

N° d'ordre : 3186

ECOLE CENTRALE DE LILLE  
UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

## THESE

Présentée en vue d'obtenir le grade de

## DOCTEUR

Spécialité : Productique, Automatique et Informatique Industrielle

par

MARIE DE VILMORIN

Ingénieur ISEN

### **Contributions à la gestion optimale de capteurs : application à la tenue de situations aériennes**

Doctorat délivré conjointement par l'Ecole Centrale de Lille  
et l'Université des Sciences et Technologies de Lille

Soutenue le lundi 09 décembre 2002 devant le jury d'examen composé de :

Madame Geneviève DAUPHIN-TANGUY	<i>Présidente</i>	Ecole Centrale de Lille
Monsieur Jean-Pierre LE CADRE	<i>Rapporteur</i>	IRISA
Monsieur Frédéric ROTELLA	<i>Rapporteur</i>	Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes
Monsieur Philippe VANHEEGHE	<i>Directeur de thèse</i>	Ecole Centrale de Lille
Monsieur Emmanuel DUFLOS	<i>Codirecteur de thèse</i>	Institut Supérieur d'Electronique du Nord
Monsieur Michel PRENAT	<i>Examineur</i>	THALES Optronique
Monsieur Jean-Pierre RICHARD	<i>Examineur</i>	Ecole Centrale de Lille
Monsieur Denis POMORSKI	<i>Examineur</i>	Université des Sciences et Technologies de Lille

# Remerciements

*Je souhaite tout d'abord remercier Madame Geneviève Dauphin-Tanguy, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de cette thèse.*

*Je suis très reconnaissante envers Monsieur Jean-Pierre Le Cadre, Directeur de recherche au CNRS, et Monsieur Frédéric Rotella, Professeur à l'Ecole d'Ingénieurs de Tarbes, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et l'honneur qu'ils me font en acceptant de le juger et d'en être les rapporteurs.*

*Je tiens à remercier Monsieur Jean-Pierre Richard, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille, pour m'avoir présenté l'activité de moniteur, pour m'avoir accueillie dans l'équipe SyNeR dont il a la responsabilité, enfin pour avoir accepté d'examiner mon travail en participant au jury de cette thèse.*

*Monsieur Denis Pomorski, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, a également participé au jury. Qu'il en soit vivement remercié.*

*Je dois beaucoup aux trois personnes qui ont encadré cette thèse.*

*Monsieur Michel Prenat, de la société THALES Optronique, a été l'investigateur du projet. Je lui suis très reconnaissante de sa patience et du suivi qu'il a assuré de mon travail, malgré l'éloignement. Qu'il soit assuré que nos nombreuses conversations téléphoniques n'ont pas été vaines...*

*Je voudrais exprimer ma sincère gratitude à Philippe Vanheeghe et Emmanuel Duflos, qui ont assuré la direction de cette thèse. Je tiens à les remercier pour les qualités humaines dont ils ont fait preuve, pour leur humour, pour leur disponibilité, leur soutien scientifique et moral et la confiance qu'ils m'ont témoignée en me proposant cette activité de recherche.*

*J'espère que nous aurons encore longtemps l'occasion de travailler ensemble.*

*Merci à celles et ceux qui ont assuré la pénible tâche qu'a été la relecture de ce manuscrit : Emmanuelle de Vilmorin, Valérie Vandenhende, David Boulinguez et Maurice Van Mallegem.*

*Je remercie le CNRS et la Région Nord-Pas de Calais qui ont financé mes travaux.*

*Mes études et ma thèse m'ont amenée à passer huit ans à l'ISEN. Je voudrais alors naturellement remercier tous les membres de son personnel, pour leur accueil, leur soutien moral et matériel, leur amitié.*

*Je voudrais particulièrement remercier Monsieur Jean-Noël Decarpigny (†), avec qui j'aurais tant aimé travailler, Monsieur Paul Astier et Monsieur Léon Carrez, directeurs de l'ISEN, pour leur accueil dans leur établissement.*

*Un grand merci à tous les membres des départements Signaux & Systèmes et Informatique : Emmanuel Duflos, Emmanuel Druon, Annemarie Kökösy, David Boulinguez, Stéphane Perrin, Arnaud Delhay, Christelle Fouque, Laurent Allain et Dominique Lohez. Chacun de façon différente, par ses qualités, sa présence et son appui, m'a permis de me sentir épanouie au sein du département. Je les remercie par ailleurs pour leurs nombreux conseils et coups de main. Je souhaite courage et persévérance à ceux qui prennent la suite.*

*Je voudrais assurer Denis Reille et Valérie Vandenhende de toute mon affection, et les remercier de leur soutien et de leur présence, souvent distrayante car rarement scientifique... J'associe bien sûr à ces remerciements Maurice Van Mallegem, Emmanuel Druon et Frédérique Grumetz.*

*Enfin, car il faut bien un enfin, je voudrais remercier mes parents, ma famille et mes amis, de Lille, de Paris ou d'ailleurs ... Ils n'avaient pas choisi de vivre ma thèse ...*

# Avant-propos

« *Contributions à la gestion optimale de capteurs : application à la tenue de situations aériennes* ». Détaillons un peu...

Nous sommes en présence d'un ensemble d'avions et de cibles se trouvant dans un espace aérien. L'objectif de ces avions est de surveiller cet espace, en particulier les cibles, afin d'élaborer les manœuvres à effectuer pour parer à la menace que celles-ci peuvent représenter. Pour cela ils sont équipés d'un ou plusieurs capteurs hétérogènes de type radar et/ou optronique.

*Que doivent faire ces avions, et par substitution ces capteurs, pour mener à bien leur mission ?* Ils doivent dans un premier temps détecter les cibles susceptibles de se trouver dans leur secteur de surveillance, puis estimer leurs positions et leurs vitesses, enfin les identifier. Nous parlerons dans ce sens indifféremment de tenue de situation aérienne ou de mission de surveillance.

*Quelles sont les informations dont ils disposent ?* Bien souvent, les avions que nous avons décrits font partie d'un système de surveillance plus complexe, pouvant intégrer par exemple des radars de veille ou des systèmes d'écoute. Ils disposent par conséquent d'une connaissance *a priori* de la situation pouvant être plus ou moins précise.

*Quelles sont les contraintes ?* A un instant donné, un capteur, qu'il soit de type radar ou optronique, ne peut observer qu'une partie de l'espace qui lui fait face. Il doit alors réorienter son axe de visée afin de le balayer dans son intégralité. Cependant les modes de déplacement de ces axes de visée dépendent du type de capteur considéré. Il est par ailleurs intuitif que les performances de détection ou de poursuite d'un capteur soient des fonctions croissantes de la durée qui est attribuée à leur réalisation. Nous considérons par conséquent une contrainte opérationnelle en la donnée d'une durée fixe et connue pour l'accomplissement de la mission de surveillance.

*Quels sont nos objectifs ?* A partir de ces données du problème, notre objectif est d'établir des stratégies optimales de gestion de ces capteurs pour la réalisation de leur mission. Nous entendons par gestion optimale le bon capteur, à la bonne place au bon moment et dans les meilleures conditions de fonctionnement. Il existe des solutions heuristiques à ce type de

problème, notre volonté est cependant d'en apporter une approche théorique par l'optimisation d'un ou plusieurs critères de performances, sous les contraintes que nous avons évoquées. Ces performances pourront être évaluées en termes de probabilités de détection, de variances d'estimation et de capacités d'identification. Trois voies seront à explorer :

- la modélisation des fonctions élémentaires de détection des capteurs,
- l'élaboration des critères de performances,
- l'optimisation de ces critères et par là l'élaboration des stratégies optimales.

Ce manuscrit a pour dessein de présenter les travaux qui ont été réalisés dans ces trois domaines, plus particulièrement dans le cadre de la détection d'un nombre connu de cibles par un ensemble de capteurs radars en une durée donnée.

Cette thèse a été réalisée au sein de l'équipe SyNeR (Systèmes Non linéaires et à Retards) du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique industrielle de Lille (LAIL, UMR CNRS 8021, Villeneuve d'Ascq, 59) et du Département Signaux et Systèmes de l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord (ISEN, Lille) en collaboration avec la société THALES Optronique (Guyancourt,78). Elle a été dirigée par Monsieur Philippe Vanheeghe, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille et directeur adjoint du LAIL, et co-encadrée par Monsieur Emmanuel Duflos, enseignant-chercheur à l'ISEN et responsable du Département Signaux et Systèmes, sous la responsabilité scientifique de Monsieur Michel Prenat, expert à la Direction Technique de la société THALES Optronique et Professeur associé au Département de Mathématiques de l'Université Paris Sud. Elle a été financée par le CNRS et la Région Nord-Pas de Calais.

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2 La gestion de capteurs, pourquoi et comment ?</b>	<b>15</b>
2.1 Introduction . . . . .	15
2.2 La gestion de capteurs . . . . .	17
2.2.1 Le système de gestion multicapteur . . . . .	17
2.2.2 Les propriétés requises d'un système de gestion multicapteur . . . . .	20
2.2.3 Les méthodes de gestion de capteurs . . . . .	21
2.3 Le gain de discrimination . . . . .	22
2.3.1 La théorie de l'information . . . . .	22
2.3.2 L'entropie relative de Kullback-Leibler . . . . .	23
2.3.3 Le filtrage de Kalman multimodèle (IMMKF : <i>Interacting Multiple Model Kalman Filtering</i> ) . . . . .	27
2.3.4 Optimisation de l'allocation - Programmation linéaire . . . . .	29
2.3.5 Simulations . . . . .	30
2.3.6 Conclusion sur le gain de discrimination - Liens avec notre étude . . . . .	35
2.4 La théorie de la recherche . . . . .	36
2.4.1 Première situation : l'axe de visée du capteur est fixe, la cible est stationnaire - Algorithme de « de Guenin » . . . . .	37
2.4.1.1 Structure de l'algorithme . . . . .	40
2.4.1.2 Résultats . . . . .	41
2.4.2 Deuxième situation : l'axe de visée du capteur est fixe, la cible est mobile - Algorithme <i>Forward and Backward</i> . . . . .	45
2.4.2.1 Le processus de Markov . . . . .	46
2.4.2.2 Les fonctions <i>Forward</i> et <i>Backward</i> . . . . .	48
2.4.2.3 Structure de l'algorithme . . . . .	49
2.4.2.4 Initialisation . . . . .	49
2.4.2.5 Performances . . . . .	49

2.4.3	Troisième situation : l'axe de visée de l'observateur et la cible sont mobiles - Algorithme <i>Branch and Bound</i> . . . . .	51
2.4.3.1	Hypothèses . . . . .	52
2.4.3.2	La méthode myope . . . . .	52
2.4.3.3	La méthode exhaustive . . . . .	52
2.4.3.4	La méthode <i>Branch and Bound</i> . . . . .	52
2.4.3.5	Performances . . . . .	53
2.4.4	Conclusion sur la théorie de la recherche . . . . .	54
2.5	L'optimisation lagrangienne . . . . .	56
2.6	Conclusion . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Les capteurs</b> . . . . .	<b>61</b>
3.1	Le capteur radar . . . . .	61
3.1.1	Cellules de résolution . . . . .	62
3.1.2	Modélisation du rapport signal sur bruit . . . . .	63
3.1.3	Probabilités de détection et de fausse alarme - Cible fluctuante . . . . .	64
3.1.4	Calibration des paramètres du capteur radar . . . . .	66
3.1.5	Optimisation de la probabilité de détection d'une cible par un capteur radar . . . . .	69
3.2	Le capteur infrarouge . . . . .	73
3.2.1	Cellules de résolution . . . . .	74
3.2.2	Modélisation du rapport signal sur bruit . . . . .	74
3.2.3	Probabilité de détection et de fausse alarme . . . . .	75
3.2.3.1	Probabilité de détection dans un pixel . . . . .	76
3.2.3.2	Probabilité de détection cumulée . . . . .	78
3.2.4	Calibration des paramètres du capteur infrarouge - Probabilité de fausse alarme . . . . .	79
3.2.5	Calcul des durées de déplacement angulaire . . . . .	80
3.2.6	Optimisation de la probabilité de détection d'une cible par un capteur infrarouge . . . . .	82
3.2.6.1	Etude de la possibilité d'optimisation de la probabilité de détection par décomposition en détections élémentaires . . . . .	82
3.2.6.2	Contre-balayage . . . . .	84
3.3	Conclusion . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Allocation temporelle monocapteur multicible</b> . . . . .	<b>87</b>
4.1	Hypothèse 1 . . . . .	89
4.1.1	Définition d'un critère d'optimisation . . . . .	89
4.1.2	Optimisation du critère $\mathcal{J}$ . . . . .	90
4.1.3	Calcul des coefficients de pondération . . . . .	95

4.1.4	Illustration des résultats - Simulations . . . . .	96
4.1.5	Evaluation des performances de l'allocation temporelle optimale . . . . .	99
4.1.6	Conclusion sur l'hypothèse 1 . . . . .	102
4.2	Hypothèse 2 . . . . .	103
4.2.1	Probabilité de détection et allocation temporelle optimale . . . . .	103
4.2.2	Evaluation des performances - Sensibilité au paramètre $d_{ref}$ . . . . .	104
4.2.3	Conclusion sur l'hypothèse 2 . . . . .	107
4.3	Hypothèse 3 . . . . .	108
4.3.1	Probabilité de détection . . . . .	109
4.3.1.1	Probabilité de présence de la cible dans la cellule $c_{ij}$ . . . . .	110
4.3.1.2	Probabilité de détection de la cible dans la cellule $c_{ij}$ . . . . .	111
4.3.2	Définition d'un critère d'optimisation . . . . .	112
4.3.3	Optimisation de l'allocation temporelle . . . . .	114
4.3.3.1	Optimisation de la probabilité de détection dans chaque direction de l'espace . . . . .	114
4.3.3.2	Optimisation de l'allocation temporelle entre toutes les directions de l'espace d'observation . . . . .	117
4.3.4	Probabilités de localisation . . . . .	118
4.3.4.1	Décomposition de la cellule en un ensemble de cellules élémentaires	120
4.3.4.2	Calcul de la probabilité de présence d'une cible sur une cellule élémentaire . . . . .	120
4.3.4.3	Approximation de la probabilité de présence dans une «cellule polaire» . . . . .	121
4.3.4.4	Calcul des erreurs d'approximation . . . . .	124
4.3.5	Modélisation paramétrique des probabilités de détection $P_{dij}$ par la méthode des moindres carrés . . . . .	125
4.3.5.1	Etude du modèle $P_d(t) = \exp(-\omega t^{-n})$ . . . . .	126
4.3.6	Calcul des coefficients de pondération . . . . .	127
4.3.7	La théorie de la recherche . . . . .	129
4.3.7.1	Hypothèses de la théorie de la recherche . . . . .	129
4.3.7.2	Indépendance du résultat par rapport à la méthode de calcul de $\rho_j$ . . . . .	130
4.3.7.2.1	Détermination de l'espace de recherche . . . . .	131
4.3.7.2.2	Calcul de l'effort de recherche élémentaire . . . . .	131
4.3.7.3	Algorithme de « de Guenin » . . . . .	132
4.3.7.4	Equivalence entre l'optimisation lagrangienne et l'algorithme de « de Guenin » . . . . .	134
4.3.7.4.1	Rappel de la méthode lagrangienne . . . . .	134
4.3.7.4.2	Algorithme de « de Guenin » . . . . .	135
4.3.8	Evaluation des performances de l'allocation temporelle optimale . . . . .	136



4.3.9	Illustration des résultats - Simulations . . . . .	138
4.3.9.1	Probabilités de présence . . . . .	138
4.3.9.2	Erreurs d'approximation . . . . .	140
4.3.9.3	Probabilités de détection . . . . .	141
4.3.9.4	Modélisation des probabilités par la méthode des moindres carrés . . . . .	142
4.3.9.5	Allocation temporelle par la méthode lagrangienne . . . . .	145
4.3.9.6	Allocation temporelle par l'algorithme de « de Guenin » . . . . .	146
4.3.9.7	Cas de distributions de très faibles écarts-type . . . . .	149
4.3.9.8	Coefficients de pondération . . . . .	151
4.3.9.9	Evaluation des performances . . . . .	153
4.3.10	Conclusion sur l'hypothèse 3 . . . . .	153
4.4	Conclusion . . . . .	154
<b>5</b>	<b>Planification multicapteur multicible</b>	<b>155</b>
5.1	L'entropie relative de Kullback-Leibler . . . . .	156
5.2	Pseudo-capteurs . . . . .	158
5.3	Comparaison des critères de sélection . . . . .	159
5.3.1	Etude du critère $\mathcal{C}_1$ . . . . .	160
5.3.2	Etude du critère $\mathcal{C}_2$ . . . . .	160
5.3.3	1 <sup>er</sup> scénario de simulations : une cible et $P$ capteurs proches . . . . .	161
5.3.4	2 <sup>ème</sup> scénario de simulations : une cible et $P$ capteurs lointains . . . . .	162
5.3.5	3 <sup>ème</sup> scénario de simulations : $N$ cibles et $P$ capteurs . . . . .	164
5.4	Allocation - Connaissance déterministe . . . . .	165
5.4.1	Exemple d'allocation instantanée . . . . .	167
5.4.1.1	Etape 1 : calcul des probabilités de détection . . . . .	167
5.4.1.2	Etape 2 : pseudo-capteurs et probabilités de détection . . . . .	167
5.4.1.3	Etape 3 : détermination de l'allocation optimale . . . . .	168
5.5	Planification . . . . .	169
5.5.1	Exemple de planification . . . . .	170
5.5.1.1	Situation 1 : les coefficients de dangerosité sont unitaires . . . . .	170
5.5.1.2	Situation 2 : les coefficients de dangerosité ne sont pas unitaires . . . . .	172
5.5.2	Analyse des résultats de simulation . . . . .	173
5.6	Allocation - Connaissance probabiliste . . . . .	175
5.6.1	Allocation initiale . . . . .	175
5.6.2	Vers une méthode de planification . . . . .	177
5.7	Conclusion . . . . .	178
	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>181</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>185</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Supposons qu'un ensemble de mobiles, typiquement des avions, se trouve dans un espace aérien et qu'il soit libre de s'y déplacer selon des trajectoires non définies. Dans cet espace peuvent aussi se trouver d'autres mobiles que nous appellerons cibles. C'est pour surveiller l'espace aérien dans lequel ils évoluent et les cibles qui peuvent s'y trouver que ces avions sont équipés d'un ou plusieurs capteurs hétérogènes. Leur mission est alors de détecter les cibles qui rentrent dans leur champ de surveillance et d'estimer leurs positions ainsi que leurs vitesses afin d'être en mesure de déclencher les actions qui pourront être nécessaires à leur maîtrise de la situation. De plus, afin d'adapter au mieux ces actions, ils pourront chercher à identifier ces cibles ou à prévoir leurs stratégies de déplacement. Un exemple appartenant au domaine militaire est le cas d'une formation aérienne se déplaçant vers des positions ennemies. Ne connaissant pas leurs intentions, il est nécessaire d'engager les actions utiles à la protection de la formation et à la contradiction de leurs objectifs.

Dans la pratique, que doit faire la formation pour la réussite de sa mission ? Les mobiles en formation et en mission de surveillance doivent détecter le maximum de cibles proches et estimer leurs positions et leurs vitesses afin d'être en mesure de déclencher les actions d'évitement ou de défense. Parallèlement, ils doivent s'intéresser aux cibles lointaines afin de prédire leurs trajectoires et anticiper leurs actions futures.

Afin de leur permettre de mener à bien leur mission, chaque mobile est équipé d'un ou plusieurs capteurs hétérogènes, de type radar (*radio detection and ranging*) ou infrarouge. Ces deux types de capteurs sont les plus couramment employés dans ce genre de mission, notamment pour leur complémentarité, aussi bien au niveau des mesures qu'ils effectuent que de leurs modes de fonctionnement ([BLA99], [MAR92]). Ils ont une position fixe sur les avions, appelés alors porteurs, et ne peuvent observer à un instant donné qu'une partie limitée de l'espace qui leur fait face et dans lequel leur porteur se déplace. Ils ont cependant la capacité de modifier l'orientation de leurs axes de visée afin d'observer la totalité de la zone aérienne d'intérêt. Ces déplacements ont une durée qui dépend des caractéristiques physiques et opérationnelles du capteur. Le mode de balayage électronique du capteur radar, pris ici pour

exemple, nous permet de considérer comme négligeables ces durées de déplacement, ce qui n'est pas possible dans le cas du capteur infrarouge qui fonctionne par balayage mécanique.

La mission de ces capteurs est donc d'observer au mieux leur environnement. Qu'entendons-nous par le terme « au mieux », au niveau de chacun des capteurs, de l'ensemble qu'ils constituent ? Chaque capteur a son propre mode de fonctionnement qui ne lui permet pas forcément d'être adapté à toutes les situations. L'opérateur va alors être amené, comme nous l'avons vu en avant-propos, à utiliser le bon capteur, à la bonne place, au bon moment et dans les meilleures conditions de fonctionnement. Le but de notre étude est par conséquent de déterminer des méthodes optimales de gestion des capteurs disponibles pour l'observation d'une scène.

L'optimalité de ces méthodes, que nous appellerons aussi stratégies, se mesure par l'évaluation de performances. Celles-ci peuvent s'exprimer en termes de probabilités de détection, de précision de localisation et de capacité d'identification. Cette volonté de quantification et de qualification des résultats va nous amener à élaborer un ou plusieurs critères d'évaluation. Utiliser au mieux une information pour gérer au mieux les capteurs afin que la formation aérienne réussisse au mieux sa mission équivaut à gérer les capteurs de façon à optimiser un ou plusieurs critère(s) sous des contraintes données. L'idée de critère est très vaste, nous nous demanderons quels sont les éléments qui devront y figurer et quelles formes leur donner. L'optimisation et les performances à atteindre dépendent fortement de la mission donnée à la formation aérienne. Que ce soit une mission de surveillance, de reconnaissance ou de défense, les critères opérationnels et qualitatifs ne seront pas les mêmes. Ainsi, la précision de la détection, l'importance accordée aux cibles, la gestion des priorités, la qualité de la poursuite, la phase d'identification et la connaissance *a priori* disponible sur l'environnement seront autant de paramètres différents à considérer en fonction de la mission.

Selon les systèmes de surveillance considérés, les phases de détection et d'estimation peuvent se trouver entrelacées au cours du temps. D'autre part, l'environnement multicible dans lequel nous nous plaçons amène les capteurs à devoir s'intéresser à l'ensemble des cibles et non pas à une entité particulière. Un capteur va donc par exemple être assigné à la détection d'une cible, puis à la poursuite d'une autre, pour enfin revenir à la détection de la première. Il est alors intéressant de choisir de façon adaptative et optimale la durée de chacune de ces phases et ce, toujours en vue d'optimiser les performances. Cette optimisation ne rentre pas dans le cadre de nos travaux, nous renvoyons le lecteur à la référence [BLA99] qui traite ce problème et en propose une bibliographie importante. Il est par ailleurs évident que les performances seront des fonctions croissantes des durées d'observation des cibles par les capteurs, mais que celles-ci ne pourront pas, pour des raisons opérationnelles ou tactiques, être aussi grandes que souhaité. Considérer des phases de détection, d'estimation ou d'identification de durées connues et fixées nous permettra de baser les critères de performances sur d'autres paramètres que les durées d'observation, par exemple ceux qui ont été définis précédemment.

De plus, ces porteurs font généralement partie d'un système de surveillance plus complexe, intégrant par exemple des radars de veille et autres systèmes d'écoute, de type ESM (*Elec-*

*tronic Support Measurement*) ou AEW (*Airbone Early Warning*). Ils disposent par conséquent d'une connaissance *a priori* de la situation par l'estimation des positions angulaires des cibles, de leurs distances par rapport aux capteurs et de leur nombre *a fortiori*, si elles sont discernables par les capteurs considérés. Cependant ces mesures n'étant disponibles qu'à une faible fréquence, il va être nécessaire de réaliser de nouvelles détections afin d'améliorer la perception globale de l'environnement par les capteurs.

Compte tenu de ce contexte et de ses contraintes, quelles sont alors les méthodes à mettre en œuvre pour résoudre le problème posé ? Nous disposons d'un ensemble de ressources, des capteurs et un capital temps, comment les utiliser à bon escient pour optimiser les performances ? Plusieurs types de problèmes vont devoir être résolus, entre autres : l'allocation de ressources temporelles et matérielles, la fusion et l'association de données, l'intégration d'une connaissance *a priori*, mais aussi la modélisation des capteurs, la représentation des connaissances, la définition des critères de performances, la modélisation de celles-ci ...

Etant donné l'ampleur du problème exposé, nous avons choisi de limiter notre étude. Bien qu'il existe des méthodes dans lesquelles la simultanéité des phases de détection, d'estimation et d'identification est considérée, les méthodes TBD (*Track Before Detect*) ([SHE90], [BLA99]), nous supposons dans le cadre de ce document qu'elles se déroulent séquentiellement et nous porterons notre attention sur la phase de détection, même si la perspective d'une phase de poursuite suivant la phase de détection restera présente. L'étape d'identification ne sera quant à elle pas abordée. Nous supposons par ailleurs un ensemble de  $N$  cibles, de caractéristiques identiques et stationnaires dans l'espace d'observation. Nous entendons par stationnaire le fait que la configuration du problème, c'est à dire que les positions relatives des cibles par rapport aux capteurs, n'évolue pas au cours du temps et que la cible reste dans la même cellule de résolution pendant la durée de l'observation. Ces cibles seront observées par un ensemble de porteurs, de position stationnaire ou en trajectoire rectiligne uniforme, équipés de  $P$  capteurs radars, principalement, ou infrarouges. L'utilisation simultanée de ces deux types de senseurs n'est pas envisagée dans le cadre de ces travaux, elle sera cependant abordée en perspectives de développement. Compte tenu de ces hypothèses, nous pouvons énoncer notre problématique de la façon suivante :

*« étant donné que  $P$  capteurs disposent d'une durée  $T$  pour la détection d'un nombre  $N$  connu de cibles, comment doivent-ils s'organiser, de façon individuelle ou collective, pour obtenir des performances de détection optimales ? »*

En résumé notre problème est celui de l'allocation de ressources, en l'occurrence un capital temps et un ensemble de capteurs, dans un environnement aérien dans lequel évoluent plusieurs cibles. Cette allocation est réalisée en vue d'optimiser la détection, qui peut être définie comme un sous-système du système global, au même titre que les étapes de poursuite et d'identification ou que d'autres processus que nous pourrions définir.

Nous nous proposons par cette thèse d'apporter une contribution à la résolution de cette problématique.

Le chapitre 2 de ce manuscrit est consacré à l'analyse de l'existant dans le cadre général de la gestion de capteurs. Nous y verrons dans un premier temps les tenants et aboutissants de celle-ci, c'est à dire les raisons qui ont amené les chercheurs à s'intéresser à la conception de systèmes de gestion et les propriétés requises pour de tels systèmes. Nous nous intéresserons ensuite à la théorie de l'information, en particulier à une mesure entropique. Nous verrons que cet outil a été utilisé, entre autres, pour l'allocation de ressources dans le cadre de l'estimation. Puis, notre problématique était proche de celle de la théorie de la recherche (*Search Theory*), c'est à dire l'étude de l'allocation optimale d'un effort de recherche, nous avons porté notre intérêt sur certains algorithmes de résolution dont les hypothèses étaient proches de celles que nous avons formulées ou que nous pourrions formuler. Enfin, la dernière partie de ce chapitre sera consacrée aux méthodes de programmation non linéaire, c'est à dire aux méthodes d'optimisation d'une fonction non linéaire soumise à des contraintes égalités ou inégalités, et en particulier à la méthode d'optimisation par utilisation de multiplicateurs de Lagrange et de fonctions duales.

Nous avons défini notre système de détection comme étant basé sur l'utilisation de capteurs de type radar ou infrarouge. Le chapitre 3 leur est par conséquent consacré. Sans pour autant rentrer dans le détail du fonctionnement de ces capteurs, qui n'est pas le sujet de cette thèse, nous nous intéressons dans ce chapitre aux notions utiles à notre étude, c'est à dire à la façon dont ils observent l'espace qui se trouve dans leur champ de vision, en particulier à leur mode de balayage, à la formation de leurs cellules de résolution et à la modélisation de leurs fonctions de détection. Nous attacherons une attention particulière à cette dernière dans le sens où notre volonté est d'obtenir, lorsque cela est possible, des résultats analytiques. A partir de ces notions, nous proposerons une méthode d'optimisation de la probabilité de détection d'une cible par un capteur radar par décomposition en un nombre optimal de détections élémentaires. Les mêmes démarches seront ensuite effectuées pour le capteur de type infrarouge. Nous verrons alors que les différences entre les deux types de capteurs entraîneront des modélisations différentes et que les méthodes employées ne pourront pas forcément être identiques.

Les résultats présentés dans le chapitre 3 sont établis dans un environnement monocapteur monocible. Le but du chapitre 4 est de les utiliser dans un domaine monocapteur multicible pour proposer une méthode optimale d'allocation. A partir d'une connaissance plus ou moins précise de la situation et des résultats du chapitre précédent, nous verrons qu'il sera possible d'établir analytiquement une méthode optimale d'allocation d'une durée  $T$  pour la détection des  $N$  cibles présentes dans le secteur d'observation du capteur et ce, en ayant pour objectif l'optimisation des performances de détection. Nous chercherons par ailleurs à évaluer, analytiquement lorsque ce sera possible, ces performances et par là-même celles de notre méthode d'allocation. Trois niveaux de connaissance seront considérés, allant de la connaissance déterministe des positions angulaires des cibles et de leurs distances par rapport aux capteurs à la donnée probabiliste de densités de localisation. Nous verrons que cette dernière

s'avèrera être une généralisation des précédentes. Enfin, nous chercherons à rapprocher nos résultats du cadre de la théorie de la recherche et verrons en quoi nos approches se complètent mutuellement.

Alors que les deux chapitres précédents étaient consacrés à l'optimisation de ressources temporelles pour la détection de cibles, nous nous intéressons dans le chapitre 5 à l'allocation des ressources matérielles que sont les capteurs pour la détection de ces mêmes cibles, en remplaçant notre étude dans un contexte multicapteur multicible. Ainsi nous proposons dans ce chapitre une méthode de planification de l'utilisation de nos capteurs pour la détection des cibles. Nous commencerons par nous intéresser aux outils développés en théorie de l'information, présentés dans le chapitre 2, et nous baserons sur nos conclusions et nos résultats précédents pour déterminer une allocation des capteurs sur les cibles, à la fois temporelle et matérielle. Cette étude sera réalisée dans l'hypothèse d'une connaissance déterministe de la situation, nous présenterons toutefois la méthode retenue pour sa résolution dans le cadre d'une connaissance *a priori* incertaine.

Enfin nous concluerons ce document par un chapitre qui aura pour objectifs la synthèse des travaux réalisés et des résultats présentés, et l'ouverture de ceux-ci vers des perspectives que nous énoncerons.



## Chapitre 2

# La gestion de capteurs, pourquoi et comment ?

### 2.1 Introduction

De nos jours, les progrès technologiques sont tels que le monde qui nous entoure contient un grand nombre d'informations multiples et variées que les utilisateurs que nous sommes sont bien incapables de déchiffrer directement. Les informations reçues peuvent être aussi diverses qu'une onde sonore, une vitesse, une position, une catégorie d'appartenance... ; les supports d'information sont eux aussi très hétérogènes. Cette hétérogénéité nous amène donc à avoir recours à des systèmes de mesure, de transformation et d'exploitation, appelés capteurs, de caractéristiques différentes mais complémentaires, et à les utiliser aux instants et emplacements adéquats. Le but de ces capteurs est de permettre une meilleure connaissance de l'environnement qui les entoure, aussi bien qualitativement que quantitativement. Ainsi les informations issues des capteurs serviront à élaborer des réponses à des interrogations telles que *qui, quoi, comment, combien*, ou encore *où, quand, comment* et *pourquoi* ? À cette fin, plusieurs capteurs, de natures différentes ou non, sont souvent utilisés conjointement. On définit alors des systèmes multicapteurs. L'interaction entre les capteurs est indirecte, cependant l'intégration des données issues d'un capteur peut influencer l'utilisation que l'on peut faire d'un autre. De façon générale la motivation que peut avoir un opérateur à utiliser plusieurs capteurs est directement liée à la réponse à la question : si un capteur permet d'augmenter la capacité d'un système donné, pourquoi une synergie de capteurs ne l'augmenterait-elle pas encore plus ([ABI92]) ? En résumé, le but de ces regroupements est d'utiliser au mieux les possibilités de chaque source d'information que sont les capteurs, tout en palliant à leur désavantage, afin d'obtenir une information meilleure que celle obtenue grâce à chacune des sources utilisée séparément. Un exemple simple de système multicapteur est notre organisme, grâce à son habilité à intégrer simultanément des informations hétérogènes ou de sources diverses (l'utilisation de nos deux yeux, le fait de voir et toucher un même objet).



Nos cinq sens sont les fonctions par lesquelles nous percevons notre environnement extérieur. Le cerveau est alors l'organe de centralisation de l'information et de prise de décision. Dans le cadre de la surveillance aérienne, la figure 2.1 page 16 illustre le simple fait que l'utilisation simultanée de deux capteurs de surveillance permet de couvrir une zone de l'espace plus importante que si on n'en utilisait qu'un seul.

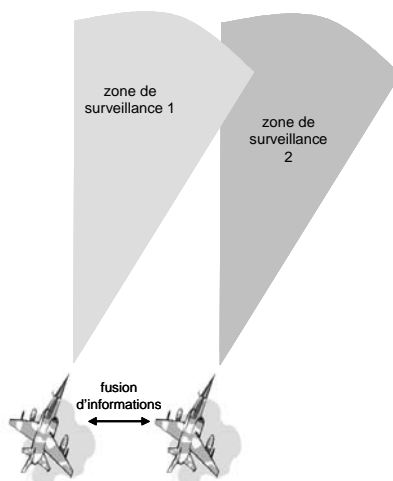


FIG. 2.1: [HON99] *accroissement de la zone de surveillance par utilisation de deux capteurs*

Le choix de ces capteurs, leur gestion temporelle, spatiale et fonctionnelle, la fusion de leurs informations font partie de la problématique de la gestion de capteurs.

La naissance de cette discipline est due conjointement à l'apparition d'un besoin, lui-même alimenté par une offre croissante de capteurs performants, et ce dans des disciplines aussi diverses que la robotique, la médecine ou les systèmes de défense.

Elle se place dans un contexte d'optimisation : comment utiliser au mieux les ressources dont nous disposons, en l'occurrence des capteurs et un capital temps, pour améliorer la connaissance que nous avons de l'environnement ? Cette recherche d'optimisation se situe alors à plusieurs niveaux, déjà cités : l'allocation spatiale et temporelle des ressources pour les tâches à effectuer, l'utilisation de ces ressources, la centralisation ou fusion des informations issues de ces différents organes de mesure.

Notre étude porte sur une mission de surveillance d'une partie d'un espace aérien, dans lequel évoluent des objets mobiles appelés cibles. Cette surveillance est effectuée par plusieurs capteurs hétérogènes, colocalisés ou non sur des porteurs mobiles. Dans ce cadre-là la gestion de capteurs intervient à chacune des missions qui leur sont affectées : la détection, la poursuite et l'identification des cibles. Le but de ce chapitre est de faire une synthèse des principaux travaux existants dans les différents domaines qui ont été soulignés, afin de replacer mes travaux dans leur contexte et de dégager les axes principaux sur lesquels s'appuyer.

## 2.2 La gestion de capteurs

Nous avons vu que le principe de la gestion de capteurs est d'exploiter au mieux les capacités de plusieurs capteurs pour permettre la réalisation de missions données avec les meilleures performances possibles. Cela se traduit par la problématique suivante : où et quand utiliser quel capteur, dans quelles conditions, pendant combien de temps et pour quelle mission ? Il n'y a pas de réponse universelle à cette question, les types de capteurs utilisés et la spécificité de l'environnement en sont cependant des points clés. Il existe de nombreux articles et ouvrages s'intéressant à cette problématique, notamment depuis les vingt dernières années. On citera par exemple [MAH96], [BAR88a], [MUS96] et [KAS97]. Cependant rares sont ceux qui s'intéressent simultanément à tous les aspects du problème. Cela signifie qu'il est possible de discerner plusieurs phases dans la gestion de capteurs, deux en l'occurrence. La première phase, dite phase amont, consiste à la gestion des capteurs avant que la mesure ne soit réalisée, c'est à dire l'allocation des ressources, à la fois matérielles et temporelles, pour l'accomplissement de la tâche. La seconde phase, dite phase aval, consiste en la synthèse des mesures et à leur exploitation. Notre étude se place au niveau de la phase amont. Avant de rentrer dans le détail de celle-ci nous allons définir précisément ce qu'est un système de gestion multicapteur et ce qui, indépendamment du bénéfice lié à l'utilisation de plusieurs capteurs, justifie l'étude et la mise en place de celui-ci.

### 2.2.1 Le système de gestion multicapteur

Nous pouvons trouver dans [Mc11] plusieurs définitions d'un système de gestion multicapteur, globalement similaires à celle donnée dans [BLA99]. Nous donnons ici celle de Buede et Waltz donnée : « un système de gestion de capteurs permet l'utilisation intelligente d'un ou plusieurs capteurs localisés sur une ou plusieurs plateformes afin d'accomplir la mission attribuée à celles-ci ». Le système de gestion de capteurs (ou SGC) doit tenir compte d'un certain nombre de paramètres tels que les ressources disponibles, la diversité de celles-ci, leurs défaillances éventuelles mais aussi les caractéristiques de l'environnement et des cibles à surveiller. Le SGC a alors pour objectifs de centraliser les informations issues des différentes sources afin d'obtenir les meilleures performances possibles et de réduire la charge de l'opérateur. Depuis les années soixante les capteurs ont beaucoup évolué techniquement, entraînant une augmentation de la qualité et de la quantité des informations recueillies. Les opérateurs n'ont dès lors plus été capables de gérer simultanément la technicité des capteurs et l'abondance des données. Par son caractère automatique et dynamique, le SGC permet à l'opérateur de ne pas être un maillon à part entière de la chaîne de mesure. L'opérateur peut se contenter de fixer un cahier des charges au système en fonction de la mission ou d'intervenir ponctuellement sur des points tactiques, sans avoir à gérer des informations trop nombreuses pour lui. Alors que l'opérateur définit l'objectif global, le SGC définit l'action de chacun des capteurs. Sur la figure 2.2 page 18 nous pouvons voir deux exemples de systèmes de gestion. Alors que dans le premier système de mesure, l'opérateur est partie intégrante de la chaîne,

il n'a plus qu'un rôle de contrôle dès lors qu'un SGC a été intégré dans l'architecture.

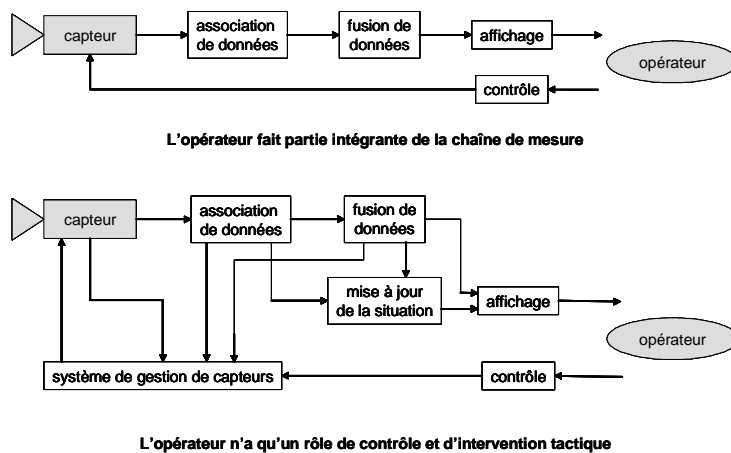


FIG. 2.2: [BLA99a] l'utilisation d'un SGC permet d'obtenir une rétroaction sans l'intervention d'un opérateur.

Il en résulte une gestion plus précise, plus dynamique, plus rapide, pouvant s'adapter quasi-systématiquement aux changements d'environnement et aux requêtes de l'utilisateur.

Cette idée d'interprétation d'un SGC comme une chaîne entre un opérateur et des capteurs est également présente dans [BLA99a]. On y retrouve aussi la notion de séparation des tâches. S. Blackman et R. Popoli proposent une structure globale de SGC se décomposant en deux niveaux : macro-niveau ( $M - level$ ) et micro-niveau ( $\mu - level$ ). Dans le  $M - level$  sont déterminées les tâches devant être accomplies par le système multicapteur pour réaliser sa mission, le  $\mu - level$  définit quant à lui la méthode optimale d'accomplissement de ces tâches par les différents sous-systèmes qui composent le système global. Cette architecture à deux niveaux se révèle être une structure intéressante. Elle permet d'abord une répartition des tâches entre les différents sous-systèmes. Ensuite elle permet à chacun d'entre eux d'être autonome, dans sa prise de décision ou ses responsabilités, ainsi que le regroupement des tâches similaires (durée d'exécution, fréquence, ...). Enfin elle minimise les liaisons entre les sous-systèmes donc les échanges de données. La décomposition du système global en macro et micro-niveaux se marie donc bien avec l'idée d'optimisation, d'une part des performances et de la durée d'exécution, d'autre part des coûts de fonctionnement que sont le temps, les ressources et l'énergie utilisés.

