Université des sciences et technologies de Lille
UFR de Mathématiques

Rémy DEBALME

Variétés hyperboliques presque-complexes

Thèse de doctorat de doctorat en mathématiques

soutenue le 6 juin 2001 devant la commission d'examen

Directeur :	Prof. Sergueï IVACHKOVITCH,	université Lille I
Rapporteurs :	Prof. Julien DUVAL,	université Toulouse III
	Prof. Mickaïl ZAIDENBERG,	université Grenoble I
Membres :	Prof. François LESCURE,	université Lille I
	Franck LORAY,	chargé de recherches au CNRS

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance au professeur Sergueï Ivachkovitch, dont j'ai apprécié la manière de diriger ma thèse : il a sû me fournir un cadre lorsque c'était nécéssaire, m'encourager lorsque je désespérais, m'écouter quand j'avais des idées, me réorienter lorsqu'elles s'avéraient fausses. Il m'a initié à la recherche et fait partager sa passion des mathématiques. Son soutien et sa disponibilité sont autant de facteurs qui ont contribué à l'élaboration de ce travail.

Je remercie aussi les professeurs Julien Duval et Mickaïl Zaïdenberg d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je suis particulièrement reconnaissant à Julien Duval de m'avoir posé de nombreuses questions et d'avoir proposé d'importantes corrections : il m'a fourni un regard nouveau qui m'a premis de mûrir ma réflexion.

Je remercie aussi le professeur François Lescure et monsieur Franck Loray d'avoir accepté d'examiner cette thèse. Leur grande culture mathématique m'a aidé à bien comprendre quelle était la place de ce travail par rapport aux autres composantes des mathématiques. De plus, leur humour et leur gentillesse m'a aidé à aborder la soutenance dans les meilleures conditions.

Le professeur François Berteloot a montré de l'enthousiasme pour le début de mon travail et a été le premier à me parler de l'importance des fonctions plurisousharmoniques en presque-complexe. Grâce à lui j'ai exploré cette voie pour montrer le théorème principal. Bien qu'elle ait échoué, il m'a aidé à comprendre la place de ces fonctions. Je lui en suis très reconnaissant. De plus, j'ai admiré le regard distancié qui était le sien, et j'avoue l'avoir pris pour modèle à l'époque où il me semblait réalisable de devenir enseignant chercheur.

Le professeur Anne-Marie Chollet a sû se montrer en toute circonstance chaleureuse, et l'estime qu'elle me portait m'a aidé à passer les passages les plus difficiles.

J'ai eu l'occasion de travailler dans le domaine de l'enseignement avec le professeur Anne Duval. J'ai beaucoup d'estime pour son travail et je la remercie pour ses nombreux conseils et renseignements, aussi bien dans le domaine de la recherche que dans celui de mon orientation ultérieure.

Je remercie le professeur Vincent Thilliez et monsieur Emmanuel Mazzilli pour les nombreuses références bibliographiques qu'ils ont sû me fournir.

Je remercie aussi tous les membres du laboratoire de mathématiques que je ne n'ai pas pû nommer, et en particulier les membres des équipes de géométrie complexe et d'analyse complexe ainsi que les doctorants.

Enfin, j'associe à ce travail tous mes proches, et en particulier Marie-Anne qui a toujours souhaité donner la priorité à ce travail, à Cécile et Adrien qui ont sû comment utiliser mes nombreux brouillons et m'ont régulièrement rappelé qu'il n'y avait que dans mon bureau de la faculté qu'il était possible de travailler; à mes parents enfin qui m'ont donné les moyens de faire des études dans de bonnes conditions et pour qui ce diplôme a tant d'importance.

Table des matières

CHAPITRE 0 : INTRODUCTION

Les variétés presque-complexes ont été introduites il y a une quarantaine d'années (voir [NwNi] et [Hm] par exemple). Depuis une dizaine d'années, les géomètres les utilisent beaucoup comme outils en géométrie symplectique, et lorsqu'ils abordent leurs propriétés ils sont guidés par des considérations liées à la structure symplectique choisie. Les résultats relatifs aux structures presque-complexes sont donc disséminés dans une multitude d'articles au gré des besoins des géomètres. Le principal ouvrage regroupant un nombre important de propriétés relatives à ces structures presque-complexes est le recueil d'articles édités sous la direction de Michèle Audin et Jacques Lafontaine, "Holomorphic curves in symplectic Geometry" [AuLa]. Mais son point de vue est toujours celui de la géométrie symplectique, et sa structure d'ouvrage collectif rend difficile une utilisation d'ouvrage de référence. Notre objectif ici est d'étudier pour elles-mêmes ces structures presque-complexes, et notre point de vue sera celui de l'analyse complexe. En dehors de propriétés purement analytiques, nous chercherons à déterminer dans quelle mesure la théorie de l'hyperbolicité au sens de Kobayashi des variétés analytiques complexes est encore valide pour les variétés presque-complexes.

Dans une première partie (Chapitre I), après avoir rappelé quelques résultats classiques au sujet des variétés presque-complexes, nous montrerons notre premier résultat :

Lemme 1. *Soit (M,J) une variété presque-complexe, où la structure J appartient à $C^{1,\alpha}(M, EndTM)$. Si p et q sont deux points de M suffisamment proches, il existe une courbe J-holomorphe $u : \Delta \to M$ telle p et q sont dans $u(\Delta)$.*

Ce résultat est un préalable à toute la suite : il nous assure que l'on peut bien relier deux points quelconques par une chaîne de disques J-holomorphes et ainsi définir la pseudo-métrique de Kobayashi sur toute variété presque complexe connexe.

Ensuite, nous rappellerons les principaux résultats de la théorie de l'hyperbolicité de Kobayashi en les transposant au cas non intégrable. Parmi ceux-ci, nous démon--trerons une version non-intégrable du lemme de Brody :

Théorème 1. *Une variété presque-complexe compacte (M,J), avec $J \in C^2$, est hyperbolique si et seulement si elle ne contient pas de droite J-complexe non constante $f : \mathbb{C} \to (M,J)$.*

Nous ne sommes pas les premiers à montrer ce résultat, B. Kruglikov et M. Overhold l'ont déja fait dans [KrOv] en 1999. Nous suivons le même plan qu'eux, la principale différence étant que leur démonstration du Lemme principal est exclusivement basée sur la théorie des équations aux dérivées partielles et peut être difficile à comprendre pour un non spécialiste.

Définition 1. Une variété hyperbolique est dite complète si sa métrique de Kobayashi est complète au sens habituel (suites de Cauchy convergentes).

Définition 2. Un ouvert Y dans une variété presque-complexe (X, J) est dit *localement hyperbolique complet* (l.c.h.) si pour tout $y \in \bar{Y}$ il existe un voisinage $V_y \ni y$ tel que $V_y \cap Y$ est hyperbolique complet.

Définition 3. Un ouvert Y d'une variété presque-complexe X est dit *plongé hyperboliquement* dans X si, étant données deux suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ à valeurs dans Y convergeant vers $x \in \bar{Y}$ et $y \in \bar{Y}$ deux points distincts de l'adhérence de Y, on a

$$\overline{\lim}_{n \to \infty} k_Y^J(x_n, y_n) > 0$$

où k_Y^J est la pseudo-métrique de Kobayashi sur la variété (Y, J).

La démonstration des propositions 1 et 2 qui suivent utilise des idées proches de celles mises en œuvre dans la démonstration du Théorème de Brody.

Proposition 1. *Soit (X, J) une variété presque-complexe compacte de dimension 4, avec $J \in C^{1,\alpha}$. Soit $D = \cup_{j=1}^n D_j$ une courbe J-complexe réductible, dont chaque composante irréductible D_j est une courbe J-complexe immergée. Supposons que pour tout $j = 1, \ldots, n$ la courbe $(D_j \setminus Sing(D), J \mid_{D_j})$ est hyperbolique. Alors $(X \backslash D, J)$ est hyperboliquement plongé si et seulement s'il n'y a pas de droite J-complexe dans $X \backslash D$.*

Par courbe J-complexe immergée, nous entendons l'image d'une application J-holomorphe $u : S \to X$ d'une surface de Riemann compacte S, telle que du ne s'annule pas (c'est à dire que $u(S)$ est une courbe sans cusps).

Proposition 2. *Notons $\mathcal{M}_{\omega,5l} = \{(J, \{D_j\}_{j=1}^5)\}$ la variété Banachique constituée des paires $(J, \{D_j\}_{j=1}^5)$, où J est une structure presque-complexe quelconque sur $\mathbb{CP}^2$ adaptée à la forme symplectique de Fubini-Studi ω et $\{D_j\}_{j=1}^5$ est la réunion de cinq droites J-complexes de $\mathbb{CP}^2$ en position générale. L'ensemble $\mathcal{H}_{\omega,5l}$ constitué par $(J, \{D_j\}_{j=1}^5)$ avec $Y = (\mathbb{CP}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^5 D_j, J)$ hyperboliquement plongé est un ouvert non vide de $\mathcal{M}_{\omega,5l}$.*

Le fait que $\mathcal{H}_{\omega,5l}$ soit non vide est le théorème de Bloch. En effet, pour la structure complexe standard sur $\mathbb{CP}^2$ et pour des droites complexes standard $D_1, \ldots, D_5$ en position générale, la variété analytique complexe $\mathbb{CP}^2 \backslash D$ est hyperboliquement plongé. Nous montrons ici que $\mathcal{H}_{\omega,5l}$ est ouvert. Ainsi, on peut fabriquer énormément d'exemples de variétés presque-complexes de ce type (c'est à dire variétés compactes auquelles on a enlevé une courbe J-complexe réductible).

L'importance des voisinages hyperboliques complets est liée au théorème suivant dû à M. Zaidenberg dans le cas intégrable que nous démontrons dans le cas non intégrable dans la deuxième partie (Chapitre II) :

Théorème 2. *Soit Y un domaine relativement compact localement hyperbolique complet d'une variété presque-complexe (M, J). Pour que Y soit hyperbolique complet il est suffisant, et pour que Y soit plongé hyperboliquement dans M, il est nécessaire et suffisant, que Y ne contienne pas de droite J-complexe et n'admette pas de droite J-complexe limitante.*

Définition 4. Comme pour une variété analytique complexe munie d'une structure intégrable, par droite J-complexe nous entendons une application J-holomorphe non constante $f : \mathbb{C} \to X$ vérifiant $\|d_z f(\frac{\partial}{\partial x})\|_h \leqslant 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, où h est une métrique J-hermitienne sur X.

Définition 5. Une droite J-complexe f est dite *droite limitante* pour Y si $f(\mathbb{C}) \subset \partial Y$ et si pour tout rayon R il existe une suite $f_n^R : \Delta(R) \to Y$ d'applications J-holomorphes du disque de rayon R dans Y convergeant uniformément vers $f\,|_{\Delta(R)}$.

Nous abordons ensuite le résultat principal de notre travail. Il affirme que tout point d'une variété presque-complexe a une base de voisinages hyperboliques complets. Le problème étant local, on est ramené au cas où notre surface est $\mathbb{R}^4$ muni d'une structure presque-complexe arbitraire $J \in C^{1,\alpha}$ pour $0 < \alpha < 1$. Soit C une courbe J-complexe non singulière passant par l'origine.

Théorème principal. *Il existe une base $\{U_j\}$ de voisinages de zéro dans $\mathbb{R}^4$, telle que:*

1) (U_j, J) sont hyperboliques complets au sens de Kobayashi;

2) $(U_j \setminus C, J)$ sont hyperboliques complets aussi.

Le principal outil de la démonstration est un lemme de Schwarz non intégrable qui majore le module de la dérivée d'une application J-holomorphe.

La conséquence du théorème principal est de renforcer les résultats des propositions 1 et 2. En effet d'après le théorème de Kiernan, si Y est plongé hyperboliquement dans X et Y est localement hyperbolique complet alors Y est hyperbolique complet. Ainsi, les ouverts de la forme $X \backslash D$ des proposition 1 et 2 sont hyperboliques complets.

Enfin, dans une dernière partie (Chapitre III), nous étudierons les notions de plurisousharmonicité et de pseudoconvexité dans le cas d'une variété presque-com--plexe. Ce n'est pas la première fois que ces notions sont abordées, en particulier Y. Elisahberg l'a fait dans [El2] et D. Mac Duff celle de structure de contact qui est proche dans [McD]. Mais ces notions n'ont à notre connaissance jamais été abordées de façon systématique, ce que nous ferons. Nous prendrons comme définition de la plurisousharmonicité et de la pseudoconvexité les définitions naturelles.

Soit (V, J) une variété presque-complexe. Soit Ω un domaine de V et ϕ une fonction réelle semi-continue supérieurement, définie sur un voisinage de Ω. ϕ est dite plurisousharmonique si $\phi \circ u$ est sousharmonique pour tout u dans $\mathcal{O}_J(\Delta, V)$. ϕ est dite strictement plurisousharmonique si $\phi \in \mathcal{C}^2$ et pour tout u dans $\mathcal{O}_J(\Delta, V)$ telle que u' ne s'annule pas, $\Delta(\phi \circ u) > 0$, où Δ représente le laplacien.

Ω est dit strictement pseudoconvexe ou strictement J-convexe s'il existe une fonction strictement plurisousharmonique ϕ définie sur un voisinage de $\overline{\Omega}$ telle que $\Omega = \{\phi < 0\}$.

On montre que la plurisousharmonicité de ϕ est équivalente au fait que la forme quadratique $dd^{\mathbb{C}}\phi(X, JX)$ soit définie positive où

$$d^{\mathbb{C}}\phi(X) = -d\phi(JX).$$

On montre ensuite qu'elle n'est pas équivalente à la Lévi-plurisousharmonicité de ϕ. ϕ est dite Lévi-plurisousharmonique si $\mathcal{L}\phi$ est une forme quadratique définie positive, avec

$$\mathcal{L}\phi(X,Y) = H_\phi(X,Y) + H_\phi(JX, JY)$$

et H est la Hessienne de ϕ.
Il est bien connu, voir le chapitre 5 du livre [Hm] de L.Hörmander que si $x_1, \ldots, x_{2n}$ sont des coordonnées dans $\mathbb{R}^{2n}$ telles que $J(0) = J_{st}$, alors la fonction $\phi : x \mapsto ||x||^2$ est plurisousharmonique dans un voisinage de zéro. Mais

Proposition 3. *Pour une structure presque-complexe J avec $J(0) = J_{st}$, $\phi : x \mapsto ||x||^2$ n'est pas* log-*plurisousharmonique si J ne vérifie pas ${}^tJ(x) = J^{-1}(x)$, c'est à dire que J n'est pas orthogonale.*

Ceci nous montre qu'il existe des fonctions plurisousharmoniques dans le cas d'une structure presque-complexe non intégrable, mais que celles-ci ne ressemblent pas autant qu'on l'aurait souhaité aux fonctions plurisousharmoniques du cas intégrable. En particulier, nous ne pouvons pas transposer facilement au cas non intégrable certaines méthodes classiques en analyse complexe comme celle de N. Sibony dans [Si] contrôlant la métrique infinitésimale de Kobayashi-Royden au bord d'un pseudoconvexe en utilisant des fonctions plurisousharmoniques (qui nous aurait permis de montrer la complète hyperbolicité des pseudoconvexes).

Dans la suite, la convention suivante est appliquée : si nous utilisons une assertion ou une définition en se référant à l'article original, (où cette assertion / définition est montrée / formulée dans le cas intégrable), cela signifie que la même démonstration / définition est utilisable dans le cas non-intégrable sans aucune modification. Le lecteur est supposé se référer à l'article original, ou s'il préfère avoir toutes les références d'un seul tenant, le livre de S. Kobayashi [Ko-2] pour tout ce qui est lié à l'hyperbolicité et le livre écrit sous la direction de M. Audin et J. Lafontaine [AuLa] pour tout ce qui est lié aux courbes pseudo-holomorphes.

1.1 Propriétés classiques des variétés presque-complexes.

Nous rappelons ici les propriétés classiques des variétés presque-complexes, en détaillant la notion de structure Hermitienne dans ce cadre.

Rappellons qu'une application f entre deux variétés M et N est de classe $C^{1,\alpha}$ si sa norme de Hölder $||f||_{1,\alpha}$ est bornée sur M où

$$||f||_{1,\alpha} = ||f||_0 + ||df||_0 + \sup \frac{||df(x) - df(y)||}{||x-y||^\alpha}$$

Définition 1.1. Une *variété presque-complexe* est une paire (M, J) où M est une variété réelle de dimension $2n$, dénombrable à l'infini et J est une section $C^{1,\alpha}$ de $End(TM)$ telle que $J^2(x) = -Id$ pour tout x de M.

Une question qui vient immédiatement à l'esprit est de savoir si la structure presque-complexe J est profondément différente ou pas d'une structure de variété analytique complexe.

Définition 1.2. On appelle structure *standard* sur un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ la structure presque-complexe représentée dans les coordonnées canoniques par

$$J_{st} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans la suite, nous noterons indifféremment i ou J_{st} la structure complexe standard sur $\mathbb{R}^{2n}, n \geq 1$. Ainsi (Δ, J_{st}) est le disque unité de $\mathbb{C}$ et $(\mathbb{R}^2, J_{st})$ est la droite complexe usuelle.

Définition 1.3. La structure presque-complexe J est dite *complexe* si elle est égale localement à la structure standard via une carte, c'est à dire si $J = \Phi_*^{-1} J_{st} \Phi_*$ où Φ est une carte locale, c'est à dire un difféomorphisme local de la variété considérée dans $\mathbb{C}^n = (\mathbb{R}^{2n}, J)$.

