

Université des Sciences et Technologies de LILLE  
Laboratoire de Mécanique de Lille (UMR CNRS 8107)

# THESE

*pour l'obtention du titre de*

# DOCTEUR

*de*

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

Discipline : Génie Civil

*présentée par*

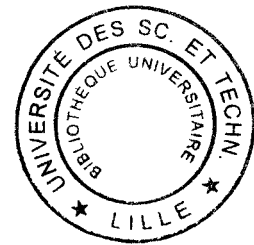
**Vincent PENSÉE**

## **Contribution de la micromécanique à la modélisation tridimensionnelle de l'endommagement par mésofissuration**

*soutenue le 19 décembre 2002*

*devant le jury composé de*

- |             |   |
|-------------|---|
| Z. MRÒZ     | Professeur, IPPT, Varsovie, <i>Président</i>                                    |
| T. DÉSOYER  | Professeur, Université Aix-Marseille II, Marseille, <i>Rapporteur</i>           |
| L. DORMIEUX | Professeur, ENPC, Champs-sur-Marne, <i>Rapporteur</i>                           |
| D. AUBRY    | Professeur, Ecole Centrale, Châtenay-Malabry                                    |
| G. BONNET   | Professeur, Université de Marne-la-Vallée, Champs-sur-Marne                     |
| D. KONDO    | Professeur, Université de Lille I, Villeneuve d'Ascq, <i>Directeur de thèse</i> |





*A Elodie,  
A mes parents et grands-parents.*



*C'est avec une certaine appréhension que j'aborde l'ultime étape de la rédaction de cette thèse que sont les remerciements. Bien conscient de tout ce que les autres m'ont apporté, il s'agit de trouver les mots justes pour leur exprimer pleinement, mais simplement, ma reconnaissance.*

*En tout premier lieu, je pense à Djimédo Kondo qui a dirigé cette thèse avec énormément de patience, beaucoup d'enthousiasme et une dose d'exigence. La base de ce travail se trouve dans nos nombreuses discussions où il a su me faire partager sa passion pour la recherche et éveiller ma curiosité scientifique. Son soutien constant a rendu facile ces trois années même dans les moments les plus critiques... Qu'il trouve en ces quelques lignes, le témoignage amical de ma profonde reconnaissance.*

*C'est ensuite à Hélène Weleman, ma collègue de bureau et amie, que je pense. Merci Hélène pour ta gentillesse, tes encouragements, ... Ces années m'auraient sans doute parues beaucoup plus longues sans ta présence quotidienne et ton humour décapant.*

*Luc Dormieux a montré beaucoup d'intérêt pour ce travail dès notre première rencontre. J'ai pu bénéficier, lors de nos différents échanges, de ses connaissances et sa rigueur scientifique. Je suis donc très honoré qu'il ait accepté la lourde tâche d'être rapporteur de ce mémoire.*

*Je remercie également Thierry Desoyer qui s'est vu confier la même tâche et j'ai été particulièrement sensible à la grande attention qu'il a porté à ce travail.*

*Je souhaite ensuite manifester ma reconnaissance à Monsieur Z. Mròz qui m'a fait l'honneur de présider ce jury, ainsi qu'à Messieurs D. Aubry et G. Bonnet qui ont participé à l'évaluation de ce travail.*

*Je remercie chaleureusement G. Caignaert et J.F. Shao, respectivement directeur du laboratoire de Mécanique de Lille et responsable de l'équipe "Mécanique des géomatériaux cohérents", de m'avoir accueilli et offert des conditions de travail très appréciables. J'exprime ma reconnaissance au C.N.R.S. et au Conseil Régional Nord-Pas de Calais qui ont financé ce travail.*

*Enfin, il y a tous les autres : les membres de l'équipe, les collègues thésards, tous ceux qui m'ont permis de près ou de loin, de mener à bien cette thèse. Qu'ils trouvent tous l'expression de ma profonde gratitude. Je pense en particulier à Fabrice, Nicolas, Stéphane, Cosmin, Annabelle.*

*Je ne terminerai pas ces remerciements sans me tourner vers ma famille qui m'a soutenu tout au long de mes études. Je n'oublie pas ma femme Elodie qui, même si les derniers mois lui ont paru longs et pénibles, m'a toujours épaulé. Je leur dois bien plus qu'ils ne l'imaginent !*

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>11</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>15</b>
<b>Chapitre I Comportement macroscopique et modélisation micromécanique des milieux mésolfissurés</b>	<b>21</b>
I.1 Endommagement fragile et mésolfissuration des géomatériaux . . . . .	22
I.1.1 Comportement fragile en traction directe . . . . .	22
I.1.2 Comportement en compression . . . . .	23
I.1.3 Compression triaxiale axisymétrique . . . . .	25
I.1.4 Synthèse . . . . .	28
I.2 Comportement macroscopique des milieux mésolfissurés : approche directe .	30
I.2.1 Généralités et méthodologie . . . . .	30
I.2.2 Expression générale de l'énergie libre macroscopique . . . . .	34
I.3 Comportement élastique macroscopique avec prise en compte des effets unilatéraux . . . . .	35
I.3.1 Critère d'ouverture/fermeture des mésolfissures . . . . .	35
I.3.2 Energie élastique macroscopique . . . . .	37
I.3.3 Généralisation à une distribution quelconque de mésolfissures . . . . .	39
I.3.4 Expression de l'enthalpie libre macroscopique . . . . .	40
I.3.5 Propriétés élastiques effectives et effets unilatéraux . . . . .	42
I.4 Conclusion . . . . .	48
<b>Chapitre II Modélisation de l'endommagement anisotrope avec effets unilatéraux</b>	<b>49</b>
II.1 Potentiel thermodynamique et lois d'état . . . . .	50
II.1.1 Variables internes d'endommagement . . . . .	50

II.1.2	Propriétés du potentiel thermodynamique . . . . .	50
II.1.3	Sur la représentation tensorielle macroscopique de l'endommagement anisotrope . . . . .	52
II.1.4	Procédure d'intégration numérique du potentiel thermodynamique .	53
II.1.5	Lois d'état . . . . .	54
II.2	Critère d'endommagement et lois d'évolution de l'endommagement . . . . .	56
II.2.1	Critère d'endommagement . . . . .	57
II.2.2	Lois d'évolution . . . . .	58
II.2.3	Formulation en vitesse de la loi d'endommagement . . . . .	59
II.2.4	Intégration numérique locale . . . . .	60
II.3	Procédure d'identification des paramètres du modèle . . . . .	60
II.3.1	Identification de la densité initiale de mésofissures et des modules élastiques . . . . .	61
II.3.2	Identification de $k$ et $\eta$ . . . . .	62
II.4	Choix du nombre de points de Gauss . . . . .	64
II.4.1	Test général . . . . .	65
II.4.2	Comparaison des prédictions sur un trajet de traction ou de compression uniaxiale . . . . .	65
II.5	Illustration du critère d'endommagement . . . . .	68
II.5.1	Etat de déformation axisymétrique . . . . .	68
II.5.2	Etat de torsion - compression (ou traction) . . . . .	71
II.5.3	Etats plans . . . . .	71
II.6	Capacités prédictives du modèle d'endommagement . . . . .	71
II.6.1	Etude analytique : une seule famille de mésofissures . . . . .	74
II.6.2	Essai de traction et de compression uniaxiale . . . . .	76
II.6.3	Essai de traction-compression . . . . .	79
II.6.4	Chargement uniaxial cyclique . . . . .	82
II.6.5	Essai axisymétrique proportionnel . . . . .	82
II.7	Conclusion . . . . .	84

**Chapitre III Introduction du frottement - Couplage avec l'endommagement** **87**

III.1	Modélisation du glissement avec frottement . . . . .	88
III.1.1	Critère de glissement par frottement - Loi d'évolution . . . . .	89
III.1.2	Illustration : torsion homogène . . . . .	93

III.2	Couplage endommagement - glissement avec frottement . . . . .	94
III.2.1	Critères d'endommagement et de glissement . . . . .	95
III.2.2	Découplage des dissipations et lois d'évolutions . . . . .	95
III.2.3	Illustration : torsion homogène . . . . .	97
III.3	Généralisation à une distribution quelconque de mésolfissures . . . . .	99
III.3.1	Potentiel thermodynamique . . . . .	99
III.3.2	Lois d'état, critères de glissement et d'endommagement . . . . .	100
III.3.3	Formulation en vitesse . . . . .	100
III.4	Intégration numérique locale . . . . .	101
III.5	Evaluation des capacités prédictives du modèle couplé . . . . .	102
III.5.1	Choix du matériau et identification . . . . .	102
III.5.2	Comportement sous sollicitations biaxiales . . . . .	104
III.5.3	Comportement sous sollicitations multiaxiales . . . . .	108
III.6	Simulations d'autres trajets de chargement et influence des paramètres. . .	108
III.6.1	Compression triaxiale . . . . .	111
III.6.2	Cisaillement simple . . . . .	116
<b>Chapitre IV Poroélasticité macroscopique des milieux endommageables</b>		<b>119</b>
IV.1	Effet de la mésolfissuration sur le comportement poromécanique . . . . .	121
IV.1.1	Poroélasticité linéaire isotrope : théorie de Biot [21] . . . . .	121
IV.1.2	Mise en évidence du rôle et des effets de la mésolfissuration sur le comportement poromécanique . . . . .	123
IV.1.3	Influence de la mésolfissuration sur le coefficient de Biot . . . . .	124
IV.2	Approche micromécanique directe de la poroélasticité des milieux mésolfissurés	126
IV.2.1	Décomposition du problème . . . . .	126
IV.2.2	Résolution du problème - Energie libre . . . . .	127
IV.2.3	Potentiels thermodynamiques (Pensée <i>et al.</i> [115]) . . . . .	128
IV.3	Prise en compte d'une porosité connectée initiale . . . . .	133
IV.4	Généralisation à une distribution quelconque de mésolfissures . . . . .	135
IV.5	Critère d'endommagement et loi couplée . . . . .	135
IV.5.1	Critère d'endommagement . . . . .	135
IV.5.2	Lois d'évolution . . . . .	137
IV.5.3	Formulation en vitesse de la loi couplée poroélasticité - endomma- gement . . . . .	137
IV.6	Quelques applications . . . . .	138



IV.6.1 Evolution en conditions drainées . . . . .	138
IV.6.2 Mise en pression interne . . . . .	141
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>147</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>151</b>
<b>Annexe A Homogénéisation des milieux élastiques fissurés : approche par tenseur d'Eshelby</b>	<b>167</b>
A.1 Principes de base des méthodes de changement d'échelle . . . . .	167
A.2 Application aux milieux mésosfissurés . . . . .	168
A.2.1 Cas des fissures ouvertes : $\mathbb{C}^f = 0$ . . . . .	169
A.2.2 Cas des fissures fermées : $\mathbb{C}^f = 3k^s \mathbb{J}$ . . . . .	170
A.2.3 Comparaison des deux approches . . . . .	170
A.3 Prise en compte des interactions . . . . .	171
A.3.1 Cas des fissures ouvertes : $\mathbb{C}^f = 0$ . . . . .	172
A.3.2 Cas des fissures fermées : $\mathbb{C}^f = 3k^s \mathbb{J}$ . . . . .	172
<b>Annexe B Distribution cylindrique de mésosfissures : expressions des modules élastiques</b>	<b>175</b>
B.1 Modèle en déformations . . . . .	175
B.1.1 Mésosfissures toutes ouvertes . . . . .	175
B.1.2 Mésosfissures toutes fermées . . . . .	176
B.2 Modèle en contraintes . . . . .	176
B.2.1 Mésosfissures toutes ouvertes . . . . .	176
B.2.2 Mésosfissures toutes fermées . . . . .	176
<b>Annexe C Sur la représentation tensorielle de l'endommagement</b>	<b>177</b>
C.1 Approximation à l'aide d'un tenseur d'ordre deux . . . . .	177
C.2 Approximation par un tenseur d'ordre quatre . . . . .	179
<b>Annexe D Introduction d'une ouverture initiale</b>	<b>181</b>
<b>Annexe E Poroélasticité macroscopique : approche de type Eshelby</b>	<b>185</b>
<b>Annexe F Evolution en conditions non-drainées</b>	<b>187</b>

# Notations

## • Notations tensorielles

$a$	scalaire	.	contraction simple
$\underline{a}$	vecteur	:	double contraction
$\underline{\underline{a}}$	tenseur d'ordre deux	$\otimes$	produit tensoriel
$\mathbb{A}$	tenseur d'ordre quatre	$\overset{s}{\otimes}$	produit tensoriel symétrisé
$\underline{\underline{\delta}}$	tenseur unité d'ordre deux	$\mathbb{I}$	tenseur unité d'ordre quatre
$\mathbb{J}$	$= \frac{1}{3} \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}}$	$\mathbb{K}$	$= \mathbb{I} - \mathbb{J}$
$(\underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}})_{ijkl}$	$= a_{il} b_{jk}$	$(\underline{\underline{a}} \overset{s}{\otimes} \underline{\underline{b}})_{ijkl}$	$= a_{ik} b_{jl}$ $\underline{\underline{a}} \overset{s}{\otimes} \underline{\underline{b}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}} + \underline{\underline{a}} \overset{s}{\otimes} \underline{\underline{b}})$

## • Paramètres matériau

$\mathbb{C}^s$	tenseur d'élasticité de la matrice solide
$\mathbb{C}^{hom}$	tenseur d'élasticité homogénéisé
$E^s$	module d'Young de la matrice solide
$\nu^s$	coefficient de Poisson de la matrice solide
$\lambda^s$ et $\mu^s$	paramètres de Lamé de la matrice solide
$k^s$	module de compression de la matrice solide
$H_0$	$= \frac{3E^s}{16(1 - \nu^{s2})}$

• Notations communes à tous les chapitres

$\underline{\underline{E}}$  tenseur de déformation macroscopique

$\underline{\underline{\Sigma}}$  tenseur de contrainte macroscopique

$\underline{\underline{\varepsilon}}$  tenseur de déformation microscopique

$\underline{\underline{\sigma}}$  tenseur de contrainte microscopique

$\underline{u}$  champ de déplacement

$\beta$  paramètre caractérisant l'ouverture des mésolfissures

$\underline{\gamma}$  vecteur glissement sur les lèvres des mésolfissures

$\mathcal{P}$  nombre de points d'intégration

$\varpi^i$  poids d'intégration associé à la  $i^{\text{ème}}$  famille de mésolfissures

• Notations associées à l'endommagement

$\underline{n}$  vecteur normal à une famille de mésolfissures

$\rho$  fonction caractérisant la distribution des densités d'endommagement

$S^2$  surface de la sphère unité

$S^{2+}(\underline{\underline{E}})$  domaine des normales où les mésolfissures sont ouvertes

$S^{2-}(\underline{\underline{E}})$  domaine des normales où les mésolfissures sont fermées

$\rho_0^d$  densité initiale d'endommagement, supposée isotrope

$\rho^d = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \rho(\underline{n}) dS$  densité globale d'endommagement

$d$  densité d'endommagement d'une famille particulière de mésolfissures

$\underline{\underline{\Delta}} = \underline{n} \otimes \underline{n} \quad \underline{\underline{N}} = \mathbb{C}^s : \underline{\underline{\Delta}}$

---

• Notations particulières aux modèles

$\mathcal{R}(d) = k(1 + \eta d)$  fonction de résistance à la fissuration

$k, \eta$  paramètres du modèle d'endommagement

$\mu_c$  coefficient de frottement

• Notations propres au chapitre IV

$p$  pression du fluide

$\phi$  porosité de pores

$\phi_0$  porosité connectée

$m$  : paramètre masse fluide

$\rho_0$  masse volumique du fluide

$\underline{\underline{B}}, M$  tenseur des coefficients et module de Biot

d'un milieu contenant une seule famille de mésolfissures

$\underline{\underline{B}}, \mathcal{M}$  tenseur des coefficients et module de Biot généralisés

# Introduction générale

L'étude du comportement macroscopique non linéaire des matériaux du Génie Civil constitue une des préoccupations majeures de la recherche dans ce domaine. Malgré leur différence de constitution, les géomatériaux cohérents tels que les bétons ou certaines roches présentent des similitudes de comportement qui s'expliquent principalement par les phénomènes de microfissuration qui s'y développent. Cette caractéristique commune les rapproche d'ailleurs d'autres classes de matériaux fragiles comme les céramiques ou les composites à matrice fragile.

La reconnaissance de la microfissuration comme source principale de la détérioration de bon nombre de propriétés physiques des géomatériaux a conduit à aborder et interpréter leur comportement macroscopique à travers l'évolution de la microstructure (cf. [81, 102]). De plus, certains aspects du comportement de ces matériaux (par exemple la transition vers un comportement moins fragile ou vers un comportement ductile) s'interprètent classiquement en évoquant la microfissuration. Sur un plan plus pratique, on notera les phénomènes de dégradation mécanique du béton<sup>1</sup> couramment observés dans les structures du Génie Civil ou encore l'importance des modifications de nombreuses propriétés physiques des roches (caractéristiques mécaniques, perméabilités,...) (Cf. [59]). S'agissant du stockage souterrain, de nombreuses questions liées à la présence ou non de zones endommagées dans le massif hôte apparaissent tout à fait cruciales pour l'évaluation de la sûreté des ouvrages étudiés.

L'étude théorique de la dégradation par microfissuration des matériaux fragiles est classiquement abordée dans le cadre de la Mécanique de l'endommagement. Il s'agit d'une discipline récente de la Mécanique des solides dont on situe généralement les débuts dans les travaux fondateurs de Kachanov [72] puis de Rabotnov [119]. Depuis une trentaine

---

<sup>1</sup>Les développements récents en mécanique de la durabilité du béton font état de divers modes couplés de détérioration dans le temps, dont bon nombre impliquent des phénomènes de microfissuration.

d'années, la Mécanique de l'endommagement s'est surtout développée dans un contexte phénoménologique, en adoptant l'approche classique par variables internes de la thermodynamique des processus irréversibles. Les progrès réalisés sont nombreux et ont notamment porté sur la description de l'anisotropie induite par la microfissuration orientée. Toutefois, de nombreuses difficultés apparaissent dans le développement de ce type d'approche lorsque l'on souhaite rendre compte à l'échelle macroscopique d'un certain nombre d'effets liés au comportement unilatéral (lors de la refermeture) des microfissures. Une synthèse critique des nombreuses inconsistances (discontinuité dans les réponses mécaniques, non symétrie du tenseur d'élasticité endommagé,...) peut être trouvée dans Chaboche [30]. Ces critiques ont été à l'origine de nouvelles approches macroscopiques basées pour la plupart sur l'utilisation d'une variable tensorielle d'endommagement d'ordre 2,  $\underline{D}$  (cf. [32, 33, 63, 99]). Malgré ces efforts, il semble qu'il subsiste toujours dans ces nouvelles modélisations un certain nombre d'incohérences (cf. Cormery et Welemane [36]). En liaison avec les difficultés introduites par ces phénomènes de désactivation de l'endommagement, certaines questions inhérentes à la démarche macroscopique font encore l'objet de discussions ; elles concernent par exemple le choix d'une représentation macroscopique appropriée de l'endommagement par mésolfissuration ou l'écriture du potentiel thermodynamique du milieu endommagé. Il est évident que l'approche purement macroscopique ne peut trouver en elle-même des réponses à de telles questions.

Les difficultés qui viennent d'être soulignées justifient à elles seules les études micromécaniques existantes, le plus souvent réalisées parallèlement aux développements purement macroscopiques. Sur un plan plus fondamental, on notera la nécessité d'une étude des phénomènes d'endommagement fragile à partir des micromécanismes de la fissuration pour une meilleure compréhension des comportements observés.

Deux tendances méritent d'être distinguées dans le développement des approches par changement d'échelle pour les matériaux microfissurés. On note tout d'abord celle qui concerne l'estimation des propriétés effectives, avec comme préoccupation majeure l'évaluation des effets d'interaction entre microfissures (cf. pour une synthèse Kachanov [74] ou Nemat-Nasser et Hori [105]). L'autre catégorie de travaux porte directement sur la modélisation micromécanique de l'endommagement (cf. Krajcinovic [80]), la préoccupation étant ici la description de l'évolution des systèmes de microfissures avec le chargement mécanique. Dans un contexte bidimensionnel, on citera à titre d'exemple les travaux d'An-

---

drieux [3], ou encore ceux de Nemat Nasser et Obata [103] néanmoins limités à des trajets de compression. Les modélisations tridimensionnelles, plus rares, concernent généralement des trajets de chargement axisymétriques (cf. [53, 85, 121, 79]). Les travaux de Gambartta et Lagomarsino [55] constituent de ce point de vue une exception notable. Malgré leur grand intérêt, ils sont toutefois formulés en contraintes, ce qui n'autorise l'étude des comportements avec radoucissement (apparaissant à des niveaux d'endommagement importants) qu'au prix de la considération de fonctions seuils d'endommagement bien particulières.

Le travail présenté dans cette thèse concerne le développement, dans le cadre des méthodes de changement d'échelle, d'une modélisation de l'endommagement par microfissuration ainsi que son couplage avec d'autres phénomènes tels que le frottement ou la poroélasticité. L'intérêt de cette démarche est de permettre de relier les réponses macroscopiques des matériaux étudiés à leur microstructure poreuse. De plus, elle apporte un éclairage sur un certain nombre de points que nous avons précédemment soulignés dans le contexte des modélisations purement macroscopiques de l'endommagement. Dans le même ordre d'idée, l'étude micromécanique des couplages de l'endommagement avec le frottement, puis avec la poroélasticité fournira également des éléments de base pour la modélisation des comportements macroscopiques couplés.

L'organisation du mémoire est la suivante :

Le premier chapitre débute par une présentation synthétique du comportement mécanique non linéaire des matériaux quasi fragiles, ceci en relation avec leur microfissuration. On introduit ensuite les éléments de base des méthodes de changement d'échelle retenues comme outil de modélisation du comportement macroscopique induit par la mésofissuration. L'approche micromécanique proposée est détaillée pour aboutir à l'expression de l'énergie macroscopique du milieu fissuré. Une attention particulière est portée sur l'analyse de l'influence des mésofissures fermées sur l'élasticité macroscopique. Quelques illustrations mettant en évidence cette influence dans diverses configurations du système de mésofissures sont présentées à la fin du chapitre. Ce chapitre est complété par l'annexe B (cf. aussi Deudé et al. [44]) dans laquelle on présente une extension des techniques de type Eshelby, classiquement développées pour un volume élémentaire représentatif (v.e.r.) contenant des fissures ouvertes, au cas des milieux élastiques comportant des fissures fermées. L'équivalence entre les deux approches est démontrée.

La modélisation tridimensionnelle proprement dite de l'endommagement anisotrope avec effets unilatéraux fait l'objet du second chapitre. L'énergie libre macroscopique construite au chapitre précédent est adoptée comme potentiel thermodynamique, la fonction de distribution de densité de mésolfissures jouant le rôle d'une variable interne d'endommagement. Les bonnes propriétés mathématiques de ce potentiel thermodynamique, notamment la continuité de la réponse macroscopique à la désactivation de l'endommagement, sont discutées. Le choix de la fonction de distribution de densité de mésolfissures, qui s'impose par l'approche par changement d'échelle, est exploité pour discuter des questions relatives à une représentation tensorielle macroscopique de l'endommagement dont on met en évidence les limitations lorsque coexistent, dans le v.e.r., des mésolfissures ouvertes et des mésolfissures fermées. La mise en œuvre de l'approche micromécanique nécessite une procédure d'intégration numérique ; celle ci est présentée et discutée à l'aide d'un certain nombre de cas tests. Cette procédure numérique facilite la formulation du critère d'endommagement et des lois d'évolution qui s'en déduisent dans le cadre d'un schéma standard. On notera que le critère d'endommagement adopté pour chaque famille de mésolfissures est du type Griffith, puisque basé sur le taux de restitution de l'énergie. Enfin, nous présentons une procédure d'identification des paramètres du modèle ainsi que des simulations permettant d'évaluer les capacités du modèle à décrire l'anisotropie induite par l'endommagement, la dissymétrie des réponses en traction et en compression, ainsi que la désactivation de l'endommagement lors de trajets particuliers.

A la lumière des résultats présentés au second chapitre, il s'avère nécessaire d'introduire les phénomènes de frottement afin d'interpréter certains aspects du comportement macroscopique des géomatériaux cohérents : effets résiduels, présence de boucles d'hystérésis, transition fragile/ductile. Dans le chapitre III, la modélisation micromécanique présentée au second chapitre est reprise afin de rendre compte du glissement par frottement sur les lèvres des mésolfissures fermées. Les résultats sont d'abord illustrés sur une étude du comportement macroscopique des milieux élastiques contenant une unique famille de fissures fermées frottantes ; une loi de frottement de type Coulomb est considérée. Le couplage du glissement par frottement avec l'endommagement est ensuite détaillé pour une famille de mésolfissures. La généralisation des résultats au cas d'une distribution quelconque en orientation des mésolfissures est ensuite présentée. Le chapitre se termine sur des éléments d'identification et de première validation du modèle couplé sur des données issues d'expé-



---

riences sur un béton (Van Mier [138]) ; on présente également quelques autres simulations permettant d'évaluer les capacités du modèle couplé.

Enfin, le chapitre IV est consacré à la poroélasticité des milieux endommageables. Il s'agit de rendre compte du comportement macroscopique de milieux poreux saturés lorsque ceux-ci sont le siège d'un processus de dégradation progressive par microfissuration. Hormis les travaux réalisés par Dormieux et al. [46] (cf. également [88, 43]), il existe très peu d'études micromécaniques consacrées aux milieux poreux fissurés contenant un fluide saturant. La contribution apportée dans ce chapitre concerne essentiellement l'analyse micromécanique du couplage entre la poroélasticité et l'évolution de l'endommagement. On présente d'abord l'extension des résultats des chapitres I et II au cas des mésolfissures saturées par un fluide sous pression  $p$ . Celle-ci conduit à une loi macroscopique de poroélasticité anisotrope dont les éléments sont déterminés par la microstructure du matériau. L'analyse du cas particulier des mésolfissures fermées est également faite. Après la formulation complète du modèle couplant poroélasticité et endommagement anisotrope avec effets unilatéraux, le chapitre s'achève sur quelques exemples d'application.

Une synthèse générale des résultats est présentée à la fin du mémoire. On présente également quelques pistes de développements futurs.

# Chapitre I

## Comportement macroscopique et modélisation micromécanique des milieux mésolfissurés

Ce premier chapitre débute par une présentation synthétique de l'effet de la microfissuration<sup>2</sup> sur le comportement mécanique non linéaire des matériaux quasi-fragiles. On introduit ensuite les méthodes de changement d'échelle retenues comme outil de modélisation du comportement macroscopique induit par la mésolfissuration. L'approche énergétique proposée, en adoptant l'hypothèse de non interaction entre mésolfissures, est basée sur des solutions issues de la Mécanique de la Rupture. Elle inclut les effets de fermeture de mésolfissures.

Quelques illustrations sont présentées à la fin du chapitre pour mettre en évidence l'effet des mésolfissures fermées sur les propriétés effectives du matériau. L'annexe A présentant les techniques de type Eshelby et leur extension au comportement macroscopique des milieux élastiques contenant des mésolfissures fermées lisses, complète le chapitre. L'équivalence entre les deux approches est démontrée.

---

<sup>2</sup>Par abus de langage, on s'autorisera à confondre les termes de *mésolfissures* et *microfissures*, la seule échelle microscopique considérée étant celle déterminée par la taille des grains constituant le matériau.

## I.1 Endommagement fragile et mésolfissuration des géomatériaux

On admet classiquement que le comportement des matériaux fragiles est intimement lié à leur état microstructural. Dans le cas particulier des géomatériaux à porosité macroscopique relativement faible (roches compactes, certains bétons, etc.)<sup>3</sup>, c'est essentiellement à la microfissuration que l'on attribue les non-linéarités et les traits caractéristiques des comportements macroscopiques. De nombreuses études ont été consacrées ces dernières décennies à la caractérisation de la microfissuration de cette classe de matériaux et à l'évaluation expérimentale de l'influence de la microfissuration sur les propriétés mécaniques ou de transport (par exemple la perméabilité). On pourra se référer à la revue bibliographique de Kranz [81] ou de Myer *et al.* [101] pour ce qui concerne les roches, ou aux études de Nemati [102], Torrenti *et al.* [136], Ringot et Bascoül [124] pour les bétons.

Il n'est pas possible, dans ce paragraphe introductif, de faire une analyse détaillée, ni des techniques de caractérisation, ni des corrélations de la microfissuration avec toutes les propriétés physiques intéressant la géomécanique (caractéristiques mécaniques, perméabilités, coefficients de diffusion, etc...). On se focalisera essentiellement ici sur le comportement mécanique à court terme, en mettant un accent particulier sur les effets de fermeture des mésolfissures sur la réponse des matériaux étudiés. Seuls les essais conventionnels de laboratoire, tels que la traction simple, la compression isotrope ou triaxiale axisymétrique, suffisants pour la compréhension des mécanismes de déformation, seront considérés.

### I.1.1 Comportement fragile en traction directe

La figure I.1.a montre, à titre d'exemple, une courbe expérimentale contrainte de traction - déformation axiale correspondant à un grès de Fontainebleau [125]. On note une résistance mécanique assez faible (de l'ordre de 1,5 MPa) avec une non-linéarité de la réponse  $y$  compris dans la phase avant pic. D'autres expériences conduites par Van Mier [138, 139] sur un béton montrent que ce type de non-linéarité en traction est la consé-

---

<sup>3</sup>Malgré leur différence de constitution, les roches et les bétons présentent des comportements mécaniques qualitativement similaires. Il faut toutefois souligner que pour certains aspects particuliers tels que par exemple la répartition initiale des microfissures ainsi que les conditions de propagation de celles-ci (ou la résistance du matériau), l'hétérogénéité microstructurale du béton, due à la présence d'agrégats, joue un rôle plus important que dans le cas des roches.

quence du développement de nombreuses microfissures, d'abord aux interfaces agrégat - matrice puis dans la matrice. On notera également le caractère fragile du comportement mécanique en traction ; celui ci se traduit en effet par une rupture survenant à des niveaux de déformation relativement modérés ainsi que par un radoucissement. En raison des phénomènes de localisation des déformations qui peuvent survenir de manière précoce dans ce type d'expérience, la partie post-pic (radoucissante) de la réponse en traction simple doit être prise avec une certaine précaution. L'essai PIED (Pour Identifier l'Endommagement Diffus) développé par certains auteurs [17] (cf. fig. I.1.b) permet de créer une déformation plus diffuse et ainsi de retarder l'apparition des zones de localisation.

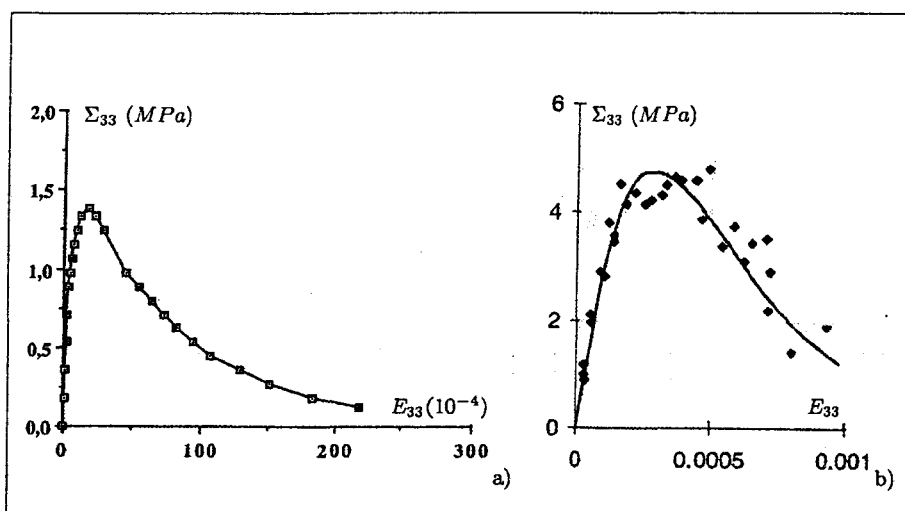


FIGURE I.1: Exemples de réponse mécanique en traction : a) traction directe pour un grès (d'après Sayehi, [125]) b) essai PIED pour un béton (d'après Bazant et Pijaudier-Cabot [17]).

## I.1.2 Comportement en compression

A l'inverse du cas de la traction simple, les mécanismes de déformation inélastique des géomatériaux en compression simple ou triaxiale sont plus complexes et font encore aujourd'hui l'objet de vifs débats. Nous souhaitons juste rappeler ici certains traits caractéristiques de ces comportements.

### I.1.2.1 Compression isotrope

Ce test consiste à appliquer de manière progressive un chargement du type  $\underline{\underline{\Sigma}} = -p\underline{\underline{\delta}}$  ( $p > 0$ ) et à mesurer les déformations longitudinale et transversale ainsi que la variation

de volume correspondante. La figure I.2 montre un exemple de réponse d'un grès sollicité sous ce type de chargement.

Le test a été réalisé au Laboratoire de Mécanique de Lille par M. Sibai [128] sur un échan-

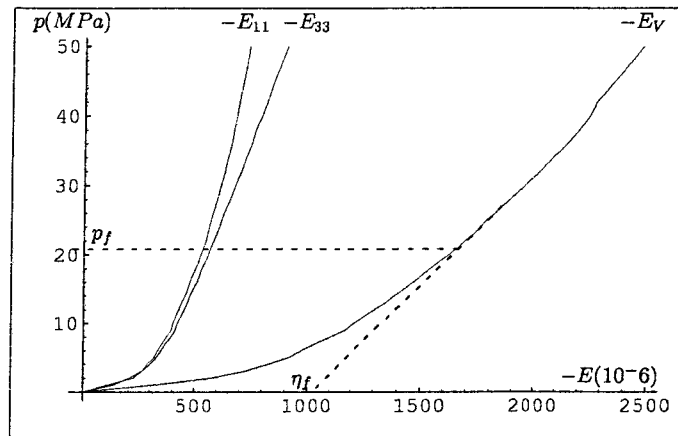


FIGURE I.2: Réponse en compression isotrope d'un grès de Fontainebleau (d'après [128]).

tillon de grès de Fontainebleau. La réponse obtenue indique une isotropie des propriétés mécaniques de l'échantillon testé ; celle-ci se traduit par la proximité des courbes de déformations longitudinale et transversale. De plus, la courbe de la pression ( $p$ ) en fonction de la déformation volumique ( $E_v$ ) présente un caractère fortement non linéaire ; elle indique une augmentation progressive du module de compression (pente de la courbe) de la roche avec le chargement, jusqu'à une valeur asymptotique que nous notons  $k^s$  (atteinte à partir d'une pression  $p_f$  dite de fermeture des microfissures). Cette variation est classiquement interprétée comme la conséquence d'une fermeture progressive des microfissures, ce qui suggère une distribution du rapport d'aspect initial (ouverture initiale) des microfissures (cf. [42]). La porosité de mésolfissures  $\eta_f$  reste très faible, de l'ordre de  $10^{-3}$ .

L'importance de la microfissuration dans la réponse mécanique qui vient d'être décrite est confirmée dans des expériences réalisées sur d'autres échantillons du même grès, thermiquement pré-microfissurés. Différents niveaux de préchauffage en température allant jusqu'à  $800^\circ C$  ont été considérés, puis l'échantillon subit une chute rapide de la température. En admettant que le seul effet de la température est de créer des microfissures et que la microfissuration ainsi générée est d'autant plus importante que la température est élevée, les résultats obtenus (cf. figure I.3) montrent clairement une influence de l'état microstructural (microfissuration induite) de la roche sur son comportement macroscopique. En particulier, le module de compression initial est d'autant plus faible que la microfis-

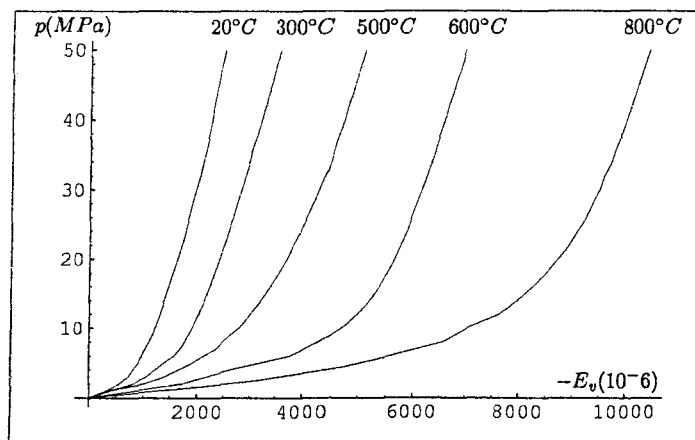


FIGURE I.3: Compression isotrope sur des échantillons de grès de Fontainebleau initialement pré-fissurés à différents niveaux de température : réponse pression - variation de volume (d'après [128]).

uration est importante. En revanche, la valeur asymptotique reste comparable pour tous les échantillons. Cette dernière observation d'une restitution quasi-complète du module de compression confirme l'interprétation des non-linéarités en terme de fermeture progressive de microfissures, au détriment d'éventuels autres mécanismes tel que le contact de type Hertz entre les grains (cf. [42]). Soulignons enfin que des cycles de chargement - déchargement au cours de cet essai auraient indiqué le caractère réversible des non linéarités observées (cf. [140]).

### I.1.3 Compression triaxiale axisymétrique

On examine ici la réponse des roches et des bétons en compression triaxiale axisymétrique. Cet essai, de pratique courante, se justifie pour les roches par les états de contrainte naturels de compression préexistants dans les massifs géologiques, et pour les bétons par le fait que, dans leur utilisation normale, ceux-ci sont destinés à supporter des états de contrainte en compression.

L'essai consiste à soumettre l'échantillon, d'abord à une compression isotrope jusqu'à une valeur de la pression de confinement choisie, puis à appliquer une contrainte de compression axiale croissante. La figure I.4 montre l'exemple d'un grès des Vosges, le test triaxial étant mené à un confinement de 10 MPa. Les caractéristiques suivantes peuvent être notées :

- la présence d'une première phase non linéaire, dite de serrage anisotrope, traduisant la refermeture des microfissures. Cette phase de serrage, particulièrement visible en

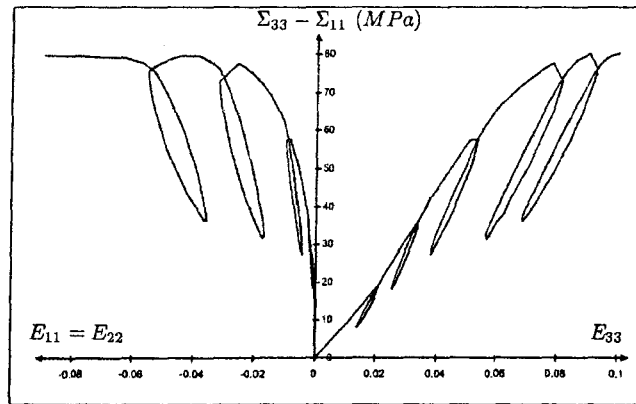


FIGURE I.4: Exemple de courbe contraintes-déformations d'un grès des Vosges en compression triaxiale; la pression de confinement est de 10 MPa (d'après [77]).

compression simple, est toutefois négligeable dans les bétons. La réalisation de cycles de chargement - déchargement axial dans cette phase indique la présence de légères boucles d'hystérésis, que l'on attribue généralement à la présence de frottement sur les lèvres des microfissures ;

- une phase de comportement linéaire suivie par une réponse fortement non linéaire au cours de laquelle on observe une dégradation de la rigidité élastique ;
- une anisotropie de comportement induite par les sollicitations et, corollairement, des déformations volumiques dilatantes classiquement interprétées comme la conséquence d'une fissuration orientée. L'anisotropie induite dans la réponse en compression est généralement confirmée par les mesures de célérité d'ondes [93] ;
- un comportement présentant un caractère fortement irréversible, pour des niveaux de contrainte élevés, que l'on met en évidence grâce aux cycles de chargement - déchargement - rechargement. Cette irréversibilité est accentuée par la présence de boucles d'hystérésis d'amplitude importante ;
- l'existence de déformations permanentes, parfois non négligeables, mises en évidence par des décharges complètes. Les origines de ces déformations permanentes sont variées : champs d'auto-contraintes, non refermeture complète de défauts, frottement sur les lèvres des mésolfissures ;
- la réalisation d'essais à différentes pressions de confinement permet classiquement de conclure à une forte sensibilité de la réponse mécanique à la pression moyenne, avec en particulier une transition fragile - ductile souvent observée pour les forts niveaux de confinement. Cette transition de comportement est souvent observée,

même pour des géomatériaux réputés fragiles.

Des expériences conduites sur d'autres grès [61, 19, 56, 110] ou sur des granites [69] conduisent à des observations qualitativement similaires. Il en est de même pour des bétons qui, hormis certains phénomènes liés à la compaction des pores à très fort confinement [27], présentent également des comportements quasi-fragiles [138, 120].

### I.1.3.1 Sur l'observation de la microfissuration des roches sollicitées en compression

Une importante littérature, tant en mécanique des roches que des bétons, a permis de corrélérer, tout au moins qualitativement, les comportements décrits en compression avec l'état de microfissuration des matériaux considérés. Pour les roches, les premiers travaux portant sur la description des divers stades de développement de la microfissuration en compression simple sont dus à Bieniawski [20]. Des observations au microscope optique ont été présentées ensuite dans Peng et Johnson [112] et dans les travaux de Halbauer *et al.* [62]. Quelques années plus tard, afin d'obtenir de meilleures résolutions, Aufmuth et Aleszka [7], Hadley [60], Tapponier et Brace [133] puis Wong [145, 146] réalisaient des observations au Microscope Electronique à Balayage (MEB). La plupart de ces études ont été effectuées sur un granite de Westerly (USA), et les auteurs s'accordent sur le fait qu'au cours de l'essai de compression, la longueur moyenne des microfissures augmente, de même que leur nombre. L'évolution de la microfissuration présente un caractère orienté, les microfissures se développant dans une direction proche de celle du chargement. En relation avec les mécanismes microscopiques induisant cette anisotropie, une question importante également abordée dans ces études concerne l'existence de microfissures de cisaillement et/ou de microfissures axiales ouvertes susceptibles d'expliquer la dilatance observée dans les stades avancés de la déformation. Selon Tapponier et Brace [133], il semble que la résolution du MEB ne permette pas de mettre en évidence les microfissures (fermées) de cisaillement. Wong [145], au contraire, décrit pour de forts niveaux de contrainte un ensemble de microfissures coplanaires orientées entre  $15^\circ$  et  $45^\circ$  par rapport à la direction de chargement. De façon plus détaillée, il indique que ces microfissures fermées se sont propagées en mode de cisaillement.

En résumé, on admet plus ou moins aujourd'hui que sous sollicitations de compression, les roches présentent à la fois des microfissures axiales ouvertes et des microfissures de cisaillement. Ces dernières sont d'ailleurs nécessaires pour interpréter l'existence éventuelle des boucles d'hystérésis signalées plus haut. Une discussion concernant les modèles phy-



siques généralement proposés pour expliquer l'existence des microfissures axiales (modèle de microfissures branchées, microfissures émanant de cavités,...) peut être trouvée dans [121].

Enfin, la nucléation (création) de microfissures est également avancée dans certaines publications récentes traitant de l'observation microscopique dans les roches. C'est le cas par exemple des travaux de Zhao [149] (cf. aussi [68]) combinant observations au MEB et techniques de stéréologie quantitative, et dans lesquels sont reportées de nombreuses données obtenues en temps réel, c'est-à-dire durant l'essai mécanique. En dehors de cette question particulière de l'importance quantitative de la nucléation de microfissures qui reste à confirmer, les résultats fournis par ces auteurs en terme de statistique de la microfissuration nous semblent particulièrement intéressants pour les travaux de modélisation micromécanique présentés dans la suite de ce mémoire. A titre d'exemple, sont reportés sur la figure I.5 des résultats issus de [149]. Ils concernent les diagrammes de rosette donnant la variation des longueurs cumulées de microfissures avec l'orientation par rapport à l'axe de chargement vertical. Les valeurs des contraintes normalisées par rapport à la résistance en compression ( $\frac{\Sigma_{33}}{\Sigma_c}$ ) sont indiquées pour chacune des figures. Ces résultats indiquent une distribution relativement étendue en orientation, montrant clairement l'existence de microfissures dont la direction ne coïncide pas avec celle du chargement. On note dans les dernières figures une diminution des longueurs cumulées ; les auteurs justifient ceci par la fermeture de certaines mésolfissures à l'approche de la résistance en compression, ce qui les exclut du mode de comptage adopté.

**Remarque I.1** *Pour les bétons, on pourra trouver dans Ringot et al. [123] des études similaires à celles qui viennent d'être présentées sur l'évolution de la microfissuration avec les sollicitations mécaniques. Les différents stades indiqués existent mais sont souvent moins marqués.*

#### **I.1.4 Synthèse**

Ce bref aperçu bibliographique confirme l'importance de la compréhension des phénomènes de microfissuration pour une interprétation rationnelle du comportement macroscopique des géomatériaux cohérents.

Nous avons également noté que les processus de refermeture progressive des microfissures sont essentiels pour l'interprétation des non-linéarités sur certains trajets de chargement (par exemple compression isotrope).

Enfin, l'endommagement par croissance de microfissures apparaît comme le mécanisme

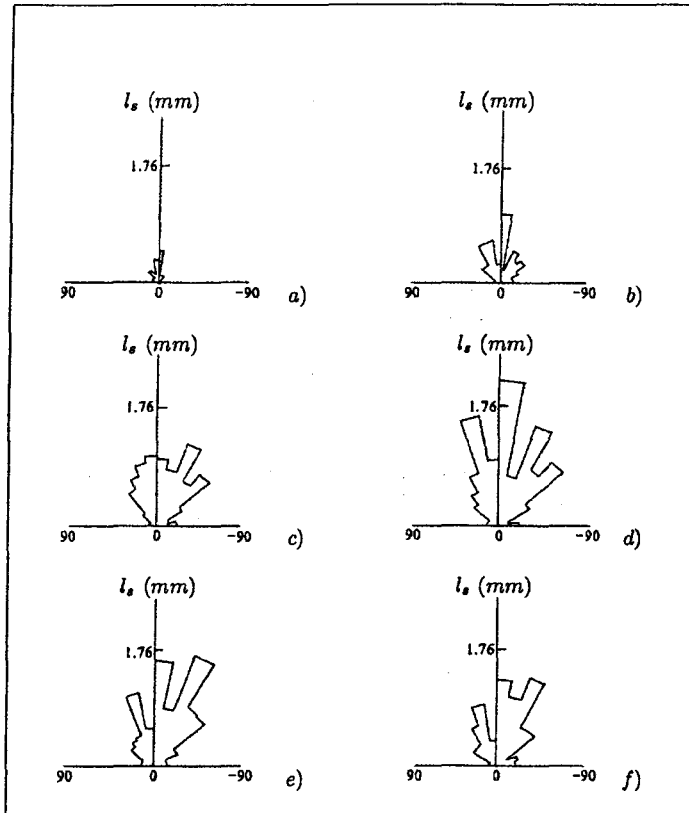


FIGURE I.5: Diagramme de rosette de la microfissuration à différents niveaux de contrainte de compression normalisés avec la résistance en compression simple (d'après [149]) : a)  $\Sigma_{33} = 0,59\Sigma_c$  b)  $\Sigma_{33} = 0,73\Sigma_c$  c)  $\Sigma_{33} = 0,88\Sigma_c$  d)  $\Sigma_{33} = 0,96\Sigma_c$  e)  $\Sigma_{33} = \Sigma_c$  f) après déchargement.

prédominant de déformations anélastiques, tant pour les roches que pour les bétons. Dans la suite, on propose une modélisation micromécanique qui tente de prendre en compte les phénomènes qui viennent d'être décrits.

## I.2 Comportement macroscopique des milieux mésolfissurés : approche directe

Dans cette partie, on présente une analyse micromécanique de l'endommagement par mésolfissuration avec prise en compte des effets unilatéraux (Pensée et Kondo [113]) ; celle-ci consiste en l'extension tridimensionnelle d'une approche proposée par Andrieux *et al.* [4].

Dans le cas d'un comportement élastique macroscopique, cette démarche, que nous qualifions de directe, est équivalente aux méthodes classiques de type Eshelby pour la modélisation des mésolfissures ouvertes [70]. Cette équivalence a été récemment étendue au cas des mésolfissures fermées dans le cadre d'une collaboration avec l'équipe de L. Dormieux [42]. Une synthèse de ces méthodes est présentée à l'annexe A.

En raison de l'hypothèse de non-interaction entre mésolfissures, qui sera adoptée par la suite, les résultats seront d'abord établis pour une famille de mésolfissures puis généralisés au cas d'une distribution quelconque de mésolfissures.

### I.2.1 Généralités et méthodologie

#### I.2.1.1 Description de la microstructure

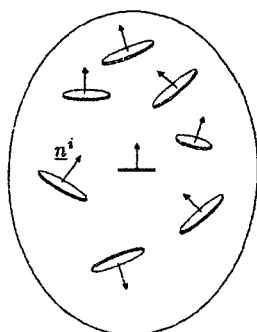


FIGURE I.6: Volume élémentaire représentatif du milieu mésolfissuré.

On désigne par  $\Omega$  le volume élémentaire représentatif (v.e.r.) d'un milieu constitué

d'une matrice isotrope de tenseur d'élasticité  $\mathbb{C}^s$  (défini par les coefficients de Lamé  $\lambda^s$  et  $\mu^s$  ou par le module d'Young  $E^s$  et le coefficient de Poisson  $\nu^s$ ), comportant de nombreuses mésolfissures (cf. figure I.6).

On suppose que la taille caractéristique de ces microfissures est petite par rapport à celle du v.e.r., ceci correspond par exemple au cas des matériaux ayant une faible porosité de mésolfissures dans leur état initial.

Le domaine occupé par une famille de mésolfissures, *i.e.* un ensemble de mésolfissures ayant toutes le même vecteur normal unitaire  $\underline{n}$ , est noté  $\omega$ .  $\omega^+$  (resp.  $\omega^-$ ) désigne la face supérieure (resp. la face inférieure) de la mésolfissure, sa normale  $-\underline{n}$  (resp.  $\underline{n}$ ) est orientée vers  $\omega^-$  (resp.  $\omega^+$ ).

Sur  $\omega$ , des conditions de type contact unilatéral sont adoptées. En désignant par  $[\underline{u}] (= \underline{u}^{\omega^+} - \underline{u}^{\omega^-})$  le saut du déplacement  $\underline{u}$  en un point  $\underline{x}$  de  $\omega$ , ces conditions s'écrivent (cf. par exemple [86]) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} [u_n] \geq 0 & (a) \\ \sigma_{nn} \leq 0 & (b) \\ [u_n] \sigma_{nn} = 0 & (c) \end{array} \right. \quad (I.1)$$

où  $[u_n]$  et  $\sigma_{nn}$  désignent respectivement la composante normale du saut de déplacement et la contrainte normale s'appliquant sur les lèvres des mésolfissures.

Ces conditions, qui traduisent le comportement unilatéral des mésolfissures, s'interprètent de la façon suivante : i) si les mésolfissures sont ouvertes ( $[u_n] > 0$ ), les lèvres sont libres d'efforts ( $\sigma_{nn} = 0$ ) et ii) si les mésolfissures sont fermées ( $[u_n] = 0$ ), une contrainte normale de compression s'applique sur les lèvres. Par ailleurs, la condition (a) exprime que les lèvres ne peuvent pas s'interpénétrer.

### I.2.1.2 Décomposition du problème

**Hypothèse I.1** *On suppose que les mésolfissures n'interagissent pas entre elles.*

En raison de cette hypothèse, le problème d'homogénéisation ( $P$ ) à résoudre se ramène à l'étude d'un v.e.r. ( $\Omega$ ) soumis au contour  $\partial\Omega$  à des conditions de type contraintes uniformes, *i.e.*  $\underline{T} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\nu}$  avec  $\underline{\underline{\Sigma}}$  homogène et  $\underline{\nu}$  le vecteur normal unitaire à  $\partial\Omega$ , et contenant une mésolfissure  $\omega$  représentant une famille, plongée dans un milieu infini d'élasticité  $\mathbb{C}^s$ .

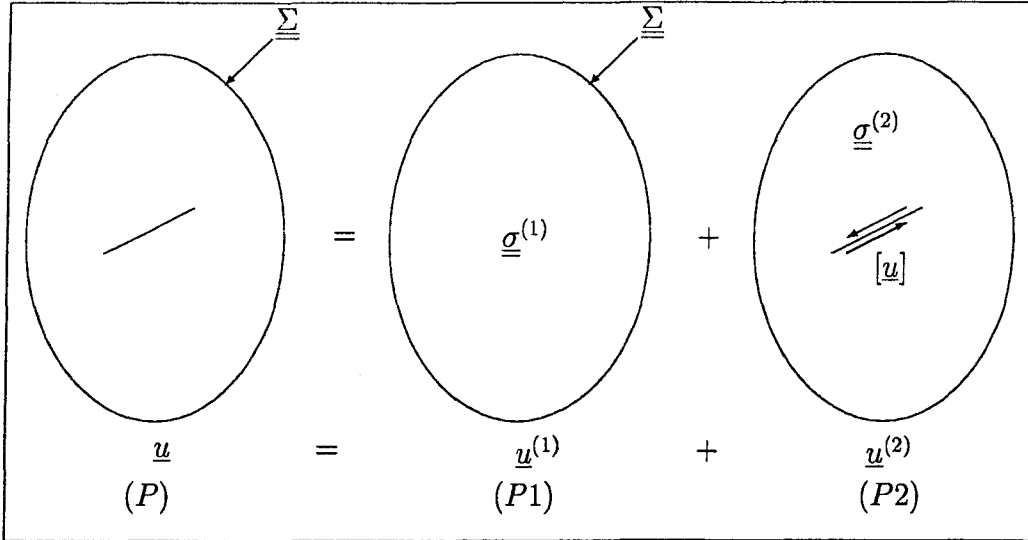


FIGURE I.7: décomposition du problème (P)

A l'instar d'Andrieux *et al.* [4], le problème (P) posé sur le v.e.r. est décomposé en deux sous-problèmes (P1) et (P2) comme indiqué sur la figure I.7. Le problème (P1) est de manière triviale un problème d'élasticité homogène. (P2) est défini par les discontinuités de déplacement  $[u]$  imposées sur les lèvres de la mésolfissure. L'idée est de distinguer dans la réponse macroscopique les effets dus uniquement aux discontinuités de déplacement sur la mésolfissure. Ainsi, le champ de déplacement réel  $\underline{u}$  est la somme de  $\underline{u}^{(1)}$  qui se produirait si le matériau était sain et de  $\underline{u}^{(2)}$  résultant des discontinuités de déplacement sur la mésolfissure<sup>4</sup>.