Le schéma 2.3 page 19 reprend l'architecture proposée dans [BLA99a], appliquée à la poursuite de cibles. Du capteur sont issues des données qui sont fusionnées et intégrées dans le processus d'évaluation de la situation. Il en résulte des *situation assessment objects*, par exemple des pistes identifiées ou mises à jour. Ces objets sont ceux auxquels le SGC est susceptible de porter un intérêt. Ils constituent les entrées du  $M - level$  qui va alors chercher à déterminer les actions qui devront leur être attribuées. Notons que c'est à ce niveau que peut

intervenir l'opérateur en désignant des *operator objects*, c'est à dire des objets, des pistes par exemple, qu'il lui semble nécessaire de considérer. Nous n'allons pas rentrer ici dans le détail de la démarche, le lecteur pourra se référer à [BLA99a], cependant nous allons en donner le principe général. Le but du  $M - level$  est d'établir un classement prioritaire des tâches à accomplir par le  $\mu - level$  (via la fonction *macro command selection*), par l'intégration des possibilités d'atteignabilité de bornes de performances, éventuellement des contraintes liées à chaque *object* (via les fonctions *sensor management policy selection* et *policy data base*).

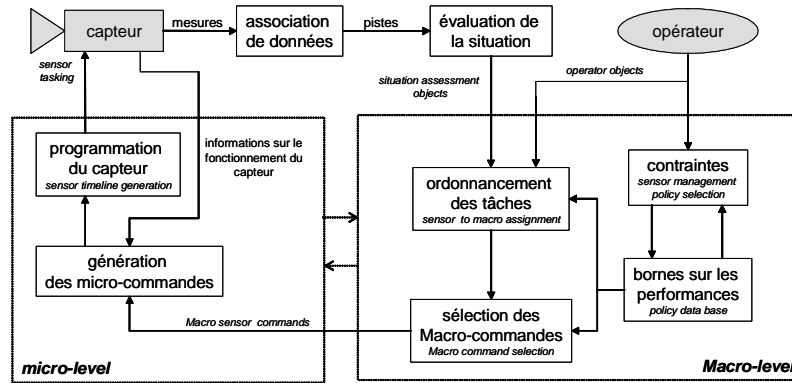


FIG. 2.3: schéma bloc de l'architecture d'un SGC, d'après [BLA99a]

Une fois la liste de tâches reçue du  $M - level$ , la fonction *micro command generation* du  $\mu - level$  détermine les actions à réaliser, c'est à dire les modes d'utilisation des capteurs, pour les accomplir de façon optimale. Pour cela il dispose d'informations détaillées sur l'environnement du capteur et sur son fonctionnement, en provenance directe de celui-ci. Une fois que les modes d'utilisation du capteur ont été déterminés, la fonction *time line generation* établit la planification de chacune des tâches.

Intéressons nous à présent à la façon dont cette structure de SGC peut être appliquée à notre étude. La mission globale de nos capteurs est la surveillance d'un espace aérien. Pour cela ils doivent détecter les cibles, les poursuivre et les identifier. Ces trois « sous-missions » sont du ressort du  $M - level$ , elles sont nécessaires afin d'accomplir la mission globale assignée au système multicapteur. Considérons la détection : disposant d'une connaissance plus ou moins bonne de l'environnement, le système multicapteur va devoir intégrer cette connaissance, déterminer les tâches à accomplir par chacun des capteurs, en l'occurrence leur positionnement et/ou l'observation des cibles, pendant combien de temps et dans quelles conditions, afin d'optimiser un critère basé sur les performances de détection définies dans le  $M - level$ . Ces sous-tâches font partie du  $\mu - level$ .

### 2.2.2 Les propriétés requises d'un système de gestion multicapteur

Nous avons vu que le rôle d'un SGC était de permettre l'accomplissement d'une ou plusieurs tâches dans des conditions optimales, aussi bien au niveau de l'utilisation des ressources que des performances atteintes. Le SGC doit pour cela considérer la complexité de l'environnement, les capacités et disponibilités de chacun des capteurs. Selon [Mc11] et [VER99], les propriétés d'un système de gestion multicapteur doivent être les suivantes :

- être intelligent, c'est à dire que le SGC doit incorporer explicitement des connaissances au niveau tactique ou environnemental,
- permettre une flexibilité maximale au niveau de l'allocation des ressources,
- assurer l'accomplissement de la mission, même dans un environnement dégradé, c'est à dire pallier à tout imprévu ou toute défaillance de capteur,
- être le plus autonome et le plus rapide possible,
- avoir une capacité d'anticipation, en se basant sur des modèles de prédiction de l'état de son environnement.

Pour assurer la réactivité du SGC, les modes de fonctionnement des capteurs vont être sans cesse réadaptés. Un mode de fonctionnement peut être défini comme un pré-réglage optimisé des paramètres des capteurs, correspondant à une mise en situation donnée : détection ou estimation dans un contexte et un but définis. La gestion de capteurs se fait dans un but d'optimisation, simultanée ou non, de toutes les tâches qui lui sont attribuées. Rechercher l'optimisation singulière d'une tâche peut aller à l'encontre d'une optimisation globale. Par exemple, on assigne une durée  $t$  à la phase de détection de deux cibles. Soit  $t_1$  (resp.  $t_2$ ) le temps nécessaire à la détection de la cible 1 (resp. 2),  $t = t_1 + t_2$ . Si, pour une raison quelconque, la phase de détection de la cible 1 atteint une durée  $t'_1 > t_1$ , alors on aura  $t'_2 < t_2$  afin de satisfaire la contrainte  $t = t'_1 + t'_2$ ; la détection de la cible 2 peut alors ne pas être optimale. Le SGC doit être capable de gérer ces changements de modes et les contraintes qui peuvent résulter de la priorité accordée à une tâche par rapport à une autre. Disposer de plusieurs modes de fonctionnement est une richesse pour un capteur car ils lui apportent polyvalence et adaptativité. Un capteur radar dispose de plusieurs fréquences d'émission et d'un mode de balayage électronique, le capteur infrarouge peut quant à lui jouer sur la durée d'observation de la cible ou sur la vitesse de balayage.

Le SGC doit être réactif aux événements, tels qu'un brusque changement de trajectoire d'une cible ou l'association de données à des pistes ambiguë, voire les anticiper. Parce que chaque piste nécessite un nombre et un (des) type(s) de capteur(s) différent(s) à chaque instant, la mise en place d'un système automatique de gestion de ressources peut s'avérer très utile pour répartir les ressources sur chaque piste, de façon dynamique, optimale et équitable dans le sens où nous avons une recherche d'optimisation globale.

Pour remédier à des perturbations ou contraintes possibles, le SGC peut disposer d'un certain nombre de solutions. Par exemple il peut tenir compte d'un seuil sur les performances

afin de ne pas perdre les pistes des cibles et éviter d'effectuer des mesures superflues lorsqu'il n'y a pas de dégradation de la qualité du pistage. En environnement dense, le SGC peut effectuer une nouvelle optimisation de l'allocation de ses ressources pour faciliter le discernement des cibles et permettre une certaine continuité et stabilité de la poursuite. Dans le cas de la détection, effectuer plusieurs détections élémentaires pourra permettre d'améliorer la probabilité de détection totale ([DUF02]). Enfin, selon le type de manœuvre de la cible, la dégradation de la poursuite peut être plus ou moins importante, pouvant provoquer jusqu'à la divergence du filtre de poursuite. En effet, lorsque la manœuvre est telle que la modélisation de la trajectoire reste bonne, l'erreur sur la prédiction est corrigée par les nouvelles mesures. Par contre, la cible peut changer radicalement de trajectoire ou de stratégie et entraîner ainsi une erreur de modélisation ; si celle-ci n'est pas compensée par un bruit d'état correctement adapté au problème, le filtre de Kalman peut diverger. Une solution est d'utiliser l'IMMKF (IMMKF : *Interacting Multiple Model Kalman Filter*), un filtrage de Kalman qui à chaque instant d'échantillonnage choisit, parmi un ensemble de modèles dont il dispose, celui le mieux adapté ([BAR88b], [SOR85], [KAS98]).

La gestion des ressources, le besoin d'adaptativité aux événements, la décharge de l'opérateur et d'autres propriétés encore, montrent la nécessité de la mise en place d'un système de gestion multicapteur dans le cadre de la surveillance d'une zone aérienne par plusieurs capteurs hétérogènes.

Revenons maintenant à la description des deux phases de la gestion de capteurs présentées précédemment : la phase amont, c'est à dire l'optimisation de l'allocation spatiale et temporelle des capteurs, le réglage des paramètres d'estimation, et la phase aval, soit la fusion de données et le retour automatique des informations vers le système de gestion. Dans le cadre de notre étude, notre intérêt se portera principalement sur la détection et la poursuite des cibles, c'est à dire l'optimisation de fonctions du  $\mu$  - *level*. Parce qu'elle permet d'apporter une connaissance supplémentaire de la situation, l'étape d'identification des cibles ne devra pas être négligée mais ne sera pas étudiée dans le cadre de ce document. Même si elle fait partie intégrante du système global, nous ne nous intéresserons pas non plus à la fusion de données, celle-ci étant suffisamment importante pour être le sujet d'une étude indépendante. Cependant nous insisterons à nouveau sur le fait que les actions réalisées par un système de gestion multicapteur dépassent le cadre de la fusion de données.

### 2.2.3 Les méthodes de gestion de capteurs

Dans [McI1] sont énoncées certaines méthodes de gestion de capteurs. Le lecteur y trouvera également de nombreuses références bibliographiques. Nous allons à présent nous intéresser à certaines d'entre elles sur lesquelles nous avons basé nos études et nos résultats.

## 2.3 Le gain de discrimination

La section précédente a mis en évidence le fait que la surveillance d'une zone aérienne nécessitait la gestion des capteurs la réalisant, gestion rendue nécessaire entre autres par la réactivité des cibles, la zone de surveillance souvent plus large que les champs de vue des capteurs, l'hétérogénéité de ceux-ci et leur nombre éventuellement inférieur à celui des cibles. Alors que notre système global est divisé en un ensemble de sous-systèmes, nous nous intéressons à celui consacré à l'allocation des capteurs sur les cibles. Notre but est alors d'apporter une réponse à la question *quel capteur, sur quelle cible, à quel moment, dans quelles conditions ?*

La problématique est donc ici celle de la sélection des capteurs et avant même, de savoir quels sont les critères de sélection. Les critères peuvent être aussi bien quantitatifs que qualitatifs. Ainsi le système pourra être amené à sélectionner les capteurs permettant d'atteindre les meilleures performances, mais aussi ceux les mieux adaptés à des types donnés de cibles, de par leurs natures ou leurs positions par rapport aux cibles. Les positions des cibles ne sont pas forcément connues, cependant nous supposons qu'il existe une connaissance minimale, au travers de densités de probabilité de localisation. D'autre part nous pouvons tenir compte de la notion de priorité dans la sélection des capteurs. En effet, la menace d'une cible peut être traduite par un coefficient, un paramètre de dangerosité, qui lui est attribué. Ainsi une cible en phase d'approche peut nécessiter une détection plus rapide et une poursuite plus précise et par là même une sélection de capteurs pour son observation plus adéquate, en nombre, en nature et en positionnement.

Ce sujet de l'allocation a déjà fait l'objet d'un certain nombre de publications. Nous citerons par exemple [DOD00], [KAS96], [KAS96a], [KAS97], [MUS96], [NAS77] et [SCH93], K. Kastella, J. M. Nash et W. Schmaedeke étant les initiateurs des théories qui vont être abordées. Selon les propos de K. Kastella et S. Musick dans [MUS96], les méthodes issues de la théorie de l'information sont les plus utilisées, grâce à leur caractère général et leur relative adaptation aux informations de types différents.

### 2.3.1 La théorie de l'information

La théorie de l'information, initiée par C. Shannon, fournit une mesure quantitative de la notion d'information apportée par un message ou une observation. La notion de quantité d'information s'apparente à celle d'incertitude. En effet elle peut être vue comme une mesure de la réduction de l'incertitude, suite à l'observation d'un évènement.

Dans le cadre de la théorie de l'information est définie une mesure entropique, traduisant l'incertitude moyenne d'une variable aléatoire discrète. Pour une distribution de probabilités  $p$ , telle que  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,  $p_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ,  $i \in \{1, n\}$ , la mesure d'entropie de Shannon est donnée par la relation  $S_n(p) = \sum_{i=1}^n -p_i \log p_i$ . Le choix de la fonction logarithmique résulte

des propriétés de celle-ci, notamment la linéarisation des calculs par sa propriété d'additivité ( $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ ). Cette mesure a de nombreuses propriétés données notamment dans [KAP92]. Nous ne les détaillerons pas ici mais nous insisterons sur celles permettant de traduire l'incertain. Ainsi lorsque le résultat est certain, c'est à dire lorsqu'il existe un  $i \in \{1, n\}$  pour lequel  $p_i = 1$  (et par conséquent  $p_j = 0$  pour  $j \neq i$ ), l'incertitude nulle est traduite par  $S_n(p) = 0$  (avec un prolongement par continuité  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$ ). L'entropie est strictement positive dans tous les autres cas où le résultat n'est pas certain. Par ailleurs, lorsque des résultats sont combinés entre eux, entraînant une diminution de l'incertitude, l'entropie est réduite également. Il existe de nombreuses variantes et extensions de cette mesure. Les auteurs pré-cités ont retenu l'entropie croisée ou relative, encore appelée entropie relative de Kullback-Leibler ou discrimination ([KAS96]).

**Remarque 1** *selon les auteurs rencontrés, la définition de la fonction entropie et des fonctions qui en découlent ne sont pas les mêmes. Certains utilisent la fonction logarithme népérien alors que d'autres lui préfèrent la fonction logarithme en base dix. Nous adopterons cette dernière.*

### 2.3.2 L'entropie relative de Kullback-Leibler

L'entropie relative de Kullback-Leibler a globalement les mêmes propriétés que l'entropie de Shannon. Elle a de plus l'avantage d'être facilement généralisable au cas continu.

Soient deux distributions de probabilités  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  et  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ ,  $p_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ,  $q_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^n q_i = 1$ ,  $i \in \{1, n\}$ . L'entropie relative de Kullback-Leibler entre les deux distributions  $p$  et  $q$  est définie par :

$$D(p : q) = \sum_{i=1}^n p_i \log \left( \frac{p_i}{q_i} \right) \quad (2.1)$$

Si  $q_i = 0$  alors on suppose que  $p_i = 0$ ,  $i \in \{1, n\}$ , et on fait le prolongement par continuité  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$ . Les propriétés de cette entropie sont également détaillées dans [KAP92] et [VER99]. Bien que sa définition ne soit pas symétrique et qu'elle ne satisfasse pas l'inégalité triangulaire, la discrimination est interprétée comme une distance entre les deux distributions, comme un gain de l'une par rapport à l'autre (DG : *discrimination gain*). Cette propriété en fait un critère de sélection : quelle distribution de probabilités  $p$  aura le meilleur bénéfice par rapport à la distribution  $q$ ? Dans le cadre de la détection et de la classification, la comparaison se fera entre une probabilité prédite et une probabilité *a priori*, ce qui entraîne un calcul récurrent du gain de discrimination dès qu'une nouvelle mesure est disponible. Les probabilités sont mises à jour par la règle de Bayes.

Les problèmes de détection et de classification sont souvent corrélés. En effet, la détection peut être traitée comme la classification dans le sens où l'on définit un type particulier de cible correspondant à l'absence d'une cible. On définit ainsi l'ensemble d'appartenance des cibles



$t = \{0, 1, 2, \dots, T\}$ , 0 signifiant qu'il n'y a pas de cible et  $1, 2, \dots, T$  étant les différents types de cibles. Dans le cadre de l'allocation de capteurs à la poursuite d'une cible nous aurons, par le calcul du DG, la discrimination entre la densité prédite quand aucune observation n'est effectuée sur la cible et la densité prédite si un capteur particulier est utilisé pour faire la mesure.

Dans [MUS96] S. Musick et K. Kastella présentent d'autres alternatives à la mesure de discrimination et en proposent une comparaison. Ces méthodes sont appliquées à la détection et à la classification d'une cible par un capteur. La zone de surveillance est décomposée en un ensemble de cellules, le but étant de déterminer un ordre de parcours optimal de celles-ci. Quatre méthodes sont brièvement présentées ci-dessous :

- **la recherche directe** : une mesure est effectuée dans chacune des cellules, sans quelconque ordonnancement.
- **la confirmation d'alertes** : cette méthode se rapproche de la précédente mais comporte une phase de confirmation d'alerte. Dans un premier temps un seuil de détection est fixé assez bas de sorte à voir apparaître des alertes, traductions d'éventuelles présences de cibles. Une phase de confirmation est alors mise en place, entraînant une sollicitation supplémentaire du ou des capteur(s). Le seuil de détection est alors beaucoup plus élevé de façon à discerner les fausses alarmes des détections réelles. La phase de confirmation est généralement choisie plus longue que celle de la première analyse de façon à améliorer les performances, en premier lieu la valeur du rapport signal sur bruit, proportionnelle à la durée consacrée par le capteur à la cible qu'il observe (*dwell time*).
- **la règle de l'index (*index rule*)** : l'idée est de s'intéresser aux cellules ayant les plus fortes probabilités de présence de cibles. Cette méthode est optimale sous deux hypothèses : le problème doit être monocible et les mesures  $z$  doivent satisfaire une propriété de symétrie.
- **le SPRT (*Sequential Probability Ratio Test*)** : le problème est simplifié à deux hypothèses :  $H_1$ , une cible est présente dans la cellule, et  $H_0$ , il n'y a pas de cible dans la cellule. A chaque instant est calculé le rapport de vraisemblance  $LR$  :

$$LR = \frac{p(z; H_1)}{p(z; H_0)} \quad (2.2)$$

$z$  est la mesure disponible à l'instant d'échantillonnage. Ce rapport est comparé à deux seuils  $T_1$  et  $T_2$ , tels que  $T_1 = \log\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)$  et  $T_2 = \log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)$  où  $\alpha$  représente la probabilité de confirmation d'une piste non valide et  $\beta$  celle d'éviction d'une piste valide. Selon la valeur du  $LR$  par rapport aux seuils  $T_1$  et  $T_2$ , la décision ne sera pas la même, comme illustré figure 2.4 page 25. Soit on décide que l'une des hypothèses  $H_0$  ou  $H_1$  est validée, soit on continue. La durée moyenne de prise de décision peut être calculée en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$  et d'une probabilité d'acceptation des hypothèses définie dans [MUS96].

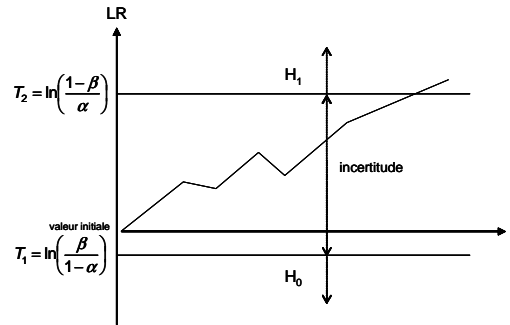


FIG. 2.4: [BLA99c] *prise de décision en fonction des seuils  $T_1$  et  $T_2$*

Les simulations effectuées par K. Kastella et S. Musick dans [MUS96] pour la détection d'une cible unique, c'est à dire la classification « cible présente »/« cible non présente », par un capteur unique dans un environnement divisé en une centaine de cellules, montre que la méthode du gain de discrimination est la plus robuste et l'une des plus performantes. Dans le cadre de la détection monocible, la méthode de recherche directe n'est pas optimale, alors que celle de l'*index rule* atteint des performances meilleures que celles du DG et du SPRT, comparables à ce niveau. Cependant, la restriction à la détection monocible en fait une méthode moins robuste que le DG qui a l'avantage, nous le verrons, d'être adaptable au problème multicible multicapteur. Par ailleurs les résultats des simulations réalisées montrent que la détection des cibles est plus rapide par l'utilisation de la méthode du DG plutôt que celle du SPRT, avec des probabilités d'erreur cependant similaires.

Le gain de discrimination est donc une méthode efficace pour l'organisation de l'observation d'un ensemble de cellules représentant l'espace dans lequel se déplace une cible.

Dans le cadre de l'allocation des capteurs à l'observation des cibles, il est possible de constituer des regroupements de capteurs, appelés pseudo-capteurs ([NAS77], [SHE95]). Selon O. Shehory et S. Kraus dans [SHE95], des agents autonomes (selon leur dénomination générale, dans l'article, à laquelle peuvent s'apparenter nos capteurs) dans un environnement multiagent ont besoin de coopérer pour accomplir des tâches, ou améliorer des performances. Plusieurs méthodes de regroupements des agents sont présentées dans leur article, allant de la théorie des jeux au SPP (*Set Partitioning Problem*). Alors que la première méthode s'avère être mal adaptée à un environnement multiagent, la seconde propose des algorithmes NP-complets ou des solutions sous-optimales. Les auteurs proposent alors un algorithme *anytime* de formation de coalitions d'agents. Cependant celui-ci se montre inadapté à notre problème dans le sens où les regroupements d'agents sont réalisés dans un but d'optimisation de l'utilisation des capacités des capteurs et non de celle des performances globales du système ou de l'accomplissement des tâches.

Dans [KAS96], K. Kastella propose l'utilisation de cette mesure de Kullback-Leibler pour la détection et la poursuite d'un nombre inconnu de cibles, par un capteur unique. Dans

ce contexte là le problème est de déterminer à chaque instant la quantité et la localisation des cellules à observer. Soit  $n$  le nombre de cibles, supposées identiques,  $n \in \{0, 1, \dots, \infty\}$ ,  $C$  le nombre de cellules,  $Z$  la mesure disponible à l'instant d'échantillonnage. La probabilité  $p(c_1, c_2, \dots, c_n | Z)$  représente la probabilité conditionnée par la mesure  $Z$  d'avoir  $n$  cibles localisées dans les cellules  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Elle est actualisée à chaque mesure pour chaque  $n$  et chaque  $c_j$ ,  $j \in [1, n]$ , par l'utilisation du théorème de Bayes. Le gain de discrimination fait alors la comparaison entre les probabilités  $p(c_1, c_2, \dots, c_n | Z)$  et  $p(c_1, c_2, \dots, c_n | Z')$ , cette dernière étant l'actualisation de la première après intégration d'une nouvelle mesure. La répartition cibles-cellules retenue est celle maximisant le DG. En effet, les cellules dont les probabilités de présence conditionnelles sont très différentes de la probabilité *a priori* apportent une quantité d'information plus importante que celles dont les probabilités en diffèrent peu. Il y a donc peu d'intérêt, puisque le gain d'information est peu significatif, à diriger le ou les capteur(s) vers des cellules dont l'information est quasiment connue. C'est ainsi que le ou les capteur(s) seront dirigés en priorité vers les cellules pour lesquelles le gain de discrimination est maximal. Des simulations ont été réalisées pour illustrer ces propos. La configuration de celles-ci est telle qu'au maximum trois cibles sont présentes dans un espace à une dimension décomposé en un ensemble de dix cellules. Les résultats montrent que, dans ce contexte monocapteur multicible, la méthode de discrimination par utilisation de la méthode de Kullback-Leibler est d'une part de mise en place facile, d'autre part à nouveau une méthode très performante ([KAS96]).

Cependant, son application à une configuration multicapteur multicible semble être moins aisée étant donné le faible nombre de publications s'y référant. Nous citerons toutefois [SCH93] et [DOD00]. Le premier auteur, W. Schmaedeke, est avec K. Kastella un précurseur en la matière. Il utilise la matrice de covariance du filtre de Kalman pour établir une prédiction du gain de discrimination pour chaque couple capteur-cible. L'allocation des capteurs aux différentes pistes est faite dans un but d'optimisation du gain de discrimination total sous certaines contraintes liées aux capteurs, comme leur capacité à pouvoir suivre plusieurs pistes simultanément. L'allocation est définie par l'utilisation de méthodes de programmation linéaire que nous aborderons ultérieurement.

P. Dodin et J. Verliac reprennent dans [DOD00] et [VER99] les propos de W. Schmaedeke. Leurs article et rapport traitent d'un problème d'allocation de ressources, c'est à dire de plusieurs capteurs, à la surveillance et le pistage de plusieurs cibles mobiles et manœuvrantes. La prise en compte de la manœuvrabilité des cibles est leur apport aux travaux de W. Schmaedeke. Elle nous intéresse également car elle rentre dans le contexte de notre problématique. Cependant, elle est une contrainte supplémentaire car elle ne permet plus d'utiliser le filtre de Kalman dans sa forme standard. Nous avons alors recours à l'IMMKF.

### 2.3.3 Le filtrage de Kalman multimodèle (IMMKF : *Interacting Multiple Model Kalman Filtering*)

L'IMMKF est un filtre de Kalman modifié pouvant gérer simultanément plusieurs modélisations de cibles ([BAR88b], [SOR85], [KAS98]). A chaque instant d'échantillonnage, il sélectionne la modélisation de trajectoire la mieux adaptée au mouvement et à la manœuvre de la cible. Différents modèles sont mis à disposition du filtre. Ils correspondent aux manœuvres de base que peuvent effectuer les cibles, leur nombre et leur nature dépendent essentiellement de la nature de celles-ci. Cette phase de modélisation est très importante car elle détermine la qualité du filtrage à venir. Les modèles sont mis à disposition du filtre qui réalise une pondération en privilégiant le modèle le plus adapté à la situation de la cible. Cette pondération se fait à partir de la probabilité prédite d'utilisation de chaque modèle, elle-même basée sur les probabilités de transition d'un modèle à un autre. Ces probabilités de transition font que le système est régi par un processus de Markov. Cette pondération par les probabilités d'utilisation du filtre a, mis à part son rôle de sélection, l'intérêt de permettre une évaluation de la pertinence de l'ensemble des modèles disponibles. En effet, par l'étude de l'évolution des probabilités il est possible de se rendre compte qu'un modèle n'est pas ou très peu utilisé et décider ainsi de son éviction de la « banque » des modèles. Celle-ci permet alors de réduire et simplifier les calculs. Détaillons les équations de ce filtre.

Soit  $j$  l'indice de modèle,  $j \in \{1, r\}$ . Nous supposons des modèles d'état de la forme :

$$\begin{cases} X_j(k+1) = F_j(k) X_j(k) + w_j(k) \\ z(k) = H_j(k) X_j(k) + v_j(k) \end{cases} \quad (2.3)$$

avec  $w_j$  et  $v_j$  des bruits d'état et de mesure tels que  $E(w_j(k) w_j(l)^T) = Q_j(k) \delta_{kl}$  et  $E(v_j(k) v_j(l)^T) = R_j(k) \delta_{kl}$  ( $\delta_{kl}$  symbole de Kronecker).

Soit  $\pi_{ji}$  la probabilité de transition du modèle  $i$  vers le modèle  $j$ . La probabilité d'utilisation du modèle  $j$  à l'instant  $k-1$  est  $\mu_j(k-1)$ , la probabilité prédite est  $\bar{\mu}_j = \sum_{i=1}^r \pi_{ji} \mu_i(k-1)$ .

A chaque nouvelle itération, les estimations calculées précédemment pour chaque modèle sont fusionnées. Nous calculons ainsi  $\mu_{i|j}$  la probabilité conditionnelle d'utilisation d'un modèle  $j$  sachant que nous utilisons un modèle  $i$  :

$$\mu_{i|j} = \frac{\pi_{ji} \mu_i(k-1)}{\bar{\mu}_j} \quad (2.4)$$

L'estimation de l'état fusionné pour le modèle  $j$  est donné par la relation (2.5), celle de la variance de l'état par l'équation (2.6) :

$$\hat{X}_{0j}(k-1|k-1) = \sum_{i=1}^r \hat{X}_i(k-1|k-1) \mu_{i|j} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
P_{0j}(k-1|k-1) = & \sum_{i=1}^r \mu_{i|j} \left\{ P_i(k-1|k-1) \right. \\
& \left. + \left[ \hat{X}_i(k-1|k-1) - \hat{X}_{0j}(k-1|k-1) \right] \left[ \hat{X}_i(k-1|k-1) - \right. \right. \\
& \left. \left. \hat{X}_{0j}(k-1|k-1) \right]^T \right\}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Chaque estimation fusionnée est mise à jour avec la nouvelle mesure  $z(k)$ , disponible à l'instant  $k$ . Les équations de prédiction sont alors :

$$\begin{cases} \text{état} & \hat{X}_j(k|k-1) = F_j(k-1) \hat{X}_{0j}(k-1|k-1) \\ \text{covariance} & P_j(k|k-1) = F_j(k-1) P_{0j}(k|k-1) F_j(k-1)^T + Q_j(k-1) \end{cases} \tag{2.7}$$

La mesure résiduelle est  $\nu_j(k) = z(k) - H_j(k-1) \hat{X}_j(k|k-1)$ , l'estimation de sa matrice de covariance est  $\Sigma_j(k) = H_j(k-1) P_j(k|k-1) H_j(k-1)^T + R_j(k-1)$ .

$W_j(k) = P_j(k|k-1) H_j(k-1)^T \Sigma_j(k)^{-1}$  est l'expression du gain de Kalman.

Et les estimations sont :

$$\begin{cases} \text{état} & \hat{X}_j(k|k) = \hat{X}_j(k|k-1) + W_j(k) \nu_j(k) \\ \text{covariance} & P_j(k|k) = P_j(k|k-1) - W_j(k) \Sigma_j(k) W_j(k)^T \end{cases} \tag{2.8}$$

Il est également nécessaire de mettre à jour les probabilités des différents modèles. Elles sont recalculées à partir de leurs probabilités prédites et de leurs fonctions de vraisemblance. Pour un modèle  $j$  la fonction de vraisemblance est donnée, dans un cas gaussien, par :

$$\Lambda_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi |\Sigma_j(k)|}} \exp \left( -\frac{1}{2} \nu_j(k)^T \Sigma_j(k)^{-1} \nu_j(k) \right) \tag{2.9}$$

Il en résulte la probabilité  $\mu_j$  du modèle  $j$ ,  $\mu_j = \frac{\bar{\mu}_j \Lambda_j}{\sum_{i=1}^r \bar{\mu}_i \Lambda_i}$ .

Enfin, les prédictions et estimations globales de l'état et de la covariance sont combinées :

$$\begin{aligned}
\text{prédiction} & \begin{cases} \hat{X}(k|k-1) = \sum_{j=1}^r \bar{\mu}_j \hat{X}_j(k|k-1) \\ P(k|k-1) = \sum_{j=1}^r \bar{\mu}_j P_j(k|k-1) \end{cases} \\
\text{estimation} & \begin{cases} \hat{X}(k|k) = \sum_{j=1}^r \hat{X}_j(k|k) \mu_j \\ P(k|k) = \sum_{j=1}^r \mu_j \left\{ P_j(k|k) + \left[ \hat{X}(k|k) - \hat{X}_j(k|k) \right] \left[ \hat{X}(k|k) - \hat{X}_j(k|k) \right]^T \right\} \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Dans ce contexte de poursuite de cibles, la mesure de Kullback-Leibler permet de calculer la discrimination entre la densité prédite et la densité estimée si un capteur particulier, ou un groupement de capteurs, est utilisé pour faire la mesure de mise à jour.

Rappelons la définition du gain de discrimination entre deux distributions de probabilités  $p$  et  $q$ , de moyennes respectives  $P$  et  $Q$  et de matrices de covariance  $\Sigma_p$  et  $\Sigma_q$  :

$$D(p : q) = \int p(X) \log \left( \frac{p(X)}{q(X)} \right) dX = \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \Sigma_q^{-1} \left( \Sigma_p - \Sigma_q + (P - Q)(P - Q)^T \right) \right] - \frac{1}{2} \log \left( \frac{|\Sigma_p|}{|\Sigma_q|} \right) \quad (2.11)$$

Soit  $Z$  l'ensemble des mesures jusqu'à l'instant  $t_{k-1}$ . Si aucune observation n'est réalisée, la densité de probabilité est obtenue par les équations de prédiction du filtre IMMKF :

$$p_0(X|Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|P(k|k-1)|}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( X - \hat{X}(k|k-1) \right) P(k|k-1)^{-1} \left( X - \hat{X}(k|k-1) \right)^T \right) \quad (2.12)$$

Appliquée au modèle  $j$  cette densité de probabilité devient  $p_{0j}(X, j|Z) = \bar{\mu}_j p_0(X|Z)$ .

Lorsqu'une mesure est disponible, on réalise une itération de l'algorithme IMMKF afin d'obtenir les estimations  $\hat{X}(k|k)$  et  $P(k|k)$ .  $Z'$  est l'ensemble des mesures à l'instant  $t_k$ , soit  $Z' = z(k) \cup Z$ . La densité de probabilité que la cible se trouve dans l'état  $X$  et suive le modèle dynamique  $j$ , connaissant l'ensemble  $Z'$  des mesures est  $p_j(X, j|Z') = \bar{\mu}_j p(X|Z')$ . La discrimination se fait alors entre les densités de probabilité  $p_j(X, j|Z')$  et  $p_{0j}(X, j|Z)$  selon la relation (2.11). Cependant ce calcul dépend d'une mesure particulière  $z$ . Elle se généralise par le calcul de son espérance mathématique :

$$DG = \int \sum_{(z)} \left\{ \int_{(X)} p_j(X, j|Z') \log \left( \frac{p_j(X, j|Z')}{p_{0j}(X, j|Z)} \right) dX \right\} p(z|Z) dz \quad (2.13)$$

Cette formulation est la plus générale possible. Elle peut être simplifiée par la biais d'approximations de la probabilité  $p(z|Z)$  ([VER99]).

### 2.3.4 Optimisation de l'allocation - Programmation linéaire

Le gain de discrimination (2.13) est calculé pour chaque couple capteur-cible. Notre objectif est à présent d'établir l'allocation optimale des capteurs sur les cibles afin de maximiser la somme des gains de discrimination, tout en tenant compte de contraintes quantitatives ou opérationnelles.

Plusieurs hypothèses sont formulées pour cerner et simplifier notre problème. Nous considérons  $S$  capteurs et  $T$  cibles. Chaque capteur  $s$  a une capacité  $c_s$ . La capacité d'un capteur est son aptitude à pouvoir observer un nombre maximal  $c_s$  de cibles dans un intervalle

de temps donné. Nous supposons d'autre part qu'il est possible de constituer des pseudo-capteurs. Comme nous l'avons vu, ceux-ci sont des regroupements de capteurs ; ils sont considérés comme des capteurs à part entière. Il y a alors  $2^S - 1$  capteurs et pseudo-capteurs possibles. Enfin, nous considérons que l'étape de détection a déjà eu lieu et que les pistes ont déjà été initialisées. Notre problème d'allocation se formule alors ainsi ([SCH93], [KAS98], [DOD00]) :

$$\begin{aligned} \text{critère à optimiser : } & C = \sum_{i=1}^{2^S-1} \sum_{j=1}^T G_{ij} x_{ij} \\ \text{contraintes : } & \begin{cases} \sum_{i=1}^{2^S-1} x_{ij} \leq 1 & j = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{i \in J(k)} \sum_{j=1}^T x_{ij} \leq c_k & k = 1, 2, \dots, S \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i \in \{1, \dots, 2^S - 1\} \quad \forall j \in \{1, \dots, T\} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$G_{ij}$  est le gain de discrimination associé au couple capteur  $i$  – cible  $j$ , calculé à partir de l'équation (2.13) page 29. Les capteurs sont numérotés de 1 à  $S$ , les pseudo-capteurs de  $S+1$  à  $2^S - 1$ .  $J(k)$  est l'ensemble constitué du capteur  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, S$ , et des pseudo-capteurs intégrant le capteur  $k$ .  $J(k)$  contient  $2^{S-1}$  éléments. Le but est de déterminer les  $x_{ij}$ , variables binaires correspondant, lorsque  $x_{ij} = 1$ , à l'allocation du capteur  $i$  sur la cible  $j$ . Notons qu'il s'agit alors d'un problème en nombre entier. La première contrainte signifie, à un instant donné, qu'une cible ne peut être observée que par un seul capteur ou pseudo-capteur, c'est à dire que ceux-ci ne peuvent pas observer la même cible s'ils appartiennent au même ensemble  $J(k)$ . La seconde inégalité traduit la contrainte de capacité de chaque capteur, mais aussi de chaque pseudo-capteur, ce qui n'avait pas été considéré dans [NAS77].

L'outil de résolution employé est la programmation linéaire. Selon G. Dahlquist et A. Bjorck dans [DAH74] la programmation linéaire est une méthode mathématique de détermination de l'optimum d'une fonction linéaire, dont le domaine de variation des variables est limité par un système d'égalités ou d'inégalités linéaires. Si la solution optimale à un problème de ce type existe alors elle se trouve d'une part dans l'espace géométrique défini par l'espace des contraintes, et peut être déterminée d'autre part par l'énumération de toutes les solutions possibles. Nous concevons facilement que cette méthode de résolution a ses limites, notamment lorsque le nombre de variables est élevé et par conséquent le nombre de solutions. Nous pourrions trouver des solutions à ce problème, par exemple une méthode heuristique ([VER99]).

### 2.3.5 Simulations

Nous pouvons trouver dans [VER99], [DOD00] et [KAS98] des simulations comparant les résultats obtenus lors de l'utilisation du critère de discrimination pour l'allocation capteurs-cibles dans le cadre de l'estimation, et ceux obtenus par des stratégies d'allocation pré-

définies, telles que l'observation alternée de chacune des cibles par les différents capteurs. Les résultats obtenus par P. Dodin et J. Verliac dans [DOD00] et [VER99] montrent que, quels que soient les nombres de capteurs et de cibles, la méthode d'allocation par optimisation du gain de discrimination est plus performante et permet notamment une bonne réactivité de l'allocation lors d'une évolution de la situation, par exemple lors d'une manœuvre de cible. Ces résultats se retrouvent dans [KAS98]. Les figures 2.5 et 2.6 pages 31 et 32 illustrent le cas de l'allocation de deux capteurs sur deux cibles. La première est soumise à des accélérations alors que la deuxième reste immobile.

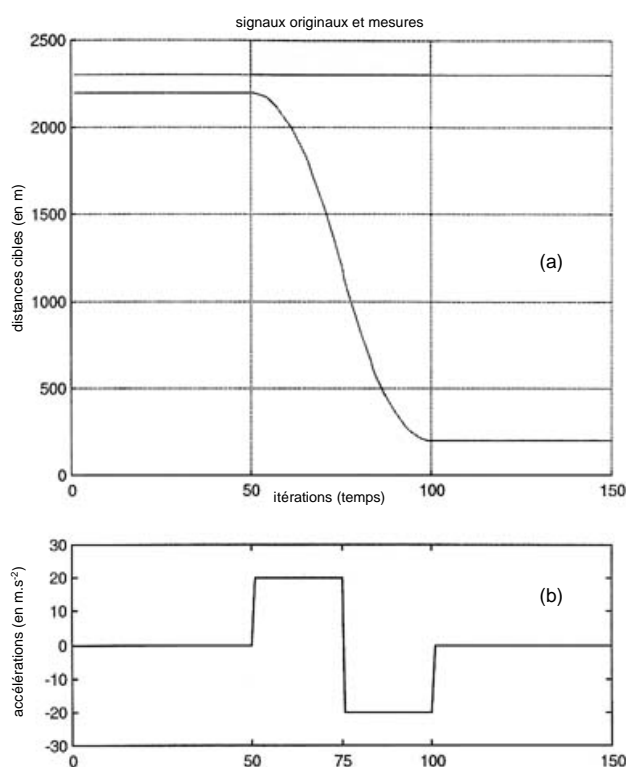


FIG. 2.5: [VER99] (a) *distances capteurs-cibles*, (b) *accélérations de la première cible*

Les deux capteurs sont fixes et de même type, le premier est considéré comme étant plus fiable et plus précis que le second ([VER99]). Cela signifie qu'il sera plus réactif lors d'une manœuvre de cible. Nous pouvons constater sur les figures pré-citées que l'allocation des capteurs se fait alternativement entre les cibles lorsque les distances capteurs-cibles n'évoluent pas, et ce indépendamment des distances auxquelles les cibles se trouvent. D'autre part nous pouvons observer que la cible manœuvrante est prise en charge de façon prioritaire par le capteur le plus précis lorsqu'elle effectue son action, sans pour autant que la deuxième cible ne soit délaissée.