Définition 1.4. On appelle *tenseur de Nijenhuis*

$$N_J(v,w) = -[v,w] + [Jv, Jw] - J[Jv, w] - J[v, Jw]$$

et on dit que J est *intégrable* si $N_J \equiv 0$

Ce tenseur nous permet de savoir intrinsèquement si une structure presque-complexe est complexe grâce au théorème suivant montré dans [NwNi] :

Théorème de Newländer-Nirenberg (1957). *La structure presque-complexe J est complexe si et seulement si J est intégrable .*

La notion de structure complexe est connue pour sa rigidité. Celle de structure presque-complexe est au contraire très souple, par exemple en modifiant localement une structure presque-complexe, on obtient encore une structure presque-complexe, et on peut par exemple utiliser des partitions de l'unité. En revanche, comme pour les structures intégrables, il existe des variétés qu'on ne peut pas munir de structure presque-complexe, l'obstruction étant de nature topologique. Un exemple classique étant celui des sphères de dimension paire. Les seules qui admettent une structure presque-complexe sont $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{S}^6$. Enfin, la propriété suivante est classique :

Propriété 1.5. *En dimension 2, toute structure presque-complexe est intégrable.*

Toute variété presque-complexe de dimension 2 sera donc appelée surface de Riemann.

Nous allons maintenant faire quelques rappels et définitions sur les questions métriques dans les variétés presque-complexes. Cette partie est volontairement plus détaillée, les résultats qui la composent étant toujours supposés connus dans les articles spécialisés, mais omis dans les ouvrages généralistes. Soit (V,ω) une variété symplectique munie d'une structure presque-complexe J. Rappelons rapidement les liens qu'on souhaite avoir entre ω et J et les métriques Riemanniennes et Hermitiennes qu'on fabrique avec ω et J.

Définition 1.6. Une forme symplectique ω est une forme bilinéaire antisymétrique fermée non dégénérée, c'est à dire telle que ω^n est une forme volume, où M est une variété de dimension 2n.

Définition 1.7. Une forme symplectique ω est dite adaptée à J si

$$\forall X,Y \in TM, \begin{cases} \omega(X,JX) > 0 \\ \omega(JX,JY) = \omega(X,Y) \end{cases}$$

Définition 1.8. La métrique Riemannienne associée à ω et à J dans le cas où la forme symplectique est adaptée est

$$\forall X,Y \in TM \quad , \quad < X,Y >= \omega(X,JY)$$

Elle est clairement bilinéaire. De plus, comme

$$< Y,X >= \omega(Y,JX) = -\omega(JX,Y) = -\omega(J^2X,JY) = \omega(X,JY) =< X,Y >$$

et

$$< X,X >= \omega(X,JX) > 0$$

c'est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Définition 1.9. *La métrique hermitienne H associée à une forme symplectique J-adaptée ω est la forme $\mathbb{C}$-bilinéaire définie par*

$$H(X,Y) = < X,Y > + i\omega(X,Y)$$

$$H(iX,Y) = H(JX,Y)$$

Propriété 1.10. *C'est une métrique hermitienne définie positive.*

Démonstration.
On vérifie facilement que H est $\mathbb{C}$-linéaire par rapport à la première variable, qu'elle a la symétrie hermitienne, qu'elle est définie positive.

Nous abordons enfin la notion d'holomorphie dans le cadre non-intégrable :

Définition 1.11. Une application de classe C^1 $u : (S, J_1) \to (M, J)$ qui vérifie les équations de Cauchy-Riemann

$$du \circ J_1 = J \circ du$$

est dite (J_1, J)-*holomorphe.*

Dans la suite, S sera une surface de Riemann, et on dira alors que u est une courbe J-holomorphe. Comme notre point de vue est de travailler avec S fixé, nous omettrons même sa présence :

Définition 1.12. L'ensemble des courbes J-holomorphes à valeurs dans M est noté $\mathcal{O}(M, J)$ ou $\mathcal{O}_J(M)$.

Les fonctions holomorphes sont au centre de l'analyse complexe, et la plupart des démonstrations les utilisent comme outils, même si elles ne sont pas liées a priori au problème. Nous ne disposerons pas ici de cet outil familier. En effet, en général, une variété presque-complexe non intégrable n'admet aucune fonction holomorphe non constante, c'est à dire d'application (J, J_{st})-holomorphe de but $\mathbb{R}^2$. C'est ce qui explique que dans notre cadre, le rôle d'objet naturel et d'outil classique est donné aux courbes J-holomorphes.

1.2 Disque passant par deux points proches.

Notre objectif est maintenant de faire passer un disque presque-complexe par deux points suffisament proches d'une variété presque-complexe. Ce résultat est indispensable pour définir la pseudo-métrique de Kobayashi (voir paragraphe 1.3), et a déjà été présenté dans le préprint [De]. B. Kruglikov et M. Overholt l'ont montré en 1999 dans [KrOv]. J.C. Sikorav a montré un résultat proche dans [Sk] (theorem 3.1.1) : si p est un point d'une variété presque-complexe (M, J) et v un vecteur suffisamment petit de T_pM, alors il existe un disque J-holomorphe $u : \Delta \to M$ avec $u(0) = p$ et $du(\frac{\partial}{\partial z}) = v$. Nous nous inspirons de sa démonstration et la suivons pas à pas.

Propriété 1.13. *Soit (M,J) une variété presque-complexe, $J \in C^{1,\alpha}(EndTM)$. Si p et q sont deux points de M suffisamment proches, il existe une courbe J-holomorphe $u : \Delta \to M$ telle p et q sont dans $u(\Delta)$.*

Démonstration. Comme le problème est local, on peut supposer que les deux points sont dans la même carte, ce qui revient à $M = \mathbb{R}^{2n}$. On peut supposer que $J(0) = i$. On travaille dans une boule $B = B(0,r) \subset \mathbb{R}^{2n}$ suffisamment petite pour que $J(v)+i$ soit inversible. L'équation traduisant que u est J-holomorphe est

$$\frac{\partial u}{\partial y} = J(u)\frac{\partial u}{\partial x}$$

En utilisant les expressions classiques $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{i}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial \bar{z}})$ et $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}})$ on peut reformuler l'équation sous la forme suivante :

$$(i + J(u))\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = (i - J(u))\frac{\partial u}{\partial z}$$

Comme $i + J(u)$ est inversible, on peut la réécrire

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = q_J(u)\frac{\partial u}{\partial z}$$

Ici

$$q_J : \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n}) \\ v & \longmapsto & [i + J(v)]^{-1}[i - J(v)] \end{array}$$

On introduit l'opérateur de Cauchy-Green (voir [Sk], [Vk]) de $L^{2,p}(\Delta, \mathbb{R}^{2n})$ dans $L^{3,p}(\Delta, \mathbb{R}^{2n}), p > 2$:

$$P : \phi \longmapsto (P\phi)(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Delta}\frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

qui vérifie $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ P = Id$. Introduisons maintenant l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} [0,1] \times L^{2,p}(\Delta, B) & \longrightarrow & L^{2,p}(\Delta, \mathbb{R}^{2n}) \\ (\varepsilon, u) & \longmapsto & [Id - Pq_J(\varepsilon u)\frac{\partial}{\partial z}]u \end{array}$$

Elle vérifie clairement

$$\frac{\partial \Phi(\varepsilon, u)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - q_J(\varepsilon u)\frac{\partial u}{\partial z}.$$

et on voit que Φ est de classe C^1 et $\Phi(\varepsilon, u)$ est holomorphe au sens standard si et seulement si εu est J-holomorphe. Notons $\Phi_\varepsilon = \Phi(\varepsilon, .)$.
Comme $q_J(0) = 0$, $\Phi_0 = Id_{L^{2,p}(\Delta,B)}$. Donc il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$, Φ_ε est un difféomorphisme de W dans V voisinages de 0 dans $L^{2,p}(B)$ et $L^{2,p}(\mathbb{R}^{2n})$ respectivement. Considérons l'application de Δ dans $\mathbb{R}^{2n}$

$$h_{p,q} : \quad z \longmapsto p + 2z(q - p)$$

où $(p,q) \in (\mathbb{R}^{2n})^2$ et notons $u_{\varepsilon,p,q} = \Phi_\varepsilon^{-1} h_{p,q}$. On remarque que
· $h_{p,q}$ étant holomorphe, $\varepsilon u_{\varepsilon,p,q}$ est J-holomorphe.
· $u_{0,p,q} = h_{p,q}$. Donc elle vérifie $u_{0,p,q}(0) = p$ et $u_{0,p,q}(\frac{1}{2}) = q$.
Considérons l'application de $[0,\varepsilon] \times (\mathbb{R}^{2n})^2$ dans $(\mathbb{R}^{2n})^2$

$$\Xi: \quad (\varepsilon,p,q) \longmapsto (u_{\varepsilon,p,q}(0), u_{\varepsilon,p,q}(\frac{1}{2}))$$

Ξ est C^1 et d'après notre remarque précédente $\Xi(0,.,.) = Id_{(\mathbb{R}^{2n})^2}$. Donc d'après le théorème des fonctions implicites, si ε est suffisamment petit, il existe U et U' voisinages de zéro dans $(\mathbb{R}^{2n})^2$ tels que $\Xi(\varepsilon,.,.) : U \longrightarrow U'$ est un difféomorphisme. Soient p_0 et q_0 deux points suffisamment proches de zéro (c'est à dire $(\frac{p_0}{\varepsilon}, \frac{q_0}{\varepsilon}) \in U'$). Il existe (p,q) tel que $\varepsilon u_{\varepsilon,p,q}(0) = p_0$ et $\varepsilon u_{\varepsilon,p,q}(\frac{1}{2}) = q_0$. Nous avons donc fabriqué $\varepsilon u_{\varepsilon,p,q}$ une courbe J-holomorphe qui passe par p_0 et q_0.

■

Remarque. On peut minorer uniformément sur tout compact de M le diamètre de l'ensemble des points reliables deux à deux. En effet, ils sont obtenus via le théorème des fonctions implicites, avec $d\Phi_0 = Id$. Si $d\Phi_\varepsilon$ est proche de Id, on a le contrôle voulu. Il suffit de choisir ε suffisamment petit pour que ce soit vrai.

1.3 Pseudo-métrique de Kobayashi.

Nous cherchons maintenant à définir la pseudo-métrique de Kobayashi et ses propriétés essentielles dans le cas d'une variété non-intégrable. Chaque point sera énoncé dans le cadre intégrable et adapté au cadre non intégrable.

Soit ρ la distance de Lobatchevski-Poincaré sur le disque unité Δ de $\mathbb{C}$. La métrique infinitésimale associée est

$$\rho = \frac{dz \otimes d\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}.$$

L'idée de Kobayashi est de choisir ρ comme archétype de la métrique et de définir sur le maximum de variétés une métrique ayant des propriétés comparables. Soit une variété analytique complexe M, et deux points p et q de M. On choisit une chaîne de points intermédiaires $p = p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}, p_k = q$ obtenus comme images de points de Δ par des disques holomorphes à valeurs dans M : il existe $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ points de Δ et $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(\Delta, M)$ tels que $f_i(a_i) = p_{i-1}$ et $f_i(b_i) = p_i$ pour $i = 1, \ldots, k$. Pour un tel choix de points et de disques, on considère $\sum_{i=1}^k \rho(a_i, b_i)$.

Définition 1.14. La pseudo-distance de Kobayashi $k_M(p,q)$ de p à q est définie comme la borne inférieure de cette cette expression pour tous les choix de telles chaînes formées de points et de disques les joignant.

Il est facile de vérifier que $k_M : M \times M \to \mathbb{R}$ est continue et vérifie les axiomes des pseudo-distances :
$k_M(p,q) \geq 0$
$k_M(p,q) = k_M^J(q,p)$
$k_M(p,q) + k_M(q,r) \geq k_M(p,r)$
En fait, ça n'est pas toujours une distance : deux points distincts peuvent être à une distance nulle.

Définition 1.15. Une variété analytique complexe M est dite *hyperbolique* si k_M est vraiment une métrique.

Pour définir la pseudo-métrique dans le cas non intégrable, la première question est de s'assurer que deux points quelconques sont reliés par au moins une chaîne finie de disques J-holomorphes. Nous avons vu dans le paragraphe précédent que deux points suffisamment proches étaient reliables par un disque J-holomorphe, et que le diamètre de l'ensemble des points reliables à un point donné était minoré uniformément sur un compact. Le nombre des disques nécessaires pour former une chaîne reliant deux points quelconques est donc fini. La pseudo-métrique de Kobayashi est donc bien définie. La démonstration des propriétés qui suivent est immédiate, aussi bien dans le cas intégrable que dans le cas non-intégrable.

Propriété 1.16. *Soit $f : M \to N$ une application holomorphe. Alors*

$$\forall (p,q) \in M^2 \quad , \quad k_M(p,q) \geq k_N(f(p),f(q))$$

Corollaire 1.17. *$k_{\mathbb{C}} \equiv 0$, et donc $\mathbb{C}$ n'est pas hyperbolique.*

Les résultats les plus intéressants qu'on en déduit sont les suivants :

Théorème de Barth (1973). *Soit X une variété analytique complexe connexe. Alors la pseudodistance de Kobayashi k_X est continue. Si k_X est une vraie distance, elle engendre la topologie standard sur X.*

Ce théorème est valable dans le cas non-intégrable, toute la démonstration origi--nale de l'auteur dans [Bt] est transposable sans aucune modification.

On souhaite de plus associer à la pseudo-métrique de Kobayashi une métrique infinitésimale, c'est à dire une manière de mesurer les vecteurs qui soit cohérente avec la métrique. Pour cela, nous avons tout d'abord besoin du résultat suivant montré dans [Sk] :

Propriété 1.18 (J.C. Sikorav 1992). *Soit (M,J) une variété presque-complexe de classe C^r pour un certain $r > 1$. Fixons un point $x \in M$. Alors pour tout $\xi \in T_xM$ suffisamment petit, il existe une application J-holomorphe $f : (\Delta,0) \to (M,x)$ telle que $df(0).\frac{\partial}{\partial z} = \xi$.*

Définition 1.19. Soit un vecteur ξ tangent à M au dessus de x, la *métrique infinitésimale de Kobayashi-Royden* est définie par

$$F_M(x,\xi) = \inf\{\frac{1}{r}, \exists f \in \mathcal{O}(\Delta_r, M), f(0) = x, f'(0) = \xi\} =$$

$$= \inf\{\frac{1}{r}, \exists f \in \mathcal{O}(\Delta, M), f(0) = x, f'(0) = r\xi\}$$

Le théorème de Royden nous dit que cette métrique infinitésimale est bien associée à la métrique de Kobayashi :

Théorème de Royden (1975). *Notons d la métrique associée à F_M, par la relation naturelle*

$$d(p,q) = \inf\{\int_0^1 F_M(\gamma(t), \gamma'(t))dt \quad , \quad \gamma \in C^1([0,1], M), \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$$

Alors $d = k_M$.

Dans le cas non-intégrable, la métrique infinitésimale de Kobayashi-Royden se définit de la même manière que dans le cas intégrable. Le théorème de Royden non-intégrable a été montré par B.Kruglikov en 1999 dans [Kr].

Définition 1.20. Une variété hyperbolique est dite complète si sa métrique de Kobayashi est complète au sens habituel (suites de Cauchy convergentes)

D'après le théorème de Hopf-Rinow, c'est équivalent au fait que tout point ait une base de voisinages compacts. Cette notion centrale sera abordée dans le chapitre II. Enfin, pour que le tableau soit complet, il nous reste à présenter le Théorème de Brody, critère d'hyperbolicité pour les variétés compactes.

1.4 Le théorème de Brody non-intégrable.

Théorème. *Une variété presque-complexe compacte M, munie de la structure J, est non hyperbolique si et seulement si elle contient une droite presque-complexe non constante $f \in \mathcal{O}_J(\mathbb{C}, M)$.*

La version originale de ce résultat a été montrée en 1977 dans [Br]. Nous montrons ici la version non intégrable de ce résultat, et la preuve que nous en donnons correspond au préprint [De]. Nous ne sommes pas les premiers à le montrer : B. Kruglikov et M. Overhold l'ont déja fait dans [KrOv] en 1999. Comme eux, suivons le plan de la démonstration originale de R. Brody, la principale difficulté pour adapter ce théorème au cas non intégrable étant le Lemme principal montré précédemment.

Lemme 1.21. *Soit (M,J) une variété presque-complexe. L'ensemble des applications J-holomorphes de Δ dans M est fermé dans la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications J-holomorphes de Δ dans (M,J), convergeant uniformément sur tout compact de Δ. Notons f sa limite. Soient deux compacts K et K' de Δ tels que K est inclus dans l'intérieur de K'. D'après J.C. Sikorav ([Sk] proposition 2.3.6 (i), p.171), on sait que si K' est suffisamment petit alors $\|f_n\|_{C^2(K)} \leq L\|f_n\|_{L^\infty(K')}$. Ainsi la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entraîne la convergence C^2 de la suite vers f. Par passage à la limite, f vérifie les équations de Cauchy-Riemann. Elle est donc J-holomorphe.

■

Dans toute la suite, M sera supposé compact. On choisit une métrique Riemannienne $|.|$ sur M. Montrons le lemme suivant :

Lemme 1.22. *Notons $f'(z_0) = f_*(z_0).\frac{\partial}{\partial x}$. M est hyperbolique si et seulement si*

$$\sup\{|f'(0)|, f \in \mathcal{O}(\Delta;(M,J))\} < \infty$$

Démonstration.

Condition suffisante.

