~ Alph 152996

Université des Sciences et Technologies de Lille Laboratoire de Mécanique de Lille (UMR CNRS 8107)

THESE

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR



de

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

Discipline : Génie Civil

présentée par

Hélène WELEMANE

Une modélisation des matériaux microfissurés Application aux roches et aux bétons

soutenue le 18 décembre 2002 devant le jury composé de

Z. MROZ	Professeur, IPPT, Varsovie	Président
Y. BERTHAUD	Professeur, Université de Paris VI	Rapporteur
A. DRAGON	Directeur de Recherche CNRS, ENSMA, Poitiers	Rapporteur
J. L. CHABOCHE	Directeur de Recherche, ONERA, Châtillon	
A. CURNIER	Professeur, EPFL, Lausanne	
F. CORMERY	Maître de Conférences, USTL, Lille	
J. F. SHAO	Professeur, USTL, Lille	Directeur de thèse

1



Comme disait Jean-Louis Aubert: voilà, c'est fini... Après la retranscription écrite de ces quelques années de labeur, la coutume veut que l'on aborde maintenant la page des remerciements...une page... Une seule page peut-elle rendre compte de toute la patience et de tout le courage dont ont fait preuve mes différents collaborateurs? Non, sans doute...

En premier lieu, je pense bien sûr à Fabrice Cormery à qui cette thèse doit beaucoup. A l'origine du sujet ainsi que de nombreuses idées et orientations liées à ce travail, il m'a avant tout communiqué le goût pour la recherche par son encadrement plein d'enthousiasme et de passion. Après ce sacré bout de chemin passé ensemble, Fabrice, je te souhaite une pleine réussite dans tes prochaines voies de recherche et d'escalade!

Ensuite, c'est mon collègue (mais néanmoins ami!) Vincent Pensée qui me vient à l'esprit. Vincent, qui m'a soutenue et supportée (le mot n'est pas vain) pendant toutes ces années d'études passées ensemble: l'EUDIL, le DEA, la thèse. Ta gentillesse et ta simplicité naturelles, ta disponibilité permanente mais surtout ton humour façon Sarcicourt ont compté énormément pour moi.

Je tiens également à citer un certain nombre de chercheurs qui, par leurs écrits ou leurs discours, m'ont aidée dans bien des domaines. Je salue entre autres Djimédo Kondo, André Dragon, Damien Halm, Alain Curnier, Jean-Louis Chaboche, Jean-Jacques Marigo... J'en profite aussi pour remercier tous les membres de mon jury pour leur disponibilité, leur écoute et le temps qu'ils ont consacré à l'examen de mes travaux.

Enfin, je rends hommage à tout un environnement idéal lié à des conditions de travail remarquables, grâce notamment à mon directeur de thèse Jian-Fu Shao qui m'a accueillie dans son équipe, au CNRS et à la région Nord-Pas-de-Calais. Je pense aussi à tous mes collègues du LML dont la compagnie et la bonne humeur ont égayé cet épisode de ma vie: Cosmin, Marjorie, Annabelle, Stéphane et les autres. Je n'oublie pas bien sûr mes proches qui m'ont grandement encouragée et soutenue: merci à vous tous!

Je me souviens pour finir de tous ces petits événements, personnels ou plus généraux, qui m'ont permis de tenir la distance: les buts de Lilian Thuram contre la Croatie en 1998 et ceux de Zizou à l'Euro 2000; les intrigues amoureuses d'Ally McBeal dans son cabinet d'avocat, les aventures de Jarod le caméléon et de Sydney dans Alias; la rencontre avec Jackie mon maître yogi; les chansons de Linda Lemay; l'arrivée d'Azzo (né en mai 2000), quadrupède velu pas spécialement futé mais ronronnant à souhait!

Aimé Jacquet a bien résumé la chose : «L'important, c'est le collectif! »

. •

Table des matières

Notations					
In	trod	uction		13	
1	Bétons et roches: comportement mécanique et modélisations				
	1.1 Introduction				
	1.2	2 Microfissuration et comportement mécanique			
		1.2.1	Comportement en compression hydrostatique	. 18	
		1.2.2	Comportement en compression uniaxiale	. 20	
		1.2.3	Comportement en traction uniaxiale	. 24	
	1.3	Modélisations			
		1.3.1	Présentation des modèles	. 28	
		1.3.2	Analyse critique	. 30	
		1.3.3	Commentaire	. 34	
2 Un modèle de comportement pour les milieux microfissur		e de comportement pour les milieux microfissurés	37		
	2.1	Introd	ntroduction		
	2.2	2.2 Description de la microfissuration			
	2.3	3 Potentiel thermodynamique et comportement élastique		. 42	
		2.3.1	Hypothèses	. 42	
		2.3.2	Energie élémentaire et effet unilatéral	. 44	
		2.3.3	Expression définitive du potentiel	. 53	
		2.3.4	Lois d'état	. 59	
	2.4	2.4 Potentiel de dissipation et loi d'évolution de l'endommagement		. 61	
		2.4.1	Hypothèses	. 61	
		2.4.2	Lois d'évolution des variables internes	. 62	
	2.5	Intégr	ation locale de la loi de comportement	. 68	

•

3 Etude des capacités prédictives du modèle					
	3.1	Intro	$\operatorname{duction}$		73
	3.2 Comportement élastique et propriétés effectives				
		3.2.1	Détermination des paramètres d'énergie	•	74
		3.2.2	Etude du comportement élastique	•	80
	3.3	Comp	portement dissipatif	•	94
		3.3.1	Détermination des paramètres de dissipation	•	94
		3.3.2	Réponse à quelques sollicitations classiques	•	99
Conclusion				1	11
Annexe A: Calculs					13
Aı	Annexe B: Conditions de continuité				17
Ar	Annexe C: Récapitulatif des équations du modèle				
Bi	Bibliographie			1	31

.

• , •

Notations

L'ensemble des tenseurs utilisés au cours de cette étude sont définis sur l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^3 dont le triplet de vecteurs $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ constitue une base orthonormée. Précisément, T^k désigne l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre k (k étant un entier).

Nous utilisons les notations intrinsèques usuelles. A titre indicatif sont rappelées ci-dessous les définitions de quelques uns des opérateurs principaux.

♦ Produits contractés

Soient $(T_{i_1i_2..i_k})_{i_1,i_2,..i_k \in [1,3]^k}$ les composantes d'un tenseur T d'ordre k dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de \mathbb{R}^3 . Les produits contractés sont alors définis de la façon suivante :

$$\begin{split} \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} &= n_i \, m_i, \quad \forall \, (\mathbf{n}, \mathbf{m}) \in (\mathbb{R}^3)^2 \\ (a \cdot b)_{ik} &= a_{ij} \, b_{jk} \,, \quad \forall \, (a, b) \in (T^2)^2 \\ a : b &= a_{ij} \, b_{ij}, \quad \forall \, (a, b) \in (T^2)^2 \\ (a : C)_{kl} &= a_{ij} \, C_{ijkl}, \quad \forall \, (a, C) \in T^2 \times T^4 \\ C :: D &= C_{ijkl} \, D_{ijkl}, \quad \forall \, (C, D) \in (T^4)^2 \\ E \bullet F &= E_{i_1 i_2 \dots i_k} \, F_{i_1 i_2 \dots i_k}, \quad \forall \, (E, F) \in (T^k)^2 \, avec \, k \ge 6 \end{split}$$

Notons enfin que la trace d'un tenseur du second ordre est définie par :

$$tr a = a_{ii}, \quad \forall a \in T^2$$

♦ Produits tensoriels

Les produits tensoriels sont définis de la façon suivante :

$$(\mathbf{n}^{\otimes k})_{i_1 i_2 \dots i_k} = n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_k}, \quad \forall \ \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$$

$$(a \otimes b)_{ijkl} = a_{ij} b_{kl}, \quad \forall \ (a,b) \in (T^2)^2$$

$$(a \otimes b)_{ijkl} = a_{ik} b_{jl}, \quad \forall \ (a,b) \in (T^2)^2$$

$$(a \otimes b)_{ijkl} = a_{il} b_{jk}, \quad \forall \ (a,b) \in (T^2)^2$$

$$(a \otimes b) = (a \otimes b + a \otimes b)/2, \quad \forall \ (a,b) \in (T^2)^2$$

♦ Divers

On notera également I le tenseur unité de T^2 et 0_k le tenseur nul de T^k dont les composantes respectives dans toute base orthonormée de \mathbb{R}^3 sont telles que :

$$I_{ij} = \left\{ egin{array}{ccc} 1\,, & si\,\,i=j \ 0\,, & si\,\,i
eq j \end{array}
ight. , \,\,\, orall\,(i,j)\in [1,3]^2$$

 et

$$(0_k)_{i_1i_2..i_k} = 0, \ \forall \ (i_1, i_2, ..i_k) \in [1,3]^k$$

Enfin, on désignera par $\lfloor A \rfloor$ la partie irréductible d'un tenseur A. On rappelle qu'un tenseur T d'ordre k est irréductible s'il est symétrique et à trace nulle, *i.e.* que ses composantes $(T_{i_1i_2..i_k})_{i_1,i_2,..i_k \in [1,3]^k}$ dans toute base de \mathbb{R}^3 sont telles que

$$T_{i_1i_2i_3..i_k} = T_{i_2i_1i_3..i_k} = T_{i_3i_2i_1..i_k} = .. = T_{i_ki_2i_3..i_1}$$

 \mathbf{et}

$$\sum_{i_1=1}^3 T_{i_1i_1i_3\dots i_k} = (0_{k-2})_{i_3\dots i_k}$$

· . •

Introduction

Dans leur état naturel, c'est-à-dire avant tout chargement, les bétons et de nombreuses roches sont microfissurés de façon plus ou moins importante. Sous sollicitation mécanique, cette microfissuration est le plus souvent amenée à évoluer soit par propagation des microfissures existantes, soit par création de nouveaux défauts.

De nombreux auteurs s'accordent à penser que c'est avant tout l'état de la microfissuration, ainsi que son évolution sous chargement, qui jouent un rôle prépondérant dans le comportement mécanique de ces matériaux et qui permettent d'apporter une explication physique à divers aspects de celui-ci.

La prise en compte de la microfissuration sur le plan des modèles de comportement est un problème difficile et encore ouvert à l'heure actuelle. Le caractère en général anisotrope de la propagation des microfissures et le fait qu'elles peuvent s'ouvrir ou se fermer selon le chargement appliqué rendent notamment cette tâche fort délicate.

Le travail exposé dans ce mémoire tente d'apporter quelques éléments de solution à ce problème. A cet effet, une nouvelle modélisation, écrite à l'échelle macroscopique, est proposée pour rendre compte de quelques spécificités essentielles du comportement des matériaux microfissurés tels que les bétons et les roches.

13

Introduction

Pour mener cette étude, nous nous sommes placés dans un cadre relativement simple, mais qui conserve néanmoins quelques unes des caractéristiques majeures du problème en question. Ainsi, l'éventail des matériaux abordés se limite principalement à ceux qui présentent un comportement initial isotrope. Un seul mécanisme dissipatif est par ailleurs envisagé, à savoir la création et la croissance de microfissures, la question du frottement n'étant pas considérée ici. Le cadre général est enfin celui des petites perturbations quasi statiques et isothermes.

La rédaction de ce mémoire s'organise autour de trois parties.

Le premier chapitre est consacré dans un premier temps à la présentation, l'analyse bibliographique et l'interprétation des principaux résultats expérimentaux sur le comportement mécanique des bétons et des roches. Dans une seconde partie, on s'intéressera aux modélisations macroscopiques existant dans la littérature, et l'on évoquera en particulier les difficultés rencontrées par celles-ci pour rendre compte des aspects précités.

La présentation du modèle proprement dit fait l'objet du second chapitre. L'endommagement y est caractérisé par un jeu de variables internes tensorielles définissant la distribution en orientation des densités de microfissures au sein du milieu. On construit ensuite le potentiel thermodynamique (en l'occurrence la fonction énergie libre) du milieu microfissuré en s'appuyant sur la physique du phénomène considéré et sur quelques considérations d'ordre micromécanique. Enfin, la question de l'évolution est traitée dans le cadre d'un schéma standard à partir d'hypothèses sur la dissipation. Cette partie s'achève sur l'explicitation de l'algorithme d'intégration numérique locale du modèle proposé.

Dans le dernier chapitre, diverses simulations sont menées afin d'évaluer la pertinence de la formulation proposée. Cette analyse sera décomposée en deux parties, la première consacrée à la réponse élastique du modèle, la seconde s'intéressant à la question de l'évolution des dommages.

. . .

• . . . • ł.

Chapitre 1

Bétons et roches: comportement mécanique et modélisations

1.1 Introduction

Afin de fixer les idées et de prendre concience du rôle crucial joué par la microfissuration, on se propose dans la première partie de ce chapitre d'analyser la réponse mécanique de bétons et de roches au travers de quelques essais couramment utilisés en génie civil.

Ces données expérimentales permettront de rappeler les principaux effets suscités par la microfissuration, tant ceux liés à la présence de microfissures que ceux induits par la propagation ou la création de nouvelles microfissures.

A l'issue de cette partie, on fera ensuite une synthèse des tentatives de modélisation macroscopique du comportement de ces matériaux, et plus spécifiquement celles visant à rendre compte des effets liés à l'ouverture – fermeture des microfissures.

1.2 Microfissuration et comportement mécanique

Malgré de grandes différences de composition, les bétons et les roches ont un comportement mécanique assez similaire. On étudie ici la réponse d'une éprouvette de ces matériaux soumise à des sollicitations relativement simples mais qui permettent de mettre en évidence les manifestations essentielles de la microfissuration : la compression hydrostatique, la compression et la traction uniaxiales. On pourra se référer par exemple aux synthèses de Mazars [43], Burlion [8] dans le cas des bétons et Paterson [49], Gatelier [19] dans le cas des roches pour une description plus détaillée du comportement de ces matériaux, notamment sous chargement multiaxial.

1.2.1 Comportement en compression hydrostatique

Une éprouvette de volume V est placée dans une enceinte de confinement et sollicitée par l'intermédiaire d'un fluide dont on contrôle la pression P_c . Dans le cas d'un matériau initialement isotrope, les déformations qui en découlent sont alors identiques dans toutes les directions de l'espace. La figure 1.1 présente la variation relative de volume d'un échantillon de grès de Fontainebleau durant cet essai (Sibar [54]).

Lorsque le confinement est appliqué, les microfissures présentes dans le matériau et ayant une ouverture non nulle à l'état naturel se ferment progressivement (on parle de phase de *serrage*). A l'échelle macroscopique, cette fermeture se traduit par une rigidification progressive du matériau, conduisant à la non linéarité de la courbe $(-\Delta V/V, P_c)$ avec augmentation du module de compressibilité K du matériau (*i.e.* la pente de cette courbe). Pour la valeur P_f appelée pression de fermeture (ici de l'ordre de 10 MPa), la quasi-totalité des microfissures sont fermées. La courbe $(-\Delta V/V, P_c)$ devient alors linéaire et le module de compressibilité atteint une valeur asymptotique K_0 considérée comme celle du matériau sain.

La restitution progressive du module de compressibilité au cours de cet essai illustre la dépendance des propriétés élastiques du matériau suivant l'état d'ouverture - fermeture des microfissures et, en particulier, la restauration induite par la fermeture de celles-ci: c'est ce que l'on appelle couramment l'effet unilatéral de l'endommagement.

L'essai de compression hydrostatique permet également de déterminer la porosité de fissure d'un matériau (*cf.* Panet [48]). L'intersection de la partie linéaire de la courbe $(-\Delta V/V, P_c)$ avec l'axe des abscisses donne en effet la valeur du volume relatif $\eta_f^0 = V_f^0/V$ des microfissures initiales (ici environ 1.5 10⁻³). On notera que dans les bétons et certaines roches très poreuses, la phase de serrage est quasiment inexistante, indiquant soit que les microfissures du matériau sont essentiellement fermées, soit que le matériau est pratiquement vierge de microfissures (Burlion [8], Homand et Duffaut [26]).



Figure 1.1: Réponse d'un grès de Fontainebleau à un essai de compression hydrostatique: courbe pression de confinement (P_c) - variation relative de volume $(\Delta V/V)$.

1.2.2 Comportement en compression uniaxiale

C'est l'essai le plus couramment réalisé en mécanique des roches et des bétons. La réponse schématique de ces matériaux à une sollicitation de compression uniaxiale d'axe \mathbf{e}_3 ($\boldsymbol{\sigma} = \sigma_3 \, \mathbf{e}_3^{\otimes 2}$ avec $\sigma_3 < 0$) est présentée à la figure 1.2. On distingue généralement quatre phases jusqu'à la rupture:

• Phase I: Serrage des fissures

Comme en compression hydrostatique, l'application du chargement conduit en premier lieu à une fermeture progressive des microfissures initiales. Cette phase de serrage induit une non linéarité dans la réponse contrainte - déformation du matériau, qui est d'autant plus marquée que celui-ci est fortement microfissuré initialement.

• Phase II: Domaine linéaire

Dans cette seconde phase, la réponse du matériau est élastique linéaire. Le comportement est en effet quasi réversible (courbes de charge et de décharge sont pratiquement confondues) et relativement peu d'évènements acoustiques sont enregistrés (voir par exemple Lockner et Byerlee [36]): le matériau ne subit donc à ce stade aucune nouvelle altération.

• Phase III: Propagation stable de la microfissuration

Les courbes contrainte - déformations du matériau cessent d'être linéaires. L'émission acoustique s'intensifie, ce qui révèle une propagation de la microfissuration. Cette propagation est stable (l'arrêt de montée en charge s'accompagne d'un arrêt de l'émission acoustique, qui ne reprend que lors d'un nouvel accroissement de la contrainte appliquée) et s'effectue de façon anisotrope : les surfaces des microfissures s'orientent en effet de préférence dans une direction parallèle à l'axe de chargement (voir par exemple Nemati [45] pour des bétons et Homand *et al.* [27] pour une roche, *cf.* figure 1.3). On notera que cette anisotropie du comportement est confirmée par la mesure des célérités d'ondes ultrasonores (Marigo [40], Berthaud [5], Homand *et al.* [27]).

20



Figure 1.2: Réponse schématique à un essai de compression uniaxiale d'axe \mathbf{e}_3 : courbes contrainte (σ_3) - déformations axiale (ε_3) et latérale ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$).

Si l'on réalise des cycles de charge - décharge durant cette phase (*cf.* figure 1.4), on constate par ailleurs la présence de boucles d'hystérésis indiquant que le matériau reste le siège de processus dissipatifs même à état d'endommagement figé. La plupart des microfissures étant ici fermées, cette dissipation est généralement attribuée au frottement des lèvres de ces défauts. On notera enfin que, si l'existence de ces boucles ne permet certes plus d'accéder aux modules élastiques du matériau, on peut néanmoins entrevoir lorsque celles-ci sont de faible amplitude (comme dans les roches par exemple) la dégradation progressive des propriétés mécaniques induite par l'endommagement.

Chapitre 1



Figure 1.3: Observations microscopiques directes d'une section de granite de la Vienne sollicité en compression uniaxiale d'axe \mathbf{e}_3 : paramètre P_L (nombre d'intersections entre le réseau de microfissures et une grille de lignes parallèles régulièrement espacées, par unité de longueur) en fonction de l'orientation de la grille et du niveau de chargement.



Figure 1.4: Réponses à un essai de compression uniaxiale d'axe \mathbf{e}_3 avec cycles de charge - décharge : courbes contrainte (σ_3) - déformations axiale (ε_3) et latérale ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$).

• Phase IV: Propagation instable de la microfissuration et ruine de l'éprouvette

A partir d'un certain seuil, l'émission acoustique s'intensifie de façon importante. Les microfissures se propagent rapidement et de façon instable, puis commencent à se rejoindre (coalescence).

La réponse de l'éprouvette n'est plus à ce stade représentative du comportement local du matériau mais de celui d'une structure, les champs de déformation au sein de l'éprouvette cessant en effet d'être homogènes.

Notons pour finir que le fait d'appliquer une pression latérale constante durant l'essai de compression (dans ce cas triaxial) modifie quelque peu le comportement qui vient d'être décrit (sensibilité à la pression moyenne). Le confinement augmente notamment le seuil de fissuration (et donc la phase II), stabilise la propagation des défauts et rend la rupture plus progressive.

1.2.3 Comportement en traction uniaxiale

L'essai de traction uniaxiale est relativement difficile à mettre en oeuvre. Le recours à des presses très rigides, un pilotage en déplacement et l'utilisation d'éprouvettes de formes particulières sont le plus souvent indispensables à sa réalisation (voir par exemple Terrien [57], Van Mier et Van Vliet [60]).

La figure 1.5 présente les courbes contrainte - déformation axiale obtenues pour un grès de Fontainebleau et un béton lors d'une traction uniaxiale $\sigma = \sigma_3 e_3^{\otimes 2}$ $(\sigma_3 > 0)$. En début de chargement, le comportement de ces matériaux est élastique linéaire. Puis, l'on constate une légère déviation par rapport à cette linéarité, liée à une progression de la microfissuration (comme l'indique l'activité acoustique, *cf*. Terrien [57]). Cette propagation des microfissures est anisotrope, la majorité des défauts se développant dans la direction perpendiculaire à l'axe de chargement, et se révèle rapidement instable.





Figure 1.5: Réponses à un essai de traction uniaxiale d'axe \mathbf{e}_3 : courbes contrainte (σ_3) - déformation axiale (ε_3) .

Sur les essais présentés, le champ de déformations dans l'échantillon cesse d'être homogène à partir du pic de la courbe contrainte - déformation axiale. La réponse obtenue n'est alors plus représentative du comportement du matériau mais du comportement de la structure que constitue l'éprouvette (*cf.* Mazars [43], Van Mier [59]). Pour accéder à la phase adoucissante du comportement, on peut par exemple recourir à la procédure PIED (Pour Identifier l'Endommagement Diffus), dans laquelle l'éffort est exercé par l'intermédiaire de barettes en aluminium collées sur la surface latérale de l'éprouvette (voir Ramtani [51]). Si l'on examine ainsi la réponse post-pic d'un béton à un essai PIED de traction uniaxiale d'axe \mathbf{e}_3 (cf. figure 1.6), on observe une dégradation progressive de ses propriétés mécaniques : la pente des décharges (élastiques linéaires), *i.e.* le module d'Young axial $E(\mathbf{e}_3)$ du matériau, décroit en effet au fur et à mesure que l'on progresse dans l'essai. On constate également la présence de déformations résiduelles irréversibles après décharge, qui peuvent s'expliquer par une refermeture imparfaite des microfissures (voir par exemple Acker [1]).

Notons que, si à l'issue d'une décharge complète de l'éprouvette, on poursuit cet essai par une compression uniaxiale suivant le même axe de chargement, on peut une nouvelle fois mettre en évidence l'effet unilatéral de l'endommagement (Ramtani [51]). Le chargement compressif provoque en effet la fermeture des microfissures préalablement générées lors de la traction et conduit ainsi à la restitution quasi totale du module d'Young axial à sa valeur initiale (*cf.* figure 1.6).



Figure 1.6: Réponse d'un béton à un essai PIED uniaxial (d'axe \mathbf{e}_3) de traction avec cycles de charge - décharge suivie de compression : courbe contrainte (σ_3) déformation axiale (ε_3).

1.3 Modélisations

L'analyse des résultats expérimentaux qui vient d'être faite a permis de mettre en relief le rôle crucial joué par la microfissuration dans le comportement mécanique des bétons et de nombreuses roches. Au travers des quelques essais présentés, on a ainsi pu observer les principaux phénomènes liés à la présence et à l'évolution de ces défauts (dégradation des propriétés mécaniques, anisotropie induite, effet unilatéral,..).

Il est aujourd'hui établi que la mécanique de l'endommagement constitue le cadre le plus approprié pour la modélisation macroscopique du comportement non linéaire de ces matériaux. Nous ne ferons pas ici l'historique de celle-ci, nous nous limiterons à en rappeler quelques points essentiels.

Depuis trois décennies, de nombreuses théories, utilisant une ou plusieurs variables d'endommagement - d'abord scalaires puis tensorielles afin de rendre compte du caractère orienté des défauts - ont été développées pour rendre compte des effets liés à la microfissuration (on pourra trouver quelques éléments de synthèse à ce sujet notamment dans Lemaitre et Chaboche [35] et Krajcinovic [33]). En dépit de ces multiples tentatives, aucune formulation actuelle ne permet de rendre compte de façon acceptable de l'intégralité des aspects décrits précédemment. En particulier, la question de l'effet unilatéral n'a toujours pas trouvé de réponse entièrement satisfaisante, même dans le cadre simplifié où les microfissures sont supposées glisser sans frottement.

Dans une analyse critique, Chaboche [10] (voir aussi Maire et Lesne [39]) démontre en effet l'existence d'anomalies mathématiques graves dans les formulations visant à rendre compte de ce phénomène (discontinuité de la réponse contrainte déformation, dissymétrie de l'opérateur des rigidités,...). On se propose ici de compléter ce propos en examinant deux approches plus récentes qui ont tenté de remédier à ces problèmes : celle de Chaboche [11] et celle de Halm et Dragon [21].

1.3.1 Présentation des modèles

En l'absence d'endommagement, les matériaux modélisés sont supposés élastiques linéaires et isotropes, de coefficients de Lamé λ_0 et μ_0 ($\mathbf{C}_0 = \lambda_0 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu_0 \mathbf{I} \overline{\otimes} \mathbf{I}$ le tenseur des rigidités élastiques correspondant). On désignera par $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur de déformation et par **d** la (ou les) variable(s) d'endommagement considérée(s). Dans la mesure où seule la réponse élastique sera examinée, on ne présentera ici que le potentiel thermodynamique postulé dans chacune des formulations étudiées.