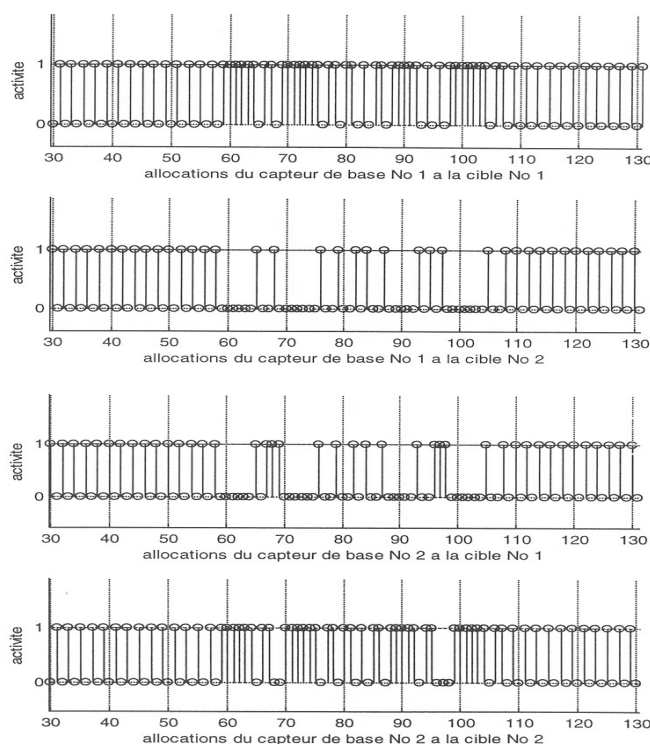


FIG. 2.6: [VER99] *allocation des capteurs sur chacune des cibles*

Ces simulations confirment l'efficacité de la mesure de discrimination de Kullback-Leibler pour l'allocation des capteurs. Son principe de fonctionnement est de favoriser la concentration des capteurs là où l'information reçue est pertinente par rapport à la connaissance antérieure.

Cependant, même s'il s'avère efficace pour la poursuite de cibles manœuvrantes, le gain de discrimination ne permet pas la prise en compte de la notion de priorité qui peut apparaître entre plusieurs cibles. En effet, même si elle ne manœuvre pas, une cible peut représenter une menace pour les avions qui l'observent. Il est donc nécessaire de déployer les ressources nécessaires à sa surveillance. Par ailleurs, une cible peut avoir un comportement l'amenant à s'éloigner de l'ensemble des porteurs ou à ne pas être observable par certains d'entre eux, ce qui est par exemple le cas lorsque deux cibles sont très proches l'une de l'autre et qu'elles appartiennent à une cellule de résolution identique (cette notion de cellule de résolution sera abordée dans le chapitre 3). Il est dans ce cas à nouveau nécessaire de renforcer la précision de la localisation, donc le nombre de capteurs, afin d'éviter la perte de la piste par l'organe de filtrage. Dans [DUM00] et [VAN01] il est proposé une méthode incluant un coefficient de menace, également appelé coefficient de dangerosité. Le critère de sélection est en fait un gain de discrimination modifié. A chaque couple capteur  $i$  – cible  $j$ , on attribue un coefficient de menace  $CD_{ij}$  et le nouveau critère de sélection est défini par le produit de ce coefficient par le

gain de discrimination associé au couple. Les critères de priorité et de qualité de l'information sont donc simultanément pris en compte. Ce coefficient est inversement proportionnel au carré de la distance porteur-cible. Il peut également être fonction d'un facteur permettant d'intégrer des aspects prioritaires plus qualitatifs. Un type de cible peut par exemple être connu comme étant plus dangereux qu'un autre, son facteur qualitatif sera alors plus élevé.

Des simulations sont proposées pour illustrer les conséquences de l'introduction d'un tel facteur. Cinq cibles évoluent dans un même plan, dans lequel se trouvent aussi trois capteurs fixes et identiques. On définit également des « zones rouges », zones dans lesquelles la menace est importante. Les figures 2.7 et 2.8, pages 33 et 34 illustrent cet exemple. Toutes les cibles se déplacent vers des zones rouges sauf celle identifiée par « cible 3 ». La première figure donne les résultats de la poursuite des cibles sans prise en compte de la notion de menace.

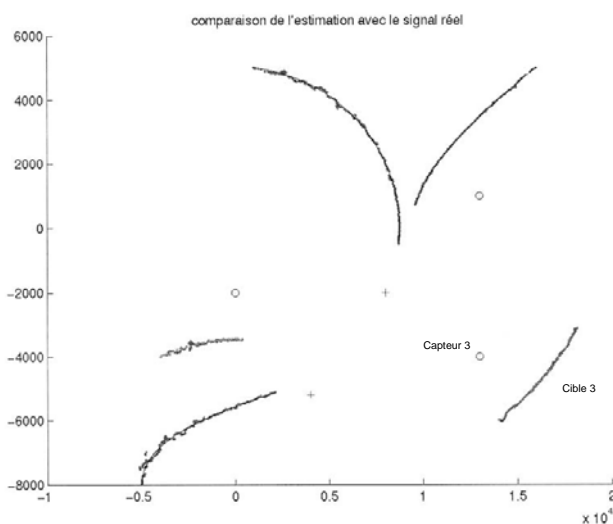


FIG. 2.7: [DUM00] poursuite des cibles sans tenir compte de la menace (les zones rouges sont représentées par des croix, les capteurs par des cercles)

La poursuite est de qualité équivalente quelle que soit la cible. Par contre elle se dégrade au niveau de la cible 3 lorsque la menace est prise en compte. En effet, puisque la cible 3 s'éloigne d'une zone dangereuse, elle ne présente plus une menace aussi importante que les autres cibles s'en rapprochant. Le nombre de capteurs qui sont alloués à sa poursuite est donc réduit. Nous pouvons constater cela figure 2.9 page 34. Celle-ci représente l'évolution temporelle de l'allocation du capteur 3 sur la cible 3, en fait le capteur le plus proche donc celui ayant la plus forte probabilité de lui être associé. Alors que la cible s'éloigne du capteur, nous constatons une diminution de l'intérêt que lui porte le capteur 3.

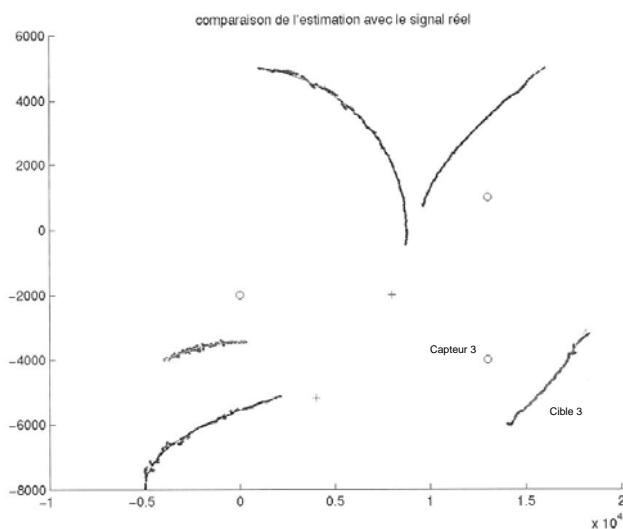


FIG. 2.8: [DUM00] poursuite des cibles avec prise en compte de la notion de menace

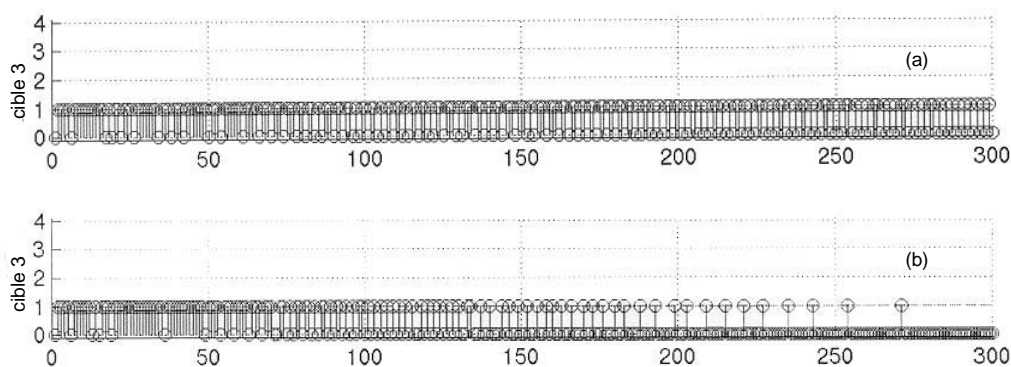


FIG. 2.9: [DUM00] allocations du capteur 3 sur la cible 3 : (a) sans prise en compte de la menace, (b) avec prise en compte de la menace

L'introduction d'un facteur de dangerosité des cibles dans le critère de sélection a donc des conséquences importantes sur les résultats de l'optimisation de l'allocation des capteurs. La définition de ces facteurs, leur modélisation, qui peut différer de celle proposée dans [DUM00], devront donc être soignées et contrôlées, en particulier au niveau des notions qualitatives qui pourront y figurer. Par ailleurs la prise en compte de la menace sous la forme qui a été proposée induit une bonne connaissance initiale de la situation, nous verrons comment l'intégrer dans un contexte où la connaissance *a priori* serait moins précise.

### 2.3.6 Conclusion sur le gain de discrimination - Liens avec notre étude

Après avoir défini la mesure de discrimination de Kullback-Leibler et l'avoir comparée avec d'autres méthodes, nous avons vu comment elle avait été utilisée pour résoudre des problèmes d'allocation de capteurs dans un contexte de détection, mais surtout de poursuite multicible.

Dans un contexte d'estimation, nous avons vu que le critère de discrimination pour l'allocation des capteurs sur les cibles présentait de bonnes performances par rapport à des allocations plus intuitives ou arbitraires. Nous avons également vu qu'il était possible de rajouter des contraintes d'observation prioritaire d'une cible en raison de la menace qu'elle représentait. Par ailleurs, les contextes d'étude rencontrés sont proches de celui dans lequel nous nous sommes placés. Les résultats publiés par les auteurs cités seront donc exploitables.

Cependant nous ne pouvons pas en dire autant à propos de la détection. Nous avons d'abord constaté que le nombre de publications consacrées à l'allocation des capteurs pour la détection était moins important, ensuite que le contexte d'étude n'était pas similaire au nôtre. En effet, alors que nous nous plaçons dans un environnement multicapteur multicible avec le nombre d'entités connu, des auteurs comme K. Kastella étudient un environnement monocapteur multicible dans lequel le nombre et la nature des cibles sont inconnus ([KAS96]). La finalité de l'optimisation n'est alors pas la même. Nous nous demanderons alors dans un premier temps quelle elle la pertinence d'un tel critère de discrimination dans notre contexte d'étude, puis dans un second temps comment le définir et l'utiliser, sachant que certaines contraintes seront à considérer. L'une d'entre elles est temporelle. En effet, la durée de la phase de détection est imposée. Cela signifie qu'il sera nécessaire de tenir compte de l'évolution temporelle (et spatiale) de la menace pour avoir le temps de parcourir les zones où celle-ci peut apparaître. Ce problème se posera d'autant plus si le nombre de cible, connu *a priori*, est supérieur à celui des capteurs ou lorsque la capacité de ceux-ci ne leur permettra pas d'observer plusieurs cibles simultanément.

Comment définir le gain de discrimination dans le cadre la détection ? L'entropie relative de Kullback-Leibler est le gain d'une probabilité par rapport à une autre. Pour la poursuite, la discrimination se faisait entre l'estimation de l'état et sa prédiction, celle-ci pouvant être qualifiée de référence. Une telle référence devra alors être définie pour la détection. Il pourrait s'agir par exemple d'une probabilité de présence *a priori*, ou de la probabilité de détection de la cible par un capteur virtuel, barycentre des autres capteurs ou autre combinaison. D'autre part, dans le cadre de la formation de pseudo-capteurs, il se pose à nouveau le problème des probabilités résultantes, c'est à dire des lois de fusion. Par similitude avec la détection décentralisée, il semblerait que les lois de fusion ET et OU soient les mieux adaptées ([DES98]). Une étude sera réalisée pour apporter des informations qualitatives et quantitatives sur les références et lois à utiliser selon les zones de l'espace et les répartitions spatiales des cibles et des capteurs.

Une fois la probabilité de référence et la loi de fusion choisies, vient le calcul du gain de

discrimination pour chaque couple cible-capteur, le terme capteur regroupant ici les capteurs de base et les pseudo-capteurs. L'allocation retenue est celle qui maximise la somme des gains de discrimination. Interviennent alors la notion d'ordre, notamment lorsqu'un capteur a la capacité d'observer plusieurs cibles simultanément, et celle d'allocation temporelle. Comment se fait-elle lorsqu'un capteur observe plusieurs cibles ? Si le capteur  $C_1$  observe la cible pendant  $t_1$  et le capteur  $C_2$  pendant  $t_2$ , combien de temps le pseudo-capteur  $C_1 - C_2$  observera-t-il la cible ? S'il doit y avoir un ordre d'ordonnement, quel sera-t-il ?

Nous chercherons à répondre à ces questions dans le chapitre 5 consacré à l'allocation des ressources matérielles. Par ailleurs, le critère de discrimination sera comparé dans le chapitre 5 à celui de la somme des probabilités.

Lorsque l'allocation aura été réalisée, nous nous retrouverons dans une configuration monocapteur (capteur ou pseudo-capteur) monocible. Nous chercherons alors comment réaliser la détection en elle-même en fonction du temps disponible et du mouvement des cibles. Nous entrons alors dans le cadre de la théorie de la recherche (ST : *Search Theory*).

## 2.4 La théorie de la recherche

Dans un contexte militaire, le principal but des patrouilles aériennes est de détecter et poursuivre les cibles pouvant représenter une menace. En période de paix, la recherche consiste simplement en une mission de surveillance, en période de crise, elle se transforme en mission de neutralisation de la menace que représente la cible. Quelle que soit la mission assignée aux porteurs, il leur est nécessaire de mettre en œuvre un certain nombre de ressources pour la réaliser. Ces ressources peuvent être matérielles : des capteurs en nombre et natures variables, du carburant ; humaines mais aussi immatérielles comme une durée d'observation. Ces ressources sont qualifiées « d'efforts de recherche ». Chaque effort supplémentaire fourni, c'est à dire chaque déploiement d'une nouvelle ressource, permet d'améliorer la qualité de la détection. Cependant certaines de ces ressources n'étant pas inépuisables, il s'avère nécessaire de les utiliser à bon escient pour limiter leur gaspillage et permettre leur répartition adéquate entre toutes les tâches qui sont attribuées aux porteurs. Cette recherche d'optimisation des efforts de recherche a donné naissance à une nouvelle discipline : la théorie de la recherche.

Nous pouvons le voir, notre problématique et celle de la *Search Theory* ont des points communs. Nous allons alors nous intéresser à cette dernière afin de mettre en évidence les contributions que chacune peut apporter à l'autre.

La théorie de la recherche a été initiée lors de la seconde guerre mondiale par B. Koopman. Son développement a été favorisé par son utilisation dans le cadre d'applications militaires. Dans [STO89], L. D. Stone dresse un bilan de son évolution depuis 1942 jusqu'aux années quatre-vingt dix. Il distingue plusieurs « ères » : classique (de 1942 à 1965), mathématique (de 1965 à 1975), algorithmique (de 1975 à 1985) et dynamique (de 1985 jusqu'aux années quatrevingt dix). La première pose les fondements de la théorie de la recherche et la définit dans sa forme la plus simple : comment répartir un effort de recherche donné pour maximiser

la probabilité de détecter un objet stationnaire dans un espace donné? Nous verrons que cette recherche d'optimisation se fait sous certaines hypothèses simplificatrices, telles que l'expression de la probabilité de détection ou la donnée d'une densité de localisation. L'apport des mathématiques a permis une meilleure formulation du problème et une contribution à sa résolution grâce à l'intégration d'outils déjà existants. Les principaux résultats s'expriment en des conditions mathématiques nécessaires et suffisantes d'optimalité. Le problème appliqué au cas d'une source stationnaire, étant arrivé à maturation lors de cette ère mathématique, les chercheurs ont commencé à s'intéresser à une optimisation pour une cible mobile, à nouveau sous certaines hypothèses. Malgré des débuts laborieux, l'orientation vers des solutions algorithmiques a permis d'apporter des solutions à la résolution de ce nouveau type de problème, en considérant dans un premier temps une recherche d'optimisation en une seule étape puis en plusieurs. Les algorithmes développés n'étaient valables que dans la phase où l'axe de visée du capteur était fixe. Le problème a ensuite été naturellement étendu au cas d'un capteur d'axe de visée mobile. Un capteur est considéré comme fixe lorsque son axe de visée est immobile, les déplacements sont des changements d'orientation de ce dernier. Cette interprétation signifie que les algorithmes d'optimisation de la répartition des efforts de recherche présentés ci-dessous sont adaptables à notre étude. En effet, même si le porteur, l'avion, est stationnaire, le capteur peut être mobile ou immobile par rapport à celui-ci. Cette nouvelle orientation vers la mobilité des capteurs a généré un dédoublement du problème en une recherche d'optimalité de la densité de l'effort de recherche et des déplacements des axes de visée de l'observateur.

Nous allons voir pour chaque approche quelles sont les hypothèses qui ont été formulées et les solutions ou contributions qui ont été proposées.

### 2.4.1 Première situation : l'axe de visée du capteur est fixe, la cible est stationnaire - Algorithme de « de Guenin »

Nous nous plaçons dans un contexte à une dimension. Cette restriction n'est pas limitative, elle permet simplement des calculs et une représentation plus aisés. Tous les résultats donnés pourront être généralisés au cas d'un espace à deux ou trois dimensions. Le temps et l'espace pourront être discrétisés, ce dernier sera alors représenté par un ensemble de cellules.

Dans cet espace  $E$  se trouvent deux entités aériennes. L'une est un observateur, porteur d'un capteur dont le type n'est pas précisé. Cet observateur est stationnaire et localisé. Il est équipé d'un capteur dont l'axe de visée est fixe. L'autre est une cible. Elle est stationnaire mais non localisée, sa nature n'est pas non plus précisée. Le but est d'établir la répartition spatiale optimale de l'effort de recherche pour sa détection et sa localisation. Le critère d'optimisation est alors la probabilité de détection, nous reviendrons sur ses propriétés.

Les résultats qui vont être exposés dans cette section sont généraux et peuvent être appliqués indifféremment aux cas continus et discrets, via certaines adaptations. Nous nous intéressons ici au cas continu.

La première hypothèse est une connaissance *a priori* sur la localisation de la cible, traduite

par une densité de localisation  $g(x) \geq 0$ , telle que  $g(x) dx = \Pr(x \leq X \leq x + dx)$ , où  $X$  est la variable aléatoire de localisation de la cible, et  $\int_E g(x) dx = \alpha$  ou  $\sum_E g(x) = \alpha$ .  $\alpha$  est un nombre réel appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ . Si  $\alpha < 1$  alors il existe une probabilité  $1 - \alpha$  que la cible ne soit pas dans le domaine de recherche  $E$ .

Pour réaliser la détection, nous disposons d'un effort de recherche total  $\Phi$ , supposé infiniment divisible entre les cellules de l'espace  $E$ . Nous avons vu que  $\Phi$  regroupait toutes les ressources utiles à la réalisation de la mission assignée aux capteurs et que celles-ci pouvaient être de natures différentes. Il est considéré ici comme un tout, c'est à dire qu'il n'y a pas de distinction entre les différentes ressources le composant. Certains problèmes peuvent cependant être décomposés, les sous-problèmes résultants font alors appel à des efforts de recherche homogènes. L'intérêt des résultats obtenus et exposés dans cette section est alors tout à fait justifié. Nous verrons ultérieurement que dans le cadre de notre étude le problème peut effectivement être décomposé, et que notre effort de recherche est en fait la durée d'observation de l'espace de recherche et par conséquent des cibles s'y trouvant.

La densité d'effort de recherche est définie par  $\varphi(x)$ , telle que  $\varphi(x) \geq 0$ , et  $\int_E \varphi(x) dx = \Phi$  ou  $\sum_E \varphi(x) = \Phi$ .

La probabilité de détection locale est fonction de la position  $x$  dans laquelle se trouve la cible et de l'effort de recherche  $\varphi(x)$  qui y est appliqué, elle s'écrit  $p(x, \varphi(x))$  ou  $p_x(\varphi(x))$  ou  $p(\varphi(x))$  ou encore  $p(\varphi)$  dans sa forme la plus simple. Plus grand sera l'effort de recherche dans une cellule, plus de chances il aura de détecter une cible s'y trouvant. Ceci se traduit par les propriétés mathématiques suivantes :

$$\begin{cases} p(0) = 0 \\ p'(\varphi) \geq 0 \\ \lim_{\varphi \rightarrow \infty} p(\varphi) = \beta \leq 1 \end{cases} \quad (2.15)$$

La première propriété signifie qu'il n'y a pas de détection sans effort de recherche. La deuxième traduit le fait que la probabilité de détection croît avec l'effort de recherche. Cette propriété sera illustrée par la probabilité de détection  $P_d$  d'une cible par un capteur radar que nous aborderons dans le chapitre 3. Enfin la dernière propriété exprime, lorsque  $\beta < 1$ , la possibilité de ne pas détecter une cible même en lui consacrant un effort de recherche infini.

La probabilité de détection locale doit également satisfaire les conditions plus générales de la loi des rendements décroissants :

$$\begin{cases} p'(\varphi) \text{ est une fonction décroissante de } \varphi \\ p'(0) > 0 \\ \lim_{\varphi \rightarrow \infty} p'(\varphi) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Ces propriétés se traduisent graphiquement par une courbe concave, passant par l'origine avec une pente positive et croissant de façon monotone vers une asymptote horizontale. Selon J. de Guenin, la plupart des probabilités de détection rencontrées dans les différentes applications

pratiques satisfont ces propriétés ([GUE61]). Cela fait de la loi des rendements décroissants une caractérisation générale et, *a priori*, non restrictive.

En résumé les hypothèses formulées pour la résolution de l'optimisation de la répartition optimale d'un effort de recherche pour la surveillance d'une zone aérienne dans le cas d'une cible stationnaire et d'un observateur stationnaire d'axe de visée fixe sont les suivantes :

- un espace d'observation discrétisable,
- un effort de recherche total, infiniment divisible entre les cellules de l'espace de recherche,
- une connaissance *a priori*, c'est à dire une densité de localisation,
- une probabilité de détection suivant la loi des rendements décroissants.

Une formulation de la probabilité de détection a souvent été utilisée par les auteurs. Il s'agit de la probabilité de détection exponentielle  $p(\varphi(x)) = 1 - \exp(-\varphi(x))$ . Elle possède les propriétés énoncées en (2.15) et (2.16). J. de Guenin insiste cependant sur le fait qu'elle est le plus généralement appliquée lorsque les efforts de recherche sont des durées. Néanmoins, quelle que soit la formulation de la probabilité de détection, la probabilité de détecter la cible entre  $x$  et  $x + dx$  est  $g(x)p(\varphi(x))dx$ . Notre problème se formule alors de la façon suivante, dans le cas continu :

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximiser} & \widehat{\varphi} = \arg \max_{\varphi} P(\varphi) \\
 \text{sous les contraintes} & \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in E \\ \int_E \varphi(x) dx = \Phi \end{array} \right. \\
 \text{avec} & P(\varphi) = \int_E g(x)p(\varphi(x)) dx
 \end{array} \tag{2.17}$$

Nous cherchons donc la distribution optimale de l'effort de recherche qui maximise la probabilité de détection pour un effort de recherche total disponible. Le problème est une recherche d'optimisation d'une fonction non linéaire sous contraintes. Il relève à nouveau de la programmation non linéaire. Cependant la théorie de la recherche lui apporte une autre méthode de résolution. Une solution a été proposée par B.O. Koopman sous l'hypothèse d'une loi de probabilité exponentielle ([KOO57]). Elle a été étendue par J. de Guenin aux lois de probabilités satisfaisant la loi des rendements décroissants ([GUE61]). Celui-ci a établi une condition nécessaire et suffisante d'optimalité : l'effort de recherche  $\varphi$  est optimal si pour chaque point  $x$  tel que  $\varphi(x) > 0$ ,

$$g(x)p'_{\varphi}(\varphi(x)) = cste = \lambda \tag{2.18}$$

Cette relation peut aussi s'écrire  $\frac{g(x)}{d\varphi/dp} = cste$ , où  $\frac{d\varphi}{dp}$  représente l'effort marginal. La condition (2.18) s'interprète en conséquence : quand la distribution de l'effort est optimale, l'effort marginal nécessaire à l'augmentation de la probabilité de détection est proportionnel à la densité de localisation au point où se trouve la cible, et ce quel que soit le point de l'espace considéré ([GUE61]).



L'hypothèse de la probabilité de détection suivant la loi des rendements décroissants permet de justifier l'existence d'une fonction inverse de  $p'_\varphi(\varphi)$ . En effet, celle-ci étant strictement décroissante et continue, elle est bijective et admet une unique fonction inverse  $f$ . Par inversion de l'expression (2.18), on obtient la densité de l'effort de recherche  $\varphi(x)$ , telle que :

$$\varphi(x) = \varphi_\lambda(x) = f\left(\frac{\lambda}{g(x)}\right) \quad (2.19)$$

Certaines propriétés sont nécessaires à la détermination de  $\varphi(x)$ . Elles sont démontrées dans [GUE61]. La première est qu'il existe un espace fini  $E_R$  contenant l'ensemble des points pour lesquels  $\varphi(x) > 0$  et défini par l'inégalité  $g(x) > \frac{\lambda}{p'_\varphi(0)}$ . En effet, puisque  $p'_\varphi$  est une fonction décroissante de  $\varphi$  et que  $\varphi > 0$ , nous avons  $p'_\varphi(\varphi) < p'_\varphi(0)$ , d'où  $g(x)p'_\varphi(\varphi) < g(x)p'_\varphi(0)$  et  $\lambda < g(x)p'_\varphi(0)$ .  $E_R$  est l'espace de recherche dans lequel la relation (2.19) est valable. Nous avons ensuite la condition sur l'effort de recherche global :  $\Phi = \int_E \varphi(x) dx = \int_E f\left(\frac{\lambda}{g(x)}\right) dx$ . Par ailleurs, la fonction  $f\left(\frac{\lambda}{g(x)}\right)$  est une fonction décroissante de  $\frac{\lambda}{g(x)}$ . Enfin la fonction  $\Phi(\lambda) = \int_E f\left(\frac{\lambda}{g(x)}\right) dx$  est une fonction décroissante de  $\lambda$ , et la fonction solution  $x \mapsto \varphi(x)$  est unique.

### 2.4.1.1 Structure de l'algorithme

L'algorithme itératif de résolution est représenté figure 2.10 page 40.

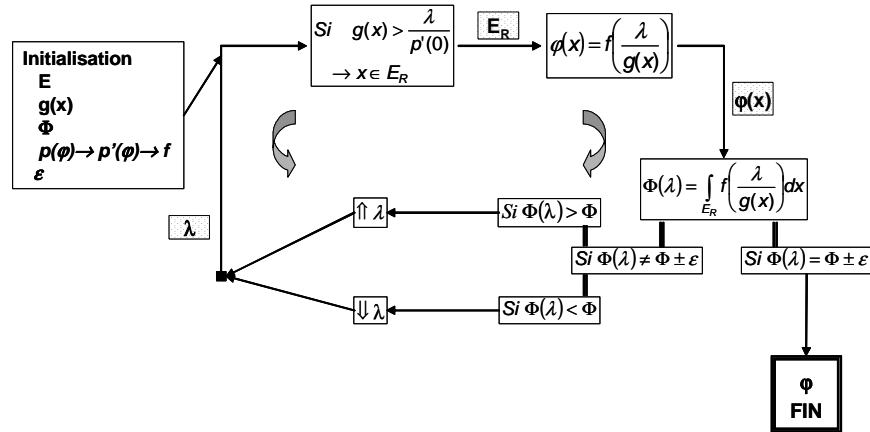


FIG. 2.10: [LEC99] *algorithme de « de Guenin »*

La densité d'effort de recherche est déterminée par des approximations successives. L'initialisation se fait avec un  $\lambda$  arbitraire, positif puisque  $g(x)$  et  $p'(0)$  le sont. La donnée de la valeur  $\lambda$  permet de déterminer l'espace de recherche  $E_R$ , ainsi que la fonction  $\varphi(x) = f\left(\frac{\lambda}{g(x)}\right)$ . Par intégration nous déterminons ensuite la valeur  $\Phi(\lambda) = \int_E \varphi_\lambda(x) dx$  et la com-

parons avec l'effort de recherche total disponible  $\Phi$ . Si  $\Phi(\lambda) > \Phi$  (resp.  $< \Phi$ ) alors nous effectuons une itération supplémentaire de l'algorithme avec une valeur supérieure (resp. inférieure) de  $\lambda$  jusqu'à obtenir la convergence vers  $\Phi(\lambda) = \Phi$  (à un  $\varepsilon$  près), garantie par l'une des propriétés précédentes. Les valeurs de  $\lambda$  sont calculées par un processus de dichotomie. Une fois la convergence de l'algorithme atteinte, l'expression de la densité de l'effort de recherche est donnée par la relation (2.19).

### 2.4.1.2 Résultats

A titre d'illustration, un exemple est donné figure 2.11 page 41, pour une loi de détection exponentielle, dans le domaine discret (des exemples dans le domaine continu se trouvent dans [LEC99]), et pour une distribution de probabilités suivant la loi  $\mathcal{N}(0, 3)$ .

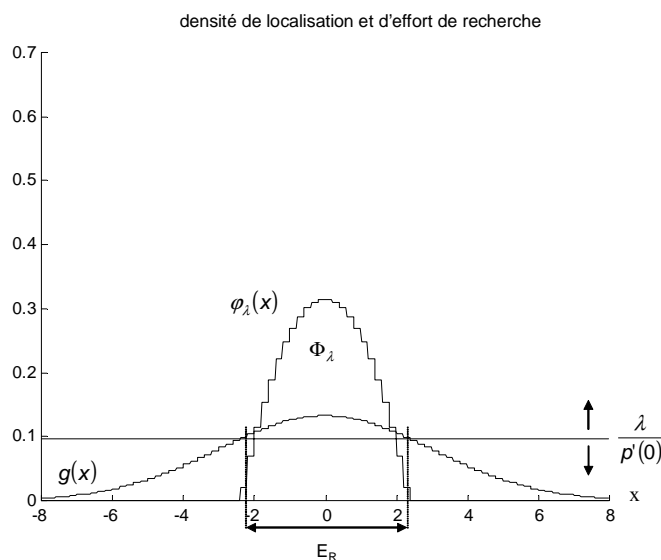


FIG. 2.11: calcul itératif de la densité  $\varphi(x)$  de l'effort de recherche à partir d'une densité de localisation,  $\Phi = 1$

Les résultats obtenus lors de cette simulation montrent que l'effort de recherche a tendance à être appliqué dans les zones où la densité de présence est la plus élevée. Cependant la figure 2.12 page 42 montre que ce lien n'est pas un lien de directe proportionnalité. La situation présentée correspond à une densité de probabilité suivant une loi composite :  $0.4 * \mathcal{N}(-2, 1) + 0.6 * \mathcal{N}(1, 1)$ . Il en résulte deux zones de recherche distinctes mais un effort de recherche réparti en  $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}$ .

Des résultats sont par ailleurs obtenus pour une autre formulation de la probabilité de détection, lorsque celle-ci s'écrit  $p(\varphi(x)) = 1 - \exp(-w(x)\varphi(x))$ , c'est à dire  $p(w(x), \varphi(x))$ . Selon B.O. Koopman le terme  $w(x)$  traduit la mesure locale de détectabilité de la cible, ou

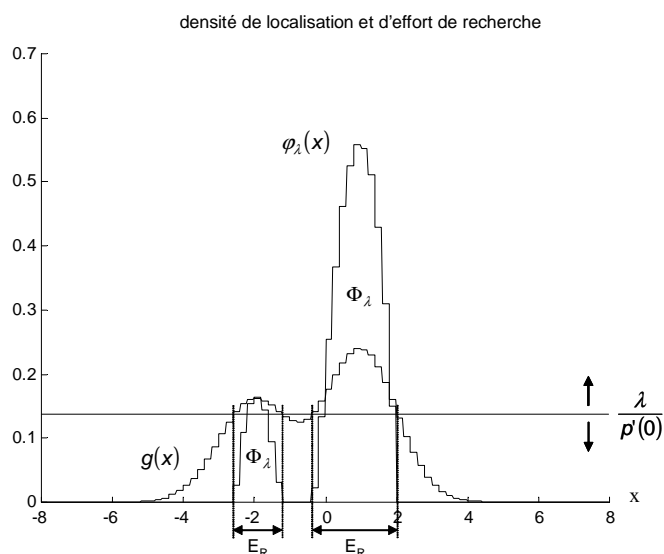


FIG. 2.12: répartition de l'effort de recherche lorsque la distribution présente plusieurs sommets  $\Phi = 1$

le taux de détection par unité de temps et/ou d'espace. En effet, ayant introduit  $w(x)$ , la probabilité de détection a deux propriétés supplémentaires :

$$\begin{cases} \lim_{w(x) \rightarrow 0} p(w(x), \varphi(x)) = 0 \\ \lim_{w(x) \rightarrow \infty} p(w(x), \varphi(x)) = 1 \end{cases} \quad (2.20)$$

J.-P. Le Cadre et G. Souris le qualifient de paramètre de visibilité ([LEC99]). Sa nullité entraîne la non détection, comme le manque de visibilité dans la zone de recherche. Lorsque la visibilité est bonne, c'est à dire lorsque  $w(x) \rightarrow \infty$ , les chances de détecter la cible sont bonnes même si l'effort de recherche est faible. Le paramètre de visibilité est donc directement lié aux paramètres réels du problème, tels que le relief, les conditions météorologiques, les capteurs utilisés ou encore les distances porteurs-cibles.

Même si un nouveau facteur a été intégré, les méthodes de résolution restent les mêmes. En effet, cette nouvelle formulation est une généralisation de la précédente pour laquelle le taux de visibilité était supposé comme étant égal à l'unité. Les figures 2.13 et 2.14, pages 43 et 43, montrent des simulations réalisées lorsque le taux de visibilité est différent de l'unité, et pour une densité de localisation suivant la loi normale  $\mathcal{N}(0, 3)$ .

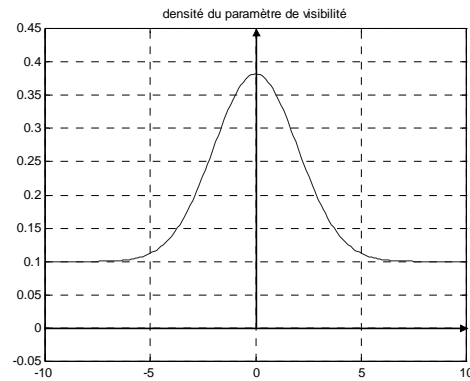


FIG. 2.13: [LEC99] le paramètre de visibilité  $w$  suit une loi normale  $0.1 + \mathcal{N}(0, 2)$

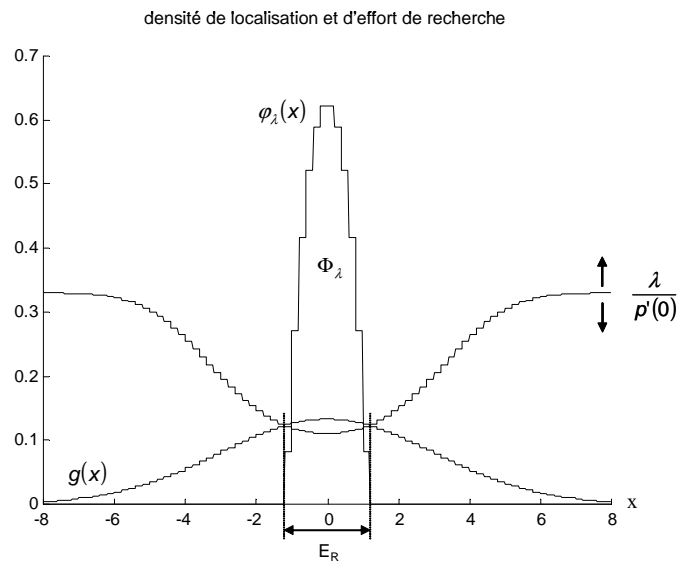


FIG. 2.14: calcul itératif de la densité  $\varphi(x)$  de l'effort de recherche lorsque le paramètre de visibilité suit la loi  $0.1 + \mathcal{N}(0, 2)$ ,  $\Phi = 1$

Alors que la dérivée de la probabilité de détection était constante sans l'adjonction du paramètre de détectabilité, elle en dépend directement lorsque celui-ci est pris en compte. Là où la visibilité est la meilleure, c'est à dire lorsque la valeur de  $\frac{\lambda}{p'(0)}$  est minimale puisque  $p'(w(x), \varphi(x)) = w(x) \exp(-w(x) \varphi(x))$ , l'attribution de l'effort de recherche sera plus importante. Dans le cas de plusieurs distributions, les zones de recherche seront regroupées car la bonne visibilité dans la zone commune justifie l'intérêt de l'augmentation de l'effort de recherche.

L'introduction d'un paramètre de visibilité permet donc d'améliorer la représentation du

problème considéré, en particulier sa précision et sa conformité au problème réel. Toutefois nous formulerons une remarque quant à la difficulté d'élaboration d'un tel paramètre. En effet, il peut sembler difficile de traduire en un paramètre numérique commun les notions d'environnement physique et de caractéristiques des capteurs. A notre niveau, nous pouvons par exemple le définir comme le produit de plusieurs termes issus chacun d'une caractéristique différente de l'environnement physique et matériel. Il peut ainsi être inversement proportionnel à la distance porteur-cible, proportionnel à un facteur  $r$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ , dépendant de la position et traduisant le relief :  $r = 1$  s'il n'y a pas de relief,  $r$  plus faible en fonction du relief avoisinant. Reste alors à définir précisément  $r$  en fonction de l'altitude et de la nature du relief, donc pour chaque situation environnementale. Le facteur de visibilité peut aussi être proportionnel à un paramètre  $m \in [0, 1]$  traduisant l'aspect météorologique, la même nécessité d'initialisation et de « cartographie » apparaît alors.

Dans leurs écrits les auteurs ne se sont pas tous souciés de l'interprétation et de l'élaboration du paramètre  $w(x)$ . Dans le plus simple des cas, ils ont supposé une visibilité maximale, dans les autres l'ont représenté par une ou plusieurs lois normales.

B.O. Koopman donne par ailleurs dans [KOO79] les résultats analytiques obtenus dans un cas particulier défini par un facteur de visibilité égal à l'unité, une loi de densité de présence gaussienne et une probabilité de détection exponentielle. Ainsi pour  $g(r) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$ ,  $r$  est la distance entre la cible et le centre de la distribution, et  $a$  le rayon de la zone de recherche, on obtient  $\varphi(r) = \frac{a^2 - r^2}{2\sigma^2}$  avec  $a^2 = 2\sigma\sqrt{\frac{\Phi}{\pi}}$  et une probabilité totale de détection  $P(\Phi) = 1 - \left(1 + \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\Phi}{\pi}}\right) \exp\left(-\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\Phi}{\pi}}\right)$ . Cette probabilité est directement liée à la variance de la densité de localisation de la cible, donc à l'incertitude quant à la position exacte de la cible, comme l'illustre la figure 2.15 page 45.

La condition nécessaire d'optimalité établie par B.O. Koopman et généralisée par J. de Guenin est donc un outil efficace de répartition spatiale d'un effort de recherche total disponible à partir du moment où l'on a déjà une connaissance *a priori* sur la scène à observer par le biais d'une densité de localisation.

Les résultats présentés sont théoriques, cela signifie que nous serons amenés à donner une interprétation plus concrète de l'effort de recherche ou du paramètre de visibilité.

Les hypothèses de résolution émises sont fortes. Même si certaines ne sont pas restrictives, d'autres, comme la forme de la probabilité de détection, peuvent limiter le domaine d'utilisation des résultats. La loi des rendements décroissants reste toutefois une loi assez générale de définition des propriétés des lois de détection.

La résolution peut être étendue à des espaces de dimension supérieure à un, continus ou discrétisés. Ces résultats sont applicables à une configuration monocapteur monocible, ces derniers étant fixes les uns par rapport aux autres.

Nous allons à présent nous intéresser au cas d'une cible mobile.

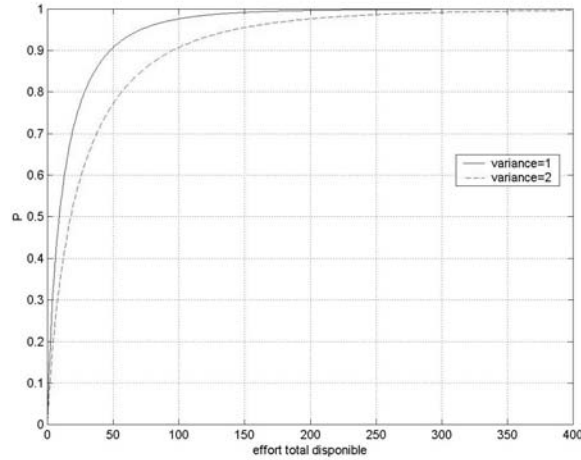


FIG. 2.15: [LEC99] probabilité de détection, fonction de l'effort de recherche total disponible, paramétrée par la variance de localisation

#### 2.4.2 Deuxième situation : l'axe de visée du capteur est fixe, la cible est mobile - Algorithme *Forward and Backward*

Les hypothèses de résolution sont les mêmes que précédemment, à savoir deux entités aérienn. L'observateur demeure stationnaire et localisé. Le temps et l'espace sont discrétisés, si bien que ce dernier est représenté par un ensemble  $E$  de cellules adjacentes  $c$ . A la différence des hypothèses précédentes, la cible est mobile, à chaque instant elle a la possibilité de se déplacer d'une ou plusieurs cellules ou de rester sur place. Le mouvement de la cible est modélisé par un processus de Markov dont nous allons voir les propriétés.

