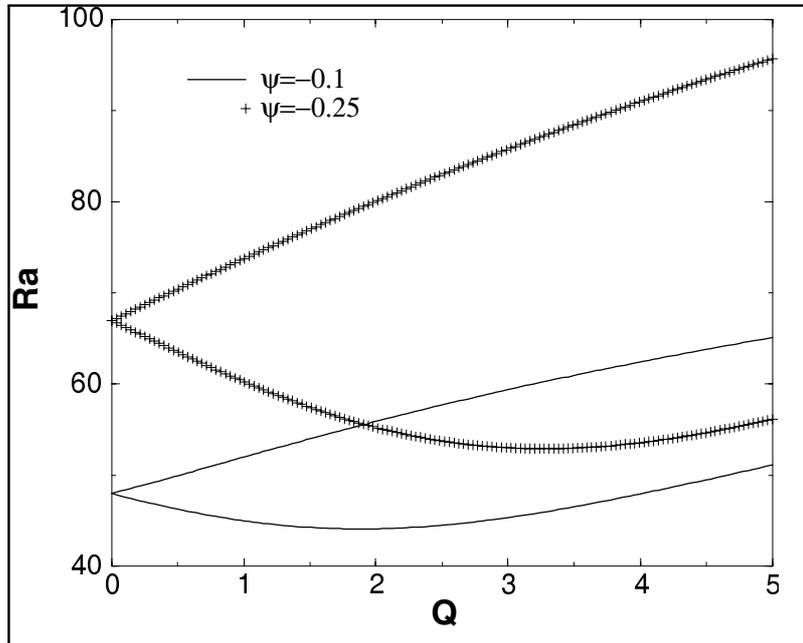


FIG. 2.19: Relation entre le seuil absolu Ra et le débit Q pour deux valeurs du rapport de séparation (trait plein : $\psi = -0.1$) et ($++$: $\psi = -0.25$).

que pour $Q = Q_c$, les seuils d'instabilités absolues et convectives coïncident. On remarque nettement ce phénomène sur la figure (2.20). En ce point, le système devient directement absolument instable sans transition par une région d'instabilités convectives [42]. Lorsque $Q < Q_c$, la région d'instabilités convectives diminue avec le débit, l'écoulement est alors capable de restreindre la zone jusqu'à l'annuler en Q_c , contrairement au cas des fluides purs où l'écoulement crée une région d'instabilités convectives [28]. Toutefois pour $Q > Q_c$, la région convective augmente. La vitesse de groupe $V_g = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_c} = 0$ s'annule précisément au point d'abscisse Q_c , et fournit une relation entre Q et ψ , représentée sur la figure (2.25). On retrouve cette particularité en milieu fluide [46].

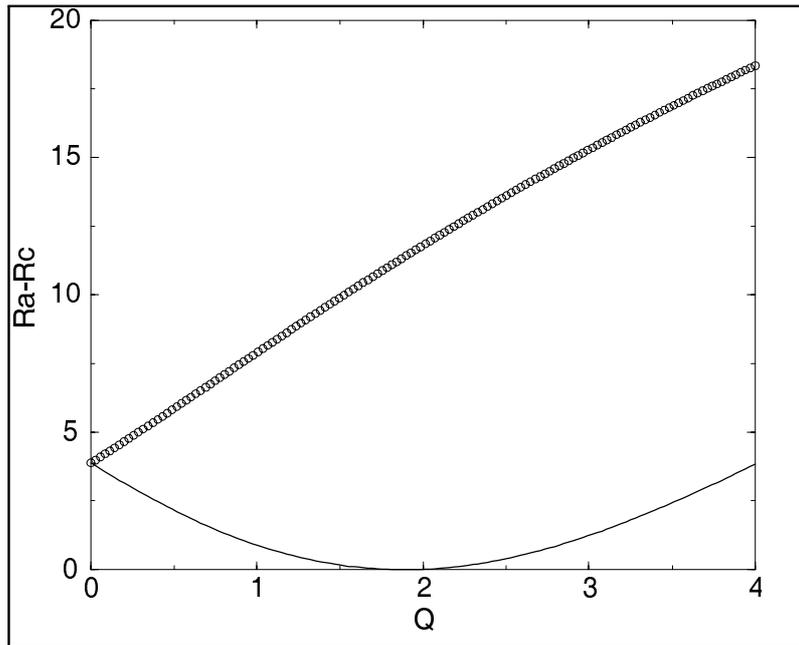


FIG. 2.20: Ecart au seuil absolu ($Ra - Rc$) en fonction du débit Q , où le trait plein est le mode $S-$ et les cercles représentent le mode $S+$ obtenu à partir de l'équation de dispersion. L'écoulement est stable pour $Ra < Rc$, convectivement instable pour $Rc < Ra < Ra^A$ et absolument instable pour $Ra > Ra^A$. Les seuils critiques et absolus coïncident au point critique où la vitesse de groupe s'annule.

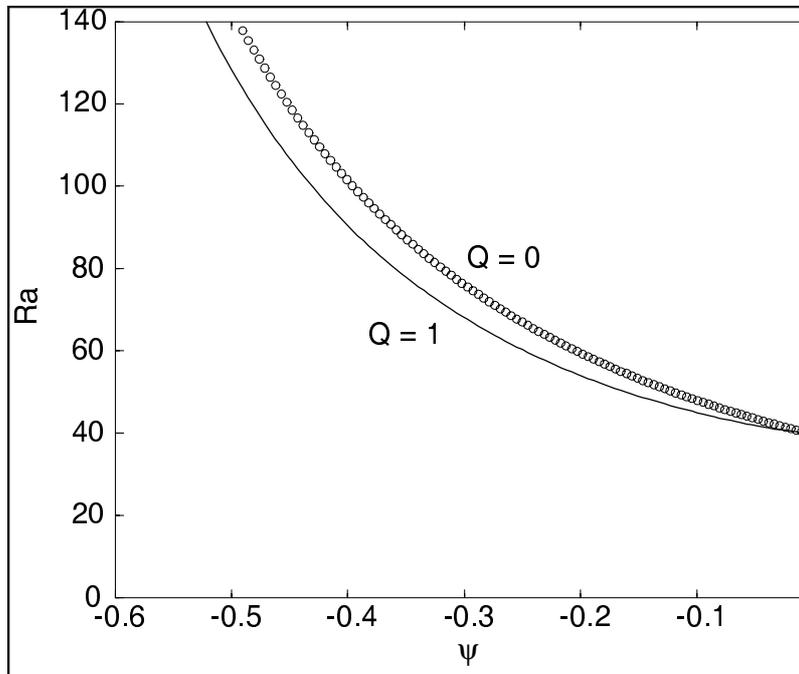


FIG. 2.21: Seuil absolu Ra en fonction du rapport de séparation ψ pour deux débits différents (trait $Q = 1$) et (cercles $Q = 0$).

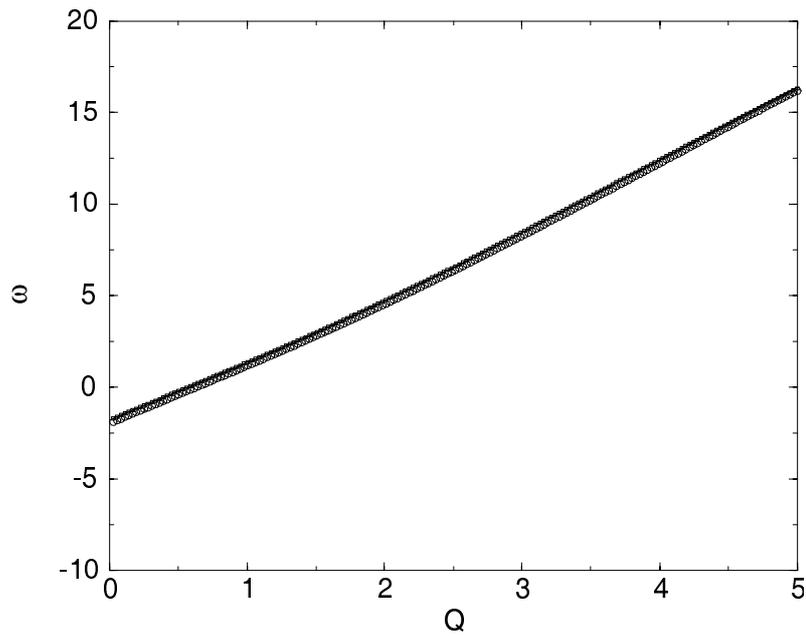


FIG. 2.22: Fréquence ω en fonction du débit Q pour $\psi = -0.01$. Les parois perméables sont représentées par des cercles ($\circ\circ$) et les parois imperméables sont représentées par des carrés (\square).

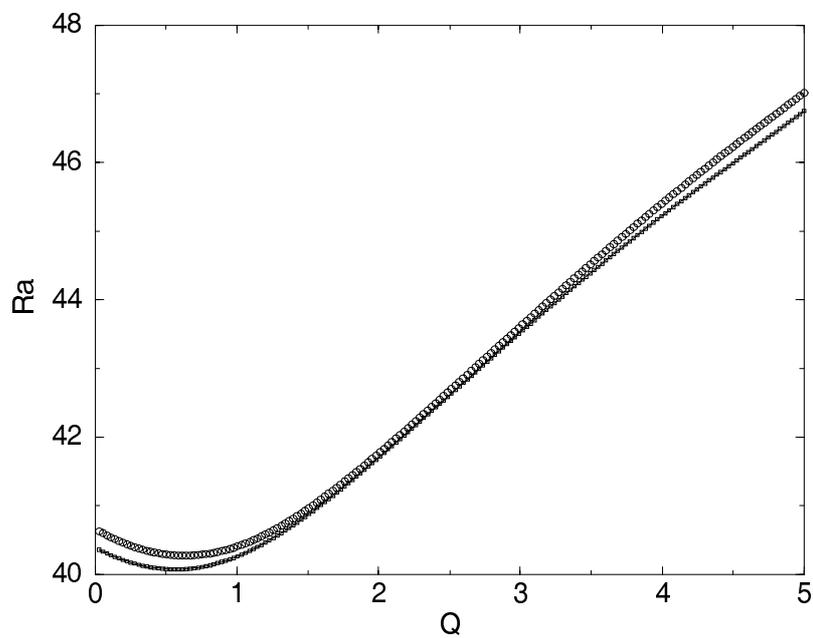


FIG. 2.23: Nombre de Rayleigh absolu en fonction du débit Q pour $\psi = -0.01$. Les parois perméables sont représentées par des cercles ($\circ\circ$) et les parois imperméables sont représentées par des carrés (\square).

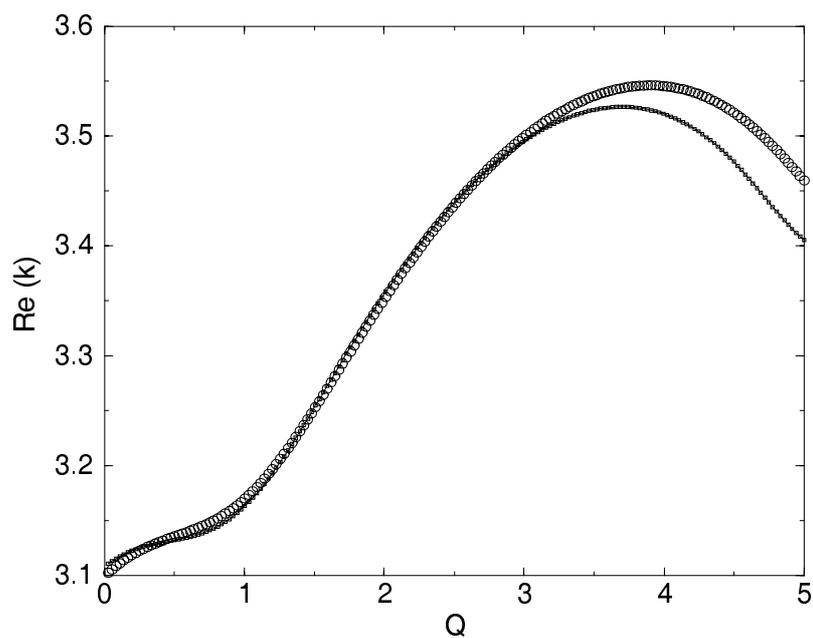


FIG. 2.24: Partie réelle du nombre d'ondes absolu en fonction du débit Q avec $\psi = -0.01$. Les parois perméables sont représentées par des cercles ($\circ\circ$) et les parois imperméables sont représentées par des carrés (\square).

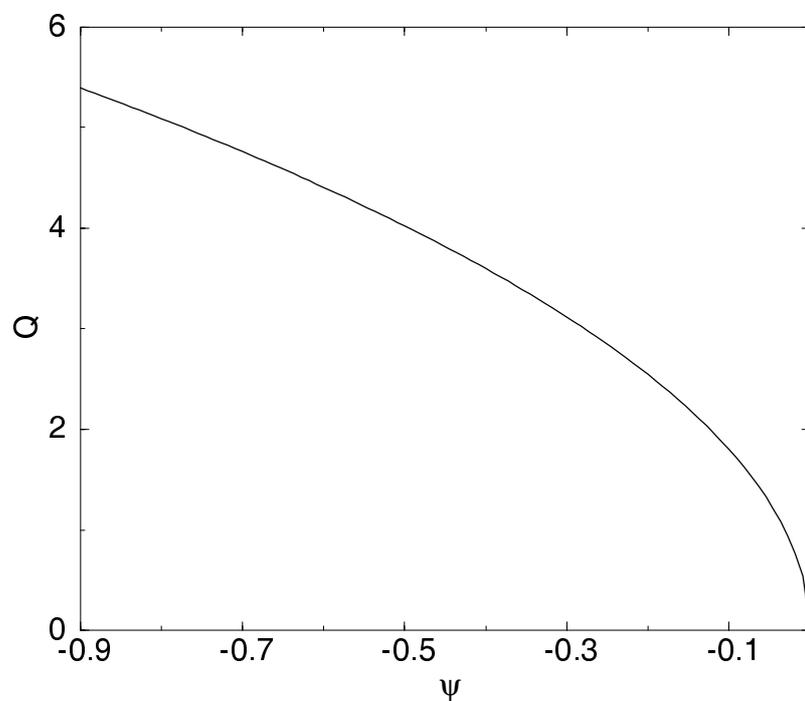


FIG. 2.25: Relation entre le débit et le rapport de séparation lorsque la vitesse de groupe s'annule.

On peut aussi représenter le seuil absolu dans le plan des paramètres (Ra, ψ) pour des débits différents. Le seuil absolu augmente lorsque le débit diminue à ψ fixé. Sur la figure (2.21), deux seuils absolus sont représentés pour $Q = 0$ et $Q = 1$.

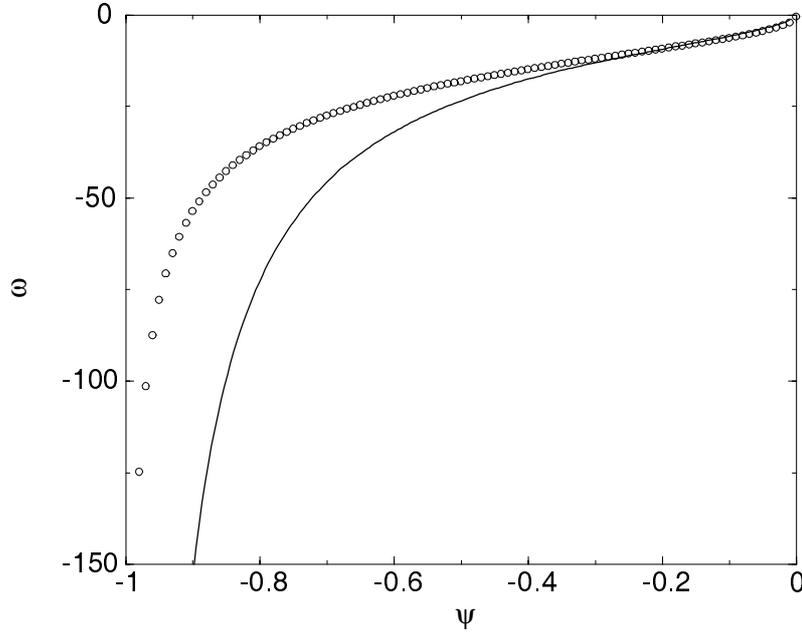


FIG. 2.26: Fréquence en fonction de ψ pour $Q = 0.1$. Fréquence absolue (trait plein) et fréquence au seuil critique ($\circ\circ$).

Dans la région intermédiaire, entre S^+ et S^- , on peut s'attendre à une compétition des deux modes bidimensionnels. Le mode S^- est linéairement absolument instable tandis que le mode S^+ reste linéairement convectivement instable. En fait, on montrera dans le chapitre suivant par une étude faiblement non linéaire, que S^+ n'existe pas non linéairement. Même dans la région où S^+ est absolument linéairement instable, c'est le mode S^- qui est sélectionné réellement.

Lorsque le rapport de séparation est inférieur au point de codimension deux, on a vu précédemment que les seuils critiques sont quasiment équivalents pour des conditions aux limites perméables et des conditions aux limites imperméables. Il est donc légitime de se demander si ce bon accord dans les résultats au seuil critique entre les deux types de parois reste valable au seuil absolu. Pour comparer l'influence des conditions aux limites sur les caractéristiques du système au seuil absolu, on représente la fréquence, le nombre d'onde et le nombre de Rayleigh absolus en fonction du débit Q . Ainsi, les figures (2.22, 2.23, 2.24) montrent que les comportements de ces grandeurs sont qualitativement et quantitativement semblables. **De même qu'au seuil critique, les allures des courbes (2.22, 2.23, 2.24) au seuil absolu sont quasiment identiques pour les parois perméables et pour les parois imperméables. On peut donc en conclure que l'approximation des condi-**

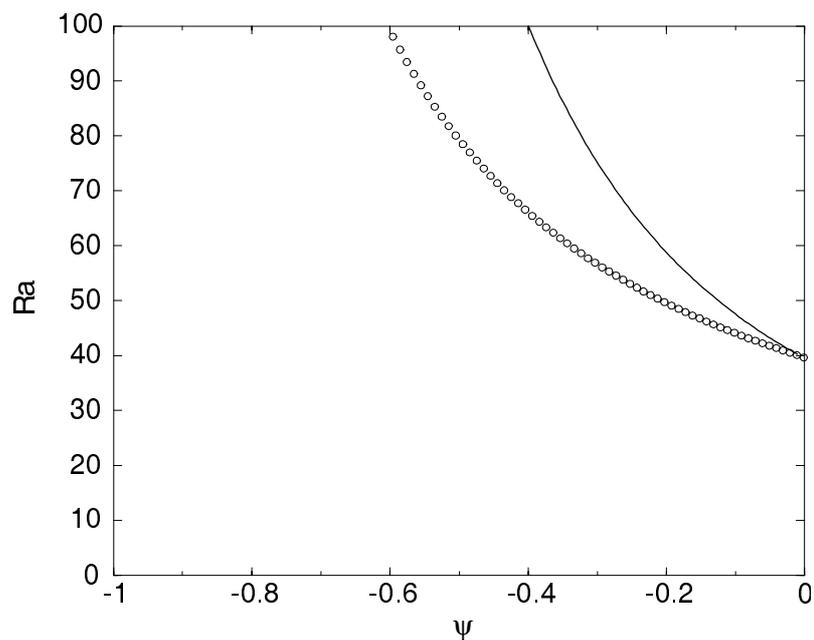


FIG. 2.27: Nombre de Rayleigh en fonction de ψ pour $Q = 0.1$. Seuil absolu (trait plein) et seuil critique ($\circ\circ$).

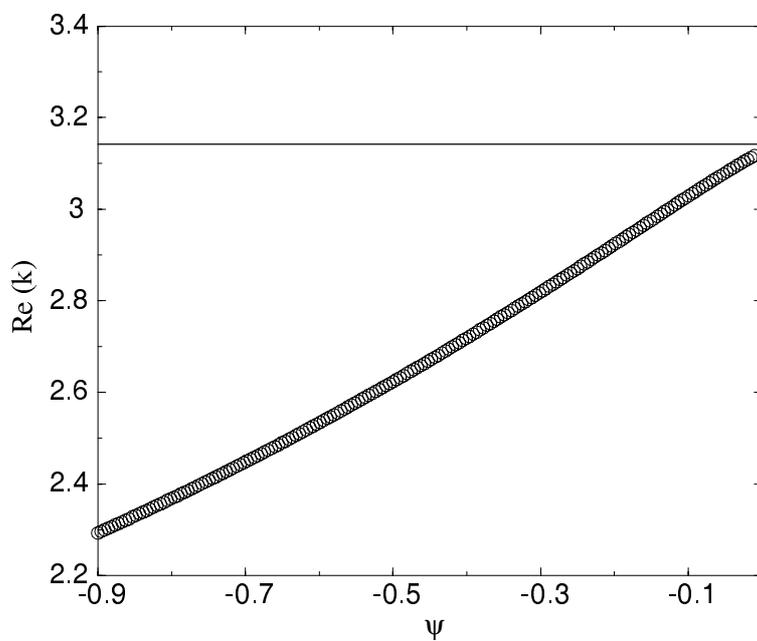


FIG. 2.28: Partie réelle du nombre d'ondes en fonction de ψ pour $Q = 0.1$. Nombre d'onde absolu ($\circ\circ\circ$) et nombre d'onde au seuil critique (trait plein).

tions aux limites de parois perméables peut être faite pour modéliser un problème linéaire lorsque le rapport de séparation est tel que $\psi < \psi_{pc}$.

On compare aussi les caractéristiques linéaires du système (fréquence, nombre d'onde et seuil d'instabilité) au seuil critique et au seuil absolu, pour un rapport de séparation inférieur au point de codimension deux. Les figures suivantes (2.26, 2.27 et 2.28) présentent la dépendance selon ψ à débit fixé des différentes grandeurs situées ci-dessus. La fréquence absolue est supérieure à la fréquence critique pour un rapport de séparation fixé. Le nombre de Rayleigh absolu est supérieur au seuil critique et le nombre d'onde absolu n'est plus constant contrairement au nombre d'onde critique.

b) $\psi > \psi_{pc}$

Au seuil absolu, comme dans le cas des mélanges binaires où $\psi < \psi_{pc}$, le système sélectionne les ondes progressives se propageant dans la direction de l'écoulement. De même, on trace les seuils absolus sur les figures (2.29, 2.30) dans les plans des paramètres (Ra, Q) et (Ra, ψ) . Lorsque ψ augmente, le nombre de Rayleigh absolu

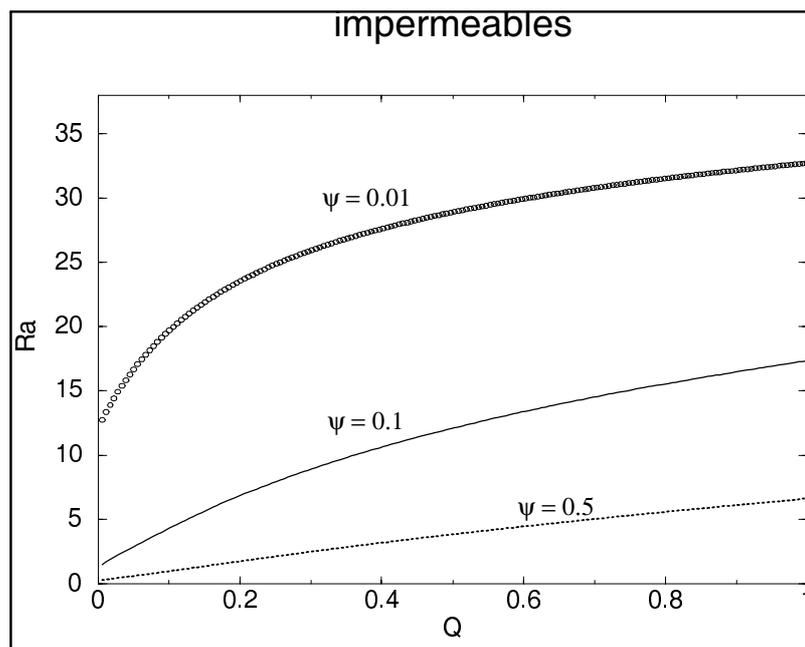


FIG. 2.29: Dépendance du nombre de Rayleigh absolu Ra^A en fonction du débit Q pour différentes valeurs du rapport de séparation (cercles : $\psi = 0.01$), (trait : $\psi = 0.1$) et (pointillés : $\psi = 0.5$).

diminue pour un débit fixé. **Dans le cas où $\psi > \psi_{pc}$, l'écoulement crée une région d'instabilités convectives comme dans le cas des fluides purs ($\psi = 0$) et d'autres systèmes physiques [61].**

De plus, on remarque sur la figure (2.31) que le seuil absolu tend vers celui

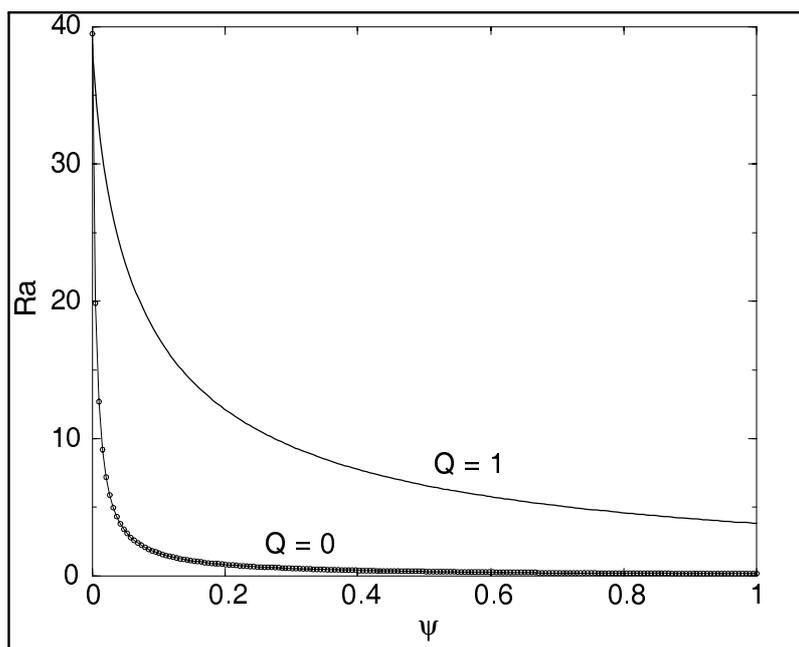


FIG. 2.30: Seuil absolu en fonction du rapport de séparation pour des valeurs de débit (trait $Q = 1$) et (cercles $Q = 0$).

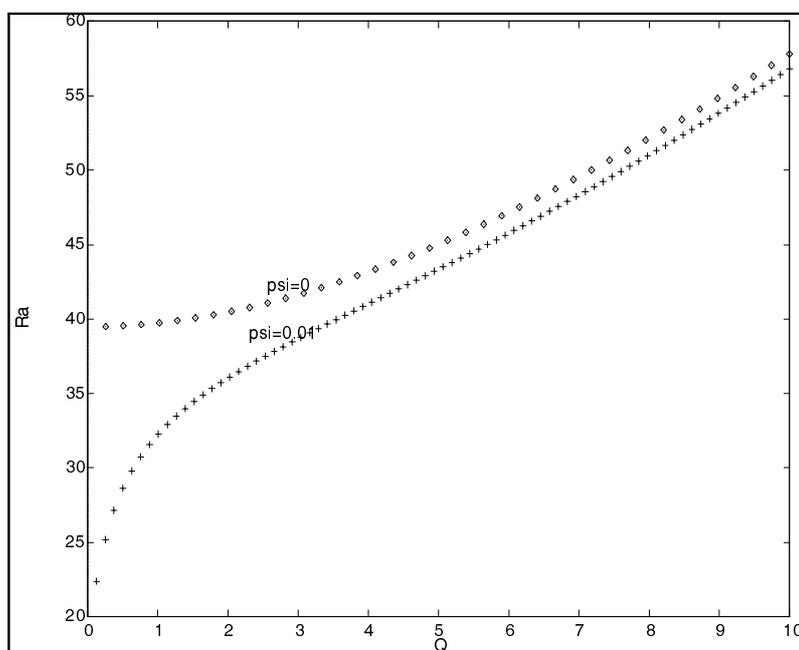


FIG. 2.31: Nombre de Rayleigh Ra absolu en fonction du débit Q , pour un mélange tel que $\psi = 0.01$ et pour un fluide pur $\psi = 0$. A haut débit, l'effet Soret disparaît.

des corps purs ($\psi = 0$) quand le débit devient très grand ; l'effet Soret est alors négligeable. Ce résultat est obtenu en milieu fluide par Jung et al [46] pour les seuils critiques qui dépendent du nombre de Reynolds ; lorsque celui-ci augmente, le seuil s'approche du nombre de Rayleigh critique d'un fluide pur $R_c(Re, \psi = 0)$.