Remarquons que pour un vecteur tangent arbitraire à Δ en 0, ν, tel que $\rho(\nu) = 1$

$$|f'(0)| = |f_*(0).\frac{\partial}{\partial x}| = |f_*(0).\nu|$$

que nous noterons $|f_*(\nu)|$. En effet, en 0, ρ est la métrique euclidienne, donc $\rho(\nu) = 1$ signifie que $\nu = a.\frac{\partial}{\partial x}$ où a est une rotation. Ainsi

$$\sup\{|f'(0)|, f \in \mathcal{O}(\Delta,(M,J))\} = \sup\{|f_*(\nu)|, f \in \mathcal{O}(\Delta,(M,J)); \nu \in T_0\Delta, \rho(\nu) = 1\} \tag{1.1}$$

Soit μ un vecteur tangent à Δ en un point p , et soit $\phi_{0,p}$ l'automorphisme conforme de Δ échangeant 0 et p,

$$\phi_{0,p}(z) = \frac{p-z}{1-\bar{p}z}$$

Il existe alors $\nu \in T_0\Delta$ tel que $\phi_*(\nu) = \mu$ et donc $f_*(\mu) = (f \circ \phi)_*(\nu)$. Ainsi

$$\sup\{|f'(0)|, f \in \mathcal{O}(\Delta,(M,J))\} = \sup\{|f_*(\nu)|, f \in \mathcal{O}(\Delta,(M,J)); \nu \in TM, \rho(\nu) = 1\}$$

Supposons que $\sup\{|f'(0)|, f \in \mathcal{O}(\Delta,(M,J))\}$ est fini et vaut c. Montrons que $k^J_M(p,q).c \geq |p,q|$, ce qui nous permettra de conclure que $k^J_M(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$ (et donc que M est hyperbolique).

$$|p,q| = \inf\{\int_\gamma |\gamma'(s)|ds, \quad \gamma : [0,1] \to M, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\} \leq$$

$$\leq \inf\{\int_\gamma |\gamma'(s)|ds, \quad \gamma:[0,1]\to M, \gamma(0)=p, \gamma(1)=q, \gamma=\sum_{i=1}^k f_i(\delta_i)$$

$$f_i \in \mathcal{O}(\Delta;(M,J)), \delta_i:[0,1]\to\Delta\} \leq$$

$$\leq \inf\{\sum_{i=1}^k \int_0^1 |f_{i*}(\delta_i'(s))|ds \qquad f_i\in\mathcal{O}(\Delta;(M,J)),$$

$$f_i(\delta_i(1)) = f_{i+1}(\delta_{i+1}(0)), f_1(\delta_1(0)) = p, f_k(\delta_k(1)) = q\} \leq$$

$$\leq \inf\{\sum_{i=1}^k c\rho(\delta_i), \quad f_i\in\mathcal{O}(\Delta;(M,J)), f_i(\delta_i(1)) = f_{i+1}(\delta_{i+1}(0)), f_1(\delta_1(0)) = p,$$

$$f_k(\delta_k(1)) = q\} =$$

$$= ck_M^J(p,q)$$

Dans la première inégalité, nous sommes passés aux courbes incluses par mor--ceaux dans des disques J-holomorphes. Dans la troisième, nous avons utilisé le fait que $|f_{i*}(\delta_i'(s))| \leq C\rho(\delta_i'(s))$ d'après l'équation (1.1). Ici, nous avons noté ρ aussi bien la métrique de Lobatchevski-Poincaré sur Δ que la métrique infinitésimale associée. D'autre part nous avons noté (abusivement) $\rho(\delta_i)$ la longueur du chemin δ_i pour la métrique de Lobatchevski-Poincaré.

Condition nécessaire.

Supposons que $\sup\{|f'(0)|; f\in\mathcal{O}(\Delta;(M,J))\} = \infty$.
Il existe alors une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de disques J-holomorphes à valeurs dans M, telle que $\lim_{n\to\infty} |f_n'(0)| = \infty$. On peut extraire de $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente par compacité de M. On note p sa limite. Soit U un voisinage de p inclus dans une carte locale. On peut supposer que $J(p) = J_{st}$ (cela revient à composer J avec une section constante de $End\ TM$). Quitte à réduire U, on peut supposer que pour tout x dans U, $\|q_J(x)\| < \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ provient de la proposition 2.3.6 (i) de [Sk], p.171. D'après cette proposition de Sikorav, on sait que

$$\forall f\in\mathcal{O}(\Delta;(U,J)), f(\Delta_{\frac{1}{m}})\subset U \quad \|f\|_{C^2(\Delta_{\frac{1}{2m}})} \leq L_m\|f\|_{L^\infty(\Delta_{\frac{1}{m}})}$$

où la constante L_m ne dépend que de m. Comme

$$\|f\|_{C^2(\Delta_{\frac{1}{2m}})} = \|f\|_{L^\infty(\Delta_{\frac{1}{2m}})} + \|df\|_{L^\infty(\Delta_{\frac{1}{2m}})} + \|d^2f\|_{L^\infty(\Delta_{\frac{1}{2m}})}$$

alors, si $f_n(\Delta_{\frac{1}{m}})\subset U$

$$|f_n'(0)| \leq L_m\|f_n\|_{L^\infty(\Delta_{\frac{1}{m}})}$$

Ainsi, pour tout entier m il existe n_m tel que $f_{n_m}(\Delta_{\frac{1}{m}}) \cap \partial U \neq \varnothing$. En particulier, on peut choisir une suite de points $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$, telle que pour tout m, x_m appartient à $f_{n_m}(\Delta_{\frac{1}{m}})$ et donc $k_M^J(f_{n_m}(0), x_m) \leq \rho(0, \frac{1}{m})$ converge vers zéro. Comme k_M^J est continue et ∂U est compact, $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ a un point d'accumulation x qui vérifie $k_M^J(x,p) = 0$. Or x est dans ∂U, donc x est différent de p. Cela signifie que k_M^J n'est pas une métrique.

■

Reprenons maintenant dans le cas non intégrable le lemme de renormalisation de Brody (cf [Br]) en suivant pas à pas la preuve originale.

Lemme de renormalisation de Brody. *Soit M une variété presque-complexe munie d'une structure J. Soit $f : \Delta_r \to M$ un disque J-holomorphe tel que $|f'(0)| \geq c \geq 0$. Alors il existe un disque J-holomorphe $\tilde{f} : \Delta_r \to M$ tel que*

$$\sup_{z\in\Delta_r} |\tilde{f}'(z)| \left(\frac{r^2 - |z|^2}{r^2}\right) = |\tilde{f}'(0)| = c$$

Démonstration. Dans un premier temps, nous allons faire le nécessaire pour avoir l'égalité, et nous imposerons ensuite à la borne supérieure d'être atteinte à l'origine. Soit $t \in [0,1]$ et

$$\begin{array}{cccc} & \Delta_r & \longrightarrow & M \\ f_t : & z & \longmapsto & f(tz) \end{array}$$

Soit $s(t) = \sup_{z\in\Delta_r} |f_t'(z)| \left(\frac{r^2 - |z|^2}{r^2}\right)$. Alors

$$\forall t < 1, \quad \sup_{z\in\Delta_r} |f_t'(z)| \leq \sup_{z\in t\Delta_r} |f'(z)| \leq \sup_{z\in\overline{\Delta_{tr}}} |f'(z)| < \infty$$

Comme f est continue sur $\overline{\Delta_{tr}}$, et $(\frac{r^2-|z|^2}{r^2}) \leq 1$, $s(t) < \infty$ pour $t < 1$.
Or l'application

$$t \mapsto \sup_{z\in\overline{\Delta_{tr}}} |f'(z)|$$

est continue, donc s est aussi continue. Or $s(0) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 1} s(t) \geq c$ donc il existe t_0 entre 0 et 1 tel que $s(t_0) = c$.

Premier cas : $t_0 = 1$.

$$c = s(1) = \sup_{z\in\Delta_r} |f'(z)| \left(\frac{r^2 - |z|^2}{r^2}\right)$$

Comme pour $z = 0$ $\quad |f'(0)|\frac{r^2}{r^2} \geq c, \quad$ le maximum est atteint en $z = 0$, il suffit de choisir $\tilde{f} = f$.

Second cas : $t_0 < 1$. Le maximum est atteint en un point z_0 à l'intérieur de Δ_r. Soit L l'automorphisme conforme de Δ_r échangeant 0 and z_0,

$$L(z) = r^2 \frac{z_0 - z}{r^2 - \bar{z_0} z}$$

Notons $\tilde{f} = f_{t_0} \circ L$. Comme la quantité $|f'_{t_0}(z)|(\frac{r^2 - |z|^2}{r^2})$ exprime la dérivée en fonction de ρ_r, elle est invariante par L.

∎

Lemme 1.23. *Soit M une variété compacte. La famille Ω de toutes les applications $C^\infty(\Delta_r, M)$ vérifiant*

$$\sup_{z \in \Delta_r} |f'(z)|(\frac{r^2 - |z|^2}{r^2}) = |f'(0)| = c$$

est relativement compacte dans la topologie de la convergence uniforme sur les compacts

Démonstration. Cette famille est équicontinue. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense de points de Δ. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Ω. $(f_m(z_1))_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite de M qui est compact. Une sous-suite convergente peut en être extraite. De cette sous-suite de fonctions on en extrait une autre, qui converge au point z_2. On extrait ainsi par ce processus diagonal de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge pour tout $z_n, n \in \mathbb{N}$. Comme $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue, $(f_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour tout z dans Δ. Donc la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement , vers une certaine fonction f. L'équicontinuité de la famille entraîne la convergence uniforme sur les compacts de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et donc f est continue.

∎

Démonstration du théorème de Brody non intégrable.

Condition suffisante. Supposons que M contient une droite presque-complexe non constante $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}; (M, J))$. Considérons deux points distincts p et q de M tels que $p = f(x)$ et $q = f(y)$.

$$k_M^J(p, q) \leq k_{\mathbb{C}}(x, y)$$

Comme $k_{\mathbb{C}} \equiv 0$, $k_M^J(p, q) = 0$ et k_M^J n'est pas une distance.

Condition nécessaire. Supposons que M n'est pas hyperbolique. D'après le lemme 1.22, il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{O}(\Delta; (M, J))$ telle que $\lim_{n \to \infty} |f'_n(0)| = \infty$.

Considérons l'application

$$\begin{array}{cccc} & \Delta_{r_n} & \longrightarrow & M \\ g_n : & z & \longmapsto & f_n(\frac{z}{r_n}) \end{array}$$

où $r_n = |f_n'(0)|$. On remarque que $|g_n'(0)| = 1$. En utilisant le lemme de renorma--lisation de Brody, on construit une suite $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de disques J-holomorphes de Δ_r dans M tels que

$$\sup_{z\in\Delta_r}|\tilde{g}_n'(z)|(\frac{r^2-|z|^2}{r^2}) = |\tilde{g}_n'(0)| = 1$$

Grâce au lemme 1.23 on extrait de $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge sur $\mathbb{C}$ uniformément sur tout compact, vers une application g. D'après le lemme 1.21, g est J-holomorphe. g n'est pas constante car

$$|g'(0)| = \lim_{n\to\infty}|\tilde{g}_n'(0)| = 1$$

g est bien une droite J-complexe non triviale.

■

Quand M n'est pas, lui même compact, mais est un ouvert relativement compact dans une variété X, la démonstration précédente nous donne le résultat suivant :

Proposition 1.24. *Si M n'est pas hyperbolique, alors $\overline{M}$ contient une droite J-complexe.*

Définition 1.25. Un ouvert Y d'une variété presque-complexe X est dit *plongé hyperboliquement* dans X si, étant données deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans Y convergeant vers $x\in\overline{Y}$ et $y\in\overline{Y}$ deux points distincts de l'adhérence de Y, on a

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}k_Y^J(x_n,y_n) > 0$$

où k_Y^J est la pseudo-métrique de Kobayashi sur la variété (Y,J).

De même que précédemment, on peut montrer :

Proposition 1.26. *Soit X est une variété compacte de dimension 4, et D une courbe J-holomorphe réductible de X. Si $M = X\backslash D$ n'est pas hyperboliquement plongée dans X, alors il existe une droite J-complexe dans X.*

Démonstration. Supposons que $X\backslash D$ n'est pas hyperboliquement plongé dans X. Munissons X d'une métrique Riemannienne h. Alors il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $X\backslash D$ convergeant respectivement vers x_0 et y_0 deux points distincts de D et telles que $k_{X\backslash D}(x_n,y_n)$ tend vers 0. Ainsi, pour tout n, il existe un chemin γ_n reliant x_n et y_n dans $X\backslash D$ dont la longueur pour la pseudométrique de Kobayashi-Royden sur $X\backslash D$ tend vers 0. Comme $x_0\neq y_0$, la longueur pour h de ces chemins est uniformément minorée à partir d'un certain rang. On déduit directement de la définition de la pseudométrique de Kobayashi-Royden l'existence de points $z_n\in\gamma_n$ et de vecteurs $\xi_n\in T_{z_n}X$ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N}, \|\xi_n\|_h = 1 \qquad \lim_{n\to\infty}\|\xi_n\|_{k_{X\backslash D}} = 0$$

A partir de là, on peut reprendre la preuve du lemme de Brody pour obtenir une droite J-holomorphe dans X.

■

1.5 Ouverts hyperboliquement plongés.

Nous allons maintenant donner des critères de plongement hyperbolique pour certains ouverts. Les démonstrations qui suivent utilisent des idées proches de celles du théorème de Brody, ainsi que les propriétés topologiques des courbes presque-complexes. En particulier, le point crucial de la preuve est le résultat suivant au sujet de la positivité d'intersection des courbes J-complexes dû à M. Micallef et B. White dans [MiWh].

Théorème 1.27. *Soient $u_i : \Delta \to (\mathbb{R}^4, J)$, $i = 1,2$ deux disques J-complexes distincts tels que $u_1(0) = u_2(0) = 0$. Notons $M_i = u_i(\Delta)$. Soit $Q = M_1 \cap M_2$ l'intersection des deux disques. Si J est C^1, alors :*

i) L'ensemble $\{(z_1, z_2) \in \Delta \times \Delta : u_1(z_1) = u_2(z_2)\}$ est un sous-ensemble discret de $\Delta \times \Delta$. En particulier, $u_1(\Delta) \cap u_2(\Delta)$ est un ensemble dénombrable. Si de plus $u_1(\partial\Delta) \cap u_2(\partial\Delta) = \varnothing$ alors $u_1(\Delta) \cap u_2(\Delta)$ est fini.

ii) L'indice d'intersection δ_p de M_1 et M_2 en un tel point $p \in Q$ est strictement positif. De plus, si μ_1 et μ_2 sont les multiplicités de u_1 et u_2 en z_1 et z_2 respectivement, avec $u_1(z_1) = u_2(z_2) = p$, alors le nombre d'intersection δ_p au point $p = u_j(s_j)$ vaut au moins $\mu_1 \cdot \mu_2$;

iii) $\delta_p = 1$ si et seulement si M_1 et M_2 s'intersectent au point p transversalement.

Ces résultats sont montrés dans [MiWh], théorèmes 7.1 et 7.3, mais aussi dans [IvSh], Théorème 3.5.1.

Nous avons aussi besoin de la description topologique suivante du nombre total d'intersection de M_1 et M_2 $\delta = \sum_{p \in Q} \delta_p$.

Soit une sphère S_r de rayon r autour de l'origine, qui borde la boule B_r. Alors, pour r suffisamment petit, les intersections $M_i \cap S_r$ sont transverses, et de plus, comme Q est au plus dénombrable, on peut trouver $r > 0$ aussi petit qu'on le souhaite tel que $\gamma_1^r \cap \gamma_2^r = \varnothing$, où $\gamma_i^r = M_i \cap S_r$. De plus, γ_i^r sera transverse à la distribution F_r des plans J-complexes tangents à S_r, voir Lemme A2.1.1 dans [IvSh]. Soit $l(\gamma_1^r, \gamma_2^r)$ le linking number des courbes γ_1^r et γ_2^r. Un lemme standard de topologie (voir par exemple [Rf]) dit alors que

$$l(\gamma_1^r, \gamma_2^r) = \sum_{p \in Q \cap B_r} \delta_p. \tag{4.1}$$

La positivité d'intersection des courbes J-complexes entraîne que si M_1 et M_2 intersectent en zéro, alors ce linking number n'est pas nul (il est strictement positif).

Nous en déduisons :

Propositio 1.28. *Soit (X,J) une variété presque-complexe compacte de dimension 4, avec $J \in C^{1,\alpha}$. Soit $D = \cup_{j=1}^{n} D_j$ une courbe J-complexe réductible, dont chaque composante irréductible D_j est une courbe J-complexe immergée. Supposons que pour tout $j = 1,\dots,n$ la courbe $(D_j \setminus Sing(D), J\mid_{D_j})$ est hyperbolique. Alors $(X\backslash D, J)$ est hyperboliquement plongé dans X si et seulement s'il n'y a pas de droite J-complexe dans $X\backslash D$.*

Définition 1.29. Une *courbe J-complexe immergée* est l'image d'une application J-holomorphe $u : S \to X$ d'une surface de Riemann compacte S, telle que du ne s'annule pas (ainsi $u(S)$ est une courbe sans cusp).

Démonstration de la Proposition 1.28.

Si $X\backslash D$ n'est pas hyperboliquement plongé dans X, alors, d'après la proposition 1.24, il y a une droite J-complexe u dans X obtenue comme limite de disques u_n à valeurs dans $X\backslash D$. Si cette droite n'est pas contenue dans $X\backslash D$, il y a deux possibilités :

- soit $u(\mathbb{C}) \not\subset D$ et $u(\mathbb{C}) \cap D \neq \varnothing$. D'après le préliminaire du paragraphe, le linking number $l(u(\mathbb{C}), D)$ de $u(\mathbb{C})$ et D est strictement positif. Donc pour n suffisamment grand, $l(u_n(\Delta_{r_n}), D) > 0$, ce qui contredit le fait que u_n soit à valeurs dans $X\backslash D$.

-soit $u(\mathbb{C}) \subset D$. Supposons par exemple que $u(\mathbb{C}) \subset D_1$. Comme $D_1 \setminus Sing(D)$ est hyperbolique, $u(\mathbb{C})$ rencontre $Sing(D)$. Par exemple $u(\mathbb{C}) \cap D_2 \neq \varnothing$. Nous sommes ramenés au cas précédent en remplaçant D par D_2. Contradiction

■

Voici la seconde proposition qui est notre objectif initial. C'est sa démonstration qui nous a amené à considérer l'existence de voisinages hyperboliques complets.

