

# THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 16 novembre 2001

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille**

**(Spécialité Automatique et Informatique Industrielle)**

par

Cyrille CHRISTOPHE

## Surveillance des systèmes non linéaires Application aux machines électriques

### Composition du jury

|                        |                      |  |
|------------------------|----------------------|--|
| <i>Président :</i>     | Alain RICHARD        | Pr., Université Henri Poincaré de Nancy I                    |
| <i>Rapporteurs :</i>   | Sette DIOP           | C.R. CNRS, LSS   |
|                        | Michel KINNAERT      | Pr., Université libre de Bruxelles                           |
|                        | Jean Pierre ROGNON   | Pr., Institut National Polytechnique de Grenoble             |
| <i>Examineurs :</i>    | Jean Philippe CASSAR | Pr, Université des Sciences et Technologies de Lille I       |
|                        | Wilfrid PERRUQUETTI  | Pr., École Centrale de Lille                                 |
| <i>Co-directeurs :</i> | Vincent COCQUEMPOT   | M. de C., Université des Sciences et Technologies de Lille I |
|                        | Marcel STAROSWIECKI  | Pr., Université des Sciences et Technologies de Lille I      |

## Remerciements

*Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille (LAIL - UPRES A 8021) dans l'équipe Analyse et Surveillance des Processus Industriels Complexes (ASPIC) sous la direction de Messieurs Marcel Staroswiecki et Vincent Cocquempot, respectivement Professeur et Maître de Conférences à l'Université des Sciences et Technologies de Lille. Je tiens à leur témoigner ma profonde gratitude pour l'accueil, le suivi et l'aide précieuse qu'ils m'ont apportés tout au long de ce travail.*

*Je suis très reconnaissant à Messieurs Sette Diop, Chargé de Recherche au LSS à Paris, Michel Kinnaert, Professeur à l'ULB à Bruxelles et Jean-Pierre Rognon Professeur à l'INPG à Grenoble, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'examiner ce travail et d'être les rapporteurs de cette thèse.*

*J'adresse également mes remerciements à Monsieur Alain Richard, Professeur CRAN pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury, ainsi qu'à Monsieur Jean-Philippe Cassar, professeur à l'Université de Lille I et Monsieur Wilfrid Perruquetti, Maître de conférences à ECL, pour l'honneur qu'ils me font en examinant ce travail et en acceptant de participer au jury.*

*Je tiens particulièrement à remercier tous les membres de l'équipe ASPIC, et tous les doctorants pour leur sympathie et l'ambiance chaleureuse qu'ils ont su entretenir tout au long de mon séjour parmi eux.*

*Enfin, mes remerciements vont à tous ceux qui m'ont soutenu ou qui, d'une manière ou d'une autre ont contribué à l'élaboration de ce travail.*



*À ma famille,  
À mes ami(e)s.*



# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduction générale</b>                                 | <b>xi</b> |
| <b>Partie I Résultats Théoriques</b>                         | <b>1</b>  |
| <b>1 Rappels</b>   | <b>3</b>  |
| 1.1 Les méthodes à base de modèles . . . . .                 | 3         |
| 1.1.1 La modélisation des systèmes . . . . .                 | 3         |
| 1.1.2 Surveillance utilisant les modèles . . . . .           | 5         |
| 1.1.3 Redondance physique (ou matérielle) . . . . .          | 5         |
| 1.1.4 Redondance analytique . . . . .                        | 6         |
| 1.1.5 La génération de résidus . . . . .                     | 6         |
| 1.1.6 La détection . . . . .                                 | 7         |
| 1.1.7 La localisation . . . . .                              | 9         |
| 1.1.7.1 Les résidus structurés . . . . .                     | 9         |
| 1.1.7.2 Les résidus directionnels . . . . .                  | 11        |
| 1.2 Éléments de mathématiques . . . . .                      | 12        |
| 1.2.1 Quelques définitions et théorèmes généraux . . . . .   | 12        |
| 1.2.2 Topologie, variétés et champs de vecteurs . . . . .    | 14        |
| 1.2.2.1 Quelques notions élémentaires de topologie . . . . . | 14        |
| 1.2.2.2 Variétés et champs de vecteurs . . . . .             | 15        |
| 1.2.3 Rappels de géométrie différentielle . . . . .          | 16        |
| 1.2.4 Concepts d’algèbre . . . . .                           | 17        |
| 1.2.4.1 Définitions générales . . . . .                      | 18        |
| 1.2.4.2 Les bases de Groebner . . . . .                      | 19        |
| 1.3 Conclusion . . . . .                                     | 21        |
| <b>2 Les observateurs</b>                                    | <b>22</b> |
| 2.1 Introduction . . . . .                                   | 22        |
| 2.2 Observabilité . . . . .                                  | 23        |
| 2.2.1 Définitions . . . . .                                  | 23        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.2.2    | Condition de rang d'observabilité . . . . .                              | 24        |
| 2.2.3    | Observabilité indépendante de $u$ et forme canonique d'observabilité . . | 25        |
| 2.2.3.1  | Systèmes uniformément observables MISO . . . . .                         | 25        |
| 2.2.3.2  | Extension aux systèmes MIMO . . . . .                                    | 26        |
| 2.3      | Les observateurs pour la surveillance . . . . .                          | 29        |
| 2.3.1    | Généralités . . . . .  | 29        |
| 2.3.2    | Observateurs à entrée inconnue (UIO) . . . . .                           | 30        |
| 2.3.2.1  | Utilisation des UIO pour la détection . . . . .                          | 30        |
| 2.3.2.2  | Utilisation des UIO pour la localisation . . . . .                       | 31        |
| 2.4      | Les observateurs de type Luenberger . . . . .                            | 34        |
| 2.4.1    | Linéarisation exacte modulo injection d'entrée sortie . . . . .          | 34        |
| 2.4.1.1  | Approche géométrique . . . . .   | 35        |
| 2.4.1.2  | Approche algébrique . . . . .  | 36        |
| 2.4.2    | Synthèse d'un observateur de Luenberger . . . . .                        | 37        |
| 2.4.3    | Observateurs à entrée inconnue (Chen and Patton, 1999) . . . . .         | 37        |
| 2.4.4    | Générateur de résidus et observateurs d'ordre réduit . . . . .           | 39        |
| 2.4.4.1  | Observateurs d'ordre réduit . . . . .                                    | 40        |
| 2.4.4.2  | Détection des défauts capteurs et actionneurs . . . . .                  | 41        |
| 2.4.4.3  | Localisation de défauts capteurs . . . . .                               | 42        |
| 2.4.4.4  | Localisation de défauts actionneurs . . . . .                            | 43        |
| 2.4.5    | Conclusion . . . . .   | 44        |
| 2.5      | Surveillance des systèmes non linéaires affines en la commande . . . . . | 44        |
| 2.5.1    | Le Problème Fondamental de la Génération de Résidus (PFGR) . . . . .     | 45        |
| 2.5.1.1  | Position du problème . . . . .   | 45        |
| 2.5.1.2  | Résolution du l-NLPGFR . . . . .   | 46        |
| 2.5.2    | Résolution de l-NLFRPG . . . . .   | 47        |
| 2.5.3    | Les observateurs à grand gain . . . . .                                  | 48        |
| 2.5.4    | Les observateurs à mode glissant . . . . .                               | 49        |
| 2.5.4.1  | Généralités . . . . .  | 49        |
| 2.5.4.2  | Implémentation sur un système sous la forme triangulaire . .             | 50        |
| 2.6      | Conclusion . . . . .   | 51        |
| <b>3</b> | <b>L'espace de parité</b> . . . . .                                      | <b>52</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .   | 52        |
| 3.2      | Sur les relations de redondance analytique . . . . .                     | 53        |
| 3.2.1    | Notations et généralités . . . . .                                       | 53        |
| 3.2.2    | Définitions et utilisation des RRA pour la surveillance . . . . .        | 55        |
| 3.2.3    | Sur le nombre de RRA . . . . .   | 56        |
| 3.2.4    | Discussion sur le nombre de RRA et sur l'existence de RRA . . . . .      | 61        |
| 3.3      | Calcul des RRA par projection . . . . .                                  | 63        |
| 3.3.1    | Principe de la méthode . . . . .   | 64        |
| 3.3.2    | Robustesse vis-à-vis des entrées inconnues . . . . .                     | 68        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.3.3    | Robustesse vis-à-vis des pannes . . . . .                            | 69         |
| 3.3.3.1  | Les pannes actionneurs . . . . .                                     | 69         |
| 3.3.3.2  | Les pannes capteurs . . . . .  | 70         |
| 3.3.4    | Conclusion . . . . .   | 71         |
| 3.4      | Calcul des RRA par élimination . . . . .                             | 71         |
| 3.4.1    | Calcul des RRA . . . . .   | 71         |
| 3.4.2    | Structuration des RRA . . . . .                                      | 74         |
| 3.4.2.1  | Définitions et propriétés . . . . .                                  | 74         |
| 3.4.2.2  | Utilisation des résultants pour la structuration . . . . .           | 75         |
| 3.4.3    | Conclusion . . . . .   | 77         |
| 3.5      | La sensibilité des résidus . . . . .                                 | 77         |
| 3.5.1    | Définition de la sensibilité . . . . .                               | 77         |
| 3.5.2    | Formes d'évaluation et sensibilité . . . . .                         | 77         |
| 3.6      | Conclusion . . . . .   | 79         |
| <b>4</b> | <b>Liens entre les résidus observateurs et les résidus de parité</b> | <b>81</b>  |
| 4.1      | Introduction . . . . .   | 81         |
| 4.2      | Étude des systèmes linéarisables . . . . .                           | 82         |
| 4.2.1    | La génération des résidus . . . . .                                  | 82         |
| 4.2.1.1  | L'espace de parité (E.P.) . . . . .                                  | 82         |
| 4.2.1.2  | Les UIO . . . . .  | 83         |
| 4.2.2    | Comparaison des résidus . . . . .                                    | 83         |
| 4.2.3    | Conclusion . . . . .   | 90         |
| 4.3      | Comparaison pour les systèmes non exactement linéarisables . . . . . | 91         |
| 4.3.1    | Génération des résidus . . . . .                                     | 91         |
| 4.3.1.1  | L'espace de parité . . . . .   | 91         |
| 4.3.1.2  | Les observateurs à grand gain . . . . .                              | 91         |
| 4.3.2    | Comparaison des résidus . . . . .                                    | 92         |
| 4.3.2.1  | Calcul des RRA issues de $\Sigma_{OBS}$ . . . . .                    | 92         |
| 4.3.2.2  | Relation entre $\rho_{EP}$ et $\rho_{OBS}$ . . . . .                 | 95         |
| 4.3.3    | Conclusion . . . . .   | 95         |
| 4.4      | Conclusion . . . . .   | 95         |
|          | <b>Partie II Application aux machines tournantes</b>                 | <b>97</b>  |
|          | <b>Introduction</b>  | <b>99</b>  |
| <b>5</b> | <b>Application au moteur à courant continu série</b>                 | <b>100</b> |
| 5.1      | Modélisation du moteur DC série . . . . .                            | 100        |
| 5.2      | Mesure du courant uniquement . . . . .                               | 102        |
| 5.2.1    | Relation de Redondance Analytique (RRA) . . . . .                    | 102        |
| 5.2.2    | Linéarisation exacte . . . . .                                       | 103        |



|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 5.2.3    | Relation entre les résidus . . . . .                          | 104        |
| 5.2.3.1  | Observateur de Luenberger . . . . .                           | 104        |
| 5.2.3.2  | Observateur à grand gain . . . . .                            | 105        |
| 5.3      | Mesure du courant et de la vitesse . . . . .                  | 108        |
| 5.3.1    | Calcul des RRA . . . . .                                      | 109        |
| 5.3.2    | Observateur de Luenberger . . . . .                           | 110        |
| 5.3.3    | Relation entre les résidus . . . . .                          | 111        |
| 5.4      | Application numérique . . . . .                               | 113        |
| 5.4.1    | Mesure du courant uniquement . . . . .                        | 113        |
| 5.4.1.1  | Observateur de Luenberger et espace de parité . . . . .       | 114        |
| 5.4.1.2  | Observateur grand gain et Espace de parité . . . . .          | 116        |
| 5.4.2    | Mesure du courant et de la vitesse . . . . .                  | 117        |
| 5.5      | Conclusion . . . . .  | 121        |
| <b>6</b> | <b>Application au moteur asynchrone</b>                       | <b>122</b> |
| 6.1      | Modélisation . . . . .  | 122        |
| 6.1.1    | Les champs tournants . . . . .                                | 122        |
| 6.1.2    | Principe de fonctionnement de la machine asynchrone . . . . . | 125        |
| 6.1.3    | Modélisation de la machine . . . . .                          | 126        |
| 6.1.3.1  | Hypothèses . . . . .  | 127        |
| 6.1.3.2  | Équations générales de la machine . . . . .                   | 127        |
| 6.1.3.3  | Transformation de Park . . . . .                              | 129        |
| 6.1.3.4  | La partie mécanique . . . . .                                 | 132        |
| 6.1.3.5  | Le modèle pour la surveillance . . . . .                      | 132        |
| 6.2      | Surveillance par la méthode d'élimination . . . . .           | 133        |
| 6.2.1    | Génération des RRA . . . . .                                  | 134        |
| 6.2.2    | Analyse des RRA . . . . .                                     | 136        |
| 6.2.3    | Résidus structurés en vitesse variable . . . . .              | 138        |
| 6.2.3.1  | Robustesse par rapport à $\Delta_{y_1}$ . . . . .             | 139        |
| 6.2.3.2  | Robustesse par rapport à $\Delta_\beta$ . . . . .             | 139        |
| 6.2.3.3  | Robustesse par rapport à $\Delta_\alpha$ . . . . .            | 140        |
| 6.2.4    | Résidus structurés en vitesse constante . . . . .             | 140        |
| 6.2.4.1  | Robustesse par rapport à $\Delta_{y_1}$ . . . . .             | 141        |
| 6.2.4.2  | Robustesse par rapport à $\Delta_\beta$ . . . . .             | 141        |
| 6.2.4.3  | Robustesse par rapport à $\Delta_\alpha$ . . . . .            | 141        |
| 6.2.5    | Table des signatures théoriques . . . . .                     | 141        |
| 6.2.5.1  | Vitesse variable . . . . .                                    | 142        |
| 6.2.5.2  | Vitesse Constante . . . . .                                   | 142        |
| 6.3      | Application numérique . . . . .                               | 143        |
| 6.3.1    | Cas non défaillant . . . . .                                  | 143        |
| 6.3.2    | Cas Défaillant . . . . .                                      | 147        |
| 6.3.2.1  | Panne du capteur de vitesse . . . . .                         | 148        |

|                                     |  |            |
|-------------------------------------|--|------------|
| 6.3.2.2                             | Variation de la résistance $R_r$ . . . . .                             | 149        |
| 6.3.2.3                             | Variation de la résistance $R_s$ . . . . .                             | 151        |
| 6.3.2.4                             | Conclusion . . . . .   | 153        |
| 6.4                                 | Conclusion . . . . .   | 153        |
| <b>Conclusions et perspectives</b>  |  | <b>155</b> |
| <b>Partie III Annexes</b>           |  | <b>161</b> |
| <b>Annexes</b>                      |  | <b>163</b> |
| <b>A Sur le calcul des dérivées</b> |  | <b>163</b> |
| A.1                                 | Introduction . . . . .   | 163        |
| A.2                                 | Approximation par une fonction analytique . . . . .                    | 164        |
| A.2.1                               | Position du problème . . . . .   | 164        |
| A.2.2                               | Approximation polynomiale . . . . .                                    | 164        |
| A.2.2.1                             | Approximation polynomiale utilisant une base orthogonale . . . . .     | 165        |
| A.2.2.2                             | Estimation des dérivées et implémentation logicielle . . . . .         | 168        |
| A.3                                 | Approximation par une fonction spline . . . . .                        | 169        |
| A.3.1                               | Définitions . . . . .  | 169        |
| A.3.2                               | Les critères pour le calcul des fonctions splines . . . . .            | 170        |
| A.4                                 | Approximation par Splines naturels lissants . . . . .                  | 171        |
| A.4.1                               | Position du problème . . . . .   | 171        |
| A.4.2                               | Solution du problème de minimisation contraint . . . . .               | 172        |
| A.4.3                               | Calcul des coefficients du spline . . . . .                            | 174        |
| A.4.4                               | Détermination de $p$ tel que $F(p) = S$ . . . . .                      | 175        |
| A.4.5                               | Influence du paramètre lissant $S$ . . . . .                           | 176        |
| A.4.6                               | Conclusion . . . . .   | 177        |
| A.5                                 | Approximation par Splines lissants . . . . .                           | 177        |
| A.5.1                               | La représentation B-Spline . . . . .                                   | 178        |
| A.5.2                               | Les fonctions Splines comme une combinaison de $B - Splines$ . . . . . | 179        |
| A.5.3                               | Dérivée d'une fonction spline . . . . .                                | 179        |
| A.5.4                               | Calcul des coefficients d'un B-Spline . . . . .                        | 180        |
| A.5.5                               | Propriétés du critère à minimiser . . . . .                            | 181        |
| A.5.6                               | Stratégie de placement de noeuds . . . . .                             | 182        |
| A.5.7                               | Influence du paramètre lissant $S$ . . . . .                           | 182        |
| A.5.8                               | Conclusion . . . . .   | 184        |
| A.6                                 | Estimation des dérivées sans approximation . . . . .                   | 184        |
| A.6.1                               | Utilisation du modèle du système . . . . .                             | 184        |
| A.6.2                               | Utilisation d'un observateur . . . . .                                 | 185        |
| A.7                                 | Conclusion . . . . .   | 186        |

|   |                |
|---|----------------|
| <b>B La commande vectorielle</b>                            | <b>187</b>     |
| B.1 Généralités . . . . .                                   | 187            |
| B.2 Calcul des variables inconnues . . . . .                | 187            |
| B.2.1 Calcul de $i_{R_q}$ . . . . .                         | 187            |
| B.2.2 Calcul de $\phi_{R_d}$ . . . . .                      | 188            |
| B.2.3 Calcul de $\omega_r$ . . . . .                        | 188            |
| B.2.4 Calcul de $\omega_s$ . . . . .                        | 188            |
| B.3 Équations de commande . . . . .                         | 188            |
| B.3.1 Calcul de $v_{S_d}$ . . . . .                         | 189            |
| B.3.2 Calcul de $v_{S_q}$ . . . . .                         | 189            |
| B.4 Schéma de synthèse de la commande vectorielle . . . . . | 189            |
| B.5 Réglage des correcteurs . . . . .                       | 191            |
| B.5.1 Régulation du flux rotorique . . . . .                | 191            |
| B.5.2 Régulation du courant $I_{S_q}$ . . . . .             | 191            |
| B.6 Asservissement en vitesse . . . . .                     | 192            |
| B.6.1 Réglage de la boucle interne de vitesse . . . . .     | 192            |
| B.6.2 Réglage de la boucle externe de vitesse . . . . .     | 193            |
| B.7 Valeurs numériques pour le moteur étudié . . . . .      | 193            |
| B.7.1 Valeurs des paramètres . . . . .                      | 193            |
| B.7.2 Réglage des correcteurs . . . . .                     | 193            |
| B.8 Conclusion . . . . .                                    | 194            |
| <br><b>Bibliographie</b>                                    | <br><b>195</b> |

# Introduction générale

## Introduction générale

Le développement de l'automatisation des systèmes industriels vise à améliorer leurs performances. Cette course à la performance a conduit à l'élaboration de systèmes de plus en plus complexes multipliant les risques de dysfonctionnement pouvant mettre en péril le système lui-même et son environnement.

Par conséquent, pour un grand nombre d'application, il est nécessaire d'implanter un système de surveillance afin de détecter, d'isoler voire de d'identifier tout dysfonctionnement.

Un système de surveillance doit permettre de caractériser le mode de fonctionnement d'un système en enregistrant des informations, en reconnaissant et en indiquant les anomalies de comportement. Cette tâche peut être réalisée en exploitation ou hors exploitation. Ces deux modes d'implantation présentent chacun un certain nombre d'avantages et d'inconvénients.

Le mode d'implémentation en exploitation permet de réagir rapidement en cas de problèmes et nécessite une maintenance sur site. Il impose un traitement en temps réel des différents signaux et ne permet pas, en général, de choisir les signaux accessibles sur le système.

Le mode d'implémentation hors exploitation permet de choisir un protocole de test : choix des signaux d'entrée, maîtrise de certaines entrées inconnues ou encore choix des mesures appropriées. Ce mode d'implémentation est choisi dans les cas de figure suivants :

- pour tester des systèmes en sortie de chaîne de production et avant la livraison aux clients,
- pour tester des systèmes à intervalles réguliers (maintenance préventive),
- en complément du mode d'implémentation en exploitation lorsque celui-ci ne permet pas de préciser la raison du dysfonctionnement du système.

Le système de surveillance doit réaliser les trois tâches suivantes :

1. La détection. Elle consiste à prendre une décision binaire : soit le système fonctionne correctement, soit une panne s'est produite. Le cas échéant, la procédure doit déterminer l'instant d'occurrence de la faute.
2. La localisation. Elle consiste à déterminer le composant défectueux.
3. L'identification. Elle consiste à déterminer l'allure de la panne en vue de déterminer le type de maintenance ou de correction (accommodation, reconfiguration) à réaliser sur l'installation. Cette étape nécessite la connaissance d'un modèle de la panne.

Beaucoup de systèmes de surveillance ne comportent que les deux premières étapes. L'identification d'une panne n'est réalisée que lorsqu'une action de reconfiguration de la commande ou des objectifs à atteindre est envisagée. Lorsqu'un algorithme de surveillance ne comporte que ces deux étapes, il est qualifié d'algorithme de FDI (Fault Detection and Isolation).

L'objectif de cette thèse est le suivant :

- étudier et comparer deux méthodes de FDI : les méthodes utilisant les observateurs et les méthodes utilisant les relations de redondance analytique (RRA) du système. Ces deux approches sont utilisées pour construire des signaux, appelés *résidus*, reflétant la cohérence entre les grandeurs mesurées et le modèle.
- implanter ces approches sur deux systèmes électrotechniques : le moteur à courant continu série et le moteur asynchrone.

## Plan du mémoire

Le mémoire est divisé en deux parties, la première traitant les aspects théoriques et la seconde les applications.

### Partie I : Résultats théoriques

Cette partie traite d'aspect théorique et se divise en quatre chapitres.

1. Le premier chapitre présente différents rappels généraux. Pour commencer, nous donnerons les concepts de base liés à la surveillance des systèmes à partir d'un modèle. Après une courte introduction sur la génération de résidus et sur la détection des défauts, nous présenterons les deux approches utilisées pour la localisation : l'utilisation des résidus structurés ou directionnels. Enfin, pour conclure ce chapitre, nous donnerons les concepts fondamentaux de mathématiques utilisés dans la suite du mémoire.
2. Le second chapitre présente un état de l'art sur la surveillance utilisant la théorie des observateurs. Pour débiter ce chapitre, la notion d'observabilité pour les systèmes non linéaires sera discutée. Puis, nous présenterons l'utilisation des observateurs pour la surveillance. Nous donnerons les deux schémas utilisés pour la localisation des pannes (DOS : Dedicated Observer Scheme et GOS : Generalized Observer Scheme). Ensuite, nous détaillerons la procédure de construction d'observateurs dédiés à la surveillance pour la classe des systèmes ayant une dynamique d'erreur linéaire. Finalement, nous aborderons l'approche géométrique utilisée pour construire des résidus structurés pour la classe des systèmes non linéaires affines en l'état. Pour conclure, ce chapitre, nous présentons deux types d'observateurs non linéaires utilisés en surveillance : les observateurs à grand gain et les observateurs à mode glissant.
3. Le troisième chapitre traite de la méthode de l'espace de parité. Pour commencer, nous étudierons les conditions d'existence des relations de redondance analytique qu'il est possible d'extraire d'un modèle. Deux théorèmes permettant de déterminer le nombre exact de relations seront donnés. Les énoncés de ces théorèmes sont bien connus mais les preuves présentées dans ce mémoire sont originales. Ensuite, nous nous intéresserons à l'obtention de ces relations. Dans un premier temps, nous considérerons les systèmes affines en la commande et en la sortie pour lesquels ces relations peuvent être obtenues par projection dans l'espace orthogonal à l'espace d'observabilité du système. Dans un second temps, nous considérerons les systèmes algébriques polynomiaux pour lesquels ces relations sont obtenues à l'aide d'un algorithme d'élimination. La construction de résidus structurés à partir de la théorie des résultants sera ensuite abordée. Ce dernier point est l'apport essentiel de cette thèse concernant les travaux réalisés sur l'approche de l'espace de parité. Enfin, pour conclure ce chapitre, nous donnerons une introduction aux problèmes liés à la sensibilité des résidus dans le cadre des systèmes non linéaires.
4. Le quatrième chapitre étudie les liens existants entre les deux méthodes de surveillance présentées dans les chapitres II et III. Cette étude est entièrement originale. elle étend dans un premier temps les travaux réalisés pour les systèmes linéaires à une classe restreinte de systèmes non linéaires. Nous montrerons que, pour la classe des systèmes linéarisables par

injection d'entrée/sortie, les résidus issus des RRA et ceux issus d'observateurs de Luenberger sont liés par un filtre linéaire. Dans un second temps, nous étendrons cette comparaison à une classe plus large de systèmes non linéaires. Nous montrerons que les résidus issus des RRA et ceux issus d'observateurs à grand gain sont liés par une relation différentielle non linéaire.

## Partie II: Application aux machines tournantes

Cette partie se divise en deux chapitres.

1. Le premier chapitre traite de l'exemple de la machine à courant continu série. Dans cet exemple, nous illustrerons les résultats prouvés dans le quatrième chapitre de la première partie. Pour commencer ce chapitre, nous présenterons quelques rappels généraux de physique permettant de déterminer un modèle de cette machine. Puis, nous étudierons deux configurations de mesure. Dans un premier temps seul le courant sera mesuré et nous comparerons les résidus obtenus par élimination aux résidus issus d'un observateur de luenberger et issus d'un observateur à grand gain. Dans un second temps, nous ajouterons un capteur de vitesse et nous comparerons les résidus de parité aux résidus issus d'un observateur de Luenberger.
2. Le second chapitre traite de la machine asynchrone. Pour débiter ce chapitre nous ferons quelques rappels de physique nécessaires à la compréhension du fonctionnement de la machine et à l'obtention du modèle de la machine dans le repère triphasé. La transformation de Park sera alors détaillée et appliquée sur le modèle pour obtenir un nouveau modèle plus simple dans un repère diphasé. A partir de ce modèle, nous proposons une étude de la surveillance de cette machine en utilisant la méthode de l'espace de parité.





Première partie

Résultats Théoriques

# Chapitre 1

## Rappels

### Introduction

Ce premier chapitre est destiné à donner des rappels généraux sur la surveillance et sur les différents points de mathématiques utilisés dans la suite du mémoire. Pour commencer les rappels sur la surveillance des systèmes à partir d'une représentation mathématique de celui-ci, nous allons proposer une classification des modèles. Ensuite, nous présenterons brièvement la génération des résidus et la détection de panne. Enfin, nous détaillerons les deux approches utilisées pour la localisation : les résidus structurés et les résidus directionnels. Pour clore ce chapitre, une section sera consacrée à quelques rappels mathématiques, notamment sur l'algèbre différentielle, nécessaire à l'étude des systèmes non linéaires.

### 1.1 Les méthodes à base de modèles

#### 1.1.1 La modélisation des systèmes

**Définition 1.1** *Un modèle est une reproduction d'un objet, c'est-à-dire une représentation formalisée d'un phénomène.*

Trois types de modèles peuvent être considérés (Feliot, 1997) :

- Les modèles fonctionnels.  
Ils sont représentés de manière graphique et sont construits à l'aide de diagrammes élémentaires organisés en réseaux hiérarchiques.
- Les modèles structurels. Ils sont représentés sous forme de tables remplies de "0" et de "1". Cette représentation binaire exprime l'existence ou non de lien entre les variables de description du système. Ce modèle est utilisé pour l'analyse structurelle des systèmes (Staroswiecki and Declerk, 1989; Declerk and Staroswiecki, 1991*a*; Declerk and Staroswiecki, 1991*b*).
- Les modèles de comportement. Ils sont représentés sous forme de relations liant les variables de description du système. Ces relations peuvent être analytiques (statiques ou dynamiques), qualitatives (équations de confluence) ou bien se présenter sous la forme de règles de production (bases de connaissances).

Dans la suite de ce mémoire, nous allons considérer les modèles de comportement représentés par des équations différentielles, c'est-à-dire les modèles s'écrivant sous la forme d'état continue standard :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x,w) \\ y &= h(x,w) \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $w \in \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^m$  est le vecteur des signaux d'excitation,  $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$  est le vecteur des sorties mesurées. Les fonctions  $f(\cdot)$  et  $h(\cdot)$  peuvent être *a priori* quelconques. Dans la suite du mémoire, seules les fonctions analytiques seront considérées.

Le vecteur  $w$  est composé de quatre types de signaux différents :

$$w = \begin{pmatrix} u^T & v^T & \varphi^T & \varrho^T \end{pmatrix}^T$$

avec :

- $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{m_u}$  est le vecteur des entrées de commande.
- $v \in \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^{m_v}$  est le vecteur des signaux de perturbation qui ne se modélisent pas sous la forme d'un processus stochastique.
- $\varphi \in \mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^{m_\varphi}$  est le vecteur des pannes.
- $\varrho \in \Xi \subseteq \mathbb{R}^{m_\varrho}$  est le vecteur des signaux modélisés par un processus stochastique. Ces signaux représentent l'influence des bruits de mesure ou encore les erreurs de modélisation.

Dans la suite du mémoire nous considérerons des modèles ne comprenant pas de signaux modélisés par des processus stochastiques. Toutefois, lorsque des processus réels seront simulés, des signaux de bruit, modélisé par des processus gaussien, seront additionnés aux sorties.

Suivant la composition de  $w$ , il est possible de qualifier de deux manières différentes les modèles d'état :

- Les modèles de fonctionnement normal (de référence ou encore sain).  
Ces modèles ne prennent pas en compte les pannes :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x,u,v) \\ y &= h(x,u,v) \end{cases} \quad (1.2)$$

- Les modèles de fonctionnement défaillant.

Ces modèles introduisent les défauts dans les signaux d'excitation. Nous verrons que ce type de modèle est indispensable pour localiser les défauts.

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x,u,v,\varphi) \\ y &= h(x,u,v,\varphi) \end{cases} \quad (1.3)$$

En fonction des fautes qu'il représente, le vecteur de pannes  $\varphi$  peut être scindé en deux parties :

Le vecteur de pannes  $\varphi$  est souvent scindé en deux sous vecteurs  $\varphi_{act}$  et  $\varphi_{capt}$ .

- $\varphi_{act} \in \mathcal{F}_{act} \subseteq \mathbb{R}^{m_{\varphi_{act}}}$  symbolise les pannes intervenant dans l'équation d'état et éventuellement dans l'équation de la sortie (par exemple les pannes actionneurs).

- $\varphi_{capt} \in \mathcal{F}_{capt} \subseteq \mathbb{R}^{m_{\varphi_{capt}}}$  symbolise les pannes capteurs. Elles interviennent dans l'équation de la mesure.

Le modèle (1.3) s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u, v, \varphi_{act}) \\ y &= h(x, u, v, \varphi_{act}, \varphi_{capt}) \end{cases} \quad (1.4)$$

### 1.1.2 Surveillance utilisant les modèles

L'utilisation des modèles pour la surveillance des systèmes date du début des années 70 (Jones, 1973). Depuis, de nombreux articles font régulièrement le point sur l'avancée des différentes approches (Frank, 1990; Patton and Chen, 1991*a*; Patton, 1994; Frank, 1996). La figure 1.1 illustre le concept général d'un système de diagnostic utilisant un modèle. Ces méthodes reposent sur l'étude d'un signal particulier appelé résidu.

**Définition 1.2** *Un résidu est un signal indicateur de défauts. Il reflète la cohérence des données mesurées vis-à-vis du modèle comportemental du système.*

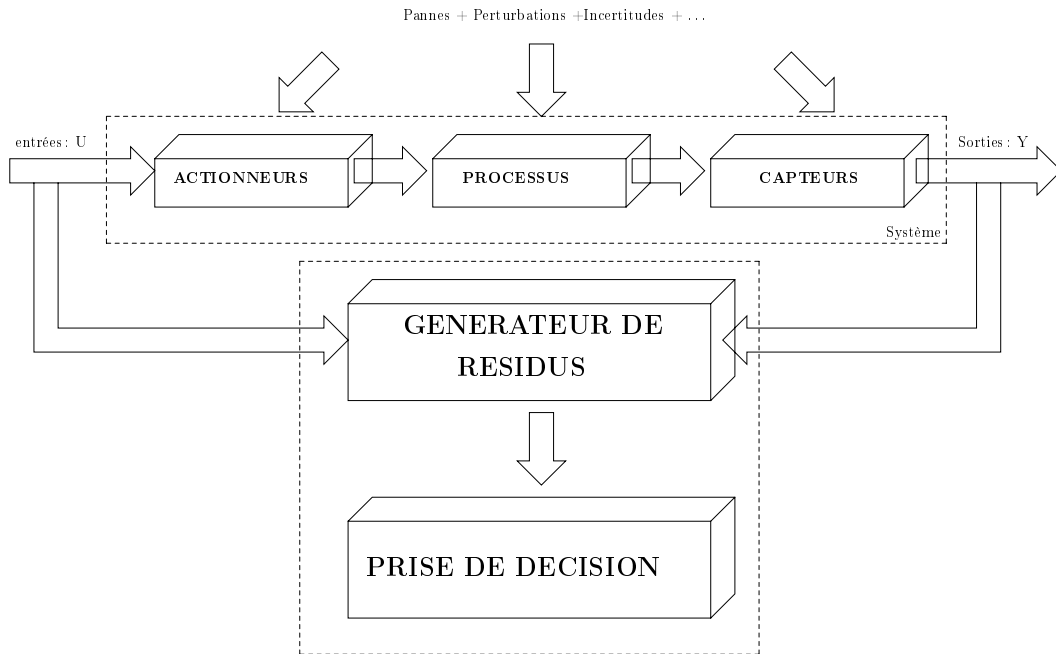


FIG. 1.1 – Principe de la génération de résidus

Les méthodes de surveillance à base de modèles utilisent la redondance d'information présente sur un système. Deux types de redondance peuvent être distingués (Brunet *et al.*, 1990) : la redondance matérielle et la redondance analytique.

### 1.1.3 Redondance physique (ou matérielle)

La redondance physique consiste à utiliser plusieurs capteurs, actionneurs, processeurs et logiciels pour mesurer et/ou contrôler une variable particulière. Un principe de vote est appliqué sur les valeurs redondantes pour décider si une faute est présente ou non. Cette approche entraîne un coût important en instrumentation mais s'avère extrêmement fiable et simple à implanter. Elle est mise en œuvre essentiellement sur des systèmes à hauts risques tels que les centrales nucléaires ou les avions.

Le diagnostic utilisant la redondance physique se limite à la surveillance des éléments redondants (capteurs, actionneurs,...) présents sur une installation. A l'aide de cette seule technique, il ne sera pas possible de détecter des pannes survenant sur des éléments non redondants.

### 1.1.4 Redondance analytique

Un complément à la redondance physique est d'exploiter les contraintes liant les différentes variables du système. Ces contraintes peuvent souvent s'exprimer sous la forme de relations analytiques liant les variables connues (relations d'entrée/sortie ou de sortie/sortie). Ces relations sont appelées des relations de redondance analytique. Le principe de la surveillance consiste à vérifier si ces relations sont égales à zéro (dans un sens statistique précisé plus loin) en utilisant les mesures prélevées en ligne sur le système. Le concept de redondance analytique repose sur l'utilisation d'un modèle mathématique du système à surveiller. Pour cette raison, les méthodes utilisant la redondance analytique pour la surveillance sont appelées méthodes à base de modèle. La figure 1.2 montre l'implantation d'un système de surveillance utilisant la redondance physique et analytique sur un processus quelconque.

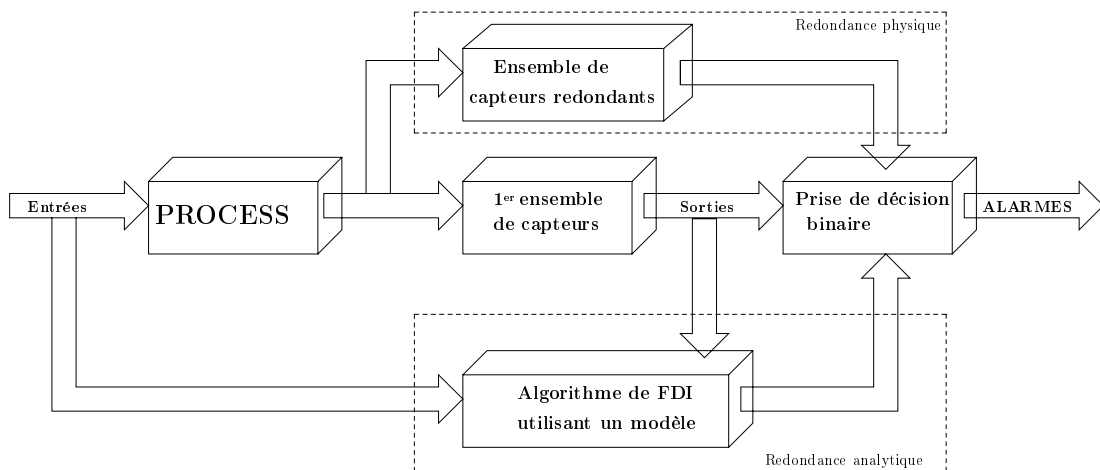


FIG. 1.2 – Redondance physique et analytique

Le principe de la surveillance utilisant un modèle peut être séparé en deux étapes : la génération de résidus et la prise de décision.

### 1.1.5 La génération de résidus

Un résidu doit refléter la cohérence des signaux mesurés avec un modèle (définition 1.2). Une image de cette cohérence est donnée par les caractéristiques statistiques (pour les méthodes basées sur un modèle du système) ou spectrales (pour les méthodes basées sur un modèle de signal) du résidu. Pour qu'un signal généré à partir des entrées et des sorties d'une installation soit un résidu il faut qu'il soit affecté par un sous-ensemble de pannes.

**Définition 1.3** *Un résidu  $r(t,y,u,v)$  est non affecté par  $v \in \mathcal{V}$  (ou invariant sous  $v$ ) si pour toute entrée admissible  $u$  et toute sortie  $y$ , nous avons  $r(t,u,y,v_1) = r(t,u,y,v_2)$  pour tout  $t \geq 0$  et quel que soit le couple  $v_1$  et  $v_2$  de  $\mathcal{V}$ . Dans le cas contraire, le signal est dit affecté par  $v$  (Isidori, 1995).*

Généralement, lorsqu'un modèle d'un système est utilisé, seulement deux caractéristiques statistiques sont prises en compte pour le résidu : sa moyenne et/ou son écart type (ou sa variance). En pratique, il est souvent possible de générer des résidus ayant une moyenne nulle en fonctionnement normal et différente de zéro en fonctionnement défectueux.

L'algorithme utilisé pour obtenir les résidus est appelé générateur de résidus. Trois approches sont principalement utilisées pour construire ce générateur de résidus :

1. Les approches d'identification (Isermann, 1984). Elles consistent à identifier en lignes les divers paramètres du système et à comparer ces estimations aux valeurs nominales des paramètres. L'erreur d'estimation est utilisée comme résidu.
2. Les approches à base d'observateurs (Clark *et al.*, 1975). Elles consistent à comparer des fonctions des sorties estimées avec les mêmes fonctions des sorties mesurées. L'écart entre ces fonctions est utilisé comme résidu.
3. Les approches dites de parité (Chow and Willsky, 1984). Elles consistent à vérifier la fermeture algébrique des relations d'entrée/sortie du modèle. Les signaux collectés sur l'installation sont injectés dans les relations d'entrée/sortie. Les signaux ainsi créés sont utilisés comme résidus.

Dans le cas linéaire, de nombreux travaux ont permis d'établir l'équivalence entre ces approches (espace de parité et identification, espace de parité et observateurs).

### 1.1.6 La détection

La procédure de détection vise à déterminer l'apparition et l'instant d'occurrence d'une faute. Une panne sera détectable si au moins un résidu permet de la détecter (Basseville, 1999).

Les résidus sont obtenus en comparant des modèles s'exprimant sous la forme d'état 1.1 et un système réel. Lorsque le modèle permet de représenter exactement le système (aucune erreur de modélisation, connaissance de la nature des signaux inconnus agissant sur le système, ...) alors les résidus générés seront strictement égaux à zéro en fonctionnement normal et différent de zéro en présence de pannes. La procédure de détection se résumera alors à déclencher une alarme lorsqu'au moins un résidu différera de zéro.

En pratique, les modèles que nous utilisons sont obtenus à partir d'hypothèses simplificatrices et sont donc imparfaits. Les résidus (qui reflètent l'écart entre le modèle et le système) ne sont plus parfaitement égaux à zéro. En règle générale, nous pouvons supposer que les résidus peuvent être modélisés par des processus stochastiques et qu'ils suivent une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$  ou  $\mu$  est la

valeur moyenne du résidu et  $\Sigma$  sa matrice de variance co-variance.

Le processus de détection le plus simple consiste à comparer une caractéristique statistique des résidus (moyenne ou écart type) à un seuil. Une alarme est déclenchée à chaque franchissement de ce seuil.

Supposons que nous ayons un résidu dont la moyenne est égale à :

- $\mu = \mu_0$  dans le cas sans panne
- $\mu = \mu_1$  dans le cas défaillant

La variance du résidu est supposés constante dans les deux cas de figure.

L'algorithme de détection doit alors discriminer les deux hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 & : \mu = \mu_0 \\ \mathcal{H}_1 & : \mu = \mu_1 \end{cases}$$

La figure 1.3 présente l'interprétation graphique du principe d'une procédure de décision pour la détection d'un saut de moyenne.

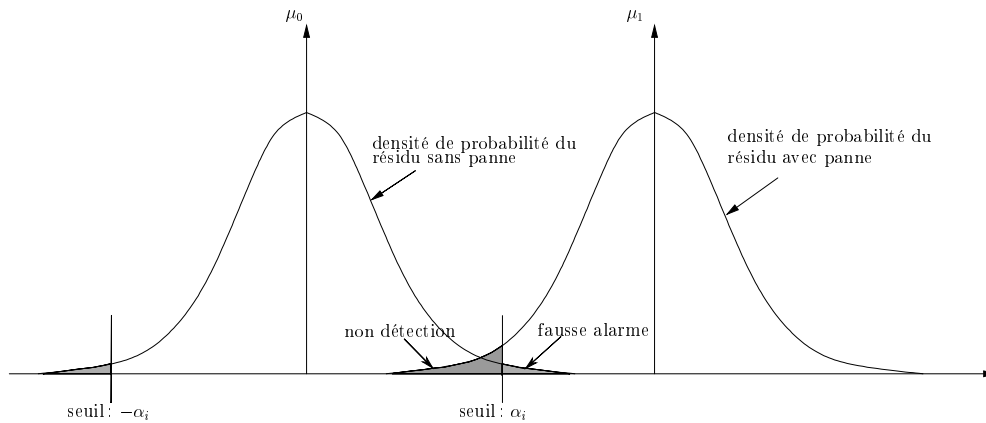


FIG. 1.3 – *Interprétation statistique d'une procédure de détection de saut de moyenne*

Une fenêtre glissante est appliquée sur le résidu. La moyenne est calculée pour chacune de ces fenêtres et est comparé à un seuil  $\alpha_i$ . Nous voyons que pour toute valeur de  $\alpha_i$ , correspond un taux de fausse alarme (choix de l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  alors que  $\mathcal{H}_0$  est vraie) et un taux de non détection (choix de l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  alors que  $\mathcal{H}_1$  est vraie).

Lorsque la loi statistique de la densité de probabilité est connue, la valeur du seuil peut être choisie de manière à imposer un taux de fausses alarmes maximum (par exemple 1%).

Une des méthodes les plus utilisées pour réaliser la détection du changement brusque d'une caractéristique statistique d'un signal est la méthode dite de *CUSUM* (Cumulative Sum). Nous allons brièvement présenter cette méthode et donner un algorithme permettant de l'implanter (Basseville and Nikiforov, 1993).

Supposons que nous cherchons à détecter une panne à partir d'un signal  $r(t)$ . De plus, nous savons que :

- seule la moyenne de  $r(t)$  est affectée par la panne

- en fonctionnement sans panne, la moyenne de  $r(t)$  est égale à  $\mu_0$
- l'amplitude minimale de la variation de moyenne que nous cherchons à détecter est égale à  $\nu$ .

Posons  $\mu_1^+$  et  $\mu_1^-$  les deux valeurs minimales des moyennes du résidu après l'apparition de la panne :

$$\mu_1^+ = \mu_0 + \nu \quad \text{et} \quad \mu_1^- = \mu_0 - \nu$$

Alors, l'algorithme suivant permet de déterminer l'instant  $t_a$  d'apparition de la panne (Basseville and Nikiforov, 1993) :

$$\begin{aligned} t_a &= \min \{k : (g_k^+ \geq \alpha_i) \cup (g_k^- \geq \alpha_i)\} \\ g_k^+ &= \left(g_{k-1}^+ + r(t_k) - \mu_0 - \frac{\nu}{2}\right)^+ \\ g_k^- &= \left(g_{k-1}^- + r(t_k) + \mu_0 - \frac{\nu}{2}\right)^+ \\ g_0 &= 0 \end{aligned}$$

avec  $(x)^+ \triangleq \sup(0, x)$ .

Pour de détail sur cet algorithme ou sur la théorie générale de la détection, nous conseillons le livre co-écrit par M. Basseville et I. Nikiforov (Basseville and Nikiforov, 1993).

### 1.1.7 La localisation

Lorsqu'une panne est détectée, une procédure de localisation est utilisée pour permettre de déterminer l'origine de celle-ci. A la différence de la détection où un seul résidu est nécessaire, la procédure de localisation nécessite un ensemble (ou vecteur) de résidus.

Pour permettre la localisation, le vecteur de résidus doit avoir un certain nombre de propriétés permettant de caractériser de manière unique chaque faute. La procédure permettant de conférer aux résidus ces propriétés, est appelée procédure d'amélioration des résidus. Il existe deux méthodes d'amélioration des résidus :

1. La construction de résidus structurés (Cocquemot *et al.*, 1991)
2. La construction de résidus directionnels (Gertler and Monajemy, 1995)

#### 1.1.7.1 Les résidus structurés

**Définition 1.4** : La structure d'un résidu  $r_i$  par rapport à un ensemble de pannes  $\{F\}$  de dimension  $\eta_f$  est le mot binaire  $S_{r_i}$  composé de  $\eta_f$  bits  $(S_{i,j})$  positionnés de la manière suivante :

- $S_{i,j} = 1$  si le résidu  $r_i$  est affecté par le  $j^{\text{ième}}$  élément de  $\{F\}$ .
- $S_{i,j} = 0$  si le résidu  $r_i$  est non affecté par le  $j^{\text{ième}}$  élément de  $\{F\}$ .

Les résidus structurés sont conçus de manière à être chacun affecté par un sous ensemble de fautes et robuste (non affecté) par rapport aux fautes restantes (fig. 1.4). Lorsqu'une faute apparaît, seul un sous ensemble de résidus réagit.



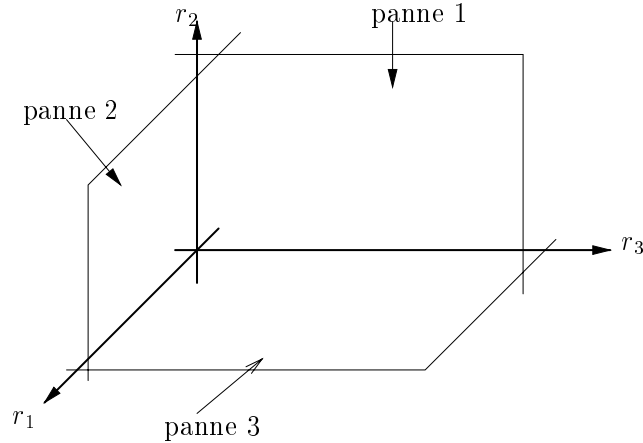


FIG. 1.4 – Résidus structurés

Les informations de sensibilité et de robustesse souhaitées pour les résidus sont répertoriées dans une table binaire, appelée *la table des signatures théoriques*. Celle-ci est construite de la manière suivante : lorsque le  $i^{\text{ième}}$  résidu doit être sensible (resp. robuste) à la  $j^{\text{ième}}$  panne, alors la valeur binaire 1 (resp. 0) est affectée à la ligne et à la colonne correspondante.

L'ensemble des résidus structurés est construit en respectant la procédure suivante :

1. Fixer la table de signatures théoriques que l'on souhaite obtenir.
2. Construire un vecteur de résidus ayant les propriétés désirées.
3. Si l'obtention d'un vecteur de résidus ayant les propriétés imposées par la table de signatures théoriques n'est pas possible, alors de nouvelles spécifications de sensibilité et de robustesse doivent être proposées.

Lorsque la table des signatures théoriques est construite, une procédure de détection, appliquée à chaque résidu, permet d'obtenir *la signature réelle* des résidus à un instant donné. Si cette signature est nulle alors aucun résidu n'a détecté de panne. Le système sera donc déclaré sain. Si une panne survient, au moins un des résidus détectera cette panne, la signature réelle deviendra non nulle. La procédure de localisation consistera alors à retrouver la signature réelle dans la table des signatures théoriques.

**Définition 1.5 :** *Une faute sera structurellement localisable si toutes les colonnes de la table des signatures théoriques sont différentes.*

La table de signatures théoriques doit être proposée de telle manière que le vecteur de résidus structurés correspondant soit calculable et que les propriétés d'isolabilité soient les plus intéressantes possibles. La qualité d'isolabilité de la table est donnée par l'ordre de localisabilité défini comme suit :

**Définition 1.6 :** *Une panne est localisable d'ordre  $k$  si sa distance de Hamming par rapport à la signature de la panne la plus proche est de  $k$  bits.*

Pour illustrer cela, considérons le petit exemple suivant.

**Exemple 1.1.1** : Soit trois résidus  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$  et trois pannes  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ . La table 1.1 présente 4 ensembles de signatures théoriques ayant des propriétés d'isolabilité différentes.

La table 1.1a) illustre le cas de deux fautes non isolables ( $f_1$  et  $f_2$  possèdent la même signature). La table 1.1b) donne un exemple où les pannes sont isolables d'ordre 1 (un seul bit est différent entre  $f_1$  et  $f_2$ ).

Les tables 1.1c) et d) montrent des pannes isolables d'ordre 2. Malgré un indice d'isolabilité identique, la table 1.1d) sera la plus simple à traiter. D'une manière générale, lorsque deux tables de signatures théoriques ont le même ordre d'isolabilité, la table contenant le plus de zéros sera systématiquement choisie.

|       | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $r_1$ | 1     | 1     | 0     |
| $r_2$ | 1     | 1     | 1     |
| $r_3$ | 0     | 0     | 1     |

a)

| $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
|-------|-------|-------|
| 1     | 1     | 0     |
| 1     | 0     | 1     |
| 0     | 0     | 1     |

b)

| $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
|-------|-------|-------|
| 1     | 1     | 0     |
| 1     | 0     | 1     |
| 0     | 1     | 1     |

c)

| $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
|-------|-------|-------|
| 1     | 0     | 0     |
| 0     | 1     | 0     |
| 0     | 0     | 1     |

d)

TAB. 1.1 – Table de signatures théoriques de trois résidus pour trois fautes

### 1.1.7.2 Les résidus directionnels

Les résidus directionnels représentent une autre possibilité pour réaliser la tâche de localisation des pannes. Ils sont construits tels que, en réponse à une panne donnée, le vecteur des résidus soit orienté suivant une direction bien précise de l'espace des résidus (fig 1.5).

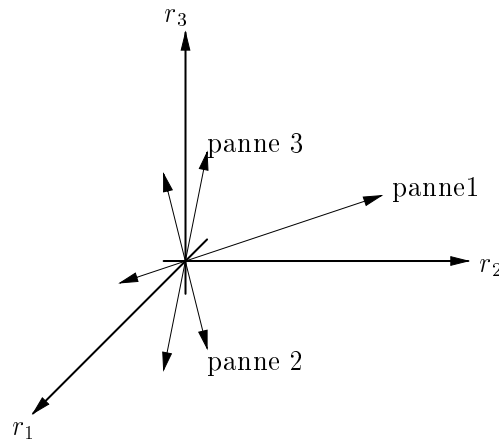


FIG. 1.5 – Résidus directionnels

Le vecteur de résidus directionnels  $\vec{r}(t)$ , en réponse à une panne  $f_i(t)$  ( $i = 1, \dots, \eta_f$ ), s'exprimera sous la forme :

$$\vec{r}(t/f_i) = \alpha_i(t)\vec{l}_i \quad i \in \{1, 2, \dots, \eta\} \quad (1.5)$$

où  $\vec{l}_i$  est un vecteur constant appelé *la signature directionnelle* de la panne  $i$  dans l'espace des résidus et  $\alpha_i$  est une fonction scalaire qui dépend de la taille et de la dynamique de la panne.

La tâche de localisation des pannes consiste à déterminer la signature directionnelle théorique la plus proche de la signature directionnelle obtenue par le calcul des résidus.

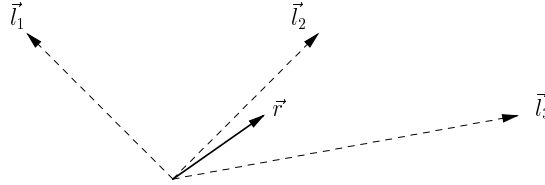


FIG. 1.6 – Résidus directionnels pour la localisation

La figure 1.6 illustre ce problème de l'isolation de panne en utilisant les résidus directionnels. En pointillé, on retrouve trois vecteurs de signatures directionnelles théoriques et en trait plein la signature réelle du résidu. Cette signature est très proche de la signature théorique de la panne 2. Il est donc probable que cette panne soit présente sur le système à surveiller.

## 1.2 Éléments de mathématiques

Dans cette section, les notions les plus importantes concernant l'algèbre classique et différentielle sont rappelées. Des développements plus approfondis pourront être trouvés dans les ouvrages (Choquet-Bruhat, 1968; Wonham, 1985; Isidori, 1995). L'algèbre différentielle sera utilisée pour l'étude de l'observabilité des systèmes ainsi que pour l'étude des conditions d'existence des relations de redondance analytique dans le cadre de l'espace de parité.

### 1.2.1 Quelques définitions et théorèmes généraux

Dans cette section,  $A$  désignera un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$  ( $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ),  $f$  sera une fonction définie de  $A$  sur  $\mathbb{R}$ . La valeur de  $f$  au point  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  sera notée  $f(x)$ .

**Définition 1.7 :** Une fonction  $f$  est dite de classe  $C^\infty$  (ou simplement  $C^\infty$  ou encore lisse) si ses dérivées partielles par rapport à  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , pour tout ordre existent.

**Définition 1.8 :** Une fonction  $f$  est dite analytique si pour chaque point  $x^\circ \in A$  il existe un voisinage  $U$  de  $x^\circ$ , tel que le développement en série de Taylor de  $f$  en  $x^\circ$  converge vers  $f(x)$  pour tout  $x \in U$ .

**Remarque 1.2.1 :** Une fonction de classe  $C^\infty$  n'est pas obligatoirement analytique. Un exemple classique de fonction  $C^\infty$  et non analytique est donné par la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas égale à son développement en série de Taylor au voisinage de  $x = 0$ .

**Définition 1.9** : Une application  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une collection (une famille) de fonctions  $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

Une application  $F$  sera dite de classe  $C^\infty$  si toutes les fonctions  $f_i$  qui la constituent sont de classe  $C^\infty$ .

Considérons maintenant  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  deux ensembles ouverts et une application  $F : U \rightarrow V$ .

La matrice jacobienne de l'application  $F$  au point  $x$  est la matrice de dimension  $n \times n$  définie de la manière suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

La valeur de  $\frac{\partial F}{\partial x}$  au point  $x = x^\circ$  est notée  $[\frac{\partial F}{\partial x}]_{x^\circ}$ .

**Définition 1.10** : Soit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  deux ensembles ouverts. Une application  $F : U \rightarrow V$  est un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  si les 3 conditions suivantes sont respectées :

- $F$  est bijective
- $F$  est de classe  $C^\infty$
- $F^{-1}$  est de classe  $C^\infty$

**Théorème 1.1 (théorème des fonctions inverses)** : Soit  $A$  un ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $F$  une application de classe  $C^\infty$  définie de  $A$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Si la matrice jacobienne de  $F$  au point  $x^\circ$  ( $[\frac{\partial F}{\partial x}]_{x^\circ}$ ) est non singulière pour tout  $x^\circ \in A$ , alors il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x^\circ$  dans  $A$  tel que  $V = F(U)$  est un ouvert sur  $\mathbb{R}^n$  et la restriction de  $F$  sur  $U$  est un difféomorphisme sur  $V$ .

Ce théorème signifie que si la matrice jacobienne d'une application de classe  $C^\infty$  est non singulière pour un ensemble ouvert de points, alors cette application admet une inverse de classe  $C^\infty$  (définition du difféomorphisme).

En prenant en compte les considérations de rang de la matrice jacobienne, le théorème des fonctions inverses peut se décliner sous la forme suivante :

**Théorème 1.2 (théorème du rang)** : Soient  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $B \subseteq \mathbb{R}^m$  deux ensembles ouverts,  $F : A \rightarrow B$  une application de classe  $C^\infty$ . Supposons que le rang de la matrice jacobienne  $[\frac{\partial F}{\partial x}]_x$ , pour tout  $x \in A$  est égal à  $k$ . Pour chaque point  $x^\circ \in A$  il existe un voisinage  $A_0$  de  $x^\circ$ ,  $A_0 \subset A$ , un voisinage  $B_0$  de  $F(x^\circ)$ ,  $B_0 \subset B$ , deux ensembles ouverts  $U \subset \mathbb{R}^n$  et  $V \subset \mathbb{R}^m$  et deux difféomorphismes  $G : U \rightarrow A_0$  et  $H : B_0 \rightarrow V$  tels que  $H \circ F \circ G(u) \subset V$  et tels que pour tout  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$

$$(H \circ F \circ G)(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

En particulier, une condition nécessaire pour qu'une application  $F$  de classe  $C^\infty$  de  $A \subset \mathbb{R}^n$  sur  $B \subset \mathbb{R}^n$  soit un difféomorphisme est que le jacobien  $|\frac{\partial F}{\partial x}|$  (déterminant de la matrice jacobienne) ne s'annule pas sur  $A$ . Lorsque  $F^{-1}$  existe (c.à.d. si  $F$  est une bijection de  $A$  sur  $B$ ), alors cette condition est suffisante sinon elle n'est que nécessaire.

Les deux théorèmes des fonctions inverses et du rang sont essentiellement utilisés pour l'étude des propriétés de commandabilité et d'observabilité des systèmes non linéaires. Le dernier théorème que nous allons donner dans cette section, connu sous la dénomination de théorème des fonctions implicites, est, lui, plutôt utilisé en complément des deux premiers théorèmes. Il permet de déterminer la partie inversible d'une application.

**Théorème 1.3 (Théorème des fonctions implicites) :** *Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  et  $B \subset \mathbb{R}^m$  deux ensembles ouverts, une application  $F$  de classe  $C^\infty$  définie de  $A \times B$  sur  $\mathbb{R}^n$  et  $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$  un élément de  $A \times B$ .*

*Supposons qu'il existe des points  $(x_0, y_0) \in A \times B$  tels que :*

$$F(x_0, y_0) = 0$$

*supposons de plus que la matrice :*

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

*est non singulière en  $(x_0, y_0)$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $A_0$  de  $x_0$  dans  $A$  et  $B_0$  de  $y_0$  dans  $B$  et une application unique  $G : A_0 \rightarrow B_0$  de classe  $C^\infty$  telle que :*

$$F(x, G(x)) = 0$$

*pour tout  $x \in A_0$ .*

## 1.2.2 Topologie, variétés et champs de vecteurs

Dans cette partie, quelques définitions classiques de topologie seront présentées de manière à pouvoir introduire les notions de variétés différentielles et les champs de vecteurs sur lesquels sont définis un certain nombre d'opérations telles que la dérivée de Lie. Ces opérations sur les champs de vecteurs sont très largement utilisées pour l'étude des systèmes non linéaires.

### 1.2.2.1 Quelques notions élémentaires de topologie

**Définition 1.11 :** *Un espace topologique  $E$  est un ensemble sur lequel a été défini un ensemble de parties de  $E$ , les ouverts, satisfaisant les propriétés suivantes :*

- toute réunion (finie ou infinie) d'ouverts est ouverte,
- toute intersection finie d'ouverts est ouverte,
- l'espace total  $E$  et l'ensemble vide sont ouverts.

Par exemple, considérons l'espace  $\mathbb{R}^n$  qui est l'ensemble des suites ordonnées de  $n$  nombres réels  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Pour munir  $\mathbb{R}^n$  d'une structure topologique il suffit de définir les ouverts comme étant la réunion de pavés ouverts. Un pavé ouvert étant soit défini par  $a_i < x_i < b_i$  ( $i = 1, \dots, n$  et  $a_i$  et  $b_i$  deux nombres réels) soit l'ensemble vide.

Dans les espaces topologiques, les notions de voisinage et de continuité sont définies comme suit :

- Un voisinage d'un point  $p$  d'un espace topologique  $E$  est tout sous ensemble de  $E$  contenant un ouvert contenant  $p$ .
- Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux espaces topologiques et  $F$  une application  $F : S_1 \rightarrow S_2$ . L'application  $F$  est dite continue en  $x \in S_1$  si pour tout voisinage  $V$  de  $F(x)$  il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que  $F(U) \subset V$ .  $F$  est dite continue sur  $S_1$  si elle est continue en tout point de  $x \in S_1$ . Une homéomorphie de  $S_1$  sur  $S_2$  est une application qui est bijective, continue.
- Un espace topologique est dit séparé (ou de Hausdorff) si deux points quelconques possèdent des voisinages disjoints.

Cette dernière définition clôt cette partie sur les rappels de topologie générale. Nous pouvons maintenant introduire les notions de variétés sur lesquelles seront définis les champs de vecteurs.

### 1.2.2.2 Variétés et champs de vecteurs

**Définition 1.12** : Une variété (topologique) de dimension  $n$  est un espace topologique séparé (ou de Hausdorff) dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ , c'est à dire qui est une réunion d'une famille d'ouverts homéomorphes à  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $U$  un de ces ouverts,  $\varphi$  un homéomorphisme de  $U$  sur  $\mathbb{R}^n$ , le couple  $(U, \varphi)$  est appelé carte locale ou système de coordonnées locales.

Avant d'introduire les champs de vecteurs, il est nécessaire de définir l'espace vectoriel tangent en chaque point d'une variété.

**Définition 1.13** : Soit  $N$  une variété de dimension  $n$  et  $C^\infty(p)$  l'ensemble de toutes les fonctions  $C^\infty$  du voisinage d'un point  $p$ . Un vecteur tangent  $v$  en  $p \in N$  est une application  $v : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}^n$  ayant les propriétés suivantes :

linéarité :  $v(a\lambda + b\gamma) = av(\lambda) + bv(\gamma)$  pour tout  $\lambda, \gamma \in C^\infty(p)$  et  $a, b \in \mathbb{R}$

règle de Leibniz :  $v(\lambda\gamma) = \gamma(p)v(\lambda) + \lambda(p)v(\gamma)$  pour tout  $\lambda, \gamma \in C^\infty(p)$ .

Une application qui satisfait la propriété de linéarité et la règle de Leibniz est aussi appelée une dérivation.

**Définition 1.14** : L'espace tangent à  $N$  en  $p$ , noté  $T_p N$ , est l'ensemble de tous les vecteurs tangents en  $p$ .

La notion d'espace tangent est bien évidemment une extension de la notion classique de plan tangent à une surface dans  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $N$  une variété de dimension  $n$ , un champ de vecteurs sur  $N$  est défini par :

**Définition 1.15** : Un champ de vecteurs  $f$  sur  $N$  est une application assignant à chaque point  $p \in N$  un vecteur tangent  $f(p)$  dans  $T_p N$ .

**Définition 1.16** : Un champ de vecteurs est dit lisse si pour chaque point  $p \in N$ , il existe une carte locale  $(U, \varphi)$  et  $n$  fonctions  $f_1, \dots, f_n$ , lisses à valeurs réelles définies sur  $U$  telles que pour tout  $q \in U$

$$f(q) = \sum_{i=1}^n f_i(q) \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right)_q$$

**Définition 1.17** : La dérivée de Lie est la dérivée d'une fonction  $\lambda$  sur un champ de vecteurs  $f$ . Elle est notée  $L_f \lambda(x)$  et est définie par :

$$L_f \lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x)$$

pour chaque  $x \in U$ .

Il est possible de dériver la fonction  $\lambda(x)$  le long de plusieurs champs de vecteurs ou plusieurs fois le long d'un même champ de vecteurs. La dérivée de  $\lambda(x)$  le long d'un champ de vecteurs  $f$  et le long d'un champ de vecteurs  $g$  est définie par :

$$L_g L_f \lambda(x) = \frac{\partial (L_f \lambda)}{\partial x} g(x)$$

Si  $\lambda(x)$  doit être dérivée  $k$  fois le long du champ de vecteurs  $f$ , la notation  $L_f^k \lambda$  est utilisée.  $L_f^k \lambda$  est définie par la formule de récurrence suivante :

$$L_f^k \lambda = \frac{\partial (L_f^{k-1} \lambda)}{\partial x} f(x) \quad \text{avec : } L_f^0 \lambda = \lambda$$

**Définition 1.18** : Le crochet (ou le produit) de Lie de deux champs de vecteurs  $f$  et  $g$ , noté  $[f, g](x)$ , est défini par :

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

pour tout  $x$  de  $U$ .

Il est évidemment possible de répéter plusieurs fois l'opération du crochet de Lie d'un champ de vecteurs  $g$  avec le même champ de vecteurs  $f$  :  $[f, [f, \dots [f, g]]](x)$ . Pour éviter cette notation relativement lourde, il est préférable d'utiliser l'opérateur  $ad_f^k g(x)$  qui est défini de manière récursive :

$$ad_f^k g(x) = [f, ad_f^{k-1} g(x)] \quad ad_f^0 g(x) = g(x)$$

### 1.2.3 Rappels de géométrie différentielle

Les notations introduites dans ce chapitre sont inspirées de celles utilisées par Isidori (Isidori, 1995) et par Massoumnia (Massoumnia, 1986).

L'image d'une application  $B$ , notée  $ImB = \mathcal{B}$  est l'espace vectoriel défini par :

$$ImB = \mathcal{B} = \{y \text{ tel que } y = Bx, \forall x \in \mathcal{X}\}$$

Le noyau d'une application  $C$ , noté  $\ker C$  est l'espace vectoriel défini par :

$$\ker C = \{x \text{ tel que } Cx = 0, \forall x \in \mathcal{X}\}$$

L'image d'un sous-espace vectoriel  $\mathcal{S}$  par une application  $A$  est notée  $A\mathcal{S}$ .

**Définition 1.19** Une application  $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est :

- *injective* lorsque :  $\Phi(v) = \Phi(u) \Rightarrow v = u$  ou de manière équivalente,  $\ker \Phi = \{0\}$ .
- *surjective* lorsque :  $Im \Phi = \mathcal{Y}$

**Définition 1.20** Un sous-espace  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$  est dit *A-invariant* si  $A\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$ .

Un champ de vecteurs lisses  $f$ , défini sur un ensemble ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , peut être interprété comme une application lisse qui assigne le vecteur  $f(x)$  de dimension  $n$  à chaque point  $x \in U$ . Supposons maintenant que nous ayons  $d$  champs de vecteurs lisses  $f_1, \dots, f_d$ , tous définis sur le même ensemble ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Alors à chaque point  $x \in U$ , les vecteurs  $f_1(x), \dots, f_d(x)$  définissent un espace vectoriel. Ces espaces vectoriels dépendent de  $x$  et sont notés  $\Delta(x)$  :

$$\Delta(x) \triangleq \text{span}\{f_1(x), \dots, f_d(x)\}$$

**Définition 1.21** Une distribution  $\Delta$  est définie comme étant l'ensemble de tous les espaces vectoriels  $\Delta(x)$  pour  $x \in U$ .

**Remarque 1.2.2** Si  $F$  est une matrice ayant  $n$  lignes et  $d$  colonnes dont les éléments sont des fonctions lisses en  $x$  alors cette matrice identifie une distribution qui sera définie par l'espace engendré par ses colonnes en ce point. La valeur d'une telle distribution à un point  $x$  sera égale à l'image de la matrice :

$$\Delta(x) = Im(F(x))$$

**Définition 1.22** Une distribution  $\Delta$  est dite *involutive* si le crochet de Lie  $[f_1, f_2]$  de toute paire de champs de vecteurs  $f_1$  et  $f_2$  appartenant à  $\Delta$  appartient aussi à  $\Delta$ .

La notion de distribution peut être intuitivement perçue comme une extension de la notion d'espace. De la même manière, nous définissons une *codistribution* comme étant l'objet dual, défini dans  $(\mathbb{R}^n)^*$ , à la distribution, définie dans  $\mathbb{R}^n$ . En quelque sorte, la codistribution est une extension de la notion d'espace tangent.

Une codistribution  $\Omega$  peut être construite à partir d'une distribution  $\Delta$  (et inversement) en utilisant l'*annulateur* de  $\Delta$ . Un annulateur, noté  $\Delta^\perp$  est l'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux aux vecteurs de  $\Delta(x)$  :

$$\Delta^\perp = \{w^* \subseteq (\mathbb{R}^n)^* \text{ tels que } \langle w^*, v \rangle = 0 \text{ pour tout } v \in \Delta(x)\}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est l'opérateur désignant le produit scalaire entre deux vecteurs.