A chaque instant d'échantillonnage correspond une étape indexée par  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , à chaque étape est associé un effort de recherche total  $\Phi_i$ . L'objectif est alors la détermination de la répartition spatiale par étape de l'effort de recherche permettant l'optimisation de la probabilité de détection totale, c'est à dire la somme des probabilités de détection obtenues à chaque étape. Notons que les quantités  $\Phi_i$  d'effort de recherche disponibles à chaque étape sont fixées arbitrairement et ne dépendent pas d'une quelconque pré-optimisation. Dans notre contexte d'étude nous pourrions réfléchir à une optimisation de leur valeur et à la signification de la donnée d'un effort de recherche pour chaque étape et non pas pour la globalité. Par exemple si nous assimilons notre effort de recherche à une durée, nous avons une durée totale  $T$  pour la phase de détection que nous pouvons répartir entre les différentes étapes. Nous avons ainsi  $\sum_{i=1}^N t_i = T$ . Dans les différents algorithmes que nous détaillerons l'hypothèse  $\sum_{i=1}^N \Phi_i = \Phi$  n'est pas prise en compte.

L'optimisation va nous amener à établir un plan de recherche, c'est à dire la répartition

spatiale de l'effort de recherche pour chaque étape :  $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]$  avec  $\varphi_i^T = [\varphi_i(c_1), \varphi_i(c_2), \dots]$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , la répartition spatiale de l'effort de recherche disponible pour l'étape  $i$  considérée. Ce plan de recherche définit la stratégie de recherche de l'observateur. La solution à ce problème d'optimisation a été apportée par L. D. Stone ([STO79]) et d'autres auteurs, dont les références se trouvent dans [WAS83], sous forme de conditions nécessaires d'optimalité. S. S. Brown montra vers la fin des années soixante-dix que ces conditions devenaient suffisantes sous l'hypothèse d'une modélisation du mouvement de la cible par un processus markovien ([BRO80]).

### 2.4.2.1 Le processus de Markov

Soit un processus discrétisé décrit par une suite  $(X_n)_{n \in N}$  de variables aléatoires définies dans le même espace. Ce processus est qualifié de chaîne de Markov si pour tout  $n \geq 1$  et tout ensemble d'états  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  aux instants  $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$  tels que  $P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \neq 0$  nous avons

$$P(X_n = x | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_n = x | X_{n-1} = x_{n-1}) \quad (2.21)$$

quel que soit l'état  $x$ . Autrement dit la connaissance du processus ne s'améliore pas si l'on ajoute des observations au processus à des instants quelconques du passé. On le qualifie alors de processus sans *post-action* ou sans mémoire. Notons cependant que cette propriété reste vraie si un ensemble fini de mesures passées influence la variable  $X_n$  à l'instant  $t_n$ . La dépendance sera cependant plus faible au fur et à mesure que l'on remonte dans le temps.

Quels que soient  $x$  et  $y$ , nous définissons une matrice de transition  $Tr(x, y) = P(X_n = y | X_{n-1} = x)$ , c'est à dire la probabilité d'atteindre un état  $x$  lorsque l'on est dans l'état  $y$ . Cette matrice traduit la connaissance que nous avons de la façon dont peut se mouvoir la cible. Dans le contexte de notre étude, elle traduit le fait que nous avons une connaissance des distributions de probabilités de direction et de vitesse, par l'intégration des probabilités de déplacement de la cible dans toutes les directions de l'espace et du nombre de cellules parcourues par celle-ci. Un exemple d'élaboration d'une matrice de transition est donné dans [WAS83].

Une densité de présence initiale  $g_1$  et une matrice de transition sont suffisantes pour déterminer la probabilité de présence de la cible à chaque étape.

Si l'on suppose que la cible n'occupe qu'une seule cellule  $\omega_i$  à chaque étape  $i$ ,  $i \in \{1, N\}$ , on appelle  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$  le chemin qu'elle parcourt le long des  $N$  étapes. Celui-ci a une probabilité  $\Pr(\omega) = g_1(\omega_1) Tr(\omega_1, \omega_2) \dots Tr(\omega_{N-1}, \omega_N)$ . Cette probabilité correspond bien à la probabilité de présence de la cible dans la cellule  $c = \omega_N$  au bout des  $N$  étapes. Par ailleurs, on appelle  $\Omega$  l'ensemble des chemins possibles :  $\Omega = \{\omega : \Pr(\omega) \geq 0\}$ .

Une autre hypothèse importante est celle de stationnarité de la cible entre deux étapes, si bien que notre problème d'allocation spatiale et temporelle se ramène en une séquence

d'allocations spatiales pour une cible stationnaire. Nous pourrions alors être tentés d'utiliser séquentiellement l'algorithme de « de Guenin » détaillé précédemment mais nous allons voir que ces « sous-problèmes » ne se résolvent pas indépendamment les uns des autres.

Dans [WAS83] et [BRO80], A. R. Washburn et S. S. Brown proposent un algorithme de résolution, appelé *Forward and Backward*. Sous l'hypothèse d'un mouvement de cible markovien et d'une probabilité de détection exponentielle leur formulation du problème est la suivante :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & \hat{\varphi} = \arg \min_{\varphi} Q(\varphi) \\ \text{sous les contraintes} & \left\{ \begin{array}{l} \varphi_i(c) \geq 0 \quad \forall c \in E \\ \sum_{c \in E} \varphi_i(c) = \Phi_i, \forall i \in \{1, \dots, N\} \end{array} \right. \end{array} \quad (2.22)$$

Cette formulation diffère quelque peu de la précédente dans le sens où les contraintes sont cette fois-ci discrétisées, mais surtout car elle fait intervenir la probabilité de non détection  $Q(\varphi)$ . Celle-ci s'exprime comme la somme sur tous les chemins possibles du produit de la probabilité d'un chemin par la probabilité de non-détection sur celui-ci, c'est à dire sur toutes les cellules qui le composent, et s'écrit :

$$Q(\varphi) = \sum_{\omega \in \Omega} \Pr(\omega) e^{-\sum_{i=1}^N w(\omega_i) \varphi(\omega_i)} \quad (2.23)$$

La probabilité de non-détection a été préférée à la fonction de détection  $P(\varphi)$  à cause de sa convexité. Cette propriété, ainsi que la linéarité des contraintes, nous placent dans un contexte de minimisation convexe avec contraintes linéaires sous forme égalité et inégalité. Les conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker sont alors applicables et permettent de prouver l'existence et l'unicité du plan de recherche  $\varphi$  optimal ([HIR96]). S. S. Brown a montré d'autre part qu'une condition nécessaire et suffisante d'optimalité du plan de recherche  $\varphi$  était que chaque allocation d'étape soit optimale et ce, en tenant compte des allocations passées et futures. Ceci peut se formaliser par la proposition « le plan  $\varphi$  est un plan optimal si et seulement si,  $\forall i \in \{1, N\}$ ,  $\varphi_i$  est solution du problème de réallocation au temps  $i$  ». Ce problème de réallocation évoqué consiste à remplacer la fonction de recherche du plan  $\varphi$  à l'étape  $i$  par une fonction  $\varphi'_i$  qui minimise la probabilité de non-détection totale alors que les fonctions de recherche aux étapes  $j \neq i$  demeurent inchangées.  $\varphi^{*i}$  est alors le nouveau plan de recherche,  $\varphi^{*i} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi'_i, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_N)$ . Nous retrouvons dans ces propos le principe de Bellman ([BOR90]), issu de la programmation dynamique. Il s'énonce dans le cas discret de la façon suivante :

**Principe de Bellman** - Si la solution d'un problème donné est fonction d'un ensemble de décisions  $d_i$  :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(d_1, d_2, \dots, d_k), \quad (2.24)$$



et si  $\mathcal{S}^*$  est la solution optimale pour un problème donné avec les décisions  $d_i^*$  :

$$\mathcal{S}^* = \mathcal{S}(d_1^*, d_2^*, \dots, d_k^*), \quad (2.25)$$

alors il vient,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$  :

$$d_i^* = \arg \text{opt}_{d_i} \mathcal{S}(d_1^*, \dots, d_{i-1}^*, d_i, d_{i+1}^*, \dots, d_k^*). \quad (2.26)$$

Le schéma de mise en œuvre de la méthode de programmation dynamique pour la résolution d'un tel problème est donné dans [BOR90].

Compte tenu de ce principe de résolution, notre problème d'optimisation se réécrit pour l'étape  $i$  :

$$\begin{array}{l} \text{minimiser} \\ \text{sous les contraintes} \end{array} \quad \begin{array}{l} \widehat{\varphi}'_i = \arg \min_{\varphi'_i} Q(\varphi^{*i}) \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi'_i(c) \geq 0 \quad \forall c \in E \\ \sum_{c \in E} \varphi'_i(c) = \Phi_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \end{array} \right. \end{array} \quad (2.27)$$

Nous voyons alors apparaître le problème d'allocation pour une cible stationnaire. En effet, en posant :

$$g^{*i}(c) = \sum_{\{\omega \in \Omega, \omega_i = c\}} \Pr(\omega) e^{-\sum_{j \neq i} w(\omega_j) \varphi_j(\omega_j)} \quad (2.28)$$

nous obtenons :

$$Q(\varphi^{*i}) = \sum_{c \in E} g^{*i}(c) e^{-w(c) \varphi'_i(c)} \quad (2.29)$$

$g^{*i}(c)$  est la probabilité qu'un chemin  $\omega$  quelconque passe par la cellule  $c = \omega_i$  sans qu'il y ait eu de détection dans les autres cellules et s'interprète comme la densité de localisation de la cible stationnaire. Nous sommes alors dans le cadre d'une adaptation de l'algorithme de « de Guenin » à un espace discrétisé et à un problème de minimisation, la difficulté résidant dans le calcul de la densité  $g^{*i}$ . Celui-ci s'effectue par l'utilisation des fonctions *Forward* et *Backward*.

#### 2.4.2.2 Les fonctions *Forward* et *Backward*

Nous ne rentrerons pas ici dans le détail de ces fonctions, le lecteur pourra s'intéresser pour cela aux références [LEC99] et [WAS83]. Nous en donnons cependant les définitions :

- *Forward*( $c, \varphi$ ) : probabilité que la cible ait atteint la cellule  $c = \omega_i$  à l'étape  $i$  sans avoir été détectée aux étapes précédentes. Elle dépend alors des efforts de recherche antérieurs et s'exprime comme le produit de la probabilité que la cible ait atteint la cellule  $c = \omega_i$  en ayant suivi le chemin  $\omega$  par la probabilité qu'elle n'ait pas été détectée dans aucune des cellules visitées.

- $Backward(c, \varphi)$  : probabilité que la cible soit dans la cellule  $c$  à l'étape  $i$  sans qu'elle soit détectée aux étapes suivantes. Elle dépend des efforts de recherche ultérieurs et s'exprime comme le produit de la probabilité que la cible poursuive son chemin en partant de la cellule  $c$  par les probabilités de ne pas être détectée dans les cellules à venir.

Ces fonctions sont calculées de façon récurrente, sous l'hypothèse d'indépendance des détections élémentaires.

La densité  $g^{*i}$  s'exprime alors comme le produit de ces deux fonctions :

$$g^{*i}(c) = Forward_i(c, \varphi) * Backward_i(c, \varphi) \quad (2.30)$$

En effet, la probabilité qu'une cible ayant une trajectoire passant par la cellule  $c = \omega_i$  ne soit pas détectée dans les cellules autres que celle-ci est bien égale au produit de la probabilité qu'elle ne soit détectée dans les cellules qui la mènent à  $c = \omega_i$  par la probabilité qu'elle ne le soit pas non plus dans les cellules qu'elle parcourt après son passage en  $c = \omega_i$ .

### 2.4.2.3 Structure de l'algorithme

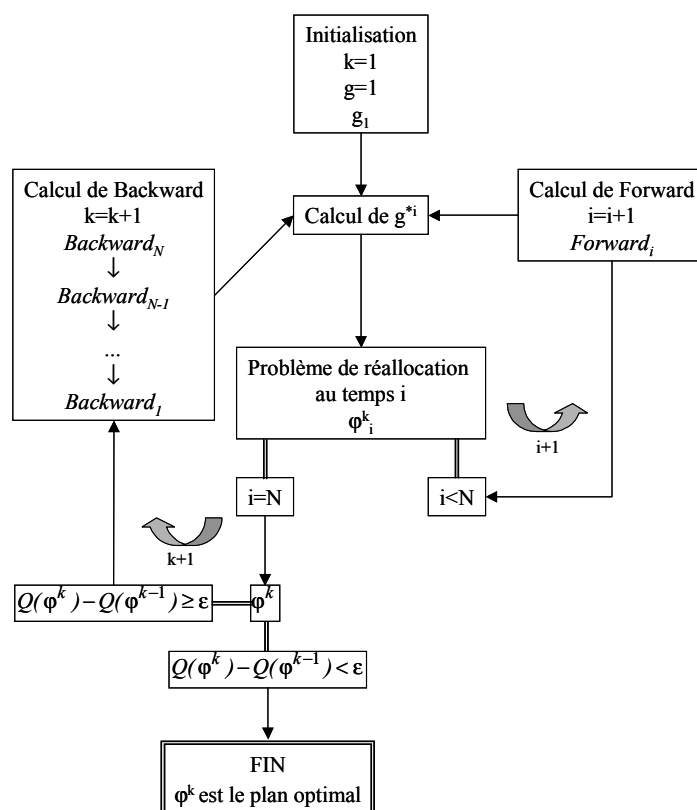
La structure de l'algorithme *Forward and Backward* est donnée figure 2.16 page 50,  $k$  est l'indice d'itération,  $i$  celui d'étape.

### 2.4.2.4 Initialisation

L'algorithme proposé fait référence à une phase d'initialisation. Celle-ci correspond à la donnée d'un premier plan de recherche  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$  qui va être optimisé tout au long de l'algorithme par des réallocations successives. Une première méthode d'initialisation est une répartition uniforme de l'effort de recherche, c'est à dire  $\varphi_i(c) = \frac{\Phi_i}{card(E)}$ ,  $E$  étant l'ensemble des cellules. Cette méthode a pour avantage sa simplicité et pour inconvénient sa trop grande sous-optimalité. Les différents auteurs, et notamment A. R. Washburn, lui ont préféré une initialisation par un plan myope ([WAS83]). Celui-ci est calculé de manière à obtenir à chaque étape  $i$  une répartition de l'effort de recherche qui minimise la probabilité de non-détection de la cible jusqu'à cette étape considérée. Ainsi on ne tient pas compte dans son calcul des efforts de recherche futurs mais seulement de ceux passés et présents. La densité de localisation  $g^{*i}$  initiale sera alors calculée grâce à la fonction *Forward*, sans tenir compte de la fonction *Backward* qui intègre les efforts de recherche futurs.

### 2.4.2.5 Performances

Dans les références consultées les performances de l'algorithme *Forward and Backward* sont souvent comparées avec celles obtenues par utilisation d'un plan myope. Rappelons que la principale différence entre les deux optimisations est que la méthode myope ne prend en compte que les efforts de recherche passés et présents alors que la seconde intègre en plus

FIG. 2.16: [LEC99] *algorithme Forward and Backward*

ceux à venir. Le plan myope correspond d'autre part à la stratégie de recherche la plus simple et la plus intuitive, c'est à dire que l'on poursuit la recherche étape par étape en intégrant les informations de non-détection issues des étapes précédentes.

Globalement, la convergence de l'algorithme *Forward and Backward* est rapide, se ramenant à quelques itérations. Les simulations effectuées dans [LEC99] pour une recherche en huit étapes montrent que l'amélioration apportée par le plan optimal sur la probabilité de détection est d'environ 3% mais que l'optimisation myope nécessiterait une augmentation de l'effort de recherche global de 10% pour atteindre les mêmes performances. Ces chiffres montrent l'intérêt de la recherche d'une stratégie optimale et sont confirmés par la figure 2.17 page 51 illustrant les performances du plan optimal par rapport au plan myope en fonction du nombre d'étapes. Nous pouvons également constater sur cette figure que le plan optimal ne l'est effectivement qu'à partir d'un certain nombre d'étapes. La justification de cette observation est apportée par A. R. Washburn dans [WAS83]. Par sa définition-même l'optimisation myope se concentre sur le passé et le présent et ne prend pas en compte les événements futurs. A. R. Washburn la qualifie alors de stratégie auto-destructive, car « son efficacité présente va au détriment de son efficacité future ». La stratégie optimale, par sa vision globale de la

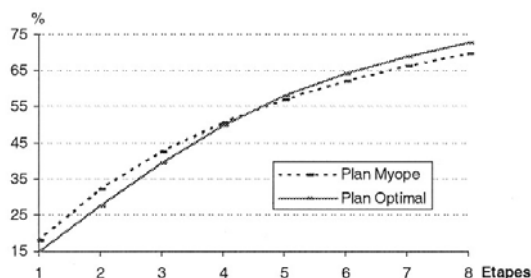


FIG. 2.17: [LEC99] évolution des probabilités de détection en fonction du nombre d'étapes et de la stratégie de recherche

situation, permet un meilleur équilibre entre les efficacités présentes et futures.

Des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité ont été établies par L. D. Stone ([STO79]). Leur application aux hypothèses d'un mouvement régi par un processus de Markov et une probabilité de détection exponentielle a permis l'élaboration d'un algorithme de résolution de l'optimisation spatiale d'un effort de recherche en plusieurs étapes. Cette méthode de résolution est par ailleurs applicable à une situation où la cible serait stationnaire, par une adaptation de la forme de la densité de localisation de la cible.

Tous les résultats ont été présentés dans le cadre d'un espace et d'un temps discrétisés. Il existe toutefois des résultats pour le domaine continu ([STO79]). D'autre part il est proposé dans [DAM00] une étude sur l'optimisation de la recherche à la fois spatiale et temporelle et ce, en considérant les caractères de renouvelabilité de certaines ressources ou d'hétérogénéité de leur nature.

### 2.4.3 Troisième situation : l'axe de visée de l'observateur et la cible sont mobiles - Algorithme *Branch and Bound*

Nous avons abordé dans les deux sections précédentes les cas dans lesquels l'axe de visée du capteur réalisant la mesure de détection était fixe alors que la cible avait la possibilité d'être en mouvement. Cette section aborde le cas dans lequel l'axe de visée de l'observateur peut changer d'orientation. En effet, certains capteurs n'ont instantanément qu'une vision partielle de l'environnement leur faisant face, il est alors nécessaire de gérer l'orientation de leurs axes de visée pour en obtenir une connaissance globale. L'objectif est alors d'optimiser les mouvements de l'axe de visée de l'observateur pour un nombre d'étape donné, une étape correspondant à un déplacement. Plusieurs références ont été étudiées, en particulier [STE79] et [LEC99], correspondant à des approches différentes du problème mais finalement équivalentes. Après avoir défini les hypothèses, nous présenterons brièvement les méthodes sous-optimales myope et exhaustive ainsi que la méthode *Branch and Bound*.

### 2.4.3.1 Hypothèses

Les méthodes de résolution proposées sont soumises à certaines hypothèses :

- la cible est, dans un premier temps, stationnaire,
- les déplacements de l'axe de visée de l'observateur se limitent aux cellules adjacentes ou à l'immobilisme,
- la visibilité de l'observateur est réduite et restreinte à une zone de détection matérialisée par un disque centré sur l'observateur et dont le rayon est fonction du paramètre de visibilité  $w$ ,
- l'effort de recherche n'est plus une durée ou un nombre de ressources qui interviennent dans le calcul de la probabilité de détection mais est traduit par le nombre d'étapes, fixé *a priori* arbitrairement.

Cette dernière hypothèse recentre le problème sur l'observateur : comment optimiser le mouvement de son axe de visée sachant que l'on dispose d'un nombre d'étapes, c'est à dire d'un effort de recherche donné ?

### 2.4.3.2 La méthode myope

Sur le même principe que celui décrit dans la section 2.4.2.4 page 49, la méthode myope consiste à ne s'intéresser qu'à l'entourage de l'observateur sans se soucier des conséquences qu'un mouvement instantanément optimal peut avoir sur une optimisation globale de la trajectoire. Ainsi le mouvement de l'observateur va aller dans le sens d'une optimisation instantanée de la probabilité de détection. A chaque étape, la probabilité de détection va être calculée pour un déplacement éventuel de l'observateur vers chacune de ses cellules avoisinantes, le déplacement effectif se fera vers la cellule permettant d'obtenir une probabilité optimale, soit *a fortiori* vers les maxima de la densité de localisation.

### 2.4.3.3 La méthode exhaustive

Cette méthode est la plus simple et la plus intuitive mais la plus coûteuse en temps de calcul. Elle consiste à établir toutes les trajectoires possibles de l'observateur et à sélectionner celle permettant d'obtenir la meilleure probabilité de détection totale au bout de toutes les étapes. L'exhaustivité de cette solution assure par sa définition-même l'optimalité du résultat. Le nombre de solutions considérées est  $9^n$ , pour une résolution en  $n$  étapes et l'hypothèse de déplacement vers les cellules adjacentes.

### 2.4.3.4 La méthode *Branch and Bound*

Le principe de cette méthode est d'éliminer parmi tous les chemins possibles pour le déplacement de l'observateur ceux qui ont une forte probabilité d'être non-optimaux, par exemple les chemins qui se dirigent dans un sens opposé à celui de la densité de localisation

de la cible. Le principe est d'estimer la probabilité de détection  $P_{\text{sup}}$  que permettrait d'obtenir un chemin, ne connaissant que les premières étapes de celui-ci. Si cette probabilité estimée est inférieure à une probabilité de référence  $P_{\text{max}}$  alors tous les chemins commençant par les mêmes premières étapes sont sous-optimaux et peuvent être éliminés. Le problème est donc l'estimation de cette probabilité de détection  $P_{\text{sup}}$ . Ce calcul va se faire par la résolution d'un problème annexe, le problème relaxé. Celui-ci consiste en la relaxation de la contrainte sur le déplacement de l'observateur. Les contraintes de proximité vont être transformées en contraintes d'accessibilité. Cela signifie que les déplacements de l'observateur sont élargis à toutes les cellules accessibles depuis la cellule initiale pour le nombre d'étapes en cours. Ces nouvelles contraintes incluent celles du problème initial, l'ensemble des solutions contient donc la solution optimale au problème initial.

L'algorithme de résolution *Branch and Bound* est donné par la figure 2.18 page 53.  $K(t, j_t)$  est l'ensemble des directions possibles depuis la cellule  $j_t$  à l'étape  $t$ .

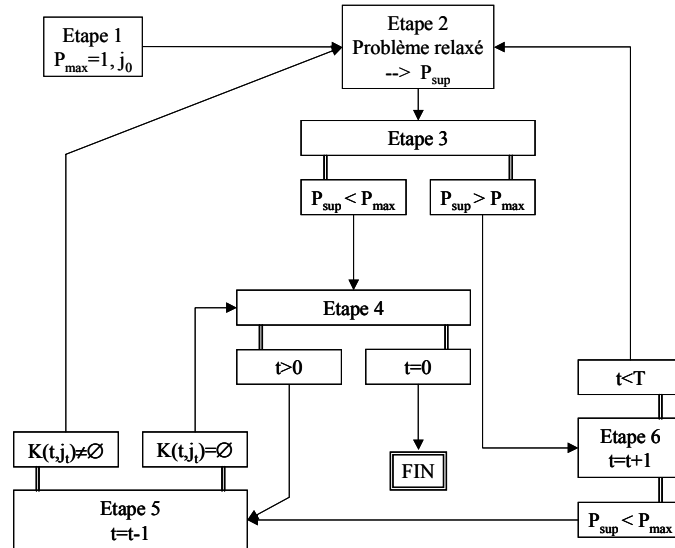


FIG. 2.18: [LEC99] *algorithme Branch and Bound*

### 2.4.3.5 Performances

Dans son article T. J. Stewart ne présente pas de comparaison entre ses résultats et ceux obtenus avec des méthodes plus simples telles que la méthode myope et la méthode exhaustive ([STE79]). Cette comparaison a été effectuée dans [LEC99] par le biais de simulations sur plusieurs étapes. Il ressort évidemment que la méthode exhaustive est optimale mais très lourde en calculs donc ne peut être appliquée qu'à un petit nombre d'étapes. Les auteurs concluent également sur l'optimalité de la méthode *Branch and Bound* : elle donne des résultats identiques à ceux obtenus par la méthode exhaustive, tant que ces derniers peuvent être obtenus. Ceci laisse à penser que la méthode peut être optimale pour un nombre d'étapes

plus important et renforce l'intérêt à lui porter. La figure 2.19 page 54 illustre l'optimalité de la méthode *Branch and Bound* par rapport à la méthode myope.

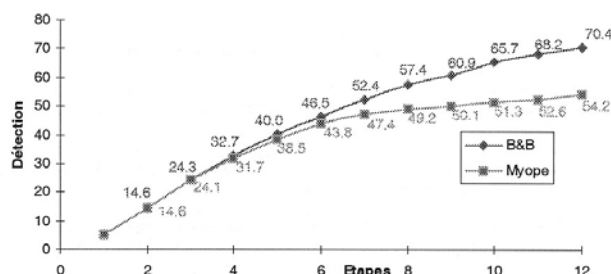


FIG. 2.19: [LEC99] comparaison des probabilités de détection totales obtenues avec les méthodes *Branch and Bound* et *myope*

Toutefois, les auteurs font remarquer que, même si elle est moins lourde en calculs que la méthode exhaustive, la méthode optimale reste lente et elle-même lourde en calculs dès que le nombre d'étapes augmente de façon trop importante. Ils proposent alors une méthode *Branch and Bound* sous-optimale dans laquelle ils fixent un seuil sur la probabilité de présence de la cible. Les cellules pour lesquelles la probabilité de présence de la cible est inférieure au seuil ne sont pas considérées dans la suite de l'optimisation. Cette méthode, bien que sous-optimale, a l'avantage de réduire considérablement la durée d'exécution de l'algorithme d'optimisation. Son principal inconvénient réside dans la détermination arbitraire de la valeur du seuil.

Nous avons vu dans cette section comment optimiser les déplacements de l'axe de visée d'un capteur en fonction de la position de la cible, de son mouvement éventuel et de l'effort de recherche disponible. Plusieurs méthodes ont été comparées. Une première intuitive et optimale pour un nombre d'étapes relativement faible, la méthode myope. Une seconde, exhaustive et optimale puisque considérant tous les déplacements possibles de l'observateur mais très lourde en calculs de par sa définition. Enfin la méthode *Branch and Bound* qui permet de limiter considérablement le volume des calculs en éliminant au fur et à mesure tous les déplacements sous-optimaux. Plus qu'une méthode mathématiquement optimale, l'algorithme *Branch and Bound* s'avère être une très bonne heuristique pour établir le mouvement optimal de l'observateur en fonction d'un nombre d'étapes donné.

#### 2.4.4 Conclusion sur la théorie de la recherche

La *Search Theory* n'est apparue qu'après la seconde guerre mondiale. Après avoir mis en évidence et défini la notion d'effort de recherche, la communauté scientifique et militaire, dans le cadre de l'ASWORG (*AntiSubmarine Warfare Operations Research Group*), s'est intéressée à l'utilisation optimale de celui-ci pour l'accomplissement d'une mission donnée.

Se plaçant dans le cadre de la détection d'une cible stationnaire par un observateur d'axe de visée fixe, B. O. Koopman et J. de Guenin ont défini des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité de la répartition spatiale de l'effort de recherche et ce pour un critère de maximisation de la probabilité de détection. Ces résultats ont été obtenus sous certaines hypothèses. La première est une connaissance *a priori* de la situation, par la donnée d'une densité de localisation. Nous verrons par la suite que cette hypothèse n'est pas restrictive puisque dans notre contexte d'étude cette connaissance peut être apportée par des systèmes de surveillance, tels que des AEW. La seconde porte sur l'effort de recherche en lui-même : une quantité totale d'effort de recherche est disponible. Il est évident que la probabilité de détection d'une cible est fonction de l'effort de recherche que l'on attribue à sa détection. Ainsi plus grand sera l'effort de recherche, c'est à dire le nombre de capteurs, leur hétérogénéité, le temps qui leur est alloué pour la détection, meilleure sera la détection. Ainsi imposer une quantité totale d'effort de recherche est une contrainte supplémentaire, qu'il est possible de justifier par l'existence de contraintes opérationnelles au sein d'un tel système de détection. Enfin la dernière hypothèse porte sur la forme de la probabilité de détection. Dans le cadre le plus général elle doit satisfaire la loi des rendements décroissants. Un cas particulier est la loi de probabilité de détection exponentielle. Cette formulation est la plus couramment utilisée en *Search Theory* mais n'est pas considérée dans l'algorithme de résolution de « de Guenin ». Cet algorithme itératif permet de déterminer la densité de l'effort de recherche sur un espace donné, en continu ou en discret. Cette densité dépend *a fortiori* de la quantité totale de l'effort de recherche, de la densité de localisation *a priori* mais aussi d'un paramètre de visibilité traduisant les contraintes environnementales de la situation. La difficulté réside alors en l'adaptation des paramètres mathématiques à notre étude.

La problématique a ensuite été complexifiée pour prendre en compte les déplacements de la cible. Supposé régi par un processus markovien, le mouvement de la cible est considéré dans un espace discrétisé et correspond à un déplacement d'une ou plusieurs cellules à chaque étape. Nous avons donc vu apparaître un problème d'optimisation multiétape de la répartition de l'effort de recherche, sous l'hypothèse de la connaissance de l'effort disponible à chacune d'entre elles. Dans ce contexte, S. S. Brown et A. R. Washburn ont proposé l'algorithme *Forward and Backward*. Par une intégration des efforts de recherche à la fois passés et futurs, cet algorithme itératif permet une répartition spatiale optimale de l'effort de recherche disponible à chaque étape. A nouveau les résultats sont obtenus sous l'hypothèse d'une probabilité de détection exponentielle et d'une connaissance de la situation à la base de l'élaboration de la matrice de transition du processus de Markov. Nous pourrions cependant nous demander s'il est possible d'adapter l'algorithme à des modélisations des mouvements autres que celles supposées ou au cas d'une cible stationnaire. D'autre part, les articles dont il est fait référence dans cette synthèse ne mentionnent pas de liens entre un éventuel effort de recherche total et ceux dont nous disposons pour chacune des étapes. Pour un effort de recherche assimilé au temps ce lien existe puisqu'une durée donnée peut être consacrée à la phase de détection. Une optimisation sous contraintes de type lagrangienne peut alors être réalisée pour l'allocation



de cette durée à chaque phase de détection élémentaire. Cette méthode d'optimisation sera présentée dans la section suivante.

Enfin l'étude s'élargit au problème de l'optimisation du mouvement de l'observateur lui-même. En effet, puisque la cible est mobile, il est tout à fait plausible qu'elle sorte du champ de vue de l'observateur. Il est alors nécessaire de réorienter celui-ci afin de garder toutes les chances de détecter la cible. Le dernier algorithme abordé a été conçu dans ce sens. A nouveau sous l'hypothèse d'une connaissance *a priori* de la situation, il permet l'optimisation des déplacements de l'axe de visée du capteur.

Ces trois algorithmes ont été développés dans un cadre général et théorique. Ceci rend leur adaptation à notre contexte non immédiate. La première difficulté est, comme nous l'avons déjà mentionné, de définir et quantifier les principaux paramètres que sont les efforts de recherche, le paramètre de visibilité et la connaissance initiale. Ensuite dans le contexte de la discrétisation, l'espace se décompose en un ensemble de cellules. En pratique il n'est pas évident d'obtenir un maillage régulier tel qu'il a été supposé dans les travaux de J.-P. Le Cadre et G. Souris ([LEC99]). Dans le cadre de notre étude, nous verrons que les cellules seront assimilées aux cellules de résolution, c'est à dire à des secteurs angulaires adjacents. Cette considération est certes peu gênante pour la mise en application, nous devons cependant nous demander quelle dimension donner à notre problème, selon les considérations établies dans la définition de la problématique.

Enfin, ces trois algorithmes ont été développés dans un contexte d'optimisation de la répartition d'un effort de recherche pour la détection d'une cible stationnaire ou non. Le même type de travail pourrait être développé pour une application au problème de l'estimation. Même si la notion temporelle n'intervient plus au même niveau, puisque l'on poursuit la cible aussi longtemps que nécessaire, il pourrait être défini un effort de poursuite regroupant le nombre de capteurs disponibles, leur nature et tout autre paramètre pouvant améliorer la qualité de l'estimation. Nous retrouvons à ce niveau la problématique définie dans la section 2.3 consacrée à la discrimination : *quel capteur, sur quelle cible, à quel moment, pendant combien de temps ?* Le fait d'aboutir à la même problématique montre l'intérêt qu'il peut y avoir à s'intéresser simultanément aux théories de la discrimination et de la recherche pour optimiser la détection et l'estimation d'une ou plusieurs cibles. Nous avons vu à ce sujet que la recherche de l'allocation des capteurs sur les différentes cibles ramenait le problème d'allocation temporelle et spatiale de l'effort de recherche à une situation monocapteur monocible, il n'empêche que les algorithmes issus de la *Search Theory* ne sont valables que dans un contexte monocible. Nous pourrions alors nous intéresser à la façon de les adapter à un contexte multicible.

## 2.5 L'optimisation lagrangienne

Comme il a été évoqué dans la section précédente nous présentons ici une méthode d'optimisation lagrangienne, c'est à dire basée sur l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange

([HIR96]). Elle sera à la base des résultats présentés dans le chapitre 4 consacré à l'allocation optimale de ressources. Une méthode de résolution a été abordée dans le paragraphe 2.3.4. Il s'agissait alors de l'utilisation d'une heuristique pour la résolution d'un problème d'optimisation d'un critère dont les paramètres étaient régis par des contraintes égalités ou inégalités. Nous considérons à présent le même type de problème, que nous appelons  $\mathcal{P}$  et que nous définissons de manière générale de la façon suivante :

$$\mathcal{P} \quad \begin{cases} \text{minimiser} & f(x) \\ \text{sous les contraintes} & \mathcal{C} = \{x \in \mathcal{R}^n \mid h_i(x) = 0, g_j(x) \leq 0, \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, p\}\} \end{cases} \quad (2.31)$$

$f : \mathcal{O} \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  est appelée fonction objectif, elle est supposée différentiable sur  $\mathcal{O}$ , et convexe.  $\mathcal{C}$  est l'ensemble-contraintes, il regroupe les  $m$  égalités et les  $p$  inégalités. Les fonctions  $h_i : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  et  $g_j : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  sont également supposées différentiables sur  $\mathcal{R}^n$ , les  $g_j$  sont convexes et les  $h_i$  sont affines. Nous proposons ici une synthèse de la résolution de ce type de problème par la méthode lagrangienne.

Si les contraintes sont linéaires, ce qui sera toujours le cas dans nos études, alors elles sont qualifiées (leurs dérivées constituent un ensemble d'éléments indépendants) et nous pouvons énoncer le théorème de Karush-Kuhn-Tucker :

**Théorème 2.1 (Karush-Kuhn-Tucker)** *Si  $\bar{x} \in \mathcal{O} \cap \mathcal{C}$  est un minimum de  $f$  sur  $\mathcal{C}$ , et si les contraintes sont qualifiées, alors il existe  $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m) \in \mathcal{R}^m$  et  $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_p) \in \mathcal{R}^p$  tels que :*

1.  $\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^p \bar{\mu}_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0$  où  $\nabla$  est l'opérateur gradient,
2.  $\bar{\mu}_j \geq 0, \forall j \in \{1, \dots, p\}$ ,
3.  $\bar{\mu}_j g_j(\bar{x}) = 0, \forall j \in \{1, \dots, p\}$ .

*Ces trois conditions sont couramment appelées « conditions de KKT ».*

La démonstration de ce théorème est donnée dans [HIR96].

Les  $\bar{\lambda}_i$  et  $\bar{\mu}_j$  sont appelés multiplicateurs de Lagrange. Nous appelons lagrangien associé au problème de minimisation de  $f$  sur  $\mathcal{C}$  la fonction  $\mathcal{L}$  :

$$\mathcal{L} : (x, \lambda, \mu) \in \mathcal{O} \times \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^p \mapsto \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j g_j(x) \quad (2.32)$$

Grâce à la qualification des contraintes, les conditions de KKT sont nécessaires et suffisantes pour que  $\bar{x}$  soit un minimum de la fonction  $f$  sur  $\mathcal{O} \cap \mathcal{C}$ . Il en résulte alors l'équivalence entre les deux énoncés :

- $\bar{x} \in \mathcal{O} \cap \mathcal{C}$  est un minimum de  $f$  sur  $\mathcal{C}$ ,
- $\bar{x} \in \mathcal{O}$  minimise  $\mathcal{L}(\cdot, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$  sur  $\mathcal{O}$ ,  $\bar{x} \in \mathcal{C}$ , et  $\bar{\mu}_j g_j(\bar{x}) = 0, \forall j \in \{1, \dots, p\}$ .

Nous avons ainsi :

$$\inf_{x \in \mathcal{O} \cap \mathcal{C}} f(x) = \inf_{x \in \mathcal{O}} \mathcal{L}(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \quad (2.33)$$

Le problème d'optimisation avec contraintes a été remplacé par un problème d'optimisation sans contraintes dont la solution  $\bar{x}$  est identique. Nous considérons pour le résoudre son problème dual. Le problème dual est une transformation, souvent une simplification, du problème initial conduisant aux mêmes solutions.

$\mathcal{P}$  est un problème de minimisation convexe. Il en résulte le théorème suivant, dont les origines et la démonstration se trouvent dans [HIR96].

**Théorème 2.2** *Sous les hypothèses de convexité, les deux énoncés suivants sont équivalents :*

- $(\bar{x}, (\bar{\lambda}, \bar{\mu}))$  est une point-selle de  $\mathcal{L}$  sur  $\mathcal{O} \times [\mathcal{R}^m \times (\mathcal{R}^+)^p]$ ,
- $\bar{x}$  est une solution de  $\mathcal{P}$  et  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  est un multiplicateur de Lagrange.

Un couple  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$  est appelé point-selle d'une forme quadratique  $l$  si :

$$l : (x, y) \in X \times Y \rightarrow \mathcal{R} \text{ et } l(\bar{x}, y) \leq l(\bar{x}, \bar{y}) \leq l(x, \bar{y}) \quad (2.34)$$

pour tout couple  $(x, y) \in X \times Y$ .

Soient les deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  telles que :

$$\begin{aligned} \varphi : x \in X &\mapsto \varphi(x) = \sup_{y \in Y} l(x, y) \\ \psi : y \in Y &\mapsto \psi(y) = \inf_{x \in X} l(x, y) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Nous avons alors l'encadrement  $\psi(y) \leq l(x, y) \leq \varphi(x)$  pour tout couple  $(x, y) \in X \times Y$  et le théorème suivant sur l'existence des points-selles.

**Théorème 2.3** *Une condition nécessaire et suffisante pour que  $l$  ait des points-selles sur  $X \times Y$  est  $\min_{x \in X} \varphi(x) = \max_{y \in Y} \psi(y)$ . Dans ce cas, l'ensemble des points-selles est exactement  $\Phi \times \Psi$ , avec*

$$\Phi = \left\{ x^* \in X \mid \varphi(x^*) = \inf_{x \in X} \varphi(x) \right\} \quad \text{et} \quad \Psi = \left\{ y^* \in Y \mid \psi(y^*) = \sup_{y \in Y} \psi(y) \right\} \quad (2.36)$$

En appliquant ces résultats à notre problème  $\mathcal{P}$ , nous pouvons définir, selon le théorème 2.2 et les équations (2.35), les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  :

$$\begin{aligned} \varphi : x \in \mathcal{O} &\mapsto \varphi(x) = \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{R}^m \times (\mathcal{R}^+)^p} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \\ \psi : (\lambda, \mu) \in \mathcal{R}^m \times (\mathcal{R}^+)^p &\mapsto \psi(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathcal{O}} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Minimiser la fonction  $\varphi$  par rapport à  $x$  revient à minimiser la fonction  $f$  par rapport à cette même variable, par contre dans la maximisation de la fonction  $\psi$  pour les variables  $\lambda$  et  $\mu$  nous voyons apparaître le problème dual  $\mathcal{D}$ . Celui-ci consiste à rechercher le couple  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  qui maximise la fonction  $\psi$ . Nous avons bien une simplification par rapport au problème initial, au niveau du nombre d'inconnues d'abord, puis par la disparition de l'ensemble des contraintes. Le théorème 2.3 assure ensuite l'équivalence entre les solutions des problèmes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{D}$ .

La formalisation de la programmation non linéaire n'a été effective qu'à partir du milieu du vingtième siècle. La définition d'un problème d'optimisation nécessite une modélisation mathématique qui met en évidence des variables d'états ou des paramètres, des contraintes sur ceux-ci et un critère à optimiser. La construction d'une fonction de Lagrange et son optimisation par l'énoncé d'un problème dual sont des méthodes pertinentes dans le cas de l'optimisation de fonctions convexes dont les variables sont soumises à des contraintes linéaires sous forme d'égalités ou d'inégalités ([HIR96]).

L. Euler a dit « *rien ne se passe dans le monde qui ne soit la signification d'un certain maximum ou d'un certain minimum* ». Le sujet de cette thèse vérifie cette affirmation puisqu'il s'agit d'un problème d'optimisation sous contraintes. Notre but est de gérer nos capteurs afin de maximiser les performances de détection ou de minimiser les erreurs de poursuite, en tenant compte de contraintes matérielles, temporelles, tactiques ou opérationnelles. Il n'est bien sûr pas possible de modéliser le problème dans sa globalité. Nous verrons alors par la suite comment les résultats de cette section pourront être utilisés pour l'optimisation de sous-systèmes que nous définirons.