Le champ  $\underline{u}^{(1)}$  est continu sur  $\Omega$  et le champ de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)}$  qui lui est associé est homogène ; il vient :

$$\forall \underline{x} \in \Omega, \underline{\underline{E}}^{(1)} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)} \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)}(\underline{x}) \quad (\text{I.2})$$

Le champ  $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}$  étant statiquement admissible avec  $\underline{\underline{\Sigma}}$ , il vient :  $\langle \underline{\underline{\sigma}}^{(1)} \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{\Sigma}}$ . Enfin, les champs  $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)}$  étant associés par la loi de comportement de la matrice solide, on a :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^s : \underline{\underline{E}}^{(1)} \quad (\text{I.3})$$

D'une part, le champ  $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}$  est auto-équilibré, *i.e.*  $\langle \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \rangle_{\Omega} = 0$ . D'autre part, on considère des mésolfissures de type penny-shaped (de rayon  $a$ ) en milieu infini. En conséquence, les

<sup>4</sup>Notons, comme l'a déjà souligné Andrieux [3] dans le cas 2D, que la décomposition qui vient d'être présentée n'a de sens que si l'on connaît le champ de déplacement total.

composantes normale  $[u_n]$  et tangentielle  $[u_t]$  de  $[\underline{u}]$ , supposées nulles dans l'état initial<sup>5</sup>, sont de la forme [130, 144, 105] :

$$\begin{aligned} [u_n](\underline{x}) &= k_n \sqrt{a^2 - r^2} \quad (a) \\ [u_t](\underline{x}) &= \underline{k}_t \sqrt{a^2 - r^2} \quad (b) \end{aligned} \quad (I.4)$$

où  $r$  représente la distance entre le centre de la mésolfissure et le point considéré sur les lèvres. A priori,  $k_n$  et  $\underline{k}_t$  sont des paramètres qui dépendent du chargement mécanique. Sous ces conditions, les contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}$  sont constantes sur les lèvres de la mésolfissure et peuvent être exprimées en fonction de  $[\underline{u}]$ . En effet, dans le cas qui nous intéresse, on a :

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{8(1 - \nu^{s2})}{\pi E^s} \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \quad (a) \\ \underline{k}_t &= \frac{16(1 - \nu^{s2})}{\pi E^s (2 - \nu^s)} \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \cdot \underline{n} \cdot (\underline{\delta} - \underline{n} \otimes \underline{n}) \quad (b) \end{aligned} \quad (I.5)$$

Par ailleurs, du fait de leur forme particulière, les discontinuités peuvent être caractérisées par deux variables :

- i). une variable scalaire non négative (cf. équation (I.1.a))  $\beta$  caractérisant l'ouverture des mésolfissures et représentant leur volume :

$$\beta = \mathcal{N} \int_{\omega^+} [u_n](\underline{x}) dS \quad (I.6)$$

- ii). un vecteur glissement, noté  $\underline{\underline{\gamma}}$ , défini par :

$$\underline{\underline{\gamma}} = \mathcal{N} \int_{\omega^+} ([\underline{u}] - [u_n]\underline{n})(\underline{x}) dS \quad (I.7)$$

où  $\mathcal{N}$  est la densité (nombre par unité de volume) de mésolfissures de la famille considérée. En intégrant les expressions (I.4), (I.5) conduit à :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) &= -\frac{H_0}{d} \beta \quad \text{avec} \quad H_0 = \frac{3E^s}{16(1 - \nu^{s2})} \quad (a) \\ \underline{\underline{\tau}}^{(2)} = \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \cdot \underline{n} \cdot (\underline{\delta} - \underline{n} \otimes \underline{n}) &= -\frac{H_0(1 - \frac{\nu^s}{2})}{d} \underline{\underline{\gamma}} \quad (b) \end{aligned} \quad (I.8)$$

où  $d = \mathcal{N}a^3$  est la densité de mésolfissures initialement introduite par Budiansky et O'Connell [25].

<sup>5</sup>La prise en compte de discontinuités initiales non nulles est possible et sera évoqué dans la suite.

Soit  $\Omega^s = \Omega - \omega$  et  $\underline{\nu}$  le vecteur unitaire normale à  $\partial\Omega^s$ , la déformation macroscopique s'écrit :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{E}} &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega^s} (\underline{\nu} \otimes^s \underline{u}) dS + \mathcal{N} \int_{\partial\omega} (\underline{n} \otimes^s \underline{u}) dS \\ &= \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)} \rangle_{\Omega^s} + \mathcal{N} \int_{\omega^+} (\underline{n} \otimes^s [\underline{u}]) dS\end{aligned}$$

Ainsi, la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}$  se décompose de la même manière que le champ de déplacement :

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}^{(1)} + \underline{\underline{E}}^{(2)} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{E}}^{(2)} = \mathcal{N} \int_{\omega^+} (\underline{n} \otimes^s [\underline{u}]) dS \quad (\text{I.9})$$

Il vient ensuite que la déformation  $\underline{\underline{E}}^{(2)}$  peut être écrite en fonction des deux paramètres  $\beta$  et  $\underline{\underline{\gamma}}$  déjà introduits :

$$\underline{\underline{E}}^{(2)} = \beta(\underline{n} \otimes \underline{n}) + (\underline{\underline{\gamma}} \otimes^s \underline{n}) \quad (\text{I.10})$$

## I.2.2 Expression générale de l'énergie libre macroscopique

On se propose maintenant de construire l'énergie libre macroscopique  $W$  pour le v.e.r. considéré. La densité volumique d'énergie libre de la matrice solide est définie par :

$$w(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbf{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{I.11})$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega^s} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(1)} + \underline{u}^{(2)}) : \mathbf{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(1)} + \underline{u}^{(2)}) dV \\ &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega^s} \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)} : \mathbf{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)} + 2 \underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)} : \mathbf{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)} : \mathbf{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)} \right\} dV\end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

Le champ  $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} (= \mathbf{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)})$  étant autoéquilibré et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)}$  étant homogène, le second terme de l'intégrale est nul. L'énergie libre macroscopique est donc la somme d'un terme purement élastique  $W^{(1)}$  et d'un terme  $W^{(2)}$  correspondant à la contribution du champ d'auto-contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}$  produit par les discontinuités de déplacement sur la mésolfissure. Il vient :

$$W^{(1)} = \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega^s} \underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)} : \mathbf{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)} dV = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}}^{(1)} : \mathbf{C}^s : \underline{\underline{E}}^{(1)} \quad (\text{I.13})$$

Par ailleurs,  $W^{(2)}$  est calculé en utilisant les expressions (I.8) des contraintes sur la mésolfissure, on obtient :

$$\begin{aligned}W^{(2)} &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega^s} \underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)} : \mathbf{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)} dV = -\frac{\mathcal{N}}{2} \int_{\omega^+} \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) [u_n] + \underline{\underline{\tau}}^{(2)} \cdot [\underline{u}_t] \right\} dS \\ &= \frac{H_0}{2d} \left\{ \beta^2 + \left(1 - \frac{\nu^s}{2}\right) \underline{\underline{\gamma}} \cdot \underline{\underline{\gamma}} \right\}\end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

L'énergie libre macroscopique totale s'écrit donc :

$$W = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}}^{(1)} : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{E}}^{(1)} + \frac{H_0}{2d} \left\{ \beta^2 + \left(1 - \frac{\nu^s}{2}\right) \underline{\underline{\gamma}} \cdot \underline{\underline{\gamma}} \right\} \quad (\text{I.15})$$

Soit en utilisant la décomposition de la déformation macroscopique (eq. I.9) :

$$W = \frac{1}{2} (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)}) : \mathbb{C}^s : (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)}) + \frac{H_0}{2d} \left\{ \beta^2 + \left(1 - \frac{\nu^s}{2}\right) \underline{\underline{\gamma}} \cdot \underline{\underline{\gamma}} \right\} \quad (\text{I.16})$$

avec  $\underline{\underline{E}}^{(2)}$  définie par (I.10).

L'expression ci-dessus montre que pour décrire le comportement d'un matériau élastique affaibli par une famille de mésolfissures de normale  $\underline{n}$  et de densité  $d$ , on dispose de :

- la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}$ ,
- et deux variables  $\beta$  et  $\underline{\underline{\gamma}}$ .

Cette expression générale sera à la base des modèles développés dans la suite (endommagement avec effets unilatéraux, couplage endommagement - frottement).

Par ailleurs, on remarquera qu'elle s'étend sans difficulté au cas des mésolfissures fermées ( $[u_n](\underline{x}) = 0$ ) en posant  $\beta = 0$ .

## I.3 Comportement élastique macroscopique avec prise en compte des effets unilatéraux

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cas de mésolfissures parfaitement lubrifiées (le cas de mésolfissures frottantes sera étudié au chapitre III). On se place ici à densité de mésolfissures  $d$  constante.

L'objectif visé est de décrire le comportement élastique macroscopique incluant les effets unilatéraux. De manière plus précise, on établira le critère définissant la transition entre les états ouverts et fermés ainsi que les propriétés élastiques homogénéisées.

### I.3.1 Critère d'ouverture/fermeture des mésolfissures

Dans les conditions qui viennent d'être indiquées, les évolutions correspondent à des processus réversibles (dissipation  $\mathcal{D}$  nulle). Il vient, en conditions isothermes :

$$\mathcal{D} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{E}}} - \dot{W} = 0$$

On considère dans un premier temps le cas de mésolfissures ouvertes. L'expression de  $\dot{W}$  est alors donnée par :

$$\dot{W} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{E}}} - \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) - \frac{H_0}{d} \beta \right\} \dot{\beta} - \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} - \frac{H_0}{d} \left(1 - \frac{\nu^s}{2}\right) \underline{\underline{\gamma}} \right\} \cdot \dot{\underline{\underline{\gamma}}} \quad (\text{I.17})$$



Puisque  $\dot{\underline{\gamma}} \cdot \underline{n} = 0$ , on a  $(\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \dot{\underline{\gamma}} = [(\underline{\underline{\delta}} - \underline{n} \otimes \underline{n}) \cdot (\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n})] \cdot \dot{\underline{\gamma}}$ . La nullité de la dissipation impose donc :

$$\mathcal{D} = \{ \underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) - \frac{H_0}{d} \beta \} \dot{\beta} + \{ (\underline{\underline{\delta}} - \underline{n} \otimes \underline{n}) \cdot (\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}) - \frac{H_0}{d} (1 - \frac{\nu^s}{2}) \underline{\underline{\gamma}} \} \cdot \dot{\underline{\gamma}} = 0 \quad (I.18)$$

Cette équation devant être vérifiée pour  $\dot{\beta}$  et  $\dot{\underline{\gamma}}$  quelconques,  $\beta$  et  $\underline{\underline{\gamma}}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{d}{H_0} (\underline{n} \otimes \underline{n}) : \underline{\underline{\Sigma}} & (a) \\ \underline{\underline{\gamma}} &= \frac{d}{H_0(1 - \frac{\nu^s}{2})} (\underline{\underline{\delta}} - \underline{n} \otimes \underline{n}) \cdot (\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}) & (b) \end{aligned} \quad (I.19)$$

Ces expressions mettent en relation des grandeurs microscopiques ( $\beta$  et  $\underline{\underline{\gamma}}$ ) avec le tenseur de contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$ . Compte tenu des hypothèses ayant permis de l'établir, (I.19.a) ne définit  $\beta$  que dans le cas où  $\underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) > 0$ . Par ailleurs, (I.19.a) indique que la transition entre l'état ouvert et fermé ( $\beta = 0$ ) des mésofissures est définie par :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) = 0 \quad (I.20)$$

De plus les mésofissures resteront fermées pour tout état de contrainte tel que  $\underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) < 0$ .

**Remarque I.2** *Un raisonnement similaire sur la dissipation dans le cas des mésofissures fermées lisses ( $\beta = 0$ ) permet de vérifier la validité de (I.19.b).*

**Remarque I.3** *Une approche alternative, permettant d'établir les expressions (I.19) consiste à écrire que le vecteur contrainte microscopique ( $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ ) est nul sur les lèvres des mésofissures :*

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tau}} &= \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \cdot (\underline{\underline{\delta}} - \underline{n} \otimes \underline{n}) = 0 & (a) \\ \underline{\underline{\sigma}} &: (\underline{n} \otimes \underline{n}) = 0 & (b) \end{aligned} \quad (I.21)$$

Or, compte tenu de la décomposition du problème, on a :  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{(1)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}$  avec  $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} = \underline{\underline{\Sigma}}$  et les composantes tangenielles et normales de  $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \cdot \underline{n}$  données par (I.8). On obtient alors :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tau}} &= \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} \cdot (\underline{\underline{\delta}} - \underline{n} \otimes \underline{n}) - \frac{H_0(1 - \frac{\nu^s}{2})}{d} \underline{\underline{\gamma}} = 0 & (a) \\ \underline{\underline{\sigma}} &: (\underline{n} \otimes \underline{n}) = \underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) - \frac{H_0}{d} \beta = 0 & (b) \end{aligned} \quad (I.22)$$

On retrouve alors les expressions (I.19).

On se propose maintenant d'exprimer les relations (I.19) ainsi que le critère d'ouverture/fermeture en fonction de la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}$ , l'objectif à terme étant de construire un modèle en déformation. Afin de conserver des relations analytiques simples, on adopte l'hypothèse suivante :

**Hypothèse I.2** *On suppose une densité modérée de mésolfissures*

Cette hypothèse permet de négliger les termes du second ordre en  $d$ . En utilisant les expressions (I.3) et (I.9), et la linéarité de  $\underline{\underline{E}}^{(2)}$  par rapport à  $d$ , les expressions suivantes, donnant  $\beta$  et  $\underline{\underline{\gamma}}$  en fonction de  $\underline{\underline{E}}$ , sont déduites :

$$\begin{aligned} \beta &\cong \frac{d}{H_0} \left( \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{E}} \right)^+ \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{N}} = \mathbb{C}^s : (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) \quad (a) \\ \underline{\underline{\gamma}} &\cong \frac{2\mu^s d}{H_0(1 - \frac{\nu^s}{2})} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{n}} \cdot (\underline{\underline{\delta}} - \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) \quad (b) \end{aligned} \tag{I.23}$$

où  $(y)^+$  désigne la partie positive de  $y$ . Ces expressions peuvent s'interpréter comme des relations de localisation de la déformation puisqu'elles permettent de déterminer  $\underline{\underline{E}}^{(2)}$  en fonction de  $\underline{\underline{E}}$ .

On en déduit l'expression du critère définissant la transition ouverture/fermeture des mésolfissures, sous l'hypothèse I.2, en fonction de  $\underline{\underline{E}}$ . Ce critère s'écrit :

$$\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{E}} = 0 \quad \text{soit} \quad \lambda^s \text{tr} \underline{\underline{E}} + 2\mu^s \underline{\underline{E}} : (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) = 0 \tag{I.24}$$

On notera qu'il diffère du critère  $\underline{\underline{E}} : (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) = 0$  généralement utilisé dans les modélisations macroscopiques proposées dans la littérature.

Pour la famille de mésolfissures considérée, les critères (I.24) (resp. (I.20)) séparent l'espace des déformations (resp. des contraintes) en deux domaines ; l'un correspondant aux mésolfissures ouvertes ( $\mathcal{E}^{ouv}$ ) et l'autre aux mésolfissures fermées ( $\mathcal{E}^{fer}$ ). La figure I.8 illustre ce propos dans l'espace des déformations axisymétriques (pour le critère (I.24)).

### I.3.2 Energie élastique macroscopique

La mise en relation de  $\beta$  et  $\underline{\underline{\gamma}}$  avec  $\underline{\underline{E}}$  et  $d$  (Eq. I.23) indique que le comportement macroscopique du milieu élastique contenant une famille de mésolfissures est décrit par  $\underline{\underline{E}}$  et  $d$  et un tenseur d'ordre deux  $\underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}$  représentant l'orientation de la famille de mésolfissures considérée.

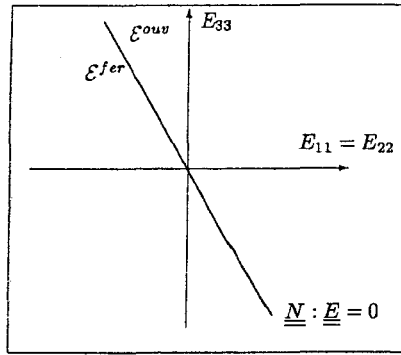


FIGURE I.8: Représentation schématique du critère d'ouverture/fermeture dans l'espace des déformations axisymétriques.

En remplaçant  $\beta$  et  $\gamma$  par leurs expressions (Eqs. I.23) dans (I.16), et en négligeant le terme quadratique  $\underline{\underline{E}}^{(2)} : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{E}}^{(2)}$  (qui est du second ordre en  $d$ ), il vient :

$$W = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{E}} - \frac{d}{2H_0} \left\{ [(\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{E}})^+]^2 + \frac{4\mu^{s2}}{1 - \frac{\nu^s}{2}} [(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) : \underline{\underline{\Delta}} - \underline{\underline{E}} : (\underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}}) : \underline{\underline{E}}] \right\} \quad (\text{I.25})$$

Le premier terme de  $W$  représente l'énergie élastique de la matrice solide non fissurée ; le second correspond à la contribution des mésolfissures. De par la présence du terme  $(\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{E}})^+$ , cette contribution est différente selon l'état (ouvert ou fermé) des mésolfissures. On notera que par construction l'énergie libre macroscopique  $W$  est continue à la transition ouvert/fermé du système de mésolfissures parallèles considéré puisque celle-ci survient lorsque  $\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{E}} = 0$ . Par ailleurs,  $W$  peut s'écrire sous la forme :

$$W = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} \quad (\text{I.26})$$

où  $\mathbb{C}^{hom}$  est le tenseur d'élasticité homogénéisé défini par :

– pour une famille de mésolfissures ouvertes :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s - a_1 d \left\{ \begin{array}{l} 2a_2 \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} + a_3 (\underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}}) \\ + (\underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}}) - a_4 \underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}} \end{array} \right\} \quad (\text{I.27})$$

– pour une famille de mésolfissures fermées :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s - a_1 d \left\{ \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} - 2 \underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}} \right\} \quad (\text{I.28})$$

Dans ces expressions, les constantes  $a_i$  ne dépendent que des propriétés élastiques de la matrice solide et sont données par :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{16E^s(1-\nu^s)}{3(2-\nu^s)(1+\nu^s)} & a_2 &= \frac{(2-\nu^s)\nu^{s2}}{2(1-2\nu^s)^2} \\ a_3 &= \frac{(2-\nu^s)\nu^s}{(1-2\nu^s)} & a_4 &= \nu^s \end{aligned} \quad (\text{I.29})$$

### 1.3.3 Généralisation à une distribution quelconque de mésolfissures

L'approche directe proposée au paragraphe précédent a conduit à une expression (I.25) de l'énergie libre du matériau mésolfissuré incluant les effets unilatéraux. Ces résultats, obtenus pour une seule famille de mésolfissures, nécessitent d'être généralisés à une distribution quelconque de mésolfissures.

Dans le cas d'une microfissuration définie par un ensemble discret de familles de microfissures, on procèdera par simple sommation des contributions de chaque famille.

Par souci de généralité, on considère une distribution quelconque en orientation des microfissures définie par une fonction de densité  $\rho$  ( $\rho(\underline{n})$  représente la densité de mésolfissures dans la direction  $\underline{n}$ ).

L'énergie libre macroscopique associée à une telle distribution, notée  $\Psi$ , est obtenue par intégration de  $W$  (donné par I.25) sur toutes les directions de l'espace, *i.e.* sur la surface de la sphère unité notée  $S^2 = \{\underline{n}, |\underline{n}| = 1\}$ . Du fait de la prise en compte des effets unilatéraux,  $S^2$  est subdivisée en deux sous-domaines disjoints  $S^{2+}$  et  $S^{2-}$ .  $S^{2+}$  (resp.  $S^{2-}$ ) désigne l'ensemble des directions pour lesquelles les mésolfissures sont ouvertes (resp. fermées). L'expression (Eq. I.24) donnant le critère d'ouverture/fermeture des mésolfissures indique que la partition de la sphère unité dépend de l'état de déformation macroscopique  $\underline{E}$ . Ainsi  $\Psi$  s'écrit :  $\Psi = \int_{S^2} W(\underline{E}, \underline{n}) dS$  avec  $W(\underline{E}, \underline{n})$  donné par (I.25), soit :

$$\Psi = \frac{1}{2} \underline{E} : \mathbb{C}^s : \underline{E} - \frac{a_1}{4\pi} \left\{ \begin{aligned} & \int_{S^{2+}(\underline{E})} \rho(\underline{n}) \left[ \begin{aligned} & a_2(\text{tr } \underline{E})^2 + a_3(\text{tr } \underline{E}) \underline{E} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \\ & + (1 - \frac{\nu^s}{2}) \underline{E} : (\underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n}) : \underline{E} \end{aligned} \right] dS \\ & + \int_{S^2} \rho(\underline{n}) \left[ \begin{aligned} & (\underline{E} \cdot \underline{E}) : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \\ & - \underline{E} : (\underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n}) : \underline{E} \end{aligned} \right] dS \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.30})$$

La première intégrale correspond à la contribution des discontinuités d'ouverture, tandis que la seconde est associée au glissement sur les lèvres des mésolfissures.

On notera que l'évaluation des intégrales intervenant dans (I.30) ne peut s'effectuer analytiquement que pour des distributions de densité  $\rho$  dont l'expression est connue et lorsque la partition de la sphère unité est déterminée (cf. remarque I.4).

Le potentiel thermodynamique  $\Psi$  peut également s'écrire sous la forme :

$$\Psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} \quad (I.31)$$

avec  $\mathbb{C}^{hom}$  défini par :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s - \frac{a_1}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \int_{S^{2+}(\underline{\underline{E}})} \rho(\underline{n}) \left[ \begin{array}{l} 2a_2 \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} + a_3 (\underline{\underline{\delta}} \otimes (\underline{n} \otimes \underline{n}) + (\underline{n} \otimes \underline{n}) \otimes \underline{\underline{\delta}}) \\ + (2 - \nu^s) (\underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n}) \end{array} \right] dS \\ + \int_{S^2} \rho(\underline{n}) \left[ \begin{array}{l} \left( (\underline{n} \otimes \underline{n}) \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}} (\underline{n} \otimes \underline{n}) \right) \\ - 2(\underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n}) \end{array} \right] dS \end{array} \right\} \quad (I.32)$$

**Remarque I.4** La partition de la sphère unité dépendant de l'état de déformation, la connaissance de la fonction de densité  $\rho$  ne suffit pas pour déterminer les propriétés macroscopiques du matériau. Il est également nécessaire de connaître l'état d'activation (ouvert ou fermé) des mésolfissures. En d'autres termes, il n'y a pas de relation univoque entre la distribution de densité  $\rho$  et les propriétés homogénéisées.

### I.3.4 Expression de l'enthalpie libre macroscopique

Il est également possible de déduire de la démarche micromécanique, l'expression de l'enthalpie libre macroscopique  $W^*$ . En effet, par transformée de Legendre-Fenchel de l'énergie libre macroscopique donnée par (I.16) et en utilisant le fait que  $\underline{\underline{E}}^{(1)} = \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)} = \mathbb{C}^{s-1} : \underline{\underline{\Sigma}}$ , il vient :

$$\begin{aligned} W^* &= \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} - W \\ &= \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbb{C}^{s-1} : \underline{\underline{\Sigma}} + \beta \underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) + \underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{\underline{\gamma}} \overset{s}{\otimes} \underline{n}) \\ &\quad - \frac{H_0}{2d} \left\{ \beta^2 + \left(1 - \frac{\nu^s}{2}\right) \underline{\underline{\gamma}} \cdot \underline{\underline{\gamma}} \right\} \end{aligned} \quad (I.33)$$

En injectant les expressions de  $\beta$  et  $\gamma$  en fonction de  $\underline{\underline{\Sigma}}$  (Eq. I.19) dans (I.33), on obtient :

$$\begin{aligned} W^* &= \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbb{C}^{s-1} : \underline{\underline{\Sigma}} \\ &\quad + \frac{d}{2H_0} \left\{ [(\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\Delta}})^+]^2 + \frac{1}{(1 - \frac{\nu^s}{2})} [(\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}) : \underline{\underline{\Delta}} - \underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}}) : \underline{\underline{\Sigma}}] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbb{S}^{hom} : \underline{\underline{\Sigma}} \end{aligned} \quad (I.34)$$

où  $\mathbb{S}^{hom}$  est le tenseur de souplesse homogénéisé du matériau mésolfissuré, défini par :

$$\mathbb{S}^{hom} = \mathbb{C}^{s-1} + \frac{d}{2H_0(1 - \frac{\nu^s}{2})} \left\{ \underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}} - b_1 \underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}} \right\} \quad (I.35)$$

avec  $b_1 = \nu^s$  si  $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\Delta}} > 0$  (mésolfissures ouvertes) et  $b_1 = 2$  si  $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\Delta}} \leq 0$  (mésolfissures fermées).

Notons que l'expression (I.34) de l'enthalpie libre macroscopique est identique à celle obtenue par Kachanov [74]. La démarche suivie ici a l'avantage de fournir également l'expression (I.33) de  $W^*$ . Celle-ci présente un caractère plus général et peut en ce sens être utilisée pour des développements incluant par exemple le glissement avec frottement sur les lèvres des mésolfissures.

On remarquera par ailleurs que la construction de l'enthalpie libre macroscopique ne fait pas appel à l'hypothèse de faible densité de mésolfissures. Concernant ce point particulier, on démontre en fait (cf. également [18]) que (I.35) correspond à l'estimation fournie par une approche de type Mori-Tanaka (cf. A.3). On notera que le schéma de Mori-Tanaka est classiquement utilisé pour prendre en compte d'une certaine façon les interactions.

Enfin, par le même procédé que celui ayant permis d'aboutir à (I.30), on obtient l'expression de l'enthalpie libre pour une distribution quelconque de mésolfissures :

$$\begin{aligned} \Psi^* &= \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbb{C}^{s-1} : \underline{\underline{\Sigma}} \\ &\quad + \frac{1}{8\pi H_0} \left\{ \int_{S^{2*+}(\underline{\underline{\Sigma}})} \rho(\underline{n}) \underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}}) : \underline{\underline{\Sigma}} dS \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1 - \frac{\nu^s}{2}} \int_{S^2} \rho(\underline{n}) [(\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}) : \underline{\underline{\Delta}} - \underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}}) : \underline{\underline{\Sigma}}] dS \right\} \end{aligned} \quad (I.36)$$

De manière générale,  $\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{E}} = 0$  et  $\underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\Sigma}} = 0$  étant différents,  $S^{2*+}$  et  $S^{2*+}$  ne coïncident pas.

### I.3.5 Propriétés élastiques effectives et effets unilatéraux

Dans ce paragraphe, on se propose d'étudier l'influence de la mésolfissuration sur les propriétés élastiques macroscopiques. De nombreuses études existent sur ce sujet [66, 104, 105, 74]. Elles sont toutefois limitées aux microfissures ouvertes ou à une approche en contraintes. On s'intéressera particulièrement aux effets dus à la fermeture des mésolfissures. Les résultats donnés par l'estimation construite sous l'hypothèse de faible densité (Eq. I.32, estimation diluée) seront comparés à ceux de l'estimation déduite de la formulation en contraintes (Eq. I.36, estimation Mori-Tanaka).

Trois distributions particulières de mésolfissures seront successivement étudiées : une distribution de mésolfissures parallèles de normale  $\underline{e}_3$ , une distribution isotrope et enfin une distribution cylindrique d'axe  $\underline{e}_3$ .

#### I.3.5.1 Distribution de mésolfissures parallèles de normale $\underline{e}_3$

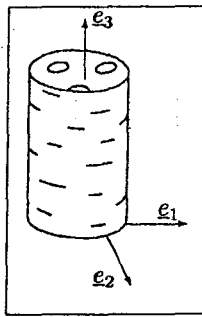


FIGURE I.9: Distribution de mésolfissures parallèles.

Dans le cas de mésolfissures ouvertes, les résultats sont synthétisés dans le tableau I.1 où  $r_1 = \frac{16(1 - \nu^s)}{3(1 - 2\nu^s)}$ . Le comportement macroscopique est de type isotrope transverse ; toutefois il s'agit d'une isotropie transverse particulière puisqu'elle est entièrement déterminée par les trois paramètres  $E^s$ ,  $\nu^s$  et  $d$ .

Les modules n'apparaissant pas dans le tableau I.1 ne sont pas affectés par la mésolfissuration. Les figures I.10.a et I.10.b permettent de comparer les propriétés effectives données par chacune des estimations respectivement pour le module d'Young  $E_3^{hom}$  et pour les modules de cisaillement  $\mu_{13}^{hom}$  et  $\mu_{23}^{hom}$ . Ces deux figures indiquent des prédictions sensiblement différentes pour les deux schémas.

Lorsque les mésolfissures se ferment, seuls les modules de cisaillement  $\mu_{13}^{hom}$  et  $\mu_{23}^{hom}$  restent affectés (de la même façon qu'à mésolfissures ouvertes). Les modules d'Young  $E_3^{hom}$  et les

	estimation diluée	estimation M.T.
$\frac{E_3^{hom}}{E^s}$	$\frac{1 - r_1(1 - \nu^s)d}{1 - 2r_1\nu^2d}$	$\frac{1}{1 + \frac{16}{3}(1 - \nu^{s2})d}$
$\frac{\nu_{31}^{hom}}{\nu^s} = \frac{\nu_{32}^{hom}}{\nu^s}$	$\frac{E_3^{hom}}{E^s}$	$\frac{E_3^{hom}}{E^s}$
$\frac{\mu_{13}^{hom}}{\mu^s} = \frac{\mu_{23}^{hom}}{\mu^s}$	$1 - r_1d$	$\frac{1}{1 + r_1d}$

TAB. I.1: Modules effectifs : distribution de mésolfissures ouvertes, parallèles de normale  $\underline{e}_3$ .

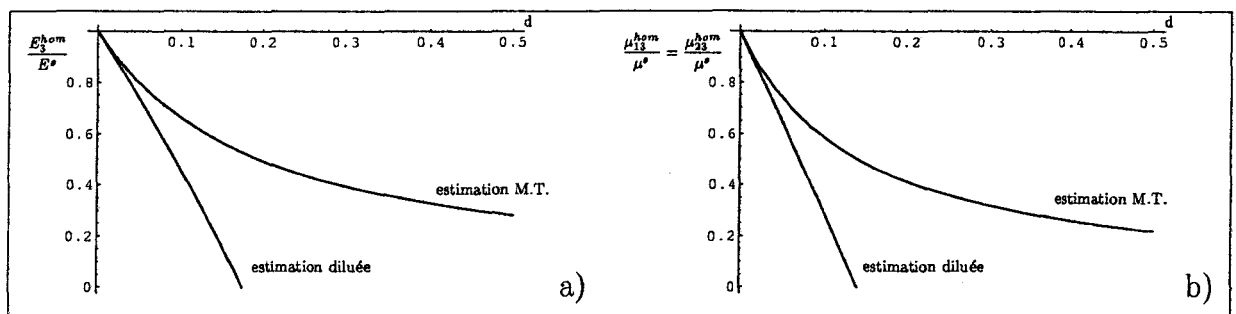


FIGURE I.10: Distribution de mésolfissures parallèles, variation des propriétés effectives en fonction de la densité  $d$  : a) module d'Young  $E_3^{hom}$  b) modules de cisaillement  $\mu_{13}^{hom}$  et  $\mu_{23}^{hom}$ .



coefficients de Poisson  $\nu_{13}^{hom}$  et  $\nu_{23}^{hom}$  sont entièrement restitués.

### I.3.5.2 Distribution isotrope

Considérons une distribution isotrope de mésos fissures ayant toutes la même densité  $\rho(\underline{n}) = \rho^d$ , il vient (cf. p. ex. [91]) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \rho(\underline{n}) dS &= \rho^d \\ \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \rho(\underline{n}) (\underline{n} \otimes \underline{n}) dS &= \frac{1}{3} \rho^d \underline{\underline{\delta}} \\ \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \rho(\underline{n}) (\underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n}) dS &= \frac{1}{15} \rho^d (5\mathbb{J} + 2\mathbb{K}) \end{aligned} \quad (I.37)$$

où  $\mathbb{J} = \frac{1}{3} \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}}$  et  $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ . En injectant ces expressions dans (I.32), on obtient pour l'estimation diluée :

- à mésos fissures toutes ouvertes :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{hom} &= 3k^s (1 - \alpha_1 \rho^d) \mathbb{J} + 2\mu^s (1 - \alpha_2^{ouv} \rho^d) \mathbb{K} \\ \text{avec } \alpha_1 &= \frac{16 (1 - \nu^s)}{9 (1 - 2\nu^s)} \quad \text{et} \quad \alpha_2^{ouv} = \frac{32 (5 - \nu^s) (1 - \nu^s)}{45 (2 - \nu^s)} \end{aligned} \quad (I.38)$$

- à mésos fissures toutes fermées :

$$\mathbb{C}^{hom} = 3k^s \mathbb{J} + 2\mu^s (1 - \alpha_2^{fer} \rho^d) \mathbb{K} \quad \text{avec} \quad \alpha_2^{fer} = \frac{32 (1 - \nu^s)}{15 (2 - \nu^s)} \quad (I.39)$$

La même analyse pour le schéma de Mori-Tanaka conduit :

- à mésos fissures toutes ouvertes :

$$S^{hom} = \frac{1}{3k^s} (1 + \alpha_1 \rho^d) \mathbb{J} + \frac{1}{2\mu^s} (1 + \alpha_2^{ouv} \rho^d) \mathbb{K} \quad (I.40)$$

- à mésos fissures toutes fermées :

$$S^{hom} = \frac{1}{2\mu^s} (1 + \alpha_2^{fer} \rho^d) \mathbb{K} \quad (I.41)$$

La figure I.11 illustre la variation du module de compression avec la densité de mésos fissures  $\rho^d$  lorsque celles-ci sont ouvertes. On notera que la complète restitution de ce module à la fermeture des mésos fissures est en accord avec les résultats expérimentaux sur des roches sollicitées en compression isotrope (cf. I.2).

Enfin, la figure I.12 montre que le module de cisaillement n'est que partiellement restitué à la fermeture des mésos fissures.

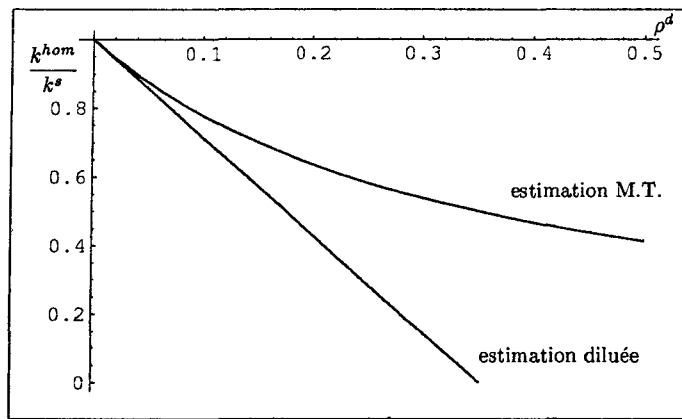


FIGURE I.11: Distribution isotrope de mésocraquelures ouvertes : variation du module de compression avec  $\rho^d$ .

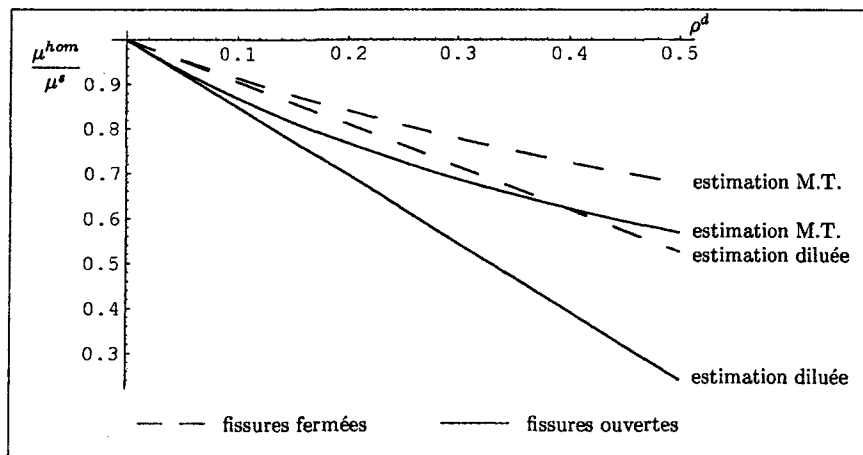


FIGURE I.12: Distribution isotrope de mésocraquelures : variation du module de cisaillement avec  $\rho^d$  a) mésocraquelures ouvertes b) mésocraquelures fermées.

## I.3.5.3 Distribution cylindrique

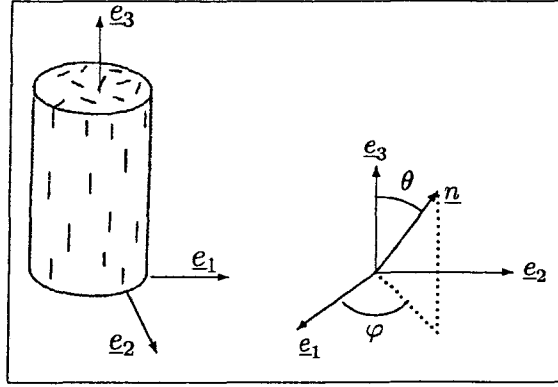


FIGURE I.13: a) distribution cylindrique de mésolfissures, b) définition des angles  $\theta$  et  $\varphi$ .

Considérons une distribution de mésolfissures de densité globale  $\rho^d$  et telles que leurs normales soient toutes dans le plan  $(e_1, e_2)$  ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) :  $\underline{n} = \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2$  (cf. fig. I.13). Il vient alors (cf. [91]) :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \rho(\underline{n})(\underline{n} \otimes \underline{n}) dS = \frac{\rho^d}{2} (\underline{\delta} - e_3 \otimes e_3) ;$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \rho(\underline{n})(\underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n}) dS = \frac{\rho^d}{8} \left[ \begin{array}{l} (\underline{\delta} - e_3 \otimes e_3) \otimes (\underline{\delta} - e_3 \otimes e_3) \\ + (\underline{\delta} - e_3 \otimes e_3) \overline{\otimes} (\underline{\delta} - e_3 \otimes e_3) \\ + (\underline{\delta} - e_3 \otimes e_3) \underline{\otimes} (\underline{\delta} - e_3 \otimes e_3) \end{array} \right] \quad (I.42)$$

Les expressions analytiques sont données en annexe B. Nous nous limiterons ici à l'illustration de la variation des différents modules avec  $\rho^d$  (figures I.14, I.15 et I.16).

La figure I.14 montre la variation du module d'Young  $E_1^{hom} = E_2^{hom}$  lorsque les mésolfissures sont ouvertes ou fermées. Les deux schémas prédisent une restitution partielle de ce module à la fermeture des mésolfissures.

La figure I.15 montre que le coefficient de Poisson  $\nu_{12}^{hom}$  est dégradé lorsque les mésolfissures sont ouvertes. Quand elles sont fermées,  $\nu_{12}^{hom}$  est supérieur à  $\nu^s$ . La dégradation du module de cisaillement  $\mu_{13}^{hom} = \mu_{23}^{hom}$  est illustrée par la figure I.16, la fermeture des mésolfissures n'ayant pas d'influence sur ce module.

Nous noterons par ailleurs que le coefficient de Poisson  $\nu_{13}^{hom} = \nu_{23}^{hom}$  évolue de la même manière que le module d'Young  $E_1^{hom}$ . Le rapport  $\frac{\nu_{13}^{hom}}{E_1^{hom}}$  est donc constant et égal à  $\frac{\nu^s}{E^s}$ .

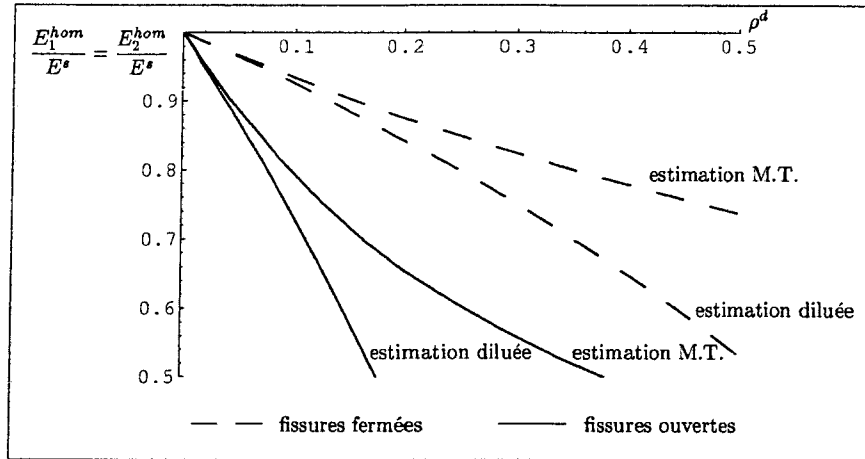


FIGURE I.14: Distribution cylindrique de mésolfissures : variation du module d'Young  $E_1^{hom} = E_2^{hom}$ .

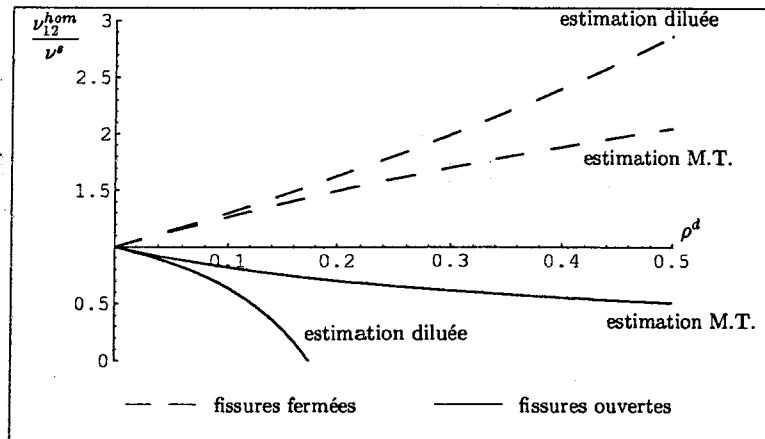


FIGURE I.15: Distribution cylindrique de mésolfissures : variation du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$ .

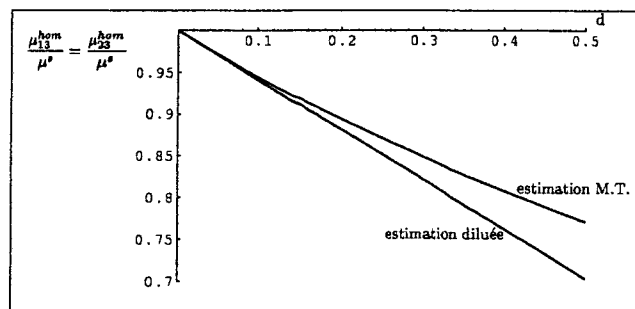


FIGURE I.16: Distribution cylindrique de mésolfissures : variation du module de cisaillement  $\mu_{13}^{hom}$ .

## I.4 Conclusion

La première partie de ce chapitre a permis de mettre en évidence les principales caractéristiques du comportement des matériaux quasi-fragiles tels que les roches et les bétons. On a ainsi souligné le rôle prépondérant joué par la microfissuration.

Une démarche micromécanique a ensuite été proposée pour la modélisation du comportement macroscopique des milieux mésolfissurés. Celle-ci permet de prendre en compte l'état d'activation (ouvert ou fermé) de la famille de mésolfissures considérée<sup>6</sup>. Les résultats ont été généralisés à un matériau comportant une distribution quelconque de mésolfissures.

Enfin, quelques illustrations ont permis de mettre en évidence l'effet des mésolfissures fermées sur les propriétés effectives du matériau.

A ce stade, on dispose de l'expression de l'énergie libre macroscopique qui sera à la base des modélisations de l'endommagement proposées dans les chapitres suivants.

---

<sup>6</sup>Rappelons que l'équivalence de cette démarche avec les techniques d'homogénéisation de type Eshelby a été montrée dans Deudé *et al.* [44] (cf. annexe A), y compris dans le cas de mésolfissures fermées

# Chapitre II

## Modélisation de l'endommagement anisotrope avec effets unilatéraux

L'approche présentée au chapitre I a permis de construire l'énergie libre macroscopique  $\Psi$  (Eq. I.30) du milieu mésolfissuré. Cette construction par changement d'échelle permet de prendre en compte les effets unilatéraux dus à la refermeture des mésolfissures. L'objectif visé dans ce chapitre est de proposer une modélisation tridimensionnelle du comportement des matériaux fragiles pour lesquels le mécanisme principal de déformation est l'endommagement par propagation de mésolfissures.

On adopte pour cela l'approche classique par variables internes qui consiste à :

- choisir la (ou les) variable(s) interne(s) d'endommagement,
- se donner un potentiel thermodynamique dont dérivent les lois d'état,
- décrire les lois d'évolution des variables de dommage.

Pour les deux premiers points, l'approche micromécanique présentée au chapitre I fournit les éléments nécessaires que l'on se propose de développer au paragraphe II.1. Quant au critère d'endommagement et aux lois d'évolution, ils feront l'objet du paragraphe II.2.

Enfin, après avoir décrit une procédure d'intégration locale de la loi d'endommagement et proposé une procédure d'identification des paramètres du modèle, on présente quelques exemples permettant d'illustrer les capacités prédictives de celui-ci.

## II.1 Potentiel thermodynamique et lois d'état

### II.1.1 Variables internes d'endommagement

Le choix de la (ou des) variable(s) d'endommagement est une question cruciale qui a fait l'objet de nombreuses propositions dans le cadre des modélisations macroscopiques. La plupart de ces modélisations sont basées sur l'utilisation d'un tenseur d'ordre deux (cf. à titre d'exemple [137, 35, 99, 50]). Pour rendre compte des effets unilatéraux, les études existantes (cf. par exemple [31, 63]) tendent à s'accorder sur la nécessité d'introduire un tenseur d'ordre quatre en plus du tenseur d'ordre deux. D'autres auteurs ont recours uniquement à un tenseur d'ordre quatre (cf. par exemple [80]).

L'étude micromécanique présentée au chapitre I suggère de considérer comme variable interne d'endommagement la fonction  $\rho$  (distribution des densités de mésolfissures) caractérisant l'état microstructural du matériau. Un tel choix est conforme à l'esprit des méthodes de changement d'échelle puisque  $\rho$  détermine la morphologie microstructurale du matériau.

### II.1.2 Propriétés du potentiel thermodynamique

On rappelle ici que le potentiel d'état retenu pour la modélisation de l'endommagement est celui fourni par (I.30). Outre la propriété de convexité requise pour le potentiel thermodynamique, la prise en compte de la refermeture des mésolfissures implique un comportement élastique multilinéaire se caractérisant par des discontinuités de la rigidité effective du matériau. Cependant, malgré ce saut, il est nécessaire que le potentiel thermodynamique et la réponse contrainte - déformation restent continus lors d'une désactivation partielle ou totale de l'endommagement.

Ces questions ont fait l'objet d'études générales par Wesolowski [143], puis plus récemment par Curnier *et al.* [39]. Ces auteurs ont notamment établi des conditions suffisantes pour la continuité de la loi de comportement d'un matériau élastique bilinéaire à la traversée de l'hypersurface séparant les domaines d'élasticités différentes. Ils ont également fourni des conditions suffisantes pour la convexité de l'énergie libre du matériau. Dans un cadre purement macroscopique, où la forme du potentiel thermodynamique est postulée, la vérification de ces conditions conduit généralement à imposer des restrictions sur les coefficients intervenant dans l'écriture du potentiel [63, 64, 142].

On se propose ici de vérifier que le potentiel  $\Psi$  obtenu par changement d'échelle (Eq. I.30)

possède déjà les conditions requises.

### II.1.2.1 Continuité de $\Psi$

Considérons un état de déformation  $\underline{E}^*$  qui appartient à l'hypersurface définissant la transition ouvert/fermé pour un certain nombre de familles de mésolfissures. Notons  $S_1^{2+}$  le domaine à mésolfissures ouvertes juste avant cet état de déformation ; supposons alors que des mésolfissures s'ouvrent, le même domaine devient  $S_2^{2+}$  tel que  $S_2^{2+} = S_1^{2+} \cup \Delta S^{2+}$ . La continuité de  $\Psi$  impose :

$$\int_{\Delta S^{2+}(\underline{E}^*)} \rho(\underline{n}) \left[ \begin{array}{l} a_2(\text{tr } \underline{E}^*)^2 + a_3(\text{tr } \underline{E}^*) \underline{E}^* : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \\ + (1 - \frac{\nu^s}{2}) \underline{E}^* : (\underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n}) : \underline{E}^* \end{array} \right] dS = 0 \quad (\text{II.1})$$

Or  $\Delta S^{2+}$  désigne les directions  $\underline{n}$  telles que  $\underline{N}(\underline{n}) : \underline{E}^* = 0$  et donc telles que l'expression à intégrer est nulle.  $\Psi$  est donc continu à la désactivation de l'endommagement. De la même façon, en écrivant la première loi d'état (cf. eq. II.9), on pourra vérifier la continuité de la contrainte macroscopique.

On met ici en évidence que la démarche micromécanique assure de fait la continuité de  $\Psi$  et de  $\underline{\Sigma}$ .

### II.1.2.2 Convexité par rapport à $\underline{E}$

S'agissant des propriétés de convexité, rappelons tout d'abord qu'en raison du comportement unilatéral se traduisant par des propriétés différentes selon l'état d'activation des mésolfissures,  $\Psi$  n'est pas de classe  $C^2$ .

Considérons dans un premier temps, une distribution de mésolfissures parallèles de normale  $\underline{n}$ . Le matériau a alors un comportement élastique bilinéaire, l'hyperplan  $\underline{N} : \underline{E} = 0$  scindant l'espace des déformations en deux domaines convexes  $\mathcal{E}^{ouv}$  et  $\mathcal{E}^{fer}$  correspondant aux domaines où les mésolfissures sont respectivement ouvertes et fermées (cf. figure I.8). Dans ce cas, la convexité de  $\Psi$  repose sur la proposition suivante, démontrée par Curnier *et al.* [39] :

*"l'énergie libre  $\Psi$ , fonction continûment différentiable, est strictement convexe sur l'espace des déformations si les deux restrictions  $\Psi^{ouv}$  et  $\Psi^{fer}$  de  $\Psi$  respectivement sur  $\mathcal{E}^{ouv}$  et  $\mathcal{E}^{fer}$  sont strictement convexes".*



La continue différentiabilité de  $\Psi$  (continuité de la réponse mécanique) ayant été démontrée au paragraphe précédent, montrons que les restrictions  $\Psi^{ouv}$  et  $\Psi^{fer}$  sont strictement convexes. On a (cf. (I.26)) :

$$\begin{aligned}\Psi^{ouv} &= \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}_{ouv}^{hom} : \underline{\underline{E}} \\ \Psi^{fer} &= \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}_{fer}^{hom} : \underline{\underline{E}}\end{aligned}\tag{II.2}$$

où  $\mathbb{C}_{ouv}^{hom}$  et  $\mathbb{C}_{fer}^{hom}$  sont donnés par (I.27) et (I.28). Ainsi, la stricte convexité de  $\Psi^{ouv}$  et  $\Psi^{fer}$  est assurée par la définie positivité de  $\mathbb{C}_{ouv}^{hom}$  et  $\mathbb{C}_{fer}^{hom}$ .

Dans le cas d'une distribution quelconque, l'espace des déformations est divisé, à priori, en une infinité de sous-espaces par les hyperplans  $\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{E}} = 0$  associés aux directions  $\underline{n}$  et définissant la transition d'état d'activation des mésofissures.

En extrapolant la proposition de Curnier *et al.* [39] à ce cas, la convexité de  $\Psi$  est assurée par la définie positivité de  $\mathbb{C}^{hom}$  dans presque tout l'espace des déformations.  $\mathbb{C}^{hom}$  dépendant de l'état de déformation, les conditions de définie positivité ne peuvent pas être établies de manière générale. Elles devront être vérifiées à chaque état de déformation et leur violation constituera un critère d'arrêt des simulations présentées dans la suite.

### II.1.3 Sur la représentation tensorielle macroscopique de l'endommagement anisotrope

Il est intéressant d'apprécier, à la lumière des résultats de la micromécanique, la pertinence d'une représentation de l'endommagement anisotrope à l'aide de tenseurs d'ordre deux ou quatre analogues à ceux généralement considérés dans le cadre macroscopique. Au vu de ce qui a été dit au paragraphe II.1.1, la question à résoudre est celle de l'approximation de la fonction de densités  $\rho$  à l'aide de ces tenseurs. En s'appuyant sur les travaux de Lubarda et Kracjinovic [91], de telles représentations sont possibles (cf. annexe C) :

– pour un tenseur d'ordre deux défini par :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \rho(\underline{n})(\underline{n} \otimes \underline{n}) dS\tag{II.3}$$

on a :

$$\rho(\underline{n}) = \frac{15}{2} (\underline{\underline{D}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) - \frac{1}{5} \text{tr}(\underline{\underline{D}}))\tag{II.4}$$

– par un tenseur d'ordre quatre, on a :

$$\rho(\underline{n}) = \frac{15}{4} \left\{ \frac{21}{2} \mathbb{D} :: (\underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n}) - 7 \underline{\underline{D}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) + \text{tr} \underline{\underline{D}} \right\} \quad (\text{II.5})$$

avec :

$$\mathbb{D} = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \rho(\underline{n}) (\underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n}) dS \quad (\text{II.6})$$

Pour ces deux représentations, les formulations analytiques du potentiel thermodynamique  $\Psi$  ne sont possibles que dans les cas où les mésolfissures sont toutes ouvertes ou toutes fermées. Les expressions obtenues sont reportées en annexe C. On notera notamment qu'hormis l'approximation de  $\rho$  qu'elle fournit, la représentation par le tenseur d'ordre quatre  $\mathbb{D}$  donne de manière exacte l'expression du potentiel dans les deux cas étudiés (mésolfissures toutes ouvertes ou toutes fermées).