• Formulation de Chaboche [11]

La formulation proposée par cet auteur constitue un cadre général au sein duquel toute modélisation macroscopique de l'endommagement peut s'inscrire. Dans le cas d'une formulation en déformation, elle repose sur une écriture générale du potentiel thermodynamique W (énergie libre par unité de volume) sous la forme :

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$$
(1.1)

où le tenseur des rigidités élastiques C, dépendant de l'état (ε , d), est défini par :

$$\mathbf{C} = \widetilde{\mathbf{C}} + \eta \sum_{i=1}^{3} H\left(-\mathbf{v}_{i} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_{i}\right) \mathbf{v}_{i}^{\otimes 4} : \left(\mathbf{C}_{0} - \widetilde{\mathbf{C}}\right) : \mathbf{v}_{i}^{\otimes 4}$$
(1.2)

 $\widetilde{\mathbf{C}}$ désigne la valeur de \mathbf{C} lorsque tous les dommages sont actifs (microfissures toutes ouvertes), η est un paramètre du matériau (compris entre 0 et 1) permettant de caractériser l'intensité de la restitution des modules élastiques et H représente la fonction d'Heaviside.

Cette formulation permet donc de restituer lorsque $\eta = 1$ la rigidité initiale du matériau dans la direction définie par le vecteur \mathbf{v}_i , *i.e.* le module d'élongation $L(\mathbf{v}_i)$, lorsque la déformation normale associée $\mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_i$ devient négative.

Trois choix sont proposés par Chaboche pour les directions orthogonales v_i où s'applique la condition unilatérale. Deux d'entre eux sont examinés en détail dans la

suite, le dernier étant commenté ultérieurement : dans un premier temps, le triplet de vecteurs unitaires $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ est une base principale de l'endommagement, d désignant un unique tenseur du second ordre; dans un second temps, ce triplet correspond à une base principale du tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$, d représentant dans ce cas une ou plusieurs variables tensorielles d'endommagement.

• Formulation de Halm et Dragon [21]

Cette formulation constitue une extension du modèle d'endommagement anisotrope proposé par Dragon *et al.* [17] qui permet de rendre compte du phénomène d'activation - désactivation de l'endommagement. Le mécanisme dissipatif considéré est décrit par une unique variable interne d'endommagement **d**, tensorielle du second ordre, rendant compte de l'étendue et de l'orientation des dommages :

$$\mathbf{d} = \sum_{k} d_k \, \mathbf{n}_k^{\otimes 2} \tag{1.3}$$

 \mathbf{n}_k représente la normale unitaire au k^e système de microfissures parallèles et d_k une mesure scalaire de leur densité. La décomposition spectrale permet d'écrire **d** dans ses axes principaux :

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{3} d_i \, \mathbf{v}_i^{\otimes 2} \tag{1.4}$$

où d_i et \mathbf{v}_i représentent les valeurs propres et vecteurs propres de **d**. Toute configuration d'endommagement est donc équivalente à trois systèmes orthogonaux de microfissures parallèles.

Le potentiel thermodynamique W proposé par Halm et Dragon [21] est défini par:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = g \operatorname{tr} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d}) + \frac{\lambda_0}{2} (\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu_0 \operatorname{tr} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \alpha \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \operatorname{tr} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d}) + 2\beta \operatorname{tr} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d}) - (\alpha + 2\beta) \boldsymbol{\varepsilon} : \left[\sum_{i=1}^3 H \left(-\mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_i \right) d_i \mathbf{v}_i^{\otimes 4} \right] : \boldsymbol{\varepsilon}$$
(1.5)

où g est une constante caractérisant des effets résiduels dus aux dommages, et α et β deux coefficients constants liés à la dégradation des propriétés élastiques.

Dans la formulation (1.5), l'opérateur tensoriel d'ordre quatre $d_i \mathbf{v}_i^{\otimes 4}$ permet d'annuler la contribution du système équivalent de microfissures de normale \mathbf{v}_i à la dégradation de la rigidité du matériau dans cette direction lorsque $\mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_i \leq 0$. Le modèle proposé par Halm et Dragon [21] s'appuie donc sur la décomposition spectrale de **d** pour rendre compte de l'effet unilatéral de l'endommagement.

1.3.2 Analyse critique (Cormery et Welemane [13])

Les formulations qui viennent d'être présentées comportent certaines déficiences mathématiques. On se propose de les mettre en évidence ici sur deux exemples simples. Examinons dans un premier temps la formulation (1.1) proposée par Chaboche [11] lorsque le triplet de vecteurs unitaires $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ est identifié à une base principale de d.

Considérons un état $(\varepsilon, \mathbf{d})$ où la déformation est uniaxiale $\varepsilon = \varepsilon_1 \mathbf{e}_1^{\otimes 2}$ avec $\varepsilon_1 < 0$ et l'endommagement \mathbf{d} est un tenseur du second ordre isotrope, *i.e.* tel que $\mathbf{d} = d_0 \mathbf{I}$. Le milieu étant supposé isotrope lorsque tous les dommages sont actifs, le tenseur des rigidités $\tilde{\mathbf{C}}$ est donc isotrope de la forme :

$$\widetilde{\mathbf{C}} = (\lambda_0 + a) \mathbf{I}^{\otimes 2} + 2 (\mu_0 + b) \mathbf{I} \overline{\otimes} \mathbf{I}$$
(1.6)

où *a* et *b* sont deux fonctions scalaires de **d**. Munis du résultat (1.6), nous sommes en mesure de calculer $W(\varepsilon, \mathbf{d})$. L'endommagement étant décrit par un tenseur sphérique, le triplet de vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ peut être identifié à une infinité de bases principales de **d**. Si l'on assimile le triplet $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ à la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, on établit alors que:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \left[\lambda_0 + 2\mu_0 - \eta \left(a + 2b \right) \right] \varepsilon_1^2$$
(1.7)

Vérifions l'unicité de ce résultat. Pour cela identifions maintenant $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ à une seconde base principale de **d**, soit $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ définie par :

$$\mathbf{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \right), \quad \mathbf{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \right), \quad \mathbf{t}_3 = \mathbf{e}_3$$
 (1.8)

on obtient alors, d'après (1.1) et (1.2):

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \left[\lambda_0 + 2\mu_0 - \frac{\eta}{2} \left(a + 2b \right) \right] \varepsilon_1^2$$
(1.9)

Ce simple changement de base principale de **d** montre que l'unicité de la réponse $W(\varepsilon, \mathbf{d})$ n'est pas assurée. A un état $(\varepsilon, \mathbf{d})$ peuvent ainsi être associés plusieurs résultats différents par W (une infinité dans l'exemple considéré), qui par conséquent n'est pas un potentiel thermodynamique.

La formulation proposée par Halm et Dragon [21] présente la même anomalie mathématique. En effet, on peut remarquer aisément que la relation (1.5) peut se mettre sous la forme (les effets résiduels dus aux dommages étant supposés ici négligeables, soit g = 0):

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \left[\widetilde{\mathbf{C}} + \sum_{i=1}^{3} H\left(-\mathbf{v}_{i} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_{i} \right) \mathbf{v}_{i}^{\otimes 4} : \left(\mathbf{C}_{0} - \widetilde{\mathbf{C}} \right) : \mathbf{v}_{i}^{\otimes 4} \right] : \boldsymbol{\varepsilon}$$
(1.10)

avec

$$\widetilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_0 + \alpha \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{d} + \mathbf{d} \otimes \mathbf{I} \right) + 2\beta \left(\mathbf{I} \ \overline{\underline{\otimes}} \ \mathbf{d} + \mathbf{d} \ \overline{\underline{\otimes}} \ \mathbf{I} \right)$$
(1.11)

et s'inscrit donc dans le cadre formel proposé par Chaboche qui vient d'être étudié. Au vu des résultats précédents, on peut donc en déduire que l'introduction de la condition unilatérale du dommage au sein de la formulation de base proposée par Dragon *et al.* [17] fait perdre à W son statut de potentiel thermodynamique. On notera que la prise en compte des effets résiduels ne modifie pas ces conclusions.

Lorsque le triplet de vecteurs unitaires $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ correspond à une base principale de $\boldsymbol{\varepsilon}$, la formulation (1.1) proposée par Chaboche [11] permet d'associer à tout état $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d})$ une et une seule énergie libre $W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d})$. Cependant, ce second choix de vecteurs unitaires $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ne permet pas d'associer à tout état $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d})$ un tenseur des rigidités élastiques $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d})$ unique, ce que nous nous proposons de démontrer maintenant.

Considérons un état $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d})$ où la déformation est uniforme $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \mathbf{I}$ avec $\varepsilon_0 < 0$ et l'endommagement \mathbf{d} tel que le tenseur $\widetilde{\mathbf{C}}$ soit isotrope, *i.e.* de la forme (1.6). Dans cet exemple, le triplet de vecteurs unitaires $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ peut être identifié à une infinité de bases principales de $\boldsymbol{\varepsilon}$ (la déformation étant définie par un tenseur sphérique). Déterminons l'expression du tenseur C associé à l'état ($\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \mathbf{I}, \mathbf{d}$) considéré lorsque ce triplet est identifié d'une part à la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, et d'autre part à la base $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ définie en (1.8). On obtient alors d'après (1.2) et (1.6):

$$\mathbf{C} = \widetilde{\mathbf{C}} - \eta \left(a + 2b \right) \left(\mathbf{e}_1^{\otimes 4} + \mathbf{e}_2^{\otimes 4} + \mathbf{e}_3^{\otimes 4} \right) \quad lorsque \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i \ (i = 1, 2, 3) \tag{1.12}$$

 \mathbf{et}

$$\mathbf{C} = \widetilde{\mathbf{C}} - \eta \left(a + 2b\right) \left(\mathbf{t}_{1}^{\otimes 4} + \mathbf{t}_{2}^{\otimes 4} + \mathbf{t}_{3}^{\otimes 4}\right) \quad lorsque \quad \mathbf{v}_{i} = \mathbf{t}_{i} \ (i = 1, 2, 3) \tag{1.13}$$

Or,

$$\mathbf{t}_{1}^{\otimes 4} + \mathbf{t}_{2}^{\otimes 4} + \mathbf{t}_{3}^{\otimes 4} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{e}_{1}^{\otimes 4} + \mathbf{e}_{2}^{\otimes 4} + \mathbf{e}_{1}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_{2}^{\otimes 2} + \mathbf{e}_{2}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{e}_{1}^{\otimes 2} \right) + \mathbf{e}_{1}^{\otimes 2} \underline{\otimes} \mathbf{e}_{2}^{\otimes 2} + \mathbf{e}_{2}^{\otimes 2} \underline{\otimes} \mathbf{e}_{1}^{\otimes 2} + \mathbf{e}_{3}^{\otimes 4}$$
(1.14)

ce qui prouve qu'à un état $(\varepsilon, \mathbf{d})$ peuvent être associés plusieurs tenseurs **C** différents. La figure 1.7 illustre les conséquences d'une telle anomalie sur le module d'Young $E(\mathbf{v})$ dans une direction de vecteur unitaire \mathbf{v} , défini par :

$$E(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}^{\otimes 2} : \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{v}^{\otimes 2}]^{-1}$$

$$(1.15)$$

lorsque la variable \mathbf{d} est un tenseur du second ordre ($\mathbf{d} = 0.1 \mathbf{I}$), le tenseur $\mathbf{\tilde{C}}$ retenu est celui proposé en (1.11) et $\eta = 1$ (restitution maximale). La comparaison des deux états ($\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \mathbf{I}, \mathbf{d} = d_0 \mathbf{I}$) définis respectivement par $\varepsilon_0 > 0$ et $\varepsilon_0 < 0$ montre, lorsque $\varepsilon_0 < 0$, une restitution partielle de $E(\mathbf{v})$ par rapport à sa valeur E_0 pour le matériau sain dans certaines directions \mathbf{v} qui dépendent du choix de la base principale de $\boldsymbol{\varepsilon}$, ce qui n'est pas acceptable.

Remarque 1.1 Les anomalies mises en évidence précédemment sur une distribution isotrope de dommages peuvent être révélées dans le cadre d'une anisotropie induite isotrope transverse. On montre par exemple aisément que la formulation proposée par Halm et Dragon [21] ne permet pas d'assurer l'unicité de la réponse $W(\varepsilon, \mathbf{d})$ pour un état de déformation $\varepsilon = \varepsilon_1 \mathbf{e}_1^{\otimes 2}$ avec $\varepsilon_1 < 0$ et de dommages $\mathbf{d} = d_0 (\mathbf{e}_1^{\otimes 2} + \mathbf{e}_2^{\otimes 2})$, puisque les directions de désactivation du dommage, définies à partir de la décomposition de \mathbf{d} , ne peuvent être déterminées de façon unique.



Figure 1.7: Modules d'Young d'un grès des Vosges affaibli par une distribution isotrope de microfissures ($\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \mathbf{I}, \mathbf{d} = 0.1 \mathbf{I}$; $\lambda_0 = 3250 \text{ MPa}, \mu_0 = 4875 \text{ MPa}, \alpha = 9925 \text{ MPa}, \beta = -11180 \text{ MPa}$).

Remarque 1.2 Le dernier choix proposé par Chaboche [11] pour le triplet $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ est le suivant : le vecteur \mathbf{v}_1 définit la direction pour laquelle le module d'Young est minimal dans un essai de traction uniaxiale, et les vecteurs \mathbf{v}_2 et \mathbf{v}_3 sont choisis de telle sorte que le triplet considéré forme une base orthonormée. Cette proposition ne permet pas non plus à W défini en (1.1) d'accéder au statut de potentiel thermodynamique. En effet, lorsque le milieu endommagé tous dommages actifs est isotrope ou isotrope transverse, l'unicité du triplet $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ne peut être assurée.

1.3.3 Commentaire

Ainsi que l'on vient de le voir, les formulations actuelles comportent encore un certain nombre d'anomalies mathématiques. La modélisation macroscopique du comportement mécanique des bétons et des roches apparaît donc comme une problématique encore très ouverte.

En ce qui concerne précisément les déficiences rencontrées ici au niveau de la prise en compte de l'effet unilatéral, elles découlent d'une utilisation inadéquate de décompositions spectrales des variables d'état dans les potentiels proposés. Une analyse critique de Carol et Willam [9] sur d'autres modélisations souligne certains autres effets néfastes engendrés par l'emploi de telles décompositions.

Notons que les nouvelles approches proposées récemment, notamment par l'école française (Badel [4], Desmorat [16], Chaboche [12]), restent construites sur ce principe et tentent de remédier aux problèmes évoqués. Nous avons choisi quant à nous de suivre une voie différente, *i.e.* de nous extraire de toute décomposition tant pour la formulation du potentiel thermodynamique (et donc pour la prise en compte de l'effet unilatéral) que pour celle de la loi d'évolution du processus dissipatif étudié. C'est précisément cette démarche et la modélisation qui en découle que nous allons vous présenter au chapitre suivant. .
Chapitre 2

Un modèle de comportement pour les milieux microfissurés

2.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de décrire la nouvelle modélisation de l'endommagement par microfissuration proposée dans le mémoire. Cette formulation s'inscrit dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles avec variables internes. La présentation du modèle se déclinera par conséquent en trois volets :

- en premier lieu, la sélection des variables internes, qui permettent de représenter le phénomène dissipatif étudié, *i.e.* la création et la croissance de microfissures,
- dans un second temps, la construction du **potentiel thermodynamique**, définissant l'énergie élastique du milieu, et de laquelle dérivent les lois d'état,
- enfin, le choix du **potentiel de dissipation**, qui fournit la loi d'évolution du processus irréversible.

Dans une dernière partie, nous présenterons la traduction algorithmique locale des équations constitutives proposées.

2.2 Description de la microfissuration

On se propose ici de préciser la définition des grandeurs mécaniques macroscopiques retenues pour caractériser l'endommagement. Considérons pour cela un volume élémentaire représentatif V d'un milieu comportant un ensemble de microfissures planes et de morphologies plus ou moins complexes (lenticulaires, elliptiques ou autres).

L'état de microfissuration de ce volume est alors défini par la disposition spatiale, l'orientation et la géométrie des dommages. L'ensemble de ces informations étant d'une complexité telle, leur prise en compte exhaustive sur le plan d'un modèle de comportement ne peut être envisagée. On se limite par conséquent dans cette étude à décrire ce que nous considérons être la signature essentielle de l'endommagement du milieu, à savoir la densité de microfissures associée à chacune des directions de l'espace.

La densité ρ_n dans la direction de vecteur unitaire **n** est précisément la grandeur scalaire et adimensionnelle définie par (*cf.* Budiansky et O'Connell [7]):

$$\rho_n = \frac{2}{\pi V} \sum_l \frac{S_{nl}^2}{P_{nl}} \tag{2.1}$$

où S_{nl} et P_{nl} désignent respectivement la surface et le périmètre de la l^e microfissure de normale unitaire **n**. La donnée des densités de microfissures associées à chaque direction permet alors de définir la fonction d'orientation scalaire ρ telle que (*cf.* Kanatani [30]):

$$\rho : \mathcal{S} \to \mathbb{R}
\mathbf{n} \mapsto \rho(\mathbf{n}) = \rho_n$$
(2.2)

où $S = \{ \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3, \ \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \}$ désigne la sphère unité de \mathbb{R}^3 .

On note que la valeur de ρ_n est indépendante du sens choisi pour le vecteur **n**, la fonction ρ est donc radialement symétrique, *i.e.* telle que

$$\rho(\mathbf{n}) = \rho(-\mathbf{n}), \quad \forall \ \mathbf{n} \in \mathcal{S}$$
(2.3)

et on la supposera par la suite de carré intégrable¹ sur S. On peut alors la développer en une série de Fourier convergente qui, compte tenu de (2.3), ne comporte que des termes d'ordres zéro et pairs en n (*cf.* He et Curnier [25], Jones [28], Kanatani [30], Zheng et Collins [64]), soit :

$$\rho(\mathbf{n}) = d_0 + d_2 : \lfloor \mathbf{n}^{\otimes 2} \rfloor + d_4 :: \lfloor \mathbf{n}^{\otimes 4} \rfloor + .., \quad \forall \mathbf{n} \in \mathcal{S}$$
(2.4)

Les tenseurs irréductibles $(1, \lfloor \mathbf{n}^{\otimes 2} \rfloor, \lfloor \mathbf{n}^{\otimes 4} \rfloor, ...)$, dont les expressions sont données à l'annexe A, forment une base orthogonale complète de l'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable sur S. Les coefficients tensoriels correspondants $(d_0, d_2, d_4, ...)$, appelés tenseurs de structure (fabric tensors en anglais), et définis par

$$d_{k} = \frac{(1+2k)!}{2^{k+2}(k!)^{2}\pi} \int_{\mathcal{S}} \rho(\mathbf{n}) \left[\mathbf{n}^{\otimes k} \right] ds \quad , \quad \forall \ k = 0, 2, 4, \dots$$
 (2.5)

avec ds l'élément infinitésimal de surface sur S, caractérisent ainsi entièrement la fonction de densité de microfissures ρ . En particulier, le coefficient tensoriel d'ordre zéro

$$d_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \rho(\mathbf{n}) \, ds \tag{2.6}$$

représente la densité totale des défauts.

Pour des raisons de commodité, on choisit ici de décrire la microfissuration du milieu au moyen de la fonction d'orientation $\hat{\rho}$ obtenue par troncature du développement (2.4):

$$\hat{\rho}(\mathbf{n}) = d_0 + d_2 : \lfloor \mathbf{n}^{\otimes 2} \rfloor + d_4 :: \lfloor \mathbf{n}^{\otimes 4} \rfloor + ... + d_p \bullet \lfloor \mathbf{n}^{\otimes p} \rfloor, \quad \forall \mathbf{n} \in \mathcal{S}$$
(2.7)

où p est un entier pair. L'ensemble des tenseurs irréductibles $(d_0, d_2, d_4, ..., d_p)$, que l'on écrira de façon générique **d**, définit alors complètement la fonction $\hat{\rho}$ et constitue par conséquent un jeu de variables internes adéquat pour caractériser l'endommagement par microfissuration.

$${}^1 i.e. ext{ telle que } \int\limits_{\mathcal{S}} \left|
ho(\mathbf{n})
ight|^2 ds < +\infty.$$

Chapitre 2

S'il est évident qu'une augmentation de l'ordre p permet d'affiner la description de la distribution de densités de microfissures (voir les analyses de Lubarda et Krajcinovic [38], Tikhomirov *et al.* [58] et l'exemple de la figure 2.1), rien ne permet pour l'instant de déterminer la valeur de p la plus pertinente pour la représentation du comportement du milieu microfissuré. Seule une étude *a posteriori* pour différentes valeurs de p fournira le moyen de répondre à cette question.

Signalons pour finir que puisque la valeur de la densité de microfissures dans une direction de vecteur **n** dépend des variables **d**, on la notera par la suite $\hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d})$.

Remarque 2.1 Une description de la microfissuration par une fonction d'orientation a déjà été proposée par Onat [46]. Notons néanmoins qu'elle se différencie de la nôtre au niveau de la définition de la densité retenue.

Remarque 2.2 Certains auteurs privilégient une représentation de l'endommagement liée aux propriétés effectives du matériau. Cette stratégie, certes avantageuse du point de vue de l'identification du modèle, ne permet toutefois pas de caractériser la microfissuration du milieu (orientation des défauts, densités,...). La démarche adoptée ici répond en revanche à cette attente - au travers de la relation (2.7) -, tout en préservant une formulation macroscopique du modèle. Ceci permettra notamment une validation enrichie du modèle, tant à l'échelle macroscopique qu'à l'échelle microscopique. De surcroît, une description géométrique de la microfissuration nous semble être une démarche pertinente pour la prise en compte de l'effet unilatéral ou encore pour le couplage avec d'autres phénomènes dissipatifs tels que le frottement.





 $\rho(\mathbf{n}) = \rho(\phi) = \begin{cases} 0 , & si \ \phi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \\ \cos\left(2\phi\right), & sinon \end{cases} : - - -$

cercle zéro : _____

2.3 Potentiel thermodynamique et comportement élastique

Les variables internes décrivant l'état d'endommagement du matériau étant posées, on se propose à présent de construire la fonction d'énergie définissant pour tout état d'endommagement **d** le comportement élastique macroscopique du matériau microfissuré. Le choix a été fait ici de retenir une formulation en déformation (ε variable observable) qui présente l'avantage de permettre une intégration numérique plus aisée.

2.3.1 Hypothèses

On admet l'existence d'un potentiel thermodynamique pour le matériau microfissuré, en l'occurrence l'énergie libre par unité de volume W, dépendant des variables $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d})$ et vérifiant les propriétés suivantes :

 \blacklozenge W est un invariant isotrope par rapport à l'ensemble de ses arguments, soit :

$$W(\mathcal{T}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d})) = W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) \tag{2.8}$$

quelle que soit la transformation orthogonale \mathcal{T} (voir par exemple Boehler [6]).

• la fonction W est de classe C^1 . Sont donc assurées la continuité du potentiel, ainsi que l'existence et la continuité de la contrainte :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2.9}$$

et des forces thermodynamiques associées à l'endommagement :

$$\mathbf{F^d} = (F^{d_0}, F^{d_2}, F^{d_4}, ..., F^{d_p}) \tag{2.10}$$

où

$$F^{d_0} = -\frac{\partial W}{\partial d_0}, \ F^{d_2} = -\frac{\partial W}{\partial d_2}, \ F^{d_4} = -\frac{\partial W}{\partial d_4}, \dots, \ F^{d_p} = -\frac{\partial W}{\partial d_p}$$
(2.11)

• W est enfin positivement homogène de degré deux par rapport à la variable ε , *i.e.* telle que:

$$\forall \mathbf{d}, \quad W(\lambda \,\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = \lambda^2 \, W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) \,, \quad \forall \, \lambda \ge 0 \tag{2.12}$$

Cette propriété implique que la contrainte définie en (2.9) est elle-même positivement homogène de degré un par rapport à $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\forall \mathbf{d}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\lambda \,\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = \lambda \,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}), \quad \forall \, \lambda \ge 0 \tag{2.13}$$

La relation contrainte - déformation du matériau lors d'un chargement réversible proportionnel $\boldsymbol{\varepsilon} = t \, \boldsymbol{\varepsilon}_0$ sera ainsi linéaire, avec possibilité d'une dissymétrie de comportement lors d'un changement de $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ en $-\boldsymbol{\varepsilon}_0$ (*cf.* Marigo [42]).

L'écriture proposée pour l'énergie libre du matériau microfissuré est la suivante :

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = W_0(\boldsymbol{\varepsilon}) + W_d(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d})$$
(2.14)

où $W_0(\varepsilon)$ désigne l'énergie libre du matériau sain (sans microfissures) supposé élastique linéaire et isotrope (de coefficients de Lamé λ_0 et μ_0):

$$W_0(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\lambda_0}{2} (tr\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu_0 tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})$$
(2.15)

et $W_d(\varepsilon, \mathbf{d})$ représente la modification d'énergie due à l'endommagement. Pour un état $(\varepsilon, \mathbf{d})$ quelconque, cette dernière est définie comme la somme sur la sphère unité S des contributions élémentaires, soit :

$$W_d(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} w(\hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \, ds \qquad (2.16)$$

où la fonction w caractérise la modification d'énergie induite par chaque ensemble de microfissures parallèles. On notera que la forme ainsi proposée suppose implicitement une certaine non interaction entre les microfissures (*cf.* Kachanov [29], Nemat-Nasser et Hori [44]).

Pour obtenir l'expression définitive du potentiel W, il reste donc maintenant à construire la fonction énergie élémentaire w. Celle-ci devra notamment être isotrope

par rapport à l'ensemble de ses arguments, radialement symétrique par rapport à la variable \mathbf{n} (*i.e.* telle que $w(., \mathbf{n}, .) = w(., -\mathbf{n}, .), \forall \mathbf{n}$), positivement homogène de degré deux par rapport à $\boldsymbol{\varepsilon}$ et de classe C^1 , de façon à ce que W satisfasse aux propriétés précitées.

2.3.2 Energie élémentaire et effet unilatéral

Ainsi que nous l'avons vu au chapitre 1, la réponse élastique d'un milieu microfissuré varie suivant l'ouverture ou la fermeture des dommages qui l'affectent. L'énergie élémentaire $w(\hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon})$ relative aux microfissures de normale **n** prend alors une valeur différente selon que celles-ci sont ouvertes ou bien fermées.