Pour plus d'information sur les notions de distribution, le lecteur pourra se référer aux deux ouvrages suivants : (Wonham, 1985; Isidori, 1995).

## 1.2.4 Concepts d'algèbre

Dans cette sous section, nous allons rappeler dans un premier temps des définitions fondamentales d'algèbre permettant d'étudier les polynômes (Cox *et al.*, 1992; Davenport *et al.*, 1986) puis dans un second temps nous présenterons l'algorithme d'élimination des bases de Groebner.



### 1.2.4.1 Définitions générales

**Définition 1.23** Un corps est un ensemble  $\mathbf{k}$  possédant deux opérations " $\cdot$ " et " $+$ " pour lesquelles les conditions suivantes sont satisfaites pour tout  $a, b, c \in \mathbf{k}$  :

- (i).  $(a + b) + c = a + (b + c)$  et  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  (associativité).
- (ii).  $a + b = b + a$  et  $a \cdot b = b \cdot a$  (commutativité).
- (iii).  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  (distributivité).
- (iv). Il existe deux éléments  $0$  et  $1 \in \mathbf{k}$  tels que  $a + 0 = a \cdot 1 = a$ .
- (v). Pour tout élément  $a \in \mathbf{k}$ , il existe un élément  $b \in \mathbf{k}$  tel que  $a + b = 0$ .
- (vi). Pour tout élément  $a \in \mathbf{k}$  et  $a \neq 0$ , il existe un élément  $b \in \mathbf{k}$  tel que  $a \cdot b = 1$ .

Les corps les plus utilisés sont les ensembles des rationnels  $\mathbb{Q}$ , des réels  $\mathbb{R}$  ou encore des complexes  $\mathbb{C}$ . Par contre, les ensembles des entiers naturels  $\mathbb{N}$  et relatifs  $\mathbb{Z}$  ne sont pas des corps puisque pour  $\mathbb{N}$ , les conditions (vi) et (v) ne sont pas respectées et pour  $\mathbb{Z}$ , la condition (vi) n'est pas respectée.

Les ensembles qui vérifient seulement les cinq premières conditions de la définition d'un corps sont appelés *anneaux commutatifs*. Un exemple d'anneau commutatif que nous allons utiliser par la suite est l'anneau des polynômes en une ou plusieurs variables. La notation adoptée pour décrire l'anneau des polynômes en les variables  $x_1, \dots, x_n$  est  $\mathbf{k}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ .

Enfin nous allons conclure cette section par les définitions des idéaux et des variétés qui sont indispensables dans la théorie de l'élimination.

**Définition 1.24** Soit  $R$  un anneau commutatif. Un sous-ensemble  $I \subset R$  est un idéal si il satisfait :

- (i).  $0 \in R$
- (ii). si  $a$  et  $b \in R$  alors  $a + b \in R$
- (iii). si  $a \in I$  et  $b \in R$  alors  $b \cdot a \in I$

Par exemple, si  $f_1, \dots, f_s$  sont des polynômes de  $\mathbf{k}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ , alors l'ensemble

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \left\{ \sum_i h_i f_i \mid h_1, \dots, h_s \in \mathbf{k}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \right\} \quad (1.7)$$

est un idéal de  $\mathbf{k}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ .

Cet idéal, noté  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ , est dit être l'idéal *généralé* par  $f_1, \dots, f_s$ .

Si les fonctions  $f_1, \dots, f_s$  sont algébriquement indépendantes, alors elles forment une base de l'idéal  $I$ .

**Définition 1.25** Soit  $\mathbf{k}$ , un corps, et soient  $f_1, \dots, f_s$  des polynômes de  $\mathbf{k}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ , alors  $V(f_1, \dots, f_s)$  est une variété affine définie par  $f_1, \dots, f_s$  si :

$$V(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{k}^n : f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq s\}$$

La variété affine est l'ensemble des solutions dans  $\mathbf{k}$  du système d'équation :

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_s(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Une propriété des variétés est qu'elles dépendent uniquement de l'idéal généré par ces équations. Ainsi, si un idéal admet deux bases génératrices,  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$  et  $\langle g_1, \dots, g_t \rangle$ , alors les variétés  $V(f_1, \dots, f_s)$  et  $V(g_1, \dots, g_t)$  sont identiques.

Dans une optique d'élimination de variables dans un système analytique, il est intéressant de trouver une base génératrice d'un idéal dont certains polynômes ne contiennent plus les variables à éliminer. Ceci conduit à la définition de l'idéal d'élimination.

**Définition 1.26** *étant donné  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ , le  $k^{\text{ième}}$  idéal d'élimination  $I_k$  est l'idéal de  $\mathbf{k}[x_{k+1}, \dots, x_n]$  défini par :*

$$I_k = I \cap \mathbf{k}[x_{k+1}, \dots, x_n]$$

En d'autres termes, l'élimination des variables  $x_1, \dots, x_k$  revient à trouver des polynômes non nuls appartenant à l'idéal  $I_k$ . Par la suite, nous allons donner une méthode permettant de déterminer une base particulière génératrice des idéaux  $I_k$ .

#### 1.2.4.2 Les bases de Groebner

Nous allons présenter ici les grandes lignes de l'algorithme des bases de Groebner. Si le lecteur est intéressé par ces aspects, nous conseillons les ouvrages de Cox, Davenport ou encore de Becker (Cox *et al.*, 1992; Davenport *et al.*, 1986; Becker and Weispfenning, 1998).

Nous commençons par définir les **ordres de monômes** les plus couramment utilisés sur l'anneau  $\mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ .

**Définition 1.27** *Un monôme de  $\mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$  est un élément élémentaire s'écrivant de la manière suivante :*

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

avec  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

Nous pouvons maintenant définir les ordre monomial.

**Définition 1.28** *L'opérateur  $>$  est un ordre monomial s'il respecte les trois conditions suivantes :*

1.  $>$  est une relation d'ordre totale<sup>1</sup>
2. si  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des éléments de  $\mathbb{N}^n$ , et si  $x^\alpha > x^\beta$  alors  $x^{\alpha+\gamma} > x^{\beta+\gamma}$
3.  $>$  est bien ordonné, c'est à dire que tout ensemble non vide de monômes de  $\mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$  a un plus petit élément pour la relation d'ordre  $>$

1. Une relation d'ordre est dite totale (ou linéaire) si pour toute paire de monômes  $X^\alpha$  et  $X^\beta$ , seulement une seule des trois affirmations suivantes est vraie:  $X^\alpha > X^\beta$ ,  $X^\alpha = X^\beta$  et  $X^\beta > X^\alpha$

Parmi les ordres monomiaux les plus connus, nous pouvons citer l'ordre **lexicographique** et l'ordre **degré-lexicographique** (Cox *et al.*, 1992).

- l'ordre lexicographique.

**Définition 1.29** Soient deux  $n$ -uple  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  et  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  d'entiers positifs ou nuls. Alors  $\alpha$  est lexicographiquement supérieur à  $\beta$  ( $\alpha >_{lex} \beta$ ) si dans le vecteur des différences  $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ , le terme non nul le plus à gauche est positif.

Nous avons  $x^\alpha >_{lex} x^\beta$  si  $\alpha >_{lex} \beta$

- l'ordre degré-lexicographique.

**Définition 1.30** deux  $n$ -uple  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  et  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  d'entiers positifs ou nuls. Alors  $\alpha$  est degré-lexicographiquement supérieur à  $\beta$  ( $\alpha >_{grlex} \beta$ ) si une des deux conditions suivantes est respectée :

- $\sum_{i=1}^n \alpha_i > \sum_{i=1}^n \beta_i$
- $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i$  et  $\alpha >_{lex} \beta$

Nous avons  $x^\alpha >_{grlex} x^\beta$  si  $\alpha >_{grlex} \beta$

**Exemple 1.2.1** Soit à ordonner suivant les ordres lexicographique et degré-lexicographique les deux monômes<sup>2</sup>  $x^1y^2$  et  $y^3z^4$ .

Les deux monômes fournissent respectivement les deux 3-uple suivant :  $\alpha = (1, 2, 0)$  et  $\beta = (0, 3, 4)$ .

- l'ordre lexicographique :  $\alpha - \beta = (1, -1, -4)$  donc  $\alpha >_{lex} \beta$  et  $x^1y^2 >_{lex} y^3z^4$ .
- l'ordre degré-lexicographique :  $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 3$  et  $\sum_{i=1}^3 \beta_i = 7$  donc  $\beta >_{lex} \alpha$  et  $y^3z^4 >_{grlex} x^1y^2$ .

**Définition 1.31** Soit un ordre monomial fixé. Un sous-ensemble fini  $G = \{g_1, \dots, g_t\}$  d'un idéal  $I$  est une base de Groebner (ou base standard) de  $I$  si :

$$\langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle = \langle I \rangle$$

où  $LT(g_i)$  est le terme dominant (Leader Term) du polynôme  $g_i$  et  $\langle I \rangle$  est l'idéal généré par les termes dominants des éléments de  $I$ .

Le lien entre les bases de Groebner et l'élimination est donné par le **théorème d'élimination**.

**Théorème 1.4 (théorème d'élimination)** Soit  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset \mathbf{k}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  un idéal et soit  $G$  une base de Groebner de  $I$  selon l'ordre lexicographique  $x_1 > x_2 > \dots > x_n$  alors pour tout  $k \in [0; n]$ , l'ensemble

$$G_k = G \cap \mathbf{k}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$$

est une base de Groebner du  $k^{\text{ième}}$  idéal d'élimination  $I_k$ .

---

2.  $a > b > \dots > x > y > z$

Le théorème d'élimination est donné pour un ordre d'élimination lexicographique. Ce choix entraîne une structure triangulaire pour les polynômes de la base de Groebner en les variables à éliminer. Ceci est illustré par le tableau ci-dessous.

|          |       |       |       |         |       |                           |  |          |       |       |         |       |   |
|----------|-------|-------|-------|---------|-------|---------------------------|--|----------|-------|-------|---------|-------|---|
|          | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\dots$ | $x_n$ |                           |  | $x_1$    | $x_2$ | $x_3$ | $\dots$ | $x_n$ |   |
| $f_1$    | ✓     | ✓     | ✓     |         | ✓     | base de Groebner avec     |  | $g_1$    | ✓     | ✓     | ✓       |       | ✓ |
| $f_2$    | ✓     | ✓     | ✓     |         | ✓     | $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ |  | $g_2$    | 0     | ✓     | ✓       |       | ✓ |
| $f_3$    | ✓     | ✓     | ✓     |         | ✓     | $\implies$                |  | $g_3$    | 0     | 0     | ✓       |       | ✓ |
| $\vdots$ |       |       |       |         |       |                           |  | $\vdots$ |       |       |         |       |   |
| $f_s$    | ✓     | ✓     | ✓     |         | ✓     |                           |  | $g_t$    | 0     | 0     | 0       |       | 0 |

### 1.3 Conclusion

Dans ce chapitre ont été rappelés les principes de base de la surveillance et les notions générales de mathématique qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire. Il est bien évident que seule une partie des aspects de la surveillance et une infime partie des aspects de topologie et d'algèbre sont présentées ici. Si le lecteur souhaite approfondir certains points particuliers, il pourra se référer aux ouvrages ou articles cités pour chaque point important de ce chapitre.

L'algèbre différentielle (espace tangent, dérivées de Lie,...), brièvement présentée à la fin de ce chapitre, sera utilisée dans la suite de ce mémoire pour étudier l'observabilité des systèmes non linéaires ainsi que pour étudier les conditions d'existence des relations de redondance analytique d'un système.

Lorsque les propriétés d'observabilité d'un système auront été développées, une procédure de surveillance pourra être mise en œuvre en appliquant par exemple une stratégie de localisation de pannes utilisant les résidus structurés.

# Chapitre 2

## Les observateurs

### 2.1 Introduction

Un grand nombre de processus physiques peuvent se modéliser par un système d'équations différentielles (linéaires ou non) du premier ordre. Le modèle obtenu, appelé modèle d'état du système, fait intervenir un certain nombre de variables internes (les variables d'état) qui sont souvent inconnues soit pour des raisons pratiques (par exemple, les courants rotoriques d'un moteur asynchrone à cage d'écureuil ne sont pas physiquement mesurables) soit pour des raisons économiques (par exemple, le couple d'un moteur est mesurable mais l'ajout d'un tel capteur entraîne un surcoût important).

La surveillance d'un système physique modélisé sous forme d'état, consiste à étudier la cohérence comportementale du modèle vis à vis du système réel. Une des approches permettant de réaliser ceci, consiste à comparer les variables mesurées avec les variables calculées (en ligne) à partir du modèle lorsque celui-ci est soumis aux mêmes signaux d'entrée que ceux du système réel. Pour calculer les sorties du modèle, il est nécessaire de connaître certaines variables d'état. Une étape préalable au calcul des sorties du modèle, consistant à estimer les variables inconnues doit être implantée. Le système permettant d'obtenir ces estimations est appelé un *observateur*. Par définition, un observateur est un système dynamique prenant pour entrées les signaux connus du système sur lequel il est implanté et dont les sorties convergent vers une estimation des variables d'état (ou d'une partie des variables d'état).

Dans ce chapitre, nous allons présenter l'utilisation des observateurs pour la surveillance d'un système physique. Contrairement à la commande, où les observateurs sont utilisés pour estimer le vecteur d'état (ou une partie du vecteur d'état), les observateurs utilisés pour la surveillance estiment les sorties (ou une fonction des sorties) du système. Lorsque l'observateur utilisé pour estimer les sortie n'utilise pas tous les états, nous parlons d'observateur d'ordre réduit, sinon nous parlons d'observateur d'ordre plein.

Dans une première partie, nous allons étudier l'*observabilité* des systèmes. Nous montrerons que dans le cas général des systèmes non linéaires, l'observabilité est une propriété locale c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas uniquement de la structure du modèle mais aussi des signaux d'entrée du système. Toutefois pour les systèmes linéaires et pour une classe de systèmes non linéaires que nous définirons, l'observabilité peut être définie de manière globale, dans ce cas, l'observabilité est

une propriété intrinsèque au système.

Dans une seconde partie, nous étudierons la synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires ainsi que pour la classe particulière des systèmes non linéaires qui sont linéarisables via une injection d'entrée/sortie. Les conditions d'existence de cette injection d'entrée/sortie linéarisante seront exposées. Pour ces systèmes (linéaires ou linéarisables), la synthèse d'un observateur est un problème qui est entièrement résolu par l'implantation d'un observateur dit de Luenberger. Nous présenterons la méthode de synthèse de ce type d'observateur et nous verrons comment il est possible d'orienter cette construction pour faciliter le problème de détection et de localisation de pannes.

Dans la dernière partie, le problème de la synthèse d'observateurs sur des systèmes purement non linéaires (non linéarisables) sera présenté. Pour ce type de systèmes, ce problème est encore largement ouvert malgré une littérature abondante sur le sujet. Nous présenterons ici les deux types d'observateurs les plus utilisés que sont d'une part les observateurs à grand gain et d'autre part les observateurs à mode glissant.

## 2.2 Observabilité

L'étude de l'observabilité d'un système est effectuée sur le modèle du système sain (lorsque celui-ci n'est soumis à aucune panne), et sans perturbation. Ce modèle est obtenu à partir du modèle général (1.1) avec le vecteur  $w$  suivant :

$$w^T = \begin{pmatrix} u^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Le modèle s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état,  $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{m_u}$  le vecteur des entrées de commande et  $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$  le vecteur des sorties mesurées. Les fonctions  $f$  et  $h$  sont supposées lisses.

### 2.2.1 Définitions

Les définitions présentées ici sont issues des articles de références (Gauthier and Bornard, 1981; Hermann and Krener, 1977).

**Définition 2.1** *Le système (2.1) est observable si, étant donné l'instant  $t_0$ , il existe un instant  $t_1 > t_0$  fini tel que la connaissance de  $y(t_0, t_1)$  ( $y(t)$  pour  $t \in [t_0; t_1]$ ) et  $u(t_0, t_1)$  permette de déterminer de manière unique la valeur du vecteur d'état à l'instant  $t_0$  ( $x(t_0)$ ), quelle que soit l'entrée  $u(t)$  du système.*

Réciproquement, pour un état initial donné  $x(t_0)$  et pour une entrée  $u(t_0, t)$  donnée, il ne peut correspondre qu'une et une seule sortie  $y(t)$ . Cela peut être exprimé en utilisant la notion d'état indiscernable.

**Définition 2.2** *Deux états initiaux  $x^1(t_0)$  et  $x^2(t_0)$  sont dits indiscernables si  $\forall t \in [t_0; t_1]$ , les*

sorties correspondantes  $y^1(t)$  et  $y^2(t)$  sont identiques quelle que soit l'entrée admissible ( $u \in \mathcal{U}$ )  $u(t_0, t_1)$  du système.

La définition d'indiscernabilité permet de caractériser mathématiquement la définition de l'observabilité d'un système (Def. 2.1).

**Définition 2.3** *Le système (2.1) est globalement observable si tous les états  $x \in \mathcal{X}$  sont discernables.*

L'observabilité globale ne signifie pas obligatoirement que toutes les entrées distinguent tous les points de  $\mathcal{X}$ . Pour éviter toute ambiguïté, seule la notion d'*observabilité locale* sera considérée. Ce concept, plus faible que celui de l'observabilité globale, tient compte de "l'indiscernabilité" des états initiaux par rapport aux entrées.

**Définition 2.4** *Soit  $U$  un sous-espace de  $\mathcal{X}$  contenant deux états initiaux  $x^1(t_0)$  et  $x^2(t_0)$ . On dit que  $x^1(t_0)$  est U-indiscernable de  $x^2(t_0)$  si,  $\forall t \geq t_0$ , les sorties correspondantes  $y^1(t)$  et  $y^2(t)$  sont identiques quelle que soit l'entrée admissible  $u[t_0; t]$  du système et si,  $\forall t \geq t_0$ , les trajectoires  $x^1(t)$  et  $x^2(t)$  appartiennent à  $U$ .*

Cette définition de l'U-indiscernabilité permet de définir l'observabilité locale tout comme la définition de l'indiscernabilité permet de définir l'observabilité globale.

**Définition 2.5** *L'état  $x^0$  est localement observable si, pour tout voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$ , l'ensemble des états U-indiscernabilité de  $x^0$  se réduit à  $x^0$ . Le système (2.1) est localement observable si tous les états  $x \in \mathcal{X}$  sont U-discernables.*

A l'aide de ces définitions, il est possible de déduire que si un système linéaire est observable, alors il sera globalement observable puisque l'observabilité de celui-ci ne dépend pas des entrées. Par contre, la notion d'observabilité locale sera utilisée pour étudier les systèmes non linéaires.

Dans la partie qui suit, nous allons donner les conditions analytiques, dont la plus connue est la condition de rang, permettant de déterminer a priori si un système est localement observable ou non.

### 2.2.2 Condition de rang d'observabilité

L'observabilité des systèmes linéaires peut être testée en étudiant le rang de la matrice d'observabilité. Nous allons présenter ici l'extension de cette condition de rang aux systèmes non linéaires. Nous montrerons que cette extension inclut le cas des systèmes linéaires (Conte *et al.*, 1998).

**Définition 2.6** *L'espace d'observabilité, noté  $\mathcal{O}$  du système 2.1 est le plus petit sous-espace vectoriel contenant  $h(x, u)$  et qui est fermé sous l'opération de la dérivation de Lie par rapport au champ de vecteur  $f(x, u)$ .*

Soit  $d\mathcal{O}$  l'espace des différentielles des éléments de  $\mathcal{O}$ .

**Définition 2.7** *On dit que le système 2.1 satisfait la condition de rang d'observabilité si, pour tout  $x \in \mathcal{X}$ ,*

$$\dim d\mathcal{O} = n \Leftrightarrow \text{rang}(d\mathcal{O}) = n \quad (2.2)$$

Lorsqu'un système satisfait à la condition de rang donnée par la définition ci-dessous, alors ce système sera localement observable.

**Remarque 2.2.1** Dans le cas des systèmes linéaires, l'espace d'observabilité  $\mathcal{O}$  est engendré par  $Cx, CAx, \dots, CA^{n-1}x$ . L'espace des différentielles de  $\mathcal{O}$  sera alors généré par la matrice constante suivante :  $[C, CA, \dots, CA^{n-1}]$ . On retrouve la condition bien connue du rang de Kalman :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C & CA & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (2.3)$$

### 2.2.3 Observabilité indépendante de $u$ et forme canonique d'observabilité

L'exemple 2.2.1 illustre l'existence d'entrées singulières pour l'observabilité.

**Exemple 2.2.1** Considérons le système non linéaire suivant composé de deux états et d'une sortie :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 u \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad (2.4a)$$

$$y = x_1 \quad (2.4b)$$

La variable  $x_2$  peut être reconstruite en fonction de l'entrée et de la dérivée première de la sortie :  $x_2 = \dot{y}/u$ . Cette variable peut donc être reconstruite uniquement lorsque l'entrée  $u$  est différente de zéro. L'observabilité du système (2.4a) dépend implicitement de la valeur de l'entrée  $u(t)$ .

Ces entrées particulières vont considérablement gêner l'étude des systèmes non linéaires. Toutefois, il existe une classe de systèmes n'admettant pas de telles entrées. La caractérisation de ces systèmes peut être trouvée dans les références suivantes (Gauthier and Bornard, 1981; Gauthier *et al.*, 1992; Gauthier and Kupka, 1994). Nous allons simplement donner ici les résultats principaux concernant l'observabilité indépendante de  $u$ .

**Définition 2.8** Une entrée  $u$  est dite universelle pour le système 2.1 sur l'intervalle  $[0; T]$  si elle distingue tout couple d'états initiaux distincts.

**Définition 2.9** Un système est dit uniformément observable si toutes ses entrées sont universelles.

Un système satisfaisant à la définition 2.9 sera observable indépendamment de l'entrée  $u$ .

#### 2.2.3.1 Systèmes uniformément observables MISO

Dans leur article, Gauthier et coll. (Gauthier *et al.*, 1992) ont caractérisé la classe des systèmes non linéaires observables indépendamment de l'entrée  $u$  dans le cas mono sortie. Le résultat principal est donné par le théorème suivant.



**Théorème 2.1** *Le système 2.1 (pour  $p = 1$ ) est uniformément observable sur  $\mathcal{X}$  si et seulement si l'application définie de la façon suivante :*

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{X} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow \zeta = \Psi(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.5)$$

*est un difféomorphisme qui transforme le système (2.1) en le système suivant :*

$$\dot{\zeta} = A\zeta + \Gamma(\zeta) + G(\zeta)u \quad (2.6a)$$

$$y = Cx \quad (2.6b)$$

où

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma(\zeta) \end{pmatrix} \\ G(\zeta) &= \begin{pmatrix} g_1(\zeta_1) \\ g_2(\zeta_1, \zeta_2) \\ \vdots \\ g_n(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cette classe de systèmes englobe une grande partie des systèmes physiques. En particulier, un grand nombre de processus chimiques (Othman, 1992; Kaboré, 1992) et électrotechniques (Verghese and Sanders, 1988; Busawon *et al.*, 1998) admettent une réécriture sous la forme (2.6).

La représentation (2.6) est appelée la *forme canonique d'observabilité* du système.

### 2.2.3.2 Extension aux systèmes MIMO

L'extension de cette représentation aux systèmes MIMO (Bornard and Hammouri, 1991) nécessite d'introduire un certain nombre de notations permettant de simplifier les écritures.

Soit une variable  $\vartheta \in \mathbb{R}$ . On définit le vecteur  $\bar{\vartheta}^{(\alpha)}$  comme étant le vecteur formé par la variable  $\vartheta$  et de ses  $\alpha$  premières dérivées temporelles :

$$\bar{\vartheta}^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \vdots \\ \vartheta^{(\alpha)} \end{pmatrix}$$

Lorsque l'ordre de dérivation  $\alpha$  est omis, cela signifie que l'on considère le vecteur  $\bar{\vartheta}^{(\alpha)}$  pour un certain nombre (indéfini) de dérivées successives de  $\vartheta$ .

Soit  $\bar{\mathcal{L}}_f$  un opérateur différentiel linéaire (inspiré de l'opérateur de différenciation de Lie) défini de la manière suivante :

$$\bar{\mathcal{L}}_f h_i(x, \bar{u}) = \frac{\partial h_i}{\partial x} f(x, u) + \frac{\partial h_i}{\partial \bar{u}} \dot{\bar{u}}$$

où  $h_i(x, \bar{u})$ , la  $i^{\text{ième}}$  ligne de  $h(x, \bar{u})$ , est une fonction définie dans un espace de réels de dimension appropriée.

La dérivée  $k^{\text{ième}}$  de  $h_i(x, \bar{u})$  utilisant l'opérateur  $\mathcal{L}_f$  est définie par récurrence :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_f^1 h_i(x, \bar{u}) &= \frac{\partial}{\partial x} \bar{\mathcal{L}}_f h_i(x, \bar{u}) = \frac{\partial h_i}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + f^T \left( \frac{\partial h_i}{\partial x} \right)^T + \dot{\bar{u}}^T \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \left( \frac{\partial h_i}{\partial x} \right)^T \right]^T \\ \bar{\mathcal{L}}_f^k h_i(x, \bar{u}) &= \frac{\partial}{\partial x} \bar{\mathcal{L}}_f^{k-1} h_i(x, \bar{u}) \end{aligned}$$

En utilisant la définition du rang d'observabilité, un système sera localement observable (au sens du rang) lorsque la condition suivante sera satisfaite :

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{L}}_f h_1(x, \bar{u}) \\ \bar{\mathcal{L}}_f^1 h_1(x, \bar{u}) \\ \vdots \\ \bar{\mathcal{L}}_f^{k_1-1} h_1(x, \bar{u}) \\ \vdots \\ \bar{\mathcal{L}}_f h_p(x, \bar{u}) \\ \vdots \\ \bar{\mathcal{L}}_f^{k_p-1} h_p(x, \bar{u}) \end{pmatrix} = n \quad (2.7)$$

Pour calculer ce rang, des indices ( $k_i$ ) de dérivation sont fixés pour chaque sortie. Cet ensemble d'indices n'est pas unique pour un système donné comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 2.2.2** Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_3 x_1 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases} \quad (2.8a)$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \quad (2.8b)$$

La condition de rang est respectée par les deux ensembles d'indices  $k_i$  suivant :

$$- \{k_1, k_2\} = \{2, 1\},$$

–  $\{k_1, k_2\} = \{1, 2\}$ .

Pour éviter les ambiguïtés dans la suite de ce mémoire, à chaque système sera affecté un ensemble unique de  $k_i$  que l'on appellera les indices d'observabilité du système. Ces indices sont définis de la manière suivante :

**Définition 2.10 ((Krener and Respondek, 1985; Nijmeijer and van der Schaft, 1990))**

Les entiers  $(k_1, k_2, \dots, k_p)$  sont les indices d'observabilité associés aux sorties d'un système s'ils forment, après un éventuel réordonnement des sorties, le plus petit  $p$ -uplet au sens lexicographique tel que :

- ★  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p$ ,
- ★  $\sum_{i=1}^p k_i = n$ ,
- ★ La condition de rang (2.7) est respectée.

Dans l'exemple 2.2.2, les indices d'observabilité sont  $k_1 = 2$  et  $k_2 = 1$ .

La forme canonique d'observabilité d'un système multi-sorties ayant pour indices d'observabilité  $k_1, k_2, \dots, k_p$  s'écrit de la manière suivante :

$$\dot{\zeta} = A\zeta + \Gamma(\zeta) + G(\zeta)u \quad (2.9a)$$

$$y = C\zeta \quad (2.9b)$$

où la matrice  $A$  est une matrice bloc diagonale:  $A = \text{diag}\{A_i\}_{i=1, \dots, p}$  dont chaque sous matrice  $A_i$  est de dimension  $k_i \times k_i$  et est définie par :

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}_{k_i \times k_i} \quad (2.10)$$

La matrice  $C$  est aussi une matrice bloc diagonale:  $C = \text{diag}\{C_i\}_{i=1, \dots, p}$  dont chaque sous matrice  $C_i$  est un vecteur de dimension  $k_i$  défini par :

$$C_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{1 \times k_i} \quad (2.11)$$

Les matrices  $\Gamma(\zeta)$  et  $G(\zeta)$  sont définies par

$$\Gamma_i(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{\mathcal{L}}_f^{k_i} h_i \end{pmatrix}_{k_i \times 1} \quad G_i(\zeta) = \begin{pmatrix} g_{i,1}(\zeta_{j,1}) \\ g_{i,2}(\zeta_{j,2}) \\ \vdots \\ g_{i,k_i}(\zeta) \end{pmatrix}_{k_i \times m_u} \quad \text{où } j = 1, 2, \dots, p \quad (2.12)$$

Avec  $\zeta = [\zeta_1 \dots \zeta_p]^T$  ou  $\zeta_i$  est un vecteur de dimension  $k_i$ :  $\zeta_i = [\zeta_{i,1} \dots \zeta_{i,k_i}]$ .

L'étude de l'observabilité et la réécriture d'un système sous sa forme canonique observable constituent les phases préalables à la synthèse d'un observateur. Dans les sections qui suivent, nous allons présenter différentes approches de synthèse d'observateurs. Nous commencerons par présenter les observateurs de type Luenberger (Luenberger, 1971) qui s'appliquent aux systèmes linéaires ou linéarisables (de manière approchée ou exacte). Nous montrerons comment ces observateurs peuvent être utilisés pour effectuer la surveillance du système sur lequel ils sont implantés. Ce type d'observateurs ne pouvant s'appliquer que sur une classe très restreinte de systèmes non linéaires, nous présenterons ensuite sommairement le principe de synthèse d'observateurs spécifiquement développés pour les systèmes non linéaires. En particulier nous détaillerons la synthèse des observateurs dits à grands gains et les observateurs à mode glissant.

## 2.3 Les observateurs pour la surveillance

Nous allons présenter dans cette section le *Problème Fondamental de la Génération de Résidus* (PFGR) (De Persis and Isidori, 1999) fondé sur l'utilisation des observateurs. Dans un premier temps, quelques généralités sur les observateurs seront présentées et le PFGR sera posé. Ensuite, nous présenterons les contraintes à ajouter lors de la synthèse des observateurs pour permettre leur utilisation pour la détection et la localisation des défauts.

### 2.3.1 Généralités

**Définition 2.11 (Observateur asymptotique)** (Van Der Schaft, 1985) *On appelle observateur asymptotique d'un système dynamique*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,u) \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

*un système dynamique dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrée et de sortie du système à observer et dont le vecteur de sortie, noté  $\hat{x}$ , est l'état estimé :*

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \hat{f}(z,y,u) \\ \hat{x} &= \hat{h}(z,y,u)\end{aligned}$$

tel que

$$\star \|\epsilon\| = \|\hat{x} - x\| \rightarrow 0 \text{ pour } t \rightarrow \infty$$

$$\star \text{ Si pour } t = t_0 \text{ on a } \hat{x}(t_0) = x(t_0) \text{ alors pour tout } t \geq t_0 \text{ on a } \hat{x}(t) = x(t)$$

Une autre propriété que possèdent beaucoup d'observateurs est la convergence asymptotique exponentielle. Cette propriété est définie comme suit.

**Définition 2.12 ((Hernandez, 1994))** *Un observateur asymptotique est dit exponentiel s'il existe un voisinage de l'origine  $U \subset \mathcal{X}$  tel que si  $\epsilon(t_0) \in U$  alors  $\|\epsilon(t)\| \leq K e^{-ct}$  où  $K$  et  $c$  sont des constantes positives  $\forall t \geq t_0$ .*

Nous allons maintenant considérer les systèmes admettant le modèle de fonctionnement défaillant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x,u,v,\varphi) \\ y &= h(x,u,v,\varphi) \end{cases}$$

Un observateur pour ce système est construit à partir de sa partie déterministe non défaillante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x,u,0,0) \\ y &= h(x,u,0,0) \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant définir le PFGR.

**Définition 2.13 (PFGR)** (*Hammouri et al., 1998*) *Considérons les deux systèmes suivants :*

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x,u,v,\varphi) \\ y &= h(x,u,v,\varphi) \end{cases} \quad (2.13)$$

et

$$\begin{cases} \dot{\zeta} &= \tilde{f}(\zeta,y,u) \\ e &= \tilde{h}(\zeta,y,u) \end{cases} \quad (2.14)$$

Alors le système (2.14) résout le PFGR associé au système (2.13) si les trois conditions suivantes sont respectées :

- (i).  $e$  n'est pas affecté, pour tout état initial  $\zeta_0$ , par le signal  $v$ .
- (ii).  $e$  est affecté par  $\varphi$ .
- (iii). Lorsque  $\varphi = 0$  et  $v = 0$ ,  $e$  tend asymptotiquement vers 0,  $\forall u, \forall \zeta_0$  et  $\forall y_0$ .

Le PFGR est posé ici de manière très générale. Nous verrons par la suite que dans le cas des systèmes non linéaires, la seconde condition doit être légèrement modifiée afin de permettre la résolution du PFGR.

### 2.3.2 Observateurs à entrée inconnue (UIO)

Dans un premier temps, définissons les UIO.

**Définition 2.14** *Un observateur est dit à entrée inconnue (ou UIO : Unknown Input Observer) si l'erreur d'estimation  $e$  tend asymptotiquement vers zéro même en présence de perturbations.*

Nous allons maintenant montrer leur utilisation pour la détection et la localisation des défauts.

#### 2.3.2.1 Utilisation des UIO pour la détection

La définition des observateurs asymptotiques 2.11 est donnée pour les systèmes non soumis à des entrées inconnues. Pour résoudre le PFGR, il est nécessaire de découpler l'estimation du vecteur d'état des perturbations. Ces observateurs peuvent alors être directement utilisés pour la génération de résidus (Fig 2.1) (Watanabe and Himmelblau, 1982; Wünnenberg and Frank, 1986; Viswanadham and Srichandert, 1987; Fang and Ge, 1988).

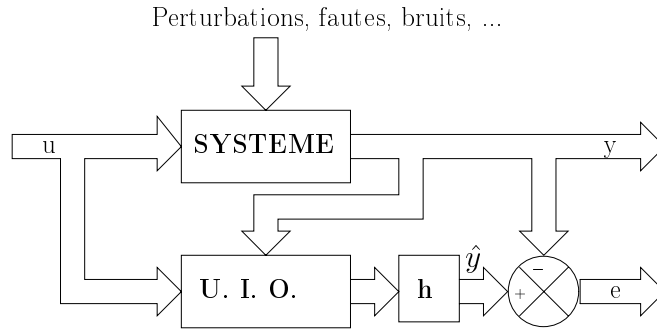


FIG. 2.1 – Génération de résidus à partir d'UIO

### 2.3.2.2 Utilisation des UIO pour la localisation

La détection d'une panne nécessite en règle générale l'utilisation d'un seul observateur. En ce qui concerne la localisation de celle-ci, il est souvent nécessaire d'avoir recours à une «banque (ou un banc) d'observateurs» plutôt qu'à un seul observateur (Patton *et al.*, 1989; Frank, 1994). La figure 2.2 présente l'architecture à adopter pour utiliser les UIO pour localiser les défauts. L'ensemble des  $m$  UIO est soumis au vecteur d'entrées  $u$  et au vecteur de sorties  $y$ . Chaque UIO

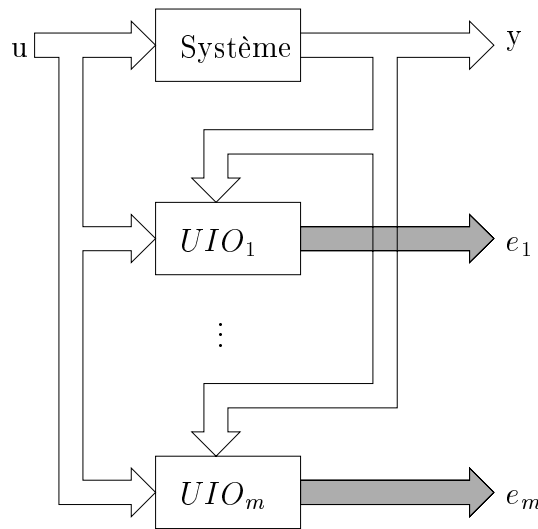


FIG. 2.2 – Architecture d'une banque d'observateurs

de la banque d'observateurs est synthétisé pour être sensible à un sous ensemble de fautes  $\varphi_i$  et insensible aux autres.

Le nombre d'observateurs à intégrer dans la banque d'observateurs dépend du nombre de fautes à détecter et à isoler. Trois cas de figure sont alors possibles :

- ★ Les fautes doivent être détectées mais pas localisées.
- ★ Seulement une faute doit être détectée et localisée à la fois (cas de panne unique)
- ★ Toutes les fautes doivent être détectées et localisées même en cas d'occurrence simultanée (cas de pannes multiples)

### 1. Cas sans localisation

Dans cette configuration, la banque d'observateurs est composée d'un unique observateur qui doit être affecté par toutes les fautes et invariant sous les perturbations.

### 2. Cas des pannes uniques

Ce cas de figure est très fréquemment étudié et est moins restrictif qu'il n'y paraît. Effectivement, il est rare (mais pas impossible) que plusieurs capteurs, actionneurs ou composants différents d'un même système tombent en panne exactement au même moment.

La banque d'observateurs sera alors constituée d'autant d'observateurs qu'il y a de pannes à isoler. Chacun de ces observateurs sera synthétisé de manière à être sensible à toutes les fautes sauf une. Ainsi, le  $i^{ime}$  observateur sera obtenu en considérant la  $i^{ime}$  faute  $\varphi_i$  comme une entrée inconnue agissant sur le système. La table de signatures théoriques des défauts sera alors composée de 1 à l'exception d'une diagonale de 0.

### 3. Cas des pannes multiples

La détection et la localisation de toutes les pannes, lorsque celles-ci peuvent intervenir simultanément, nécessitent de pouvoir découpler chaque observateur de toutes les fautes sauf une. Cette hypothèse est très contraignante quand à la synthèse des UIO car le nombre de degrés de liberté restants après le découplage des entrées inconnues est souvent insuffisant pour permettre le découplage vis-à-vis de toutes les pannes sauf une.

Lorsque la banque d'observateurs peut être obtenue, la table de signatures théoriques sera alors composée de 0 à l'exception d'une diagonale de 1.

Les pannes sur une installation peuvent survenir à 3 emplacements :

- sur les composants du système (pannes internes)
- sur les actionneurs
- sur les capteurs

Suivant la position de la faute, il est possible d'adapter la construction de la banque d'observateurs pour améliorer les performances du système de surveillance.

#### 1. Détection et localisation des pannes composants

La synthèse des UIO pour la détection de pannes internes est une tâche complexe. Une solution consiste à décomposer le système en plusieurs sous-systèmes dépendant chacun d'un sous-ensemble de composants pouvant présenter une défaillance. Un UIO est alors construit sur chacun de ces sous-systèmes. Ces observateurs, synthétisés sur uniquement une partie du système sont appelés des observateurs locaux.

La synthèse des observateurs locaux est possible si les sous-systèmes sont soit totalement découplés (découplage parfait) les uns des autres soit faiblement couplés.

Si le découplage est parfait, la synthèse des observateurs locaux ne pose pas de problème puisque chaque sous-système peut être considéré comme un système indépendant. Lorsque les sous-systèmes sont couplés, c'est à dire que certaines variables interviennent dans plusieurs sous-systèmes, alors les variables de couplage sont intégrées dans le vecteur des entrées inconnues lors de la synthèse des UIO. Si le couplage entre les sous-systèmes fait intervenir beaucoup de variables, le nombre de degrés de liberté pour la synthèse des UIO pourra se révéler insuffisant.

## 2. Détection et localisation des pannes actionneurs

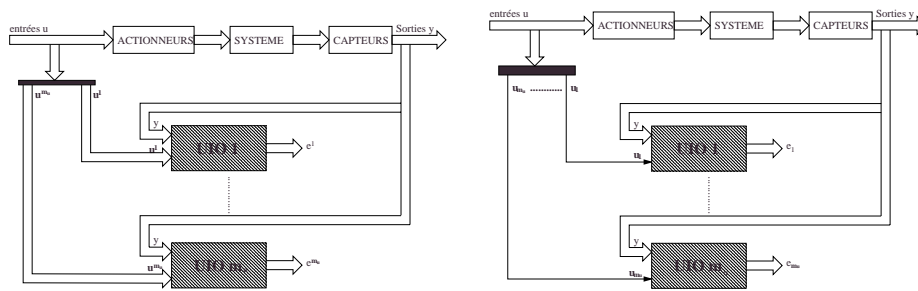
Ces pannes sont modélisées par un terme additif sur une composante du vecteur d'entrées  $u$ . Deux schémas doivent être envisagés :

- Pannes uniques

Dans ce cas de figure, la banque d'observateurs pourra être construite suivant l'architecture GOS (Generalized Observer Scheme) présentée sur la figure 2.3.a. Chaque résidu issu d'un UIO est insensible à une panne actionneur particulière et sensible à toutes les autres. Il est donc possible de détecter et localiser les pannes actionneurs lorsque celles-ci interviennent séparément.

- Pannes multiples

La banque d'observateurs pourra être construite suivant l'architecture DOS (Dedicated Observer Scheme) présentée sur la figure 2.3.b. Chaque résidu issu d'un UIO est sensible à une et une seule panne actionneur ce qui permet de détecter et localiser les pannes même lorsqu'elles surviennent simultanément.



2.3.a) Structure GOS

2.3.b) structure DOS

FIG. 2.3 – Localisation des pannes actionneurs

## 3. Détection et localisation des pannes capteurs

Ces pannes sont modélisées par des termes additifs sur les composantes du vecteur de sortie  $y$ . Deux possibilités sont encore envisageables pour la construction de la banque d'observateurs suivant que les hypothèses pannes uniques ou pannes multiples sont retenues.

- Pannes uniques

Dans ce cas de figure, la banque d'observateur pourra être construite suivant l'architecture GOS présentée sur la figure 2.4.a. Chaque résidu issu d'un UIO est insensible à une panne capteur particulière et sensible à toutes les autres. Il est donc possible de détecter et localiser les pannes capteurs lorsque celles-ci interviennent séparément.

- Pannes multiples

La banque d'observateurs pourra être construite suivant l'architecture DOS présentée sur la figure 2.4.b. Chaque résidu issu d'un UIO est sensible à une et une seule panne capteur ce qui permet de détecter et localiser les pannes même lorsqu'elles surviennent simultanément.



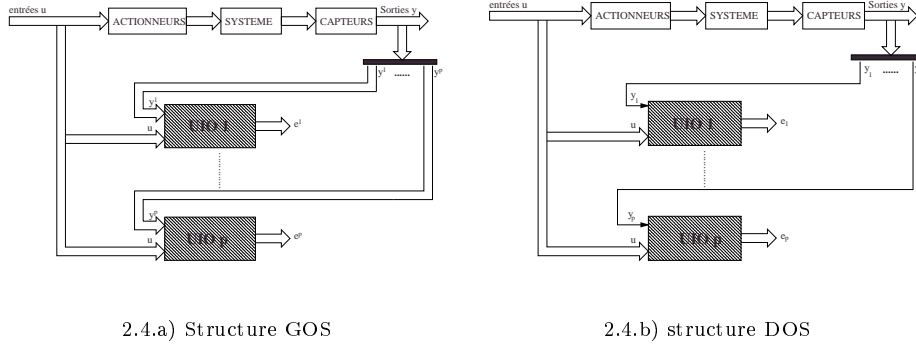


FIG. 2.4 – Localisation des pannes capteurs

## 2.4 Les observateurs de type Luenberger

Les observateurs de Luenberger peuvent être implantés sur tous les systèmes dont la dynamique des variables d'état est représentée par des équations linéaires (Luenberger, 1971). Cette caractéristique se retrouve directement sur les systèmes linéaires mais aussi indirectement sur certains systèmes non linéaires. Effectivement, certains systèmes sont modélisés par des équations non linéaires mais sont intrinsèquement linéaires puisque la non-linéarité peut être supprimée via une injection d'entrée/sortie éventuellement généralisée<sup>3</sup>. Lorsque le modèle du système est écrit sous la forme adéquate, la synthèse d'un observateur de Luenberger est possible. Si après la synthèse, des degrés de liberté sont disponibles, ils peuvent être utilisés pour dédier ce type d'observateurs à la surveillance en construisant des UIO qui seront inclus dans une banque d'observateurs (Patton *et al.*, 1989).

Cette section définira la classe de systèmes non linéaires admettant une forme linéaire via une injection d'entrée/sortie. Puis, nous présenterons la méthode de synthèse des observateurs de Luenberger enfin nous conclurons sur l'utilisation de ce type d'observateurs pour la surveillance.

### 2.4.1 Linéarisation exacte modulo injection d'entrée sortie

La linéarisation exacte d'un système modulo une injection d'entrée/sortie consiste à trouver des transformations d'état et de sortie qui permettent de transformer un système non linéaire en un système ayant des dynamiques d'état linéaires. Ce problème peut se formuler de la manière suivante. Soit le système non linéaire :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,w) \\ y &= h(x,w) \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec  $x \in \mathcal{X}$ ,  $w$  est le vecteur des signaux d'excitation composé par les vecteurs d'entrée de commande  $u$ , de perturbation  $v$  et de faute  $\varphi$ .  $f(\cdot)$  et  $h(\cdot)$  sont deux fonctions analytiques en leurs arguments. Nous supposons que la condition de rang d'observabilité de ce système est remplie.

<sup>3</sup>. La dénomination «généralisé» est utilisée lorsque dans le terme d'injection d'entrée/sortie contiennent des dérivées des entrées ou/et des sorties

On cherche une transformation de coordonnées d'état  $x^* = \phi(x)$  et une transformation de coordonnées de sortie  $y^* = \Lambda(y)$  telles que le système 2.15 soit équivalent à :

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= Ax^* + \psi(y, w) \\ y^* &= Cx^* \end{aligned} \quad (2.16)$$

avec  $x^* \in \mathcal{X}$ . La fonction  $\psi(y, w)$  est définie de  $\mathbb{R}^{p \times m}$  sur  $\mathbb{R}^n$  et peut se décomposer de la manière suivante :

$$\psi(y, w) = \psi_c(y, u) + \psi_e(y, w) \quad (2.17)$$

où  $\psi_c(y, u)$  (resp.  $\psi_e(y, w)$ ) est la forme de calcul (resp. d'évaluation) de  $\psi(y, w)$ .

**Remarque 2.4.1** *Sans perte de généralité, les matrices  $A$  et  $C$  peuvent s'écrire sous la forme canonique d'observabilité (2.9).*

Le problème de linéarisation par injection d'entrée/sortie a été résolu de manière géométrique et algébrique.

#### 2.4.1.1 Approche géométrique

Les premiers travaux ont utilisé des outils plutôt géométriques pour résoudre le problème de la linéarisation exacte (Krener and Isidori, 1983; Krener and Respondek, 1985; Keller, 1987; Isidori, 1995). Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une transformation d'état est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 2.2** *[(Krener and Isidori, 1983)] Le système autonome non linéaire :*

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{cases}$$

*est localement équivalent au système linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x}^* &= Ax^* + \psi(y) \\ y &= Cx^* \end{cases}$$

*si et seulement si :*

- (i).  $\dim(\text{span}\{dh(x), dL_f h(x), \dots, L_f^{n-1} h(x)\}) = n$
- (ii). *Le champ de vecteur  $g$  défini par*

$$L_g L_f^k(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq k < n-1 \\ 1 & \text{si } k = n-1 \end{cases} \quad (2.18)$$

*est unique et satisfait*

$$[ad_f^i g, ad_f^j g] = 0 \quad (2.19)$$

*pour  $0 \leq i < j \leq n-1$ .*

La première condition donnée par le théorème 2.2 est facile à tester. Par contre, la deuxième condition nécessite le calcul d'un champ de vecteurs  $g$  obtenu en résolvant un système d'équations aux dérivées partielles souvent très complexe. Cette approche a été étendue aux systèmes multivariés (Xia and Gao, 1989) et en considérant la transformation de sortie.

### 2.4.1.2 Approche algébrique

L'approche géométrique a permis de donner un certain nombre de résultats concernant les conditions nécessaires et suffisantes pour la linéarisation exacte des systèmes non linéaires. Toutefois, ces travaux s'avèrent extrêmement complexes et dans la majorité des cas, totalement inexploitable.

Parallèlement à l'approche géométrique, une théorie, utilisant des outils algébriques a été développée. Dans (Keller, 1987), le problème de la linéarisation est traité pour des systèmes d'ordre réduit ( $n = 2$  ou  $3$ ). Dans ce cas, la solution est obtenue en résolvant un système d'équations aux dérivées partielles mais aucune méthode n'est apportée quant à la résolution de ce système.

Une approche originale est parue en 95 (Plestan, 1995). Cette approche repose sur l'étude de la structure des équations différentielles d'entrée/sortie du système et sur la théorie de la réalisation canonique. Un algorithme permet de calculer, lorsque cela est possible, la transformation d'état à appliquer sur le système non linéaire pour le linéariser. Si la transformation n'existe pas, l'algorithme ne retourne aucun résultat, ce qui permet de conclure sur la non réalisabilité du système d'équations différentielles d'entrée/sortie. Le principe de cet algorithme est le suivant. Soit le système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x,w) \\ y &= h(x,w) \end{cases}$$

Pour des raisons de simplicité, nous considérerons uniquement le cas mono variable. Le cas multivariable n'apporte rien de plus pour la compréhension du fonctionnement de l'algorithme.

L'équation différentielle d'entrée/sortie associée à ce système est obtenue en éliminant la variable d'état  $x$  (dans la suite de ce mémoire, des algorithmes permettant de faire cela seront proposés). Ensuite, le terme en  $y^{(n)}$  est isolé pour obtenir une relation s'écrivant sous la forme :

$$y^{(n)} = F(\bar{y}^{(n-1)}, \bar{w}^{(n-1)}) \quad (2.20)$$

Si le système est linéarisable, alors il est localement équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{x}^* &= Ax^* + \psi(y,w) \\ y &= Cx^* = x_1^* \end{cases}$$

Avec la matrice  $A$  sous la forme canonique observable.

L'équation différentielle d'entrée/sortie de ce système est donnée par :

$$y^{(n)} = \psi_1^{(n-1)}(y,w) + \psi_2^{(n-2)}(y,w) + \dots + \psi_n(y,w) \quad (2.21)$$

Pour un même système, l'équation d'entrée/sortie étant unique, les équations (2.20) et (2.21) sont équivalentes. L'algorithme permet de trouver les fonctions  $\psi_i$  à partir de l'équation (2.20) (Plestan and Glumineau, 1997).

### 2.4.2 Synthèse d'un observateur de Luenberger

Les observateurs de type Luenberger s'appliquent aux systèmes dont les dynamiques des variables d'état sont linéaires, c'est-à-dire aux systèmes admettant la représentation suivante :

$$\dot{x} = Ax + \psi(y, w) \quad (2.22a)$$

$$y = Cx \quad (2.22b)$$

La fonction  $\psi(y, w)$  est décomposée de manière à séparer la forme de calcul de la forme d'évaluation :

$$\psi(y, w) = \psi_c(y, u) + \psi_e(y, w)$$

La synthèse d'un observateur de Luenberger est réalisée sur la partie calculable du système (2.22) :

$$\dot{x} = Ax + \psi_c(y, u) \quad (2.23a)$$

$$y = Cx \quad (2.23b)$$

L'observateur de Luenberger associé au système (2.23a) et (2.23b) est défini par l'équation suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \psi_c(y, u) + K(y - C\hat{x}) \quad (2.24)$$

où  $K$  est la matrice de gain de l'observateur de dimension  $n \times p$ .

L'erreur d'estimation de l'état est donnée par :

$$\epsilon = x - \hat{x} \quad (2.25)$$

La dérivée de  $\epsilon$  donne :

$$\dot{\epsilon} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \quad (2.26a)$$

$$= Ax + \psi_c(y, u) - A\hat{x} - \psi_c(y, u) - K(y - C\hat{x}) \quad (2.26b)$$

$$= (A - KC)\epsilon \quad (2.26c)$$

Si la matrice  $A - KC$  est stable, l'équation (2.26b) implique que l'erreur d'estimation de l'état tend asymptotiquement vers zéro. La vitesse de convergence est fixée par le positionnement des valeurs propres de cette matrice.

### 2.4.3 Observateurs à entrée inconnue (Chen and Patton, 1999)

La synthèse d'observateurs à entrée inconnue basée sur la théorie des observateurs de Luenberger n'est réalisable que pour des systèmes dont les fautes et les entrées inconnues sont additives. Cela signifie que le système doit s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \psi_c(y, u) + Ev + G_a \varphi_{act} \\ y = Cx + G_s \varphi_{capt} \end{cases} \quad (2.27)$$

**Remarque 2.4.2** : il est toujours possible de considérer la matrice  $E$  de rang plein colonne (Chen and Patton, 1999).

L'équation différentielle régissant le comportement de l'erreur d'estimation d'état lorsqu'aucune faute n'agit sur le système, est donnée par :

$$\dot{\epsilon} = (A - KC)\epsilon + Ev \quad (2.28)$$

La condition de stabilité de la matrice  $A - KC$  n'assure plus la convergence du vecteur d'état estimé vers le vecteur d'état réel lorsque des perturbations agissent sur le système. Pour obtenir la convergence vers l'état réel, il est nécessaire de modifier la procédure de synthèse. Pour cela, considérons le système suivant :

$$\dot{\zeta} = F\zeta + T\psi_c(y, u) + Ky \quad (2.29a)$$

$$\hat{x} = \zeta + Hy \quad (2.29b)$$

L'équation différentielle régissant l'évolution de  $x - \hat{x}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= Ax + \psi_c(y, u) + Ev - F\zeta - T\psi_c(y, u) - Ky - Hy \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$= Ax + (I - T)\psi_c(y, u) + Ev - F\zeta - Ky - HCAx - HC\psi_c(y, u) - HCEv \quad (2.31)$$

En posant  $K = K_1 + K_2$  :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= (A - HCA - K_1C)x - F\zeta + (I - T - HC)\psi_c(y, u) - K_2y + (I - HC)Ev \\ &= (A - HCA - K_1C)\epsilon - (F - (A - HCA - K_1C))\hat{x} \\ &\quad - (K_2 - FH)y - (T - (I - HC))\psi_c(y, u) - (HC - I)Ev \end{aligned} \quad (2.32)$$

Le système (2.29) est un observateur à entrée inconnue pour le système (2.27) si les matrices  $F$ ,  $T$ ,  $K$  et  $H$  peuvent être choisies telles que :

$$(HC - I)E = 0 \quad (2.33)$$

$$T = I - HC \quad (2.34)$$

$$F = A - HCA - K_1C \text{ stable} \quad (2.35)$$

$$K_2 = FH \quad (2.36)$$

Si ces conditions sont respectées, alors l'erreur d'estimation de l'état sera régie par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\epsilon} = F\epsilon \quad (2.37)$$

Comme  $F$  est stable, alors le vecteur d'état estimé convergera vers le vecteur d'état réel même en présence d'entrées inconnues.

Le théorème suivant (Chen and Patton, 1999) donne les conditions d'existence d'un UIO pour un système donné.

**Théorème 2.3** : *Les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (2.27) admette un UIO de la forme (2.29) sont :*

1. Le rang de la matrice  $CE$  doit être égal au rang de la matrice  $E$

2. La paire  $(C, A_1)$  est détectable<sup>4</sup> ou

$$A_1 = A - E[(CE)^T CE]^{-1}(CE)^T CA$$

La procédure de synthèse d'un observateur à entrée inconnue peut être décrite par l'algorithme suivant :

étape 1° : Tester la première condition du théorème 2.3. Si la condition n'est pas respectée, aller à l'étape 9.

étape 2° : Calculer les matrices  $H$ ,  $T$  et  $A_1$  en utilisant les formules suivantes :

$$H = E[(CE)^T CE]^{-1}(CE)^T \quad T = I - HC \quad A_1 = TA$$

étape 3° : Tester la deuxième condition du théorème. Si la paire  $(C, A_1)$  est observable, alors un UIO existe et  $K_1$  peut être calculé par positionnement de pôle dans ce cas aller à l'étape 8 sinon aller à l'étape 4.

étape 4° : Construire une matrice  $P$  telle que l'on ait :

$$PA_1P^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad CP^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}$$

étape 5° : Tester la détectabilité de  $(C, A_1)$ . Si au moins une valeur propre de  $A_{22}$  est instable, alors il est impossible de construire un UIO et dans ce cas, aller à l'étape 9.

étape 6° : Calculer  $K_p^1$  par placement de pôles de la matrice :  $A_{11} - K_p^1 C_1$ .

étape 7° : Calculer  $K_1$  en utilisant la formule suivante :

$$K_1 = P^{-1} \begin{bmatrix} (K_p^1)^T & (K_p^2)^T \end{bmatrix}^T$$

où la matrice  $K_p^2$  est une matrice non nulle de dimension appropriée.

étape 8° : Calculer  $F$  et  $K$  en utilisant :

$$\begin{aligned} F &= A_1 - K_1 C & K &= K_1 + K_2 \\ & & &= K_1 + FH \end{aligned}$$

étape 9° : Fin

Nous allons maintenant construire un générateur de résidus en utilisant la théorie de UIO.

#### 2.4.4 Générateur de résidus et observateurs d'ordre réduit

La théorie des UIO que nous venons de présenter peut être utilisées pour construire un générateur de résidus robustes vis-à-vis des entrées inconnues et sensibles aux fautes. Nous allons montrer que la synthèse d'un UIO implique que seule une partie de l'état est estimée par l'observateur. En réalité, l'algorithme de construction des UIO permet de dégager un sous-système découplé des perturbations. La dimension de ce sous-système étant inférieure à la dimension du système initial, nous parlons alors d'observateurs d'ordre réduit.

Pour terminer, nous montrerons comment nous pouvons utiliser ces observateurs pour localiser les pannes capteurs et actionneurs.

<sup>4</sup> La paire  $(C, A)$  est dite détectable si ses modes non observables sont stables

#### 2.4.4.1 Observateurs d'ordre réduit

La structure de l'observateur est donnée par les équations 2.29 :

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= F\zeta + T\psi_c(y, u) + Ky \\ \hat{x} &= \zeta + Hy\end{aligned}$$

Les matrices de structures  $F$ ,  $T$ ,  $K$  et  $H$  sont choisies pour respecter les conditions 2.33 à 2.36:

$$\begin{aligned}(HC - I)E &= 0 \\ T &= I - HC \\ F &= A - HCA - K_1C \text{ stable} \\ K_2 &= FH\end{aligned}$$

La matrice  $T$  est une matrice de changement de coordonnée d'état :

$$\begin{aligned}\epsilon = \hat{x} - x &= \zeta + Hy - x \\ &= \zeta - (I - HC)x \\ &= \zeta - Tx\end{aligned}$$

Si cette matrice est singulière, alors  $\zeta$  converge seulement vers une partie de l'état du système et l'UIO est un observateur d'ordre réduit.

**Proposition 2.4** *Si le rang de la matrice  $E$  est différent de zéro, alors la matrice de transformation de coordonnée d'état  $T$  est singulière.*

**Preuve** La condition 2.33 implique :

$$TE = 0 \iff \text{rang}(TE) = 0$$

L'inégalité de Sylvester () appliquée aux matrices  $T$  et  $E$  fournit l'inégalité suivante :

$$\text{rang}(T) + \text{rang}(E) - \text{nb}_{col}(T) \leq \text{rang}(TE)$$

Or

- $\dim(E) = n \times m_v \Rightarrow \text{rang}(E) = m_v$
- $\dim(T) = n \times n \Rightarrow \text{nb}_{col}(T) = n$

L'inégalité de Sylvester (Gantmacher, 1959) permet de majorer le rang de la matrice  $T$  :

$$\begin{aligned}\text{rang}(T) &\leq n + \text{rang}(TE) - \text{rang}(E) \\ &\leq n + 0 + m_v \\ &\leq n - m_v\end{aligned}$$

Si  $m_v \neq 0$ , alors :

$$\text{rang}(T) < n \tag{2.38}$$

La matrice  $T$  est par conséquent singulière.

□

Le vecteur de résidus peut-être obtenu en prenant la différence entre une combinaison linéaire des sorties estimées et la même combinaison linéaire des sorties mesurées :

$$\begin{aligned} e &= C\zeta - (I - CH)y \\ &= C\zeta - L_2y \end{aligned} \quad (2.39)$$

La matrice  $L_2$  correspond à une matrice de changement de coordonnée de sorties. Comme la matrice  $T$ , il est possible de montrer que cette matrice n'est pas de rang plein.

Finalement, le générateur de résidus réduit s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z} &= F^*z + T^*\psi(y,u) + K^*y \\ e^* &= C^*z - L_2^*y \end{cases} \quad (2.40)$$

avec :

$$\begin{aligned} T^*A - F^*T^* &= K^*C \\ C^*T^* &= L_2^*C \\ T^*E &= 0 \end{aligned}$$

avec  $T^*$  et  $L_2^*$  sont de rang plein ligne.

#### 2.4.4.2 Détection des défauts capteurs et actionneurs

Le système incluant les pannes est utilisé :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + \psi_c(y,u) + Ev + G_a\varphi_{act} \\ y &= Cx + G_s\varphi_{capt} \end{cases} \quad (2.41)$$

où  $\varphi_{act}$  représente les pannes actionneurs et composants pouvant se représenter de manière additive sur l'équation d'état du système et  $\varphi_{capt}$  représente les pannes capteurs. Dans la suite, la matrice  $G_s$  sera choisie, sans perte de généralité, égale à l'identité.

Pour montrer que les résidus  $e^*$  sont bien sensibles aux pannes capteurs et actionneurs, nous allons exprimer ces résidus en fonction de l'erreur d'estimation de l'état réduit :

$$\begin{aligned} \epsilon &= z - T^*x \\ \dot{\epsilon} &= \dot{z} - T^*\dot{x} \\ &= F^*\epsilon - T^*G_a\varphi_{act} + K^*\varphi_{capt} \end{aligned}$$

Le vecteur de résidus réduit peut être exprimé en fonction de  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} e^* &= C^*z - L_2^*y \\ &= C^*\epsilon - L_2^*\varphi_{capt} \end{aligned}$$

Le générateur de résidus s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} &= F^*\epsilon - T^*G_a\varphi_{act} + K^*\varphi_{capt} \\ e^* &= C^*\epsilon - L_2^*\varphi_{capt} \end{cases} \quad (2.42)$$



Les résidus générés à partir du système (2.42) sont d'une part découplés des entrées inconnues et permettent de détecter les pannes actionneurs (si  $\varphi_{act} \notin \ker G_a^T T^{*T}$ ) et les pannes capteurs.

Les UIO peuvent être utilisés pour structurer les résidus vis-à-vis des pannes et permettre ainsi leur localisation via la construction d'une banque d'observateurs.

#### 2.4.4.3 Localisation de défauts capteurs

Pour synthétiser des observateurs permettant de détecter et localiser les défauts capteurs, nous allons supposer qu'aucun actionneur ne présente de défaut ( $\varphi_{act} = 0$ ). Les équations du système sont alors :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + \psi_c(y, u) + Ev \\ y &= Cx \\ y_m &= Cx + \varphi_{capt} \end{cases} \quad (2.43)$$

Où  $y$  est la réelle (inconnue) du système et  $y_m$  est la sortie mesurée qui est connue et qui peut être sujette à des fautes. Le modèle du système peut s'exprimer en fonction de  $y_m$  :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + \psi(y_m - \varphi_{capt}, u) + Ev \\ y_m &= Cx + \varphi_{capt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} &= Ax + \psi_c(y_m, u) + \psi_e(y_m, u, \varphi_{capt}) + Ev \\ y_m &= Cx + \varphi_{capt} \end{cases} \quad (2.44)$$

Pour synthétiser les observateurs à entrée inconnue permettant d'isoler les pannes capteurs, le modèle doit pouvoir s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + \psi_c^j(y_m, u) + G_{\varphi_{capt}, j} \varphi_{capt, j} + Ev \\ y_m^j &= C^j x + \varphi_{capt}^j \\ y_{m, j} &= c_j x + \varphi_{capt, j} \end{cases} \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, p \quad (2.45)$$

où  $y_{m, j}$  représente la  $j^{\text{ième}}$  composante du vecteur  $y_m$  et  $c_j$  est la  $j^{\text{ième}}$  ligne de la matrice  $C$ .  $y_m^j$  est l'ensemble des sorties à l'exception de  $y_{m, j}$  et la matrice  $C^j$  est égale à la matrice  $C$  sans la ligne  $c_j$ .

En utilisant cette décomposition,  $p$  UIO peuvent être construits en utilisant l'algorithme présenté précédemment :

$$\begin{cases} \dot{z}^j &= F^{*j} z^j + T^{*j} \psi_c^j(y_m, u) + K^{*j} y_m^j \\ e^{*j} &= C^{*j} z^j - L_2^{*j} y_m^j \end{cases} \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, p \quad (2.46)$$

Les matrices  $F^{*j}$ ,  $T^{*j}$  et  $K^{*j}$  doivent être choisies pour respecter les conditions :

$$\left. \begin{aligned} T^{*j}E &= 0 \\ T^{*j}G_{\varphi_{capt},j} &= 0 \\ T^{*j}A - F^{*j}T^{*j} &= K^{*j}C^{*j} & F^{*j} \text{ stable} \\ C^{*j}T^{*j} &= L_2^{*j}C^j \end{aligned} \right\} \text{ pour } j = 1, \dots, p$$

Pour les observateurs synthétisés en respectant cette procédure, la table de signatures théoriques des défauts capteurs est remplie de '1' à l'exception de la diagonale principale qui est composée de '1'. D'après la définition de la «localisabilité» 1.5, la structure de cette table permet l'isolation (théorique) de tous les défauts capteurs.

#### 2.4.4.4 Localisation de défauts actionneurs

Pour localiser les défauts actionneurs, nous allons supposer que les capteurs ne sont pas défaillants ( $\varphi_{capt} = 0$ ). Le modèle du système est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + \psi_c(y,u) + Ev + G_a \varphi_{act} \\ y &= Cx \end{cases} \quad (2.47)$$

Le vecteur de pannes  $\varphi_{act}$  est décomposé de manière à extraire la composante  $\varphi_{act,j}$ . Le vecteur d'entrées inconnues  $v$  est alors étendu pour inclure la panne  $\varphi_{act,j}$  et l'observateur construit sera robuste vis-à-vis de cette panne.

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + \psi_c(y,u) + Ev + G_a^j \varphi_{act}^j + G_{aj} \varphi_{act,j} \\ y &= Cx \end{cases} \quad (2.48)$$

où  $G_a^j$  est la matrice  $G_a$  privée de sa  $j^{\text{ième}}$  colonne et  $G_{aj}$  est la  $j^{\text{ième}}$  colonne de la matrice  $G_a$ . De même,  $\varphi_{act}^j$  est égal au vecteur  $\varphi_{act}$  sans sa  $j^{\text{ième}}$  composante et  $\varphi_{act,j}$  est la  $j^{\text{ième}}$  composante du vecteur  $\varphi_{act}$ .

Notons  $v^j$  (resp.  $E^j$ ) le vecteur des entrées inconnues  $v$  (resp. de la matrice  $E$ ) étendu :

$$E^j = \begin{bmatrix} E & G_{aj} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad v^j = \begin{bmatrix} v \\ \varphi_{act,j} \end{bmatrix}$$

Le modèle s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + \psi_c(y,u) + E^j v^j + G_a^j \varphi_{act}^j \\ y &= Cx \end{cases} \quad (2.49)$$

Pour chaque  $j$  ( $j$  variant de 1 au nombre de pannes considérées  $m_{\varphi_{act}}$ ), un UIO est synthétisé à partir du système (2.49) :

$$\begin{cases} \dot{z}^j &= F^{*j} z^j + T^{*j} \psi_c(y,u) + K^{*j} y \\ e^{*j} &= C^* \zeta^j - L_2^{*j} y \end{cases} \quad (2.50)$$

Les matrices  $F^{*j}$ ,  $T^{*j}$  et  $K^{*j}$  doivent être choisies pour respecter les conditions :

$$\left. \begin{array}{l} T^{*j}E^j = 0 \\ T^{*j}A - F^{*j}T^{*j} = K^{*j}C^* \quad F^{*j} \text{ stable} \\ C^*T^{*j} = L_2^{*j}C \end{array} \right\} \text{ pour } j = 1, \dots, m_{\varphi_{act}}$$

Pour les observateurs synthétisés en respectant cette procédure, la table de signatures théoriques des défauts actionneurs est remplie de '1' à l'exception de la diagonale principale qui est composée de '1'. D'après la définition de la «localisabilité» 1.5, la structure de cette table permet l'isolation (théorique) de tous les défauts actionneurs modélisés.

### 2.4.5 Conclusion

Les observateurs de type Luenberger ont été développés pour les systèmes linéaires. De nombreux travaux ont permis de définir une classe de systèmes non linéaires mais admettant, via une transformation non linéaire difféomorphique de l'état, un modèle dont les équations représentant les dynamiques de l'état sont linéaires.

L'utilisation de ces observateurs pour la surveillance a donné lieu à un grand nombre de publications. Une théorie, permettant de synthétiser des observateurs à entrée inconnue fondée sur une approche algébrique de placement de pôles, a été développée pour générer des résidus structurés par rapport aux pannes.

Toutefois, l'utilisation de ces observateurs s'avère très restrictive quant au type de pannes considérées. Par nature, ces observateurs ne pourront être utilisés que pour des pannes additives. De plus, la classe de systèmes non linéaires pouvant être écrits sous la forme souhaitée est petite. Pour réaliser la surveillance d'un système non linéaire ne pouvant être linéarisé, d'autres types d'observateurs doivent être utilisés (observateurs à grand gain ou à mode glissant).

## 2.5 Surveillance des systèmes non linéaires affines en la commande

L'approche algébrique de placement de pôles pour synthétiser un observateur est intéressante dans le cas des systèmes linéaires. Lorsque cela n'est plus le cas, il s'avère impossible d'utiliser et même d'étendre cette méthode. En revanche, l'approche géométrique que nous allons maintenant présenter permet de traiter directement la classe des systèmes non linéaires affines en la commande. Les premiers travaux présentant l'approche géométrique pour la détection et la localisation de défauts sont l'œuvre de Massoumnia pour les systèmes linéaires (Massoumnia, 1986). Ils furent étendus par Hammouri pour les systèmes non linéaires affines en l'état (Hammouri *et al.*, 1998) et par Isidori pour les systèmes affines en la commande (De Persis and Isidori, 1999).

