N° d'ordre : 2948

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

par

Amoussou Thomas GUÉDÉNON

Idéaux premiers et algèbre homologique dans les produits croisés

Soutenue le 21 juin 2001 devant la Commission d'Examen :

Jean D'ALMEIDA, Professeur à l'Université de Lille 1
Jean-Claude DOUAI, Professeur à l'Université de Lille 1
Tom LENAGAN, Professeur à l'Université d'Edingburgh, Scotland (G.B.)
André LEROY, Professeur à l'Université de Lens
Dimitri MARKOUCHEVITCH, Professeur à l'Université de Lille 1
Michel VAN DEN BERGH, Professeur à l'Université de Dipenbeek (Belgique)

Que souhaiter aux jeunes qui se consacrent à la science?

Ivan Pavlov

14/09/1849 - 27/02/1936

De la constance avant tout:
Etudiez le b-a ba avant de vous attaquer aux sommets.
Assimilez d'abord une chose avant de passer à la suite.
Soyez réservés et patients.
Etudiez, comparez, accumulez les faits.
Ils sont l'air dont vit le savant.

Puis vient la modestie:
Ne croyez pas tout savoir.
L'orgueil ne doit pas vous emporter.

En dernier lieu la passion:
Sachez que la science exige de l'homme
qu'il lui consacre sa vie.
Soyez fervents dans vos recherches.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Jean d'Almeida qui a voulu que je sorte de l'isolement en acceptant de me faire soutenir cette thèse qui a trop duré.

J'exprime ma reconnaissance à Tom H. Lenagan et à Michel Van den Bergh pour le service inoubliable qu'ils m'ont rendu et l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être les rapporteurs de cette thèse.

J'exprime mes sincères remerciements à Jean Claude Douai, André Leroy et Dimitri Markouchevitch qui ont accepté chaleureusement de prendre part au jury de cette thèse. Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma reconnaissance.

Je remercie les membres du laboratoire Arithmétique, géométrie, analyse et topologie de m'avoir accueilli me permettant ainsi de mener à bien cette thèse.

Je remercie les membres de l'équipe Théorie des groupes, représentations et applications de l'Université Paris 7; en particulier: Monique Douchez (Secrétaire) et Paul Gérardin (Directeur) pour m'avoir aidé dans mon travail informatique.

Je remercie ma famille qui m'a entouré d'affection et qui a toujours pensé à moi au cours des nombreuses prières adressées à Dieu et à mes ancêtres.

Je remercie mes amis et tous ceux qui m'ont soutenu et qui ont cru en moi malgré les embûches: Daniel Békima, Kamla Boudra, Jean-Pierre Célimène, Zénon Mukumpuri, Jean Ndoumbé, Jean Ndzié, Comlan Quenum, Sylvestre Rakotomalala, Kidjégbo Touré, particulièrement: Emile Edorh, Naïm Mégarbane, Olivier Sègbo, Philippe Wété, François Zinsou et naturellement Théodule de Souza.

Table des matières

RESUME DETAILLE DES TRAVAUX

PARTIE A

IDEAUX PREMIERS ET ALGEBRE HOMOLOGIQUE

DANS LES PRODUITS CROISES

PRIME IDEALS AND HOMOLOGICAL ALGEBRA

IN CROSSED PRODUCTS

SUMMARY

This thesis is a contribution to the study of noncommutative Noetherian rings. We study prime ideals and homological algebra in a class of Noetherian rings which contain enveloping algebras and rings of differential operators. Fix a field k of characteritic 0. Let R be a Noetherian k-algebra, g a finite dimensional Lie algebra, U(g) the enveloping algebra of g and A the crossed product of R by U(g).

In the first part of this thesis, g is completely solvable and sometimes nilpotent. We extend to A some well known results in enveloping algebras and differential operator rings. More precisely, we study Tauvel's height formula, catenarity and localization in A. As a result on localization, we give some sufficient conditions for the primitive ideals of the localization of A at a clique of prime ideals to be generated by a regular normalizing sequence; this is a noncommutative analog of the concept of regularity of a commutative ring. We have used this result to calculate the invariants of Bass.

In the second part, g is often semisimple and the canonical injection of g in A is a morphism of Lie algebras. We define various categories such as the category of Modules over the ring of invariants, the category of all g-modules, the subcategory of those which are locally finite and the subcategories of each which are also A-modules. We study the functor which maps a g-module to its largest locally finite g-submodule, as well as related hom-functors, induction functors and other functors, along with their derived functors. We relate these derived functors by spectral sequences. We obtain some isomorphisms of Ext groups. We study projective modules, injective modules and essential extensions in the various categories. We calculate the Picard groups of the ring of invariants and we discuss the semisimplicity of the category of locally finite A-modules. Most of these results are well known in rings with algebraic group action.

Résumé détaillé des travaux

0 Introduction

Cette thèse sera présentée sous forme d'articles. Pour faciliter sa lecture, nous avons jugé bon de faire précéder les articles par un résumé détaillé (où nous faisons apparaître sans démonstration les principaux résultats) avec une bibliographie propre. Ce résumé permet de faire un lien entre des articles rédigés à des périodes différentes et qui ne sont pas toujours indépendants les uns des autres,

Les anneaux non commutatifs sont actuellement l'objet de recherches très actives. La théorie a particulièrement suscité un vif intérêt à cause de ses applications à des domaines connexes, en particulier, en théories des représentations de groupes et d'algèbres de Lie; mais aussi, parce que de nombreux résultats et méthodes utilisés dans le cas commutatif ont été adaptés avec succès au cas non commutatif.

Dans l'étude des anneaux noethériens non commutatifs, la localisation et l'algèbre homologique ont reçu une attention particulière, notamment à cause du rôle prépondérant qu'elles ont joué dans la théorie commutative: beaucoup de résultats fondamentaux dans les anneaux noethériens commutatifs ont été obtenus par des méthodes de localisation et par des méthodes homologiques. La théorie des anneaux non commutatifs a vraiment débuté en 1958 avec le théorème de Goldie qui affirme que tout anneau noethérien premier admet un anneau total des fractions: ce qui est l'analogue du corps des fractions dans la théorie commutative. C'est autour de cette même période qu'ont été publiés en algèbre homologique l'ouvrage [6] de Cartan-Eilenberg (qui fut sans doute une étape importante dans l'histoire de l'algèbre) et l'article [14] de Grothendieck (qui est sans doute une bonne référence sur les suites spectrales). Depuis cette période, l'intérêt porté à l'étude des anneaux non commutatifs n'a cessé de croître. Parmi les anneaux noethériens non commutatifs étudiés de façon intensive ces dernières années figurent les anneaux noethériens à identités polynomiales, les algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie de dimension finie et les anneaux de groupes des groupes polycycliques par finis etc.

Dans cette thèse, nous étudions les idéaux premiers (chaînes d'idéaux premiers, localisation et formule des hauteurs de Tauvel) et l'algèbre homologique (modules projectifs et injectifs, résolutions injectives minimales, foncteurs cohomologiques et suites spectrales) dans les produits croisés $R \star g$, où R est un anneau et g une algèbre de Lie de dimension finie: c'est une classe importante d'anneaux non commutatifs qui contient les algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie, les anneaux d'opérateurs différentiels $R[\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n; \delta_1, \delta_2, ..., \delta_n]$ et l'algèbre de Weyl $A_n(R)$.

Dans tout l'exposé, k est un corps, R une k-algèbre, g une k-algèbre de Lie de dimension finie n et $U(g)$ l'algèbre enveloppante de g. On suppose que g opère par dérivations sur R et on note $R \star g$ le produit croisé de R par $U(g)$ [3; 7; 27; 34]. L'anneau $R \star g$ est un R-module libre à droite et à gauche qui contient R comme sous-algèbre et $U(g)$ comme sous-espace vectoriel. Il existe une application linéaire δ de g dans l'algèbre de Lie des k-dérivations de R et une application bilinéaire $t : g \times g \to R$ telle que $[\bar{X}, \bar{Y}] - \overline{[X, Y]} = t(X, Y)$; où $X \in g$ et $\bar{X}$ désigne l'image canonique de X dans $R \star g$. Pour chaque $X \in g$, posons $\delta(X) = \delta_X$. On prolonge l'action de g à $R \star g$, en posant $\delta_X(a) = \bar{X}a - a\bar{X}$ pour tout $a \in R \star g$.

Si l'application t est identiquement nulle (par exemple, si g est de dimension 1), alors δ est un morphisme d'algèbres de Lie de g dans l'algèbre de Lie des k-dérivations de R et l'anneau $R \star g$ se note souvent $R\#U(g)$; dans ce cas, R et $U(g)$ sont des sous-g-modules de $R\#U(g)$. Si g est de dimension 1 de base X, alors $R\#U(g) \simeq R[\theta, \delta]$, l'extension de Ore de R par $\delta = \delta_X$, où X est envoyé sur θ.

Ce travail est composé de deux paragraphes précédés chacun d'une introduction. Dans le premier paragraphe, nous résumons les articles [15; 16 sections 1 à 4; 17; 18] qui traitent des chaînes d'idéaux premiers et de la localisation dans l'anneau $R \star g$; où le plus souvent, g est nilpotente ou complètement résoluble. Le deuxième paragraphe résume les articles [16 section 5; 19; 20] qui traitent de l'algèbre homologique dans la catégorie $Mod_{(R\#U(g))}$, des $R\#U(g)$-modules g-localement finis; où g est souvent semi-simple.

Pour les démonstrations des principaux résultats énoncés, le lecteur pourra consulter les articles concernés.

Dans tout l'exposé, le mot "noethérienne" signifie " noethérienne à droite et à gauche".

1 Chaîne d'idéaux premiers et localisation dans les anneaux munis d'une action d'algèbre de Lie

Un sous-ensemble multiplicativement stable S d'un anneau A vérifie la condition de Ore à droite si quels que soient $a \in A$ et $s \in S$, il existe $a' \in A$ et $s' \in S$ tels que $sa' = as'$. Un idéal premier P dans un anneau noethérien premier A est dit localisable si l'ensemble $\mathcal{C}_A(P)$ des éléments de A, réguliers modulo P vérifie la condition de Ore à droite et à gauche.

Un anneau local (nécessairement noethérien) A d'idéal maximal M est dit régulier si M est engendré par un ensemble régulier normalisant d'éléments de cardinal $d < \infty$. Pour un tel anneau, R. Walker [41] a montré que

$$d = gldim(A) = Kdim(A) = dim(A) = dimh_A(A/M) = ht(M);$$

$gldim$, $Kdim$, dim et $dimh_A$ désignent respectivement la dimension globale, la dimension de Krull au sens de Gabriel et de Rentschler, la dimension de Krull classique et la dimension homologique et ht désigne la hauteur d'un idéal premier.

Pour la définition de la clique d'un idéal premier dans un anneau noethérien, on peut consulter [22, Chapitre 7].

Un anneau A est caténaire si chaque fois que $P \subseteq Q$ sont deux idéaux premiers de A, toutes les chaînes saturées d'idéaux premiers de A reliant P à Q ont la même longueur.

Rappelons quelques résultats sur lesquels sont basés nos travaux:

Soient k algébriquement clos, g résoluble et $A = U(g)$. Alors J.C. McConnell [29, Theorem 3] a montré que A est hypernormale; i.e. les idéaux de A sont engendrés par un ensemble normalisant d'éléments. Par conséquent, les cliques d'idéaux premiers de A sont classiquement localisables [22, 7.2.16; 36] ou [5]. Soient P un idéal premier de A, $\Omega(P)$ la clique de P et $A_{\mathcal{T}}$ le localisé de A par rapport à $\Omega(P)$. Alors K. Brown a montré que $A_{\mathcal{T}}$ se comporte comme un anneau local régulier [5]. De façon précise, il a montré que si M est un idéal primitif de $A_{\mathcal{T}}$, alors M est engendré par un ensemble normalisant semi-invariant d'éléments de cardinal

$$d = |\mathcal{I}_A(P)| = gldim(A_\mathcal{T}) = Kdim(A_\mathcal{T}) = ht(M) = ht(P)$$

où $|\mathcal{I}_A(P)| \leq n$ désigne le cardinal d'un certain sous-ensemble de A. Dans le même article, il a calculé les invariants μ_i de Bass et il a montré que le grade du A-module A/P est égal à la hauteur de P.

Pour les propriétés de la dimension de Gelfand-Kirillov sur k, notée $GKdim$, nous renvoyons le lecteur à [24; 27, Chapitre 8]. Dans [40], P. Tauvel a montré que

$$GKdim(A) = GKdim(A/P) + ht(P) \qquad (*)$$

La formule (*) n'est pas toujours vraie dans une k-algèbre quelconque, mais elle l'est dans les algèbres noethériennes premières de type fini à identités polynomiales [27, 10.13.6; 35, Theorem 4]. Nous allons l'appeler la formule des hauteurs de Tauvel. M. Lorenz [26] a aussi montré que la formule des hauteurs de Tauvel est vraie dans A. Il a utilisé ce résultat pour montrer que si h est un idéal de g et si P est un idéal premier g-invariant de $U(h)$, alors $g\text{-}ht(P) = ht(P)$; où $g\text{-}ht$ désigne la version g-invariante de la hauteur. Cette relation entre la hauteur et la g-hauteur est aussi vraie, d'après [40], dans l'algèbre symétrique $S(g)$ de g. Dans [11], O. Gabber a montré que l'anneau A est caténaire; il en résulte que la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour les facteurs premiers de A.

Soient k non nécessairement algébriquement clos et g nilpotente. Alors J.C. McConnell [28, Theorem 3.2] a montré que A est hypercentrale; i.e. les idéaux de A sont engendrés par un ensemble centralisant d'éléments. Donc les idéaux premiers de A sont classiquement localisables [22, 3.3.11, 3.3.20; 38, Corollary 1]. Dans [39, Theorem A], P.F. Smith a aussi montré que A est hypercentrale. Ensuite, il a montré que si P est un idéal premier de A, alors le localisé A_P de A en P est un anneau local régulier de dimension au plus égale à n. Utilisant ce résultat, M.P. Malliavin a montré [33, Corollaire 4.11, Proposition 4.12] que A est caténaire et elle a calculé les invariants μ_i de Bass. La caténarité de A a été aussi prouvée par T. Levasseur [25].

Soient R une k-algèbre commutative noethérienne, δ une k-dérivation de R et $R[\theta, \delta]$ l'extension de Ore de R par δ. On suppose que R est δ-localement finie. Si l'anneau des polynômes $R[x]$ est caténaire, A.D. Bell et G. Sigurdsson ont montré que l'anneau $R[\theta, \delta]$ est caténaire [2, Theorem 2.8]. Ce résultat a été généralisé par une autre méthode de démonstration à l'anneau des opérateurs différentiels $R[\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n; \delta_1, \delta_2, ..., \delta_n]$ par K. Brown, K. Goodearl et T. Lenagan [4].

Rappelons qu'un k-espace vectoriel M muni d'une action de g est g-localement fini, si chaque élément de M est contenu dans un sous-espace vectoriel g-stable de dimension finie de M. Dans le cas particulier, où g est de dimension 1, donc $R \star g \simeq R[\theta, \delta]$, on préfère dire que R est "δ-localement finie" au lieu de "g-localement finie".

Dans les articles [15; 16 section 1 à 4; 17; 18] , nous avons généralisé les résultats énoncés ci-dessus à l'anneau $R \star g$. Dans cette section, le corps k est de caractéristique 0.

1.1 Condition d'hypernormalité et formule des hauteurs de Tauvel dans l'anneau $R \star g$

Un idéal I de R est g-invariant si $\delta_X(I) \subseteq I$ pour tout $X \in g$. Lorsque les seuls idéaux g-invariants de R sont 0 et R, on dit que R est g-simple.

Soient R noethérienne et P un idéal premier g-invariant de R. On appelle g-hauteur de P et on note $g\text{-}ht(P)$ (si cette dernière est finie) la longueur maximale des chaînes d'idéaux premiers g-invariants de R d'extrémité P.

Un élément a de R est dit g-normal (g-central) si a est normal (central) dans R et $\delta_X(a) = r_X a$ ($\delta_X(a) = 0$) pour tout $X \in g$; où r_X est un élément de R.

L'algèbre R est dite g-hypernormale (g-hypercentrale) si, étant donné deux idéaux g-invariants $I \subset J$ de R, l'idéal J/I de R/I contient un élément g-normal (g-central) non nul.

Soient k algébriquement clos, g résoluble, R commutative g-localement finie. Alors R est g-hypernormale: c'est une conséquence du théorème de Lie.

Si I est un idéal de R, on note I^+ le plus grand idéal g-invariant de R contenu dans I. Soit R noethérienne à droite. Si I est un idéal premier de R, alors I^+ est aussi premier [2]. Si R est noethérienne à droite g-simple, alors R est première.

Nous avons prouvé [16, Lemme 2.6], la version g-invariante du résultat bien connu qui dit que dans un anneau noethérien hypernormal, les idéaux premiers sont tous de hauteur finie. Ensuite, nous avons établi les résultats suivants:

Proposition 1.1.1 ([16, Proposition 2.7 et Corollaire 2.8]) Soient R

noethérienne à droite g-hypernormale et P un idéal premier de R de hauteur $d < \infty$.

(1) Alors il existe une chaîne saturée d'idéaux premiers

$$P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_i \subset P_d = P$$

de R, où un $P_i = P^+$.

(2) Si P est g-invariant, alors $g\text{-}ht(P) = d$.

Si $b_1, b_2, ..., b_i$ sont des éléments de R, on note $(b_1, b_2, ..., b_i)$ l'idéal de R qu'ils engendrent.

Les éléments $b_1, b_2, ..., b_l$ forment un ensemble g-normalisant d'éléments de R si

(i) b_1 est un élément g-normal non nul de R;

(ii) $b_i + (b_1, ..., b_{i-1})$ est un élément g-normal non nul de $R/(b_1, ..., b_{i-1})$ pour $1 \leq i \leq l$.

On définit de façon similaire la notion d'ensemble g-centralisant d'éléments de R. Un ensemble g-normalisant (g-centralisant) d'éléments de R est un ensemble normalisant (centralisant) d'éléments de R.

Théorème 1.1.2 ([17, Théorème 2.2]) Soient R noethérienne. Alors

(1) R est g-hypernormale si et seulement si chaque idéal g-invariant de R est engendré par un ensemble g-normalisant d'éléments.

(2) R est g-hypercentrale si et seulement si chaque idéal g-invariant de R est engendré par un ensemble g-centralisant d'éléments.

Il résulte de (1.1.2 (2)) que si R est noethérienne g-hypercentrale. alors tous les idéaux premiers g-invariants de R sont classiquement localisables.

La g-dimension de Krull classique de R, notée $g\text{-}dim(R)$ est la version g-invariante de la dimension de Krull classique. Nous avons $g\text{-}dim(R) \leq dim(R)$.

Soit R commutative de type fini g-simple. Alors R. Hart a montré que R est un anneau régulier [21, Corollary of Theorem 1]. Nous précisons [16, Théorème 5.2] que la dimension de R est au plus égale à n. Nous avons utilisé ce résultat pour montrer que si k est algébriquement clos, si g est résoluble et si R est commutative g-simple, alors R est un anneau régulier de dimension au plus égale à n. Nous avons prouvé:

Proposition 1.1.3 ([16, Théorème 5.5]) Soient R commutative de type fini g-hypernormale et P un idéal premier de R. Alors

- $ht(P) \leq g\text{-}ht(P) + n$.

- $dim(R) \leq g\text{-}dim(R) + n$.

- $ht(P) = g\text{-}ht(P^+) + m$; où m est le nombre minimum de générateurs de PR_P/P^+R_P.

La proposition 1.1.3 est améliorée si on suppose k algébriquement clos, g résoluble et R g-localement finie [16, Théorème 5.16].

A partir de maintenant, fixons un entier m tel que $0 \leq m \leq n$.

Soit g complètement résoluble. Fixons une série de composition de g; i.e. une chaîne

$$0 = g_0 \subset g_1 \subset ... \subset g_n = g$$

d' idéaux de g telle que g_{i+1}/g_i est de dimension 1. Nous poserons $R_i = R \star g_i$; $0 \leq i \leq n$ et $B = R_m$; donc $R_0 = R$ et $R \star g_n = R \star g$. Choisissons X_i dans $g_i - g_{i-1}$ tel que $X_i + g_{i-1}$ soit une base de g_i/g_{i-1}. Donc $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est une base de g. Nous avons $R_i \simeq R_{i-1}[\theta_i, \delta_i]$, l'extension de Ore de R_{i-1} par δ_i; où $\bar{X}_i$ est envoyé sur θ_i et $\delta_i(r) = \delta_{X_i}(r)$ pour tout $r \in R_{i-1}$.

Nous avons établi dans [16, Corollaires 2.16 et 2.18] les résultats suivants:

Proposition 1.1.4 (1) Soit g nilpotente. Si R est g -hypercentrale, alors chaque $R \star g_i$ est g-hypercentrale. En particulier, $R \star g$ est hypercentrale.

(2) Soit g complètement résoluble. Si R est g-hypernormale, alors chaque $R \star g_i$ est g-hypernormale. En particulier, $R \star g$ est hypernormale.

On dit que la condition (C_1) (resp. (C_2)) est satisfaite dans R si la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour les idéaux premiers g-invariants de R (resp. si la g-hauteur et la hauteur sont finies et coïncident sur les idéaux premiers g-invariants de R).

Si R est g-simple (en particulier, si R est une algèbre de Weyl sur k), les conditions (C_1) et (C_2) sont trivialement satisfaites dans R.

Si R est de type fini noethérienne première à identités polynomiales, la condition (C_1) est satisfaite dans R. D'après la proposition (1.1.1), si R est noethérienne à droite g-hypernormale, alors la condition (C_2) est satisfaite dans R. Si g opère trivialement sur R, la condition (C_2) est trivialement satisfaite dans R. Si R est l'algèbre enveloppante d'un idéal de g et si g est complètement résoluble, alors les conditions (C_1) et (C_2) sont satisfaites dans R.

Nous avons montré dans [15] les résultat suivants:

Proposition 1.1.5 ([15, Propositions 4.13 et 4.17]) Soient k algébriquement clos, g résoluble, R noethérienne de type fini, $B = R * g_m$ et P un idéal premier g-invariant de B. On suppose que les conditions (C_1) et (C_2) sont satisfaites dans R, alors $GKdim(B) = GKdim(B/P) + ht(P)$ et $g\text{-}ht(P) = ht(P)$.

En fait, la proposition 1.1.5 est vraie même si k n'est pas algébriquement clos, pourvu que g soit complètement résoluble.

1.2 Localisation dans l'anneau $R \star g$ lorsque g est complètement résoluble

On pourra consulter [16; 17; 18] pour les résultats de cette section. Les notations et les conventions sont celles de (1.1).

Pour la démonstration du lemme suivant, on renvoie à [16, Corollaire 2.16; 17, Lemme 3.1].

Lemme 1.2.1 Soient g complètement résoluble, R noethérienne à droite g-hypernormale, P un idéal premier g-invariant de $B = R\star g_m$, $P_1 = P \cap R_i$ et $P_2 = P \cap R_{i-1}$; $1 \leq i \leq m$. Alors P_1 et $P_2R_i = R_iP_2$ sont des idéaux premiers g-invariants de R_i. De plus, soit $P_1 = P_2R_i$ ou bien, il existe $p \in P_1 - R_iP_2$ tel que

(i) $\delta_X(p) - u_Xp - m\lambda(X)p \in R_iP_2$ pour tout $X \in g$; où $u_X \in R$, m est le degré minimal en X_i d'un élément de $P_1 - R_iP_2$ à coefficients dans R_{i-1} et λ est un caractère de g.

(ii) $p + R_iP_2$ est un élément normal dans R_i/P_2R_i.

(iii) Si $s \in R_i$ et $ps \in R_iP_2$, alors $s \in R_iP_2$.

(iv) pour tout $q \in P_1$, il existe $c \in \mathcal{C}(P)$ tel que $qc \in R_iP_2 + R_ip$.

Dans le lemme (1.2.1), si g est nilpotente et si R est g-hypercentrale, alors dans la conclusion, $u_X = \lambda = 0$ et $p + R_iP_2$ est central dans R_i/P_2R_i. Nous avons démontré [17, Théorème 3.2 et Corollaire 3.4] les résultats suivants:

Théorème 1.2.2 Soient g complètement résoluble, R noethérienne à droite première g-hypernormale, $B = R * g_m$, P un idéal premier g-invariant localisable de B et $Q = P \cap R$. Si Q est localisable et si QR_Q est engendré par un ensemble régulier g-normalisant d'éléments, alors B_P est un anneau local régulier de dimension

$$dim(R_Q) + |\{i \leq m : P \cap R_i \neq (P \cap R_{i-1})R_i\}|.$$

Corollaire 1.2.3 Soient R commutative noethérienne intègre, g nilpotente, $B = R * g_m$, P un idéal premier g-invariant de B et $Q = P \cap R$. Si QR_Q est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments, alors P est localisable, PB_P est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments et

$$dim(B_P) = dim(R_Q) + |\{i \leq m : P \cap R_i \neq (P \cap R_{i-1})R_i\}|$$

Soient A un anneau noethérien ou à identités polynomiales, P un idéal premier de A et $Fr(A/P)$ l'anneau total des fractions de A/P. Si N est un $Fr(A/P)$-module, on note $l(N)$ sa longueur en tant que $Fr(A/P)$-module. Soit M un A-module. Posons pour $i \geq 0$;

$$\mu_i(P, M) = l(Fr(A/P) \otimes_A Ext^i_A(A/P, M))/l(Fr(A/P)).$$

Si P est complètement premier, alors $\mu_i(P, M)$ est la dimension sur $Fr(A/P)$ du $Fr(A/P)$-espace vectoriel $Fr(A/P) \otimes_A Ext^i_A(A/P, M)$. Ces nombres μ_i ont été introduits en algèbre commutative par H. Bass [1] et dans les algèbres enveloppantes d'une algèbre de Lie résoluble de dimension finie par M.P. Malliavin [33]; dans les deux cas, P est complètement premier.

Corollaire 1.2.4 ([17, Corollaire 3.5]) Soient g nilpotente, R commutative noethérienne intègre, $B = R * g_m$ et P un idéal premier g-invariant de B de hauteur d. Si QR_Q est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments, alors $\mu_i(P, B) = 0$ si $i \neq d$ et $\mu_d(P, B) = 1$.

Soient A un anneau noethérien à droite et P un idéal premier de A. Le grade du A-module A/P est l'entier

$$j_A(A/P) = inf\{i : Ext^i_A(A/P, A) \neq 0\}$$

où A/P et A sont considérés comme A-modules à gauche ou à droite.

Corollaire 1.2.5 ([17, Corollaire 3.6]) Sous les hypothèses de (1.2.3), $j_B(B/P) = ht(P)$.

Un élément a de R est semi-invariant si l'espace vectoriel ka est g-stable.

Soit S une k-algèbre contenant R. Nous supposons que g agit aussi par dérivations sur S et que cette action prolonge celle de g sur R.

Un élément s de S est (R, g)-admissible (fortement (R, g)-admissible) si s normalise (centralise) R et $\delta_X(s) = \lambda_X s$ pour tout $X \in g$, où λ_X est un élément de k; la dernière condition signifie que s est un semi-invariant de R.

Nous dirons que S est (R, g)-admissible (fortement (R, g)-admissible) si, chaque fois que $I \subset J$ sont des idéaux g-invariants de S, l'idéal J/I de S/I contient un élément $(R/I \cap R, g)$-admissible (fortement $(R/I \cap R, g)$-admissible) non nul.

Il est clair que si un élément de S est fortement (R, g)-admissible, alors il est (R, g)-admissible et si S est fortement (R, g)-admissible, alors S est (R, g)-admissible.

Un élément g-central ((R, g)-admissible) de R est fortement (R, g)-admissible (g-normal) dans R. Si R est g-hypercentrale ((R, g)-admissible), alors R est fortement (R, g)-admissible (g-hypernormale). Si R est hypernormale (hypercentrale) et si l'action de g est triviale, alors R est (R, g)-admissible (fortement (R, g)-admissible). Si k est algébriquement clos, si g est résoluble et si R est commutative g-localement finie, alors R est fortement (R, g)-admissible.

A partir de maintenant, on suppose que le corps k est algébriquement clos non dénombrable (par exemple, le corps des nombres complexes), R est une k-algèbre noethérienne, g est résoluble et $A = R \star g$. On suppose aussi que R est fortement (R, g)-admissible et que les idéaux premiers de l'anneau des polynômes à une variable $R[x]$ à coefficients dans R sont complètement premiers. Donc les idéaux premiers de $R \star h$ sont complètement premiers pour toute sous-algèbre de Lie h de g [36]. Fixons un idéal premier P de A. Notons $\Omega(P)$ la clique de P. Posons

$$\mathcal{T} = \cap\{A - P'; \quad \text{où} \quad P' \quad \text{parcourt} \quad \Omega(P)\}.$$

D'après nos hypothèses, A est hypernormale. D'après [22, Corollary 7.2.16], $\Omega(P)$ est classiquement localisable; donc $\mathcal{T}$ vérifie la condition de Ore dans A. D'après [22, 7.1], les idéaux primitifs à gauche de $A_{\mathcal{T}}$ sont aussi primitifs à droite, $A_{\mathcal{T}}/M$ est un anneau simple artinien pour tout idéal primitif M de $A_{\mathcal{T}}$ et les idéaux primitifs de $A_{\mathcal{T}}$ sont de la forme $P'A_{\mathcal{T}}$; où P' parcourt $\Omega(P)$.

Théorème 1.2.6 ([18, Theorem 2.5]) Soient R intègre fortement (R, g)-admissible et M un idéal primitif de A_T. Si QR_Q est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments, alors

(1) M est engendré par un ensemble régulier normalisant semi-invariant d'éléments de cardinal

$$d = dim(R_Q) + |\{i \leq n : P \cap R_i \neq (P \cap R_{i-1})R_i\}|.$$

(2)

$$d = gldim(A_T) = Kdim(A_T) = ht(M) = ht(P).$$

Nous avons aussi discuté les nombres μ_i de Bass et nous avons relié la hauteur de P au grade du A-module A/P comme dans (1.2.4) et (1.2.5).

Le théorème 1.2.6 est une généralisation de [17, Théorème 5.4], où nous avions supposé R commutative g-localement finie et Imt identiquement nulle.

1.3 Localisation dans l'anneau $R \star g$ lorsque g est nilpotente

Le lecteur pourra consulter [16] pour les démonstrations des résultats de cette section dont le but est d'étudier la caténarité de l'anneau $R \star g$ par des méthodes de localisation. Les notations et les conventions sont celles de (1.1) et (1.2).

La g-caténarité est la version g-invariante de la caténarité dans un anneau muni d'une action d'algèbre de Lie g.

Un idéal premier g-invariant Q de R est g-régulièrement localisable s'il existe une chaîne

$$0 = Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq ... \subseteq Q_l = Q$$

d'idéaux g-invariants de R telle que, si $Q_{i-1} \subset Q_i$, il existe $p \in Q_i - Q_{i-1}$ tel que

(1) $p + Q_{i-1}$ est un élément g-central régulier de R/Q_{i-1}

(2) pour tout $q \in Q_i$, il existe $c \in \mathcal{C}_R(Q)$ tel que $qc \in Q_{i-1} + Rp$.

Si tous les idéaux premiers g-invariants de R sont g-régulièrement localisables, on dit que R est g-régulièrement localisable.

Théorème 1.3.1 [16, Théorème 4.6]) Soient g nilpotente, R noethérienne à droite, première g-hypercentrale, $B = R * g_m$, P un idéal premier g-invariant de B et $Q = P \cap R$. Si Q est g-régulièrement localisable, alors P est g-régulièrement localisable et B_P est un anneau local régulier de dimension au plus égale à $dim(R_Q) + m$.

Sous les hypothèses du théorème (1.3.1), nous avons calculé aussi les nombres μ_i de Bass et nous avons relié la hauteur de P au grade du B-module B/P exactement comme dans (1.2.4) et (1.2.5).

Thérème 1.3.2 ([16, Proposition 4.10]) Soient g nilpotente, R noethérienne à droite première, g-hypercentrale, g-régulièrement localisable et $B = R * g_m$. Alors B est g-caténaire. En particulier, $R \star g$ est caténaire.

Si R est noethérienne et si Q est un idéal premier g-invariant g-régulièrement localisable de R, alors Q est classiquement localisable et QR_Q est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments.

1.4 Caténarité dans l'anneau $R\#U(g)$ lorsque g est abélienne

On conserve les notations et les conventions des paragraphes précédents. On suppose que Imt est identiquement nulle, g abélienne et R commutative. On note S l'anneau des polynômes à m variables et à coefficients dans R.

Théorème 1.4.1 ([16, Théorème 3.6]) Soient R noethérienne g-hypernormale et $B = R\#U(g_m)$. Si S est caténaire ou g-caténaire, alors B est g-caténaire. En particulier, $R\#U(g)$ est caténaire.

Corollaire 1.4.2 ([16, Corollaire 3.9]) Soient R de type fini g-hypernormale et $B = R\#U(g_m)$. Alors B est g-caténaire et la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour les facteurs premiers g-invariants de B. En particulier, $R\#U(g)$ est universellement caténaire et la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour les facteurs premiers de $R\#U(g)$.

2 Algèbre homologique dans la catégorie $Mod_{(R\#U(g))}$

Les résultats de cette section sont basés sur les travaux de A. R. Magid [30; 31; 32], de F. du Cloux [8] et de I. Doraiswamy [9]. Soit k un corps algébriquement clos, G un groupe algébrique affine sur k (le plus souvent linéairement réductif et connexe), R une k-algèbre commutative (noethérienne) sur laquelle G opère rationnellement par automorphismes d'anneau. Un R-module qui est un G-module rationnel tel que les actions de R et G sont compatibles est appelé un $R-G$-module.

Dans [30], Magid a défini les * dimensions homologiques (versions g-invariantes des dimensions homologiques dans Mod_R), puis il a relié chaque * dimension à la dimension homologique correspondante. Ce qui lui a permis d'énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que l'algèbre R soit régulière ou de Gorenstein. Dans [31], il a étudié les propriétés homologiques des $R-G$-modules, plus précisément, les modules injectifs, les résolutions injectives minimales et la cohomologie. Dans [32], il a calculé le groupe de Picard de l'anneau des invariants R^G en relation avec le groupe de Picard de R et de divers sous-groupes du groupe des caractères $\chi(G)$ de G.

Dans [9], I. Doraiswamy a montré que si R est commutative de type fini G-simple et si G est linéairement réductif, alors la catégorie des $R-G$-modules est semi-simple. Notre but est d'établir des résultats analogues à ceux obtenus dans [9; 30; 31; 32] lorsque l'action provient d'une algèbre de Lie. Nous obtenons aussi une généralisation de [32] et une suite spectrale de [8, Proposition 2.7.3].

A partir de maintenant, k est de caractéristique 0 non nécessairement algébriquement clos. Tous les modules sont des modules à gauche. Nous notons Mod_A (si A est un anneau) la catégorie des A-modules et par k-ev la catégorie des espaces vectoriels sur k.

Un R-module M qui est un g-module tel que $X(rm) = X(r)m + rX(m)$ s'appelle un $R\#U(g)$-module.

Nous allons noter $Mod_{(g)}$ la sous catégorie pleine de Mod_g dont les objets sont g-localement finis et par $Mod_{(R\#U(g))}$ la catégorie des $R\#U(g)$-modules g-localement finis; c'est une sous catégorie pleine de $Mod_{R\#U(g)}$.

2.1 Dimensions homologiques dans les anneaux munis d'une action d'algèbre de Lie

On suppose que R est commutative. Soit M un $R\#U(g)$-module.

- La g-dimension projective de M notée, $g\text{-}pd_R(M)$ est le plus petit entier m tel que $Ext^i_R(M, N) = 0$ pour tout $i > m$ et pour tout $R\#U(g)$-module N.

- La g-dimension injective de M notée, $g\text{-}id_R(M)$ est le plus petit entier m tel que $Ext^i_R(N, M) = 0$ pour tout $i > m$ et pour tout $R\#U(g)$-module N.

- La g-dimension globale de R notée, $g\text{-}gldim(R)$ est le plus petit entier m tel que $Ext^i_R(P, Q) = 0$ pour tout $i > m$ et pour tous $R\#U(g)$-modules P et Q.

Il est clair que $g\text{-}pd_R(M) \leq pd_R(M)$; $g\text{-}id_R(M) \leq id_R(M)$ et $g\text{-}gldim(R) \leq gldimd(R)$ pour tout $R\#U(g)$-module M.

Une algèbre (noethérienne) A est dite régulière si A_P est un anneau local régulier pour chaque idéal premier P de A. elle est dite de Gorenstein, si sa dimension injective est finie.

Nous avons relié chaque g-dimension homologique à la dimension homologique correspondante; par exemple, $g\text{-}id_R(M) \leq id_R(M) \leq g\text{-}id_R(M) + n$. Ensuite, nous avons montré.

Corollaire 2.1.4 ([16, Corollaires 5.20 et 5.21]) Soit R de type fini g-hypernormale. Alors R est régulière (resp. de Gorenstein) si et seulement si R_Q est régulière (resp. de Gorenstein) pour tout idéal premier g-invariant Q de R.

Soient R g-localement finie non nécessairement de type fini et M un $R\#U(g)$-module g-localement fini (on dira que R est un * anneau et que M est un * module). On définit de façon similaire les * dimensions projective de M notée, $^*pd_R(M)$, injective de M notée, $^*id_R(M)$ et globale de R, notée $^*gldim(R)$. Supposons que R est un * anneau, k algébriquement clos et g résoluble. Donc R est g-hypernormale. Nous avons relié chaque * dimension à la dimension homologique correspondante exactement comme dans le cas des g-dimensions. Nous avons aussi établi un résultat analogue à (2.1.4).

2.2 Foncteurs cohomologiques

Nous avons établi dans [19] (utilisant les méthodes de Magid) des résultats similaires à ceux de [31] dans la catégorie des $R\#U(g)$-modules g-localement finis. Signalons toutefois que notre algèbre R n'est pas toujours commutative. Tous les produits tensoriels et les"*Hom*" sont pris relativement à k.

Si M est un g-module, on note $M^g = \{m \in M; X.m = 0 \quad \forall X \in g\}$, l'ensemble des éléments g-invariants de M. Nous définissons un foncteur $a = (-)^g$ de $Mod_{(g)}$ dans k-ev. Nous notons $R^p a(g,-)$ ses foncteurs dérivés droits

Nous noterons $M^{(g)}$ l'ensemble des éléments g-finis de M. On désigne par $H^p_{(g)}(-)$ les foncteurs dérivés droits du foncteur $M \to M^{(g)}$ défini de Mod_g dans $Mod_{(g)}$.

Nous introduisons aussi le foncteur $\mathcal{L}_R(-,-) = Hom_R(-,-) \cap Hom_{(g)}(-,-)$ défini de $Mod_{R\#U(g)} \times Mod_{R\#U(g)}$ dans $Mod_{(g)}$ et nous notons $\mathcal{L}^p_R(-,-)$ ses foncteurs dérivés droits. Nous notons $\widetilde{Ext}_{R\#U(g)}(-,-)$ si R est g-localement finie, les foncteurs dérivés droits du foncteur $Hom_{R\#U(g)}(-,-)$ restreint à $Mod_{(R\#U(g))} \times Mod_{(R\#U(g))}$.

Si $R = k$, le foncteur $\mathcal{L}_k(-,-)$ et ses dérivés $\mathcal{L}^p_k(-,-)$ sont notés respectivement $Hom_{(g)}(-,-)$ et $Ext^p_{(g)}(-,-)$ par F. du Cloux [8]. On trouvera d'autres propriétés homologigues des $R\#U(g)$-modules dans [10].

Proposition 2.2.1 ([19, Proposition 2.22]) Soit R noethérienne g-localement finie. Soient M et N dans $Mod_{(R\#U(g))}$ avec M de type fini. Alors nous avons la suite spectrale

$$R^p a(g, \quad Ext^q_R(M,N)) \Rightarrow \widetilde{Ext}^{p+q}_{R\#U(g)}(M,N).$$

Corollaire 2.2.2 ([19, Corollaire 2.25]) Soit R noethérienne g-localement finie. Soient M et N dans $Mod_{(R\#U(g))}$ avec M de type fini. Si g est semi-simple, alors nous avons

$$Ext^q_R(M,N)^g = \widetilde{Ext}^q_{R\#U(g)}(M,N).$$

Proposition 2.2.3 ([19, Proposition 2.27]) Soient M et N deux $R\#U(g)$-modules. Alors nous avons

(1) la suite spectrale

$$H^p_{(g)}(Ext^q_R(M,N)) \Rightarrow \mathcal{L}^{p+q}_R(M,N).$$

(2) $H^p_{(g)}(N) = \mathcal{L}^p_R(R, \quad N)$ pour tout $R\#U(g)$-module N.

La proposition (2.2.3 (1)) est une généralisation de [8, Corollaire 2].

Proposition 2.2.4 ([19, Propositions 2.30 et 2.31]) Soient M et N deux $R\#U(g)$-modules. Alors nous avons

(1) les suites spectrales

$$H^p_g(Ext^q_R(M, N)) \Rightarrow Ext^{p+q}_{R\#U(g)}(M, N)$$

et

$$R^p a(g, \mathcal{L}^q_R(M, N)) \Rightarrow Ext^{p+q}_{R\#U(g)}(M, N)$$

(2)

$$H^q_g(N) = Ext^q_{R\#U(g)}(R, N).$$

(3) Si g est semi-simple, alors nous avons

$$\mathcal{L}^q_R(M, N)^g = Ext^q_{R\#U(g)}(M, N).$$

La deuxième suite spectrale de la proposition (1) est une généralisation de [8, Proposition 2.7.3].

Un cas particulier de (2.2.4) est celui où g est le produit semi-direct d'un idéal r par une sous-algèbre de Lie s. Dans ce cas, $U(g) \simeq U(r)\#U(s)$. Si de plus, r est le radical résoluble de g (donc s est semi-simple), on obtient des résultats intéressants [19, section 3].

2.3 Le foncteur $\mathcal{L}_S(R, -)$

Pour les résultats de cette sous-section, on pourra consulter [20]. L'anneau des invariants R^g est un sous-anneau de R; nous allons le noter S dans tout l'exposé. Pour tout M dans Mod_S, on note $\mathcal{L}_S(R, M)$ l'ensemble des éléments g-finis de $Hom_S(R, M)$ muni de la structure de $R\#U(g)$-module définie par $rf(s) = f(sr)$. Pour tout $M \in Mod_{(g)}$, on pose $(M)_g = M/M_1$; où M_1 est le sous g-module de M engendré par $g.M$. On note q_M l'application canonique $M \to (M)_g$.

Dans la proposition suivante, nous montrons que le foncteur $\mathcal{L}_S(R, -)$ est adjoint au foncteur $(-)^g$ restreint à $Mod_{(R\#U(g))}$.

Proposition 2.3.1 Soient $M \in Mod_S$ et $N \in Mod_{(R\#U(g))}$. Alors l'application $\phi : Hom_{R\#U(g)}(N, \mathcal{L}_S(R, M)) \to Hom_S((N)_g, M)$ définie par $\phi(f)(q_N(x)) = f(x)(1)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Le premier résultat important de [20] est:

Théorème 2.3.2 ([20, Théorème 2.4]) Soit g semi-simple.

(1) Si $N \in Mod_S$ et si M est un $R\#U(g)$ sous-module de $\mathcal{L}_S(R, N)$, alors $M^g = 0$ implique $M = 0$.

(2) Si $M \to N$ est un monomorphisme essentiel de S-modules, alors $\mathcal{L}_S(R, M) \to \mathcal{L}_S(R, N)$ est un monomorphisme essentiel de $R\#U(g)$-modules.

(3) Si $N \in Mod_S$, alors $E_{R\#U(g)}(\mathcal{L}_S(R, N))$ est isomorphe à $\mathcal{L}_S(R, E_S(N))$.

(4) Si $N \in Mod_S$, alors $(E_{R\#U(g)}(\mathcal{L}_S(R, N)))^g$ est isomorphe à $E_S(N)$.

D'après (2.3.2 (1)), les $R\#U(g)$ sous-modules non nuls du $R\#U(g)$-module g-localement fini induit $\mathcal{L}_S(R, N)$ contiennent des éléments invariants non nuls. Nous allons montrer ci-dessous que ceci implique que M est une extension essentielle de RM^g.

Corollaire 2.3.3 ([20, Corollaire 2.5]) Soit g semi-simple. Soient $N \in Mod_S$ et M un $R\#U(g)$ sous-module non nul de $\mathcal{L}_S(R, N)$.

(1) Alors M est une extension essentielle de son sous-$R\#U(g)$-module RM^g.

(2) Si $m \in M$ et si $p_M(rm) = 0$ pour tout $r \in R$, alors $m = 0$.

Pour tout $M \in Mod_{(R\#U(g))}$, nous allons poser

$$^*M = \{m \in M \quad \text{tel que} \quad p_M(rm) = 0 \quad \text{pour tout} \quad r \in R\}.$$

Nous allons identifier dans $Mod_{(R\#U(g))}$ les modules injectifs de la forme $\mathcal{L}_S(R, I)$, où I est un injectif dans Mod_S.

Théorème 2.3.4 ([20], Théorème 2.8) Soit g semi-simple.

(1) Si E est un injectif dans $Mod_{(R\#U(g))}$ avec $^*E = 0$, alors E^g est S-injectif et E est $R\#U(g)$-isomorphe à $\mathcal{L}_S(R, E^g)$.

(2) Si $M \in Mod_{(R\#U(g))}$ avec $^*M = 0$, alors $E_{R\#U(g)}(M)$ est $R\#U(g)$-isomorphe à $\mathcal{L}_S(R, E_S(M^g))$.

Nous dirons que la condition (α) est satisfaite dans $Mod_{(R\#U(g))}$ si $Mod_{(R\#U(g))}$ admet un cogénérateur injectif C tel que $^*C = 0$.

Dans la proposition suivante, Nous montrons que sous certaines conditions, le foncteur $(-)^g$ transforme les résolutions injectives minimales de $Mod_{(R\#U(g))}$ en résolutions injectives minimales de Mod_S.

Proposition 2.3.6 ([20, Proposition 2.13]) Soit g semi-simple. Supposons que la condition (α) est satisfaite dans $Mod_{(R\#U(g))}$. Soient R et S noethériennes, $M \in Mod_{(R\#U(g))}$, $\{E^i_{R\#U(g)}(M)\}$ la résolution injective minimale de M dans $Mod_{(R\#U(g))}$ et $\{E^i_S(M^g)\}$ la résolution injective minimale de M^g dans Mod_S. Alors $(E^i_{R\#U(g)}(M))^g = E^i_S(M^g)$, pour tout i.

Théorème 2.3.7 ([20, Théorème 2.14]) Soit g semi-simple. Supposons que la condition (α) est satisfaite dans $Mod_{(R\#U(g))}$. Soient R et S noethériennes avec S commutative. Soit $M \in Mod_{(R\#U(g))}$ et pour tout $P \in spec(S)$, soit $\mu_i(P, M^g)$ le nombre de fois que $E_S(S/P)$ apparaît dans $E^i_S(M^g)$. Alors $E^i_{R\#U(g)}(M)$ est la somme directe, pour $P \in spec(S)$ de $\mu_i(P, M^g)$ copies de $E_{R\#U(g)}(R/PR)$.

La condition (α) sur $Mod_{(R\#U(g))}$ est trop forte. Elle montre d'après [20, 2.10(2)] que si N est un injectif dans $Mod_{(R\#U(g))}$, alors N^g est S-injectif. Sous une condition de finitude de R sur S, nous allons montrer que R est S-plat.

Théorème 2.3.8 ([20, Théorème 2.17]) Soient g semi-simple et R commutative. Supposons que le foncteur $(-)^g$ transforme les injectifs de $Mod_{(R\#U(g))}$ en injectifs de Mod_S. Soit V un g-module simple de dimension finie. Si R_V (composante g-isotypique) est de type fini comme S-module, alors R_V is S-flat. Si R_W est de type fini comme S-module pour tout g-module simple de dimesion finie W, alors R est S-plat.

La réciproque de (2.3.8) est aussi vraie.

Théorème 2.3.9 ([20, Proposition 2.18]]) Soit g semi-simple. Supposons que R est plat comme S-module à droite. Alors le foncteur $(-)^g$ transforme les injectifs de $Mod_{(R\#H)}$ en injectifs de Mod_S.

2.4 Le foncteur $R \otimes_S (-)$ et le groupe de Picard de S

Pour les résultats de cette sous-section, on pourra consulter [20]. On supose que R est commutative. Nous voulons étudier le groupe de Picard de l'anneau

$R^g = S$. Si P est dans $Mod_{R\#U(g)}$, alors P^g est dans Mod_S. Si P est un S-module, $R \otimes_S P$ est un objet de $Mod_{R\#U(g)}$. Donc nous obtenons deux foncteurs: $R \otimes_S (-)$ de Mod_S dans $Mod_{R\#U(g)}$ et $(-)^g$ de $Mod_{R\#U(g)}$ dans Mod_S. Si R est g-localement finie, alors $R \otimes_S M$ est un objet de $Mod_{(R\#U(g))}$.

Pour chaque $M \in Mod_{R\#U(g)}$, soit c_M: $R \otimes_S M^g \longrightarrow M$ l'application définie par $c_M(r \otimes m) = rm$ pour tout $m \in M, r \in R$. Alors c_M est $R\#U(g)$-linéaire.

Si M est un R-module, nous posons $Hom_R(M, R) = M^*$.

Un objet M de $Mod_{R\#U(g)}$ est de type invariant si $M = RM^g$.

Soient $M \in Mod_S$ et $M_R = R \otimes_S M$. Alors M_R est de type invariant. En particulier, R est de type invariant. Nous avons montré le résultat suivant:

Proposition 2.4.1 ([20, Théorème 3.9]) Soient g semi-simple, R g-localement finie et P un projectif, de type fini et de type invariant dans $Mod_{(R\#U(g))}$. Alors

(1) P^g est un projectif de type fini dans Mod_S.

(2) P^* est de type invariant.

(3) l'application c_P est un $R\#U(g)$-isomorphisme.

La première assertion de (2.4.1) montre que le foncteur $(-)^g$ transforme certains projectifs de $Mod_{(R\#U(g))}$ en projectifs de Mod_S. La troisième assertion de (2.4.1) montre que le rang de P comme R-module est égal au rang de P^g comme S-module. Donc, si P est inversible comme R-module, alors P^g est inversible comme S-module.

Notons $Z(g, R)$ l'ensemble de toutes les applications additives de g vers R qui vérifient la condition de cocycle [37]; i.e.

$$\phi([X, Y]) = X(\phi(Y)) - Y(\phi(X))$$

Un $R\#U(g)$-module M est dit inversible s'il est inversible comme R-module.

Posons $R_\phi = \{a \in R; X.a = \phi(X)a \text{ pour tout } X \in g \text{ où } \phi \in Z(g, R)\}$.

Posons $Z^u(g, R) = \{\phi \in Z(g, R); R_\phi \text{ contient un élément inversible de } R\}$ et $Z^s(g, R) = \{\phi \in Z(g, R); RR_\phi = R \text{ et } RR_{-\phi} = R\}$.

$Z^u(g, R)$ et $Z^s(g, R)$ sont des sous-groupes de $Z(g, R)$ et $Z^u(g, R) \subseteq Z^s(g, R)$.

Les classes d'isomorphismes des $R\#U(g)$-modules inversibles forment un groupe commutatif sous les opérations induites par le produit tensoriel pris sur R. Nous allons noter $Pic(R, g)$ ce groupe. Si M est un $R\#U(g)$-module inversible, on désignera par $\{M\}$ sa classe dans $Pic(R, g)$. Nous noterons les classes d'isomorphismes dans le groupe de Picard ordinaire $Pic(.)$ par [ ]. Nous avons un homomorphisme de groupes $Pic(R, g) \rightarrow Pic(R)$ défini par $\{M\} \rightarrow [M]$.

Soit $\phi \in Z(g, R)$. D'après [37], il existe un $R\#U(g)$-module inversible M et un élément $m \in M$ tel que $M = Rm$ et $Xm = \phi(X)m$ pour tout $X \in g$. Un tel M sera noté $R[\phi]$. Nous définissons un morphisme de groupes $p : Z(g, R) \rightarrow Pic(R, g)$ en posant $p(\phi) = \{R[\phi]\}$.

Théorème 2.4.3 ([20, Théorème 3.13]) Sous les hypothèses et avec les notations ci-dessus, nous avons une suite exacte de groupes

$$0 \rightarrow Z^u(g, R) \rightarrow Z(g, R) \rightarrow Pic(R, g) \rightarrow Pic(R).$$

A partir de maintenant, nous supposons que l'action de g sur R est localement finie. Posons $Z_R(g, R)=\{\phi \in Z(g, R) : Im(\phi)$ est contenue dans un sous g-module de dimension finie de R $\}$: c'est un sous-groupe de $Z(g, R)$.

Posons $Pic_R(R, g) = \{\{M\} \in Pic(R, g) :$ M est g-localement fini$\}$.

Nous avons un homomorphisme de groupes $Pic(S) \rightarrow Pic_R(R, g)$ défini par $[M] \rightarrow \{M_R\}$.

Proposition 2.4.4 ([20, Proposition 3.14]) L'application $Pic(S) \rightarrow Pic_R(R, g)$ est une injection. Si g est semi-simple, l'image est $\{\{M\} \in Pic_R(R, g)$ telle que M est de type invariant$\}$.

Posons $Z_R^u(g, R) = Z_R(g, R) \cap Z^u(g, R)$ and $Z_R^s(g, R) = Z_R(g, R) \cap Z^s(g, R)$

Ce sont des sous-groupes de $Z_R(g, R)$ et nous avons $Z_R^u(g, R) \subseteq Z_R^s(g, R)$.

Théorème 2.4.5 ([20, Théorème 3.16]) Il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow Z_R^u(g, R) \rightarrow Z_R(g, R) \rightarrow Pic_R(R, g) \rightarrow Pic(R).$$

Théorème 2.4.6 ([20, Théorème 3.19]) Soit g semi-simple. Alors il existe une suite exacte

$$0 \to Z^u_R(g,R) \to Z^s_R(g,R) \to Pic(S) \to Pic(R).$$

Nous dirons que la condition ($\star$) est satisfaite dans R si l'image de tout élément de $Z_R(g,R)$ est contenue dans une sous-algèbre de dimension finie g-stable de R.

La condition ($\star$) est satisfaite dans R dans les cas suivants:

Premier cas. Si tout sous g-module de dimension finie de R est contenu dans une sous-algèbre de dimension finie g-stable de R. C'est le cas si R est algébrique sur k.

Deuxième cas. Si tout élément de $Z_R(g,R)$ est un caractère de g.

Nous supposons à partir de maintenant que la condition ($\star$) est satisfaite dans R.

Lemme 2.4.7 ([20, Lemme 3.21]) Soit R intègre. Supposons qu'il existe un idéal maximal $\mathcal{M}$ de R tel que $g.\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ et $R/\mathcal{M} \simeq k$. Si $\phi \in Z(g,R)$ est non nul, alors $RR_\phi \neq R$. En particulier, $Z^s_R(g,R) = 0$.

Corollaire 2.4.8 ([20, Corollaire 3.22]) Soit R intègre. S'il existe un idéal maximal $\mathcal{M}$ de R tel que $g.\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ et $R/\mathcal{M} \simeq k$, alors $Pic(S) \to Pic(R)$ est une injection.

2.5 Semi-simplicité de la catégorie $Mod_{(R\#U(g))}$

Pour les résultats de cette sous-section, on pourra consulter [20, section 5]. Nous avons montré:

Théorème ([20, Corollaire 5.3]) Soient g semi-simple et R commutative noethérienne. Si R est semi-simple ou g-simple, alors la catégorie $Mod_{(R\#U(g))}$ est semi-simple.

References

[1] H. Bass, On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z. 82 (1963), 8-28.

[2] A.D. Bell et G. Sigurdsson, Catenarity and Gelfand-Kirillov dimension in Ore extensions, J. of Algebra 127, (1989), 409-425.

[3] A.D. Bell, Localization and ideal theory in iterated differential operator rings, J. of Algebra 106, (1987), 376-402.

[4] K.A. Brown, K.R. Goodearl et T.H. Lenagan, Prime ideals in differential operator rings - Catenarity, Trans. Amer. Math Soc. 317, $n°2$ (1990), 749-772.

[5] K.A. Brown, Ore sets in enveloping algebras, Compositio Mathematica 53, (1984), 347-367.

[6] H. Cartan et S. Eilenberg, "Homological algebra", Princeton University Press, 1956.

[7] W. Chin, Prime ideals in differential operator rings and crossed products of infinite groups, J. of Algebra 106, (1987) 78-104.

[8] F. du Cloux, Représentations de longueur finie des groupes de Lie résolubles, Memoirs of the Amer. Math. Soc. 407, (1989)

[9] I. Doraiswamy, Projectivity of modules over rings with suitable group action, Comm. in Algebra **1982**, *10* (8), 787-795.

[10] G. L. Fel'Dman, Global dimension of rings of differential operators, Trans. Moscow Math. Soc. 41-42, (1981), 123-147.

[11] O. Gabber, Equidimensionalité de la variété caractéristique, "Exposé de O. Gabber" rédigé par Thierry Levasseur, Paris 6 (1985).

[12] K.R. Goodearl et R.B. Warfield, "An introduction to noncommutative noetherian rings", Cambridge university press / Cambridge / New york / Portchester / Melbourne / Sydney, 1989.

[13] K. R. Goodearl, Classical localizability in solvable enveloping algebra and Poincaré - Birkhoff - Witt extensions, J. of Algebra 132, (1990), 243-262.

[14] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math. J. 9, (1957), 119-221.

[15] T. Guédénon, La formule des hauteurs de Tauvel dans les anneaux d'opérateurs différentiels, Comm. in Algebra 21 (6), (1993), 2077-2100.

[16] T. Guédénon, Localisation, caténarité et dimensions dans les anneaux munis d'une action d'algèbre de Lie, J. of Algebra 178, (1995), 21-47.

