Année 2002

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LILLE I

Spécialité :

MECANIQUE

Présentée par :

Leila KHALIJ

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LILLE I

Sujet de thèse :

DETERMINATION DIRECTE DES ETATS LIMITES ET DES CHAMPS DE CONTRAINTES RESIDUELLES POUR LES STRUCTURES CHARGEES CYCLIQUEMENT. APPLICATION DE LA METHODE D'ANALYSE SIMPLIFIEE.

Soutenue en mars 2002 devant le jury composé de :

Monsieur	J.M.	BERGHEAU	
Monsieur	K.	DECROOS	
Monsieur	S.	HARIRI	
Madame	G.	INGLEBERT	Rapporteur
Monsieur	M.	NAIT	
Mademoiselle	R.	VAUCHER	
Monsieur	D.	WEICHERT	Rapporteur

A mes parents,

A mes sœurs et à mes frères.

Remerciements

Cette thèse a été effectuée au sein du Laboratoire de calculs de structures du département Mécanique et Comportement des Matériaux (M.C.M.) de l'école des Mines de Douai. Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Mademoiselle C. ROBIN pour son accueil au sein du département.

Je tiens à remercier vivement tout d'abord mes deux Directeurs de thèse, Monsieur S. HARIRI, Mademoiselle R. VAUCHER. Merci encore pour tous les conseils, les encouragements et pour toute l'aide que vous m'avez apportés durant ces trois années dans une ambiance aussi sympathique que scientifique.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur M. NAIT de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse, à Madame G. INGLEBERT et Monsieur D. WEICHERT qui ont accepté d'être les rapporteur de cette thèse. Je tiens également à remercier Monsieur K. DECROOS et Monsieur J. M. BERGHEAU qui m'ont honorée de leur présence dans mon jury.

Je ne saurais oublier tous les membres du laboratoire avec qui j'ai passé ces trois années. Et je tiens à remercier plus particulièrement Messieurs F. NUNIO et D. ZAKRZEWSKI pour leur disponibilité et leurs conseils avisés ainsi que Monsieur P. FLAHAUT pour sa bonne humeur et sa gentillesse.

Je tiens à remercier également les doctorants et mes amis qui m'ont assurée de leur soutien et de leur amitié. Sachant que je ne peux pas tous les citer (et aussi pour ne pas faire de jaloux), qu'ils reçoivent ici le témoignage de ma sincère sympathie.

De plus, je remercie chaleureusement Messieurs J. ZARKA et H. KARAOUNI pour les explications concernant l'analyse simplifiée et les modèles rhéologiques mais aussi pour leur sympathie.

Enfin, mille mercis (et bien plus...) à mes parents, mes sœurs et mes frères pour leur soutien moral et pour m'avoir supportée dans les pires moments.

Sommaire

Introduction

Et je dis que la vie est vraiment faite d'obscurité
Sauf lorsqu'il y a envie de faire
Et toute envie de faire est aveugle sans savoir-faire
Et tout savoir-faire est vain sans travail
Et tout travail est vide sans amour
Et travailler avec amour
Revient à se lier à soi-même
Et à autrui, et à Dieu.

Khalil Gibran

La résolution de nombreux problèmes industriels nécessite une bonne connaissance du comportement élastoplastique. Parmi ces problèmes, nous pouvons évoquer ceux posés par les réacteurs nucléaires, les constructions offshore, les traitements tels que le galetage ou le grenaillage, les séismes, ... Le point commun de ces domaines est la sollicitation variable dans le temps qui entraîne des phénomènes de déformation progressive. Les règles de sécurité imposent à l'ingénieur de s'assurer que ces déformations restent limitées et se stabilisent après quelques cycles.

Au bout d'un grand nombre de cycles, trois comportement de la structure peuvent apparaître :

✓ *Adaptation*. En tout point de la structure, la déformation plastique atteint un état limite stabilisé constant.

✓ *Accommodation*. En tout point de la structure, la déformation plastique atteint un état limite stabilisé périodique.

✓ *Rochet*. Il existe au moins un point de la structure où la déformation plastique s'accroît de manière incrémentale et cela jusqu'à ruine de la structure.

Par conséquent, il faut introduire un comportement inélastique qui permette de décrire ces déformations irréversibles. Diverses alternatives ont donc été proposées. Une approche faisant appel à la *théorie des charges limites* a été introduite afin de déterminer la charge au-delà de laquelle la structure n'est plus stable. Son efficacité a été prouvée par de nombreux auteurs dans le cadre des lois de comportement simples. Elle permet d'accéder à l'idée qu'avant de s'écrouler, le système subit des déformations plastiques irréversibles.
Mais la connaissance de cette charge limite ne permet pas de s'assurer de la sécurité d'une structure soumise à une sollicitation variable dans le temps.

En effet, le dimensionnement de ces structures doit être tel que le phénomène de rochet ne puisse exister et idéalement que l'état adapté apparaisse rapidement.

En utilisant une *méthode incrémentale* quelconque, les concepteurs seront amenés à déterminer le nombre de cycles nécessaire pour atteindre l'état stabilisé. Indispensable pour une meilleure compréhension de la physique du comportement des matériaux déformables, ces méthodes passent par un calcul complet de l'évolution de la structure et s'avèrent être très coûteuses en temps et en stockage mémoire. C'est pour cette raison qu'elles sont souvent restreintes à un nombre limité de cycles.

De nombreux travaux ont été développés afin de pallier les problèmes de l'incrémentation et des calculs plastiques. Nous pouvons citer par exemple la généralisation de la charge limite (ou analyse limite) : *la théorie d'adaptation.*

Cette théorie permet de définir un domaine de charge sûr pour lequel quelle que soit l'histoire de charge à l'intérieur de ce domaine, le système demeure stable.

Les structures actuelles étant de plus en plus sollicitées, la convergence vers l'état adapté amène un surdimensionnement excessif car la théorie d'adaptation surestime le domaine d'adaptation et ne prend pas en compte l'état limite accommodé. Il est donc nécessaire de permettre l'apparition localisée d'un comportement élastoplastique tel que l'accommodation. Dans cet état, la ruine de la structure apparaît par fatigue.

Par conséquent, la théorie d'adaptation ne suffit plus pour étudier l'état limite de la structure. D'autres axes de recherche ont été envisagés.

Ces autres approches dites méthodes de résolutions simplifiées, reposent essentiellement sur des calculs purement élastiques. Elles sont basées sur des diagrammes. Elles sont rapides mais ne sont valables que pour des types de structures et des chargements bien définis.

Une approche développée par J. Zarka et al. **[Zarka90]** semble apporter une solution satisfaisante, comparée aux méthodes citées précédemment. Nous présenterons ainsi les développements de cette méthode dite « *Méthode d'analyse simplifiée des structures inélastiques ou MASSI* » et nous comparerons l'estimation obtenue par rapport aux résultats d'une méthode incrémentale intégrée sous un code de calcul industriel par éléments finis.

L'analyse simplifiée permet d'estimer le comportement inélastique d'une structure quelconque à partir de l'utilisation d'outils relatifs aux calculs élastiques : l'évaluation de la solution est obtenue sans avoir recours au calcul de type incrémental, mais simplement à partir de calculs élastiques ainsi que de projections locales.

Les caractéristiques de l'étude sont les suivantes :

✓ On ne considère que le matériau standard généralisé **[Halphen75]**, stable au sens de Drucker **[Drucker64]** et qui obéit au Principe du Travail Plastique Maximal de Hill **[Hill50]**.

✓ Le matériau est élasto-plastique à écrouissage cinématique linéaire (modèle de Prager **[Prager55]**).

✓ Le critère de plasticité est du type VON MISES et la loi d'écoulement du type associé.

✓ Dans tous les problèmes traités, nous nous plaçons sous les hypothèses quasi-statiques en petites déformations.

✓ Le chargement est mécanique cyclique radial.

✓ Tous les calculs élastiques et élasto-plastiques ont été effectués sur le code éléments finis SYSTUS.

✓ L'intégralité des calculs a été réalisée sur une station de travail SGI O2 processeur R10 000, ainsi la comparaison du temps de calcul peut être appréciée.

L'intégration de l'analyse simplifiée dans un code de calcul repose sur la méthode des éléments finis et sur la programmation mathématique.

Ce mémoire se décompose en quatre chapitres :

□ Le **chapitre 1** consiste à mettre en évidence de maniere non exhaustive, les notions de plasticité : la modélisation du comportement des matériaux et ses aspects, les schémas d'évolution comme l'écrouissage (isotrope et cinématique), les différents critères de plasticité (Von Mises et Tresca), les modèles rhéologiques, ...

❑ Le **chapitre 2** permet le recensement de quelques méthodes asymptotiques qui permettent d'approcher les limites de la tenue et de la stabilité d'une structure. Nous préciserons leurs avantages et inconvénients afin d'introduire notre choix qui est l'analyse simplifiée développée par J. Zarka **[Zarka90]**.

❑ Le **chapitre 3** est relatif à la proposition de la méthode d'analyse simplifiée. Elle repose, par un calcul purement elastique, sur la décomposition de la réponse réelle et sur un changement de variable. Nous verrons ainsi que cette méthode permet des résolutions très rapides.

❑ Dans le **chapitre 4**, la méthode d'analyse simplifiée est implémentée au code de calcul éléments finis SYSTUS par l'intermédiaire de son interface. Nous verrons d'ailleurs que certains éléments sont plus appropriés que d'autres pour l'utilisation de cette méthode. De plus, notre code est validé sur des structures bidimensionnelles (concentrations de contraintes) et tridimensionnelles ainsi que sur des structures de type coques minces avec courbure. L'intérêt de l'analyse simplifiée réside dans sa simplicité de mise en œuvre ainsi que dans sa réduction importante des temps de calculs par rapport aux méthodes traditionnelles.

Ce rapport se termine par une conclusion générale et une proposition de perspectives.

Rappels de la plasticité

Nomenclature

Lettres majuscules

C	Module d'écrouissage.	MPa $(N.mm^{-2})$
E	Déformation macroscopique (tenseur).	
E^{i}	Déformation initiale macroscopique (tenseur).	
E^{p}	Déformation plastique macroscopique (tenseur).	
$\dot{E}^{p} = dE^{p}$	Vecteur accroissement des déformations plastiques.	s^{-1}
F^{d}	Force de surface	
I_1, I_2, I_3	Invariants du tenseur des contraintes.	
J_1, J_2, J_3	Invariants du tenseur déviateur des contraintes.	
S	Tenseur des déviateurs de contraintes.	MPa $(N.mm^{-2})$
U^{d}	Déplacements imposés	mm
V	Elément de volume.	
X^{d}	Force de volume	

Lettres minuscules.

f	Fonction de charge.	
k_0	Limite élastique de cisaillement.	MPa $(N.mm^{-2})$
k_v, k_T	Limite élastique de cisaillement de Von Mises et de Tresca.	MPa $(N.mm^{-2})$
s	Seuil.	
t	Temps.	s
$y = \lfloor y_\alpha \quad y_\beta \quad y_\gamma \rfloor^T$	Paramètre interne.	

Lettres majuscules grecques.

Σ^{*}	Tenseur virtuel des contraintes.	MPa $(N.mm^{-2})$
Σ	Tenseur des contraintes.	MPa $(N.mm^{-2})$
$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$	Contraintes principales.	MPa $(N.mm^{-2})$

Lettres minuscules grecques.

ε^{p}	Déformation plastique microscopique.	
$\chi = [\alpha \quad \beta \quad \gamma]^{T}$	Déplacements inélastiques locaux.	mm
ρ	Paramètre d'écrouissage isotrope.	
$\sigma = [\sigma_{\alpha} \quad \sigma_{\beta} \quad \sigma_{\gamma}]^{T}$	Contraintes locales associées à chacune des déformations inélastiques locales.	MPa ($N.mm^{-2}$)

Exposants et indices

$\ldots^{-1}$	Inverse de ...
$\ldots^{T}$	Transposé de ...
$\ldots_{max}$	Maximal.

Notations

tr	Trace d'un tenseur d'ordre 2	$tr\sigma = \sum_{i} \sigma_{ii}$.

CHAPITRE 1.
RAPPELS DE LA PLASTICITE

1.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à un rappel non exhaustif de la théorie de plasticité ce qui va permettre le choix des hypothèses nécessaires à notre étude (critère de plasticité, type d'écrouissage du matériau, ...). On suppose une loi de comportement élastoplastique faisant intervenir les déformations non élastiques, et une loi d'écoulement plastique déduite du principe du travail plastique maximal de Hill **[Hill50]**. De plus, nous nous limiterons aux hypothèses des petites perturbations.

Toute l'étude sera basée sur des chargements quasi-statiques (les effets dynamiques seront négligés). La structure de volume fini V et de surface S_V (décomposée en deux parties complémentaires S_F et S_U avec $S_F \cup S_U = S_V$ et $S_F \cap S_U = \emptyset$) est soumise au chargement suivant à chaque instant t (figure 1.1.) :

- ✓ Des forces de volume $X^d(t)$ dans V.
- ✓ Des déformations initiales $E^I(t)$ dans V.
- ✓ Des forces de surface $F^d(t)$ sur S_F.
- ✓ Des déplacements imposés $U^d(t)$ sur S_U.

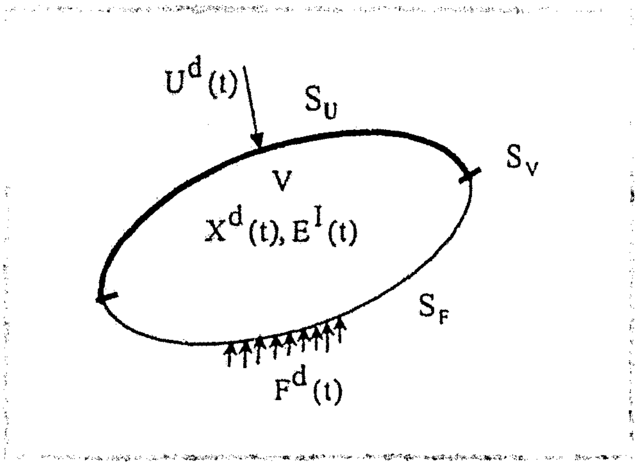


Figure 1.1. Chargement de la structure

1.2. Surface de charge – Définition.

Considérons un volume élémentaire de matière soumis à une sollicitation quelconque associée à un tenseur des contraintes Σ. La théorie générale de la plasticité suppose l'existence d'une fonction scalaire $f(\Sigma, y)$ telle que :

- ✓ $f(\Sigma, y) < 0$ correspond au domaine élastique $dE^p = 0$.
- ✓ $f(\Sigma, y) = 0$ peut correspondre à l'apparition des déformations plastiques $dE^p \neq 0$.
- ✓ $f(\Sigma, y) > 0$ correspond au domaine inaccessible par le matériau.

dE^p est l'accroissement des déformations plastiques. Les paramètres y, appelés paramètres internes mesurent l'ensemble des phénomènes irréversibles tel que l'écrouissage. Les $f(\Sigma, y)$ sont appelés fonctions de charge dans l'espace des contraintes et les surfaces définies par l'équation $f(\Sigma, y) = 0$ representent la surface de charge ou surface d'écoulement dans l'espace des contraintes.

1.3. Critères de plasticité

Le principe d'invariance impose que la frontière du domaine reste invariante par changement de repère. La fonction qui définie la surface de charge ne dépend donc que des invariants du tenseur de contraintes Σ :

$$f = f(I_1, I_2, I_3) \qquad (1.1.)$$

où I_1, I_2, I_3 sont les invariants scalaires du tenseur des contraintes.

$$I_1 = tr(\Sigma) = \Sigma_{ii} \qquad (1.2.)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} tr(\Sigma.\Sigma) = \frac{1}{2}(\Sigma_{ij}\Sigma_{ij}) \qquad (1.3.)$$

$$I_3 = \frac{1}{3} tr(\Sigma.\Sigma.\Sigma) = \frac{1}{3}(\Sigma_{ij}\Sigma_{jk}\Sigma_{ki}) \qquad (1.4.)$$

On admet généralement, pour certains types de matériaux, l'hypothèse d'incompressibilité plastique et par conséquent de l'indépendance du comportement vis à vis de la contrainte hydrostatique. La fonction f ne dépend alors que des invariants du déviateur des contraintes, c'est le cas de la plupart des matériaux métalliques, objet de cette étude. Dans ce cas, nous avons :

$$f = f(J_2, J_3) \tag{1.5.}$$

avec

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \tag{1.6.}$$

et

$$J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{ik} S_{jk} \tag{1.7.}$$

où J_2 et J_3 sont les second et troisième invariants scalaires du tenseur déviateur des contraintes S tel que :

$$S = \mathrm{dev}(\Sigma) = \Sigma - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\Sigma)I \tag{1.8.}$$

Nous nous limiterons à la présentation des deux critères les plus couramment rencontrés.

Remarque.

> *Dans les applications, c'est le critère de Von Mises qui reste le plus utilisé en raison de sa grande facilité d'emploi dans les calculs numériques. Le critère de Tresca est plus délicat d'utilisation en raison des discontinuités de normale à la surface.*

1.3.1. Critère de Tresca

Tresca a postulé que la plastification se produit en un point du matériau lorsque la contrainte de cisaillement maximale en ce point atteint une valeur critique.

En terme des contraintes principales, ce critère (1868) peut s'exprimer par :

$$\max\left[|\Sigma_1 - \Sigma_2|, |\Sigma_2 - \Sigma_3|, |\Sigma_3 - \Sigma_1|\right] = 2k_T \qquad (1.9.)$$

où k_T est la contrainte de cisaillement limite uniaxiale du matériau. Σ_1, Σ_2 et Σ_3 sont les contraintes principales.

Dans l'espace des contraintes principales, ce critère est représenté par un prisme droit (figure 1.2.) à la base hexagonale dont l'axe est la trisectrice du repère. Il est inscrit dans le cylindre de Von Mises.

1.3.2. Critère de Von Mises

Le critère de Von Mises (1913) est indépendant du troisième invariant en plus de la contrainte hydrostatique.

La fonction s'écrit :

$$f = J_2 - k_v^2 = 0 \qquad (1.10.)$$

avec k_v contrainte de cisaillement limite du matériau.

En termes de contraintes principales, le critère se met sous la forme :

$$f = \frac{1}{6}\left[(\Sigma_1 - \Sigma_2)^2 + (\Sigma_2 - \Sigma_3)^2 + (\Sigma_3 - \Sigma_1)^2\right] - k_v^2 = 0 \qquad (1.11.)$$

La limite à la traction simple est égale à $\sigma_0 = \sqrt{3}k_v$. On notera désormais $k_v = k_0$.

Dans l'espace des contraintes principales l'équation (1.11.) représente une surface cylindrique circulaire dont l'axe coïncide avec l'axe hydrostatique (figure 1.3.).

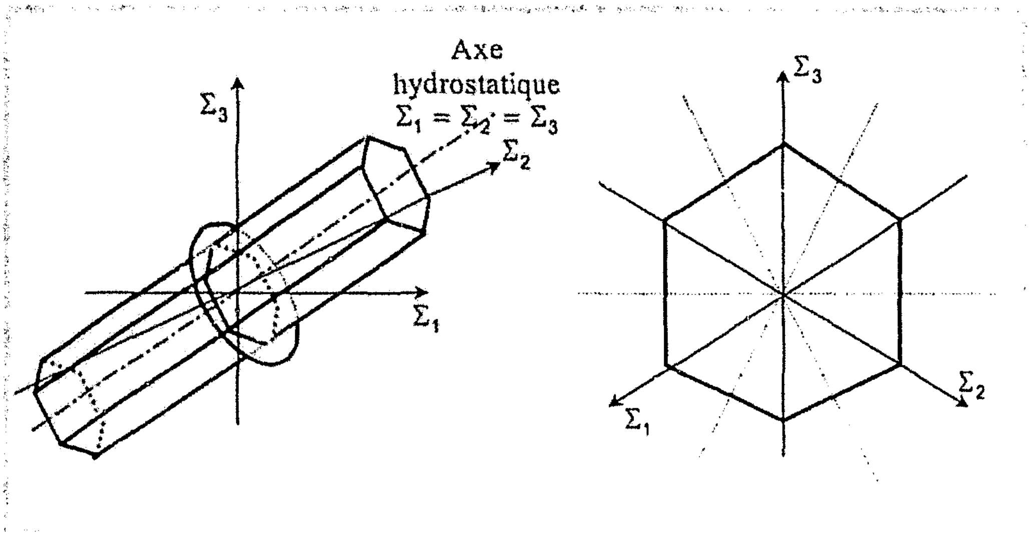


Figure 1.2. Représentation du critère de Tresca.

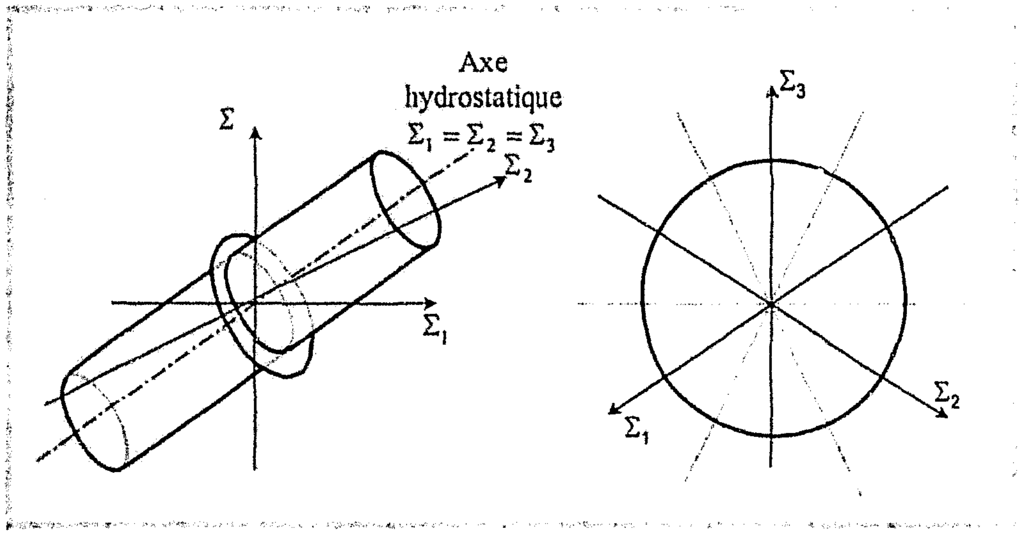


Figure 1.3. Représentation du critère de Von Mises.

1.4. Ecrouissage

A partir des considérations générales sur le comportement des matériaux inélastiques, Halphen et Drucker **[Halphen75]** ont introduit une définition générale d'un matériau écrouissable stable dit standard.

Les schémas simples d'évolution les plus couramment évoqués sont :

1.4.1. L'écrouissage isotrope

Le modèle de Taylor (1931) considère une simple dilatation homothétique de la surface de charge (figure 1.4.) par rapport à l'origine. Il est très utilisé pour sa simplicité et sa bonne représentativité dans le cas du chargement radial c'est-à-dire lorsque le vecteur représentatif des contraintes dans l'espace des contraintes garde une direction constante.

L'évolution de la surface de charge est gouvernée par une seule variable scalaire ρ. La fonction de charge associée au critère de Von Mises, s'exprime sous la forme :

$$f(\Sigma,\rho) = J_2 - k_c(\rho) \qquad (1.12.)$$

1.4.2. L'écrouissage cinématique linéaire

Dans ce cas, il y aura une simple translation de la surface de charge, sans rotation ni déformation. La variable d'écrouissage y est de nature tensorielle, elle indique la position actuelle de la surface de charge (associée au critère de Von Mises) :

$$f(\Sigma, y) = f(\Sigma - y) - k_e \qquad (1.13.)$$

Le modèle de Prager **[Prager55]** énonce que les frontières successives se déduisent de la frontière initiale par translation dans l'espace des contraintes. Ainsi, il a proposé :

$$y = CE^p \qquad (1.14.)$$

comme centre de la surface de charge obtenue après translation, dans l'espace des déviateurs des contraintes (figure 1.5.). C est appelé module d'écrouissage.

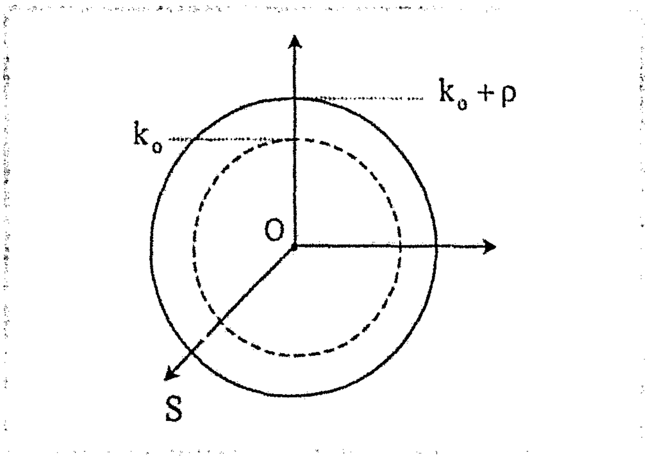


Figure 1.4. Ecrouissage isotrope dans l'espace des déviateurs de contraintes.

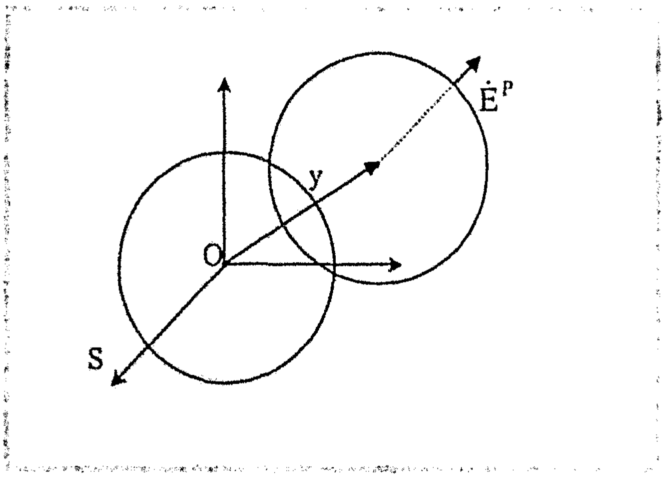


Figure 1.5. Ecrouissage cinématique dans l'espace des déviateurs de contrainte.

Remarque

*Les deux modèles ci-dessus ne sont que des approximations du comportement réel des métaux. Des modèles plus complexes combinant les deux types d'écrouissage ou proposant des lois d'évolution des paramètres plus sophistiqués, ont été proposés par de nombreux auteurs. On trouvera notamment dans **[Drucker62]**, d'autres modèles d'écrouissage.*

1.5. Modèles

En plasticité théorique, pour des raisons de commodité de calcul, les comportements ductiles des métaux sont généralement remplacés par des schémas simples (figure 1.6.). Ceux qui nous intéressent particulièrement, dans un premier temps, sont :

- ✓ (a) Modèle élastique parfaitement plastique.
- ✓ (b) Modèle élasto-plastique à écrouissage linéaire.
- ✓ (c) Modèle rigide-plastique.
- ✓ (d) Modèle rigide élastique à écrouissage linéaire.

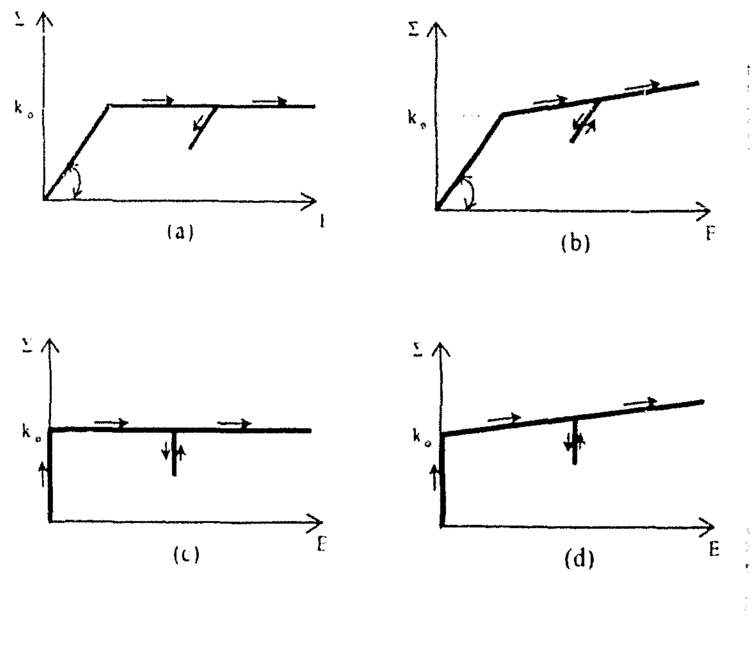


Figure 1.6. Divers comportements.

1.6. Aspect du comportement plastique

Plusieurs approches ont été proposées afin de modéliser le comportement des matériaux.

1.6.1. Approche phénoménologique

Il s'agit de définir des expressions mathématiques qui puissent être susceptibles de conduire à une représentation mathématique des comportements observés expérimentalement durant les chargements uniaxiaux, les chargements multiaxiaux monotones radiaux ou cycliques : comportement élastique réversible, comportement inélastique, limite élastique, écrouissage, radoucissement, fluage, relaxation, adaptation, accommodation, rochet, rupture, fatigue, ...

Les principaux aspects à retenir concernent le domaine élastique défini dans l'espace des contraintes (un domaine à l'intérieur duquel il n'y a pas de variation des déformations inélastiques) et les règles d'écoulement qui traduisent les évolutions de ces déformations inélastiques quand on quitte le domaine élastique.

1.6.2. Approche physique

Dans cette approche, il est recherché tout d'abord le comportement des matériaux à l'échelle microscopique pour en revenir ensuite par homogénéisation à l'échelle macroscopique.

1.6.3. Approche de J. Zarka

La signification physique exacte du modèle n'est plus recherchée. Certains travaux permettent de supposer qu'il existe à l'échelle locale microscopique des mécanismes inélastiques élémentaires sources des déformations plastiques (instantanées irréversibles avec seuil), des déformations visqueuses (différées sans seuil) et des déformations viscoplastiques (différées avec seuil), reliés entre eux par une matrice élastique linéaire.

Ces comportements sont représentés par les modèles rhéologiques **[Zarka90]** suivants (figure 1.7.) :

✓ (a) Le ressort (élasticité linéaire). La charge σ est liée à l'élongation e du ressort de raideur k suivant $\sigma = k.e$.

✓ (b) L'amortisseur est représentatif du comportement visqueux. On a $\dot{\beta} = \sigma_\beta/\eta$ et $\beta = 0$ si $\sigma_\beta = 0$ avec η qui représente le facteur d'amortissement. β caractérise le déplacement de l'amortisseur et enfin σ_β est la charge appliquée.

✓ (c) Les déformations permanentes se produisent à partir d'un seuil de plasticité s. La plasticité parfaite correspond au cas théorique où il n'y a ni viscosité ni écrouissage. Le modèle en est fourni par le patin. α est le déplacement du patin. On aura $-s \le \sigma_r \le +s$ et $\varepsilon = \varepsilon^p = \alpha$.

✓ (d) L'assemblage en parallèle d'un patin et d'un amortisseur permet de modéliser un comportement viscoplastique (Modèle de Norton). Les déplacements respectifs α et β du patin et de l'amortisseur sont constamment identiques et sont notés γ. σ_γ représente la charge appliquée sur le système. σ_α et σ_β représentent les contraintes existantes respectivement dans le patin et de l'amortisseur. On aura $\sigma_\gamma = \sigma_\alpha + \sigma_\gamma$ avec $\sigma_\alpha \in [-s,+s]$ et $\sigma_\beta = \eta\dot{\beta} = \eta\dot{\gamma}$.

✓ Un patin couplé à deux éléments ressorts permet de modéliser le comportement plastique à écrouissage cinématique linéaire (figure 1.8.). Le premier ressort est en parallèle avec le patin. Le déplacement α du patin est suffisant pour caractériser l'état de l'assemblage. La contrainte locale au niveau du patin peut s'écrire $\sigma_\alpha = \Sigma - h\alpha$ ou encore $\sigma_\alpha = A_\alpha\Sigma - y_\alpha$ avec $A_\alpha = 1$ et $y_\alpha = h\alpha$.

- Critère de plasticité : $|\sigma_\alpha| \le s$.
- Loi d'évolution (figure 1.9.a.) : $\dot{\alpha}$ est normale extérieure au convexe d'élasticité $C_0 = [-s; s]$. L'évolution du système est donné par :

$$\dot{\alpha} \in \partial\varphi_{C_0(\sigma_\alpha)} \; avec \; \sigma_\alpha \in C_0$$

- Cette loi d'évolution peut encore s'écrire $\dot{\alpha} \in -\partial\varphi_{y_\alpha(\Sigma)}$

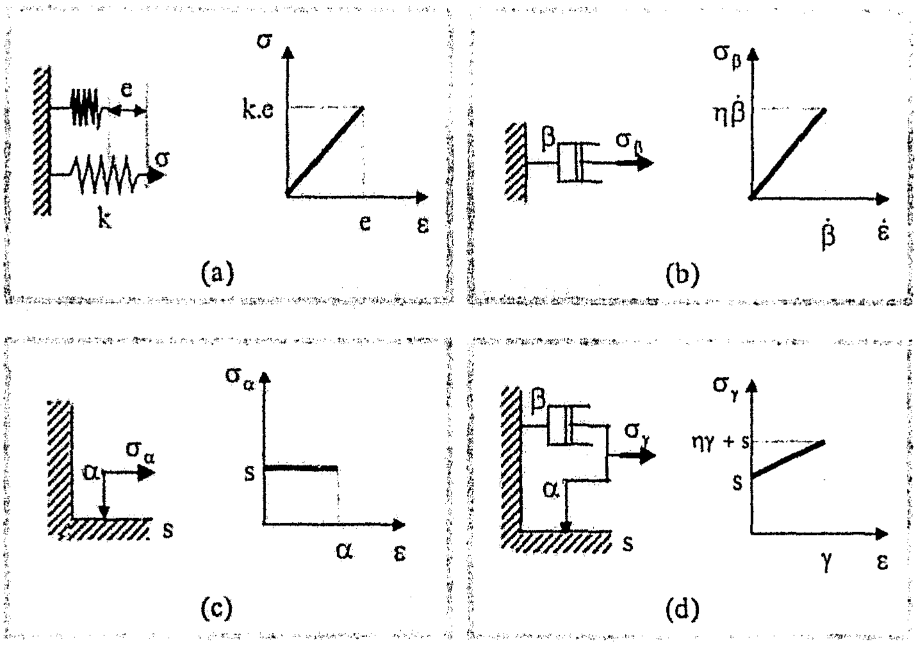


Figure 1.7. Différents types de modèles rhéologiques et leur loi de comportement associée.

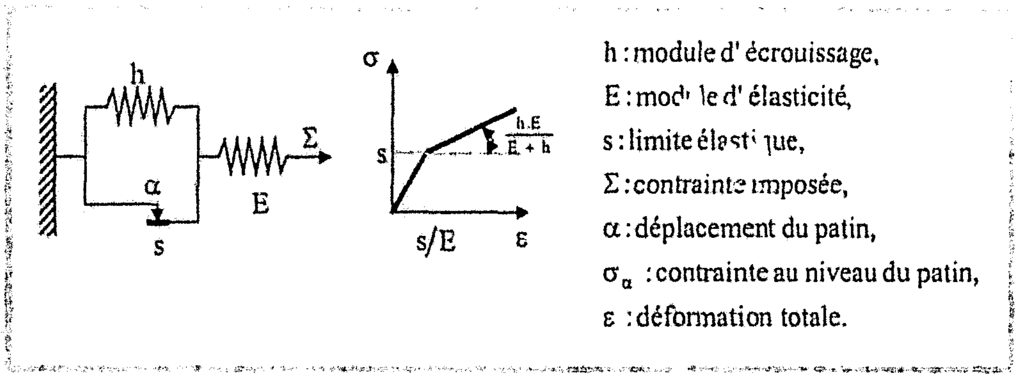


Figure 1.8. Modèle à écrouissage cinématique linéaire.

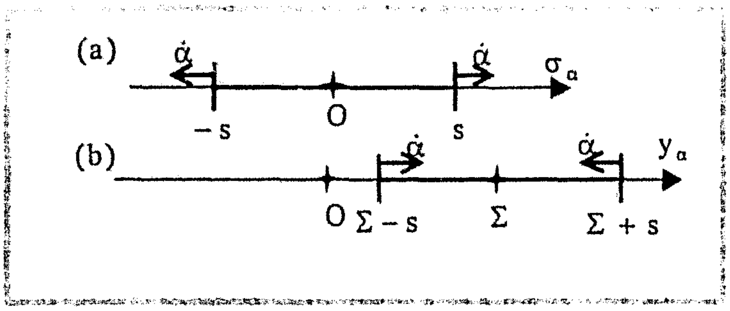


Figure 1.9. Lois d'évolution

1.7. Matériau élastoplastique

Nous allons nous intéresser particulièrement aux types de matériaux introduits par Halphen et Nguyen **[Halphen75]** : les *Matériaux Standards Généralisés* (MSG) qui satisfont au :

1.7.1. Postulat de Drucker

La stabilité du matériau s'énonce de la façon suivante :
« *Le travail accompli lors d'un cycle de charge fermé* » (figure 1.11.) « *et complet quelconque est non négatif.* » **[Drucker64]**.

A partir du comportement des matériaux inélastiques, Drucker **[Drucker64]** a présenté une définition générale d'un matériau écrouissable stable dit standard. La figure 1.10. illustre les différents comportements de matériaux inélastiques. Au sens de Drucker, le matériau (a) est stable car soumis à l'incrément de contrainte $\Delta\Sigma$, il fournit le travail ($\Delta\Sigma.\Delta E$) positif. Les matériaux (b) et (c) sont considérés comme instables car le travail est négatif.

1.7.2. Principe du travail plastique maximal

Du postulat de Drucker, il vient :

$$(\Sigma_{ij} - \Sigma^*_{ij}).dE^p_{ij} \geq 0 \qquad (1.15.)$$

avec Σ^*_{ij} contrainte virtuelle telle que $f(\Sigma^*_{ij}) < 0$.
L'inégalité (1.15) est encore appelée principe de Hill du travail maximum **[Hill50]**.

Si l'on choisit A et B infiniment proches (figure 1.11.) alors :

$$d\Sigma_{ij}.dE^p_{ij} \geq 0 \qquad (1.16.)$$

Cette inégalité est appelée condition d'unicité car elle a pour conséquence l'unicité des solutions plastiques au sens incrémental.

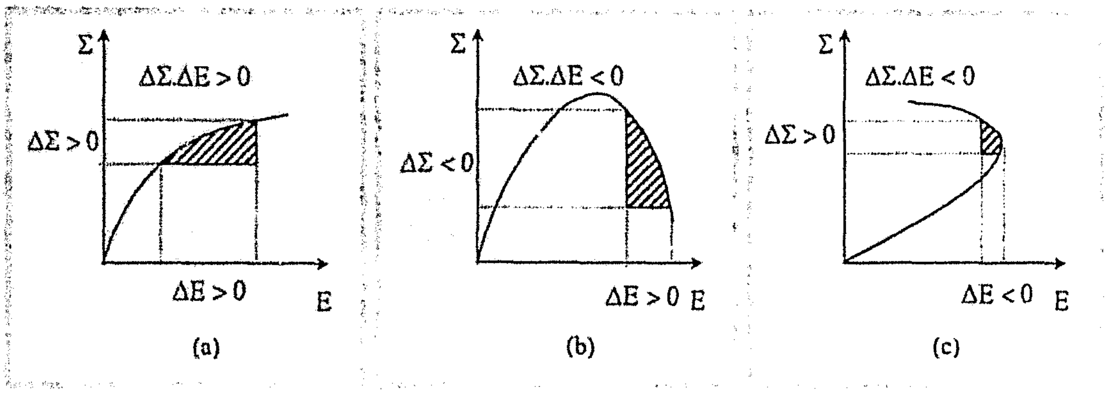


Figure 1.10. Hypothèses de stabilité des matériaux écrouissables.

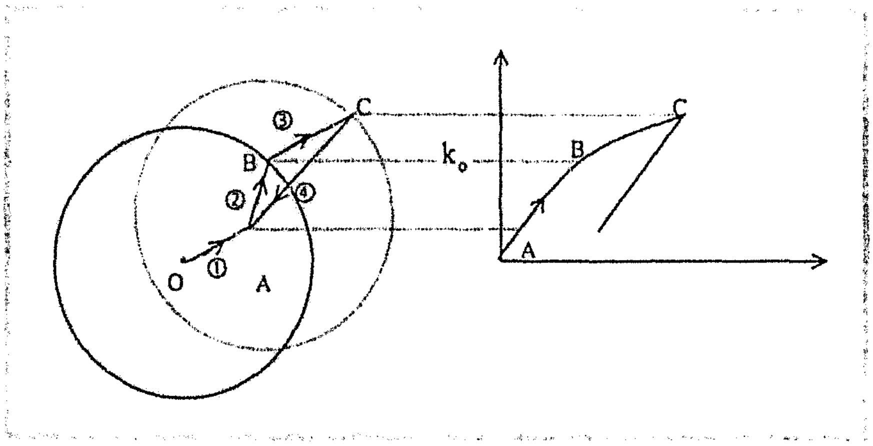


Figure 1.11. Cycle de charge fermé dans l'espace des contraintes.

Les inégalités précédentes entraînent :

✓ La normalité. Le vecteur d'accroissement des déformations plastiques est normal à la surface de charge et est dirigé vers l'extérieur de cette surface **[Mandel78]**.

$$dE^{p}_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \Sigma_{ij}} \qquad (1.17.)$$

avec $d\lambda \geq 0$ facteur de proportionnalité.

✓ La convexité. La surface de charge $f = 0$ est convexe (figure 1.12.).