Cette section donne les bases de l'approche géométrique et les principaux résultats et théorèmes sans donner leurs démonstrations. La formulation et la solution du *l-NLPGFR* (local NonLinear Fundamental Problem of Residual Generation) seront présentées.

Lorsque le *l-NLPGFR* est résolu, nous obtenons un sous système, découplé des perturbations et

d'un sous ensemble de pannes, et sur lequel nous pouvons implanter un observateur. Pour conclure cette section, nous présenterons deux méthodes de synthèse d'observateurs non linéaires.

## 2.5.1 Le Problème Fondamental de la Génération de Résidus (PFGR)

### 2.5.1.1 Position du problème

Le problème de la génération de résidus pour les systèmes non linéaires est encore un problème largement ouvert. Dans cette section, nous allons présenter les travaux les plus récents traitant de ce sujet et utilisant une approche géométrique (De Persis and Isidori, 1999; Blanke *et al.*, 2000; Lootsma, 2001).

Les travaux, les plus généraux à ce jour, étudient la classe de systèmes non linéaires affines en la commande, c'est à dire les systèmes s'écrivant sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i + \sum_{i=1}^{m_\varphi} l_i(x)\varphi_i + \sum_{i=1}^{m_d} p_i(x)v_i \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (2.51)$$

où  $x$  est le vecteur d'état, défini sur un voisinage  $\mathcal{N}$  de l'origine dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $u_i$  sont les entrées de commande,  $y$  le vecteur des sorties mesurées,  $\varphi_i$  sont les fautes et  $v_i$  les perturbations. Les fonctions  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $l_i(x)$  et  $p_i(x)$  sont des champs de vecteurs lisses et les fonctions  $h_i$  (les composantes du vecteur  $h$ ) sont lisses.

Pour cette classe de systèmes, le PFGR admet la définition locale suivante :

**Définition 2.15 (Local NonLinear Fundamental Problem of Residual Generation (l-NLPGFR)):**

Considérons le système 2.51, le l-NLPGFR consiste à trouver, si possible, un filtre :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} &= \tilde{f}(y,\zeta) + \sum_{i=1}^m \tilde{g}_i(y,\zeta)u_i \\ e &= \tilde{h}(y,\zeta) \end{cases} \quad (2.52)$$

où  $\zeta \in \mathbb{R}^q$  avec  $1 \leq q \leq n$ ,  $e \in \mathbb{R}^s$  avec  $1 \leq s \leq p$ .  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}_i$  sont des champs de vecteurs lisses et  $\tilde{h}$  est un vecteur de fonctions lisses respectant  $\tilde{f}(0,0) = 0$  et  $\tilde{h}(0) = 0$ . Ce filtre est construit tel que si le système en cascade suivant :

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix}}_{\dot{x}^e} = \underbrace{\begin{pmatrix} f(x) \\ \tilde{f}(y,\zeta) \end{pmatrix}}_{f^e(x^e)} + \sum_{i=1}^m \underbrace{\begin{pmatrix} g_i(x) \\ \tilde{g}_i(y,\zeta) \end{pmatrix}}_{g_i^e(x^e)} u_i + \sum_{i=1}^{m_\varphi} \underbrace{\begin{pmatrix} l_i(x) \\ 0 \end{pmatrix}}_{l^e(x^e)} \varphi_i + \sum_{i=1}^{m_d} \underbrace{\begin{pmatrix} p_i(x) \\ 0 \end{pmatrix}}_{p^e(x^e)} v_i \\ e = \tilde{h}(y,\zeta) = h^e(x^e) \end{cases} \quad (2.53)$$

est défini sur un voisinage de l'origine  $x^e = (x,\zeta)^T = (0,0)^T$ , noté  $\mathcal{N}^e$ , alors les 3 propriétés suivantes sont respectées :

- (i). si  $\varphi = 0$ , alors  $e$  n'est pas affecté par  $u_i$  et  $v_j$ ,  $\forall i,j$ .
- (ii).  $e$  est affecté par  $\varphi$ .

- (iii).  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t; x^\circ, \zeta^\circ, u, \varphi = 0, v)\| = 0$  pour toute condition initiale  $x^\circ$  et  $z^\circ$  choisie dans un espace convenable contenant l'origine  $(x, \zeta)^T = (0, 0)^T$  et pour tout ensemble d'entrées admissibles. On remarquera que la convergence vers zéro du résidu n'est imposée uniquement qu'en l'absence de panne.

**Remarque 2.5.1** Cette définition de l-NLPGFR est presque identique à la définition générale 2.13. Seule une légère différence sur la formulation de la première condition est ajoutée, à savoir que la robustesse vis-à-vis des perturbations n'est souhaitée que dans le cas où les fautes sont nulles.

Dans cette définition, la condition (i), assure la robustesse du résidu, c'est-à-dire, que ni les signaux de commande  $u_i$ , ni les signaux de perturbations  $v_i$  n'affectent le résidu. La condition (ii) assure, quant à elle, la sensibilité des résidus vis-à-vis du signal de panne. Enfin, la condition (iii) assure la stabilité du générateur de résidus dans le cas non défaillant.

### 2.5.1.2 Résolution du l-NLPGFR

Nous allons maintenant présenter les principaux résultats trouvés dans les travaux de (De Persis and Isidori, 1999). Sans perte de généralité, seul le cas de pannes  $\varphi$  scalaires sera présenté.

Considérons le système en cascade (2.53). L'espace d'observabilité (ou encore l'espace des observations) de ce système, noté  $\mathcal{O}^e$  est défini comme le plus petit espace linéaire (sur  $\mathbb{R}$ ) des fonctions sur  $(X)^e$  contenant toutes les dérivées de Lie successives:  $L_{X_1} L_{X_2} \cdots L_{X_k} h_j^e$  pour  $j \in [1, \dots, p]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , avec  $X_i$ ,  $i \in k$ , l'ensemble des champs de vecteurs  $\{f^e, g_1^e, \dots, g_m^e, p_1^e, \dots, p_{m_d}^e\}$  (voir définition 2.6).

L'espace d'observabilité  $\mathcal{O}^e$  définit une *codistribution* d'observabilité  $d\mathcal{O}^e$  par :

$$d\mathcal{O}^e = \text{span}\{d\mathcal{O}(x^e), \mathcal{O} \subset \mathcal{O}^e\}, x^e \in \mathcal{X}^e \quad (2.54)$$

où  $d\mathcal{O}$  est l'opérateur de dérivation standard :

$$d\mathcal{O}(x^e) = \left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x_{n+q}} \end{array} \right)$$

L'annulateur de la codistribution d'observabilité, noté  $(d\mathcal{O}^e)^\perp$  peut être interprété comme la distribution d'inobservabilité du système (2.53). En conséquence, les conditions ((i)) et ((ii)) de la définition 2.15 sont équivalentes aux deux interprétations géométriques suivantes :

$$\text{span}\{g^e, p^e\} \subset (d\mathcal{O}^e)^\perp \text{ et } l^e \notin (d\mathcal{O}^e)^\perp \quad (2.55)$$

Si  $x^e = (x, \zeta)^T = (0, 0)^T$  est un point régulier de  $(d\mathcal{O}^e)$ , alors  $(d\mathcal{O}^e)$  peut être décrite par la plus petite codistribution invariante sous les champs de vecteurs  $\{f^e, g^e, p^e\}$  et contenue dans  $\text{span}\{dh^e\}$ . Cette codistribution est notée  $Q^e$ . Ainsi, dans le voisinage de  $(0, 0)^T$ , la relation suivante est correcte :

$$d\mathcal{O}^e = Q^e$$

La condition 2.55 devient :

$$\text{span}\{g^e, p^e\} \subset (Q^e)^\perp \text{ et } l^e \notin (Q^e)^\perp \quad (2.56)$$

Les deux conditions ((i)) et ((ii)) de la définition 2.15 du l-NLPGFR peuvent être remplacées par les conditions (2.56).

Le but est de déterminer la distribution d'inobservabilité du système et le changement de variable permettant de scinder le système en deux sous-systèmes tels que l'un des deux sous-systèmes soit parfaitement découplé des entrées inconnues. Un observateur pourra alors être implanté sur ce sous-système permettant d'estimer un sous-ensemble de l'état et un sous-ensemble de sortie (éventuellement transformés par des difféomorphismes) sans être affectés par les perturbations. En d'autres termes il sera possible de synthétiser un UIO.

**Théorème 2.5 ((Blanke *et al.*, 2000))** *Posons  $Q$  une distribution invariante conditionnée involutive<sup>5</sup> telle que :*

$$\text{span}\{p\} \subset Q \subset \ker\{d(\psi \circ h)\} \text{ et } l \notin Q \quad (2.57)$$

*pour une application surjective :*

$$\psi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{\bar{p}}$$

*définie localement autour de  $y = 0$ . Alors, il existe un changement de coordonnées d'état  $\tilde{x} = \Phi(x)$  et un changement de coordonnées de sortie  $\tilde{y} = \Psi(y)$ , définis localement autour respectivement de  $x = 0$  et  $y = 0$ , tels que dans le nouveau système de coordonnées, le système (2.51) s'écrive sous la forme :*

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{f}_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_2) + \tilde{g}_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_2)u + \tilde{l}_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\varphi \quad (2.58a)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{f}_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + \tilde{g}_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)u + \tilde{l}_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\varphi + \tilde{p}_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)v \quad (2.58b)$$

$$\tilde{y}_1 = \tilde{h}_1(\tilde{x}_1) \quad (2.58c)$$

$$\tilde{y}_2 = \tilde{h}_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \quad (2.58d)$$

*avec  $\tilde{x}_1 \in \mathbb{R}^v$ ,  $v \triangleq \text{codim}(Q)$  et  $\tilde{l}_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \neq 0$  localement autour de  $\Psi(0)$ .*

Le choix de la matrice  $Q$  est le point capital de la procédure de décomposition du système. Dans (De Persis and Isidori, 1999), un algorithme en deux phases est proposé pour obtenir une distribution  $Q$  permettant de résoudre, lorsque cela est possible, le l-NLPGFR. La distribution  $Q$  ainsi obtenue va garantir l'observabilité locale du sous-système découplé permettant ainsi d'envisager l'implémentation d'un observateur.

## 2.5.2 Résolution de l-NLFRPG

Le système original est décomposé suivant la procédure décrite dans la section précédente. Nous supposons donc que ce système est localement équivalent au système donné par les équations (2.58a) à (2.58d). La première condition du l-NLPGFR (Def. 2.15) impose que les résidus soient insensibles aux perturbations lorsque les pannes sont nulles. Cette condition sera respectée si le sous-système composé par les équations (2.58a) et (2.58c) est considéré et que les résidus sont

---

5. Une distribution  $\Delta$  est dite *conditionnée invariante* pour un système 2.51 si elle satisfait :  $[f, \Delta \cap \ker\{dh\}] \subset \Delta$  et  $[g_i, \Delta \cap \ker\{dh\}] \subset \Delta$

généérés en soustrayant les sorties (éventuellement transformées) mesurées aux sorties estimées.

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{f}_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_2) + \tilde{g}_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_2)u + \tilde{l}_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\varphi \\ \tilde{y}_1 &= \tilde{h}_1(\tilde{x}_1) \end{cases}$$

Un observateur pour ce sous-système est synthétisé sur la partie indépendante des pannes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= \tilde{f}_1(\hat{x}_1, \tilde{y}_2) + \tilde{g}_1(\hat{x}_1, \tilde{y}_2)u \\ \hat{y}_1 &= \tilde{h}_1(\hat{x}_1) \end{cases} \quad (2.59)$$

Les équations de l'observateur sont données par :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} &= \hat{f}_1(\zeta, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, u) \\ \hat{x}_1 &= \hat{h}_1(\zeta, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, u) \end{cases}$$

La sortie estimée du sous-système est donnée par :

$$\hat{y}_1 = \tilde{h}_1(\hat{h}_1(\zeta, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, u)) \quad (2.60)$$

Les résidus générés en soustrayant les sorties mesurées aux sorties estimées :

$$e = \tilde{y}_1 - \hat{y}_1 \quad (2.61)$$

seront bien découplés des entrées inconnues et affectés par les pannes. Ils résolvent donc le *l-NLPFGR*.

Nous allons maintenant présenter deux types d'observateurs différents : les observateurs à grand gain et les observateurs à mode glissant.

### 2.5.3 Les observateurs à grand gain

L'idée de base pour la synthèse des observateurs à grand gain consiste à masquer les non linéarités d'un système en mettant des gains très importants sur les parties linéaires (d'où le nom grand gain). Les premiers travaux présentant ce type d'observateurs sont l'œuvre de Gauthier et al (Gauthier *et al.*, 1992; Gauthier and Kupka, 1994).

Nous nous intéressons uniquement aux systèmes pouvant s'écrire sous la forme 2.59, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (2.62)$$

De plus, dans un but de simplifier les écritures, seul le cas mono-sortie est présenté. Ce système est supposé *uniformément observable*, ce qui signifie que sous le difféomorphisme  $\Psi(x)$  défini par :

$$\begin{aligned} \Psi : V &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow \zeta = \Psi(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1}h(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.63)$$

le système (2.62) s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{\zeta} = A\zeta + \Gamma(\zeta) + G(\zeta)u \quad (2.64a)$$

$$y = Cx \quad (2.64b)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma(\zeta) \end{pmatrix}, G(\zeta) = \begin{pmatrix} \bar{g}_1(\zeta_1) \\ \bar{g}_2(\zeta_1, \zeta_2) \\ \vdots \\ \bar{g}_n(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \end{pmatrix}$$

et  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

Le théorème suivant est démontré dans (Gauthier *et al.*, 1992), il donne les équations de l'observateur à grand gain.

**Théorème 2.6** *Supposons que le système (2.62) est uniformément observable, que les fonctions  $\gamma$  et  $\bar{g}_i$  sont globalement lipschitziennes et que  $u$  est bornée. Alors le système suivant :*

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^m g_i(\hat{x})u_i - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x}(\hat{x}) \right)^{-1} S_\theta^{-1} C^T (h(\hat{x}) - y) \quad (2.65)$$

où  $S_\theta$  est solution de

$$C^T C = \theta S_\theta + A^T S_\theta + S_\theta A \quad (2.66)$$

est un observateur exponentiel, dit à grand gain, pour le système (2.62).

Ce théorème à été étendu au cas multi-sortie par Bornard et Hammouri (Bornard and Hammouri, 1991).

En utilisant les formes particulières des matrices  $A$  et  $C$ , on trouve la matrice  $S_\theta = [S_\theta(l, k)]_{1 \leq l, k \leq n}$  suivante :

$$S_\theta(l, k) = \frac{(-1)^{l+k} C_{l+k-2}^{k-1}}{\theta^{l+k-1}} \quad (2.67)$$

où  $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ .

Par exemple, dans le cas de systèmes de dimension deux, on obtient :

$$S_\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta} & -\frac{1}{\theta^2} \\ -\frac{1}{\theta^2} & \frac{2}{\theta^3} \end{bmatrix}$$

Des exemples d'utilisation d'observateurs à grand gain, utilisant une décomposition en sous systèmes découplés obtenus à l'aide de l'approche géométrique peuvent être trouvés dans (Kaboré, 1992; Kaboré *et al.*, 1997) ou encore (Lootsma, 2001).



## 2.5.4 Les observateurs à mode glissant

### 2.5.4.1 Généralités

La synthèse des observateurs à mode glissant est basée sur la théorie des systèmes à structure variable introduite par Fillipov dans les années 60 (Fillipov, 1960) et Utkin à la fin des années 70 (Utkin, 1977). Les premiers travaux mentionnant ce type d'observateurs sont l'œuvre de Slotine (Slotine *et al.*, 1986), Canudas de Wit (Canudas de Wit and Slotine, 1991), Drakunov et Utkin (Drakunov and Utkin, 1995). Ces observateurs ont ceci de particulier que le terme correctif est une fonction discontinue  $sgn$  définie par :

$$sgn(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \\ \text{non définie en } x = 0 \end{cases}$$

Pour un système de la forme générale :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x,u) \\ y &= h(x) \end{cases}$$

Un observateur à mode glissant s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x},u) + \Lambda Sgn(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= h(\hat{x}) \end{cases} \quad (2.68)$$

où  $\Lambda$  est une matrice de gain de dimension  $n \times p$  et :

$$Sgn(y - \hat{y}) \triangleq \begin{pmatrix} sgn(y_1 - \hat{y}_1) \\ sgn(y_2 - \hat{y}_2) \\ \vdots \\ sgn(y_p - \hat{y}_p) \end{pmatrix}$$

### 2.5.4.2 Implémentation sur un système sous la forme triangulaire

**Théorème 2.7** *Les systèmes s'écrivant sous la forme canonique d'observabilité (2.64) admettent pour observateur le système constitué par les équations suivantes :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{\zeta}}_1 &= \hat{\zeta}_2 & + \bar{g}_1(\zeta_1)u & + \lambda_1 sgn_1(\zeta_1 - \hat{\zeta}_1) \\ \dot{\hat{\zeta}}_2 &= \hat{\zeta}_3 & + \bar{g}_2(\zeta_1, \tilde{\zeta}_2)u & + \lambda_2 sgn_2(\tilde{\zeta}_2 - \hat{\zeta}_2) \\ \vdots & & & \\ \dot{\hat{\zeta}}_{n-1} &= \hat{\zeta}_n & + \bar{g}_{n-1}(\zeta_1, \tilde{\zeta}_2, \dots, \tilde{\zeta}_{n-1})u & + \lambda_{n-1} sgn_{n-1}(\tilde{\zeta}_{n-1} - \hat{\zeta}_{n-1}) \\ \dot{\hat{\zeta}}_n &= \gamma(\zeta_1, \tilde{\zeta}_2, \dots, \tilde{\zeta}_n) & + \bar{g}_n(\zeta_1, \tilde{\zeta}_2, \dots, \tilde{\zeta}_n)u & + \lambda_n sgn_n(\tilde{\zeta}_n - \hat{\zeta}_n) \end{cases} \quad (2.69)$$

où :

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_i &= \hat{\zeta}_i + \lambda_{i-1} \text{sgn}_{i,\text{moy}}(\tilde{\zeta}_{i-1} - \hat{\zeta}_{i-1}) \text{ pour } i = 2, \dots, n \\ \tilde{\zeta}_1 &= \zeta_1\end{aligned}$$

et la fonction  $\text{sgn}_i$  est égale à zéro tant que la variable  $\hat{\zeta}_{i-1}$  n'a pas convergé puis est égale à la fonction signe classique. L'indice moy ajouté aux fonctions  $\text{sgn}$  signifie que cette fonction prend la valeur moyenne de la fonction  $\text{sgn}$  (c'est à dire la valeur en 0 de  $\text{sgn}$  filtrée par un filtre passe bas) afin de rejeter les variations dues au «chattering»<sup>6</sup>.

La démonstration de ce théorème peut être trouvée dans (Boukhobza, 1997).

Des exemples utilisant les observateurs à modes glissants pour effectuer la surveillance de systèmes non linéaires en utilisant la décomposition en sous-systèmes découplés peuvent être trouvés dans (Djemai *et al.*, 2000).

## 2.6 Conclusion

Ce chapitre a présenté différentes approches permettant de réaliser la surveillance de systèmes linéaires et non linéaires. Nous avons montré que les observateurs peuvent être utilisés non seulement pour détecter des défauts mais aussi, en utilisant une banque d'observateurs, pour les localiser. Pour permettre cette localisation, la notion d'observateurs à entrée inconnue a été introduite. Une première approche, basée sur le placement de pôles, a été présentée pour synthétiser ces observateurs à partir de la théorie des observateurs de Luenberger. Cette approche étant limitée à la classe très restrictive des systèmes linéaires ou linéarisables par injection d'entrée/sortie, une deuxième approche, géométrique cette fois, a été exposée. Cette seconde approche permet de décomposer un système en deux sous-systèmes dont un est découplé du vecteur d'entrée inconnue. Ce sous-système servira alors de base pour synthétiser un observateur non linéaire qui sera, sous certaines conditions, sensible à un sous-ensemble de fautes et robuste vis-à-vis des autres fautes et des perturbations. Parmi les différents observateurs non linéaires, les deux plus répandus dans la littérature ont retenu notre attention : les observateurs à grand gain et à mode glissant.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter la méthode de l'espace de parité. Cette autre approche est une alternative à l'utilisation des observateurs pour la détection et la localisation de défauts.

---

6. Perturbations hautes fréquences dues aux discontinuités des fonctions signes

# Chapitre 3

## L'espace de parité

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la théorie des observateurs appliquée pour la génération de résidus robustes. Cette approche est certainement la plus utilisée pour la surveillance. Toutefois, les outils géométriques utilisés pour la synthèse de ces observateurs sont souvent difficiles à mettre en œuvre. Un autre inconvénient des observateurs réside dans le choix des conditions initiales. Dans le cas des systèmes non linéaires, le choix des conditions initiales influe sur le temps de convergence de l'observateur. Or, le *PFGR* ne fournit des résidus utilisables que lorsque l'observateur a convergé (condition iii). Pendant le régime transitoire, il est impossible de réaliser la surveillance du système. Or ce temps de convergence correspond au démarrage du système. Durant cette phase, le système est soumis à de fortes contraintes et toute panne peut avoir de graves conséquences. Par exemple, les courants de démarrage d'un moteur électrique sont très importants et peuvent entraîner, en cas de coupure de spires, des arcs électriques dangereux pour le matériel mais surtout pour la sécurité du personnel. Pour essayer de s'affranchir de toutes ces contraintes imposées par les observateurs, il est intéressant d'étudier d'autres méthodes permettant de réaliser la surveillance des systèmes.

Une alternative aux observateurs pour assurer la surveillance des systèmes est la méthode dite de l'espace de parité. Cette méthode consiste en la validation des relations d'entrée/sortie (appelées aussi Relations de Redondance Analytique: RRA) lorsque celles-ci sont évaluées avec les données prélevées sur le système. Les premiers travaux présentant cette approche sont l'œuvre de Chow & Willsky au début des années 80 (Chow, 1980; Chow and Willsky, 1984). La méthode proposée dans cet article de Chow & Willsky repose sur une approche géométrique. Les équations d'état du système sont projetées dans l'espace orthogonal (complémentaire) à l'espace d'observabilité ceci pour obtenir des relations indépendantes des variables d'état inconnues. Cet espace, complémentaire à l'espace d'observabilité, est appelé *espace de parité*. Cette dénomination doit son origine au test de bits de parité sur les systèmes logiques, qui est très proche de cette méthode lorsque des systèmes statiques sont considérés.

Dans ce chapitre, nous allons présenter la méthode de l'espace de parité pour la génération de résidus, en utilisant des outils géométriques et algébriques.

Dans une première partie, nous donnons deux théorèmes permettant de déterminer le nombre de

RRA qu'il est possible d'obtenir pour un système donné et pour des ordres de dérivation fixés pour chaque sortie. Le premier théorème ne tiendra pas compte des considérations de robustesse vis-à-vis des perturbations, contrairement au second. Ces théorèmes sont bien connus et on été démontrés en utilisant les différentielles de Kähler (Diop and Fliess, 1991) ou en utilisant des outils d'analyse algébrique (Comtet-Varga, 1997). Dans ce mémoire, une démonstration originale est présentée. Cette preuve est réalisée en utilisant les outils de géométrie différentielle déjà utilisés dans le cadre de l'approche observateur pour extraire les sous-systèmes découplés.

Dans la deuxième partie, nous exploiterons ces deux théorèmes et nous présenterons l'approche géométrique de l'espace de parité, développée par Chow & Willsky. Initialement, cette méthode est limitée aux systèmes linéaires. Nous montrerons qu'il est possible de l'étendre à la classe des systèmes non linéaires linéarisables par injection d'entrée/sortie. Pour conclure cette partie, la structuration des résidus vis à vis des entrées inconnues et des fautes sera présentée.

La troisième partie traitera des systèmes non linéaires plus généraux. Une approche algébrique fondée sur la théorie de l'élimination sera présentée. Cette partie se conclura par la présentation d'une approche originale concernant la structuration des résidus vis-à-vis des pannes.

Enfin, une dernière partie traitera de la sensibilité des résidus vis-à-vis des pannes et donnera les conditions nécessaires garantissant cette sensibilité.

## 3.2 Sur les relations de redondance analytique

Dans cette partie, nous allons donner quelques généralités sur l'utilisation des relations de redondance analytique (RRA) pour la surveillance. Dans un premier temps, nous introduirons un certain nombre de notations utilisées dans la suite de ce chapitre. Ensuite, nous définirons le problème fondamental de la génération de résidus (PFGR) fondé sur l'utilisation des RRA.

### 3.2.1 Notations et généralités

Considérons la classe des systèmes se modélisant par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x,w) \\ y &= h(x,w) \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état,  $y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$  le vecteur des sorties et  $w \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^m$  le vecteur contenant les différents signaux d'excitation agissant sur le système, c'est-à-dire, les entrées connues  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{m_u}$ , les entrées inconnues  $v \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{m_v}$  et les fautes  $\varphi \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^{m_\varphi}$ . Les deux fonctions  $f(\cdot)$  et  $h(\cdot)$  sont supposées analytiques.

Les signaux  $y$  et  $w$  sont supposés infiniment dérivable. Un ordre de dérivation  $s_i$  est attribué à chaque sortie  $y_i$   $i \in [1, \dots, p]$ .

**Lemme 3.1 ((Comtet-Varga, 1997))** *la dérivée d'ordre  $s_i$  de la sortie  $y_i$  est une fonction lisse, s'écrivant sous la forme :*

$$y_i^{(s_i)} = \lambda_{i,s_i}(x, \bar{w}^{(s_i)})$$

**Preuve** La démonstration se fait par récurrence.

Pour  $s_i = 0$ , l'affirmation est respectée :

$$y_i = h_i(x, w)$$

est une fonction lisse. Sa dérivée, sera aussi une fonction lisse :

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \frac{dh_i(x, w)}{dt} = \frac{\partial h_i(x, w)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h_i(x, w)}{\partial w} \dot{w} \\ &= \frac{\partial h_i(x, w)}{\partial x} f(x, w) + \frac{\partial h_i(x, w)}{\partial w} \dot{w} \\ \Rightarrow \dot{y}_i &= \lambda_{i,1}(x, \bar{w}^{(1)}) \end{aligned}$$

Supposons que l'affirmation est vraie pour  $s_i \geq 1$  :

$$y_i^{(s_i)} = \lambda_{i,s_i}(x, \bar{w}^{(s_i)})$$

montrons alors que :

$$y_i^{(s_i+1)} = \lambda_{i,s_i+1}(x, \bar{w}^{(s_i+1)})$$

Pour cela, dérivons  $y_i^{(s_i)}$  :

$$\begin{aligned} y_i^{(s_i+1)} &= \dot{y}_i^{(s_i)} = \frac{d\lambda_{i,s_i}(x, \bar{w}^{(s_i)})}{dt} \\ &= \frac{\partial \lambda_{i,s_i}(x, \bar{w}^{(s_i)})}{\partial x} \dot{x} + \frac{\lambda_{i,s_i}(x, \bar{w}^{(s_i)})}{\partial \bar{w}^{(s_i)}} \dot{\bar{w}}^{(s_i)} \\ &= \frac{\partial \lambda_{i,s_i}(x, \bar{w}^{(s_i)})}{\partial x} f(x, w) + \frac{\lambda_{i,s_i}(x, \bar{w}^{(s_i)})}{\partial \bar{w}^{(s_i)}} \dot{\bar{w}}^{(s_i)} \\ y_i^{(s_i+1)} &= \lambda_{i,s_i+1}(x, \bar{w}^{(s_i+1)}) \end{aligned}$$

□

Toutes les sorties avec leurs dérivées temporelles successives sont regroupées pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_1^{(s_1)} \\ \vdots \\ y_p \\ \vdots \\ y_p^{(s_p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,0}(x, w) \\ \vdots \\ \lambda_{1,s_1}(x, \bar{w}^{(s_1)}) \\ \vdots \\ \lambda_{p,0}(x, w) \\ \vdots \\ \lambda_{p,s_p}(x, \bar{w}^{(s_p)}) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\bar{y}^{(s)} = \Lambda_s(x, \bar{w}^{(s)})$$

Les principales notations étant introduites, nous allons maintenant définir mathématiquement la notion de relations de redondance analytique et leur utilisation pour la surveillance.

### 3.2.2 Définitions et utilisation des RRA pour la surveillance

**Définition 3.1** On appelle Relation de Redondance Analytique (RRA) toute relation de la forme :

$$\omega_i(\bar{y}^{(s)}, \bar{w}^{(s)}) = 0$$

où  $y$  est le vecteur de sortie du système excité par les entrées  $w$ .

D'après cette définition, l'ensemble des RRA qu'admet un système n'est pas unique puisque, à partir d'une RRA, il est possible d'en recréer une infinité en la multipliant par n'importe quelle fonction en  $\bar{y}$ ,  $\bar{w}$  non nulle. De même, la combinaison de deux RRA génère une nouvelle RRA. Pour éviter toute ambiguïté quant aux ensembles de RRA, nous allons définir la notion d'indépendance algébrique (Kolchin, 1973).

**Définition 3.2** Soit  $\eta$  éléments  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\eta$  appartenant à une famille de fonctions  $\Omega$ . Ces éléments sont dits algébriquement dépendants sur un corps  $\mathbf{k}$  s'il existe un polynôme  $P(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\eta)$  à coefficients dans  $\mathbf{k}$ , non nul, tel que

$$P(\omega_1, \dots, \omega_\eta) = 0$$

Si un tel polynôme n'existe pas, alors les éléments  $\omega_1, \dots, \omega_\eta$  sont dits algébriquement indépendants.

**Remarque 3.2.1** l'indépendance est définie de façon algébrique. Des relations algébriquement indépendantes peuvent être liées dans un sens différentiel ou même algébrique. En particulier, si  $\omega_i$  s'écrit sous la forme d'un polynôme :  $\omega_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\eta} a_k (\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}) \frac{d\omega_k}{dt}$  alors  $\omega_i$  est algébriquement indépendant de  $\omega_j = 0$  pour  $j = 1, \dots, \eta$  et  $j \neq i$ . Nous verrons dans la suite de ce chapitre l'importance de cette remarque.

Nous allons maintenant définir le PFGR et nous verrons comment les RRA peuvent être utilisées pour le résoudre.

**Définition 3.3 (Le PFGR)** Considérons le système (3.1), le PFGR consiste à construire des résidus en évaluant les RRA avec les signaux d'entrée/sortie du système réel tels que les deux conditions suivantes soient respectées :

1. les résidus ne sont pas affectés par les perturbations
2. les résidus sont affectés par les fautes

**Remarque 3.2.2** les deux conditions de la définition de PFGR sont identiques aux deux premières conditions du PFGR présenté pour les observateurs. La troisième condition sur la convergence n'a plus lieu d'être ici, les RRA étant indépendantes des conditions initiales.

Pour utiliser les RRA comme générateur de résidus, il faut décomposer ces relations en deux parties, une ne dépendant que des signaux connus (les sorties mesurées et les entrées de commande) et l'autre dépendant obligatoirement d'au moins un des signaux inconnus (Staroswiecki and Comtet-Varga, 2001) :

$$\omega_i(\bar{y}^{(s)}, \bar{w}^{(s)}) = \omega_i(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = \omega_{i,c}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}) - \omega_{i,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = 0$$

où  $\omega_{i,c}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)})$  est la forme de calcul de  $\omega_i(\bar{y}^{(s)}, \bar{w}^{(s)})$  et vérifie :

$$\omega_{i,c}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}) = \omega_i(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, 0, 0) \quad \forall \bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)} \quad (3.3)$$

et  $\omega_{i,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)})$  est la forme d'évaluation de  $\omega_i(\bar{y}^{(s)}, \bar{w}^{(s)})$  et vérifie :

$$\omega_{i,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, 0, 0) = 0 \quad \forall \bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)} \quad (3.4)$$

Si les dérivées des signaux d'entrée/sortie sont connues, alors  $\omega_{i,c}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)})$  est évaluable en ligne. Si le système n'est soumis à aucune entrée inconnue ( $v = 0$ ), la forme d'évaluation est identiquement nulle en l'absence de défaut et est structurellement sensible aux fautes apparaissant explicitement dans cette forme. Dans ces conditions, les formes de calcul des RRA peuvent être utilisées comme générateur de résidus.

Lorsque le système est soumis à des entrées inconnues, la forme d'évaluation est influencée non seulement par les pannes mais aussi par les entrées inconnues. La forme de calcul des RRA (égale à la forme d'évaluation) ne peut plus être utilisée comme générateur de résidus puisque la première condition du PFGR de la définition 3.3 n'est plus respectée.

Pour résoudre le PFGR, nous devons construire des RRA qui soient robustes vis-à-vis des entrées inconnues. Pour réaliser cela, la forme d'évaluation est décomposée en deux parties, une indépendante des pannes et l'autre dépendant obligatoirement des pannes :

$$\omega_{i,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = \omega_{i,e,rob}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}) + \omega_{i,e,rob}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) \quad (3.5)$$

où

$$\omega_{i,e,rob}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}) = \omega_{i,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}, 0)$$

Pour permettre l'utilisation des formes de calcul comme générateur de résidus, les RRA doivent être conçues de telle sorte que l'expression  $\omega_{i,e,rob}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}, 0)$  soit toujours identiquement nulle.

La dernière étape pour utiliser les RRA pour la surveillance est la structuration des RRA afin de réaliser la localisation des défauts. Pour cela, les relations à concevoir doivent être insensibles aux entrées inconnues et la forme d'évaluation doit être construite de telle sorte que la table de signatures théoriques issue de ces relations ait une structure permettant la localisation.

La problématique étant posée, nous allons maintenant discuter du nombre de RRA algébriquement indépendantes qu'il est possible d'obtenir à partir d'un modèle donné.

### 3.2.3 Sur le nombre de RRA

Dans cette section, nous allons énoncer deux théorèmes fondamentaux permettant de déterminer *a priori* le nombre de RRA algébriquement indépendantes qu'il est possible d'obtenir pour un système et pour un ensemble d'ordres de dérivation des sorties fixé.

Le premier théorème que nous allons présenter, donne le nombre de RRA sans tenir compte des considérations de robustesse vis-à-vis des entrées inconnues.

**Théorème 3.2 ((Comtet-Varga, 1997))** *A tout p-uple  $(s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{N}^p$  fixé, on associe l'entier  $r_s$  défini comme étant le rang de la matrice jacobienne en  $x$  de  $\Lambda_s$  :*

$$r_s = \text{rang} \left[ \frac{\partial \Lambda_s}{\partial x} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_{1,0}}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \lambda_{1,0}}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_{1,s_1}}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \lambda_{1,s_1}}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_{p,0}}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \lambda_{p,0}}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_{p,s_p}}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \lambda_{p,s_p}}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

alors il existe exactement

$$\eta = \sum_{i=1}^p s_i + p - r_s$$

relations de redondance analytique algébriquement indépendantes faisant intervenir les variables  $\bar{y}_1^{(s_1)}, \bar{y}_2^{(s_2)}, \dots, \bar{y}_p^{(s_p)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}$  et  $\bar{\varphi}^{(s)}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = 0 \\ \vdots \\ \omega_\eta(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = 0 \end{array} \right.$$

**Preuve** La preuve de ce théorème se réalise en deux étapes. Dans un premier temps, nous déterminons le nombre de relations. Dans un second temps, nous prouvons l'indépendance algébrique de ces relations.

Considérons l'application  $\Lambda_s$ , définie par les fonctions  $\lambda_{i,j}$  pour  $i \in [1, \dots, p]$  et  $j \in [0, \dots, s_i]$ , telle que, pour tous les signaux admissibles  $u, v$  et  $\varphi$ , nous ayons :

$$\begin{aligned} \Lambda_s : \mathcal{X} &\longrightarrow \bar{\mathcal{Y}} \subset \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^p s_i + p} \\ x &\longrightarrow \bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)} = \Lambda_s(x, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) \end{aligned}$$

Par définition, le rang de  $\Lambda_s$  en  $x$  est égal à  $r_s$ . En appliquant le théorème du rang<sup>7</sup>, il existe deux difféomorphismes  $H$  et  $G$ , définis respectivement de  $\bar{\mathcal{Y}}$  sur  $A \subset \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^p s_i + p}$  et de  $U \subset \mathbb{R}^n$  sur  $\mathcal{X}$  :

$$\begin{aligned} H : \bar{\mathcal{Y}} &\longrightarrow A & G : \mathcal{X} &\longrightarrow U \\ \bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)} &\longrightarrow \bar{\gamma}_{u,v,\varphi} = H(\bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)}) & x &\longrightarrow \zeta = G(x) \end{aligned}$$

---

<sup>7</sup> voir théorème 1.2



tels que l'application  $(H \circ \Lambda_s \circ G)(x)$ , définie de  $\mathcal{X}$  sur  $\bar{\mathcal{Y}}$ , soit égale à :

$$(H \circ \Lambda_s \circ G) : \mathcal{X} \longrightarrow \bar{\mathcal{Y}}$$

$$x \longrightarrow \bar{\gamma}_{u,v,\varphi} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{r_s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les équations  $\bar{\gamma}_{u,v,\varphi} = 0$  sont les RRA recherchées. Le nombre de ces relations est égal à

$$\eta = \underbrace{\sum_{i=1}^p s_i + p}_{\dim \bar{\mathcal{Y}}} - \underbrace{r_s}_{\substack{\text{nb de colonnes de} \\ (H \circ \Lambda_s \circ G)(x) \\ \text{différentes de zéro}}}$$

Ceci prouve la première partie du théorème sur le nombre de relations. Maintenant, il nous faut prouver l'indépendance algébrique de ces relations.

$$\bar{\gamma}_{u,v,\varphi} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{r_s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{1-r_s} \\ 0 \end{pmatrix} \iff H(\bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)}) = \begin{pmatrix} X_{1-r_s} \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'application H est scindée en deux parties :

$$\begin{cases} H_1(\bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)}) = X_{1-r_s} \\ H_2(\bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)}) = 0 \end{cases}$$

avec :  $\dim H_1(\bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)}) = r_s \times 1$  et  $\dim H_2(\bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)}) = \eta \times 1$ . De plus, comme,  $H(\bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)})$  est un difféomorphisme, nous avons :

$$\text{rang} \left[ \frac{\partial H(\bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)})}{\partial \bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)}} \right] = \sum_{i=1}^p s_i + p \text{ rang} \left[ \frac{\partial H_1(\bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)})}{\partial \bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)}} \right] = r_s \text{ et } \text{rang} \left[ \frac{\partial H_2(\bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)})}{\partial \bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)}} \right] = \eta$$

Notons  $H_2(\bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)}) = [h_{2,1}(\bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)}) \dots h_{2,\eta}(\bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)})]^T$ . Nous voulons prouver que ces relations sont algébriquement indépendantes. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde et poser comme

hypothèse qu'il existe un polynôme  $P(H_2) = P(h_{2,1}, \dots, h_{2,\eta})$  différent du polynôme nul et égal à zéro :

$$P(h_{2,1}, \dots, h_{2,\eta}) = 0$$

D'après la définition 3.2, si un tel polynôme existe alors les relations sont algébriquement dépendantes.

$$P(H_2) = 0 \implies \frac{\partial P(H_2)}{\partial \bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)}} = \frac{\partial P(H_2)}{\partial H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)}} = 0$$

Nous avons donc :

$$\frac{\partial H_2}{\partial \bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)}} \in \ker \left( \frac{\partial P(H_2)}{\partial H_2} \right)$$

nous en déduisons :

$$\text{rang} \left( \frac{\partial H_2}{\partial \bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)}} \right) \leq \dim \ker \left( \frac{\partial P}{\partial H_2} \right)$$

La dimension de  $\ker \left( \frac{\partial P}{\partial H_2} \right)$  est donnée par la relation suivante :

$$\dim \ker \left( \frac{\partial P}{\partial H_2} \right) = nb_{col} \frac{\partial P}{\partial H_2} - \dim \text{Im} \left( \frac{\partial P}{\partial H_2} \right)$$

or  $nb_{col} \frac{\partial P}{\partial H_2} = \eta$ .

Par hypothèse, le polynôme  $P(H_2)$  est non nul. Ceci implique  $\dim \text{Im} \left( \frac{\partial P}{\partial H_2} \right) > 0$ . Par conséquent :

$$\dim \ker \left( \frac{\partial P}{\partial H_2} \right) < \eta \text{ et } \text{rang} \left( \frac{\partial H_2}{\partial \bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)}} \right) < \eta$$

Cette dernière inégalité est impossible puisque par construction, nous avons  $\text{rang} \left( \frac{\partial H_2}{\partial \bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)}} \right) = \eta$ .

L'hypothèse faite sur la dépendance algébrique des relations  $h_{2,i}(\bar{y}_{u,v,\varphi}^{(s)})$  est fausse. Ceci implique que les RRA obtenues sont algébriquement indépendantes.

□

Le théorème 3.2 fournit le nombre de RRA qu'il est possible d'obtenir pour un système donné. Ces relations s'écrivent :

$$\Omega : \begin{cases} \omega_1(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = 0 \\ \vdots \\ \omega_\eta(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

De manière à séparer les formes de calcul des formes d'évaluation, elles peuvent être réécrites :

$$\Omega : \begin{cases} \omega_{1,c}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}) = \omega_{1,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) \\ \vdots \\ \omega_{\eta,c}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}) = \omega_{\eta,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) \end{cases} \quad (3.7)$$

Les formes d'évaluation  $\omega_{i,e}$  ne sont pas calculables en ligne puisqu'elles dépendent des fautes. Lorsqu'aucune faute ( $\varphi = 0$ ) et qu'aucune entrée inconnue ( $v = 0$ ) n'agit sur le système, alors  $\omega_{i,e}$  est identiquement nulle (3.4) et la forme de calcul des RRA peut servir de générateur de résidus. Toutefois, dans la pratique, l'hypothèse de l'absence d'entrées inconnues est très restrictive. Il est alors nécessaire de la lever pour pouvoir utiliser les RRA comme générateur de résidus. Pour tenir compte de cela, un nouveau théorème permet de déterminer le nombre de RRA algébriquement indépendantes et robustes vis-à-vis des entrées inconnues.

**Théorème 3.3** *Pour tout p-uple  $(s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{N}^p$  fixé, on associe l'entier  $r_s^*$  défini comme étant le rang de la matrice jacobienne en  $x$  et en  $\bar{d}^{(s)}$  de  $\Lambda_s$  :*

$$r_s^* = \text{rang} \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial \Lambda_s}{\partial x} & \frac{\partial \Lambda_s}{\partial \bar{v}^{(s)}} \end{array} \right]$$

alors il existe exactement

$$\eta^* = \sum_{i=1}^p s_i + p - r_s^*$$

relations de redondance analytique algébriquement indépendantes faisant intervenir les variables  $\bar{y}_1^{(s_1)}, \bar{y}_2^{(s_2)}, \dots, \bar{y}_p^{(s_p)}, \bar{u}^{(s)}$ , et  $\bar{\varphi}^{(s)}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = 0 \\ \vdots \\ \omega_{\eta^*}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = 0 \end{array} \right.$$

**Preuve** La preuve de ce théorème est identique à celle du théorème précédent en étendant simplement le vecteur d'état  $x$  par les composantes  $\bar{v}^{(s)}$ .

□

Les RRA peuvent être réécrites de manière à séparer les formes de calcul des formes d'évaluation :

$$\Omega^* : \left\{ \begin{array}{l} \omega_{1,c}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}) = \omega_{1,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) \\ \vdots \\ \omega_{\eta^*,c}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}) = \omega_{\eta^*,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Les formes de calcul et d'évaluation sont, par définition, égales à :

$$\begin{aligned} \omega_{i,c}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}) &= \omega_i(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, 0) \\ \omega_{1,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) &= \omega_i(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) - \omega_{i,c}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}) \end{aligned}$$

En l'absence de panne, la forme d'évaluation est nulle ce qui implique une forme de calcul égale à zéro aussi. En revanche, si une faute apparaît, la forme d'évaluation devrait être différente de zéro impliquant la même réaction de la forme de calcul. Ces deux faits permettent de conclure sur la possibilité d'utiliser ces RRA comme générateur de résidus pour la détection des pannes.

### 3.2.4 Discussion sur le nombre de RRA et sur l'existence de RRA

Nous allons maintenant commenter les deux théorèmes présentés dans la section précédente. Effectivement, au premier abord, les résultats énoncés par ces théorèmes peuvent sembler identiques. Toutefois, nous allons montrer que ces résultats s'opposent sur un point, à savoir que le premier théorème garantit l'existence d'ordres de dérivation minimaux tels que des RRA existent tandis que le second théorème n'assure pas l'existence de tels ordres.

**Lemme 3.4** *Il existe des p-uples  $(s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{N}^p$  tels que le rang  $r_s$  de la matrice jacobienne  $\Lambda_s$  en  $x$  se stabilise impliquant qu'il existe des relations s'écrivant :*

$$\omega_i(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = 0$$

**Preuve** Par définition :

$$\begin{aligned} r_s = \text{rang} \left[ \frac{\partial \Lambda_s}{\partial x} \right] &\leq \min \left( \text{nombre de ligne de } \frac{\partial \Lambda_s}{\partial x}, \text{nombre de colonne de } \frac{\partial \Lambda_s}{\partial x} \right) \\ \implies r_s &\leq \min \left( \sum_{i=1}^p s_i + p, n \right) \end{aligned}$$

Donc, même en augmentant indéfiniment les ordres de dérivations sur les sorties, le rang de la matrice jacobienne en  $x$  de  $\Lambda_s$  sera au plus égal à  $n$ .

Le nombre de relations est donné par la formule du théorème 3.2 :  $\eta = \sum_{i=1}^p s_i + p - r_s$ . Si les ordres de dérivations sont choisis tels que  $\sum_{i=1}^p s_i + p \leq n$  alors  $\eta$  sera toujours égal à zéro. Pour garantir l'obtention de RRA, il suffit de choisir des ordres de dérivation adéquats.

□

Ce lemme est directement déduit du théorème 3.2. Non seulement il donne le nombre de RRA, mais aussi il stipule qu'il existe des RRA et que ce nombre de relations n'est pas borné. Effectivement, pour augmenter le nombre de relations, il suffit d'augmenter les ordres de dérivation. Les relations ainsi trouvées seront, de par le théorème 3.2, algébriquement indépendantes. Toutefois, nous allons montrer que cette augmentation du nombre de relations n'est qu'artificiel et que seules quelques relations sont réellement indépendantes, les autres pouvant être déduites par dérivation.

**Théorème 3.5** *Soit un p-uple  $(k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{N}^p$  tel que  $\sum_{i=1}^p k_i = n$  et  $\text{rang} \left[ \frac{\partial \Lambda_k}{\partial x} \right] = n$ , alors il existe seulement p RRA indépendantes (algébriquement et au sens de la dérivée) quels que soient les ordres de dérivation  $s_i > k_i$  choisis.*

**Preuve**  $\Lambda_k$  définit une application de  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Comme  $\text{rang} \left[ \frac{\partial \Lambda_k}{\partial x} \right] = n$  alors  $\frac{\partial \Lambda_k}{\partial x}$  est non singulière. D'après le théorème des fonctions inverses<sup>8</sup>, cette application est localement inversible :

$$x = \Lambda_k^{-1}(\bar{y}_1^{(k_1)}, \dots, \bar{y}_p^{(k_p)}, \bar{u}^{(k^*)}, \bar{v}^{(k^*)}, \bar{\varphi}^{(k^*)}) \quad (3.9)$$

avec  $k^* = \max\{k_i\}$  pour  $i = 1, \dots, p$ .

Considérons maintenant  $y_i^{(k_i+1)} = \lambda_{i, k_i+1}(x, \bar{u}^{(k_i+1)}, \bar{v}^{(k_i+1)}, \bar{\varphi}^{(k_i+1)})$  pour  $i \in [1, \dots, p]$ . Dans ces p

<sup>8</sup>. voir théorème 1.1

relations, la variable  $x$  est remplacée par sa valeur calculée en (3.9). Les relations ainsi trouvées sont  $p$  RRA puisqu'elles s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} y_1^{(k_1+1)} - \lambda_{1,k_1+1}(x, \bar{u}^{(k^*+1)}, \bar{v}^{(k^*+1)}, \bar{\varphi}^{(k^*+1)}) = 0 \\ \vdots \\ y_p^{(k_p+1)} - \lambda_{p,k_p+1}(x, \bar{u}^{(k^*+1)}, \bar{v}^{(k^*+1)}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1(\bar{y}_1^{(k_1+1)}, \bar{y}_2^{(k_2)}, \dots, \bar{y}_p^{k_p}, \bar{u}^{(k^*+1)}, \bar{v}^{(k^*+1)}, \bar{\varphi}^{(k^*+1)}) = 0 \\ \omega_p(\bar{y}_1^{(k_1)}, \bar{y}_2^{(k_2)}, \dots, \bar{y}_p^{k_p+1}, \bar{u}^{(k^*+1)}, \bar{v}^{(k^*+1)}, \bar{\varphi}^{(k^*+1)}) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Dans le tableau ci dessous, nous présentons la structure de ces relations vis-à-vis des signaux  $y_i^{(k_i+1)}$  :

|            | $y_1^{(k_1+1)}$ | $y_2^{(k_2+1)}$ | $\dots$ | $y_p^{(k_p+1)}$ |
|------------|-----------------|-----------------|---------|-----------------|
| $\omega_1$ | ✓               | -               |         | -               |
| $\omega_2$ | -               | ✓               |         | -               |
| $\vdots$   |                 |                 |         |                 |
| $\omega_p$ | -               | -               |         | ✓               |

où le symbole ✓ représente l'occurrence du signal dans la relation et le symbole – est utilisé lorsque le signal n'apparaît pas dans la relation. Il apparaît que les relations sont bien algébriquement indépendantes car  $\text{rang} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \bar{y}} \right] = p$ .

Nous allons maintenant montrer que ces relations sont aussi indépendantes au sens de la dérivée. Supposons qu'une relation  $\omega_j$  dépendante des autres relations au sens de la dérivée. Alors, cette relation s'écrit sous la forme :

$$\omega_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p a_i \left( \bar{y}^{(k)}, \bar{u}^{(k)}, \bar{v}^{(k)}, \varphi^{(k)} \right) \frac{d\omega_i}{dt}$$

La structure de la relation  $\omega_j$  doit alors faire apparaître un terme en  $y_i^{(k_i+2)}$ . Ceci est en contradiction avec le tableau donnant la structure de toutes les relations.

Si une sortie  $y_j$  est dérivée à un ordre supérieur à  $k_j + 1$  alors la nouvelle relation sera obtenue en dérivant  $\omega_j$  du système 3.10.

□

Lorsque la robustesse vis-à-vis des entrées inconnues n'est pas considérée, il existe autant de RRA indépendantes que le système admet de sorties.

Si le système est soumis à des entrées inconnues, alors, le théorème 3.3 permet de déterminer le nombre de RRA qu'il est possible d'obtenir. Contrairement au théorème 3.2, celui-ci ne garantit pas l'existence de relations. Ceci s'explique simplement par le fait que le rang  $r_s^*$  de la matrice jacobienne de  $\Lambda_s$  en  $x$  et en  $\bar{v}^{(s)}$  ne se stabilise pas forcément avec l'augmentation des ordres de

dérivation. Effectivement, l'augmentation de l'ordre de dérivation n'a plus seulement un effet sur le nombre de lignes de la matrice jacobienne comme précédemment mais aussi sur le nombre de colonnes ayant pour conséquence de ne plus pouvoir borner la valeur de  $r_s^*$ .

Toutefois, nous allons maintenant prouver que, lorsque le nombre de colonnes de la matrice  $\Lambda_s$  ( $n_{c\Lambda_s}$ ) augmente moins vite que le nombre de lignes ( $n_{l\Lambda_s}$ ), il existe des RRA.

**Théorème 3.6** *Si, lorsque les ordres de dérivation sur les sorties augmentent, le nombre de colonnes  $n_{c\Lambda_s}$  de la matrice  $\Lambda_s$  augmente plus vite que le nombre de lignes  $n_{l\Lambda_s}$  de  $\Lambda_s$  alors il existe*

$$\eta^* = n_{l\Lambda_s} - n_{c\Lambda_s}$$

RRA

**Preuve** La somme des indices de dérivation est égale à :

$$\sum_{k=1}^p s_k = n_{l\Lambda_s} - p$$

Le rang  $r^*$  de la matrice  $\Lambda_s$  est égal à :

$$r^* = \min(n_{l\Lambda_s}, n_{c\Lambda_s})$$

Si pour un  $p$ -uple  $s$ , nous avons  $r^* = n_{l\Lambda_s}$  alors, en appliquant le théorème 3.3, nous trouvons qu'il n'existe aucune RRA.

Si  $n_{c\Lambda_s}$  augmente moins vite que  $n_{l\Lambda_s}$ , alors, il existe un  $p$ -uple  $s^*$  tel que :

$$n_{c\Lambda_{s^*}} < n_{l\Lambda_{s^*}}$$

En appliquant le théorème 3.3, nous montrons qu'il existe exactement :

$$\eta^* = n_{l\Lambda_{s^*}} - n_{c\Lambda_{s^*}} > 0 \quad (3.11)$$

RRA

□

Nous allons maintenant présenter deux méthodes de calcul des RRA. La première approche est une méthode géométrique fondée sur la projection des équations du système dans un espace particulier ne dépendant plus de l'état (l'espace de parité ou d'inobservabilité du système). La seconde approche est une méthode algébrique fondée sur la théorie de l'élimination. Elle permet de traiter une classe importante de systèmes.

### 3.3 Calcul des RRA par projection

Cette approche est apparue initialement dans les travaux de Chow et Willsky (Chow and Willsky, 1984) où seuls les systèmes linéaires sont considérés. Nous allons détailler ici cette approche en considérant une classe de systèmes plus large, celle des systèmes admettant la représentation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(y,u)x + \psi(y,u,v,\varphi_{act}) \\ y &= Cx + \varphi_{capt} \end{cases} \quad (3.12)$$

Cette classe de systèmes englobe non seulement les systèmes linéaires et non linéaires linéarisables (voir chapitre observateur) mais aussi les systèmes linéaires à coefficients variant dans le temps. Dans une première partie, nous allons présenter le principe général de la méthode sans nous préoccuper des considérations de robustesse vis-à-vis des entrées inconnues. Ensuite, nous déclinons la méthode pour construire des RRA directement utilisables pour la surveillance, c'est-à-dire, découplées des entrées inconnues et structurées vis-à-vis des fautes.

### 3.3.1 Principe de la méthode

Supposons que le système étudié est localement observable et qu'à chaque sortie  $y_i$ , correspond un ordre de dérivation fixé  $s_i$ . De plus, nous supposons que ces ordres de dérivation sont choisis tels que  $p$  RRA indépendantes puissent être obtenues. Enfin, le système est supposé sous la forme canonique observable :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_p \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \end{array} \right. = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p,1} & \dots & A_{p,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_p \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \end{array} \right. = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & c_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_{capt,1} \\ \vdots \\ \varphi_{capt,p} \end{bmatrix}$$

où les matrices  $A_{i,j}$  dépendent de  $y$  et  $u$  et ont la structure suivante :

$$A_{i,i}(y,u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_{i,nc_i+1}(y,u) & \dots & \dots & \dots & a_{i,nc_i+1}(y,u) \end{bmatrix}_{(s_i-1) \times (s_i-1)}$$

$$A_{\substack{i,j \\ i \neq j}}(y,u) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \\ a_{i,nc_j+1}(y,u) & \dots & a_{i,nc_j+1}(y,u) \end{bmatrix}_{(s_i-1) \times (s_j-1)}$$

où  $nc_i = \sum_{k=1}^{i-1} s_k$  est le nombre de colonnes situées avant  $A_{i,i}$  ou  $A_{i,j}$  dans la matrice A. Les matrices  $c_i$  sont constantes et égales à :

$$c_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{1 \times (s_i-1)}$$

**Remarque 3.3.1** Si le système est sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z} &= \underline{A}(y,u)z + \underline{\psi}(y,u,v,\varphi_{act}) \\ y &= \underline{C}(y,u)z + \varphi_{capt} \end{cases}$$

où  $\underline{A}(y,u)$  et  $\underline{C}(y,u)$  ne sont pas sous la forme canonique observable, alors la transformation linéaire définie par  $x = Tz$  ou  $T$  est la matrice de passage construite comme suit :

$$T = [\underline{C}_1^T, \dots, (\underline{C}_1 \underline{A}^{s_1-1})^T, \dots, \underline{C}_p^T, \dots, (\underline{C}_p \underline{A}^{s_p-1})^T]$$

permet d'obtenir le système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= T \underline{A}(y,u) T^{-1} x + T \underline{\psi}(y,u,d,\varphi_{act}) \\ y &= \underline{C}(y,u) T^{-1} x + \varphi_{capt} \end{cases}$$

où les matrices  $T \underline{A}(y,u) T^{-1}$  et  $\underline{C}(y,u) T^{-1}$  sont sous la forme canonique observable (Guidorzi, 1975; Delmaire, 1996; Delmaire et al., 1999).

D'après la définition 2.6 de l'espace d'observabilité  $\mathcal{O}$ , la matrice  $T$  est égale à la matrice  $d\mathcal{O}$ . Le système, étant supposé observable, nous avons la condition de rang suivante :

$$\text{rang}(d\mathcal{O}) = n$$

et par conséquent, la matrice  $T$  est inversible.

Pour appliquer la méthode, considérons indépendamment les sorties  $y_i$  associées à leur sous-système respectif :

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= A_{i,i} x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p A_{i,j} x_j + \psi_i \\ y_i &= c_i x_i \end{cases} \quad (3.14)$$

En utilisant la structure des matrices  $A_{i,k}$  et  $c_i$ , nous avons :

$$c_i A_{i,i}^k = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underbrace{1}_{k^{\text{ième}} \text{ colonne}} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

pour  $0 \leq k \leq s_i - 1$ ,

$$c_i A_{i,i}^{s_i} = \begin{bmatrix} a_{i,nc_i+1}(y,u) & \cdots & a_{i,nc_i+1}(y,u) \end{bmatrix}$$

et

$$c_i A_{i,j}^k = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

quel que soit  $k$ . La sortie  $y_i$  est considéré sur son horizon de dérivation :

$$\begin{aligned} y_i &= c_i x_i + \varphi_{capt,i} = x_{i,1} + \varphi_{capt,i} \\ \dot{y}_i &= x_{i,2} + \psi_{i,1} + \dot{\varphi}_{capt,i} \\ &\vdots \\ y_i^{(s_i)} &= c_i A_{i,i}^{s_i} x_i + \psi_{i,1}^{s_i-1} + \cdots + \psi_{i,s_i} + \varphi_{capt,i}^{(s_i)} \\ \Rightarrow \bar{y}_i^{(s_i)} &= OBS_{i,s_i} x_i + COM_{i,s_i}(c_i, A_{i,i}) \bar{\psi}_i^{(s_i-1)} + \bar{\varphi}_{capt,i}^{(s_i)} \end{aligned} \quad (3.15)$$



$$\text{où } OBS_{i,s_i} = \begin{bmatrix} I_{s_i} \\ c_i A_{i,i}^{s_i} \end{bmatrix} \text{ et } COM_{i,s_i}(c_i, A_{i,i}) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ c_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ c_i A_{i,i}^{s_i-1} & \dots & c_i \end{bmatrix}.$$

L'opération est réitérée pour chaque sortie pour obtenir :

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_1^{(s_1)} \\ \vdots \\ \bar{y}_p^{(s_p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} OBS_{1,s_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & OBS_{p,s_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} COM_{1,s_1}(c_1, A_{1,1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & COM_{p,s_p}(c_p, A_{p,p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1^{(s_1)} \\ \vdots \\ \bar{\psi}_p^{(s_p)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_{capt,1}^{(s_1)} \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_{capt,p}^{(s_p)} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = OBS_s(C,A)x + COM_s(C,A)\bar{\psi}^{(s)} + \bar{\varphi}_{capt}^{(s)} \quad (3.16)$$

Le principe de la méthode de l'espace de parité par projection est de trouver une matrice  $W(y,u)$  telle que :

$$W(y,u)OBS_s(C,A) = 0 \quad (3.17)$$

Ou, de manière équivalente,  $W(y,u)^T \in \ker(OBS_s^T(C,A))$ . Une matrice respectant ces conditions permet d'engendrer l'espace d'inobservabilité du système. Les dimensions de cette matrice, si elle existe, sont données par le lemme suivant :

**Lemme 3.7** *La matrice  $W(y,u)$  décrivant une base de l'espace de parité, c'est-à-dire respectant l'égalité (3.17), est composée de  $\sum_{i=1}^p s_i + p$  colonnes et de  $p$  lignes.*

**Preuve** Le nombre de colonnes de  $W(y,u)$  est égal au nombre de lignes de la matrice  $OBS_s(C,A)$  donc égal à  $\sum_{i=1}^p s_i + p$ .

Pour déterminer le nombre de lignes de  $W(y,u)$ , nous allons utiliser la forme canonique d'observabilité des matrices  $A_{i,i}$  et  $c_i$ . Ainsi les matrices  $OBS_{i,s_i}(c_i, A_{i,i})$  s'écrivent sous la forme :

$$OBS_{i,s_i} = \begin{bmatrix} I_{s_i} \\ a_{i,nc_i+1} \quad \dots \quad a_{i,nc_i+1} \end{bmatrix}$$



Ces relations peuvent être décomposées en forme de calcul et forme d'évaluation. Si certaines formes d'évaluation ne font pas intervenir d'entrées inconnues alors ces relations peuvent servir de générateur de résidus. Dans le cas contraire, des contraintes doivent être ajoutées pour déterminer la matrice  $W(y,u)$  et obtenir des relations robustes vis-à-vis des entrées inconnues. Nous allons maintenant expliciter ces contraintes.

### 3.3.2 Robustesse vis-à-vis des entrées inconnues

Considérons le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_p \end{bmatrix}}_{\dot{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A_{1,1}(y,u) & \dots & A_{1,p}(y,u) \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p,1}(y,u) & \dots & A_{p,p}(y,u) \end{bmatrix}}_{A(y,u)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1(y,u) \\ \vdots \\ B_p(y,u) \end{bmatrix}}_{B(y,u)} + \underbrace{\begin{bmatrix} E_1(y,u) \\ \vdots \\ E_p(y,u) \end{bmatrix}}_{E(y,u)} v + \underbrace{\begin{bmatrix} F_1(y,u) \\ \vdots \\ F_p(y,u) \end{bmatrix}}_{F(y,u)} \varphi_{act} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}}_y &= \underbrace{\begin{bmatrix} c_1(y,u) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & c_p(y,u) \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_{capt,1} \\ \vdots \\ \varphi_{capt,p} \end{bmatrix}}_{\varphi_{capt}} \end{aligned}$$

Les matrices  $A(y,u)$  et  $C$  sont supposées sous la forme canonique observable.

Le principe de la méthode exposé précédemment est utilisé sur ce système pour former le vecteur des sorties sur leurs horizons de dérivation respectifs :

$$\begin{aligned} \bar{y}^{(s)} &= \begin{bmatrix} OBS_{1,s_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & OBS_{p,s_p} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} COM_{i,s_1}(c_1, A_{1,1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & COM_{p,s_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_1^{(s_1)}(y,u) \\ \vdots \\ \bar{B}_p^{(s_p)}(y,u) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} COM_{1,s_1}(c_1, A_{1,1}, E_1) \\ \vdots \\ COM_{p,s_p}(c_p, A_{p,p}, E_p) \end{bmatrix} \bar{v}^{(s)} + \begin{bmatrix} COM_{1,s_1}(c_1, A_{1,1}, F_1) \\ \vdots \\ COM_{p,s_p}(c_p, A_{p,p}, F_p) \end{bmatrix} \bar{\varphi}_a^{(s)} + \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_{act,1}^{(s_1)} \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_{capt,p}^{(s_p)} \end{bmatrix} \quad (3.21) \end{aligned}$$

Avec :

$$COM_{i,s_i}(c_i, A_{i,i}, X) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_i X & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_i A_{i,i}^{s_i-1} X & \dots & c_i X & \underbrace{0 \dots 0}_{\max_i \{s_i\} - s_i} \end{bmatrix}$$

Les RRA robustes vis-à-vis des entrées inconnues  $v$  sont obtenues en projetant le système (3.21) dans un sous-espace invariant par rapport aux variables d'état  $x$  et aux perturbations  $v$ . La matrice de projection  $W(y,u)$  permettant ces deux découplages doit vérifier les deux contraintes suivantes :

$$\begin{cases} W(y,u)OBS_s(C,A) & = 0 \\ W(y,u)COM(C,A,E) & = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

De plus, la matrice  $W(y,u)$  doit assurer la sensibilité des relations aux pannes. Ceci entraîne la condition suivante :

$$W(y,u)COM(C,A,F) \neq 0$$

Ces trois conditions sont équivalentes à :

$$\begin{cases} W^T(y,u) \in \ker(OBS_s^T) \cap \ker(COM(C,A,E)^T) \\ W^T(y,u) \notin \ker(COM(C,A,F)^T) \end{cases} \quad (3.23)$$

Les RRA sont alors obtenues en multipliant le système d'équations (3.22) par  $W(y,u)$  :

$$W(y,u)\bar{y}^{(s)} = W(y,u)COM_s(C,A)\bar{B}^{(s)}(y,u) + W(y,u)COM(C,A,F)\bar{\varphi}_{act}^{(s)} + W(y,u)\bar{\varphi}_{capt}^{(s)}$$

Les RRA calculées de la sorte peuvent servir directement de générateur de résidus pour la détection mais pas pour la localisation des défauts. Cette tâche nécessite la construction de RRA robustes vis-à-vis des entrées inconnues mais ayant une table de signatures de panne permettant la localisation. Nous allons maintenant nous intéresser à la construction des RRA structurées vis-à-vis des pannes.

### 3.3.3 Robustesse vis-à-vis des pannes

Comme pour les UIO, nous allons considérer les deux types de pannes suivants :

- les pannes actionneurs ou paramètres ( $\varphi_{act}$ ) qui peuvent se modéliser par l'ajout d'un terme additif sur l'équation d'état du système.
- les pannes capteurs ( $\varphi_{capt}$ ) qui se modélisent par un terme additif sur l'équation de la mesure.

#### 3.3.3.1 Les pannes actionneurs

Ces pannes sont modélisées par le vecteur  $\varphi_{act}$  et par la matrice d'influence  $F(y,u)$ . Pour construire des RRA structurées, nous allons scinder le vecteur des pannes en deux :

- $\varphi_{act,j}$  est la  $j^{\text{ième}}$  composante du vecteur  $\varphi_{act}$
- $\varphi_{act}^j$  est le vecteur  $\varphi_{act}$  sans sa  $j^{\text{ième}}$  composante.

La matrice  $W(y,u)$  recherchée doit appartenir aux espaces d'inobservabilité du système, des perturbations et au sous-ensemble de fautes  $\varphi_{act}^j$ .

Exprimons ceci sous la forme de projection. La partie dépendant des pannes est scindée de la manière suivante :

$$F(y,u)\varphi_{act} = \begin{bmatrix} F_1(y,u) \\ \vdots \\ F_p(y,u) \end{bmatrix} \varphi_{act} = \begin{bmatrix} F_{1,j}(y,u) \\ \vdots \\ F_{p,j}(y,u) \end{bmatrix} \varphi_{act,j} + \begin{bmatrix} F_1^j(y,u) \\ \vdots \\ F_p^j(y,u) \end{bmatrix} \varphi_{act}^j \quad (3.24)$$

Le vecteur des sorties et de leurs dérivées s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \bar{y}^{(s)} = OBS_s x &+ COM_s(C,A)\bar{B}(y,u)^{(s)} + COM_s(C,A,E)\bar{v}^{(s)} \\ &+ COM_s^j(C,A,F^j)\bar{\varphi}_{act}^{(s)} + COM_{s,j}(C,A,F_j)\bar{\varphi}_{act,j}^{(s)} \end{aligned}$$

La matrice de projection  $W(y,u)$  devra alors satisfaire aux trois conditions de robustesse suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} W(y,u)OBS_s(C,A) = 0 \\ W(y,u)COM_s(C,A,E) = 0 \\ W(y,u)COM_s^j(C,A,F^j) = 0 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

et à la condition de sensibilité :

$$W(y,u)COM_{s,j}(C,A,F_j) \neq 0 \quad (3.26)$$

ou encore :

$$W^T(y,u) \in \ker(OBS_s^T(C,A)) \cap \ker(COM_s^T(C,A,E)) \cap \ker(COM_s^j(C,A,F^j)) \quad (3.27)$$

$$W^T(y,u) \notin \ker(COM(C,A,F_j)^T) \quad (3.28)$$

Les RRA sont toujours obtenues en multipliant l'égalité (3.21) à gauche par  $W(y,u)$ .

En appliquant cette procédure pour différents sous-ensembles de pannes, il est alors possible de construire des RRA permettant la localisation des défauts si de telles relations existent (leur nombre étant fourni par le théorème 3.3).

### 3.3.3.2 Les pannes capteurs

Ce type de pannes est modélisé par un terme additif sur l'équation de mesure du système. Toutefois les sorties injectées dans les matrices  $A(y,u)$ ,  $B(y,u)$ ,  $E(y,u)$  et  $F(y,u)$  sont les sorties réelles et non les sorties mesurées.