[17] T. Guédénon, Localisation dans les anneaux munis d'une action d'algèbre de Lie résoluble, J. of Algebra 197, (1997), 372-384.

[18] T. Guédénon, Localisation in rings equipped with a solvable Lie algebra action, Comm. in Algebra 27 (7), (2000), 3523-3533.

[19] T. Guédénon, Sur la cohomologie g-finie, Comm. in Algebra 21 (4), (1993), 1103-1139.

[20] T. Guédénon, Algèbre homologique dans la catégorie $Mod_{(R\#U(g))}$, J. of Algebra 197, (1997), 584-614.

[21] R. Hart, Derivations on commutative rings, J. London Math. Soc. (2) 8, (1974), 171-175.

[22] A.V. Jategaonkar, "Localization in Noetherian rings", London Math. Soc. Lecture Notes Series, Cambridge University Press (1986).

[23] A.V. Jategaonkar, Relative Krull dimension and prime ideals in right noetherian rings, Comm. Algebra 2, (1974), 429-408.

[24] G. Krause et T.H. Lenagan, "Growth of Algebra and Gelfand-Kirillov dimension, Research Notes in Math.", n° 116, Pitman, London, (1985).

[25] T. Levasseur, Sur le spectre premier d'une algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente, C. R. Acad. Sci. Paris série A 289, (1979), 55-58.

[26] M. Lorenz, Chains of prime ideals in enveloping algebras of solvable Lie algebras, J. London Math. Soc. 24, (1981), 205-210.

[27] J.C. McConnell et J. Robson, "Noncommutative Noetherian Rings", Wiley, Chichester New York, (1987).

[28] J.C. McConnell, The intersection theorem for a class of noncommutative rings, Proc. London Math. Soc. 17, (1967), 487-498.

[29] J.C. McConnell, Localisation in enveloping rings, J. London Math. Soc. 43, (1968), 421-428.

[30] A. Magid, Dimensions in rings with solvable algebraic group action, Math. Scand. 47, (1980), 21-28.

[31] A. Magid, Cohomology of rings with algebraic group action, Advances in Math. 59 (1986), 124-151.

[32] A. Magid, Picard groups of rings of invariants, J. Pure Appl. Algebra 17, (1980), 305-311.

[33] M.P. Malliavin, Module sans torsion et modules injectifs sur les algèbres de Lie résolubles, J. of Algebra 83, (1983), 126-157.

[34] S. Montgomery, Cossed products of Hopf algebras and enveloping algebras, "Perspectives in Rings Theory" (F. Van Oystaeyen and L. Le Bruyn, eds.), Kluwer Academic Publishers, (1988), 253-268.

[35] W. Schelter, Non-commutative affine P.I. rings are catenary, J. of Algebra 51, (1978), 12-18.

[36] G. Sigurdsson, Differential operator rings whose prime factors have bounded Goldie dimension, Arch. der Math. 42, (1984), 348-354.

[37] S.M. Skryabin, An algebraic approach to the Lie Algebra of Cartan type, Comm. Algebra 21, (1993), 1229-1336.

[38] P.F. Smith, Localization and the AR property, Proc. London Math. Soc. 22 (3), (1971), 39-68.

[39] P.F. Smith, Noncommutative regular local rings, Glasgow Math. J. 17, (1976), 98-102.

[40] P. Tauvel, Sur les quotients premiers de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble, Bull. Soc. Math. France 106, (1 978), 177-205.

[41] R. Walker, Local rings and normalizing sets of elements, Proc. London Math. 24 (3), (1972), 27-45.

'OMMUNICATIONS IN ALGEBRA, 21(6), 2077-2100 (1993)

LA FORMULE DES HAUTEURS DE TAUVEL DANS LES ANNEAUX D'OPERATEURS DIFFERENTIELS.

Thomas Guédénon
37, rue Pasteur
92800 Puteaux
FRANCE

Abstract

Throughout this paper, k is an algebraically closed field of characteristic zero and R an ıssociative algebra with identity over the field k.

If U is the enveloping algebra of a finite dimensional solvable Lie algebra, then P. Tauvel 9] has shown that for every prime ideal P of U one has

$$d(U) = d(U/P) + htP, \qquad (*)$$

vhere htP denotes the height of the prime ideal P of U and d(U) denote the Gelfand-Kirillov limension of U over k. We call (*) Tauvel's height formula.

Now, we fix an integer n and we form the differential operator rings

$R_n = R[\theta_1, \delta_1] \dots [\theta_n, \delta_n]$ defined as follows :

$R_0 = R$, $R_1 = R[\theta_1, \delta_1]$ is the Ore extension of R by δ_1 and for $2 \le i \le n$ the ring $R_i = R[\theta_1, \delta_1] \dots [\theta_i, \delta_i]$ is the Ore extension of R_{i-1} by δ_i.

All the δ_i are derivations of R and we set $\Delta_{1,n} = \{ \delta_1 , \dots , \delta_n \}$.

We suppose that the two following conditions are always satisfied :

(1) R is stable under the action of each δ_i for (i = 1 , 2 , ... , n).

(2) R_i is stable under the action of each δ_j for $0 \le i \le j \le n$.

If P is a $\Delta_{1,n}$ - invariant prime ideal of R we use $\Delta_{1,n}$ - htP to denote the $\Delta_{1,n}$ - height of ?, that is, the supremum of the lengths of chain of $\Delta_{1,n}$ - invariant prime ideals of R with P at :he top.

In this paper, we will show three results :

Proposition 3.2

Let R be an affine, left and right Noetherian algebra over k and $A = R[\theta_1, \delta_1] \dots [\theta_n, \delta_n]$ with the conditions (1) and (2).

We suppose that on the $\Delta_{1,n}$ - invariant prime ideals of R :

(C_1) Tauvel's height formula is valid,

(C_2)The $\Delta_{1,n}$ - height and the height are the same.

Then, if, for $0 \leq m \leq n$ P is a $\Delta_{m+1,n}$ - invariant prime ideals of R_m , one has

$$d(R_m) = d(R_m/P) + htP.$$

In particular, under these hypotheses, Tauvel's height formula is valid in

$$A = R[\theta_1, \delta_1] \dots [\theta_n, \delta_n] .$$

Proposition 4.13

Let R be an affine, left and right Noetherian algebra over k, g a finite dimensional solvable Lie algebra, h an ideal of g, A = R*g the crossed product of R by g and B = R*h . We suppose that on the g - invariant prime ideals of R :

(C'_1) Tauvel's height formula is valid,

(C'_2) The g- height and the height are the same.

If P is a g-invariant prime ideal of B, then

$$d(B) = d(B/P) + htP.$$

In particular, under these hypotheses, Tauvel's height formula is valid in R*g.

Proposition 4.17

Under the hypotheses and the notations of the second result, if Q is a g-invariant prime ideal of B, then g-ht Q = ht Q. This result has been established by M. Lorenz [6] in the particular case of an enveloping algebra of a finite dimensional solvable Lie algebra.

0 - INTRODUCTION

Dans cet exposé, k est un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique 0. Soit A une k-algèbre. La dimension de Gelfand-Kirillov de A, notée d(A), est définie par

$$d(A) = \operatorname*{Sup}_{V} \ \overline{\operatorname*{Lim}_{n\to+\infty}} \ \log_n \left(\dim_k \left(\sum_{i=0}^{n} V^i \right) \right) \quad ,$$

où V est un sous-espace vectoriel de dimension finie de A, $V^\circ = k$, $V^1 = V$ et pour $i \geq 1$, $V^i = \{v_1 v_2 \dots v_i$ où les $v_i \in V\}$. Pour les propriétés de la dimension de Gelfand-Kirillov, on pourra consulter [5]. Si A est une k-algèbre commutative intègre de type fini, alors il est bien connu qu'on a, pour tout idéal premier P de A la formule

$$d(A)= d(A/P) + htP, \qquad (*)$$

où htP désigne la hauteur de P (cf [8] et [6]). La formule

$$d(A)= d(A/P) + htP$$

n'est pas toujours vraie dans une k-algèbre quelconque A. Toutefois, si A est l'algèbre enveloppante d'une k-algèbre de Lie résoluble de dimension finie, alors Patrice Tauvel [9] a montré que la formule

$$d(A)= d(A/P) + htP$$

est vraie dans A. Pour cette raison, on appellera (*) la formule des hauteurs de Tauvel.

Soit R une k-algèbre commutative de type fini, δ une k-dérivation de R. Si δ est localement finie, i.e si chaque sous-espace vectoriel de dimension finie de R est contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension finie δ -invariant de R, alors A.D. Bell et G. Sigurdsson [1] ont montré que la formule des hauteurs de Tauvel est vraie sur tout facteur premier de l'anneau $A = R\,[\theta\,,\,\delta\,]$: l'extension de Ore de R par δ. Ce résultat a été généralisé par K.A. Brown, K.R. Goodearl et T.H. Lenagan à l'anneau $A = R\,[\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n\,;\,\delta_1, \delta_2, ...\delta_n]$ (cf [2]).

Nous allons montrer dans cet exposé que la formule des hauteurs de Tauvel est vraie dans l'anneau $A = R*g$, où R est une k-algèbre nœthérienne à droite et à gauche de type fini, g une k-algèbre de Lie résoluble de dimension finie n qui opère par dérivation sur R si on suppose que sur les idéaux premiers g-invariants de R :

(C'_1) la formule des hauteurs de Tauvel est vraie,

(C'_2) la g-hauteur et la hauteur coïncident.

Sous nos hypothèses, g est complètement résoluble ; donc R*g est isomorphe à un anneau de la forme $R\,[\theta_1, \delta_1]...[\theta_n, \delta_n]$, où

(1) R est stable sous l'action de chaque δ_i ($i = 1, 2 ..., n$),

(2) $R[\theta_1, \delta_1]\,...[\theta_i, \delta_i]$ est stable sous l'action des dérivations δ_j , $1 \leq i < j \leq n$.

Posons $\Delta_{1,n} = \{\delta_1, \delta_2, ...\delta_n\}$. Alors la g-hauteur et la hauteur coïncident sur les idéaux premiers g-invariants de R si et seulement si la $\Delta_{1,n}$-hauteur et la hauteur coïncident sur les idéaux premiers $\Delta_{1,n}$- invariants de R.

Plus généralement, nous allons montrer que la formule des hauteurs de Tauvel est vraie dans l'anneau $R\,[\theta_1, \delta_1]...[\theta_n, \delta_n]$ avec les conditions (1) et (2), où R est une k-algèbre nœthérienne à droite et à gauche de type fini si on suppose que sur les idéaux premiers $\Delta_{1,n}$-invariants de R :

(C_1) la formule des hauteurs de Tauvel est vraie,

(C_2) la $\Delta_{1,n}$-hauteur et la hauteur coïncident.

Notre résultat généralise celui de Tauvel. Dans le paragraphe 1, nous définissons l'anneau $R\,[\theta_1, \delta_1]...[\theta_n, \delta_n]$. Dans le paragraphe 2, nous avons réuni quelques résultats sur les idéaux de $R\,[\theta_1, \delta_1]...[\theta_n, \delta_n]$ dont on se servira aux paragraphes 3 et 4 consacrés aux résultats que nous avons annoncés.

Dans tout l'exposé, on désignera par R une k-algèbre associative unitaire et on dira tout simplement que R est une k-algèbre. De même, on fixe un entier n une fois pour toutes.

1 - CONSTRUCTION DE L'ANNEAU $R[\theta_1, \delta_1]...[\theta_n, \delta_n]$.

Soient k un corps et R une k-algèbre. Si δ_1 est une k-dérivation de R, on peut construire l'extension de Ore de R par δ_1 qu'on note $R[\theta_1, \delta_1]$. C'est une k-algèbre associative et unitaire dans laquelle la multiplication est définie à partir de celle de R et de la relation $\theta_1 r - r\theta_1 = \delta_1(r)$ pour tout $r \in R$. L'algèbre $R[\theta_1, \delta_1]$ est un R-module libre à droite et à gauche dont les éléments sont de la forme $\sum_{i \geq 0} r_i\theta_1^i$, où les r_i sont des éléments de R .L'algèbre $R[\theta_1, \delta_1]$ contient R comme sous-algèbre.

Si δ_2 est une k-dérivation de $R[\theta_1, \delta_1]$, on construit de la même manière, l'extension de Ore de $R[\theta_1, \delta_1]$ par δ_2 que l'on note $R[\theta_1, \delta_1][\theta_2, \delta_2]$.

Ainsi, par ce procédé, on construit pour $n \geq 2$, l'anneau $R[\theta_1, \delta_1]...[\theta_n, \delta_n]$ extension de Ore de $R[\theta_1, \delta_1]...[\theta_{n-1}, \delta_{n-1}]$ par δ_n . Dans tout l'exposé, on supposera que les deux conditions suivantes sont toujours réalisées :

(1) R est stable sous l'action de chaque dérivation δ_i ($i = 1, 2 ..., n$),

(2) $R[\theta_1, \delta_1]...[\theta_i, \delta_i]$ est stable sous l'action de chaque δ_j , $1 \leq i < j \leq n$.

2 - LES IDEAUX PREMIERS DANS $R[\theta_1, \delta_1]...[\theta_n, \delta_n]$.

Soient R une k-algèbre et $\Delta_{1,n} = \{\delta_1, \delta_2, ...\delta_n\}$ un ensemble fini de k-dérivations de R.

<u>Définition 2.1</u>

<u>Un idéal</u> Q <u>de</u> R <u>est dit</u> $\Delta_{1,n}$-invariant <u>si on a</u> $\delta_i(Q) \subseteq Q$ <u>pour</u> $i = 1, 2, ..., n$.

<u>Notation</u>

On notera $R[\theta_1, \delta_1]...[\theta_i, \delta_i] = R_i$ pour $0 \leq i \leq n$, $R_0 = R$ $R_n = A$ et $\Delta_{i,j} = \{\delta_i, \delta_{i+1}..., \delta_j\}$pour $1 \leq i \leq j \leq n$. On a donc $\Delta_{i,i} = \delta_i$ pour $i = 1, 2, ..., n$.

<u>Remarque</u>

On a $\Delta_{n+1,n} = \emptyset$. Pour cela, dans tout l'exposé, un idéal $\Delta_{n+1,n}$ -invariant de $A = R_n$ est tout simplement un idéal de A.

<u>Lemme 2.2</u>

Soient R une k-algèbre et $A = R[\theta_1, \delta_1]...[\theta_n, \delta_n]$.

(i) Si P est un idéal premier $\Delta_{j+1,n}$ -invariant de R_j, alors $P \cap R_i$ est un idéal premier $_{+1,n}$ -invariant de R_i pour $0 \leq i \leq j \leq n$.

(ii) Si Q est un idéal $\Delta_{i+1,n}$ -invariant de R_i, alors $(QR_l)R_m = QR_m$ our $0 \leq i \leq l < m \leq n$.

(iii) Si Q est un idéal $\Delta_{i+1,n}$-invariant de R_i, alors $Q R_j = R_j Q$ pour $0 \leq i < j \leq n$.

Par suite, $Q R_j$ est un idéal bilatère de R_j. De plus, $Q R_j$ est $\Delta_{j+1,n}$ -invariant.

(iv) Si Q est un idéal $\Delta_{i+1,n}$ -invariant de R_i, alors QR_m est un idéal premier $_{n+1,n}$ -invariant de R_m pour $0 \leq i < m \leq n$.

Preuve

(i) On a $R_j = R_{j-1}[\theta_j, \delta_j]$. Donc (cf [7] 14.2.5) $P \cap R_{j-1}$ est un idéal premier δ_j-variant de R_{j-1}. Par suite, $P \cap R_{j-1}$ est $\Delta_{j+1,n}$ -invariant car P est $\Delta_{j+1,n}$ -invariant et $_{-1}$ est stable sous l'action de chaque élément de $\Delta_{j+1,n}$. On en déduit que $P \cap R_{j-1}$ est un éal premier $\Delta_{j,n}$ -invariant de R_{j-1}. Nous avons

$$R_{j-1} = R_{j-2}[\theta_{j-1}, \delta_{j-1}],$$

onc $(P \cap R_{j-1}) \cap R_{j-2}$ est un idéal premier δ_{j-1} -invariant de R_{j-2}.

e plus, $(P \cap R_{j-1}) \cap R_{j-2}$ est $\Delta_{j,n}$ -invariant ; donc $(P \cap R_{j-1}) \cap R_{j-2}$ est un idéal premier $_{j-1,n}$ -invariant de R_{j-2}. Or $(P \cap R_{j-1}) \cap R_{j-2} = P \cap R_{j-2}$, donc $P \cap R_{j-2}$ est un idéal emier $\Delta_{j-1,n}$-invariant de R_{j-2}. En continuant ce processus, on montre de proche en proche ue $P \cap R_i$ est un idéal premier $\Delta_{i+1,n}$-invariant de R_i pour $0 \leq i \leq j \leq n$. Ce qui prouve (i).

(ii) C'est évident.

(iii) Soit Q un idéal $\Delta_{i+1,n}$ -invariant de R_i. Un élément de $Q R_{i+1}$ est une combinaison néaire à coefficients dans Q en les monômes $\theta_{i+1}^{\alpha_{i+1}}$, où $\alpha_{i+1} \in IN$. On montre de proche en oche que, pour tout q appartenant à Q, on a

$$\theta_{i+1}^{\alpha_{i+1}} q = q\, \theta_{i+1}^{\alpha_{i+1}} + \sum_{\beta_{i+1} < \alpha_{i+1}} \binom{\alpha_{i+1}}{\beta_{i+1}} \delta_{i+1}^{\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}}(q)\, \theta_{i+1}^{\beta_{i+1}}$$

car $R_{i+1} = R_i[\theta_{i+1}, \delta_{i+1}]$. On en déduit que

$$\theta_{i+1}^{\alpha_{i+1}} Q \subseteq Q\, \theta_{i+1}^{\alpha_{i+1}} + \sum_{\beta_{i+1} < \alpha_{i+1}} \binom{\alpha_{i+1}}{\beta_{i+1}} \delta_{i+1}^{\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}}(Q)\, \theta_{i+1}^{\beta_{i+1}}$$

onc $R_{i+1} Q \subseteq Q R_{i+1}$ car Q est δ_{i+1} - invariant. On montre de même que $R_{i+1} \subseteq R_{i+1} Q$, donc $Q R_{i+1} = R_{i+1} Q$.

D'après (ii), on a $Q R_{i+2} = (Q R_{i+1}) R_{i+2} = R_{i+2} (R_{i+1} Q) = R_{i+2} Q$. Ainsi, de roche en proche on obtient $Q R_j = R_j Q$ pour $j > i$.

Fixons un indice l avec $j < l \leq n$ et considérons $q\theta_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots \theta_j^{\alpha_j}$ comme élément de R_{l-1}. On a

$$\delta_l\left(q\theta_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots \theta_j^{\alpha_j}\right) = q\delta_l\left(\theta_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots \theta_j^{\alpha_j}\right) + \delta_l(q)\, \theta_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots \theta_j^{\alpha_j} \in Q R_j$$

car δ_l est une dérivation de R_{l-1}, l'idéal Q est δ_l-invariant et R_j est stable sous l'action de δ_l. On en déduit que $\delta_l (Q R_j) \subseteq QR_j$ pour l fixé, $j < l \leq n$. Donc $Q R_j$ est $\Delta_{j+1,n}$ -invariant. Ce qui prouve (iii).

(iv) Soit Q un idéal premier $\Delta_{i+1,n}$ - invariant de R_i ($i = 0, 1, \ldots, n$).

Donc Q est δ_{i+1} -invariant. Or $R_{i+1} = R_i [\theta_{i+1}, \delta_{i+1}]$, donc (cf [8] 14.2.5) $Q R_{i+1}$ est un idéal premier de R_{i+1} et il est $\Delta_{i+2,n}$-invariant.

On montre de même que $(Q R_{i+1}) R_{i+2} = Q R_{i+2}$ est un idéal premier de R_{i+2} et il est $\Delta_{i+3,n}$ -invariant. De proche en proche, on montre par ce procédé que $Q R_m$ est un idéal premier $\Delta_{m+1,n}$ -invariant de R_m, $0 \leq i < m \leq m$.

Lemme 2.3

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche de type fini, $A = R [\theta_1, \delta_1] \ldots [\theta_n, \delta_n]$. On suppose que la formule des hauteurs de Tauvel est vraie sur les idéaux premiers $\Delta_{1,n}$-invariants de R. Soit P un idéal premier de A et $Q = P \cap R$. Alors

$$d(A) - d(A/P) \leq \mathrm{ht}Q + n.$$

Preuve

Comme R est une sous-algèbre de A et $Q = P \cap R$, l'anneau R/Q est une sous-algèbre de A/P. Il en résulte (cf ([5]) que $d(R/Q) \leq d(A/P)$. Or Q est un idéal premier $\Delta_{1,n}$-invariant de R, donc, d'après l'hypothèse, on a $d(R/Q) = d(R) - \mathrm{ht}Q$ et, puisque R est une k-algèbre de type fini, il vient $d(A) = d(R) + n$ (cf [7]) ; d'où le résultat.

Lemme 2.4

Soient R une k-algèbre, $A = R [\theta_1, \delta_1] \ldots [\theta_n, \delta_n]$, Q un idéal premier $\Delta_{1,n}$-invariant de R. Alors A/QA est isomorphe à $R/Q [\theta_1, \bar{\delta}_1] \ldots [\theta_n, \bar{\delta}_n]$, où les $\bar{\delta}_i$ sont induites par les δ_i, R/Q est stable sous l'action de chaque $\bar{\delta}_i$ et $R/Q [\theta_1, \bar{\delta}_1] \ldots [\theta_i, \bar{\delta}_i]$ est stable sous l'action des dérivations $\bar{\delta}_{i+1}, \ldots, \bar{\delta}_n$.

Preuve

D'après les hypothèses, $Q R_i$ est un idéal $\Delta_{i+1,n}$ -invariant de R_i pour $0 \leq i \leq n$. Posons pour $1 \leq j \leq n - i$,

$$\bar{\delta}_{i+j}(R_i + Q R_i) = \delta_{i+j}(R_i) + Q R_i.$$

Les $\bar{\delta}_{i+j}$ sont des dérivations de $R_i/Q R_i$. On peut donc construire de façon naturelle l'extension de Ore $R_i/QR_i [\theta_{i+1}, \bar{\delta}_{i+1}]$ de R_i/QR_i par $\bar{\delta}_{i+1}$. Or $(Q R_i) R_{i+1} = QR_{i+1}$, donc $R_{i+1}/QR_{i+1} \approx R_i/QR_i [\theta_{i+1}, \bar{\delta}_{i+1}]$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} A/QA &\approx R_{n-1}/QR_{n-1} [\theta_n, \bar{\delta}_n] \\ &\approx R_{n-2}/QR_{n-2}[\theta_{n-1}, \bar{\delta}_{n-1}] [\theta_n, \bar{\delta}_n] \\ &\approx \ldots \approx R/Q [\theta_1, \bar{\delta}_1] \ldots [\theta_n, \bar{\delta}_n]. \end{aligned}$$

<u>Définition 2.5</u>

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche, $\Delta_{1,n} = \{\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n\}$ un ensemble fini de k-dérivations de R et Q un idéal premier $\Delta_{1,n}$ - invariant de R. On appelle $\Delta_{1,n}$ - hauteur de Q, et on note $\Delta_{1,n}$ -htQ, la longueur maximale des chaînes d'idéaux premiers $\Delta_{1,n}$ - invariants de R d'extrémité Q.

<u>Remarque</u>

On a $\Delta_{1,n}$ -htQ $\leq$ htQ.

<u>Lemme 2.6</u>

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche, $A = R [\theta_1, \delta_1]\ldots[\theta_n, \delta_n]$. On suppose que $\Delta_{1,n}$ -ht $(P\cap R)$ = ht $(P\cap R)$ pour tout idéal premier P de A. Alors, pour tout idéal premier $\Delta_{i+1,n}$ - invariant Q de R_i, on a

(1) $\Delta_{1,n}$ -ht $(Q\cap R)$ = ht $(Q\cap R)$ pour $0 \leq i \leq n$.

(2) $\Delta_{j,k}$ -ht $(Q\cap R)$ = ht $(Q\cap R)$ pour $1 \leq j < k < n$.

<u>Preuve</u>

(1) D'après 2.2, QA est un idéal premier de A et A est un R_i -module libre à droite et à gauche. On a donc $QA\cap R_i = Q$, d'où

$$QA\cap R = (QA\cap R_i) \cap R = Q\cap R.$$

Par hypothèse, $\Delta_{1,n}$ -ht $(QA\cap R)$ = ht $(QA\cap R)$. On en déduit que

$$\Delta_{1,n}\text{-ht}\,(Q\cap R) = \text{ht}\,(Q\cap R), \text{ d'où (1).}$$

(2) Compte tenu de (1), il vient $\Delta_{1,n}$ -ht $(Q \cap R)$ = ht $(Q \cap R)$; or $\Delta_{1,n}$ -ht $(Q \cap R) \leq \Delta_{j,k}$ -ht $(Q \cap R)$, donc ht $(Q \cap R) \leq \Delta_{j,k}$ -ht $(Q \cap R)$. Puisque

$$\Delta_{j,k} \text{-ht } (Q \cap R) \leq \text{ht } (Q \cap R),$$

on obtient l'égalité.

Corollaire 2.7

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche, $A = R[\theta_1, \delta_1]...[\theta_n, \delta_n]$. On suppose que $\Delta_{1,n}$ -ht $(P \cap R)$ = ht $(P \cap R)$ pour tout idéal premier P de A. Alors, pour tout idéal premier $\Delta_{1,n}$ - invariant Q de R, on a
$\Delta_{1,n}$ -htQ = htQ et réciproquement.

Preuve

On pose i = 0 dans 2.6 (1), d'où la première assertion. Réciproquement, si P est un idéal premier de A, alors $P \cap R$ est un idéal premier $\Delta_{1,n}$ - invariant de R.

Définition 2.8

Soient R une k-algèbre et $\Delta_{1,n} = \{\delta_1,...,\delta_n\}$ un ensemble fini de k-dérivations de R. On dit que R est $\Delta_{1,n}$ simple si les seuls idéaux $\Delta_{1,n}$ - invariants de R sont (0) et R.

Lemme 2.9

Soient R une k-algèbre et $A = R[\theta_1, \delta_1]..[\theta_n, \delta_n]$. L'algèbre R est $\Delta_{1,n}$ simple si et seulement si $P \cap R = (0)$ pour tout idéal bilatère propre P de A.

Preuve

Si P est un idéal propre de A, alors $P \cap R$ est un idéal $\Delta_{1,n}$ - invariant de R et $P \cap R \neq R$. Par suite, si R est $\Delta_{1,n}$ - simple, on obtient $P \cap R = 0$.

Réciproquement, soit $Q \neq R$ un idéal $\Delta_{1,n}$ - invariant de R. Alors QA est un idéal bilatère propre de A, donc $QA \cap R = 0$. Comme $QA \cap R = Q$, il vient $Q = 0$ et R est $\Delta_{1,n}$ - simple.

3 - LA FORMULE DES HAUTEURS DE TAUVEL DANS L'ANNEAU $R[\theta_1, \delta_1]...[\theta_n, \delta_n]$.

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche, $A = R_n = R[\theta_1, \delta_1]...[\theta_n, \delta_n]$. On suppose que la $\Delta_{1,n}$ -hauteur et la hauteur coïncident sur les idéaux premiers $\Delta_{1,n}$ -

ıvariants de R. Soit P un idéal premier $\Delta_{m+1,n}$ -invariant de R_m , $m \leq n$, $Q = P \cap R$ et $htQ = l$. ılors $\Delta_{1,n}$ -htQ = htQ, et il existe donc une chaîne d'idéaux premiers $\Delta_{1,n}$ - invariants de R de ›ngueur l et d'extrémité Q

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_l = Q.$$

Posons $P_i = Q_i R_m$ pour $0 \leq i \leq l$ et $P_{l+i} = (P \cap R_i) R_m$ pour $1 \leq i \leq m$. D'après 2.2, ›us les P_j sont des idéaux premiers $\Delta_{m+1,n}$ invariants de R_m et on a $P_{l+m} = P$. Compte tenu u fait que $R = R_0 \subseteq R_1 \subseteq \ldots \subseteq R_m$, on obtient la chaîne d'idéaux premiers $\Delta_{m+1,n}$- ıvariants de R_m d'extrémité P

$$P_0 \subseteq P_1 \subseteq \ldots \subseteq P_l = QA \subseteq P_{l+1} \subseteq \ldots \subseteq P_{l+m} = P \qquad (*)$$

Sous ces hypothèses et notations, on a

Proposition 3.1

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche de type fini, $\backslash = R[\theta_1, \delta_1]\ldots[\theta_n, \delta_n]$. On suppose que les conditions (C_1) et (C_2) sont satisfaites sur les déaux premiers $\Delta_{1,n}$ - invariants de R.

Alors, si pour $0 \leq m \leq n$, P est un idéal premier $\Delta_{m+1,n}$ invariant de R_m, la chaîne (*) a ›our longueur $d(R_m) - d(R_m/P)$.

Preuve

Pour m = 0, on a $R_m = R$ et P est un idéal premier $\Delta_{1,n}$ - invariant de R. La proposition :st donc vraie d'après les hypothèses.

Supposons m = 1. Alors $R_1 = R[\theta_1, \delta_1]$, P est un idéal premier $\Delta_{2,n}$ - invariant de R_1. .a chaîne (*) se réduit à la chaîne d'idéaux premiers $\Delta_{2,n}$ - invariants de R_1

$$P_0 \subseteq P_1 \subseteq \ldots \subseteq P_l = Q_l R_1 = QR_1 \subseteq P_{l+1} = P \quad , (\alpha)$$

›ù $P_i = Q_i R_1$ pour $0 \leq i \leq l$, l = htQ, $Q = P \cap R$ et chaque Q_i est un idéal premier $\backslash_{1,n}$ -invariant de R avec $Q_l = Q$ et

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_l = Q. \qquad (\beta)$$

D'après nos hypothèses, la chaîne (β) a pour longueur l = htQ = d (R) - d (R/Q). Or ˀ$_1$ /Q R_1 ≈ $R/Q[\theta_1, \delta_1]$ et R est de type fini, donc (cf [8] 8.2.10) on a ı $(R_1/QR_1) = d(R/Q) + 1$ et $d(R_1) = d(R) + 1$. Il en résulte que la chaîne (β) a pour ongueur $d(R_1) - d(R_1/QR_1)$.

Si $P_i = P_{i+1}$ pour un indice i, $0 \leq i \leq l - 1$, alors $Q_i R_1 \cap R = Q_{i+1} R_1 \cap R$. Or R_1 est un R-module libre à droite et à gauche, donc

$$Q_i R_1 \cap R = Q_i \text{ et } Q_{i+1} R_1 \cap R = Q_{i+1}.$$

On aurait donc $Q_i = Q_{i+1}$. Ce qui est une contradiction. On a donc $P_i \subset P_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq l - 1$. La chaîne $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_l$ a donc même longueur que la chaîne (β). Sa longueur est donc $d(R_1) - d(R_1/QR_1)$. Si $P = P_l = QR_1$, alors la démonstration est terminée. Si $P \supset P_l = QR_1$, alors la chaîne (α) a pour longueur

$$d(R_1) - d(R_1/QR_1) + 1 = d(R_1) - (d(R_1/QR_1) - 1).$$

Nous allons montrer que $d(R_1/P) = d(R_1/QR_1) - 1$. Comme R/Q est une sous-algèbre de R_1/P, on a $d(R/Q) \leq d(R_1/P)$, c'est-à-dire que $d(R_1/QR_1) - 1 \leq d(R_1/P)$. Or P et QR_1 sont des idéaux premiers de R_1 et $P \supset QR_1$; donc $P/QR1$ est un idéal premier non réduit à (0) de l'anneau R_1/QR_1 qui est un anneau premier de Goldie. L'idéal P/QR_1 contient donc des éléments réguliers (cf [7] 2; 2.1, 3.4 et 3.5). Il en résulte que $d(R_1/P) \leq d(R_1/QR_1) - 1$ (cf [5] 3.15). Ce qui achève la démonstration lorsque m = 1.

Supposons donc la proposition vraie dans l'anneau R_i, $0 \leq i < m$.

On a $R_m = R_{m-1}[\theta_m, \delta_m]$. Posons $P' = P \cap R_{m-1}$; donc P' est un idéal premier $\Delta_{m,n}$- invariant de R_{m-1} et on a

$$P' \cap R = (P \cap R_{m-1}) \cap R = P \cap R = Q.$$

Posons $P'_i = Q_i R_{m-1}$ pour $0 \leq i \leq l$ et $P'_{l+i} = (P' \cap R_i) R_{m-1}$ pour $1 \leq i \leq m - 1$. On a donc $P' = P'_{l+m-1}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, la chaîne d'idéaux premiers $\Delta_{m,n}$ - invariants de R_{m-1}

$$P'_0 \subseteq P'_1 \subseteq \ldots \subseteq P'_l \subseteq \ldots P'_{l+m-1} = P' \qquad (\alpha')$$

a pour longueur $d(R_{m-1}) - d(R_{m-1}/P')$. Comme R_{m-1} est une k-algèbre de type fini, on a

$$d(R_m) = d(R_{m-1}) + 1 \text{ et } d(R_m/P'R_m) = d(R_{m-1}/P') + 1$$

car $R_m/P'R_m \approx R_{m-1}/P'[\theta_m, \delta_m]$. On en déduit que la chaîne (α') a pour longueur $d(R_m) - d(R_m/P'R_m)$. Chaque Q_i est $\Delta_{1,n}$ - invariant, donc (cf lemme 2.2) chaque $P'_i R_m$ est un idéal premier $\Delta_{m+1,n}$ - invariant de R_m et

$$P'_i R_m = (Q_i R_{m-1}) R_m = Q_i R_m = P_i,\ 0 \leq i \leq l.$$

Pour $1 \leq i \leq m-1$, on a $P' \cap R_i = P \cap R_i$, donc (cf lemme 2.2) chaque $P'_{l+i} R_m$ est un idéal premier $\Delta_{m+1,n}$ - invariant de R_m et

$$P'_{l+i} R_m = ((P' \cap R_i) R_{m-1}) R_m = ((P \cap R_i) R_{m-1}) R_m = (P \cap R_i) R_m = P_{l+i}.$$

Ainsi, pour tout i, $0 \le i \le l + m - 1$, chaque $P'_i R_m$ est un idéal premier $\Delta_{m+1,n}$ - invariant de R_m et on a $P'_i R_m = P_i$. L'anneau R_m est un R_{m-1}-module libre à droite et à gauche, donc pour chaque i, on a $P'_i = (P'_i R_m) \cap R_{m-1} = P_i \cap R_{m-1}$. Ainsi, pour $0 \le i \le l + m - 2$, on a $P_i = P_{i+1}$ si et seulement si $P'_i = P'_{i+1}$. Il en résulte que la chaîne $P_0 \subseteq P_1 \subseteq \dots \subseteq P_{l+m-1}$ a même longueur que la chaîne (α'). Sa longueur est donc

$d(R_m) - d(R_m/P' R_m)$. On a $P_{l+m-1} = P'_{l+m-1} R_m = P' R_m$.

Si $P = P'R_m$, alors la démonstration est terminée.

Si $P \supset P' R_m$, alors la chaîne (*) a pour longueur

$$d(R_m) - d(R_m/P' R_m) + 1 = d(R_m) - (d(R_m/P'R_m) - 1).$$

Montrons que $d(R_m/P) = d(R_m/P'R_m) - 1$. Comme R_{m-1}/P' est une sous algèbre de R_m/P, on a $d(R_{m-1}/P') \le d(R_m/P)$, c'est à dire que $d(R_m/P'R_m) - 1 \le d(R_m/P)$; or $R_m/P'R_m$ est un anneau premier de Goldie et $P/P'R_m$ est un idéal premier non réduit à (0) de $R_m/P'R_m$, donc (cf [5] 3.15) on a $d(R_m/P) \le d(R_m/P'R_m) - 1$. Ce qui achève la démonstration.

Proposition 3.2

Soient R une k-algèbre nœthérienne à droite et à gauche de type fini, $A = R[\theta_1, \delta_1]\dots[\theta_n, \delta_n]$. On suppose que les conditions (C_1) et (C_2) sont satisfaites sur les idéaux premiers $\Delta_{1,n}$ - invariants de R.

Alors, si, pour $o \le m \le n$, P est un idéal premier $\Delta_{m+1,n}$ - invariant de R_m, on a

$$d(R_m) = d(R_m/P) + \mathrm{ht}\ P.$$

Preuve

D'après la proposition précédente, on a $d(R_m) - d(R_m/P) \le \mathrm{ht}P$. Or (cf [5] 3.16) on a $d(R_m) - d(R_m/P) \ge \mathrm{ht}P$.

Corollaire 3.3

Soient R une k-algèbre nœthérienne à droite et à gauche de type fini, $\Delta_{1,n}$ - simple, $A = R[\theta_1, \delta_1]\dots[\theta_n, \delta_n]$. Si P est un idéal premier $\Delta_{m+1,n}$ - invariant de R_m, $0 \le m \le n$, alors

$$d(R_m) = d(R_m/P) + \mathrm{ht}P.$$

Preuve

Sous nos hypothèses, le seul idéal premier $\Delta_{1,n}$-invariant de R est (0) et les hypothèses de la proposition 3.2 sont satisfaites.

Corollaire 3.4

La formule des hauteurs de Tauvel est vraie dans l'anneau $A = k[x_1,\dots, x_n][y, \delta_i]$, où δ_i est la dérivation par rapport à l'une des variables x_i.

Preuve

Supposons $i = n$. L'anneau A est donc isomorphe à un anneau de la forme

$R[x_n]\left[y, \frac{\partial}{\partial x_n}\right] = R\left[x_n, \dot{\delta_1}\right]\left[y, \dot{\delta_2}\right]$, où

$$R = k[x_1, \dots, x_{n-1}], \dot{\delta_1} = 0 \text{ et } \dot{\delta_2} = \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Posons $\Delta_{1,2} = \{\delta_1', \delta_2'\}$. Tous les idéaux premiers de R sont $\Delta_{1,2}$ - invariants et la formule des hauteurs de Tauvel est vraie dans R. La proposition 3.2 donne le résultat.

Corollaire 3.5

Soient R une k-algèbre nœthérienne à droite et à gauche de type fini dans laquelle la formule des hauteurs de Tauvel est vraie, A_n (k) la nème algèbre de Weyl sur k, $A = A_n(R) = R \otimes A_n(k)$ et P un idéal premier de A. Alors $d(A)= d(A/P) + \text{ht}P$.

Preuve

L'algèbre $A_n(k)$ est isomorphe à un anneau de la forme

$$k[x_1, x_2, \dots, x_n]\left[y_1, \frac{\partial}{\partial x_1}\right]\dots\left[y_n, \frac{\partial}{\partial x_n}\right].$$

Il en résulte que $A = A_n(R) = R \otimes A_n(k)$ est isomorphe à un anneau de la forme

$$R[x_1, \dots, x_n]\left[y_1, \frac{\partial}{\partial x_1}\right]\dots\left[y_n, \frac{\partial}{\partial x_n}\right],$$

où $rx_i - x_i r = 0 = ry_i - y_i r$, $1 \le i \le n$. L'anneau A est donc isomorphe à un anneau de la forme

$$R[x_1, \delta_1][x_2, \delta_2]\dots[x_n, \delta_n][y_1, \delta_{n+1}]\dots[y_n, \delta_{2n}],$$

où $\delta_i = 0$ pour $1 \le i \le n$ et $\delta_{n+j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$ pour $1 \le j \le n$. Posons $\Delta_{1,2n} = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2n}\}$. Par hypothèse, la formule des hauteurs de Tauvel est vraie dans R. Comme tous les idéaux de R sont $\Delta_{1,2n}$ - invariants, la proposition (3.2) donne le résultat.

Corollaire 3.6

Soient R une k-algèbre nœthérienne à droite et à gauche de type fini, $A = R[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]$, l'anneau des polynômes à n variables. On suppose que la formule es hauteurs de Tauvel est vraie dans R. Soit P un idéal premier de A. Alors

$$d\ (A) = d\ (A/P) + htP.$$

Preuve

Dans la proposition 3.2 on pose tous les $\delta_i = 0$ et $m = n$.

Remarque

On a toujours $d\ (R[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]) = d\ (R) + n$. Donc, dans le corollaire 3.6, on peut emplacer R de type fini par $d\ (R) < +\infty$.

Le corollaire suivant est un cas particulier de la proposition 3.2.

Corollaire 3.7

Soient R une k-algèbre nœthérienne à droite et à gauche de type fini, $A = R\ [\theta, \delta]$. On suppose que les conditions (C_1) et (C_2) sont satisfaites sur les idéaux premiers δ-invariants de R.Si P est un idéal premier de A, alors

$$d\ (A) = d\ (A/P) + htP.$$

Le résultat suivant généralise le corollaire (3.7).

Proposition 3.8

Soients R une k-algèbre nœthérienne à droite et à gauche de type fini, $A = R\ [\theta, \delta]$. On suppose que la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour les idéaux premiers δ-invariants de R. Si P est un idéal premier de A tel que $\delta\text{-ht}\ (P \cap R) = ht\ (P \cap R)$, alors

$$d\ (A) = d\ (A/P) + htP.$$

Preuve

Posons $P \cap R = Q$. On a $\delta\text{-}htQ = htQ$. Il existe donc une chaîne d'idéaux premiers δ-invariants de R de longueur $l = htQ$ et d'extrémité Q

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_l = Q.$$

Posons $P_i = Q_iA$, $0 \le i \le l$ et $P_{l+1} = P$. On a $Q_lA = QA \subseteq P$ et tous les Q_iA sont des idéaux premiers de A. On obtient donc la chaîne d'idéaux premiers de A d'extrémité P

$$P_0 \subseteq P_1 \subseteq \dots \subseteq P_l = Q_lA = QA \subseteq P_{l+1} = P \qquad (*)$$

Par une démonstration similaire à celle qui a été faite en 3.1 lorsque $m = 1$, on montre que cette chaîne (*) a pour longueur $d\ (A) - d\ (A/P)$.

Donc on a d (A) - d (A/P) $\leq$ htP. Or (cf [5] 3.16) d (A) - d (A/P) $\geq$ htP. Ce qui achève la démonstration.

Illustrons la proposition 3.8 par un exemple provenant de [1] 2.9.

Exemple 3.9

Soit R = k [x y] l'anneau des polynômes à deux variables, A = R[θ , δ], où $\delta = (2y)\frac{\partial}{\partial x} + (x + y^2)\frac{\partial}{\partial y}$.

La k-algèbre R est commutative, intègre et de type fini. La formule des hauteurs de Tauvel est donc vraie dans R. Nous avons d (R) = 2 et d (A) = 3.

Les seuls idéaux premiers δ- invariants de R sont (cf [4] 2.15) $Q_1 = xR + yR$ et $Q_2 = (x + y^2 + 1)R$. Nous avons htQ_1 = 2, htQ_2 = 1, δ-htQ_1 = 1 et δ-htQ_2 = 1. Soit P un idéal premier de A. Nous allons distinguer deux cas, suivant que $P \cap R = Q_1$ ou $P \cap R = Q_2$.

1er cas $P \cap R = Q_1$. Donc on a δ-ht($P \cap R$) $\neq$ ht ($P \cap R$).

a) Si $P = Q_1 A$, alors (cf [1] 2.2) htP = δ-ht($P \cap R$) = 1 et (cf [1] 2.4)

$$d\,(A/P) = d\,(R/P \cap R) + 1,$$

donc d (A/P) = d (R) - htQ_1 + 1 = 2 - 2 + 1 = 1 et d (A) $\neq$ d (A/P) + htP.

b) Si $Q_1 A \subset P$, alors (cf [1] 2.2) htP = δ-htQ_1 + 1 = 2 et (cf [1] 2.4)

$$d\,(A/P) = d\,(R/Q_1) = d\,(R) - htQ_1 = 2\text{-}2 = 0.$$

Donc d (A) $\neq$ d (A/P) + htP. Il en résulte que la formule des hauteurs de Tauvel n'est pas vraie pour P dans les 2 cas étudiés.

2ème cas $P \cap R = Q_2$. Donc on a ht ($P \cap R$) = δ-ht ($P \cap R$).

a) Si $Q_2 A = P$, alors (cf [1] 2.2 et 2.4) htP = δ-htQ_2 = 1 et

$$d\,(A/P) = d\,(R/Q_2) + 1 = d\,(R) - htQ_2 + 1 = 2 - 1 + 1 = 2.$$

On a donc d (A) = d (A/P) + htP.

b) Si $Q_2 A \subset P$, alors (cf [1] 2.2 et 2.4) htP = δ-htQ_2 + 1 = 2 et

$$d\,(A/P) = d\,(R/Q_2) = d\,(R) - htQ_2 = 2 - 1 = 1.$$

On a donc d (A) = d (A/P) + htP. A nouveau dans les deux cas étudiés, la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour P.

Corollaire 3.10

Soient R une k-algèbre nœthérienne à droite et à gauche de type fini, $A = R\,[\theta_1, \delta_1]...[\theta_n, \delta_n]$, $R_i = R[\theta_1, \delta_1]...[\theta_i, \delta_i]$, $0 \leq i \leq n$.

ʼn suppose que les conditions (C_1) et (C_2) sont satisfaites sur les idéaux premiers $_{1,n}$-invariants de R.

(1) Si Q est un idéal premier $\Delta_{1,n}$ - invariant de R, alors on a $htQR_i = htQ$.

(2) Si P est un idéal premier $\Delta_{i+1,n}$ - invariant de R_i et si $P \supset (P\cap R)R_i$, alors on a

$$ht(P\cap R) + 1 \leq htP \leq ht\,(P\cap R) + i,\ i \geq 1.$$

Preuve

(1) On a (cf 3.2) $d\,(R_i) = d\,(R_i/QR_i) + htQR_i$; la k-algèbre R est de type fini et $_i/QR_i \approx R/Q\,[\theta_1, \delta_1]...[\theta_i, \delta_i]$; donc $d\,(R_i) = d\,(R) + i$ et $d\,(R_i/Q\,R_i) = d\,(R/Q) + i$. On en éduit que $htQ\,R_i = d\,(R) - d\,(R/Q) = htQ$.

(2) Posons $P\cap R = Q$. Puisque $P \supset QR_i$, on a (cf [6] 3.15) $d\,(R_i/P) \leq d\,(R_i/Q\,R_i) - 1$ et :f 3.2) $d\,(R_i) - htP \leq d\,(R_i) - ht\,QR_i - 1$, c'est-à-dire que $htP \geq ht\,(QR_i) + 1, = htQ + 1$ d'après ι première partie. On a aussi (cf 3.2 et 2.3) $htP = d\,(R_i) - d\,(R_i/P) \leq htQ + i$.

Corollaire 3.11

Soient R une k-algèbre nœthérienne à droite et à gauche de type fini, $A = R\,[\theta, \delta]$. On uppose que les conditions (C_1) et (C_2) sont satisfaites sur les idéaux premiers δ-invariants de ⁚. Si P est un idéal premier de A contenant strictement $(P\cap R)A$, alors

$$htP = ht\,(P\cap R) + 1.$$

Preuve

On pose $i = n = 1$ dans le corollaire 3.10 (2).

Corollaire 3.12

Soient R une k-algèbre nœthérienne à droite et à gauche de type fini, $\Delta_{1,n}$ - simple,

$$A = R\,[\theta_1, \delta_1]...[\theta_n, \delta_n],$$
$$R_i = R[\theta_1, \delta_1]...[\theta_i, \delta_i]\ ,\ 0 \leq i \leq n\ .$$

ⁱi P est un idéal premier non nul $\Delta_{i+1,n}$ - invariant de R_i, alors

$$1 \leq htP \leq i\ ,\ i \geq 1.$$

Preuve

Puisque R est $\Delta_{1,n}$ - simple, on a $P\cap R = (0)$ et le corollaire 3.10 (2) donne le résultat.

4 - LA FORMULE DES HAUTEURS DE TAUVEL DANS L'ANNEAU R*g.

Dans ce paragraphe, g est une k-algèbre de Lie de dimension finie n.

Soient R une k-algèbre, Der_k R l'espace vectoriel des k-dérivations de R, g une k-algèbre de Lie qui opère par dérivations sur R via une application linéaire δ: g -> Der_k R. On peut construire l'anneau d'opérateurs différentiels R*g étudié dans [3] et [7]. Dans [7] cet anneau est noté R*U (g), où U (g) désigne l'algèbre enveloppante de g et il est appelé produit croisé de R par U (g). Si x ∈ g, on notera $\overline{x}$ l'image canonique de x dans R*g et on posera $\delta_x = \delta(x)$. L'espace vectoriel de base de R*g est R ⊗ U(g). Dans l'anneau R*g, nous avons les relations suivantes :

(i) l'application : g —> R*g ; x —> $\overline{x}$ est une injection d'espaces vectoriels,

(ii) $\overline{x}r - r\overline{x} = \delta_x(r) \in R$; x ∈ g, r ∈ R,

(iii) $[\overline{x}, \overline{y}] - \overline{[x, y]} \in R$; x, y ∈ g,

(iv) Si $(x_1, x_2 \dots x_n)$ est une base de g, alors R*g est un R-module libre à droite et à gauche de base les monômes $\overline{x}_1^{\alpha_1}\, \overline{x}_2^{\alpha_2} \dots \overline{x}_n^{\alpha_n}$, où les $\alpha_i \in$ IN.

Lorsque dans (i), l'application g —> R*g ; x —> $\overline{x}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie, l'anneau R*g se note R # U (g).

Lorsque g opère trivialement sur R, l'anneau R # U (g) est isomorphe à R ⊗ U(g) (cf [7]).

Rappelons enfin que, lorsque g est résoluble, R*g est isomorphe à un anneau de la forme R $[\theta_1, \delta_1] \dots [\theta_n, \delta_n]$, où

(1) R est stable sous l'action de chaque dérivation δ_i,(i = 1, ..., n).

(2) $R[\theta_1, \delta_1] \dots [\theta_n, \delta_n]$ est stable sous l'action de chaque δj, $1 \leq i < j \leq n$.

<u>Définition 4.1</u>

Un idéal Q de R est dit g-invariant si $\delta_X(Q) \subseteq Q$ pour tout X∈ g.

<u>Remarque</u>

Soit h un idéal de g. On construit de façon naturelle l'anneau R*h. C'est une sous-algèbre de R*g et g opère par dérivation sur R*h. En particulier, g opère par dérivation sur R*g et tout idéal de R*g est g-invariant.

Lemme 4.2

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche, g une k-algèbre de Lie, h' ⊂ h ux idéaux de g , A = R*g , B = R*h, B' = R*h'.

(1) Si Q est un idéal premier g-invariant de B, alors Q∩B' est un idéal premier g-invariant e B'.

(2) Si Q est un idéal premier g-invariant de B', alors QB est un idéal premier g-invariant e B.

Preuve

(1) On a A = B' ∗g/h' et Q est un idéal premier g-invariant de B', donc (cf [7] 14.2.5) QA st un idéal premier de A. D'autre part, A est un B-module libre à droite et à gauche, donc A∩B = Q. On en déduit que

$$Q\cap B' = (QA\cap B)\cap B' = QA\cap B' ;$$

r QA∩B' est un idéal premier g-invariant de B'. Ce qui prouve (1).

(2) On a B = B'*h/h' et Q est un idéal premier g-invariant (donc h-invariant) de B' ; donc B est un idéal premier de B. Comme δ_X est une dérivation de B, on a

$$\delta_X(qb) = \delta_X(q)b + q\delta_X(b) \text{ pour tous } X \in g, q \in Q \text{ et } b \in B;$$

r Q est g-invariant et g opère par dérivation sur B, donc $\delta_X(b) \in B$. On en déduit que $_X(qb) \in QB$. Donc QB est g-invariant, d'où (2).

Lemme 4.3

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche de type fini, g une k-algèbre de ie, A = R*g. On suppose que la formule des hauteurs de Tauvel est vraie sur les idéaux remiers g-invariants de R. Soit P un idéal premier de A et Q = P ∩ R. Alors on a

$$d(A) - d(A/p) \leq htQ + n.$$

Preuve

La démonstration est similaire à celle du lemme (2.3).

Définition 4.4

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche, g une k-algèbre de Lie qui opère ar dérivations sur R. On dit que R est g-simple si les seuls idéaux g-invariants de R sont (0) t R.

Lemme 4.5

Soient R une k-algèbre, g une k-algèbre de Lie, $A = R*g$. Alors R est g-simple si et seulement si $P \cap R = (0)$ pour tout idéal bilatère propre P de A.

Preuve

La démonstration est similaire à celle du lemme 2.9.

Définition 4.6

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche, g une k-algèbre de Lie qui opère par dérivations sur R et Q un idéal premier g-invariant de R.

On appelle g-hauteur de Q et on note g-htQ la longueur maximale des chaînes d'idéaux premiers g-invariants de R d'extrémité Q.

Remarque

On a g- htQ $\leq$ htQ.

Lemme 4.7

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche, g une k-algèbre de Lie, h et h' deux idéaux de g, $A = R * g$. On suppose que pour tout idéal premier P de A, on a g-ht $(P\cap R)$ = ht $(P\cap R)$. Alors, pour tout idéal premier g-invariant Q de $R*h$, on a

(1) g-ht $(Q\cap R)$ = ht $(Q\cap R)$.

(2) h'-ht $(Q\cap R)$ = ht $(Q\cap R)$. En particulier, h-ht $(Q\cap R)$ = ht $(Q\cap R)$.

Preuve

(1) On a $A = R*g \approx (R*h) * g/h$ et Q est un idéal premier g-invariant de $R*h$, donc QA est un idéal premier de A (cf [7] 14.2.5). En posant $B = R*h$, on a $QA\cap B = Q$ car A est un B-module libre à droite et à gauche, donc

$$Q\cap R = (QA\cap B) \cap R = QA\cap R.$$

Or (cf [7] 14.2.5) $QA\cap R$ est un idéal premier de A; donc d'après l'hypothèse, on a g-ht $(QA\cap R)$ = ht$(QA \cap R)$. On en déduit que g-ht $(Q\cap R)$ = ht $(Q\cap R)$. Ce qui prouve (1).

(2) Par définition, on a g-ht $(Q\cap R) \leq$ h'-ht $(Q\cap R)$; donc d'après (1), on a ht $(Q\cap R) \leq$ h'-ht $(Q\cap R)$. La deuxième inégalité est évidente.

Corollaire 4.8

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche, g une k-algèbre de Lie et . = R*g. Si g-ht (P∩R) = ht (P∩R) pour tout idéal premier P de A, alors ghtQ = htQ pour ›ut idéal premier g-invariant Q de R et réciproquement.

Preuve

On pose h = (0) dans (4.7 (1)), on obtient la première assertion. La réciproque est vidente.

Lemme 4.9

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche, g une k-algèbre de Lie, $h' \subset h$ eux idéaux de g, A = R*g, B = R*h et B' = R*h'.

(1) Si Q' et Q sont deux idéaux premiers g-invariants de B', alors

(a) g-ht Q' ≤ g-htQ, si $Q' \subseteq Q$.

(b) g-ht Q' ≤ g-htQ - 1, si $Q' \subset Q$.

(2) Si Q' est un idéal premier g-invariant de B', alors g-htQ' ≤ g-ht Q'B.

Preuve

(1) C'est évident.

(2) Supposons g-htQ' = l. Il existe donc une chaîne d'idéaux premiers g-invariants de B'

$$Q'_0 \subset Q'_1 \subset \ldots \subset Q'_l = Q.$$

On en déduit la chaîne d'idéaux premiers g-invariants de B

$$Q'_0 B \subseteq Q'_1 B \subseteq \ldots \subseteq Q'_l B = QB.$$

Si $Q'_i B = Q'_{i+1} B$, alors $Q'_i B \cap B' = Q'_{i+1} B \cap B'$; or B = B'*h/h' est un B'-module libre à droite et à gauche, donc

$$Q'_i B \cap B' = Q'_i \text{ et } Q'_{i+1} B \cap B' = Q'_{i+1}.$$

On aurait donc $Q'_i = Q'_{i+1}$. Ce qui est une contradiction. On a donc $Q'_i B \subset Q'_{i+1} B$. Donc on a l ≤ g-htQ'B.

Lemme 4.10

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche de type fini, g une k-algèbre de

Lie, h un idéal de g de dimension i, $A = R*g$, $B = R*h$. On suppose que les conditions (C'_1) et (C'_2) sont satisfaites sur les idéaux premiers g-invariants de R.

(1) Si Q est un idéal premier g-invariant de R, alors $htQB = htQ$.

(2) Si P est un idéal premier g-invariant de B et si $P \supset (P \cap R)B$, alors

$$ht\,(P \cap R) + 1 \leq htP \leq d\,(B) - d\,(B/P) \leq ht\,(P \cap R) + i.$$

Preuve

(1) Posons $g\text{-}htQ = htQ = l$. Il existe donc une chaîne d'idéaux premiers g-invariants de R d'extrémité Q

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_l = Q. \qquad (*)$$

De cette chaîne (*), on déduit la chaîne d'idéaux premiers g-invariants de B d'extrémitè QB

$$Q_0B \subseteq Q_1B \subseteq Q_2B \subseteq \ldots \subseteq Q_lB = QB.$$

Si $Q_iB = Q_{i+1}B$, alors $Q_iB \cap R = Q_{i+1}B \cap R$. Or B est un R-module libre à droite et à gauche, donc $Q_iB \cap R = Q_i$ et $Q_{i+1}B \cap R = Q_{i+1}$. On aurait donc $Q_i = Q_{i+1}$, ce qui est une contradiction, donc $Q_iB \subsetneq Q_{i+1}B$. On a donc $htQ \leq htQB$.