Proposition 1.30. *Notons $\mathcal{M}_{\omega,5l} = \{(J, \{D_j\}_{j=1}^{5})\}$ la variété Banachique constituée des paires $(J, \{D_j\}_{j=1}^{5})$, où J est une structure presque-complexe quelconque sur $\mathbb{CP}^2$, adaptée à la forme de Fubini-Studi ω et $\{D_j\}_{j=1}^{5}$ la réunion de cinq droites J-complexes dans $\mathbb{CP}^2$ en position générale. L'ensemble $\mathcal{H}_{\omega,5l}$ constitué de $(J, \{D_j\}_{j=1}^{5})$ avec $Y = (\mathbb{CP}^2 \backslash \bigcup_{j=1}^{5} D_j, J)$ hyperboliquement plongé dans $\mathbb{CP}^2$ est un ouvert non vide de $\mathcal{M}_{\omega,5l}$.*

Le fait que $\mathcal{H}_{\omega,5l}$ soit non vide est le théorème de Bloch (voir [La]). En effet, pour la structure complexe standard sur $\mathbb{CP}^2$ et pour des droites complexes standard $D_1, \dots, D_5$ en position générale, cette proposition signifie bien que la variété analytique complexe $\mathbb{CP}^2 \setminus D$ est hyperboliquement plongé. Une des conséquences est que cette proposition donne une manière de fabriquer beaucoup d'exemples de variétés hyperboliques presque-complexes de ce type (c'est à dire variété presque-complexe compacte moins une courbe J-complexe réductible).

Démonstration. Cette démonstration ressemble à la précédente. Supposons que l'on peut trouver une suite $(\{D_i^{(k)}\}_{i=1}^{5}, J_k)$ dans $\mathcal{M}_{\omega,5l}$, telle que les $Y_k = (\mathbb{CP}^2 \backslash D^{(k)}, J_k)$ ne sont pas hyperboliques, la suite $(\{D_i^{(k)}\}_{i=1}^{5}, J_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(\{D_i\}_{i=1}^{5}, J)$

dans $\mathcal{M}_{\omega,5l}$, tel que $Y = (\mathbb{CP}^2 \backslash D, J)$ est hyperbolique. Considérons les métriques J_k et J-Hermitiennes $\omega(\cdot, J_k \cdot)$ et $\omega(\cdot, J\cdot)$ sur $\mathbb{CP}^2$ (voir chapitre V pour les définitions des métriques Hermitiennes dans le cas presque-complexe). D'après le corollaire 2.6, il existe une droite J_k-complexe $u_k : \mathbb{C} \rightarrow Y_k$. Les gradiants de u_k sont uniformément bornés et donc une suite extraite, notée de nouveau $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$. Toutes les topologies sur l'espace des applications holomorphes sont équivalentes (voir par exemple le corollaire 3.2.2 de [IvSh]) et donc $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une application J-holomorphe $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{CP}^2$ au sens C^1. Comme $\|du(0)\|_h = \lim_{k\rightarrow\infty} \|du_k(0)\|_{h_k} = \frac{1}{2}$, l'application u est une droite J-complexe. $u(\mathbb{C})$ ne peut pas être contenu dans Y à cause de l'hyperbolicité de celui-ci. Donc $u(\mathbb{C}) \cap D \neq \varnothing$.

Des considérations similaires à celles de la preuve dde la proposition 1.28 montrent que dans ce cas $u_k(\mathbb{C}) \cap D^{(k)} \neq \varnothing$ for $k >> 1$. Contradiction. On en déduit que $\mathbb{CP}^2 \backslash D$ est hyperboliquement plongé dans $\mathbb{CP}^2$.

■

On obtient un dernier résultat en utilisant une démonstration similaire. Notons $\mathcal{M}_{\omega,d}$ la variété Banachique des paires (J, D), où J est une structure presque-complexe ω-adaptée sur $\mathbb{CP}^2$ et D est une courbe *irréductible* J-complexe de degré d dans $\mathbb{CP}^2$. Notons $\mathcal{H}_{\omega,d}$ le sous-ensemble formé des $(J, D) \in \mathcal{M}_{\omega,d}$ tels que $(\mathbb{CP}^2 \setminus D, J)$ est plongé hyperboliquement dans $(\mathbb{CP}^2, J)$.

Proposition 1.31. *L'ensemble $\mathcal{H}_{\omega,d}$ est un ouvert non vide de $\mathcal{M}_{\omega,d}$, à condition que $d \geqslant 5$.*

Démonstration. $\mathcal{H}_{\omega,d}$ est non vide d'après le résultat de Zaidenberg [Za-2], qui affirme qu'il existe un ouvert dans la variété des courbes algébriques de degré $d \geqslant 5$ dans $\mathbb{CP}^2$ telles que $\mathbb{CP}^2 \setminus D$ est hyperboliquement plongé dans $\mathbb{CP}^2$ pour toute courbe D de cet ensemble.
$\mathcal{H}_{\omega,d}$ est ouvert, la démonstration est identique à celle de la proposition 1.30.

■

CHAPITRE II : VOISINAGES HYPERBOLIQUES COMPLETS

2.1 Hyperbolicité complète et théorème de Zaidenberg.

Dans le chapitre qui suit, nous commencerons par rappeler un résultat de Zaïdenberg et nous l'appliquerons à notre cadre. Ensuite, nous montrerons l'hyperbolicité complète locale en dimension 4, et pour cela nous reprendrons en détails et en français l'article que j'ai eu l'honneur de réaliser avec le professeur S. Ivachkovitch, [DeIv] qui est paru dans l'International Journal of Mathematics. Pour plus de détails sur les équations de Beltrami et les opérateurs de Cauchy-Green et de Calderon-Zygmund, se reporter au livre de I. Vekua [Vk].

Dans le cas intégrable, Kobayashi et Kiernan ont remarqué le rôle central joué par les voisinages hyperboliques complets. Leur importance est liée au théorème suivant dû à Zaidenberg dans le cas intégrable que nous démontrons dans le cas non intégrable :

Théorème 2.1. *Soit Y un domaine relativement compact localement hyperbolique complet d'une variété presque-complexe (M, J). Pour que Y soit hyperbolique complet il est suffisant, et pour que Y soit plongé hyperboliquement dans M, il est nécessaire et suffisant, que Y ne contienne pas de droite J-complexe et n'admette pas de droite J-complexe limitante.*

Ce résultat utilise les notions suivantes :

Définition 2.2. Un ouvert Y dans une variété presque-complexe (X, J) est dit *localement hyperbolique complet* (l.c.h.) si pour tout $y \in \bar{Y}$ il existe un voisinage $V_y \ni y$ tel que $V_y \cap Y$ est hyperbolique complet.

Un exemple que nous garderons à l'esprit de cette situation est celui où (X, J) est une surface presque-complexe et $Y = X \setminus D$, où $D = \cup_k D_k$ est une courbe (réductible) avec des composantes J-complexes D_k irreductibles, qui ne contiennent pas de cusps. Ce théorème nous affirme alors qu'un tel Y est localement hyperbolique complet.

Remarque. Si Y est plongé hyperboliquement dans (X, J) et Y est localement hyperbolique complet, alors (Y, J) est hyperbolique complet, voir [Ki].

Définition 2.3. Comme pour une variété analytique complexe munie d'une structure intégrable, par droite J-complexe nous entendons une application J-holomor--phe non constante $f : \mathbb{C} \to X$ telle que $\|d_z f(\frac{\partial}{\partial x})\|_h \leqslant 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, où h est une métrique J-hermitienne sur X.

Définition 2.4. Une droite J-complexe f est dite *droite limitante* pour Y si $f(\mathbb{C})$ est inclus dans le bord ∂Y et si pour tout rayon R il existe une suite d'applications J-holomorphes $f_n^R : \Delta(R) \to Y$ du disque de rayon R dans Y convergeant uniformément vers $f|_{\Delta(R)}$.

Passons maintenant à la démonstration du théorème de Zaidenberg non intégra- -ble. Pour cela, suivons pas à pas la démonstration originale de l'auteur dans [Za]. Soit h une métrique Riemannienne sur M. Nous noterons aussi h la distance associée. Soit H la métrique infinitésimale

$$H(x,\xi) = \sqrt{h_x(\xi,\xi)}, \quad \forall x \in M, \forall \xi \in T_xM$$

Comme Y est localement hyperbolique complet, en tout point p de Y on peut choisir un voisinage ouvert U_i de p dans M tel que $U_i \cap Y$ est hyperbolique complet (pour $k^J_{U_i \cap Y}$). Soit $U_1, \dots, U_n$ un recouvrement fini du compact $\overline{Y}$ avec de tels ouverts. Notons ε le nombre de Lebesgue de ce recouvrement par rapport à h. On considère un autre recouvrement fini de $\overline{Y}$ avec des ouverts hyperboliques complets V_i dont le h-diamètre est majoré par $\frac{\varepsilon}{4}$. On note $U_{i,\alpha}$ et $V_{i,\alpha}$ respectivement chaque composante connexe de $U_i \cap Y$ et $V_i \cap Y$. On obtient ainsi des recouvrements localement finis de Y. Pour $x \in Y$ et $\xi \in T_xY$, considérons les métriques infinitésimales G_0 et G définies par

$$G_0(x,\xi) = \min\{F_{V_{i,\alpha}}(x,\xi), V_{i,\alpha} \ni x\}$$

et

$$G = \max(G_0, H)$$

On remarque que G est une métrique infinitésimale continue. En effet G_0 est clairement continue. Notons g et g_0 les distances associées.

Lemme 2.5. *La g-boule $B_g(p, \frac{\varepsilon}{4})$ est relativement compacte dans Y pour tout point $p \in Y$.*

Démonstration. Considérons un U_i contenant p et tel que $h(p, \partial U_i) \geq \varepsilon$. Notons $U_{i,\alpha}$ la composante connexe de p dans U_i. Montrons que

$$B_g(p, \frac{\varepsilon}{4}) \subset B_{k_{U_{i,\alpha}}}(p, \frac{\varepsilon}{4}) \tag{1.2}$$

Comme $G \geq G_0$ il suffit de montrer que $G_0 \geq F_{U_{i,\alpha}}$ sur les g-boules $B_g(p, \frac{\varepsilon}{4})$. On remarque que $B_g(p, \frac{\varepsilon}{4})$ est inclus dans $U_{i,\alpha} \cap B_h(p, \frac{\varepsilon}{4})$. En effet, $G \geq H$ et donc $B_g(p, \frac{\varepsilon}{4})$ est inclus dans $B_h(p, \frac{\varepsilon}{4})$. De plus, comme ε est le nombre de Lebesgue du recouvrement, $B_h(p, \frac{\varepsilon}{4})$ est inclus dans U_i. La boule $B_g(p, \frac{\varepsilon}{4})$ étant connexe, elle est incluse dans une seule composante connexe de U_i.

Considérons un ouvert $V_{j,\beta}$ tel que $V_{j,\beta} \cap U_{i,\alpha} \cap B_h(p, \frac{\varepsilon}{4}) \neq \emptyset$. Comme le h-diamètre de $V_{j,\beta}$ est inférieur à $\frac{\varepsilon}{4}$,

$$V_{j,\beta} \subset U_{i,\alpha} \cap B_h(p, \frac{\varepsilon}{2})$$

Ainsi, $G_0 = \min\{F_{V_{k,\gamma}}\}$ est supérieur à $F_{U_{i,\alpha}}$ sur $U_{i,\alpha} \cap B_h(p, \frac{\varepsilon}{4})$; ce qui montre (1.2).

Comme tout $U_{i,\alpha}$ est hyperbolique complet, $B_{k_{U_{i,\alpha}}}(p, \frac{\varepsilon}{4}) \Subset U_{i,\alpha} \subset Y$, et on déduit de (1.2) que $B_g(p, \frac{\varepsilon}{4})$ est inclus dans Y.

Corollaire 2.6. *La métrique infinitésimale G est complète.*

Lemme 2.7. *S'il existe un $c > 0$ tel que*

$$F_Y \geq cG \tag{1.3}$$

alors Y est une variété hyperbolique complète, plongée hyperboliquement dans M.

Démonstration. Comme $F_Y \geq cG \geq cH$, il existe un U_i et un V_j pour tout p tel que $k_Y(V_j \cap Y, U_i \cap Y) > 0$ qui est une des définitions d'un plongement hyperbolique.

Pour l'hyperbolicité complète, toute k_Y-boule $B_{k_Y}(p,r)$ est incluse dans $B_g(p, \frac{r}{c})$ qui est compactement incluse dans Y.

Lemme 2.8. *Si la condition* (1.3) *n'est pas satisfaite, alors il existe une droite J-complexe ϕ incluse dans Y ou limitante pour Y.*

Démonstration.

Première étape. Posons $c = \frac{1}{n}$. Comme la condition (1.3) n'est pas vérifiée, il existe un vecteur tangent (x_n, ξ_n) dans TY tel que

$$F_Y(x_n, \xi_n) < \frac{1}{n} G(x_n, \xi_n)$$

Par homogénéité, on peut supposer $G(x_n, \xi_n) = 1$ et donc $F_Y(x_n, \xi_n) < \frac{1}{n}$. Ainsi, par définition de la métrique infinitésimale de Kobayashi-Royden, il existe une suite de disques $f_n \in \mathcal{O}(\Delta_n, Y)$ tels que $f_n(0) = x_n$ and $df_n(0) = (1+\delta_n)\xi_n$. On utilise le lemme de reparamétrisation de Brody et on obtient une suite de disques $\phi_n \in \mathcal{O}(\Delta_n, Y)$ tels que $|d\phi_n(0)|_G = 1$ and

$$\forall z \in \Delta_n, \quad |d\phi_n(z)|_G \leq \frac{n^2}{n^2 - |z|^2}$$

La suite forme une famille équicontinue. Or $\overline{Y}$ est compact. En utilisant le theorème d'Ascoli et un processus diagonal, on extrait une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une application J-holomorphe $\phi \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, M)$.

Deuxième étape. Cette application n'est pas constante.
C'est clairement vrai si $\phi(0) \in Y$. Si $\phi(0) \in \partial Y$, supposons que ϕ est constante. Considérons l'ouvert V_i contenant $y_0 := \phi(0)$. Comme $\phi_n|_{\Delta_2}$ converge vers le disque constant y_0, $\varphi_k(\Delta_2)$ est inclus dans V_i pour k assez grand. Comme Δ_2 est connexe, $\varphi_k(\Delta_2)$ est inclus dans une seule des composantes connexes $V_{i,\alpha}$ de $V_i \cap Y$. Notons $p_k = \varphi_k(0)$, et $\zeta_k = d\phi_k(0)$. Ainsi, $F_{V_{i,\alpha}}(p_k, \zeta_k) \leq \frac{1}{2}$. Or

$$G_0(p_k, \zeta_k) = \min\{F_{V_{i,\alpha}}(p_k, \zeta_k), V_{i,\alpha} \ni p_k\}$$

donc $G_0(p_k,\zeta_k) \leq \frac{1}{2}$. Comme $|\zeta_k|_G = |d\phi_k(0)|_G = 1$ et $|\zeta_k|_{G_0} \leq \frac{1}{2}$, $|\zeta_k|_H = 1$. Donc $|d\phi(0)|_H = 1$ et ϕ n'est pas constante, ce qui est contradictoire avec notre hypothèse.

Dernière étape. ϕ est à valeurs soit dans Y soit dans ∂Y.
Supposons qu'il existe z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ tel que $\phi(z_0)$ soit dans Y. Montrons que $\phi(\mathbb{C})$ est inclus dans Y. Supposons qu'il existe z_1 tel que $g(z_1)$ est dans ∂Y. Quitte à modifier le choix des points, on peut supposer que $\phi(z_0)$ et $\phi(z_1)$ sont dans le même ouvert V_i. Notons $V_{i,\alpha}$ la composante connexe de V_i contenant $\phi(z_0)$. Ainsi

$$k^J_{V_{i,\alpha}}(\phi(z_0), \phi(z_1)) = \infty$$

Or, il existe un rang N tel que pour tout $n > N$, $\phi_n(z_0)$ et $\phi_n(z_1)$ sont dans $V_{i,\alpha}$. Les topologies engendrées par h et $k^J_{V_{i,\alpha}}$ sont identiques d'après le théorème de Bath (voir [Bt], et le début de ce chapitre). Comme la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact et donc simplement vers ϕ pour la métrique h, les suites $(\phi_n(z_1))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\phi_n(z_1))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\phi(z_1)$ et $\phi(z_0)$ pour la métrique $k^J_{V_{i,\alpha}}$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} k^J_{V_{i,\alpha}}(\phi_n(z_0), \phi_n(z_1)) = \infty$$

Comme les applications pseudo-holomorphes réduisent la distance de Kobayashi,

$$\forall n > N, \quad k^J_{V_{i,\alpha}}(\phi_n(z_0), \phi_n(z_1)) < \rho(z_0, z_1)$$

Or $\rho(z_0, z_1)$ est un nombre fini, donc c'est une contradiction.

Démonstration du théorème 2.1. *Pour conclure, il reste à montrer que Y ne peut pas simultanément admettre une droite J-complexe limitante et être plongé hyperboliquement.*

Démonstration. Considérons les mêmes ϕ et ϕ_n que précédemment, avec $\phi(\mathbb{C})$ inclus dans ∂Y. Considérons deux points z_0 et z_1 de $\mathbb{C}$ dont les images par ϕ sont distinctes. Les suites $(\phi_k(z_0))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\phi_k(z_1))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\phi(z_0)$ et $\phi(z_1)$ respectivement. Comme les applications J-holomorphes réduisent la métrique de Kobayashi,

$$k_Y(\phi(z_0), \phi(z_1)) \leq k_{\Delta_k}(z_0, z_1)$$

et le second membre converge vers 0. Ainsi, si Y admet une droite J-complexe limitante, elle n'est pas plongée hyperboliquement.