Le système est alors modélisé par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A(y,u)x + B(y,u)v + E(y,u)v + F(y,u)\varphi_{act} \\ y = Cx \\ y_m = Cx + \varphi_{capt} \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Pour construire des RRA structurées vis-à-vis des pannes  $\varphi_{capt}$ , le système doit être décomposé de manière à trouver un sous-système découplé d'un sous-ensemble de sorties sur lequel la méthode de projection pourra être appliquée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^j = A_1^j(y,u)x^j + A_2^j(y,u)x_j + B^j(y,u)v + E^j(y,u)vF^j(y,u)\varphi_{act} \\ \dot{x}_j = A_{j,1}(y_j,u)x_j + B_j(y_j,u)v + E_j(y_j,u)v + F_j(y_j,u)\varphi_{act} \\ y_m^j = C_1^j x^j + C_2^j x_j + \varphi_{capt}^j \\ y_{m,j} = C_j x_j + \varphi_{capt,j} \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Le sous-système qui nous intéresse est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_j &= A_{j,1}(y_j, u)x_j + B(y_j, u) + E(y_j, u)v + F(y_j, u)\varphi_{act} \\ y_{m,j} &= C_j x_j + \varphi_{capt,j} \end{cases} \quad (3.31)$$

Ce nouveau système est découplé des sorties  $y^j$ . Une matrice  $W(y_{m,j}, u)$  peut alors être calculée pour obtenir des RRA robustes vis-à-vis de  $y^j$  et donc de  $\varphi_{capt}^j$ . En répétant l'opération pour plusieurs sous-ensembles de sorties  $y^j$ , il est alors possible de structurer les RRA pour localiser les défauts capteurs.

### 3.3.4 Conclusion

La méthode de l'espace de parité par projection est une méthode qui est bien appropriée pour détecter les pannes sur des systèmes linéaires ou linéarisés. Toutefois, pour les systèmes linéarisés, la localisation peut s'avérer compliquée, en particulier lorsque les pannes capteurs sont considérées car celles-ci vont intervenir sur les équations de mesure et d'état. Cette double influence nécessite de transformer le système de manière à trouver un sous-système découplé d'un sous-ensemble de sorties. Pour trouver la transformation, l'approche géométrique présentée dans le chapitre traitant des observateurs, pourra être utilisée.

La méthode de génération de résidus par projection dans l'espace de parité ne s'applique que pour une classe de systèmes restreinte. Nous allons maintenant proposer une méthode fondée sur la théorie de l'élimination permettant de déterminer les RRA pour une classe de système plus large.

## 3.4 Calcul des RRA par élimination

Le principe de cette approche consiste à éliminer les variables inconnues apparaissant dans un système d'équations analytiques ou différentielles. Le principe en lui-même n'impose aucune condition quant à la forme du modèle excepté les hypothèses d'analyticité des fonctions  $f(\cdot)$  et  $h(\cdot)$ . Toutefois, en pratique, la théorie de l'élimination se limite au cas des systèmes polynomiaux, pour lesquels des outils informatiques sont disponibles. Pour cette raison, nous considérerons des systèmes pouvant être modélisés par des fonctions polynomiales. Cette hypothèse n'est pas restrictive dans le sens où tous les systèmes analytiques peuvent être décomposés, en utilisant la décomposition en série de Taylor, en un système polynomial.

Pour débiter cette section, le calcul des RRA en utilisant un algorithme d'élimination particulier est présenté. Puis une approche originale de structuration des relations permettant la localisation des pannes est exposée.

### 3.4.1 Calcul des RRA

Le système considéré est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u, v, \varphi) \\ y &= h(x, u, v, \varphi) \end{cases} \quad (3.32)$$

où  $f(\cdot)$  et  $h(\cdot)$  sont supposées polynomiales.

Les sorties sont dérivées jusqu'aux ordres  $s_i$  pour former le système (3.2) :

$$\bar{y}^{(s)} = \Lambda_s(x, \bar{u}^{(s)}, \bar{v}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) \quad (3.33)$$

Le calcul de RRA revient à éliminer dans le système (3.33) les variables d'état  $x$ , les perturbations  $\bar{v}^{(s)}$  et éventuellement des composantes du vecteur de pannes pour construire des RRA structurées. Il existe plusieurs méthodes pour réaliser l'élimination des variables. Parmi ces méthodes, trois font l'objet de développements importants et ont donné lieu à des implantations logicielles :

- la théorie de l'élimination (Diop, 1989; Diop, 1991)
- les bases de Groebner (ou Gröbner) (Cox *et al.*, 1992; Becker and Weispfenning, 1998; Comtet-Varga *et al.*, 1999)
- les ensembles caractéristiques (Ritt, 1950; Glad, 1989; Ljung and Glad, 1999)

Les deux premières approches traitent des systèmes algébriques et éliminent les variables spécifiées par l'utilisateur suivant un ordre imposé. La dernière approche traite des systèmes différentiels et élimine les différentes variables ainsi que leurs dérivées. Cette méthode nécessite aussi de fixer une relation d'ordre entre les différentes variables à éliminer et leurs dérivées.

Ces trois méthodes nécessitent qu'un ordre d'élimination soit fixé et leurs algorithmes respectifs utilisent tous la division euclidienne. Toutefois pour la théorie de l'élimination développée par Diop (Diop, 1989) ainsi que pour les ensembles caractéristiques (Ritt, 1950), l'utilisation de la division euclidienne entraîne l'apparition d'inéquations polynomiales pour assurer des dénominateurs toujours différents de zéro. Ces inégalités restreignent le domaine de validité des RRA en imposant des contraintes difficiles à tester sur les trajectoires du système. Pour cette raison, nous avons choisi d'utiliser les bases de Groebner comme algorithme d'élimination.

Pour déterminer les RRA issues d'un système s'écrivant sous la forme 3.32, considérons l'idéal  $I$ , dont la base génératrice est constituée des polynômes  $\bar{y}^{(s)} - \Lambda(x, \bar{w}^{(s)})$  :

$$\begin{aligned} I &= \left\langle y_1 - \lambda_{1,0}, \dots, y_1^{(s_1)} - \lambda_{1,s_1}, \dots, y_p - \lambda_{p,0}, \dots, y_p^{(s_p)} - \lambda_{p,s_p} \right\rangle \\ &= \left\langle f_1, \dots, f_{\sum_{i=1}^p s_i + p} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.34)$$

Un algorithme de calcul formel est utilisé pour trouver une base de Groebner de cet idéal en utilisant l'ordre d'évaluation suivant :

$$\underbrace{x_1 > \dots > x_n}_{\text{élimination des variables d'états}} > \underbrace{v^{(s)} > \dots > \dot{v} > v}_{\text{robustesse vis-à-vis des entrées inconnues}} > \underbrace{\varphi^{(s)} > \dots > \varphi}_{\text{structuration des RRA pour la localisation}} > \underbrace{y^{(s)} > u^{(s)} > \dots > y > u}_{\text{minimisation des ordres de dérivation}} \quad (3.35)$$

L'ordre d'élimination n'est pas unique, toutefois les variables d'état  $x$  seront toujours supérieures aux autres variables, qui seront arrangées suivant des considérations de robustesse. Le tableau

ci-dessous présente la structure des polynômes avant et après le calcul des bases de Groebner.

|                            | $x_1$ | $\dots$ | $x_n$ | $v^{(s)}$ | $\dots$ | $v$ | $\bar{\varphi}^{(s)}$ | $\bar{y}^{(s)}$ | $\bar{u}^{(s)}$ |
|----------------------------|-------|---------|-------|-----------|---------|-----|-----------------------|-----------------|-----------------|
| $f_1$                      | ✓     |         | ✓     | ✓         |         | ✓   | ✓                     | ✓               | ✓               |
| $f_2$                      | ✓     |         | ✓     | ✓         |         | ✓   | ✓                     | ✓               | ✓               |
| $\vdots$                   |       |         |       |           |         |     |                       |                 |                 |
| $f_{\sum_{i=1}^p s_i + p}$ | ✓     |         | ✓     | ✓         |         | ✓   | ✓                     | ✓               | ✓               |

↓

|                     | $x_1$ | $x_2$   | $\dots$ | $x_n$ | $v^{(s)}$ | $\dots$ | $v$ | $\bar{\varphi}^{(s)}$ | $\bar{y}^{(s)}$ | $\bar{u}^{(s)}$ |
|---------------------|-------|---------|---------|-------|-----------|---------|-----|-----------------------|-----------------|-----------------|
| $g_1$               | ✓     | ✓       |         | ✓     | ✓         |         | ✓   | ✓                     | ✓               | ✓               |
| $g_2$               | 0     | ✓       |         | ✓     | ✓         |         | ✓   | ✓                     | ✓               | ✓               |
| $\vdots$            |       |         |         |       |           |         |     |                       |                 |                 |
| $g_{\tau-\eta+1}$   | 0     | $\dots$ | $\dots$ | 0     | ✓         |         | ✓   | ✓                     | ✓               | ✓               |
| $\vdots$            |       |         |         |       |           |         |     |                       |                 |                 |
| $g_{\tau-\eta^*}$   | 0     | $\dots$ | $\dots$ | 0     | ✓         |         | ✓   | ✓                     | ✓               | ✓               |
| $g_{\tau-\eta^*+1}$ | 0     | $\dots$ | $\dots$ | 0     | 0         |         | 0   | ✓                     | ✓               | ✓               |
| $\vdots$            |       |         |         |       |           |         |     |                       |                 |                 |
| $g_\tau$            | 0     | $\dots$ | $\dots$ | 0     | 0         |         | 0   | ✓                     | ✓               | ✓               |

où  $\tau$  est la dimension de la base de Groebner,  $\eta$  est le nombre de RRA obtenues en appliquant le théorème 3.2 et  $\eta^*$  est le nombre de RRA obtenues en appliquant le théorème 3.3.

A partir de la table de structure, les RRA recherchées sont données par les  $\eta^*$  dernières lignes :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{\tau-\eta^*+1} = 0 \\ \vdots \\ g_\tau = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \omega_1(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = 0 \\ \vdots \\ \omega_{\eta^*}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = 0 \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Ces RRA sont décomposées en forme de calcul et en forme d'évaluation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{1,c}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}) = \omega_{1,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) \\ \vdots \\ \omega_{\eta^*,c}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}) = \omega_{\eta^*,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) \end{array} \right. \quad (3.37)$$

où

$$\omega_{i,c}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}) = \omega_i(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, 0)$$



et

$$\omega_{i,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = \omega_i(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) - \omega_{i,c}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)})$$

Ainsi, les résidus seront générés à partir des formes de calcul  $\omega_{i,c}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)})$  qui sont égales à zéro en l'absence de faute et devraient être différentes de zéro dans le cas contraire.

Ces résidus peuvent servir pour la détection des défauts. Pour la localisation, une étape de structuration des relations doit être envisagée. Nous allons maintenant présenter une approche permettant de réaliser cela.

### 3.4.2 Structuration des RRA

Pour assurer la localisation des défauts, nous choisissons d'utiliser l'approche des résidus structurés. Cette approche consiste à construire la table de signatures théoriques des défauts en respectant des propriétés d'isolabilité<sup>10</sup>. Après la procédure d'élimination, la table de signatures sera entièrement composée de un.

|                   |                         |     |                                   |
|-------------------|-------------------------|-----|-----------------------------------|
|                   | $\bar{\varphi}_1^{(s)}$ | ... | $\bar{\varphi}_{m_\varphi}^{(s)}$ |
| $\omega_1$        | 1                       | ... | 1                                 |
| $\vdots$          | $\vdots$                |     | $\vdots$                          |
| $\omega_{\eta^*}$ | 1                       | ... | 1                                 |

Pour triangulariser la table de signatures, une première méthode consiste à choisir lors de la procédure d'élimination l'ordre d'élimination suivant :

$$x > \bar{v}^{(s)} > \bar{\varphi}_1^{(s)} > \dots > \bar{\varphi}_{m_\varphi} > \bar{y}^{(s)} > \bar{u}^{(s)} \quad (3.38)$$

Il est clair que la structure triangulaire ou diagonale est intéressante pour la localisation, toutefois, elle nécessite d'avoir au moins autant de RRA que de fautes et de plus elle entraîne une complexité importante au sein des algorithmes d'élimination tels que les bases de Groebner, qui ne garantissent pas de donner un résultat même si celui-ci existe.

Une approche plus intéressante consiste à construire des nouvelles RRA en effectuant des combinaisons polynomiales à partir du système initial. Pour réaliser cela, nous allons présenter une méthode originale utilisant les résultants (Christophe *et al.*, 1999).

#### 3.4.2.1 Définitions et propriétés

**Définition 3.4** Soient  $f, g \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$  telles que :

$$\begin{cases} f &= a_l x_1^l + \dots + a_0 & (a_l \neq 0) \\ g &= b_k x_1^k + \dots + b_0 & (b_k \neq 0) \end{cases} \quad (3.39)$$

<sup>10</sup>. voir chapitre I

où  $a_i, b_i \in \mathbf{k}[\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]$ . Alors, la matrice de Sylvester de  $f$  et  $g$  par rapport à  $x_1$ , notée  $Sylv(f, g, x_1)$  est définie de la manière suivante :

$$Sylv(f, g, x_1) = \begin{pmatrix} a_l & 0 & & 0 & b_k & 0 & & 0 \\ a_{l-1} & a_l & \ddots & & b_{k-1} & b_k & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_0 & \vdots & & a_l & b_0 & \vdots & & b_k \\ 0 & a_0 & & \vdots & 0 & b_0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{k \text{ colonnes}} \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{l \text{ colonnes}}$

Le résultant de  $f$  et  $g$  par rapport à  $x_1$ , noté  $Res(f, g, x_1)$  est égal au déterminant de la matrice de Sylvester :

$$Res(f, g, x_1) = \det(Sylv(f, g, x_1))$$

Nous allons maintenant donner quelques propriétés<sup>11</sup> importantes permettant de lier les résultants au problème de l'élimination de variables.

**Propriété 3.8** Soient  $f, g \in \mathbf{k}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ , alors :

- (i).  $Res(f, g, x_1)$  est dans le premier idéal d'élimination  $\langle f, g \rangle \cap \mathbf{k}[\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]$
- (ii). Il existe deux polynômes  $A, B \in \mathbf{k}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  tels que  $Af + Bg = Res(f, g, x_1)$
- (iii).  $Res(f, g, x_1)$  est égal au polynôme nul si et seulement si  $f$  et  $g$  ont un facteur commun dans  $\mathbf{k}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ .

Nous allons maintenant utiliser cet outil pour structurer les RRA.

### 3.4.2.2 Utilisation des résultants pour la structuration

Nous allons considérer que la procédure d'élimination a fourni le système de RRA algébriquement indépendantes suivant :

$$\begin{cases} \omega_1(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = 0 \\ \vdots \\ \omega_{\eta^*}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

A partir de ce système, nous souhaitons construire de nouvelles RRA, indépendantes entre elles et robustes vis-à-vis d'une panne  $\varphi_i$ . Ces relations devront donc avoir une structure telle que le vecteur  $\bar{\varphi}_i^{(s)}$  n'apparaisse plus.

11. Voir [Cox] pour les démonstrations

**Proposition 3.9** Soient deux RRA  $\omega_j(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = 0$  et  $\omega_k(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = 0$ , alors  $Res(\omega_j, \omega_k, \varphi_i^{(l)})$ , ou  $\varphi_i^{(l)}$  est une composante du vecteur  ${}_v arphi^{(s)}$ , est tel que :

$$Res(\omega_j, \omega_k, \varphi_i^{(l)}) = 0$$

**Preuve** Cette proposition découle immédiatement de la propriété 3.8.(ii). Prenons deux RRA  $\omega_j(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{*(s)}, \varphi_i^{(l)}) = 0$  et  $\omega_k(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{*(s)}, \varphi_i^{(l)}) = 0$  où  $\varphi_i^{(l)}$  est la composante à éliminer et  $\bar{\varphi}^{*(s)}$  est le vecteur  $\bar{\varphi}^{(s)}$  sans la composante à éliminer  $\varphi_i^{(l)}$ .

La propriété 3.8.(ii) donne :

$$\begin{aligned} Res(\omega_j, \omega_k, \varphi_i^{(s_i)}) &= A_{j,k} \omega_k + B_{j,k} \omega_j \\ &= A_{j,k} 0 + B_{j,k} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Pour éliminer l'influence d'une panne  $\varphi_i$  par la méthode des résultants, chaque élément du vecteur  $\bar{\varphi}_i^{(s)}$  doit être éliminé dans le système original. En utilisant les notations  $\omega_k^j = Res(\omega_i^{j-1}, \omega_m^{j-1}, \varphi_i^{(j-1)})$  et  $\omega_k^0 = \omega_k$ , nous obtenons pour chaque étape d'élimination, les tables d'occurrence de  $\bar{\varphi}_i^{(s)}$  suivantes :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & \varphi_i & \dot{\varphi}_i & \dots & \varphi_i^{(s-1)} & \varphi_i^{(s)} \\ \hline \omega_1 & \checkmark & \checkmark & & \checkmark & \checkmark \\ \hline \vdots & & & & & \\ \hline \omega_{\eta^*} & \checkmark & \checkmark & & \checkmark & \checkmark \\ \hline \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & \varphi_i & \dot{\varphi}_i & \dots & \varphi_i^{(s-1)} & \varphi_i^{(s)} \\ \hline \omega_1^1 & 0 & \checkmark & & \checkmark & \checkmark \\ \hline \vdots & & & & & \\ \hline \omega_{\eta^*-1}^1 & 0 & \checkmark & & \checkmark & \checkmark \\ \hline \end{array} \\ \\ \Rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & \varphi_i & \dot{\varphi}_i & \dots & \varphi_i^{(s-1)} & \varphi_i^{(s)} \\ \hline \omega_1^2 & 0 & 0 & & \checkmark & \checkmark \\ \hline \vdots & & & & & \\ \hline \omega_{\eta^*-2}^2 & 0 & 0 & & \checkmark & \checkmark \\ \hline \end{array} & \dots \Rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & \varphi_i & \dot{\varphi}_i & \dots & \varphi_i^{(s-1)} & \varphi_i^{(s)} \\ \hline \omega_1^{s+1} & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \hline \vdots & & & & & \\ \hline \omega_{\eta^*-s+1}^{s+1} & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

En appliquant le lemme 3.9, les RRA recherchées sont les suivantes :

$$\begin{cases} \omega_1^{s+1}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}_i^{*(s)}) = 0 \\ \vdots \\ \omega_{\eta^*-s+1}^{s+1}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}_i^{*(s)}) = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

Cette approche est bien adaptée pour éliminer des variables ayant des ordres de dérivation peu élevés et pour un nombre de relations réduit. Elle permet de contrôler le processus d'élimination ce qui n'est pas possible avec les méthodes d'élimination classiques comme les bases de Groebner.

### 3.4.3 Conclusion

La méthode de l'espace de parité par élimination permet de traiter la classe de systèmes pouvant être représentés par un modèle polynomial. Ce type de systèmes est très répandu et s'avère moins restrictif qu'il n'y paraît. Effectivement, beaucoup de systèmes analytiques non polynomiaux admettent une représentation polynomiale après une éventuelle transformation et un changement de variables (Conte *et al.*, 1988; Fliess, 1990).

La détermination de RRA à partir d'un tel système est réalisée en utilisant divers algorithmes d'élimination tels que les bases de Groebner. Ces algorithmes permettent l'élimination «globale» d'un ensemble de variables ordonnées dans un système d'équations. Ils s'avèrent donc intéressants pour construire des RRA pour la détection. En ce qui concerne la localisation, le problème n'est plus un problème d'élimination globale mais consiste à éliminer l'influence d'une variable dans un système d'équations. Pour réaliser cela, il est préférable d'utiliser des algorithmes moins sophistiqués mais permettant de mieux contrôler la procédure d'élimination.

## 3.5 La sensibilité des résidus

Dans les sections précédentes, nous nous sommes intéressés aux deux premières conditions du PFGR<sup>12</sup> et nous allons maintenant discuter de la troisième condition qui est la sensibilité du résidu aux fautes. Pour cela, quelques définitions sur la sensibilité seront données de manière à pouvoir poser correctement le problème. Ensuite, nous donnerons les conditions permettant de garantir la sensibilité d'un résidu.

### 3.5.1 Définition de la sensibilité

**Définition 3.5** (*Sensibilité réelle (Guernez-Jean, 1998)*) *La sensibilité d'un résidu vis-à-vis d'un ensemble de défaillances est la capacité de ce résidu à représenter les défaillances en s'écartant de zéro.*

La sensibilité des RRA passe donc par l'étude des formes d'évaluation puisqu'elles seules contiennent l'information relative au vecteur de pannes. Pour représenter cette dépendance vis-à-vis du vecteur de pannes, définissons la *sensibilité structurelle*.

**Définition 3.6** (*Sensibilité structurelle*) *Un résidu est dit structurellement sensible à une panne si sa forme d'évaluation contient la variable de panne ou une de ses dérivées, c'est-à-dire :*

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi_i} \neq [0 \dots 0]$$

Par la suite, nous montrerons que la sensibilité structurelle est une condition nécessaire mais non suffisante de sensibilité réelle du résidu.

### 3.5.2 Formes d'évaluation et sensibilité

L'information concernant les pannes se trouve dans les formes d'évaluation. Nous supposons ici que les RRA étudiées sont robustes vis-à-vis des entrées inconnues. Les formes d'évaluation

<sup>12</sup>. voir définition 3.3

forment le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{1,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = 0 \quad \text{Si } \varphi = 0 \\ \vdots \\ \omega_{\eta^*,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = 0 \quad \text{Si } \varphi = 0 \end{array} \right. \quad (3.42)$$

En fonctionnement non défaillant, les formes d'évaluation étant composées uniquement de monômes dépendant au moins d'une panne, sont nulles. En fonctionnement défaillant, la résolution du PFGR nécessite que  $\omega_{i,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)})$  soit différent de zéro lorsqu'une panne agit sur le système. Nous allons maintenant étudier sous quelles conditions cette inégalité est respectée.

Pour réaliser cette étude, nous allons faire l'hypothèse de la panne simple (une seule panne peut se produire à la fois). Le cas de pannes multiples ne peut pas être traité de manière générale en raison de la complexité des formes d'évaluation à traiter.

Considérons la panne  $\varphi_j$  et la forme d'évaluation  $\omega_{i,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)})$  et faisons l'hypothèse que  $\varphi_k = 0$  pour  $k \in [1, \dots, m_\varphi]$  et  $k \neq j$ . Pour que la forme d'évaluation soit influencée par la panne unique  $\varphi_j$ , il est nécessaire qu'au moins une composante de cette forme d'évaluation dépende de la panne  $\varphi_j$  ou d'une de ses dérivées. En d'autres termes, il faut que le résidu soit structurellement sensible à la faute lorsque toutes les autres pannes sont nulles :

$$\left. \frac{\partial \omega_{i,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)})}{\partial \bar{\varphi}_j} \right|_{\varphi_k=0} \neq 0$$

Lorsque cette condition est remplie, la forme d'évaluation peut être considérée comme un polynôme à coefficient dans  $\mathbf{k}[\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}]$  et dont les variables sont des monômes de l'anneau  $\mathbf{k}[\bar{\varphi}_j^{(s)}]$ . Ainsi,

$$\omega_{i,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}^{(s)}) = 0 \quad (3.43)$$

est une équation différentielle polynomiale en  $\varphi_j$ . Deux contraintes sont alors nécessaires pour assurer la sensibilité réelle du résidu à la panne  $\varphi_j$ . La première porte sur l'allure de la faute  $\varphi_j$ . Si la trajectoire de cette panne appartient à l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (3.43) alors le résidu ne sera pas «réellement sensible» à cette panne.

En pratique cette condition ne peut pas être testée puisqu'elle suppose la connaissance de l'allure de la panne qui est un signal inconnu pour l'utilisateur.

La seconde condition repose sur les coefficients de la forme d'évaluation. Ces coefficients appartiennent à  $\mathbf{k}[\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}]$  et peuvent être tous nuls simultanément sur toute la plage temporelle d'occurrence du défaut. La figure 3.1 montre les trois trajectoires que peuvent suivre les coefficients. L'interprétation de la figure 3.1 est donnée par le tableau ci-dessous.

| Fig. 3.1a)        | Fig. 3.1b)                                | Fig. 3.1c)          |
|-------------------|---|---------------------|
| Résidus sensibles | Résidus insensibles<br>entre $[t_3, t_4]$ | Résidus insensibles |

En conclusion, un résidu, généré par une forme de calcul  $\omega_{i,c}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)})$  sera sensible à une panne  $\varphi_j$ , sous l'hypothèse de panne unique, si les trois conditions suivantes sont respectées :

1. Le résidu est structurellement sensible à la panne  $\varphi_j \forall \bar{y}, \bar{u}$ .

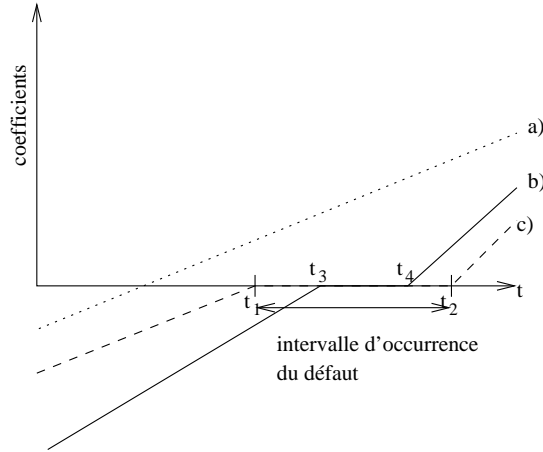


FIG. 3.1 – allure des trajectoires des coefficients de  $\omega_{i,e}$

2.  $\varphi_j$  n'est pas solution de l'équation différentielle, c'est-à-dire pour toutes pannes détectables.  $\omega_{i,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}_j^{(s)}) = 0$ .
3. Les coefficients du polynôme  $\omega_{i,e}(\bar{y}^{(s)}, \bar{u}^{(s)}, \bar{\varphi}_j^{(s)})$  en  $\varphi_j$  sont pas tous égaux à zéros.

### 3.6 Conclusion

Ce chapitre a présenté une alternative à l'utilisation des observateurs pour effectuer la surveillance des systèmes linéaires et non linéaires. Cette autre approche, appelée approche de l'espace de parité, permet de construire des relations de redondance analytique (RRA). Après séparation de la partie dépendant uniquement des signaux connus et de leurs dérivées successives (forme de calcul) de la partie dépendant des perturbations et des pannes (forme d'évaluation), ces RRA peuvent être utilisées pour générer les résidus.

Dans un premier temps, nous avons donné deux théorèmes permettant de déterminer *a priori* le nombre de relations existant pour un système donné et pour un ordre de dérivation des sorties fixé.

Dans un second temps, nous avons montré comment les relations peuvent être construites à partir du système initial en projetant les équations de la sortie dans un espace orthogonal à l'espace d'observabilité du système. Nous avons ensuite étendu cette approche en tenant compte de considérations de robustesse vis-à-vis des perturbations puis des pannes afin de permettre la détection et la localisation de celles-ci.

Ensuite, pour permettre d'appliquer cette méthode à une classe de systèmes plus large, nous avons présenté une approche algébrique permettant d'éliminer les variables inconnues, par l'utilisation d'algorithmes spécifiques tels que les bases de Groebner. Pour tenir compte des considérations de robustesse vis-à-vis des pannes et permettre la localisation de celles-ci, nous avons présenté une approche originale, utilisant le calcul des résultants, permettant d'éliminer une variable entre deux relations.

Pour terminer ce chapitre, nous avons présenté la notion de sensibilité des résidus par rapport aux pannes et nous avons donné trois conditions nécessaires et suffisantes permettant d'assurer la

sensibilité des résidus à une panne sous l'hypothèse de panne unique.

Dans ce chapitre, nous n'avons pas considéré le calcul des dérivées des signaux qui est le problème principal de cette méthode. Ce problème sera traité dans un chapitre indépendant consacré à présenter les différentes méthodes d'estimation des dérivées.

## Chapitre 4

# Liens entre les résidus observateurs et les résidus de parité

### 4.1 Introduction

Les deux chapitres précédents ont présenté les deux principales méthodes permettant de réaliser la surveillance des systèmes à partir d'un modèle de celui-ci. Ces deux méthodes consistent à utiliser soit un observateur soit les relations d'entrée/sortie pour générer les résidus. Ces signaux doivent posséder deux propriétés essentielles pour assurer la détection des défauts :

- être égaux à zéro lorsque le système est en fonctionnement non défectueux
- être différents de zéro dans le cas contraire.

D'autres propriétés structurelles peuvent être ajoutées pour permettre la localisation des défauts, c'est-à-dire, de déterminer sans ambiguïté, le composant défectueux.

Pour chacune de ces approches, un problème fondamental de génération des résidus (FPRG) a été posé. Nous avons constaté une similitude dans la formulation des deux problèmes. Effectivement, seule une condition de convergence est ajoutée lorsque les générateurs de résidus fondés sur la théorie des observateurs sont considérés.

Le but de ce chapitre est de comparer les résultats obtenus par ces deux approches. L'intérêt d'effectuer la comparaison des résultats n'est pas de déterminer quelle est la meilleure méthode mais bien de mettre en évidence la complémentarité des deux approches afin d'exploiter les points forts de chacune d'elles.

De nombreux travaux ont étudié les liens existants entre les méthodes de surveillance utilisant les observateurs et celles utilisant l'espace de parité dans le cas des systèmes linéaires (Cocquemot, 1993; Ding and Frank, 1994; Patton and Chen, 1991*b*; Nuninger *et al.*, 1997). Dans ce chapitre, nous allons apporter quelques nouveaux éléments concernant la comparaison des deux approches dans le cas des systèmes non linéaires.

Dans une première partie, nous étendrons les travaux réalisés pour les systèmes linéaires à la classe des systèmes non linéaires linéarisables par injection d'entrée/sortie. Dans une seconde partie, nous présenterons une approche originale permettant de déterminer la relation liant les résidus obtenus par élimination et ceux obtenus à l'aide d'observateurs grand gain.



## 4.2 Étude des systèmes linéarisables

Dans cette section, nous considérons les systèmes admettant la modélisation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + \psi(y,u) + Ev + G_a \varphi_{act} \\ y &= Cx + \varphi_{capt} \end{cases} \quad (4.1)$$

Nous allons rappeler très brièvement les deux méthodes de synthèse des générateurs de résidus. Ce rappel a pour objectif de redonner les notations et constitue le point de départ indispensable à la comparaison.

### 4.2.1 La génération des résidus

Pour commencer, nous allons redonner les résultats principaux du principe de synthèse des Relations de Redondance Analytique (RRA) en utilisant l'approche par projection présentée dans le chapitre traitant de l'espace de parité. Nous donnerons ensuite les expressions du générateur de résidus fondé sur la théorie des Unknown Input Observer présentée dans le chapitre traitant des observateurs.

#### 4.2.1.1 L'espace de parité (E.P.)

La méthode consistant à projeter les équations des sorties et de leurs dérivées temporelles successives dans l'espace d'inobservabilité du système peut être utilisée directement lorsque la modélisation du dit systèmes est sous la forme (4.1). Cette approche consiste à trouver une matrice de projection  $W$  telle que la condition suivante soit respectée :

$$W^T \in \ker(OBS_s^T(C,A)) \cap \ker(COM_s^T(C,A,E)) \quad (4.2)$$

Les matrices  $OBS_s(C,A)$  et  $COM_s(C,A,E)$  sont définies par :

$$OBS_s(C,A) = \begin{bmatrix} OBS_{s_1}(c_1,A) \\ \vdots \\ OBS_{s_p}(c_p,A) \end{bmatrix} \quad COM_s(C,A,E) = \begin{bmatrix} COM_{s_1}(c_1,A,E) \\ \vdots \\ COM_{s_p}(c_p,A,E) \quad 0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$OBS_{s_i} = \begin{bmatrix} c_i \\ c_i A \\ \vdots \\ c_i A^{s_i} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad COM_{s_i}(c_i,A,E) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_i E & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ c_i A^{s_i-1} E & \dots & \dots & c_i E \end{bmatrix}$$

et les ordres de dérivation sur chaque sortie sont tels que  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_p$ .

Les RRA sont données par :

$$W \bar{y}^{(s)} - W COM_s(C,A) \bar{\psi}^{(s)}(y,u) - W COM_s(C,A,G_a) \bar{\varphi}_{act}^{(s)} - W \bar{\varphi}_{capt}^{(s)} = 0 \quad (4.3)$$

Les résidus sont générés en injectant dans la forme de calcul de (4.3) les signaux prélevés sur le système :

$$r(t) = W\bar{y}^{(s)} - WCOM_s(C,A)\bar{\psi}^{(s)}(y,u) = WCOM_s(C,A,G_a)\bar{\varphi}_{act}^{(s)} + W\bar{\varphi}_{capt}^{(s)} \quad (4.4)$$

Dans l'expression du résidu (4.4) les formes de calcul et d'évaluation ont été séparées. Cette dernière permet de vérifier que le résidu est bien égal à zéro dans le cas non défaillant. Pour qu'il soit différent de zéro en cas de pannes, il faut que la matrice  $W^T$  n'appartienne pas au noyau de  $COM_s^T(C,A,G_a)$ .

#### 4.2.1.2 Les UIO

Le générateur de résidus fondé sur la théorie des UIO est synthétisé en suivant la procédure décrite dans le chapitre traitant des observateurs. La structure de l'observateur choisi est :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} &= F\zeta + T\psi(y,u) + Ky \\ \hat{x} &= \zeta + Hy \\ e(t) &= C\zeta - (I - CH)y \end{cases} \quad (4.5)$$

Les matrices  $F$ ,  $T$ ,  $K$  et  $H$  sont choisies pour respecter les conditions 2.33 à 2.36 :

$$\begin{cases} (HC - I)E &= 0 \\ T &= I - HC \\ F &= A - HCA - K_1C \text{ stable} \\ K_2 &= FH \end{cases}$$

La matrice  $K$  est égale à la somme des matrices  $K_1$  et  $K_2$ .

Pour simplifier les écritures, nous posons  $L_2 = I - CH$ .

Le résidu d'observateur s'écrit sous la forme :

$$e(t) = C\zeta - L_2y$$

A partir de la deuxième condition de la synthèse de l'observateur, la matrice  $L_2$  est reliée à la matrice  $T$  par la relation :

$$L_2C = CT \quad (4.6)$$

La démonstration est immédiate:  $L_2C = C - CHC = C(I - HC) = CT$ .

#### 4.2.2 Comparaison des résidus

Dans le chapitre traitant des observateurs, nous avons montré que le générateur de résidus 4.5 peut s'écrire sous une forme réduite :

$$\begin{cases} \dot{z} &= F^*z + T^*\psi(y,u) + K^*y \\ e^* &= C^*z - L_2^*y \end{cases} \quad (4.7)$$

Les matrices  $F^*$ ,  $T^*$ ,  $K^*$ ,  $C^*$  et  $L_2^*$  vérifient :

$$\begin{aligned} T^*E &= 0 \\ T^*A - F^*T^* &= K^*C \\ C^*T^* &= L_2^*C \end{aligned}$$

Nous nous proposons de déterminer la relation existant entre les résidus de parité  $r(t)$  et les résidus d'observateur réduit  $e^*$ .

Pour trouver cette relation, nous allons étendre les vecteurs d'état et de résidus réduits pour obtenir le générateur de résidus étendu suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{z}_1^* \\ z_e \end{bmatrix}}_{z_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} F^* & 0 \\ 0 & f^* \end{bmatrix}}_{F_e} \underbrace{\begin{bmatrix} z \\ z_1^* \\ z_e \end{bmatrix}}_{z_e} + \underbrace{\begin{bmatrix} T^* \\ t^* \end{bmatrix}}_{T_e} \psi(y,u) + \underbrace{\begin{bmatrix} K^* \\ k^* \end{bmatrix}}_{K_e} y \\ \underbrace{\begin{bmatrix} e^* \\ e_1^* \\ e_e \end{bmatrix}}_{e_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} C^* & 0 \\ 0 & c^* \end{bmatrix}}_{C_e} \underbrace{\begin{bmatrix} z \\ z_1^* \\ z_e \end{bmatrix}}_{z_e} - \underbrace{\begin{bmatrix} L_2^* \\ l_2^* \end{bmatrix}}_{L_{2e}} y \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Le vecteur d'état étendu  $z_e$  a la même dimension que le vecteur d'état du système:  $\dim(z_e) = \dim(x) = n$ . De même, le vecteur de résidus a la même dimension que le vecteur de sortie:  $\dim(e_e) = \dim(y) = p$ .

Les matrices  $f^*$ ,  $t^*$ ,  $k^*$ ,  $c^*$  et  $l_2^*$  sont choisies telles que les conditions suivantes soient respectées :

$$t^*A - f^*t^* = k^*C \quad (4.9a)$$

$$c^*T^* = l_2^*C \quad (4.9b)$$

$$F \quad \text{stable} \quad (4.9c)$$

$$T_e = \begin{bmatrix} T^* \\ t^* \end{bmatrix} \quad \text{régulière} \quad (4.9d)$$

$$L_{2e} = \begin{bmatrix} L_2^* \\ l_2^* \end{bmatrix} \quad \text{régulière} \quad (4.9e)$$

Le nouveau générateur de résidus s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_e = F_e z_e + T_e \psi(y,u) + K_e y \\ e_e = C_e z_e - L_{2e} y \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Les matrices  $F_e$ ,  $T_e$ ,  $K_e$ ,  $C_e$  et  $L_{2e}$  respectent, par construction, les deux conditions de Luenberger :

$$F_e T_e = T_e A - K_e C$$

$$C_e T_e = L_{2e} C$$

Pour trouver la relation liant  $e_e(t)$  à  $r(t)$ , nous allons dériver la  $i^{\text{ième}}$  ligne de  $e_e(t)$ , notée  $e_{e,i}$ , jusqu'à l'ordre  $s_i$  pour  $1 \leq i \leq p$ .

$$\begin{aligned} e_{e,i} &= c_{e,i}z_e - L_{2e,i}y \\ \Rightarrow \dot{e}_{e,i} &= c_{e,i}\dot{z}_e - L_{2e,i}\dot{y} \\ &= c_{e,i}\dot{z}_e - L_{2e,i}C\dot{x} - L_{2e,i}\dot{\varphi}_{capt} \end{aligned}$$

Nous remplaçons  $\dot{z}_e$  et  $\dot{x}$  par leurs expressions respectives :

$$\begin{aligned} \dot{e}_{e,i} &= c_{e,i}F_e\dot{z}_e + c_{e,i}T_e\psi(y,u) + c_{e,i}K_e y - L_{2e,i}CAx - L_{2e,i}C\psi(y,u) - L_{2e,i}CEv \\ &\quad - L_{2e,i}CG_a\varphi_{act} - L_{2e,i}\dot{\varphi}_{capt} \end{aligned} \quad (4.11)$$

En utilisant la relation  $L_{2e,i}C = c_{e,i}T_e$ , l'expression 4.11 se simplifie :

$$\dot{e}_{e,i} = c_{e,i}F_e\dot{z}_e + c_{e,i}K_e y - c_{e,i}T_e Ax - L_{2e,i}CEv - L_{2e,i}CG_a\varphi_{act} - L_{2e,i}\dot{\varphi}_{capt} \quad (4.12)$$

La matrice  $F_e$  peut s'exprimer en fonction des matrices  $T_e$ ,  $A$ ,  $K_e$  et  $C$ :

$$\begin{aligned} F_e T_e &= T_e A - K_e C \\ F_e &= T_e A T_e^{-1} - K_e C T_e^{-1} \end{aligned} \quad (4.13)$$

L'expression de  $F_e$  est injectée dans l'équation (4.12) :

$$\begin{aligned} \dot{e}_{e,i} &= c_{e,i}T_e A T_e^{-1} z_e - c_{e,i}K_e C T_e^{-1} z_e + c_{e,i}K_e y - c_{e,i}T_e Ax - L_{2e,i}CEv \\ &\quad - L_{2e,i}CG_a\varphi_{act} - L_{2e,i}\dot{\varphi}_{capt} \end{aligned}$$

En posons  $\epsilon_e \triangleq z_e - T_e x$ , nous obtenons :

$$\dot{e}_{e,i} = c_{e,i}T_e A T_e^{-1} \epsilon_e - c_{e,i}K_e (y - C T_e^{-1} z_e) - c_{e,i}T_e Ax - L_{2e,i}CEv - L_{2e,i}CG_a\varphi_{act} - L_{2e,i}\dot{\varphi}_{capt}$$

Nous allons maintenant prouver que  $y - C T_e^{-1} z_e = -L_{2e,i}^{-1} e_e$ .

**Preuve** Le vecteur de résidus  $e_e$  est donné par :

$$e_e = C_e z_e - L_{2e} y$$

Comme la matrice  $L_{2e}$  est inversible, nous avons :

$$y = L_{2e}^{-1} C_e z_e - L_{2e}^{-1} e_e$$

en soustrayant  $-C T_e^{-1} z_e$  au deux membres, nous obtenons :

$$\begin{aligned} y - C T_e^{-1} z_e &= L_{2e}^{-1} C_e z_e - L_{2e}^{-1} e_e - C T_e^{-1} z_e \\ &= (L_{2e}^{-1} C_e - C T_e^{-1}) z_e - L_{2e}^{-1} e_e \\ &= (L_{2e}^{-1} C_e T_e T_e^{-1} - C T_e^{-1}) z_e - L_{2e}^{-1} e_e \end{aligned}$$

or  $C_e T_e = L_{2e} C$ , donc :

$$y - C T_e^{-1} z_e = -L_{2e}^{-1} e_e \quad (4.14)$$

□

L'expression de la dérivée première de  $e_{e,i}$  est finalement égale à :

$$\dot{e}_{e,i} = c_{e,i}T_eAT_e^{-1}\epsilon_e - c_{e,i}K_eL_{2e}^{-1}e_e - L_{2e,i}CEv - L_{2e,i}CG_a\varphi_{act} - L_{2e,i}\dot{\varphi}_{capt} \quad (4.15)$$

Le calcul des expressions des dérivées de  $e_{e,i}$  d'ordre supérieur à un nécessite la connaissance de la dérivée première de l'erreur d'estimation  $\epsilon_e$ .

Par définition, nous avons :

$$\epsilon_e = z_e - T_e x$$

La dérivée de  $\epsilon_e$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_e &= \dot{z}_e - T_e \dot{x} \\ &= F_e z_e + T_e \psi(y, u) + K_e y - T_e A x - T_e \psi(y, u) - T_e E v - T_e G_a \varphi_{act} \end{aligned} \quad (4.16)$$

L'expression de  $F_e$  donnée par 4.13 est injectée dans 4.16 :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_e &= T_e A T_e^{-1} z_e - K_e C T_e^{-1} z_e + K_e y - T_e A x - T_e E v - T_e G_a \varphi_{act} \\ &= T_e A T_e^{-1} \epsilon_e - K_e L_{2e}^{-1} e_e - T_e E v - T_e G_a \varphi_{act} \end{aligned} \quad (4.17)$$

La dérivée d'ordre  $s_i$  et  $e_{e,i}$  peut maintenant être calculée par récurrence.

**Proposition 4.1** *La dérivée  $s_i^{\text{ième}}$  de  $e_{e,i}(t)$  s'écrit sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned} e_{e,i}^{(s_i)} &= c_{e,i}T_eA^{s_i}T_e^{-1}\epsilon_e - \sum_{j=0}^{s_i-1} c_{e,i}T_eA^jT_e^{-1}K_eL_{2e}^{-1}e_e^{(s_i-j-1)} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{s_i-1} L_{2e,i}CA^jEv^{(s_i-j-1)} - \sum_{j=0}^{s_i-1} L_{2e,i}CA^jG_a\varphi_{act}^{(s_i-j-1)} - L_{2e,i}\varphi_{capt}^{(s_i)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

**Preuve** Pour  $s_i = 1$ , l'expression 4.18 est égale à l'expression de  $\dot{e}_{e,i}$  donnée par 4.15.

Supposons que 4.18 est vraie pour  $s_i \geq 1$ , montrons alors qu'elle reste valable pour  $s_i + 1$ .

L'expression de la dérivée  $(s_i + 1)^{\text{ième}}$  de  $e_{e,i}$  est obtenue en dérivant une fois l'expression de la dérivée  $s_i^{\text{ième}}$  de  $e_{e,i}$  :

$$e_{e,i}^{s_i+1} = \dot{e}_{e,i}^{(s_i)}$$

Calculons la dérivée première de  $e_{e,i}^{(s_i)}$  donnée par 4.18 :

$$\begin{aligned} \dot{e}_{e,i}^{(s_i)} &= c_{e,i}T_eA^{s_i}T_e^{-1}\dot{\epsilon}_e - \sum_{j=0}^{s_i-1} c_{e,i}T_eA^jT_e^{-1}K_eL_{2e}^{-1}\dot{e}_{e,i}^{(s_i-j-1)} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{s_i-1} L_{2e,i}CA^jE\dot{v}^{(s_i-j-1)} - \sum_{j=0}^{s_i-1} L_{2e,i}CA^jG_a\dot{\varphi}_{act}^{(s_i-j-1)} - L_{2e,i}\dot{\varphi}_{capt}^{(s_i+1)} \end{aligned}$$

$\dot{\epsilon}_e$  est remplacé par son expression donnée par 4.17 :

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}_{e,i}^{(s_i)} &= c_{e,i} T_e A^{s_i} T_e^{-1} (T_e A T_e^{-1} \epsilon_e - K_e L_{2e}^{-1} e_e - T_e E v - T_e G_a \varphi_{act}) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{s_i-1} c_{e,i} T_e A^j T_e^{-1} K_e L_{2e}^{-1} \dot{\epsilon}_e^{(s_i-j-1)} - \sum_{j=0}^{s_i-1} L_{2e,i} C A^j E v^{(s_i-j-1)} \\
&\quad - \sum_{j=0}^{s_i-1} L_{2e,i} C A^j G_a \varphi_{act}^{(s_i-j-1)} - L_{2e,i} \varphi_{capt}^{(s_i+1)} \\
&= c_{e,i} T_e A^{s_i+1} T_e^{-1} \epsilon_e - \sum_{j=0}^{s_i-1} c_{e,i} T_e A^j T_e^{-1} K_e L_{2e}^{-1} e_e^{(s_i-j)} - c_{e,i} T_e A^{s_i} T_e^{-1} K_e L_{2e}^{-1} e_e \\
&\quad - \sum_{j=0}^{s_i-1} L_{2e,i} C A^j E v^{(s_i-j)} - c_{e,i} T_e A^{s_i} E v \\
&\quad - \sum_{j=0}^{s_i-1} L_{2e,i} C A^j G_a \varphi_{act}^{(s_i-j)} - c_{e,i} T_e A^{s_i} G_a \varphi_{act} - L_{2e,i} \varphi_{capt}^{(s_i+1)}
\end{aligned}$$

En utilisant  $c_{e,i} T_e = L_{2e,i} C$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
e_{e,i}^{(s_i+1)} &= c_{e,i} T_e A^{s_i+1} T_e^{-1} \epsilon_e - \sum_{j=0}^{s_i} c_{e,i} T_e A^j T_e^{-1} K_e L_{2e}^{-1} e_e^{(s_i-j)} - L_{2e,i} \varphi_{capt}^{(s_i+1)} \\
&\quad - \sum_{j=0}^{s_i} L_{2e,i} C A^j E v^{(s_i-j)} - \sum_{j=0}^{s_i} L_{2e,i} C A^j G_a \varphi_{act}^{(s_i-j)}
\end{aligned}$$

Cette expression vérifie la récurrence.

□

La dérivée  $s^{\text{ième}}$  du vecteur des résidus  $e_e$  est égale à :

$$\begin{aligned}
e_e^{(s)} &= C_e T_e A^s T_e^{-1} \epsilon_e - \sum_{j=0}^{s-1} C_e T_e A^j T_e^{-1} K_e L_{2e}^{-1} e_e^{(s-j-1)} \\
&\quad - \sum_{j=0}^{s-1} L_{2e} C A^j E v^{(s-j-1)} - \sum_{j=0}^{s-1} L_{2e} C A^j G_a \varphi_{act}^{(s-j-1)} - L_{2e} \varphi_{capt}^{(s)}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

En utilisant  $C_e T_e = L_{2e} C$  et la non singularité de la matrice  $L_{2e}$ , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
L_{2e}^{-1} e_e^{(s)} &= C A^s T_e^{-1} \epsilon_e - \sum_{j=0}^{s-1} C A^j T_e^{-1} K_e L_{2e}^{-1} e_e^{(s-j-1)} \\
&\quad - \sum_{j=0}^{s-1} C A^j E v^{(s-j-1)} - \sum_{j=0}^{s-1} C A^j G_a \varphi_{act}^{(s-j-1)} - \varphi_{capt}^{(s)}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Ces égalités sont écrites sur toute la fenêtre de dérivation (de 0 à  $s$ ) pour former l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} L_{2e}^{-1}e_e \\ L_{2e}^{-1}\dot{e}_e \\ \vdots \\ L_{2e}^{-1}e_e^{(s)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^s \end{bmatrix} T^{-1}\epsilon - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ CT_e^{-1}K_eL_{2e}^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ CA^{s-1}T_e^{-1}K_eL_{2e}^{-1} & \cdots & CT_e^{-1}K_eL_{2e}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_e \\ \dot{e}_e \\ \vdots \\ e_e^{(s-1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi_{capt} \\ \dot{\varphi}_{capt} \\ \vdots \\ \varphi_{capt}^{(s)} \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ CE & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ CA^{s-1}E & \cdots & CE \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \\ \vdots \\ v^{(s-1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ CG_a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ CA^{s-1}G_a & \cdots & CG_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{act} \\ \dot{\varphi}_a \\ \vdots \\ \varphi_{act}^{(s-1)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Pour trouver la relation liant les résidus de parité aux résidus d'observateur, les lignes de la relation précédente vont être permutées à l'aide d'une matrice de réordonnancement  $P$ , composée de un et de zéro, et telle que l'égalité suivante soit respectée :

$$P \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} OBS_{s_1}(c_1, A) \\ \vdots \\ OBS_{s_p}(c_p, A) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

L'équation (4.21) est multipliée à gauche par  $P$  :

$$\begin{aligned}
P \begin{bmatrix} L_{2e}^{-1}e_e \\ L_{2e}^{-1}\dot{e}_e \\ \vdots \\ L_{2e}^{-1}e_e^{(s)} \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^s \end{bmatrix} T^{-1}\epsilon - P \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ CT_e^{-1}K_eL_{2e}^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ CA^{s-1}T_e^{-1}K_eL_{2e}^{-1} & \cdots & CT_e^{-1}K_eL_{2e}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_e \\ \dot{e}_e \\ \vdots \\ e_e^{(s-1)} \end{bmatrix} \\
&- P \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ CE & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ CA^{s-1}E & \cdots & CE \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \\ \vdots \\ v^{(s-1)} \end{bmatrix} - P \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ CG_a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ CA^{s-1}G_a & \cdots & CG_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{act} \\ \dot{\varphi}_{act} \\ \vdots \\ \varphi_{act}^{(s-1)} \end{bmatrix} - P \begin{bmatrix} \varphi_{capt} \\ \dot{\varphi}_{capt} \\ \vdots \\ \varphi_{capt}^{(s)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

La transformation  $P$  permet de faire apparaître les matrices  $OBS_s(C,A)$ ,  $COM_s(C,A,E)$  et  $COM_s(C,A,G_a)$ :

$$\begin{aligned}
 P \begin{bmatrix} L_{2e}^{-1} e_e \\ L_{2e}^{-1} \dot{e}_e \\ \vdots \\ L_{2e}^{-1} e_e^{(s)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} OBS_s(C,A) \\ 0 \end{bmatrix} T_e^{-1} \epsilon_e - \begin{bmatrix} COM_s(C,A, T_e^{-1} K_e L_{2e}^{-1}) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_e \\ \dot{e}_e \\ \vdots \\ e_e^{(s-1)} \end{bmatrix} \\
 &\quad - \begin{bmatrix} COM_s(C,A,E) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \\ \vdots \\ v^{(s-1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} COM_s(C,A,G_a) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{act} \\ \dot{\varphi}_{act} \\ \vdots \\ \varphi_{act}^{(s-1)} \end{bmatrix} - \bar{\varphi}_{capt}^{(s)}
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Soit la matrice de projection  $W^*$  égale à :

$$W^* = \begin{bmatrix} W & 0 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

telle que le nombre de colonnes soit égal au nombre de lignes de  $P$  et la matrice  $W$ , définie par 4.2 est telle que :

$$W.OBS_s(C,A) = 0 \text{ et } W.COM_s(C,A,E) = 0$$

L'équation (4.25) est projetée dans le sous-espace défini par cette matrice :

$$\begin{aligned}
 W^* P \begin{bmatrix} L_{2e}^{-1} e_e \\ \vdots \\ L_{2e}^{-1} e_e^{(s)} \end{bmatrix} &= W^* \begin{bmatrix} OBS_s(C,A) \\ 0 \end{bmatrix} T_e^{-1} \epsilon_e \\
 &\quad - W^* \begin{bmatrix} COM_s(C,A, T_e^{-1} K_e L_{2e}^{-1}) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_e \\ \vdots \\ e_e^{(s-1)} \end{bmatrix} - W^* \begin{bmatrix} COM_s(C,A,E) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \vdots \\ v^{(s-1)} \end{bmatrix} \\
 &\quad - W^* \begin{bmatrix} COM_s(C,A,G_a) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{act} \\ \vdots \\ \varphi_{act}^{(s-1)} \end{bmatrix} - W^* \bar{\varphi}_{capt}^{(s)}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$



La matrice  $W$  appartenant aux noyaux de  $OBS_s(C,A)$  et de  $COM_s(C,A,E)$ , l'équation (4.26) se simplifie et s'écrit sous la forme :

$$W^*P \left\{ \begin{bmatrix} L_{2e}^{-1}e_e \\ \vdots \\ L_{2e}^{-1}e_e^{(s)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} COM_s(C,A,T_e^{-1}K_eL_{2e}^{-1}) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_e \\ \vdots \\ e_e^{(s-1)} \end{bmatrix} \right\} = \quad (4.27)$$

$$WOBS_s(C,A)T_e^{-1}\epsilon_e - WCOM_s(C,A,E)\bar{v}^{(s-1)} - WCOM_s(C,A,G_a)\bar{\varphi}_{act}^{(s-1)} - W\bar{\varphi}_{capt}^{(s)}$$

Après les simplifications dues aux propriétés de la matrice  $W$ , le terme de droite de l'équation (4.27) se réduit à :

$$-WCOM_s(C,A,G_a)\bar{\varphi}_{act}^{(s-1)} - W\bar{\varphi}_{capt}^{(s)}$$

Cette expression est égale à la forme d'évaluation de la RRA issue du modèle (4.4). Nous pouvons donc écrire :

$$W^*P \left\{ \begin{bmatrix} L_{2e}^{-1}e_e \\ \vdots \\ L_{2e}^{-1}e_e^{(s)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} COM_s(C,A,T_e^{-1}K_eL_{2e}^{-1}) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_e \\ \vdots \\ e_e^{(s-1)} \end{bmatrix} \right\} = r(t) \quad (4.28)$$

La relation (4.28) exprime le lien existant entre le vecteur de résidus de parité  $r(t)$  et le vecteur de résidus d'observateur  $e_e(t)$ . Ce lien est donné ici dans le domaine temporel et fait intervenir les dérivées successives des résidus  $e_e(t)$ . Nous pouvons réécrire cette relation dans le domaine de Laplace. Le lien existant entre les résidus s'exprime alors sous la forme d'une fonction de transfert :

$$W^*P \left\{ \begin{bmatrix} L_{2e}^{-1}E_e(p) \\ \vdots \\ L_{2e}^{-1}pE_e(p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} COM_s(C,A,T_e^{-1}K_eL_{2e}^{-1}) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_e(p) \\ \vdots \\ (p-1)E_e(p) \end{bmatrix} \right\} = R(p) \quad (4.29)$$

En notant  $\mathcal{F}_e(p) = [W^*PM(p)]^{-1}$ , le lien s'exprime sous la forme d'une matrice de transfert :

$$E_e(p) = \mathcal{F}_e(p)R(p) \quad (4.30)$$

### 4.2.3 Conclusion

Cette section vient d'étendre le résultat d'équivalence entre les résidus d'observateur et les résidus de parité prouvé dans (Cocquempot, 1993; Patton and Chen, 1991b; Magni and Mouyon, 1994; Ding and Frank, 1994) aux systèmes non linéaires linéarisables. La relation liant ces deux résidus peut être exprimée sous la forme de matrice de transfert dont les dynamiques dépendent de la matrice de gain de l'observateur.

Nous allons maintenant étendre ces résultats à une certaine classe de systèmes «purement non linéaires» et pour lesquels la génération de résidus par l'approche d'observateur est fondée sur la théorie des grands gains.

## 4.3 Comparaison pour les systèmes non exactement linéarisables

La classe de systèmes considérée dans cette section est celle admettant la modélisation suivante :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (4.31)$$

Ce système est supposé uniformément observable. Les indices d'observabilité relatifs à chaque sortie  $y_i$  sont les entiers  $k_i$  pour  $1 \leq i \leq p$ . Dans un premier temps, nous allons rappeler les procédures de synthèse des générateurs de résidus présentées dans les deux chapitres précédents. Enfin nous montrerons, dans le cas mono sortie, que le résidu d'observateur est lié au résidu de parité par une fonction non linéaire que nous déterminerons.

### 4.3.1 Génération des résidus

Dans un premier temps, nous rappellerons le principe de la synthèse des RRA en utilisant les algorithmes d'élimination du vecteur d'état. Puis, nous terminerons par le rappel de l'approche utilisant les observateurs.

#### 4.3.1.1 L'espace de parité

Le système (4.31) est supposé uniformément observable. Nous avons montré dans le chapitre précédent que sous cette hypothèse, le système admet exactement  $p$  RRA algébriquement et différentiellement indépendantes. Pour les calculer, la méthode proposée consiste à écrire chaque sortie avec ses dérivées temporelles successives jusqu'à l'ordre  $k_i + 1$  et à éliminer le vecteur d'état du système ainsi formé.

$$\bar{y}_i^{(k_i+1)} = \Lambda_{k_i+1}(x, \bar{u}^{(k_i)}) \quad (4.32)$$

Dans le cadre des systèmes algébriques polynomiaux, le vecteur d'état  $x$  peut être éliminé via un algorithme formel tel que les Bases de Groebner. Lorsque les RRA sont calculées sur le modèle sain, nous obtenons directement les formes de calcul  $\rho_{EP}(\bar{y}^{(k+1)}, \bar{u}^{(k)})$  des résidus. Ceux-ci sont calculés à partir des formes de calcul en utilisant les signaux collectés sur le système.

#### 4.3.1.2 Les observateurs à grand gain

La seconde approche permettant de générer des résidus consiste à synthétiser un système dynamique dont les sorties convergent vers zéro lorsqu'aucune faute n'agit sur le processus à surveiller. Plusieurs méthodes existent pour synthétiser un tel système. Dans le chapitre traitant des observateurs, deux théories permettant de construire ce système ont été présentées. La première utilise la théorie des observateurs à mode glissant et la seconde celle des observateurs à grand gain. Nous limiterons l'étude aux observateurs grand gain.

Le générateur de résidus s'écrit de la manière suivante :

$$\Sigma_{OBS}: \begin{cases} \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}) + g(\hat{x})u - \left[ \frac{\partial \Psi_{\Sigma}(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \right]^{-1} S_{\infty}^{-1}(\theta) C^T (h(\hat{x}) - y) \\ e &= y - h(\hat{x}) \end{cases} \quad (4.33)$$

ou  $\Psi_{\Sigma}(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \Psi_{1\Sigma}(\hat{x}) \\ \vdots \\ \Psi_{p\Sigma}(\hat{x}) \end{bmatrix}$  et  $\Psi_{i\Sigma}(\hat{x}) = \begin{bmatrix} h_i(\hat{x}) \\ \vdots \\ L_f^{k_i-1} h_i(\hat{x}) \end{bmatrix}$ . La matrice de gain  $S_{\infty}^{-1}(\theta)$  doit être choisie solution de :

$$\theta S_{\infty}(\theta) + A^T S_{\infty}(\theta) + S_{\infty}(\theta) A - C^T C = 0$$

( $A$  et  $C$  sont les matrices de la forme canonique observable).

**Remarque 4.3.1** L'équation d'état de  $\Sigma_{OBS}$  est composée de deux parties. La première est une recopie du système original et la seconde est un terme correctif qui tend vers zéro lorsque l'erreur d'estimation du vecteur de sortie tend vers zéro.

Le résidu est obtenu en soustrayant les sorties mesurées aux sorties estimées.

### 4.3.2 Comparaison des résidus

La détermination de la relation unissant les résidus d'observateur aux résidus de parité, s'effectue de la manière suivante. Dans un premier temps, nous allons montrer, dans le cas mono sortie (ceci afin d'éviter d'alourdir les écritures), que le système  $\Sigma_{OBS}$  admet une et une seule RRA. Puis dans une seconde partie, nous calculerons cette relation. Enfin nous montrerons à partir de cette relation, que les résidus de parité sont égaux à une fonction non linéaire des résidus d'observateur.

#### 4.3.2.1 Calcul des RRA issues de $\Sigma_{OBS}$

L'étape préliminaire au calcul des RRA est de déterminer le nombre de relations existant sur le système.

**Proposition 4.2** Les systèmes  $\Sigma$  et  $\Sigma_{OBS}$  admettent chacun une et une seule RRA.

**Preuve** Le système  $\Sigma$  est par hypothèse uniformément observable. Dans le chapitre concernant l'espace de parité, nous avons démontré que lorsqu'un système est observable, alors il admet autant de RRA que de sortie. Donc dans le cas mono sortie, le système admet une seule RRA.

Nous allons maintenant montrer que le système  $\Sigma_{OBS}$  admet lui aussi une seule RRA.

Le système  $\Sigma$  étant uniformément observable, il peut donc s'écrire sous la forme canonique d'observabilité suivante (Gauthier *et al.*, 1992) :

$$\tilde{\Sigma}: \begin{cases} \dot{\zeta} &= A\zeta + \Lambda(\zeta) + G(\zeta)u \\ y &= C\zeta = h(\zeta) \end{cases} \quad (4.34)$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma(\zeta) \end{pmatrix}, G(\zeta) = \begin{pmatrix} \bar{g}_1(\zeta_1) \\ \bar{g}_2(\zeta_1, \zeta_2) \\ \vdots \\ \bar{g}_n(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \end{pmatrix}$$

et  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

Le système  $\tilde{\Sigma}$  admet une et une seule RRA. Pour montrer que le système  $\Sigma_{OBS}$  n'admet lui aussi qu'une seule RRA, nous allons montrer que ce système est difféomorphique à un système ayant la structure de  $\tilde{\Sigma}$ .

Pour cela, effectuons sur  $\Sigma_{OBS}$  un premier changement de variable défini par le difféomorphisme  $\Psi_{\Sigma}$  :

$$\tilde{\Sigma}_{OBS} : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \tilde{f}(\hat{x}) + \tilde{g}(\hat{x})u - S_{\infty}^{-1}(\theta)C^T(C\hat{x} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} = \tilde{h}(\hat{x}) \end{cases}$$

où  $S_{\infty}^{-1}(\theta)$  est une matrice de dimension  $n \times n$  s'écrivant de la manière suivante :

$$S_{\infty}^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} \alpha_{1,2}(\theta) & \cdots & \alpha_{1,n}(\theta) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1}(\theta) & \cdots & \alpha_{n,n}(\theta) \end{bmatrix}$$

Le système  $\tilde{\Sigma}_{OBS}$  est réécrit pour séparer la partie autonome de la partie commandée :

$$\tilde{\Sigma}_{OBS} : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \tilde{f}(\hat{x}) - S_{\infty}^{-1}(\theta)C^T C\hat{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{g}(\hat{x}) & S_{\infty}^{-1}(\theta)C^T \end{bmatrix}}_{\tilde{g}_{obs}} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}}_{u_{obs}} \\ \hat{y} = C\hat{x} = \tilde{h}(\hat{x}) \end{cases}$$

Soit l'application  $\tilde{\Psi}_{\Sigma}$  définie par :

$$\tilde{\Psi}_{\Sigma}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\hat{x} \longrightarrow z = \tilde{\Psi}_{\Sigma}(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{h}(\hat{x}) \\ \vdots \\ L_{\tilde{f}}\tilde{h}(\hat{x}) \end{bmatrix}$$

où  $\tilde{f}'(\hat{x})$  est la partie autonome du système  $\tilde{\Sigma}_{OBS}$  :

$$\tilde{f}'(\hat{x}) = \tilde{f}(\hat{x}) - S_{\infty}^{-1}(\theta)C^T C\hat{x}$$

Or la matrice  $C$  a la structure de la forme canonique observable:  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ .

Ceci implique que le vecteur  $C^T C \hat{x}$  a la structure suivante:

$$C^T C \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'application  $\tilde{\Psi}_\Sigma$  s'écrit alors:

$$\tilde{\Psi}_\Sigma(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{h}(\hat{x}) = \hat{x}_1 \\ L_{\tilde{f}} \tilde{h}(\hat{x}) = \hat{x}_2 - \alpha_{1,1}(\theta) \hat{x}_1 \\ L_{\tilde{f}}^2 \tilde{h}(\hat{x}) = \hat{x}_3 - \alpha_{2,1}(\theta) \hat{x}_1 - \alpha_{1,1}(\theta) \hat{x}_2 - \alpha_{1,1}^2(\theta) \hat{x}_1 \\ \vdots \\ L_{\tilde{f}}^{n-1} \tilde{h}(\hat{x}) = \tilde{q}(\hat{x}) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

où  $\tilde{q}(\hat{x})$  est une fonction non linéaire en  $(\hat{x})$ . Le jacobien en  $\hat{x}$  de  $\tilde{\Psi}_\Sigma(\hat{x})$  est une matrice triangulaire dont chaque élément de la diagonale est différent de zéro. L'application  $\tilde{\Psi}_\Sigma$  est donc un difféomorphisme. Cette application est utilisée pour définir un changement de coordonnées transformant le système  $\tilde{\Sigma}_{OBS}$  en le système  $\tilde{\Sigma}_{OBS}^*$  suivant:

$$\tilde{\Sigma}_{OBS}^* : \begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{\hat{x}}_1 & = z_2 + \tilde{g}_{obs1}(z_1) u_{obs} \\ \dot{z}_2 = \dot{\hat{x}}_2 - \alpha_{1,1}(\theta) \dot{\hat{x}}_1 & = z_3 + \tilde{g}_{obs2}(z_1, z_2) u_{obs} \\ \vdots \\ \dot{z}_n = \dots & = \tilde{f}_{obs}(z) + \tilde{g}_{obs}(z) u_{obs} \end{cases}$$

Le système  $\tilde{\Sigma}_{OBS}^*$  a la même structure que le système  $\tilde{\Sigma}$  ce qui signifie qu'il est uniformément observable et par conséquent, il admet une et une seule RRA.

Les transformations utilisées pour aboutir à ce système étant toutes des difféomorphismes, nous pouvons conclure que le système  $\Sigma_{OBS}$  admet lui aussi une et une seule RRA.

□

Le calcul de cette relation est réalisé en utilisant un algorithme approprié. cette relation s'écrit sous la forme générale suivante:

$$\rho_{OBS}(\bar{y}^{(k+1)}, \bar{u}^{(k)}, \bar{e}^{(k+1)}, \theta) = 0 \quad (4.36)$$

### 4.3.2.2 Relation entre $\rho_{EP}$ et $\rho_{OBS}$

La relation liant les deux RRA est déterminée en utilisant la décomposition en série de *Taylor* de  $\rho_{OBS}$  autour de  $\bar{e}$  et  $\theta$ . Cette décomposition est possible puisque  $\rho_{OBS}$  est analytique. Nous pouvons écrire :

$$\rho_{OBS}(\bar{y}^{(k+1)}, \bar{u}^{(k)}, \bar{e}^{(k+1)}, \theta) = \rho_{OBS, \bar{e}}(\bar{y}^{(k+1)}, \bar{u}^{(k)}, 0, 0) + \rho_{OBS, e}(\bar{y}^{(k+1)}, \bar{u}^{(k)}, \bar{e}^{(k+1)}, \theta) = 0 \quad (4.37)$$

avec :

$$\rho_{OBS, e}(\bar{y}^{(k+1)}, \bar{u}^{(k)}, \bar{e}^{(k+1)}, \theta) \Big|_{\bar{e}^{(k+1)}=0, \theta=0} = 0 \quad (4.38)$$

Lorsque  $e = 0$  et  $\theta = 0$ , les systèmes  $\Sigma$  et  $\Sigma_{OBS}$  sont identiques. Les RRA issues de ces deux systèmes doivent alors être identiques :

$$\rho_{OBS, \bar{e}}(\bar{y}^{(k+1)}, \bar{u}^{(k)}, 0, 0) = \rho_{EP}(\bar{y}^{(k+1)}, \bar{u}^{(k)}) \quad (4.39)$$

La relation (4.37) est équivalente à :

$$\rho_{EP}(\bar{y}^{(k+1)}, \bar{u}^{(k)}) + \rho_{OBS, e}(\bar{y}^{(k+1)}, \bar{u}^{(k)}, \bar{e}^{(k+1)}, \theta) = 0 \quad (4.40)$$

Cette relation fait apparaître les résidus d'observateur et de parité :

$$r(t) = -\rho_{OBS, e}(\bar{y}^{(k+1)}, \bar{u}^{(k)}, \bar{e}^{(k+1)}, \theta) \quad (4.41)$$

La fonction  $\rho_{OBS, e}(\bar{y}^{(k+1)}, \bar{u}^{(k)}, \bar{e}^{(k+1)})$  étant obtenue par décomposition en série de Taylor, elle s'écrit sous la forme d'une somme, éventuellement infinie de polynômes dont les coefficients appartiennent au corps des polynômes en les variables  $\bar{y}^{(k+1)}, \bar{u}^{(k)}$  et en les variables  $\bar{e}^{(k+1)}, \theta$ . Ainsi, la relation (4.41) peut s'écrire sous la forme d'un polynôme à coefficients non constants :

$$r(t) = \sum_{i=1} a_i(\bar{y}^{(k+1)}, \bar{u}^{(k)}, \theta) \bar{e}_i^{(k+1)} \quad (4.42)$$

où  $\bar{e}_i^{(k+1)}$  est une composante de l'ensemble des monômes qu'il est possible de générer avec  $e, \dots, e^{(k+1)}$  et apparaissant dans  $\rho_{OBS, e}(\bar{y}^{(k+1)}, \bar{u}^{(k)}, \bar{e}^{(k+1)})$ .