On a $B/QB \approx R/Q*h$ donc

$$d\,(B/QB) = d\,(R/Q) + i = d\,(R) - htQ + i = d\,(B) - htQ.$$

On a donc $d\,(B) - d\,(B/QB) = htQ$. Or B est un anneau noethérien à droite et à gauche, donc B/QB est un anneau premier de Goldie, donc (cf [5]) on a

$$htQB \leq d\,(B) - d\,(B/QB) = htQ, \text{ d'où (1).}$$

(2) Posons $P \cap R = Q$. On a donc $P \supset QB$ et $htQ + 1 \leq htP$ d'après (1). Comme B est un anneau noethérien à droite et à gauche, B/P est un anneau premier de Goldie, donc

$$htP \leq d\,(B) - d\,(B/P).$$

Comme R/Q est une sous-algèbre de B/P, on a $d\,(R/Q) \leq d\,(B/P)$, c'est-à-dire que

$$d\,(R) - htQ \leq d\,(B/P). \text{ Or } d\,(B) = d\,(R) + i;$$

donc $d\,(B) - d\,(B/P) \leq htQ + i$. Ce qui prouve (2).

Corollaire 4.11

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche de type fini, g une k-algèbre de Lie, h un idéal de g de dimension i, $A = R*g$, $B = R*h$. On suppose que R est g-simple.

Si P est un idéal premier non nul g-invariant de B, alors

$$1 \leq htP \leq d\,(B) - d\,(B/P) \leq i.$$

Preuve

Comme R est g-simple, on a $P \cap R = (0)$ et les hypothèses du lemme 4.10 sont satisfaites. n obtient le résultat d'après la 2ème partie de 4.10.

Corollaire 4.12

Soient g une k-algèbre de Lie, A = U (g) l'algèbre enveloppante de g, P un idéal premier : A. Alors on a

$$0 \leq htP \leq d(A) - d(A/P) \leq n.$$

Preuve

Si P = (0), alors htP = 0.

Si $P \neq (0)$, on pose h = g et R = k avec l'action triviale de g dans (4.11), on obtient

$$1 \leq htP \leq d(A) - d(A/P) \leq n.$$

Proposition 4.13

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche de type fini, g une k-algèbre de ie résoluble, h un idéal de g, A = R*g, B = R*h. On suppose que les conditions (C'_1) et (C'_2) ont satisfaites sur les idéaux premiers g-invariants de R.

i P est un idéal premier g-invariant de B, alors d (B) = d (B/P) + htP.

Preuve

Sous nos hypothèses, g est une k-algèbre de Lie complètement résoluble de dimension inie n. Donc, si m désigne la dimension de h, on a $A = R * g \approx R[\theta_1, \delta_1]...[\theta_n, \delta_n]$ avec les onditions (1) et (2) et $B = R*h \approx R[\theta_1, \delta_1]...[\theta_m, \delta_m]$, $0 \leq m \leq n$. Un idéal de R est g-ıvariant si et seulement s'il est $\Delta_{1,n}$ - invariant. Il en résulte que la $\Delta_{1,n}$- hauteur et la hauteur oïncident sur les idéaux premiers $\Delta_{1,n}$ - invariants de R. De même, la formule des hauteurs de 'auvel est vraie sur les idéaux premiers $\Delta_{1,n}$ - invariants de R. On sait aussi qu'un idéal de R*h st g-invariant si et seulement s'il est g/h-invariant. Donc, si P est un idéal premier g-invariant le B = R*h, alors P est un idéal premier $\Delta_{m+1,n}$ -invariant de ₹ $[\theta_1, \delta_1]...[\theta_m, \delta_m]$. On obtient donc le résultat en appliquant 3.2.

Corollaire 4.14

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche de type fini, g une k-algèbre de ie résoluble, h un idéal de g et B = R*h. On suppose que R est g-simple. Soit P un idéal premier g-invariant de B. Alors d (B) = d (B/P) + htP.

Preuve

Comme R est g-simple, le seul idéal premier g-invariant de R est (0). Les hypothèses de la proposition 4.13 sont satisfaites.

Corollaire 4.15 (Patrice Tauvel [9])

Soient g une k-algèbre de Lie résoluble, A = U (g) l'algèbre enveloppante de g. Si P est un idéal premier de A, alors on a d (A) = d (A/P) + htP.

Preuve

On pose h = g et R = k dans le corollaire 4.14 avec l'action triviale de g sur k.

Corollaire 4.16

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche de type fini, dans laquelle la formule des hauteurs de Tauvel est vraie, g une k-algèbre de Lie résoluble, h un idéal de g, B = R⊗U (h). Si P est un idéal premier de B, alors d (B) = d (B/P) + htP.

Preuve

On considère R⊗U(g) comme R # U (g), où g opère trivialement sur R. Tous les idéaux premiers de R sont donc g-invariants et les hypothèses de 4.13 sont satisfaites.

Proposition 4.17

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche de type fini, g une k-algèbre de Lie résoluble, h un idéal de g, A = R*g, B = R*h. On suppose que les conditions (C'_1) et (C'_2) sont satisfaites sur les idéaux premiers g-invariants de R.
Alors, pour tout idéal premier g-invariant Q de B, on a g-htQ = htQ.

Preuve

La démonstration se fera par récurrence sur la dimension de h.

Si $\dim_k h = 0$, alors h = 0 et B = R. La proposition est donc vraie.

Si $\dim_k h = 1$, alors $B \approx R[\theta, \delta]$. Posons $Q' = Q \cap R$. D'après 4.2, Q' est un idéal premier g-invariant de R et par hypothèse, g-htQ' = htQ'. Donc d'après (4.9 (1)), on a g-htQ'B ≤ g-htQ car $Q'B \subseteq Q$, et d'après (4.9 (2)),

$$\text{htQ}' = \text{g-htQ}' \leq \text{g-htQ'B} \leq \text{g-htQ}. \qquad (*)$$

Si $Q = Q'B$, alors $B/Q \approx R/Q'[\theta, \delta]$, donc $d(B/Q) = d(R/Q') + 1$; or $d(B) = d(R) + 1$, $(R/Q') = d(R) - htQ'$ et (cf 4.13) $d(B/Q) = d(B) - htQ$. On en déduit que $htQ = htQ'$, et (*) ıtraîne $htQ \leq g\text{-}htQ$, donc $g\text{-}htQ = htQ$, car l'autre inégalité est trivialement vraie.

Si $Q \supsetneq Q'B$, alors (cf. 4.9 (1)) on a $g\text{-}htQ \geq g\text{-}htQ'B + 1$, or d'après la première partie, $\text{-}htQ'B = htQ'B = htQ'$, d'où $g\text{-}htQ \geq htQ' + 1$. Comme R/Q' est une sous-algèbre de B/Q, n a $d(R/Q') \leq d(B/Q)$. On en déduit que $htQ' \geq htQ - 1$ et, puisque $htQ' = htQ'B < htQ$, on $htQ' = htQ - 1$, donc $g\text{-}htQ \geq htQ' + 1 = htQ$. Ainsi nous avons $g\text{-}htQ = htQ$. Ce qui achève la émonstration si $\dim_k h = 1$.

Soit h' un idéal de g de codimension 1 dans h et supposons la proposition vraie pour $*h'$. Posons $B' = R*h'$, $B = R*h$, $Q' = Q \cap B'$. On a donc $g\text{-}htQ' = htQ'$ et (cf 4.9)

$$htQ' = g\text{-}htQ' \leq g\text{-}htQ'B \leq g\text{-}htQ \qquad (**)$$

i $Q = Q'B$, alors $B/Q'B \approx B'/Q'[\theta, \delta]$, donc $d(B/Q'B) = d(B'/Q') + 1$.

ɪr $d(B) = d(B') + 1$;

n en déduit que $htQ'B = htQ'$ et la relation (**) entraîne $htQ \leq g\text{-}htQ$. Il en résulte que $\text{-}htQ = htQ$.

Si $Q \supsetneq Q'B$, alors on a d'après ce qui précède, $htQ' = htQ'B < htQ$. Comme B'/Q' est ne sous-algèbre de B/Q, on a $d(B'/Q') \leq d(B/Q)$. On en déduit que $htQ \leq htQ' + 1$. On a onc $htQ = htQ' + 1$. On a (cf 4.9 (1)) $g\text{-}htQ \geq g\text{-}htQ'B + 1$, or $g\text{-}htQ'B = htQ'B = htQ'$, onc $g\text{-}htQ \geq htQ' + 1 = htQ$, d'où $g\text{-}htQ = htQ$. Ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire 4.18</u>

Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche de type fini, g une k-algèbre de ,ie résoluble, h un idéal de g, $B = R*h$. On suppose que R est g-simple. Alors, pour tout idéal remier g-invariant Q de B, on a $g\text{-}htQ = htQ$.

<u>Corollaire 4.19</u> ([6] Martin Lorenz)

Soient g une k-algèbre de Lie résoluble, h un idéal de g et U (h) l'algèbre enveloppante .e h. Alors, pour tout idéal premier g-invariant Q de U(h), on a $g\text{-}htQ = htQ$.

<u>Preuve</u>

On pose $R = k$ dans (4.15) avec l'action triviale de g sur k.

BIBLIOGRAPHIE

Bell A. D. and Sigurdsson G. :

Catenarity and Gelfand-Kirillov dimension in Ore Extension, J. of Algebra, 127, n° 2, 1989, 409-425

2 Brown K.A. and Goodearl K.R. and Lenagan T.H. :
Prime ideal in differential operator rings - Catenarity. Trans. of the Amer. math. society, 317, n° 2, February 1990, 749-772.

3 Chin W. :
Prime ideal in differential operator rings and crossed product of infinite groups, J. of Algebra, 106, volume 1, (1987), 78-104

4 Goodearl K.R. and Warfield Jr, R.B. :
Krull dimension of differential operator rings, Proc. of the London Math. Soc., 45, (1982), 49-70

5 Krause G. and Lenagan T. :
Growth of algebra and Gelfand-Kirillov dimension, Research notes in math. n° 116, Pitman, London, (1985)

6 Lorenz M. :
Chains of prime ideals in envelopping algebras of solvable Lie algebras, Journal of the London mathematical society, 24, (1981), 205-210

7 Mc Connel J.C. and Robson J. :
Non commutative Noetherian rings, J. Wiley, Chichester, New-York, 1987

8 Serre J.P. :
Algèbres locales - multiplicités, Springer lecture note in mathematics 11, Berlin, 1965

9 Tauvel P. :
Sur les quotients premiers de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble, Bull. Soc. math., France, 106, (1978), 177-205

Received: February 1992

Revised: July 1992 and September 1992

JOURNAL OF ALGEBRA 178, 21–47 (1995)

Localisation, caténarité et dimensions dans les anneaux munis d'une action d'algèbre de Lie

Thomas Guédénon

37, rue Pasteur, 92800-Puteaux, France

Communicated by Richard G. Swan

Received April 5, 1993

JE DEDIE CE TRAVAIL A LOKO JOSE DOMINIQUE

This paper is devoted to the study of smash products $R\#U(g)$ where R is a Noetherian algebra and g is a finite-dimensional Lie algebra (usually nilpotent or solvable) acting as a derivation on R. The questions considered involve the prime ideals of both R and $R\#U(g)$, especially the height of the prime ideals and its connection to their g-height. This is applied to show that the ring $R\#U(g)$ is catenary in certain cases and to connect the height with the (Gelfand–Kirillov) dimension of the corresponding factor ring (seeking to generalize the fact that $\dim A = \operatorname{ht} P + \dim(A/P)$ when P is the prime ideal of a commutative affine algebra A). Another major theme is the study of homological properties and related concepts such as regularity; a typical result is that R is regular whenever the localization R_P is regular for all g-invariant prime ideals P, provided that R is g-hypernormal.

INTRODUCTION

Dans tout l'exposé, k est un corps commutatif de caractéristique zéro, R une k-algèbre (toujours associative et unitaire), $\operatorname{Der}_k R$ la k-algèbre de Lie des k-dérivations de R et g une k-algèbre de Lie de dimension finie n qui opère par dérivations sur R via un morphisme d'algèbres de Lie δ: $g \to \operatorname{Der}_k R$, par $U(g)$ l'algèbre enveloppante de g et par $R\#U(g)$ l'anneau d'opérateurs différentiels étudié dans [2] et [18]. Pour tout $X \in g$, on note $\bar{X}$ l'image canonique de X dans $R\#U(g)$ et on pose $\delta(X) = \delta_X$.

Une k-algèbre noethérienne signifie noethérienne à droite et à gauche.

La notation $d(\ )$ désigne la dimension de Gelfand–Kirillov; pour ses propriétés, on pourra consulter [12].

Le paragraphe 1 renferme les résultats préliminaires et les définitions de base dont on se servira dans la suite de l'exposé.

0021-8693/95 $12.00

Dans le paragraphe 2, R est une k-algèbre noethérienne à droite g-hypernormale. Nous avons montré que la hauteur et la g-hauteur coïncident sur les idéaux premiers g-invariants de R et nous avons discuté de la formule des hauteurs de Tauvel dans les anneaux d'opérateurs différentiels (cf. 2.8, 2.11 à 2.14).

Dans le paragraphe 3, R est une k-algèbre commutative noethérienne g-hypernormale et g est abélienne. Nous avons prouvé que:

—si les anneaux de polynômes $R[x_1, x_2, \ldots, x_m]$, $1 \leq m \leq n$ sont caténaires ou g-caténaires, alors chaque anneau $R\#U(g_m)$ est g-caténaire (cf. 3–6), où les g_m sont des idéaux particuliers de g définis après (2–14).

—si R est universellement g-caténaire, alors chaque $R\#U(g_m)$ est universellement g-caténaire (cf. 3–8).

—si R est commutative de type fini, alors la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour les facteurs premiers g-invariants de l'anneau $R\#U(g_m)$ (cf. 3–9).

Dans le paragraphe 4, g est une k-algèbre de Lie nilpotente et R une k-algèbre noethérienne à droite (première) g-hypercentrale. Nous avons montré que:

—si P est un idéal premier g-invariant de $B = R\#U(g_m)$, $0 \leq m \leq n$ et si $P \cap R$ est g-régulièrement localisable, alors P est g-régulièrement localisable et B_P est un anneau local régulier (cf. 4.6).

—si R est g-régulièrement localisable, alors chaque $R\#U(g_m)$, $0 \leq m \leq n$ est g-caténaire (cf. 4.10). Si de plus R est commutative de type fini, alors $R\#U(g_m)$, $0 \leq m \leq n$ est g-caténaire et la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour les facteurs premiers g-invariants de $R\#U(g_m)$ (cf. 4.13).

Dans le paragraphe 5, R est une k-algèbre g-hypernormale de type fini. Nous avons montré que:

—$\dim R \leq g\text{-}\dim R + n$; où dim et g-dim désignent respectivement la dimension de Krull classique et la g-dimension de Krull classique (cf. 5.5).

—si M est un $R\#U(g)$-module, alors $g\text{-pd}_R M = \text{pd}_R M$, où pd_R et $g\text{-pd}_R$ désignent respectivement la dimension projective et la g-dimension projective (cf. 5.8).

—$g\text{-gl}\dim R \leq \text{gl}\dim R \leq g\text{-gl}\dim R + n$, où gl dim et g-gl dim désignent respectivement la dimension globale et la g-dimension globale (cf. 5.9).

—si M est un $R\#U(g)$-module, alors $g\text{-id}_R M \leq \text{id}_R M \leq g\text{-id}_R M + n$; où id_R et $g\text{-id}_R$ désignent respectivement la dimension injective et la g-dimension injective (cf. 5.11).

—R est régulière (respectivement de Gorenstein) si et seulement si R_Q est régulière (respectivement de Gorenstein) pour tout idéal premier g-invariant Q de R. (Cf. (5.12), (5.13).)

Enfin, nous avons examiné le cas particulier, où k est algébriquement clos et R est un * anneau.

Pour obtenir nos résultats, nous nous sommes inspiré de ([5, 1 à 3], [16] et [22]).

1. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

DÉFINITION 1.1. Un idéal Q de R est dit g-invariant si $\delta_X(Q) \subseteq Q$ pour tout $X \in g$.

Si $Q' \subset Q$ sont des idéaux premiers g-invariants de R, alors Q/Q', est un idéal premier g-invariant de R/Q'. On dira que Q/Q' est un facteur premier g-invariant de R.

DÉFINITION 1.2. On dit que R est g-simple si les seuls idéaux g-invariants de R sont (O) et R lui-même.

Si I est un idéal de R, on note I^+ le plus grand idéal g-invariant de R contenu dans I. Dans [2], I^+ est noté $(I : \Delta)$, où $\Delta = \{\delta_X, X \in g\}$.

Si I est un idéal premier de R, alors (cf. [2, 2–5]) I^+ est un idéal premier de R.

Si I est un idéal g-invariant de R, alors $I^+ = I$.

Soient I un idéal de R et J un idéal g-invariant de R contenu dans I, alors $(I/J)^+ = I^+/J$. En particulier, $(I/I^+)^+ = 0$.

Un g-module M est dit g-localement fini si $\dim_k U(g) \cdot m < +\infty$ pour tout $m \in M$.

On dit que M est un $R\#U(g)$-module si M est un R-module et un g-module tels que $X(rm) = X(r)m + r(Xm)$ pour tous $X \in g$, $r \in R$ et $m \in M$.

Il est clair que R est un $R\#U(g)$-module et que I est un idéal g-invariant de R si et seulement si I est un sous-$R\#U(g)$-module de R.

Si R est une k-algèbre commutative et un g-module g-localement fini, on dira que R est un * anneau.

Si R est un * anneau et si M est un $R\#U(g)$-module g-localement fini, on dira que M est un * module.

DÉFINITION 1.3. Soient R une k-algèbre noethérienne à droite et P un idéal premier g-invariant de R. On appelle g-hauteur de P et on note g-ht P (si cette dernière est finie) la longueur maximale des chaînes d'idéaux premiers g-invariants de R d'extrémité P. On a toujours g-ht P $\leq$ ht P.

DÉFINITIONS 1.4. (1) Une chaîne d'idéaux premiers (respectivement d'idéaux premiers g-invariants) de R

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_r$$

est dite saturée si $\mathrm{ht}(P_i/P_{i-1}) = 1$
(respectivement $g\text{-ht}(P_i/P_{i-1}) = 1$) pour $1 \leq i \leq r$.

(2) On dit que R est caténaire (respectivement g-caténaire) si, étant donné deux idéaux premiers (respectivement deux idéaux premiers g-invariants) quelconques $P \subseteq Q$ de R, toutes les chaînes saturées d'idéaux premiers (respectivement d'idéaux premiers g-invariants) de R d'extrémités P et Q ont la méme longueur.

Le lemme suivant fournit un exemple d'anneau g-caténaire et caténaire.

LEMME 1.5. *On suppose k algébriquement clos. Soient g une k-algèbre de Lie résoluble et h un idéal de g. Alors $U(h)$ est caténaire et g-caténaire.*

Preuve. Sous nos hypothèses, il est bien connu (cf. [7] 4.4.1) que $U(h)$ est caténaire. Soient $P \subset Q$ deux idéaux premiers g-invariants de $U(h)$ tels que $g\text{-ht}(Q/P) = 1$. Il n'existe donc aucun idéal premier g-invariant de $U(h)$ entre P et Q. Il ne peut donc exister (cf. [13, 2]) aucun idéal premier entre P et Q, donc $\text{ht}(Q/P) = 1$. On en déduit que toutes les chaînes saturées d'idéaux premiers g-invariants de $U(h)$ sont aussi saturées dans spec $(U(h))$. Or $U(h)$ est caténaire, donc g-caténaire.

LEMME 1.6. *Soient g résoluble, R un * anneau et $A = R\#U(g)$. Alors, $d(A) = d(R) + n$.*

Preuve. Comme g est résoluble, il existe une chaîne de sous-algèbres de Lie de g:

$$0 = h_0 \subset h_1 \subset \cdots \subset h_n = g,$$

où h_i est un idéal de codimension 1 dans h_{i+1}.

Pour chaque i, $0 \leq i \leq n - 1$, on a $R\#U(h_{i+1}) \approx (R\#U(h_i))\# U(h_{i+1}/h_i)$.

Il est clair que R et $U(h_i)$ sont (h_{i+1}/h_i)-localement finis; on en déduit que $R\#U(h_i)$ est (h_{i+1}/h_i)-localement fini, car $R\#U(h_i)$ est engendrée comme algèbre par R et $U(h_i)$. On obtient le résultat en utilisant [14, Remarques au lemme 1]).

DÉFINITION 1.7. Soient λ une forme linéaire sur $g/[g, g]$ et M un g-module localement fini. On dit qu'un élément m de M est un semi-invariant de poids λ, s'il se transforme suivant le caractère λ sous l'action de g. En d'autres termes, $X \cdot m = \lambda(X)\, m$ pour tout $X \in g$.

Si k est algébriquement clos et si g est résoluble, le théorème de Lie prouve que tout g-module localement fini non nul contient un semi-invariant.

2. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES k-ALGÈBRES g-HYPERNORMALES

DÉFINITION 2.1. Soit R une k-algèbre.

(1) Un élément s de R est dit g-normal si s est normal dans l'anneau $R\#U(g)$; ce qui équivaut à dire que s est normal dans R (i.e., $sR = Rs$) et Rs est un idéal g-invariant de R (i.e., $\delta_X(s) = r_X s$ pour un $r_X \in R$ et pour tout $X \in g$).

(2) Un élément s de R est dit g-central si s est central dans l'anneau $R\#U(g)$ (i.e., s est central dans R et $\delta_X(s) = 0$ pour tout $X \in g$).

Il est clair qu'un élément g-central de R est g-normal.

DÉFINITIONS 2.2. On dit que la k-algèbre R est

(1) hypercentrale (respectivement hypernormale) si chaque fois que $\overline{R}$ est un quotient de R par un idéal, tout idéal non nul de $\overline{R}$ contient un élément central (respectivement normal) non nul.

(2) g-hypercentrale (respectivement g-hypernormale) si chaque fois que $\overline{R}$ est un quotient de R par un idéal g-invariant, tout idéal g-invariant non nul de $\overline{R}$ contient un élément g-central (respectivement g-normal) non nul.

Une k-algèbre g-hypercentrale est g-hypernormale.

Si R est g-hypercentrale au sens de Bell [2, Section 6], alors R est g-hypernormale.

Si k est algébriquement clos et si g est résoluble, tout *anneau est g-hypernormal.

Remarques 2.3. (1) Si g opère trivialement sur R, alors:

(a) R est g-hypernormale si et seulement si R est hypernormale.

(b) R est g-hypercentrale si et seulement si R est hypercentrale.

(2) Posons $A = R\#U(g)$. Alors g opère par dérivations sur A lorsqu'on pose $\delta_X(a) = \overline{X}a - a\overline{X}$, pour tous $X \in g$, $a \in A$. Pour cette action de g, tous les idéaux de A sont g-invariants et

(a) A est g-hypernormale si et seulement si A est hypernormale.

(b) A est g-hypercentrale si et seulement si A est hypercentrale.

(3) Soient h un idéal de g, $R = U(h)$ l'algèbre enveloppante de h et $I_1 \subset I_2$ deux idéaux g-invariants de R. S'il existe un élément $r \in I_2 \setminus I_1$ tel que $\delta_X(r) \in I_1$ pour tout $X \in g$, alors $r + I_1$ est un élément central de R/I_1, car R est engendrée comme k-algèbre par h.

D'après (2.3 (3)), notre définition d'une k-algèbre g-hypercentrale coïncide avec celle qui est proposée dans [22].

La définition d'une k-algèbre g-hypercentrale de [2] ne permet pas de faire les remarques (2.3 (1) b, (2) b et (3)).

LEMME 2.4. (1) *Si R est g-simple, alors R est une k-algèbre g-hypercentrale.*

(2) *Si R est simple, alors R est une k-algèbre h-hypercentrale pour tout idéal h de g.*

LEMME 2.5. *Soient R une k-algèbre et Q un idéal g-invariant de R.*

(1) *Si R est g-hypernormale, alors R/Q est g-hypernormale.*

(2) *Si R est g-hypercentrale, alors R/Q est g-hypercentrale.*

LEMME 2.6. *Soient R une k-algèbre noethérienne à droite g-hypernormale et P un idéal premier g-invariant de R. Alors la hauteur de P est finie.*

Preuve. Soit Q un idéal premier de R strictement contenu dans P; donc $Q^+ \subseteq Q \subset P$. Quitte à quotienter R par Q^+, on peut supposer que $Q^+ = 0$; donc R est un anneau premier et Q ne peut contenir aucun élément g-normal non nul de R. Comme R est g-hypernormale, il existe a non nul dans P tel que a est un élément g-normal de R. Pour tout $r \in R$, il existe donc $r_1 \in R$ tel que $ra - ar_1 = 0 \in Q$. Donc $a + Q$ appartient à P/Q et $a + Q$ est normal dans R/Q. On en déduit (cf. [11, 3.5]) que la hauteur de P est finie.

PROPOSITION 2.7. *Soient R une k-algèbre noethérienne à droite g-hypernormale et P un idéal premier de R de hauteur* ht $P = d$ *finie. Alors il existe une chaîne saturée d'idéaux premiers de R d'extrémité P*

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_d = P$$

où un P_i est égal à P^+.

Preuve. La démonstration se fera par récurrence sur l'entier d. Si $d = 0$, alors P est un idéal premier minimal de R. Il est donc g-invariant, d'où $P = P^+$. Supposons le résultat démontré dans toute k-algèbre noethérienne à droite g-hypernormale pour les idéaux premiers de hauteurs strictement inférieures à d. Soit une chaîne saturée d'idéaux premiers de R d'extrémité P.

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_d = P$$

Quitte à quotienter R par Q_0, on peut supposer que $Q_0 = 0$; donc R est un anneau premier. Si $P^+ = 0$, alors le résultat est vrai.

Si $P^+ \neq 0$, alors comme R est g-hypernormale, il existe un élément a non nul dans $P^+ \subset P$ tel que a est un élément normal dans R et Ra est un idéal g-invariant de R. Posons $\overline{R} = R/Ra$ et $\overline{P} = P/Ra$ Comme R est un anneau premier, l'élément a est non diviseur de zéro.

D'après le théorème d'idéal principal (cf. [11] 3.1), on a

$$\mathrm{ht}_{\overline{R}}\overline{P} = \mathrm{ht}_R P - 1 = d - 1$$

Or $\bar{R}$ est noethérienne à droite et g-hypernormale; donc d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une chaîne saturée d'idéaux premiers de $\bar{R}$ d'extrémité $\bar{P}$

$$\bar{P}_1 \subset \bar{P}_2 \subset \cdots \subset \bar{P}_d$$

où un $\bar{P}_i$ est égal à $\bar{P}^+ = P^+/Ra$. Si P_i est l'image inverse de $\bar{P}_i$ dans R, alors

$$0 \subset Ra \subset P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_d = P$$

est une chaîne d'idéaux de R, où les P_i sont premiers et où un P_i est égal à P^+.

COROLLAIRE 2.8. *Soient R une k-algèbre noethérienne à droite g-hypernormale, $Q' \subset Q$ deux idéaux premiers g-invariants de R. Alors* g-ht Q = ht Q *et* g-ht(Q/Q') = ht(Q/Q').

Preuve. La première assertion se démontre comme en (2.7). Sous nos hypothèses, R/Q' est une k-algèbre noethérienne à droite g-hypernormale et Q/Q' est un idéal premier g-invariant de R/Q'. La deuxième assertion découle alors de la première.

COROLLAIRE 2.9. *Soient R une k-algèbre noethérienne à droite g-hypernormale et P un idéal premier de R de hauteur finie. Alors*

$$\text{ht } P = g\text{-ht}(P^+) + \text{ht}(P/P^+).$$

Preuve. Posons ht $P = d$. Il existe (cf. 2.7) une chaîne saturée d'idéaux premiers de R

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_d = P$$

où un P_i est égal à P^+. Pour cet indice i, nous avons ht P = ht P_i + ht(P/P_i); d'où ht P = ht(P^+) + ht(P/P^+). Le corollaire (2.8) donne le résultat.

Le corollaire suivant fournit aussi un exemple d'anneau caténaire et g-caténaire.

COROLLAIRE 2.10. *Si R est une k-algèbre noethérienne à droite g-hypernormale caténaire, alors R est g-caténaire. En particulier, une k-algèbre commutative de type fini g-hypernormale est caténaire et g-caténaire.*

Preuve. Sous nos hypothèses, si $P \subset Q$ sont deux idéaux premiers g-invariants de R, alors d'après (2.8), g-ht(Q/P) = ht(Q/P). On en déduit que toutes les chaînes saturées d'idéaux premiers g-invariants de R d'extrémités P et Q sont aussi saturées dans spec R. D'après l'hypothèse de caténarité, ces chaînes ont la même longueur.

COROLLAIRE 2.11. *On suppose k algébriquement clos. Soient g une k-algèbre de Lie résoluble, h un idéal de g, R une k-algèbre g-hypernormale, $B = R\#U(h)$ et Q un idéal premier g-invariant de B. Si R est commutative intègre de type fini ou si R est noethérienne première de type fini à identités polynomiales, alors*

$$d(B) - d(B/Q) = \mathrm{ht}\, Q = g\text{-ht}\, Q.$$

Preuve. Sous nos hypothèses, la formule des hauteurs de Tauvel est vraie dans R. De plus (cf. 2.8) la g-hauteur et la hauteur coïncident sur les idéaux premiers g-invariants de R. On obtient les résultats du corollaire en utilisant ([9, 4–13 et 4–17]).

COROLLAIRE 2.12. *Soient k algébriquement clos, g résoluble et R un *anneau noethérien avec $d(R) < +\infty$, h un idéal de g et $B = R\#U(h)$.*

(1) *Si la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour les idéaux premiers g-invariants de R, alors pour tout idéal premier g-invariant P de B on a*

$$g\text{-ht}\, P = \mathrm{ht}\, P = d(B) - d(B/P).$$

(2) *Si la formule des hauteurs de Tauvel est vraie dans R, alors la formule des hauteurs de Tauvel est vraie dans B.*

Preuve. On utilise (1.6), (2.8), et [9, 4.13 et 4.17]. On signale que dans [9], l'hypothèse R de type fini a été faite pour s'assurer que $d(R) < \infty$ et que $d(B) = d(R) + \dim h$.

(2) C'est évident, car sous nos hypothèses, R est h-localement fini.

Lorsque g est une k-algèbre de Lie de dimension un, on sait que $R\#U(g)$ est isomorphe à un anneau de la forme $R[\theta, \delta]$: l'extension de Ore de R par $\delta = \delta_X$. Dans ce cas particulier, on remplacera "g-hypernormale" par "δ-hypernormale", "g-caténaire" par "δ-caténaire", "g-invariant" par "δ-invariant" et "g-hauteur" par "δ-hauteur".

COROLLAIRE 2.13. *Soient R une k-algèbre commutative de type fini δ-hypernormale. Alors l'anneau $R[\theta, \delta]$ est caténaire et la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour les facteurs premiers de $R[\theta, \delta]$.*

Preuve. Sous nos hypothèses, l'anneau R est caténaire, donc (cf. 2.10) R est δ-caténaire. De plus $R[\theta]$ est caténaire; on en déduit (cf. [3, 2.3]) que $R[\theta, \delta]$ est caténaire. Nos hypothèses entraînent aussi (cf. 2.8) que la δ-hauteur et la hauteur coïncident sur les facteurs premiers δ-invariants de R. On obtient la dernière assertion en utilisant ([3, 2.5 et 2.6]).

COROLLAIRE 2.14. *Soient R une k-algèbre noethérienne de type fini δ-hypernormale à identités polynomiales. Alors la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour les facteurs premiers de l'anneau $A = R[\theta, \delta]$.*

Preuve. Considérons deux idéaux premiers $P \subseteq Q$ dans A. On peut supposer $P \cap R = 0$; donc R est un anneau premier. Soit C l'ensemble des éléments centralisants réguliers de R. On sait que C est un ensemble de Ore à droite et à gauche de R donc de A. Si P n'est pas induit (donc $P \neq 0$), on localise R en C et on a $AC^{-1} = RC^{-1}[\theta, \delta]$. Comme R est premier l'anneau RC^{-1} est simple (cf. [19, 1.7.9]). Sous nos hypothèses. AC^{-1} n'est pas simple; donc (cf. [8, 1.14]) δ est une dérivation intérieure de RC^{-1} et (cf. [15]) AC^{-1} est un anneau de polynômes à coefficients dans RC^{-1}; donc A est une k-algèbre noethérienne première de type fini à identités polynomiales. D'après le résultat de Schelter (cf. [20, theorem 4] et [19, theorem 4.4.27]), la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour les facteurs premiers de A. On peut donc se ramener au cas où $P = 0$. Si $Q \cap R = 0$, le même argument que ci-dessus montre que A est encore une k-algèbre noethérienne première de type fini à identités polynomiales; donc la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour les facteurs premiers de A. On peut donc supposer $Q \cap R \neq 0$. Si Q est induit (ce qui doit être le cas si $\mathrm{ht}(Q/P) = 1$), alors (cf. [9, 3.8]) $d(A) = d(A/Q) + \mathrm{ht}(Q)$, car la formule des hauteurs de Tauvel est vraie dans R et (cf. 2.8) $\delta\text{-ht}(Q \cap R) = \mathrm{ht}(Q \cap R)$.

Soit g une k-algèbre de Lie complètement résoluble. Il existe donc une chaîne d'idéaux de g

$$0 = g_0 \subseteq g_1 \subseteq \cdots \subseteq g_n = g,$$

où g_{i-1} est de codimension un dans g_i, $1 \leq i \leq n$.

Nous avons donc les sous-anneaux suivants de $R\#U(g)$:

$$R_0 = R;\ R_1 = R\#U(g_1), \dots, R_i = R\#U(g_i), \dots, R_n = R\#U(g).$$

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une base de g telle que $(X_1, X_2, \dots, X_i)$ est une base de g_i, $1 \leq i \leq n$. Alors pour $1 \leq i < j \leq n$, $\delta_{X_j}(X_i) \in R\#U(g_i)$.

Si de plus, g est nilpotente, alors

$$\text{pour } 1 \leq i < j \leq n, \qquad \delta_{X_j}(X_i) \in R\#U(g_{i-1}). \qquad (\alpha)$$

On rappelle que chaque R_i est une extension de Ore de R_{i-1} par $\delta_{X_i} = \delta_i$; donc $R_i = R_{i-1}[\theta, \delta_i]$.

Pour tout $a \in R_{i-1}$ et pour tout entier naturel l, nous avons

$$\theta^l a = a\theta^l + \sum_{j=1}^{l-1} \binom{l}{j} \delta_i^j(a)\theta^{l-j}. \qquad (\beta)$$

Dans la suite de l'exposé, nous allons utiliser fréquemment l'idéal g_m et le sous-anneau R_m de $R\#U(g)$ pour m fixé $1 \leq m \leq n$.

LEMME 2.15. *Soient g une k-algèbre de Lie nilpotente et R une k-algèbre.*
(1) *Si R_{i-1} est g-hypernormale, alors R_i est g-hypernormale, $1 \leq i \leq n$.*
(2) *Si R_{i-1} est g-hypercentrale, alors R_i est g-hypercentrale, $1 \leq i \leq n$.*

Preuve. (1) Soient I_1 et I_2 deux idéaux g-invariants de R_i avec $I_1 \subset I_2$. Soit $f \in I_2 \setminus I_1$ de degré minimal m et posons pour $j = 1,2$ $K_j = \{c \in R_{i-1}$: $\theta^m c + \sum_{l=0}^{m-1}\theta^l c_l \in I_j$ pour certains $c_0, \dots, c_{m-1} \in R_{i-1}\}$. Manifestement, K_1 et K_2 sont des idéaux de R_{i-1} et $K_1 \subseteq K_2$. Le coefficient de θ^m dans f est un élément de $K_2 \setminus K_1$, à cause du choix de m, donc $K_1 \subset K_2$. Soit $c \in K_j$, pour un j fixé, $j = 1,2$ et, posons $h = \theta^m c + \sum_{l=0}^{m-1}\theta^l c_l$, où les $c_l \in R_{i-1}$, donc $h \in I_j$. Par hypothèse, $\delta_X(h) = [\overline{X}, h] \in I_j$ pour tout $X \in g$. Pour $1 \leq l \leq n$, le terme de plus haut degré dans $\delta_l(h)$ est $\delta_l(\theta^m)c + \theta^m \delta_l(c)$. D'après (α), $\delta_l(\theta) \in R_{i-1}$, donc le degré de $\delta_l(\theta^m)$ est au plus $m-1$. On en déduit que $\theta^m \delta_l(c)$ est le terme de plus haut degré dans $\delta_l(h)$ et que $\delta_l(c) \in K_j$. Ainsi $\delta_l(K_j) \subseteq K_j$, c'est-à-dire que K_1 et K_2 sont des idéaux g-invariants de R_{i-1} et $K_1 \subset K_2$.

Comme R_{i-1} est g-hypernormale, il existe $b \in K_2 \setminus K_1$ tel que $b + K_1$ est un élément normal dans R_{i-1}/K_1 et $[\overline{X}, b] - r_X b \in K_1$ pour un élément r_X de R_{i-1} et pour tout $X \in g$. Il existe donc $b_0, \dots, b_{m-1} \in R_{i-1}$ tel que si $t = \theta^m b + \sum_{l=0}^{m-1}\theta^l b_l$, alors $t \in I_2 \setminus I_1$. Soit $u \in R_{i-1}$; il existe donc $v \in R_{i-1}$ tel que $ub - bv \in K_1$. D'après (β), dans $ut - tv$, le terme de plus haut degré est $\theta^m(ub - bv)$; or $ub - bv \in K_1$; donc $ut - tv \in I_1$. Soit $1 \leq j \leq n$ et posons $r_{X_j} = r_j$. Dans $\delta_j(t) - r_j t$, le terme de plus haut degré est $\theta^m(\delta_j(b) - r_j b)$; or $\delta_j(b) - r_j b \in K_1$; donc $\delta_j(t) - r_j t \in I_1$.

On déduit de $\delta_i(t) - r_i t \in I_1$, que pour tout entier naturel q non nul, il existe $w \in R_i$ tel que $\theta^q t - tw \in I_1$. Le reste de la démonstration est évident à partir de la relation (β).

(2) On raisonne comme dans (1). L'élément b qui intervient dans la démonstration de (1) est central modulo K_1, donc $u = v \in R_{i-1}$, tandis que r_X est nul pour tout $X \in g$, donc $w = \theta^q$.

Conservant les notations précédentes, on a

COROLLAIRE 2.16. *Soit g une k-algèbre de Lie nilpotente et R une k-algèbre.*

(1) *Si R est g-hypernormale, alors R_i est g-hypernormale pour tout $i \leq n$. En particulier, $R_n = R\#U(g)$ est hypernormale.*

(2) *Si R est g-hypercentrale, alors R_i est g-hypercentrale pour tout $i \leq n$. En particulier, $R_n = R\#U(g)$ est hypercentrale.*

La définition d'une k-algèbre g-hypercentrale de [2] ne permet pas d'obtenir le corollaire (2.16 (2)).

La remarque suivante sera utile pour le paragraphe 3.

REMARQUE 2.17. *D'après la démonstration de* (2.15 (1)), *si R est g-hypernormale alors pour tout $j \leq i$ et pour tout $r \in R_j$, il existe $r' \in R_j$ tel que $rt - tr' \in I_1$ et pour tout $X \in g$ l'élément $r_X \in R$.*

COROLLAIRE 2.18. *Soient g une k-algèbre de Lie complètement résoluble et R une k-algèbre.*

Si R est g-hypernormale, alors R_i est g-hypernormale pour tout $i \leq n$. En particulier, $R\#U(g)$ est hypernormale.

Preuve. Il suffit de montrer que si R_{i-1} est g-hypernormale, alors R_i est g-hypernormale. La preuve se fait exactement comme dans (2.15). Pour $1 \leq l \leq n$, le terme de plus haut degré dans $\delta_l(h)$ est $\theta^m(s_l c + \delta_l(c))$, où s_l est le coefficient de θ^m dans $\delta_l(\theta^m)$. Par une légère modification de la preuve de ([2, 4.1]), on montre que K_1 et K_2 sont g-invariants. Le reste de la démonstration est évident.

3. CATÉNARITÉ DANS LES ANNEAUX MUNIS D'UNE ACTION D'ALGÈBRE DE LIE ABÉLIENNE

On conserve les notations et les conventions des paragraphes précédents. De plus, R est une k-algèbre commutative.

Soient g une k-algèbre de Lie abélienne (donc nilpotente) de base $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ telle que $(X_1, \ldots, X_m)$ est une base de g_m, $1 \leq m \leq n$. Posons $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$, où $\delta_i = \delta_{X_i}$ pour $1 \leq i \leq n$, $B = R_m = R\#U(g_m)$, $S = S_m = R[x_1, \ldots, x_m]$ l'anneau des polynômes à m variables. On sait qu'il existe une action de g sur R_m. On définit

—une action de g sur S_m en posant $\delta_i(x_j) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.

—un isomorphisme de R-modules ϕ: $B \to S$ en posant $\phi(X_1^{i_1} \cdots X_m^{i_m}) = x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m}$ (cf. [5, §1])

—pour $r \in R$, une application k-linéaire d_r: $S \to S$ par $d_r(s) = \phi([r, \phi^{-1}(s)])$ (cf. [5, $N_1(b)$]).

Posons $\nabla = \Delta \cup \{d_r$, où $r \in R\}$. Alors ∇ est un ensemble d'applications k-linéaires de S vers S.

Nous définissons dans S_m les notions de "∇-invariant", "∇-caténaire", "∇-hauteur" (cf. [5, §1]) et d'une façon évidente la notion de "∇-hypernormale."

Voici quelques résultats qui permettent de mieux connaître l'application ϕ et l'ensemble ∇.

Soit R une k-algèbre commutative noethérienne. Si P est un idéal ∇-invariant de S, alors $\phi^{-1}(P)$ est un idéal g-invariant de B. L'ensemble ∇ opère de façon naturelle sur $\bar{S} = S/P$ et si p_s désigne la surjection canonique de S sur $\bar{S}$, alors p_s envoie les idéaux ∇-invariants de S sur les idéaux ∇-invariants de $\bar{S}$. De même, la surjection canonique $p_{\bar{B}}$ de B sur $\bar{B} = B/\phi^{-1}(P)$ envoie les idéaux g-invariants de B sur ceux de $\bar{B}$.

Il est facile de vérifier que:

—le R-isomorphisme ϕ induit un R-isomorphisme $\bar{\phi}$ de $\bar{B}$ vers $\bar{S}$ tel que $p_s \circ \phi = \bar{\phi} \circ p_B$;

—si I est un idéal g-invariant (respectivement un idéal premier g-invariant) de $\bar{B}$ alors $\bar{\phi}(I)$ est un idéal ∇-invariant (respectivement un idéal premier ∇-invariant) de $\bar{S}$;

—si J est un idéal ∇-invariant (respectivement un idéal premier ∇-invariant) de $\bar{S}$; alors $\bar{\phi}^{-1}(J)$ est un idéal g-invariant (respectivement un idéal premier g-invariant) de $\bar{B}$.

On peut adapter les résultats de ([5, §1 et §2]) à notre contexte pour démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 3.1. *Soient g une k-algébre de Lie abélienne, R une k-algèbre, $B = R_m = R\#U(g_m)$, où m est fixé $1 \leq m \leq n$.*

L'application ϕ: $B = R_m \to S_m = S$ induit une bijection entre

(1) l'ensemble des idéaux g-invariants de B et l'ensemble des idéaux ∇-invariants de S.

(2) l'ensemble des idéaux premiers g-invariants de B et l'ensemble des idéaux premiers ∇-invariants de S. De plus ϕ et ϕ^{-1} préservent les inclusions.

LEMME 3.2. *Soient g une k-algèbre de Lie abélienne, R une k-algèbre, $B = R_m = R\#U(g_m)$, $1 \leq m \leq n$ et I un idéal g-invariant de B. S'il existe $c \in B$ tel que pour tout $r \in R$, il existe $r_1 \in R$ tel que $rc - cr_1 \in I$, alors quel que soit $t \in B$, il existe $t_1 \in B$ tel que $\phi(ct) - \phi(c)\phi(t_1) \in \phi(I)$.*

Preuve. Il suffit d'adapter avec une légère modification la démonstration de ([5, 1.6.(3)]).

THÉORÈME 3.3. *Soient g une k-algèbre de Lie abélienne, R une k-algèbre g-hypernormale, $B = R_m = R\#U(g_m)$, $1 \leq m \leq n$. Alors $S = R[x_1, \ldots, x_m]$ est une k-algèbre ∇-hypernormale.*

Preuve. Soient $P \subseteq Q$ deux idéaux ∇-invariants de S. Donc $\phi^{-1}(P) \subset \phi^{-1}(Q)$ sont des idéaux g-invariants de B. D'après (2.16), B est g-hypernormale. Il existe donc $b \in \phi^{-1}(Q) \setminus \phi^{-1}(P)$ tel que $b + \phi^{-1}(P)$est un élément normal de $\bar{B} = B/\phi^{-1}(P)$ et $\delta_i(b) - b_i B \in \phi^{-1}(P)$ pour un $b_i \in B$, $1 \leq i \leq n$. D'après (2.17), on peut supposer que chaque $b_i \in R$; donc (cf. [5, 1.1iii]), $\delta_i \phi(b) - b_i \phi(b) \in P$. D'après (2.17), pour tout $r \in R \subset B$, il existe $r_1 \in R$ tel que $rb - br_1 \in \phi^{-1}(P)$; donc $[r, b] + b(r - r_1) \in \phi^{-1}(P)$. D'après (3.2), il existe $t_1 \in B$ tel que $\phi([r, b]) - \phi(t_1)\phi(b) \in P$. Par définition, $d_r(\phi(b)) = \phi([r, b])$, or $\phi(b) \in Q \setminus P$ et S est commutative; donc S est ∇-hypernormale.

LEMME 3.4. *Soient g une k-algèbre de Lie abélienne, R une k-algèbre noethérienne g-hypernormale, $B = R\#U(g_m)$, $S = R[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ l'anneau des polynômes à m variables $1 \leq m \leq n$; I un idéal de S et I^* le plus grand idéal ∇-invariant de S contenu dans I.*

(1) *Si I est premier, alors I^* est aussi premier.*

(2) *Si I est un idéal premier minimal, alors $I = I^*$.*

Preuve. (cf. [5, Theorem 2.3 and Corollary 2.5]).

Tous ces résultats préliminaires prouvent que dans le contexte actuel, on peut obtenir les analogues de la proposition (2.7) et des corollaires (2.8, 2.9). Nous énonçons l'analogue du corollaire (2.8), car c'est celui qui nous intéresse.

LEMME 3.5. *Soient g une k-algèbre de Lie abélienne, R une k-algèbre noethérienne g-hypernormale, $B = R\#U(g_m)$, $S = R[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ l'anneau des polynômes à m variables $1 \leq m \leq n$; $P \subset Q$ deux idéaux premiers ∇-invariants de S, alors $\nabla\text{-ht}(Q/P) = \text{ht}(Q/P)$.*

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat suivant:

THÉRÈME 3.6. *Soient g une k-algèbre de Lie abélienne, R une k-algèbre noethérienne g-hypernormale, $B = R\#U(g_m)$, $1 \leq m \leq n$. Si l'anneau des polynômes $S = R[x_1, \ldots, x_m]$ est caténaire ou g-caténaire, alors B est g-caténaire. En particulier, $R\#U(g)$ est caténaire.*

Preuve. Soient $P \subset Q$ deux idéaux premiers g-invariants de B. Alors (cf. 3.1) $\phi(P) \subset \phi(Q)$ sont deux idéaux premiers ∇-invariants de S. D'après (3.5), toutes les chaînes saturées d'idéaux premiers ∇-invariants de S d'extrémités $\phi(P)$ et $\phi(Q)$ sont des chaînes saturées d'idéaux premiers, donc aussi des chaînes saturées d'idéaux premiers g-invariants. Comme S est caténaire ou g-caténaire, toutes ces chaînes ont la même longueur. On en déduit (cf. 3.1) que toutes les chaînes saturées d'idéaux premiers g-invariants de B d'extrémités P et Q ont la même longueur.

DÉFINITION 3.7. Une k-algèbre R est dite universellement caténaire (respectivement universellement g-caténaire) si tous les anneaux de polynômes $R[x_1, x_2, \ldots, x_t]$ à un nombre fini de variables sont caténaires (respectivement g-caténaires).

COROLLAIRE 3.8. *Soient g une k-algèbre de Lie abélienne, R une k-algèbre noethérienne g-hypernormale, universellement g-caténaire et $B = R\#U(g_m)$, $1 \leq m \leq n$. Alors B est universellement g-caténaire. En particulier $R\#U(g)$ est universellement caténaire.*

Preuve. L'anneau des polynômes à $q - m$ variables $B[x_{m+1}, \ldots, x_q]$ peut être identifié à un anneau de la forme $R\#U(H)$, où H est une k-algèbre de Lie abélienne de dimension q. Comme R est universellement g-caténaire, l'anneau des polynômes $R[x_1, \ldots, x_q]$ est g-caténaire. Le théorème (3.6) donne le résultat.

Corollaire 3.9. *Soient g une k-algèbre de Lie abélienne, R une k-algèbre de type fini g-hypernormale et* $B = R\#U(g_m)$, $1 \leq m \leq n$. *Alors B est g-caténaire et la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour les facteurs premiers g-invariants de B.*

Preuve. Sous nos hypothèses, R est universellement caténaire; donc l'anneau $S = R[x_1, x_2, \dots, x_m]$ est caténaire. On en déduit (cf. 3.6) que B est g-caténaire. Soient $P \subset Q$ deux idéaux premiers g-invariants de B. Donc $P/(P \cap R)B \subset Q/(P \cap R)B$ sont deux idéaux premiers g-invariants de $B/(P \cap R)B \approx (R/P \cap R)\#U(g_m)$. Comme $R/P \cap R$ est une k-algèbre intègre de type fini g-hypernormale, la formule hauteurs de Tauvel est vraie pour les idéaux premiers g-invariants de $B/(P \cap R)B$ (cf. (2.8) et [9] 4.13).

De même, d'après (2.5) et (2.8) la g-hauteur et la hauteur coïncident sur les idéaux premiers g-invariants de $B/(P \cap R)B$. Comme B est g-caténaire, on obtient le résultat.

4. LOCALISATION ET CATÉNARITÉ DANS LES ANNEAUX MUNIS D'UNE ACTION D'ALGÈBRE DE LIE NILPOTENTE

On conserve les notations et les conventions des paragraphes précédents.

Soit A un anneau unitaire. On dit que A est un anneau local si A est noethérien à droite, possède un seul idéal maximal M qui coïncide avec son radical de Jacobson, $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = 0$ et A/M est un anneau simple Artinien.

Un anneau local A d'idéal maximal M est dit régulier s'il existe une chaîne d'idéaux M_i de A:

$$0 = M_0 \subseteq M_i \subseteq \cdots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_d = M$$

telle que M_i/M_{i-1} est engendré par un élément central régulier de A/M_{i-1}, $1 \leq i \leq d$. On dit alors que A est un anneau local régulier de dimension d et (cf. [23, theorem, 2–7])

$$r \cdot \operatorname{gl\,dim} A = K \cdot \dim A = h \cdot \dim A/M = \dim A = d$$

où $r \cdot \operatorname{gl\,dim}$ désigne la dimension globale à droite; $K \cdot \dim$, la dimension de Krull; $h \cdot \dim$ la dimension homologique de A-modules et dim, la dimension de Krull classique.

Soient A un anneau unitaire et P un idéal premier de A. On pose $C_A(P) = \{c \in A$ tel que $c + P$ est régulier dans $A/P\}$. On peut supprimer l'indice A, s'il n'y a pas de confusion.

DÉFINITION 4.1. Un idéal premier d'un anneau A est régulièrement localisable s'il existe une chaîne

$$0 = P_0 \subseteq P_1 \subseteq \cdots \subseteq P_d = P$$

d'idéaux de A telle que, si P_{i-1} est contenu strictement dans P_i, alors il existe $p \in P_i \setminus P_{i-1}$ vérifiant

(1) $p + P_{i-1}$ est un élément central régulier de A/P_{i-1}.

(2) Pour tout $q \in P_i$, il existe $c \in C(P)$ tel que $qc \in P_{i-1} + Ap$

La définition (4.1) est équivalente à celle qui est donnée dans [22] mais les deux définitions ne sont pas les mêmes.

LEMME 4.2. *Soit A un anneau noethérien à droite et P un idéal premier régulièrement localisable de A. Alors $C(P)$ vérifie la condition de Ore à droite dans A.*

Preuve. Il suffit d'adapter la preuve du théorème 2.2 de [21] à notre contexte.

Sous les hypothèses de (4–2) posons $K = \{c \in A\colon ca = 0$ pour a dans $C(P)\}$. Alors K est un idéal de A et $a + K$ est un élément régulier de A/K pour tout $a \in C(P)$. On peut donc former l'anneau quotient partiel à droite de A/K par rapport à $\{a + K;\ a \in C(P)\}$ que nous allons noter A_P.

Un élément de A_P s'écrit sous la forme uc^{-1}, où $u \in A/K$ et $c \in \{a + K;\ a \in C(P)\}$.

LEMME 4.3. *Soit A un anneau premier noethérien à droite et P un idéal premier régulièrement localisable de A, alors A_P est un anneau local régulier.*

Preuve. Cf. [22, Lemma 1.4]).

LEMME 4.4. *Soient g une k-algèbre de Lie nilpotente, R une k-algèbre noethérienne à droite, g-hypercentrale, P un idéal premier g-invariant de R_m, $P_1 = P \cap R_i$ et $P_2 = P \cap R_{i-1}$, $1 \leq i \leq m \leq n$. Alors P_1 et $R_iP_2 = P_2R_i$ sont des idéaux premiers g-invariants de R_i. De plus, soit $P_1 = P_2R_i$ ou bien il existe $p \in P_1 \setminus R_iP_2$ tel que*

(i) *$\delta_X(p) \in R_iP_2$ pour tout $X \in g$.*

(ii) *$p + R_iP_2$ est un élément central dans R_i/P_2R_i.*

(iii) *Si $s \in R_i$ et $ps \in R_iP_2$ alors $s \in R_iP_2$*

(iv) *Pour tout $q \in P_1$ il existe $c \in C(P)$ tel que $qc \in R_iP_2 + R_ip$.*

Preuve. Les assertions (i) et (ii) sont évidentes, car $R_{i-1} \subseteq R_i$, et R_i est g-hypercentrale.

(iii) D'après (ii), $p + R_iP_2$ est un élément central non nul de l'anneau premier noethérien à droite R_i/R_iP_2, donc $p + R_iP_2$ est un élément régulier.

(iv) Comme dans (2–15), choisissons un polynôme $f \in P_1 \setminus R_iP_2$ de degré minimal m (ne pas confondre ce "m" avec celui de l'énoncé) et posons $K_1 = \{c \in R_{i-1}\colon\ \theta^m c + \sum_{t=0}^{m-1}\theta^t c_t \in R_iP_2,$ où $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1} \in R_{i-1}\}$ et $K_2 = \{c \in R_{i-1}\colon\ \theta^m c + \sum_{t=0}^{m-1}\theta^t c_t \in P_1$ où $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1} \in R_{i-1}\}$. On a $R_i = R_{i-1}[\theta, \delta_i]$, où $\delta_i = \delta_{X_i}$. D'après la preuve de (2.15 (2)), il existe des éléments $a_0, a_1, \ldots, a_m \in R_{i-1}$ tels que l'élément $p = \sum_{t=0}^{m}\theta^t a_t \in P_1 \setminus R_iP_2$ et vérifie $\delta_X(p) \in R_iP_2 = \sum_{t=0}^{l}\theta^t P_2$ pour tout $X \in g$. A nouveau, d'après la preuve de (2.15 (2)), $a_m \in K_2 \setminus K_1$ et $\delta_X(a_m) \in K_1$ pour tout $X \in g$. Donc $\delta_X(a_m) \in P_2 \subseteq P$ pour tout $X \in g$. Nous savons aussi que $[r, a_m] \in K_1$ pour tout $r \in R$; donc $[r, a_m] \in P_2 \subseteq P$. On vient de montrer que

$$[u, a_m] \in P, \qquad \text{pour tout } u \in B \qquad (*).$$

L'élément a_m n'appartient pas à P à cause du choix de m; donc d'après (*), $a_m + P$ est un élément central non nul de l'anneau premier noethérien à droite B/P. Donc $a_m + P$ est un élément régulier de B/P; d'où $a_m \in C(P)$. Soit $q = \sum_{t=0}^{v}\theta^t q_t \in P_1$. Si $q \notin R_iP_2$, alors $v \geq m$ à cause du choix de m. Nous avons:

$$\begin{aligned}
&\theta^v q_v a_m - \theta^{v-m} q_v \theta^m a_m \\
&\quad = \theta^v q_v a_m - \theta^{v-m}\theta^m q_v a_m + \theta^{v-m} \sum_{1 \leq j < m} \binom{m}{j} \delta_i^j(q_v)\theta^{m-j} a_m \\
&\quad = \theta^{v-m} \sum_{1 \leq j < m} \binom{m}{j} \delta_i^j(q_v)\theta^{m-j} a_m.
\end{aligned}$$

On en déduit que $qa_m - \theta^{v-m} q_v p \in \sum_{t=0}^{v-1}\theta^t R_{i-1}$.

Posons $r = qa_m - \theta^{v-m} q_v p = \sum_{t=0}^{v-1}\theta^t r_t$, où les $r_t \in R_{i-1}$.

Si $r \in R_iP_2$, alors on pose $a_m = c$ et $f = \theta^{v-m} q_v$ et la démonstration est terminée. Si $r \notin R_iP_2$, alors on recommence le même processus que précédemment. Ainsi, de proche en proche, on peut trouver $f \in R_i$ tel que $a_m^{v-m+1} - fp \in \sum_{t=0}^{m-1}\theta^t R_{i-1}$, où $qa_m^{v-m+1} - fp$ est un élément de R_iP_2 à cause du choix de m. Donc $qa_m^{v-m+1} \in R_iP_2 + fp$, et en posant $c = a_m^{v-m+1}$, on obtient (iv).

Si $q \in R_iP_2$ alors on obtient (iv) de façon triviale.

Remarque 4.5. Lorsque dans (4.1), *les idéaux* P_i sont g-invariants et l'élément p vérifie $[\bar{X}, p] \in P_{i-1}$ pour tout $X \in g$, on dira que l'idéal premier g-invariant P est g-régulièrement localisable.

Si tous les idéaux premiers g-invariants de R sont g-régulièrement localisables, on dira que R est g-régulièrement localisable.