■

Notre objectif est maintenant de montrer que tout point d'une variété presque-complexe a une base de voisinages hyperboliques complets.

Remarque. L'existence de voisinages hyperboliques (et même plongés hyperboliquement) est triviale : si c'etait faux, on pourrait construire une suite de disques J-holomorphes $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec pour tout n $f_n \in \mathcal{O}_J(\Delta, B(p, \frac{1}{n}))$ où $|f_n'(0)|$ tend vers l'infini. On en extrait par Brody une sous-suite convergente après reparamétrisation vers une J-droite holomorphe non constante d'après le théorème de Brody. Or par construction, cette J-droite est concentrée en p (le rayon des boules tend evrs 0). Contradiction.
On pourrait le montrer aussi en combinant le théorème de Brody avec l'existence locale de fonctions plurisousharmoniques montrée au chapitre III.

Revenons à la fabrication d'une base de voisinages hyperboliques complets en dimension 4. Le problème étant local, on est ramené au cas où notre surface est $\mathbb{R}^4$ muni d'une structure presque-complexe arbitraire $J \in C^{1,\alpha}$ pour $0 < \alpha < 1$. Soit C une courbe J-complexe non singulière passant par l'origine.
Nous allons montrer que

Théorème 2.9. *Il existe une base $\{U_j\}$ de voisinages de zéro dans $\mathbb{R}^4$, telle que:*
1) (U_j, J) sont hyperboliques complets au sens de Kobayashi;
2) $(U_j \setminus C, J)$ sont hyperboliques complets aussi.

Nous nous limitons à la dimension 4 en raison de la place cruciale de la trivialisation locale de la structure presque-complexe de J.C. Sikorav dans notre démonstration. Or cette trivialisation n'est valable qu'en dimension 4. Dans le cas où J est intégrable, ce résultat est une conséquence directe du lemme de Schwarz-Pick. En effet, on peut choisir un système de coordonnées holomorphes locales tel que C est un des axes, et l'ensemble $U_j = \Delta^2_{\frac{1}{j}}$, le bidisque de rayon $\frac{1}{j}$. Alors la distance de Kobayashi sur U_j et $U_j \setminus C$ peut être calculée explicitement, et de cette forme explicite, on voit qu'elle est complète, voir par exemple [Ko-2], Ch.2. L'utilité des voisinages hyperboliques complets dans la théorie des variétés hyperboliques complètes, observée tout d'abord par Kiernan et Kobayashi, est devenu un classique depuis. Le fait que ce résultat reste vrai pour *toute* structure presque complexe est assez surprenant. En effet, étant donné un germe *quelconque* de surface réelle non singulière $C \ni 0$ dans $\mathbb{R}^4$, on peut facilement construire une structure presque-complexe J dans un voisinage de zéro telle que C devienne une courbe J-complexe. Notons aussi qu'à cause de la non-existence de fonctions J-holomorphes pour J quelconque, l'hyperbolicité de $U \setminus C$ pour une courbe J-complexe C n'est pas évidente non plus.

Nous nous sommes intéressés au cas des surfaces presque-complexes, parce qu'une structure presque-complexe J sur une variété de dimension supérieure ne possède pas d'hypersurface J-complexe même localement.

Dans un premier temps nous allons donner une sorte de lemme de Schwarz, et déduire notre théorème de ce lemme. Ensuite nous allons montrer ce lemme de Schwarz. Enfin, dans le chapitre suivant, nous allons en déduire des corollaires qui ont guidé cette partie de notre recherche.

2.2 Démonstration du théorème.

Notre objectif est de construire une base de voisinages hyperboliques complets de l'origine dans $(\mathbb{R}^4, J)$, où J est une structure presque-complexe arbitraire de classe $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Il existe un système de coordonnées locales (z_1, z_2) dans un voisinage de 0 tel que notre structure presque-complexe dans ces coordonnées est de la forme

$$J(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} A(z_1, z_2) & 0 \\ 0 & B(z_1, z_2) \end{pmatrix},$$

et $J(0) = J_{st}$, la structure standard de $\mathbb{C}^2$. Si de plus, une courbe J-complexe non singulière C passant par 0 est donnée, on peut choisir les coordonnées locales de telle manière que C soit défini par $z_1 = 0$, (voir l'article [Sk] de Jean-Claude Sikorav).

Considérons la structure $J_\varepsilon(z_1, z_2) := J(\varepsilon z_1, \varepsilon z_2)$. Nous cherchons à montrer que pour ε suffisamment petit, le bidisque $\Delta_\varepsilon^2 := \{(z_1, z_2) : |z_1| < \varepsilon, |z_2| < \varepsilon\}$ de birayon ε et $\Delta_\varepsilon^2 \setminus \{z_1 = 0\}$ sont hyperboliques complets, ce qui revient à montrer que le bidisque unité Δ^2 et $\Delta^2 \setminus \{z_1 = 0\}$ sont hyperboliques complets en tant que sous-variétés de $\mathbb{R}^4$ muni de J_ε. Les lemmes et propriétés qui suivent vont être formulés de manière à être adaptés aux deux cas. Une démonstration qui traiterait seulement de la complétude de Δ^2 serait identique, sauf qu'il ne serait pas nécéssaire d'utiliser de revêtement. Un lecteur qui serait dérouté par la multitude des choses traitées simultanément et la compléxité des notations peut donc dans un premier temps ne pas tenir compte de tout ce qui est lié aux revêtements. Notons $z = x + iy$ les coordonnées de Δ. Soit $f = (u, v) \in \mathcal{O}_J(\Delta, \Delta^2)$. L'équation de Cauchy-Riemann pour la première coordonnée est

$$\frac{\partial u}{\partial x} + A(u(z), v(z)) \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

où $A(u(z), v(z))$ est une matrice 2x2 réelle. On passe en coordonnées complexes

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + A(u(z), v(z)) \frac{1}{i} (-\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}) = 0$$

$$(1 - Ai) \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + (1 + Ai) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + (1 - Ai)^{-1} (1 + Ai) \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Notons

$$q_A(z_1, z_2) := -[1 - A(z_1, z_2) \circ J_{st}]^{-1} [1 + A(z_1, z_2) \circ J_{st}]$$

Pour z, u, v fixés, $q_A(z, v, u)$ est un opérateur $\mathbb{R}$-linéaire. Décomposons le en partie $\mathbb{C}$-linéaire et partie $\mathbb{C}$-antilinéaire $q_A(z, v, u) = \mu^1(z, v, u) + \mu^2(z, v, u) \circ \sigma$, où σ est l'opérateur de conjugaison. Alors, l'équation de Cauchy-Riemann pour la première composante devient

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - \mu^1(z,v,u)\frac{\partial u}{\partial z} - \mu^2(z,v,u)\overline{\frac{\partial u}{\partial z}} = 0. \tag{2.1}$$

La deuxième coordonnée, v est ici considérée comme un paramètre. Dans toute la suite, pour les fonctions, tenseurs, etc. définis sur l'ouvert $W \subset \mathbb{R}^N$, nous entendrons par $C^k(W)$-norme d'un objet T

$$\|T\|_{C^k(W)} := \sum_{r=0}^{k} \sup\{\|D^r(T(x))\| : x \in W\}$$

Le lemme suivant qui est dû à M. Gromov est une espèce de lemme de Schwarz et nous donne une majoration C^1 du paramètre v.

Lemme 2.10. *Si J est suffisamment proche de $J_{\rm st}$ au sens C^1 sur Δ^2, alors il existe une constante $C = C(\|J - J_{\rm st}\|_{C^1(\Delta^2)})$ telle que toute application J-holomorphe $f : \Delta \to \Delta^2$ vérifie*

$$\|df(0)\| \leqslant C. \tag{2.2}$$

Ainsi, il existe (un autre) C tel que pour toute application J-holomorphe $f = (u,v) : \Delta \to \Delta^2$ les composantes $\|u\|_{C^1(\Delta(\frac{1}{2}))}$ et $\|v\|_{C^1(\Delta(\frac{1}{2}))}$ sont bornées par C. En composant par l'homothétie $z \to \frac{1}{2}z$, on en déduit que cette majoration est valable sur Δ au complet. Comme toutes nos considérations sont locales, on peut utiliser la norme Euclidienne standard $\|\cdot\|$ dans toutes nos estimations comme (2.2).

Soit D un domaine relativement compact de $\mathbb{C}$. En pratique pour nous, $D = \Delta$ ou $D = \Delta^*$. Fixons un revêtement universel $\pi : \Delta \to D$. Supposons que $\mu^1, \mu^2 \in C^1(\mathbb{R}^6)$ sont fixés et ont une $C^1(\mathbb{R}^6)$-norme finie (dans la suite suffisamment petite). Considérons l'équation de Beltrami généralisée (2.1) pour les applications C^1 $u : \Delta \to D$. On suppose que la norme $C^1(\mathbb{R}^2)$ du paramètre v est bornée par un certain C. Pour une application C^1 $u : \Delta \to D$ notons u_π une branche quelconque univaluée de $\pi^{-1} \circ u$. Notons λ la coordonnée du revêtement universel Δ. Soit enfin

$$\begin{array}{cccc} & \Delta & \longrightarrow & \Delta \\ \varphi_a : & \lambda & \longmapsto & \frac{a-\lambda}{1-\bar{a}\lambda} \end{array}$$

l'automorphisme du disque unité échangeant $a \in \Delta$ avec l'origine. L'équation (2.1) devient pour $u_{a,\pi} := \varphi_a \circ u_\pi$

$$\frac{\partial u_{a,\pi}}{\partial \bar{z}} - \mu^1_\pi(z,v,a,u_{a,\pi})\frac{\partial u_{a,\pi}}{\partial z} - \mu^2_\pi(z,v,a,u_{a,\pi})(\overline{\frac{\partial u_{a,\pi}}{\partial z}}) = 0, \tag{2.3}$$

où

$$\mu^1_\pi(z,v,a,u_{a,\pi}) = \mu^1(z,v,(\pi \circ \varphi_a)(u_{a,\pi}))$$

$$\mu_\pi^2(z,v,a,u_{a,\pi}) = \mu^2(z,v,(\pi\circ\varphi_a)(u_{a,\pi})\cdot(\overline{\frac{\partial(\pi\circ\varphi_a)}{\partial\lambda}}\cdot[\frac{\partial(\pi\circ\varphi_a)}{\partial\lambda}]^{-1})$$

Dans le paragraphe suivant nous allons prouver le lemme de type lemme de Schwarz :

Lemme 2.11. *Il existe un $\varepsilon = \varepsilon(\pi, C) > 0$ et une constante $K = K(\pi, C, \varepsilon) < \infty$, tels que pour toute solution de (2.3) $w \in C^1(\Delta, \Delta)$ avec des coefficients et des paramètres vérifiant $\|\mu^{1,2}\|_{C^1(\mathbb{R}^6)} < \varepsilon$, $\|v\|_{C^1(\Delta)} < C$ et telle que $w(0) = 0$, on a l'estimation suivante :*

$$\|dw(0)\| \leqslant K. \tag{2.4}$$

Remarque 1. En montrant cette propriété, que nous appellerons dorénavant le lemme de Schwarz-Pick pour les applications J-holomorphes $u : \Delta \to \Delta$, on montre en fait deux choses. Premièrement, un lemme de Schwarz qui nous donne une majoration uniforme du module de la dérivée de u pour peu que $u(0) = 0$, c'est à dire $|du(0)| \leqslant 1$. Deuxièmement, en utilisant "l'invariance de jauge" des équations de Cauchy-Riemann homogènes par rapport au "groupe de jauge" $G := Aut_{Hol}(\Delta)$, on obtient la version "invariant de jauge" de ce lemme :

$$\frac{|du(0)|}{1-|u(0)|^2} \leqslant 1, \tag{2.5}$$

qui signifie exactement la complétude de la métrique de Kobayashi sur le disque unité.

L'équation de Cauchy-Riemann (ou de Beltrami) généralisée (2.1) n'a pas de symétrie en dehors des cas où les μ^i sont très particuliers. Ainsi, au lieu de considérer uniquement une équation, on symétrise le problème et on considère la famille au complet des équations (2.3) avec un paramètre $\varphi_a \in G$, notre groupe de jauge. L'estimation uniforme (2.4) de la dérivée en zéro nous permet de tirer les mêmes conclusions que pour les équations de Cauchy-Riemann standard, le problème étant maintenant renforcé par les symétries à vérifier.

Remarque 2. Néanmoins, le prix de tout cela est que les coefficients de (2.4) ne sont plus bornés dans aucun espace de Sobolev ou de Hölder, étant donné que le paramètre a s'échappe vers le bord $\partial\Delta$. Ils sont seulement bornés pour la norme sup, et ça n'est clairement pas suffisant pour contrôler la dérivée en zéro. La clef est qu'il y a (voir Première étape de la démonstration du paragraphe suivant) une majoration *a priori* des solutions w de (2.4) vérifiant $w(0) = 0$ en norme Hölderienne sur un voisinage de zéro. Cela nous permet de contrôler la norme de Hölder des coefficients et d'appliquer un bootstrap une fois de plus (voir Deuxième étape).

Corollaire 2.12. *Pour J suffisamment proche de J_{st} en norme C^1, l'ouvert (Δ^2, J) est hyperbolique complet.*

Démonstration. Comme nous l'avons déja expliqué, en prenant J proche de J_{st} on peut majorer les composantes (u,v) d'une application J-holomorphe $f : \Delta \to \Delta^2$

en utilisant le lemme de Gromov. La forme explicite de q_A et donc de $\mu^{1,2}$ montre que $||\mu^{1,2}||_{C^1} < \varepsilon$ de nouveau lorsque J est proche de J_{st}, où ε est celui du lemme 2.11 appliqué au revêtement identique $\pi = \mathrm{Id} : \Delta \to \Delta$. Notons $a = u(0)$. Du lemme 2.11 appliqué à $w = \varphi_a \circ u$, on déduit $||dw(0)|| \leq K$, où K ne dépend pas de w.

Or
$$dw(0) = \frac{1}{|a|^2 - 1} \cdot du(0)$$
et donc pour toute solution $u : \Delta \mapsto \Delta$ de (2.1) telle que $u(0) = a$, on a
$$\frac{1}{||du(0)||} \geq \frac{1}{K(1 - |a|^2)}$$
ce qui signifie que pour tout vecteur $(\xi, 0)$ de $T_{(a,b)}\Delta^2$
$$k_{\Delta^2,J}((a,b),(\xi,0)) \geq \frac{C_1|\xi|}{1 - |a|^2}$$
par définition de la pseudo-métrique de Kobayashi-Royden.

On peut bien sûr appliquer les mêmes considérations à la deuxième composante de (u,v). Ainsi
$$k_{\Delta^2,J}((a,b),(0,\eta)) \geq \frac{C_2|\eta|}{1 - |b|^2}$$
Et donc,
$$k_{\Delta^2,J}((a,b),(\xi,\eta)) \geq \max(\frac{C_1|\xi|}{1 - |a|^2}, \frac{C_2|\eta|}{1 - |b|^2}), \tag{2.6}$$
qui donne la conclusion désirée : en effet, la métrique de Kobayashi-Royden est minorée à une constante près par la métrique de Kobayashi-Royden du bidisque muni de la structure standard, et un chemin qui va jusqu'au bord donc est de longueur infinie.

∎

Corollaire 2.13. *Pour J suffisamment proche de J_{st} au sens C^1 sur le bidisque Δ^2, l'ouvert $(\Delta^2 \setminus (\{0\} \times \Delta), J)$ est hyperbolique complet.*

Démonstration. Appliquons le lemme 2.10 au revêtement universel
$$\begin{array}{cccc} & \Delta & \longrightarrow & \Delta^* = D \\ \pi : & \lambda & \longmapsto & \exp\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \end{array}$$
Soit $u : \Delta \to \Delta^*$ une solution de (2.1). Posons $a = u(0)$ et $b = \ln(a)$. On choisit la détermination du log telle que la partie imaginaire de b, soit dans $[-\pi, \pi[$. Notons enfin $\lambda : z \mapsto \frac{z+1}{1-z}$, et $c == \lambda(b) = \frac{b+1}{1-b} \in \Delta$. Ainsi c est une des préimages de a par le revêtement π. Choisissons la branche univaluée u_π de $\pi^{-1} \circ u$ telle que $u_\pi(0) = c$, et

considérons $w = \varphi_c \circ u_\pi$, une solution de (2.3). Estimons $u(0)$ $u = \exp\circ\lambda^{-1}\circ\varphi_c^{-1}\circ w$, $\varphi_c^{-1} = \varphi_c$ et $\lambda^{-1}(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Ainsi on a

$$u(z) = \exp\left(\frac{\frac{c-w(z)}{1-\bar{c}w(z)} - 1}{1+\frac{c-w(z)}{1-\bar{c}w(z)}}\right) = \exp\left(\frac{c-w(z)-1+\bar{c}w(z)}{1-\bar{c}w(z)+c-w(z)}\right) = \exp\left(\frac{c-1+(\bar{c}-1)w(z)}{c+1-(\bar{c}+1)w(z)}\right)$$

Comme $w = \varphi\circ\lambda\circ\ln\circ u$,

$$dw(0) = d\varphi_c(c).d\lambda(b).\frac{du(0)}{a} = \frac{|c|^2-1}{(1-|c|^2)^2}.\frac{2}{(1+b)^2}\frac{du(0)}{a} = \frac{1}{|c|^2-1}.\frac{2}{(1+b)^2}\frac{du(0)}{a}$$

Comme $b = \ln a$ et $c = \frac{\ln a+1}{1-\ln a}$

$$|c|^2 = \frac{\ln a+1}{1-\ln a}.\frac{\ln\bar{a}+1}{1-\ln\bar{a}} = \frac{1+|\ln a|^2+\ln(|a|^2)}{1+|\ln a|^2-\ln(|a|^2)} = \frac{(1+\ln|a|)^2}{(1-\ln|a|)^2}$$

Ainsi

$$dw(0) = \frac{1}{|\frac{1+\ln a}{1-\ln a}|^2-1}\frac{2}{(1+\ln a)^2}\frac{du(0)}{a},$$

Or d'après le lemme 2.10, $|dw(0)| \leqslant K$, où K est indépendant des facteurs considérés, donc

$$\frac{1}{|du(0)|} \geq K_1\frac{1}{|a|\ln\frac{1}{|a|}}$$

pour a proche de zéro. Par définition de la pseudo-métrique de Kobayashi-Royden, pour tout vecteur $(\xi,0)$ de $T_{(a,b)}(\Delta^2\setminus\Delta^*)$,

$$k_{\Delta^2\setminus\Delta^*,J}((a,b),(\xi,0)) \geq K_1\frac{1}{|a|\ln\frac{1}{|a|}} \tag{2.7}$$

lorsque a est proche de zéro, et donc,

$$k_{\Delta^2\setminus\Delta^*,J}((a,b),(\xi,\eta)) = \bigcirc\left(\frac{1}{|a|\ln\frac{1}{|a|}}\right)\sqrt{\xi^2+\eta^2}$$

On en déduit que tout chemin menant à 0 a une longueur infinie, ce qui prouve le corollaire.