Il est ici supposé que l'état d'ouverture - fermeture d'un ensemble de microfissures parallèles ne dépend pas de leur densité mais seulement de leur orientation et de l'état de déformation. On postule ainsi l'existence d'une fonction scalaire g des variables $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon})$, radialement symétrique par rapport à \mathbf{n} , de classe C^1 et définissant, pour chaque vecteur unitaire \mathbf{n} fixé, un hyperplan dans l'espace des déformations \mathcal{E} (l'application partielle $g(\mathbf{n}, .)$ est une forme linéaire). Cet hyperplan, d'équation

$$g(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \tag{2.17}$$

divise l'espace \mathcal{E} en deux sous-domaines correspondant aux états ouvert et fermé des microfissures de normale **n**. Sans restreindre la généralité, on considèrera ainsi que pour l'état de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$, les microfissures de normale **n** sont ouvertes si $g(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) > 0$ et fermées si $g(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \leq 0$, l'équation de l'hyperplan (2.17) définissant le critère d'ouverture - fermeture de ces défauts.

L'énergie élémentaire $w(\hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon})$ relative aux microfissures de normale **n** prend alors la forme suivante :

$$w(\hat{\rho}(\mathbf{n},\mathbf{d}),\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{cases} w_1(\hat{\rho}(\mathbf{n},\mathbf{d}),\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}), & si \quad g(\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) > 0 \quad (\acute{e}tat \; ouvert) \\ w_2(\hat{\rho}(\mathbf{n},\mathbf{d}),\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}), & si \quad g(\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) \le 0 \quad (\acute{e}tat \; ferm\acute{e}) \end{cases}$$
(2.18)

Ceci étant posé, il reste donc maintenant à préciser l'expression de w.

On fait ici l'hypothèse que la fonction w est linéaire par rapport à la variable $\hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d})$, ce qui revient à considérer de faibles densités de microfissures (*cf.* Krajcinovic [32], Pensée et Kondo [50]). Etant donnée la définition (2.18), les fonctions w_1 et w_2 sont donc elles-mêmes linéaires par rapport à cette variable, d'où :

$$w_i(\hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}) h_i(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}), \quad \forall i = 1, 2$$
(2.19)

Compte tenu des conditions imposées à w et des propriétés de la fonction $\hat{\rho}$, les fonctions scalaires h_1 et h_2 introduites en (2.19) doivent être isotropes par rapport à leurs arguments $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon})$ et, dans le même temps, radialement symétriques par rapport à \mathbf{n} . Elles constituent alors des fonctions isotropes des variables $(\mathbf{n}^{\otimes 2}, \boldsymbol{\varepsilon})$ (Spencer [55]) et s'expriment en fonction :

- des invariants de $\mathbf{n}^{\otimes 2}$: $tr(\mathbf{n}^{\otimes 2}) = 1$, $tr(\mathbf{n}^{\otimes 2} \cdot \mathbf{n}^{\otimes 2}) = 1$, $tr(\mathbf{n}^{\otimes 2} \cdot \mathbf{n}^{\otimes 2} \cdot \mathbf{n}^{\otimes 2}) = 1$,
- des invariants de $\boldsymbol{\varepsilon}$: $tr \boldsymbol{\varepsilon}, tr (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}), tr (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}),$
- et des invariants mixtes : $tr(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n}^{\otimes 2}), tr(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n}^{\otimes 2}), tr(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n}^{\otimes 2}\cdot\mathbf{n}^{\otimes 2}) = tr(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n}^{\otimes 2}), tr(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n}^{\otimes 2}\cdot\mathbf{n}^{\otimes 2}) = tr(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n}^{\otimes 2}), tr(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n}^{\otimes 2}\cdot\mathbf{n}^{\otimes 2}) = tr(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n}^{\otimes 2}).$

Les fonctions h_1 et h_2 devant enfin être positivement homogènes de degré deux par rapport à $\boldsymbol{\varepsilon}$, elles s'écrivent alors :

$$h_{i}(\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) = \alpha_{i} tr(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}) + \beta_{i} (tr\,\boldsymbol{\varepsilon})^{2} + \chi_{i} tr\,\boldsymbol{\varepsilon} tr(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n}^{\otimes 2}) + \varphi_{i} tr(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n}^{\otimes 2}) + \psi_{i} tr^{2}(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n}^{\otimes 2}) , \qquad \forall i = 1,2$$

$$(2.20)$$

où les coefficients scalaires $(\alpha_i, \beta_i, \chi_i, \varphi_i, \psi_i)_{i=1,2}$ sont ici supposés constants.

Au vu des relations (2.18), (2.19) et (2.20), l'expression de l'énergie élémentaire relative aux microfissures de normale **n** fait donc apparaître deux ensembles de cinq paramètres : $(\alpha_1, \beta_1, \chi_1, \varphi_1, \psi_1)$ et $(\alpha_2, \beta_2, \chi_2, \varphi_2, \psi_2)$ caractérisant cette énergie à microfissures respectivement ouvertes et fermées. Ces deux jeux de paramètres ne peuvent toutefois pas être quelconques puisqu'ils doivent permettre d'assurer la dernière condition mathématique imposée à la fonction w, *i.e.* être de classe C^1 . On se propose donc ci-dessous de déterminer les conditions imposées aux coefficients par cette exigence.

(a) w continûment différentiable

D'après (2.18) et (2.19), la fonction énergie élémentaire w est définie de la façon suivante :

$$w(\hat{\rho}(\mathbf{n},\mathbf{d}),\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{cases} w_1(\hat{\rho}(\mathbf{n},\mathbf{d}),\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) = \hat{\rho}(\mathbf{n},\mathbf{d}) h_1(\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}), & si \quad g(\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) > 0\\ w_2(\hat{\rho}(\mathbf{n},\mathbf{d}),\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) = \hat{\rho}(\mathbf{n},\mathbf{d}) h_2(\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}), & si \quad g(\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) \le 0 \end{cases}$$
(2.21)

Compte tenu des propriétés de $\hat{\rho}$, le fait d'imposer que cette fonction soit de classe C^1 revient à s'assurer que la fonction h définie par :

$$h(\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{cases} h_1(\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}), & si \quad g(\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) > 0\\ h_2(\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}), & si \quad g(\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) \le 0 \end{cases}$$
(2.22)

est elle-même de classe C^1 . Cette propriété est satisfaite si et seulement si (voir démonstration en annexe B) en tout point $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon})$ tel que $g(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}) = 0$,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 [h_1 - h_2]}{\partial \mathbf{n}^2} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = s(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \\ \frac{\partial^2 [h_1 - h_2]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{n}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = s(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \\ \frac{\partial^2 [h_1 - h_2]}{\partial \mathbf{n} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = s(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \\ \frac{\partial^2 [h_1 - h_2]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = s(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \end{cases}$$
(2.23)

avec s une fonction scalaire continue (les relations (B.25) de l'annexe B étant trivialement vérifiées en tous points $(n, 0_2)$).

D'après leurs propriétés d'homogénéité, les fonctions h_1, h_2 et g sont telles que :

$$\begin{cases} \frac{\partial [h_1 - h_2]}{\partial \varepsilon} (\mathbf{n}, \varepsilon) : \varepsilon = 2 [h_1 - h_2] (\mathbf{n}, \varepsilon) \\ \frac{\partial^2 [h_1 - h_2]}{\partial \varepsilon^2} (\mathbf{n}, \varepsilon) : \varepsilon = \frac{\partial [h_1 - h_2]}{\partial \varepsilon} (\mathbf{n}, \varepsilon) \\ \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} (\mathbf{n}, \varepsilon) : \varepsilon = g(\mathbf{n}, \varepsilon) \end{cases}$$
(2.24)

Les propriétés (2.24) impliquent alors que les trois premières conditions de (2.23) seront satisfaites si la quatrième est vérifiée. On en déduit donc que la fonction h est de classe C^1 si et seulement si pour tout couple $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon})$ tel que $g(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = 0$,

$$\frac{\partial^2 [h_1 - h_2]}{\partial \varepsilon^2} (\mathbf{n}, \varepsilon) = s \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} (\mathbf{n}, \varepsilon) \otimes \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} (\mathbf{n}, \varepsilon)$$
(2.25)

s étant ici constante. Le tenseur d'ordre quatre $\frac{\partial^2 [h_1 - h_2]}{\partial \varepsilon^2}(\mathbf{n}, \varepsilon)$ doit ainsi être singulier et en particulier de rang un. D'après (2.20), le tenseur $\frac{\partial^2 h_i}{\partial \varepsilon^2}(\mathbf{n}, \varepsilon)$ s'écrit dans toute base orthonormée $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{k})$ de \mathbb{R}^3 (notation de Voigt):

$$\begin{bmatrix} 2(\alpha_i + \beta_i + \chi_i + \varphi_i + \psi_i) & 2\beta_i + \chi_i & 2\beta_i + \chi_i & 0 & 0 & 0 \\ 2\beta_i + \chi_i & 2(\alpha_i + \beta_i) & 2\beta_i & 0 & 0 & 0 \\ 2\beta_i + \chi_i & 2\beta_i & 2(\alpha_i + \beta_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_i + \frac{\varphi_i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_i + \frac{\varphi_i}{2} \end{bmatrix}$$
(2.26)

quel que soit i = 1, 2. Il résulte donc que la fonction w est de classe C^1 si et seulement si :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \\ 4 \left(\beta_1 - \beta_2\right) \left(\psi_1 - \psi_2\right) - (\chi_1 - \chi_2)^2 = 0 \end{cases}$$
(2.27)

Ainsi, compte tenu de cette condition, au maximum sept des dix coefficients intervenant dans l'expression de départ de l'énergie élémentaire sont indépendants. En toute rigueur, la détermination définitive de $w(\hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon})$ nécessiterait alors l'identification de ces paramètres au travers d'essais mécaniques, qui en l'occurrence devront être réalisés pour des états ouverts et des états fermés de défauts. Une alternative à ceci consiste à faire une hypothèse sur la restitution des propriétés élastiques induite par la fermeture des dommages, *i.e.* de caractériser la fonction w_2 . Cette démarche permet de restreindre le nombre de paramètres indépendants et de limiter l'identification à des configurations de dommages tous ouverts. C'est précisément cette voie que nous avons choisi de suivre ici.

(b) Condition de restitution

A l'instar de Chaboche [11] et de Halm et Dragon [21], on suppose qu'un ensemble de microfissures fermées de normale unitaire **m** ne contribue pas à la dégradation du module d'élongation $L(\mathbf{m})$ du matériau dans leur direction normale. On postule de plus ici que ces microfissures ne contribuent pas non plus aux modules en contrainte volumique $\kappa(\mathbf{v})$ du matériau dans toute direction de vecteur unitaire **v**.

Si seule une confrontation avec l'expérience permettra de valider ces postulats, notons toutefois qu'ils concordent avec les résultats obtenus en micromécanique sous les hypothèses de non interaction et de faibles densités de microfissures (cf. Pensée et Kondo [50]).

Les modules d'élongation $L(\mathbf{v})$ et en contrainte volumique $\kappa(\mathbf{v})$ dans une direction de vecteur unitaire \mathbf{v} sont définis par (He et Curnier [25]):

$$\begin{cases} L(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}} \\ \kappa(\mathbf{v}) = \frac{tr \, \boldsymbol{\sigma}}{tr \, \boldsymbol{\varepsilon}} \end{cases}$$
(2.28)

où σ est le tenseur des contraintes correspondant à un essai d'élongation uniaxiale $\varepsilon = \overline{\varepsilon} \mathbf{v}^{\otimes 2}$. Etant données les relations (2.14) à (2.16), ces modules s'écrivent ici:

$$\begin{cases} L(\mathbf{v}) = L_0 + \frac{1}{4\pi\bar{\varepsilon}} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \left(\hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \bar{\varepsilon} \, \mathbf{v}^{\otimes 2} \right) \cdot \mathbf{v} \, ds \\ \kappa(\mathbf{v}) = \kappa_0 + \frac{1}{4\pi\bar{\varepsilon}} \int_{\mathcal{S}} tr \left[\frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \left(\hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \bar{\varepsilon} \, \mathbf{v}^{\otimes 2} \right) \right] ds \end{cases}$$
(2.29)

où $L_0 = \lambda_0 + 2\mu_0$ et $\kappa_0 = 3\lambda_0 + 2\mu_0$ désignent respectivement les modules d'élongation et en contrainte volumique du matériau sain. La contribution élémentaire d'un ensemble de microfissures fermées de normale unitaire **m** s'écrit alors pour $L(\mathbf{v})$:

$$\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\mathbf{v}\cdot\frac{\partial w_2}{\partial \varepsilon}\left(\hat{\rho}(\mathbf{m},\mathbf{d}),\mathbf{m},\bar{\varepsilon}\,\mathbf{v}^{\otimes 2}\right)\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}}\,\hat{\rho}(\mathbf{m},\mathbf{d})\,\mathbf{v}\cdot\frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon}(\mathbf{m},\bar{\varepsilon}\,\mathbf{v}^{\otimes 2})\cdot\mathbf{v}$$
(2.30)

et pour $\kappa(\mathbf{v})$:

$$\frac{1}{\bar{\varepsilon}} tr\left[\frac{\partial w_2}{\partial \varepsilon} \left(\hat{\rho}(\mathbf{m}, \mathbf{d}), \mathbf{m}, \bar{\varepsilon} \mathbf{v}^{\otimes 2}\right)\right] = \frac{1}{\bar{\varepsilon}} \hat{\rho}(\mathbf{m}, \mathbf{d}) tr\left[\frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon}(\mathbf{m}, \bar{\varepsilon} \mathbf{v}^{\otimes 2})\right]$$
(2.31)

La condition de restitution postulée ci-dessus est alors satisfaite si et seulement si :

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{m}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \, \mathbf{m}^{\otimes 2}) \cdot \mathbf{m} = 0 \\ tr \left[\frac{\partial h_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{m}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \, \mathbf{v}^{\otimes 2}) \right] = 0 , \quad \forall \, \mathbf{v} \end{cases}$$
(2.32)

ce qui, compte tenu de l'expression (2.20), conduit aux relations suivantes entre les coefficients définissant l'énergie à état fermé des microfissures :

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 + \chi_2 + \varphi_2 + \psi_2 = 0 \\ 2 \alpha_2 + 6 \beta_2 + \chi_2 = 0 \\ 3 \chi_2 + 2 \varphi_2 + 2 \psi_2 = 0 \end{cases}$$
(2.33)

Les conditions imposées par la restitution étant ainsi établies, regroupons-les à présent avec les conditions (2.27) permettant d'assurer que w est de classe C^1 . On obtient en tout six relations à satisfaire par les dix coefficients $(\alpha_i, \beta_i, \chi_i, \varphi_i, \psi_i)_{i=1,2}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{2} + \beta_{2} + \chi_{2} + \varphi_{2} + \psi_{2} &= 0 \\ 2 \,\alpha_{2} + 6 \,\beta_{2} + \chi_{2} &= 0 \\ 3 \,\chi_{2} + 2 \,\varphi_{2} + 2 \,\psi_{2} &= 0 \\ \alpha_{1} &= \alpha_{2} \\ \varphi_{1} &= \varphi_{2} \\ 4 \,(\beta_{1} - \beta_{2}) \,(\psi_{1} - \psi_{2}) - (\chi_{1} - \chi_{2})^{2} &= 0 \end{aligned}$$
(2.34)

Ainsi au maximum, quatre de ces coefficients sont indépendants et déterminent l'expression de tous les autres. Précisément, nous avons privilégié ici comme choix de coefficients indépendants les paramètres $\alpha_1, \beta_1, \chi_1$ et φ_1 (qui permettent de caractériser l'énergie élémentaire à défauts ouverts) de façon à pouvoir réécrire les équations (2.34) sous la forme d'un système linéaire, soit :

$$\alpha_{2} = \alpha_{1}$$

$$\beta_{2} = -\frac{\alpha_{1}}{2}$$

$$\chi_{2} = \alpha_{1}$$

$$\varphi_{2} = \varphi_{1}$$

$$\psi_{2} = -\frac{3\alpha_{1}}{2} - \varphi_{1}$$

$$2(\alpha_{1} + 2\beta_{1})\psi_{1} = \Delta$$

$$(2.35)$$

avec $\Delta = (\chi_1 - \alpha_1)^2 - (3\alpha_1 + 2\varphi_1)(\alpha_1 + 2\beta_1)$. On se propose donc maintenant de définir les expressions des coefficients restants α_2 , β_2 , χ_2 , φ_2 , ψ_2 et ψ_1 en fonction de ces quatre paramètres. Pour cela, il convient de distinguer plusieurs cas :

(i) Les paramètres α_1 , β_1 , χ_1 et φ_1 sont tels que $\alpha_1 + 2\beta_1 \neq 0$; le système (2.35) est alors déterminé, *i.e.* de rang six. On en déduit que l'unique solution cherchée est:

$$\alpha_{2} = \alpha_{1}$$

$$\beta_{2} = -\frac{\alpha_{1}}{2}$$

$$\chi_{2} = \alpha_{1}$$

$$\varphi_{2} = \varphi_{1}$$

$$\psi_{2} = -\frac{3\alpha_{1}}{2} - \varphi_{1}$$

$$\psi_{1} = \frac{\Delta}{2(\alpha_{1} + 2\beta_{1})}$$

$$(2.36)$$

La valeur des quatre coefficients α_1 , β_1 , χ_1 et φ_1 fixe donc ici celle de tous les paramètres introduits.

(ii) Les paramètres α_1 , β_1 , χ_1 et φ_1 sont liés par les relations $\alpha_1 + 2\beta_1 = 0$ et $\Delta = 0$ (ou de manière équivalente $\beta_1 = -\alpha_1/2$ et $\chi_1 = \alpha_1$); le système (2.35) est alors indéterminé à un paramètre, *i.e.* de rang cinq. En prenant pour inconnues principales les paramètres α_2 , β_2 , χ_2 , φ_2 et ψ_2 , celui-ci admet donc une solution unique:

$$\begin{cases}
\alpha_2 = \alpha_1 \\
\beta_2 = -\frac{\alpha_1}{2} \\
\chi_2 = \alpha_1 \\
\varphi_2 = \varphi_1 \\
\psi_2 = -\frac{3\alpha_1}{2} - \varphi_1
\end{cases}$$
(2.37)

quel que soit ψ_1 . Dans ce cas, seule la connaissance de α_1 , φ_1 et ψ_1 sera alors nécessaire pour la détermination de tous les coefficients du modèle.

(iii) Si enfin les paramètres α_1 , β_1 , χ_1 et φ_1 sont tels que $\alpha_1 + 2\beta_1 = 0$ et $\Delta \neq 0$, le système (2.35) n'admet pas de solution.

A ce stade, nous sommes donc en mesure de préciser l'expression de la fonction g définissant le critère d'ouverture - fermeture des microfissures et ainsi de finaliser l'écriture de l'énergie élémentaire. Compte tenu des relations (2.36) et (2.37), la discontinuité de la dérivée partielle seconde de h par rapport à ε peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial^2 [h_1 - h_2]}{\partial \varepsilon^2} (\mathbf{n}, \varepsilon) = s \left(\delta_1 \, \mathbf{n}^{\otimes 2} + \delta_2 \, \mathbf{I} \right)^{\otimes 2} \tag{2.38}$$

où les valeurs de s, δ_1 et δ_2 sont données au tableau 2.1. En identifiant cette expression à (2.25), on obtient alors:

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \delta_1 \, \mathbf{n}^{\otimes 2} + \delta_2 \, \mathbf{I}$$
(2.39)

Utilisant la propriété de linéarité de g par rapport à $\boldsymbol{\varepsilon}$, il résulte que :

$$g(\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon} = \delta_1 \, \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} + \delta_2 \, tr \, \boldsymbol{\varepsilon}$$
(2.40)

Le critère d'ouverture - fermeture des microfissures de normale n s'écrit alors :

$$\delta_1 \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} + \delta_2 tr \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{2.41}$$

ce qui nous permet de déterminer l'expression définitive de l'énergie élémentaire $w(\hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon})$ associée aux microfissures de normale unitaire \mathbf{n} , soit :

$$w(\hat{\rho}(\mathbf{n},\mathbf{d}),\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{cases} w_1(\hat{\rho}(\mathbf{n},\mathbf{d}),\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}), & si \quad \delta_1 \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} + \delta_2 tr \,\boldsymbol{\varepsilon} > 0 \\ (\acute{e}tat \ ouvert) \\ w_2(\hat{\rho}(\mathbf{n},\mathbf{d}),\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}), & si \quad \delta_1 \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} + \delta_2 tr \,\boldsymbol{\varepsilon} \le 0 \\ (\acute{e}tat \ ferm\acute{e}) \end{cases}$$
(2.42)

avec

$$w_{1}(\hat{\rho}(\mathbf{n},\mathbf{d}),\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) = \hat{\rho}(\mathbf{n},\mathbf{d}) \begin{bmatrix} \alpha_{1} tr (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \beta_{1} (tr \boldsymbol{\varepsilon})^{2} \\ + \chi_{1} tr \boldsymbol{\varepsilon} tr (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}^{\otimes 2}) + \varphi_{1} tr (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}^{\otimes 2}) \\ + \psi_{1} tr^{2} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}^{\otimes 2}) \end{bmatrix}$$
(2.43)

 \mathbf{et}

$$w_{2}(\hat{\rho}(\mathbf{n},\mathbf{d}),\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) = \hat{\rho}(\mathbf{n},\mathbf{d}) \begin{bmatrix} \alpha_{1} \left[tr\left(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\right) - \frac{1}{2} \left(tr\,\boldsymbol{\varepsilon}\right)^{2} \right] \\ + \alpha_{1} tr\,\boldsymbol{\varepsilon} tr\left(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n}^{\otimes 2}\right) + \varphi_{1} tr\left(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n}^{\otimes 2}\right) \\ - \left(\frac{3}{2}\alpha_{1} + \varphi_{1}\right) tr^{2} \left(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n}^{\otimes 2}\right) \end{bmatrix}$$
(2.44)

.

	8	δ_1,δ_2
(i) $(\alpha_1, \beta_1, \chi_1, \varphi_1)$ tels que $\alpha_1 + 2\beta_1 \neq 0$	$\frac{1}{\alpha_1 + 2\beta_1}$	$\begin{cases} \delta_1 = \chi_1 - \alpha_1 \\ \delta_2 = \alpha_1 + 2\beta_1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \delta_1 = \alpha_1 - \chi_1 \\ \delta_2 = -\alpha_1 - 2\beta_1 \end{cases}$
(ii) $(\alpha_1, \beta_1, \chi_1, \varphi_1)$ tels que $\alpha_1 + 2\beta_1 = 0$ $et \Delta = 0$	$3lpha_1 + 2arphi_1 + 2\psi_1$	$\{\delta_1 = 1 \ , \delta_2 = 0\}$ ou $\{\delta_1 = -1, \delta_2 = 0\}$
(iii) $(\alpha_1, \beta_1, \chi_1, \varphi_1)$ tels que $\alpha_1 + 2\beta_1 = 0$ $et \ \Delta \neq 0$	pas de solution	

avec $\Delta = (\chi_1 - \alpha_1)^2 - (3 \alpha_1 + 2 \varphi_1) (\alpha_1 + 2 \beta_1)$

Tableau 2.1: Coefficients s, δ_1 et δ_2 .

2.3.3 Expression définitive du potentiel

Maintenant que l'énergie élémentaire est définie, il reste enfin à donner l'expression définitive du potentiel thermodynamique W.

Pour cela, notons $S_1(\varepsilon)$ et $S_2(\varepsilon)$ les ensembles de vecteurs unitaires de l'espace correspondant, pour l'état de déformation ε , aux normales des microfissures respectivement ouvertes et fermées:

$$\begin{cases} S_1(\boldsymbol{\varepsilon}) = \{ \mathbf{n} \in \mathcal{S}, \ g(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \delta_1 \, \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} + \delta_2 \, tr \, \boldsymbol{\varepsilon} > 0 \} \\ S_2(\boldsymbol{\varepsilon}) = \{ \mathbf{n} \in \mathcal{S}, \ g(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \delta_1 \, \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} + \delta_2 \, tr \, \boldsymbol{\varepsilon} \le 0 \} \end{cases}$$
(2.45)

d'où

$$\forall \, \boldsymbol{\epsilon} \,, \quad \begin{cases} \mathcal{S}_1(\boldsymbol{\epsilon}) \cup \mathcal{S}_2(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathcal{S} \\ \mathcal{S}_1(\boldsymbol{\epsilon}) \cap \mathcal{S}_2(\boldsymbol{\epsilon}) = \emptyset \end{cases}$$
(2.46)

Etant données la définition (2.16) de la contribution $W_d(\varepsilon, \mathbf{d})$ de l'endommagement à l'énergie et les relations (2.18) et (2.45), on en déduit que:

$$W_d(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_1(\boldsymbol{\varepsilon})} w_1(\hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \, ds + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2(\boldsymbol{\varepsilon})} w_2(\hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \, ds \quad (2.47)$$

soit encore de façon équivalente:

$$W_d(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{d}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} w_1(\hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}) \, ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2(\boldsymbol{\epsilon})} [w_1 - w_2](\hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}) \, ds \quad (2.48)$$

En utilisant l'expression de l'énergie élémentaire (2.42) à (2.44) obtenue au paragraphe précédent et les propriétés de l'intégration sur la sphère unité S (*cf.* annexe A), on peut établir la forme définitive du potentiel thermodynamique, soit en utilisant les relations définies au tableau 2.2 :

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = W_{0}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \alpha \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) d_{0} + \beta (\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^{2} d_{0}$$

+ $\chi \operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot d_{2}) + \varphi \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d_{2}) + \psi \boldsymbol{\varepsilon} : d_{4} : \boldsymbol{\varepsilon}$
- $\frac{1}{2} s \boldsymbol{\varepsilon} : \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_{2}(\boldsymbol{\varepsilon})} \hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}) [\delta_{1} \mathbf{n}^{\otimes 2} + \delta_{2} \mathbf{I}]^{\otimes 2} ds : \boldsymbol{\varepsilon}$ (2.49)

Chapitre 2

	p = 0	p=2	$p \ge 4$
α	$\alpha_1 + \frac{1}{3}\varphi_1 + \frac{2}{15}\psi_1$		
β	$eta_1 + rac{1}{3} \chi_1 + rac{1}{15} \psi_1$		
x	0	$\frac{2}{105} \left(7 \chi\right)$	$(1+2\psi_1)$
arphi	0	$\frac{2}{105}$ (7 φ	$_1 + 4 \psi_1$
ψ	0	0	$\frac{8}{315}\psi_1$

Tableau 2.2: Coefficients α , β , χ , φ et ψ selon l'ordre d'approximation p.

où les valeurs des coefficients (s, δ_1, δ_2) sont données en fonction des paramètres α , β , χ , φ et ψ aux tableaux 2.3, 2.4 et 2.5. Les deux premières lignes de (2.49) définissent l'énergie libre du milieu microfissuré lorsque toutes les microfissures sont ouvertes, tandis que le dernier terme rend compte de la modification d'énergie due à la fermeture éventuelle de certaines d'entre elles.