Pour tous les états mixtes dans lesquels il existe à la fois des systèmes de mésolfissures ouvertes et des systèmes de mésolfissures fermées, de telles formulations analytiques s'avèrent impossibles en raison de la partition de la sphère unité.

**Remarque II.1** *Dans un contexte purement macroscopique, une démarche intéressante consiste en un développement en série de Fourier convergente de  $\rho(\underline{n})$  (cf. [75, 67]). Cette approche a été récemment développée par Welemane [141].*

#### II.1.4 Procédure d'intégration numérique du potentiel thermodynamique

Comme nous l'avons déjà signalé, la détermination analytique du potentiel thermodynamique n'est possible que moyennant la connaissance de la fonction de distribution  $\rho$ , ce qui n'est généralement pas le cas. C'est essentiellement pour cette raison que nous adoptons, pour la mise en oeuvre de l'approche micromécanique, une procédure d'intégration numérique de type Gauss.

Si l'on retient par exemple une procédure à  $\mathcal{P}$  points d'intégration, on a alors :

$$\Psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{E}} - \frac{a_1}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{\mathcal{P}_1} \varpi^i d^i \left[ \begin{array}{l} a_2 (\text{tr} \underline{\underline{E}})^2 + a_3 (\text{tr} \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{E}} : (\underline{n}^i \otimes \underline{n}^i) \\ + (1 - \frac{\nu^s}{2}) \underline{\underline{E}} : (\underline{n}^i \otimes \underline{n}^i \otimes \underline{n}^i \otimes \underline{n}^i) : \underline{\underline{E}} \end{array} \right] \\ + \sum_{i=1}^{\mathcal{P}} \varpi^i d^i \left[ \begin{array}{l} (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) : (\underline{n}^i \otimes \underline{n}^i) \\ - \underline{\underline{E}} : (\underline{n}^i \otimes \underline{n}^i \otimes \underline{n}^i \otimes \underline{n}^i) : \underline{\underline{E}} \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (\text{II.7})$$

où  $\mathcal{P}_1$  désigne le nombre de points d'intégration tels que  $\underline{N}^i : \underline{E} > 0$  et où  $\varpi^i$  désigne le poids associé au  $i^{\text{ème}}$  point d'intégration.

Compte tenu de cette écriture, le jeu de variables  $\alpha = \{d^i, i = 1, \mathcal{P}\}$  constitue les variables internes pour la modélisation de l'endommagement. En fait,  $d^i$  est la densité de mésofissures associée à l'élément de surface  $dS$  correspondant à la  $i^{\text{ème}}$  direction. On notera que la variable déformation macroscopique et l'ensemble des  $d^i$  constituent ainsi les variables d'état pour la modélisation :

$$\Psi = \Psi(\underline{E}, \alpha) = \Psi(\underline{E}, d^1, d^2, \dots, d^{\mathcal{P}}) \quad (\text{II.8})$$

L'approche par intégration numérique présente des similitudes avec des techniques développées dans le contexte des modèles microplans (cf. par exemple [28]). En effet, dans ces modèles, l'intégration des relations constitutives est effectuée sur la sphère unité en utilisant des schémas d'intégration à 21, 33, 37 ou 61 points répartis sur une demi-sphère de rayon unité [16] (cf. figure II.1). Les directions et les poids d'intégration sont donnés dans Bazant et Oh [16]. Sur un plan purement mathématique, on notera que ces schémas permettent de réaliser l'intégration exacte de polynômes (jusqu'au 13<sup>ème</sup> degré avec 61 points).

Une question qui se pose pour l'utilisation de tels schémas est le choix du nombre de points de Gauss. Pour les modèles microplans, Badel [9] a constaté une forte dispersion des résultats et conclut que 61 points ne suffisent pas. Il nous semble cependant que les inconsistances relevées par cet auteur sont davantage liées à la formulation des modèles microplans qu'à la procédure d'intégration elle-même. Pour la modélisation développée dans cette étude, nous discuterons du choix du nombre de points d'intégration au paragraphe II.4.

### II.1.5 Lois d'état

La première loi d'état (déjà considérée au § II.1.2.2), donnant la contrainte macroscopique, est obtenue par dérivation de  $\Psi$  par rapport à  $\underline{E}$  :

$$\underline{\Sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{E}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{E} \quad (\text{II.9})$$

où  $\mathbb{C}^{hom}$ , donné par (I.32), est déterminé à l'aide du jeu de variables internes retenu.

Le calcul de la force thermodynamique associée à  $\rho$  s'avère plus délicat. En s'appuyant sur

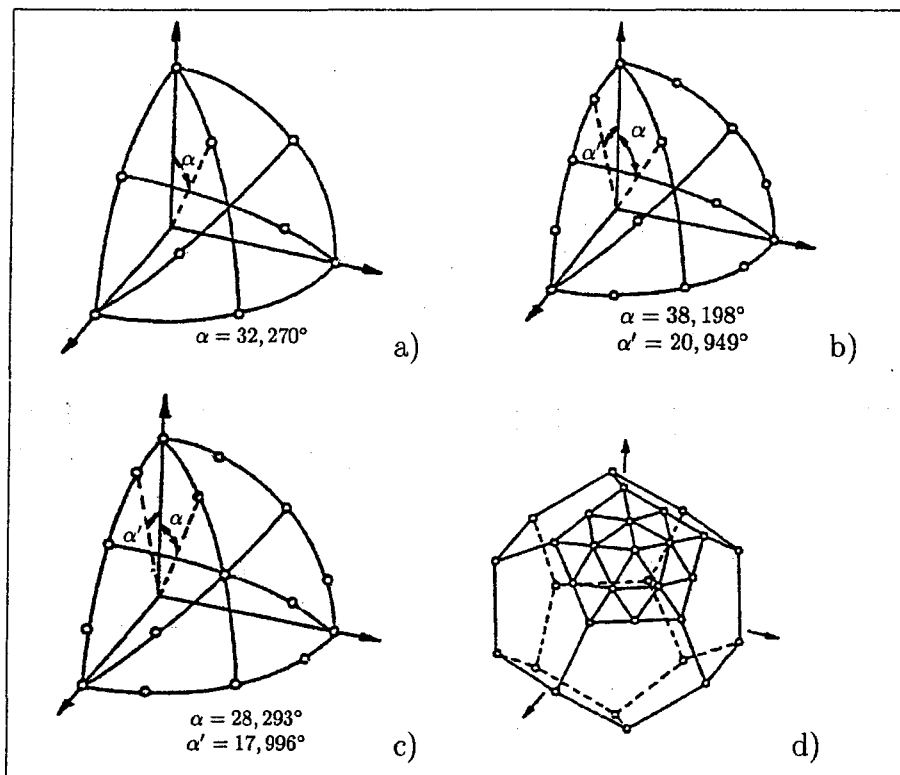


FIGURE II.1: Répartition des points d'intégration pour les schémas à  
 a) 21 points, b) 33 points, c) 37 points et d) 61 points [16].

la représentation de  $\rho$  adoptée au paragraphe précédent, la force thermodynamique "généralisée", associée au jeu de variables d'endommagement  $\alpha$ , est constituée par l'ensemble  $F^\alpha = \{F^{d^i}, i = 1, \mathcal{P}\}$ . Les forces thermodynamiques élémentaires  $F^{d^i}$  sont définies, à partir de (I.25), par :

$$F^{d^i} = -\frac{\partial W^i}{\partial d^i} = \frac{1}{2H_0} \left\{ [(N^i : E)^+]^2 + \frac{4\mu^{s^2}}{1 - \frac{\nu^s}{2}} [(\underline{E} \cdot \underline{E}) : \underline{\Delta}^i - \underline{E} : (\underline{\Delta}^i \otimes \underline{\Delta}^i) : \underline{E}] \right\} \quad (\text{II.10})$$

La force thermodynamique  $F^{d^i}$  s'interprète comme un taux de restitution de l'énergie analogue à celle classiquement utilisée en Mécanique linéaire de la rupture. En effet, en posant  $G^i = -\frac{\partial W^i}{\mathcal{N}^i \partial S^i}$  où  $\mathcal{N}^i S^i$  est la surface totale des mésolfissures de la famille considérée, on note que  $G^i = \frac{\partial d^i}{\partial S^i} F^{d^i}$ . Compte tenu du fait que la densité  $d^i = \mathcal{N}^i a^{i3} = \frac{\mathcal{N}^i S^{i\frac{3}{2}}}{\pi\sqrt{\pi}}$ , il vient :

$$F^{d^i} = \frac{4\pi^2}{3P^i} G^i \quad \text{avec} \quad P^i = 2\pi a^i \quad (\text{II.11})$$

Cette interprétation est similaire à celle fournie par Suquet [131] dans le contexte de l'endommagement par croissance de microvides sphériques ou de microfissures cylindriques : la force thermodynamique associée à la variable d'endommagement est une moyenne pondérée du taux de restitution d'énergie (de type Griffith) sur le bord des mésolfissures.

On notera enfin que  $F^{d^i}$  correspond à un taux de restitution de l'énergie en mode mixte puisqu'il comporte un terme  $(\frac{1}{2H_0} [(N^i : E)^+]^2)$  provenant de l'ouverture des mésolfissures (mode I) et des termes correspondant au taux de restitution de l'énergie de cisaillement (mode II et III).

## II.2 Critère d'endommagement et lois d'évolution de l'endommagement

Ce paragraphe a pour objectif de proposer un cadre permettant de décrire les conditions d'amorçage et d'évolution de l'endommagement. Du point de vue de la démarche micromécanique, ceci revient à préciser quand et comment évoluera le système de mésolfissures considéré. Cette question a été abordée dans le cadre de la Mécanique de la rupture fragile. On citera notamment les travaux de Nguyen *et al.* [106] (cf. également [107]) pour l'analyse des systèmes de fissures rectilignes dans un solide bidimensionnel et de fissures planes de contour quelconque. On notera que le cas des mésolfissures fermées a été récemment étudié par Leblond [84].

On adopte ici le point de vue classique de la thermodynamique des processus irréversibles (cf. [57, 58, 87, 95]).

### II.2.1 Critère d'endommagement

On adopte un critère d'endommagement associé à chaque famille, de la forme :

$$f^i(F^{d^i}, d^i) = F^{d^i} - \mathcal{R}(d^i) \quad (\text{II.12})$$

Le critère défini par (II.12) est conforme à celui classiquement considéré en Mécanique de la rupture, la fonction  $\mathcal{R}(d^i)$  jouant un rôle équivalent à une résistance à la fissuration (courbe R) [26]. Cette courbe R est habituellement déterminée à partir d'expériences de fissuration (cf. par exemple [109, 92]). Elle permet de rendre compte des éventuelles hétérogénéités microstructurales.

On notera que la dépendance de  $\mathcal{R}$  avec  $d^i$  dans (II.12) confère à  $d^i$  le rôle d'une variable d'écroutissage.

Le critère qui vient d'être décrit, et qui sera utilisé comme loi de propagation locale, s'interprète de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } F^{d^i} < \mathcal{R}(d^i), \text{ alors } \dot{d}^i &= 0 \text{ (pas de propagation de l'endommagement)} \\ \text{si } F^{d^i} = \mathcal{R}(d^i), \text{ alors } \dot{d}^i &\geq 0 \text{ (propagation de l'endommagement)} \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Cette loi est associée au potentiel de dissipation micromécanique  $\mathcal{R}(d^i)d^i$ .

Dans le contexte qui vient d'être adopté,  $F^{d^i}$  étant fonction de la déformation macroscopique  $\underline{E}$ , le domaine de réversibilité  $\mathcal{C}^i$  associé à la  $i^{\text{ème}}$  famille de mésolfissures est défini par :

$$\mathcal{C}^i = \{\underline{E} \text{ tel que } f^i(\underline{E}, d^i) \leq 0\} \quad (\text{II.14})$$

Par conséquent, le domaine de réversibilité global est défini comme l'intersection des convexes  $\mathcal{C}^i$  ( $i = 1, \mathcal{P}$ ). Des illustrations du critère, dans différents sous-espaces de déformation, seront présentées plus loin.

Il est intéressant de remarquer que la fonction de charge  $f^i$  ne dépend que de la variable  $d^i$  qui lui est associée ; ceci simplifiera notamment le traitement numérique présenté dans la suite.

## II.2.2 Lois d'évolution

Adoptant un schéma standard, conforme à la présentation faite au paragraphe précédent, la loi d'évolution de chaque variable  $d^i$  ( $i = 1, \mathcal{P}$ ) suit une règle de normalité par rapport à la fonction de charge  $f^i$  qui lui est associée. Il vient :

$$\left. \begin{aligned} \dot{d}^i &= \dot{\Lambda}_{d^i} \frac{\partial f^i(F^{d^i}, d^i)}{\partial F^{d^i}} = \dot{\Lambda}_{d^i} \quad ; \quad \dot{\Lambda}_{d^i} \geq 0 \\ \text{soit } \dot{d}^i &= \begin{cases} 0 & \text{si } f^i < 0 \text{ ou } (f^i = 0 \text{ et } \dot{f}^i < 0) \\ \dot{\Lambda}_{d^i} & \text{si } f^i = 0 \text{ et } \dot{f}^i = 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.15})$$

Chaque multiplicateur d'endommagement  $\dot{\Lambda}_{d^i}$  est donné par la condition de consistance  $\dot{f}^i = 0$ ; on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_{d^i} &= \frac{1}{\mathcal{R}'(d^i)} \{ \underline{\underline{A}}^i : \underline{\underline{E}} \}^+ \\ \text{avec } \underline{\underline{A}}^i &= \frac{1}{2H_0} \left\{ \begin{aligned} &2(\underline{\underline{N}}^i : \underline{\underline{E}})^+ \underline{\underline{N}}^i \\ &+ \frac{4\mu^{s2}}{(1-\nu^s/2)} [ \underline{\underline{\Delta}}^i \cdot \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\Delta}}^i - 2(\underline{\underline{\Delta}}^i \otimes \underline{\underline{\Delta}}^i) : \underline{\underline{E}} ] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

**Remarque II.2** La loi d'évolution (II.15) suppose implicitement une propagation des mésosfissures dans leur propre plan<sup>7</sup>. Il s'agit bien sûr d'une hypothèse qui ne se justifie que par les simplifications importantes de calcul qu'elle permet. Une modélisation impliquant un changement d'orientation des mésosfissures au cours de leur propagation nécessiterait de considérer les normales  $\underline{n}$  comme des variables évolutives. Ce type de démarche a été récemment mis en œuvre par Swoboda et Yang [132] et Schütte et Bruhns [126] dans le contexte 2D. Une extension tridimensionnelle de cette approche paraît actuellement hors de portée.

On notera enfin que l'hypothèse d'une croissance des microfissures dans leur propre plan n'implique pas l'impossibilité de rendre compte des effets d'une rotation des axes de chargement. En effet, une telle évolution du chargement conduirait, dans le cadre adopté ici, à une activation sélective d'autres systèmes de mésosfissures.

<sup>7</sup>Une analyse du branchement des mésosfissures peut être trouvée dans Amestoy [1] ou Amestoy et Leblond [2]. Quant à celle concernant une théorie générale de la propagation de fissures tridimensionnelles, on pourra se référer à Leblond [83].

**Remarque II.3** Le cadre adopté pour la loi d'évolution du système de mésofissures indique que la vitesse de propagation  $\dot{d}^i$  de chaque variable ne dépend de  $\underline{E}$  que par l'intermédiaire de la force thermodynamique  $F^{d^i}$  qui lui est associée. Ce cadre est tout à fait conforme à celui présenté par Rice [122] pour la transition micro-macro, avec comme variables internes des grandeurs décrivant l'arrangement microstructural du matériau.

### II.2.3 Formulation en vitesse de la loi d'endommagement

La formulation en vitesse s'obtient par différentiation de la première loi d'état. En effet, on a :

$$\dot{\Sigma} = \dot{\mathbb{C}}^{hom} : \underline{E} + \mathbb{C}^{hom} : \underline{\dot{E}} \quad (\text{II.17})$$

Or,  $\dot{\mathbb{C}}^{hom}$  dépendant des éventuels changements d'état d'activation (ouvert ou fermé) du système de mésofissures dus à l'évolution du chargement, il s'écrit :

$$\dot{\mathbb{C}}^{hom} = \sum_{i=1}^P \varpi^i \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial d^i} \dot{d}^i + \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial \underline{E}} : \underline{\dot{E}} \quad (\text{II.18})$$

Or,  $\underline{E}$  n'intervient pas de manière explicite dans  $\mathbb{C}^{hom}$  mais plutôt par l'intermédiaire de la partition de la sphère unité; par conséquent, le dernier terme de (II.18) ne peut pas être calculé de manière générale.

Dans le cas où l'état d'activation reste inchangé durant l'incrément de déformation considéré, il est possible d'évaluer le tenseur des modules tangents associé à la loi d'endommagement :

$$\underline{\dot{\Sigma}} = \mathbb{C}_t^{hom} : \underline{\dot{E}} \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}_t^{hom} = \mathbb{C}^{hom} - \sum_{i=1}^P \varpi^i \frac{1}{\mathcal{R}'(d^i)} \mathcal{G}^i \underline{A}^i \otimes \underline{A}^i \quad (\text{II.19})$$

$$\text{avec } \mathcal{G}^i = \begin{cases} 0 & \text{si } f^i < 0 \text{ ou } (f^i = 0 \text{ et } \dot{f}^i < 0) \\ 1 & \text{si } f^i = 0 \text{ et } \dot{f}^i = 0 \end{cases}$$

et  $\underline{A}^i$  donné par (II.16).

**Remarque II.4** Dans les applications mises en œuvre par la suite, on adopte la forme suivante pour  $\mathcal{R}(d^i)$  :

$$\mathcal{R}(d^i) = k(1 + \eta d^i) \quad (\text{II.20})$$



où  $k$  et  $\eta$  sont deux paramètres du modèle. Cette forme est identique à celle proposée par Marigo [94] dans le contexte des modèles d'endommagement isotrope.

Il est évident que d'autres formes peuvent être adoptées pour la courbe de résistance  $\mathcal{R}(d^i)$  sur la base d'observations expérimentales (cf. à ce propos Basista [15]).

## II.2.4 Intégration numérique locale

Un schéma implicite associé à une méthode classique de prédiction-corrrection est adopté. L'état mécanique est supposé totalement connu au pas  $j$ , on suppose *a priori* que l'évolution entre les pas  $j$  et  $j + 1$  est élastique. En considérant que le pilotage du trajet de sollicitations se fasse à déformation totale imposée, il vient :

$$\text{prédiction élastique : } \begin{cases} \underline{\underline{E}}_{j+1} = \underline{\underline{E}}_j + \Delta \underline{\underline{E}} \\ d_{j+1}^i = d_j^i \quad (i = 1 \text{ à } \mathcal{P}) \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

Il reste à vérifier si cet état mécanique est admissible, *i.e.*  $\forall i, f^i(F_{j+1}^{d^i}, d_j^i) \leq 0$ . Dans le cas contraire, on procède à une correction non-linéaire :

$$\text{correction non - linéaire : } \begin{cases} \text{Pour } i = 1 \text{ à } \mathcal{P} \\ \text{Si } f^i(F_{j+1}^{d^i}, d_j^i) > 0 \\ \Delta d^i = \frac{1}{k\eta} f^i(F_{j+1}^{d^i}, d_j^i) \\ d_{j+1}^i = d_j^i + \Delta d^i \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

Du fait de la forme du critère d'endommagement et de la fonction  $\mathcal{R}(d^i)$  (II.20), l'incrément d'endommagement associé à chaque famille de mésolfissures est déduit immédiatement par résolution d'une équation linéaire. L'utilisation d'un schéma itératif de type Newton-Raphson s'avère inutile, la correction suivant une prédiction élastique non-admissible étant immédiate.

## II.3 Procédure d'identification des paramètres du modèle

Nous proposons ici une démarche d'identification des paramètres intervenant dans la modélisation qui vient d'être décrite. Ces paramètres sont les deux modules élastiques

caractérisant le comportement de la matrice solide, la distribution de densité initiale de mésolfissures et les deux paramètres  $k$  et  $\eta$  intervenant dans le critère d'endommagement. En supposant que la distribution de densité initiale est isotrope, elle est caractérisée ici par la densité globale  $\rho_0^d$ .

### II.3.1 Identification de la densité initiale de mésolfissures et des modules élastiques

A priori, la densité initiale des mésolfissures doit être évaluée à partir d'une caractérisation de la microstructure du matériau (cf. techniques d'observation indiquées au chapitre I). Nous adoptons ici un point de vue consistant à identifier ce paramètre ainsi que les modules élastiques de la matrice solide à partir de certains essais conventionnels (compression hydrostatique et traction uniaxiale) présentés au chapitre I. Cette façon de procéder est licite puisque l'approche micromécanique a permis de relier les propriétés macroscopiques à la microstructure du matériau.

Dans cette phase d'identification, on suppose que les mésolfissures sont initialement ouvertes, cette ouverture étant relativement faible. On considère de plus que cette ouverture est identique pour toutes les familles de mésolfissures. L'extension du modèle à ce cas est présenté en annexe D. Considérons l'essai de compression isotrope pour lequel la réponse est schématisée sur la figure II.2.

Les mésolfissures étant ouvertes dans la première phase du chargement, le module de compression  $k^{ouv}$  est donné par :

$$k^{ouv} = k^s (1 - \alpha_1 \rho_0^d) \quad (\text{II.23})$$

Lorsque toutes les mésolfissures sont fermées, ce module est totalement restauré, *i.e.*  $k^{fer} = k^s$ . Ceci permet d'identifier un premier module élastique.

Les modules de compression  $k^{ouv}$  et  $k^{fer}$  étant déterminés sur la courbe expérimentale, il vient :

$$\frac{k^{ouv}}{k^{fer}} = (1 - \alpha_1 \rho_0^d) \text{ soit } \rho_0^d = \frac{1}{\alpha_1} \left(1 - \frac{k^{ouv}}{k^{fer}}\right) \quad (\text{II.24})$$

La détermination de  $\rho_0^d$  nécessite la connaissance des deux modules élastiques  $k^s$  et  $\mu^s$ . Nous proposons d'identifier le second module sur la courbe de traction uniaxiale. La pente de la partie linéaire correspond au module d'Young initialement endommagé, soit  $E^{ini}$  la pente mesurée. Les mésolfissures étant toutes ouvertes, il vient :

$$E^{ini} = \frac{9k^s \mu^s (1 - \alpha_1 \rho_0^d) (1 - \alpha_2^{ouv} \rho_0^d)}{k^s (1 - \alpha_1 \rho_0^d) + \mu^s (1 - \alpha_2^{ouv} \rho_0^d)} \quad (\text{II.25})$$

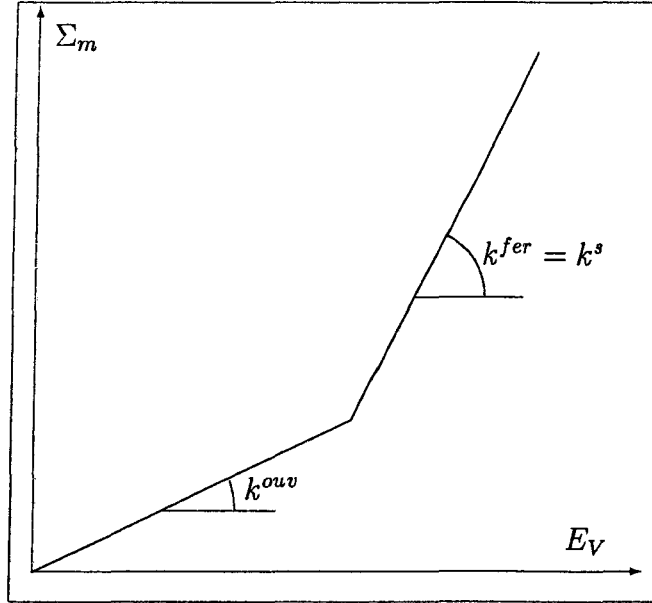


FIGURE II.2: Schématisation d'un essai de compression hydrostatique.

En injectant les expressions de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2^{ouv}$  (Eq. I.38) et de  $\rho_0^d$  (Eq. II.24) en fonction de  $k^s$  et  $\mu^s$ , le module de cisaillement de la matrice solide est la solution réelle de l'équation :

$$(9k^{ouv} - E^{ini})(16(k^s - k^{ouv})\mu^{s3} + 6k^s(k^s - 6k^{ouv})\mu^{s2} + 45k^{s3}\mu^s) + 15k^{s2}k^{ouv} E^{ini}(3k^s - 2\mu^s) = 0, \quad (\text{II.26})$$

ce qui permet de déterminer  $\rho_0^d$  selon II.24.

**Remarque II.5** L'analyse simplifiée relative à la schématisation de la figure II.2 est imposée par la prise en compte d'une ouverture initiale identique pour toutes les mésolfissures. Une étude plus générale de cette question basée sur la considération d'une distribution d'ouverture des mésolfissures peut être trouvée dans Deudé [43] (cf. également [42]).

### II.3.2 Identification de $k$ et $\eta$

Les paramètres  $k$  et  $\eta$  relatifs à l'évolution de l'endommagement (seuil et écrouissage) sont plus délicats à déterminer. A priori, ils peuvent être identifiés en utilisant un essai approprié, les données nécessaires à l'identification étant l'état de contrainte au seuil d'endommagement, la contrainte au pic et la distribution des densités de mésolfissures au pic. Ce dernier paramètre étant difficilement accessible, on privilégiera des états isotropes d'endommagement, produits par exemple par un trajet d'extension isotrope.

### - Essai d'extension hydrostatique

Lors d'un trajet d'extension hydrostatique, les mésolfissures sont toutes ouvertes et l'endommagement évolue de manière isotrope ; celui-ci peut donc être décrit par la variable scalaire  $\rho^d$ . En utilisant (I.38), le potentiel thermodynamique s'écrit :

$$\Psi = \frac{1}{2}k^s(1 - \alpha_1\rho^d)(\text{tr } \underline{\underline{E}})^2 + \mu^s(1 - \alpha_2^{\text{ouv}}\rho^d)\underline{\underline{E}}' : \underline{\underline{E}}' \text{ avec } \underline{\underline{E}}' = \underline{\underline{E}} - \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{\underline{E}})\underline{\underline{\delta}} \quad (\text{II.27})$$

En notant  $\Sigma_m$  la contrainte macroscopique moyenne et  $E_V$  la déformation volumique, il vient :

$$\begin{aligned} \Sigma_m &= k^s(1 - \alpha_1\rho^d)E_V \\ f^\rho &= \frac{1}{2}k^s\alpha_1E_V^2 - k(1 + \eta\rho^d) \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

où  $f^\rho$  définit le critère d'endommagement associé à  $\rho^d$ . En notant  $\Sigma_m^0$  la contrainte moyenne au seuil d'endommagement ; on a :

$$k = \frac{1}{2} \frac{\alpha_1 \Sigma_m^0}{k^s(1 - \alpha_1\rho_0^d)^2(1 + \eta\rho_0^d)} \quad (\text{II.29})$$

Le paramètre  $\eta$  est identifié en utilisant la contrainte moyenne au pic, notée  $\Sigma_m^p$ , et l'expression (II.29) de  $k$ . La combinaison de  $\dot{\Sigma}_m = 0$  et de  $f^\rho = 0$  permet d'obtenir une expression de la densité de mésolfissures au pic de contrainte. En écrivant ensuite que l'état mécanique au pic est sur la surface de charge  $f^\rho = 0$ , il vient que  $\eta$  est la solution réelle de l'équation du troisième degré :

$$\frac{\Sigma_m^p{}^2}{\Sigma_m^0{}^2} \eta^2 \alpha_1 (1 - \alpha_1 \rho_0^d) (1 + \eta \rho_0^d) - \frac{4}{27} (1 + \eta)^3 = 0 \quad (\text{II.30})$$

$k$  est alors donné par (II.29).

### - Essai de traction uniaxiale

L'essai d'extension hydrostatique étant peu courant en géomécanique, une alternative pour l'identification consiste à utiliser un essai de traction uniaxiale. La microfissuration induite par ce trajet de chargement étant plus complexe, il n'est pas possible de proposer une identification analytique des paramètres  $k$  et  $\eta$ .

Une simplification consiste à considérer que le seuil d'endommagement est déterminé à l'aide du critère d'endommagement associé aux mésolfissures de normale  $\underline{n} = \underline{e}_3$ . On en déduit  $k$  en fonction du paramètre  $\eta$  et de la contrainte axiale au seuil d'endommagement.

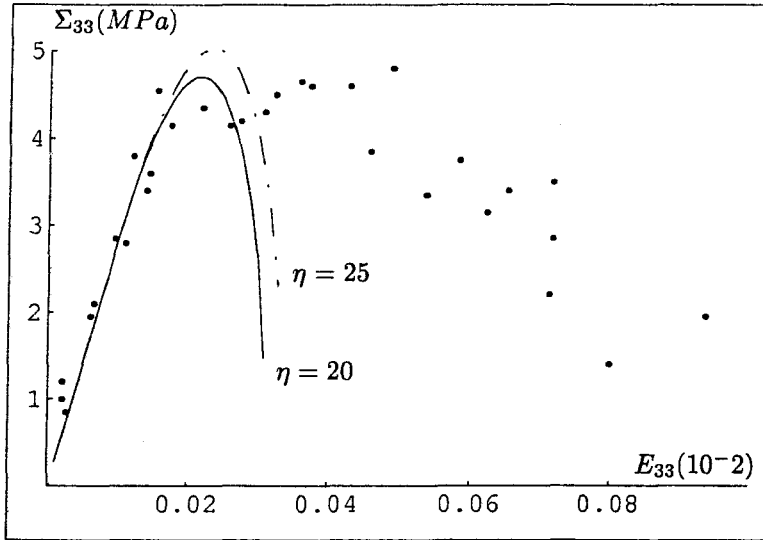


FIGURE II.3: identification des paramètres sur un essai de traction uniaxiale de Bazant et Pijaudier-Cabot [17]

Le paramètre  $\eta$  apparaît alors comme un paramètre de calage.

La figure II.3 présente pour un béton le résultat de cette procédure d'identification pour deux valeurs du paramètre  $\eta$  :  $\eta = 20$  ( $k = 6,02.10^{-4} J.m^{-2}$ ) et  $\eta = 25$  ( $k = 5,78.10^{-4} J.m^{-2}$ ). Les autres paramètres sont :  $E^s = 29 \text{ GPa}$ ,  $\nu^s = 0,19$  et  $\rho_0^d = 0,01$ .

Les deux simulations sont relativement proches et apparaissent satisfaisantes. On observe toutefois que le modèle ne fournit pas des prédictions concordantes avec le comportement post-pic, notamment pour de forts niveaux de déformation. Dans la suite de ce chapitre, le couple de paramètre retenu est  $\eta = 25$  et  $k = 5,78.10^{-4} J.m^{-2}$ .

## II.4 Choix du nombre de points de Gauss

Comme nous l'avons souligné au paragraphe II.1.1, l'intégration numérique sur la sphère unité nécessite de choisir un schéma d'intégration (*i.e.* le nombre de points de Gauss à considérer) parmi ceux proposés par Bazant et Oh [16]. Afin de justifier le choix qui sera fait, nous proposons une série de tests, les paramètres du modèle étant ceux qui viennent d'être déterminés.

### II.4.1 Test général

Le premier test ne porte pas directement sur la formulation du modèle d'endommagement ; il s'agit de calculer les tenseurs  $\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \underline{n} \otimes \underline{n} dS$  et  $\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} dS$  et de les comparer à leur valeur théorique en évaluant :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathcal{R}}^d} &= \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \underline{n} \otimes \underline{n} dS - \frac{1}{3} \underline{\underline{\delta}} \\ \mathbb{R}^q &= \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} dS - \frac{1}{15} (3\mathbb{K} + 2\mathbb{I}) \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

Pour les schémas à 21, 33 et 37 points de Gauss, les normes de  $\underline{\underline{\mathcal{R}}^d}$  et  $\mathbb{R}^q$  sont de l'ordre de  $10^{-12}$ , ce qui correspond à la précision du calcul. Par contre, le schéma à 61 points de Gauss conduit à une valeur de l'ordre de  $10^{-2}$ . Il ne s'agit pas ici de chercher la ou les sources de cette erreur, mais il est probable que celles-ci proviennent des poids reportés dans [16].

Ce premier test, s'il ne permet pas de choisir une procédure d'intégration, invalide donc le schéma à 61 points tel qu'il est donné dans [16]. Les tests suivants compareront les résultats des schémas d'intégration à 21, 33 et 37 points de Gauss sur des trajets de chargement particuliers.

### II.4.2 Comparaison des prédictions sur un trajet de traction ou de compression uniaxiale

On considère les trajets de traction et de compression uniaxiale d'axe  $\underline{e}_3$ . La comparaison est établie sur trois critères : la courbe de comportement, l'évolution de  $\rho^d$  au cours du chargement et la distribution des densités au pic. En traction uniaxiale (fig. II.4 et II.5), de légères différences sont observées dans l'évolution de  $\rho^d$  (fig. II.4.b) ; l'erreur relative maximale entre les trois schémas d'intégration est de l'ordre de 4%.

Les distributions de densité au pic obtenues (fig. II.5) sont de formes similaires ; la densité maximale est obtenue pour les mésolfissures de normale  $\underline{n} = \underline{e}_3$ . Les mésolfissures dont la normale appartient au plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$  ne se propagent pas sous ce chargement axisymétrique.

En compression uniaxiale (fig. II.6 et II.7), les résultats obtenus pour les trois schémas d'intégration sont identiques jusqu'au pic, ce qui paraît satisfaisant.

Sur la base de ces différentes comparaisons, nous retiendrons le schéma à 33 points d'intégration, celui-ci paraissant être un bon compromis entre la précision numérique et

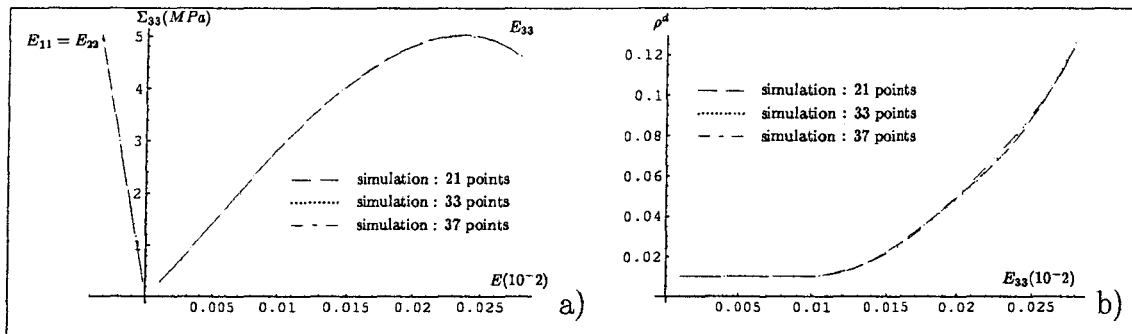


FIGURE II.4: Traction uniaxiale : comparaisons des simulations avec 21, 33 et 37 points d'intégration. a) courbe contrainte - déformation. b) évolution de la densité d'endommagement

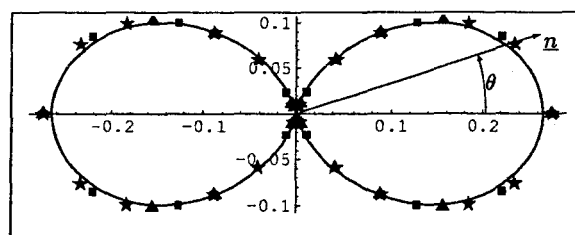


FIGURE II.5: Traction uniaxiale : distribution des densités d'endommagement au pic pour les simulations avec 21 (triangles), 33 (carrés) et 37 (étoiles) points d'intégration. Le trait plein constitue une approximation des distributions obtenues.

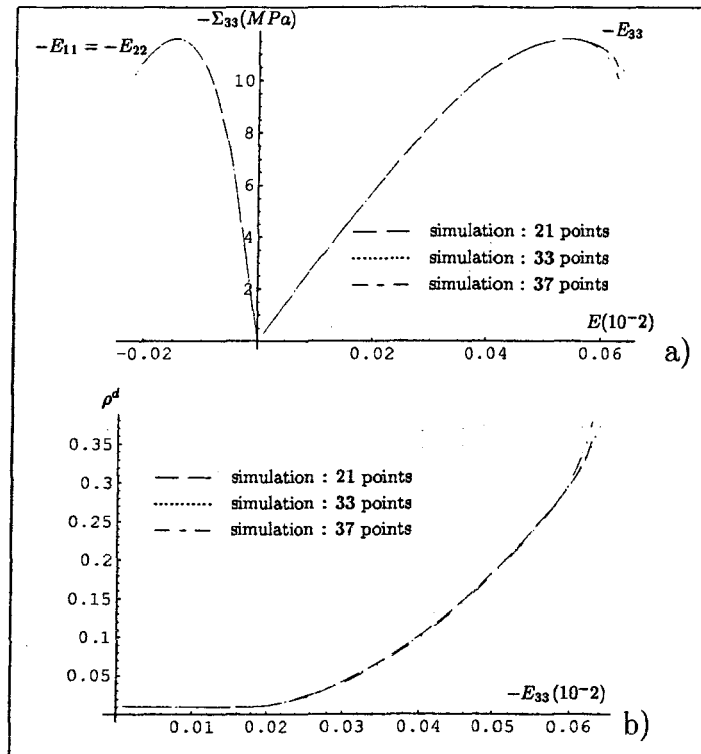


FIGURE II.6: Compression uniaxiale : comparaisons des simulations avec 21, 33 et 37 points d'intégration. a) courbe contrainte - déformation. b) évolution de la densité d'endommagement



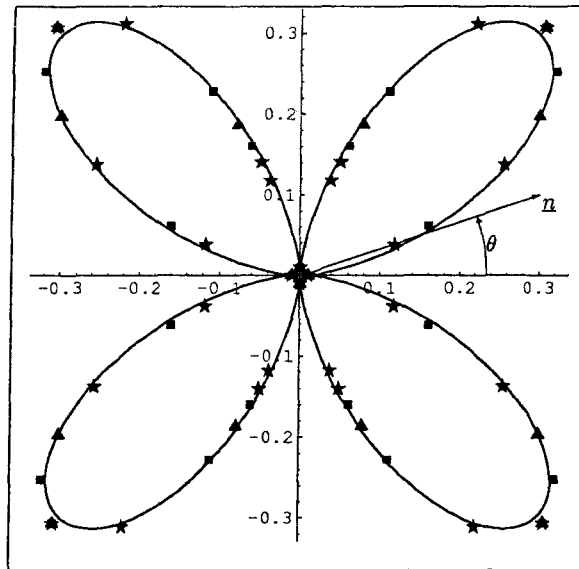


FIGURE II.7: Compression uniaxiale : distribution des densités d'endommagement au pic pour les simulations avec 21 (triangles), 33 (carrés) et 37 (étoiles) points d'intégration. Le trait plein constitue une approximation des distributions obtenues.

le temps de calcul. Notons que le schéma à 21 points pourrait être suffisant notamment dans la perspective de calculs de structures.

## II.5 Illustration du critère d'endommagement

Nous proposons d'illustrer le critère de premier endommagement (Eq. II.12) dans plusieurs sous-espaces de déformations et de contraintes. Les paramètres utilisés sont ceux déjà définis ; rappelons que la densité de mésosfissuration est supposée isotrope dans l'état initial.

### II.5.1 Etat de déformation axisymétrique

Dans un premier temps, on se restreint à un état de déformation axisymétrique, tel que  $\underline{E} = E_{11}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + E_{33}(\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)$ . Le critère initial d'endommagement sera donc illustré dans le plan ( $E_{11} = E_{22}, E_{33}$ ).

Considérons une famille de normale  $\underline{n}$ , le critère d'ouverture/fermeture de cette famille

s'écrit :

$$E_{33} = -\frac{4\nu^s + (1 - 2\nu^s)(1 - \cos 2\theta)}{2\nu^s + (1 - 2\nu^s)(1 + \cos 2\theta)} E_{11} \quad (\text{II.32})$$

En vertu de l'axisymétrie du chargement, le critère d'endommagement (II.12) est défini par :

– à mésolfissures ouvertes :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2H_0} (A(\theta)E_{11}^2 + B(\theta)E_{11}E_{33} + C(\theta)E_{33}^2) - \mathcal{R}(d) = 0 \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} A(\theta) = (2\lambda^s + \mu^s(1 - \cos 2\theta))^2 + \frac{4\mu^{s2}(\lambda^s + \mu^s)}{3\lambda^s + 4\mu^s} \sin^2 2\theta \\ B(\theta) = 2(\lambda^s + \mu^s(1 - \cos 2\theta))(\lambda^s + \mu^s(1 + \cos 2\theta)) - \frac{8\mu^{s2}(\lambda^s + \mu^s)}{3\lambda^s + 4\mu^s} \sin^2 2\theta \\ C(\theta) = (\lambda^s + \mu^s(1 + \cos 2\theta))^2 + \frac{4\mu^{s2}(\lambda^s + \mu^s)}{3\lambda^s + 4\mu^s} \sin^2 2\theta \end{array} \right. \quad (\text{II.33}) \end{aligned}$$

– et à mésolfissures fermées :

$$\frac{2\mu^{s2}(\lambda^s + \mu^s)}{H_0(3\lambda^s + 4\mu^s)} \sin^2 2\theta (E_{11} - E_{33})^2 - \mathcal{R}(d) = 0 \quad (\text{II.34})$$

où  $\theta$  est l'angle entre  $\underline{e}_3$  et  $\underline{n}$  (cf. figure I.13.b). Le critère d'endommagement initial d'une famille quelconque de mésolfissures est donc la réunion de deux demi-droites (à mésolfissures fermées) parallèles à l'axe hydrostatique et d'une partie d'ellipse (à mésolfissures ouvertes). La figure II.8 donne la représentation du critère pour trois familles différentes ( $\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}$  et  $\frac{5\pi}{12}$ ).

Le critère global, défini comme la courbe enveloppe intérieure des critères associés aux différentes familles, est obtenu en simulant des trajets de chargements radiaux dans le sous-espace de déformation considéré. Le procédé utilisé pour obtenir le critère global est comparable à celui des plans critiques d'endommagement proposé par Mroz et Maciejewski [97, 98]. Les figures (II.9.a) et (II.9.b) fournissent l'illustration du critère global dans les sous-espaces ( $E_{11} = E_{22}, E_{33}$ ) et ( $\Sigma_{11} = \Sigma_{22}, \Sigma_{33}$ ) respectivement. Sur ces deux courbes, le trait continu (resp. le trait discontinu) indique les états de sollicitation où le critère est atteint à mésolfissures ouvertes (resp. à mésolfissures fermées). On observera également une certaine dissymétrie entre traction et compression.

Ces résultats appellent deux remarques :

- La dissymétrie entre les seuils en compression et en traction uniaxiales est d'environ 2 (cf. fig. II.9). Ceci n'est pas conforme aux observations expérimentales sur le type

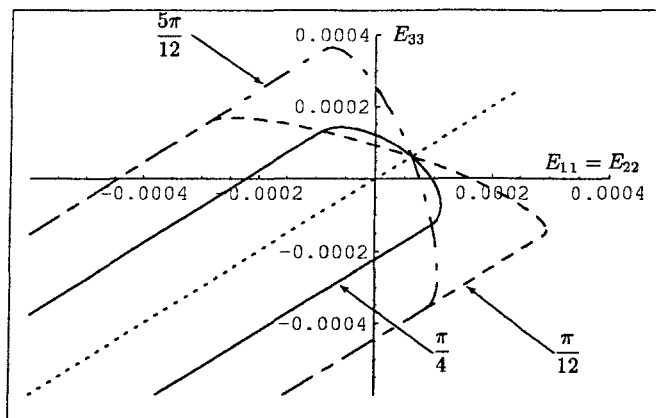


FIGURE II.8: Trace du critère d'endommagement initial associé à plusieurs familles de mésofissures dans le plan ( $E_{11} = E_{22}, E_{33}$ ).

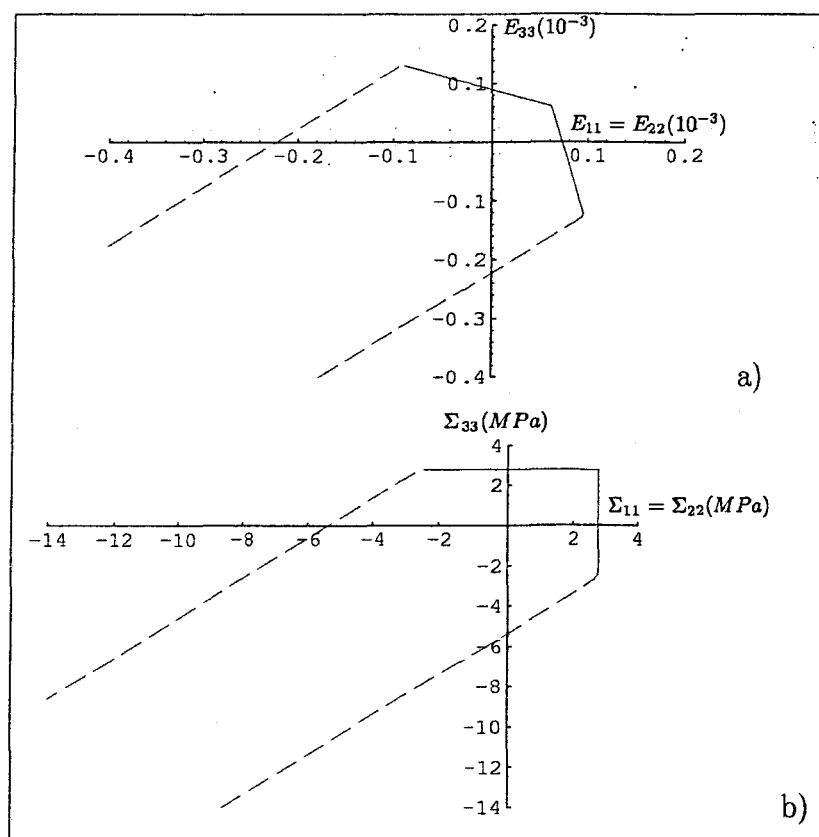


FIGURE II.9: Tracé du critère d'endommagement dans les plans a) ( $E_{11} = E_{22}, E_{33}$ ) b) ( $\Sigma_{11} = \Sigma_{22}, \Sigma_{33}$ ).

de matériau considéré. Ce point pourra être réexaminé en considérant, conformément à des données d'expérience, des énergies critiques différentes en mode I et en mode II (cf. Atkinson et Meredith [5]).

- Le critère à mésofissures fermées (portions linéaires) est parallèle à l'axe hydrostatique. Ceci illustre le fait que le critère d'endommagement (à fissure fermée) ne dépend pas de la contrainte moyenne. Dans son état actuel, le modèle proposé ne permet donc pas de décrire les effets de la pression moyenne sur les seuils d'endommagement en compression. On verra au chapitre III que l'introduction des phénomènes de frottement sur les lèvres des mésofissures fermées apportera une première réponse.

### II.5.2 Etat de torsion - compression (ou traction)

Les figures II.10.a et II.10.b représentent le critère d'endommagement initial dans les sous espaces ( $E_{33}, E_{13} = E_{23}$ ) et ( $\Sigma_{33}, \Sigma_{13} = \Sigma_{23}$ ) respectivement.

Comme au paragraphe précédent, le trait continu (resp. discontinu) permet de distinguer les états de sollicitation où le critère est atteint à mésofissures ouvertes de ceux où il est atteint à mésofissures fermées. On note également des effets de dissymétrie traction-compression sur la forme du critère. Par ailleurs, on observe une symétrie par rapport aux contraintes (ou déformations) de cisaillement.

### II.5.3 Etats plans

Nous considérons ici les états de sollicitations planes, *i.e.* de déformations planes ( $E_{22} = 0$ ) et de contraintes planes ( $\Sigma_{22} = 0$ ). Les figures II.11.a et II.11.b permettent de comparer les résultats obtenus dans les sous-espaces ( $E_{11}, E_{33}$ ) et ( $\Sigma_{33}, \Sigma_{11}$ ) respectivement.

## II.6 Capacités prédictives du modèle d'endommagement

L'objectif visé ici est d'illustrer les prédictions du modèle sur quelques trajets de chargement simples.

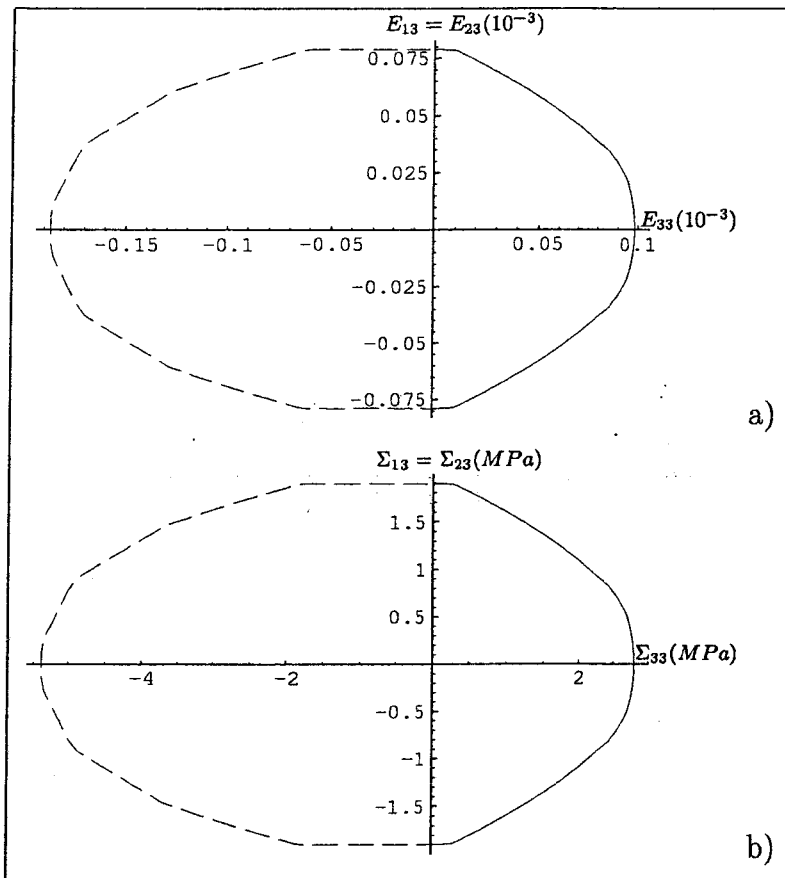


FIGURE II.10: Tracé du critère d'endommagement initial dans les plans  
a)  $(E_{33}, E_{13} = E_{23})$  b)  $(\Sigma_{33}, \Sigma_{13} = \Sigma_{23})$ .

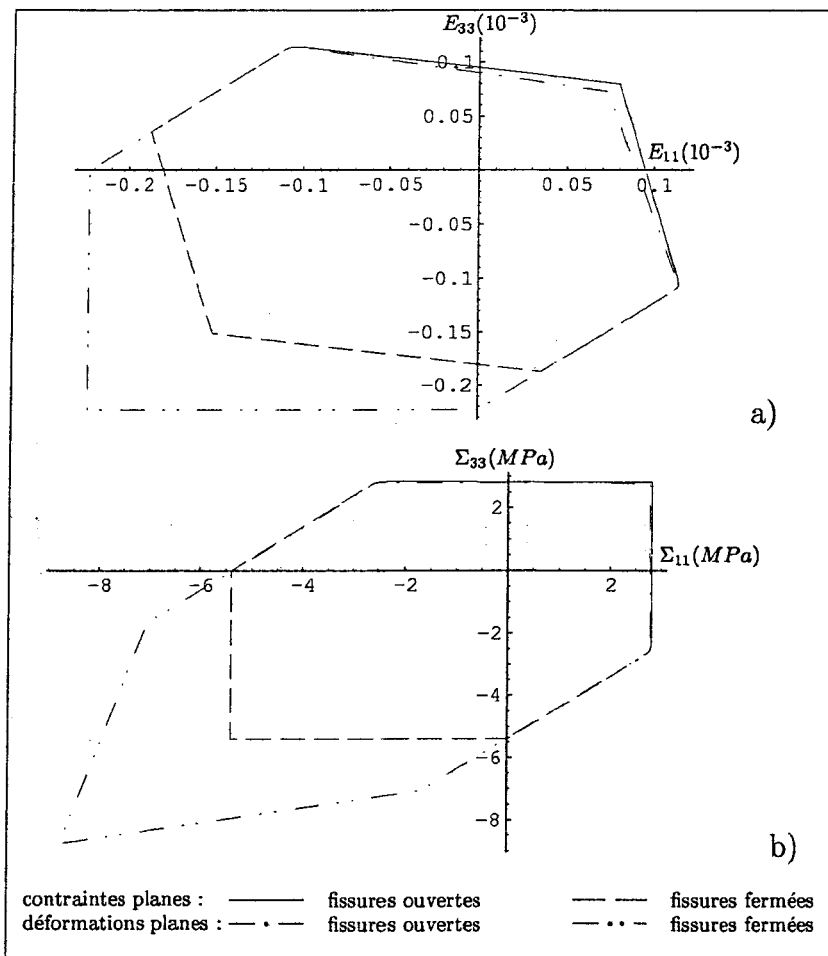


FIGURE II.11: Déformations planes ( $E_{22} = 0$ ) et contraintes planes ( $\Sigma_{22} = 0$ ) : tracé du critère d'endommagement initial dans les plans a) ( $E_{11}, E_{33}$ ) b) ( $\Sigma_{33}, \Sigma_{11}$ ).