THÉORÈME 4.6. *Soient g une k-algèbre de Lie nilpotente, R une k-algèbre première noethérienne à droite g-hypercentrale, $A = R_n = R\#U(g)$, $B = R_m$, $1 \leq m \leq n$, P un idéal premier g-invariant de B. Si $Q = P \cap R$ est g-régulièrement localisable, alors P est g-régulièrement localisable et B_P est un anneau local régulier de dimension au plus égale à* $\dim R_Q + m$

Preuve. Comme $P \cap R$ est g-régulièrement localisable, il existe une chaîne $0 = Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \cdots \subseteq Q_{l-1} \subseteq Q_l = P \cap R = Q$ d'idéaux g-invariants de R vérifiant les conditions de la définition (4–1) et de la remarque (4.5). Considérons la chaîne d'idéaux de B:

$$0 = P_0 \subseteq P_1 \subseteq \cdots \subseteq P_{l-1} \subseteq P_l = B(P \cap R) \subseteq P_{l+1} \subseteq \cdots \subseteq P_{l+m} = P \tag{γ}$$

où $P_{l+i} = B(P \cap R_i)$, $0 \leq i \leq m$ et $P_i = Q_i B$, $0 \leq i \leq l$. Un élément de P_{l+i} est une combinaison en les monômes $X_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots X_m^{\alpha_m}$ à coefficients dans $P \cap R_i$. Supposons $P_{l+i-1} \subset P_{l+i}$. Si $R_i(P \cap R_{i-1}) = P \cap R_i$, alors $B(R_i(P \cap R_{i-1})) = B(P \cap R_i) = P_{l+i} = B(P \cap R_{i-1}) = P_{l+i-1}$, car $B = BR_i$; ce qui est une contradiction.

On a donc $R_i(P \cap R_{i-1}) \subset P \cap R_i$. Nous déduisons de (4.4 (i) et (ii)) qu'il existe $p \in P \cap R_i \setminus R_i(P \cap R_{i-1})$ tel que $p + R_i(P \cap R_{i-1})$ est un élément central de $R_i/R_i(P \cap R_{i-1})$ et $[\overline{X}, p] \in R_i(P \cap R_{i-1}) \subseteq B(P \cap R_{i-1}) = P_{l+i-1}$ pour tout $X \in g$. On en déduit que $up - pu \in P_{l+i-1}$ pour tout $u \in B$, car B est R_i-libre à droite et à gauche de base les monômes $X_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots X_m^{\alpha_m}$. Il en résulte que $p + P_{l+i-1}$ est un élément g-central de

$$B/P_{l+i-1}, \qquad 1 \leq i \leq m.$$

Or (cf. 4.4, (iii)) $p + R_i(P \cap R_{i-1})$ est un élément régulier de $R_i/R_i(P \cap R_{i-1})$, donc $p + P_{l+i-1}$ est un élément régulier de B/P_{l+i-1} (car B est un R_i-module libre à droite et à gauche) et (cf. 4.4 (iv)) pour tout $q \in P_{l+i}$, il existe $c \in C_B(P)$ tel que $qc \in P_{l+i-1} + Bp$.

Si $Q_{i-1}B \subset Q_iB$, alors $Q_{i-1} \subset Q_i$. Il existe donc $z \in Q_i \setminus Q_{i-1}$ tel que $z + Q_{i-1}$ est un élément g-central régulier de R/Q_{i-1} *et pour tout* $q \in Q_i$ *il existe* $c \in C_R(Q) \subset C_B(P)$, *tel que* $qc \in Q_{i-1} + Rz$. *Il est facile de vérifier que* $z + Q_{i-1}B$ *est un élément g-central régulier de* $B/Q_{i-1}B$ *qui vérifie* (4.1 (2)). *On conclut que P est g-régulièrement localisable et* (*cf.* 4.3) *B_P est un anneau local régulier.*

A partir de la chaîne (γ), on obtient la chaîne $0 = P_0B_P \subseteq P_1B_P \subseteq \cdots \subseteq P_{l+1}B_P \subseteq \cdots \subseteq P_{l+m}B_P = PB_P$ d'idéaux de B_P telle que pour tout i avec $0 \leq i \leq l + m - 1$, $P_{i+1}B_P/P_iB_P$ est engendré par un élement central régulier. Donc la dimension de Krull classique de B_P est au plus $l + m$, où l est nécessairement la dimension de Krull classique de R_Q.

COROLLAIRE 4.7. *Soient g une k-algèbre de Lie nilpotente, R une k-algèbre noethérienne à droite.* $A = R\#U(g) = R_n$, $B = R_m$, $1 \leq m \leq n$. *Si R est g-simple (respectivement simple), alors B est g-régulièrement (respectivement régulièrement) localisable.*

Soient A une k-algèbre noethérienne ou à identités polynomiales, P un idéal premier de A, $Fr(A/P)$ l'anneau total des fractions de A/P. Si N est un $Fr(A/P)$-module, on note $l(N)$ sa longueur en tant que $Fr(A/P)$-module. Donc $l(Fr(A/P))$ est la dimension de Goldie de A/P. Soit M un A-module. Posons pour $i \geq 0$

$$\mu_i(P, M) = l\big(Fr(A/P) \otimes_A \operatorname{Ext}^i_A(A/P, M)\big): l\big(Fr(A/P)\big).$$

Si S est une partie multiplicative de Ore dans R contenue dans $C(P)$, alors $\mu_i(P, M)$ est égal à $\mu_i(S^{-1}P, S^{-1}M)$ défini sur l'anneau $S^{-1}A$.

Les nombres μ_i ont été introduits en algèbre commutative par *H.* Bass (cf. [1, page 11]).

THÉORÈME 4.8. *Soient g une k-algèbre de Lie nilpotente, R une k-algèbre noethérienne première g-hypercentrale, $B = R_m$; $0 \leq m \leq n$ et P un idéal premier g-invariant de B. Si $P \cap R$ est g-régulièrement localisable, alors $\mu_i(P, B) = \delta_{i, \mathrm{ht}\, P}$, où $\delta_{i, \mathrm{ht}\, P}$ désigne le symbole de Kronecker et* ht *P la hauteur de P.*

Preuve. D'après (4.6), B_P est un anneau local régulier, d'où $\mathrm{gl} \cdot \dim B_P = \mathrm{ht}\, P = d$; donc $\operatorname{Ext}^i_{B_P}(B_P/PB_P, B_P) = 0$ si $i > \mathrm{ht}\, P$. D'après ([17, Prop. 1 et 2) on a $\operatorname{Ext}^i_{B_P}(B_P/PB_P, Bp) = 0$ si $i < \mathrm{ht}\, P$ et $\operatorname{Ext}^d_{B_P}(B_P/PB_P, B_P) \approx B_P/PB_P \approx Fr(B/P)$. Or $Fr(B/P) \otimes_B \operatorname{Ext}^i_B(B/P, B) \approx S^{-1}\operatorname{Ext}^i_B(B/P, B) \approx \operatorname{Ext}^i_{B_P}(B_P/PB_P, B_P)$ pour tout $i \geq 0$ où $S = C(P)$. Ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 4.9. *Soient g une k-algèbre de Lie nilpotente, R une k-algèbre noethérienne première g-hypercentrale g-régulièrement localisable, $B = R_m$, $0 \leq m \leq n$, $Q \subseteq P$ une chaîne saturée d'idéaux premiers g-invariants de B, alors $\mu_j(Q, B) > 0$ implique $\mu_{j+1}(P, B) > 0$.*

Preuve. Sous nos hypothèses, P est g-régulièrement localisable et (cf. 4.6) B_P est un anneau local régulier. De plus, on a (cf. 2.8) $\mathrm{ht}(P/Q) = 1$. Le résultat va se démontrer comme dans le cas commutatif (cf. [1, 3.1]). On pose $A = B_P$, $P' = PB_P$, $Q' = QB_P$. Comme B est g-hypercentrale, on peut choisir x dans $P \setminus Q$ tel que $x + Q$ est un élément central de B/Q. On peut vérifier que l'image de x dans A appartient à $P' \setminus Q'$ et que $\dot{x} = x + Q'$ est un élément central de A/Q'. Comme A/Q' est un anneau premier, l'élément $\dot{x}$ est non diviseur de zéro. On en déduit que la suite $0 \to A/Q' \xrightarrow{\dot{x}} A/Q' \to A/(Q' + Ax) \to 0$ est exacte. Ce qui entraîne que la suite $\mathrm{Ext}_A^j(A/Q', A) \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}_A^j(A/Q', A) \to \mathrm{Ext}_A^{j+1}(A/(Q' + Ax), A)$ est exacte. Par hypothèse, $\mu_j(Q, B) \neq 0$, donc $\mathrm{Ext}_B^j(B/Q, B) \neq 0$. On en déduit que $Fr(B/P) \otimes_B \mathrm{Ext}_B^j(B/Q, B) \neq 0$ (i.e., $\mathrm{Ext}_A^j(A/Q', A) \neq 0$). Comme x appartient au radical de A, on a $\mathrm{Ext}_A^{j+1}(A/(Q' + Ax), A) \neq 0$. Or $A/(Q' + Ax)$ est de longueur finie et le foncteur $\mathrm{Ext}_A^{j+1}(-, A)$ est exact à droite, donc $\mathrm{Ext}_A^{j+1}(A/P', A) \neq 0$.

PROPOSITION 4.10. *Soient g une k-algèbre de Lie nilpotente, R une k-algèbre noethérienne première g-hypercentrale g-régulièrement localisable et $B = R_m$, $0 \leq m \leq n$, alors B est g-caténaire. En particulier, $R\#U(g)$ est caténaire.*

Preuve. Soient $P \subset Q$ deux idéaux premiers g-invariants de B tels que $g\text{-ht}(Q/P) = 1$ et $g\text{-ht}\, P = d$. On a (cf. 2.8) $\mathrm{ht}\, P = d$ et (cf. 4.8) $\mu_d(P, B) = 1$; d'où (cf. 4.9) $\mu_{d+1}(Q, B) > 0$ et à nouveau (cf. 4.8) $\mathrm{ht}\, Q = d + 1$. On a donc (cf. 2.8) $g\text{-ht}\, Q = d + 1$.

COROLLAIRE 4.11. *Soient g une k-algèbre de Lie nilpotente, R une k-algèbre noethérienne $B = R_m$, $0 \leq m \leq n$.*

(1) *Si R est g-simple, alors B est g-caténaire. En particulier $R\#U(g)$ est caténaire.*

(2) *Si R est simple, alors B est caténaire et g-caténaire.*

Preuve. (1) C'est évident.

(2) Comme R est une k-algèbre simple, elle est g_m-hypercentrale et son unique idéal premier (0) est g_m-régulièrement localisable pour $0 \leq m \leq n$. Donc (cf. 4.10) B est caténaire.

COROLLAIRE 4.12. *Soient g une k-algèbre de Lie nilpotente, R une k-algèbre commutative noethérienne et $B = R_m$, $0 \leq m \leq n$. Si $P \subset Q$ sont deux idéaux premiers de B qui ont la même contraction dans R, alors toutes les chaînes saturées d'idéaux premiers de B d'extrémités P et Q ont la même longueur.*

Preuve. Quitte à quotienter R par $P \cap R$ et B par $(P \cap R)B$, on peut supposer que R est une k-algèbre intègre et $P \cap R = Q \cap R = (0)$. Posons $C = R \setminus \{0\}$. Alors C est un ensemble de Ore à droite et à gauche dans R; donc dans B et on a $BC^{-1} = RC^{-1}\#U(g_m)$, où RC^{-1} est le corps des fractions de R. On en déduit (cf. 4.11) que BC^{-1} est caténaire.

Or, $P \cap C = \varnothing$ et $Q \cap C = \varnothing$; donc $PC^{-1} \subset QC^{-1}$ sont des idéaux premiers de BC^{-1}. Donc toutes les chaînes saturées d'idéaux premiers de BC^{-1} d'extrémités PC^{-1} et QC^{-1} ont la même longueur. On obtient le résultat et utilisant ([4, 2.10]).

COROLLAIRE 4.13. *Soient g une k-algèbre de Lie nilpotente, R une k-algèbre commutative de type fini g-hypercentrale g-régulièrement localisable* *et $B = R_m$, $0 \leq m \leq n$. Alors B est g-caténaire et la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour les facteurs premiers g-invariants de B.*

Preuve. Les hypothèses de (4.10) sont satisfaites, donc B est g-caténaire. De plus, la formule des hauteurs de Tauvel est vraie dans R et la g-hauteur coïncide avec la hauteur sur les idéaux premiers g-invariants de R. Donc (cf. [9, 4.13]), la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour les idéaux premiers g-invariants de B. Comme B est g-caténaire, on obtient la dernière assertion.

COROLLAIRE 4.14. *Soient g une k-algèbre de Lie nilpotente, R une k-algèbre noethérienne de type fini et $B = R_m$, $0 \leq m \leq n$.*

(1) *Si R est g-simple, alors B est g-caténaire et la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour les facteurs premiers g-invariants de B.*

(2) *Si R est simple, alors B est caténaire et g-caténaire. De plus, la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour les facteurs premiers de B.*

COROLLAIRE 4.15. *Soient g une k-algèbre de Lie nilpotente, R une k-algèbre noethérienne de type fini et $B = R_m$, $0 \leq m \leq n$. Si les idéaux premiers g-invariants de B ont la même contraction dans R, alors B est g-caténaire et la formule des hauteurs de Tauvel est vraie pour les facteurs premiers g-invariants de B.*

Preuve. C'est évident à partir de (4.14 (1)).

5. DIMENSIONS DANS LES ANNEAUX MUNIS D'UNE ACTION D'ALGÈBRE DE LIE

Dans ce paragraphe, en plus des conventions et les notations précédentes, toutes les k-algèbres sont commutatives et on dira tout simplement k-algèbres. Tous les * anneaux sont supposés noethériens.

PROPOSITION 5.1. *Soit R une k-algèbre g-hypernormale*

(1) *R est g-simple si et seulement si chaque élément g-normal non nul de R est inversible.*

(2) *Si R est intègre et si S désigne l'ensemble des éléments g-normaux non nuls de R, alors S est une partie multiplicative de Ore dans R et $S^{-1}R$ est g-simple.*

Preuve. (1) Supposons que R est g-simple et soit a un élément g-normal non nul de R. On sait que Ra est un idéal g-invariant de R; donc $Ra = 0$ ou $Ra = R$. Or $Ra \neq 0$, donc $Ra = R$. Comme R est un anneau unitaire, on en déduit que a est inversible. Supposons que chaque élément g-normal non nul de R est inversible et soit I un idéal g-invariant non nul de R. L'idéal I contient donc un élément g-normal non nul a. Or, l'élément a est inversible, donc I contient l'élément unité de R, d'où $I = R$.

(2) Il est clair que S est une partie multiplicative de Ore dans R. Munissons $S^{-1}R$ de la structure de g-module définie par $\delta_X(a/s) = -a\delta_X(s)/s^2 + \delta_X(a)/s$, pour $X \in g$, $a \in R$ et $s \in S$. Il est clair que $S^{-1}R$ est g-hypernormale.

Pour montrer que $S^{-1}R$ est g-simple, on montrera que chaque élément g-normal non nul de $S^{-1}R$ est inversible. Soit donc a/s un élément g-normal non nul de $S^{-1}R$. Donc $J = (S^{-1}R)(a/s) = S^{-1}(Ra)$ est un idéal g-invariant non nul de $S^{-1}R$. L'image inverse de J par l'application canonique $R \to S^{-1}R$ est un idéal g-invariant non nul I de R. Comme R est g-hypernormal, I contient un élément b de S tel que $b/1 \in J$. Il existe donc $0 \neq u \in R$ et $t \in S$ tels que $ua = bt$. On en déduit que $ua \in S$. Ce qui prouve que a/s est inversible d'inverse us/ua.

THÉORÈME 5.2. *Soit A une k-algèbre de type fini g-simple ou une localisation d'une k-algèbre de type fini g-simple, alors A est un anneau intègre régulier de dimension au plus égale à n.*

Preuve. Il est clair que A est un anneau intègre. D'après ([10, corollary of theorem 1]) A est un anneau régulier. Or A est un $(A\#U(g) - A)$ bimodule de type fini des deux côtés et fidèle à droite. Donc (cf. [8, 12–4]) $\dim A \leq \dim A\#U(g)$ et (cf. [9, 4–11]), $\dim(A\#U(g)) \leq n$.

COROLLAIRE 5.3. *Soient R une k-algèbre intègre g-hypernormale de type fini et S l'ensemble des éléments g-normaux non nuls dans R. Alors $S^{-1}R$ est un anneau intègre régulier de dimension au plus égale à n.*

DÉFINITION 5.4. *Soit R une k-algèbre commutative noethérienne. La g-dimension de Krull classique de R notée* g-dim R *est la borne supérieure des g-hauteurs de P, où P parcourt l'ensemble des idéaux premiers g-invariants de R.*

Les corollaires (2.9) *et* (5.3) *vont maintenant nous permettre d'établir une relation entre la dimension de Krull classique et la g-dimension de Krull classique d'une k-algèbre g-hypernormale de type fini R.*

THÉORÈME 5.5. *Soient R une k-algèbre g-hypernormale de type fini et P un idéal premier de R. Alors*:

(1) $\operatorname{ht} P \leq g\text{-ht}(P^+) + n$.

(2) $\dim R \leq g\text{-dim } R + n$.

(3) $\operatorname{ht} P = g\text{-ht}(P^+) + m$, *où m est le nombre minimum de générateurs de PR_P/P^+R_P dans R_P/P^+R_P.*

Preuve. Posons $\bar{R} = R/P^+$. L'anneau $\bar{R}$ est intègre. Soit $\bar{S}$ l'ensemble des éléments g-normaux non nuls dans $\bar{R}$ et posons $T = \bar{S}^{-1}\bar{R}$. Il est clair que $(P/P^+)^+ = 0$, donc $(P/P^+) \cap \bar{S} = \emptyset$. On en déduit que $\mathrm{ht}(P/P^+) = \mathrm{ht}((P/P^+)T)$.

D'après (5.1 (2)), T est g-simple et d'après (5.3), T est régulier de dimension au plus égale à n. Le corollaire (2.9) donne (1) et (2). Maintenant, posons $Q = (P/P^+)T$. Comme T est régulier, il est bien connu que $\mathrm{ht}\, Q = \mathrm{ht}(QT_Q) = m$, où m est le nombre minimum de générateurs de QT_Q; or $T_Q = R_P/P^+R_P$ et $QT_Q = PR_P/P^+R_P$, d'où (3).

LEMME 5.6. (1) *Soit R une k-algèbre noethérienne. Si M est un projectif dans la catégorie des $R\#U(g)$-modules, alors M est un projectif dans la catégorie des R-modules.*

(2) *Soit R un * anneau. Si M est un projectif dans la catégorie des * modules, alors M est un projectif dans la catégorie des R-modules.*

Preuve. (1) L'application naturelle Π: $R \otimes_k M \to M$ est un épimorphisme de $R\#U(g)$-modules. Posons $K = \ker \Pi$.

Alors K est un sous-$R\#U(g)$-module de $R \otimes_k M$ et on a la suite exacte de $R\#U(g)$-modules $0 \to K \to R \otimes_k M \to M \to 0$.

Comme M est un porjectif dans la catégorie de $R\#U(g)$-modules, cette suite exacte est scindée. Or $R \otimes_k M$ est un projectif dans Mod_R, d'où le résultat.

(2) La démonstration est identique à celle de (1).

DÉFINITIONS 5.7. Soient R une k-algèbre noethérienne et M un $R\#U(g)$-module.

—La g-dimension projective de M notée $g\text{-pd}_R M$ est le plus petit entier m tel que $\mathrm{Ext}^i_R(M, N) = 0$ pour tout $i > m$ et pour tout $R\#U(g)$-module N.

—La g-dimension injective de M notée $g\text{-id}_R M$ est le plus petit entier m tel que $\mathrm{Ext}^i_R(N, M) = 0$ pour tout $i > m$ et pour tout $R\#U(g)$-module N.

—La g-dimension globale de R notée $g\text{-gl}\dim R$ est le plus petit entier m tel que $\mathrm{Ext}^i_R(P, Q) = 0$ pour tout $i > m$ et pour tous $R\#U(g)$-modules P et Q.

Il est clair qu'on a les inégalités $g\text{-pd}_R M \leq \mathrm{pd}_R M$;

$$g\text{-id}_R M \leq \mathrm{id}_R M \qquad \text{et} \qquad g\text{-gldim}\, R \leq \mathrm{gldim}\, R.$$

On définit de même la * dimension projective de M notée * $\mathrm{pd}_R M$, la * dimension injective de M notée * $\mathrm{id}_R M$ et la * dimension globale de R notée * $\mathrm{gl}\dim R$ où R est un * anneau et M un * module

Il est clair qu'on a les inégalités * $\mathrm{pd}_R M \leq \mathrm{pd}_R M$;

$$^*\mathrm{id}_R M \leq \mathrm{id}_R M \qquad \text{et} \qquad ^*\mathrm{gl}\dim R \leq \mathrm{gl}\dim R.$$

THÉORÈME 5.8. (1) *Soient R une k-algèbre noethérienne et M un $R\#U(g)$-module. Alors* $g\text{-pd}_R M = \text{pd}_R M$.

(2) *Soit R un * anneau et M un * module, alors* $^*\,\text{pd}_R M = \text{pd}_R M$.

Preuve. Il suffit de montrer le résultat pour M lorsque $g\text{-pd}_R M = 0$. La preuve se fait comme en (5.6) en utilisant la longue suite exacte des $\text{Ext}_R(-,-)$.

THÉORÈME 5.9. *Soient R une k-algèbre g-hypernormale de type fini. Alors on a* $g\text{-gl}\dim R \leq \text{gl}\dim R \leq g\text{-gl}\dim R + n$.

Preuve. La première inégalité a déjà été signalée. Montrons donc la deuxième inégalité. On a $\text{gl}\dim R = \sup\{\text{pd}_R(R/M)$, où M parcourt l'ensemble des idéaux maximaux de $R\}$. Soient M un idéal maximal de R, S l'ensemble des éléments g-normaux non nuls dans R/M^+ et $T = S^{-1}(R/M^+)$. Il est clair que R/M est un R/M^+-module, donc un T-module. On en déduit que $\text{pd}_R(R/M) \leq \text{pd}_T(R/M) + \text{pd}_R T$. D'après (5.1) et (5.3), T est régulier de dimension au plus égale à n; donc $\text{pd}_T(R/M) \leq n$. Or T est un $R\#U(g)$-module, donc d'après (5.8), $\text{pd}_R T = g\text{-pd}_R T$. Puisque $g\text{-pd}_R T \leq g\text{-gl}\dim R$, on obtient le résultat.

PROPOSITION 5.10. *Soient R une k-algèbre g-hypernormale de type fini, P un idéal premier de R et M un R-module. Si $\mu_i(P^+, M) = 0$ pour $i > r$, alors $\mu_i(P, M) = 0$ pour $i > r + n$.*

Preuve. Posons $T = R_P/P^+R_P$ et $\overline{T} = R_P/PR_P$. On a (cf. [6, page 349]) la suite spectrale $\text{Ext}^j_T(\overline{T}, \text{Ext}^i_{R_P}(T, M_P)) \Rightarrow \text{Ext}^m_{R_P}(\overline{T}, M_P)$.

Soit S l'ensemble des éléments g-normaux non nuls dans R/P^+. On a $(P/P^+) \cap S = \varnothing$, donc T est une localisation de $S^{-1}(R/P^+)$. On en déduit (cf. 5.3) que T est régulier de dimension au plus égale à n; donc $\text{Ext}^j_T(-,-) = 0$ si $j > n$. Supposons $\mu_i(P^+, M) = 0$ pour $i > r$; donc $\text{Ext}^i_{R_P}(T, M_P) = 0$ pour $i > r$ et la suite spectrale ci-dessus dégénère et donne $\text{Ext}^j_T(\overline{T}, \text{Ext}^i_{R_P}(T, M_P)) = 0$ pour $i + j > r + n$; donc $\text{Ext}^m_{R_P}(\overline{T}, M_P) = 0$ pour $m > r + n$, c'est-à-dire que $\mu_m(P, M) = 0$ pour $m > r + n$.

COROLLAIRE 5.11. *Soient R une k-algèbre g-hypernormale de type fini et M un $R\#U(g)$-module. Alors* $g\text{-id}_R M \leq \text{id}_R M \leq g\text{-id}_R M + n$.

Preuve. Nous montrerons seulement la deuxième inégalité. Par définition de $g\text{-id}_R$, on a $\mu_i(P^+, M) = 0$ pour $i > g\text{-id}_R M$.

On en déduit (cf. 5.10) que $\mu_i(P, M) = 0$ pour $i > g\text{-id}_R M + n$, donc $\text{id}_R M \leq g\text{-id}_R M + n$.

COROLLAIRE 5.12. *Soit R une k-algèbre g-hypernormale de type fini. Alors R est régulière si et seulement si R_Q est régulière pour tout idéal premier g-invariant Q de R.*

Preuve. Montrons que la condition est suffisante. Pour cela, soient M un R-module et $Q \subseteq P$ deux idéaux premiers de R. Par hypothèse, $\mu_i(Q^+, M) = 0$ pour $i > \operatorname{gl\,dim} R_{Q^+} = \dim R_{Q^+} = \operatorname{ht}(Q^+)$. Donc (cf. 5.10) $\mu_i(Q, M) = 0$ pour $i > \operatorname{ht}(Q^+) + n$ et (cf. 5.5), $\mu_i(Q, M) = 0$ pour $i > \operatorname{ht} Q$, d'où $\mu_i(Q, M) = 0$ pour $i > \operatorname{ht} P$. Il en résulte que $\operatorname{id}_{R_P} M_P \leq \operatorname{ht} P < +\infty$; donc $\operatorname{gl\,dim} R_P < \infty$ et R est un anneau régulier.

COROLLAIRE 5.13. *Soit R une k-algèbre g-hypernormale de type fini. Alors R est un anneau de Gorenstein si et seulement si R_Q est un anneau de Gorenstein pour tout idéal premier g-invariant Q de R.*

Preuve. Montrons que la condition est suffisante. Soit P un idéal premier de R. En remplaçant M par R_P dans la preuve de (5.12), on obtient $\operatorname{id}_{R_P} R_P < +\infty$. Donc R_P est un anneau de Gorenstein.

Nous allons examiner le cas particulier où R est un * anneau.

A partir de maintenant, on suppose k algébriquement clos et g-résoluble.

LEMME 5.14. *Soit R un * anneau g-simple. Alors tout * module de type fini M est un R-module libre.*

Preuve. Supposons d'abord que M est un * module monogène dont le générateur m est un semi-invariant; donc $U(g) \cdot m \approx k \cdot m$ et $M = (R\#U(g))m = Rm$. Il est clair que ann (m) est un idéal g-invariant de R. Or R est g-simple, donc ann $(m) = 0$ ou R. Mais ann $(m) \neq R$, car $1 \in R$ et $1 \cdot m = m \neq 0$; donc ann $(m) = 0$; donc M est $R\#U(g)$-isomorphe à R.

Maintenant, si M est un * module de type fini, alors M admet une suite de composition dans laquelle chaque facteur est un * module monogène de générateur un semi-invariant. D'après ce qui précède, chaque facteur de la suite est R-libre. Donc M est R-libre.

THÉORÈME 5.15. *Soit R un * anneau g-simple. Alors R est un anneau intègre régulier de dimension au plus égale à n.*

Preuve. Il est clair que R est intègre. Sous nos hypothèses, $R = \operatorname{dir\,lim} R_i$, où chaque R_i est un sous * anneau de type fini de R. Soit S_i l'ensemble des éléments g-normaux non nuls de R_i et posons $T_i = S_i^{-1}R_i$. D'après (5.1, (1)) $T_i \subseteq R$; donc $R = \operatorname{dir\,lim} T_i$. D'après (5.1 (2)) chaque T_i est un * anneau g-simple. Supposons $T_i \subseteq T_j$. Alors T_j est limite directe de ses sous-$T_i\#U(g)$-modules de type fini $T_{j\alpha}$. D'après (5.14) chaque $T_{j\alpha}$ est T_i-libre; donc T_j est T_i-plat. Il en résulte que les inclusions $T_i \subseteq T_j$ sont des morphismes plats. D'après (5.2) chaque T_i est un anneau régulier de dimension égale au plus à n; d'où le résultat.

THÉORÈME 5.16. *Soient R un * anneau et P un idéal premier de R. Alors*:
(1) $\operatorname{ht} P \leq g\text{-}\operatorname{ht}(P^+) + n$.
(2) $\dim R \leq g\text{-}\dim R + n$.

(3) ht $P = g\text{-ht}(P^+) + m$, *où* m *est le nombre minimum de générateurs de* PR_P/P^+R_P *dans* R_P/P^+R_P.

Preuve. La preuve se fait comme en (5.5).

THÉORÈME 5.17. *Soit* R *un * anneau, alors on a*

$$* \operatorname{gl\,dim} R \leq \operatorname{gl\,dim} R \leq {}^*\operatorname{gl\,dim} R + n.$$

Preuve. La démonstration se fait comme en (5.9).

THÉORÈME 5.18. *Soient* R *un * anneau,* P *un idéal premier de* R *et* M *un* R*-module. Si* $\mu_i(P^+, M) = 0$ *pour* $i > r$, *alors* $\mu_i(P, M) = 0$ *pour* $i > r + n$.

Preuve. La preuve se fait comme en (5.10).

COROLLAIRE 5.19. *Soient* R *un * anneau, et* M *un * module. Alors* $^*\operatorname{id}_R M \leq \operatorname{id}_R M \leq {}^*\operatorname{id}_R M + n$.

Preuve. La démonstration se fait comme en (5.11).

COROLLAIRE 5.20. *Soit* R *un * anneau, alors* R *est régulier si et seulement si* R_Q *est régulier pour tout idéal premier g-invariant* Q *de* R.

Preuve. La preuve se fait comme en (5.12).

COROLLAIRE 5.21. *Soit* R *un * anneau, alors* R *est de Gorenstein si et seulement si* R_Q *est de Gorenstein pour tout idéal premier g-invariant* Q *de* R.

Preuve. La preuve se fait comme en (5.13).

Nous allons maintenant établir un résultat analogue aux corollaires (5.12) et (5.13) pour les anneaux de Cohen–Macaulay lorsque R est un * anneau.

LEMME 5.22 ([16, Lemme 15]). *Soient* A *un anneau commutatif,* I *un idéal de* A *et* M *un* A*-module tels que* $\operatorname{Ext}^i_A(A/I, M)$ *est un* A/I*-module libre pour tout* i *et* $\operatorname{Ext}^i_A(A/I, M) = 0$ *pour* $i < d$. *Soient* x *un élément non diviseur de zéro dans* A/I *et* $I' = I + Ax$. *Alors* $\operatorname{Ext}^i_A(A/I', M)$ *est* A/I'*-libre pour tout* i *et* $\operatorname{Ext}^i_A(A/I', M) = 0$ *pour* $i \leq d$.

Le résultat suivant est une version plus forte de (5.8) dans le cas des * modules.

THÉORÈME 5.23. *Soient* R *un * anneau,* M *un * module de type fini,* P *un idéal premier de* R *et* $s = \operatorname{ht} P - \operatorname{ht}(P^+)$. *Si* $\mu_i(P^+, M) = 0$ *pour* $i < r$, *alors* $\mu_i(P, M) = 0$ *pour* $i < r + s$.

Preuve. Soit S l'ensemble des éléments g-normaux non nuls dans R/P^+ et $T = S^{-1}(R/P^+)$. Alors T est un * anneau g-simple et $\operatorname{Ext}^i_R(T, M)$ est un $T\#U(g)$-module g-localement fini de type fini et (cf. 5.14)

$\mathrm{Ext}^i_R(T, M)$ est T-libre. Posons $Q = (P/P^+)T$. On a $R_P/P^+R_P = T_Q$ et, après localisation, $\mathrm{Ext}^i_{R_P}(T_Q, M_P)$ est T_Q-libre. Comme dans (5.10), nous avons la suite spectrale

$$\mathrm{Ext}^j_{T_Q}\big(\overline{T}_Q, \mathrm{Ext}^i_{R_P}(T_Q, M_P)\big) \Rightarrow \mathrm{Ext}^m_{R_P}\big(\overline{T}_Q, M_P\big), \text{ où } \overline{T}_Q = R_P/PR_P.$$

Comme T_Q est un anneau local régulier, on a (cf. [1, 3.6, p. 14]) $\mathrm{Ext}^j_{T_Q}(\overline{T}_Q, T_Q) = 0$ pour $j \neq \dim T_Q$. On en déduit que $\mathrm{Ext}^j_{T_Q}(\overline{T}_Q, \mathrm{Ext}^i_{R_P}(T_Q, M_P)) = 0$ pour $j \neq \dim T_Q$. D'après (2.9), $\dim T_Q = \mathrm{ht}(QT_Q) = \mathrm{ht}(PR_P/P^+R_P) = \mathrm{ht}(P/P^+) = s$; donc la suite spectrale dégénère et donne $\mathrm{Ext}^s_{T_Q}((\overline{T}_Q, \mathrm{Ext}^i_{R_P}(T_Q, M_P)) = \mathrm{Ext}^{s+i}_{R_P}(\overline{T}_Q, M_P)$. Il en résulte que $\mu_m(P^+, M) = 0$ implique $\mu_{m+s}(P, M) = 0$ pour tout m. En particulier, si $\mu_i(P^+, M) = 0$ pour $i < r$, alors $\mu_i(P, M) = 0$ pour $s \leq i < r + s$. Comme T_Q est un anneau local régulier, l'idéal $PR_P/P^+R_P = QT_Q$ est engendré par une T_Q-suite régulière $x_1, \ldots, x_s$. Posons $I_j = P^+R_P + R_Px_1 + \cdots + R_Px_j$, donc $I_0 = P^+R_P$ et $I_s = PR_P$. Maintenant, $\mathrm{Ext}^i_{R_P}(R_P/I_0, M_P) = \mathrm{Ext}^i_{R_P}(T_Q, M_P)$ est un R/I_0-module libre pour tout i et, par hypothèse, $\mathrm{Ext}^i_{R_P}(T_Q, M_P) = 0$ pour $i < s$. Le lemma (5.22) et une démonstration par récurrence montrent que $\mathrm{Ext}^i_{R_P}(R_P/PR_P, M_P) = 0$ pour $i < s$, donc $\mu_i(P, M) = 0$ pour $i < s$. Ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 5.24. *Soit R un * anneau. Alors R est un anneau de Cohen–Macaulay si et seulement si R_P est un anneau de Cohen–Macaulay pour tout idéal premier g-invariant P de R.*

Preuve. La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Pour cela, soit P un idéal premier de R. D'après les hypothèses, R_{P^+} est un anneau de Cohen–Macaulay, donc (cf. [1, 3.7, p. 14]) $\mu_i(P^+, R) = 0$ pour tout $i < \mathrm{ht}(P^+)$. D'après (5.23), on a $\mu_i(P, R) = 0$ pour $i < \mathrm{ht}(P^+) + (\mathrm{ht}\, P - \mathrm{ht}(P^+)) = \mathrm{ht}\, P$; donc à nouveau (cf. [1, 3.7, p. 14]) R_P est un anneau de Cohen–Macaulay. On en déduit que R est un anneau de Cohen–Macaulay.

REMERCIEMENT

Je voudrais remercier le rapporteur anonyme pour les suggestions et remarques faites sur la version initiale.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Bass, On the ubiquity of Gorenstein rings, *Math. Z.* **82** (1963), 8–28.
2. A. D. Bell, Localization and ideal theory in iterated differential operator rings, *J. Algebra*, **106**, volume 2, (1987), 376–401.

3. A. D. Bell et G. Sigurdsson, Catenarity and Gelfand–Kirillov dimension in Ore extensions, *J. Algebra* **127**, n° 2 (1989), 409–425.
4. W. Borho, P. Gabriel, et R. Rentschler, "Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie-Algebren," Lecture Notes in Math., Vol. **357**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973.
5. K. A. Brown, K. R. Goodearl, et T. H. Lenagan, Prime ideals in differential operator rings—catenarity, *Trans. Amer. Math Soc.* **317**, n° 2 (Feb. 1990), 749–772.
6. H. Cartan et S. Eilenberg, "Homological Algebra," Princeton Mathematical Series, Vol. 19, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1956.
7. O. Gabber, Equidimensionalité de la variété caractéristique, "Exposé de O. Gabber," rédigé par T. Levasseur, Paris VI, 1985.
8. K. R. Goodearl et R. B. Warfield Jr., "An introduction to Noncommutative Noetherian Rings," Cambridge Univ. Press, Cambridge/New York/Portchester/Melbourne/Sydney, 1989.
9. T. Guédénon, La formule des hauteurs de Tauvel dans les anneaux d'opérateurs différentiels, *Comm. in Algebra* **21**, n° 6 (1993), 2077–2100.
10. R. Hart, Dérivations on commutative rings, *J. London Math. Soc.* (2) **8** (1974), 171–175.
11. A. V. Jategaonkar, Relative Krull dimension and prime ideals in right Noetherian rings, *Comm. In Algebra* **2** (1974), 429–468.
12. G. Krause et T. Lenagan, "Growth of algebra and Gelfand–Kirillov dimension, Research notes in math., n° 116, Pitman, London, 1985.
13. M. Lorenz, Chains of prime ideals in enveloping algebras of solvable Lie algebras, *J. London Math. Society* **24** (1981), 205–210.
14. M. Lorenz, On the Gelfand–Kirillov dimension of skew polynomial ring, *J. Algebra* **77** (1982), 186–188.
15. M. Lorenz, Completely prime ideals in Ore extensions, *Comm. in Algebra* **9**, n° 11 (1981), 1227–1232.
16. A. R. Magid, Dimension in rings with solvable algebraic group action, *Math. Scand.* **47** (1980), 21–28.
17. M. P. Malliavin, Cohomologie d'algèbres de Lie nilpotentes et caractéristiques d'Euler-Poincaré, *Bull. Sci. Math. 2 Ser.*, **100** (1976), 269–287.
18. J. C. McConnel et J. Robson, "Noncommutative Noetherian rings," Wiley, Chichester/New York, 1987.
19. L. H. Rowen, "Polynomial Identities in Ring Theory," Pure and Applied Mathematics, Vol. 84, Academic Press, New York, 1980.
20. W. Schelter, Non-commutative affine PI rings are catenary, *J. Algebra* **51** (1978), 12–18.
21. P. F. Smith, Localization and the AR property, *Proc. London Math. Soc.* (*3*) **22** (1971), 39–68.
22. P. F. Smith, Noncommutative regular local rings, *Glasgow Math. J.* **17** (July 1976), 98–102.
23. R. Walker, Local rings and normalizing sets of elements, *Proc. London Math. Soc.* (*3*) **24** (1972), 27–45.

JOURNAL OF ALGEBRA **197**, 372–384 (1997)
ARTICLE NO. JA977074

Localisation dans les anneaux munis d'une action d'algèbre de Lie résoluble

Thomas Guédénon

37 rue Pasteur, 92800, Puteaux, France

Communicated by Robert Steinberg

Received March 30, 1996

A MA TANTE FÉLICIENNE DE LOUZA

INTRODUCTION

Dans tout l'exposé, k désigne le corps des nombres complexes, g une k-algèbre de Lie de dimension finie n d'algèbre enveloppante $U(g)$, R une k-algèbre (toujours associative et unitaire). On suppose que g opère par dérivations sur R via un morphisme d'algèbres de Lie δ de g vers l'algèbre de Lie des k-dérivations de R. On note $A = R \# U(g)$ l'anneau d'opérateurs différentiels étudié dans [2].

Soient g résoluble, R commutative noethérienne, P un idéal premier de A et Ω (P) la clique de P. Posons $\mathscr{T} = \bigcap\{A \setminus Q$; où Q parcourt Ω $(P)\}$. D'après [8, 7.7], $\mathscr{T}$ est un ensemble de Ore dans A. Donc $A_{\mathscr{T}}/M$ est un anneau simple artinien si M est un idéal primitif à droite de $A_{\mathscr{T}}$ [8, 7.7; 10, 7.1].

Fixons un idéal t de g et posons $B_2 = R \# U(t)$. Soit h un idéal de g contenant t et maximal par rapport à la propriété

$$P \cap B_1 = (P \cap B_2)B_1, \qquad \text{où } B_1 = R \# U(h).$$

On dit que la condition (L_1) (respectivement (L_2)) est satisfaite pour P si $P \cap B_1$ est localisable (respectivement $Q \cap B_1$ est localisable pour tout Q appartenant à Ω (P)).

Il est clair que (L_2) entraîne (L_1). La condition (L_2) est satisfaite pour P dans les cas suivants:

1*er cas*. Si g est nilpotente, R est intègre et QR_Q est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments; où $Q = P \cap R$ (cf. 3.4).

2*ème cas*. Si dim $g = 1$ (cf. preuve de 4.4).

0021-8693/97 $25.00

3ème cas. Si R est intègre g-localement finie et QR_Q est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments; où $Q = P \cap R$ (cf. 1.1 et 5.3). En particulier, si R est régulière intègre et g opère trivialement sur R.

4ème cas. Si R est g-simple (cf. 1.1 et remarques 5.8).

Le but de l'exposé est d'étendre à l'anneau $R \# U(g)$, lorsque R est intègre et g-hypernormale, certains résultats obtenus pour $U(g)$ par K. A. Brown dans [7, 6.1].

Plus précisément, nous montrons (cf. 4.2) que si M est un idéal primitif de $A_{\mathcal{G}}$, si QR_Q est engendré par un ensemble régulier g-normalisant d'éléments; où $Q = P \cap R$ et si la condition (L_2) est satisfaite pour P, alors M est engendré par un ensemble régulier normalisant contenant d éléments; où d, la hauteur de M est aussi la dimension globale et la dimension de Krull de $A_{\mathcal{G}}$.

Dans les premier, troisième et quatrième cas ci-dessus, nous montrons que l'entier d est aussi égal à la hauteur de P. Nous discutons alors dans ces trois cas des nombres de Bass dans l'anneau $R \# U(g)$. Dans le troisième cas, le résultat est amélioré si dim $g = 1$.

1. PRÉLIMINAIRES

Les notations et les définitions suivantes seront utilisées dans l'exposé.

Un anneau noethérien signifie noethérien à droite et à gauche.

Soient A un anneau noethérien et P un idéal premier de A.

On note ht P la hauteur de P.

On pose $\mathscr{C}_A(P) = \{a \in A$ tel que $a + P$ est régulier dans $A/P\}$.

Le grade de P est l'entier

$$j_A(P) = \inf\{i : \operatorname{Ext}^i_A(A/P, A) \neq 0\};$$

où A/P et A sont considérés comme A-modules à gauche ou à droite.

Si P est complètement premier, $\operatorname{Fr}(A/P)$ désigne le corps des fractions de A/P et $\mu_i(P, A)$ la dimension sur $\operatorname{Fr}(A/P)$ du $\operatorname{Fr}(A/P)$ — espace vectoriel $\operatorname{Fr}(A/P) \otimes_A \operatorname{Ext}^i_A(A/P, A)$.

Les nombres μ_i ont été introduits en algèbre commutative par H. Bass [1] et dans les algèbres enveloppantes par M. P. Malliavin [11]. On trouvera une définition plus générale des nombres μ_i dans [9, Sect. 4].

On note gl $- d(A)$ et $K - d(A)$ la dimension globale et la dimension de Krull au sens de Gabriel et Rentschler de A.

Nous utilisons la notion d'anneau local régulier au sens de Walker [12].

Soient P et Q deux idéaux premiers de A. La notation $P \rightsquigarrow Q$ signifie qu'il existe un lien de P vers Q. Pour la définition de cette notion et de la clique d'un idéal premier, on pourra consulter [10].

Le lemme suivant se démontre en adaptant la preuve de [8, 7.3] à notre contexte. Il est utile pour les paragraphes 4 et 5.

LEMME 1.1. *Soient R noethérienne, h un idéal de g, $A = R \# U(g)$, $B = R \# U(h)$ et $P \rightsquigarrow Q$ deux idéaux complètement premiers de A tels que $P \cap B$ et $Q \cap B$ soient complètement premiers.*

(1) *Si $P \cap B$ est localisable, alors $Q \cap B \subseteq P \cap B$*

(2) *Si $Q \cap B$ est localisable, alors $P \cap B \subseteq Q \cap B$.*

2. ELÉMENTS g-NORMALISANTS DE R

Soit R noethérienne.

Si I est un idéal g-invariant de R et si b est un élément g-normal de R non contenu dans I, alors $I + Rb$ est un idéal g-invariant de R.

Si $\{b_1, b_2, \ldots, b_i\}$ est un ensemble normalisant d'éléments R, on note $(b_1, b_2, \ldots, b_i)$ l'idéal de R qu'il engendre.

DÉFINITION 2.1. Soit R noethérienne. Les éléments $b_1, b_2, \ldots, b_l$ forment un ensemble g-normalisant d'éléments de R si

(i) b_1 est un élément g-normal non nul dans R

(ii) $b_i + (b_1, \ldots, b_{i-1})$ est un élément g-normal non nul dans $R/(b_1, \ldots, b_{i-1})$ pour $1 \leq i \leq l$.

On définit de façon similaire la notion d'ensemble g-centralisant d'éléments de R et d'ensemble normalisant semi-invariant d'éléments de R.

THÉORÈME 2.2. *Soient R noethérienne et I un idéal g-invariant de R.*

(i) *Si R est g-hypernormale, alors I est engendré par un ensemble g-normalisant d'éléments de R.*

(ii) *Si R est g-hypercentrale, alors I est engendré par un ensemble g-centralisant d'éléments de R.*

Preuve. (i) On suppose $I \neq 0$. D'après nos hypothèses, I contient un élément g-normal non nul b_1 de R. Supposons que $\{b_1, \ldots, b_i\}$ est un ensemble g-normalisant d'éléments de R contenu dans I. Posons $J = (b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i)$. Si $I = J$, alors le résultat est vrai. Si $I \neq J$, alors il existe $b_{i+1} \in I \setminus J$ tel que $b_{i+1} + J$ est un élément g-normal non nul de R/J. Donc $\{b_1, \ldots, b_{i+1}\}$ est un ensemble g-normalisant d'éléments de R. Si $I = J + (b_{i+1})$, alors la démonstration est terminée. Si $I \neq J + (b_{i+1})$, on recommence le même processus. Comme R est noethérienne, on conclut que I est engendré par un ensemble g-normalisant d'éléments de R.

(ii) La démonstration se fait comme en (i).

COROLLAIRE 2.3. *Soit R noethérienne g-hypercentrale. Alors tous les idéaux premiers g-invariants de R sont localisables.*

Preuve. Soit P un idéal premier g-invariant de R. D'après le théorème (2.2), P est engendré par un ensemble g-centralisant d'éléments de R. Or un ensemble g-centralisant d'éléments est un ensemble centralisant d'éléments. Le résultat est maintenant évident.

Soient k algébriquement clos, g résoluble et R commutative noethérienne g-localement finie. Si I est un idéal g-invariant de R, alors I est engendré par un ensemble (normalisant) semi-invariant d'éléments de R.

Soit R noethérienne, h un idéal de g et $B = R \# U(h)$. Si $\{a_1, \ldots, a_l\}$ est un ensemble g-normalisant (respectivement régulier g-normalisant) d'éléments de R, alors $\{a_1, \ldots, a_l\}$ est un ensemble g-normalisant (respectivement régulier g-normalisant) d'éléments de B.

Soit Q un idéal g-invariant de R. Si $\{a_1, \ldots, a_l\}$ est un ensemble g-normalisant d'éléments de R qui engendre Q, alors $\{a_1, \ldots, a_l\}$ engendre QB.

Si $\mathscr{C}$ est un ensemble de Ore dans R, alors, d'après [3, 4.5], $\mathscr{C}$ est un ensemble de Ore dans B et $B_{\mathscr{C}} = R_{\mathscr{C}} \# U(h)$. Si $\mathscr{C}$ est composé d'éléments réguliers et si $\{a_1, \ldots, a_l\}$ est un ensemble g-normalisant d'éléments de R, alors $\{a_1, \ldots, a_l\}$ est un ensemble g-normalisant d'éléments de $R_{\mathscr{C}}$.

Soit Q un idéal premier g-invariant de R. Si $\{a_1, \ldots, a_l\}$ est un ensemble g-normalisant d'éléments de R qui engendre Q, alors $\{a_1, \ldots, a_l\}$ engendre $Q_{\mathscr{C}}$.

Remarque. Tout ce qui a été dit ci-dessus reste vrai lorsqu'on remplace "g-normalisant" par "g-centralisant" ou par "normalisant semi-invariant" dans les hypothèses et les conclusions.

3. RÉSULTATS GÉNÉRAUX SUR LA LOCALISATION DANS $R \# U(g)$

Dans ce paragraphe et les suivants, g est résoluble.

Soit $0 = g_0 \subset g_1 \subset \cdots \subset g_n = g = g$ une suite de composition de g; donc g_i est un idéal de g et g_i/g_{i-1} est de dimension 1, pour $1 \leq i \leq n$. Soit $\lambda_i \in g^*$ la valeur propre de l'action adjointe de g sur g_i/g_{i-1}, $1 \leq i \leq n$. Les λ_i sont les valeurs de Jordan–Hölder de g.

Pour $i = 1, 2, \ldots, n$; fixons $X_i \in g_i \setminus g_{i-1}$; donc $(X_1, X_2, \ldots, X_i)$ est une base de g_i. Posons $R = R_0$ et $R_i = R \# U(g_i)$; $0 \leq i \leq n$; donc $R_n = R \# U(g)$.

Si R est g-hypernormale, nous avons montré dans [9, 2.18] que chaque R_i est g-hypernormale. Afin de rendre l'exposé bien clair, apportons quelques précisions à ce résultat. Fixons un entier $i = 1, 2, \ldots, n$ et un entier $j \leq i$. D'après la preuve de [9, 2.15], si $I_1 \subset I_2$ sont deux idéaux g-invariants de R_i, alors il existe $t \in I_2 \setminus I_1$ tel que

(1) pour tout $u \in R_j$, il existe $v \in R_j$ vérifiant $ut - tv \in I_1$. Dans le cas particulier, où R est commutative, $ut - tu \in I_1$ pour tout $u \in R$.

(2) pour tout $X \in g$, $\delta_X(t) - r_X t - m_1 \lambda_1(X)t - \cdots - m_i \lambda_i(X)t \in I_1$; où $r_X \in R$, les m_j pour $j \leq i$ sont des entiers naturels et m_i est le degré minimal en X_i d'un élément de $I_2 \setminus I_1$ à coefficients dans R_{i-1}. Pour la définition des entiers $m_1, \ldots, m_{i-1}$, on pourra se reporter à la preuve de [9, 2.15].

(3) Si R est g-hypercentrale, alors $r_X = 0$ pour tout $X \in g$.

(4) Si R est commutative g-localement finie, alors $r_X = \phi(X)$ pour tout $X \in g$; où ϕ est un caractère de g.

Dans ces conditions, [9, 4.4] peut être généralisé de la façon suivante:

LEMME 3.1. *Soient R noethérienne à droite g-hypernormale, P un idéal premier g-invariant de $B = R_m$, $P_1 = P \cap R_i$ et $P_2 = P \cap R_{i-1}$; $1 \leq i \leq m \leq n$. Alors P_1 et $P_2 R_i = R_i P_2$ sont des idéaux premiers g-invariants de R_i. De plus, soit $P_1 = P_2 R_i$, ou bien il existe $p \in P_1 \setminus R_i P_2$ tel que*

(i) *$\delta_X(p) - u_X p - m\lambda(X)p \in R_i P_2$ pour tout $X \in g$; où $u_X \in R$ et m est le degré minimal en X_i d'un élément de $P_1 \setminus R_i P_2$ à coefficients dans R_{i-1};*

(ii) *$p + R_i P_2$ est un élément normal de $R_i / P_2 R_i$;*

(iii) *si $s \in R_i$ et $ps \in R_i P_2$, alors $s \in R_i P_2$;*

(iv) *pour tout $q \in P_1$, il existe $c \in \mathscr{C}_B(P)$ tel que $qc \in R_i P_2 + R_i p$.*

Preuve. Il suffit d'adapter la preuve de [9, 4.4] à notre contexte. Voici les grandes lignes de la démonstration. On choisit $f \in P_1 \setminus R_i P_2$ de degré minimal m en X_i et on définit K_1 et K_2 comme dans [9, 4.4]. Il existe $a_m \in K_2 \setminus K_1$ tel que $a_m + K_1$ est normal dans R_{i-1}/K_1 et $\delta_X(a_m) - u_X a_m \in K_1$ pour tout $X \in g$, où $u_X = r_X + m_1\lambda_1 + \cdots + m_{i-1}\lambda_{i-1}$ et $r_X \in R$ (cf. début de ce paragraphe). Ceci entraîne l'existence d'un élément $p \in P_1 \setminus R_i P_2$ qui vérifie (i), (ii) et (iii). Il est facile de voir que $\delta_X(a_m) - u_X a_m \in P_2 \subseteq P$ pour tout $X \in g$.

De même pour tout $r \in R$, il existe $r_1 \in R$ tel que $ra_m - a_m r_1 \in P_2 \subseteq P$. Ainsi, pour tout $u \in R_m$, il existe $v \in R_m$ tel que $ua_m - a_m v \in P$. Or $a_m \notin P$ à cause du choix de m; donc $a_m \in \mathscr{C}_B(P)$. Le reste de la démonstration se fait exactement comme dans [9, 4.4].

Remarque. D'après la preuve de (3.1), l'élément a_m (et donc c) est aussi régulier dans R_{i-1} modulo P_2.

Pour tout idéal premier g-invariant P de $B = R_m$, $\Im(B)$ désigne l'ensemble des entiers $i \leq m$ tels que $P \cap R_i \neq (P \cap R_{i-1})R_i$.

Le résultat suivant est une généralisation de [9, 4.6].

THÉORÈME 3.2. *Soient R noethérienne à droite première g-hypernormale, $B = R_m$, $0 \leq m \leq n$, P un idéal premier g-invariant localisable de B et $Q = P \cap R$. Si Q est localisable et si QR_Q est engendré par un ensemble régulier g-normalisant d'éléments, alors B_P est un anneau local régulier de dimension au plus égale à* $\dim R_Q + |\Im(B)|$; *où $|\Im(B)|$ désigne le cardinal de* $\Im(B)$.

Preuve. La démonstration se fait exactement comme [9, 4.6] on utilise (3.1) et on fait les changements appropriés.

Le résultat suivant prouve que, si R n'est pas g-hypercentrale, on peut quand même parler de localisation dans $R \# U(g)$.

THÉORÈME 3.3. *Soient R commutative noethérienne intègre, $B = R_m$, $0 \leq m \leq n$, P un idéal premier g-invariant de B et $Q = P \cap R$. On suppose que*

(1) *QR_Q est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments*;

(2) *$P \cap R_i \neq (P \cap R_{i-1})R_i$ implique $\lambda_i = 0$.*

Alors P est localisable, PB_P est engendré par un ensemble régulier g-centralisant et $\dim B_P = \dim R_Q + |\Im(B)|$.

Preuve. La démonstration va se faire comme dans [4, 2.6]. Posons $P_i = P \cap R_i$ et $\mathscr{C}_i = \mathscr{C}_{R_i}(P_i)$; $0 \leq i \leq m$.

Il suffit de montrer la propriété suivante:

$(*, i)$ $\mathscr{C}_{i-1}$ est un ensemble de Ore dans B et $P_i B_{\mathscr{C}_{i-1}}$ est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments de $(P_i)\mathscr{C}_{i-1}$.

D'après les hypothèses, $\mathscr{C}_0$ est un ensemble de Ore dans R et $Q_{\mathscr{C}_0}$ (donc $QB_{\mathscr{C}_0}$) est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments de $Q_{\mathscr{C}_0}$. Notons K_0 le corps des fractions de R/Q. Si P_1/QR_1 est non nul, alors, d'après [4, 2.1], $(P_1)_{\mathscr{C}_0}/(Q_{\mathscr{C}_0})R_1$ est engendré par un élément g-central régulier de $K_0[X_1, \delta_1]$. Il en résulte que $(P_1)_{\mathscr{C}_0}$ (et donc $P_1 B_{\mathscr{C}_0}$) est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments de $(P_1)_{\mathscr{C}_0}$. Ainsi $(*, 1)$ est vraie.

Supposons que $(*, i)$ est vraie pour $1 \leq i < m$. Il est clair que $\mathscr{C}_{i-1} \subset \mathscr{C}_i$. D'après $(*, i)$, l'idéal $(P_i)_{\mathscr{C}_{i-1}} R_{i+1}$ de $(R_{i+1})_{\mathscr{C}_{i-1}}$ est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments de $(P_i)_{\mathscr{C}_{i-1}}$. Il est donc localisable. On en déduit que $\mathscr{C}_i$ est un ensemble de Ore dans R_{i+1}, donc dans B.

Si $P_{i+1}/P_i R_{i+1}$ est non nul, on démontre comme dans le cas $(*, 1)$ que $(P_{i+1})\mathscr{C}_i$ (et donc $P_{i+1}(B_{\mathscr{C}_i})$) est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments de $(P_{i+1})\mathscr{C}_i$. Il suffit pour cela, d'appliquer [4, 2.1] à l'idéal $(P_{i+1})_{\mathscr{C}_i}/(P_i)_{\mathscr{C}_i}R_{i+1}$ de $K_i[X_{i+1}, \delta_{i+1}]$, où K_i est le corps des fractions de R_i/P_i. Ainsi, $P_{i+1}B_{\mathscr{C}_i}$ est localisable; donc $(*, i+1)$ est vraie. On en déduit que P est localisable et PB_P est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments. La dernière assertion est évidente.

COROLLAIRE 3.4. *Soient R commutative noethérienne intègre, g nilpotente, $B = R_m$, $0 \leq m \leq n$, P un idéal premier g-invariant de B et $Q = P \cap R$. Si QR_Q est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments, alors P est localisable, PB_P est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments de B_P et* $\dim B_P = \dim R_Q + |\mathfrak{I}(B)|$.