∎

2.3 Démonstration du lemme de Schwarz-Pick.

Lemme 2.11. *Il existe un $\varepsilon = \varepsilon(\pi, C) > 0$ et une constante $K = K(\pi, C, \varepsilon) < \infty$, tels que pour toute solution de (2.3) $w \in C^1(\Delta, \Delta)$ avec des coefficients et des paramètres vérifiant $\|\mu^{1,2}\|_{C^1(\mathbb{R}^6)}) < \varepsilon$, $\|v\|_{C^1(\Delta)} < C$ et telle que $w(0) = 0$, on a l'estimation suivante :*

$$\|dw(0)\| \leqslant K. \tag{2.4}$$

Supposons que la conclusion du lemme n'est pas vraie. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications $h_n : \Delta \mapsto \Delta$, telles que $h_n(0) = 0$, solutions de (2.3), et telles que $|dh_n(0)| \to \infty$. Pour tout n, notons v_n le paramètre fonctionnel et par a_n le paramètre dans Δ correspondants.

Première étape. Il existe $\delta > 0$ et n_0 tels que, pour $n \geqslant n_0$ $h_n \in C^{0,\frac{1}{2}}(\Delta_\delta, \Delta_{\frac{1}{2}})$ et $\{h_n\}_{n\geqslant n_0}$ est un ensemble borné dans cet espace.

Soit une fonction plateau ρ qui est C^∞ et telle que $\rho \equiv 1$ sur $\Delta_{\frac{3}{4}}$ et $\rho \equiv 0$ en dehors de Δ. Notons $h_n^\rho = \rho h_n$. L'équation (2.3) pour h_n, écrite en fonction de h_n^ρ devient

$$\frac{\partial h_n^\rho}{\partial \bar z} - \mu^1_{v,a_n}(z,h_n)\frac{\partial h_n^\rho}{\partial z} - \mu^2_{v,a_n}(z,h_n)\overline{(\frac{\partial h_n^\rho}{\partial z})} = h_n\frac{\partial \rho}{\partial \bar z} - h_n\mu^1_{v,a}(z,h_n)\frac{\partial \rho}{\partial z} -$$

$$-\bar h_n\mu^2_{v,a}(z,h_n)\overline{(\frac{\partial \rho}{\partial z})}. \tag{2.8}$$

Reprenons les notations de I. Vekua dans [Vk] pour introduire les opérateurs de Cauchy-Green $P : L^4(\Delta) \to L^{1,4}(\Delta)$ et de Calderon-Zygmund $\Pi : L^4(\Delta) \to L^4(\Delta)$,définis respectivement comme

$$Pg(z) := \frac{1}{2i\pi}\int\int_\Delta \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar\zeta,$$

et

$$\Pi g(z) := p.v.\frac{1}{2i\pi}\int\int_\Delta \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \wedge d\bar\zeta.$$

Ces opérateurs sont notés respectivement T_{CG} et T_{CZ} dans [DeIv]. P et Π sont des opérateurs linéaires bornés dans les espaces de Sobolev et de Hölder. Notons $C_{k,p}$ la norme de P en tant qu'opérateur de $L^{k,p}(\Delta)$ dans $L^{k+1,p}(\Delta)$ et par $C_{k,\alpha}$ la norme de P en tant qu'opérateur de $C^{k,\alpha}$ dans $C^{k+1,\alpha}$. De même, on note $A_{k,p}$ et $A_{k,\alpha}$ les constantes associées à Π en tant qu'opérateur de $L^{k,p}$ dans $L^{k,p}$ et de $C^{k,\alpha}$ dans $C^{k,\alpha}$. Ici k est un entier positif, $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $0 < \alpha < 1$.

Les propriétés classiques des optérateurs de Cauchy-Green et de Calderon-Zyg- -mund sont que $\bar\partial \circ P = Id$ et $\Pi = \partial \circ P$, et que sur l'adhérence dans $L^{1,2}$ de l'espace des applications C^∞ à support compact, $\Pi \circ \bar\partial = \partial$ et $P \circ \bar\partial = Id$. On remarque que les h_n^ρ sont dans ces espaces. Posons

$$g_1 = \frac{\partial \rho}{\partial \bar z} - \mu^1_{v,a}(z, h_n)\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

et

$$g_2 = -\mu^2_{v,a}(z, h_n)\overline{(\frac{\partial \rho}{\partial z})}$$

L'équation (2.8) devient

$$[Id - \mu^1_{v,a}(., h_n) \circ \Pi - \mu^2_{v,a}(., h_n) \circ \sigma \circ \Pi]\frac{\partial}{\partial \bar z} h_n^\rho = h_n g_1 + \bar h_n g_2. \tag{2.9}$$

On remarque que $h_n g_1 + \bar h_n g_2$ est une suite bornée dans $L^4(\Delta, \mathbb{R}^2)$. En effet, h_n prend ses valeurs dans Δ et g_1 et g_2 sont bornées. Comme $||\Pi||_{L^4}$ est borné, et comme μ^1 et μ^2 sont aussi petits que nous le souhaitons, cet opérateur est inversible. Ainsi,

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} h_n^\rho = [Id - \mu^1_{v,a}(., h_n) \circ \Pi - \mu^2_{v,a}(., h_n) \circ \sigma \circ \Pi]^{-1}(h_n g_1 + \bar h_n g_2),$$

et donc

$$h_n^\rho = P\big([Id - \mu^1_{v,a}(., h_n) \circ \Pi - \mu^2_{v,a}(., h_n) \circ \sigma \circ \Pi]^{-1}(h_n g_1 + \bar h_n g_2)\big). \tag{2.10}$$

Ainsi (h_n^ρ) est une suite bornée dans $L^{1,4}(\Delta, \Delta)$. En utilisant le plongement de Sobolev, $L^{1,p} \subset C^{0,\alpha=\frac{2}{p}}$, et notre suite $(h_n^\rho)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^{0,\frac{1}{2}}$. Ainsi, $\{h_n^\rho\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille bornée et équicontinue d'applications sur tout compact de Δ. D'après le théorème d'Ascoli, cette famille est compacte, et on en extrait une sous-suite convergente. Après réindexation, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\Delta_{\frac{3}{4}}$ vers une application $h : \Delta_{\frac{3}{4}} \to \Delta$ telle que $h(0) = 0$. Il existe δ tel que $h(\Delta_\delta) \subset \Delta_{\frac{1}{2}}$ et donc $h_n(\Delta_\delta) \subset \Delta_{\frac{1}{2}}$ pour n suffisamment grand. Donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné dans $C^{0,\frac{1}{2}}(\Delta_\delta, \Delta_{\frac{1}{2}})$ à partir d'un certain rang $n >> 1$.

Deuxième étape. Il existe n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $h_n \in C^{1,\frac{1}{2}}(\Delta_{\frac{\delta}{2}})$ et la famille $\{h_n\}_{n\geqslant n_0}$ est bornée dans cet espace.

Les paramètres v_n sont bornés dans $C^1(\Delta)$, et les h_n le sont dans $C^{0,\frac{1}{2}}(\Delta_\delta, \Delta_{\frac{1}{2}})$. Ainsi $\mu^1_{v,a_n}(z, h_n)$ et $\mu^2_{v,a_n}(z, h_n)$ sont bornés dans $C^{0,\frac{1}{2}}(\Delta_\delta)$. Notons $f_n(z) := h_n(\delta z)$. C'est une suite bornée dans $C^{0,\frac{1}{2}}(\Delta, \Delta)$. Il ne nous reste plus qu'à prouver que la famille $\{f_n\}$ est bornée dans $C^{1,\frac{1}{2}}(\Delta_{\frac{1}{2}})$. on voit que f_n vérifie

$$\frac{\partial f_n}{\partial \bar z} - \mu^1_{v_n,a_n}(z, f_n(z))\frac{\partial f_n}{\partial z} - \mu^2_{v_n,a_n}(z, f_n)\overline{(\frac{\partial f_n}{\partial z})} = 0. \tag{2.11}$$

avec $\mu^1_{v_n,a_n}(z,f_n)$ et $\mu^2_{v_n,a_n}(z,f_n)$ uniformément bornés dans $C^{0,\frac{1}{2}}(\Delta,\Delta)$. On renouvelle maintenant le raisonnement de la première étape, appliqué à f_n au lieu de h_n et on arrive à l'équation (2.9) mais considérée cette fois ci dans les espaces de Hölder. De cette manière, on obtient que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^{1,\frac{1}{2}}(\Delta_{\frac{1}{2}})$. Contradiction.

∎

2.4 Corollaires.

Nous allons maintenant tirer les conséquences du théorème 2.9. En effet, d'après le théorème de Kiernan, une variété plongée hyperboliquement et localement hyperbolique complète est hyperbolique complète. Ainsi les proposition 1.28, 1.30 et 1.31 deviennent

Corollaire 2.14. *Soit (X,J) une variété presque-complexe compacte de dimension 4, avec $J \in C^{1,\alpha}$. Soit $D = \cup_{j=1}^n D_j$ une courbe J-complexe réductible, dont chaque composante irréductible D_j est une courbe J-complexe immergée. Supposons que pour tout $j = 1,\dots,n$ la courbe $(D_j \setminus Sing(D), J\mid_{D_j})$ est hyperbolique. Alors $(X\backslash D, J)$ est hyperbolique complet si et seulement s'il n'y a pas de droite J-complexe dans $X\backslash D$.*

Corollaire 2.15. *Notons $\mathcal{M}_{\omega,5l} = \{(J,\{D_j\}_{j=1}^5)\}$ la variété Banachique constituée des paires $(J,\{D_j\}_{j=1}^5)$, où J est une structure presque-complexe quelconque sur $\mathbb{CP}^2$, adaptée à la forme de Fubini-Studi ω et $\{D_j\}_{j=1}^5$ la réunion de cinq droites J-complexes dans $\mathbb{CP}^2$ en position générale. L'ensemble $\mathcal{H}_{\omega,5l}$ formé des $(J,\{D_j\}_{j=1}^5)$ pour lesquels $Y = (\mathbb{CP}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^5 D_j, J)$ hyperbolique complet est un ouvert non vide de $\mathcal{M}_{\omega,5l}$.*

Notons $\mathcal{M}_{\omega,d}$ la variété Banachique des paires (J,D), où J est une structure presque-complexe ω-adaptée sur $\mathbb{CP}^2$ et D est une courbe *irréductible* J-complexe de degré d dans $\mathbb{CP}^2$. Notons $\mathcal{H}_{\omega,d}$ le sous-ensemble formé des $(J,D) \in \mathcal{M}_{\omega,d}$ tels que $(\mathbb{CP}^2 \setminus D, J)$ est hyperbolique complet.

Corollaire 2.16. *L'ensemble $\mathcal{H}_{\omega,d}$ est un ouvert non vide de $\mathcal{M}_{\omega,d}$, à condition que $d \geqslant 5$.*

Pour terminer le chapître, nous proposons une démonstration élémentaire du corollaire 2.14 n'utilisant pas les propriétés topologiques des courbes presque-complexes.

Démonstration du Corollaire 2.6.

Première phase : $X\backslash D$ plongé hyperboliquement dans X si et seulement s'il n'y a pas de droite J-complexe dans $X\backslash D$.

Nous avons fabriqué précédemment une base de voisinages hyperboliques complets sous forme de bidisques en tout point, et nous avons montré que si on enlevait un disque plongé dans un tel voisinage dont le bord est dans le bord du bidisque, il était toujours hyperbolique complet. C'est clairement encore le cas si on enlève deux tels disques qui s'intersectent transversalement. Soit donc un recouvrement fini du compact X par des bidisques hyperboliques complets $U_1, \ldots, U_n$. On remarque que pour tout i, $U_i \backslash D$ est hyperbolique complet (pour $k^J_{U_i \backslash D}$). La seule chose que nous avons à vérifier est que $Y = X \setminus D$ n'admet pas de droite J-complexe limitante. Soit $u : \mathbb{C} \to D$ une droite J-complexe limitante pour $Y = X \setminus D$. On peut supposer par exemple que $u(\mathbb{C}) \subset D_1$. $u(\mathbb{C})$ ne peut pas être contenue dans $D_1 \setminus Sing(D)$, car la courbe $D_1 \setminus Sing(D)$ est supposée hyperbolique. Donc il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $p := u(z_0) \in D_1 \cap Sing(D)$. Supposons par exemple que p est sur $D_1 \cap D_2$. Soit U_i un ouvert du recouvrement contenant p et $q = u(z_1)$ un point de $D_1 \backslash D_2$, lui aussi dans U_i. U étant limitante, il existe une suite de disques J-holomorphes à valeurs dans $X \backslash D$ $(u_n)_{n \in N}$ convergeant uniformément vers u (pour la métrique Riemannienne de X). A partir d'un certain rang N, $u_n(z_0)$ et $u_n(z_1)$ sont dans U_i. Or, $U_i \backslash D_2$ est hyperbolique complet. Comme $(u_n(z_0))_{n \in N}$ est une suite qui converge vers un point du bord de cet ensemble (pour la topologie engendrée par la métrique Riemannienne de X), et comme les topologies engendrées par cette métrique Riemannienne sur $U_i \backslash D_2$ et celle engendrée par la métrique de Kobayashi sur $U_i \backslash D_2$ sont identiques, (c'est le théorème de Barth, voir [Bt]),

$$\lim_{n \to \infty} k^J_{U_i \backslash D}(u_n(z_0), u_n(z_1)) = \infty$$

Or les applications presque-complexes réduisant la distance (voir chapitre I),

$$\forall n > N, \quad k^J_{U_i \backslash D}(\tilde{g}_n(z_0), \tilde{g}_n(z_1)) < \rho(z_0, z_1)$$

Comme $\rho(z_0, z_1)$ est un nombre fini, c'est absurde.

Seconde phase : $X \backslash D$ est localement hyperbolique complet d'après le théorème principal. D'après le théorème de Kiernan, il est donc hyperbolique complet.

∎

CHAPITRE III : Plurisousharmonicité et pseudoconvexité

3.1 Plurisousharmonicité.

Soit (V, J) une variété presque-complexe. Soit Ω un domaine de V et ϕ une fonction réelle semi-continue supérieurement définie sur un voisinage de Ω. Nous noterons dans la suite Δ aussi bien le disque unité de $\mathbb{C}$ muni de la structure complexe standard que le Laplacien.

Définition 3.1. ϕ est dite plurisousharmonique si $\phi \circ u$ est sousharmonique pour tout u dans $\mathcal{O}_J(\Delta, V)$, c'est à dire dans le cas où ϕ est $\mathcal{C}^2$

$$\forall u \in \mathcal{O}_J(\Delta, V), \quad \Delta(\phi \circ u) \geq 0.$$

Définition 3.2. ϕ est dite strictement plurisousharmonique si ϕ est $\mathcal{C}^2$ et

$$\forall u \in \mathcal{O}_J(\Delta, V), \forall y \quad u'(y) \neq 0, \forall x \in \Delta, \quad \Delta(\phi \circ u)(x) > 0$$

Définition 3.3. ϕ est dite Lévi-plurisousharmonique si $\mathcal{L}\phi$ est une forme quadratique définie positive, où

$$\mathcal{L}\phi(X, Y) = H_\phi(X, Y) + H_\phi(JX, JY)$$

et H est la Hessienne de ϕ.

Cette définition n'a de sens que dans le cas où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$. En effet, sinon on doit passer par des cartes locales pour calculer la Hessienne. Or la valeur de la Hessienne n'est pas invariante par changement de carte (on peut même, par un changement de carte judicieux donner n'importe quelle valeur choisie à l'avance à la Hessienne en un point).