## 2.6 Conclusion

Notre objectif dans ce chapitre était de présenter les travaux existants dans le domaine de la gestion de capteurs. Après avoir défini la problématique de façon générale, nous avons mis en évidence sa complexité et les propriétés requises pour les systèmes de gestion mis en place. Nous avons ensuite abordé plus en détails certaines théories, outils ou méthodes élaborées ou utilisées pour contribuer à la résolution du problème.

La théorie de l'information nous fournit dans un premier temps un outil de mesure de l'apport d'information, l'entropie relative de Kullback-Leibler. Cet outil a été utilisé avec succès pour l'allocation de capteurs pour l'estimation de trajectoires, notre objectif est d'étudier sa définition dans le cadre de l'allocation de ressources dans un contexte de détection et de le comparer au critère de la somme des probabilités.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la théorie de la recherche, et à certaines méthodes de résolution du problème de l'allocation d'un effort de recherche qui en sont issues. Bien que présentée dans un cadre très général, la problématique de cette théorie présente, nous le verrons, de nombreuses similitudes avec la nôtre. Nous chercherons alors à les rapprocher.

Enfin, nous avons présenté une méthode d'optimisation, basée sur les conditions d'optimalité de *Karush-Kuhn-Tucker*. Elle sera elle-même à la base des résultats qui seront présentés dans le chapitre 4.

Ces méthodes, outils et théories ne sont bien sûr pas exhaustives, nous les avons choisies pour leur pertinence et les similitudes qu'elles présentent avec notre problématique.

## Chapitre 3

# Les capteurs

Dans le chapitre 1 nous avons vu que les thèmes globaux de notre étude étaient la gestion de capteurs et l'allocation de ressources, mais qu'il ne s'agissait pas d'une étude sur les capteurs en eux-mêmes. Cependant, sans pour autant entrer dans les détails de leur fonctionnement, il nous est nécessaire de définir quels sont les capteurs que nous considérons dans notre étude ainsi que les notions nécessaires s'y rapportant. Nous allons alors nous intéresser à la façon dont ils observent l'espace, dont ils forment leurs cellules de résolution mais aussi à la modélisation de leurs fonctions de détection et à la façon de les optimiser. Nous verrons par ailleurs l'importance de ces modélisations et la sensibilité des résultats à celles-ci. Les paramètres numériques donnés dans ce chapitre sont des ordres de grandeur typiques pour les capteurs considérés.

Dans le cadre de la surveillance aérienne, les capteurs utilisés peuvent être regroupés en deux catégories : actifs et passifs ([BLA99a]). Alors que les capteurs passifs, typiquement les capteurs infrarouges, recueillent l'information sur les cibles par l'énergie qu'elles rayonnent dans l'environnement, les capteurs actifs (radars) émettent un signal qui se réfléchit sur les éventuelles cibles en présence. Nous nous intéressons à chacun de ces deux types de capteurs.

### 3.1 Le capteur radar

De par ses bonnes performances en environnement perturbé (perturbations météorologiques, par exemple) et ses bonnes capacités de mesure, le radar est amené à jouer un rôle prépondérant dans les systèmes dans lesquels il est inclus ([BLA99], [STI98]). En effet, parmi l'ensemble des capteurs existants, l'étude du radar a été l'une des premières et celle qui a suscité le plus d'intérêt et d'efforts de la part des chercheurs. Il en résulte à ce jour une très bonne connaissance de son fonctionnement et une modélisation fiable auxquelles s'ajoutent l'intérêt porté aux informations qu'il fournit et à leur suffisance pour certaines tâches. Ces informations sont des distances et des vitesses radiales.

Les capteurs radars que nous considérons ont un mode d'adressage par balayage électro-

que, comme la plupart des capteurs récents, ou en cours de développement, de ce type. Cela signifie que leurs axes mécaniques sont fixes et que c'est la direction d'émission de l'onde analysante qui est commandée.

### 3.1.1 Cellules de résolution

Dans un espace à deux dimensions, nous définissons un secteur angulaire comme zone de surveillance. L'angle d'ouverture de ce secteur est  $\Theta_s$  égal à  $120^\circ$ , l'observation se fait entre les distances  $d_{\min}$  et  $d_{\max}$ . Le capteur radar peut observer tout ce secteur, il dispose cependant d'un champ de vue instantané de  $\Theta_r$  degrés d'ouverture, typiquement égal à  $3^\circ$ . Ces données déterminent  $nb_{-c_{pr}} = \frac{\Theta_s}{\Theta_r}$  directions d'observation. La durée de déplacement d'une direction vers une autre est négligeable devant les autres durées considérées dans cette étude, en raison du mode de balayage électronique de ce capteur.

Dans chaque direction le capteur radar forme instantanément un ensemble de cellules de distance et de vitesse radiale. Chaque cellule de distance a une largeur  $l_d$ , typiquement égale à  $50\text{ m}$ . Le nombre de cellules de distance est  $nb_{-c_d} = \frac{d_{\max} - d_{\min}}{l_d}$ . La largeur d'une cellule de résolution en vitesse radiale est  $l_v$ , typiquement égale à  $\frac{0.015}{T}$  où  $T$  est la durée d'observation.

La figure 3.1 page 62 illustre le découpage d'une portion de l'espace d'observation en cellules de distance et de direction.

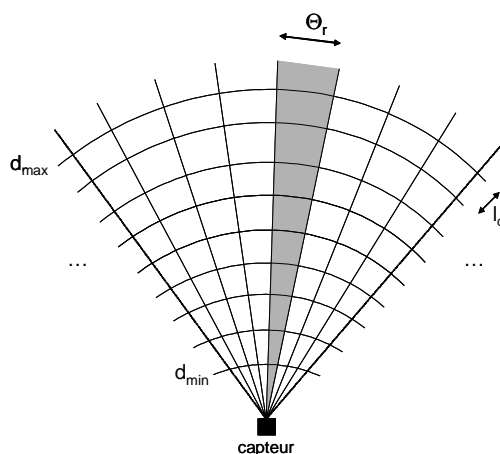


FIG. 3.1: schématisation des cellules de direction et de distance sur une partie de l'espace d'observation

A un instant donné le radar émet une impulsion correspondant à la longueur  $d_p$  d'une porte distance. Celle-ci correspond à l'intervalle de distances parcouru pendant l'ouverture temporelle du récepteur. La durée  $\tau$  de cette impulsion est fonction de cette longueur et de

la célérité  $c$  de la lumière, selon l'expression ([STI98]) :

$$\tau = \frac{2d_p}{c} \quad (3.1)$$

Si l'impulsion rencontre une cible ponctuelle alors elle est réfléchiée et réceptionnée avec un décalage temporel. Il est alors possible de déterminer à quelle distance se situe la cible par l'équation (3.1).

En réalité, le radar envoie un train d'impulsions. Si la largeur de la cible est inférieure à la largeur d'une porte distance et si elle est centrée dans celle-ci, alors le signal reçu sera maximal pour l'impulsion correspondante. Par contre, si la cible est à cheval sur deux portes distance alors le signal pour chacune des impulsions correspondantes sera affaibli (-6 dB si la cible est exactement à cheval sur les deux portes).

Globalement, nous tiendrons compte de ces phénomènes en considérant une perte moyenne environ égale à 1,5 dB sur le rapport signal sur bruit. Nous nous plaçons alors dans l'hypothèse de cibles centrées sur les portes distance et cherchons à déterminer les expressions du rapport signal sur bruit ainsi que des probabilités de fausse alarme et de détection.

### 3.1.2 Modélisation du rapport signal sur bruit

La relation entre le rapport signal sur bruit  $SNR_R$  et les différentes caractéristiques de l'antenne et de l'électronique de réception du radar est donnée par l'expression suivante ([DAR73]) :

$$SNR_R = \frac{P_e G_e G_r \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 k b F \gamma d^4} \quad (3.2)$$

avec :

- $P_e$ , la puissance moyenne émise par le radar,
- $G_e$ , le gain de l'antenne à l'émission,
- $G_r$ , le gain de l'antenne à la réception,
- $\lambda$ , la longueur d'onde émise,
- $\sigma$ , la surface équivalente radar de la cible,
- $k$ , la constante de Boltzmann,
- $b$ , la bande passante du filtre d'intégration cohérente,
- $F$ , le facteur de bruit incluant les pertes (circuits hyperfréquences et traitements),
- $\gamma$ , la température de fonctionnement,
- $d$ , la distance radar-cible.



Si  $G_0$  est le gain de l'antenne selon l'axe mécanique, alors les gains d'antenne  $G_e$  et  $G_r$  dans une direction de dépointage  $\theta$  seront égaux à  $G_0 \cos(\theta)$  car la surface de l'antenne est multipliée par  $\cos(\theta)$  dans la direction  $\theta$ .

Pour une durée d'observation de la cible  $T$ , la bande passante  $b$  du filtre d'intégration cohérente est égale à :

$$b = \frac{1}{T} \quad (3.3)$$

Ces considérations nous amènent à réécrire le rapport  $SNR_R$  sous une forme simplifiée :

$$SNR_R = \frac{\alpha T (\cos(\theta))^2}{d^4} \quad (3.4)$$

avec  $\alpha = \frac{P_e G_0^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 k F \theta}$ , défini comme étant un paramètre opérationnel du système, dépendant des paramètres de la cible et du capteur radar. Nous supposons que les cibles à détecter ont toutes le même pouvoir de réflexion,  $\alpha$  est par conséquent constant.

Notons que l'établissement de cette expression a été fait sous une hypothèse simplificatrice. Nous avons supposé que si la cible est dans une direction faisant un angle  $\theta$  avec l'axe mécanique de l'antenne, alors le faisceau de celle-ci est orienté électroniquement de façon à ce que son axe intercepte exactement la cible. Le gain de l'antenne dans la direction de la cible est alors égal à son gain maximal, c'est-à-dire le gain qu'elle aurait si le faisceau n'était pas dépointé, multiplié par  $\cos(\theta)$ . Ceci est dû au fait que la surface apparente de l'antenne dans cette direction est également multipliée par  $\cos(\theta)$ .

Dans le cadre de cette thèse, nous n'avons pas modélisé plus finement les effets d'espacement entre les faisceaux. Ils ont été étudiés en détail dans [BIL86].

### 3.1.3 Probabilités de détection et de fausse alarme - Cible fluctuante

Au cours de son traitement dans la chaîne de réception du radar, le bruit de réception s'ajoute au signal qui est alors transformé en signal composite. Nous supposons que le récepteur est constitué d'un filtre adapté et d'un détecteur de signal carré qui produit des échantillons  $\nu_i$  de la puissance reçue. Pour des raisons que nous évoquerons ultérieurement, nous considérons qu'il n'y a pas de post-intégration. Ainsi nous ne considérons qu'un seul échantillon  $\nu$  de la puissance reçue. Après avoir normalisé cette variable aléatoire  $\nu$  par rapport à la variance du bruit, nous la comparons à un seuil  $S$  afin d'établir les conditions de fausses alarmes et de détection. En absence de signal utile le bruit peut dépasser le seuil. Il s'agit alors d'une fausse alarme. En présence de signal utile, le signal composite peut dépasser le seuil. Il s'agit alors d'une détection.

Etant donné la normalisation effectuée et l'hypothèse d'utilisation d'un détecteur quadratique, et dans le cas où aucune cible n'est présente, c'est à dire un signal composite restreint au bruit, la densité de probabilité de chaque  $\nu$  est égale à :

$$p(\nu) = \exp(-\nu) \quad (3.5)$$

La probabilité de fausse alarme est la probabilité que la variable aléatoire  $\nu$  dépasse le seuil  $S$ , soit :

$$P_{fa} = \int_S^{+\infty} p(\nu) d\nu = \exp(-S) \quad (3.6)$$

Nous avons implicitement supposé jusqu'à présent que l'amplitude du signal reçu par le capteur radar était constante. En réalité les objets éclairés par le radar ont des formes très complexes qui font que l'énergie renvoyée par la cible varie d'une impulsion à une autre. Une cible de forme complexe peut-être considérée comme un ensemble de réflecteurs élémentaires, ou « points brillants » dont la position dans l'espace est liée à l'orientation de la cible ([DAR73b]). Ces réflecteurs réfléchissent en direction du radar des signaux élémentaires indépendants, comme l'illustre la figure 3.2 page 65. L'amplitude de l'énergie reçue fluctue alors au cours du temps, nous qualifions par conséquent la cible de « cible fluctuante ».

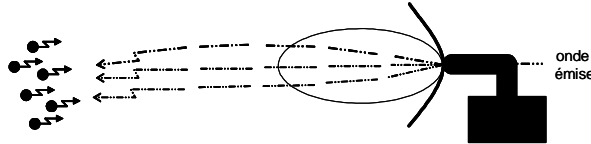


FIG. 3.2: [DAR73b] illustration de la réflexion de l'onde émise sur les « points brillants » de la cible fluctuante

Le phénomène de fluctuation des cibles vient perturber la détection de celles-ci. En effet, pour atteindre une probabilité de détection élevée, une cible fluctuante nécessite un rapport signal sur bruit plus élevé qu'une cible non fluctuante. Ceci vient du fait que le rapport signal sur bruit instantané peut être plus faible que le rapport signal sur bruit moyen. L'idée a alors été de créer des signaux indépendants de façon à ce que si l'une des réponses de la cible est faible les autres ne le soient pas forcément. Dans ce but, on émet successivement des impulsions de fréquences variables et suffisamment différentes pour que le signal réfléchi par la cible fluctue et forme donc une suite de signaux indépendants pour le radar ([DAR73]).

Selon P. Swerling et J. Darricau dans [SWE60], [SWE65] et [DAR73b], l'énergie reçue peut être modélisée par une loi de Laplace, ou loi de Rayleigh du premier ordre, dans le cas de fluctuations lentes. Si  $x$  est la variable aléatoire représentant le rapport signal sur bruit de la mesure  $\nu$  et  $\bar{x}$  le rapport signal sur bruit moyen, alors la densité de probabilité de  $x$  est égale à :

$$p(x|\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}} \exp\left(\frac{-x}{\bar{x}}\right) \quad (3.7)$$

Nous sommes alors en présence d'une cible de type *Swerling 1*. Il existe cinq types de modélisation de l'énergie reçue : *Swerling 0,1,2,3* et *4*. Le type *Swerling 1* s'applique particulièrement aux avions de chasse et aux véhicules de combat au sol ([KLE97]).

A partir de la relation (3.7) il est possible de déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire  $\nu$  ([SWE60], [DAR73b]) :

$$p(\nu) = \frac{1}{1 + \bar{x}} \exp\left(-\frac{\nu}{1 + \bar{x}}\right) \quad (3.8)$$

La probabilité de détection est la probabilité que le signal composite dépasse le seuil  $S$  :

$$P_d = \int_S^\infty p(\nu) d\nu = \exp\left(-\frac{S}{1 + \bar{x}}\right) \quad (3.9)$$

Soit en introduisant la probabilité de fausse alarme calculée en (3.6) :

$$P_d = (P_{fa})^{\frac{1}{1 + \bar{x}}} = (P_{fa})^{\frac{1}{1 + SNR_R}} \quad (3.10)$$

### 3.1.4 Calibration des paramètres du capteur radar

Nous effectuons une calibration des paramètres du capteur radar en vue de leur utilisation dans les simulations qui illustreront les résultats présentés dans ce document. Ceux-ci seront pour leur part exprimés de façon générale en fonction des paramètres littéraux.

Nous calibrons la probabilité de fausse alarme pour un objet situé au maximum à  $50 \text{ km}$ . Etant donné que les cellules de résolution en distance ont une largeur de  $50 \text{ m}$ , il se forme à un instant donné 1000 cellules de résolution en distance. Si nous supposons que le capteur radar forme également 1000 cellules de résolution en vitesse, alors  $10^6$  cellules de résolution sont formées durant l'analyse d'une direction de l'espace. Si celle-ci dure  $10 \text{ ms}$  alors le radar génère  $10^8$  cellules de résolution par seconde. Pour obtenir, par exemple, au maximum une fausse alarme par seconde, il faut donc une probabilité de fausse alarme par cellule égale à  $10^{-8}$ . Cette valeur numérique de la probabilité de fausse alarme est bien entendu arbitraire et dépendante de paramètres que nous avons nous-mêmes quantifiés, elle sera néanmoins utilisée dans les simulations qui seront réalisées.

La constante  $\alpha$  présente dans l'expression du rapport signal sur bruit dépend des caractéristiques du radar et de la cible. Nous supposons qu'elle est telle que la probabilité de détection d'une cible située à  $50 \text{ km}$  dans l'axe mécanique du radar (c'est à dire de dépointage nul, soit  $\theta = 0$ ) et observée pendant  $10 \text{ ms}$ , soit égale à 0.8.  $\alpha$  est alors égal à  $5.097 \cdot 10^7 \text{ km}^4 \text{ ms}^{-1}$ , pour une distance en kilomètres et une durée d'observation en millisecondes.

Une fois cette calibration du radar établie, nous donnons figure 3.3 page 67 l'allure générale de la probabilité de détection en fonction de la distance pour une durée d'observation donnée ( $10 \text{ ms}$ ) et en fonction de cette durée d'observation pour une distance donnée ( $50 \text{ km}$ ).

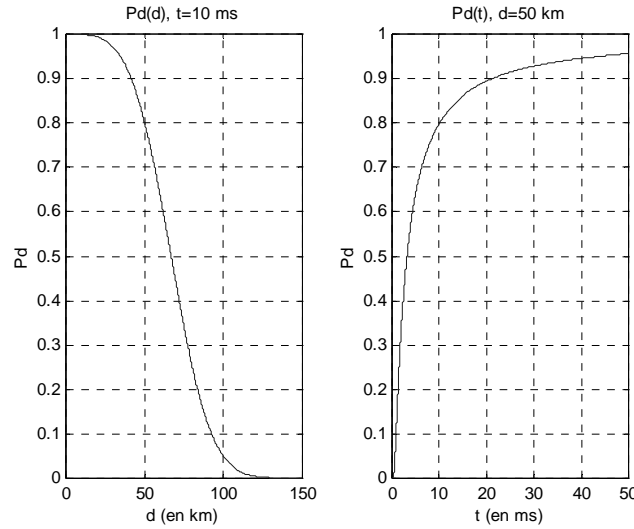


FIG. 3.3: *probabilité de détection du capteur radar, en fonction de la distance (en km) et du temps (en ms)*

Les allures de ces courbes sont cohérentes avec les propriétés attendues de la probabilité de détection. En effet, elle décroît en fonction de la distance à laquelle se trouve la cible et croît en fonction de la durée d'observation de celle-ci par le capteur.

De la même façon que pour la probabilité de fausse alarme, la calibration du paramètre  $\alpha$  dépend des paramètres que nous avons fixés arbitrairement. Nous pourrions alors nous demander quelle est leur influence sur la probabilité de détection. La figure 3.4 page 68 illustre ce phénomène.

La première partie de la figure illustre l'influence de la calibration du paramètre  $\alpha$  lorsque la probabilité de détection est calculée en fonction de la distance, la seconde lorsque qu'elle est calculée en fonction du temps. Trois valeurs de  $\alpha$  ont été considérées. La première calibration est déterminée de façon à obtenir une probabilité de détection de 0.8 pour une durée d'observation de 5 ms et une distance de 15 km, la seconde est celle que nous avons définie précédemment, enfin la dernière est calculée pour les mêmes valeurs de la probabilité de détection et de la durée d'observation mais pour une distance de 100 km. Nous pouvons effectivement constater sur cette figure l'influence de la calibration du paramètre  $\alpha$ . Ainsi lorsque le paramètre  $\alpha$  est calibré par une distance faible,  $\alpha_1 = 4.1295 \cdot 10^5 \text{ km}^4 \text{ ms}^{-1}$ , la probabilité varie fortement en fonction de la distance et très faiblement en fonction du temps. Cela signifie que pour atteindre une probabilité de détection élevée avec cette calibration ( $\alpha = 4.1295 \cdot 10^5 \text{ km}^4 \text{ ms}^{-1}$ ), la cible devra être très proche du capteur ou la durée d'observation très importante. Ces deux contraintes ne seront pas forcément réalisables pour des raisons techniques ou opérationnelles. Lorsque le paramètre  $\alpha$  est calibré par une distance élevée,  $\alpha_3 = 8.1551 \cdot 10^8 \text{ km}^4 \text{ ms}^{-1}$ , le phénomène inverse est observé : à distance faible les variations

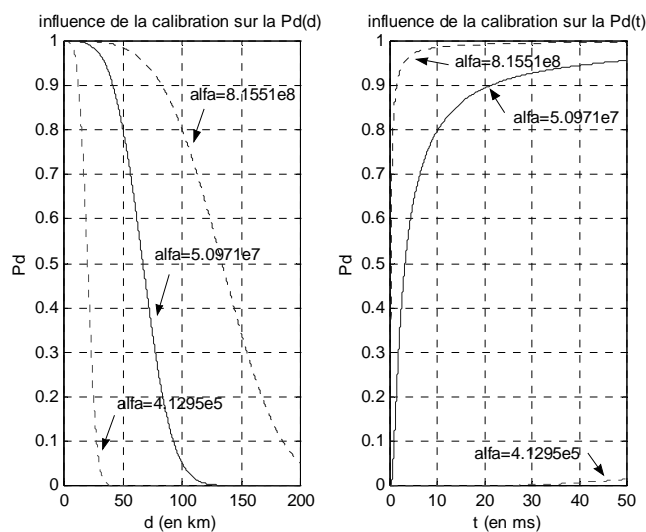


FIG. 3.4: influence de la calibration en distance du paramètre  $\alpha$  sur la probabilité de détection, en fonction de la distance et de la durée d'observation de la cible

de la probabilité de détection seront très faibles alors qu'elle évoluera très rapidement en fonction de la durée d'observation. Ces deux calibrations ne sont donc pas bien adaptées à notre problème, la probabilité de détection étant à la fois trop et pas assez sensible à la distance ou à la durée d'observation. La calibration intermédiaire que nous avons retenue,  $\alpha_2 = 5.097 \cdot 10^7 \text{ km}^4 \text{ m s}^{-1}$ , est donc un bon compromis. Elle assure une bonne sensibilité de la probabilité de détection par rapport aux deux paramètres que sont la distance capteur-cible et la durée d'observation.

Cette sensibilité justifie par ailleurs la nécessité de gestion temporelle que nous aborderons par la suite : deux cibles proches l'une de l'autre auront pour la même durée d'observation des probabilités de détection différentes. C'est cette différence qui va entraîner la nécessité d'une gestion du temps alloué à la détection, pour optimiser la détection de chacune des cibles. Si au contraire les probabilités étaient très proches les unes des autres, la répartition de la durée d'observation se ferait de façon équitable entre les cibles, la gestion temporelle ne serait alors pas utile.

La probabilité de détection d'une cible par un capteur radar dépend donc de la probabilité de fausse alarme et du rapport signal sur bruit, qui lui dépend, entre autres, de la distance capteur-cible et de la durée d'observation. Nous nous intéressons à présent à l'optimisation de cette probabilité de détection.

### 3.1.5 Optimisation de la probabilité de détection d'une cible par un capteur radar

Le paragraphe précédent nous a montré que la probabilité de détection se dégradait avec la distance. Il existe plusieurs méthodes pour l'améliorer. La première solution consiste à utiliser la procédure de détection de type « alerte et confirmation » ([DAN81]). La première étape, dite phase d'alerte, consiste en une étape de détection avec un seuil de détection fixé volontairement bas, ce qui a pour conséquence de produire un nombre non négligeable de fausses alarmes. Le but de la deuxième étape, dite phase de confirmation, est de lever les ambiguïtés, c'est à dire de minimiser le nombre de fausses alarmes par l'augmentation du seuil de détection mais aussi de modifier la forme de l'onde émise afin de l'adapter à la cible. Un autre paramètre significatif est l'espacement entre deux faisceaux d'analyse : diminuer cet espacement permet de diminuer le nombre de cibles non détectées car se trouvant entre deux faisceaux adjacents. Cependant, la décomposition de la détection en deux phases est pénalisante du point de vue de la durée d'analyse de la zone à observer. Une autre solution consiste alors à augmenter cette durée d'observation. Elle n'est cependant pas adaptée puisque la pente  $\frac{dP_d}{dT}$  est une fonction décroissante de la durée d'observation  $T$  de la cible et qu'une longue durée  $T$  n'est pas envisageable opérationnellement parlant puisque la cible est intrinsèquement non stationnaire. Une troisième solution consiste alors à changer le mode d'utilisation du capteur radar. Au lieu d'effectuer une seule acquisition de signal pendant la durée  $T$ , donc une seule détection, on acquiert  $N$  signaux élémentaires. Nous pouvons alors faire la somme des  $N$  signaux reçus par le radar, c'est à dire les puissances reçues, et effectuer une opération de détection sur le signal somme. Nous faisons alors de la post-intégration. Cependant cette méthode est problématique dans le cas où la cible change de cellule de résolution car il faut faire la somme des signaux dans les cellules où est passée la cible. Nous lui préférons alors la méthode consistant à effectuer une détection élémentaire sur chaque signal reçu, donc d'effectuer  $N$  détections élémentaires indépendantes ([STI98], [KLE97]). Une façon d'obtenir des probabilités de détection élémentaires indépendantes est l'utilisation du radar avec une fréquence d'émission différente lors de chaque détection élémentaire ([DAR73b]).

La probabilité de détection cumulée, c'est à dire la probabilité de détecter au moins une fois la cible après les  $N$  phases de détections élémentaires est donnée par l'expression suivante :

$$P_d = 1 - (1 - P_{de})^N \quad (3.11)$$

où  $P_{de}$  est la probabilité de détection élémentaire donnée par l'expression (3.10).  $(1 - P_{de})^N$  est la probabilité que la cible ne soit pas détectée lors des  $N$  détections élémentaires indépendantes.

A partir de cette expression de la probabilité de détection cumulée nous avons cherché comment l'optimiser, c'est à dire défini une stratégie optimale de détection d'une cible par un capteur et évalué ses performances analytiquement. Les résultats sont synthétisés par le lemme 3.1.

**Lemme 3.1** Soit  $\gamma_r = \ln 2$  la solution de l'équation (3.12) :

$$(1 - \exp(-\gamma_r)) \ln(1 - \exp(-\gamma_r)) + \gamma_r \exp(-\gamma_r) = 0 \quad (3.12)$$

Soit  $N$  le nombre de détections élémentaires réalisées pendant la durée totale d'observation  $T$  d'une cible située à la distance  $d$  du capteur radar. Si chaque détection élémentaire dure  $\frac{T}{N}$  et si la cible est telle que son rapport signal sur bruit est grand, alors la probabilité de détection est maximale lorsque  $N = N_{opt}$  avec :

$$N_{opt} = \frac{\gamma_r \alpha T (\cos(\theta))^2}{d^4 \ln\left(\frac{1}{P_{fa}}\right)} \quad (3.13)$$

La probabilité de détection élémentaire est alors égale à 0.5 et la probabilité de détection totale résultante à :

$$P_d = 1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau_r}\right) \quad (3.14)$$

avec

$$\tau_r = \frac{d^4 \ln(P_{fa})}{\gamma_r \alpha (\cos(\theta))^2 \ln(1 - \exp(-\gamma_r))} \quad (3.15)$$

**Preuve** Si nous faisons l'hypothèse d'un rapport signal sur bruit grand devant l'unité alors la probabilité élémentaire de détection s'écrit de la façon suivante, selon les équations (3.4) et (3.10) et en tenant compte du fait qu'une détection élémentaire a une durée  $\frac{T}{N}$  :

$$P_{de} = (P_{fa})^{\frac{1}{SNR}} = \exp\left(\frac{d^4 N \ln(P_{fa})}{\alpha T (\cos(\theta))^2}\right) \quad (3.16)$$

Soit en posant  $\beta = \frac{d^4 \ln\left(\frac{1}{P_{fa}}\right)}{\alpha T (\cos(\theta))^2}$  :

$$P_{de} = \exp(-\beta N) \quad (3.17)$$

La probabilité de détection cumulée est, d'après l'expression (3.11), égale à :

$$P_d = 1 - (1 - \exp(-\beta N))^N = 1 - \exp(N \ln(1 - \exp(-\beta N))) \quad (3.18)$$

Nous cherchons le nombre  $N$  de détections élémentaires qui maximise cette probabilité de détection. Pour cela nous dérivons l'expression (3.18) de  $P_d$  par rapport à  $N$  et résolvons  $\frac{dP_d}{dN} = 0$  :

$$\frac{dP_d}{dN} = - \left( \ln(1 - \exp(-\beta N)) + \frac{\beta N \exp(-\beta N)}{1 - \exp(-\beta N)} \right) \exp(N \ln(1 - \exp(-\beta N))) \quad (3.19)$$

L'écriture de l'équation  $\frac{dP_d}{dN} = 0$  en posant  $\gamma_r = \beta N$  conduit à l'équation (3.12). Sa solution est déterminée par l'étude de la fonction  $x \mapsto (1 - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x}) + xe^{-x}$ . Le graphe de cette fonction est donné figure 3.5 page 71.

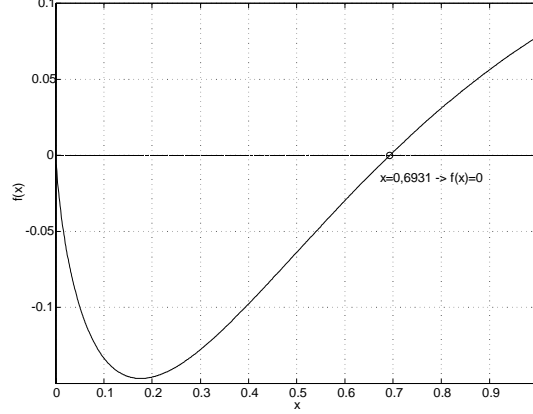


FIG. 3.5: graphe de la fonction  $x \mapsto f(x) = (1 - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x}) + xe^{-x}$

La solution de l'équation (3.12) est  $\gamma_r = \ln 2$ . Elle conduit à une probabilité de détection élémentaire  $P_{de} = 0.5$ . Il en résulte le nombre optimal  $N_{opt}$  de subdivisions de la durée  $T$  :

$$N_{opt} = \frac{\gamma_r}{\beta} \quad (3.20)$$

soit le nombre de détections élémentaires donné par l'expression (3.13). Chaque détection élémentaire a une durée  $t = \frac{T}{N_{opt}}$ , soit :

$$t = \frac{d^4 \ln\left(\frac{1}{P_{fa}}\right)}{\gamma_r \alpha (\cos(\theta))^2} \quad (3.21)$$

Enfin l'expression (3.14) de la probabilité de détection cumulée est donnée par l'introduction de l'expression (3.20) dans (3.18). ■

Les résultats exprimés dans ce lemme montrent d'une part que la modélisation des fonctions élémentaires de détection permet de définir analytiquement des stratégies pour optimiser les performances de détection d'une cible et d'autre part qu'il est possible de quantifier ces performances.

Trois remarques peuvent cependant être formulées quant à ces résultats :

**Remarque 2** le nombre de cycles défini par (3.13) n'est pas entier dans le cas général considéré ici. Dans un cadre applicatif, il faudrait choisir ce nombre égal à la partie entière de  $N_{opt}$  augmentée de l'unité. Cependant, nous garderons cette valeur optimale du nombre de



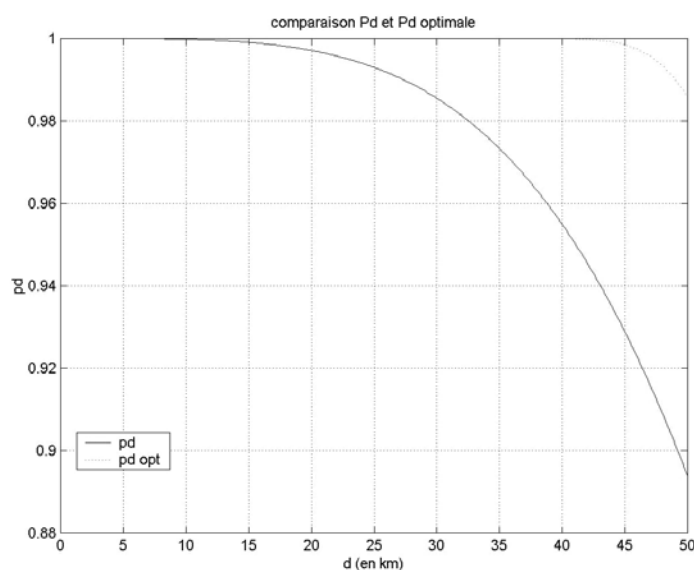


FIG. 3.6: comparaison des probabilités de détection obtenues en employant la méthode optimale de découpage du temps, lorsque les distances sont connues

cycles dans la suite de l'étude, pour deux raisons : d'abord parce qu'elle permet de calculer les performances optimales qui, comme la borne de Cramer-Rao en théorie de l'estimation, peuvent ne pas être atteignables mais servir de références, ensuite parce que garder cette valeur n'entâche en rien le caractère général des résultats. Le moment venu,  $N_{opt}$  pourra être remplacé par sa valeur entière opérationnelle correspondante.

**Remarque 3** *l'hypothèse d'un rapport signal sur bruit grand devant l'unité est purement théorique. Elle nous permet d'écrire simplement la probabilité de détection. Elle est également justifiée par le fait qu'elle nous conduit à considérer des probabilités de détection au moins égales à 0.5, donc nécessitant des rapports signal sur bruit élevés.*

La figure 3.6 page 72 montre les résultats des simulations effectuées pour comparer les performances issues de l'optimisation de la probabilité de détection par décomposition en détections élémentaires. Réalisée pour une durée d'observation de 20 ms, cette simulation montre que dès lors que la cible s'éloigne de plus de quelques kilomètres du capteur, les performances issues de la décomposition en détections élémentaires sont plus satisfaisantes que celles obtenues par une stratégie plus classique, c'est à dire basée sur un seul cycle de détection. Nous venons de définir une méthode de détection optimale d'une cible par un capteur radar. Cette méthode est basée sur plusieurs hypothèses fortes. La première concerne la fluctuation des cibles, elle est à la base de la modélisation des fonctions de détection du capteur. Selon les auteurs précités, ce modèle de fluctuation des cibles est l'un des modèles admis

en théorie du radar, en raison notamment de sa formulation simple ([DAR73b]). La seconde hypothèse forte concerne la connaissance *a priori*. Nous avons en effet supposé implicitement que les positions des cibles, c'est à dire les distances capteurs-cibles et les dépointages, étaient connues et qu'il s'agissait par conséquent d'une phase de redétection. Nous verrons par la suite que cette connaissance *a priori* peut ne pas être aussi précise et chercherons alors à établir de nouvelles stratégies de gestion intégrant cette nouvelle hypothèse.

D'autre part, nous nous sommes volontairement placés dans un environnement monocible monocapteur alors que notre problématique est définie dans un environnement multicible multicapteur. Nous chercherons alors à utiliser ces premiers résultats dans le cadre plus large qu'est la détection de plusieurs cibles par plusieurs capteurs. Ce sera l'objectif des chapitres 4 et 5.

Mais avant d'aller plus loin dans l'optimisation de l'utilisation du capteur radar, nous nous intéressons au capteur infrarouge.

## 3.2 Le capteur infrarouge

En temps de crise, mais plus généralement lors d'une mission de surveillance aérienne, l'avion qui sait être discret a un avantage par rapport à son adversaire car il possède l'effet de surprise lui permettant de remplir sa mission à moindres risques. La discrétion d'un capteur peut alors se révéler être un avantage tactique. Nous avons vu que le capteur radar avait un mode de fonctionnement actif, c'est à dire qu'il émet un signal qui se réfléchit sur les cibles et les autres objets présents dans le secteur d'émission. Par conséquent si le radar a une chance de détecter une cible, alors cette cible a la même chance de détecter l'avion porteur du radar. D'autre part, le signal émis par le radar peut être détecté à plus grande distance par un capteur passif spécialisé dans ce type de détection (par exemple des *ESM*). Les capteurs infrarouges ont quant à eux un mode de fonctionnement passif, dans le sens où ils recueillent l'information sur la cible par l'énergie qu'elle rayonne, sans émission de signaux trahissant leur présence. Les informations apportées par ces deux types de capteurs sont différentes mais complémentaires. Tandis que le capteur radar renseigne sur la position et la vitesse radiale d'un objet, le capteur infrarouge fournit des mesures angulaires, de direction et de vitesse transversale apparente. Donc sans avoir vocation à le remplacer, le capteur infrarouge se présente comme une bonne alternative au capteur radar.

Après s'être attachés à la modélisation et l'optimisation des fonctions de détection du capteur radar, nous nous intéressons à présent à celles du capteur infrarouge. Toutefois, l'étude de la gestion simultanée de ces deux capteurs ne sera pas réalisée, son ampleur dépassant le cadre de cette thèse.

Le développement et la modélisation des capteurs infrarouges sont plus récents que ceux des capteurs radars, remontant aux années soixante ([BLA99b]). Les chercheurs ne sont pas encore unanimes quant à la modélisation de ces capteurs, qui se révèle être plus complexe. Le mode d'adressage du capteur passif est mécanique, comme les premières générations de

capteurs actifs. Ceci n'autorise pas autant de réactivité de la part du système de gestion mis en place pour le ou les capteur(s) qu'avec le capteur radar. Nous verrons qu'il sera nécessaire de tenir compte de durées de déplacement de l'axe de visée du capteur, durées pénalisantes lorsque la durée allouée à l'observation de la zone aérienne est fixée.

M. Mariton insiste dans [MAR92] sur la nécessité de l'utilisation des capteurs imageurs, en raison notamment des progrès technologiques des objets à surveiller, au niveau de leur mobilité et de leur manœuvrabilité. Au delà des mesures angulaires, les caméras infrarouges permettent d'acquérir une image de la cible, ajoutant ainsi une information qualitativement différente des mesures de position usuelles. Alors qu'un capteur radar nécessite de prendre en compte un temps de traitement, un capteur infrarouge imageur traduit quasi instantanément la manœuvre d'une cible. En effet, celles-ci manœuvrent essentiellement par des accélérations latérales, ce qui se traduit rapidement par un changement d'attitude et donc d'apparence du mobile dans l'image. Il est donc légitime d'espérer détecter la manœuvre plus rapidement par filtrage des attributs de l'image plutôt que par filtrage d'une mesure de position. Par une adaptation rapide du capteur effectuant la poursuite, on peut alors réduire la dégradation de la précision du pistage après la manœuvre.

Fort de ces avantages, voyons maintenant comment le capteur passif infrarouge forme ses cellules de résolution et comment se modélisent et se calibrent ses fonctions de détection.

### 3.2.1 Cellules de résolution

Le capteur infrarouge a la même mission que le capteur radar, à savoir la surveillance d'une zone aérienne de largeur angulaire  $\Theta_s$ . Nous nous plaçons de la même façon dans un espace à deux dimensions. Pour une orientation de son axe de visée, le capteur infrarouge a un champ de vue instantané de largeur angulaire  $\Theta_{ir}$ , typiquement égal à  $6^\circ$ . Nous avons alors  $nb\_c_{\varphi_{ir}} = \frac{\Theta_s}{\Theta_{ir}}$  directions d'observation. A l'intérieur de chaque secteur  $\Theta_{ir}$  le capteur infrarouge forme un ensemble de cellules de direction et de vitesse transversale. Chaque cellule de direction a une largeur  $l_\theta$ , égale à quelques centaines de micro-radians, par exemple  $200 \mu rad$ . Le nombre de cellules de directions est par conséquent  $nb\_c_\theta = \frac{\Theta_{ir}}{l_\theta}$ . La résolution en vitesse transversale est égale à  $\frac{l_\theta}{T} rads^{-1}$ , lorsque  $T$  est la durée d'observation de la cible.

### 3.2.2 Modélisation du rapport signal sur bruit

Le rapport signal sur bruit  $SNR_{IR}$  d'un capteur d'image infrarouge est donné par la relation suivante ([BLA99], [KLE97]) :

$$SNR_{IR} = K_o \tau(r) \frac{\pi d_0 D^* J_t}{4d^2 f_{\#}} \left( \frac{T}{\alpha_d K_f} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.22)$$

avec :

- $T$ , la durée d'observation de la cible,

- $K_f$ , une constante de proportionnalité, en général proche de l'unité,
- $\alpha_d$ , le champ de vue instantané, en stéradian ( $sr$ ),
- $J_t$ , l'intensité radiale du signal émis par la cible, en  $W.sr^{-1}$ ,
- $d_0$ , le diamètre de l'ouverture optique,
- $d$ , la distance capteur-cible,
- $\tau(r)$ , le facteur de transmission atmosphérique,
- $K_o$ , transmission de l'optique du capteur,
- $f_{\#}$ , le numéro de focale,  $f_l = f_{\#} d$  est la longueur focale,
- $D^*$ , le facteur normalisé de détectivité du capteur, en  $W^{-1}.cm.\sqrt{Hz}$ .