Définition de la convexité.

> *Un ensemble K sera dit convexe si, pour tout couple* (x_1, x_2), *le segment* $[x_1, x_2]$ *est inclus dans K.*

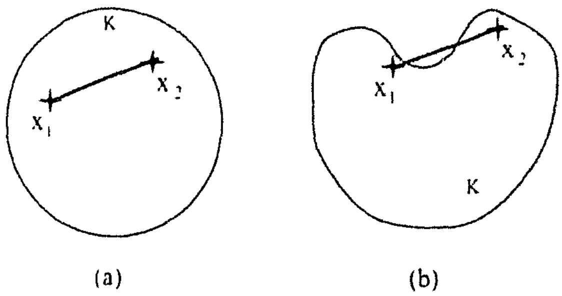


Figure 1.12. Ensemble convexe (a) et non convexe (b).

Il en résulte qu'une fonction F est convexe si l'inégalité est satisfaite :

$$\forall x_1, x_2 \quad \forall \Lambda \in [0,1] \quad F(\Lambda x_1 + (1-\Lambda)x_2) \leq \Lambda F(x_1) + (1-\Lambda)F(x_2) \qquad (1.18.)$$

1.8. Etats limites du MSG sous chargement cyclique

D'une manière générale, pour l'état asymptotique (figure 1.13) d'une structure soumise à un chargement cyclique, on peut avoir :

✓ (a) Adaptation (*Elastic shakedown*). La réponse de la structure devient purement élastique. Les champs des contraintes résiduelles et des déformations plastiques tendent vers une limite constante qui dépend des conditions initiales.

Selon Debordes et Nayroles (1976) « *l'adaptation d'une structure élastoplastique est le phénomène qui consiste en l'établissement d'un champ de contraintes résiduelles tel que les variations des sollicitations ne provoquent plus que des déformations élastiques* ».

✓ (b) Accommodation (*Plastic shakedown*). La réponse globale en contrainte et déformation devient périodique. Dans ce type de comportement les déformations plastiques restent bornées mais varient périodiquement dans le temps.

✓ (c) Rochet élastoplastique (*Ratchetting*). La réponse de la structure est une augmentation incrémentale du champ de déformation plastique qui sera finalement la cause de la ruine de la structure par défaillance incrémentale.

Pour un matériau à écrouissage, il existe une grande variété de réponses à des sollicitations cycliques, que l'on travaille en contraintes imposées ou en déformations imposées (figure 1.14).

L'écrouissage cinématique linéaire ne permet pas de décrire correctement les effets de rochet ou de relaxation de la contrainte moyenne en chargement cyclique **[Lemaître85, Francois92]**. Halphen a démontré l'existence d'une solution périodique en contraintes et en déformations. Donc dans ce cas, la structure est soit accommodée, soit adaptée. Ce modèle tient compte de l'effet de Bauschinger.

Quant à l'écrouissage isotrope (modèle de Prandtl et Reuss), les seuls cycles stabilisés auxquels il peut conduire à contrainte imposée, sont complètement adaptés sans écoulement plastique. En déformation imposée, la stabilisation se produit suivant un cycle parfaitement plastique **[Lemaître85, Francois92]** (figure 1.14).

Pour décrire l'effet de rochet, un modèle d'écrouissage cinématique non linéaire peut être utilisé en contrainte imposée.

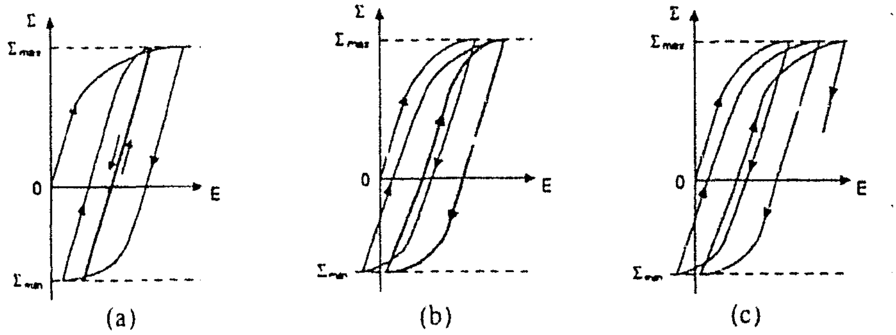


Figure 1.13. Etats limites d'une structure.

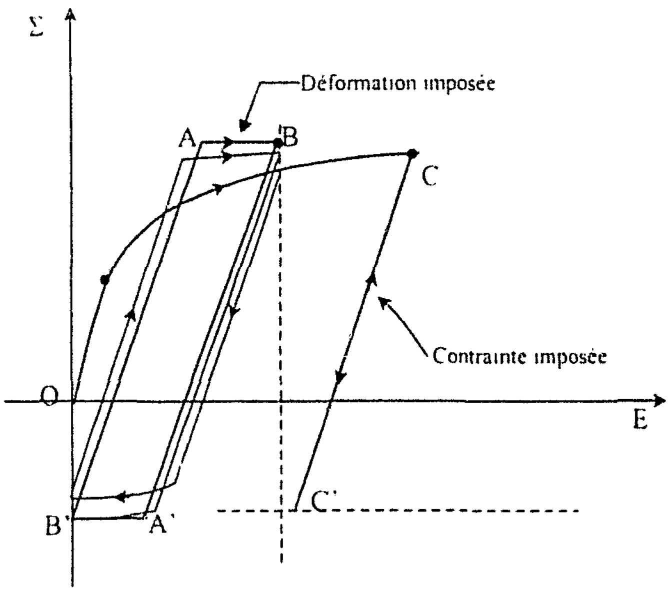


Figure 1.14. Comportement cyclique avec un modèle à écrouissage isotrope

Conclusion du chapitre 1

Cette partie bibliographique est consacrée aux rappels de plasticité en prenant en compte l'écrouissage et à l'analyse du comportement des structures soumises à un chargement cyclique radial.

Nous avons donc présenté de manière non exhaustif, les critères de plasticité et les écrouissages les plus couramment évoqués. De plus, nous avons décrit les divers schémas pour modéliser les comportements des matériaux métalliques et les différentes approches pour représenter ces comportements. Nous avons particulièrement développé les modèles rhéologiques et leurs assemblages.

Ensuite, nous nous sommes intéressé au matériau élastoplastique de type standard généralisé. Nous avons détaillé pour ce matériau, les règles de stabilité (postulat de Drucker), de travail plastique maximal de Hill, de normalité et de convexité.

Enfin, nous avons illustrer les comportements limites (adaptation, accommodation et effet de Rochet) possibles d'une structure chargée cycliquement.

Nous allons dans le chapitre suivant, passer en revue certaines méthodes de détermination de ces états limites.

Les différentes méthodes asymptotiques

Nomenclature

Lettres majuscules

$D(\dot{E}^p)$	Dissipation plastique.	
E	Tenseur des déformations.	
E^{el}	Tenseur des déformations élastiques.	
$\dot{E}^p = dE^p$	Vecteur accroissement des déformations plastiques.	s^{-1}
F^d	Forces de surface.	
M	Matrice d'élasticité.	MPa ($N.mm^{-2}$)
R	Tenseur des contraintes résiduelles.	MPa ($N.mm^{-2}$)
$\overline{R}$	Contraintes résiduelles auto-équilibrées.	MPa ($N.mm^{-2}$)
S	Tenseur des déviateurs de contraintes.	MPa ($N.mm^{-2}$)
S^{el}	Tenseur des déviateurs de contraintes élastiques.	MPa ($N.mm^{-2}$)
U	Vecteur des déplacements.	mm
U^d	Déplacements imposés.	mm
V	Elément de volume.	
W_p	Travail plastique.	
X^d	Forces de volume.	
Y_i	Paramètre transformé de la structure.	

Lettres minuscules.

f	Fonction de charge.	
k_0	Limite élastique de cisaillement.	MPa ($N.mm^{-2}$)
n	Normale sortante.	
m	Facteur de charge.	
t	Temps.	s
$y = [y_\alpha \quad y_\beta \quad y_\gamma]^T$	Paramètre interne.	

Lettres majuscules grecques.

Σ	Tenseur des contraintes.	MPa ($N.mm^{-2}$)
Σ^{el}	Tenseur des contraintes élastiques.	MPa ($N.mm^{-2}$)

Lettres minuscules grecques.

β	Facteur de sécurité.	
σ_y	Seuil de plasticité.	MPa ($N.mm^{-2}$)

Exposants et indices

$...^T$	Transposé de ...
$..._{max}$, $..._{min}$	Maximal, minimal.

Notations

CA, SA, PA	Resp. Cinématiquement, Statiquement et Plastiquement Admissible.
div	Divergence.

CHAPITRE 2.
METHODES DE CALCULS ASYMPTOTIQUES

2.1. Introduction

Différentes méthodes de détermination de l'état limite et la charge de ruine d'une structure, existent.

Parmi elles, nous pouvons citer :

- ✓ L'analyse limite permet d'étudier l'état de ruine plastique des structures de forme quelconques, soumises uniquement à des charges proportionnelles,
- ✓ La théorie d'adaptation est plus connue sous le terme de *shakedown* et qui étudie les conditions de ruine d'une structure sous charges variables.
- ✓ Les méthodes dites incrémentales qui restent applicable dans tous les cas, mais nécessite à la fois :
  - Une connaissance de l'histoire du trajet de chargement,
  - Un calcul itératif des déformations et contraintes à chaque pas de chargement,
  - De tester l'existence d'un état limite de la structure.
- ✓ Les méthodes de résolution simplifiée qui permettent de déterminer des bornes pour le champ de déformation ou l'état de contrainte d'une structure au bout d'un temps donné, ou des bornes de l'état limite de cette structure sous chargement cyclique, à partir d'un minimum de calculs, de préférence élastiques linéaires.
- ✓ L'analyse simplifiée que nous verrons plus en détail au chapitre suivant.

Ces méthodes sont développées dans les paragraphes suivants, après quelques définitions nécessaires à leur compréhension.

2.2. Généralités et définitions

2.2.1. Les contraintes résiduelles

On définit les contraintes résiduelles comme étant des contraintes qui règnent dans une structure en l'absence de tout chargement extérieur. Elles ont été pendant très longtemps considérées comme ayant un effet néfaste (responsables des fissures produites lors d'une trempe ou d'une rectification ou des ruptures prématurées en fatigue). Il a fallu attendre 1929 pour voir changer ce point de vue grâce aux travaux de Föppel qui montrent que les contraintes résiduelles, induites par écrouissage de surface d'une pièce, par exemple, permettent d'augmenter la limite d'endurance, de cette dernière, en fatigue **[Horger60]**.

Les contraintes résiduelles peuvent avoir plusieurs origines : les procédés de fabrication, d'élaboration, de traitements thermiques, ... Les sollicitations extérieures, en fonction du comportement de la structure et du niveau des contraintes, peuvent aussi générer des contraintes résiduelles lors du déchargement de la structure.

Dans le cadre des petites perturbations, le tenseur des déformations est définit comme la partie symétrique linéaire du gradient de déplacement :

$$E(t) = \frac{1}{2}[\text{grad } U(t) + (\text{grad } U(t))^T] \qquad (2.1.)$$

Les contraintes résiduelles se mettent sous la forme suivante :

$$R_{ij}(t) = \Sigma_{ij}(t) - \Sigma_{ij}^{el}(t) \qquad (2.2.)$$

On dit qu'elles sont auto-équilibrées c'est-à-dire qu'elles satisfont les équations :

$$\text{div } R_{ij} = 0 \textit{ en tout point du domaine} \qquad (2.3.)$$

$$R_{ij}.n_j = 0 \textit{ sur la surface extérieure} \qquad (2.4.)$$

2.2.2. Caractéristiques des champs

Un champ de déplacement est dit cinématiquement admissible (CA) s'il vérifie les conditions imposées en déplacements sur la partie S_U de la surface :

$$U = U^d \tag{2.5.}$$

Un champ de contrainte est dit statiquement admissible (SA) s'il vérifie les équations d'équilibre (n étant le vecteur normal unitaire, externe à la surface S_V) :

$$\mathrm{div}\Sigma(t) + X^d(t) = 0 \text{ dans } V \tag{2.6.}$$

$$\Sigma(t).n = F^d(t) \text{ sur } S_F \tag{2.7.}$$

Un champ de contrainte plastiquement admissible (PA) est un champ continu et dérivable qui ne viole pas le critère de plasticité c'est-à-dire $f(\Sigma) \leq 0$.

Remarque

> *Un champ de contrainte SA et PA sera dit licite.*

2.3. Théorèmes fondamentaux de l'analyse limite

L'idée de base de cette méthode est d'obtenir directement la charge de ruine sans passer par un processus de développement des déformations plastiques jusqu'à la ruine.

2.3.1. Historique

Les théorèmes sur la ruine plastique ont été développés par Kazinczy (1914) et Kist (1917). Leur démonstration et leur formulation sous la forme actuelle sont dues à Hill **[Hill50]**, Drucker, Greenberg & Prager **[Prager55]**. Les applications de ces théorèmes sont nombreuses et on peut mentionner en particulier l'ouvrage de synthèse de Massonnet & Save **[Save97]**.

D'autres travaux ont permis d'intégrer l'analyse limite aux méthode des éléments finis. Nous pouvons citer les travaux de Neal **[Neal50]**, Hodge & Belytschko **[Hodge68]**, Maier **[Maier70]**, Nguyen **[Nguyen76]** et encore d'autres auteurs.

Récemment une analyse limite simplifiée de la borne inférieure, appelée méthode de compensation élastique, a été développée par Mackenzie & Boyle **[Mackenzie94]**, Ponter (1995), Shi et al. (1996). L'idée est de modifier le module de Young de chaque élément durant le calcul linéaire élastique par éléments finis afin d'obtenir une optimisation du champ de contrainte statiquement admissible.

2.3.2. Remarque

Si l'on ne s'intéresse qu'à ce qui se passe à l'état limite, on peut montrer que le chargement limite du système élastique parfaitement plastique est le même que celui du système rigide plastique de même seuil pourvu que l'on puisse négliger les changements de géométrie avant rupture **[Salençon79]**.

2.3.3. Facteur de charge

Considérons un volume V fait d'un matériau élastique- ou rigide-parfaitement-plastique soumis à des charges radiales. On suppose que la structure est initialement en équilibre avec des forces de référence de volume X_i^o et de surface F_i^o **[Bui98, Nguyen84]** :

$$\begin{cases} X_i^d = mX_i^o \\ F_i^d = mF_i^o \end{cases} \qquad (2.8.)$$

Le coefficient m est appelé multiplicateur de charge ou facteur de charge.

Quand m est suffisamment grand, un certain nombre de régions du solide se plastifient car le critère de plasticité est atteint dans ces régions. Au fur et à mesure que m s'accroît, les régions plastiques s'élargissent, se rejoignent et les régions rigides ne peuvent plus empêcher la formation d'un mécanisme de ruine. Alors on a un état d'écoulement très grand caractérisé par des déformations plastiques très grandes sous chargement constant. La charge correspondante à cet état est appelé la charge de ruine ou la charge limite.

2.3.4. Analyse limite

A partir des principes variationnels, nous pouvons évaluer les multiplicateurs limites de charge grâce aux théorèmes de la borne supérieure (cinématique) et de la borne inférieure (statique).

2.3.4.1. Théorème de la borne inférieure ou théorème statique

> *« Le multiplicateur de charge m^s correspondant à tout état de contraintes licites est inférieur à la solution exacte m correspondant à la ruine ».*

On peut donc déduire :

$$m \geq m^s \tag{2.9.}$$

2.3.4.2. Théorème de la borne supérieure ou théorème cinématique

> *« Le multiplicateur de charge m^c correspondant à l'ensemble de champs de déplacements U CA, est supérieur à la solution exacte m correspondant à la ruine ».*

On peut donc déduire de la même façon :

$$m^c \geq m \tag{2.10.}$$

On peut aussi énoncer le théorème combiné suivant :

> *« Si nous pouvons trouver un champ de contraintes licite et si le champ de vitesses de déformations associé par la loi d'écoulement l'est aussi, alors le multiplicateur limite obtenu constitue la solution exacte ».*

$$m^s = m^c = m \tag{2.11.}$$

2.3.5. *Analyse limite élastoplastique*

Soit le travail plastique [**Kaliszky96**] :

$$W_p = \frac{1}{2}\int_V M_{ijkl} R_{ij} R_{kl} dV - W_{po} \leq 0 \qquad (2.12.)$$

avec M_{ijkl} le tenseur élastique et W_{po} une limite admissible choisie afin d'anticiper à d'éventuelles déformations plastiques excessives.

La solution de ce problème dépend de la charge limite élasto-plastique m_{ep} et de la distribution de champ d'auto-contrainte R_{ij}. Il existe deux cas :

- ✓ Si $W_{po} = 0$ alors $R_{ij} = 0$ et la solution donne la charge limite élastique m_e. Si $m \leq m_e$ seules des déformations élastiques se développent dans le corps.
- ✓ Si $W_{po} \mapsto \infty$ alors la solution provient de la charge limite plastique m_p. Si $m \leq m_p$, les contraintes se maintiennent en équilibre. On aura : $m_e \leq m_{ep} \leq m_p$.

La théorie d'adaptation considérée comme une généralisation de l'analyse limite, permet de caractériser la charge limite ou la charge potentiellement supportable par une structure soumise à une histoire de charges variables, évoluant entre des limites prescrites.

2.4. Théorie de l'adaptation

La théorie d'adaptation permet de prévoir la non-défaillance des structures sous chargements variables, indépendamment des conditions initiales et de plus, en ne possédant qu'une information minimale sur le trajet de chargement lui-même.

2.4.1. *Historique*

Depuis Bleich (1932) [**Bleich32**], l'étude des structures élastoplastiques sous chargements variables a connu d'importants développements. Melan (1936) [**Melan36**] est le premier a avoir donné une appréhension générale du phénomène d'adaptation sous forme d'un théorème statique avec le concept de champ de contraintes résiduelles indépendant du temps. Les démonstrations de ce théorème n'ont été donné que plus tard par Symonds et Prager (1950) [**Symonds50**], par Symonds (1951) [**Symonds51**] et par Koiter (1952) [**Koiter52**].

L'approche cinématique et le concept fondamental de l'incrément de déformation plastiquement admissible ont été introduits par Koiter **[Koiter60]** et développés par Neal (1956), Gokhfeld (1966) et enfin Sawczuk (1969).

Une formulation améliorée incluant le facteur de charge a été proposée par Martin (1975). Le théorème fondamental de l'adaptation peut être généralisé dans le cas des structures élastoplastiques soumises à des cycles quelconques de charge **[Symonds50]**, de températures **[Prager55]**, incluant les effets dynamiques **[Corradi73, Corigliano95]**, les effets géométriques **[Weichert86, Tritsch93]**, l'endommagement **[Hachemi94, Druyanov98]**.

L'effet de l'écrouissage cinématique a été étudié en premier par Melan (1977) **[Mandel77]** ou par Stein (1994) **[Stein94]** qui utilisent le modèle du matériau standard généralisé développé par Halphen (1975) **[Halphen75]**.

2.4.2. Condition d'adaptation plastique

On dit que la structure s'adapte si :

- ✓ Les déformations tendent vers une limite constante sous un chargement donné
- ✓ Le travail de déformation plastique $\int_0^t dt \int_V \Sigma : \dot{E}^p dV$ reste borné et tend vers une limite constante lorsque $t \mapsto \infty$.

2.4.3. Théorème fondamental d'adaptation

C'est le théorème de Melan ou théorème de la borne inférieure ou encore théorème statique.

L'adaptation a lieu au niveau de chargement m si et seulement si à ce niveau, il existe un champ de contrainte résiduelle $\overline{R}_{ij}$ associé indépendant du temps, tel que :

$$\Sigma_{ij}^{s}(t) = \Sigma_{ij}^{el}(t) + \overline{R}_{ij} \qquad (2.13.)$$

satisfait l'inégalité stricte $f(\Sigma_{ij}^{s}) < 0$. $\Sigma_{ij}^{s}(t)$ est un champ de contrainte statiquement admissible et il satisfait (2.6) et (2.7). $\Sigma_{ij}^{el}(t)$ est un champ de contrainte élastique fictif.

2.4.4. Théorème cinématique

Il porte sur les champs de vitesses de déformations admissibles **[Koiter60]**.

On aura adaptation s'il existe $m > 1$ tel que pour tout trajet de chargement $\Sigma^{el}(t)$ et pour tout $\dot{E}^p_a$ admissible on ait :

$$m\int_0^T dt \int_V \Sigma^{el} : \dot{E}^p_a dV \leq \int_0^T dt \int_V D(\dot{E}^p_a) dV \qquad (2.14.)$$

$D(\dot{E}^p_a)$ étant la dissipation plastique associée à $\dot{E}^p_a$.

2.4.5. Adaptation avec prise en compte de l'écrouissage cinématique

L'adaptation pour ce cas sera formulée avec prise en compte du critère de Von Mises, de la façon suivante **[Stein94, König82]**.

Soit $\beta > 1$ un facteur de sécurité tel que :

$$f(\beta\Sigma^{el}(t) + y) \leq k_0^2 \qquad (2.15.)$$

avec y paramètre interne **[Zarka90]** et k_0 limite d'élasticité en cisaillement du matériau.

2.4.6. Fluctuation élastique

L'article référencé **[Mandel77]** introduit la notion de fluctuation de la contrainte élastique $\Sigma^{el}(x,t)$ en tout point x du volume V. Cette fluctuation est déterminée par la construction de la plus petite sphère (figure 2.1.) qui contient l'histoire entière du chargement élastique $S^{el}(x,t)$.

Dans l'espace des paramètres transformés, on aura pour une valeur fixe Y_i :

$$k^*(x) = \min_{Y_i} \max_{t\in[0,T]} \sqrt{\frac{1}{2}(S^{el}(x,t) - Y_i)^T (S^{el}(x,t) - Y_i)} \qquad (2.16.)$$

$k^*(x)$ est la fluctuation de la solution et c'est le rayon de la sphère circonscrite au trajet de chargement. Y_i est le paramètre transformé de la structure qui sera explicité plus en détail dans le chapitre 3.

✓ Si en tout point de la structure $k^*(x) \leq k_0$ alors la structure s'adapte.

✓ Par contre, s'il existe un seul point où $k^*(x) > k_0$ alors la structure s'accommode.

Ces conditions sont nécessaires dans le cas où le matériau est à écrouissage cinématique linéaire.

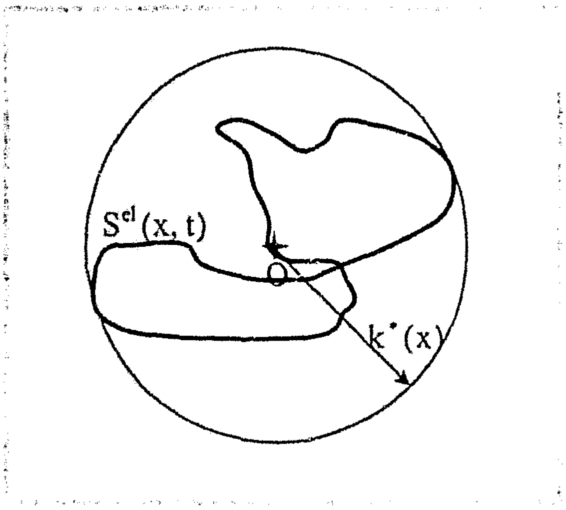


Figure 2.1. Construction géométrique de la fluctuation.

2.5. Conclusion sur ces méthodes

Un grand intérêt de ces théories est que leurs applications ne nécessitent pas la connaissance exacte du trajet de chargement de la structure étudiée mais seulement celle des limites entre lesquelles il peut varier.

L'analyse limite ne s'applique qu'aux chargements proportionnels, ce qui rend son utilisation limitée. Une extension a donc été proposée : la théorie d'adaptation dont les chargements peuvent être variables dans le temps.

D'autres méthodes plus classiques existent : les méthodes incrémentales qui nécessitent la connaissance de l'histoire du trajet de chargement.

2.6. Les méthodes incrémentales

La quasi-totalité des méthodes de résolution des problèmes non linéaires sont des méthodes incrémentales **[Ladevèze96]**. Le chargement ou plutôt l'intervalle de temps étudié [0,T] est décomposé en une succession d'intervalles généralement petits. L'histoire des différentes quantités étant connue jusqu'à l'instant t, on étudie un nouvel intervalle de temps $[t, t+\Delta t]$ où Δt est l'incrément.

2.6.1. Les différentes méthodes incrémentales utilisées

Les travaux de recherche récents sur les méthodes incrémentales sont extrêmement nombreux. On peut par exemple citer la méthode de résolution de Newton qui traite des problèmes non linéaires qui ne dépendent pas du temps **[Zienkiewicz91, Ladevèze96]**.

Les méthodes pas à pas qui permettent de suivre l'évolution de la structure étape par étape comme par exemple l'algorithme de Nguyen qui permet de déterminer la déformation plastique à l'aide d'une suite élastique et de projections élément par élément sur le convexe de plasticité **[L[illegible]hani90, Nguyen77]**.

L'idée de rechercher directement le cycle stabilisé d'une structure soumise à un chargement cyclique sans suivre l'histoire du chargement a été développée par Akel et Nguyen avec la méthode cyclique **[Akel89, Nguyen00]**. Le principe est de ne traiter itérativement qu'un cycle de chargement mécanique en séparant les étapes locale et globale. L'étape locale est répétée jusqu'à l'obtention de la périodicité des déformations plastiques.

On peut signaler aussi la méthode de sauts de cycles **[Saï93]** qui permet de déterminer l'état asymptotique de la structure considérée. Elle possède une vue plus générale sur les évolutions et permet donc de faire des analyses plus rapides, par rapport aux méthodes incrémentales traditionnelles, pour un nombre de cycles raisonnable.

2.6.2. Méthodes à Grands Incréments de Temps (MGIT)

Il existe de nombreux perfectionnements aux méthodes que nous avons décrites, comme par exemple les approches à grands incréments de temps qui diffèrent de la méthode incrémentale ou pas-à-pas car elles ne sont pas basée sur la notion d'incrément. Il s'agit de méthodes itératives qui, à chaque itération, proposent une approximation des déplacements, déformations, contraintes en tout point de la structure et sur la totalité de l'intervalle de temps.

2.6.3. Méthode intégrée sous systus

La méthode des éléments finis (Cf. chapitre 4), appliquée à la résolution des problèmes statiques non linéaires, conduit à résoudre, à chaque instant, une équation du type **[Systus99]** :

$$\pi = F - \vartheta \qquad (2.17.)$$

où π est le vecteur des forces nodales résiduelles, F est le vecteur des forces extérieures appliquées à la structure et $\vartheta = K.U$ le vecteur des forces internes dues aux déplacements de la structure (K est la matrice de raideur et U le vecteur déplacement des nœuds).

Le problème consiste à minimiser les forces nodales résiduelles π. Pour résoudre l'équation (2.17.) à chaque instant, un algorithme implicite et une méthode itérative sont utilisés.

A chaque itération les forces nodales résiduelles décroient et tendent à s'annuler.

Soit π_i le résidu résultant de la ième itération, c'est-à-dire obtenu avec un champ de déplacement U_i, alors une meilleure solution pourra être obtenue en écrivant :

$$\pi_{i+1} = \pi_i + \left(\frac{\partial \pi}{\partial U}\right)_i \delta U_i = 0 \qquad (2.18.)$$

où

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial U}\right)_i = (\kappa_T)_i \qquad (2.19.)$$

$(\kappa_T)_i$ représente la matrice tangente résultante de la ième itération.

La résolution par un solveur itératif de l'équation matricielle :

$$\pi_i = -\left(\frac{\partial \pi}{\partial U}\right)_i \delta U_i \qquad (2.20.)$$

nous permet d'obtenir une nouvelle approximation :

$$U_{i+1} = U_i + \delta U_i \qquad (2.21.)$$

puis un nouveau résidu π_{i+1}, correspondant à U_{i+1} et ainsi de suite jusqu'à ce que le résidu soit inférieur à la précision demandée p :

$$\|\pi_{i+1}\| \leq p \tag{2.22.}$$

2.6.4. Conclusion

Ces méthodes permettent, a priori, d'avoir des résultats tout à fait convenables mais leur grand inconvénient est la convergence lente qui rend les calculs élastoplastiques longs et coûteux.

De plus, elles exigent pour certaines une complète connaissance de l'histoire de chargement. Pour éviter ceci, un certain nombre de méthodes simplifiées ont été proposées.

2.7. Méthodes de résolution simplifiées

On calcule (en général en utilisant la Méthode des Eléments Finis ou MEF) la réponse élastique de la structure pour chacun des paramètres de chargement. La réponse à un chargement réel sera obtenue par superposition.

2.7.1. Diagramme de Bree

Bree [**Bree67**] s'est appuyé pour établir son diagramme, sur un calcul élastoplastique parfait.

Sous l'hypothèse de plasticité parfaite, dans l'espace des chargements, il distingue plusieurs zones (figure 2.2) correspondant aux divers types d'évolution susceptibles de se produire : évolution purement élastique E, rochet R ou adaptation S et accommodation P. Sa méthode ne permet pas d'évaluer la valeur de la déformation à l'état stabilisé.

Il applique sa méthode à des structures à parois minces soumises à une pression interne constante σ_p et à un gradient thermique cyclique ΔT (σ_Y est le seuil de plasticité).

Pour un chargement donné, on porte le point représentatif de la structure sur le diagramme et on obtient le comportement limite de la structure.

Lorsque σ_p dépasse le seuil de plasticité σ_Y, on a ruine de la structure. La figure précédente reproduit le diagramme de Bree dans le plan (σ_p, σ_T).

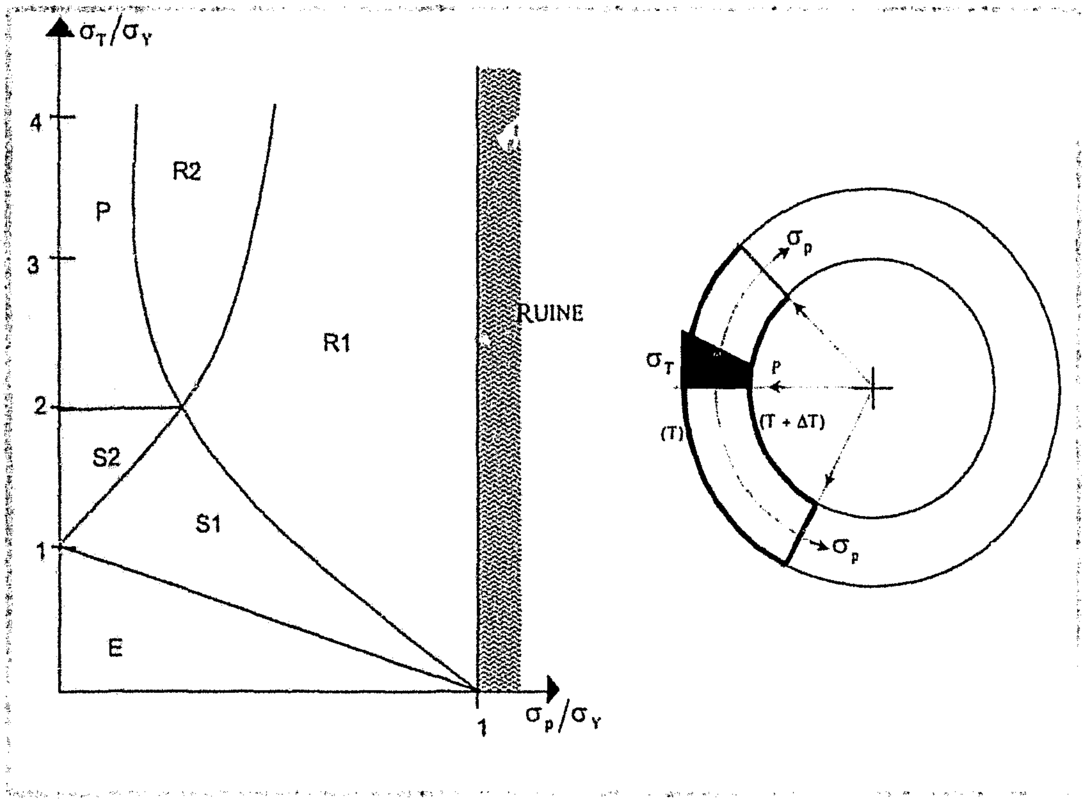


Figure 2.2. Diagramme de Bree.

2.7.2. Diagramme de O'Donnel et Porowski

Ils ont repris le calcul élastique parfaitement plastique **[O'Donnell95]** et le diagramme de Bree avec en plus introduction de lignes d'isocontraintes qui permettent de définir des bornes de la déformation inélastique dans le cas où les effets la viscosité ne sont pas négligeables.

2.7.3. Méthodes expérimentales (Cousseran et al)

Ils ont construit à partir d'expériences sur des tubes en traction et en torsion, un diagramme donnant pour un chargement fixé, la contrainte efficace qui ensuite permettra de déterminer la réponse globale.

2.7.4. Conclusion sur ces méthodes

Ces méthodes sont très intéressantes par leur simplicité. Pourtant elles ne peuvent s'appliquer qu'à des géométries très simplifiées sous un type de chargement bien déterminé. L'extension aux structures complexes est difficilement envisageable et pour d'autres structures simples ou d'autres chargements, il faudrait refaire les essais et établir les diagrammes correspondants.

Pour ces trois méthodes, les études ont été effectuées sur des tubes à parois minces, qui ont été pris à titre d'illustration. Elles débouchent sur le dimensionnement des tuyauteries susceptibles d'être sollicitées en dehors du domaine élastique.

2.8. La Méthode d'analyse simplifiée des structures inélastiques

Le chapitre 3 traite exclusivement cette méthode. Elle permet de déterminer l'état limite d'une structure et de construire la réponse correspondante à l'aide de calculs élastiques rapides dont le coût est négligeable par rapport à celui d'un calcul incrémental classique.

La validité de cette méthode a été prouvée dans plusieurs domaines : à partir d'exemples simples [**Zarka90, Inglebert84, Vasseur96, Tribout83**]; d'application concrètes sous chargements sismiques ou dynamiques [**Zarka88**] ; pour les études de contact par roulement, grenaillage ou galetage [**Zarka90, Frelat91, Lu91, Braham91**] ou encore avec prise en compte des effets géométriques [**Jaradeh87**].

Conclusion du chapitre 2

Dans cette seconde partie bibliographique, nous avons cité différentes méthodes de détermination du comportement asymptotique d'une structure. L'objectif de cette étude vise à comparer les méthodes et à mettre en évidence leurs avantages et inconvénients.

Nous avons donc cité ces différentes approches :

L'analyse limite. Elle permet d'obtenir directement la charge limite mais ne s'applique qu'aux chargements proportionnels.
Une extension de cette analyse qui est la **théorie d'adaptation**. Elle s'applique aux chargements variables dans le temps mais surestime le domaine d'adaptation et ne prend pas en compte l'état limite accommodé.
Les **méthodes incrémentales** qui sont fonction de l'histoire du trajet de chargement et rendent les résolutions trop lourdes donc des temps de calculs augmentant avec la complexité de la structure.
Les méthodes simplifiées. Elles sont basées sur l'expérience et il est par conséquent, nécessaire de refaire des essais pour chaque géométrie et chaque chargement. De plus, elles ne sont applicables qu'à des structures simples.

Finalement, nous allons travailler avec la **méthode d'analyse simplifiée**, développée dans le chapitre suivant et nous allons l'intégrer dans un code de calcul éléments finis. Nous prenons les résultats obtenus par la méthode incrémentale comme références afin de confronter les deux méthodes.

Analyse inélastique

Nomenclature

Lettres majuscules

$A = \lfloor A_\alpha \quad A_\beta \quad A_\gamma \rfloor^T$	Matrice de localisation.	
b	Matrice de couplage des mécanismes inélastiques	
C	Module d'écrouissage.	MPa ($N.mm^{-2}$)
C_L	Intersection de deux convexes.	
$\mathcal{E}, \hat{\mathcal{E}}$	Module de Young, module de Young modifié.	MPa ($N.mm^{-2}$)
E	Tenseur des déformations.	
E^e	Partie élastique de la réponse réelle.	
E^{el}	Tenseur des déformations élastiques.	
E^{ine}	Tenseur des déformations inélastiques.	
E^I	Tenseur de déformations initiales.	
E^P	Tenseur des déformations plastiques.	
$\dot{E}^P = dE^P$	Vecteur accroissement des déformations.	s^{-1}
$M^{-1}, \hat{M}^{-1}$	Matrice d'élasticité, matrice d'élasticité modifiée.	MPa ($N.mm^{-2}$)
R	Tenseur des contraintes résiduelles.	MPa ($N.mm^{-2}$)
S	Tenseur des déviateurs de contraintes.	MPa ($N.mm^{-2}$)
S^{el}	Tenseur des déviateurs de contraintes élastiques.	MPa ($N.mm^{-2}$)
V	Elément de volume.	
$Y(t)$	Paramètre transformé de la structure.	

Lettres minuscules.

f	Fonction de critère de plasticité.	
k_0	Limite élastique de cisaillement.	MPa ($N.mm^{-2}$)
m	Facteur de charge.	
s	Seuil.	
t	Temps.	s
$y = \lfloor y_\alpha \quad y_\beta \quad y_\gamma \rfloor^T$	Paramètre interne.	

Lettres majuscules grecques.

Σ	Tenseur des contraintes.	MPa ($N.mm^{-2}$)
Σ^{el}	Tenseur des contraintes élastiques.	MPa ($N.mm^{-2}$)

Lettres minuscules grecques.

$\chi = [\alpha \quad \beta \quad \gamma]^T$	Déplacements inélastiques locaux.	mm
δ_{ij}	Symbole de Kronecker (vaut 1 si i = j et 0 sinon).	
$\nu, \hat{\nu}$	Coefficient de Poisson ou coefficient de Poisson modifié.	
$\sigma = [\sigma_\alpha \quad \sigma_\beta \quad \sigma_\gamma]^T$	Contraintes locales associées à chacune des déformations inélastiques locales.	MPa ($N.mm^{-2}$)
σ_0	Limite élastique.	MPa ($N.mm^{-2}$)

Exposants et indices

$\ldots^{-1}$	Inverse de …
$\ldots^{T}$	Transposé de …
$\ldots_0$	Initial.
$\ldots_{max}, \ldots_{min}, \ldots_{moy}$	Maximal, minimal, moyen.

Notations

CA, SA, PA	Cinématiquement, Statiquement et Plastiquement Admissible.	
dev	Déviateur.	
det	Déterminant d'une matrice.	
div	Divergence.	
grad	Gradient.	
Pr	Projection.	
tr	Trace d'un tenseur d'ordre 2	$tr\sigma = \sum_i \sigma_{ii}$.
:	Produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2.	$A : B = \sum_{i,j} A_{ij}B_{ij}$

CHAPITRE 3.
LA METHODE D'ANALYSE SIMPLIFIEE DES STRUCTURES INELASTIQUES

3.1. Introduction

La méthode d'analyse simplifiée des structures inélastiques ou MASSI a été développée par le professeur J. Zarka et al. C'est une approche locale qui est en fait basée sur un découplage du champ de déformation plastique et du champ de contrainte résiduelle.

3.2. Approche locale

Nous adopterons pour la suite, l'approche du professeur J. Zarka **[Zarka90]** vue au chapitre 1 : le matériau sera considéré comme un ensemble de sous éléments simples appelés modèles rhéologiques.

3.2.1. Mécanismes inélastiques

D'après la figure 1.6, nous allons finalement distinguer trois types de mécanismes élémentaires inélastiques :

- ✓ Le mécanisme α qui implique des déformations instantanées inélastiques avec seuil qui inclut tous les mécanismes de glissement secs, de dislocations, …
- ✓ Le mécanisme β qui permet de modéliser les déformations inélastiques différées sans seuil. Il inclut tous les processus de diffusion.
- ✓ Le mécanisme γ qui permet de modéliser des déformations inélastiques différées avec seuil. Il implique tous les processus thermiquement activés.

3.2.2. Contraintes locales et déformations plastiques globales

La déformation inélastique aura un rôle fondamental dans le comportement inélastique global du volume.

Ces déplacements relatifs aux mécanismes inélastiques seront notés χ et ils seront considérés en tant que paramètres internes.

$$\chi = [\alpha \quad \beta \quad \gamma]^T \tag{3.1.}$$

Soit Σ le vecteur de contrainte. Les contraintes locales au niveau de chaque mécanisme inélastique sont données par l'équation :

$$\sigma = [\sigma_\alpha \quad \sigma_\beta \quad \sigma_\gamma]^T = A\Sigma - b\chi \tag{3.2.}$$

Posons $y = b.\chi$:

$$\sigma = [\sigma_\alpha \quad \sigma_\beta \quad \sigma_\gamma]^T = A\Sigma - y = \begin{bmatrix} A_\alpha \\ A_\beta \\ A\gamma \end{bmatrix} \Sigma - \begin{bmatrix} y_\alpha \\ y_\beta \\ y_\gamma \end{bmatrix} \tag{3.3.}$$

- ✓ y représente les paramètres internes transformés.
- ✓ $(\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma)$ sont les contraintes locales associées à chacune des déformations inélastiques locales.
- ✓ $(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma)$ sont les matrices de localisation élastique et elles sont considérées constantes dans le temps.
- ✓ $A\Sigma$ représente les contraintes élastiques locales sur les mécanismes.
- ✓ b est la matrice de couplage des mécanismes inélastiques. Elle est définie positive et, dans le cadre des petites déformations, elle est symétrique.

Deux cas peuvent se présenter :

- b régulière ($\det b \neq 0$) : la relation liant les quantités y et χ est alors bijective. L'évolution de χ (ou y) permet de suivre simultanément l'évolution de y (ou de χ).
- b singulière ($\det b = 0$ donc b est non inversible) : dans ce cas il est nécessaire de suivre simultanément l'évolution de y et de χ.

