

THÈSE

PRÉSENTÉE

À L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE,

POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ (MATHÉMATIQUES),

par Franck MELLIEZ.



*Une rédaction sur la courbe de Bring comprenant notamment une
étude sur l'«involution dualité» liée aux sections du fibré de
Horrocks–Mumford.*



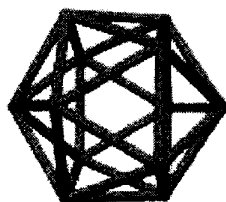
SOUTENUE LE 4 JANVIER 2004 DEVANT

MM. RANESTAD, *Rapporteur*,
D'ALMEIDA, } *Examineurs*,
PESKINE, }
GRUSON, *Directeur de thèse.*

Une recette de l'essence de Fenouil

par Timoleo Timolei

1614 après J.-C.



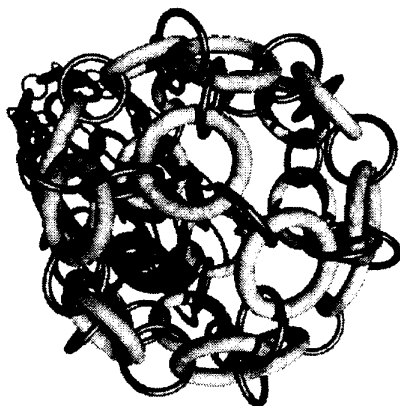
Résumé

Pour produire cet opusculé, un Thésard T a utilisé un manuscrit du célèbre alchimiste T. TIMOLEI traitant de l'iquenosaèdre. Il prétend en extraire certains renseignements, par exemple que toute sextique rationnelle plane à 6 tritangentes est projection de l'unique sextique gauche rationnelle ($\mathcal{A}_5$ -invariante) qui admet une infinité de plans tritangents (celles-ci sont presque en bijection avec les sections du célèbre sextique fibré de Horrocks-Mumford sur $\mathbf{P}^4 = \text{Proj}(\mathbb{C}[K, L, E, I, N])$). Ce phénomène découle de l'unicité — dans un espace projectif (complexe) — d'une «figure» formée d'une cubique gauche et d'une cubique gauche duale dont les réseaux sont orthogonaux.

Avec un égal brio, l'auteur T. T. poursuit sa cueillette en mettant en évidence une presque bijection (i.e. une application qui est génériquement un isomorphisme) entre l'ensemble des variétés abéliennes (1,5)-polarisées à isomorphisme et dualité près d'une part, et l'ensemble des sextuplets de points d'une droite projective complexe à homographie près d'autre part. Outre les résultats (indispensables) de BARTH et MOORE concernant le fibré de Horrocks-Mumford, l'argument clé est qu'il existe au plus une droite rencontrant six plans triséants à une quintique rationnelle normale.

Table des matières

<i>Introduction</i>	4
<i>Notations</i>	5
§0 La courbe de Bring	5
0.1 Représentations de $SL(2, \mathbb{F}_5)$	5
0.2 Une construction de la courbe de Bring	7
§1 Modèle canonique d'une courbe de genre 4	9
1.1 Construction	9
1.2 Interprétation géométrique	11
1.3 Étude (succincte) des cas où la cubique est singulière	13
§2 Caractérisation de la courbe de Bring	14
2.1 Rappels sur les formes binaires du sixième degré	14
2.2 Sextiques rationnelles planes à six tritangentes	15
2.3 Le volume japonais	18
§3 L'involution «dualité» liée aux sections du fibré de Horrocks–Mumford	20
3.1 Projection d'une variété abélienne depuis une six-sécante	20
3.2 Construction de la correspondance $(5,1)$	22
3.3 L'involution proprement dite	23
Annexe	25
A.1 La deuxième correspondance $(5,1)$	25
A.2 Volume japonais: généralisation	25
Bibliographie	27
Version anglaise	28





ORIGINE DE CETTE RÉDACTION est l'article «On rational plane sextics with six tritangents» de W. BARTH et R. MOORE, cité dans la suite [B-M2]; ils y étudient une famille de sextiques rationnelles (planes) qui admettent six tritangentes. Elles sont toutes projection d'une seule et même sextique gauche $\mathcal{S}$, invariante sous une action du groupe icosaédral $\mathfrak{A}_5 \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_5)$ sur $\mathbb{P}^3$ et jouissant de la propriété:

(*) $\mathcal{S}$ admet une infinité de plans tritangents.