## II.6.1 Etude analytique : une seule famille de mésolfissures

On commence par une étude analytique portant sur un matériau affaibli par une famille de mésolfissures parallèles de normale  $\underline{e}_3$  et de densité initiale  $d_0$ .

### II.6.1.1 Comportement à mésolfissures ouvertes : traction uniaxiale

Le premier trajet de chargement considéré est une traction uniaxiale d'axe  $\underline{e}_3$  ( $\underline{\Sigma} = \Sigma_{33}(\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)$  avec  $\Sigma_{33} > 0$ ). Au cours de ce trajet, le système de mésolfissures parallèles est ouvert ; la déformation latérale  $E_{11} = E_{22}$  est exprimée en fonction de la déformation axiale  $E_{33}$  :

$$E_{11} = -\nu^s \frac{1 - r_1(1 - \nu^s)d}{1 - 2r_1\nu^s d} E_{33} \quad \text{avec} \quad r_1 = \frac{16}{3} \frac{(1 - \nu^s)}{(1 - 2\nu^s)} \quad (\text{II.35})$$

Il vient alors l'expression de la contrainte axiale :

$$\Sigma_{33} = E^s \frac{1 - r_1(1 - \nu^s)d}{1 - r_1\nu^s d} E_{33} \quad (\text{II.36})$$

Le critère d'endommagement s'écrit :

$$f = \frac{8}{3} \frac{E^s(1 - \nu^{s2})}{(1 - 2r_1\nu^s d)^2} E_{33}^2 - k(1 + \eta d) \quad (\text{II.37})$$

La limite  $E_{33}^0$  du domaine élastique est donc défini par :

$$E_{33}^0 = (1 - 2r_1\nu^s d_0) \sqrt{\frac{3k(1 + \eta d_0)}{8E^s(1 - \nu^{s2})}} \quad (\text{II.38})$$

La réponse est donnée par (II.36) avec  $d = d_0$  tant que  $E_{33} < E_{33}^0$ . Au delà de cet état de déformation ( $E_{33} \geq E_{33}^0$ ), la densité de mésolfissuration  $d$  est déterminée en posant  $f = 0$  ; il suffit alors d'injecter  $d$  dans (II.36) pour obtenir la réponse mécanique. Celle-ci est présentée sur la figure II.12 pour un matériau ayant les propriétés élastiques définies plus haut,  $k$  étant fixé (à  $5,78 \cdot 10^{-4}$ ) et  $\eta$  variant (le but étant d'analyser l'influence de ce paramètre).

On observe que le seuil d'endommagement et la contrainte au pic augmentent avec  $\eta$ . Par ailleurs, on note l'existence d'une valeur de  $\eta$  en dessous de laquelle il n'y a plus de phase d'écrouissage positif en contrainte. De même, on notera que  $\eta = 0$  correspond à un comportement élastique fragile.

Enfin, la figure II.13 montre que, lorsque  $\eta$  diminue, l'endommagement a tendance à évoluer de façon plus rapide, confirmant une tendance plus prononcée à la fragilité.

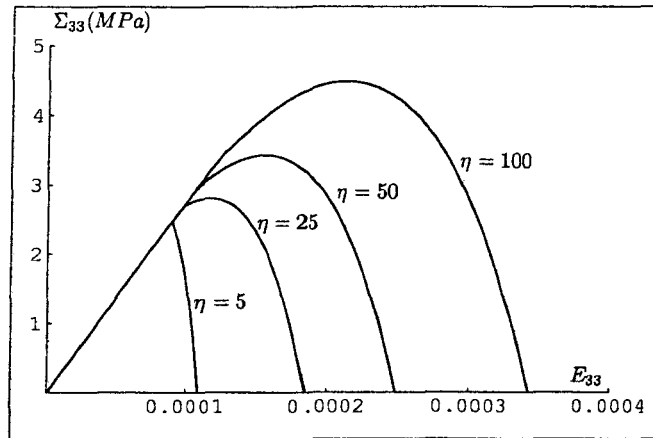


FIGURE II.12: Une famille de mésolfissures : traction uniaxiale.

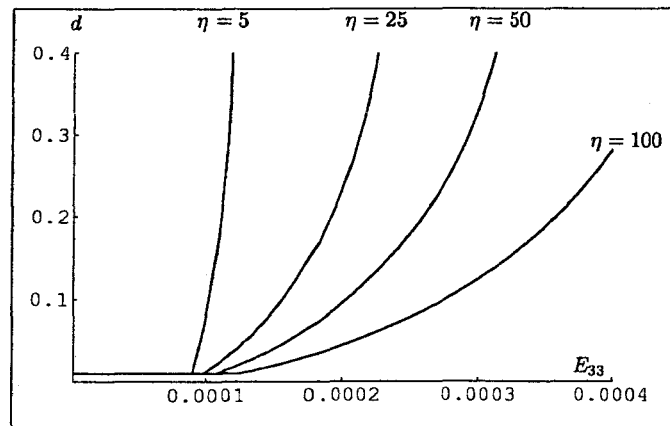


FIGURE II.13: Une famille de mésolfissures, traction uniaxiale :  
évolution de l'endommagement.



### II.6.1.2 Comportement à mésofissures fermées : compression suivie d'une torsion homogène

Considérons à présent un chargement défini par une compression permettant de maintenir les mésofissures fermées, suivie d'une torsion telle que  $E_{13} = E_{23}$ . On s'intéresse à la phase de chargement en torsion. Le critère d'endommagement s'écrit :

$$f = \frac{32}{3} \frac{E^s(1 - \nu^s)}{(2 - \nu^s)(1 + \nu^s)} E_{13}^2 - k(1 + \eta d) \quad (\text{II.39})$$

La limite du domaine élastique s'obtient en posant  $d = d_0$  et  $f = 0$ , il vient :

$$|E_{13}^0| = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3(2 - \nu^s)(1 + \nu^s)}{2E^s(1 - \nu^s)} k(1 + \eta d_0)} \quad (\text{II.40})$$

Par ailleurs, pour  $|E_{13}| > |E_{13}^0|$ , l'état de déformation et d'endommagement vérifie  $f = 0$ , on obtient :

$$d = \frac{1}{k\eta} \left( \frac{32}{3} \frac{E^s(1 - \nu^s)}{(2 - \nu^s)(1 + \nu^s)} E_{13}^2 - k \right) \quad (\text{II.41})$$

Enfin, la réponse mécanique est donnée par :

$$|\Sigma_{13}| = 2\mu^s \left( 1 - \frac{16(1 - \nu^s)}{3(2 - \nu^s)} d \right) |E_{13}| \quad (\text{II.42})$$

Il s'agit d'un comportement élastique avec un module de cisaillement macroscopique apparent (endommagé) dépendant de  $d$ . Les figures II.14 et II.15 donnent respectivement la courbe ( $|E_{13}|, |\Sigma_{13}|$ ) et l'évolution de l'endommagement au cours du chargement considéré.

Notons que ce type de comportement à mésofissures fermées lisses a été récemment mis en évidence par Barthélémy *et al.* [12] dans le cas d'un comportement de fissure avec un frottement de type Von Misès.

## II.6.2 Essai de traction et de compression uniaxiale

Ces deux trajets de chargement ont déjà été utilisés dans l'objectif de comparer les différents schémas d'intégration (§ II.4.2). On se propose ici de caractériser l'endommagement et ses effets sous ces sollicitations.

### II.6.2.1 Traction uniaxiale

La réponse contrainte - déformation durant cet essai est présentée à la figure II.4.a (rappelons que le schéma à 33 points d'intégration a été adopté). La courbe donnant la

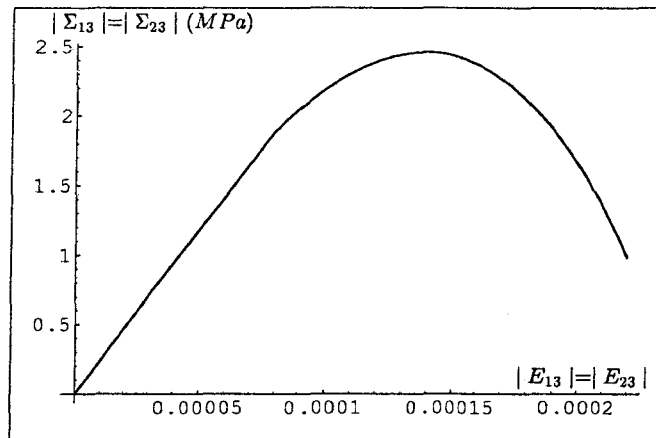


FIGURE II.14: Une famille de mésolfissures : torsion homogène.

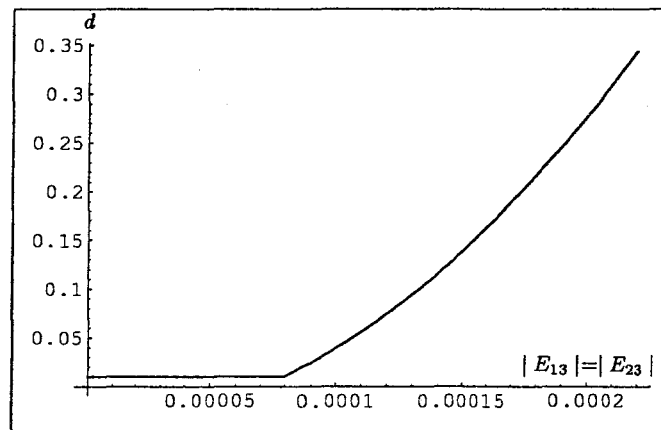


FIGURE II.15: Une famille de mésolfissures, torsion homogène :  
évolution de l'endommagement.

déformation latérale reste quasi-linéaire jusqu'au pic de contrainte. On remarque en effet que le coefficient de Poisson  $\nu_{31}$  et le module d'Young  $E_3$  varient quasiment de la même façon (fig. II.16) au cours du chargement.

Cette figure (II.16) montre que les modules les plus dégradés sont le coefficient de Pois-

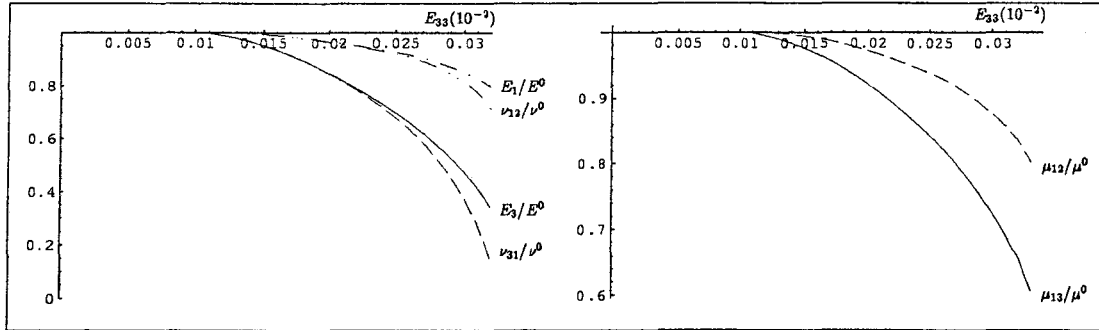


FIGURE II.16: Essai de traction simple : évolution des propriétés effectives.

son  $\nu_{31}$ , le module d'Young  $E_3$  et le module de cisaillement  $\mu_{31}$ . Ceci s'explique par la distribution des densités d'endommagement (cf. fig. II.5). En effet, ce sont les familles dont la normale est proche de l'axe de chargement qui se propagent de manière la plus importante.

Enfin, la figure II.17 représente l'évolution du paramètre d'ouverture  $\beta$  pour trois familles d'orientations différentes, choisies à titre d'illustration. Cette figure montre que  $\beta$  augmente au cours du chargement et que ce sont les mésolfissures de normale  $\underline{e}_3$  qui sont les plus ouvertes. On notera également des similitudes entre l'évolution de ce paramètre et celle de la densité globale d'endommagement (cf. fig. II.4.b). De plus, la possibilité de suivre l'évolution de l'ouverture des systèmes de mésolfissures avec le chargement constitue un avantage de la démarche micromécanique. Ceci est d'autant plus vrai dans la perspective de l'utilisation (assez courante) d'un critère d'ouverture critique pour le dimensionnement des pièces fissurées.

### II.6.2.2 compression uniaxiale

La réponse mécanique a été présentée à la figure II.6.a. La distribution des densités d'endommagement (cf. fig. II.7) montre que ce sont essentiellement des mésolfissures fermées ( $\theta$  proche de  $\frac{\pi}{4}$ ) qui se propagent. Cependant, on constate sur la figure II.18.a, représentant l'évolution des densités d'endommagement à mésolfissures ouvertes  $\rho_{ouv}^d = \frac{1}{4\pi} \int_{S^{2+}} \rho(\underline{n}) dS$  et à mésolfissures fermées  $\rho_{fer}^d = \frac{1}{4\pi} \int_{S^{2-}} \rho(\underline{n}) dS$ , qu'à partir d'un

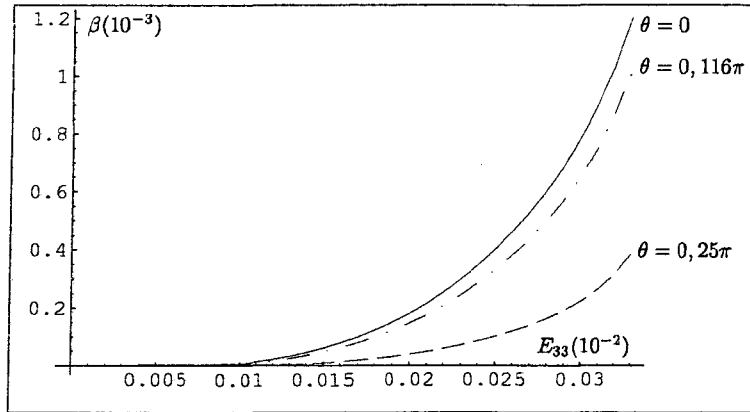


FIGURE II.17: Essai de traction simple : évolution de  $\beta$  pour trois familles d'orientations différentes.

certain niveau de chargement, certaines familles de mésolfissures déjà ouvertes ou passant d'un état fermé à un état ouvert se propagent. Ceci est directement lié à l'évolution du coefficient de Poisson  $\nu_{31}$  (cf. fig. II.19). En particulier, la figure II.18.b montre l'évolution de la densité des familles définies par  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Celles-ci se propagent, après le pic de contrainte, de manière très rapide.

Enfin, on notera l'influence des changements d'état (fermé à ouvert) et de la propagation

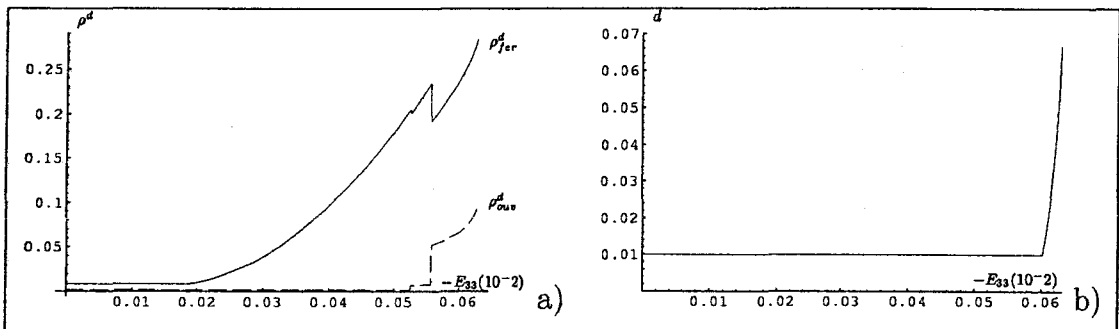


FIGURE II.18: Essai de compression simple : évolution de l'endommagement a) à mésolfissures ouvertes et fermées b) famille telle que  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

de ces mésolfissures ouvertes sur les modules d'élasticité (fig. II.19).

### II.6.3 Essai de traction-compression

Dans ce paragraphe, le trajet de chargement considéré consiste en une phase de traction uniaxiale suivie d'une décharge, puis d'une compression uniaxiale (selon le même

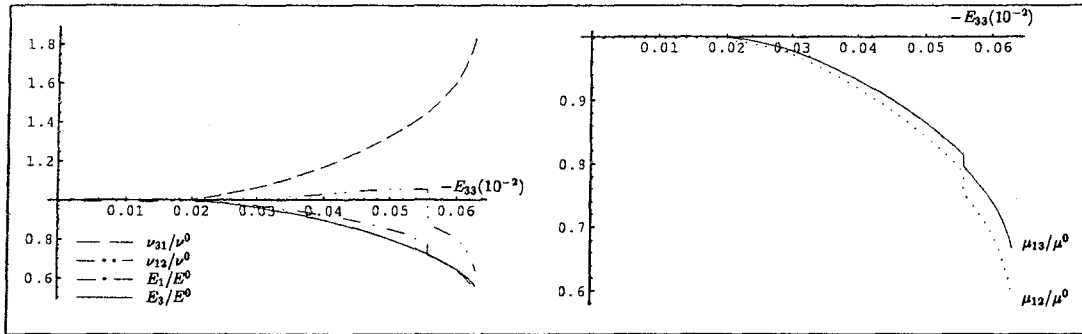


FIGURE II.19: Essai de compression simple : évolution des propriétés effectives.

axe).

La courbe contrainte-déformation simulée est présentée sur la figure II.20. Cette figure met

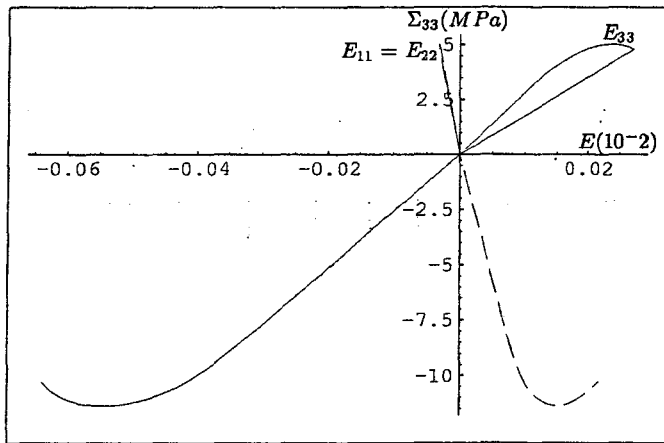


FIGURE II.20: Essai de traction-compression : courbe contraintes - déformations.

en évidence l'effet de la désactivation de l'endommagement. En effet, après la décharge, intervenant suite à une évolution de l'endommagement (par mésolfissures ouvertes) en traction, la compression appliquée referme les mésolfissures. Le module d'Young est alors restauré, *i.e.* la pente de la courbe  $(E_{33}, \Sigma_{33})$  est identique à sa valeur initiale.

Les figures II.21 et II.22 représentent les distributions de densités respectivement avant déchargement et au dernier stade du chargement en compression. Les distributions simulées sont comparées avec les approximations obtenues à l'aide d'un tenseur d'ordre deux et d'un tenseur d'ordre quatre. Pour ce faire, les tenseurs d'ordre deux  $\underline{D}$  et d'ordre quatre  $\mathbb{D}$ , définis respectivement par (II.3) et (II.6), sont calculés numériquement, puis la fonction

$\rho$  est obtenue en utilisant les expressions (II.4) et (II.5). Notons que  $\rho(\underline{n})$  ne dépend que de l'angle  $\theta$  en raison de l'axisymétrie du chargement considéré.

Avant le déchargement, la distribution prédite par le modèle est bien représentée par chacune des deux approximations (figure II.21).

Par contre, en fin de simulation, les résultats obtenus indiquent que l'approximation

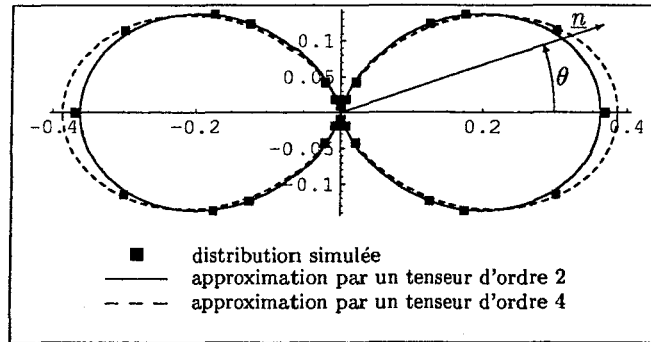


FIGURE II.21: Essai de traction-compression : distribution des densités avant déchargement.

d'ordre quatre se révèle de meilleure qualité. Cependant, bien qu'elle permette de décrire les densités maximales obtenues en compression ( $\theta = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{\pi}{2} \right]$ ), elle ne saisit pas celles induites par la traction ( $\theta = 0 [\pi]$ ).

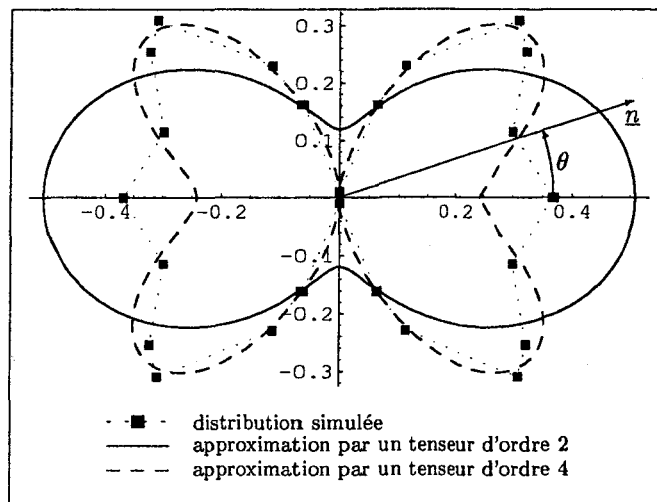


FIGURE II.22: Essai de traction-compression : distribution des densités au dernier stade du chargement en compression.

### II.6.4 Chargement uniaxial cyclique

Nous considérons un chargement uniaxial (d'axe  $e_3$ ) cyclique, consistant en une compression uniaxiale avec décharge suivie d'un chargement en traction uniaxiale. La courbe donnant  $\Sigma_{33}$  en fonction de  $E_{33}$  est présentée sur la figure II.23. On observe clairement

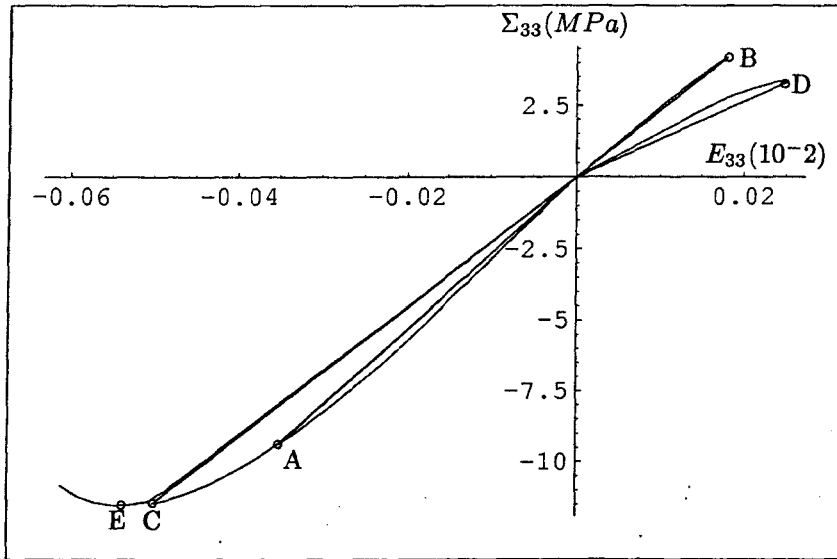


FIGURE II.23: Chargement cyclique : courbe contrainte-déformation.

ici l'effet de l'endommagement préexistant sur la réponse. Notons que cette sensibilité est plus prononcée en traction qu'en compression.

La figure II.24 montre l'évolution de la distribution des densités au cours du chargement. Pour chaque phase (AB, BC, CD et DE), la distribution est tracée au premier pas (trait continu) et au dernier pas (trait discontinu).

### II.6.5 Essai axisymétrique proportionnel

Nous considérons ici un essai axisymétrique proportionnel avec un rapport  $\kappa$  négatif entre contraintes axiale et latérale :  $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma_{11}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \kappa \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)$  avec  $\Sigma_{11} > 0$  et  $\kappa < 0$ . Le matériau est sollicité en traction latéralement et en compression axialement. La réponse pour  $\kappa = \frac{\Sigma_{33}}{\Sigma_{11}} = -2$  est illustrée par la figure II.25.a. Le but de cet essai est également de montrer la capacité du modèle à représenter une évolution d'endommagement lorsque coexistent des mésolfissures ouvertes et des mésolfissures fermées. Ceci est illustré par la figure II.25.b où sont représentées les évolutions de la densité de mésolfissures ouvertes  $\rho_{ouv}^d$  et de la densité de mésolfissures fermées  $\rho_{fer}^d$ .

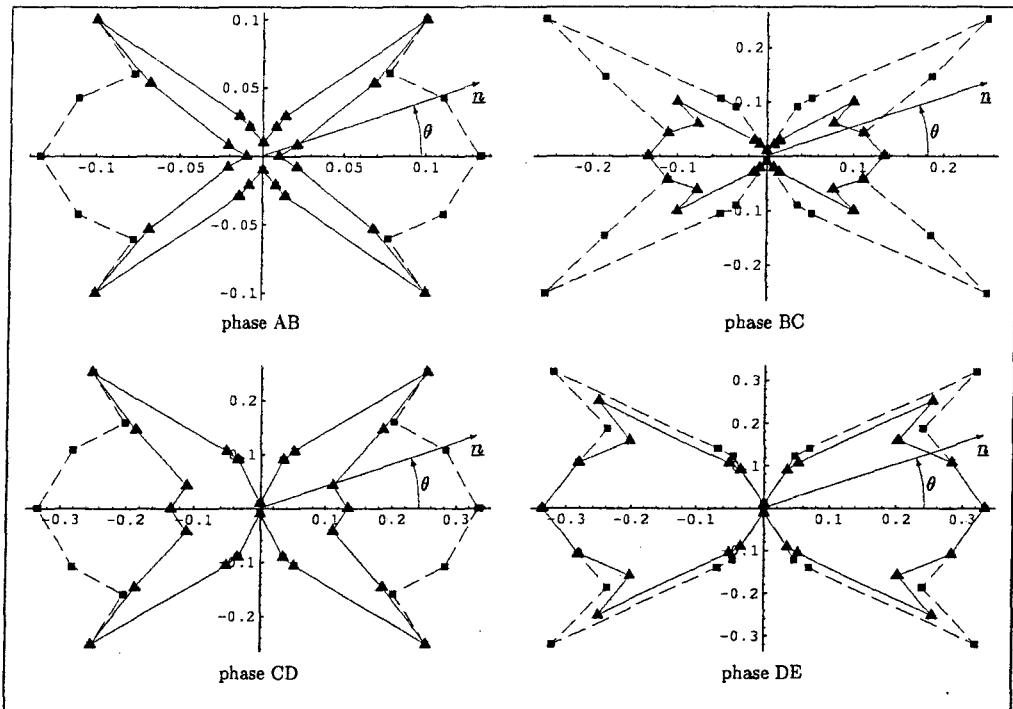


FIGURE II.24: Chargement cyclique : évolution des densités de mésofissuration au cours du chargement.

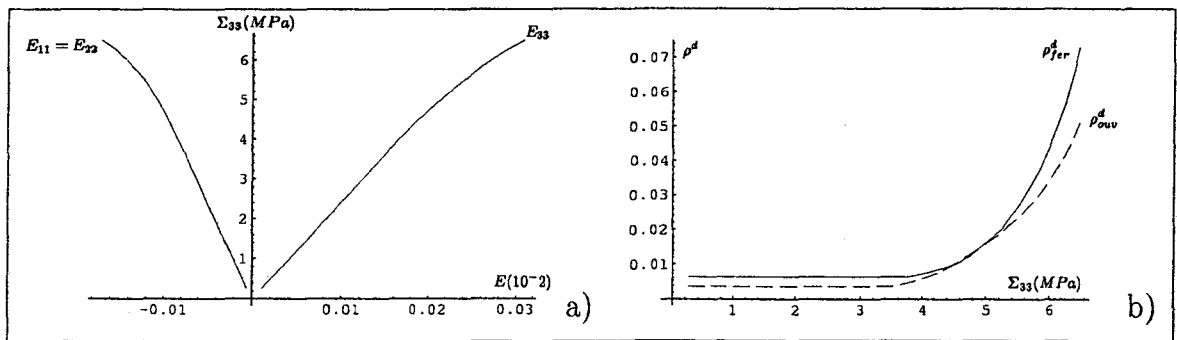


FIGURE II.25: Chargement proportionnel  $\kappa = -2$  : a) courbe contrainte-déformation b) évolution des densités d'endommagement à mésofissures ouvertes  $\rho_{ouv}^d$  et à mésofissures fermées  $\rho_{fer}^d$ .



La figure II.26, représentant la distribution des densités en fin de simulation, indique que les mésolfissures telles que  $\theta$  est proche de  $\frac{\pi}{2}[\pi]$  se sont également propagées.

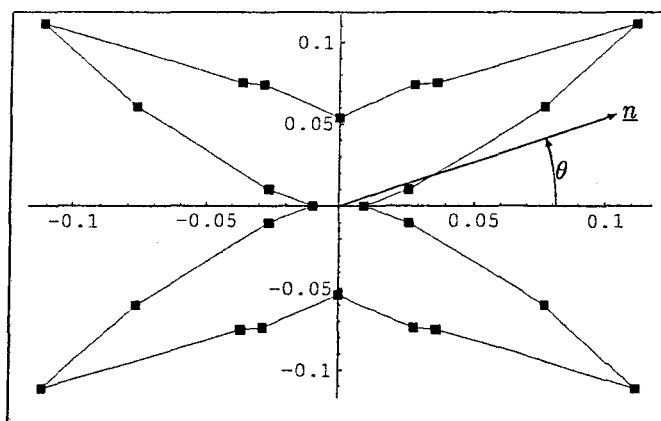


FIGURE II.26: Chargement proportionnel  $\kappa = -2$  : distribution des densités d'endommagement en fin de simulation.

## II.7 Conclusion

A l'issue de ce chapitre, on dispose d'un modèle d'endommagement anisotrope incluant les effets unilatéraux. Basée sur les développements présentés au chapitre I, la formulation proposée combine une démarche micromécanique avec la thermodynamique des processus irréversibles.

Un soin particulier a été apporté au traitement des effets unilatéraux. En effet, une des originalités du modèle réside dans le traitement par intégration numérique sur la sphère unité de la distribution quelconque de mésolfissures. Une telle procédure par intégration permet de gérer la partition de la sphère unité imposée par la refermeture des mésolfissures.

Par ailleurs, les lois d'évolution de l'endommagement, basées sur le taux de restitution de l'énergie, sont justifiées par des concepts classiquement utilisés en mécanique de la rupture.

Les premières simulations montrent l'intérêt de la démarche micromécanique qui permet de corrélérer la réponse macroscopique avec l'évolution de la microfissuration.

Bien que les premiers résultats soient encourageants, le modèle ne permet pas de décrire un certain nombre de phénomènes observés dans les géomatériaux. Dans la suite, une

attention particulière devra être portée aux points suivants :

- description des effets résiduels,
- dissymétrie entre comportements en traction et en compression,
- dépendance du comportement avec la pression moyenne.

La prise en compte des phénomènes de glissement avec frottement sur les lèvres des mésos-fissures fermées devrait, sur ces points, permettre d'améliorer sensiblement les prédictions du modèle.

# Chapitre III

## Introduction du frottement - Couplage avec l'endommagement

Au chapitre II, nous avons proposé une modélisation de l'endommagement par mésofissuration. Cette modélisation rend compte de l'anisotropie induite par l'endommagement ainsi que des effets liés au comportement unilatéral des mésofissures. L'analyse micromécanique a été menée en adoptant une hypothèse de lubrification parfaite pour les mésofissures fermées (hypothèse de fissures lisses). Or, des expériences sur des roches (cf. [140, 20]) montrent l'importance des phénomènes de frottement sur les lèvres des mésofissures. De plus, comme nous l'avons déjà souligné au chapitre I, l'interprétation de certains aspects particuliers du comportement des géomatériaux (déformations permanentes, présence de boucles d'hystérésis) fait classiquement appel à ces phénomènes de frottement.

L'étude micromécanique du comportement des milieux élastiques comportant des mésofissures frottantes a déjà fait l'objet de plusieurs études<sup>8</sup>. Nombre de ces travaux ont été effectués dans un contexte bidimensionnel en adoptant soit une approche de type "propriétés effectives" [96, 70]<sup>9</sup>, soit une démarche incrémentale [103, 14, 15]. Une mention particulière est à faire des travaux d'Andrieux *et al.* [4] dans lesquels la démarche micromécanique est combinée avec une analyse thermodynamique des phénomènes de frottement. Les études tridimensionnelles des milieux microfissurés incluant le glissement

---

<sup>8</sup>Dans le contexte macroscopique, on notera les travaux de Halm et Dragon [65], puis de Dragon *et al.* [51].

<sup>9</sup>On soulignera simplement ici l'inconsistance de ce type d'approche qui ne permet pas de prendre en compte le caractère dissipatif du frottement, et aboutit par ce fait à un tenseur de souplesse "inélastique" effective non symétrique.

avec frottement sont plus rares [73, 53, 71] et sont souvent limités à des trajets de sollicitations particuliers (compression axisymétrique). L'étude de Gambarotta et Lagomarsino [55] constitue une exception qui doit être soulignée. On notera toutefois que la modélisation proposée par ces auteurs s'appuie sur une formulation en contrainte. Or, dans le contexte des mésolfissures lisses, une analyse comparative préliminaire des formulations en déformation (du chapitre II) et en contrainte nous a permis de montrer un certain nombre de différences qualitatives [116].

Dans ce chapitre, on se propose donc de reprendre et d'étendre la modélisation présentée au second chapitre en prenant en compte le glissement par frottement sur les lèvres des mésolfissures fermées. On présente tout d'abord une étude du comportement macroscopique du milieu élastique contenant une famille de fissures frottantes (§ III.1). Le frottement sur les lèvres des mésolfissures est supposé de type Coulomb et l'endommagement figé. Le couplage du glissement avec l'endommagement par propagation des mésolfissures fait l'objet du paragraphe III.2. Les résultats obtenus sont ensuite généralisés à une distribution quelconque  $\rho$  des mésolfissures. Le chapitre se termine sur des éléments d'identification et de première validation du modèle couplé à l'aide de données issues d'expériences réalisées sur un béton [138]. Quelques autres simulations permettant d'évaluer les capacités du modèle sont proposées.

### III.1 Modélisation du glissement avec frottement

Dans ce paragraphe, on considère une famille de mésolfissures fermées ( $\beta = 0$  ou  $\underline{N} : \underline{E} \leq 0$ ). Dans un premier temps, le seul mécanisme dissipatif considéré est le glissement avec frottement, l'endommagement étant supposé constant. On se propose d'adapter les résultats généraux, établis au chapitre I, au cas du glissement avec frottement en s'appuyant sur l'hypothèse suivante :

**Hypothèse III.1** *Le glissement en présence de frottement est décrit à l'aide du vecteur discontinuité de déplacement tangentiel  $\underline{\gamma}$  défini par (I.4) et (I.7).*

Cette hypothèse, qui revient à considérer que le saut de déplacement tangentiel est de la même forme que celui défini dans un problème élastique (cf. chapitre I), se justifie par la nécessaire continuité de  $\underline{\gamma}$  tant à la réouverture qu'à la refermeture des mésolfissures.

Le potentiel thermodynamique est alors donné par l'expression (I.16) en posant  $\beta = 0$ , il vient :

$$W = \frac{1}{2}(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)}) : \mathbb{C}^s : (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)}) + \frac{H_1}{2d} \underline{\underline{\gamma}} \cdot \underline{\underline{\gamma}} \quad (\text{III.1})$$

avec  $H_1 = H_0(1 - \frac{\nu^s}{2})$ .

On notera que dans (III.1), la variable de glissement est dissipative. Par conséquent, à endommagement fixé, le comportement dissipatif est déterminé par le vecteur  $\underline{\underline{\gamma}}$ , ou de manière équivalente par la déformation  $\underline{\underline{E}}^{(2)} = \underline{\underline{\gamma}} \otimes^s \underline{\underline{n}}$ . Cette remarque permet de faire une analogie avec la plasticité avec écrouissage en assimilant  $\underline{\underline{E}}^{(2)}$  avec une variable de déformation plastique et  $\underline{\underline{\gamma}}$  à une variable d'écrouissage. L'énergie libre macroscopique (III.1) peut également s'écrire :  $W = W^{(1)}(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)}) + W^{(2)}(\underline{\underline{\gamma}})$  avec  $W^{(1)}(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)}) : \mathbb{C}^s : (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)})$  représentant la part de l'énergie stockée par déformation élastique et  $W^{(2)}(\underline{\underline{\gamma}}) = \frac{H_1}{2d} \underline{\underline{\gamma}} \cdot \underline{\underline{\gamma}}$  la part de l'énergie stockée par écrouissage.

Afin de garder l'unité de la démarche micromécanique, nous faisons le choix de  $\underline{\underline{\gamma}}$  comme variable interne associée au phénomène de glissement avec frottement. Un tel choix s'avère nécessaire, notamment pour la description de la transition entre l'état "fermé" et l'état "ouvert" des mésolfissures.

La contrainte macroscopique s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^s : (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)}) \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{E}}^{(2)} = \underline{\underline{\gamma}} \otimes^s \underline{\underline{n}} \quad (\text{III.2})$$

L'objectif de la modélisation présentée par la suite étant de décrire l'évolution de  $\underline{\underline{E}}^{(2)}$ , c'est-à-dire  $\dot{\underline{\underline{E}}}^{(2)} = \dot{\underline{\underline{\gamma}}} \otimes^s \underline{\underline{n}}$ , il s'agit maintenant de préciser les lois d'évolution de  $\underline{\underline{\gamma}}$ .

### III.1.1 Critère de glissement par frottement - Loi d'évolution

#### III.1.1.1 Ecriture du critère

Comme annoncé dans l'introduction de ce chapitre, on considère des fissures fermées frottantes de type Coulomb. En raison de l'uniformité des contraintes sur les lèvres, la saturation du critère de frottement est obtenue sur toute la fissure. La loi de frottement se formule sous la forme d'un critère de Coulomb  $g(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$ , formulé à l'échelle microscopique. Ainsi  $g(\underline{\underline{\sigma}})$  est définie par :

$$g(\underline{\underline{\sigma}}) = |\underline{\underline{\tau}}| + \mu_c \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}), \quad \text{si} \quad \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\underline{n}}^i \otimes \underline{\underline{n}}) \leq 0 \quad (\text{III.3})$$

où  $\mu_c$  est le coefficient de frottement sur les lèvres des mésolfissures et  $\underline{\tau} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \cdot (\underline{\delta} - \underline{n} \otimes \underline{n})$  et  $\underline{\underline{\sigma}} : (\underline{n} \otimes \underline{n})$  sont donnés par (I.22). En posant  $\beta = 0$  (mésolfissures fermées), il vient :

$$g(\underline{\underline{\Sigma}}, \underline{\gamma}) = |\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} \cdot (\underline{\delta} - \underline{n} \otimes \underline{n}) - \frac{H_1}{d} \underline{\gamma}| + \mu_c \underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}), \quad \text{si } \underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \leq 0 \quad (\text{III.4})$$

**Remarque III.1** Il est intéressant de remarquer que ce critère peut également s'exprimer en fonction de la force thermodynamique  $\underline{F}^\gamma$  associée à  $\underline{\gamma}$ . En effet, il vient :  $g(\underline{F}^\gamma) = |\underline{F}_T^\gamma| + \mu_c F_N^\gamma$ , si  $\underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{n}^i \otimes \underline{n}^i) \leq 0$  où  $\underline{F}_T^\gamma$  et  $F_N^\gamma$  sont respectivement les composantes tangentielle et normale de la force thermodynamique  $\underline{F}^\gamma$ .

Ce critère présente l'inconvénient d'être exprimé en contrainte, ce qui nécessite un schéma itératif pour sa mise en œuvre dans le cadre de la formulation en déformation adoptée dans cette étude. Cette remarque nous conduit à l'exprimer en fonction de la déformation macroscopique. On procède comme au chapitre I (sous l'hypothèse de faible densité de mésolfissures) à la linéarisation des expressions. Etant donné que  $\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^s : (\underline{E} - \underline{E}^{(2)})$ , il vient :

$$\begin{aligned} \underline{F}_T^\gamma &= \mathbb{C}^s : (\underline{E} - \underline{E}^{(2)}) \cdot \underline{n} \cdot (\underline{\delta} - \underline{n} \otimes \underline{n}) - \frac{H_1}{d} \underline{\gamma} \cong 2\mu^s \underline{E} \cdot \underline{n} \cdot (\underline{\delta} - \underline{n} \otimes \underline{n}) - \frac{H_1}{d} \underline{\gamma} \quad (a) \\ \underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) &= \mathbb{C}^s : (\underline{E} - \underline{E}^{(2)}) : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \cong \underline{E} : \underline{N} \quad (b) \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

L'expression du critère de glissement,  $h = 0$ , en fonction de la déformation macroscopique est alors déterminé par :

$$h = |\hat{\underline{F}}_T^\gamma| + \mu_c \underline{E} : \underline{N} = 0 \quad \text{avec} \quad \hat{\underline{F}}_T^\gamma = 2\mu^s \underline{E} \cdot \underline{n} \cdot (\underline{\delta} - \underline{n} \otimes \underline{n}) - \frac{H_1}{d} \underline{\gamma} \quad (\text{III.6})$$

Le critère de glissement défini par (III.6) est représenté pour une famille de mésolfissures de normale  $\underline{e}_3$  dans l'espace réduit des déformations normale et tangentielle ( $E_{33}, E_{13} = E_{23}$ ) (figure III.1) et dans l'espace réduit des contraintes normale et tangentielle ( $\Sigma_{33}, \Sigma_{13} = \Sigma_{23}$ ) (figure III.2). Sur chacune de ces figures, le critère est représenté pour une valeur nulle et une valeur non nulle du vecteur glissement. Ces deux figures illustrent le rôle de variable d'érouissage cinématique attribué à  $\underline{\gamma}$ , le domaine de réversibilité gardant la même forme en se déplaçant par translation dans l'espace de déformation considéré ici.

Le critère présenté permet d'assurer la continuité de  $\underline{\gamma}$  lors de la transition ouvert/fermé ou inversement. En effet, lorsque la fissure est ouverte, on a (I.23) :  $\underline{\gamma}^+ = \frac{d}{H_1} 2\mu^s \underline{E} \cdot \underline{n} \cdot (\underline{\delta} - \underline{n} \otimes \underline{n})$ . Lorsqu'elle est fermée, l'état limite avant ouverture correspond au sommet du cône ; ce qui conduit à  $|\hat{\underline{F}}_T^\gamma| = 0$  soit  $\underline{\gamma}^- = \underline{\gamma}^+$ .

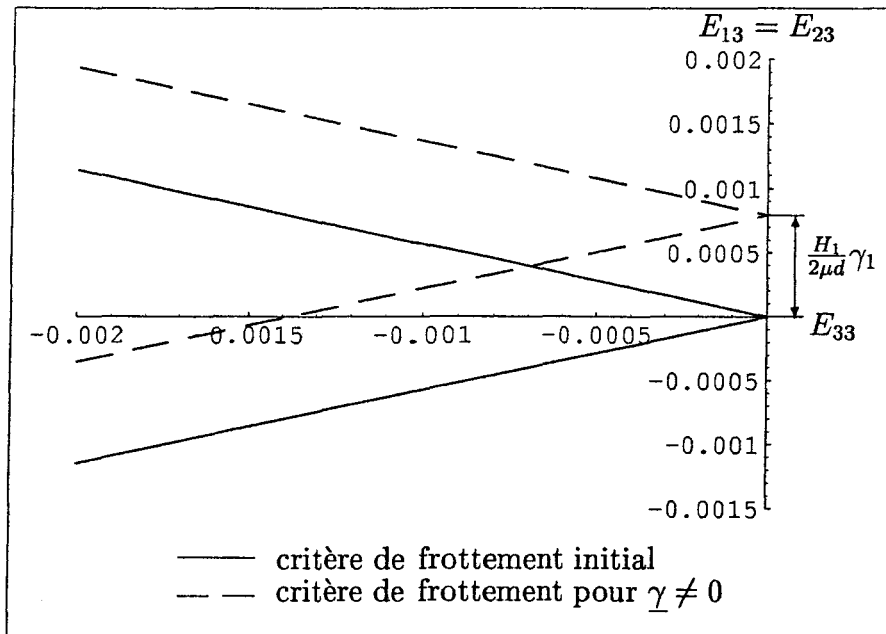


FIGURE III.1: Seuil de glissement  $h = 0$  dans l'espace des déformations

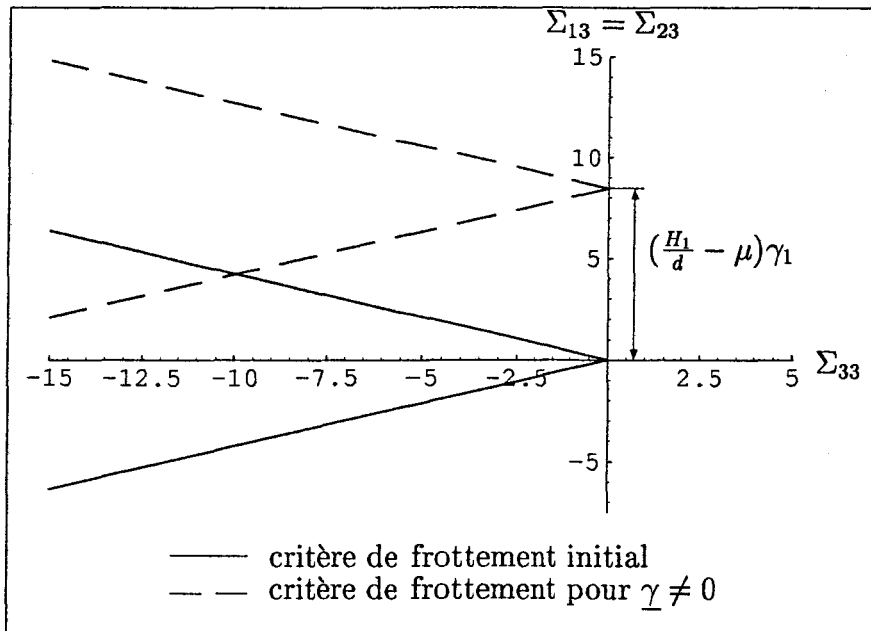


FIGURE III.2: Seuil de glissement  $h = 0$  dans l'espace des contraintes

**Remarque III.2** Comme l'a déjà souligné Andrieux [3], l'introduction d'une cohésion  $c$  dans le critère ne permettrait plus d'assurer la continuité de  $\underline{\gamma}$  entre les états ouvert et fermé de la mésofissure. Tant qu'il s'agit de ne décrire que des comportements à fissures fermées, celle-ci ne pose aucune difficulté (cf. par exemple l'étude de Lawn et Marshal [82]).

### III.1.1.2 Loi d'évolution du glissement avec frottement

La loi de frottement de Coulomb implique une évolution du glissement dans la direction  $\underline{v} = \frac{\hat{F}_T^\gamma}{|\hat{F}_T^\gamma|}$ . On écrit alors :

$$\underline{\dot{\gamma}} = \dot{\xi} \underline{v} \quad \text{avec} \quad \dot{\xi} \geq 0 \quad (\text{III.7})$$

où  $\dot{\xi}$  est donné par la condition de consistance  $\dot{h} = 0$ .

En remarquant que  $|\hat{F}_T^\gamma| = \hat{F}_T^\gamma \cdot \underline{v}$ , la condition de consistance conduit à :

$$\dot{\xi} = \frac{d}{H_1} \{ [2\mu^s(\underline{n} \otimes \underline{v}) + \mu_c \underline{N}] : \underline{\dot{E}} \}^+ \quad (\text{III.8})$$

soit :

$$\underline{\dot{\gamma}} = \begin{cases} 0 & \text{si } h < 0 \text{ ou si } h = 0 \text{ et } \dot{h} < 0 \\ \frac{d}{H_1} \{ [2\mu^s(\underline{n} \otimes \underline{v}) + \mu_c \underline{N}] : \underline{\dot{E}} \}^+ \underline{v} & \text{si } h = 0 \text{ et } \dot{h} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

**Remarque III.3** Le glissement par frottement décrit par (III.6) et (III.7) implique un comportement non dilatant de la fissure fermée ( $\dot{\beta} = 0$ ). La dilatance est généralement attribuée au franchissement d'aspérités (cf. par exemple [111]). Sa modélisation nécessiterait d'abandonner l'hypothèse de fissures planes adoptée dans toute l'étude. On notera que Barthélémy et al. [12] ont récemment proposé, dans le cadre des techniques d'Eshelby, une modélisation des fissures de type Drucker-Prager dans laquelle des effets de dilatance sont mis en évidence.

**Remarque III.4** La loi de Coulomb est souvent interprétée comme une loi non standard. En effet, dans le cadre de la modélisation présentée ici (cf. relations (III.6) et (III.7)), la vitesse  $\dot{\gamma}$  n'est pas normale à la frontière du domaine des forces admissibles  $(\underline{F}_T^\gamma, \underline{F}_N^\gamma)$ .



### III.1.2 Illustration : torsion homogène

On se propose d'illustrer le comportement macroscopique du milieu à mésolfissures fermées sur un premier exemple simple.

Considérons une famille de mésolfissures, de normale  $\underline{e}_3$  et de densité  $d$  fixée. Soit un char-

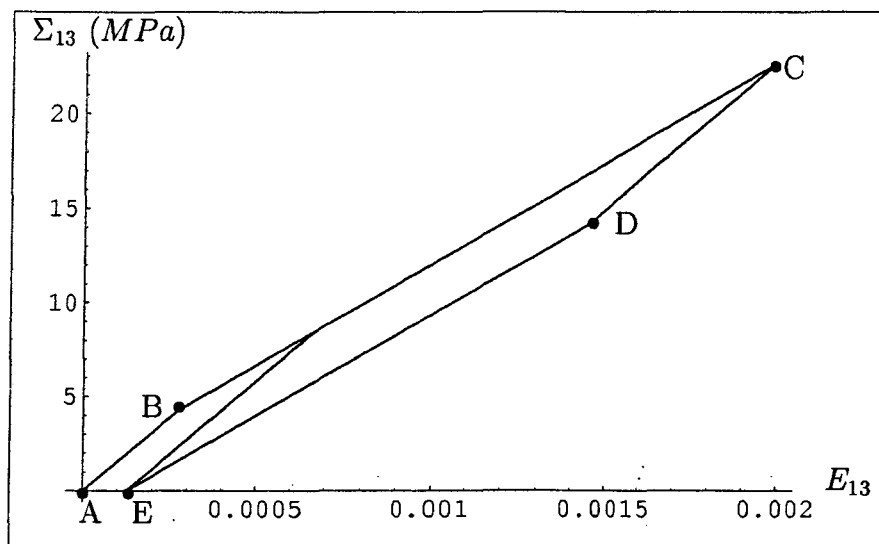


FIGURE III.3: Réponse du matériau en torsion homogène

gement consistant en une compression permettant de maintenir les mésolfissures fermées, suivie d'une torsion telle que  $E_{13} = E_{23}$  puis d'une décharge. On s'intéresse à la réponse en torsion du matériau.

La figure III.3 met en évidence un comportement macroscopique hystérétique. Celui-ci s'explique par l'évolution du glissement sur les lèvres des mésolfissures. En effet, la figure III.4, portant sur l'évolution de la norme du vecteur glissement en fonction de la déformation macroscopique  $E_{13}$ , indique quatre phases distinctes déjà mises en évidence par d'autres auteurs (cf. par exemple [82]) dans le cadre de formulations en contraintes :

- La première ( $AB$ ) correspond à une phase élastique, le glissement étant bloqué par frottement, *i.e.* il y a adhérence. La pente de la courbe de chargement correspond au module de cisaillement de la matrice solide, les mésolfissures parfaitement adhérentes n'affectant pas l'élasticité homogénéisée.
- ( $BC$ ) correspond à la phase de glissement dissipatif. On note une augmentation de la norme de  $\underline{\gamma}$ .
- Durant la première phase de décharge ( $CD$ ), le glissement est de nouveau bloqué par frottement. Le module de cisaillement est égal au module de cisaillement de la

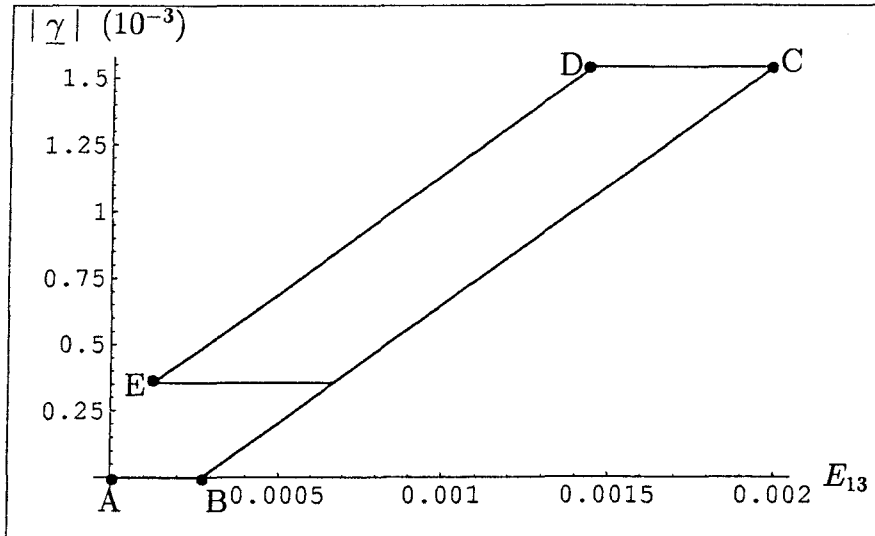


FIGURE III.4: Evolution de la norme du vecteur glissement au cours de l'essai de torsion homogène

matrice solide.