La qualité des mesures réalisées par un capteur infrarouge est liée aux phénomènes atmosphériques. L'influence de ceux-ci sur la qualité des mesures est due, de façon simplifiée, à trois phénomènes : l'atténuation, l'émission et les turbulences. L'atténuation est la façon dont l'atmosphère agit sur la dissipation de l'énergie de la cible. Nous supposons que, pour une simplification de notre modèle, nous ne tiendrons pas compte de cette atténuation, ce qui est le cas quand les cibles et les porteurs se trouvent à haute altitude. Il en résulte  $\tau(r) = 1$ . La relation entre le rapport signal sur bruit, la distance capteur-cible et la durée d'observation peut alors se simplifier :

$$SNR_{IR} = \frac{\beta\sqrt{T}}{d^2} \quad (3.23)$$

en posant :

$$\beta = K_o \frac{\pi d_0 D^* J_t}{4 f_{\#}} \left( \frac{1}{\alpha_d K_f} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.24)$$

### 3.2.3 Probabilité de détection et de fausse alarme

Nous avons vu que le capteur infrarouge avait un mode de fonctionnement passif, c'est à dire que contrairement au capteur radar, il n'émet pas de signal destiné à se réfléchir sur la surface de la cible. Cela entraîne que l'hypothèse d'une cible fluctuante, telle qu'elle a été définie dans le paragraphe 3.1.3, n'a plus de raison d'être. L'expression (3.10) de la probabilité de détection n'est donc plus valable pour une détection par un capteur infrarouge. Le but de cette section est alors d'établir la relation entre la probabilité de détection, le rapport signal sur bruit et la probabilité de fausse alarme dans le cas d'un capteur infrarouge.

Il existe plusieurs architectures du système de détection du capteur infrarouge ([KLE97]). En particulier son organe d'observation peut être une matrice, par exemple carrée, ou une barrette verticale d'un ou quelques pixels de largeur. Dans ce dernier cas, il est nécessaire d'effectuer un balayage horizontal afin de pouvoir observer la cible dans son intégralité. La figure 3.7 page 76 illustre ces propos dans un espace à deux dimensions. Bien que les processus

de détection ne soient pas les mêmes, ces deux systèmes de détection sont l'un comme l'autre employés dans les systèmes de surveillance infrarouge. Nous considérons pour notre étude un détecteur de type matrice. Afin de déterminer la probabilité de détection sur l'ensemble de la matrice, nous déterminons la probabilité de détection dans un pixel.

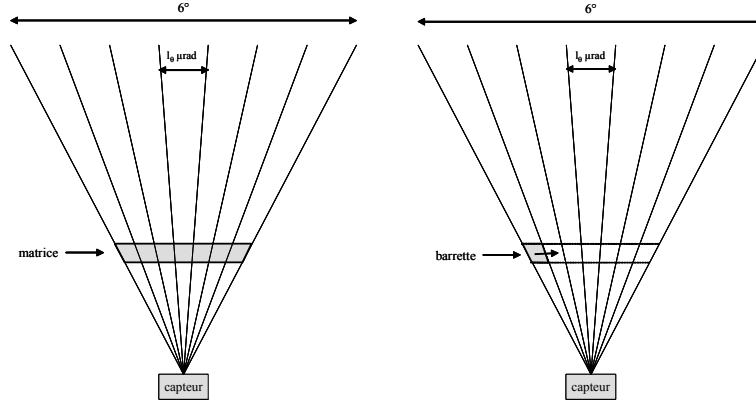


FIG. 3.7: schématisation de la détection par utilisation d'une matrice ou d'une barrette par le capteur infrarouge, dans un espace à deux dimensions

### 3.2.3.1 Probabilité de détection dans un pixel

Le signal issu de l'intégration de l'énergie rayonnée par la cible est entâché d'un bruit dont l'origine est multiple : bruit de fond de scène et bruits générés par l'ensemble du système optique de réception. La puissance de ce bruit suit une loi gaussienne de moyenne  $P_b$  et d'écart-type  $\sigma$  et celle de l'ensemble signal+bruit une loi gaussienne de moyenne  $P_b + P_s$  et de même écart-type. Le rapport signal sur bruit dans un pixel est égal à  $\frac{P_s}{\sigma}$ . Comme pour le capteur radar nous émettons deux hypothèses, dépendantes de la présence ou non d'une cible dans le secteur observé. Soit  $H_0$  l'hypothèse dans laquelle il n'y a pas de cible. Le signal est alors restreint au seul bruit dont la densité s'écrit :

$$p(\nu | H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\nu - P_b}{\sigma}\right)^2\right) \quad (3.25)$$

$H_1$  est l'hypothèse de présence d'une cible. Nous obtenons alors un signal composite de densité de puissance :

$$p(\nu | H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\nu - P_b - P_s}{\sigma}\right)^2\right) \quad (3.26)$$

Nous considérons un système de détection basé sur le critère de Neyman-Pearson. Celui-ci consiste en la maximisation d'une probabilité de détection pour une probabilité de fausse

alarme donnée ([KAY98], [DES98]). Si  $\Delta_1$  correspond au domaine de valeurs sur lequel l'hypothèse  $H_1$  est validée, alors les probabilités de détection et de fausse alarme s'écrivent, de façon générale :

$$P_d = \int_{\Delta_1} p(x|H_1) dx \quad (3.27)$$

$$P_f = \int_{\Delta_1} p(x|H_0) dx \quad (3.28)$$

Soit  $P_{fa}$  la valeur maximale de la probabilité de fausse alarme  $P_f$ . Etant donné que nous sommes dans le cadre d'un problème d'optimisation sous contrainte, la maximisation de la probabilité de détection  $P_d$  est équivalente à celle de la fonction lagrangienne suivante :

$$\mathcal{L}_\lambda = \alpha_d - \lambda(P_f - P_{fa}) \quad (3.29)$$

où  $\lambda$  est un multiplicateur de Lagrange. Compte tenu des expressions (3.27) et (3.28), cette fonction se récrit :

$$\mathcal{L}_\lambda = \lambda P_{fa} + \int_{\Delta_1} (p(x|H_1) - \lambda p(x|H_0)) dx \quad (3.30)$$

Puisque le premier terme de cette expression est fixé, maximiser ce lagrangien revient à maximiser l'intégrale  $\int_{\Delta_1} (p(x|H_1) - \lambda p(x|H_0)) dx$ , ce qui revient à définir le détecteur de Neyman-Pearson optimal :

$$\Lambda(x) \underset{H_0}{\gtrsim} \lambda \quad \text{avec} \quad \Lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \quad \text{et} \quad P_f = \int_{\lambda}^{+\infty} p(x|H_0) dx \quad (3.31)$$

où  $\Lambda(x)$  est le rapport de vraisemblance. Si  $\Lambda(x) > \lambda$  alors l'hypothèse  $H_1$  est décidée, sinon l'hypothèse  $H_0$ .

Les probabilités de détection et de fausse alarme s'expriment en fonction du multiplicateur de Lagrange, du seuil en l'occurrence,  $\lambda$  fixé. L'élimination de celui-ci entre les deux expressions conduit à établir la probabilité de détection en fonction de celle de fausse alarme. Si  $P_d = f_1(\lambda)$  et  $P_f = f_2(\lambda)$ , alors  $P_d = f_1(f_2^{-1}(\lambda))$ , soit  $P_d = f(P_f)$ . De façon plus générale nous aurons  $P_d = f(P_f, R)$

Nous appliquons à présent ces résultats généraux à notre étude en commençant par calculer le rapport de vraisemblance  $\Lambda(\nu)$  :

$$\Lambda(\nu) = \frac{p(\nu|H_1)}{p(\nu|H_0)} = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{P_s^2 - 2\nu P_s + 2P_b P_s}{\sigma^2}\right) \quad (3.32)$$

Nous déterminons le domaine  $\Delta_1$  par comparaison de ce rapport à une valeur seuil  $\lambda$ . Nous obtenons :

$$\Delta_1 = \left\{ \nu \mid \nu > \frac{\sigma^2}{P_s} \lambda' + \frac{P_s}{2} + P_b \right\} \quad \text{avec} \quad \lambda' = \ln(\lambda) \quad (3.33)$$

Les expressions des probabilités de détection et de fausse alarme sont données par les relations (3.27) et (3.28). Elles s'écrivent, après calculs, de la façon suivante :

$$P_d = Q\left(\frac{1}{R}\lambda' + \frac{R}{2}\right) \quad (3.34)$$

$$P_f = Q\left(\frac{1}{R}\lambda' - \frac{R}{2}\right) \quad (3.35)$$

avec  $R$  le rapport signal sur bruit et  $Q$  la fonction :

$$\begin{aligned} Q : \mathcal{R} &\rightarrow [0, \frac{1}{2}] \\ z &\mapsto \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

$\operatorname{erf}$  est la fonction d'erreur de la loi normale :

$$\begin{aligned} \operatorname{erf} : \mathcal{R} &\rightarrow [0, 1] \\ z &\mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \end{aligned} \quad (3.37)$$

Il résulte des expressions (3.34) et (3.35) l'écriture de la probabilité de détection en fonction de celle de fausse alarme, c'est à dire la probabilité de détection sur un pixel :

$$P_{dx} = Q(Q^{-1}(P_f) - R) \quad (3.38)$$

Selon le théorème de Neyman-Pearson, la probabilité de détection  $P_d$  sera maximale si la probabilité de fausse alarme est égale à sa valeur maximale  $P_{fa}$ . Il en résulte :

$$P_{dx} = Q(Q^{-1}(P_{fa}) - R) \quad (3.39)$$

### 3.2.3.2 Probabilité de détection cumulée

Soit  $P_x$  le nombre de pixels. Nous supposons qu'à un instant donné la cible ne se trouve que dans un pixel et que la vitesse de balayage de la matrice est telle que la cible ne change pas de cellule de résolution entre deux mesures. Il en résulte des détections indépendantes d'un pixel à l'autre. De plus nous supposons un processus de détection tel que la cible est considérée comme détectée dès qu'elle l'a été dans un des pixels. Nous calculons alors la probabilité de détection cumulée sur l'ensemble des pixels :

$$P_d = 1 - (1 - P_{dx})^{P_x} \quad (3.40)$$

Soit

$$P_d = 1 - \exp(P_x \ln(1 - Q(Q^{-1}(P_{fa}) - SNR_{IR}))) \quad (3.41)$$

### 3.2.4 Calibration des paramètres du capteur infrarouge - Probabilité de fausse alarme

Comme il a été fait pour le capteur de type radar, nous calibrons la probabilité de fausse alarme  $P_{fa}$  en considérant que nous avons une fausse alarme par seconde. Le champ de vue instantané du capteur infrarouge est d'environ  $6^\circ$ , la résolution angulaire à l'intérieur de ce champ est égale à  $200 \mu rad$ . Le capteur définit donc simultanément environ 523 cellules de résolution angulaire horizontalement et verticalement, soit 273529 cellules, pendant la durée de l'observation de l'espace. Si celle-ci dure  $10 ms$  alors le capteur infrarouge constitue  $273529 \cdot 10^2$  cellules de résolution en une seconde. La probabilité de fausse alarme sera par conséquent égale à  $3.66 \cdot 10^{-8}$ .

Le paramètre  $\beta$  est fonction des caractéristiques techniques du capteur infrarouge. Nous effectuons sa calibration de la même façon que pour le capteur radar, en supposant que la probabilité de détection est égale à 0.8 pour une distance de  $50 km$  et une durée d'observation de  $10 ms$ . Il en résulte  $\beta = 0.7916 \cdot 10^3 km^2 ms^{-\frac{1}{2}}$  pour des distances en  $km$  et des durées en  $ms$ .

Nous donnons figure 3.8 page 79 l'allure générale de la probabilité de détection du capteur infrarouge, calibrée avec les valeurs données ci-dessus, d'abord en fonction de la distance (pour  $t = 10 ms$ ), puis en fonction du temps (pour  $d = 50 km$ ).

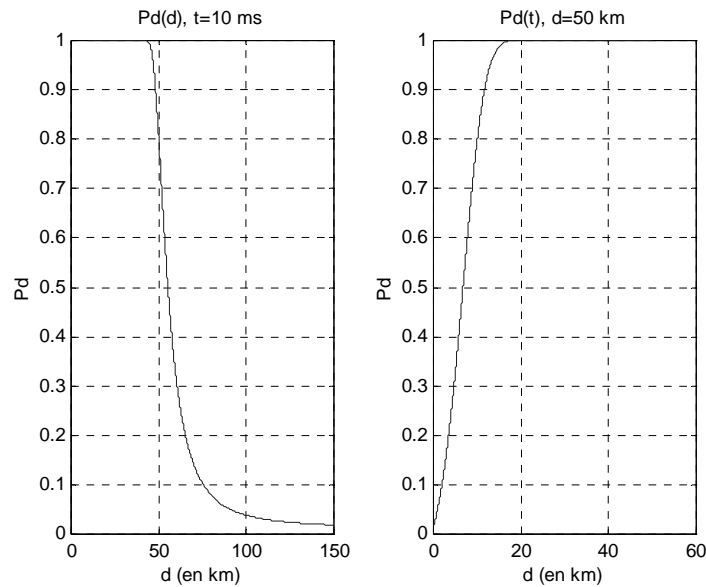


FIG. 3.8: probabilité de détection du capteur infrarouge, en fonction de la distance (en  $km$ ) et du temps (en  $ms$ )

La figure 3.9 page 80 illustre quant à elle l'influence de cette calibration sur le comporte-



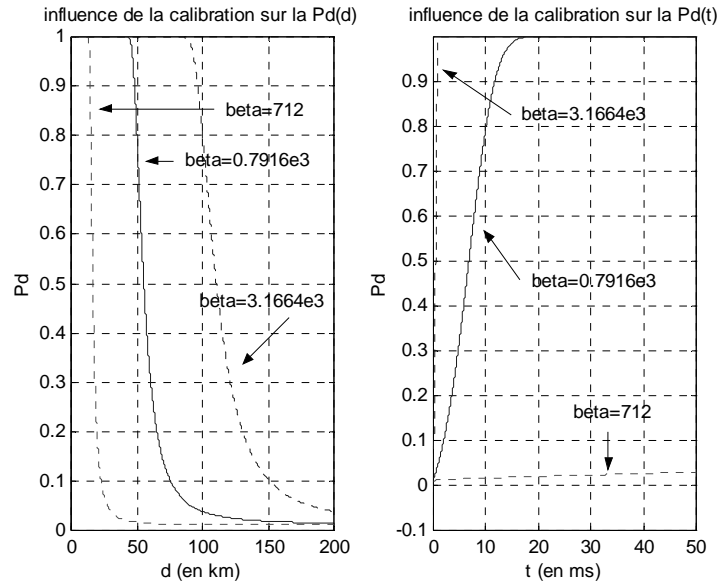


FIG. 3.9: influence de la calibration en distance du paramètre  $\beta$  sur la probabilité de détection, en fonction de la distance et de la durée d'observation de la cible

ment de la probabilité de détection.

Des remarques identiques à celles du capteur radar peuvent être formulées.

### 3.2.5 Calcul des durées de déplacement angulaire

Le capteur infrarouge a été présenté comme ayant un mode de balayage mécanique, engendrant des coûts temporels de déplacement de son axe de visée. Même si ceux-ci ne seront pas toujours considérés, nous nous intéressons ici à leur calcul en déterminant, dans un espace à une dimension, le temps nécessaire au ralliement d'une position angulaire stabilisée  $\alpha$  à partir d'une position  $\alpha_0$ , c'est à dire à la modification de l'orientation de l'axe de visée d'un angle  $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$ . Cette durée est contrainte par des données opérationnelles, typiquement une vitesse angulaire de déplacement maximale  $v_{\max}$  et une accélération angulaire maximale  $a_{\max}$ . Le déplacement angulaire de l'axe de visée du capteur peut être décomposé en quatre phases :

- accélération  $a_{\max}$  pour passer de la vitesse  $v_0$  à la vitesse  $v_{\max}$ ,
- accélération nulle, vitesse constante  $v_{\max}$ ,
- décélération  $-a_{\max}$  pour passer de la vitesse  $v_{\max}$  à la vitesse  $v = 0$ ,
- stabilisation autour de la position  $\alpha$ .

Les trois premières phases sont illustrées sur la figure 3.10 page 81. Ces différentes étapes

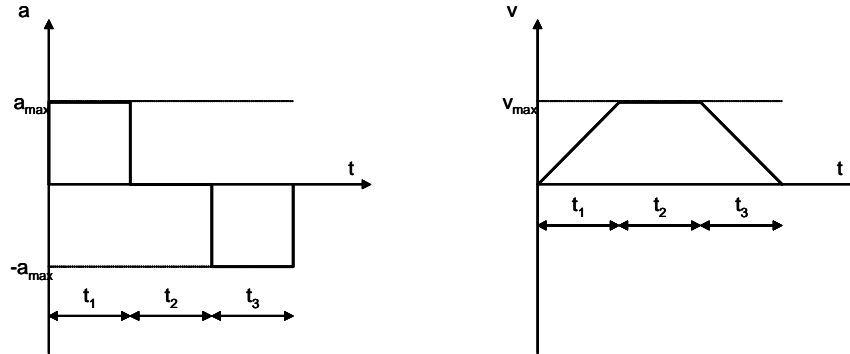


FIG. 3.10: représentation des accélérations et des vitesses angulaires lors des trois premières phases de déplacement du capteur optronique

ont respectivement pour durées  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  et  $t_{stab}$ .  $T_d(\alpha_0, \alpha)$  est la durée totale de déplacement angulaire, elle est égale à  $t_1 + t_2 + t_3 + t_{stab}$ .

Lors de la première phase, l'équation temporelle du mouvement est  $\alpha(t) = \frac{1}{2}a_{\max}t^2 + \alpha_0$ . La vitesse  $v_{\max}$  est atteinte au bout de  $t_1 = \frac{v_{\max}}{a_{\max}}$ . Elle correspond à une position angulaire  $\alpha_1 = \frac{1}{2} \frac{v_{\max}^2}{a_{\max}} + \alpha_0$ .

Lors de la seconde phase, de vitesse constante et d'accélération nulle, l'équation du mouvement devient  $\alpha(t) = v_{\max}t + \alpha_1$ . La position angulaire de l'axe de visée évolue alors jusqu'à la position  $\alpha_2 = v_{\max}t_2 + \alpha_1$ ,  $t_2$  étant la durée de cette phase.

La troisième étape correspond à la décélération du capteur vers la position angulaire  $\alpha$  désirée. L'équation du mouvement est alors  $\alpha(t) = -\frac{1}{2}a_{\max}t^2 + v_{\max}t + \alpha_2$ . La durée de cette phase est  $t_3 = \frac{v_{\max}}{a_{\max}}$ .

La durée totale de déplacement angulaire de l'axe de visée du capteur et de stabilisation est alors :

$$T_d(\alpha_0, \alpha) = \frac{\alpha - \alpha_0}{v_{\max}} + \frac{v_{\max}}{a_{\max}} + t_{stab} \quad (3.42)$$

Ces résultats sont à considérer avec certaines précautions. Il ne sont d'abord valables que dans le cas où la vitesse  $v_{\max}$  est atteinte. Ensuite, les ordres de grandeur des vitesses et accélérations maximales de déplacement sont  $v_{\max} = 100^\circ/s$  et  $a_{\max} = 1000^\circ/s^2$ , la durée de stabilisation  $t_{stab}$  est comprise entre 50 et 100 ms, indépendamment de l'amplitude angulaire du déplacement. Un déplacement de  $6^\circ$ , par exemple, nécessitera une durée au minimum égale à 60 ms. Nous pouvons par conséquent constater qu'une phase de détection de quelques millisecondes, comme nous l'avons envisagée avec le capteur radar, n'est pas raisonnable lors de l'utilisation du capteur optronique. Donc si nous considérons ces durées de déplacement, nous devons recalibrer nos capteurs optroniques afin d'obtenir des performances raisonnables pour des durées d'intégration beaucoup plus longues. Toutefois la considération de durées trop importantes ne nous permettra plus de nous placer dans l'hypothèse de cibles stationnaires

et elles sont par ailleurs limitées technologiquement, pour les capteurs que nous considérons, à quelques millisecondes dans chaque pixel. Il sera alors nécessaire de s'intéresser à d'autres types de capteurs. La calibration proposée dans le paragraphe précédent n'est donc valable que dans l'hypothèse dans laquelle les coûts temporels de déplacement ne sont pas considérés. Les deux types de capteurs sont alors utilisables dans les mêmes conditions de calibration. Il sera par la suite nécessaire de s'interroger sur la façon d'utiliser et de calibrer ces capteurs pour qu'ils aient un apport effectif l'un par rapport à l'autre lors d'une utilisation simultanée.

Cette méthode d'adressage discret n'est toutefois pas unique. Il est également possible d'envisager un balayage continu de la zone d'observation, par exemple à une vitesse de  $100^\circ/s$  en considérant des durées de retournement de quelques centaines de millisecondes d'ordre de grandeur. Ce type de balayage est mieux adapté lors de l'utilisation du capteur pour la surveillance d'une zone aérienne dans son intégralité. Il nécessite cependant lui aussi des durées d'observation supérieures à quelques millisecondes.

### 3.2.6 Optimisation de la probabilité de détection d'une cible par un capteur infrarouge

Indépendamment de la façon dont le capteur infrarouge modifie l'orientation de son axe de visée, nous nous intéressons ici à l'optimisation de la détection pour une position donnée de celui-ci.

Nous supposons donc que dans l'axe de visée du capteur se trouve une cible dont nous connaissons la position *a priori* par rapport au capteur, et que nous observons pendant une durée  $T$ . Dans ces conditions, la probabilité de détection de la cible est donnée par la relation (3.41). Comme il a été proposé pour le capteur radar, nous étudions la possibilité d'optimisation de cette probabilité par décomposition de la détection en un nombre optimal de détections élémentaires.

#### 3.2.6.1 Etude de la possibilité d'optimisation de la probabilité de détection par décomposition en détections élémentaires

La démarche employée est identique à celle présentée dans le lemme 3.1 du paragraphe 3.1.5. Le lecteur pourra s'y référer. Soit  $N$  le nombre de détections élémentaires. Chacune d'entre elles a une durée  $\frac{T}{N}$ . En tenant compte de l'expression (3.41) de la probabilité de détection et de l'expression (3.23) du rapport signal sur bruit, le probabilité de détection élémentaire s'écrit :

$$P_{de} = 1 - \exp \left( P_x \ln \left( 1 - Q \left( \gamma - \frac{u}{\sqrt{N}} \right) \right) \right) \quad (3.43)$$

avec  $\gamma = Q^{-1}(P_{fa})$  et  $u = \frac{\beta\sqrt{T}}{d^2}$ . La probabilité de détection cumulée est donnée par la relation (3.11), elle est ici égale à :

$$P_d = 1 - \exp\left(NP_x \ln\left(1 - Q\left(\gamma - \frac{u}{\sqrt{N}}\right)\right)\right) \quad (3.44)$$

Nous recherchons le nombre de détections  $N$  permettant de maximiser cette probabilité. La résolution de l'équation  $\frac{dP_d}{dN} = 0$  conduit à l'équation suivante :

$$(1 - Q(\gamma - \delta)) \ln(1 - Q(\gamma - \delta)) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\delta \exp\left(-\frac{1}{2}(\gamma - \delta)^2\right) = 0 \quad (3.45)$$

avec  $\delta = \frac{u}{\sqrt{N}}$ . Comme il était prévisible, nous aboutissons sur une équation transcendante. Cependant celle-ci n'a pas de solution numérique. En effet, la probabilité de détection telle qu'elle est définie en (3.44) est une fonction décroissante de  $N$ , comme le montre la figure 3.11 page 83.

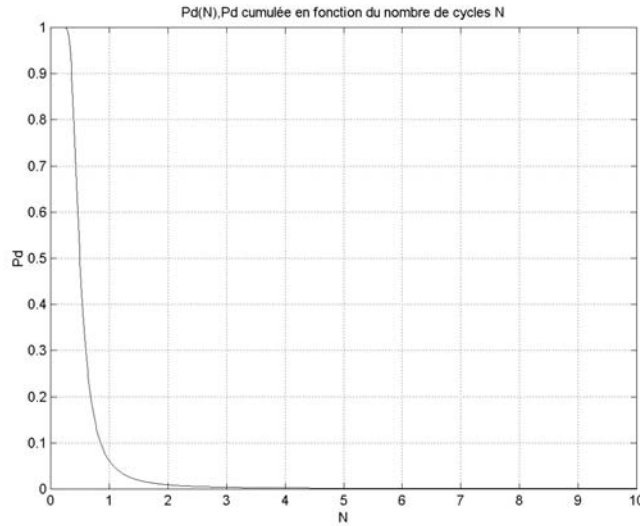


FIG. 3.11: probabilité de détection cumulée en fonction du nombre de cycles, pour  $d$  et  $T$  fixés en cohérence avec la calibration effectuée

Ces résultats montrent qu'une méthode qui était optimale pour le capteur radar ne l'est pas pour le capteur infrarouge. La décomposition en détections élémentaires de durées identiques ne conduit pas à l'amélioration de la probabilité de détection de la cible par le capteur infrarouge, au contraire elle en atténue les performances. Ils nous permettent à nouveau d'insister sur l'importance de l'étape de modélisation des capteurs. Deux capteurs de modes de fonctionnement différents, donc de modélisations différentes, ne pourront pas forcément être utilisés de la même façon.

Une alternative possible pour améliorer la probabilité de détection par un capteur infrarouge serait d'envisager des détections élémentaires de durées différentes, telles que leur somme soit égale à la durée d'observation totale  $T$ , ou encore de mettre en place un processus mécanique de contre-balayage.

### 3.2.6.2 Contre-balayage

Le contre-balayage est effectué par un ensemble d'éléments mécaniques ajoutés au capteur optronique. Ils ont pour action de modifier le mode de balayage du capteur : au lieu d'effectuer un balayage continu de l'ensemble des pixels, ils vont permettre la stabilisation sur certains d'entre eux. Ainsi, pour une durée totale équivalente, moins de pixels seront observés mais pendant une durée plus importante, permettant ainsi une amélioration des performances de détection sur ces pixels.

L'intérêt d'un tel processus est de pouvoir ajuster les durées des paliers, c'est à dire la stabilisation dans un pixel, en fonction des vitesses de balayage de l'ensemble et des durées d'intégration et éviter ainsi que la cible ne change de pixel lors de l'observation. Cette méthode n'est valable que pour de courtes durées et des amplitudes angulaires faibles. Elle n'a pas été précisément étudiée au cours de cette thèse.

## 3.3 Conclusion

Ce chapitre avait pour but la présentation de deux types de capteurs que sont les capteurs radars et infrarouges. Les fonctions de détection, rapport signal sur bruit, probabilité de détection et de fausse alarme, ont été modélisées en tenant compte des caractéristiques techniques de chacun et des contraintes opérationnelles du système de surveillance que nous avons considéré. Pour le capteur optronique nous avons de plus déterminé le coût temporel d'un déplacement angulaire de son axe de visée. Ces études ont permis de mettre en évidence les différences conceptuelles entre les deux capteurs et la complémentarité issue de celles-ci. Le capteur radar est utilisable quelles que soient les conditions météorologiques, il délivre des informations de distance radiale et de vitesse. Son mode de fonctionnement par balayage électronique lui permet d'avoir une bonne agilité angulaire de déplacement de son axe de visée. Cependant les informations angulaires qu'il peut fournir ne sont pas très précises et il peut être localisé par un système de détection de capteurs. Le capteur infrarouge est, quant à lui, sensible aux conditions météorologiques mais discret de par son mode de fonctionnement passif. Il fournit des informations précises de directions et de vitesses angulaires mais ne possède pas la même capacité de déplacement angulaire de son axe de visée que le capteur radar. De façon générale, les signatures radars et infrarouges d'une cible sont très différentes. Ces différences nous ont conduit à établir des modélisations différentes des fonctions de détection de ces capteurs et nous avons montré qu'il n'était pas possible de considérer des modes de gestion identiques pour ces capteurs.

En nous plaçant dans un environnement monocible monocapteur et en considérant une position angulaire fixe de l'axe de visée des capteurs nous avons cherché à optimiser les probabilités de détection de la cible par les capteurs. A partir de la modélisation de la probabilité de détection du capteur radar, établie sous l'hypothèse d'une cible fluctuante, nous avons déterminé analytiquement une méthode permettant de l'optimiser. Si nous avions conservé, en première approximation, cette hypothèse de cible fluctuante pour le capteur infrarouge nous aurions pu obtenir des résultats de même type pour l'optimisation de la probabilité de détection par ce type de capteur. Cependant une étude plus fine du mode de fonctionnement du capteur optronique nous a amenés à établir une autre modélisation et à envisager l'utilisation d'autres méthodes, dont nous avons donné un exemple.



## Chapitre 4

# Allocation temporelle monocapteur multicible

Le système de détection et de poursuite que nous avons défini est composé de capteurs radars et infrarouges, choisis notamment pour leur complémentarité. A un instant donné, nous avons vu que chacun d'eux ne pouvait observer qu'une partie limitée de l'espace et qu'ils devaient par conséquent modifier les orientations de leurs axes de visée afin de l'observer dans sa globalité. Nous avons vu également qu'ils n'avaient pas le même mode de fonctionnement, le mode de balayage électronique du radar lui permet de passer instantanément d'une position angulaire à une autre alors que celui du capteur optronique engendre des coûts de déplacement. Enfin, même si nous nous plaçons dans un contexte de collaboration et que c'est l'un de nos objectifs, nous avons dû limiter notre étude à l'utilisation séparée de ces deux types de capteurs. Parce que sa connaissance est plus avancée, que sa modélisation est mieux reconnue et que son mode de balayage n'engendre pas de pertes temporelles (ou des pertes négligeables par rapport aux durées d'observation), nous considérons un capteur de type radar pour l'observation d'une zone aérienne déterminée.

La surveillance d'une zone aérienne consiste, de façon simplifiée, en une phase de détection des cibles suivie d'une phase de poursuite. Puisque le capteur radar peut rediriger son faisceau d'analyse dans toutes les directions de l'espace sans aucune inertie, il aura la possibilité de passer facilement d'une phase à l'autre. Il est alors particulièrement intéressant, dans le but d'optimiser les performances du capteur, de gérer de façon réactive et adaptative le temps imparti à chacune d'entre elles. Les durées qui leur sont allouées peuvent être optimisées selon des critères liés au contexte opérationnel du système de détection. Pourront être considérées, par exemple, l'importance et la priorité accordées à chaque cible, la qualité requise pour la poursuite, la proximité des pistes ou l'information *a priori* disponible initialement sur les cibles. Nous trouverons des éléments de réponse à ce problème dans la référence [BLA99], qui propose par ailleurs une bibliographie importante à ce sujet. Nous supposons pour notre part que cette optimisation a déjà été réalisée, nous disposons par conséquent d'une durée



$T$  allouée à la détection des cibles présentes dans la zone aérienne à observer. Notre but est alors dans un premier temps d'optimiser l'utilisation de cette ressource temporelle pour la détection des cibles présentes dans l'espace d'observation.

Nous avons présenté dans le chapitre 3 une étude relative à la gestion de cette durée pour l'observation d'une cible stationnaire par un capteur radar. La stratégie consistait alors à décomposer la phase de détection en un nombre optimal  $N_{opt}$  de détections élémentaires de durées  $\frac{T}{N_{opt}}$ . Cependant cette étude portait sur les moyens à mettre en œuvre afin d'optimiser la détection d'une cible unique, alors que l'environnement est généralement multicible. Nous nous proposons donc dans ce chapitre d'étudier l'optimisation de la procédure de détection de plusieurs cibles considérées dans leur globalité et non plus une à une. Ce type de situation peut par exemple survenir lorsque le capteur radar est intégré dans un ensemble de détection comprenant un système d'écoute radar de type ESM (*Electronic Support Measurement*) ou AEW (*Airbone Early Warning*). Les positions angulaires des cibles peuvent de ce fait être estimées (par l'ESM et l'AEW) ainsi que leurs distances (par l'AEW). Dans les deux cas l'estimation n'est généralement pas très précise et les fréquences de mesures faibles. Notre capteur radar peut par conséquent être amené à redétecter l'ensemble des cibles, à partir d'une connaissance initiale, pour acquérir des informations supplémentaires et plus précises.

En définitive, nous nous posons le problème suivant, qualifié de problème d'allocation temporelle :

*« disposant d'une connaissance initiale plus ou moins précise et d'une durée  $T$ , fixée et connue, pour réaliser la détection d'un ensemble de  $N$  cibles,  $N$  connu, par un capteur radar dont nous avons modélisé les fonctions de détection dans le chapitre 3, comment utiliser  $T$  de façon à optimiser la détection de chacune des cibles ? »*

A propos de la connaissance *a priori* de la situation nous formulons trois hypothèses, selon le degré de précision du système d'écoute :

1. les positions des cibles par rapport au capteur sont connues, en distance et en direction,
2. seules leurs directions sont connues,
3. les positions des cibles ne sont pas connues, l'information *a priori* est traduite par une densité de localisation.

La première hypothèse traduit le cad idéal, les deux autres sont plus réalistes.

De plus, nous supposons dans le cas des deux premières hypothèses que les cibles sont une à une différenciables, c'est à dire qu'elles ne sont pas confondues et ne se trouvent pas dans la même direction d'observation. Ces deux contraintes seront levées lors de l'étude de la troisième hypothèse.

Nous allons commencer par établir la stratégie optimale de gestion temporelle dans le cadre de la première hypothèse. Nous verrons ensuite comment utiliser les résultats obtenus et ceux du chapitre précédent pour établir les stratégies relatives aux deux autres hypothèses.

Enfin nous chercherons à rapprocher notre étude du cadre déjà existant de la théorie de la recherche.

## 4.1 Hypothèse 1 : la connaissance *a priori* est déterministe

Dans la section 3.1.5 page 69, nous avons réalisé une optimisation de la probabilité de détection d'une cible de position fixe et connue par un capteur radar. La méthode d'optimisation retenue a été un découpage en un nombre optimal de détections élémentaires, autrement dit une gestion optimale de la durée  $T$ , c'est à dire finalement une proposition d'allocation temporelle. Même s'il est ici étendu à un nombre  $N$  de cibles, notre problème est identique. Nous recherchons la répartition de la durée  $T$  permettant l'optimalité de la détection de chacune des cibles. Avant de nous intéresser à l'allocation temporelle en elle-même, voyons comment nous pouvons définir précisément un critère d'optimisation ([DUF02], [VIL00b], [VAN00]).

### 4.1.1 Définition d'un critère d'optimisation

La situation considérée comporte  $N$  cibles. La première hypothèse suppose que leurs dépointages  $\theta_i$  et leurs distances  $d_i$  sont connus, et ce quel que soit  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Le capteur radar dispose de la durée  $T$  pour leur détection. Soit  $t_i, i \in \{1, \dots, N\}$ , la durée d'observation de chaque cible par le capteur. Puisque les cibles sont supposées se trouver dans des directions différentes de l'espace, le capteur n'a pas la capacité d'en observer plusieurs simultanément. Il en résulte la relation suivante entre la durée totale d'observation et les durées individuelles :

$$\sum_{i=1}^N t_i = T \quad (4.1)$$

avec

$$t_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (4.2)$$

Toute durée doit évidemment être positive, nous verrons néanmoins que certaines d'entre elles pourront être nulles, en raison notamment des positions relatives des cibles les unes par rapport aux autres.

Notre objectif est d'optimiser la détection de chacune des cibles, tout en tenant compte de l'ensemble qu'elles représentent. Puisqu'une probabilité est toujours positive, maximiser chaque probabilité revient à maximiser leur somme. Nous définissons ainsi une première forme de critère à optimiser :

$$J = \sum_{i=1}^N P_{di}(t_i) \quad (4.3)$$

Cependant, ce type de critère accorde la même importance à chacune des cibles. Nous pouvons le généraliser en introduisant une pondération sur les probabilités. La détection de certaines cibles sera donc favorisée. Soit  $\epsilon_i$  le poids associé à la probabilité  $P_{di}(t_i)$ , soit plus généralement à la cible  $i$ , le critère  $J$  se réécrit alors :

$$J = \sum_{i=1}^N \epsilon_i P_{di}(t_i) \quad (4.4)$$

Ces pondérations peuvent être rapprochées des coefficients de dangerosité qui ont été définis dans la section 2.3.5 page 32, nous proposerons dans le paragraphe 4.1.3 une méthode de calcul.

$P_{di}(t_i)$  est la probabilité de détection de la cible  $i$  par le capteur radar, lorsque celui-ci l'observe pendant la durée  $t_i$ . Si la durée  $t_i$  est connue, alors nous nous trouvons dans le cas d'une optimisation monocapteur monocible telle qu'elle a été résolue dans la section 3.1.5. Nous en appliquons alors les résultats, en mettant en place une stratégie de découpage optimal de la durée  $t_i$  en  $n_i$  sous-intervalles. Selon le lemme 3.1, chaque  $P_{di}$  est donc égale à :

$$P_{di}(t_i) = 1 - \exp\left(-\frac{t_i}{\tau_{ri}}\right) \quad (4.5)$$

avec

$$\tau_{ri} = \frac{d_i^4 \ln(P_{fa})}{\gamma_r \alpha (\cos(\theta_i))^2 \ln(1 - \exp(-\gamma_r))} \quad (4.6)$$

Etant donné cette expression des probabilités de détection, le critère  $J$  atteindra son maximum lorsque les durées  $t_i$  tendront vers l'infini, ce qui n'est pas compatible avec la contrainte que nous avons défini en introduction de ce chapitre, c'est à dire une phase de détection de durée finie. Notre objectif va donc être de maximiser le critère  $J$  sous la contrainte égalité (4.1) et les  $N$  contraintes inégalités données en (4.2), soit :

$$\mathcal{J} \begin{cases} \text{maximiser} & J = \sum_{i=1}^N \epsilon_i P_{di}(t_i) \\ \text{sous les contraintes} & \sum_{i=1}^N t_i = T \text{ et } t_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, N\} \end{cases} \quad (4.7)$$

#### 4.1.2 Optimisation du critère $\mathcal{J}$

Nous reconnaissons dans l'énoncé du critère  $\mathcal{J}$  un problème d'optimisation tel qu'il a été décrit dans la section 2.5 page 56 consacrée à la programmation non linéaire. Afin de le formaliser, nous introduisons les notations suivantes :

$$t = [t_1, t_2, \dots, t_N]^T \quad (4.8)$$

$$f(t) = - \sum_{i=1}^N \epsilon_i P_{di}(t_i) \quad (4.9)$$

$f$  est la fonction objectif.

$$h(t) = \sum_{i=1}^N t_i - T \quad (4.10)$$

$$g_i(t) = t_i, \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (4.11)$$

$h$  et  $g_i$  sont les fonctions contraintes.

Avec ces notations, la maximisation sous contraintes du critère  $J$  revient à la minimisation de la fonction objectif  $f$  définie sur  $\mathcal{R}^N$  sous les mêmes contraintes. Ces  $N$  contraintes  $g_i(t) \geq 0$  nous amènent à rechercher un minimum sur  $\mathcal{R}^{N+}$ . Selon la référence [HIR96], les théorèmes énoncés dans la section 2.5 et la propriété (2.33), le problème d'optimisation de la fonction  $f$  se reformule en un problème de minimisation d'une fonction de Lagrange :

$$\mathcal{L}(t, \lambda, \mu) = f(t) + \lambda h(t) + \sum_{i=1}^N \mu g_i(t) \quad (4.12)$$

avec  $\lambda$  et  $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_N]^T$  les multiplicateurs de Lagrange tels que  $\mu_i g_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, N\}$ .

Les résultats de l'optimisation de ce lagrangien, et par conséquent de l'allocation temporelle, sont synthétisés dans le lemme 4.1.

**Lemme 4.1** *Soit la fonction  $x \mapsto [x]^+$  définie sur  $\mathcal{R}$  par :*

$$\begin{aligned} [x]^+ &= x \text{ si } x > 0 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \quad (4.13)$$

et  $\lambda$  l'unique solution de l'équation :

$$\sum_{i=1}^N \frac{\tau_{ri}}{T} \left[ \ln \left( \frac{T\epsilon_i}{\tau_{ri}\lambda} \right) \right]^+ - 1 = 0 \quad (4.14)$$

On appelle  $\mathcal{I}$  l'ensemble défini par :

$$\mathcal{I} = \left\{ i \in \{1, \dots, N\} \mid \lambda < \frac{T\epsilon_i}{\tau_{ri}} \right\} \quad (4.15)$$

La répartition optimale  $t$  qui optimise le lagrangien (4.12) avec les probabilités de détection définies en (4.5) est égale à :

$$\begin{cases} t_i &= \tau_{ri} \ln \left( \frac{T\epsilon_i}{\tau_{ri}\lambda} \right) \text{ si } i \in \mathcal{I} \\ &= 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (4.16)$$

Le nombre optimal  $n_i$  de détections élémentaires à réaliser dans chaque intervalle de temps  $t_i$ , donc pour chaque cible  $i$ , est alors égal à :

$$n_i = \frac{\gamma_r \alpha t_i (\cos(\theta_i))^2}{d_i^4 \ln(P_{fa})} \quad (4.17)$$

La durée d'un cycle élémentaire est  $t'_i = \frac{t_i}{n_i}$ .