L'intérêt d'étudier une telle famille est lié au fibré $\mathcal{F}$ de Horrocks-Mumford (sur $\mathbb{P}^4$): projetons — dans l'espace projectif $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}\mathcal{H}^0(\mathcal{F})$ — depuis une section s de $\mathbb{P}^3$ la courbe sextique $\mathcal{S}$ (elle paramétrise les sections dont le lieu des zéros est une surface quintique «scroll» elliptique doublée), il s'agit d'une sextique de $\mathbb{P}^2$ rationnelle à six tritangentes. Le recouvrement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié le long de cette sextique est birationnel à la surface de Kummer déduite de la variété abélienne duale de celle qui constitue les zéros de s («reconstruction method»).

Dans la première partie («La courbe de Bring»), on s'intéresse à la sextique $\mathcal{S}$ elle-même (appelée souvent sextique de Klein) en utilisant essentiellement les représentations du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_5)$ (notamment la correspondance de MacKay). Le graphe de la correspondance (3,3) entre la courbe $\mathcal{S}$ et ses plans tritangents est une courbe de genre 4 dont le groupe d'automorphisme contient $\mathfrak{A}_5$. Cette dernière propriété caractérise la courbe en question (appelée courbe de Bring). On observe qu'on peut illustrer cette courbe comme graphe de la correspondance d'incidence entre une cubique gauche et une cubique gauche duale dont les réseaux (de quadriques) sont orthogonaux (on dit aussi apolaires).

Dans la partie «Modèle canonique d'une courbe de genre 4», on illustre la courbe de genre 4 générique comme graphe d'incidence entre une cubique gauche et une cubique gauche duale, ce qui permet de construire son modèle canonique (dans $\mathbb{P}^3$) comme intersection de surfaces (de degré 2 et 3) entièrement déterminées par la donnée de la courbe i.e. on ne fait aucun choix (c'est trivial pour la quadrique — car elle est unique — mais pas a priori pour la cubique). La surface cubique ainsi construite arrive d'ailleurs avec un double-six «marqué». On clôt cette partie en décrivant dans quel cas la surface cubique admet quatre points doubles: la courbe de genre 4 originelle est la correspondance d'incidence entre une quintique rationnelle gauche et ses triséchantes (sous-partie 1.3).

Les résultats précédemment obtenus convergent vers la conclusion 2.1 (page 14):

Toute sextique rationnelle plane à 6 tritangentes est projection de la sextique de Klein $\mathcal{S}$.

Si la démonstration appelle quelque résultat sur les formes binaires de degré 6, l'argument principal est le fait qu'il n'existe qu'une seule figure comprenant deux cubiques gauches dont les réseaux sont orthogonaux (il convient bien sûr de dualiser l'une des cubiques). On est ramené à cette dernière situation en rappelant qu'étant donnés six diviseurs de degré 3 sur une courbe rationnelle, il existe (dans l'espace des diviseurs de degré 3 identifié à $\mathbb{P}^3$) une unique cubique gauche qui les contient. On termine cette troisième partie par une interprétation du volume japonais (il s'agit de l'ensemble des écritures de l'équation d'une conique doublée en somme de puissance 4 de formes linéaires, c'est aussi — à compactification près — l'espace des modules des variétés abéliennes (1,5)-polarisées) en termes de plans six-sécants à la surface de Véronèse de degré 9 dans $\mathbb{P}^6$.

L'ultime partie est consacrée à l'involution «dualité» sur les sections du fibré $\mathcal{F}$ i.e. étant donnée une section s , on cherche des informations sur la section s' telle que le lieu des zéros de s et de s' soient des variétés abéliennes duales. Il s'agit d'une question soulevée par W. BARTH et R. MOORE à la fin de [B-M]. On n'arrive (malheureusement) pas à trouver une construction géométrique (dans $\mathbb{P}^3$) permettant de passer de s à s' (l'involution n'est définie qu'à $\mathfrak{A}_5$ près, ce qui ne facilite pas les choses) mais les renseignements glanés permettent de conclure (conclusion 3.14) que:

- Il existe une application qui est (génériquement) un isomorphisme entre*
1. les variétés abéliennes — avec une polarisation (1,5) — à isomorphisme et dualité près;
 2. les sextuplets de points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ près.

L'outil principal pour aboutir à ce résultat est l'association, à chaque section s de $H^0(\mathcal{F})$, d'une correspondance (5,1) entre la sextique $\mathcal{S}$ (identifiée à $\mathbf{P}^1$) et la droite projective paramétrant ses plans tritangents.

Notations

Le corps de base est celui des nombres complexes $\mathbf{C}$. Si V est un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel, on ne distinguera pas en général un élément $v \in V$ de la droite vectorielle qu'il engendre $\mathbf{C} \cdot v \in \mathbf{P}V$ et on notera $S^n V$ la n -ième puissance symétrique de V ,

$$\varphi_n : \mathbf{P}V \longrightarrow \mathbf{P}S^n V$$

le plongement de Véronèse. $V^\vee$ désigne l'ensemble des formes linéaires sur V .

§0 La courbe de Bring



LA COURBE DE BRING apparaît naturellement dans la résolution de l'équation générale du cinquième degré (cf. par exemple [Edg]). C'est la courbe de genre 4 admettant le plus gros groupe d'automorphismes, à savoir $\mathfrak{S}_5$, ce qui la caractérise complètement et que nous adopterons comme définition. En fait, il suffit de s'intéresser aux représentations *projectives* de $\mathfrak{A}_5 = \mathbf{PSL}(2, \mathbf{F}_5)$. On utilise le

Conclusion 0.1 (Schur)

Toute représentation projective de $\mathfrak{A}_5$ est induite par une représentation linéaire de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_5)$, i.e. pour toute représentation ρ de dimension n on a un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbf{C}^* & \longrightarrow & \mathrm{GL}(n, \mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathrm{PGL}(n, \mathbf{C}) \longrightarrow 1 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \rho \\ 1 & \longrightarrow & \{-1, 1\} & \longrightarrow & \mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_5) & \longrightarrow & \mathfrak{A}_5 \longrightarrow 1 \end{array}$$

Schur démontre un résultat beaucoup plus général, voir [Sta, page 118] pour un traitement moderne. Dans le cas qui nous intéresse, cela découle de l'égalité $H_2(\mathfrak{A}_5, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_2$.

Un outil très utile dans l'étude des représentations de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_5)$ est la correspondance de McKay. Bien que «connue», elle est peu explicitée dans la littérature, c'est pourquoi on s'autorise une digression.

0.1 Représentations de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_5)$

L'extension centrale précédente permet de construire une représentation irréductible $S_1 \simeq \mathbf{C}^2$ de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_5)$ par exemple en faisant opérer $\mathfrak{A}_5$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ (i.e. on choisit un icosaèdre, on déduit alors un morphisme de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_5)$ dans $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$).

On construit une forme bilinéaire sur l'anneau $\mathcal{R}$ engendré par les représentations de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_5)$ telle que $\langle W, W' \rangle$ égale le nombre de facteur(s) S_1 dans la décomposition de $W \otimes W'$.

À cette forme est associé un diagramme dont les sommets sont indexés par les représentations *irréductibles* de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_5)$, deux sommets W et W' sont reliés par $\langle W, W' \rangle$ arête(s). On a alors

Proposition 0.2 (Correspondance de MacKay)

Les représentations irréductibles de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_5)$ s'agencent suivant le diagramme de Dynkin complété $\widetilde{E}_8$. De plus un sommet W est relié à des sommets W_i si et seulement si $W \otimes S_1 \simeq \bigoplus W_i$ (comme $\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_5)$ -modules).

Preuve. On va construire un diagramme vérifiant cette dernière propriété et vérifier qu'il définit la bonne forme bilinéaire. Une étude comparative des caractères de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{F}_5)$ suffirait, on exhibe néanmoins une méthode artisanale mais «effective». Les seuls outils utilisés sont les formules de pléthysme concernant les représentations de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ (cf. [F-H, § 11]).

Bibliographie

- [ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths, et J. Harris. *Geometry of Algebraic Curves, Volume 1*. Springer-Verlag, 1985.
- [Bak] H. F. Baker. *Principles of geometry*. Cambridge University Press, 1922-1933.
- [BHM] W. Barth, K. Hulek, et R. Moore. «Degenerations of the Horrocks-Mumford surfaces». *Math. Ann.*, 277 735–755, 1987.
- [B-M] W. Barth et R. Moore. «Geometry in the space of Horrocks-Mumford surfaces». *Topology*, 28(2) 231–245, 1986.
- [B-M2] W. Barth et R. Moore. «On rational plane sextics with six tritangents». Dans «Algebraic geometry and commutative algebra in honor of M. Nagata», pages 45–58. 1987.
- [Cat] F. Catanese. «On the rationality of certain moduli spaces related to curves of genus 4». Dans «Algebraic Geometry», LNM 1008, pages 31–60. Springer-Verlag, 1983.
- [Cob] A.B. Coble. *Algebraic geometry and theta functions*, tome 10. AMS Coll. Publ., 1929.
- [Edg] W. L. Edge. «Bring's curve». *J. London Math. Soc. (2)*, 18 539–545, 1978.
- [Ell] E.B. Elliot. *An introduction to the Algebra of Quantics*. Chelsea reprint, 1964.
- [F-H] W. Fulton et J. Harris. *Representation Theory*. GTM 129. Springer-Verlag, 1991.
- [H-M] G. Horrocks et D. Mumford. «A rank 2 vector bundle on $\mathbf{P}^4$ with 15000 symmetries». *Topology*, 12 63–81, 1973.
- [Mu] S. Mukai. «Fano 3-folds». Dans «Vectors Bundles and Special Proj. Embeddings (Bergen 1989)», tome 179 de *LNS*, pages 255–263. Lond. Math. Soc., 1992.
- [MuUm] S. Mukai et H. Umemura. «Minimal rational 3-folds». Dans «Algebraic Geometry (Proceedings Tokyo/Kyoto 1982)», LNM 1016, pages 490–518. Springer-Verlag, 1983.
- [TT] Un Passant. «Manuscrit trouvé à Saragosse».
- [Que] R. Queneau. *Les Fleurs bleues*. Gallimard, 1964.
- [Schr] F.-O. Schreyer. «Geometry and algebra of prime Fano 3-folds of genus 12». arXiv:math.AG/9911044, 1999.
- [S-B] N. I. Shepherd-Barron. «The Rationality of Certain Space Associated to Trigonal Curves». *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 46 165–171, 1987.
- [Sta] U. Stambach. *Homology in Group Theory*. LNM 359. Springer-Verlag, 1973.
- [Syl] J.-J. Sylvester. «An essay on canonical forms, supplement to a sketch of a memoir on elimination, transformation and canonical forms». Dans «Collected papers», tome I, pages 203–216. Cambridge University Press, 1851.