### 4.3.3 Conclusion

Dans cette section, nous avons montré que les résidus d'observateur et les résidus de parité obtenus par élimination des variables inconnues dans le système sont semblables à un filtre près. Le filtre trouvé est non linéaire à coefficients variant dans le temps.

L'expression de ce filtre est souvent complexe mais seule son existence et la possibilité de le calculer *a priori* nous intéresse puisque cela prouve qu'il existe une passerelle permettant de passer d'un résidu à l'autre.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des résultats obtenus sur la comparaison des méthodes de génération de résidus utilisant d'une part la théorie des observateurs et d'autre part la théorie

de l'espace de parité.

Deux cas de figure ont été étudiés suivant que le système à surveiller est exactement linéarisable ou non.

Lorsque le système initial est exactement linéarisable, nous avons montré que les résultats connus pour les systèmes linéaires (Cocquempot, 1993; Ding and Frank, 1994; Patton and Chen, 1991*b*) sont directement transposables. Ainsi, les résidus de parité sont égaux à un filtre linéaire près, aux résidus d'observateur.

Lorsque les systèmes non linéaires sont considérés, nous avons montré que lorsque l'approche observateur fondée sur la théorie des grands gains est utilisée, les résidus issus de ce générateur et ceux obtenus par élimination sont liés par un filtre non linéaire à coefficients variant dans le temps.

Dans ce chapitre, nous n'avons pas traité l'approche observateur fondée sur la théorie des modes glissants. Toutefois, il est possible d'utiliser la même démarche que pour les observateurs à grand gain mais en considérant séparément les équations de l'observateur suivant les valeurs des fonctions «signes».

## Deuxième partie

# Application aux machines tournantes



# Introduction

Cette partie est consacrée à l'application de l'approche de l'espace de parité et à ses liens avec l'approche observateur pour la génération de résidus. Deux exemples illustratifs seront traités.

Le premier exemple sera l'étude du moteur à courant continu série. Le choix de ce moteur tient essentiellement au fait que son modèle se prête bien pour l'application des méthodes proposées dans la partie théorique de ce mémoire. Nous présenterons dans un premier temps, la modélisation de ce type de machine. Puis, dans un second temps, nous synthétiserons deux observateurs sur ce modèle, le premier utilisant la théorie des grands gains et le second la linéarisation exacte. A partir de ces observateurs, nous générerons des résidus et nous déterminerons les relations liant les résidus d'observateur aux résidus de l'espace de parité générés à partir de la théorie de l'élimination ou par projection.

Le second exemple que nous traiterons est celui de la machine asynchrone. Nous présenterons dans un premier temps, son principe de fonctionnement. A partir des lois de la physique, nous donnerons le modèle dans le repère triphasé (ou  $a,b,c$ ). Dans un second temps, nous présenterons la transformation de Park qui permet de passer du repère triphasé à un repère diphasé (ou  $d,q$ ). Le modèle en  $a,b,c$  sera écrit dans ce nouveau repère et nous donnerons les équations du moteur dans le repère de Park.

A partir de ce modèle, nous appliquerons la théorie de l'élimination pour obtenir les relations de redondance analytique permettant de générer les résidus. Nous verrons que ces RRA peuvent être modifiées de manière à supprimer la composante sinusoïdale des différents signaux d'entrées sorties, améliorant ainsi la procédure de calcul des dérivées. Nous appliquerons l'approche des résultants permettant de déterminer des relations robustes vis-à-vis des incertitudes sur les paramètres. Ensuite, nous synthétiserons un observateur à grand gain sur ce modèle afin de générer des résidus. Nous déterminerons enfin la relation non linéaire reliant ces résidus aux résidus issus des RRA.

## Chapitre 5

# Application au moteur à courant continu série

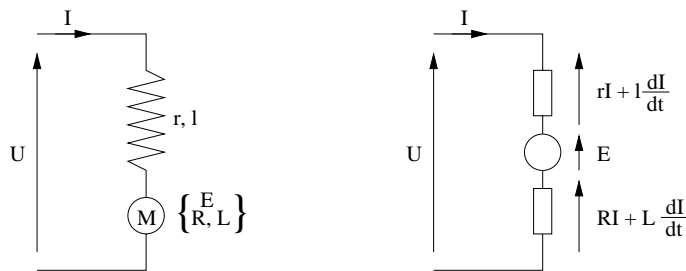
Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier les différents points théoriques développés dans ce mémoire au moteur à courant continu série (moteur DC série) encore appelé moteur à excitation shunt.

Ce type de moteur est souvent utilisé pour la traction électrique en raison de ses propriétés mécaniques, en particulier :

1. Il a un couple de démarrage élevé.
2. Il est «autorégulé» en puissance.

### 5.1 Modélisation du moteur DC série

Le terme série signifie que l'inducteur est connecté en série avec l'induit comme le montre les figures 5.1



5.1.a) Schéma mécanique

5.1.b) Schéma électrique

FIG. 5.1 – Schémas mécanique et électrique du moteur à courant continu série

Les lettres minuscules  $r$  et  $l$  représentent respectivement la résistance et l'inductance de l'inducteur (ou stator), tandis que les lettres majuscules  $R$  et  $L$  représentent respectivement la

résistance et l'inductance de l'induit (ou rotor).

Le flux dans l'induit, noté  $\phi_f$ , est une fonction du courant d'induit. Dans le cas du moteur à excitation série, nous avons la relation:  $\phi_f = f(I)$ . De plus si le circuit magnétique est non saturé, alors la fonction  $f(\cdot)$  est linéaire (Chiasson and Bodson, 1993):

$$\phi_f = LI$$

La force électromotrice  $E$  de ce moteur est donnée par :

$$E = K_m \phi_f \omega$$

où  $K_m$  est une constante dépendant des caractéristiques de la machine et s'exprimant par :

$$K_m = \frac{p}{2a} \frac{n}{\pi}$$

où  $p$  est le nombre de paires de pôles,  $2a$  le nombre de voies d'enroulement et  $n$  le nombre total de conducteurs du rotor.

Pour modéliser cette machine, nous allons dans un premier temps étudier la partie électrique et dans un second temps la partie mécanique.

#### La partie électrique

La loi d'Ohm appliquée au schéma électrique (fig. 5.1.b) donne :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt}(l + L) &= U - E - (r + R)I \\ &= U - K_m \phi_f \omega - (r + R)I \\ &= -(R + r)I - K_m L \omega I + U \end{aligned}$$

#### La partie mécanique

La relation fondamentale de la dynamique appliquée aux solides en rotation sur l'arbre du moteur et sa charge donne :

$$\begin{aligned} J \frac{d\omega}{dt} &= \underbrace{K_m \phi_f I}_{\text{couple moteur}} - \underbrace{B\omega}_{\text{frottement visqueux}} - \underbrace{C_r}_{\text{couple résistant}} \\ &= K_m L I^2 - B\omega - C_r \end{aligned}$$

où  $J$  est le moment d'inertie de la charge et  $B$  est le coefficient de frottement visqueux.

En utilisant les notations  $x_1 = \omega$ ,  $x_2 = I$ ,  $R_t = R + r$  et  $L_t = L + l$  nous obtenons la représentation d'état suivante du moteur :

$$\dot{x}_1 = -\frac{B}{J}x_1 + K_m \frac{L}{J}x_2^2 - \frac{C_r}{J} \quad (5.1a)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{R_t}{L_t}x_2 - K_m \frac{L}{L_t}x_1 x_2 + \frac{U}{L_t} \quad (5.1b)$$

Le couple résistant  $C_r$  agit sur le système comme une entrée inconnue.

Nous allons étudier deux configurations de placement de capteurs. Dans un premier temps, nous considérerons qu'un seul capteur est implanté et mesure le courant. Dans un second temps un capteur de vitesse sera ajouté. Nous monterons l'intérêt de ce capteur pour la surveillance.

## 5.2 Mesure du courant uniquement

L'équation de la mesure suivante est ajoutée aux deux équations (5.1) :

$$y = x_2$$

Dans un premier temps, nous calculerons l'unique relation de redondance analytique qu'il est possible d'extraire du modèle. Dans un second temps, nous chercherons le modèle linéarisé exact équivalent. Enfin, dans un dernier temps nous implanterons un observateur de type Luenberger et un observateur grand gain et nous calculerons les liens entre le résidu de parité et les résidus issus des deux types d'observateur.

### 5.2.1 Relation de Redondance Analytique (RRA)

Le modèle du moteur est polynomial, nous pouvons déterminer la RRA en utilisant un algorithme d'élimination tel que les bases de Groebner. Mais avant d'appliquer cet algorithme, nous devons déterminer l'ordre de dérivation de la sortie nécessaire à l'obtention d'une relation.

Pour cela, écrivons les dérivées successives de la sortie  $y$  pour déterminer la fonction  $\Lambda_2$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x_2 \\ \dot{y} = -\frac{R_t}{L_t}x_2 - K_m \frac{L}{L_t}x_1x_2 + \frac{U}{L_t} \\ \ddot{y} = \frac{K_m LB}{JL_t}x_1x_2 - \frac{K_m^2 L^2 x_2^3}{L_t J} + \frac{K_m L}{L_t J}x_2 C_r + \frac{R_t^2}{L_t^2}x_2 + 2\frac{R_t L K_m}{L_t^2}x_1x_2 + \frac{K_m^2 L^2}{L_t^2}x_1^2x_2 \\ \quad - \left( \frac{K_m L}{L_t^2}x_1 + \frac{R_t}{L_t} \right) U + \frac{\dot{U}}{L_t} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

En compactant l'écriture, nous obtenons :

$$\Rightarrow \bar{y}^{(2)} = \Lambda_2(x_1, x_2, \bar{U}^{(1)}, C_r) \quad (5.3)$$

Le rang  $r_s$  de la matrice Jacobienne  $\frac{\partial \Lambda_2}{\partial x}$  est égal à 2. En utilisant le théorème 3.2 qui permet de déterminer le nombre de RRA issues d'un modèle pour un ordre de dérivation donné, nous obtenons qu'il existe exactement une RRA pour le moteur à courant continu :

$$\begin{aligned} \eta &= s + p - r_s \\ &= 2 + 1 - 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pour déterminer cette relation, nous utilisons le logiciel de calcul symbolique MAPLE et la fonction *gbasis* permettant de calculer une base de Groebner pour un système polynomial. La RRA obtenue est :

$$\begin{aligned} \omega(\bar{y}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, C_r) &= \ddot{y} + \frac{\dot{y}}{L_t y} U - \frac{\dot{y}^2}{y} - \frac{\dot{U}}{L_t} + \frac{(K_m L)^2 y^3}{L_t J} \\ &\quad + \frac{B}{J} \left( \dot{y} - \frac{U}{L_t} + \frac{R_t}{L_t} y \right) - \frac{K_m L}{L_t J} y C_r = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Cette RRA peut être décomposée de manière à séparer la forme de calcul de la forme d'évaluation. De plus, pour simplifier la forme d'évaluation, nous allons diviser cette RRA par  $y$  (le courant

dans la machine est strictement positif donc  $y \neq 0$ ) :

$$\frac{\omega(\bar{y}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, C_r)}{y} = \omega_c(\bar{y}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}) - \omega_e(C_r) = 0 \quad (5.5)$$

Les formes de calcul et d'évaluation sont respectivement égales à :

$$\begin{aligned} \omega_c(\bar{y}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}) &= \frac{\ddot{y}}{y} - \left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^2 + \frac{1}{L_t} \frac{\dot{y}U - \dot{U}y}{y^2} + \frac{B}{J} \frac{\dot{y}}{y} \\ &\quad + \frac{(K_m L y)^2}{L_t J} + \frac{B}{J} \left(\frac{R_t}{L_t} - \frac{U}{L_t y}\right) \end{aligned} \quad (5.6a)$$

$$\omega_e(C_r) = \frac{K_m L}{L_t J} C_r \quad (5.6b)$$

**Remarque 5.2.1** Dans cette configuration de mesure, il est impossible de trouver une RRA indépendante du couple résistant  $C_r$ , même en augmentant l'ordre de dérivation sur la sortie.

Si le couple résistant peut être considéré constant, alors nous avons  $\dot{C}_r = 0$  et par conséquent, une RRA indépendante de  $C_r$ , notée  $\omega_{rob}$  peut être trouvée en dérivant une fois la RRA  $\frac{\omega}{y}$  :

$$\omega_{rob} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega}{y}\right) \quad (5.7)$$

## 5.2.2 Linéarisation exacte

Pour déterminer le système équivalent linéarisé par injection d'entrée/sortie, nous allons utiliser l'algorithme présenté dans la thèse de Plestan (Plestan, 1995). Le point de départ de cet algorithme est la RRA donnée en (5.4). Le principe de l'algorithme consiste à écrire cette relation sous la forme :

$$\omega(\bar{y}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, C_r) = \ddot{y} - \varphi_{1,1}(y, U, C_r) - \varphi_{1,2}(y, U, C_r) = 0 \quad (5.8)$$

Les deux fonctions  $\varphi_{1,1}$  et  $\varphi_{1,2}$ , si elles existent, sont données pas l'algorithme. Pour ce système, l'algorithme permet de conclure que le système n'est pas linéarisable dans sa forme actuelle.

Nous essayons de déterminer une transformation de sortie qui permettrait de résoudre le problème de linéarisation. La détermination de cette transformation de sortie est étudiée dans l'article de Krener (Krener and Respondek, 1985). Appliquée à notre exemple, la méthode proposée par Krener permet de trouver la transformation suivante :

$$\tilde{y} = \ln(y) \quad (5.9)$$

Divisons la RRA par  $y$  et regroupons les termes par ordre décroissant sur les dérivées :

$$\begin{aligned} \frac{\omega(\bar{y}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, C_r)}{y} &= \frac{\ddot{y}}{y} - \left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^2 + \frac{1}{L_t} \frac{\dot{y}U - \dot{U}y}{y^2} + \frac{B}{J} \frac{\dot{y}}{y} \\ &\quad + \frac{(K_m L y)^2}{L_t J} + \frac{B}{J} \left(\frac{R_t}{L_t} - \frac{U}{L_t y}\right) - \frac{K_m L}{L_t J} C_r = 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{y}}{y} - \left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^2 &= \ddot{\tilde{y}} \\ \frac{1}{L_t} \frac{\dot{y}U - \dot{U}y}{y^2} + \frac{B}{J} \frac{\dot{y}}{y} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{B}{J} \ln(y) - \frac{1}{L_t} \frac{U}{y}\right) \end{aligned}$$

Donc ,  $\frac{\omega(\bar{y}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, C_r)}{y}$  se décompose sous la forme :

$$\frac{\omega(\bar{y}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, C_r)}{y} = \ddot{y} - \dot{\varphi}_{1,1}(y, U, C_r) - \varphi_{1,2}(y, U, C_r) = 0 \quad (5.11)$$

où les fonctions  $\varphi_{1,1}(y, U, C_r)$  et  $\varphi_{1,2}(y, U, C_r)$  sont données par :

$$\varphi_{1,1}(y, U, C_r) = \frac{1}{L_t} \frac{U}{y} - \frac{B}{J} \ln(y) \quad (5.12)$$

$$\varphi_{1,2}(y, U, C_r) = -\frac{(K_m L y)^2}{L_t J} - \frac{B}{J} \left( \frac{R_t}{L_t} - \frac{U}{L_t y} \right) + \frac{K_m L}{L_t J} C_r \quad (5.13)$$

Le modèle du système est donc localement équivalent à :

$$\dot{\zeta}_1 = \zeta_2 + \frac{1}{L_t} \frac{U}{y} - \frac{B}{J} \ln(y) \quad (5.14a)$$

$$\dot{\zeta}_2 = -\frac{(K_m L y)^2}{L_t J} - \frac{B}{J} \left( \frac{R_t}{L_t} - \frac{U}{L_t y} \right) + \frac{K_m L}{L_t J} C_r \quad (5.14b)$$

$$\ln y = \tilde{y} = \zeta_1 \quad (5.14c)$$

## 5.2.3 Relation entre les résidus

### 5.2.3.1 Observateur de Luenberger

Pour calculer le filtre liant le résidu de parité au résidu issu de l'observateur de Luenberger, nous allons considérer le modèle linéarisé (5.14) du moteur.

A partir de ce modèle, la RRA peut être déterminée par projection :

$$\bar{y}^{(2)} = OBS_2(C, A)\zeta + COM_2(C, A)\bar{\varphi}^{(1)}(y, U, C_r) \quad (5.15)$$

Les matrices  $A$  et  $C$  étant sous la forme canonique observable :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

les matrices  $OBS_2(C, A)$  et  $COM_2(C, A)$  sont :

$$OBS_2(C, A) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } COM_2(C, A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \\ CA & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de projection  $W$  peut être choisie égale à :

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

La RRA obtenue par projection est égale à :

$$\ddot{y} = \dot{\varphi}_{1,1}(y, U, C_r) + \varphi_{1,2}(y, U, C_r)$$

En reprenant l'équation (5.11), le résidu obtenu par projection est égal à  $\frac{\omega(\bar{y}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, C_r)}{y}$ .

Nous allons maintenant construire le générateur de résidus en utilisant la théorie des observateurs à entrée inconnue. La structure du générateur est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\zeta}} &= F\hat{\zeta} + T\varphi(y, U) + Ky \\ e &= C\hat{\zeta} - (I - CH)\ddot{y} \\ &= C\hat{\zeta} + L_2\ddot{y} \end{cases} \quad (5.17)$$

Les matrices  $F$ ,  $T$ ,  $K$ ,  $C$ ,  $H$  et  $L_2$  sont égales à :

$$F = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } L_2 = -1$$

La procédure décrite au chapitre 4 est appliquée pour déterminer le filtre reliant le résidu d'observateur  $e_{lin}$  au résidu de parité  $\omega(\bar{y}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, C_r)/y$ . La relation 4.28 s'écrit alors sous la forme :

$$W \begin{bmatrix} e_{lin} \\ \dot{e}_{lin} \\ \ddot{e}_{lin} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CK & 0 \\ CAK & CK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{lin} \\ \dot{e}_{lin} \end{bmatrix} = \frac{\omega(\bar{y}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, C_r)}{y} = r(t) \quad (5.18)$$

En utilisant l'expression de la matrice  $W$  donnée en (5.16), nous obtenons la relation suivante :

$$\ddot{e}_{lin} + CAKe_{lin} + CK\dot{e}_{lin} = r(t)$$

Cette équation peut être écrite dans le domaine de Laplace. Nous obtenons :

$$E_{lin}(p) = \frac{R(p)}{p^2 + CKp + CAK} \quad (5.19)$$

### 5.2.3.2 Observateur à grand gain

Nous allons maintenant présenter la comparaison entre le résidu de parité et celui issu d'un observateur à grand gain.

Ce type d'observateur peut être directement appliqué sur le modèle non linéaire (5.1). Ce modèle s'écrit sous la forme générale affine en la commande :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^2 g_i(x)u_i \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (5.20)$$

avec

$$f(x) = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J}x_1 + K_m \frac{L}{J}x_2^2 \\ -\frac{R_t}{L_t}x_2 - K_m \frac{L}{L_t}x_1x_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \chi_2(x) \\ -\chi_1(x_1)x_2 \end{bmatrix}$$

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_t} \end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } h(x) = x_2$$

Les deux entrées sont :

$$u_1 = U \text{ et } u_2 = C_r$$

Ce modèle est mis sous la forme canonique observable en appliquant le changement de coordonnées diffeomorphique  $\Psi(x)$  défini par 2.63:

$$\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \rightarrow \zeta = \Psi(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1}h(x) \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

En remplaçant  $f(x)$  et  $h(x)$  par leurs expressions respectives, cette application est égale à :

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\chi_1(x_1)x_2 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

L'observateur à grand gain est synthétisé conformément au théorème 2.6 et a pour équations :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u - \left[ \frac{\partial \Psi(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \right]^{-1} S_\theta^{-1} C^T (h(\hat{x}) - y) \\ C^T C = \theta S_\theta + A^T S_\theta + S_\theta A \end{cases}$$

Les matrices  $A$  et  $C$  sont les matrices de la forme canonique observable et sont égales à :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de gain  $S_\theta$  est calculée à l'aide de la formule (2.67) :

$$S_\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta} & -\frac{1}{\theta^2} \\ -\frac{1}{\theta^2} & \frac{2}{\theta^3} \end{bmatrix}$$

Nous obtenons le terme de gain suivant :

$$S_\theta^{-1} C^T = \begin{bmatrix} 2\theta \\ \theta^2 \end{bmatrix}$$



L'expression de l'observateur grand gain est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= \chi_2(\hat{x}) + \frac{2L_t\theta}{K_m L \hat{x}_2} (\chi_1(\hat{x}_1) + \frac{\theta}{2}) (\hat{x}_2 - y) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\chi_1(\hat{x}_1) \hat{x}_2 + \frac{U}{L_t} - 2\theta(\hat{x}_2 - y) \end{cases} \quad (5.23)$$

Pour utiliser cet observateur comme générateur de résidus, nous pouvons choisir la sortie suivante :

$$e_{GG} = y - \hat{x}_2 \quad (5.24)$$

La relation non linéaire reliant le résidu issu de l'observateur grand gain  $e_{GG}$  au résidu de parité est déterminée en éliminant le vecteur d'état dans le système (5.23) en considérant la sortie (5.24).

Le scalaire  $e_{GG}$  est dérivé jusqu'à l'ordre deux. le vecteur suivant est alors obtenu :

$$\begin{aligned} y - e_{GG} &= \hat{x}_2 \\ \dot{y} - \dot{e}_{GG} &= -\chi_1(\hat{x}_1) \hat{x}_2 + \frac{U}{L_t} + 2\theta e_{GG} \\ \ddot{y} - \ddot{e}_{GG} &= \chi_1(\hat{x}_1)^2 \hat{x}_2 - \frac{K_m L}{L_t} \chi_2(\hat{x}) \hat{x}_2 - \chi_1(\hat{x}_1) \frac{U}{L_t} + \frac{\dot{U}}{L_t} + 2\theta(\theta e_{GG} + \dot{e}_{GG}) \end{aligned}$$

Ce système peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} y - e_{GG} &= \hat{x}_2 \\ \dot{y} - \dot{e}_{GG} - 2\theta e_{GG} &= -\chi_1(\hat{x}_1) \hat{x}_2 + \frac{U}{L_t} \\ \ddot{y} - \ddot{e}_{GG} - 2\theta(\dot{e}_{GG} + \theta e_{GG}) &= \chi_1(\hat{x}_1)^2 \hat{x}_2 - \frac{K_m L}{L_t} \chi_2(\hat{x}) \hat{x}_2 - \chi_1(\hat{x}_1) \frac{U}{L_t} + \frac{\dot{U}}{L_t} \end{cases} \quad (5.25)$$

La structure de ce système est identique à celle du système (5.2) pour  $C_r = 0$  et en effectuant les substitutions suivantes :

$$\begin{aligned} y &\rightarrow y - e_{GG} \\ \dot{y} &\rightarrow \dot{y} - \dot{e}_{GG} - 2\theta e_{GG} \\ \ddot{y} &\rightarrow \ddot{y} - \ddot{e}_{GG} - 2\theta(\dot{e}_{GG} + \theta e_{GG}) \end{aligned}$$

Nous pouvons éliminer les variables  $\hat{x}_1$  et  $\hat{x}_2$  dans ce système et obtenir une relation identique à (5.4) :

$$\omega \left( \ddot{y} - \ddot{e}_{GG} - 2\theta(\dot{e}_{GG} + \theta e_{GG}), \dot{y} - \dot{e}_{GG} - 2\theta e_{GG}, y - e_{GG}, \bar{U}^{(1)}, 0 \right) = 0 \quad (5.26)$$

Comme  $C_r = 0$ , cette relation est équivalente à la forme de calcul :

$$\begin{aligned} \omega_c \left( \ddot{y} - \ddot{e}_{GG} - 2\theta(\dot{e}_{GG} + \theta e_{GG}), \dot{y} - \dot{e}_{GG} - 2\theta e_{GG}, y - e_{GG}, \bar{U}^{(1)} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \omega_c \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{e}_{GG}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, \theta \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

avec :

$$\begin{aligned} \omega_c \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{e}_{GG}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, \theta \right) &= \frac{\ddot{y} - \ddot{e}_{GG} - 2\theta(\dot{e}_{GG} + \theta e_{GG})}{y - e_{GG}} - \left( \frac{\dot{y} - \dot{e}_{GG} - 2\theta e_{GG}}{y - e_{GG}} \right)^2 \\ &+ \frac{(\dot{y} - \dot{e}_{GG} - 2\theta e_{GG}) U - \dot{U} (y - e_{GG})}{L_t (y - e_{GG})^2} + \frac{B}{J} \frac{\dot{y} - \dot{e}_{GG} - 2\theta e_{GG}}{y - e_{GG}} \\ &+ \frac{(K_m L)^2}{L_t J} (y - e_{GG})^2 + \frac{B}{J} \left( \frac{R_t}{L_t} - \frac{U}{L_t (y - e_{GG})} \right) \end{aligned}$$

Pour faire apparaître la forme de calcul du résidu de parité (5.6a), nous pouvons décomposer  $\omega_c \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{e}_{GG}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, \theta \right)$  en série de *Taylor* autour de  $\bar{e}_{GG}^{(2)}$  mais cette fonction n'étant pas polynômiale, le développement sera infini. Toutefois, nous pouvons obtenir une décomposition finie en considérant la décomposition de  $(y - e_{GG})^2 \omega_c \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{e}_{GG}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, \theta \right)$  puis en divisant le tout par  $y^2$  ( $y \neq 0$ ):

$$\frac{(y - e_{GG})^2 \omega_c \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{e}_{GG}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, \theta \right)}{y^2} = \omega_c \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{U}^{(1)} \right) + \omega_{c,1} \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{e}_{GG}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, \theta \right)$$

avec

$$\omega_{c,1} \left( \bar{y}^{(2)}, 0, \bar{U}^{(1)}, 0 \right) = 0$$

Or

$$\frac{(y - e_{GG})^2 \omega_c \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{e}_{GG}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, \theta \right)}{y^2} = \omega_c \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{e}_{GG}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, \theta \right) - \underbrace{2\omega_c \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{e}_{GG}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, \theta \right) \frac{e_{GG}}{y} + \left( \frac{e_{GG}}{y} \right)^2}_{-\omega_{c,2} \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{e}_{GG}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, \theta \right)}$$

avec

$$\omega_{c,2} \left( \bar{y}^{(2)}, 0, \bar{U}^{(1)}, 0 \right) = 0$$

La forme de calcul obtenue par élimination sur l'observateur peut alors se décomposer en une partie égale à la forme de calcul du résidu de parité et en une forme égale à zéro lorsque le résidu d'observateur et ses dérivées successives  $\bar{e}_{GG}$  sont nulles :

$$\omega_c \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{e}_{GG}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, \theta \right) = \omega_c \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{U}^{(1)} \right) + \underbrace{\omega_{c,1} \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{e}_{GG}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, \theta \right) + \omega_{c,2} \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{e}_{GG}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, \theta \right)}_{-\omega_{c,3} \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{e}_{GG}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, \theta \right)}$$

L'équation (5.27) se décompose alors :

$$\omega_c \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{U}^{(1)} \right) - \omega_{c,3} \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{e}_{GG}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, \theta \right) = 0 \quad (5.28)$$

Le résidu de parité  $\omega_c \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{U}^{(1)} \right)$  et le résidu issu de l'observateur à grand gain  $e_{GG}$  sont liés par un filtre non linéaire :

$$\omega_c \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{U}^{(1)} \right) = \omega_{c,3} \left( \bar{y}^{(2)}, \bar{e}_{GG}^{(2)}, \bar{U}^{(1)}, \theta \right) \quad (5.29)$$

### 5.3 Mesure du courant et de la vitesse

Dans cette configuration, tout le vecteur d'état est mesuré. Le système est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\frac{B}{J}x_1 + \frac{K_m L}{J}x_2^2 - \frac{C_T}{J} \\ \dot{x}_2 &= -\frac{R_t}{L_t}x_2 - \frac{K_m L}{L_t}x_1 x_2 + \frac{U}{L_t} \end{cases} \quad (5.30)$$

$$\begin{cases} y_1 &= x_2 \\ y_2 &= x_1 \end{cases} \quad (5.31)$$

Nous allons étudier ici la génération de résidus par les approches de l'espace de parité et par un observateur linéarisé. Pour commencer, nous allons déterminer les RRA issues du modèle puis nous linéariserons le modèle pour construire l'observateur.

### 5.3.1 Calcul des RRA

Lorsque seulement le courant est mesuré, nous avons montré qu'il est impossible de construire une RRA indépendante du couple résistant. Avec l'ajout du capteur de vitesse, nous allons voir que nous pouvons obtenir une RRA robuste par rapport à  $C_r$ .

Dans une première étape, nous dérivons le vecteur de sortie pour déterminer la fonction  $\Lambda_s$ . Nous choisissons les ordres de dérivation suivant :

- $s_1$ , associé à la sortie  $y_1$ , égal à 1
- $s_2$ , associé à la sortie  $y_2$ , égal à 1

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 y_1 &= x_2 \\
 \dot{y}_1 &= -\frac{R_t}{L_t} x_2 - \frac{K_m L}{L_t} x_1 x_2 + \frac{U}{L_t} \\
 y_2 &= x_1 \\
 \dot{y}_2 &= -\frac{B}{J} x_1 + \frac{K_m L}{J} x_2^2 - \frac{C_r}{J}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

En condensant l'écriture, nous avons :

$$\bar{y}^{(1)} = \Lambda_1(x_1, x_2, U, C_r)$$

La matrice jacobienne de  $\Lambda_1$  en  $x$  et  $C_r$  est égale à :

$$\left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial x} & \frac{\partial \Lambda_1}{\partial C_r} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_m L}{L_t} x_2 & -\frac{R_t}{L_t} - \frac{K_m L}{L_t} x_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{B}{J} & 2\frac{K_m L}{J} x_2 & -\frac{1}{J} \end{array} \right]$$

Le rang  $r^*$  de cette matrice est égal à 3. En utilisant le théorème 3.3, nous pouvons calculer le nombre de RRA issues du modèle et robustes vis-à-vis de  $C_r$  :

$$\begin{aligned}
 \eta^* &= \sum_{k=1}^2 s_k + p - r^* \\
 &= (1 + 1) + 2 - 3 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Cette relation est facilement calculable en remplaçant  $x_1$  (resp.  $x_2$ ) dans l'expression  $\dot{y}_1$  par  $y_2$  (resp.  $y_1$ ) :

$$\omega_1(\bar{y}_1^{(1)}, y_2, U) = \dot{y}_1 + \frac{R_t}{L_t} y_1 + \frac{K_m L}{L_t} y_1 y_2 - \frac{U}{L_t} = 0 \tag{5.33}$$

La dérivée première de  $y_2$  permet de déterminer une RRA dépendant de  $C_r$  comme pour la configuration précédente mais en diminuant les ordres de dérivation nécessaires :

$$\omega_2 \left( y_1, \bar{y}_2^{(1)}, C_r \right) = \dot{y}_2 + \frac{B}{J} y_2 - \frac{K_m L}{J} y_1^2 + \frac{C_r}{J} \quad (5.34)$$

**Remarque 5.3.1** La relation  $\omega_1 \left( \bar{y}_1^{(1)}, y_2, U \right) = 0$  peut être obtenue par projection en considérant le vecteur composé de  $y_1$  et  $\dot{y}_1$  et en remplaçant dans cette dernière ligne  $x_1$  et  $x_2$  respectivement par  $y_2$  et  $y_1$  :

$$\begin{aligned} y_1 &= x_2 \\ \dot{y}_1 &= -\frac{R_t}{L_t} y_1 - \frac{K_m L}{L_t} y_1 y_2 + \frac{U}{L_t} \end{aligned}$$

La matrice de projection  $W$  est donnée par :

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

### 5.3.2 Observateur de Luenberger

Le système est déjà sous la forme canonique observable :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \varphi_{1,1}(y_1, y_2) - \frac{C_r}{J} \\ \dot{x}_2 &= \varphi_{2,1}(y_1, y_2, U) \end{cases} \quad (5.36a)$$

$$\begin{cases} y_1 &= x_2 \\ y_2 &= x_1 \end{cases} \quad (5.36b)$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1} &= -\frac{B}{J} y_2 + \frac{K_m L}{J} y_1^2 \\ \varphi_{2,1} &= -\frac{R_t}{L_t} y_1 - \frac{K_m L}{L_t} y_1 y_2 + \frac{U}{L_t} \end{aligned}$$

Ce modèle s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \varphi(y, u) + Ev \\ y &= Cx \end{aligned}$$

où les matrices  $A$ ,  $\varphi(y, u)$ ,  $E$  et  $C$  sont données par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi(y, u) = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1}(y, u) \\ \varphi_{2,1}(y, u) \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -\frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En suivant l'algorithme de construction des UIO donné dans le chapitre traitant des observateurs, nous pouvons calculer les matrices  $H$ ,  $T$ ,  $F$  et  $K$  permettant d'obtenir le générateur de résidus.

$$H = E \left[ (CE)^T CE \right]^{-1} (CE)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.37a)$$

$$T = I - HC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.37b)$$

La matrice  $K_1$  est calculée par placement de pôles telle que la matrice  $A - K_1C$  soit stable. La structure des matrices  $A$  et  $C$  entraîne que  $K_1$  est une matrice de dimension deux et pouvant être choisie antidiagonale.

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & k_{12} \\ k_{21} & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } k_{12}, k_{21} > 0 \quad (5.38a)$$

$$F = A - K_1C = \begin{bmatrix} -k_{12} & 0 \\ 0 & -k_{21} \end{bmatrix} \quad (5.38b)$$

$$K_2 = FH = \begin{bmatrix} 0 & -k_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.38c)$$

$$K = K_1 + K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.38d)$$

Le générateur de résidus utilisant les UIO peut être construit avec les équations suivantes :

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} -k_{12} & 0 \\ 0 & -k_{21} \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varphi(y, u) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_{21} & 0 \end{bmatrix} y \quad (5.39a)$$

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \zeta \quad (5.39b)$$

### 5.3.3 Relation entre les résidus

La matrice  $T$  n'étant pas inversible, il est possible de construire un observateur d'ordre réduit pour générer les résidus. Cet observateur, équivalent au système (4.7) aura pour équations :

$$\dot{z} = F^* z + T^* \psi(y, u) + K^* y \quad (5.40a)$$

$$e^* = C^* z - L_2^* y \quad (5.40b)$$

nous avons les matrices  $F^*$ ,  $T^*$ ,  $K^*$ ,  $C^*$  et  $L_2^*$  suivantes :

$$F^* = -k_{21}, T^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K^* = \begin{bmatrix} k_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C^* = 1 \text{ et } L_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour trouver le filtre liant le résidu de parité au résidu d'observateur, nous allons étendre l'observateur réduit pour obtenir un système identique au système (4.10).

Les matrices supplémentaires  $f^*$ ,  $t^*$ ,  $k^*$ ,  $c^*$  et  $l_2^*$  peuvent être choisies de la manière suivante :

$$f^* = -k_{22}, t^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, k^* = \begin{bmatrix} 0 & k_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, c^* = 1 \text{ et } l_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système étendu s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{z}_e &= \begin{bmatrix} -k_{21} & 0 \\ 0 & -k_{22} \end{bmatrix} z_e + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \phi(y, u) + \begin{bmatrix} k_{21} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} y \\ e_e &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z_e - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y \end{aligned}$$

Les matrices  $T_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  et  $L_{2e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  sont inversibles. En suivant la procédure présentée dans le chapitre 4, nous obtenons la relation (4.28) :

$$W^* P \left\{ \begin{bmatrix} e^* \\ e_{sup} \\ \dot{e}^* \\ \dot{e}_{sup} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CT_e^{-1}KL_{2e}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^* \\ e_{sup} \\ \dot{e}^* \\ \dot{e}_{sup} \end{bmatrix} \right\} = \omega_1 \left( \bar{y}_1^{(1)}, y_2, U \right)$$

La matrice de permutation  $P$  est choisie telle que :

$$P \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 A \end{bmatrix}$$

Nous obtenons donc la matrice  $P$  suivante :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de projection  $W^*$  est choisie égale à  $W$ .

Finalement, nous obtenons la relation suivante liant le résidu d'observateur au résidu de parité :

$$\dot{e}^* + k_{21} e^* = \omega_1 \left( \bar{y}_1^{(1)}, y_2, U \right) \quad (5.41)$$

Dans le domaine de Laplace, nous obtenons le filtre suivant :

$$E^*(p) = \frac{\Omega_1(p)}{p + k_{21}} \quad (5.42)$$

## 5.4 Application numérique

Les valeurs numériques que nous choisissons sont issues de (Chiasson and Bodson, 1993; Plestan, 1995):

$$\begin{aligned}
 R &= 0.01485\Omega \\
 r &= 0.00989\Omega \\
 R_t &= R + r = 0.02474\Omega \\
 L \gg l &\Rightarrow L_t \simeq L = 0.06H \\
 K_m &= 0.04329 \\
 J &= 30.1N/rad.s^{-2} \\
 B &= 0.1N/rad.s^{-1}
 \end{aligned}$$

La tension d'alimentation  $U$  doit être comprise entre 0 et 1000 Volts et le courant est limité à 1000 Ampères.

Nous avons choisi d'alimenter le moteur par une loi de commande exponentielle donnée par l'expression :

$$U = -70e^{-\frac{t}{35}} + 70$$

Le couple résistant est choisi constant et égal à  $100N.m$ . Les conditions initiales du moteur sont choisies égales à zéro et le pas de simulation est choisi égal à  $1.10^{-2}$  s.

### 5.4.1 Mesure du courant uniquement

A la valeur du courant, nous avons ajouté un bruit blanc gaussien de variance 0.1 représentant les bruits de mesure.

Les figures 5.2.a & 5.2.b montre l'évolution temporelle des signaux d'excitation du moteur.

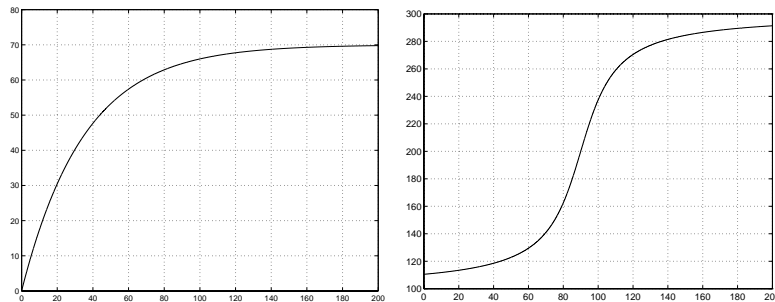
5.2.a) entrée  $U$ 5.2.b) entrée  $C_r$  (inconnue)

FIG. 5.2 – Allure des différents signaux d'entrée du moteur

Les figures 5.3.a & 5.3.b montre l'évolution temporelle des signaux de sortie du moteur.

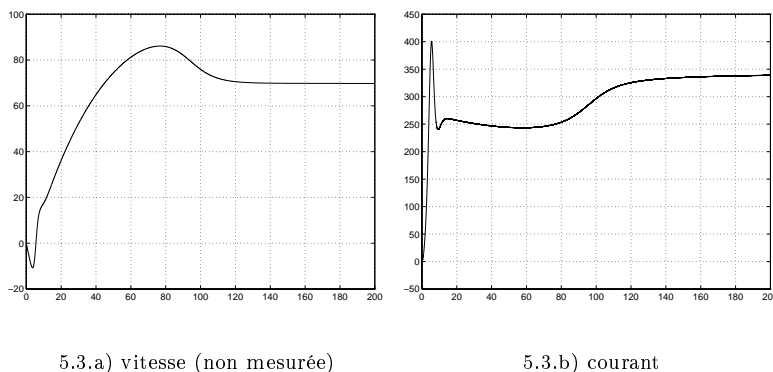


FIG. 5.3 – Allure des différents signaux de sortie du moteur

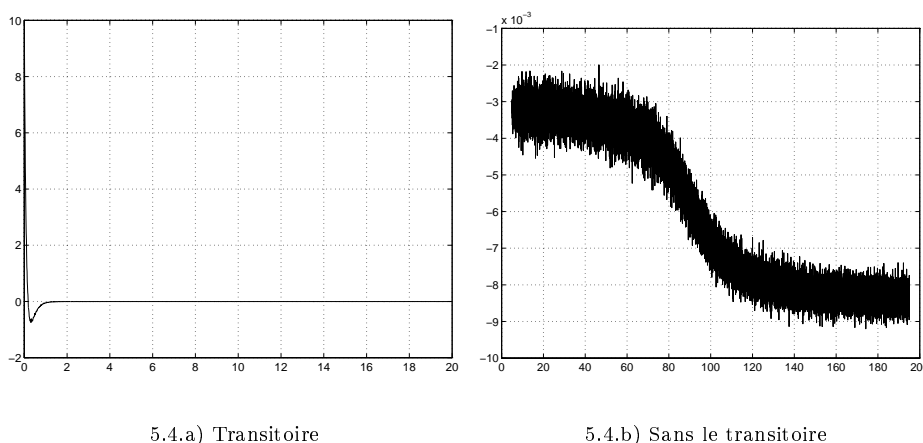
#### 5.4.1.1 Observateur de Luenberger et espace de parité

Le générateur de résidus utilisant la théorie des observateurs de Luenberger décrit par les équations (5.17) est implanté sur le système. Les dynamiques de cet observateur sont choisies pour que les valeurs propres de la matrice  $A - KC$  soient négatives et égales à  $\begin{bmatrix} -15 & -10 \end{bmatrix}$ . Ce choix permet d'obtenir la matrice de gain suivante :

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Les résidus générés par cet observateur<sup>13</sup> et par la méthode de l'espace de parité<sup>14</sup> sont donnés respectivement par les équations (5.17) et (5.6a).

Les évolutions temporelles de ces deux résidus sont présentées sur la figure 5.4.



13. Les conditions initiales de l'observateur sont choisies différentes de celles du système initial et sont égales à  $\zeta_1(0) = 10$  et  $\zeta_2(0) = 15$

14. Le calcul des dérivées pour évaluer la RRA est réalisé par approximation polynomiale sur une fenêtre de longueur 51 échantillons et avec des polynômes de degré 1 (resp. 3) pour calculer la dérivée première (resp. seconde)



FIG. 5.4 – Résidus générés par l'observateur de Luenberger

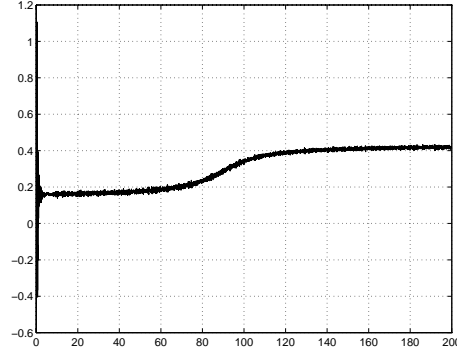


FIG. 5.5 – Résidus de parité

Les figures 5.4 et 5.4.1.1 montrent que les résidus dépendent du couple résistant. Le résidu de parité est plus sensible à la valeur du couple résistant. Toutefois, comme nous connaissons la forme d'évaluation du résidu, nous pouvons utiliser ce signal pour obtenir l'évolution exacte du couple résistant ce qui n'est pas directement possible avec le résidu d'observateur.

Nous allons maintenant appliquer au résidu de parité le filtre donné par l'équation (5.19) :

$$\mathcal{F}(p) = \frac{1}{p^2 + CKp + CAK} = \frac{1}{p^2 + 15p + 50}$$

La relation liant les deux résidus peut s'exprimer sous la forme d'état compagne suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{e}_{lin} \\ \ddot{e}_{lin} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -50 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{lin} \\ \dot{e}_{lin} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ e_{lin} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{lin} \\ \dot{e}_{lin} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (5.43)$$

Pour simuler ce filtre, il est nécessaire de connaître les conditions initiales  $e_{lin}(0)$  et  $\dot{e}_{lin}(0)$ . En pratique, seul  $e_{lin}(0)$  peut être connu, tandis que  $\dot{e}_{lin}(0)$  nécessite la connaissance des conditions initiales du système. En simulation, ces conditions étant connues, nous pouvons donc initialiser le filtre avec les vraies conditions initiales :

$$\begin{aligned} e_{lin}(0) &= -10 \\ \dot{e}_{lin}(0) &= 135 \end{aligned}$$

La figure 5.4 montre la sortie du système (5.43).

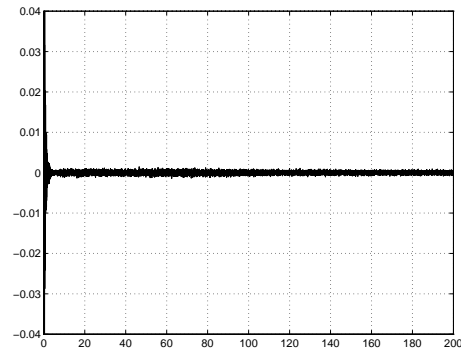


FIG. 5.6 – Différence entre le résidu de parité filtré et le résidu d'observateur de Luenberger

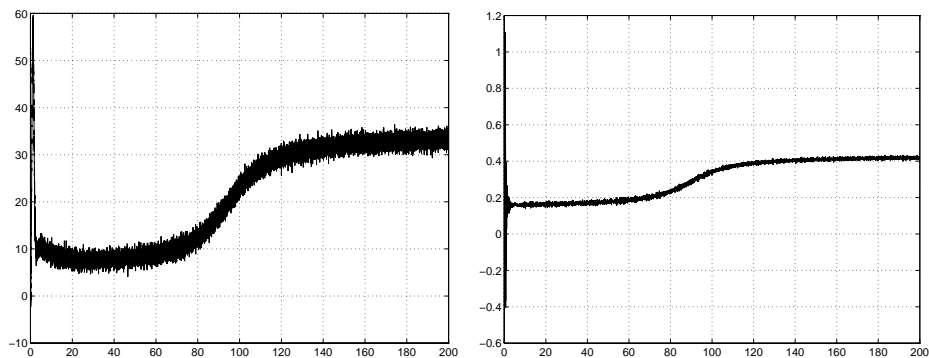
La figure 5.6 illustre parfaitement les résultats prouvés dans le chapitre 4.

#### 5.4.1.2 Observateur grand gain et Espace de parité

L'observateur décrit par les équations (5.23) est maintenant implanté sur le système. Les paramètres d'initialisation et de réglage de cet observateur sont les suivants :

- conditions initiales :  $\hat{x}_1(0) = 10$  et  $\hat{x}_2(0) = 10$ .
- le gain  $\theta$  est égal 1.

Aucune panne n'est considérée, seule la variation de couple résistant influe sur le résidu issu de l'observateur grand gain. La figure 5.7 montre l'évolution temporelle du résidu d'observateur et du résidu de parité.

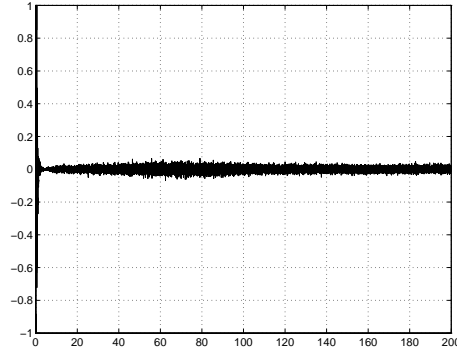


5.7.a) Résidu d'observateur grand gain

5.7.b) Résidu de parité

FIG. 5.7 – Résidu issu de l'observateur grand gain

Pour comparer ces deux résidus, la fonction  $\omega_{c,3}$  est évaluée avec les signaux mesurés. La figure 5.7 montre la différence entre  $\omega_{c,3}$  et le résidu de parité  $r(t)$ .



### 5.4.2 Mesure du courant et de la vitesse

Dans les sections précédentes, nous avons présenté trois méthodes de génération de résidus utilisant les observateurs de Luenberger, les observateurs grand gain et l'espace de parité. Les résidus calculés dans le cas d'une variation anormale du paramètre  $R_t$  sont relativement médiocres, en particulier lorsque la robustesse vis-à-vis du couple résistant est considérée.

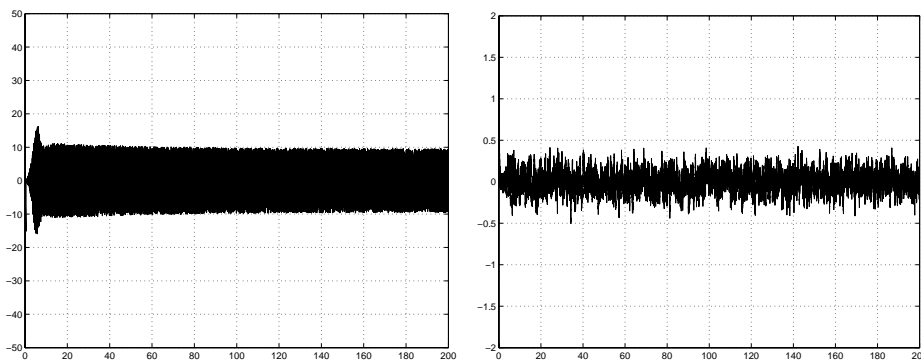
Nous allons maintenant ajouter la mesure de la vitesse. Avec ce capteur supplémentaire, nous allons comparer le résidu robuste par rapport au couple résistant, généré par la méthode de l'espace de parité (évaluation de la RRA donnée par l'équation 5.33), avec celui généré à partir du système (5.40).

Pour la simulation, un bruit blanc gaussien de variance unitaire est ajouté à ce capteur.

Les paramètres d'initialisation de l'observateur sont :

- la condition initiale choisie égale à  $z(0) = 10$
- le gain est choisi arbitrairement égal à  $k_{21} = 10$

Les figures 5.8.a et 5.8.b montrent respectivement l'évolution temporelle du résidu issu de l'évaluation de la RRA et du résidu issu de l'observateur.



5.8.a) Résidu de parité

5.8.b) Résidu d'observateur

FIG. 5.8 – Résidus issus de l'observateur de Luenberger

Nous allons étudier deux configurations de panne :

- la variation de paramètre présentée à la figure 1

– une dérive suivie d'un biais sur le capteur de vitesse.

### 1. Variation de $R_t$

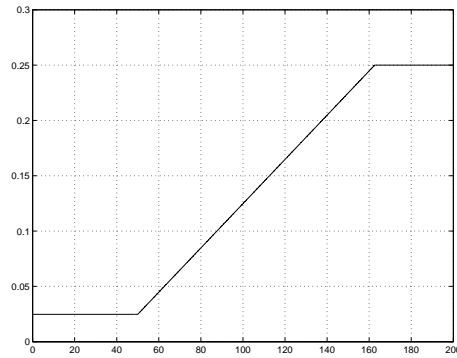


FIG. 5.9 – Panne sur le paramètre  $R_t$

Les deux figures 5.10.a et 5.10.b montrent l'évolution temporelle des résidus de parité et d'observateur. L'évolution du résidu de parité peut facilement s'expliquer à partir de la

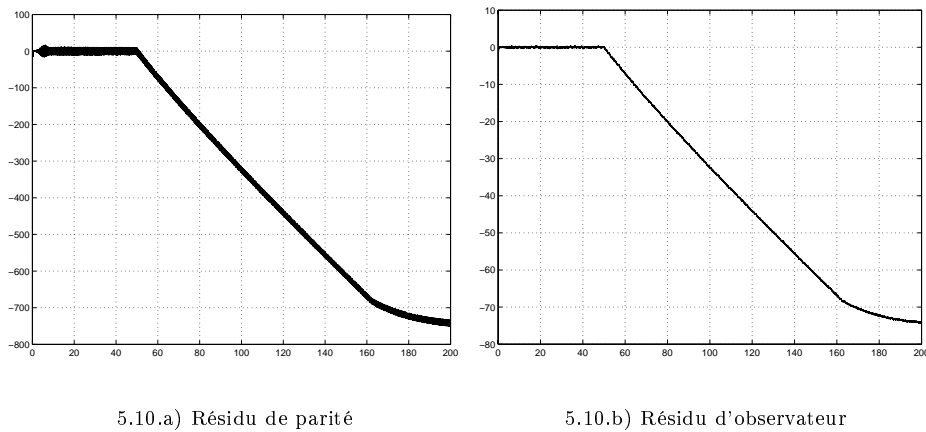
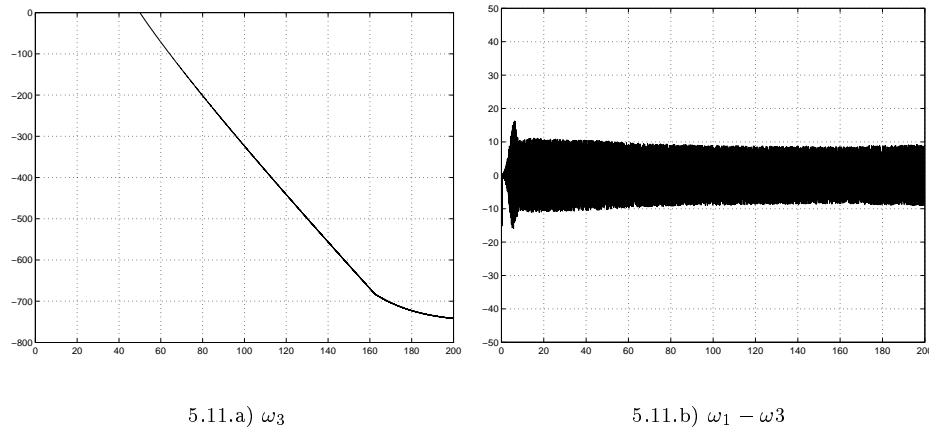


FIG. 5.10 – Résidus de parité et d'observateur pour une variation de  $R_t$

forme d'évaluation de celui-ci :

$$\omega_e = -\frac{\Delta(t)}{L} y_1 \quad (5.44)$$

La figure 5.11.a (resp. 5.11.b) montre l'évolution temporelle de  $\omega_e$  (resp. l'erreur  $\omega_1 - \omega_3$ ).

FIG. 5.11 – Sensibilité de  $r(t)$  pour une variation de  $R_t$ 

Nous allons maintenant appliquer le filtre donné par l'équation (5.42) qui lie les deux résidus<sup>15</sup>. Les figures 5.12.a et 5.12.b présentent les résultats obtenus.

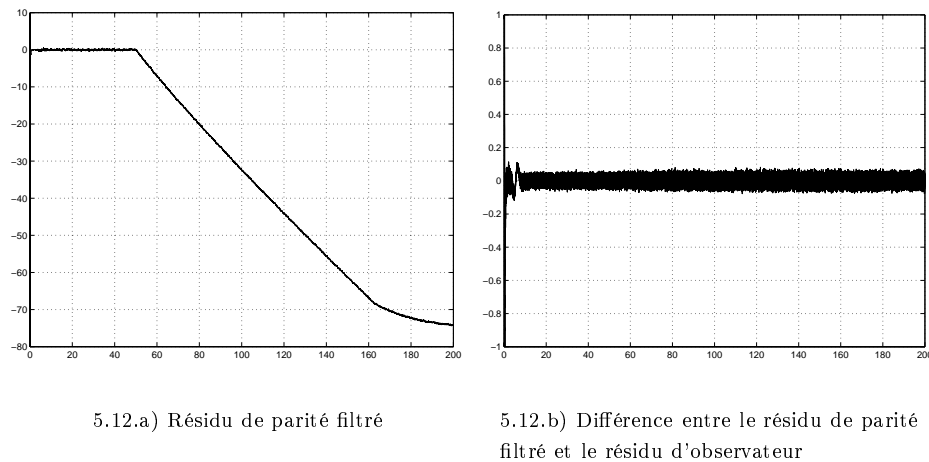


FIG. 5.12 – Lien unissant les résidus d'observateur et de parité

Ces figures illustrent bien le lien existant entre les deux résidus. Ce lien peut permettre entre autre de déterminer facilement la forme d'évaluation du résidu d'observateur et d'étudier sa sensibilité à la panne.

## 2. Panne capteur

La figure 5.13 montre l'allure de la panne ajoutée au capteur de vitesse.

---

<sup>15</sup>. La valeur initiale du filtre est choisie égale à 10

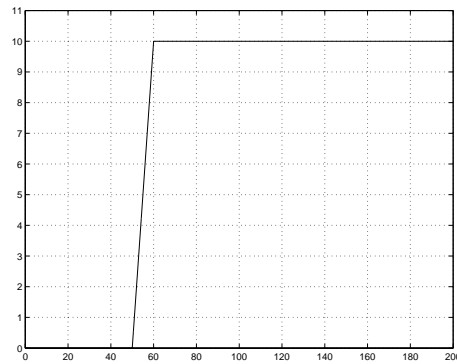
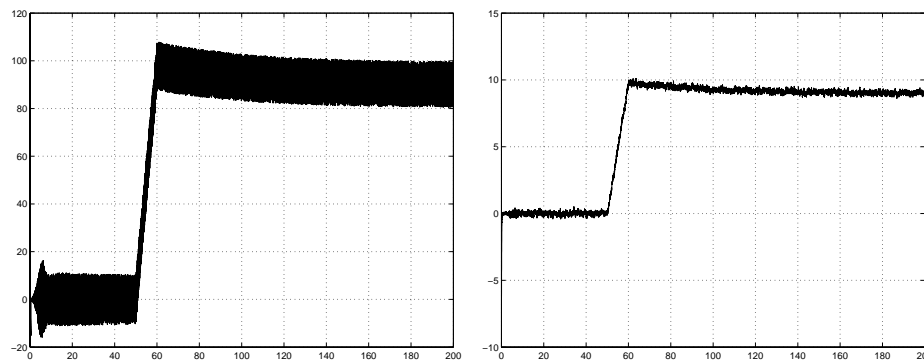


FIG. 5.13 – Allure du défaut capteur

Les figures 5.14.a et 5.14.b montrent l'évolution temporelle des deux résidus de parité et d'observateur.



5.14.a) Résidu de parité

5.14.b) Résidu d'observateur

FIG. 5.14 – Lien entre les résidus d'observateur et de parité

La forme d'évaluation du résidu de parité est égale à :

$$\omega_e = K_m y_1 \Delta(t)$$

Cette forme correspond à l'allure du résidu présenté sur la figure 5.14.a.

Nous allons maintenant filtrer le résidu de parité pour illustrer son lien avec le résidu d'observateur. Les deux figures 5.15.a et 5.15.b montrent respectivement le résidu de parité filtré et l'erreur entre ce résidu filtré et le résidu d'observateur.

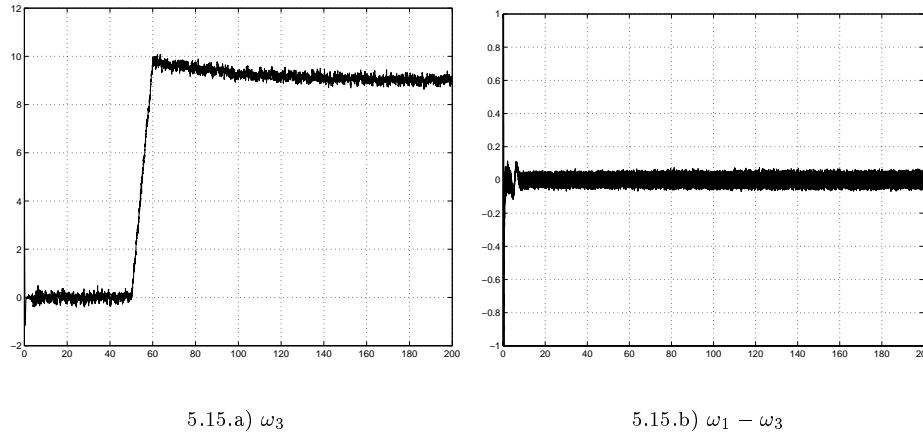


FIG. 5.15 – Lien entre les résidus d'observateur et de parité

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'exemple du moteur à courant continu série. Deux configurations de mesure ont été choisies, soit seul le courant est mesuré, soit le courant et la vitesse sont mesurés.

Dans la première configuration de mesure, nous avons implanté trois types de générateur de résidus utilisant respectivement les observateurs de Luenberger, les observateurs à grand gain et l'espace de parité. Ces différents résidus sont évalués pour détecter une variation anormale de la résistance équivalente du moteur. Les résultats obtenus sont concluants pour le résidu de parité et le résidu issu de l'observateur de Luenberger lorsqu'aucune considération de robustesse vis-à-vis du couple résistant n'est prise en compte. Le résidu issu de l'observateur grand gain s'avère peu sensible à ce défaut mais la robustesse vis-à-vis du couple résistant explique ces mauvais résultats.

Dans la seconde configuration, nous avons considéré uniquement les résidus robustes vis-à-vis du couple résistant et issus de l'observateur de Luenberger et de l'espace de parité. Deux défauts sont considérés, la variation de la résistance équivalente du moteur et une variation de la valeur donnée par le capteur de vitesse.

Les résultats de comparaison des résidus présentés dans le chapitre 4 sont validés sur ces différents cas de figures.

Nous allons maintenant considérer l'exemple du moteur asynchrone pour lequel nous allons illustrer les problèmes de robustesse abordés dans le chapitre traitant de l'espace de parité.

## Chapitre 6

# Application au moteur asynchrone

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'appliquer l'approche de l'espace de parité, présentée dans le chapitre 3 sur la machine asynchrone.

Pour commencer l'étude, nous présenterons le modèle du moteur. Dans un premier temps, les phénomènes électromagnétiques présents dans l'entrefer du moteur et permettant de faire tourner le rotor seront rappelés. Dans un second temps, la transformation de Park permettant d'obtenir un modèle à coefficients constants sera présentée. Enfin, La modélisation de la partie mécanique sera présentée. Toutes ces étapes permettent d'aboutir à un modèle de simulation, validé dans le cadre de l'action incitative «Diagnostic des entraînements électriques». Cette simulation sera utilisée pour générer les différents signaux nécessaires pour appliquer nos algorithmes de surveillance.

### 6.1 Modélisation

Pour commencer nous allons rappeler les principes de base de l'électromagnétisme. En particulier, nous présenterons le concept des champs tournants qui sont créés au niveau du stator et qui permettent de faire tourner le rotor. Ensuite, nous présenterons la transformation de Park pour aboutir à un modèle de la partie électrique de la machine.

#### 6.1.1 Les champs tournants

Le stator d'une machine asynchrone est composé de bobinages qui lorsqu'ils sont alimentés, produisent un champ magnétique qui crée des forces électromotrices au sein de l'entrefer de la machine. Pour illustrer ces phénomènes physiques, nous allons considérer une machine composée d'une paire de pôles (fig. 6.1.1). Nous allons calculer la force électromotrice générée par la ligne de champ<sup>16</sup> ( $C$ ) passant par un point  $M$  repéré par l'angle  $\theta$  (Caron and Hautier, 1995). L'amplitude de cette force est déterminée par le théorème d'Ampère (Bonal, 1997) rappelé ci-dessous.

**Théorème 6.1 (théorème d'Ampère)** *La circulation du vecteur de champ magnétique  $\vec{H}$  le long d'une trajectoire fermée ( $C$ ) est égale à la somme algébrique des courants de spires que ce champs traverse.*

---

16. Une ligne de champs est une courbe fermée qui est en tout point tangente au vecteur de champ.



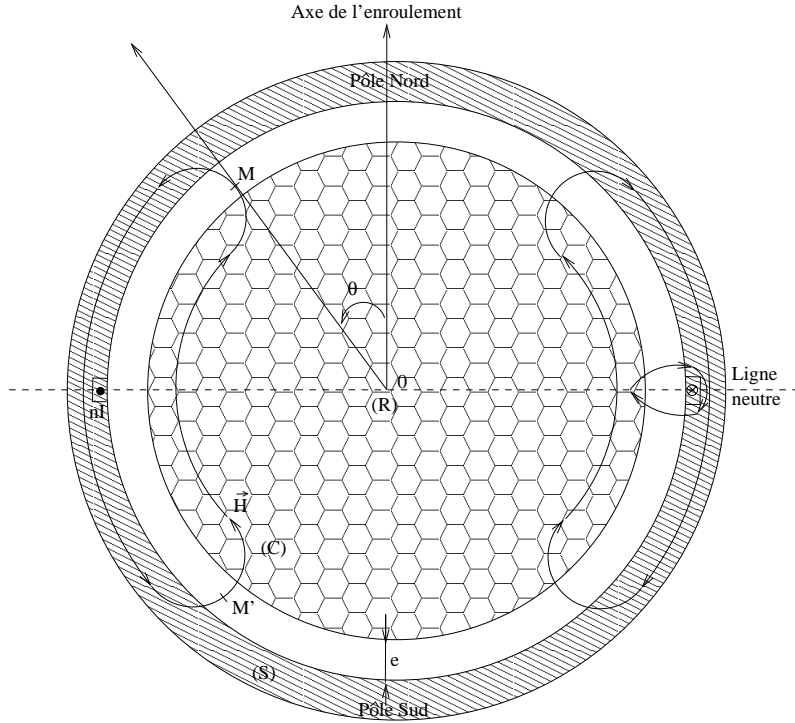


FIG. 6.1 – Lignes de champ magnétique créées par deux courants d'encoche

En appliquant ce théorème à la ligne de champ (C), nous obtenons :

$$\oint_{(C)} \vec{H} \vec{dl} = \underbrace{\oint_{fer} \vec{H} \vec{dl}}_{\text{matériaux ferromagnétique}} + \underbrace{\oint_{RMS} \vec{H} \vec{dl}}_{\text{entrefer, au point M, allant du rotor (R) vers le stator (S)}} + \underbrace{\oint_{SM'R} \vec{H} \vec{dl}}_{\text{entrefer, au point M' (symétrique au point M par rapport à la ligne de neutre), allant du stator vers le rotor}} = nI \quad (6.1)$$

où  $n$  est le nombre de spires.

Par définition, la force magnétomotrice (f.m.m) au point  $M$  est donné par :

$$\oint_{RMS} \vec{H} \vec{dl} \triangleq \mathcal{E}(M) = H(M)e$$

par symétrie, au point  $M'$ , nous avons :

$$\oint_{SM'R} \vec{H} \vec{dl} \triangleq \mathcal{E}(M') = -\mathcal{E}(M)$$

La perméance<sup>17</sup> des matériaux ferromagnétiques (le stator et le rotor) étant très supérieure à la perméance d'entrefer, le terme  $\oint_{fer} \vec{H} \vec{dl}$  dans l'équation (6.1) peut être négligé. Nous obtenons finalement la relation suivante :

$$\mathcal{E}(M) - \mathcal{E}(M') = nI \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{nI}{2} \quad (6.2)$$

17. la perméance d'un matériaux représente sa capacité à conduire les lignes de champ

Pour l'exemple d'une machine à une paire de pôles, la f.m.m. est égale à  $\frac{nI}{2}$  pour la partie supérieure du stator et égale à  $-\frac{nI}{2}$  pour la partie inférieure. La figure 6.2 montre la répartition spatiale de la f.m.m. pour une seule spire.

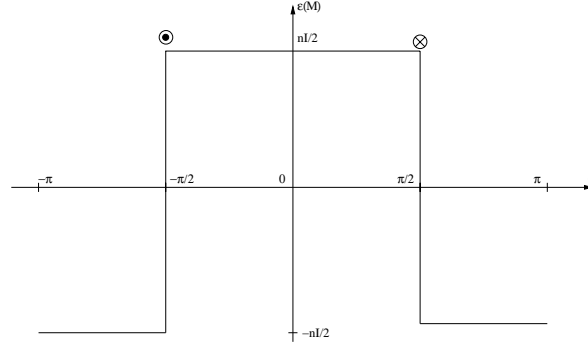


FIG. 6.2 – Répartition spatiale de la f.m.m

En augmentant le nombre de spires et en les répartissant de manière judicieuse, l'évolution de la f.m.m. s'exerçant au point  $M$  tend vers une sinusoïde. La relation donnant cette f.m.m. est obtenue en faisant la décomposition en série de Fourier de la courbe 6.2 et en ne considérant que le premier harmonique :

$$\mathcal{E}(\theta) = \frac{2kn}{\pi} i \cos(p\theta) = \mathcal{E} \cos p\theta \quad (6.3)$$

où  $p$  est le nombre de paires de pôles,  $k$  le facteur de bobinage,  $n$  est le nombre total de spires de l'enroulement d'une phase et  $i$  est le courant traversant les spires.

**Remarque 6.1.1** La notation  $\mathcal{E}(\theta)$  est utilisée pour représenter la f.m.m. au point  $M$  dans un repère polaire tandis que  $\mathcal{E}(M)$  est utilisée pour représenter la f.m.m. au point  $M$  dans le repère cartésien.

Pour une machine synchrone ou asynchrone le courant d'alimentation est polyphasé<sup>18</sup> ( $q$  phases) sinusoïdal. Pour chaque phase, ce courant s'exprime par :

$$i_k = I \cos \left( \omega_s t \pm k \frac{2\pi}{q} \right) \text{ pour } k \in [0, \dots, q-1]$$

Le signe + (resp. -) est utilisé lorsque nous alimentons le moteur dans le sens direct (resp. indirect). Dans la suite, nous ne considérerons que le cas où l'alimentation est dans le sens directe.

La f.m.m. au point  $M$ , engendrée par le courant  $i_k$ , vaut :

$$\mathcal{E}_k(\theta, t) = \mathcal{E} \cos \left( \omega_s t + k \frac{2\pi}{q} \right) \cos(p\theta)$$

La f.m.m. totale au point  $M$  est obtenue en additionnant les f.m.m. engendrées par tous les courants  $i_k$  :

$$\mathcal{E}(\theta, t) = \mathcal{E} \sum_{k=0}^{q-1} \cos \left( \omega_s t + k \frac{2\pi}{q} \right) \cos(p\theta)$$

18. polyphasé : plusieurs phases, habituellement 3 phases.