**Preuve** Nous voulons minimiser la fonction objectif  $f$  sous la contrainte égalité (4.10) et les  $N$  contraintes inégalités (4.11). Nous effectuons pour cela les changements de variables suivants :

$$x_i = \frac{t_i}{T} \quad (4.18)$$

$$w_i = \frac{T}{\tau_{ri}} \quad (4.19)$$

Nous pouvons ainsi écrire chaque inverse de probabilité de détection pondérée  $-\epsilon_i P_{di}(t_i)$  sous la forme d'une fonction  $f_i(x_i)$  :

$$f_i(x_i) = \epsilon_i (\exp(-w_i x_i) - 1) \quad (4.20)$$

Nous appelons  $\mathbf{X}$  et  $f(\mathbf{X})$  le vecteur et la fonction respectivement définis par  $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_N]^T$  et  $f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i)$ . Le problème d'optimisation  $\mathcal{P}$  que nous avons alors à résoudre est le suivant :

$$\mathcal{P} \begin{cases} \text{minimiser} & f(\mathbf{X}) \\ \text{sous les contraintes} & \sum_{i=1}^N x_i = 1 \text{ et } x_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, N\} \end{cases} \quad (4.21)$$

La solution de ce problème est abordée dans la référence [LEC00], dans le cadre de la théorie de la recherche.

Les contraintes (4.10) et (4.11) sont linéaires, elles sont par conséquent qualifiées. Nous pouvons de ce fait appliquer les résultats du théorème 2.1. Si  $\underline{\mathbf{X}}$  est la solution au problème  $\mathcal{P}$ , alors il existe des multiplicateurs de Lagrange  $\underline{\lambda} \in \mathcal{R}$  et  $\{\underline{\mu}_1, \dots, \underline{\mu}_N\} \in \mathcal{R}^{N+}$  tels que :

$$\begin{cases} f'(\underline{x}_i) - \underline{\mu}_i + \underline{\lambda} = 0 \\ \underline{\mu}_i \underline{x}_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \end{cases} \quad (4.22)$$

A partir de l'équation (4.20), nous calculons les dérivées secondes des fonctions  $f_i$  :

$$f''_i(x_i) = \epsilon_i w_i^2 \exp(-w_i x_i) \quad (4.23)$$

Ces dérivées s'avèrent être positives quelle que soit la valeur de l'indice  $i$  et de la variable  $x_i$ . Les fonctions  $f_i$  sont par conséquent convexes. Cela signifie que les conditions de KKT sont nécessaires et suffisantes.

Si l'indice  $i$  correspond à une valeur strictement positive de  $\underline{x}_i$  alors la seconde équation de (4.22) permet d'écrire que  $\underline{\mu}_i = 0$ . D'autre part, et selon la même équation, si  $\underline{x}_i = 0$  alors  $\underline{\mu}_i \geq 0$ . Dans chacun des cas, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$f'_i(\underline{x}_i) + \lambda = \underline{\mu}_i \geq 0 \quad (4.24)$$

Compte tenu de la formulation (4.20) des fonctions  $f_i$ , l'inégalité (4.24) se récrit :

$$\begin{cases} -\epsilon_i w_i \exp(-w_i \underline{x}_i) + \underline{\lambda} = 0 \quad \forall i \text{ tel que } \underline{x}_i > 0 \\ \epsilon_i w_i - \underline{\lambda} \leq 0 \quad \forall i \text{ tel que } \underline{x}_i = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

La condition  $\underline{x}_i > 0$  est par conséquent équivalente à  $\underline{\lambda} < \epsilon_i w_i$ . Nous définissons alors l'ensemble  $\mathcal{I}$  :

$$\mathcal{I} = \{i \in \{1, \dots, N\} \mid \underline{\lambda} < \epsilon_i w_i\} \quad (4.26)$$

Des égalités (4.25) nous déduisons les  $\underline{x}_i$  optimaux :

$$\begin{cases} \underline{x}_i = \underline{x}_i(\underline{\lambda}) = \frac{1}{w_i} \ln\left(\frac{\epsilon_i w_i}{\underline{\lambda}}\right) & \text{si } i \in \mathcal{I} \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.27)$$

Pour déterminer définitivement les solutions  $\underline{x}_i$ , il nous reste à déterminer  $\underline{\lambda}$ . Pour cela nous récrivons la fonction lagrangienne (4.12) définie sur  $\mathcal{R}^{N+}$ , en tenant compte du fait que les  $\underline{\mu}_i$  sont nuls quand les  $\underline{x}_i$  sont positifs :

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i) + \lambda \left( \sum_{i=1}^N x_i - 1 \right) \quad (4.28)$$

Nous avons vu dans la section 2.5 qu'à un problème d'optimisation tel que le nôtre pouvait se substituer un problème dual, de solutions identiques. Nous définissons dans cette optique une fonction duale  $\psi$  :

$$\psi(\lambda) = \min_{\mathbf{X} \in \mathcal{R}^{N+}} \mathcal{L}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) \quad (4.29)$$

Cette fonction tend vers  $-\infty$  lorsque  $\lambda < 0$ , nous restreignons donc le domaine de définition de  $\psi$  à  $\lambda$  positif.

Notre problème d'optimisation étant un problème de minimisation convexe ( $f(\mathbf{X})$  et les  $g_i$  sont convexes et les  $h_i$  sont affines), le point  $(\underline{\mathbf{X}}, \lambda)$  est un point selle de  $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda})$  et  $\lambda$  est obtenu par maximisation de la fonction duale  $\psi(\lambda)$  qui, étant concave par dualité, possède un unique maximum ([HIR96], [LEC00]). D'après ces résultats généraux et la relation (4.27) entre  $\underline{\mathbf{X}}$  et  $\lambda$ , la fonction  $\psi(\lambda)$  s'écrit :

$$\psi(\lambda) = - \sum_{i \in \mathcal{I}} \left( \epsilon_i - \frac{\lambda}{w_i} \right) + \lambda \left( \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{1}{w_i} \ln\left(\frac{\epsilon_i w_i}{\lambda}\right) - 1 \right) \quad (4.30)$$

Nous introduisons alors la fonction  $x \mapsto [x]^+$  définie sur  $\mathcal{R}$  par les équations (4.13). Il résulte de son utilisation la réécriture de la fonction duale :

$$\psi(\lambda) = -\sum_{i=1}^N [(\epsilon_i - \frac{\lambda}{w_i})]^+ + \lambda \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{w_i} [\ln(\frac{\epsilon_i w_i}{\lambda})]^+ - 1 \right) \quad (4.31)$$

dont la dérivée première s'écrit ([LEC00]) :

$$\psi'(\lambda) = -1 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{w_i} [\ln(\frac{\epsilon_i w_i}{\lambda})]^+ \quad (4.32)$$

Son unique maximum  $\underline{\lambda}$  est obtenu en résolvant  $\psi'(\lambda) = 0$ . Enfin, en introduisant ce  $\underline{\lambda}$  dans l'expression (4.27) des  $\underline{x}_i$  et en revenant à la variable principale  $t_i$ , nous obtenons la répartition optimale de la durée  $T$  entre les  $N$  cibles, donnée en (4.16). L'expression (3.13) page 70 nous permet ensuite d'obtenir le nombre  $n_i$  de détections élémentaires pour chaque cible. ■

Nous avons donc déterminé une stratégie d'allocation temporelle d'une durée  $T$  pour la détection d'un ensemble de  $N$  cibles par un capteur radar. De la même façon que dans la section 3.1.5, nous pouvons faire une remarque sur la nécessité, dans le cadre opérationnel, de valeurs entières pour les paramètres  $n_i$ . Par ailleurs nous avons implicitement supposé que la durée  $T$  était infiniment divisible, ce qui ne sera pas forcément le cas dans la réalité. Cette hypothèse se justifie ici dans le sens où nous avons supposé que les durées de déplacement du capteur radar étaient nulles. Nous pourrions nous intéresser en perspective de cette thèse à la façon de traiter l'hypothèse d'une durée  $T$  non infiniment divisible, dans le cas notamment de l'utilisation d'un capteur infrarouge qui oriente son axe de visée par un balayage mécanique. Ce mode de fonctionnement induit des durées de déplacement non nulles, il faut de ce fait rentabiliser l'observation de chaque direction, par exemple en imposant une durée minimale qui peut être la plus petite subdivision de  $T$ . Enfin les expressions (4.16) des  $t_i$  dépendent de la racine de l'équation (4.32) qui n'a pas de forme analytique. Elles sont donc assez générales. Il est cependant possible de les simplifier dans le cas particulier où  $\text{card}(\mathcal{I}) = N$ .

**Lemme 4.2** *Dans le cas particulier où les  $N$  cibles sont observées par le capteur, c'est à dire lorsque  $\text{card}(\mathcal{I}) = N$ , la répartition optimale de la durée  $T$  est donnée par la relation suivante :*

$$t_i = \frac{\sum_{j=1}^N \tau_{rj} \ln(\frac{\epsilon_i \tau_{rj}}{\epsilon_j \tau_{ri}}) + T}{\sum_{j=1}^N (\frac{\tau_{rj}}{\tau_{ri}})} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (4.33)$$

*Une condition suffisante pour que la répartition temporelle optimale soit donnée par l'expression (4.33) est qu'il existe  $\lambda_o > \lambda$  tel que :*

$$\lambda_o < \frac{T \epsilon_i}{\tau_{ri}} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (4.34)$$

**Preuve** En nous reportant au lemme 4.1 et à sa démonstration,  $\lambda$  est l'unique solution de l'équation  $\psi(\lambda) = 0$  :

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{w_i} \ln\left(\frac{\epsilon_i w_i}{\lambda}\right) - 1 = 0 \quad (4.35)$$

Soit

$$\underline{\lambda} = \exp\left(\frac{\left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{w_j} \ln(\epsilon_j w_j)\right) - 1}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{w_j}}\right) \quad (4.36)$$

Introduisant cette expression de  $\underline{\lambda}$  dans les expressions (4.27) des  $x_i$ , nous obtenons :

$$\underline{x}_i = \frac{\left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{w_j} \ln(\epsilon_j w_j)\right) + 1}{\sum_{j=1}^N \frac{w_i}{w_j}} \quad (4.37)$$

Enfin, par les changements de variables (4.18) et (4.19) nous revenons à l'expression (4.33) des  $t_i$ . D'autre part, s'il existe un  $\lambda_o > \lambda$  tel que les  $N$  inégalités (4.34) soient vérifiées, alors il vient :

$$\lambda < \frac{T \epsilon_i}{\tau_{ri}} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (4.38)$$

Selon la définition (4.15) de l'ensemble  $\mathcal{I}$  nous avons bien  $\text{card}(\mathcal{I}) = N$ . ■

A partir d'une connaissance déterministe de la situation et d'une modélisation des fonctions de détection du capteur radar, nous sommes donc capables d'établir une stratégie d'allocation optimale de la durée totale assignée à la phase de détection.

Après avoir décrit la façon dont nous comptons calculer les pondérations des probabilités, nous présenterons quelques simulations illustrant les résultats de ce début de chapitre. Enfin nous étudierons comment évaluer les performances des résultats présentés et ce notamment en fonction du nombre de cibles détectées dans la durée  $T$ .

### 4.1.3 Calcul des coefficients de pondération

Nous avons abordé dans le paragraphe 4.1.1 le fait d'introduire dans le critère à optimiser des pondérations sur les probabilités de détection. Ces coefficients traduisent la menace que représentent les cibles pour les capteurs, donc pour les avions porteurs qui les observent. Jusque là, nous n'avions émis aucune hypothèse quant à la nature des cibles et supposé qu'elles étaient toutes identiques. Sans aller jusqu'à considérer des cibles de natures différentes, ce qui pourrait faire l'objet d'une étude à part entière, nous avons jugé que l'introduction d'un facteur de menace dans le critère ajoutait un degré supplémentaire de définition de la situation.



Plus un coefficient sera fort, plus la cible sera jugée dangereuse et l'attention accordée à sa détection sera importante. Dans ces conditions, nous nous demandons ce qui rend une cible menaçante ou prioritaire. Nous pouvons d'abord considérer la distance à laquelle elle se trouve : plus une cible est proche et plus sa détection s'avère nécessaire. Sa nature joue également. D'autres facteurs extérieurs peuvent aussi intervenir. Soit  $\epsilon_{ij}$  le coefficient de pondération attribué à la cible  $i$  observée par le capteur  $j$  (la lettre  $j$  est omise quand il n'y a qu'un seul capteur). Nous proposons de définir les  $\epsilon_{ij}$  de la façon suivante :

$$\epsilon_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{d_{ij}^2} \quad (4.39)$$

où les  $\alpha_{ij}$  sont les coefficients propres à la nature de la cible et/ou aux facteurs extérieurs. N'ayant supposé aucune connaissance à ce sujet, nous prendrons ces derniers unitaires.  $d_{ij}$  est la distance de la cible  $i$  au capteur  $j$ . Après normalisation, les coefficients deviennent :

$$\epsilon_{ij} = \frac{\frac{\alpha_{ij}}{d_{ij}^2}}{\sum_{k=1}^N \frac{\alpha_{kj}}{d_{kj}^2}} \quad (4.40)$$

Plusieurs remarques peuvent être formulées quant à l'élaboration de ces coefficients. Ils sont tout d'abord définis ici dans un cadre déterministe, c'est à dire pour des distances porteurs-cibles connues. Nous avons vu que ce ne sera pas toujours le cas. Nous verrons alors au moment venu comment déterminer les facteurs de menace en fonction de la connaissance *a priori* qui sera disponible. La notion de menace a déjà été abordée dans la partie 2.3.5 consacrée à l'allocation des capteurs sur les cibles pour l'estimation de leur trajectoire et par un critère de sélection entropique ([DUM00], [VAN01]). Les pondérations n'y étaient cependant pas calculées de la même façon. Alors que notre méthode de calcul se base sur la menace individuelle que chaque cible représente pour les capteurs, celle présentée dans [DUM00] considère plutôt la menace globale dans l'environnement et ce en définissant des « zones rouges » de l'espace dans lesquelles toute cible est dangereuse. Ainsi le facteur de dangerosité est calculé en fonction de la distance de la cible à la zone rouge la plus proche, cette distance étant considérée en  $d^{-3}$ . Notons que ces deux méthodes de calcul ont été déterminées de façon empirique, nous n'avons pas rencontré dans les articles étudiés de méthodes plus universelles ou générales. Chacune d'entre elles a ses spécificités, ses avantages et ses inconvénients. C'est pourquoi, dans un souci de généralisation, nous laisserons dans les résultats présentés les coefficients sous leur forme littérale  $\epsilon_{ij}$  et n'utiliserons leur expression (4.40) que dans nos simulations.

#### 4.1.4 Illustration des résultats - Simulations

Nous considérons quatre cibles présentes dans le même espace aérien. Ces cibles sont identiques et positionnées de façon à être dissociables par le capteur, respectivement à 20, 30, 40 et 50 *km*. Les dépointages sont tous supposés nuls. La durée d'observation est  $T = 10$  *ms*.

De plus la calibration des fonctions de détection est celle qui a été définie dans le paragraphe 3.1.4.

Les simulations sont réalisées avec le logiciel *Matlab*<sup>®</sup>. Nous nous proposons de comparer plusieurs séries de résultats correspondant à différentes méthodes d'allocation. Nous nous intéresserons aux pondérations, aux allocations temporelles, aux probabilités de détection, à leur somme et à la valeur du critère  $J$  défini par (4.4). Ces résultats sont regroupés dans six tableaux :

- cas 1 - tableau 4.1 : la méthode employée est la méthode optimale présentée par le lemme 4.1, les pondérations sont uniformes,
- cas 2 - tableau 4.2 : la méthode employée est la méthode optimale présentée par le lemme 4.1, les pondérations sont uniformes, une des cibles a été éloignée,
- cas 3 - tableau 4.3 : la méthode employée est la méthode optimale présentée par le lemme 4.1, les pondérations ne sont pas uniformes et calculées par l'expression (4.40),
- cas 4 - tableau 4.4 : la méthode employée est la méthode optimale présentée par le lemme 4.1, les pondérations ne sont pas uniformes et calculées par l'expression (4.40), une des cibles a été éloignée,
- cas 5 - tableau 4.5 : l'allocation temporelle est uniforme entre toutes les cibles,
- cas 6 - tableau 4.6 : l'allocation temporelle est pondérée par les coefficients  $\epsilon_{ij}$ .

$d_i$ (en $km$ )	20	30	40	50
$\epsilon_i$	0.25	0.25	0.25	0.25
$t_i$ (en $ms$ )	0.5490	1.7912	3.4450	4.2148
$P_{di}$	0.9896	0.9471	0.8329	0.5920
$\sum_i P_{di} = 3.3616$	<b><math>J = 0.8404</math></b>			

TAB. 4.1: cas 1

$d_i$ (en $km$ )	20	30	40	100
$\epsilon_i$	0.25	0.25	0.25	0.25
$t_i$ (en $ms$ )	0.7407	2.7581	6.5011	0
$P_{di}$	0.9979	0.9892	0.9658	0
$\sum_i P_{di} = 2.9529$	<b><math>J = 0.7382</math></b>			

TAB. 4.2: cas 2

Ces tableaux sont à comparer deux à deux :

$d_i$ (en $km$ )	20	30	40	50
$\epsilon_i$	0.5392	0.2397	0.1348	0.0863
$t_i$ (en $ms$ )	0.7419	2.2726	3.8588	3.1267
$P_{di}$	0.9979	0.9760	0.8632	0.4858
$\sum_i P_{di} = 3.3249$	<b><math>J = 0.9306</math></b>			

TAB. 4.3: cas 3

$d_i$ (en $km$ )	20	30	40	100
$\epsilon_i$	0.5766	0.2562	0.1441	0.0231
$t_i$ (en $ms$ )	0.8835	2.9902	6.1263	0
$P_{di}$	0.9994	0.9926	0.9585	0
$\sum_i P_{di} = 2.9504$	<b><math>J = 0.9687</math></b>			

TAB. 4.4: cas 4

$d_i$ (en $km$ )	20	30	40	50
$\epsilon_i$	0.25	0.25	0.25	0.25
$t_i$ (en $ms$ )	2.5	2.5	2.5	2.5
$P_{di}$	1	0.9600	0.6390	0.3412
$\sum_i P_{di} = 2.9402$	<b><math>J = 0.7350</math></b>			

TAB. 4.5: cas 5

$d_i$ (en $km$ )	20	30	40	50
$\epsilon_i$	0.5392	0.2397	0.1348	0.0863
$t_i$ (en $ms$ )	5.3920	2.3970	1.3480	0.8630
$P_{di}$	1	0.9804	0.5034	0.1677
$\sum_i P_{di} = 2.6516$	<b><math>J = 0.8566</math></b>			

TAB. 4.6: cas 6

- tableaux 4.1 et 4.2 : la méthode utilisée pour l'allocation temporelle est la même, les pondérations ne sont pas prises en compte mais une des cibles a été éloignée. Nous constatons que cette cible n'est plus observée par le capteur, il en résulte un gain de temps qui est redistribué entre les trois autres cibles et qui permet d'accroître leurs probabilités de détection. Les valeurs de  $J$  ne sont cependant pas comparables puisque les deux configurations sont différentes. Notons que c'est le facteur distance qui a été modifié ici, nous aurions pu conserver la même configuration et diminuer la durée d'observation  $T$ . Les mêmes conclusions auraient alors été obtenues.
- tableaux 4.1 et 4.3 : la méthode utilisée pour l'allocation temporelle est la même mais des pondérations sont introduites dans le deuxième cas. Comme attendu, les cibles les plus proches sont favorisées pour la détection. Les performances, c'est à dire  $J$ , sont meilleures dans le deuxième cas où des critères à la fois quantitatifs et qualitatifs, par la prise en compte de la menace, sont considérés.
- tableaux 4.2 et 4.4 : nous sommes dans la même situation que précédemment, mais pour une configuration de cibles différente. Nous remarquons que les mêmes observations peuvent être formulées.
- tableaux 4.1 et 4.5 : nous comparons ici la méthode optimale que nous avons élaborée et une méthode de répartition homogène de la durée  $T$  entre les cibles : même si certaines probabilités individuelles sont meilleures, les performances globales de la méthode de répartition uniforme sont moins bonnes, comme nous pouvions nous y attendre.
- tableaux 4.3 et 4.6 : la méthode optimale tient compte cette fois-ci des pondérations, nous la comparons alors avec la répartition de  $T$  entre les quatre cibles, pondérée par les  $\epsilon_{ij}$ . Cette dernière méthode est à nouveau sous-optimale.
- tableaux 4.5 et 4.6 : nous comparons les performances des deux méthodes sous-optimales et en déduisons que la prise en compte du critère qualitatif qu'est la menace permet d'améliorer les performances globales.

#### 4.1.5 Evaluation des performances de l'allocation temporelle optimale

L'allocation temporelle optimale établie dans ce chapitre a pour but l'optimisation d'un critère basé sur les probabilités de détection. En dehors du fait que ce critère est maximal pour l'allocation temporelle optimale, il peut être intéressant d'étudier les performances en termes de nombre de cibles détectées pendant la durée  $T$  allouée à la phase de détection. Dans cette idée, nous cherchons à savoir si l'allocation temporelle optimale permet de satisfaire une contrainte opérationnelle du type :

*$\mathcal{C}_{op}$  : « pendant la durée  $T$  allouée à la phase de détection, la probabilité qu'au moins  $x\%$  des cibles aient été détectées est supérieure à  $p_0$  »*

Nous appelons  $P(x; T)$  la probabilité qu'au moins  $x\%$  des cibles aient été détectées pendant la durée  $T$ . Nous cherchons alors à savoir si la contrainte  $P(x; T) > p_0$  peut être

satisfaite. Ce type de contrainte est réaliste dans un contexte de surveillance aérienne, lors de laquelle les porteurs ont pour mission de détecter le maximum de cibles avec des probabilités les plus fortes possibles.

Le théorème 4.1 ci-dessous présente une condition à laquelle la contrainte  $P(x; T) > p_0$  est satisfaite.

**Théorème 4.1** *Pendant une durée  $T$  connue et fixée, un radar cherche à détecter  $N$  cibles de dépointages  $\theta_i$  et situées aux distances  $d_i$  ( $i \in \{1, \dots, N\}$ ) du capteur. Les paramètres  $d_i$  et  $\theta_i$  sont connus. Si nous supposons que l'allocation temporelle optimale est telle que le capteur observe la cible  $i$  pendant la durée  $t_i$ , alors la durée  $T$  permet de satisfaire la contrainte « pendant la durée  $T$  allouée à la phase de détection, la probabilité qu'au moins  $x\%$  des cibles aient été détectées est supérieure à  $p_0$  » si et seulement si :*

$$p_{\mathcal{I}}(T) \geq p_x \quad (4.41)$$

et

$$\sum_{j=p_x}^{p_{\mathcal{I}}(T)-1} \left( \sum_{k=1}^{\binom{p_{\mathcal{I}}(T)}{j}} \left[ \prod_{l=1}^j P_d(d_{p,j,k}(l), T) \prod_{n=1}^{p_{\mathcal{I}}(T)-j} (1 - P_d(\overline{d}_{p,j,k}(n), T)) \right] \right) + \prod_{l=1}^{p_{\mathcal{I}}(T)} P_d(d_l, T) - p_0 \geq 0 \quad (4.42)$$

Les notations employées sont les suivantes :

- $p_x$  est le plus petit entier tel que  $\frac{p_x}{N} > \frac{x}{100}$ ,
- $\mathcal{I}$  est l'ensemble défini par la relation (4.15),
- $p_{\mathcal{I}}(T)$  est le cardinal de  $\mathcal{I}$ , lorsque la durée de la phase de détection est  $T$ ,
- $D = \{d_1, \dots, d_{p_{\mathcal{I}}(T)}\}$  est l'ensemble de toutes les distances indicées dans  $\mathcal{C}$  par  $r$ , où  $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, p_{\mathcal{I}}(T)\}$  et  $r$  est la fonction  $r : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $i \mapsto r(i) = i_c$ , fonction permettant la réindexation des indices contenus dans  $\mathcal{I}$ ,
- $P_{p,j}$  est l'ensemble de toutes les combinaisons de  $j$  éléments dans l'ensemble  $D$  de  $p_{\mathcal{I}}(T)$  éléments,
- $c_{p,j}(k)$  est la  $k^{\text{ième}}$  combinaison de  $P_{p,j}$ ,
- $d_{p,j,k}(l)$  est le  $l^{\text{ième}}$  élément de  $c_{p,j}(k)$ ,
- $\overline{c}_{p,j}(k)$  est l'ensemble complémentaire de  $c_{p,j}(k)$  dans  $D$ ,
- $\overline{d}_{p,j,k}(l)$  est le  $l^{\text{ième}}$  élément de  $\overline{c}_{p,j}(k)$

Les probabilités  $P_d(d_{p,j,k}(l), T)$ ,  $P_d(\overline{d}_{p,j,k}(n), T)$  et  $P_d(d_l, T)$  sont déterminées par la relation (4.5).

**Preuve** La condition nécessaire pour qu'au moins  $x\%$  des cibles soient détectées pendant la durée  $T$  est qu'au moins  $p_x$  cibles soient observées pendant cette même durée, c'est à dire que les indices les désignant appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{I}$ . La condition (4.41) doit donc nécessairement être satisfaite. Nous supposons que c'est le cas.

Si nous voulons détecter au moins  $x\%$  des cibles dans l'ensemble initial de  $N$  cibles, alors il faut nécessairement détecter un nombre de cibles  $j$  qui appartienne à l'ensemble  $\{p_x, p_x + 1, \dots, p_{\mathcal{I}}(T)\}$ . Pour chaque  $j$ , nous avons  $\text{Card}(P_{p,j}) = \binom{p_{\mathcal{I}}(T)}{j}$  combinaisons possibles de détection. Pour chaque combinaison, les cibles détectées sont celles dont les distances appartiennent à  $c_{p,j}(k)$  ( $k \in \{1, \dots, \binom{p_{\mathcal{I}}(T)}{j}\}$ ) et les cibles non détectées celles dont les distances appartiennent à  $\overline{c_{p,j}(k)}$ . Etant donné que ces événements sont tous indépendants, la probabilité de détecter exactement  $j$  cibles, lorsque  $j < p_{\mathcal{I}}(T)$ , est égale à :

$$\sum_{k=1}^{\binom{p_{\mathcal{I}}(T)}{j}} \left[ \prod_{l=1}^j P_d(d_{p,j,k}(l), T) \prod_{n=1}^{p_{\mathcal{I}}(T)-j} (1 - P_d(\overline{d_{p,j,k}(n)}, T)) \right] \quad (4.43)$$

avec  $P_d(d_{p,j,k}(l), T)$ ,  $P_d(\overline{d_{p,j,k}(l)}, T)$  et  $P_d(d_l, T)$  définies par la relation (4.5). Par conséquent, la probabilité de détecter plus de  $x\%$  des cibles pendant la durée  $T$  est égale à :

$$\sum_{j=p_x}^{p_{\mathcal{I}}(T)} \left( \sum_{k=1}^{\binom{p_{\mathcal{I}}(T)}{j}} \left[ \prod_{l=1}^j P_d(d_{p,j,k}(l), T) \prod_{n=1}^{p_{\mathcal{I}}(T)-j} (1 - P_d(\overline{d_{p,j,k}(n)}, T)) \right] \right) + \prod_{l=1}^{p_{\mathcal{I}}(T)} P_d(d_l, T) \quad (4.44)$$

Le dernier terme correspond à la détection de 100% des cibles sur lesquelles le capteur consacre du temps. Par conséquent, si la durée  $T$  vérifie la contrainte  $\mathcal{C}_{op}$  alors nous avons nécessairement la probabilité définie en (4.44) supérieure à  $p_0$ , soit l'inégalité (4.42).

Inversement, si la relation (4.42) est vérifiée, alors nous pouvons calculer pour un  $T$  donné la probabilité (4.44), représentant la probabilité qu'au moins  $x\%$  des cibles aient été détectées. Si cette probabilité est supérieure à  $p_0$  alors la durée  $T$  vérifie bien la contrainte. ■

Le résultat exprimé dans ce théorème est intéressant dans le sens où il va nous permettre de déterminer si la durée allouée à la phase de détection permet de satisfaire la contrainte  $\mathcal{C}_{op}$  pour la configuration de cibles donnée. Ainsi, nous pouvons déterminer la durée minimale  $T_{\min}$  permettant de satisfaire la contrainte  $\mathcal{C}_{op}$ , et ce parce qu'il est évident d'après le théorème 4.1 que  $T_{\min}$  est la plus petite durée permettant de satisfaire les relations (4.41) et (4.42).

La figure 4.1 page 102 illustre les résultats obtenus pour la configuration de cibles donnée dans le paragraphe 4.1.4, dans le cas où nous cherchons à détecter plus de 80% des cibles avec une probabilité supérieure à 0.9, et où les pondérations sont unitaires. La figure 4.2 page 103 illustre quant à elle l'évolution du nombre de cibles observées lorsque la durée  $T$  augmente. Nous pouvons logiquement remarquer que celui-ci augmente avec  $T$ . Les cibles qui ne sont pas observées sont systématiquement les plus lointaines et ce, pour deux raisons. D'abord ce sont

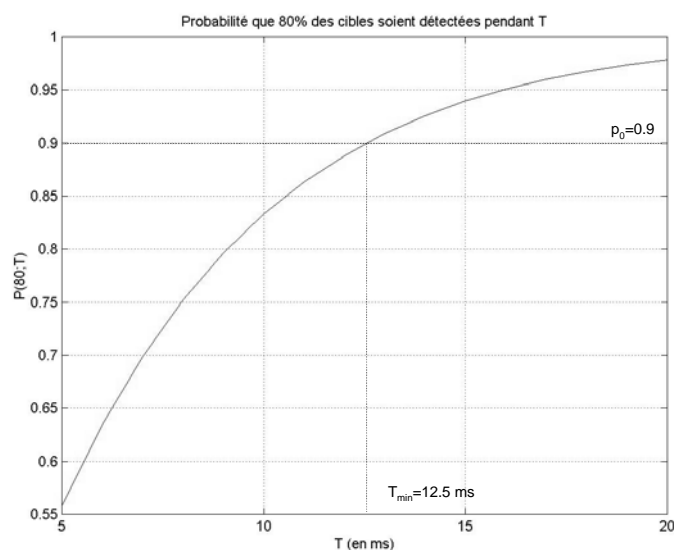


FIG. 4.1: évolution en fonction de  $T$  de la probabilité qu'au moins 80% des cibles soient détectées

elles qui ont les probabilités de détection les plus faibles. Ensuite, n'ayant pas tenu compte des menaces éventuelles, c'est le critère de distance qui agit directement sur l'optimisation.

#### 4.1.6 Conclusion sur l'hypothèse 1

Sous l'hypothèse d'une connaissance déterministe de la situation, nous avons utilisé les résultats des chapitres précédents pour établir analytiquement une stratégie optimale d'allocation d'une durée  $T$  pour la détection d'un ensemble de  $N$  cibles par un capteur radar. Pour cela, nous avons défini un critère basé sur les performances de détection mais aussi sur la prise en compte de la menace que représentent les cibles. Les simulations réalisées ont montré que notre méthode était optimale par rapport à certaines méthodes pré-définies et que la prise en compte du facteur qualitatif permettait d'établir une allocation temporelle conduisant à des performances encore meilleures. D'autre part, nous avons vu qu'il était possible d'évaluer les performances en termes de nombre de cibles détectées et de déterminer les durées d'observation nécessaires à la satisfaction de contraintes opérationnelles.

Toutefois, il peut sembler peu réaliste de disposer d'une connaissance déterministe telle que nous l'avons supposée. Nous allons par conséquent nous intéresser au cas où les distances capteurs-cibles ne sont pas connues bien que leur nombre et leurs positions angulaires le soient.

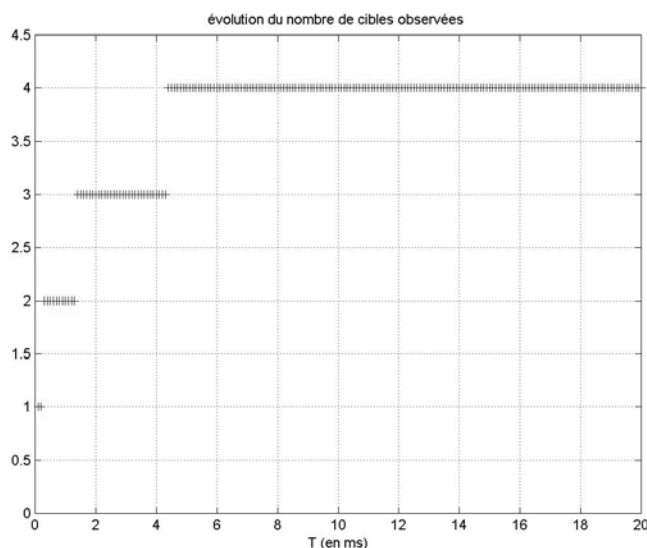


FIG. 4.2: évolution en fonction de  $T$  du nombre de cibles observées

## 4.2 Hypothèse 2 : les distances capteurs-cibles sont inconnues

Nous nous intéressons dans cette section à la situation dans laquelle les distances capteurs-cibles ne sont pas connues et dans un premier temps à la façon d'adapter les résultats existants à cette nouvelle situation.

Puisque les distances ne sont pas connues et que nous ne disposons d'aucune information *a priori* sur celles-ci, nous supposons que toutes les cibles se trouvent à une même distance de référence  $d_{ref}$  et nous effectuons l'allocation temporelle avec cette nouvelle donnée. La première étape consiste donc à formuler la probabilité de détection d'une cible positionnée à une distance  $d$  du capteur sachant que l'allocation temporelle a été établie pour une distance de référence  $d_{ref}$ .

### 4.2.1 Probabilité de détection et allocation temporelle optimale

Nous supposons donc que les  $N$  cibles se trouvent à la distance  $d_{ref}$  du capteur. Les résultats établis à la section précédente à propos de la répartition temporelle optimale peuvent donc être utilisés en substituant les  $d_{ref}$  aux  $d_i$ .

La répartition temporelle optimale est par conséquent, et d'après les équations (4.16) :

$$\begin{cases} t_i(d_{ref}) &= \tau_{ri}(d_{ref}) \ln \left( \frac{T\epsilon_i}{\tau_{ri}(d_{ref})\lambda(d_{ref})} \right) \text{ si } i \in \mathcal{I} \\ &= 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (4.45)$$



avec

$$\tau_{ri}(d_{ref}) = \frac{d_{ref}^4 \ln(P_{fa})}{\gamma_r \alpha (\cos(\theta_i))^2 \ln(1 - \exp(-\gamma_r))} \quad (4.46)$$

Le nombre optimal de détections élémentaires est, d'après (4.17) :

$$n_i = \frac{\gamma_r \alpha t_i(d_{ref}) (\cos(\theta_i))^2}{d_{ref}^4 \ln(P_{fa})} \quad (4.47)$$

La probabilité de détecter une cible à la distance  $d_i$  lorsque nous effectuons  $n_i$  détections élémentaires est donnée par la relation (3.18) dans laquelle nous considérons une durée d'observation de la cible égale à  $t_i(d_{ref})$ . Après introduction des relations (4.45), (4.46) et (4.47), il en résulte l'expression suivante de la probabilité de détection d'une cible située à la distance  $d_i$  du capteur alors que nous la supposons à la distance  $d_{ref}$  :

$$\begin{aligned} P_{di}(d_i, d_{ref}, T) &= 1 - \exp\left(\frac{\gamma_r \alpha t_i(d_{ref}) (\cos(\theta_i))^2}{d_{ref}^4 \ln(P_{fa})} \ln\left(1 - \exp\left(\left(\frac{d_i}{d_{ref}}\right)^4 \gamma_r\right)\right)\right) \text{ si } i \in \mathcal{I} \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Le choix de la distance  $d_{ref}$  est pour l'instant arbitraire. En cherchant à évaluer le même type de performances que dans la section précédente nous allons voir qu'il peut être optimisé en fonction de la configuration de la situation.

#### 4.2.2 Evaluation des performances - Sensibilité au paramètre $d_{ref}$

Soit la contrainte  $\mathcal{C}_{op}$  décrite précédemment. Nous énonçons dans le théorème 4.2 une condition à laquelle elle est satisfaite.

**Théorème 4.2** *Pendant une durée  $T$  connue et fixée, un radar cherche à détecter  $N$  cibles de dépointages  $\theta_i$  et situées aux distances  $d_i$  ( $i \in \{1, \dots, N\}$ ) du capteur. Les paramètres  $\theta_i$  sont connus, les distances sont inconnues. Si nous supposons pour la détermination de l'allocation temporelle optimale que toutes les cibles sont à la distance  $d_{ref}$ , et que le capteur observe la cible  $i$  pendant la durée  $t_i$ , alors la durée  $T$  permet de satisfaire la contrainte « pendant la durée  $T$  allouée à la phase de détection, la probabilité qu'au moins  $x\%$  des cibles aient été détectées est supérieure à  $p_0$  » si et seulement si :*

$$p_{\mathcal{I}}(T) \geq p_x \quad (4.49)$$

et

$$\sum_{j=p_x}^{p_{\mathcal{I}}(T)-1} \left( \sum_{k=1}^{\binom{p_{\mathcal{I}}(T)}{j}} \left[ \prod_{l=1}^j P_d(d_{p,j,k}(l), d_{ref}, T) \prod_{n=1}^{p_{\mathcal{I}}(T)-j} (1 - P_d(\overline{d_{p,j,k}}(n), d_{ref}, T)) \right] \right) + \prod_{l=1}^{p_{\mathcal{I}}(T)} P_d(d_l, d_{ref}, T) - p_0 \geq 0 \quad (4.50)$$

Les notations employées sont les suivantes :

- $p_x$  est le plus petit entier tel que  $\frac{p_x}{N} > \frac{x}{100}$ ,
- $\mathcal{I}$  est l'ensemble défini par la relation (4.15),
- $p_{\mathcal{I}}(T)$  est le cardinal de  $\mathcal{I}$ , lorsque la durée de la phase de détection est  $T$ ,
- $D = \{d_1, \dots, d_{p_{\mathcal{I}}(T)}\}$  est l'ensemble de toutes les distances indicées dans  $\mathcal{C}$  par  $r$ , où  $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, p_{\mathcal{I}}(T)\}$  et  $r$  est la fonction  $r : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $i \mapsto r(i) = i_c$ , fonction permettant la réindexation des indices contenus dans  $\mathcal{I}$ ,
- $P_{p,j}$  est l'ensemble de toutes les combinaisons de  $j$  éléments dans l'ensemble  $D$  de  $p_{\mathcal{I}}(T)$  éléments,
- $c_{p,j}(k)$  est la  $k^{\text{ième}}$  combinaison de  $P_{p,j}$ ,
- $d_{p,j,k}(l)$  est le  $l^{\text{ième}}$  élément de  $c_{p,j}(k)$ ,
- $\overline{c_{p,j}}(k)$  est l'ensemble complémentaire de  $c_{p,j}(k)$  dans  $D$ ,
- $\overline{d_{p,j,k}}(l)$  est le  $l^{\text{ième}}$  élément de  $\overline{c_{p,j}}(k)$

Les probabilités  $P_d(d_{p,j,k}(l), d_{ref}, T)$ ,  $P_d(\overline{d_{p,j,k}}(n), d_{ref}, T)$  et  $P_d(d_l, d_{ref}, T)$  sont déterminées par la relation (4.48).

**Preuve** La preuve de ce théorème est identique à celle du théorème 4.1 dans laquelle les expressions (4.5) des probabilités de détections sont remplacées par les expressions (4.48). ■

Des simulations ont été réalisées afin de valider et illustrer ces résultats. Elles se trouvent dans leur globalité dans la référence [DUF02]. Nous reprenons ici deux d'entre elles. Soit un système de dix cibles de dépointages et distances différentes mais de mêmes pondérations. Soit  $x\% = 80\%$  et  $p_0 = 0.9$ . Les tableaux 4.7 et 4.8 regroupent les données des deux scénaris. Ceux-ci ont été élaborés afin de tester la sensibilité de la stratégie au paramètre  $d_{ref}$ .

Le calcul des probabilités nécessite le calcul de  $\lambda$ . Cette unique racine de l'équation (4.14) est obtenue numériquement pour chaque  $T$  et chaque  $d_{ref}$  testés. Elle permet également de connaître de façon explicite l'ensemble  $\mathcal{I}$  ainsi que son cardinal et l'ensemble  $\mathcal{C}$ . Pour le scénario 2, la figure 4.3 page 107 représente, en fonction de  $T$ , l'évolution de la probabilité de détecter plus de 80% des cibles lorsque  $d_{ref} = 20 \text{ km}$ . Nous ne présentons pas cette probabilité

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_i$ (en km)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\theta_i$ (en degré)	-25	-20	-15	-5	0	10	20	30	40	50

TAB. 4.7: description du scénario 1

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_i$ (en km)	10	15	17	20	21	22	23	24	25	50
$\theta_i$ (en degré)	-25	-20	-15	-5	0	10	20	30	40	50

TAB. 4.8: description du scénario 2

pour les autres scénarios car l'allure est la même. Comme dans la section précédente, nous constatons qu'il est possible de déterminer la durée minimale  $T_{\min}$  nécessaire à la satisfaction de la contrainte  $\mathcal{C}_{op}$ . Elle est cette fois-ci dépendante de la distance de référence  $d_{ref}$ . La figure 4.4 page 108 représente l'évolution en fonction du temps du nombre de cibles observées, à nouveau pour une distance  $d_{ref}$  donnée.