COROLLAIRE 3.5. *Sous les hypothèses de* (3.4), *soit d la hauteur de P. Alors $\mu_i(P, B) = 0$ si $i \neq d$ et $\mu_d(P, B) = 1$.*

COROLLAIRE 3.6. *Sous les hypothèses de* (3.4), *on a* $j_B(B/P) = \operatorname{ht} P$.

Preuve. Il suffit d'utiliser (3.5) et la définition du grade de P.

4. RÉSULTAT FONDAMENTAL

Dans ce paragraphe, R est commutative noethérienne, $A = R \# U(g)$ et P est un idéal premier de A. On conserve aussi les notations des paragraphes précédents.

Fixons un idéal t de g. Posons $B_2 = R \# U(t)$. Choisissons un idéal h de g maximal par rapport à la propriété $P \cap B_1 = (P \cap B_2)B_1$; où $B_1 = R \# U(h)$.

Supposons la condition (L_1) satisfaite pour P. Alors $\mathscr{S} = B_1 \setminus P \cap B_1$ est un ensemble de Ore dans B_1, donc dans A. Notons D le corps des fractions de $B_1/P \cap B_1$.

LEMME 4.1. *Sous ces hypothèses et avec ces notations, soit R intègre. Alors $A_{\mathscr{S}}/(P \cap B_1)A_{\mathscr{S}}$ est isomorphe à $D[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ l'algèbre des polynômes sur D; où l est la dimension de h.*

Preuve. Soit $(X_{l+1}, \ldots, X_n)$ une base du complémentaire de h dans g. Pour $i \in \{l+1, \ldots, n\}$, posons $h' = h \oplus kX_i$ et $A' = R \# U(h')$. Alors $P \cap A' \neq (P \cap B_1)A'$, à cause de la maximalité de h. On en déduit que $(P \cap A')/(P \cap B_1)A'$ est un idéal premier non nul de $(B_1/P \cap B_1)[X_i, \delta_i]$, donc $D[X_i, \delta_i]$ n'est pas un anneau simple; donc δ_i doit être [3, 4.7] une dérivation intérieure de D. Il existe alors $d_i \in D$ tel que l'élément $x_i = X_i - d_i$ commute avec D. Il est clair que $D[X_i] = D[x_i]$. Ainsi, $A_{\mathscr{S}}/(P \cap B_1)A_{\mathscr{S}} = D \# U(g/h) = D[x_{l+1}, \ldots, x_n]$.

Soient $i, j \in \{l+1, \ldots, n\}$. Si $Z(D)$ désigne le centre de D, alors $[x_i, x_j] = [X_i, X_j] - [X_i, d_j] - [d_i, X_j] + [d_i, d_j] = [X_i, X_j] - [d_i, d_j] \in Z(D)$, car $[X_i, \ ] = [d_i, \ ]$ sur D. On montre comme ci-dessus que $D[X_i, X_j] = D \# U(kX_i \oplus kX_j)$ n'est pas un anneau simple. Si $[x_i, x_j] \neq 0$, alors $D[X_i, X_j] = D[x_i, x_j]$ est isomorphe à $A_1(D)$, l'algèbre de Weyl d'ordre 1 sur D. Ce qui est impossible, car $A_1(D)$ est un anneau simple; donc $[x_i, x_j] = 0$. Ce qui achève la démonstration.

Notons $\Omega(P)$ la clique de P et posons $\mathscr{T} = \bigcap\{A \backslash Q$, où Q parcourt $\Omega(P)\}$. D'après [8, 7.7], $\mathscr{T}$ est un ensemble de Ore dans A. D'après [8, 7.7; 10, 7.1], les idéaux primitifs de $A_{\mathscr{T}}$ sont de la forme $QA_{\mathscr{T}}$; où Q parcourt $\Omega(P)$.

Supposons que la condition (L_1) est satisfaite pour P. D'après [10, 5.4.5; 5, 1.1], $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{T}$. Donc $A_{\mathscr{T}}$ est une localisation de $A_{\mathscr{S}}$.

Soient R intègre g-hypernormale et $Q = P \cap R$. Si QR_Q est engendré par un ensemble régulier g-normalisant d'éléments, alors, d'après (3.2), $(P \cap B_1)A_{\mathscr{S}}$ (et donc $(P \cap B_1)A_{\mathscr{T}}$) est engendré par un ensemble régulier normalisant d'éléments. Le cardinal de cet ensemble sera noté d_1.

Nous arrivons au résultat fondamental de l'exposé. Il généralise (3.2), lorsque R est commutative et $m = n$.

THÉORÈME 4.2. *Sous les hypothèses et avec les notations ci-dessus, soient R intègre g-hypernormale, M un idéal primitif de $A_{\mathscr{T}}$ et $Q = P \cap R$. Si QR_Q est engendré par un ensemble régulier g-normalisant d'éléments et si la condition (L_2) est satisfaite pour P, alors*

(1) *M est engendré par un ensemble régulier normalisant d'éléments de cardinal* $d = \dim R_Q + |\Im(A)|$.

(2) $d = \mathrm{gl} - d(A_{\mathscr{T}}) = K - d(A_{\mathscr{T}}) = \mathrm{ht}\, M$.

Preuve. (1) Posons $I = (P \cap B_1)A_{\mathscr{T}}$. D'après (L_2) et (1.1), $I = (P' \cap B_1)A_{\mathscr{T}} \subseteq P'A_{\mathscr{T}}$ pour tout P' dans $\Omega(P)$. On en déduit que I est contenu dans le radical de Jacobson de $A_{\mathscr{T}}$. D'après (4.1), $A_{\mathscr{T}}/I$ est une localisation de $D[x_{l+1}, \ldots, x_n]$. On en déduit que M/I est engendré par un ensemble régulier centralisant d'éléments de cardinal d_2, par exemple. Donc M est engendré par un ensemble régulier normalisant d'éléments de cardinal $d_1 + d_2 = d$.

(2) Il est clair que $d_2 = \mathrm{gl} - d(A_{\mathscr{T}}/I) = K - d(A_{\mathscr{T}}/I) < +\infty$.

Les deux premières égalités découlent de [12, 1.4 et 1.9]. D'après le théorème de l'idéal principal, ht $M = d$.

D'après [2, 7.9], si Q est un idéal premier g-invariant de R, alors QA est classiquement localisable.

LEMME 4.3. *Soient R intègre et Q un idéal premier g-invariant de R. Si QR_Q est engendré par un ensemble régulier g-normalisant d'éléments, alors A_{QA} est un anneau local régulier.*

Le théorème (4.2) peut être amélioré si g est de dimension 1.

THÉORÈME 4.4. *Soient g de dimension 1, R intègre, M un idéal primitif de $A_{\mathscr{T}}$ et $Q = P \cap R$. Si QR_Q est engendré par un ensemble régulier g-normalisant d'éléments, alors*

(1) *M est engendré par un ensemble régulier normalisant d'éléments de cardinal $d = \dim R_Q + |\Im(A)|$*

(2) $d = \mathrm{gl} - d(A_{\mathscr{T}}) = K - d(A_{\mathscr{T}}) = \mathrm{ht}\, M$.

Preuve. Si $P = (P \cap R)A$, alors, d'après (4.3), le résultat est vrai. Dans ce cas, $|\Im(A)| = 0$.

Si $P \neq (P \cap R)A$, alors pour $t = (0)$ et $h = (0)$ (donc $B_2 = B_1 = R$), la condition (L_2) est trivialement satisfaite pour P. Enfin, d'après les hypothèses, l'idéal $(P \cap R)A_{\mathscr{T}}$ est engendré par un ensemble régulier normalisant d'éléments. Le résultat se démontre exactement comme (4.2). Dans ce dernier cas, $|\Im(A)| = 1$.

5. QUELQUES APPLICATIONS DU RÉSULTAT FONDAMENTAL

Dans ce paragraphe, R est commutative noethérienne et $A = R \# U(g)$. On conserve les notations des paragraphes précédents.

Si λ est un caractère de g, alors le morphisme d'algèbres de Lie $g \to R \# U(g)$; $X \to X + \lambda(X)$ permet de définir un automorphisme d'algèbre R-linéaire τ_λ de $R \# U(g)$.

LEMME 5.1. *Soient R g-localement finie et $P \rightsquigarrow Q$ deux idéaux premiers de A. Alors, il existe un caractère λ g tel que $Q = \tau_\lambda(P)$.*

Preuve. Par définition, il existe, d'après [10, 5.3], un idéal I de A tel que $PQ \subseteq I \subset P \cap Q$ et $(P \cap Q)/I$ est sans torsion comme A/P module à gauche et comme A/Q-module à droite. Il existe (cf. § 3), $p \in P \cap Q \backslash I$ tel que $q = p + I$ est normal dans A/I et

$$\delta_X(q) = \phi(X)q + m_1\lambda_1(X)q + \cdots + m_n\lambda_n(X)q;$$

où ϕ est un caractère de g. Posons $\lambda = \phi + m_1\lambda_1 + \cdots + m_n\lambda_n$; donc $Xq = qX + \lambda(X)q = q\tau_\lambda(X)$ pour tout $X \in g$. On en déduit que $uq = q\tau_\lambda(u)$ pour tout $u \in U(g)$. On sait aussi que $rq = qr$ pour tout $r \in R$. Il en résulte que $aq = q\tau_\lambda(a)$ et $qa = \tau_{-\lambda}(a)q$ pour tout $a \in A$.

D'autre part, comme A/P et A/Q sont des anneaux intègres, la condition de torsion faite sur $(P \cap Q)/I$ implique que l'annulateur à gauche (respectivement à droite) de q dans A est P (respectivement Q). Tout ceci prouve que $Q = r.\ \mathrm{ann}_A(q) = \tau_\lambda(\mathrm{l.\ ann}_A(q)) = \tau_\lambda(P)$.

LEMME 5.2. *Soient R g-localement finie, h un idéal de g et $B = R \# U(h)$.*

(1) *Si $P \rightsquigarrow Q$ sont deux idéaux premiers de A tels que $P = (P \cap B)A$, alors $Q = (Q \cap B)A$ et $P \cap B \rightsquigarrow Q \cap B$. Réciproquement:*

(2) *Si $P' \rightsquigarrow Q'$ sont deux idéaux premiers de B tels que P' est g-invariant, alors Q' est g-invariant et $P'A \rightsquigarrow Q'A$.*

Preuve. (1) D'après (5.1), $Q = \tau_\lambda(P)$ pour un caractère λ de g. Comme $\tau_\lambda(B) = B$, on a $Q = (Q \cap B)A$.

Posons $P \cap B = P^0$ et $Q \cap B = Q^0$: ce sont des idéaux premiers (g-invariants) de B. Maintenant,

$$\begin{aligned}(P \cap Q)/PQ &= (P \cap Q \cap B)A/P^0AQ^0A \\ &= (P \cap Q \cap B)A/(P^0Q^0)A = ((P^0 \cap Q^0)/P^0Q^0)A. \qquad (*)\end{aligned}$$

D'après les hypothèses, A vérifie la condition de second niveau [2, 7.4]. D'après [8, 1.4] et $(*)$, $\mathrm{l.\ ann}_B((P^0 \cap Q^0)/P^0Q^0) = P^0$ et $\mathrm{r.\ ann}_B((P^0 \cap Q^0)/P^0Q^0) = Q^0$. A nouveau, d'après [8, 1.4], $P^0 \rightsquigarrow Q^0$.

(2) D'après (5.1), il existe un caractère μ de h tel que $Q' = \tau_\mu(P')$. D'après [3, 6.4], μ est la restriction à h d'un caractère λ de g. Puisque $g = h + \mathrm{Ker}\,\lambda$, un sous-ensemble de $h \cup \mathrm{Ker}\,\lambda$ forme une base $\mathscr{E}$ de g. Soit $X \in \mathscr{E}$. Alors $\delta_X(Q') \subseteq Q'$, si $X \in h$. Supposons que X est dans $\mathrm{Ker}\,\lambda$ et soit $q' \in Q'$. On sait que $q' = \tau_\lambda(q)$ pour un q de P'. Nous avons $\delta_X(q') = X\tau_\lambda(q) - \tau_\lambda(q)X = \tau_\lambda(\delta_X(q)) \in \tau_\lambda(P') = Q'$. Donc Q' est g-invariant. On en déduit que $Q'A$ est un idéal premier de A. Puisque $P'A \cap Q'A = (P' \cap Q')A$ et $P'AQ'A = P'Q'A$, l'assertion découle facilement de [8, 1.4].

Soit P un idéal premier de A. Posons $t = \bigcap\{\mathrm{Ker}\,\lambda_i, i \in \mathfrak{I}(A)\}$. Il est clair que t est un idéal de g. Posons $B_2 = R \# U(t)$. Soit h un idéal de g contenant t et maximal par rapport à la propriété

$$P \cap B_1 = (P \cap B_2)B_1, \qquad \text{où } B_1 = R \# U(h).$$

Avec ces notations, on a

LEMME 5.3. *Soient R intègre g-localement finie et $Q = P \cap R$. Si QR_Q est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments, alors $P \cap B_2$*

(*respectivement* $P \cap B_1$) *est un idéal premier localisable de* B_2 (*respectivement de* B_1).

Preuve. L'idéal $P \cap B_2$ de B_2 vérifie les conditions du théorème (3.3), donc $P \cap B_2$ est localisable.

Soit P' un idéal premier de B_1 tel que $(P \cap B_2)B_1 \rightsquigarrow P'$. D'après (5.2 (1)), $P' = (P' \cap B_2)B_1$ et $P \cap B_2 \rightsquigarrow P' \cap B_2$. Comme $P \cap B_2$ est localisable, $P \cap B_2 = P' \cap B_2$. Il en résulte que $P' = (P \cap B_2)B_1$. Donc la clique de $(P \cap B_2)B_1$ est réduite à $(P \cap B_2)B_1$. D'après [10, 7.2-5], $(P \cap B_2)B_1$ est classiquement localisable.

Le résultat suivant est une belle illustration de (4.2).

THÉORÈME 5.4. *Avec les notations ci-dessus, soient R intègre g-localement finie, M un idéal primitif de* $A_{\mathcal{T}}$ *et* $Q = P \cap R$. *Si* QR_Q *est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments, alors*

(1) *M est engendré par un ensemble régulier normalisant semi-invariant d'éléments de cardinal* $d = \dim R_Q + |\mathfrak{S}(A)|$

(2) $d = \mathrm{gl} - d(A_{\mathcal{T}}) = K - d(A_{\mathcal{T}}) = \mathrm{ht}\, M = \mathrm{ht}\, P$.

Preuve. On choisit les idéaux t et h comme ci-dessus. D'après (5.3), la condition (L_1) est satisfaite pour P. Soit P' un élément de $\Omega(P)$. D'après (5.1), $P' = \tau_\lambda(P)$ pour un caractère λ de g. Comme B_1 est τ_λ-stable, $P' \cap B_1 = \tau_\lambda(P \cap B_1)$. On en déduit que $P' \cap B_1$ est localisable, car $P \cap B_1$ l'est et τ_λ est un automorphisme d'algèbre de B_1; donc la condition (L_2) est satisfaite pour P. Le théorème (4.2) donne (1) et les trois premières égalités de (2).

Nous avons $\mathrm{ht}\, P = \mathrm{ht}(PA_{\mathcal{T}}) = \mathrm{ht}\, M$, car $M = P'A_{\mathcal{T}} = \tau_\lambda(P)A_{\mathcal{T}} = \tau_\lambda(PA_{\mathcal{T}})$ pour un P' dans $\Omega(P)$ et un caractère λ de g. On signale que τ_λ est prolongé à $A_{\mathcal{T}}$ de façon naturelle.

Le résultat suivant est une généralisation appropriée de [9, 4.8].

THÉORÈME 5.5. *Avec les notations ci-dessus, soient R intègre g-localement finie,* $Q = P \cap R$ *et d la hauteur de P. Si* QR_Q *est engendré par un ensemble régulier g-centralisant d'éléments, alors* $\mu_i(P, A) = 0$ *si* $i \neq d$ *et* $\mu_d(P, A) = 1$.

Preuve. D'après (5.4), $PA_{\mathcal{T}}$ est engendré par un ensemble régulier normalisant $\{z_1, \ldots, z_s, \ldots, z_d\}$; où s est la dimension de R_Q. De plus, $z_i + (z_1, \ldots, z_{i-1})$ est un vecteur propre de $A_{\mathcal{T}}/(z_1, \ldots, z_{i-1})$; pour $i = 1, \ldots, d$. Si ϕ_i est sa valeur propre, alors $\phi_1 = \cdots = \phi_s = 0$; donc $\tau_{\phi_1} = \cdots = \tau_{\phi_s} =$ identité. On démontre comme dans la preuve de (5.1) que

$z_i \tau_{\phi_i}(a) = (a) z_i$ modulo $(z_1, \ldots, z_{i-1})$ pour tout $a \in A_{\mathscr{T}}$. D'après [6, 2.5],

$$\operatorname{Ext}^i_{A_{\mathscr{T}}}(A_{\mathscr{T}}/PA_{\mathscr{T}}, A_{\mathscr{T}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq d \\ A_{\mathscr{T}}/PA_{\mathscr{T}} & \text{si } i = d \end{cases}$$

comme $A_{\mathscr{T}}$-module à gauche.

Or

$$\begin{aligned} \operatorname{Fr}(A/P) \otimes_A \operatorname{Ext}^i_A(A/P, A) &= \mathscr{T}^{-1} \operatorname{Ext}^i_A(A/P, A) \\ &= \operatorname{Ext}^i_{A_{\mathscr{T}}}(A_{\mathscr{T}}/PA_{\mathscr{T}}, A_{\mathscr{T}}) \end{aligned}$$

et $A_{\mathscr{T}}/PA_{\mathscr{T}} = \operatorname{Fr}(A/P)$; d'où le résultat.

COROLLAIRE 5.6. *Sous les hypothèses de* (5.5), $j_A(A/P) = d$.

Le corollaire suivant est un résumé de (5.4), (5.5) et (5.6) dans un cas particulier intéressant.

COROLLAIRE 5.7. *Soient R régulière intègre, M un idéal primitif de $A_{\mathscr{T}}$ et $Q = P \cap R$. Si l'action de g sur R est triviale, alors*

(1) *M est engendré par un ensemble régulier normalisant semi-invariant d'éléments de cardinal d* $= \dim R_Q + |\Im(A)|$.

(2) $d = \mathrm{gl} - d(A_{\mathscr{T}}) = K - d(A_{\mathscr{T}}) = \mathrm{ht}\, M = \mathrm{ht}\, P$.

(3) $\mu_i(P, A) = 0$ *si* $i \neq d$ *et* $\mu_d(P, A) = 1$.

(4) $d = j_A(A/P)$.

Remarques 5.8. (1) Si $\dim g = 1$, les résultats de (5.4), (5.5) et (5.6) sont aussi vrais lorsqu'on remplace dans l'énoncé "g-centralisant" par "normalisant semi-invariant". Pour montrer cela, il suffit d'utiliser (4.4).

(2) Si dans les résultats obtenus dans ce paragraphe, nous avons supposé que R est g-localement finie, c'est pour que l'élément r_X introduit au début du paragraphe 3 soit dans le corps de base k pour chaque X de g. Or, pour chaque X appartenant à g, l'élément r_X est nul, lorsque R est g-simple. On déduit de cette observation que tous les résultats obtenus dans ce paragraphe, à l'exception de (5.2 (2)) sont aussi vrais lorsqu'on remplace l'hypothèse "g-localement finie" par "g-simple." Dans ces conditions, R est $P \cap R = (0)$ et intègre.

REFERENCES

1. H. Bass, On the ubiquity of Gorenstein rings, *Math. Z.* **82** (1963), 8–28.
2. A. D. Bell, Localization and ideal theory in iterated differential operator rings, *J. Algebra* **106** (1987), 376–401.

3. W. Borho, P. Gabriel, et R. Rentschler, Primideale in Einhüllender auflösbarer Lie-Algebren, *in* "Lecture Notes in Math.," Vol. 357, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1973.
4. K. A. Brown, Localisation, bimodules and injective modules for enveloping algebras of solvable Lie algebras, *Bull. Sci. Math.* **107** (1983), 225–251.
5. K. A. Brown, Ore sets in Noetherian rings, *in* "Séminaire d'Algèbre P. Dubreil et M. P. Malliavin," pp. 355–66, Lecture Notes in Math., Vol. 1146, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1986.
6. K. A. Brown et T. Levasseur, Cohomology of bimodules over enveloping algebras, *Math. Z.* **189** (1985), 393–413.
7. K. A. Brown, Ore sets in enveloping algebras, *Compositio Math.* **53** (1984), 347–367.
8. K. R. Goodearl, Classical localizability in solvable enveloping algebra and Poincaré-Birkhoff-Witt extensions, *J. Algebra* **132** (1990), 243–262.
9. T. Guédénon, Localisation, caténarité et dimensions dans les anneaux munis d'une action d'algèbre de Lie, *J. Algebra* **178** (1995), 21–47.
10. A. V. Jategaonkar, Localization in noetherian rings, *in* "London Math. Soc. Lecture Notes Series," Vol. 98, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1986.
11. M. P. Malliavin, Modules sans torsion et modules injectifs sur les algèbres de Lie résolubles, *J. Algebra* **83** (1983), 126–156.
12. R. Walker, Local rings and normalizing sets of elements, *Proc. London Math. Soc.* (3) **24** (1972), 27–45.

COMMUNICATIONS IN ALGEBRA, 28(7), 3523–3533 (2000)

Localisation in rings equipped with a solvable Lie algebra action

Thomas Guédénon
21 Avenue de Versailles
75016 Paris
FRANCE
guedenon@caramail.com

Abstract

Let k be an algebraically closed uncountable field of characteristic 0, g a finite dimensional solvable k-Lie algebra, R a noetherian k-algebra on which g acts by k-derivations, $U(g)$ the enveloping algebra of g, $A = R \star g$ the crossed product of R by $U(g)$, P a prime ideal of A and $\Omega(P)$ the clique of P. Suppose that the prime ideals of the polynomial ring $R[x]$ are completely prime. If R is g-hypernormal, then $\Omega(P)$ is classical. Denote by $A_{\mathcal{T}}$ the localised ring and let M be a primitive ideal of $A_{\mathcal{T}}$. Set $Q = P \cap R$. In this note, we show that if R is a strongly (R, g)-admissible integral domain and if QR_Q is generated by a regular g-centralising set of elements, then

(1) M is generated by a regular g-semi-invariant normalising set of elements of cardinal $d = dim(R_Q) + |\mathcal{I}_A(P)|$.

(2) $d = gldim(A_{\mathcal{T}}) = Kdim(A_{\mathcal{T}}) = ht(M) = ht(P)$.

0 Introduction

All rings and algebras (except Lie algebras) in this paper are associative with identity. All modules are left modules. Noetherian means left and right noetherian. Ore set means left and right Ore set.

Let A be a noetherian ring, P a prime ideal of A and M an A-module.

Set $\mathcal{C}_A(P) = \{c \in A, \quad c+P \quad \text{is regular in } A/P\}$. Let $\mathcal{C}$ be a multiplicative Ore set in A. If $P \cap \mathcal{C} = \emptyset$, then $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_A(P)$.

Denote by $Fr(A/P)$ the classical quotient ring of A/P. If N is a $Fr(A/P)$-module, denote by $l(N)$ its length as $Fr(A/P)$-module. For each $i \geq 0$, set (see [3, section 4])

$$\mu_i(P, M) = l(Fr(A/P) \otimes_A Ext_A{}^i(A/P, M))/l(Fr(A/P)).$$

If P is completely prime, $Fr(A/P)$ is the quotient division ring of A/P and $l(N)$ is the dimension of the $Fr(A/P)$-vector space N. These numbers μ_i are introduced in commutative algebra by H. Bass [1] and in the enveloping algebras by M.P. Malliavin [7]. We call them the numbers of Bass.

Let M be nonzero . The grade or the j-number of M denoted by $j_A(M)$ or $j(M)$ is the infimum of positive integers $i \geq 0$ such that $Ext_A{}^i(M, A) \neq 0$. If $M = 0$, we set $j(M) = +\infty$. If A has a finite injective dimension and M is nonzero, then $j(M) < +\infty$.

We denote by $Kdim(A)$, $dim(A)$ and $gldim(A)$ the (Gabriel - Rentschler) Krull dimension, the classical Krull dimension and the global dimension of A, and by $ht(P)$ the height of P.

Throughout, we fix a field k, a k-algebra R and an integer $n \geq 0$.

Denote by $A_n(R)$ the k-algebra generated by R and $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ with the relations

$$x_i r - r x_i = 0 = y_i r - r y_i, r \in R,$$

$$x_i x_j - x_j x_i = y_i y_j - y_j y_i = 0 \quad \text{and} \quad x_i y_j - y_j x_i = \delta_{ij};$$

where δ_{ij} is the symbol of Kronecker.

Let g be a k-Lie algebra of finite dimension n and $U(g)$ the enveloping algebra of g. We suppose that g acts by derivations on R and we denote by $A = R \star g$ the crossed product of R by $U(g)$ (see [2 and 8]).

For each $X \in g$, we denote by $\bar{X}$ the canonical image of X in $R \star g$ and we set $\delta(X) = \delta_X$. We recall that there exists a linear map δ from g to the k-Lie algebra of k-derivations of R and a bilinear map $t : g$ x $g \rightarrow R$ such that $[\bar{X}, \bar{Y}] - \overline{[X, Y]} = t(X, Y)$.

If R is commutative and if g is abelian, the δ_i are commuting derivations of R.

If g is the abelian Lie algebra of dimension $2n$ acting trivially on R, then $A_n(R)$ is isomorphic to a crossed product $R \star g$ under the obvious embedding of g.

In the particular case where the image Imt of t is identically 0 (for example, if $n = 1$), $R \star g$ is usually denoted by $R\#U(g)$; in this case R is a g-module.

Any multiplicative Ore set C in R is a multiplicative Ore set in $A = R \star g$ and $A_C = R_C \star g$ [8, Lemma 14.2.7].

Let h be a Lie subalgebra of g. Thus we can construct the crossed product $B = R \star h$ of R by $U(h)$. If h is an ideal of g, we can define an action of g (hence of g/h) on B and it is well known that the algebras $R \star g$ and $B \star (g/h)$ are isomorphic. An ideal of B is g-invariant if and only if it is g/h-invariant.

Let $b \in R$. Then $U(g).b$ is a g-stable k-vector subspace of R. We say that b is g-finite if $U(g).b$ has a finite dimension. It is clear that an element of $R \star h$ is g-finite if and only if it is g/h-finite.

We say that R is g-locally finite if all its elements are g-finite.

The enveloping algebra of an ideal of g is g-locally finite for the natural action of g. If R is g-locally finite, any g-invariant factor of R is g-locally finite. If g acts trivially on R, then R is g-locally finite.

An element b of R is g-normal if b is normal in R and Rb is a g-invariant ideal of R.

Let h be an ideal of g. An element of R is g-normal if and only if it is g-normal in $R \star h$.

The algebra R is g-hypernormal if for any pair of g-invariant ideals $I \subset J$ in R, the factor J/I contains a nonzero g-normal element of R/I.

If g is completely solvable, we fix a composition series of g; i.e. a chain

$$0 = g_0 \subset g_1 \subset ... \subset g_n = g$$

of ideals of g such that g_{i+1}/g_i has dimension one. We shall set $R_i = R \star g_i$; $0 \leq i \leq n$; so $R_0 = R$ and $R \star g_n = R \star g$. Choose X_i in $g_i - g_{i-1}$ such that $X_i + g_{i-1}$ is a basis of g_i/g_{i-1}. So $(X_1, X_2, ..., X_n)$ is a basis of g and $R_i \simeq R_{i-1}[\theta_i, \delta_i]$ the Ore extension of R_{i-1} by δ_i; where $\bar{X}_i$ is sent to θ_i and $\delta_i(r) = \delta_{X_i}(r)$ for any $r \in R_{i-1}$. Each $X_i + g_{i-1}$ is a g-eigenvector of g_i/g_{i-1}; so $\overline{[X, X_i]} - \lambda_i(X)\bar{X}_i \in R_{i-1}$ for any $X \in g$; where $\lambda_i(X) \in k$ is the g-eigenvalue of $X_i + g_{i-1}$. Hence $\delta_X(\bar{X}_i) - \lambda_i(X)\bar{X}_i \in R_{i-1}$. The λ_i are the Jordan-Hølder values of g. If g is nilpotent, the λ_i are equal to 0; so g_i/g_{i-1} is g-central in g/g_{i-1}.

From now on we fix an integer m; $0 \leq m \leq n$. For any g-invariant prime ideal P of $B = R \star g_m$, we set

$$\mathcal{I}_B(P) = \{i \leq m, P \cap R_i \neq (P \cap R_{i-1})R_i\}.$$

Remark 0.1 *(1) In [3], the results from 2.4 to 2.18 (except 2.12) and all the results in section 4 are true even if the image Imt of t is not identically 0.*

(2) The same remark is true for the results in the first fourth paragraphs of [4] (except the point (4) page 376).

The aim of this paper is to generalize the results obtained in [4]. Let k be algebraically closed uncountable of characteristic 0, g solvable and R a noetherian strongly (R, g)-admissible (see the definition in section 1) integral domain. Suppose that every prime ideal in the polynomial ring $R[x]$ is completely prime. Hence every prime ideal in $R \star h$ is completely prime, for any Lie subalgebra h of g. Let P be a prime ideal of $A = R \star g$ and $\Omega(P)$ the clique of P. Set $\mathcal{T} = \cap\{A - Q; \quad Q \in \Omega(P)\}$. By [9, Corollary 2.6] and [6, Corollary 7.2.16], $\mathcal{T}$ is a multiplicative Ore set in A and $A_{\mathcal{T}}/M$ is a simple artinian ring for any primitive ideal M of $A_{\mathcal{T}}$. By [6, page 187], the right primitive ideals of $A_{\mathcal{T}}$ are also left primitive ideals and are of the form $P'A_{\mathcal{T}}$; where $P' \in \Omega(P)$.

In this paper we show that if M is a primitive ideal of $A_{\mathcal{T}}$, then M is generated by a regular normalising g-semi-invariant set of elements of cardinal d; where d the height of M is also the global dimension and the Krull dimension of $A_{\mathcal{T}}$. We show also that d is the height of P and we prove that the grade of the A-module A/P is equal to the height of P. This allows us to study the numbers of Bass in $R \star g$.

Among the rings $R \star g$ to which these results may be applied are, for example:

- the Weyl algebra $A_n(R)$, where R is a commutative noetherian regular integral domain.

- $R \star g$, where R is a Weyl algebra over k .

- $R \star g$, where R is a noetherian hypercentral regularly localisable integral domain, g acts trivially on R and every prime ideal of $R[x]$ is completely prime.

1 Preliminary results

We retain the above conventions and notations. Let S be an overalgebra of R. We suppose that g acts also on S and the action of g on S extends that of g

on R. An element s of S is (R, g)-admissible (strongly (R, g)-admissible) if s normalises (centralises) R and $\delta_X(s) = \lambda_X s$ for any $X \in g$, where λ_X is some element of k. If $s \in R$ is strongly (R, g)-admissible, the map $\lambda : X \longmapsto \lambda_X$; $(X \in g)$ is a character of g.

Let I be a g-invariant ideal of S. Then $R/I \cap R$ is a subalgebra of S/I. A nonzero element of S/I centralises $R/I \cap R$ if and only if it centralises R modulo I.

We say that S is (R, g)-admissible (strongly (R, g)-admissible) if whenever $I \subset J$ are g-invariant ideals of S, the ideal J/I of S/I contains a nonzero $(R/I \cap R, g)$-admissible (strongly $(R/I \cap R, g)$-admissible) element.

It is clear that if an element of S is strongly (R, g)-admissible, then it is (R, g)-admissible and if S is strongly (R, g)-admissible, then S is (R, g)-admissible.

A g-central ((R, g)-admissible) element of R is strongly (R, g)-admissible (g-normal) in R. If R is g-hypercentral ((R, g)-admissible), then R is strongly (R, g)-admissible (g-hypernormal). If R is hypernormal (hypercentral) and the action of g is trivial, then R is (R, g)-admissible (strongly (R, g)-admissible).

Let k be algebraically closed of characteristic 0, g solvable and R commutative g-locally finite. If the image Imt of t is identically 0, then by Lie's Theorem, R is strongly (R, g)-admissible.

Lemma 1.1 *Let k be algebraically closed of characteristic 0, g solvable and h an ideal of g.*

(1) Then $U(h)$ is $(U(h),\ g)$-admissible.

(2) If h is nilpotent, $U(h)$ is strongly $(U(h),\ g)$-admissible.

Proof (1) Set $R = U(h)$ and $l = dim_k(h)$. By [3, Corollaire 2.18] and Remark 0.1, R is g-hypernormal. More precisely, if $I_1 \subset I_2$ are two g-invariant ideals of R, there exists [4, page 375], $p \in I_2 - I_1$ such that $p + I_1$ is normal in R/I_1 and

$$\delta_X(p) - m_1\lambda_1(X)p - \ldots - m_l\lambda_l(X)p \in I_1$$

for all $X \in g$; where the m_j; $j \leq l$ are positive integers. Since the X_i; $1 \leq i \leq l$ generate $U(h)$, p is a normal element of $U(h)$. The result follows from Lie's Theorem, since $U(h)$ is a g-locally finite g-module.

(2) Let $Y \in h$ and let

$$0 = g_0 \subset g_1 \subset \ldots \subset g_l = h \subset \ldots \subset g_n = g$$

be a composition series of g passing through h. Then $\delta_Y(X_i) \in g_{i-1}$; for $0 \leq i \leq l$, since h is nilpotent and

$$0 = g_0 \subset g_1 \subset \ldots \subset g_l = h$$

is a composition series of h. Also we have $\delta_Y(X_i) - \lambda_i(Y)X_i \in g_{i-1}$. It follows that $\lambda_i(Y) = 0$; $0 \leq i \leq l$ for all $Y \in h$. Thus by (1), $\delta_Y(p) \in I_1$ for all $Y \in h$; this means that $rp - pr \in I_1$ for all $r \in R$.

Lemma 1.2 *Let k be algebraically closed, g abelian and R commutative g-locally finite. Then R is strongly (R, g)-admissible.*

Proof Let I be a nonzero g-invariant ideal of R. Adapt the proof of [5, Lemme 4.12] to show that there exists in I a nonzero element u such that $\delta_X(u) = \lambda_X u$ for any $X \in g$; where $\lambda_X \in k$.

We refer the reader to [4, page 374] for the definition of a g-normalising, a g-centralising and a g-semi-invariant set of elements in R. Clearly, a g-normalising (g-centralising) set of elements in R is a normalising (centralising) set of elements in R.

The following theorem generalizes [4, Théorème 3.3].

Theorem 1.3 *Let k be algebraically closed of characteristic 0, g solvable, R a noetherian integral domain, $A = R\star g$ and $B = R\star g_m$; $0 \leq m \leq n$. Assume that every prime ideal in the polynomial ring $R[x]$ is completely prime. Let P be a g-invariant prime ideal of B and set $Q = P \cap R$. Suppose that the following conditions hold:*

(1) Q is localisable and QR_Q is generated by a regular g-centralising set of elements.

(2) $P \cap R_i \neq (P \cap R_{i-1})R_i$ implies $\lambda_i = 0$.

Then P is localisable, PB_P is generated by a regular g-centralising set of elements and $dim(B_P) = dim(R_Q) + |\mathcal{I}_B(P)|$.

Proof Adapt the proof of [4, Théorème 3.3].

Lemma 1.4 *Let I be a g-invariant ideal of S. If S is (R, g)-admissible (strongly (R, g)-admissible), then S/I is $(R/(I \cap R), g)$-admissible (strongly $(R/(I \cap R), g)$-admissible).*

Lemma 1.5 *Let g be completely solvable. (1) If R is (R, g)-admissible, then each R_i is (R_j, g)-admissible; $0 \leq j \leq i \leq n$.*

(2) If R is strongly (R, g)-admissible, then each R_i is strongly (R, g)-admissible; $0 \leq i \leq n$.

Proof The results follow from the proofs of [3, Lemme 2.15 and Corollaire 2.18] and from [4, page 376] and Remark 0.1.

Lemma 1.6 *(1) Let R be noetherian, g completely solvable, $B = R \star g_m; 0 \leq m \leq n$ and I a g-invariant ideal of B. If R is (R, g)-admissible, then I is generated by a normalising g-semi-invariant set of elements.*

(2) Let R be noetherian and strongly (R, g)-admissible. Then every g-invariant ideal of R is generated by a centralising g-semi-invariant set of elements. Therefore every g-invariant prime ideal of R is localisable.

Proof (1) Let $I \neq 0$. By Lemma 1.5, I contains a nonzero normal g-semi-invariant element b_1. The rest of the proof is similar to that of [4, Théorème 2.2].

Let λ be a character of g. For each $i = 1, ..., n$; set $\overline{X}_i + \lambda(X_i) = \widetilde{X}_i$.

Lemma 1.7 *For every character λ of g, the map $\tau_\lambda : R \star g \to R \star g$;*

$$\sum r_{i_1 i_2 ... i_n} \overline{X}_1{}^{i_1} \overline{X}_2{}^{i_2} ... \overline{X}_n{}^{i_n} \to \sum r_{i_1 i_2 ... i_n} \widetilde{X}_1^{i_1} \widetilde{X}_2^{i_2} ... \widetilde{X}_n^{i_n}$$

is an R-linear automorphism of k-algebras.

Lemma 1.8 *Let g be completely solvable, R noetherian strongly (R, g)-admissible and $A = R \star g$. If P and P' are two completely prime ideals of A such that $P' \in \Omega(P)$. Then there exists a character λ of g such that $P' = \tau_\lambda(P)$.*

Proof There is an ideal I in A such that $PP' \subseteq I \subset P \cap P'$ and $(P \cap P')/I$ is torsionfree as left A/P'-module and as right A/P-module. By Lemma 1.5 and its proof, there exists $p \in P \cap P' - I$ such that $q = p + I$ is normal in A/I and $\delta_X(q) = \lambda(X)q$, where λ is some character of g. So $\bar{X}q = q\bar{X} + q\lambda(X) = q\tau_\lambda(\bar{X})$. The rest of the proof is similar to that of [4, Lemme 5.1].

Lemma 1.9 *Let k be of characteristic 0, g completely solvable, R noetherian strongly (R, g)-admissible, h an ideal of g, $A = R \star g$ and $B = R \star h$. If $P \rightsquigarrow Q$ (P is linked to Q) are two completely prime ideals of A such that $P = (P \cap B)A$, then $Q = (Q \cap B)A$ and $P \cap B \rightsquigarrow Q \cap B$.*

Proof Adapt the proof of [4, Lemme 5.2 (1)]. Use Lemma 1.8.

2 The main results

We retain the notations and conventions introduced in the preceding sections, k is uncountable, algebraically closed and of characteristic 0, g is solvable and we suppose that every prime ideal in the polynomial ring in one variable $R[x]$ is completely prime. So, by [9, Corollary 2.6], every prime ideal of $R \star h$ is completely prime, for any Lie subalgebra h of g. We recall [9] that if R is commutative or is a Weyl algebra over k or is the enveloping algebra of an ideal of g, then every prime ideal of $R[x]$ is completely prime.

Fix a prime ideal P of $R \star g$ and an ideal t of g and set $B_2 = R \star t$. Denote by $\Omega(P)$ the clique of P and set $\mathcal{T} = \cap\{A - P'; P' \in \Omega(P)\}$.

Let h be an ideal of g containing t and maximal with respect to the property that $P \cap B_1 = (P \cap B_2)B_1$; where $B_1 = R \star h$.

We say that condition (L_1) (resp. condition (L_2)) is satisfied for P if $P \cap B_1$ is classically localisable (resp. $P' \cap B_1$ is classically localisable for any $P' \in \Omega(P)$). Clearly, (L_2) implies (L_1).

Suppose that condition (L_1) is satisfied for P. Then $\mathcal{S} = B_1 - (P \cap B_1)$ is an Ore set in B_1 and hence in A. Denote by D the quotient division ring of $B_1/P \cap B_1$.

The assumption that k is uncountable is not necessary in Lemmas 2.1 and 2.4.

Lemma 2.1 *Under the above hypotheses and notations, suppose that condition (L_1) is satisfied for P. Let R be a noetherian integral domain. Then $A_{\mathcal{S}}/(P \cap B_1)A_{\mathcal{S}}$ is isomorphic as algebra to the polynomial ring $D[x_{l+1}, \ldots, x_n]$; where l is the dimension of h.*

Proof Adapt the proof of [4, Lemme 4.1] and remark that $D[\bar{X}_i, \bar{X}_j]$ is isomorphic to $D \star (kX_i \oplus kX_j)$.

Let R be g-hypernormal. By [3, Corollaire 2.18] and [6, page 226], $R \star g$ satisfies the strong second layer condition. By [6, Corollary 7.2.16], $\Omega(P)$ is classically localisable; i.e. $\mathcal{T}$ is an Ore set in A. So $A_{\mathcal{T}}/M$ is a simple artinian ring for any primitive ideal M of $A_{\mathcal{T}}$.

Theorem 2.2 *Under the above hypotheses and notations, let R be a noetherian g-hypernormal integral domain. Set $A = R \star g$ and $Q = P \cap R$. Let M be a primitive ideal of $A_{\mathcal{T}}$. Assume that Q is localisable, QR_Q is generated by a regular g-normalising set of elements and condition (L_2) is satisfied for P. Then*

(1) M is generated by a regular normalising set of elements of cardinal $d = dim(R_Q) + |\mathcal{I}_A(P)|$.

(2) $d = gldim(A_{\mathcal{T}}) = Kdim(A_{\mathcal{T}}) = ht(M)$.

Proof Adapt the proof of [4, Théorème 4.2]. Use [4, Lemme 1.1] and Lemma 2.1.

Remark 2.3 *(1) The results in Theorem 2.2 are true if we replace in the hypotheses, "g-hypernormal" by "(R, g)-admissible" and "g-normalising" by "normalising g-semi-invariant". In this particular case, the ideal M is generated by a regular normalising g-semi-invariant set of elements.*

(2) One can summarize Theorem 2.2 by saying that the localised ring $A_{\mathcal{T}}$ behaves as a regular local ring.

Lemma 2.4 *Let R be a noetherian strongly (R, g)-admissible integral domain. Set $A = R \star g$ and $Q = P \cap R$. If QR_Q is generated by a regular g-centralising set of elements, then $P \cap B_2$ (resp. $P \cap B_1$) is a localisable prime ideal of B_2 (resp. of B_1).*

Proof Adapt the proof of [4, Lemme 5.3]. Use Theorem 1.3 and Lemma 1.9.

Now we are ready to prove the following interesting result

Theorem 2.5 *Let R be a noetherian strongly (R, g)-admissible integral domain. Set $A = R \star g$ and $Q = P \cap R$. Let M be a primitive ideal of $A_{\mathcal{T}}$. If QR_Q is generated by a regular g-centralising set of elements, then*

(1) M is generated by a regular g-semi-invariant normalising set of elements of cardinal $d = dim(R_Q) + |\mathcal{I}_A(P)|$.

(2) $d = gldim(A_{\mathcal{T}}) = Kdim(A_{\mathcal{T}}) = ht(M) = ht(P)$.

Proof Set $t = \cap\{Ker\lambda_i, i \in \mathcal{I}_A(P)\}$. It is clear that t is an ideal of g. Set $B_2 = R \star t$. Let h be an ideal of g containing t and maximal with respect to the property that $P \cap B_1 = (P \cap B_2)B_1$; where $B_1 = R \star h$. By Lemma 2.4, the condition (L_1) is satisfied for P. The rest of the proof is similar to that of [4, Théorème 5.4]. Use Lemma 1.8 and Theorem 2.2.

Corollary 2.6 *Let R be a noetherian strongly (R, g)-admissible integral domain. Set $A = R \star g$ and $d = ht(P)$. If QR_Q is generated by a regular g-centralising set of elements, then $\mu_i(P, A) = 0$ if $i \neq d$ and $\mu_d(P, A) = 1$.*

Proof Adapt the proof of [4, Théorème 5.5].

Corollary 2.7 *Under the hypotheses of Corollary 2.6, we have $j_A(A/P) = d$.*

Proof Adapt the proof of [4, Corollaire 5.6].

Theorem 2.5 and its two Corollaries may be applied in the following circumstances:

- R is commutative noetherian g-locally finite, the image Imt of t is identically 0 and QR_Q is generated by a regular g-centralising set of elements. We have established these results in [4].
- R is commutative noetherian and g-simple. For the case where R is a g-module, see [4].
- R is a Weyl algebra over k.
- g is abelian, R is a commutative noetherian regular integral domain and the action of g is trivial. In particular, if R is a commutative noetherian regular integral domain, Theorem 2.5 and its two Corollaries may be applied to the ring $A_n(R)$.

References

[1] H. Bass, On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z. 82 (1963), 8-28.

[2] W. Chin, Prime ideals in differential operator rings and crossed products of infinite groups, J. of Algebra 106 (1987), 78-104.

[3] T. Guédénon, Localisation, caténarité et dimensions dans les anneaux munis d'une action d'algèbre de Lie, J. of Algebra 178 (1995), 21-47.

[4] T. Guédénon, Localisation dans les anneaux munis d'une action d'algèbre de Lie résoluble, J. of Algebra 197 (1997), 372-384.

[5] T. Guédénon, Anneaux munis d'une action de groupe superrésoluble, Algebras Groups and Geometries, to appear.

[6] A.V. Jategaonkar, "Localization in Noetherian rings", London Math. Soc. Lecture Notes Series, Cambridge University Press (1986).

[7] M.P. Malliavin, Module sans torsion et modules injectifs sur les algèbres de Lie résolubles, J. of Algebra 83 (1983), 126-157.

[8] J.C. McConnell and J. Robson, "Noncommutative Noetherian Rings", Wiley, Chichester New York, (1987).

[9] G. Sigurdsson, Differential operator rings whose prime factors have bounded Goldie dimension, Arch. der Math. 42 (1984), 348-354.

[10] R. Walker, Local rings and normalizing sets of elements, Proc. London Math. (3) 24 (1972), 27-45

Received: April 1999

Revised: July 1999

PARTIE B

Lemme 1.3

Si $M \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}$ alors $M^{(\mathfrak{g})}$ est le plus grand sous-$\mathfrak{g}$-module localement fini de M.

Définition 1.4

Nous poserons $\mathrm{Hom}_k\,(M,N)^{(\mathfrak{g})} = \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}\,(M, N)$ pour tous $\mathfrak{g}$-modules M et N (cf. [6] §1) et $\mathrm{Hom}_k\,(M,N)^{(\mathfrak{g})} = \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}\,(M,N) = \mathcal{L}\,(M,N)$ si M et N sont des $\mathfrak{g}$-modules localement finis.

Proposition 1.5

Soient M, N et P des $\mathfrak{g}$-modules avec M localement fini, alors il existe un isomorphisme k-linéaire

$\phi : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\,(M \otimes_k N,P) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\,(M, \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}\,(N,P)$ défini par

$\phi\,(f)\,(m)\,(n) = f\,(m \otimes_k n)$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\,(M \otimes_k N,P)$, $m \in M$, $n \in N$.

Preuve :

Soit $\overline{\phi}$: $\mathrm{Hom}_k\,(M \otimes_k N,P) \to \mathrm{Hom}_k\,(M, \mathrm{Hom}_k\,(N,P))$ défini par $\overline{\phi}\,(f)(m)(n) = f(m \otimes_k n)$.

On sait [3] que $\overline{\phi}$ est un k-isomorphisme. Notons ϕ la restriction de $\overline{\phi}$ à $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\,(M \otimes_k N,P)$. On vérifie facilement que $\phi(f)$ est $\mathfrak{g}$-linéaire pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\,(M \otimes_k N,P)$. On en déduit que $\phi(f)(M) \subsetneq \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}\,(N,P)$ car M est localement fini ; ϕ est donc une application k-linéaire injective de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\,(M \otimes_k N,P)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\,(M, \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}\,(N,P)$. Si $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\,(M, \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}\,(N,P))$, il existe $f \in \mathrm{Hom}_k\,(M \otimes_k N,P)$ tel que $\overline{\phi}\,(f) = \varphi$, donc $f = \overline{\phi}^{-1}(\varphi)$. On vérifie que f est $\mathfrak{g}$-linéaire. On a donc $\varphi = \overline{\phi}\,(f) = \phi(f)$, d'où on déduit que l'application ϕ est sujective, ce qui achève la démonstration.

Proposition 1.6

Soient M, N deux $\mathfrak{g}$-modules, M localement fini et f un élément de $\mathrm{Hom}_k\,(M,N)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

morphismes dans ce paragraphe lorsque R est commutatif. Enfin nous étudions le cas, au paragraphe 3, du produit semi-direct de deux algèbres de Lie.

Nous obtenons des suites spectrales de foncteurs composés qui théoriquement permettent de les calculer.

§1. Les foncteurs $(-)(\mathfrak{g})$, $\mathcal{L}$ et leurs dérivés

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif k de caractéristique 0. On note $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$.

Définition 1.1

Un $\mathfrak{g}$-module (à gauche) M est localement fini si pour tout élément m de M on a $\dim_k U(\mathfrak{g})\, m < \infty$. Un tel élément m est dit $\mathfrak{g}$-fini.

Notons $\underline{Mod}_{\mathfrak{g}}$ la catégorie des g-modules (à gauche), $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{Mod}_{\mathfrak{g}}$ formée des g-modules localement finis et k-e.v. la catégorie des k-espaces vectoriels. Si M est un $\mathfrak{g}$-module, on désignera par $M(\mathfrak{g})$ l'ensemble des éléments $\mathfrak{g}$-finis de M.

Rappelons les résultats suivants :

Lemme 1.2

Si M et N sont deux $\mathfrak{g}$-modules alors $M \otimes_k N$ et $\mathrm{Hom}_k(M,N)$ sont des $\mathfrak{g}$-modules pour l'action diagonale c'est-à-dire lorsqu'on pose $X.(m \otimes_k n) = X.m \otimes_k n + m \otimes_k Xn$ et $(Xf)(m) = Xf(m) - f(Xm)$ pour tous $X \in \mathfrak{g}$, $m \in M$, $n \in N$, $f \in \mathrm{Hom}_k(M,N)$.

COMMUNICATIONS IN ALGEBRA, 21(4), 1103-1139 (1993)

SUR LA COHOMOLOGIE $\mathfrak{g}$- FINIE

Thomas GUÉDENON
37, rue Pasteur
92800 Puteaux
France

§0 . Introduction

Soient k un corps commutatif de caractéristique 0, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur k, U ($\mathfrak{g}$) l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Un élément m d'un $\mathfrak{g}$-module M est $\mathfrak{g}$-fini, s'il engendre un sous-espace de dimension finie sous l'action de U ($\mathfrak{g}$). Nous dirons que M est localement fini si tous ses éléments sont $\mathfrak{g}$-finis. Notons $\underline{\mathrm{Mod}}_{\mathfrak{g}}$ la catégorie des $\mathfrak{g}$-modules à gauche, $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$ la sous-catégorie formée des $\mathfrak{g}$-modules localement finis. Dans [6], Fokko du Cloux a introduit le foncteur $M \to M^{(\mathfrak{g})}$ de $\underline{\mathrm{Mod}}_{\mathfrak{g}}$ vers $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$ et ses dérivés $H^{i}_{(\mathfrak{g})}$ ainsi que des foncteurs $\mathrm{Ext}^{j}_{(\mathfrak{g})}(M_1, M_2)$ et R^{p}_{a}, p-ième foncteur dérivé du foncteur $M \to M^{\mathfrak{g}}$ de $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$ vers la catégorie des k-espaces vectoriels.

Nous étendons certains des résultats de [6] au cas où l'algèbre $\mathfrak{g}$ opère par dérivations localement finies sur une k-algèbre (associative) noethérienne R. Pour obtenir les résultats que nous avions en vue nous nous sommes inspiré de l'article [10] de A.R. Magid qui obtient des résultats pour une k-algèbre R sur laquelle opère un groupe algébrique affine. Un certain nombre de propositions du premier paragraphe sont des transcriptions de celle de A.R. Magid.

Lorsque $\mathfrak{g}$ opère par dérivation sur R, il est bien connu que l'on peut construire une algèbre notée $R\#U(\mathfrak{g})$ qui vérifie un certain problème universel. Lorsque R est commutative, cette algèbre a été introduite par Rinehart [11], voir aussi la bibliographie de Feld'man [7]. Cette construction a permis à T. Levasseur [9] d'obtenir des critères d'induction et de coïnduction, fonctorialisant les résultats de R. Blattner [2].

Enfin un exemple important d'algèbre du type $R\#U(\mathfrak{g})$ est celui où $\mathfrak{g}$ est produit semi-direct de $\underline{s}$ par un idéal $\underline{r}$ et alors $U(\mathfrak{g}) = U(\underline{r}) \# U(\underline{s})$.

Dans le premier paragraphe nous rappelons les définitions du foncteur $(-)^{(\mathfrak{g})}$ et ses propriétés et nous introduisons le foncteur $\mathcal{L}$ et ses dérivés $\mathcal{L}^q$. Les dérivés R^pa, $\mathcal{L}^q$, sont reliés via une suite spectrale aux foncteurs dérivés de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(-,-)$ définis sur la catégorie $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})} \times \underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$.

Dans le second paragraphe nous étudions le cas où $\mathfrak{g}$ opère par dérivations sur R et nous relions par une suite spectrale les foncteurs R^pa aux foncteurs dérivés de $\mathrm{Hom}_{R\#U(\mathfrak{g})}(-,-)$ restreint à $\underline{\mathrm{Mod}}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$ où $\underline{\mathrm{Mod}}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$ désigne la catégorie des $R\#U(\mathfrak{g})$-modules qui sont $\mathfrak{g}$-localement finis. Nous explicitons également des

(1) Il existe un $\mathfrak{g}$-module V de dimension finie, un élément v de V et un $\mathfrak{g}$-morphisme $F : M \otimes_k V \to N$ tels que $F(m \otimes_k v) = f(m)$, $m \in M$.

(2) Il existe un $\mathfrak{g}$-module V de dimension finie, un élément v de V et un $\mathfrak{g}$-morphisme $F' : M \to \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(V,N)$ tels que $F'(m)(v) = f(m)$, $m \in M$.

(3) On a $f \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(M,N)$.

Preuve :

Supposons la condition (1) vérifiée ; soit le k-isomorphisme $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M \otimes_k V,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(V,N))$, défini par $\phi(g)(m)(v_1) = g(m \otimes_k v_1)$, $g \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(M \otimes_k V,N)$, $m \in M$, $v_1 \in V$ (1-5). Posons $F' = \phi(F)$; F' est $\mathfrak{g}$-linéaire et $F'(m)(v) = \phi(F)(m)(v) = F(m \otimes_k v) = f(m)$ pour tout $m \in M$ donc (1) $\Rightarrow$ (2).

Si la condition (2) est satisfaite, posons $F = \phi^{-1}(F')$; F est $\mathfrak{g}$-linéaire et on a :

$$F(m \otimes_k v) = \phi(F)(m)(v) = \phi(\phi^{-1}(F'))(m)(v) = F'(m)(v) = f(m)$$

pour tout $m \in M$ donc (2) $\Rightarrow$ (1).

Si la condition (1) est satisfaite, on a :

$$(Xf)(m) = Xf(m) - f(Xm) = XF(m \otimes_k v) - F(Xm \otimes_k v) = F(m \otimes_k Xv)$$
$$X \in \mathfrak{g},\ m \in M .$$

Puisque $\dim_k V < +\infty$ et $Xv \in V$ on a $Xv = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ où $v_1, v_2, \ldots, v_n$ engendrent V et $\alpha_i \in k$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$. Il en résulte que $(Xf)(m) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(m \otimes_k v_i)$. Posons $F_i(m) = F(m \otimes_k v_i)$; Xf est donc un élément du sous-espace vectoriel E de $\mathrm{Hom}_k(M,N)$ engendré par les fonctions F_i ; E est manifestement un sous-$\mathfrak{g}$-module de dimension finie de $\mathrm{Hom}_k(M,N)$. Comme $f \in E$, on a $U(\mathfrak{g}) f \subseteq E$ donc $\dim_k U(\mathfrak{g}) f < +\infty$ c'est-à-dire que $f \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(M,N)$ d'où (1) $\Rightarrow$ (3).

Sous les hypothèses de la condition (3)., posons $V = U(\mathfrak{g})\, f$; V est un sous-$\mathfrak{g}$-module de dimension finie de Hom_k (M,N) et $f \in V$. Soit l'application F définie de $M \otimes_k V \to N$ par $F(m \otimes_k v) = v(m)$, $m \in M$, $v \in V$; F est $\mathfrak{g}$-linéaire et on a $F(m \otimes_k f) = f(m)$ pour tout $m \in M$ donc (3) $\Rightarrow$ (1).

Corollaire 1.7

Si M, N et P sont des $\mathfrak{g}$-modules avec M et N localement finis et si $f \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(M,N) = \mathcal{L}(M,N)$, $g \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(N,P)$ alors $f \circ g \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(M,P)$.

Preuve :

Il existe des $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie V et W, $v \in V$, $w \in W$ et des $\mathfrak{g}$-morphismes $G : M \otimes_k V \to N$, $F : N \otimes_k W \to P$ tels que $G(m \otimes_k v) = g(m)$, $F(n \otimes_k w) = f(n)$ pour tous $m \in M$, $n \in N$ (cf. 1-6).
Soit K l'application : $M \otimes_k (V \otimes_k W) \to P$ définie par
$K(m \otimes_k s \otimes_k t) = F(G(m \otimes_k s) \otimes_k t)$, $m \in M$, $s \in V$, $t \in W$.
K est $\mathfrak{g}$-linéaire et vérifie $K(m \otimes_k (v \otimes_k w)) = K(m \otimes_k v \otimes_k w) = F(G(m \otimes_k v) \otimes_k w) = F(g(m) \otimes_k w) = f(g(m)) = f \circ g(m)$, $m \in M$. Il en résulte que $f \circ g \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(M,P)$ car $v \otimes_k w \in V \otimes_k W$ et $\dim_k V \otimes_k W < +\infty$ (cf. 1-6).
Les résultats 1.8 et 1.9 sont énoncés dans [6] ; nous en donnons une démonstration.

Lemme 1.8

Si I est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}$ alors $I^{(\mathfrak{g})}$ est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(\mathfrak{g})}$.