La déformation plastique globale est obtenue à l'aide de la déformation inélastique locale :

$$E^P = A^T\chi = [A_\alpha \quad A_\beta \quad A_\gamma] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \tag{3.4.}$$

3.2.3. Remarques

Après analyse des exemples vus au paragraphe 1.5.3 :

✓ On suppose que les déplacements inélastiques locaux (c'est-à-dire les paramètres internes au niveau des modèles rhéologiques inélastiques) et que la contrainte globale appliquée Σ, sont connues.

✓ On en déduit les contraintes locales au niveau de chaque modèle inélastique et on introduit une matrice de localisation A et une matrice d'interaction b. Enfin, on défini les paramètres internes transformés y.

✓ On peut donc écrire l'expression de la loi d'évolution pour les paramètres internes transformés y et les paramètres internes.

3.2.4. Loi d'évolution des mécanismes inélastiques locaux

Notre étude se limitera aux mécanismes α qui sont représentatifs du comportement plastique parfait (pas d'écrouissage).

La contrainte locale σ_α exercée au niveau du patin doit être plastiquement admissible à tout moment, c'est-à-dire qu'elle doit satisfaire la condition :

$$-s \leq \sigma_\alpha \leq +s \qquad (3.5.)$$

Soit C_0, un domaine convexe fixe, centré sur l'origine avec $C_0 \equiv [-s,+s]$:

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = +s \rightarrow \dot{\alpha} \geq 0 \\ \sigma_\alpha = -s \rightarrow \dot{\alpha} \leq 0 \\ -s \leq \sigma_\alpha \leq +s \rightarrow \dot{\alpha} = 0 \end{cases} \qquad (3.6.)$$

On dit que $\dot{\alpha}$ est dirigé suivant la normale extérieure du domaine convexe C_0 en σ_α ou encore que $\dot{\alpha}$ appartient à la subdifférentielle de la fonction ψ en σ_α et on note :

$$\dot{\alpha} \in \partial\psi_{C_0}(\sigma_\alpha) \qquad (3.7.)$$

3.3. Evolution globale d'une structure

Nous nous placerons en petites perturbations ce qui signifie que les différentes configurations occupées par le milieu peuvent être confondues avec la configuration initiale.

Notre volume élémentaire sera modélisé par une succession de mécanismes α reliés entre eux par des ressorts.

3.3.1. Réponse élastique

Pour une structure à comportement purement élastique et linéaire, on se donne un opérateur *ELAS* analytique ou numérique (Méthode des éléments finis dans notre cas) qui sera composé des caractéristiques de la structure et qui permettra de déterminer les champs élastiques, solution du problème.

Pour notre étude, la partition de géométrie et la loi de comportement ne varieront pas.

Les caractéristiques de l'opérateur *ELAS* pour un matériau fictif purement élastique, sont :

$$ELAS\ (\text{Géométrie} \,\|\, \text{Chargement} \,\|\, \text{Loi de comportement}) \qquad (3.8.)$$

Soit,

$$ELAS\ (V, S_F, S_U \,\|\, X^d(t), E^I(t), F^d(t), U^d(t) \,\|\, M) \qquad (3.9.)$$

Cet opérateur permettra de déterminer les champs élastiques $U^{el}(t), E^{el}(t)$ CA avec $U^d(t)$ sur S_U et $\Sigma^{el}(t)$ SA avec $X^d(t)$ dans V et $F^d(t)$ sur S_F.

On a la relation d'élasticité linéaire suivante :

$$\Sigma^{el}(t) = L[E^{el}(t) - E^I(t)] \qquad (3.10.)$$

ou encore

$$E^{el}(t) = M\Sigma^{el}(t) + E^I(t) \qquad (3.11.)$$

avec M représentant la matrice de rigidité ou de souplesse et $L = M^{-1}$ est la matrice des compliances élastiques.

3.3.2. Partition des déformations

$U(t)$, $E(t)$ sont les champs de déplacements et déformations réels CA avec $U^d(t)$ sur S_U.
$\Sigma(t)$ est le champ de contrainte réel SA avec $F^d(t)$ sur S_F.
Le champ $E(t)$ se décompose de la façon suivante :

$$E(t) = E^e(t) + E^p(t) + E^I(t) \qquad (3.12.)$$

avec

$$E^e(t) = M\Sigma(t) \qquad (3.13.)$$

d'où

$$E(t) = M\Sigma(t) + E^p(t) + E^I(t) \qquad (3.14.)$$

La figure 3.1 illustre cette partition dans le cas d'un chargement uniaxial.

3.3.3. Réponse inélastique

Si on désigne par $R(t)$, le champ des contraintes résiduelles obtenu en déchargeant purement élastiquement la structure à partir d'un état élastoplastique connu, la réponse inélastique s'écrit :

En contrainte : $R(t) = \Sigma(t) - \Sigma^{el}(t)$ *S.A. avec 0 dans V et 0 sur* S_F *(3.15.)*

En déplacement : $U^{ine}(t) = U(t) - U^{el}(t)$ *C.A. avec 0 sur* S_U *(3.16.)*

En déformation : $E^{ine}(t) = E(t) - E^{el}(t)$ *C.A. avec 0 sur* S_U *(3.17.)*

3.3.4. Décomposition de la réponse réelle

Pour une meilleure compréhension des étapes de calculs, toutes les équations sont regroupées dans le tableau 1. (pour plus de clarté la variable t a été omise) et la figure 3.2 représente la décomposition de la réponse réelle.

Réponse élastique	*Réponse réelle*	*Réponse inélastique*
$\Sigma^{el} = L(E^{el} - E^{l})$ $\Downarrow$ $E^{el} = M\Sigma^{el} + E^{l}$	$E = E^{l} + E^{P} + E^{e}$ $E^{e} = M\Sigma$	$U = U^{el} + U^{ine}$ $E = E^{el} + E^{ine}$ $\Sigma = \Sigma^{el} + R$

$$
\begin{aligned}
& E = E^{l} + E^{P} + M\Sigma \\
& \Rightarrow E = E^{l} + E^{P} + M\Sigma^{el} + MR \\
& E^{ine} = E - E^{el} \\
& \Rightarrow E^{ine} = E^{l} + E^{P} + M\Sigma^{el} + MR - E^{el}
\end{aligned}
$$

$$E^{ine} = E^{l} + E^{P} + M\Sigma^{el} + MR - M\Sigma^{el} - E^{l}$$

$$\Rightarrow E^{ine} = E^{P} + MR \tag{3.18.}$$

$$\Leftrightarrow R = M^{-1}(E^{ine} - E^{P}) \tag{3.19.}$$

Tableau 3.1. Décomposition de la réponse réelle.

En comparant les équations suivantes $E^{ine} = MR + E^{P}$ et $E^{el} = M\Sigma^{el} + E^{l}$, on peut constater que le champ des contraintes résiduelles peut être obtenu, en faisant un calcul élastique homogène, avec comme déformation initiale le champ $E^{P}(t)$. Autrement dit en utilisant l'opérateur *ELAS* :

$$ELAS\ (V, S_F, S_U \,\|\, 0^{d}, E^{P}(t), 0^{d}, 0^{d} \,\|\, M^{-1}) \tag{3.20.}$$

Cela signifie que le champ des contraintes résiduelles est une fonction linéaire de la déformation irréversible $E^{P}(t)$ que l'on peut donc exprimer symboliquement sous la forme :

$$R(t) = Z_0 . E^{P}(t) \tag{3.21.}$$

avec Z_0 qui est un opérateur linéaire symétrique et singulier.

$E^{P}(t)$ permet de déterminer $R(t)$, la réciproque n'est pas vraie. On va donc, par l'analyse inélastique être amené à découpler l'équation (3.21) par le biais d'un changement de variable.

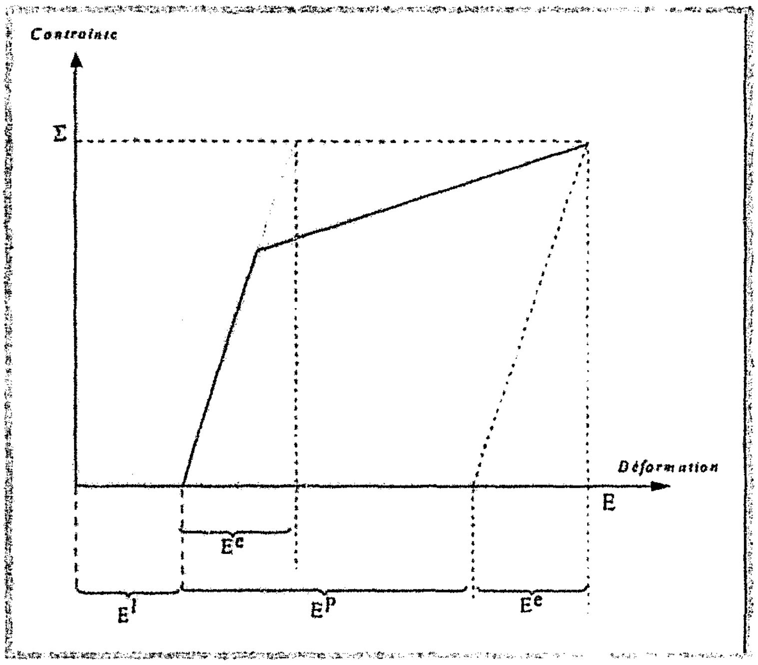


Figure 3.1. Répartition des déformations.

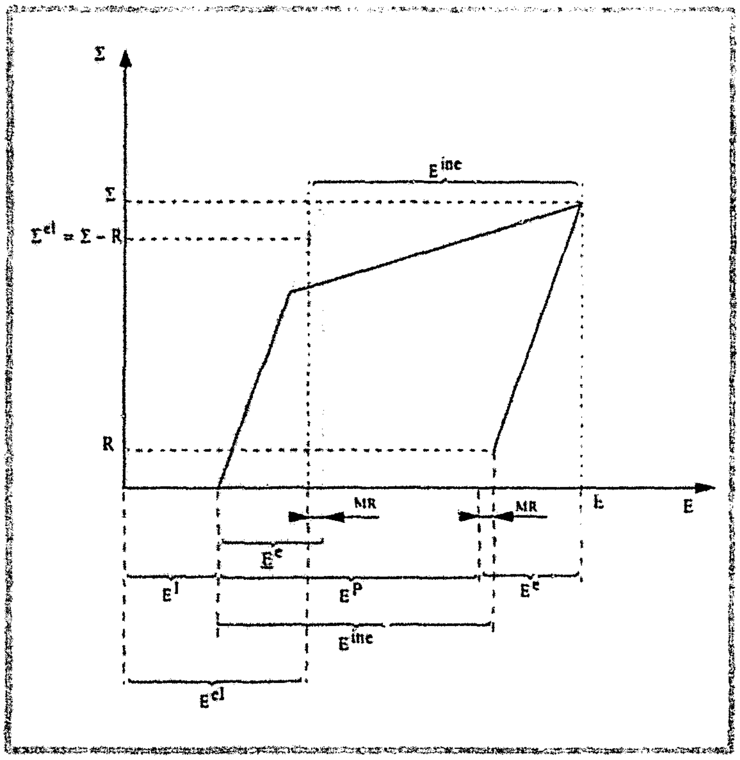


Figure 3.2. Décomposition de la réponse réelle de la structure.

3.4. Extension aux chargements cycliques radiaux

3.4.1. Chargements

La figure 3.3 regroupe quelques types de chargement :

- ✓ (a) Chargement quelconque.
- ✓ (b) Chargement radial alterné.
- ✓ (c) Chargement radial répété.

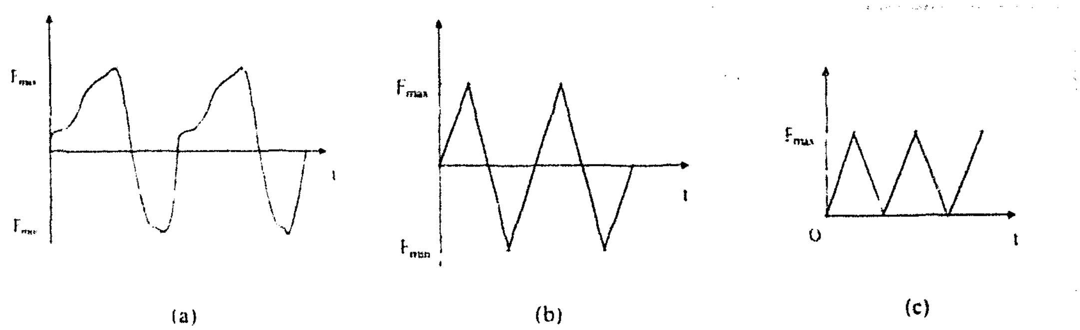


Figure 3.3. Quelques types de chargement.

3.4.2. Définition

Le chargement étant de période T, la réponse élastique de la structure pourra s'écrire comme suit :

$$\Sigma^{el}(t+T)=\Sigma^{el}(t) \qquad (3.22.)$$

On suppose que la structure est soumise à un chargement cyclique de type (b) et (c) (figure 3.3).

Pour de tels chargements, et en chaque point, le champ des contraintes élastique varie périodiquement sous la forme :

$$\Sigma^{el}(t)=(1-\Lambda(t)).\Sigma^{el}_{min}+\Lambda(t).\Sigma^{el}_{max}=\Sigma^{el}_{moy}\pm\frac{2\Lambda(t)-1}{2}\Delta\Sigma^{el} \qquad (3.23.)$$

Le facteur $\Lambda(t)$ variant entre 0 et 1 puis entre 1 et 0.

$\Sigma^{el}_{moy} = \dfrac{\Sigma^{el}_{max} + \Sigma^{el}_{min}}{2}$ représente l'état de contrainte élastique moyen et $\Delta\Sigma^{el} = \Sigma^{el}_{max} - \Sigma^{el}_{min}$ représente l'amplitude du champ de contrainte élastique et indique la direction de chargement.

3.4.3. Existence du champ de contrainte

Soit deux ensembles convexes, $\varsigma(t)$ et $C_o(t)$ si l'intersection de ces deux ensembles (figure 3.4), pour un état initial donné et pour un trajet de chargement donné, est différente de l'ensemble vide quelque soit t, alors il existe une et une seule solution du champ de contrainte.

B. Halphen **[Halphen78]** a montré que dans le cas où :

- ✓ Le champ de contrainte $\Sigma(t)$ est statiquement et plastiquement admissible ($\in \varsigma(t) \cap C_o(t)$).
- ✓ Tous domaines convexes, définissant les domaines d'élasticité de chaque mécanisme inélastique, sont de dimension finie et symétriques par rapport à l'origine.

alors il existe une solution périodique pour le champ de contrainte. De plus quelque soit l'état initial, la convergence du champ de contrainte vers une solution périodique est assurée.

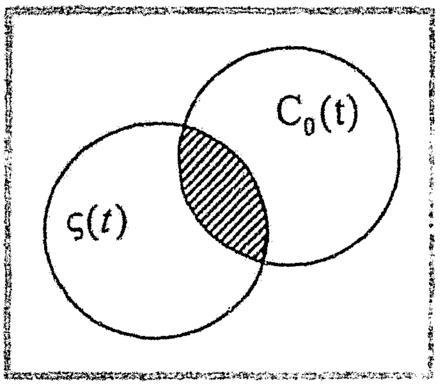


Figure 3.4. $\varsigma(t) \cap C_0(t) \neq \varnothing \quad \forall t \in [0,T]$.

Cependant rien ne peut être assuré concernant le champ de déformation total ou plastique ($E = E^P$) car il n'existe pas de relation bijective entre $\dot{\Sigma}(t)$ et $\dot{E}^P(t)$.

3.4.4. *Caractéristiques des matrices b et conséquences*

Lorsque les matrices b sont régulières (cf. § 3.1.2), on obtient un comportement asymptotique de type accommodation ou adaptation alors que pour des matrices b singulières la déformation progressive s'accumule indéfiniment (effet Rochet).

Nous nous intéresserons donc au cas où les matrices b sont régulières.

3.4.5. *Matériau à écrouissage cinématique linéaire*

On va se limiter au matériau à écrouissage cinématique linéaire sous chargement cyclique, qui est représentatif du comportement adapté et accommodé uniquement. L'effet de rochet n'est donc pas pris en compte. Pour ce matériau, on va utiliser le changement de variable qui va nous permettre le découplage entre le champ de déformation et le champ de contrainte résiduelle.

3.4.5.1. *Ecriture classique*

Généralement on associe, pour un matériau à écrouissage cinématique linéaire, le critère de Von Mises. Pour alléger les écritures la variable t sera omise.

$$f(S, E^P) = \frac{1}{2}(S - y)(S - y) - k_0^2 \leq 0 \qquad (3.24.)$$

- ✓ k_0 est la limite d'élasticité en cisaillement du matériau.
- ✓ $y = CE^P$ est le champ de paramètres internes, C est le module d'écrouissage.
- ✓ $S = \mathrm{dev}\Sigma$ est le déviateur des contraintes.

En se plaçant dans l'espace des déviateurs des contraintes, ce critère représente une sphère centrée en y de rayon k_0 (figure 3.5).

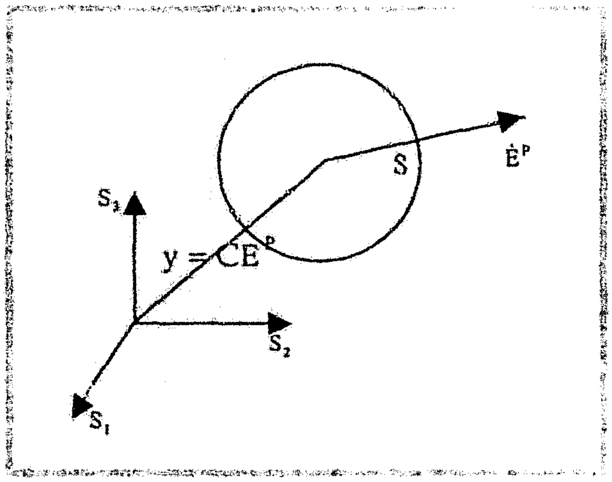


Figure 3.5. Critère de Von Mises dans l'espace des déviateurs des contraintes.

On a vu que l'écoulement plastique se faisait suivant la règle de normalité c'est-à-dire que $\dot{E}^P$ est porté par la normale extérieure au convexe de plasticité :

$$\dot{E}^P \in \partial\psi_{C(y)}(S) \qquad (3.25.)$$

$C_{(y)}(S)$ étant le convexe centré en y au point S.

3.4.5.2. Nouvelle écriture

Pour un mécanisme α, on a vu :

$$\sigma_\alpha = A\Sigma - y \qquad (3.26.)$$

Posons A comme étant un opérateur déviatorique c'est-à-dire que $A = \text{dev}$. Alors :

$$A\Sigma = \text{dev}\Sigma = \Sigma - \frac{\text{tr}\Sigma}{3}\delta_{ij} \qquad (3.27.)$$

δ_{ij} étant le coefficient de Kronecker.

Le critère s'écrit :

$$\frac{1}{2}\sigma_\alpha{}^T\sigma_\alpha \leq k_0^2 \qquad (3.28.)$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{dev}\Sigma - y)^{t}(\mathrm{dev}\Sigma - y) \le k_0^2 \tag{3.29.}$$

Comme $\Sigma = \Sigma^{el} + R$ et $S = \mathrm{dev}\Sigma$

$$\mathrm{dev}\Sigma = \mathrm{dev}\Sigma^{el} + \mathrm{dev}R$$

$$\Rightarrow S = S^{el} + \mathrm{dev}R \tag{3.30.}$$

$$S - y = S^{el} - \underbrace{(y - \mathrm{dev}R)}$$

$$S - y = S^{el} - \quad Y \tag{3.31.}$$

Ce changement de variable, faisant intervenir le paramètre transformé structural Y, met en évidence le couplage qui existe entre les contraintes résiduelles R et les paramètres internes caractérisant l'écrouissage y.
Le critère de Von Mises devient :

$$\frac{1}{2}(S^{el} - Y)(S^{el} - Y) \le k_0^2 \tag{3.32.}$$

On se placera désormais dans l'espace des paramètres transformés de la structure.

L'introduction de ces paramètres nous fournit les renseignements suivants :

- ✓ A chaque instant ces paramètres doivent vérifier le critère de plasticité c'est-à-dire être PA. Ils sont à l'intérieur du convexe centré sur S^{el}.
- ✓ S'il y a écoulement plastique, celui-ci se fait à la vitesse :

$$\dot{E}^{p} = \lambda(S - y) \tag{3.33.}$$

où $\lambda = 0$ si $f(S, E^{p}) < 0$ et $\lambda \ge 0$ si $f(S, E^{p}) = 0$.

Ou encore

$$\dot{E}^{p} = \lambda(S^{el} - Y) \qquad (3.34.)$$

Ce qui signifie que dans l'espace des Y, cet écoulement se fait suivant la normale intérieure au convexe centré sur S^{el}.

$$\dot{E}^{p} \in -\partial\psi_{C(S^{el})}(Y) \qquad (3.35.)$$

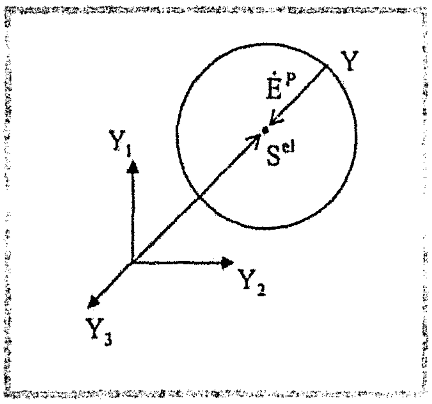


Figure 3.6. Ecoulement plastique dans l'espace des paramètres transformés Y.

Les positions de Y sont connues dès lors que la solution élastique S^{el} est connue indépendamment de l'histoire de chargement. Ces positions sont déterminées localement en tout point de la structure. Ainsi, on peut exprimer la déformation inélastique E^{ine} en fonction de Y et de R. Soit,

$$E^{p} = C^{-1}(Y + devR) \qquad (3.36.)$$

puisque

$$E^{ine} = MR + E^{p} \qquad (3.37.)$$

alors

$$E^{ine} = MR + C^{-1}Y + C^{-1}devR$$

$$E^{ine} = R(M + C^{-1}dev) + C^{-1}Y \tag{3.38.}$$

On pose

$$\hat{M} = M + C^{-1}dev \tag{3.39.}$$

$\hat{M}$ est l'opérateur de souplesse modifié.
Avec

$$C^{-1} = A^T b^{-1} \tag{3.40.}$$

Dans ce cas,

$$ELAS\ (V, S_t, S_f V \,\|\, 0^d, C^{-1}Y, 0^d, 0^d \,\|\, \hat{M}^{-1}) \tag{3.41.}$$

avec comme déformation initiale $C^{-1}Y$ et comme loi de comportement $\hat{M}^{-1}$. On aura finalement le champ des contraintes résiduelles.
On aura U^{ine}, E^{ine} et alors $R = \hat{M}^{-1}(E^{ine} - C^{-1}Y)$ puis $E^P = C^{-1}(Y + devR)$.

Les quantités E et ν vont changer aussi :

$$MR \mapsto \frac{1+\nu}{\mathcal{E}} R_{ij} - \frac{\nu}{\mathcal{E}} R_{jj}\delta_{ij} \tag{3.42.}$$

$$C^{-1}devR \mapsto \frac{1}{C}(R_{ij} - \frac{R_{jj}}{3}\delta_{ij}) \tag{3.43.}$$

$$\Rightarrow E_{ij}^{ine} = \frac{1+\nu}{\mathcal{E}} R_{ij} - \frac{\nu}{\mathcal{E}} R_{jj}\delta_{ij} + \frac{1}{C} R_{ij} - \frac{R_{jj}}{3C} R_{jj}\delta_{ij} + \frac{1}{C} Y_{ij}$$

$$E_{ij}^{ine} = R_{ij}(\frac{1+\nu}{\mathcal{E}} + \frac{1}{C}) - R_{jj}\delta_{ij}(\frac{\nu}{\mathcal{E}} + \frac{1}{3C}) + \frac{1}{C} Y_{ij} \tag{3.44.}$$

On pose,

$$E_{ij}^{ine} = R_{ij}(\frac{1+\hat{\nu}}{\hat{\mathcal{E}}}) - R_{jj}\delta_{ij}(\frac{\hat{\nu}}{\hat{\mathcal{E}}}) + \frac{1}{C} Y_{ij} \tag{3.45.}$$

Par identification, on aura finalement :

$$\begin{cases} \dfrac{1+\hat{\nu}}{\hat{\mathcal{E}}} = \dfrac{1+\nu}{\mathcal{E}} + \dfrac{1}{C} \\ \text{et} \\ \dfrac{\hat{\nu}}{\hat{\mathcal{E}}} = \dfrac{\nu}{\mathcal{E}} + \dfrac{1}{3C} \end{cases} \tag{3.46.}$$

La résolution du système (3.46) donne :

$$\hat{\mathcal{E}} = \frac{3\mathcal{E}C}{2\mathcal{E} + 3C} \tag{3.47.}$$

$$\hat{\nu} = \frac{3\nu C + \mathcal{E}}{2\mathcal{E} + 3C} \tag{3.48.}$$

3.4.6. Nature de l'état limite

La nature de l'état limite peut être immédiatement déterminée à partir des analyses élastiques de la structure c'est-à-dire en obtenant $\Sigma^{el}(t)$ pour un cycle $[0,T]$. Une construction élémentaire géométrique et locale, dans l'espace des Y est requise.
Posons :

$$C_L = C(S^{el}_{max}) \cap C(S^{el}_{min}) \tag{3.49.}$$

Sur une période, l'état limite d'une structure peut être adapté si C_L est non vide ($C_L \neq \varnothing$) ou accommodé si C_L est vide ($C_L = \varnothing$) **[Halphen76]**.
Cela revient à déterminer la distance entre les centres des deux convexes extrêmes et à la comparer avec la limite d'élasticité en cisaillement k_0. En posant, en tout point :

$$\Delta S^{el} = S^{el}_{max} - S^{el}_{min} \tag{3.50.}$$

La distance entre ces deux convexes a pour expression :

$$d^{el} = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta S^{el} : \Delta S^{el}} \tag{3.51.}$$

Nous proposons d'évaluer Y à partir de l'état interne initial Y_0.

3.4.7. Comportement adapté

3.4.7.1. Caractérisation du comportement

Dans ce cas on a $d^{el} \leq k_0$. Tous les mécanismes élémentaires de plasticité, déformation plastique locale ou écrouissage, les paramètres transformés Y ainsi que les déformations plastiques E^p et les contraintes résiduelles globales R tendent chacun vers une limite constante sous chargement cyclique. Pour les paramètres transformés Y, cette limite Y_L se trouve à l'intérieur ou sur la frontière de C_L (figure 3.7). Tout dépend alors de l'état initial pour pouvoir la déterminer. Trois cas sont possibles.

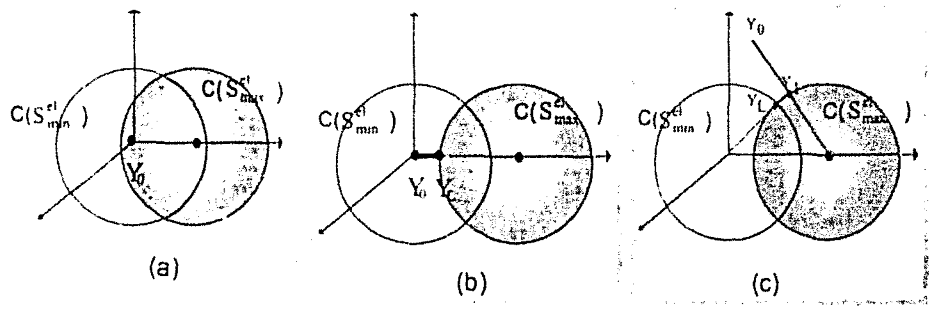


Figure 3.7. Comportement adapté.

- ✓ Si Y_0 est à l'intérieur de C_L alors en ce point, il n'y a pas d'évolution plastique (figure 3.7.a.).
- ✓ Si Y_0 est à l'extérieur de C_L et à l'intérieur d'un des convexes alors Y_0 va être projeté sur C_L orthogonalement suivant la direction de S^{el}_{max} (figure 3.7.b.).
- ✓ Figure 3.7.c. : Y_0 est à l'extérieur de C_L et à l'exterieur des deux convexes.

3.4.7.2. Règles de projections

Les points appartenant aux cônes (figure 3.8) peuvent être projetés directement tandis que les points hors des cônes ne sont projetés qu'alternativement sur $C(S^{el}_{max})$ puis sur $C(S^{el}_{min})$ jusqu'à ce que la solution Y_L soit obtenue sur C_L.

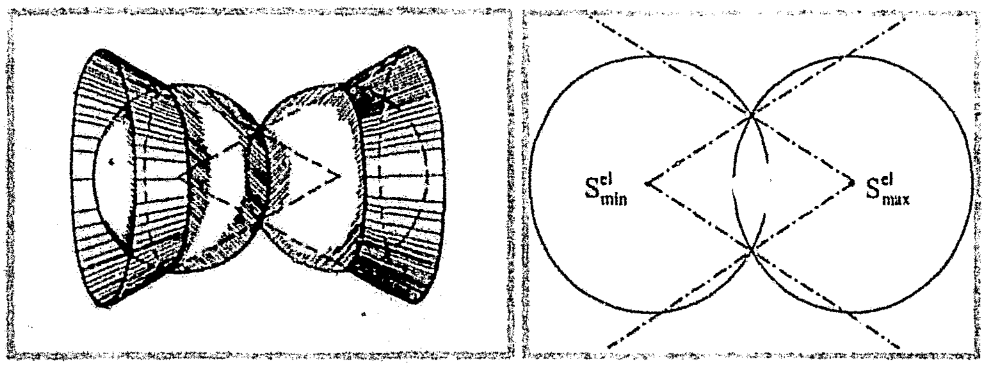


Figure 3.8. Cônes de projection.

3.4.7.3. Partition mixte

Nous avons d'une part des éléments dont les paramètres transformés sont connus, et d'autre part c'est la déformation plastique qui est connue. Cela nous amène à considérer deux types de matériau (figure 3.9).

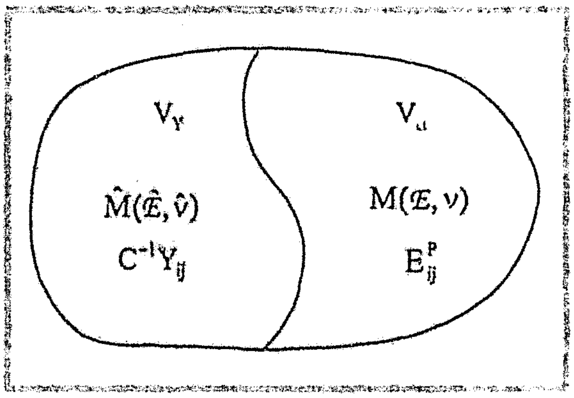


Figure 3.9. Matériau mixte.

✓ Sur V_α, il n'y a pas d'évolution plastique du mécanisme (cas a. figure 3.7).

Les déformations plastiques E^P et la matrice d'élasticité classique M^{-1} sont utilisées comme paramètre d'*ELAS* :

$$ELAS(V, S_U, S_F \| 0^d, E^P, 0^d, 0^d \| M^{-1}) \qquad (3.52.)$$

Avec

$$R = M^{-1}(E^{\text{me}} - E^{P}) \textit{ et } E^{P} = 0 \qquad (3.53.)$$

✓ Sur V_v on posera $Y_L = \Pr_{C_L}(Y_0)$ [1]. Dans ce cas, ce sont la loi de comportement élastique modifiée $\hat{M}$ et $C^{-1}Y_L$ qui sont utilisés (cas b. figure 3.7).

$$\mathit{ELAS}\ (\, V, S_U, S_F \,\|\, 0^d, C^{-1}Y_L, 0^d, 0^d \,\|\, \hat{M}\,) \qquad (3.54.)$$

Avec

$$R = \hat{M}^{-1}(E^{\text{me}} - C^{-1}Y_L) \qquad (3.55.)$$

Ces deux opérateurs *ELAS* permettront de déterminer les champs inconnus U^{me} puis E^{me} et enfin R, sur les parties considérées.

A partir des résultats de ce calcul, les quantités $Y_{L,i}$ et E_i^P peuvent être alors déterminées en utilisant l'expression :

$$\begin{cases} \text{Sur } V_\alpha : Y_{L,i} = CE^P - \text{dev}R \\ \text{Sur } V_Y : E_i^P = C^{-1}(Y_L + \text{dev}R) \end{cases} \qquad (3.56.)$$

Sur V_α, la position de $Y_{L,i}$ (à l'itération i) par rapport à l'intersection C_L est examinée. Si $Y_{L,i}$ est situé à l'intérieur de C_L alors le point considéré reste sur V_α. Dans le cas contraire, il est déplacé dans V_Y et une nouvelle valeur de Y_L est obtenue en projetant $Y_{L,i}$ sur C_L.

Si au moins une projection a été réalisée, la partition de V en V_α et V_Y est alors réactualisée et conduit à une nouvelle itération du calcul. Lorsque plus aucune projection de $Y_{L,i}$ sur C_L n'est à réaliser, la solution à l'état stabilisé est alors obtenue et nous avons :

$$\begin{cases} Y_L = Y_{L,i} \\ E^P = E_i^P \end{cases}$$

---

[1] Y_L est la projection de Y_0 sur C_L

3.4.8. Comportement accommodé

3.4.8.1. Caractérisation du comportement

Dans ce cas $d^{el} > k_0$. Les champs inélastiques tendent vers des champs périodiques sous l'influence de la plasticité alternée qui se développe aux points les plus sollicités.

On peut avoir une accommodation dite globale c'est-à-dire que C_L est vide en tout point de la structure, ou une adaptation locale c'est-à-dire qu'il existe quelques points où C_L est non vide. Pour ce dernier cas l'estimation des paramètres transformés sera alors identique au cas de l'adaptation globale.

Il s'agit de trouver une borne inférieure et une borne supérieure (figure 3.10) de ΔY qui permettront d'obtenir un encadrement de la quantité ΔE^P relatif à un état limite accommodé.

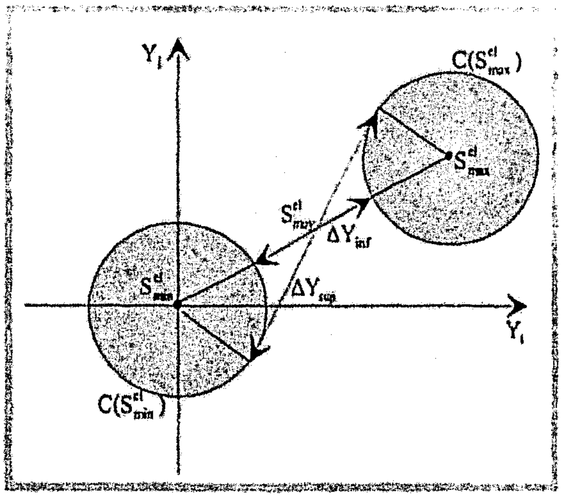


Figure 3.10. Etat accommodé dans l'espace des Y

3.4.8.2. Borne inférieure

Comme à chaque sommet la solution doit se trouver dans $C(S^{el}_{min})$ puis dans $C(S^{el}_{max})$, une borne inférieure immédiate est obtenue pour l'amplitude ΔY **[Kim96, Zarka90]**.

$$\Delta Y_{inf} = \left[1 - \frac{2k_0}{\left\| \Delta S^{el} \right\|} \right] . \Delta S^{el} \qquad (3.57.)$$

où k_o est le rayon de la sphère et $\left\| \Delta S^{el} \right\| = \sqrt{1/2 (\Delta S^{el})^T (\Delta S^{el})}$.

✓ Sur V_α

$$ELAS\,(\, V, S_U, S_F \,\|\, 0^d, 0, 0^d, 0^d \,\|\, M^{-1}\,) \tag{3.58.}$$

✓ Sur V_Y

$$ELAS(\, V, S_U, S_F \,\|\, 0^d, C^{-1}\Delta Y_{inf}, 0^d, 0^d \,\|\, \hat{M}^{-1}) \tag{3.59.}$$

On obtient finalement ΔU_{min}^{inc}, ΔE_{min}^{inc} et ΔR_{min}.

3.4.8.3. Borne supérieure

Quand l'amplitude de charge est très grande, il est possible de démontrer qu'un état stationnaire est atteint dans lequel la vitesse d'évolution de Y_{ij} est la même que celle de S_{ij}^{el} **[Zarka89]**.
Comme :

$$S^{el} = (1-\Lambda)S_{min}^{el} + \Lambda.S_{max}^{el} \tag{3.60.}$$

alors,

$$\dot{S}^{el} = \frac{dS^{el}}{d\Lambda} = -S_{min}^{el} + S_{max}^{el} = \Delta S^{el} \tag{3.61.}$$

$$\Rightarrow \dot{Y} = \dot{S}^{el} = \Delta S^{el} \tag{3.62.}$$

De plus,

$$E^P = C^{-1}Y \Rightarrow \dot{E}^P = C^{-1}\dot{Y} \tag{3.63.}$$

$$\dot{\Lambda} = \left\| C^{-1}\dot{Y} \right\| = \sqrt{\frac{1}{2}(C^{-1}\dot{Y})^T(C^{-1}\dot{Y})} \tag{3.64.}$$

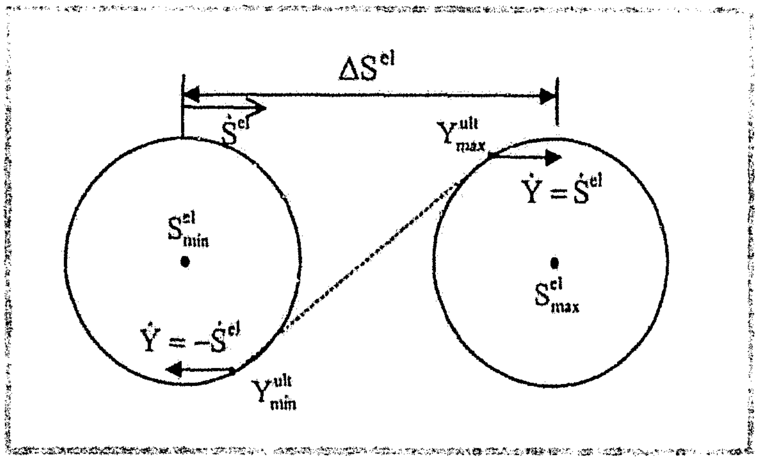


Figure 3.11. Bornes supérieures de l'accommodation.

Les positions ultimes, comme l'illustre la figure (3.11.), s'écriront :

$$Y^{ult}_{min} = S^{el}_{min} + \frac{k_o}{\dot{\Lambda}} C^{-1} \dot{Y} \qquad (3.65.)$$

$$Y^{ult}_{max} = S^{el}_{max} - \frac{k_o}{\dot{\Lambda}} C^{-1} \dot{Y} \qquad (3.66.)$$

d'où finalement :

$$\Delta Y_{sup} = Y^{ult}_{max} - Y^{ult}_{min}. \qquad (3.67.)$$

✓ Sur V_a

$$ELAS\ (V, S_U, S_F \| 0^d, 0, 0^d, 0^d \| M^{-1}) \qquad (3.68.)$$

✓ Sur V_Y

$$ELAS(V, S_U, S_F \| 0^d, C^{-1}\Delta Y_{sup}, 0^d, 0^d \| \hat{M}^{-1}) \qquad (3.69.)$$

On obtient ΔU^{ine}_{max}, ΔE^{ine}_{max} et ΔR_{max}.

3.4.8.4. Valeurs moyennes

Quand $C_L = \emptyset$, alors la quantité Y_{moy} est choisie égale à S^{el}_{moy}.

✓ Sur V_α

$$ELAS\ (\ V, S_U, S_F \| 0^d, E^p_{moy}, 0^d, 0^d \| M^{-1}\ ) \qquad (3.70.)$$

✓ Sur V_Y

$$ELAS\ (\ V, S_U, S_F \| 0^d, C^{-1}Y_{moy}, 0^d, 0^d \| \tilde{M}^{-1}\ ) \qquad (3.71.)$$

On obtient U^{ine}_{moy}, E^{ine}_{moy} et R_{moy}.

Sur V_α, nous effectuons des tests locaux suivant :

Si les quantités $\left(Y_{moy,i} \pm \frac{1}{2}\Delta Y_{inf,i}\right)$ et $\left(Y_{moy,i} \pm \frac{1}{2}\Delta Y_{sup,i}\right)$ sont situées à l'intérieur des domaines plastiques centrés sur $\left(S^{el}_{moy} \pm \frac{1}{2}\Delta S^{el}\right)$, alors l'élément considéré reste sur V_α.

Dans le cas contraire, le point est déplacé dans V_Y. Il faut alors de nouveau évaluer Y_{moy}, ΔY_{inf} et ΔY_{sup}. Dans ce cas, Nous procédons donc à une nouvelle itération du calcul. Cette procédure est répétée jusqu'à ce que tous les tests réalisés (sur tous les points) soient satisfaits.

Lorsque les tests locaux sont tous vérifiés, l'opérateur élastique conduit à un encadrement de la réponse inélastique de la structure.

Conclusion du chapitre 3

Nous avons, dans ce chapitre, développé la méthode d'analyse simplifiée sachant que le matériau est de type standard généralisé à écrouissage cinématique linéaire. Ainsi, les structures ont un comportement limite adapté ou accommodé.

Selon l'état limite considéré, nous déterminons la solution qui est constante dans le cas de l'adaptation ou périodique s'il y a accommodation.