- Le critère est de nouveau atteint en  $D$ ,  $(DE)$  correspond à une phase de glissement inverse (dans le sens opposé à celui de  $(BC)$ ).

Notons également la présence d'une déformation résiduelle à l'issue du cycle (annulation de  $\Sigma_{13}$ , point  $E$ ). Celle-ci correspond à une valeur non nulle de  $\underline{\gamma}$  après décharge complète.

## III.2 Couplage endommagement - glissement avec frottement

Le paragraphe précédent nous a permis de mettre en évidence et d'interpréter le comportement macroscopique "plastique" des milieux fissurés avec présence d'hystérésis ou non. Dans l'analyse du glissement avec frottement, la densité de mésolfissuration était supposée constante, ceci se justifiant pour de faibles niveaux de glissement. Lorsque celui-ci atteint un certain stade, les mésolfissures vont se propager, ce qui conduit à un couplage entre le glissement par frottement et l'endommagement. L'objectif de ce paragraphe est donc de construire un modèle qui rend compte d'un tel couplage.

On rappelle que le potentiel thermodynamique est donné par (III.1),  $d$  ayant le statut de variable (évolutive) d'endommagement.

L'écriture de (III.1) implique, en raison de la présence du terme  $\frac{H_1}{2d} \underline{\gamma} \cdot \underline{\gamma}$ , un couplage d'état

(d'endommagement et de glissement)

Comme au chapitre II, l'hypothèse d'une propagation des mésolfissures fermées dans leur propre plan est adoptée.

### III.2.1 Critères d'endommagement et de glissement

Le critère de frottement est donné par l'équation (III.6). Le critère d'endommagement est, comme au chapitre II, défini par :

$$f = F^d - \mathcal{R}(d) = \frac{1}{2} \frac{H_1}{d^2} \underline{\gamma} \cdot \underline{\gamma} - \mathcal{R}(d) \quad (\text{III.10})$$

$F^d$  étant déterminée à partir de (III.1). Le critère (III.10) indique qu'il y aura évolution de l'endommagement si  $\underline{\gamma}$  atteint une valeur critique  $\underline{\gamma}_c$  telle que :

$$|\underline{\gamma}_c| = d \sqrt{\frac{2\mathcal{R}(d)}{H_1}} \quad (\text{III.11})$$

**Remarque III.5** *Nous sommes en présence d'un couplage fort avec interférence implicite [49], les deux variables internes  $\underline{\gamma}$  et  $d$  intervenant dans chacun des critères (III.10) et (III.6).*

La figure III.5 illustre le critère d'endommagement, pour un milieu contenant une famille de mésolfissures de normale  $\underline{e}_3$ , dans l'espace réduit des déformations normale et tangentielles ( $E_{33}, E_{13} = E_{23}$ ). Cette figure permet de comparer les courbes  $f = 0$  pour le modèle de base (endommagement uniquement) et pour le modèle couplé. Le critère d'endommagement à fissures ouvertes ( $E_{33} > 0$ ) n'est pas modifié. En revanche, la prise en compte du frottement a pour effet de retarder la progression de l'endommagement lorsque les mésolfissures sont fermées.

### III.2.2 Découplage des dissipations et lois d'évolutions

- **Découplage des dissipations :**

Lorsque la fissure est fermée, la dissipation s'écrit :

$$\mathcal{D} = -\frac{\partial W}{\partial d} \dot{d} - \frac{\partial W}{\partial \underline{\gamma}} \dot{\underline{\gamma}} \quad (\text{III.12})$$

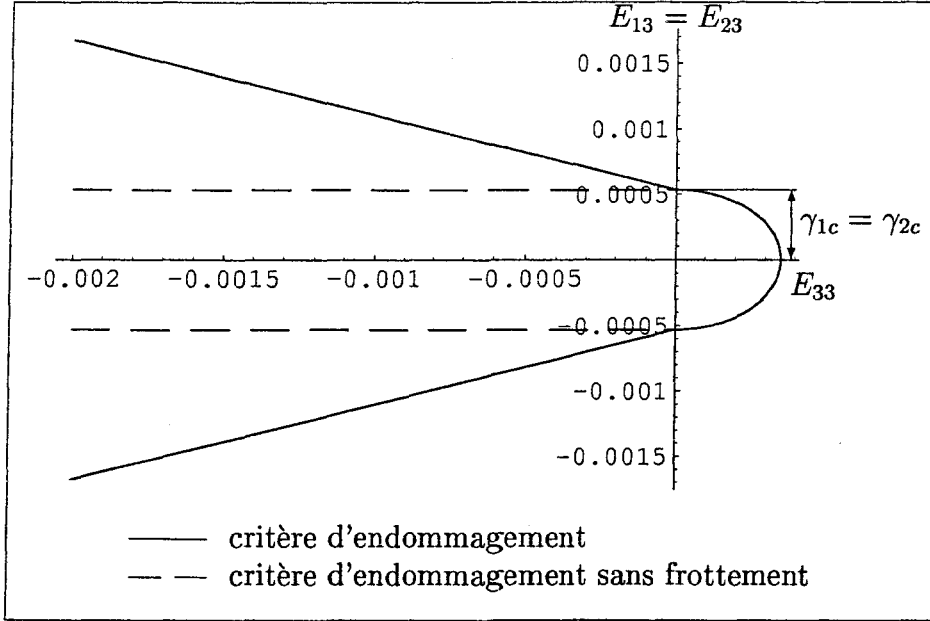


FIGURE III.5: Seuil d'endommagement dans l'espace des déformations

On impose que la fissure ne peut que se propager ( $\dot{d} > 0$ ) et non se recoller ( $\dot{d} < 0$ ). En toute généralité, l'inégalité  $\mathcal{D} \geq 0$  n'assure pas ce fait. On suppose classiquement un découplage des dissipations, ce qui conduit aux inégalités suivantes :

$$\begin{cases} -\frac{\partial W}{\partial d} \dot{d} \geq 0 & (a) \\ -\frac{\partial W}{\partial \underline{\gamma}} \dot{\underline{\gamma}} \geq 0 & (b) \end{cases} \quad (III.13)$$

• lois d'évolution des variables internes :

Les lois d'évolution de  $\underline{\gamma}$  et  $d$  sont données par les relations de consistance  $\dot{f} = 0$  et  $\dot{h} = 0$ . La première s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial d} \dot{d} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\gamma}} \dot{\underline{\gamma}} = 0 \quad (III.14)$$

On en déduit :

$$\dot{d} = \frac{H_1}{Gd^2} \underline{\gamma} \cdot \dot{\underline{\gamma}} \quad \text{avec} \quad G = \frac{H_1}{d^3} \underline{\gamma} \cdot \underline{\gamma} + k\eta \quad (III.15)$$

$G$  étant positif, la positivité de  $\dot{d}$  implique  $\underline{\gamma} \cdot \dot{\underline{\gamma}} \geq 0$ . La loi d'évolution de l'endommagement est donc donnée par :

$$\dot{d} = \begin{cases} 0 & \text{si } f < 0 \text{ ou } f = 0 \text{ et } \dot{f} < 0 \\ \frac{H_1}{Gd^2} (\underline{\gamma} \cdot \dot{\underline{\gamma}})^+ & \text{si } f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0 \end{cases} \quad (III.16)$$

**Remarque III.6** Le cas  $\underline{\gamma} \cdot \dot{\underline{\gamma}} < 0$  correspond à la situation de glissement inverse, donc sans évolution de l'endommagement.

**Remarque III.7** L'équation (III.16) montre que l'évolution de  $d$  est conditionnée par celle de  $\underline{\gamma}$ . Bien que soit faite l'hypothèse de découplage des dissipations, (III.16) indique que l'évolution des phénomènes d'endommagement n'est pas indépendante de celle des phénomènes de glissement.

Par ailleurs, de la relation  $\dot{h} = 0$ , il vient :

$$\dot{\xi} = \frac{d}{\tilde{H}H_1} \{ [2\mu^s(\underline{n} \otimes \underline{v}) + \mu_c \underline{N}] : \underline{\dot{E}} \}^+ \quad \text{avec} \quad \tilde{H} = 1 - \frac{H_1}{Gd^3} [(\underline{\gamma} \cdot \underline{v})^+]^2 \quad (\text{III.17})$$

La loi d'évolution du glissement est donc donnée par :

$$\underline{\dot{\gamma}} = \begin{cases} 0 & \text{si } h < 0 \text{ ou } h = 0 \text{ et } \dot{h} < 0 \\ \frac{d}{\tilde{H}H_1} \{ [2\mu^s(\underline{n} \otimes \underline{v}) + \mu_c \underline{N}] : \underline{\dot{E}} \}^+ \underline{v} & \text{si } h = 0 \text{ et } \dot{h} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

### III.2.3 Illustration : torsion homogène

De la même façon qu'au paragraphe III.1.2, nous considérons la famille de mésolfissures de normale  $\underline{e}_3$  et le même chargement, *i.e.* une compression permettant de maintenir les mésolfissures fermées, suivie d'une torsion telle que  $|E_{13}| = |E_{23}|$ , puis d'une décharge en torsion.

La figure III.6, représentant la réponse  $\Sigma_{13} - E_{13}$  met en évidence trois phases en charge : les deux premières sont linéaires et leur interprétation correspond à celle fournie pour la figure III.3. La dernière phase (BC), non linéaire, correspond à un écrouissage non linéaire introduit par une évolution de l'endommagement. On retrouve par ailleurs un comportement hystérétique illustré par le cycle de déchargement - rechargement.

On note que l'endommagement n'évolue pas au cours de ce cycle (cf. fig. III.7.b). L'explication des phases (CD), (DE), (EF) est identique à celle proposée au paragraphe III.1.2.

Détaillons les phases (OA), (AB) et (BC) à partir des évolutions de  $|\underline{\gamma}|$  et de  $d$  :

- la phase (OA) est élastique, le glissement est bloqué par adhérence ; l'endommagement ne peut donc pas évoluer.
- (AB) correspond à la phase de glissement dissipatif. La norme de  $\underline{\gamma}$  augmente de façon linéaire (cf. fig. III.7.a).

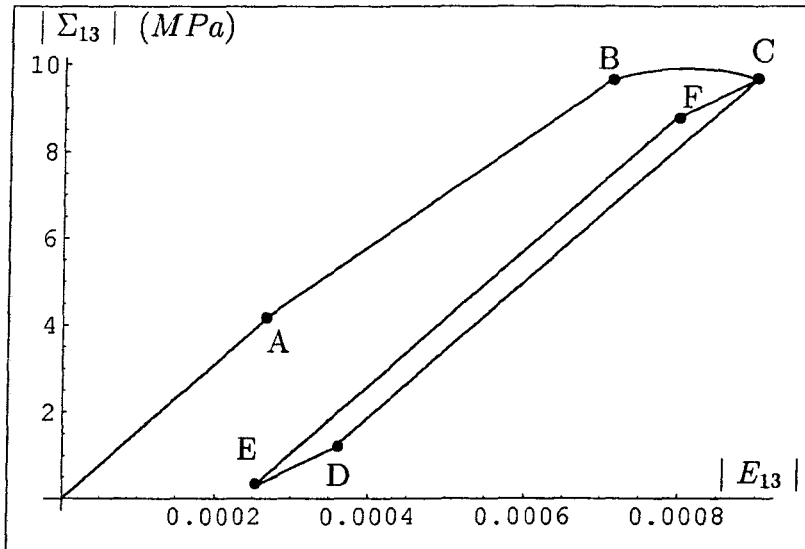


FIGURE III.6: Torsion homogène : réponse contrainte-déformation

- Au point B,  $\underline{\gamma}$  atteint la valeur critique définie par (III.11). (BC) correspond à une phase où il y a évolution, de manière simultanée, du glissement et de l'endommagement. On notera que ces évolutions (en fonction de  $E_{13}$ ) sont non linéaires (cf. fig. III.7).

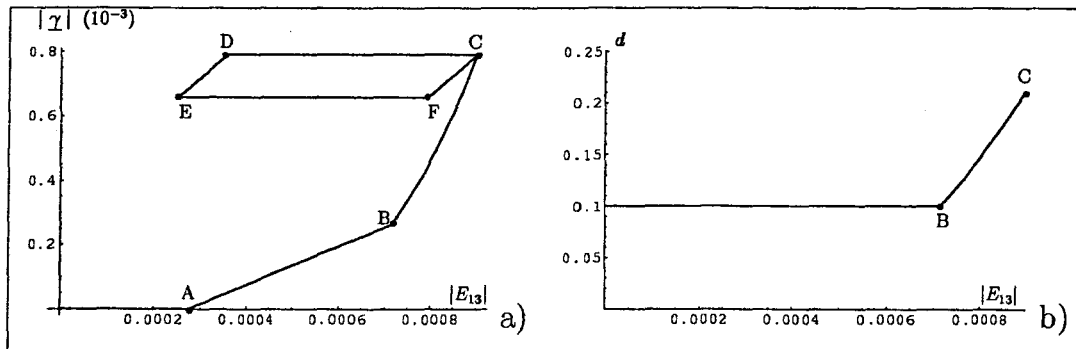


FIGURE III.7: Torsion homogène : a) évolution de  $|\underline{\gamma}|$  b) évolution de  $d$

Cet ensemble de résultats indique clairement que dans le mode de couplage induit par les fissures frottantes évolutives, l'endommagement n'affecte que les propriétés plastiques macroscopiques (écrouissage) et laisse inchangée l'élasticité homogénéisée.

### III.3 Généralisation à une distribution quelconque de mésolfissures

#### III.3.1 Potentiel thermodynamique

Comme au chapitre I (cf. § I.3.3), l'énergie libre macroscopique du milieu mésolfissuré s'écrit comme l'intégrale de l'énergie élémentaire  $W$  sur toutes les directions de l'espace. La prise en compte simultanée des effets unilatéraux et du glissement avec frottement sur les lèvres des mésolfissures implique à nouveau une écriture distincte de  $W$  selon que les mésolfissures sont ouvertes (I.25) ou fermées (III.1). Ainsi,  $\Psi$  s'écrit :

$$\Psi = \frac{1}{2}(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)}) : \mathbb{C}^s : (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)}) + \frac{1}{4\pi} \int_{S^{2-}(\underline{\underline{E}})} \frac{H_1}{2\rho(\underline{\underline{n}})} \underline{\underline{\gamma}}(\underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{\gamma}}(\underline{\underline{n}}) dS$$

$$- \frac{\alpha_1}{4\pi} \int_{S^{2+}(\underline{\underline{E}})} \rho(\underline{\underline{n}}) \left\{ \begin{array}{l} a_2(\text{tr } \underline{\underline{E}})^2 + a_3(\text{tr } \underline{\underline{E}})\underline{\underline{E}} : (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) \\ + (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) : (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) - \frac{\nu^s}{2} \underline{\underline{E}} : (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) : \underline{\underline{E}} \end{array} \right\} dS \quad \begin{array}{l} (a) \\ (III.19) \end{array}$$

avec  $\underline{\underline{E}}^{(2)} = \frac{1}{4\pi} \int_{S^{2-}(\underline{\underline{E}})} (\underline{\underline{\gamma}}(\underline{\underline{n}}) \otimes^s \underline{\underline{n}}) dS \quad (b)$

dans lequel les coefficients  $a_i$  sont donnés par (I.29).

**Remarque III.8** *Le vecteur glissement  $\underline{\underline{\gamma}}$  et le paramètre d'ouverture  $\beta$  étant par construction continus à la transition entre les états ouverts et fermés des mésolfissures, la continuité de  $\Psi$  est de fait assurée.*

#### Remarque III.9 Sur les variables internes

*L'analyse qui précède confère également à la distribution  $\underline{\underline{\gamma}}$  défini par  $\underline{\underline{\gamma}}(\underline{\underline{n}})$  le statut de variable interne. Celle-ci sera représentée en adoptant à nouveau la démarche d'intégration présentée au chapitre précédent.*

*Dans ce contexte, en considérant  $\mathcal{P}$  points d'intégration, l'ensemble des variables internes est constitué par  $\mathcal{P}$  variables d'endommagement  $d^i$  ( $i = 1$  à  $\mathcal{P}$ ) et  $\mathcal{P}$  vecteurs glissement  $\underline{\underline{\gamma}}^i$ .*

### III.3.2 Lois d'état, critères de glissement et d'endommagement

La contrainte macroscopique est obtenue par dérivation de (III.19). On obtient :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^s : (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)}) - \frac{a_1}{4\pi} \int_{S^{2+}} \rho(\underline{n}) \left\{ \begin{array}{l} 2a_2(\text{tr } \underline{\underline{E}})\underline{\underline{\delta}} + a_3[\underline{\underline{E}} : (\underline{n} \otimes \underline{n})\underline{\underline{\delta}} + \text{tr } \underline{\underline{E}}(\underline{n} \otimes \underline{n})] \\ + (\underline{n} \otimes \underline{n}) \cdot \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{E}} \cdot (\underline{n} \otimes \underline{n}) - \nu^s(\underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n}) : \underline{\underline{E}} \end{array} \right\} dS \quad (\text{III.20})$$

avec  $\underline{\underline{E}}^{(2)}$  donné par (III.19.b).

La force thermodynamique associée à chaque variable d'endommagement  $d^i$  ( $i = 1$  à  $\mathcal{P}$ ) est définie par (II.10) pour une famille de mésolfissures ouvertes et pour une famille de mésolfissures fermées par :

$$F^{d^i} = \frac{1}{2} \frac{H_1}{d^{i2}} \underline{\underline{\gamma}}^i \cdot \underline{\underline{\gamma}}^i \quad (\text{III.21})$$

La composante tangentielle de la force thermodynamique associée à  $\underline{\underline{\gamma}}^i$  est définie par :

$$\underline{\underline{F}}_T^{\underline{\underline{\gamma}}^i} = 2\mu^s \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{n}}^i \cdot (\underline{\underline{\delta}} - \underline{\underline{n}}^i \otimes \underline{\underline{n}}^i) - \frac{H_1}{d^i} \underline{\underline{\gamma}}^i \quad (\text{III.22})$$

La généralisation proposée ne modifiant pas la définition des forces thermodynamiques, le critère d'endommagement est donc défini par (II.12) à fissures ouvertes et par (III.10) à fissures fermées. Le critère de glissement avec frottement est lui défini par (III.6).

### III.3.3 Formulation en vitesse

A nouveau, la formulation en vitesse de la loi couplée n'est possible qu'en l'absence de changement d'état d'activation des mésolfissures au cours de l'incrément considéré. Elle s'écrit sous la forme  $\underline{\underline{\dot{\Sigma}}} = \mathbb{C}_t^{hom} : \underline{\underline{\dot{E}}}$  avec  $\mathbb{C}_t^{hom}$  défini, en utilisant (II.15) et (III.18), par :

$$\mathbb{C}_t^{hom} = \mathbb{C}^s - \sum_{i=1}^{\mathcal{P}_1} \varpi^i \frac{d^i}{H_1 \tilde{H}} \mu^s(\underline{\underline{n}}^i \otimes \underline{\underline{v}}^i) \otimes (2\mu^s(\underline{\underline{n}}^i \otimes \underline{\underline{v}}^i) + \mu_c \underline{\underline{N}}) - \sum_{i=1}^{\mathcal{P}_2} \varpi^i d^i \{ \mathbb{B}^i + \underline{\underline{E}} : (\mathbb{B}^i \otimes \mathbb{B}^i) : \underline{\underline{E}} \} \quad (\text{III.23})$$

$$\mathbb{B}^i = a_1 \left\{ \begin{array}{l} 2a_2 \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} + a_3 [(\underline{\underline{n}}^i \otimes \underline{\underline{n}}^i) \otimes \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}} \otimes (\underline{\underline{n}}^i \otimes \underline{\underline{n}}^i)] \\ + [(\underline{\underline{n}}^i \otimes \underline{\underline{n}}^i) \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}} (\underline{\underline{n}}^i \otimes \underline{\underline{n}}^i)] \\ - \nu^s(\underline{\underline{n}}^i \otimes \underline{\underline{n}}^i \otimes \underline{\underline{n}}^i \otimes \underline{\underline{n}}^i) \end{array} \right\}$$



où  $\tilde{H}$  est défini par (III.17) et où  $\mathcal{P}_1$  (resp.  $\mathcal{P}_2$ ) désigne le nombre de familles de mésolfissures fermées (resp. ouvertes). On remarquera que du fait de la présence des termes provenant du glissement avec frottement sur les mésolfissures fermées,  $\mathbb{C}_t^{hom}$  ne possède plus la symétrie majeure.

### III.4 Intégration numérique locale

Comme au chapitre II, on considère un schéma implicite associé à une méthode de prédiction-correction. Supposons donc un pilotage à déformation totale imposée, l'état mécanique au pas  $j$  étant totalement connu, et considérons à priori que l'évolution entre les pas  $j$  et  $j + 1$  est élastique; il vient :

$$\text{prédiction élastique : } \begin{cases} \underline{E}_{j+1} = \underline{E}_j + \Delta \underline{E} \\ d_{j+1}^i = d_j^i \quad (i = 1 \text{ à } \mathcal{P}) \\ \underline{\gamma}_{j+1}^i = \underline{\gamma}_j^i \quad (i = 1 \text{ à } \mathcal{P}) \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

#### • Cas des fissures ouvertes

Dans ce cas, la situation est identique à celle considérée au chapitre II. Si une correction non-linéaire est nécessaire, celle-ci est définie par :

$$\text{correction non - linéaire : } \begin{cases} \text{Pour } i = 1 \text{ à } \mathcal{P} \\ \text{Si } f^i(F_{j+1}^{d^i}, d_j^i) > 0 \\ \Delta d_{j+1}^i = \frac{1}{k\eta} f^i(F_{j+1}^{d^i}, d_j^i) \\ d_{j+1}^i = d_j^i + \Delta d_{j+1}^i \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

Par ailleurs, il est indispensable de procéder à une "actualisation élastique" des vecteurs glissement  $\underline{\gamma}^i$  en utilisant (I.23.b).

#### • Cas des fissures fermées

Considérons le cas le plus général, où au pas  $j + 1$  il y a évolution du glissement et de

l'endommagement. Les incréments  $\Delta d_{j+1}^i$  et  $\Delta \underline{\gamma}_{j+1}^i$  doivent vérifier simultanément :

$$f^i(d_j^i + \Delta d_{j+1}^i, \underline{\gamma}_j^i + \Delta \underline{\gamma}_{j+1}^i) = 0 \quad (\text{III.26})$$

$$h^i(\underline{E}_{j+1}, d_j^i + \Delta d_{j+1}^i, \underline{\gamma}_j^i + \Delta \underline{\gamma}_{j+1}^i) = 0$$

La résolution de ce système non linéaire nécessite une procédure itérative, les conditions initiales étant définies par (III.24), *i.e.*  $d_{j+1,0}^i = d_j^i$  et  $\underline{\gamma}_{j+1,0}^i = \underline{\gamma}_j^i$ . De la linéarisation de  $f$  et  $h$  autour des valeurs actuelles des variables internes (cf. Ortiz et Simo [108]), il vient que les incréments  $\Delta d_{j+1,k}^i$  et  $\Delta \xi_{j+1,k}^i$  (définissant l'évolution de  $\underline{\gamma}^i$ ) sont solutions de [55] :

$$\begin{cases} \frac{\partial f_{j+1,k-1}^i}{\partial d^i} \Delta d_{j+1,k}^i + \frac{\partial f_{j+1,k-1}^i}{\partial \underline{\gamma}^i} \underline{v}_{j+1,k-1}^i \Delta \xi_{j+1,k}^i = f_{j+1,k-1}^i \\ \frac{\partial h_{j+1,k-1}^i}{\partial d^i} \Delta d_{j+1,k}^i + \frac{\partial h_{j+1,k-1}^i}{\partial \underline{\gamma}^i} \underline{v}_{j+1,k-1}^i \Delta \xi_{j+1,k}^i = h_{j+1,k-1}^i \end{cases} \quad (\text{III.27})$$

avec :

$$\begin{cases} f_{j+1,k-1}^i = f^i(\underline{\gamma}_{j+1,k-1}^i, d_{j+1,k-1}^i) \\ h_{j+1,k-1}^i = h^i(\underline{E}_{j+1}, \underline{\gamma}_{j+1,k-1}^i, d_{j+1,k-1}^i) \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

et où

$$\underline{v}_{j+1,k-1}^i = \frac{2\mu^s \underline{E}_{j+1} \cdot \underline{n}^i \cdot (\underline{\delta} - \underline{n}^i \otimes \underline{n}^i) - \frac{H_1}{d_{j+1,k-1}^i} \underline{\gamma}_{j+1,k-1}^i}{|2\mu^s \underline{E}_{j+1} \cdot \underline{n}^i \cdot (\underline{\delta} - \underline{n}^i \otimes \underline{n}^i) - \frac{H_1}{d_{j+1,k-1}^i} \underline{\gamma}_{j+1,k-1}^i|} \quad (\text{III.29})$$

Il vient alors :

$$\underline{\gamma}_{j+1,k}^i = \underline{\gamma}_{j+1,k-1}^i + \underline{v}_{j+1,k-1}^i \Delta \xi_{j+1,k}^i \quad (\text{III.30})$$

$$d_{j+1,k}^i = d_{j+1,k-1}^i + \Delta d_{j+1,k}^i$$

L'arrêt de la procédure itérative est défini par la détermination d'un état mécanique admissible et d'un vecteur  $\underline{v}$  stable (*i.e.*  $|\underline{v}_{j+1,k-1}^i \cdot \underline{v}_{j+1,k}^i - 1| < \epsilon$ ).

## III.5 Evaluation des capacités prédictives du modèle couplé

### III.5.1 Choix du matériau et identification

Les simulations présentées dans ce chapitre concernent un béton étudié par Van Mier [138]. Ce choix est justifié par la large gamme de trajets de chargement disponibles et

notamment un certain nombre d'essais multiaxiaux.

A priori, la procédure d'identification des paramètres ( $\lambda^s$ ,  $\mu^s$ ,  $\rho_0^d$ ,  $k$  et  $\eta$ ) proposée au chapitre II (§ II.3) reste valable. En effet, celle-ci est basée sur des essais où le mécanisme de frottement n'est pas activé (traction isotrope, traction simple, ...). La prise en compte du glissement avec frottement nécessite l'identification d'un seul paramètre supplémentaire : le coefficient de frottement  $\mu_c$  sur les lèvres des mésolfissures fermées.

L'identification de  $\mu_c$  proposée ici repose sur l'analyse des essais de compression triaxiale d'axe  $\underline{e}_3$ . Sur la courbe de comportement, le premier seuil de non-linéarité correspond en principe au seuil de frottement. Pour une famille dont l'orientation est définie par les angles  $\theta$  et  $\varphi$ , ce seuil est donné par :

$$2\mu^s(E_3 - E_1)|\sin\theta\cos\theta| + \mu_c[2(\lambda^s + \mu^s\sin^2\theta)E_1 + (\lambda^s + 2\mu^s\cos^2\theta)E_3] = 0 \quad (\text{III.31})$$

Ainsi, on vérifie par dérivation de cette équation par rapport à  $\theta$  que la première famille activée est définie par :

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{\mu_c}\right) \quad (\text{III.32})$$

Le seuil de non-linéarité est alors donné par :

$$\mu^s(E_3 - E_1)\sqrt{\mu_c^2 + 1} + \mu_c[(2\lambda^s + \mu^s)E_1 + (\lambda^s + \mu^s)E_3] = 0 \quad (\text{III.33})$$

Soit en fonction de la contrainte macroscopique (la densité d'endommagement initiale étant supposée isotrope) :

$$3(\Sigma_3 - \Sigma_1)\sqrt{\mu_c^2 + 1} + [3(\Sigma_1 + \Sigma_3) - 2(2\Sigma_1 + \Sigma_3)\alpha_2^{fer}\rho_0^d]\mu_c = 0 \quad (\text{III.34})$$

dans lequel  $\alpha_2^{fer}$  est donné par (I.39).

Cette équation donne dans le plan  $(\Sigma_1, \Sigma_3)$  une fonction seuil sous la forme d'une droite dont la pente permet de déduire  $\mu_c$ . En ne considérant qu'un seul essai triaxial et connaissant le seuil de non-linéarité,  $\mu_c$ , solution de l'équation (III.34), est donné par :

$$\mu_c = \frac{3}{2} \frac{\Sigma_1 - \Sigma_3}{\sqrt{((3 - \alpha_2^{fer}\rho_0^d)\Sigma_3 - 2\alpha_2^{fer}\rho_0^d\Sigma_1)((3 - 2\alpha_2^{fer}\rho_0^d)\Sigma_1 - \alpha_2^{fer}\rho_0^d\Sigma_3)}} \quad (\text{III.35})$$

**Remarque III.10** *En l'absence d'essais triaxiaux axisymétriques, nécessaires à l'identification des paramètres, pour le matériau considéré, la détermination des différents paramètres résulte d'un calage sur un essai de compression uniaxiale. Les paramètres utilisés par la suite sont synthétisés dans le tableau III.1.*

$E^s$ (MPa)	$\nu^s$	$\rho_0^d$	$k$ ( $J.m^{-2}$ )	$\eta$	$\mu_c$
33330	0,23	0,01	$2,5.10^{-3}$	32	0,4

TAB. III.1: Synthèse des paramètres du modèle couplé identifiés sur un essai de compression uniaxiale [138].

La figure III.8 compare la courbe de calage avec les données expérimentales. Le calage réalisé permet de décrire le seuil de première non-linéarité et la contrainte au pic; il apparaît relativement satisfaisant.

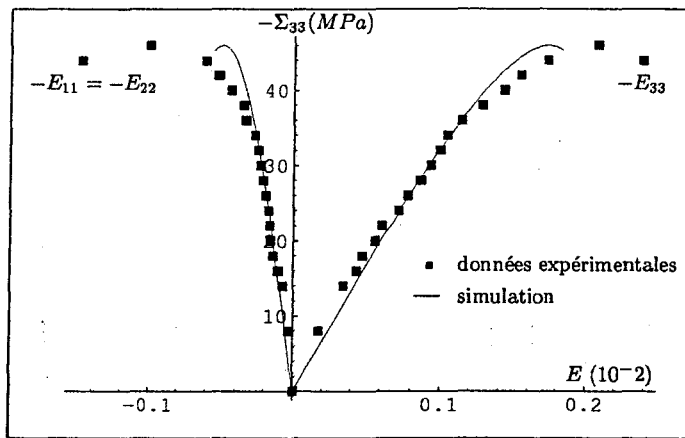


FIGURE III.8: Courbe d'identification des paramètres (données expérimentales [138])

### III.5.2 Comportement sous sollicitations biaxiales

En vue d'une validation du modèle, on se propose ici d'analyser les prédictions sur des trajets de sollicitation pour lesquels des données expérimentales sont disponibles [138].

#### III.5.2.1 Contraintes biaxiales

Dans ce paragraphe, nous considérons un essai de compression biaxiale telle que  $\Sigma_{11} = 0$  et  $\Sigma_{22} = 0,05\Sigma_{33}$  avec  $\Sigma_{33} < 0$ . La figure III.9 permet de comparer le comportement simulé avec les données expérimentales.

La figure III.10 présente la distribution des densités de microfissuration obtenue au pic de contraintes dans les plans  $(e_2, e_3)$  et  $(e_3, e_1)$  définis respectivement par  $\varphi = 0$  et par

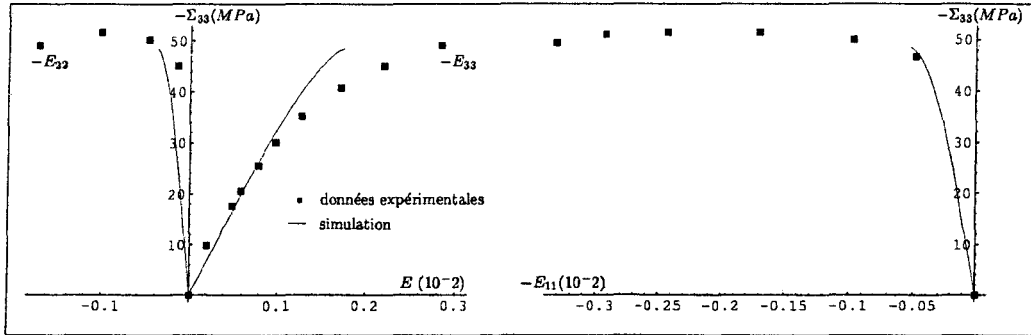


FIGURE III.9: Contraintes biaxiales : ( $\Sigma_{11} = 0$  ;  $\Sigma_{22} = 0,05\Sigma_{33}$  ;  $\Sigma_{33}$ ), comparaisons avec les données expérimentales de Van Mier [138].

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Cette figure met en évidence le caractère tridimensionnelle de la distribution de la mésofissuration. Les familles activées ont même orientation par rapport à l'axe  $\underline{e}_3$  (angle  $\theta$ ) quel que soit l'angle  $\varphi$ . Par contre, leur densité varie en fonction de  $\varphi$ . On observe que la densité de mésofissuration correspondant aux familles dont la normale appartient au plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$ , i.e.  $\varphi = 0$ , est plus importante que celle des familles dont la normale est dans le plan  $(\underline{e}_2, \underline{e}_3)$ , i.e.  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . L'évolution de la densité globale est présentée sur la figure III.11.

Nous profitons de la mise en œuvre des simulations sous sollicitations biaxiales pour illustrer le critère d'endommagement dans le modèle couplé. La figure III.12 donne une représentation de ce critère en conditions biaxiales dans le plan  $(\Sigma_{22}, \Sigma_{33})$  dans la zone de bicompression. Celui-ci a été obtenu en simulant des essais radiaux :  $\Sigma_{22} = k'\Sigma_{33}$  pour  $k'$  variant de 0 à 1.

Enfin, la figure III.13 présente les valeurs des contraintes prédites au pic dans l'espace des contraintes biaxiales. De manière surprenante, les simulations se trouvent en bon accord avec l'expérience. Insistons sur le fait que ces valeurs ne sont pas obtenues au prix d'un critère de rupture *ad hoc*, mais proviennent des prédictions du pic de contraintes par le modèle.

### III.5.2.2 Déformations planes

Nous considérons maintenant un trajet de déformations planes ( $E_{11} = 0$ ). La figure III.14 présente la courbe de comportement prédite par le modèle comparée aux données expérimentales de Van Mier [138]. On notera une différence importante sur la courbe donnant  $\Sigma_{11}$  en fonction de  $E_{33}$ . Le fait que la pente de la partie linéaire soit assez faible est déjà souligné par Van Mier [138] qui a noté de trop faibles valeurs du coefficient de

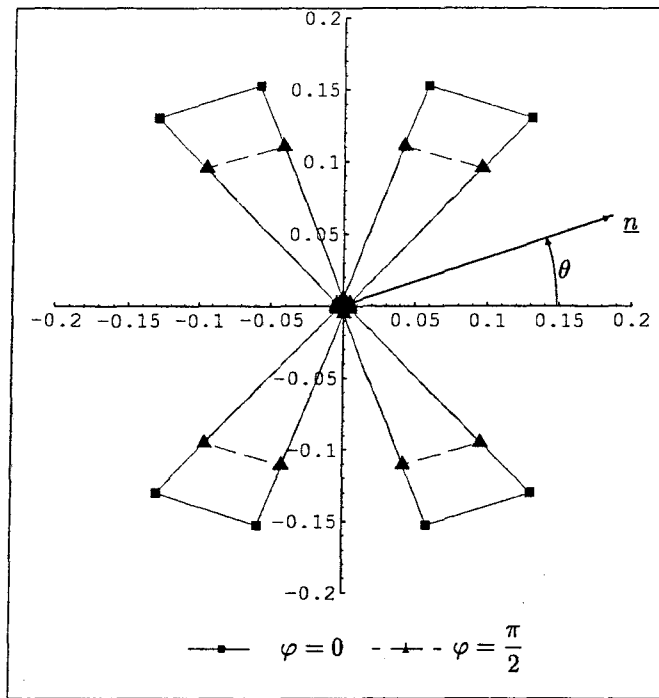


FIGURE III.10: Contraintes biaxiales : ( $\Sigma_{11} = 0$  ;  $\Sigma_{22} = 0,05\Sigma_{33}$  ;  $\Sigma_{33}$ )  
distribution des densités au pic de contraintes pour  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

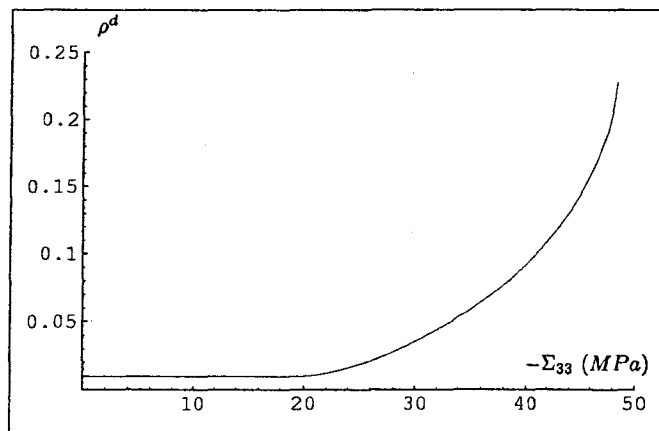


FIGURE III.11: Contraintes biaxiales : ( $\Sigma_{11} = 0$  ;  $\Sigma_{22} = 0,05\Sigma_{33}$  ;  $\Sigma_{33}$ )  
évolution de la densité d'endommagement  $\rho^d$ .

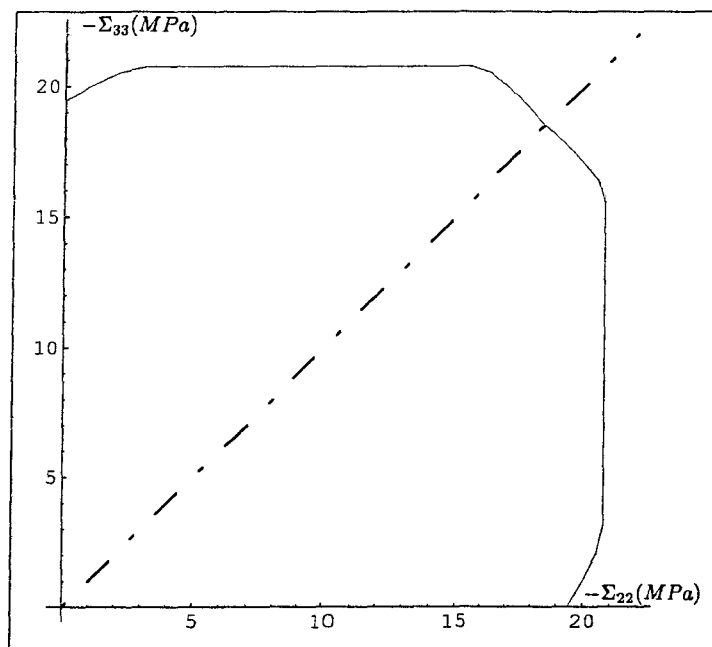


FIGURE III.12: Contraintes biaxiales : ( $\Sigma_{11} = 0$ ) critère d'endommagement dans le plan ( $\Sigma_{22}, \Sigma_{33}$ ) dans la zone de bicompression.

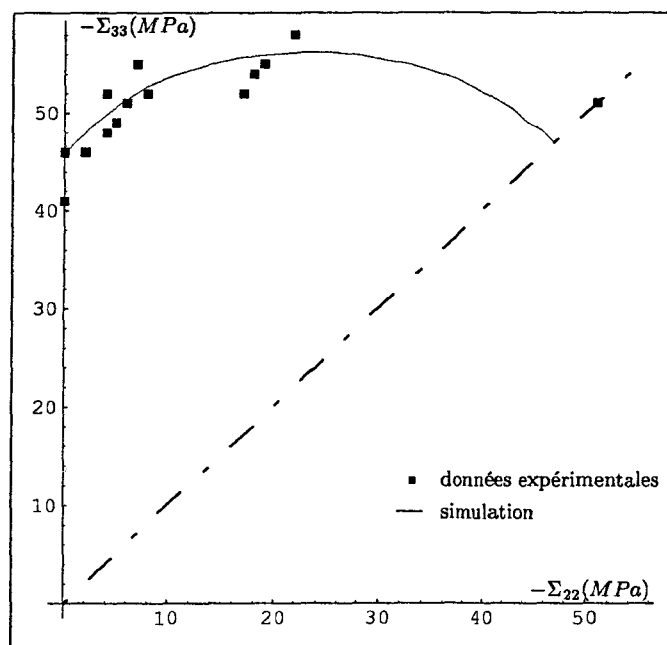


FIGURE III.13: Contraintes biaxiales : ( $\Sigma_{11} = 0$ ) contraintes au pic; comparaison simulation et expérience [138].

Poisson dans cette expérience.

La figure III.15, représentant la distribution des densités d'endommagement au pic pour

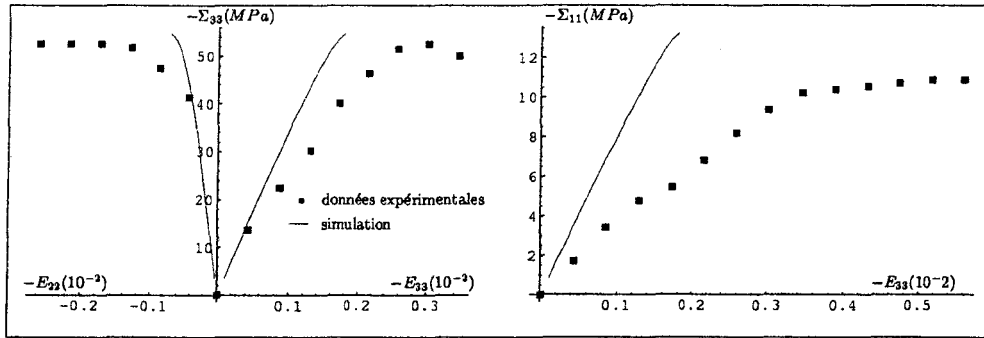


FIGURE III.14: Déformations planes : ( $E_{11} = 0$ ), comparaisons avec les données expérimentales de Van Mier [138].

$\varphi = 0$  et  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , montre une anisotropie très marquée. En effet, on note que les familles dont la normale appartient au plan ( $\underline{e}_1, \underline{e}_3$ ) se sont très peu propagées par rapport au familles dont la normale est dans le plan ( $\underline{e}_2, \underline{e}_3$ ).

Enfin, la figure III.16 présente l'évolution de la densité d'endommagement  $\rho^d$  en fonction de la contrainte macroscopique. On notera les valeurs relativement faibles de l'endommagement par rapport à celles obtenues pour les précédentes simulations (cf. fig. III.11).

### III.5.3 Comportement sous sollicitations multiaxiales

La figure III.17 présente la courbe de comportement obtenue pour un essai de compression multiaxiale telle que  $\Sigma_{11} = 0,05\Sigma_{33}$  et  $\Sigma_{22} = 0,1\Sigma_{33}$ . Les comparaisons semblent satisfaisantes en dehors des forts niveaux de déformation. La distribution et l'évolution de l'endommagement sont présentées respectivement sur les figures III.18 et III.19. Précisons que dans ce cas, toutes les mésolfissures sont fermées.

## III.6 Simulations d'autres trajets de chargement et influence des paramètres.

On se propose ici d'analyser la réponse du matériau sous d'autres trajets pour lesquels on ne dispose pas de données expérimentales. Ceci sera l'occasion d'étudier l'influence de certains paramètres du modèle.



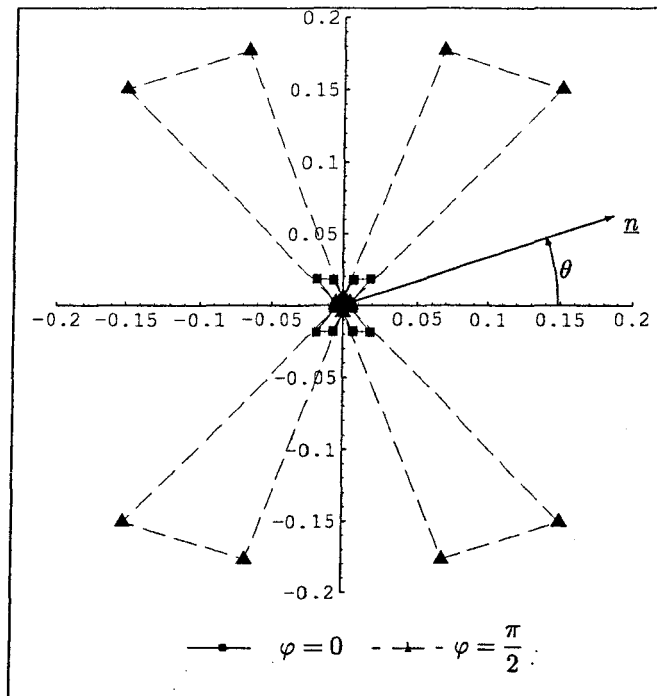


FIGURE III.15: Déformations planes : ( $E_{11} = 0$ ) distribution des densités au pic de contraintes pour  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

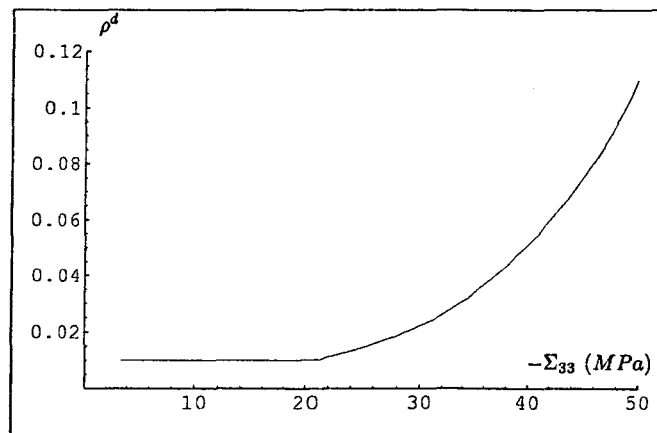


FIGURE III.16: Déformations planes : ( $E_{11} = 0$ ) évolution de la densité d'endommagement  $\rho^d$ .

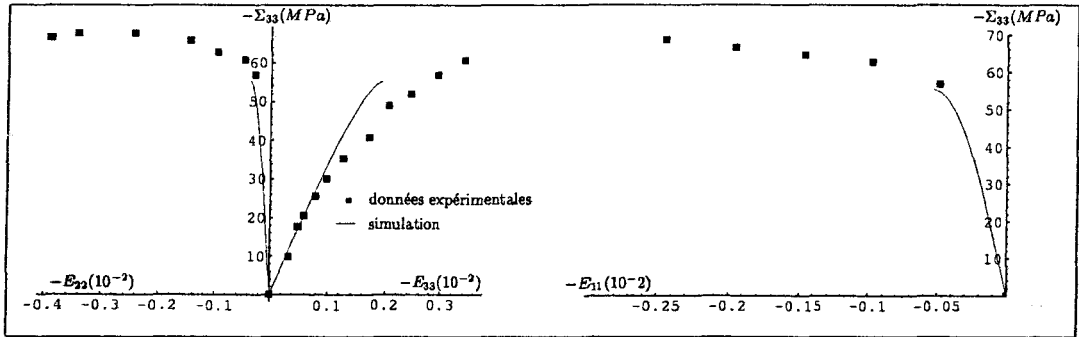


FIGURE III.17: Compression multiaxiale : ( $\Sigma_{11} = 0,05\Sigma_{33}$ ,  $\Sigma_{22} = 0,1\Sigma_{33}$ ), comparaisons avec les données expérimentales de Van Mier [138].

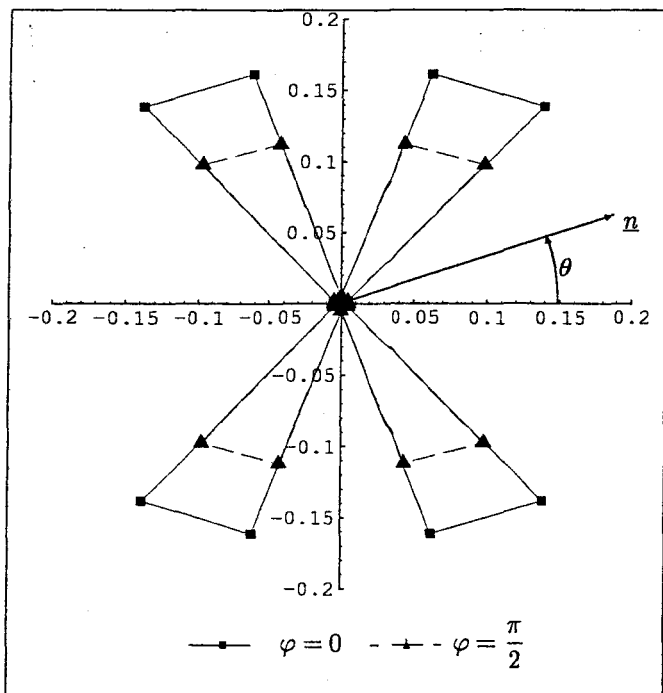


FIGURE III.18: Compression multiaxiale : ( $\Sigma_{11} = 0,05\Sigma_{33}$ ,  $\Sigma_{22} = 0,1\Sigma_{33}$ ), distribution des densités pour  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

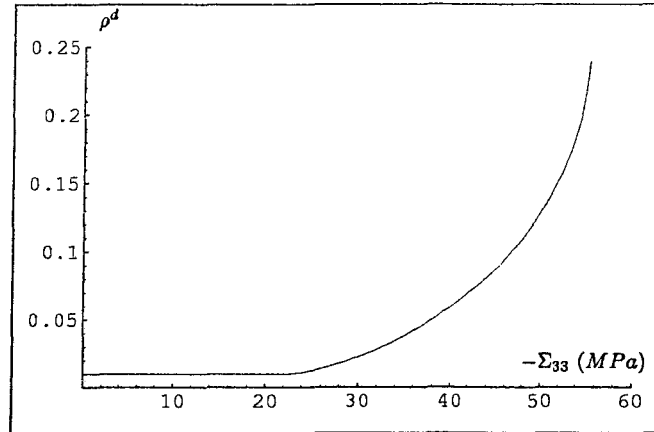


FIGURE III.19: Compression multiaxiale : ( $\Sigma_{11} = 0,05\Sigma_{33}$ ,  $\Sigma_{22} = 0,1\Sigma_{33}$ ), évolution de la densité d'endommagement  $\rho^d$ .

### III.6.1 Compression triaxiale

Dans ce paragraphe, nous considérons un essai de compression triaxiale d'axe  $\underline{e}_3$   $\underline{\Sigma} = \Sigma_{11}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \Sigma_{33}(\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)$  avec  $\Sigma_{11} < 0$  et  $\Sigma_{33} < 0$ . Dans un premier temps, nous montrerons la sensibilité du modèle couplé à la pression moyenne. L'influence du coefficient de frottement sera ensuite étudiée. Enfin, on illustrera le comportement du matériau soumis à un cycle de chargement, déchargement et rechargement déviatorique.

#### III.6.1.1 Influence de la pression de confinement

La figure III.20 représente la courbe de comportement en compression simple et en compression triaxiale pour trois valeurs différentes du confinement  $\Sigma_{11}$ . On notera une nette augmentation de la contrainte au pic avec le confinement.

L'évolution de la densité globale d'endommagement  $\rho^d$  est illustrée sur la figure III.21 pour les quatre chargements. On constate que le seuil d'endommagement augmente avec le confinement. De même, on constate une nette augmentation du pic de contraintes lorsque le confinement augmente. Par contre, le confinement n'a pas d'influence notable sur la densité globale d'endommagement au pic d'une part et sur la forme de la courbe d'évolution de  $\rho^d$  d'autre part. Ces résultats semblent indiquer l'existence d'une densité globale critique pour laquelle le pic est obtenu ; c'est un point intéressant qui mérite d'être approfondi.

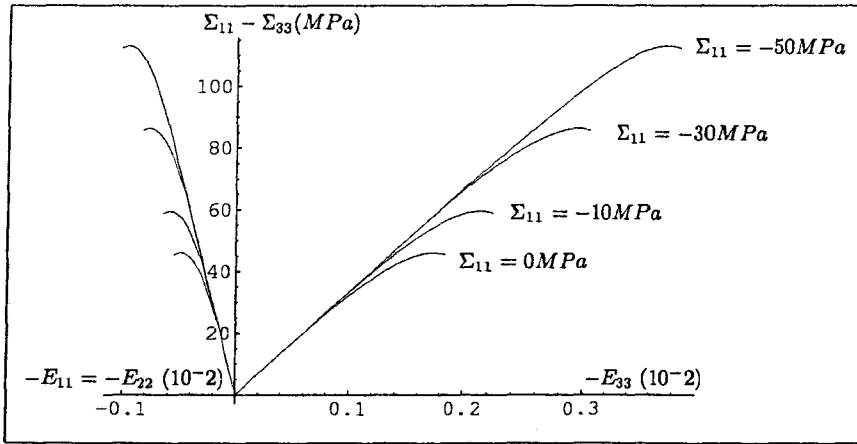


FIGURE III.20: Essai de compression triaxiale : effet de la pression de confinement sur la courbe de comportement

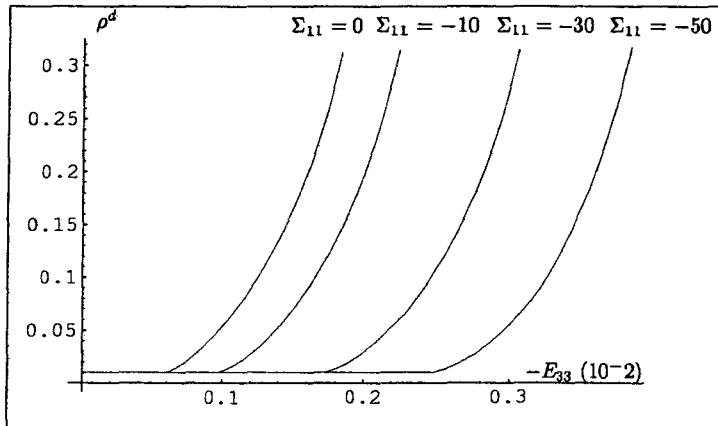


FIGURE III.21: Essai de compression triaxiale : effet de la pression de confinement sur l'évolution de l'endommagement

### III.6.1.2 Influence du coefficient de frottement

Les figures III.22 et III.23 illustrent l'influence du coefficient de frottement respectivement sur la courbe de comportement en compression triaxiale ( $\Sigma_{11} = -10MPa$ ) et sur l'évolution de  $\rho^d$  au cours du chargement. On note sur ces figures que le seuil d'endommagement et la contrainte au pic augmentent avec le coefficient de frottement.

Par ailleurs, le coefficient de frottement a une influence sur la densité d'endommagement

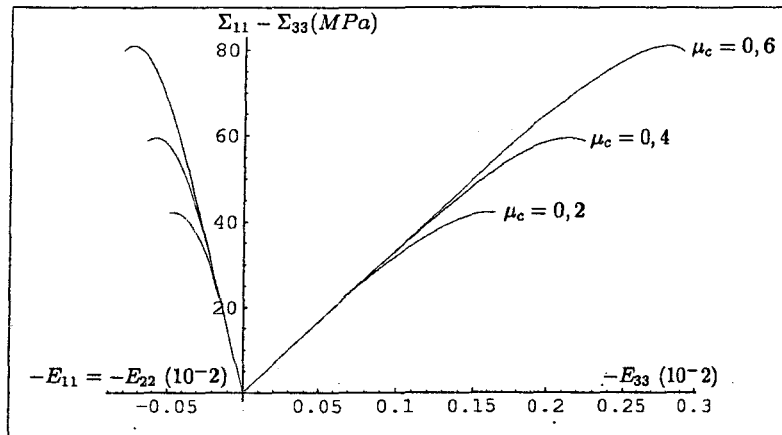


FIGURE III.22: Essai de compression triaxiale ( $\Sigma_{11} = -10MPa$ ) : effet du coefficient de frottement sur la courbe de comportement

$\rho^d$  au pic et sur la forme de la courbe d'évolution de celle-ci. En effet, on note que lorsque le coefficient de frottement augmente, l'évolution de  $\rho^d$  est moins rapide et la densité d'endommagement au pic est plus importante.

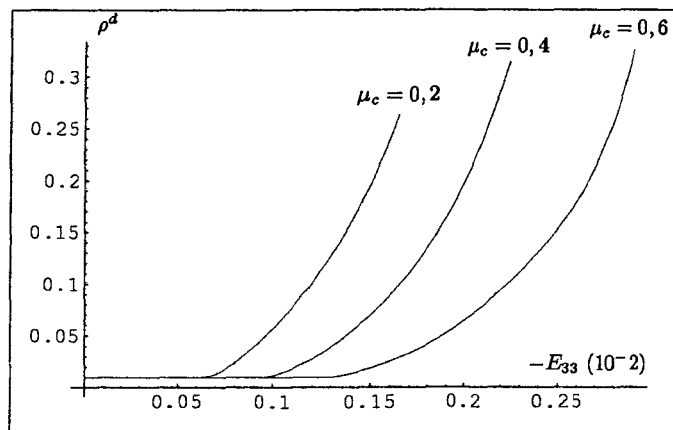


FIGURE III.23: Essai de compression triaxiale ( $\Sigma_{11} = -10MPa$ ) : effet du coefficient de frottement sur l'évolution de l'endommagement

### III.6.1.3 Compression triaxiale avec décharge

La figure III.24 représente la courbe de comportement pour un cycle de chargement suivi d'un déchargement puis d'un rechargement déviatorique, la pression de confinement étant ici égale à  $-30MPa$ .

Le comportement macroscopique obtenu présente une hystérésis ; par ailleurs, on observe la présence de déformations résiduelles à la fin du déchargement déviatorique.

Ces observations macroscopiques peuvent être mises en relation avec les informations

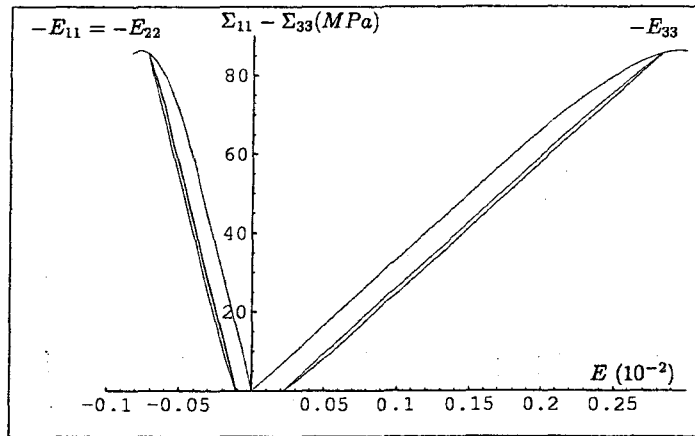


FIGURE III.24: Essai de compression triaxiale ( $\Sigma_{11} = -30Mpa$ ) avec décharge.

microscopiques. En effet, la figure III.25 représente l'évolution de la norme du vecteur glissement  $|\underline{\gamma}|$  au cours du cycle pour les deux familles de mésolfissures les plus proches de la famille telle que  $\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{\mu_c}$  ( $= 0,379\pi$ ) (cf. Eq. III.32), et dont les contributions sont les plus importantes. Ces deux courbes, qualitativement similaires, appellent les mêmes commentaires que la figure III.7.a.

Enfin, la figure III.26 représente la distribution des densités d'endommagement à la contrainte à partir de laquelle est effectué le déchargement. On remarque que la distribution obtenue est différente de celle obtenue pour les mésolfissures lisses (cf. figure II.7). En effet alors que la densité maximale était obtenue pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , on l'obtient ici à  $\theta = 0,356\pi$  avec le modèle couplé. On notera que la famille pour laquelle la densité d'endommagement est la plus élevée est aussi celle pour laquelle la norme du vecteur glissement est la plus élevée.

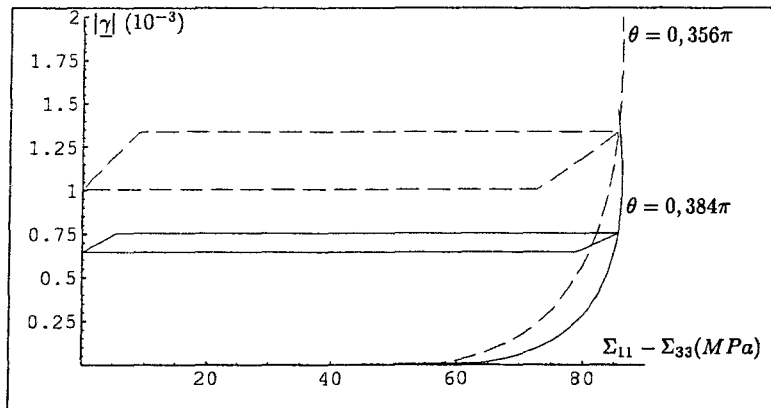


FIGURE III.25: Essai de compression triaxiale ( $\Sigma_{11} = -30\text{Mpa}$ ) avec décharge : évolution de  $|\underline{\gamma}|$  au cours du chargement.

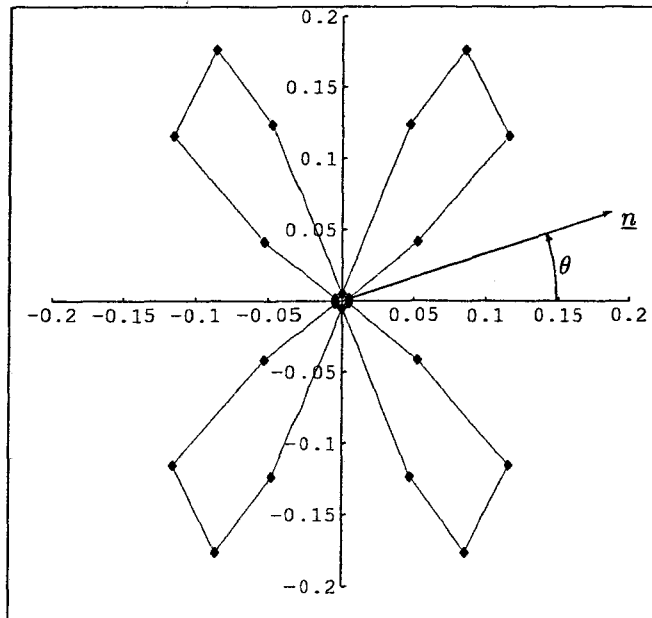


FIGURE III.26: Essai de compression triaxiale ( $\Sigma_{11} = -30\text{Mpa}$ ) avec décharge : distribution des densités d'endommagement avant déchargement.

### III.6.2 Cisaillement simple

On souhaite évaluer la prédiction du modèle dans le cas d'un chargement macroscopique en cisaillement simple. L'objectif poursuivi est d'une part d'analyser à nouveau une configuration mixte (présence de mésolfissures ouvertes et de mésolfissures fermées), et d'autre part de mettre en évidence le comportement dilatant du milieu endommagé. Le chargement est imposé sous la forme  $\underline{\underline{\Sigma}} = \tau(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)$  avec  $\tau$  croissant : il s'agit d'un cisaillement (hors axes) dont les axes sont les bissectrices du plan  $(\underline{e}_2, \underline{e}_3)$ . La figure III.27 montre la réponse macroscopique en déformations  $E_{22}$  et  $E_{33}$ , ainsi que la déformation volumique ( $E_v$ ) en fonction de  $\tau$ , la déformation  $E_{11}$  est nulle. On observe une forte non-linéarité pour les déformations  $E_{22}$ . La courbe de déformation volumique indique une dilatance que l'on interprète comme la conséquence du développement d'un endommagement important à fissures ouvertes pour des niveaux importants de  $\tau$ .

La répartition en orientation de la densité de mésolfissures dans le plan  $(\underline{e}_2, \underline{e}_3)$  est indi-

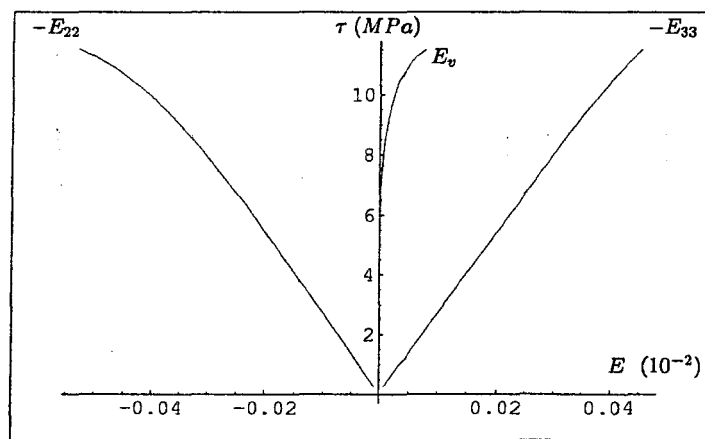


FIGURE III.27: Essai de cisaillement simple : courbe de comportement.

quée sur la figure III.28. Elle confirme une contribution importante des mésolfissures dont la normale est proche de  $\underline{e}_2$ .



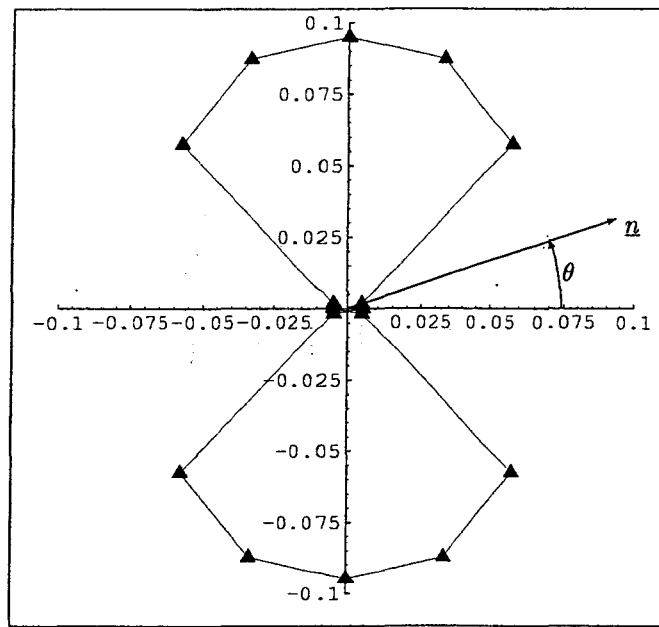


FIGURE III.28: Essai de cisaillement simple : distribution des densités d'endommagement dans le plan  $(\underline{e}_2, \underline{e}_3)$ .

## Chapitre IV

# Poroélasticité macroscopique des milieux endommageables

La présence d'un fluide dans un matériau poreux affecte son comportement macroscopique. L'étude du couplage poromécanique a été introduite, dans un contexte macroscopique, par Biot [21] dans le cadre de l'élasticité linéaire isotrope. De nombreuses extensions ont ensuite été proposées par exemple au cas des matériaux anisotropes [22, 29, 135] ou encore à l'étude du comportement non linéaire [23]. Plus récemment, Coussy [37, 38] a proposé une théorie générale de la thermodynamique des milieux poreux, incluant en particulier les comportements plastiques.

D'un point de vue micromécanique, on citera l'étude d'Auriault et Sanchez-Palencia [8] dans le cadre de l'homogénéisation des milieux périodiques. L'application des techniques d'homogénéisation des milieux aléatoires à l'étude des milieux poroélastiques est plus récente (cf. par exemple [34, 45, 88, 43, 46, 48]). On citera également l'étude de Thompson et Willis [135] traitant de la poroélasticité des milieux initialement anisotropes.

Peu de travaux ont été consacrés à la modélisation du couplage de la poroélasticité avec l'endommagement par mésolfissuration. Les concepts de la mécanique de l'endommagement, dans les milieux poreux saturés (bétons), ont été utilisés pour la première fois par Bourdarot [24], le modèle macroscopique proposé étant basé sur l'utilisation d'une variable d'endommagement scalaire. Bary [13] a fourni une formulation plus complète incluant l'anisotropie induite (utilisation d'une variable d'endommagement tensorielle d'ordre deux) ainsi que les effets de l'endommagement sur les coefficients poroélastiques.

En mécanique des roches, on notera les travaux présentés dans [127, 10, 11].

Ces travaux sur le couplage poroélasticité-endommagement ont tous été développés dans un cadre purement macroscopique. Un certain nombre de questions telles que l'anisotropie induite, les lois d'évolution de l'endommagement ou encore l'identification des modèles, restent encore en suspens. Il est clair qu'une démarche purement macroscopique ne peut apporter de réponse précise à ces questions.

L'étude présentée dans ce chapitre peut être perçue comme un prolongement de la démarche développée dans Lemarchand [88], Deudé [43] et Dormieux *et al.* [46] où sont mises en œuvre les techniques de type Eshelby pour l'analyse des milieux poreux fissurés. La contribution essentielle réside, ici, dans l'étude du couplage entre endommagement anisotrope (par propagation de mésolfissures) et poroélasticité.

Le chapitre débute par une présentation succincte de la théorie de la poroélasticité linéaire isotrope de Biot [21], le but étant d'introduire les coefficients du couplage poroélastique. Ensuite, en se basant sur cette théorie, nous interprétons des données expérimentales concernant un grès de Fontainebleau. L'objectif de cette analyse est double : montrer d'une part que la mésolfissuration fait partie intégrante de la porosité connectée de cette roche ; d'autre part, étudier, selon leur état d'activation, l'influence des mésolfissures sur les coefficients poroélastiques. C'est un point important qui permettra de confirmer à nouveau l'importance des effets unilatéraux.

Nous proposons ensuite d'étendre la démarche présentée au chapitre I au cas des milieux poreux mésolfissurés. Sur la base des travaux présentés dans [88, 46], on vérifie l'équivalence des résultats obtenus avec ceux déduits des techniques de type Eshelby. La formulation du modèle poroélastique endommageable est présentée au paragraphe IV.5. Enfin, on illustre la modélisation à l'aide de quelques applications (§ IV.6).

## IV.1 Effet de la mésolfissuration sur le comportement poromécanique

### IV.1.1 Poroélasticité linéaire isotrope : théorie de Biot [21]

Les travaux de Biot s'inscrivent dans un cadre purement macroscopique. A cette échelle, le v.e.r. d'un milieu poreux saturé peut être considéré comme la superposition de deux milieux continus en interaction : le fluide saturant l'espace poreux et le squelette (matrice poreuse).

D'un point de vue thermodynamique, il s'agit d'un système ouvert puisqu'il peut y avoir un échange de fluide avec l'extérieur au cours d'une transformation. Afin de décrire cet échange, la variable  $m$ , représentant l'apport en masse de fluide par unité de volume consécutif à la transformation, est introduite.

Sous les hypothèses d'une part de transformations infinitésimales et d'autre part de faibles apports de masse fluide, le comportement poroélastique linéaire isotrope est décrit par les deux lois d'état donnant respectivement la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  et la pression de fluide  $p$  en fonction de la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}$  et de la masse fluide  $m$ . En notant  $\underline{\underline{\Sigma}}_0$  et  $p_0$  la contrainte et la pression initiales, on pose :

$$\underline{\underline{\Sigma}} - \underline{\underline{\Sigma}}_0 = \left( K - \frac{2}{3}\mu \right) \text{tr}(\underline{\underline{E}})\underline{\underline{\delta}} + 2\mu\underline{\underline{E}} - bM\frac{m}{\varrho_0^f}\underline{\underline{\delta}} \quad (a)$$

$$p - p_0 = M \left( -b \text{tr} \underline{\underline{E}} + \frac{m}{\varrho_0^f} \right) \quad (b)$$

Dans ces expressions,  $K$  est le module de compression du milieu poreux saturé, défini dans une transformation où il n'y a pas d'échange de fluide avec l'extérieur, *i.e.*  $m = 0$  (condition non drainée).  $\mu$  est le module de cisaillement du matériau poreux et  $\varrho_0^f$  est la masse volumique initiale du fluide.

Notons qu'en exprimant  $\frac{m}{\varrho_0^f}$  en fonction de  $p$  et  $\underline{\underline{E}}$  (Eq. IV.1.b), une écriture alternative de la première équation d'état est :

$$\underline{\underline{\Sigma}} - \underline{\underline{\Sigma}}_0 = \left( K_0 - \frac{2}{3}\mu \right) \text{tr}(\underline{\underline{E}})\underline{\underline{\delta}} + 2\mu\underline{\underline{E}} - b(p - p_0) \quad (IV.2)$$

où  $K_0 = K - Mb^2$  est le module de compression du milieu poreux saturé en condition drainé ( $m \neq 0$ ).

Deux coefficients directement liés au couplage poromécanique apparaissent dans ces équations ; il s'agit de :

- $M$ , le module de Biot, qui représente la variation de pression de fluide nécessaire pour introduire une variation de masse fluide  $m$  dans une transformation isochore ( $\text{tr } \underline{\underline{E}} = 0$ ).
- $b$ , le coefficient de Biot qui représente le rapport entre  $\frac{m}{\varrho_0^f}$  et la variation de volume  $\text{tr } \underline{\underline{E}}$  dans une transformation telle que  $p = p_0$  (condition drainée). Physiquement,  $b$  s'interprète comme la fraction de la variation de volume du matériau poreux correspondant à la variation de volume de l'espace poreux.

La variable masse fluide peut être exprimée en fonction de la porosité lagrangienne  $\phi$ . En effet, en supposant que les variations de la masse volumique du fluide sont infinitésimales, la forme linéarisée de l'équation d'état du fluide s'écrit :

$$p = K_f \frac{\Delta \varrho^f}{\varrho_0^f} \quad (\text{IV.3})$$

où  $K_f$  est le module de compression du fluide saturant. Et on a :

$$\frac{m}{\varrho_0^f} = \phi - \phi_0 + \phi_0 \frac{\Delta \varrho^f}{\varrho_0^f} \quad (\text{IV.4})$$

On montre [38, 48] que le coefficient et le module de Biot peuvent être exprimés en fonction des propriétés des constituants du milieu :

$$\begin{aligned} b &= 1 - \frac{K_0}{K_s} & (a) \\ \frac{1}{M} &= \frac{b - \phi_0}{K_s} + \frac{\phi_0}{K_f} & (b) \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

où  $K_s$  est le module de compression de la matrice solide.

Le comportement poroélastique linéaire isotrope tel qu'il vient d'être présenté peut être appliqué au cas des milieux fissurés si l'on suppose une distribution isotrope de mésos-fissures. On se propose d'analyser des données récemment obtenues au laboratoire sur des trajets de chargement isotropes. L'objectif est de discuter de la connexion entre les mésosfissures et les pores <sup>10</sup>. On analysera également l'effet de la mésosfissuration sur les propriétés poroélastiques.

<sup>10</sup>L'importance de cette question a été récemment soulignée et analysée dans Dormieux et al [46]

## IV.1.2 Mise en évidence du rôle et des effets de la mésolfissuration sur le comportement poromécanique

### IV.1.2.1 Discussion sur la connexion entre mésolfissures et pores

Le matériau considéré est un grès pour lequel nous souhaitons montrer l'existence d'une connexion entre les pores et les mésolfissures. A l'instar de Dormieux *et al.* [46], considérons un essai isotrope au cours duquel la contrainte moyenne  $\Sigma_m$  et la pression  $p$  restent égales. Enfin, on suppose une distribution isotrope de mésolfissures initialement ouvertes.

Dans un premier temps, considérons que les mésolfissures ne sont pas connectées aux pores; la pression dans les mésolfissures est donc nulle. Au cours de ce chargement, les mésolfissures vont progressivement se refermer. La courbe contrainte moyenne - déformation volumique déduite d'une telle expérience est non linéaire, les non linéarités étant uniquement induites par la refermeture progressive des mésolfissures.

Dans le cas contraire, si les mésolfissures sont supposées connectées aux pores, elles sont saturées par le fluide à la pression  $p$  et sont astreintes à rester ouvertes. La courbe contrainte moyenne - déformation volumique sera linéaire avec une pente correspondant au module de compression de la matrice solide  $K_s$ .

Pour examiner cette question de la connexion des mésolfissures, on reprend les résultats

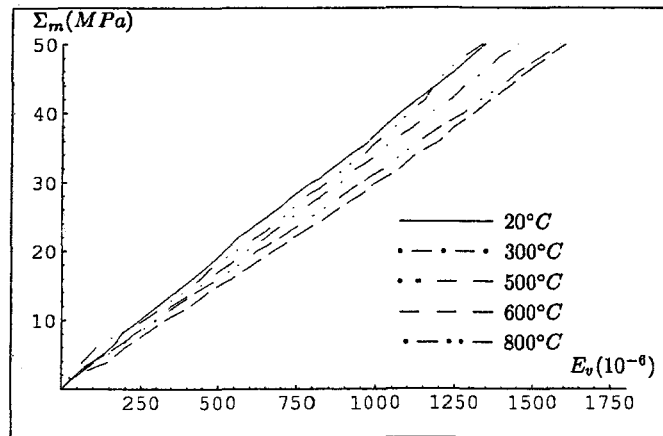


FIGURE IV.1: essai de compression isotrope à  $\Sigma_m = p$  pour différents échantillons thermiquement pré-endommagés [128]

expérimentaux obtenus par Sibai [128] sur un grès de Fontainebleau (cf. également Sibai *et al.* [129]). Ces essais ont été réalisés sur des échantillons thermiquement pré-endommagés

(cf. § I.1.2.1). Sur la figure IV.1, on présente les courbes donnant la contrainte moyenne  $\Sigma_m$  en fonction de la déformation volumique  $E_v$  pour les différents échantillons testés (endommagement préalable à  $20^\circ C$ ,  $300^\circ C$ ,  $500^\circ C$ ,  $600^\circ C$  et  $800^\circ C$ ). Cette figure montre que les réponses obtenues sont linéaires avec des pentes relativement proches pour les cinq échantillons.

Compte tenu de ce qui a été dit plus haut, la linéarité des réponses s'interprète comme la conséquence d'une connexion entre pores et mésolfissures. Ces essais permettent également de déterminer le module de compression  $K_s$  de la matrice solide (pente de la droite  $\Sigma_m - E_v$ ); dont la valeur varie entre 31200 MPa ( $500^\circ C$ ) et 35900 MPa ( $20^\circ C$ ).

**Remarque IV.1** *Si  $K_s$ , ainsi déterminé, est classiquement interprété comme le module de compression de la matrice solide, on notera que la mesure effectuée fait intervenir la porosité occluse (non connectée). Ceci peut expliquer la légère variation observée dans les pentes de la figure IV.1 et conforte les conclusions sur la connexion entre mésolfissures et pores qui, rappelons le, repose uniquement sur la linéarité des courbes  $\Sigma_m$  en fonction de  $E_v$ .*

### IV.1.3 Influence de la mésolfissuration sur le coefficient de Biot

Au chapitre I, nous avons mis en évidence le comportement élastique non linéaire, dû à la refermeture progressive des mésolfissures sous sollicitation de compression isotrope. En particulier, nous avons mis en évidence trois phases sur la figure I.2, correspondant à un essai isotrope en condition drainée (avec  $p = 0$ ). Ces trois phases ont été reliées aux différents états d'activation de la microfissuration : phase initiale où les mésolfissures sont toutes ouvertes, phase de refermeture progressive et phase où les mésolfissures sont toutes fermées.

On se propose, ici, d'évaluer le coefficient de Biot  $b$  (Eq. IV.5.a) dans la première et la dernière phase de ce comportement correspondant à des états où les mésolfissures sont respectivement toutes ouvertes et toutes fermées.

**Remarque IV.2** *Le coefficient de Biot est habituellement défini dans la dernière phase du comportement; cependant, en raison de ce qui vient être dit, sa définition précise doit traduire les états d'activation différents des mésolfissures.*

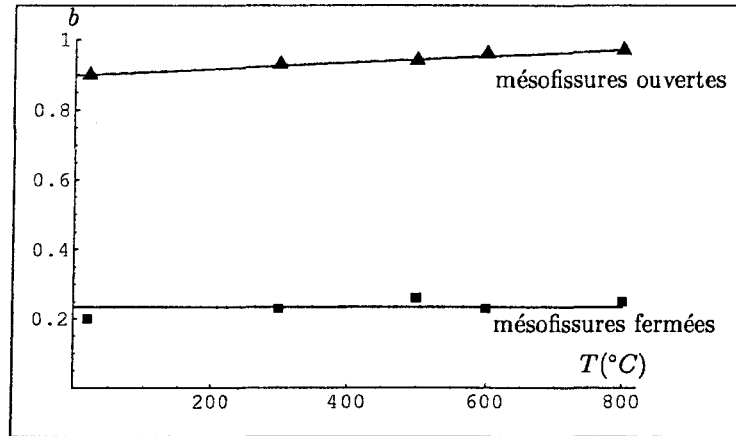


FIGURE IV.2: essai de compression isotrope drainé pour différents échantillons thermiquement pré-endommagés : évolution des coefficients de Biot à mésosfissures ouvertes et fermées en fonction de la température.

La figure IV.2 présente l'évolution des coefficients de Biot en fonction de la température préalablement appliquée pour endommager les échantillons. On observe que lorsque les mésosfissures sont fermées, le coefficient de Biot varie légèrement autour d'une valeur moyenne de 0,21. En revanche, lorsque les mésosfissures sont ouvertes,  $b$  augmente de façon quasi-linéaire avec la température.

Ainsi, en supposant que le seul effet de l'augmentation de température est l'endommagement par mésosfissuration, on constate d'une part que seules les mésosfissures ouvertes ont une influence sur le coefficient de Biot et d'autre part que l'état d'activation de la mésosfissuration influe sensiblement sur la valeur du coefficient de Biot, celui-ci passant en moyenne de 0,94 à 0,21 lorsque les mésosfissures se ferment. Cette dernière valeur du coefficient de Biot correspond en principe à la porosité de pores du grès qui est de l'ordre de 10%. Cette interprétation peut être confirmée en utilisant les expressions (IV.28) et (IV.29) présentées ultérieurement.

**Remarque IV.3** On notera que le grès de Fontainebleau étudié semble avoir une mésosfissuration initiale (à 20°C) non négligeable.

**Remarque IV.4** Dans ce paragraphe, l'effet de la microfissuration a été étudié uniquement sur le coefficient de Biot. L'influence sur le module de Biot  $M$  s'en déduit par l'équation (IV.5.b).



## IV.2 Approche micromécanique directe de la poroélasticité des milieux mésolfissurés

On se propose de reprendre ici l'analyse du v.e.r. considéré au chapitre I, en y incluant l'effet d'un fluide saturant. Le but poursuivi est d'abord la construction du potentiel thermodynamique nécessaire à la modélisation du comportement poroélastique endommageable. Dans un premier temps, on se place dans le cas où la seule porosité considérée est celle induite par la microfissuration.

### IV.2.1 Décomposition du problème

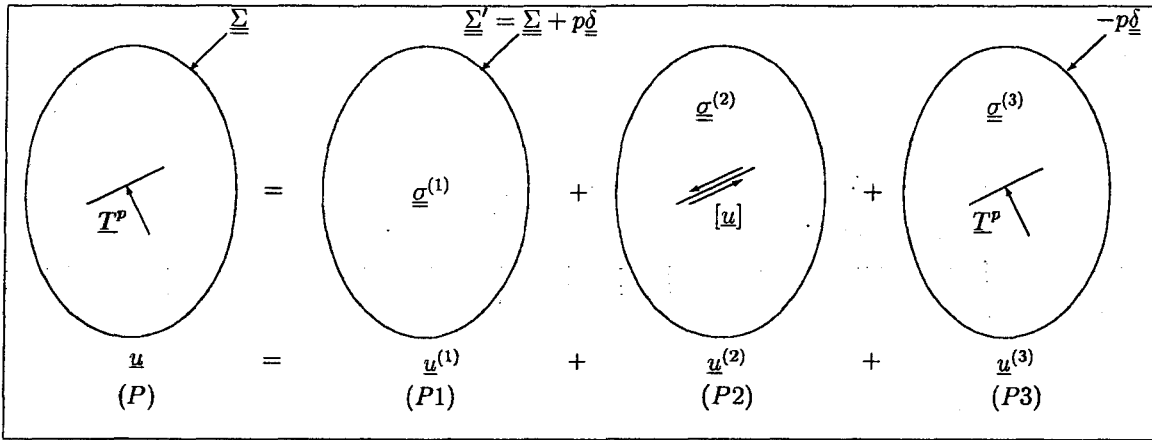


FIGURE IV.3: décomposition du problème (P)

Considérons donc à nouveau la microstructure décrite au chapitre I; on rappelle qu'il s'agit d'une matrice solide contenant une famille de mésolfissures de normale  $\underline{\underline{n}}$ . Les mésolfissures sont maintenant saturées par un fluide à la pression  $p$ . Les conditions imposées sur leurs lèvres s'écrivent :

$$\forall \underline{\underline{x}} \in \omega^+, \quad \left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{n}}(\underline{\underline{x}}) = -p\underline{\underline{n}}(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{T}}^p & (a) \\ [u_n] \geq 0 & (b) \\ \sigma_{nn} + p \leq 0 & (c) \\ [u_n] (\sigma_{nn} + p) = 0 & (d) \end{array} \right. \quad (IV.6)$$

Le problème d'homogénéisation (P) posé sur le v.e.r. est décomposé en trois sous-problèmes

élémentaires indiqués sur la figure IV.3. Les sous-problèmes (P1) et (P3) sont des problèmes d'élasticité dont les solutions sont homogènes dans  $\Omega$ . Le champ  $\underline{u}^{(1)}$  est le champ qui se produirait si le matériau était sain en appliquant au v.e.r. la contrainte de Terzaghi  $\underline{\Sigma}' = \underline{\Sigma} + p\underline{\delta}$ . Le sous-problème (P2) permet de distinguer les effets des discontinuités de déplacement  $[\underline{u}]$  (dues à  $\underline{\Sigma}$  et  $p$ ) sur la mésolfissure.

Les champs de déformation microscopiques  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(3)}$  étant homogènes dans  $\Omega$ , il vient  $\underline{\underline{E}}^{(1)} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)} \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)}(\underline{x})$  et  $\underline{\underline{E}}^{(3)} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{(3)} \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{(3)}(\underline{x}) = -\frac{p}{3k^s}\underline{\underline{\delta}}$ . Comme dans le cas sec (Eq. I.9), on vérifie que la déformation macroscopique se décompose de la même façon que le champ de déplacement :

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}^{(1)} + \underline{\underline{E}}^{(2)} + \underline{\underline{E}}^{(3)} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{E}}^{(2)} = \beta(\underline{n} \otimes \underline{n}) + \underline{\underline{\gamma}} \otimes \underline{n} \quad (\text{IV.7})$$

## IV.2.2 Résolution du problème - Energie libre

On se propose de construire l'énergie libre macroscopique  $v$  de la phase solide du v.e.r. A priori,  $\underline{\underline{E}}$  et  $p$  sont adoptés comme paramètres de chargement. Les phénomènes de frottement étant exclus dans ce chapitre,  $\beta$  et  $\underline{\underline{\gamma}}$  sont des fonctions de  $\underline{\underline{E}}$  et  $p$  qu'il s'agira de déterminer. L'énergie libre macroscopique est la moyenne sur  $\Omega^m (= \Omega - \omega)$  de l'énergie libre spécifique; le matériau constitutif de la matrice étant élastique, il vient :

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega^m} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(1)} + \underline{u}^{(2)} + \underline{u}^{(3)}) : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(1)} + \underline{u}^{(2)} + \underline{u}^{(3)}) dV \quad \text{soit} \\ v &= \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega^m} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(1)}) : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(1)}) dV + \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega^m} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(2)}) : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(2)}) dV \\ &+ \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega^m} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(3)}) : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(3)}) dV + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^m} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(1)}) : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(3)}) dV \\ &+ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^m} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(1)}) : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(2)}) dV + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^m} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(3)}) : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(2)}) dV \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

Les champs  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(3)}$  étant homogènes et  $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}$  étant autoéquilibré, les deux dernières intégrales du second membre de IV.8 sont nulles. Le deuxième terme, noté  $v^{(2)}$  a été calculé au chapitre I (Eq. I.14). L'énergie libre s'écrit donc en utilisant la décomposition de  $\underline{\underline{E}}$  :

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2} \underline{\underline{E}}^{(1)} : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{E}}^{(1)} + v^{(2)} + \frac{1}{2} \underline{\underline{E}}^{(3)} : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{E}}^{(3)} + \underline{\underline{E}}^{(1)} : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{E}}^{(3)} \\ &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{E}}^{(1)} + \underline{\underline{E}}^{(3)}) : \mathbb{C}^s : (\underline{\underline{E}}^{(1)} + \underline{\underline{E}}^{(3)}) + v^{(2)} \\ \text{Soit } v &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)}) : \mathbb{C}^s : (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)}) + \frac{H_0}{2d} \left\{ \beta^2 + \left(1 - \frac{\nu^s}{2}\right) \underline{\underline{\gamma}} \cdot \underline{\underline{\gamma}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

**Remarque IV.5** L'expression (IV.9) est exactement de la même forme que (I.16) établie pour le milieu sec. On notera toutefois que dans cette expression, l'effet de la pression est à priori contenu dans les paramètres  $\beta$  et  $\underline{\gamma}$ .

## IV.2.3 Potentiels thermodynamiques (Pensée et al. [115])

### IV.2.3.1 Critère d'ouverture/fermeture des mésolfissures

Les mésolfissures étant ouvertes ou fermées non frottantes, à densité  $d$  fixée, le matériau se comporte de manière élastique. La nullité de la dissipation intrinsèque implique dans ce cas :

$$\mathcal{D} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{E}}} + p\dot{\beta} - \dot{v} = 0 \quad (\text{IV.10})$$

Il vient :

$$\mathcal{D} = \{ \underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) + p - \frac{H_0}{d}\beta \} \dot{\beta} + \{ \underline{T} - \frac{H_0}{d}(1 - \frac{\nu^s}{2})\underline{\gamma} \} \cdot \dot{\underline{\gamma}} \quad (\text{IV.11})$$

avec  $\underline{T} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} \cdot (\underline{\delta} - \underline{n} \otimes \underline{n})$ . Cette égalité devant être vérifiée pour  $\dot{\beta}$  et  $\dot{\underline{\gamma}}$  quelconques, on déduit :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{d}{H_0} \{ \underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) + p \}^+ \quad (a) \\ \underline{\gamma} &= \frac{d}{H_0(1 - \frac{\nu^s}{2})} \underline{T} \quad (b) \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Le paramètre  $\beta$  étant positif ou nul, seule la partie positive de  $\underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) + p$  intervient dans (IV.12.a). Le critère d'ouverture/fermeture des mésolfissures en présence d'un fluide saturant s'écrit donc :  $\underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) + p = 0$ .

Comme dans le cas sec, en se plaçant sous l'hypothèse de faible densité de mésolfissuration,  $\beta$  et  $\underline{\gamma}$  peuvent, après linéarisation, être exprimés en fonction de  $\underline{\underline{E}}$  et  $p$  :

$$\begin{aligned} \beta &\cong \frac{d}{H_0} \{ \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{N}} + p \}^+ \quad (a) \\ \underline{\gamma} &\cong \frac{2\mu^s d}{H_0(1 - \frac{\nu^s}{2})} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{n} \cdot (\underline{\delta} - \underline{n} \otimes \underline{n}) \quad (b) \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

On en déduit l'expression du critère d'ouverture/fermeture des mésolfissures en fonction de la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}$  et de la pression de fluide  $p$  :

$$\underline{\underline{E}} : \underline{\underline{N}} + p = 0 \quad \text{soit} \quad \lambda^s \text{tr} \underline{\underline{E}} + 2\mu^s \underline{\underline{E}} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) + p = 0 \quad (\text{IV.14})$$

## IV.2.3.2 Potentiel thermodynamique : cas des mésolfissures ouvertes

Considérons dans un premier temps le cas des mésolfissures ouvertes ( $\beta > 0$ ). En remplaçant  $\beta$  et  $\underline{\gamma}$  par leurs expressions (IV.13) dans (IV.9),  $v$  s'écrit, sous l'hypothèse I.2 (qui permet de négliger le terme quadratique  $\underline{\underline{E}}^{(2)} : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{E}}^{(2)}$ ) :

$$v = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{E}} + \frac{d}{2H_0} p^2 - \frac{d}{2H_0} \left\{ (\underline{\underline{E}} : \underline{\underline{N}})^2 + \frac{4\mu^s}{(1-\nu^s)} [(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) : \underline{\underline{\Delta}} - \underline{\underline{E}} : (\underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}}) : \underline{\underline{E}}] \right\} \quad (\text{IV.15})$$

$$\text{soit } v = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} + \frac{d}{2H_0} p^2$$

avec  $\mathbb{C}^{hom}$  le tenseur d'élasticité homogénéisé du milieu mésolfissuré sec à microfissures ouvertes (Eq. I.27).

$\dot{v}$  étant égal à  $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{E}}} + p\dot{\beta}$  (cf. Eq. IV.10), l'argumentation de  $v$  en  $\underline{\underline{E}}$  et  $p$  ne lui confère pas le statut de potentiel thermodynamique. A l'instar de Deudé *et al.* [42], nous introduisons  $v^*(\underline{\underline{E}}, p) = v(\underline{\underline{E}}, p) - p\beta$  qui vérifie bien  $\dot{v}^* = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{E}}} - \beta\dot{p}$ . Ainsi  $v^*$ , représentant l'énergie potentielle macroscopique, est le potentiel thermodynamique pour le choix du couple de variables  $(\underline{\underline{E}}, p)$ . Il vient, en utilisant (IV.13) et (IV.15) :

$$v^*(\underline{\underline{E}}, p) = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - \frac{d}{H_0} p \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{N}} - \frac{d}{2H_0} p^2 \quad (\text{IV.16})$$

On en déduit les lois d'état donnant respectivement l'expression de la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  et celle de la porosité macroscopique  $\beta$  en fonction de  $\underline{\underline{E}}$  et  $p$  :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}} &= \frac{\partial v^*}{\partial \underline{\underline{E}}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - \frac{d}{H_0} p \underline{\underline{N}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{B}} p \quad (a) \\ \beta &= -\frac{\partial v^*}{\partial p} = \frac{d}{H_0} \{ \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{E}} + p \} = \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} + \frac{p}{M} \quad (b) \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

On obtient ainsi une loi poroélastique macroscopique ayant la même structure que celle de la théorie anisotrope de Biot, en identifiant, pour le milieu mésolfissuré, le tenseur des coefficients de Biot  $\underline{\underline{B}} = \frac{d}{H_0} \underline{\underline{N}}$  et le module de Biot  $M$  (tel que  $\frac{1}{M} = \frac{d}{H_0}$ ).

En raison du caractère généralement orienté de la mésolfissuration, le tenseur  $\underline{\underline{B}}$  présente une certaine anisotropie ; la pression de fluide est donc susceptible d'induire des contraintes macroscopiques de cisaillement. A titre d'illustration, la figure IV.4 présente la variation de la composante  $B_{12}$  en fonction de l'orientation de la mésolfissure (l'illustration correspond à un matériau tel que  $\lambda^s = 2\mu^s$ , *i.e.*  $\nu^s = \frac{1}{3}$ ).

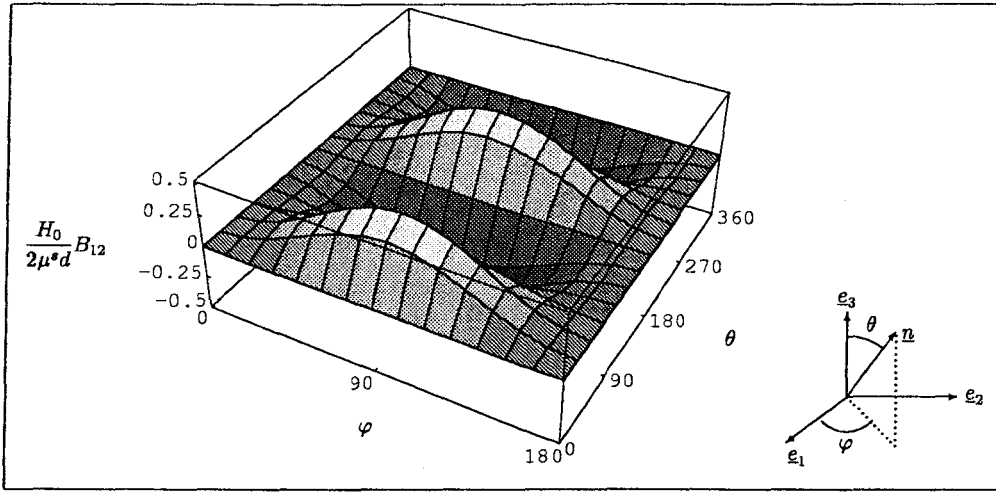


FIGURE IV.4: évolution de  $B_{12}$  en fonction de l'orientation de la mésocraquelure dans le cas où  $\lambda^s = 2\mu^s$  (les angles  $\theta$  et  $\varphi$  sont exprimés en degrés).

**Remarque IV.6** On aurait pu choisir les variables  $\underline{\underline{E}}$  et  $\beta$  comme arguments de  $v$  qui possède alors, pour ce choix de variables, le statut de potentiel thermodynamique. En effet, en remplaçant  $\gamma$  par son expression (IV.13) dans (IV.15), on obtient l'expression de  $v$  :

$$v = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{E}} - \frac{d}{H_0} \frac{2\mu^{s2}}{(1 - \frac{\nu^s}{2})} \{ (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) : \underline{\underline{\Delta}} - \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{E}} \} - \beta \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{N}} + \frac{H_0}{2d} \beta^2 \quad (\text{IV.18})$$

et les deux lois d'état :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}} &= \frac{\partial v}{\partial \underline{\underline{E}}} = \mathbb{C}^s : \underline{\underline{E}} - \frac{d}{H_0} \frac{2\mu^{s2}}{(1 - \frac{\nu^s}{2})} \{ \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{\Delta}} \cdot \underline{\underline{E}} - 2\underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{E}} \} - \beta \underline{\underline{N}} \\ p &= \frac{\partial v}{\partial \beta} = -\underline{\underline{E}} : \underline{\underline{N}} + \frac{H_0}{d} \beta \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

qui sont équivalentes à (IV.17).

**Remarque IV.7** L'enthalpie libre macroscopique  $v^{**}$ , obtenue par transformée de Legendre-Fenchel de l'énergie libre macroscopique (IV.9) s'écrit  $v^{**} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} + p\beta - v$ . Du fait que  $\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^s : (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)})$ , il vient :

$$v^{**} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbb{S}^s : \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}}^{(2)} - \frac{K_0}{2d} \{ \beta^2 + (1 - \frac{\nu^s}{2}) \underline{\underline{\gamma}} \cdot \underline{\underline{\gamma}} \} + p\beta \quad (\text{IV.20})$$

où  $\mathbb{S}^s = \mathbb{C}^{s-1}$ . En suivant une démarche similaire à celle ayant permis d'aboutir à (IV.15), on peut construire le potentiel macroscopique (enthalpie libre)  $v^{**}(\underline{\underline{\Sigma}}, p)$  en partant de

(IV.20); il vient :

$$\begin{aligned}
 v^{**} &= \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbb{S}^s : \underline{\underline{\Sigma}} + \frac{d}{2H_0(1-\nu^s)} \{ (\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\Sigma}}) : \underline{\underline{\Delta}} - \frac{\nu^s}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : (\underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}}) : \underline{\underline{\Sigma}} \} \\
 &\quad + \frac{d}{H_0} p \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\Delta}} + \frac{d}{2H_0} p^2 \\
 &= \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \mathbb{S}^{hom} : \underline{\underline{\Sigma}} + \frac{d}{H_0} p \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\Delta}} + \frac{d}{2H_0} p^2
 \end{aligned} \tag{IV.21}$$

où  $\mathbb{S}^{hom}$  est le tenseur de souplesse homogénéisé du matériau sec.  $v^{**}$  apparaît comme le potentiel thermodynamique pour le choix du couple de variables  $(\underline{\underline{\Sigma}}, p)$ . Les deux lois d'état donnant respectivement la déformation macroscopique  $\underline{\underline{E}}$  et la porosité de mésolfissures  $\beta$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{E}} &= \frac{\partial v^{**}}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} = \mathbb{S}^{hom} : \underline{\underline{\Sigma}} + \frac{d}{H_0} p \underline{\underline{\Delta}} \\
 \beta &= \frac{\partial v^{**}}{\partial p} = \frac{d}{H_0} \{ \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\Delta}} + p \}
 \end{aligned} \tag{IV.22}$$

Notons qu'en posant  $\beta = 0$  dans (IV.22.b) (cf. [135]), on déduit l'expression du tenseur de Skempton pour le milieu mésolfissuré, noté  $\underline{\underline{B}}^s$ ; tel que  $p = -\underline{\underline{B}}^s : \underline{\underline{\Sigma}}$ . Il vient :

$$\underline{\underline{B}}^s = \underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \tag{IV.23}$$

**Remarque IV.8** Le tenseur des modules de Biot défini en (IV.17) a été obtenu sous l'hypothèse de faible densité de mésolfissures. L'inversion de (IV.22.a) permet d'en donner une expression en s'affranchissant de cette hypothèse. On obtient :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{S}^{hom-1} : \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{B}}^* p \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{B}}^* = \frac{d}{H_0} \mathbb{S}^{hom-1} : \underline{\underline{\Delta}} \tag{IV.24}$$

Ainsi,  $\underline{\underline{B}}^*$  est exprimé en fonction des propriétés effectives du matériau alors que  $\underline{\underline{B}}$  était déterminé par les propriétés mécaniques de la matrice solide. Pour illustrer cette remarque, considérons un système de mésolfissures de normale  $\underline{\underline{e}}_3$  et de densité  $d$ . Les composantes non nulles de  $\underline{\underline{B}}$  et  $\underline{\underline{B}}^*$  sont données par :

$$\begin{aligned}
 B_{11} = B_{22} &= \frac{16(1-\nu^s)\nu^s}{3(1-2\nu^s)} d & B_{11}^* = B_{22}^* &= \frac{16(1-\nu^s)\nu^s d}{3(1-2\nu^s) + 16(1-\nu^s)^2 d} \\
 B_{33} &= \frac{16(1-\nu^s)^2}{3(1-2\nu^s)} d & B_{33}^* &= \frac{16(1-\nu^s)^2 d}{3(1-2\nu^s) + 16(1-\nu^s)^2 d}
 \end{aligned} \tag{IV.25}$$

La figure IV.5 présente l'évolution comparée de ces composantes en fonction de la densité de mésolfissures  $d$ . Naturellement, les deux formulations coïncident à faible densité.

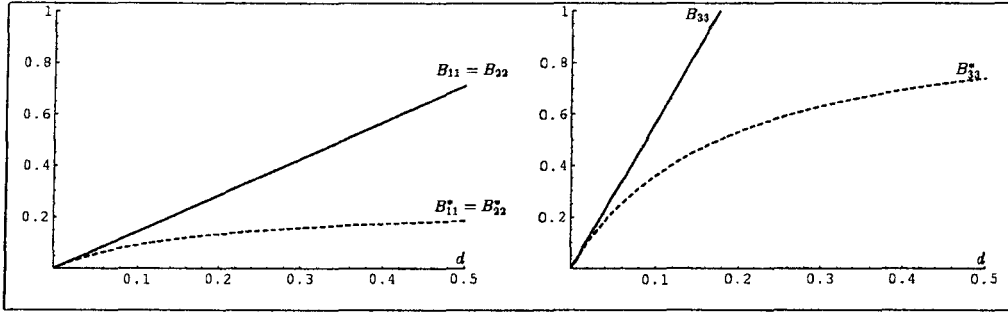


FIGURE IV.5: Un système de mésolfissures de normale  $e_3$  : comparaison des composantes non nulles de  $\underline{\underline{B}}$  et  $\underline{\underline{B}}^*$  en fonction de la densité de mésolfissures.

Les prédictions de l'estimation, sous l'hypothèse de faible densité de mésolfissures, montre une évolution très rapide et conduit à une valeur de  $B_{33} = 1$  pour une densité de mésolfissures relativement modérée alors que les composantes de  $\underline{\underline{B}}^*$  tendent vers des valeurs asymptotiques.

#### IV.2.3.3 Potentiel thermodynamique : cas des mésolfissures fermées

En posant  $\beta = 0$  et en remplaçant  $\underline{\underline{\gamma}}$  par son expression (IV.13.b) dans (IV.9), il vient :

$$\begin{aligned} v^* &= \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{E}} - \frac{2\mu^{s2}d}{H_1} \{ (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) : \underline{\underline{\Delta}} - \underline{\underline{E}} : (\underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}}) : \underline{\underline{E}} \} \\ &= \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} \end{aligned} \quad (IV.26)$$

où  $\mathbb{C}^{hom}$  est ici le tenseur d'élasticité homogénéisé du milieu mésolfissuré sec à mésolfissures fermées (Eq. I.28). (IV.26) indique que les mésolfissures fermées ne participent pas directement à la poroélasticité du milieu saturé. Cependant, elle reste connectée à la porosité, la pression de fluide se manifestant lors d'une éventuelle réouverture. Ceci paraît conforme aux observations expérimentales que nous avons présentées et analysées au paragraphe IV.1.3. Un résultat analogue a été récemment obtenu par Dormieux *et al.* [47] pour la poroélasticité des milieux à joints.

Dans ce qui suit, sauf indication contraire,  $v^*$  est adopté comme potentiel thermodynamique.

**Remarque IV.9** On peut montrer (cf annexe E) que la démarche micromécanique présentée dans cette section fournit des résultats équivalents à ceux déduits des approches de type Eshelby développées par Lemarchand [88] (cf. également [46]).

### IV.3 Prise en compte d'une porosité connectée initiale

Dans un contexte plus général, le matériau sain (non fissuré), défini comme la matrice solide au paragraphe IV.2, peut être un matériau poreux. Cette porosité a pour effet de modifier non seulement les propriétés élastiques mais aussi les propriétés poroélastiques.

On se propose donc d'introduire dans la modélisation précédente une porosité initiale due à la présence des pores. On considère donc un espace poreux, subdivisé en deux familles : les pores du milieu poreux non fissuré et les mésolfissures.

Ainsi, le milieu poreux non fissuré a une élasticité  $\mathbb{C}^0$  définie par (cf. par exemple [88]) :

$$\mathbb{C}^0 = (1 - \phi_0)\mathbb{C}^s : (\phi_0(\mathbb{I} - \mathbb{S})^{-1} + (1 - \phi_0)\mathbb{I})^{-1} \quad (\text{IV.27})$$

où  $\phi_0$  désigne la porosité de pores initiale et où  $\mathbb{S}$  est le tenseur d'Eshelby. Dans le cas de pores sphériques, l'estimation par un schéma dilué conduit à [147] :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^0 &= 3k^s \left(1 - \frac{\phi_0}{1 - \kappa_1(1 - \phi_0)}\right) \mathbb{J} + 2\mu^s \left(1 - \frac{\phi_0}{1 - \kappa_2(1 - \phi_0)}\right) \mathbb{K} \\ \text{avec } \kappa_1 &= \frac{1 + \nu^s}{3(1 - \nu^s)} \quad \text{et} \quad \kappa_2 = \frac{2(4 - 5\nu^s)}{15(1 - \nu^s)} \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

Par ailleurs, le matériau poreux non fissuré possède des propriétés poroélastiques  $\underline{\underline{B}}^0$  et  $\underline{\underline{M}}^0$  qui s'obtiennent en utilisant respectivement (E.7) (dans lesquelles  $\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^0$ ) et (E.9) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}}^0 &= b\underline{\underline{\delta}} \quad \text{avec} \quad b = \left(1 - \frac{k^0}{k^s}\right) \quad (a) \\ \frac{1}{M^0} &= \frac{b - \phi_0}{k^s} \quad (b) \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

En faisant de plus l'hypothèse de non interaction entre pores et mésolfissures, la linéarité du problème autorise à écrire les propriétés poroélastiques  $\underline{\underline{B}}^p$  et  $M^p$  du milieu poreux fissuré sous la forme :

$$\underline{\underline{B}}^p = \underline{\underline{B}}^0 + \underline{\underline{B}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\underline{B}} = \frac{d}{H_0} \underline{\underline{N}} & \text{si } \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{E}} > 0 \\ \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{0}} & \text{si } \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{E}} \leq 0 \end{cases} \quad (\text{IV.30})$$



$$\frac{1}{M^p} = \frac{1}{M^0} + \frac{1}{M} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{1}{M} = \frac{d}{H_0} & \text{si } \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{E}} > 0 \\ \frac{1}{M} = 0 & \text{si } \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{E}} \leq 0 \end{cases} \quad (\text{IV.31})$$

L'élasticité de ce même milieu est définie par :

– pour une famille de mésolfissures ouvertes :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^0 - a_1 d \left\{ \begin{array}{l} 2a_2 \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} + a_3 (\underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}}) \\ + \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} - a_4 \underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}} \end{array} \right\} \quad (\text{IV.32})$$

– pour une famille de mésolfissures fermées :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^0 - a_1 d \left\{ \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} - 2 \underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}} \right\} \quad (\text{IV.33})$$

Les constantes  $a_i$  sont données par (I.29).

Enfin, on notera que la prise en compte de la porosité initiale ne modifie pas la forme du potentiel thermodynamique qui s'écrit :

$$v_p^* = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - p \underline{\underline{B}}^p : \underline{\underline{E}} - \frac{p^2}{2M^p} \quad (\text{IV.34})$$

En écrivant la seconde loi d'état à mésolfissures fermées et ouvertes, on montre que le critère d'ouverture/fermeture des mésolfissures n'est pas modifié par la prise en compte de la porosité initiale. En effet, il vient :

– à mésolfissures ouvertes :

$$\beta + \phi - \phi_0 = b \operatorname{tr} \underline{\underline{E}} + p \frac{b - \phi_0}{k^s} + \frac{d}{H_0} \{ \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{E}} + p \} \quad (\text{IV.35})$$

– à mésolfissures fermées :

$$\phi - \phi_0 = b \operatorname{tr} \underline{\underline{E}} + p \frac{b - \phi_0}{k^s} \quad (\text{IV.36})$$

Soit à la transition :

$$\frac{d}{H_0} \{ \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{E}} + p \} = 0 \quad (\text{IV.37})$$

ce qui correspond au critère défini par (IV.14).

## IV.4 Généralisation à une distribution quelconque de mésolfissures

Dans ce paragraphe, on généralise les résultats obtenus à une distribution quelconque de mésolfissures en utilisant la même procédure que dans le cas sec. Il vient :

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{E}} - \frac{1}{8\pi H_0} \int_{S^{2+}(\underline{E})} \rho(\underline{n}) (\underline{N} : \underline{\underline{E}})^2 dS \\ & - \frac{\mu^{s2}}{2\pi H_0 (1 - \frac{\nu^s}{2})} \int_{S^2} \rho(\underline{n}) [(\underline{E} \cdot \underline{E}) : \underline{\underline{\Delta}} - \underline{E} : (\underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}}) : \underline{\underline{E}}] dS \\ & - p \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} - \frac{1}{2\mathcal{M}} p^2 \end{aligned} \quad (IV.38)$$

$$\text{Soit } \Phi = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - p \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} - \frac{1}{2\mathcal{M}} p^2$$

où  $\underline{\underline{B}}$  et  $\mathcal{M}$ , définis par :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}} = & (1 - \frac{k^0}{k^s}) \underline{\underline{\delta}} + \frac{1}{4\pi H_0} \int_{S^{2+}(\underline{E})} \rho(\underline{n}) \underline{\underline{N}} dS \\ \frac{1}{\mathcal{M}} = & \frac{1}{k^s} (1 - \frac{k^0}{k^s} - \phi_0) + \frac{1}{4\pi H_0} \int_{S^{2+}(\underline{E})} \rho(\underline{n}) dS \end{aligned} \quad (IV.39)$$

sont identifiés comme le tenseur des coefficients de Biot et le module de Biot pour le milieu poreux multifissuré.  $\mathbb{C}^{hom}$  est le tenseur d'élasticité homogénéisé du matériau sec défini par (I.32). On note de nouveau que la contribution des mésolfissures ouvertes peut conduire à une anisotropie de  $\underline{\underline{B}}$  suivant la distribution  $\rho$  considérée.

Les lois d'état prennent la forme classique :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{E}}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{B}} p \quad (a) \quad (IV.40)$$

$$\phi - \phi_0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial p} = \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} + \frac{p}{\mathcal{M}} \quad (b)$$

## IV.5 Critère d'endommagement et loi couplée

### IV.5.1 Critère d'endommagement

En suivant le même raisonnement qu'au chapitre II, la force thermodynamique associée à chaque variable d'endommagement  $d^i$  est définie par :

$$F^{d^i} = -\frac{\partial v_p^{*i}}{\partial d^i} \quad (IV.41)$$

Ce qui s'écrit, à partir de (IV.15) :

– cas des mésolfissures ouvertes :

$$F^{d^i} = \frac{1}{2H_0} \left\{ (\underline{N}^i : \underline{E})^2 + \frac{4\mu^{s2}}{(1 - \frac{\nu^s}{2})} [(\underline{E} \cdot \underline{E}) : \underline{\Delta}^i - \underline{E} : (\underline{\Delta}^i \otimes \underline{\Delta}^i) : \underline{E}] \right\} + p \frac{1}{H_0} (\underline{N}^i : \underline{E} + \frac{p}{2}) \quad (\text{IV.42})$$

– cas des mésolfissures fermées :

$$F^{d^i} = \frac{2\mu^{s2}}{H_0(1 - \frac{\nu^s}{2})} \{ (\underline{E} \cdot \underline{E}) : \underline{\Delta}^i - \underline{E} : (\underline{\Delta}^i \otimes \underline{\Delta}^i) : \underline{E} \} \quad (\text{IV.43})$$

On reconduit ici la forme adoptée au chapitre II pour le critère d'endommagement, c'est-à-dire basée sur le taux de restitution de l'énergie associé à chaque variable  $d^i$  :

$$f^i(F^{d^i}, d^i) = F^{d^i} - \mathcal{R}(d^i) \quad (\text{IV.44})$$

Compte tenu de (IV.42), on observe que la pression  $p$  aura une influence notable dans la propagation de l'endommagement à mésolfissures ouvertes. De façon générale, la pression  $p$  intervient au travers de  $\underline{E}' = \underline{E} + \frac{p}{3k^s} \underline{\delta}$ . En effet, en remplaçant, dans le critère d'endommagement (II.12), la déformation macroscopique  $\underline{E}$  par  $\underline{E}'$ , on obtient le critère défini par (IV.44).

**Remarque IV.10** De façon analogue, l'utilisation de  $v^{**}$  comme potentiel thermodynamique conduit à l'expression suivante de la force thermodynamique associée à une variable d'endommagement  $d^i$  :  $F^{d^i} = \frac{\partial v^{**i}}{\partial d^i}$ . Soit :

– à mésolfissures ouvertes :

$$F^{d^i} = \frac{1}{2H_0(1 - \frac{\nu^s}{2})} \{ (\underline{\Sigma} \cdot \underline{\Sigma}) : \underline{\Delta} - \frac{\nu^s}{2} \underline{\Sigma} : (\underline{\Delta} \otimes \underline{\Delta}) : \underline{\Sigma} \} + \frac{1}{H_0} p \underline{\Sigma} : \underline{\Delta} + \frac{1}{2H_0} p^2 \quad (\text{IV.45})$$

– à mésolfissures fermées :

$$F^{d^i} = \frac{1}{2H_0(1 - \frac{\nu^s}{2})} \{ (\underline{\Sigma} \cdot \underline{\Sigma}) : \underline{\Delta} - \underline{\Sigma} : (\underline{\Delta} \otimes \underline{\Delta}) : \underline{\Sigma} \} \quad (\text{IV.46})$$

Introduisons dans ces expressions la contrainte effective de Terzaghi  $\underline{\Sigma}' = \underline{\Sigma} + p\underline{\delta}$ . Il vient alors :

– à mésolfissures ouvertes :

$$F^{d^i} = \frac{1}{2H_0(1 - \frac{\nu^s}{2})} \{ (\underline{\Sigma}' \cdot \underline{\Sigma}') : \underline{\Delta} - \frac{\nu^s}{2} \underline{\Sigma}' : (\underline{\Delta} \otimes \underline{\Delta}) : \underline{\Sigma}' \} \quad (\text{IV.47})$$

- à mésolfissures fermées :

$$F^{d^i} = \frac{1}{2H_0(1 - \frac{\nu^s}{2})} \{ (\underline{\underline{\Sigma}}' : \underline{\underline{\Sigma}}') : \underline{\underline{\Delta}} - \underline{\underline{\Sigma}}' : (\underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}}) : \underline{\underline{\Sigma}}' \} \quad (\text{IV.48})$$

Ces expressions sont celles que l'on aurait obtenues dans le cas sec en appliquant la contrainte  $\underline{\underline{\Sigma}}'$ . La pression de fluide  $p$  intervient donc dans le critère d'endommagement formulé dans l'espace des contraintes et de la pression, au travers de la contrainte effective de Terzaghi. Notons que la pertinence de cette contrainte effective est discutée de manière générale pour les milieux poreux saturés par De Buhan et Dormieux [40].

### IV.5.2 Lois d'évolution

De façon analogue aux développements présentés dans les chapitres précédents, la loi d'évolution de chaque variable d'endommagement est donnée par :

$$\left| \begin{array}{l} \dot{d}^i = \dot{\Lambda}_{d^i} \frac{\partial f^i(F^{d^i}, d^i)}{\partial F^{d^i}} = \dot{\Lambda}_{d^i} \ ; \ \dot{\Lambda}_{d^i} \geq 0 \\ \text{soit } \dot{d}^i = \begin{cases} 0 & \text{si } f^i < 0 \text{ ou } (f^i = 0 \text{ et } \dot{f}^i < 0) \\ \dot{\Lambda}_{d^i} & \text{si } f^i = 0 \text{ et } \dot{f}^i = 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (\text{IV.49})$$

Le multiplicateur d'endommagement  $\dot{\Lambda}_{d^i}$ , obtenu à partir de l'écriture de la condition de consistance  $\dot{f}^i = 0$ , a pour expression :

$$\dot{\Lambda}_{d^i} = \frac{1}{\mathcal{R}'(\dot{d}^i)} \left\{ \left( \underline{\underline{A}}^i + \mathcal{H}^i \frac{1}{H_0} p \underline{\underline{N}}^i \right) : \underline{\underline{E}} + \frac{1}{H_0} (\underline{\underline{N}}^i : \underline{\underline{E}} + p)^+ \dot{p} \right\}^+ \quad (\text{IV.50})$$

où  $\underline{\underline{A}}^i$  est défini par (II.16) et  $\mathcal{H}^i = 1$  si  $\lambda^s \text{tr } \underline{\underline{E}} + 2\mu^s \underline{\underline{\delta}} + \frac{k^p}{k^s} p \geq 0$  et  $\mathcal{H}^i = 0$  dans le cas contraire.

### IV.5.3 Formulation en vitesse de la loi couplée poroélasticité - endommagement

Comme aux chapitres II et III, la formulation en vitesse de la loi couplée ne peut s'écrire de façon explicite que dans le cas où l'état d'activation des mésolfissures reste

inchangé durant l'incrément de déformation considéré. La différentiation de la première loi d'état (IV.40) donne alors :

$$\underline{\underline{\dot{\Sigma}}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{\dot{E}}} - \underline{\underline{\mathcal{B}}}\dot{p} - \sum_i \varpi^i \left\{ \underline{\underline{A}}^i + \mathcal{H}^i \frac{1}{H_0} \underline{\underline{N}}^i p \right\} \dot{d}^i \quad (IV.51)$$

En injectant  $\dot{d}^i$  donné par (IV.49) et (IV.50), on obtient la loi couplée endommagement-poroélasticité en vitesse, qui s'écrit :

$$\underline{\underline{\dot{\Sigma}}} = \mathbb{C}_t^{hom} : \underline{\underline{\dot{E}}} - \underline{\underline{\mathcal{B}}}_t \dot{p} \quad (IV.52)$$

où  $\mathbb{C}_t^{hom}$  est le tenseur des modules tangents défini par :

$$\mathbb{C}_t^{hom} = \mathbb{C}^{hom} - \sum_{i=1}^P \varpi^i \frac{\mathcal{G}^i}{\mathcal{R}'(d^i)} \underline{\underline{U}}^i \otimes \underline{\underline{U}}^i \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{U}}^i = \underline{\underline{A}}^i + \mathcal{H}^i \frac{1}{H_0} \underline{\underline{N}}^i \quad (IV.53)$$

et  $\underline{\underline{\mathcal{B}}}_t$  le tenseur des modules de Biot tangents donné par :

$$\underline{\underline{\mathcal{B}}}_t = \underline{\underline{\mathcal{B}}} + \frac{1}{H_0} \sum_{i=1}^P \varpi^i \frac{\mathcal{G}^i}{\mathcal{R}'(d^i)} \left( \underline{\underline{N}}^i : \underline{\underline{E}} + p \right)^+ \underline{\underline{U}}^i \quad (IV.54)$$

Dans ces expressions,  $\mathcal{G}^i$  est défini par :

$$\mathcal{G}^i = \begin{cases} 0 & \text{si } f^i < 0 \text{ ou } (f^i = 0 \text{ et } \dot{f}^i < 0) \\ 1 & \text{si } f^i = 0 \text{ et } \dot{f}^i = 0 \end{cases}$$

## IV.6 Quelques applications

### IV.6.1 Evolution en conditions drainées

On se propose d'illustrer brièvement la modélisation construite sur quelques trajets simples en conditions drainées<sup>11</sup>.

Les essais drainés caractérisent le comportement à long terme du matériau, c'est à dire le comportement lorsque la pression de fluide est en équilibre avec la pression extérieure. Sous cette condition, la pression de fluide  $p$  est constante au cours de l'essai.

<sup>11</sup>l'annexe F est consacrée à la formulation en conditions non drainées

#### IV.6.1.1 Traction uniaxiale : influence de la porosité de pores

Nous considérons un essai de traction uniaxiale tel que  $\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma_{33}(\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)$  avec  $\Sigma_{33} > 0$ . Les paramètres du modèle sont ceux utilisés au chapitre II. La porosité initiale de mésosfissures est fixée à  $\beta_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ . La pression  $p$  est égale à  $2\text{MPa}$ . Les figures (IV.6), (IV.7) et (IV.8) représentent respectivement la réponse contrainte-déformation axiale, l'évolution de  $\frac{m}{\rho_0}$  et l'évolution de la densité globale  $\rho^d$  pour trois valeurs de la porosité de pores  $\phi_0$  (0%, 5% et 10%).

On notera que lorsque la porosité  $\phi_0$  augmente, d'une part la contrainte au pic dimi-

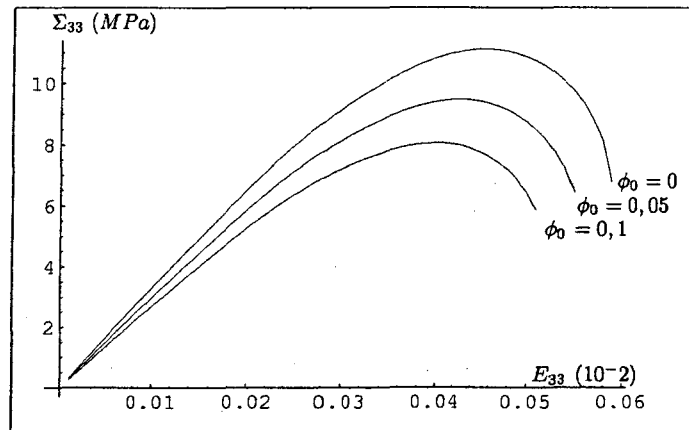


FIGURE IV.6: Traction uniaxiale ( $p = 2\text{MPa}$ ) : courbe contrainte - déformation axiale pour trois valeurs différentes de  $\phi_0$ .

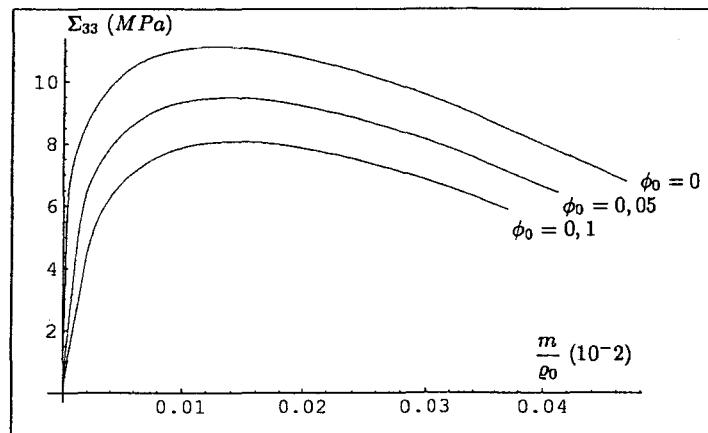


FIGURE IV.7: Traction uniaxiale ( $p = 2\text{MPa}$ ) : évolution de  $\frac{m}{\rho_0}$  au cours du chargement pour trois valeurs différentes de  $\phi_0$ .

nue et d'autre part la densité de mésosfissuration globale augmente plus rapidement. Le

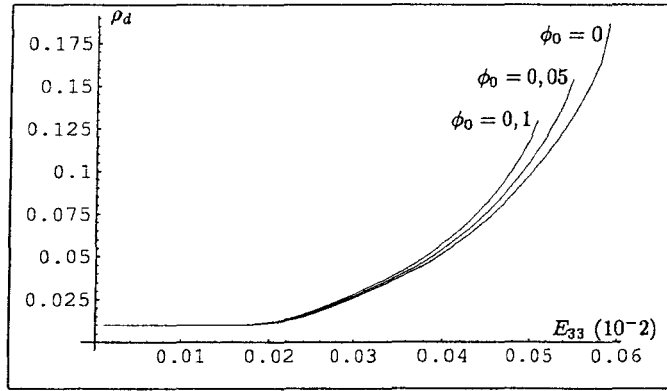


FIGURE IV.8: Traction uniaxiale ( $p = 2MPa$ ) : évolution de  $\rho^d$  au cours du chargement pour trois valeurs différentes de  $\phi_0$ .

fait que l'évolution de  $\frac{m}{\rho_0}$  soit non linéaire traduit le couplage entre la poroélasticité et l'endommagement.

#### IV.6.1.2 Cisaillement simple

On reprend ici le chargement macroscopique de cisaillement simple, déjà analysé au troisième chapitre, auquel on superpose ici une pression de fluide constante de  $2 MPa$ . Le comportement observé (figure IV.9) est similaire à celle de la figure III.27. On note toutefois une déformation volumique plus importante, ce qui traduit bien un effet de la pression de fluide sur la réponse du matériau.

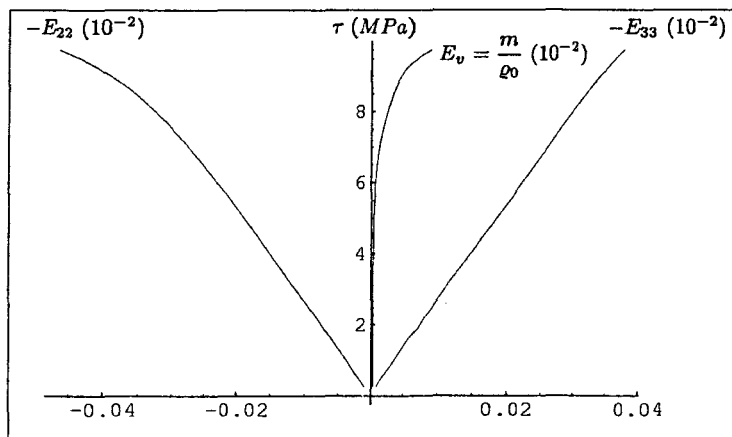


FIGURE IV.9: Cisaillement simple : courbe de comportement.

## IV.6.2 Mise en pression interne

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à une sollicitation de type mise en pression interne pour une contrainte macroscopique nulle ( $\underline{\Sigma} = 0$ ). Ce cas correspond par exemple au phénomène d'alcali-réaction observé dans les bétons. Celui-ci a fait l'objet d'une étude micromécanique [88] sur laquelle nous nous appuyerons ; l'apport de ce qui suit réside dans la prise en compte de l'éventuelle propagation des mésolfissures.

A l'instar de Lemarchand [88], nous considérons que l'évolution de la masse de fluide

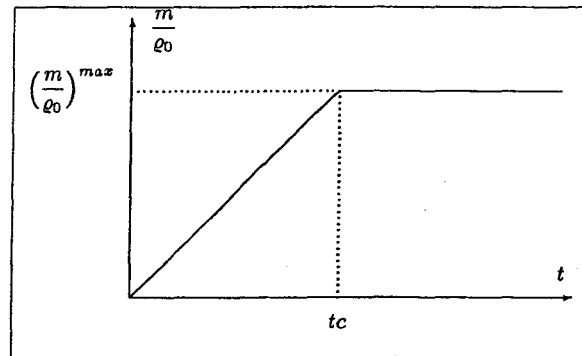


FIGURE IV.10: Evolution de  $\frac{m}{\rho_0}$  au cours du temps.

par unité de volume  $m$  est connue. La forme adoptée<sup>12</sup> est illustrée par la figure IV.10. L'évolution de  $\frac{m}{\rho_0}$  est d'abord linéaire au cours du temps ( $t < t_c$ ) puis  $\frac{m}{\rho_0}$  est maintenue constante ( $t > t_c$ ).

La pression de fluide est considérée comme étant uniforme dans l'espace poreux et le fluide est supposé incompressible (masse volumique constante). Par ailleurs, on considère que la porosité est exclusivement constituée par les mésolfissures ouvertes.

Sous la condition  $\underline{\Sigma} = 0$ , la première loi d'état (IV.40.a) s'écrit :

$$\underline{E} = \mathbb{C}^{hom-1} : \underline{\underline{B}}p \quad (IV.55)$$

En injectant cette expression dans (IV.40.b), la seconde loi d'état devient :

$$p \left( \frac{1}{M} + \underline{\underline{B}} : \mathbb{C}^{hom-1} : \underline{\underline{B}} \right) = \beta + \phi - \phi_0 \quad (IV.56)$$

L'état de saturation totale, traduit par le fait que le volume du fluide est équivalent à celui de l'espace poreux disponible, s'exprime par la relation  $\beta + \phi = \frac{m}{\rho_0}$ . Dans ce cas,

<sup>12</sup>Lemarchand [88] a montré que ce choix suffit à décrire la courbe en "s" observée au laboratoire.



en utilisant (IV.55) et (IV.56), on obtient l'expression de la déformation macroscopique et de la pression en fonction de la masse de fluide :

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\frac{1}{M} + \underline{\underline{\mathcal{B}}} : \mathbb{C}^{hom-1} : \underline{\underline{\mathcal{B}}}} \left( \frac{m}{\rho_0} - \phi_0 \right)^+ \quad (a) \\ \underline{\underline{E}} &= \frac{\mathbb{C}^{hom-1} : \underline{\underline{\mathcal{B}}}}{\frac{1}{M} + \underline{\underline{\mathcal{B}}} : \mathbb{C}^{hom-1} : \underline{\underline{\mathcal{B}}}} \left( \frac{m}{\rho_0} - \phi_0 \right)^+ \quad (b) \end{aligned} \quad (IV.57)$$

où  $(\cdot)^+$  désigne la partie positive et indique que la déformation macroscopique et la pression seront nulles tant que le fluide ne sature pas l'espace poreux initialement disponible.

A titre d'illustration, on considère une distribution isotrope de mésolfissures, toutes ouvertes dans leur état initial ( $\beta_0$ ), de densité globale  $\rho^d$  (valeur initiale  $\rho_0^d$ ). Les paramètres utilisés sont, de nouveau, ceux identifiés au chapitre III (cf. tableau III.1). Il est nécessaire d'y ajouter la porosité initiale de mésolfissures  $\beta_0$ , on considère  $\beta_0 = 3.10^{-4}$ . L'évolution de  $\frac{m}{\rho_0}$  (figure IV.10) est décrite par  $\left(\frac{m}{\rho_0}\right)^{max} = 4,5.10^{-4}$  et  $tc = 200j$ .

Dans ce cas,  $\mathbb{C}^{hom}$  est défini par (I.38). Les coefficients poroélastiques  $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$  et  $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathcal{B}}} &= \frac{k^s}{H_0} \rho^d \underline{\underline{\delta}} = \frac{16(1 - \nu^{s2})}{9(1 - 2\nu^s)} \rho^d \underline{\underline{\delta}} \quad (a) \\ \underline{\underline{\mathcal{M}}} &= \frac{1}{H_0} \rho^d \quad (b) \end{aligned} \quad (IV.58)$$

En utilisant les expressions (IV.57.a) et (IV.57.b), il vient :

$$\begin{aligned} p &= \frac{3}{32} \frac{E^s}{(1 - \nu^{s2}) \rho^d} \left( 1 - \frac{32}{9} \frac{1 - \nu^{s2}}{1 - 2\nu^s} \rho^d \right) \left( \frac{m}{\rho_0} - \phi_0 \right)^+ \quad (a) \\ \underline{\underline{E}} &= \frac{1}{3} \left( \frac{m}{\rho_0} - \phi_0 \right)^+ \underline{\underline{\delta}} \quad (b) \end{aligned} \quad (IV.59)$$

En injectant ces expressions dans (IV.44), le critère d'endommagement s'écrit en fonction de  $m$  :

$$f = \frac{3E^s}{32\rho^d(1 - \nu^{s2})} \left( \frac{m}{\rho_0} - \phi_0 \right)^+ - k(1 + \eta\rho^d) = 0 \quad (IV.60)$$

Les figures (IV.11), (IV.12) et (IV.13) présentent respectivement les évolutions de la déformation volumique  $E_v$ , la pression  $p$  et la densité de mésolfissuration  $\rho^d$  en fonction du temps.

Ces évolutions se décomposent en quatre phases :

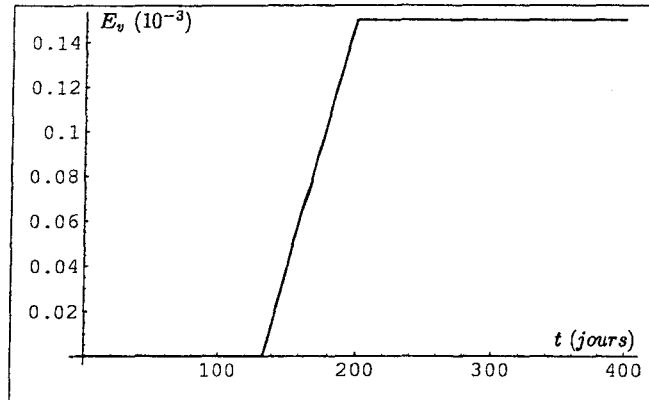


FIGURE IV.11: Evolution de la déformation volumique au cours du temps.

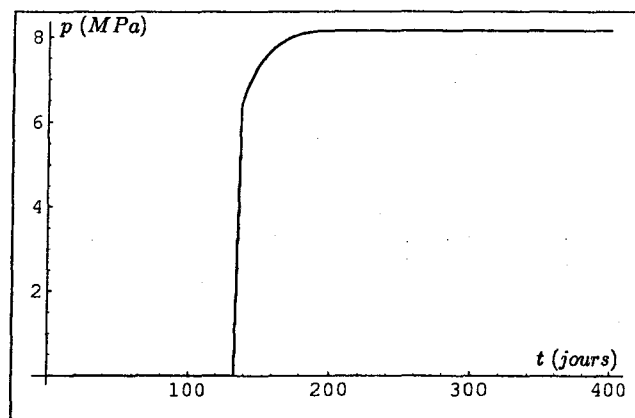


FIGURE IV.12: Evolution de la pression au cours du temps.

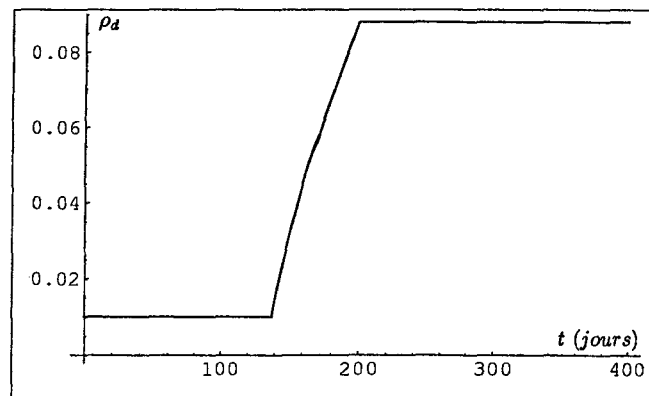


FIGURE IV.13: Evolution de la densité de mésofissuration au cours du temps.

- La première phase correspond au remplissage de l'espace poreux par le fluide ; la déformation macroscopique et la pression sont nulles (cf. IV.57), la densité d'endommagement est constante et égale à sa valeur initiale.
- Dans la deuxième phase, le comportement est élastique, les évolutions de la déformation volumique et de la pression sont linéaires ; l'endommagement n'évolue pas.
- Le critère d'endommagement initial est atteint. Au cours de la troisième phase, il y a évolution de l'endommagement. On notera la linéarité de la courbe  $E_v$  en fonction de  $t$  (cf. (IV.59)), l'évolution de la pression étant quant à elle non linéaire. On observe également que le critère d'endommagement est atteint peu de temps après le remplissage de la porosité, ce qui explique l'évolution rapide de la pression.
- Lorsque le temps  $t_c$  est atteint,  $m$  n'évolue plus. Par conséquent,  $\underline{E}$ ,  $p$  et  $\rho^d$  gardent des valeurs constantes.

La figure IV.14 illustre l'évolution de la pression au cours du temps pour un choix différent de  $\left(\frac{m}{\rho_0}\right)^{max} (= 6,5 \cdot 10^{-4})$ . Cette figure, à comparer à la figure IV.12, montre un effet de radoucissement : la pression de fluide diminue alors que  $m$  augmente. Ce radoucissement est la conséquence d'un endommagement plus important (cf. figure IV.15).

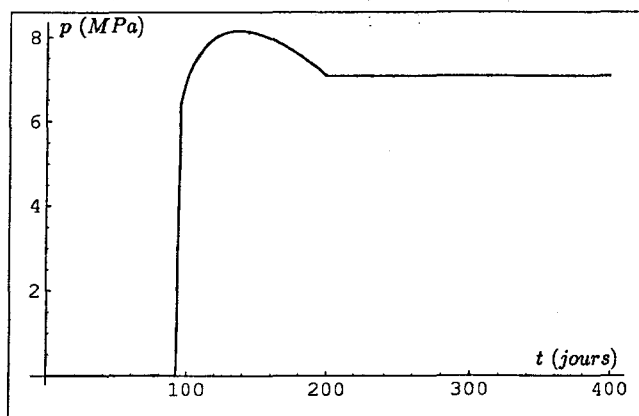


FIGURE IV.14: Evolution de la pression au cours du temps.

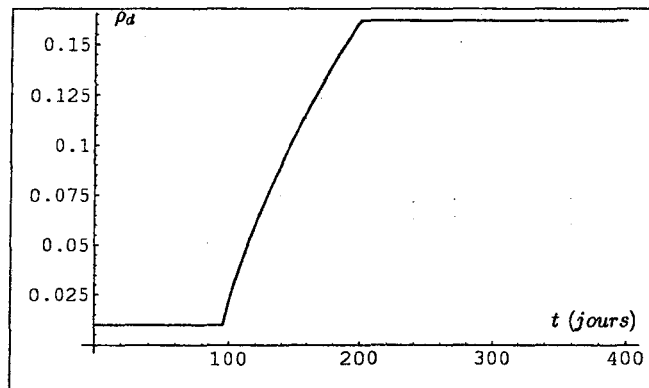


FIGURE IV.15: Evolution de la densité de mésofissuration au cours du temps.

# Conclusion générale et perspectives

Cette étude a été consacrée à la modélisation des phénomènes de dégradation par mésolfissuration dans le cadre des méthodes de changement d'échelle. Son ambition était de formuler un modèle d'endommagement anisotrope avec effets unilatéraux, mettant en relation les comportements macroscopiques avec l'état de microfissuration des matériaux étudiés. Cet objectif est pleinement atteint : outre le fait de disposer d'un outil d'analyse tridimensionnelle et de prédiction de l'endommagement, le travail réalisé a également permis de clarifier de nombreuses questions qui font encore l'objet de controverses dans le contexte des modélisations purement macroscopiques.

Pour asseoir notre démarche de modélisation, nous avons, au chapitre I adopté un point de vue énergétique qui a permis d'établir une expression générale de l'énergie libre macroscopique. Afin de simplifier la formulation, les hypothèses de non interaction puis de faible densité de mésolfissures ont été adoptées. La construction qui s'en déduit a abouti à un critère macroscopique déterminant la transition entre les états ouvert et fermé pour les familles de mésolfissures présentes dans le volume élémentaire représentatif. On notera que ce critère, issu de l'analyse micromécanique, s'avère différent de celui de déformation normale nulle classiquement utilisé dans la littérature. L'étude détaillée de l'élasticité macroscopique a en outre mis en évidence les modes complexes selon lesquels les mésolfissures fermées affectent les propriétés homogénéisées des milieux étudiés.

Fort de ces résultats et de leur généralisation à une distribution quelconque en orientation des mésolfissures, nous avons, dans un second temps, proposé une modélisation complète du processus d'endommagement anisotrope incluant le comportement unilatéral des mésolfissures. L'approche par changement d'échelle a conduit à un formalisme macroscopique qui se distingue radicalement des modélisations actuellement proposées dans la littérature. En effet, en raison du caractère unilatéral de l'endommagement, nous avons montré qu'en dehors des configurations où les fissures sont toutes ouvertes ou toutes fermées, il

n'est pas possible de fournir une représentation macroscopique de l'endommagement à l'aide d'un tenseur d'ordre deux ou quatre. Ce résultat contraste avec l'idée couramment admise qu'un tenseur d'ordre quatre suffirait pour déterminer exactement les propriétés élastiques macroscopique des milieux mésolfissurés. En fait, ceci n'est plus vrai lorsque coexistent dans le v.e.r. des fissures ouvertes et des fissures fermées. Ces observations, ainsi que le contexte micromécanique, ont largement justifié l'adoption d'une procédure d'intégration numérique du potentiel thermodynamique du milieu endommagé. Ajoutons que ce choix a facilité la mise en œuvre du modèle. Les applications présentées à ce stade de la modélisation ont permis de démontrer le caractère opérationnel de la démarche pour l'étude des modes d'endommagement en traction avec possibilité de prise en compte des effets unilatéraux. Bien qu'encourageants, les résultats obtenus, dans le cas des sollicitations de compression, sont moins satisfaisants. Une première idée d'amélioration pourrait consister à modifier, sur la base de données expérimentales précises (cf. par exemple [109]), la fonction de résistance  $\mathcal{R}$  intervenant dans la définition du critère d'endommagement.

Les insuffisances observées ont motivé la prise en compte des phénomènes de glissement avec frottement sur les lèvres des mésolfissures fermées. La modélisation micromécanique du couplage de l'endommagement tridimensionnel avec le glissement par frottement nous a semblé être une contribution tout à fait précieuse à la compréhension du comportement macroscopique quasi-fragile des géomatériaux. Pour des fissures frottantes de type Coulomb, elle a permis de préciser la structure mathématique des lois couplées. Rappelons que dans ce cas, on obtient un couplage fort des deux mécanismes avec interférence implicite, ce qui implique la résolution d'équations couplant endommagement et glissement. Les exemples de simulations choisis pour illustrer les capacités du modèle couplé sont tout à fait probants. Ils doivent toutefois être poursuivis, tout au moins pour une validation complémentaire sur des roches.

L'extension à la poroélasticité des milieux endommageables comporte des aspects tout à fait originaux. La question de la connexion entre pores et microfissures, peu abordée dans le contexte des modélisations macroscopiques, s'est révélée cruciale dans l'analyse micromécanique. Sur la base de données d'expériences réalisées sur un grès, l'hypothèse de fissures connectées a été adoptée et a conduit à une modélisation mettant en évidence le lien entre les propriétés poroélastiques anisotropes et la morphologie microstructurale (anisotropie de la microfissuration, état d'activation des mésolfissures, niveau d'endomma-

---

gement). Une évaluation détaillée des capacités prédictives du modèle couplant poroélasticité et endommagement reste à faire.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses ; elles peuvent être regroupées en trois points :

- i). Validation complète, en relation avec les évolutions de microstructure, des différents niveaux du modèle micromécanique de comportement du milieu sec : endommagement avec effets unilatéraux, couplage avec le frottement. Compte tenu de la confiance que l'on peut accorder aux premières évaluations présentées dans ce mémoire, une implémentation numérique dans un code d'éléments finis peut être envisagée. Il s'agit là d'une étape importante dans la validation des approches micromécaniques. Un soin particulier devra être apporté dans la démarche numérique, notamment pour aborder les comportements avec radoucissement (cf. à ce propos Lorentz [89]).

Une question importante, qui n'a pas été abordée dans ce mémoire et qui mérite qu'on y consacre des efforts, concerne la rupture du milieu endommagé. Plusieurs pistes portant soit sur la mise en évidence d'une configuration critique de la microfissuration, soit sur des analyses de type localisation des déformations<sup>13</sup>, peuvent être envisagées.

- ii). L'étude du comportement poromécanique des milieux endommageables doit être poursuivie. Comme précédemment souligné, il s'agira à court terme de valider la formulation présentée. Les travaux expérimentaux déjà réalisés au laboratoire sur des grès [76] serviront de base à cette validation. A moyen terme, l'étude d'un certain nombre de questions, actuellement au cœur de la mécanique de la durabilité des bétons, est envisagée. Nous pensons notamment aux phénomènes d'alcali-réaction dans lesquels les mécanismes de croissance de mésofissures par mise en pression interne et chargement extérieur jouent un rôle important.
- iii). Enfin, bien qu'à priori cela puisse paraître hors de portée de l'étude déjà effectuée, l'incorporation des effets dynamiques dans la modélisation micromécanique s'avère réalisable en s'appuyant sur des solutions et des lois de propagation de fissures relevant de la mécanique de la rupture dynamique (cf. par exemple [54]). Cette extension permettra en particulier d'évaluer le rôle de la microfissuration dans les problèmes

---

<sup>13</sup>Se posera, à nouveau, à ce sujet la question de la détermination de l'opérateur tangent et, éventuellement, celle d'une formulation dynamique (cf. par exemple [6, 90, 41, 78]).

d'impact sur des matériaux endommageables tels que le béton.



# Bibliographie

- [1] **M. Amestoy.**  
*Propagation de fissures en élasticité plane.* Thèse d'état, Université de Paris 6, 1987.
- [2] **M. Amestoy, J.B. Leblond.**  
Crack paths in plane situations : 2. Detailed form of the expansion of the stress intensity factors. *Int. J. Solids Structures*, 29 : 465-501, 1992.
- [3] **S. Andrieux.**  
*Un modèle de matériau microfissuré - Applications aux roches et aux bétons.* Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.
- [4] **S. Andrieux, Y. Bamberger, J.J. Marigo.**  
Un modèle de matériau microfissuré pour les roches et les bétons. *Journal de mécanique théorique et appliquée*, 5(3) : 471-513, 1986.
- [5] **B.K. Atkinson, P.G. Meredith.**  
Experimental fracture mechanics data for rocks and minerals. *In : Fracture Mechanics of Rocks*, Ed : B.K. Atkinson, Academic Press, San Diego, 477-525, 1987
- [6] **D. Aubry.**  
Transition from localized to discontinuous behaviour in porous dilatant materials. Dans : Mazars and Bazant, Editors, *Cracking Damage*, Elsevier, 259-268, 1989.
- [7] **R.E. Aufmuth, J.C. Alezka.**  
A scanning electron microscope investigation of statically stressed foundation materials. *Bull. Assoc. Eng. Geol.*, 13, 137-149, 1976.
- [8] **J.-L. Auriault, E. Sanchez-Palencia.** Etude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable. *Journal de Mécanique*, 16(4) : 575-603, 1977.
- [9] **P. Badel.**  
*Contributions à la simulation numérique de structures en béton armé.* Thèse de doctorat, Université de Paris 6, 2001.

- [10] **M. Bart.**  
*Contributions à la modélisation du comportement hydromécanique des massifs rocheux avec fractures.* Thèse de doctorat, Université de Lille 1, 2000.
- [11] **M. Bart, J.F. Shao, D. Lydzba.**  
Poroelastic behavior of saturated brittle rock with anisotropic damage. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 24 : 1139-1154, 2000.
- [12] **J.-F. Barthélémy, L. Dormieux, D. Kondo.**  
Détermination du comportement macroscopique d'un milieu à fissures frottantes. *C.R. Mécanique*, sous presse.
- [13] **B. Bary.**  
*Etude du couplage hydraulique-mécanique dans le béton endommagé.* Thèse de doctorat, Université de Paris 6, 1996.
- [14] **M. Basista, D. Gross.**  
The sliding crack model of brittle deformation : an internal variable approach. *Int. J. Solids Structures*, 45 : 487-509, 1998.
- [15] **M. Basista.** *Micromechanical and lattice modeling of brittle damage.* IPPT PAN, Warszawa, 2001.
- [16] **Z.P. Bazant, B.H. Oh.**  
Efficient numerical integration on the surface of a sphere. *Z.A.M.M.*, 66 : 37-49, 1986.
- [17] **Z.P. Bazant, G. Pijaudier-Cabot.**  
Measurement of characteristic length of non local continuum. *ASCE J. Engrg. Mech.*, 115 : 755-769, 1989.
- [18] **Y. Benveniste.**  
A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mech. Mater.*, 6 : 147-157, 1987.
- [19] **P. Besuelle.**  
*Déformation et rupture dans les roches tendres et les sols indurés : comportement homogène et localisation.* Thèse de doctorat, Université de Grenoble 1, 1999.
- [20] **Z.T. Bieniawski.**  
Mechanism of brittle fracture of rock. Part I : Theory of the fracture process. Part II : Experimental study. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 4 : 395-430, 1967.

- 
- [21] **M.A. Biot.**  
General theory of three dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.*, 12 : 155-164, 1941.
- [22] **M.A. Biot.**  
Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *J. Appl. Phys.*, 26 : 182-185, 1955.
- [23] **M.A. Biot.**  
Non linear and semilinear rheology of porous solids. *J. Geophysical Research*, 78 : 4924-4937, 1973.
- [24] **E. Bourdarot.**  
*Application of porodamage model to analysis of concrete dam.* EDF/CNEH, 1991.
- [25] **B. Budiansky and J.R. O'Connell.**  
Elastic moduli of a cracked solid. *Int. J. Solids Structures*, 12 : 81-97, 1976.
- [26] **H.D. Bui.**  
*La mécanique de la rupture fragile.* Masson, Paris, 1978.
- [27] **N. Burlion**  
Techniques d'essais et caractérisation expérimentale. *Dans : Comportement mécanique du béton*, Eds : G. Pijaudier-Cabot et J.M. Reynouard, Hermès, Paris, 2002.
- [28] **I. Carol, P.C. Prat, Z.P. Bazant.**  
New explicit microplane model for concrete : theoretical aspects and numerical implementation. *Int. J. Solids Structures*, 29 : 1173 - 1191, 1992.
- [29] **M.M. Carroll.**  
An effective stress law for anisotropic elastic deformation. *J. Geophysical Research*, 84 : 7510-7512, 1979.
- [30] **J.L. Chaboche.**  
Damage induced anisotropy : on the difficulties associated with the active/passive unilateral condition, *Int. J. Damage Mech.*, 2 : 311-329, 1992.
- [31] **J.L. Chaboche.**  
Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage. *Int. J. Damage Mech.*, 2 : 311 - 329, 1993.
- [32] **J.L. Chaboche, P.M. Lesne, J.F. Maire.**  
Continuum damage mechanics, anisotropy and damage deactivation for brittle materials like concrete and ceramic composites. *Int. J. Damage Mech.*, 4 : 5-22, 1995.

- [33] **J.L. Chaboche, J.F. Maire.**  
A new micromechanics based CDM model and its application to CMC's, *Aero. Sci. Tech.*, 6 : 131-145, 2002.
- [34] **X. Chateau, L. Dormieux.**  
Approche micromécanique du comportement d'un milieu poreux non saturé. *C.R. Acad. Sci., Série I Ib*, 326 : 533-538, 1998.
- [35] **J.P. Cordebois, F. Sidoroff.**  
Anisotropie élastique induite par endommagement. *Proc. Euromech 115*, Villars de Lans, Editions du CNRS, n°295 : 761-774, 1982.
- [36] **F. Cormery, H. Weleman.**  
A critical review of some damage models with unilateral effect. *Mech. Res. Com.*, 29 : 391-395, 2002.
- [37] **O. Coussy.**  
A general theory of thermoporoelastoplasticity for saturated porous material. *Transport in porous media*, 4 : 281-293, 1989.
- [38] **O. Coussy.**  
*Mécanique des milieux poreux*. Editions Technip, Paris, 1991.
- [39] **A. Curnier, Q-C. He, P. Zysset.**  
Conewise linear elastic materials. *J. Elasticity*, 37 : 1-38, 1995.
- [40] **P. De Buhan, L. Dormieux.**  
A micromechanical-based approach to the failure of saturated porous media. *Transport in Porous Media*, 34 : 47-62, 1999.
- [41] **T. Désoyer.**  
*Contribution à la modélisation de l'endommagement diffus et localisé*, Habilitation à diriger des recherches, Université de Poitiers, 1995.
- [42] **V. Deudé, L. Dormieux, D. Kondo, S. Maghous.**  
Micromechanical approach to non-linear poroelasticity : application to cracked rocks. *J. Eng. Mech.*, 128(8) : 848-855, 2002.
- [43] **V. Deudé.**  
*Non linéarités géométriques et physiques dans les milieux poreux : apport des méthodes de changement d'échelle*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.

- 
- [44] **V. Deudé, L. Dormieux, D. Kondo, V. Pensée.**  
Propriétés élastiques non linéaires d'un milieu mésolfissuré. *C.R. Mécanique*. 330 : 587-592, 2002.
- [45] **L. Dormieux, S. Maghous.**  
Evolution des propriétés élastiques en poroplasticité finie. *C.R. Acad. Sci., Série Ib*, 328 : 593-600, 2000.
- [46] **L. Dormieux, A. Molinari, D. Kondo.**  
Micromechanical approach to the behavior of poroelastic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 50 : 2203-2231, 2002.
- [47] **L. Dormieux, S. Maghous, D. Kondo, J.F. Shao.**  
Macroscopic poroelastic behavior of jointed rocks. Dans : Auriault et al. (Eds), *Poromechanics II*, 179-183, Balkema publishers, 2002.
- [48] **L. Dormieux, E. Bourgeois.**  
*Introduction à la micromécanique des milieux poreux*; Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [49] **A. Dragon.**  
Sur le couplage endommagement - Plasticité. *Actes 6ème journée nationale DYMAT- CEG Gramat*, 1990.
- [50] **A. Dragon, F. Cormery, T. Desoyer, D. Halm.**  
Localized failure analysis using damage models, *Dans : Localization and bifurcation theory for soils and rocks*, Ed. R. Chambon et al., Balkema, Rotterdam. 127-140, 1994.
- [51] **A. Dragon, D. Halm, Th. Desoyer.**  
Anisotropic damage in quasi brittle solids : modelling, computational issues and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 183 : 331-352, 2000.
- [52] **J.D. Eshelby.**  
The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 241 : 375-396, 1957.
- [53] **D. Fanella, D. Krajcinovic.**  
A micromechanical model for concrete in compression. *Engineering fracture Mechanics*, 29 : 49-66, 1988.
- [54] **L.B. Freund.**  
*Dynamic fracture mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

- [55] **L. Gambarotta, S. Lagomarsino.**  
A microcrack damage model for brittle materials. *Int. J. Solids Structures*, 30(2) : 177-198, 1993.
- [56] **N. Gatelier.**  
*Etude expérimentale et théorique de l'endommagement des roches anisotropes.* Thèse de doctorat, Université de Grenoble 1, 2001.
- [57] **P. Germain.**  
*Cours de mécanique des milieux continus.* Masson, Paris, 1973.
- [58] **P. Germain, Q.S. Nguyen, P. Suquet.**  
Continuum thermodynamics. *J. Appl. Mech.*, 50 : 1010-1020, 1983.
- [59] **Y. Gueguen, V. Palciauskas.**  
*Introduction to the physics of rocks,* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1994.
- [60] **K. Hadley.**  
Comparison of calculated and observed crack densities and seismic velocities in Westerley granite. *J. Geophys. Res.*, 81 : 3484-3487, 1976.
- [61] **A. Haied.**  
*Etude expérimentale de la rupture en mode de déformations localisé d'un grès.* Thèse de doctorat, Université de Lille 1, 1995.
- [62] **D.K. Halbauer, H. Wagner, N.G.W. Cook.**  
Some observations concerning the microscopic and mechanical behavior of quartzite specimens in stiff, triaxial compression. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstracts*, 10 : 713-726, 1973.
- [63] **D. Halm, A. Dragon.**  
A model of anisotropic damage by mesocrack growth ; unilateral effect. *Int. J. Damage Mech.*, 5 : 384-402, 1996.
- [64] **D. Halm.**  
*Contribution à la modélisation du comportement unilatéral et du frottement dans les milieux mésolfissurés.* Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 1997.
- [65] **D. Halm, A. Dragon.**  
An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 17(3) : 439-460, 1998.

- 
- [66] **Z. Hashin.**  
The differential scheme and its application to cracked materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 36 : 719-734, 1988.
- [67] **Q.-C. He, A. Curnier.**  
A more fundamental approach to damaged elastic stress-strain relations. *Int. J. Solids Structures*, 32(10) : 1453-1457, 1995.
- [68] **F. Homand, D. Hoxha, T. Belem, M.-N. Pons, N. Hoteit.**  
Geometric analysis of damaged microcracking in granites. *Mech. Mater.*, 32 : 361-376, 2000.
- [69] **F. Homand, A.-S. Chiarelli, D. Hoxha.**  
Caractéristiques physiques et mécaniques du granite de la vienne et de l'argilite. *Revue française de génie civil* 6 : 11-20, 2002.
- [70] **H. Horii, S. Nemat-Nasser.**  
Overall moduli of solids with microcracks : load-induced anisotropy. *J. Mech. Phys. Solids*, 31(2) : 155-171, 1983.
- [71] **J.W. Ju.**  
On two-dimensional self consistent micromechanical damage models for brittle solids. *Int. J. Solids Structures*, 27(2) : 227-258, 1991.
- [72] **L.M. Kachanov.**  
On the time to failure under creep conditions, *Izv. AN SSSR, Otd. Tekhn. Nauk.*, 8 : 26-31, 1958.
- [73] **M. Kachanov.**  
A microcrack model of rock inelasticity - Part I : frictional sliding on microcracks ; Part II : propagation of microcracks. *Mech. Mater.*, 1 : 19-41, 1982.
- [74] **M. Kachanov.**  
Elastic solids with many cracks and related problems. *Advances in applied mechanics*, 30 : 259-445.
- [75] **K. Kanatani.** Distribution of directional data and fabric tensors. *Int. J. Engng. Sci.*, 22(2), 149-164, 1984.
- [76] **M. Karami.**  
*Etude expérimentale du comportement poromécanique d'une roche endommageable.*  
Thèse de doctorat, Université de Lille 1, 1998.

- [77] **R. Khazraei.**  
*Etude expérimentale et modélisation de l'endommagement anisotrope des roches fragiles.* Thèse de doctorat, Université de Lille 1, 1995.
- [78] **V. Keryvin, Th. Désoyer, J.-L. Hanus.**  
Localisation de la déformation sous sollicitations lentes : une approche dynamique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mécanique*, 328 : 727-732, 2000.
- [79] **D. Kondo, F. Homand, D. Hoxha.**  
Changement d'échelle et modélisation de l'endommagement par mésolfissuration des roches : relations avec la mécanique de la rupture. *Dans : Modèles de comportement des sols et des roches, Traité MIM, Vol. II, Lois incrémentales, Viscoplasticité, endommagement.* Coord : P.Y. Hycher et J.F. Shao, Hermès, 141-173, 2002.
- [80] **D. Krajcinovic.**  
*Damage mechanics*, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands. 1996.
- [81] **R.L. Kranz.**  
Microcracks in rocks : a review. *Tectonophysics*, 100 : 449-480, 1983.
- [82] **B.R. Lawn, D.B. Marshall.**  
Nonlinear stress-strain curves for solids containing closed cracks with friction. *J. Mech. Phys. Solids*, 46(1) : 85-113, 1998.
- [83] **J.B. Leblond.**  
Crack kinking and curving in 3-dimensional elastic solids. Application to the study of crack path stability in hydraulic fracturing. *Dans : Int. Conf. Mixed Mode Fracture and Fatigue.*, Wien, 1991.
- [84] **J.B. Leblond.**  
Basic results for elastic fracture mechanics with frictionless contact between the crack lips, *Eur. J. Mech., A/Solids*, 19(4) : 633-647, 2000.
- [85] **X. Lee, J.W. Ju.**  
Micromechanical damage model for brittle solids, part II : compressive loadings. *J. Eng. Mech.*, 117, 1515-1536, 1991.
- [86] **D. Leguillon, E. Sanchez-Palencia.**  
On the Behaviour of a cracked elastic body with or without friction. *J. de Mécanique Théorique et appliquée*, 1(2) : 195-209, 1982.



- 
- [87] **J. Lemaitre, J.L. Chaboche.**  
*Mécanique des matériaux solides.* Dunod, Paris, 1985.
- [88] **E. Lemarchand.**  
*Contribution de la micromécanique à l'étude des phénomènes de transport et de couplage poromécanique dans les milieux poreux.* Thèse de doctorat, Université de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Marne La Vallée, 2001.
- [89] **E. Lorentz**  
*Lois de comportements à gradients de variables internes : construction, formulation variationnelle et mise en œuvre numérique.* Thèse de doctorat, Université de Paris 6, 1999.
- [90] **B. Loret, J.H. Prevost**  
Dynamic strain-localization in elasto-(visco-) plastic solids : Part 1 - General formulation and one-dimensional examples. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 83 : 247-273, 1990.
- [91] **V.A. Lubarda, D. Krajcinovic.**  
Damage tensors and the crack density distribution. *Int. J. Solids Structures*, 30(20) : 2859-2877, 1993.
- [92] **Y.W. Mai.**  
Failure characterisation of fibre-reinforced cement composites with R-curve characteristics. *Dans : Toughening Mechanisms in Quasi-Brittle Materials.* Ed. S.P. Shah. Kluwer Publisher. New-York. 489-527, 1991.
- [93] **J.J. Marigo.**  
*Propagation des ondes ultrasonores et microfissuration du béton.* Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1980.
- [94] **J.J. Marigo.**  
Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique. *C.R. Acad. Sc. Paris, II*, 292 : 1309-1312, 1981.
- [95] **G.A. Maugin.**  
*The thermomechanics of plasticity and fracture.* The Cambridge Univ. Press, 1992.
- [96] **W.C. Moss, Y.M. Gupta.**  
A constitutive model describing dilatancy and cracking in brittle rocks. *J. of Geophysical Research*, 87 : 2985 - 2998, 1982.

- [97] **Z. Mróz, J. Maciejewski.**  
Failure criteria of anisotropically damaged materials based on the critical plane concept. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 26(4) : 407-431, 2002.
- [98] **Z. Mróz, J. Maciejewski.**  
Failure criteria and compliance variation of anisotropically damaged materials. *Dans : Proc. Symposium Anisotropic Behavior of Damaged Materials*, Cracovie, Pologne, 2002.
- [99] **S. Murakami, K. Kamiya.**  
Constitutive and damage evolution equations of elastic brittle materials based on irreversible thermodynamics. *Int. J. Mech. Sci.*, 39(4) : 473-486, 1996.
- [100] **T. Mura.**  
*Micromechanics of defects in solids*, 2nd edition. Martinus Nijhoff Publ., The Hague, Boston, 1987.
- [101] **L.R. Myer, J.M. Kemeny, Z. Zheng, R. Suarez, R.T. Ewy, N.G.W. Cook.**  
Extensive cracking in porous rock under differential compressive stress. *Appl. Mech. Rev.*, 45(8) : 263-280, 1992.
- [102] **K.M. Nemati.**  
*Generation and interaction of compressive stress-induced microcracks in concrete*  
Ph.D. Thesis, University of California, Berkley, 1994.
- [103] **S. Nemat-Nasser, M. Obata.**  
A microcrack model of dilatancy in brittle materials. *J. of Applied Mechanics*, 55 : 24-35, 1988.
- [104] **S. Nemat-Nasser, M. Hori.**  
Elastic solids with microdefects. *Dans : Micromechanics and inhomogeneity - The Toshio Mura Anniversary volume*, Eds G.J. Weng et al. (Springer, New York), 297-320, 1990.
- [105] **S. Nemat-Nasser and M. Hori.**  
*Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1993.
- [106] **Q.-S. Nguyen, C. Stolz, G. Debruyne.**  
Energy methods in fracture mechanics : stability, bifurcation and second variation. *Euro. J. Mech. A/Solids*, 9 : 157-173, 1990.

- 
- [107] **Q.-S. Nguyen.**  
*Stabilité et mécanique non linéaire.* Hermès, Paris, 2000.
- [108] **M. Ortiz, J.C. Simo.**  
An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int. J. Num. Methods Eng.*, 23 : 353-366, 1986.
- [109] **Ch. Ouyang, B. Mobasher, S.P. Shah.**  
An R-curve approach for fracture of quasi-brittle materials. *Eng. Fract. Mech.*, 37 : 901-913, 1990.
- [110] **E. Papamichos, J. Tronvoll, I. Vardoulakis, J.F. Labuz, A. Skjaerstein, T.E. Unander, J. Sulem.**  
Constitutive testing of Red Wildmoor sandstone. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 5(1) : 1-40, 2000.
- [111] **M.E. Plesha.**  
Constitutive models for rock discontinuities with dilatancies and surface degradation. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 11 : 345-362, 1987.
- [112] **S.S. Peng, A.M. Johnson.**  
Crack growth and faulting in cylindrical specimens of Chemsford granite. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 9 : 37-86, 1972.
- [113] **V. Pensée, D. Kondo.**  
Une analyse micromécanique 3-D de l'endommagement par mésolfissuration. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Série IIB - Mécanique*, 329 : 271-276, 2001.
- [114] **V. Pensée, D. Kondo, L. Dormieux.**  
Micromechanical analysis of anisotropic damage in brittle materials. *J. Engng. Mech., ASCE*, 128(8) : 889-897, 2002.
- [115] **V. Pensée, L. Dormieux, D. Kondo, V. Deudé.**  
Poroélasticité d'un milieu mésolfissuré : analyse micromécanique. *C.R. Mécanique*, 330 : 147-152, 2002.
- [116] **V. Pensée, D. Kondo.**  
Micromechanics of anisotropic brittle damage : comparative analysis of a stress-based and a strain-based formulations. *Mech. Mater.*, sous presse.

- [117] **P. Ponte-Castaneda, J.R. Willis.**  
The effect of spatial distribution on the behavior of composite materials and cracked media. *J. Mech. Phys. Solids*, 43 : 1919-1951, 1995.
- [118] **Y. Qiang, L. Zhongkui and L.G. Tham.**  
An explicit expression of the second-order fabric-tensor dependent elastic compliance tensor. *Mech. Res. Comm.*, 28(3) : 255-260, 2001.
- [119] **Rabotonov.**  
*Creep problem in structural members*, North-Holland, 1969.
- [120] **S. Ramtami.**  
*Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral.* Thèse de doctorat, Université de Paris 6, 1990.
- [121] **V. Renaud.**  
*Contributions à l'étude d'un modèle de mésofissuration : application au comportement d'un grès.* Thèse de doctorat, Université de Lille 1, 1998.
- [122] **J.R. Rice.**  
Inelastic constitutive relations for solids : an internal variable theory and its application to metal plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 19 : 433-455, 1971.
- [123] **E. Ringot.**  
Development of the map cracking in concrete under compressive loading. *Cement and Concrete research*, 18 : 933-942, 1988.
- [124] **E. Ringot, A. Bascoul.**  
About the analysis of microcracking in concrete. *Cement and Concrete Composites*. 23(2-3) : 261-266, 2001.
- [125] **M. Sayehi.**  
*Etude expérimentale de l'endommagement du grès de Fontainebleau.* Thèse de doctorat. Université de Lille 1. 1992.
- [126] **H. Schütte, O.T. Bruhns.**  
On a geometrically non linear damage model based on a multiplicative decomposition of the deformation gradient and the propagation of microcracks. *J. Mech. Phys. Solids*, 50 : 827-853, 2002

- 
- [127] **J.F. Shao.**  
Poroelastic behaviour of brittle rock materials with anisotropic damage. *Mech. Mater.*, 30 : 41-53, 1998.
- [128] **M. Sibai.**  
Communication privée. 2002.
- [129] **M. Sibai et al.**  
à paraître.
- [130] **G.C. Sih, H. Liebowitz.**  
*Fracture an advanced treatise, vol. 2.* Academic Press. New-York, London. 1968.
- [131] **P. Suquet.**  
*Plasticité et homogénéisation.* Thèse de doctorat d'état, Université de Paris 6, 1982.
- [132] **G. Swoboda, Q. Yang.**  
An energy-based damage model of geomaterials - II. deduction of damage evolution laws. *Int. J. Solids Structures*, 36 : 1735-1755, 1999.
- [133] **P. Tapponier, W.F. Brace.**  
Developpement of stress induced microcracks in westerly granite. *Int. J. Rock. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, 13 : 103-112, 1976.
- [134] **D. Thikomirov, R. Niekamp, E. Stein**  
On three-dimensional microcrack density distribution. *Z.A.M.M.*, 81 : 3-16, 2001.
- [135] **M. Thompson, J.R. Willis.**  
A reformulation of the equations of anisotropic poroelasticity. *J. Appl. Mech.*, 58 : 612-616, 1991.
- [136] **J.-M. Torrenti, O. Didry, J.-P. Ollivier, F. Plas.**  
*La dégradation des bétons : couplage fissuration-dégradation chimique.* Hermès, 1996.
- [137] **A. Vakulenko, M. Kachanov.**  
Continuum theory of medium with cracks. *Mekhanika Tverdogo Tela*, 4 : 159-166, 1971. (traduction anglaise dans *Mech. Sol.*, Faraday Press, 145-151).
- [138] **J.G.M. Van Mier.**  
*Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions,* Thèse de Docteur Ingénieur, Technische Hogeschool Eindhoven, 1984.

- [139] **J.G.M. Van Mier.**  
Fracture propagation in concrete under complex stress. *Dans : SEM/RILEM, Int. Conf. on fracture of concrete and rock, Houston*, Ed. S.P. Shah, S.E. Swartz, 1987.
- [140] **J.B. Walsh.**  
The effect of cracks on the uniaxial compression of rocks. *J. Geophys. Res.*, 70(2) : 399-411, 1965.
- [141] **H. Weleman.**  
*Une modélisation des matériaux microfissurés - Application aux roches et aux bétons.* Thèse de doctorat, Université de Lille 1, 2002.
- [142] **H. Weleman, F. Cormery.**  
Some remarks on the damage unilateral effect for microcracked materials. *Int. J. Dam. Mech.*, 11 : 65-86, 2002.
- [143] **Z. Wesolowski.**  
Elastic material with different elastic constants in two regions of variability of deformation. *Arch. Mech.*, 21(4) : 449-468, 1969.
- [144] **J.R. Willis.**  
The stress field around an elliptical crack. *Int. J. Eng. Sc.*, 6 : 253-263, 1968.
- [145] **T.F. Wong.**  
Micromechanics of faulting in Westerly granite. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 19 : 49-62, 1982.
- [146] **T.F. Wong.**  
Geometric probability approach to the characterization and analysis of microcracking in rocks. *Mech. Mater.*, 4, 261-276, 1985.
- [147] **A. Zaoui.**  
*Matériaux hétérogènes et composites.* Cours de l'Ecole Polytechnique, 2000.
- [148] **A. Zaoui.**  
Structural morphology and constitutive behavior of microheterogeneous materials. *Dans : Continuum micromechanics*, Ed. P. Suquet, Springer, New-York, 291-347, 1997.
- [149] **Y. Zhao.**  
Crack pattern evolution and a fractal damage constitutive model for rock. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 35(3) : 349-366, 1998.

---

[150] Q.-S. Zheng, D.-X. Du.

An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution. *J. Mech. Phys. Solids*, 49 : 2765-2788, 2001.

# Annexe A

## Homogénéisation des milieux élastiques fissurés : approche par tenseur d'Eshelby

L'objectif de cette annexe est de présenter l'application des techniques de changement d'échelle de type Eshelby à la détermination des propriétés élastiques macroscopiques des milieux élastiques fissurés. De nombreux travaux existent pour les milieux élastiques affaiblis par un ensemble de fissures ouvertes [144, 70, 100, 88]. Dans le cadre d'une collaboration avec l'équipe de L. Dormieux, ces méthodes ont été récemment étendues au cas des fissures fermées [44] (cf. également [114]). C'est l'ensemble de cette démarche qui est synthétisée dans cette annexe. Enfin, dans la dernière partie, on s'intéresse à la prise en compte des interactions entre les mésolfissures.

### A.1 Principes de base des méthodes de changement d'échelle

Dans ce paragraphe, nous présentons de manière succincte les principes des méthodes de changement d'échelle basées sur la théorie d'Eshelby (cf. Eshelby [52], Zaoui [147, 148]). Considérons donc un v.e.r.  $\Omega$ , d'un matériau hétérogène dont tous les constituants ont un comportement élastique linéaire. On a donc :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) \quad (\forall \underline{x} \in \Omega) \quad (\text{A.1})$$



Par ailleurs, on adopte pour ce v.e.r. des conditions de déformation homogène au contour  $\partial\Omega$ , i.e. :  $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{E}\cdot\underline{x}$  où  $\underline{u}$  désigne le vecteur déplacement et  $\underline{E}$  est la déformation macroscopique.

En vertu du principe de superposition, la solution du problème s'exprime alors linéairement en fonction de la déformation macroscopique  $\underline{E}$  :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{E} \quad (\text{A.2})$$

Le tenseur  $\mathbb{A}$ , appelé tenseur de localisation, permet d'exprimer la déformation microscopique  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$  en fonction de la déformation macroscopique. Il vérifie la condition dite de cohérence, i.e. :  $\langle \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle = \mathbb{I}$ .

Sous les conditions aux limites indiquées, la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  est définie comme la moyenne des contraintes microscopiques sur le v.e.r.  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$  :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} \quad (\text{A.3})$$

En utilisant (A.2) et en prenant la moyenne de (A.1) sur le v.e.r., on définit le comportement homogénéisé du matériau :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} : \underline{E} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{E} \quad (\text{A.4})$$

Le tenseur d'élasticité homogénéisé est donc défini par :

$$\mathbb{C}^{hom} = \langle \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} \quad (\text{A.5})$$

## A.2 Application aux milieux mésofissurés

Comme au paragraphe I.2.1.1, on considère une matrice solide isotrope d'élasticité  $\mathbb{C}^s$ , comportant des mésofissures de type penny-shaped. D'un point de vue géométrique, celles-ci sont modélisées par des ellipsoïdes aplatis possédant la symétrie de révolution autour du petit axe. Une famille de mésofissures est donc caractérisée par l'orientation et le rapport d'aspect, noté  $\epsilon$ , des mésofissures qui la composent.

L'élasticité des mésofissures ouvertes est classiquement définie par  $\mathbb{C}^f = 0$ ; ceci permettant de rendre compte du fait qu'elles ne supportent pas de contraintes. Dans le cas de mésofissures fermées, l'idée développée dans [44] consiste à les modéliser par un matériau fictif d'élasticité  $\mathbb{C}^f = 3k^s\mathbb{J}$ , l'objectif étant de rendre compte de la nullité des contraintes

tangentielles sur les lèvres des mésofissures.

En développant la relation (A.5) et en notant  $\phi$  la fraction volumique des fissures, il vient :

$$\mathbb{C}^{hom} = \langle \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = (1 - \phi)\mathbb{C}^s : \langle \mathbb{A} \rangle_s + \phi\mathbb{C}^f : \langle \mathbb{A} \rangle_f \quad (\text{A.6})$$

où  $\langle . \rangle_s$  (resp.  $\langle . \rangle_f$ ) désigne la moyenne volumique dans la phase solide (resp. dans la fissure). Du fait que  $\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I}$ , il vient :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s + \phi(\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s) : \langle \mathbb{A} \rangle_f \quad (\text{A.7})$$

Afin de comparer les résultats avec ceux obtenus au chapitre I, on se placera sous l'hypothèse de mésofissures non interagissantes (schéma dilué). Ainsi, en adoptant l'estimation du schéma dilué, le tenseur de localisation est défini par :

$$\langle \mathbb{A} \rangle_f = (\mathbb{I} + \mathbb{S}_\epsilon^s : \mathbb{C}^{s-1} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s))^{-1} \quad (\text{A.8})$$

où  $\mathbb{S}_\epsilon^s$  est le tenseur d'Eshelby, dépendant du rapport d'aspect  $\epsilon = \frac{c}{a}$  de l'ellipsoïde et relatif à la matrice d'élasticité  $\mathbb{C}^s$ . Dans le repère associé à l'ellipsoïde considéré, les composantes non nulles de  $\mathbb{S}_\epsilon^s$  sont (cf. [100, 70]) :

$$\begin{aligned} S_{1111} = S_{2222} &= \frac{13 - 8\nu^s}{32(1 - \nu^s)}\pi\epsilon, & S_{3333} &= 1 - \frac{1 - 2\nu^s}{1 - \nu^s}\frac{\pi}{4}\epsilon, \\ S_{1122} = S_{2211} &= \frac{8\nu^s - 1}{32(1 - \nu^s)}\pi\epsilon, & S_{1133} = S_{2233} &= \frac{2\nu^s - 1}{8(1 - \nu^s)}\pi\epsilon, \\ S_{3311} = S_{3322} &= \frac{\nu^s}{1 - \nu^s}\left(1 - \frac{4\nu^s + 1}{8\nu^s}\pi\epsilon\right), & S_{1212} &= \frac{7 - 8\nu^s}{32(1 - \nu^s)}\pi\epsilon, \\ S_{1313} = S_{2323} &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\nu^s - 2}{1 - \nu^s}\frac{\pi}{4}\epsilon\right) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

En désignant par  $\mathcal{N}$  la densité volumique de mésofissures de la famille considérée, la fraction volumique  $\phi = \frac{4}{3}\pi a^2 c \mathcal{N}$ . En introduisant la densité de mésofissures  $d = \mathcal{N}a^3$  et le rapport d'aspect, on a  $\phi = \frac{4}{3}\pi\epsilon d$ .

### A.2.1 Cas des fissures ouvertes : $\mathbb{C}^f = 0$

Compte tenu de (A.7) et (A.8), le tenseur d'élasticité homogénéisé s'écrit :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left(\mathbb{I} - \frac{4\pi}{3}\epsilon d(\mathbb{I} - \mathbb{S}_\epsilon^s)^{-1}\right) \quad (\text{A.10})$$

L'expression précédente tend à montrer que le tenseur d'élasticité homogénéisé dépend du rapport d'aspect des mésolfissures.

En fait, le tenseur  $\epsilon(\mathbb{I} - \mathbb{S}_\epsilon^s)^{-1}$  admet une limite, noté  $\mathbb{L}$ , quand le rapport d'aspect  $\epsilon$  tend vers 0, ce qui est le cas des mésolfissures modélisées par un ellipsoïde aplati. Le tenseur d'élasticité homogénéisé s'écrit donc :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left( \mathbb{I} - \frac{4\pi}{3} d\mathbb{L} \right) \text{ avec } \mathbb{L} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon(\mathbb{I} - \mathbb{S}_\epsilon^s)^{-1} \quad (\text{A.11})$$

Les composantes non nulles de  $\mathbb{L}$  sont données dans le repère de la fissure par (cf. p. ex. [43]) :

$$L_{3333} = \frac{4(1 - \nu^s)^2}{\pi(1 - 2\nu^s)}, \quad L_{3311} = L_{3322} = \frac{4(1 - \nu^s)\nu^s}{\pi(1 - 2\nu^s)}, \quad L_{1313} = L_{2323} = \frac{2(1 - \nu^s)}{\pi(2 - \nu^s)}, \quad (\text{A.12})$$

### A.2.2 Cas des fissures fermées : $\mathbb{C}^f = 3k^s \mathbb{J}$

Dans ce cas, le tenseur d'élasticité homogénéisé s'écrit :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s - \frac{8\pi}{3} \mu^s \epsilon d\mathbb{K} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_\epsilon^s : \mathbb{K})^{-1} \quad (\text{A.13})$$

Pour des rapports d'aspect suffisamment petits, le tenseur  $\epsilon\mathbb{K} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_\epsilon^s : \mathbb{K})^{-1}$  tend vers sa limite  $\mathbb{L}'$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , il vient alors :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left( \mathbb{I} - \frac{4\pi}{3} d\mathbb{L}' \right) \text{ avec } \mathbb{L}' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon\mathbb{K} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_\epsilon^s : \mathbb{K})^{-1} \quad (\text{A.14})$$

Dans le repère associé à la fissure, la seule composante non nulle de  $\mathbb{L}'$  est donnée par [43] :

$$L'_{1313} = L'_{2323} = \frac{2(1 - \nu^s)}{\pi(2 - \nu^s)} \quad (\text{A.15})$$

### A.2.3 Comparaison des deux approches

Dans ce dernier paragraphe, nous comparons l'approche qui vient d'être présentée avec celle proposée au chapitre I. Pour ce faire, considérons une distribution de mésolfissures parallèles de vecteur normal  $\underline{e}_3$ , de densité  $d$ . En utilisant (A.14), les composantes du tenseur d'élasticité affectées par le système de mésolfissures considéré sont les suivantes :

– pour un système de mésolfissures ouvertes :

$$\begin{aligned}
C_{1111}^{hom} &= C_{2222}^{hom} = (\lambda^s + 2\mu^s) \left( 1 - d \frac{16\nu^s}{3(1-2\nu^s)} \right) \\
C_{3333}^{hom} &= (\lambda^s + 2\mu^s) \left( 1 - d \frac{16(1-\nu^s)^2}{3(1-2\nu^s)} \right) \\
C_{1122}^{hom} &= \lambda^s \left( 1 - d \frac{16\nu^s(1-\nu^s)}{3(1-2\nu^s)} \right) \\
C_{1133}^{hom} &= C_{2233}^{hom} = \lambda^s \left( 1 - d \frac{16(1-\nu^s)^2}{3(1-2\nu^s)} \right) \\
C_{1313}^{hom} &= C_{2323}^{hom} = \mu^s \left( 1 - d \frac{16(1-\nu^s)}{3(2-\nu^s)} \right)
\end{aligned} \tag{A.16}$$

– pour un système de mésolfissures fermées :

$$C_{1313}^{hom} = C_{2323}^{hom} = \mu^s \left( 1 - d \frac{16(1-\nu^s)}{3(2-\nu^s)} \right) \tag{A.17}$$

On peut aisément vérifier que ces résultats sont ceux que fournit (I.32) pour  $\underline{n} = \underline{e}_3$ .

**Remarque A.11** *En appliquant les formules de changement de base appropriées, on peut également montrer que les résultats obtenus sont équivalents pour une famille de mésolfissures d'orientation quelconque.*

## A.3 Prise en compte des interactions

Des analyses sur la prise en compte des interactions entre mésolfissures ouvertes peuvent être trouvées dans Ponte-Castaneda et Willis [117] ou Zheng et Du [150]. Nous présentons ici le schéma de Mori-Tanaka (cf. [18, 43]). La démarche consiste à considérer une mésolfissure plongée dans une matrice homogène infinie, d'élasticité  $\mathbb{C}^s$ , et soumise à l'infini à une déformation auxiliaire  $\underline{\underline{E}}^0$  qu'il s'agira de préciser. Notons que c'est dans la définition de  $\underline{\underline{E}}^0$  que réside la prise en compte des interactions.

Le résultat d'Eshelby (A.2) nous permet d'écrire :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_f = (\mathbb{I} + \mathbb{S}_\epsilon^s : \mathbb{C}^{s-1} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s))^{-1} : \underline{\underline{E}}^0 \tag{A.18}$$

Par ailleurs, on a :  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_s = \underline{\underline{E}}^0$ . En outre, la déformation auxiliaire  $\underline{\underline{E}}^0$  doit satisfaire à la condition  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_\Omega = \underline{\underline{E}}$ . On a alors :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{E}} &= (1 - \phi) \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_s + \phi \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_f \\
&= \left[ (1 - \phi)\mathbb{I} + \phi(\mathbb{I} + \mathbb{S}_\epsilon^s : \mathbb{C}^{s-1} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s))^{-1} \right] : \underline{\underline{E}}^0
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Soit :

$$\underline{\underline{E}}^0 = \left[ (1 - \phi)\mathbb{I} + \phi(\mathbb{I} + \mathbb{S}_\epsilon^s : \mathbb{C}^{s-1} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s))^{-1} \right]^{-1} : \underline{\underline{E}} \quad (\text{A.20})$$

En injectant cette expression dans (A.18), il vient :

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_f &= (\mathbb{I} + \mathbb{S}_\epsilon^s : \mathbb{C}^{s-1} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s))^{-1} \\ &: \left[ (1 - \phi)\mathbb{I} + \phi(\mathbb{I} + \mathbb{S}_\epsilon^s : \mathbb{C}^{s-1} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s))^{-1} \right]^{-1} : \underline{\underline{E}} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Cette expression fait apparaître le tenseur de localisation pour le schéma de Mori-Tanaka :

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A} \rangle_f^{MT} &= (\mathbb{I} + \mathbb{S}_\epsilon^s : \mathbb{C}^{s-1} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s))^{-1} \\ &: \left[ (1 - \phi)\mathbb{I} + \phi(\mathbb{I} + \mathbb{S}_\epsilon^s : \mathbb{C}^{s-1} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s))^{-1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Celui-ci est à comparer avec (A.8) défini pour l'estimation diluée. Enfin, en utilisant (A.7), on en déduit l'expression du tenseur d'élasticité homogénéisé :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s + \phi(\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s) : \langle \mathbb{A} \rangle_f^{MT} \quad (\text{A.23})$$

### A.3.1 Cas des fissures ouvertes : $\mathbb{C}^f = 0$

Compte tenu de (A.22) et (A.23), il vient :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s - \phi\mathbb{C}^s : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_\epsilon^s)^{-1} : \left[ (1 - \phi)\mathbb{I} + \phi(\mathbb{I} - \mathbb{S}_\epsilon^s)^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{A.24})$$

Ce qui s'écrit, de manière plus concise, sous la forme :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left[ \mathbb{I} + \frac{\phi}{(1 - \phi)} (\mathbb{I} - \mathbb{S}_\epsilon^s)^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{A.25})$$

ou encore pour des rapports d'aspects petits :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left[ \mathbb{I} + \frac{4\pi}{3} d\mathbb{L} \right]^{-1} \quad (\text{A.26})$$

où  $\mathbb{L} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon(\mathbb{I} - \mathbb{S}_\epsilon^s)^{-1}$ .

### A.3.2 Cas des fissures fermées : $\mathbb{C}^f = 3k^s\mathbb{J}$

De la même façon, à mésofissures fermées, on obtient :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s - \phi 2\mu^s \mathbb{K} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_\epsilon^s : \mathbb{K})^{-1} : \left[ (1 - \phi)\mathbb{I} + \phi(\mathbb{I} - \mathbb{S}_\epsilon^s : \mathbb{K})^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{A.27})$$

Soit encore de manière plus concise :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left[ \mathbb{J} + (1 - \phi)\mathbb{K} : \left[ (1 - \phi)\mathbb{I} + \phi(\mathbb{I} - \mathbb{S}_\epsilon^s : \mathbb{K})^{-1} \right]^{-1} \right] \quad (\text{A.28})$$

Et en introduisant  $\mathbb{L}' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \mathbb{K} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_\epsilon^s : \mathbb{K})^{-1}$  :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : \left[ \mathbb{J} + (1 - \phi)\mathbb{K} : \left[ (1 - \phi)\mathbb{I} + \frac{4\pi}{3} d\mathbb{L}' \right]^{-1} \right] \quad (\text{A.29})$$

Le calcul de  $\mathbb{S}^{hom}$  à mésofissures ouvertes ou fermées s'obtient en inversant respectivement (A.26) et (A.29).

Dans le cas d'une seule famille de mésofissures de normale  $\underline{e}_3$ , on peut aisément vérifier que l'on obtient le même résultat qu'en utilisant (I.35).

# Annexe B

## Distribution cylindrique de mésolfissures : expressions des modules élastiques

### B.1 Modèle en déformations

L'objectif de cette annexe est de synthétiser les résultats obtenus pour les propriétés élastiques macroscopiques d'une matrice élastique affaiblie par une distribution cylindrique de mésolfissures. Les approches en déformation, puis en contrainte sont successivement considérées.

#### B.1.1 Mésolfissures toutes ouvertes

$$\frac{E_1}{E^s} = \frac{E_2}{E^s} = \frac{2}{2\nu^{s2} + \frac{3(2-\nu^s)(1+\nu^s)}{3(2-\nu^s)-4(4-\nu^s)(1-\nu^s)\rho^d} + \frac{3(1-2\nu^s)^2(1+\nu^s)}{3(1-2\nu^s)-8(1-\nu^s)\rho^d}} \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\nu_{12}}{\nu^s} = \frac{1 - \frac{2(1-\nu^{s2})\rho^d}{(2-\nu^s)(1-2\nu^s)} \left( 5 - 2\nu^s + \frac{16}{3}(4-\nu^s)\nu^s\rho^d \right)}{1 - \frac{2(1-\nu^s)\rho^d}{3(2-\nu^s)(1-2\nu^s)} \left( 8 - \nu^s(1-\nu^s)(11-6\nu^s) - \frac{16}{3}\nu^{s2}(4-\nu^s)(1-\nu^s)\rho^d \right)} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\mu_{13}}{\mu^s} = \frac{\mu_{23}}{\mu^s} = 1 - \frac{4(1-\nu^s)}{3(2-\nu^s)}\rho^d \quad (\text{B.3})$$

### B.1.2 Mésolfissures toutes fermées

$$\frac{E_1}{E^s} = \frac{E_2}{E^s} = \frac{1 - \frac{8}{3} \frac{(1-\nu^s)}{(2-\nu^s)} \rho^d}{1 - \frac{4}{3} \frac{(1-\nu^s)^2}{(2-\nu^s)} \rho^d} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\nu_{12}}{\nu^s} = \frac{1 + \frac{8}{3} \frac{(1-\nu^s)^2}{(2-\nu^s)\nu^s} \rho^d}{1 - \frac{4}{3} \frac{(1-\nu^s)^2}{(2-\nu^s)} \rho^d} \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\mu_{13}}{\mu^s} = \frac{\mu_{23}}{\mu^s} = 1 - \frac{4}{3} \frac{(1-\nu^s)}{(2-\nu^s)} \rho^d \quad (\text{B.6})$$

## B.2 Modèle en contraintes

### B.2.1 Mésolfissures toutes ouvertes

$$\frac{E_1}{E^s} = \frac{E_2}{E^s} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{(8-3\nu^s)(1-\nu^s)^2}{(2-\nu^s)} \rho^d} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\nu_{12}}{\nu^s} = \frac{1 + \frac{2(1-\nu^s)^2}{3(1-2\nu^s)} \rho^d}{1 + \frac{2(1-\nu^s)(5-3\nu^s)}{3(1-2\nu^s)} \rho^d} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\mu_{13}}{\mu^s} = \frac{\mu_{23}}{\mu^s} = \frac{1}{1 + \frac{4}{3} \frac{(1-\nu^s)}{(2-\nu^s)} \rho^d} \quad (\text{B.9})$$

### B.2.2 Mésolfissures toutes fermées

$$\frac{E_1}{E^s} = \frac{E_2}{E^s} = \frac{1}{1 + \frac{4}{3} \frac{(1-\nu^s)^2}{(2-\nu^s)} \rho^d} \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\nu_{12}}{\nu^s} = \frac{1 + \frac{4(1-\nu^s)^2}{3\nu^s(2-\nu^s)} \rho^d}{1 + \frac{2}{3(2-\nu^s)} \left( 8 - \nu^s(3-\nu^s)(1+3\nu^s) \right) \rho^d} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\mu_{13}}{\mu^s} = \frac{\mu_{23}}{\mu^s} = \frac{1}{1 + \frac{4}{3} \frac{(1-\nu^s)}{(2-\nu^s)} \rho^d} \quad (\text{B.12})$$



# Annexe C

## Sur la représentation tensorielle de l'endommagement

Dans cette annexe, nous proposons une analyse du potentiel thermodynamique (I.30) pour deux choix d'approximations tensorielles de la variable interne d'endommagement  $\rho$ . Ces approximations s'appuient sur les travaux de Lubarda et Krajcinovic [91] (cf. également Thikhomirov et al. [134], Qiang et al. [118]).

### C.1 Approximation à l'aide d'un tenseur d'ordre deux

Suivant Lubarda et Krajcinovic [91], on choisit d'approcher la distribution de densités  $\rho$  par un tenseur d'ordre deux  $\underline{\underline{d}}$  tel que  $\rho(\underline{n}) = \underline{\underline{d}} : (\underline{n} \otimes \underline{n})$ . On montre qu'il est possible d'exprimer  $\underline{\underline{d}}$  en fonction de la variable macroscopique  $\underline{\underline{D}}$  :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \rho(\underline{n})(\underline{n} \otimes \underline{n}) dS \quad (\text{C.1})$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}} &= \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \underline{\underline{d}} : (\underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n}) dS \\ &= \frac{1}{15} \underline{\underline{d}} : (\underline{\delta} \otimes \underline{\delta} + \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}}) \\ &= \frac{1}{15} (\text{tr}(\underline{\underline{d}}) \underline{\delta} + 2\underline{\underline{d}}) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

De plus,

$$\text{tr } \underline{\underline{D}} = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \underline{\underline{d}} : (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) dS = \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\underline{d}} \quad (\text{C.3})$$

$$\text{soit : } \text{tr } \underline{\underline{d}} = 3 \text{tr } \underline{\underline{D}}$$

Ce qui, reporté dans (C.2), conduit à :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{15}{2} (\underline{\underline{D}} - \frac{1}{5} \text{tr}(\underline{\underline{D}}) \underline{\underline{\delta}}) \quad (\text{C.4})$$

et donc :

$$\rho(\underline{\underline{n}}) = \frac{15}{2} (\underline{\underline{D}} : (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) - \frac{1}{5} \text{tr}(\underline{\underline{D}})) \quad (\text{C.5})$$

On se propose maintenant d'exprimer  $\Psi$  en fonction de  $\underline{\underline{D}}$ ; pour ce faire, il est nécessaire de calculer la quantité  $\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \rho(\underline{\underline{n}}) (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) dS$ . En injectant  $\rho(\underline{\underline{n}})$  donné par (C.5) dans cette intégrale, il vient :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \rho(\underline{\underline{n}}) (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) dS = \left\{ \begin{array}{l} \frac{15}{8\pi} \underline{\underline{D}} : \int_{S^2} (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) dS \\ - \frac{1}{20} \text{tr } \underline{\underline{D}} \int_{S^2} (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) dS \end{array} \right\} \quad (\text{C.6})$$

En utilisant des résultats de Qiang et al. [118], il vient :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} n_i n_j n_k n_l n_\alpha n_\beta dS = \frac{1}{35} \left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij} A_{kl\alpha\beta} + \delta_{ik} A_{jl\alpha\beta} + \delta_{il} A_{jk\alpha\beta} \\ + \delta_{i\alpha} A_{jkl\beta} + \delta_{i\beta} A_{jkl\alpha} \end{array} \right\} \quad (\text{C.7})$$

$$\text{et } \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} n_i n_j n_k n_l dS = \frac{1}{5} A_{ijkl}$$

avec  $\mathbb{A} = \frac{1}{3} (\underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}})$  d'où :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \rho(\underline{\underline{n}}) (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) dS = \frac{1}{7} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{5} \text{tr } \underline{\underline{D}} (\underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}}) \\ + (\underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}} \otimes \underline{\underline{\delta}}) \\ + (\underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}} \otimes \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{D}} \otimes \underline{\underline{\delta}}) \end{array} \right\} \quad (\text{C.8})$$

Cette intégration analytique n'étant possible que sur la totalité de la sphère unité, en injectant (C.1) et (C.8) dans l'expression (I.30) du potentiel thermodynamique, on obtient :

– pour une distribution quelconque de mésolfissures toutes ouvertes ( $S^{2+} = S^2$ ) :

$$\Psi^{ouv} = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{E}} - a_1 \left\{ \begin{array}{l} (a_2 + \frac{1}{35} a_4) \text{tr} \underline{\underline{D}} (\text{tr} \underline{\underline{E}})^2 \\ + (a_3 - \frac{2}{7} a_4) \text{tr} \underline{\underline{E}} \text{tr} (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}}) \\ + (1 - \frac{4}{7} a_4) \text{tr} (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}}) + \frac{2}{35} a_4 \text{tr} \underline{\underline{D}} \text{tr} (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) \end{array} \right\} \quad (\text{C.9})$$

avec  $a_4 = \frac{\nu^s}{2}$

– pour une distribution de fissures toutes fermées ( $S^{2+} = \emptyset$ ) :

$$\Psi^{fer} = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{E}} - \frac{a_1}{7} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{5} \text{tr} \underline{\underline{D}} (\text{tr} \underline{\underline{E}})^2 - 2 \text{tr} \underline{\underline{E}} \text{tr} (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}}) \\ + 3 \text{tr} (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}}) + \frac{2}{5} \text{tr} \underline{\underline{D}} \text{tr} (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) \end{array} \right\} \quad (\text{C.10})$$

On note que ces expressions font intervenir tous les invariants quadratiques en  $\underline{\underline{E}}$  et linéaires en  $\underline{\underline{D}}$ . Une telle forme correspond à celle adoptée par Murakami et Kamiya [99] dans un cadre purement macroscopique, les coefficients des invariants étant, dans ce contexte, à déterminer.

## C.2 Approximation par un tenseur d'ordre quatre

On s'intéresse maintenant à la représentation de  $\rho$  à l'aide d'un tenseur d'ordre quatre  $\mathbb{Q}$  tel que :  $\rho(\underline{\underline{n}}) = \mathbb{Q} :: (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}})$ . De la même façon qu'au paragraphe précédent, on cherche, dans un premier temps, à exprimer  $\mathbb{Q}$  en fonction de la variable macroscopique :  $\mathbb{D} = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \rho(\underline{\underline{n}}) (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) dS$ . Puis,  $\rho(\underline{\underline{n}})$  est exprimée en fonction de  $\mathbb{D}$ . En suivant Lubarda et Krajcinovic [91], on a :

$$\rho(\underline{\underline{n}}) = \frac{15}{4} \left\{ \frac{21}{2} \mathbb{D} :: (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) - 7 \underline{\underline{D}} : (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) + \text{tr} \underline{\underline{D}} \right\} \quad (\text{C.11})$$

On remarquera que  $\underline{\underline{D}}$  peut être obtenu par contraction de  $\mathbb{D}$ . Compte-tenu de cette remarque les expressions des potentiels thermodynamiques à fissures toutes ouvertes ou toutes fermées sont immédiates. On obtient :

– pour une distribution de mésolfissures toutes ouvertes :

$$\Psi^{ouv} = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{E}} - a_1 \left\{ \begin{array}{l} a_2 (\text{tr} \underline{\underline{E}})^2 \text{tr} (\mathbb{D} : \underline{\underline{\delta}}) + a_3 \text{tr} \underline{\underline{E}} (\underline{\underline{E}} : \mathbb{D} : \underline{\underline{\delta}}) \\ (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) : \mathbb{D} : \underline{\underline{\delta}} - \frac{\nu^s}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{D} : \underline{\underline{E}} \end{array} \right\} \quad (\text{C.12})$$

– pour une distribution de mésosfissures toutes fermées

$$\Psi^{fer} = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^s : \underline{\underline{E}} - a_1 \{ (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) : \mathbb{D} : \underline{\underline{\delta}} - \underline{\underline{E}} : \mathbb{D} : \underline{\underline{E}} \} \quad (\text{C.13})$$

## Annexe D

### Introduction d'une ouverture initiale

La modélisation proposée suppose que les mésolfissures sont fermées dans leur état initial. L'objectif de cette annexe est de proposer une extension qui tienne compte d'une éventuelle ouverture initiale des mésolfissures.

Considérons donc une matrice solide comportant une famille de mésolfissures ayant toutes même ouverture initiale, celle-ci peut être caractérisée par le paramètre  $\beta_0$ , valeur initiale de  $\beta$ .

La construction de l'énergie libre suit la même démarche que celle présentée chapitre I en remplaçant  $\beta$  par  $\beta - \beta_0$ . Le potentiel thermodynamique s'écrit :

$$W = \frac{1}{2}(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)}) : \underline{\underline{C}}^s : (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}^{(2)}) + \frac{H_0}{2d} \left\{ (\beta - \beta_0)^2 + \left(1 - \frac{\nu^s}{2}\right) \underline{\underline{\gamma}} \cdot \underline{\underline{\gamma}} \right\} \quad (D.1)$$

avec  $\underline{\underline{E}}^{(2)} = (\beta - \beta_0)(\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) + (\underline{\underline{\gamma}} \otimes^s \underline{\underline{n}})$ .

Dans le cas de mésolfissures ouvertes ou fermées non frottantes, le raisonnement ayant conduit à (I.19) est reconduit, on obtient les expressions suivantes pour  $\beta$  et  $\underline{\underline{\gamma}}$  :

$$\begin{aligned} \beta - \beta_0 &= \frac{d}{H_0} (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) : \underline{\underline{\Sigma}} & (a) \\ \underline{\underline{\gamma}} &= \frac{d}{H_0(1 - \frac{\nu^s}{2})} (\underline{\underline{\delta}} - \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) \cdot (\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) & (b) \end{aligned} \quad (D.2)$$

Sous l'hypothèse d'une densité modérée de mésolfissures, il vient :

$$\begin{aligned} \beta - \beta_0 &\cong \frac{d}{H_0} \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{E}} & (a) \\ \underline{\underline{\gamma}} &\cong \frac{2\mu^s d}{H_0(1 - \frac{\nu^s}{2})} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{n}} \cdot (\underline{\underline{\delta}} - \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) & (b) \end{aligned} \quad (D.3)$$

Des expressions (D.2.a) et (D.3.a), on déduit les expressions, respectivement en fonction de la contrainte macroscopique et de la déformation macroscopique, du critère d'ouverture/fermeture ( $\beta = 0$ ) des mésolfissures en présence d'une ouverture initiale des mésolfissures :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}} &: (\underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}) + \frac{H_0}{d} \beta_0 = 0 \quad (a) \\ \underline{\underline{N}} &: \underline{\underline{E}} + \frac{H_0}{d} \beta_0 = 0 \quad (b) \end{aligned} \quad (D.4)$$

En injectant les expressions (D.3) dans l'expression (D.1) du potentiel thermodynamique. On obtient :

- à mésolfissures ouvertes :

$$W^{ouv} = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbf{C}^s : \underline{\underline{E}} - \frac{d}{2H_0} \left\{ (\underline{\underline{E}} : \underline{\underline{N}})^2 + \frac{4\mu^{s2}}{1 - \nu^s} [(\underline{\underline{E}} : \underline{\underline{E}}) : \underline{\underline{\Delta}} - \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{E}}] \right\} \quad (D.5)$$

- à mésolfissures fermées ( $\beta = 0$ ) :

$$\begin{aligned} W^{fer} &= \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbf{C}^s : \underline{\underline{E}} \\ &\quad - d \frac{2\mu^{s2}}{H_0(1 - \nu^s)} \{ (\underline{\underline{E}} : \underline{\underline{E}}) : \underline{\underline{\Delta}} - \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\Delta}} \otimes \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{E}} \} + \beta_0 \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{N}} + \frac{H_0}{2d^2} \beta_0^2 \end{aligned} \quad (D.6)$$

On en déduit l'expression de la première loi d'état, donnant la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$ , il vient :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}}^{ouv} &= \mathbf{C}_{ouv}^{hom} : \underline{\underline{E}} \quad (a) \\ \underline{\underline{\Sigma}}^{fer} &= \mathbf{C}_{fer}^{hom} : \underline{\underline{E}} + \beta_0 \underline{\underline{N}} \quad (b) \end{aligned} \quad (D.7)$$

où  $\mathbf{C}_{ouv}^{hom}$  et  $\mathbf{C}_{fer}^{hom}$  sont les tenseurs d'élasticité homogénéisé à fissures ouvertes (Eq. I.27) et fermées (Eq. I.28). L'introduction d'une ouverture initiale des mésolfissures ne modifie donc pas les propriétés homogénéisées du matériau. Par contre, la prise en compte de  $\beta_0$  induit une précontrainte  $\beta_0 \underline{\underline{N}}$  lorsque les mésolfissures se ferment.

**Remarque D.12** La généralisation à une distribution quelconque de mésolfissures est immédiate en suivant la procédure proposée au § I.3.3.

**Remarque D.13** L'ouverture initiale étant supposée identique pour toutes les familles de mésolfissures, lors d'un essai de compression isotrope, la refermeture de toutes les mésolfissures intervient au même niveau de chargement. Le comportement macroscopique obtenu

---

*est donc bilinéaire (cf. figure II.2).*

*A l'instar de Deude et al [42], une amélioration consisterait à supposer que l'ouverture initiale des mésofissures est décrite par une fonction de distribution  $\mathcal{F}(\beta_0)$ .*

## Annexe E

# Poroélasticité macroscopique : approche de type Eshelby

Nous présentons ici une démarche de type Eshelby permettant de construire les expressions du tenseur et du module de Biot d'un milieu poreux saturé. Le développement de cette approche peut être trouvé dans Lemarchand [88].

On note  $\Omega$  le v.e.r. du milieu poreux.  $\Omega_s$  et  $\Omega_f$  désignent respectivement la partie solide et l'espace poreux saturé par un fluide. La porosité lagrangienne est notée  $\phi$  et est égale à  $|\Omega_f|/|\Omega_0|$  où  $|\Omega_0|$  désigne le volume total initial.

Le chargement est défini, comme au chapitre IV par la déformation macroscopique  $\underline{E}$  et la pression de fluide  $p$ . Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\forall \underline{x} \in \partial\Omega_f, \quad \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = -p\underline{n} \tag{E.1}$$

$$\forall \underline{x} \in \partial\Omega, \quad \underline{u}(\underline{x}) = \underline{E} \cdot \underline{x}$$

Le champ  $\sigma$  est prolongé par  $-p\underline{\delta}$  dans  $\Omega_f$  et  $\underline{u}$  y est prolongé par continuité. Ainsi,  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{u}$  sont des champs définis sur  $\Omega$ . Le champ de contrainte dans  $\Omega$  s'écrit sous la forme :

$$\underline{\sigma} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\sigma}^p \quad \text{avec} \quad \mathbb{C} = \begin{cases} \mathbb{C}^s & \text{dans } \Omega_s \\ 0 & \text{dans } \Omega_f \end{cases} \quad \text{et} \quad \underline{\sigma}^p = \begin{cases} \underline{0} & \text{dans } \Omega_s \\ -p\underline{\delta} & \text{dans } \Omega_f \end{cases} \tag{E.2}$$

Le problème étant linéaire, le chargement peut être décomposé en deux :  $\underline{u}'$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}'$  et  $\underline{\sigma}'$  (resp.  $\underline{u}''$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}''$  et  $\underline{\sigma}''$ ) désignent le déplacement, la déformation et la contrainte solutions dans  $\Omega$  du problème défini par  $\underline{E}$  et  $p = 0$  (resp.  $p$  et  $\underline{E} = \underline{0}$ ). En utilisant (E.2), on déduit que  $\underline{\sigma}'$  et  $\underline{\sigma}''$  sont égaux respectivement à 0 et  $-p\underline{\delta}$  dans  $\Omega_f$ .



Notons  $\mathbb{A}$  la champ des tenseurs de localisation de la déformation défini sur  $\Omega$  dans le problème ( $\underline{\underline{E}}, p = 0$ ) et tel que  $\underline{\underline{\varepsilon}}' = \mathbb{A} : \underline{\underline{E}}$ . La contrainte macroscopique dans ce problème est alors donnée par :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}' \rangle = (1 - \phi) \langle \underline{\underline{\sigma}}' \rangle_s = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} \text{ avec } \mathbb{C}^{hom} = (1 - \phi) \mathbb{C}^s : \langle \mathbb{A} \rangle_s \quad (\text{E.3})$$

où  $(1 - \phi) \langle \mathbb{A} \rangle_s = \mathbb{I} - \phi \langle \mathbb{A} \rangle_f$  avec  $\langle \mathbb{A} \rangle_f$  défini par (A.8) dans le cas dilué.

La solution du problème ( $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}, p$ ) est quant à elle proportionnelle à  $p$ . Ainsi, il existe un tenseur  $\underline{\underline{B}}$  tel que  $\langle \underline{\underline{\sigma}}'' \rangle = -p \underline{\underline{B}}$ . Il vient alors :

$$(1 - \phi) \langle \underline{\underline{\sigma}}'' \rangle_s = p(\phi \underline{\underline{\delta}} - \underline{\underline{B}}) \quad (\text{E.4})$$

On en déduit l'équation de la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - p \underline{\underline{B}} \quad (\text{E.5})$$

L'expression de  $\underline{\underline{B}}$  est obtenu en utilisant le théorème de Lévin :

$$-p \underline{\underline{B}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}^p : \mathbb{A} \rangle = -p \phi \underline{\underline{\delta}} : \langle \mathbb{A} \rangle_f \quad (\text{E.6})$$

$$\text{d'où : } \underline{\underline{B}} = \phi \underline{\underline{\delta}} : \langle \mathbb{A} \rangle_f$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}} &= \underline{\underline{\delta}} : (\mathbb{I} - (1 - \phi) \langle \mathbb{A} \rangle_s) \\ &= \underline{\underline{\delta}} : (\mathbb{I} - \mathbb{C}^{s-1} : \mathbb{C}^{hom}) \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

La seconde équation d'état de la poroélasticité donne la variation du volume poreux :

$$\begin{aligned} \phi - \phi_0 &= \phi \underline{\underline{\delta}} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_f = \phi \underline{\underline{\delta}} : (\langle \underline{\underline{\varepsilon}}' \rangle_f + \langle \underline{\underline{\varepsilon}}'' \rangle_f) \\ &= \phi \underline{\underline{\delta}} : (\langle \mathbb{A} \rangle_f : \underline{\underline{E}} + \langle \underline{\underline{\varepsilon}}'' \rangle_f) \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

$$\phi - \phi_0 = \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} + \phi \underline{\underline{\delta}} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}'' \rangle_f$$

Compte-tenu de la décomposition du problème, on a  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}}'' \rangle = 0$ , et en utilisant l'expression (E.4), il vient :

$$\phi \underline{\underline{\delta}} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}}'' \rangle_f = \frac{p}{M} \text{ avec } \frac{1}{M} = \underline{\underline{\delta}} : \mathbb{C}^{s-1} : (\underline{\underline{B}} - \phi \underline{\underline{\delta}}) \quad (\text{E.9})$$

Ainsi, la seconde loi d'état s'écrit :

$$\phi - \phi_0 = \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{E}} + \frac{p}{M} \quad (\text{E.10})$$

On peut vérifier que les résultats obtenus pour le milieu mésolfissuré sont conformes aux résultats généraux qui viennent d'être présentés ((E.5), (E.7), (E.9) et (E.10)).

## Annexe F

### Evolution en conditions non-drainées

L'objectif visé dans cette annexe est simplement d'explicitier la formulation du modèle pour des évolutions en conditions non-drainées.

Ces conditions caractérisent le comportement à court terme du matériau saturé. La masse de fluide contenue dans l'échantillon est constante. On peut exprimer la loi de comportement en fonction de ce paramètre en utilisant les relations (IV.3) et (IV.4). La seconde loi d'état (IV.40), s'écrit alors :

$$\frac{m}{\rho_f^0} = \underline{\underline{\mathcal{B}}} : \underline{\underline{E}} + \left( \frac{1}{\mathcal{M}} + \frac{\varphi_0}{K^f} \right) p \quad (\text{F.1})$$

Soit en posant  $m = 0$  :

$$p = -\mathcal{M}' \underline{\underline{\mathcal{B}}} : \underline{\underline{E}} \quad (\text{F.2})$$

avec  $\frac{1}{\mathcal{M}'} = \frac{1}{\mathcal{M}} + \frac{\varphi_0}{K^f}$ . Notons que sous l'hypothèse de fluide incompressible ( $K^f \rightarrow \infty$ ), on a  $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ . En remplaçant ensuite  $p$  dans (IV.38), il vient :

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} + \frac{\mathcal{M}'}{2} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\mathcal{B}}} \otimes \underline{\underline{\mathcal{B}}} : \underline{\underline{E}} \\ &= \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathbb{C}_u^{hom} : \underline{\underline{E}} \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

avec  $\mathbb{C}_u^{hom}$  le tenseur d'élasticité homogénéisé en condition non-drainé.

**Remarque F.14** Du fait que  $p = -\mathcal{M}' \underline{\underline{\mathcal{B}}} : \underline{\underline{E}}$ , le critère d'ouverture/fermeture des mésofissures s'écrit :

$$(\underline{\underline{N}}^i - \mathcal{M}' \underline{\underline{\mathcal{B}}}) : \underline{\underline{E}} = 0 \quad (\text{F.4})$$

En raison de la présence de  $\mathcal{M}'$  et  $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$ , le critère d'ouverture/fermeture d'une famille de mésofissures, en conditions non-drainées, dépend du statut des autres familles.

Dans ce cas, en injectant (F.2) dans (IV.42), la force thermodynamique associée à une variable d'endommagement  $d^i$ , pour une famille de mésolfissures ouvertes s'écrit<sup>14</sup> :

$$F^{d^i} = \frac{1}{2H_0} \left\{ (\underline{N}^i : \underline{E})^2 + \frac{4\mu^{s2}}{(1 - \frac{\nu^s}{2})} [(\underline{E} \cdot \underline{E}) : \underline{\Delta}^i - \underline{E} : (\underline{\Delta}^i \otimes \underline{\Delta}^i) : \underline{E}] \right\} - \frac{1}{H_0} \mathcal{M}'(\underline{B} : \underline{E}) \left\{ \underline{N}^i : \underline{E} - \frac{1}{2} \mathcal{M}' \underline{B} : \underline{E} \right\} \quad (F.5)$$

La loi d'évolution de l'endommagement, à mésolfissures ouvertes, est obtenu en écrivant à nouveau la condition de consistance; en notant que  $\frac{\partial \mathcal{M}'}{\partial d^i} = -\frac{1}{H_0} \mathcal{M}'^2$  et  $\frac{\partial \underline{B}}{\partial d^i} = \frac{1}{H_0} \underline{N}^i$ , il vient :

$$\dot{d}^i = \begin{cases} 0 & \text{si } f^i < 0 \text{ ou } f^i = 0 \text{ et } \dot{f}^i < 0 \\ \frac{1}{V^i + \mathcal{R}'(d^i)} (\underline{A}^i + \underline{T}^i) : \underline{\dot{E}} & \text{si } f^i = 0 \text{ et } \dot{f}^i = 0 \end{cases} \quad (F.6)$$

où  $V^i$  et  $\underline{T}^i$  sont donnés par :

$$V^i = \frac{1}{H_0^2} \mathcal{M}' \left( \underline{N}^i : \underline{E} - \mathcal{M}' \underline{B} : \underline{E} \right)^2 \quad (F.7)$$

$$\underline{T}^i = -\frac{1}{H_0} \mathcal{M}' \left\{ \left( \underline{N}^i : \underline{E} - \frac{1}{2} \mathcal{M}' \underline{B} : \underline{E} \right) \underline{B} - \underline{B} : \underline{E} \left( \underline{N}^i - \frac{1}{2} \mathcal{M}' \underline{B} \right) \right\} \quad (F.8)$$

<sup>14</sup>pour une famille de mésolfissures fermées, l'expression de la force thermodynamique est donnée par (IV.43)