Preuve :

Soient M et N dans $\mathrm{Mod}_{(\mathfrak{g})}$, i un $\mathfrak{g}$-monomorphisme de M dans N, f une application $\mathfrak{g}$-linéaire de $M \to I^{(\mathfrak{g})}$. Soit i_1 l'injection canonique de $I^{(\mathfrak{g})}$ dans I. Il existe donc une application $\mathfrak{g}$-linéaire $\overline{f}$ de $N \to I$ telle que $\overline{f} \circ i = i_1 \circ f = f$ car f est un $\mathfrak{g}$-morphisme de $M \to I$. On a $\overline{f}(N) \subseteq I^{(\mathfrak{g})}$, car $\overline{f}$ est $\mathfrak{g}$-linéaire et N est localement fini. Ce qui prouve que $I^{(\mathfrak{g})}$ est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(\mathfrak{g})}$.

Corollaire 1.9

La catégorie $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$ possède suffisamment d'injectifs.

Preuve :

Si $M \in \underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$ et si E(M) est l'enveloppe injective de M dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{\mathfrak{g}}$, alors $E(M)^{(\mathfrak{g})}$ est un injectif dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$ d'après (1-8). Or $M \subseteq E(M)$ donc $M^{(\mathfrak{g})} \subseteq E(M)^{(\mathfrak{g})}$ c'est-à-dire que $M \subseteq E(M)^{(\mathfrak{g})}$. Tout objet de $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$ est donc contenu dans un objet injectif de $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$, ce qui prouve notre assertion..

Considérons le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(-,-)$ qui va de $\underline{\mathrm{Mod}}_{\mathfrak{g}} \times \underline{\mathrm{Mod}}_{\mathfrak{g}}$ dans k-e.v. (cf. [6] §1) et notons $\mathcal{L}(-,-)$ sa restriction à $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})} \times \underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$.

Proposition 1.10

Pour tout $T \in \mathrm{Mod}_{(\mathfrak{g})}$, les foncteurs $\mathcal{L}(T,-)$ et $\mathcal{L}(-,T)$ sont exacts à gauche dans $\mathrm{Mod}_{(\mathfrak{g})}$.

Preuve :

Soit $0 \to M \to N \to P \to 0$ une suite exacte dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$. Alors la suite $0 \to \mathrm{Hom}_k(T,M) \to \mathrm{Hom}_k(T,N) \to \mathrm{Hom}_k(T,P) \to 0$ est exacte dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{\mathfrak{g}}$. On en déduit que la suite :

$0 \to \mathrm{Hom}_k(T,M)^{(\mathfrak{g})} \to \mathrm{Hom}_k(T,N)^{(\mathfrak{g})} \to \mathrm{Hom}_k(T,P)^{(\mathfrak{g})}$ est exacte dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$ car le foncteur $(-)^{(\mathfrak{g})}$ de $\underline{\mathrm{Mod}}_{\mathfrak{g}}$ dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$ qui à M fait correspondre $M^{(\mathfrak{g})}$ est un foncteur covariant exact à gauche ; c'est-à-dire que la suite $0 \to \mathcal{L}(T,M) \to \mathcal{L}(T,N) \to \mathcal{L}(T,P)$ est exacte dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$. Ceci prouve l'exactitude à gauche du foncteur $\mathcal{L}(T,-)$.

On démontre de même que le foncteur $\mathcal{L}(-,T)$ est exact à gauche dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{(g)}$.

Proposition 1.11

Si E est un injectif dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{(g)}$ alors :

(1) $\mathcal{L}(-,E)$ est un foncteur exact dans $\mathrm{Mod}_{(g)}$;

(2) $\mathcal{L}(N,E)$ est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(g)}$ pour tout $N \in \underline{\mathrm{Mod}}_{(g)}$.

Preuve :

Si $0 \to M \to N \to P \to 0$ est une suite exacte dans $\mathrm{Mod}_{(g)}$ alors la suite $0 \to \mathcal{L}(P,E) \to \mathcal{L}(N,E) \to \mathcal{L}(M,E)$ est exacte dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{(g)}$ (cf. 1-10). Soit φ un élément de $\mathcal{L}(M,E) = \mathrm{Hom}_{(g)}(M,E)$. Il existe, d'après 1-6, un g-module V de dimension finie, un élément v de V et un g-morphisme $F : M \otimes_k V \to E$ tels que $F(m \otimes_k v) = \varphi(m)$, $m \in M$. L'application $i \otimes_k \mathrm{Id}_V : M \otimes_k V \to N \otimes_k V$ définie par $(i \otimes_k \mathrm{id}_V)(m \otimes_k v_1) = i(m) \otimes_k v_1$, $m \in M$, $v_1 \in V$ est un g-monomorphisme.

Puisque $M \otimes_k V$ et $N \otimes_k V$ sont manifestement des g-modules localement finis, il existe un g-morphisme $G : N \otimes_k V \to E$ tel que $G \circ (i \otimes_k \mathrm{Id}_V) = F$, car E est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(g)}$. Posons $f(n) = G(n \otimes_k v)$, $n \in N$. On a $f \in \mathcal{L}(N,E) = \mathrm{Hom}_{(g)}(N,E)$ (d'après 1-6) et $f \circ i(m) = f(i(m)) = G(i(m) \otimes_k v) = G \circ (i \otimes_k \mathrm{Id}_V)(m \otimes_k v) = F(m \otimes_k v) = \varphi(m)$ pour tout $m \in M$. Donc $f \circ i = \varphi$. Ceci signifie que le morphisme $\mathcal{L}(N,E) \to \mathcal{L}(M,E)$ est surjectif. Il en résulte que la suite $0 \to \mathcal{L}(P,E) \to \mathcal{L}(N,E) \to \mathcal{L}(M,E) \to 0$ est exacte dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{(g)}$ d'où (1).
Pour tous g-modules localement finis M et N, on peut identifier, d'après 1-5, les espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_g(M, \mathcal{L}(N,E))$ et $\mathrm{Hom}_g(M \otimes_k N,E)$. Le foncteur $\mathrm{Hom}_g(-,\mathcal{L}(N,E))$ de $\underline{\mathrm{Mod}}_{(g)}$ dans k-e.v.

est exact car composé du foncteur exact $-\otimes_k N$ qui va de <u>Mod</u>$_{(\mathfrak{g})}$ dans <u>Mod</u>$_{(\mathfrak{g})}$ et du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}$ (-,E) qui va de <u>Mod</u>$_{(\mathfrak{g})}$ dans k-<u>e.v.</u>, qui est aussi exact car E est un injectif dans Mod$_{(\mathfrak{g})}$. Ceci prouve (2).

<u>Définition 1.12</u>

Nous noterons : a : <u>Mod</u>$_{(\mathfrak{g})} \to$ k.<u>e.v.</u> le foncteur covariant exact à gauche $a(M) = M^{\mathfrak{g}}$ et $R^pa(\mathfrak{g},-)$ ses dérivés droits ; $\mathcal{L}^p$ (M,-) les foncteurs dérivés droits du foncteur covariant exact à gauche $\mathcal{L}$(M,-) défini dans <u>Mod</u>$_{(\mathfrak{g})}$, M$\in$<u>Mod</u>$_{(\mathfrak{g})}$ et $\varepsilon xt^p_{\mathfrak{g}}$ (-,-) les foncteurs dérivés droits du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}$ (-,-) restreint à la catégorie <u>Mod</u>$_{(\mathfrak{g})}$ x <u>Mod</u>$_{(\mathfrak{g})}$. Signalons que dans ([6] §2-8) les $R^pa(\mathfrak{g},-)$ sont notés $R^pa(-)$. Il est clair que pour <u>tout $\mathfrak{g}$-module localement fini</u> M <u>et pour tout $\mathfrak{g}$-module de dimension finie</u> V on a :

$$R^pa(\mathfrak{g},M) = \varepsilon xt^p_{\mathfrak{g}}(\mathbf{k},M),\ p\geq 0 \text{ et } \mathcal{L}^q(V,M) = 0,\ q \geq 1.$$

<u>Lemme 1.13</u>

<u>Si</u> k <u>est de caractéristique</u> 0 <u>et si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple alors tout $\mathfrak{g}$-module localement fini</u> M <u>est un injectif dans</u> Mod$_{(\mathfrak{g})}$.

<u>Preuve</u> :

En effet <u>Mod</u>$_{(\mathfrak{g})}$ est une catégorie semi-simple.

<u>Corollaire 1.14</u>

<u>Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple, alors on a pour tout</u> M, N$\in$<u>Mod</u>$_{(\mathfrak{g})}$

(1) $R^pa(\mathfrak{g},M) = 0 \qquad p \geq 1$

(2) $\mathcal{L}^q(M,N) = 0 \qquad q \geq 1$

(3) $\varepsilon xt^p_{\mathfrak{g}}(M,N) = 0 \qquad p \geq 1.$

Proposition 1.15

Si k est de caractéristique 0, et si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple, alors le foncteur $a = (-)^{\mathfrak{g}}$ de $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$ dans k-e.v. est exact.

Preuve :

Soit $0 \to M \to N \to P \to 0$ une suite exacte dans $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$. D'après 1.13 elle est scindée. Donc $0 \to M^{\mathfrak{g}} \to N^{\mathfrak{g}} \to P^{\mathfrak{g}} \to 0$ est exacte.

Proposition 1.16

Pour tous $\mathfrak{g}$-modules localement finis M et N, on a la suite spectrale

$$R^p a\,(\mathfrak{g}, \mathcal{L}^q(M,N)) \Rightarrow \varepsilon xt_{\mathfrak{g}}^{p+q}\,(M,N).$$

Preuve :

On a $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N) = \mathcal{L}(M,N)^{\mathfrak{g}}$. Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,-)$ de $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$ dans k-e.v. est donc le composé du foncteur covariant $\mathcal{L}(M,-)$ de $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$ dans $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$ et du foncteur covariant exact à gauche $a = (-)^{\mathfrak{g}}$ de $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$ dans k-e.v. ; on sait (cf. 1-11) que $\mathcal{L}(M,-)$ envoie les injectifs de $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$ dans les injectifs de $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$. On peut donc appliquer la suite spectrale des foncteurs composés (cf. [8] théorème 2-4-1). On a :

$(R^p a)((R^q\,\mathcal{L}(M,-))\,(N)) \Rightarrow (R^{p+q}\,\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\,(M,-))(N)$ où la notation R^p désigne les foncteurs dérivés droits.

Par définition $(R^p a)(-) = R^p a(\mathfrak{g},-)$, $R^q\,\mathcal{L}\,(M,-) = \mathcal{L}^q(M,-)$ et

$R^{p+q}\,\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\,(M,-) = \varepsilon xt_{\mathfrak{g}}^{p+q}\,(M,-)$. D'où la suite spectrale annoncée.

Corollaire 1.17

Pour tout $\mathfrak{g}$-module localement fini M et tout $\mathfrak{g}$-module de dimension finie V on a $R^p a\,(\mathfrak{g}, V^* \otimes_k M) = \varepsilon xt_{\mathfrak{g}}^{p}\,(V,M)$, $p \geq 0$ où V^* désigne le dual algébrique de l'espace vectoriel V.

Preuve :

On sait que $\mathcal{L}^q(V,M) = 0$, $q \geq 1$. Donc la suite spectrale de la proposition (1-16) dégénère et donne :

$$R^p a(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(V,M)) = \varepsilon xt^p_{\mathfrak{g}}(V,M),\ p\geq 0.$$

On sait que $\mathrm{Hom}_k(V,M) = V^* \otimes_k M$.▪

Le corollaire précédent est, dans un cas particulier, l'analogue de la relation bien connue $H^p(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(M,N)) = \mathrm{Ext}^p_{\mathfrak{g}}(M,N)$, $p\geq 0$, M et N appartiennent à $\underline{\mathrm{Mod}}_{\mathfrak{g}}$ où $H^p(\mathfrak{g},-)$ désigne la cohomologie ordinaire de $\mathfrak{g}$.

Lemme 1.18

Si M et V appartiennent à $\underline{\mathrm{Mod}}_{\mathfrak{g}}$ avec $\dim_k V < +\infty$, alors

$$(M \otimes_k V)^{(\mathfrak{g})} = M^{(\mathfrak{g})} \otimes_k V.$$

Preuve :

Notons V^* le dual de V ; $V\otimes_k M$ et $\mathrm{Hom}_k(V^*,M)$ sont $\mathfrak{g}$-isomorphes (cf. [3] corollaire 2 page 168). On en déduit que $M \otimes_k V$ et $\mathrm{Hom}_k(V^*,M)$ sont $\mathfrak{g}$-isomorphes donc $(M \otimes_k V)^{(\mathfrak{g})}$ et $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(V^*,M)$ sont $\mathfrak{g}$-isomorphes.

De même $M^{(\mathfrak{g})} \otimes_k V$ et $\mathrm{Hom}_k(V^*, M^{(\mathfrak{g})})$ sont $\mathfrak{g}$-isomorphes.

Il est clair que $\mathrm{Hom}_k(V^*,M^{(\mathfrak{g})})$ est contenu dans $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(V^*,M)$. Soit $f\in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(V^*,M)$. Il existe d'après (1-6) un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie L, un élément l de L et un $\mathfrak{g}$-morphisme $F : V^*\otimes_k L \to M$ tels que $F(v^* \otimes_k l) = f(v^*)$ pour tout $v^* \in V^*$; l'élément $f(v^*)$ est $\mathfrak{g}$-fini car F est $\mathfrak{g}$-linéaire et $v^* \otimes_k l$ est $\mathfrak{g}$-fini. Il en résulte que $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(V^*,M)$ est contenu dans $\mathrm{Hom}_k(V^*,M^{(\mathfrak{g})})$. On en déduit que :

$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(V^*,M) = \mathrm{Hom}_k(V^*,M^{(\mathfrak{g})})$; donc $(M \otimes_k V)^{(\mathfrak{g})} = M^{(\mathfrak{g})} \otimes_k V$.▪

Notons $U(\mathfrak{g})^*$ le dual algébrique de l'espace vectoriel $U(\mathfrak{g})$ et $R(\mathfrak{g})$ l'ensemble des éléments $\mathfrak{g}$-finis de $U(\mathfrak{g})^*$ pour l'action diagonale.

Corollaire 1.19

Pour tout $M \in \underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$, $R_{(\mathfrak{g})} \otimes_k M$ est un injectif dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$.

Preuve :

Si $M \in \underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$ alors M est limite inductive de sous-$\mathfrak{g}$-modules de dimension finie M_i de M, $i \in I$.

Pour chaque $i \in I$, les $\mathfrak{g}$-modules $U(g)^* \otimes_k M_i$ et $\mathrm{Hom}_k(U(\mathfrak{g}),M_i)$ sont isomorphes (cf. [3] corollaire 1 page 168). Comme $U(\mathfrak{g})$ est un $\mathfrak{g}$-module projectif, $\mathrm{Hom}_k(U(\mathfrak{g}),M_i)$ est un injectif dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{\mathfrak{g}}$ pour chaque $i \in I$, d'où $\varinjlim_{i\in I} (U(\mathfrak{g})^* \otimes_k M_i) = U(\mathfrak{g})^* \otimes_k M$ est un injectif dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{\mathfrak{g}}$ car $U(\mathfrak{g})$ est nœthérien. Il en résulte que $(\varinjlim_{i\in I} (U(\mathfrak{g})^* \otimes_k M_i))^{(\mathfrak{g})}$ est un injectif dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$, or

$$(\varinjlim_{i\in I} (U(\mathfrak{g})^* \otimes_k M_i))^{(\mathfrak{g})} = \varinjlim_{i\in I} (U(\mathfrak{g})^* \otimes_k M_i)^{(\mathfrak{g})} = \varinjlim_{i\in I} ((U)(\mathfrak{g})^{*(\mathfrak{g})} \otimes_k M_i) =$$

$R(\mathfrak{g}) \otimes_k M$.▪

Soit M et N des $\mathfrak{g}$-modules. Posons $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(M,N) = A'_{M;N}$ et $A'_{M,M} = A'_M$. Soit $\mathfrak{g}^\circ$ l'algèbre de Lie opposée de $\mathfrak{g}$ et ^{V} l'antiautomorphisme principal de U défini par $x^v = -x$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$. On a les isomorphismes d'algèbre suivants :

$U(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^\circ) \approx U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}^\circ) \approx U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})^\circ \approx U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$. Posons $U^2 = U(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^\circ)$, $\underline{k} = \{(x,-x),\ x \in \mathfrak{g}\}$. Il est clair que $\underline{k}$ et $\mathfrak{g}$ sont des algèbres de Lie isomorphes ; donc $U(\underline{k})$ est une sous-algèbre de U^2 isomorphe à U. Si M et N sont des $\mathfrak{g}$-modules, alors on munit $\mathrm{Hom}_k(M,N)$ de la structure de $U \otimes U$-module à gauche définie par $[(u \otimes v) f](m) = u(f(v^v m))$, $u \in U$; $v \in U$, $f \in \mathrm{Hom}_k(M,N)$ et $m \in M$. $\mathrm{Hom}_k(M,N)$ est alors un U-U bimodule. Plus précisément on a

$(u.f)(m) = u\,(f(m))$ et $(f.u.)(m) = f(u.m)$, $u \in U$, $f \in \mathrm{Hom}_k\,(M,N)$ et $m \in M$. Par restriction des scalaires $\mathrm{Hom}_k\,(M,N)$ est un $\underline{k}$-module à gauche et l'ensemble de ses éléments $\underline{k}$-finis est précisément $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}\,(M,N)$. Il est clair que $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}\,(M,N)$ est un $U \otimes U$-module à gauche.

Lemme 1.20

Si M et N sont des $\mathfrak{g}$-modules alors pour tout $i \geq 0$ $\mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}(M,N)$ est un U^2-module à gauche.

Preuve :

Soit $P^* = (P_i)\ i \geq 0$ une résolution projective de M dans $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}$. Pour chaque $i \geq 0$, $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}\,(P_i,N)$ est un U^2-module à gauche ; donc $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}\,(P^*,N)$ est un complexe de U^2-modules à gauche qui induit en cohomologie une structure de U^2-module à gauche sur chaque $\mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,N)$: $i \geq 0$.

Lemme 1.21

Si M et N sont des $\mathfrak{g}$-modules alors :

(1) $\mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,N)$ est un A'_N-module à gauche et un A'_M-module à droite, $i \geq 0$

(2) $\mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,N)$ est un A'_N-U bimodule, $i \geq 0$

(3) $\mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,N)$ est un U-A'_M bimodule, $i \geq 0$.

Preuve

(1) Si $P^* = (P_i)_{i \geq 0}$ est une résolution projective de M dans $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}$ alors $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}\,(P^*, N)$ est un complexe de A'_N-modules à gauche ; donc chaque $\mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,N)$ est un A'_N-module à gauche.

Si $E^* = (E^i)_{i\geq 0}$ est une résolution injective de N dans $Mod_{\mathfrak{g}}$ alors $\mathcal{E}xt^i_{(\mathfrak{g})}(M,N) = H^i(Hom_{(\mathfrak{g})}(M,E^*))$, $i \geq 0$; or $Hom_{(\mathfrak{g})}(M,E^*)$ est un complexe de A'_M-modules à droite. Il en résulte que chaque $\mathcal{E}xt^i_{(\mathfrak{g})}(M,N)$ est un A'_M-module à droite.

(2) C'est évident car pour tous g-modules P et N, $Hom_{(\mathfrak{g})}(P,N)$ est un A'_N-U bimodule.

(3) C'est évident car pour tous $\mathfrak{g}$-modules M et E, $Hom_{(\mathfrak{g})}(M,E)$ est un U-A'_M bimodule.

Lemme 1.22

Soient M, N, V et W des $\mathfrak{g}$-modules avec V et W de dimension finie. Alors les $\mathfrak{g}$-modules $Hom_k(V,W) \otimes_k Hom(M,N)$ et $Hom(V\otimes M, W\otimes N)$ sont isomorphes.

Preuve :

L'application $\lambda : Hom(V,W) \otimes Hom(M,N) \to Hom(V\otimes M, W\otimes N)$ définie par $\lambda(f\otimes g)(v\otimes m) = f(v)\otimes g(m)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels car V et W sont de dimension finie.

L'application λ est manifestement $\mathfrak{g}$-linéaire ; donc elle envoie $(Hom(V,W)\otimes Hom(M,N))^{(\mathfrak{g})}$ dans $Hom_{(\mathfrak{g})}(V\otimes M,W\otimes N)$. Comme $Hom(V,W)$ est un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie, on a $Hom_{(\mathfrak{g})}(V\otimes M,W\otimes N) \approx Hom(V,W)\otimes Hom_{(\mathfrak{g})}(M,N)$.▪

Si V est un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie, alors on munit $V\otimes U$ et $U\otimes V$ d'une structure de U-Ubimodule en posant $X(v\otimes u) = Xv\otimes u + v\otimes Xu$; $(v\otimes u)X = v\otimes uX$; $X(u\otimes v) = Xu\otimes v + u\otimes Xv$; $(u\otimes v)X = uX\otimes v$; $X\in \mathfrak{g}$, $u \in U$, $v\in V$; $U\otimes V$ et $V\otimes U$ sont des U-U bimodules isomorphes. Nous allons poser $\phi_V = V\otimes U$.

Lemme 1.23

Soient M, N, V, W des $\mathfrak{g}$-modules avec V et W de dimension finie. Alors on a pour tout $i \geq 0$.

(1) $\mathrm{Hom}\,(V,W) \otimes \mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,N) \approx \mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(V\otimes M,\, W\otimes N)$

(2) $\phi_W \otimes_U \mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,N) \approx W\otimes \mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,N) \approx \mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,W\otimes N)$

(3) $\phi_{V^*} \otimes_U \mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,N) \approx V^* \otimes \mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,N) \approx \mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(V\otimes M,N)$

(4) $\mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(V,\mathrm{Hom}\,(M,N)) \approx \mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,N) \otimes_U \phi_{V^*} \approx \mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,N)\otimes V^*$

Preuve :

(1) $\mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(V\otimes M,W\otimes -)$ et $\mathrm{Hom}\,(V,W)\otimes \mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,-)$ sont des foncteurs cohomologiques de $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}$ dans $\mathrm{Mod}_{(\mathfrak{g})}$ car $\mathrm{Hom}\,(V,W) \otimes -$ et $W\otimes -$ sont exacts de $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}$ dans $\mathrm{Mod}_{(\mathfrak{g})}$. Si I est un injectif de $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}$, alors $W\otimes I$ est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}$ car $\mathrm{Hom}\,(M,W\otimes I) \approx \mathrm{Hom}\,(W^*\otimes M,I)$ et $W^*\otimes -$ est exact. On a donc $\mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(V\otimes M,\, W\otimes I) = 0$ et $\mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,I) = 0$, $i>0$. $\mathrm{Ext}^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(V\otimes M,\, W\otimes -)$ et $\mathrm{Hom}\,(V,W) \otimes \mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,-)$ sont donc des foncteurs cohomologiques qui s'annulent sur les injectifs pour $i>0$ et qui (cf. lemme 1.21) coïncident en degré 0. Ils coïncident donc pour tous degrés (cf. [8] 2.4.1) ; d'où (1).

(2) Posons $V = k$ avec l'action triviale de $\mathfrak{g}$ dans (1).

On a : $W\otimes \mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,N) = \mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,W\otimes N)$. Il est clair que

$W\otimes \mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,N) \approx \phi_W \otimes_U \mathcal{E}xt^{i}_{(\mathfrak{g})}\,(M,N)$; d'où (2).

(3) Posons W = k avec l'action triviale de g dans (1).

On a $V^*\otimes\mathcal{E}xt^i_{(g)}(M,N) \approx \mathcal{E}xt^i_{(g)}(V\otimes M,N)$. Il est clair que

$V^*\otimes\mathcal{E}xt^i_{(g)}(M,N) = \phi_{V^*} \otimes_U \mathcal{E}xt^i_{(g)}(M,N)$, d'où (3).

(4) $\mathcal{E}xt^i_{(g)}(V,\mathrm{Hom}\,(M,-))$ et $\mathcal{E}xt^i_{(g)}(M,-)\otimes_U\phi_{V^*}$ sont des foncteurs cohomologiques de Mod_g dans Mod_g car les foncteurs Hom (M,-) et $-\otimes_U\phi_{V^*}$ sont exacts de Mod_g dans Mod_g. Si I est un injectif dans Mod_g, alors Hom (M,I) est un injectif dans Mod_g car Hom $(-\otimes M,I)$ = Hom(-,Hom(M,I) et le foncteur $-\otimes M$ est exact de Mod_g dans Mod_g. On a donc $\mathcal{E}xt^i_{(g)}(V,\mathrm{Hom}\,(M,I) = 0$ et $\mathcal{E}xt^i_{(g)}(M,I) = 0$, $i > 0$.

$\mathcal{E}xt^i_{(g)}(V,\ \mathrm{Hom}(M,-))$ et $\mathcal{E}xt^i_{(g)}(M,-)\otimes_U\phi_{V^*}$ sont donc des foncteurs cohomologiques de Mod_g dans Mod_g qui s'annulent sur les injectifs pour $i > 0$. Comme $\mathrm{Hom}_{(g)}(V,\mathrm{Hom}\,(M,N)) = \mathrm{Hom}_{(g)}(V\otimes M,N) = \mathrm{Hom}_{(g)}(M,N)\otimes_U\phi_{V^*}$. On obtient donc le premier isomorphisme de (4). Il est clair qu'on a $\mathcal{E}xt^i_{(g)}(M,N)\otimes_U\phi_{V^*} = \mathcal{E}xt^i_{(g)}(M,N)\otimes_U(V^*\otimes U) =$

$\mathcal{E}xt^i_{(g)}(M,N)\otimes_U(U\otimes V^*) \approx \mathcal{E}xt^i_{(g)}(M,N)\otimes V^*$: $i \geq 0$.

<u>Corollaire 1.24</u>

<u>Si</u> N <u>et</u> V <u>sont des</u> g-<u>modules avec</u> V <u>de dimension finie, alors on a pour</u> $i \geq 0$:

(1) $\phi_V\otimes_U H^i_{(g)}(N) = V\otimes H^i_{(g)}(N) = H^i_{(g)}(V\otimes N)$

(2) $\phi_{V^*}\otimes_U H^i_{(g)}(N) = V^*\otimes H^i_{(g)}(N) = \mathcal{E}xt^i_{(g)}(V,N)$

<u>Preuve</u> :

(1) Il suffit de remplacer M par k avec l'action triviale de g et W par V dans le lemme 1.23 (2).

(2) Il suffit de remplacer M par k avec l'action triviale de $\mathfrak{g}$ dans le lemme 1.23 (3).

§2. Les foncteurs $\mathcal{L}_R$ (-,-), $\mathrm{Hom}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ (-,-) et leurs dérivés

Dans ce paragraphe, R désigne une k-algèbre associative, unitaire, noethérienne à droite et à gauche, où k est un corps commutatif de caractéristique 0, soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie qui opère sur R via un morphisme d'algèbres de Lie $\delta : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_k R$ où $\mathrm{Der}_k R$ est l'algèbre de Lie des k-dérivations de R. L'algèbre R est donc munie d'une structure de $\mathfrak{g}$-module et <u>on suppose que l'action de</u> $\mathfrak{g}$ <u>sur</u> R <u>est localement finie</u>. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\delta(X)$ sera noté δ_X. On sait alors construire une k-algèbre associative unitaire $R\#U(\mathfrak{g})$, un morphisme d'algèbres $\Psi_0 : R \to R\#U(\mathfrak{g})$ et un morphisme d'algèbres de Lie $\aleph_0 : \mathfrak{g} \to R\#U(\mathfrak{g})$ tels que

$$\aleph_0 (X)\Psi_0 (r) - \Psi_0 (r) \aleph_0 (X) = \Psi_0 (\delta_X (r)),\ X\in\mathfrak{g},\ r\in R \text{ (cf. [1] §3, [5] §2).}$$

Les morphismes Ψ_0 et $\aleph_0$ sont injectifs. On peut identifier R à une sous-algèbre de $R\#U(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{g}$ à une sous-algèbre de Lie de $R\#U(\mathfrak{g})$. Signalons que $R\#U(\mathfrak{g})$ est engendré comme algèbre par R et $\mathfrak{g}$. C'est une algèbre noethérienne (cf. [1]§3). Notons $\underline{\mathrm{Mod}}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ la catégorie des $R\#U(\mathfrak{g})$-modules à gauche et $\underline{\mathrm{Mod}}_R$ celle des R-modules à gauche.

<u>Définition 2.1</u>

On dira que M est un (R-$\mathfrak{g}$)-<u>module</u> si M est un R-module à gauche et un $\mathfrak{g}$-module à gauche tel que $X(rm) = \delta_X(r)m + r(Xm)$, $X\in\mathfrak{g}$, $r\in R$, $m\in M$. On a $\mathrm{Hom}_{R\#U(\mathfrak{g})} (M,N) = \mathrm{Hom}_R (M,N) \cap \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}} (M,N)$

pour tous (R-$\mathfrak{g}$)-modules M et N. $\underline{\mathrm{Mod}}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ est donc la catégorie des (R-$\mathfrak{g}$)- modules.

Les notations et les conventions du paragraphe 1 restent en vigueur.

Définition 2.2

On dira que M est un R#U($\mathfrak{g}$)-module $\mathfrak{g}$-localement fini si M est un R#U($\mathfrak{g}$)-module et si l'action de $\mathfrak{g}$ sur M est localement finie. Par exemple R est un R#U($\mathfrak{g}$)-module $\mathfrak{g}$-localement fini. La catégorie des R#U($\mathfrak{g}$)-modules $\mathfrak{g}$-localement finis sera notée $\underline{\mathrm{Mod}}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$. C'est une sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Mod}}_{R\#U(\mathfrak{g})}$. Elle est fermée pour les sommes directes.

Lemme 2.2'

1) Si I est un R#U($\mathfrak{g}$)-module alors $I^{(\mathfrak{g})}$ est un R#U($\mathfrak{g}$)-module $\mathfrak{g}$ localement fini.
2) Si I est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ alors $I^{(\mathfrak{g})}$ est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$.
3) La catégorie $\mathrm{Mod}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$ possède suffisamment d'injectifs.

Preuve :

1) Soient $r\in R$, $m\in I^{(\mathfrak{g})}$. Nous allons montrer que rm est $\mathfrak{g}$fini. Soit donc $X\in\mathfrak{g}$; on a :

$$X(rm) = X(r)m + r(Xm)=(X.r)m+ r(X.m) \in V = (U(\mathfrak{g})r).(U(\mathfrak{g})m).$$

Comme r et m sont $\mathfrak{g}$-finis, on a $\dim_k U(\mathfrak{g})\, r<+\infty$ et $\dim_k U(\mathfrak{g})\, m<+\infty$. Si $(r_1, r_2, ..., r_l)$ est une base de $U(\mathfrak{g})r$ et $(m_1, m_2,...,m_k)$ une base de $U(\mathfrak{g})m$ alors V est le sous-espace vectoriel de I engendré par les $r_i m_j$, $1\le i\le l$, $1\le j\le k$. On a donc

$\dim_k V<+\infty$. Pour tout $X\in\mathfrak{g}$, on a $X(r_i m_j) = (Xr_i)m_j + r_i(Xm_j) \in V$ pour chaque i et chaque j ; V est donc un sous-$\mathfrak{g}$-module de I. Il en résulte que $U(\mathfrak{g})(rm) \subseteq V$. on a donc $\dim_k U(\mathfrak{g})(rm)<+\infty$ c'est-à-dire que r.m et $\mathfrak{g}$-fini. Ce qui prouve 1).

2). C'est évident. La démonstration se fait comme en (1.8).

3) C'est évident. La démonstration se fait comme en (1.9)..

Lemme 2.3

Si M est un $\mathfrak{g}$-module et N un $R\#U(\mathfrak{g})$-module alors $M\otimes_k N$, $N\otimes_k M$ et $\mathrm{Hom}_k(M,N)$ sont des $R\#U(\mathfrak{g})$-modules pour les opérations :

$X(m \otimes_k n) = Xm \otimes_k n + m \otimes_k Xn$

$r(m \otimes_k n) = m \otimes_k rn$

$X(n \otimes_k m) = Xn \otimes_k m + n \otimes_k Xm$

$r(n \otimes_k m) = rn \otimes m$

$(xf)(m) = xf(m) - f(xm)$

$(rf)(m) = rf(m)$, $X\in\mathfrak{g}$, $r\in R$, $m\in M$, $n\in N$, $f\in \mathrm{Hom}_k(M,N)$.

Corollaire 2.4

Si M et N sont dans $\mathrm{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$, alors $M \otimes_k N$ et $\mathrm{Hom}_k(M,N)$ sont dans $\mathrm{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ et $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ est un sous-$\mathfrak{g}$-module de $\mathrm{Hom}_k(M,N)$.

Corollaire 2.5

Si $W\in \mathrm{Mod}_{(\mathfrak{g})}$ alors $R\otimes_k W\in \mathrm{Mod}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$

Proposition 2.6

Les $R\#U(\mathfrak{g})$-modules $R\otimes_k U(\mathfrak{g})$ et $R\#U(\mathfrak{g})$ sont isomorphes.

Preuve :

Soit $\alpha : R \otimes_k U(\mathfrak{g}) \to R\#U(\mathfrak{g})$ défini par $\alpha(r \otimes_k u) = ru$, $r\in R$, $u \in U(\mathfrak{g})$; l'application α est $R\#U(\mathfrak{g})$-linéaire.

Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathfrak{g}$ alors $X_1^{\nu 1}X_2^{\nu 2}\ldots X_n^{\nu n}$ où $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$ est une R-base à gauche et à droite de $R\#U(\mathfrak{g})$(cf. [1] §3, [5] §2). Soit $v \in R\#U(\mathfrak{g})$ on a $v = \Sigma a_\nu X_1^{\nu 1}X_2^{\nu 2} \ldots X_n^{\nu n}$ où $a_\nu \in R$. L'application $\beta : R\# U(\mathfrak{g}) \to R \otimes_k U(\mathfrak{g})$ définie par :
$\beta(v) = \Sigma a_\nu \otimes_k X_1^{\nu 1}X_2^{\nu 2} \ldots X_n^{\nu n}$ est $R\#U(\mathfrak{g})$-linéaire. On vérifie facilement que α et β sont deux applications réciproques l'une de l'autre. ∎

Proposition 2.7

Un $R\#U(\mathfrak{g})$-module $\mathfrak{g}$-localement fini M est de type fini comme $R\#U(\mathfrak{g})$-module si et seulement si il existe un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie W et une $R\#U(\mathfrak{g})$-surjection de $R\otimes_k W$ sur M.

Preuve :

Si W est un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie de k-base $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ alors $R \otimes_k W$ est un $R\#U(\mathfrak{g})$-module R-libre de base $(1 \otimes_k w_1, \ldots, 1 \otimes_k w_n)$; si φ est une $R\#U(\mathfrak{g})$ surjection de $R \otimes_k W$ sur M alors tout élément de M est combinaison R-linaire des $\varphi(1 \otimes_k w_i)$, $1 \leq i \leq n$. Donc M est de type fini comme R-module, donc comme $R\#U(\mathfrak{g})$-module. Supposons M de type fini comme $R\#U(\mathfrak{g})$-module de partie génératrice $(m_1, m_2, \ldots, m_s)$. Si $m \in M$, on a $m = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i m_i$, $\alpha_i \in R\#U(\mathfrak{g})$.

Chaque $\alpha_i = r_i u_i$, $r_i \in R$, $u_i \in U(\mathfrak{g})$ (proposition 2-6). Donc $m = \sum_{i=1}^{s} (r_i u_i) m_i$ $= \sum_{i=1}^{s} r_i (u_i m_i)$. Posons $W = U(\mathfrak{g})m_1 + u(\mathfrak{g})m_2 + \ldots + U(\mathfrak{g})m_s$. Pour chaque i, $\dim_k U(\mathfrak{g})m_i < +\infty$ car M est $\mathfrak{g}$-localement fini, donc W est un sous-$\mathfrak{g}$-module de dimension finie de M qui contient les $U(\mathfrak{g})m_i$. Soit l'application $f : R \otimes_k W \to M$ définie par $f(r \otimes_k w) = rw$. L'application f est R#U($\mathfrak{g}$)-linéaire et $f(\sum_{i=1}^{s} r_i \otimes_k (u_i m_i)) = m$ donc c'est une R#U($\mathfrak{g}$)-surjection. Ce qui achève la démonstration.

Corollaire 2.8

Un R#U($\mathfrak{g}$)-module $\mathfrak{g}$-localement fini est de type fini comme R#U($\mathfrak{g}$)-module si et seulement si il est de type fini comme R-module.

Définition 2.9

Si M et N sont des R#U($\mathfrak{g}$)-modules, on pose

$\mathcal{L}_R(M,N) = \mathrm{Hom}_R(M,N) \cap \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(M,N)$.

Il est clair que $\mathcal{L}_R(M,N)$ est dans $\mathrm{Mod}_{(\mathfrak{g})}$.

Lemme 2.10

Si N est un R#U($\mathfrak{g}$)-module $\mathfrak{g}$-localement fini alors $\psi : \mathcal{L}_R(R,N) \to N$ défini par $\psi(f) = f(1)$ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules.

Preuve :

Nous avons $\psi(Xf)=(Xf)(1)=Xf(1)-f(X1)=Xf(1)-f(\delta_X(1))=Xf(1)=X\psi(f)$ pour tous $f \in \mathcal{L}_R(R,N)$, $X \in \mathfrak{g}$; ψ est donc $\mathfrak{g}$-linéaire.

Si $\psi(f)=0$ alors $f(r) = f(r1) = rf(1) = r\psi(f) = 0$ pour tout $r \in R$ donc $f=0$; ψ est donc un $\mathfrak{g}$-monomorphisme.

Si $n \in N$, on définit $f_n : R \to N$ par $f_n(v) = vn$; $v \in R$; f_n est R-linéaire et on montre que $Xf_n = f_{Xn}$, $X \in \mathfrak{g}$; on en déduit que $f_n \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(R,N)$ car N est $\mathfrak{g}$-localement fini. On a donc $f_n \in \mathcal{L}_R(R,N)$. $\psi(f_n) = f_n(1) = 1.n = n$. Donc ψ est un $\mathfrak{g}$-épimorphisme. Ce qui achève la démonstration.

Lemme 2.11

Si W est un $\mathfrak{g}$-module et N un R#U($\mathfrak{g}$)-module alors les $\mathfrak{g}$-modules $\mathrm{Hom}_R(R\otimes_k W,N)$ et $\mathrm{Hom}_k(W,N)$ sont isomorphes.

Preuve :

Les applications $\phi : \mathrm{Hom}_R (R\otimes_k W,N) \to \mathrm{Hom}_k (W,N)$ et $\psi : \mathrm{Hom}_k (W,N) \to \mathrm{Hom}_R (R \otimes_k W,N)$ définies respectivement par $\phi(f)(w) = f(1 \otimes_k w)$ et $\psi(g)(r \otimes_k w) = rg(w)$ sont $\mathfrak{g}$-linéaires et réciproques l'une de l'autre.

Lemme 2.12

Si L est un $\mathfrak{g}$-module, M et N deux $R\#U(\mathfrak{g})$-modules, alors $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}} (L,\mathrm{Hom}_R (M,N))$ et $\mathrm{Hom}_{R\#U(\mathfrak{g})} (L \otimes_k M,N)$ sont k-isomorphes.

Preuve :

Les applications $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}} (L,\mathrm{Hom}_R (M,N))\to\mathrm{Hom}_{R\#U(\mathfrak{g})} (L\otimes_k M,N)$ et $\psi : \mathrm{Hom}_{R\#U(\mathfrak{g})} (L \otimes_k M,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}} (L,\mathrm{Hom}_R (M,N))$ définies respectivement par $\phi(f) (\ell\otimes_k m) = f(\ell)(m)$ et $\psi(g)(\ell)(m) = g(\ell \otimes_k m)$ sont k-linéaires et réciproques l'une de l'autre.

Corollaire 2.13

Si I est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ alors

(1) $\mathrm{Hom}_R (M,I)$ est injectif dans $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}$ pour tout $M\in \mathrm{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$

(2) I est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}$.

Preuve :

D'après (2-12) on a $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}} (-,\mathrm{Hom}_R (M,I))= \mathrm{Hom}_{R\#U(\mathfrak{g})} (- \otimes_k M,I)$. Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}} (-,\mathrm{Hom}_R (M,I))$ de $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}$ dans k-e.v. est donc le composé du foncteur exact $-\otimes_k M$ de $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}$ dans $\mathrm{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ et du foncteur $\mathrm{Hom}_{R\#U(\mathfrak{g})} (-,I)$ de $\mathrm{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ dans k-e.v., qui est aussi exact car I est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ par hypothèse. Il en résulte que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}} (-,\mathrm{Hom}_R (M,I))$ est exact de $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}$ dans k-e.v. Par conséquent $\mathrm{Hom}_R (M,I)$ est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{g}}$ d'où (1).

Une démonstration similaire à celle qui a été faite dans (2.10) permet d'affirmer que les $\mathfrak{g}$-modules Hom_R (R,I) et I sont isomorphes. D'après (1), Hom_R (R,I) est un injectif dans $\underline{Mod}_{\mathfrak{g}}$ donc I est un injectif dans $\underline{Mod}_{\mathfrak{g}}$; d'où (2).

Corollaire 2.14

Si L est un g-module localement fini, M et N deux $R\#U(\mathfrak{g})$-modules alors $Hom_{\mathfrak{g}}$ (L,$\mathcal{L}_R$ (M,N) et $Hom_{R\#U(\mathfrak{g})}$ (L $\otimes_k$ M,N) sont k-isomorphes.

Preuve :

On utilise (2.12) et comme L est localement fini, son image par un morphisme $\mathfrak{g}$-linéaire est contenu dans $Hom_R (M,N)^{(\mathfrak{g})} = \mathcal{L}_R$ (M,N).

Corollaire 2.15

Si I est un injectif dans $\underline{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ alors $\mathcal{L}_R$ (M,I) est un injectif dans $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$ pour tout M dans $\underline{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$.

Preuve :

(2-14) et une démonstration analogue à (2.13) (1) donnent le résultat.

Corollaire 2.16

Si I est un injectif dans $\underline{Mod}_{((R\#U(\mathfrak{g}))}$ alors

1) $\mathcal{L}_R$ (M,I) est un injectif dans $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$ pour tout M dans $\underline{Mod}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$.
2) I est un injectif dans $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$.

Preuve :

(2.14) et une démonstration analogue à (2.13) (1) donne (1).

D'après (2.10), les $\mathfrak{g}$-modules $\mathcal{L}_R$ (R,I) et I sont isomorphes. D'après (1), $\mathcal{L}_R$ (R,I) est un injectif dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$ donc I aussi d'où (2).

Proposition 2.17

Si M et N sont deux R#U($\mathfrak{g}$)-modules $\mathfrak{g}$-localement finis et si M est de type fini alors $\mathcal{L}_R$ (M,N) = Hom_R (M,N).

Preuve :

Il existe un $\mathfrak{g}$-module W de dimension finie et une R#U($\mathfrak{g}$)-surjection f : $R \otimes_k W \to M$ d'après (2.7).

En appliquant le foncteur Hom_R (-,N) de $\underline{\mathrm{Mod}}_{\mathfrak{g}}$ dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{\mathfrak{g}}$, on obtient une application $\mathfrak{g}$-linéaire

Hom_R (f,N) : Hom_R (M,N) $\to$ Hom_R ($R \otimes_k W$,N) qui à $\varphi \in \mathrm{Hom}_R$ (M,N) fait correspondre $\varphi \circ f$.

On montre facilement que Hom_R (f,N) est une injection. Identifions donc Hom_R (M,N) à un sous-$\mathfrak{g}$-module de Hom_R ($R \otimes_k W$,N).

Hom_k (W,N) est manifestement $\mathfrak{g}$-localement fini et (2.11) entraîe que Hom_R ($R \otimes_k W$,N) est localement fini donc Hom_R (M,N) est localement fini d'où $\mathcal{L}_R$ (M,N) = Hom_R (M,N).

Proposition 2.18

Si I est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$ alors $\mathcal{L}_R$ (-,I) est un foncteur exact de $\underline{\mathrm{Mod}}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$ dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$.

Preuve :

Soit $0 \to M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\Pi} p \to 0$ une suite exacte dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$. Il est évident que $0 \to \mathrm{Hom}_R (P,I) \to \mathrm{Hom}_R (N,I) \to \mathrm{Hom}_R (M,I)$ est une suite exacte dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{\mathfrak{g}}$. On en déduit que la suite

$0 \to Hom_R (P,I)^{(\mathfrak{g})} \to Hom_R (N,I)^{(\mathfrak{g})} \to Hom_R (M,I)^{(\mathfrak{g})}$ est exacte dans $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$.

Soit $f \in Hom_R (M,I)^{(\mathfrak{g})}$, posons $W = U(\mathfrak{g})$ f. On a donc $\dim_k W < +\infty$.

Soit $F_1 : M \otimes_k W \to I$ tel que $F_1 (m \otimes_k w) = w(m)$, $m \in M$, $w \in W$; F_1 est un $R\#U(\mathfrak{g})$-morphisme.

Soit $i \otimes_k Id : M \otimes_k W \to N \otimes_k W$ tel que $(i \otimes_k Id)(m \otimes_k w) = i(m) \otimes_k w$. $i \otimes_k Id$ est un $R\#U(\mathfrak{g})$-monomorphisme. Il existe donc $\overline{F}_1$, $R\#U(\mathfrak{g})$-linéaire, de $N \otimes_K W \to I$ tel que $\overline{F}_1 \circ (i \otimes_K Id) = F_1$ car I est un injectif dans $\underline{Mod}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$ et $M \otimes_K W$ et $N \otimes_k W$ appartiennent à $\underline{Mod}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$.

Soit $\overline{f} : N \to I$ défini par $\overline{f}(n) = \overline{F}_1 (m \otimes_k f)$, $n \in N$. $\overline{f} \in Hom_{(\mathfrak{g})} (N,I) = \mathcal{L}(N,I)$ (cf. 1.6). L'application $\overline{f}$ est manifestement R-linéaire donc $\overline{f} \in Hom_R (N,I)^{(\mathfrak{g})} = \mathcal{L}_R (N,I)$.

Nous avons :

$f(m) = F_1 (m \otimes_k f) = \overline{F}_1 \circ (i \otimes_k Id)(m \otimes_k f) = \overline{F}_1 (i(m) \otimes_k f) = \overline{f} \circ i(m)$, $m \in M$. Ce qui prouve que le morphisme :

$$Hom_R (N,I)^{(\mathfrak{g})} \to Hom_R (M,I)^{(\mathfrak{g})} \text{ est surjectif.}$$

Donc la suite $0 \to Hom_R (P,I)^{(\mathfrak{g})} \to Hom_R (N,I)^{(\mathfrak{g})} \to Hom_R (M,I)^{(\mathfrak{g})} \to 0$ est exacte dans $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$. Ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire 2.19</u>

<u>Soit</u> I <u>un injectif dans</u> $\underline{Mod}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$; <u>si</u> $M \in \underline{Mod}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$, M <u>de type fini alors</u> $\mathcal{E}xt_R^p (M,I) = 0$, $p > 0$.

<u>Preuve</u> :

Il existe un $\mathfrak{g}$-module V_0 de dimension finie et une $R\#U(\mathfrak{g})$-surjection $p_0 : P_0 = R \otimes_k V_0 \to M$ d'après (2.7).

Posons $K = Ker\ p_0$. C'est un sous-$R\#U(\mathfrak{g})$-module $\mathfrak{g}$-localement fini de P_0. Comme $R\#U(\mathfrak{g})$ est noethérien et $P_0 = R \otimes_k V_0$ est un $R\#U(\mathfrak{g})$-

module de type fini, K est de type fini. Il existe donc un $\mathfrak{g}$-module V_1 de dimension finie et une $R\#U(\mathfrak{g})$-surjection $p_1 : P_1 = R \otimes_k V_1 \to K$. on a $\operatorname{Im} p_1 = K = \operatorname{Ker} p_0$. On construit pa ce procédé une résolution R-libre donc R-projective de M :

$$P_* = \dots p_i = R\otimes_k V_i \to P_{i-1} = R \otimes_k V_{i-1} \to \dots \to P_1 = R \otimes_k V_1 \to$$

$P_0 = R \otimes_k V_0 \to M \to 0$ où chaque V_i est un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie. On a donc $\mathcal{E}xt_R^P (M,I) = H^P (\mathrm{Hom}_R (P_*,I)$. On sait que :

$$\mathrm{Hom}_R (M,I) = \mathcal{L}_R (M,I) \text{ et } \mathrm{Hom}_R (P_i,I) = \mathcal{L}_R (P_i,I),\ i\geq 0$$

donc $\mathcal{E}xt_R^P (M,I) = H^P (\mathcal{L}_R (P_*,I))$.

Signalons que P_* est aussi un complexe acyclique de $R\#U(\mathfrak{g})$-modules $\mathfrak{g}$-localement finis sur M (cf. [4] chapitre 5.1), donc $\mathcal{L}_R(P_*,I)$ est une résolution injective de $\mathcal{L}_R (M,I)$ dans $\underline{\mathrm{Mod}_{(\mathfrak{g})}}$ car I étant un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$ le foncteur $\mathcal{L}_R (-,I)$ est exact de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$ dans $\mathrm{Mod}_{(\mathfrak{g})}$ d'après (2.18) et $\mathcal{L}_R(-,I)$ envoie les objets de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$ dans les injectifs de $\mathrm{Mod}_{(\mathfrak{g})}$ (on utilise (2.16). Il en résulte que $H^P (\mathcal{L}_R(P_*,I)) = 0$ pour $p > 0$ donc $\mathcal{E}xt_R^P(M,I) = 0$, $p > 0$.

<u>Corollaire 2.20</u>

<u>Soient</u> M <u>et</u> N <u>dans</u> $\mathrm{Mod}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$, M <u>de type fini et</u> $E^* = \{E^i\}$ <u>une résolution injective de</u> N <u>dans</u> $\mathrm{Mod}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$. Alors $\mathcal{E}xt_R^P (M,N) = H^P(\mathrm{Hom}_R (M,E^*))$, $p \geq 0$.

<u>Preuve</u> :

Nous avons $\mathcal{E}xt_R^P (M,N) = H^P(\mathrm{Hom}_R (P_*,N) = H^P (\mathcal{L}_R (P_*,N))$ où P_* est la résolution R-libre de M construite dans le corollaire précédent. $\mathcal{L}_R (P_*,N)$ est un complexe dans $\mathrm{Mod}_{(\mathfrak{g})}$ qui induit sur chaque $H^P (\mathcal{L}_R (P_*,N)) = \mathcal{E}xt_R^P (M,N)$ une structure de $\mathfrak{g}$-module localement fini.

$\mathcal{E}xt_R^p$ (M,-) est donc un foncteur cohomologique de $\underline{\mathrm{Mod}}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$ dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$ et, d'après (2.19), on a $\mathcal{E}xt_R^p$ (M,I) = 0, p >0 pour tout injectif I de $\underline{\mathrm{Mod}}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$.

Notons $R^p \mathcal{L}_R$ (M,-) les foncteurs dérivés droits du foncteur $\mathcal{L}_R$ (M,-) qui va de $\underline{\mathrm{Mod}}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$ dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$.

Il est clair que $R^p \mathcal{L}_R$ (M,-) est un foncteur cohomologique de $\underline{\mathrm{Mod}}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$ dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$ et que ($R^p \mathcal{L}_R$ (M,-)) (I) = 0, p>0 pour tout injectif I de $\underline{\mathrm{Mod}}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$. De plus on a :

$\mathcal{E}xt_R^o (M,-) = \mathrm{Hom}_R (M,-) = \mathcal{L}_R (M,-) = R^o\mathcal{L}_R (M,-)$.

Il en résulte que $\mathcal{E}xt_R^p(M,-) = R^p \mathcal{L}_R (M,-)$ pour tout $p \geq 0$ donc $\mathcal{E}xt_R^p (M,N) = (R^p \mathcal{L}_R (M,-))(N) = H^p (\mathcal{L}_R (M,E^*)) = H^p (\mathrm{Hom}_R (M,E^*))$, $p\geq 0$.

<u>Définition 2.21</u>

<u>Notons</u> $\widetilde{\mathcal{E}xt}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ (-,-) <u>Les foncteurs dérivés droits du foncteur</u> $\mathrm{Hom}_{R\#U(\mathfrak{g})}(-,-)$ restreint à $\underline{\mathrm{Mod}}_{(R\#U(\mathfrak{g}))} \times \underline{\mathrm{Mod}}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$.

<u>Proposition 2.22</u>

<u>Si</u> M <u>et</u> N <u>sont deux</u> R#U($\mathfrak{g}$)-<u>modules</u>, $\mathfrak{g}$-<u>localement finis et</u> M <u>de type fini, on a la suite spectrale</u> :

$$R^p a(\mathfrak{g}, \mathcal{E}xt_R^q (M,N)) \Rightarrow \widetilde{\mathcal{E}xt}^{p+q}_{R\#U(\mathfrak{g})} (M,N).$$

<u>Preuve</u> :

On a $\mathrm{Hom}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ (M,-) = Hom_R $(M,-)^{\mathfrak{g}}$. Le foncteur $\mathrm{Hom}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ (M,-) de $\underline{\mathrm{Mod}}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$ dans k-<u>e.v.</u> est donc le composé du foncteur covariant Hom_R (M,-) = $\mathcal{L}_R$ (M,-) qui va de $\underline{\mathrm{Mod}}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$ dans $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$ et du foncteur covariant exact à gauche a = $(-)^{\mathfrak{g}}$ qui va de $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$ dans k-<u>e.v.</u>. D'après (2.16), Hom_R(M,-) = $\mathcal{L}_R$ (M,-) envoie les injectifs de $\underline{\mathrm{Mod}}_{(R\#U(\mathfrak{g}))}$ dans les injectifs de $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$. On peut donc appliquer la suite spectrale des foncteurs composés (cf. [8] théorème 2.4.1).

On trouve :

$R^p\, a((R^q\mathrm{Hom}_R\,(M,-))(N)) \Rightarrow (R^{p+q}\,\mathrm{Hom}_{R\#U(\mathfrak{g})}\,(M,-))(N)$.
On sait (2.20) que $(R^q\,\mathrm{Hom}_R\,(M,-))(N) = \mathcal{E}xt^q_R\,(M,N)$ et par définition $(R^p\,a)(-) = R^p\,a\,(\mathfrak{g},-)$, $R^{p+q}\,\mathrm{Hom}_{R\#U(\mathfrak{g})}\,(M,-) = \widetilde{\mathcal{E}xt}^{p+q}_{R\#U()}\,(M,-)$. D'où la suite spectrale annoncée.

Corollaire 2.23

Pour tout $R\#U(\mathfrak{g})$-module, $\mathfrak{g}$-localement fini N, on a

$$R^pa\,(\mathfrak{g},N) = \widetilde{\mathcal{E}xt}^p_{R\#U(\mathfrak{g})}\,(R,N).$$

Preuve :

Il suffit de remplacer M par R dans (2.22). La suite spectrale dégénère et on a $R^pa\,(\mathfrak{g},\mathrm{Hom}_R\,(R,N)) = \mathcal{E}xt^p_{R\#U(\mathfrak{g})}\,(R,N)$ et (2.10) permet d'affirmer que les $\mathfrak{g}$-modules $\mathrm{Hom}_R\,(R,N)$ et N sont isomorphes. On trouve donc le résultat annoncé.

Corollaire 2.24

Pour tout $R\#U(\mathfrak{g})$-module, $\mathfrak{g}$-localement fini N, on a

$$\mathcal{E}xt^p_{\mathfrak{g}}\,(k,N) = \mathcal{E}xt^p_{R\#U(\mathfrak{g})}\,(R,N).$$

Corollaire 2.25

Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, on a pour tous $R\#U(\mathfrak{g})$-modules, $\mathfrak{g}$-localement finis M et N, M de type fini, :

$$\widetilde{\mathcal{E}xt}^q_{R\#U(\mathfrak{g})}(M,N) = (\mathcal{E}xt^q_R\,(M,N))^{\mathfrak{g}},\ q\geq 0.$$

Preuve :

Puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple on a $R^pa\ (\mathfrak{g}, \mathcal{E}xt^q_R\ (M,N)) = 0$ pour tout $p \geq 1$ d'après (1.14) et la suite spectrale de (2.22) dégénère.

Soient M et N dans $\underline{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$. Si $R^p\ Hom_R\ (M,-)$ désigne les foncteurs dérivés droits du foncteur $Hom_R\ (M,-)$ qui va de $\underline{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ dans $\underline{Mod}_{\mathfrak{g}}$, alors on a $(R^p\ Hom_R\ (M,-))(N) = H^p(Hom_R\ (M,E^*))$ où E^* est une résolution injective de N dans $\underline{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$. Comme $R\#U(\mathfrak{g})$ est R-libre, E^* est aussi une résolution injective de N dans $\underline{Mod}_R$. On a donc $(R^p\ Hom_R(M,-))(N) = H^p\ (Hom_R\ (M,E^*)) = \mathcal{E}xt^p_R\ (M,N)$. Il existe donc sur chaque $\mathcal{E}xt^p_R\ (M,N)$, $p \geq 0$ une structure de $\mathfrak{g}$-module.

Définition 2.26

On notera $\mathcal{L}^q_R\ (M,-)$ les foncteurs dérivés droits du foncteur $\mathcal{L}_R\ (M,-)$ qui va de $Mod_{R\#U(\mathfrak{g})}$ dans $Mod_{(\mathfrak{g})}$ et $H^p_{(\mathfrak{g})}\ (-)$ ceux du foncteur $(-)^{(\mathfrak{g})}$ qui va de $\underline{Mod}_{\mathfrak{g}}$ dans $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$ qui à tout $\mathfrak{g}$-module M fait correspondre $M^{(\mathfrak{g})}$ (cf. [6] §1).