> Dans le cas de **l'adaptation**, un paramètre interne plastiquement admissible de la structure est recherché. Les champs de déformation plastique et de contraintes résiduelles sont déduits par l'intermédiaire de l'opérateur élastique.
> Pour l'**accommodation**, c'est un encadrement de la déformation plastique que nous déterminons et donc une solution du champ de contraintes résiduelles périodique.

Cette méthode est basée sur des calculs purement élastique et la construction de l'opérateur *ELAS* va nous permettre par la suite, de déduire les champs de déplacement, de déformation et de contraintes. Nous nous intéresserons plus particulièrement à la détermination des champs de contraintes résiduelles.

Nous allons intégrer l'analyse simplifiée dans un code de calcul éléments finis et l'appliquer à différents types de structures (chapitre 4).

Modélisation de l'analyse simplifiée sous SYSTUS

- Applications -

Nomenclature

Lettres majuscules latines

B	Matrice des dérivées de fonction de forme.	
$C = 2h/3$	Module d'écrouissage.	MPa (N.mm^{-2})
$\mathfrak{E}, \hat{\mathfrak{E}}$	Module de Young, module de Young modifié.	MPa (N.mm^{-2})
E	Tenseur des déformations.	
E^e	Partie élastique de la réponse réelle.	
E^{el}	Tenseur des déformations élastiques.	
E^{ine}	Tenseur des déformations inélastiques.	
E^I	Tenseur de déformations initiales.	
E^p	Tenseur des déformations plastiques.	
F^{elt}	Force nodale élémentaire (en éléments finis).	N
G	Module de cisaillement.	MPa (N.mm^{-2})
J	Matrice jacobienne.	
K^{elt}	Matrice de rigidité élémentaire.	NxN
L_x, L_y	Longueur suivant x et suivant y	mm
M	Vecteur des efforts de flexion	
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion.	Nm/m
$M^{-1}, \tilde{M}^{-1}$	Matrice d'élasticité, matrice d'élasticité modifiée.	MPa (N.mm^{-2})
N	Vecteur des efforts résultants de membrane.	
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts résultants de membrane.	N/m
$\langle N \rangle$	Matrice des fonctions de forme (ou d'interpolation).	
R	Tenseur des contraintes résiduelles.	MPa (N.mm^{-2})
S	Tenseur des déviateurs de contraintes.	MPa (N.mm^{-2})
S^{el}	Tenseur des déviateurs de contraintes élastiques.	MPa (N.mm^{-2})
T_{xz}, T_{yz}	Efforts résultants de cisaillement.	N/m
$U = [u \quad v \quad w]^T$	Vecteur déplacement.	

$\tilde{U}$	Déplacements nodaux.	mm
V	Elément de volume.	
Y(t)	Paramètre transformé de la structure.	

Lettres minuscules latines

e	Épaisseur.	mm
f	Fonction de charge.	
h	Épaisseur de la coque.	mm
k_0	Limite élastique de cisaillement.	MPa ($N.mm^{-2}$)
n	Normale sortante.	
(r, s, t)	Repère local.	
t	Temps.	s
u, v	Déplacements suivant x et suivant y.	mm
w	Déplacement transversal suivant z.	mm
w^P	Poids au point d'intégration.	
(x, y, z)	Repère global.	
z	Axe suivant l'épaisseur.	

Lettres majuscules grecques

Σ	Tenseur des contraintes.	MPa ($N.mm^{-2}$)
Σ^{el}	Tenseur des contraintes élastiques.	MPa ($N.mm^{-2}$)

Lettres minuscules grecques

β_x, β_y	Rotations suivant x et suivant y	
χ	Vecteur des courbures	
ε	Vecteur des déformations.	
ε^I	Vecteur des déformations initiales.	
ε^N	Vecteur des déformations de membrane.	
$\nu, \hat{\nu}$	Coefficient de Poisson, coefficient de Poisson modifié.	
σ	Vecteur des contraintes locales.	MPa ($N.mm^{-2}$)
σ_0	Limite élastique.	MPa ($N.mm^{-2}$)
(ξ, η, ζ)	Repère local.	

Exposants et indices

$\ldots^{-1}$	Inverse de ...
$\ldots^{T}$	Transposé de ...
$\ldots_{0}, \ldots_{L}$	Initial, limite.
$\ldots^{elt}$	Élémentaire.
$\ldots_{max}, \ldots_{min}, \ldots_{moy}$	Maximal, minimal, moyen.

Notations

CA, SA, PA	Cinématiquement, Statiquement et Plastiquement Admissible.	
dev	Déviateur.	
det	Déterminant d'une matrice.	
npie	Nombre de points de Gauss.	
Proj	Projection.	
tr	Trace d'un tenseur d'ordre 2	$tr\sigma = \sum_{i} \sigma_{ii}$.

CHAPITRE 4.
MODELISATION DE L'ANALYSE SIMPLIFIEE SOUS SYSTUS. APPLICATIONS

4.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser particulièrement à l'intégration et aux applications de la MASSI sous SYSTUS par la méthode des éléments finis. Nous utiliserons le langage S.I.L. (System Interface Language) **[SIL99]**, interface de communication avec la base de données des résultats de ce logiciel.

Par l'intermédiaire du langage S.I.L., nous avons construit l'opérateur *ELAS* (Cf. annexe B). Cet opérateur nous permet de déterminer :

- ✓ Les champs de déplacement.
- ✓ Les champs de déformation.
- ✓ Les champs de contrainte.
- ✓ L'état limite de la structure considérée
- ✓ Les paramètres associés (champs de contraintes résiduelles, ...).

Une attention particulière est portée sur la détermination du champ des contraintes résiduelles.

Après un bref rappel de la méthode des éléments finis, nous nous intéressons à l'application de l'analyse simplifiée aux structures bidimensionnelles, tridimensionnelles et de type coques minces.

Pour chaque cas, nous avons étudié différents types d'éléments (isoparamétriques) pour en retenir le plus approprié. La procédure d'intégration de l'analyse simplifiée dans le code SYSTUS **[Systus99]** est décrite sachant que diverses structures ont été étudiées.

Afin d'illustrer notre démarche, nous avons traité les cas suivants :

a. Après validation sur diverses structures bidimensionnelles, nous présentons l'exemple de la plaque trouée en son centre (concentration de contraintes), modélisée en contraintes planes et soumise à un effort de traction cyclique.

b. Pour les structures tridimensionnelles, nous avons choisi parmi les exemples traités, le crochet de levage soumis à une flexion cyclique.

c. Les structures de type coques minces sont représentées par une bouteille soumise à une pression interne cyclique.

Nous avons présenté pour ces structures les différents résultats et l'analyse limite (adaptation et accommodation) obtenus par l'analyse simplifiée. La méthode incrémentale nous a permis de confronter et d'exploiter les résultats.

4.2. Méthode des éléments finis

4.2.1. Introduction

Pour construire l'opérateur *ELAS*, SYSTUS met en œuvre la méthode des éléments finis en formulation déplacement. Nous nous limiterons à cette théorie.

Le principe de base de la méthode des éléments finis **[Batoz90, Barreau80, Imbert95]** consiste à subdiviser le domaine considéré en sous-domaines de forme relativement simple appelés "éléments finis". On va alors définir une approximation de la solution (déplacements ou contraintes) non pas pour l'ensemble de la structure mais pour chacun des nœuds de ses éléments constitutifs.

4.2.2. Formulation en déplacement

Soit $\tilde{U}$ une approximation de U champ de déplacement en chaque point de l'élément elt tel que :

$$U \approx \tilde{U} = \sum \langle N \rangle_i \tilde{U}_i^{elt} = \langle N \rangle . \tilde{U}^{elt} \qquad (4.1.)$$

$\tilde{U}^{elt}$ représente l'ensemble des déplacements nodaux pour un élément particulier elt.

$\langle N \rangle$ représente la matrice des fonctions d'interpolation sur l'élément. Elle est aussi appelée matrice des fonctions de forme.

Les déformations peuvent être obtenues par l'équation approchée suivante :

$$E = B.\widetilde{U}^{elt} \qquad (4.2.)$$

avec E vecteur représentatif des déformations et B matrice des dérivées des fonctions de forme. La matrice élémentaire de rigidité est la suivante :

$$K^{elt} = \int_V B^T M^{-1} B \; dV \qquad (4.3.)$$

Soit F^{elt} le vecteur des forces élémentaires tel que :

$$F^{elt} = F^{elt}_{int} + F^{elt}_{vol} + F^{elt}_{surf} \qquad (4.4.)$$

$$F^{elt} = \int_V B^T M^{-1} E^I \; dV + \int_V (N)^T X^d \; dV + \int_{S_F} (N)^T F^d \; dS_F \qquad (4.5.)$$

4.2.3. Formulation appliquée à l'analyse simplifiée

Dans le cas du matériau mixte (cf. § 3.1.2.3.), le volume élémentaire est partitionné en V_α (partie élastique) et en V_Y (partie plastique).

La relation (4.5) s'écrit :

$$F^{elt} = \int_{V_\alpha} B^T M^{-1} E^I \; dV_\alpha + \int_{V_Y} B^T \hat{M}^{-1} E^I \; dV_Y + \int_V (N)^T X^d \; dV + \int_{S_F} (N)^T F^d \; dS_F \qquad (4.6.)$$

M^{-1} est la loi de comportement et elle est fonction du module de Young $\mathcal{E}$ et du coefficient de Poisson ν. $\hat{M}^{-1}$ est la loi de comportement modifiée, fonction du module de Young modifié $\hat{\mathcal{E}}$ et du coefficient de Poisson $\hat{\nu}$ tels que (Cf. chapitre 3) :

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{E}} = \dfrac{3\mathcal{E}C}{2\mathcal{E}+3C} \\ \hat{\nu} = \dfrac{2\nu C+\mathcal{E}}{2\mathcal{E}+3C} \end{cases}$$

C étant le module d'écrouissage.

L'analyse simplifiée nécessite un champ de contrainte SA avec des conditions aux limites nulles et un champ de déformations CA avec des conditions aux limites nulles.
La relation (4.5.) devient finalement :

$$F^{cli} = \int_{V_\alpha} B^T M^{-1} E^1 \, dV_\alpha + \int_{V_Y} B^T \hat{M}^{-1} E^1 \, dV_Y \qquad (4.7.)$$

Or dans V_α, $E^1 = E^P = 0$ car il n'y a pas de plastification. Donc :

$$F^{cli} = \int_{V_Y} B^T \hat{M}^{-1} E^1 \, dV_Y \qquad (4.8.)$$

Remarque

> *Sous SYSTUS, pour récupérer* F^{cli}*, nous avons dû reconstruire et assembler la matrice* B *par l'intermédiaire de l'interpréteur S.I.L (cf. Annexe A).*

4.3. Intégration du module d'analyse inélastique sous SYSTUS

4.3.1. Récupération et traitement des données

Le but est de déterminer l'état limite de la structure considérée et finalement d'estimer, à partir de cet état, les champs de déformations plastiques et de contraintes résiduelles. Nous avons intégré le code suivant sous SYSTUS. Tous les éléments (bidimensionnels, tridimensionnels ou coques) peuvent être utilisés sachant que certains ne permettent pas d'obtenir des résultats cohérents.

La programmation s'organise de la façon suivante :

1. Pré-traitement.
   - ✓ Entrée de la géometrie : V, S_U et S_F.
   - ✓ Entrée du chargement :
     - L'état initial sera supposé vierge de toute contrainte initiale donc $Y_0 = 0$.
     - Le chargement est uniaxial.

✓ Le matériau sera défini par ses caractéristiques mécaniques $\mathcal{E}$ (module de Young), ν (coefficient de Poisson), h (module d'écrouissage) et σ_0 (limite d'élasticité).

✓ Le maillage. Pour valider les développements de la programmation nous avons travaillé sur des structures simples telles que les structures bidimensionnelles en contraintes planes. La discrétisation s'est donc faite avec des éléments plans. De plus, pour une meilleure estimation de l'état limite, des éléments isoparamétriques rectangulaires quadratiques sont utilisés. Ces éléments sont sous-intégrés avec quatre points de Gauss. Pour les structures tridimensionnelles, les éléments choisis sont les hexaèdres à 20 nœuds et à 27 ou à 8 points de Gauss selon le cas considéré. Les coques minces sont modélisées par des éléments quadrangles linéaires (4 nœuds et 4 points de Gauss) afin de prendre en compte la courbure.

2. Traitement.

✓ Initialisation des paramètres.

✓ Réalisation d'un outil de calcul élastique (opérateur *ELAS*).

✓ Algorithme associé au code de calcul SYSTUS par l'intermédiaire du S.I.L. (cf. annexe B). Cet algorithme permet de déterminer les contraintes élastiques par l'intermédiaire de l'opérateur *ELAS*, puis de déduire les déviateurs de contraintes élastiques correspondants S^{el}_{max} et S^{el}_{min}.

✓ L'état limite de la structure est ensuite défini par un test sur la distance entre les deux convexes centrés en S^{el}_{max} et S^{el}_{min}. Enfin selon l'état limite considéré, la réponse inélastique est déterminée sachant qu'elle est constante dans le cas adapté et périodique, s'il y a accommodation.

3. Post traitement.

Les caractéristiques (répartition du module de Young actualisé) et la répartition des champs inélastiques sont directement visualisées sur l'interface de SYSTUS.

4.3.2. Arbre de programmation

Les étapes de programmation de l'analyse simplifiée sur S.I.L. ont été illustrées par un arbre programmatique (figure.4.1.) qui met en valeur la partition mixte de chaque état limite.

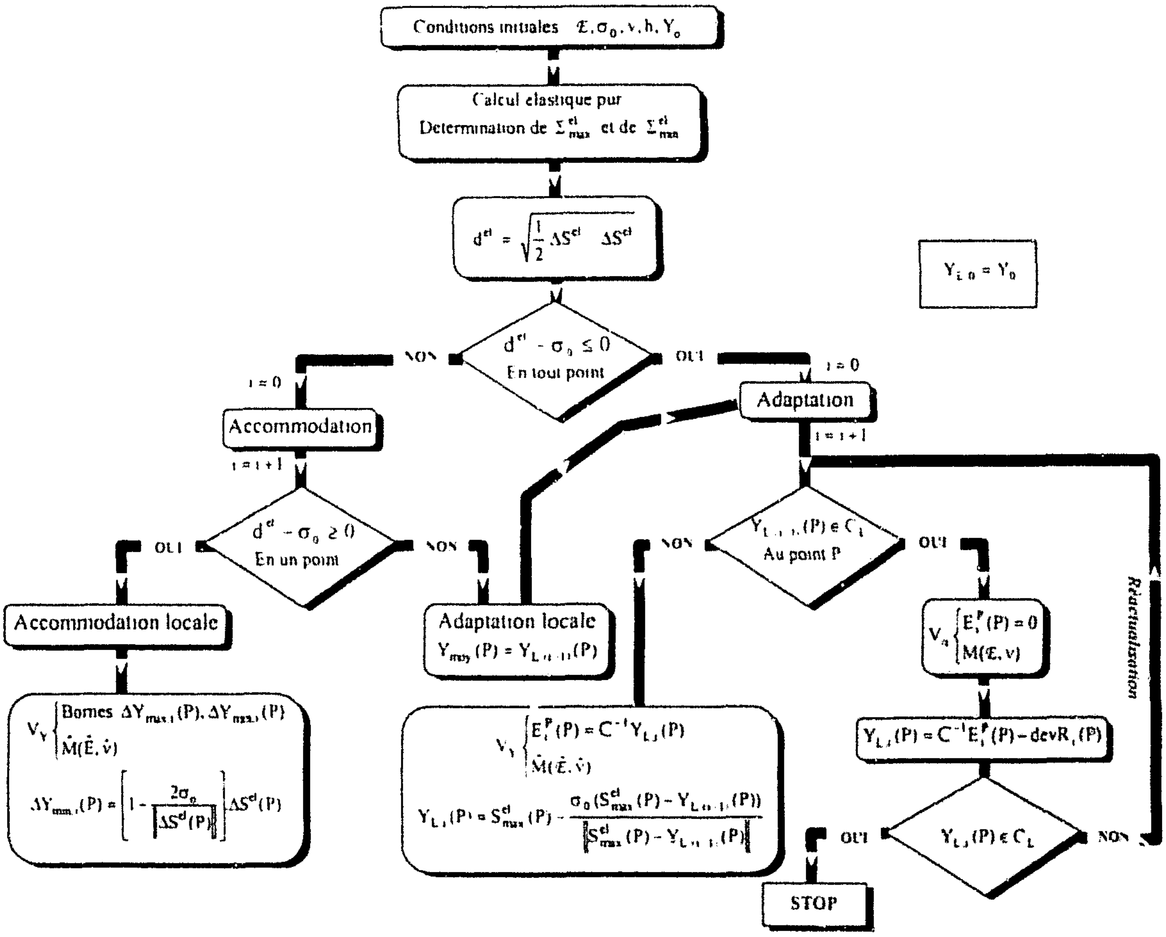


Figure 4.1. Arbre de programmation de l'analyse simplifiée

4.4. Applications

Nous avons testé le code (cf. annexe B) sur des structures bidimensionnelles et des structures tridimensionnelles. Ces tests nous ont permis de déterminer l'état limite de la structure considérée et d'estimer les champs inélastiques associés (contraintes résiduelles et déformations plastiques). De plus, des calculs incrémentaux ont été réalisés sur les mêmes structures (caractéristiques mécaniques et chargements identiques) afin de comparer avec l'analyse simplifiée et donc de valider le code précédent. Pour ces calculs, les éléments sont sous-intégrés pour les résolutions élasto-plastiques.

4.4.1. Concentration de contraintes

Soit la plaque d'épaisseur e, percée en son centre (Figure 4.2.). Nous avons supposé un état de contraintes plan et le matériau à écrouissage cinématique linéaire.

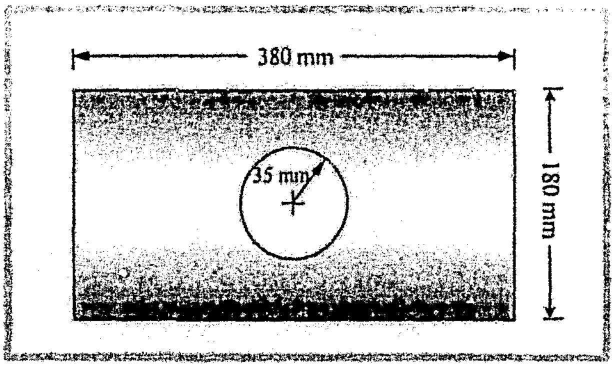


Figure 4.2. Plaque trouée.

4.4.1.1. Modélisation de la structure

Les caractéristiques mécaniques de la structure (acier) sont regroupées dans le tableau 4.1. Par symétrie, nous n'avons considéré qu'un quart de plaque.

E	ν	σ_0	$h = 3C/2$	e
210000 MPa	0,28	300 MPa	21000 MPa	1 mm

Tableau 4.1. Caractéristiques mécaniques

Les chargements appliqués sont représentés sur la figure 4.3. Nous avons choisi de fixer la charge minimale et de faire varier la charge maximale afin d'obtenir les deux états limites.

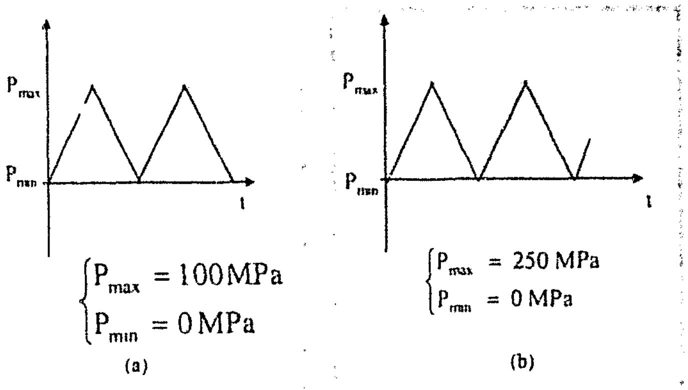


Figure 4.3. Chargements appliqués à la structure

Les premiers tests ont été effectués pour des éléments triangulaires quadratiques (figure 4.4). La structure est discrétisée en 240 éléments et 529 nœuds soient 1058 degrés de liberté.

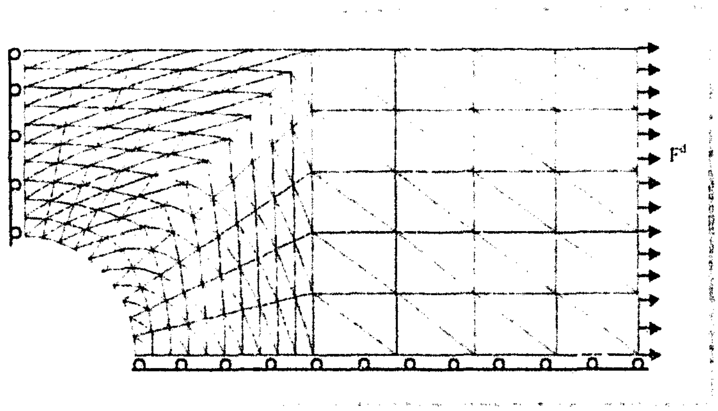


Figure 4.4. Modélisation de la structure par des éléments triangulaires

Nous n'avons représenté que la répartition de la contrainte résiduelle et de la déformation plastique dans le cas adapté (figures 4.5 et 4.6). Nous avons donc illustré le fait que ces éléments ne permettent pas d'avoir des résultats cohérents (par rapport à la méthode incrémentale d'une part et à la répartition d'autre part) pour l'analyse simplifiée.

Deux raisons sont possibles :

1. L'élément triangulaire n'est pas statiquement admissible.
2. Il n'y a pas assez de points de Gauss dans l'élément pour la plastification.

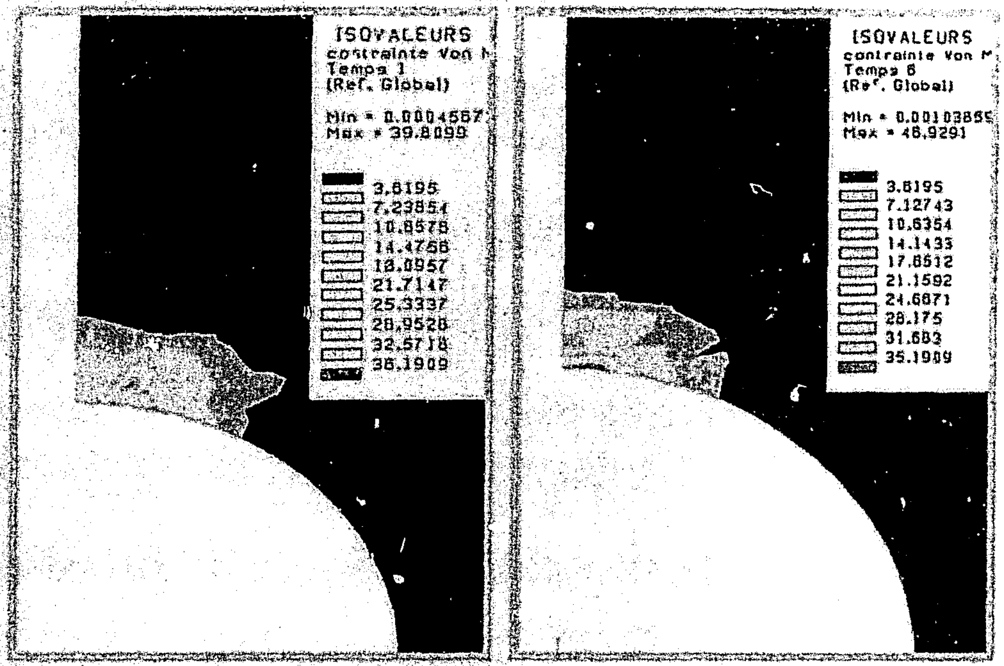


Figure 4.5. Répartitions de la contrainte résiduelle
(a) Analyse simplifiée (b) Méthode incrémentale

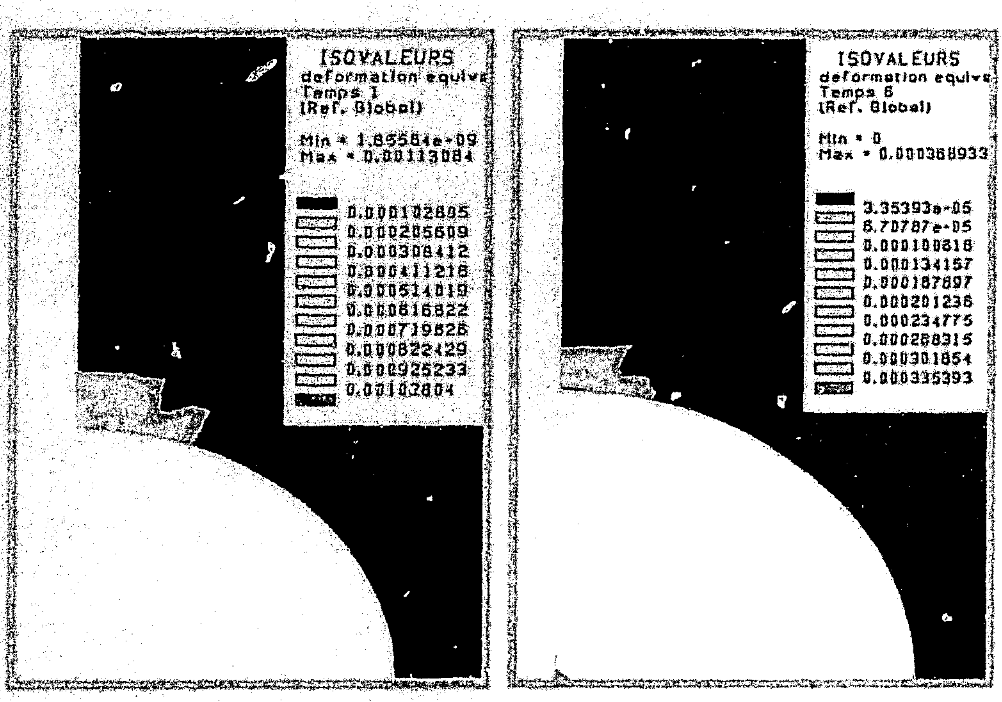


Figure 4.6. Répartitions de la déformation plastique
(a) Analyse simplifiée (b) Méthode incrémentale

Le temps de calcul CPU de l'analyse simplifiée est de 15,81 secondes (une itération) et il est de 28,28 secondes pour la méthode incrémentale (moins de 6 cycles de chargement). La sous-intégration des éléments ne change pas le nombre de points de Gauss (3 points d'intégration).

Les éléments de maillage choisis finalement (figure 4.7) sont les quadrilatères à 8 nœuds et à 9 points d'intégrations (cf. Annexe A). Des tests ont été réalisés pour les éléments à 9 points de Gauss et pour les éléments à 4 points de Gauss.

De plus, nous avons étudié l'influence de la taille de ces éléments sur les résultats. La structure est modélisée en 300 éléments et 981 nœuds soit 1962 degrés de liberté pour le cas du maillage grossier (figure 4.7.a). Le maillage fin est composé de 1200 éléments et 3761 nœuds soit 7522 degrés de liberté (figure 4.7.b).

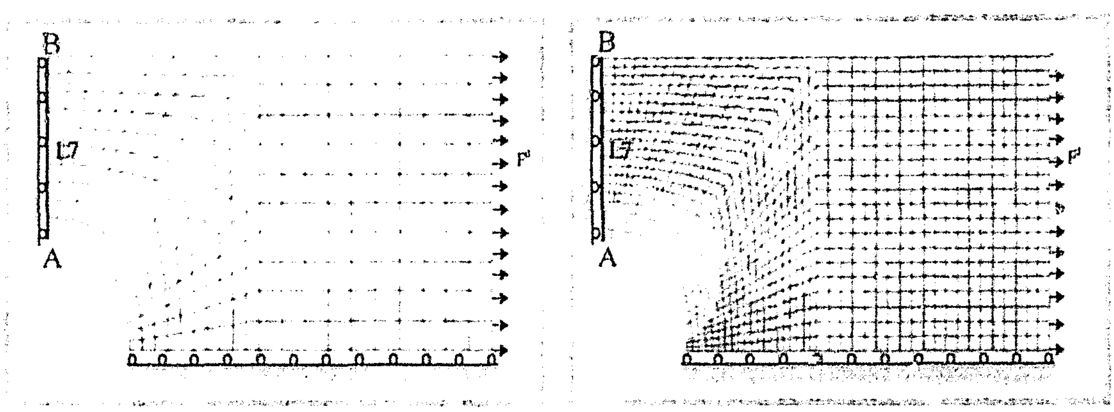


Figure 4.7. Modélisation de la structure par des éléments quadrangulaires (a) Maillage grossier (b) Maillage fin

4.4.2. Adaptation de la structure

4.4.2.1. Maillage grossier

Pour le chargement de la figure 4.3.a, la structure maillée grossièrement (figure 4.7.a) devient adaptée. Nous avons donc une limite constante des champs inélastiques. Nous avons comparé les répartitions (figures 4.8 et 4.9) du champ de contraintes résiduelles par Von Mises et de la déformation plastique, le long de L7, obtenues par l'analyse simplifiée et par la méthode incrémentale. La notion de « distance » sur les courbes suivantes représente la distance entre les nœuds qui composent la ligne L7, dirigée de A vers B (figure 4.7).

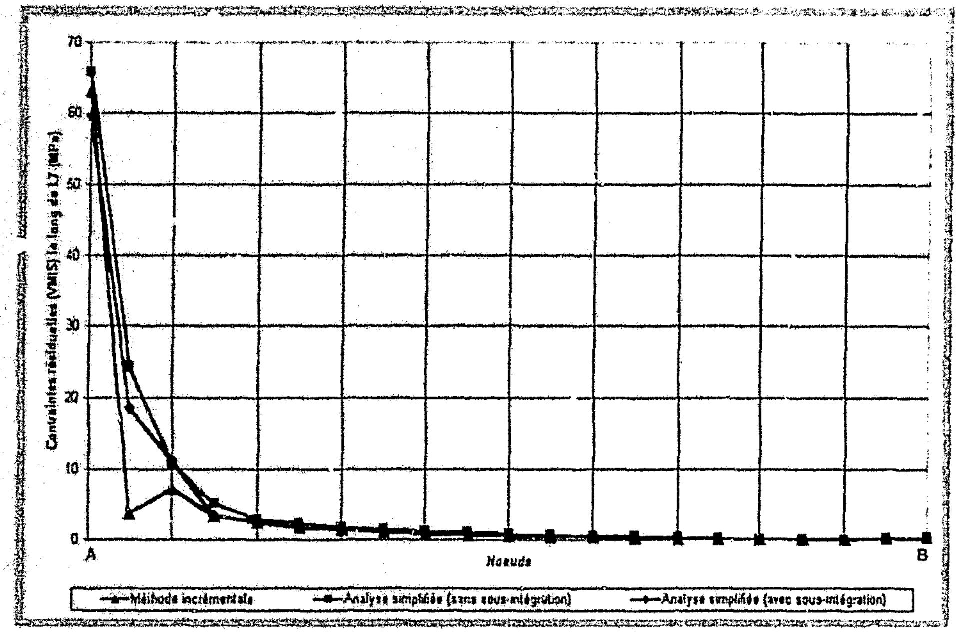


Figure 4.8. Comparaison de la contrainte résiduelle (VMIS) le long de L7

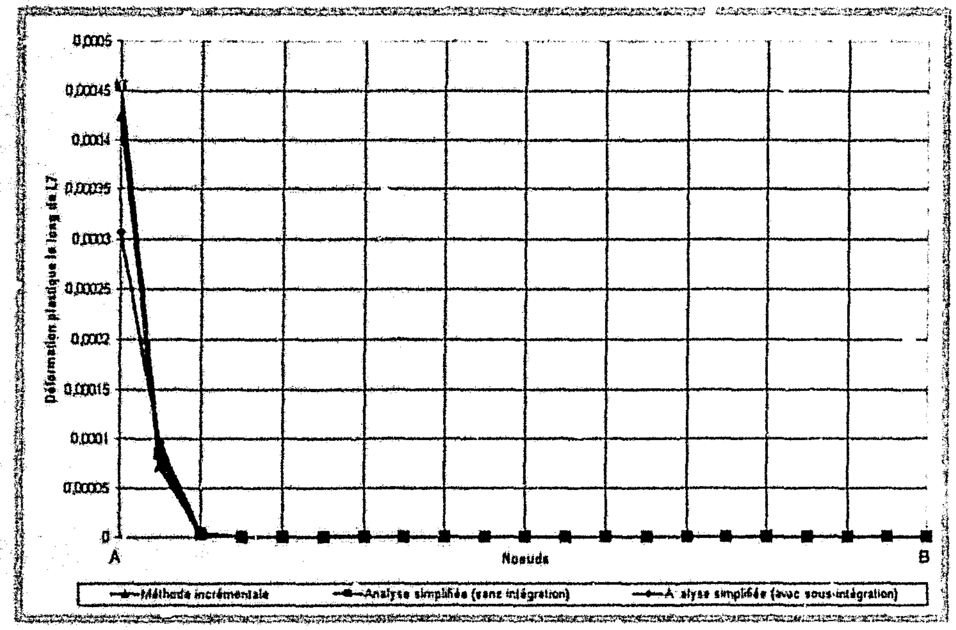


Figure 4.9. Comparaison de la déformation plastique le long de L7

Les figures 4.10 et 4.11 permettent la visualisation et donc la comparaison des répartitions des différents champs inélastiques.

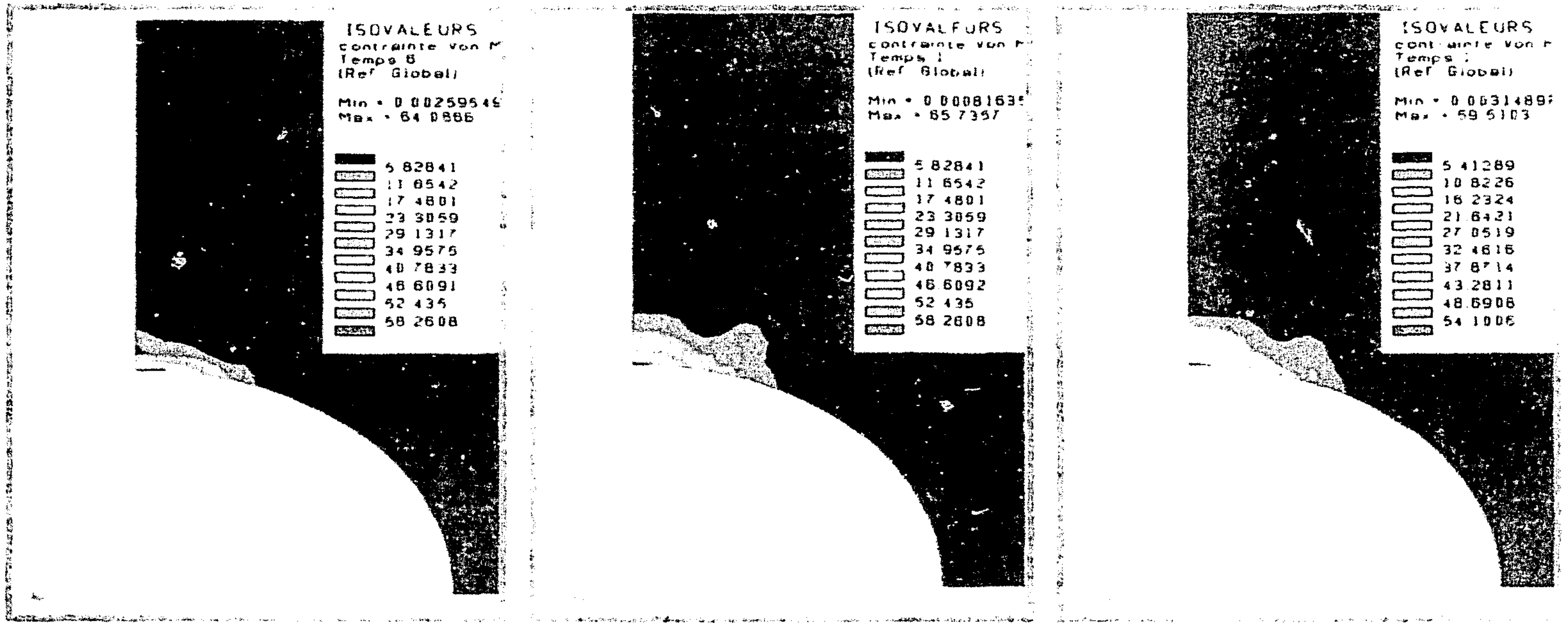


Figure 4.10. Comparaison des répartitions de la contrainte résiduelle

(a) Méthode incrémentale (b) Analyse simplifiée (sans sous-intégration) (c) Analyse simplifiée (avec sous-intégration)

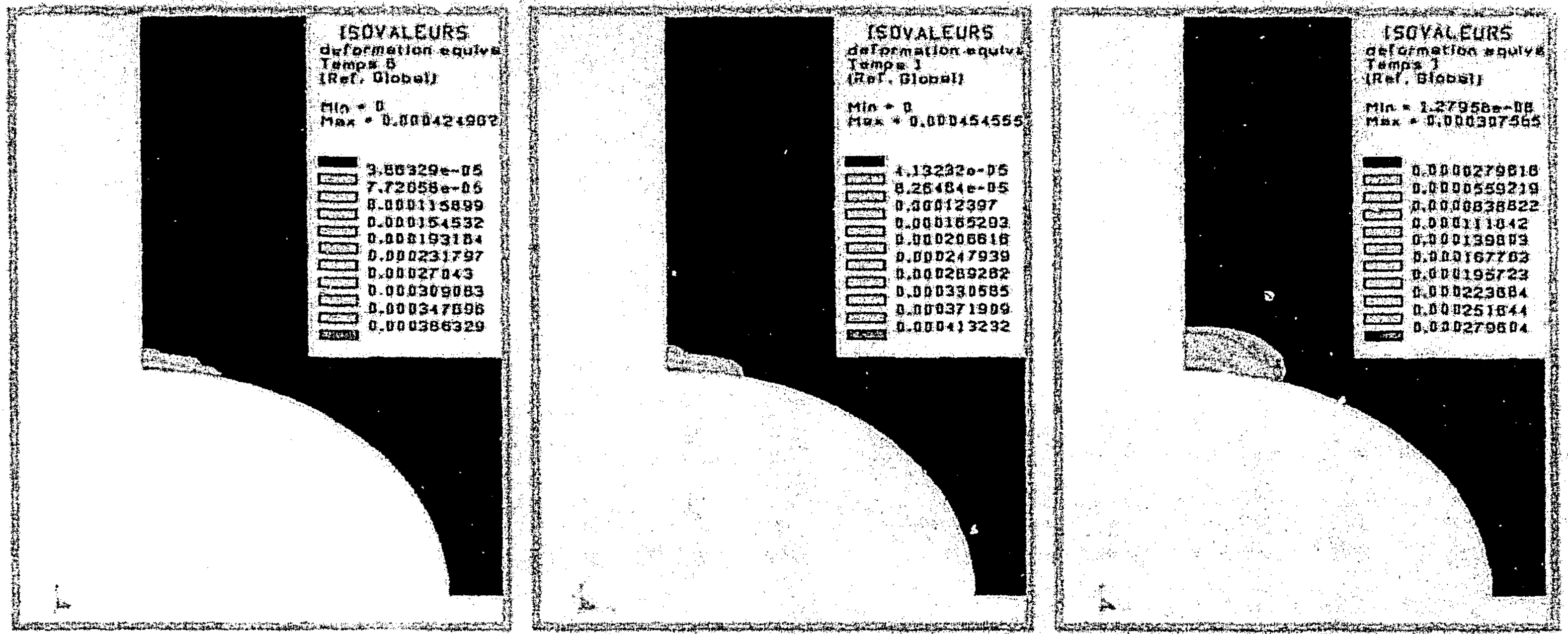


Figure 4.11. Comparaison des répartitions de la déformation plastique

(a) Méthode incrémentale (b) Analyse simplifiée (sans sous-intégration) (c) Analyse simplifiée (avec sous-intégration)

Le calcul incrémental semble lui aussi tendre vers une solution adaptée (figure 4.12).

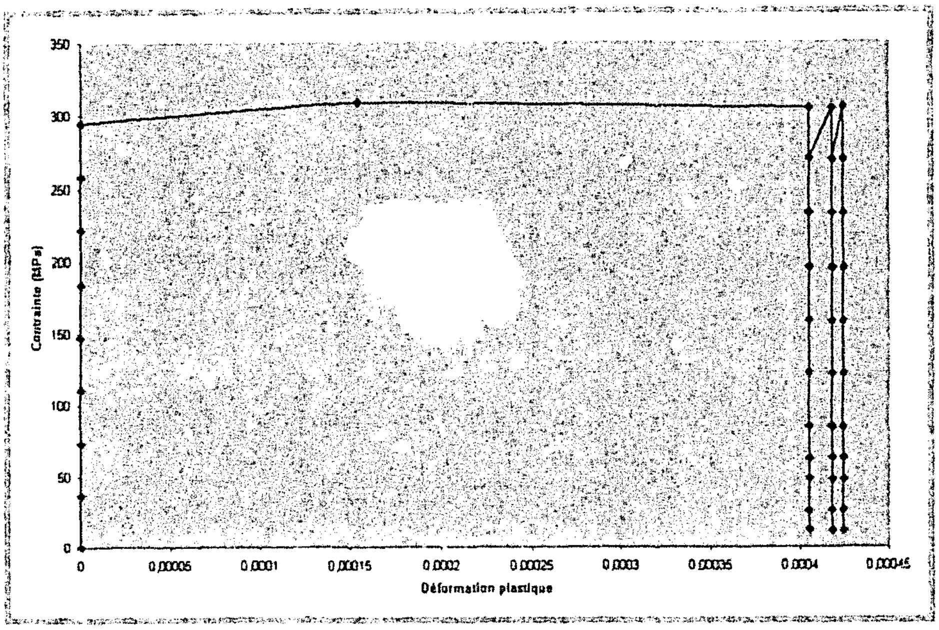


Figure 4.12. Courbe cyclique (méthode incrémentale)

Le tableau 4.2 résume les différents résultats obtenus par les deux méthodes.