On peut noter que la détermination de l'énergie libre d'un milieu microfissuré passe par l'identification des deux coefficients de Lamé du matériau (λ_0 et μ_0) et, dans le cas le plus général où $p \ge 4$, de quatre paramètres caractérisant la contribution énergétique des microfissures.

Lorsque p = 0, *i.e.* où $\mathbf{d} = (d_0)$, on a en effet

$$\chi = \varphi = \psi = 0 \tag{2.50}$$

Les coefficients (α, β) doivent en outre vérifier la dernière relation du système (2.35), *i.e.* être tels que

$$\Delta_0 = \alpha \left(\alpha + 3 \beta \right) = 0 \tag{2.51}$$

Compte tenu de cette relation, l'énergie libre à p = 0 ne fait donc apparaître au plus qu'un seul paramètre lié à la dégradation des propriétés élastiques.

	s	δ_1,δ_2
(i) (α, β) tels que $\alpha + 2\beta \neq 0$ $(\Delta_0 = 0)$	$\frac{1}{\alpha + 2\beta}$	$\{\delta_1 = -\alpha, \ \delta_2 = \alpha + 2\beta\}$ ou $\{\delta_1 = \alpha, \ \delta_2 = -\alpha - 2\beta\}$
(ii) (α, β) tels que $\alpha + 2\beta = 0$ et $\Delta_0 = 0$	3lpha	$\{\delta_1 = 1, \ \delta_2 = 0\}$ ou $\{\delta_1 = -1, \ \delta_2 = 0\}$
(iii) (α, β) tels que $\alpha + 2\beta = 0$ $et \Delta_0 \neq 0$		pas de solution

avec $\Delta_0 = \alpha (\alpha + 3\beta)$

Tableau 2.3: Coefficients s, δ_1 et δ_2 (p = 0).

Lorsque p = 2, *i.e.* où $\mathbf{d} = (d_0, d_2)$, on a alors seulement

$$\psi = 0 \tag{2.52}$$

et les coefficients $(\alpha, \beta, \chi, \varphi)$ doivent dans ce cas être liés par la relation

$$\Delta_2 = 4 (\alpha + 3\beta) (2\alpha + 5\varphi) - 25 (3\chi + 2\varphi)^2 = 0$$
(2.53)

Pour cet ordre d'approximation, la contribution énergétique des microfissures n'est donc caractérisée que par trois paramètres au maximum.

	8	δ_1,δ_2
(i) $(\alpha, \beta, \chi, \varphi)$ tels que $\alpha + 2\beta - 5\chi - \frac{5}{2}\varphi \neq 0$ $(\Delta_2 = 0)$	$\frac{1}{\alpha+2\beta-5\chi-\frac{5}{2}\varphi}$	$\begin{cases} \delta_1 = -\alpha + \frac{15}{2}\chi + \frac{5}{2}\varphi \\ \delta_2 = \alpha + 2\beta - 5\chi - \frac{5}{2}\varphi \end{cases}$ ou $\begin{cases} \delta_1 = \alpha - \frac{15}{2}\chi - \frac{5}{2}\varphi \\ \delta_2 = -\alpha - 2\beta + 5\chi + \frac{5}{2}\varphi \end{cases}$
(ii) $(\alpha, \beta, \chi, \varphi)$ tels que $\alpha + 2\beta - 5\chi - \frac{5}{2}\varphi = 0$ et $\Delta_2 = 0$	$3\alpha + \frac{15}{2}\varphi$	$\{ \delta_1 = 1 \;,\; \delta_2 = 0 \}$ ou $\{ \delta_1 = -1 \;,\; \delta_2 = 0 \}$
(iii) $(\alpha, \beta, \chi, \varphi)$ tels que $\alpha + 2\beta - 5\chi - \frac{5}{2}\varphi = 0$ $et \Delta_2 \neq 0$	pas de solution	

avec $\Delta_2 = 4 (\alpha + 3 \beta) (2 \alpha + 5 \varphi) - 25 (3 \chi + 2 \varphi)^2$

Tableau 2.4: Coefficients s, δ_1 et δ_2 (p = 2).

Enfin, dans le cas d'une approximation d'ordre quatre et plus, pour laquelle $\mathbf{d} = (d_0, d_2, d_4, ..., d_p)$, les cinq coefficients $(\alpha, \beta, \chi, \varphi, \psi)$ doivent être liés par

$$\Delta_4 = 4 (\alpha + 3\beta) (2\alpha + 5\varphi + 27\psi) - 25 (3\chi + 2\varphi)^2 = 0$$
 (2.54)

La formulation la plus générale du modèle ne fait par conséquent intervenir que quatre paramètres au plus pour décrire la modification d'énergie induite par l'endommagement.

	S	δ_1,δ_2
(i) $(\alpha, \beta, \chi, \varphi, \psi)$ tels que $\alpha + 2\beta - 5\chi$ $-\frac{5}{2}\varphi + \frac{9}{2}\psi \neq 0$	$rac{1}{lpha+2eta-5\chi-rac{5}{2}arphi+rac{9}{2}\psi}$	$\begin{cases} \delta_1 = -\alpha + \frac{15}{2}\chi + \frac{5}{2}\varphi - \frac{27}{2}\psi\\ \delta_2 = \alpha + 2\beta - 5\chi - \frac{5}{2}\varphi + \frac{9}{2}\psi \end{cases}$ ou $\delta_1 = \alpha - \frac{15}{2}\chi - \frac{5}{2}\varphi + \frac{27}{2}\psi$
$(\Delta_4 = 0)$		$\left\{\begin{array}{c} \delta_1 = -\frac{1}{2}\chi - \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\varphi \\ \delta_2 = -\alpha - 2\beta + 5\chi + \frac{5}{2}\varphi - \frac{9}{2}\psi \end{array}\right\}$
(ii) $(\alpha, \beta, \chi, \varphi, \psi)$ tels que $\alpha + 2\beta - 5\chi$ $-\frac{5}{2}\varphi + \frac{9}{2}\psi = 0$ $et \Delta_4 = 0$	$3lpha + rac{15}{2}arphi + rac{81}{2}\psi$	$\{\delta_1 = 1 , \delta_2 = 0\}$ ou $\{\delta_1 = -1 , \delta_2 = 0\}$
(iii) $(\alpha, \beta, \chi, \varphi, \psi)$ tels que $\alpha + 2\beta - 5\chi$ $-\frac{5}{2}\varphi + \frac{9}{2}\psi = 0$ $et \Delta_4 \neq 0$	pas de solution	

avec $\Delta_4 = 4(\alpha + 3\beta)(2\alpha + 5\varphi + 27\psi) - 25(3\chi + 2\varphi)^2$

Tableau 2.5: Coefficients $s, \delta_1 \text{ et } \delta_2 \ (p \ge 4)$.

Notons enfin qu'une indétermination subsiste quant au choix des coefficients δ_1 et δ_2 intervenant dans l'expression du critère d'ouverture - fermeture des microfissures. On retiendra pour l'identification de ceux-ci le choix conduisant à l'interprétation la plus physique (imposant par exemple que les microfissures soient fermées lors d'une compression hydrostatique).

Il est enfin intéressant de remarquer que dans le cas où les microfissures sont toutes ouvertes (*i.e.* si $S_2(\varepsilon) = \emptyset$), l'expression (2.49) se réduit à:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = W_0(\boldsymbol{\varepsilon}) + \alpha \operatorname{tr} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) d_0 + \beta (\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 d_0 + \chi \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \operatorname{tr} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot d_2) + \varphi \operatorname{tr} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d_2) + \psi \boldsymbol{\varepsilon} : d_4 : \boldsymbol{\varepsilon}$$
(2.55)

Respectivement, si les microfissures sont toutes fermées (*i.e.* si $S_2(\varepsilon) = S$), il vient :

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = W_0(\boldsymbol{\varepsilon}) + \alpha' \operatorname{tr} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) d_0 + \beta' (\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 d_0 + \chi' \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \operatorname{tr} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot d_2) + \varphi' \operatorname{tr} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d_2) + \psi' \boldsymbol{\varepsilon} : d_4 : \boldsymbol{\varepsilon}$$
(2.56)

avec

$$\begin{cases} \alpha' = \frac{1}{10} \left(8 \alpha - 5 \varphi - 27 \psi \right) \\ \beta' = \frac{1}{30} \left(-8 \alpha + 5 \varphi + 27 \psi \right) \\ \chi' = \frac{2}{105} \left(4 \alpha - 25 \varphi + 54 \psi \right) \\ \varphi' = -\frac{1}{35} \left(4 \alpha - 25 \varphi + 54 \psi \right) \\ \psi' = -\frac{1}{105} \left(4 \alpha + 10 \varphi - 51 \psi \right) \end{cases}$$
(2.57)

On constate ainsi que, dans ces deux cas de figure, seuls les tenseurs d_0 , d_2 et d_4 contribuent à l'énergie libre du milieu, de façon similaire à ce que l'on observe en micromécanique (*cf.* Kachanov [29]). Lorsque le milieu contient des microfissures ouvertes et des microfissures fermées, *i.e.* que $S_2(\varepsilon) \neq \{\emptyset, S\}$, l'expression de l'énergie fait en revanche intervenir l'ensemble des tenseurs ($d_0, d_2, d_4, ..., d_p$) au travers du dernier terme de (2.49).

2.3.4 Lois d'état

Les lois d'état, définissant la relation contrainte - déformation et les forces thermodynamiques associées à l'endommagement, sont obtenues par dérivation du potentiel (2.49). Ainsi précisément pour la contrainte, on obtient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) &= \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \left(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}\right) \\ &= \lambda_0 \left(tr \boldsymbol{\varepsilon} \right) \mathbf{I} + 2 \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon} + 2 \alpha d_0 \boldsymbol{\varepsilon} + 2 \beta d_0 \left(tr \boldsymbol{\varepsilon} \right) \mathbf{I} \\ &+ \chi \left[tr \left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot d_2 \right) \mathbf{I} + \left(tr \, \boldsymbol{\varepsilon} \right) d_2 \right] + \varphi \left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot d_2 + d_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \right) + 2 \psi d_4 : \boldsymbol{\varepsilon} \\ &- s \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2(\boldsymbol{\varepsilon})} \hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}) \left[\delta_1 \mathbf{n}^{\otimes 2} + \delta_2 \mathbf{I} \right]^{\otimes 2} ds : \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned}$$
(2.58)

Les forces thermodynamiques $\mathbf{F}^{\mathbf{d}} = (F^{d_0}, F^{d_2}, F^{d_4}, ..., F^{d_p})$ sont quant à elles définies par:

$$F^{d_k}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = - \frac{\partial W}{\partial d_k}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}), \quad \forall \ k \in [0, 2, 4, .., p]$$
(2.59)

soit en utilisant l'expression de la fonction énergie élémentaire

$$F^{d_{k}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial w}{\partial d_{k}} (\hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \, ds$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial d_{k}} (\mathbf{n}, \mathbf{d}) \, h(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \, ds$$
(2.60)

Sachant que

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial d_k}(\mathbf{n}, \mathbf{d}) = \left\lfloor \mathbf{n}^{\otimes k} \right\rfloor$$
(2.61)

on obtient alors:

$$F^{d_{0}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = -\alpha \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - \beta (\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^{2} + \frac{s}{8\pi} \int_{\mathcal{S}_{2}(\boldsymbol{\varepsilon})} (\delta_{1} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} + \delta_{2} \operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^{2} ds$$

$$(2.62)$$

$$F^{d_{2}}(\varepsilon, \mathbf{d}) = -\chi tr \varepsilon [\varepsilon] - \varphi [\varepsilon \cdot \varepsilon]$$

$$+ \frac{s}{8\pi} \int_{\mathcal{S}_{2}(\varepsilon)} (\delta_{1} \mathbf{n} \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{n} + \delta_{2} tr \varepsilon)^{2} [\mathbf{n}^{\otimes 2}] ds$$

$$F^{d_{4}}(\varepsilon, \mathbf{d}) = -\frac{1}{3} \psi [\varepsilon \otimes \varepsilon + 2\varepsilon \overline{\otimes} \varepsilon]$$

$$+ \frac{s}{8\pi} \int_{\mathcal{S}_{2}(\varepsilon)} (\delta_{1} \mathbf{n} \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{n} + \delta_{2} tr \varepsilon)^{2} [\mathbf{n}^{\otimes 4}] ds$$

$$(2.63)$$

$$(2.64)$$

.

et pour tout $k \ge 6$:

$$F^{d_k}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = + \frac{s}{8\pi} \int_{\mathcal{S}_2(\boldsymbol{\varepsilon})} \left(\delta_1 \, \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} + \delta_2 \, tr \boldsymbol{\varepsilon} \right)^2 \, \left\lfloor \mathbf{n}^{\otimes k} \right\rfloor \, ds \tag{2.65}$$

Les forces $\mathbf{F}^{\mathbf{d}} = (F^{d_0}, F^{d_2}, F^{d_4}, ..., F^{d_p})$ permettent de définir la variation d'énergie élastique du matériau lorsque la distribution des densités de microfissures progresse. Ce sont les forces thermodynamiques associées aux vitesses d'endommagement $\dot{\mathbf{d}} = (\dot{d}_0, \dot{d}_2, \dot{d}_4, ..., \dot{d}_p)$.

Notons pour finir que, puisque ces forces ne dépendent que de l'état de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$, on ne fera apparaître par la suite que cette seule dépendance:

$$F^{d_k}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = F^{d_k}(\boldsymbol{\varepsilon}) , \quad \forall \ k \in [0, 2, 4, .., p]$$
(2.66)

2.4 Potentiel de dissipation et loi d'évolution de l'endommagement

On s'est intéressé jusqu'à présent à modéliser la réponse élastique d'un matériau microfissuré. Pour compléter cette description, il reste maintenant à définir l'évolution des paramètres caractérisant l'endommagement, *i.e.* à déterminer *quand* et *comment* va évoluer la distribution des densités de microfissures au sein du matériau.

2.4.1 Hypothèses

La création et la croissance de microfissures sous chargement mécanique étant un processus dissipatif complexe, nous avons fait ici un choix relativement pragmatique pour caractériser celui-ci en nous plaçant dans le cadre du schéma standard (on pourra trouver quelques éléments de synthèse à ce sujet dans Germain [20], Halphen et Nguyen [22], Marigo [41], Suquet [56]).

On fait précisément ici les hypothèses suivantes:

(H1) il existe un potentiel de dissipation scalaire \mathcal{D} dépendant de la vitesse d'endommagement $\dot{\mathbf{d}} = (\dot{d}_0, \dot{d}_2, \dot{d}_4, ..., \dot{d}_p)$ et de l'état actuel d'endommagement \mathbf{d} , vérifiant les propriétés suivantes pour tout \mathbf{d} fixé: semi-continu inférieur, convexe, positivement homogène de degré un, non négatif et minimal en $\mathbf{0} = (0, 0_2, 0_4, ..., 0_p)$.

(H2) le mécanisme dissipatif est normal.

On postule donc d'après ces hypothèses que l'on a dans toute évolution réelle (cf. Lorentz [37]):

$$\mathcal{D}(\dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = \Phi \tag{2.67}$$

avec Φ la dissipation intrinsèque volumique induite ici par la création et la propagation des microfissures :

$$\Phi = (\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}), \dot{\mathbf{d}})$$

= $F^{d_0}(\boldsymbol{\varepsilon}) \dot{d_0} + F^{d_2}(\boldsymbol{\varepsilon}) : \dot{d_2} + F^{d_4}(\boldsymbol{\varepsilon}) :: \dot{d_4} + ... + F^{d_p}(\boldsymbol{\varepsilon}) \bullet \dot{d_p}$ (2.68)

où (., .) désigne le produit scalaire sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R} \times T^2 \times T^4 \times ... \times T^p$. Cela revient à considérer que l'on peut mesurer la dissipation due à la création de surfaces de décohésion par une fonction dépendant des variables **d** décrivant la distribution de densités de microfissures et de leurs vitesses **d**. Le fait que le potentiel de dissipation \mathcal{D} est homogène de degré un en **d** assure l'indépendance de la progression de l'endommagement vis-à-vis du temps physique, les solutions du problème d'évolution étant en effet dans ce cas définies à un changement d'échelle en temps près (voir Lorentz [37]).

L'hypothèse (H2) s'interprète quant à elle comme un principe de taux de restitution de l'énergie maximal analogue au principe de Hill en plasticité. La variable d décrivant l'état actuel d'endommagement figure en outre parmi les arguments du potentiel \mathcal{D} , et joue par conséquent un rôle analogue à celui d'une variable d'écrouissage.

Notons pour finir qu'en toute généralité les hypothèses précédentes autorisent a priori une diminution de la densité totale de microfissures, *i.e.* conduisant à une "restauration" du matériau. En effet, on peut avoir des vitesses $\dot{\mathbf{d}}$ admissibles, *i.e.* vérifiant l'inégalité fondamentale $\Phi \geq 0$, telles que $\dot{d}_0 < 0$. Cette éventualité sera exclue par la suite au travers de conditions supplémentaires imposées aux coefficients du modèle.

2.4.2 Lois d'évolution des variables internes

(a) Potentiel de dissipation

L'écriture proposée pour le potentiel de dissipation est la suivante :

$$\mathcal{D}(\mathbf{d}, \mathbf{d}) = k(\mathbf{d}) \| \mathbf{d} \|$$
(2.69)

où k est une fonction scalaire strictement positive et le symbole $\| . \|$ désigne la norme euclidienne sur E:

$$\begin{cases} k(\mathbf{d}) = k_0 (1 + \eta \, d_0) \\ avec \ k_0 > 0 \ et \ \eta > 0 \end{cases}, \quad \|\dot{\mathbf{d}}\| = \sqrt{(\dot{\mathbf{d}}, \dot{\mathbf{d}})}$$
(2.70)

On suppose ici, au travers de la fonction k, que la dissipation est d'autant plus importante que le matériau est fortement microfissuré, ce qui revient implicitement à tenir compte de la résistance du milieu hétérogène à la progression des microfissures. On note en particulier que la dissipation est dans le cas d'une évolution isotrope de l'endommagement proportionnelle au taux de variation de la densité totale de microfissures dans le milieu:

$$\mathcal{D}(\dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = k(\mathbf{d}) \quad \dot{d}_0$$
(2.71)

la quantité $k(\mathbf{d})$ peut alors s'interpréter directement comme l'énergie de surface de la mécanique de la rupture.

Il reste maintenant à préciser les lois d'évolution, *i.e.* l'expression des vitesses d.

(b) Calcul de la direction d'écoulement et de la frontière du domaine de réversibilité

L'hypothèse de normalité (*H2*) revient à dire, qu'à d fixé, la vitesse $\dot{\mathbf{d}}$ est un sous-gradient en $\mathbf{F}^{\mathbf{d}}$ de la transformée de Legendre-Fenchel partielle (par rapport à $\dot{\mathbf{d}}$) de \mathcal{D} :

$$\mathbf{d} \in \partial \mathcal{D}^*_{\mathbf{F}^d} \tag{2.72}$$

avec

$$\mathcal{D}^{*}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = \sup_{\tilde{\mathbf{d}}} \left\{ (\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{d}}) - \mathcal{D}(\tilde{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) \right\}$$
(2.73)

En opérant séparément pour le module et la direction, on trouve que ce supremum est égal à

$$\mathcal{D}^{*}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = \sup_{t \ge 0} \sup_{\tilde{\mathbf{d}}, \|\tilde{\mathbf{d}}\| = t} \left\{ (\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{d}}) - \mathcal{D}(\tilde{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) \right\}$$
$$= \sup_{t \ge 0} \left\{ t \left[\| \mathbf{F}^{\mathbf{d}} \| - k(\mathbf{d}) \right] \right\}$$
$$= \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & , & si & \| \mathbf{F}^{\mathbf{d}} \| \le k(\mathbf{d}) \\ +\infty & , & si & \| \mathbf{F}^{\mathbf{d}} \| > k(\mathbf{d}) \end{array} \right.$$
(2.74)

A **d** fixé, la fonction \mathcal{D}^* est ainsi la fonction indicatrice du convexe fermé non vide \mathcal{K}_d de l'espace des forces défini par la fonction seuil f:

$$\mathcal{K}_{\mathbf{d}} = \left\{ \mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \ f\left(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}\right) = \| \mathbf{F}^{\mathbf{d}} \| - k(\mathbf{d}) \le 0 \right\}$$
(2.75)

et le sous-différentiel de \mathcal{D}^* en $\mathbf{F^d}$ est tel que :

$$\partial \mathcal{D}_{\mathbf{F}^{d}}^{*} = \begin{cases} \{\emptyset\} &, \quad si \quad f(\mathbf{F}^{d}, \mathbf{d}) > 0\\ C_{\mathcal{K}_{\mathbf{d}}}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}) &, \quad si \quad f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) \le 0 \end{cases}$$
(2.76)

avec $C_{\mathcal{K}_{\mathbf{d}}}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}})$ le cône normal extérieur à $\mathcal{K}_{\mathbf{d}}$ en $\mathbf{F}^{\mathbf{d}}$:

$$C_{\mathcal{K}_{\mathbf{d}}}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}) = \begin{cases} \{\mathbf{0}\} & , \quad si \quad f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) < 0 \\ \\ \{\tilde{\mathbf{d}}, \forall \, \tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{d}} \in \mathcal{K}_{\mathbf{d}}, \, (\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{d}} - \mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{d}}) \le 0 \} , \quad si \quad f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = 0 \end{cases}$$
(2.77)

On peut alors préciser l'expression de $\dot{\mathbf{d}}$:

$$\dot{\mathbf{d}} \in \partial \mathcal{D}_{\mathbf{F}^{d}}^{*} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{d}} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^{d}} \left(\mathbf{F}^{d}, \mathbf{d} \right) \\ \\ \Lambda \ge 0, \ f \left(\mathbf{F}^{d}, \mathbf{d} \right) \le 0, \ \Lambda f \left(\mathbf{F}^{d}, \mathbf{d} \right) = 0 \end{cases}$$
(2.78)

avec

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{F^d}} = \left(\frac{\partial f}{\partial F^{d_0}}, \frac{\partial f}{\partial F^{d_2}}, \frac{\partial f}{\partial F^{d_4}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial F^{d_p}}\right)$$
(2.79)

Lorsque les forces thermodynamiques $\mathbf{F}^{\mathbf{d}}$ appartiennent à l'intérieur du domaine de réversibilité $\mathcal{K}_{\mathbf{d}}$, le comportement est non dissipatif et les variables internes n'évoluent pas. En revanche, elles peuvent évoluer lorsque $\mathbf{F}^{\mathbf{d}}$ appartient à la frontière de $\mathcal{K}_{\mathbf{d}}$, *i.e.* lorsque la norme de $\mathbf{F}^{\mathbf{d}}$ atteint un certain seuil dépendant de l'endommagement actuel ($k(\mathbf{d})$ représentant la "dimension" de ce seuil).

Le vecteur
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^{\mathbf{d}}}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d})$$
 s'exprime ici

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^{\mathbf{d}}}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = \left(\frac{F^{d_0}}{\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}\|}, \frac{F^{d_2}}{\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}\|}, \frac{F^{d_4}}{\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}\|}, ..., \frac{F^{d_p}}{\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}\|}\right) = \frac{\mathbf{F}^{\mathbf{d}}}{\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}\|}$$
(2.80)

ce qui permet de réécrire (2.78) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{d}_{0} = \Lambda \frac{F^{d_{0}}}{\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}\|}, \ \dot{d}_{2} = \Lambda \frac{F^{d_{2}}}{\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}\|}, \ \dot{d}_{4} = \Lambda \frac{F^{d_{4}}}{\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}\|}, ..., \ \dot{d}_{p} = \Lambda \frac{F^{d_{p}}}{\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}\|}\\ \Lambda \ge 0, \ f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) \le 0, \ \Lambda f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = 0 \end{cases}$$
(2.81)

Cette expression nous montre que la croissance de la densité totale de microfissures d_0 est assurée si et seulement si $F^{d_0}(\boldsymbol{\varepsilon}) = -\int_{\mathcal{S}} h(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) ds \geq 0, \forall \boldsymbol{\varepsilon}$. Afin de vérifier cette condition, on fait ici l'hypothèse supplémentaire que les fonctions h_1 et h_2 sont négatives, *i.e.* que

$$\forall i = 1, 2, \quad h_i(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \le 0, \ \forall (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon})$$

$$(2.82)$$

ce qui impose les conditions suivantes aux coefficients caractérisant l'énergie :

$$\begin{cases} \alpha - \frac{5}{2}\varphi + \frac{9}{4}\psi \le 0, \ \alpha + 2\beta - 5\chi - \frac{5}{2}\varphi + \frac{9}{2}\psi \le 0\\ \alpha + \frac{5}{4}\varphi - 9\psi \le 0, \ \alpha + \beta + 5(\chi + \varphi) + 9\psi \le 0 \end{cases}$$
(2.83)

L'ensemble des vitesses d'endommagement admissibles est alors défini comme celui conduisant à un assouplissement du matériau, *i.e.* tel que $\dot{d}_0 \ge 0$.