Nous avons choisi ici comme définitions de la plurisousharmonicité et de la stricte plurisousharmonicité les plus naturelles. Mais, dans le cas intégrable, elles peuvent être définies d'une multitude de manières différentes. On cherche donc à savoir parmi toutes ces autres définitions possibles, quelles sont celles qui sont équivalentes aux définitions choisies dans le cas non intégrable. Commençons par faire une liste exhaustive des définitions équivalentes de la plurisousharmonicité. La plupart d'entre elles provient de l'analyse complexe, voir par exemple [Kz] de S. Krantz. Excluons dès le départ celles qui sont basées sur l'extension de fonctions holomorphes, en effet dans le cas non-intégrable il n'y a pas en général de fonction J-holomorphe, c'est à dire d'application J-holomorphes de Ω dans $\mathbb{C}$. Les deux définitions possibles de la plurisousharmonicité sont les suivantes, en plus de celle que nous avons choisie comme référence :

i) La forme quadratique associée à la 2-forme différentielle $dd^{\mathbb{C}}\phi(X, JY)$ est définie positive, où $d^{\mathbb{C}}$ est la 1-forme différentielle

$$d^{\mathbb{C}}\phi(X) = -d\phi(JX)$$

ii) ϕ est Levi-plurisousharmonique

Lemme 3.4. *Soit X un vecteur de $T_p\Omega$; soit u un disque J-holomorphe immergé dans Ω tel que $u(0)=p$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(0)=X$. Alors*

$$dd^{\mathbb{C}}\phi_p(X,JX)=\Delta(\phi\circ u)(0)$$

Démonstration. Ce résultat est local. Montrons le pour un système de coordonnées quelconque $t_1,\dots,t_{2n}$ autour du point considéré. Cette fois ci le choix du sytème de coordonnées locales est indifférent. En effet, tous les termes du calcul qui va suivre dépendrons du choix du sytème de coordonnées locales. En particulier la forme quadratique $\mathcal{L}_\phi(X,X)$. Néanmoins les expressions $dd^{\mathbb{C}}\phi_p(X,JX)$ et $\Delta(\phi\circ u)(0)$ pour u tel que $\frac{\partial u}{\partial x}(0)=X$ sont définies de manière intrinsèques, sans référence à aucune carte. Comme on va montrer qu'elles sont égales dans une carte quelconque, elles seront égales.

Soit u un disque J-holomorphe à valeurs dans Ω. On note x et y les coordonnées sur le disque unité Δ de $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial\phi\circ u}{\partial x}=\sum_i\frac{\partial\phi}{\partial t_i}\frac{\partial u_i}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2\phi\circ u}{\partial x^2}=\sum_{i,j}\frac{\partial^2\phi}{\partial t_i\partial t_j}\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial t_i}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$$

Il en est de même pour y et donc le calcul du Laplacien nous donne

$$\Delta(\phi\circ u)=\sum_j\frac{\partial\phi}{\partial t_j}.\Delta u_j+\sum_{i,j}\frac{\partial^2\phi}{\partial t_i\partial t_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial u_j}{\partial y}\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)$$

Notons $v=(\frac{\partial u_1}{\partial x},\dots,\frac{\partial u_{2n}}{\partial x})$ et H_ϕ la Hessienne de ϕ dans ce système de coordonnées.

$$\Delta(\phi\circ u)=\sum_j\frac{\partial\phi}{\partial t_j}.\Delta u_j+H_\phi(v,v)+H_\phi(Jv,Jv)\tag{3.1}$$

Notons $\mathcal{L}_\phi(v,v)=H_\phi(v,v)+H_\phi(Jv,Jv)$, et travaillons à modifier la formulation du premier terme. On peut écrire les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u_i}{\partial y}=\sum_k J_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}=\sum_{j,k}\frac{\partial J_{ik}}{\partial t_j}\frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial u_j}{\partial y}+J_{ik}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x\partial y}$$

De plus

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}=-\sum_k J_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \sum_{j,k} \frac{-\partial J_{ik}}{\partial t_j}\frac{\partial u_k}{\partial y}\frac{\partial u_j}{\partial x} - J_{ik}\frac{\partial^2 u_k}{\partial y \partial x}$$

Donc

$$\sum_i \frac{\partial \phi}{\partial t_i}.\Delta u_i = \sum_{i,j,k} \frac{\partial \phi}{\partial t_i}\frac{\partial J_{ik}}{\partial t_j}(\frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial u_j}{\partial y} - \frac{\partial u_k}{\partial y}\frac{\partial u_j}{\partial x})$$

$$\sum_i \frac{\partial \phi}{\partial t_i}.\Delta u_i = \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial \phi}{\partial t_i}\frac{\partial J_{ik}}{\partial t_j}(v_k J_{jl} v_l - J_{kl} v_l v_j) \tag{3.2}$$

Cherchons maintenant à donner une formulation adaptée à $dd^{\mathbb{C}}\phi(X, JY)$. Notons $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial t_i}$ et $Y = \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial t_i}$.

$$dd^{\mathbb{C}}\phi(X, JY) = Xd^{\mathbb{C}}\phi(JY) - (JY)d^{\mathbb{C}}\phi(X) - d^{\mathbb{C}}\phi([X, JY]) =$$

$$= (JX)d\phi(JY) + Yd\phi(X) + d\phi(J[X, JY]) =$$

$$= \sum_{i,j,k,l} J_{il} a_l \frac{\partial}{\partial t_i}(\frac{\partial \phi}{\partial t_j} J_{jk} b_k) + b_i \frac{\partial}{\partial t_i}(\frac{\partial \phi}{\partial t_j} a_j) + d\phi(J[X, JY]) =$$

$$= \sum_{i,j,k,l} J_{il} a_l (\frac{\partial^2 \phi}{\partial t_j \partial t_i} J_{jk} b_k + \frac{\partial \phi}{\partial t_j}\frac{\partial J_{jk}}{\partial t_i} b_k + \frac{\partial \phi}{\partial t_j} J_{jk}\frac{\partial b_k}{\partial t_i}) + b_i(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t_j \partial t_i} a_j + \frac{\partial \phi}{\partial t_j}\frac{\partial a_j}{\partial t_i}) -$$

$$+ d\phi(J[X, JY]) =$$

$$= \mathcal{L}_\phi(X, Y) + \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial \phi}{\partial t_j}(J_{il} a_l \frac{\partial J_{jk}}{\partial t_i} b_k + J_{il} a_l J_{jk}\frac{\partial b_k}{\partial t_i} + b_i \frac{\partial \phi}{\partial t_j}\frac{\partial a_j}{\partial t_i}) + d\phi(J[X, JY])$$

Développons le terme $d\phi(J[X, JY]) = -d\phi(J[JY, X])$.

$$[JY, X] = \sum_{i,k,l} J_{il} b_l \frac{\partial a_k}{\partial t_i}\frac{\partial}{\partial t_k} - a_i(\frac{\partial J_{kl}}{\partial t_i} b_l + J_{kl}\frac{\partial b_l}{\partial t_i})\frac{\partial}{\partial t_k}$$

$$J[JY, X] = \sum_{i,j,k,l} (J_{jk} J_{il} b_l \frac{\partial a_k}{\partial t_i} - J_{jk} a_i \frac{\partial J_{kl}}{\partial t_i} b_l - J_{jk} J_{kl} a_i \frac{\partial b_l}{\partial t_i})\frac{\partial}{\partial t_j}$$

$$d\phi(J[JY, X]) = \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial \phi}{\partial t_j} J_{jk} J_{il} b_l \frac{\partial a_k}{\partial t_i} - \frac{\partial \phi}{\partial t_j} J_{jk} a_i \frac{\partial J_{kl}}{\partial t_i} b_l + \frac{\partial \phi}{\partial t_j} a_i \frac{\partial b_l}{\partial t_i})$$

Donc

$$dd^{\mathbb{C}}\phi(JX, Y) = \mathcal{L}_\phi(X, Y) + \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial \phi}{\partial t_j} J_{il} b_l \frac{\partial J_{jk}}{\partial t_i} a_k + \frac{\partial \phi}{\partial t_j} J_{jk} a_i \frac{\partial J_{kl}}{\partial t_i} b_l$$

Or,

$$\frac{\partial J^2}{\partial t_i} = 0$$

donc

$$\sum_k J_{jk} \frac{\partial J_{kl}}{\partial t_i} = -\sum_k \frac{\partial J_{jk}}{\partial t_i} J_{kl}$$

et

$$dd^{\mathbb{C}}\phi(JX,Y) = \mathcal{L}_\phi(X,Y) + \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial \phi}{\partial t_j} J_{il} b_l \frac{\partial J_{jk}}{\partial t_i} a_k - \frac{\partial \phi}{\partial t_j} a_i \frac{\partial J_{jk}}{\partial t_i} J_{kl} b_l$$

$$dd^{\mathbb{C}}\phi(JX,Y) = \mathcal{L}_\phi(X,Y) + \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \frac{\partial J_{jk}}{\partial t_i} (J_{il} b_l a_k - J_{kl} b_l a_i)$$

Ainsi

$$dd^{\mathbb{C}}\phi(JX,X) = \mathcal{L}_\phi(X,X) + \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \frac{\partial J_{jk}}{\partial t_i} (J_{il} a_l a_k - J_{kl} a_l a_i) \qquad (3.3)$$

En comparant cette expression avec l'expression (3.2), on remarque qu'elles sont égales dans le cas où $v = X$ ∎

Proposition 3.5. *Notons $d^{\mathbb{C}}$ la 1-forme différentielle*

$$d^{\mathbb{C}}\phi(X) = -d\phi(JX)$$

ϕ est strictement plurisousharmonique si et seulement si la forme quadratique associée à la 2-forme différentielle $dd^{\mathbb{C}}\phi(X, JY)$ est définie positive.

Démonstration. Supposons que $\phi \circ u$ est strictement sousharmonique pour tout disque J-holomorphe u. Ainsi, il existe une constante positive a telle que

$$\forall u \in \mathcal{O}_J(\Delta, V), \forall x \in \Delta, \quad \Delta(\phi \circ u)(x) > 0$$

Soit X un vecteur tangent au point p. Jean-Claude Sikorav a montré dans [Sk] qu'il existe un disque J-holomorphe u_0 passant par p tel que $\frac{\partial u_0}{\partial x}(p) = X$. Donc $dd^{\mathbb{C}}\phi(JX,X) > 0$, et la forme quadratique considérée est définie positive.

Réciproquement, supposons que la forme quadratique $dd^{\mathbb{C}}\phi(X, JX)$ est définie positive. Cela signifie qu'il existe une constante strictement positive a telle que

$$\forall X \in T\Omega, \quad dd^{\mathbb{C}}\phi(X, JX) \geq a||X||^2$$

et donc après avoir posé $X = \frac{\partial u}{\partial x}$, que

$$\forall u \in \mathcal{O}_J(\Delta, V), \forall x \in \Delta \quad \Delta(\phi \circ u)(x) > 0$$

∎

Corollaire 3.6. *La Lévi-plurisousharmonicité n'est pas équivalente à la plurisous--harmonicité.*

Démonstration. Nous avons vu que

$$\Delta(\phi \circ u) = \sum_j \frac{\partial \phi}{\partial t_j}.\Delta u_j + \mathcal{L}\phi(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}) \tag{3.1}$$

Fabriquons un contrexemple. Soit dans $\mathbb{R}^4$ muni des coordonnées $(t_1, \ldots, t_4)$ la structure presque-complexe

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -t_1 & \sqrt{1-t_1^2} & 0 \\ t_1 & 0 & 0 & -\sqrt{1-t_1^2} \\ -\sqrt{1-t_1^2} & 0 & 0 & -t_1 \\ 0 & \sqrt{1-t_1^2} & t_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit un point p de coordonnées $(\tau_1, \ldots, \tau_4)$ avec $\tau_1 \neq 0$. D'après la propriété 1.18 due à Sikorav, il existe un disque J-complexe u tel que $u(0) = p$ et $du(0).\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t_2}$. Soit ϕ une fonction plurisousharmonique définie au voisinage de p telle que $d\phi(p) = \frac{\partial}{\partial t_1}$. Ainsi

$$\sum_j \frac{\partial \phi}{\partial t_j}.\Delta u_j = 1.\Delta u_1$$

Or d'après l'équation (3.3), en notant $du(0).\frac{\partial}{\partial x} = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial t_j}$

$$\Delta u_i = \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial J_{jk}}{\partial t_i}(J_{il}a_l a_k - J_{kl}a_l a_i)$$

Un calcul élémentaire nous donne

$$\Delta u_1 = t_1$$

En choisissant ϕ judicieusement, la forme de Levi et $dd^{\mathbb{C}}\phi(.,J.)$ sont de signes différents dans certaines zones de $\mathbb{R}^4$.

∎

Remarque. Nous avons montré au passage que contrairement au cas standard, les coordonnées d'une application J-holomorphe ne sont en général pas harmoniques.

3.2 Stricte pseudoconvexité.

Définition 3.7. Ω est dit strictement pseudoconvexe ou strictement J-convexe si il existe une fonction strictement plurisousharmonique ϕ définie sur un voisinage de $\overline{\Omega}$ telle que $\Omega = \{\phi < 0\}$.

Cherchons de nouveau à donner des caractérisations équivalentes à la stricte pseudoconvexité. Une des caractérisations possibles de la stricte pseudoconvexité est le fait que Ω soit localement biholomorphe à un ensemble convexe. Là aussi, il est illusoire de lui trouver une quelconque utilité dans le cas non-intégrable. En effet, soit l'ensemble convexe en question est muni d'une structure complexe intégrable, et J devrait alors être intégrable, ce qui n'est pas le cas en général. Soit, on ne pose pas de condition sur la structure presque-complexe de cet ensemble convexe, et dans ce cas on peut en trouver un qui convient pour n'importe quel Ω, ce qui signifie que tout domaine est strictement pseudoconvexe ! En effet, Ω est localement difféomorphe à un ensemble convexe (via un certain Φ). Il suffit de munir l'ensemble convexe en question de la structure presque-complexe Φ^*J, pour faire de Φ un biholomorphisme.

Définition 3.8. (cf [El-1],[El-2],[ElGr]) Une variété de contact est une variété lisse V de dimension 2k-1 munie d'une distribution ξ d'hyperplans tangents de codimension 1 complètement nonintégrable, c'est à dire une distribution qui peut être au moins localement définie par une 1-forme α telle que $d\alpha$ n'est dégénérée en aucun point, c'est à dire $\alpha \wedge (d\alpha)^{k-1}$ s'annule nulle part.

Propriété 3.9. *Si Ω est strictement pseudoconvexe alors il a un bord de type contact.*

Démonstration. Soit ξ la distribution d'hyperplans tangents sur $\partial\Omega$ formée par les hyperplans presque-complexes

$$\forall x \in \partial\Omega, v \in \xi_x \Leftrightarrow v \in T_x\partial\Omega, Jv \in T_x\partial\Omega$$

$$\Leftrightarrow d\phi_x(v) = 0, d\phi_x(Jv) = 0$$

Notons $d^{\mathbb{C}}\phi = (d\phi) \circ J$. Ainsi un vecteur v de $T_x\partial\Omega$ est dans ξ_x si et seulement si $d^{\mathbb{C}}\phi_x(v) = 0$. Ainsi, ξ est définie par la 1-forme $\alpha = -d^{\mathbb{C}}\phi$. Si Ω est strictement pseudoconvexe, $d\alpha$ est tamed et donc non dégénérée.

Définition 3.10. Un ouvert Ω de V vérifie la *condition des disques* si pour toute suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ de disques J-holomorphes définis sur $\overline{\Delta}$ à valeurs dans Ω, convergente en tant que suite d'applications de $\overline{\Delta}$ dans V vers un disque u tel que $u(\partial\Delta) \cap \partial\Omega = \varnothing$, vérifie $u(\Delta) \cap \partial\Omega = \varnothing$.

Propriété 3.11. *La condition des disques est vérifiée par tout domaine pseudoconvexe (défini par une fonction plurisousharmonique).*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de disques J-holomorphes à valeurs dans Ω, convergeant vers un disque u tel que $u(\partial\Delta) \cap \partial\Omega = \varnothing$. Supposons qu'il existe

z_0 dans Δ tel que $u(z_0)$ soit sur $\partial\Omega$. Soit ϕ une fonction $\mathcal{C}^2$ définissante pour Ω, c'est à dire telle que $\Omega = \{\phi < 0\}$ et $d\phi$ ne s'annule pas sur $\partial\Omega$. Ainsi pour tout z dans $\Delta, u(z)$ appartient à $\overline{\Omega}$, et donc $\phi(u(z)) \leq 0$. Or comme $u(z_0)$ est sur le bord de Ω, $\phi(u(z_0)) = 0$. Donc $\phi \circ u$ a un maximum à l'intérieur de Δ et n'est donc pas sousharmonique. Donc ϕ n'est pas plurisousharmonique.

■

La réciproque, pour une structure intégrable, a une preuve classique dont la clef est la plurisousharmonicité de la fonction

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log(dist(x, \partial\Omega)) \end{array}$$

Dans le cas non intégrable, cette fonction n'a aucune raison d'être plurisousharmonique, et cette démonstration ne peut pas être utilisée. Nous ne savons pas si la réciproque est vraie pour une structure presque-complexe quelconque.

Remarque 1. Si Ω est un domaine strictement pseudoconvexe relativement compact de M, alors Ω est hyperboliquement plongé dans M. En effet, notons ϕ la fonction strictement plurisousharmonique définissante associée. Si Ω n'était pas hyperboliquement plongé, par Brody on produirait une J-droite non constante f à valeurs dans $\overline{\Omega}$, et on pourrait supposer quitte à reparamétriser que $f'(0) \neq 0$. Comme $\phi \circ f$ est sousharmonique bornée sur $\mathbb{C}$ donc constante, ce qui contredit $\Delta(\phi \circ f)(0) > 0$.

Remarque 2. Il suffirait d'après le théorème de Kiernan de montrer l'hyperbolicité complète locale des strictement pseudoconvexes pour en déduire leur hyperbolicité complète. Nous ne savons actuellement pas le montrer. Un cheminement possible serait de montrer que comme dans le cas standard il existe en tout point p du bord des courbes J-complexes d'appui, c'est à dire des courbes J-complexes extérieures à Ω, tangentes à $\partial\Omega$ en p. On en déduirait l'hyperbolicité complète locale d'après le théorème principal.