		Méthode incrémentale	Analyse simplifiée	
Sous-intégration		Avec	Sans	Avec
Itération ou cycle		6 cycles	1 itération	1 itération
Temps CPU		84,68 s.	40,06 s.	24,77 s.
Erreur absolue	contrainte		1,65	4,6
	déformation		3.10^{-5}	$1,17.10^{-4}$

Tableau 4.2. Résultats pour le maillage grossier

Nous pouvons remarquer que les valeurs de contraintes et de déformations correspondantes à l'analyse simplifiée associée aux éléments sous-intégrés, sous-estiment celles de la méthode incrémentale. Si les éléments ne sont pas sous-intégrés, alors on obtient une bonne représentation des champs.

Le temps de calcul pas-à-pas effectué est 2 fois supérieur au calcul simplifié associé aux éléments sans sous-intégration et environ 4 fois supérieur au calcul simplifié associé aux éléments avec sous-intégration.

Après avoir vu l'influence de la sous-intégration sur les résultats, nous allons nous intéresser à la taille des éléments et donc affiner le maillage.

4.4.2.2. Maillage fin

Le chargement de la figure 4.3.a appliqué à la structure maillée suivant la figure 4.7.b, donne un comportement asymptotique adapté. Nous avons comparé les variations (figures 4.13 et 4.14) des champs inélastiques le long de L7.

Les valeurs des contraintes et des déformations obtenues par l'analyse simplifiée et les éléments sans sous-intégration sont légèrement supérieures à celles obtenues par la méthode incrémentale, sachant que les répartitions des champs inélastiques sont sensiblement les mêmes.

A nouveau, les résultats obtenus par l'analyse simplifiée en utilisant les éléments avec sous-intégration ne sont pas très concluants comme le prouve l'erreur absolue des contraintes qui n'est pas négligeable (Cf. tableau 4.3). Cependant les répartitions des champs inélastiques sont semblables (figures 4.15 et 4.16).

Le tableau 4.3 résume les différents résultats obtenus par les deux méthodes.

		Méthode incrémentale	Analyse simplifiée	
	Sous-intégration	Avec	Sans	Avec
Itération ou cycle		6 cycles	2 itérations	1 itération
Temps CPU		821,40 s.	364,23 s.	116,43 s.
Erreur absolue	contrainte		1,65	29,24
	déformation		10^{-5}	$3{,}03.10^{-4}$

Tableau 4.3. Résultats pour le maillage fin

Le temps de calcul pas-à-pas effectué est 2,25 fois supérieur au calcul simplifié associé aux éléments sans sous-intégration et environ 7 fois supérieur au calcul simplifié associé aux éléments avec sous-intégration.

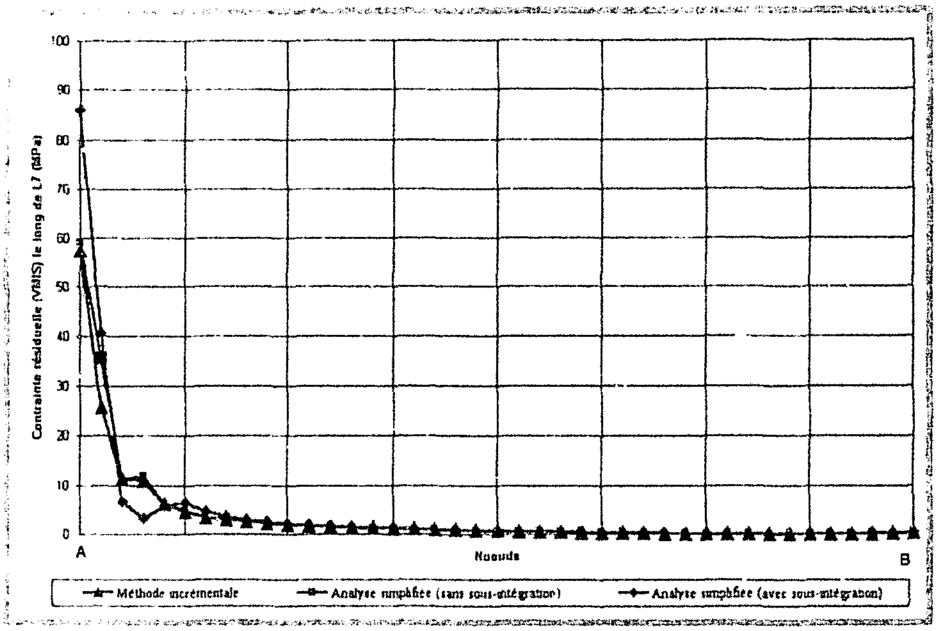


Figure 4.13. Comparaison de la contrainte résiduelle (VMIS) le long de L7

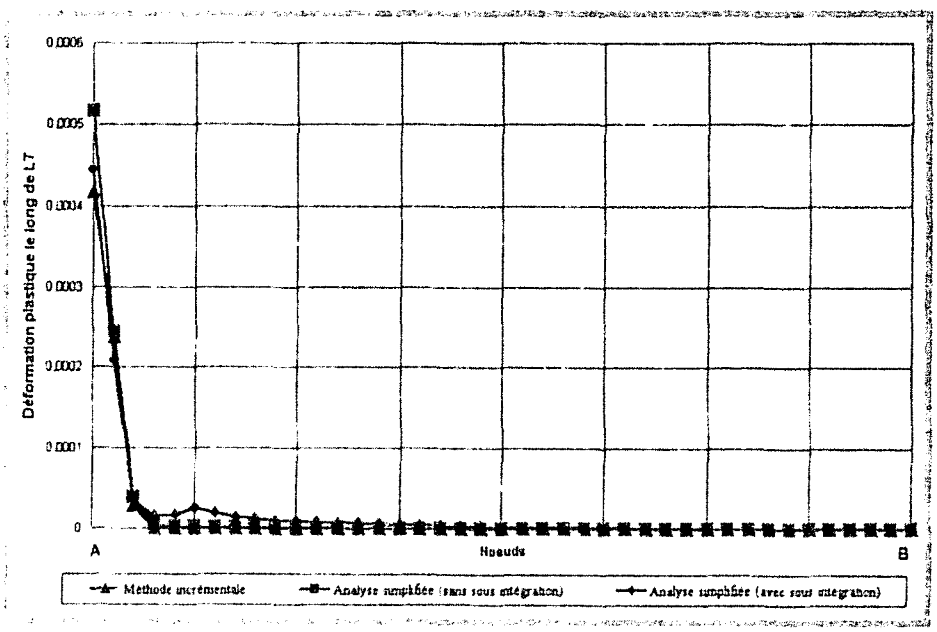


Figure 4.14. Comparaison de la déformation plastique le long de L7

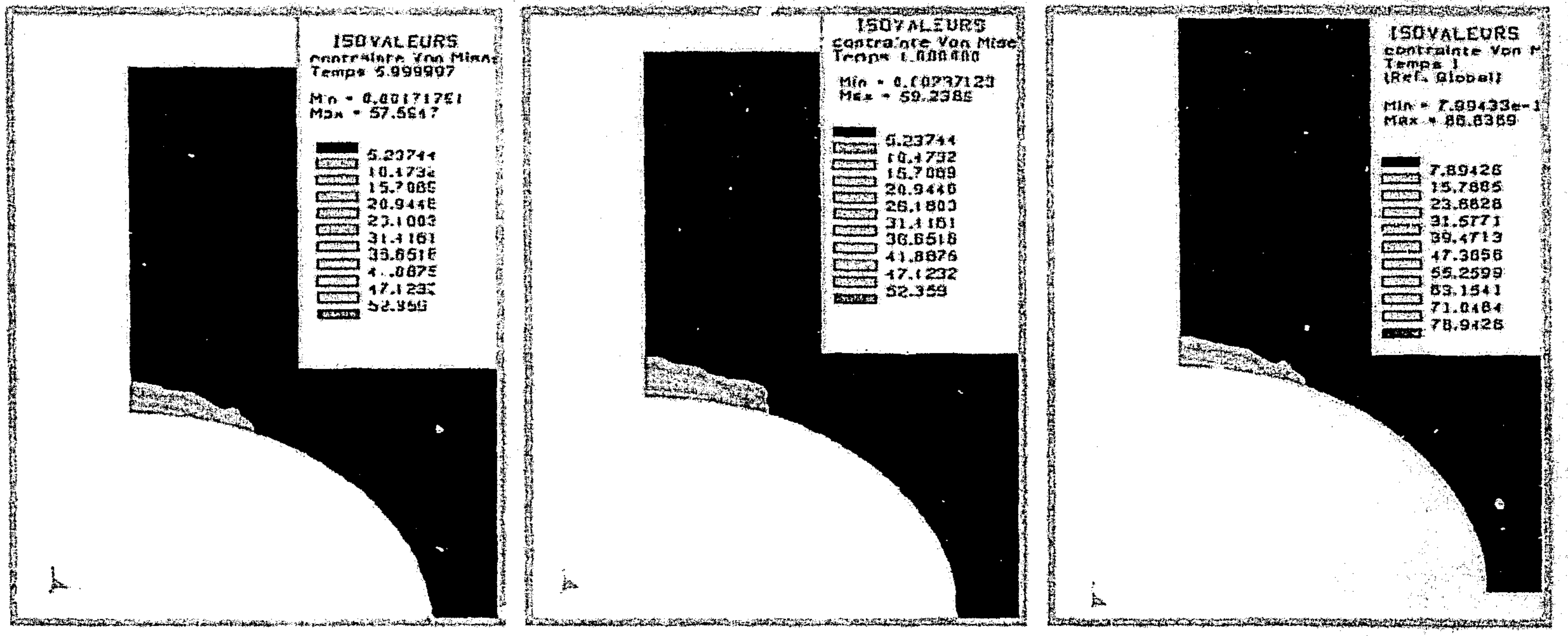


Figure 4.15. Comparaison des répartitions de la contrainte résiduelle

(a) Méthode incrémentale (b) Analyse simplifiée (sans sous-intégration) (c) Analyse simplifiée (avec sous-intégration)

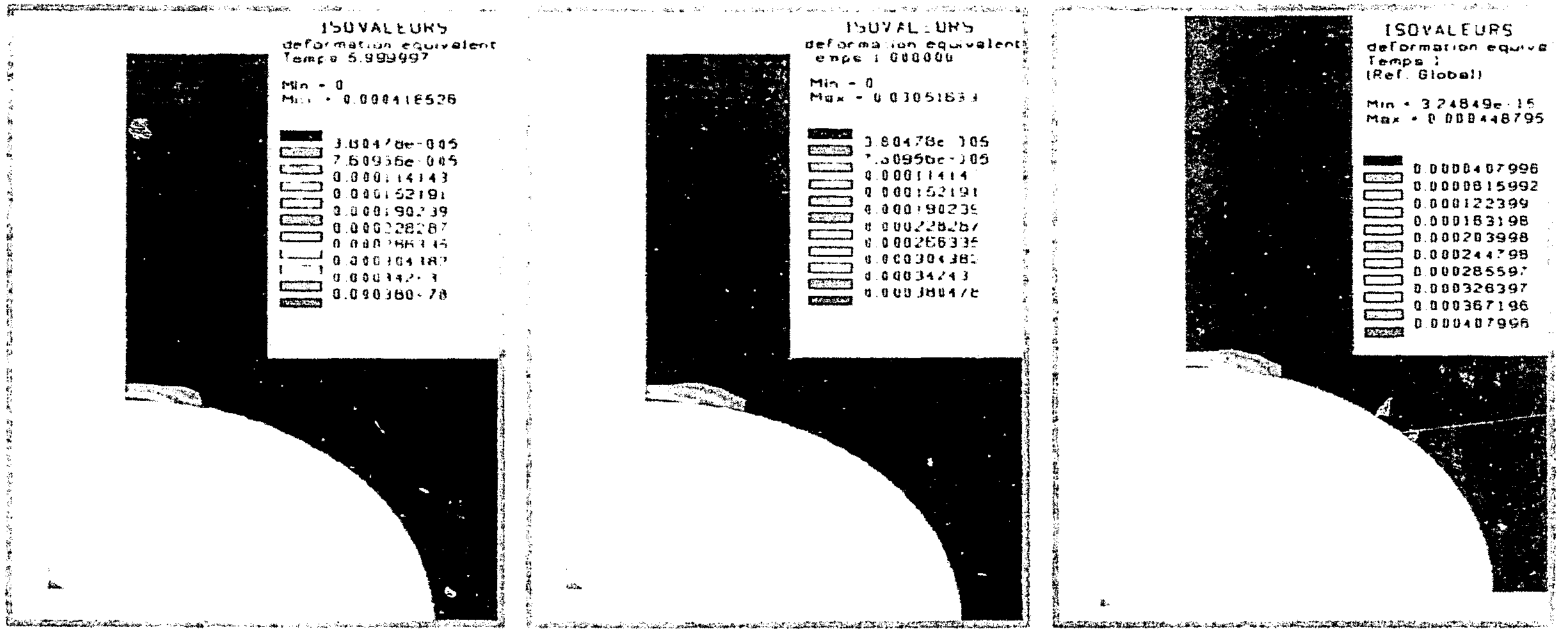


Figure 4.16. Comparaison des répartitions de la déformation plastique

(a) Méthode incrémentale (b) Analyse simplifiée (sans sous-intégration) (c) Analyse simplifiée (avec sous-intégration)

Nous notons que le calcul incrémental semble lui aussi tendre vers une solution adaptée (figure 4.17).

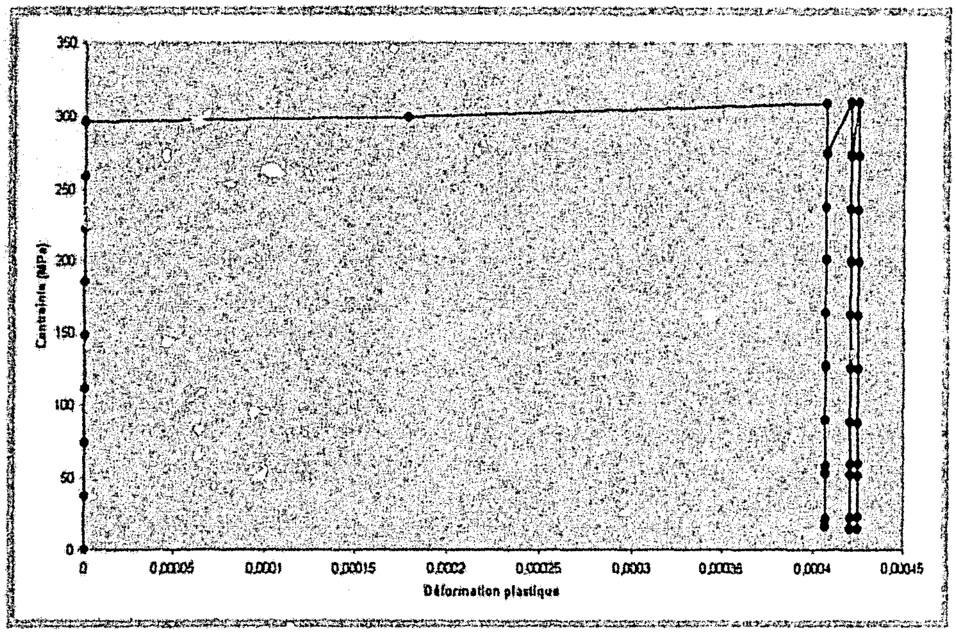


Figure 4.17. Courbe cyclique (méthode incrémentale)

4.4.3. Conclusion sur les paramètres d'influence

Pour savoir quel élément est le plus adapté, nous considérons la méthode incrémentale ou pas-à-pas comme référence.
Nous avons donc effectué plusieurs tests par rapport au type d'élément, au nombre de points d'intégration et à la taille de ces éléments sachant que l'on ne travaillera qu'avec des éléments quadratiques afin d'augmenter la précision des résultats.

4.4.3.1. Influence du type d'élément

Les éléments triangulaires quadratiques (six nœuds et trois points de Gauss), qui s'avèrent moins sensibles à la distorsion géométrique, sont les plus utilisés pour la résolution des problèmes d'élasticité en milieu industriel **[Batoz90]**.

Dans le cadre de l'analyse simplifiée, ces éléments auraient été intéressants pour diminuer les erreurs de « plastification ». En effet, la « plastification » d'un point de Gauss entraîne la « plastification » de l'élément en entier.

D'après l'exemple de la figure 4.18, l'élément triangulaire à six nœuds comparé à l'élément quadrangulaire à huit nœuds, nous donne une zone plastifiée et une zone élastique dans le premier cas et une zone plastifiée complète dans le deuxième cas.

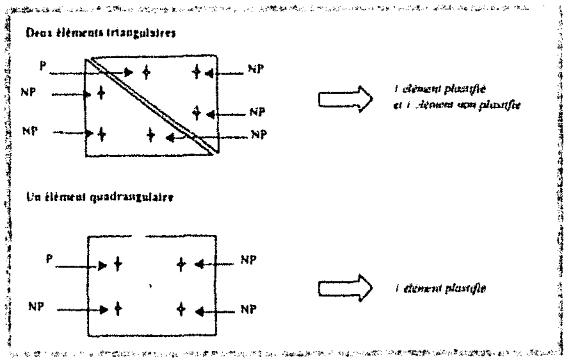


Figure 4.18. Comparaison entre deux éléments isoparamétriques (exemple).

Mais finalement, les éléments triangulaires ne permettent pas de modéliser les structures bidimensionnelles car ils ne donnent pas de résultats satisfaisants lorsque l'on applique l'analyse simplifiée (cf. § 4.4.1.1.).

4.4.3.2. Prise en compte de la sous-intégration des éléments

Pour les structures bidimensionnelles (cf. Annexe A), nous n'utiliserons que des éléments quadrangulaires quadratiques à huit nœuds (figure 4.2.). D'après Mialon **[Mialon91]**, si ces éléments sont sous-intégrés en quatre points de Gauss alors ils permettent de prendre en compte l'incompressibilité plastique (critère de Von Mises).

Nous avons donc testé la sous intégration et la non sous-intégration de différents éléments bidimensionnels dans le cas de l'analyse simplifiée et nous avons constaté que les valeurs des champs étaient assez différentes. Les comparaisons de ces valeurs permettent de conclure à la nécessité de ne pas sous-intégrer les éléments.

4.4.3.3. Influence de la taille des éléments

La taille des éléments ne modifie pas l'état asymptotique de la structure mais permet de donner plus de précision à la réponse inélastique, pour la méthode incrémentale et pour l'analyse simplifiée associée aux éléments sans sous-intégration. Dans le cas des éléments sous-intégrés, on remarque une instabilité lorsque l'on passe d'un maillage grossier à un maillage fin (les valeurs obtenues par l'analyse simplifiée appliquée au maillage grossier sous-estiment les valeurs de la méthode incrémentale et elles sont surestimées lorsque l'analyse simplifiée est appliquée au maillage fin).

Finalement, pour l'accommodation, les résultats précédents nous font choisir des éléments quadrangulaires quadratiques sans sous-intégration. La finesse du maillage permet de jouer sur la précision des résultats mais pas sur leur nature.

4.4.4. Accommodation de la structure

Nous avons retenu le maillage fin et l'accommodation de la structure est obtenue grâce au chargement de la figure 4.3.b. Pour cet état limite, les bornes de déformations plastiques et de contraintes résiduelles sont à déterminer puisque la limite est périodique (figure 1.13).

Les variations des déformations plastiques et des contraintes résiduelles sont reportées sur les figures 4.19 et 4.20. Les figures 4.21 et 4.22 illustrent les différentes répartitions des champs inélastiques (bornes supérieure, inférieure et valeur moyenne pour l'analyse simplifiée, méthode incrémentale).

La résolution par l'analyse simplifiée s'effectue en 3 itérations et 978 secondes, temps C.P.U. Le calcul par la méthode incrémentale se fait en 7 cycles de 0,1 pas et 1758 secondes, temps C.P.U. Finalement, le calcul simplifié nécessite un temps proche de 1/2 du temps de calcul pas-à-pas effectué.

Les bornes issues de l'estimation de l'analyse simplifiée encadrent bien la solution incrémentale dans le cas de la déformation plastique (figure 4.12). Pour la contrainte résiduelle (figure 4.11), nous constatons un mauvais encadrement de la solution et des zones de sous-estimation de cette contrainte résiduelle.

Finalement, c'est la borne inférieure qui est la plus représentative puisqu'elle est plus proche de la solution incrémentale, la borne supérieure étant très élevée. L'erreur relative entre la borne inférieure de l'analyse simplifiée et la méthode incrémentale est d'environ 17% pour la contrainte résiduelle et d'environ 11% pour la déformation plastique.

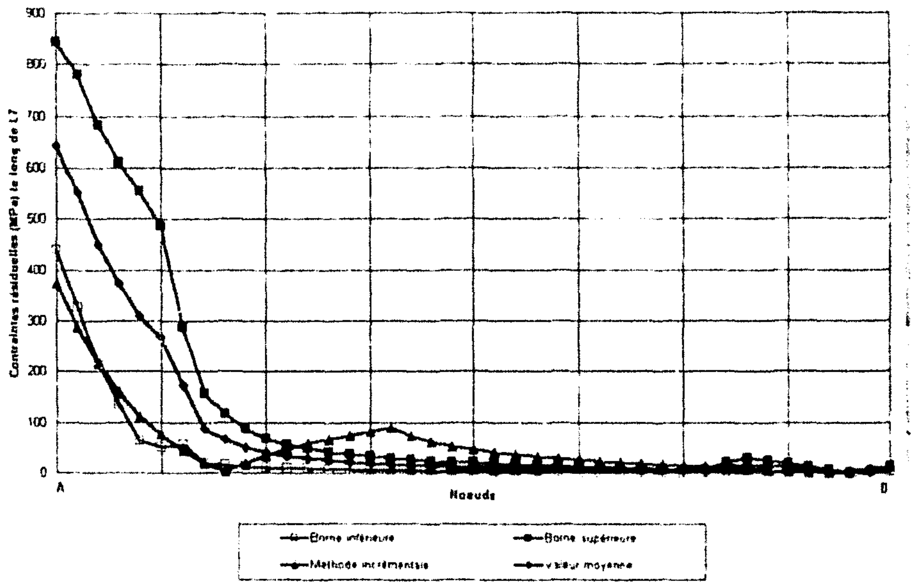


Figure 4.19. Comparaison de la contrainte résiduelle (VMIS) le long de L7

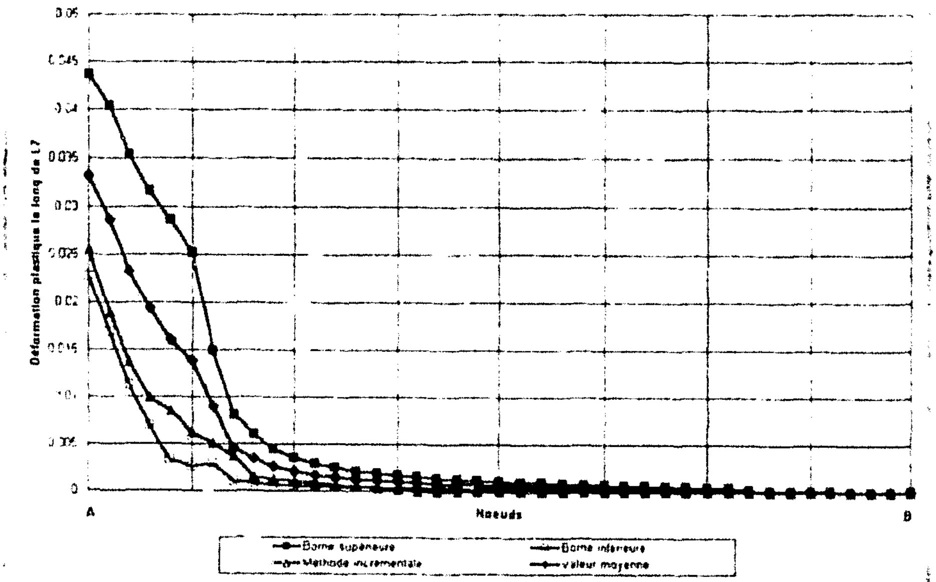


Figure 4.20. Comparaison de la déformation plastique le long de L7

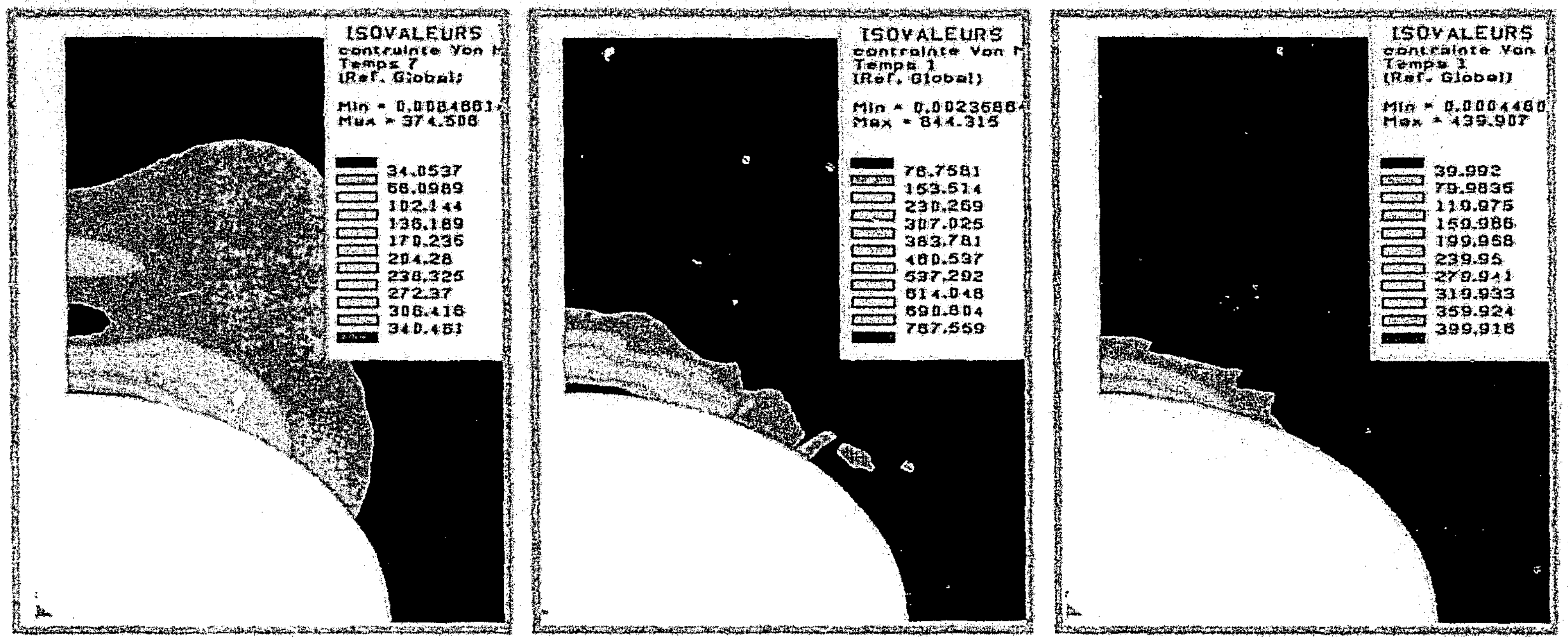


Figure 4.21. Répartitions de la contrainte résiduelle (VMIS)

(a) Méthode incrémentale (b) Analyse simplifiée (borne supérieure) (c) Analyse simplifiée (borne inférieure)

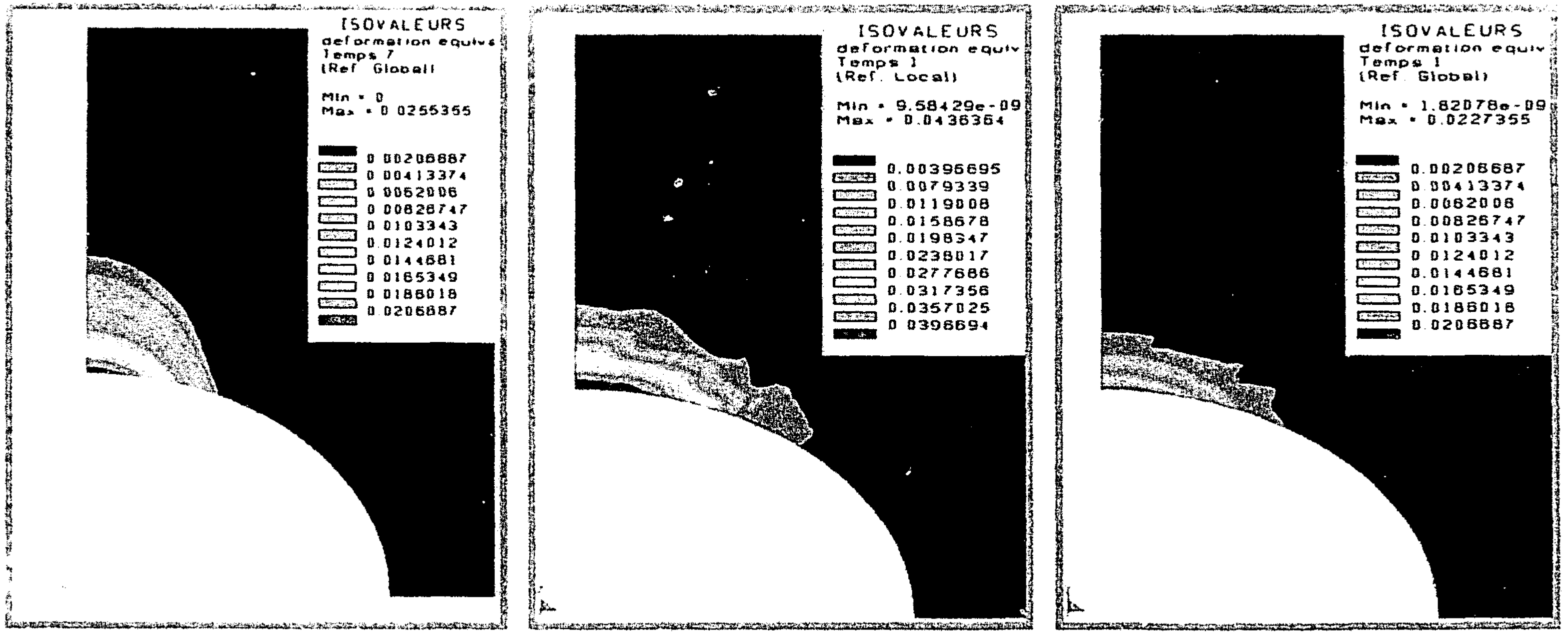


Figure 4.22. Répartitions de la déformation plastique

(a) Méthode incrémentale (b) Analyse simplifiée (borne supérieure) (c) Analyse simplifiée (borne inférieure)

La convergence de la méthode incrémentale est représenté sur la figure 4.23.

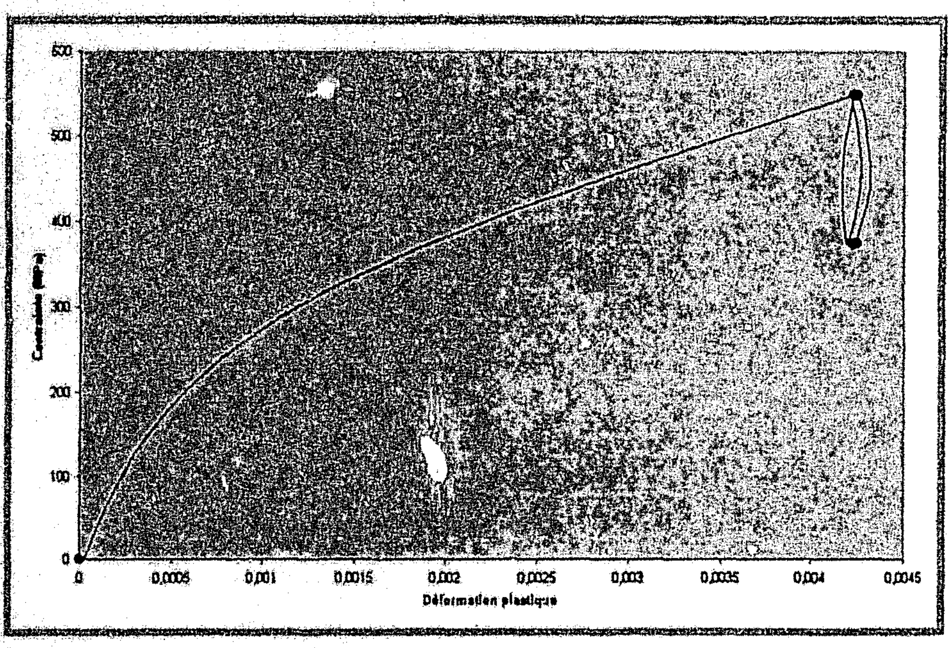


Figure 4.23. Courbe cyclique (méthode incrémentale)

4.4.5. Partition mixte

Conformément au § 3.4.7.3 (Cf. chapitre 3), nous pouvons illustrer la partition mixte (figure 4.24) grâce au module de Young (en rouge) et au module de Young modifié (en bleu). Ainsi, nous avons la répartition de la zone plastique selon la nature de l'état limite.

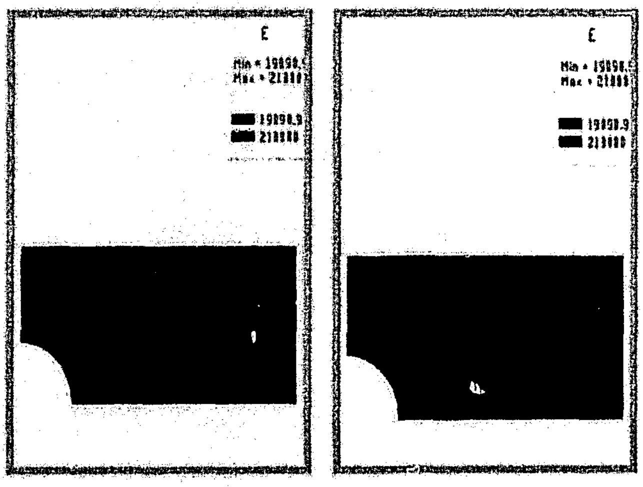


Figure 4.24. Zones plastiques
(a) adaptation (b) accommodation

Nous avons constaté finalement que si l'on pouvait aisément implanter l'analyse simplifiée dans un code alors tous les types d'éléments ne permettaient pas une d'obtenir une bonne estimation des champs. Nous allons donc étendre l'analyse simplifiée aux éléments tridimensionnels afin de définir les paramètres d'influence.

4.5. Structures tridimensionnelles

Nous avons appliqué les deux formulations incrémentale classique et simplifiée pour diverses structures tridimensionnelles. Nous allons illustrer les résultats obtenus par les deux approches sur une structure étudiée dans les manuels d'exemples de SYSTUS **[Systus99]**. C'est un crochet (figure 4.25) de levage employé pour le stockage ou le déstockage dans un magasin de pièces détachées.

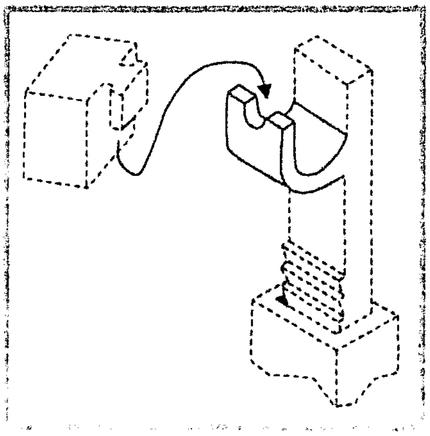


Figure 4.25. Crochet de levage

Un incident probable est l'accrochage, par un des côtés du crochet au moment du levage, d'une partie fixe d'un des supports de rangement. Nous avons supposé cet accrochage cyclique.

Les caractéristiques mécaniques de la structure (acier) sont regroupées dans le tableau 4.4.

$\mathcal{E}$	ν	σ_0	$h = 3C/2$
210000 MPa	0,28	300 MPa	21000 MPa

Tableau 4.4. Caractéristiques mécaniques

Le crochet va donc subir une pression répartie (flexion), représentée à la figure 4.26. Le premier cas de chargement (figure 4.26.a) donne une limite adaptée de la structure et le deuxième cas (figure 4.26.b), un état limite accommodé.

Cette pression est appliquée sur la face D, la face B étant bloquée dans les trois directions (figure 4.27).

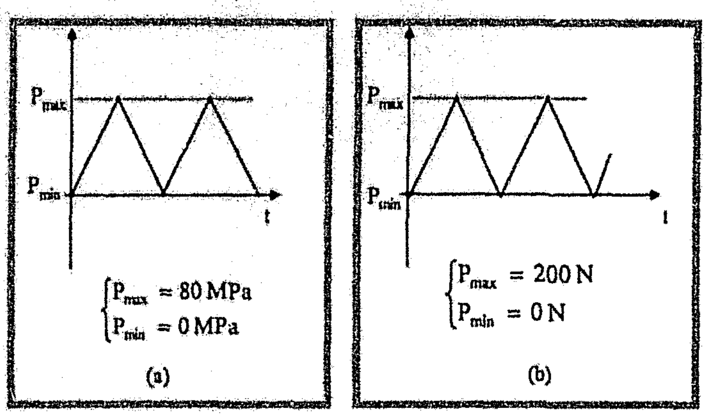


Figure 4.26. Chargements appliqués à la structure

Le crochet est discrétisé en 298 éléments et 1744 nœuds soit 5232 degrés de liberté. Il est modélisé (figure 4.27) en éléments hexaédriques quadratiques à 20 nœuds. Les éléments ont 27 ou 8 points de Gauss s'ils sont respectivement sans sous-intégration ou avec (on pourra se reporter à l'annexe C pour la discrétisation avec des éléments prismatiques).

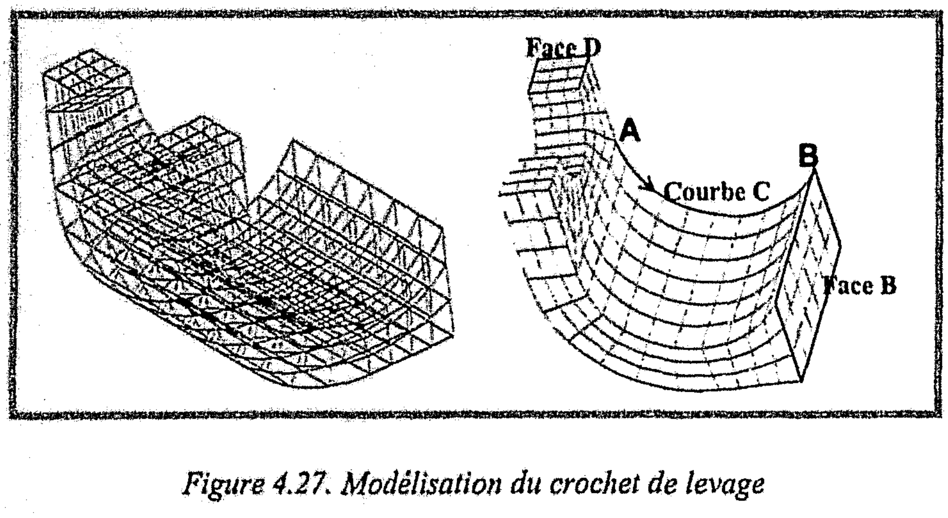


Figure 4.27. Modélisation du crochet de levage

4.5.1. État adapté du crochet

Le crochet s'adapte au bout de 2 itérations par l'analyse simplifiée et à moins d'une dizaine de cycles par la méthode incrémentale (figure 4.28).

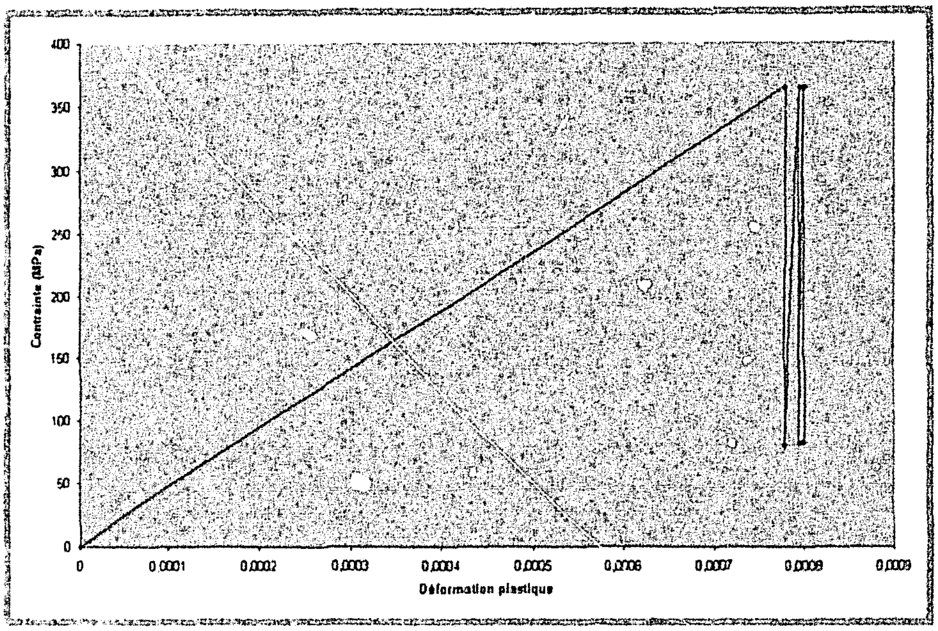


Figure 4.28. Courbe cyclique

Nous avons comparé les variations (figure 4.29 et figure 4.30) du champ de contraintes résiduelles et de déformation plastique obtenues par l'analyse et par la méthode incrémentale, le long de la courbe C suivant la direction AB (figure 4.27). Les figures 4.31 et 4.32 permettent la visualisation et donc la comparaison des répartitions des différents champs inélastiques.

L'analyse simplifiée associée aux éléments avec sous-intégration ne nous donne pas de résultats concluants si nous les comparons à la ceux de la méthode incrémentale. Il est donc nécessaire d'avoir le maximum de points de Gauss dans l'élément pour avoir une bonne représentation de la « plastification ». Nous retrouvons finalement les conclusions du cas bidimensionnel.

La résolution avec l'analyse simplifiée (éléments sans sous-intégration) est réalisée à coûts et à temps de calculs négligeables : 752.79 secondes temps CPU contre 4799.53 secondes pour la méthode élastoplastique. Le calcul simplifié nécessite donc un temps proche de 1/6 ième du temps de calcul pas-à-pas effectué.

L'erreur relative est très faible (environ 0.3% pour la contrainte résiduelle et d'environ 7% pour la déformation plastique) et l'estimation par l'analyse simplifiée des champs inélastiques est supérieure aux résultats obtenus par la méthode élastoplastique.

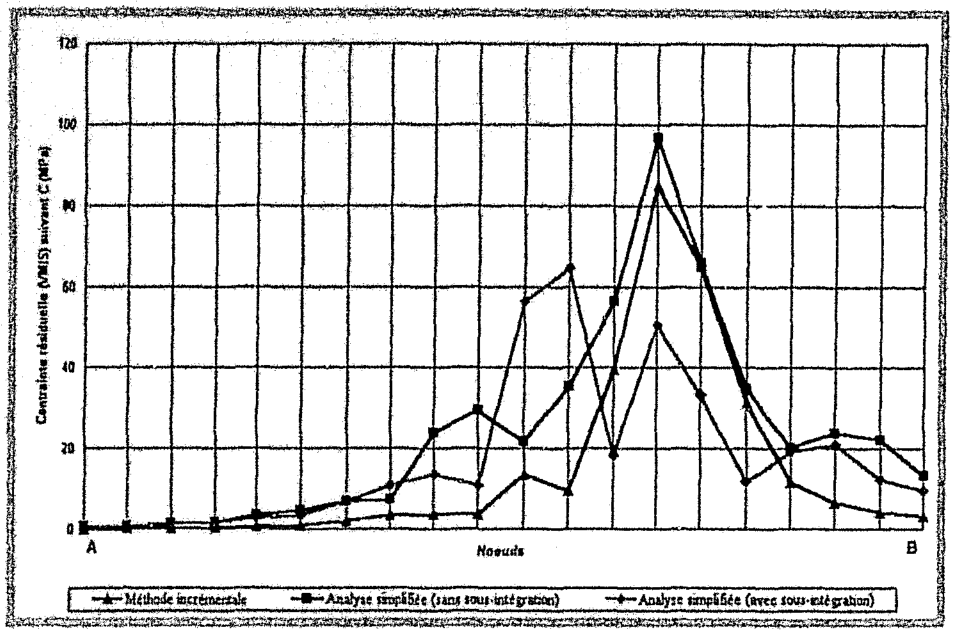


Figure 4.29. Comparaison de la contrainte résiduelle (VMIS) le long de la courbe C

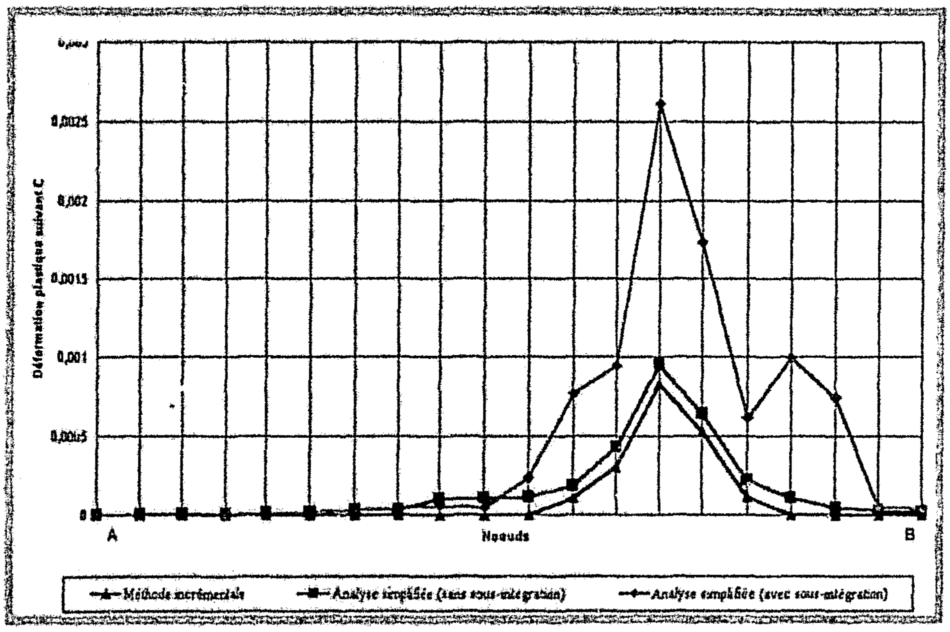


Figure 4.30. Comparaison de la déformation plastique le long de la courbe C

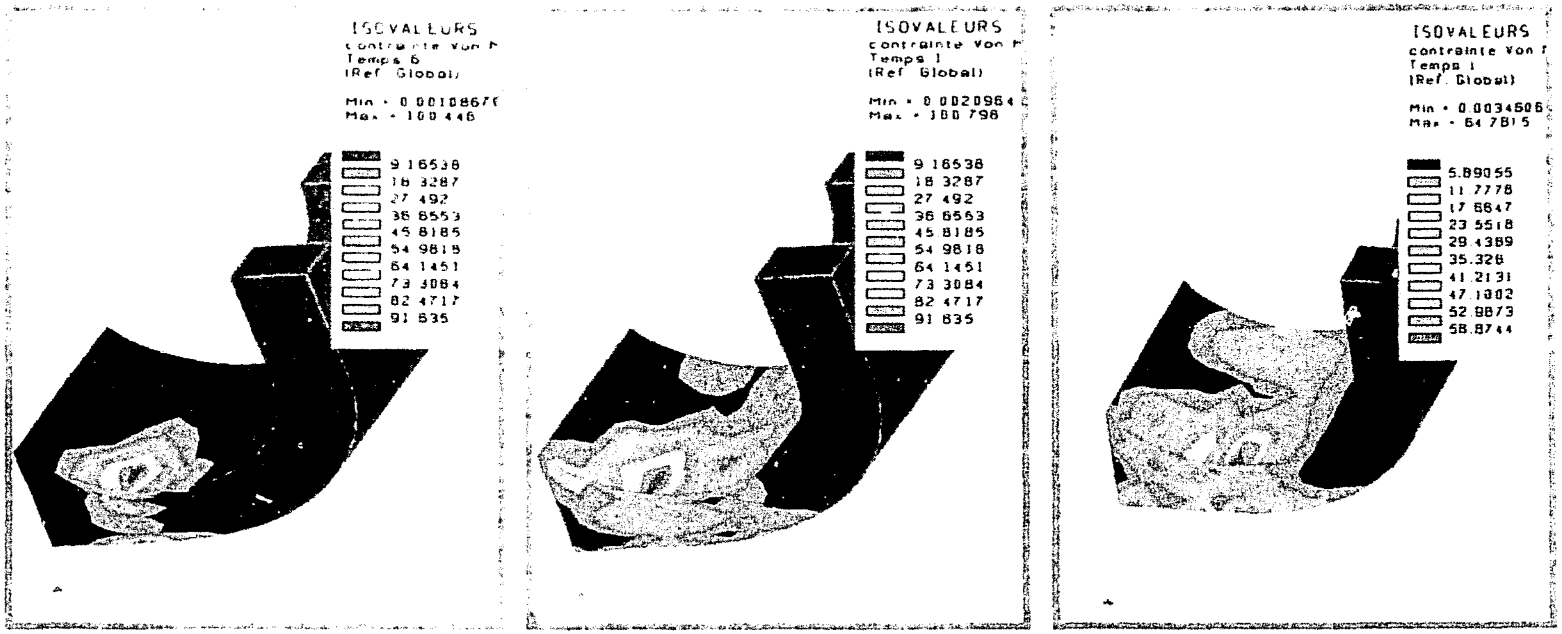


Figure 4.31. Comparaison des répartitions de la contrainte résiduelle

(a) Méthode incrémentale (b) Analyse simplifiée (sans sous-intégration) (c) Analyse simplifiée (avec sous-intégration)

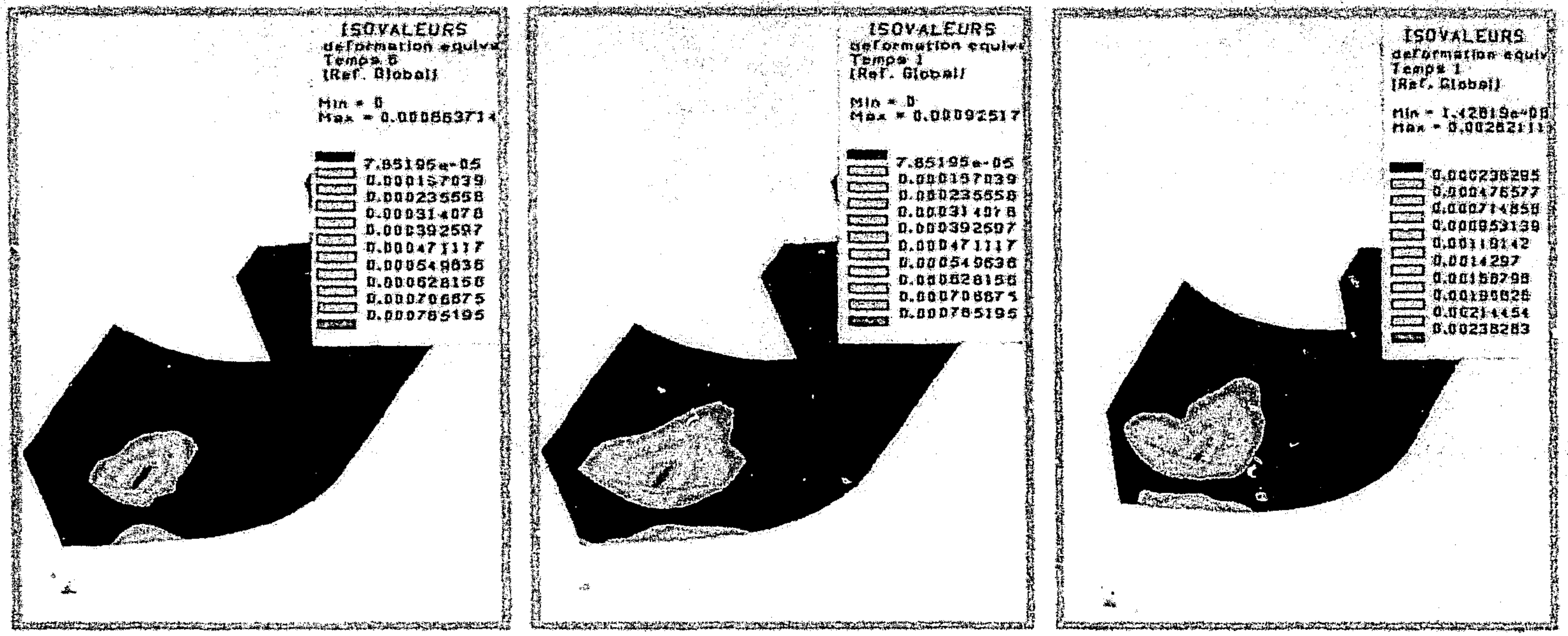


Figure 4.32. Comparaison des répartitions de la déformation plastique

(a) Méthode incrémentale (b) Analyse simplifiée (sans sous-intégration) (c) Analyse simplifiée (avec sous-intégration)

Il ne faut donc retenir désormais que les éléments hexaédriques sans sous-intégration puisqu'ils permettent d'obtenir des résultats plus cohérents.

4.5.2. Accommodation de la structure

Le chargement de la figure 4.26.b nous donne un état limite accommodé du crochet au bout de 2 itérations pour l'analyse simplifiée et d'environ 10 cycles de chargement pour la méthode incrémentale (figure 4.33).

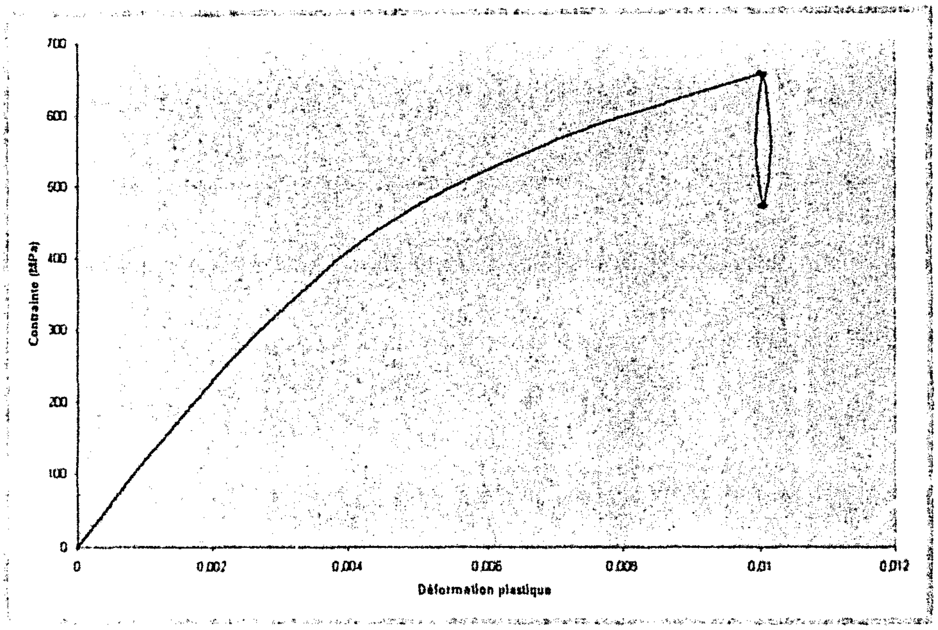


Figure 4.33. Courbe cyclique

Les variations des différentes bornes le long de la courbe C sont représentées sur la figure 4.34 et la figure 4.35.

C'est encore la borne inférieure qui estime au mieux la solution de la méthode incrémentale. L'erreur relative entre cette borne inférieure et la méthode incrémentale est d'environ 4% pour la contrainte résiduelle et d'environ 25% pour la déformation plastique.

La résolution par la méthode incrémentale s'est déroulée en 5623.69 secondes temps C.P.U. Le calcul par l'analyse simplifiée s'est effectué en 860.31 secondes temps C.P.U., soit environ 1/7 ième du temps par la méthode pas-à-pas.

Nous pouvons constater, d'après les différents temps de calcul que l'adaptation se stabilise plus rapidement que l'accommodation.

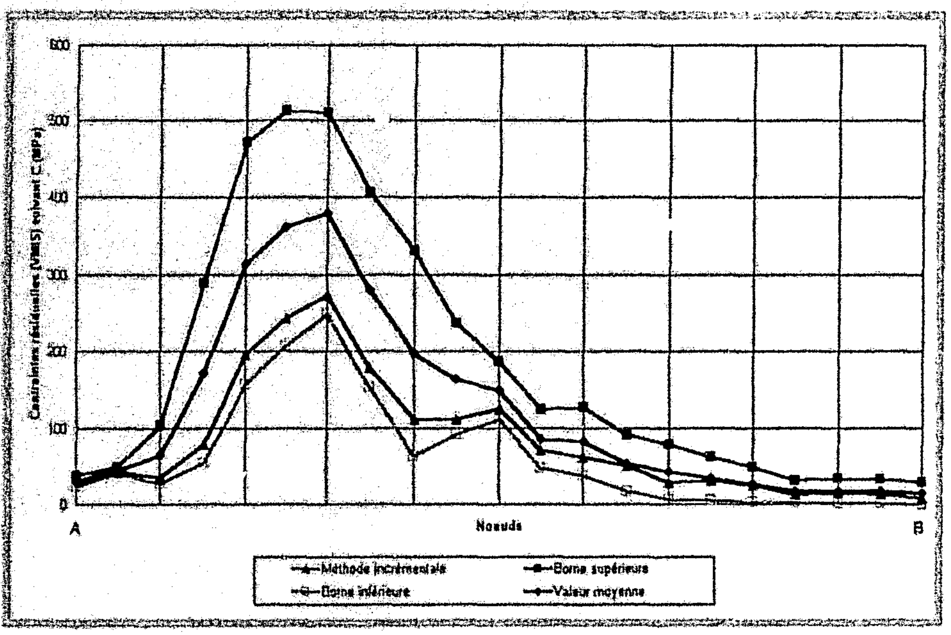


Figure 4.34. Comparaison de la contrainte résiduelle (VMIS) le long de la courbe C

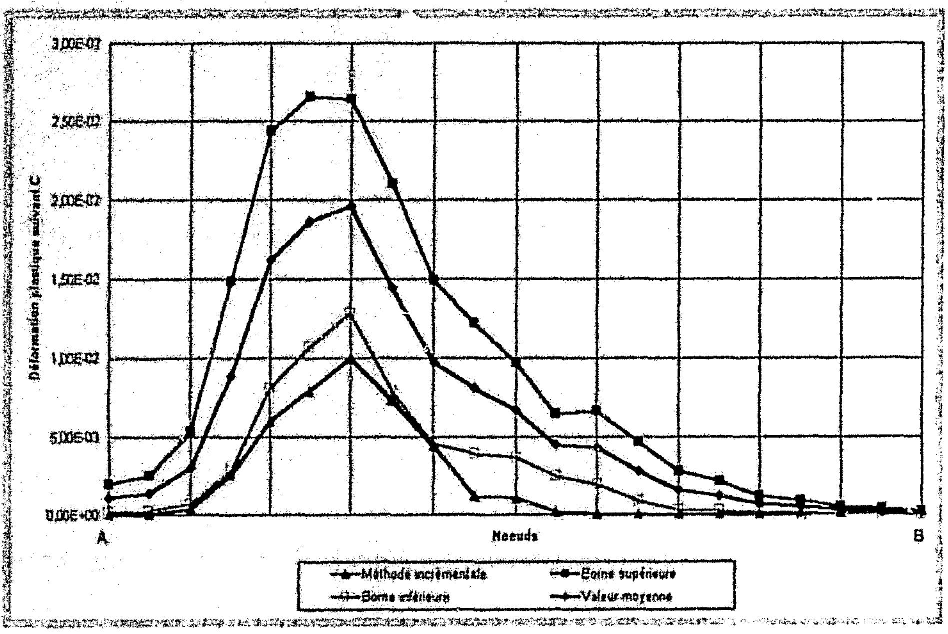


Figure 4.35. Comparaison de la déformation plastique le long de la courbe C

De la figure 4.36 à la figure 4.37, nous avons la répartition des bornes inférieure et supérieure obtenues par les différentes méthodes.

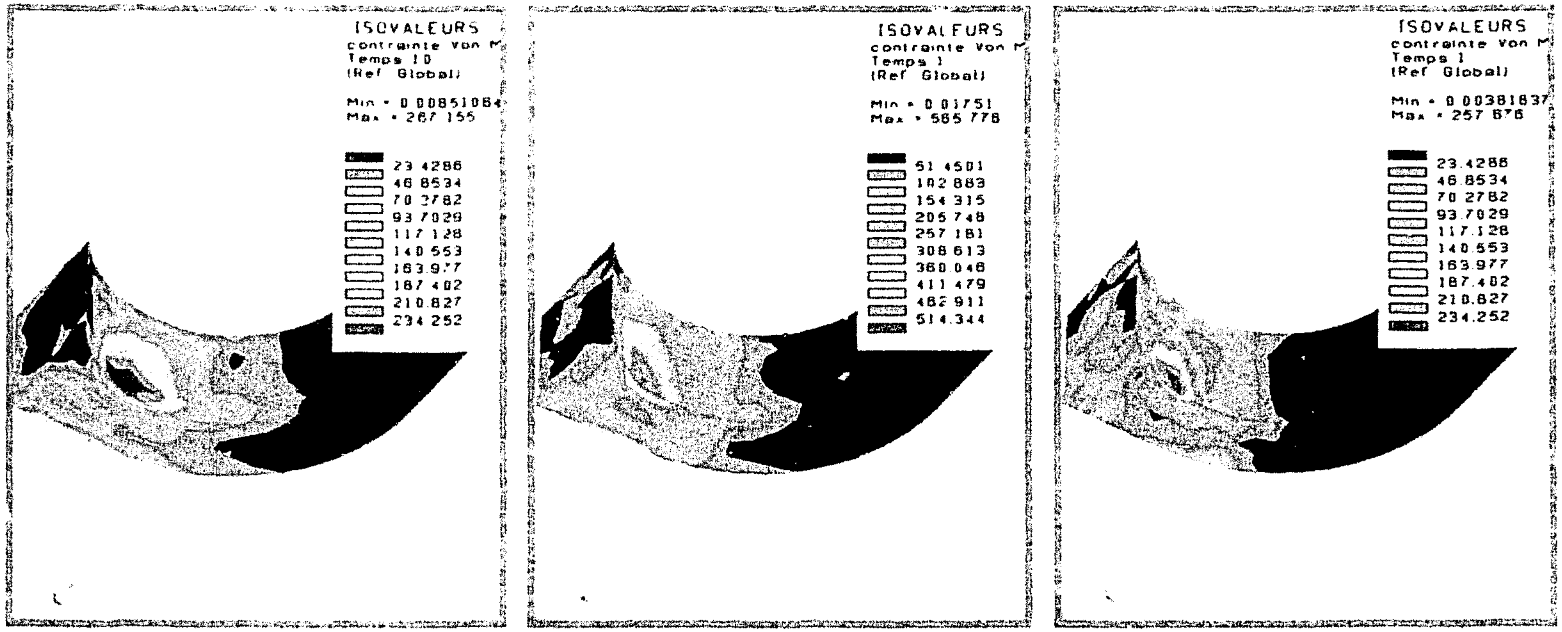


Figure 4.36. Répartitions de la contrainte résiduelle (VMIS)

(a) Méthode incrémentale (b) borne supérieure (Analyse simplifiée) (c) borne inférieure (Analyse simplifiée)

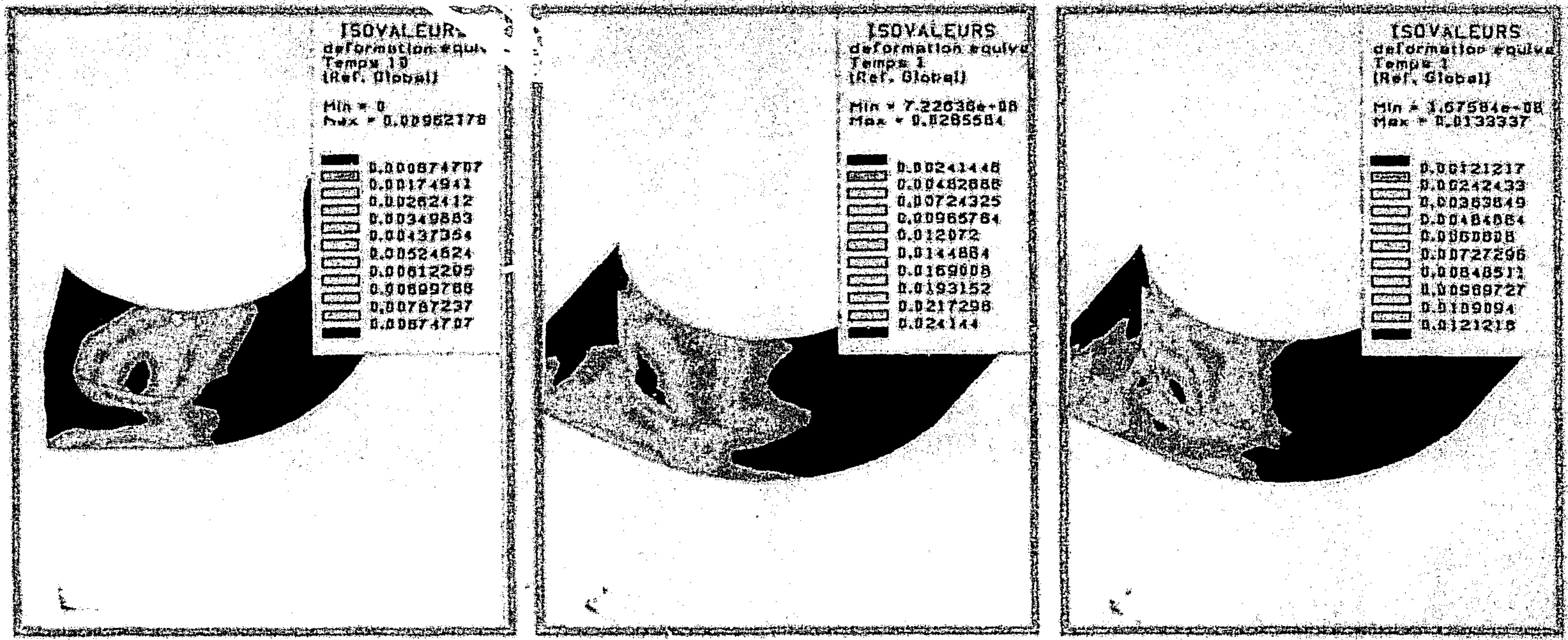


Figure 4.37. Répartition de la déformation plastique

(a) Méthode incrémentale (b) borne supérieure (Analyse simplifiée) (c) borne inférieure (Analyse simplifiée)

4.5.3. Partition mixte

Nous avons illustré comme précédemment, la partition mixte et donc les zones plastiques (figure 4.38) par l'intermédiaire du module de Young et du module de Young modifié. La figure 4.38.a représente l'adaptation et la figure 4.38.b l'accommodation.

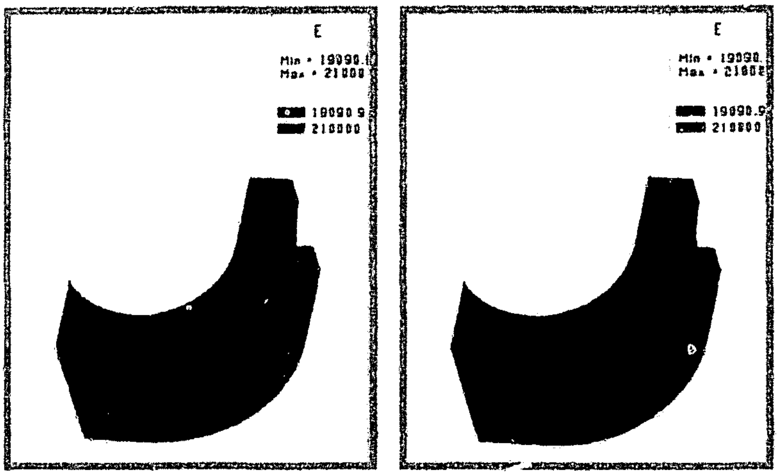


Figure 4.38. Zones plastiques
(a) adaptation (b) accommodation

Après avoir validé notre méthode, nous allons étendre les résultats à un type de structure « discrète » : les coques.

Cette extension aux éléments coques est présentée dans le paragraphe suivant sachant que dans ce cas, l'étude se fait par l'intermédiaire des variables généralisées.

4.6. Extension aux éléments coques

4.6.1. Introduction

Une extension aux coques de l'analyse simplifiée et son implantation dans le code de calcul SYSTUS (figure 4.39) est présentée dans ce chapitre. Ces éléments sont différents des éléments vus dans les paragraphes précédents car ils nécessitent la connaissance des champs dans l'épaisseur.

Le formalisme développé par la suite ne concerne que les coques minces.

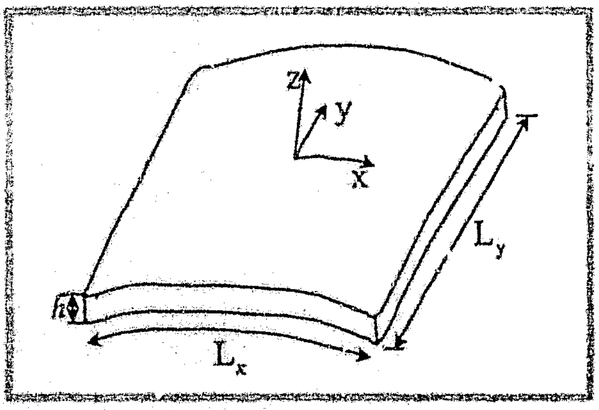


Figure 4.39. Coque mince

Nous considérerons une étude basée sur les hypothèses classiques des coques :

- ✓ des sections droites. Les déplacements u et v (suivant x et y) d'un point quelconque x,y,z varient alors linéairement en z et le déplacement transversal w (suivant z) n'est fonction que de x et y.
- ✓ d'une déformation transversale ε_{zz} nulle (pas de variation d'épaisseur).
- ✓ de la contrainte σ_{zz} négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur de contraintes.
- ✓ Des petites déformations et des petites rotations.
- ✓ L'influence du cisaillement transversal est pris en compte (supposé constant).

Cette théorie fait intervenir :

✓ Cinq variables cinématiques indépendantes (les déplacements de membrane u et v dans le plan de référence $z = 0$, le déplacement transversal w et les rotations β_x et β_y de la normale à la surface moyenne dans les plans xz et yz respectivement).

✓ Trois efforts résultants de membrane notés N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, trois moments de flexion notés M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} et deux efforts tranchants notés T_{xz}, T_{yz}.

Le plan xy est le plan moyen de la coque. La variable selon l'épaisseur est notée z tel que $-t \leq z \leq t$ avec $t = \frac{h}{2}$ et h l'épaisseur.

Le quadrilatère à 4 nœuds permet d'étudier à la fois les coques minces et les coques épaisses (figure 4.40). Il admet un champ de déplacement linéaire en membrane et en flexion. Il est constitué de 4 points de Gauss avec ou sans sous-intégration.

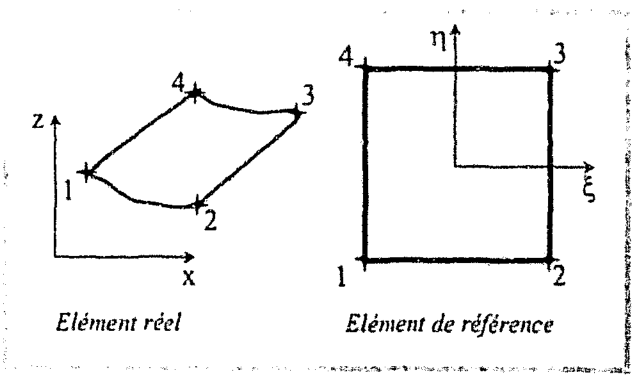


Figure 4.40. Elément isoparamétrique

Cet élément linéaire à 4 nœuds est développé par T.J.R Hughes **[Hughes86, Hughes87]** et dans le volume 2 de J.L. Batoz & G. Dhatt **[Batoz90]**.

4.6.2. Les efforts résultants

Les efforts résultants de membrane sont :

$$N = \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t}^{t} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \qquad (4.9)$$

Les moments résultants de flexion et de torsion sont :

$$M = \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t}^{t} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{r} \end{bmatrix} z\,dz \qquad (4.10)$$

et les efforts tranchants ou efforts résultants de cisaillement :

$$T = \begin{bmatrix} T_{xz} \\ T_{yz} \end{bmatrix} = \int_{-t}^{t} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz \qquad (4.11)$$

Les déformations linéaires s'écrivent :

$$e = \varepsilon^{N} + z\chi \qquad (4.12)$$

avec

$$e = \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{bmatrix} \qquad (4.13)$$

et

$$\varepsilon^{N} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{N} \\ \varepsilon_{yy}^{N} \\ 2\varepsilon_{xy}^{N} \end{bmatrix}, \ \chi = \begin{bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ 2\chi_{xy} \end{bmatrix} \qquad (4.14)$$

Les déformations e sont linéaires en z. ε^{N} représente les déformations de membrane et χ les courbures. Les déformations de cisaillement transversal γ sont constantes à travers l'épaisseur et elles s'écrivent :

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \qquad (4.15)$$

4.6.3. Relations efforts résultants-déformations

En considérant les relations précédentes, on obtient :

$$\begin{cases} N = H_m \varepsilon^N \\ M = H_f \chi \\ T = H_c \gamma \end{cases} \tag{4.16}$$

Dans le cas du matériau homogène et isotrope, H_m, H_f et H_c sont définies dans l'annexe A.2.

4.6.4. Critère de plasticité

Nous allons chercher à travailler dans un espace où le critère de plasticité est représenté par une sphère. Il est donc nécessaire d'effectuer un changement de variables afin d'exprimer le critère de Von Mises sous la forme suivante (en prenant en compte l'écrouissage) :

$$f(Q,q) = \left[(Q-q)^T (Q-q)\right]^{1/2} - k_0 \tag{4.17}$$

avec Q déviateur des contraintes généralisées et q paramètres internes généralisés.

Les variables généralisées ne tiennent pas compte de l'évolution de la zone plastique le long de l'épaisseur car ce sont des variables globales. Le critère utilisant les variables généralisées est employé au CEA [**Hoffmann73, Buff81**]. Le problème traité en variables généralisées aurait permis de réduire le nombre de variables et d'augmenter la stabilité numérique [**Iliouchine56, Hodge68, Robinson71**].

Mais une intégration numérique dans la direction de l'épaisseur est requise pour représenter correctement la plastification et les distributions des contraintes. Nous avons donc appliqué le critère de Von Mises local pour chaque surface de la coque :

$$f(\sigma) = \left[\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)\right]^{1/2} \tag{4.18}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}$$ est la contrainte dans l'épaisseur.

Nous allons donc appliquer la méthode d'analyse simplifiée à une structure discrétisée en éléments coques en considérant le critère local et en utilisant une intégration dans l'épaisseur.

Les résultats obtenus par la méthode incrémentale appliquée aux coques, ont été utilisés comme référence.

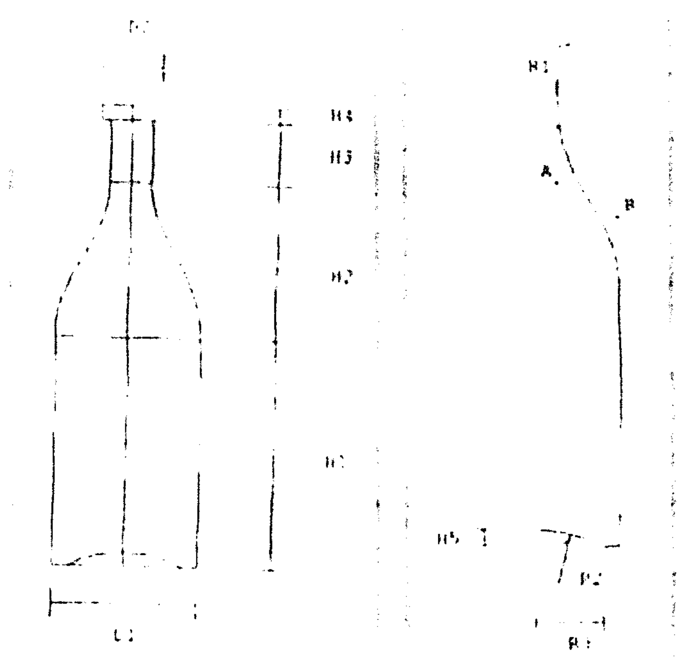
4.7. Application numérique pour les coques

Pour calculer les champs inélastiques par la méthode incrémentale, la coque est divisée transversalement en n couches (dans notre cas n = 3). Pour chacune de ces couches, l'histoire des déformations est calculée. De la même manière, nous avons divisé la coque en 3 couches pour appliquer la méthode d'analyse simplifiée.

Nous avons donc testé diverses structures de types coques minces et nous avons choisi de présenter les résultats obtenus pour une bouteille en acier (tableau 4.5) en appui sur le fond (figure 4.41).

E	ν	C	σ_0	h
210 000 MPa	0,3	$0{,}1 \times E$	300 MPa	1 mm

Tableau 4.5 Caractéristiques mécaniques



COTES	VALEURS (mm)	COTES	VALEURS (mm)
D1	100	H4	10
D2	40	H5	10
H1	150	R1	14
H2	100	R2	85
H3	40	R3	40

Figure 4.41. Dimensions de la bouteille

Cette structure est discrétisée en éléments coques (704 éléments et 749 nœuds soit à 3745 degrés de liberté, Cf. figure 4.42) et est soumise à une pression cyclique Pz. Les valeurs de la pression ont été choisies de sorte que l'on ait adaptation dans un premier cas et accommodation dans l'autre (figure 4.43).

Nous ne tenons pas compte du caractère axisymétrique de la structure et nous n'étudierons par symétrie que la moitié de la bouteille.

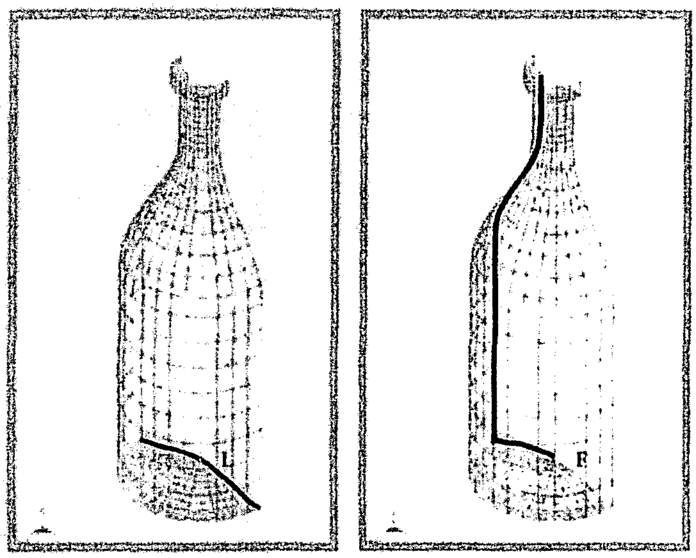


Figure 4.42. Modélisation de la coque

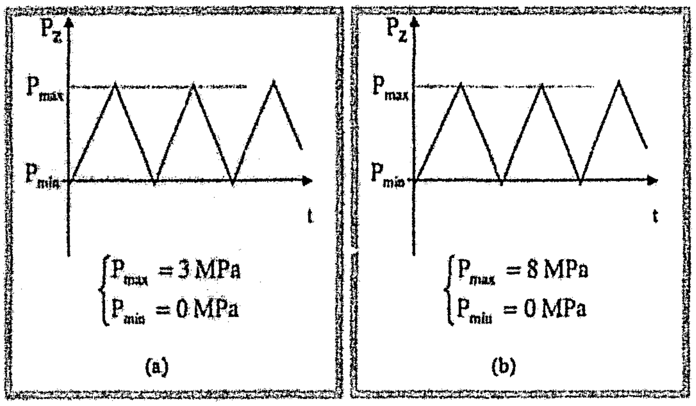


Figure 4.43. Chargement

Remarque

La déformation plastique sous SYSTUS ne peut pas être représentée par la méthode d'analyse simplifiée.

4.7.1. Adaptation de la coque

Le chargement de la figure 4.43.a. donne un comportement asymptotique adapté pour les surfaces supérieure et inférieure aussi bien par l'analyse simplifiée que par la méthode incrémentale. La surface moyenne reste élastique avec les deux méthodes.

La figure 4.44 représente les courbes de convergence obtenues pour ces 2 surfaces par la méthode incrémentale.

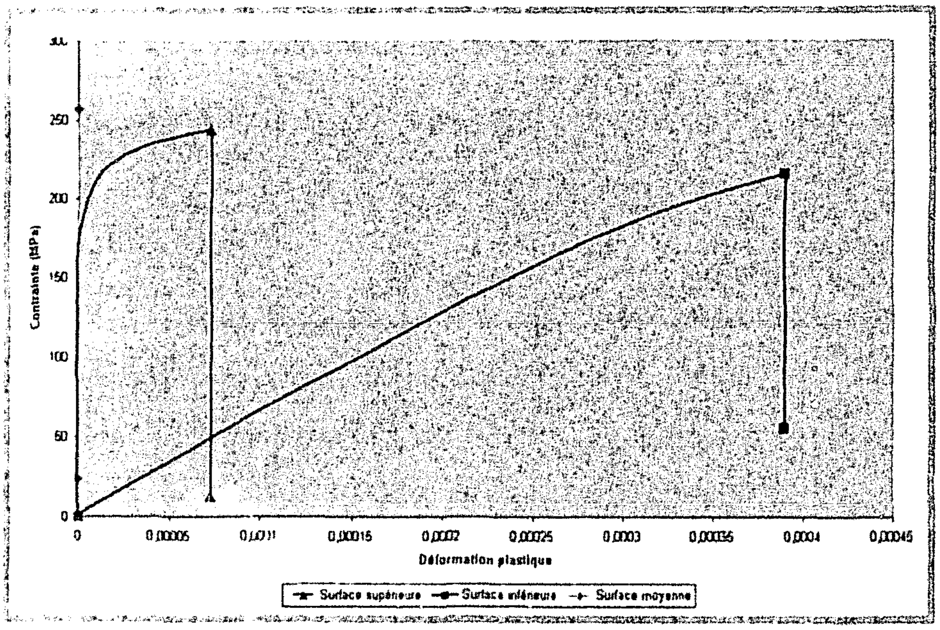


Figure 4.44. Convergence par la méthode incrémentale

Nous pouvons visualiser les répartitions des champs de contraintes résiduelles obtenus par les deux méthodes (figures 4.45 et 4.46).

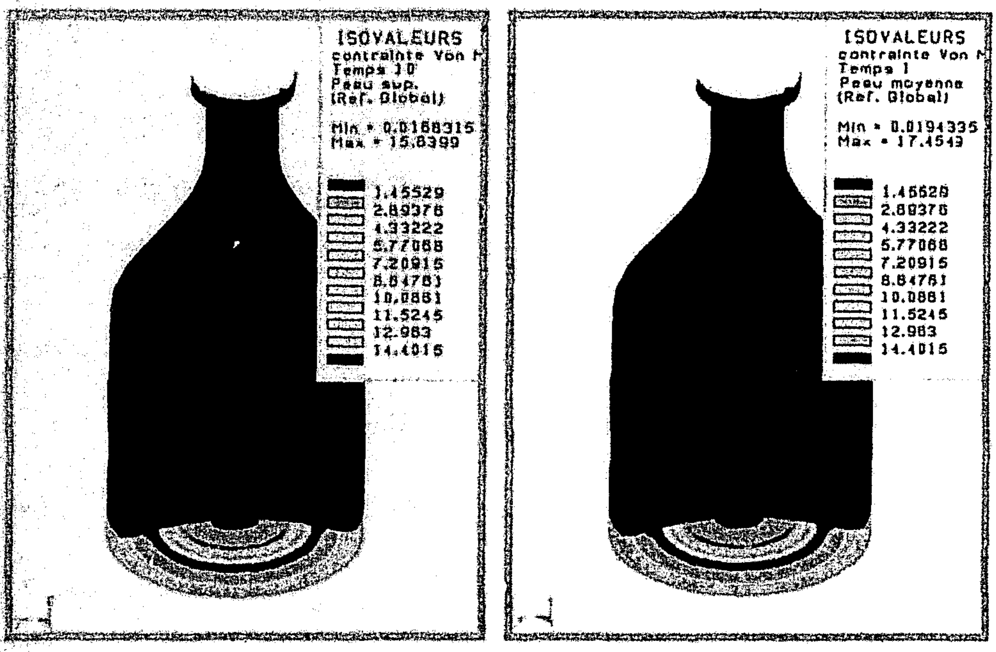


Figure 4.45. Répartition de la contrainte résiduelle (surface supérieure)

(a) Méthode incrémentale (b) Analyse simplifiée

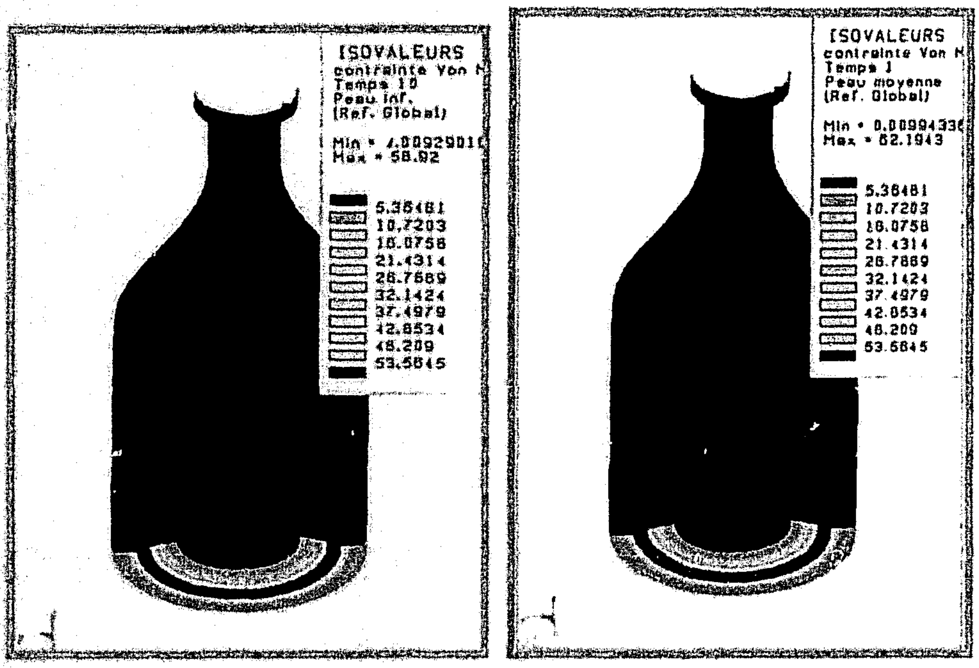


Figure 4.46. Répartition de la contrainte résiduelle (surface inférieure)

(a) Méthode incrémentale (b) Analyse simplifiée

Sur les figures 4.47 et 4.48, nous avons illustré les variations obtenues le long de la ligne L (figure 4.42.a).

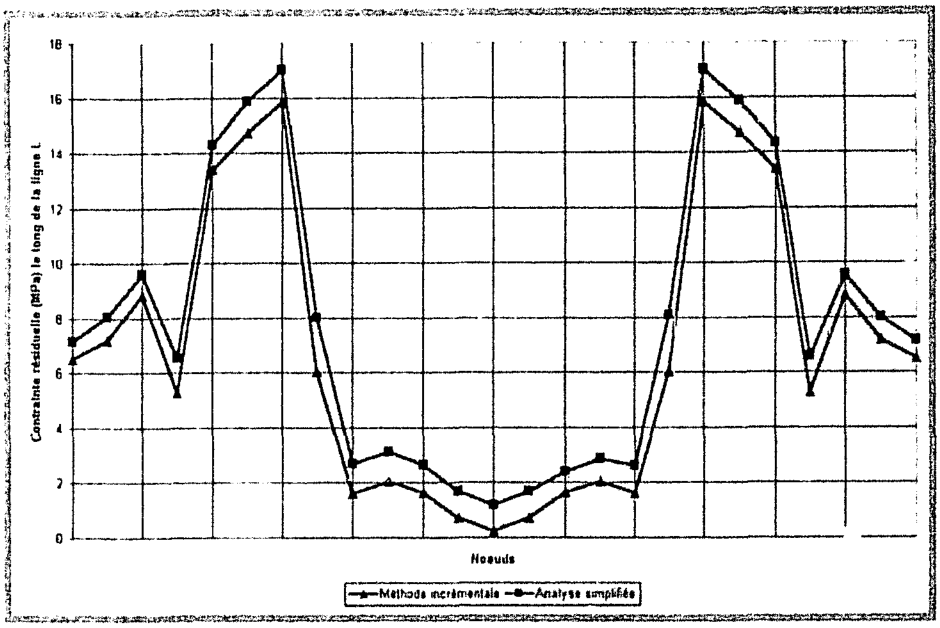


Figure 4.47. Variation de la contrainte résiduelle le long de L (surface supérieure)

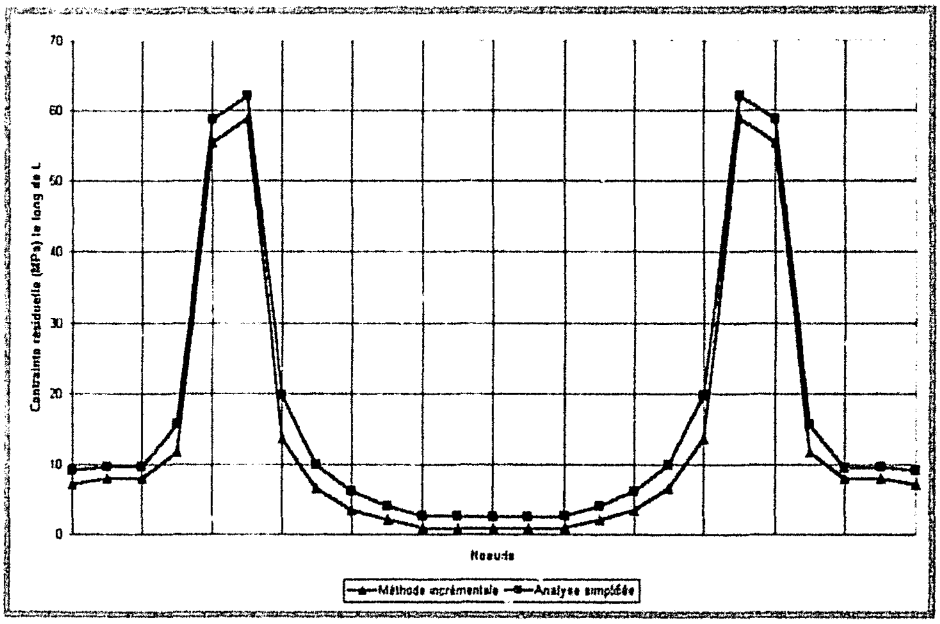


Figure 4.48. Variation de la contrainte résiduelle le long de L (surface inférieure)

Le temps de calcul de l'analyse simplifiée est de 560 secondes (1 itération) et celui de la méthode incrémentale est de 980 secondes (moins de 10 cycles). Les valeurs obtenues par l'analyce simplifiée surestiment légèrement celles de la méthode incrementale mais les répartitions restent semblables.

Les erreurs relatives sont d'environ 10% pour la surface supérieure et environ 6% pour la surface inférieure.

4.7.2. Accommodation

Avec le chargement de la figure 4.43.b, la structure a un comportement asymptotique accommodé pour les 3 surfaces par l'analyse simplifiée. De même, la méthode incrémentale donne un état limite accommodé pour ces 3 surfaces (figure 4.49).

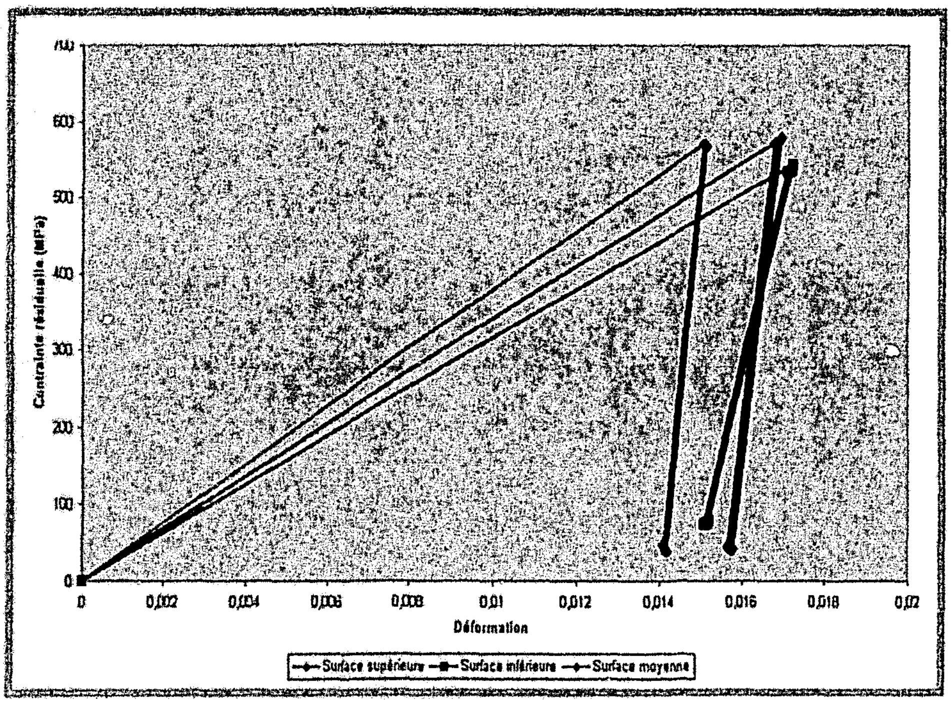


Figure 4.49. Courbe cyclique (méthode incrémentale)

Les figures 4.50 à 4.52 représentent les répartitions des contraintes résiduelles respectivement pour les surfaces supérieure, inférieure et moyenne. Nous avons représenté les variations le long de la ligne F (figure 4.42.b), des contraintes résiduelles au sens de Von Mises (figures 4.53 à 4.55) pour les différentes bornes.

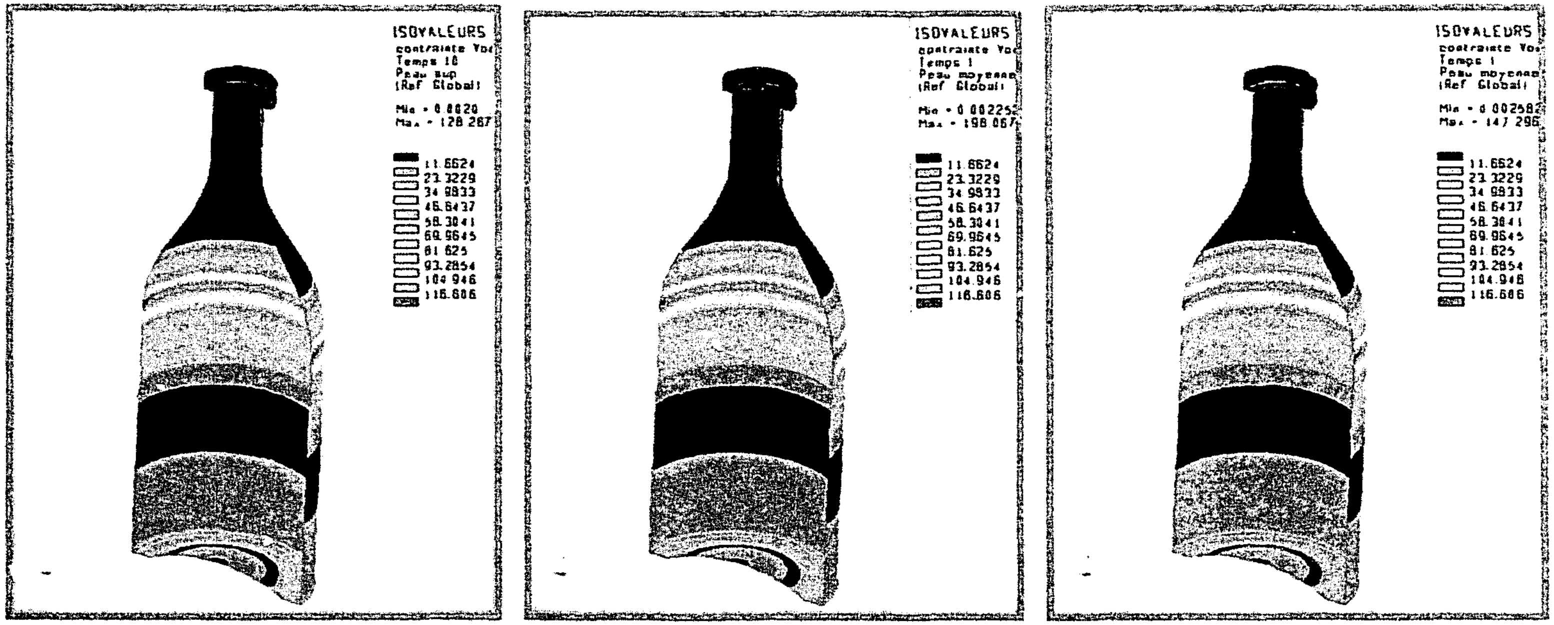


Figure 4.50. Répartition de la contrainte résiduelle (surface supérieure)

(a) Méthode incrémentale (b) Analyse simplifiée (borne supérieure) (c) Analyse simplifiée (borne inférieure)

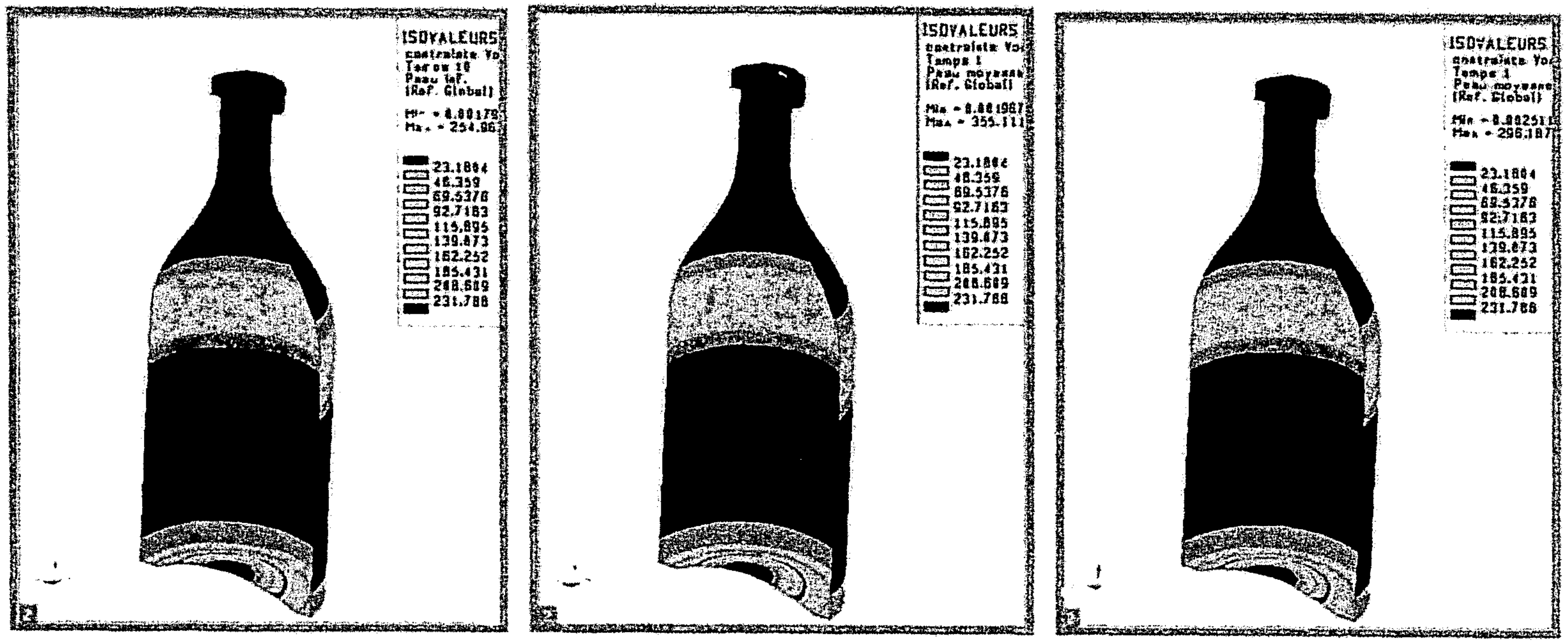


Figure 4.51. Répartitio: de la contrainte résiduelle (surface inférieure)

(a) Méthode incrémentale (b) Analyse simplifiée (borne supérieure) (c) Analyse simplifiée (borne inférieure)

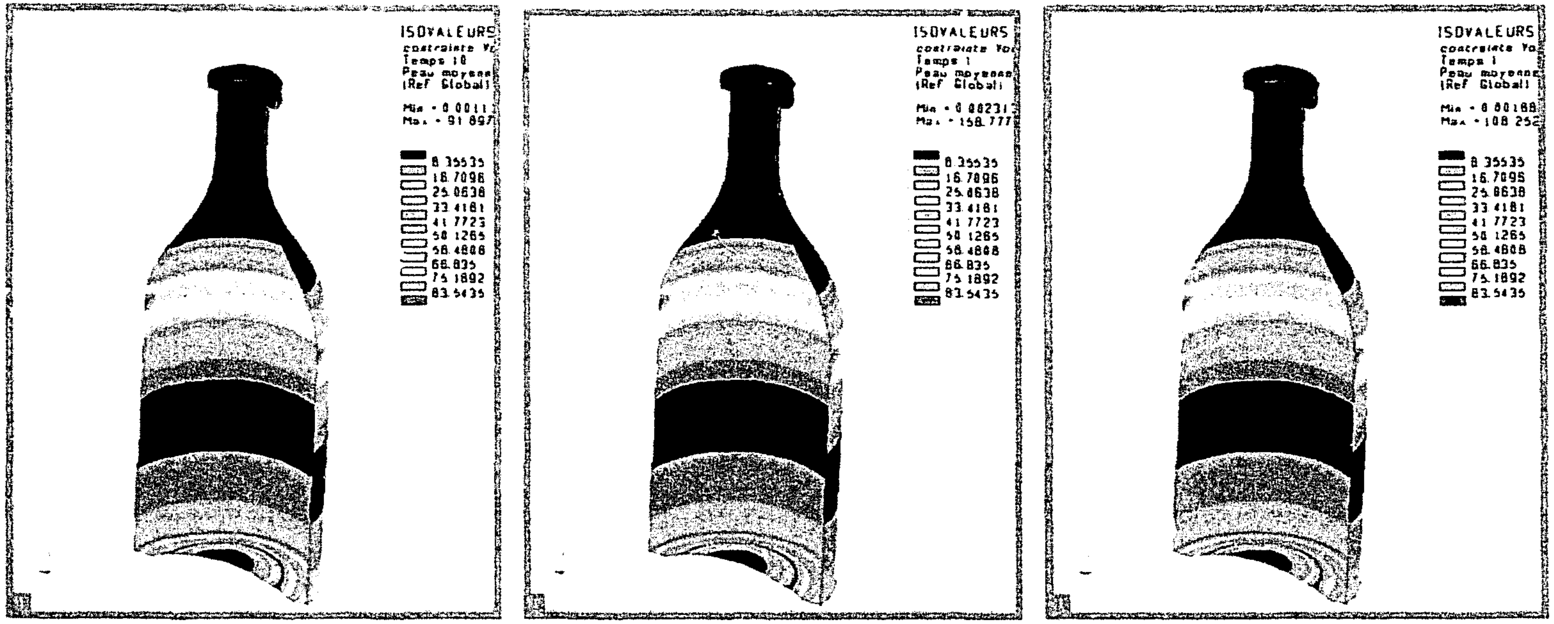


Figure 4.52. Répartition de la contrainte résiduelle (surface moyenne)

(a) Méthode incrémentale (b) Analyse simplifiée (borne supérieure) (c) Analyse simplifiée (borne inférieure)

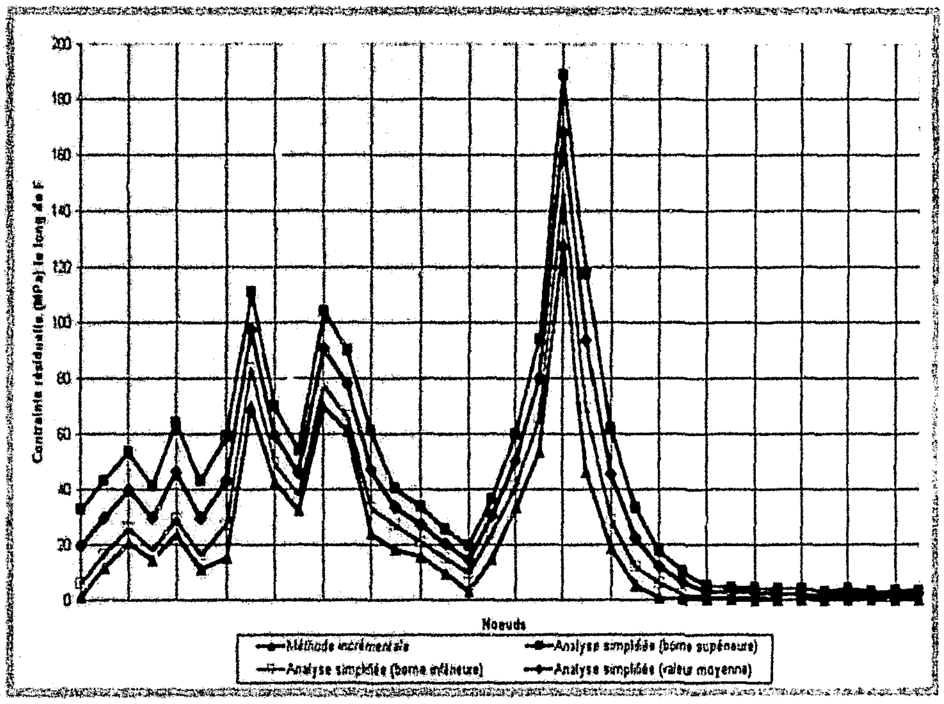


Figure 4.53. Variation de la contrainte résiduelle (surface supérieure)

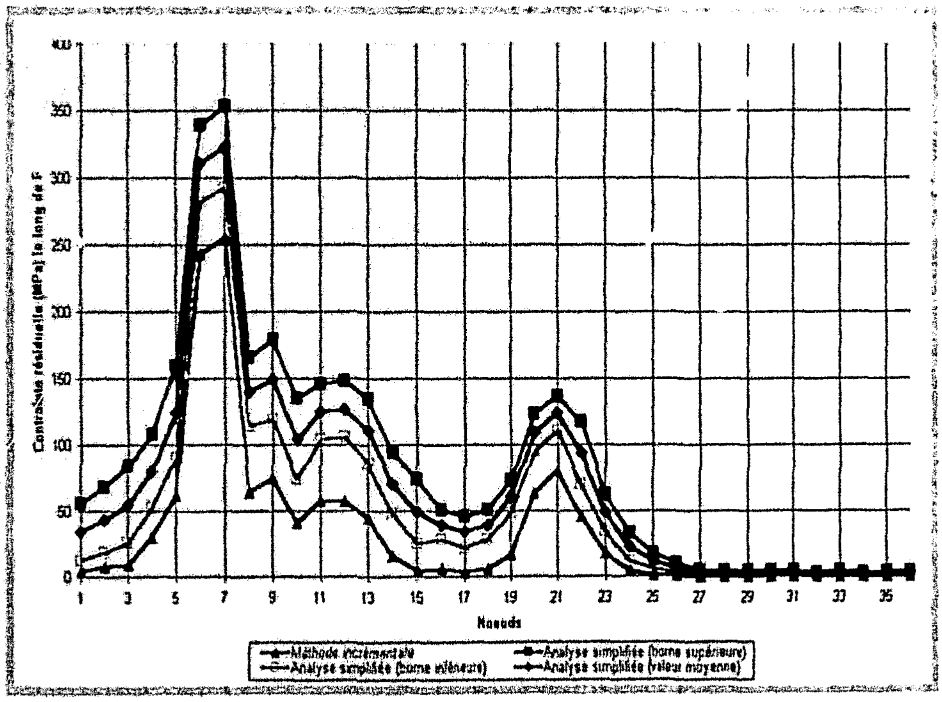


Figure 4.54. Variation de la contrainte résiduelle (surface inférieure)

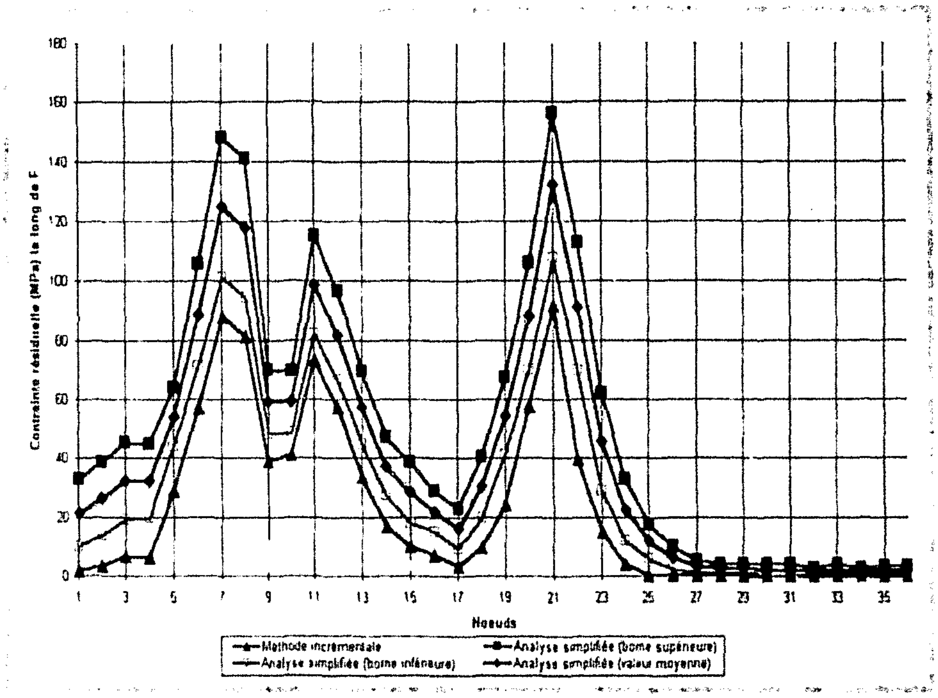


Figure 4.55. Variation de la contrainte résiduelle (surface moyenne)

La résolution par la méthode incrémentale s'est effectuée en 3285 secondes temps CPU (moins de 10 cycles de chargement) et en 1570 secondes pour l'analyse simplifiée (2 itérations).

Nous constatons une bonne corrélation des résultats. La borne inférieure est plus proche de la valeur obtenue par la méthode incrémentale.

L'erreur relative entre la borne inférieure et la méthode incrémentale est de 8% pour la surface supérieure, environ 10% pour la surface inférieure et pour la surface moyenne.

Conclusion du chapitre 4

Nous avons implémenté par l'intermédiaire du SIL, l'analyse simplifiée dans le code de calcul éléments finis. Ce module a été validé pour des structures de type bidimensionnelles, tridimensionnelles et coques minces. Chaque type de géométrie est illustrée par un exemple et les résultats obtenus par le module ont été confrontés à ceux de la méthode incrémentale.

Nous avons donc déterminé l'état limite de la structure pour avoir une estimation correcte des champs de déformations plastiques et de contraintes résiduelles (au bout de quelques itérations). L'intérêt de cette méthode est l'application à une structure complexe afin de diminuer le temps de calcul et le stockage en mémoire par rapport à une méthode élastoplastique classique.

Nous avons pu mettre en évidence l'influence du type, de la taille et de la sous-intégration des éléments. Si l'on résume les différents résultats, nous constatons que l'analyse simplifiée est conservative lorsque les éléments choisis (quadrangulaires dans le cas bidimensionnel et hexaédriques dans le cas tridimensionnel) sont sans sous-intégration. Le nombre de points de Gauss doit donc être maximum pour obtenir une bonne cohérence des champs. La taille de ces éléments n'influe que sur la précision.

De plus, nous nous sommes intéressé aux structures de type coques minces. Similairement au chapitre 4, nous avons réalisé les essais sur une structure simple en utilisant le code d'analyse simplifié implémenté dans le code SYSTUS et la méthode incrémentale.

Nous avons déterminé le comportement asymptotique de la structure pour différents chargements. Ainsi, nous avons obtenu une estimation correcte de la contrainte résiduelle sachant que la déformation plastique n'a pas pu être visualisées pour les coques minces.

Nous avons notamment mis en évidence la rapidité de l'analyse simplifiée par rapport à la méthode incrémentale en comparant les temps CPU de chacune de ces deux formulations.

Conclusion générale

C'est ainsi qu'une page est lentement tournée,
Elle retombe de l'autre côté,
S'ajoutant aux autres déjà terminées,
Pour le moment, cela ne fait qu'une mince couche,
Formant un tas inépuisable.
Mais c'est tout de même une page de plus qui est terminée,
Une portion de vie

Dino Buzzati

Diverses méthodes pour la détermination de l'état asymptotique d'une structure chargée cycliquement existent. Nous avons cité dans ce mémoire :

- ✓ L'analyse limite. Cette méthode ne convient pas pour un chargement cyclique.
- ✓ La théorie d'adaptation qui surestime le domaine d'adaptation et ne prend pas en compte le phénomène d'accommodation.
- ✓ Les résolutions simplifiées qui sont basées sur des données expérimentales. Elles sont spécifiques à des structures et des chargements donnés.
- ✓ L'analyse simplifiée. Elle repose sur des calculs purement élastiques, la décomposition de la réponse réelle et un changement de variable.

Parmi ces méthodes, nous avons choisi la méthode d'analyse simplifiée (adaptation et accommodation) appliquée aux structures inélastiques. Cette méthode, développée par J. Zarka et al. permet des résolutions très rapides.

A partir de cette méthode, nous nous sommes attachés à la prévision de l'état limite ainsi qu'à l'estimation des champs de contraintes résiduelles et de déformation plastique, par l'intermédiaire de calculs purement élastiques. Pour cela, nous avons construit un opérateur élastique *ELAS* qui nous a permis de déterminer les différents champs élastiques et inélastiques.

Un paramètre est introduit afin de découpler localement les champs de déformation plastique et de contraintes résiduelles. Ce paramètre est associé à l'écrouissage cinématique linéaire (modèle de Prager) et au critère de Von Mises, en utilisant le modèle du matériau standard généralisé. De plus, on voit apparaître un autre changement de variable qui permet d'insérer la notion de partition mixte du matériau.

Nous avons donc implémenté l'analyse simplifiée dans un code de calcul éléments finis et nous avons testé diverses structures (bidimensionnelles, tridimensionnelles et de type coques minces). Les résultats ont été finalement illustrés par un exemple pour chaque cas. Afin de valider ces résultats, nous avons appliqué une formulation incrémentale ou pas-à-pas aux structures considérées et ceci aux mêmes conditions (chargements, conditions limites, maillages, code de calcul, ...). Cette formulation nécessite la connaissance de l'histoire du trajet de chargement, ce qui rend la résolution très coûteuse en temps de calculs et en stockage mémoire.

L'étude comporte 3 parties :

- ✓ Une **première partie** bibliographique qui regroupe les différents rappels non exhaustif, de la plasticité (Cf. chapitre 1). Quelques méthodes numériques et expérimentales de détermination du comportement asymptotique d'une structure sont citées dans le chapitre 2.
- ✓ Une **seconde partie** qui est le développement de l'analyse simplifiée (Cf. chapitre 3) et la construction de l'opérateur élastique *ELAS* afin d'obtenir les différentes réponses. Cette méthode repose sur un calcul purement élastique et sur la décomposition de la réponse réelle.
- ✓ Une **troisième partie** qui concerne l'intégration de l'analyse simplifiée dans un code de calcul éléments finis, l'influence du type d'élément et l'application à des structures bidimensionnelles, tridimensionnelles et de type coques minces (Cf. chapitre 4).

L'écart entre l'analyse simplifiée et la méthode incrémentale est faible et la comparaison des répartitions est concluante. Le temps de résolution par l'analyse simplifiée est réduit très fortement par rapport à celui de la méthode incrémentale. Ceci montre d'une part, l'efficacité de l'analyse simplifiée et d'autre part l'économie que nous pouvons avoir au niveau du temps de calcul.

Une étude en cours, permettra d'étendre l'application aux structures industrielles complexes (en prenant en compte notamment les problèmes de contact et de fissure).

De plus, nous proposons de généraliser dans le futur, cette application aux types coques épaisses.

Enfin, une comparaison avec une étude expérimentale est envisagée.

Références bibliographiques

[Barreau80] Barreau J.J., Laroze S. (1980) *Calculs de structures par éléments finis*, ENS de l'Aéronautique et de l'Espace.

[Batoz90] Batoz, J. L., Dhatt, G.(1990) *Modélisation des Structures par Eléments Finis. Vol. 1: Solides élastiques. Vol. 2 Poutres et plaques. Vol. 3 Coques*, Edition Hermès.

[Bleich32] Bleich H. (1932) *Ueber die bemessung statisch unbestimmter stahltragwerke unter berücksichtigung des elastisch-plastischen verhaltes des Baustoffes*, Bauingenieur- Vol. 19-20, p. 261.

[Borhani90] Borhani A., Zarka J. (1990) *Nouvelles méthodes de calcul de la charge limite et des déformations associées*, Thèse de doctorat, UTC.

[Bousshine94] Bousshine L. (1994) *Simulation numérique des processus de poinçonnement, de coupe et de formage des métaux et matériaux granulaires*, Thèse de doctorat, Faculté polytechnique de Mons.

[Braham91] Braham S. (1991) *Modélisation du galetage des vilebrequins. Evolution des contraintes résiduelles sous chargement de service*, Thèse de doctorat, Ecole polytechnique.

[Bree67] Bree J. (1967) *Elastic-plastic behaviour of thin tubes subjected on internal pressure and intermittent high heat fluxes with application to fast-nuclear reactor fuel elements*, J. Strain analysis, Vol. 2, n° 3, pp. 226-238.

[Buff81] Buff B. (1981) *Méthode directe de calcul de l'état limite d'une structure élasto-plastique soumise à un chargement cyclique*, Thèse de doctorat, Université de Compiègne.

[Bui98] Bui C.T. (1998) *Analyse directe des états limites plastiques des structures par programmation mathématique et discrétisation en éléments finis*, Thèse de doctorat, Université de Liège.

[Corigliano95] Gorigliano A., Maier G. (1995) *Dynamic shakedown analysis and bounds for elastoplastic structures with nonassociative internal variable constitutive laws*, Int. J. solids structures vol 32 n° 21, pp. 3145-3166.

[Corradi73] Corradi L., Maier G. (1973) *Inadaptation theorems in the dynamics of elastic-works hardening structures*, Ing. Arch. 43, pp. 44-57.

[Debordes77] Debordes O. (1977) *Contribution à la théorie et au calcul de l'élastoplasticité asymptotique*, Thèse de doctorat, Aix-Marseille.

[Drucker62] Drucker D.C. (1962) *Plasticity and viscoelasticity : basic concepts*, Handbook of Engineering Mechanics, ed. W. Flügge, chap 46, McGraw Hille, New York.

[Drucker64] Drucker D.C. (1964) *On the postulate of stability of material in the mechanics of continua*, J. de Mécanique, 3, pp. 235-249.

[Druyanov97] Druyanov B., Roman I. (1997) *Concept of the limit yield condition in shakedown theory*, Int. J. Mech. solids structures vol 34 n°13, pp. 1547-1556.

[Druyanov98] Druyanov B., Roman I. (1998) *On adaptation (shakedown) of a class of damaged elastic plastic bodies to cyclic loading*, Eur. J. Mech. A/solids 17 n°1, pp. 71-78.

[El Ghaoui96] El Ghaoui L., Lebret H., Rottembourg B. (1996) *Optimisation convexe pour les sciences de l'ingénieur*, Revue Scientifique et Technique de la Défense.

[François92] François D., Pineau A. & Zaoui A. (1992) *Comportement mécanique des matériaux Elasticité et plasticité*, Hermès.

[Frelat91] Frelat J. (1991) *Modélisation des traitements mécaniques de surface*, CETIM.

[Gatt93] Gatt J.M. (1993) *Etude théorique et expérimentale de la déformation progressive*, thèse de doctorat.

[Hachemi94] Hachemi A.(1994) *Contribution à l'analyse d'adaptation des structures inélastiques avec prise en compte de l'endommagement*. Thèse de doctorat, USTL.

[Halphen75] Halphen B., Nguyen Q.S. (1975) *Sur les matériaux standards généralisés*, J. de Mécanique, vol 14 n°1, pp. 39-63.

[Halphen78] Halphen B. (1978) *Problèmes quasi-statiques en viscoplasticité*, Thèse de doctorat, Paris.

[Hill50] Hill R. (1950) *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, Oxford, Chap. XII.

[Hodge68] Hodge P.G. Jr., Belytschko T. (1968) *Numerical methods for the limit analysis of plates*, J. Apply. Mech. Vol. 35, p. 796.

[Hoffmann73] Hoffmann A., Livolant M. & Roche R. (1973) *Plastic analysis of shells by finite element methods global plasticity models*, Berlin, 10/14 sept., Vol. V.

[Horger60] Horger O.J. (1960) *Residual stresses,* Chap.11 de Handbook of experimental stress analysis, ed. M. Henteruyl, pp. 459-578.

[Hughes86] Hughes T.J.R., (1986) Hinton E. *Finite element methods for plate and shell structures,* Element technology vol. 1 & 2, Pineridge press international

[Hughes87] Hughes T.J.R. (1987) *The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis,* Dover publications, New York.

[Iliouchine56] Iliouchine A.A. (1956) *Plasticité : déformations élastiques – plastiques,* Ed. Eyrolles, Paris.

[Inglebert84] Inglebert G. (1984) *Analyse simplifiée des structures élasto-visco-plastiques sous chargement cycliques,* Thèse de doctorat, Université Paris VI.

[Imbert95] Imbert J.F. (1979) *Analyse des structures par éléments finis,* Sup'aéro.

[Jaradeh97] Jaradeh Y. (1997) *Analyse simplifiée de l'instabilité des structures élastoplastiques sous chargement cycliques,* thèse de doctorat, ENPC.

[Kaliszky96] Kaliszky S. (1996) *Elastoplastic analysis with limites plastic deformations and deplacements* Mech. Struct. & Mach., 24 (1), pp. 39-50.

[Kim96] Kim B.S. (1996) *Optimisation des structures inélastiques,* Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique.

[Koiter52] Koiter W.T. (1952) *Some remarks on plastic shakedown theorems,* Proc. 8th Int. Congr. Appl. Mech. n° 1, Istambul, p. 220.

[Koiter60] Koiter W.T. (1960) *General theorems for elastic-plastic solids,* In Progress in solid mechanics, ed. by I.N. Sneddon and R. Hill, pp. 165-221, North-Holland, Amsterdam.

[König82] König J.A. (1982) *On some recent developments in the shakedown theory,* advances in mechanics 5 n°1, pp. 237-258.

[Ladevèze96] Ladevèze P. (1996) *Mécanique non linéaire des structures,* Hermès.

[Lemaître85] Lemaître J. & Chaboche J.L. (1985) *Mécanique des matériaux solides,* Bordas, Paris.

[Lu91] Lu J., Flavenot J.F., Turbat A., François D. (1991) *Modélisation de la relaxation des contraintes résiduelles en fatigue,* Publications CETIM, Senlis.

[Mackenzie94] Mackenzie D., Shi J., Boyle J.T. (1994) *Finite element modelling for limit analysis by the elastic compensation*, Computers & structures 51(4), pp. 403-410.

[Maier70] Maier G. (1970) *A matrix structural theory of piecewise-linear plasticity with interacting yield planes*, Meccanica 7, pp. 51-66.

[Maier72] Maier G. (1972) *A shakedown matrix theory allowing for work-hardening and second order geometrics effects*, Int. Symp. Found. plasticity, pp. 417-433.

[Mandel62] Mandel J., Radenkovic D., Parsy F., Epain R., Lubliner J. (1962) *Séminaire de plasticité*, Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air, Ecole polytechnique de Paris.

[Mandel77] Mandel J., Zarka J., Halphen B. (1977) *Adaptation d'une structure élastoplastique à écrouissage cinématique*, Mech. Res. Comm., 4, pp. 309-314.

[Mandel78] Mandel J. (1978) *Propriétés mécaniques des matériaux*, Eyrolles.

[Melan36] Melan V.E. (1936) *Theorie statisch unbestimmter systeme aus ideal-plastischen baustoff*, Sitber. Akad. Wiss. Wien. Iia, Vol. 145, pp. 195-218.

[Melan38] Melan V.E. (1938) *Zür plastizität des räumlichen kontinuums*, Ing. Arch.9, pp. 115-126.

[Mialon91] Mialon P., Thomas B. (1991) *Incompressibilité en plasticite sous-intégration et autres techniques numériques*, EDF Bulletin de direction des études et recherches, Série C Mathématiques N°2, pp. 1-85.

[Neal50] Neal B.G. (1950) *Limit load of a cantilever in plane stress*, Engineering Plasticity, ed by Heyman J. & Leckie F A.

[Nguyen76] Nguyen D.H (1976) *Direct limit analysis via rigid-plastic element computer method*, Applied mechanics and engineering Vol. 8., pp.81-116.

[Nguyen84] Nguyen D.H. (1984) *Sur la plasticité et le calcul des états limites par éléments finis*, Thèse de doctorat, Université de Liège.

[Nguyen77] Nguyen Q.S. (1977) *On the elastic-plastic initial boundary value problem ans its numerical integration*, I.J. for Numerical methods in engineering, Vol 11, pp. 817-832.

[Prager55] Prager W. (1955) *The theory of plasticity : a survey of recent achievements* Proc. inst. Mech. Engrs, London, Vol. 169 pp. 41-57.

[O'Donnell95] O'Donnell W., Porowski J. (1995) *Uoper bound for accumulated strains due to creep ratchetting*, Water Resources (WRC), June 1974, n° 195, pp. 57-62.

[Rappaz98] Rappaz M., Bellet M., Deville M. (1998) *Modélisation numérique en science des matériaux*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

[Robinson71] Robinson M. (1971) *A comparison of yield surfaces for thin shells*, Int. J. Mech. Sci., Vol. 13, pp. 345-354.

[Saï93] Saï K. (1993) *Modèles à grand nombre de variables internes et méthode numériques associées*, Thèse de doctorat, Mines de Paris.

[Salençon79] Salençon J. (1979) *Le comportement plastique*, Evolution et théories modernes en élasticité et plasticité, SEBTP, pp. 93-129.

[Save97] Save M.A., Massonnet C.E., De Saxce G. (1997) *Plastic limit analysis of plates shells and disks*, North Holland series in Applied Mathematics and Mechanics.

[SIL99] Systus International (1999) *Manuel de référence SIL*, ESI Group.

[Stein94] Stein E., Huang Y. (1994) *An analytical method for shakedown problems with kinematic hardening materials* Int. J. Solids Structures vol 31 n°18, pp. 2433-2444.

[Symonds50] Symonds P.S., Prager W. (1950) *Elastic-plastic analysis of structures subjected to loads varying arbitrarily between prescribed limits*, J. of appl. Mech., Vol. 17, pp. 315-323.

[Symonds51] Symonds P.S. (1951) *Shakedown in continuous media*, J. of appl. Mech., Vol. 18, n° 85.

[Systus99] Systus International (1999) *Manuel de référence analyse*, 4 tomes, ESI Group.

[Timoshenko] Timoshenko & Goodier J.N. *Theory of elasticity*, International student, Mc Graw-Hill.

[Tribout83] Tribout J., Inglebert G. Casier J. (1983) *A simplified method for the inelastic analysis of structures under cyclic loadings*, Vol 105 Août, Transactions of the ASME.

[Tritsch93] Tritsch J.B (1993) *Analyse d'adaptation des structures élasto-plastiques avec prise en compte des effets géométriques*, Thèse de doctorat, USTL.

[Vasseur96] Vasseur E., Navidi P., Harirì S. (1996) *Direct determination of limiting cycle during cyclic loading*, Computational materials Sc. 7, pp. 11-15.

[Vasseur97] Vasseur E. (1997) *Application de l'apprentissage automatique à l'étude du comportement à la fatigue des structures*, thèse de doctorat, USTL.

[Weichert86] Weichert D. (1986) *On the influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of elastic-plastic structures*, Int. J. Plast. Vol. 2 N° 2, pp. 135-148.

[Zarka78] Zarka J., Arnaudeau F.C. Casier J., Baylac G. (1978) *Simplified methods in pressure vessel analysis*, R.S. Barsoum.

[Zarka88] Zarka J., Pecker A. (1988) *Participation à la mise au point d'une méthode d'analyse simplifiée*, LMS école polytechnique, Rapport final.

[Zarka90] Zarka J., Frelat J., Inglebert G. & Kasmai-Navidi P. (1990) *A new approach inelastic analysis of structures*, CADLM.

[Zienkiewicz91] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. (1991) *La méthode des éléments finis*, Afnor technique.

Annexes

Nomenclature

Lettres majuscules latines

B	Matrice des dérivées de fonction de forme.	
$C = 2h/3$	Module d'écrouissage.	MPa ($N.mm^{-2}$)
$\mathcal{E},\hat{\mathcal{E}}$	Module de Young, module de Young modifié.	MPa ($N.mm^{-2}$)
E	Tenseur des déformations.	
E^e	Partie élastique de la réponse réelle.	
E^{el}	Tenseur des déformations élastiques.	
E^{ine}	Tenseur des déformations inélastiques.	
E^I	Tenseur de déformations initiales.	
E^p	Tenseur des déformations plastiques.	
F^{elt}	Force nodale élémentaire (en éléments finis).	N
G	Module de cisaillement.	MPa ($N.mm^{-2}$)
J	Matrice jacobienne.	
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion.	Nm / m
$M^{-1}, \hat{M}^{-1}$	Matrice d'élasticité, matrice d'élasticité modifiée.	MPa ($N.mm^{-2}$)
N	Vecteur des efforts résultants de membrane.	
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts résultants de membrane.	N / m
$\langle N \rangle$	Matrice des fonctions de forme (ou d'interpolation).	
R	Tenseur des contraintes résiduelles.	MPa ($N.mm^{-2}$)
S	Tenseur des déviateurs de contraintes.	MPa ($N.mm^{-2}$)

S^{el}	Tenseur des déviateurs de contraintes élastiques.	MPa ($N.mm^{-2}$)
T_{xz}, T_{yz}	Efforts résultants de cisaillement.	N/m
$U = [u \quad v \quad w]^t$	Vecteur déplacement.	
V	Elément de volume.	
$Y(t)$	Paramètre transformé de la structure.	

Lettres minuscules latines

f	Fonction de charge.	
h	Épaisseur de la coque.	mm
k_0	Limite élastique de cisaillement.	MPa ($N.mm^{-2}$)
n	Normale sortante.	
(r, s, t)	Repère local.	
u, v	Déplacements suivant x et suivant y.	mm
w	Déplacement transversal suivant z.	mm
w^p	Poids.	
(x, y, z)	Repère global.	
z	Axe suivant l'épaisseur.	

Lettres majuscules grecques

Σ	Tenseur des contraintes.	MPa ($N.mm^{-2}$)
Σ^{el}	Tenseur des contraintes élastiques.	MPa ($N.mm^{-2}$)

Lettres minuscules grecques

β_x, β_y	Rotations suivant x et suivant y
χ	Vecteur des courbures

ε	Vecteur des déformations.	
ε^{I}	Vecteur des déformations initiales.	
ε^{N}	Vecteur des déformations de membrane.	
$\nu, \hat{\nu}$	Coefficient de Poisson ou coefficient de Poisson modifié.	
σ	Vecteur des contraintes locales.	MPa ($N.mm^{-2}$)
σ_0	Limite élastique.	MPa ($N.mm^{-2}$)
(ξ,η,ζ)	Repère local.	

Exposants et indices

$\ldots^{-1}$	Inverse de ...
$\ldots^{T}$	Transposé de ...
$\ldots^{elt}$	Élémentaire.
$\ldots_{max}, \ldots_{min}, \ldots_{moy}$	Maximal, minimal, moyen.

Notations

dev	Déviateur.
det	Déterminant d'une matrice.
npie	Nombre de points de Gauss.
Proj	Projection.

ANNEXE A. RECONSTRUCTION DE LA MATRICE DES DERIVEES DES FONCTIONS DE FORME

La matrice des dérivées des fonctions de forme B est reconstruite par l'intermédiaire du SIL afin de calculer les forces nodales selon l'équation 4.7. Cette reconstruction se fait en fonction de l'option et de l'élément choisi.

A.1. Structures bidimensionnelles et tridimensionnelles

Dans le cas général, les déformations et les contraintes réelles sont définies comme suit :

$$E = \begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{zz} \\ 2E_{xy} \\ 2E_{xz} \\ 2E_{yz} \end{bmatrix}, \ \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} \\ \Sigma_{yy} \\ \Sigma_{zz} \\ \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xz} \\ \Sigma_{yz} \end{bmatrix}$$

Pour un matériau isotrope, la matrice de loi de comportement élastique M^{-1} se met sous la forme :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_2 & 0 \\ H_2 & H_1 & H_2 & 0 \\ H_2 & H_2 & H_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \qquad (A.1.)$$

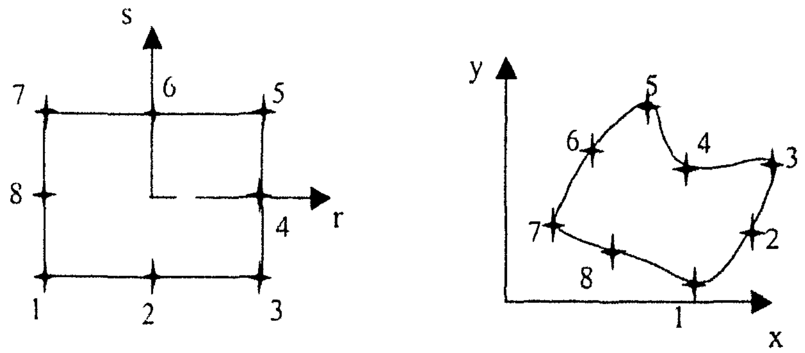
avec $H_1 = \dfrac{\mathcal{E}(1-a\nu)}{(1+\nu)(1-\nu-a\nu)}$, $H_2 = \dfrac{\nu H_1}{(1-a\nu)}$ et $G = \dfrac{\mathcal{E}}{2(1+\nu)}$.

Dans le cas des contraintes planes ($\Sigma_{zz} = 0, E_{zz} \neq 0$), on posera $a = 0$, en déformations planes $a = 1$ ($\Sigma_{zz} \neq 0, E_{zz} = 0$) et en axisymétrique $a = 1$ ($\Sigma_{zz} \neq 0, E_{zz} \neq 0$).

Quelques éléments sont présentés pour les structures bidimensionnelles et pour les structures tridimensionnelles.

A.1.1. L'élément quadrangulaire quadratique isoparamétrique

Pour modéliser les structures, nous avons choisi l'élément quadrangulaire quadratique (figure A.1.). Il est constitué de 8 nœuds et de 9 points de Gauss dans le cas où il n'est pas sous-intégré et de 4 points de Gauss dans le cas contraire.



avec (r,s) coordonnées locales et (x,y) coordonnées globales.

Figure A.1. Elément quadrangulaire quadratique.

Les fonctions d'interpolation $\langle N \rangle$ sont de la forme :

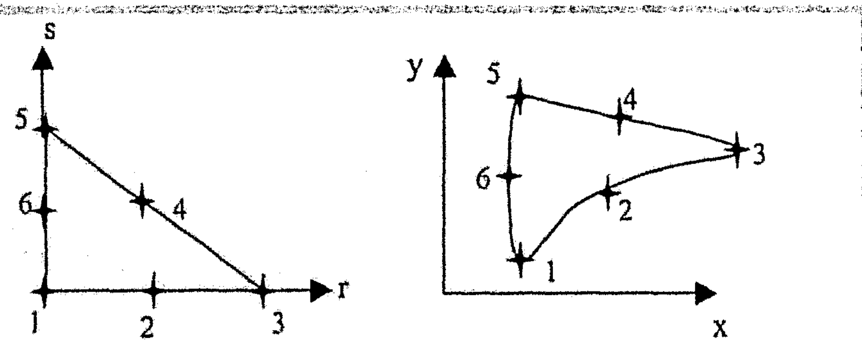
$$\langle N \rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-r)(1-s)(-r-s-1) \\ \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s) \\ \frac{1}{4}(1+r)(1-s)(r-s-1) \\ \frac{1}{2}(1+r)(1-s^2) \\ \frac{1}{4}(1+r)(1+s)(r+s-1) \\ \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s) \\ \frac{1}{4}(1-r)(1+s)(-r+s-1) \\ \frac{1}{2}(1-r)(1-s^2) \end{bmatrix} \qquad (A.2.)$$

La matrice des dérivées des fonctions de forme B s'écrit donc :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \langle N \rangle_1}{\partial r} & 0 & \cdots & \frac{\partial \langle N \rangle_8}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \langle N \rangle_1}{\partial s} & \ddots & 0 & \frac{\partial \langle N \rangle_8}{\partial s} \\ \frac{\partial \langle N \rangle_1}{\partial s} & \frac{\partial \langle N \rangle_1}{\partial r} & \cdots & \frac{\partial \langle N \rangle_8}{\partial s} & \frac{\partial \langle N \rangle_8}{\partial r} \end{bmatrix} \qquad (A.3.)$$

A.1.2. L'élément triangulaire quadratique isoparamétrique

L'élément triangulaire (figure A.2) est constitué de 6 nœuds et de 3 points de Gauss.



avec (r, s) coordonnées locales et (x, y) coordonnées globales.

Figure A.2. Elément triangulaire quadratique

Les fonctions d'interpolation $\langle N \rangle$ de cet élément sont :

$$\langle N \rangle = \begin{bmatrix} w(2w-1) \\ 4rw \\ r(2r-1) \\ 4rs \\ s(2s-1) \\ 4sw \end{bmatrix} \qquad (A.4.)$$

Avec $w = 1 - r - s$.

La matrice des dérivées des fonctions de forme B s'écrit :

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial r} & 0 & \cdots & \dfrac{\partial\langle N\rangle_6}{\partial r} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial s} & \ddots & 0 & \dfrac{\partial\langle N\rangle_6}{\partial s} \\ \dfrac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial s} & \dfrac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial r} & \cdots & \dfrac{\partial\langle N\rangle_6}{\partial s} & \dfrac{\partial\langle N\rangle_6}{\partial r} \end{bmatrix} \qquad (A.5.)$$

A.1.3. Evaluation des forces nodales

Pour transformer les variables et le domaine sur lequel l'intégration est effectuée, on utilise :

$$dV = dxdy = \det J drds \qquad (A.6.)$$

avec J matrice Jacobienne qui se met sous la forme :

$$J = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{nn} \dfrac{\partial\langle N\rangle_i}{\partial r} x_i & \sum_{i=1}^{nn} \dfrac{\partial\langle N\rangle_i}{\partial r} y_i \\ \sum_{i=1}^{nn} \dfrac{\partial\langle N\rangle_i}{\partial s} x_i & \sum_{i=1}^{nn} \dfrac{\partial\langle N\rangle_i}{\partial s} y_i \end{bmatrix} \quad nn=6,8 \qquad (A.7.)$$

On peut calculer l'intégrale 4.7 par diverses méthodes dont la méthode d'intégration de Gauss **[Rappaz98]** qui consiste à l'évaluer selon :

$$F^{el} = \int_{V^{el}} B^t \hat{M}\ {}^tE^t dV = \int_{V^{el}} B^t \hat{M}\ {}^tE^t \det J drds \qquad (A.8.)$$

qui se simplifie par :

$$F^{el} = \sum_{p=1}^{npie} (\det J\, w^p).B^t \hat{M}\ {}^tE^t \qquad (A.9.)$$

où npie est le nombre de points d'intégration (ou point de Gauss) de poids associé w^p.

A.1.4. L'élément hexaédrique quadratique isoparamétrique

Les éléments utilisés sont des hexaèdres à 20 nœuds et à 27 points de Gauss (figure A.3.).

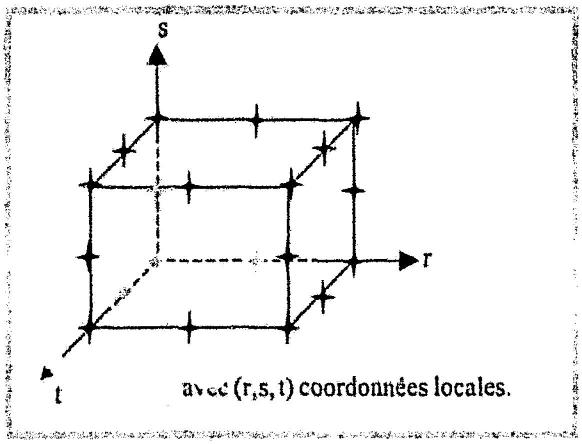


Figure A.3. L'élément hexaédrique quadratique

La matrice des dérivées des fonctions de forme B s'écrit :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial r} & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial\langle N\rangle_{20}}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial s} & 0 & & 0 & \frac{\partial\langle N\rangle_{20}}{\partial s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial t} & \ddots & 0 & 0 & \frac{\partial\langle N\rangle_{20}}{\partial t} \\ \frac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial s} & \frac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial r} & 0 & & \frac{\partial\langle N\rangle_{20}}{\partial s} & \frac{\partial\langle N\rangle_{20}}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial t} & 0 & \frac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial r} & & \frac{\partial\langle N\rangle_{20}}{\partial t} & 0 & \frac{\partial\langle N\rangle_{20}}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial t} & \frac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial s} & \cdots & 0 & \frac{\partial\langle N\rangle_{20}}{\partial t} & \frac{\partial\langle N\rangle_{20}}{\partial s} \end{bmatrix} \qquad (A.10.)$$

Les fonctions d'interpolation $\langle N \rangle$ associées à B sont de la forme suivante :

$$\langle N \rangle = \begin{bmatrix} (1-r)(1-s)(1-t)(-r-s-t-2)/8 \\ (1-r^2)(1-s)(1-t)/4 \\ (1+r)(1-s)(1-t)(r-s-t-2)/8 \\ (1+r)(1-s^2)(1-t)/4 \\ (1+r)(1+s)(1-t)(r+s-t-2)/8 \\ (1-r^2)(1+s)(1-t)/4 \\ (1-r)(1+s)(1-t)(-r+s-t-2)/8 \\ (1-r)(1-s^2)(1-t)/4 \\ (1-r)(1-s)(1-t^2)/4 \\ (1+r)(1-s)(1-t^2)/4 \\ (1+r)(1+s)(1-t^2)/4 \\ (1-r)(1+s)(1-t^2)/4 \\ (1-r)(1-s)(1+t)(-r-s+t-2)/8 \\ (1-r^2)(1-s)(1+t)/4 \\ (1+r)(1-s)(1+t)(r-s+t-2)/8 \\ (1+r)(1-s^2)(1+t)/4 \\ (1+r)(1+s)(1+t)(r+s+t-2)/8 \\ (1-r^2)(1+s)(1+t)/4 \\ (1-r)(1+s)(1+t)(-r+s+t-2)/8 \\ (1-r)(1-s^2)(1+t)/4 \end{bmatrix} \qquad (A.11.)$$

A.1.5. L'élément prismatique quadratique isoparamétrique

Le prisme est constitué de 15 nœuds et de 9 points de Gauss (figure A.4.).

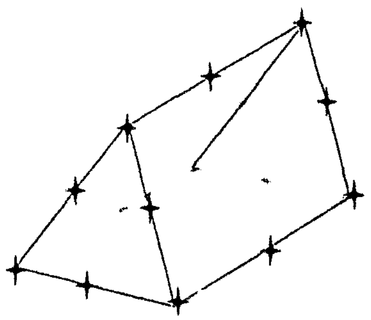


Figure A.4. L'élément prismatique

La matrice des dérivées des fonctions de forme B s'écrit :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial r} & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial\langle N\rangle_{15}}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial s} & 0 & & 0 & \frac{\partial\langle N\rangle_{15}}{\partial s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial t} & \ddots & 0 & 0 & \frac{\partial\langle N\rangle_{15}}{\partial t} \\ \frac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial s} & \frac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial r} & 0 & & \frac{\partial\langle N\rangle_{15}}{\partial s} & \frac{\partial\langle N\rangle_{15}}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial t} & 0 & \frac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial r} & & \frac{\partial\langle N\rangle_{15}}{\partial t} & 0 & \frac{\partial\langle N\rangle_{15}}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial t} & \frac{\partial\langle N\rangle_1}{\partial s} & \cdots & 0 & \frac{\partial\langle N\rangle_{15}}{\partial t} & \frac{\partial\langle N\rangle_{15}}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (A.12.)$$

Les fonctions d'interpolation $\langle N\rangle$ associées à B sont de la forme suivante :

$$\langle N\rangle = \begin{bmatrix} (1-r)(1-s)(1-t)(-r-s-t-2)/8 \\ (1-r^2)(1-s)(1-t)/4 \\ (1+r)(1-s)(1-t)(r-s-t-2)/8 \\ (1+r)(1-s^2)(1-t)/4 \\ (1+r)(1+s)(1-t)(r+s-t-2)/8 \\ (1-r^2)(1+s)(1-t)/4 \\ (1-r)(1+s)(1-t)(-r+s-t-2)/8 \\ (1-r)(1-s^2)(1-t)/4 \\ (1-r)(1-s)(1-t^2)/4 \\ (1+r)(1-s)(1-t^2)/4 \\ (1+r)(1+s)(1-t^2)/4 \\ (1-r)(1+s)(1-t^2)/4 \\ (1-r)(1-s)(1+t)(-r-s+t-2)/8 \\ (1-r^2)(1-s)(1+t)/4 \\ (1+r)(1-s)(1+t)(r-s+t-2)/8 \\ (1+r)(1-s^2)(1+t)/4 \\ (1+r)(1+s)(1+t)(r+s+t-2)/8 \\ (1-r^2)(1+s)(1+t)/4 \\ (1-r)(1+s)(1+t)(-r+s+t-2)/8 \\ (1-r)(1-s^2)(1+t)/4 \end{bmatrix} \quad (A.13.)$$

A.1.6. Evaluation des forces nodales

Pour transformer les variables et le domaine sur lequel l'intégration est effectuée, on utilise :

$$dV = dxdydz = \det J drdsdt \qquad (A.14.)$$

Plus explicitement, la matrice J s'écrit comme suit :

$$J = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{nn} \frac{\partial \langle N \rangle_i}{\partial r} x_i & \sum_{i=1}^{nn} \frac{\partial \langle N \rangle_i}{\partial r} y_i & \sum_{i=1}^{nn} \frac{\partial \langle N \rangle_i}{\partial r} z_i \\ \sum_{i=1}^{nn} \frac{\partial \langle N \rangle_i}{\partial s} x_i & \sum_{i=1}^{nn} \frac{\partial \langle N \rangle_i}{\partial s} y_i & \sum_{i=1}^{nn} \frac{\partial \langle N \rangle_i}{\partial s} z_i \\ \sum_{i=1}^{nn} \frac{\partial \langle N \rangle_i}{\partial t} x_i & \sum_{i=1}^{nn} \frac{\partial \langle N \rangle_i}{\partial t} y_i & \sum_{i=1}^{nn} \frac{\partial \langle N \rangle_i}{\partial t} z_i \end{bmatrix} \quad nn=15,20 \qquad (A.15)$$

On peut calculer l'intégrale 4.7. par la méthode de Gauss selon :

$$F^{elt} = \int_{V^{el}} B^T \hat{M}^{-1} E^i dV = \int_{V^{el}} B^T \hat{M}^{-1} E^i \det J drdsdt \qquad (A.16.)$$

qui se simplifie par :

$$F^{elt} = \sum_{p=1}^{npie} (\det J . w^p) . B^T \hat{M}^{-1} E^i \qquad (A.17.)$$

où npie est le nombre de points d'intégration (ou point de Gauss) de poids associé w^p.

A.2. Eléments coques

Dans le cas du matériau homogène et isotrope, nous avons :

$$H_m = \int_{-t}^{t} M^{-1} . dz = \frac{\mathcal{E}h}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad (A.18.)$$

$$H_f = \int_{-t}^{t} M^{-1}.z^2.dz = \frac{\mathcal{E}h^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad (A.19.)$$

$$H_c = \frac{\mathcal{E}hk}{2(1+\nu)}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (A.20.)$$

M^{-1} est la loi de comportement élastique et k est appelé facteur de correction de cisaillement transversal. Par convention $k = 5/6$ (proposition faite par Bollé en 1947 par analogie avec la théorie des poutres à sections rectangulaires).

Les déformations ε^N, χ et γ sont définies en fonction des variables nodales :

$$\varepsilon^N = B_m \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \; avec \; B_m = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle & 0 \\ 0 & \langle N_{,\eta} \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle & \langle N_{,\xi} \rangle \end{bmatrix} \qquad (A.21.)$$

$$\chi = B_f \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} \; avec \; B_f = \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & \langle N_{,\eta} \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle & \langle N_{,\xi} \rangle \end{bmatrix} \qquad (A.22.)$$

$$\gamma = B_c \begin{bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} \; avec \; B_c = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle & 0 & \langle N \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle & -\langle N \rangle & 0 \end{bmatrix} \qquad (A.23.)$$

$\langle N_{,\xi} \rangle = \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \xi}$ et $\langle N_{,\eta} \rangle = \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \eta}$ sont les dérivées des fonctions de forme de l'élément quadrilatère à 4 nœuds.

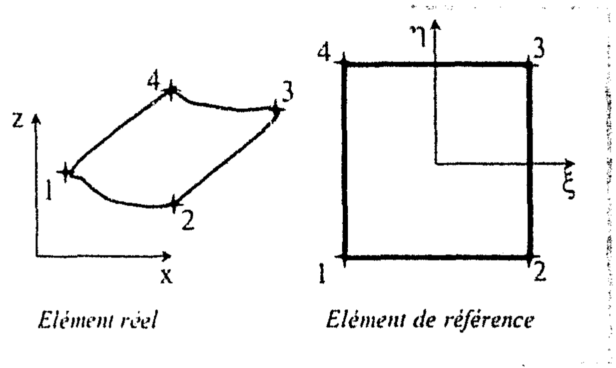


Figure A.5. Elément isoparamétrique

Ces fonctions de forme (ou d'approximations) sont celles de l'élément quadrangle linéaire (figure A.5) :

$$\langle N \rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix} \tag{A.24.}$$

Finalement, la matrice des dérivées des fonctions de forme généralisée **[Hughes87]** est :

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 0 & b & -c & 0 \end{bmatrix} \tag{A.25.}$$

avec $a = \langle N_{,\xi} \rangle$, $b = \langle N_{,\eta} \rangle$ et $c = \langle N \rangle$.

La relation 4.8 du chapitre 4, devient donc :

$$F^{ell} = \int B^T \hat{H}\, e^I dV_Y \qquad (A.26.)$$

avec e^I la déformation initiale généralisée et B la matrice des fonctions de forme définie précédemment (Eq. A.16).

D'après les relations (A.18), (A.19) et (A.20), la loi de comportement généralisée H se met sous la forme suivante :

$$H = \frac{\mathcal{E}\hbar}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\hbar^2}{12} & \frac{\hbar^2}{12}\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\hbar^2}{12}\nu & \frac{\hbar^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\hbar^2}{24}(1-\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}k \end{bmatrix} \qquad (A.27.)$$

La matrice d'élasticité modifiée $\hat{H}$ est fonction du module de Young modifié $\hat{\mathcal{E}}$ et du coefficient de Poisson modifié $\hat{\nu}$.

Remarque.

> *Sous SYSTUS, la pression s'applique à une maille dite de peau et de dimension inférieure d'un degré à la dimension de la structure. Dans le cas des structures bidimensionnelles, la maille de peau est de dimension 1 (éléments linéiques à 3 nœuds et 3 points de Gauss). Pour les structures tridimensionnelles, la maille de peau est de dimension 2 (éléments quadrangulaires à 8 nœuds et 9 points de Gauss pour la méthode incrémentale ou 4 points de Gauss pour l'analyse simplifiée).*

ANNEXE B. CODE DE CALCUL

L'algorithme du traitement dans SYSTUS se décompose comme suit :

Notations.

- Na : nature de l'état limite.
- Ne : nombre d'éléments.
- Np : nombre de points de Gauss.
- P : représente un point de Gauss inclus dans V.
- N : représente un nœud du maillage.

Entrées du programme.

- La géométrie : V, S_t, S_F.
- Le matériau : $M(E,\nu), h = \frac{2}{3}C, \sigma_0$.
- Le chargement : uniaxial et défini par F^d_{max} et F^d_{min}.

Initialisation.

La structure est supposée initialement vierge.

- $U^{inc}(N) = 0 \quad \forall N \in V$.
- $E^{inc}(P) = E^p(P) = E^I(P) = 0 \quad \forall P \in V$.
- $R(P) = Y(P) = S^{el}(P) = 0 \quad \forall P \in V$.

Analyse de réponse élastique de la structure.

- Détermination des contraintes élastiques pour le chargement maximum et pour le chargement minimum.

$$ELAS(V, S_t, S_F \| F^d_{min}, E^I = 0 \| M) \Rightarrow U^{el}_{min}(N) \rightarrow E^{el}_{min}(P) \rightarrow \Sigma^{el}_{min}(P).$$

$$ELAS(V, S_t, S_F \| F^d_{max}, E^I = 0 \| M) \Rightarrow U^{el}_{max}(N) \rightarrow E^{el}_{max}(P) \rightarrow \Sigma^{el}_{max}(P).$$

- Calculs des déviateurs de contraintes élastiques avec $S^{el}(P) = \mathrm{dev}\Sigma^{el}(P)$.
- On pose $\Delta S^{el}(P) = S^{el}_{max}(P) - S^{el}_{min}(P)$.

Détermination de l'état limite de la structure.

- Na = 1;
- TQ $(I \le Ne)$ faire
- Na = 1;
- TQ $(I \le Ne)$ faire

  TQ $(J \le Np[I])$ et (iAcco = 0) faire

  Calcul de $\Delta S^{el}(P)$;

  Si $\dfrac{\Delta S^{el}(P)}{2} \le \sigma_0$ alors

  Na = 2 (adaptation);

  Sinon

  Na = 3 (accommodation) et iAcco = 1;

  Fin si;

  Retour TQ;

  Retour TQ;

Détermination de la réponse inélastique suivant l'état limite considéré.

- Itération = 1;
- Si (Na = 2) alors

  TQ $(I \le Ne)$ faire

  TQ $(J \le Np[I])$ faire

  Détermination de $E^p(P)$ sur V_α et $C^{-1}Y(P)$ sur V_Y;

  - sur V_α : $E^p(P) = 0$;
  - sur V_Y : $Y(P) = \underset{C_L}{\mathrm{Proj}}\, Y_0(P)$;

TEST = 1;

TQ (TEST = 1) faire

Calcul élastique homogène avec pour :

Déformation initiale :

- $E^P(P)$ sur V_α ;

- $C^{-1}Y(P)$ sur V_Y ;

Loi de comportement élastique :

- M sur V_α ;

- $\hat{M}$ sur V_Y ;

→ Obtention de $U^{ime}(N) \to E^{ime}(P) \to R(P)$;

Détermination de $Y(P)$ et $E^P(P)$:

- sur V_α : $Y(P) = -devR(P)$;

- sur V_Y : $E^P(P) = [Y(P) + devR(P)]/C$;

Test de convergence :

Si $\forall P \in V_\alpha$, $(CE^P(P) - devR(P)) \in C_L$ alors

TEST = 0;

Sinon

- Réactualisation de la partition V_α - V_Y ;

- Réévaluation de $E^P(P)$ sur V_α et de $Y(P)$ sur V_Y ;

Fin si;

Retour TQ;

Retour TQ;

Retour TQ;

• Sinon (si Na = 3)

TQ ($I \le Ne$) faire

TQ ($J \le Np[I]$) faire

Si $\frac{\Delta S^{el}(P)}{2} \leq \sigma_0$

Détermination de $E^p(P)$ sur V_α et $C^{-1}Y(P)$ sur V_Y ;

- sur V_α : $E^p(P) = 0$;

- sur V_Y : $Y(P) = \underset{C_L}{\mathrm{Proj}}\, Y_0(P)$;

Sinon

Détermination de $E^p(P)$ sur V_α et $C^{-1}Y_{max}(P)$, $C^{-1}Y_{min}(P)$, $C^{-1}Y_{moy}(P)$ sur V_Y avec $Y_{moy} = S^{el}_{moy}$;

Fin si ;

TEST = 1;

TQ (TEST = 1) faire

Calcul élastique homogène avec pour :

Déformation initiale :

- $E^p(P)$ sur V_α ;

- $C^{-1}Y_{max}(P)$ pour la borne maximum sur V_Y ;

- $C^{-1}Y_{min}(P)$ pour la borne minimum sur V_Y ;

- $C^{-1}Y_{moy}(P)$ pour la valeur moyenne sur V_Y ;

Loi de comportement élastique :

- M sur V_α ;

- $\hat{M}$ sur V_Y ;

➔ Obtention de $U^{ine}_{moy}(N) \rightarrow E^{ine}_{moy}(P) \rightarrow R_{moy}(P)$;

➔ Obtention de $\Delta U^{ine}_{max}(N) \rightarrow \Delta E^{ine}_{max}(P) \rightarrow \Delta R_{max}(P)$;

➔ Obtention de $\Delta U^{ine}_{min}(N) \rightarrow \Delta E^{ine}_{min}(P) \rightarrow \Delta R_{min}(P)$;

Détermination de $Y(P)$ et $E^p(P)$:

- sur V_α : $Y_{moy}(P) = -\mathrm{dev}R_{moy}(P)$;

- sur V_Y : $E^P_{moy}(P) = [Y_{moy}(P) + devR_{moy}(P)]/C$;

Test de convergence :

Si $\forall P \in V_\alpha$, $Y_{moy}(P) \in C(S^{el}_{moy})$ alors TEST = 0;

Sinon

- Réactualisation de la partition $V_\alpha - V_Y$;

- Réévaluation de $E^P_{moy}(P)$ sur V_α et de $Y^P_{moy}(P)$ sur V_Y ;

Fin si;

Retour TQ

Retour TQ;

Fin si;

ANNEXE C. L'ELEMENT PRISMATIQUE

Nous reprenons ici l'exemple du crochet de levage du paragraphe 4.5 (chapitre 4). Les conditions limites, le chargement et les caractéristiques restent les mêmes. Nous avons discrétisé le crochet en éléments prismatiques (annexe A) afin de mettre en évidence l'influence du type d'élément. Il est constitué de 576 éléments (figure C.1) et 2096 nœuds (soit 6288 degrés de liberté).

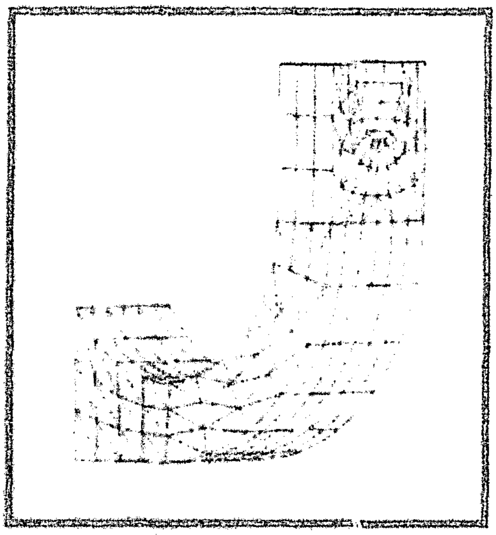


Figure C.1. Modélisation de la structure

Nous avons appliqué le chargement de la figure 4.26.a (chapitre 4) en ne considérant que la non sous-intégration (9 points d'intégration) des éléments. En effet, nous avons vu dans le chapitre 4 que la sous-intégration des éléments ne permettait pas d'avoir des résultats proche de la méthode incrémentale.

La structure a un comportement adapté au bout de 2 itérations pour l'analyse simplifiée et en moins de 10 cycles pour la méthode incrémentale.

Les figures C.2 et C.3 représentent les répartitions de la contrainte résiduelle et de la déformation plastique pour les deux méthodes.

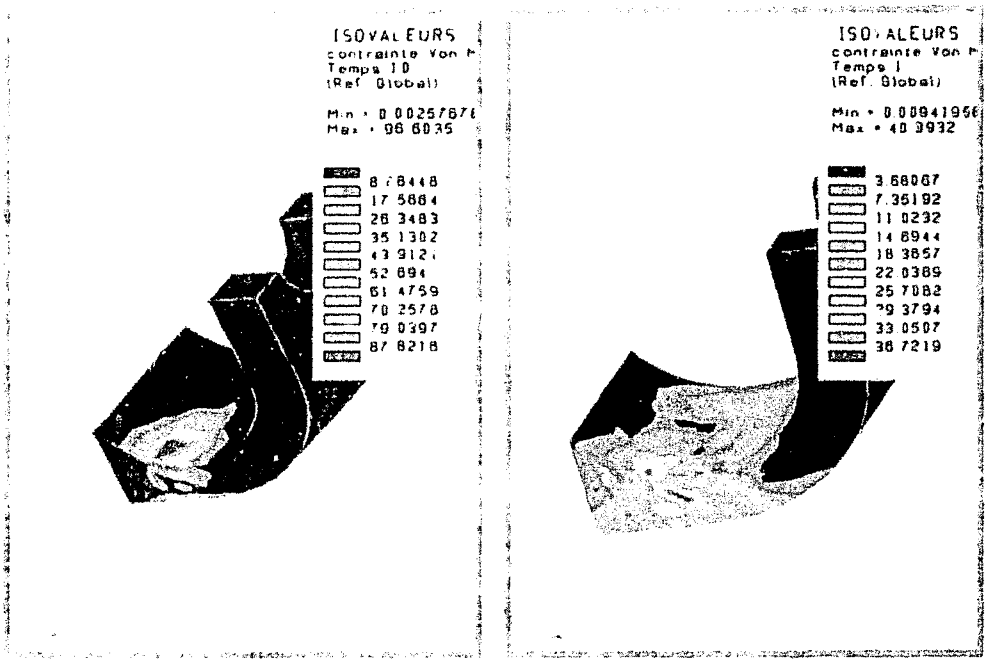


Figure C.2. Comparaison des répartitions de la contrainte résiduelle
(a) Méthode incrémentale (b) Analyse simplifiée (sans sous-intégration)

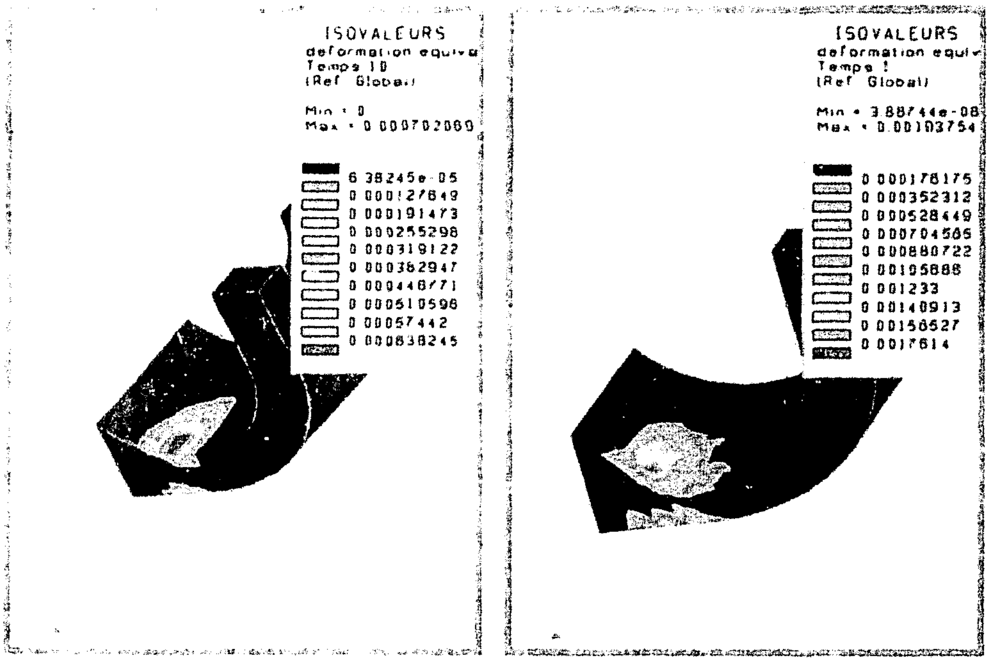


Figure C.3. Comparaison des répartitions de la contrainte résiduelle
(a) Méthode incrémentale (b) Analyse simplifiée (sans sous-intégration)

Le temps de résolution est de 378,91 secondes temps CPU pour l'analyse simplifiée et 482,23 secondes pour la méthode incrémentale.

Les répartitions obtenues par l'analyse simplifiée sont très différentes de celles de la méthode incrémentale. Finalement, l'élément prismatique n'est pas envisageable pour l'analyse simplifiée.

FIN