En utilisant les formules classiques de trigonométrie, nous obtenons le résultat suivant :

$$\mathcal{E}(\theta, t) = \frac{q}{2} \mathcal{E} \cos(\omega_s t - p\theta) \quad (6.4)$$

L'alimentation polyphasée du bobinage statorique crée une force magnétomotrice tournante. Nous allons maintenant calculer la vitesse de rotation de cette force. A l'instant initial, les maxima de cette force sont situés à :

$$\cos(p\theta) = 1 \Rightarrow \theta = 0 + k \frac{2\pi}{p}, \quad k = 0, 1, \dots$$

A l'instant  $\Delta t$ , ces maxima se retrouvent aux emplacements :

$$\cos(\omega_s \Delta t + p\theta) = 1 \Rightarrow \theta = -\frac{\omega_s}{p} \Delta t + k \frac{2\pi}{p}, \quad k = 0, 1, \dots$$

La vitesse angulaire  $\Omega_s$  du champ tournant est donc égal à :

$$\Omega_s = -\frac{\omega_s}{p} \quad (6.5)$$

Cette vitesse est appelée *vitesse synchrone*. Lorsque le rotor tourne exactement à la vitesse  $\Omega_s$ , alors la machine est dite synchrone. Dans le cas contraire, la machine est dite asynchrone.

### 6.1.2 Principe de fonctionnement de la machine asynchrone

Une machine asynchrone est composée :

- d'un stator bobiné créant un champ magnétique tournant lorsqu'il est alimenté par une source polyphasée.
- d'un rotor composé de circuits magnétiques en court-circuit.
- d'un entrefer très étroit pour limiter les pertes magnétiques.

Deux types de rotors se distinguent, les rotors bobinés (ou à bagues) et les rotors à cage.

#### 1. Le rotor bobiné

Le rotor est constitué d'un empilement de disques de tôles dans lesquels sont placés des encoches. Ses encoches contiennent un bobinage polyphasé branché en court-circuit.

Ce type de rotor donne un accès au bobinage rotorique ce qui est un avantage important pour la commande (possibilité de diminuer les courants au démarrage) et pour la surveillance (possibilité de mesurer les courants rotoriques). Toutefois, l'accès au rotor d'une machine en rotation nécessite l'implantation d'un système collecteur/balais. Cette partie mécanique est directement en contact avec le rotor et s'use très rapidement.

Enfin, le coût relativement élevé (en comparaison au rotor à cage) rend ce type de rotor peu intéressant dans le domaine industriel.

#### 2. Le rotor à cage

Le rotor est composé de deux anneaux dans lesquels sont disposés des barres formant ainsi un certain nombre de circuits magnétiques fermés et naturellement en court-circuit (fig 6.3).

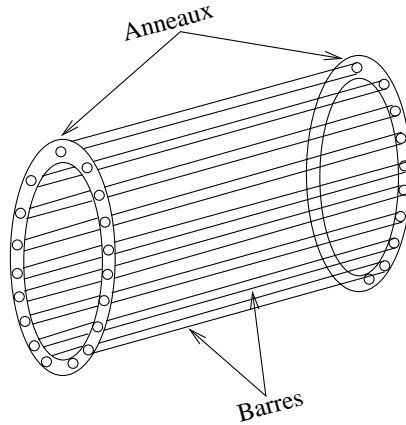


FIG. 6.3 – Cage d'écureuil

Le rotor est plongé dans un champ magnétique sinusoïdal ce qui crée dans les circuits magnétiques du rotor des courants d'induits (appelés «courants de Foucault»). Ces courants sont créés de manière à s'opposer à la cause qui leur a donné naissance. La combinaison de ces courants et du champ magnétique génère une force faisant tourner le rotor dans le même sens que le champ tournant.

Le rotor ne peut toutefois pas atteindre la vitesse du champ tournant puisque dans ce cas, il ne serait plus soumis aux variations de champ, supprimant les courants d'induit et donc la force faisant tourner le rotor.

Le rotor tourne donc à une vitesse ( $\Omega$ ) légèrement inférieure à la vitesse du champ tournant ( $\Omega_s$ ):

$$\Omega_s > \Omega$$

**Définition 6.1** L'écart entre les vitesses statorique et rotorique est caractérisé par le glissement, noté  $g$ , défini par :

$$g = \frac{\Omega_s - \Omega}{\Omega_s}$$

### 6.1.3 Modélisation de la machine

Nous allons maintenant nous intéresser à la modélisation de la partie électrique de la machine. Deux types de modèles se distinguent dans la littérature :

- Les modèles fins (réseaux de perméances (Delforge-Delmotte, 1995), réseaux électriques (Heno *et al.*, 1997; Konan *et al.*, 1988)).  
Ils sont obtenus à partir des éléments finis et nécessitent une connaissance approfondie de la géométrie de la machine. Ces modèles sont très précis mais sont très complexes à utiliser et dépendent de la machine pour laquelle ils ont été conçus.
- Les modèles simplifiés (modèle en abc, modèle de Park (Seguier and Notelet, 1994)).  
Ils sont obtenus à partir des diverses lois de l'électromagnétisme sous certaines hypothèses simplificatrices que nous détaillerons plus loin.

Nous n'allons considérer que les modèles simplifiés. Dans un premier temps, nous donnerons les différentes hypothèses de validité de ces modèles. Puis dans un second temps, nous donnerons la représentation dite en abc de la machine et enfin nous présenterons le modèle de Park.

### 6.1.3.1 Hypothèses

Nous supposons que :

- L'épaisseur de l'entrefer est constante, les effets d'encoche sont négligés.
- La saturation du circuit magnétique est négligée.
- Les résistances des enroulements ne varient pas avec la température.
- La force magnétomotrice créée par chacune des phases a une répartition sinusoïdale.
- La machine est alimentée par une source triphasée et chaque phase est représentée par une lettre (a, b et c).
- Le rotor est bobiné. Si ce n'est pas le cas, nous considérerons le bobinage triphasé équivalent.

### 6.1.3.2 Équations générales de la machine

Pour chaque phase statorique et rotorique, nous pouvons appliquer la loi d'Ohm.

Pour le stator, les équations suivantes sont obtenues :

$$\begin{cases} v_{S_a} &= R_s i_{S_a} + \frac{d}{dt} \phi_{S_a} \\ v_{S_b} &= R_s i_{S_b} + \frac{d}{dt} \phi_{S_b} \\ v_{S_c} &= R_s i_{S_c} + \frac{d}{dt} \phi_{S_c} \end{cases} \quad (6.6)$$

et pour le rotor, nous avons le même système :

$$\begin{cases} v_{R_a} &= R_r i_{R_a} + \frac{d}{dt} \phi_{R_a} \\ v_{R_b} &= R_r i_{R_b} + \frac{d}{dt} \phi_{R_b} \\ v_{R_c} &= R_r i_{R_c} + \frac{d}{dt} \phi_{R_c} \end{cases} \quad (6.7)$$

avec

- $v_{S_a}$ ,  $v_{S_b}$  et  $v_{S_c}$  sont les tensions appliquées aux trois phases du stator.
- $i_{S_a}$ ,  $i_{S_b}$  et  $i_{S_c}$  sont les courants dans les trois phases du stator.
- $\phi_{S_a}$ ,  $\phi_{S_b}$  et  $\phi_{S_c}$  sont les flux traversant ces trois phases.
- $R_s$  est la résistance d'une phase.

Pour le rotor, les notations ont les mêmes significations, la lettre  $R$  remplaçant la lettre  $S$ .

Les flux peuvent être exprimés en fonction des courants des inductances statorique et rotorique et des mutuelles. L'hypothèse d'entrefer constant combinée avec la construction symétrique de la machine permettent d'obtenir des inductances propres constantes et égales pour chaque phase d'un même enroulement. De même, les mutuelles entre phase sont constantes et égales.

Les notations suivantes seront adoptées :

- $L_s$  est l'inductance des phases du stator.

- $L_r$  est l'inductance des phases du rotor.
- $M_S$  est la mutuelle entre les phases du stator.
- $M_r$  est la mutuelle entre les phases du rotor.

Les mutuelles entre les phases du stator et du rotor dépendent de l'angle entre les enroulements concernés (6.4).

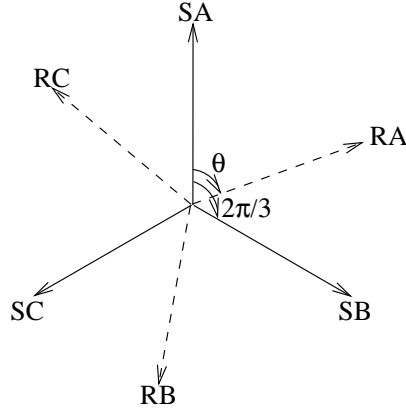


FIG. 6.4 – Repère statorique et repère rotorique

Notons  $M$  la mutuelle entre deux phases lorsque les axes coïncident, nous avons alors :

$$M_{SR} = M \cos \left( \theta + (r - s) \frac{2\pi}{3} \right)$$

où  $r$  (resp.  $s$ ) représente le numéro de la phase rotorique (resp. statorique) concernée (1 pour la phase  $a$ , 2 pour la phase  $b$  et 3 pour la phase  $c$ ).

Les flux résultants ont alors pour expressions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{S_a} = L_s i_{S_a} + M_s i_{S_b} + M_s i_{S_c} + M_{AA} i_{R_a} + M_{AB} i_{R_b} + M_{AC} i_{R_c} \\ \phi_{S_b} = L_s i_{S_b} + M_s i_{S_a} + M_s i_{S_c} + M_{BA} i_{R_a} + M_{BB} i_{R_b} + M_{BC} i_{R_c} \\ \phi_{S_c} = L_s i_{S_c} + M_s i_{S_a} + M_s i_{S_b} + M_{CA} i_{R_a} + M_{CB} i_{R_b} + M_{CC} i_{R_c} \\ \phi_{R_a} = L_r i_{R_a} + M_r i_{R_b} + M_r i_{R_c} + M_{AA} i_{S_a} + M_{AB} i_{S_b} + M_{AC} i_{S_c} \\ \phi_{R_b} = L_r i_{R_b} + M_r i_{R_a} + M_r i_{R_c} + M_{BA} i_{S_a} + M_{BB} i_{S_b} + M_{BC} i_{S_c} \\ \phi_{R_c} = L_r i_{R_c} + M_r i_{R_a} + M_r i_{R_b} + M_{CA} i_{S_a} + M_{CB} i_{S_b} + M_{CC} i_{S_c} \end{array} \right.$$

En remplaçant ces expressions dans (6.6) et (6.7) et en condensant les écritures, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} [v_S] = [R_S] [i_S] + [L_{SS}] \frac{d}{dt} [i_S] + \frac{d}{dt} [[M_{SR}] [i_R]] \\ [v_R] = [R_R] [i_R] + [L_{RR}] \frac{d}{dt} [i_R] + \frac{d}{dt} [[M_{RS}] [i_S]] \end{array} \right. \quad (6.8)$$

avec :

$$[v_S] = \begin{bmatrix} v_{S_a} \\ v_{S_b} \\ v_{S_c} \end{bmatrix}, [v_R] = \begin{bmatrix} v_{R_a} \\ v_{R_b} \\ v_{R_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [i_S] = \begin{bmatrix} i_{S_a} \\ i_{S_b} \\ i_{S_c} \end{bmatrix}, [i_R] = \begin{bmatrix} i_{R_a} \\ i_{R_b} \\ i_{R_c} \end{bmatrix}$$

$$[R_S] = R_s I_{3 \times 3}, [R_R] = R_r I_{3 \times 3}, [L_{SS}] = \begin{bmatrix} L_s & M_s & M_s \\ M_s & L_s & M_s \\ M_s & M_s & L_s \end{bmatrix}, [L_{RR}] = \begin{bmatrix} L_r & M_r & M_r \\ M_r & L_r & M_r \\ M_r & M_r & L_r \end{bmatrix}$$

$$[M_{SR}] = M \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta) & \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = [M_{RS}]^T$$

Le rotor étant court-circuité, le vecteur de tension  $[v_R]$  est égal à zéro. Le système (6.8) forme le modèle en abc du moteur.

Ce modèle de la machine n'est pas très utilisé car il nécessite le calcul à chaque instant des matrices  $M_{SR}$  et  $\frac{d}{dt}M_{SR}$ .

Nous allons maintenant présenter la transformation de Park permettant d'obtenir un modèle à coefficients constants.

### 6.1.3.3 Transformation de Park

La transformation de Park permet de passer de la représentation dans le repère abc à une représentation dans un repère diphasé (orthogonal). La figure 6.5 montre les différents axes et leurs positionnements les uns par rapport aux autres.

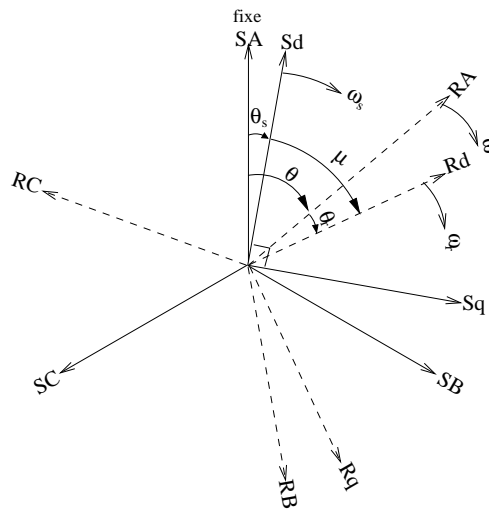


FIG. 6.5 – Axe des phases statorique et rotorique et repère de Park

Les vitesses  $\omega_s$ ,  $\omega_r$  et  $\omega$  sont liées aux angles  $\theta_s$ ,  $\theta_r$  et  $\theta$  par les relations suivantes :

$$\omega_s = \frac{d}{dt}\theta_s \quad \omega_r = \frac{d}{dt}\theta_r \quad \omega = \frac{d}{dt}\theta$$

**Définition 6.2** La transformation de Park d'angle  $\alpha$  est définie par :

$$P(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\alpha - 2\frac{\pi}{3}) & \cos(\alpha + 2\frac{\pi}{3}) \\ -\sin(\alpha) & -\sin(\alpha - 2\frac{\pi}{3}) & -\sin(\alpha + 2\frac{\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Nous appliquons la transformation de Park d'angle  $\theta_s$  (resp.  $\theta_r$ ) aux grandeurs statoriques (resp. rotoriques) :

$$\begin{aligned} [v_{cS}] &= [P(\theta_s)] [v_S] & \text{et} & \quad [i_{cS}] = [P(\theta_s)] [i_S] \\ [v_{cR}] &= [P(\theta_r)] [v_R] = 0 & \text{et} & \quad [i_{cR}] = [P(\theta_r)] [i_S] \end{aligned}$$

où

$$[v_{cS}] = \begin{bmatrix} v_{S_d} \\ v_{S_q} \\ v_{S_0} \end{bmatrix}, \quad [i_{cS}] = \begin{bmatrix} i_{S_d} \\ i_{S_q} \\ i_{S_0} \end{bmatrix}, \quad [v_{cR}] = \begin{bmatrix} v_{R_d} \\ v_{R_q} \\ v_{R_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [i_{cR}] = \begin{bmatrix} i_{R_d} \\ i_{R_q} \\ i_{R_0} \end{bmatrix}$$

Lorsque la machine est équilibrée, c'est-à-dire que la somme des courants et des tensions est égale à zéro, alors la composante correspondant aux axes  $S_0$  et  $R_0$ <sup>19</sup> est nulle. Dans la suite de la modélisation, nous ne tiendrons plus compte de cette composante.

Sans perte de généralité, nous pouvons faire coïncider les axes  $S_d$  et  $R_d$ . Ce choix impose de fixer l'angle  $\mu = 0$ . Sous cette considération, la transformation de Park, appliquée aux systèmes (6.6) et (6.7), permet d'obtenir :

$$\begin{cases} v_{S_d} = R_s i_{S_d} + \frac{d\phi_{S_d}}{dt} - \frac{d\theta_s}{dt} \phi_{S_q} \\ v_{S_q} = R_s i_{S_q} + \frac{d\phi_{S_q}}{dt} + \frac{d\theta_s}{dt} \phi_{S_d} \\ 0 = R_r i_{R_d} + \frac{d\phi_{R_d}}{dt} - \frac{d\theta_r}{dt} \phi_{R_q} \\ 0 = R_r i_{R_q} + \frac{d\phi_{R_q}}{dt} + \frac{d\theta_r}{dt} \phi_{R_d} \end{cases} \quad (6.10)$$

Le lien entre les flux et les courants dans le repère de Park (ou repère d,q) est donné par :

$$\begin{bmatrix} \phi_{S_d} \\ \phi_{S_q} \\ \phi_{R_d} \\ \phi_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s - M_s & 0 & \frac{3}{2}M & 0 \\ 0 & L_s - M_s & 0 & \frac{3}{2}M \\ \frac{3}{2}M & 0 & L_r - M_r & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}M & 0 & L_r - M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_d} \\ i_{S_q} \\ i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

<sup>19</sup>. la composante homopolaire



Pour simplifier les écritures, nous introduisons les grandeurs *cycliques* définies de la manière suivante :

- $\mathcal{L}_s = L_s - M_s$  : l'inductance cyclique propre du stator.
- $\mathcal{L}_r = L_r - M_r$  : l'inductance cyclique propre du rotor.
- $\mathcal{M} = \frac{3}{2}M$  : la mutuelle cyclique stator-rotor.

En utilisant ces notations, le moteur peut se modéliser la forme d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_{S_d} \\ \dot{\phi}_{S_q} \\ \dot{\phi}_{R_d} \\ \dot{\phi}_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_s\sigma} & \dot{\theta}_s & \frac{\mathcal{M}}{T_s\mathcal{L}_r\sigma} & 0 \\ -\dot{\theta}_s & -\frac{1}{T_s\sigma} & 0 & \frac{\mathcal{M}}{T_s\mathcal{L}_r\sigma} \\ \frac{\mathcal{M}}{T_r\mathcal{L}_s\sigma} & 0 & -\frac{1}{T_r\sigma} & \dot{\theta}_r \\ 0 & \frac{\mathcal{M}}{T_r\mathcal{L}_s\sigma} & -\dot{\theta}_r & -\frac{1}{T_r\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{S_d} \\ \phi_{S_q} \\ \phi_{R_d} \\ \phi_{R_q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{S_d} \\ v_{S_q} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

$$\begin{bmatrix} i_{S_d} \\ i_{S_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathcal{L}_s\sigma} & 0 & -\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{L}_s\mathcal{L}_r\sigma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathcal{L}_s\sigma} & 0 & -\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{L}_s\mathcal{L}_r\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{S_d} \\ \phi_{S_q} \\ \phi_{R_d} \\ \phi_{R_q} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

où  $T_s$  (resp.  $T_r$ ) est la constante de temps statorique (resp. rotorique) et  $\sigma$  est le coefficient de dispersion. Ces paramètres sont donnés par :

$$T_s = \frac{\mathcal{L}_s}{R_s}, T_r = \frac{\mathcal{L}_r}{R_r} \text{ et } \sigma = 1 - \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{L}_s\mathcal{L}_r}$$

Les angles  $\theta_s$  et  $\theta_r$  sont reliés par la relation :

$$\theta = \theta_s - \theta_r$$

Par conséquent, nous pouvons fixer librement à une valeur quelconque un de ces angles. Trois choix sont couramment faits :

- $\theta_r = 0$ . Le repère d,q est fixe par rapport au rotor.
- $\theta_s = 0$ . Le repère d,q est fixe par rapport au stator.
- $\theta_s = \omega_s t$  et  $\theta_r = g\omega_s t$ . Le repère d,q est fixe par rapport au champ tournant.

Par la suite, nous verrons que le repère d,q fixe par rapport au champ tournant est intéressant pour la commande de la machine car il permet de transformer les grandeurs sinusoïdales en valeurs continues.

Pour la surveillance, nous préférons le repère d,q fixe par rapport au stator. Ce choix permet d'obtenir un modèle polynomial du moteur permettant d'appliquer les algorithmes d'élimination présentés précédemment.

### 6.1.3.4 La partie mécanique

La partie mécanique est modélisée à partir de l'équation fondamentale de la dynamique appliquée aux solides en rotation :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \underbrace{C_{em}}_{\text{Couple électromagnétique}} - \underbrace{B\Omega}_{\text{Couple de frottement visqueux}} - \underbrace{C_r}_{\text{Couple résistant}}$$

avec :

- $J$  : le moment d'inertie
- $\Omega$  : la vitesse mécanique donnée par  $\Omega = \frac{\omega_r}{p}$
- $B$  : le coefficient de frottement visqueux
- $C_r$  : le couple de frottement sec ou couple résistant
- $C_{em}$  : le couple électromagnétique

Le couple électromagnétique peut s'exprimer en fonction des courants statoriques et des flux rotoriques :

$$C_{em} = p \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{L}_r} (\phi_{R_d} i_{S_q} - \phi_{R_q} i_{S_d}) \quad (6.14)$$

### 6.1.3.5 Le modèle pour la surveillance

Pour appliquer directement les algorithmes d'élimination présentés dans le chapitre 3, nous devons trouver un modèle polynomiale de la machine. Cette structure du modèle est garantie si nous choisissons le référentiel fixe par rapport au stator.

La représentation d'état de la machine est donnée par les équations (6.12) et (6.13) :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_{S_d} \\ \dot{\phi}_{S_q} \\ \dot{\phi}_{R_d} \\ \dot{\phi}_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_s \sigma} & \dot{\theta}_s & \frac{\mathcal{M}}{T_s \mathcal{L}_r \sigma} & 0 \\ -\dot{\theta}_s & -\frac{1}{T_s \sigma} & 0 & \frac{\mathcal{M}}{T_s \mathcal{L}_r \sigma} \\ \frac{\mathcal{M}}{T_r \mathcal{L}_s \sigma} & 0 & -\frac{1}{T_r \sigma} & \dot{\theta}_r \\ 0 & \frac{\mathcal{M}}{T_r \mathcal{L}_s \sigma} & -\dot{\theta}_r & -\frac{1}{T_r \sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{S_d} \\ \phi_{S_q} \\ \phi_{R_d} \\ \phi_{R_q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{S_d} \\ v_{S_q} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_{S_d} \\ i_{S_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathcal{L}_s \sigma} & 0 & -\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{L}_s \mathcal{L}_r \sigma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathcal{L}_s \sigma} & 0 & -\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{L}_s \mathcal{L}_r \sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{S_d} \\ \phi_{S_q} \\ \phi_{R_d} \\ \phi_{R_q} \end{bmatrix}$$

Le référentiel fixe par rapport au stator impose :

- $\theta_s = 0$  et  $\dot{\theta}_s = 0$
- $\theta_r = -\theta$  et  $\dot{\theta}_r = -\omega = -p\Omega$

Le modèle est alors donné par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Omega} = \frac{p\mathcal{M}}{\mathcal{L}_r J} (\phi_{R_d} i_{S_q} - \phi_{R_q} i_{S_d}) - \frac{B}{J} \Omega - \frac{C_r}{J} \\ \dot{\phi}_{S_d} = -\frac{1}{T_s \sigma} \phi_{S_d} + \frac{\mathcal{M}}{T_s \mathcal{L}_r \sigma} \phi_{R_d} + v_{S_d} \\ \dot{\phi}_{S_q} = -\frac{1}{T_s \sigma} \phi_{S_q} + \frac{\mathcal{M}}{T_s \mathcal{L}_r \sigma} \phi_{R_q} + v_{S_q} \\ \dot{\phi}_{R_d} = \frac{\mathcal{M}}{T_r \mathcal{L}_s \sigma} \phi_{S_d} - \frac{1}{T_r \sigma} \phi_{R_d} - p\Omega \phi_{R_q} \\ \dot{\phi}_{R_q} = \frac{\mathcal{M}}{T_r \mathcal{L}_s \sigma} \phi_{S_q} + p\Omega \phi_{R_d} - \frac{1}{T_r \sigma} \phi_{R_q} \end{array} \right.$$

En utilisant les équations de sortie de la représentation d'état, les variables du flux statorique peuvent être supprimées. Nous obtenons ainsi le modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{p\mathcal{M}}{\mathcal{L}_r J} (x_2 x_5 - x_3 x_4) - \frac{B}{J} x_1 - \frac{C_r}{J} \\ \dot{x}_2 = \beta (\mathcal{M} x_4 - x_2) - p x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = \beta (\mathcal{M} x_5 - x_3) + p x_1 x_2 \\ \dot{x}_4 = \gamma x_4 + \delta (\beta x_2 + p x_1 x_3) + \frac{v_{S_d}}{\mathcal{L}_s \sigma} \\ \dot{x}_5 = \gamma x_5 + \delta (\beta x_3 - p x_1 x_2) + \frac{v_{S_q}}{\mathcal{L}_s \sigma} \end{array} \right. \quad (6.15a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_4 \\ y_3 = x_5 \end{array} \right. \quad (6.15b)$$

où le vecteur d'état  $x$  est donné par :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Omega & \phi_{R_d} & \phi_{R_q} & i_{S_d} & i_{S_q} \end{bmatrix}^T$$

et les paramètres  $\gamma$ ,  $\beta$  et  $\delta$  sont donnés respectivement par :

$$\gamma = -\frac{1}{\sigma} (\alpha + (1 - \sigma)\beta) \quad \beta = \frac{1}{T_r} \quad \alpha = \frac{1}{T_s} \quad \delta = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{L}_s \mathcal{L}_r \sigma}$$

Le modèle (6.15) est sous une forme polynomiale et permet l'application de la méthode de l'espace de parité utilisant la théorie de l'élimination.

## 6.2 Surveillance par la méthode d'élimination

Dans cette section, nous allons appliquer la méthode de l'espace de parité pour obtenir les RRA issues du modèle de la machine asynchrone.

Nous calculerons ensuite le nombre de relations qu'il est possible d'extraire de ce modèle lorsqu'aucune considération de robustesse n'est prise en compte. Nous affinerons notre recherche en cherchant le nombre de relations découplées du couple résistant.

Nous continuerons notre étude par le calcul de ces relations en utilisant l'algorithme d'élimination des bases de Groebner. Nous montrerons que les RRA obtenues peuvent être décomposées sous la forme d'une somme de termes sinusoïdaux. Pour faciliter l'évaluation des RRA, nous verrons qu'il est possible de supprimer cette composante sinusoïdale et de n'utiliser que des variables continues. A partir des RRA «non sinusoïdales», nous allons considérer trois pannes survenant sur :

- le capteur de vitesse
- la résistance équivalente du rotor  $R_r$
- la résistance équivalente du stator  $R_s$

Le fait de considérer des variations sur les résistances équivalentes de Park n'a pas de justification physique dans le sens où un court-circuit de spire au stator ne se traduira pas par ce type de variation, de même pour une rupture de barres ou d'anneaux du rotor (Raison, 2000).

Toutefois nous justifions ce choix par le fait que l'objectif ici est de tester le bon fonctionnement de la méthode de l'espace de parité pour les systèmes non linéaires. La méthode des résultants sera appliquée pour obtenir des RRA robustes vis-à-vis de ces pannes.

La détection de défaut sera réalisée en utilisant procédure du CUSUM.

Pour commencer, nous allons déterminer le nombre de RRA qu'il est possible d'extraire du modèle (6.15a).

### 6.2.1 Génération des RRA

Pour déterminer le nombre de RRA qu'il est possible d'extraire du modèle, nous devons dans un premier temps trouver les ordres de dérivation à attribuer à chaque sortie. Puis, en utilisant le théorème 3.2 (ou 3.3) nous obtenons le nombre de RRA.

Pour ce modèle, nous choisissons les ordres de dérivation suivants (Comtet-Varga *et al.*, 1999):

- $s_1$ , associé à la sortie  $y_1$ , égal à 1.
- $s_2$ , associé à la sortie  $y_2$ , égal à 1.
- $s_3$ , associé à la sortie  $y_3$ , égal à 1.

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
 y_1 &= x_1 \\
 \dot{y}_1 &= \frac{p\mathcal{M}}{\mathcal{L}_r J} (x_2 x_5 - x_3 x_4) - \frac{B}{J} x_1 - \frac{C_r}{J} \\
 y_2 &= x_4 \\
 \dot{y}_2 &= \gamma x_4 + \delta (\beta x_2 + p x_1 x_3) + \frac{v_{S_d}}{\mathcal{L}_s \sigma} \\
 y_3 &= x_5 \\
 \dot{y}_3 &= \gamma x_5 + \delta (\beta x_3 - p x_1 x_2) + \frac{v_{S_q}}{\mathcal{L}_s \sigma}
 \end{aligned}$$

Soit :

$$\bar{y}^{(1)} = \Lambda_1 (x, v_{S_d}, v_{S_q}, C_r)$$

La matrice jacobienne de  $\Lambda_1$  en  $x$  est égale à :

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{B}{J} & \frac{p\mathcal{M}}{\mathcal{L}_r J} x_5 & -\frac{p\mathcal{M}}{\mathcal{L}_r J} x_4 & -\frac{p\mathcal{M}}{\mathcal{L}_r J} x_3 & \frac{p\mathcal{M}}{\mathcal{L}_r J} x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \delta p x_3 & \beta \delta & p \delta x_1 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\delta p x_2 & -\delta p x_1 & \beta \delta & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Le rang  $r$  de cette matrice est égal à 5. Le théorème 3.3 donnant le nombre de RRA indique qu'une seule RRA peut être extraite du modèle.

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{k=1}^3 s_k + p - r \\ &= (1 + 1 + 1) + 3 - 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

L'algorithme d'élimination des bases de Groebner est utilisé pour déterminer cette RRA. Son expression est la suivante :

$$\begin{aligned} \rho_1 \left( \bar{y}_1^{(1)}, \bar{y}_2^{(1)}, \bar{y}_3^{(1)}, v_{S_d}, v_{S_q} \right) &= p^2 \mathcal{L}_s \sigma A_1 (p y_1 y_2 - \beta y_3) + p^2 \mathcal{L}_s \sigma A_2 (p y_1 y_3 - \beta y_2) \\ &\quad + \left( \beta^2 + (p y_1)^2 \right) (J (p \dot{y}_1 + B p y_1) + p C_r) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

avec  $A_1 = \dot{y}_2 - \gamma y_2 - \frac{v_{S_d}}{\mathcal{L}_s \sigma}$  et  $A_2 = \dot{y}_3 - \gamma y_3 - \frac{v_{S_q}}{\mathcal{L}_s \sigma}$ .

Cette relation dépend du couple résistant et pourra être utilisée comme générateur de résidu seulement si  $C_r$  est connu. Dans le cas contraire, cette relation pourra servir pour calculer  $C_r$ .

Nous allons maintenant chercher des relations robustes par rapport à  $C_r$ .

Avec les ordres de dérivation sur les sorties égaux à 1, nous montrons à l'aide du théorème 3.3 qu'il n'existe pas de telles RRA. Pour en obtenir, nous devons augmenter de un l'ordre de dérivation sur les deux sorties en courants  $y_2$  et  $y_3$  (Comtet-Varga *et al.*, 1999).

Le rang  $r^*$  de la matrice  $\Lambda_2 = \begin{bmatrix} y_1 & \dot{y}_1 & y_2 & \dot{y}_2 & \ddot{y}_2 & y_3 & \dot{y}_3 & \ddot{y}_3 \end{bmatrix}^T$  est égal à 6. L'expression de  $\Lambda_2$  est obtenue sans difficulté mais prend beaucoup de place. Pour cette raison, elle n'est pas présentée ici. En utilisant le théorème 3.3, nous montrons qu'il existe exactement deux RRA robustes par rapport à  $C_r$  :

$$\begin{aligned} \eta^* &= \sum_{k=1}^3 s_k + p - r^* \\ &= (1 + 2 + 2) + 3 - 6 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Les expressions de ces deux RRA sont obtenues par l'algorithme des bases de Groebner et sont égales à :

$$\begin{aligned}
\rho_2 \left( \bar{y}_1^{(1)}, \bar{y}_2^{(2)}, \bar{y}_3^{(2)}, \bar{v}_{S_d}^{(1)}, \bar{v}_{S_q}^{(1)} \right) &= \left( \beta^2 + (py_1)^2 \right) \left( \dot{A}_1 - \frac{\beta(1-\sigma)}{\sigma} (\beta y_2 + py_1 y_3) \right) \\
&\quad - (\beta A_2 + A_1 py_1) (-2\beta py_1 + p\dot{y}_1) \\
&\quad - (\beta A_1 - A_2 py_1) \left( (py_1)^2 - \beta^2 \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.17}$$

et

$$\begin{aligned}
\rho_3 \left( \bar{y}_1^{(1)}, \bar{y}_2^{(2)}, \bar{y}_3^{(2)}, \bar{v}_{S_d}^{(1)}, \bar{v}_{S_q}^{(1)} \right) &= \left( \beta^2 + (py_1)^2 \right) \left( \dot{A}_2 - \frac{\beta(1-\sigma)}{\sigma} (\beta y_3 - py_1 y_2) \right) \\
&\quad - (\beta A_1 + A_2 py_1) (2\beta py_1 - p\dot{y}_1) \\
&\quad - (\beta A_2 + A_1 py_1) \left( (py_1)^2 - \beta^2 \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.18}$$

### 6.2.2 Analyse des RRA

Nous allons maintenant étudier les deux RRA données précédemment. Ces relations sont par construction indépendantes (algébriquement et au sens de la dérivée). Nous allons montrer que les signaux issus de ces deux RRA sont simplement déphasés de  $\frac{\pi}{2}$  (Christophe and Cocquempot, 1999; Christophe *et al.*, 2000).

Nous montrerons qu'il est possible de trouver deux RRA indépendantes et faisant intervenir les signaux non sinusoïdaux suivants :

- les amplitudes instantanées des courants et des tensions
- la pulsation instantanées de l'alimentation statorique
- le déphasage instantané entre la tension et le courant

Ces signaux sont soit obtenus directement à partir des signaux mesurés (les amplitudes instantanées et le déphasage) soit fournis par la commande (la pulsation statorique).

Pour montrer que les deux RRA  $\rho_2$  et  $\rho_3$  génèrent des résidus déphasés de  $\frac{\pi}{2}$ , nous écrivons les courants et les tensions sous leur forme sinusoïdale :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{S_a} = V^* \cos(\omega_s t + \theta_v) \\ v_{S_b} = V^* \cos(\omega_s t + \theta_v - \frac{2\pi}{3}) \\ v_{S_c} = V^* \cos(\omega_s t + \theta_v + \frac{2\pi}{3}) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} i_{S_a} = I^* \cos(\omega_s t + \theta_i) \\ i_{S_b} = I^* \cos(\omega_s t + \theta_i - \frac{2\pi}{3}) \\ i_{S_c} = I^* \cos(\omega_s t + \theta_i + \frac{2\pi}{3}) \end{array} \right.$$

où  $V^*$  (resp.  $I^*$ ) représentent la valeur instantanée de la tension (resp. du courant) et  $\theta_v$  (resp.  $\theta_i$ ) représentent le déphasage de la tension (resp. du courant) par rapport à l'origine.

La transformation de Park appliquée à ces signaux conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{S_d} = V \cos(\omega_s t + \theta_v) \\ v_{S_q} = V \sin(\omega_s t + \theta_v) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} i_{S_d} = I \cos(\omega_s t + \theta_i) \\ i_{S_q} = I \sin(\omega_s t + \theta_i) \end{array} \right.$$

où  $V = \sqrt{\frac{2}{3}}V^*$  et  $I = \sqrt{\frac{2}{3}}I^*$ .

Soit  $\theta_{vi}$  le déphasage entre la tension et le courant. Ce déphasage est lié à  $\theta_i$  et  $\theta_v$  par la relation suivante :

$$\theta_{vi} = \theta_v - \theta_i$$

Les tensions statoriques peuvent s'exprimer en fonction de  $\theta_i$  et  $\theta_{vi}$  :

$$\begin{cases} v_{S_d} &= V (\cos(\theta_{vi}) \cos(\omega_s t + \theta_i) - \sin(\theta_{vi}) \sin(\omega_s t + \theta_i)) \\ v_{S_q} &= V (\cos(\theta_{vi}) \sin(\omega_s t + \theta_i) + \sin(\theta_{vi}) \cos(\omega_s t + \theta_i)) \end{cases}$$

Les expressions des tensions et des courants sont injectées dans les deux RRA  $\rho_2$  et  $\rho_3$  et nous obtenons :

$$\begin{cases} \rho_2 &= a_1 (\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}) \cos(\omega_s t + \theta_i) + b_1 (\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}) \sin(\omega_s t + \theta_i) \\ &= 0 \\ \rho_3 &= a_2 (\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}) \cos(\omega_s t + \theta_i) + b_2 (\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}) \sin(\omega_s t + \theta_i) \\ &= 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

Le calcul des expressions de  $a_i (\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V})$  et  $b_i (\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V})$  pour  $i = 1, 2$  permet de trouver les propriétés suivantes :

$$a_1 (\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}) = b_2 (\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}) \quad (6.20a)$$

$$a_2 (\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}) = -b_1 (\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}) \quad (6.20b)$$

les expressions de  $a_1$  et  $a_2$  ( $a_1$  (resp.  $a_2$ ) est utilisé pour  $a_1 (\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V})$  (resp.  $a_2 (\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V})$ )) sont égales à :

$$\begin{aligned} a_1 &= (\beta^2 + p^2 y_1^2) \left( \dot{C}_{11} - C_{12} C_{13} - \frac{\beta^2 (1 - \sigma)}{\sigma} I \right) - (\beta C_{13} + p y_1 C_{11}) (-2\beta p y_1 + p \dot{y}_1) \\ &\quad - (\beta C_{11} - p y_1 C_{13}) (p^2 y_1^2 - \beta^2) \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= (\beta^2 + p^2 y_1^2) \left( -C_{11} C_{12} - \dot{C}_{13} - \frac{(1 - \sigma) \beta p y_1 I}{\sigma} \right) - (\beta C_{11} - p y_1 C_{13}) (-2\beta p y_1 + p \dot{y}_1) \\ &\quad + (\beta C_{13} + p y_1 C_{11}) (p^2 y_1^2 - \beta^2) \end{aligned} \quad (6.22)$$

avec

$$C_{11} = \dot{I} - \gamma I - \frac{V}{\mathcal{L}_s \sigma} \cos(\theta_{vi})$$

$$C_{12} = \dot{\omega}_s t + \omega_s + \dot{\theta}_i$$

$$C_{13} = C_{12} I - \frac{V}{\mathcal{L}_s \sigma} \sin(\theta_{vi})$$

Les deux RRA (6.19) sont factorisées et peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \rho_2 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sin \left( \omega_s t + \theta_i + \arctan \left( \frac{b_1}{a_1} \right) \right) = 0 \\ \rho_3 &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \sin \left( \omega_s t + \theta_i + \arctan \left( \frac{b_2}{a_2} \right) \right) = 0 \end{cases}$$

A partir des propriétés (6.20), nous avons :

$$\begin{aligned}\sqrt{a_1^2 + b_1^2} &= \sqrt{b_2^2 + (-a_2)^2} \\ &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \triangleq R\end{aligned}\quad (6.23)$$

et

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) &= \arctan\left(-\frac{a_2}{b_2}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right) - \frac{\pi}{2}\end{aligned}\quad (6.24)$$

Par conséquent, les deux RRA  $\rho_2$  et  $\rho_3$  sont égales à

$$\rho_2 = R \sin\left(\omega_s t + \theta_i + \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right)\right) = 0 \quad (6.25a)$$

$$\rho_3 = R \sin\left(\omega_s t + \theta_i + \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (6.25b)$$

Les équations (6.25) prouvent que les deux RRA ,  $\rho_2$  et  $\rho_3$  sont simplement déphasées de  $\frac{\pi}{2}$ . Pour que ces deux RRA soient égales à zéro, il faut que  $R = 0$ . Ceci est possible si et seulement si :

$$\begin{cases} a_1(\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}) = 0 \\ a_2(\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}) = 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

Les deux relations  $a_1$  et  $a_2$  peuvent servir de RRA. L'évaluation des résidus avec ces relations nécessite l'utilisation de signaux non sinusoïdaux ce qui facilite l'estimation des dérivées.

### 6.2.3 Résidus structurés en vitesse variable

Nous allons maintenant considérer la machine tournant à une vitesse non constante et en fonctionnement dégradé. Trois pannes vont être considérées :

- les pannes capteur (seul le capteur de vitesse sera considéré)
- les pannes stator
- les pannes rotor

Ces pannes sont modélisées par l'ajout d'un terme sur la valeur nominale du composant considéré :

- pour le capteur de vitesse, la sortie mesurée  $y_1$  sera égale à  $y_{1r} + \Delta_{y_1}$
- pour les pannes stator, nous considérons une variation de la constante de temps statorique :  
 $\alpha^* = \alpha + \Delta_\alpha$
- pour les pannes rotor, nous considérons une variation de la constante de temps rotorique :  
 $\beta^* = \beta + \Delta_\beta$

Ces pannes sont injectées dans les deux RRA  $a_1$  et  $a_2$ . Nous avons alors :

$$a_1(\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}, \bar{\Delta}_\alpha, \bar{\Delta}_\beta, \bar{\Delta}_{y_1}) = 0 \quad (6.27a)$$

$$a_2(\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}, \bar{\Delta}_\alpha, \bar{\Delta}_\beta, \bar{\Delta}_{y_1}) = 0 \quad (6.27b)$$



Ces deux RRA sont décomposées de manière à séparer leurs formes de calcul de leurs formes d'évaluation :

$$\begin{aligned} a_1(\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}, \bar{\Delta}_\alpha, \bar{\Delta}_\beta, \bar{\Delta}_{y_1}) \\ a_{1c}(\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}) + a_{1e}(\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}, \bar{\Delta}_\alpha, \bar{\Delta}_\beta, \bar{\Delta}_{y_1}) = 0 \end{aligned} \quad (6.28a)$$

$$\begin{aligned} a_2(\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}, \bar{\Delta}_\alpha, \bar{\Delta}_\beta, \bar{\Delta}_{y_1}) \\ a_{2c}(\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}) + a_{2e}(\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}, \bar{\Delta}_\alpha, \bar{\Delta}_\beta, \bar{\Delta}_{y_1}) = 0 \end{aligned} \quad (6.28b)$$

Nous allons maintenant calculer les relations robustes par rapport à  $\Delta_{y_1}$ ,  $\Delta_\alpha$  et  $\Delta_\beta$ .

D'après le théorème 3.3, nous montrons que les relations robustes existent uniquement si les termes additifs sont constants. Sous cette condition, la génération des relations robustes est réalisée en éliminant un paramètre dans deux relations. Pour cela, nous allons utiliser la méthode des résultants présentée dans le chapitre 3 (Christophe *et al.*, 1999; Christophe and Cocquempot, 2000).

### 6.2.3.1 Robustesse par rapport à $\Delta_{y_1}$

Les deux relations  $a_1$  et  $a_2$  sont écrites sous la forme de polynôme en  $\Delta_{y_1}$  avec des coefficients dans le corps  $\mathbf{k}[\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}, \bar{\Delta}_\alpha, \bar{\Delta}_\beta]$  :

$$\begin{cases} a_1 = S_{1,3}^{\Delta_{y_1}} \Delta_{y_1}^3 + S_{1,2}^{\Delta_{y_1}} \Delta_{y_1}^2 + S_{1,1}^{\Delta_{y_1}} \Delta_{y_1}^1 + S_{1,0}^{\Delta_{y_1}} \\ a_2 = S_{2,3}^{\Delta_{y_1}} \Delta_{y_1}^3 + S_{2,2}^{\Delta_{y_1}} \Delta_{y_1}^2 + S_{2,1}^{\Delta_{y_1}} \Delta_{y_1}^1 + S_{2,0}^{\Delta_{y_1}} \end{cases} \quad (6.29)$$

La RRA robuste par rapport à  $\Delta_{y_1}$  est obtenue en calculant le résultant entre  $a_1$  et  $a_2$  par rapport à  $\Delta_{y_1}$  :

$$\rho_{\Delta_{y_1}} = Res(a_1, a_2, \Delta_{y_1}) = \begin{vmatrix} S_{1,3}^{\Delta_{y_1}} & 0 & 0 & S_{2,3}^{\Delta_{y_1}} & 0 & 0 \\ S_{1,2}^{\Delta_{y_1}} & S_{1,3}^{\Delta_{y_1}} & 0 & S_{2,2}^{\Delta_{y_1}} & S_{2,3}^{\Delta_{y_1}} & 0 \\ S_{1,1}^{\Delta_{y_1}} & S_{1,2}^{\Delta_{y_1}} & S_{1,3}^{\Delta_{y_1}} & S_{2,1}^{\Delta_{y_1}} & S_{2,2}^{\Delta_{y_1}} & S_{2,3}^{\Delta_{y_1}} \\ S_{1,0}^{\Delta_{y_1}} & S_{1,1}^{\Delta_{y_1}} & S_{1,2}^{\Delta_{y_1}} & S_{2,0}^{\Delta_{y_1}} & S_{2,1}^{\Delta_{y_1}} & S_{2,2}^{\Delta_{y_1}} \\ 0 & S_{1,0}^{\Delta_{y_1}} & S_{1,1}^{\Delta_{y_1}} & 0 & S_{2,0}^{\Delta_{y_1}} & S_{2,1}^{\Delta_{y_1}} \\ 0 & 0 & S_{1,0}^{\Delta_{y_1}} & 0 & 0 & S_{2,0}^{\Delta_{y_1}} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.30)$$

La forme de calcul doit être extraite de cette RRA pour générer le résidu robuste vis-à-vis de  $\Delta_{y_1}$ .

### 6.2.3.2 Robustesse par rapport à $\Delta_\beta$

Comme précédemment, les deux RRA  $a_1$  et  $a_2$  peuvent s'écrire sous la forme d'un polynôme de degré 3 en la variable  $\Delta_\beta$  avec des coefficients dans le corps  $\mathbf{k}[\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V}, \bar{\Delta}_\alpha, \bar{\Delta}_{y_1}]$ . La

RRA robuste par rapport à  $\Delta_\beta$  est alors égale au résultant entre  $a_1$  et  $a_2$  par rapport à  $\Delta_\beta$  :

$$\rho_{\Delta_\beta} = Res(a_1, a_2, \Delta_\beta) = \begin{vmatrix} S_{1,3}^{\Delta_\beta} & 0 & 0 & S_{2,3}^{\Delta_\beta} & 0 & 0 \\ S_{1,2}^{\Delta_\beta} & S_{1,3}^{\Delta_\beta} & 0 & S_{2,2}^{\Delta_\beta} & S_{2,3}^{\Delta_\beta} & 0 \\ S_{1,1}^{\Delta_\beta} & S_{1,2}^{\Delta_\beta} & S_{1,3}^{\Delta_\beta} & S_{2,1}^{\Delta_\beta} & S_{2,2}^{\Delta_\beta} & S_{2,3}^{\Delta_\beta} \\ S_{1,0}^{\Delta_\beta} & S_{1,1}^{\Delta_\beta} & S_{1,2}^{\Delta_\beta} & S_{2,0}^{\Delta_\beta} & S_{2,1}^{\Delta_\beta} & S_{2,2}^{\Delta_\beta} \\ 0 & S_{1,0}^{\Delta_\beta} & S_{1,1}^{\Delta_\beta} & 0 & S_{2,0}^{\Delta_\beta} & S_{2,1}^{\Delta_\beta} \\ 0 & 0 & S_{1,0}^{\Delta_\beta} & 0 & 0 & S_{2,0}^{\Delta_\beta} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.31)$$

### 6.2.3.3 Robustesse par rapport à $\Delta_\alpha$

Les deux RRA  $a_1$  et  $a_2$  s'écrivent sous la forme d'un polynôme de degré 1 en la variable  $\Delta_\alpha$  avec des coefficients dans le corps  $\mathbf{k}[\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{V}}, \bar{\Delta}_\beta, \bar{\Delta}_{y_1}]$ . La RRA robuste par rapport à  $\Delta_\alpha$  est égale au résultant entre  $a_1$  et  $a_2$  par rapport à  $\Delta_\alpha$  :

$$\rho_{\Delta_\alpha} = Res(a_1, a_2, \Delta_\alpha) = \begin{vmatrix} S_{1,1}^{\Delta_\alpha} & S_{2,1}^{\Delta_\alpha} \\ S_{1,2}^{\Delta_\alpha} & S_{2,2}^{\Delta_\alpha} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.32)$$

## 6.2.4 Résidus structurés en vitesse constante

Nous allons maintenant étudier la machine tournant à vitesse constante.

Ce fonctionnement particulier nécessite une étude indépendante du fonctionnement en vitesse variable. Effectivement, en calculant les expressions de  $\rho_{\Delta_{y_1}}$  et de  $\rho_{\Delta_\beta}$ , nous constatons que la dérivée première de la vitesse,  $\dot{y}_1$  peut être mise en facteur. Lorsque la vitesse est constante, la dérivée de la vitesse est toujours égale à zéro et les deux résidus calculés à partir des deux RRA robustes ne seront affectés par aucune panne.

Le résultant entre  $a_1|_{\dot{y}_1=0}$  et  $a_2|_{\dot{y}_1=0}$  par rapport à  $\Delta_{y_1}$  est calculé et nous obtenons que ce résultant est identiquement nul. D'après la propriété 3.8 (iii), il existe un facteur commun entre ces deux relations. Après le calcul de ce facteur, les deux RRA s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} a_1|_{\dot{y}_1=0} &= \left( (\beta + \Delta_\beta)^2 + (y_1 - \Delta_{y_1}) \right) a'_1 \\ a_2|_{\dot{y}_1=0} &= \left( (\beta + \Delta_\beta)^2 + (y_1 - \Delta_{y_1}) \right) a'_2 \end{cases} \quad (6.33)$$

Les formes de calcul de  $a'_1$  et de  $a'_2$ , notées respectivement  $a'_{1c}$  et  $a'_{2c}$  sont égales à :

$$\begin{cases} a'_{1c} &= \dot{C}_{11} - C_{12}C_{13} + \beta \left( \dot{I} + \frac{\alpha}{\sigma} I - \frac{V \cos(\theta_{vi})}{\mathcal{L}_s \sigma} \right) + p y_1 C_{13} \\ a'_{2c} &= -C_{11}C_{12} - \dot{C}_{13} - \frac{(1-\sigma)\beta p y_1 I}{\sigma} - \beta C_{13} + p y_1 C_{11} \end{cases} \quad (6.34)$$

Nous allons maintenant construire des résidus structurés par rapport aux trois pannes considérées.

### 6.2.4.1 Robustesse par rapport à $\Delta_{y_1}$

Dans ce cas, les RRA  $a'_1$  et  $a'_2$  s'écrivent comme des polynômes de degré 1 en  $\Delta_{y_1}$  :

$$\begin{cases} a'_1 &= S'_{1,1} \Delta_{y_1} + S'_{1,0} \\ a'_2 &= S'_{2,1} \Delta_{y_1} + S'_{2,0} \end{cases} \quad (6.35)$$

La RRA robuste par rapport à  $\Delta_{y_1}$  est donnée par :

$$\rho'_{\Delta_{y_1}} = Res(a'_1, a'_2, \Delta_{y_1}) \begin{vmatrix} S'_{1,1} & S'_{2,1} \\ S'_{1,0} & S'_{2,0} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.36)$$

### 6.2.4.2 Robustesse par rapport à $\Delta_\beta$

Les RRA  $a'_1$  et  $a'_2$  s'écrivent comme des polynômes de degré 1 en  $\Delta_\beta$ . La RRA robuste par rapport à  $\Delta_\beta$  est donnée par :

$$\rho'_{\Delta_\beta} = Res(a'_1, a'_2, \Delta_\beta) \begin{vmatrix} S'_{1,1} & S'_{2,1} \\ S'_{1,0} & S'_{2,0} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.37)$$

**Remarque 6.2.1** Lorsque la machine est soumise à un couple résistant constant, le fonctionnement à vitesse constante implique une tension d'alimentation d'amplitude et de fréquence constante. Dans ces conditions, les deux RRA  $\rho'_{\Delta_{y_1}}$  et  $\rho'_{\Delta_\beta}$  peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \rho'_{\Delta_{y_1}} &= (\beta + \Delta_\beta) \rho'_1(y_1, I, U, \omega_s, \theta_i, \theta_{vi}, \Delta_\alpha) &= 0 \\ \rho'_{\Delta_\beta} &= ((y_1 + \Delta_{y_1}) - \omega_s) \rho'_1(y_1, I, U, \omega_s, \theta_i, \theta_{vi}, \Delta_\alpha) &= 0 \end{cases}$$

où  $\rho'_1(y_1, I, U, \omega_s, \theta_i, \theta_{vi}, \Delta_\alpha)$  est un polynôme appartenant au corps  $\mathbf{k}[y_1, I, U, \omega_s, \theta_i, \theta_{vi}, \Delta_\alpha]$ .

Lorsque  $\delta_\alpha = 0$ , les deux résidus générés à partir de  $\rho'_{\Delta_{y_1}}$  et  $\rho'_{\Delta_\beta}$  ne sont affectés par aucune des deux autres pannes  $\Delta_{y_1}$  et  $\Delta_\beta$ .

Donc, à vitesse constante, pour un couple résistant constant, il est impossible de localiser les pannes survenant au niveau du rotor, que se soit une panne capteur ou une panne composant.

### 6.2.4.3 Robustesse par rapport à $\Delta_\alpha$

Les RRA  $a'_1$  et  $a'_2$  s'écrivent comme des polynômes de degré 1 en  $\Delta_\alpha$ . La RRA robuste par rapport à  $\Delta_\alpha$  est donnée par :

$$\rho'_{\Delta_\alpha} = Res(a'_1, a'_2, \Delta_\alpha) \begin{vmatrix} S'_{1,1} & S'_{2,1} \\ S'_{1,0} & S'_{2,0} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.38)$$

## 6.2.5 Table des signatures théoriques

Nous allons maintenant récapituler les résultats obtenus dans les sections précédentes en donnant pour les deux cas de figure étudiés, les tables de signatures théoriques des défauts pour toutes les RRA calculées.

### 6.2.5.1 Vitesse variable

|                          | $\Delta_{y_1}$ | $\Delta_{\beta}$ | $\Delta_{\alpha}$ |
|--------------------------|----------------|------------------|-------------------|
| $a_1$                    | 1              | 1                | 1                 |
| $a_2$                    | 1              | 1                | 1                 |
| $\rho_{\Delta_{y_1}}$    | 0              | 1                | 1                 |
| $\rho_{\Delta_{\beta}}$  | 1              | 0                | 1                 |
| $\rho_{\Delta_{\alpha}}$ | 1              | 1                | 0                 |

D'un point de vue structurel, les trois pannes sont entièrement détectable et localisable.

### 6.2.5.2 Vitesse Constante

Pour tenir compte de la remarque 6.2.1, nous devons considérer deux situations suivant que le l'amplitude de l'alimentation est constante ou non.

1. Amplitude d'alimentation constante.

La table des signatures est donnée par :

|                           | $\Delta_{y_1}$ | $\Delta_{\beta}$ | $\Delta_{\alpha}$ |
|---------------------------|----------------|------------------|-------------------|
| $a'_1$                    | 1              | 1                | 1                 |
| $a'_2$                    | 1              | 1                | 1                 |
| $\rho'_{\Delta_{y_1}}$    | 0              | 0                | 1                 |
| $\rho'_{\Delta_{\beta}}$  | 0              | 0                | 1                 |
| $\rho'_{\Delta_{\alpha}}$ | 1              | 1                | 0                 |

Les deux pannes survenant au niveau du rotor  $\Delta_{y_1}$  et  $\Delta_{\beta}$  sont détectable mais non localisable.

En réalité, les deux RRA  $\rho'_{\Delta_{y_1}}$  et  $\rho'_{\Delta_{\beta}}$  se simplifient et peuvent être toutes les deux être remplacées par  $\rho'_1(y_1, I, U, \omega_s, \theta_i, \theta_{vi}, \Delta_{\alpha})$ .

2. Amplitude d'alimentation non constante.

La table des signatures est donnée par :

|                           | $\Delta_{y_1}$ | $\Delta_{\beta}$ | $\Delta_{\alpha}$ |
|---------------------------|----------------|------------------|-------------------|
| $a'_1$                    | 1              | 1                | 1                 |
| $a'_2$                    | 1              | 1                | 1                 |
| $\rho'_{\Delta_{y_1}}$    | 0              | 1                | 1                 |
| $\rho'_{\Delta_{\beta}}$  | 1              | 0                | 1                 |
| $\rho'_{\Delta_{\alpha}}$ | 1              | 1                | 0                 |

Les deux pannes survenant au niveau du rotor  $\Delta_{y_1}$  et  $\Delta_\beta$  sont détectable et localisable.

### 6.3 Application numérique

Les paramètres que nous choisissons pour la machine asynchrone sont ceux du «Benchmark» utilisé dans le cadre de l'action incitative *diagnostic des enroulement électriques* dans le cadre du GDR SDSE (surveillance des systèmes électrotechnique). La puissance de cette machine est de 1 kW et ces paramètres électriques sont égaux à :

- $R_s = 10\Omega$ ,  $\mathcal{L}_s = 0.38H$
- $R_r = 3.5\Omega$ ,  $\mathcal{L}_r = 0.3H$
- $\mathcal{M} = 0.3H$

De plus, cette machine contient deux paire de pôles  $p = 2$  et les caractéristiques de la charge sont égales à :

- $J = 0.02kg.m^2$
- $B = 0.04N.m.s.rad^{-1}$

Pour les simulations , nous choisissons une période d'échantillonnage de  $1ms$  sur une fenêtre temporelle de  $10s$ . La consigne de vitesse est fixée à  $500tr.min^{-1}$ .

La figure 6.6 montre l'évolution du couple résistant.

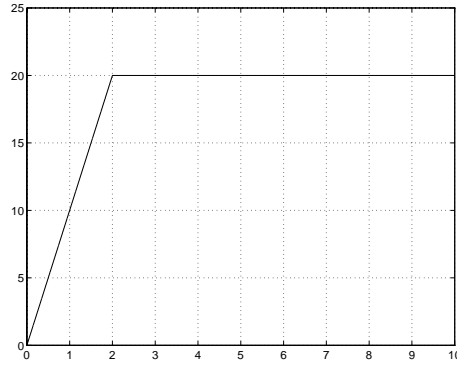


FIG. 6.6 – évolution du couple résistant

La variance  $\sigma_v$  des bruits de mesure pour chacun des capteurs est donnée dans le tableau ci-dessous :

|            | $i_{S_a}, i_{S_b}, i_{S_c}$ | $i_{S_a}, i_{S_b}, i_{S_c}$ | $vit$ |
|------------|-----------------------------|-----------------------------|-------|
| $\sigma_v$ | 0.5                         | 10                          | 1     |

#### 6.3.1 Cas non défaillant

Les figures 6.7 montrent l'évolution temporelle des tensions  $v_{S_a}$ ,  $v_{S_b}$  et  $v_{S_c}$ , des courants  $i_{S_a}$ ,  $i_{S_b}$  et  $i_{S_c}$  et de la vitesse.

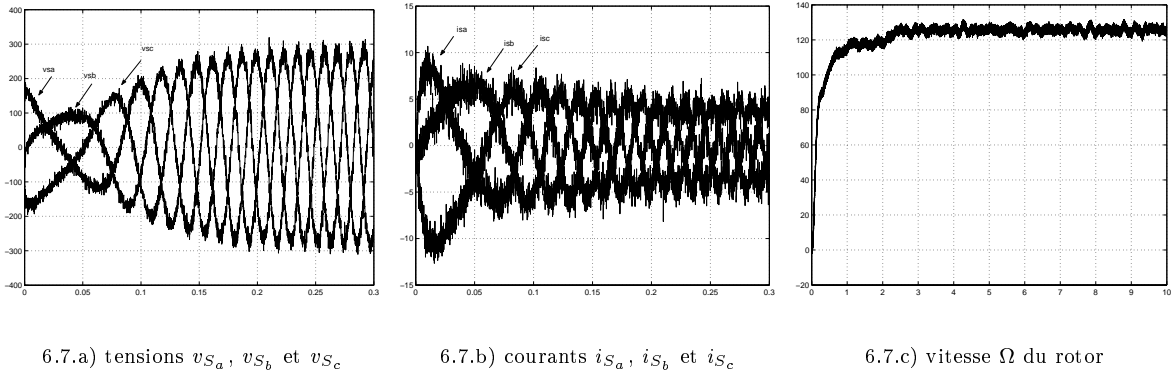


FIG. 6.7 – Allure des différents signaux

La transformation de Park dans le référentiel fixe par rapport au stator, appliquée sur les courants et sur les tensions permet d'obtenir les courants  $i_{S_d}$ ,  $i_{S_q}$ ,  $v_{S_d}$  et  $v_{S_q}$  présentés sur la figure 6.8.

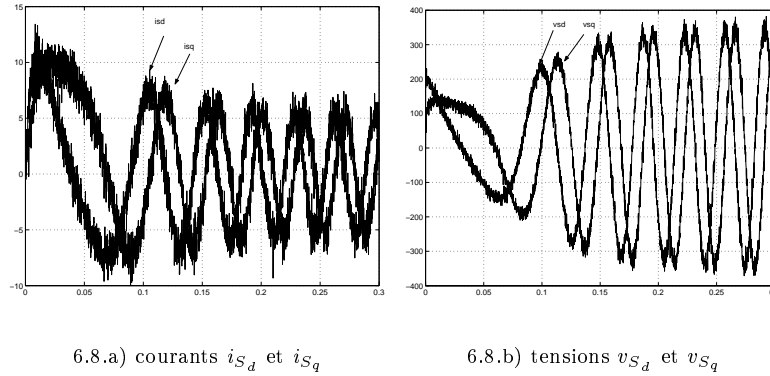


FIG. 6.8 – Allure des différents signaux

Pour évaluer les résidus à partir des signaux non sinusoïdaux, nous devons calculer les signaux  $\omega_s$ ,  $I$ ,  $V$ ,  $\theta_{vi}$  et  $\theta_i$  :

- $\omega_s$  est directement donné par la commande
- $I$  (resp.  $V$ ) est calculé à partir des signaux dans le repère de Park par :  $I = \sqrt{i_{S_d}^2 + i_{S_q}^2}$  (resp.  $V = \sqrt{v_{S_d}^2 + v_{S_q}^2}$ ).
- $\theta_{vi}$  est calculé à partir des courants et tensions statoriques dans le repère de Park :  $\theta_{vi} = \arctan\left(\frac{i_{S_d} v_{S_q} - i_{S_q} v_{S_d}}{i_{S_d} v_{S_d} + i_{S_q} v_{S_q}}\right)$
- $\theta_i$  est calculé à partir des courants statoriques dans le repère de Park :  $\theta_i = \arctan\left(\frac{i_{S_q}}{i_{S_d}}\right)$

Les figures 6.9 présentent l'allure de ces différents signaux.

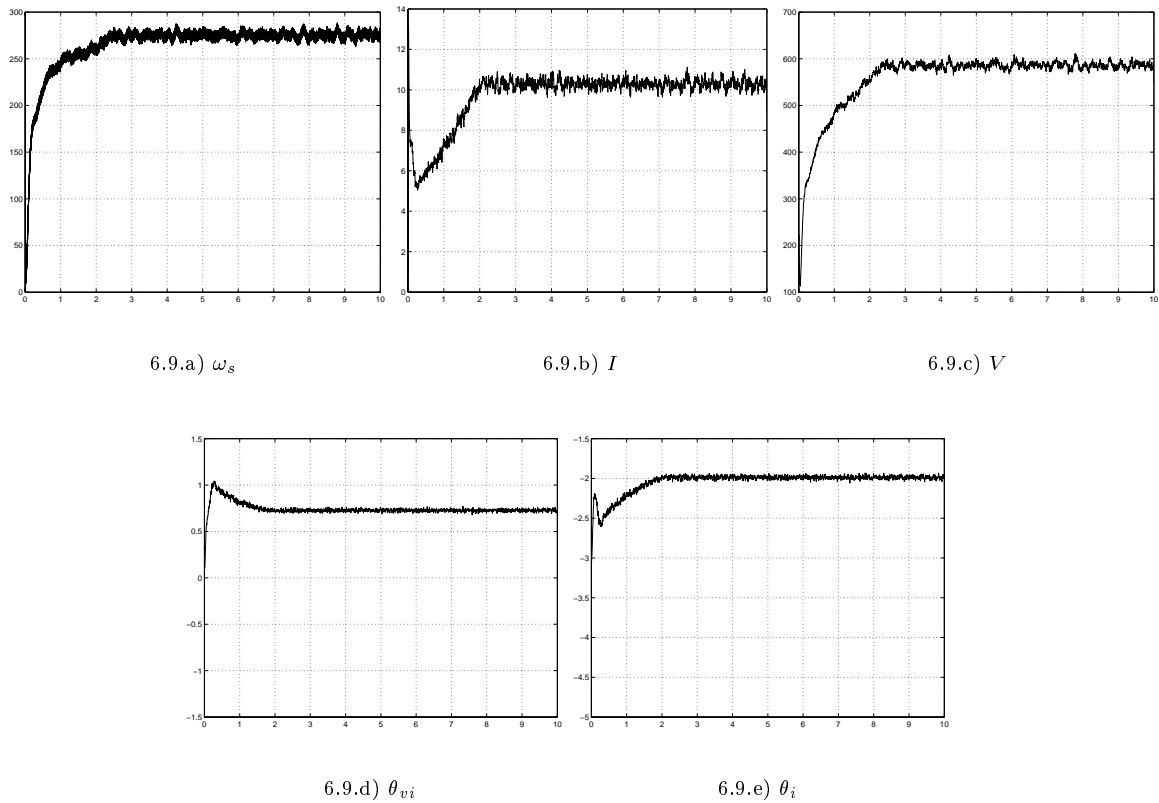


FIG. 6.9 – Signaux calculés à partir des signaux prélevés sur le moteur

Les dérivées des différents signaux sont calculées en utilisant l'approximation polynômiale. La taille de la fenêtre temporelle est de  $151ms$  et le polynôme approximant est de degré 5.

Les figures 6.10 montre l'évolution temporelle des résidus issus des formes de calcul suivantes :

- $a_{1c}(\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V})$
- $a_{2c}(\bar{y}_1, \bar{\omega}_s, \bar{\theta}_i, \bar{\theta}_{vi}, \bar{I}, \bar{V})$
- $\rho'_{1c}(y_1, I, U, \omega_s, \theta_i, \theta_{vi})$
- $\rho'_{\Delta_{\alpha c}}(y_1, I, U, \omega_s, \theta_i, \theta_{vi}, 0)$

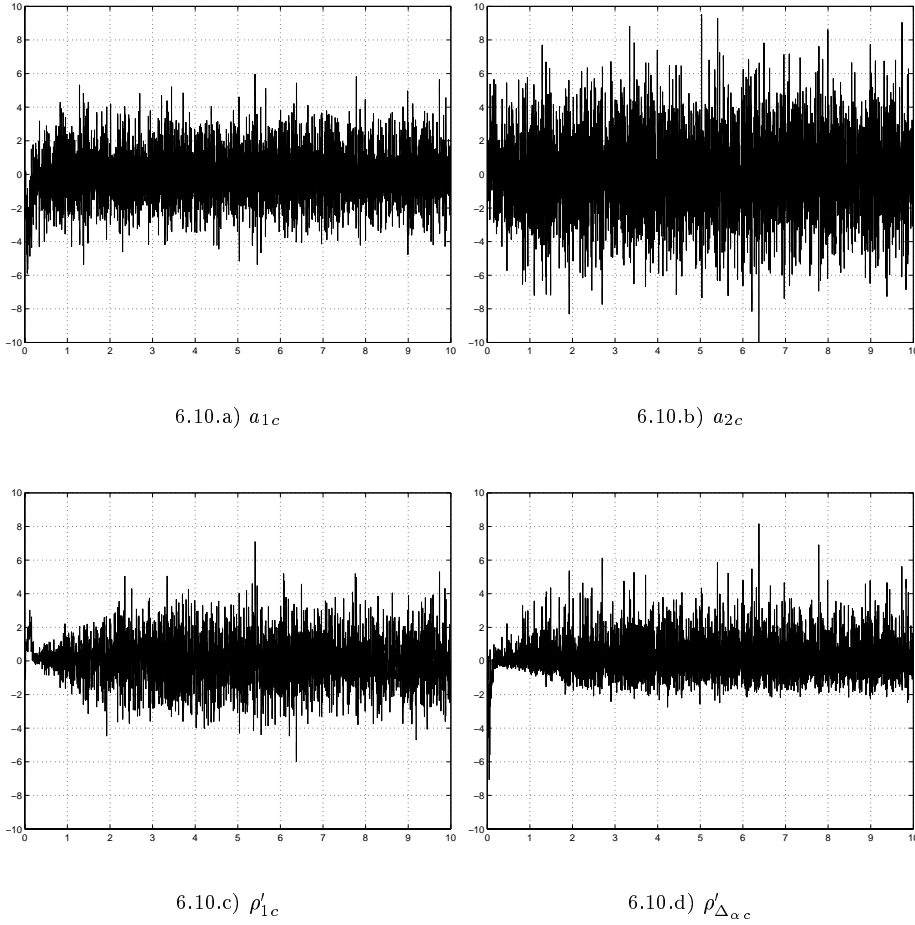


FIG. 6.10 – Résidus calculés dans le cas sans panne

Pour chacun de ces signaux, nous déterminons les deux paramètres permettant de régler notre test du CUSUM :

- la valeur  $\mu_0$  représentant la valeur autour de laquelle le résidu doit se trouver en fonctionnement défaillant.
- la valeur  $\nu$  représentant l'amplitude maximale du changement de moyenne.

Le paramètre  $\mu_0$  est obtenu en calculant la moyenne des résidus. Pour éviter les problèmes liés à l'initialisation du calcul des dérivées, le début et la fin des résidus ne sont pas pris en compte.

Le paramètre  $\nu$  est calculé en utilisant une fenêtre temporelle que nous faisons glisser sur les résidus. Dans chacune de ces fenêtres, nous calculons la moyenne des résidus. La valeur de  $\nu$  est obtenue en prenant la plus grande différence (en valeur absolue) entre la moyenne  $\mu_0$  des résidus calculée sur toute la durée du signal et les moyennes calculées sur chacune des fenêtres.