Proposition 2.27

Si M et N sont deux $R\#U(\mathfrak{g})$-modules alors on a la suite spectrale

$$H^p_{(\mathfrak{g})}\ (\mathcal{E}xt^q_R\ (M,N)) \Rightarrow \mathcal{L}^{p+q}_R\ (M,N)$$

Preuve :

On a $\mathcal{L}_R\ (M,N) = Hom_R\ (M,N)^{(\mathfrak{g})}$. Donc le foncteur $\mathcal{L}_R\ (M,-)$ de $\underline{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ dans $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$ est le composé du foncteur covariant $Hom_R\ (M,-)$ de $\underline{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ dans $\underline{Mod}_{\mathfrak{g}}$ et du foncteur covariant exact à gauche $(-)^{(\mathfrak{g})}$ qui va de $\underline{Mod}_{\mathfrak{g}}$ dans $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$. D'après le corollaire (2.13),

Hom_R (M,-) envoie les injectifs de $\underline{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ dans les injectifs de $\underline{Mod}_{\mathfrak{g}}$. On peut donc appliquer les résultats de la suite spectrale des foncteurs composés. On trouve

$(R^p(-)^{(\mathfrak{g})})((R^q\, Hom_R(M,-))(N)) \Rightarrow (R^{p+q}\, \mathcal{L}_R\, (M,-))\, (N).$

On sait que $(R^q\, Hom_R\, (M,-))(N) = \mathcal{E}xt_R^q\, (M,N)$

et par définition $(R^p\, (-)^{(\mathfrak{g})})\, (-) = H^p_{(\mathfrak{g})}\, (-)$, $R^{p+q}\, \mathcal{L}_R\, (M,-) = \mathcal{L}_R^{p+q}\, (M,-)$.

On trouve donc la suite spectrale annoncée.▪

Remarquons que si R = k,donc

$R\#U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})$, on a $\mathcal{L}_R\, (M,-) = \mathcal{L}_k\, (M,-) = Hom_{(\mathfrak{g})}(M,-)$

pour tout M dans $\underline{Mod}_{\mathfrak{g}}$. La suite spectrale (2.27) dégénère et donne

$H^p_{(\mathfrak{g})}\, (Hom_k\, (M,N)) = \mathcal{E}xt^p_{(\mathfrak{g})}\, (M,N)$

pour tous M, N $\in Mod_{(\mathfrak{g})}$: c'est le corollaire 2 §2 du [6].

<u>Corollaire 2.28</u>

<u>Pour tout</u> $R\#U(\mathfrak{g})$-<u>module</u> N, <u>on a</u> $H^p_{(\mathfrak{g})}\, (N) = \mathcal{L}^p_R\, (R,N)$, $p \geq 0$.

<u>Preuve</u> :

Il suffit de remplacer M par R dans (2.27), la suite spectrale dégénère et donne le résultat.

<u>Corollaire 2.29</u>

<u>Pour tout</u> $R\#U(\mathfrak{g})$-<u>module</u> N, <u>on a</u> $\mathcal{E}xt^p_{(\mathfrak{g})}\, (k,N) = \mathcal{L}^p_R\, (R,N)$

<u>Preuve</u> :

On sait (cf. [6] §2) que $\mathcal{E}xt^p_{(\mathfrak{g})}\, (k,N) = H^p_{(\mathfrak{g})}(N)$ et en utilisant le corollaire précédent on obtient le résultat.

Proposition 2.30

Si M et N sont deux R#U($\mathfrak{g}$)-modules alors on a la suite spectrale

$$H^p_{\mathfrak{g}}(\mathcal{E}xt^q_R(M,N)) \Rightarrow \mathcal{E}xt^{p+q}_{R\#U(\mathfrak{g})}(M,N).$$

Preuve :

On a : $Hom_{R\#U(\mathfrak{g})}(M,N) = Hom_R(M,N)^{\mathfrak{g}}$, donc le foncteur $Hom_{R\#U(\mathfrak{g})}(M,-)$ de $\underline{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ dans k-e.v. est le composé du foncteur covariant $Hom_R(M,-)$ de $\underline{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ dans $\underline{Mod}_{\mathfrak{g}}$ et du foncteur covariant exact à gauche $(-)^{\mathfrak{g}}$ de $\underline{Mod}_{\mathfrak{g}}$ dans k-e.v.. D'après le corollaire (2.13), si I est un injectif dans $\underline{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ alors $Hom_R(M,I)$ est un injectif dans $\underline{Mod}_{\mathfrak{g}}$. On peut donc appliquer la suite spectrale des foncteurs composés. On trouve :
$(R^p\,()^{\mathfrak{g}})((R^q\,Hom_R(M,-))(N) \Rightarrow (R^{p+q}\,Hom_{R\#U(\mathfrak{g})}(M,-))(N)$. On sait que $(R^q\,Hom_R(M,-))(N) = \mathcal{E}xt^q_R(M,N)$ et par définition $R^p\,(-)^{\mathfrak{g}}(-) = H^p_{\mathfrak{g}}(-)$ et $R^{p+q}\,Hom_{R\#U(\mathfrak{g})}(M,-) = \mathcal{E}xt^{p+q}_{R\#U(\mathfrak{g})}(M,-)$. Ce qui donne la suite spectrale annoncée.

Proposition 2.31

Si M et N sont deux R#U($\mathfrak{g}$)-modules alors on a la suite spectrale

$$R^p a_{(\mathfrak{g}}, \mathcal{L}^q_R(M,N)) \Rightarrow \mathcal{E}xt^{p+q}_{R\#U(\mathfrak{g})}(M,N).$$

Preuve :

$Hom_{R\#U(\mathfrak{g})}(M,N) = \mathcal{L}_R(M,N)^{\mathfrak{g}}$, donc le foncteur $Hom_{R\#U(\mathfrak{g})}(M,-)$ de $\underline{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ dans k-e.v. est le composé du foncteur covariant $\mathcal{L}_R(M,-)$ qui va de $\underline{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ dans $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$ et du foncteur covariant exact à gauche $a = (-)^{\mathfrak{g}}$ qui va de $\underline{Mod}_{(\mathfrak{g})}$ dans k-e.v. ; on sait d'après le corollaire (2.15), que $\mathcal{L}_R(M,-)$ envoie les injectifs de $\underline{Mod}_{R\#U(\mathfrak{g})}$ dans les injectifs de $\underline{\mathrm{Mod}}_{(\mathfrak{g})}$. On peut donc appliquer la suite spectrale des foncteurs composés. On trouve :

$(R^p a)((R^q \mathcal{L}_R (M,-))(N) \Rightarrow (R^{p+q} \mathrm{Hom}_{R\#U(\mathfrak{g})} (M,-)) (N)$.

Par définition $(R^p a)(-) = R^p a(\mathfrak{g},-)$, $R^q \mathcal{L}_R (M,-) = \mathcal{L}_R^q (M,-)$ et

$R^{p+q} \mathrm{Hom}_{R\#U(\mathfrak{g})} (M,-) = \mathcal{E}xt^{p+q}_{R\#U(\mathfrak{g})} (M,-)$. On a donc

$$R^p a (\mathfrak{g}, \mathcal{L}_R^q (M,N)) \Rightarrow \mathcal{E}xt^{p+q}_{R\#U(\mathfrak{g})} (M,N).$$

Remarquons que si $R = k$ avec l'opération triviale de $\mathfrak{g}$ donc $R\#U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})$, la suite spectrale (2.28) devient

$$R^p a(\mathfrak{g}, \mathcal{L}_k^q (M,N)) \Rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathfrak{g}}^{p+q} (M,N)$$

pour tous $\mathfrak{g}$-modules M et N. Les $\mathcal{L}_k^q (M,N)$ sont notés $\mathcal{E}xt^q_{(\mathfrak{g})} (M,N)$ dans [6]. On trouve donc :

$$R^p a (\mathfrak{g}, \mathcal{E}xt^q_{(\mathfrak{g})} (M,N)) \Rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathfrak{g}}^{p+q} (M,N).$$

C'est la suite spectrale du [6] §1, 2.8).

On suppose à partir de maintenant que la k-algèbre R est commutative.

Définition 2.32

Posons $\mathcal{L} = R \otimes_k \mathfrak{g}$ et soit $V(R,\mathcal{L})$ l'algèbre des opérateurs différentiels engendrée par $\mathcal{L}$ (cf. [7] et [11]). On écrira V au lieu de $V(R,\mathcal{L})$. Il est facile de voir utilisant les propriétés universelles de $R\#U(\mathfrak{g})$ et de $V(R,\mathcal{L})$ que :

Proposition 2.33

Les algèbres $R\#U(\mathfrak{g})$ et $V(R,\mathcal{L})$ sont isomorphes.

Lemme 2.34

Si M et N sont deux $R\#U(\mathfrak{g})$-modules alors $\mathrm{Hom}_R (M,N)$ et $M \otimes_R N$ sont des $R\#U(\mathfrak{g})$-modules.

Lemme 2.35

Si M et N sont deux $R\#U(\mathfrak{g})$-modules $\mathfrak{g}$-localement finis avec N de type fini alors $M \otimes_R N$ est un $R\#U(\mathfrak{g})$-module $\mathfrak{g}$-localement fini.

Preuve :

Puisque N est de type fini, il existe d'après (2.7) un $\mathfrak{g}$-module V de dimension finie et une $R\#U(\mathfrak{g})$-surjection $\varphi : R \otimes_k V \to N$. L'application $id \otimes_R \varphi : M \otimes_R (R \otimes_k V) \to M \otimes_R N$ définie par $(id \otimes_R \varphi)(m \otimes_R (r \otimes_k v)) = m \otimes_R \varphi(r \otimes_k v)$ est une $R\#U(\mathfrak{g})$-surjection. Le $R\#U(\mathfrak{g})$-module $M \otimes_R (R \otimes_k V)$ est $\mathfrak{g}$-localement fini car $M \otimes_R (R \otimes_k V)$ et $M \otimes_k V$ sont $R\#U(\mathfrak{g})$-isomorphes et $M \otimes_k V$ est $\mathfrak{g}$-localement fini. Il en résulte que $M \otimes_R N$ est $\mathfrak{g}$-localement fini.

Proposition 2.36

Si M et N sont deux $R\#U(\mathfrak{g})$-modules et M $\mathfrak{g}$-localement fini alors $\mathcal{L}_R(M,N)$ est un $R\#U(\mathfrak{g})$-module $\mathfrak{g}$-localement fini.

Preuve :

On sait que $\mathcal{L}_R(M,N)$ est un sous-$\mathfrak{g}$-module localement fini de $\mathrm{Hom}_R(M,N)$. Soit $a \in R$, notons $L(a) : M \to N$ la multiplication à gauche par a c'est-à-dire que $L(a)m = am$, $m \in M$. L'application $L(a)$ est k-linéaire et on vérifie facilement que $L(Xa) = XL(a)$, $X \in \mathfrak{g}$; d'où on déduit que $\dim_k L(U(\mathfrak{g})\, a) < +\infty$ car R est $\mathfrak{g}$-localement fini.
Donc $L(a) \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(M,N) = \mathcal{L}(M,N)$.
Si $f \in \mathcal{L}_R(M,N)$, on a $af = f \circ L(a)$ donc $af \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g})}(M,N)$ d'après (1.7). Comme af est manifestement R-linéaire, $af \in \mathcal{L}_R(M,N)$. Donc $\mathcal{L}_R(M,N)$ est un sous-R-module de $\mathrm{Hom}_R(M,N)$. De plus $X(af) = \delta_X(a)f + a(Xf)$ car $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ et $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ est un $R\#U(\mathfrak{g})$-module. Ce qui termine la démonstration.

Proposition 2.37

Soient M, N et P des $R\#U(\mathfrak{g})$-modules avec M et N $\mathfrak{g}$-localement finis. Alors il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$\phi : \mathrm{Hom}_{R\#U(\mathfrak{g})} (M \otimes_R N,P) \to \mathrm{Hom}_{R\#U(\mathfrak{g})} (M,\mathcal{L}_R (N,P))$ défini par

$\phi(f)(m)(n) = f(m \otimes_R n)$, $f \in \mathrm{Hom}_{R\#U(\mathfrak{g})} (M \otimes_R N,P)$, $m \in M$, $n \in N$.

Preuve :

Notons V pour $V(R,\mathcal{L})$.

On sait [7] que $\phi : \mathrm{Hom}_V (M \otimes_R N,P) \to \mathrm{Hom}_V (M,\mathrm{Hom}_R(N,P))$ défini par $\phi(f)(m)(n) = f(m \otimes_R n)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Comme M est $\mathfrak{g}$-localement fini, on a $\phi(f)(m) \in \mathcal{L}_R (N,P)$. Donc ϕ établit un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathrm{Hom}_V (M \otimes_R N,P)$ sur $\mathrm{Hom}_V (M,\mathcal{L}_R (N,P))$.

Posons $\phi = \tilde{\phi}$ et utilisons la proposition (2.33), on obtient le résultat annoncé.

§3. Produit semi-direct d'algèbres de Lie

Soient $\underline{s}$ et $\underline{r}$ des k-algèbres de Lie de dimension finie et δ de $\underline{s}$ dans $\mathrm{Der}_k\, \underline{r}$ un homomorphisme de K-algèbres de Lie. Notons $U(\underline{r})$ l'algèbre enveloppante de $\underline{r}$ et soit $\delta(s)$ l'unique dérivation de $U(\underline{r})$ qui prolonge $\delta(s)$, $s \in \underline{s}$; δ est un homomorphisme d'algèbres de Lie de $\underline{s} \to \mathrm{Der}_k\, U(r)$. Considérons l'algèbre $U(\underline{r})\#U(s)$ (cf. [1] §3, [5] §2)et soit $\mathfrak{g}$ le produit semi-direct de $\underline{s}$ par $\underline{r}$ (correspondant à l'homomorphisme

$s \to \delta_s = \delta(s)$, $s \in \underline{s}$). Il est facile de vérifier en utilisant les propriétés universelles de $U(\underline{r}) \# U(\underline{s})$ (cf. [1] §3) et de $U(\mathfrak{g})$ que :

Proposition 3.1

Les algèbres $U(\underline{r}) \# U(\underline{s})$ et $U(\mathfrak{g})$ sont isomorphes.

Proposition 3.2

Sous les hypothèses précédentes, on a la suite spectrale $R^pa(\underline{s}, \mathcal{L}^q_{U(\underline{r})}(M,N)) \Rightarrow \mathcal{E}xt^{p+q}_{\mathfrak{g}}(M,N)$ pour tous $\mathfrak{g}$-modules M et N.

Preuve :

On utilise (2.31) et (3.1).

Corollaire 3.3

Si $\underline{s}$ est semi-simple alors on a $(\mathcal{L}^q_{U(\underline{r})}(M,N))^{\underline{s}} = \mathcal{E}xt^q_{\mathfrak{g}}(M,N)$, $q \geq 0$, pour tous $\mathfrak{g}$-modules M et N.

Preuve :

Puisque $\underline{s}$ est semi-simple, on a d'après (1.14) :

$$R^pa(\underline{s}, \mathcal{L}^q_{U(\underline{r})}(M,N)) = 0, \ p \geq 1$$

La suite spectrale de (3.2) dégénère et donne le résultat annoncé.

Corollaire 3.4

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple, alors on a $(\mathcal{E}xt^q_{(\mathfrak{g})}(M,N))^{\mathfrak{g}} = \mathcal{E}xt^q_{\mathfrak{g}}(M,N)$, $q \geq 0$ pour tous $\mathfrak{g}$-modules M et N.

Preuve :

On prend $\underline{s}$ semi-simple et $\underline{r} = (0)$ (donc $\mathfrak{g} = \underline{s}$) dans le corollaire précédent. On trouve $(\mathcal{L}^q_k(M,N))^{\mathfrak{g}} = \mathcal{E}xt^q_{\mathfrak{g}}(M,N)$, $q \geq 0$ pour tous $\mathfrak{g}$-modules M et N. Dans [6], les $\mathcal{L}^q_k(M,N)$ sont notés $\mathcal{E}xt^q_{(\mathfrak{g})}(M,N)$. Ce qui achève la démonstration.

Corollaire 3.5

Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, alors on a $(H^q_{(\mathfrak{g})}(N))^{\mathfrak{g}} = H^q_{\mathfrak{g}}(N)$, $q \geq 0$ pour tout $\mathfrak{g}$-module N.

Preuve :

D'après le corollaire précédent, on a $(\mathcal{E}xt^q_{(\mathfrak{g})}(k,N)) = \mathcal{E}xt^q_{\mathfrak{g}}(k,N)$.

On sait que $\mathcal{E}xt^q_{\mathfrak{g}}(k,N) = H^q_{\mathfrak{g}}(N)$ et $\mathcal{E}xt^q_{(\mathfrak{g})}(k,N) = H^q_{(\mathfrak{g})}(N)$.

On trouve donc le résultat annoncé.

BIBLIOGRAPHIE

1 Bell, Allen D. : Localization and ideal theory in iterated differential operator rings, J. Algebra, 106 volume 2 ; 376-401 (1987).

2 Blattner, R : Induced and produced representations of Lie algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 144 (1969), 457-474.

3 Bourbaki, N. : Algèbre, chapitre II, Masson éd.

4 Cartan, H. and Eilenberg, S. : Homological Algebra, Princeton, University press (1956).

5 Chin, W. : Prime ideals in differential operator rings and crossed products of infinite groups, J. Algebra, 106, volume 1, 78-104, (1987).

6 Du Cloux, F. : Foncteurs dérivés des vecteurs $\mathfrak{g}$-finis (preprint).

7 Fel'Dman, G.L. : Global dimension of rings of differential operators, Trans. Moscow math. Soc., 123-147, (1982, n° 1).

8 Grothendieck, A. : Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math. J.9, 119-221, (1957).

9 Levasseur, T. : Critère d'induction et de coinduction pour certains anneaux d'opérateurs différentiels. Comm. In Algebra 12 (20) 1984, 2457-2524.

10 Magid, A.R. : Cohomology of rings with algebraic group action. Advances in Mathematics 59, 124-151, (1986).

11 Rinehart, G.S. : Differential form on general commutative algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 108, 195-222, (1963).

Received: February 1992

JOURNAL OF ALGEBRA **197**, 584–614 (1997)
ARTICLE NO. JA977080

Algèbre homologique dans la catégorie $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$

Thomas Guédénon

37, rue Pasteur, 92800 Puteaux, France

Communicated by Leonard Scott

Received January 15, 1995

JE DÉDIE CE TRAVAIL À ARSÈNE ASSOGBA

Let k be an algebraically closed field of characteristic zero, g a finite-dimensional Lie algebra over k, $U(g)$ the enveloping algebra of g, R a Noetherian k-algebra on which g acts by derivations via a Lie algebra morphism, and $R\#U(g)$ the differential operator rings generated by R and $U(g)$. This paper is concerned with the homological algebra for $R\#U(g)$-modules which are g-locally finite, especially with injective and projective modules, minimal injective resolutions, and cohomology.

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, g une k-algèbre de Lie de dimension finie, $U(g)$ l'algèbre enveloppante de g, R une k-algèbre noethérienne sur laquelle g opère par dérivations via un morphisme d'algèbres de Lie et $R\#U(g)$ le produit croisé de R par $U(g)$. Ce papier traite de l'algèbre homologique dans la catégorie des $R\#U(g)$-modules g-localement finis, plus particulièrement des modules injectifs et projectifs, des résolutions injectives minimales et de la cohomologie.

0. INTRODUCTION

Soient k un corps commutatif de caractéristique nulle, g une k-algèbre de Lie de dimension finie, $U(g)$ l'algèbre enveloppante de g, R une k-algèbre associative unitaire noethérienne à droite et à gauche sur laquelle g opère par dérivations via un morphisme d'algèbres de Lie δ et $R\#U(g)$ l'anneau d'opérateurs différentiels engendré par R et $U(g)$. Tous les modules considérés dans ce travail sont des modules à gauche.

Soit M un g-module. Un élément m de M est dit g-fini si $\dim_k U(g)m < +\infty$. Si tous les éléments de M sont g-finis, on dit que M est g-localement fini.

On note Mod_R la catégorie des R-modules, Mod_g la catégorie des g-modules, $\mathrm{Mod}_{(g)}$ la sous-catégorie de Mod_g dont les objets sont g-locale-

0021-8693/97 $25.00

ment finis, $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$ la catégorie des $R\#U(g)$-modules, $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ la sous-catégorie de $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$ dont les objets sont g-localement finis et k-ev la catégorie des espaces vectoriels sur k.

Si $M \in \mathrm{Mod}_g$, on note M^g le sous-g-module des invariants de M (l'action de g sur M^g est triviale). Il est clair que R^g est une sous-k-algèbre unitaire de R et R est un $(R^g$-$R^g)$ bimodule. L'anneau R^g sera supposé noethérien à droite et à gauche et désigné par la lettre S dans tout l'exposé.

On définit un foncteur $(\ )^g$ de $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$ vers $\mathrm{Mod}_{S\#U(g)}$ et, lorsque R est g-localement finie, deux foncteurs $\mathscr{F}_S(R, -)$ et $R \otimes_S -$ de Mod_S vers $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Ces trois foncteurs vont nous permettre d'établir des relations entre les propriétés homologiques d'un $R\#U(g)$-module g-localement fini et celles de son sous-module des invariants.

Comme k est de caractéristique zéro, le théorème de Weyl sur la réductibilité complète peut être utilisé pour montrer que $\mathrm{Mod}_{(g)}$ est une catégorie semi-simple, si g est semi-simple; dans ces conditions, le foncteur $(\ )^g$ est exact de $\mathrm{Mod}_{(g)}$ vers Mod_g.

Les principaux résultats de l'article sont obtenus en supposant g semi-simple.

Le premier paragraphe contient les définitions de base, les notations et les résultats préliminaires dont on aura besoin dans l'article.

Dans le deuxième paragraphe, R est g-localement finie. Nous montrons que:

(1) le foncteur $\mathscr{F}_S(R, -)$ envoie les injectifs de Mod_S dans les injectifs de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ et les S-monomorphismes essentiels dans les $R\#U(g)$-monomorphismes essentiels;

(2) l'image par $\mathscr{F}_S(R, -)$ de l'enveloppe injective d'un objet de Mod_S est $R\#U(g)$-isomorphe à l'enveloppe injective de l'image de cet objet par $\mathscr{F}_S(R, -)$; et le foncteur $(\ )^g$ établit un isomorphisme de S-modules entre ces deux enveloppes injectives;

(3) le foncteur $(\ )^g$ envoie certains injectifs de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ dans les injectifs de Mod_S; et ces injectifs de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ sont $R\#U(g)$-isomorphes aux images par $\mathscr{F}_S(R, -)$ de leurs sous-modules des invariants;

(4) si la catégorie $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ possède un cogénérateur injectif d'un certain type, on peut caractériser les $R\#U(g)$-modules induits g-localement finis injectifs et le foncteur $(\ )^g$ préserve les résolutions injectives minimales: c'est-à-dire que le sous-module des invariants du n^e terme de la résolution injective minimale d'un objet de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ est S-isomorphe au n^e terme de la résolution injective minimale du sous-module des invariants de cet objet; cette condition imposée à la catégorie $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ est, en général, trop forte: elle implique en particulier que R est plat sur R^g pourvu que R soit commutative.

Dans le paragraphe 3, R est commutative et souvent g-localement finie. Nous montrons que le foncteur $(\ )^g$ transforme certains projectifs de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ en projectifs de Mod_S; nous obtenons certains résultats analogues à ceux du paragraphe 2 et nous étudions le groupe de Picard de l'anneau S.

Dans le paragraphe 4, nous examinons le cas particulier où R est l'algèbre de Hopf de g.

Dans le paragraphe 5, nous montrons sous certaines hypothèses que $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ est une catégorie semi-simple et S est un anneau semi-simple.

Pour obtenir nos résultats, nous nous sommes inspiré des articles de Magid [9, 10].

Pour la construction de l'anneau $R\#U(g)$, on pourra consulter [1]. On trouvera d'autres propriétés homologiques des $R\#U(g)$-modules dans [6, 7].

Ce travail est la suite de nos résultats parus dans [7].

1. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

On dit qu'un objet M de $\mathrm{Mod}_{(g)}$ est ergodique si $M^g = \{0\}$. Nous avons utilisé le terme ergodique par analogie avec [9, p. 126].

Si M est ergodique, alors tout sous-module de M est ergodique.

Si g est semi-simple et si $M \in \mathrm{Mod}_{(g)}$, on note M_g le plus grand sous-g-module ergodique de M. Il est clair que $M^g \cap Mg = \{0\}$. Par conséquent, M/M^g est ergodique pour tout $M \in \mathrm{Mod}_{(g)}$ si g est semi-simple.

LEMME 1.1. *Soient g semi-simple et* $M \in \mathrm{Mod}_{(g)}$. *Alors on a* $M = M^g \oplus M_g$ *une somme directe de g-modules.*

DÉFINITION 1.2. Soit $M \in \mathrm{Mod}_{(g)}$, on note M^1 le sous-g-module de M engendré par $g \cdot M$. On pose $(M)_g = M/M^1$ et on note $q_M \colon M \to (M)_g$ la projection canonique.

Il est évident que l'action de g sur $(M)_g$ est triviale.

LEMME 1.3. *Soit* $M \in \mathrm{Mod}_{(g)}$. *Si g est semi-simple, on a les isomorphismes de g-modules*

$$M^1 \approx M_g \qquad et \qquad (M)_g \approx M^g.$$

Si g est semi-simple, la décomposition $M = M_g \oplus M^g$ en somme directe de g-modules est fonctorielle dans le sens suivant: si $f\colon M \to M'$ est un morphisme de g-modules, alors $f(M^g) \subseteq M'^g$ et $f(M_g) \subseteq M'_g$. En particulier, $f \circ p_M = p_{M'} \circ f$.

Soient g semi-simple et $M \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Pour r fixé dans S, notons f_r le k-endomorphisme de M défini par $f_r(m) = rm$. Alors f_r est g-linéaire, d'où $f_r \circ p_M = p_M \circ f_r$. Ceci implique que $f_r(M^g) \subseteq M^g$ et $f_r(M_g) \subseteq M_g$: c'est-à-dire que M^g et M_g sont des sous-S-modules (donc des sous-$S\#U(g)$-modules) de M et p_M est S-linéaire (donc $S\#U(g)$-linéaire).

Pour tout M dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, le sous-g-module M^1 de M engendré par $g \cdot M$ défini en (1.2) est un sous-$S\#U(g)$-module de M. Donc $(M)_g = M/M^1$ appartient à $\mathrm{Mod}_{(S\#U(g))}$ et la projection canonique q_M est $S\#U(g)$-linéaire. Il est facile de voir que les g-isomorphismes $M^1 \approx M_g$ et $(M)_g \approx M^g$ de (1.3) sont aussi des $S\#U(g)$-isomorphismes.

Si M et N sont dans Mod_g, on munit $\mathrm{Hom}(M,N)$ et $M \otimes N$ de la structure de g-module définie par l'action diagonale.

On note $\mathrm{Hom}_{(g)}(M,N)$ l'ensemble des éléments g-finis de $\mathrm{Hom}(M,N)$ [5, paragraphe 1 et 7, 1.4].

Si M et N sont dans $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$, on note [7, 2.9] $\mathscr{F}_R(M,N)$ l'ensemble des éléments g-finis de $\mathrm{Hom}_R(M,N)$.

Soit M un S-module. Munissons M de la structure de g-module trivial. Alors M devient un objet de $\mathrm{Mod}_{(S\#U(g))}$. Nous pouvons donc considérer $\mathrm{Hom}(R,M)$ comme un objet de $\mathrm{Mod}_{S\#U(g)}$.

Si $r \in R$ et $f \in \mathrm{Hom}(R,M)$, on pose $(rf)(s) = f(sr)$. Donc $\mathrm{Hom}(R,M) \in \mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$ et $\mathrm{Hom}_S(R,M)$ est un sous-$R\#U(g)$-module de $\mathrm{Hom}(R,M)$. Or, si R est g-localement finie, $s \to sr$ est dans $\mathscr{F}_S(R,R)$, donc [7, 1.7] $rf \in \mathscr{F}_S(R,M)$ pour tout $f \in \mathscr{F}_S(R,M)$. Ainsi $\mathscr{F}_S(R,M)$ est un objet de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, si R est g-localement finie.

Remarque. Les démonstrations de (2.7), (2.8), (2.17) et (2.35) de [7] n'utilisent pas le fait que R est g-localement finie. Cette remarque sera utile pour le paragraphe 5.

Rappels. (1) Si M (respectivement N) est dans Mod_S (respectivement dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$), on note $E_S(M)$ (respectivement $E_{R\#U(g)}(M)$) l'enveloppe injective de M dans Mod_S (respectivement de N dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$).

(2) Un objet M de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ est de type fini dans $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$ si et seulement s'il est de type fini dans Mod_R [7, 2.8].

(3) Si R est g-localement finie, on note [7, 2.21] $\widetilde{\mathrm{Ext}}_{R\#U(g)}(-,-)$ les foncteurs dérivés droits du foncteur $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(-,-)$ restreint à $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))} \times \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

(4) Soient M dans Mod_g et V un g-module simple. On appelle composant isotypique de M d'espèce V et on note M_V, la somme des sous-modules de M isomorphes à V. C'est un sous-module semi-simple de M, somme directe de sous-modules isomorphes à V.

LEMME 1.4. *Soient g semi-simple, M dans* $\mathrm{Mod}_{(g)}$ *et V un g-module simple de dimension finie. Alors, on a un isomorphisme de g-modules* $\mathrm{Hom}_g(V, M) \otimes V \approx M_V$ *et* $M = \oplus M_V$.

Si dans (1.4), M appartient à $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, alors

$$\mathrm{Hom}(V, M) = V^* \otimes M \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))};$$

donc $\mathrm{Hom}_g(V, M) \in \mathrm{Mod}_{(S\#U(g))}$ et le g-isomorphisme de (1.4) devient un $S\#U(g)$-isomorphisme.

LEMME 1.5. (1) *Soit R commutative g-localement finie. Si M et N sont dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, *alors $M \otimes_R N$ est dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

(2) *Si M est dans* Mod_S, *alors $R \otimes_S M$ est dans* $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$. *Il est g-localement fini si R est g-localement finie, car $R \otimes_S M$ est un quotient de $R \otimes_k S \otimes_k M$ dans* $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$ *et ce dernier est g-localement fini.*

(3)(a) *Si M est dans* Mod_S *et N dans* $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$, *on a des isomorphismes d'espaces vectoriels.*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(R \otimes_S M, N) &= \mathrm{Hom}_S\big(M, \mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(R, N)\big)\\ &= \mathrm{Hom}_S(M, N^g).\end{aligned}$$

(b) *Si* $M \in \mathrm{Mod}_S$ *et* $N \in \mathrm{Mod}_{S\#U(g)}$, *alors* $\mathrm{Hom}_{S\#U(g)}(M, N)$ *et* $\mathrm{Hom}_S(M, N^g)$ *sont des espaces vectoriels isomorphes.*

(4) *Soit R commutative,* $M \in \mathrm{Mod}_S$, *V un g-module de dimension finie et* $N \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. *Alors*

$$\mathrm{Hom}_R(R \otimes V, N) = \mathrm{Hom}(V, N) = V^* \otimes N = N \otimes V^*$$

sont des isomorphismes de $R\#U(g)$-modules. En particulier, $(N \otimes V^*)^g$ *et* $\mathrm{Hom}_g(V, N)$ *sont S-isomorphes.*

(5) *Soient S commutative,* $M \in \mathrm{Mod}_S$ *et V un g-module de dimension finie. Alors l'application* ϕ: $\mathrm{Hom}_g(V \otimes R, M) \to \mathrm{Hom}_g(V, \mathscr{F}_S(R, M))$ *définie par* $\phi(f)(v)(r) = f(v \otimes r)$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels.* (*La preuve est une conséquence de* [7, 1.5].)

2. LE FONCTEUR $\mathscr{F}_S(R, -)$

Dans ce paragraphe, R est g-localement finie. Nous avons la formule d'adjoint suivante:

PROPOSITION 2.1. *Soient* $M \in \mathrm{Mod}_S$ *et N dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. *Alors l'application* ϕ: $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(N, \mathscr{F}_S(R, M)) \to \mathrm{Hom}_S((N)_g, M)$ *définie par* $\phi(f)(q_N(x)) = f(x)(1)$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Preuve. Soit f appartenant à l'ensemble de départ de ϕ. Pour $n \in N$ et $r \in R$, nous avons $\phi(f)(q_N(rn)) = f(rn)(1) = f(n)(r)$. Cette relation prouve que ϕ est un monomorphisme. Maintenant, soit h_1 appartenant à l'ensemble d'arrivée de ϕ.

Posons $h(n)(r) = h_1(q_N(rn))$ pour $n \in N$ et $r \in R$. On définit ainsi une application linéaire h: $N \to \mathrm{Hom}_S(R, M)$. Pour tout $X \in g$, on a

$$\begin{aligned}(X \cdot h(n))(r) &= -h(n)(X(r))\\ &= -h_1(q_N(X(r)n))\\ &= -h_1(q_N(X(rn)) + h_1(q_N(r(Xn))\\ &= h_1(q_N(r(Xn))) = h(Xn)(r),\end{aligned}$$

car $q_N(X(rn)) = 0$. Donc h est g-linéaire.

Pour tous $r, r' \in R$, on a $(rh(n))(r') = h(n)(r'r) = h_1(q_N(r'rn)) = h(rn)(r')$. Donc h est R-linéaire. Ainsi h est $R\#U(g)$-linéaire. Or N est g-localement fini; donc $h(N) \subseteq \mathscr{F}_S(R, M)$. L'application h est donc définie de N vers $\mathscr{F}_S(R, M)$ et $\phi(h) = h_1$.

COROLLAIRE 2.2. *Soient g semi-simple et I un injectif dans* Mod_S. *Alors* $\mathscr{F}_S(R, I)$ *est un injectif dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

Preuve. Pour tout N dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, on sait que $(N)_g$ et N^g sont S-isomorphes. De plus, le foncteur $(\ )_g$ est exact de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ dans Mod_S. Donc $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(*, \mathscr{F}_S(R, I))$ est le composé, d'après (2.1), des foncteurs exacts $(\ )_g$ et $\mathrm{Hom}_S(*, I)$.

Nous allons voir maintenant que le corollaire (2.2) peut se préciser davantage. Mais, avant cela, signalons la formule suivante.

LEMME 2.3. *Soient g semi-simple et M un S-module. Alors l'application F de* $\mathscr{F}_S(R, M)^g \to M$ *définie par* $F(f) = f(1)$ *est un isomorphisme de S-modules.*

Preuve. Soit G l'application de $M \to \mathrm{Hom}(R, M)$ définie par $G(m)(r) = p_R(r)m$. Il est clair que $G(m)$ est S-linéaire et g-invariant. Donc G est définie de $M \to \mathrm{Hom}_S(R, M)^g = \mathscr{F}_S(R, M)^g$. Maintenant, $F \circ G(m) = G(m)(1) = p_R(1)m = m$; donc $F \circ G =$ identité de M. De même,

$$\begin{aligned}G \circ F(f)(r) &= G(F(f))(r) = G(f(1))(r) = p_R(r)f(1)\\ &= f(p_R(r)) = p_M \circ f(r) = f(r),\end{aligned}$$

car M est un g-module trivial. Donc $G \circ F =$ identité de $\mathscr{F}_S(R, M)^g$.

(2) Considérons le sous-$R\#U(g)$-module de M engendré par m. Si m est non nul, ce sous-module contient un élément invariant non nul $y = \Sigma r_i u_i m$, où $u_i \in U(g)$ et $r_i \in R$. Mais $p_M(y) = y$ alors que $P_M(\Sigma r_i u_i m) = P_M(\Sigma\Sigma u_{ij} r_{ij} m) = \Sigma\Sigma u_{ij} p_M(r_{ij} m) = 0$, où $r_{ij} \in R$ et $u_{ij} \in U(g)$, car p_M est g-linéaire. Donc y serait nul. Ce qui est une contradiction. Donc $m = 0$.

Nous voulons savoir maintenant quand un $R\#U(g)$-module est sous-module d'un module induit de la forme $\mathscr{F}_S(R, M)$. La condition nécessaire de (2.5(2)) est aussi suffisante.

DÉFINITION 2.6. Soient g semi-simple et M dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Alors $^*M = \{m \in M$ tel que $p_M(rm) = 0$ pour tout $r \in R\}$.

LEMME 2.7. *Soient g semi-simple et M dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. *On définit* ϕ_M: $M \to \mathscr{F}_S(R, M^g)$ *par* $\phi_M(m)(r) = p_M(rm)$.

(1) *$^*M$ est le noyau de ϕ_M.*

(2) *Si f: $M \to M'$ est un morphisme dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, *alors* $(^*M) \subseteq {}^*(M')$.

(3) $^*(M/^*M) = 0$.

(4) *Si M est un sous-$R\#U(g)$-module de N, on a $^*N \cap M = {}^*M$.*

(5) *Si $^*M = 0$, ϕ_M est un monomorphisme essentiel dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

Remarque. D'après (2.1),

$$\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(M, \mathscr{F}_S(R, M^g)) = \mathrm{Hom}_S((M)_g, M^g).$$

Donc ϕ_M est le $R\#U(g)$-morphisme correspondant au $S\#U(g)$-isomorphisme canonique $(M)_g \to M^g$.

Preuve du lemme. L'assertion (1) est évidente et (2) découle du fait que $P_{M'} \circ f = f \circ p_M$. Pour démontrer (3), observons que $(^*M)^g = 0$; donc $(M/^*M)^g = M^g$. Comme $\mathrm{Ker}\,\phi_M = {}^*M$, il existe un $R\#U(g)$-morphisme $\bar{\phi}_M$: $M/^*M \to \mathscr{F}_S(R, (M/^*M)^g) = \mathscr{F}_S(R, M^g))$ tel que $\phi_M = \bar{\phi}_M \circ (M \to M/^*M)$. Nécessairement, $\bar{\phi}_M = \phi_{M/^*M}$. Soit $m + {}^*M \in {}^*(M/^*M)$. D'après (1), $\phi_{M/^*M}(m + {}^*M) = 0$; donc $\phi_M(m) = 0$; d'où $m \in {}^*M$. On en déduit que $^*(M/^*M) = 0$. L'assertion (4) découle de la définition (2.6) et du fait que la restriction de p_N à M est p_M. Pour démontrer (5), supposons $^*M = 0$ et identifions M et $\phi_M(M)$. Si L est un sous-$R\#U(g)$-module non nul de $\mathscr{F}_S(R, M^g)$, alors, d'après (2.4(1)), $L^g \neq 0$, et d'après (2.3), $M^g = \mathscr{F}_S(R, M^g)^g$, donc $L \cap M \neq 0$.

Nous pouvons utiliser (2.7) pour identifier dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ les modules injectifs de la forme $\mathscr{F}_S(R, I)$, où I est S-injectif.

THÉORÈME 2.4. *Soit g semi-simple.*

(1) *Si $N \in \mathrm{Mod}_S$ et si M est un sous-$R\#U(g)$-module de $\mathscr{F}_S(R, N)$, alors $M^g = 0$ implique $M = 0$.*

(2) *Si $M \to N$ est un monomorphisme essentiel de S-modules, alors $\mathscr{F}_S(R, M) \to \mathscr{F}_S(R, N)$ est un monomorphisme essentiel de $R\#U(g)$-modules.*

(3) *Si $N \in \mathrm{Mod}_S$, alors $E_{R\#U(g)}(\mathscr{F}_S(R, N))$ est isomorphe à $\mathscr{F}_S(R, E_S(N))$.*

(4) *Si $N \in \mathrm{Mod}_S$, alors $E_{R\#U(g)}(\mathscr{F}_S(R, N))^g$ est isomorphe à $E_S(N)$.*

Preuve. Si T est un sous-ensemble de $\mathscr{F}_S(R, M)$, on pose $T(1) = \{f(1) \text{ tel que } f \in T\}$.

(1) Supposons $M^g = 0$. Alors $(M)_g = 0$; donc $\mathrm{Hom}_S((M)_g, N) = 0$. D'après (2.1), $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(M, \mathscr{F}_S(R, N)) = 0$. Or, ce dernier "Hom" contient l'inclusion de M dans $\mathscr{F}_S(R, N)$. On conclut que $M = 0$.

(2) Si L est un sous $R\#U(g)$-module non nul de $\mathscr{F}_S(R, N)$, alors d'après (1), L^g est un sous-S-module non nul de $\mathscr{F}_S(R, N)^g$. D'après (2.3), ceci signifie que $L(1)$ est un sous-S-module non nul de N, et donc $L(1) \cap M$ est non nul. Or $L(1) \cap M = (\mathscr{F}_S(R, M) \cap L)(1)$; donc L rencontre $\mathscr{F}_S(R, M)$ de façon non triviale.

(3) D'après (2), $\mathscr{F}_S(R, N) \to \mathscr{F}_S(R, E_S(N))$ est un monomorphisme essentiel dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Or, d'après (2.2), $\mathscr{F}_S(R, E_S(N))$ est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$; d'où (3).

(4) D'après (3), $E_{R\#U(g)}(\mathscr{F}_S(R, N)) = \mathscr{F}_S(R, E_S(N))$. D'après (2.3), $\mathscr{F}_S(R, E_S(N))^g = E_S(N)$.

D'après (1) de (2.4), les sous-$R\#U(g)$-modules non nuls M du $R\#U(g)$-module g-localement fini induit $\mathscr{F}_S(R, N)$ contiennent des invariants non nuls.

Voici une condition plus forte: nous allons voir ci-dessous que ceci implique que M est une extension essentielle de RM^g. Simultanément, nous obtenons une condition sur M qui implique qu'on peut prendre $N = M^g$.

COROLLAIRE 2.5. *Soient g semi-simple, N dans Mod_S et M un sous-$R\#U(g)$-module non nul de $\mathscr{F}_S(R, N)$. Alors*

(1) *M est une extension essentielle de son sous-$R\#U(g)$-module RM^g.*

(2) *Si $m \in M$ et $p_M(rm) = 0$ pour tout $r \in R$, alors $m = 0$.*

Preuve. (1) Soit L un sous-$R\#U(g)$-module non nul de M. D'après (2.4(1)), $L^g \neq 0$ et $L^g \subseteq M^g$. Donc $L \cap RM^g \neq 0$.

THÉORÈME 2.8. *Soit g semi-simple.*

(1) *Si E est un injectif dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *avec* $^*E = 0$, *alors* E^g *est S-injectif et E est $R\#U(g)$-isomorphe à* $\mathcal{F}_S(R, E^g)$.

(2) *Si M est dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *avec* $^*M = 0$, *alors* $E_{R\#U(g)}(M)$ *est $R\#U(g)$-isomorphe à* $\mathcal{F}_S(R, E_S(M^g))$.

Preuve. (1) Soit $E' = E_s(E^g)$. Alors $E^g \to E'$ est un S-monomorphisme essentiel; donc, d'après (2.4(2)), $\mathcal{F}_S(R, E^g) \to \mathcal{F}_S(R, E')$ est un $R\#U(g)$-monomorphisme essentiel. D'après (2.7(5)), $E \to \mathcal{F}_S(R, E^g)$ est aussi un $R\#U(g)$-monomorphisme essentiel. Comme E est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, nous avons les $R\#U(g)$-isomorphismes $E = \mathcal{F}_S(R, E^g) = \mathcal{F}_S(R, E')$. D'après (2.3) $\mathcal{F}_S(R, E')^g \approx E'$ est S-injectif; donc $E^g = E'$ est S-injectif.

(2) Posons $E = E_S(M^g)$. D'après (2.2), $\mathcal{F}_S(R, E)$ est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, et nous avons d'après (2.7(5)) et (2.4(2)), les $R\#U(g)$-monomorphismes essentiels $M \to \mathcal{F}_S(R, M^g) \to \mathcal{F}_S(R, E)$. Donc $E_{R\#U(g)}(M)$ est $R\#U(g)$-isomorphe à $\mathcal{F}_S(R, E)$.

Nous remarquons que la condition $^*E = 0$ de (2.8(1)) est aussi nécessaire d'après (2.5(2)) pour que E soit $R\#U(g)$-isomorphe à $\mathcal{F}_S(R, E^g)$.

Nous allons maintenant trouver une condition sur $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ qui nous permettra d'appliquer (2.8).

LEMME 2.9. *La catégorie* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *possède un cogénérateur injectif C.*

Preuve. Soient I un cogénérateur injectif de $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$. Pour tout M dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))} \subseteq \mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$ et pour tout élément non nul m de M, il existe un $R\#U(g)$-morphisme $f\colon M \to I$ tel que $f(m) \neq 0$. Comme M est g-localement fini, on a $f(M) \subseteq I^{(g)}$ et, d'après [7, 2.2'], $I^{(g)}$ est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Donc $I^{(g)} = C$ est un cogénerateur injectif de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

Remarque. S'il existe un cogénérateur injectif C de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ qui vérifie $^*C = 0$, alors, d'après (2.7(4)), chaque objet M de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ vérifie $^*M = 0$.

On dira que la condition (α) est satisfaite dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, si $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ possède un cogénérateur injectif C tel que $^*C = 0$.

PROPOSITION 2.10. *Soit g semi-simple. On suppose que la condition (α) est satisfaite dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

(1) *Alors chaque injectif de* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *est de la forme* $\mathcal{F}_S(R, I)$, *où I est un injectif de* Mod_S.

(2) *Soit* $M \in \mathrm{Mod}_S$ *et* $N \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. *Alors*

$$\widetilde{\mathrm{Ext}}^p_{R\#U(g)}(R \otimes_S M, N) = \mathrm{Ext}^p_S(M, N^g), \qquad p \geq 0.$$

Preuve. (1) C'est évident à partir de (2.8(1)) et de la remarque précédente.

(2) Soit $\{E^i\}$ une résolution injective de N dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. D'après (1.5(3)), $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(R \otimes_S M, E^i) = \mathrm{Hom}_S(M, (E^i)^g)$ pour chaque i. Nous avons donc

$$\widetilde{\mathrm{Ext}}^p_{R\#U(g)}(R \otimes_S M, N) = H^p\big(\mathrm{Hom}_S\big(M, (E^*)^g\big)\big)$$

pour $p \geq 0$. Or, d'après (2.8(1)), $(E^i)^g$ est un injectif dans Mod_S et le foncteur $(\ )^g$ est exact. Donc le membre de droite est $\mathrm{Ext}^p_S(M, N^g)$.

LEMME 2.11. *Soient g semi-simple et* $\{E^i/i \in I\}$ *un ensemble de S-modules injectifs. Alors* $E = \oplus\{\mathscr{F}_S(R, E^i)/i \in I\}$ *est* $R\#U(g)$*-isomorphe à* $\mathscr{F}_S(R, \{\oplus E^i/i \in I\})$.

Preuve. D'après (2.2) et [7, remarque suivant (2.2)], E est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. D'après (2.5(2)), $\mathscr{F}_S(R, E^i) = 0$ pour tout i; donc ${}^*E = 0$. D'après (2.3) $E^g = \oplus E^i$. D'après (2.7(5)), ϕ_E est un $R\#U(g)$-monomorphisme essentiel et, puisque E est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, on conclut que ϕ_E est un $R\#U(g)$-isomorphisme.

LEMME 2.12. *Soient g semi-simple, I un injectif dans* Mod_S, $M \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *avec* ${}^*M = 0$ *et* $f\colon M \to \mathscr{F}_S(R, I)$ *un* $R\#U(g)$*-monomorphisme essentiel. Alors* $M^g \to \mathscr{F}_S(R, I)^g = I$ *est un S-monomorphisme essentiel.*

Preuve. D'après (2.7(5)), ϕ_M est un $R\#U(g)$-monomorphisme essentiel; et d'après (2.2), $\mathscr{F}_S(R, I)$ est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Il existe donc un $R\#U(g)$-morphisme $h\colon \mathscr{F}_S(R, M^g) \to \mathscr{F}_S(R, I)$ tel que $f = h \circ \phi_M$. Soit L un sous-S-module de I tel que $L \cap M^g = 0$. Alors $\mathscr{F}_S(R, M^g) \cap \mathscr{F}_S(R, L) = 0$ et $\mathscr{F}_S(R, L)$ est un sous-$R\#U(g)$-module de $\mathscr{F}_S(R, I)$. Si $\mathscr{F}_S(R, L)$ est non nul, il rencontrerait $M = \phi_M(M)$ de façon non triviale, car $\phi_M(M) \subseteq \mathscr{F}_S(R, M^g)$. Ce qui n'est pas possible; donc $\mathscr{F}_S(R, L) = 0$. On en déduit d'après (2.3), que $0 = \mathscr{F}_S(R, L)^g = L$.

Nous sommes maintenant prêt pour montrer que le foncteur $(\ )^g$ transforme les résolutions injectives minimales de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ en résolutions injectives minimales de Mod_S et on pourra donc déterminer les résolutions dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

PROPOSITION 2.13. *On suppose que la condition* (α) *est satisfaite dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. *Soient g semi-simple,* $M \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, $\{E^i_{R\#U(g)}(M)\}$ *la résolution injective minimale de M dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *et* $\{E^i_S(M^g)\}$ *la S-résolution injective minimale de* M^g. *Alors* $(E^i_{R\#U(g)}(M))^g = E^i_S(M^g)$ *pour chaque i.*

Preuve. Posons $E^i = E^i_{R\#U(g)}(M)$ pour chaque i et $K^i = \mathrm{Ker}(E^i \to E^{i+1})$. D'après (2.8(1)), $I^i = (E^i)^g$ est S-injectif et $E^i = \mathscr{F}_S(R, I^i)$. Comme g est semi-simple, la suite $I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^i \to \cdots$ est exacte dans Mod_S et $(K^i)^g = \mathrm{Ker}(I^i \to I^{i+1})$. Comme $^*(K^i) = 0$ et $K^i \to E^i = \mathscr{F}_S(R, I^i)$ est un $R\#U(g)$-monomorphisme essentiel, $(K^i)^g \to I^i = \mathscr{F}_S(R, I^i)^g$ est, d'après (2.12), un S-monomorphisme essentiel. Donc $\{I^i\}$ est une S-résolution injective minimale de $(K^0)^g = M^g$.

THÉORÈME 2.14. *Soit S commutative. On suppose que la condition (α) est satisfaite dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *et g semi-simple. Soit $M \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ et, pour $P \in \mathrm{spec}(S)$, soit $\mu_i(P, M^g)$ le nombre de fois que $E_S(S/P)$ apparaît dans $E^i_S(M^g)$. Alors $E^i_{R\#U(g)}(M)$ est la somme directe, pour P parcourant* $\mathrm{spec}(S)$, *de $\mu_i(P, M^g)$ copies de $E_{R\#U(g)}(R/RP)$.*

Preuve. D'après (2.8(1)) et (2.13), $E^i_{R\#U(g)}(M)$ est $R\#U(g)$-isomorphe à $\mathscr{F}_S(R, E^i_{R\#U(g)}(M)^g) = \mathscr{F}_S(R, E^i_S(M^g))$. Donc, d'après la définition des μ_i et (2.11), $E^i_{R\#U(g)}(M)$ est la somme directe, pour P parcourant $\mathrm{spec}(S)$, de $\mu_i(P, M^g)$ copies de $\mathscr{F}_S(R, E_S(S/P))$. Or $(R/PR)^g = S/P$; donc, d'après (2.8(2)), $\mathscr{F}_S(R, E_S(S/P))$ est $R\#U(g)$-isomorphe à $E_{R\#U(g)}(R/PR)$; d'où le résultat.

Remarque. La condition (α) imposée à $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ est trop forte. Elle montre d'après (2.10(2)) que si N est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, alors N^g est S-injectif.

Nous allons voir maintenant sous une hypothèse de finitude de R sur S, que cela signifie que R est S-plat.

Nous commençons par identifier les composants g-isotypiques des $R\#U(g)$-modules $\mathscr{F}_S(R, M)$.

LEMME 2.15. *Soient g semi-simple et S commutative. Si M est un S-module et V un g-module simple de dimension finie, alors $\mathscr{F}_S(R, M)_V$ est $S\#U(g)$-isomorphe à $\mathscr{F}_S(R_{V^*}, M)$.*

Preuve. Considérons les isomorphismes suivants:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_g(V, \mathscr{F}_S(R, M)) &= \mathrm{Hom}_g(V \otimes R, M)\\ &= \mathrm{Hom}_g(V \otimes R_{V^*}, M) = \mathrm{Hom}_g(V, \mathscr{F}_S(R_{V^*}, M)).\end{aligned}$$

Le premier et le troisième isomorphismes découlent de (1.5(5)) et le deuxième de la définition de R_{V^*} (si W est un autre g-module simple de dimension finie, alors $\mathrm{Hom}_g(V, W^*) = 0$ si $W^* \neq V$). Il résulte maintenant de (1.4) que $\mathscr{F}_S(R, M)_V = \mathscr{F}_S(R_{V^*}, M)_V$. Si W est un g-module simple de dimension finie non isomorphe à V, alors $\mathrm{Hom}_g(W \otimes R_{V^*}, M) = 0$, car $\mathrm{Hom}_g(W \otimes V^*, k) = 0$, donc

$$\mathscr{F}_S(R_{V^*}, M) = \bigoplus_W \mathscr{F}_S(R_{V^*}, M)_W = \mathscr{F}_S(R_{V^*}, M)_V.$$

COROLLAIRE 2.16. *Soient g semi-simple et R commutative. Supposons que le foncteur* $(\ )^g$ *transforme les injectifs de* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *en injectifs de* Mod_S. *Si I est S-injectif et V un g-module simple de dimension finie, alors* $\mathscr{F}_S(R_{V^*}, I)$ *est aussi S-injectif.*

Preuve. Posons $W = V^*$ et $E = \mathscr{F}_S(R, I)$. Alors, d'après (2.2), E est un injectif de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Posons $M = R \otimes V$; donc M est de type fini dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ et libre comme R-module. D'après (1.5(4)), $E \otimes W$ et $\mathrm{Hom}_R(M, E)$ sont $R\#U(g)$-isomorphes. D'après [7, 2.17], $\mathscr{F}_R(M, E) = \mathrm{Hom}_R(M, E)$; donc, d'après [7, 2.37], $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(*, E \otimes W) = \mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(* \otimes_R M, E)$. Or $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(-, E)$ et $(*) \otimes_R M$ sont exacts respectivement de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ dans k-ev et de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$; donc $E \otimes W$ est injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Il résulte de nos hypothèses que $(E \otimes W)^g$ est S-injectif. Or, d'après (1.5(4)), $(E \otimes W)^g$ est S-isomorphe à $\mathrm{Hom}_g(V, E)$. Maintenant, $E_V = \mathrm{Hom}_g(V, E) \otimes V$ comme objet de $\mathrm{Mod}_{(S\#U(g))}$; donc E_V est S-injectif. D'après (1.4), $E_V = \mathscr{F}_S(R, I)_V = \mathscr{F}_S(R_{V^*}, I)$; d'où le résultat.

Si dans (2.16), R_{V^*} est de type fini comme S-module, alors [7, 2.17] $\mathrm{Hom}_S(R_{V^*}, I)$ est S-injectif. Nous allons utiliser cette observation pour conclure sous les hypothèses de (2.16) que R_{V^*} est S-plat.

THÉORÈME 2.17. *Soient g semi-simple et R commutative. Supposons que le foncteur* $(\ )^g$ *transforme les injectifs de* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *en injectifs de* Mod_S. *Soit V un g-module simple de dimension finie. Si* R_V *est de type fini comme S-module, alors* R_V *est S-plat. Si* R_W *est de type fini comme S-module pour chaque g-module simple de dimension finie W, alors R est S-plat.*

Preuve. Soit I un injectif dans Mod_S. Alors on a l'isomorphisme de dualité [2, p. 348]

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_S\big(\mathrm{Tor}_1^S(M, R_V), I\big) &= \mathrm{Ext}_S^1\big(M, \mathrm{Hom}_S(R_V, I)\big)\\ &= \mathrm{Ext}_S^1\big(M, \mathscr{F}_S(R_V, I)\big)\end{aligned}$$

et (2.16) montre que $\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Tor}_1^S(M, R_V), I) = 0$ pour tout M dans Mod_S. On en déduit que $\mathrm{Tor}_1^S(M, R_V) = 0$ (il suffit de prendre $I = E_S(\mathrm{Tor}_1^S(M, R_V))$).

La deuxième assertion est immédiate à partir de la première.

La réciproque de (2.17) est aussi vraie:

PROPOSITION 2.18. *Supposons g semi-simple et R un S-module plat à droite. Alors le foncteur* $(\ )^g$ *transforme les injectifs de* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *en injectifs de* Mod_S.

Preuve. Soient E un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ et M un S-module quelconque. D'après (1.5(3)), $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(R \otimes_S M, E) = \mathrm{Hom}_S(M, E^g)$; donc le foncteur $\mathrm{Hom}_S(*, E^g)$ est le composé du foncteur $R \otimes_S (*)$ qui est exact de Mod_S vers $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ et du foncteur $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(*, E)$ qui est exact de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ vers k-ev.

LEMME 2.19. *Soient g semi-simple, M de type fini dans* Mod_S *et N un objet de* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. *Alors pour tout i, $\mathrm{Ext}^i_S(M, N)$ est un g-module localement fini et* $\mathrm{Ext}^i_S(M, N)^g = \mathrm{Ext}^i_S(M, N^g)$.