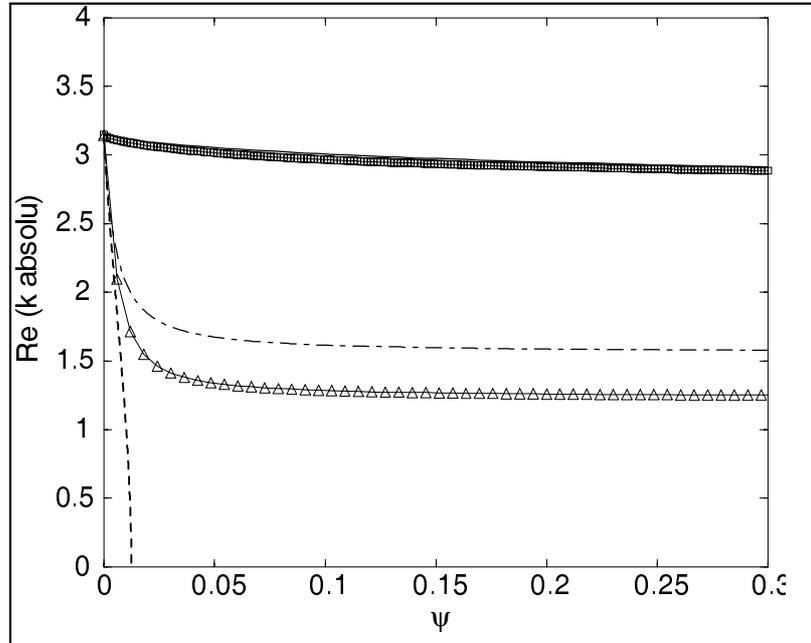


FIG. 2.32: Partie réelle du nombre d'onde absolu en fonction de ψ avec en (\square) ; $Q=1$, ligne discontinue ; ($Q=0.01$) et (triangles) ; $Q=0.005$. La ligne pointillée correspond au nombre d'onde critique.

Nous avons représenté sur la figure (2.32) le nombre d'onde critique k_c au seuil d'instabilité convective (ligne pointillée) ainsi que la partie réelle du nombre d'onde au seuil d'instabilité absolue pour différents débits. Nous avons montré par une étude de stabilité linéaire temporelle, pour $\psi > \psi_{pc}$, que le nombre d'onde k_c décroît fortement lorsque ψ augmente, pour finir par s'annuler pour $\psi \succeq \psi_0$. En régime d'instabilité absolue, le comportement du nombre d'onde est tout à fait différent. Pour des petites valeurs de ψ , la partie réelle du nombre d'onde subit une décroissance d'autant moins importante que le débit est élevé. Cette décroissance s'estompe pour des valeurs de ψ un peu plus grandes et la partie réelle du nombre d'onde tend vers une constante.

Ce résultat est une originalité du point de vue de la formation des structures. En effet, là où la théorie temporelle de stabilité prévoit absence de structuration de la convection, la théorie spatio-temporelle prédit une organisation en rouleaux transversaux oscillant globalement avec la même fréquence.

2.2.5 Comparaison avec les prévisions de l'équation de Ginzburg-Landau linéaire

Le comportement dynamique des structures au seuil peut être décrit phénoménologiquement sous une forme très générale à l'aide de deux équations couplées non linéairement de type Ginzburg-Landau. Ces équations rendent compte de la modulation spatio-temporelle lente des amplitudes complexes $A(x, t)$ des ondes. Dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à l'étude de stabilité linéaire, c'est pourquoi dans cette section on ne considère que la *partie linéaire* de cette équation, dite équation d'amplitude. Aux chapitres suivants, une étude de dynamique non linéaire au voisinage du seuil sera réalisée à l'aide de la détermination complète de l'équation d'amplitude dans laquelle figurent les termes non linéaires.

Les termes linéaires de l'équation d'amplitude ont été calculés à partir de l'équation de dispersion. Si on écrit l'équation de Ginzburg-Landau complexe linéarisée sous la forme suivante, on peut facilement en déduire ses termes linéaires :

$$\tau_0 \left(\frac{\partial A}{\partial t} + V_g \frac{\partial A}{\partial x} \right) = \varepsilon(1 + ic_0)A + \xi_0^2(1 + i\beta) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} . \quad (2.41)$$

Cette équation admet dans la plus grande généralité des coefficients complexes. C'est le cas lorsque $\psi < \psi_{pc}$, en revanche les coefficients sont réels pour $\psi > \psi_{pc}$. Chacun des termes de l'équation (2.41) reflète une propriété physique du système. L'équation contient un terme instationnaire $\left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)$, un terme d'advection $\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)$ à la vitesse de groupe V_g , un terme d'instabilité linéaire (εA) , un terme diffusif $\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right)$ et un terme dispersif $\left(i\beta \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right)$.

a) cas $\psi < \psi_{pc}$

On reprend l'expression de l'équation de dispersion dans le cas des parois imperméables (2.13). Le calcul des termes linéaires est classique et immédiat, ainsi on

trouve :

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= \frac{1}{R_c \left[\frac{\partial \omega_i}{\partial Ra} \right]_c} = \frac{1}{\pi^2} , \\
V_g^\pm &= \left[\frac{\partial \omega_r}{\partial k} \right]_c = Q \pm \frac{\Omega_c}{\pi} , \\
\varepsilon &= \frac{Ra - R_c}{R_c} , \\
c_0 &= R_c \tau_0 \left[\frac{\partial \omega_r}{\partial Ra} \right]_c = \frac{\Omega_c}{2\pi^2} , \\
\xi_0^2 &= \frac{1}{2R_c} \left[\frac{\partial^2 Ra}{\partial k^2} \right]_c = \frac{1}{\pi^2} , \\
\beta &= - \left[\frac{\tau_0}{2\xi_0^2} \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k^2} \right]_c = \frac{\Omega_c}{2\pi^2} ,
\end{aligned}$$

et la fréquence critique du système sans débit est $\Omega_c^2 \simeq -\frac{32\pi^2\psi}{1+\psi}$.

L'équation d'amplitude linéarisée peut être résolue de façon exacte en cherchant la réponse à une condition initiale en $t = 0$ prise sous la forme d'une distribution de Dirac ($\delta(x)$).

On écrit différemment l'équation d'amplitude linéarisée afin de simplifier l'écriture en multipliant par π^2 et en posant $\mu_r = \varepsilon\pi^2$, $\mu_i = \varepsilon\frac{\Omega_c}{2}$ avec $\tau_0 = \xi_0^2 = 1$:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + V_g^- \frac{\partial A}{\partial x} = (\mu_r + i\mu_i)A + (1 + i\beta) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} . \quad (2.42)$$

La solution de (2.42) est la suivante :

$$A(x, t) = [4\pi(1 + \beta)t]^{-\frac{1}{2}} \exp \left[(\mu_r + i\mu_i)t - \frac{(x - V_g^- t)^2}{4(1 + i\beta)t} \right] .$$

Cette solution a un taux de croissance spatiale exponentielle si : $4\mu_r(1 + \beta^2) > \left(\frac{x}{t} - V_g^-\right)^2$. Dans le repère se déplaçant à la vitesse $\frac{x}{t} = V_g^-$, le taux d'accroissement maximum se réduit à la partie réelle de l'accroissement linéaire μ_r .

Lorsque $t \rightarrow \infty$, c'est à dire $\frac{x}{t} = 0$, on obtient le seuil absolu :

$$\begin{aligned}
\mu_r^{A\pm} &= \frac{V_g^{\pm 2}}{4(1 + \beta^2)} \\
k_0^\pm &= \frac{-V_g^\pm(i + \beta)}{2(1 + \beta^2)} \\
\omega_0^\pm &= -\beta\mu_r^{A\pm} = \frac{-V_g^{\pm 2}\beta}{4(1 + \beta^2)} .
\end{aligned}$$

Le seuil absolu ainsi que le nombre d'onde et la fréquence absolus sont donnés en

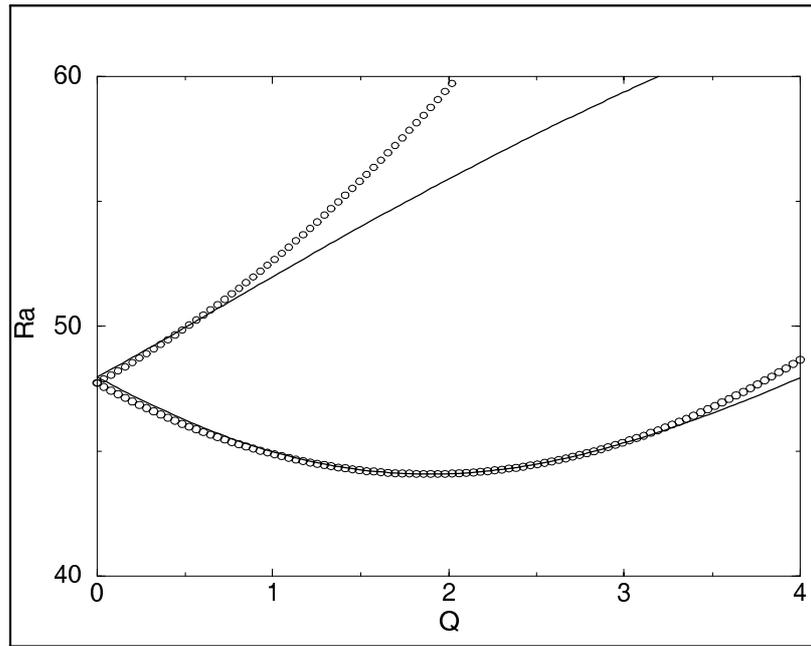


FIG. 2.33: Comparaison des seuils absolus issus de l'équation de dispersion (trait plein) et de l'équation d'amplitude (cercles) pour $\psi = -0.1$.

fonction des paramètres de l'équation d'amplitude linéarisée. On peut comparer ces valeurs approchées à la solution exacte (2.37). Comme on peut le remarquer à l'aide du graphe (2.33), **les deux courbes correspondant au mode S^- coïncident et l'approximation de l'équation d'amplitude est donc valable près du seuil**. Lorsque la vitesse de groupe s'annule, le seuil absolu est confondu avec le seuil d'instabilité critique. L'état de base $A = 0$ est linéairement convectivement instable si le paramètre de contrôle μ reste inférieur au seuil absolu μ_A tout en étant positif (régime instable). Les perturbations se propagent vers l'aval loin de la source impulsionnelle, tandis que pour un écoulement linéairement absolument instable, les perturbations se répandent à la fois vers l'amont et vers l'aval, envahissant de ce fait tout le domaine d'étude. Pour ce type de régime, le paramètre μ représentant l'écart au seuil critique est toujours supérieur au seuil absolu μ^A . Cette distinction est nécessaire dans l'étude d'instabilité lorsque l'invariance Galiléenne est rompue.

– **b) cas $\psi > \psi_{pc}$**

On écrit l'expression de l'équation de Ginzburg-Landau linéaire qui admet des coefficients réels car la bifurcation est stationnaire lorsque le terme d'advection s'annule :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + Q \frac{\partial A}{\partial x} = \mu A + a \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad . \quad (2.43)$$

◇ **Cas des parois imperméables**

$$\text{On pose : } F = \frac{\Lambda k_c^2 [8\psi(k_c^2 + \pi^2) + \Lambda(1 + \psi)k_c^2\pi^2]}{8\psi((\Lambda + 1)k_c^2 + \pi^2)}$$

$$\mu = \frac{Ra - R_c}{R_c} F$$

$$a = \frac{1}{2} \left[\frac{4(3k_c^2 + \pi^2)}{(k_c^2 + \pi^2)^2} - \frac{(16\psi/\pi^2) + 2\Lambda(1 + \psi)}{(8\psi/\pi^2)(k_c^2 + \pi^2) + \Lambda(1 + \psi)k_c^2} \right] F$$

◇ Cas des parois perméables

$$\text{On pose : } \zeta = \psi + \Lambda\psi + \Lambda$$

$$\mu = \left(\frac{2\pi^2\Lambda\zeta}{\psi + \Lambda\zeta} \right) \left(\frac{Ra - R_c}{R_c} \right)$$

$$a = \frac{2\zeta\Lambda}{\psi + \Lambda\zeta}$$

Dans ce cas, on note que le seuil absolu est donné par $\mu^A = \frac{Q^2}{4a}$ et le nombre d'onde absolu associé est imaginaire pur : $k^A = -\frac{iQ\tau_0}{2a}$.

Le fait que la correction du nombre d'onde donnée par le modèle de Ginzburg-Landau est imaginaire pur signifie que la partie réelle du nombre d'onde total est égale à sa valeur au seuil convectif k_c . Ceci n'est valable, en vue des résultats issus du modèle originel et qui sont illustrés sur la figure (2.32) que pour des valeurs de ψ petites devant ψ_0 . **Pour les autres valeurs de ψ , le modèle de Ginzburg-Landau est loin d'être satisfaisant et particulièrement pour des valeurs modérées ou élevées du débit.**

2.2.6 Phénomène d'amplification du bruit en régime convectif

Nous avons vu qu'en régime absolument instable, le système acquiert sa propre dynamique en sélectionnant une structure oscillant avec une fréquence bien déterminée. En revanche, à des temps grands le système retourne à l'état de conduction lorsque l'instabilité est de nature convective.

L'objet de ce paragraphe est d'étudier l'influence d'une perturbation infinitésimale **permanente** à l'entrée du milieu sur la dynamique des structures convectives dans la région convectivement instable. Cette perturbation à l'entrée du milieu pourrait être générée par la présence du bruit inhérent à toute expérience dans un laboratoire [69].

L'amplitude $A(x, t)$ peut être développée de la façon suivante où le mode de Fourier $A_0(\omega)$ de l'amplitude du bruit d'entrée $A_0(t) = A(x = 0, t)$ croît en aval :

$$A(x, t) = \int A_0(\omega) \exp(ik(\omega)x - i\omega t) d\omega \quad ,$$

avec la fréquence $\omega \in \mathbb{R}$ et le nombre d'onde $k \in \mathbb{C}$. L'amplification spatiale est décrite par la partie imaginaire de k . A partir de l'équation de Ginzburg-Landau linéaire (2.42), on peut en déduire la relation de dispersion reliant k à ω :

$$k(\omega) = \frac{-iV_g \pm \sqrt{-V_g^2 + 4(1+i\beta)((\mu_r + i\mu_i) + i\omega)}}{2(1+i\beta)} .$$

On sépare les parties réelle et imaginaire du nombre d'onde complexe $k(\omega)$:

$$V_g k_i - k_r^2 + k_i^2 + 2\beta k_r k_i + \mu_r = 0 \quad (2.44)$$

$$-V_g k_r - \beta k_r^2 + \beta k_i^2 - 2k_r k_i + \omega + \mu_i = 0 . \quad (2.45)$$

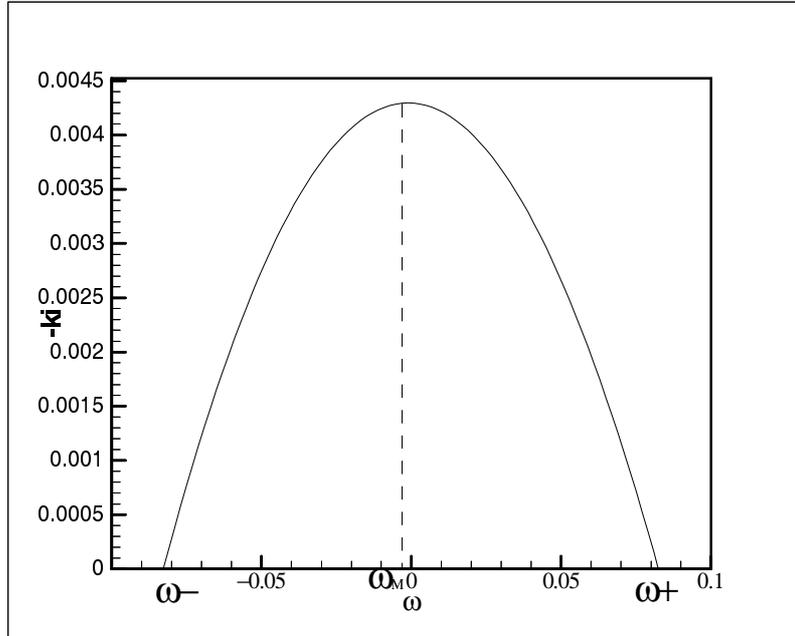


FIG. 2.34: Taux de croissance spatial $-k_i$ en fonction de la fréquence ω obtenu à partir de l'équation d'amplitude avec $\psi = -0.01$ et $Q = 0.1$. Le nombre de Rayleigh est $Ra = 40.2$, il est supérieur au nombre de Rayleigh critique $R_c = 40.076$ et inférieur au seuil absolu $Ra^A = 40.29$.

On résout ce système d'équations non linéaires à l'aide de l'algorithme de Gauss-Seidel, et on trace ainsi le taux d'accroissement spatial et le nombre d'onde en fonction de la fréquence (figures (2.34, 2.35)).

Il y a amplification dans la zone où $-k_i > 0$, ce qui correspond à une fréquence comprise entre deux valeurs ω_+ et ω_- :

$$\omega_{\pm} = \beta\mu_r - \mu_i \pm V_g \sqrt{\mu_r} .$$

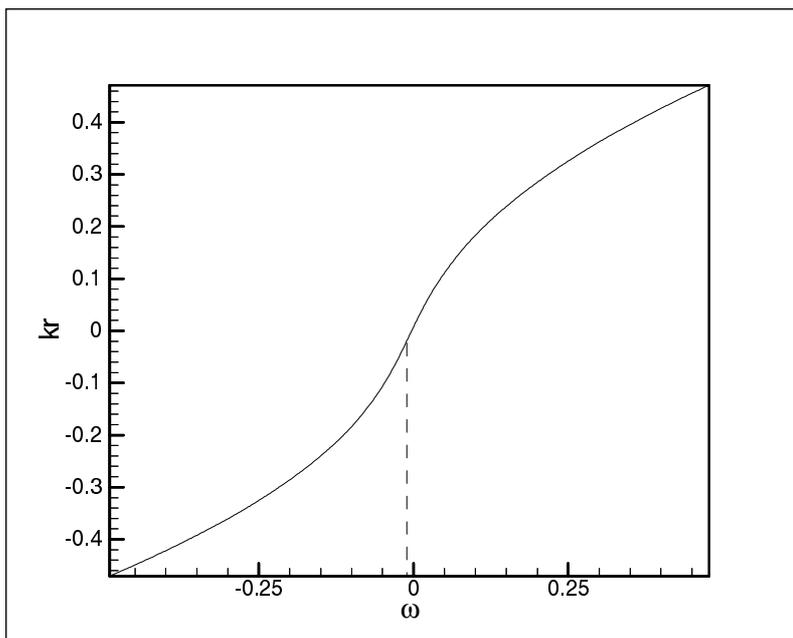


FIG. 2.35: Nombre d'onde k_r en fonction de la fréquence ω obtenu à partir de l'équation d'amplitude avec $\psi = -0.01$ et $Q = 0.1$. Le nombre de Rayleigh est $Ra = 40.2$, il est supérieur au nombre de Rayleigh critique $R_c = 40.076$ et inférieur au seuil absolu $Ra^A = 40.29$.

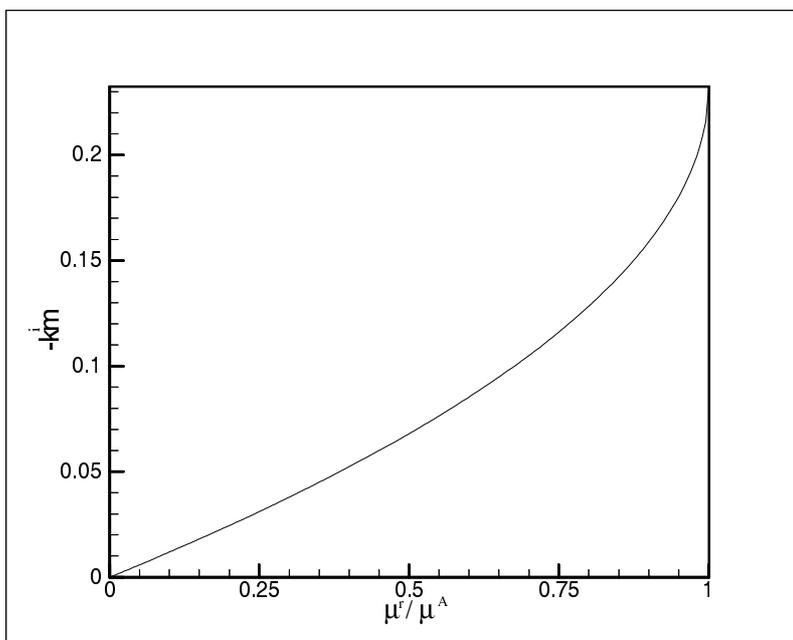


FIG. 2.36: Taux de croissance maximal en fonction du paramètre de contrôle μ normalisé par la valeur de μ au seuil absolu (μ^A) pour $\psi = -0.01$ et $Q = 0.1$.

La fréquence ω_M correspondant au taux d'accroissement spatial le plus grand est trouvée en calculant $\frac{\partial k^i}{\partial \omega} = 0$. Le taux de croissance spatial maximal est obtenu et représenté sur la figure (2.36) en fonction du paramètre de contrôle μ_r , supposé inférieur au seuil absolu : $\mu^A = \frac{V_g^2}{4(1 + \beta)}$.

$$\begin{aligned}\omega_M &= -\mu_i - \beta\mu_r \\ k_m^i &= \frac{V_g(1 - \sqrt{(1 - \mu_r/\mu^A)})}{2(1 + \beta^2)}\end{aligned}$$

Ce taux maximum d'accroissement spatial, valable uniquement en zone convectivement instable, i.e. pour $R_c < Ra < Ra^A$, est tracé en fonction du paramètre de contrôle μ^r . La caractérisation de cette bande de fréquence correspondant à une amplification des structures macroscopiques par le bruit d'entrée permet notamment la détermination du coefficient de Soret.

2.2.7 Spectre de fréquence et détermination du coefficient de Soret

L'expérience montre une transition caractéristique si l'on s'intéresse au spectre de fréquence. En effet, **en régime convectivement instable, le spectre de fréquence est plutôt large. Si on augmente peu à peu le paramètre de contrôle Ra , à débit constant, c'est à dire que l'on s'approche du seuil absolu, le signal demeure périodique et uniforme, mais le spectre de fréquence rétrécit jusqu'à devenir un pic. Ce phénomène intervient exactement au seuil absolu et reste valable au-dessus de ce seuil. Cette transition dans la forme du spectre de fréquence permet donc de déterminer expérimentalement la valeur de la fréquence absolue.** Babcock et al. [1] montrent dans l'expérience de Taylor-Couette ouvert forcé par un écoulement axial, qu'il existe une très bonne concordance entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques. Ainsi, les points de mesure expérimentaux correspondant à la transition d'un spectre de fréquence large (régime convectivement instable) à un spectre étroit (régime absolument instable) coïncident avec le seuil absolu calculé numériquement.

De ce fait, il est possible d'imaginer une expérience similaire dans notre système, en plaçant des thermocouples dans la cellule poreuse expérimentale. Le relevé des points expérimentaux peut être confronté à l'une des courbes théoriques (2.21, 2.30) exposant le seuil absolu Ra^A en fonction du rapport de séparation ψ . La connaissance de ce dernier est par conséquent immédiate.

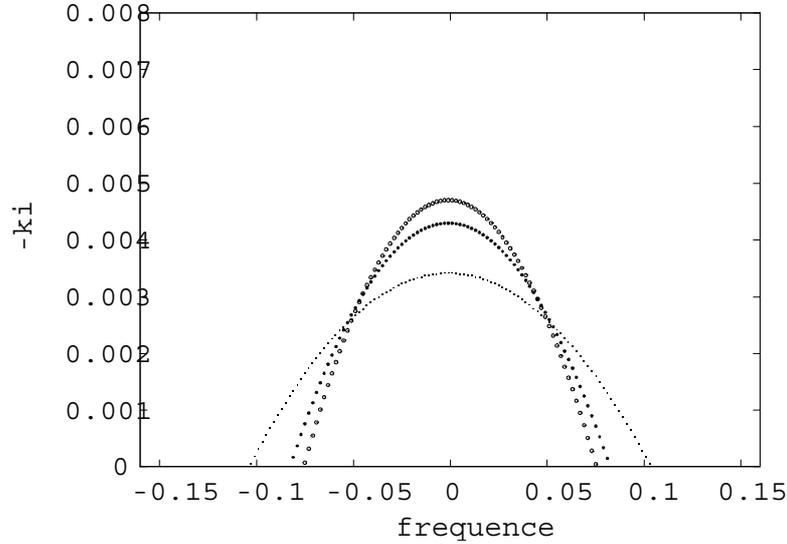


FIG. 2.37: Taux d'amplification spatial ($-k_i$) en fonction de la fréquence ω pour différents débits $Q = 0.1$ (...), $Q = 0.17$ (●●●) et $Q = 0.3$ (○○○) et $\psi = -0.01$.

2.3 Conclusion

L'étude linéaire de stabilité temporelle montre que la nature de la bifurcation dépend du rapport de séparation ψ . Il existe un point de codimension deux ψ_{pc} au-delà duquel la bifurcation est stationnaire si le débit est nul et en-deçà duquel la bifurcation est une bifurcation de Hopf. Dans les deux cas, le taux de croissance temporelle est le même que dans un système forcé par un écoulement horizontal. Lorsque l'on confronte deux types de conditions aux limites (parois horizontales perméables et imperméables à la matière), les caractéristiques linéaires du système au seuil sont presque quantitativement identiques pour $\psi < \psi_{pc}$. Par contre, de nombreuses différences dans les nombres d'ondes, fréquences et nombre de Rayleigh critiques apparaissent pour $\psi > \psi_{pc}$.

La nature convective ou absolue des instabilités est donnée par l'évaluation de la réponse linéaire du système à des perturbations localisées. En régime convectif, le système se comporte comme un amplificateur de bruit et l'instabilité est temporaire. Dans le cas du régime absolu, le système est assimilé à un oscillateur auto-entretenu, possédant une dynamique intrinsèque à une fréquence propre bien définie. Ce pic de fréquence est la signature d'une instabilité absolue. En régime convectif, ce pic s'élargit jusqu'à l'apparition d'un spectre large de fréquence. Ce changement du spectre de fréquence est proposé comme critère pour déterminer ψ .

Au seuil absolu, l'étude linéaire de stabilité spatio-temporelle montre que le sys-

tème sélectionne une direction de propagation des ondes progressives. Celles-ci se propagent sous la forme de rouleaux transversaux dans la direction de l'écoulement. Les structures tridimensionnelles ne sont pas permanentes et quittent à des temps asymptotiquement grands le milieu étudié. Pour $\psi < \psi_{pc}$, le débit a pour effet de réduire la zone d'instabilités convectives et l'annule en un point où le système passe directement d'un régime stable à un régime absolument instable. En revanche, pour $\psi > \psi_{pc}$, le débit filtrant crée nécessairement une zone d'instabilité convective comme pour les fluides purs.

Le nombre d'onde se comporte différemment suivant la nature de l'instabilité. En régime convectif, il décroît au fur et à mesure que ψ augmente, pour finir par s'annuler au delà d'une certaine valeur ψ_0 de ψ . Ce comportement prédit par une équation de dispersion approchée est confirmée par une intégration numérique des équations originelles du problème. Lorsque le système devient absolument instable, le nombre d'onde est non nul, y compris dans la zone $\psi > \psi_0$.

Les prévisions de l'équation de Ginzburg-Landau linéarisée sont discutées aussi bien pour $\psi > \psi_{pc}$ que pour $\psi < \psi_{pc}$. Si ces prévisions en matière de caractéristiques de l'instabilité absolue s'avèrent convenables pour $\psi < \psi_{pc}$ et pour $\psi_{pc} < \psi \ll \psi_0$, elles cessent de l'être pour des mélanges dont le rapport de séparation ψ dépasse ψ_0 .

Chapitre 3

Dynamique faiblement non linéaire pour $\psi < \psi_{pc}$

L'analyse de stabilité linéaire menée au chapitre précédent a permis de déterminer le seuil d'apparition des structures convectives ainsi que le nombre d'onde et la fréquence associés. Au-delà de ce seuil où se produit la première bifurcation, le temps caractéristique de certaines perturbations diverge indiquant que certains modes convectifs s'amplifient linéairement. La prise en compte des termes non linéaires dans les équations régissant le problème devient nécessaire ; naît alors une nouvelle dynamique décrite correctement par une équation (ou plusieurs) appelée la forme normale de la bifurcation ou l'équation d'amplitude. Une technique très utilisée en pratique pour le calcul de ces équations d'amplitude consiste à introduire dans le problème des développements à échelles multiples. Pour la clarté de ce mémoire, nous avons rassemblé dans l'annexe A les calculs des équations d'amplitude relatives aux différents cas de figure : $\psi < \psi_{pc}$ et $\psi > \psi_{pc}$ pour des parois perméables et imperméables.

3.1 Instabilités primaires et non linéarités

L'étude linéaire de stabilité spatio-temporelle a montré que seuls les modes bidimensionnels sont amplifiés localement ; les autres modes sont convectés vers l'aval et finissent par quitter le milieu. Par conséquent, l'étude qui suit se limitera à décrire la dynamique non linéaire des seuls modes bidimensionnels.

3.1.1 Sélection non linéaire en régime d'instabilité absolue

Dans le but d'étudier la compétition non linéaire entre les deux modes bidimensionnels de fréquence respective ω^- et ω^+ (voir chapitre précédent), nous avons mené une étude faiblement non linéaire au voisinage de la première bifurcation.