(c) Condition de cohérence et calcul du multiplicateur

Le paragraphe précédent a permis de déterminer la direction de la vitesse d'endommagement $\dot{\mathbf{d}}$. Il reste donc maintenant à en préciser l'amplitude, *i.e.* à définir la valeur du multiplicateur Λ .

La loi d'évolution décrite en (2.78) n'est possible que si le sous-différentiel de \mathcal{D}^* en $\mathbf{F}^{\mathbf{d}}$ n'est pas vide, *i.e.* si les forces $\mathbf{F}^{\mathbf{d}}$ appartiennent au domaine de réversibilité $\mathcal{K}_{\mathbf{d}}$ pour tout état d'endommagement **d**. Cette condition, dite de *cohérence*, revient alors à assurer la validité de la seconde équation de (2.78) à tout instant, soit :

$$\Lambda \dot{f} \left(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d} \right) = 0 \tag{2.84}$$

ce qui impose que

$$\begin{cases} \dot{f} \left(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d} \right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = 0 \\ \Lambda > 0 \qquad \Rightarrow \quad \dot{f} \left(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d} \right) = 0 \end{cases}$$
(2.85)

On en déduit donc que

۰.

$$\Lambda \begin{cases} = 0, \quad si \quad f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) < 0 \quad ou \quad f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = 0 \quad et \quad \dot{f}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) < 0 \\ > 0, \quad si \quad f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = 0 \quad et \quad \dot{f}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = 0 \end{cases}$$
(2.86)

Par ailleurs, sachant que

$$\frac{\partial f}{\partial d_0}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = -k_0 \eta \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial d_k}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = 0_k, \ \forall \ k \in [2, 4, .., p]$$
(2.87)

on a

$$\dot{f}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}},\mathbf{d}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^{\mathbf{d}}}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}},\mathbf{d}), \dot{\mathbf{F}}^{\mathbf{d}}\right) - k_0 \eta \Lambda \frac{F^{d_0}}{\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}\|}$$
(2.88)

La valeur du multiplicateur Λ dans le cas non nul, *i.e.* pour lequel $\dot{f}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = 0$, est alors la suivante

$$\Lambda = \frac{\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}\|}{k_0 \eta F^{d_0}} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^{\mathbf{d}}} \left(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d} \right), \dot{\mathbf{F}}^{\mathbf{d}} \right) \right]$$
(2.89)

Remarquons toutefois que pour les points situés sur le seuil $f(\mathbf{F}^{d}, \mathbf{d}) = 0$, on a l'équivalence

$$\dot{f}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}},\mathbf{d}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^{\mathbf{d}}}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}},\mathbf{d}),\dot{\mathbf{F}}^{\mathbf{d}}) < 0$$
 (2.90)

En effet,

$$\dot{f}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}},\mathbf{d}) < 0 \quad \stackrel{(2.85)}{\Longrightarrow} \quad \Lambda = 0 \quad \stackrel{(2.88)}{\Longrightarrow} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^{\mathbf{d}}}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}},\mathbf{d}),\dot{\mathbf{F}}^{\mathbf{d}}\right) = \dot{f}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}},\mathbf{d}) < 0 \quad (2.91)$$

Réciproquement,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^{\mathbf{d}}}\left(\mathbf{F}^{\mathbf{d}},\mathbf{d}\right),\dot{\mathbf{F}}^{\mathbf{d}}\right)<0\quad \stackrel{(2.88)}{\Longrightarrow}\quad \dot{f}\left(\mathbf{F}^{\mathbf{d}},\mathbf{d}\right)<0\tag{2.92}$$

puisque $k_0 \eta \Lambda \frac{F^{d_0}}{\|\mathbf{F}^d\|} \ge 0$. Il résulte alors que :

$$\Lambda = \begin{cases} 0 & , \quad si \quad f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) < 0 \\ \frac{\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}\|}{k_0 \eta F^{d_0}} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^{\mathbf{d}}} \left(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d} \right), \dot{\mathbf{F}}^{\mathbf{d}} \right) \right]^+ , \quad si \quad f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = 0 \end{cases}$$
(2.93)

où $x^+ = \sup \{0, x\}$, soit encore compte tenu de (2.80),

.

$$\Lambda = \begin{cases} 0 & , \quad si \quad f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) < 0\\ \frac{\left[(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \dot{\mathbf{F}}^{\mathbf{d}}) \right]^{+}}{k_{0} \eta F^{d_{0}}} & , \quad si \quad f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = 0 \end{cases}$$
(2.94)

En résumé donc, la loi d'évolution des variables internes \mathbf{d} est la suivante :

$$\dot{\mathbf{d}} = \begin{cases} \mathbf{0} , & si \quad f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = \| \mathbf{F}^{\mathbf{d}} \| - k_0 (1 + \eta \, d_0) < 0 \\ \\ \frac{\left[(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \dot{\mathbf{F}}^{\mathbf{d}}) \right]^+}{k_0 \, \eta \, F^{d_0} \| \mathbf{F}^{\mathbf{d}} \|} \mathbf{F}^{\mathbf{d}} , & si \quad f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = 0 \end{cases}$$
(2.95)

ce qui définit bien le quand et le comment de la propagation de l'endommagement.

L'ensemble des équations constitutives du modèle proposé sont récapitulées à l'annexe C.

2.5 Intégration locale de la loi de comportement

Pour conclure cette présentation du modèle, on s'intéresse ici au schéma d'intégration numérique locale (homogène, en un point) des équations constitutives qui viennent d'être établies. Connaissant la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^r$ et les variables internes \mathbf{d}^r à la fin du pas de temps r, le problème consiste à déterminer, à partir de l'incrément de déformation $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, les valeurs $\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1}$ et \mathbf{d}^{r+1} de ces variables ainsi que celle du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^{r+1}$ à la fin du pas de temps r + 1, *i.e.*:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^{r+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^r + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{d}^{r+1} = \mathbf{d}^r + \Delta \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\sigma}^{r+1} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1}, \mathbf{d}^{r+1}) \end{cases}$$
(2.96)

Pour assurer une bonne stabilité à l'algorithme de résolution, nous adoptons ici un schéma d'intégration purement implicite dont nous présentons ci-après les différentes étapes.

(a) Prédiction élastique

On suppose dans un premier temps que le nouvel état mécanique est situé à l'intérieur du convexe de réversibilité, *i.e.* que l'évolution entre les pas r et r + 1 est purement élastique :

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{0} \tag{2.97}$$

On vérifie alors si l'état mécanique ($\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1}, \mathbf{d}^r$) satisfait la condition

$$f\left(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1}), \mathbf{d}^{r}\right) \le 0 \tag{2.98}$$

Si tel est le cas, la prédiction élastique coïncide avec la solution du problème :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^{r+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^r + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{d}^{r+1} = \mathbf{d}^r \end{cases}$$
(2.99)

La procédure locale se termine alors par le calcul de σ^{r+1} conformément à (2.96).

Dans le cas contraire, *i.e.* si $f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1}), \mathbf{d}^r) > 0$, une correction est nécessaire. C'est précisément l'objet de la procédure développée ci-dessous où l'on calcule l'accroissement d'endommagement $\Delta \mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ permettant de satisfaire au critère $f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1}), \mathbf{d}^{r+1}) = 0.$

(b) Phase de correction

La loi d'évolution de l'endommagement peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{\mathbf{d}} = \Lambda \frac{\mathbf{F}^{\mathbf{d}}}{\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}\|} , \quad si \quad f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) = 0$$
(2.100)

Ce problème en vitesse est discrétisé ici sous une forme incrémentale par la règle du point milieu généralisée :

$$\Delta \mathbf{d} = \Delta \Lambda \; \frac{\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+\zeta})}{\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+\zeta})\|} \tag{2.101}$$

avec

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{r+\zeta} = (1-\zeta)\,\boldsymbol{\varepsilon}^r + \zeta\,\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1} \tag{2.102}$$

Précisément, on retient ici la valeur $\zeta = 1$, ce qui correspond à un schéma purement implicite. Un tel choix est notamment motivé par les travaux d'Ortiz et Popov [47] sur les modèles d'élasto-plasticité qui montrent dans ce cas la stabilité inconditionnelle de l'algorithme, quelle que soit la taille de l'incrément de chargement et même pour des comportements fortement non linéaires. On obtient alors la relation

$$\Delta \mathbf{d} = \Delta \Lambda \frac{\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1})}{\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1})\|}$$
(2.103)

dans laquelle il reste à calculer l'accroissement $\Delta \Lambda$ du multiplicateur d'endommagement. Ce dernier est obtenu en vérifiant le critère d'endommagement

$$f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1}), \mathbf{d}^{r+1}) = \| \mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1}) \| - k_0 [1 + \eta (d_0^r + \Delta d_0)] = 0$$
(2.104)

En injectant (2.103) dans cette relation, on obtient une équation scalaire linéaire en $\Delta\Lambda$, de laquelle on tire

$$\Delta \Lambda = \frac{\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1})\| \left[\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1})\| - k_0 \left(1 + \eta \, d_0^r\right)\right]}{k_0 \, \eta \, F^{d_0}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1})} \tag{2.105}$$

Connaissant $\Delta \Lambda$, l'incrément $\Delta \mathbf{d}$ est ensuite calculé à partir de la relation (2.103) et l'état mécanique au pas r + 1 est enfin déterminé par

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^{r+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^r + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{d}^{r+1} = \mathbf{d}^r + \Delta \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\sigma}^{r+1} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1}, \mathbf{d}^{r+1}) \end{cases}$$
(2.106)

Le tableau 2.6 récapitule l'algorithme qui vient d'être décrit.

Remarque 2.3 On note que l'inconvénient souvent évoqué pour les schémas implicites en élasto-plasticité, i.e. la nécessité d'un processus itératif pour déterminer le multiplicateur plastique, disparaît naturellement dans le modèle, le calcul du multiplicateur d'endommagement se réduisant en effet à la résolution d'une équation linéaire. Données d'entrée : état de déformation et d'endommagement au pas $r(\boldsymbol{\varepsilon}^r, \mathbf{d}^r)$, incrément de déformation $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$

(1) calcul de la déformation au pas r + 1: $\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^r + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$

Prédiction élastique

(2) calcul de la valeur de la fonction seuil pour l'état $(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1}, \mathbf{d}^r)$: $f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1}), \mathbf{d}^r)$ (2.1) si $f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1}), \mathbf{d}^r) \leq 0$, alors $\mathbf{d}^{r+1} = \mathbf{d}^r$ et aller en (6) (2.1) si $f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1}), \mathbf{d}^r) > 0$, aller en (3)

Phase de correction

- (3) calcul du multiplicateur $\Delta \Lambda = \frac{\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1})\| \left[\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1})\| k_0 (1+\eta d_0^r)\right]}{k_0 \eta F^{d_0}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1})}$ (4) calcul de l'incrément d'endommagement $\Delta \mathbf{d} = \Delta \Lambda \frac{\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1})}{\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1})\|}$
- (5) correction de la valeur de l'endommagement $\mathbf{d}^{r+1} = \mathbf{d}^r + \Delta \mathbf{d}$ et aller en (6)
- (6) calcul de la contrainte au pas r + 1: $\sigma^{r+1} = \sigma(\varepsilon^{r+1}, \mathbf{d}^{r+1})$

Données de sortie: état mécanique au pas r + 1 ($\boldsymbol{\varepsilon}^{r+1}, \mathbf{d}^{r+1}, \boldsymbol{\sigma}^{r+1}$)

Tableau 2.6: Algorithme d'intégration numérique locale du modèle.
Chapitre 3

Etude des capacités prédictives du modèle

3.1 Introduction

On se propose à présent d'évaluer les capacités prédictives du modèle d'endommagement par microfissuration présenté au chapitre précédent.

Dans un premier temps, nous étudierons les aptitudes du modèle à décrire le comportement d'un matériau microfissuré dont la distribution de dommages est supposée figée. Nous nous intéresserons ensuite aux aspects dissipatifs et à l'évolution de cette dernière sous différents chargements mécaniques.

3.2 Comportement élastique et propriétés effectives

Dans cette partie, les distributions de microfissures considérées sont supposées figées (pas d'évolution de l'endommagement). On se propose dans un premier temps de préciser la méthode à employer pour déterminer les coefficients caractérisant l'énergie élastique du matériau. Dans une seconde étape, nous évaluerons les aptitudes du modèle au travers de la simulation de quelques problèmes simples.

3.2.1 Détermination des paramètres d'énergie

La détermination définitive de l'énergie libre nécessite, nous l'avons dit, l'identification des deux coefficients de Lamé (λ_0 et μ_0) et d'un certain nombre de paramètres caractérisant la modification d'énergie due à l'endommagement (*cf.* chapitre 2, § 2.3.3). Si l'obtention des coefficients de Lamé peut se faire très classiquement à partir d'essais simples comme la traction ou la compression uniaxiales, l'identification des autres paramètres nécessite quant à elle une stratégie propre dont nous allons maintenant vous présenter les grandes lignes dans le cas le plus général où $p \ge 4$.

Précisément, la détermination de ces coefficients nécessite la connaissance, pour une distribution axisymétrique d'endommagement du matériau, de deux informations :

- celle de la distribution des densités de microfissures au sein du matériau,
- et celle du tenseur des rigidités effectif lorsque toutes ces microfissures sont ouvertes.

C'est pourquoi, on se propose dans une première étape de pré-endommager une éprouvette de matériau de façon axisymétrique (d'axe **m**), par exemple en la soumettant à une compression ou une traction uniaxiales. Après décharge de l'éprouvette, on réalise ensuite N mesures $(\rho_1, \rho_2, ..., \rho_N)$ de la densité de microfissures respectivement dans les directions de vecteurs $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, ..., \mathbf{n}_N$ définis par les angles sphériques θ_i et $\phi_i = \frac{\pi}{N}i$ dans la base orthonormée ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{m}$) de \mathbb{R}^3 (cf. figure 3.1). A partir de ces données, on peut alors déterminer la meilleure approximation $\hat{\rho}$ de cette distribution, *i.e.* les tenseurs d_0 , d_2 et d_4 (puisque seuls ces trois tenseurs apparaissent dans l'expression du tenseur des rigidités à défauts tous ouverts, cf. chapitre 2, § 2.3.3), en minimisant l'expression suivante:

$$A = \sum_{i=1}^{N} \left[\rho_i - \hat{\rho}(\mathbf{n}_i, \mathbf{d}) \right]^2$$
(3.1)

avec

$$\hat{\rho}(\mathbf{n}_i, \mathbf{d}) = d_0 + d_2 : \left\lfloor \mathbf{n}_i^{\otimes 2} \right\rfloor + d_4 :: \left\lfloor \mathbf{n}_i^{\otimes 4} \right\rfloor$$
(3.2)

Compte tenu de la symétrie considérée, les tenseurs irréductibles d_2 et d_4 se mettent ici sous la forme :

$$d_2 = a \lfloor \mathbf{m}^{\otimes 2} \rfloor, \quad d_4 = b \lfloor \mathbf{m}^{\otimes 4} \rfloor$$
 (3.3)

avec a et b deux réels non nuls. La résolution du système formé par les équations suivantes :

$$\frac{\partial A}{\partial d_0} = 0 , \quad \frac{\partial A}{\partial a} = 0 , \quad \frac{\partial A}{\partial b} = 0$$
(3.4)

conduit alors finalement aux expressions des variables d_0 , d_2 et d_4 .

Ayant la distribution de défauts, il reste dans une seconde étape à comparer les tenseurs de rigidités C à défauts tous ouverts obtenus sur le plan expérimental et sur le plan de la modélisation adoptée.

Pour cela, on soumet l'éprouvette de matériau à un ensemble de sollicitations (non endommageantes) telles que les microfissures soient toutes ouvertes et permettant d'avoir accès aux différentes composantes de C (par exemple des tractions uniaxiales, *cf.* François [18], ou des élongations uniaxiales, *cf.* Hayes [23]). On note C^{exp} le tenseur ainsi mesuré.

Chapitre 3



Figure 3.1: Directions de mesures de la densité de microfissures.

Dans le cas du modèle, le tenseur des rigidités à défauts tous ouverts s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{C} = 2 \left(\mu_0 + \alpha \, d_0\right) \mathbf{I} \,\overline{\underline{\otimes}} \,\mathbf{I} + \left(\lambda_0 + 2\beta \, d_0\right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \chi \left(d_2 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes d_2\right) + \varphi \left(d_2 \,\overline{\underline{\otimes}} \,\mathbf{I} + \mathbf{I} \,\overline{\underline{\otimes}} \, d_2\right) + 2\psi \, d_4$$
(3.5)

qui fait apparaître au maximum quatre paramètres indépendants (cf. chapitre 2, § 2.3.3). L'identification des coefficients du modèle repose alors sur la minimisation de l'expression scalaire suivante :

$$B = (\|\mathbf{C}^{\exp}\| - \|\mathbf{C}\|)^2 \tag{3.6}$$

où $\|\mathbf{T}\|$ désigne la norme du tenseur d'ordre quatre \mathbf{T} définie par :

$$\|\mathbf{T}\|^2 = \mathbf{T} :: \mathbf{T} \tag{3.7}$$

Si l'on fait l'hypothèse que l'on se trouve dans le cas (i) (cf. chapitre 2, tableau 2.5), *i.e.* que

$$\alpha + 2\beta - 5\chi - \frac{5}{2}\varphi + \frac{9}{2}\psi \neq 0 \quad (avec \ \Delta_4 = 0) \tag{3.8}$$

la détermination des coefficients indépendants α , χ , φ et ψ est obtenue par résolution du système formé par les quatre équations suivantes :

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha} = 0 , \quad \frac{\partial B}{\partial \chi} = 0 , \quad \frac{\partial B}{\partial \varphi} = 0 , \quad \frac{\partial B}{\partial \psi} = 0$$
(3.9)

Ceci fait, il reste ensuite à calculer la valeur du coefficient β à l'aide de la relation $\Delta_4 = 0$ et à vérifier que l'hypothèse (3.8) est bien respectée. Si tel n'est pas le cas, il faut alors se tourner vers la solution (ii) pour laquelle

$$\alpha + 2\beta - 5\chi - \frac{5}{2}\varphi + \frac{9}{2}\psi = 0 \quad et \quad \Delta_4 = 0$$
 (3.10)

Dans cette éventualité, seuls les trois paramètres α , χ et φ sont indépendants et les trois équations :

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha} = 0 , \quad \frac{\partial B}{\partial \chi} = 0 , \quad \frac{\partial B}{\partial \varphi} = 0$$
 (3.11)

suffisent à leur détermination. Notons enfin que dans l'un ou l'autre cas, il conviendra de vérifier dans une dernière étape que les coefficients obtenus satisfont bien à la condition (2.83).

En conclusion, le jeu complet de paramètres peut donc être déterminé de façon formelle à partir d'une seule éprouvette de matériau, dans son état initial pour les coefficients de Lamé et dans un état endommagé pour les coefficients restants. Toutefois, vu la dispersion habituelle des résultats expérimentaux, il sera préférable pour obtenir une estimation représentative de la réalité, de multiplier ces mesures avec différentes éprouvettes, voire même différentes distributions de défauts, et de déterminer les valeurs finales des coefficients précités à l'issue d'un procédé de moyennage.

Différents résultats expérimentaux concernant la mesure sur des roches et des bétons de distributions de densités de microfissures (voir par exemple Nemati [45], Homand *et al.* [27]) et de tenseur de rigidités (voir notamment François [18]) ont pu être recensées dans la littérature. Ces études n'ayant cependant jamais été menées conjointement pour le même matériau, on ne dispose pas encore à l'heure actuelle de l'ensemble des données expérimentales nécessaires à la procédure qui vient d'être décrite.

Face à cette difficulté, une solution alternative consiste à s'appuyer sur les résultats fournis par l'analyse micromécanique, comme cela a déjà été proposé par Sayers et Kachanov [53] et Zheng [63], ce qui permet d'obtenir un jeu de paramètres cohérents vis-à-vis du problème considéré.

Considérons ainsi un volume élémentaire représentatif V constitué d'une matrice homogène élastique linéaire et isotrope affaiblie par un ensemble de microfissures planes, parallèles et lenticulaires (de normale unitaire le vecteur **m** et de densité totale $d_0 = \frac{1}{V} (\sum_i a_i^3)$, a_i désignant leurs rayons). On adopte par ailleurs les hypothèses de non interaction entre les défauts, de faibles densités de microfissures et de glissement non dissipatif des lèvres de celles-ci.

On peut montrer par un calcul direct que dans ce cas les variables d'endommagement d_2 et d_4 s'expriment (*cf.* Lubarda et Krajcinovic [38]):

$$d_2 = \frac{15}{2} d_0 \left[\mathbf{m}^{\otimes 2} \right], \ d_4 = \frac{315}{8} d_0 \left[\mathbf{m}^{\otimes 4} \right]$$
 (3.12)

quelle que soit la densité totale d_0 des microfissures. La résolution du problème de changement d'échelle (dont les étapes détaillées peuvent notamment être trouvées dans Krajcinovic [32], Marigo [40], Welemane [61], Pensée et Kondo [50]) conduit quant à elle à l'expression suivante pour le tenseur des rigidités lorsque les microfissures sont ouvertes :

$$\mathbf{C}^{micro} = \mathbf{C}_{0} - \Lambda_{0} d_{0} \begin{bmatrix} 2\beta_{0} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \chi_{0} \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{m}^{\otimes 2} + \mathbf{m}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{I} \right) \\ + \left(\mathbf{I} \,\overline{\underline{\otimes}} \, \mathbf{m}^{\otimes 2} + \mathbf{m}^{\otimes 2} \,\overline{\underline{\otimes}} \, \mathbf{I} \right) + 2 \,\psi_{0} \,\mathbf{m}^{\otimes 4} \end{bmatrix}$$
(3.13)

les valeurs des coefficients Λ_0 , β_0 , χ_0 et ψ_0 étant indiquées au tableau 3.1.

Λ_0	β_0	χ_0	ψ_0
$\frac{32}{3} \frac{\mu_0 (\lambda_0 + 2 \mu_0)}{(3 \lambda_0 + 4 \mu_0)}$	$\frac{\lambda_0^2 (3 \lambda_0 + 4 \mu_0)}{16 \mu_0^2 (\lambda_0 + \mu_0)}$	$\frac{\lambda_0\left(3\lambda_0+4\mu_0\right)}{4\mu_0\left(\lambda_0+\mu_0\right)}$	$\frac{\lambda_{0}}{4\left(\lambda_{0}+\mu_{0}\right)}$

Tableau 3.1: Coefficients Λ_0 , β_0 , χ_0 et ψ_0 .

On note que le tenseur obtenu en (3.13) possède seulement quatre composantes indépendantes sur les cinq théoriquement imposées par la symétrie considérée, *i.e.* l'isotropie transverse d'axe **m** (*cf.* Kachanov [29]). Dans le cas (i), *i.e.* où les relations (3.8) sont vérifiées, le modèle ne fait apparaître également que quatre paramètres indépendants ($\alpha, \chi, \varphi \in \psi$). On peut alors déterminer l'expression de ces inconnues par une méthode directe, c'est-à-dire en résolvant le système linéaire suivant :

$$C_{1111} - C_{1133} = C_{1111}^{micro} - C_{1133}^{micro}$$

$$C_{3333} - C_{1133} = C_{3333}^{micro} - C_{1133}^{micro}$$

$$C_{1313} = C_{1313}^{micro}$$

$$C_{2323} = C_{2323}^{micro}$$
(3.14)

où l'on note $(C_{ijkl})_{(i,j,k,l)\in[1,3]^4}$ les composantes du tenseur **C** dans toutee base orthonormée $(\mathbf{m}, \mathbf{t}, \mathbf{k})$ de \mathbb{R}^3 .

En introduisant les expressions (3.5), (3.12) et (3.13), le système (3.14) s'exprime alors :

$$\begin{cases} 2\alpha - \frac{15}{2}\chi - 5\varphi + \frac{63}{4}\psi = \frac{8\lambda_0(\lambda_0 + 2\mu_0)}{3(\lambda_0 + \mu_0)} \\ 2\alpha + \frac{15}{2}\chi + 10\varphi + 27\psi = -\frac{8(\lambda_0 + 2\mu_0)^2}{3(\lambda_0 + \mu_0)} \\ \alpha + \frac{5}{4}\varphi - 9\psi = -\frac{16\mu_0(\lambda_0 + 2\mu_0)}{3(3\lambda_0 + 4\mu_0)} \\ \alpha - \frac{5}{2}\varphi + \frac{9}{4}\psi = 0 \end{cases}$$
(3.15)

dont la solution unique est:

$$\left(\begin{array}{l} \alpha = -\frac{16\,\mu_0\,(\lambda_0 + 2\,\mu_0)\,(9\,\lambda_0 + 10\,\mu_0)}{45\,(\lambda_0 + \mu_0)\,(3\,\lambda_0 + 4\,\mu_0)} \\ \chi = -\frac{16\,\lambda_0\,(\lambda_0 + 2\,\mu_0)\,(21\,\lambda_0 + 26\,\mu_0)}{315\,(\lambda_0 + \mu_0)\,(3\,\lambda_0 + 4\,\mu_0)} \\ \varphi = -\frac{64\,\mu_0\,(\lambda_0 + 2\,\mu_0)\,(6\,\lambda_0 + 7\,\mu_0)}{315\,(\lambda_0 + \mu_0)\,(3\,\lambda_0 + 4\,\mu_0)} \\ \psi = \frac{64\,\lambda_0\,\mu_0\,(\lambda_0 + 2\,\mu_0)}{945\,(\lambda_0 + \mu_0)\,(3\,\lambda_0 + 4\,\mu_0)} \\ \end{array} \right)$$
(3.16)

On en déduit ensuite par la condition $\Delta_4 = 0$ l'expression du dernier coefficient β , soit

$$\beta = -\frac{2\lambda_0 \left(\lambda_0 + 2\mu_0\right) \left(45\lambda_0^2 + 120\lambda_0 \mu_0 + 76\mu_0^2\right)}{45\mu_0 \left(\lambda_0 + \mu_0\right) \left(3\lambda_0 + 4\mu_0\right)} \tag{3.17}$$

Les paramètres $(\alpha, \beta, \chi, \varphi, \psi)$ sont bien tels que la condition (3.8) est vérifiée et permettent également de satisfaire les conditions (2.83). Le tableau 3.2 rassemble les valeurs de ces coefficients pour un grès des Vosges et un béton, dont les coefficients de Lamé ont été identifiés respectivement par Karami [31] et Ramtani [51]. Ce sont ces valeurs que nous utiliserons par la suite pour réaliser les simulations.

	grès des Vosges	béton
λ_0	5300	8965
μ_0	6220	13445
α	-9180	-20395
β	-11670	-18700
χ	-2775	-4855
φ	-3595	-8010
ψ	85	160

Tableau 3.2: Paramètres constitutifs pour un grès des Vosges et un béton (les valeurs indiquées sont en MPa).