Preuve. Considérons M comme un objet de $\mathrm{Mod}_{(S\#U(g))}$ (l'action de g est triviale). Soit $\{F_i\}$ une résolution de M par des S-modules libres de type fini et regardons chaque F_i comme un objet de $\mathrm{Mod}_{(S\#U(g))}$ (l'action de g est triviale). Alors $\mathrm{Ext}^i_S(M, N)$ est dans $\mathrm{Mod}_{(g)}$. Ainsi,

$$\mathrm{Ext}^i_S(M, N)^g = H^i(\mathrm{Hom}_S(F_*, N))^g = H^i\big(\mathrm{Hom}_S(F_*, N)^g\big).$$

D'après (7, 2.10 et 2.17], nous avons $\mathrm{Hom}_S(F_p, N)^g = \mathrm{Hom}_S(F_p, N^g)$; donc

$$\mathrm{Ext}^i_S(M, N)^g = H^i(\mathrm{Hom}_S(F_*, N^g)) = \mathrm{Ext}^i_S(M, N^g).$$

PROPOSITION 2.20. *Soient g semi-simple, $M \in \mathrm{Mod}_S$, $N \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ et R de type fini dans* Mod_S. *Alors on a la suite spectrale*

$$\widetilde{\mathrm{Ext}}^i_{R\#U(g)}\big(N, \mathrm{Ext}^j_S(R, M)\big) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_S(N^g, M); \text{pour } i \geq 0, j \geq 0.$$

Si de plus N est de type fini, on a

$$\mathrm{Ext}^i_R\big(N, \mathrm{Ext}^j_S(R, M)\big)^g \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_S(N^g, M).$$

Preuve. Comme R est de type fini dans Mod_S, on a d'après [7, 2.17], $\mathscr{F}_S(R, M) = \mathrm{Hom}_S(R, M)$. D'après (2.2), le foncteur $\mathscr{F}_S(R, -)$ envoie les injectifs de Mod_S dans les injectifs de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. D'après (2.1), le foncteur $\mathrm{Hom}_S((N)_g, -)$ défini de Mod_S vers k-ev est le composé du foncteur covariant $\mathscr{F}_S(R, -) = \mathrm{Hom}_S(R, -)$ qui va de Mod_S dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ et du foncteur covariant exact à gauche $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(N, -)$ qui va de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ dans k-ev. La suite spectrale des foncteurs composés donne (1).

(2) Il suffit d'appliquer [7, 2.25].

Remarque. Posons $R = U(g)$. Alors R est un g-module localement fini pour l'action adjointe de g et R^g est le centre de R. La plupart des résultats que nous venons d'établir sont vrais pour l'anneau $R\#U(g)$.

Soit $M \in \mathrm{Mod}_R$. On munit M de la structure de g-module trivial. Si g opère trivialement sur R (donc $R\#U(g)$ et $R \otimes U(g)$ sont isomorphes comme k-algèbres), alors M devient un objet de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

COROLLAIRE 2.21. *Soient g semi-simple opérant trivialement sur R, $M \in$* Mod_R *et* $N \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. *Alors on a*

$$\widetilde{\mathrm{Ext}}^i_{R\#U(g)}(N, M) = \mathrm{Ext}^i_R(N^g, M) \qquad \textit{pour } i \geq 0.$$

Si de plus, N est de type fini, on a

$$\mathrm{Ext}^i_R(N, M)^g = \mathrm{Ext}^i_R(N^g, M) \qquad \textit{pour } i \geq 0.$$

Preuve. On pose $R = S$ dans (2.20).

3. LE FONCTEUR $R \otimes_S (-)$

Dans ce paragraphe, R est commutative. Si M est un R-module, la notation M^* désigne $\mathrm{Hom}_R(M, R)$. Nous allons étudier le groupe de Picard de l'anneau S.

DEFINITION 3.1. Un objet M de $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$ est de type invariant si $M = RM^g$.

LEMME 3.2. *Soit* $M \in \mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$. *L'application* f_M: $R \otimes_S M^g \to M$; $r \otimes m \to rm$ *est* $R\#U(g)$*-linéaire. Son image est* RM^g. *Si M est de type invariant, alors* f_M *est un épimorphisme.*

LEMME 3.3. *Soient M et* $N \in \mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$. *On suppose qu'il existe une* $R\#U(g)$*-surjection* $M \to N$. *Alors, si M est de type invariant, il en est de même pour N.*

LEMME 3.4. *Soit* $M \in \mathrm{Mod}_S$ *et* $M_R = R \otimes_S M$. *Alors l'application* ϕ *définie de* $R(M_R)^g \to M_R$ *par* $\phi[r(r_1 \otimes m)] = rr_1 \otimes m$ *est un isomorphisme de* $R\#U(g)$*-modules. Donc* M_R *est de type invariant. En particulier, R est de type invariant.*

LEMME 3.5. *Soient g semi-simple, R g-localement finie,* $M \in \mathrm{Mod}_S$ *et* $M_R = R \otimes_S M$. *Si M est S-projectif, alors* M_R *est projectif dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

Preuve. Pour tout objet N de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, on a d'après (1.5(3)), $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(M_R, N) = \mathrm{Hom}_S(M, N^g)$. Le foncteur $(\ )^g$ est exact de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ dans $\mathrm{Mod}_{(S\#U(g))}$; d'où le résultat.

PROPOSITION 3.6. *Soit M un projectif de type fini dans* Mod_S. *Alors l'application* $M \to (R \otimes_S M)^g$ *définie par* $m \to 1 \otimes m$ *est un S-isomorphisme.*

Preuve. Pour tout S-module N, notons f_N l'application $N \to (R \otimes_S N)^g$ définie par $f_N(n) = 1 \otimes n$. Alors f est une transformation naturelle de foncteurs additifs de S-modules: $1 \to (R \otimes_S (*))^g$, où 1 désigne le foncteur identité dans Mod_S et f_S est un isomorphisme. Il en résulte que f_M est un isomorphisme si M est projectif de type fini.

Lorsque R est g-localement finie, le lemme (3.5) et la proposition (3.6) montrent que si g est semi-simple et si M est un S-module projectif de type fini, alors le $R\#U(g)$-module g-localement fini projectif de type fini et de type invariant $R \otimes_S M$ a la propriété que son sous-S module des invariants est aussi un projectif de type fini. Nous allons voir que cette propriété est vraie pour tout $R\#U(g)$-module g-localement fini projectif de type fini et de type invariant.

LEMME 3.7. *Soir M dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

(1) *On suppose que R est g-localement finie. Si M est un projectif dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, *alors M est un projectif dans* Mod_R.

(2) *Si g est semi-simple et si M est de type fini R-projectif, alors M est projectif dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

Preuve. (1) C'est évident.

(2) Les foncteurs $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ et $(\ )^g$ sont exacts respectivement de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ dans $\mathrm{Mod}_{(g)}$ et de $\mathrm{Mod}_{(g)}$ dans Mod_g.

LEMME 3.8. *Soient g semi-simple, R g-localement finie, P et Q de type fini dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *avec Q projectif dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *et f: $P \to Q$ un $R\#U(g)$-épimorphisme. Alors il existe un $R\#U(g)$-monomorphisme h: $Q \to P$ tel que $f \circ h =$ identité de Q.*

Preuve. L'application $f^* = \mathrm{Hom}_R(Q, f)$ définie de $\mathrm{Hom}_R(Q, P) \to \mathrm{Hom}_R(Q, Q)$ est surjective, car Q est projectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$; donc dans Mod_R. Il est facile de voir que f^* est g-linéaire. D'après [7, 2.17 et 2.36], $\mathrm{Hom}_R(Q, P)$ et $\mathrm{Hom}_R(Q, Q)$ appartienent à $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))} \subseteq \mathrm{Mod}_{(g)}$. Donc f^* est surjective sur les invariants, c'est-à-dire que f^* est surjective de

$$\mathrm{Hom}_R(Q, P)^g = \mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(Q, P)$$
$$\to \mathrm{Hom}_R(Q, Q)^g = \mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(Q, Q).$$

Comme l'identité de Q appartient à $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(Q, Q)$, il existe donc $h \in \mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(Q, P)$ tel que $f \circ h =$ identité de Q. Il est clair que h est un monomorphisme.

THÉORÈME 3.9. *Soient g semi-simple et P un projectif de type fini et de type invariant dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *où R est g-localement finie. Alors*

(1) *P^g est un S-module de type fini projectif.*

(2) *P^* est de type invariant.*

(3) *L'application définie de $(P^g)_R = R \otimes_S P^g \to P$ par $r \otimes p \to rp$ est un $R\#U(g)$-isomorphisme.*

Preuve. Comme P est de type invariant, il existe $p_1, p_2, \ldots, p_n \in P^g$ avec $n < +\infty$ tel que $P = \Sigma R p_i$. Posons $F = R^{(n)} = R \oplus R \oplus \cdots \oplus R$ et soit $f\colon F \to P$ l'application définie par $f(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \Sigma r_i p_i$. Alors $F \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ et f est un $R\#U(g)$-épimorphisme. D'après (3.8), il existe un monomorphisme $h \in \mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(P, F)$ tel que $f \circ h =$ identité de P. La restriction de h à P^g est donc un S-morphisme inverse à droite pour la restriction de f à F^g, et

$$F^g = S^{(n)} = S \oplus \cdots \oplus S; \qquad \text{d'où } (1).$$

L'application $h^* = \mathrm{Hom}_R(h, R)$ définie de $F^* = \mathrm{Hom}_R(F, R) \to P^* = \mathrm{Hom}_R(P, R)$ est surjective et g-linéaire; donc P^* est de type invariant, car F^* l'est, d'où (2).

Pour démontrer (3), considérons l'application $R\#U(g)$-linéaire t_P définie de $R \otimes_S P^g \to P$ par $t_P(r \otimes p) \to rp$. Alors t est une transformation naturelle de foncteurs additifs $R \otimes_S (\ )^g \to 1$ de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, où 1 est le foncteur identité de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. L'application t_R est un isomorphisme; donc t_F est un isomorphisme par additivité. Il en résulte que t_P est un isomorphisme, car $F = P \oplus \mathrm{Ker}\, f$ comme g-modules.

On attire l'attention du lecteur sur la similarité entre les assertions (1) et (3) de (3.9) et les résultats de (2.8(1)).

Nous allons maintenant établir un résultat analogue à (2.4(1)).

LEMME 3.10. *Soient $N \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, et $M \in \mathrm{Mod}_S$. Si N est un quotient de $R \otimes_S M$ dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, alors $N^g = 0$ implique $N = 0$.*

Preuve. Si $N^g = 0$, alors $\mathrm{Hom}_S(M, N^g) = 0$. D'après (1.5(3)), $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(R \otimes_S M, N) = 0$. Or ce dernier “Hom” contient le $R\#U(g)$-épimorphisme $R \otimes_S M \to N$; donc $N = 0$.

La troisième assertion de (3.9) montre que le rang de P comme R-module est égal au rang de P^g comme S-module. Donc, si P est inversible comme R-module, alors P^g est inversible comme S-module.

Le reste de ce paragraphe est consacré à l'étude de ces modules qui sont de rang 1.

Nous allons suivre la même démarche que Magid [10]. Pour obtenir des résultats plus généraux, nous allons utiliser l'ensemble $Z(g, R)$ introduit dans [9, p. 1239] à la place des caractères de g.

Notons $\mathrm{Pic}(R)$ le groupe de Picard de R. Si M est un R-module inversible, sa classe dans $\mathrm{Pic}(R)$ sera notée $[M]$.

Un $R\#U(g)$-module est inversible s'il est inversible en tant que R-module. Par exemple, R est un $R\#U(g)$-module inversible.

Soit M un $R\#U(g)$-module. Les isomorphismes canoniques: $M \otimes_R R = M$ et $M \otimes_R M^* = R$ sont $R\#U(g)$-linéaires. On en déduit que les classes d'isomorphismes des $R\#U(g)$-modules inversibles forment un groupe commutatif. Nous allons le noter $\mathrm{Pic}(R, g)$. Si M est inversible, on note $\{M\}$ sa classe dans $\mathrm{Pic}(R, g)$. Plus précisément, si N est un autre $R\#U(g)$-module inversible, alors $\{M\} \cdot \{N\} = \{M \otimes_R N\}$, $\{M\}^{-1} = \{M^*\}$. L'élément unité de $\mathrm{Pic}(R, g)$ est $\{R\}$. Nous avons un homomorphisme de groupes

$$q: \mathrm{Pic}(R, g) \to \mathrm{Pic}(R), \qquad \{M\} \to [M].$$

Soit ϕ une application additive de $g \to R$. On dit que ϕ vérifie la condition de cocycles [11, p. 1239] si $\phi([X, Y]) = X(\phi(Y)) - Y(\phi(X))$ pour tous $X, Y \in g$.

On note $Z(g, R)$ le groupe additif de toutes les applications additives de g vers R qui vérifient la condition de cocycles.

Exemples. (1) Si λ est un caractère de g, alors $\lambda \in Z(g, R)$.

(2) Supposons que R est intègre et soit a un élément non nul g-normal de R, c'est-à-dire normal dans $R\#U(g)$. Donc $X(a) = r_X a$ pour tout $X \in g$, où r_X est un élément de R. Comme R est intègre, r_X est unique pour chaque $X \in g$. Posons $\phi(X) = r_X$ pour chaque $X \in g$. Alors $\phi \in Z(g, R)$.

Posons $R_\phi = \{a \in R$ tel que $X(a) = \phi(X)a$ pour tout $X \in g$; où $\phi \in Z(g, R)\}$. Donc $R_0 = R^g$.

Il est clair que R_ϕ est un sous-espace vectoriel de R et RR_ϕ est un sous-$R\#U(g)$-module de R. Nous avons $1 \in R_\phi$ si et seulement si $\phi = 0$. Si $a \in R_\phi$ et si a est inversible, alors $a^{-1} \in R_{-\phi}$.

Nous prions le lecteur de ne pas confondre la notation R_ϕ avec celle de [11, p. 1239].

Posons $Z^u(g, R) = \{\phi \in Z(g, R)$ tel que R_ϕ contient un élément inversible de $R\}$ et

$$Z^s(g, R) = \{\phi \in Z(g, R) \text{ tel que } RR_\phi = R \text{ et } RR_{-\phi} = R\}.$$

Ce sont des sous-groupes de $Z(g, R)$ et $Z^u(g, R) \subseteq Z^s(g, R)$.

Lemme 3.11. *Soient M un $R\#U(g)$-module inversible et $e \in M$ tels que $M = Re$. Alors M est R-libre et e est une R-base de M.*

Soit M comme dans (3.11). Alors, d'après [11, 1.3], il existe $\phi \in Z(g, R)$ tel que $X(e) = \phi(X)e$ pour tout $X \in g$.

Lemme 3.12. *Soient M et M' deux $R\#U(g)$-modules inversibles tels que $M = Re$, $M' = Re'$, où $e \in M$ et $e' \in M'$. S'il existe un élément ϕ de $Z(g, R)$ vérifiant $X(e) = \phi(X)e$ et $X(e') = \phi(X)e'$ pour tout $X \in g$, alors le R-isomorphisme de M vers M' qui envoie e sur e' est un isomorpisme de $R\#U(g)$-modules.*

Soit $\phi \in Z(g, R)$. D'après [11, 1.3], il existe un $R\#U(g)$-module inversible M, un élément e dans M tels que $M = Re$ et $X(e) = \phi(X)e$ pour tout $X \in g$. Un tel M sera noté $R[\phi]$. Les "$R[\phi]$" sont $R\#U(g)$-isomorphes aux "R_ϕ" de [11].

On définit un morphisme de groupes p de $Z(g, R) \to \mathrm{Pic}(R, g)$, en posant $p(\phi) = \{R[\phi]\}$.

THÉORÈME 3.13. *Sous les hypothèses et avec les notations ci-dessus, on a une suite exacte de groupes*:

$$0 \to Z^u(g, R) \to Z(g, R) \to \mathrm{Pic}(R, g) \to \mathrm{Pic}(R).$$

Preuve. Notons f l'injection canonique de $Z^u(g, R)$ dans $Z(g, R)$. La suite est exacte en $Z^u(g, R)$. Soit $\phi \in Z^u(g, R)$. Donc R_ϕ contient un élément inversible a de R tel que $(Xfa) = (X(a) = \phi(X)a$ pour tout $X \in g$. Si e désigne une R-base de $R[\phi]$ telle que $X(e) = \phi(X)e$ pour tout $X \in g$, alors l'application $R[\phi] \to R$; $re \to ra$ est un isomorphisme de $R\#U(g)$-modules; donc $p(\phi) = \{R[\phi]\} = \{R\}$; donc $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, p$. Soit $\phi \in Z(g, R)$ et $p(\phi) = \{R\}$; donc $R[\phi]$ possède une R-base m telle que $X(m) = 0$ pour tout $X \in g$. Soit e une R-base de $R[\phi]$ telle que $X(e) = \phi(X)e$ pour tout $X \in g$. Alors $e = um$, où u est un élément inversible de R.

Il est facile de vérifier que $u \in R_\phi$; donc $\phi \in Z^u(g, R)$; d'où $\mathrm{Ker}\, p \subseteq \mathrm{Im}\, f$. Ainsi la suite est exacte en $Z(g, R)$. Si $\phi \in Z(g, R)$, alors $q(p(\phi)) = [R]$. Maintenant soit $\{M\} \in \mathrm{Ker}\, q$. Donc $[M] = [R]$; c'est-à-dire $M = Rm$ avec $m \in M$. D'après [11, 1.3], $X(m) = \phi(X)m$ pour tout $X \in g$, où $\phi \in Z(g, R)$. Soit e une R-base de $R[\phi]$ telle que $X(e) = \phi(X)e$ pour tout $X \in g$. Alors l'application $M \to R[\phi]$; $rm \to re$ est un isomorphisme de $R\#U(g)$-modules. On en déduit que $\{M\} = \{R[\phi]\} = p(\phi)$; donc la suite est exacte en $\mathrm{Pic}(R, g)$.

A partir de maintenant, R est g-localement finie.

Posons $\mathrm{Pic}_R(R, g) = \{\{M\} \in \mathrm{Pic}(R, g)$ tel que M est g-localement fini$\}$: c'est un sous-groupe de $\mathrm{Pic}(R, g)$. Nous avons un homomorphisme de groupes

$$\mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}_R(R, g); \qquad [M] \to \{M_R\}; \qquad \text{où } M_R = R \otimes_S M.$$

Nous allons utilser (3.6), (3.9) et (3.13) pour étudier le groupe de Picard de l'anneau S.

PROPOSITION 3.14. *Le morphisme* $\mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}_R(R, g)$ *est une injection. Si g est semi-simple, l'image est* $\{\{M\} \in \mathrm{Pic}_R(R, g)$ *tel que M est de type invariant*$\}$.

Preuve. Soit $[M] \in \mathrm{Pic}(S)$. D'après (3.6), $M = (M_R)^g$. Si $\{M_R\} = \{R\}$, alors $(M_R)^g = R^g = S$; donc le morphisme est injectif. Si $[M] \in \mathrm{Pic}(S)$, alors M_R est de type invariant, donc l'image est contenue dans l'ensemble désiré. Réciproquement, si g est semi-simple et $\{M\} \in \mathrm{Pic}_R(R, g)$ avec M de type invariant, alors $M = (M^g)_R$ d'après (3.9(3)). Donc $\{M\}$ est dans l'image.

Posons $Z_R(g, R) = \{\phi \in Z(g, R)$ tel que $\mathrm{Im}\, \phi$ est contenue dans un sous-g-module de dimension finie de $R\}$.

Remarquons que tout caractère de g appartient à $Z_R(g, R)$.

Si on suppose que les éléments de $Z(g, R)$ sont k-linéaires, alors $Z_R(g, R) = Z(g, R)$.

On dira que la condition $(*)$ est satisfaite dans R si l'image de tout élément de $Z_R(g, R)$ est contenue dans une sous-algèbre de dimension finie g-stable de R.

La condition $(*)$ est satisfaite dans R dans les cas suivants:

1*er cas*. Si tout sous-g-module de dimension finie de R est contenu dans une sous-algèbre de dimension finie g-stable de R. Par exemple si R est algébrique sur k.

2*ème cas*. Si $Z_R(g, R)$ est l'ensemble des caractères de g. Ce cas est trivialement réalisé, si R est intègre et tous les éléments de R sont des semi-invariants pour g. On trouvera au paragraphe 6, un exemple non trivial.

Dans la suite du paragraphe, on suppose que la condition $(*)$ est satisfaite dans R.

LEMME 3.15. *Soit $\phi \in Z(g, R)$. Alors $R[\phi]$ est g-localement fini si et seulement si $\phi \in Z_R(g, R)$.*

Preuve. Posons $M = R[\phi]$ et soit e une R-base de M telle que $X(e) = \phi(X)e$ pour tout $X \in g$. Soit e' l'élément de M^* tel que $\langle e', e\rangle = 1$. Si M est g-localement fini, alors $\phi(X)e$ appartient à un sous-g-module V de dimension finie M pour tout $X \in g$. On en déduit que $\mathrm{Im}\, \phi \subseteq W = e'(V)$ et W est un sous-espace vectoriel de dimension finie de R. Comme R est g-localement finie, on peut supposer que W est g-stable donc $\phi \in Z_R(g, R)$ et la condition est nécessaire.

Si $\mathrm{Im}\, \phi$ est contenue dans une sous-algèbre W de dimension finie g-stable de R, alors We est un sous-g-module de dimension finie de M et $U(g)e \subseteq We$. Soit $m \in M$. On a $m = re$ avec $r \in R$ et $\dim U(g)(r) < +\infty$. Il est clair que $(U(g)(r))(U(g)e)$ est un sous-g-module de dimension finie de M contenant $U(g)m$. Donc M est g-localement fini.

Posons $Z_R^u(g, R) = Z_R(g, R) \cap Z^u(g, R)$ et

$$Z_R^s(g, R) = Z_R(g, R) \cap Z^s(g, R).$$

Ce sont des sous-groupes de $Z_R(g, R)$ et $Z_R^u(g, R) \subseteq Z_R^s(g, R)$:

THÉORÈME 3.16. *Nous avons une suite exacte de groupes*

$$0 \to Z_R^u(g, R) \to Z_R(g, R) \to \mathrm{Pic}_R(R, g) \to \mathrm{Pic}(R).$$

Preuve. D'après (3.15), la restriction de p à $Z_R(g, R)$ définit un morphisme $Z_R(g, R) \to \mathrm{Pic}_R(R, g)$. Le théorème (3.13) donne le résultat.

LEMME 3.17. *Soit $\phi \in Z_R(g, R)$. Alors $R[\phi]$ est de type invariant si et seulement si $RR_{-\phi} = R$.*

Preuve. $R[\phi] = Re$, où $e \in R[\phi]$ et $X(e) = \phi(X)e$ pour tout $X \in g$. On en déduit que $re \in R[\phi]^g$ si et seulement si $X(r)e = -r\phi(X)e$ pour tout $X \in g$; donc, si et seulement si $X(r) = -\phi(X)r$ pour tout $X \in g$. Ainsi, $R[\phi]^g = R_{-\phi}e$ et, $R[\phi] = RR[\phi]^g$ si et seulement si $Re = RR_{-\phi}e$; donc $R = RR_{-\phi}$.

Le lemme (3.17) peut s'améliorer si g est semi-simple.

COROLLAIRE 3.18. *Soient g semi-simple et $\phi \in Z_R(g, R)$. Alors $R[\phi]$ est de type invariant si et seulement si $\phi \in Z_R^s(g, R)$.*

Preuve. Signalons que $R[\phi]^* = R[-\phi]$. Si $R[\phi]$ est de type invariant, alors, d'après (3.9), il en est de même pour $R[\phi]^*$. D'après (3.17), $RR_{-\phi} = R$ et $RR_\phi = R$; donc $\phi \in Z_R^s(g, R)$.

Si $\phi \in Z_R^s(g, R)$, alors $RR_{-\phi} = R$; donc $R[\phi]$ est de type invariant, d'après (3.17).

THÉORÈME 3.19. *Soit g semi-simple. Alors, il existe une suite exacte de groupes*

$$0 \to Z_R^u(g, R) \to Z_R^s(g, R) \to \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(R).$$

Preuve. D'après (3.14), $\mathrm{Pic}(S)$ est le sous-groupe de $\mathrm{Pic}_R(R, g)$ constitué des objets de type invariant. D'après (3.18), l'image inverse dans $Z_R(g, R)$ de ce sous-groupe est $Z_R^s(g, R)$. Le résultat découle de (3.16).

Même si g n'est pas semi-simple, on peut appliquer quand même certains des résultats précédents.

THÉORÈME 3.10. *Il existe un sous-groupe E de $Z_R^s(g, R)$ et une suite exacte de groupes*

$$E \to \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(R).$$

Preuve. Le morphisme $\mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(R)$ est le composé $\mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}_R(R, g) \to \mathrm{Pic}(R)$ et le premier morphisme est injectif, d'après (3.14). Soit M un S-module inversible tel que $[M]$ est dans le noyau. Supposons qu'il existe $\phi \in Z_R(g, R)$ tel que $\{R[\phi]\} = \{M_R\}$. Donc $R[\phi]$ est de type invariant. Le lemme (3.17) entraîne que $RR_{-\phi} = R$. Or, $R[-\phi] = R[\phi]^* = (M_R)^* = (M^*)_R$ est aussi de type invariant; donc, d'après (3.17), $RR_\phi = R$. Ainsi, $\phi \in Z_R^s(g, R)$. Il en résulte que le sous-groupe E en question est l'image inverse dans $Z_R(g, R)$ de l'image de $\mathrm{Pic}(S)$ dans $\mathrm{Pic}_R(R, g)$. Le théorème (3.16) donne le résultat.

Le théorème (3.20) donne assez d'informations sur le groupe $\mathrm{Pic}(S)$ si le groupe $Z_R^s(g, R)$ est réduit à $\{0\}$; donc E est réduit à $\{0\}$.

LEMME 3.21. *Soit R intègre. Supposons qu'il existe un idéal maximal g-invariant J de R tel que $R/J = k$. Si ϕ est un élément non nul de $Z_R(g, R)$, alors $RR_\phi \neq R$. En particulier, $Z_R^s(g, R) = \{0\}$.*

Preuve. Supposons qu'il existe un élément f de R_ϕ qui ne soit pas dans J. Choisissons

$$0 \neq \lambda \in k \qquad \text{avec } f - \lambda \in J \text{ et } X \in g \text{ tel que } \phi(X) = b \neq 0.$$

Alors $bf = X(f - \lambda) \in J$; donc $b \in J$. D'autre part, b appartient à une k-algèbre de dimension finie intègre; donc b est inversible. Ce qui est une contradiction. Il en résulte que $R_\phi \subseteq J$, donc $RR_\phi \neq R$.

COROLLAIRE 3.22. *Soit R intègre, S'il existe un idéal maximal g-invariant J de R tel que $R/J = k$, alors* $\mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(R)$ *est une injection.*

On trouvera au paragraphe 6 les mêmes résultats sur le groupe de Picard dans le cas d'une action de groupe.

4. CAS PARTICULIER OÙ R EST L'ALGÈBRE DE HOPF DE g

On pose [7, p. 1114] $R(g) = \mathrm{Hom}_{(g)}(U(g), k)$. Il est bien connu que $R(g)$ est une sous-k-algèbre unitaire de la k-algèbre associative et commutative $\mathrm{Hom}(U(g), k)$. L'unité de $R(g)$ est le morphisme de k-algèbres ε: $U(g) \to k$ induit par le morphisme d'algèbres de Lie $g \to \{0\}$. L'action de g sur $R(g)$ est une action de dérivation et il est facile de vérifier que $R(g)$ est un $R(g)\#U(g)$-module g-localement fini et $R(g)^g$ est isomorphe à k comme k-algèbre et comme g-module trivial.

Le foncteur $\mathscr{F}_k(R(g), -)$ sera noté $\mathrm{Hom}_{(g)}(R(g), -)$ conformément à [5, 1.2]. Si k est algébriquement clos et si g est semi-simple, alors [3, 2.8.16(a) et (d)], $R(g)$ est une k-algèbre commutative de type fini. Comme $R(g)^g \approx k$, la plupart des résultats du paragraphe 2 sont triviaux lorsqu'on remplace

R par $R(g)$. Notre but est de réunir dans ce paragraphe les résultats non triviaux du paragraphe 2 et de reformuler les résultats du paragraphe 3 dans le cas particulier où $R = R(g)$. L'anneau $R(g)$ sera noté H.

Si M est un espace vectoriel sur K, on va le considérer comme un g-module trivial.

Nous conservons les mêmes conventions et les mêmes notations qu'aux paragraphes précédents et nous supposons k algébriquement clos et g semi-simple.

PROPOSITION 4.1. *Soient* $M \in k$-ev *et* $N \in \mathrm{Mod}_{(H\#U(g))}$. *Alors* $\mathrm{Hom}_{H\#U(g)}(N, \mathrm{Hom}_{(g)}(H, M))$ *et* $\mathrm{Hom}(N^g, M)$ *sont k-isomorphes.*

COROLLAIRE 4.2. *Soit* $I \in k$-ev, *alors* $\mathrm{Hom}_{(g)}(H, I)$ *est un injectif de* $\mathrm{Mod}_{(H\#U(g))}$.

LEMME 4.3. *Soit* $M \in k$-ev, *alors* $\mathrm{Hom}_{(g)}(H, M)^g \approx M$.

LEMME 4.4. *Soient* $N \in k$-ev *et* M *un sous-*$H\#U(g)$*-module de* $\mathrm{Hom}_{(g)}(H, N)$. *Alors* $M^g = 0$ *implique* $M = 0$.

LEMME 4.5. *Soit* $N \in k$-ev *et* M *un sous-*$H\#U(g)$*-module non nul de* $\mathrm{Hom}_{(g)}(H, N)$. *Alors* M *est une extension essentielle de son sous-*$H\#U(g)$*-module* HM^g.

THÉORÈME 4.6. (1) *Si* E *est un injectif de* $\mathrm{Mod}_{(H\#U(g))}$ *tel que* $^*E = 0$, *alors* $E = \mathrm{Hom}_{(g)}(H, E^g)$ *un isomorphisme de* $H\#U(g)$*-modules.*

(2) *Soit* $M \in \mathrm{Mod}_{(H\#U(g))}$ *tel que* $^*M = 0$, *alors*

$$E_{H\#U(g)}(M) = \mathrm{Hom}_{(g)}(H, M^g).$$

LEMME 4.7. *Soit* $\{E_i\}$ *une famille d'espaces vectoriels sur* k. *Alors*

$$\bigoplus \mathrm{Hom}_{(g)}(H, E_i) = \mathrm{Hom}_{(g)}\Big(H, \bigoplus E_i\Big).$$

LEMME 4.8. *Soient* $M \in k$-ev *et* V *un* g*-module simple de dimension finie. Alors* $\mathrm{Hom}_{(g)}(H, M)_V = \mathrm{Hom}_{(g)}(H_{V^*}, M)$.

LEMME 4.9. *Soient* $M \in k$-ev. *Alors* $H \otimes M$ *est un projectif de type invariant dans* $\mathrm{Mod}_{(H\#U(g))}$. *Si de plus,* M *est de dimension finie, alors* $H \otimes M$ *est de type fini et* $(H \otimes M)^g \approx M$.

Remarque. Si $M \in k$-ev est de dimension finie, le résultat $(H \otimes M)^g = M$ est bien connu, car $(H \otimes M)^g = \mathrm{Hom}_g(U(g), M)$.

THÉORÈME 4.10. *Soit P un projectif de type fini et de type invariant dans* $\mathrm{Mod}_{(H\#U(g))}$. *Alors*

(1) *P^g est un espace vectoriel de dimension finie sur k.*

(2) *$H \otimes P^g$ est $H\#U(g)$-isomorphe à P; donc P est H-libre de type fini et son rang en tant que H-module est la dimension de l'espace vectoriel P^g.*

LEMME 4.11. *Soient $N \in \mathrm{Mod}_{(H\#U(g))}$ et $M \in k$-ev. Si N est un quotient de $H \otimes M$ dans $\mathrm{Mod}_{(H\#U(g))}$, alors $N^g = 0$ implique $N = 0$.*

Considérons la projection canonique $p = p_H \colon H \to H^g = k$. Alors $p \in \mathrm{Hom}(H, k)$ et il est g-invariant, donc $p \in \mathrm{Hom}_g(H, k)$.
Enfin, voici le dernier résultat de ce paragraphe.

THÉORÈME 4.12. *Conservant les notations ci-dessus, on a*

$$E_{H\#U(g)}(kp) = \mathrm{Hom}_{(g)}(H, k).$$

Preuve. Il est clair que $Hp = kp$. D'après (4.3), on a $\mathrm{Hom}_g(H, k) = kp$; donc $H\,\mathrm{Hom}_g(H, k) = kp$. D'après (4.2), $\mathrm{Hom}_{(g)}(H, k)$ est un injectif de $\mathrm{Mod}_{(H\#U(g))}$; donc, d'après (4.5), $\mathrm{Hom}_{(g)}(H, k) = E_{H\#U(g)}(kp)$.

5. SEMI-SIMPLICITÉ DE LA CATÉGORIE $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$

Dans ce paragraphe, g est semi-simple. On se propose de généraliser le théorème de Weyl sur la réductibilité complète à la catégorie $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Cette généralisation dans le cas des actions de groupes est faite dans [4]. On définit dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ la notion de simplicité et de semi-simplicité de manière évidente.

Soit $M \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Alors M est simple (respectivement semi-simple) dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ si et seulement si M est simple (respectivement semi-simple) dans $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$. Quand nous disons qu'un objet de $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$ est simple (respectivement semi-simple), il s'agit d'une simplicité (respectivement d'une semi-simplicité) dans $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$.

On suppose dans la suite du paragraphe que l'hypothèse suivante est satisfaite: Pour tout objet de type fini M de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, le foncteur $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ est exact de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ dans $\mathrm{Mod}_{(g)}$.

Cette hypothèse est réalisée dans les cas suivants:

1*er cas.* R est un anneau semi-simple.

2*ème cas.* R est commutative g-simple; car d'après [11, 1.6], tout $R\#U(g)$-module de type fini comme R-module est R-projectif.

3*ème cas.* R est commutative de type fini régulière intègre et $R\delta(g) = \mathrm{Der}_k R$; l'algèbre de Lie des k-dérivations de R [8, prop. 7.7].

LEMME 5.1. *Soit $M \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Si M est de type fini, alors M est un projectif dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

Preuve. On utilise l'exactitude du foncteur $(\ )^g$ de $\mathrm{Mod}_{(g)}$ dans Mod_g et celle du foncteur $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ dans $\mathrm{Mod}_{(g)}$.

PROPOSITION 5.2. *Chaque objet M de* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *de type fini est la somme directe d'une famille de sous-$R\#U(g)$-modules simples de type fini de M. Donc M est semi-simple.*

Preuve. Il suffit de montrer que tout sous-$R\#U(g)$-module N de M est un facteur direct de M. Soit donc N un sous-$R\#U(g)$-module de M. On a dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ la suite exacte $0 \to N \to M \to M/N \to 0$. D'après (5.1), M/N est un projectif de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, car il est de type fini. La suite exacte précédente est donc scindée dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$; d'où le résultat.

COROLLAIRE 5.3. *Chaque objet M de* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *est la somme directe d'une famille de sous-$R\#U(g)$-modules simples de type fini de M. Donc M est semi-simple.*

Preuve. M est la somme de ses sous-$R\#U(g)$-modules de type fini. La proposition (5.2) donne le résultat.

COROLLAIRE 5.4. *On suppose que R est g-localement finie. Alors $S = R^g$ est un anneau semi-simple.*

Preuve. Soit $I \in \mathrm{Mod}_S$. D'après (5.3), $\mathscr{F}_S(R, I)$ est un injectif de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. D'après (2.5(2)), ${}^*\mathscr{F}_S(R, I) = 0$; donc, d'après (2.8(1)), $\mathscr{F}_S(R, I)^g$ est un injectif dans Mod_S et d'après (2.3), $\mathscr{F}_S(R, I)^g$ et I sont S-isomorphes.

Remarque. Si dans (5.4), R est commutative g-simple, alors R^g est un corps et le résultat est trivial.

COROLLAIRE 5.5. *Soient R commutative g-localement finie g-simple et M un sous-$R\#U(g)$-module non nul de $R^{(n)} = R \oplus R \oplus \cdots \oplus R$, $n < +\infty$. Alors M est $R\#U(g)$-isomorphe à un $R^{(m)}$, $1 \leq m \leq n$.*

Preuve. Soit π_i: $R^{(n)} \to R$ la projection sur la $i$ème coordonnée. Si μ: $M \to R^{(n)}$ est l'inclusion, alors $\pi_i \circ \mu(M)$ est un idéal g-invariant de R; donc $\pi_i \circ \mu(M) = 0$ ou R. Or M est non nul. Donc, si M est simple, M est $R\#U(g)$-isomorphe à R. Si M n'est pas simple, alors M est semi-simple, d'après (5.3). Donc M est $R\#U(g)$-isomorphe à $R^{(m)}$; où m est un entier compris entre 1 et n, d'après (5.3).

C'est la fin de l'exposé. Mais nous allons ajouter un paragraphe consacré à l'étude du groupe de Picard dans le cas d'une action de groupe.

6. APPENDICE

Nous rassemblons ici, certains résultats qui auraient pu alourdir le paragraphe 3. Dans ce paragraphe, R est un anneau commutatif associatif unitaire et G un groupe qui opère sur R par automorphisme d'anneaux. On note $U(R)$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de R et G^R l'ensemble de toutes les applications de G vers $U(R)$ muni de la multiplication $\phi\phi'(g) = \phi(g)\phi'(g)$ pour tout $g \in G$: c'est un groupe commutatif. L'inverse d'un élément ϕ de G^R est défini par $\phi^{-1}(g) = (\phi(g))^{-1}$ pour tout $g \in G$. L'élément neutre de G^R est l'application définie par $1(g) = 1$ pour tout $g \in G$. Si $u \in U(R)$, alors $g(u) \in U(R)$ pour tout $g \in G$ et l'inverse de $g(u)$ est $g(u^{-1})$.

Soit M un R-module. Pour tout $r \in R$, on note r_M l'opérateur de M qui définit l'action de r sur M et R_M l'ensemble de tous ces opérateurs. Si $r \in U(R)$, alors r_M est un R-automorphisme de M.

On dit qu'une bijection additive f de M vers M est un quasi-R-automorphisme si $f \circ R_M = R_M \circ f$.

On note $Q\,\mathrm{Aut}_R(M)$ l'ensemble de tous les quasi-R-automorphismes de M: c'est un groupe qui contient tous les R-automorphismes de M. De plus, $Q\,\mathrm{Aut}_R(R)$ contient tous les automorphismes d'anneaux de R.

On munit $Q\,\mathrm{Aut}_R(M)$ d'une structure de $U(R)$-module en posant $u \cdot f = u_M \circ f$.

Notons $\overline{Q\,\mathrm{Aut}_R}(M)$ l'ensemble de tous les couples (f, j), où f est un quasi-R-automorphisme de M et j un automorphisme d'anneaux de R vérifiant $f \circ r_M = j(r)_M \circ f$ pour tout $r \in R$. Naturellement, $\overline{Q\,\mathrm{Aut}_R}(M)$ est muni d'une structure de groupe.

On dit qu'un groupe additif M est un G-module, s'il existe un morphisme de groupes η de G vers le groupe $S(M)$ des bijections additives de M vers M. Pour des raisons de simplicité, on écrira $\eta(g)(m) = g(m)$ et $\eta(g) = g_M$ pour tous $g \in G$ et $m \in M$. Il est clair que R est un G-module.

Un (R, G)-module est un R-module M qui est aussi muni d'une structure de G-module tel que le couple (g_M, g_R) appartienne à $\overline{Q\,\mathrm{Aut}_R}(M)$.

Il est clair que R est un (R, G)-module.

Soit M un (R, G)-module. Posons $\rho_\phi(g) = \phi(g)_M \circ g_M$ pour tous $\phi \in G^R$ et $g \in G$. Alors ρ_ϕ est une application de G vers $Q\,\mathrm{Aut}_R(M)$ et le couple (ρ_ϕ, g_R) appartient à $\overline{Q\,\mathrm{Aut}_R}(M)$.

Pour que ρ_ϕ soit un morphisme de groupes, il faut qu'on ait la relation:

$$\phi(gg') = g(\phi(g'))\phi(g) \qquad \text{pour tous } g, g' \in G. \qquad (\alpha)$$

Notons $Z(G, R)$ le sous-ensemble de G^R dont les éléments vérifient la relation (α): c'est un sous-groupe de G^R. Si $\phi \in Z(G, R)$, alors $\phi(e) = 1$, où e est l'élément neutre de G et $\phi^{-1}(g) = g(\phi(g^{-1}))$ pour tout $g \in G$.

EXEMPLE 1. Soit M un (R,G)-module R-libre de rang 1. Si m est une R-base de M, alors $g_M(m) = r_g m$ pour tout $g \in G$; où r_g est un élément de R qui est unique parce que M est R-libre. Posons $\phi(g) = r_g$. Alors $\phi \in Z(G,R)$.

Un élément a de R est dit G-normal si $g(a) = r_g a$ pour tout $g \in G$; où r_g est un élément de R.

EXEMPLE 2. Si R est intègre, tout élément G-normal non nul de R permet de définir un élément ϕ de $Z(G,R)$.

PROPOSITION 6.1. *Soit M un R-module inversible. Si η et η' sont deux morphismes de groupes de G vers $S(M)$ compatibles avec la structure de R-module, alors il existe $\phi \in Z(G,R)$ tel que $\eta'(g) = \phi(g)_M \circ \eta(g)$ pour tout $g \in G$.*

Preuve. On sait que $(\eta(g), g_R)$ et $(\eta'(g), g_R)$ appartiennent à $\overline{Q\,\mathrm{Aut}}_R(M)$; donc $(\eta'(g) \circ \eta(g)^{-1}, \mathrm{id}_R) \in \overline{Q\,\mathrm{Aut}}_R(M)$. Ceci signifie que $(\eta'(g) \circ \eta(g)^{-1} \in \mathrm{Aut}_R(M)$. Or,

$$\mathrm{Aut}_R(M) \subseteq \mathrm{Hom}_R(M,M) = M \otimes_R M^* \cong R;$$

donc $\eta'(g) \circ \eta(g)^{-1} \in U(R)$.

Posons $\phi(g) = \eta'(g) \circ \eta(g)^{-1}$ pour tout $g \in G$. Alors $\phi \in G^R$. Puisque η' est un morphisme de groupes, nous avons $u_M = v_M$; où $u = \phi(gg')$ et $v = g(\phi(g'))\phi(g)$ pour tous $g, g' \in G$. D'autre part, il existe des éléments m_i dans M et f_i dans M^* en nombre fini tels que $\Sigma f_i(m_i) = 1$. Pour chaque i, nous avons $um_i = vm_i$; donc $uf_i(m_i) = vf_i(m_i)$. Il en résulte que $u = v$; donc $\phi \in Z(G,R)$.

Soient ϕ un élément de $Z(G,R)$ et M un (R,G)-module. Donc ρ_ϕ est un morphisme de groupes. On peut définir un nouveau (R,G)-module $M(\phi)$ qui coïncide avec M comme R-module et dont l'action de G est définie par

$$g \cdot m = \rho_\phi(g)(m) = \phi(g)_M \circ g_M(m) = \phi(g)(g(m)).$$

Un (R,G)-module est dit inversible s'il est inversible en tant que R-module. Par exemple R est un (R,G)-module inversible.

D'après la proposition (6.1), si M est un (R,G)-module inversible, alors les $M(\phi)$ (où ϕ parcourt $Z(G,R)$ sont les seuls (R,G)-modules qui coïncident avec M comme R-modules.

LEMME 6.2. *Soient M un (R,G)-module inversible et $m \in M$ tels que $M = Rm$. Alors M est R-libre et m est une R-base de M.*

Preuve. Il faut utiliser l'élément m^* de M^* défini par $m^*(m) = 1$.

PROPOSITION 6.3. (1) *Soit $\phi \in Z(G,R)$. Alors, il existe un (R,G)-module inversible M, un élément x dans M tels que $M = Rx$ et $g(x) = \phi(g)x$ pour tout $g \in G$. Réciproquement, soient M un (R,G)-module inversible et $x \in M$ tels que $M = Rx$. Alors il existe $\phi \in Z(G,R)$ tel que $g(x) = \phi(g)x$ pour tout $g \in G$.*

(2) *Soient N un autre (R,G)-module inversible, $y \in N$ tels que $N = Ry$. Soit $\phi' \in Z(G,R)$ tel que $g(y) = \phi'(g)y$ pour tout $g \in G$. Pour qu'il existe un (R,G)-isomorphisme i: $M \to N$ vérifiant $i(x) = y$, il faut et il suffit que $\phi = \phi'$.*

Preuve. (1) Par définition, le (R,G)-module $R(\phi)$ est R-isomorphe à R; donc il est inversible. Nous avons $g \cdot 1 = \phi(g) \cdot 1$; d'où la première assertion. La réciproque est déja signalée (cf. lemme (6.2) et exemple 1).

(2) Notons id l'application identique de $R(\phi)$ vers $R(\phi')$: elle est R-linéaire. Elle est G-linéaire si et seulement si $\phi = \phi'$. Considérons les (R,G)-isomorphismes j de $R(\phi)$ vers M et j' de $R(\phi')$ vers N définis par $j(r) = rx$ et $j'(r) = ry$ pour tout $r \in R$. Posons $i = j' \circ \mathrm{id} \circ j^{-1}$. Alors i est le seul R-isomorphisme qui vérifie $i(x) = y$. Il est G-linéaire si et seulement si id est G-linéaire; d'où le résultat.

LEMME 6.4. *Tout élément inversible de R est un élément G-normal.*

Preuve. Soit u un élément inversible de R; donc $R = Ru$. D'après (6.3(1)), il existe $\phi \in Z(G,R)$, tel que $g(u) = \phi(g)u$ pour tout $g \in G$.

Posons $R_\phi = \{a \in R$ tel que $g(a) = \phi(g)a$ pour tout $g \in G$; où $\phi \in Z(G,R)\}$. Donc $R_1 = R^G$; R_ϕ est un sous-groupe additif de R; RR_ϕ est un sous-(R,G)-module de R et $1 \in R_\phi$ si et seulement si $\phi = 1$. Si $a \in R_\phi$ et si a est inversible, alors $a^{-1} \in R_{\phi^{-1}}$.

Posons $Z^u(G,R) = \{\phi \in Z(G,R)$ tel que R_ϕ contient un élément inversible de $R\}$ et $Z^s(G,R) = \{\phi \in Z(G,R)$ tel que $RR_\phi = R$ et $RR_{\phi^{-1}} = R\}$. Ce sont des sous-groupes de

$$Z(G,R) \text{ et } Z^u(G,R) \subseteq Z^s(G,R).$$

Si M est un R-module inversible, sa classe dans $\mathrm{Pic}(R)$ sera notée $[M]$. Les classes d'isomorphismes des (R,G)-modules inversibles forment un groupe commutatif. Nous allons le noter $\mathrm{Pic}(R,G)$. Si M est un (R,G)-module inversible, on note $\{M\}$ sa classe dans $\mathrm{Pic}(R,G)$. Nous avons un homophormisme de groupes q:

$$\mathrm{Pic}(R,G) \to \mathrm{Pic}(R); \qquad \{M\} \to [M].$$

Soit $\phi \in Z(G, R)$. D'après la proposition (6.3), il existe un (R, G)-module inversible M, un élément x dans M tels que

$$M = Rx \qquad \text{et} \qquad g(x) = \phi(g)x \qquad \text{pour tout } g \in G,$$

un tel M sera noté $R[\phi]$. Il est clair que $R[\phi]$ et $R(\phi)$ sont (R, G)-isomorphes. On définit un morphisme de groupes p de $Z(G, R)$ vers $\mathrm{Pic}(R, G)$ et posant $p(\phi) = \{R[\phi]\}$.

THÉORÈME 6.5. *Sous les hypothèses et avec les notations ci-dessus, on a une suite exacte de groupes*

$$1 \to Z^u(G, R) \to Z(G, R) \to \mathrm{Pic}(R, G) \to \mathrm{Pic}(R).$$

Preuve. Il suffit d'adapter la preuve de (3.13) à notre contexte en faisant les changements appropriés.

A partir de maintenant, R est de plus une algèbre sur un corps k algébriquement clos et G un groupe algébrique affine sur k. Dans le contexte actuel, un espace vectoriel M sur k est un G-module si le morphisme g_M appartient au groupe linéaire $GL(M)$ de M qui est un sous-groupe de $S(M)$. Un G-module M est rationnel si pour chaque $m \in M$, le translaté $G(m)$ de m engendre un sous-espace vectoriel W de dimension finie de M et le morphisme induit de G vers $GL(W)$ est un morphisme de groupes algébriques sur k.

Dans la suite, on suppose que l'action de G sur R est rationnelle.

Remarque. Dans (6.1), si η et η' agissent rationnellement sur M, alors l'élément ϕ appartient à $Z_R(G, R)$.

Nous pouvons utiliser le lemme 1, la proposition 2, le corollaire 4 et la proposition 5 de [10], puisque leurs démonstrations ne font pas intervenir les hypothèses (2) et (3) de la page 305.

Posons $\mathrm{Pic}_R(R, G) = \{\{M\} \in \mathrm{Pic}(R, G)$ tel que M est rationnel$\}$: c'est un sous-groupe de $\mathrm{Pic}(R, G)$. Nous avons un homormorphisme de groupes $\mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}_R(R, G)$; $[M] \to \{M_R\}$; où $M_R = R \otimes_S M$. Nous allons étudier le groupe de Picard de l'anneau S.

Posons $Z_R(G, R) = \{\phi \in Z(G, R)$ tel que Im ϕ est contenue dans un sous-G-module de dimension finie de $R\}$

Tout caractère de G appartient à $Z_R(G, R)$.

Remarque. L'image de tout élément de $Z_R(G, R)$ est contenue dans une sous-algèbre de dimension finie G-stable de R dans certains cas:

1*er cas.* Si tout sous-G-module de dimension finie de R est contenu dans une sous-algèbre de dimension finie G-stable de R. Par exemple, si R est algébrique sur k.

2ème cas. Si $Z_R(G, R) = \chi(G)$ l'ensemble des caractères de G ou mieux encore, si $Z(G, R) = \chi(G)$: c'est l'hypothèse (3) faite sur R dans [10] à la page 305.

LEMME 6.6. *Soit $\phi \in Z(G, R)$. Alors $R[\phi]$ est rationnel si et seulement si $\phi \in Z_R(G, R)$.*

Preuve. On raisonne exactement comme en (3.15) en faisant les changements appropriés.

Posons

$$Z_R^u(G, R) = Z_R(G, R) \cap Z^u(G, R)$$

et

$$Z_R^s(G, R) = Z_R(G, R) \cap Z^s(G, R).$$

Ce sont des sous-groupes de $Z_R(G, R)$ et $Z_R^u(G, R) \subseteq Z_R^s(G, R)$.

THÉORÈME 6.7. *Nous avons une suite exacte de groupes*

$$1 \to Z_R^u(G, R) \to Z_R(G, R) \to \mathrm{Pic}_R(R, G) \to \mathrm{Pic}(R).$$

Preuve. D'après (6.6), la restriction de p à $Z_R(G, R)$ définit un morphisme de groupes de $Z_R(G, R)$ vers $\mathrm{Pic}_R(R, G)$. Le théorème (6.5) donne le résultat.

LEMME 6.8. *Soit $\phi \in Z_R(G, R)$. Alors $R[\phi]$ est de type invariant si et seulement si $RR_{\phi^{-1}} = R$.*

Preuve. Le raisonnement est identique à celui de (3.17) ou [10, lemme 7).

Le lemme (6.8) peut être amélioré si G est linéairement réductif.

COROLLAIRE 6.9. *Soient G linéairement réductif et $\phi \in Z_R(G, R)$. Alors $R[\phi]$ est de type invariant si et seulement si $\phi \in Z_R^s(G, R)$.*

Preuve. Il suffit d'adapter la preuve de (3.18) avec les changements appropriés. On utilise [10, corollaire 4] à la place de (3.9).

THÉORÈME 6.10. *Soit G linéairement réductif. Alors il existe une suite exacte de groupes*

$$1 \to Z_R^u(G, R) \to Z_R^s(G, R) \to \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(R).$$

Preuve. Le raisonnement est similaire à celui de (3.19). On utilise [10, prop. 5] à la place de (3.14) et (6.9) à la place de (3.18).

Même si G n'est pas linéairement réductif, on peut appliquer certains des résultats précédents.

THÉORÈME 6.11. *Il existe un sous-groupe E de $Z^s_R(G, R)$ et une suite exacte de groupes $E \to \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(R)$.*

Preuve. Le raisonnement est identique à celui de (3.20). On utilise [10, prop. 5] à la place de (3.14) en faisant les changements appropriés.

Le théorème (6.11) donne assez d'informations sur le groupe $\mathrm{Pic}(S)$ si le groupe $Z^s_R(G, R)$ est réduit à $\{1\}$.

On dit que la condition $(**)$ est satisfaite dans R si l'image de tout élément de $Z_R(G, R)$ est contenue dans une sous-algèbre W de dimension finie G-stable de R et $W \setminus \{0\} \subseteq U(R)$.

Pour le lemme suivant et son corollaire, on suppose que la condition $(**)$ est satisfaite dans R.

LEMME 6.12. *Supposons qu'il existe un idéal maximal G-invariant J de R tel que $R/J = k$. Si $\phi \in Z^s_R(G, R)$ avec $\phi \neq 1$, alors $RR_\phi \neq R$. En particulier, $Z^s_R(G, R) = \{1\}$.*

Preuve. On raisonne comme dans [10, lemme 11] en faisant les changements appropriés.

COROLLAIRE 6.13. *S'il existe un idéal maximal G-invariant J de R tel que $R/J = k$, alors $\mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(R)$ est une injection.*

Preuve. Le raisonnement est similaire à celui de [10, corollaire 12].

Remarques. (1) Dans la démonstration du théorème 6 de [10] à la dixième ligne, il semble qu'on n'a pas besoin d'imposer aux éléments inversibles de R d'être des semi-invariants.

(2) Nos résultats généralisent ceux de [10]. Nous avons tout simplement remplacé l'ensemble $\chi(G)$ des caractères de G par un ensemble plus gros $Z_R(G, R)$ qui est lui-même un sous-groupe de $Z(G, R)$. Si $Z(G, R)$ est réduit à $\chi(G)$ (c'est l'hypothèse (3) faite à la page 305 de [10]), on retrouve les résultats de [10].

Nous allons donner un exemple où la condition $(*)$ du paragraphe 3 est satisfaite.

Soient k de caractéristique nulle et G connexe d'algèbre de Lie $\mathscr{F}$. Soit M un (R, G)-module rationnel. D'après [8, lemme 2, p. 559], M est un $R\#U(\mathscr{F})$-module localement fini.

LEMME 6.14. *Soit a un élément de R. Alors*

(1) *a est G-normal si et seulement si a est $\mathscr{F}$-normal.*

(2) *a est G-semi-invariant si et seulement si a est $\mathscr{F}$-semi-invariant.*

(3) *a est G-invariant si et seulement si a est $\mathscr{F}$-invariant.*

Preuve. (1) Soit a G-normal; donc Ra est un idéal G-invariant de R, c'est-à-dire Ra est un sous (R, G)-module de R. On en déduit que Ra est un sous-$R\#U(\mathscr{F})$-module de R; donc a est $\mathscr{F}$-normal. Pour démontrer la réciproque, posons $W = U(\mathscr{F})(a)$. Comme R est rationnel, il existe d'après

[8, preuve du lemme, p. 559] un G-module V de dimension finie contenant W. Or, en caractéristique zéro, il est bien connu que G et $\mathscr{F}$ laissent stables les mêmes sous-espaces vectoriels de V. Donc W est G-stable. Il en résulte que RW est un sous (R, G)-module de R. D'autre part, $Ra \subseteq RW$, car $a \in W$. Supposons maintenant que a soit $\mathscr{F}$-normal; donc $W \subseteq Ra$. On en déduit que $RW = Ra$; donc a est G-normal.

(2) Si a est G-semi-invariant, alors ka est un sous-G-module de dimension 1 de R, donc ka est un sous-$\mathscr{F}$-module de R; donc a est $\mathscr{F}$-semi-invariant. Pour la réciproque, remarquons que $W = U(\mathscr{F})(a) = ka$, si a est $\mathscr{F}$-semi-invariant. Un raisonnement similaire à celui de (1) montre que W est G-stable; donc a est G-semi-invariant.

(3) Comme R est rationnel, l'élément a appartient à un sous-G-module V de dimension finie de R. Ce sous-espace V est aussi $\mathscr{F}$-stable. Il est bien connu que G et $\mathscr{F}$ possèdent les mêmes éléments invariants dans V.

COROLLAIRE 6.15. *Soit R normale de type fini. Alors* $Z(\mathscr{F}, R) = \chi(\mathscr{F})$.

Preuve. Soit $\phi \in Z(\mathscr{F}, R)$. Supposons que R_ϕ ne soit pas réduit à $\{0\}$. Soit $a \in R_\phi$. Donc a est un élément $\mathscr{F}$-normal de R. D'après (6.14(1)), a est un élément G-normal de R. Comme R est intègre, il existe $\psi \in Z(G, R)$ tel que $g(a) = \psi(g)a$ pour tout $g \in G$. D'après [10, p. 305], ψ est un caractère de G. Donc a est G-semi-invariant. D'après (6.14(2)), a est $\mathscr{F}$-semi-invariant. Comme R est intègre, ϕ est un caractère de $\mathscr{F}$.

Si R_ϕ est réduit à $\{0\}$, alors est ϕ un élément quelconque de $Z(\mathscr{F}, R)$. On peut donc supposer que ϕ est un caractère de $\mathscr{F}$.

REFERENCES

1. A. D. Bell, Localization and ideal theory in iterated differential operator rings, *J. Algebra* **106** (1987), 376–401.
2. H. Cartan and S. Eilenberg, "Homological Algebra," Princeton University Press, 1956.
3. J. Dixmier, "Algèbres enveloppantes," Gauthier–Villars, Paris, 1974.
4. I. Doraiswamy, Projectivity of modules over rings with suitable group action, *Comm. Algebra* **10** (1982), 787–795.
5. F. Du Cloux, Foncteurs dérivés des vecteurs g-finis (cf. Représentations de longueur finie des groupes de Lie résolubles), *Mem. Amer. Math. Soc.* **407** (1989).
6. G. L. Fel'dman, Global dimension of rings of differential operators, *Trans. Moscow Math. Soc.* (1982), 123–147.
7. T. Guédénon, Sur la cohomologie g-finie, *Comm. Algebra* **21** (1993), 1103–1139.
8. T. Levasseur, Critère d'induction et de coinduction pour certains anneaux d'opérateurs différentiels, *J. Algebra* **110** (1987), 530–562.
9. A. R. Magid, Cohomology of rings with algebraic group action, *Adv. Math.* **59** (1986), 124–151.
10. A. R. Magid, Picard groups of rings of invariants, *J. Pure Appl. Algebra* **17** (1980), 305–311.
11. S. M. Skryabin, An algebraic approach to the Lie algebras of Cartan type, *Comm. Algebra* **21** (1993), 1229–1336.