3.3 Propriétés des fonctions plurisousharmoniques.

Il est naturel de savoir s'il existe toujours des fonctions plurisousharmoniques, pour une structure presque-complexe quelconque. La propriété suivante répond à cette question. Ce résultat n'est pas nouveau, Hörmander l'a démontré en 1966 dans [Hm]. En voici une preuve détaillée :

Propriété 3.12. *Soit un point p d'une variété presque complexe. Il existe un système de coordonnées locales centré en p dans lequel la fonction $\phi : x \mapsto ||x||^2$ est plurisousharmonique.*

Démonstration. On choisit un système de coordonnées centré en p dans lequel $J(p) = J_{st}$. Ainsi $J(x) = J_{st} + \varepsilon(x)$ où pour tout point x, $\varepsilon(x)$ est un endomorphisme de l'espace tangent tel que $\varepsilon(0) = 0$. La variété est munie d'une forme symplectique, qui trivialisée dans la carte locale considérée, donne une structure symplectique qui engendre avec J la métrique Riemannienne triviale $< .,. >$. Ceci peut clairement être réalisé localement, et il n'y a pas d'objection au prolongement global d'une telle structure symplectique, étant donné la souplesse de ces structures (en particulier le fait de pouvoir utiliser des partitions de l'unité). Ainsi

$$d\phi = \sum_{i=1}^{2n} 2x_i dx_i$$

$$d^{\mathbb{C}}\phi(\xi) = -\sum_{i=1}^{2n} 2x_i dx_i(J\xi) = -\sum_{i=1}^{2n} 2x_i dx_i(J_{st}\xi) - \sum_{i=1}^{2n} 2x_i dx_i(\varepsilon\xi) =$$

$$= -(\sum_{i=1}^{n} 2x_{2i-1}\xi_{2i} - 2x_{2i}\xi_{2i-1} + \sum_{i,j} 2x_i \varepsilon_{ij}\xi_j)$$

$$d^{\mathbb{C}}\phi = -(\sum_{i=1}^{n} 2x_{2i-1}dx_{2i} - 2x_{2i}dx_{2i-1} + \sum_{i,j} 2x_i\varepsilon_{ij}dx_j)$$

$$dd^{\mathbb{C}}\phi = \sum_{i=1}^{n} -2dx_{2i-1}\wedge dx_{2i} + 2dx_{2i}\wedge dx_{2i-1} - \sum_{i,j} 2\varepsilon_{ij}dx_i\wedge dx_j - \sum_{i,j,k} 2x_i\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x_k}dx_k\wedge dx_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -4dx_{2i-1}\wedge dx_{2i} - \sum_{i,j} f_{ij}dx_i\wedge dx_j$$

en notant

$$f_{ij} = 2\varepsilon_{ij} + \sum_k 2x_k\frac{\partial\varepsilon_{kj}}{\partial x_i}$$

Les fonctions f_{ij} ainsi définies sont clairement continues. De plus, comme $\frac{\partial\varepsilon_{kj}}{\partial x_i}$ est localement borné au voisinage de 0, $f_{ij}(0) = 0$. Ainsi, en notant

$$f = \sum_{i,j} f_{ij}dx_i\wedge dx_j$$

on a

$$dd^{\mathbb{C}}\phi = 4\omega_{st} + f$$

Localement autour de 0, f est négligeable devant ω_{st}, et donc, quitte à réduire suffisamment la carte locale considérée, la forme quadratique associée à la 2-forme $dd^{\mathbb{C}}\phi$ est définie positive, et ϕ est strictement plurisousharmonique.

Remarque. Bien qu'il existe toujours des fonctions plurisousharmoniques dans le cas d'une structure presque-complexe non intégrable, le théorème suivant nous montre que celles-ci ne ressemblent pas autant qu'on l'aurait souhaité aux fonctions plurisousharmoniques du cas intégrable.

Proposition 3.13. *Pour une structure presque-complexe quelconque, $\phi : x \mapsto ||x||^2$ n'est pas* log*-plurisousharmonique*

Démonstration. On travaille de nouveau dans une carte locale, et nous identifierons donc la variété avec un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la métrique Riemannienne triviale. En particulier, ici on peut identifier les points et les vecteurs. Considérons la fonction $\psi = \log\phi$. Montrons que ψ n'est pas plurisousharmonique.

$$d\psi = \sum_{i=1}^{2n} \frac{2x_i dx_i}{||x||^2}$$

$$d^{\mathbb{C}}\psi(\xi) = -\sum_{i=1}^{2n} \frac{2x_i dx_i(J\xi)}{||x||^2} = -\sum_{i,j} \frac{2x_i J_{ij} dx_j}{||x||^2}$$

$$dd^{\mathbb{C}}\phi = -\sum_{i,j,k} \frac{2||x||^2 \delta_{ik} J_{ij} dx_k \wedge dx_j + 2||x||^2 x_i \frac{\partial J_{ij}}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_j - 4x_k x_i J_{ij} dx_k \wedge dx_j}{||x||^4}$$

$$dd^{\mathbb{C}}\phi(\xi, J\xi) = \sum_{i,j,k,l} \frac{2}{||x||^4}[||x||^2 J_{ij}(J_{il}\xi_l\xi_j - \xi_i J_{jl}\xi_l) + ||x||^2 x_i \frac{\partial J_{ij}}{\partial x_k}(J_{kl}\xi_l\xi_j - \xi_k J_{jl}\xi_l) -$$
$$-2x_k x_i J_{ij}(J_{kl}\xi_l\xi_j - \xi_k J_{jl}\xi_l)]$$

$$dd^{\mathbb{C}}\phi(\xi, J\xi) = \frac{2}{||x||^4}[||x||^2||J\xi||^2 + ||x||^2||\xi||^2 - 2 < x, J\xi >^2 - 2 < x, \xi >^2 +$$
$$+||x||^2 \sum_{i,j,k,l} x_i \frac{\partial J_{ij}}{\partial x_k}(J_{kl}\xi_l\xi_j - \xi_k J_{jl}\xi_l)]$$

Choisissons ξ tel que cette expression soit strictement négative, par exemple en fixant

$$\xi = \frac{x}{||x||^2}$$

$$dd^{\mathbb{C}}\phi(\xi, J\xi) = \frac{2}{||x||^4}[||Jx||^2 + ||x||^2 - 2 < x, \frac{Jx}{||x||} >^2 - 2||x||^2 +$$
$$+ \sum_{i,j,k,l} x_i \frac{\partial J_{ij}}{\partial x_k}(J_{kl}x_l x_j - x_k J_{jl}x_l)]$$

Or $\frac{\partial J_{ij}}{\partial x_k}$ est localement borné, donc le dernier terme est un $\bigcirc(||x||^3)$. Donc

$$dd^{\mathbb{C}}\phi(\xi, J\xi) = \frac{2}{||x||^4}[||Jx||^2 - ||x||^2 + \bigcirc(||x||^3)] - 4 < x, \frac{Jx}{||x||^3} >^2$$

Mettons nous en dehors du cas particulier où J est une isométrie pour la métrique Riemannienne triviale. Ainsi, il existe un x tel que $||Jx|| \neq ||x||$. Donc on peut choisir x_0 tel que $||Jx_0|| < ||x_0||$. En effet, si $||Jx_0|| > ||x_0||$ nous n'avons qu'à le remplacer par $J^{-1}x_0$. Pour x_0, $||Jx|| = k||x||$ avec $0 < k < 1$, et tous les points x de cette direction (de la forme tx_0, pour t réel) vérifient cette égalité. Ainsi

$$dd^{\mathbb{C}}\phi(\xi, J\xi) = \frac{2}{||x||^4}[(k^2-1)||x||^2 + \bigcirc(||x||^3)] - 4 < x, \frac{Jx}{||x||^3} >^2$$

qui est négatif pour x suffisamment petit.

CHAPITRE IV : CONCLUSION

Les directions naturelles de recherche à l'issue de ce travail sont les suivantes :

1) Montrer le théorème principal en dimension quelconque. Un tel résultat ne peut être directement montré à l'aide de cette thèse, étant donné que la trivialisation locale de la structure presque-complexe de J.C Sikorav n'est vraie qu'en dimension 4.

2) Montrer un théorème de Bloch presque-complexe, c'est à dire que pour certaines structures presque-complexes, pour tout diviseur D formé de 5 droites complexes en position générale, $CP^2\backslash D$ est hyperbolique complet. Ce résultat est plus fort que le notre qui ne montre l'hyperbolicité complète que pour certaines structures presque-complexes, pour certains D en position générale formant un ouvert.

3) Montrer l'existence de courbes J-complexe d'appui en tout point du bord d'un strictement pseudonvexe (voir la remarque faite en fin de paragraphe 3.2). Cela permettrait de montrer l'hyperbolicité complete des strictement pseudoconvexes.

4) Nous avons montré que par deux points suffisamment proches il passait un J-disque. C'est l'objet du paragraphe 1.2. Une question qui se pose est de savoir s'il est possible de relier deux points quelconques d'une variété presque-complexe connexe. Rappelons que dans le cas intégrable, ce résultat se montre en considérant un chemin réel reliant les deux points, en l'approximant par un chemin analytique et en complexifiant.

REFERENCES

[AuLa] M. Audin and J.Lafontaine (eds.), *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Birkhäu--ser, Basel, 1994.

[BoTu] R. Bott and L. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Springer, New-York, 1982.

[Bt] T.J. Barth, *The Kobayashi distance induces the standard topology.*, Proc. Amer. Math. Soc. **35** (1972), 439-440.

[Br] R. Brody, *Compact manifolds and hyperbolicity.*, Trans. Amer. Math. Soc. **235** (1978), 213-219.

[Ch] B. Chabat, *Introduction à l'analyse complexe*, Mir, Moscou, 1990; traduction française, Tomes 1 et 2.

[De] R. Debalme, *Kobayashi hyperbolicity of almost complex manifolds*, Preprint of the university of Lille, IRMA **50** (1999).

[DeIv] R. Debalme and S. Ivachkovitch, *Complete hyperbolic neighborhoods in almost complex surfaces*, to appear in the Internat. Journ. of Math.; Preprint of the university of Lille, IRMA **52** (2000).

[El-1] Y. Eliashberg, *Filling by holomorphic discs and its application*, Geometry of low dimensional manifolds (Donaldson and Thomas, eds.), vol. 2, Cambridge, 1990, pp. 45-67.

[El-2] Y. Eliashberg, *Symplectic geometry of plurisubharmonic functions*, Gauge theory and symplectic geometry (J. Hurtubise and F. Lalonde, eds.), Kluwer Academic Publishers, 1997, pp. 49-67.

[ElGr] Y. Eliashberg and M Gromov, *Convex symplectic manifolds*, Proc Sympos Pure Math. **52** (1991), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 135-162.

[Gm] I. Graham, *Boundary behaviour of of the Caratheodory and Kobayashi metrics on strong--ly pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^n$ *with smooth boundary*, Trans Amer. Math. Soc. **207** (1975), 219-240.

[Gr] M. Green, *The hyperbolicity of the complement of 2n+1 hyperplanes in general position in* $\mathbb{P}^n$*, and related results*, Proc. Amer. Math. Soc. **66** (1977), 109-113.

[G] M. Gromov, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. math. **82** (1985), 307-347.

[GiTr] D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, Berlin, 1977.

[GrHa] P. Griffith and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley ans Sons, New York, 1978.

[Hm] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, Van Nostrand, Princeton, 1966.

[IvSh] S. Ivashkovich, V. Shevchishin, *Complex Curves in Almost-Complex Manifolds and Meromorphic Hulls*, Lecture Notes in Schriftenreihe des Graduiertenkollegs, Geometrie und Math. Physik, Ruhr-Uni-Bochum, Heft 36 (1999,), 1-186, see also math.CV/9912046.

[JaPf] M. Jarnicki and P. Pflug, *Invariant distances and metrics in complex analysis*, de Gruyter, Berlin, 1993.

[Ki] P. Kiernan, *Hyperbolically Imbedded Spaces and the Big Picard Theorem*, Math. Ann. **204** (1973), 203-209.

[Ko-1] S. Kobayashi, *Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings*, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 460-480.

[Ko-2] S. Kobayashi, *Hyperbolic Complex Spaces*, Springer, Berlin, 1998.

[Ko-3] S. Kobayashi, *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, Dekker, New York, 1970.

[Kr] B. Kruglikov., *Existence of close pseudoholomorphic disks for almost complex manifolds and their application to the Kobayashi-Royden pseudonorm*, Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya **33 n 1** (1999), 46-58; English translation in Funct. Anal. Appl. **33 n 1** (1999), 38-48.

[KrOv] B. Kruglikov and M. Overholt, *Pseudoholomorphic mappings and Kobayashi hyperbolicity*, Differential Geom. Appl. **11 n 3** (1999), 265-277.

[Kz] S. Krantz, *Function theory of several complex variables*, John Wiley and Sons, New York, 1982.

[La] S. Lang, *Introduction to complex hyperbolic spaces*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[McD] D. McDuff, *Singularities and positivity of intersections of J-holomorphic curves*, Holomorphic curves in symplectic geometry (M. Audin and J.Lafontaine, eds.), Birkhauser, Basel, 1994, p. 191-215.

[MiWh] M. Micallef , B. White, *The structure of branch points in minimal surfaces and in pseudoholomorphic curves*, Ann. Math. **139** (1994), 35-85.

[NwNi] Newländer and Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Math. **65** (1957), 391-404.

[Ra] R. Range, *Holomorphic functions and integral representation in several complex variables*, Springer, New-York, 1986.

[Rf] D. Rolfsen, *Knots and links*, vol. N7, Publish or perish, 1976.

[Ro] H.L. Royden, *Remarks on the Kobayashi metric*, Lect. Notes in Math. **185** (1970), Springer Verlag, Berlin, 125-137.

[Si] N.Sibony, *A class of hyperbolic manifolds*, Ann. Math. Studies **100** (1981), 357-372.

[Sk] J.-C. Sikorav, *Some properties of holomorphic curves in almost complex manifolds*, Holomorphic curves in symplectic geometry (M. Audin and J.Lafontaine, eds.), Birkhauser, Basel, 1994, p. 165-189.

[Vk] I.N. Vekua, *Generalized analytic functions*, Pergamon press, Oxford, 1962.

[Wa] F. Warner, *Fondations of differentiable manifoldsand Lie groups*, Scott, Foresman and Co., 1971.

[We] R. Wells, *Differential analysis on complex manifolds*, Springer, Berlin, 1980.

[Za-1] M. Zaidenberg, *Picard's Theorem and Hyperbolicity*, Siberian Math. J. **24** (1983), 858-867.

[Za-2] M. Zaidenberg, *Stability of hyperbolic embeddedness and construction of examples*, Math. USSR Sbornik **63 N 2** (1989), 351-361.

ABSTRACT. The aim of this thesis is to prove in the scope of the almost-complex manifolds some results of the theory of Kobayashi hyperbolic manifolds.

In a first part, it is proved that two points of an almost-complex manifold that are close enough are linked by a pseudo-holomorphic disc. To fulfil this condition is necessary to define the Kobayashi pseudo-metric. Most of the classical results about hyperbolicity are proved to be true in this scope (theorems of Barth, Royden, and Brody).

In the second part, heart of this thesis, it is proved that each point on an almost complex surface has a basis of complete hyperbolic neighbourhoods (c.h.n.). Moreover, if one removes a non-singular J-complex curve from such a neighbourhood, it is still complete hyperbolic. As a consequence of the existence of the c.h.n. we obtain the following statement : consider the Banach manifold consisting of the pairs (J, D), where J is an almost complex structure on $\mathbb{C}P^2$ tamed by the Fubini-Study form and D is the union of five J-complex lines in $\mathbb{C}P^2$ in general position. For (J, D) in a nonempty open subset in this Banach manifold $(\mathbb{C}P^2 \setminus D, J)$ is hyperbolically imbedded into $(\mathbb{C}P^2, J)$. With this result, the theorem of Bloch can be generalized.

In the third part, the notions of plurisubharmonicity and pseudoconvexity are studied in the case of a non-integrable almost-complex structure. After the definitions of these notions, following L. Hörmander, the properties of $\varphi : x \mapsto ||x||^2$ are studied in a well chosen coordinate system.

RÉSUMÉ. L'objectif de cette thèse est de montrer dans le cadre des variétés presques-complexes un certain nombre de résultats de la théorie des variétés hyperboliques au sens de Kobayashi.

Dans une première partie, on montre que deux points d'une variété presque-complexe suffisamment proches sont joignables par un disque pseudo-holomorphe, préalable nécessaire à la définition de la pseudo-distance de Kobayashi. On montre alors que la plupart des résultats classiques de la théorie relatifs à l'hyperbolicité (théorèmes de Barth, Royden et Brody) sont encore valables.

La deuxième partie, cœur de cette thèse, a pour objet de montrer que chaque point d'une surface presque complexe a une base de voisinages hyperboliques complets (c.h.n.). De plus, si l'on retire une J-courbe non singulière d'un tel voisinage, il reste hyperbolique complet. Une des conséquences de l'existence des c.h.n. est le résultat suivant : soit la variété Banachique constituée des paires (J, D), où J est une structure presque-complexe sur $\mathbb{C}P^2$ adaptée à la forme symplectique de Fubini-Study et où D est la réunion de cinq droites J-complexes de $\mathbb{C}P^2$ en position générale. Il existe un ouvert non vide de cette variété Banachique, tel que pour tout couple (J, D) de cet ouvert, $(\mathbb{C}P^2 \setminus D, J)$ est plongé hyperboliquement dans $(\mathbb{C}P^2, J)$. Ce résultat nous permet de généraliser le théorème de Bloch.

Enfin dans une troisième partie, on étudie les notions de plurisousharmonicité et de pseudoconvexité dans le cas d'une variété presque-complexe. Après avoir défini ces notions, à la suite de L. Hörmander on étudie les propriétés de la fonction $\varphi : x \mapsto ||x||^2$ dans un système de coordonnées adapté.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX