Université de Lille I
U.F.R. de Mathématiques - Laboratoire A.G.A.T. - U.M.R. 8524

Une région explicite sans zéro pour les fonctions L de Dirichlet

Thèse

de

Habiba KADIRI

pour obtenir le titre de

Docteur en Mathématiques

Soutenue le 20 décembre 2002 devant la Commission d'Examen :

Président	Etienne FOUVRY	Professeur, Univ. de Paris XI
Rapporteur	Carl POMERANCE	Professeur, Bell Laboratories Murray Hill, USA
Rapporteur	Michel BALAZARD	Chargé de Recherche CNRS, Univ. de Bordeaux 1
Examinateur	Stéphane LOUBOUTIN	Professeur, Institut de Mathématiques de Luminy
Directeur	Hervé QUEFFÉLEC	Professeur, Univ. de Lille 1
Co-directeur	Olivier RAMARÉ	Chargé de Recherche CNRS, Univ. de Lille 1

Table des matières

I Préliminaires 10

1 Formule explicite. 10

2 Étude de la transformée de Laplace d'une fonction particulière 16

3 Étude de $\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ 21

4 Etude de Δ_1. 24

5 Etude de Δ_2. 27

6 Une généralisation du lemme de Stechkin. 29

II Une région sans zéro explicite pour la fonction ζ de Riemann 33

7 Introduction 33

8 Introduction (english version) 36

9 Structure de la preuve. 40

9.1 Une formule explicite. 40
9.2 La fonction test f. 41
9.3 Une inégalité trigonométrique. 41
9.4 La région sans zéros. 42

10 Preuves 46

10.1 Preuve de la proposition 9.1 : 46
10.2 Étude de $D(s-1)$ - Preuve de la proposition 9.2 : 46
10.3 Étude de la somme sur les zéros 47
10.3.1 Cas $k = 1$ et $\varrho \in \{\varrho_0, 1-\overline{\varrho}_0\}$: 47
10.3.2 Cas $(k = 0,2,3,4)$ ou $(k = 1$ et $\varrho \notin \{\varrho_0, 1-\overline{\varrho_0}\})$: 48
10.4 Étude du reste Δ_2 - Preuve de la proposition 9.3 52

III Une région sans zéro explicite pour les fonctions L de Dirichlet 53

11 Introduction. **53**

12 Introduction (english version) **55**

13 Une formule explicite. **58**

14 Une inégalité trigonométrique. **58**
14.1 Le défaut de primitivité. 59

15 Lemmes préliminaires. **60**
15.1 Étude de $D(s-1)$. 60
15.2 Étude de la somme sur les zéros. 61
15.2.1 Cas $k=1$ et $\varrho \in \{\varrho_0, 1-\overline{\varrho_0}\}$: 61
15.2.2 Cas $(k=0,2,3,4)$ ou $(k=1$ et $\varrho \notin \{\varrho_0, 1-\overline{\varrho_0}\})$: 62
15.2.3 Cas où γ_0 est proche de zéro. 62

16 Cas des fonctions de Rumely. **63**

17 Cas où $|\gamma_0| > \sigma + \delta + \mathfrak{a}$. **65**

18 Cas où $|\gamma_0| \leq \sigma + \mathfrak{a} + \delta$ et χ d'ordre supérieur à 5. **65**

19 Cas où $|\gamma_0| \leq \sigma + \mathfrak{a} + \delta$ et χ d'ordre inférieur à 4. **66**
19.1 Cas où $\frac{\alpha}{R \log q} \leq |\gamma_0| \leq \sigma + \mathfrak{a} + \delta$ et χ d'ordre inférieur à 4. 66
19.1.1 Cas où χ est d'ordre 2. 67
19.1.2 Cas où χ est d'ordre 3. 68
19.1.3 Cas où χ est d'ordre 4. 69
19.2 Cas où $0 < |\gamma_0| < \frac{\alpha}{R \log q}$ et χ d'ordre inférieur à 4. 70
19.2.1 Cas où χ est d'ordre 2. 70
19.2.2 Cas où χ est d'ordre 3. 71
19.2.3 Cas où χ est d'ordre 4. 72

20 Cas de deux zéros réels associés à un caractère primitif réel non principal. **73**

21 Cas de deux zéros réels associés à deux caractères primitifs réels. **74**

22 Cas d'au plus 4 zéros d'un caractère primitif non principal de petite hauteur pour un module q non exceptionnel. **76**

IV Une estimation de la taille du plus petit nombre premier dans une progression arithmétique **79**

23 Introduction. **79**

24 Introduction (english version) **81**

25 Lemmes préliminaires. **82**

26 Preuve du théorème. **85**
26.1 Etude de Σ_{11} 86
26.2 Etude de Σ_{12} 86
26.3 Etude de Σ_{13} 89
26.4 Etude de Σ_2. 90
26.5 Etude de Σ_3. 91
26.6 Conclusion 93

Introduction

Nous connaissons depuis le mémoire de Riemann en 1859 (cf. [27]) l'efficacité de la théorie des fonctions analytiques dans l'étude des nombres premiers. En particulier l'outil fondamental pour établir le théorème des nombres premiers, à savoir que

$$\pi(x) \backsim Li(x) = \int_2^x \frac{d\,u}{\log u} \tag{1}$$

est l'étude du comportement de la fonction dite ζ de Riemann et plus précisément la localisation de ses zéros dans la région $\{s \in \mathbb{C}, 0 \leq \Re s \leq 1\}$, appelée aussi bande critique.
Riemann conjecture qu'en fait, ils se trouvent tous sur la droite $\Re s = 1/2$. Ce que l'on appelle depuis l'hypothèse de Riemann a alors amené les chercheurs à calculer les premiers zéros de ζ. Les résultats dans ce domaine connaissent des améliorations constantes grâce à l'utilisation de matériels et d'algorithmes de plus en plus efficaces. Très récemment, des calculs menés en réseau ont permis à S.Wedeniwski (cf. [35]) de vérifier l'hypothèse de Riemann jusqu'à une partie imaginaire de $3.3 \cdot 10^9$, ce qui a permit d'améliorer des tests de primalité.
Hormis les calculs de ζ, nous disposons de région sans zéro pour cette fonction. S'il est facile de voir que

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{si} \quad \Re s > 1 \tag{2}$$

Hadamard (voir [10]) et De La Vallée Poussin (cf. [6]) établissent séparément en 1896 ce premier résultat non trivial :

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{si} \quad \Re s = 1 \tag{3}$$

qui permet de montrer le théorème des nombres premiers.

Ce lien entre la distribution des nombres premiers d'une part, et la localisation des zéros de ζ d'autre part, s'affine en constatant que le terme d'erreur dans ce théorème est en fait fonction d'un domaine à gauche de la ligne $\Re s = 1$ ne contenant aucun zéro de ζ. Plus précisément, un résultat comme celui de De La Vallée Poussin qui montre en 1899 (cf. [7]) qu'il n'y a pas de zéros dans la région

$$\Re s \geq 1 - \frac{1}{R_0 \log(|\Im s| + 2)} \tag{4}$$

avec $R_0 = 34.82$, permet de majorer le terme $|\pi(x) - Li(x)|$ par $x \exp\left(-\sqrt{\frac{\log x}{R_0}}\right)$ à une constante multiplicative près.

En 1975, B.Rosser et L.Schoenfeld dans [30] abaissent R_0 jusqu'à 9.645908801, une valeur restée inchangée jusquà très récement : K. Ford (cf. théorème 4 [8]) atteint la valeur 8.463 en 2000, puis nous montrons $R_0 = 5.70175$ au théorème 8.1.
Les améliorations apportées dans ce travail ne sont pas le fait unique de l'essor de l'informatique. Pour mieux éclairer les méthodes élaborées ici, nous allons revenir sur celles qu'on utilisait jusqu'à présent pour trouver une région sans zéro, tout d'abord pour la fonction de Riemann.
L' idée fondamentale de cette preuve consiste à exprimer $\zeta(s)$ en fonction de ses zéros, plus précisément, d'une somme sur ceux-ci, puis de se débarasser de ces derniers à l'exception du zéro qui nous intéresse (on le notera ϱ_0 et $Z(\zeta)^*$ l'ensemble des zéros critiques privé de ϱ_0).
Ainsi, De La Vallée poussin, étudie la somme sur tous les zéros

$$-\sum_{\varrho\in Z(\zeta)^*}\Re\Big(\frac{1}{s-\varrho}\Big) \tag{5}$$

et l'élimine grâce à un argument de positivité lorsque $\Re s > 1$. Stechkin affine ce raisonnement en utilisant la symétrie des zéros de ζ.
Une autre approche, qui est celle de Landau par exemple (cf. [19]), consiste à regarder la somme sur les zéros proches d'un point de l'axe réel, à une distance qu'on notera M, avec un terme reste de l'ordre de $\frac{\log|\Im\varrho_0|}{M}$. Heath Brown améliore cette méthode en effectuant un lissage qui lui assure la positivité des zéros à une distance de $\frac{1}{\log|\Im\varrho_0|}$ de l'axe réel mais qui lui donne un terme reste numériquement trop grand.
Ici, la démarche est un peu hybride, en ce sens que nous utilisons un lissage pour restreindre la somme aux zéros vérifiant $|\varrho-\varrho_0| \ll 1$. Pour traiter cette somme, nous devons alors prendre en compte la symétrie des zéros, ce qui nous assure de la positivité de la somme même pour des zéros plus éloignés de l'axe $\Re s = 1$, et en fait de tous. Le terme d'erreur est alors négligeable, ce qui nous donne des résultats effectifs exposés dans la seconde partie après les lemmes préparatoires de la première partie.

L'intérêt de cette méthode est de pouvoir se généraliser aux fonctions L de Dirichlet. Nous rappelons que l'hypothèse de Riemann a été étendue à leur cas.
Pour un entier q fixé, nous considérons toutes les fonctions L de Dirichlet associées à un caractère χ de conducteur q.
Les vérifications numériques sont ici plus délicates, attendue de la dépendance en l'entier q. La plus récente est motivée par des preuves de transcendance (voir l'article de Bennett [3]), lesquelles nécessitent couramment de tels résultats effectifs.
De manière analogue à ζ, les fonctions L, associées à un module q fixé, possèdent une région sans zéro à gauche de l'axe $\Re s = 1$ de la forme :

$$\Re s \geq 1 - \frac{1}{R_1\log(\max(q,q|\Im s|))} \tag{6}$$

à l'exception d'au plus une d'entre elles qui correspondrait alors à un caractère réel et qui aurait au plus un zéro réel dans cette zone. La dernière valeur pour R_1 a été établie en 1984 par Mc. Curley (cf. [16]) en généralisant la méthode de Rosser et Schoenfeld : $R_1 = 9.6459$. Il obtient alors que la taille du plus petit nombre premier en progression arithmétique est inférieure au terme $\exp\left(\alpha(\log q)^2\right)$, où α est une constante proche de R_1 : $\alpha = 13.36$.
Nous améliorons ces résultats dans la troisième partie, au théorème 12.1, où nous trouvons pour R_1 la valeur 6.4355. Nous considérons pour cela le produit de toutes les fonctions de Dirichlet associées à un même module. Nous sommes alors garantis de la symétrie des zéros pour ce produit et cela nous permet d'utiliser, dans le cas des zéros de partie imaginaire "pas trop petite", les arguments avancés pour la fonction de Riemann, et l'autre cas est traité de manière plus spécifique. De plus, au théorème 22.1 nous précisons que pour chaque caractère χ de module q, la fonction $L(s,\chi)$ a au plus quatre zéros dans la région

$$|\Im s| \leq 1 - \frac{1}{R_1 \log q} \tag{7}$$

$$\Re s \geq 1 - \frac{1}{R_4 \log q} \quad \text{où} \quad R_4 = 2.58208. \tag{8}$$

Enfin, la dernière partie est consacrée à une utlisation effective de la localisation des zéros des fonctions L de Dirichlet à la répartition des nombres premiers dans une progression arithmétique de la forme $\{a + nq\}$. Nous savons qu'il en existe une infinité. Nous rappelons que le résultat ultime en la matière est celui de Linnik qui établit en 1944 (cf. [20] et [21]) que le plus petit d'entre eux (qu'on notera $P(a,q)$) vérifie

$$P(a,q) \leq mq^L. \tag{9}$$

La constante L a depuis été calculée, la dernière estimation étant dûe à Heath Brown qui trouve en 1992 (cf. [12]) : $L = 5.5$. Cependant, la constante m reste non explicite, attendue qu'elle dépend essentiellemnt d'une estimation de densité de tous les zéros des fonctions L associées à un module fixé. Ici, le théorème 22.1 nous donne une information qui, à défaut d'être uniforme sur tous les caractères asociés à q, est néammoins effective. Nous établissons ainsi au théorème 24.1, dans le cas où q est non exceptionnel, que

$$P(a,q) \leq \exp\left(\alpha(\log q)^2\right) \quad \text{où} \quad \alpha = 6.56391. \tag{10}$$

Introduction (english version)

Thanks to Riemann's memoir, in 1859 (see [27]), analytic function theory is known for its efficacity in the study of prime numbers. In particular the fundamental ingredient to establish the prime number theorem, i.e.:

$$\pi(x) \backsim Li(x) = \int_2^x \frac{d\,u}{\log u}, \tag{11}$$

is to know the behaviour of a function called the Riemann ζ function and more precisely to have information about of location of its zeros in the so-called critical strip $\{s \in \mathbb{C}, 0 \leq \Re s \leq 1\}$.
In fact, Riemann conjectured that they all lie on the critical line $\Re s = 1/2$. Since then many researchers managed to find the first zeros of ζ. Results in this area improve with the use of more efficient hardware and algorithms. Very recently, network techniques led S.Wedeniwski (see [35]) to check the Riemann hypothesis until an imaginary part of $3.3 \cdot 10^9$ and allowed him better primality tests.
In addition to these numerical computations, we know explicit zero free regions. It is easy to see

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{if} \quad \Re s > 1. \tag{12}$$

Hadamard (see [10]) and De La Vallée Poussin (see [6]) showed separately in 1896 the first non trivial result :

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{if} \quad \Re s = 1, \tag{13}$$

which is essential to show the prime number theorem.

This link between the distribution of prime numbers and the location of zeta's zeros is getting deeper with the following fact : the error term is essentialy depending on a zero-free region located on the left hand side of the line $\Re s = 1$. In 1899 De La Vallée Poussin showed (see [7]) that there is no zero in the region

$$\Re s \geq 1 - \frac{1}{R_0 \log(|\Im s| + 2)} \quad \text{where} \quad R_0 = 34.82, \tag{14}$$

and deduced from it

$$\Big|\pi(x) - Li(x)\Big| \ll x \exp\Big(- \sqrt{\frac{\log x}{R_0}}\Big). \tag{15}$$

In 1975 in [30] B.Rosser and L.Schoenfeld reduced R_0 to 9.645908801. This value has

not been moved until very recently : K. Ford (see Theorem 4 in [8]) reached 8.463 in 2000, and we show $R_0 = 5.70175$ in theorem 8.1.
We underline that improvements in this domain are not only due to the recent progress of computer science. Before explaining the methods employed here to find a zero free region, we will recall the ones used until now and at first for the Riemann zeta function.
The fundamental idea of the proof consists first in expressing $\zeta(s)$ in terms of its zeros, and then in getting rid of all of them but the one ϱ_0 we study. In the sequel we will call $Z(\zeta)^*$ the set of all critical zeros except ϱ_0.
De La Vallée Poussin also studied the sum

$$-\sum_{\varrho\in Z(\zeta)^*}\Re\Big(\frac{1}{s-\varrho}\Big) \tag{16}$$

and used a positivity argument when $\Re s > 1$. Stechkin improved this proof by using the symmetry of the zeros.
Another approach to the problem, like Landau's one (see [19]) consists in restricting the sum over the zeros to the ones verifying $|\varrho - \varrho_0| \le M$ with a remainder term of order $\frac{\log|\Im\varrho_0|}{M}$. Heath-Brown improved this method in two ways, one of them being the introduction of a smoothing. He selects $M = 1/\log|\Im\varrho_0|$ and still discards the zeros by positivity. However the remaining term is numerically too large.
The idea of our proof is inspired by both these methods : we use a smoothing so as to restrict the sum to zeros verifying $|\varrho - \varrho_0| \ll 1$. Then we use the symmetry of the zeros and find that the sum is positive even for farther zeros and in fact for all of them. The error term also becomes insignificant. Using this we get effective results that are proved in the second part of this thesis after preliminary lemmas gathered in the first part.

Moreover, this method is also useful in the more general case of the Dirichlet L functions, as we shall see.
We recall the Riemann hypothesis has been extended to them. We denote q a positive integer and consider all Dirichlet functions associated to the modulus q.
Numerical computations are in this case more difficult because of the dependence in q.
The more recent results are motivated by transcendental proofs (see Bennett [3]) that commonly require such computations.
As in the case of ζ, the L functions associated with a given modulus q never vanish in a region on the left hand side of the axis $\Re s = 1$:

$$\Re s \ge 1 - \frac{1}{R_1\log(\max(q,q|\Im s|))}, \tag{17}$$

except for at most one of them which should be real and which vanishes at most once in this part. The best value for R_1 was found in 1984 by McCurley (see [16]) by extending

Rosser and Schoenfeld's proof : $R_1 = 9.6459088001$. He deduced from it that the size of the least prime number in an arithmetic progression is smaller than $\exp\left(\alpha(\log q)^2\right)$, where α is a real constant close to R_1, namely $\alpha = 10.81$.

In the third part, we improve these results in theorem 12.1, where we establish $R_1 = 6.4355$. To prove it, we study the product of all L functions associated with a given modulus q. This process guarantees the required symmetry of the zeros and allows us to use the same arguments as for Zeta, at least in the case "of not too small" imaginary parts. The other case is treated in a more specific way. Moreover, we precise in theorem 22.1 that each Dirichlet L function has at most four zeros in the region :

$$|\Im s| \leq 1 - \frac{1}{R_1 \log q} \tag{18}$$

$$\Re s \geq 1 - \frac{1}{R_4 \log(\max(q,q|\Im s|))} \quad \text{where} \quad R_4 = 2.58208. \tag{19}$$

The last part is dedicated to an application of these results to the distribution of prime numbers in an arithmetic progression $\{a + nq\}$. We know that there is an infinity of them and we recall that the best result in this domain is due to Linnik. He proved in 1944 (see [20] and [21]) that the smallest of them (denoted by $P(a,q)$) satisfies:

$$P(a,q) \leq mq^L, \tag{20}$$

where m, L are absolute constants. The constant L has since been bounded. The last estimation is due to Heath-Brown who showed in 1992 (see [12]) : $L = 5.5$ is admissible. However, the constant m is still non explicit. It essentially depends on the density of all zeros of all functions L associated to a given modulus. In theorem 24.1, we deduce from (18) in the case of non exceptional modulus q :

$$P(a,q) \leq \exp\left(\alpha(\log q)^2\right) \quad \text{where} \quad \alpha = 6.56391. \tag{21}$$

Première partie
Préliminaires

1 Formule explicite.

Théorème 1.1.
Soit ϕ une fonction à valeurs complexes définie sur la droite réelle qui vérifie les conditions (A) et (B) suivantes :

(A) ϕ est continue et continuement dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points a_i où $\phi(x)$ et sa dérivée $\phi'(x)$ n'ont que des discontinuités de première espèce et pour lesquels ϕ vérifie la condition de la moyenne (i.e $\phi(a_i) = \frac{1}{2}[\phi(a_i+0)+\phi(a_i-0)]$).

(B) Il existe $b > 0$ tel que $\phi(x)e^{x/2}$ et $\phi'(x)e^{x/2}$ soient $\mathcal{O}(e^{-(1/2+b)|x|})$ au voisinage de l'infini.

Pour tout réel $a < 1$, vérifiant $0 < a < b$, $\phi(x)$ possède alors une transformée de Laplace

$$\Phi(s) = \int_0^{+\infty} \phi(x)e^{-sx}d\,x$$

holomorphe dans la bande $-(1+a) < \sigma < a$ et qui est $\mathcal{O}(1/|t|)$ uniformément dans la bande $-(1+a) \le \sigma \le a$.

Soit q un entier non nul et soit χ un caractère primitif de Dirichlet modulo q. Notons $\mathfrak{a} = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi(-1) = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge1}\Lambda(n)\chi(n)\phi(\log n) = \delta_{q,1}\Big(\Phi(-1)+\Phi(0)\Big) + \frac{1}{2}(1-\delta_{q,1})(1-\mathfrak{a})\Phi(0) \\ - \sum_{\varrho\in Z(\chi)}\Phi(-\varrho) + \phi(0)\log\frac{q}{\pi} + \sum_{n\ge1}\frac{\Lambda(n)\overline{\chi}(n)}{n}\phi(-\log n) \\ + \lim_{T\mapsto+\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{1/2-iT}^{1/2+iT}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\Big)\Phi(-s)d\,s\end{aligned}$$

Preuve.
D'après le théorème d'inversion de Laplace :

$$\phi(\log n) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma=-(1+a)}\Phi(s)n^s d\,s \quad (n \ge 1).$$

Ainsi, par définition de $\frac{L'}{L}(s,\chi)$ pour $\sigma > 1$ et grâce au changement de variable $s \mapsto -s$, nous pouvons écrire :

$$\sum_{n\geq 1} \Lambda(n)\chi(n)\phi(\log n) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma=1+a} -\frac{L'}{L}(s,\chi)\Phi(-s)d\,s. \qquad (22)$$

Soit $T > 0$, notons $I(T)$ l'intégrale :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\substack{\sigma\,=\,1+a\\ -T\,\leq\, t\,\leq\, T}} -\frac{L'}{L}(s,\chi)\Phi(-s)d\,s.$$

L'intégration de $-\frac{L'}{L}(s,\chi)\Phi(-s)$ sur le contour du rectangle formé par les droites $\sigma = 1+a, \sigma = -a, t = T, t = -T$ permet de réécrire $I(T)$:

$$\begin{aligned} I(T) = \frac{1}{2i\pi}&\int_{\substack{\sigma\,=\,-a\\ -T\,\leq\, t\,\leq\, T}} -\frac{L'}{L}(s,\chi)\Phi(-s)d\,s \\ &+ \frac{1}{2i\pi}\int_{\substack{-a\,\leq\,\sigma\,\leq\,1+a\\ t\,=\,T}} -\frac{L'}{L}(s,\chi)\Phi(-s)d\,s \\ &- \frac{1}{2i\pi}\int_{\substack{-a\,\leq\,\sigma\,\leq\,1+a\\ t\,=\,-T}} -\frac{L'}{L}(s,\chi)\Phi(-s)d\,s \\ &- \Bigg(-\delta_{q,1}\Phi(-1) + \frac{1}{2}(1-\delta_{q,1})(1-\mathfrak{a})\Phi(0) + \sum_{\varrho\in Z(\zeta)}\Phi(-\varrho)\Bigg) \qquad (23)\end{aligned}$$

Grâce à la condition (B), les deux dernières intégrales tendent vers 0 lorsque T tend vers ∞.
De plus, l'équation fonctionnelle de L :

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) = \log\frac{q}{\pi} - \frac{L'}{L}(1-s,\overline{\chi}) + \frac{1}{2}\Big\{\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\Big) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1-s+\mathfrak{a}}{2}\Big)\Big\}$$

permet de décomposer la première intégrale en la somme des trois intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} I_1(T) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\substack{\sigma\,=\,-a\\ -T\,\leq\, t\,\leq\, T}} \sigma = -a, -T \leq t \leq T \log\frac{q}{\pi}\Phi(-s)d\,s \\ I_2(T) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\substack{\sigma\,=\,-a\\ -T\,\leq\, t\,\leq\, T}} -\frac{L'}{L}(1-s,\overline{\chi})\Phi(-s)d\,s \\ I_3(T) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\substack{\sigma\,=\,-a\\ -T\,\leq\, t\,\leq\, T}} \frac{1}{2}\Big\{\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\Big) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1-s+\mathfrak{a}}{2}\Big)\Big\}\Phi(-s)d\,s \end{aligned}$$

D'une part, le théorème d'inversion de Laplace permet d'écrire immédiatement :

$$\lim_{T\mapsto+\infty} I_1(T) = \phi(0)\log\frac{q}{\pi} \tag{24}$$

D'autre part, le développement de $-\frac{L'}{L}$ en série de Dirichlet donne :

$$\lim_{T\mapsto+\infty} I_2(T) = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)\overline{\chi}(n)}{n}\phi(-\log n) \tag{25}$$

En ce qui concerne I_3, déplaçons la droite d'intégration vers la droite $\sigma = 1/2$ sur laquelle Γ vérifie :

$$\frac{1}{2}\Big\{\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\Big)+\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1-s+\mathfrak{a}}{2}\Big)\Big\} = \Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\Big)$$

Grâce à la condition (B), nous obtenons :

$$\lim_{T\mapsto+\infty} I_3(T) = \frac{1}{2i\pi}\lim_{T\mapsto+\infty}\int_{\substack{\sigma=1/2\\ -T\leq t\leq T}}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\Big)\Phi(-s)d\,s+(1-\mathfrak{a})\Phi(0) \tag{26}$$

Et (22), (23), (24), (25) et (26) donnent ainsi l'égalité annoncée. □

Proposition 1.2.
Soient f une fonction comme ci-dessus, s un nombre complexe et χ un caractère primitif non principal modulo q. Nous avons les deux identités

$$\begin{aligned}\Re\Bigg(\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}f(\log n)\Bigg) &= f(0)\Bigg(-\frac{1}{2}\log(\pi)+\Re\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s}{2}+1\Big)\Bigg)\\ &\quad+\Re F(s-1)-\sum_{\varrho\in Z(\zeta)}\Re F(s-\varrho)\\ &\quad+\Re\Bigg(\frac{1}{2i\pi}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{z}{2}\Big)\frac{F_2(s-z)}{(s-z)^2}d\,z+\frac{F_2(s)}{s^2}\Bigg)\end{aligned} \tag{27}$$

et

$$\begin{aligned}\Re\Bigg(\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}f(\log n)\Bigg) &= f(0)\Bigg(\frac{1}{2}\log(q/\pi)+\frac{1}{2}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\Big)\Bigg)\\ &\quad-\sum_{\varrho\in Z(\chi)}\Re F(s-\varrho)\\ &\quad+\Re\Bigg(\frac{1}{2i\pi}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{z+\mathfrak{a}}{2}\Big)\frac{F_2(s-z)}{(s-z)^2}d\,z+\frac{1-\mathfrak{a}}{2}\frac{F_2(s)}{s^2}\Bigg)\end{aligned} \tag{28}$$

où F_2 est la transformée de Laplace de f", $Z(\zeta)$ désigne l'ensemble des zéros non triviaux de la fonction ζ de Riemann et $Z(\chi)$ celui de la fonction L de Dirichlet associée au caractère χ.

Preuve. 1. Pour obtenir (27), il ne reste plus qu'à prendre la partie réelle dans la formule du théorème 1.1 dans le cas $q = 1$ et $s = \sigma + it$, où a priori $\sigma > 1$, et

$$\phi(y) = \begin{cases} (f(0) - f(y))e^{-ys} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ϕ est alors une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ qui vérifie bien la condition (B) et on a pour $\Re z < \Re s$:

$$\Phi(-z) = \frac{f(0)}{s-z} - F(s-z) = -\frac{F_2(s-z)}{(s-z)^2},$$
$$\Phi(0) = -\frac{F_2(s)}{s^2}, \quad \Phi(-1) = \frac{f(0)}{s-1} - F(s-1)$$

où F_2 est la transformée de Laplace de f". Il vient alors

$$\begin{aligned} \Re \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} f(\log n) = f(0)\ \Re\Bigg(\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} - \frac{1}{s-1} + \sum_{\varrho\in Z(\zeta)} \frac{1}{s-\varrho}\Bigg) \\ + \Re F(s-1) - \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} \Re F(s-\varrho) \\ + \Re\Bigg(\frac{1}{2i\pi}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{z}{2}\Big)\frac{F_2(s-z)}{(s-z)^2} d\,z + \frac{F_2(s)}{s^2}\Bigg) \end{aligned} \tag{29}$$

La formule d'Hadamard (voir [5]) permet de réécrire le terme facteur de $f(0)$:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -B - \frac{1}{2}\log\pi + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s}{2}+1\Big) - \sum_{\varrho\in Z(\zeta)}\Big(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{s-\varrho}\Big) \tag{30}$$

or $\Re B = -\sum_{\varrho\in Z(\zeta)} \Re\frac{1}{\varrho}$ donc

$$\Re\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{1}{s-1} + \sum_{\varrho\in Z(\zeta)}\frac{1}{s-\varrho}\Big) = -\frac{1}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s}{2}+1\Big) \tag{31}$$

L'identité (29) devient :

$$\Re\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}f(\log n) = f(0)\bigg(-\frac{1}{2}\log(\pi)+\frac{1}{2}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s}{2}+1\Big)\bigg) + \Re F(s-1) - \sum_{\varrho\in Z(\zeta)}\Re F(s-\varrho) + \Re\bigg(\frac{1}{2i\pi}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{z}{2}\Big)\frac{F_2(s-z)}{(s-z)^2}d\,z+\frac{F_2(s)}{s^2}\bigg)$$

Nous avons ici une égalité entre deux fonctions harmoniques sur le demi-plan $\Re s>1$, mais les deux membres définissent des fonctions sur $\mathbb{C}$ tout entier (l'introduction de la partie réelle ôte les problèmes de convergence) ce qui fait que l'égalité reste vraie sur $\mathbb{C}$. Ceci achève la démonstration de la proposition 1.2.

2. Pour obtenir (28), on procède de la même manière que précédemment, mais en considérant cette fois-ci $q>1$. De plus, à la place de l'identité de Hadamard (30), on utilise l'identité classique (cf. [5]):

$$-\Re\frac{L'}{L}(s,\chi) = \frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi}+\frac{1}{2}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\Big)-\sum_{\varrho\in Z(\chi)}\Re\frac{1}{s-\varrho} \tag{32}$$

□

Nous prenons les notations suivantes pour alléger quelque peu le travail typographique et posons :

δ et κ sont deux réels dans[0,1], $\chi_{(0)}$ est le caractère principal primitif modulo q.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(s) &= \Re\Bigg(\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}f(\log n)\Bigg)\Big(1-\frac{\kappa}{n^\delta}\Big)\\
&= \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}f(\log n)\cos(t\log n)\Big(1-\frac{\kappa}{n^\delta}\Big)\\
T_1(s) &= -\frac{1}{2}\log\pi+\frac{1}{2}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s}{2}+1\Big),\\
T_2(s) &= \Re\Bigg(\frac{1}{2i\pi}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{z}{2}\Big)\frac{F_2(s-z)}{(s-z)^2}dz+\frac{F_2(s)}{s^2}\Bigg)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\Big)\Re\frac{F_2(s-1/2-it)}{(s-1/2-it)^2}dt+\Re\frac{F_2(s)}{s^2}.\\
\Delta_1(s) &= T_1(s)\ -\ \kappa\, T_1(s+\delta)\\
\Delta_2(s) &= T_2(s)\ -\ \kappa\, T_2(s+\delta)\\
D(s) &= \Re F(s)-\kappa\,\Re F(s+\delta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et}\quad \mathcal{S}(s,\chi) &= \Re\Bigg(\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}f(\log n)\Bigg)\Big(1-\frac{\kappa}{n^\delta}\Big)\\
&= \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}f(\log n)\Big(1-\frac{\kappa}{n^\delta}\Big)\Re\Big(\frac{\chi(n)}{n^{it}}\Big)\\
T_1(s,\chi) &= \frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi}+\frac{1}{2}\Re\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\Big),\\
T_2(s,\chi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{\mathfrak{a}+1/2}{2}+i\frac{T}{2}\Big)\Re\frac{F_2(s-1/2-iT)}{(s-1/2-iT)^2}dT+\frac{1-\mathfrak{a}}{2}\Re\frac{F_2(s)}{s^2}\\
\Delta_1(s,\chi) &= T_1(s,\chi)\ -\ \kappa\, T_1(s+\delta,\chi)\\
\Delta_2(s,\chi) &= T_2(s,\chi)\ -\ \kappa\, T_2(s+\delta,\chi)
\end{aligned}$$

Ainsi les formules (27) et (28) s'écrivent respectivement :

$$\mathcal{S}(s) = f(0)\Delta_1(s)+D(s-1)-\sum_{\varrho\in Z(\zeta)}D(s-\varrho)\ +\Delta_2(s) \tag{33}$$

$$\text{et}\quad \mathcal{S}(s,\chi) = f(0)\Delta_1(s,\chi)-\sum_{\varrho\in Z(\chi)}D(s-\varrho)\ +\Delta_2(s,\chi). \tag{34}$$

Nous aurons besoin dans la suite de majorations pour chacun des termes ci-dessus. C'est l'objet des paragraphes suivants.

2 Étude de la transformée de Laplace d'une fonction particulière

Dans toute la suite, nous allons considérer une fonction positive f, de classe $C^2([0,d])$, support compact dans $[0,d[$ et telle que :

$$f(d) = f'(0) = f'(d) = f''(d) = 0. \tag{H_1}$$

Nous notons F sa transforme de Laplace :

$$F(s) = \int_0^d e^{-st} f(t)\, dt.$$

et $\tilde{F}(x,y)$ la partie réelle de $F(x+iy)$:

$$\tilde{F}(x,y) = \int_0^d e^{-xt} f(t) \cos(yt) d\,t. \tag{35}$$

En sus de ces conditions , nous imposons à $\tilde{F}$ de vérifier :

$$\tilde{F}(x,y) \geq 0 \quad \text{si} \quad x \geq 0. \tag{H_2}$$

Heath Brown propose une famille de fonctions (cf. lemme 7.5, [12]) dont nous ne savons pas si elles sont optimales pour notre problème, mais dont nous pensons qu'elles sont assez bien adaptées à notre méthode. Pour $\theta \in]\pi/2,\pi[$, nous définissons :

$$f(t) = \eta h_\theta(\eta t)$$

où $\eta \in [0,1]$ et h_θ est indépendante de η. Cette fonction est nulle en dehors de $[0,-2\theta/\tan\theta]$ et, pour u appartenant à cet intervalle, vaut

$$\begin{aligned} h_\theta(u) = (1+\tan^2\theta)\Big[(1+\tan^2\theta)\Big(\frac{-\theta}{\tan\theta} - \frac{u}{2}\Big)\cos(u\tan\theta) + \frac{-2\theta}{\tan\theta} - u \\ - \frac{\sin(2\theta + u\tan\theta)}{\sin(2\theta)} + 2\Big(1 + \frac{\sin(\theta + u\tan\theta)}{\sin\theta}\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{36}$$

Nous avons alors

$$f(0) = \eta g_1(\theta),\ \Re F(0) = \tilde{F}(0,0) = g_2(\theta),\ \Re F(1-\beta_0) = \tilde{F}(1-\beta_0,0) = g_3(\theta) \tag{37}$$

où nous avons posé :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g_1(\theta) &=& (1+\tan^2\theta)(3 - \theta\tan\theta - 3\theta\cot\theta), \\ g_2(\theta) &=& 2(1+\tan^2\theta)(1-\theta\cot\theta)^2, \\ g_3(\theta) &=& 2\tan^2\theta + 3 - 3\theta\tan\theta - 3\theta\cot\theta. \end{array} \right. \tag{38}$$

Pour les besoins ultérieurs, nous définissons aussi

$$d(\theta,\eta) = \frac{d_1(\theta)}{\eta} \quad \text{où} \quad d_1(\theta) = \frac{-2\theta}{\tan\theta}. \tag{39}$$

Nous allons maintenant étudier cette fonction $\tilde{F}$.

Lemme 2.1.
Nous avons

$$\tilde{F}(x,y) = \eta g_1(\theta)\frac{x}{x^2+y^2} + H(x,y)$$

où la fonction H vérifie

$$|H(x,y)| \leq \frac{M(x/\eta)\eta^2}{x^2+y^2}, \quad \textit{avec} \quad M(z) = \int_0^{d_1(\theta)} |h_\theta^{"}(u)|e^{-zu}d\,u.$$

De plus lorsque z est proche de 0, nous avons le développement suivant :

$$521.632z \leq M(z) \leq 521.633 - 212.573z + 68.114z^2,$$

Sinon, la majoration par m/z donne une approximation de M suffisante où

$$m = \max_{u\in[0,d_1(\theta)]} |h_\theta^{"}(u)| = |h_\theta^{"}(0)| = 1322.86625 + \mathcal{O}^*(10^{-5}).$$

Preuve.
Rappelons que :

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{F_2(s)}{s^2}$$

où F_2 est la transformée de laplace de $f^{"}$. Donc :

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x,y) &= \Re\Big[\frac{f(0)}{x+iy} + \frac{1}{(x+iy)^2}\int_0^{d(\theta,\eta)} e^{-(x+iy)t} f^{"}(t)\,dt\Big] \\ &= f(0)\frac{x}{x^2+y^2} + \int_0^{d(\theta,\eta)} \frac{(x^2-y^2)\cos(ty) - 2xy\sin(ty)}{(x^2+y^2)^2} e^{-xt} f^{"}(t)\,dt\end{aligned}$$

Notons H le reste et majorons le :

$$H(x,y) = \int_0^{d(\theta,\eta)} \frac{(x^2-y^2)\cos(ty) - 2xy\sin(ty)}{(x^2+y^2)^2} e^{-xt} f^{"}(t)\,dt. \tag{40}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous donne

$$|(x^2-y^2)\cos(ty)-2xy\sin(ty)| \leq \sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy)^2} = x^2+y^2 \tag{41}$$

et par conséquent

$$|H(x,y)| \leq \frac{1}{x^2+y^2}\int_0^{d(\theta,\eta)} e^{-xt}|f''(t)|\,dt$$

Par définition de f, $f''(t) = \eta^3 h_\theta''(\eta t)$, donc un changement de variable donne que l'intégrale de droite est égale à $\eta^2\int_0^{d_1(\theta)}|h_\theta''(u)|e^{-\frac{x}{\eta}u}d\,u$.
De plus, les inégalités élémentaires $1-t \leq e^{-t} \leq 1-t+t^2$, valables pour $t \geq -1$, nous donne l'encadrement annoncé pour $M(z)$, ce qui achève la démonstration du lemme. □

Nous aurons besoin pour la proposition 6.2 d'une estimation plus précise de $H(x,y)$ lorsque y tend vers l'infini :

Lemme 2.2.
Nous avons

$$|H(x,y)| \leq m\eta^3\frac{|x||x^2-3y^2|}{(x^2+y^2)^3} + \frac{M_1(x/\eta)\eta^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\textit{avec} \qquad M_1(z) = \int_0^{d_1(\theta)}|h_\theta^{(3)}(u)|e^{-zu}d\,u.$$

De plus lorsque z est proche de 0, nous avons le développement suivant :

$$2526.445 \leq M_1(z) \leq 2526.446 - 1087.742z + 348.808z^2,$$

Sinon, la majoration par m_1/z donne une approximation de M_1 suffisante avec

$$m_1 = \max_{u\in[0,d_1(\theta)]}|h_\theta^{(3)}(u)| = 4135.12706 + \mathcal{O}^*(10^{-5}).$$

Preuve.
En intégrant par parties

$$H(x,y) = \Re\Big(\frac{1}{(x+iy)^2}\int_0^{d(\theta,\eta)} e^{-(x+iy)t}f''(t)d\,t\Big)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \Re\Big(\frac{f''(0)}{(x+iy)^3} + \frac{1}{(x+iy)^3}\int_0^{d(\theta,\eta)} e^{-(x+iy)t}f^{(3)}(t)d\,t\Big) \\ &= f''(0)\frac{x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} \\ &\quad + \int_0^{d(\theta,\eta)}\frac{x(x^2-3y^2)\cos(xt)-y(y^2-3x^2)\sin(yt)}{(x^2+y^2)^3}e^{-xt}f^{(3)}(t)d\,t \end{aligned}$$

En achevant la preuve comme celle du lemme 2.1, nous montrons ainsi que :

$$H(x,y) \leq h_\theta^{"}(0)\eta^3 \frac{|x||x^2-3y^2|}{(x^2+y^2)^3} + \frac{\eta^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \int_0^{d_1(\theta)} |h_\theta^{(3)(u)}| e^{-\frac{x}{\eta}u} d\,u$$

□

Dorénavant, nous opérons à $y \geq 0$ fixé. D'après le résultat ci-dessus, nous pouvons espérer que , pour $x \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \tilde{F}(x,y)$ se comporte comme la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2+y^2}$, c'est à dire qu'elle croisse jusqu' à une valeur proche de y puis décroisse ensuite.
Lorsque $y = 0$, il est immédiat de voir que la fonction est décroissante et tend vers 0 en l'infini.
Lorsque y est strictement positif, on a le lemme suivant:
Lemme 2.3.
Pour tout $y > 0$ l'application $\tilde{F}(\cdot,y)$ décroît sur $[x_2(\eta,y),+\infty[$ avec $x_2(\eta,y) = \varepsilon_3(\eta) + \sqrt{y^2+\varepsilon_3^2(\eta)}$, $\varepsilon_3(\eta) = 6.424\eta$.
Par ailleurs, pour tout $y > 0$ l'application $\tilde{F}(\cdot,y)$ croît sur $[0,x_1(\eta,y)]$ avec $x_1(\eta,y) = \frac{1}{2}y - \varepsilon_1(\eta) + \sqrt{(\frac{1}{2}y-\varepsilon_1(\eta))^2 - \varepsilon_2(\eta)}$ pourvu que la quantité sous la racine soit positive ou nulle, où nous avons posé $\varepsilon_1(\eta) = 4.055\eta$ et $\varepsilon_2(\eta) = 3.529\eta$.

Preuve.
Reprenons H de la démonstration précédente donné par (40). Il vient

$$\frac{\partial}{\partial x}H(x,y) = \int_0^{d(\theta,\eta)} \left(-t\frac{(x^2-y^2)\cos(ty) - 2xy\sin(ty)}{(x^2+y^2)^2} \right. \\ \left. -2\frac{x(x^2-3y^2)\cos(ty) - y(3x^2-y^2)\sin(ty)}{(x^2+y^2)^3} \right) e^{-xt} f"(t)\,dt.$$

Nous utilisons encore l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour montrer que :

$$|2x(x^2-3y^2)\cos(ty) - 2y(3x^2-y^2)\sin(ty)| \leq 2(x^2+y^2)^{3/2}$$

ainsi que (41) pour obtenir

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial x}H(x,y)\right| \quad &\leq \quad \int_0^{d(\theta,\eta)} |f"(t)| \left(\frac{t}{x^2+y^2} + \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) e^{-xt}\,dt \\ &= \eta\frac{M_2(x/\eta)}{x^2+y^2} + 2\eta^2\frac{M(x/\eta)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

où

$$M_2(z) = \int_0^{d_1(\theta)} |h_\theta''(u)| u e^{-zu} d\,u \le \|u h_\theta''\|_\infty / z.$$

1. Supposons $x \ge y$. Puisque

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = g_1(\theta)\eta \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial}{\partial x} H(x,y) \tag{42}$$

   nous pouvons garantir que $\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) \le 0$ dès que

$$g_1(\theta)(y^2 - x^2) + M_2(x/\eta)(x^2+y^2) + 2\eta M(x/\eta)\sqrt{x^2+y^2} \le 0$$

   ce qui est impliqué par

$$g_1(\theta)(y^2 - x^2) + \eta(\|u h_\theta''\|_\infty + 2\sqrt{2}\|h_\theta''\|_1) x \le 0$$

   avec $\|u h_\theta''\|_\infty \le 423.867$ et $\|h_\theta''\|_1 \le 521.633$.

$$x \ge x_2(\eta,y) = \varepsilon_3(\eta) + \sqrt{y^2 + \varepsilon_3^2(\eta)}$$

   avec

$$\varepsilon_3(\eta) = 6.424\eta \ge \frac{\|u h_\theta''\|_\infty + 2\sqrt{2}\|h_\theta''\|_1}{2 g_1(\theta)} \eta.$$

2. Dès que $x \le y$, nous pouvons aussi garantir à partir de (42) que $\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) \ge 0$ et

$$g_1(\theta)(y^2 - x^2) - M_2(x/\eta)(x^2+y^2) - 2\eta M(x/\eta)\sqrt{x^2+y^2} \ge 0$$

   ce qui est impliqué par

$$g_1(\theta)(y^2 - x^2) - \eta \|u h_\theta''\|_\infty \frac{2y^2}{x} - 2\sqrt{2}\eta \|h_\theta''\|_1 y \ge 0.$$

   Comme nous n'aurons pas besoin d'un résultat très performant, nous nous contentons de noter que $y^2 - xy \ge y^2 - x^2$, ce qui nous laisse avec

$$g_1(\theta)(y - x)x - 2\eta \|u h_\theta''\|_\infty y - 2\sqrt{2}\eta \|h_\theta''\|_1 x \ge 0$$

   et il nous suffit maintenant d'avoir

$$x^2 - (y - 8.110\eta)x + 7.057\eta y \le 0.$$

$\square$

3 Étude de $\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}$

Lemme 3.1.
Soit y_0, x, x_0 et x_1 des réels positifs tels que $x_0 \leq x \leq x_1$. Soient de plus $\delta \in [0,1]$ et $\kappa \in [0; x/(x+\delta)]$.Alors

$$\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{x}{2}+i\frac{y}{2}\Big) - \kappa\, \Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{x+\delta}{2}+i\frac{y}{2}\Big)$$
$$\leq \begin{cases} \min\Big(r_1(x_0,x_1,y_0),r_4(x_0,x_1,y_0)\Big) & \text{si } 0<|y|<y_0 \\ (1-\kappa\ )\log\frac{y}{2} + \min\Big(r_2(x_0,x_1,y_0),r_3(x_0,x_1,y_0)\Big) & \text{si } |y|\geq y_0 \end{cases} \tag{43}$$

où r_1, r_2, r_3 et r_4 sont successivement définis en (47), (50), (55) and (59).

Preuve.
Dans la suite, $\Psi_{\kappa,\delta}(x,y)$ désignera la différence $\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{x}{2}+i\frac{y}{2}\Big) - \kappa\, \Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{x+\delta}{2}+i\frac{y}{2}\Big)$. Il y a différentes manières d'approcher $\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{x}{2}+i\frac{y}{2}\Big)$. Nous en verrons ici trois d'entre elles.

1. Rappelons l'identité de MC.Curley (cf.[16]):

$$\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{x}{2}+i\frac{y}{2}\Big) = \frac{1}{2}\log\Big(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\Big) - \frac{x}{x^2+y^2} + \Re\int_0^{+\infty}\frac{(u-[u]-1/2)}{|u+\frac{x+iy}{2}|^2}du \tag{44}$$

   où l'intégrale vérifie

$$\Re\int_0^{+\infty}\left|\frac{(u-[u]-1/2)}{\Big(u+\frac{x+iy}{2}\Big)^2}\right|du = \frac{1}{y}\arctan\frac{y}{x} \tag{45}$$

   Nous déduisons de (44) que $\Psi_{\kappa,\delta} \leq R_1(x,y)$, où R_1 est défini par :

$$\frac{1}{2}\log\Big(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\Big) - \frac{\kappa}{2}\log\Big(\frac{(x+\delta)^2}{4}+\frac{y^2}{4}\Big)$$
$$-\Big(\frac{x}{x^2+y^2} - \kappa\,\frac{x+\delta}{(x+\delta)^2+y^2}\Big) + \frac{1}{y}\Big(\arctan\frac{y}{x} + \kappa\ \arctan\frac{y}{x+\delta}\Big) \tag{46}$$

   Nous allons maintenant distinguer les cas où y est borné ($0<|y|<y_0$) ou non ($|y|\geq y_0$).

   (a) Dans le premier cas, on majore $\frac{1}{y}\arctan\frac{y}{x}$ par $\frac{1}{x}$:

$$R_1(x,y) \leq r_1(x_0,x_1,y_0) = \frac{1-\kappa}{2}\log\Big(\frac{(x_1+\delta)^2}{4}+\frac{y_0^2}{4}\Big)$$
$$-\frac{x_0}{x_1^2+y_0^2} + \frac{1}{x_0} + \frac{2\kappa}{x_0+\delta} \tag{47}$$

(b) Dans le second, en remarquant que $\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{x}{2}+i\frac{y}{2}\Big)$ est d'ordre $\log|y|$, nous réécrivons $R_1(x,y)$ sous la forme :

$$R_1(x,y)=(1-\kappa\ )\log\frac{|y|}{2}+R_2(x,y) \tag{48}$$

avec

$$\begin{aligned}R_2(x,y)=&\frac{1}{2}\log\Big(\frac{x^2}{y^2}+1\Big)-\frac{\kappa}{2}\log\Big(\frac{(x+\delta)^2}{y^2}+1\Big)\\&-\Big(\frac{x}{x^2+y^2}-\kappa\ \frac{x+\delta}{(x+\delta)^2+y^2}\Big)+\frac{1}{y}\Big(\arctan\frac{y}{x}+\kappa\ \arctan\frac{y}{x+\delta}\Big)\end{aligned} \tag{49}$$

Le terme $\frac{1}{y}\arctan\frac{y}{x}$ est positif et est une fonction décroissante de y, de même que $\frac{x}{x^2+y^2}-\kappa\ \ \frac{x+\delta}{(x+\delta)^2+y^2}$ lorsque $\kappa\ \leq\frac{x}{x+\delta}$. Ainsi, puisque $|y|\geq y_0$, le terme d'erreur vérifie :

$$\begin{aligned}R_2(x,y)\leq r_2(x_0,x_1,y_0)=&\frac{1-\kappa}{2}\log\Big(\frac{(x_1+\delta)^2}{y_0^2}+1\Big)\\&+\frac{1}{y_0}\Big(\arctan\frac{y_0}{x_1}+\kappa\ \arctan\frac{y_0}{x_1+\delta}\Big)\end{aligned} \tag{50}$$

2. L'identité ci-dessous donne une autre majoration pour $\psi_{\kappa,\delta}$:

$$\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}(x+iy)=\log|y|-\frac{x}{2(x^2+y^2)}+R(x,y)\qquad(y^2>x^2,x>0) \tag{51}$$

avec

$$|R(x,y)|\leq\frac{1}{12x|y|}+\frac{x^2}{2y^2} \tag{52}$$

Donc

$$\psi_{\kappa,\delta}(x,y)\leq(1-\kappa\ )\log\frac{|y|}{2}+R_3(x,y)\leq(1-\kappa\ )\log\frac{|y|}{2}+r_3(x_0,x_1,y_0) \tag{53}$$

où R_3 et r_3 sont donnés par :

$$\begin{aligned}R_3(x,y)=-\Big(\frac{x}{x^2+y^2}-\kappa\ \frac{x+\delta}{(x+\delta)^2+y^2}\Big)&+\frac{1}{3y}\Big(\frac{1}{x}+\frac{\kappa}{x+\delta}\Big)\\&+\frac{1}{2y^2}\Big(x^2+(x+\delta)^2\Big)\end{aligned} \tag{54}$$

$$r_3(x_0,x_1,y_0)=\frac{1}{3y_0}\Big(\frac{1}{x_0}+\frac{\kappa}{x_0+\delta}\Big)+\frac{1}{2y_0^2}\Big(x_1^2+(x_1+\delta)^2\Big) \tag{55}$$

3. Si $0 < |y| < y_0$:
   Nous rappelons que $\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ s'écrit sous la forme (Cf. [1]):

$$\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}(x+iy) = -\gamma - \frac{x}{x^2+y^2} + \sum_{n\geq 1}\Big(\frac{1}{n} - \frac{x+n}{(x+n)^2+y^2}\Big) \quad (\text{si } x > 0\ ) \qquad (56)$$

   et donc

$$\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{x}{2} + i\frac{y}{2}\Big) - \kappa\ \Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{x+\delta}{2} + i\frac{y}{2}\Big) = R_4(x,y) \leq r_4(x_0,x_1,y_0) \qquad (57)$$

   avec

$$\begin{aligned} R_4(x,y) = &-(1-\kappa\ )\gamma - 2\Big(\frac{x}{x^2+y^2} - \kappa\ \frac{x+\delta}{(x+\delta)^2+y^2}\Big) \\ &+ 2\sum_{n\geq 1}\Big(\frac{1}{2n} - \frac{x+2n}{(x+2n)^2+y^2}\Big) - 2\kappa\ \sum_{n\geq 1}\Big(\frac{1}{2n} - \frac{x+\delta+2n}{(x+\delta+2n)^2+y^2}\Big) \end{aligned} \qquad (58)$$

$$\begin{aligned} r_4(x_0,x_1,y_0) = &-(1-\kappa\ )\gamma - 2\Big(\frac{x_0}{x_1^2+y_0^2} - \frac{\kappa}{x_0+\delta}\Big) \\ &+ 2\sum_{n\geq 1}\Big(\frac{1}{2n} - \frac{x_0+2n}{(x_0+2n)^2+y_0^2}\Big) - 2\kappa\ \sum_{n\geq 1}\Big(\frac{1}{2n} - \frac{1}{x_1+\delta+2n}\Big) \end{aligned} \qquad (59)$$

□

Lemme 3.2.
Soit $\mathfrak{a}$ un entier égal à 0 ou 1.

$$\Big|\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1}{4} + i\frac{T}{2}\Big)\Big| \leq U_0(T) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log\frac{16}{1+4T^2} + \frac{2}{1+4T^2} - \frac{\pi}{2} & \text{si } |T| < 1/2 \\ \log\frac{|T|}{2} - \frac{2}{1+4T^2} + \frac{2}{3|T|} + \frac{1}{8T^2} & \text{si } |T| \geq 1/2 \end{cases}$$

$$\Big|\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{\mathfrak{a}+1/2}{2} + i\frac{T}{2}\Big)\Big| \leq U(T) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log\frac{16}{1+4T^2} + \frac{2}{1+4T^2} - \frac{\pi}{6} & \text{si } |T| < \mathfrak{a}+1/2 \\ \log\frac{|T|}{2} - \frac{2}{1+4T^2} + \frac{2}{3|T|} + \frac{9}{8T^2} & \text{si } |T| \geq \mathfrak{a}+1/2 \end{cases}$$

Preuve.
Utilisons le lemme précédent en prenant $\kappa\ = 0$.

1. Si $|T| < \mathfrak{a}+1/2$:

$$\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{\mathfrak{a}+1/2}{2} + i\frac{T}{2}\Big) \leq |R_1(\mathfrak{a}+1/2,T)| \qquad (60)$$

avec

$$R_1(\mathfrak{a}+1/2,T) = \frac{1}{2}\log\Big(\frac{(\mathfrak{a}+1/2)^2}{4} + \frac{T^2}{4}\Big) - \frac{\mathfrak{a}+1/2}{(\mathfrak{a}+1/2)^2+T^2} + \frac{1}{T}\arctan\frac{T}{\mathfrak{a}+1/2} \quad (61)$$

(a) Si $\mathfrak{a}=0$, $T \mapsto R_1(1/2,T)$ est négative dans $[0,1/2]$. Donc (61) devient :

$$\Big|\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\Big)\Big| \le -R_1(1/2,T) \le \frac{1}{2}\log\frac{16}{1+4T^2} + \frac{2}{1+4T^2} - \frac{\pi}{2} \quad (62)$$

(b) Si $\mathfrak{a}=1$, $T \mapsto R_1(3/2,T)$ est successivement négative puis positive dans $[0,3/2]$ et donc :

$$\Re\Big|\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{3}{4}+i\frac{T}{2}\Big)\Big| \le -R_1(3/2,T) \le \frac{1}{2}\log\frac{16}{1+4T^2} + \frac{2}{1+4T^2} - \frac{\pi}{6} \quad (63)$$

2. Si $|T| \ge \mathfrak{a}+1/2$, nous avons :

$$\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{\mathfrak{a}+1/2}{2}+i\frac{T}{2}\Big) \le \log\frac{T}{2} + |R_3(\mathfrak{a}+1/2,T)| \quad (64)$$

avec

$$R_3(\mathfrak{a}+1/2,T) = -\frac{\mathfrak{a}+1/2}{(\mathfrak{a}+1/2)^2+T^2} + \frac{1}{3(\mathfrak{a}+1/2)T} + \frac{(\mathfrak{a}+1/2)^2}{2T^2} \quad (65)$$

Comme $T \mapsto R_3(\mathfrak{a}+1/2,T)$ est toujours positive dans $[\mathfrak{a}+1/2,+\infty[$, nous avons :

$$\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{\mathfrak{a}+1/2}{2}+i\frac{T}{2}\Big) \le \log\frac{T}{2} + R_3(\mathfrak{a}+1/2,T) \le \log\frac{T}{2} - \frac{2}{1+4T^2} + \frac{2}{3T} + \frac{9}{8T^2} \quad (66)$$

$\square$

4 Etude de Δ_1.

Rappelons que les termes étudiés sont

$$\Delta_1(\sigma+it) = -\frac{1-\kappa}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{\sigma}{2}+1+i\frac{t}{2}\Big) - \frac{\kappa}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{\sigma+\delta}{2}+1+i\frac{t}{2}\Big)$$

$$\text{et}\quad \Delta_1(\sigma+it,\chi) = \frac{1-\kappa}{2}\log\frac{q}{\pi} + \frac{1}{2}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{\sigma+\mathfrak{a}+it}{2}\Big) - \frac{\kappa}{2}\,\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{\sigma+\mathfrak{a}+\delta+it}{2}\Big)$$

Lemme 4.1.
Soit σ un réel positif vérifiant $0 < \sigma_0 \le \sigma \le \sigma_1$ et $t_0 > 0$.

1. *Cas d'un caractère primitif principal :*

$$\Delta_1(\sigma + ik\gamma_0) \le \begin{cases} c_1(0) & \text{si } k = 0 \\ \frac{1-\kappa}{2}\log\gamma_0 + c_1(k) & \text{si } k \ge 1 \text{ et } |\gamma_0| \ge t_0 \\ c_1'(k) & \text{si } k \ge 1 \text{ et } |\gamma_0| < t_0 \end{cases} \tag{67}$$

2. *Cas d'un caractère primitif non principal :*

$$\Delta_1(\sigma + ik\gamma_0, \chi_{(k)}) \le \begin{cases} \frac{1-\kappa}{2}\log q + C_1(0) & \text{si } k = 0 \\ \frac{1-\kappa}{2}\log q_k\gamma_0 + C_1(k) & \text{si } k \ge 1 \text{ et } |\gamma_0| \ge t_0 \\ \frac{1-\kappa}{2}\log q_k + C_1'(k) & \text{si } k \ge 1 \text{ et } |\gamma_0| < t_0 \end{cases} \tag{68}$$

où c_1, c_1', C_1 et C_1' sont définis par :

$$\begin{cases} c_1(0) &= -\frac{1-\kappa}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\sigma_1}{2} + 1\right) - \frac{\kappa}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\sigma_0+\delta}{2} + 1\right) \\ c_1(k) &= (1-\kappa\ )\left(\gamma + \frac{1}{2}\log\frac{k}{4\pi}\right) + \frac{1}{2}\min(r_2, r_3) \\ c_1'(k) &= (1-\kappa\ )\left(\gamma - \frac{\log 2\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\min(r_1, r_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1(0) &= -\frac{1-\kappa}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\sigma_1+1}{2}\right) - \frac{\kappa}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\sigma_0+\delta}{2}\right) \\ C_1(k) &= \frac{1-\kappa}{2}\log\frac{k}{2\pi} + \frac{1}{2}\min(r_2, r_3) \\ C_1'(k) &= -\frac{1-\kappa}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\min(r_1, r_4) \end{cases}$$

$$\textit{avec} \qquad r_i = r_i(\sigma_0 + 2, \sigma_1 + 2, kt_0) \qquad (i = 1,2,3,4)$$

Preuve.

1. Cas d'un caractère primitif principal :
   (a) Si $k = 0$, nous avons immédiatement grâce à la croissance de $\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ sur $[0;+\infty[$:

$$\Delta_1(\sigma) \le -\frac{1-\kappa}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\sigma_1}{2} + 1\right) - \frac{\kappa}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\sigma_0+\delta}{2} + 1\right) = c_1(0) \tag{69}$$

(b) Si $k \geq 1$, nous utilisons le lemme 3.1 en prenant $x_0 = \sigma_0 + 2$, $x_1 = \sigma_1 + 2$ et $y_0 = kt_0$:

i. Si $\gamma_0 \geq t_0$:

$$\begin{aligned}\Delta_1(\sigma + ik\gamma_0) &\leq \frac{1-\kappa}{2}\log\frac{\gamma_0}{2} + (1-\kappa\ )\Big(\gamma + \frac{1}{2}\log\frac{k}{2\pi}\Big)\\ &+ \frac{1}{2}\min(r_2(\sigma_0+2,\sigma_1+2,kt_0),r_3(\sigma_0+2,\sigma_1+2,kt_0))\\ &= \frac{1-\kappa}{2}\log\gamma_0 + (1-\kappa\ )\Big(\gamma + \frac{1}{2}\log\frac{k}{4\pi}\Big)\\ &+ \frac{1}{2}\min(r_2(\sigma_0+2,\sigma_1+2,kt_0),r_3(\sigma_0+2,\sigma_1+2,kt_0))\\ &= \frac{1-\kappa}{2}\log\gamma_0 + c_1(k)\end{aligned}$$

ii. Si $\gamma_0 < t_0$:

$$\begin{aligned}\Delta_1(\sigma + ik\gamma_0) &\leq (1-\kappa\ )\Big(\gamma - \frac{\log 2\pi}{2}\Big)\\ &+ \frac{1}{2}\min(r_1(\sigma_0+2,\sigma_1+2,kt_0),r_4(\sigma_0+2,\sigma_1+2,kt_0)) = c_1'(k)\end{aligned}$$

2. Cas d'un caractère primitif non principal :

(a) Si $k = 0$, il vient directement :

$$\begin{aligned}\Delta_1(\sigma) &\leq \frac{1-\kappa}{2}\log q - \frac{1-\kappa}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{\sigma_1+1}{2}\Big)\\ &- \frac{\kappa}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{\sigma_0+\delta}{2}\Big) = \frac{1-\kappa}{2}\log q + C_1(0)\end{aligned} \tag{70}$$

(b) Si $k \geq 1$, nous utilisons le lemme (3.1) en prenant $x_0 = \sigma_0$, $x_1 = \sigma_1 + 1$, $y_0 = kt_0$:

i. Si $\gamma_0 \geq t_0$:

$$\begin{aligned}\Delta_1(\sigma + ik\gamma_0,\chi_{(k)}) &\leq \frac{1-\kappa}{2}\log q_k\gamma_0 + \frac{1-\kappa}{2}\log\frac{k}{2\pi}\\ &+ \frac{1}{2}\min(r_2(\sigma_0,\sigma_1+1,kt_0),r_3(\sigma_0,\sigma_1+1,kt_0))\\ &= \frac{1-\kappa}{2}\log q_k\gamma_0 + C_1(k)\end{aligned}$$

ii. Si $\gamma_0 < t_0$:

$$\begin{aligned}\Delta_1(\sigma + ik\gamma_0,\chi_{(k)}) \leq \frac{1-\kappa}{2}\log\frac{q_k}{\pi} + \frac{1}{2}\min(r_1(\sigma_0,\sigma_1+1,kt_0),\\ r_4(\sigma_0,\sigma_1+1,kt_0))\\ = \frac{1-\kappa}{2}\log q_k - \frac{1-\kappa}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\min(r_1(\sigma_0,\sigma_1+1,kt_0),\\ r_4(\sigma_0,\sigma_1+1,kt_0))\\ = \frac{1-\kappa}{2}\log q_k + C_1'(k)\end{aligned}$$

□

5 Etude de Δ_2.

Nous rappelons que les termes étudiés sont :

$$T_2(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\Big)\Re\frac{F_2(\sigma-1/2-i(T-t))}{(\sigma-1/2-i(T-t))^2}dT + \Re\frac{F_2(s)}{s^2}$$

$$\text{et}\quad T_2(s,\chi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{\mathfrak{a}+1/2}{2}+i\frac{T}{2}\Big)\Re\frac{F_2(\sigma-1/2-i(T-t))}{(\sigma-1/2-i(T-t))^2}dT + \frac{1-\mathfrak{a}}{2}\Re\frac{F_2(s)}{s^2}$$

Lemme 5.1.
Soit $t_1 \geq 0$. Si $\gamma_0 \geq t_1$, alors

1. Cas d'un caractère primitif principal :

$$\Delta_2(\sigma+ik\gamma_0) \leq c_4(\eta,k) \quad (0\leq k\leq 4) \tag{71}$$

$$\text{avec}\quad \begin{cases} c_4(\eta,k) & = & c_{41}(\eta,k)+c_{42}(\eta,k)\\ c_{41}(\eta,k) & = & c_{40}(\eta,\sigma_0-1/2,kt_1)+\kappa\ c_{40}(\eta,\sigma_0-1/2+\delta,kt_1)\\ c_{40}(\eta,x,y) & = & \frac{m\eta^3}{2\pi x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{U_0(T)}{x^2+(T-y)^2}dT\\ c_{42}(\eta,k) & = & \begin{cases}\Big(\frac{1}{\sigma_0^3}+\frac{\kappa}{(\sigma_0+\delta)^3}\Big)m\eta^3 & \text{si } t_1=0 \text{ ou } k=0\\ \Big(\frac{1}{\sigma_0}+\frac{\kappa}{\sigma_0+\delta}\Big)\frac{m\eta^3}{(kt_1)^2} & \text{sinon}\end{cases}\end{cases} \tag{72}$$

2. Cas d'un caractère primitif non principal :

$$\Delta_2(\sigma + ik\gamma_0,\chi) \leq C_4(\eta,k) \quad (0 \leq k \leq 4) \tag{73}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} C_4(\eta,k) & = & C_{41}(\eta,k) + \frac{1}{2}c_{42}(\eta,k) \\ C_{41}(\eta,k) & = & C_{40}(\eta,\sigma_0 - 1/2,kt_1) + \kappa\ C_{40}(\eta,\sigma_0 - 1/2 + \delta,kt_1) \end{cases} \tag{74}$$

$$\text{où } C_{40} \text{ est donné par} \quad C_{40}(\eta,x,y) = \frac{m\eta^3}{2\pi x}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(T)}{x^2+(T-y)^2}dT. \tag{75}$$

Preuve.
Nous donnons le détail des majorations pour $\Delta_2(s,\chi_0)$, le cas de $\Delta_2(s,\chi_0)$ se traitant exactement de la même manière.

1. Étudions d'abord le terme intégral.

$$\Big|\int_{-\infty}^{+\infty} \Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\Big)\Re\frac{F_2(x-i(T-y))}{(x-i(T-y))^2}dT\Big| \leq \int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\Big)\Big|\Big|\Re\frac{F_2(x-i(T-y))}{(x-i(T-y))^2}\Big|dT$$

Comme

$$\Big|\Re\frac{F_2(\sigma-1/2-i(T-t))}{(\sigma-1/2-i(T-t))^2}\Big| = \eta^2\Big|\int_0^{d_1(\theta)}\Re\frac{h"(t)e^{-(x-i(T-y))t/\eta}}{(x-i(T-y))^2}dt\Big|$$
$$= \eta^2\Big|\int_0^{d_1(\theta)} h"(t)\frac{e^{-xt/\eta}}{x^2+(T-y)^2}dt\Big| \leq \eta^2\int_0^{d_1(\theta)}|h"(t)|\frac{e^{-xt/\eta}}{x^2+(T-y)^2}dt$$

D'après le théorème de Fubini, nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\Big)\Big|\Big|\Re\frac{F_2(x-i(T-y))}{(x-i(T-y))^2}\Big|dT$$
$$\leq \eta^2\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\Big)\Big|\int_0^{d_1(\theta)}\frac{|h"(t)|\exp^{-xt/\eta}}{x^2+(T-y)^2}dt\,dT$$
$$= \eta^2 M\Big(\frac{x}{\eta}\Big)\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\Big)\Big|\frac{1}{x^2+(T-y)^2}dT$$

Enfin, en majorant $\left|\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right|$ grâce au lemme 3.2 et $M\Big(\frac{x}{\eta}\Big)$ par $\frac{m}{x}\eta$ nous obtenons :

$$\frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\infty}^{+\infty}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\Big)\Re\frac{F_2(x-i(T-y))}{(x-i(T-y))^2}dT\Big|$$
$$\leq \frac{m\eta^3}{2\pi x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{U_0(T)}{x^2+(T-y)^2}dT = c_{40}(\eta,x,y)$$

Notons que si l'intégrale qui intervient est de l'ordre de $\log t$, le η^3 qui la précède est de l'ordre de $1/\log^3 t$ ce qui fait qu'il est facile de montrer que cette quantité est décroissante en t et qu'elle est donc majorée par $c_{40}(\eta,x,kT_0)$. Notons

$$c_{41}(\eta,k) = C_{40}(\eta,\sigma_0-1/2,kt_1) + \kappa\ c_{40}(\eta,\sigma_0-1/2+\delta,kt_1) \tag{76}$$

2. Il nous reste à approcher $H(\sigma,k\gamma_0)$ grâce au lemme 2.2 :

$$|H(\sigma,k\gamma_0)| + \kappa\ |H(\sigma+\delta,k\gamma_0)| \leq c_{42}(\eta,k) \tag{77}$$

$$\text{avec}\quad c_{42}(\eta,k) = \begin{cases} \Big(\frac{1}{\sigma_0^3}+\frac{\kappa}{(\sigma_0+\delta)^3}\Big)m\eta^3 & \text{si } k=0 \\ \Big(\frac{1}{\sigma_0}+\frac{\kappa}{\sigma_0+\delta}\Big)\frac{m\eta^3}{(kT_0)^2} & \text{sinon} \end{cases} \tag{78}$$

□

6 Une généralisation du lemme de Stechkin.

Pour la suite nous introduisons les notations suivantes :

$$D(x+iy) = \tilde{F}(x,y) - \kappa\ \tilde{F}(x+\delta,y)$$

où δ et κ sont dans $[0,1]$.
Nous allons démontrer ici un résultat fondamental qui consiste en une généralisation du lemme de Stechkin.

Lemme 6.1. *(Stechkin - [31])*
Si $0<\beta\leq\frac{1}{2}$, $\Re s>1$, $\Im s\geq 0$, $\delta=\frac{1}{2}\big(1+\sqrt{1+4(\Re s)^2}\big)$, *alors*

$$\Re\Big(\frac{1}{s-\beta}\Big) - \frac{1}{\sqrt{5}}\Re\Big(\frac{1}{s-\beta+\delta}\Big) \geq 0$$

Nous noterons η la quantité $1-\beta$ et la supposerons minorée par une valeur η_0.

Proposition 6.2.
Soit $\sigma > \frac{1}{2}$. Pour $\beta \in [\frac{1}{2},\sigma]$ et $y > 0$, nous avons

$$D(\sigma-\beta+iy)+D(\sigma-1+\beta+iy)\geq 0$$

dès que $\delta \geq \delta_0$ et $0 \leq \kappa \leq \kappa_0$ où δ_0 est la solution de l'équation $\kappa_2(\delta)=\kappa_3(\delta)$, $\kappa_2(\delta)$ et $\kappa_3(\delta)$ étant respectivement définis en (79) et (80) et où κ_0 est la valeur en δ_0 de κ_2.

Preuve.
Nous cherchons le plus grand κ tel que

$$D(\sigma-\beta+iy)+D(\sigma-1+\beta+iy)\geq 0,$$

ce qui revient à minorer la fonction ci-dessus lorsque $\beta+iy$ parcourt $\mathbb{C}$. En fait, celle-ci étant harmonique sur $\mathbb{C}$ en tant que partie réelle de fonctions entières, nous pouvons nous restreindre au domaine $\{1-\sigma\beta \leq \sigma\ ,\ |y| \leq y_0\}$, où y_0 est un réel positif et étudier

$$Q(\beta+iy)=\frac{\tilde{F}(\sigma-\beta,y)+\tilde{F}(\sigma-1+\beta,y)}{\tilde{F}(\sigma+\delta-\beta,y)+\tilde{F}(\sigma+\delta-1+\beta,y)}$$

Nous allons tout d'abord vérifier que le dénominateur de Q ne s'annule jamais sur $\mathbb{C}$: la positivité de $\tilde{F}$ implique que $\tilde{F}(\sigma+\delta-\beta,y)+\tilde{F}(\sigma-1+\delta+\beta,y)$ s'annule si et seulement si $\tilde{F}(\sigma+\delta-\beta,y)$ et $\tilde{F}(\sigma-1+\delta+\beta,y)$ s'annulent. En utilisant les majorations du lemme 2.1, nous obtenons les deux inégalités :

$$\frac{g_1(\theta)(\sigma-\beta+\delta)}{(\sigma-\beta+\delta)^2+y^2}-\frac{m\eta_0^2}{(\sigma-\beta+\delta)((\sigma-\beta+\delta)^2+y^2)}\leq 0$$
$$\frac{g_1(\theta)(\sigma-1+\beta+\delta)}{(\sigma-1+\beta+\delta)^2+y^2}-\frac{m\eta_0^2}{(\sigma-1+\beta+\delta)((\sigma-1+\beta+\delta)^2+y^2)}\leq 0$$

ce qui équivaut à ce que $|\sigma-\beta+\delta|$ et $|\sigma-1+\beta+\delta|$ soient tous deux majorés par $\sqrt{\frac{m}{g_1(\theta)}}\eta_0$ et donc que δ soit majoré par le terme négatif $\sqrt{\frac{m}{g_1(\theta)}}\eta_0+1/2-\sigma$, ce qui est absurde.
Comme l'application $y_0 \mapsto \min_{1-\sigma\leq\beta\leq\sigma,|y|\leq y_0} Q(\beta+iy)$ est décroissante sur $[0,+\infty[$, nous pouvons supposer y_0 assez grand, au moins supérieur à $\sigma-\beta$ et $\sigma-1+\delta$ (nous prendrons $y_0\geq 10$). Par ailleurs, en prenant pour domaine $|y|\leq y_0$ et $1-\sigma\leq\beta\leq\sigma$, comme $Q(1-z)=Q(z)$ et $Q(\overline{z})=Q(z)$, il nous suffit de nous restreindre aux deux côtés : $(y=y_0,\ 1/2\leq\beta\leq\sigma)$ et $(0\leq y\leq y_0,\ \beta=\sigma)$.
Dans le premier cas, nous minorons $Q(\beta+iy_0)$ par le terme $Q_1(\sigma,\beta,y_0)$:

$$\frac{g_1(\theta)\left(\frac{(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+y_0^2}+\frac{(\sigma-1+\beta)}{(\sigma-1+\beta)^2+y_0^2}\right)-H(\sigma-\beta,y_0)-H(\sigma-1+\beta,y_0)}{g_1(\theta)\left(\frac{(\sigma-\beta+\delta)}{(\sigma-\beta+\delta)^2+y_0^2}+\frac{(\sigma-1+\beta+\delta)}{(\sigma-1+\beta+\delta)^2+y_0^2}\right)+H(\sigma-\beta+\delta,y_0)+H(\sigma-1+\beta+\delta,y_0)}$$

et nous minorons chaque valeur de H grâce au lemme 2.2 :

$$\begin{aligned}
H(\sigma-\beta,y_0) &\leq \frac{3my_0^3\eta^4}{((\sigma-\beta)^2+y_0^2)^3}+\frac{M_1(0)\eta^3}{((\sigma-\beta)^2+y_0^2)^{3/2}}\\
&\leq (3m\eta_0+2249.79)\frac{\eta_0^3}{y_0^3}\\
H(\sigma-1+\beta,y_0) &\leq \frac{3my_0^3\eta^3(\sigma-1+\beta)}{((\sigma-1+\beta)^2+y_0^2)^3}+\frac{m_1\eta^4/(\sigma-1+\beta)}{((\sigma-1+\beta)^2+y_0^2)^{3/2}}\\
&\leq \left(3m\eta_0^3+\frac{m_1\eta_0^4}{\sigma_0-1/2}\right)\frac{1}{y_0^3}\\
H(\sigma-\beta+\delta,y_0) &\leq \frac{3my_0^3\eta^3(\sigma-\beta+\delta)}{((\sigma-\beta+\delta)^2+y_0^2)^3}+\frac{m_1\eta^4/(\sigma-\beta+\delta)}{((\sigma-\beta+\delta)^2+y_0^2)^{3/2}}\\
&\leq \left(3m\eta_0^3+\frac{m_1\eta_0^4}{\delta}\right)\frac{1}{y_0^3}\\
H(\sigma-1+\beta+\delta,y_0) &\leq \frac{3my_0^3\eta^3(\sigma-1+\beta+\delta)}{((\sigma-1+\beta+\delta)^2+y_0^2)^3}+\frac{m_1\eta^4/(\sigma-1+\beta+\delta)}{((\sigma-1+\beta+\delta)^2+y_0^2)^{3/2}}\\
&\leq \left(3m\eta_0^3+\frac{m_1\eta_0^4}{\delta}\right)\frac{1}{y_0^3}
\end{aligned}$$

nous avons ainsi :

$$Q_1(\sigma,\beta,y_0)\geq\frac{g_1(\theta)(2\sigma-1)\frac{y_0^2}{y_0^2+1}-\left[(3m+3m\eta_0+M_1(0))\eta_0^3+\frac{m_1}{1/2-\eta_0}\eta_0^4\right]\frac{1}{y_0}}{g_1(\theta)(2\sigma+2\delta-1)+\left[6m\eta_0^3+\frac{2m_1}{\delta}\eta_0^4\right]\frac{1}{y_0}}$$

Nous voyons facilement que le terme de droite est une fonction croissante en la variable σ, donc on peut la minorer par sa valeur en σ_0, valeur que nous noterons $\kappa_1(y_0,\delta)$. Regardons maintenant Q sur l'autre côté $0\leq y\leq y_0$, $\beta=\sigma$. Nous allons utiliser le lemme 2.1 pour $\tilde{F}(2\sigma-1,y)$, $\tilde{F}(\delta,y)$ et $\tilde{F}(2\sigma-1+\delta,y)$. Pour $\tilde{F}(0,y)$, le lemme ne suffit plus lorsque y est proche de 0. A la place, nous utilisons la positivité de $\tilde{F}$ et nous minorons ainsi $Q(\sigma+iy)$ par :

$$\frac{1}{(2\sigma-1)^2+y^2}\;\frac{g_1(\theta)(2\sigma-1)-m\eta_0^2/(2\sigma-1)}{\frac{\delta g_1(\theta)+m\eta_0^2/\delta}{\delta^2+y^2}+\frac{(2\sigma-1+\delta)g_1(\theta)+m\eta_0^2/(2\sigma-1+\delta)}{(2\sigma-1+\delta)^2+y^2}}$$

puis par

$$Q_2(y)=\frac{1}{1+y^2}\;\frac{g_1(\theta)(1-2\eta_0)-m\eta_0^2/(1-2\eta_0)}{\frac{\delta g_1(\theta)+m\eta_0^2/\delta}{\delta^2+y^2}+\frac{(\delta+1)g_1(\theta)+m\eta_0^2/(\delta+1-2\eta_0)}{(\delta+1-2\eta_0)^2+y^2}}$$

Nous étudions le sens de variation de Q_2 et pour cela regardons le signe du dénominateur de sa dérivée. A un facteur positif près, nous trouvons le trinôme du second degré suivant : $Q_3(y)=d_2y^2+d_1(\theta)y+d_0$, où les d_i sont des fonctions polynômes de δ.

d_2 est positif pour $\delta \leq 0.07$, négatif sinon et le discriminant de Q_3 est toujours positif pour $\delta \geq 0.03$. Supposons $\delta > 0.07$.
Alors $Q_3(y) \geq 0$ est successivement positive puis négative sur $[0, +\infty[$ et donc Q_2 est d'abord croissante puis décroissante et son minimum est à déterminer entre $Q_2(0)$ et $Q_2(y_0)$.
En fait nous pouvons même regarder sans trop de perte la limite de Q_2 en l'infini au lieu de $Q_2(y_0)$. Nous noterons respectivement ces valeurs $\kappa_2(\delta)$ et $\kappa_3(\delta)$:

$$\kappa_2(\delta) = \frac{g_1(\theta)(1-2\eta_0) - m\eta_0^2/(1-2\eta_0)}{(1+2\delta)g_1(\theta) + \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{1+\delta-2\eta_0}\right)m\eta_0^2} = \frac{1}{1+2\delta} + \mathcal{O}(\eta_0) \tag{79}$$

$$\kappa_3(\delta) = \frac{g_1(\theta)(1-2\eta_0) - m\eta_0^2/(1-2\eta_0)}{\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1+\delta}{(1+\delta-2\eta_0)^2}\right)g_1(\theta) + \left(\frac{1}{\delta^3} + \frac{1}{(1+\delta-2\eta_0)^3}\right)m\eta_0^2} = \frac{1}{\frac{1}{\delta} + \frac{1}{1+\delta}} + \mathcal{O}(\eta_0) \tag{80}$$

En remarquant que $\kappa_1(.,\delta)$ est une fonction décroissante et que $\kappa_2(\delta) \leq \kappa_1(10,\delta)$, nous voyons qu'il ne reste plus pour conclure qu'à choisir la valeur optimale de $\min(\kappa_2(\delta),\kappa_3(\delta))$ lorsque $\delta \in [0,1]$. A un $\mathcal{O}(\eta_0)$ près, nous prenons donc δ tel que :

$$\frac{1}{1+2\delta} = \frac{1}{\frac{1}{\delta} + \frac{1}{1+\delta}} \quad \text{et donc} \quad \kappa = \frac{1}{1+2\delta}$$

C'est à dire qu'à un $\mathcal{O}(\eta_0)$ près, $\delta = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803 + \mathcal{O}^*(10^{-5})$ et $\kappa = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.44721 + \mathcal{O}^*(10^{-5})$. $\square$

Deuxième partie

Une région sans zéro explicite pour la fonction ζ de Riemann

7 Introduction

Depuis l'article de Riemann en 1860 (cf. [27]), nous savons que la répartition des nombres premiers est étroitement liée à la répartition des zéros d'une fonction particulière, appelée depuis la fonction ζ de Riemann. Nous rappelons qu'elle est définie sur le demi-plan $\sigma > 1$ par :

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

où le produit porte sur les nombres premiers.
La série ci-dessus converge absolument et uniformément dans le demi-plan $\sigma \geq \sigma_0$, pour tout $\sigma_0 > 1$. La fonction se prolonge en une fonction holomorphe dans le plan complexe sauf en 1, qui est pôle unique et en lequel elle a pour résidu 1. Elle vérifie l'équation fonctionnelle suivante sur le plan complexe tout entier :

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s)$$

Les zéros sur l'axe réel de la fonction $\zeta(s)$ sont donc les pôles de $\Gamma(s/2+1)$, c'est à dire les entiers $-2n$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Elle a en outre une infinité de racines imaginaires dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1. Nous appellerons $Z(\zeta)$ l'ensemble de ces zéros dits non-triviaux et les noterons $\varrho = \beta + i\gamma$. Ils se répartissent symétriquement par rapport à l'axe réel et par rapport à l'axe $\sigma = 1/2$.
L'hypothèse de Riemann affirme qu'en fait, ils se trouvent tous sur la droite $\sigma = 1/2$. Mais cette conjecture n'a encore été ni démontrée ni contredite.
Van de Lune, te Riele et Winter l'ont cependant vérifiée en 1986 (cf. [33]) pour les zéros de partie imaginaire infèrieure à $5 \cdot 10^8$, ce qui concerne les $1.5 \cdot 10^9$ premiers zéros de la fonction ζ de Riemann. Ce résultat vient même d'être tout récemment amélioré par S.Wedeniwski jusqu'à une partie imaginaire de 3 330 657 430.697.
En attendant, nous disposons de résultats plus faibles. S'il est facile de voir que $\zeta(s) \neq 0$ lorsque $\sigma > 1$, Hadamard (voir [10]) et De La Vallée Poussin (cf. [6]) en 1896 établissent séparément que $\zeta(s) \neq 0$ si $\sigma = 1$ et en déduisent le théorème des nombres premiers.
En 1899, De La Vallée Poussin (cf. [7]) montre plus précisément que $\zeta(s)$ n'a pas de zéros dans la région

$$\sigma \geq 1 - \frac{1}{R_0 \log|t|} \qquad (|t| \geq 3)$$

avec $R_0 = 34.82$.
B.Rosser améliore la constante R_0 notamment en modifiant le polynôme trigonométrique (voir ci-après) et en 1939 il obtient $R_0 = 19$ (cf. [28]) puis avec L.Schoenfeld en 1962, $R_0 = 17.516$ (cf. [29]). En 1975, dans [30], ces derniers reprennent une idée fondamentale due à Stechkin (cf. lemme 2 [31]) et descendent jusqu'à $R_0 = 9.645908801$.
Beaucoup plus récemment et avec une méthode différente, K.Ford (cf. Théorème 4, [8]) atteint la valeur 8.463.

En se basant sur la majoration de $\zeta(s)$ lorsque $\sigma = 1$ donnée par la méthode de Korobov et Vinogradov (cf. [15]), il est possible d'obtenir une région sans zéros du type :

$$\sigma > 1 - \frac{1}{R_0'(\log t)^{2/3}(\log\log t)^{1/3}} \qquad (|t| \geq 10)$$

En 1994, O.V.Popov (cf. [24]) trouve $R_0' = 14518$, ce qui a été amélioré en 2000 par Y.Cheng qui montre que $R_0' = 990$ est admissible. Il en déduit qu'il y a un nombre premier entre x^3 et $(x+1)^3$ lorsque $x \geq e^{e^{44.06}}$ (cf. [4]). Le dernier résultat en date est celui de Ford avec $R_0' = 57.54$ (cf. [8]).

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 7.1 (Principal).
Si $\varrho = \beta + i\gamma$ est un zéro non trivial de la fonction ζ de Riemann, alors :

$$(1-\beta)\log|\gamma| \geq \frac{1}{R_0} \qquad \text{où} \qquad R_0 = 5.70175$$

Notons que la région sans zéro induite par ce théorème est plus fine que celle de Ford-Vinogradov jusqu'à une hauteur de $|\Im s| \leq e^{5511}$.

Rappelons les trois points fondamentaux autour desquels s'articule la preuve d'un tel résultat. Tout repose d'abord sur une expression de la partie réelle de $-(\zeta'/\zeta)(s) = \sum_{n\geq 1}\Lambda(n)n^{-s}$, en fonction des zéros de la fonction ζ de Riemann. Pour cela, il y a deux approches :

1. celle, dite globale, de De La Vallée Poussin qui regarde tous les zéros avec la relation

$$\Re\Big(\frac{-\zeta'}{\zeta}(s)\Big) = \gamma - \frac{\log 2\pi}{2} + \frac{1}{2}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s}{2}+1\Big) + \Re\Big(\frac{1}{s-1}\Big) - \sum_{\varrho\in Z(\zeta)}\Re\Big(\frac{1}{s-\varrho}\Big) \qquad (81)$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni.

2. celle, dite locale, de Landau qui s'attache aux zéros “proches” de s avec la majoration

$$\Re\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\Big) = -\sum_{|s-\varrho|\leq\frac{c}{\log\Im s}} \Re\Big(\frac{1}{s-\varrho}\Big) + \mathcal{O}\big(\log\Im s\big) \tag{82}$$

Le second point essentiel de la preuve consiste en la positivité de la somme sur les zéros $\sum_\varrho \Re\Big(\frac{1}{s-\varrho}\Big)$ lorsqu'on suppose $\Re s > 1$.
Enfin, la preuve s'achève avec un autre argument de positivité. Si $P(\theta) = \sum_{k=0}^{K} a_k \cos(k\theta)$ est un polynôme trigonométrique vérifiant $a_k \geq 0$ et $P(\theta) \geq 0$, alors on a :

$$\Re\sum_{k=0}^{K} a_k \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+ikt}} \geq 0$$

En ce qui concerne le travail présenté ici, nous reprendrons une idée exploitée entre autres par Stechkin et Heath-Brown, et qui consiste à multiplier la fonction de Von Mangoldt $\Lambda(n)$ par une fonction lisse positive $g(\log n)$ tout en conservant la positivité de la somme sur les zéros. Par exemple Stechkin (cf. [31]) prend $g(x) = 1-\kappa\, e^{-\delta x}$ où κ et δ sont deux réels positifs. Quant à Heath-Brown, il propose une formule plus compliquée (cf. [12] et le paragraphe 9.2), l'essentiel pour g étant d'être de classe C^2 dans $]0, +\infty[$, à support compact et, comme nous allons le voir, à transformée de Laplace positive. En fait, nous considèrerons le produit de leurs deux fonctions.
Les formules de Weil (voir [36]) s'appliquent alors et donnent une formule impliquant la somme sur tous les zéros (voir le paragraphe 9.1) :

$$\begin{aligned}\Re\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} g(\log n)\right) = g(0)\ \Re\left(\gamma - \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s}{2}+1\Big)\right)\\ + \Re G(s-1) - \sum_{\varrho\in Z(\zeta)} \Re G(s-\varrho) + \Re R(s)\end{aligned}$$

où G est la transformée de Laplace de g

$$G(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} g(t)\, dt = \frac{g(0)}{z} + \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} e^{-zt} g'(t)\, dt$$

et où $R(s)$ est un terme reste sous la condition $G(z) - g(0)/z = \mathcal{O}(1/|z|^2)$.
En remarquant que la transformée de Laplace de la fonction constante égale à 1 est $\frac{1}{z}$, et en rappelant que l'inégalité $\Re\frac{1}{z} > 0$ si $\Re z > 0$ est fondamentale pour traiter la

somme sur les zéros, nous souhaiterions imposer à g que sa transformée de Laplace vérifie :

$$\Re G(z) \geq 0 \quad \text{si} \quad \Re z > 0$$

C'est la condition principale qu'impose Heath Brown. Ayant une approche "locale", il se doit alors de contrôler la taille de la somme partielle sur les zéros à une distance au plus M d'un point de l'axe $\Re s = 1$, ainsi que celle du terme reste. Avec $M = \frac{1}{\log q}$, ce dernier est d'ordre $\mathcal{O}\left(\frac{\log q}{\log\log q}\right)$, où la constante implicite est numériquement trop grande.
Nous affaiblissons ici cette condition en utilisant la symétrie des zéros non triviaux et généralisons le lemme de Stechkin (cf. lemme 2, [31]) en montrant que

$$\Re G(s-\varrho) + \Re G(s+1-\overline{\varrho}) \geq 0 \qquad \text{si} \quad \Re(s-\varrho) > 0$$

(voir le paragraphe 9.4), de sorte que nous considérons plus de zéros à chaque fois. Nous pouvons alors repousser les zéros plus loin de l'axe $\Re s = 1$, jusqu'à une distance constante. Le terme reste est alors d'ordre $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log q}\right)$ et la constante implicite est ici raisonnable.
En prenant $\Re s > 1$, une telle démonstration apporterait déjà une amélioration à la constante de Rosser et Schoenfeld. Or la fonction g est à support compact, ce qui nous permet de prendre $\Re s \leq 1$.
Pour ce qui est de la somme

$$\sum_{\{\varrho \in Z(\zeta), \Re(s-\varrho) \leq 0\}} \Re G(s-\varrho),$$

nous montrerons que c'est un terme reste (voir le paragraphe 9.4).
Enfin, nous conservons l'argument trigonométrique final en considérant un polynôme de degré 4 proche de celui introduit par Rosser et Schoenfeld (voir le paragraphe 9.3).

Nous donnons dans la partie 9 tous les résultats nécessaires à l'établissement de notre résultat et nous y fixons nos notations. Pour le détail des preuves, nous nous reporterons ensuite à la section 10.

8 Introduction (english version)

We recall that the Riemann zeta function is defined for $\sigma > 1$ by :

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

where the product extends over all prime numbers.
The series is absolutely and uniformely convergent in the half plane $\Re s \geq \sigma_0$, for any $\sigma_0 > 1$. The function is meromorphically continued to the whole complex plane, except at the point 1, which is a unique pole and for which the residue is 1. And it satisfies the functionnal equation :

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s)$$

The function $\zeta(s)$ also vanishes on the real axis at the poles of $\Gamma(s/2+1)$, that is to say at integers $-2n$, where $n \in \mathbb{N}^*$. Moreover, it has infinitely many zeros with real part in [0,1]. They are called non-trivial and denoted by $\varrho = \beta + i\gamma$. We call $Z(\zeta)$ the set of all non-trivial zeros. They are distribued symmetrically with respect to the real axis and to the line $\Re s = \frac{1}{2}$.
In fact, Riemann's hypothesis asserts that they all lie on this line, but it has not been yet either proved or disproved.
However, Van de Lune, te Riele and Winter have checked it in 1986 (see [33]) for the zeros of imaginary part bounded with $5 \cdot 10^8$, which concerned the $1.5 \cdot 10^9$ first of them. This result has just been improved by S.Wedeniwski until an imaginary part of 3 330 657 430.697.
Meanwhile, we get the following assertion. If it is obvious that

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{if} \quad \Re s > 1,$$

Hadamard (see [10]) and De La Vallée Poussin (see [6]) established in 1896 at the same time but separately that

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{if} \quad \Re s = 1,$$

and they deduced the prime number theorem from it.
In 1899, De La Vallée Poussin (see [7]) showed more precisely that $\zeta(s)$ never vanishes for

$$\Re s \geq 1 - \frac{1}{R_0 \log|\Im s|} \qquad (|\Im s| \geq 3)\ , \quad \text{where} \quad R_0 = 34.82.$$

B.Rosser improved the constant R_0 by using a different trigonometric polynomial (see thereafter) and in 1939 he obtained $R_0 = 19$ (see [28]) and then $R_0 = 17.516$ (see [29]) with L. Schoenfeld in 1962. In 1975 they used in [30] a main lemma of Stechkin (see lemma 2 in [31]) and they showed $R_0 = 9.645908801$.
More recently, and with a different point of vue, K. Ford (see Theorem 4 in [8]) found $R_0 = 8.463$.

In fact, he was interested in Korobov and Vinogradov zero-free region (see [15]) : by using majorations of $\zeta(1+it)$, it is possible to show that

$$\Re s > 1 - \frac{1}{R_0'(\log|\Im s|)^{2/3}(\log\log|\Im s|)^{1/3}} \qquad (|\Im s| \geq 10)$$

For example, O.V.Popov (see [24]) established in 1994 that $R_0' = 14518$ and Y.Cheng in 2000 that $R_0' = 990$ and deduced that there exist a prime number between x^3 and $(x+1)^3$ for $x \geq e^{e^{44.06}}$ (see [4]). The last result in this domain is due to K. Ford with $R_0' = 57.54$ (see [8]).

The purpose of this chapter is to establish a De La Vallée Poussin zero-free region :
Théorème 8.1 (Principal).
Let $\varrho = \beta + i\gamma$ be a non trivial zero of the Riemann zeta function, then :

$$(1-\beta)\log|\gamma| \geq \frac{1}{R_0} \qquad \textit{where} \qquad R_0 = 5.70175$$

Notice that the zero-free region induced by this theorem is better than Ford-Vinogradov's one for $|\Im s| \leq e^{5511}$.

Let us extract the three main ideas of this proof.

1. The key is to relate the sum $-(\zeta'/\zeta)(s) = \sum_{n\geq 1} \Lambda(n) n^{-s}$ to a sum over zeros. There are two ways of thinking :
   - a "global" one, like De La Vallée Poussin who considers all the zeros :
   $$\Re\Big(\frac{-\zeta'}{\zeta}(s)\Big) = \gamma - \frac{\log 2\pi}{2} + \frac{1}{2}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s}{2}+1\Big) + \Re\Big(\frac{1}{s-1}\Big) - \sum_{\varrho\in Z(\zeta)} \Re\Big(\frac{1}{s-\varrho}\Big) \tag{83}$$
   where γ is the Euler-Mascheroni's constant.
   - a "local" one, like Landau who restricts to the zeros close to s :
   $$\Re\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\Big) = -\sum_{|s-\varrho|\leq \frac{c}{\log \Im s}} \Re\Big(\frac{1}{s-\varrho}\Big) + \mathcal{O}\big(\log \Im s\big) \tag{84}$$
2. We study the size of the sum over the zeros. More precisely, we get the positivity of $\sum_\varrho \Re\Big(\frac{1}{s-\varrho}\Big)$ when $\Re s > 1$.
3. We introduce a non-negative trigonometric polynomial :
   $$P(\theta) = \sum_{k=0}^{K} a_k \cos(k\theta) \quad \text{where} \quad a_k \geq 0 \quad \text{and} \quad P(\theta) \geq 0$$
   which ensures us with the positivity of
   $$\Re \sum_{k=0}^{K} a_k \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+ikt}}$$

The proof elaborated here is inspired by an idea used among others by Stechkin and Heath-Brown : we multiply the Von Mangoldt function $\Lambda(n)$ by a smooth positive function $g(\log n)$ and at the same time we keep the positivity argument for the sum over the zeros. For instance, Stechkin (see [31]) chosed $g(x) = 1 - \kappa\ e^{-\delta x}$ where κ and δ are two positive reals. Heath-Brown took a more complicated g, (see [12] e and section 9.2), which is C^2 in $]0, +\infty[$, has a compact support and a Laplace transform with positive real part. In fact, we will consider the product of these two functions.
Weil formulas (see [36] and section 1) also work and yields:

$$\Re\left(\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}g(\log n)\right) = g(0)\ \Re\left(\gamma - \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right)\right) + \Re G(s-1) - \sum_{\varrho\in Z(\zeta)}\Re G(s-\varrho) + \Re R(s)$$

where G is the Laplace transform of g

$$G(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}g(t)\,dt = \frac{g(0)}{z} + \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} e^{-zt}g'(t)\,dt$$

and $R(s)$ is a remainder term when $G(z) - g(0)/z = \mathcal{O}(1/|z|^2)$.
Let us notice that the Laplace transform of the constant function 1 is $\frac{1}{z}$, and let us recall that the inequality $\Re\frac{1}{z} > 0$ when $\Re z > 0$ is fundamental to study the sum over the zeros. We also would like g to satisfy :

$$\Re G(z) \geq 0 \quad \text{when} \quad \Re z > 0$$

That is Heath Brown's condition. As he uses the "local" method, he also has to control the size of the partial sum over zeros distant by at most M from a point of the line $\Re s = 1$ and the size of the remainder term. With $M = \frac{1}{\log q}$, this one is of order $\mathcal{O}\left(\frac{\log q}{\log\log q}\right)$, but the implied constant is numerically too large.
Here, we weaken this hypothesis by using the symmetry of the non trivial zeros and use a generalized Stechkin's lemma proved in section 6 which asserts :

$$\Re G(s-\varrho) + \Re G(s+1-\overline{\varrho}) \geq 0 \quad \text{when} \quad \Re(s-\varrho) > 0,$$

so we consider twice more zeros. The advantage is that we can remove zeros at a further distance from the line $\Re s = 1$, in fact even at a constant distance. The remaining term stays of order $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log q}\right)$ with a decent implied constant.
With the condition $\Re s > 1$, such a proof already would improve Rosser and Schoenfeld's

result. But as the function g is compactly supported, we can even take $\Re s \leq 1$.
We will show that the following sum is a remainder term in section 9.4

$$\sum_{\varrho \in Z(\zeta), \Re(s-\varrho) \leq 0} \Re G(s-\varrho),$$

Finally, we use a trigonometric argument and consider a fourth degree polynomial, similar to the one used by Rosser and Schoenfeld (see section 9.3).

The following section explains all our arguments which are then proved in section 10.

9 Structure de la preuve.

Commençons par préciser nos paramètres.
Nous considérons un zéro non trivial $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ de la fonction ζ de Riemann et nous souhaitons montrer que ce zéro vérifie le théorème 8.1. La symétrie des zéros de ζ nous permet de nous limiter au cas où γ_0 est positif. De plus, comme tous les zéros de partie imaginaire positive inférieure à $T_0 = 3.3 \cdot 10^9$ sont connus (cf. [35]) et résident tous sur la droite critique, nous supposerons que γ_0 est supérieur à T_0. Enfin, nous supposerons que $(1-\beta_0)\log\gamma_0 \leq \frac{1}{5}$
Nous noterons η le réel $(1-\beta_0)$, s le nombre complexe $\sigma + it$, où $t \in [0, +\infty[$, R un réel pour lequel la région sans zéro est vérifiée et t_0 un réel supèrieur à 1. Nous écrirons η sous la forme $\frac{1}{r\log\gamma_0}$, où $5 \leq r \leq R$ en vertu de notre hypothèse, et σ sous la forme $1 - \frac{1}{R\log(4\gamma_0+t_0)}$. Grâce au résultat de Rosser (cf. [28]), nous prenons tout d'abord $R = 9.645908801$. Notamment, $\sigma \geq \sigma_0 = 1 - \frac{1}{9.645908801\log(4T_0+1)} \geq 0.99555$ et $\eta \leq \eta_0 = \frac{1}{r\log T_0} \leq \frac{1}{5\log T_0} \leq 0.00912$.
Dans la suite, κ , δ désignent des constantes qui dépendent et ne dépendent que de r et R. Cette dépendance est assez faible mais toutefois numériquement interessante.

9.1 Une formule explicite.

Nous obtenons d'après la formule (33) obtenue à la proposition 1.2 :

$$\mathcal{S}(s) = f(0)\Delta_1(s) + D(s-1) - \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} D(s-\varrho) \ + \Delta_2(s) \tag{85}$$

9.2 La fonction test f.

Nous considérons la fonction f définie au paragraphe 2. Nous rappelons qu'elle dépend des paramètres η et θ et en particulier :

$$f(0) = \eta g_1(\theta), \quad \tilde{F}(0{,}0) = g_2(\theta), \quad \tilde{F}(1-\beta_0{,}0) = g_3(\theta)$$

Nous prendrons $\theta = 1.848$ ce qui nous donnera

$$g_1(\theta) = 147.84112 + \mathcal{O}^*(10^{-5}), \quad g_2(\theta) = 62.17067 + \mathcal{O}^*(10^{-5}),$$
$$g_3(\theta) = 48.76676 + \mathcal{O}^*(10^{-5}), \quad d_1(\theta) = 1.05161 + \mathcal{O}^*(10^{-5}).$$

où $u = \mathcal{O}^*(v)$ signifie $|u| \leq v$.
D'après le lemme 2.1, nous rappelons que

$$\tilde{F}(x{,}y) = \eta g_1(\theta) \frac{x}{x^2+y^2} + H(x{,}y)$$

où la fonction H vérifie

$$|H(x{,}y)| \leq \frac{M(x/\eta)\eta^2}{x^2+y^2}$$

Avec les majorations :
lorsque z est proche de 0 $\quad 521.632z \leq M(z) \leq 521.633 - 212.573z + 68.114z^2$,
et sinon $\quad M(z) \leq m/z$, avec $m = 1322.86625 + \mathcal{O}^*(10^{-5})$.

9.3 Une inégalité trigonométrique.

Nous utilisons ici l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \cos(ky) = 8(0.91 + \cos y)^2 (0.265 + \cos y)^2 \geq 0,$$
$$\text{avec} \quad a_0 = 10.91692658, \quad a_1 = 18.63362, \quad a_2 = 11.4517,$$
$$a_3 = 4.7, \quad a_4 = 1, \quad A = \sum_{k=1}^{4} a_k = 35.78532.$$

En remarquant que

$$\sum_{n\geq 1} f(\log n) \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \Big(1 - \frac{\kappa}{n^\delta}\Big) \ \sum_{k=0}^{4} a_k \cos(k\gamma_0 \log n) \geq 0$$

$$\text{c'est à dire} \quad \sum_{k=0}^{4} a_k \mathcal{S}(\sigma + ik\gamma_0) \geq 0 \tag{86}$$

Et nous obtenons grâce à (87) l'inégalité fondamentale suivante :

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \Bigg(f(0)\Delta_1(\sigma+ik\gamma_0) + D(\sigma-1+ik\gamma_0) \\ - \sum_{\varrho\in Z(\zeta)} D(\sigma+ik\gamma_0-\varrho) \ + \Delta_2(\sigma+ik\gamma_0) \Bigg) \geq 0 \quad (87)$$

Il reste donc à trouver des majorations pour chacun des termes ci-dessus. C'est l'objet du paragraphe suivant.

9.4 La région sans zéros.

Les valeurs que nous donnons ici sont calculées pour $r = 5.97484$, $R = 9.645908801$. A la fin de ce paragraphe, la valeur $R = 5.97485$ est donc licite et nous pouvons recommencer les calculs, ce que nous avons fait. Mais l'étape principale est la première et elle permet en outre au lecteur de vérifier nos résultats.
Pour T_0, nous prendrons la valeur de S.Wedeniwski, c'est à dire très exactement 3 330 657 430.697. (La valeur finale obtenue pour R_0 sera alors améliorée d'un centième par rapport à la valeur T_0 de te Riele et Winter.)

Commençons par le terme $\Delta_1(s)$: lorsque t est non nul, $\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\big(\frac{s}{2}+1\big)$ est de l'ordre de $\log t$ (voir lemme 3.1 au paragraphe 3). Au paragraphe 10.1 nous établirons la proposition suivante :

Proposition 9.1. *Il existe une fonction $\mathcal{C}_1(\eta)$ qui vérifie*

$$f(0)\sum_{k=0}^{4} a_k\Delta_1(\sigma+ik\gamma_0) \leq \frac{A}{2}(1-\kappa\ )g_1(\theta)\eta\log\gamma_0 + \mathcal{C}_1(\eta).$$

On se repportera à (92) et au lemme 4.1, pour la définition de $\mathcal{C}_1(\eta)$ et

$$\mathcal{C}_1(\eta) \leq -2818.513\eta.$$

En ce qui concerne le terme $D(s)$, nous avons $\Re F(s-1) = \tilde{F}(\sigma-1{,}0)$ lorsque $t=0$. Sinon $\Re F(s-1)$ est de l'ordre de η/t^2 (voir le lemme 2.1) et nous montrerons au paragraphe 10.2 que

Proposition 9.2. *Il existe une fonction $\mathcal{C}_2(\eta)$ qui vérifie*

$$\sum_{k=0}^{4} a_k D(\sigma-1+ik\gamma_0) \leq a_0\tilde{F}(\sigma-1{,}0) + \mathcal{C}_2(\eta)$$

La fonction $C_2(\eta)$ est définie en (96) et

$$\mathcal{C}_2(\eta) \leq -1141.389\eta + 2.794 \cdot 10^{-15}\eta^2 + 26515.117\eta^3.$$

Le terme $\Delta_2(s)$ est un terme reste, de l'ordre de η^3 (voir le paragraphe 10.4). Nous montrerons au paragraphe 10.4 la proposition suivante :

Proposition 9.3. *Il existe une fonction $\mathcal{C}_4(\eta)$ qui vérifie*

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \Delta_2(\sigma + ik\gamma_0) \leq \mathcal{C}_4(\eta)$$

Les éléments qui définissent $\mathcal{C}_4(\eta)$ sont donnés en (110), (76) et (78) et

$$\mathcal{C}_4(\eta) \leq 2.334 \cdot 10^6 \eta^3$$

Nous en arrivons enfin au point essentiel, traité au paragraphe 10.3, qui est l'étude de la somme sur les zéros.

Pour cela, en nous inspirant de l'idée de Stechkin basée sur la symétrie des zéros de ζ, nous pouvons réécrire la première somme sous la forme :

$$\sum_{\varrho \in Z(\zeta)} D(s-\varrho) = D(s-\varrho_0) + D(s-1+\overline{\varrho_0})$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\varrho \in Z(\zeta) \setminus \{\varrho_0, 1-\overline{\varrho}_0\}} \Big[D(s-\varrho) + D(s-1+\overline{\varrho}) \Big]$$

La proposition 6.2 nous permet d'éliminer une partie des termes de la somme. Nous rappelons qu'elle affirme :

$$D(s-\varrho) + D(s-1+\overline{\varrho}) \geq 0$$
$$\text{lorsque } 1-\sigma < \beta < \sigma \ , \ \ \kappa \ = \kappa_{\ 0} \ \text{ et } \ \delta = \delta_0$$

où δ_0 est la solution de l'équation $\kappa_2(\delta) = \kappa_3(\delta)$, $\kappa_{\ 2}(\delta)$ et $\kappa_{\ 3}(\delta)$ étant respectivement définis en (79) et (80), et où $\kappa_{\ 0}$ est la valeur de $\kappa_{\ 2}$ en δ_0.

À un $\mathcal{O}(\eta_0)$ près, nous avons en fait que

$$\kappa_{\ 2}(\delta) = \frac{1}{1+2\delta} \quad \text{et} \quad \kappa_{\ 3}(\delta) = \frac{1}{\frac{1}{\delta} + \frac{1}{1+\delta}}$$

ce qui permet d'approcher δ_0 par $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\kappa_{\ 0}$ par $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Plus exactement, nous trouvons $\delta_0 = 0.62063 + \mathcal{O}^*(10^{-5})$ et $\kappa_{\ 0} = 0.4389 + \mathcal{O}^*(10^{-5})$.

Il reste alors à minorer la somme restante qui porte sur les zéros de partie réelle vérifiant $\sigma \leq \beta \leq 1$, ce qui revient à $\gamma \geq \gamma_0 + t_0$. Cette somme se trouve alors dépendre de la valeur t_0. Nous verrons à la proposition 10.3 comment la minorer et nous obtiendrons finalement :

Proposition 9.4. *Il existe une fonction $\mathcal{C}_3(\eta,t_0)$ qui vérifie*

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} D(\sigma + ik\gamma_0 - \varrho) \geq a_1 \tilde{F}(\sigma - \beta_0,0) - \mathcal{C}_3(\eta,t_0)$$

$\mathcal{C}_3(.,t_0)$ est une appplication polynôme du type $p_1\eta + p_2(t_0)\eta^2 + p_3(t_0)\eta^3$, où p_1 est une constante négative et où p_2 et p_3 sont deux applications positives et décroissantes, d'ordre $\frac{\log t_0}{t_0}$. Pour une définition plus explicite, nous nous reporterons à (108). En attendant, nous pouvons toujours voir que :

$$\mathcal{C}_3(\eta,t_0) \leq \mathcal{C}_3(\eta,1) \leq -53.717\eta + 103816.285\eta^2 + 1.677 \cdot 10^6 \eta^3.$$

Finalement, en notant $\mathcal{C}(\eta,t_0) = \mathcal{C}_1(\eta) + \mathcal{C}_2(\eta) + \mathcal{C}_3(\eta,t_0) + \mathcal{C}_4(\eta)$, nous tirons de l'inégalité fondamentale (87) :

$$0 \leq \frac{A}{2}(1-\kappa\ )g_1(\theta)\eta\log\gamma_0 + a_0\tilde{F}(\sigma - 1,0) - a_1\tilde{F}(\sigma - \beta_0,0) + \mathcal{C}(\eta,t_0)$$

soit encore

$$\eta \log \gamma_0 \geq \frac{a_1\tilde{F}(\sigma - \beta_0,0) - a_0\tilde{F}(\sigma - 1,0) - \mathcal{C}(\eta,t_0)}{\frac{A}{2}g_1(\theta)(1-\kappa\ )}$$

En fait, $\mathcal{C}(\eta,t_0)$ s'écrit sous la forme :

$$\alpha_1\eta + \alpha_2(t_0)\eta^2 + \alpha_3(t_0)\eta^3$$

où α_1 est une constante négative et où α_2 et α_3 sont, comme p_2 et p_3, deux fonctions de t_0, positives et décroissantes sur $[1,+\infty[$, d'ordre $\frac{\log t_0}{t_0}$. D'après les propriétés des coefficients α_i, on voit que $\mathcal{C}(.,t_0)$ admet trois racines réelles dont une est égale à zéro, les deux autres étant de signes opposés. $\mathcal{C}(.,t_0)$ est donc successivement négatif puis positif sur $[0,+\infty[$ et on obtient que $\mathcal{C}(.,t_0)$ est négatif sur $[0,\eta_0]$ en vérifiant que $\mathcal{C}(\eta_0,t_0)$ l'est, ce que l'on voit en regardant cette valeur en $t_0 = 1$: nous trouvons $\mathcal{C}(\eta_0,1) = -22.058$. La constante cherchée est ainsi donnée par

$$\frac{\frac{A}{2}g_1(\theta)(1-\kappa\ )}{a_1\tilde{F}(\sigma - \beta_0,0) - a_0\tilde{F}(\sigma - 1,0)} \tag{88}$$

qu'on optimise en σ.
En notant $\omega = \frac{1-\sigma}{\eta}$, le terme $a_1\tilde{F}(\sigma-\beta,0) - a_0\tilde{F}(\sigma-1,0)$ s'avère être une fonction de ω que nous noterons K :

$$K(\omega) = \int_0^{d_1(\theta)} (a_1 e^{-t} - a_0) h_\theta(t) e^{\omega t} d\,t$$

K est une fonction croissante sur $[0,1]$, sa valeur optimale est donc en $\omega = \frac{r \log T_0}{R \log(4T_0+1)}$, en vertu des hypothèses faites sur σ et η.
Les données initiales $r = 5.97484$, $R = 9.645908801$ nous amène à $R_0 = 5.97485$. Nous allons optimiser notre résultat en réitérant les calculs : remplaçons R par la valeur R_0 que nous venons de trouver et r par une valeur supérieure à celle que nous venons d'utiliser mais inférieure au futur R_0 (nous procédons par tatonnement). Les valeurs successives de r et R que nous obtenons ainsi forment deux suites décroissantes qui semblent tendre vers une valeur commune.
Nous donnons ci-dessous les valeurs successives prises pour r et R, et trouvées pour R_0 (il s'agit de la valeur suivante de R) avec une erreur à 10^{-5} près :

R	9.645908801	5.974849	5.730454	5.704873	5.70209	5.701786
r	5.97484	5.73045	5.70487	5.70208	5.70178	5.70174
R_0	5.974849	5.730454	5.704873	5.70209	5.701786	5.701753

Nous trouvons ainsi $R_0 = 5.70175$. Nous remarquerons que cette valeur est assez proche de la valeur optimale calculée en $\omega = \frac{r}{R}$ et qui vaut 5.65267.

Les calculs ont été menés à la fois sous MAPLE et sous PARI / GP avec une précision de 10^{-28} et dans chacun des cas, nous retrouvons les résultats annoncés.
Nous précisons qu'en utilisant le polynôme de Rosser et Schoenfeld, c'est à dire $8(0.9126+\cos y)^2(0.2766+\cos y)^2$, et en prenant $\theta = 1.848$, nous trouvons pour R_0 la valeur 5.70216.
D'autre part, en ce qui concerne le choix de la valeur de θ, nous remarquons que le terme final étudié en (88), est en fait une fonction depéndant uniquement des trois paramètres r, R et θ. Pour chaque étape décrite précédemment, c'est à dire pour chaque r et R choisi, nous pouvons donc calculer la valeur de θ en laquelle (88) est optimal.
En prenant pour donnes initiales $r = 5.97145$, $R = 9.645908801$, nous trouvons ainsi qu'en $\theta = 1.85362 + \mathcal{O}^*(10^{-5})$, la valeur R_0 vaut $5.97146 + \mathcal{O}^*(10^{-5})$ et en réitérant le procédé :

R	9.645908801	5.97146	5.73009	5.70484	5.70210	5.70180	5.70176
r	5.97145	5.73008	5.70483	5.70208	5.70178	5.70174	5.70174
θ	1.85362	1.84834	1.84781	1.84775	1.84774	1.84774	1.84774
R_0	5.97146	5.73009	5.70484	5.70210	5.70180	5.70176	5.70175

Finalement, par souci de clarté, nous avons choisi de fixer la valeur de θ à 1.848, d'autant plus que cela n'influe pas sur la précision donnée au résultat final.

10 Preuves

10.1 Preuve de la proposition 9.1 :

Rappelons que d'après les inégalités (67) établies au lemme 4.1, nous avons

$$\Delta_1(\sigma + ik\gamma_0) \leq \begin{cases} c_1(0) & \text{si } k = 0 \\ \frac{1-\kappa}{2}\log\gamma_0 + c_1(k) & \text{si } k \geq 1 \text{ et } |\gamma_0| \geq t_0 \end{cases} \tag{89}$$

Ainsi, en sommant pour $k = 0,1,2,3,4$:

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \Delta_1(\sigma + ik\gamma_0) \leq \frac{A(1-\kappa\ )}{2}\log\gamma_0 + c_1 \tag{90}$$

$$\text{avec} \quad c_1 = \sum_{k=0}^{4} a_k c_1(k) \tag{91}$$

et donc

$$f(0)\ \sum_{k=0}^{4} a_k \Delta_1(\sigma + ik\gamma_0) \leq \frac{A}{2}(1-\kappa\ )g_1(\theta)\ \eta\log\gamma_0 + \mathcal{C}_1(\eta)$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{C}_1(\eta) = c_1 g_1(\theta)\ \eta \leq -2718.913\eta \tag{92}$$

10.2 Étude de $D(s-1)$ - Preuve de la proposition 9.2 :

Lemme 10.1.
Soit t_0 un réel positif.

$$D(\sigma - 1 + ik\gamma_0) \leq \begin{cases} \tilde{F}(\sigma - 1,0) + c_2(\eta) & \text{si } k = 0 \\ C_2(k,\eta) & \text{si } k \geq 1 \text{ et } \gamma_0 \geq t_0 \end{cases} \tag{93}$$

$$\textit{avec} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} c_2(\eta) & = & -\kappa\ \frac{g_1(\theta)}{\delta}\eta + \kappa\ \frac{m}{\delta^3}\eta^3 \\ C_2(k,\eta) & = & -\kappa\ \frac{g_1(\theta)(\sigma_0 - 1 + \delta)}{2(kt_0)^2}\eta + \frac{M(-1)+\kappa\ m}{(kt_0)^2}\eta^2 \end{array} \right.$$

Preuve.
Nous utilisons simplement les majorations du lemme 2.1.

1. Dans le cas où $k = 0$:

$$\begin{aligned} D(\sigma-1) &= \tilde{F}(\sigma-1{,}0) - \kappa\ \tilde{F}(\sigma-1+\delta{,}0) \\ &\leq \tilde{F}(\sigma-1{,}0) - \ \kappa\ \left(\frac{g_1(\theta)}{\delta}\eta - \frac{m}{\delta^3}\eta^3\right) \end{aligned} \tag{94}$$

2. Dans le cas où $k \geq 1$ et $\gamma_0 \geq t_0$:

$$\begin{aligned} &\tilde{F}(\sigma-1{,}k\gamma_0) - \kappa\ \tilde{F}(\sigma-1+\delta{,}k\gamma_0) \\ &\leq M(-1)\frac{\eta^2}{(kt_0)^2} - \left(g_1(\theta)\frac{\sigma_0-1+\delta}{2}\eta - m\eta^2\right)\frac{\kappa}{(kt_0)^2} \end{aligned} \tag{95}$$

□

Finalement, en sommant le lemme 10.1 pour $k = 0{,}1{,}2{,}3{,}4$:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{4} a_k D(\sigma + ik\gamma_0) \leq a_0\tilde{F}(\sigma-1{,}0)\ +\ \mathcal{C}_2(\eta) \\ &\text{avec}\quad \mathcal{C}_2(\eta) = M(-1)\sum_{k=1}^{4}\frac{a_k}{(kT_0)^2}\eta^2 - \kappa\left(\left[a_0\frac{g_1(\theta)}{\delta} + \frac{\delta g_1(\theta)}{2}\sum_{k=1}^{4}\frac{a_k}{(kT_0)^2}\right]\eta \right. \\ &\qquad \left. - m\sum_{k=1}^{4}\frac{a_k}{(kT_0)^2}\eta^2 - a_0\frac{m}{\delta^3}\eta^3\right) \\ &\qquad \leq -1141.389\eta + 2.793\cdot 10^{-15}\eta^2 + 26515.116\eta^3 \end{aligned} \tag{96}$$

10.3 Étude de la somme sur les zéros

10.3.1 Cas $k = 1$ et $\varrho \in \{\varrho_0{,}1-\overline{\varrho}_0\}$:

Rappelons :

$$\begin{aligned} D(\sigma-\beta_0) &= \tilde{F}(\sigma-\beta_0{,}0) - \ \kappa\ \tilde{F}(\sigma-\beta_0+\delta{,}0) \\ D(\sigma-1+\beta_0) &= \tilde{F}(\sigma-1+\beta_0{,}0) - \ \kappa\ \tilde{F}(\sigma-1+\beta_0+\delta{,}0) \end{aligned}$$

D'après la décroissance de l'application $x \mapsto \tilde{F}(x{,}0)$ et le lemme 2.1, nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\sigma-1+\beta_0+\delta{,}0) \leq \tilde{F}(1-\eta_0+\delta{,}0) &\leq \frac{g_1(\theta)}{1-\eta_0+\delta}\eta + \frac{m}{(1-\eta_0+\delta)^3}\eta^3 \\ \tilde{F}(\sigma-\beta_0+\delta{,}0) &\leq \tilde{F}(\delta{,}0) \geq \frac{g_1(\theta)}{\delta}\eta + \frac{m}{\delta^3}\eta^3 \\ \tilde{F}(\sigma-1+\beta_0{,}0) &\geq \tilde{F}(1{,}0) \geq g_1(\theta)\eta - m\eta^3 \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad D(\sigma-\beta_0)+D(\sigma-1+\beta_0) \geq \tilde{F}(\sigma-\beta_0,0)$$
$$+\Big(g_1(\theta)\eta - m\eta^3\Big) - \kappa\left(\Big(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{1-\eta_0+\delta}\Big)g_1(\theta)\eta + \Big(\frac{1}{\delta^3}+\frac{1}{(1-\eta_0+\delta)^3}\Big)m\eta^3\right) \tag{97}$$

10.3.2 Cas ($k=0,2,3,4$) ou ($k=1$ et $\varrho \notin \{\varrho_0, 1-\overline{\varrho_0}\}$) :

Les zéros de ζ étant symétriques par rapport à l'axe réel et à l'axe $\sigma = 1/2$, nous avons :

$$\sum_{\varrho\in Z(\zeta)} D(\sigma+ik\gamma_0-\varrho) = \frac{1}{2}\sum_{\varrho\in Z(\zeta)}\Big[D(\sigma+ik\gamma_0-\varrho)+D(\sigma-1+ik\gamma_0+\bar{\varrho})\Big]$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\{\varrho\in Z(\zeta),\beta>\frac{1}{2}\}}\Big[D(\sigma-\beta+i(k\gamma_0-\gamma))+D(\sigma-1+\beta+i(k\gamma_0-\gamma))\Big]$$
$$+\sum_{\{\varrho\in Z(\zeta),\beta=\frac{1}{2}\}} D(\sigma-1/2+i(k\gamma_0-\gamma))$$

Prenons δ et κ comme dans la proposition 6.2, c'est à dire

$$\delta = 0.62063+\mathcal{O}^*(10^{-5}) \quad \text{et} \quad \kappa = 0.4389+\mathcal{O}^*(10^{-5}).$$

Dans le cas où β est dans l'intervalle $[1/2,\sigma]$ et où $k\gamma_0-\gamma>0$, ceci implique que la différence $\big[D(\sigma-\beta+i(k\gamma_0-\gamma))+D(\sigma-1+\beta+i(k\gamma_0-\gamma))\big]$ est positive et nous avons ainsi :

$$\sum_{\varrho\in Z(\zeta)} D(\sigma+ik\gamma_0-\varrho) \geq \frac{1}{2}\sum_{\{\varrho\in Z(\zeta),\beta>\sigma\}}\Big[D(\sigma-\beta+i(k\gamma_0-\gamma))+D(\sigma-1+\beta+i(k\gamma_0-\gamma))\Big]$$

Dans la suite de cette section, nous posons $y_k = |k\gamma_0-\gamma|$.
Il reste à minorere la dernière somme, c'est à dire à étudier le cas où $\beta\in]\sigma,1]$, ce qui revient au cas où $y_k\geq t_0$, puisque $\sigma = 1-\frac{1}{R\log(4\gamma_0+t_0)}$ et $\beta\leq 1-\frac{1}{R\log\gamma}$. C'est chose faite à la proposition 10.3 ci-après.
Pour la montrer, nous avons besoin du lemme préliminaire suivant :
Lemme 10.2.

$$\sum_{\{\varrho\in Z(\zeta),|\gamma-t|\geq t_0\}}\frac{1}{(\gamma-t)^2}\leq c_{30}(t,t_0)$$

$$\begin{aligned}
\textit{avec} \quad c_{30}(0,t_0) &= \Big(\frac{0.16}{t_0}+\frac{0.58}{t_0^2}\Big)\log t_0 - \frac{0.133}{t_0}+\frac{4.64}{t_0^2}\\
\textit{et} \quad c_{30}(t,t_0) &= \Big(\frac{0.478}{t_0}+\frac{0.854}{t_0^2}\Big)\log t + \frac{0.886}{t_0^2}\log(\log t)
\end{aligned}$$

$$+\Big(\frac{0.16}{t_0+14}+\frac{2.229}{t_0(t_0+14)}+\frac{0.58}{(t_0+14)^2}+\frac{16.24}{t_0(t_0+14)^2}+\frac{113.68}{t_0^2(t_0+14)^2}\Big)\log(t_0+14)$$
$$-\frac{0.877}{t_0}+\frac{14.21}{t_0^2}-\frac{1.785}{t_0(t_0+14)}+\frac{3.77}{(t_0+14)^2}-\frac{50.98}{t_0(t_0+14)^2}-\frac{300.008}{t_0^2(t_0+14)^2}$$

Preuve.
Notons $\Sigma(t,t_0)$ la somme à étudier, $N(u)$ le nombre de zéros non triviaux de ζ de partie imaginaire dans $[0,u]$.
D'après le théorème de Backlund (cf. [2]), $N(u)$ vérifie :

$$\begin{aligned}
N(u) &= \frac{u}{2\pi}\log\frac{u}{2\pi}-\frac{u}{2\pi}+\frac{7}{8}+Q(u)\\
\text{avec } Q(u) &\leq 0.137\log u + 0.443\log\log u + 4.35 \qquad (u\geq 2)
\end{aligned}$$

donc :

$$d\,N(u) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{u}{2\pi} + d\,Q(u) \tag{98}$$

1. Dans le cas où $t=0$, comme $Q(t_0)\geq 0$, nous avons facilement :

$$\Sigma(0,t_0) \leq \int_{t_0}^{+\infty}\frac{d\,N(u)}{u^2} \leq \Big(\frac{1}{2\pi t_0}+\frac{0.58}{t_0^2}\Big)\log t_0 + \frac{1-\log 2\pi}{2\pi t_0}+\frac{4.64}{t_0^2}$$

ce qui donne la première inégalité annoncée.

2. Dans le cas où $t\geq t_0$, nous pouvons majorer $\Sigma(t,t_0)$ par $\int_{|u-t|\geq t_0}\frac{d\,N(u)}{(u-t)^2}$ et donc, comme ζ n'a pas de zéros dans $|\Im z|\leq 14$, par la somme des trois termes suivants :

$$J_1(t,t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_0\leq t< t_0+14\\ \int_{14}^{t-t_0}\frac{d\,N(u)}{(t-u)^2} & \text{si } t\geq t_0+14\end{cases}$$
$$J_2(t,t_0) = \int_{t+t_0}^{+\infty}\frac{d\,N(u)}{(u-t)^2}, \qquad J_3(t,t_0) = \int_{14}^{+\infty}\frac{d\,N(u)}{(u+t)^2}$$

Majorons-les en utilisant (98) :

$$J_1(t,t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t-14}\frac{\log\frac{t-u}{2\pi}}{u^2}d\,u + \frac{Q(t-t_0)}{t_0^2} - \frac{Q(14)}{(t-14)^2} + 2\int_{t_0}^{t-14}\frac{Q(t-u)}{u^3}d\,u$$

Comme $Q(14) \geq 0$, nous avons :

$$J_1(t,t_0) \leq \frac{1}{2\pi t_0} \log \frac{t-t_0}{2\pi} + \frac{Q(t-t_0)}{t_0^2} + \frac{1}{t_0^2} \sup_{14 \leq v \leq t-t_0} |Q(v)|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi t_0} \log t + 2\frac{Q(t)}{t_0^2} - \frac{\log 2\pi}{2\pi t_0}$$
$$\leq \Big(\frac{0.16}{t_0} + \frac{0.274}{t_0^2}\Big) \log t + \frac{0.886}{t_0^2} \log\log t - \frac{0.292}{t_0} + \frac{8.7}{t_0^2} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} J_2(t,t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{t+t_0}^{+\infty} \frac{\log \frac{u}{2\pi}}{(u-t)^2} d\,u + \int_{t+t_0}^{+\infty} \frac{d\,Q(u)}{(u-t)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi t_0} \log \frac{t+t_0}{2\pi} + \frac{1}{2\pi t} \log \frac{t+t_0}{2t_0} - \frac{Q(t+t_0)}{t_0^2} + 2\int_{t_0}^{+\infty} \frac{Q(u+t)}{u^3} d\,u \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités $\log(t+a) \leq \log t + a/t$, $\log\log t \leq \log t$ et $t \geq t_0$, nous obtenons :

$$J_2(t,t_0) \leq \Big(\frac{0.319}{t_0} + \frac{0.58}{t_0^2}\Big) \log t - \frac{0.292}{t_0} + \frac{5.51}{t_0^2} \quad (100)$$

De la même façon, on obtient pour J_3 :

$$J_3(t,t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{14}^{+\infty} \frac{\log \frac{u}{2\pi}}{(u+t)^2} d\,u + \int_{14}^{+\infty} \frac{d\,Q(u)}{(u+t)^2}$$
$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{14}^{+\infty} \frac{\log \frac{u}{2\pi}}{(u+t_0)^2} d\,u + 2\int_{14}^{+\infty} \frac{Q(u)}{(u+t_0)^3}\, du$$
$$\leq \Big(\frac{0.16}{t_0+14} + \frac{2.229}{t_0(t_0+14)} + \frac{0.58}{(t_0+14)^2} + \frac{16.24}{t_0(t_0+14)^2} + \frac{113.68}{t_0^2(t_0+14)}\Big) \log(t_0+14)$$
$$- \frac{0.292}{t_0} - \frac{1.785}{t_0(t_0+14)} + \frac{3.77}{(t_0+14)^2} - \frac{50.978}{t_0(t_0+14)^2} - \frac{300.008}{t_0^2(t_0+14)} \quad (101)$$

Pour finir, la somme des majorations (99), (100) et (101) donne la seconde inégalité annoncée.

□

Proposition 10.3.

$$\sum_{\{\varrho \in Z(\zeta), y_k \geq t_0\}} \Big[D(\sigma - \beta + iy_k) + D(\sigma - 1 + \beta + iy_k)\Big]$$
$$\geq -\Big(\frac{M(0)c_{30}(kt_0,t_0)}{2}\eta^2 + \frac{(1+2\kappa\ )mc_{30}(kt_0,t_0)}{2\sigma_0 - 1}\eta^3\Big)$$

Preuve.
D'après la majoration de $\tilde{F}$ établie au lemme 2.1, nous avons :

$$\sum_{\{\varrho\in Z(\zeta),y_k\geq t_0\}} \Big[D(\sigma-\beta+iy_k)+D(\sigma-1+\beta+iy_k)\Big]$$
$$\geq g_1(\theta)\sum_{\{\varrho\in Z(\zeta),y_k\geq t_0\}} \Re\Big(\frac{1}{\sigma-\beta+iy_k}+\frac{1}{\sigma-1+\beta+iy_k}$$
$$-\frac{\kappa}{\sigma-\beta+\delta+iy_k}-\frac{\kappa}{\sigma-1+\beta+\delta+iy_k}\Big)$$
$$-\sum_{\{\varrho\in Z(\zeta),y_k\geq t_0\}}\Big(|H(\sigma-\beta,y_k)|+|H(\sigma-1+\beta,y_k)|$$
$$+\kappa\ |H(\sigma-\beta+\delta,y_k)|+\kappa\ |H(\sigma-1+\beta+\delta,y_k)|\Big) \quad (102)$$

Le terme général de la première somme est positif puisque $\delta\geq\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, d'après le lemme de Stechkin (cf. lemme 2, [31]).
Il reste à minorer la seconde somme de (102). Or le lemme 2.1 permet de majorer respectivement $|H(\sigma-\beta,y_k)|$ par $\frac{M(0)}{y_k^2}\eta^2$, puis $|H(\sigma-1+\beta,y_k)|$, $|H(\sigma-\beta+\delta,y_k)|$ et $|H(\sigma-1+\beta+\delta,y_k)|$ par $\frac{m}{(\sigma_0-1/2)y_k^2}\eta^3$. L'inégalité (102) devient alors :

$$\sum_{\{\varrho\in Z(\zeta),y_k\geq t_0\}} \Big[D(\sigma-\beta+iy_k)+D(\sigma-1+\beta+iy_k)\Big]$$
$$\geq-\Big[M(0)\eta^2+\frac{(1+2\kappa\ )m}{\sigma_0-1/2}\eta^3\Big]\sum_{\{\varrho\in Z(\zeta),y_k\geq t_0\}}\frac{1}{y_k^2} \quad (103)$$

Le lemme 10.2 nous fournit une majoration de la somme de droite et donc (103) devient l'inégalité annoncée. □

On achève la preuve de la proposition 9.4 en déduisant tout d'abord de la proposition 10.3

$$\sum_{k=0}^{4}a_k\sum_{\{\varrho\in Z(\zeta),y_k\geq t_0\}} \Big[D(\sigma-\beta+iy_k)+D(\sigma-1+\beta+iy_k)\Big]$$
$$\geq-\mathcal{C}_{31}(\eta,t_0)-\mathcal{C}_{32}(\eta,t_0)\kappa \quad (104)$$

$$\text{avec}\qquad \mathcal{C}_{31}(\eta,t_0)=\frac{1}{2}\Big[M(0)\eta^2+\frac{m}{\sigma_0-1/2}\eta^3\Big]\sum_{k=0}^{4}a_kc_{30}(kt_0,t_0) \quad (105)$$

$$\mathcal{C}_{32}(\eta,t_0) = \frac{m}{\sigma_0 - 1/2} \sum_{k=0}^{4} a_k c_{30}(kt_0,t_0)\eta^3 \tag{106}$$

(Nous rappelons que c_{30} est défini au lemme 10.2.)
La proposition 6.2, les inégalités (97) et (104) donnent finalement :

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} \Big[D(\sigma - \beta + iy_k) + D(\sigma - 1 + \beta + iy_k) \Big] \geq a_1 \tilde{F}(\sigma - \beta_0,0) - \mathcal{C}_3(\eta,t_0)$$

avec
$$\mathcal{C}_3(\eta,t_0) = a_1 \Bigg[\Bigg(\Big(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{1-\eta_0+\delta}\Big) g_1(\theta)\eta + \Big(\frac{1}{\delta^3} + \frac{1}{(1-\eta_0+\delta)^3}\Big) m\eta^3 \Bigg)\kappa - \Bigg(g_1(\theta)\eta - m\eta^3 \Bigg) \Bigg] + \mathcal{C}_{31}(\eta,t_0) + \mathcal{C}_{32}(\eta,t_0)\kappa \tag{107}$$

On écrira $\mathcal{C}_3(\eta,t_0)$ sous la forme polynômiale suivante :

$$p_1\eta + p_2(t_0)\eta^2 + p_3(t_0)\eta^3 \tag{108}$$

où $p_1 = a_1 g_1(\theta)\Bigg(\Big(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{1-\eta_0+\delta}\Big)\kappa \ - 1 \Bigg)$, $p_2(t_0) = \frac{M(0)}{2} \sum_{k=0}^{4} a_k c_{30}(kt_0,t_0)$,

$$p_3(t_0) = \frac{3m}{2\sigma_0 - 1} \sum_{k=0}^{4} a_k c_{30}(kt_0,t_0) + a_1 m \Bigg(\Big(\frac{1}{\delta^3} + \frac{1}{(1-\eta_0+\delta)^3}\Big)\kappa \ - 1 \Bigg).$$

10.4 Étude du reste Δ_2 - Preuve de la proposition 9.3

Nous rappelons l' inégalité (71) obtenue au lemme 5.1

$$\Delta_2(\sigma + ik\gamma_0) \leq c_4(\eta,k) \quad (0 \leq k \leq 4) \tag{109}$$

où $c_4(\eta,k)$ est défini en (72). Finalement :

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \Delta_2(\sigma + ik\gamma_0) \leq \mathcal{C}_4(\eta)$$

avec
$$\mathcal{C}_4(\eta) = \sum_{k=0}^{4} a_k \Big(\mathcal{C}_{41}(\eta,k) + \mathcal{C}_{42}(\eta,k) \Big) \leq 2.305 \cdot 10^6 \eta^3 \tag{110}$$

Troisième partie
Une région sans zéro explicite pour les fonctions L de Dirichlet

11 Introduction.

Soit q un entier positif, χ un caractère primitif non principal modulo q et $L(s,\chi)$ la fonction L de Dirichlet associée. Nous rappelons que la formule

$$L(s,\chi) = \sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

definit une fonction holomorphe dans le demi plan $\Re\ s > 0$ et elle se prolonge méromorphiquement à tout le plan complexe. Elle ne s'annule jamais dans la région $\Re\ s > 1$ et, dans le demi plan $\Re\ s < 0$, admet comme zéros les entiers $-\mathfrak{a} - 2n$, $n \geq 0$, où $\mathfrak{a} = \frac{1-\chi(-1)}{2}$. On appelle ces derniers des zéros triviaux. Les zéros restants éventuels se situent dans la bande, dite critique, $0 \leq \sigma \leq 1$ et sont distribués symétriquement par rapport à l'axe $\Re s = \frac{1}{2}$ mais, contrairement à la fonction ζ, pas nécessairement par rapport à l'axe réel. En fait, les conjugués $\overline{\varrho}$ des zéros ϱ de $L(s,\chi)$ sont les zéros de $L(s,\overline{\chi})$.
Riemann conjecture de manière analogue à ζ qu'en fait tous les zéros de toutes les fonctions L de Dirichlet se répartissent sur l'axe $\Re s = \frac{1}{2}$.
Notons $\mathcal{L}_q(s)$ le produit des $\phi(q)$ fonctions de Dirichlet associées aux caractères de conducteur q. Dans le cas où $q = 1$, nous rappelons que $\mathcal{L}_1(s) = \zeta(s)$.
L'objet de cette partie est d'élargir à $\mathcal{L}_q(s)$, lorsque $q \geq 2$, le résultat que nous venons d'établir pour la fonction ζ. Plus précisément, on souhaite montrer que $\mathcal{L}_q(s)$ admet au plus un zéro dans la région

$$\sigma \geq 1 - \frac{1}{R_1 \log q(|t| + 2)}$$

Un tel zéro, s'il existe, est réel, simple et correspond à un caractère réel non principal. Nous le désignerons sous le nom de zéro exceptionnel et q sous celui de module exceptionnel.
En 1899, De La Vallée Poussin annonce déjà que c'est chose possible. Différents travaux, comme ceux de Chen ou de Heath Brown, ont permis d'évaluer la constante R_1 à respectivement des valeurs de 7.33 et 2.87 (voir [12]), mais seulement pour des valeurs de q assez grandes.
Ici, nous cherchons à nous affranchir de la contrainte sur la taille de q. En 1984, K.S.

McCurley généralise le résultat de J. B. Rosser et L. Scoenfeld à toutes les fonctions L de Dirichlet (voir [16]). Nous obtenons ici :

Théorème 11.1.
La fonction $\mathcal{L}_q(s)$ admet au plus un zéro dans la région :

$$\sigma \geq 1 - \frac{1}{R_1 \log \frac{\max(q, q|t|)}{c}} \qquad \text{avec } R_1 = 6.4355 \text{ et } c = 1.7367 \tag{111}$$

McCurley met de plus en évidence un phénomène qu'on pourrait dire de répulsion des zéros réels, que nous précisons en montrant tout d'abord :

Théorème 11.2.
Soient χ_1 et χ_2 deux caractères primitifs réels distincts de conducteurs respectifs q_1 et q_2. Soient β_1 et β_2 deux zéros réels non triviaux de respectivement $L(s,\chi_1)$ et $L(s,\chi_2)$. Alors

$$\min(\beta_1, \beta_2) \leq 1 - \frac{1}{R' \log \frac{q_1 q_2}{c}} \qquad \text{avec } R' = 2.30025 \text{ et } c' = 47.46163. \tag{112}$$

De ce dernier théorème, nous déduisons que, pour un module donné, il ne peut y avoir qu'au plus un seul zéro exceptionnel et que, sous certaines conditions, il y a au plus un module exceptionnel sur deux modules donnés.
D'autre part, ce phénomène se produit encore pour des zéros de petite hauteur :

Théorème 11.3. *Soit q un module non exceptionnel, $n \leq 4$, χ un caractère primitif non principal de conducteur q et soient $\varrho_k = \beta_k + i\gamma_k$, $1 \leq k \leq n$, n zéros de $L(s,\chi)$ tels que $1/2 < \beta_n < \beta_{n-1} < ... < \beta_1$ et $|\gamma_k| \leq \frac{1}{\log q}$. Alors β_n vérifie*

$$\beta_n \leq 1 - \frac{1}{R_n \log q} \tag{113}$$

où les valeurs de R_n sont données dans le tableau suivant :

n	2	3	4
R_n	4.42161	2.65479	2.62949

C'est à dire qu'il y a au plus n zéros de parties réelles dans la région $\left[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{R_n \log q}\right]$
Nous allons généraliser aux fonctions L les idées développées pour trouver une région sans zéro pour la fonction ζ. La preuve sera ainsi bâtie sur les trois principes suivants :

1. Grâce aux formules de Weil établies au chapitre 1, nous avons une identité impliquant les zéros de $L(s,\chi)$ du type :

$$\begin{aligned}\Re\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s} g(\log n)\right) = \; & \Re \frac{g(0)}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}+1\right) \\ & + \Re G(s-1) - \sum_{\varrho \in Z(\chi)} \Re G(s-\varrho) + \Re R(s)\end{aligned}$$

où $Z(\chi)$ est l'ensemble des zéros non triviaux de $L(s,\chi)$ et G la transformée de Laplace de g :

$$G(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} g(t)\, dt = \frac{g(0)}{z} + \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} e^{-zt} g'(t)\, dt$$

où $R(s)$ est un terme reste lorsque $G(z) - g(0)/z = \mathcal{O}(1/|z|^2)$.

2. La généralisation du lemme de Stechkin établie au chapitre 6 étant un résultat indépendant du module q considéré, nous conservons ainsi l'argument de positivité pour la somme $\sum_{\varrho \in Z(\chi)} \Re G(s-\varrho)$.
3. Nous utilisons une inégalité trigonometrique pour conclure.

Pour toute la suite χ désigne un caractère non principal primitif de conducteur q et $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ un zéro de la fonction $L(s,\chi)$ associée.
Nous notons R un réel qui vérifie une région sans zéro : grâce aux travaux de Mc.Curley (voir [16]), nous pouvons prendre $R = 9.645908801$. Nous appelerons η le réel $(1-\beta_0)$ et nous l'écrirons sous la forme $\eta = \frac{1}{r \log \max(q, q|\gamma_0|)}$, où $6 \le r \le R$. Enfin, s désignera un complexe $1 + it$,où $t \ge 0$, κ et δ des constantes réelles dépendant de r et R et θ un paramètre dans $]\pi/2,\pi[$.
Nous choisissons comme précédemment la fonction f définie au paragraphe 2. Nous rappelons qu'elle dépend des paramètres η et θ et en particulier :

$$f(0) = \eta g_1(\theta), \quad \tilde{F}(0,0) = g_2(\theta), \quad \tilde{F}(1-\beta_0,0) = g_3(\theta)$$

.

12 Introduction (english version)

Let $q > 1$ be an integer, χ be a non principal primitive character modulo q and $L(s,\chi)$ be the associated Dirichlet L-function. We recall that the formula

$$L(s,\chi) = \sum_{n \ge 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

defines a function holomorphic for $\Re s > 0$. It is meromorphically continued to the whole complex plane and it never vanishes when $\Re s > 1$. Its zeros in the half plane $\Re s \le 0$ are the integers $-\mathfrak{a} - 2n$, $n \ge 0$, where $\mathfrak{a} = \frac{1-\chi(-1)}{2}$. All remaining zeros are in the critical strip $0 < \sigma < 1$, distributed symmetrically with respect to the critical line $\Re s = \frac{1}{2}$ but not necessarily with respect to the real line $\Im s = 0$. In fact, if ρ is a zero of $L(s,\chi)$, then $\overline{\rho}$ is a zero of $L(s,\overline{\chi})$.

It is conjectured that the zeros of Dirichlet L functions lie in the critical line $\Re s = \frac{1}{2}$. Let $\mathcal{L}_q(s)$ be the product of the $\phi(q)$ Dirichlet L-functions formed with characters modulo q. In the case $q = 1$, we have $\mathcal{L}_1(s) = \zeta(s)$. The purpose of this chapter is to generalize the former result about ζ to $\mathcal{L}_q(s)$, for $q \geq 2$. More precisely, we show that there is at most one single zero in the region

$$\sigma \geq 1 - \frac{1}{R_1 \log |t|} \qquad (|t| \geq 2) \tag{114}$$

Such a zero, if it exists, is real, simple and corresponds to a real non-principal character modulo q. We shall refer to it as an exceptional zero and q as an exceptional modulus. In 1899, De La Vallée Poussin already stated that such a result was accessible. There have been several investigations about the size of R_1 but only for sufficiently large q. For example, Chen found $R_1 = 7.33$ in 1983 and Heath-Brown $R_1 = 2.87$ in 1992 (see [12]).
We try to remove this restriction on q. In 1984, K. S. Mc Curley generalized Rosser and Schoenfeld's methods and proved $R_1 = 9.64598001$. Here we prove the three following theorems:

Théorème 12.1.
The function $\mathcal{L}_q(s)$ has at most one single zero in the region:

$$\sigma \geq 1 - \frac{1}{R_1 \log \frac{\max(q, q|t|)}{c}} \qquad \textit{where } R_1 = 6.4355 \ , \ c = 1.7367 \tag{115}$$

Moreover, following Mc Curley we quantify the 'repulsion' phenomenom of two real zeros

Théorème 12.2.
Let χ_1 and χ_2 be two distinct real primitive characters modulo q_1 and q_2, respectively. Let β_i be a real zero of $L(s,\chi_i)$ with $0 < \beta_i < 1$. Then

$$\min(\beta_1,\beta_2) \leq 1 - \frac{1}{R' \log \frac{q_1 q_2}{c'}} \tag{116}$$

with $R' = 2.30025$ and $c' = 47.46163$.

This theorem has at least two consequences: it implies first that there is at most one exceptional zero for a given modulus and secondly that, under certain conditions on a pair of moduli, at most one of them is exceptional. We complete this arsenal with another result:

Théorème 12.3.
Let q be a non exceptionnal modulus, $n \leq 4$, χ a non-principal primitif character modulo

q and $\varrho_k = \beta_k + i\gamma_k$, $1 \le k \le n$, n zeros of $L(s,\chi)$ satisfying $1/2 < \beta_n < \beta_{n-1} < \ldots < \beta_1$ and $|\gamma_k| \le \frac{1}{\log q}$. Then β_n satisfies

$$\beta_n \le 1 - \frac{1}{R_n \log q} \tag{117}$$

where the values of R_n are:

n	2	3	4
R_n	4.42161	2.65479	2.62949

This means that there is at most n zeros in the strip

$$\Big\{ s \in \mathbb{C} : 1 - \frac{1}{R_n \log q} \le \Re s \le \frac{1}{2}\ ,\ |\Im s| \le 1 \Big\}.$$

The former ideas involved to find a zero-free region for the Riemann zeta function can be used in the case of the zeros of "not too small" imaginary part L-functions (the other case is treated in a more specific way.). The proof is also grounded on three fundamental ideas:

1. Thanks to Weil's formulas established in section 1, we get an explicit formula involving all the zeros of $L(s,\chi)$:

$$\Re\Bigg(\sum_{n \ge 1} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s} g(\log n) \Bigg) = \Re \frac{g(0)}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s+\mathfrak{a}}{2} + 1 \Big) + \Re G(s-1) - \sum_{\varrho \in Z(\chi)} \Re G(s-\varrho) + \Re R(s)$$

   where $Z(\chi)$ is the set of the non trivial zeros of $L(s,\chi)$ and G is the Laplace transform of g:

$$G(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} g(t)\, dt = \frac{g(0)}{z} + \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} e^{-zt} g'(t)\, dt$$

   and $R(s)$ is a remainder term when $G(z) - g(0)/z = \mathcal{O}(1/|z|^2)$.

2. As the generalisation of Stechkin's lemma proved in section 6 does not depend on the integer q, we also have an argument of positivity for the sum

$$\sum_{\varrho \in Z(\chi)} \Re G(s-\varrho).$$

3. We use the non-negativity of a trigonometric polynomial to conclude.

In the sequel, χ is a non principal primitive character of conductor q and $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ is a zero of the Dirichlet L-function $L(s,\chi)$.
Let s be a complex number $1 + it$, where $t \geq 0$, κ and δ two real constants depending on r and R, and θ a paramater choosen in $]\pi/2,\pi[$. We denote R a real satisfying a zero-free region : according to Mc Curley's work ([16]), we take $R = 9.645908801$. Let denote η the real $(1-\beta_0)$ and write it $\eta = \frac{1}{r \log \max(q,q|\gamma_0|)}$, where $6 \leq r \leq R$.
We take the function f defined in section 2 and recall that it depends on η and θ. In particular :

$$f(0) = \eta g_1(\theta), \quad \tilde{F}(0,0) = g_2(\theta), \quad \tilde{F}(1-\beta_0,0) = g_3(\theta)$$

.

13 Une formule explicite.

Nous rappelons les formules (33) et (34) obtenues à la proposition 1.2 :

$$\mathcal{S}(s) = f(0)\Delta_1(s) + D(s-1) - \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} D(s-\varrho) + \Delta_2(s) \tag{118}$$

$$\text{et} \quad \mathcal{S}(s,\chi) = f(0)\Delta_1(s,\chi) - \sum_{\varrho \in Z(\chi)} D(s-\varrho) + \Delta_2(s,\chi). \tag{119}$$

14 Une inégalité trigonométrique.

Comme pour ζ, nous utilisons la positivité d'un polynôme trigonométrique. Ici nous prenons celui de Rosser et Schoenfeld (voir [30]) :

$$P(\theta) = 8(0.9126 + \cos\theta)^2(0.2766 + \cos\theta)^2 = \sum_{k=0}^{4} a_k \cos(k\theta)$$

$$\text{où} \quad a_0 = 11.18593553, \quad a_1 = 19.034834400, \quad a_2 = 11.67618784,$$

$$a_3 = 4.7568, \quad a_4 = 1, \quad A = \sum_{k=1}^{4} a_k = 36.50633184.$$

Nous obtenons ainsi la positivité de :

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \mathcal{S}(\sigma + ikt,\chi^k) = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\Big(1 - \frac{\kappa}{n^\delta}\Big) P\Big(\arg(\chi(n) n^{-i\gamma_0})\Big) \tag{120}$$

Notons $\chi_{(k)}$ caractère primitif de conducteur q_k associé à χ^k et $\mathfrak{a}_k = \frac{1-\chi_{(k)}(-1)}{2}$.

En réécrivant la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} a_k \mathcal{S}(\sigma + ik\gamma_0, \chi^k)$ sous la forme

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \mathcal{S}(\sigma + ik\gamma_0, \chi_{(k)}) - \sum_{k=0}^{4} a_k \mathcal{S}(\sigma + ik\gamma_0, \chi_{(k)} - \chi^k)$$

il nous reste à trouver une minoration pour ce dernier terme.

14.1 Le défaut de primitivité.

Soit p un nombre premier divisant q. Nous notons : $\displaystyle c_p(\sigma) = \sum_{m\geq 1} \frac{f(m\log p)}{p^{m\sigma}}\Big(1 - \frac{\kappa}{p^{m\delta}}\Big)$.

Lemme 14.1.

$$\frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta \sum_{k=1}^{4} a_k \log\frac{q}{q_k} + \sum_{k=0}^{4} a_k \mathcal{S}(\sigma + ik\gamma_0, \chi_{(k)} - \chi^k) \geq 0 \tag{121}$$

Preuve.
Nous rappelons que la seconde somme s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n) f(\log n)}{n^\sigma}\Big(1 - \frac{\kappa}{n^\delta}\Big)\Re\Big(\frac{\chi_{(k)}(n) - \chi^k(n)}{n^{ik\gamma_0}}\Big)$$
$$= a_0 \sum_{p|q} \log p \sum_{m\geq 1} \frac{f(m\log p)}{p^{m\delta}} + \sum_{k=1}^{4} a_k \sum_{p|q} \log p \sum_{\{m\geq 1, p^m\nmid q_k\}} \frac{f(m\log p)}{p^{m\sigma}}\Big(1 - \frac{\kappa}{p^{m\delta}}\Big)\Re\Big(\frac{\chi_{(k)}(p^m)}{p^{imk\gamma_0}}\Big)$$

Elle se minore par : $\displaystyle a_0 \sum_{p|q} c_p(\sigma)\log p - \sum_{k=1}^{4} a_k \sum_{p|q} \log p \sum_{p\nmid q_k} c_p(\sigma)$

Et nous trouvons ainsi les minorations pour (121) par :

$$a_0 \sum_{p|q} c_p(\sigma)\log p + \sum_{k=1}^{4} a_k \Big[\frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta \log\frac{q}{q_k} - \sum_{p|q}\log p \sum_{p\nmid q_k} c_p(\sigma)\Big]$$
$$\geq a_0 \sum_{p|q} c_p(\sigma)\log p + \sum_{k=1}^{4} a_k \sum_{\{p|q, p\nmid q_k\}} \log p \Big[\frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta\nu_p\Big(\frac{q}{q_k}\Big) - c_p(\sigma)\Big] \quad (122)$$

où $\nu_p(x)$ est la valuation p-adique de x avec $\nu_p(p) = 1$.
Il est clair que le premier terme est positif et on montre aisément qu'il en est de même pour $\frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta\nu_p\Big(\frac{q}{q_k}\Big) - c_p(\sigma)$: en effet, f étant une fonction décroissante, nous pouvons majorer $f(m\log p)$ par $f(0) = \eta g_1(\theta)$. Nous obtenons ainsi :

$$c_p(\sigma) \geq \eta g_1(\theta) \sum_{m\geq 1} \frac{1}{p^{m\sigma}}\Big(1 - \frac{\kappa}{p^{m\delta}}\Big) = \eta g_1(\theta)\Big(\frac{1}{p^\sigma - 1} - \frac{\kappa}{p^{\sigma+\delta}-1}\Big) \leq \eta g_1(\theta)\frac{1-\kappa}{2}\nu_p\Big(\frac{q}{q_k}\Big)$$

ce qui achève la preuve. □

15 Lemmes préliminaires.

15.1 Étude de $D(s-1)$.

Lemme 15.1.

$$D(ik\gamma_0) \leq \begin{cases} g_2(\theta) + c_2(\eta) & \text{si } k = 0 \\ \frac{1-\kappa}{2} f(0)\log q & \text{si } k \geq 1 \text{ et } \frac{\alpha}{R\log q} \leq \gamma_0 \leq \sigma + \mathfrak{a} + \delta. \end{cases} \quad (123)$$

$$\textit{avec} \quad c_2(\eta) = -\kappa\frac{g_1(\theta)}{\delta}\eta + \kappa\frac{m}{\delta^3}\eta^3 \quad \textit{et} \quad \alpha \geq \sqrt{\frac{2RM(0)}{(1-\kappa)k^2 g_1(\theta)}}$$

Preuve.
Comme pour la preuve de (10.1), nous utilisons les majorations du lemme 2.1.

1. Dans le cas où $k = 0$:

$$D(0) = \tilde{F}(0{,}0) - \kappa\tilde{F}(\delta{,}0) \leq \tilde{F}(0{,}0) - \kappa\Big(\frac{g_1(\theta)}{\delta}\eta - \frac{m}{\delta^3}\eta^3\Big) \quad (124)$$

2. Dans le cas où $k \geq 1$:

$$\tilde{F}(0,k\gamma_0) - \kappa\ \tilde{F}(\delta,k\gamma_0) \leq \tilde{F}(0,k\gamma_0) \leq \frac{M(0)}{(k\gamma_0)^2}\eta^2 \leq f(0)\frac{M(0)R}{g_1(\theta)(k\alpha)^2}\log q$$
$$\leq \frac{1-\kappa}{2} f(0)\log q \quad \text{lorsque } \alpha \geq \sqrt{\frac{2RM(0)}{(1-\kappa)k^2 g_1(\theta)}}$$

□

15.2 Étude de la somme sur les zéros.

Nous allons étudier la somme

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \sum_{\varrho\in Z(\chi_{(k)})} D(\sigma+ik\gamma_0-\varrho) = a_1\big[D(\sigma-\beta_0)+D(\sigma-1+\beta_0)\big]$$
$$+\, a_1 \sum_{\varrho\in Z(\chi)\setminus\{\varrho_0,1-\overline{\varrho_0}\}} D(\sigma+i\gamma_0-\varrho) + \sum_{k\in\{0,2,3,4\}} a_k \sum_{\varrho\in Z(\chi_{(k)})} D(\sigma+ik\gamma_0-\varrho) \quad (125)$$

Nous allons voir que le terme $\big[D(\sigma-\beta_0)+D(\sigma-1+\beta_0)\big]$ peut être approché par $\tilde{F}(\sigma-\beta_0,0)$ et que nous maîtrisons la taille de chacune de ces sommes.

15.2.1 Cas $k=1$ et $\varrho \in \{\varrho_0, 1-\overline{\varrho_0}\}$:

Rappelons l'inégalité (97) obtenue au chapitre 10.3.1 :

Lemme 15.2.

$$D(\sigma-\beta_0)+D(\sigma-1+\beta_0) \geq \tilde{F}(\sigma-\beta_0,0) - C_3(\eta) \quad (126)$$

avec $$C_3(\eta) = \kappa\left[\Big(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{1-\eta_0+\delta}\Big)g_1(\theta) + \Big(\frac{1}{\delta^3}+\frac{1}{(1-\eta_0+\delta)^3}\Big)m\eta^3\right] - g_1(\theta)\eta + m\eta^3 \quad (127)$$

15.2.2 Cas ($k = 0,2,3,4$) ou ($k = 1$ et $\varrho \notin \{\varrho_0, 1-\overline{\varrho_0}\}$) :

Grâce à la propriété de symétrie des zéros de $L(s,\chi)$ par rapport à l'axe $\Re\ s = \frac{1}{2}$, nous pouvons réécrire la somme sur les zéros sous la forme :

$$\sum_{\varrho \in Z(\chi)} D(\sigma + ik\gamma_0 - \varrho) = \frac{1}{2} \sum_{\varrho \in Z(\chi)} \Big[D(\sigma + ik\gamma_0 - \varrho) + D(\sigma - 1 + ik\gamma_0 + \bar{\varrho}) \Big]$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{\varrho \in Z(\chi)\ \beta > \frac{1}{2}} \Big[D(\sigma - \beta + i(k\gamma_0 - \gamma)) + D(\sigma - 1 + \beta + i(k\gamma_0 - \gamma)) \Big]$$
$$+ \sum_{\varrho \in Z(\chi)\ \beta = \frac{1}{2}} D(\sigma - \tfrac{1}{2} + i(k\gamma_0 - \gamma))$$

Lorsque $\beta \in [1/2,\sigma]$, $(k\gamma_0 - \gamma) > 0$, $\delta \geq \delta_0$ et $0 \leq \kappa \leq \kappa_0$, nous retrouvons l'argument de positivité donné par la proposition 6.2 : la différence $\big[D(\sigma - \beta + i(k\gamma_0 - \gamma)) + D(\sigma - 1 + \beta + i(k\gamma_0 - \gamma))\big]$ est positive.
Nous rappelons que δ_0 est la solution de l'équation $\kappa_2(\delta) = \kappa_3(\delta)$, $\kappa_2(\delta)$ et $\kappa_3(\delta)$ étant respectivement définis en (79) et (80) et que κ_0 est la valeur en δ_0 de κ_2.
Remarquons que σ_0 and σ_1 étant proches de 1 à un $\mathcal{O}(\eta_0)$ près, nous pouvons approcher κ_2 et κ_3 comme dans le cas de ζ, c'est à dire que :

$$\kappa_2(\delta) = \frac{1}{1 + 2\delta} + \mathcal{O}(\eta_0) \quad \text{et} \quad \kappa_3(\delta) = \frac{1}{\frac{1}{\delta} + \frac{1}{1+\delta}} + \mathcal{O}(\eta_0)$$

Nous retrouvons ainsi que δ est proche de $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et κ_q de $\frac{1}{\sqrt{5}}$ à un $\mathcal{O}(\eta_0)$ près.

15.2.3 Cas où γ_0 est proche de zéro.

Nous utiliserons les résultats suivants au chapitre 19.2 afin d'estimer le terme

$\mathcal{D} = D(\sigma - \beta_0 - i\gamma_0) + D(\sigma - 1 + \beta_0 - i\gamma_0) + D(\sigma - \beta_0 + i\gamma_0) + D(\sigma - 1 + \beta_0 + i\gamma_0)$.

Lemme 15.3.
Lorsque $\sigma = 1$ et $|\gamma_0| \leq \alpha\eta$, où α est une constante positive telle que $\alpha d_1(\theta) \in [0,\pi]$, alors :

$$\mathcal{D} \geq 2\tau(\alpha,\theta) g_3(\theta) - C_3'(\alpha,\eta) \tag{128}$$

$$\begin{aligned} \textit{avec} \quad \tau(\alpha,\theta) &= \frac{\tilde{F}(\eta,\alpha\eta)}{g_3(\theta)} \\ C_3'(\alpha,\eta) &= -2\Big[\frac{1-\eta_0}{1+\alpha^2\eta_0^2} g_1(\theta)\eta - \frac{m}{(1-\eta_0)^3}\eta^3\Big] \\ &+ 2\kappa\Big[\Big(\frac{\delta}{(1-\eta_0+\delta)^2} + \frac{\eta_0+\delta}{\delta^2}\Big) g_1(\theta)\eta + \Big(\frac{1}{(1-\eta_0+\delta)^3} + \frac{1}{\delta^3}\Big) m\eta^3\Big] \end{aligned}$$

Preuve.
Ecrivons $|\gamma_0|$ sous la forme $t\eta$, où $t \in [0,\alpha]$. Alors $\mathcal{D}$ s'écrit :

$$2\Big(\big(\tilde{F}(\eta,t\eta) + \tilde{F}(1-\eta,t\eta)\big) - \kappa\big(\tilde{F}(\eta+\delta,t\eta) + \tilde{F}(1-\eta+\delta,t\eta)\big)\Big) \tag{129}$$

et $\tilde{F}(\eta,t\eta)$ peut être approché par $\tilde{F}(\eta,0)$ de la manière suivante :

$$\tilde{F}(\eta,t\eta) \geq \tau(\alpha,\theta)\tilde{F}(\eta,0) \quad \text{avec} \quad \tau(\alpha,\theta) = \frac{\tilde{F}(\eta,\alpha\eta)}{\tilde{F}(\eta,0)}, \tag{130}$$

ce qui se déduit directement du fait que la fonction de t :

$$\tilde{F}(\eta,t\eta) = \int_0^{d_1(\theta)} e^{-u}\cos(tu)h_\theta(u)d\,u$$

est décroissante lorsque $td_1(\theta) \in [0,\pi]$.
Enfin, le lemme 2.1 permet d'estimer les termes restants :

$$\begin{aligned}\mathcal{D} \geq 2\tau(\alpha,\theta)g_3(\theta) + 2\Big[\frac{1-\eta_0}{1+\alpha^2\eta_0^2}g_1(\theta)\eta - \frac{m}{(1-\eta_0)^3}\eta^3\Big] \\ - 2\kappa\Big[\Big(\frac{\delta}{(1-\eta_0+\delta)^2} + \frac{\eta_0+\delta}{\delta^2}\Big)g_1(\theta)\eta + \Big(\frac{1}{(1-\eta_0+\delta)^3} + \frac{1}{\delta^3}\Big)m\eta^3\Big]\end{aligned}$$

□

Nous aurons par la suite à estimer les termes $\Delta_1(s)$, $\Delta_2(s)$ et $D(s-1)$. Nous utiliserons pour cela les lemmes respectifs 4.1, 5.1 et 15.1.
Pour la suite, nous noterons $\mathcal{C}_i(\eta)$ les termes restes de chacun des Δ_i et $\mathcal{C}(\eta)$ la somme $\sum_{i=1}^4 \mathcal{C}_i(\eta)$. Dans chaque cas, nous trouverons que $\mathcal{C}(\eta)$ s'écrit sous la forme $(b_1+b_3\eta^2)\eta$, où b_1 et b_3 sont des constantes réeles, respectivement negative et positive.
Pour les sections 16 à 19.1, nous prendrons comme valeurs numériques

$$\theta = 1.86398 \ , \ \sigma = \sigma_0 = \sigma_1 = 1 \text{ et } R = 9.64590880108801. \tag{131}$$

Les valeurs pour t_0, t_1, r, η_0, κ et δ changeront selon les différentes configurations étudiées.

16 Cas des fonctions de Rumely.

Certains travaux, comme ceux de Rumely (voir [25]) ou de Bennett (voir [3]) ont permis d'infirmer l'Hypothèse de Riemann Généralisée jusqu'à une certaine hauteur

H : leurs investigations numériques montrent que les zéros de certaines fonctions L de Dirichlet, de partie imaginaire imaginaire bornée par H, se situent tous sur l'axe critique $\Re\ s = 1/2$. Plus précisément nous avons les théorèmes

Théorème 16.1. *Rumely*

1. *Toute fonction L de Dirichlet associée à un caractère de conducteur* $q \leq 13$ *vérifie* $HRG(10000)$.
2. *Toute fonction L de Dirichlet associée à un caractère de conducteur q appartenant à l'un des ensembles ci-dessous vérifie* $HRG(2500)$.

$$\begin{aligned}&\{q \leq 72\},\\ &\{q \leq 112, q \textit{ n'est pas premier}\},\\ &\{116,117,120,121,124,125,128,132,140,143,144,\\ &\qquad 156,163,169,180,216,243,256,360,420,432\}\end{aligned}$$

Théorème 16.2. *Bennett*

Toute fonction L de Dirichlet associée à un caractère de conducteur premier q, tel que $73 \leq q \leq 347$, *vérifie* $HRG(1000)$.

Nous déduisons de ces deux résultats complémentaires que toute fonction L de Dirichlet associée à un caractère de conducteur q, tel que $13 \leq q \leq 113$ vérifie $HRG(1000)$, ce qui nous permet d'effectuer nos calculs en prenant les constantes :

$$t_0 = t_1 = 1000 \ , \ r = 6.35616 \text{ et } \eta_0 = \frac{1}{r \log(3 \cdot 10^4)} \leq 0.01527. \tag{132}$$

Les lemmes (68) et (15.1) nous permettent d'approcher respectivement les termes $\Delta_1(\sigma + ik\gamma_0,\chi)$ par $\frac{1-\kappa}{2}\log(q\gamma_0)$ et $D(0)$ par $g_2(\theta)$. Quand à la somme sur les zéros, nous sommes assurés de sa positivité en prenant κ et δ commme dans la proposition 6.2, c'est à dire

$$\kappa = 0.44526 \text{ et } \delta = 0.61885. \tag{133}$$

L'inégalité trigonométrique (121) devient alors :

$$\begin{aligned}0 \leq \frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta \sum_{k=1}^{4} a_k \log\frac{q}{q_k} + \frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta \log q \sum_{k=1}^{4} a_k \log q_k + \mathcal{C}_1(\eta)\\ + a_0\tilde{F}(0,0) + \mathcal{C}_2(\eta) \ - \ a_1\tilde{F}(1-\beta_0) + \mathcal{C}_3(\eta) \ + \ \mathcal{C}_4(\eta)\end{aligned} \tag{134}$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{C}_1(\eta) = \Big(a_0 c_1(0) + \sum_{k=1}^{4} a_k C_1(k)\Big) g_1(\theta)\eta \quad , \quad \mathcal{C}_2(\eta) = a_0 c_2(\eta) \quad ,$$

$$\mathcal{C}_3(\eta) = a_1 C_3(\eta) \quad , \quad \mathcal{C}_4(\eta) = a_0 c_4(\eta,0) + \sum_{k=1}^{4} a_k C_4(\eta,k)$$

Ce qui s'écrit plus simplement

$$0 \leq \frac{A}{2}(1-\kappa)g_1(\theta)\eta\log q + a_0g_2(\theta) - a_1g_2(\theta) + \mathcal{C}(\eta) \tag{135}$$

ou encore $$\eta\log q \geq \frac{a_1g_3(\theta) - a_0g_2(\theta) - (b_1+b_3\eta^2)\eta}{\frac{A}{2}(1-\kappa)g_1(\theta)} \tag{136}$$

car le terme reste $\mathcal{C}(\eta)$ s'écrit sous la forme $(b_1+b_3\eta^2)\eta$, avec

$$b_1 = -3286.63 \quad \text{et} \quad b_3 = 665314.873 \tag{137}$$

Nous trouvons que $b_1+b_3\eta^2$ est toujours négatif dans $[0,\eta_0]$, ce qui implique la minoration attendue

$$\eta\log\frac{q}{c} \geq \frac{1}{R} \tag{138}$$

$$\text{où} \quad \frac{\frac{A}{2}(1-\kappa)g_1(\theta)}{a_1g_3(\theta)-a_0g_2(\theta)} \leq R = 6.35617 \quad \text{et} \quad \exp\left(\frac{-(b_1+b_3\eta_0^2)}{\frac{A}{2}(1-\kappa)g_1(\theta)}\right) \geq c = 10.78377 \tag{139}$$

17 Cas où $|\gamma_0| > \sigma + \delta + \mathfrak{a}$.

Nous diminuons ici la hauteur du zéro considéré, cependant elle reste encore suffisemment grande pour appliquer les arguments de la section précédente. Nous prenons ici comme valeurs numériques :

$$t_0 = t_1 = 1+\delta\ ,\ r = 6.43549\ ,\ \eta_0 = \frac{1}{r\log 114} \leq 0.03281\ , \tag{140}$$

$$\kappa = 0.43834 \quad \text{et} \quad \delta = 0.6217. \tag{141}$$

Et nous retrouvons les inégalités finales (136) et (139) avec

$$b_1 = -2277.29\ ,\ b_3 = 207493.045\ , \tag{142}$$

$$R = 6.4355 \quad \text{et} \quad c = 4.66665. \tag{143}$$

18 Cas où $|\gamma_0| \leq \sigma + \mathfrak{a} + \delta$ et χ d'ordre supérieur à 5.

La hauteur $|\gamma_0|$ du zéro considéré est ici bornée, de sorte que, pour tout $k \geq 1$, le terme $\Delta_1(\sigma + ik\gamma_0,\chi_k)$ se trouve proche de $\frac{1-\kappa}{2}\log q$ (voir (68)). Par contre, $D(0)$ peut encore être approcher par $g_2(\theta)$. Nous prenons ici comme valeurs numériques

$$t_1 = 0 \ , \ t_0 = 2+\delta \ , \ r = 6.43549 \ , \ \eta_0 = \frac{1}{r\log(114)} \leq 0.03281 \ , \tag{144}$$

$$\kappa = 0.43834 \quad \text{et} \quad \delta = 0.6217. \tag{145}$$

Finalement l'inégalité trigonométrique (121) devient :

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta \sum_{k=1}^{4} a_k \log\frac{q}{q_k} + \frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta \sum_{k=1}^{4} a_k \log q_k + \mathcal{C}_1(\eta) \\ + a_0\tilde{F}(0{,}0) + \mathcal{C}_2(\eta) - \ a_1\tilde{F}(1-\beta_0) + \mathcal{C}_3(\eta) \ + \ \mathcal{C}_4(\eta) \end{aligned} \tag{146}$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{C}_1(\eta) = \Big(a_0 c_1(0) + \sum_{k=1}^{4} a_k C_1'(k)\Big) g_1(\theta)\eta \quad , \quad \mathcal{C}_2(\eta) = a_0 c_2(\eta)$$

$$\mathcal{C}_3(\eta) = a_1 C_3(\eta) \quad , \quad \mathcal{C}_4(\eta) = a_0 c_4(\eta{,}0) + \sum_{k=1}^{4} a_k C_4(\eta{,}k)$$

Ce qui nous ramène à (136) et (139) avec

$$b_1 = -1106.952 \ , \ b_3 = 290522.849 \ , \tag{147}$$

$$R = 6.4355 \quad \text{et} \quad c = 1.81424. \tag{148}$$

19 Cas où $|\gamma_0| \leq \sigma + \mathfrak{a} + \delta$ et χ d'ordre inférieur à 4.

Dans cette nouvelle configuration un terme nouveau apparaît (c'est $D(ik\gamma_0)$ pour les k multiples de l'ordre de χ) et il tend vers $g_2(\theta)$. Néammoins, tant que $|\gamma_0|$ n'est pas trop proche de zéro, nous verrons à la section 19.1 que nous pouvons encore contrôler la taille de ce terme. Et lorsque ce n'est plus le cas, nous montrerons à la section 19.2 comment parer la difficulté en diminuant le degré du polynôme trigonométrique.
Par contre rien ne change pour $\Delta_1(\sigma + ik\gamma_0{,}\chi)$, qu'on majore encore par $\frac{1-\kappa}{2}\log q$, lorsque $k \geq 1$, grâce à (68).

19.1 Cas où $\frac{\alpha}{R\log q} \leq |\gamma_0| \leq \sigma + \mathfrak{a} + \delta$ et χ d'ordre inférieur à 4.

Nous gardons les mêmes valeurs qu'au chapitre précédent, c'est à dire

$$t_1 = 0 \ , \ t_0 = 2+\delta \ , \ r = 6.43549 \ , \ \eta_0 = \frac{1}{r\log(114)} \leq 0.03281 \ , \tag{149}$$

$$\kappa = 0.43834 \quad \text{et} \quad \delta = 0.6217. \tag{150}$$

La contrainte sur ϱ_0 de ne pas être trop proche de l'axe réel (c'est la condition $|\gamma_0| \geq \frac{\alpha}{R\log q}$) nous permet de majorer $D(ik\gamma_0)$ avec $\frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta \log q$. C'est le lemme (15.1), avec $\alpha = \sqrt{\frac{RM(0)}{k(1-\kappa)g_1(\theta)}}$. Nous nous ramènerons alors à la même inégalité que précédemment, et nous retrouverons $R = 6.4355$.

19.1.1 Cas où χ est d'ordre 2.

χ étant un caractère d'ordre 2, χ^2 et χ^4 sont principaux et $\chi^3 = \chi$, de sorte que l'inégalité (121) devient :

$$0 \leq a_0 S(\sigma) + a_1 S(\sigma + i\gamma_0,\chi) + a_2 S(\sigma + 2i\gamma_0) + a_3 S(\sigma + 3i\gamma_0,\chi) + a_4 S(\sigma + 4i\gamma_0) \tag{151}$$

ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & f(0)\Big(a_0\Delta_1(\sigma)+a_1\Delta_1(\sigma+i\gamma_0,\chi)+a_2\Delta_1(\sigma+2i\gamma_0)+a_3\Delta_1(\sigma+3i\gamma_0,\chi)+a_4\Delta_1(\sigma+4i\gamma_0)\Big) \\ & + a_0 D(\sigma-1) + a_2 D(\sigma - 1 + 2i\gamma_0) + a_4 D(\sigma - 1 + 4i\gamma_0) \\ & - \sum_{\varrho\in Z(\chi)} \Big(a_1 D(\sigma + i\gamma_0 - \varrho) + a_3 D(\sigma + 3i\gamma_0 - \varrho)\Big) \\ & - \sum_{\varrho\in Z(\zeta)} \Big(a_0 D(\sigma - \varrho) + a_2 D(\sigma + 2i\gamma_0 - \varrho) + a_4 D(\sigma + 4i\gamma_0 - \varrho)\Big) \\ & + \Big(a_0\Delta_2(\sigma) + a_1\Delta_2(\sigma+i\gamma_0,\chi) + a_2\Delta_2(\sigma+2i\gamma_0) + a_3\Delta_2(\sigma+3i\gamma_0,\chi) + a_4\Delta_2(\sigma+4i\gamma_0)\Big) \end{aligned} \tag{152}$$

En prenant $\alpha = \sqrt{\frac{RM(0)}{4(1-\kappa)g_1(\theta)}} \leq 3.76477$, (152) devient :

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & (a_1 + a_3)\frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta\log q + \mathcal{C}_1(\eta) \\ & + \ a_0\tilde{F}(0,0) + (a_2 + a_4)\frac{1-\kappa}{2}\log q\ g_1(\theta)\eta + \mathcal{C}_2(\eta) \\ & - \ a_1\tilde{F}(1-\beta_0) + \mathcal{C}_3(\eta) \ + \ \mathcal{C}_4(\eta) \end{aligned} \tag{153}$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \mathcal{C}_1(\eta) &= \Big(a_0c_1(0) + a_1C_1'(1) + a_2c_1'(2) + a_3C_1'(3) + a_4c_1'(4)\Big)g_1(\theta)\eta \\ \mathcal{C}_2(\eta) &= a_0c_2(\eta) \quad , \quad \mathcal{C}_3(\eta) = a_1C_3(\eta) \\ \mathcal{C}_4(\eta) &= a_0c_4(\eta,0) + a_1C_4(\eta,1) + a_2c_4(\eta,2) + a_3C_4(\eta,3) + a_4c_4(\eta,4) \end{aligned}$$

Ce qui nous ramène encore à (136) et (139) avec

$$b_1 = -1017.984\ ,\ b_3 = 261972.132 \tag{154}$$

$$R = 6.4355 \quad \text{et} \quad c = 1.7367. \tag{155}$$

19.1.2 Cas où χ est d'ordre 3.

Dans ce cas, χ est nécessairement un caractère pair, χ^3 est principal, $\chi^4 = \chi$, de sorte que l'inégalité trigonométrique devient :

$$0 \leq \frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta a_2 \log\frac{q}{q_2} + a_0 S(\sigma) + a_1 S(\sigma+i\gamma_0,\chi) + a_2 S(\sigma+2i\gamma_0,\chi_{(2)}) \\ + a_3 S(\sigma+3i\gamma_0) + a_4 S(\sigma+4i\gamma_0,\chi) \quad (156)$$

ce qui s'écrit aussi $\quad 0 \leq \dfrac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta a_2 \log\dfrac{q}{q_2}$

$$+f(0)\Big(a_0\Delta_1(\sigma)+a_1\Delta_1(\sigma+i\gamma_0,\chi)+a_2\Delta_1(\sigma+2i\gamma_0,\chi_{(2)})+a_3\Delta_1(\sigma+3i\gamma_0)+a_4\Delta_1(\sigma+4i\gamma_0,\chi)\Big) \\ + a_0 D(\sigma-1) + a_3 D(\sigma-1+3i\gamma_0) \\ - \sum_{\varrho\in Z(\chi)} \Big(a_1 D(\sigma+i\gamma_0-\varrho) + a_4 D(\sigma+4i\gamma_0-\varrho)\Big) \\ - \sum_{\varrho\in Z(\zeta)} \Big(a_0 D(\sigma-\varrho) + a_3 D(\sigma+3i\gamma_0-\varrho)\Big) - \sum_{\varrho\in Z(\chi_{(2)})} a_2 D(\sigma+2i\gamma_0-\varrho) \\ +\Big(a_0\Delta_2(\sigma)+a_1\Delta_2(\sigma+i\gamma_0,\chi)+a_2\Delta_2(\sigma+2i\gamma_0,\chi_{(2)})+a_3\Delta_2(\sigma+3i\gamma_0)+a_4\Delta_2(\sigma+4i\gamma_0,\chi)\Big) \quad (157)$$

Et finalement, en supposant $\alpha = \sqrt{\frac{2RM(0)}{9(1-\kappa)g_1(\theta)}} \leq 3.54946$, (157) devient :

$$0 \leq \frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta a_2 \log\frac{q}{q_2} + \frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta(a_1\log q + a_2 \log q_2 + a_4 \log q) + \mathcal{C}_1(\eta) \\ + a_0 g_2(\theta) + a_3 \frac{1-\kappa}{2}\log q \;\, g_1(\theta)\eta + \mathcal{C}_2(\eta) \\ - a_1 g_3(\theta) + \mathcal{C}_3(\eta) + \mathcal{C}_4(\eta) \quad (158)$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{C}_1(\eta) = \Big(a_0 c_1(0) + a_1 C_1'(1) + a_2 C_1'(2) + a_3 c_1'(3) + a_4 C_1'(4)\Big) g_1(\theta)\eta \\ \mathcal{C}_2(\eta) = a_0 c_2(\eta) \quad , \quad \mathcal{C}_3(\eta) = -a_1 c_3(\eta) \\ \mathcal{C}_4(\eta) = a_0 c_4(\eta,0) + a_1 C_4(\eta,1) + a_2 C_4(\eta,2) + a_3 c_4(\eta,3) + a_4 C_4(\eta,4)$$

ce qui nous ramène encoreà (136) et (139)

$$\text{avec} \quad b_1 = -1687.173 \;,\; b_3 = 279809.056 \quad (159)$$
$$R = 6.4355 \;\text{ et }\; c = 2.82774. \quad (160)$$

19.1.3 Cas où χ est d'ordre 4.

Le caractère χ^4 est en fait principal et l'inégalité trigonométrique s'écrit :

$$0 \leq \frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta\Big(a_2 \log\frac{q}{q_2} + a_3\log\frac{q}{q_3}\Big)$$
$$+ a_0 S(\sigma) + a_1 S(\sigma+i\gamma_0,\chi) + a_2 S(\sigma+2i\gamma_0,\chi_{(2)}) + a_3 S(\sigma+3i\gamma_0,\chi_{(3)}) + a_4 S(\sigma+4i\gamma_0) \tag{161}$$

$$\begin{aligned}\text{c'est à dire}\quad 0 \leq\ & \frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta\Big(a_2 \log\frac{q}{q_2} + a_3\log\frac{q}{q_3}\Big)\\
&+ f(0)\Big(a_0\Delta_1(\sigma) + \sum_{k=1}^{3} a_k\Delta_1(\sigma+ki\gamma_0,\chi_{(k)}) + a_4\Delta_1(\sigma+4i\gamma_0)\Big)\\
&+ a_0 D(\sigma-1) + a_4 D(\sigma-1+4i\gamma_0)\\
&- a_1 \sum_{\varrho\in Z(\chi)} D(\sigma+i\gamma_0-\varrho)\\
&- \sum_{\varrho\in Z(\zeta)}\Big(a_0 D(\sigma-\varrho) + a_4 D(\sigma+4i\gamma_0-\varrho)\Big) - \sum_{k=2}^{3} a_k \sum_{\varrho\in Z(\chi_{(k)})} D(\sigma+ki\gamma_0-\varrho)\\
&+ \Big(a_0\Delta_2(\sigma) + \sum_{k=1}^{3} a_k\Delta_2(\sigma+ki\gamma_0,\chi_{(k)}) + a_4\Delta_2(\sigma+4i\gamma_0)\Big)\end{aligned} \tag{162}$$

Et donc (162) devient sous l'hypothèse $\alpha = \sqrt{\frac{2RM(0)}{16(1-\kappa)g_1(\theta)}} \leq 2.66209$:

$$\begin{aligned}0 \leq\ & \frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta\Big(a_2 \log\frac{q}{q_2} + a_3\log\frac{q}{q_3}\Big)\\
&+ \frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta\Big(a_1\log q + a_2\log q_2 + a_3\log q_3\Big) + \mathcal{C}_1(\eta)\\
&+ a_0 g_2(\theta) + a_4\frac{1-\kappa}{2}\log q\ g_1(\theta)\eta + \mathcal{C}_2(\eta)\\
&- a_1 g_3(\theta) + \mathcal{C}_3(\eta) + \mathcal{C}_4(\eta)\end{aligned} \tag{163}$$

$$\begin{aligned}\text{avec}\quad \mathcal{C}_1(\eta) &= \Big(a_0 c_1(0) + \sum_{k=1}^{3} a_k C_1'(k) + a_4 c_1'(4)\Big) g_1(\theta)\eta\\
\mathcal{C}_2(\eta) &= a_0 c_2(\eta) \quad , \quad \mathcal{C}_3(\eta) = a_1 C_3(\eta)\\
\mathcal{C}_4(\eta) &= a_0 c_4(\eta,0)\sum_{k=1}^{3} a_k C_4(\eta,k) + a_4 c_4(\eta,4)\end{aligned}$$

Et nous retrouvons (136) et (139) :

$$b_1 = -1104.172 \ , \ b_3 = 288270.538 \ , \tag{164}$$

$$R = 6.4355 \quad \text{et} \quad c = 1.81375. \tag{165}$$

19.2 Cas où $0 < |\gamma_0| < \frac{\alpha}{R \log q}$ et χ d'ordre inférieur à 4.

Nous allons utiliser ici d'autres inégalités que celle de Rosser et Schoenfeld, leur intérêt étant d'être d'ordre inférieur à 4. Nous changerons en conséquence la valeur de θ de sorte à optimiser R.
De plus, nous pouvons majorer sans trop de perte $S(\sigma + ik\gamma_0,\chi)$ par $S(\sigma,\chi)$ et $\tilde{F}(\sigma - \beta_0,\gamma_0)$ par $\tilde{F}(\sigma - \beta_0,0)$.
Pour la suite, nous prenons $t_0 = \frac{\alpha}{R \log 114}$ et $t_1 = 0$, où $|\gamma_0| \in [t_1,t_0]$.

19.2.1 Cas où χ est d'ordre 2.

Nous prenons comme valeurs numériques $\theta = 1.70693$, $R = 9.645908801$ et $r = 3.50877$.
Le caractère χ est réel et nous utilisons l'inégalité triviale :
$1 + \cos\theta \geq 0$ de laquelle on déduit $0 \leq \ S(\sigma) + S(\sigma,\chi)$ et

$$\begin{aligned} 0 \leq \ & f(0)\Big(\Delta_1(\sigma) + \Delta_1(\sigma,\chi)\Big) + D(\sigma - 1) \\ & - \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} D(\sigma - \varrho) - \sum_{\varrho \in Z(\chi)} D(\sigma - \varrho) \\ & + \Big(\Delta_2(\sigma) + \Delta_2(\sigma,\chi)\Big) \end{aligned} \tag{166}$$

De plus, les zéros de $L(s,\chi)$ sont dans ce cas répartis symétriquement par rapport à l'axe réel et en isolant ϱ_0 dans la somme sur les zéros de $L(s,\chi)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{\varrho \in Z(\chi)} D(\sigma - \varrho) = & \Big[D(\sigma - \beta_0 - i\gamma_0) + D(\sigma - 1 + \beta_0 - i\gamma_0) + \\ & D(\sigma - \beta_0 + i\gamma_0) + D(\sigma - 1 + \beta_0 + i\gamma_0)\Big] \\ & + \sum_{\varrho \in Z(\chi) \setminus \{\varrho_0, 1-\overline{\varrho_0}, \overline{\varrho_0}, 1-\varrho_0\}} D(\sigma - \varrho) \end{aligned}$$

Le lemme 15.3 et la proposition 6.2 nous permettent de conclure pour $\kappa = 0.31221$ et $\delta = 0.66823$ que

$$\sum_{\varrho \in Z(\chi)} D(\sigma - \varrho) \geq 2\tau(\alpha,\theta) g_3(\theta) - C_3'(\alpha,\eta) \quad \text{avec} \quad 2\tau(\alpha,\theta) \geq 0.87634$$

et (166) devient ainsi :

$$0 \leq \frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta \log q + \mathcal{C}_1(\eta) \ + \ g_2(\theta) + \mathcal{C}_2(\eta) \ - \ 1.75268 g_3(\theta) + \mathcal{C}_3(\eta) \ + \ \mathcal{C}_4(\eta)$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{C}_1(\eta) = \Big(c_1(0) + C_1(0)\Big) g_1(\theta)\eta \ , \quad \mathcal{C}_2(\eta) = c_2(\eta) \ ,$$
$$\mathcal{C}_3(\eta) = C_3'(\alpha,\eta) \ , \quad \mathcal{C}_4(\eta) = c_4(\eta,0) + C_4(\eta,0) \ ,$$

et donc à la place de (136) nous obtenons

$$\eta \log q \geq \frac{1.75268 g_3(\theta) - g_2(\theta) - (b_1 + b_3\eta^2)\eta}{\frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)}$$
$$\text{avec} \quad b_1 = -1756.993 \ , \ b_3 = 519695.191.$$

La fonction de η, $b_1 + b_3\eta^2$ est ici successivement négative puis positive dans $[0,\eta_0]$, de sorte que la valeur maximale pour R est obtenue en η_0 :

$$\frac{\frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)}{1.75268 g_3(\theta) - g_2(\theta) - (b_1 + b_3\eta_0^2)\eta_0} \leq R = 3.50878.$$

19.2.2 Cas où χ est d'ordre 3.

Nous prenons ici $\theta = 1.71326$, $R = 9.645908801$ et $r = 5.48963$.
χ est un caractère impair, χ^3 est principal, $\chi^2 = \overline{\chi}$ et nous utilisons la positivité du polynôme

$$P(\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + a_3 \cos 3\theta = (1 + \cos\theta)(1 + 2\cos\theta)^2 \geq 0$$
$$\text{avec} \quad a_0 = 5 \ , \ a_1 = 8 \ , \ a_2 = 4 \ , \ a_3 = 1$$

pour en déduire les inégalités

$$0 \leq \ 2(a_0 + a_3)S(\sigma) + (a_1 + a_2)\Big(S(\sigma,\chi) + S(\sigma,\overline{\chi})\Big) \qquad (167)$$
$$\text{c'est à dire :} \quad 0 \leq \ S(\sigma) + S(\sigma,\chi) + S(\sigma,\overline{\chi}) \qquad (168)$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad 0 \leq \ & f(0)\Big(\Delta_1(\sigma) + 2\Delta_1(\sigma,\chi)\Big) + D(\sigma - 1) \\ & - \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} D(\sigma - \varrho) - \sum_{\varrho \in Z(\chi)} D(\sigma - \varrho) - \sum_{\varrho \in Z(\overline{\chi})} D(\sigma - \varrho) \\ & + \Delta_2(\sigma) + 2\Delta_2(\sigma,\chi) \quad (169) \end{aligned}$$

En remarquant que les conjugués $\overline{\varrho}$ des zéros ϱ de $L(s,\chi)$ constituent les zéros de $L(s,\overline{\chi})$, nous isolons le zéro qui nous intéresse de la manière suivante :

$$\sum_{\varrho\in Z(\chi)} D(\sigma-\varrho)+\sum_{\varrho\in Z(\overline{\chi})} D(\sigma-\varrho)=\sum_{\varrho\in Z(\chi)}\Big[D(\sigma-\varrho)+D(\sigma-\overline{\varrho})\Big]$$
$$=\Big[D(\sigma-\beta_0-i\gamma_0)+D(\sigma-1+\beta_0-i\gamma_0)+D(\sigma-\beta_0+i\gamma_0)+D(\sigma-1+\beta_0+i\gamma_0)\Big]$$
$$+\sum_{\varrho\in Z(\chi)\backslash\{\varrho_0,1-\overline{\varrho_0}\}}\Big[D(\sigma-\varrho)+D(\sigma-\overline{\varrho})\Big] \quad (170)$$

Nous concluons comme au paragraphe précédent qu'en prenant $\kappa=0.38935$ et $\delta=0.64093$, nous avons la minoration :

$$\sum_{\varrho\in Z(\chi)}\Big[D(\sigma-\varrho)+D(\sigma-\overline{\varrho})\Big]\geq 2\tau(\alpha,\theta)g_3(\theta)-C_3'(\alpha,\eta) \text{ avec } 2\tau(\alpha,\theta)\geq 0.8791$$

Et (169) devient alors :

$$0\leq(1-\kappa)g_1(\theta)\eta\log q+\mathcal{C}_1(\eta) \;+\; g_2(\theta)+\mathcal{C}_2(\eta) \;-\; 1.7582g_3(\theta)+\mathcal{C}_3(\eta) \;+\; \mathcal{C}_4(\eta)$$

$$\text{avec}\quad \mathcal{C}_1(\eta)=\Big(c_1(0)+2C_1(0)\Big)g_1(\theta)\eta\ ,\quad \mathcal{C}_2(\eta)=c_2(\eta)\ ,$$
$$\mathcal{C}_3(\eta)=C_3'(\alpha,\eta)\ ,\quad \mathcal{C}_4(\eta)=c_4(\eta,0)+2C_4(\eta,0)\ ,$$

$$\text{et}\quad \eta\log q\geq\frac{1.7582g_3(\theta)-g_2(\theta)-(b_1+b_3\eta^2)\eta}{(1-\kappa)g_1(\theta)}$$
$$\text{avec}\quad b_1=-1929.865\ ,\ b_3=612517.05$$
$$\frac{(1-\kappa)g_1(\theta)}{1.7582g_3(\theta)-g_2(\theta)}\leq R=5.48964 \quad\text{et}\quad \exp\left(\frac{-(b_1+b_3\eta_0^2)}{(1-\kappa)g_1(\theta)}\right)\geq c=74.52319$$

19.2.3 Cas où χ est d'ordre 4.

Nous prenons $\theta=1.74662$, $R=9.645908801$ and $r=4.48899$.
Nous avons $\chi^3=\overline{\chi}$ et $\overline{\chi^2}=\chi^2$, de sorte qu'on utilise la positivité du plolynôme de degré 3 :

$$P(\theta)=a_0+a_1\cos\theta+a_2\cos 2\theta+a_3\cos 3\theta=4cos^2\theta(1+\cos\theta)$$
$$a_0=2\ ,\ a_1=3\ ,\ a_2=2\ ,\ a_3=1$$

pour en déduire

$$0 \leq \ a_2(1-\kappa)g_1(\theta)\eta\log\frac{q}{q_2} + 2a_0S(\sigma) + (a_1+a_3)(S(\sigma,\chi)+S(\sigma,\overline{\chi})) + 2a_2S(\sigma,\chi_{(2)})$$

$$\begin{aligned}\text{et}\quad 0 \leq\ & \frac{1-\kappa}{2}g_1(\theta)\eta\log\frac{q}{q_2} \\ & + f(0)\Big(\Delta_1(\sigma)+2\Delta_1(\sigma,\chi)+\Delta_1(\sigma,\chi_{(2)})\Big) \ + \ D(\sigma-1) \\ & - \sum_{\varrho\in Z(\zeta)} D(\sigma-\varrho) - \sum_{\varrho\in Z(\chi)} D(\sigma-\varrho) - \sum_{\varrho\in Z(\overline{\chi})} D(\sigma-\varrho) - \sum_{\varrho\in Z(\chi_{(2)})} D(\sigma-\varrho) \\ & + \ \Delta_2(\sigma)+2\Delta_2(\sigma,\chi)+\Delta_2(\sigma,\chi_{(2)}) \end{aligned} \tag{171}$$

La décomposition de la somme sur les zéros vue précédemment en (170) et les mêmes arguments nous donnent la minoration suivante, lorsque $\kappa = 0.39257$ et $\delta = 0.63971$:

$$\sum_{\varrho\in Z(\chi)} D(\sigma-\varrho) + \sum_{\varrho\in Z(\overline{\chi})} D(\sigma-\varrho) \geq 2\tau(\alpha,\theta)g_3(\theta) - C_3'(\alpha,\eta) \quad \text{avec } 2\tau(\alpha,\theta) \geq 0.89413$$

Et (171) devient :

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & (1-\kappa)g_1(\theta)\eta\log q + \mathcal{C}_1(\eta) \ + \ g_2(\theta)+\mathcal{C}_2(\eta) \\ & - \ 1.78827g_3(\theta)+\mathcal{C}_3(\eta) \ + \ \mathcal{C}_4(\eta) \end{aligned} \tag{172}$$

$$\begin{aligned} \text{avec}\quad & \mathcal{C}_1(\eta) = \Big(c_1(0)+3C_1(0)\Big)g_1(\theta)\eta\ , \quad \mathcal{C}_2(\eta) = c_2(\eta)\ , \\ & \mathcal{C}_3(\eta) = C_3'(\alpha,\eta)\ , \quad \mathcal{C}_4(\eta) = c_4(\eta,0)+3C_4(\eta,0) \end{aligned}$$

$$\text{et}\quad \eta\log q \geq \frac{1.78827g_3(\theta)-g_2(\theta)-(b_1+b_3\eta^2)\eta}{(1-\kappa)g_1(\theta)}$$

$$\text{avec}\quad b_1 = -1369.542\ ,\ b_3 = 27994.517$$

$$\frac{(1-\kappa)g_1(\theta)}{1.78827g_3(\theta)-g_2(\theta)} \leq R = 4.489 \quad \text{et} \quad \exp\left(\frac{-(b_1+b_3\eta_0^2)}{(1-\kappa)g_1(\theta)}\right) \geq c = 242.77866$$

20 Cas de deux zéros réels associés à un caractère primitif réel non principal.

Théorème 20.1. *Soit χ un caractère primitif réel non principal de conducteur q. Soient β_1 et β_2 deux zéros réels de $L(s,\chi)$ vérifiant $1/2 < \beta_1 < \beta_2$. Alors*

$$\beta_1 \leq 1 - \frac{1}{R'\log\frac{q}{c}} \quad \textit{avec} \quad R' = 1.28325 \ \textit{et}\ c' = 2.82973. \tag{173}$$

On en déduit que pour chaque caractère tel que ci-dessus, il existe au plus un seul zéro réel se trouvant dans la région établie au théorème 12.1, c'est à dire tel que $\beta \geq 1 - \frac{1}{R \log \frac{q}{c}}$. Un tel zéro, s'il existe est appelé zéro exceptionnel et q module exceptionnel.

Preuve.
Nous allons utiliser la même inégalité trigonométrique qu'à la section 19.2.1, c'està dire, $0 \leq\ S(\sigma) + S(\sigma,\chi)$, et nous en déduisons :

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & f(0)\Big(\Delta_1(\sigma) + \Delta_1(\sigma,\chi)\Big) + D(\sigma-1) \\ & \qquad - \sum_{\varrho \in Z(\chi)} D(\sigma-\varrho) - \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} D(\sigma-\varrho) \\ & \qquad\qquad + \Big(\Delta_2(\sigma) + \Delta_2(\sigma,\chi)\Big) \end{aligned} \tag{174}$$

Nous prenons $\theta = 1.93718$, $R = 1.6129$ et $r = 1.28324$.
Nous isolons les deux zéros ϱ_1 et ϱ_2 et nous trouvons la minoration suivante pour (174), en prenant $\kappa = 034123$ et $\delta = 0.65834$:

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & \frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)\eta \log q + \mathcal{C}_1(\eta) \ + \ \tilde{F}(0,0) + \mathcal{C}_2(\eta) \\ & \qquad - \ \tilde{F}(1-\beta_1,0) - \tilde{F}(1-\beta_2,0) + \mathcal{C}_3(\eta) \ + \ \mathcal{C}_4(\eta) \end{aligned} \tag{175}$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{C}_1(\eta) = \Big(c_1(0) + C_1(0)\Big) g_1(\theta)\eta \quad , \quad \mathcal{C}_2(\eta) = c_2(\eta) \quad ,$$
$$\mathcal{C}_3(\eta) = C_3(\eta) \quad , \quad \mathcal{C}_4(\eta) = c_4(\eta,0) + C_4(\eta,0).$$

$$\text{et} \quad \eta \log q \geq \frac{2g_3(\theta) - g_2(\theta) - (b_1 + b_3\eta^2)\eta}{\frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)}$$
$$\text{avec} \quad b_1 = -133.991 \ , \ b_3 = 3935.831$$
$$\frac{\frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)}{2g_3(\theta) - g_2(\theta)} \leq R' = 1.28325 \quad \text{et} \quad \exp\left(\frac{-(b_1 + b_3\eta_0^2)}{\frac{1-\kappa}{2} g_1(\theta)}\right) \geq c' = 2.82973$$

□

21 Cas de deux zéros réels associés à deux caractères primitifs réels.

L'objet de cette section est de démontrer le théorème 21.1 :

Théorème 21.1.
Soient χ_1 et χ_2 deux caractères primitifs réels distincts de conducteurs respectifs q_1 et q_2. Soient β_1 et β_2 deux zéros réels non triviaux de respectivement $L(s,\chi_1)$ et $L(s,\chi_2)$. Alors

$$\min(\beta_1,\beta_2) \leq 1 - \frac{1}{R\text{''} \log \frac{q_1 q_2}{c\text{''}}} \qquad \textit{avec } R\text{''} = 2.30025 \textit{ et } c\text{''} = 47.46163. \tag{176}$$

Un tel résultat nous assure du fait que parmi les $\phi(q)$ caractères de conducteur q, il y en a au plus un pour lequel il y aurait au plus un zéro dans la région $Re\ s \geq 1 - \frac{1}{R \log \frac{q}{c}}$. De plus si un tel zéro existe, il est nécessairement réel, ainsi que le caractère associé.

Preuve.
Nous prendrons les valeurs numériques $\theta = 1.93718$, $R = 3.22188$ et $r = 2.30024$.
Remarquons que $\chi_1\chi_2$ est un caractère non principal et que son conducteur est q_1q_2.
Nous allons étudier la somme suivante

$$\begin{aligned} &S(\sigma) + S(\sigma,\chi_1) + S(\sigma,\chi_2) + S(\sigma,\chi_1\chi_2) \\ &\qquad = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\Big(1 - \frac{\kappa}{n^\delta}(1+\chi_1(n))(1+\chi_2(n))\Big) \end{aligned} \tag{177}$$

χ_1 et χ_2 étant réels, nous sommes assurés de sa positivité et nous la réécrivons sous la forme :

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & f(0)\Big(\Delta_1(\sigma) + \Delta_1(\sigma,\chi_1) + \Delta_1(\sigma,\chi_2) + \Delta_1(\sigma,\chi_1\chi_2)\Big) \\ &+ D(\sigma-1) \ - \sum_{\varrho\in Z(\zeta)} D(\sigma-\varrho) \\ &- \sum_{\varrho\in Z(\chi_1)} D(\sigma-\varrho) + \sum_{\varrho\in Z(\chi_2)} D(\sigma-\varrho) - \sum_{\varrho\in Z(\chi_1\chi_2)} D(\sigma-\varrho) \\ &+ \ \Big(\Delta_2(\sigma) + \Delta_2(\sigma,\chi_1) + \Delta_2(\sigma,\chi_2) + \Delta_2(\sigma,\chi_1\chi_2\Big) \end{aligned} \tag{178}$$

Les premiers termes $\Delta_1(\sigma,\chi_1)$, $\Delta_1(\sigma,\chi_2)$ et $\Delta_1(\sigma,\chi_1\chi_2)$ se majorent respectivement par $\frac{1-\kappa}{2}\log q_1$, $\frac{1-\kappa}{2}\log q_2$ et $\frac{1-\kappa}{2}\log(q_1q_2)$. Alors, en prenant $\kappa = 0.40957$ et $\delta = 0.63319$ et en mettant en évidence les zéros recherchés, nous avons :

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & \frac{1-\kappa}{2}\, g_1(\theta)\eta\Big(\log q_1 + \log q_2 + \log(q_1q_2)\Big) + \mathcal{C}_1(\eta) \ + \ \tilde{F}(0,0) + \mathcal{C}_2(\eta) \\ &- \ \tilde{F}(1-\beta_1,0) - \tilde{F}(1-\beta_2,0) + \mathcal{C}_3(\eta) \ + \ \mathcal{C}_4(\eta) \end{aligned} \tag{179}$$

$$\text{avec}\quad \mathcal{C}_1(\eta) = \Big(c_1(0) + C_1(0)\Big) g_1(\theta)\eta \quad , \quad \mathcal{C}_2(\eta) = c_2(\eta)$$
$$\mathcal{C}_3(\eta) = 2C_3(\eta) \quad , \quad \mathcal{C}_4(\eta) = c_4(\eta,0) + 3C_4(\eta,0)$$

$$\text{et}\quad \eta \log(q_1q_2) \geq \frac{2g_3(\theta) - g_2(\theta) - (b_1 + b_3\eta^2)\eta}{(1-\kappa)g_1(\theta)}$$
$$\text{avec}\quad b_1 = -271.283\ ,\ b_3 = 10534.96$$
$$\frac{(1-\kappa)g_1(\theta)}{2g_3(\theta) - g_2(\theta)} \leq R" = 2.30025 \quad \text{et} \quad \exp\left(\frac{-(b_1 + b_3\eta_0^2)}{(1-\kappa)g_1(\theta)}\right) \geq c" = 47.46163$$

□

22 Cas d'au plus 4 zéros d'un caractère primitif non principal de petite hauteur pour un module q non exceptionnel.

Théorème 22.1. *Soit $n \leq 4$, χ un caractère primitif non principal de conducteur q et soient $\varrho_k = \beta_k + i\gamma_k$, $1 \leq k \leq n$, n zéros de $L(s,\chi)$ tels que $1/2 < \beta_n < \beta_{n-1} < \dots < \beta_1$ et $|\gamma_k| \leq \frac{\omega}{R_1 \log q}$, où R_1 donné par la région sans zéro de L : $R_1 = 6.4455$ et $\omega = 6$. Alors β_n vérifie*

$$\beta_n \leq 1 - \frac{1}{R_n \log q} \tag{180}$$

où les valeurs de R_n sont données dans le tableau suivant :
Lorsque $q \geq 114$

n	2	3	4
R_n	5.09635	3.25925	2.58208

Lorsque $q \geq 10^6$

n	2	3	4
R_n	3.97165	1.79648	1.24443

On en déduit que si β_k est une des n parties réelles de zéros comme ci-dessus, alors

$$\beta_k \leq 1 - \frac{1}{R_k \log q}$$

Preuve.
Nous réécrivons l'inégalité triviale

$$0 \leq 2S(\sigma) + S(\sigma,\chi) + S(\sigma,\overline{\chi}) \tag{181}$$

sous la forme

$$
\begin{aligned}
0 \leq f(0)\Big(2\Delta_1(\sigma) + 2\Delta_1(\sigma,\chi)\Big) &+ 2D(\sigma-1) \\
&- 2\sum_{\varrho\in Z(\zeta)} D(\sigma-\varrho) - \sum_{\varrho\in Z(\chi)} D(\sigma-\varrho) - \sum_{\varrho\in Z(\overline{\chi})} D(\sigma-\varrho) \\
&+ \Big(2\Delta_2(\sigma) + 2\Delta_2(\sigma,\chi)\Big) \quad (182)
\end{aligned}
$$

Nous rappelons que les conjugués des zéros ϱ de $L(s,\chi)$ sont les zéros de $L(s,\overline{\chi})$ et nous écrivons :

$$
\begin{aligned}
\sum_{\varrho\in Z(\chi)} D(\sigma-\varrho) + \sum_{\varrho\in Z(\overline{\chi})} D(\sigma-\varrho) &= \sum_{\varrho\in Z(\chi)} \Big(D(\sigma-\varrho) + D(\sigma-\overline{\varrho})\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big[D(\sigma-\varrho_k) + D(\sigma-\overline{\varrho_k}) + D(\sigma-1+\overline{\varrho_k}) + D(\sigma-1+\varrho_k)\Big] \\
&+ \sum_{\varrho\in Z(\chi)\setminus\bigcup_{k=1}^{n}\{\varrho_k,1-\overline{\varrho_k}\}} \Big(D(\sigma-\varrho) + D(\sigma-\overline{\varrho})\Big) \quad (183)
\end{aligned}
$$

En prenant $\sigma = 1$, κ et δ comme indiqué dans la proposition 6.2, nous sommes assurés de la positivité de la seconde somme de (183) et de la somme sur les zéros de ζ. De plus, en posant $g_3(\theta) = \tilde{F}(1-\beta_k,0)$, nous pouvons majorer chaque $\tilde{F}(1-\beta_k,0)$ par $g_3(\theta)$ du fait de la décroissance de l'application $x \mapsto \tilde{F}(x,0)$. Le lemme 15.3 nous donne alors la minoration suivante :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \Big[D(\sigma-\varrho_k) &+ D(\sigma-\overline{\varrho_k}) + D(\sigma-1+\overline{\varrho_k}) + D(\sigma-1+\varrho_k)\Big] \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \Big[2\tau(\omega,\theta)\tilde{F}(1-\beta_k,0) - C_3'(\omega,\eta)\Big] \\
&\geq 2n\tau(\omega,\theta)g_3(\theta) - nC_3'(\omega,\eta)\Big] \quad (184)
\end{aligned}
$$

et finalement, grâce aux lemmes 4.1, 15.1 et 5.1, l'inégalité (182) devient :

$$
\begin{aligned}
0 \leq (1-\kappa)g_1(\theta)\eta\log q + \mathcal{C}_1(\eta) \;&+\; 2g_2(\theta) + \mathcal{C}_2(\eta) \\
&-\; 2n\tau(\omega,\theta)g_3(\theta) + \mathcal{C}_3(n,\eta) \;+\; \mathcal{C}_4(\eta) \quad (185)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
\text{avec} \qquad \mathcal{C}_1(\eta) = 2\big(c_1(0) + C_1(0)\big)g_1(\theta)\eta \\
\mathcal{C}_2(\eta) = 2c_2(\eta) \quad , \quad \mathcal{C}_3(n,\eta) = nC_3'(\omega,\eta) \\
\mathcal{C}_4(\eta) = 2c_4(\eta,0) + 2C_4(\eta,0)
\end{gathered}
$$

C'est à dire qu'il ne reste plus qu'à minorer le terme de droite suivant (nous le noterons $1/R_n(\eta)$)

$$\eta \log q \geq \frac{2n\tau(\omega,\theta))g_3(\theta) - 2g_2(\theta) - (b_1(n) + b_3(n)\eta^2)\eta}{(1-\kappa)g_1(\theta)} \tag{186}$$

Dans chacun des cas suivants, nous sommes dans le cas où la fonction de η : $b_1(2) + b_3(2)\eta^2$ est successivement négative puis positive dans l'intervalle $[0,\eta_0]$, de sorte que $R_n(\eta)$ atteint sa valeur maximale en $\eta = 0$:

$$\frac{(1-\kappa)g_1(\theta)}{2n\tau(\omega,\theta)g_3(\theta) - 2g_2(\theta)} \leq R_n.$$

Nous donnons dans le tableau suivant les différentes valeurs de θ, $2n\tau(\omega,\theta)$ et r, et donc de η_0, κ, δ, $b_1(n)$ et $b_3(n)$.

n	2	3	4
θ	1.66356	1.68421	1.69456
$2n\tau(\omega,\theta)$	3.433	4.76016	6.06137
r	5.09632	3.25924	2.58203
η_0	0.04142	0.06479	0.08178
κ	0.30355	0.24314	0.19935
δ	0.6711	0.69023	0.70319
$b_1(n)$	-10484.484	-8134.668	-8355.204
$b_3(n)$	$6.499 \cdot 10^6$	$2.620 \cdot 10^6$	$1.83 \cdot 10^6$
R_n	5.09635	3.25925	2.58208

Nous rappelons que ces résultats sont établis pour $q \geq 114$. Pour la suite, nous nous placerons dans le cas où $q \geq 10^6$. En reproduisant les calculs ci-dessus, nous obtenons naturellement des valeurs un peu meilleures pour R_n que nous utiliserons au chapitre suivant.

n	2	3	4
θ	1.66356	1.68421	1.69456
$2n\tau(\omega,\theta)$	0.85825	4.76016	6.06137
r	3.97164	1.79647	1.24442
η_0	0.01822	0.04029	0.05816
κ	0.41291	0.35052	0.29656
δ	0.63189	0.65508	0.6734
$b_1(n)$	-8318.977	-6254.297	-6573.519
$b_3(n)$	$7.543 \cdot 10^6$	$3.031 \cdot 10^6$	$2.087 \cdot 10^6$
R_n	3.97165	1.79648	1.24443

$\square$

Quatrième partie
Une estimation de la taille du plus petit nombre premier dans une progression arithmétique

23 Introduction.

Soient q et a deux entiers premiers entre eux. Dirichlet établit en 1837 que chaque progression arithmétique $\{qn + a\}$ contient une infinité de nombres premiers. On se pose naturellement la question de savoir quelle est la taille du plus petit d'entre eux. Nous notons ce dernier $P(a,q)$.
En supposant vraie l'hypothèse de Riemann généralisée, nous avons alors

$$P(a,q) \ll \big(\phi(q)\log q\big)^2.$$

En fait on conjecture même que

$$P(a,q) \ll q^{1+\epsilon}.$$

La première affirmation sur le sujet fut établit en 1944 par Linnik : il montre qu'il existe une constante $L \geq 2$ qui vérifie

$$P(a,q) \ll q^L.$$

Il est à souligner que Linnik le montre aussi dans le cas particulièrement délicat où le module q est exceptionnel. Ce théorème constitue l'un des résultats les plus aboutis en théorie analytique des nombres. De nombreux chercheurs ont depuis investigués pour trouver une valeur minimale pour L, le dernier résultat étant dû à Heath Brown qui évalue L à 5.5 (voir [12]).
Pour aborder un tel problème, on étudie communément une somme de termes positifs portant sur les nombres premiers en progression arithmétique bornés par un réel x. Il s'agit alors de vérifier sous quelle condition sur x cette somme devient strictement positive.
Pour la suite, nous nous restreignons au cas des modules non exceptionnels au sens donné au théorème 22.1.
Par exemple, pour la fonction

$$\theta(x,q,a) = \sum_{p\leq x \ \ p\equiv a \bmod q} \log p$$

dont on sait grâce au théorème des nombres premiers qu'elle est équivalente à $\frac{x}{\phi(q)}$, une localisation des zéros des fonctions L de module q permet d'estimer le terme d'erreur :

$$\Big|\theta(x,q,a) - \frac{x}{\phi(q)}\Big| \ll x \exp\Big(-\sqrt{\frac{\log x}{R_1}}\Big).$$

où R_1 est la constante de la région sans zéro du type De La Vallée Poussin. Et on en déduit que

$$P(a,q) \leq \exp(c(\log q)^2)$$

où c est une constante proche de R_1.
Mc. Curley obtient ainsi $c = 10.93$ lorsque $q \geq 10^{20}$ (voir [17]).
La preuve du théorème de Linnik s'appuie en outre sur une estimation asymptotique de la densité des zéros :

$$\sum_{\chi \bmod q} N(\sigma,T,\chi) = \mathcal{O}\big((qT)^{m(1-\sigma)}\big)$$

où m est une constante et $N(\sigma,T,\chi)$ le nombre de zéros $\varrho = \beta + i\gamma$ de $L(s,\chi)$ tels que $\sigma \leq \beta \leq 1$ et $0 \leq \gamma \leq T$.
Au théorème 22.1 du chapitre précédent, nous avons obtenu pour les modules non exceptionnels :

$$N\Big(1 - \frac{1}{R_4 \log q}, \frac{\omega}{R_1 \log q}, \chi\Big) \leq 4$$

Ce résultat, à défaut d'être uniforme en q, est effectif et nous permet d'établir l'approximation ci-après pour $P(a,q)$. S. Wagstaff ayant vérifié numériquement dans [34] que jusqu'à une valeur de q inférieure à $q_0 = 10^6$, $P(a,q)$ était de l'ordre de $\phi(q)\log q \log \phi(q)$, nous nous permettons de supposer $q \geq q_0 = 10^6$.

Théorème 23.1.

$$P(a,q) \leq \exp(\alpha(\log q)^2) \tag{187}$$

où α est donné par :

q	10^6	10^{10}	10^{20}	10^{30}	10^{50}	10^{100}
α	6.950145	6.718318	6.56391	6.517269	6.482259	6.457718

Nous avons besoin des rappels suivants pour montrer ce résultat.

24 Introduction (english version)

Let q and a be relatively prime integers. Dirichlet showed in 1837 that every arithmetic progression $\{qn+a\}$ contains infinitely many prime numbers. A natural question to ask is then, how big is the first such prime, denoted by $P(a,q)$.
If the Generelised Riemann Hypothesis is true, then we would have

$$P(a,q) \ll \big(\phi(q)\log q\big)^2.$$

It has even been conjectured that

$$P(a,q) \ll q^{1+\epsilon}.$$

The most important result on the subject is that of Linnik : it asserts that there is a constant $L \geq 2$ satisfying

$$P(a,q) \ll q^L,$$

and he even proved this result in the more difficult case of exceptionnal modulus. Since then, many investigations have given numerical values to L. The last one is due to Heath Brown who showed in 1992 that $L = 5.5$ (see [12]).
Such a problem is solved by studying a sum of positive terms extended over primes or prime powers be longing to the given arithmetic progression, and that are bounded by a real number x. The purpose is then to find conditions on x so that the sum does not vanish.
From now on we restrict our attention to non exceptional modulus, in the sense given in theorem 22.1.
We commonly use Chebyshev functions like

$$\theta(x,q,a) = \sum_{\{p\leq x, p\equiv a \bmod q\}} \log p$$

It is known thanks to the prime number theorem that this function is equivalent to $\frac{x}{\phi(q)}$ and thanks to a localisation of the L functions zeros, the error term can be bounded by:

$$\Big|\theta(x,q,a) - \frac{x}{\phi(q)}\Big| \ll x\exp\bigg(-\sqrt{\frac{\log x}{R_1}}\bigg).$$

where R_1 is the constant of the De La Vallée Poussin zero free region. From which we deduce

$$P(a,q) \leq \exp(\alpha(\log q)^2)$$

where α happens to be a constant close to R_1.
Mc. Curley showed that $\alpha = 10.93$ when $q \geq 10^{20}$ (see [17]).

Moreover, Linnik's proof depends on a principle called the "log-free" zero-density estimate :

$$\sum_{\chi \bmod q} N(\sigma,T,\chi) = \mathcal{O}\big((qT)^{m(1-\sigma)}\big)$$

where m is a real constant and $N(\sigma,T,\chi)$ the number of zeros $\varrho = \beta + i\gamma$ of $L(s,\chi)$ satisfying $\sigma \leq \beta \leq 1$ and $0 \leq \gamma \leq T$.
At theorem 22.1 of the former chapter, we established for the non exceptionnal modulus that :

$$N\Big(1 - \frac{1}{R_4 \log q}, \frac{\omega}{R_1 \log q}, \chi\Big) \leq 4$$

Though this result is not uniform in q we get a numerical estimation for $P(a,q)$. S. Wagstaff has checked in [34] that $P(a,q) \ll \phi(q) \log q \log \phi(q)$ for $q \leq q_0 = 10^6$. We will establish for $q > q_0$.
Théorème 24.1.

$$P(a,q) \leq \exp(\alpha(\log q)^2) \tag{188}$$

where α is given by :

q	10^6	10^{10}	10^{20}	10^{30}	10^{50}	10^{100}
α	6.950145	6.718318	6.56391	6.517269	6.482259	6.457718

We now give some preliminary lemmas to show our theorem.

25 Lemmes préliminaires.

Soit m un entier positif et f une fonction définie sur $[a,b]$. On dit que f est m-admissible si elle vérifie :

1. f est m fois différentiable
2. $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$, où $0 \leq k \leq m-1$,
3. $f \geq 0$,
4. f n'est pas identiquement nulle.

Nous prenons ici pour f : $f(t) = \big((t-a)(b-t)\big)^m$ et notons $a = L$ et $b = L(1+\delta)$, où L et δ sont des constantes positives que nous préciserons au paragraphe suivant. En posant classiquement

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| d\,t \quad \text{et} \quad \|f^{(m)}\|_2 = \Big(\int_a^b |f^{(m)}(t)|^2 d\,t\Big)^{1/2}$$

nous les calculons dans notre cas précis et trouvons

Lemme 25.1. *(Ramaré & Saouter - [26])*
Nous avons

$$\|f\|_\infty = \left(\frac{L\delta}{2}\right)^{2m} \ , \ \|f\|_1 = (L\delta)^{2m+1}\frac{(m!)^2}{(2m+1)!} \ ,$$

$$\|f'\|_1 = \frac{(L\delta)^{2m}}{2^{2m-1}} \ , \ \|f^{(m)}\|_2 = (L\delta)^{m+1/2}\frac{m!}{\sqrt{2m+1}}.$$

$$et \quad \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_1} \le \frac{2m+1}{L\delta} \quad , \quad \frac{\|f'\|_1}{\|f\|_1} = \frac{\nu_m}{L\delta} \quad , \quad \frac{\|f^{(m)}\|_2}{\|f\|_1} = \frac{\mu_m}{(L\delta)^{m+1/2}}$$

$$avec \quad \nu_m = \frac{(m!)^2}{2^{2m-1}(2m+1)!} \quad , \quad \mu_m = \frac{(2m+1)!}{m!\sqrt{2m+1}}.$$

Lemme 25.2.
Soient m un entier positif, F la transformée de Laplace d'une fonction m-admissible f, et s un nombre complexe. Alors

$$F(s) = \frac{1}{s^k}\int_L^{L(1+\delta)} f^{(k)}(t)e^{-st}dt \ , \ k \in \{1...,m\}$$

$$|F(s)| \le \|f^{(k)}\|_1\frac{e^{-\sigma L}}{|s|^k} \quad et \quad |F(s)| \le \|f\|_1 e^{-\sigma L}$$

Proposition 25.3.
Nous avons les formules explicites

1. *Si χ est le caractère primitif principal :*

$$\sum_{n\ge1}\frac{\Lambda(n)}{n}f(\log n) = F(0) + F(1) - \sum_{\varrho_\chi\in Z(\zeta)} F(1-\varrho_\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac14 + i\frac{T}{2}\Big)F(1/2+iT)dT \quad (189)$$

2. *Si χ n'est pas le caractère primitif principal :*

$$\sum_{n\ge1}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n}f(\log n) = \frac14(1+\chi(-1))F(1) - \sum_{\varrho_\chi\in Z(\chi)} F(1-\varrho_\chi) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{2-\chi(-1)}{4} + i\frac{T}{2}\Big)F(1/2+iT)dT \quad (190)$$

Preuve. Ces formules découlent de la formule de Weil établie au théorème 1.1 :

$$\sum_{n\geq 1}\Lambda(n)\chi(n)\phi(\log n) = \delta_{q,1}\big(\Phi(-1)+\Phi(0)\big)+\frac{1}{4}(1-\delta_{q,1})(1+\chi(-1))\Phi(0)$$
$$-\sum_{\varrho\in Z(\chi)}\Phi(-\varrho)+\phi(0)\log\frac{q}{\pi}+\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)\overline{\chi}(n)}{n}\phi(-\log n)$$
$$+\lim_{T\mapsto+\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{1/2-iT}^{1/2+iT}\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\Big)\Phi(-s)d\,s \quad (191)$$

□

Lemme 25.4. *(Mc.Curley - [17])*
Soit $T\geq 1$. Nous notons $N(T,\chi)$ le nombre de zéros d'une fonction L de Dirichlet $L(s,\chi)$ dans la région du plan complexe $\Re s\in[0,1]$ et $\Im s\in[-T,T]$.

$$\Big|N(T,\chi)-\frac{T}{\pi}\log\frac{qT}{2\pi e}\Big|\leq a_1\log(qT)+a_2 \quad \textit{où} \quad a_1=0.9185,\ a_2=5.512 \quad (192)$$

Lemme 25.5. *(Ramaré & Rumely - [25])*
Soit χ un caractère de conducteur q, m un entier positif et deux réels x et x_0 vérifiant $x\geq x_0\geq 1$ et $2R\ln^2(q/c)\geq\log(x_0)$. Alors

$$\sum_{\{\varrho_\chi\in Z(\chi),|\gamma|\geq 1\}}\frac{x^\beta}{|\gamma|^m}+\sum_{\{\varrho_\chi\in Z(\overline{\chi}),|\gamma|\geq 1\}}\frac{x^\beta}{|\gamma|^m}\leq x(\tilde{A}+\tilde{B})+\sqrt{x}(\tilde{C}+\tilde{D}) \quad (193)$$

où nous avons

$$\begin{cases}\tilde{A} &= \Big[\frac{1}{\pi(m-2)}\Big(\log\frac{q}{2\pi}+\frac{1}{m-2}\Big)+\frac{a_1}{m}\Big]\exp\Big(\frac{-L}{R\log\frac{q}{c}}\Big)\\ \tilde{B} &= 2(a_1\log q+a_2)\exp\Big(\frac{-L}{R\log\frac{q}{c}}\Big)\\ \tilde{C} &= \frac{1}{\pi(m-1)}\Big(\log\frac{q}{2\pi}+\frac{1}{m-1}\Big)\\ \tilde{D} &= 2a_1\log q+2a_2+\frac{a_1}{m}\end{cases}$$

les constantes a_1 et a_2 étant celles du lemme 25.4.

Lemme 25.6. *(voir Chapitre 3 - lemme 3.2)*

$$\Big|\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{2-\chi(-1)}{4}+i\frac{T}{2}\Big)\Big|$$
$$\leq U(T)=\begin{cases}\frac{1}{2}\log\frac{16}{1+4T^2}+\frac{2}{1+4T^2}-\frac{\pi}{6} & \text{si } |T|<\frac{2-\chi(-1)}{4}\\ \log\frac{|T|}{2}-\frac{2}{1+4T^2}+\frac{2}{3|T|}+\frac{9}{8T^2} & \text{sinon}\end{cases}$$

Lemme 25.7. *(H. L. Montgomery et R. C. Vaughan - [23])*

$$\textit{Si } M>0 \textit{ et } N>1, \textit{ alors} \quad \pi(M+N)-\pi(M)\leq\frac{2N}{\log N}$$

26 Preuve du théorème.

Soient δ et L deux réels positifs que nous prenons comme suit :
$\delta \geq \delta_0$ avec $\delta_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ et $L = \alpha(\log q)^2$ avec $\alpha \leq 2R_1$, où R_1 est la constante de la région sans zéro trouvée au théorème 12.1, c'est à dire $R_1 = 6.4355$.
Nous allons considérer dans la suite la somme sur les premiers :

$$\Sigma_0 = \sum_{p \in A(a,q)} \frac{\log p}{p} \frac{f(\log p)}{\|f\|_1} \tag{194}$$

où f est une fonction m-admissible à support compact dans un intervalle $[L,L(1+\delta)]$, $\|f\|_1$ désigne la norme usuelle et $A_{a,q} = \{n \in \mathbb{N} : (n,q) = 1,\ n \equiv a (\bmod q)$ et $n \in [e^L, e^{L(1+\delta)}]\}$.
Nous pouvons exprimer cette somme en fonction de tous les entiers, en écrivant :

$$\Sigma_0 = \Sigma_1 - \Sigma_2 \tag{195}$$

$$\text{avec} \quad \Sigma_1 = \sum_{n \in A_{a,q}} \frac{\Lambda(n)}{n} \frac{f(\log n)}{\|f\|_1} \quad \text{et} \quad \Sigma_2 = \sum_{\{k \geq 2,\ p^k \in A_{a,q}\}} \frac{\log p}{p^k} \frac{f(k \log p)}{\|f\|_1} \tag{196}$$

Σ_1 s'exprime sous la forme :

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(a) \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n} \frac{f(\log n)}{\|f\|_1}$$

D'après le lemme 25.3, nous pouvons réécrire le terme sommé dans le cas où χ est primitif. Ainsi, en notant χ_1 le caractère primitif associé à χ :

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(a) \sum_{n \geq 1} \frac{\chi_1(n)\Lambda(n)}{n} \frac{f(\log n)}{\|f\|_1} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} + \Sigma_{13} \tag{197}$$

$$\text{où } \Sigma_{11} = \frac{1}{\phi(q)} \left[1 + \left(1 + \frac{1}{4} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left(\overline{\chi}(a) + \chi_1(-a) \right) \right) \frac{F(1)}{\|f\|_1} \right] \tag{198}$$

$$\Sigma_{12} = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(a) \sum_{\varrho_\chi \in Z(\chi)} \frac{F(1-\varrho_\chi)}{\|f\|_1} \tag{199}$$

$$\Sigma_{13} = \frac{1}{2\pi\phi(q)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(1/2+iT)}{\|f\|_1} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(a) \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{2-\chi(-1)}{4} + i\frac{T}{2} \right) dT \tag{200}$$

Notons Σ_3 la somme restante. Elle s'écrit alors sous la forme

$$\Sigma_3 = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n} \frac{f(\log n)}{\|f\|_1} \left(\omega_q(a,n) - w_q(a,n) \right) \tag{201}$$

$$\text{où} \quad w_q(a,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A_{a,q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \omega_q(a,n) = \begin{cases} \frac{\phi(Q)}{\phi(q)} & \text{si } n \in A_{a,Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{202}$$

Q étant le plus grand diviseur de q premier avec n. Nous rappelons que ω, qui a en fait été introduite par Ramaré et Rumely dans [25], vérifie

$$\omega_q(a,n) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \bmod Q} \chi(n)\overline{\chi}(a) \tag{203}$$

Finalement, puisque $\Sigma_0 = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} + \Sigma_{13} - \Sigma_2 - \Sigma_3$, nous obtenons que ce terme est positif dès lors que :

$$0 \leq \Sigma_{11} - \big(|\Sigma_{12}| + |\Sigma_{13}| + |\Sigma_2| + |\Sigma_3|\big) \tag{204}$$

C'est à dire qu'il nous reste à minorer de Σ_{11} et majorer $|\Sigma_{12}|$, $|\Sigma_{13}|$, $|\Sigma_2|$ et $|\Sigma_3|$.

26.1 Etude de Σ_{11}

$$\Sigma_{11} = \frac{1}{\phi(q)} \left[1 + \Big(1 + \frac{1}{4} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(a)\big(1 + +\overline{\chi_1}(-a)\big)\Big) \frac{F(1)}{\|f\|_1} \right] \tag{205}$$

Il vient aisément que $\frac{F(1)}{\|f\|_1} \geq e^{-L(1+\delta)}$ et $1 + \frac{1}{4}\sum_{\chi\neq\chi_0}\big(1 + +\overline{\chi_1}(-a)\big)\Big) \geq \frac{1}{2}$, ainsi :

$$\Sigma_{11} \geq \frac{1}{q}\Big(1 + \frac{1}{2}e^{-L(1+\delta_0)}\Big) \geq \frac{1}{q} + \frac{\exp\big(-2R_1(1+\delta_0)(\log q)^2\big)}{2q} \tag{206}$$

26.2 Etude de Σ_{12}

$$|\Sigma_{12}| \leq \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \sum_{\varrho \in Z(\chi)} \frac{|F(1-\varrho)|}{\|f\|_1} \tag{207}$$

Nous approchons de différentes façons le terme $F(1-\varrho_\chi)$ selon la taille de $\Im\varrho_\chi$. Nous notons comme suit les deux sommes étudiées

$$\Sigma_{121} = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \sum_{\{\varrho\in Z(\chi), |\gamma|\leq 1\}} \frac{|F(1-\varrho)|}{\|f\|_1} \quad \text{et} \quad \Sigma_{122} = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \sum_{\{\varrho\in Z(\chi), |\gamma|> 1\}} \frac{|F(1-\varrho)|}{\|f\|_1}$$

1. Si $|\gamma| \leq 1$, nous utilisons les résultats de la section 24 sur la répartition des zéros des fonctions L de Dirichlet : nous savons, d'après le théorème 12.1 qu'il n'y a pas de zéros dans la région $1-\beta \geq \frac{1}{R_1 \log q}$.
Notons β_1, β_2 et β_3 les trois premières parties réelles de zéros ϱ_k telles que $|\gamma_k| \leq \frac{\omega}{R_1 \log q}$ et $1/2 \leq \beta_3 < \beta_2 < \beta_1 \leq 1 - \frac{1}{R_1 \log q}$. D'après le théorème 21.1, nous avons les inégalités : $\beta_1 \leq 1 - \frac{1}{R_1 \log q}$, $\beta_2 \leq 1 - \frac{1}{R_2 \log q}$, $\beta_3 \leq 1 - \frac{1}{R_3 \log q}$.
La région $\mathcal{R}$ des zéros éventuels restants est alors décrite par :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \bigcup \mathcal{R}_2$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{R}_1 = \Big\{ \varrho = \beta + i\gamma \ : \ 1 - \frac{1}{R_4 \log q} \leq \beta \leq 1 - \frac{1}{R_1 \log q} \text{ et } \frac{\omega}{R_1 \log q} \leq \gamma \leq 1 \Big\}$$

$$\text{et} \quad \mathcal{R}_2 = \Big\{ \varrho = \beta + i\gamma \ : \ \frac{1}{2} \leq \beta \leq 1 - \frac{1}{R_4 \log q} \text{ et } 0 \leq \gamma \leq 1 \Big\}$$

Σ_{121} est majoré par

$$\begin{aligned}\sum_{\{\varrho \in Z(\chi), |\gamma| \leq 1\}} \frac{|F(1-\varrho)|}{\|f\|_1} &\leq 2 \sum_{k=1}^{3} \frac{|F(1-\varrho_k)|}{\|f\|_1} + 2 \sum_{\varrho \in \mathcal{R}} \frac{|F(1-\varrho)|}{\|f\|_1} \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{3} \exp\Big(- \frac{L}{R_k \log q}\Big) + N(1,\chi) \max_{\varrho \in \mathcal{R}} \frac{|F(1-\varrho)|}{\|f\|_1} \qquad (208)\end{aligned}$$

Lorsque $\varrho \in \mathcal{R}_1$

$$\begin{aligned}\frac{|F(1-\varrho)|}{\|f\|_1} &\leq \frac{\|f'\|_1}{\|f\|_1} \frac{\exp\big(- (1-\beta)L\big)}{((1-\beta)^2 + \gamma^2)^{1/2}} \\ &\leq \frac{\nu_m}{L\delta} \frac{q^{-\alpha/R_1} R_1 \log q}{\sqrt{2}\omega} \leq \frac{\nu_m}{\sqrt{2}\omega\alpha\delta_0 R_1} \frac{q^{-\alpha/R_1}}{\log q}\end{aligned}$$

où nous avons supposé α supérieur à une certaine valeur α_0 que nous déterminerons à la fin de cette preuve, ceci uniquement pour simplifier l'équation finale que va vérifier α.

Lorsque $\varrho \in \mathcal{R}_2$

$$\frac{|F(1-\varrho)|}{\|f\|_1} \leq \exp\big(- (1-\beta)L\big) \leq \exp\Big(\frac{-L}{R_4 \log q}\Big) \leq q^{-\alpha_0/R_4}$$

Ainsi, nous avons :

$$\sum_{\{\varrho\in Z(\chi),|\gamma|\le 1\}} \frac{|F(1-\varrho)|}{\|f\|_1} \le 2\sum_{k=1}^{3} q^{-\alpha/R_k}$$
$$+ (a_1\log q + a_2)\max\left\{\frac{\nu_m}{\sqrt{2}\omega\alpha_0\delta_0 R_1}\frac{q^{-\alpha/R_1}}{\log q}q^{-\alpha/R_1},q^{-\alpha_0/R_4}\right\}$$
$$\le B_0(q,m)q^{-\alpha/R_1} \quad (209)$$

$$B_0(q,m) = 2\sum_{k=1}^{3} q^{\alpha(1/R_1-1/R_k)}+(a_1\log q+a_2)\max\left\{\frac{\nu_m}{\sqrt{2}\omega\alpha_0\delta_0 R_1}\frac{1}{\log q},q^{\alpha_0(1/R1-1/R_4)}\right\}$$

2. Si $|\gamma|>1$, nous avons d'après le lemme 25.2

$$\frac{|F(1-\varrho)|}{\|f\|_1} \le \frac{\mu_m}{(L\delta)^m}\frac{e^{-(1-\beta)L}}{|\gamma|^m} \quad (210)$$

et donc $$\sum_{\{\varrho\in Z(\chi),|\gamma|>1\}} \frac{|F(1-\varrho)|}{\|f\|_1} \le \frac{\mu_m}{(L\delta)^m}e^{-L}\sum_{\{\varrho\in Z(\chi),|\gamma|>1\}}\frac{e^{\beta L}}{|\gamma|^m}$$

Nous rappelons que les conjugués des zéros ϱ de $L(s,\chi)$ sont les zéros de $L(s,\overline{\chi})$. Nous pouvons donc réécrire la somme :

$$\sum_{\chi \bmod q}\sum_{\{\varrho\in Z(\chi),|\gamma|>1\}}\frac{e^{\beta L}}{|\gamma|^m} = \frac{1}{2}\sum_{\chi \bmod q}\left(\sum_{\{\varrho\in Z(\chi),|\gamma|>1\}}\frac{e^{\beta L}}{|\gamma|^m} + \sum_{\{\varrho\in Z(\overline{\chi}),|\gamma|>1\}}\frac{e^{\beta L}}{|\gamma|^m}\right) \quad (211)$$

Nous avons supposé $L\le 2R_1(\log q)^2$, de sorte qu'en prenant $x_0=x=e^L$, le lemme (25.5) nous permet de majorer le terme sommé par :

$$e^L(\tilde{A}+\tilde{B}) + e^{L/2}(\tilde{C}+\tilde{D})$$

avec $$\left\{\begin{array}{lcl} \tilde{A} &=& \left[\frac{1}{\pi(m-2)}\log q + \frac{1}{\pi(m-2)}\left(\frac{1}{m-2}-\log 2\pi\right)+\frac{a_1}{m-1}\right]\exp\left(\frac{-L}{R_1\log q}\right)\\ \tilde{B} &=& 2\left(a_1\log q + a_2\right)\exp\left(\frac{-L}{R_1\log q}\right)\\ \tilde{C} &=& \frac{1}{\pi(m-1)}\log q + \frac{1}{\pi(m-1)}\left(\frac{1}{m-1}-\log 2\pi\right)\\ \tilde{D} &=& 2a_1\log q + 2a_2 + \frac{a_1}{m}\end{array}\right.$$

donc $$\Sigma_{122} \le \frac{\mu_m}{2(L\delta)^m}\left(\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)+e^{-L/2}\left(\tilde{C}+\tilde{D}\right)\right)$$

c'est à dire $\quad \Sigma_{122} \leq \Bigg[c_3(m,\alpha_0) \dfrac{q^{-\alpha_0/R_1}}{(\log q)^{2m-1}} \; + \; c_4(m,\alpha_0) \dfrac{q^{-\alpha_0/R_1}}{(\log q)^{2m}}$

$$+ \; c_5(m,\alpha_0) \frac{\exp\big(-\frac{\alpha_0}{2}(\log q)^2\big)}{(\log q)^{2m-1}} \; + \; c_6(m,\alpha_0) \frac{\exp\big(-\frac{\alpha_0}{2}(\log q)^2\big)}{(\log q)^{2m}} \Bigg] \frac{1}{\delta^m} \qquad (212)$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} c_3(m,_0) &= \frac{\mu_m}{2\alpha_0^m}\big(\frac{1}{\pi(m-2)} + 2a_1\big) \\ c_4(m,\alpha_0) &= \frac{\mu_m}{2\alpha_0^m}\Big(\frac{1}{\pi(m-2)}\big(\frac{1}{m-2} - \log 2\pi\big) + \frac{a_1}{m-1} + 2a_2\Big) \\ c_5(m,\alpha_0) &= \frac{\mu_m}{2\alpha_0^m}\big(\frac{1}{\pi(m-1)} + 2a_1\big) \\ c_6(m,\alpha_0) &= \frac{\mu_m}{2\alpha_0^m}\Big(\frac{1}{\pi(m-1)}\Big(\frac{1}{m-1} - \log 2\pi\Big) + \frac{a_1}{m} + 2a_2\Big) \end{cases}$$

Finallement, nous obtenons pour Σ_{12} :

$$\Sigma_{12} \leq B_0(q,m) q^{-\alpha/R_1} + \Bigg[c_3(m,\alpha_0) \frac{q^{-\alpha_0/R_1}}{(\log q)^{2m-1}} + c_4(m,\alpha_0) \frac{q^{-\alpha_0/R_1}}{(\log q)^{2m}}$$

$$+ c_5(m,\alpha_0) \frac{\exp\big(-\frac{\alpha_0}{2}(\log q)^2\big)}{(\log q)^{2m-1}} + c_6(m,\alpha_0) \frac{\exp\big(-\frac{\alpha_0}{2}(\log q)^2\big)}{(\log q)^{2m}} \Bigg] \frac{1}{\delta^m} \qquad (213)$$

26.3 Etude de Σ_{13}

$$|\Sigma_{13}| \leq \frac{1}{2\pi\phi(q)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F(1/2 + iT)|}{\|f\|_1} \sum_{\chi \bmod q} \left| \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{2 - \chi_1(-1)}{4} + i\frac{T}{2}\Big) \right| dT$$

Nous utilisons le lemme (25.6) pour le terme $\Re\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ et l'inégalité suivante donnée par le lemme 25.2

$$\frac{|F(1/2 + iT)|}{\|f\|_1} \leq \frac{2^m \mu_m e^{-L/2}}{(L\delta)^m} \frac{1}{(1 + 4T^2)^{m/2}}$$

$$\text{pour obtenir} \quad |\Sigma_{13}| \leq \frac{2^m \mu_m}{2\pi} \frac{e^{-L/2}}{(L\delta)^m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(T)}{(1 + 4T^2)^{m/2}} dT$$

$$|\Sigma_{13}| \leq c_7(m) \frac{\exp\big(-\frac{\alpha_0}{2}(\log q)^2\big)}{(\log q)^{2m}} \quad \text{où} \quad c_7(m) = \frac{2^m \mu_m}{2\pi \alpha_0^m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(T)}{(1 + 4T^2)^{m/2}} dT \qquad (214)$$

26.4 Etude de Σ_2.

Nous rappelons que :

$$\Sigma_2 = \sum_{\{k\geq 2,\ p^k\in A_{a,q}\}} \frac{\log p}{p^k}\frac{f(k\log p)}{\|f\|_1}$$

D'après le lemme (25.1), nous pouvons majorer cette somme par

$$\frac{2m+1}{L\delta}\sum_{\{k\geq 2,\ p^k\in A_{a,q}\}} \frac{\log p}{p^k}$$

et donc, grâce à la décroissance de la fonction $x\exp(-x)$, par

$$\frac{2m+1}{\delta}e^{-L}\sum_{2\leq k<\frac{L(1+\delta)}{\log 2}} \frac{1}{k}\Big(\pi\big(e^{L(1+\delta)/k}\big)-\pi\big(e^{L/k}\big)\Big)$$

Grâce au théorème 25.7 de H. L. Montgomery et R. C. Vaughan, nous avons la majoration

$$\pi\big(e^{L(1+\delta)/k}\big)-\pi\big(e^{L/k}\big)\leq \frac{2e^{L/k}\big(e^{L\delta/k}-1\big)}{\log\Big(e^{L/k}\big(e^{L\delta/k}-1\big)\Big)}$$

et donc

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &\leq \frac{2m+1}{\delta}e^{-L}\sum_{2\leq k<\frac{L(1+\delta)}{\log 2}}\frac{2e^{L/k}\big(e^{L\delta/k}-1\big)}{k\log\Big(e^{L/k}\big(e^{L\delta/k}-1\big)\Big)}\\ &\leq \frac{2(2m+1)}{L\delta}e^{-L}\big(e^{L\delta/2}-1\big)\sum_{2\leq k<\frac{L(1+\delta)}{\log 2}} e^{L/k}\\ &\leq \frac{2(2m+1)}{\log 2}e^{-L/2}\big(e^{L\delta/2}-1\big)\frac{1+\delta}{\delta}\end{aligned}$$

$$\text{C'est à dire}\quad \Sigma_2\leq c_8(m)\exp\Big(-\frac{\alpha_0}{2}(\log q)^2\Big)\Big[\exp\Big(-\frac{\alpha_0\delta_0}{2}(\log q)^2\Big)-1\Big]\Big(1+\frac{1}{\delta^m}\Big)$$
$$\text{où}\quad c_8(m)=\frac{2(2m+1)}{\log 2} \tag{215}$$

26.5 Etude de Σ_3.

Nous rappelons que :

$$\Sigma_3 = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n}\frac{f(\log n)}{\|f\|_1}\big(\omega_q(a,n) - w_q(a,n)\big)$$
$$= \sum_{n\in A_{a,Q}} \frac{\Lambda(n)}{n}\frac{f(\log n)}{\|f\|_1}\Big(\frac{\phi(Q)}{\phi(q)} - 1\Big) + \sum_{n\in A_{a,Q}\setminus A_{a,q}} \frac{\Lambda(n)}{n}\frac{f(\log n)}{\|f\|_1}\frac{\phi(Q)}{\phi(q)} \tag{216}$$

En utilisant le lemme (25.1) et le fait que l'ensemble $A_{a,Q}$ est contenu dans $A_{a,q}$, nous pouvons donc la majorer par :

$$\frac{2m+1}{L\delta}\sum_{n\in A_{a,Q}\setminus A_{a,q}} \frac{\Lambda(n)}{n}\frac{\phi(Q)}{\phi(q)}$$

cette dernière somme donc sur des puissances de premiers p qui divisent q mais pas Q, c'est à dire que le terme $\frac{\phi(Q)}{\phi(q)}$ s'écrit $\frac{1}{(p-1)p^{\nu_p(q)-1}}$, où $\nu_p(q)$ est la valuation de q en p, et il est donc inférieur à $\frac{1}{p-1}$. Nous obtenons les majorations suivantes pour Σ_3

$$\Sigma_3 \leq \frac{2m+1}{L\delta}\sum_{\{k\geq 1,\ p|q\}} \frac{\log p}{(p-1)p^k}$$
$$\leq \frac{2m+1}{L\delta}\sum_{\{p|q,\ p\leq e^{(L(1+\delta)/2)}\}} \frac{\log p}{p-1}\sum_{k\in[L/\log p, L(1+\delta)/\log p]} \frac{1}{p^k}$$
$$\leq \frac{2m+1}{L\delta}e^{-L}\sum_{p|q}\frac{p\log p}{(p-1)^2}$$

Il nous reste alors à estimer cette dernière somme :

$$\sum_{p|q}\frac{p\log p}{(p-1)^2} = \sum_{p|q}\frac{\log p}{p} + \sum_{p|q}\frac{(2p-1)\log p}{p(p-1)^2} \tag{217}$$

La première somme diverge. En la décomposant selon les "petits" et les "grands" facteurs premiers de q :

$$\sum_{\{p|q,p\leq P\}}\frac{\log p}{p} + \sum_{\{p|q,p>P\}}\frac{\log p}{p} \tag{218}$$

nous connaisons une estimation du terme principal, à savoir que, d'après les estimations de J. B. Rosser et L. Schoenfeld dans [29] :

$$\sum_{\{p|q,p\leq P\}}\frac{\log p}{p} \leq \log P \tag{219}$$

Pour la seconde, nous utilisons la décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{\log x}{x}$ et le fait qu'il y a au plus $\frac{\log q}{\log P}$ diviseurs premiers de q. Nous la majorons ainsi par $\frac{\log P}{P}\frac{\log q}{\log P}$. C'est à dire, en prenant $P = \log q$:

$$\sum_{\{p|q, p\leq P\}} \frac{\log p}{p} + \sum_{\{p|q, p>P\}} \frac{\log p}{p} \leq \log\log q + 1 \tag{220}$$

La seconde somme de (217) est finie et nous obtenons une majoration effective de la manière suivante :

$$\sum_{p|q} \frac{(2p-1)\log p}{p(p-1)^2} \leq \sum_{\{p|q, p\leq P_0\}} \frac{(2p-1)\log p}{p(p-1)^2} + \sum_{\{p|q, p>P_0\}} \frac{(2p-1)\log p}{p(p-1)^2} \tag{221}$$

La première somme se calcule directement grâce au logiciel GP/PARI. Grâce à la décroissance de $\frac{(2x-1)\log x}{x(x-1)^2}$. Nous pouvons majorer la seconde par $\int_{P_0-1}^{+\infty} \frac{(2x-1)\log x}{x(x-1)^2} d\,x$. Et nous obtenons finalement, en prenant $P_0 = 5 \cdot 10^5$:

$$\sum_{p|q} \frac{p\log p}{(p-1)^2} \leq \log\log q + 1 + 1.98233142 + 5.648 \cdot 10^{-5} < \log\log q + 3 \tag{222}$$

$$\text{Et donc} \quad \Sigma_3 \leq (2m+1)\frac{\exp(-L)}{L\delta}\log\log q + 3(2m+1)\frac{\exp(-L)}{L\delta} \tag{223}$$

$$\Sigma_3 \leq \left[c_9(m,\alpha_0)\frac{\exp\big(-\alpha_0(\log q)^2\big)}{\alpha_0(\log q)^2}\log\log q + 3c_9(m,\alpha_0)\frac{\exp\big(-\alpha_0(\log q)^2\big)}{\alpha_0(\log q)^2}\right]\frac{1}{\delta^{m+1/2}}$$
$$\text{où} \quad c_9(m) = \frac{2m+1}{\alpha_0} \tag{224}$$

26.6 Conclusion

Nous déduisons des inégalités (206), (213), (214), (215) et (224) :

$$
\begin{aligned}
0 \leq \frac{1}{q} \;+\; &\frac{\exp\big(-2R_1(1+\delta_0)(\log q)^2\big)}{2q} \;-\; B_0(q,m)q^{-\alpha/R_1}\\
-\; c_7(m)\frac{\exp\big(-\frac{\alpha_0}{2}(\log q)^2\big)}{(\log q)^{2m}} \;-\; &c_8(m)\exp\Big(-\frac{\alpha_0}{2}(\log q)^2\Big)\Big[\exp\Big(-\frac{\alpha_0\delta_0}{2}(\log q)^2\Big)-1\Big]\\
-\;\Big[c_3(m,_0)\frac{q^{-\alpha_0/R_1}}{(\log q)^{2m-1}} \;+\; &c_4(m,\alpha_0)\frac{q^{-\alpha_0/R_1}}{(\log q)^{2m}} \;+\; c_5(m,\alpha_0)\frac{\exp\big(-\frac{\alpha_0}{2}(\log q)^2\big)}{(\log q)^{2m-1}}\\
+\,c_6(m,\alpha_0)\frac{\exp\big(-\frac{\alpha_0}{2}(\log q)^2\big)}{(\log q)^{2m}} + &c_8(m)\exp\Big(-\frac{\alpha_0}{2}(\log q)^2\Big)\Big[\exp\Big(-\frac{\alpha_0\delta_0}{2}(\log q)^2\Big)-1\Big]\\
+\; c_9(m,\alpha_0)\frac{\exp\big(-\alpha_0(\log q)^2\big)}{\alpha_0(\log q)^2}\log\log q \;+\; &3c_9(m,\alpha_0)\frac{\exp\big(-\alpha_0(\log q)^2\big)}{\alpha_0(\log q)^2}\Big]\frac{1}{\delta^m}
\end{aligned}
\tag{225}
$$

C'est à dire que

$$
0 \leq -B_0(q,m)q^{-\alpha/R_1} + B_1(q,m) - B_2(q,m)\delta^{-m} \tag{226}
$$

où

$$
\begin{aligned}
B_1(q,m) = \frac{1}{q} \;+\; &\frac{\exp\big(-2R_1(1+\delta_0)(\log q)^2\big)}{2q}\\
-\; c_7(m)\frac{\exp\big(-\frac{\alpha_0}{2}(\log q)^2\big)}{(\log q)^{2m}} \;-\; &c_8(m)\exp\Big(-\frac{\alpha_0}{2}(\log q)^2\Big)\Big[\exp\Big(-\frac{\alpha_0\delta_0}{2}(\log q)^2\Big)-1\Big]
\end{aligned}
\tag{227}
$$

$$
\begin{aligned}
B_2(q,m) = c_3(m,_0)\frac{q^{-\alpha_0/R_1}}{(\log q)^{2m-1}} \;+\; &c_4(m,\alpha_0)\frac{q^{-\alpha_0/R_1}}{(\log q)^{2m}} \;+\; c_5(m,\alpha_0)\frac{\exp\big(-\frac{\alpha_0}{2}(\log q)^2\big)}{(\log q)^{2m-1}}\\
+\,c_6(m,\alpha_0)\frac{\exp\big(-\frac{\alpha_0}{2}(\log q)^2\big)}{(\log q)^{2m}} + &c_8(m)\exp\Big(-\frac{\alpha_0}{2}(\log q)^2\Big)\Big[\exp\Big(-\frac{\alpha_0\delta_0}{2}(\log q)^2\Big)-1\Big]\\
+\; c_9(m,\alpha_0)\frac{\exp\big(-\alpha_0(\log q)^2\big)}{\alpha_0(\log q)^2}\log\log q \;+\; &3c_9(m,\alpha_0)\frac{\exp\big(-\alpha_0(\log q)^2\big)}{\alpha_0(\log q)^2}
\end{aligned}
\tag{228}
$$

Ce qui signifie que α est majoré par

$$
\frac{R_1}{\log q}\log\Big(\frac{B_0(q,m)}{B_1(q,m)-B_2(q,m)\delta^{-m}}\Big) \tag{229}
$$

$$\text{Nototons } \alpha(m,q,\delta) \text{ le terme } (1+\delta)\frac{R_1}{\log q}\log\left(\frac{B_0(q,m)}{B_1(q,m)-B_2(q,m)\delta^{-m}}\right) \tag{230}$$

il nous reste alors à optimiser ce dernier. Nous prenons $m = 3$. A chaque q considéré, nous choisissons pour α_0 la valeur la plus grande possible, de sorte que lorsqu'on minimise $\alpha(m,q,\delta)$ en fonction du paramètre δ, nous obtenons pour α une valeur plus grande à 10^{-6} près de α_0.

q	10^6	10^{10}	10^{20}	10^{30}	10^{50}	10^{100}
α_0	6.95014	6.71831	6.56389	6.51726	6.48225	6.45771
δ	$2.15 \cdot 10^{-3}$	$1.017 \cdot 10^{-3}$	$3.645 \cdot 10^{-3}$	$1.995 \cdot 10^{-3}$	$9.322 \cdot 10^{-4}$	$3.316 \cdot 10^{-4}$
α	6.950145	6.718318	6.56391	6.517269	6.482259	6.457718

Références

[1] M.Abramowitz and I.Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, *Dover*, New York, 1965.

[2] R.J. Backlund, *Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunction*, *Acta Mat.*, 41, 1918, pp 345–375.

[3] M.A. Bennett, *Rational approximation to algebraic numbers of small heights: the diophantine equation* $ax^n - by^n = 1$, *J. Reine Angew. Math 535*, 2001, pp 1–49.

[4] Y. Cheng, *An explicit zero-free region for the Riemann zeta-function*, *Rocky Mountain J. Math.*, 30, 2000, pp 135–148.

[5] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, *Graduate Texts in Mathematics*, third edition, 2000.

[6] C.-J. de la Vallée Poussin, *La fonction zêta de Riemann et les nombres premiers en général*, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I.* , 20, 1896, pp 183–256.

[7] C.-J. de la Vallée Poussin, *Sur la fonction zêta de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée*, *Mém. Couronnés et Autres Mém. Publ. Acad. Roy. Sci. des lettres Beaux-Arts Belg.*, 59, 1899–1900, pp 1–74.

[8] K. Ford, *Zero-free region for the Riemann zeta function*, *Preprint*, 2001.

[9] T. Gronwall, *Sur les séries de Dirichlet correspondant à des caractères complexes*, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 35, 1913, pp 145–159.

[10] J. Hadamard, *Sur la distribution des zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *et ses conséquences arithmétiques*, *Bull. Soc. Math. France*, 24, 1896, pp 199–220.

[11] D. R. Heath-Brown, *Zero-free regions of* $\zeta(s)$ *and* $L(s,\chi)$, *Proceedings of the Amalfi confernece on analytic number theory (Maiori, 1989), Univ. Salerno, Salerno, Italy*, 1992, pp 195–200.

[12] D. R. Heath-Brown, *Zero-free regions for Dirichlet L-functions, and the least prime in an arithmetic progression*, *Proc. London Math. Soc.* , 64, 1992, pp 265–338.

[13] H. Kadiri, *Une région sans zéro explicite pour la fonction zêta de Riemann*, *à paraître dans Acta Arithmetica.*

[14] H. Kadiri, *Zero-free regions for the Dirichlet L-functions*, *preprint.*

[15] N. M. Korobov, *Estimates of trigonometric sums and their applications*, *Uspehi Mat. Nauk*, 13, 1958, pp 185–192. (Russian)

[16] K.S. McCurley, *Explicit zero-free regions for Dirichlet L-functions*, *J. Number Theory*, 19, 1984, pp 7–32.

[17] K.S. McCurley, *Explicit estimates of the error term in the prime number theorem for arithmetic progressions*, *Math. Comp.*, 42, no.165, 1984, pp 265–285.

[18] K.S. McCurley, *Explicit estimates for* $\theta(x;3,l)$ *and* $\psi(x;3,l)$, *Math. Comp.*, 42, no.165, 1984, pp 287–296.

[19] E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Vol, Chap. 79, pp 321–324.

[20] Y.V. LINNIK, *On the least prime in an arithmetic progression. I. The Deuring-Heilbronn phenomenon*, *Rec. Math. [Mat. Sbornik]* , no.15(57), 1944, pp 139–178.

[21] Y.V. LINNIK, *On the least prime in an arithmetic progression. II. The Deuring-Heilbronn phenomenon*, *Rec. Math. [Mat. Sbornik]* , no.15(57), 1944, pp 347–368.

[22] T. METSÄNKYLÄ, *Zero-free regions of Dirichlet's L-functions near the point 1*, *Ann. Univ. Turku. Ser. AI*, 139, 1970.

[23] H. L. MONTGOMERY ET R. C. VAUGHAN, *The large sieve*, *Mathematika*, 40, no. 40, Vol. 20, pp 119–134, 1973.

[24] O. V. POPOV, *A derivation of a modern bound for the zeros of the Riemann zeta function by the Hadamard method* , *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, 96, 1994, pp 42–45. (Russian)

[25] O. RAMARÉ & R. RUMELY, *Primes in arithmetic progressions. Math. Comp.*, 65, 1996, pp 397–425.

[26] O. RAMARÉ & Y. SAOUTER, *Short effective intervals containing primes.* , , 19, pp –.

[27] B. RIEMANN, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse . Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschafen zu Berlin aus dem Jahre 1859*, 1860, pp 671–680.

[28] J.B. ROSSER, *Explicit bounds for some functions of prime numbers. American Journal of Math.*, 63, 1941, pp 211–232.

[29] J.B. ROSSER & L. SCHOENFELD, *Approximate formulas for some functions of prime numbers. Illinois J. Math.*, 6, 1962, pp 64–94.

[30] J.B. ROSSER & L. SCHOENFELD, *Sharper bounds for the chebyshev functions $\vartheta(x)$ and $\psi(x)$. Math. Comp.*, 29(129), 1975, pp 243–269.

[31] S.B. STECHKIN, *The zeros of the Riemann zeta-function*, *Mat. Zametki*, 8, 1970, pp 419–429 (Russian); English translation in *Math. Notes*, 8, 1970, pp 706–711.

[32] S.B. STECHKIN, *Rational inequalities and zeros of the Riemann zeta-function*, *Trudy Math. Inst. Steklov*, 189, 1989, pp 110–116 ; English translation in *Proc. Steklov Inst. Math, AMS Translations Series*, 4, 1990, pp 127–134.

[33] J. VAN DE LUNE, H. J. J. TE RIELE & D. T. WINTER, *On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip: IV*, *Math. Comp.*, 46, 1986, pp 667–681.

[34] S. WAGSTAFF, *Greatest of the least primes in arithmetic progressions having a given modulus Math of Comp*, 33 (1979), pp 1073–1080.

[35] S. WEDENIWSKI, *The first 10 billion zeros of the Riemann zeta function are calculated and satisfy the Riemann hypothesis. www.hipilib.de/zeta/index.html*

[36] A. WEIL, *Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premiers. Oeuvres Complètes*, 2, 1952, pp 48–61.

Résumé

Nous étudions la répartition des zéros non triviaux de la fonction Zêta de Riemann. Plus précisément, nous montrons qu'il n'y en a pas dans une région à gauche de l'axe $\Re s = 1$ de la forme :

$$\Re s \geq 1 - \frac{1}{R_0 \log\big(|\Im s| + 2\big)} \quad \text{où} \quad R_0 = 5.70175$$

Les méthodes élaborées dans ce cas se généralisent alors à celui des fonctions de Dirichlet et nous établissons que les fonctions L associées à un module q fixé ne s'annulent jamais dans la région :

$$\Re s \geq 1 - \frac{1}{R_1 \log(\max(q,q|\Im s|))} \quad \text{où} \quad R_1 = 6.4355.$$

à l'exception d'au plus une d'entre elles qui correspondrait alors à un caractère réel et qui aurait au plus un zéro réel dans cette zone. De plus, nous précisons que chaque fonction associée à un caractère donné possède au plus quatre zéros très proches de l'axe réel dans la région

$$\Re s \geq 1 - \frac{1}{R_4 \log(\max(q,q|\Im s|))} \quad \text{où} \quad R_4 = 2.58208.$$

Enfin, nous appliquons nos résultats à la répartition des nombres premiers dans une progression arithmétique de la forme $\{a + nq\}$. Nous établissons ainsi que le plus petit d'entre eux (qu'on notera $P(a,q)$) vérifie

$$P(a,q) \leq \exp\big(\alpha(\log q)^2\big) \quad \text{où} \quad \alpha = 6.56391 \quad (q \geq 10^{20}).$$

Abstract

We establish the existence of explicit zero-free regions for the Riemann Zeta function. It never vanishes in the region on the left hand side of the axis $\Re s = 1$:

$$\Re s \geq 1 - \frac{1}{R_0 \log\big(|\Im s| + 2\big)} \quad \text{with} \quad R_0 = 5.70175.$$

The method is also useful in the more general case of the Dirichlet functions associated with a given modulus q. They never vanish in the region :

$$\Re s \geq 1 - \frac{1}{R_1 \log(\max(q,q|\Im s|))} \quad \text{with} \quad R_0 = 6.4355.$$

except for at most one of them which should be real and which vanishes at most once in this part. Moreover, we precise that each function has at most four zeros in :

$$\Re s \geq 1 - \frac{1}{R_4 \log(\max(q,q|\Im s|))} \quad \text{where} \quad R_4 = 2.58208.$$

The last part is dedicated to an application of these results to the distribution of prime numbers in an arithmetic progression $\{a + nq\}$. The smallest of them (denoted by $P(a,q)$) satisfies :

$$P(a,q) \leq \exp\big(\alpha(\log q)^2\big) \quad \text{where} \quad \alpha = 6.56391.$$

Mots-clés: région sans zéro, fonction Zêta de Riemann, fonction L de Dirichlet.

U.F.R. de Mathématiques, UMR 8524, Université de Lille 1,
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.