3.2.2 Etude du comportement élastique

Les paramètres caractérisant l'énergie élastique étant ainsi déterminés, nous pouvons à présent aborder l'analyse des capacités du potentiel thermodynamique proposé, *i.e.* examiner les effets de l'endommagement sur les propriétés effectives du matériau pour différentes configurations de microfissures et pour différents états d'ouverture - fermeture de celles-ci.

(a) Propriétés effectives

Etudions tout d'abord le cas d'un milieu affaibli par des configurations de microfissures soit toutes ouvertes ($S_2(\varepsilon) = \emptyset$) soit toutes fermées ($S_2(\varepsilon) = S$). L'expression générale du tenseur des rigidités effectif du matériau est alors la suivante :

• à défauts ouverts :

$$\mathbf{C} = 2 \left(\mu_0 + \alpha \, d_0\right) \, \mathbf{I} \, \overline{\underline{\otimes}} \, \mathbf{I} + \left(\lambda_0 + 2 \, \beta \, d_0\right) \, \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \chi \left(d_2 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes d_2\right) + \varphi \left(d_2 \, \overline{\underline{\otimes}} \, \mathbf{I} + \mathbf{I} \, \overline{\underline{\otimes}} \, d_2\right) + 2 \psi \, d_4$$
(3.18)

• à défauts fermés :

$$\mathbf{C} = 2 \left(\mu_0 + \alpha' \, d_0\right) \mathbf{I} \,\overline{\underline{\otimes}} \,\mathbf{I} + \left(\lambda_0 + 2 \,\beta' \, d_0\right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \chi' \left(d_2 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes d_2\right) + \varphi' \left(d_2 \,\overline{\underline{\otimes}} \,\mathbf{I} + \mathbf{I} \,\overline{\underline{\otimes}} \, d_2\right) + 2 \,\psi' \, d_4$$
(3.19)

les expressions de $(\alpha', \beta', \chi', \varphi', \psi')$ étant données en (2.57).

Le type d'anisotropie induite pouvant être décrite par le modèle varie suivant l'ordre d'approximation p choisi. De façon générale, l'ordre p = 0 (avec $\mathbf{d} = (d_0)$) est restreint à la représentation des distributions isotropes de microfissures, tandis que les ordres $p \ge 2$ permettent de rendre compte d'aspects directionnels.

Précisément, dans le cas où p = 2 ($\mathbf{d} = (d_0, d_2)$), l'anisotropie obtenue à défauts tous ouverts ou tous fermés est une orthotropie dont les axes coïncident avec les axes principaux du tenseur d_2 . Soulignons néanmoins que, compte tenu de la linéarité du potentiel thermodynamique en \mathbf{d} , cette orthotropie présente un caractère simplifié puisqu'elle est définie par moins de neuf coefficients indépendants. Si l'on assimile la base ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) à la base principale du tenseur d_2 et si l'on note $(C_{ijkl})_{(i,j,k,l)\in[1,3]^4}$ les composantes du tenseur \mathbf{C} dans cette base, on montre en effet que

$$C_{1111} + C_{2222} + C_{3333} = C_{1122} + C_{1133} + C_{2233} + 2\left(C_{1212} + C_{1313} + C_{2323}\right) \quad (3.20)$$

Notons que cette particularité peut également être mise en évidence sur des modèles utilisant une seule variable d'endommagement tensorielle du second ordre et symétrique (*cf.* Cowin [14]). Lorsque l'on considère un ordre p supérieur ou égal à quatre, l'émergence du terme en d_4 provoque une déviation par rapport à cette orthotropie et conduit à une anisotropie de comportement plus générale. On rappelle toutefois ici que lorsque les défauts sont tous ouverts ou tous fermés, une description plus précise de la distribution de densités à l'aide d'un ordre $p \ge 6$ ne modifie en rien le type d'anisotropie obtenue (l'ordre p = 4 est dans ces cas suffisant).

Si l'on examine par exemple le grès et le béton qui viennent d'être identifiés, on note que l'influence du tenseur d'ordre quatre à microfissures ouvertes est sensiblement négligeable. Cette particularité peut notamment être mise en évidence par le calcul du rapport ς des normes euclidiennes des contributions $\mathbf{C}^{(1)}$ et $\mathbf{C}^{(2)}$ des termes respectifs (d_0, d_2) et d_4 au tenseur des rigidités \mathbf{C} du matériau:

$$\begin{cases} \mathbf{C} = \mathbf{C}_{0} + \mathbf{C}^{(1)}(d_{0}, d_{2}) + \mathbf{C}^{(2)}(d_{4}) \\ \\ \varsigma = \frac{\|\mathbf{C}^{(2)}\|}{\|\mathbf{C}^{(1)}\|} \end{cases}$$
(3.21)

A titre illustratif sur le cas d'un seul système de microfissures, on obtient pour ces matériaux

$$\varsigma \cong 0.02 \tag{3.22}$$

Lorsque les microfissures sont fermées, la contribution de d_4 ne peut plus en revanche être négligée. Pour cette même distribution de microfissures, on obtient en effet cette fois :

$$\varsigma \cong 0.92 \tag{3.23}$$

L'orthotropie décrite à p = 2 est alors ici violée de manière significative par le choix d'un ordre d'approximation p supérieur. Ces résultats, qui corroborent certaines constatations d'ordre micromécanique (*cf.* Kachanov [29]), démontrent l'influence du terme tensoriel d'ordre quatre d_4 dans la description des propriétés effectives d'un milieu affecté par des défauts fermés.

Examinons à présent les propriétés effectives obtenues pour ce modèle dans le cas de distributions relativement simples de défauts.

• Distribution isotrope de microfissures

Le tenseur des rigidités du matériau se réduit dans ce cas à:

$$\mathbf{C} = \begin{cases} 2(\mu_0 + \alpha d_0) \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I} + (\lambda_0 + 2\beta d_0) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : défauts ouverts \\ 2(\mu_0 + \alpha' d_0) \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I} + (\lambda_0 + 2\beta' d_0) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : défauts fermés \end{cases}$$
(3.24)

avec d_0 la densité totale de microfissures.

Examinons tout d'abord le module de compressibilité K du matériau microfissuré, défini par :

$$K = \frac{tr\,\boldsymbol{\sigma}}{3\,tr\,\boldsymbol{\varepsilon}}\tag{3.25}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur des déformations correspondant à un essai hydrostatique $\boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{I}$, soit encore ici

$$K = [\mathbf{I} : \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{I}]^{-1}$$
(3.26)

 \mathbf{C}^{-1} désignant le tenseur des souplesses effectif du matériau. En utilisant la méthode d'inversion proposée par Kunin [34] pour le calcul de ce tenseur, et en nous plaçant sous l'hypothèse de faible densité de microfissuration ($d_0 \ll 1$), on obtient alors l'expression suivante pour le module K:

$$K = \begin{cases} K_0 + \frac{2}{3} (\alpha + 3\beta) d_0 & : défauts ouverts \\ K_0 & : défauts fermés \end{cases}$$
(3.27)

où $K_0 = (3 \lambda_0 + 2 \mu_0)/3$ désigne le module de compressibilité du matériau sain. Pour les matériaux identifiés, le coefficient $\alpha + 3\beta$ est négatif. La densité totale de microfissures d_0 étant positive, le module de compressibilité de ces matériaux est alors dégradé lorsque les microfissures sont ouvertes. Si les défauts sont en revanche fermés, les conditions de restitution imposées au modèle impliquent alors la restauration totale du module K à sa initiale K_0 quel que soit le matériau, conformément aux observations expérimentales (*cf.* chapitre 1, § 1.2.1).

Etudions maintenant le module d'Young $E(\mathbf{v})$ dans une direction de vecteur unitaire \mathbf{v} et le coefficient de Poisson $\nu(\mathbf{v}, \mathbf{t})$ relatif aux directions orthogonales de vecteur unitaire \mathbf{v} et \mathbf{t} , définis par (Hayes [24]):

$$\begin{cases} E(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}} \\ , \quad \forall (\mathbf{v}, \mathbf{t}), \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} = 0 \end{cases}$$
(3.28)
$$\nu(\mathbf{v}, \mathbf{t}) = -\frac{\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{t}}{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}} \end{cases}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur des déformations correspondant à un essai uniaxial $\boldsymbol{\sigma} = \bar{\sigma} \mathbf{v}^{\otimes 2}$. Ils s'expriment alors ici:

$$\begin{cases} E(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}^{\otimes 2} : \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{v}^{\otimes 2}]^{-1} \\ \nu(\mathbf{v}, \mathbf{t}) = -\frac{\mathbf{t}^{\otimes 2} : \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{v}^{\otimes 2}}{\mathbf{v}^{\otimes 2} : \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{v}^{\otimes 2}} \end{cases}, \quad \forall (\mathbf{v}, \mathbf{t}), \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} = 0 \qquad (3.29)$$

A titre illustratif, on obtient pour le grès des Vosges identifié ($E_0 = 15300$ MPa, $\nu_0 = 0.23$) et pour une densité totale de microfissures $d_0 = 0.1$:

$$\frac{E(\mathbf{v})}{E_0} = \begin{cases} 0.85 : défauts ouverts \\ 0.93 : défauts fermés \end{cases} \le 1 , \quad \forall \mathbf{v}$$
(3.30)

On remarque ainsi que le module d'Young reste dégradé par rapport à sa valeur initiale E_0 (correspondant au matériau sain) pour les deux états de défauts, la valeur à microfissures fermées étant toutefois la moins affectée. Sur le même exemple, le coefficient de Poisson s'exprime quant à lui:

$$\frac{\nu(\mathbf{v}, \mathbf{t})}{\nu_0} = \begin{cases} 0.84 : défauts ouverts\\ 1.09 : défauts fermés \end{cases}, \quad \forall (\mathbf{v}, \mathbf{t}), \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} = 0 \qquad (3.31)$$

Si l'on observe de nouveau une dégradation à microfissures ouvertes, le coefficient de Poisson prend en revanche une valeur supérieure à sa valeur initiale ν_0 lorsque les défauts sont fermés. Ces restitutions partielles du module d'Young et du coefficient de Poisson peuvent s'expliquer au travers d'une analyse micromécanique (*cf.* Welemane et Cormery [62]). On montre en effet qu'une microfissure fermée ne contribue pas aux modules d'Young ni aux coefficients de Poisson associés à sa direction normale mais demeure active dans les autres directions de l'espace. Puisque l'on a ici une distribution isotrope de dommages, chaque microfissure contribue à la dégradation des propriétés effectives du matériau dans toutes les directions de l'espace hormis celle associée à sa normale, d'où le résultat. **Remarque 3.1** Cet exemple d'une configuration isotrope de dommages permet de montrer que, même dans sa formulation la plus simple avec une seule variable scalaire $\mathbf{d} = (d_0)$, le modèle proposé permet une description plus riche des effets de l'endommagement par rapport aux approches du type

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = (1 - d) W_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{3.32}$$

On prévoit en effet ici non seulement une altération du module d'Young mais également une modification du coefficient de Poisson.

• Un système de microfissures parallèles

Considérons à présent un milieu affecté par un ensemble de microfissures parallèles de normale unitaire **m**. En introduisant les expressions des tenseurs d_2 et d_4 données dans ce cas par (3.12) dans les relations (3.18) et (3.19), et en calculant le tenseur des souplesses \mathbf{C}^{-1} correspondant, on peut en déduire les expressions des modules d'Young $E(\mathbf{v})$ et des coefficients de Poisson $\nu(\mathbf{v}, \mathbf{t})$ effectifs du matériau. Celles-ci étant relativement complexes et ne présentant pas forcément d'intérêt, on ne les illustrera ici qu'au travers des figures 3.2 et 3.3 obtenues pour le grès des Vosges respectivement aux ordres d'approximation p = 2 et $p \ge 4$ (les vecteurs \mathbf{m} , \mathbf{v} et t étant supposés coplanaires).

Dans le cas tout d'abord où les défauts sont ouverts, ces figures montrent que les modules $E(\mathbf{v})$ et $\nu(\mathbf{v}, \mathbf{t})$ du matériau considéré sont plus ou moins dégradés selon la direction de l'espace, avec une dégradation maximale dans la direction normale aux microfissures. Conformément à la remarque précédente, on note en outre que les descriptions de ces propriétés fournies respectivement à p = 2 et à $p \ge 4$ sont dans ce cas relativement similaires.

Chapitre $\dot{3}$



Figure 3.2: Modules d'Young et coefficients de Poisson d'un grès des Vosges affaibli par un ensemble de microfissures parallèles de normale unitaire \mathbf{m} ($d_0 = 0.1, p = 2$).



Figure 3.3: Modules d'Young et coefficients de Poisson d'un grès des Vosges affaibli par un ensemble de microfissures parallèles de normale unitaire \mathbf{m} ($d_0 = 0.1, p \ge 4$).

Lorsque les défauts sont fermés, les valeurs de ces modules sont en revanche très sensibles au choix de p. En particulier, le module d'Young $E(\mathbf{m})$ et le coefficient de Poisson $\nu(\mathbf{m}, \mathbf{t})$ dans la direction normale aux défauts récupèrent lorsque $p \ge 4$ leurs valeurs initiales E_0 et ν_0 , ce qui va dans le sens des observations faites sur le plan expérimental (*cf.* Ramtani [51] pour le module d'Young²) et micromécanique (*cf.* Welemane et Cormery [62]). Concernant la comparaison à p = 2, on voit en revanche que la restitution de $E(\mathbf{m})$ et $\nu(\mathbf{m}, \mathbf{t})$ n'est dans ce cas que partielle. On peut noter enfin que, quel que soit l'ordre p retenu, les microfissures fermées demeurent actives au niveau des propriétés élastiques du matériau, les modules $E(\mathbf{v})$ et $\nu(\mathbf{v}, \mathbf{t})$ restant en effet dégradés dans des directions de vecteur unitaire $\mathbf{v} \neq \mathbf{m}$.

Il est enfin intéressant de remarquer qu'avec un ordre $p \ge 4$, la valeur du module de cisaillement $\mu(\mathbf{m}, \mathbf{t})$ dans la direction normale aux microfissures est bien insensible à l'état d'ouverture - fermeture des défauts, conformément à l'hypothèse de glissement non dissipatif retenue dans cette étude (*cf.* figure 3.4). On rappelle que le module de cisaillement du matériau associé aux directions orthogonales de vecteurs unitaires \mathbf{v} et \mathbf{t} est défini par (Hayes [24]):

$$\mu(\mathbf{v}, \mathbf{t}) = \frac{(\mathbf{v} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{v}) : \boldsymbol{\sigma}}{2 (\mathbf{v} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}}$$
(3.33)

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur des déformations correspondant à un essai $\boldsymbol{\sigma} = \bar{\sigma} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{v}).$

²Une restitution de coefficients de Poisson à leur valeur initiale a pu néanmoins être observée sur des composites initialement anisotropes lors d'un essai de traction - compression uniaxiales (voir par exemple Allix *et al.* [2]).



Figure 3.4: Modules de cisaillement normalisés $\mu(\mathbf{v}, \mathbf{t})/\mu_0$ d'un grès des Vosges affaibli par un ensemble de microfissures parallèles de normale unitaire \mathbf{m} ($d_0 = 0.1$).

• Cas d'un matériau contenant des défauts ouverts et des défauts fermés

Si lorsque les défauts sont tous ouverts et tous fermés, la description à l'ordre p = 4 de la distribution de densités fournit des résultats assez satisfaisants, notons néanmoins qu'il resterait à étudier le cas où le matériau est à la fois affecté par des microfissures ouvertes et par des microfissures fermées. Ainsi que nous l'avons souligné au chapitre 2 (§ 2.3.3), la représentation des propriétés effectives fournie par le modèle dépend dans ce cas de l'ordre d'approximation $p \ge 4$ considéré puisque l'ensemble des tenseurs $(d_0, d_2, d_4, ..., d_p)$ interviennent dans le terme de restitution de l'équation (2.49).

Afin d'illustrer cette influence, on se propose ici d'examiner le cas d'un grès des Vosges affaibli par la distribution de microfissures présentée à la figure 2.1 du chapitre 2 et soumis à un état de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ tel que $S_2(\boldsymbol{\varepsilon}) \neq \{\emptyset, S\}$ (*cf.* figure 3.5). Nous avons calculé pour ce matériau le module d'élongation $L(\mathbf{e}_3)$ dans la direction de l'axe \mathbf{e}_3 de symétrie de cette distribution pour différents ordres p:

$$\frac{L(\mathbf{e}_3)}{L_0} = \begin{cases} 0.488 & si \ p = 0\\ 0.55 & si \ p = 2\\ 0.454 & si \ p = 4\\ 0.449 & si \ p = 6 \end{cases}$$
(3.34)

On constate ainsi que la valeur de ce module à p = 4 diffère de celle obtenue pour p = 6. Dans le cas d'états d'ouverture - fermeture mixtes, l'anisotropie décrite à l'ordre d'approximation p = 4 est donc bien affinée par le choix d'un ordre psupérieur.

Si les quelques exemples précédents ont permis de mettre en évidence les avantages du tenseur d'ordre quatre d_4 , notons que seule une étude complémentaire et une confrontation à l'expérience permettra de quantifier plus précisément et de valider l'importance des tenseurs d_k d'ordre supérieur.



Figure 3.5: Influence de l'ordre d'approximation p pour des états d'ouverture - fermeture mixtes de défauts.

(b) Conditions d'ouverture - fermeture des microfissures

Après avoir examiné au paragraphe précédent les conséquences liées à la présence de microfissures ouvertes et fermées sur les propriétés élastiques du matériau, on se propose dans cette partie d'étudier plus en détail les modalités de changement d'état des défauts, *i.e.* de préciser *quand* intervient la transition entre état ouvert et état fermé.

On rappelle que le critère d'ouverture - fermeture des microfissures associé à la normale unitaire n est le suivant :

$$\delta_1 \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} + \delta_2 \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{3.35}$$

où les constantes δ_1 et δ_2 identifiées pour les deux matériaux étudiés sont définies au tableau 3.3. Ce critère ne dépend pas de la densité des défauts considérés mais seulement de leur orientation et de l'état de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ du milieu.

•	grès des Vosges	béton
δ_1	12440	26890
δ_2	5300	8965

Tableau 3.3: Paramètres du critère d'ouverture - fermeture des microfissures pour un grès des Vosges et un béton (les valeurs indiquées sont en MPa).

On peut noter que l'expression (3.35) a une forme plus générale que le critère habituel $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} = 0$, postulé ou obtenu dans les formulations macroscopiques (voir par exemple Chaboche [11], Halm et Dragon [21]), puisqu'elle introduit un terme supplémentaire dépendant de la trace de la déformation. On remarque par ailleurs que ce critère fait intervenir les coefficients du modèle (au travers de δ_1 et δ_2) et dépend par conséquent du matériau considéré.

Afin d'illustrer ces différences, considérons le cas du grès des Vosges affaibli par une distribution isotrope de microfissures (*cf.* figure 3.6). Si l'on se place tout d'abord dans l'espace réduit des déformations axisymétriques d'axe \mathbf{e}_3 ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \varepsilon_3$), on note en effet que les domaines correspondant aux microfissures toutes ouvertes (en blanc) et toutes fermées (en gris foncé) ne sont pas restreints respectivement aux cadrans des déformations positives et négatives.

L'examen de la transcription de ces domaines dans l'espace réduit des contraintes axisymétriques ($\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_3$) est également riche d'enseignements. D'une façon générale, on constate que ceux-ci sont relativement semblables aux domaines définis par le critère classique $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$. Si l'on soumet le matériau à une traction hydrostatique $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_0 \mathbf{I}$ avec $\sigma_0 > 0$ ou à une traction uniaxiale $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_3 \mathbf{e}_3^{\otimes 2}$ avec $\sigma_3 > 0$, les microfissures sont ainsi toutes ouvertes. Lors d'une compression hydrostatique $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_0 \mathbf{I}$ avec $\sigma_0 < 0$, elles sont en revanche toutes fermées. Néanmoins, on peut noter que lors d'une compression uniaxiale $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_3 \mathbf{e}_3^{\otimes 2}$ avec $\sigma_3 < 0$, certaines microfissures (situées parallèlement à l'axe de chargement) seront considérées dans le modèle comme étant ouvertes.



Figure 3.6: Critère d'ouverture - fermeture des défauts: cas d'un grès des Vosges affaibli par une distribution isotrope de microfissures ($d_0 = 0.1$).

3.3 Comportement dissipatif

Le paragraphe précédent a permis d'évaluer les aptitudes du modèle au niveau de la représentation du comportement élastique de milieux microfissurés (à endommagement figé). Pour compléter cette analyse, on se propose à présent d'examiner la réponse fournie par celui-ci lorsque l'endommagement évolue. En premier lieu, il convient comme précédemment d'apporter quelques précisions quant aux paramètres introduits dans le modèle pour caractériser cet aspect.

3.3.1 Détermination des paramètres de dissipation

(a) Influence des paramètres

On se propose dans la première partie de ce paragraphe d'étudier l'influence de chacun des coefficients strictement positifs k_0 et η entrant dans l'expression de la dissipation (2.69). Pour cela, on se place dans le cadre d'une sollicitation uniaxiale en déformation $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_3 \, \mathbf{e}_3^{\otimes 2}$ où $\varepsilon_3 > 0$, qui permet des développements analytiques simples.

En supposant le matériau initialement vierge de microfissures, exprimons tout d'abord la valeur de la déformation ε_3 au seuil de premier endommagement. On note que dans le cas des matériaux identifiés, le domaine $S_2(\varepsilon)$ demeure vide tout au long du chargement. En effet,

$$g(\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) = \delta_1 \,\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} \,+\, \delta_2 \,tr \,\boldsymbol{\varepsilon} \,=\, \boldsymbol{\varepsilon}_3 \,(\delta_1 + 3 \,\delta_2) > 0 \,, \quad \forall \,\boldsymbol{\varepsilon}_3 \tag{3.36}$$

puisque les coefficients $\delta_1 + 3 \delta_2$ sont ici positifs. Les forces thermodynamiques associées aux variables internes $\mathbf{d} = (d_0, d_2, d_4, ..., d_p)$ s'écrivent alors :

$$F^{d_0}(\boldsymbol{\varepsilon}) = -(\alpha + \beta) \varepsilon_3^2$$

$$F^{d_2}(\boldsymbol{\varepsilon}) = -(\chi + \varphi) \varepsilon_3^2 \left[\mathbf{e}_3^{\otimes 2} \right]$$

$$F^{d_4}(\boldsymbol{\varepsilon}) = -\psi \varepsilon_3^2 \left[\mathbf{e}_3^{\otimes 4} \right]$$
(3.37)

les forces $F^{d_k}(\varepsilon)$ pour $k \ge 6$ étant nulles puisque $S_2(\varepsilon) = \emptyset$ (cf. chapitre 2, § 2.3.4). Sachant que la fonction seuil d'endommagement est définie par :

$$f(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}), \mathbf{d}) = \| \mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon}) \| - k_0 (1 + \eta \, d_0)$$
(3.38)

où la norme de $\mathbf{F^d}(\pmb{\varepsilon})$ se réduit ici à

$$\|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\varepsilon})\| = \left[[F^{d_0}(\boldsymbol{\varepsilon})]^2 + F^{d_2}(\boldsymbol{\varepsilon}) : F^{d_2}(\boldsymbol{\varepsilon}) + F^{d_4}(\boldsymbol{\varepsilon}) :: F^{d_4}(\boldsymbol{\varepsilon}) \right]^{\frac{1}{2}}$$
(3.39)

on obtient alors la valeur suivante pour la déformation axiale $\overline{\varepsilon}_3$ au point de premier endommagement $(d_0 = 0)$:

$$\overline{\varepsilon}_3 = \sqrt{\frac{k_0}{\xi}} \tag{3.40}$$

avec

$$\xi = \left[(\alpha + \beta)^2 + \frac{2}{3} (\chi + \varphi)^2 + \frac{8}{35} \psi^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$
(3.41)

Le paramètre k_0 permet donc de caractériser le seuil d'apparition des premières microfissures, les valeurs des coefficients α , β , χ , φ et ψ étant fixées par les propriétés effectives du matériau. Notons que ce seuil est infini lorsque ξ tend vers zéro.