Cette étude est détaillée dans l'annexe A. Si on note A et B les amplitudes respectives des modes de fréquences ω^- et ω^+ , on aboutit à deux équations d'amplitude couplées de type Ginzburg-Landau complexe :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + V_g^- \frac{\partial A}{\partial x} = (\mu_r + i\mu_i)A + (1 + i\beta) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - (1 + i\alpha)A|A|^2 - (\gamma + i\delta)A|B|^2 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + V_g^+ \frac{\partial B}{\partial x} = (\mu_r + i\mu_i)B + (1 + i\beta) \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - (1 + i\alpha)B|B|^2 - (\gamma + i\delta)B|A|^2 \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} V_g^- &= Q - \frac{\Omega_c}{\pi} \text{ et } V_g^+ = Q + \frac{\Omega_c}{\pi} \\ \mu_r &= \frac{Ra - R_c}{R_c} \pi^2, \quad \mu_i = \frac{Ra - R_c}{R_c} \frac{\Omega_c}{2} \\ \beta &= \frac{\Omega_c}{2\pi^2} \\ \alpha &= -\frac{(1 + \psi)\Omega_c}{16\psi} \\ \gamma &= \frac{1}{\Lambda}, \quad \delta = \Omega_c \left(\frac{1 + \psi}{16\psi} - \frac{2}{3\Lambda\pi^2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{et } \Omega_c^2 \simeq -\frac{32\pi^2\psi}{1 + \psi} .$$

β mesure la dispersion de l'onde et α mesure le couplage entre l'amplitude et la fréquence de l'onde. On note aussi que **les ondes stationnaires ne peuvent exister** du fait que le débit est non nul, entraînant des valeurs différentes (et non égales et opposées comme dans le cas sans débit) des vitesses de groupe V_g^- et V_g^+ . On note aussi que **la bifurcation est supercritique** du fait que le coefficient non linéaire est toujours positif.

Nous avons vu que lorsque le débit est nul, les deux modes A et B deviennent simultanément absolument instables. Par contre, en présence du débit, les deux modes apparaissent à des seuils absolus différents. Une analyse non linéaire est nécessaire pour connaître la sélection des modes et leur stabilité en régime absolument instable.

Les solutions homogènes du système (3.1, 3.2) autres que la solution triviale ($A = 0, B = 0$), sont de deux types :

- celles qui correspondent à des ondes progressives d'amplitudes :

$$\begin{aligned} A^s &= \sqrt{\mu_r} \exp [i(\mu_i - \alpha\mu_r)t] \quad \text{et} \quad B^s = 0 \quad , \\ A^s &= 0 \quad \text{et} \quad B^s = \sqrt{\mu_r} \exp [i(\mu_i - \alpha\mu_r)t] \end{aligned}$$

- celles qui correspondent à un système de modes mixtes d'amplitude :

$$A^m = B^m = \sqrt{\frac{\mu_r}{1 + \gamma}} \exp \left[i \left(\mu_i - \frac{\alpha + \delta}{1 + \gamma} \mu_r \right) t \right] .$$

L'analyse spatio-temporelle a montré que le mode trivial $(A, B) = (0, 0)$, qui correspond à l'état conducteur, devient absolument instable au profit du mode A oscillant avec la fréquence ω^- . Il en découle que pour $Ra > Ra^A$, une structure convective pleinement développée sous forme d'onde progressive d'amplitude A , envahit en premier le domaine physique. Par conséquent, l'étude de stabilité secondaire dans le domaine absolument instable concerne en premier lieu le mode $(A^s \neq 0, B^s = 0)$. L'étude de stabilité de $(A^s, 0)$ par rapport au mode mixte (A^m, B^m) est réalisée en introduisant des perturbations homogènes $a(t)$ et $b(t)$. On pose donc :

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{\mu_r} + a) \exp [i(\mu_r - \alpha\mu_r)t] \\ B &= 0 + b \quad . \end{aligned}$$

Il vient en reportant dans les équations (3.1, 3.2) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= -\mu_r(1 + i\alpha)(a + \bar{a}) \\ \frac{\partial b}{\partial t} &= \mu_r(1 - i\delta - \gamma)b \quad . \end{aligned}$$

Le taux d'accroissement temporel de la perturbation b est $\sigma_b = \mu_r(1 - \gamma) = \left(1 - \frac{1}{\Lambda}\right)\mu_r$. Il est négatif, indiquant que les ondes progressives $(A^s, 0)$ sont stables par rapport à des perturbations correspondant au mode $(0, B)$. Le deuxième seuil absolu correspondant au **mode** B oscillant avec la fréquence ω^+ **n'a pas à avoir lieu** puisqu'il ne tient pas compte de l'interaction non linéaire entre les deux modes A et B .

En ce qui concerne les perturbations de A , on est amené à calculer les valeurs propres associées à a et \bar{a} . Elles s'écrivent $\sigma_1 = 0$ et $\sigma_2 = -2\mu_r$. L'existence du mode marginal ($\sigma_1 = 0$) est liée à l'invariance de l'équation d'amplitude (3.1) par la transformation $(A, 0) \rightarrow (Ae^{i\theta}, 0)$. Cette invariance indique que les instabilités qui se manifestent en premier sont des instabilités liées à la phase. Ce sera l'objet de la section (3.2).

3.1.2 Intégration numérique de l'équation de Ginzburg-Landau complexe

Conditions aux limites périodiques

Pour visualiser la transition du régime d'instabilité convective au régime d'instabilité absolue, on a intégré numériquement, au voisinage du seuil, l'équation d'amplitude complexe (3.1) avec $B = 0$. Les conditions aux limites adoptées sont des conditions aux limites périodiques, qui n'ont aucun sens physique pour l'écoulement. Le but de cette partie est de décrire l'évolution spatio-temporelle de perturbations

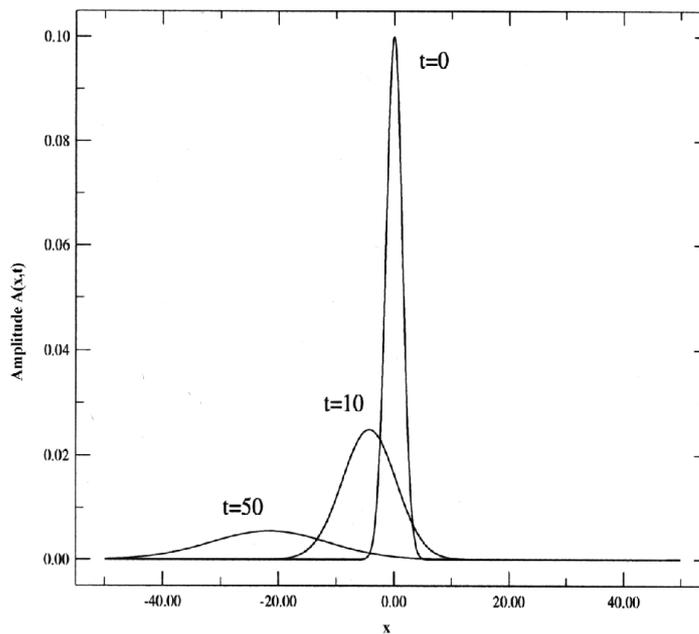


FIG. 3.1: Evolution temporelle en fonction de x de l'enveloppe en régime stable; le système relaxe vers son état initial de conduction pure.

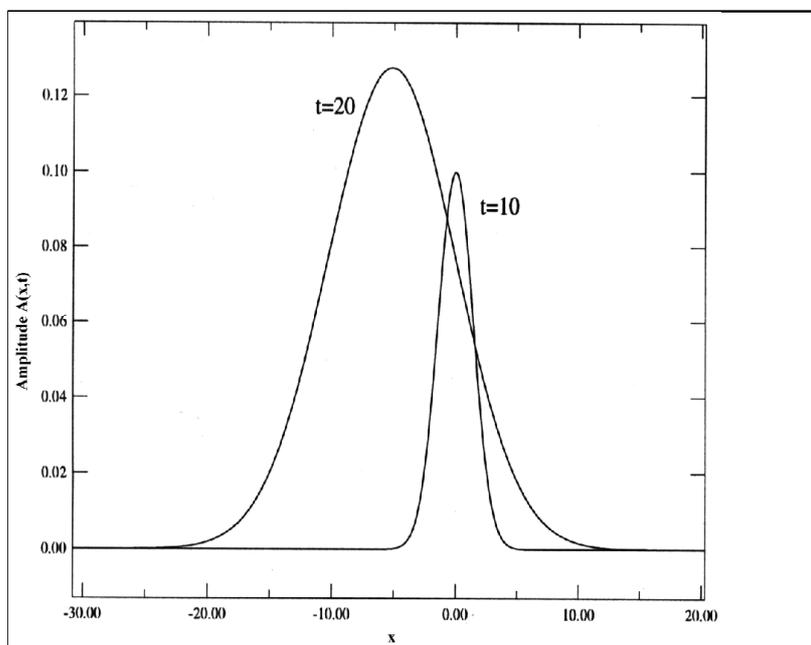


FIG. 3.2: Evolution temporelle en fonction de x de l'enveloppe en régime convectif; le système retourne vers son état de base dans le repère du laboratoire.

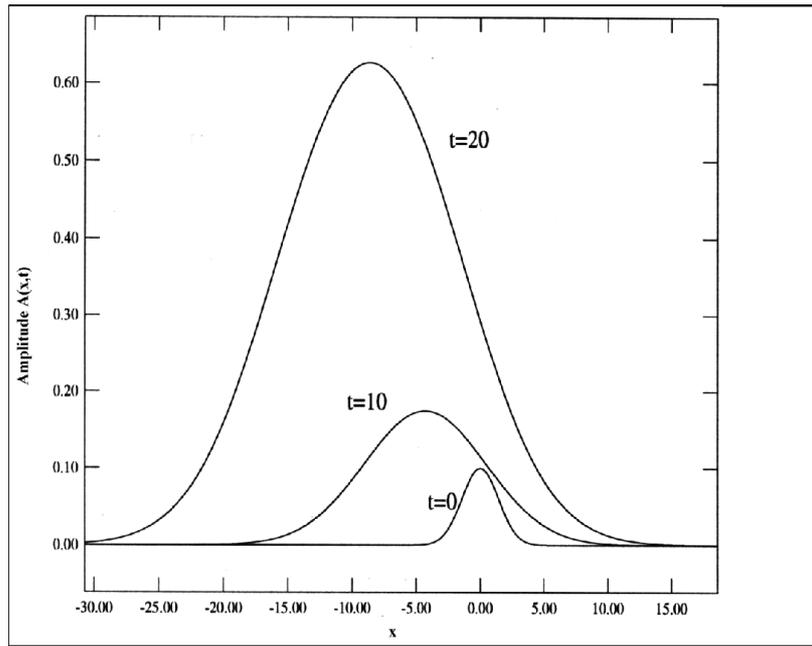


FIG. 3.3: Evolution temporelle en fonction de x de l'enveloppe en régime absolu ; les perturbations croissent sur place et envahissent le domaine étudié.

initiales infinitésimales. On a vu au chapitre précédent que le système répond à ces perturbations arbitraires de deux façons différentes en régime linéairement instable. Ainsi cette partie constitue un exemple d'illustration des deux régimes instables : régime convectif et régime absolu. La perturbation initiale localisée en espace est prise sous la forme d'une Gaussienne étroite de très faible amplitude en un point du milieu, elle correspond à une modélisation d'une distribution de Dirac. Le comportement spatial de l'enveloppe est représenté à différents temps sur les figures (3.1, 3.2, 3.3). Sur ces différentes figures, un paquet d'ondes se développe, se déplaçant dans la direction x et dans le sens contraire à celui de l'écoulement (dépendant du signe de la vitesse de groupe). La première figure (3.1) correspond au régime stable dans lequel toute perturbation infinitésimale décroît. En régime convectivement instable, figure (3.2), un paquet d'ondes instable naît et se propage en progressant dans la direction opposée à celle du débit. L'écoulement se comporte comme un amplificateur spatial des perturbations localisées. La perturbation locale s'accroît temporellement mais est advectée par l'écoulement. A un endroit fixe, la perturbation décroît et le système retourne vers son état de repos initial, même lorsque ($Ra > R_c$). Dans le repère se déplaçant à la vitesse de groupe, la perturbation est amplifiée et est élargie (figure 3.3). Lorsque ($Ra > Ra^A$), le système est absolument instable, le paquet d'ondes se propage à la fois vers l'aval et vers l'amont, les vitesses de front de l'aile lente et de l'aile rapide se meuvent dans des directions opposées. Les perturbations s'amplifient sur place près de la source impulsionnelle, et le paquet d'ondes tend à

envahir tout le domaine.

Cependant, les conditions aux limites périodiques constituent simplement une illustration des différents régimes d'instabilité. La réalité physique exige d'autres conditions aux limites.

Conditions aux limites réalistes

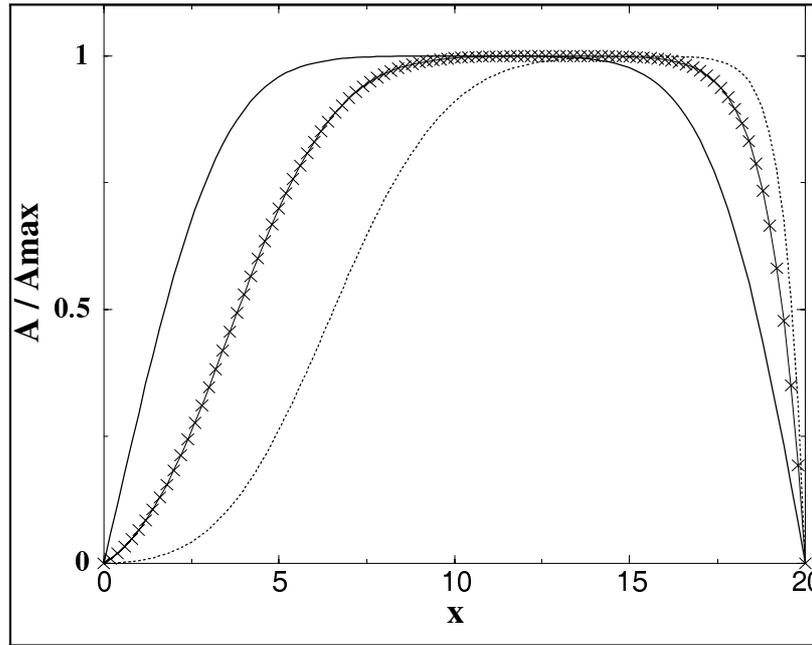


FIG. 3.4: Evolution du front en fonction du débit $Q = 2.2$ (trait plein), $Q = 3.1$ (croix) et $Q = 4.1$ (pointillés) pour $Ra = 46$ ($Ra^A = 45.2$). Modules des amplitudes $A(x)$ normalisées en fonction de x .

Comme les gradients verticaux de température et de concentration sont imposés à l'entrée et à la sortie, de sorte que l'état conductif soit retrouvé, les conditions aux limites réalistes s'écrivent : $A(0) = A(L) = 0$. Pour connaître la forme spatiale des solutions, l'équation de Ginzburg-Landau complexe est résolue à l'aide d'un schéma aux différences finies (algorithme de Crank-Nicholson) avec une résolution temporelle $\delta t = 0.03$ et une grille spatiale $\delta x = 0.2$. La longueur de la boîte est choisie arbitrairement $L = 20$. Sur la figure (3.4), le module de l'amplitude est tracé en fonction de la distance x , correspondant à la direction de l'écoulement, à un temps d'intégration suffisamment grand pour obtenir un état stable stationnaire. L'enveloppe représente la solution de l'équation d'amplitude. Tant que $Ra < Ra^A$, toutes les perturbations infinitésimales sont amorties et le système relaxe vers son état de conduction ($A = 0$). Alors que dès que le régime est absolu, les perturbations s'accroissent et envahissent le domaine d'observation, les ondes progressives sont

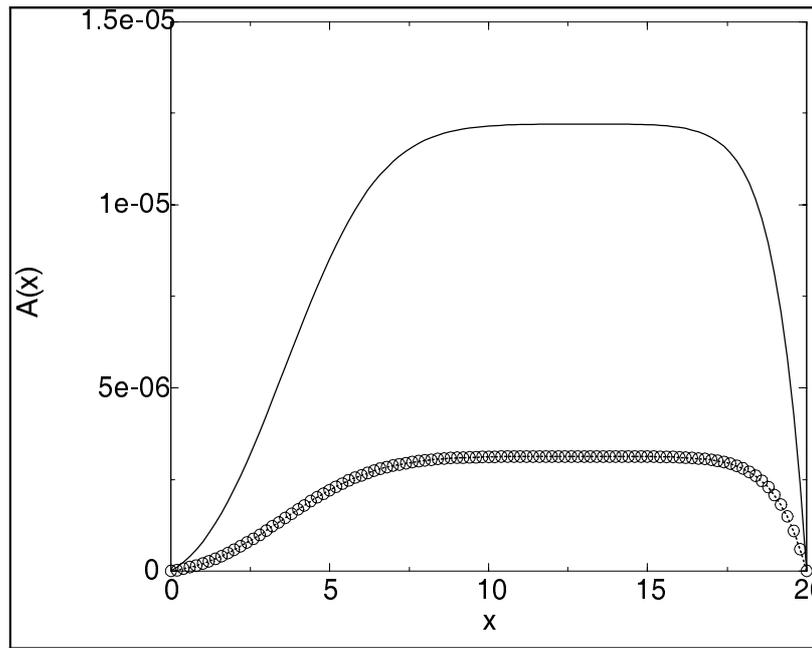


FIG. 3.5: Représentation du module de l'amplitude en fonction de x pour $\psi = 0.01$ et $Q = 1$ pour deux nombres de Rayleigh différents ; $Ra = 18$ (\circ) et $Ra = 22$ (trait plein).

formées puisque les ondes stationnaires n'existent pas tant que le débit est non nul. En régime absolument instable, le front se déplace à l'encontre de l'écoulement et est stoppé à une distance Δx de l'entrée (où il est en équilibre avec l'advection), c'est la distance nécessaire pour que la structure atteigne la moitié de son amplitude saturée finale. Sur cette figure (3.5), l'amplitude est tracée pour différents nombres de Rayleigh (supérieurs au seuil absolu) et pour un débit fixé. On voit que **la longueur d'établissement du front diminue quand le nombre de Rayleigh augmente**. Par contre, si **le nombre de Rayleigh est fixé et que le débit est augmenté**, alors le front est déplacé vers l'aval et **la distance Δx tend à s'accroître**.

3.1.3 Lois d'échelle d'établissement des modes globaux et détermination du coefficient de Soret

Lois d'échelle

L'intégration numérique de l'équation ci-dessous (3.3) a mis en évidence en régime absolument instable, un accroissement spatial sous forme de front reliant l'état de conduction à l'entrée jusqu'à un état stationnaire d'ondes progressives stables. Couairon et Chomaz ont établi une relation entre la longueur d'établissement du front Δx et la distance au seuil absolu ($Ra - Ra^A$) [24]. Ils ont également évalué la fréquence quand le système est légèrement absolument instable.

En opérant les changements de variable; $A = A'\sqrt{\alpha}$, $A = A'e^{i\mu_i t}$ et $c_3 = -1/\alpha$, l'équation prend une forme équivalente à celle traitée dans [24] :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + V_g^- \frac{\partial A}{\partial x} = \mu A + (1 + i\beta) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - (1 - ic_3)A|A|^2 \quad . \quad (3.3)$$

On cherche des solutions périodiques dans le temps de (3.3) capables de relier l'état de base $A = 0$ à l'entrée et un état d'amplitude saturée structuré sous la forme d'ondes progressives en aval infini. Cette solution est nommée **mode global non linéaire**. Ce dernier peut s'écrire sous la forme suivante :

$$A(x, t) = a(x) e^{i \int_x q'(x') dx'} e^{-i\omega t} \quad ,$$

où $a(x)$, $q'(x')$ et ω sont réels. A l'infini, $A(x)$ tend asymptotiquement vers une onde progressive solution de (3.3) écrite sous la forme : $A = a_N e^{iq'_N x - i\omega t}$. On prend a_N , q'_N et ω réels et définis par : $a_N^2 = \mu - q_N'^2$ et $\omega = V_g^- q_N + c_1 q_N'^2 - c_3 a_N^2$. La fréquence ω est considérée comme une valeur propre et est évaluée près du seuil d'instabilité absolue μ_A par une méthode de développements asymptotiques raccordés. Si on pose $\mu = \mu_A + \varepsilon$ et $\omega = \omega_A + \varepsilon\omega_1$, en supposant le paramètre ε très petit devant l'unité, cette méthode consiste à rechercher un développement asymptotique externe en ε , et une solution interne par une étude locale. Le raccordement de ces deux solutions permet de déterminer le décalage ω_1 de la fréquence globale et par conséquent la longueur d'établissement Δx . Le décalage de la fréquence est solution de l'équation suivante :

$$\alpha_1 \beta_1 = - \sinh^2 \left(\frac{\alpha_1 \pi}{\beta_1} \right) \sum_{j=1}^{\infty} j \rho_j a_N^{j-1} \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^0 + \omega_1 \lambda_j^1) a_N^j \quad ,$$

avec $\alpha_1 = \sqrt{\frac{|\xi_1| - \kappa_1}{2}}$, $\beta_1 = \sqrt{\frac{|\xi_1| + \kappa_1}{2}}$, $|\xi_1| = \sqrt{c_0(1 + \omega_1^2)}$, $\kappa_1 = c_0(1 + c_1\omega_1)$ et $c_0 = \frac{1}{1 + c_1^2}$. Les expressions de ρ_j , λ_j^0 et λ_j^1 apparaissent dans le développement de la solution extérieure et sont calculées numériquement. Couairon et al. [24] montrent que la relation entre la longueur caractéristique du mode global non linéaire et l'écart au seuil $\varepsilon = \mu - \mu_A$:

$$\Delta x = \frac{\pi}{\beta_1 \sqrt{\varepsilon}} \quad . \quad (3.4)$$

On remarque que pour $\varepsilon \rightarrow 0$, c'est à dire quand le nombre de Rayleigh se rapproche du seuil absolu, la distance caractéristique diverge. La position Δx du front varie en $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, ceci est un résultat général et est valable dès que la bifurcation est supercritique, i.e. que le critère linéaire sélectionne ce front. Nous verrons par la suite qu'il n'en n'est pas de même dans le cas d'une bifurcation souscritique. On est

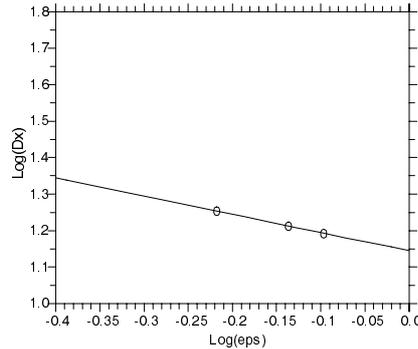


FIG. 3.6: Position du front , longueur d'établissement du front en fonction de l'écart au seuil absolu en échelle log-log. Les cercles représentent les résultats issus de l'intégration numérique.

bien sûr conduit à comparer ces résultats analytiques avec les résultats issus de l'intégration numérique de l'équation d'amplitude effectuée dans la section précédente. A partir de ces courbes numériques, on détermine la distance Δx d'établissement du front, et on peut ainsi tracer pour quelques valeurs l'évolution de cette distance en fonction de l'écart au seuil. La figure (3.6) en échelle log-log montre que la loi d'échelle est remarquablement en accord avec les résultats numériques et fournit par conséquent une bonne approximation de la position du front. Ceci est aussi le cas pour le problème de Taylor-Couette en présence d'un écoulement axial et de Rayleigh Bénard Poiseuille ; Couairon & Chomaz montrent ce résultat en comparant leur loi d'échelle avec les simulations numériques directes de Müller [57] et de Büchel [14]. Finalement, on en conclut que pour des systèmes ouverts, **les lois d'échelle établies par Couairon et Chomaz fournissent une bonne prédiction sur la forme et la position des modes globaux non linéaires.**

Détermination du coefficient de Soret

Dans cette partie, une nouvelle proposition concernant la détermination du coefficient de Soret est donnée. Pour cela, les lois d'échelle précédemment exposées et les seuils linéaires absolus présentés au chapitre 2 vont désormais prendre toute

leur importance. L'intérêt porté à résoudre ce problème est grand et les chercheurs concernés par le phénomène de thermodiffusion s'attachent eux aussi à trouver dans leur domaine précis une réponse à cette vaste question [44]. Le but de cette recherche se situe dans la connaissance du coefficient de Soret, très souvent inconnu des expérimentateurs en présence d'un mélange quelconque. Pour mesurer ce coefficient de thermodiffusion k_T , comme le gradient de température est connu, il suffit de déterminer le gradient de concentration. On rappelle l'expression du flux de diffusion à l'état stationnaire : $\vec{J} = -\rho D(\nabla C + \frac{k_T}{T_0} \nabla T) = \vec{0}$. Or, cette évaluation locale de différence de concentration du mélange n'est pas facile à obtenir, du fait notamment de la présence de la convection. Pour se libérer de cette dernière, certains expérimentateurs réalisent de coûteuses **mesures du coefficient de Soret en apesanteur** [78]. Une autre approche se basant sur le couplage convectif est l'objet des expériences réalisées par l'équipe de J.K. Platten à Mons en Belgique [19]. Leur but est de mesurer le coefficient de Soret à l'aide d'une **colonne de thermogravitation** de très faible largeur. La variation du champ de vitesses, mesuré par vélocimétrie laser Doppler, dû au gradient de concentration, permet d'évaluer ce coefficient.

Pour notre part, d'un point de vue théorique, l'objectif de cette section est de montrer que la combinaison de l'étude linéaire et non linéaire apporte une réponse, à la fois pour un système en régime convectif et en régime absolu. C'est sur la transition entre ces deux types de régime que se base notre réponse ¹. En fait, on est amené à évaluer le rapport de séparation ψ , qui est le paramètre sans dimension utilisé dans l'analyse du problème. On rappelle l'expression de celui-ci ², et on note que l'obtention de la valeur du coefficient de Soret en découle, puisque les coefficients d'expansion thermique (α) et solutale (β) sont facilement mesurables, par exemple en utilisant un densimètre à quartz vibrant, d'une précision de 10^{-6} gr/cm^3 [68].

Si on réalise N expériences en régime faiblement absolument instable, i.e. Ra est légèrement supérieur à Ra^A , on est capable de mesurer la longueur d'établissement du front Δx pour chaque situation [66]. A partir de l'écriture de la loi d'échelle (3.4), on peut remarquer que le nombre de Rayleigh absolu correspond au coefficient directeur de la droite $f(\Delta x)^2 = Ra(\Delta x)^2$ d'équation :

$$Ra(\Delta x)^2 = Ra^A(\Delta x)^2 + \left(\frac{\pi}{\beta_1}\right)^2 .$$

En traçant celle-ci grâce aux N points de mesure, on peut connaître le seuil absolu et par conséquent déterminer le coefficient de Soret à l'aide des seuils absolus linéaires exposés au chapitre 2 (2.30, 2.21).

¹On remarquera que les méthodes employées pour caractériser le coefficient de Soret sont tout aussi valables en milieu fluide.

² $\psi = -\frac{\beta k_T}{\alpha T_0}$

3.2 Stabilité des ondes progressives par rapport à une perturbation quelconque

Les rouleaux transversaux installés dans le système au-dessus du seuil de l'instabilité primaire peuvent être désormais considérés comme le nouvel état de base dont la stabilité doit être étudiée. Comme pour le cas de l'instabilité primaire, la stabilité de ces solutions non linéaires est recherchée en introduisant des perturbations infinitésimales de grande longueur d'onde. C'est par l'action de brisure de symétries présentes dans le système que des instabilités secondaires sont créées, soit par une compression/dilatation de la longueur d'onde, soit par une torsion. Eckhaus [30] s'est intéressé à la façon dont des structures bidimensionnelles deviennent instables lorsqu'elles sont soumises à des efforts de compression ou de dilatation. Cette instabilité est maintenant connue sous le nom d'instabilité d'Eckhaus; elle a été étudiée dans de nombreux systèmes physiques notamment dans le problème de Rayleigh-Bénard [60].

Une solution homogène de l'équation (3.1) est écrite sous la forme d'une onde progressive :

$$A_0 = Z \exp[i(\Omega t + px)] \quad , \quad (3.5)$$

avec $Z^2 = \mu_r - p^2$ et $\Omega = \mu_i + (\alpha - \beta)p^2 - \alpha\mu_r - V_g p$.

Afin d'étudier la stabilité de (3.5), on pose $A = (Z + a) \exp[i(\Omega t + px)]$, et on calcule l'équation linéarisée régissant l'évolution de la perturbation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= (1 + i\beta) \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 2ip \frac{\partial a}{\partial x} \right) - (1 + i\alpha) Z^2 (a + \bar{a}) - V_g^- \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} &= (1 - i\beta) \left(\frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial x^2} - 2ip \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} \right) - (1 - i\alpha) Z^2 (a + \bar{a}) - V_g^- \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} \end{aligned}$$

On prend la transformée de Fourier des deux équations :

$$\frac{\partial \hat{a}}{\partial t} = -(1 + i\beta)(k_x^2 + 2pk_x) \hat{a} - (1 + i\alpha) Z^2 (\hat{a} + \bar{\hat{a}}) - iV_g^- k_x \hat{a} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \bar{\hat{a}}}{\partial t} = -(1 - i\beta)(k_x^2 - 2pk_x) \bar{\hat{a}} - (1 - i\alpha) Z^2 (\hat{a} + \bar{\hat{a}}) - iV_g^- k_x \bar{\hat{a}} \quad (3.7)$$

On doit trouver les valeurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad ,$$

avec :

$$\begin{aligned} a_{11} &= - \left[(1 + i\beta)(k_x^2 + 2pk_x) + (1 + i\alpha)Z^2 - iV_g^- k_x \right] \\ a_{12} &= -(1 + i\alpha)Z^2 \\ a_{21} &= -(1 - i\alpha)Z^2 \\ a_{22} &= - \left[(1 - i\beta)(k_x^2 - 2pk_x) + (1 - i\alpha)Z^2 - iV_g^- k_x \right] \quad . \end{aligned}$$

Si on note Tr la trace de cette matrice et D son déterminant, les valeurs propres sont données par la relation :

$$\sigma_{\pm} = \frac{Tr}{2} \pm \sqrt{\frac{Tr^2}{4} - D} \quad . \quad (3.8)$$

On trouve après calculs en remplaçant $\sqrt{\frac{Tr^2}{4} - D}$ par son développement limité à l'ordre deux en k_x :

$$Re(\sigma_{\pm}) = - \left(Z^2 + iV_g k_x + k_x^2 + 2ip\beta k_x \right) \pm Z^2 + 2ip\alpha k_x + \left[\frac{2p^2(1 + \alpha^2)}{Z^2} - \alpha\beta \right] k_x^2 \quad . \quad (3.9)$$

La valeur propre σ_- est toujours négative : $Re(\sigma_-) = -2Z^2 + O(k_x^2)$. Les perturbations proportionnelles au vecteur propre qui lui est associé seront donc amorties au cours du temps. Par contre la partie réelle de σ_+ est nulle à l'ordre zéro, ce qui traduit l'existence d'un mode marginal dû à la liberté de choix de l'origine des phases pour la solution A_0 :

$$Re(\sigma_+) = \left[\frac{2p^2(1 + \alpha^2)}{Z^2} - (\alpha\beta + 1) \right] k_x^2 \quad . \quad (3.10)$$

3.2.1 Instabilités de Benjamin-Feir

Une solution homogène de l'équation (3.1) est écrite sous la forme suivante où l'on considère $p = 0$:

$$A_0 = Z \exp[i\Omega t] \quad . \quad (3.11)$$

Si on pose $p = 0$ dans l'expression de la valeur propre $Re(\sigma_+)$, les perturbations sont associées à :

$$\sigma_{BF} = -(\alpha\beta + 1)k_x^2 \quad . \quad (3.12)$$

Ainsi, une instabilité de Benjamin-Feir [4] peut s'installer dans le système si $\alpha\beta + 1$ est négatif. Cette instabilité correspond physiquement à une turbulence faible.

Quelque soit le type de conditions aux limites adopté (parois perméables ou non à la matière), **l'instabilité de Benjamin-Feir n'apparaît jamais dans le système**. En effet, dans le cas des parois imperméables, la quantité $\alpha\beta + 1$ est toujours positive et égale à 2, compte tenu des valeurs de $\alpha\beta$. De ce fait, **la présence de l'écoulement a une influence considérable sur l'émergence des instabilités de Benjamin-Feir ; il interdit leur formation**. Toutefois, pour des parois perméables et lorsque les ondes sont stationnaires, (c'est à dire pour $A = B$ et lorsque le débit est nul), on rappelle qu'une **instabilité de Benjamin-Feir se développe dans la zone** : $-1 < \psi < -0.75$ [9], [10].

3.2.2 Instabilités convectives d'Eckhaus

Les perturbations de compression et/ou de dilatation des rouleaux propagatifs sont appelées instabilités d'Eckhaus et ont un nombre d'onde de même direction que le nombre d'onde des rouleaux ($k_x \neq 0, k_y = 0$) (figure 3.7 issue de [54]). Lorsque $k_x \in \mathbb{R}$, on parle d'instabilités secondaires convectives. La solution s'écrit pour une perturbation longitudinale ($k_x \neq 0$) où on reprend l'expression de (3.10) :

$$\sigma_E = \left[\frac{2p^2(1 + \alpha^2)}{Z^2} - (\alpha\beta + 1) \right] k_x^2 \quad . \quad (3.13)$$

Si l'on tient compte de l'expression de $Z^2 = \mu_r - p^2$, l'instabilité convective d'Eckhaus [30] se manifeste si $\frac{2p^2(1 + \alpha^2)}{\mu_r - p^2} - (\alpha\beta + 1) > 0$. On réécrit cette inégalité différemment ;

$$3p^2 \left[1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha(\alpha - \beta)}{\alpha\beta + 1} \right] > \mu_r \quad . \quad (3.14)$$

On voit que quand l'invariance par translation est rompue, une instabilité de grande longueur d'onde naît lorsque :

$$p^2 < \mu_r < 3p^2 \left[1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha(\alpha - \beta)}{\alpha\beta + 1} \right] \quad .$$

Cette instabilité se manifeste via la compression/dilatation des rouleaux (rouleaux comprimés si $p > 0$ et rouleaux dilatés si $p < 0$) dans une zone où la convection est faible. Cette instabilité ne s'atténuant pas, elle s'amplifie en provoquant la disparition de paires de rouleaux ($p > 0$) ou la formation de paires de rouleaux ($p < 0$). On remarque que le seuil critique d'Eckhaus n'est pas fonction du débit Q . En revanche, lorsque $\mu_r > 3p^2 \left[1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha(\alpha - \beta)}{\alpha\beta + 1} \right]$, on observe une fluctuation spontanée de la longueur d'onde locale des rouleaux propagatifs, i.e. une compression et/ou dilatation des rouleaux ; il n'existe pas de création de nouveaux rouleaux, mais uniquement resserrement ou étalement des rouleaux primaires.

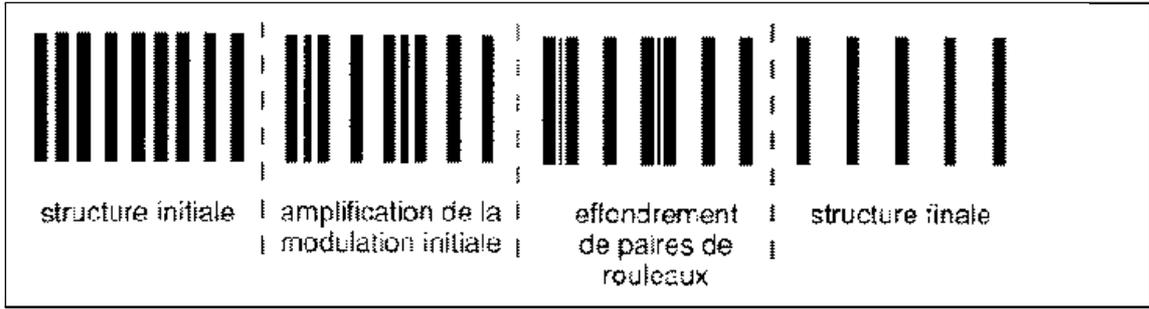


FIG. 3.7: Evolution d'une modulation de longueur d'onde pour des rouleaux trop comprimés en moyenne au delà du seuil de l'instabilité d'Eckhaus.

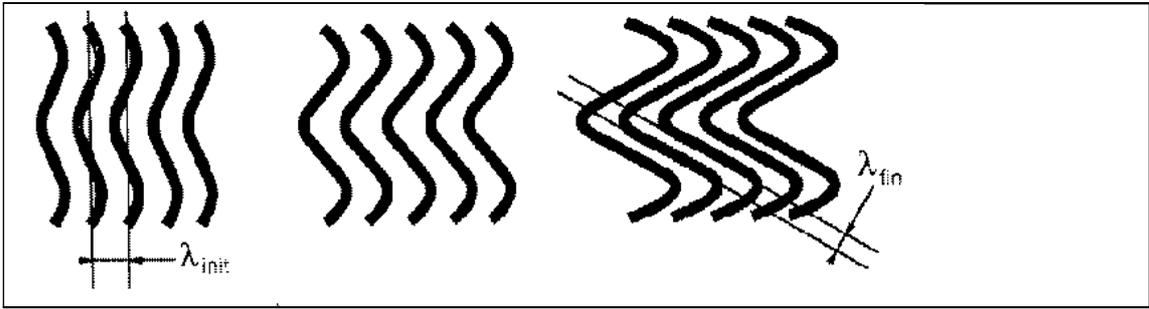


FIG. 3.8: Evolution et saturation de l'instabilité zigzag pour des structures en rouleaux initialement alignés perpendiculairement à la direction de l'écoulement.

3.2.3 Instabilités convectives ZigZag

Les perturbations de modulation des rouleaux propagatifs sont appelées instabilités Zigzag lorsque le nombre d'onde de ces perturbations est perpendiculaire au nombre d'onde des rouleaux. Pour permettre l'étude de stabilité de ces perturbations Zigzag, l'équation de Ginzburg-Landau doit être modifiée pour assurer la possibilité aux rouleaux de varier selon y . L'équation de Ginzburg-Landau (3.1) considère la variation lente de l'enveloppe selon la direction de l'écoulement. Newell et al. [60] ont montré qu'une légère variation spatiale dans la direction du vecteur d'onde \vec{k} , correspondant à une variation δk du module du nombre d'onde, doit être associée à une variation d'ordre $\sqrt{\delta k}$ dans la direction perpendiculaire.

Soit le vecteur \vec{k} ($k_c - \delta k_x, \delta k_y$) de module k_c et situé au voisinage de $\vec{k}(k_c, 0)$. On représente ce vecteur sur le cercle suivant (figure 3.9) :

$$\begin{aligned} k_c - \delta k_x &= k_c \cos \alpha = k_c - k_c \frac{\alpha^2}{2} \\ \delta k_y &= k_c \sin \alpha = k_c \alpha \end{aligned}$$

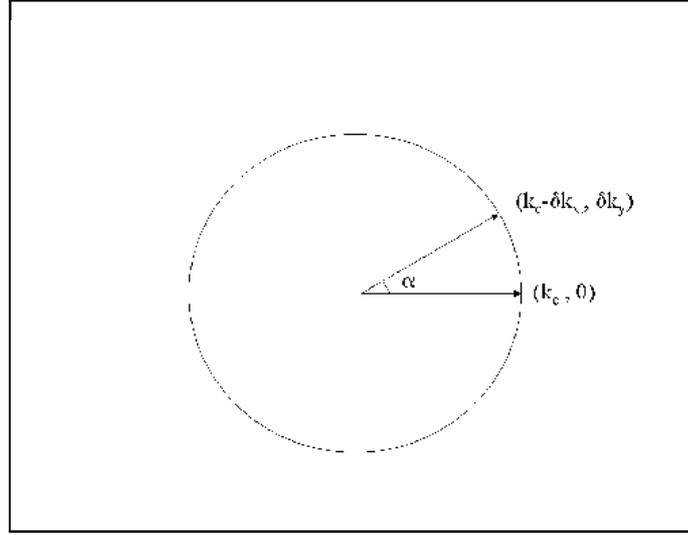


FIG. 3.9: Représentation de deux vecteurs de même module et décalés d'un angle très faible α .

avec $\alpha \ll 1$, d'où :

$$\begin{aligned} (\delta k_y)^2 &= 2k_c \delta k_x \\ \left(\frac{\partial}{\partial Y}\right)^2 &= 2k_c \frac{\partial}{\partial X} = -2i \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} \quad . \end{aligned}$$

On introduit une nouvelle échelle lente $Y = \varepsilon^{1/2} y$, et on remplace dans l'équation de Ginzburg-Landau l'échelle lente $\frac{\partial}{\partial X}$ par $\frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2ik_c} \frac{\partial^2}{\partial Y^2}$. L'équation obtenue, nommée équation de Newell-Whitehead-Segel à coefficients complexes s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + V_g^- \frac{\partial A}{\partial x} &= (\mu_r + i\mu_i)A + (1 + i\beta) \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2ik_c} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right)^2 A \\ &\quad - (1 + i\alpha)A|A|^2 - (\gamma + i\delta)A|B|^2 \quad . \end{aligned}$$

La stabilité de la solution (3.5) est étudiée pour des perturbations a modulées suivant l'axe (Oy) de la forme $a(k_x = 0, k_y) \sim e^{i\delta k_y y}$. La valeur propre associée aux perturbations Zigzag s'obtient après calculs :

$$\sigma_{ZZ} = -\frac{pq_y^2}{k_c} + O(q_y^4) \quad .$$

Si p est négatif, l'instabilité dans la direction normale à celle des rouleaux peut se former. Il y a alors une ondulation (ou torsion) des rouleaux propagatifs selon y (figure 3.8 issue de [54]). Cette instabilité est due à une brisure de symétrie du problème (invariance par rotation).

3.3 Instabilités secondaires absolues

De même que pour la première bifurcation, quand le paramètre de contrôle Ra devient supérieur au seuil critique d'Eckhaus (ou ZigZag) précédemment défini, il devient nécessaire de déterminer les régions d'instabilité convective et absolue pour ces instabilités secondaires. Pour cela, on cherche le point col signifiant que la vitesse de groupe s'annule [20] :

$$\begin{aligned} D(\sigma^+, k_x, k_y) &= 0 \quad , \\ \frac{\partial \sigma^+}{\partial k_x}(\sigma, k_x, k_y) &= 0 \quad , \\ \frac{\partial \sigma^+}{\partial k_y}(\sigma, k_x, k_y) &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.15}$$

On a résolu numériquement ce système à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson et les résultats sont reportés sur le diagramme de stabilité (3.10) :

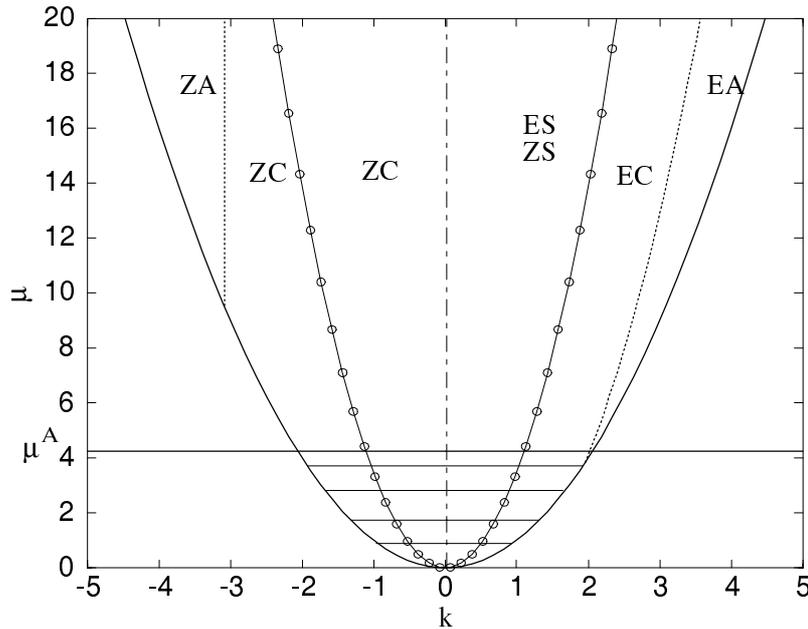


FIG. 3.10: Diagramme de stabilité μ en fonction de k où $Q = 0.1$ et $\psi = -0.5$. L'instabilité d'Eckhaus est stable (ES), convectivement instable (EC) et absolument instable (EA). L'instabilité Zigzag est convectivement instable (ZC) et absolument instable (ZA). La région d'existence des rouleaux est élargie par la vitesse de groupe. Dans la zone hachurée ($\mu < \mu^A$), il y a coexistence de l'état de conduction et des rouleaux propagatifs stables.

3.3.1 Instabilités absolues d'Eckhaus

La présence du débit a , contrairement au seuil critique, une action sur le seuil absolu, elle a pour effet de diminuer le seuil d'instabilité absolu d'Eckhaus. On note donc l'élargissement de la zone d'existence des structures grâce à la vitesse de groupe V_g^- . L'influence du débit est aussi considérable que dans le cas de l'instabilité primaire, puisqu'il crée une région d'instabilité convective. En effet, lorsqu'il n'y a pas d'écoulement horizontal dans le système, il n'existe pas de région convective pour l'instabilité secondaire. Le système passe directement d'un régime stable à un régime absolument instable. Les seuils critiques de l'instabilité d'Eckhaus et de l'instabilité ZigZag sont confondus avec les seuils absolus. Lorsque le paramètre μ dépasse le seuil absolu μ^A , l'état de base conductif du système devient absolument instable, on voit alors sur la figure suivante apparaître une région bistable due au débit où peuvent coexister l'état de base et les rouleaux propagatifs convectivement instables. Sur la figure (3.10), l'instabilité d'Eckhaus est présentée avec l'instabilité ZigZag. Pour un maximum de clarté sur cette figure, les seuils obtenus numériquement en résolvant le système (3.15) correspondant à l'instabilité Eckhaus sont tracés uniquement pour $k > 0$, il ne faut pas omettre la symétrie $k \rightarrow -k$ permettant d'obtenir les résultats pour $k < 0$. Il existe dans le système des combinaisons linéaires de l'instabilité Eckhaus et de l'instabilité ZigZag qui correspondent à des structures tridimensionnelles, en opposition avec les structures d'Eckhaus qui sont bidimensionnelles.

Müller et Tveitereid [58] ont montré que le seuil absolu des perturbations d'Eckhaus peut être calculé asymptotiquement pour des faibles débits, de sorte que le développement selon le débit soit valide. Le seuil absolu pour l'instabilité d'Eckhaus s'écrit comme suit :

$$\mu_E = 3p^2 - \frac{\sqrt{7} - 2}{(3 - \sqrt{7})^{1/3}} (p^4 [V_g + 2(\beta - \alpha)p]^2)^{1/3} . \quad (3.16)$$

Quand la vitesse de groupe s'annule, de même que pour l'instabilité primaire, le système passe directement d'un régime stable à un régime absolument instable, figure (3.11). La région d'instabilité convective n'existe pas et on montre ce résultat numériquement en intégrant le système (3.15) avec $V_g = 0$. Le seuil d'instabilité convective d'Eckhaus est confondu avec le seuil absolu. Par contre, on ne retrouve pas analytiquement ce résultat en imposant $V_g = 0$ dans l'expression du seuil absolu (3.16). Les deux expressions (3.16) et (3.14) sont différentes lorsque $V_g = 0$. En effet, le seuil absolu (3.16) est donné par un développement analytique ; ce résultat est une approximation à l'ordre $V_g^{2/3}$ et ne constitue pas un seuil absolu exact. Il faudrait sûrement continuer le développement à un ordre supérieur pour retrouver le seuil convectif (3.14).

Lorsque la vitesse de groupe est non nulle, il existe une région d'instabilité convective

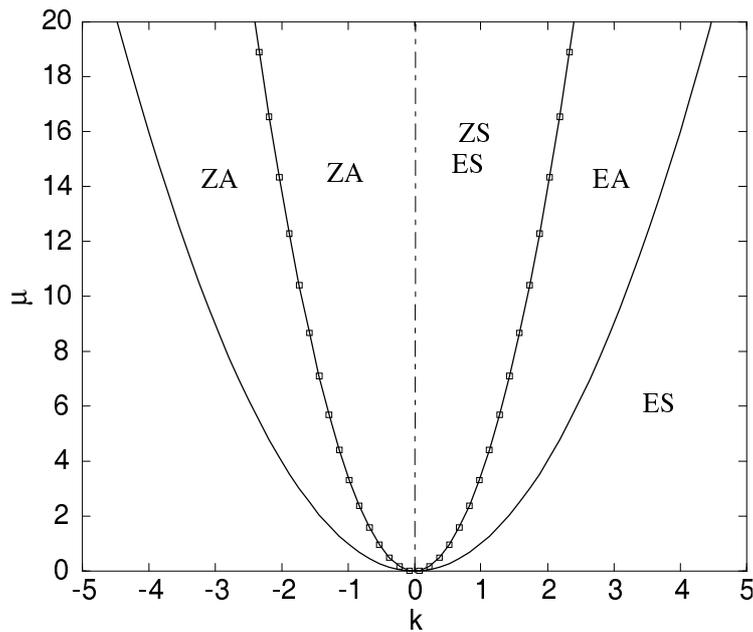


FIG. 3.11: Diagramme de stabilité μ en fonction de k où $\psi = -0.5$. L'instabilité d'Eckhaus est stable (*ES*) et absolument instable (*EA*). L'instabilité Zigzag est absolument instable (*ZA*). Il n'existe plus de région convective lorsque la vitesse de groupe V_g est nulle.

tive, créée par le terme d'advection.

3.3.2 Instabilités absolues Zigzag

De même, le seuil absolu de l'instabilité ZigZag a été déterminé numériquement. Un calcul analytique en considérant un développement selon la vitesse de groupe fournit le seuil absolu :

$$k_{ZA} = -\frac{V_g}{2} .$$

3.4 Conclusion

Comme les notions linéaires ne décrivent pas l'état spatio-temporel de l'écoulement au-dessus du seuil, les équations d'amplitude sont un moyen pour décrire la dynamique faiblement non linéaire de l'écoulement. Elles permettent de comprendre le rôle saturant des non linéarités sur la dynamique des structures dissipatives au voisinage du seuil.

Lorsque $\psi < \psi_{pc}$, la bifurcation est supercritique et l'équation d'amplitude admet des coefficients complexes rendant compte des propriétés physiques du système. Au seuil absolu, l'étude linéaire a montré l'apparition de deux modes bidimensionnels,

correspondant à des ondes progressives. L'étude faiblement non linéaire indique que seul le premier mode existe non linéairement.

Une intégration numérique de cette équation d'amplitude complexe avec des conditions aux limites adaptées montre l'existence d'un mode global non linéaire. Le régime convectif se distingue du régime absolu à partir de l'existence de ces modes globaux. Plus le débit filtrant imposé est fort, plus la distance à laquelle l'amplitude saturée des ondes progressives est atteinte, est importante. Couairon et Chomaz ont déterminé des lois d'échelle reliant cette longueur d'établissement du front avec la distance au seuil absolu. Cette relation analytique, validée par nos résultats d'intégration numérique de l'équation d'amplitude complexe, permet une détermination expérimentale du coefficient de Soret.

Parmi les solutions des équations d'amplitude, seules celles qui sont stables vis à vis de petites perturbations peuvent être observées : la stabilité secondaire des modes non linéaires sélectionne ceux qui ont un sens physique. L'étude en termes d'instabilité convective et d'instabilité absolue de la solution modulée selon deux types de perturbations orthogonales ($(k_x \neq 0, k_y = 0)$ et $(k_y \neq 0, k_x = 0)$) met en évidence les mécanismes de déstabilisation des rouleaux (compression/dilatation ou torsion pure des rouleaux). On montre que la région des solutions modulées peut être élargie par la présence du débit.

Chapitre 4

Dynamique faiblement non linéaire pour $\psi > \psi_{pc}$

Les concepts d'instabilité linéaire convective et absolue ont été exposés dans le chapitre 2. L'analyse de la réponse linéaire du système à une perturbation infinitésimale initialement localisée permet de séparer le régime convectif du régime absolu tant que l'état conducteur est déstabilisé linéairement. Or, comme on le verra plus loin, il existe des mélanges pour lesquels l'état conducteur devient non linéairement instable alors qu'il reste linéairement stable. C'est le cas notamment lorsque la première bifurcation que subit le système est de nature sous-critique. Dans ce cas de figure, l'analyse linéaire qui prédit la transition convectif-absolu pourrait être mise en défaut. Chomaz [26] a étendu les notions d'instabilités convectives et absolues aux systèmes non linéairement instables. Ainsi, la réponse du système n'est plus étudiée par rapport à une impulsion localisée mais par rapport à des perturbations d'amplitudes et d'extension finies. Nous rappelons alors les différents comportements du système en présence de ces perturbations d'amplitude finie :

- L'état de base d'un système est **non linéairement stable** si pour toute perturbation d'amplitude et d'extension finies, le système relaxe vers l'état de base dans tout repère mobile. Dans le cas contraire, il est **non linéairement instable** et deux types d'instabilités sont à distinguer :
- L'état de base d'un système est **non linéairement convectivement instable** si le système retourne à son état de base dans le repère du laboratoire.
- L'état de base d'un système est **non linéairement absolument instable** si la perturbation d'extension et d'amplitude finies se répand dans tout le domaine physique étudié. Le système ne relaxe alors plus vers son état de base en tout point du repère du laboratoire.

Les principaux résultats de ce chapitre ont été publiés dans [43] et [44]. Cependant, à notre connaissance aucune étude dans la littérature ne s'est intéressée

à déterminer la nature convective et absolue des instabilités secondaires lorsque **la bifurcation est sous-critique**. Cette tâche est accomplie au paragraphe (4.4).

4.1 Nature de la bifurcation

Pour décrire la dynamique du système, une équation de Ginzburg-Landau réelle d'ordre cinq décrivant le comportement faiblement non linéaire du mode le plus instable est dérivée près du seuil :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + Q \frac{\partial A}{\partial x} = \mu A + a \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + c_1 A |A|^2 - c_2 A |A|^4 \quad , \quad (4.1)$$

avec c_1 et c_2 positifs pour remplir la condition de souscriticalité. On détaille l'ex-

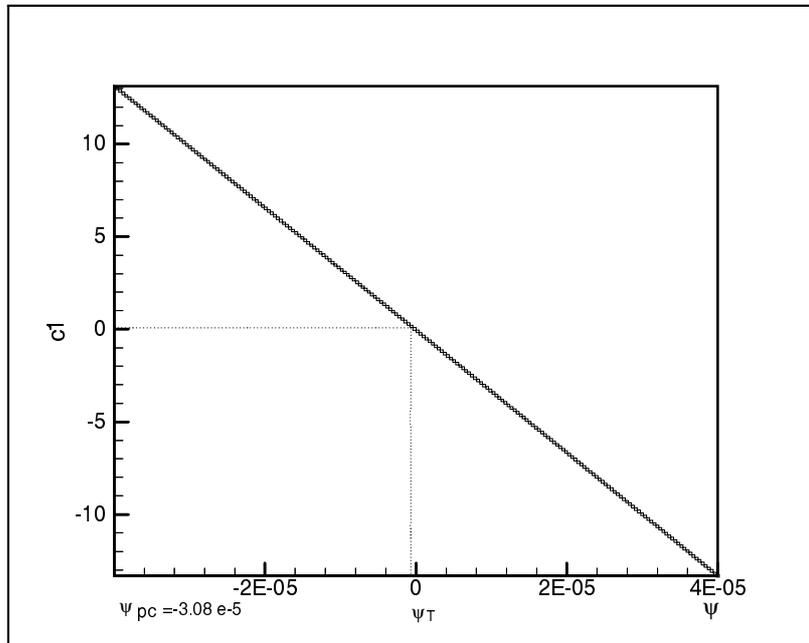


FIG. 4.1: Termes non linéaires cubiques c_1 en fonction de ψ pour des parois imperméables. Le rapport de séparation tricritique est noté ψ_T et le point de codimension deux est ψ_{pc} . La région pour laquelle le terme non linéaire d'ordre 3 est positif correspond à une région où la bifurcation est souscritique.

pression des coefficients de l'équation d'amplitude (4.1) en fonction des paramètres phénoménologiques du problème, pour les deux types de conditions aux limites traités :

– parois imperméables :

$$\text{On pose } F = \frac{\Lambda k_c^2 [8\psi(k_c^2 + \pi^2) + \Lambda(1 + \psi)k_c^2 \pi^2]}{8\psi((\Lambda + 1)k_c^2 + \pi^2)}$$

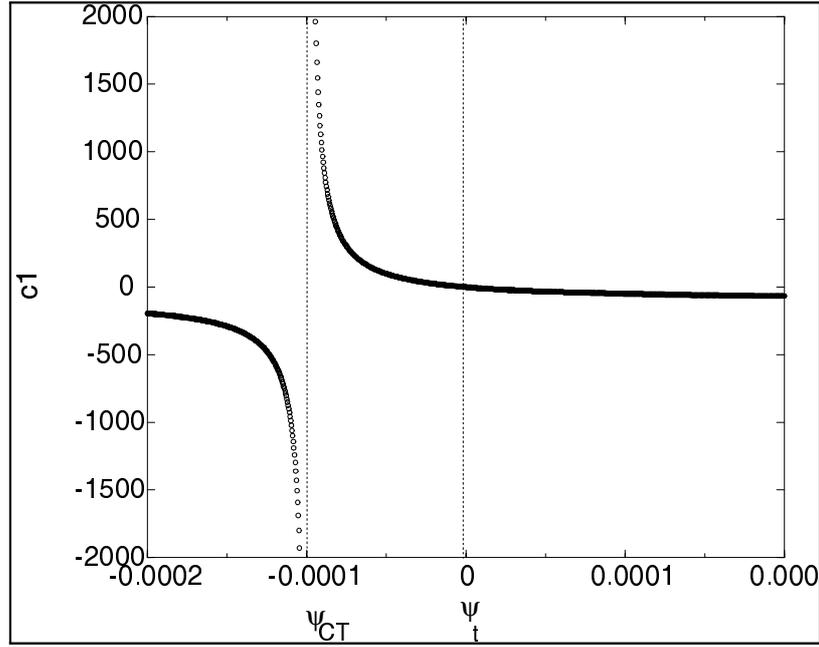


FIG. 4.2: Termes non linéaires cubiques c_1 en fonction de ψ pour des parois perméables. Le rapport de séparation tricritique est noté ψ_t et le point de codimension deux est ψ_{CT} . La région pour laquelle le terme non linéaire d'ordre 3 est positif correspond à une région où la bifurcation est souscritique.

$$\mu = \frac{Ra - R_c}{R_c} F$$

$$a = \frac{1}{2} \left[\frac{4(3k_c^2 + \pi^2)}{(k_c^2 + \pi^2)^2} - \frac{(16\psi/\pi^2) + 2\Lambda(1 + \psi)}{(8\psi/\pi^2)(k_c^2 + \pi^2) + \Lambda(1 + \psi)k_c^2} \right] F$$

$$c_1 = \left[\frac{1}{(k_c^2 + \pi^2)} + \frac{16\psi R_c(4k_c^2\Lambda + 3(k_c^2 + \pi^2))}{3\pi^2\Lambda^3 k_c^2(k_c^2 + \pi^2)^2} \right] F$$

$$c_2 = \left[\frac{2}{\Lambda^2 k_c^2(k_c^2 + \pi^2)} \right] F$$

$$\text{On rappelle : } k_c^2 = \frac{\pi^2(\Lambda + \Lambda\psi - \frac{8\psi}{\pi^2})}{(\Lambda + \Lambda\psi + \frac{8\psi}{\pi^2})}, \quad R_c = \frac{4\pi^2\Lambda^2(1 + \psi)}{(\Lambda + \Lambda\psi + \frac{8\psi}{\pi^2})^2}.$$

– parois perméables :

$$\mu = \left(\frac{2\pi^2\Lambda\zeta}{\psi + \Lambda\zeta} \right) \left(\frac{Ra - R_c}{R_c} \right)$$

$$a = \frac{2\zeta\Lambda}{\psi + \Lambda\zeta}$$

$$c_1 = \frac{\psi + \Lambda^2\zeta}{\Lambda(\psi + \Lambda\zeta)}$$

$$c_2 = \frac{\zeta}{2\Lambda\pi^2(\psi + \Lambda\zeta)}$$

avec $\zeta = \psi + \Lambda\psi + \Lambda$.

Pour $\psi > \psi_{pc}$, les non linéarités dominantes peuvent être soit déstabilisantes ou stabilisantes pour le système. On s'aperçoit en étudiant la nature de la bifurcation à partir des équations d'amplitude dérivées près du seuil, qu'il existe pour certains mélanges, une déstabilisation du système due aux termes non linéaires d'ordre 3. Ceux-ci ne contrecarrent plus la croissance linéaire, mais s'ajoutent à elle dans le processus de déstabilisation du système. Le coefficient réel du terme non linéaire d'ordre 3 de l'équation de Ginzburg-Landau devient positif, ainsi la saturation n'est plus assurée. La figure (4.1), ainsi que la figure (4.2) montrent que la zone "sous-critique" se trouve entre le point de codimension deux et le point tricritique : $\psi_{pc} < \psi < \psi_T$. Le point tricritique ψ_T , au-delà duquel la bifurcation est supercritique, prend des valeurs différentes selon que les parois sont perméables ($\psi_T = -10^{-6}$) ou imperméables ($\psi_T = -1.510^{-7}$), mais reste assez proche du point de codimension deux. Le développement asymptotique nécessaire à l'établissement de l'équation d'amplitude régissant la dynamique du mélange près d'une telle bifurcation doit être poussé jusqu'à l'ordre 5, où désormais les non linéarités sont stabilisantes pour le système ¹. Une telle bifurcation est appelée **bifurcation souscritique**.

Dans la région où $\psi < \psi_{pc}$ et $\psi > \psi_T$, la bifurcation est supercritique. Le chapitre 3 a traité la zone où $\psi < \psi_{pc}$. La prochaine section (4.2) est consacrée à l'étude des instabilités lorsque $\psi > \psi_T$. La section (4.3) est dédiée à la région $\psi_{pc} < \psi < \psi_T$ où la bifurcation est sous-critique.

4.2 Bifurcation supercritique

Les équations d'amplitude pour des ondes stationnaires pour $\psi > \psi_{pc}$ et $\psi < \psi_{pc}$ ont été dérivées par Brand et Steinberg [6] pour un système sans débit ($V_g = 0$) aux parois perméables. L'originalité de ce travail est de déterminer les termes non linéaires du système en présence d'advection dans le cas des conditions aux limites de parois imperméables. Lorsque le débit est non nul, seules les ondes progressives se forment quand le système est déstabilisé. L'équation de Ginzburg-Landau est modifiée par rapport à celle dérivée par [6] puisqu'un terme d'advection faisant apparaître la vitesse de groupe est ajouté et les termes non linéaires sont différents. Lorsque la bifurcation est supercritique, le terme quintique dans l'équation (4.1) est négligé ($c_2 = 0$) et c_1 est négatif puisque les non linéarités d'ordre trois sont

¹Si on suppose que A et -A sont physiquement équivalents, alors la fonction non linéaire du second membre de (4.1) doit être une fonction impaire de A : $\frac{dA}{dt} = F(A)$ et $\frac{d(-A)}{dt} = F(-A) = -F(A)$

stabilisantes.

On remarque que pour un débit nul, la vitesse de groupe $V_g = Q$ s'annule et le terme d'advection disparaît dans l'équation de Ginzburg-Landau. Dans ce cas, le système déstabilisé devient directement absolument instable. Lorsque le débit est non nul, cette équation traduit l'existence d'une onde progressive se propageant à la vitesse de groupe V_g égale au débit Q . Ce terme est à l'origine de l'émergence des instabilités convectives.

4.2.1 Lois d'échelle

On reprend l'étude concernant l'établissement du mode global non linéaire exposée au chapitre 3. Une loi d'échelle pour la taille de croissance des modes globaux a été calculée par [24]. Cette étude est basée sur une analyse en perturbation singulière en fonction de la distance au seuil absolu ε . En régime absolu, la taille de croissance de ces modes globaux non linéaires varie comme $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, lorsque le critère linéaire est valable (bifurcation supercritique).

On obtient la même relation entre la longueur d'établissement du front Δx et ε puisque les calculs sont réalisés à partir de l'équation d'amplitude. Lorsque $\psi > \psi_{pc}$, l'équation de Ginzburg-Landau est réelle. Ainsi la relation devient :

$$\Delta x = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \quad .$$

De même que pour $\psi < \psi_{pc}$, cette loi d'échelle peut être utilisée comme un critère de détermination expérimentale du coefficient de Soret (voir section 3.1 du chapitre 3).

Ces lois d'échelle ne sont valables qu'en régime d'instabilité absolue. Dans ce type de régime instable, des ondes progressives d'amplitude saturée sont reliées à la solution de conduction pure à l'entrée par un front.

Dans la section suivante, on étudie la stabilité de ces ondes progressives par rapport à deux genres de perturbation (parallèle et perpendiculaire à l'écoulement).

4.2.2 Instabilités secondaires

L'équation d'amplitude généralisée en une équation de Newell-Whitehead-Segel, où on considère les deux dimensions x et y dans le terme diffusif, est pour $\psi > \psi_{pc}$:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + Q \frac{\partial A}{\partial x} = \mu A + \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k_c} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 A - A|A|^2 \quad , \quad (4.2)$$

où on a posé les changements de variable suivants : $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial x'}$, $A' = \sqrt{c_1} A$ et $Q' = \frac{Q}{\sqrt{a}}$.

En général, on peut étudier la stabilité des solutions soit par rapport au module de l'amplitude et à longueur d'onde constante, soit par rapport à la phase avec un module de l'amplitude constant. Il existe des solutions stationnaires exactes de l'équation (4.2) dont le module est constant ($\partial_x |A| = 0$) et dont la phase prend la forme $\phi = \delta k x - \delta \omega t$. L'introduction de cette solution dans l'équation (4.2), en prenant soin de séparer la partie réelle et la partie imaginaire, fournit l'expression du module de l'amplitude de la solution non linéaire $A_0 = \sqrt{\mu - \delta k^2}$ valable uniquement lorsque $|\delta k| < \sqrt{\mu}$, et l'expression de la fréquence $\delta \omega = Q \delta k$. La solution totale au-dessus du seuil prend la forme suivante écrite à une phase près :

$$A(x, y, t) = A_0 e^{i(k_c + \delta k)x - i(\omega_c + \delta \omega)t} + C.C. \quad (4.3)$$

Cette solution périodique structurée sous la forme de rouleaux transversaux alignés perpendiculairement à la direction de l'écoulement x existe au-dessus du seuil critique dès lors que $\mu > \delta k^2$. Son nombre d'onde total est $k = (k_c + \delta k, 0)$ et sa fréquence totale est $\omega = \omega_c + \delta \omega$.

Pour étudier la stabilité de ces solutions non linéaires, une perturbation infinitésimale est introduite dans la solution (4.3) :

$$A(x, y, t) = (A_0 + \delta A(x, y, t)) e^{i(\delta k x - \delta \omega t)},$$

avec :

$$\delta A(x, y, t) = \delta A_1 e^{i(\vec{q}, \vec{r})} e^{\lambda t} + \delta A_2^* e^{-i(\vec{q}^*, \vec{r})} e^{\lambda t},$$

où $\vec{q} = (q_x, q_y)$ et $\vec{r} = (x, y)$.

On procède comme au chapitre 3 et les valeurs propres s'écrivent :

$$\begin{aligned} \lambda^\pm(q_x, q_y) = & -(\mu - \delta k^2) - q_x^2 - i q_x Q - \frac{q_y^2}{2k_c} \left(2\delta k + \frac{q_y^2}{2k_c} \right) \\ & \pm \left[(\mu - \delta k^2)^2 + \left(2q_x \left(\delta k + \frac{q_y^2}{2k_c} \right) \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Si $Re(\lambda) < 0$, la perturbation va décroître au cours du temps, et les rouleaux propagatifs seront stables. Si $Re(\lambda) > 0$, la perturbation a alors une croissance exponentielle, et les rouleaux propagatifs sont linéairement instables.

On peut classer les instabilités de phase selon deux types de perturbations :

- Les perturbations de compression et de dilatation des rouleaux propagatifs

Elles sont appelées instabilités d'Eckhaus et ont un nombre d'onde de même direction que le nombre d'onde des rouleaux ($q_x \neq 0, q_y = 0$)

- Les perturbations de torsion des rouleaux propagatifs

Elles sont appelées instabilités Zigzag et ont un nombre d'onde perpendiculaire au nombre d'onde des rouleaux ($q_x = 0, q_y \neq 0$)

Instabilité convective d'Eckhaus

On suppose que le vecteur d'onde de la perturbation est parallèle au vecteur d'onde des rouleaux (parallèles à la direction de l'écoulement). On reprend l'expression de la valeur propre (4.4) dans laquelle on a posé $q_y = 0$:

$$\lambda^\pm(q_x) = -(\mu - \delta k^2) - q_x^2 - iq_x Q \pm [(\mu - \delta k^2)^2 + (2q_x(\delta k))^2]^{1/2} \quad (4.5)$$

Cette solution devient instable $\forall x$ lorsque :

$$q_x^2 < 2(3\delta k^2 - \mu) \quad ,$$

ce qui donne le seuil de l'instabilité d'Eckhaus, indépendant de l'écoulement :

$$\mu_{EC} = 3\delta k^2 \quad . \quad (4.6)$$

Instabilité convective ZigZag

Lorsque les perturbations sont transversales, i.e. ($q_x = 0$ et $q_y \neq 0$), le vecteur d'onde des perturbations est perpendiculaire au vecteur d'onde de la structure en rouleaux. On écrit la valeur propre λ tirée de l'équation (4.4) où l'on a posé $q_x = 0$.

$$\begin{aligned} \lambda^- &= -2(\mu - \delta k^2) + O(q_y^4) \\ \lambda^+ &= -\frac{\delta k}{k_c} q_y^2 + O(q_y^4) \quad . \end{aligned}$$

Comme la valeur propre réelle λ^- est négative, la seule façon d'obtenir une instabilité ZigZag, c'est à dire une torsion des rouleaux due à des perturbations transversales, est que la valeur propre λ^+ devienne positive :

$$\lambda^+ = -\frac{\delta k}{k_c} q_y^2 > 0 \quad ,$$

l'inégalité ci-dessus est toujours vraie si δk est négatif. Ainsi, quand $\delta k < 0$, l'instabilité ZigZag se manifeste par une torsion des rouleaux autour de leur axe.

Instabilité secondaire absolue

Lorsque le paramètre de contrôle μ est supérieur aux seuils critiques d'Eckhaus et/ou Zigzag, la solution modulée est instable (par compression, dilatation et/ou torsion). Une nouvelle solution apparaît dans le système si les perturbations Eckhaus ou Zigzag envahissent le domaine, c'est à dire si l'instabilité secondaire est absolue. On doit alors déterminer l'influence du débit sur ces seuils absolus [43].

Pour cela, on cherche le point col signifiant que la vitesse de groupe s'annule [20] :

$$\begin{aligned} D(\lambda, q_x, q_y) &= 0, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial q_x}(\lambda, q_x, q_y) &= 0, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial q_y}(\lambda, q_x, q_y) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.7)$$

Instabilité d'Eckhaus absolue

$$\lambda(q_x) = -(\mu - \delta k^2) - q_x^2 - iq_x Q + [(\mu - \delta k^2)^2 + 4q_x^2 \delta k^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

Le seuil de l'instabilité absolu est donné par l'égalité suivante où $q_y = 0$ et q_x est complexe :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q_x} = -2q_x - iQ + \frac{4k^2 q_x}{\sqrt{(\mu - \delta k^2)^2 + 4q_x^2 \delta k^2}} \quad . \quad (4.9)$$

Le seuil d'Eckhaus absolu a été déterminé numériquement en résolvant le système (4.8, 4.9) avec $Re(\lambda) = 0$.

Par ailleurs, ce seuil a été obtenu analytiquement au moyen de deux développements différents.

(1) Un développement au voisinage du seuil ($\mu = \delta k^2$) (de la deuxième bifurcation) donne le nombre d'onde absolu d'Eckhaus en supposant que l'amplitude $A_0 = \sqrt{\mu - \delta k^2}$ est petite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial q_x} &= 0 \Rightarrow 2q_x = 2\delta k - iQ + \dots \\ q_x^{EA} &= \delta k - i\frac{Q}{2} + \dots \end{aligned}$$

Pour obtenir le seuil d'instabilité secondaire absolue μ^{EA} , il suffit d'introduire l'expression du nombre d'onde absolu q_x^{EA} dans la relation de dispersion (4.8) dont la partie réelle doit s'annuler conformément aux relations définissant le point col.

$$\mu^{EA} = 2\delta k^2 - \frac{Q^2}{4} + \dots \quad (4.10)$$

(2) Un deuxième développement est possible si on suppose que A_0 est de l'ordre de l'unité et que le débit est petit devant l'unité. Alors on retrouve le seuil convectif d'Eckhaus diminué d'une quantité proportionnelle à la puissance 2/3 du débit :

$$\begin{aligned} \mu &= 3\delta k^2 - a(\delta k)^{4/3} Q^{2/3} \\ a &= \frac{(7\sqrt{7} - 17)^{1/3}}{2^{1/3}} \quad . \end{aligned}$$

Instabilité ZigZag absolue

Pour l'instabilité absolue ZigZag, on suppose que q_y est réel et que q_x est prolongé en un nombre imaginaire pur, contrairement au seuil critique d'instabilité où l'on considère q_x nul. Le vecteur d'onde s'écrit alors :

$$\vec{q} = (0 + iq_x, q_y) \text{ avec } q_x, q_y \text{ réels} \quad .$$

La valeur propre complexe λ prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \lambda(q_x, q_y, k) = & -(\mu - \delta k^2) + q_x^2 + q_x Q - \frac{q_y^2}{2k_c} \left(2\delta k + \frac{q_y^2}{2k_c} \right) \\ & + \left[(\mu - \delta k^2)^2 - \left(2q_x \left(\delta k + \frac{q_y^2}{2k_c} \right) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Le seuil Zigzag absolu est fourni par le point col (q_x^{ZA}, q_y^{ZA}) qui doit vérifier :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q_x} = 2q_x + Q + \left(2\delta k + \frac{q_y^2}{k_c} \right) \frac{2q_x \left(\delta k + \frac{q_y^2}{2k_c} \right)}{\sqrt{(\mu - \delta k^2)^2 - \left(\delta k + \frac{q_y^2}{2k_c} \right)^2}} = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q_y} = -\frac{q_y}{k_c} \left(2\delta k + \frac{q_y^2}{k_c} \right) + 2q_x \frac{q_y}{k_c} \frac{2q_x \left(\delta k + \frac{q_y^2}{2k_c} \right)}{\sqrt{(\mu - \delta k^2)^2 - \left(\delta k + \frac{q_y^2}{2k_c} \right)^2}} = 0 \quad .$$

On pose :

$$\begin{aligned} S &= \left(2\delta k + \frac{q_y^2}{k_c} \right) \\ T &= \frac{2q_x \left(\delta k + \frac{q_y^2}{2k_c} \right)}{\sqrt{(\mu - \delta k^2)^2 - \left(\delta k + \frac{q_y^2}{2k_c} \right)^2}} \quad . \end{aligned}$$

Les équations (4.12) s'écrivent désormais comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial q_x} &= 2q_x + Q + ST = 0 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial q_y} &= -\frac{q_y}{k_c} S + 2q_x \frac{q_y}{k_c} T = 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Le système s'annule pour la relation suivante : $S^2 + 2q_x(2q_x + Q) = 0$. On obtient immédiatement le nombre d'onde absolu ZigZag selon x et selon y :

$$\begin{aligned} q_x^{ZA} &= -\frac{Q}{2} + \dots \\ q_y^{ZA} &= \sqrt{-2 \delta k k_c} > 0 \quad , \end{aligned}$$

avec $\delta k < 0$ puisque q_y est supposé réel. On en déduit le seuil absolu ZigZag en reportant la valeur de ces nombres d'onde absolus dans l'expression de la valeur propre λ et en annulant la partie réelle de cette dernière :

$$k^{ZA} = -\frac{Q}{2} .$$

Lorsque $\delta k < k^{ZA}$, et au dessus du seuil critique ($\mu > \delta k^2$), l'instabilité Zigzag est absolue. Les perturbations se répandent à la fois vers l'amont et vers l'aval et envahissent tout le domaine. Les rouleaux initialement alignés le long de l'axe des y et stables par rapport à une rotation locale se tordent et deviennent tridimensionnels.

Le diagramme de stabilité est présenté sur la figure (4.3). Les régions où les solutions sont convectivement instables (*EC*) et absolument instables (*EA*) pour l'instabilité d'Eckhaus, ainsi que les régions où les solutions sont convectivement instables (*ZC*) et absolument instables (*ZA*) pour l'instabilité Zigzag y sont présentées. La région d'existence des solutions est élargie par la présence du débit filtrant Q . Au-dessous du seuil critique et au-dessous du seuil absolu (μ^A) de l'instabilité primaire, l'état de base et les rouleaux asymptotiquement stables (i.e. convectivement instables) coexistent.

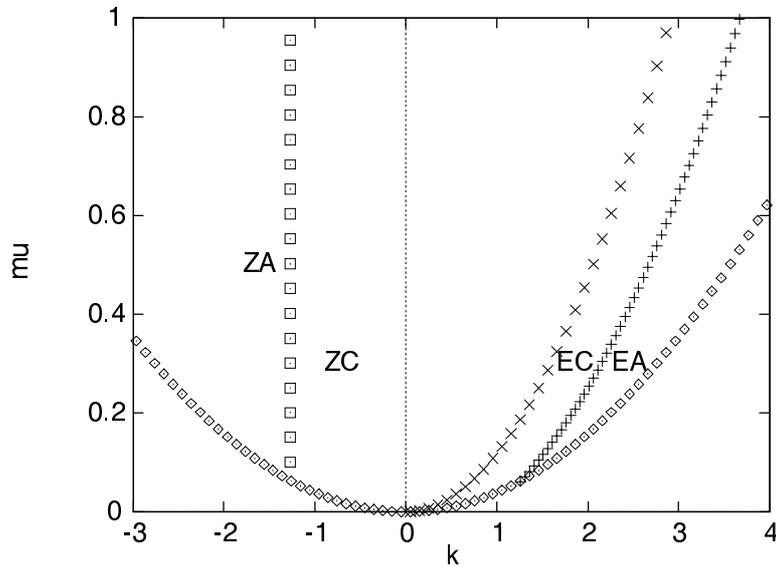


FIG. 4.3: Diagramme de stabilité μ en fonction de k où $Q = 0.1$ et $\psi = 0.001$. L'instabilité d'Eckhaus est convectivement instable (EC) et absolument instable (EA). L'instabilité Zigzag est convectivement instable (ZC) et absolument instable (ZA). La région d'existence des rouleaux est élargie par la vitesse de groupe.

4.3 Bifurcation souscritique

Dans le cas d'une bifurcation supercritique, le critère linéaire est valable lorsque l'on étudie le passage de l'instabilité convective à l'instabilité absolue. Toutefois, lorsqu'il s'agit d'une bifurcation souscritique, le critère linéaire n'est plus approprié, une étude de stabilité non linéaire est requise pour tenir compte de ces non linéarités qui déstabilisent le système pour des perturbations d'amplitude finie. Pour décrire la dynamique du système près du seuil, on s'appuie sur l'équation de Ginzburg-Landau quintique (4.1). Une étude non linéaire est menée en suivant la même démarche que dans [25], [77]. Elle fournit des valeurs analytiques des seuils des instabilités non linéairement convectives et non linéairement absolues. Le front qui relie l'état de base homogène à l'état final d'ondes progressives saturées est régi à la fois par le critère linéaire et par les propriétés non linéaires. L'équation de Ginzburg-Landau quintique (4.1) est transformée en une équation différentielle ordinaire dans la variable $\tau = x - vt$. Une solution exacte de type front, appelée "front non linéaire" existe et possède une vitesse v_f^{NL} , que l'on est capable de calculer analytiquement. Van Saarloos et Hohenberg [77] décrivent les solutions en translation uniforme de l'équation d'amplitude complexe. Ils ont énoncé les conjectures suivantes généralisant l'étude de dynamique des fronts vue dans le chapitre précédent :

Lorsque le système est linéairement instable :

Si la vitesse non linéaire de l'aile du front existe et est supérieure à sa vitesse linéaire ($v_f^{NL} > v_f^L$), et si le module du nombre d'onde imaginaire (i.e. le taux de croissance spatiale) non linéaire est supérieur à celui du front linéaire ($|k_i^{NL}| > |k_i^L|$), alors la dynamique du système est dominée par le front non linéaire, et le critère linéaire tombe en défaut. Dans cette zone de paramètres, les nouveaux seuils sont non linéaires, ailleurs, les seuils linéaires restent valables.

Lorsque le système est linéairement stable :

Si la vitesse non linéaire de l'aile du front existe et est positive, alors la dynamique du système est dominée par un front non linéaire et inférieur au seuil d'instabilité linéaire.

4.3.1 Propagation des fronts

Si on appelle F la partie homogène du second membre de (4.1), alors F admet une fonction potentielle φ telle que $\varphi = -\int F dA$. Le potentiel associé à cette équation d'amplitude est : $\varphi(A) = -\mu \frac{A^2}{2} - c_1 \frac{A^4}{4} + c_2 \frac{A^6}{6}$. Les états homogènes de (4.1) sont la solution triviale $A = 0$ et la solution non nulle $A_{\pm}^2 = \frac{c_1 \pm \sqrt{c_1^2 + 4\mu c_2}}{2c_2}$. On montre que le point fixe A_+ est stable tandis que le point fixe A_- correspond

à une branche instable. Les coordonnées du point tournant sont $\mu_1 = -\frac{c_1^2}{4c_2}$ et $A^2 = -\frac{c_1}{2c_2}$ qui correspond à une bifurcation noeud-col. Lorsque le débit est nul, la branche A_+ existe et reste stable si $\mu > \mu_1$, et la branche A_- existe et est instable quand $\mu_1 < \mu < 0$. On définit le point de Maxwell où les deux états stables haut et bas possèdent le même potentiel, ainsi on note $\mu_M = -\frac{3}{16}\frac{c_1^2}{c_2}$. Ce qui signifie que lorsque le débit est nul, l'état de base est stable linéairement et non linéairement pour $\mu < \mu_M$. Lorsque $\mu_M < \mu < 0$, la branche supérieure stationnaire A_+ est stable et l'état de base est métastable.

L'étude de stabilité non linéaire de l'état de base se réalise en cherchant la réponse du système à des perturbations d'extension et d'amplitude finies. Pour cela, on considère un front reliant l'état de base trivial à la solution stationnaire stable A_+ dans le repère se déplaçant à la vitesse de groupe Q . Ce front peut être vu en régime absolument instable comme un front stationnaire capable de remonter l'écoulement vers l'amont jusqu'à une certaine distance Δx de l'entrée, tout en luttant contre l'advection.

Pour **un débit nul**, les vitesses de ce front v_f se calculent analytiquement [76]. La vitesse de front non linéaire du paquet d'ondes et son taux de croissance spatiale k_i sont obtenus en fonction des paramètres physiques réels de l'équation (4.1) :

$$\begin{aligned} v_f^L &= 2\sqrt{a\mu} \quad \text{pour} \quad \mu_1 < \mu < \frac{3c_1^2}{4c_2} \\ v_f^{NL} &= \frac{c_1\sqrt{a}}{\sqrt{3c_2}} \left[-1 + 2 \left(1 + 4\mu\frac{c_2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad \text{pour} \quad \mu > \frac{3c_1^2}{4c_2} \\ k_i^L &= -\sqrt{\frac{\mu}{a}} \\ k_i^{NL} &= -\sqrt{\frac{c_2}{3a}} A_+^2 \quad , \end{aligned} \quad (4.14)$$

où l'exposant L signifie que la sélection du front est linéaire comme dans le cas de la bifurcation supercritique où les non linéarités sont saturantes pour le système, et l'exposant NL indique au contraire que le front est sélectionné non linéairement. On retrouve bien le critère de van Saarloos et Hohenberg [77] qui stipule que si la vitesse non linéaire de l'aile du front existe et est supérieure à sa vitesse linéaire ($v_f^{NL} > v_f^L$) et si le module du nombre d'onde imaginaire (taux de croissance spatiale) non linéaire est supérieur à celui du front linéaire ($|k_i^{NL}| > |k_i^L|$), alors la dynamique du système est dominée par le front non linéaire, et le critère linéaire n'est plus approprié (figure 4.4).

Lorsque **le débit est non nul** ($Q \neq 0$), on définit une vitesse de front V_f dans le référentiel du laboratoire. Puisque l'écoulement se déplace à la vitesse de groupe

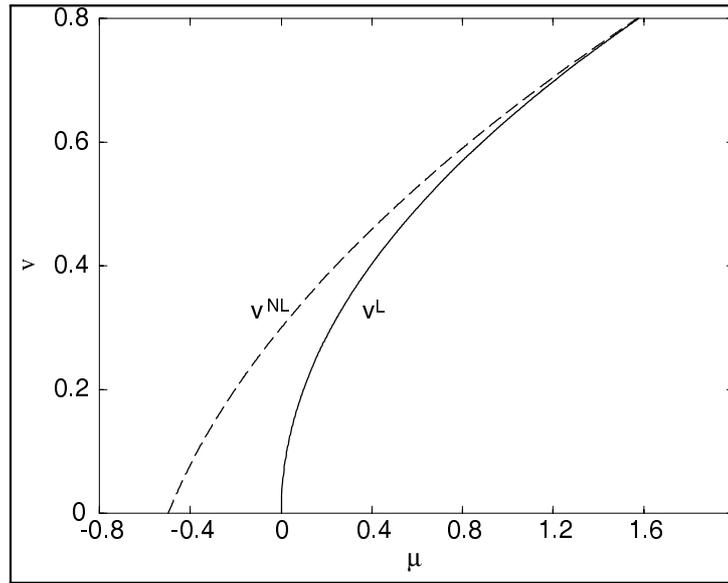


FIG. 4.4: Représentation de la zone non linéairement absolument instable dans le plan des paramètres (μ, v) . La vitesse de front non linéaire est supérieure à la vitesse de front linéaire conformément au critère de van Saarloos et Hohenberg.

Q , la vitesse de front dans le référentiel fixe est donc donnée par la relation :

$$V_f = v_f - Q \quad . \quad (4.15)$$

Cette vitesse correspond à la vitesse lente de l'aile du paquet d'ondes. Ainsi, lorsque $V_f < 0$, l'écoulement de base est non linéairement convectivement instable (*NLC*), alors que pour $V_f > 0$, l'instabilité est non linéairement absolument instable (*NLA*), et la branche stable A_+ envahit tout le domaine d'étude. Le seuil d'instabilité absolue non linéaire est donné par la relation $v_f = Q$, ce qui nous donne immédiatement la valeur du nombre de Rayleigh au seuil absolu :

$$\begin{aligned} \mu_A &= \mu_A^{NL} = \frac{3Q^2}{16a} + \frac{3}{16} \left(\frac{2c_1Q}{\sqrt{3ac_2}} - \frac{c_1^2}{c_2} \right) \quad \text{pour} \quad Q < Q_c = c_1 \sqrt{\frac{3a}{c_2}} \quad (4.16) \\ \mu_A &= \mu_A^L = \frac{Q^2}{4a} \quad \text{pour} \quad Q < Q_c = c_1 \sqrt{\frac{3a}{c_2}} \quad . \end{aligned}$$

Un seuil non linéaire existe dorénavant au-dessous du seuil linéaire, ceux-ci évoluent en croissant avec le paramètre de débit Q . Dans cette zone de paramètres, pour $Q < Q_c$, ce sont les effets non linéaires qui sont prédominants par rapport aux effets de l'écoulement à débit Q . Quand $Q > Q_c$, ce sont les effets de l'écoulement qui deviennent importants dans la dynamique par rapport aux non linéarités. Ces seuils coïncident en $Q = Q_c = c_1 \sqrt{\frac{3a}{c_2}}$. L'instabilité est non linéairement convectivement instable (*NLC*) pour $\mu_M < \mu < \mu^{NL}$ et non linéairement absolument instable

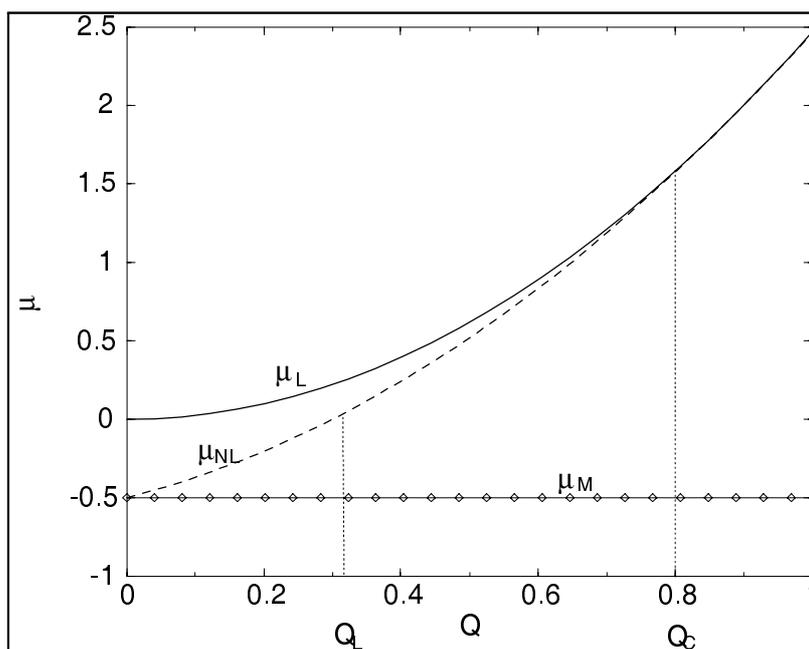


FIG. 4.5: Seuils absolus linéaires et non linéaires en fonction du débit Q . Au-dessous du seuil de Maxwell μ_M , l'état de conduction est non linéairement stable. La région pour laquelle $Q < Q_c$ est régie par le critère de stabilité non linéaire, l'état de conduction est non linéairement absolument instable pour $\mu > \mu_A^{NL}$. Pour $Q > Q_c$, le critère linéaire de stabilité est valable, l'état de base est absolument instable pour $\mu > \mu_A^L$. Le seuil absolu est égal au seuil critique linéaire quand $Q = Q_L$. $\psi = -5.5 \cdot 10^{-5}$.

(*NLA*) pour $\mu > \mu^{NL}$, l'écoulement est non linéairement stable en tout point situé au-dessous du seuil de Maxwell μ_M . La région où $Q > Q_c$ est dominée par le critère linéaire classique de stabilité, l'état de référence est stable lorsque $\mu < 0$ (i.e. pour $Ra < R_c$), il est linéairement convectivement instable pour $0 < \mu < \mu_A^L$ et absolument instable quand le paramètre de contrôle μ dépasse le seuil absolu linéaire noté ici μ_A^L . On remarque que, voir figure (4.5), le système peut être à la fois non linéairement absolument instable (*NLA*) et linéairement convectivement instable (*C*), puisque la vitesse de front non linéaire est supérieure à la vitesse linéaire.

4.3.2 Cycle d'hystérésis

a) Absence du débit ($Q = 0$)

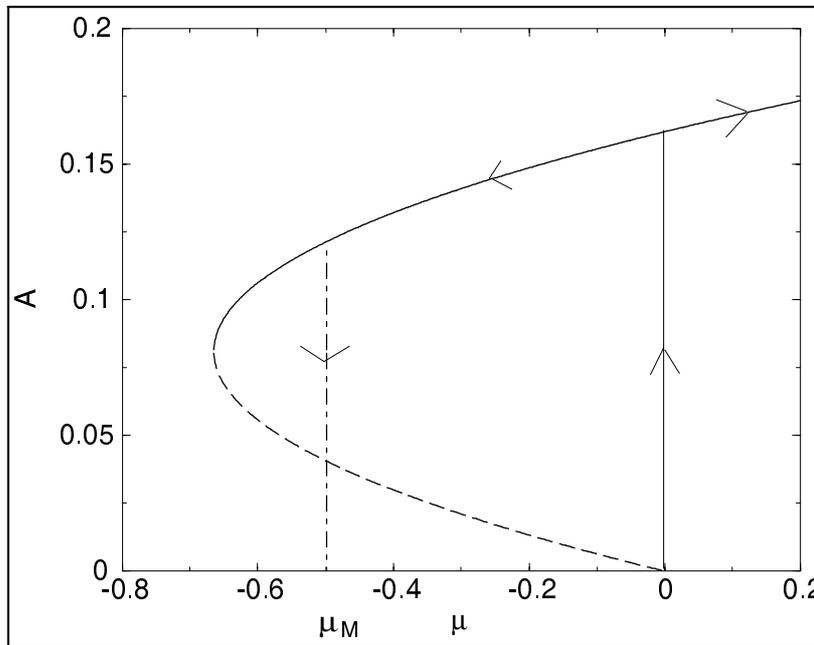


FIG. 4.6: Cycle d'hystérésis lorsque $Q = 0$ et $\psi = -5.5 \cdot 10^{-5}$.

Dans tout système subissant une bifurcation sous critique, apparaît un cycle d'hystérésis entre l'état non perturbé et le mode global non linéaire. Lorsque le paramètre de contrôle μ est augmenté, tel que $\mu < 0$, le système reste dans son état de conduction initial tant que la perturbation est petite. Une deuxième solution apparaît. Quand $\mu \geq 0$, la solution conductive devient linéairement instable et le système passe sur la branche supérieure stable. Si on décroît le paramètre de contrôle μ , le système reste sur la branche d'ondes progressives jusqu'au seuil de Maxwell μ_M où il repasse sur la solution stable A_0 . Ce phénomène d'hystérésis est présenté sur la figure (4.6).

b) Présence du débit ($Q \neq 0$)

On peut représenter le diagramme de bifurcation dans le plan des paramètres (A, μ) en fonction du débit Q . Ce dernier joue un rôle considérable sur la dynamique du système lorsqu'il est varié. En effet, si on est en présence d'une bifurcation souscritique, en faisant fluctuer le paramètre de contrôle μ , le système peut décrire un cycle d'hystérésis, c'est à dire que le système passe d'une branche stable à une autre. L'état de base peut bifurquer vers un autre état stationnaire non trivial, en l'occurrence la branche haute A_+ , lorsque le nombre de Rayleigh est augmenté. Ce passage s'effectue au seuil critique $Ra = R_c$. Lorsqu'on diminue le paramètre de contrôle μ , alors le système bifurque à nouveau sur la branche de l'état de base, mais en un autre point que précédemment ; $\mu = \mu_A^{NL}$. En présence du débit, il existe un régime d'instabilité convective dans lequel le système relaxe asymptotiquement vers son état de base. On note $Q_L = \frac{c_1 \sqrt{a}}{\sqrt{3c_2}}$ la valeur du débit pour laquelle le seuil absolu non linéaire s'annule ($\mu_A^{NL} = 0$). Lorsque $Q < Q_L$, la région de bistabilité s'étend de μ_A^{NL} à 0 ($Ra = R_c$). Ces valeurs dépendent du débit Q et sont représentées sur les figures (4.7, 4.8). Quand on augmente celui-ci jusqu'à la valeur $Q = Q_L$, le seuil absolu non linéaire s'annule correspondant à $Ra = R_c$, et par conséquent le cycle d'hystérésis disparaît (figure 4.8). Au-delà de cette valeur critique (Q_L), la région bistable n'existe plus désormais.

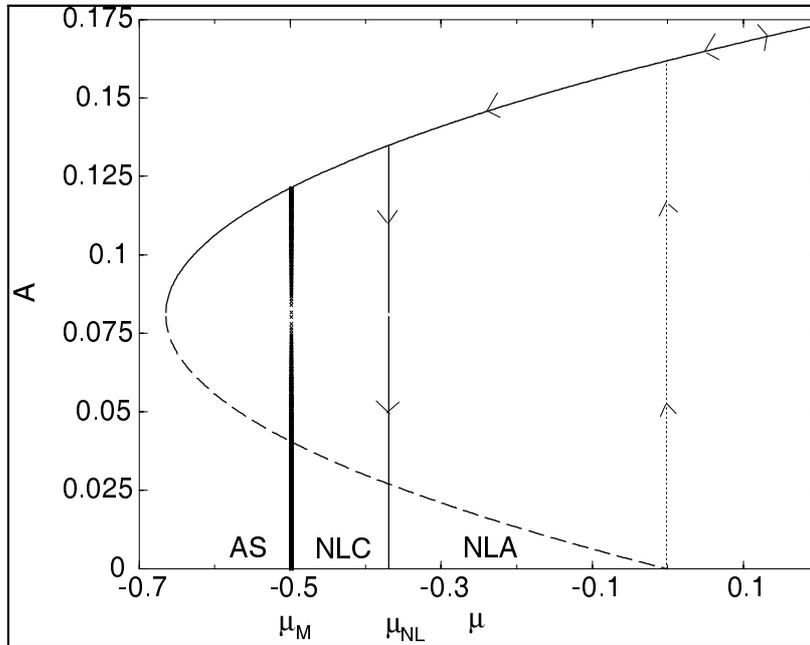


FIG. 4.7: Evolution de l'amplitude en fonction du paramètre de contrôle μ . Cycle d'hystérésis pour $Q = 0.1 < Q_L$. Les régions sont absolument stable (AS), non linéairement convectivement instable (NLC) et non linéairement absolument instable (NLA).

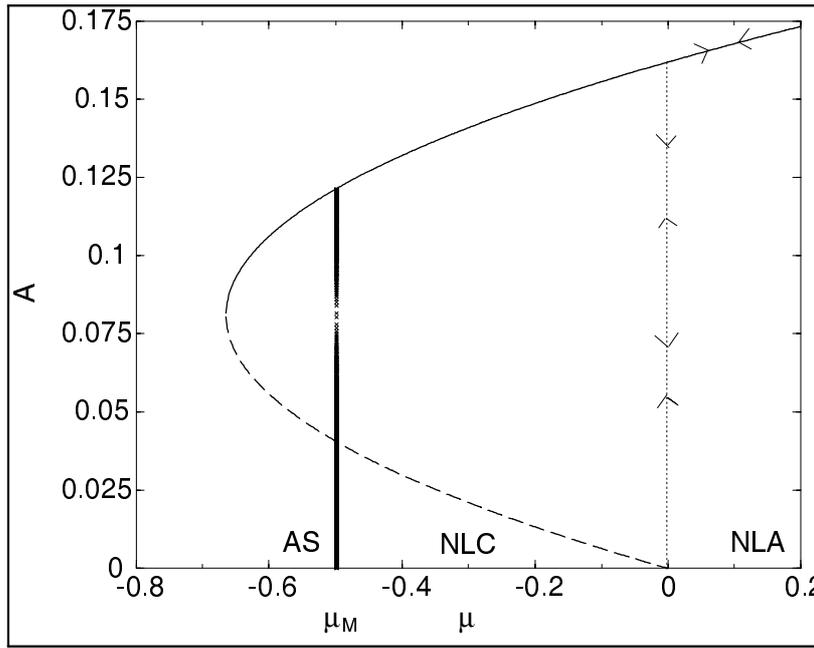


FIG. 4.8: Disparition du cycle d'hystérésis pour $Q = 2 > Q_L$.

En conclusion, l'effet du débit est de diminuer voire de faire disparaître le cycle d'hystérésis propre à toute bifurcation souscritique. On a montré que les fronts reliant l'état de base aux ondes progressives (rouleaux transversaux) sont régis soit par le critère linéaire, soit par les propriétés non linéaires, selon les valeurs des vitesses de front linéaire et non linéaire. Le seuil d'instabilité est non linéaire et inférieur au seuil linéaire; la dynamique du système au seuil est alors dominée par la propagation de fronts non linéaires.

4.3.3 Lois d'échelle et détermination de ψ

La loi d'échelle pour la longueur d'établissement du front n'est pas le même selon le type de bifurcation qui intervient dans le système. Quand $Q < Q_c$, le front est non linéairement sélectionné, i.e. pour un écoulement convectivement instable ou linéairement stable. Le mode non linéaire peut être assimilé, comme dans le cas d'une bifurcation supercritique, à un front bloqué par l'écoulement aval. Dans ce type de bifurcation, la distance Δx requise pour que l'amplitude atteigne la moitié de sa valeur saturée est proportionnelle à $\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ [25]. La croissance de modes globaux non linéaires est plus rapide que dans le cas où le front est sélectionné linéairement. Cette loi d'échelle fournissant la taille caractéristique du front reliant les solutions A_0 et A_+ pour $\varepsilon = \mu - \mu_A^{NL}$ est déterminée par une méthode asymptotique de développements raccordés [25]. Des expériences ont été réalisées récemment pour un écoulement cisailé entre un gaz et un liquide en cellule de Hele Shaw [35]. C'est la

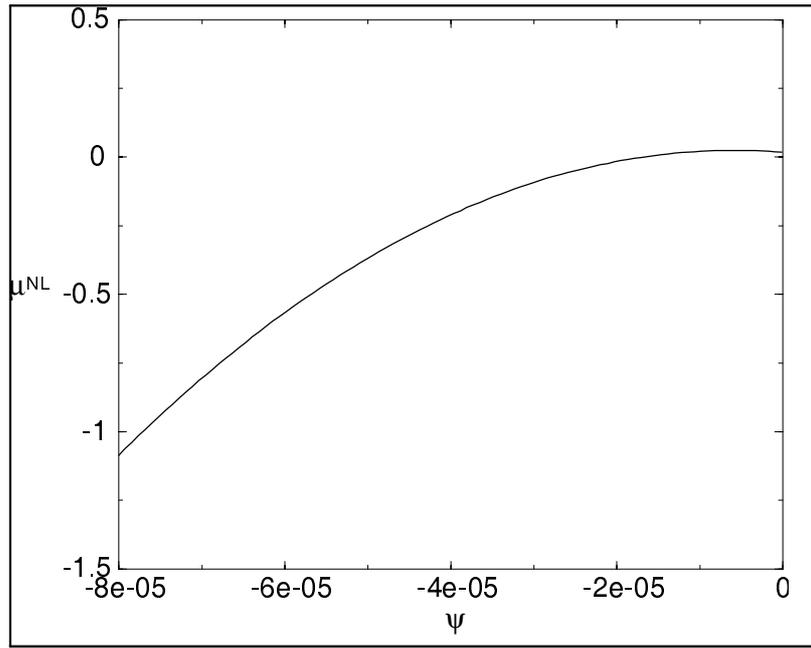


FIG. 4.9: Seuil non linéaire d'instabilité absolue en fonction de ψ pour $Q = 0.1$.

première expérience qui confirme les lois d'échelle de [25] dans le cas d'une bifurcation souscritique. Seules des expériences numériques avaient validé ces résultats asymptotiques lorsque le critère linéaire est valide. Les résultats de Gondret et al. [35] sont en parfait accord avec les résultats théoriques et la longueur d'établissement du front trouvée expérimentalement coïncide très bien avec la loi d'échelle. Dans ce cas, un régime non linéairement absolument instable apparaît au-dessous du seuil de transition linéaire C/A .

Jusqu'ici, on a proposé une méthode expérimentale de détermination du coefficient ψ lorsque la bifurcation est supercritique. Qu'advient-il lorsque les non-linéarités du troisième ordre sont déstabilisantes? Quand il existe une région d'hystérésis, les lois d'échelle deviennent différentes de celles étudiées dans le cas de la bifurcation supercritique. La position du front sélectionné non linéairement varie en $\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ où ε définit l'écart au seuil absolu non linéaire, $\varepsilon = \mu - \mu_A^{NL}$. La taille caractéristique du front joignant les deux états stables $A = 0$ et A_+ permet de donner des informations sur l'apparition des structures saturées. Si la taille de la cellule expérimentale est très grande $L \gg 1$, le mode global non linéaire s'installe dans le système pratiquement au seuil μ_A^{NL} près de la sortie. Par conséquent, la manifestation de ce front fournit la mesure directe du seuil μ_A^{NL} et en reportant la valeur mesurée sur la courbe théorique obtenue sur la figure (4.9), la détermination du coefficient ψ est alors possible.

4.4 Instabilités secondaires : cas d'une bifurcation souscritique

Les résultats de la section (4.2) sont valables lorsque la première bifurcation est supercritique, or il existe une région de paramètres dans notre problème où la bifurcation est souscritique. On s'intéresse alors à déterminer les régions d'instabilité selon leur nature; convective ou absolue comme dans le cas où la transition est supercritique et à étudier l'influence du débit sur celles ci. On reprend l'équation d'amplitude quintique dans le cas où la bifurcation est souscritique (4.1).

La solution stationnaire et homogène de (4.1) s'écrit :

$$A_0^2 = \frac{c_1}{2c_2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4(\mu - ak^2)c_2}{c_1^2}} \right) . \quad (4.17)$$

On procède pour l'analyse de stabilité linéaire comme dans le cas où la bifurcation est supercritique.

4.4.1 Instabilité convective d'Eckhaus

La solution stationnaire A_0 représente la branche physique. Elle existe pour des nombres d'onde tels que :

$$\mu = ak^2 - \frac{c_1^2}{4c_2} . \quad (4.18)$$

Ce seuil est le seuil d'existence des structures modulées.

Après calculs, le seuil convectif est donné par la relation suivante :

$$\mu_{conv} = 2ak^2 - \frac{c_1^2}{8c_2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{16ac_2k^2}{c_1^2}} \right) . \quad (4.19)$$

4.4.2 Instabilité absolue d'Eckhaus

Solution numérique

Rappelons que comme dans le cas supercritique (et dans le cas des instabilités primaires), le seuil absolu est atteint lorsque la vitesse de groupe s'annule. La condition nécessaire est donc :

$$\begin{aligned} D(\lambda, q_x) &= 0 \quad , \\ \partial\lambda/\partial q_x(\lambda, q_x) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \lambda &= (\mu + iq_x Q + A_0^2(2c_1 - 3c_2 A_0^2) - c_2(k^2 + q_x^2)) + \sqrt{4k^2 q_x^2 a^2 + A_0^4(c_1 - 2c_2 A_0^2)^2} \\ (iQ - 2aq_x) \sqrt{4k^2 q_x^2 a^2 + A_0^4(c_1 - 2c_2 A_0^2)^2} + 4a^2 k^2 q_x &= 0 \quad q_x \in \mathbb{C} \quad . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Solution analytique

Des calculs similaires à ceux introduits dans la section (4.2), pour un système subissant une bifurcation supercritique, ont été développés dans cette thèse. Nous étendons le travail de [8] à la nature convective et absolue de l'instabilité dans le régime sous critique. Ainsi, on obtient pour le seuil absolu par voie analytique :

$$\mu_{abs} = \mu_{conv} + bQ^{2/3} \quad , \quad (4.22)$$

$$\text{avec } b = -\frac{\sqrt{7}-2}{(3-\sqrt{7})^{1/3}} k^{4/3} \frac{c_1^2(1+C)}{c_1^2(1+C) + 4ac_2k^2} \text{ et } C = 1 + \frac{4(\mu - ak^2)c_2}{c_1^2} \quad .$$

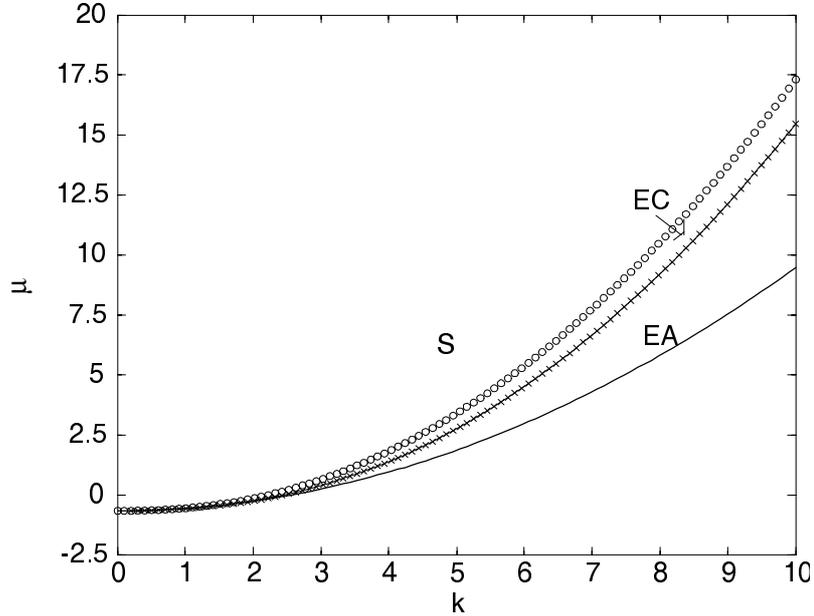


FIG. 4.10: Diagramme de stabilité pour l'instabilité d'Eckhaus dans le cas d'une bifurcation sous-critique avec $Q = 0.1$ et $\psi = -5.5 \cdot 10^{-5}$.

4.5 Conclusion

Une équation d'amplitude quintique a été obtenue près du seuil de la bifurcation sous-critique pour certains mélanges dont le rapport de séparation ψ appartient à un intervalle $\psi_{pc} < \psi < \psi_T$.

Les notions d'instabilité convective et absolue non linéaires sont introduites. Elles caractérisent la réponse du système à des perturbations initiales d'amplitude et d'extension finies. On montre que l'état conducteur peut être non linéairement absolument instable alors qu'il est linéairement convectivement instable voire stable. Ceci indique que le seuil d'instabilité est non linéaire et est situé au-dessous du seuil

linéaire. L'effet le plus surprenant concerne le cycle d'hystérésis. En effet, le débit est capable de le réduire, et même de l'annuler pour une valeur critique Q_c que l'on a déterminée.

Nous avons aussi obtenu des résultats nouveaux concernant la nature des instabilités d'Eckhaus lorsque la bifurcation est sous-critique.

Conclusion générale et perspectives

Les résultats obtenus dans les quatre chapitres sont synthétisés dans cette section et une extension possible de ces travaux est suggérée.

Ce travail apporte une contribution à la connaissance théorique des instabilités spatio-temporelles pouvant naître et se développer dans un mélange binaire confiné en milieu poreux chauffé par le bas et soumis à un écoulement horizontal. La formulation mathématique de ce problème repose sur la loi phénoménologique de Darcy pour décrire la filtration du mélange binaire dans le milieu poreux. On montre que ce système admet une solution respectant toutes les symétries du problème, appelée état conducteur. La stabilité de cet état est étudiée aussi bien par rapport à des perturbations étendues spatialement que par rapport à des perturbations localisées. Lorsque la condition de parois imperméables est respectée, le problème de stabilité linéaire est résolu par intégration numérique. Néanmoins, un développement de Galerkin à l'ordre 1 constitue une très bonne approximation des caractéristiques critiques de l'instabilité au seuil. En revanche, le modèle idéalisé reposant sur la condition de perméabilité des parois conduit à des solutions analytiques exactes. Une comparaison des résultats issus des deux modèles montre qu'il existe des différences qualitatives au voisinage du point de codimension deux ψ_{pc} et du comportement du nombre d'onde lorsque le rapport de séparation est positif, i.e. au-delà d'une certaine valeur de ψ , le nombre d'onde s'annule. Ce comportement est analogue à celui observé dans les mélanges binaires en milieu fluide. Au seuil critique, on montre que l'effet de l'écoulement horizontal est réduit simplement à déplacer les fréquences d'oscillation du système d'une quantité proportionnelle à la vitesse débitante. Aucune direction du nombre d'onde n'étant privilégiée par la présence de l'écoulement, toute structure convective tridimensionnelle est susceptible d'apparaître dans le système. Ce résultat est en désaccord avec les observations expérimentales de M. Combarous [22] concernant les fluides purs ($\psi = 0$) où la valeur prise par le débit filtrant est primordiale dans la sélection des rouleaux transversaux propagatifs ou des rouleaux longitudinaux fixes.

Sur le plan linéaire, l'idée d'analyser le comportement spatio-temporel de l'état

conductif en fonction du bruit d'entrée est associée au changement de nature des instabilités. Ainsi, les notions d'instabilité convective et absolue sont définies par la réponse du système à une impulsion initiale localisée. Si le système amplifie le bruit extérieur, alors l'écoulement est convectivement instable. Par contre, il est absolument instable lorsqu'il se comporte comme un oscillateur auto-entretenu. Cette distinction a permis d'apporter des résultats importants au sujet des phénomènes de déstabilisation de la solution de conduction. Au seuil absolu, le système sélectionne parmi une infinité de modes instables, les ondes progressives bidimensionnelles se propageant dans la direction de l'écoulement. Lorsque les rouleaux se forment par bifurcation de Hopf, il existe une valeur critique du débit où la vitesse de groupe s'annule, pour laquelle le régime convectivement instable disparaît.

L'amplification des perturbations en régime convectif est temporaire en absence de bruit continu. Cependant, dans une expérience, le bruit est toujours présent et entretient l'amplification des structures macroscopiques. Le régime convectif est caractérisé par un spectre de fréquence large, tandis qu'un pic de fréquence est la signature d'une instabilité absolue. Cette transition observable expérimentalement mène à la détermination du coefficient de Soret, via les fréquences absolues théoriques présentées au chapitre 2.

Ces notions linéaires ne décrivent pas l'état spatio-temporel de l'état de convection au-dessus du seuil de bifurcation.

Lorsque $\psi < \psi_{pc}$, la bifurcation est toujours supercritique et les ondes qui se forment sont des ondes progressives ; les ondes stationnaires ne pouvant pas s'établir comme dans le cas du problème sans débit. Pour étudier la dynamique faiblement non linéaire de l'état de base, (la solution de conduction pure), on est conduit à déterminer près du seuil une équation non linéaire régissant l'évolution spatio-temporelle de l'amplitude des rouleaux de convection. Cette équation du type Ginzburg-Landau complexe décrit correctement la bifurcation du régime de conduction pure vers le régime convectif. Elle est calculée à la fois pour des conditions aux limites de parois perméables et imperméables, ce qui constitue l'originalité et l'intérêt évident pour des comparaisons avec l'expérience. Au seuil d'instabilité absolue, deux modes bidimensionnels possédant des fréquences différentes apparaissent linéairement. En fait, seul le premier mode existe réellement ; la sélection des modes s'opère non linéairement. La prise en compte de ces non linéarités au voisinage du seuil montre l'existence d'un mode global non linéaire. En effet, les rouleaux transversaux convectifs se déplacent dans le sens de l'écoulement mais la structure spatiale de l'amplitude de ces rouleaux est stationnaire et saturée. La solution de l'équation d'amplitude avec des conditions entrée/sortie imposant la conduction pure est obtenue numériquement. Ce mode global non linéaire peut être vu comme un front qui remonte l'écoulement (régime absolu) et qui s'arrête à une certaine distance de l'entrée. L'un

des objectifs a été de comparer cette longueur d'établissement du front reliant l'état de conduction à l'entrée à un état d'ondes progressives d'amplitude saturée avec la longueur obtenue par des méthodes de perturbations singulières. En effet, Couairon et Chomaz ont développé une loi d'échelle pour déterminer cette longueur en fonction de la distance au seuil absolu ε , qui est en bon accord avec nos résultats d'intégration numérique de l'équation d'amplitude. La longueur d'établissement du front ainsi que le seuil linéaire d'instabilité absolue peuvent être utilisés pour déterminer expérimentalement le coefficient de Soret.

Les rouleaux de convection qui se sont créés, sont à leur tour pris comme nouvel état de base pour une étude de stabilité en termes de régime convectif et absolu, par rapport à des perturbations longitudinales engendrant des instabilités d'Eckhaus bidimensionnelles et transversales à l'écoulement générant des instabilités ZigZag tridimensionnelles. Le débit a pour effet de créer une zone d'instabilité secondaire convective quelle que soit la valeur du coefficient de Soret. Par conséquent la zone d'existence des structures asymptotiquement stables est agrandie. Les instabilités de Benjamin-Feir sont absentes dans le système quelque soit le type de parois. Lorsque le débit est nul, les ondes peuvent être stationnaires et des instabilités de Benjamin-Feir se forment pour certains mélanges. Le débit est donc capable de sélectionner les structures.

L'équation d'amplitude obtenue près du seuil renseigne sur la nature de la bifurcation. Lorsque la bifurcation est sous-critique, le critère linéaire de la transition convectif/absolu peut s'avérer inadéquat. On montre qu'un seuil non linéaire existe au-dessous du seuil linéaire et que la présence du débit entraîne une réduction jusqu'à la disparition du cycle d'hystérésis, pour une valeur critique du débit.

Dans le cas d'une transition non linéaire, une longueur caractéristique du mode global est obtenue en $\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Si la cellule expérimentale est grande, le mode global non linéaire prend place au voisinage de la sortie. Le seuil absolu non linéaire est ainsi mesuré. L'obtention de la valeur du coefficient de Soret se fait à l'aide du seuil absolu théorique.

De plus, le diagramme de stabilité concernant l'instabilité d'Eckhaus est déterminé dans le cas d'une transition souscritique.

Pour s'affranchir de l'hypothèse du faible écart au seuil, des simulations numériques du problème aux dérivées partielles sont envisagées pour établir une comparaison avec les résultats analytiques de cette thèse d'une part et étudier la dynamique fortement non linéaire du système d'autre part. Dans ce travail, nous avons utilisé la loi de Darcy sous sa forme la plus simple comme équation de quantité de mouvement. Cependant, elle permet de retrouver les résultats expérimentaux en fluide pur de Combarous [23]. Ceux-ci montrent une transition à un débit plus élevé des rouleaux transversaux aux rouleaux longitudinaux. Cette transition nécessite de te-

nir compte des effets d'inertie de Forchheimer dans la loi de Darcy et du rapport de forme du milieu poreux. Un travail de thèse sur ce sujet vient de commencer au laboratoire. De nombreux travaux théoriques et numériques sont possibles sur ce sujet et peuvent avoir des applications technologiques notamment dans le domaine du génie pétrolier où un mélange eau-pétrole dans un sous sol est considéré.

Bibliographie

- [1] K.L. Babcock, G. Ahlers and D.S. Cannell, *Noise amplification in open Taylor-Couette flow*, Phys. Rev. E, 50, No 5, 3670-3692, (1994).
- [2] Bear, *Dynamics of fluid in porous media*, New York, Elsevier, (1972).
- [3] C. Beckermann and R. Viscanta, *Forced convection boundary layer flow and heat transfer along a flat plate embedded in a porous medium*, Int. J. of Heat and Mass Transfer 30, No 7, 1547-1551, (1987).
- [4] T.B. Benjamin and J.E. Feir, *The disintegration of wave trains on deep water, part 1 theory*, J. Fluid Mech., 27, 417-430, (1967).
- [5] M.M. Bou-Ali, O. Ecenarro, J.A. Madariaga, C.M. Santamaria and J.J.Valencia, *Thermogravitational measurement of the Soret coefficient of liquid mixtures*, J. Phys. Condens. Matter 10, 3321-3331, (1998).
- [6] H.R. Brand and V. Steinberg, *Nonlinear effects in the convective instability of a binary mixture in a porous medium near threshold*, Phys. Letters, 93 A, No 7, (1983).
- [7] H.R. Brand and V. Steinberg, *Convective instabilities in binary mixtures in a porous medium*, Physica A, 119, 327-338, (1983).
- [8] H.R. Brand, R.J. Deissler and G. Ahlers, *Simple model for the Benard instability with horizontal flow near threshold*, Phys. Rev. A 43, 4462-4268, (1991).
- [9] H.R. Brand et V. Steinberg, *Analog of the Benjamin-Feir near the onset of convection in binary fluid mixtures*, Phys. Rev. A (Rapid Comm.), 29, No 4, 2303-2304, (1984).
- [10] H.R. Brand and R.J. Deissler, *Eckhaus and Benjamin-Feir instabilities near a weakly inverted bifurcation*, Phys. Rev. A, 45, No 6, 3732-3736, (1992).
- [11] L. Brevdo, *Three-dimensional absolute and convective instabilities, and spatially amplifying waves in parallel shear flows*, Z. Angew. Math. Phys., 42, 911-942, (1991).
- [12] R.J. Briggs, *Electron-Stream Interaction with Plasmas*, MIT Press, (1964).

- [13] H.C. Brinkman, *A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles*, Applied Sciences Research A1, 27-34, (1947).
- [14] P. Büchel, M. Lücke, D. Roth and R. Schmitz, *Pattern selection in the absolutely unstable regime as a nonlinear eigenvalue problem : Taylor vortices in axial flow*, Phys. Rev. E, 53, 4764-4777, (1996).
- [15] P. Büchel, M. Lücke, *Influence of through-flow on binary fluid convection*, Phys. Rev. E., 61, No 4, 3793-3810, (2000).
- [16] D.R. Caldwell, *Experimental studies on the onset of thermohaline convection*, J. Fluid. Mech., 64, 347-367, (1974).
- [17] P. Carrière and P.A. Monkewitz, *Convective versus absolute instability in mixed Rayleigh-Bénard-Poiseuille convection*, J. Fluid. Mech., 384, 243-262, (1999).
- [18] G. Chauveteau, *Essai sur la loi de Darcy*, Thèse, Université de Toulouse, (1965).
- [19] G. Chavepeyer and J.K. Platten, *Simulation numérique 2D de la séparation dans une colonne de thermogravitation et comparaison avec la théorie de Furry-Jones-Onsager-Majumdar*, Entropie, 198, 25, (1996).
- [20] J.M. Chomaz, A. Couairon and S. Julien, *Absolute and convective nature of the Eckhaus and Zigzag instability with throughflow*, Phys. Fluid. 11, 3369-3373, (1999).
- [21] K. Clusius and G. Dickel, *Das Trennröhrverfahren bei Flüssigkeiten*, Naturwiss 27, 148-149, (1939).
- [22] M. Combarous, *Convection naturelle et convection mixte en milieu poreux*, thèse d'état, Faculté des sciences de l'Université de Paris, (1970).
- [23] M. Combarous and S.A. Bories, *Hydrothermal convection in saturated porous media*, Adv. Hydrosci. 10, Academic Press, 231-307, (1975).
- [24] A. Couairon and J.M. Chomaz, *Primary and secondary nonlinear global instability*, Physica D, 132, 428-456, (1999).
- [25] A. Couairon and J.M. Chomaz, *Absolute and convective instabilities, front velocities and global modes in nonlinear systems*, Physica D, 108, 236-276, (1997).
- [26] A. Couairon and J.M. Chomaz, *Global instability in fully nonlinear systems*, Phys. Rev. Lett., 77, No 19, 4015-4018, (1996).
- [27] M.C. Cross and K. Kim, *Existence of a codimension 2 point at the threshold of binary fluid convection between rigid impermeable boundaries*, Phys. Rev. A, 38, 529, (1988).
- [28] F. Dufour and M.C. Néel, *Numerical study of instability in a horizontal porous channel with bottom heating and forced horizontal flow*, Phys. Fluids, 10, No 9, 2198-2207, (1998).

- [29] F. Dufour, *Etude analytique et numérique de la convection entraînée en milieu poreux*, Thèse de Doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse III, (1998).
- [30] V. Eckhaus, *Studies in nonlinear stability theory*, Springer Tracts in natural Philosophy, Vol. 6, (1965).
- [31] M. Firdaouss, J.L. Guermond and P. Le Quéré, *Nonlinear corrections to Darcy's law at low Reynolds numbers*, J. Fluid. Mech., 343, 331-350, (1997).
- [32] F. Forchheimer, *Wasssergnengung durch boden*, Z. Ver. Deutch Ing. 45, 1782-1788, (1901).
- [33] M. Gaster, *The development of three-dimensional wave packets in a boundary layer*, J. Fluid Mech., 32, 173-184, (1968).
- [34] R.C. Givler and S.A. Altobelli, *A determination of the effective viscosity for the Brinkman-Forchheimer flow model*, J. Fluid. Mech., 258, 355-370, (1994).
- [35] P. Gondret, P. Ern, L. Meignin and M. Rabaud, *Experimental evidence of a nonlinear transition from convective to absolute instability*, Phys. Rev. Lett., 82, No 7, 1442-1445, (1999).
- [36] L.S. Hall and W. Heckrotte, *Instabilities : Convective versus Absolute*, Phys. Rev., 166, No 1, (1968).
- [37] R. Heinrichs, G. Ahlers and D.S. Cannell, *Traveling waves and spatial variation in the convection of a binary mixture*, Phys. Rev. A, **35**, 6, 2761-2764, (1987).
- [38] C.W. Horton and F.T. Rogers, *Convection currents in a porous medium*, J. Appl. Phys., 16, 367-370, (1945).
- [39] P. Huerre and P.A. Monkewitz, *Absolute and convective instabilities in free shear layers*, J. Fluid Mech., 159, 151-168, (1985).
- [40] P. Huerre and P.A. Monkewitz, *Local and global instabilities in spatially developing flows*, Ann. Rev. Fluid Mech., 22, 473-537, (1990).
- [41] B. Huke, M. Lücke, P. Büchel and Ch. Jung, *Stability boundaries of roll and square convection in binary fluid mixtures with positive separation ratio*, J. Fluid Mech., 408, 121-147, (2000).
- [42] A. Joulin and M.N. Ouarzazi, *Convection mixte d'un mélange binaire en milieu poreux*, C. R. Acad. Sci., 328, Série IIb, 311-316, (2000).
- [43] A. Joulin and M.N. Ouarzazi, *Nature des instabilités primaires et secondaires d'un mélange binaire en convection entraînée*, Rencontre du Non-Linéaire 2000, 105, Paris Onze Editions Orsay, (2000).
- [44] M.N. Ouarzazi, A. Joulin, P.A. Bois and J.K. Platten, *Soret effect and mixed convection in porous media*, Lecture Notes in Physics, 4th Int. Meeting of Thermodiffusion (Allemagne Sept 2000), à paraître.

- [45] A. Joulin, M.N. Ouarzazi et P.A. Bois, *Instabilités spatio-temporelles d'un mélange binaire en convection entraînée dans un milieu poreux et détermination du coefficient de Soret*, XV^e Congrès français de Mécanique, Nancy, (2001).
- [46] C. Jung, M. Lücke and P. Büchel, *Influence of through-flow on linear pattern formation properties in binary mixture convection*, Phys. Rev. E, 54, No 2, 1510-1529, (1996).
- [47] P. Kolodner, H. Williams and C. Moe, *Optical measurement of the Soret coefficient of ethanol/water solutions*, J. Chem. Phys. 88, No 11, 6512-6524, (1988).
- [48] L. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, London, Pergamon, (1959).
- [49] E.R. Lapwood, *Convection of a fluid in a porous medium*, Proc. Cambridge Phil. Soc., 44, 508-528, (1948).
- [50] O. Lhost and J.K. Platten, *Transitions between steady states, traveling waves and modulated waves in the system water-isopropanol heated from below*, Phys Rev. A, 38, 3147-3150, (1988).
- [51] O. Lhost, *Etude de la convection libre induite par effet Soret*, Thèse de Doctorat de l'Université de Mons-Hainaut, (1990).
- [52] S.J. Linz and M. Lücke, *Convection in binary mixtures : A Galerkin model with impermeable boundary conditions*, Phys.Rev. A, 35, No 9, 3997-4000, (1987).
- [53] J.M. Luijkx, J.K. Platten and J.C. Legros, *On the existence of thermoconvective rolls, transverse to a superimposed mean Poiseuille flow*, Int. J. Heat Mass Transfer, 24, 803-817, (1981).
- [54] P. Manneville, *Structures dissipatives, chaos et turbulence*, Collection Aléa-Saclay, Gif-sur-Yvette, (1991).
- [55] C.C. Mei and J.L. Auriault, *The effect of weak inertia on flow through a porous medium*, J. Fluid. Mech., 222, 647-663, (1991).
- [56] H. W. Müller, M. Lücke and M. Kamps, *Convective patterns in horizontal flow*, Europhys. Lett., 10, 451, (1989).
- [57] H.W. Müller, M. Lücke and M. Kamps, *Transversal convection patterns in horizontal shear flow*, Phys. Rev. A, 45, No 6, 3714, (1992).
- [58] H.W. Müller and M. Tveitereid, *Absolute and convective nature of the Eckhaus and Zigzag instability*, Phys. Rev. Lett., 74, No 9, 1582-1585, (1995).
- [59] M. Muskat, *The flow of homogeneous fluids through porous media*, The Maple Press Company, York, (1946).
- [60] A.C. Newell and J.A. Whitehead, *Finite bandwidth, finite amplitude convection*, J. Fluid. Mech. 38, 279-303, (1969)

- [61] X. Nicolas, A. Mojtabi and J.K. Platten, *Two dimensional numerical analysis of the Poiseuille-Bénard flow in a rectangular channel heated from below*, Phys. Fluids, 9, 337-348, (1997).
- [62] X. Nicolas, J.M. Luijkx et J.K. Platten, *Linear stability of mixed convection flows in horizontal rectangular channels of finite transversal extension heated from below*, Int. J. Heat Mass Transfer, 43, 589-610, (2000).
- [63] D.A. Nield and A. Bejan, *Convection in porous media*, Springer-Verlag, (1992).
- [64] M.N. Ouarzazi, P.A. Bois and M. Taki, *Nonlinear interaction of convective instabilities and temporal chaos of a fluid mixture in a porous medium*, Eur. J. Mech. B/Fluids, 13, No 4, 423-438, (1994).
- [65] M.N. Ouarzazi, and P.A. Bois, *Convective instability of a fluid mixture in a porous medium with time-dependent temperature gradient*, Eur. J. Mech., B/Fluids, 13, 3, 275-298, (1994).
- [66] M.T. Ouazzani, J.K. Platten, H.W. Müller and M. Lücke, *Etude de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes-III*, Int. J. Heat and Mass Transfer, 38, No 5, 875-886, (1995).
- [67] J.K. Platten and J.C. Legros, *Convection in liquids*, Springer Verlag, New York, (1984).
- [68] J.K. Platten, J.F. Dutrieux et G. Chavepeyer, *Evaluation du coefficient Soret par couplage convectif*, XV^e Congrès français de Mécanique, Nancy, (2001).
- [69] M.R.E. Proctor, S.M. Tobias and E. Knobloch, *Noise-sustained structures due to convective instability in finite domains*, Physica D, 145, 191-206, (2000).
- [70] E. Sanchez-Palencia, *Non homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics, Springer Verlag (1980).
- [71] W. Schöpf and W. Zimmermann, *Convection in binary fluids : Amplitude equations, codimension-2 bifurcation, and thermal fluctuations*, Phys. Rev. E, 47, No 3, 1739-1764, (1993).
- [72] C. Soret, *Influence de la température sur la distribution des sels dans leurs solutions*, C. R. Acad. Sci., 91, 289-291, (1880).
- [73] C.M. Surko and P. Kolodner, *Oscillatory traveling-wave convection in a finite container*, Phys. Rev. Lett., 58, 20, (1987).
- [74] L. Tartar, *Appendix of Non homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics, Springer Verlag, (1980).
- [75] R.Q. Twiss, *Propagation in electronion streams*, Phys. Rev., 88, 1392-1407, (1952).

- [76] W. van Saarloos, *Front propagation into unstable states, II Linear versus non-linear marginal stability and rate of convergence*, Phys. Rev. A, 39, No 12, 6367-6390, (1989).
- [77] W. van Saarloos and P.C. Hohenberg, *Fronts, pulses and sinks in generalized complex Ginzburg-Landau equations*, Physica D, 14, 303, (1992).
- [78] S. Van Vaerenbergh and J.C. Legros, *Soret coefficients of organic solutions measured in the microgravity SCM experiment and by the flow and Benard cells*, J. Phys. Chem. B., 102, 4426, (1998).
- [79] K.J. Zhang, M.E. Briggs, R.W. Gammon and J.V. Sengers, *Optical measurement of the Soret coefficient and the diffusion coefficient of liquid mixtures*, J. Chem. Phys. 104, No 17, 6881-6892 (1996).
- [80] B.J.A Zielinska and H.R. Brand, *Exact solution of the linear stability problem for the onset of convection in binary fluid mixtures*, Phys. Rev. A, 35, 4349-4353, (1987).

Annexe A

Détermination d'équations d'amplitude

A.1 Parois perméables

A.1.1 Cas $\psi > \psi_{pc}$

Cette annexe présente la détermination des équations d'amplitude utilisées aux chapitres 3 et 4. Elles décrivent la dynamique spatio-temporelle du système au voisinage du seuil de la première bifurcation. Le système (1.17) avec $Da = 0$ des équations du mouvement est précisément :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ \Delta W - (1 + \psi)\Delta_h \theta - \psi \Delta_h \xi &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + Q \frac{\partial \theta}{\partial x} + \vec{u} \cdot \nabla \theta - \Delta \theta - RaW &= 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + Q \frac{\partial \xi}{\partial x} + \vec{u} \cdot \nabla \xi - \Lambda \Delta \xi + \Delta \theta &= 0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Les trois dernières équations de (A.1) peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$(L' \partial_t + L(Ra))V = N \tag{A.2}$$

avec :

$$L' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où le vecteur $V = (W, \theta, \xi)^T$ avec W la composante verticale de la vitesse, θ désigne la perturbation de la température et $\xi = C - \theta$, avec C la perturbation de la

concentration. La notation T représente la transposée. L est l'opérateur **linéaire** :

$$L = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) & (1 + \psi) \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \psi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -Ra & iQ \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) & 0 \\ 0 & -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) & iQ \frac{\partial}{\partial x} + \Lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \end{pmatrix}$$

N est l'opérateur **non linéaire** :

$$N = \begin{pmatrix} 0 \\ -\vec{u} \cdot \nabla \theta \\ -\vec{u} \cdot \nabla \xi \end{pmatrix}$$

On sait d'après l'étude linéaire menée au chapitre deux que pour $Ra = R_c$, V présente une bifurcation. Ce vecteur V pourra s'écrire dans un voisinage de la bifurcation :

$$V^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{R_c}{k_c^2 + \pi^2} \\ \frac{R_c}{\Lambda(k_c^2 + \pi^2)} \end{pmatrix} A e^{i(k_c x - ik_c Q t)} \sin(\pi z) + C.C. + \dots$$

où $e^{i(k_c x - ik_c Q t)} \sin(\pi z)$ sont les modes propres marginaux, les points de suspension représentent des corrections d'ordre supérieur, et A est l'amplitude dont l'évolution est donnée par la forme normale de la bifurcation. Comme cette dernière est un développement asymptotique et que ce sont les ordres les plus bas qui dominent la dynamique, on ne considère que la partie pertinente de la forme normale, c'est à dire celle regroupant les termes d'ordre minimal. L'équation d'amplitude cherchée est donc écrite à un ordre donné, ce qui implique une relation entre l'ordre de grandeur de $Ra - R_c$ et celui de l'amplitude A . La méthode consiste à introduire un petit paramètre ε qui mesure les ordres de grandeur, et à développer V , le paramètre Ra , ainsi que les variables de temps et d'espace, en fonction de ε . On pose donc :

$$\begin{cases} Ra = R_c + \varepsilon^2 R_2 \\ X = \varepsilon x \\ T_1 = \varepsilon t \quad \text{et} \quad T_2 = \varepsilon^2 t \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

où on suppose les T_i indépendants les uns des autres ainsi que X et x . Ce qui conduit alors aux dérivées partielles temporelles et spatiales :

$$\begin{cases} \partial_t = \partial_t + \varepsilon \partial_{T_1} + \varepsilon^2 \partial_{T_2} \\ \partial_x = \partial_x + \varepsilon \partial_X \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Ces transformations consistent à séparer les ordres de grandeur temporels et spatiaux auxquels interviennent les divers phénomènes.

Lorsque l'état de conduction perd sa stabilité i.e. $Ra = R_c$, le taux d'accroissement temporel de certains modes diverge comme $\frac{1}{Ra - R_c}$. Cet accroissement temporel linéaire de l'instabilité est compensé par les termes non linéaires d'ordre minimal dans l'équation d'amplitude. Dans le cas d'une bifurcation sous critique, la méthode consiste à développer la solution V en $(Ra - R_c)^{1/4}$, (i.e. $(Ra - R_c) A \sim A^5$) alors que dans le cas d'une bifurcation supercritique, le développement asymptotique de V est en $(Ra - R_c)^{1/2}$, (i.e. $(Ra - R_c) A \sim A^3$). Comme on s'intéresse au premier cas, on pose :

$$V = \varepsilon^{1/2} V^{(1/2)} + \varepsilon^1 V^{(1)} + \varepsilon^{3/2} V^{(3/2)} + \varepsilon^2 V^{(2)} + \varepsilon^{5/2} V^{(5/2)} + \dots \quad (\text{A.5})$$

En remplaçant le développement (A.5) et les relations (A.3) et (A.4) dans le système (A.1), et en identifiant les coefficients de même puissance en ε , le système s'écrit sous la forme d'une série de problèmes linéaires :

$$\begin{aligned} (L'\partial_t + L_0) V^{(1/2)} &= 0 = SM_{1/2} && O(\varepsilon^{1/2}) \\ (L'\partial_t + L_0) V^{(1)} &= N^{(1)} = SM_1 && O(\varepsilon^1) \\ (L'\partial_t + L_0) V^{(3/2)} &= -L'\partial_{T_1} V^{(1/2)} + N^{(3/2)} = SM_{3/2} && O(\varepsilon^{3/2}) \\ (L'\partial_t + L_0) V^{(2)} &= -L'\partial_{T_1} V^{(1)} + N^{(2)} = SM_2 && O(\varepsilon^2) \\ (L'\partial_t + L_0) V^{(5/2)} &= -L'\partial_{T_1} V^{(3/2)} - L'\partial_{T_2} V^{(1/2)} + L_2 V^{(1/2)} + N^{(5/2)} = SM_{5/2} && O(\varepsilon^{5/2}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

où L_0 est l'opérateur linéaire pour $Ra = R_c$ et $k = k_c$. L_2 est l'opérateur linéaire défini par :

$$L_2 = \begin{pmatrix} -\partial_X^2 & (1 + \psi) \partial_X^2 & \psi \partial_X^2 \\ R_2 & \partial_X^2 & 0 \\ 0 & -\partial_X^2 & \Lambda \partial_X^2 \end{pmatrix}$$

$N^{(1)}$, $N^{(3/2)}$, $N^{(2)}$ et $N^{(5/2)}$ sont des termes non linéaires et les SM_n représentent les seconds membres.

Les équations (A.6) peuvent alors s'écrire comme suit :

$$(L'\partial_t + L_0) V^{(n)} = SM_n$$

Ces équations n'ont de solution que si le second membre SM_n est orthogonal au noyau de l'opérateur adjoint $(L'\partial_t + L_0)^\dagger$. Cette condition de compatibilité ou

alternative de Fredholm s'écrit :

$$\langle V_p, SM_n \rangle = 0 \quad (\text{A.7})$$

où V_p est le vecteur propre qui engendre $\ker(L'\partial_t + L_0)^\dagger$ et \langle, \rangle est le produit scalaire dans \mathbb{L}_2 . La condition (A.7) entraîne l'existence de $V^{(n)}$, mais pas son unicité. On impose alors une condition d'orthogonalité des solutions d'ordres successifs avec $V^{(1/2)}$:

$$\langle V^{(n)}, V^{(1/2)} \rangle = 0$$

En suivant cette démarche, on résoud successivement les équations (A.6) à chaque ordre.

- À l'ordre $(\varepsilon^{(1/2)})$; il vient :

$$V^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{R_c}{k_c^2 + \pi^2} \\ \frac{R_c}{\Lambda(k_c^2 + \pi^2)} \end{pmatrix} A(X, T_1, T_2) e^{i(k_c x - k_c Q t)} \sin(\pi z) + C.C.$$

où $A(X, T_1, T_2)$ est l'amplitude de la solution. Elle dépend des variables lentes en espace et en temps.

- À l'ordre $(\varepsilon^{(1)})$;

La condition de solvabilité à l'ordre (ε^1) est automatiquement satisfaite. La condition d'orthogonalité $\langle V^{(1/2)}, V^{(1)} \rangle = 0$ mène aux expressions, dans lesquelles on a remplacé k_c par sa valeur ($k_c = \pi$) :

$$V^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{R_c}{4\pi^3} \\ \frac{R_c(1 + \Lambda)}{4\pi^3 \Lambda^2} \end{pmatrix} |A|^2 \sin(2\pi z)$$

- À l'ordre $(\varepsilon^{(3/2)})$;

L'alternative de Fredholm à l'ordre $(\varepsilon^{(3/2)})$ conduit à l'équation non linéaire d'ordre 3 suivante ¹ :

$$\partial_{T_1} A + Q \partial_X A = - \left(\frac{\psi(1 + \Lambda) + \Lambda^2(\psi + \Lambda\psi + \Lambda)}{\Lambda(\psi + \Lambda(\psi + \Lambda\psi + \Lambda))} \right) A|A|^2 \quad (\text{A.8})$$

$$\text{Posons } c_1 = - \frac{\psi(1 + \Lambda) + \Lambda^2(\psi + \Lambda\psi + \Lambda)}{\Lambda(\psi + \Lambda(\psi + \Lambda\psi + \Lambda))}$$

¹On remarque que le coefficient c_1 lié au terme cubique est positif du fait que le rapport de séparation ψ est tel que $\psi_{pc} < \psi < \psi_T$ (bifurcation sous-critique). Il est négatif dans le cas d'une bifurcation supercritique.

L'équation de compatibilité vérifiée, $(L'\partial_t + L_0) V^{(3/2)} = -L'\partial_{T_1} V^{(1/2)} + N^{(3/2)}$ admet une solution non triviale $V^{(3/2)}$:

$$V^{(3/2)} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\pi} \frac{\partial A}{\partial X} \sin(\pi z) e^{i(k_c x - k_c Q t)} + C.C. \\ (a \sin(\pi z) + b \sin(3\pi z)) A |A|^2 e^{i(k_c x - \omega_c t)} + C.C. \\ (c \sin(\pi z) + d \sin(3\pi z)) A |A|^2 e^{i(k_c x - \omega_c t)} + C.C. \end{pmatrix}$$

où a, b, c et d sont des coefficients dépendant de ψ et de Λ .

- À l'ordre $(\varepsilon^{(2)})$;

À cet ordre, l'alternative de Fredholm est automatiquement vérifiée. Si l'on impose la condition d'orthogonalité, la solution à l'ordre $(\varepsilon^{(2)})$ s'écrit :

$$V^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\alpha \sin(2\pi z) + \beta \sin(4\pi z)) \\ (\varphi \sin(2\pi z) + \varrho \sin(4\pi z)) \end{pmatrix} |A|^4$$

où α, β, φ et ϱ sont des coefficients dépendant de ψ et de Λ .

- À l'ordre $(\varepsilon^{(5/2)})$;

L'alternative de Fredholm mène à l'équation non linéaire :

$$\partial_{T_2} A = \left(\frac{2\pi^2 \Lambda(\psi + \Lambda\psi + \Lambda)}{\psi + \Lambda(\psi + \Lambda\psi + \Lambda)} \right) \frac{Ra - R_c}{R_c} A + \left(\frac{2\Lambda(\psi + \Lambda\psi + \Lambda)}{\psi + \Lambda(\psi + \Lambda\psi + \Lambda)} \right) \partial_{X^2} A - c_2 A |A|^4 \quad (\text{A.9})$$

$$\text{avec } c_2 = \frac{c\psi^2}{8\Lambda^2(\psi + \Lambda\psi + \Lambda)} - \frac{\pi\varphi\psi}{4\Lambda} + \frac{\pi^2 a\psi}{2\Lambda R_c(\psi + \Lambda\psi + \Lambda)} - \frac{\pi^3 \alpha}{R_c}$$

Pour obtenir une équation d'amplitude contenant les variables d'espace et de temps originelles x et t , il faut réintroduire les relations :

$$\begin{aligned} \partial_t A &= \varepsilon \partial_{T_1} A + \varepsilon^2 \partial_{T_2} A \\ \partial_x A &= \varepsilon \partial_X A \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

où $\partial_{T_1} A$ et $\partial_{T_2} A$ sont données respectivement par les relations (A.8, A.9).

Ainsi, en rassemblant tous ces termes, on obtient l'équation d'amplitude quintique :

$$\begin{aligned} \partial_t A + Q \partial_X A &= \frac{2\pi^2 \Lambda(\psi + \Lambda\psi + \Lambda)}{\psi + \Lambda(\psi + \Lambda\psi + \Lambda)} \frac{Ra - R_c}{R_c} A + \frac{2\Lambda(\psi + \Lambda\psi + \Lambda)}{\psi + \Lambda(\psi + \Lambda\psi + \Lambda)} \partial_{X^2} A \\ &+ c_1 A |A|^2 - c_2 A |A|^4 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A.1.2 Cas $\psi < \psi_{pc}$

On reprend le système (A.1) écrit sous forme compacte comme pour le cas $\psi > \psi_{pc}$;

$$(L'\partial_t + L)V = N \quad (\text{A.12})$$

De même, on introduit les développements (A.4). Lorsque $\psi < \psi_{pc}$, la bifurcation est toujours supercritique pour des nombres de Lewis $\Lambda = O(10^{-2})$. Le développement asymptotique de $V = (W, \theta, \xi)^T$ s'écrit :

$$V = \varepsilon V^{(1)} + \varepsilon^2 V^{(2)} + \varepsilon^3 V^{(3)} + \dots \quad (\text{A.13})$$

avec

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= A(X, T_1, T_2) \exp(ik_c x - i(-\Omega_c + Qk_c)t) \sin(\pi z) + C.C. \\ &\quad + B(X, T_1, T_2) \exp(ik_c x - i(\Omega_c + Qk_c)t) \sin(\pi z) + C.C. \end{aligned}$$

où Ω_c est la fréquence d'oscillation du mode neutre en absence de débit.

$$(L'\partial_t + L_0)V^{(1)} = 0 = SM1 \quad O(\varepsilon)$$

$$(L'\partial_t + L_0)V^{(2)} = (-L'\partial_{T_1} + L_1)V^{(1)} + N^{(2)} = SM2 \quad O(\varepsilon^2),$$

$$(L'\partial_t + L_0)V^{(3)} = (-L'\partial_{T_1} + L_1)V^{(2)} + (-L'\partial_{T_2} + L_2)V^{(1)} + N^{(3)} = SM3 \quad O(\varepsilon^3)$$

avec ;

$$L_1 = \begin{pmatrix} -2\partial_{xX}^2 & 2(1+\psi)\partial_{xX}^2 & 2\psi\partial_{xX}^2 \\ 0 & -Q\partial_X + 2\partial_{xX}^2 & 0 \\ 0 & -2\partial_{xX}^2 & -Q\partial_X + 2\Lambda\partial_{xX}^2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} -\partial_X^2 & (1+\psi)\partial_X^2 & \psi\partial_X^2 \\ R_2 & \partial_X^2 & 0 \\ 0 & -\partial_X^2 & \Lambda\partial_X^2 \end{pmatrix}$$

Les termes non linéaires sont $N^{(2)}$ et $N^{(3)}$:

$$N^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -U_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - W_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \\ -U_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - W_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$N^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -U_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - W_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} - U_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - W_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - U_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial X} \\ -U_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} - W_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial z} - U_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - W_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - U_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial X} \end{pmatrix}$$

En procédant comme pour le cas $\psi > \psi_{pc}$, on résoud à chaque ordre en ε , les problèmes linéaires obtenus en imposant la condition de compatibilité ou alternative de Fredholm. Cette dernière à l'ordre (ε^3) s'écrit en fonction des variables physiques d'espace (x) et de temps (t) :

$$\begin{aligned}\tau \left[\frac{\partial A}{\partial \tau} + V_g^- \frac{\partial A}{\partial x} \right] &= 2\pi^2 \mu A - (\alpha_r + i\alpha_i) A|A|^2 - (\gamma + i\delta) A|B|^2 \\ \tau \left[\frac{\partial B}{\partial \tau} + V_g^+ \frac{\partial B}{\partial x} \right] &= 2\pi^2 \mu B - (\alpha_r + i\alpha_i) B|B|^2 - (\gamma + i\delta) B|A|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau &= \left(\frac{4\pi^2}{2\pi^2 - i\Omega_c} \right) \\ V_g^- &= Q - \frac{\Omega_c}{\pi} \text{ et } V_g^+ = Q + \frac{\Omega_c}{\pi} \\ \alpha_r &= \frac{(1 + \psi)}{4\pi^4} 8\pi^4 \\ \alpha_i &= \frac{(1 + \psi)}{4\pi^4} \frac{16\pi^6}{\Omega_c} \\ \gamma &= \frac{(i\Omega_c + 2\pi^2)}{\Lambda} \left(\frac{1 + \psi}{2\pi^2} \right) \\ \delta &= \frac{(i\Omega_c + 2\pi^2)}{\Lambda} \left(\frac{\psi}{i\Omega_c} \right)\end{aligned}$$

Les différents termes de cette équation ont été obtenus et sont précisément :

Termes en $\frac{\partial A}{\partial t}$:

$$\frac{k_c^2 + \pi^2}{(-i\Omega_c + k_c^2 + \pi^2)} + \frac{k_c^2 \psi}{\Lambda(k_c^2 + \pi^2) - i\Omega_c} \left(\frac{(k_c^2 + \pi^2)R_c}{(-i\Omega_c + k_c^2 + \pi^2)(-i\Omega_c + \Lambda k_c^2)} \right) \simeq \frac{4\pi^2}{2\pi^2 - i\Omega_c}$$

Termes en μA :

$$-(k_c^2 + \pi^2) = -2\pi^2$$

Termes en $A|A|^2$:

$$\begin{aligned}& \frac{(k_c^2 + \pi^2)^2}{(\Omega_c^2 + (k_c^2 + \pi^2)^2)} + \frac{k_c^2 \psi \sqrt{2}\pi}{\Lambda(k_c^2 + \pi^2) + i\Omega_c} \times \\ & \left(\frac{\pi^2 R_c (k_c^2 + \pi^2)}{\sqrt{2}\Lambda\pi^3(\Omega_c^2 + (k_c^2 + \pi^2)^2)} + \frac{2\pi\sqrt{2}(k_c^2 + \pi^2)R_c((k_c^2 + \pi^2)^2\Lambda - \Omega_c^2)}{\Lambda\pi^2 4((k_c^2 + \pi^2)^2 + \Omega_c^2)(\Lambda^2(k_c^2 + \pi^2)^2 + \Omega_c^2)} \right) = \\ & \frac{(1 + \psi)}{4\pi^4} \left(8\pi^4 + i \frac{16\pi^6}{\Omega_c} \right)\end{aligned}$$

Termes en $A|B|^2$:

$$\left(\frac{(k_c^2 + \pi^2)(-i\Omega_c + k_c^2 + \pi^2)}{(\Omega_c^2 + (k_c^2 + \pi^2)^2)} \right) + \frac{k_c^2 \psi \sqrt{2}}{\Lambda(k_c^2 + \pi^2) + i\Omega_c} \times$$

$$\left(\frac{R_c(i\Omega_c + k_c^2 + \pi^2)}{\Lambda\sqrt{2}(\Omega_c^2 + (k_c^2 + \pi^2)^2)} + \frac{2\sqrt{2}(k_c^2 + \pi^2)R_c}{(-i\Omega_c + k_c^2 + \pi^2)(-i\Omega_c + \Lambda(k_c^2 + \pi^2))4\Lambda} \right) = \frac{(i\Omega_c + 2\pi^2)}{\Lambda} \left(\frac{1 + \psi}{2\pi^2} + \frac{\psi}{i\Omega_c} \right)$$

A.2 Parois imperméables : Modèle de Lorenz

Ce modèle porte le nom de son inventeur, le météorologue Edward Lorenz (chercheur au M.I.T.) qui tenta dans les années 1960 de modéliser l'atmosphère² en vue de fournir une bonne prévision du temps. Afin de résoudre les équations du mouvement (équations aux dérivées partielles) de la convection de Rayleigh-Bénard de manière simplifiée tout en conservant les caractéristiques essentielles de la description complète, Lorenz obtint un système de trois équations différentielles ordinaires (o.d.e.) du premier ordre en temps, en appliquant la méthode de Galerkin avec une troncature judicieusement adaptée. Le modèle de Lorenz a été utilisé dans l'étude de la convection d'un mélange binaire avec prise en compte de parois imperméables en absence de l'écoulement horizontal [52].

A.2.1 Cas $\psi < \psi_{pc}$

Un compromis doit être fait pour garder tous les éléments importants servant à la modélisation tout en simplifiant les équations. L'application de la méthode de Galerkin au système d'équations de départ mène à un système d'équations différentielles ordinaires, où chaque équation décrit l'évolution temporelle de chaque grandeur physique (W , θ et ξ). Ces trois grandeurs sont développées comme suit sous la forme de modes fondamentaux et de modes secondaires (ou modes excités) :

$$\begin{aligned} W(x, z, t) &= (W_{11}^A(t)e^{-ikx} + W_{11}^B(t)e^{ikx} + C.C.)\sqrt{2}\sin \pi z & (A.14) \\ \theta(x, z, t) &= (\theta_{11}^A(t)e^{-ikx} + \theta_{11}^B(t)e^{ikx} + C.C.)\sqrt{2}\sin \pi z + \theta_{02}(t)\sqrt{2}\sin 2\pi z \\ \xi(x, z, t) &= (\xi_{10}^A(t)e^{-ikx} + \xi_{10}^B(t)e^{ikx} + C.C.) + \xi_{01}(t)\sqrt{2}\cos \pi z + C.C. \end{aligned}$$

On adopte la notation classique, ainsi pour la vitesse verticale W et la température θ , le mode fondamental retenu est le mode W_{11}^A (θ_{11}^A) (le premier indice correspond à la variation selon x et le second indice selon z). En ce qui concerne le champ ξ , il faut prendre en compte la condition d'imperméabilité sur les bords horizontaux, la composante verticale du flux de diffusion est nul ; $\frac{\partial \xi}{\partial z} = 0$ en $z = 0; 1$, c'est à dire qu'au lieu de choisir le mode (1, 1) comme pour les deux champs précédents, il faut considérer le mode (1, 0). Le coefficient $\sqrt{2}$ est introduit pour des facilités de normalisation. L'introduction de ces modes fondamentaux dans les termes non linéaires ($\vec{V} \cdot \nabla \theta$, $\vec{V} \cdot \nabla \xi$) des équations (A.1) vont engendrer des modes non linéaires, nommés modes excités (ξ_{01} et θ_{02}).

Les équations d'évolution temporelle de chaque mode sont obtenues en multipliant les équations par le développement spatial $f(z)$ selon z du mode concerné et en intégrant sur l'épaisseur verticale.

²Il considéra que l'atmosphère était une couche de fluide visqueux d'extension infinie, présentant un gradient de densité opposé au champ de gravité.

Pour les modes fondamentaux W_{11}^A , W_{11}^B , θ_{11}^A , θ_{11}^B , ξ_{10}^A et ξ_{10}^B , on obtient :

$$-(k^2 + \pi^2)W_{11}^{A,B} + (1 + \psi)k^2\theta_{11}^{A,B} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\psi k^2\xi_{10}^{A,B} = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\dot{\theta}_{11}^{A,B} \mp ikQ\theta_{11}^{A,B} + (k^2 + \pi^2)\theta_{11}^{A,B} - RaW_{11}^{A,B} - \sqrt{2}\pi W_{11}^{A,B}\theta_{02} - \sqrt{2}\pi W_{11}^{*B,A}\theta_{02} = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\dot{\xi}_{10}^{A,B} \mp ikQ\xi_{10}^{A,B} + \Lambda k^2\xi_{10}^{A,B} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}(k^2 + \pi^2)\theta_{11}^{A,B} - \pi(W_{11}^{A,B}\xi_{01} + W_{11}^{*B,A}\xi_{01}) = 0 \quad (\text{A.17})$$

où le signe - correspond aux modes d'exposant A et le signe + correspond aux modes d'exposant B . A ces équations, il faut rajouter leur complexe conjugué. L'évolution temporelle des modes excités non linéairement θ_{02} et ξ_{01} est donnée par :

$$\dot{\theta}_{02} + 4\pi^2\theta_{02} + \pi\sqrt{2}(W_{11}^A\theta_{11}^{*A} + W_{11}^{*A}\theta_{11}^A + W_{11}^A\theta_{11}^B + W_{11}^B\theta_{11}^A) = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\dot{\xi}_{01} + \Lambda\pi^2\xi_{01} - \frac{32\pi}{3}\theta_{02} + \pi(W_{11}^A\xi_{10}^{*A} + W_{11}^{*A}\xi_{10}^A + W_{11}^A\xi_{10}^B + W_{11}^B\xi_{10}^A) = 0 \quad (\text{A.19})$$

On obtient un modèle de Lorenz à 14 équations : (A.15, A.16, A.17) et leurs complexes conjugués à la fois pour les modes d'exposant A et pour les modes d'exposant B et les deux équations réelles (A.18, A.19).

Pour décrire la dynamique non linéaire du système au voisinage du seuil de stabilité, on effectue un développement asymptotique en échelles multiples de temps en introduisant une échelle lente $\tau = \varepsilon^2 t$. Ainsi, la dérivée partielle par rapport au temps devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$\begin{aligned} W_{11} &= \varepsilon W_{11}^{(1)}(t, \tau) + \varepsilon^2 W_{11}^{(2)}(t, \tau) + \varepsilon^3 W_{11}^{(3)}(t, \tau) + \dots \\ \theta_{11} &= \varepsilon \theta_{11}^{(1)}(t, \tau) + \varepsilon^2 \theta_{11}^{(2)}(t, \tau) + \varepsilon^3 \theta_{11}^{(3)}(t, \tau) + \dots \\ \xi_{10} &= \varepsilon \xi_{10}^{(1)}(t, \tau) + \varepsilon^2 \xi_{10}^{(2)}(t, \tau) + \varepsilon^3 \xi_{10}^{(3)}(t, \tau) + \dots \\ \xi_{01} &= \varepsilon^2 \xi_{01}^{(2)}(t, \tau) + \varepsilon^3 \xi_{01}^{(3)}(t, \tau) + \dots \\ \theta_{02} &= \varepsilon^2 \theta_{02}^{(2)}(t, \tau) + \varepsilon^3 \theta_{02}^{(3)}(t, \tau) + \dots \\ Ra &= R_c + \varepsilon^2 R_2 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

avec :

$$\begin{aligned} W_{11}^A &= A(\tau)e^{ik_c Q t - i\Omega_c t} & W_{11}^B &= B(\tau)e^{-ik_c Q t - i\Omega_c t} \\ \theta_{11}^A &= F(\tau)e^{ik_c Q t - i\Omega_c t} & \theta_{11}^B &= E(\tau)e^{-ik_c Q t - i\Omega_c t} \\ \xi_{10}^A &= G(\tau)e^{ik_c Q t - i\Omega_c t} & \xi_{10}^B &= H(\tau)e^{-ik_c Q t - i\Omega_c t} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

- À l'ordre (ε) :

L'introduction de ces développements (A.20, A.21) dans le système de Lorenz mène à l'ordre ε :

$$\begin{aligned} L_c(A, F, G)^T &= (0, 0, 0)^T \\ L_c(B, E, H)^T &= (0, 0, 0)^T \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

avec :

$$L_c = \begin{pmatrix} -(k_c^2 + \pi^2) & k_c^2(1 + \psi) & \frac{2\sqrt{2}}{\pi}k_c^2\psi \\ -R_c & (k_c^2 + \pi^2) - i\Omega_c & 0 \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}(k_c^2 + \pi^2) & \Lambda k_c^2 - i\Omega_c \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

L'annulation du déterminant de cet opérateur L_c conduit à la relation de dispersion qui fournit Ω_c (chapitre 2). La résolution de (A.22) donne

$$\begin{aligned} (F, E)^T &= \frac{R_c}{k_c^2 + \pi^2 - i\Omega_c} (A, B)^T \\ (G, H)^T &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{(k_c^2 + \pi^2)R_c}{(k_c^2 + \pi^2 - i\Omega_c)(\Lambda k_c^2 - i\Omega_c)} (A, B)^T \end{aligned}$$

Il est à noter que l'adjoint de L_c s'écrit :

$$L_c^\dagger = \begin{pmatrix} -(k_c^2 + \pi^2) & -R_c & 0 \\ k_c^2(1 + \psi) & (k_c^2 + \pi^2) + i\Omega_c & -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}(k_c^2 + \pi^2) \\ k_c^2\psi\frac{2\sqrt{2}}{\pi} & 0 & \Lambda k_c^2 + i\Omega_c \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

Le noyau de L_c^\dagger est engendré par le vecteur $V_p = \left(1, -\frac{k_c^2 + \pi^2}{R_c}, -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{k_c^2\psi}{\Lambda k_c^2 + i\Omega_c}\right)^T$.

• À l'ordre (ε^2)

A cet ordre, la condition de compatibilité est automatiquement satisfaite et afin de ne pas introduire une nouvelle amplitude liée à $W_{11}^{(2)}$, on impose à $W_{11}^{(2)}$ d'être orthogonal à $W_{11}^{(1)}$,

$$\langle W_{11}^{(1)}, W_{11}^{(2)} \rangle = 0$$

ce qui conduit à $W_{11}^{(2)} = \theta_{11}^{(2)} = \xi_{10}^{(2)} = 0$.

On trouve ainsi l'expression des modes excités θ_{02} et ξ_{01} d'après les équations (A.18, A.19) :

$$\begin{aligned} \theta_{02} &= -\frac{R_c(k_c^2 + \pi^2)}{\sqrt{2}\pi(\Omega_c^2 + (k_c^2 + \pi^2)^2)}|A|^2 - \frac{R_c(i\Omega_c + k_c^2 + \pi^2)}{\sqrt{2}\pi(\Omega_c^2 + (k_c^2 + \pi^2)^2)}AB \\ \xi_{01} &= \left(-\frac{32\pi}{3} \frac{R_c(k_c^2 + \pi^2)}{\sqrt{2}\Lambda\pi^3(\Omega_c^2 + (k_c^2 + \pi^2)^2)} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{2\pi(k_c^2 + \pi^2)R_c((k_c^2 + \pi^2)\Lambda k_c^2 - \Omega_c^2)}{\Lambda\pi^2((k_c^2 + \pi^2)^2 + \Omega_c^2)(\Lambda^2 k_c^4 + \Omega_c^2)} \right) A|A|^2 \\ &\quad - \left(\frac{32\pi}{3} \frac{R_c(i\Omega_c + k_c^2 + \pi^2)}{\Lambda\sqrt{2}\pi^3(\Omega_c^2 + (k_c^2 + \pi^2)^2)} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{2\pi(k_c^2 + \pi^2)R_c}{(-i\Omega_c + k_c^2 + \pi^2)(-i\Omega_c + \Lambda k_c^2)\Lambda\pi^2} \right) AB \end{aligned}$$

- À l'ordre $O(\varepsilon^3)$:

Le système s'écrit alors sous la forme suivante :

$$L_c \left(W_{11}^{(3)}, \theta_{11}^{(3)}, \xi_{10}^{(3)} \right) = SM_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial \theta_{11}^{(1)}}{\partial \tau} + R_2 W_{11}^{(1)} + \sqrt{2}\pi (W_{11}^A + W_{11}^{*B}) \theta_{02} \\ -\frac{\partial \xi_{10}^{(1)}}{\partial \tau} + \pi (W_{11}^A + W_{11}^{*B}) \xi_{01} \end{pmatrix}$$

Ce système n'a de solution que si le second membre est orthogonal au noyau de l'opérateur adjoint L^\dagger engendré par le vecteur V_p . Cette condition de compatibilité s'écrit :

$$\langle V_p, SM_3 \rangle = 0 \quad (\text{A.25})$$

Cette condition mène à l'obtention des différents termes :

Termes en $\frac{\partial A}{\partial \tau}$ et $\frac{\partial B}{\partial \tau}$:

$$\frac{k_c^2 + \pi^2}{(-i\Omega_c + k_c^2 + \pi^2)} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right)^2 \frac{k_c^2 \psi}{\Lambda k_c^2 - i\Omega_c} \left(\frac{(k_c^2 + \pi^2)R_c}{(-i\Omega_c + k_c^2 + \pi^2)(-i\Omega_c + \Lambda k_c^2)} \right)$$

Termes en μA et μB :

$$-(k_c^2 + \pi^2)$$

Termes en $A|A|^2$ et $B|B|^2$:

$$\frac{(k_c^2 + \pi^2)^2}{(\Omega_c^2 + (k_c^2 + \pi^2)^2)} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{k_c^2 \psi \pi}{\Lambda k_c^2 - i\Omega_c} \times \left(\frac{32\pi}{3} \frac{R_c(k_c^2 + \pi^2)}{\sqrt{2}\Lambda\pi^3(\Omega_c^2 + (k_c^2 + \pi^2)^2)} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{2\pi(k_c^2 + \pi^2)R_c((k_c^2 + \pi^2)\Lambda k_c^2 - \Omega_c^2)}{\Lambda\pi^2((k_c^2 + \pi^2)^2 + \Omega_c^2)(\Lambda^2 k_c^4 + \Omega_c^2)} \right)$$

Termes en $A|B|^2$ et $B|A|^2$:

$$\left(\frac{(k_c^2 + \pi^2)(-i\Omega_c + k_c^2 + \pi^2)}{(\Omega_c^2 + (k_c^2 + \pi^2)^2)} \right) + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{k_c^2 \psi}{\Lambda k_c^2 + i\Omega_c} \times \left(\frac{32\pi}{3} \frac{R_c(i\Omega_c + k_c^2 + \pi^2)}{\Lambda\sqrt{2}\pi^2(\Omega_c^2 + (k_c^2 + \pi^2)^2)} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{2(k_c^2 + \pi^2)R_c}{(-i\Omega_c + k_c^2 + \pi^2)(-i\Omega_c + \Lambda k_c^2)\Lambda} \right)$$

Il est à remarquer que les termes linéaires avec des dérivées spatiales et temporelles s'obtiennent à partir de l'équation de dispersion (chapitre 2). Les équations

d'amplitude complexes couplées s'écrivent en "calant" les termes de l'équation linéaire trouvés grâce à l'équation de dispersion et les termes de l'équation ci-dessus.

Ces deux équations s'écrivent :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + V_g^- \frac{\partial A}{\partial x} = (\mu_r + i\mu_i)A + (1 + i\beta) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - (\alpha_r + i\alpha_i)A|A|^2 - (\gamma + i\delta)A|B|^2 \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + V_g^+ \frac{\partial B}{\partial x} = (\mu_r + i\mu_i)B + (1 + i\beta) \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - (\alpha_r + i\alpha_i)B|B|^2 - (\gamma + i\delta)B|A|^2 \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} V_g^- &= Q - \frac{\Omega_c}{\pi} \text{ et } V_g^+ = Q + \frac{\Omega_c}{\pi} \\ \mu_r &= \frac{Ra - R_c}{R_c} \pi^2 \\ \mu_i &= \frac{Ra - R_c}{R_c} \frac{\Omega_c}{2} \\ \beta &= \frac{\Omega_c}{2\pi^2} \\ \alpha_r &= -\frac{2\pi^2}{3\Lambda(\Omega_c^2 + 4\pi^4)} \left(\frac{16\psi}{1 + \psi} \right) \\ \alpha_i &= \frac{2\pi^2}{3\Lambda(\Omega_c^2 + 4\pi^4)} \Omega_c \\ \gamma &= \frac{1}{\Lambda} \\ \delta &= \Omega_c \left(\frac{1 + \psi}{16\psi} - \frac{2}{3\Lambda\pi^2} \right) \\ \text{et } \Omega_c^2 &\simeq -\frac{32\pi^2\psi}{1 + \psi} \end{aligned}$$

A.2.2 Cas $\psi > \psi_{pc}$

Pour décrire la dynamique du système, une équation d'ordre cinq décrivant le comportement faiblement non linéaire du mode le plus instable s'écrit de façon générale comme suit :

$$\tau \left(\frac{\partial A}{\partial t} + V_g \frac{\partial A}{\partial x} \right) = \mu' A + \xi_0^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + c_1 A |A|^2 - c_2 A |A|^4 \quad (\text{A.28})$$

avec :

$$\begin{aligned} \tau &= \left[\frac{1}{R_c \frac{\partial \omega_i}{\partial Ra}} \right]_c = \frac{8\psi((\Lambda + 1)k_c^2 + \pi^2)\Lambda k_c^2}{[8\psi(k_c^2 + \pi^2) + \Lambda(1 + \psi)k_c^2 \pi^2]} , \\ V_g &= \left[\frac{\partial \omega_r}{\partial k} \right]_c = Q , \\ \xi_0^2 &= \frac{1}{2R_c} \left[\frac{\partial^2 Ra}{\partial k^2} \right]_c = \frac{1}{2} \left[\frac{4(3k_c^2 + \pi^2)}{(k_c^2 + \pi^2)^2} - \frac{(16\psi/\pi^2) + 2\Lambda(1 + \psi)}{(8\psi/\pi^2)(k_c^2 + \pi^2) + \Lambda(1 + \psi)k_c^2} \right] , \\ \mu' &= \frac{Ra - R_c}{R_c} . \end{aligned}$$

L'équation devient précisément en divisant par τ :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + Q \frac{\partial A}{\partial x} = \mu A + a \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + c_1 A |A|^2 - c_2 A |A|^4 \quad (\text{A.29})$$

$$\mu = \frac{1}{\tau} \mu' \quad \text{et} \quad a = \frac{\xi_0^2}{\tau} .$$

On sait que les termes linéaires peuvent être obtenus à partir de l'équation de dispersion approchée exposée au chapitre 2 ; il reste à trouver les termes non linéaires c_1 et c_2 .

La version homogène et stationnaire de (A.29) s'écrit :

$$\mu A + c_1 A |A|^2 - c_2 A |A|^4 = 0 \quad (\text{A.30})$$

Pour déterminer c_1 et c_2 , nous proposons une méthode astucieuse qui consiste à montrer que le système de Lorenz stationnaire peut se mettre sous la forme de (A.30). En posant :

$$\begin{aligned} W_{11}(t) &= A(t) e^{-ik_c Q t} \\ \theta_{11}(t) &= b(t) e^{-ik_c Q t} \\ \xi_{10}(t) &= c(t) e^{-ik_c Q t} \end{aligned}$$

les équations (A.16 et A.19) stationnaires s'écrivent précisément :

$$\begin{aligned} (k^2 + \pi^2)b &= RaA + \sqrt{2}\pi A \theta_{02} \\ 4\pi^2 \theta_{02} &= -\pi\sqrt{2}(Ab^* + A^*b) \end{aligned}$$

En combinant ces deux dernières équations, on trouve le coefficient b et θ_{02} en fonction de A avec :

$$\begin{aligned}\theta_{02} &= -\frac{\sqrt{2}}{2\pi(k_c^2 + \pi^2 + |A|^2)} Ra|A|^2 \\ b &= \frac{Ra}{k_c^2 + \pi^2 + |A|^2} A\end{aligned}$$

Pour trouver c et ξ_{01} , on utilise (A.17, A.19) :

$$\begin{aligned}\Lambda k_c^2 c - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}(k^2 + \pi^2)b - \pi(A\xi_{01}^* + A^*\xi_{01}) &= 0 \\ \Lambda\pi^2\xi_{01} - \frac{32\pi}{3}b + \pi(Ac^* + A^*c) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda k_c^2 c &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{(k_c^2 + \pi^2) Ra}{k_c^2 + \pi^2 + |A|^2} A - \left(\frac{\pi Ra A |A|^2}{(k_c^2 + \pi^2 + |A|^2) \left(\Lambda\pi^2 + \frac{2\pi^2}{\Lambda k_c^2} |A|^2 \right)} \right) \\ &\times \left(\frac{16\sqrt{2}}{3} + \frac{4\sqrt{2}(k_c^2 + \pi^2)}{\Lambda k_c^2} \right)\end{aligned}$$

Une équation non linéaire est obtenue en reportant les valeurs de b et c dans l'équation stationnaire (A.15) :

$$\begin{aligned}-(k^2 + \pi^2)A + (1 + \psi)k^2b + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\psi k^2c &= 0 \\ \pi^2 \left\{ -\Lambda(k_c^2 + \pi^2)^2 + k_c^2(1 + \psi)Ra\Lambda + \frac{8}{\pi^2}\psi(k_c^2 + \pi^2)Ra \right\} A + \\ \left\{ -(k_c^2 + \pi^2)\Lambda\pi^2 + \frac{1}{\Lambda k_c^2} \left[2\pi^2 \left(-(k_c^2 + \pi^2)^2 + k_c^2 Ra(1 + \psi) \right) - \frac{64}{3}k_c^2\psi Ra \right] \right\} \times A|A|^2 \\ - \frac{(k_c^2 + \pi^2)2\pi^2}{\Lambda k_c^2} A|A|^4 &= 0\end{aligned}$$

On réécrit cette équation sous la forme (A.30) :

$$\frac{Ra - R_c}{R_c} A + c_1 A|A|^2 - c_2 A|A|^4 = 0$$

avec c_1 et c_2 positifs pour remplir la condition de souscriticalité.

$$\begin{aligned}c_1 &= \left[\frac{1}{(k_c^2 + \pi^2)} + \frac{16\psi R_c(4k_c^2\Lambda + 3(k_c^2 + \pi^2))}{3\pi^2\Lambda^3 k_c^2(k_c^2 + \pi^2)^2} \right] \frac{1}{\tau} \\ c_2 &= \left[\frac{2}{\Lambda^2 k_c^2(k_c^2 + \pi^2)} \right] \frac{1}{\tau} \\ k_c^2 &= \frac{\pi^2 \left(\Lambda + \Lambda\psi - \frac{8\psi}{\pi^2} \right)}{\left(\Lambda + \Lambda\psi + \frac{8\psi}{\pi^2} \right)}, \quad R_c = \frac{4\pi^2\Lambda^2(1 + \psi)}{\left(\Lambda + \Lambda\psi + \frac{8\psi}{\pi^2} \right)^2}.\end{aligned}$$

Celle-ci fournit les coefficients nécessaires à l'obtention de l'équation quintique suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + Q \frac{\partial A}{\partial x} = \mu A + a \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + c_1 A |A|^2 - c_2 A |A|^4 \quad ,$$