Pour trouver les valeurs de  $\mu_0$  et de  $\nu$ , nous avons considéré une fenêtre glissante de  $0.5s$  et nous avons considéré les résidus à partir de  $0.3s$  jusqu'à  $9.7s$ . Ces valeurs sont présentées dans le tableau



ci-dessous.

|                        |         |       |
|------------------------|---------|-------|
|                        | $\mu_0$ | $\nu$ |
| $a_1$                  | 0       | 0.1   |
| $a_2$                  | 0       | 0.2   |
| $\rho'_1$              | 0.1     | 0.2   |
| $\rho_{\Delta_\alpha}$ | 0.3     | 0.2   |

Pour déterminer le seuil de détection de l'algorithme de CUSUM, nous allons calculer les valeurs de  $g_k^+$  et  $g_k^-$  :

$$\begin{aligned} g_k^+ &= \left( g_{k-1}^+ + r(t_k) - \mu_0 - \frac{\nu}{2} \right)^+ \\ g_k^- &= \left( g_{k-1}^- + r(t_k) + \mu_0 - \frac{\nu}{2} \right)^+ \\ g_0 &= 0 \end{aligned}$$

La valeur du seuil pour chaque résidu est obtenue par la formule suivante :

$$\alpha_i = \max \left( \max (g_k^+), \max (g_k^-) \right)$$

|                        | $\max (g_k^+)$ | $\max (g_k^-)$ | $\alpha_i$ |
|------------------------|----------------|----------------|------------|
| $a_1$                  | 500            | 600            | <b>600</b> |
| $a_2$                  | 880            | 680            | <b>880</b> |
| $\rho'_1$              | 770            | 600            | <b>770</b> |
| $\rho_{\Delta_\alpha}$ | 580            | 443            | <b>580</b> |

### 6.3.2 Cas Défaillant

Nous allons considérer trois types de panne :

1. Une panne capteur de vitesse. Cette panne intervient à partir de  $t = 4s$  et augmente linéairement jusqu'à  $t = 5s$  puis elle se stabilise à 5% de la valeur réelle du capteur (fig. 6.11.a).
2. Une variation de la résistance  $R_r$ . Cette panne survient brusquement à partir de  $t = 5s$  et son amplitude est de 10% de la valeur nominale de  $R_r$  (fig. 6.11.b) .
3. Une variation de la résistance  $R_s$ . Cette panne survient brusquement à partir de  $t = 5s$  et son amplitude est de 10% de la valeur nominale de  $R_s$  (fig. 6.11.c).

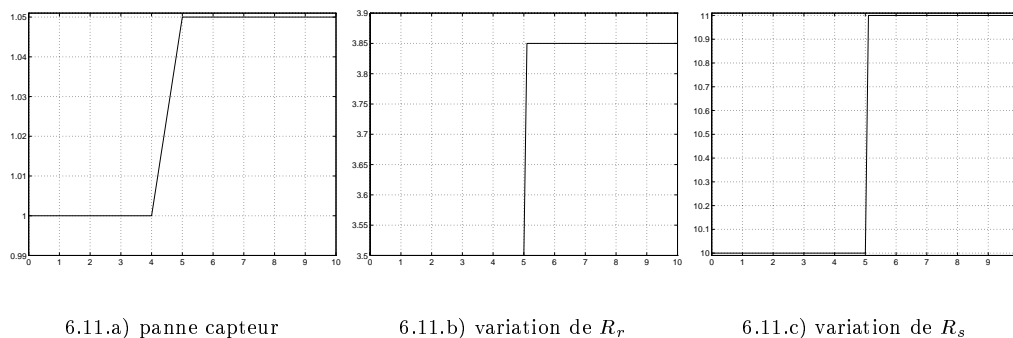


FIG. 6.11 – évolution temporelle des trois types de pannes

### 6.3.2.1 Panne du capteur de vitesse

Les figures 6.12 montrent les évolutions temporelles des quatre résidus dans le cas d'une panne capteur.

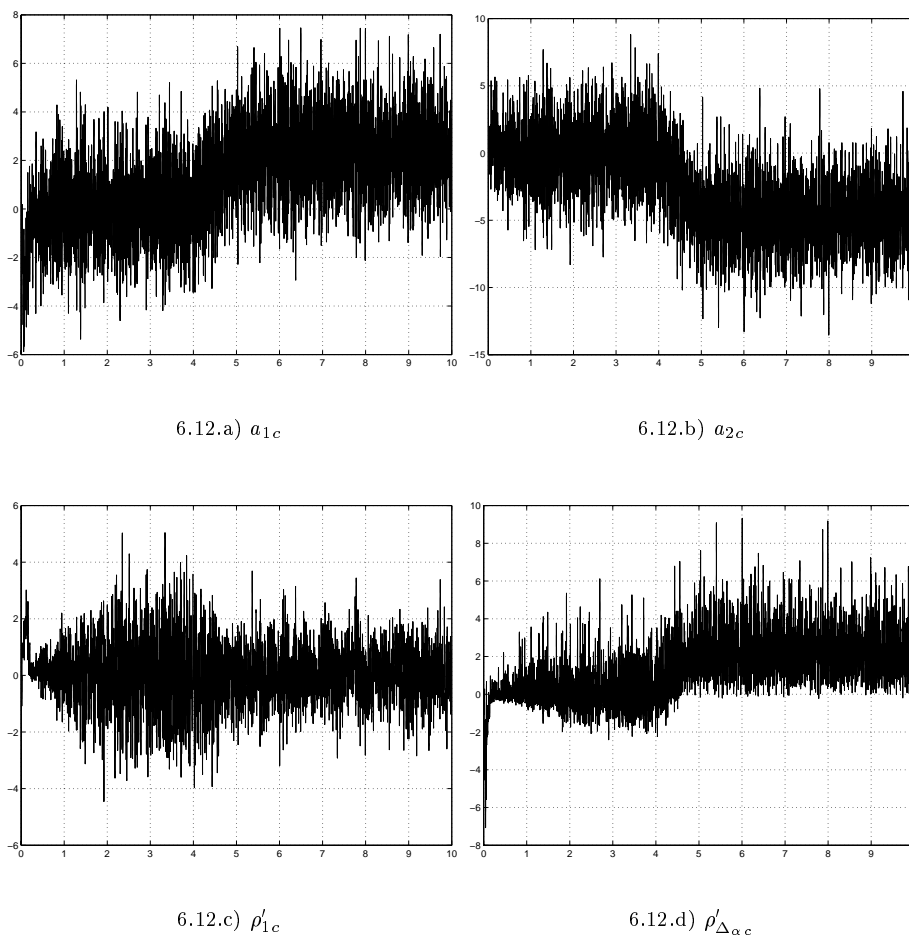


FIG. 6.12 – évolution temporelle des 4 résidus en présence d'une panne du capteur de vitesse

Nous voyons sur ces quatre figures, que trois résidus sont affectés par la panne. Pour déterminer précisément l'instant d'apparition du défaut, nous appliquons l'algorithme du CUSUM pour ces

quatre résidus. Les figures 6.13 montrent l'évolution de  $g_k^+$  et  $g_k^-$  pour les quatre résidus.

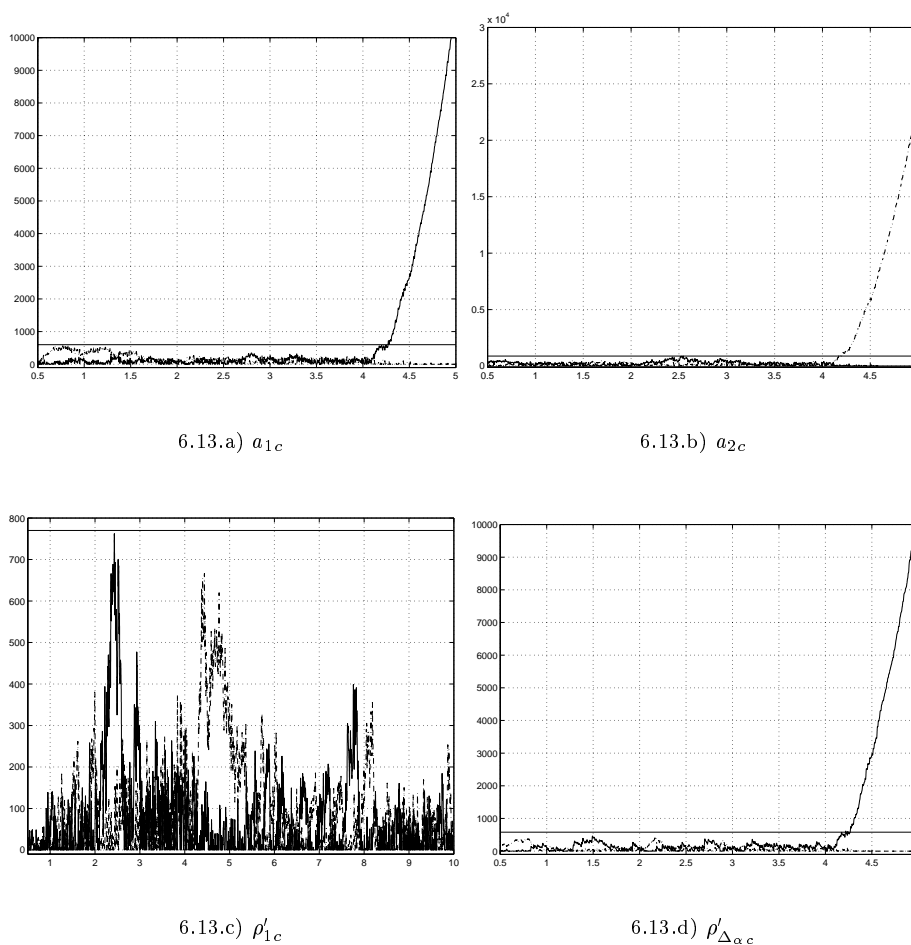


FIG. 6.13 – Application du CUSUM pour une panne du capteur de vitesse

Sur ces figures, le trait horizontal représente la valeur du seuil à partir duquel la panne est détectée.

Le tableau ci-dessous donne les instants d'apparition de la panne. Ceux ci sont déterminés à partir de la formule suivante :

$$t_a = \min \{k : (g_k^+ \geq \alpha_i) \cup (g_k^- \geq \alpha_i)\}$$

|       | $a_1$       | $a_2$       | $\rho'_1$ | $\rho_{\Delta\alpha}$ |
|-------|-------------|-------------|-----------|-----------------------|
| $t_a$ | <b>4.27</b> | <b>4.17</b> | -         | <b>4.21</b>           |

### 6.3.2.2 Variation de la résistance $R_r$

Les figures 6.14 montrent les évolutions temporelles des quatre résidus dans le cas d'une variation brusque de  $R_r$ .

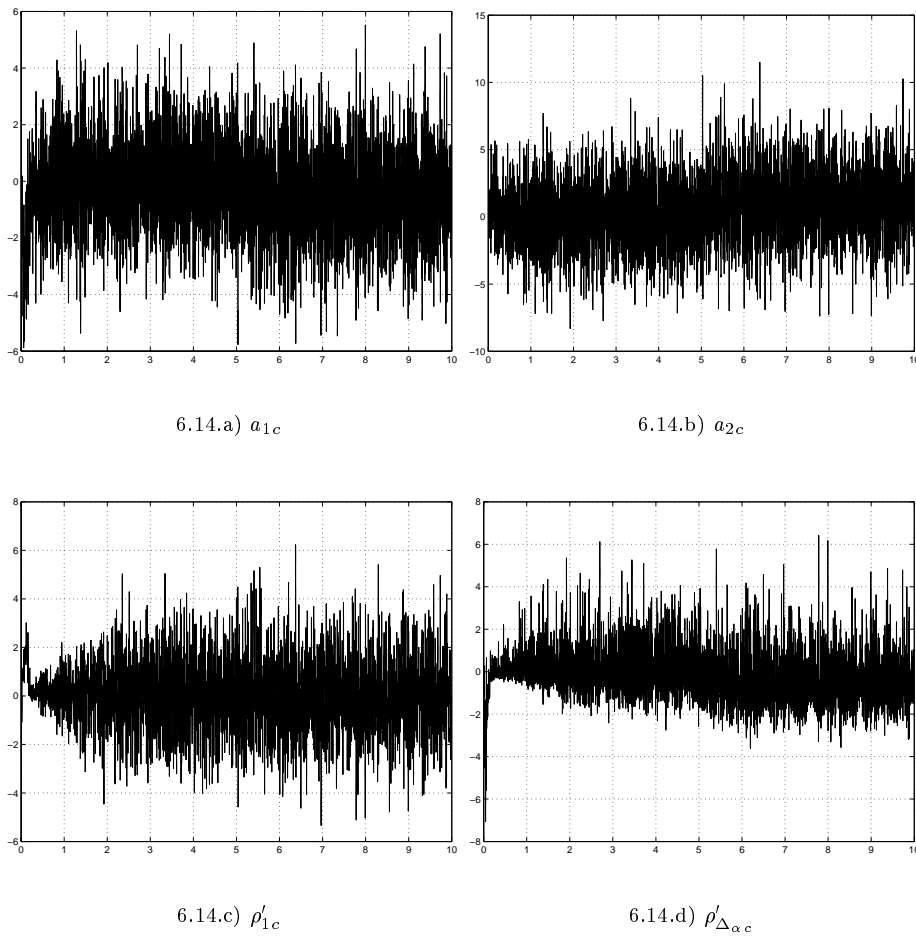
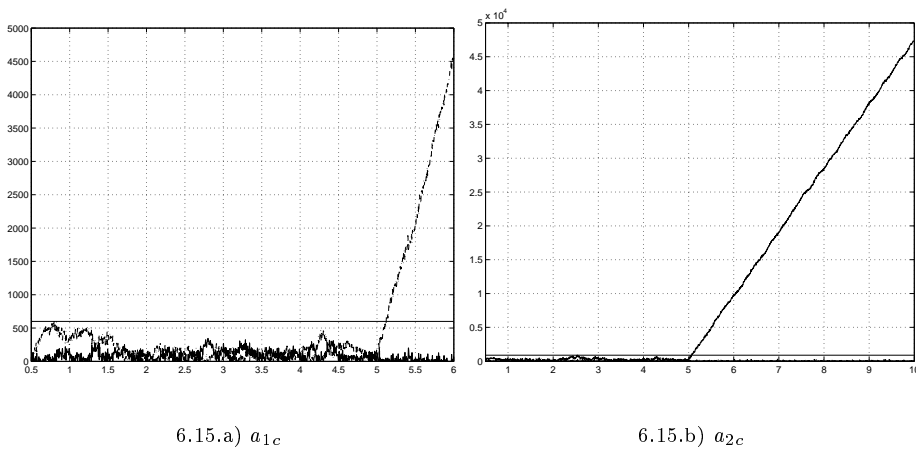
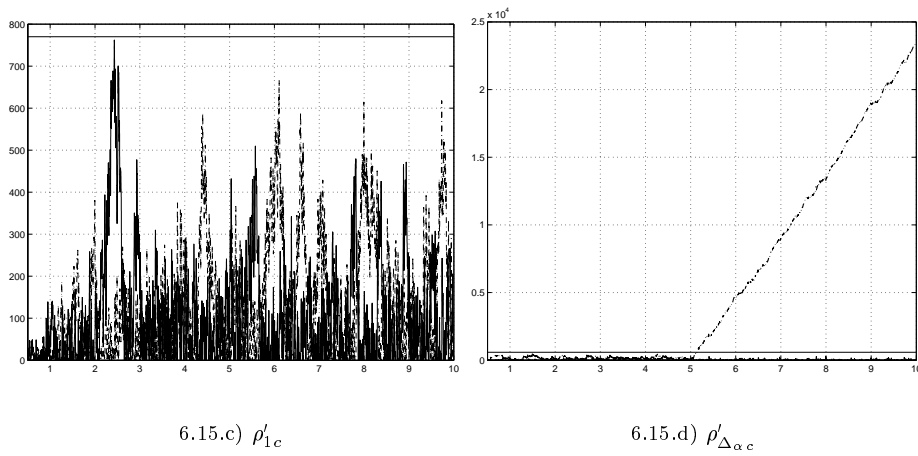


FIG. 6.14 – évolution temporelle des quatre résidus en présence d'une variation de  $R_r$ .

Nous voyons sur ces quatre figures, que trois résidus sont affectés par la panne. Pour déterminer précisément l'instant d'apparition du défaut, nous appliquons l'algorithme du CUSUM pour ces quatre résidus. Les figures 6.15 montrent l'évolution de  $g_k^+$  et  $g_k^-$  pour les quatre résidus.



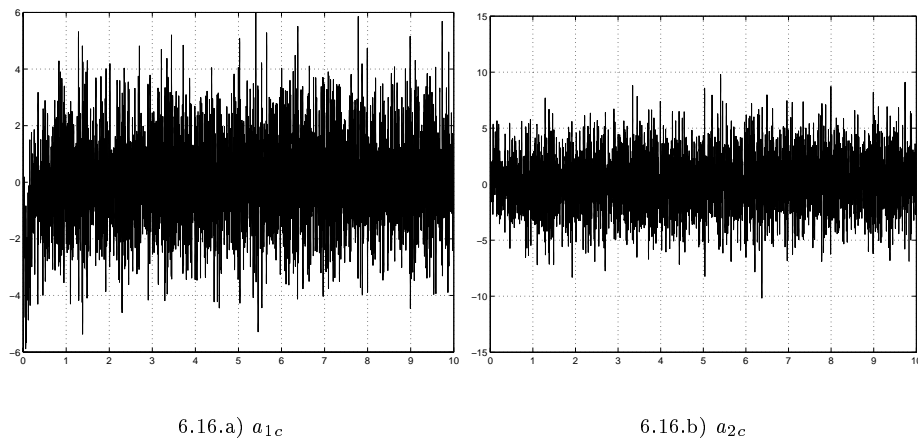
FIG. 6.15 – Application du CUSUM pour une variation de 10% de  $R_r$ .

Le tableau ci-dessous donne les instants d'apparition de la panne.

|       | $a_1$      | $a_2$       | $\rho'_1$ | $\rho_{\Delta\alpha}$ |
|-------|------------|-------------|-----------|-----------------------|
| $t_a$ | <b>5.1</b> | <b>5.06</b> | -         | <b>5.13</b>           |

### 6.3.2.3 Variation de la résistance $R_s$

Les figures 6.16 montrent les évolutions temporelles des quatre résidus dans le cas d'une variation de  $R_s$ .



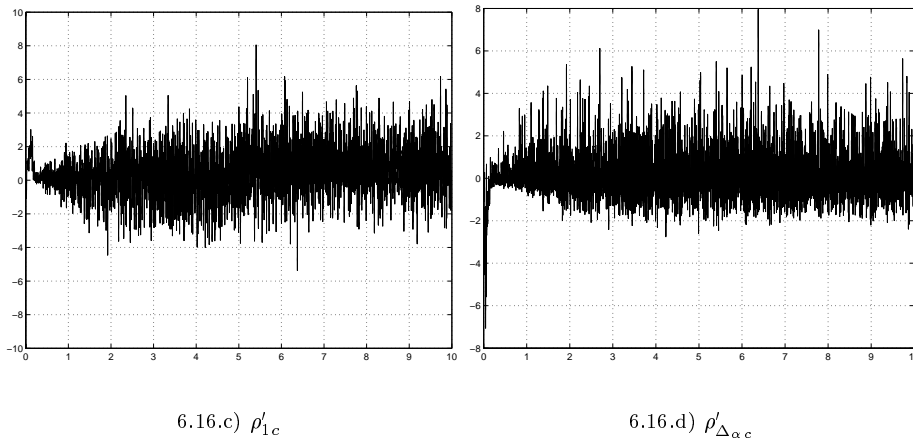


FIG. 6.16 – évolution temporelle des quatre résidus en présence d'une variation de  $R_s$

Nous voyons sur ces quatre figures, que trois résidus sont affectés par la panne. Pour déterminer précisément l'instant d'apparition du défaut, nous appliquons l'algorithme du CUSUM pour ces quatre résidus. Les figures 6.17 montrent l'évolution de  $g_k^+$  et  $g_k^-$  pour les quatre résidus.

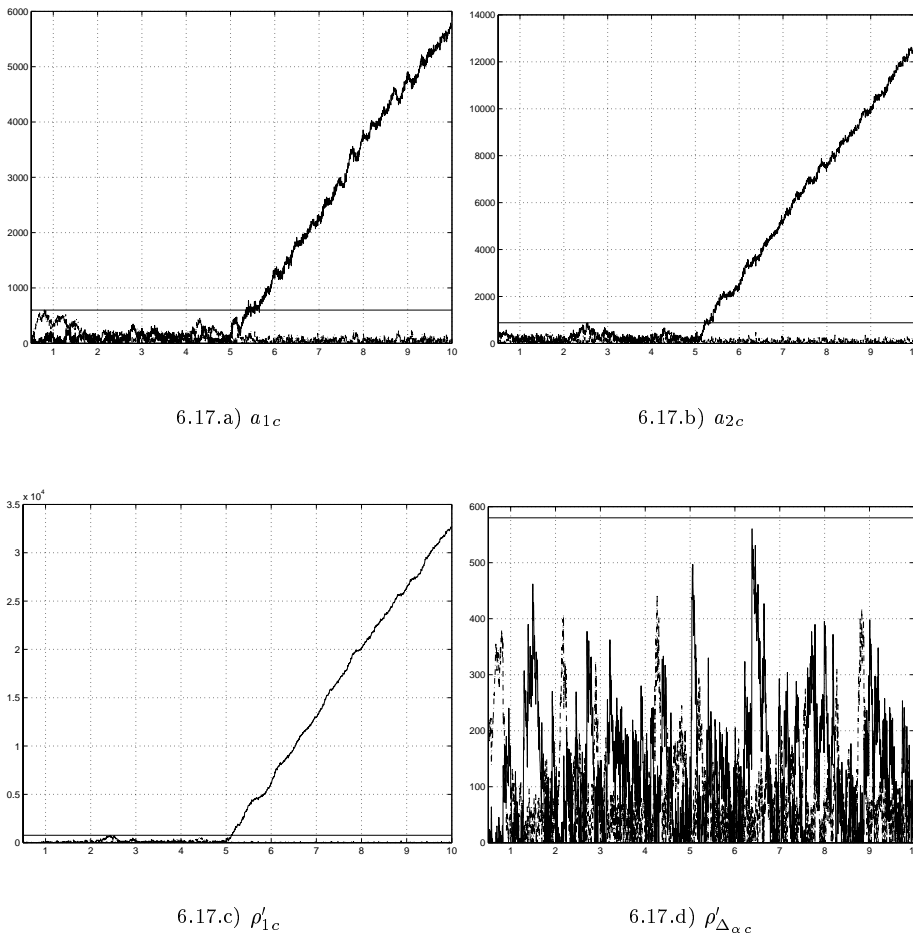


FIG. 6.17 – Application du CUSUM pour une variation de  $R_s$ 

Le tableau ci-dessous donne les instants d'apparition de la panne.

|       | $a_1$       | $a_2$      | $\rho'_1$   | $\rho_{\Delta_\alpha}$ |
|-------|-------------|------------|-------------|------------------------|
| $t_a$ | <b>5.33</b> | <b>5.2</b> | <b>5.12</b> | -                      |

### 6.3.2.4 Conclusion

Les trois types de pannes que nous avons étudiées sont toutes les trois détectables en utilisant le test du CUSUM.

Dans les tableaux donnant les temps à partir desquels les pannes sont détectées, nous remarquons qu'il faut au moins  $1ms$  et au plus  $3ms$  pour déclencher une alarme.

Pour réaliser la localisation de la panne, il faut considérer uniquement les deux résidus robustes  $\rho'_1$  et  $\rho_{\Delta_\alpha}$ . Effectivement, dès que la procédure de détection appliquée à un des ces résidus déclenche une alarme, alors la panne peut être détectée<sup>20</sup>.

## 6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode de l'espace de parité pour la surveillance du moteur asynchrone. Dans un premier temps nous nous sommes intéressés à la modélisation de ce type de machine. Nous avons ainsi pu déterminer sous quelles hypothèses nous pouvons obtenir un modèle de la machine dans le repère  $a, b, c$ . Nous avons ensuite présenté la transformation de Park qui permet de trouver un modèle simplifié de la machine dans un repère diphasé appelé repère  $d, q$ . Pour terminer l'étude de ce moteur, nous avons appliqué la méthode de l'espace de parité pour générer des résidus permettant de détecter différents dysfonctionnements. Nous avons vu qu'il est possible, en utilisant le modèle de Park fixe par rapport au stator, d'obtenir un modèle polynomial de la machine. A partir de ce modèle, nous avons mis en évidence que nous pouvions trouver trois RRA dont une dépend du couple résistant et des signaux collectés sur le système et leurs dérivées premières. Les deux autres RRA sont indépendantes du couple résistant.

En injectant dans ces RRA les expressions sinusoïdales des courants et des tensions, nous avons montré qu'elles étaient déphasées de  $\frac{\pi}{2}$ . Toutefois, à partir de ces RRA, nous pouvons obtenir deux autres RRA dépendant de signaux non sinusoïdaux.

Ces deux nouvelles RRA sont utilisées pour obtenir d'autres relations robustes par rapport aux pannes pouvant survenir soit sur le capteur de vitesse soit sur une des résistance équivalentes des enroulements statoriques ou rotoriques. En étudiant ces RRA robustes, nous avons mis en évidence que deux cas de figures doivent être envisagés suivant que la machine tourne à vitesse variable ou constante.

A vitesse variable, nous avons montré que toutes les pannes étaient détectables et localisable d'un point de vue théorique. En pratique, lorsque les signaux mesurés sont entachés de bruit, il s'avère excessivement difficile d'évaluer les résidus robustes en raison de leurs expressions extrêmement complexes.

A vitesse constante, nous avons vu que lorsque la tension d'alimentation est d'amplitude constante,

<sup>20</sup>. Dans le cas où nous supposons qu'il ne peut y avoir de fausses alarmes ou de non détection

les résidus robustes par rapport aux pannes survenant sur le capteur de vitesse et sur la résistance rotor ne permettent pas de discriminer ces deux pannes. Dans ce cas de figure, nous ne pouvons générer que quatre résidus, deux affectés par toutes les pannes et deux permettant de discriminer les pannes survenant au stator et au rotor.

Finalement, nous avons présenté une application numérique reprenant les valeurs pour les différents paramètres d'une machine réelle implantée à l'université de Poitier et servant de Benchmark au projet par redondance analytique des entraînements électrique du groupe de travail inter GDR AUTO/SDSE/ISIS (*Surveillance et Disponibilité des Systèmes Électrotechniques*, 2000; *Diagnostic des entraînements électriques*, 2001). Les résidus calculés illustrent les résultats prouvés dans le cas où la machine tourne à vitesse constante et pour une alimentation d'amplitude constante. Nous avons montré qu'il est possible de détecter les trois types de pannes considérés mais qu'il n'est possible de localiser que les variations sur la résistance statorique, les deux autres pannes survenant sur le rotor ne pouvant pas être discriminées.



## Conclusions et perspectives

## Conclusion

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans la continuité des travaux effectués au LAIL concernant la surveillance des systèmes complexes admettant un modèle analytique.

Ce mémoire s'articule en deux parties. La première est consacrée aux développements théoriques tandis que la seconde est consacrée aux applications.

## Partie I

Dans le premier chapitre de cette partie, nous avons rappelé les concepts généraux utilisés en surveillance. Pour commencer, nous avons présenté une classification des modèles des systèmes suivant les variables qu'ils utilisent. Puis, nous avons exposé le principe général de la génération de résidus (signaux indicateur de défauts) utilisés pour la détection de pannes. Ensuite, nous avons rappelé les résultats de l'analyse structurelle permettant d'utiliser les résidus pour la localisation des défauts. Enfin, pour conclure ce chapitre, nous avons présenté les outils mathématiques nécessaires à l'étude des systèmes non linéaires.

Dans le second chapitre de cette partie, nous avons étudié l'utilisation des observateurs pour la génération de résidus. Dans un premier temps, nous avons rappelé les différentes définitions de l'observabilité (globale, locale, uniforme) puis dans un second temps, nous avons défini le Problème Fondamental de la Génération de Résidus (PFGR). La solution de ce problème est présentée pour deux classes de systèmes :

- La classe des systèmes à dynamiques d'état linéaires. Elle regroupe les systèmes linéaires et les systèmes non linéaires linéarisables par injection d'entrée/sortie. La solution au PFGR consiste à implanter un observateur de Luenberger sur le sous système découplé des perturbations et découplé du sous ensemble de pannes vis-à-vis desquelles nous souhaitons être robuste.
- La classe des systèmes possédant un modèle analytique. La solution du PFGR consiste à implanter un observateur non linéaire (grand gain, mode glissant) sur le sous système découplé des perturbations et découplé du sous ensemble de pannes vis-à-vis desquelles nous souhaitons être robuste.

Dans le troisième chapitre de cette partie, nous avons étudié la méthode de l'espace de parité pour la génération des résidus. Pour commencer, nous avons présenté deux théorèmes permettant de déterminer, à partir d'un système donné, le nombre de relations de redondance analytique qu'il est possible d'obtenir. Le premier théorème ne prend pas en compte les considérations de robustesse contrairement au second. Ensuite, nous avons détaillé la procédure d'obtention de ces relations. Dans un premier temps, nous avons considéré les systèmes affines en la commande et la sortie. Pour ces systèmes, les relations peuvent être obtenues par projection dans l'espace orthogonal à l'espace d'observabilité du système. Dans un second temps, nous avons considéré des systèmes algébriques polynomiaux pour lesquels les relations sont obtenues en utilisant un algorithme d'élimination tel que les bases de Groebner. Enfin, pour conclure ce chapitre, nous avons présenté quelques aspects concernant la sensibilité des résidus vis-à-vis des fautes.

Enfin, dans le dernier chapitre de cette partie, nous avons comparé les deux approches de génération

de résidus étudiées dans les deux chapitres précédents. Nous avons dans un premier temps étendu les travaux effectués pour les systèmes linéaires à la classe des systèmes non linéaires possédant des dynamiques d'état linéaires. Deux cas de figure ont été présentés suivant que la génération de résidus est réalisé à partir d'un observateur d'ordre plein ou d'ordre réduit. Dans un second temps, nous avons proposé une approche originale permettant de prouver et de déterminer le lien existant entre les résidus obtenus par élimination et ceux issus d'un observateur à grand gain.

## Partie II

Dans le premier chapitre de cette partie, nous avons illustré les résultats obtenus dans le quatrième chapitre de la première partie concernant la comparaison des résidus. Le système considéré est le moteur à courant continu série. Deux configurations de mesure ont été présentées :

- seul le courant est mesuré
- le courant et la vitesse sont mesurés

Dans la première configuration de mesure, les résidus ont été générés à partir d'un observateur de Luenberger, d'un observateur à grand gain et à partir de l'approche de l'espace de parité. Dans la seconde configuration, nous avons traité les résidus issus d'un observateur de Luenberger et de l'approche de l'espace de parité. Les résultats de la comparaison des résidus de parité avec les résidus issus des différents observateurs confirme la théorie prouvée dans le quatrième chapitre de la première partie.

Le second chapitre de cette partie traite de la machine asynchrone. Nous avons, pour commencer, déterminé un modèle de cette machine s'écrivant sous forme polynomiale. Ensuite, à partir de ce modèle, nous avons généré des résidus en utilisant la théorie de l'élimination. Nous avons montré que trois relations de redondance analytique peuvent être déterminées et que seulement deux d'entre-elles sont robustes par rapport au couple résistant. En utilisant les expressions temporelles des tensions et des courants, ces deux relations ont été réécrites de manière à supprimer leur composante sinusoïdale. Nous avons ensuite construit des relations robustes vis-à-vis de trois types de pannes : une panne capteur (capteur de vitesse) et deux pannes paramètres (résistances statorique et rotorique). Pour la procédure de détection, nous avons implanté un test du CUSUM permettant de détecter les sauts de moyenne. Les résultats obtenus permettent de conclure quant à la viabilité de la méthode de l'espace de parité pour réaliser la surveillance des systèmes non linéaires.

## Perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire permettent de répondre à un certain nombre de questions mais laisse d'autres points en suspend. Pour la partie théorique, la structuration des résidus pour les systèmes non linéaires ne considère que des découplages parfaits. Il serait intéressant de compléter les travaux sur la sensibilité des résidus pour permettre de proposer des solutions de découplages optimaux, lorsque le découplage parfait est impossible. De plus, les travaux de comparaison doivent aboutir à terme à rendre les deux méthodes complémentaires. En particulier, il est plus simple de construire des résidus robustes en utilisant la méthode de l'espace de parité.

Il serait intéressant de trouver comment utiliser ces résidus de parité robuste pour construire un observateur qui soit lui aussi robuste.

Du point de vue de l'implantation numérique, il est clair que le calcul des dérivées est un problème très important pour la méthode de l'espace de parité. Deux orientations sont possibles :

- déterminer une méthode fiable permettant de calculer les dérivées sans amplifier les bruits de mesure,
- éviter de devoir calculer ces dérivées (Taillibert, 1999; Shumsky, 1999).

Enfin, pour le moteur asynchrone, le modèle de Park présenté dans ce mémoire est un modèle de bon fonctionnement et à partir duquel il est impossible de modéliser des pannes internes. Il est donc important de trouver un modèle de panne du moteur afin de pouvoir valider les méthodes de surveillance par redondance analytique sur des mesures expérimentales. Des travaux dans ce sens ont été entrepris (Schaeffer, 1999; Chang *et al.*, 2001*a*; Chang *et al.*, 2001*b*).



## Troisième partie

### Annexes



# Annexe A

## Sur le calcul des dérivées

### A.1 Introduction

Dans ce mémoire, deux méthodes de génération de résidus pour les systèmes modélisés sous forme d'état sont présentées. La première des deux approches utilise la théorie des observateurs tandis que la seconde utilise la théorie de l'élimination. Nous avons ensuite montré que ces deux méthodes présentent un certain nombre de points communs et en particulier que les résidus issus de chacune d'entre elles sont reliés par un filtre (linéaire ou non).

Toutefois, malgré ce lien, les deux approches ne peuvent pas être considérées comme strictement équivalentes. Effectivement, d'un point de vue calculatoire, elles sont diamétralement opposées, l'approche observateur ne nécessitant pas de calcul de dérivées contrairement à l'approche de l'espace de parité.

Lorsque la méthode de l'espace de parité est utilisée, le calcul des dérivées temporelles des signaux d'entrée/sortie est un problème important. Ces dérivées étant indispensables pour l'évaluation des formes de calcul des RRA, nous allons consacrer ce chapitre à l'étude des différentes méthodes visant à estimer les dérivées d'un signal à partir des points de mesures de celui-ci.

Dans la littérature, deux approches se distinguent :

1. Le signal à dériver est reconstruit à l'aide d'une fonction analytique (généralement par un polynôme).
2. Le signal à dériver est utilisé comme entrée dans un filtre dont la sortie converge vers la dérivée à calculer.

Dans ce chapitre, nous allons présenter quatre méthodes fondées sur l'approximation du signal par une fonction analytique. Nous présenterons dans un premier temps le problème sous une formulation générale consistant à décomposer la fonction génératrice du signal à dériver dans une base de fonctions analytiques quelconques. Puis dans un second temps, nous étudierons trois bases particulières :

- base polynomiale classique
- base polynomiale orthogonale
- base de splines



Pour la base de fonctions splines, nous étudierons deux critères différents, le critère du **spline naturel lissant** et le critère du **spline lissant**.

Pour terminer ce chapitre, nous présenterons brièvement les approches utilisant les filtres.

## A.2 Approximation par une fonction analytique

### A.2.1 Position du problème

Soit un ensemble de  $N$  points de mesures représentés par les doublets  $(t_i, y_i)$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Supposons que ces points de mesures respectent la relation suivante:

$$y_i = y(t_i) + e(t_i)$$

où  $y(t)$  et  $e(t)$  sont respectivement les parties déterministe et stochastique (de moyenne nulle) du signal.

$y(t)$  est supposée être analytique, c'est-à-dire qu'en tout point elle peut être décomposée sous forme d'une série de fonctions analytiques :

$$y(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \theta_r g_r(t, \alpha_r) \quad (\text{A.1})$$

L'objectif de l'approximation est de déterminer les coefficients  $\theta_r$  pour un choix de fonctions  $g_r(t, \alpha_r)$  tel que l'écart entre les points de mesure  $y_i$  et les valeurs  $y(t_i)$  soit minimum.

Plusieurs choix pour les fonctions  $g_r(t, \alpha_r)$  peuvent être effectués. En particulier nous pouvons citer :

- $g_r(t, \alpha_r) = t^r$ . Ce choix correspond à la décomposition en série de *Taylor*.
- $g_r(t, \alpha_r) = e^{j\alpha_r t}$ . Ce choix correspond à la décomposition en série de Fourier.

Nous pouvons aussi citer les choix de décomposition en fonctions splines ou encore en ondelettes. Dans cette section, nous allons étudier la décomposition en série de *Taylor* en utilisant deux bases de polynômes différentes puis nous étudierons deux approches utilisant des bases de fonctions splines.

### A.2.2 Approximation polynomiale

La fonction  $y(t)$  est décomposée en série de *Taylor* :

$$y(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \theta_r t^r \quad (\text{A.2})$$

Lorsque la fonction  $y(t)$  est analytique, il est toujours possible de trouver un entier  $k$  tel que pour tout  $\epsilon$  fixé, nous ayons (Davis, 1975) :

$$\left| y(t) - \sum_{r=0}^k \theta_r t^r \right| < \epsilon \quad (\text{A.3})$$

Les coefficients  $\theta_r$  peuvent alors être calculés par la méthode des moindres carrés (M.C.). Nous allons brièvement rappeler le principe de la méthode des M.C.. Posons les matrices  $Y$ ,  $X$ ,  $W$  et

$\Theta$  définies de la manière suivante :

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^k \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & t_N & \cdots & t_N^k \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_k \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_N \end{bmatrix}$$

Le principe de la méthode des M.C. est de trouver le vecteur des paramètres  $\Theta_{nom}$  tel que le critère quadratique  $S_k$ , défini par :

$$S_k = (Y - X\Theta)^T W (Y - X\Theta) \quad (\text{A.4})$$

soit minimum.

La solution de ce problème est donné par  $\left. \frac{\partial S_k}{\partial \Theta} \right|_{\Theta = \Theta_{nom}} = 0$ . Le calcul de cette équation aboutit à trouver  $\Theta_{nom}$  solutions du système d'équations normales suivant :

$$X^T W X \Theta_{nom} = X^T W Y \quad (\text{A.5})$$

La matrice  $(X^T W X)$  étant inversible, ce système admet une solution unique donnée par :

$$\Theta_{nom} = (X^T W X)^{-1} X^T W Y \quad (\text{A.6})$$

Lorsque le nombre de mesures  $N$  est supérieur au degré du polynôme approximant  $k$ , l'inversibilité de la matrice  $X^T W X$  est garantie. Toutefois, lorsque  $k$  augmente, cette matrice devient rapidement mal conditionnée et entraîne des problèmes de stabilité numérique importants. Ainsi, une variation infime de  $10^{-10}$  sur la valeur d'un point de mesure  $y_i$  peut entraîner une différence d'environ 300 sur le coefficient de plus haut degré pour un polynôme approximant de degré 9.

Pour palier ce problème d'instabilité numérique, nous allons maintenant proposer une approche différente utilisant une base polynomiale orthogonale.

### A.2.2.1 Approximation polynomiale utilisant une base orthogonale

La fonction  $y(t)$  est décomposée suivant la représentation A.1. La fonction  $g_r(t, \alpha_r)$  est choisie polynomiale :

$$g_r(t, \alpha_r) = \sum_{i=1}^r \alpha_{r,i} t^i \quad (\text{A.7})$$

Les coefficients  $\alpha_r$  sont déterminés pour conférer la propriété d'orthogonalité aux polynômes  $g_r(t, \alpha_r)$  :

$$\langle g_r(t, \alpha_r), g_s(t, \alpha_s) \rangle \triangleq \sum_{i=1}^N w_i g_r(t_i, \alpha_r) g_s(t_i, \alpha_s) = 0 \text{ pour } r \neq s \quad (\text{A.8a})$$

$$\neq 0 \text{ sinon} \quad (\text{A.8b})$$

La matrice  $X^T W X$  s'écrit sous la forme :

$$X^T W X = \begin{bmatrix} \langle g_0(t, \alpha_0), g_0(t, \alpha_0) \rangle & \langle g_0(t, \alpha_0), g_1(t, \alpha_1) \rangle & \cdots & \langle g_0(t, \alpha_0), g_k(t, \alpha_k) \rangle \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle g_k(t, \alpha_0), g_0(t, \alpha_0) \rangle & \cdots & \cdots & \langle g_k(t, \alpha_k), g_k(t, \alpha_k) \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Lorsque les conditions (A.7) sont respectées, la matrice (A.9) est diagonale. Les paramètres  $\Theta$  peuvent alors être obtenus de manière numériquement stable. Nous obtenons :

$$X^T W X \Theta = X^T W Y \Rightarrow \Theta = (X^T W X)^{-1} X^T W Y \quad (\text{A.10a})$$

$$\Rightarrow \theta_r = \frac{\sum_{i=1}^N w_i y_i g_r(t_i, \alpha_r)}{\sum_{i=1}^N w_i g_r^2(t_i, \alpha_r)} \quad (\text{A.10b})$$

Le calcul des coefficients  $\theta_r$  nécessite la connaissance des polynômes orthogonaux  $g_r(t, \alpha_r)$ . Ceux-ci peuvent être déterminés de plusieurs manières (Fox and Parker, 1968), en particulier, ces polynômes peuvent être issus de la relation de récurrence suivante (Forsythe, 1957) :

$$g_{l+1}(t, \alpha_{l+1}) = (t - \beta_{l+1})g_l(t, \alpha_l) - \gamma_l g_{l-1}(t, \alpha_{l-1}) \quad (\text{A.11a})$$

$$g_{-1} = 0 \quad (\text{A.11b})$$

$$g_0 = 1 \quad (\text{A.11c})$$

où les coefficients  $\beta_{l+1}$  et  $\gamma_l$  sont donnés par :

$$\beta_{l+1} = \frac{\langle t g_l(t, \alpha_l), g_l(t, \alpha_l) \rangle}{\langle g_l(t, \alpha_l), g_l(t, \alpha_l) \rangle} \quad \gamma_l = \frac{\langle g_l(t, \alpha_l), g_l(t, \alpha_l) \rangle}{\langle g_{l-1}(t, \alpha_{l-1}), g_{l-1}(t, \alpha_{l-1}) \rangle} \quad (\text{A.12})$$

En utilisant cette relation de récurrence, les coefficients  $\theta_r$  peuvent être déterminés de manière numériquement stable. Nous allons maintenant discuter du choix du degré  $k$  du polynôme approximant.

**Proposition A.2** *La valeur minimale du critère  $S_k = (Y - X_k \Theta_k)^T W (Y - X_k \Theta_k)$ <sup>21</sup> est une série strictement décroissante en fonction de  $k$ .*

**Preuve** Pour démontrer cela, nous développons l'expression de  $S_k$  :

$$S_k = Y^T W Y - \Theta_k^T X_k^T W Y - Y^T W X_k \Theta_k + \Theta_k^T X_k^T W X_k \Theta_k$$

en utilisant (A.10a), le critère se simplifie :

$$S_k = Y^T W Y - \Theta_k^T X_k^T W X_k \Theta_k$$

---


$$21. X_k = \begin{bmatrix} g_0(t_1, \alpha_0) & \cdots & g_k(t_1, \alpha_k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_0(t_N, \alpha_0) & \cdots & g_k(t_N, \alpha_k) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Theta_k = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_k \end{bmatrix}$$

Le vecteur des paramètres  $\Theta_k$  et la matrice des polynômes orthogonaux  $X_k$  peuvent s'exprimer en fonction des mêmes matrices au degré inférieur :

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} \Theta_{k-1} \\ \theta_k \end{bmatrix} \text{ et } X_k = \begin{bmatrix} X_{k-1} & g_k(t, \alpha_k) \end{bmatrix}$$

Le critère s'écrit alors sous une forme récursive :

$$S_k = S_{k-1} - g_k^T(t, \alpha_k) W g_k(t, \alpha_k) \theta_k^2$$

La matrice de pondération  $W$  étant strictement positive, le terme  $g_k^T(t, \alpha_k) W g_k(t, \alpha_k) \theta_k^2$  est lui aussi positif. Le critère est par conséquent une série strictement décroissante en  $k$ .

□

Le degré du polynôme approximant est déterminé en appliquant un seuil sur la valeur minimale du critère. Lorsque le signal à approximer est déterministe (non bruité), le polynôme interpolant (c'est à dire passant par tous les points de mesure) peut être considéré. Le degré de ce polynôme est donné par la formule :

$$k = N - 1$$

La valeur minimale du critère sera alors égale à zéro.

En revanche, lorsque le signal à approximer contient une partie stochastique, la valeur minimale du critère est une image de la variance de la partie stochastique du signal. La valeur du seuil dépend alors de cette variance.

Si elle est inconnue, la valeur de  $k$  est déduite de l'allure de la courbe des  $S_k$  minimaux. Effectivement, à partir d'une certaine valeur de  $k$ , nous pouvons montrer que la valeur minimale du critère se stabilise. Pour illustrer ceci, nous présentons un petit exemple didactique. Un signal test  $y(t) = \sin(2\pi t) + e(t)$  où  $e(t)$  est un bruit blanc de moyenne nulle et d'écart type égal à 0.02. La figure A.1 présente l'allure de  $S_k$  en fonction de  $k$  pour  $k$  variant de trois à dix.

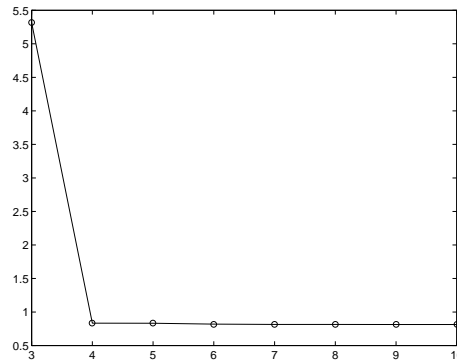


FIG. A.1 – Allure de  $S_k$  pour  $3 \leq k \leq 10$

Sur cet exemple, nous constatons que nous pouvons choisir le degré du polynôme approximant égal à quatre puisque à partir de cette valeur, nous avons une stabilisation de  $S_k$ .

### A.2.2.2 Estimation des dérivées et implémentation logicielle

La fonction  $y(t)$  est approximée par un polynôme  $p_k(t, \Theta_k, \alpha_k)$  de degré  $k$ . Ce polynôme s'écrit de la manière suivante :

$$y(t) \simeq p_k(t, \Theta_k, \alpha_k) = \sum_{r=0}^k a_r t^r$$

Les coefficients  $a_r$  sont calculés à partir des coefficients  $\Theta_k$  et  $\alpha_k$ . La dérivée de  $p_k(t, \Theta_k, \alpha_k)$  s'exprime alors sous la forme suivante :

$$\dot{p}_k(t, \Theta_k, \alpha_k) = \sum_{i=1}^k i a_i t^{i-1}$$

#### – Implémentation hors ligne

Par implémentation hors ligne, nous entendons que :

- nous disposons d'un nombre de points de mesures suffisamment important pour que la partie stochastique puisse être considérée comme gaussienne
- nous ne sommes sujets à aucune contrainte en terme de temps de calcul ou de capacité mémoire.

Le polynôme approximant s'écrit dans la base des polynômes orthogonaux :

$$p_k(t, \Theta_k, \alpha_k) = \sum_{r=0}^k \theta_r g_r(t, \alpha_r)$$

La dérivée de ce polynôme est égale à :

$$\dot{p}_k(t, \Theta_k, \alpha_k) = \sum_{r=0}^k \theta_r \dot{g}_r(t, \alpha_r)$$

Nous pouvons donc écrire cette dérivée sous la forme d'une relation de récurrence sur le degré du polynôme :

$$\dot{p}_k(t, \Theta_k, \alpha_k) = \sum_{r=0}^{k-1} \theta_r \dot{g}_r(t, \alpha_r) + \theta_k \dot{g}_k(t, \alpha_k) \quad (\text{A.13a})$$

$$= \dot{p}_{k-1}(t, \Theta_{k-1}, \alpha_{k-1}) + \theta_k \dot{g}_k(t, \alpha_k) \quad (\text{A.13b})$$

avec la condition initiale

$$\dot{p}_1(t, \Theta_1, \alpha_1) = 0$$

La dérivée de polynômes orthogonaux peut eux aussi s'exprimer récursivement en dérivant la relation (A.11a) :

$$\dot{g}_k(t, \alpha_k) = (t - \beta_k) \dot{g}_{k-1} + g_{k-1}(t, \alpha_{k-1}) - \gamma_{k-1} \dot{g}_{k-2}(t, \alpha_{k-2}) \quad (\text{A.14a})$$

$$\dot{g}_{-1}(t, \alpha_{-1}) = \dot{g}_0(t, \alpha_0) = 0 \quad (\text{A.14b})$$

Les coefficients  $\beta_k$  et  $\gamma_{k-1}$  sont toujours donnés par (A.12) et  $g_{k-1}(t, \alpha_{k-1})$  par (A.11a).

– Implémentation sur une fenêtre glissante

L'implémentation hors ligne présentée ci-dessus, n'est pas, en théorie, limitée par le degré du polynôme approximant puisque la procédure de calcul de celui-ci est numériquement stable. Toutefois, malgré cette stabilité numérique, l'approximation polynomiale s'avère peu fiable pour des degrés supérieurs à dix. Effectivement, dans (Demailly, 1996), il est montré que la convergence du polynôme approximant n'est pas assurée au alentour des extrémités du signal (phénomène de Runge). En revanche, cette approche donne les meilleurs résultats au milieu de l'intervalle des points de mesure. Pour profiter de cet avantage, nous pouvons implémenter cette approche récursive d'approximation polynomiale sur une fenêtre glissante et calculer la dérivée au point milieu de cette fenêtre (fig A.2).

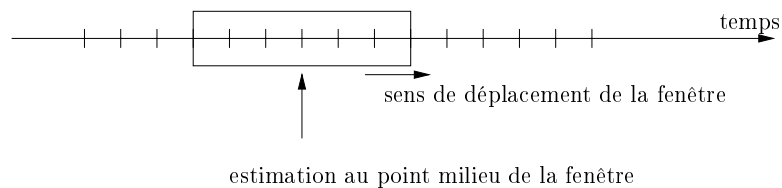


FIG. A.2 – *Principe de la fenêtre glissante*

Cette approche peut être considérée comme «quasiment» en ligne puisque chaque estimation de dérivée est donnée en temps différé, le retard étant égal à la moitié de la longueur de la fenêtre glissante.

A notre connaissance, il n'existe pas de méthode permettant de déterminer *a priori* la longueur de fenêtre optimale permettant d'obtenir les meilleurs résultats. Toutefois, si nous souhaitons utiliser cette méthode «en ligne», nous devons faire un compromis entre une fenêtre suffisamment grande pour que la partie stochastique puisse être considérée comme gaussienne et suffisamment petite pour éviter des retards trop importants pour l'obtention de la dérivée.

## A.3 Approximation par une fonction spline

Les fonctions splines sont très fréquemment utilisées dans le domaine de l'analyse numérique (interpolation, lissage de données, résolution numérique d'équations différentielles, estimation d'intégrales,...). Les premiers algorithmes efficaces de calcul de splines datent des années 70 (Lyche and Schumaker, 1974). Ces algorithmes se sont améliorés au fur et à mesure de l'évolution de l'informatique pour fournir aujourd'hui des outils très performants, implantés dans de nombreux logiciels de traitement du signal tel que matlab (De Boor, 1990).

Cette section a pour objectif de donner les bases indispensables à l'utilisation des splines ainsi que diverses stratégies de calcul de la fonction d'approximation.

### A.3.1 Définitions

**Définition A.3** ((Dierckx, 1993)) *Une fonction  $s(x)$ , définie sur un intervalle  $[a,b]$ , est appelée une fonction spline de degré  $k > 0$  (ou d'ordre  $k + 1$ ) ayant pour noeuds la séquence strictement*

croissante  $\lambda_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, g+1$  ( $\lambda_0 = a, \lambda_{g+1} = b$ ) si les deux conditions suivantes sont respectées :

1. Sur chaque intervalle de noeuds successifs  $[\lambda_j, \lambda_{j+1}]$ ,  $s(x)$  est donnée par un polynôme de degré maximal égal à  $k$

$$s_{[\lambda_j, \lambda_{j+1}]}(x) \in \mathcal{P}_k, \quad j = 0, 1, \dots, g \quad (\text{A.15})$$

2. La fonction  $s(x)$  et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre  $k-1$  sont toutes continues sur  $[a, b]$

$$s(x) \in \mathcal{C}_{[a, b]}^{k-1} \quad (\text{A.16})$$

La détermination de la fonction spline approximante nécessite l'estimation des paramètres suivants :

- le degré  $k$  de la fonction spline
- le nombre et la position des noeuds  $\lambda_i$
- les coefficients de tous les polynômes définis entre chaque couple de noeuds successifs.

En ce qui concerne le degré de la fonction spline, l'utilisation des splines cubiques ( $k = 3$ ) est recommandée. Ce choix donne un bon compromis entre efficacité (temps de calcul, quantité de mémoire requise) et qualité de l'approximation. Toutefois si des estimations de dérivées d'ordre élevé sont nécessaires, le degré du spline augmente en conséquence. Néanmoins, il est fortement conseillé de toujours utiliser un degré impair.

Le nombre et la position des noeuds  $\lambda_i$  est un problème délicat. Deux approches se distinguent dans la littérature.

1. Les noeuds  $\lambda_i$  sont choisis égaux aux abscisses des points de données. Lorsque le nombre de données est élevé, le nombre de coefficients à estimer devient très élevé nécessitant un espace mémoire important.
2. Les noeuds sont positionnés automatiquement en essayant de prendre en compte l'allure générale de la courbe à estimer. Cette méthode permet une diminution importante du nombre de paramètres à estimer mais nécessite une plus grande quantité de calculs pour trouver un ensemble de noeuds convenable.

L'estimation des coefficients des polynômes entre les noeuds est réalisée en minimisant un critère.

### A.3.2 Les critères pour le calcul des fonctions splines

La littérature est très vaste sur ce sujet (Dierckx, 1993; Powell, 1970; Woodford, 1970). Nous allons présenter ici les quatre principaux critères.

- Le critère des moindres carrés. Il consiste à minimiser la quantité suivante :

$$\delta = \sum_{i=1}^n (w_i (y_i - s(t_i)))^2 \quad (\text{A.17})$$

- Le critère du *spline naturel lissant*. Le problème considéré est le suivant : trouver la fonction  $s(t)$  pour laquelle

$$\eta = \int_{t_1}^{t_n} \left( s^{(l)}(t) \right)^2 dt \quad (\text{A.18})$$

est minimale sous la contrainte :

$$\delta = \sum_{i=1}^n (w_i (y_i - s(t_i)))^2 \leq S \quad (\text{A.19})$$

où  $S$  est un nombre positif appelé coefficient de lissage.

- Le critère de *Powell*. Il permet de déterminer le spline cubique  $s(x)$  qui minimise l'expression suivante :

$$\varphi = \delta + \sum_{i=1}^g (\omega_i d_i)^2 \quad (\text{A.20})$$

ou  $\delta$  est le critère des moindres carrés, les  $\omega_i$  sont des coefficients positifs de pondération tandis que les  $d_i$  sont les valeurs des discontinuités suivantes :

$$d_i = s^{(3)}(t_i^+) - s^{(3)}(t_i^-) \quad (\text{A.21})$$

- Le critère du *spline lissant*. Ce critère mélange les avantages des deux critères précédents à savoir, la possibilité de n'utiliser qu'un nombre réduit de noeuds (impossible avec le critère du spline naturel lissant) tout en gardant la possibilité de régler le lissage de la courbe approximante. Le spline de degré  $k$  à déterminer est la solution du problème de minimisation :

$$\tilde{\eta} = \sum_{i=1}^g \left( s^{(k)}(\lambda_i^+) - s^{(k)}(\lambda_i^-) \right)^2 \quad (\text{A.22})$$

sous la contrainte

$$\delta = \sum_{i=1}^n (w_i (y_i - s(t_i)))^2 \leq S \quad (\text{A.23})$$

La liste des critères n'est pas exhaustive et nous avons cité ici les principaux. Nous allons maintenant étudier plus en détail les méthodes utilisant le critère du spline naturel lissant (A.18) et (A.19) et le critère du spline lissant (A.22) et (A.23).

## A.4 Approximation par Splines naturels lissants

Nous allons détailler dans cette section la procédure d'approximation par des splines naturels lissants. Dans un premier temps, nous allons donner quelques définitions importantes puis nous montrerons comment le problème d'optimisation contraint peut être résolu. Enfin, nous montrerons l'influence du coefficient de lissage  $S$  (Woodford, 1970).

### A.4.1 Position du problème

**Définition A.4** Une fonction spline naturelle est un spline de degré impair  $k = 2l - 1$  ( $l \geq 2$ ) qui satisfait les contraintes suivantes :

$$s^{(l+j)}(a) = s^{(l+j)}(b) = 0 \text{ pour } j = 0, 1, \dots, l-2 \quad (\text{A.24})$$



Soit un ensemble de données  $(t_i, y_i)$  pour  $i = 1, \dots, n$ , un nombre positif quelconque  $S$  (nous verrons plus loin l'influence de ce nombre), et un entier positif  $l$ , nous cherchons la fonction  $s(t)$  telle que :

$$\int_{t_1}^{t_n} \left( s^{(l)}(t) \right)^2 dt$$

soit minimale et satisfasse

$$\sum_{i=1}^n (w_i (y_i - s(t_i)))^2 \leq S$$

#### A.4.2 Solution du problème de minimisation contraint

**Théorème A.3** *Le problème de minimisation contraint précédent admet pour solution une fonction spline  $s(t)$  de degré  $2l - 1$ .*

**Preuve** Introduisons les variables  $p$  et  $z$  et utilisons la méthode de Lagrange qui permet de résoudre le problème de minimisation contraint en minimisant la fonction

$$K(p, z) = \int_{t_1}^{t_n} \left( s^{(l)}(t) \right)^2 dt + p \left\{ \sum_{i=1}^n (w_i (y_i - s(t_i)))^2 + z^2 - S \right\} \quad (\text{A.25})$$

Soit  $h(t)$ , un léger déplacement par rapport à la solution  $s(t)$  :  $s(t) = s_{opt}(t) + h(t)$ .

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_n} \left( s^{(l)}(t) + h^{(l)}(t) \right)^2 dt + p \left\{ \sum_{i=1}^n (w_i (y_i - s(t_i) + h(t_i)))^2 + z^2 - S \right\} \\ = & \int_{t_1}^{t_n} \left( s^{(l)}(t) \right)^2 dt + \int_{t_1}^{t_n} \left( h^{(l)}(t) \right)^2 dt + 2 \int_{t_1}^{t_n} s^{(l)}(t) h^{(l)}(t) dt \\ & + p \left\{ \sum_{i=1}^n (w_i (y_i - s(t_i)))^2 + z^2 - S \right\} + 2p \sum_{i=1}^n (w_i h(t_i) (y_i - s(t_i))) \\ & + p \sum_{i=1}^n h^2(t_i) \end{aligned}$$

pour  $|h(t)|$  et  $|h^{(l)}(t)|$  suffisamment petit  $\left( \int_{t_1}^{t_n} \left( h^{(l)}(t) \right)^2 dt \approx 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n h^2(t_i) \approx 0 \right)$ , nous avons :

$$\int_{t_1}^{t_n} s^{(l)}(t) h^{(l)}(t) dt + p \sum_{i=1}^n (w_i h(t_i) (y_i - s(t_i))) = 0 \quad (\text{A.26})$$

Calculons  $\int_{t_1}^{t_n} s^{(l)}(t) h^{(l)}(t) dt$  en intégrant par partie :

$$\int_{t_1}^{t_n} s^{(l)}(t) h^{(l)}(t) dt = \left[ h^{(l-1)}(t) s^{(l)}(t) \right]_{t_1}^{t_n} - \int_{t_1}^{t_n} s^{(l+1)}(t) h^{(l-1)}(t) dt \quad (\text{A.27})$$

$$\int_{t_1}^{t_n} s^{(l+1)}(t) h^{(l-1)}(t) dt = \left[ h^{(l-2)}(t) s^{(l+1)}(t) \right]_{t_1}^{t_n} - \int_{t_1}^{t_n} s^{(l+2)}(t) h^{(l-2)}(t) dt \quad (\text{A.28})$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_n} s^{(l)}(t) h^{(l)}(t) dt &= \sum_{i=1}^j (-1)^{i+1} \left[ h^{(l-i)}(t) s^{(l+i-1)}(t) \right]_{t_1}^{t_n} \\ &+ (-1)^j \int_{t_1}^{t_n} s^{(l+j)}(t) h^{(l-j)}(t) dt \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

pour  $j = 1, \dots, l$ .

en particulier, pour  $j = l$ , nous avons :

$$\int_{t_1}^{t_n} s^{(l)}(t)h(t)^{(l)} dt = \sum_{i=1}^{l-1} (-1)^{i+1} \left[ h^{(l-i)}(t)s^{(l+i-1)}(t) \right]_{t_1}^{t_n} + (-1)^{l+1} \left[ h(t)s^{(2l-1)}(t) \right]_{t_1}^{t_n} \\ + (-1)^l \int_{t_1}^{t_n} s^{(2l)}(t)h(t)dt$$

une solution possible pour  $s(t)$  sera alors donnée par :

$$\begin{cases} (-1)^l \int_{t_1}^{t_n} s^{(2l)}(t)h(t)dt = 0 \\ \sum_{i=1}^{l-1} (-1)^{i+1} \left[ h^{(l-i)}(t)s^{(l+i-1)}(t) \right]_{t_1}^{t_n} = 0 \\ (-1)^{l+1} \left[ h(t)s^{(2l-1)}(t) \right]_{t_1}^{t_n} + p \sum_{i=1}^n (w_i h(t_i) (y_i - s(t_i))) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

Le système précédent est résolu pour  $s(t)$  ayant les propriétés suivantes :

$$s^{(2l)}(t) = 0 \quad (\text{A.31a})$$

$$s^{(l+s)}(\tau) = 0 \text{ pour } s = 0, \dots, l-2 \text{ et } \tau = t_1, t_n \quad (\text{A.31b})$$

$$s^{(2l-1)}(t_i^+) - s^{(2l-1)}(t_i^-) = (-1)^{l+1} p w_i (y_i - s(t_i)) \text{ pour } i = 1, \dots, n \quad (\text{A.31c})$$

ou

$$t_i^+ = \lim_{h \downarrow 0} t_i + h$$

$$t_i^- = \lim_{h \uparrow 0} t_i + h$$

Une solution possible pour  $s(t)$  est de choisir une fonction spline naturelle de degré  $2l-1$ .

□

Le calcul des coefficients de la fonction spline  $s(t)$  est réalisé en minimisant la fonction  $K(p, z)$ .

Cette fonction est dérivée par rapport à  $p$  et  $z$  :

$$pz = 0 \quad (\text{A.32})$$

$$\sum_{i=1}^n (w_i (y_i - s(t_i)))^2 + z^2 - S = 0 \quad (\text{A.33})$$

Si  $p = 0$ , tous les polynômes de degré  $l-1$  minimisent le critère (A.25).

Le cas le plus intéressant à traiter est le cas  $p \neq 0$  et  $z = 0$ . Pour l'étude de ce cas, introduisons la fonction  $F(p)$  définie par :

$$F(p) = \sum_{i=1}^n (w_i (y_i - s(t_i)))^2 \quad (\text{A.34})$$

(à chaque  $p$  correspond une solution  $s(t)$ ).

**Théorème A.4** *Il existe un  $p \in R$  unique tel que*

$$F(p) - S = 0 \quad (\text{A.35})$$

**Preuve** L'existence d'au moins une solution est donnée par l'étude des extrémités  $F(0)$  et  $F(\infty)$ . Il est évident que  $F(0) > S$  puisque dans le cas contraire, la solution du problème de minimisation contraint est le spline  $s(t)$ .

De plus le cas  $F(\infty) = 0$ , correspond au spline interpolant, c'est-à-dire passant par tous les points de données.

Le théorème de *Rolle* indique qu'il existe au moins une solution à  $F(p) - S = 0$ .

Pour avoir unicité de la solution il faut montrer que la fonction est strictement décroissante pour  $p > 0$  c'est-à-dire  $\frac{dF(p)}{dp} < 0$ .

Notons  $s_p(t) = \frac{ds(t)}{dp}$  et calculons l'intégrale suivante :

$$\int_{t_1}^{t_n} \left( s_p^{(l)}(t) \right)^2 dt \quad (\text{A.36})$$

en intégrant plusieurs fois par partie et en utilisant les conditions (A.31), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_n} \left( s_p^{(l)}(t) \right)^2 dt &= (-1)^{l-1} \int_{t_1}^{t_n} \left( \dot{s}_p(t) s_p^{(2l-1)} \right) dt \\ &= (-1)^l \sum_{i=1}^n s_p(t_i) \left[ s_p^{(2l-1)}(t_i^+) - s_p^{(2l-1)}(t_i^-) \right] \\ &= (-1) \sum_{i=1}^n s_p(t_i) \left( w_i^2 (s(t_i) - y_i) + p w_i^2 s_p(t_i) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{dF(p)}{dp} - p \sum_{i=1}^n (w_i s_p(t_i))^2 \end{aligned}$$

or  $\left( s_p^{(l)}(t) \right)^2$  est positif donc  $\int_{t_1}^{t_n} \left( s_p^{(l)}(t) \right)^2 dt > 0$ . Nous déduisons que  $\frac{dF(p)}{dp} < 0$

□

### A.4.3 Calcul des coefficients du spline

Sur l'intervalle  $[t_i, t_{i+1})$  pour  $i = 1, \dots, n$  (ou  $t_{n+1}$  est indéfini mais supérieur à  $t_n$ ), la solution  $s(t)$  s'écrit comme :

$$s(t) = \sum_{j=1}^{2l} a_{i,j} (t - t_i)^{j-1} \quad (\text{A.37})$$

Les dérivées successives de  $s(t)$  sont données par :

$$s^{(k)}(t_i^+) = k! a_{i,k+1} \text{ et } s^{(k)}(t_i^-) = \sum_{j=1}^{2l-k} (k+j-1)! a_{i-1,j+k} (t_i - t_{i-1})^{j-1} \quad (\text{A.38})$$

Il y a donc  $2nl$  coefficients  $a_{ij}$  à déterminer. Les conditions de continuité à chaque noeud sont :

$$s^{(k)}(t_i^+) = s^{(k)}(t_i^-) \text{ pour } i = 1, \dots, n \text{ et } k = 0, \dots, 2l - 2$$

auxquelles nous ajoutons les équations provenant de (A.31c) :

$$s^{(2l-1)}(t_i^+) - s^{(2l-1)}(t_i^-) = (-1)^{l+1} p w_i (y_i - s(t_i)) \text{ pour } i = 1, \dots, n$$

Nous obtenons donc  $n(2l - 1) + n = 2nl$  équations.

**Remarque A.4.1** Les conditions de continuité en  $t_1$  ajoutent  $2l$  paramètres ( $a_{0,j}$  pour  $j = 1, \dots, 2l$ ) à estimer :

$$s^{(k)}(t_1^-) = \sum_{j=1}^{2l-k} (k+j-1)! a_{0,j+k} (t_1 - t_0)^{j-1} \quad (\text{A.39})$$

Pour assurer la solvabilité du problème d'estimation, il faut ajouter  $2l$  équations sans adjoindre de nouveaux paramètres. Pour ce faire, nous devons utiliser les conditions aux extrémités données par (A.31b)

$$s^{(l+s)}(\tau) = 0 \text{ pour } s = 0, \dots, l-2 \text{ et } \tau = t_1, t_n \quad (\text{A.40})$$

Pour  $t_1^-$ , et  $t_n^+$  les  $2l - 1$  conditions suivantes sont trouvées :

$$a_{0,j} = 0 \text{ pour } j = l+1, \dots, 2l \quad (\text{A.41})$$

$$a_{n,j} = 0 \text{ pour } j = l, \dots, 2l-2 \quad (\text{A.42})$$

La condition manquante est donnée en fixant arbitrairement le dernier paramètre à zéro :

$$a_{n,2l} = 0 \quad (\text{A.43})$$

Les paramètres sont calculés en résolvant le système juste déterminé suivant :

$$\begin{cases} s^{(k)}(t_i^+) = s^{(k)}(t_i^-) \text{ pour } i = 1, \dots, n \text{ et } k = 0, \dots, 2l-2 \\ s^{(2l-1)}(t_i^+) - s^{(2l-1)}(t_i^-) = (-1)^{l+1} p w_i (y_i - s(t_i)) \text{ pour } i = 1, \dots, n \\ a_{0,j} = a_{n,j} = 0 \text{ pour } j = l+1, \dots, 2l \end{cases}$$

#### A.4.4 Détermination de $p$ tel que $F(p) = S$

La racine de  $F(p) - S = 0$  est calculée avec la méthode d'optimisation non linéaire de Newton Raphson :

$$p_0 = 1 \quad (\text{A.44})$$

$$p_{n+1} = p_n + \frac{S - F(p_n)}{F'(p_n)} \quad (\text{A.45})$$

où  $F'(p)$  désigne la dérivée de  $F(p)$  par rapport à  $p$ . Pour simplifier les calculs, l'approximation de  $F'(p)$  sera effectuée par la méthode d'Euler :

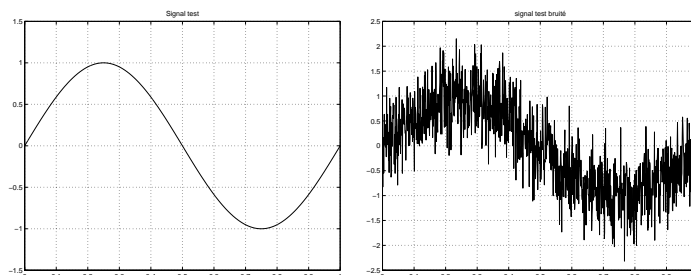
$$F'(p_n) = \left. \frac{dF'(p)}{dp} \right|_{p=p_n} \approx \frac{F(p_{n-1}) - F(p_n)}{p_{n-1} - p_n} \quad (\text{A.46})$$

L'estimation des dérivées successives de  $y_i$  est donnée par

$$\dot{y}_i \approx \dot{s}(t_i) = a_{i,2} \quad \ddot{y}_i \approx \ddot{s}(t_i) = 2a_{i,3} \quad \dots \quad y_i^{(k)} \approx s^{(k)}(t_i) = k! 2a_{i,k+1} \quad (\text{A.47})$$

### A.4.5 Influence du paramètre lissant $S$

Pour illustrer l'influence du paramètre  $S$  sur l'estimation de la courbe, nous allons considérer un petit exemple simple. Prenons une période d'un signal sinusoïdal auquel on ajoute un bruit blanc de variance 0.5 (fig. A.3).