Pour les états de déformation tels que $\varepsilon_3 \geq \overline{\varepsilon}_3$, le seuil d'endommagement est défini de la façon suivante:

$$\varepsilon_3 = \sqrt{\frac{k_0(1+\eta \, d_0)}{\xi}} = \overline{\varepsilon}_3 \sqrt{(1+\eta \, d_0)} \tag{3.42}$$

on peut alors en déduire l'expression de la densité totale de microfissures d_0 du milieu en fonction de la déformation axiale appliquée:

$$d_0 = \frac{1}{\eta} \left[\left(\frac{\varepsilon_3}{\overline{\varepsilon}_3} \right)^2 - 1 \right]$$
(3.43)

D'après la loi d'évolution proposée, les vitesses d'endommagement d_2 et d_4 sont telles que :

$$\dot{d}_2 = \frac{F^{d_2}(\boldsymbol{\varepsilon})}{F^{d_0}(\boldsymbol{\varepsilon})} \, \dot{d}_0, \quad \dot{d}_4 = \frac{F^{d_4}(\boldsymbol{\varepsilon})}{F^{d_0}(\boldsymbol{\varepsilon})} \, \dot{d}_0 \tag{3.44}$$

ce qui conduit après intégration à :

$$d_{2} = \frac{(\chi + \varphi)}{(\alpha + \beta)\eta} \left[\left(\frac{\varepsilon_{3}}{\overline{\varepsilon}_{3}} \right)^{2} - 1 \right] \left[\mathbf{e}_{3}^{\otimes 2} \right], \quad d_{4} = \frac{\psi}{(\alpha + \beta)\eta} \left[\left(\frac{\varepsilon_{3}}{\overline{\varepsilon}_{3}} \right)^{2} - 1 \right] \left[\mathbf{e}_{3}^{\otimes 4} \right] \quad (3.45)$$

Connaissant les valeurs des variables d_0 , d_2 et d_4 , et sachant qu'ici $S_2(\varepsilon) = \emptyset$, la contrainte axiale du matériau s'exprime alors :

$$\sigma_{3} = (\lambda_{0} + 2\,\mu_{0})\,\varepsilon_{3} + \frac{2\,\xi^{2}\,\varepsilon_{3}}{(\alpha + \beta)\,\eta} \left[\left(\frac{\varepsilon_{3}}{\overline{\varepsilon}_{3}}\right)^{2} - 1 \right]$$
(3.46)

La pente de la courbe $(\varepsilon_3, \sigma_3)$ au point de premier endommagement est donc donnée par :

$$\frac{\partial \sigma_3}{\partial \varepsilon_3}(\overline{\varepsilon}_3) = \lambda_0 + 2\,\mu_0 + \frac{2\,\xi^2\,\overline{\varepsilon}_3}{(\alpha+\beta)\,\eta} \tag{3.47}$$

On note que celle-ci ne dépend que de la valeur de η , les autres coefficients ayant été préalablement définis. Le coefficient η joue alors le rôle de paramètre d'écrouissage dans la modélisation proposée.

Pour les matériaux identifiés, les coefficients $\alpha + \beta$ sont négatifs. La pente de la courbe contrainte axiale - déformation est alors d'autant plus forte que η est élevé. Plus précisément, si l'on pose η_c la valeur :

$$\eta_c = -\frac{4\,\xi^2\,\overline{\varepsilon}_3}{(\lambda_0 + 2\,\mu_0)\,(\alpha + \beta)}\tag{3.48}$$

la pente de la courbe est négative pour $\eta < \eta_c$. Mécaniquement, ceci se manifeste par le fait que pour les valeurs de η inférieures à η_c , la contrainte axiale diminue dès que le matériau commence à s'endommager. On parlera dans ce cas d'écrouissage négatif en contrainte. Au contraire lorsque $\eta > \eta_c$, il s'agit d'un écrouissage positif en contrainte.

L'influence du paramètre d'écrouissage η est illustrée de façon qualitative sur la figure 3.7. La valeur $\eta = +\infty$ correspond à un matériau ne s'endommageant pas, alors que le matériau ne peut subir de déformation supplémentaire lorsque η tend vers zéro (les valeurs négatives de η ont été exclues au chapitre précédent).

Soulignons pour finir que, quel que soit l'écrouissage (négatif ou positif), on obtient pour un endommagement suffisant un comportement avec adoucissement. En effet, la pente $\frac{\partial \sigma_3}{\partial \varepsilon_3}(\varepsilon_3)$ s'annule lorsque ε_3 atteint la valeur $\tilde{\varepsilon}_3$ donnée par :

$$\widetilde{\varepsilon}_{3} = \begin{cases} \overline{\varepsilon}_{3} & , \ si \ \eta \leq \eta_{c} \\ \overline{\varepsilon}_{3} \sqrt{\frac{1}{3}(1 + \frac{2\eta}{\eta_{c}})} & , \ si \ \eta \geq \eta_{c} \end{cases}$$
(3.49)

La contrainte $\tilde{\sigma}_3$ correspondant à cette déformation est alors la contrainte axiale maximale que peut supporter le matériau au cours du chargement considéré.



Figure 3.7: Influence du paramètre η sur la réponse en élongation uniaxiale (d'axe \mathbf{e}_3): courbe contrainte axiale (σ_3) - déformation (ε_3).

(b) Détermination de k_0 et η

L'étude qui vient d'être faite a permis de montrer l'influence des deux paramètres entrant dans l'expression de la dissipation. Il reste maintenant à les identifier pour le grès des Vosges et le béton étudiés. A cette fin, on considère un essai de compression uniaxiale $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_3 \mathbf{e}_3^{\otimes 2}$ avec $\sigma_3 < 0$.

En supposant un endommagement initial nul, le paramètre k_0 est identifié à partir de la contrainte $\overline{\sigma}_3$ au point de premier endommagement. Le comportement du matériau sain étant par ailleurs élastique linéaire et isotrope, on peut montrer facilement que la déformation ε induite par ce chargement est ici telle que $S_2(\varepsilon) = S$. Un calcul analogue à celui réalisé précédemment permet alors d'en déduire l'expression du paramètre k_0 :

$$k_0 = \vartheta \left(\frac{\overline{\sigma}_3}{E_0}\right)^2 \tag{3.50}$$

avec

$$\vartheta = \begin{bmatrix} [(1+2\nu_0^2)\alpha' + (1-2\nu_0)^2\beta']^2 \\ +\frac{2}{3}(1+\nu_0)^2[(1-2\nu_0)\chi' + (1-\nu)\varphi']^2 + \frac{8}{35}(1+\nu_0)^4(\psi')^2 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}$$
(3.51)

Les essais réalisés par Karami [31] pour le grès des Vosges et Ramtani [51] pour le béton donnent alors les valeurs indiquées au tableau 3.4 pour ce paramètre.

La valeur du coefficient d'écrouissage η est quant à elle déterminée à partir de la courbe déformation latérale - déformation axiale. Un calage assez grossier de la réponse fournie par le modèle avec les résultats expérimentaux fournit la valeur de ce paramètre (*cf.* tableau 3.4). On présente à la figure 3.8 l'accord obtenu dans le cas du béton.

	grès des Vosges	béton
$k_{0}\left(MPa ight)$	0.0006	0.001
η	90	200

Tableau 3.4: Paramètres constitutifs k_0 et η pour un grès des Vosges et un béton.



Figure 3.8: Réponse d'un béton à un essai de compression uniaxiale d'axe \mathbf{e}_3 : courbe déformation latérale ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) - déformation axiale (ε_3).

3.3.2 Réponse à quelques sollicitations classiques

Pour achever cette analyse des capacités prédictives du modèle, on s'intéresse ici à la réponse du modèle sur quelques essais mécaniques simples. Les simulations présentées ici ont été réalisées pour l'ordre d'approximation p = 4.

(a) Comportement en traction uniaxiale

La figure 3.9 présente la réponse du béton identifié précédemment (et supposé initialement non endommagé) à un essai de traction uniaxiale d'axe \mathbf{e}_3 ($\boldsymbol{\sigma} = \sigma_3 \mathbf{e}_3^{\otimes 2}$ avec $\sigma_3 > 0$). Notons que les calculs ont été réalisés jusqu'à la valeur maximale atteinte par la contrainte, l'unicité de la réponse n'étant pas assurée au delà.

La réponse du matériau est dans un premier temps élastique linéaire. A partir d'un certain seuil (point A), on constate une déviation par rapport à ce comportement liée à une propagation des microfissures. Ceci se traduit notamment par une non linéarité de la courbe contrainte - déformation axiale et par une dégradation progressive du module d'Young $E(\mathbf{e}_3)$ et du coefficient de Poisson $\nu(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$ (= $\nu(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$) du matériau (*cf.* figure 3.9).

En ce qui concerne précisément l'endommagement, on note que les surfaces des microfissures se développent préférentiellement dans la direction perpendiculaire à l'axe de chargement, la densité de microfissures $\hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d})$ étant en effet maximale pour $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ (cf. figure 3.9). Comme on le voit sur cet exemple, et bien qu'elle ne fasse appel à aucune décomposition, la loi d'évolution postulée permet donc de rendre compte d'une propagation anisotrope de la microfissuration.

A titre indicatif, nous avons également représenté dans l'espace des déformations axisymétriques ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \varepsilon_3$) le trajet de chargement considéré ici ainsi que les domaines d'ouverture - fermeture des défauts (*cf.* figure 3.10). On peut alors observer que les microfissures demeurent dans une configuration ouverte tout au long de l'essai.



Figure 3.9: Réponse d'un béton à un essai de traction uniaxiale d'axe e_3 .

Si les résultats obtenus sont donc relativement satisfaisants d'un point de vue qualitatif, on note toutefois que la valeur de la contrainte au pic est ici surestimée par rapport à la réalité. Ceci s'explique en partie par le fait que le seuil initial de non linéarité k_0 a été identifié au paragraphe précédent à partir d'une compression uniaxiale. L'utilisation par exemple d'une valeur moyenne entre les seuils en traction et en compression pour k_0 permettrait d'obtenir une valeur plus raisonnable pour celle-ci.



Figure 3.10: Réponse d'un béton à un essai de traction uniaxiale d'axe \mathbf{e}_3 : trajet de chargement et domaines d'ouverture - fermeture des microfissures dans l'espace des déformations axisymétriques.

(b) Comportement en compressions uniaxiale et triaxiales

Examinons à présent le cas d'une compression uniaxiale $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_3 \mathbf{e}_3^{\otimes 2}$ ($\sigma_3 < 0$). On présente à la figure 3.11 la réponse obtenue dans ce cas pour le béton considéré.

Comme précédemment, la première phase du comportement est élastique linéaire (jusqu'au point A). On note toutefois une dissymétrie entre les seuils de non linéarité obtenus pour la compression et la traction. Si l'on calcule le rapport des contraintes en ce point pour ces deux sollicitations, on obtient effectivement :

$$r_0 = -\frac{\overline{\sigma}_3^c}{\overline{\sigma}_3^t} = 1.6 \tag{3.52}$$

Ce rapport est relativement faible par rapport à un béton courant pour lequel r_0 varie entre 5 et 7. Une modification de l'expression de la dissipation, par exemple au travers d'une forme différente de la fonction $k(\mathbf{d})$, permettrait néanmoins d'accentuer cette dissymétrie.

Au delà de ce seuil, les courbes contrainte - déformations cessent ensuite d'être linéaires du fait de la propagation des dommages. On note sur la figure 3.11 que la distribution des défauts obtenue est quasiment isotrope, ce qui n'est pas en corrélation avec les observations expérimentales. Notons toutefois que, contrairement à la traction, la plupart des microfissures sont ici fermées et donc supposées glisser (*cf.* figure 3.12). L'hypothèse simplificatrice de parfaite lubrification de leurs lèvres nous semble alors être l'une des causes essentielles de ce résultat, la dissipation induite par le frottement des lèvres des microfissures fermées conditionnant effectivement dans la réalité la croissance de la densité de microfissures (voir par exemple Andrieux [3]).

La réalisation de décharges au cours de l'essai permet quant à elle d'examiner l'évolution des propriétés élastiques du matériau. Malgré les distributions de densités obtenues, on constate ainsi que les résultats à ce niveau vont dans le sens des observations expérimentales (voir par exemple Ramtani [51]): le module d'Young axial $E(\mathbf{e}_3)$ est bien progressivement dégradé, tandis que le coefficient de Poisson $\nu(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$ (= $\nu(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$) augmente avec l'endommagement (*cf.* figure 3.11). Chapitre 3



Figure 3.11: Réponse d'un béton à un essai de compression uniaxiale d'axe e_3 .

Pour ce qui est enfin des essais de compressions triaxiales avec pression de confinement, la réponse du matériau ne diffère que très peu de celle qui vient d'être présentée pour une compression uniaxiale. Si l'on examine le seuil d'endommagement initial dans l'espace des contraintes (*cf.* figure 3.13), on observe en effet que celui-ci tend dans le domaine de compression vers un cylindre de révolution centré sur l'axe hydrostatique, soit en d'autres termes qu'il ne dépend pas de la contrainte moyenne appliquée. On notera néanmoins que la description du glissement dissipatif sur les lèvres des microfissures fermées devrait permettre également de modifier ce résultat, comme on peut le voir sur les modélisations micro-macro (voir par exemple Andrieux [3]).



Figure 3.12: Réponse d'un béton à un essai de compression uniaxiale d'axe \mathbf{e}_3 : trajet de chargement et domaines d'ouverture - fermeture des microfissures dans l'espace des déformations axisymétriques.

Chapitre 3



Figure 3.13: Seuil initial d'endommagement d'un béton dans l'espace des contraintes axisymétriques.

(c) Comportement en traction - compression uniaxiales

Pour conclure cette analyse du modèle, on s'intéresse ici à un essai mettant en jeu une transition pour certains défauts entre état ouvert et état fermé. Le matériau est en effet soumis à une traction uniaxiale endommageante $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_3 \mathbf{e}_3^{\otimes 2}$ avec $\sigma_3 > 0$ (phase 1), puis déchargé totalement (phase 2) et enfin soumis à une compression réversible selon le même axe $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_3 \mathbf{e}_3^{\otimes 2}$ avec $\sigma_3 < 0$ (phase 3). La figure 3.14 présente la réponse du béton étudié à cette sollicitation.

On observe tout d'abord que la configuration de défauts induite par la traction (en phase 1) passe d'un état ouvert lors de la décharge (phase 2) à un état mixte lors de la compression (phase 3). En particulier, les microfissures qui se ferment sont celles situées plus ou moins perpendiculairement par rapport à l'axe de chargement.



Figure 3.14: Réponse d'un béton à un essai de traction - compression uniaxiales d'axe e_3 .

Au niveau de la réponse contrainte - déformation du matériau, cette transition s'effectue de façon continue, conformément à nos hypothèses. Les propriétés élastiques sont quant à elles bien modifiées par la fermeture des défauts. Ainsi par exemple,

$$\frac{E(\mathbf{e}_3)}{E_0} = \begin{cases} 0.81 & (phase \ 2) \\ 0.92 & (phase \ 3) \end{cases}$$
(3.53)

 \mathbf{et}

$$\frac{\nu(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)}{\nu_0} = \frac{\nu(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)}{\nu_0} = \begin{cases} 0.78 & (phase \ 2)\\ 1.12 & (phase \ 3) \end{cases}$$
(3.54)

Si l'on assiste à une certaine restitution de ces propriétés en phase 3, on note toutefois qu'elles ne récupèrent pas complètement leurs valeurs initiales, ce qui s'explique en partie par le fait que toutes les microfissures ne sont pas refermées par la compression.

Si les quelques essais qui viennent d'être présentés ont permis d'évaluer de façon globale les aptitudes du modèle, on notera que ce travail de validation devra dans l'avenir être complété et approfondi pour différents matériaux et pour des trajets de chargement plus complexes (en particulier les essais hors axes).
. .



Conclusion

Le modèle macroscopique d'endommagement par microfissuration présenté dans ces travaux semble apte à décrire quelques uns des phénomènes essentiels liés au comportement non linéaire des bétons et des roches. Cette approche permet en particulier de rendre compte d'une dégradation anisotrope des propriétés élastiques de ces matériaux et de la dépendance de celles-ci vis-à-vis de l'état d'ouverture fermeture des microfissures.

Il apparaît néanmoins, au vu des remarques et simulations présentées dans le dernier chapitre, que des améliorations et enrichissements devront être apportés à cette version de base. Une vérification sur le plan expérimental des hypothèses retenues pour sa construction ainsi qu'une validation plus complète seront notamment à envisager. La possibilité ici d'un aller - retour entre le niveau global et le niveau local (au travers de la distribution de densités) constituera pour cela un avantage majeur permettant une interprétation physique des équations proposées.

Il conviendra également dans le futur d'ouvrir le cadre trop restrictif de l'étude à la prise en compte d'autres phénomènes dissipatifs, et en premier lieu à celle du frottement. On notera à ce titre que le cadre formel de la modélisation y est très favorable, dans la mesure où l'on peut déterminer ici les directions de l'espace correspondant aux microfissures fermées et donc concernées par ce mécanisme.

Enfin, il est sans doute intéressant d'envisager le couplage avec d'autres phénomènes physiques. Grâce au caractère ouvert du modèle, on pourra notamment étendre celui-ci au cas des milieux poreux, la présence de fluide se révélant en effet primordiale dans le comportement des roches.

Annexe A: Calculs

(a) Expression de la partie irréductible de $n^{\otimes m}$

Soit $\langle T \rangle$ la somme de toutes les permutations différentes d'un tenseur T. Par exemple,

$$\langle \mathbf{I}^{\otimes 2} \rangle = \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mathbf{I} \,\overline{\underline{\otimes}} \,\mathbf{I}$$

$$\langle \mathbf{I} \otimes \mathbf{n}^{\otimes 2} \rangle = \mathbf{n}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{n}^{\otimes 2} + 2 \,\left(\mathbf{n}^{\otimes 2} \,\overline{\underline{\otimes}} \,\mathbf{I} + \mathbf{I} \,\overline{\underline{\otimes}} \,\mathbf{n}^{\otimes 2} \right)$$

$$(A.1)$$

La partie irréductible $\lfloor \mathbf{n}^{\otimes m} \rfloor$ du tenseur $\mathbf{n}^{\otimes m}$ d'ordre pair m s'exprime alors (*cf.* Zheng et Collins [64]):

$$\left\lfloor \mathbf{n}^{\otimes m} \right\rfloor = \sum_{r=0}^{m/2} (-1)^r \beta_r(m) \left\langle \mathbf{I}^{\otimes r} \otimes \mathbf{n}^{\otimes m-2r} \right\rangle$$
(A.2)

avec, dans le cas tridimensionnel considéré ici,

$$\beta_0(m) = 1, \ \beta_r(m) = \frac{\beta_{r-1}(m)}{2\left(\frac{1}{2} + m - r\right)}$$
(A.3)

Ainsi par exemple,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{1} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{n}^{\otimes 2} \end{bmatrix} = \mathbf{n}^{\otimes 2} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{n}^{\otimes 4} \end{bmatrix} = \mathbf{n}^{\otimes 4} - \frac{1}{7} \begin{bmatrix} \mathbf{n}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{n}^{\otimes 2} + 2 \left(\mathbf{n}^{\otimes 2} \overline{\otimes} \mathbf{I} + \mathbf{I} \overline{\otimes} \mathbf{n}^{\otimes 2} \right) \end{bmatrix} \\ + \frac{1}{35} \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mathbf{I} \overline{\otimes} \mathbf{I} \right)$$
 (A.4)

(b) Intégration sur la sphère unité S

L'intégration sur la sphère unité $S = \{ \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \}$ des produits tensoriels d'un vecteur unitaire \mathbf{n} exprimés dans la base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de \mathbb{R}^3 conduit aux résultats suivants (*cf.* Kanatani [30], He et Curnier [25]):

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S} ds = 1, \quad \frac{1}{4\pi} \int_{S} n_{i}n_{j} ds = \frac{1}{3} I_{ij}, \quad \frac{1}{4\pi} \int_{S} n_{i}n_{j}n_{k}n_{l} ds = \frac{1}{5} J_{ijkl},$$
$$\frac{1}{4\pi} \int_{S} n_{i}n_{j}n_{k}n_{l}n_{m}n_{n} ds = \frac{1}{7} J_{ijklmn}$$
$$\frac{1}{4\pi} \int_{S} n_{i}n_{j}n_{k}n_{l}n_{m}n_{n}n_{p}n_{q} ds = \frac{1}{9} J_{ijklmnpq}$$
(A.5)

avec

$$J_{ijkl} = \frac{1}{3} (I_{ij} I_{kl} + I_{ik} I_{jl} + I_{il} I_{jk})$$

$$J_{ijklmn} = \frac{1}{5} (I_{ij} J_{klmn} + I_{ik} J_{jlmn} + I_{il} J_{jkmn} + I_{im} J_{jkln} + I_{in} J_{jklm}) \quad (A.6)$$

$$J_{ijklmnpq} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} I_{ij} J_{klmnpq} + I_{ik} J_{jlmnpq} + I_{il} J_{jkmnpq} + I_{im} J_{jklnpq} \\ + I_{in} J_{jklmpq} + I_{ip} J_{jklmnpq} + I_{iq} J_{jklmnp} \end{pmatrix}$$

On a par ailleurs les deux propriétés suivantes (cf. He et Curnier [25], Zheng et Collins [64]):

• quels que soient les entiers pairs i et j tels que $i \neq j$,

$$\int_{\mathcal{S}} \left\lfloor \mathbf{n}^{\otimes i} \right\rfloor \otimes \left\lfloor \mathbf{n}^{\otimes j} \right\rfloor \, ds = 0_{i+j} \tag{A.7}$$

• quel que soit le tenseur irréductible X_i d'ordre pair i,

$$X_i \bullet \int_{\mathcal{S}} \mathbf{n}^{\otimes (i+j)} ds = 0_j \quad , \quad \forall \ j = 0, 2, 4, .., i - 2$$
 (A.8)

• ·. •

•

Annexe B: Conditions de continuité

Cette annexe étend une proposition initialement faite par Curnier *et al.* [15]. Précisons que la démonstration présentée ici se veut générale, l'application dont nous avons spécifiquement besoin dans le mémoire étant détaillée à la fin de cette annexe.

Position du problème

Soient F un espace vectoriel euclidien normé et \mathcal{A} un domaine de celui-ci séparé en deux domaines \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 par une interface ϕ caractérisée par une fonction $p: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$:

$$\mathcal{A}_{1} = \{ x \in \mathcal{A}, \ p(x) > 0 \} , \ \mathcal{A}_{2} = \{ x \in \mathcal{A}, \ p(x) < 0 \} ,$$

$$\phi = \{ x \in \mathcal{A}, \ p(x) = 0 \}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{1} \cup \mathcal{A}_{2} \cup \phi , \ \mathcal{A}_{1} \cap \mathcal{A}_{2} = \emptyset$$
(B.1)

On suppose que la fonction p présente toutes les propriétés nécessaires pour que \mathcal{A} soit séparé en deux moitiés comparables (les domaines \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 devront notamment être simplement connectés, *cf.* Curnier *et al.* [15]).

Les symboles D et D^2 placés devant le nom d'une fonction désignent respectivement ici (lorsqu'elles existent) les différentielles première et seconde au sens de Fréchet de celle-ci. **Proposition**: Soit la fonction $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ définie par:

$$\forall x \in \mathcal{A}, \quad f(x) = \begin{cases} f_1(x), & si \quad p(x) > 0\\ f_2(x), & si \quad p(x) \le 0 \end{cases}$$
(B.2)

où $f_1: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ et $f_2: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe C^2 sur \mathcal{A} et $p: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur \mathcal{A} .

La fonction f est alors de classe C^1 sur \mathcal{A} si et seulement si il existe un point x_0 de ϕ tel que

$$\begin{cases} f_1(x_0) = f_2(x_0) \\ D f_1(x_0) = D f_2(x_0) \end{cases}$$
(B.3)

et qu'en tout point x de ϕ ,

$$D^{2}[f_{1} - f_{2}](x)(x') = s(x) D p(x)(x') D p(x), \quad \forall x' \in F$$
(B.4)

où $s: F \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Démonstration : Compte tenu des propriétés de continuité de f_1 et f_2 , l'application f est de façon évidente de classe C^1 sur les domaines \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 de \mathcal{A} . La difficulté se situe par conséquent au niveau de ϕ . La démonstration proposée s'articule autour de deux lemmes.

Lemme 1: L'application f définie en (B.2) est continue sur ϕ si et seulement si il existe un point x_0 de ϕ tel que

$$f_1(x_0) = f_2(x_0) \tag{B.5}$$

et qu'en tout point x de ϕ ,

$$D[f_1 - f_2](x) = u(x) D p(x)$$
(B.6)

où $u: F \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur F.

Démonstration : Supposons l'application f continue sur ϕ , alors la relation (B.5) est trivialement vérifiée. Quels que soient deux points proches x et x' de ϕ , on en déduit également :

$$f_1(x) = f_2(x) \qquad f_1(x') = f_2(x') p(x) = 0 \qquad p(x') = 0$$
(B.7)

Les applications f_1 et f_2 étant de classe C^2 et p de classe C^1 sur \mathcal{A} , on peut écrire le développement limité suivant ($\|.\|$ désigne une norme sur F):

$$\begin{cases} f_1(x') = f_1(x) + D f_1(x)(x' - x) + o(||x' - x||) \\ f_2(x') = f_2(x) + D f_2(x)(x' - x) + o(||x' - x||) \\ p(x') = p(x) + D p(x)(x' - x) + o(||x' - x||) \end{cases}$$
(B.8)

En soustrayant la première relation (B.8) de la seconde et en utilisant les propriétés de continuité (B.7), on obtient :

$$\begin{cases}
D[f_1 - f_2](x)(x' - x) = o(||x' - x||) \\
Dp(x)(x' - x) = o(||x' - x||)
\end{cases}$$
(B.9)

Si l'on divise ces expressions par ||x' - x|| et l'on fait tendre x' vers x, le vecteur unitaire $\frac{x'-x}{||x'-x||}$ de F tend vers le vecteur T_x et, par linéarité de la différentielle, on en déduit que

$$\begin{cases} D[f_1 - f_2](x)(T_x) = 0\\ Dp(x)(T_x) = 0 \end{cases}$$
(B.10)

quel que soit le point x de ϕ et quel que soit le vecteur unitaire T_x de F, ce qui implique la relation (B.6) avec $u: F \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur F.

Réciproquement, supposons qu'il existe un point x_0 de ϕ où f soit continue et qu'en tout point x de ϕ la relation (B.6) soit vérifiée. L'application u étant continue et p de classe C^1 sur \mathcal{A} , on peut intégrer cette relation entre le point x_0 et un point x' de ϕ le long de ϕ :

$$\int_{x_0}^{x'} D[f_1 - f_2](x)(dx) = \int_{x_0}^{x'} u(x) Dp(x)(dx)$$
(B.11)

pour tous points x' et x appartenant à ϕ . Comme D p(x)(dx) = 0 sur ϕ , que f_1 et f_2 sont de classe C^2 sur \mathcal{A} , on a alors :

$$f_1(x') - f_2(x') - [f_1(x_0) - f_2(x_0)] = 0, \quad \forall \ x' \in \phi$$
(B.12)

Compte tenu de (B.5), on en déduit par conséquent que

$$f_1(x') = f_2(x'), \quad \forall \ x' \in \phi \tag{B.13}$$

i.e. que la fonction f est continue sur ϕ .