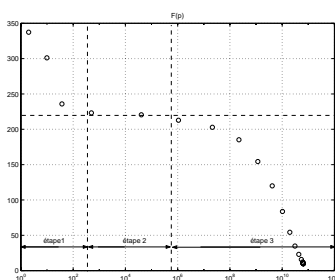


A.3.a) Signal sans bruit

A.3.b) signal avec bruit

FIG. A.3 – *Partie déterministe* :  $y_{det}(t) = \sin(2\pi t)$ 

Nous avons démontré que la fonction  $F(p)$  est strictement décroissante en  $p$ . La figure A.4 montre que 3 phases peuvent être dégagées.

FIG. A.4 – *Allure de  $F(p)$* 

Trois valeurs de  $S$  sont choisies pour correspondre à chacune de ces trois phases :  $S = 50$ , 220 et 340. Le tableau A.1 indique la valeur de  $p$  ainsi que le nombre d'itération nécessaire pour obtenir  $F(p) < S$ .

Les figures (fig. A.5) montrent les allures des courbes estimées ainsi que la courbe réelle. Ces

|         |                      |      |        |
|---------|----------------------|------|--------|
| $S$     | 50                   | 220  | 340    |
| nb_iter | 20                   | 17   | 5      |
| $p$     | $1.17 \cdot 10^{10}$ | 1246 | 0.9496 |

TAB. A.1 – *Nombre d'itération et  $p$  pour les trois valeurs de  $S$* 

figures illustrent ce que nous avons montré dans cette section. Lorsque  $S$  tend vers zéro alors  $p$

doit tendre vers l'infini et le spline approximant tend vers le spline interpolant. Ceci est montré avec la deuxième colonne du tableau A.1 et avec la figure A.5.a. La figure A.5.c illustre le fait que si  $S$  est trop élevé (proche de  $F(0)$ ) alors le spline approximant est trop lisse et très éloigné de la courbe réelle.

En revanche, le choix le plus intéressant pour  $S$  est celui où la fonction  $F(p)$  semble se stabiliser (ici environ 220).

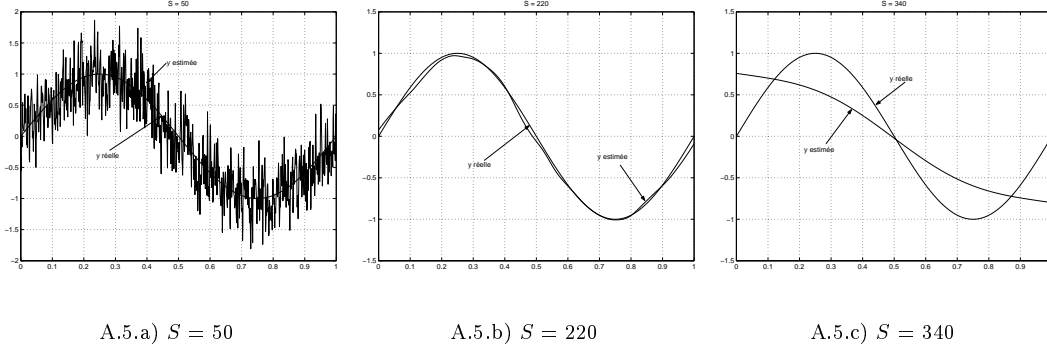


FIG. A.5 – Estimation de  $y(t)$  pour 3 valeurs de  $S$

### A.4.6 Conclusion

La méthode d'approximation proposée dans cette section permet de trouver le spline naturel lissant utilisant une méthode numériquement stable. Le réglage du paramètre lissant  $S$  dépend de la connaissance disponible *a priori* sur le bruit. Si les pondérations  $w_i$  sont connues alors  $S$  peut être choisi dans l'intervalle  $n \pm \sqrt{2n}$  (Woodford, 1970). Toutefois, dans la majorité des cas, aucune information sur le bruit n'est disponible. Dans ce cas, les coefficients de pondération sont choisis égaux à un et  $S$  est déterminé par approximations successives.

## A.5 Approximation par Splines lissants

La méthode d'approximation du spline naturel lissant présentée dans la section précédente nécessite la résolution d'un système de  $2nl$  équations à autant d'inconnues. La complexité calculatoire devient rapidement contraignante pour des signaux comprenant un nombre élevé de points. La méthode du spline lissant permet de considérer non plus tous les points du signal mais simplement les points les plus significatifs (appelés les noeuds) permettant d'une part de réduire considérablement les coefficients à estimer et d'autre part d'éliminer les valeurs aberrantes éventuellement présentes dans le signal (Dierckx, 1993).

Le critère considéré est le suivant :

$$\tilde{\eta} = \sum_{i=1}^g \left( s^{(k)}(\lambda_i^+) - s^{(k)}(\lambda_i^-) \right)^2 \quad (\text{A.48})$$

sous la contrainte

$$\delta = \sum_{i=1}^n (w_i (y_i - s(t_i)))^2 \leq S \quad (\text{A.49})$$

Dans la section précédente, nous avons considéré la représentation des fonctions splines sous la forme polynomiale :

$$s(t) = \sum_{i=0}^k a_{i,j} (t - \lambda_j)^i \text{ pour } \lambda_j \leq t \leq \lambda_{j+1}, j = 0, \dots, g \quad (\text{A.50})$$

$$\text{Avec } s^{(l)}(\lambda_j^-) = s^{(l)}(\lambda_j^+) \text{ pour } j = 1, \dots, g \text{ et } l = 0, \dots, k-1$$

Ces fonctions splines appartiennent à un espace vectoriel  $\eta_k(\lambda_0, \dots, \lambda_{g+1})$  de dimension égale au nombre de coefficients à estimer auquel est soustrait le nombre de contraintes :

$$\dim \eta_k(\lambda_0, \dots, \lambda_{g+1}) = (g+1)(k+1) - gk = g+k+1 \quad (\text{A.51})$$

### A.5.1 La représentation B-Spline

**Définition A.5 ((Dierckx, 1993))** La normalisée B - Spline  $N_{i,k+1}(t)$  de degré  $k$  avec les noeuds non coïncidents  $\lambda_i, \dots, \lambda_{i+k+1}$ , est définie par :

$$N_{i,k+1}(t) = (\lambda_{i+k+1} - \lambda_i) \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(\lambda_{i+j} - t)_+^k}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{k+1} (\lambda_{i+j} - \lambda_{i+l})} \quad (\text{A.52})$$

Parmi les différentes propriétés des B - Splines nous citerons :

1. Positivité :

$$N_{i,k+1}(t) \geq 0 \text{ pour tout } t$$

2. Support local :

$$N_{i,k+1}(t) = 0 \text{ si } t \notin [\lambda_i, \lambda_{i+k+1}]$$

3. Récurrence :

$$N_{i,l+1}(t) = \frac{t-\lambda_i}{\lambda_{i+l}-\lambda_i} N_{i,l}(t) + \frac{\lambda_{i+l+1}-t}{\lambda_{i+l+1}-\lambda_{i+1}} N_{i+1,l}(t)$$

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}] \\ 0 & \text{si } t \notin [\lambda_i, \lambda_{i+1}] \end{cases}$$

4. Dérivée d'un B - Spline (Tsao, 1993) :

$$\dot{N}_{i,k+1}(t) = k \left[ \frac{N_{i,k}(t)}{\lambda_{i+k} - \lambda_i} - \frac{N_{i+1,k}(t)}{\lambda_{i+k+1} - \lambda_{i+1}} \right] \quad (\text{A.53})$$

### A.5.2 Les fonctions Splines comme une combinaison de $B$ – Splines

Pour un ensemble fixé de noeuds  $\lambda_j$ ,  $j = 0, \dots, g+1$ , nous pouvons construire  $g - k + 1$  B-Splines linéairement indépendants (Dierckx, 1993). Pour obtenir une base de l'espace vectoriel  $\eta_k$  nous avons besoin d'ajouter un ensemble de  $2k$  B-Splines linéairement indépendants. Pour cela, les noeuds additionnels  $\lambda_{-k}, \dots, \lambda_{-1}$  et  $\lambda_{g+2}, \dots, \lambda_{g+k+1}$  satisfaisant :

$$\lambda_{-k} = \lambda_{-k+1} = \dots = \lambda_0 \quad (\text{A.54})$$

$$\lambda_{g+1} = \lambda_{g+2} = \dots = \lambda_{g+k+1} \quad (\text{A.55})$$

sont ajoutés et les expressions des B-Splines ayant des noeuds coïncidents sont données par les deux relations suivantes :

$$N_{i,l+1}(t) = \begin{cases} \left( \frac{\lambda_{i+l+1}-t}{\lambda_{i+l+1}-\lambda_i} \right)^l & \text{si } t \in [\lambda_i, \lambda_{i+l+1}) \\ 0 & \text{si } t \notin [\lambda_i, \lambda_{i+l+1}) \end{cases}$$

$$N_{i,l+1}(t) = \begin{cases} \left( \frac{t-\lambda_i}{\lambda_{i+l+1}-\lambda_i} \right)^l & \text{si } t \in [\lambda_i, \lambda_{i+l+1}) \\ 0 & \text{si } t \notin [\lambda_i, \lambda_{i+l+1}) \end{cases} \quad (\text{A.56})$$

Les B-Splines  $N_{-k,k+1}(t)$  à  $N_{g,k+1}(t)$  forment une base de l'espace vectoriel  $\eta_k$  ( $\lambda_0, \dots, \lambda_{g+1}$ ) dans laquelle chaque fonction spline admet une unique représentation :

$$s(t) = \sum_{i=-k}^g c_i N_{i,k+1}(t) \quad (\text{A.57})$$

où les coefficients  $c_i$  sont appelés les coefficients B-Splines de  $s(t)$ .

**Remarque A.5.1** : La base de B-Splines forme une partition de l'unité sur  $[\lambda_0, \lambda_{g+1}]$  c'est-à-dire :

$$\sum_{i=-k}^g N_{i,k+1}(t) = 1 \text{ pour tout } t \in [\lambda_0, \lambda_{g+1}] \quad (\text{A.58})$$

### A.5.3 Dérivée d'une fonction spline

En utilisant l'expression de la dérivée des B-Splines donnée en (A.53), nous trouvons (Dierckx, 1993) :

$$s^{(\nu)}(t) = \prod_{i=1}^{\nu} (k+1-i) \sum_{i=-k+\nu}^g c_{i,\nu} N_{i,k+1-\nu}(t) \quad (\text{A.59})$$

avec

$$c_{i,j} = \begin{cases} c_i & \text{si } j = 0 \\ \frac{c_{i,j-1} - c_{i-1,j-1}}{\lambda_{i+k+1-j} - \lambda_i} & \text{si } j > 0 \end{cases} \quad (\text{A.60})$$



### A.5.4 Calcul des coefficients d'un B-Spline

Les coefficients  $c_i$  doivent minimiser le critère:

$$\tilde{\eta}(c) = \sum_{i=1}^g \left( s^{(k)}(\lambda_i^+) - s^{(k)}(\lambda_i^-) \right)^2 \quad (\text{A.61})$$

sous la contrainte

$$\delta(c) = \sum_{i=1}^n (w_i (y_i - s(t_i)))^2 \leq S \quad (\text{A.62})$$

Les solutions de ce problème sont données en utilisant la méthode de Lagrange (Dierckx, 1993). Nous cherchons les points critiques de la fonction:

$$K(p, z, c) = \tilde{\eta}(c) + p(\delta(c) + z^2 - S) \quad (\text{A.63})$$

En dérivant  $K(p, z, c)$  par rapport à  $p$  et  $z$ , nous obtenons

$$\delta(c) = S - z^2 \quad (\text{A.64})$$

$$pz = 0 \quad (\text{A.65})$$

Deux cas de figure sont alors envisageables:  $p = 0$  ou  $z = 0$ . Dans la section précédente, nous avons montré que  $p = 0$  ne présente pas d'intérêt puisqu'il suffit de calculer le polynôme de degré  $k$  par M.C. et satisfaisant:

$$\sum_{i=1}^n (w_i (y_i - P_k(t_i)))^2 \leq S \quad (\text{A.66})$$

pour obtenir la solution de ce problème.

En revanche, le cas  $p \neq 0$  et  $z = 0$  est plus intéressant à traiter. Dans la suite de cette section, nous noterons

$$F(p) = \sum_{i=1}^n (w_i (y_i - s_p(t_i)))^2 \quad (\text{A.67})$$

où  $s_p(t)$  est le spline minimisant  $K(p, 0, c)$ :

$$K(p, 0, c) = \sum_{q=1}^g \left( \sum_{i=-k}^g c_i a_{i,q} \right)^2 + p \left[ \sum_{i=1}^n \left( w_i \left( y_i - \sum_{r=-k}^g c_r N_{r,k+1}(t_i) \right) \right)^2 - S \right] \quad (\text{A.68})$$

avec

$$a_{i,q} = N_{i,k+1}^{(k)}(\lambda_q^+) - N_{i,k+1}^{(k)}(\lambda_q^-) \quad (\text{A.69})$$

soit en utilisant (A.53):

$$a_{i,q} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < q - k - 1 \text{ ou } i > q \\ \frac{(-1)^{k+1} k! (\lambda_{i+k+1} - \lambda_i)}{\prod_{\substack{j=i \\ j \neq q}}^{i+k+1} (\lambda_q - \lambda_j)} & \text{si } q - k - 1 \leq i \leq q \end{cases} \quad (\text{A.70})$$

La fonction  $K(p,0,c)$  est minimale par rapport aux paramètres  $c_i$  lorsque  $\frac{\partial K(p,0,c)}{\partial c_j} = 0$  pour  $j = -k, \dots, g$ . Il en résulte que  $c_j$  doit être solution du système suivant :

$$\frac{1}{p} \sum_{i=-k}^g c_i \langle a_i, a_j \rangle + \sum_{i=-k}^g c_i \langle N_i, N_j \rangle = \langle N_i, y \rangle \text{ pour } j = -k, \dots, g \quad (\text{A.71})$$

où

$$\langle N_i, N_j \rangle = \sum_{r=1}^n w_r^2 N_{j,k+1}(t_r) N_{i,k+1}(t_r) \quad (\text{A.72})$$

$$\langle N_i, y \rangle = \sum_{r=1}^n w_r^2 N_{i,k+1}(t_r) y_r \quad (\text{A.73})$$

$$\langle a_i, a_j \rangle = \sum_{q=1}^g a_{i,q} a_{j,q} \quad (\text{A.74})$$

Ce système s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$Gc = r \quad (\text{A.75})$$

avec  $G = A + p^{-1}B$  et  $B = H^T H$ . Les matrices  $A$ ,  $H$  et  $r$  sont données par

$$A = \begin{bmatrix} \langle N_{-k}, N_{-k} \rangle & \cdots & \langle N_{-k}, N_g \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle N_g, N_{-k} \rangle & \cdots & \langle N_g, N_g \rangle \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} \langle N_{-k}, y \rangle \\ \vdots \\ \langle N_{-k}, y \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{A.76})$$

$$H = \begin{bmatrix} a_{-k,1} & \cdots & a_{g,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{-k,g} & \cdots & a_{g,g} \end{bmatrix} \quad (\text{A.77})$$

Les expressions de  $\langle N_i, N_j \rangle$  et de  $\langle N_i, y \rangle$  sont calculées de la manière suivante

$$\langle N_i, N_j \rangle = \sum_{r=1}^n w_r^2 N_{i,k+1}(t_r) N_{j,k+1}(t_r) \quad (\text{A.78})$$

$$\langle N_i, y \rangle = \sum_{r=1}^n w_r^2 N_{i,k+1}(t_r) y_r \quad (\text{A.79})$$

Le système étant juste déterminé, les paramètres  $c_i$  sont obtenus en résolvant (A.75).

### A.5.5 Propriétés du critère à minimiser

Nous allons ici donner les valeurs aux limites de  $F(p)$  :  $F(0)$  et  $F(\infty)$ .

- Lorsque  $p$  tend vers l'infini, le spline lissant correspondant tend vers le spline obtenu par moindres carrés pondérés noté  $S_g(t)$ . Ainsi on obtient :

$$F(\infty) = F_g(\infty) = \sum_{r=1}^m (w_r (y_r - S_g(t_r)))^2 \quad (\text{A.80})$$

On remarquera particulièrement l'indice  $g$  correspondant au nombre de noeuds utilisés. Ainsi, pour chaque ensemble de noeuds correspondra un spline  $S_g(t)$  et donc une valeur de  $F(\infty)$ . Le cas  $g = n - k - 1$  correspond au spline interpolant et la fonction  $F_{n-k-1}(\infty)$  est égale à zéro.

- Lorsque  $p$  tend vers zéro, le spline lissant tend vers le polynôme approximant  $P_k$  de degré  $k$  et on obtient

$$F(0) = \sum_{r=1}^m (w_r (y_r - P_k(t_r)))^2 \quad (\text{A.81})$$

Enfin on peut démontrer de la même manière que pour le spline naturel lissant que la fonction  $F(p)$  est continue et strictement décroissante.

La figure (A.6) montre l'évolution de la fonction  $F(p)$  pour plusieurs valeurs de  $g$ .

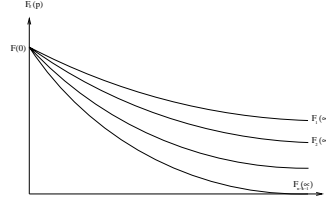


FIG. A.6 – Allure de  $F(p)$

### A.5.6 Stratégie de placement de noeuds

Les noeuds peuvent être choisis de manière à réduire le nombre de points à traiter en essayant de tenir compte de l'allure générale du signal (Dierckx, 1993). Dans un premier temps, le polynôme approximant  $P_k(t)$  est déterminé. Il correspond au spline  $S_0(t)$  lequel à la particularité suivante :

$$F_0(0) = F_0(\infty) \quad (\text{A.82})$$

Si  $F_0(0) \leq S$  alors ce polynôme est une solution de notre problème et l'algorithme de placement de noeuds s'arrête. Toutefois dans la majorité des cas,  $F_0(0) > S$ . Dans ce cas, nous déterminons les splines  $S_{g_j}(t)$  par M.C. avec la séquence croissante de noeuds  $g_j$ . A chaque itération, le nombre de noeuds  $g_j$  est augmenté de  $\Delta g_j$  :

$$\begin{cases} g_0 = 0 \\ g_{j+1} = g_j + \Delta g_j \end{cases} \quad j = 0, 1, \dots \quad (\text{A.83})$$

La quantité  $\Delta g_j$  devra tenir compte des résultats précédents pour obtenir rapidement le nombre de noeuds nécessaire permettant de trouver  $F_{g_j}(\infty) \leq S$ .

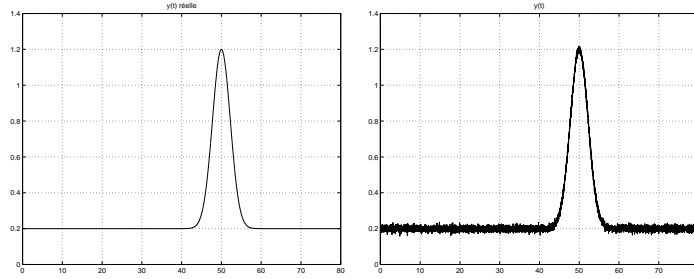
### A.5.7 Influence du paramètre lissant $S$

Le paramètre lissant  $S$  à la même influence sur l'approximation par spline lissant que sur l'approximation par spline naturel lissant. Toutefois, ce paramètre influe aussi sur le nombre et sur le placement des noeuds. Pour observer cela, un exemple didactique est proposé.

Considérons les données  $(t_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, 8001$  avec

$$t_i = 1e^{-2}(i - 1), y_i = f(t_i) + e_i \tag{A.84}$$

La fonction  $f(t)$  est donnée par :  $f(t) = e^{-\frac{(t-50)^2}{10}} + 0.2$ . Le bruit  $e_i$  additif est choisi de variance :  $\sigma_e = 1e^{-2}$ . La figure montre l'allure des courbes sans et avec le bruit.



A.7.a) Signal sans bruit

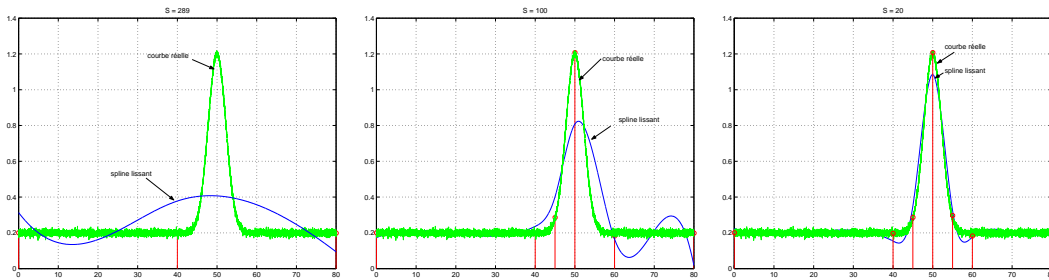
A.7.b) signal avec bruit

FIG. A.7 – Allure de  $y(t)$

Dans un premier temps, le polynôme approximant de degré 3 est calculé. On obtient alors  $F(0) = 289$ . Pour montrer l'influence de  $S$ , six valeurs sont choisies :  $S = 289, 100, 20, 10, 1$  et  $0.9$ . Le nombre de noeuds calculé ainsi que le paramètre  $p$  sont donnés dans le tableau A.2.

|     |        |       |       |        |                  |                |
|-----|--------|-------|-------|--------|------------------|----------------|
| $S$ | 289    | 100   | 20    | 10     | 1                | 0.9            |
| $p$ | 0.0075 | 60.18 | 28.86 | 234.21 | $1.5 \cdot 10^4$ | $4 \cdot 10^3$ |
| $g$ | 1      | 4     | 5     | 6      | 15               | 21             |

TAB. A.2 – paramètres  $p$  et  $g$  pour le spline lissant



A.8.a)  $S = 289$

A.8.b)  $S = 100$

A.8.c)  $S = 20$

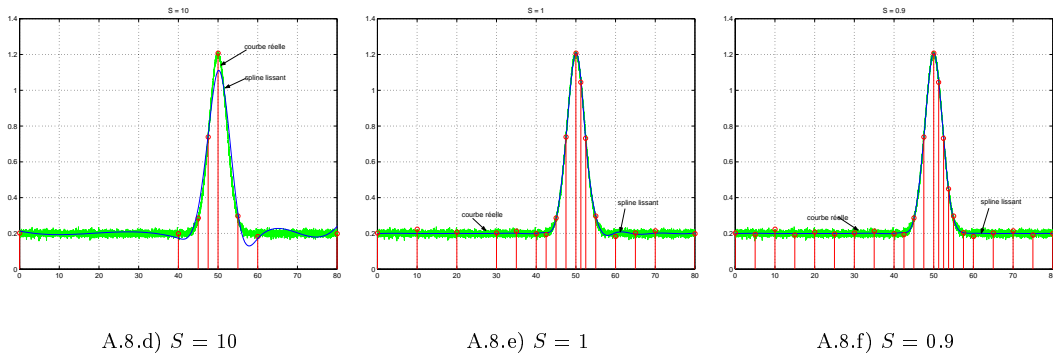


FIG. A.8 – *Spline lissant et stratégie de placement de noeuds pour plusieurs valeurs de  $S$*

Sur les figures ainsi que dans le tableau A.2 il apparaît que plus le paramètre  $S$  est choisi petit plus le nombre de noeuds augmente et plus la courbe estimée se rapproche des données. Théoriquement si nous faisons tendre  $S$  vers zéro, le nombre de noeuds tendra vers le nombre de points de données et le spline approximant tendra vers le spline interpolant.

La stratégie de placement de noeuds permet bien de prendre en compte l'allure du signal puisqu'ils sont placés en priorité au niveau du pic (fig A.8b) c) & d)).

### A.5.8 Conclusion

La méthode d'approximation exposée dans cette section permet de trouver le spline lissant en utilisant une stratégie de placement de noeuds prenant en compte l'allure du signal. Cette méthode est numériquement stable et demande un espace mémoire réduit par rapport à la méthode du spline naturel lissant de part la réduction du nombre de points à traiter. Les problèmes inhérents au réglage du paramètre lissant  $S$  sont identiques au cas du spline naturel lissant.

## A.6 Estimation des dérivées sans approximation

Dans cette dernière section, nous allons brièvement présenter d'autres approches permettant d'estimer les dérivées d'un signal sans approximer sa partie déterministe par une fonction.

La première approche que nous allons présenter utilise le modèle du système et permet de donner l'allure exacte de la dérivée lorsque tous les signaux d'excitation sont connus.

La seconde approche utilise la théorie des observateurs et consiste à construire un système convergent vers la dérivée recherchée.

### A.6.1 Utilisation du modèle du système

Les méthodes utilisant la théorie de l'approximation ne tiennent pas compte du modèle du système générant les signaux à dériver.

Cette connaissance peut toutefois être prise en compte pour calculer la dérivée exacte des signaux

de sortie  $y(t)$ . Le modèle du système s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x,w) \\ y &= h(x,w) \end{cases} \quad (\text{A.85})$$

la dérivée de la sortie  $y$  est donc donnée par :

$$\dot{y} = \frac{dh(x,w)}{dt} = \frac{\partial h(x,w)}{\partial x} f(x,w) + \frac{\partial h(x,w)}{\partial w} \dot{w} \quad (\text{A.86})$$

Cette expression est calculable à condition de connaître d'une part la dérivée de tous les signaux d'excitation (les entrées connues et inconnues ainsi que les pannes) et le vecteur d'état  $x$ .

L'estimation de  $x$  peut être réalisée en utilisant un observateur construit sur le système (Dabroom and Khalil, 1999) si le vecteur d'excitation  $w$  est connu :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} &= \hat{f}(\zeta,w) \\ \hat{y} &= \hat{h}(\zeta,w) \end{cases} \quad (\text{A.87})$$

Avec la condition de convergence des sorties :

$$\hat{y} - y = 0$$

Cette approche permet de donner non pas une estimation des dérivées mais la valeur exacte de celles-ci.

En pratique, il est impossible de l'implanter puisque les perturbations et les fautes ne sont pas connues.

### A.6.2 Utilisation d'un observateur

Il existe deux manières différentes d'utiliser la théorie des observateurs pour calculer les dérivées. La première approche consiste à utiliser le modèle du système comme présenté précédemment. Nous avons mis en évidence les limitations de cette approche. Par contre, la seconde approche consiste à synthétiser un filtre prenant pour entrée le signal à dériver et ayant pour sortie la dérivée recherchée.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= u \\ \dot{x}_2 &= -\alpha \text{sign}(x_1(t_i) - y(t_i)) \end{cases} \quad (\text{A.88})$$

$$u = x_2(t_i) - \lambda |x_1(t_i) - y(t_i)|^{1/2} \text{sign}(x_1(t_i) - y(t_i)) \quad (\text{A.89})$$

$$(\text{A.90})$$

**Théorème A.5** (Levant, 1998) : *Il existe des constantes positives  $\lambda$  et  $\alpha$  telles que, pour un  $\epsilon$  positif fixé, l'inégalité suivante tienne*

$$|u - \dot{y}| < \epsilon \quad (\text{A.91})$$

*après un régime transitoire fini.*

Pour plus d'informations concernant ce type de filtre et les conditions de convergence, nous conseillons au lecteur l'article suivant (Levant, 1998).

## A.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté plusieurs algorithmes d'estimation de dérivées d'un signal quelconque. Nous avons principalement insisté sur les approches consistant à approximer les points de mesure par un polynôme. Deux cas de figure ont été étudiés suivant que ce polynôme approximant est continu ou défini par morceaux (fonctions splines).

Dans le cas des polynômes continus, nous avons mis en évidence l'importance du choix de la base de polynômes pour effectuer l'approximation. Une base de polynômes orthogonaux a retenu notre attention et nous avons présenté une approche récursive permettant d'estimer la dérivée d'un signal sur une fenêtre glissante.

Pour limiter le problème du choix du degré du polynôme approximant, nous avons présenté l'approximation d'une courbe en utilisant des fonctions splines. Deux critères différents ont été étudiés. Le premier introduisant un paramètre de lissage et utilisant tous les points de mesure et le second utilisant toujours le paramètre de lissage mais tenant compte de l'allure de la courbe pour n'utiliser que les points de mesure les plus significatifs, limitant ainsi l'espace mémoire à utiliser.

Enfin, nous avons très rapidement présenté des méthodes alternatives pour estimer les dérivées. En particulier, l'approche actuellement développée par Levant qui paraît intéressante dans le sens où elle peut être implantée en ligne.

Toutefois, malgré toutes ces méthodes, seule l'approximation polynomiale pour l'instant permet une implémentation «quasiment» en ligne via l'utilisation d'une fenêtre glissante.

# Annexe B

## La commande vectorielle

### B.1 Généralités

Le principe de la commande vectorielle (à flux orienté) consiste à découpler la commande du flux et la commande du couple (Seguier and Notelet, 1994).

Pour réaliser ce type de commande, nous devons utiliser le modèle de Park dans le repère fixe par rapport au champ tournant :

- $\theta_s = \omega_s t$  et  $\theta_r = g\omega_s t$

et faire coïncider l'axe d avec le flux rotorique de manière à avoir :

$$\phi_{R_q} = 0 \quad (\text{B.1})$$

Dans ce repère, le modèle s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} v_{S_d} &= R_s i_{S_d} + \frac{d}{dt} \phi_{S_d} - \omega_s \phi_{S_q} \\ v_{S_q} &= R_s i_{S_q} + \frac{d}{dt} \phi_{S_q} + \omega_s \phi_{S_d} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.2a})$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= R_r i_{R_d} + \frac{d}{dt} \phi_{R_d} \\ 0 &= R_r i_{R_q} + \omega_r \phi_{R_d} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.2b})$$

A partir des équations (B.2b) et (6.11), les quatre variables inconnues  $i_{R_q}$ ,  $\phi_{R_d}$ ,  $\omega_r$  et  $\omega_s$  peuvent être exprimées en fonction des trois variables mesurées  $i_{S_d}$ ,  $i_{S_q}$  et  $\omega$  (Caron and Hautier, 1995). Ces variables seront ensuite injectées dans les deux équations B.2a.

### B.2 Calcul des variables inconnues

#### B.2.1 Calcul de $i_{R_q}$

A partir de (6.11), nous avons :

$$\phi_{R_q} = \mathcal{M} i_{S_q} + \mathcal{L}_r i_{R_q}$$



Le repère étant choisi tel que  $\phi_{R_q}$  soit égal à zéro, nous avons alors :

$$i_{R_q} = -\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{L}_r} i_{S_q} \quad (\text{B.3})$$

### B.2.2 Calcul de $\phi_{R_d}$

La première équation de B.2b donne :

$$\frac{d}{dt}\phi_{R_d} = -R_r i_{R_q}$$

A partir de (6.11), nous avons :

$$\phi_{R_d} = \mathcal{M}i_{S_d} + \mathcal{L}_r i_{R_q} \Rightarrow i_{R_q} = \frac{\phi_{R_d} - \mathcal{M}i_{S_d}}{\mathcal{L}_r}$$

En remplaçant cette expression de  $i_{R_q}$  dans l'expression de  $\frac{d}{dt}\phi_{R_d}$ , nous obtenons :

$$\phi_{R_d} = \frac{\mathcal{M}}{T_r s + 1} i_{S_d} \quad (\text{B.4})$$

où  $s$  est l'opérateur de dérivation :  $s = \frac{d}{dt}$ .

### B.2.3 Calcul de $\omega_r$

En remplaçant  $i_{R_q}$  dans la deuxième équation de (B.2b), nous obtenons :

$$\omega_r = \frac{\mathcal{M}}{T_r} \frac{i_{S_d}}{\phi_{R_d}} \quad (\text{B.5})$$

### B.2.4 Calcul de $\omega_s$

$\omega_s$  est obtenu à partir de la relation liant les vitesses des champs statorique  $\omega_s$ , rotorique  $\omega_r$ , et de la vitesse électrique  $\omega$  :

$$\omega = \omega_s - \omega_r$$

Comme  $\omega = p\Omega$  et  $\omega_r$  est donné par (B.5), nous avons :

$$\omega_s = p\Omega + \omega_r \quad (\text{B.6})$$

## B.3 Équations de commande

A partir des équations de sortie du modèle de Park (6.13) et des expressions des variables inconnues calculées précédemment, nous allons exprimer les équations de commande (B.2a) sous la forme de deux fonctions de transfert. Celles-ci permettront d'implanter une loi de commande classique à base de correcteurs à action Proportionnelle Intégrale (P.I.).

Après remplacement, les équations de commande s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} v_{S_d} &= R_s i_{S_d} + \sigma \mathcal{L}_s \frac{d}{dt} i_{S_d} + \mathcal{L}_s \frac{(1-\sigma)}{\mathcal{M}} \frac{d}{dt} \phi_{R_d} - \sigma \mathcal{L}_s \omega_s i_{S_q} \\ v_{S_q} &= R_s i_{S_q} + \sigma \mathcal{L}_s \frac{d}{dt} i_{S_q} + \mathcal{L}_s \frac{(1-\sigma)}{\mathcal{M}} \omega_s \phi_{R_d} + \sigma \mathcal{L}_s \omega_s i_{S_d} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

### B.3.1 Calcul de $v_{S_d}$

Dans l'expression de  $v_{S_d}$ , le courant  $i_{S_d}$  est remplacé par son expression obtenue par l'équation (B.4) :

$$i_{S_d} = \frac{1}{\mathcal{M}} (T_r s + 1) \phi_{R_d}$$

Nous obtenons alors la relation suivante :

$$\frac{R_s}{\mathcal{M}} [1 + (T_s + T_r) s + \sigma T_s T_r s^2] \phi_{R_d} = v_{S_d} + e_d \quad (\text{B.8})$$

où  $e_d$  est un signal de perturbation donné par :

$$e_d = \sigma \mathcal{L}_s \omega_s i_{S_q} \quad (\text{B.9})$$

Nous notons  $F_\phi$  le transfert entre la tension  $v_{S_d}$  et le flux  $\phi_{R_d}$  :

$$F_\phi = \frac{\frac{\mathcal{M}}{R_s}}{1 + (T_s + T_r) s + \sigma T_s T_r s^2} \quad (\text{B.10})$$

### B.3.2 Calcul de $v_{S_q}$

De l'équation  $v_{S_q}$ , nous obtenons directement :

$$R_s [1 + \sigma T_s] i_{S_q} = v_{S_q} + e_q$$

où  $e_q$  est un signal de perturbation donné par :

$$e_q = -\mathcal{L}_s \omega_s \frac{1 + \sigma T_r s}{1 + T_r s} i_{S_d}$$

Nous notons par  $F_q$  le transfert entre la tension  $v_{S_q}$  et le courant  $i_{S_q}$  :

$$F_q = \frac{\frac{1}{R_s}}{1 + \sigma T_s s} \quad (\text{B.11})$$

## B.4 Schéma de synthèse de la commande vectorielle

La figure B.1 montre l'architecture d'implantation de la commande vectorielle.

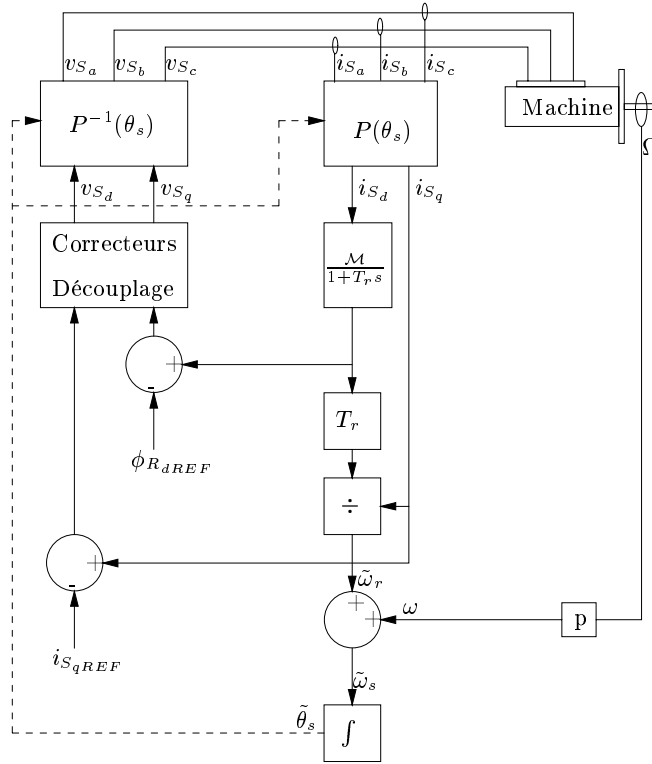


FIG. B.1 – Architecture de la commande vectorielle

Sur la figure B.1, les *tildes* sont utilisés pour les signaux calculés. La figure B.2 représente le schéma fonctionnel de la commande. Ce schéma fait apparaître les fonctions de transfert  $F_\phi$ ,  $F_q$  ainsi que les deux correcteurs  $C_\phi$  et  $C_q$  à ajouter pour commander le moteur.

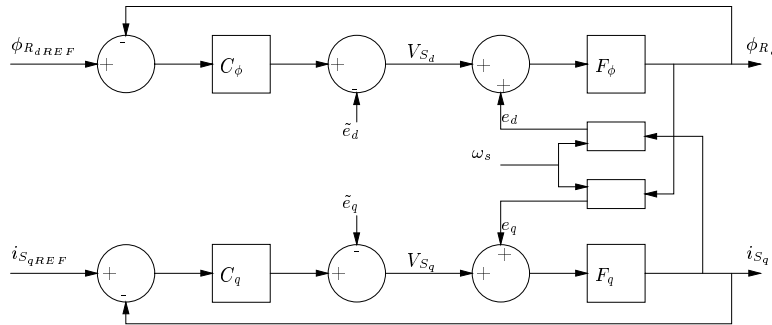


FIG. B.2 – Schéma fonctionnel de la commande vectorielle

Dans la figure (B.2), les blocs vides correspondent aux couplages  $e_d$  (B.9) et  $e_q$  (B.3.2). Le flux rotorique  $\phi_{R_d}$  est régulé de manière à pouvoir être constant (fixé à sa valeur nominale). La commande vectorielle que nous venons de décrire permet de commander le moteur en courant en fixant une référence  $i_{S_q REF}$  sur  $i_{S_q}$ .

## B.5 Réglage des correcteurs

Le réglage des deux correcteurs  $C_\phi$  et  $C_q$  peut être réalisé par une procédure de placement de pôles (Caron and Hautier, 1995). Nous allons dans un premier temps considérer la régulation du flux  $\phi_{R_d}$  puis dans un second temps, nous traiterons de la régulation du courant  $i_{S_q}$ .

### B.5.1 Régulation du flux rotorique

La fonction de transfert  $F_\phi$ , donnée par l'équation (B.10), est du second ordre et peut se décomposer en deux fonctions de transfert du premier ordre (le discriminant du dénominateur est toujours positif) :

$$F_\phi = \frac{K_1}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

$T_1$  et  $T_2$  sont deux constantes de temps positives vérifiant :  $T_2 > T_1$ .

Le correcteur  $C_\phi$  est choisi avec les deux actions proportionnelle et intégrale et peut s'écrire sous la forme :

$$C_\phi = K_\phi \frac{1 + T_\phi s}{s}$$

Ce correcteur peut être choisi de la manière suivante :

- compenser la constante de temps la plus grande du système
- fixer le coefficient d'amortissement du système à 1

Les calculs aboutissent aux résultats suivants :

$$K_\phi = \frac{1}{4K_1 T_1} \qquad T_\phi = T_2 \qquad (\text{B.12})$$

### B.5.2 Régulation du courant $I_{S_q}$

La fonction de transfert  $F_q$ , donnée par l'équation (B.11), est du premier ordre et s'écrit sous la forme générale :

$$F_q = \frac{K_2}{1 + T_3 s}$$

Le correcteur  $C_q$  utilisé est de la même forme que celui utilisé pour la régulation du flux rotorique :

$$C_q = K_q \frac{1 + T_q s}{s}$$

Les deux paramètres de ce correcteur sont choisis pour :

- compenser la constante de temps  $T_3$
- fixer la constante de temps  $\tau$  du système bouclé

Les calculs aboutissent aux résultats suivants :

$$K_q = \frac{1}{K_2 \tau} \qquad T_q = T_3 \qquad (\text{B.13})$$

## B.6 Asservissement en vitesse

Pour conclure la partie concernant la commande de la machine, nous allons présenter l'asservissement en vitesse de la machine. La fonction de transfert en vitesse est donnée par l'équation fondamentale de la dynamique :

$$J \frac{d}{dt} \Omega = C_e - B\Omega - C_r$$

Dans le repère de Park considéré pour la commande vectorielle, le couple électromagnétique s'écrit sous la forme :

$$C_{em} = p \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{L}_r} \phi_{R_q} i_{S_q}$$

En admettant que la boucle de régulation du flux rotorique fonctionne correctement et que sa dynamique est très supérieure à celle de la boucle de vitesse, nous pouvons considérer que :  $\phi_{R_q} = \phi_{R_q REF}$ . Dans ces conditions, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} C_{em} &= p \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{L}_r} \phi_{R_q REF} \frac{1}{1 + \tau s} i_{S_q REF} \\ &= F_{C_{em}}(s) i_{S_q REF} = \frac{K_{em}}{1 + \tau s} i_{S_q REF} \end{aligned}$$

L'asservissement est réalisé par une stratégie à double boucle PI-P (fig B.3).

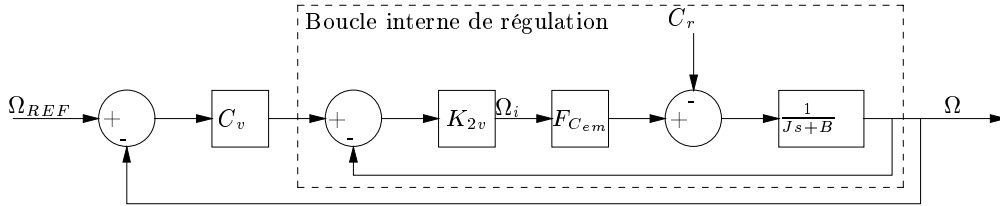


FIG. B.3 – Schéma fonctionnel de l'asservissement en vitesse

Nous allons donner maintenant les réglages à adopter pour les deux correcteurs  $C_v$  et  $K_{2v}$  en commençant par la boucle interne.

### B.6.1 Réglage de la boucle interne de vitesse

Nous allons régler le gain  $K_{2v}$  tel que le coefficient d'amortissement de la fonction de transfert entre  $\Omega_i$  et  $\Omega$  soit égal à 1. La fonction de transfert de la boucle de régulation de vitesse interne est égale à :

$$\Omega = \frac{K_{2v} K_{em}}{J \tau s^2 + (J + B \tau) s + B + K_{2v} K_{em}} \Omega_i - \frac{1 + \tau s}{J \tau s^2 + (J + B \tau) s + B + K_{2v} K_{em}} C_r$$

Pour que le coefficient amortissement soit égal à 1, nous trouvons le paramètre  $K_{2v}$  égal à :

$$K_{2v} = \frac{(J - B \tau)^2}{4 K_{em} J \tau}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est égale à :

$$\Omega = \frac{\left(\frac{J-B\tau}{J+B\tau}\right)^2}{\left(\frac{2J\tau}{J+B\tau}s+1\right)^2}\Omega_i - \frac{\frac{4J\tau}{(J+B\tau)^2}(1+\tau s)}{\left(\frac{2J\tau}{J+B\tau}s+1\right)^2}C_r$$

$$\frac{K_4}{(T_4s+1)^2}\Omega_i - \frac{K_5(1+\tau s)}{(T_4s+1)^2}C_r$$

### B.6.2 Réglage de la boucle externe de vitesse

Nous allons maintenant régler le correcteur  $C_v$ .

La fonction de transfert en boucle fermée du système est donnée par :

$$\Omega = \frac{K_4C_v}{(1+T_4s)^2 + K_4C_c}\Omega_i - \frac{K_5(1+\tau s)}{(1+T_4s)^2 + K_4C_c}C_r$$

Le correcteur utilisé est un correcteur à actions proportionnelle et intégrale. Il s'écrit sous la forme :

$$C_v = K_v \frac{1+T_v s}{s}$$

Les deux paramètres de ce correcteur sont choisis pour :

- compenser la constante de temps  $T_4$  du système
- fixer le facteur d'amortissement du système à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Les calculs aboutissent à :

$$K_v = \frac{1}{2T_4} \qquad T_v = T_4 \qquad (\text{B.14})$$

## B.7 Valeurs numériques pour le moteur étudié

### B.7.1 Valeurs des paramètres

Les valeurs numériques des différents paramètres du moteur sont :

- $R_s = 10\Omega$ ,  $\mathcal{L}_s = 0.38H$
- $R_r = 3.5\Omega$ ,  $\mathcal{L}_r = 0.3H$
- $\mathcal{M} = 0.3H$

De plus, cette machine contient deux paire de pôles  $p = 2$  et les caractéristiques de la charge sont égales à :

- $J = 0.02kg.m^2$
- $B = 0.04N.m.s.rad^{-1}$

### B.7.2 Réglage des correcteurs

Nous allons donner les valeurs des paramètres des 4 correcteurs utilisés pour la commande du moteur. Pour calculer ces paramètres, nous devons fixer la constante de temps  $\tau$  de la boucle de régulation de courant  $i_{S_q}$  et calculer la valeur nominale du flux rotorique  $\phi_{Rd}$ . Pour assurer une convergence rapide de la boucle de régulation en courant, nous choisissons  $\tau = 0.1s$ . le flux

rotorique de référence est égal à  $1Wb$ .

A partir de ces choix, nous obtenons les valeurs suivantes pour les quatre correcteurs.

| $C_\phi$ |          | $C_q$ |       | $C_v$ |       | $K_{2v}$ |
|----------|----------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $T_\phi$ | $K_\phi$ | $T_q$ | $K_q$ | $T_v$ | $K_v$ |          |
| 0.1      | 1500     | 0.008 | 100   | 0.1   | 3     | 0.01     |

## B.8 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté la commande vectorielle de la machine asynchrone. Ce type de commande est très répandu dans le milieu industrielle pour réaliser l'asservissement en vitesse de ce moteur.

La méthode que nous avons proposée ici est issue de l'ouvrage de Hautier et al [REF]. Quatre correcteurs doivent être réglés :

- Un pour réguler le flux rotorique  $\phi_{R_d}$  à sa valeur nominale.
- Un pour réguler le courant statorique  $i_{S_q}$ .
- Deux pour l'asservissement de la vitesse.

Les valeurs des actions proportionnelle et intégrale de chacun de ces correcteurs sont calculées par placement de pôles pour accélérer les dynamiques des boucles de régulation du courant et du flux et assurer un rapport optimal entre le dépassement et le temps de réponse pour la boucle de vitesse.

# Bibliographie

- Basseville, M. (1999). On Fault Detectability and Isolability. *ECC'99, Karlsruhe (Allemagne)*.
- Basseville, M. and I. Nikiforov (1993). *Detection of Abrupt Changes, Theory and Application*. Prentice Hall. N.J.
- Becker, T. and V. Weispfenning (1998). *Gröbner Bases, A computational Approach to Commutative Algebra*. Springer. New York.
- Blanke, M., C. Frei, F. Kraus, R.J. Patton and M. Staroswiecki (2000). *Control of Complex Systems*. Chap. "Fault Tolerant Control System", pp. 165–189. Aström, Albertos, Blanke, Isidori, Schaufelberg, Sanz ed.. Springer.
- Bonal, J. (1997). *Entraînements Électriques à vitesse variable*. Vol. 1. Lavoisier TEC & DOC.
- Bornard, G. and H. Hammouri (1991). A High Gain Observer for a Class of Uniformly Observable Systems. *CDC'91, Brighton (Angleterre)* pp. 1494–1496.
- Boukhobza, T. (1997). Contribution aux Formes d'Observabilité pour les Observateurs Modes Glissants. Thèse de doctorat. Université de Paris Sud.
- Brunet, J., D. Jaume, M. Labarrère, A. Rault and M. Vergé (1990). *Détection et Diagnostic de Pannes : Approche par Modélisation*. Hermès.
- Busawon, K., M. Farza and H. Hammouri (1998). Observer Design for a Special Class of Non Linear Systems. *Int. J. of Control* **71**(3), 405–418.
- Canudas de Wit, C. and J. J. E. Slotine (1991). Sliding Observers in Robot Manipulator. *Automatica* **27**(5), 859–864.
- Caron, J. P. and J. P. Hautier (1995). *Modélisation et Commande de la Machine Asynchrone*. Technip.
- Chang, X., V. Cocquempot and C. Christophe (2001a). A Model of Asynchronous Machines for Stator Fault Detection and Isolation. *IEEE Trans. on Industrial Electronics* p. Soumis.
- Chang, X., V. Cocquempot and C. Christophe (2001b). Modélisation de la Machine Asynchrone pour la Détection des Pannes. *Journal Européen des Systèmes Automatisés* p. Soumis.
- Chen, J. and R. J. Patton (1999). *Robust Model-based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Kluwer Academic Publisher.
- Chiasson, J. N. and M. Bodson (1993). Nonlinear Control of a Shunt DC Motor. *IEEE Trans. on Aut. Control* **38**(11), 1662–1666.
- Choquet-Bruhat, Y. (1968). *Géométrie Différentielle et Systèmes Extérieurs*. Dunod.
- Chow, E. Y. (1980). Failure Detection System Design Methodology. Phd thesis. MIT, Cambridge, M.A.



- Chow, E. Y. and A. S. Willsky (1984). Analytical Redundancy and the Design of Robust Failure Detection Systems. *IEEE Trans. on Aut. Control* **29**(7), 602–615.
- Christophe, C. and V. Cocquempot (1999). Génération de résidus non sinusodaux pour la machine asynchrone. *JDA '99, Nancy (France)*.
- Christophe, C. and V. Cocquempot (2000). Fault Detection and Isolation of Induction Motors Using Analytical Redundancy Relations. *Control Engineering Practice, Submitted*.
- Christophe, C., V. Cocquempot and M. Staroswiecki (1999). Robust Residual Generation For Induction Motors Using Elimination Theory. *IEEE SDEMPED'99, Gijon, (Espagne)*, pp. 551–556.
- Christophe, C., V. Cocquempot and M. Staroswiecki (2000). Non-Sinusoidal Residual Generation for FDI of Induction Motor. *SICICA'2000, Buenos-Aires (Argentine)* pp. 213–218.
- Clark, R. N., D. C. Fosth and W. M. Walton (1975). Detecting Instrument Malfunctions in Control Systems. *IEEE Trans. Aero. Elect. Sys.* **11**(4), 465–473.
- Cocquempot, V. (1993). Surveillance des Processus Industriels Complexes. Génération et Optimisation des Relations de Redondance Analytique. PhD thesis. Université des Sciences et Technologies de Lille 1. France.
- Cocquempot, V., J. Ph. Cassar and M. Staroswiecki (1991). Generation of Robust Analytical Redundancy Relations. *ECC'91, Grenoble (France)* pp. 309–314.
- Comtet-Varga, G. (1997). Surveillance des Systèmes Non Linéaires: Application aux Machines Asynchrones. PhD thesis. Université des Sciences et Technologies de Lille 1. France.
- Comtet-Varga, G., C. Christophe, V. Cocquempot and M. Staroswiecki (1999). FDI For the Induction Motor using Elimination Theory. *ECC'99, Karlsruhe (Allemagne)*.
- Conte, G., C. M. Moog and Perdon (1988). Un Théorème sur la Représentation Entrée/Sortie d'un Système Non Linéaire. *Acad. Sci. Paris, I-307* pp. 363–366.
- Conte, G., C. Moog and A. Perdon (1998). *Nonlinear Control Systems*. Springer. New York.
- Cox, D., J. Little and D. O'Shea (1992). *Ideals, Varieties and Algorithms*. Springer. New York.
- Dabroom, A.M. and H.K. Khalil (1999). Discrete-Time Implementation of High-Gain Observers for Numerical Differentiation. *INT.J. Control* **72**(17), 1523–1537.
- Davenport, J. Y., Y. Siret and E. Tournier (1986). *Calcul Formel. Systèmes et Algorithmes de Manipulations Algébriques*. Masson. Paris.
- Davis, Ph. J. (1975). *Interpolation and Approximation*. Dover Publication Inc.
- De Boor, C. (1990). *Spline Toolbox User's Guide*. Mathworks.
- De Persis, C. and A. Isidori (1999). On the Problem of Residual Generation for Fault Detection in Nonlinear Systems and Some Related Facts. *ECC'99, Karlsruhe (Allemagne)*.
- Declerk, P. and M. Staroswiecki (1991a). Characterisation of the Canonical Components of a Structural Graph. Application to Fault Detection in Large Scale Industrial Plants. *ECC 91, Grenoble (France)*.
- Declerk, P. and M. Staroswiecki (1991b). Identification of Structurally Solvable Subsystems for the Design of Fault Detection and Isolation Schemes, using the Embedding Procedure. *9th IFAC/IFORS symposium on identification and system parameter estimation, Budapest (Hongrie)*.

- Delforge-Delmotte, C. (1995). Modélisation d'un Actionneur Asynchrone et sa Commande Vectorielle par Réseaux de Perméances. PhD thesis. Université des Sciences et Technologies de Lille 1. France.
- Delmaire, G. (1996). Comparaison des Méthodes d'Identification Paramétrique et de l'Espace de Parité pour la Détection et la Localisation de Défaillances dans les Systèmes Automatisés. PhD thesis. Université des Sciences et Technologies de Lille 1. France.
- Delmaire, G., J. Ph. Cassar, M. Staroswiecki and C. Christophe (1999). Comparison of Multivariable Identification and Parity Space Techniques for F.D.I. Purpose in M.I.M.O. Systems. *ECC'99, Karlsruhe (Allemagne)*.
- Demailly, J. P. (1996). *Analyse Numérique et Équations Différentielles*. Presses Universitaires de Grenoble.
- Diagnostic des entraînements électriques* (2001). *Journées Nationales d'Automatique (CDRom), Autrans, Session XVI*.
- Dierckx, P. (1993). *Curve and Surface Fitting with Splines*. Oxford Science Publication.
- Ding, X. and P.M. Frank (1994). Comparison of Observer-Based Fault Detection Approaches. *SAFEPROCESS'94, Helsinki (Finlande)* pp. 556–561.
- Diop, S. (1989). Théorie de l'Élimination et Principe du Modèle Interne en Automatique. Thèse de doctorat. Université de Paris Sud. Orsay, France.
- Diop, S. (1991). Elimination in Control Theory. *Math. Control Signals systems* **4**, 17–32.
- Diop, S. and M. Fliess (1991). On Nonlinear Observability. *ECC'91, Grenoble (France)* pp. 152–157.
- Djemai, M., J. P. Barbot and O. Bethoux (2000). Observer Design for a Special Class of Non Linear Systems. *CDC'00* p. CD ROM.
- Drakunov, S. and V. Utkin (1995). Sliding Mode Observer. Tutorial. *CDC'95* pp. 3376–3379.
- Fang, C. Z. and W. Ge (1988). Failure Isolation in Linear Systems. *12th IMACS World Congress on Scientific Computation, Paris (France)*.
- Feliot, C. (1997). Modélisation de Systèmes Complexes : Intégration et Formalisation de Modèles. Thèse de doctorat. Université des Sciences et Technologies de Lille1. France.
- Fillipov, A. F. (1960). Differential Équations with Discontinuous Right-Hand Side. *American Mathematical Society Transactions* **62**, 199–231.
- Fliess, M. (1990). Generalized Controller Canonical Forms for Linear and Non Linear Dynamics. *IEEE Trans. on Aut. Control* **35**, 994–1001.
- Forsythe, G. E. (1957). Generation and Use of Orthogonal Polynomials for Data-Fitting with a Digital Computer. *J. Soc. Indust. Appl. Math* **5**(2), 74–88.
- Fox, L. and I. B. Parker (1968). *Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*. London, New York, Oxford U.P.
- Frank, P.M. (1990). Fault Diagnosis in Dynamic Systems using Analytical and Knowledge-based Redundancy - A Survey and some New Results. *Automatica* **26**(3), 459–474.
- Frank, P.M. (1994). On-Line Fault Detection in Uncertain Nonlinear Systems Using Diagnostic Observers: A Survey. *Int. J. Systems SCI.* , **25**(12), 2129–2154.
- Frank, P.M. (1996). Analytical and Qualitative Model-Based Fault Diagnosis - A Survey and Some New Results. *European Journal of Control* **2**(1), 6–28.

- Gantmacher, F.R. (1959). *Theory of matrices*. Chelsea.
- Gauthier, J. P. and I. Kupka (1994). Observability and Observers for Nonlinear Systems. *SIAM J. Contr. Optim.* **32**(4), 975–994.
- Gauthier, J. P., H. Hammouri and S. Othman (1992). Simple Observer for Nonlinear Systems - Application to a Bioreactor. *IEEE Trans. on Aut. Control* **37**(6), 875–880.
- Gauthier, J.P. and G. Bornard (1981). Observability for any  $u(t)$  of a Class of Nonlinear Systems. *IEEE Trans. on Aut. Control* **26**, 922–926.
- Gertler, J. and R. Monajemy (1995). Generating Directional Residuals with Dynamic Parity Relations. *Automatica* **31**(4), 627–635.
- Glad, S.T. (1989). Nonlinear State Space and Input Output Descriptions Using Differential Polynomials. *Lecture Notes in Control and Information Science* **122**, 182–189.
- Guernéz-Jean, C. (1998). Surveillance des Systèmes à Modèles Polynomiaux : Generation de Résidus et Étude de Sensibilité. PhD thesis. Université des Sciences et Technologies de Lille 1. France.
- Guidorzi, R. (1975). Canonical Structures in the Identification of Multivariable Systems. *Automatica* **11**, 361–374.
- Hammouri, H., M. Kinnaert and E.H. Yaagoubi (1998). Fault Detection and Isolation for State Affine Systems. *European Journal of Control* **4**, 2–16.
- Henao, H., G.A. Capolino and M. Poloujadoff (1997). A Circuit-Oriented Model of Induction Machine for Diagnostics. *IEEE SDEMPED, Carry-le-Rouet, France* pp. 185–190.
- Hermann, R. and A. Krener (1977). Nonlinear Controllability and Observability. *IEEE Trans. on Aut. Control* **22**, 728–740.
- Hernandez, J. (1994). Sur la Synthèse de Lois de Commande Non Linéaires avec Observateur : Applications à la Robotique et à l'Électrotechnique. Thèse de doctorat. Université de Paris Sud. Orsay, France.
- Isermann, R. (1984). Process Fault Detection Based on Modelling and Estimation. *Automatica* **20**(4), 387–404.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. Springer Verlag.
- Jones, H. L. (1973). Failure Detection in Linear System. Ph. d thesis. MIT., Cambridge, MA.
- Kaboré, P. (1992). Contribution a la Détection et à l'Isolation de Pannes dans les Systèmes Non-Linéaires. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard, Lyon I. France.
- Kaboré, P., H. Hammouri and S. Othman (1997). An Adaptive Approach to Failure Detection Filters Design for a Hydraulic Process. *CDC'97, San Diego (Etat Unis)*.
- Keller, H. (1987). Nonlinear Observer Design by Transformation into a Generalized Observer Canonical Form. *Int J. Control* **46**(6), 1915–1930.
- Kolchin, E.R. (1973). *Differential Algebra and Algebraic Groups*. Academic Press. New York.
- Konan, K., H. Hénao., G.A. Capolino and M. Fernandez-Cabanás (1988). A New Stator Model to Study Induction Machine Winding Short-Circuits. *ICEM'98, Istanbul, Turkey* **3**, 1516–1521.
- Krener, A.J. and A. Isidori (1983). Linearization by Output Injection and Nonlinear Observers. *Systems and Control Letters* **3**, 47–52.
- Krener, A.J. and W. Respondek (1985). Non Linear Observers with Linearizable Error Dynamics. *SIAM J. Contr. Optim.* **23**(2), 197–216.

- 
- Levant, A. (1998). Robust Exact Differentiation via Sliding Mode Technique. *Automatica* **34**(3), 379 – 384.
- Ljung, L. and S. Glad (1999). On Global Identifiability for Arbitrary Model Parametrizations. *Automatica* Vol **30**, 265–276.
- Lootsma, T. (2001). Observer-Based Fault Detection and Isolation For Nonlinear Systems. Phd thesis. Aalborg University. Denmark.
- Luenberger, D. G. (1971). An Introduction to Observers. *IEEE Trans. on Aut. Control* **AC-16**(6), 596–602.
- Lyche, T. and L. L. Schumaker (1974). Procedures for Computing Smoothing and Interpolating Natural Splines. *Communications of the ACM* **17**(8), 463–467.
- Magni, J.F. and P. Mouyon (1994). On Residual Generation by Observer and Parity Space Approaches. *IEEE Trans. on Aut. Control* **2**(39), 441–447.
- Massoumnia, M.A. (1986). A Geometric Approach to the Synthesis of Failure Detection Filter. *IEEE Trans. on Aut. Control* **31**(9), 839–846.
- Nijmeijer, H. and A. van der Schaft (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer Verlag. New York.
- Nuninger, W., F. Kratz and J. Ragot (1997). Structural Equivalence Between Direct Residuals Based on Parity Space and Indirect Residuals Based on Unknown Inputs Observers. *SAFE-PROCESS'97, Hull (Angleterre)* **1**, 462–467.
- Othman, S. (1992). Sur les Observateurs des Systèmes non Linéaires. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard. Lyon I.
- Patton, R. J. and J. Chen (1991a). A review of Parity Space Approaches to Fault Diagnosis. *SAFEPROCESS'91, Baden-Baden (Allemagne)* pp. 239–255.
- Patton, R. J. and J. Chen (1991b). A Re-Examination of the Relationships Between Parity Space and Observer-Based Approaches in Fault Diagnosis. *Revue Européenne de Diagnostic et Sécurité de fonctionnement* **1**(2), 183–200.
- Patton, R. J., P. Frank and R. Clark (1989). *Fault Diagnosis in Dynamic Systems*. Prentice Hall.
- Patton, R.J. (1994). Robust Model Based Fault Diagnosis: the State of the Art. *SAFEPROCESS'94, Helsinki, Finland* **1**, 1–23.
- Plestan, F. (1995). Linéarisation par Injection d'Entrée-Sortie Généralisée et Synthèse d'Observateurs. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Nantes. France.
- Plestan, F. and A. Glumineau (1997). Linearization by Generalized Input - Output Injection. *System and Control Letter* **31**, 115 – 128.
- Powell, M.J.D. (1970). Curve Fitting by Splines in One Variable. pp. 65–83.
- Raison, B. (2000). Détection et Localisation de Défaillances sur un Enroulement Électrique. PhD thesis. Institut national polytechnique de Grenoble. France.
- Ritt, J. F. (1950). *Differential Algebra*. American Mathematical Society, Providence, RI.
- Schaeffer, E. (1999). Diagnostic des Machines Asynchrones: Modèles et Outils Paramétriques Dédiés à la Simulation et à la Détection de Défauts. PhD thesis. Ecole Centrale de Nantes.
- Seguier, G. and F. Nolelet (1994). *Electrotechnique Industrielle*. Lavoisier TEC & DOC.
- Shumsky, A. (1999). Continuous - time Parity Relation Method for Fault Diagnosis in Nonlinear Uncertain Systems. *ECC'99, Karlsruhe, (Allemagne)*.

- Slotine, J. J. E., J. K. Hedrick and E. A. Misawa (1986). Nonlinear State Estimation Using Sliding Observers. *CDC'86, Athènes (Grèce)* pp. 332–339.
- Staroswiecki, M. and G. Comtet-Varga (2001). Analytic Redundancy Relations for Fault Detection and Isolation in Algebraic Dynamic Systems. *Automatica* **37**, 687–699.
- Staroswiecki, M. and P. Declerk (1989). Analytical Redundancy in Non Linear Interconnected Systems by Means of Structural Analysis. *IFAC/IMACS/IFORS/ AIPAC, Nancy (France)*.
- Surveillance et Disponibilité des Systèmes Électrotechniques* (2000). *Actes des Journées Bilan du GDR SDSE, Villeurbanne*.
- Taillibert, P. (1999). Residual Evaluation without Derivative Computation. *DX'99, Loch Awe (Angleterre)* pp. 617–622.
- Tsao, N.K. (1993). On the Numerical Computation of the Derivatives of a B-Spline Series. *IMA Journal of Numerical Analysis* **13**, 343–364.
- Utkin, V. I. (1977). Variable Structure Systems with Sliding Mode. *IEEE Trans. on Aut. Control* **26**(2), 212–222.
- Van Der Schaft, A. J. (1985). Non linear Observers. *IEEE Trans. on Aut. Control* **30**(2), 1254–1256.
- Vergheze, G. C. and S. R. Sanders (1988). Observers for Flux Estimation in Induction Motors. *IEEE Trans. on Industrial Electronics* **35**, 85–94.
- Viswanadham, N. and R. Srichandert (1987). Fault Detection Using Unknown Input Observers. *Control-Theory and Advanced Technology* **3**, 91–101.
- Watanabe, K. and D. M. Himmelblau (1982). Instrument Fault Detection in Systems with Uncertainties. *Int. J. Systems Sci.* **13**, 137–158.
- Wonham, W. M. (1985). *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. Springer Verlag.
- Woodford, C.H. (1970). An Algorithm for Data Smoothing using Spline Functions. *BIT* **10**, 501–510.
- Wünnenberg, J. and P. Frank (1986). *System Fault Diagnostics, Reliability and Related Knowledge-Based Approaches*. Vol. 1. Tzafestas, Singh, Schmidt ed.. Reidel Press.
- Xia, X. and X. Gao (1989). Nonlinear Observer Design by Observer Error Linearization. *SIAM Journal of Control and Optimisation* **27**(1), 199–213.

# Surveillance des systèmes non-linéaires. Application aux machines tournantes

**Résumé :** Les algorithmes de surveillance (détection et localisation des pannes) reposent sur l'analyse d'un signal, appelé résidu, qui reflète la cohérence entre le comportement du modèle du système non défaillant et le comportement du système réel. Les résidus sont créés en utilisant essentiellement deux types d'approches : les observateurs et l'espace de parité. Dans ce mémoire, nous considérons des systèmes non-linéaires et comparons les résidus générés par les deux approches. Nous appliquons ensuite les résultats sur deux types de moteurs électriques. L'approche de type observateur nécessite en général deux étapes. Dans un premier temps, un sous-système découplé des perturbations et d'un sous-ensemble de pannes est extrait du modèle. Dans un second temps, un observateur est implanté sur ce sous système. Les résidus sont générés en comparant les grandeurs mesurées aux grandeurs estimées. Trois types d'observateurs sont étudiés dans ce mémoire : les observateurs de Luenberger, à grand gain et à mode glissant. L'approche de l'espace de parité consiste à extraire du système des relations d'entrée/sortie appelées Relation de Redondance Analytique (RRA). Les résidus sont générés en évaluant ces RRA avec les signaux mesurés. Les outils mis en œuvre pour obtenir des relations robustes vis-à-vis des entrées inconnues et des pannes sont plus simples que ceux utilisés pour extraire les sous-systèmes découplés dans l'approche observateur. Toutefois, un inconvénient majeur de cette approche est la nécessité de calculer des dérivées des signaux mesurés à des ordres parfois élevés. Pour les systèmes linéaires, il a été montré que les résidus issus de ces deux méthodes sont liés par un filtre linéaire. Dans un premier temps, nous étendons ce résultat aux systèmes non linéaires linéarisables. Nous montrons ensuite que pour les systèmes non linéaires affine en l'état, les résidus issus d'un observateur grand gain et les résidus de parité sont liés par une fonction non-linéaire. Afin d'illustrer les résultats théoriques, deux applications sont traitées : le moteur à courant continu série et le moteur asynchrone.

**Mots-clés :** surveillance, systèmes non-linéaires, observateurs, espace de parité, moteur à courant continu série, moteur asynchrone

## Nonlinear systems diagnosis Application to the electrical machines

**Abstract :** Model based Fault Detection and Isolation (FDI) systems are designed using mainly two kinds of approaches : the observer based approach and the parity space one. The FDI algorithms are based on the analysis of a signal (a residual) which reflects the discrepancy between the actual behaviour of the system and the expected behaviour given by its model. In this thesis, we consider nonlinear systems. We develop and compare the two approaches in that framework. Then, we apply the results to two kinds of electrical machines. The observer-based approach needs generally two steps. The first one consists of determination a subsystem which is decoupled from the perturbations and from a subset of faults. The second step is the design of an observer for this decoupled subsystem. The residuals are generated from the comparison between signals which are measured and estimated. Three kinds of observers are studied in this thesis : Luenberger observers, high gain observers and sliding mode observers. The parity space approach consists of finding from the model equations a set of input/output relations which are called Analytical Redundancy Relations (ARR). The residuals are generated by the evaluation of these ARR using the actual signals which are collected on-line. The relations which are robust with respect to the perturbations and to a subset of faults are generated using algebraic tools. These mathematical tools are easier to use than the geometrical one which are needed for the observer-based approach. However, a major drawback of this approach comes from the time derivative evaluation of signals which are measured. For linear systems, it is well known that a linear filter links the residuals which are generated by these two approaches. At first, we extend this result to linearizable nonlinear systems. Then, we prove that residuals which are generated using a high gain observer for more general nonlinear systems are linked to the parity space residuals. The link is expressed as a non-linear function. Finally, two practical application examples are included to illustrate the theoretical results : the DC series motor and the induction motor.

**Keywords:** Fault and Detection Isolation, nonlinear systems, observer, parity space, DC series motor, induction motor