Lemme 2: L'application f définie en (B.2) est de classe C^1 sur ϕ si et seulement si il existe un point x_0 de ϕ tel que

$$D f_1(x_0) = D f_2(x_0) \tag{B.14}$$

et qu'en tout point x de ϕ ,

$$D^{2}[f_{1} - f_{2}](x)(x') = s(x) D p(x)(x') D p(x), \quad \forall x' \in F$$
(B.15)

où $s: F \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur F.

Démonstration : Supposons que la fonction f soit de classe C^1 sur ϕ , alors la relation (B.14) est trivialement vérifiée. De plus, en adoptant un raisonnement identique à celui du lemme précédent, on montre que ($\mathcal{O} : F \to \mathbb{R}$ la fonction nulle) :

$$\begin{cases} D^{2} [f_{1} - f_{2}](x)(T_{x}) = \mathcal{O} \\ D p(x)(T_{x}) = 0 \end{cases}$$
(B.16)

quel que soit le point x de ϕ , et quel que soit le vecteur unitaire T_x de F. Introduisons l'hyperplan $H_x = \{x' \in F, D p(x)(x') = 0\}$ de F. D'après l'algèbre linéaire, le système (B.16) précédent admet deux solutions :

- soit $D^2 f_1(x) = D^2 f_2(x);$
- soit $D^2 f_1(x) \neq D^2 f_2(x)$; dans ce cas $Ker D^2 [f_1 f_2](x) = H_x$ et Rang $D^2 [f_1 - f_2](x) = \dim F - \dim Ker D^2 [f_1 - f_2](x) = \dim F - \dim H_x = 1.$

La première solution correspond au cas trivial où la différentielle seconde de f est continue; la seconde en revanche autorise une discontinuité de celle-ci si l'application linéaire $D^2 [f_1 - f_2](x)$ est de rang un. Par conséquent

$$D^{2}[f_{1} - f_{2}](x)(x') = s(x) D p(x)(x') M(x)$$
(B.17)

où $s: F \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur F et $M(x): F \to \mathbb{R}$ une application linéaire non nulle. Les applications f_1 et f_2 étant de classe C^2 , on a en outre la symétrie suivante:

$$D^{2}[f_{1} - f_{2}](x)(x')(x'') = D^{2}[f_{1} - f_{2}](x)(x'')(x')$$
(B.18)

ce qui conduit à l'expression (B.15).

Réciproquement, supposons qu'il existe un point x_0 de ϕ où la différentielle première de f soit continue et qu'en tout point x de ϕ la relation (B.15) soit vérifiée. L'application s étant continue et g de classe C^1 sur \mathcal{A} , on peut intégrer cette relation entre le point x_0 et un point x' de ϕ le long de ϕ :

$$\int_{x_0}^{x'} D^2 [f_1 - f_2](x)(dx) = \int_{x_0}^{x'} s(x) D p(x)(dx) D p(x)$$
(B.19)

pour tous points x' et x appartenant à ϕ . Comme D p(x)(dx) = 0 sur ϕ , que f_1 et f_2 sont de classe C^2 sur \mathcal{A} , on a par conséquent :

$$D f_1(x') - D f_2(x') - [D f_1(x_0) - D f_2(x_0)] = \mathcal{O}, \quad \forall \ x' \in \phi$$
(B.20)

Compte tenu de (B.14), on en déduit alors que

$$D f_1(x') = D f_2(x'), \quad \forall x' \in \phi$$
(B.21)

i.e. que la différentielle Df de la fonction f est continue sur ϕ , et donc que f est de classe C^1 sur ϕ .

Application: Cas de la fonction h définie en (2.22)

L'espace vectoriel considéré est ici $F = \mathbb{R}^3 \times T^2$ et $\mathcal{A} = \mathcal{S} \times T^{2S}$ (T^{2S} désignant l'ensemble des tenseurs du second ordre symétriques). On rappelle que dans ce cas, si une fonction $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ est différentiable en un point $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon})$ de \mathcal{A} , sa différentielle première en ce point est définie par :

$$Df(\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{n}',\boldsymbol{\varepsilon}') = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{n}' + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{n},\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon}'$$
(B.22)

où $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon})$ et $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon})$ désignent les dérivées partielles premières de f en $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon})$. Si cette fonction est par ailleurs deux fois différentiable au point $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon})$ de \mathcal{A} , sa différentielle seconde en ce point est telle que:

$$D^{2} f(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{n}', \boldsymbol{\varepsilon}')(\mathbf{n}'', \boldsymbol{\varepsilon}'') = \mathbf{n}'' \cdot \frac{\partial^{2} f}{\partial \mathbf{n}^{2}}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{n}' + \mathbf{n}'' \cdot \frac{\partial^{2} f}{\partial \mathbf{n} \partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon}' + \boldsymbol{\varepsilon}'' : \frac{\partial^{2} f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{n}}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{n}' + \boldsymbol{\varepsilon}'' : \frac{\partial^{2} f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{2}}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon}'$$
(B.23)

où $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{n}^2}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}), \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{n} \partial \boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}), \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\epsilon} \partial \mathbf{n}}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon})$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon})$ représentent les dérivées partielles secondes de f en $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon})$. La proposition démontrée ci-avant revient dans ce cas à:

Proposition: Soit la fonction $h : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \in \mathcal{A}, \quad h(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{cases} h_1(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}), & si \quad g(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) > 0\\ h_2(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}), & si \quad g(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \le 0 \end{cases}$$
(B.24)

où $h_1: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ et $h_2: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe C^2 sur \mathcal{A} et $g: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur \mathcal{A} .

La fonction h est alors de classe C^1 sur \mathcal{A} si et seulement si il existe un point $(\mathbf{n}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0)$ tel que $g(\mathbf{n}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0) = 0$ et

$$\begin{cases} h_1(\mathbf{n}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0) = h_2(\mathbf{n}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0) \\\\ \frac{\partial h_1}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{n}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0) = \frac{\partial h_2}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{n}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0) \\\\ \frac{\partial h_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{n}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0) = \frac{\partial h_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{n}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0) \end{cases}$$
(B.25)

et qu'en tout point $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon})$ tel que $g(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = 0$,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 [h_1 - h_2]}{\partial \mathbf{n}^2} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = s(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \\ \frac{\partial^2 [h_1 - h_2]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{n}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = s(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \\ \frac{\partial^2 [h_1 - h_2]}{\partial \mathbf{n} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = s(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \\ \frac{\partial^2 [h_1 - h_2]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = s(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) \end{cases}$$
(B.26)

où $s: F \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

.

Annexe C: Récapitulatif des équations du modèle

♦ Variables d'état

Variable observable: tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ Variables internes d'endommagement (p un entier pair): $\mathbf{d} = (d_0, d_2, d_4, ..., d_p)$

♦ Potentiel thermodynamique (énergie libre)

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = W_{0}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \alpha \operatorname{tr} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) d_{0} + \beta (\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^{2} d_{0}$$
$$+ \chi \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \operatorname{tr} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot d_{2}) + \varphi \operatorname{tr} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d_{2}) + \psi \boldsymbol{\varepsilon} : d_{4} : \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$- \frac{1}{2} s \, \boldsymbol{\varepsilon} : \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_{2}(\boldsymbol{\varepsilon})} \hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}) \left[\delta_{1} \, \mathbf{n}^{\otimes 2} + \delta_{2} \, \mathbf{I} \right]^{\otimes 2} ds : \boldsymbol{\varepsilon}$$
(C.1)

avec

$$\hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}) = d_0 + d_2 : \lfloor \mathbf{n}^{\otimes 2} \rfloor + d_4 :: \lfloor \mathbf{n}^{\otimes 4} \rfloor + ... + d_p \bullet \lfloor \mathbf{n}^{\otimes p} \rfloor, \quad \forall \mathbf{n} \in \mathcal{S}$$

$$S_2(\boldsymbol{\varepsilon}) = \{ \mathbf{n} \in \mathcal{S}, \ g(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \delta_1 \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} + \delta_2 \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \leq 0 \}$$
(C.2)

Annexe C

$\mathbf{p} = 0$	\$	δ_1,δ_2
(i) (α, β) tels que $\alpha + 2\beta \neq 0$ $(\Delta_0 = 0)$	$\frac{1}{\alpha + 2\beta}$	$\{\delta_1 = -lpha, \ \delta_2 = lpha + 2eta\}$ ou $\{\delta_1 = lpha, \ \delta_2 = -lpha - 2eta\}$
(ii) (α, β) tels que $\alpha + 2\beta = 0$ et $\Delta_0 = 0$	3lpha	$\{\delta_1 = 1, \ \delta_2 = 0\}$ ou $\{\delta_1 = -1, \ \delta_2 = 0\}$
(iii) (α, β) tels que $\alpha + 2\beta = 0$ $et \Delta_0 \neq 0$		pas de solution

avec $\Delta_0 = \alpha \left(\alpha + 3 \beta \right)$

$\mathbf{p}=2$	S	δ_1,δ_2
(i) $(\alpha, \beta, \chi, \varphi)$ tels que $\alpha + 2\beta - 5\chi - \frac{5}{2}\varphi \neq 0$ $(\Delta_2 = 0)$	$rac{1}{lpha+2eta-5\chi-rac{5}{2}arphi}$	$\begin{cases} \delta_1 = -\alpha + \frac{15}{2}\chi + \frac{5}{2}\varphi \\ \delta_2 = \alpha + 2\beta - 5\chi - \frac{5}{2}\varphi \end{cases}$ ou $\begin{cases} \delta_1 = \alpha - \frac{15}{2}\chi - \frac{5}{2}\varphi \\ \delta_2 = -\alpha - 2\beta + 5\chi + \frac{5}{2}\varphi \end{cases}$
(ii) $(\alpha, \beta, \chi, \varphi)$ tels que $\alpha + 2\beta - 5\chi - \frac{5}{2}\varphi = 0$ et $\Delta_2 = 0$	$3lpha+rac{15}{2}arphi$	$\{\delta_1 = 1, \ \delta_2 = 0\}$ ou $\{\delta_1 = -1, \ \delta_2 = 0\}$
(iii) $(\alpha, \beta, \chi, \varphi)$ tels que $\alpha + 2\beta - 5\chi - \frac{5}{2}\varphi = 0$ $et \Delta_2 \neq 0$		pas de solution

avec $\Delta_2 = 4 (\alpha + 3 \beta) (2 \alpha + 5 \varphi) - 25 (3 \chi + 2 \varphi)^2$

Récapitulatif des équations du modèle

$\mathbf{p} \ge 4$	\$	δ_1,δ_2
(i) $(\alpha, \beta, \chi, \varphi, \psi)$ tels que $\alpha + 2\beta - 5\chi$ $-\frac{5}{2}\varphi + \frac{9}{2}\psi \neq 0$ $(\Delta_4 = 0)$	$\frac{1}{\alpha+2\beta-5\chi-\frac{5}{2}\varphi+\frac{9}{2}\psi}$	$\begin{cases} \delta_1 = -\alpha + \frac{15}{2}\chi + \frac{5}{2}\varphi - \frac{27}{2}\psi\\ \delta_2 = \alpha + 2\beta - 5\chi - \frac{5}{2}\varphi + \frac{9}{2}\psi \end{cases}$ $ou\\ \delta_1 = \alpha - \frac{15}{2}\chi - \frac{5}{2}\varphi + \frac{27}{2}\psi\\ \delta_2 = -\alpha - 2\beta + 5\chi + \frac{5}{2}\varphi - \frac{9}{2}\psi \end{cases}$
(ii) $(\alpha, \beta, \chi, \varphi, \psi)$ tels que $\alpha + 2\beta - 5\chi$ $-\frac{5}{2}\varphi + \frac{9}{2}\psi = 0$ et $\Delta_4 = 0$	$3lpha+rac{15}{2}arphi+rac{81}{2}\psi$	$\{\delta_1 = 1, \ \delta_2 = 0\}$ ou $\{\delta_1 = -1, \ \delta_2 = 0\}$
(iii) $(\alpha, \beta, \chi, \varphi, \psi)$ tels que $\alpha + 2\beta - 5\chi$ $-\frac{5}{2}\varphi + \frac{9}{2}\psi = 0$ $et \Delta_4 \neq 0$	pas de solution	

.

avec $\Delta_4 = 4 \,(\alpha + 3\,\beta) \,(2\,\alpha + 5\,\varphi + 27\,\psi) - 25\,(3\,\chi + 2\,\varphi)^2$

♦ Lois d'état

Contrainte σ

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = \lambda_0 (tr\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu_0 \boldsymbol{\varepsilon} + 2\alpha d_0 \boldsymbol{\varepsilon} + 2\beta d_0 (tr\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}$$

+
$$\chi [tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot d_2) \mathbf{I} + (tr \boldsymbol{\varepsilon}) d_2] + \varphi (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot d_2 + d_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + 2\psi d_4 : \boldsymbol{\varepsilon}$$
 (C.3)
- $s \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2(\boldsymbol{\varepsilon})} \hat{\rho}(\mathbf{n}, \mathbf{d}) [\delta_1 \mathbf{n}^{\otimes 2} + \delta_2 \mathbf{I}]^{\otimes 2} ds : \boldsymbol{\varepsilon}$

Forces thermodynamiques $\mathbf{F^d} = (F^{d_0}, F^{d_2}, F^{d_4}, ..., F^{d_p})$

$$F^{d_0}(\boldsymbol{\varepsilon}) = -\alpha \operatorname{tr} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - \beta (\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \frac{s}{8\pi} \int_{\mathcal{S}_2(\boldsymbol{\varepsilon})} (\delta_1 \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} + \delta_2 \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 ds$$
(C.4)

$$F^{d_{2}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = -\chi tr \boldsymbol{\varepsilon} \lfloor \boldsymbol{\varepsilon} \rfloor - \varphi \lfloor \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \rfloor + \frac{s}{8\pi} \int_{\mathcal{S}_{2}(\boldsymbol{\varepsilon})} (\delta_{1} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} + \delta_{2} tr \boldsymbol{\varepsilon})^{2} \lfloor \mathbf{n}^{\otimes 2} \rfloor ds$$
(C.5)

$$F^{d_4}(\boldsymbol{\varepsilon}) = -\frac{1}{3} \psi \left[\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} + 2 \boldsymbol{\varepsilon} \,\overline{\otimes} \,\boldsymbol{\varepsilon} \right] \\ + \frac{s}{8\pi} \int_{\mathcal{S}_2(\boldsymbol{\varepsilon})} \left(\delta_1 \,\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} + \delta_2 \, tr \boldsymbol{\varepsilon} \right)^2 \left[\mathbf{n}^{\otimes 4} \right] \, ds$$
(C.6)

$$F^{d_k}(\boldsymbol{\varepsilon}) = + \frac{s}{8\pi} \int_{\mathcal{S}_2(\boldsymbol{\varepsilon})} \left(\delta_1 \, \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} + \delta_2 \, tr \boldsymbol{\varepsilon} \right)^2 \, \left\lfloor \mathbf{n}^{\otimes k} \right\rfloor \, ds \quad , \quad \forall \, k = 6, 8, .., p$$
(C.7)

♦ Loi d'évolution de l'endommagement

$$\dot{\mathbf{d}} = \begin{cases} \mathbf{0} & , \quad si \quad f\left(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}\right) = \|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}\| - k_{0}(1 + \eta d_{0}) < 0 \\ \\ \frac{\left[\left(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \dot{\mathbf{F}}^{\mathbf{d}}\right)\right]^{+}}{k_{0} \eta F^{d_{0}} \|\mathbf{F}^{\mathbf{d}}\|} \mathbf{F}^{\mathbf{d}} , \quad si \quad f\left(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}, \mathbf{d}\right) = 0 \end{cases}$$
(C.8)



.

Bibliographie

- Acker P., "Comportement mécanique du béton: apports de l'approche physico-chimique", thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1987.
- [2] Allix O., Cluzel C., Gasser A., Ladevèze P., "Modélisation des composites céramique - céramique à différentes échelles", Rev. Comp. Mater. Avanc., vol. 3, pp. 277-297, 1993.
- [3] Andrieux S., "Un modèle de matériau microfissuré: Applications aux roches et aux bétons", thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1983.
- [4] Badel P., "Contributions à la simulation numérique de structures en béton armé", thèse de doctorat, Université de Paris VI, 2001.
- [5] Berthaud Y., "Mesure de l'endommagement du béton par une méthode ultrasonore", thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1988.
- [6] Boehler J. P., Applications of tensor functions in solid mechanics, Springer Verlag, Wien, 1987.
- Budiansky B., O'Connell R. J., "Elastic moduli of a cracked solid", Int. J. Solids Structures, vol. 12, pp. 81-97, 1976.
- [8] Burlion N., "Technique d'essais et caractérisation expérimentale", [dans] Comportement mécanique du béton, Ed. Pijaudier-Cabot G. et Reynouard J.M., Hermès, Paris, 2002 (à paraître).
- [9] Carol I., Willam K., "Spurious energy dissipation/generation in stiffness recovery models for elastic degradation and damage", Int. J. Solids Structures, vol. 33, n° 20-22, pp. 2939-2957, 1996.

- [10] Chaboche J. L., "Damage induced anisotropy: on the difficulties associated with the active/passive unilateral condition", Int. J. Damage Mech., vol. 1, pp. 148-171, 1992.
- [11] Chaboche J. L., "Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage", Int. J. Damage Mech., vol. 2, pp. 311-329, 1993.
- [12] Chaboche J. L., Maire J. F., "A new micromechanics based CDM model and its application to CMC's", Aero. Sci. Tech., vol. 6, pp. 131-145, 2002.
- [13] Cormery F., Welemane H., "A critical review of some damage models with unilateral effect", Mech. Res. Comm., vol. 29, pp. 391-395, 2002.
- [14] Cowin S., "The relationship between the elasticity tensor and the fabric tensor", Mech. Mater., vol. 4, pp. 137-147, 1985.
- [15] Curnier A., He Q. C., Zysset P., "Conewise linear elastic materials", J. Elasticity, vol. 37, pp. 1-38, 1995.
- [16] Desmorat R., "Dissymétrie de comportement élastique anisotrope couplé ou non à l'endommagement", C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série IIb, pp. 445-450, 2000.
- [17] Dragon A., Cormery F., Desoyer T., Halm D., "Localized failure analysis using damage models", [dans] Localization and bifurcation theory for soils and rocks, Ed. Chambon R. et al., Balkema, Rotterdam, pp. 127-140, 1994.
- [18] François M., "Identification des symétries matérielles de matériaux anisotropes", thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1995.
- [19] Gatelier N., "Etude expérimentale et théorique de l'endommagement des roches anisotropes", thèse de doctorat, Université de Grenoble I, 2001.
- [20] Germain P., Cours de mécanique des milieux continus, Masson, Paris, 1973.
- [21] Halm D., Dragon A., "A model of anisotropic damage by mesocrack growth; unilateral effect", Int. J. Damage Mech., vol. 5, pp. 384-402, 1996.

- [22] Halphen B., Nguyen Q. S., "Sur les matériaux standards généralisés",
 J. Méca., vol. 14, n° 1, pp. 39-63, 1975.
- [23] Hayes M., "A simple statical approach to the measurement of the elastic constants in anisotropic media", J. Mater. Sci., vol. 4, pp. 10-14, 1969.
- [24] Hayes M., "Connexions between the moduli for anisotropic elastic materials", J. Elasticity, vol. 2, n° 2, 1972.
- [25] He Q. C., Curnier A., "A more fundamental approach to damaged elastic stress-strain relations", Int. J. Solids Structures, vol. 32, pp. 1433-1457, 1995.
- [26] Homand F., Duffaut P. [coordonnateurs], Manuel de mécanique des roches -Tome 1: fondements, Ecole des mines de Paris, 1999.
- [27] Homand F., Hoxha D., Belem T., Pons M. N., Hoteit N., "Geometric analysis of damaged microcracking in granites", Mech. Mater., vol. 32, pp. 361-376, 2000.
- [28] Jones M. N., Spherical harmonics and tensors in classical field theory, Wiley & Sons, New York, 1985.
- [29] Kachanov M., "Elastic solids with many cracks and related problems", [dans] Advances in applied mechanics, vol. 30, Ed. Hutchinson J. et Wu T., Academic Press, New York, pp. 259-445, 1993.
- [30] Kanatani K. I., "Distribution of directional data and fabric tensors", Int. J. Engng Sci., vol. 22, n° 2, pp. 149-164, 1984.
- [31] Karami M. H., "Etude expérimentale du comportement poromécanique d'une roche endommageable", thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1998.
- [32] Krajcinovic D., "Micromechanical basis of phenomenological models", [dans] Continuum damage mechanics - Theory and applications, Ed. Krajcinovic D. et Lemaitre J., Springer Verlag, Wien, pp. 195-206, 1987.
- [33] Krajcinovic D., "Damage Mechanics", [dans] Applied mathematics and mechanics, vol. 41, Ed. Achenbach J. D. et al., Elsevier Science B. V., Amsterdam, 1996.

- [34] Kunin I. A., "An algebra of tensor operators and its application to elasticity", Int. J. Engng Sci., vol. 19, n° 12, pp. 1551-1561, 1981.
- [35] Lemaitre J., Chaboche J. L., Mécanique des matériaux solides, Dunod, Paris, 1988.
- [36] Lockner D.A., Byerlee J. D., "Fault growth and acoustic emissions in confined granite", ASME Appl. Mech. Rev., vol. 45, n° 3, part 2, pp. 165-173, 1992.
- [37] Lorentz E., "Lois de comportement à gradients de variables internes: construction, formulation variationnelle et mise en oeuvre numérique", thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1999.
- [38] Lubarda V. A., Krajcinovic D., "Damage tensors and the crack density distribution", Int. J. Solids Structures, vol. 30, n°20, pp. 2859-2877, 1993.
- [39] Maire J. F., Lesne P. M., "A damage model for ceramic matrix composites", Aero. Sci. Tech., vol. 4, pp. 259-266, 1997.
- [40] Marigo J. J., "Propagation des ondes ultrasonores et microfissuration du béton", thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1980.
- [41] Marigo J. J., "Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique", C. R. Acad. Sci. Paris, Série II, t. 292, n° 19, pp. 33-36, 1981.
- [42] Marigo J. J., "Constitutive relations in plasticity, damage and fracture mechanics based on a work property", Nuclear Eng. Design, vol. 114, pp. 249-272, 1989.
- [43] Mazars J., "Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure", thèse de doctorat d'état, Université de Paris VI, 1984.
- [44] Nemat-Nasser S., Hori M., "Micromechanics: overall properties of heterogenous materials", [dans] Applied mathematics and mechanics, vol. 37, Ed. Achenbach J. D. et al., Elsevier Science B. V., Amsterdam, 1993.
- [45] Nemati K. M., "Generation and interaction of compressive stress-induced microcracks in concrete", Ph-D thesis, University of California, Berkeley, 1994.

- [46] Onat E. T., "Effective properties of elastic materials that contain penny shaped voids", Int. J. Engng Sci., vol. 22, pp. 1013-1021, 1984.
- [47] Ortiz M., Popov E. P., "Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic consitutive relations", Int. J. Num. Meth. Engng, vol. 21, pp. 1561-1576, 1985.
- [48] Panet M., "Propriétés mécaniques des roches", [dans] La mécanique des roches appliquée aux ouvrages de génie civil, Ed. Panet M. et al., Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1976.
- [49] Paterson M. S., Experimental rock deformation The brittle field, Ed. Wyllie
 P. J. et al., Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [50] Pensée V., Kondo D., "Une analyse micromécanique 3-D de l'endommagement par microfissuration", C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, série IIb, pp. 271-276, 2001.
- [51] Ramtani S., "Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral", thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1990.
- [52] Sayehi M., "Etude expérimentale de l'endommagement du grès de Fontainebleau", thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1992.
- [53] Sayers C. M., Kachanov M., "A simple technique for finding effective elastic constants of cracked solids for arbitrary crack orientation statistics", Int. J. Solids Structures, vol. 27, n° 6, pp. 671-680, 1991.
- [54] Sibaï M., Communication privée.
- [55] Spencer A. J. M., "Constitutive theory for strongly anisotropic solids", [dans]
 Continuum theory of the mechanics of fibre-reinforced composites, Ed. Spencer
 A. J. M., Springer CISM, n° 282, pp. 1-32, 1984.
- [56] Suquet P., "Plasticité et homogénéisation", thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1982.

- [57] Terrien M., "Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction", Bull. Liaison Laboratoire des Ponts et Chaussées, n° 105, ref. 2398, 1980.
- [58] Tikhomirov D., Niekamp R., Stein E., "On three-dimensional microcrack density distribution", Z. Angew. Math. Mech., vol. 81, n° 1, pp. 3-16, 2001.
- [59] Van Mier J. G. M., "Strain softening of concrete under multiaxial loading conditions", doctoral dissertation, Eindhoven University of technology, The Netherlands, 1984.
- [60] Van Mier J. G. M., Van Vliet M. R. A., "Uniaxial tension test for the determination of fracture parameters of concrete: state of the art", Eng. Frac. Mech., vol. 69, pp. 235-247, 2002.
- [61] Welemane H., "Un modèle d'endommagement par mésofissuration", D.E.A. de Génie Civil, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1998.
- [62] Welemane H., Cormery F., "Some remarks on the damage unilateral effect modelling for microcracked materials", Int. J. Damage Mech., vol. 11, pp. 65-86, 2002.
- [63] Zheng Q. S., "A unified invariant description of micromechanically-based effective elastic properties for two-dimensional damaged solids", Mech. Mater., vol. 25, pp. 273-289, 1997.
- [64] Zheng Q. S., Collins I. F., "The relationship between damage variables and their evolution laws and microstructural and physical properties", Proc. R. Soc. Lond. A, vol. 454, pp. 1469-1498, 1998.