Pour chacun des scénaris, nous avons donc évalué, pour différentes valeurs de  $d_{ref}$ , les durées  $T_{min}$ . N'ayant pour l'instant aucun résultat de l'influence de  $T$  sur l'évolution de  $\lambda$  et de  $p_{\mathcal{I}}$ , la méthode est la suivante : pour chaque valeur de  $d_{ref}$  nous avons calculé numériquement la probabilité (4.50) que plus de 80 % des cibles soient détectées pour des valeurs croissantes de  $T$ . La première valeur de  $T$  permettant de satisfaire  $p_0 \geq 0.9$  est la détermination numérique de  $T_{min}$ . Les résultats des simulations sont représentés figure 4.5 pour le scénario 1 et figure 4.6 pour le scénario 2.

Nous remarquons que, quel que soit le scénario, l'évolution de la fonction  $T_{min} = f(d_{ref})$  est la même. Cette évolution a été constatée sur toutes les simulations que nous avons réalisées. On notera que le début de l'intervalle de simulation pour  $d_{ref}$  n'est pas le même pour toutes les simulations. Ceci est dû à des problèmes numériques qui surviennent lorsque  $d_{ref}$  devient inférieure à une certaine valeur limite qui dépend de la distribution initiale des distances. Sur l'intervalle de simulation de  $d_{ref}$ , la fonction  $T_{min} = f(d_{ref})$  commence toujours par être strictement décroissante avant de devenir strictement croissante. La valeur de  $d_{ref}$  à partir de laquelle la fonction devient croissante ainsi que le temps  $T_{min}$  correspondant sont reportés dans le tableau 4.9 pour chaque scénario. L'analyse de ce tableau permet de remarquer que la distance  $d_{ref}$  optimale (c'est à dire celle qui permet d'obtenir le temps le plus faible) est proche de la distance pour laquelle  $x\% = 80\%$  des cibles ont une distance comprise dans l'intervalle  $[0, d_{ref}]$ . Ce résultat s'avère vérifié dans toutes les simulations. Il reste à démontrer.

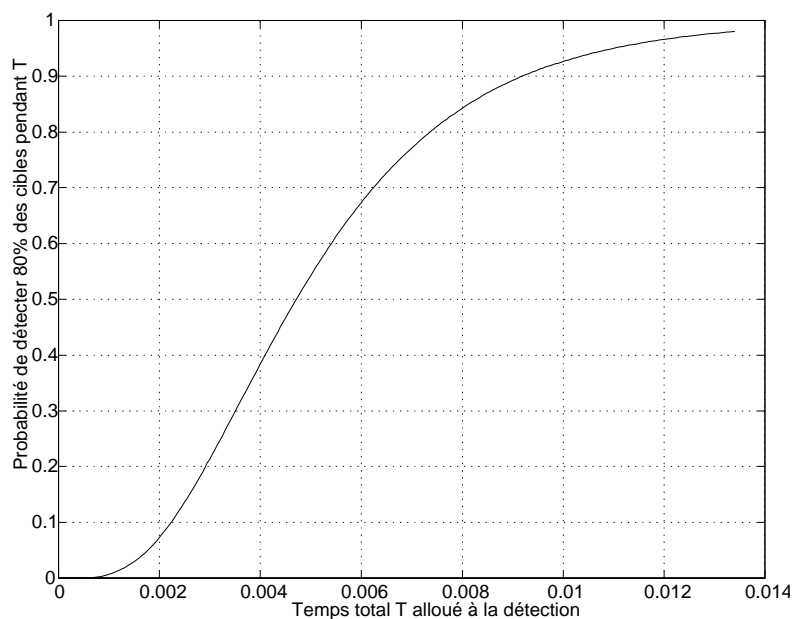


FIG. 4.3: [DUF02] évolution en fonction de la durée  $T$  qu'au moins 80% des cibles soient détectées, lorsque  $d_{ref} = 20$  km

scénario	$T_{min}$ (en s)	$d_{ref}$ optimale (en km)
1	$8.1 \cdot 10^{-1}$	80
2	$7.9 \cdot 10^{-3}$	23

TAB. 4.9: estimation du temps d'observation minimal possible et valeur de calibration optimale de la distance  $d_{ref}$

### 4.2.3 Conclusion sur l'hypothèse 2

Cette partie était consacrée au cas où les positions des cibles ne sont finalement pas connues. Il a été montré qu'il était possible d'utiliser la stratégie de détection optimale élaborée en 4.1 pour déterminer analytiquement la probabilité de détecter une cible supposée à une distance de référence. Les performances de ces hypothèses ont été évaluées à travers l'étude de la satisfaction d'une contrainte. Les résultats ont en outre montré la sensibilité aux choix de la distance de référence.

Nous abordons à présent la cas où seule une information *a priori* sur les cibles est disponible, c'est à dire une hypothèse de connaissance moins forte que les précédentes, qui remplace l'étude dans un cadre probabiliste en supposant que la connaissance dont nous disposons soit traduite par des densités de probabilités.

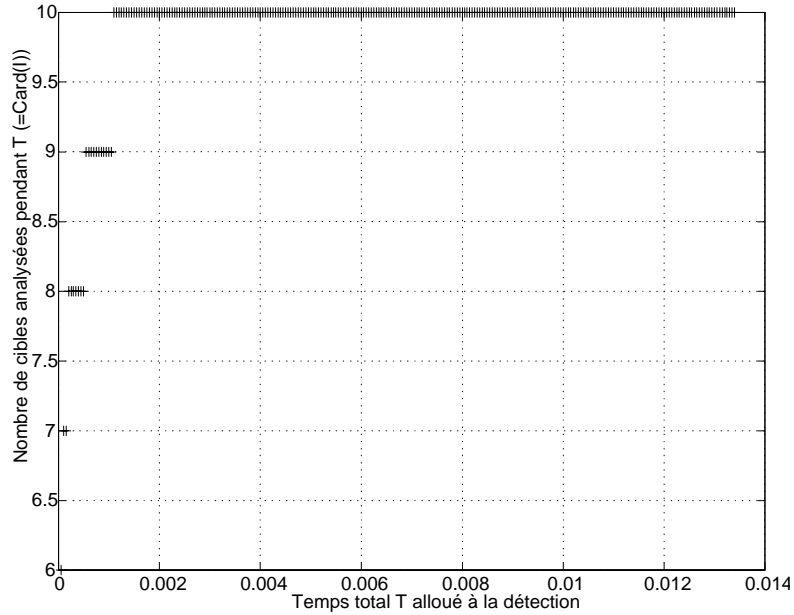


FIG. 4.4: [DUF02] évolution en fonction de la durée  $T$  du nombre de cibles observées, lorsque  $d_{ref} = 20 \text{ km}$

### 4.3 Hypothèse 3 : la connaissance *a priori* est donnée par des densités de localisation

L'objectif de cette troisième partie est d'élaborer des stratégies de répartition temporelle de la durée  $T$  lorsque la connaissance *a priori* se trouve sous la forme d'une ou plusieurs densité(s) de localisation. Cette situation est un intermédiaire entre les deux premières hypothèses, nous allons voir qu'il est à nouveau possible d'adapter les résultats de la section 4.1. Elle en est par ailleurs une généralisation dans le sens où les résultats dépendront de paramètres propres aux distributions de probabilités, tels que leurs écart-types. Ainsi certains paramètres nous permettront de retrouver des résultats similaires à ceux obtenus pour une bonne connaissance de la situation alors que d'autres traduiront l'incertitude à ce propos.

Le fait d'avoir une connaissance incertaine de la situation va nous amener à considérer l'espace d'observation dans son intégralité, c'est à dire établir une allocation temporelle pour chaque direction de l'espace. Nous entendons par le terme « direction de l'espace » les  $nb_{c_\varphi}$  directions d'observation qui ont été définies dans le paragraphe 3.1.1 page 62. Nous nous replaçons par conséquent dans un espace à deux dimensions en considérant les données se trouvant dans le chapitre 3, à propos de la zone à surveiller et des cellules de résolution du capteur radar. Cette nouvelle considération va nous permettre de lever l'hypothèse qui avait été formulée dans les sections 4.1 et 4.2, à propos du positionnement des cibles. En effet, il avait été implicitement supposé que les cibles se répartissaient dans l'espace  $\Theta_s$  selon des directions

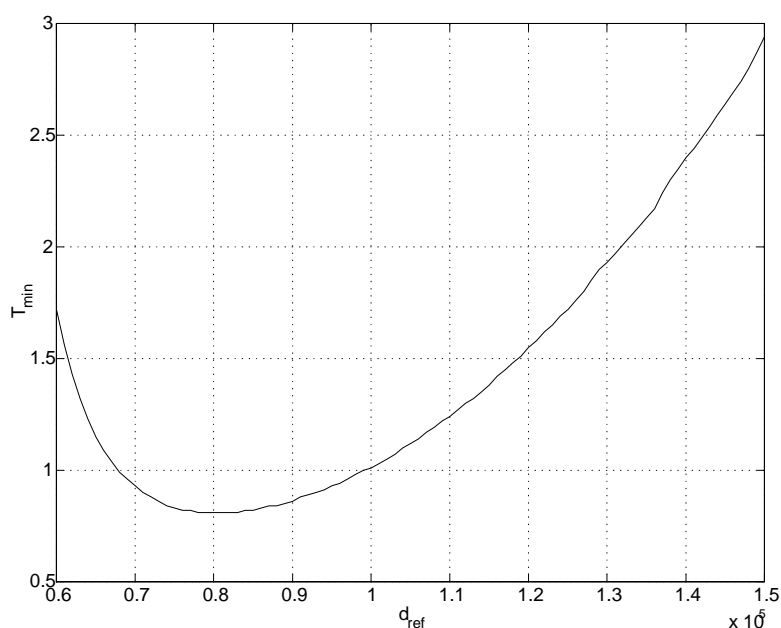


FIG. 4.5: [DUF02] évolution en fonction de  $d_{ref}$  du temps nécessaire pour que la probabilité que 80% des cibles soient détectées soit égale à 0.9, scénario 1

différentes. Cette assertion nous permettait de nous affranchir du cas où plusieurs cibles se trouvaient dans la même direction mais à des distances différentes. Les résultats présentés dans cette section intégreront la possibilité d'avoir une configuration telle que plusieurs cibles peuvent se trouver dans la même direction par rapport au capteur. Dans un tel cas et puisque le capteur radar forme toutes ses cellules de résolution en distance simultanément, la durée d'observation d'une direction donnée sera la même quelles que soient les distances auxquelles se trouveront les cibles présentes dans ce champ de vue instantané du capteur radar et quel que soit leur nombre.

Au cours de cette section, nous verrons comment calculer les probabilités de détecter de une à  $N$  cibles dans chaque direction de l'espace à partir de la connaissance *a priori* disponible. A partir de là, nous verrons comment adapter les premiers résultats de ce chapitre pour déterminer la stratégie optimale d'observation du secteur  $\Theta_s$ . Enfin, nous chercherons à formaliser nos résultats dans le cadre théorique de la *Search Theory*.

### 4.3.1 Probabilité de détection

Une probabilité de détection a été définie dans la section 3.1.3 du chapitre 3. Il s'agit de la probabilité de détecter une cible de type *Swerling 1* sachant qu'elle se situe à la distance  $d$  du capteur radar. En utilisant le formalisme des probabilités conditionnelles et en appelant  $H_k$  l'événement « la cible  $k$  est détectée », la probabilité (3.10) s'écrit  $P(H_k | d)$ . La probabilité

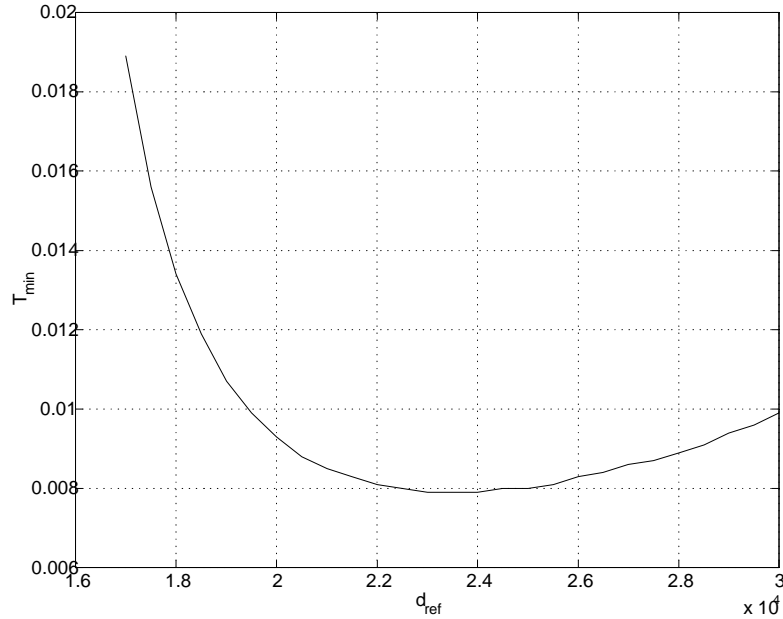


FIG. 4.6: [DUF02] évolution en fonction de  $d_{ref}$  du temps nécessaire pour que la probabilité que 80% des cibles soient détectées soit égale à 0.9, scénario 2

de détecter la cible à la distance  $d$  du capteur alors qu'elle s'y trouve effectivement est alors, selon Bayes :

$$P(H_k, d) = P(H_k | d) P(d) \quad (4.51)$$

où  $P(d)$  est la probabilité que la cible se trouve à la distance  $d$ . Dans le cadre de la première hypothèse les distances sont connues, la probabilité de présence de la cible à la distance  $d$  est alors unitaire et  $P(H_k, d) = P(H_k | d)$ . Dans l'hypothèse actuelle, la seule connaissance dont nous disposons est une distribution de localisation dans les cellules de l'espace d'observation. Notre premier objectif est donc de déterminer la probabilité que la cible soit détectée dans la cellule  $c$  et qu'elle s'y trouve effectivement. A nouveau selon Bayes, cette probabilité s'écrit :

$$P(H_k, c) = P(H_k | c) P(c) \quad (4.52)$$

où  $P(c)$  est la probabilité *a priori* que la cible se trouve dans la cellule  $c$ . Intéressons-nous à présent à chacun des termes qui la composent.

#### 4.3.1.1 Probabilité de présence de la cible dans la cellule $c_{ij}$

Nous appelons  $c_{ij}$  la cellule de distance  $i$  et de direction  $j$ . La probabilité de présence d'une cible dans une cellule se fait par intégration de sa densité de présence sur la surface de la cellule considérée. Nous n'avons pour l'instant émis aucune hypothèse sur la nature et

les caractéristiques des densités de présence. Dans un premier temps, nous nous garderons d'en fournir davantage, ceci afin de préserver la généralité de notre démarche qui se base sur l'utilisation des probabilités de localisation et non sur la façon dont elles sont calculées. Ainsi nous définissons la probabilité de présence d'une cible  $k$  dans une cellule  $c_{ij}$ ,  $i$  étant l'indice de distance et  $j$  celui de direction, par la relation :

$$P_l(k, c_{ij}) = \rho_{ijk} \quad (4.53)$$

#### 4.3.1.2 Probabilité de détection de la cible dans la cellule $c_{ij}$

La probabilité qu'une cible de type *Swerling 1* soit détectée par un capteur radar sachant qu'elle se trouve à la distance  $d$  et qu'elle est observée pendant la durée  $T$ , est donnée par la relation (3.10) que nous rappelons ici :

$$P_d = (P_{fa})^{\frac{1}{1+SNR_R}} \text{ avec } SNR_R = \frac{\alpha T (\cos(\theta))^2}{d^4} \quad (4.54)$$

Comme il a été supposé dans la section 3.1, et en tenant compte de la remarque 3, nous supposons que le rapport signal sur bruit est grand devant l'unité.

La probabilité (4.54) est fonction de la distance  $d$ . Soit la constante  $\gamma > 0$  telle que  $\gamma = \frac{\ln(1/P_{fa})}{\alpha T (\cos(\theta))^2}$ . Nous avons alors  $P_d(d) = e^{-\gamma d^4}$ . Les hypothèses que nous avons formulées dans le chapitre 3 à propos de la taille des portes distance, du positionnement des cibles par rapport à celles-ci et des ajustements numériques à réaliser pour compenser le fait que les cibles puissent ne pas être centrées sur elles, nous amènent à établir la proposition suivante :

**Proposition 1** « la probabilité de détecter une cible dans une cellule donnée est approximable par la probabilité de détecter cette même cible à la distance sur laquelle est centrée cette cellule »

L'expression (4.52) sera alors applicable pour calculer la probabilité que la cible soit dans la cellule  $c_{ij}$  et qu'elle y soit détectée.

Notons que la probabilité  $P_d$  n'est pas fonction de la direction dans laquelle se trouve la cible. En effet, deux cibles non confondues situées à la même distance du capteur, et pour lesquelles les durées d'observation sont les mêmes, auront la même probabilité de détection. Par la suite, il sera cependant nécessaire de considérer ces directions lorsque le paramètre supplémentaire que sont les coûts de déplacement sera pris en compte dans notre problème. Certes, un radar à balayage électronique tel qu'il est actuellement considéré n'engendre pas de coûts de déplacement de son axe de visée, mais nous serons amenés ultérieurement à utiliser dans notre système multicapteur des capteurs infrarouges qui, comme nous l'avons vu, n'ont pas forcément le même mode de fonctionnement.

Par conséquent, la probabilité de détecter la cible  $k$  dans la cellule  $c_{ij}$ , centrée autour de la distance  $d_i$ , sachant qu'elle s'y trouve effectivement, s'écrit :

$$P_d(H_k | c_{ij}) = P_d(H_k | d_i) = e^{-\gamma_i d_i^4} \quad (4.55)$$



Nous en déduisons la probabilité que la cible  $k$  soit dans la cellule  $c_{ij}$  et qu'elle y soit détectée :

$$P_d(H_k, c_{ij}) = P_d(H_k | c_{ij}) P_l(k, c_{ij}) = P_{dijk} = \rho_{ijk} e^{-\gamma_i d_i^4} \quad (4.56)$$

A présent que la probabilité de détection est définie, et dans l'idée de suivre la même démarche que celle employée dans la section 4.1, nous nous intéressons à l'énoncé d'un critère sur les performances à optimiser.

### 4.3.2 Définition d'un critère d'optimisation

Nous avons vu dans le chapitre 3 que le mode de fonctionnement des capteurs radars amène ceux-ci à constituer simultanément toutes leurs cellules de résolution en distance. La notion de durée d'observation d'une cellule n'a alors de signification que dans le sens où toutes les cellules de distance situées dans une même direction seront observées pendant la même durée. Nous ne parlons plus alors de durée d'observation d'une cible mais de durée d'observation d'une direction. Si  $t_j$  est la durée d'observation de la direction  $j$ , alors la probabilité donnée par l'équation (4.56) se réécrit :

$$P_d(H_k, c_{ij}) = P_{dijk} = \rho_{ijk} e^{-\delta_i \frac{d_i^4}{t_j}} \quad (4.57)$$

avec  $\delta_i = \gamma_i t_j = \frac{\ln(1/P_{fa})}{\alpha(\cos(\theta_i))^2}$ .

Ces considérations engendrent une nouvelle formulation de notre problématique :

*« connaissant les densités de présence d'un nombre donné de cibles présentes dans un espace à deux dimensions et la durée totale allouée à leur détection, comment répartir cette durée de façon optimale entre les différentes directions de cet espace ? »*

Cette problématique est similaire à celle déjà rencontrée, à la différence que l'optimisation ne va plus se faire par rapport aux cibles mais par rapport aux directions de l'espace. En effet, si notre objectif est d'optimiser la détection des cibles alors il est équivalent de chercher une optimisation dans chaque direction, en intégrant le fait qu'il puisse s'y trouver plusieurs cibles simultanément.

Dans ce cas de figure, il nous est nécessaire de déterminer la probabilité de détecter de une à  $N$  cibles dans chaque direction  $j$ .

Soit  $P_{dj k}$  la probabilité de détecter la cible  $k$  dans la direction  $j$ . Puisque nous avons fait l'hypothèse que les portes distance étaient centrées sur les cibles et que les cellules de résolution ne se chevauchaient pas, cette probabilité  $P_{dj k}$  s'écrit :

$$P_{dj k} = \sum_{i=1}^{nb\_c_d} P_{dijk} \quad (4.58)$$

Soit un ensemble d'évènements  $A_i$ ,  $i \in \{1, n\}$ , non incompatibles. La probabilité d'union de ces évènements est donnée par la formule de Poincaré ([VEN73]) :

$$P(\cup A_i, i \in \{1, n\}) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i,j=1, i \neq j}^n P(A_i \cap A_j) + \sum_{i,j,k=1, i \neq j \neq k}^n P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \quad (4.59)$$

Cette formule générale est utilisée pour le calcul de la probabilité  $P_{dj}$  où  $A_k$  représente l'évènement «la cible  $k$  est détectée». Cette probabilité représente la probabilité de détecter de une à  $N$  cibles dans une direction  $j$  donnée.

Enfin, nous pouvons énoncer le critère à optimiser :

$$\mathcal{G} \begin{cases} \text{maximiser} & G = \sum_{j=1}^{nb\_c\varphi} \epsilon_j P_{dj}(t_j) \\ \text{sous les contraintes} & \sum_{i=1}^{nb\_c\varphi} t_j = T \text{ et } t_j \geq 0 \forall j \in \{1, \dots, nb\_c\varphi\} \end{cases} \quad (4.60)$$

Les termes  $\epsilon_j$  sont à nouveau des termes de pondération des différentes directions. Ils interviennent ici dans un souci de généralisation et traduisent les priorités accordées à certaines directions, c'est à dire les menaces qui sont susceptibles de s'y trouver. Nous verrons ultérieurement comment les calculer en fonction de ceux exprimés dans le paragraphe 4.1.3.

Les critères  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{J}$  sont de formes similaires mais diffèrent par l'expression des probabilités de détection considérées. Celles-ci sont de la forme (4.59) dans le critère  $\mathcal{G}$ , elles ne sont pas exprimables sous les formes (3.10) ou (4.5). Cette dernière considération rend impossible l'exploitation des résultats énoncés dans la section 4.1.2 et l'élaboration d'une quelconque solution analytique. Nous avons par conséquent cherché à modéliser les probabilités de détection  $P_{dj}$  afin de pouvoir suivre le même raisonnement pour la démonstration à défaut de pouvoir en appliquer directement les résultats.

La probabilité de détection utilisée dans la section 4.1.2 est de la forme  $P_d(t) = 1 - \exp(-\frac{t}{\tau_r})$  (équation (4.5)). Nous avons cherché à modéliser notre probabilité de détection  $P_{dj}$  par une expression faisant intervenir un paramètre supplémentaire, afin d'obtenir un ajustement le plus proche possible, au sens de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne, de la probabilité réelle. Le modèle est donné par l'expression suivante :

$$P_{dj}(t_j) = \exp\left(-\omega_j t_j^{-n_j}\right) \quad (4.61)$$

Ce modèle a été choisi en raison de la similitude de son comportement en fonction du temps avec celui de la probabilité donnée en (4.5).  $\omega_j$  et  $n_j$  sont les paramètres du modèle à déterminer, pour chaque direction  $j$ .

Il existe de nombreuses méthodes de détermination des paramètres  $\omega_j$  et  $n_j$  ([BOR92]). A nouveau dans un souci de généralisation, nous supposons qu'ils ont été déterminés et qu'ils sont positifs. Une fois que la méthode générale d'optimisation sera présentée, nous consacrerons le paragraphe 4.3.5 à leur identification par la méthode des moindres carrés.

La modélisation (4.61) de la probabilité de détection de une à  $N$  cibles dans chaque direction est alors utilisée pour établir la répartition optimale dans tout l'espace de la durée  $T$  allouée à la phase de détection.

### 4.3.3 Optimisation de l'allocation temporelle

Avec une probabilité telle qu'elle a été modélisée par l'expression (4.61) dans la section précédente, la résolution du problème d'optimisation défini en (4.60) se rapproche de celle exposée dans la section 4.1.2. Après quelques adaptations nous allons voir qu'elles sont très proches l'une de l'autre. Cela signifie qu'à partir de la connaissance des densités de présence de plusieurs cibles dans un secteur d'observation, il est possible d'élaborer une stratégie optimale de répartition temporelle et d'en évaluer les performances analytiquement.

#### 4.3.3.1 Optimisation de la probabilité de détection dans chaque direction de l'espace

Le capteur radar observe une direction  $j$  de l'espace dans laquelle il est susceptible de se trouver de une à  $N$  cibles. La probabilité de détection dans cette direction est donnée par la relation (4.61), pour une durée d'observation  $t_j$ . Comme il a été fait dans la section 3.1.5, et en suivant la même démarche, nous proposons une stratégie d'optimisation de cette probabilité par une décomposition en un nombre optimal de détections élémentaires.

**Lemme 4.3** Soit  $\gamma_{sj}$  la solution de l'équation :

$$(1 - \exp(-\gamma_{sj})) \ln(1 - \exp(-\gamma_{sj})) + n_j \gamma_{sj} \exp(-\gamma_{sj}) = 0 \quad (4.62)$$

Soit  $M_j$  le nombre de détections élémentaires indépendantes dans la  $j$ -ème direction de l'espace, réalisées pendant la durée  $t_j$ . Si chaque détection élémentaire dure  $\frac{t_j}{M_j}$  alors la probabilité de détection de une à  $N$  cibles dans la direction  $j$  est maximale lorsque :

$$M_j = M_{j \text{ opt}} = \left( \frac{\gamma_{sj} t_j^{n_j}}{\omega_j} \right)^{\frac{1}{n_j}} \quad (4.63)$$

La probabilité de détection élémentaire est alors égale à  $\exp(-\gamma_{sj})$  et la probabilité de détection totale qui en résulte à :

$$P_{dj} = 1 - \exp\left(-\frac{t_j}{\tau_j}\right) \quad (4.64)$$

avec

$$\tau_j = - \left( \frac{\omega_j}{\gamma_{sj}} \right)^{\frac{1}{n_j}} \frac{1}{\ln(1 - \exp(-\gamma_{sj}))} \quad (4.65)$$

**Preuve** Si nous faisons l'hypothèse que la probabilité de détecter de une à  $N$  cibles dans la direction  $j$  de l'espace puisse s'écrire sous la forme (4.61), alors la probabilité élémentaire de détection s'écrit de la façon suivante, en tenant compte qu'une détection élémentaire a une durée  $\frac{t_j}{M_j}$  :

$$P_{dej} = \exp\left(-\omega_j \left(\frac{M_j}{t_j}\right)^{n_j}\right) \quad (4.66)$$

Soit en posant  $\alpha_j = \frac{\omega_j}{t_j^{n_j}} > 0$  :

$$P_{dej} = \exp\left(-\alpha_j M_j^{n_j}\right) \quad (4.67)$$

La probabilité de détection cumulée est, d'après l'expression (3.11), égale à :

$$P_{dj} = 1 - \left(1 - \exp\left(-\alpha_j M_j^{n_j}\right)\right)^{M_j} = 1 - \exp\left(M_j \ln\left(1 - \exp\left(-\alpha_j M_j^{n_j}\right)\right)\right) \quad (4.68)$$

Nous cherchons le nombre  $M_j$  de détections élémentaires qui maximise cette probabilité de détection. Pour cela nous dérivons l'expression (4.68) de  $P_{dj}$  par rapport à  $M_j$  et résolvons  $\frac{dP_{dj}}{dM_j} = 0$ . L'écriture de cette équation en posant  $\gamma_{sj} = \alpha_j M_j^{n_j}$  conduit à l'équation (4.62). Sa solution est déterminée numériquement par l'étude de la fonction  $x \mapsto (1 - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x}) + n_j x e^{-x}$ . Contrairement à celle de l'équation (3.12) qui était unique pour l'ensemble des cibles, la solution dépend ici du paramètre  $n_j$ , et de façon non explicite de  $\omega_j$ . Nous aurons alors une solution  $\gamma_{sj}$ , donc une  $P_{dej}$  pour chaque direction  $j$  de l'espace.

Le nombre optimal  $M_{j\text{opt}}$  de détections élémentaires qui maximise la probabilité de détection totale est alors :

$$M_{j\text{opt}} = \left(\frac{\gamma_{sj}}{\alpha_j}\right)^{\frac{1}{n_j}} = \left(\frac{\gamma_{sj} t_j^{n_j}}{\omega_j}\right)^{\frac{1}{n_j}} \quad (4.69)$$

En substituant  $M_j$  par  $M_{j\text{opt}}$  dans l'expression (4.68) et en posant

$$\tau_j = -\left(\frac{\omega_j}{\gamma_{sj}}\right)^{\frac{1}{n_j}} \frac{1}{\ln(1 - \exp(-\gamma_{sj}))} \quad (4.70)$$

nous obtenons l'expression (4.64) de la probabilité de détection cumulée. ■

Cette preuve repose, entre autres, sur le fait que la solution de l'équation (4.62) est unique pour un  $j$  donné. Le lemme suivant justifie ce résultat.

**Lemme 4.4** *La solution  $\gamma_{sj}$  de l'équation*

$$(1 - \exp(-\gamma_{sj})) \ln(1 - \exp(-\gamma_{sj})) + n_j \gamma_{sj} \exp(-\gamma_{sj}) = 0 \quad (4.71)$$

*est unique pour un  $n_j$  donné.*

**Preuve** Soit  $x = \gamma_{sj} > 0, n = n_j$ . Considérons les fonctions  $h_1$  et  $h_{2n}$  :

$$\begin{aligned} h_1 &: x \mapsto (1 - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x}) \\ h_{2n} &: x \mapsto -nxe^{-x} \end{aligned} \tag{4.72}$$

Nous nous intéressons à leurs variations et à leur(s) intersection(s). Les fonctions  $h_1$  et  $h_{2n}$  sont définies et continues sur  $\mathcal{R}^{+*}$ , leurs variations sont synthétisées dans les tableaux 4.10 et 4.11. Les fonctions  $h_1$  et  $h_{2n}$  sont définies et continues sur le même intervalle, elles ont les mêmes

<b>x</b>	0		$1 - \ln(e - 1)$		$+\infty$
$h'_1$	$\infty$	-	0	+	0
$h_1$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0

TAB. 4.10: variations de la fonction  $h_1 : x \mapsto (1 - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x})$

<b>x</b>	0		1		$+\infty$
$h'_{2n}$	$-n$	-	0	+	0
$h_{2n}$	0	$\searrow$	$-\frac{n}{e}$	$\nearrow$	0

TAB. 4.11: variations de la fonction  $h_{2n} : x \mapsto -nxe^{-x}$

variations et les mêmes limites aux bornes de leurs domaines de définition. Lorsque  $x$  tend vers zéro, nous avons  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h_{2n}(x) = 0^-$  alors que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h'_1(x) = \infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h'_{2n}(x) = -n$ . La courbe représentative de la fonction  $h_{2n}$  est donc située au dessus de celle de la fonction  $h_1$  quand  $x$  tend vers zéro par valeurs positives. Lorsque  $x$  tend vers l'infini, nous avons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h_{2n}(x) = 0^-$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h'_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h'_{2n}(x) = 0^-$ . D'autre part, nous démontrons facilement que  $0 < h'_1(x) < h'_{2n}(x)$  quand  $x$  tend vers l'infini. Cela signifie que la courbe représentative de la fonction  $h_{2n}$  se trouve en dessous de celle de la fonction  $h_1$  quand  $x$  tend vers l'infini. Ces propriétés, valables quelle que soit la valeur du paramètre  $n$ , justifient l'intersection unique des deux courbes et par là-même l'existence d'une solution unique à l'équation  $h_1(x) = h_{2n}(x)$ , c'est à dire à l'équation (4.62). La figure 4.7 page 117 illustre ces résultats. ■

Ces deux lemmes établissent une méthode d'optimisation de la probabilité de détecter de une à  $N$  cibles dans chaque direction  $j$  de l'espace. La méthode employée est identique à celle proposée dans le cas déterministe. Les résultats sont similaires bien que la valeur de la probabilité de détection élémentaire soit propre à chaque direction de l'espace.

A présent que la probabilité de détection est optimisée dans chaque direction de l'espace, nous nous intéressons à la répartition de la durée  $T$  entre toutes celles-ci.

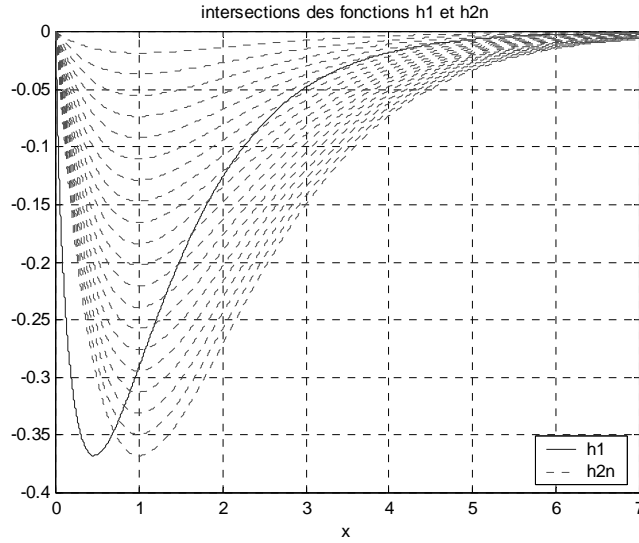


FIG. 4.7: courbes représentatives des fonctions  $h_1$  et  $h_{2n}$ , paramétrées par  $n$

#### 4.3.3.2 Optimisation de l'allocation temporelle entre toutes les directions de l'espace d'observation

L'expression de la probabilité de détection cumulée obtenue dans le lemme 4.4 est identique à celle du lemme 3.1 à la définition des  $\tau$  près. Bien que nous ne soyons pas dans le cadre d'une hypothèse déterministe, cette similitude nous permet de raisonner pour l'optimisation du critère  $\mathcal{G}$  de la même façon que dans la section 4.1.2, et par conséquent d'en reprendre les résultats. Nous énonçons ainsi le lemme 4.5 :

**Lemme 4.5** Soit la fonction  $x \mapsto [x]^+$  définie sur  $\mathcal{R}$  par :

$$\begin{aligned} [x]^+ &= x \text{ si } x > 0 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \quad (4.73)$$

et  $\lambda$  l'unique solution de l'équation :

$$\sum_{j=1}^{nb\_c\varphi} \frac{\tau_j}{T} \left[ \ln \left( \frac{T\epsilon_j}{\tau_j \lambda} \right) \right]^+ - 1 = 0 \quad (4.74)$$

On appelle  $\mathcal{I}$  l'ensemble défini par :

$$\mathcal{I} = \left\{ j \in \{1, \dots, nb\_c\varphi\} \mid \lambda < \frac{T\epsilon_j}{\tau_j} \right\} \quad (4.75)$$

La répartition optimale  $t$  qui optimise le Lagrangien (4.12) avec les probabilités de détection définies en (4.64) est égale à :

$$\begin{cases} t_j &= \tau_j \ln \left( \frac{T\epsilon_j}{\tau_j \lambda} \right) \text{ si } j \in \mathcal{I} \\ &= 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (4.76)$$

Le nombre optimal  $m_j$  de détections élémentaires à réaliser dans chaque intervalle de temps  $t_j$ , donc dans chaque direction  $j$ , est alors égal à :

$$m_j = \left( \frac{\gamma_{sj} t^{n_j}}{\omega_j} \right)^{\frac{1}{n_j}} \quad (4.77)$$

La durée d'un cycle élémentaire est  $t'_j = \frac{t_j}{m_j}$ .

**Preuve** La preuve de ce lemme est identique à celle du lemme 4.1 aux définitions des  $\tau_j$  et  $M_j$  près. ■

A l'origine, toutes les directions de l'espace d'observation ont été considérées, finalement toutes ne sont pas observées. Deux raisons expliquent ces évictions. La première est issue de l'approximation par le modèle (4.61), nous verrons sa justification dans le paragraphe 4.3.5. La deuxième est directement liée à la définition (4.15) de l'ensemble  $\mathcal{I}$ .

A partir d'une connaissance *a priori* traduite par des densités de localisation, nous sommes donc capables de déterminer analytiquement une stratégie de répartition optimale d'une durée  $T$  entre les  $nb_{c_\varphi}$  directions de l'espace et ce, dans le but d'optimiser la détection des  $N$  cibles s'y trouvant. Cette optimisation a été réalisée dans un cadre général, elle est basée sur deux hypothèses :

1. il est possible de déterminer les probabilités de présence dans chaque cellule  $c_{ij}$  à partir de la connaissance *a priori* disponible,
2. il est possible de modéliser la probabilité de détecter de une à  $N$  cibles dans la direction  $j$  par l'expression (4.61).

Afin d'établir une méthode complète de gestion temporelle à partir de la connaissance initiale, nous proposons à présent une méthode de calcul des probabilités de présence et une méthode de modélisation de la probabilité de détection, tout en insistant sur le fait que les méthodes employées n'entravent en rien la généralité de la démarche globale. Nous nous intéresserons d'autre part à la méthode de calcul des coefficients de pondération  $\epsilon_j$ .

#### 4.3.4 Probabilités de localisation

Comme il a été dit auparavant, les radars de détection lointaine qui composent le système d'écoute ne fournissent pas une information très précise, étant transmise avec des intervalles

de temps assez longs. Ces deux éléments justifient d'une part la nécessité de redétection à partir d'une connaissance *a priori* mais aussi l'indépendance des coordonnées de la cible entre deux intervalles de temps. En nous plaçant dans un espace à deux dimensions, nous considérons dans un premier temps un repère cartésien et les coordonnées de position de la cible  $x$  et  $y$ . Ces coordonnées sont des variables aléatoires.

Parce qu'elle est la loi la plus à même de représenter des distributions naturelles, que ses propriétés mathématiques sont intéressantes et parce qu'un ajustement de ses paramètres nous permettra de traduire facilement tous les niveaux de la précision de l'information, la loi normale est celle qui a été retenue comme distribution de nos deux coordonnées ([VEN73], [BLA81]). D'autres lois pourront être choisies, s'adaptant mieux à d'autres configurations, sans remettre en cause la généralité de la méthode.

Soient  $\bar{x}$  et  $\sigma_x$  la moyenne et l'écart-type de l'abscisse  $x$ ,  $\bar{y}$  et  $\sigma_y$  ceux de l'ordonnée  $y$ . Les densités de probabilités associées aux lois normales  $\mathcal{N}(\bar{x}, \sigma_x)$  et  $\mathcal{N}(\bar{y}, \sigma_y)$  sont les suivantes :

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \bar{x})^2}{\sigma_x^2}\right) \quad (4.78)$$

$$p_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y - \bar{y})^2}{\sigma_y^2}\right) \quad (4.79)$$

La connaissance *a priori* est issue d'avions de type AEW. Ceux-ci ont une fréquence de mesure assez faible qui peut justifier l'hypothèse d'indépendance de nos variables.

Puisque ces deux variables aléatoires sont supposées indépendantes, la densité de probabilité de la variable aléatoire de position  $X$  est égale au produit des deux densités (4.78) et (4.79), soit :

$$p_X(x, y) = p_x(x) p_y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left[-\frac{1}{2} \left( \left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}\right)^2 \right)\right] \quad (4.80)$$

Cette expression de la densité de localisation de la cible va nous permettre d'établir sa probabilité de présence dans chacune des cellules de l'espace par intégration sur leur surface. Ces cellules ont été détaillées dans le paragraphe 3.1.1, nous pouvons constater qu'elles ont été définies en direction et en distance, c'est à dire en coordonnées polaires. L'intégration va donc nécessiter une adaptation des deux systèmes de coordonnées et par là même engendrer la complexification de nos calculs. C'est pourquoi nous choisissons de réaliser une approximation de la probabilité de présence de la cible dans la cellule par la somme des probabilités sur des surfaces élémentaires la composant. Ces surfaces élémentaires auront leurs côtés parallèles aux axes du repère afin de permettre l'utilisation de la propriété d'indépendance des variables. Notons que nous pourrions considérer à l'origine des densités de probabilités en  $(r, \theta)$ , c'est à dire directement dans le repère polaire. Cependant l'intégration ne s'en trouverait pas facilitée pour autant car l'hypothèse d'indépendance des variables ne serait plus valable.



C'est pourquoi nous proposons la méthode ci-dessous qui aura comme avantage sa simplicité de mise en œuvre et la donnée d'une expression analytique de la probabilité de localisation dans une cellule.

#### 4.3.4.1 Décomposition de la cellule en un ensemble de cellules élémentaires

La position de la cible est définie dans un repère cartésien. Considérant une discrétisation de l'espace, celui-ci est représenté par un ensemble de cellules « cartésiennes » de dimensions  $dx$  et  $dy$ , que nous prendrons identiques. Leurs valeurs peuvent être variables, nous les prendrons égales à  $50\text{ m}$ , selon les ordres de grandeur donnés par G. W. Stimson ([STI98]).

Nous définissons à présent un réseau de cellules plus fin, chacune d'entre elles représentant une surface élémentaire d'intégration, soit un carré de côté  $a = \frac{dx}{a}$ .  $a$  est un paramètre entier à définir en fonction de la précision désirée, une valeur égale à cinq donne, pour  $dx = 50\text{ m}$  des cellules élémentaires de  $100\text{ m}^2$  de surface. Ces cellules sont illustrées figure 4.8 page 120.

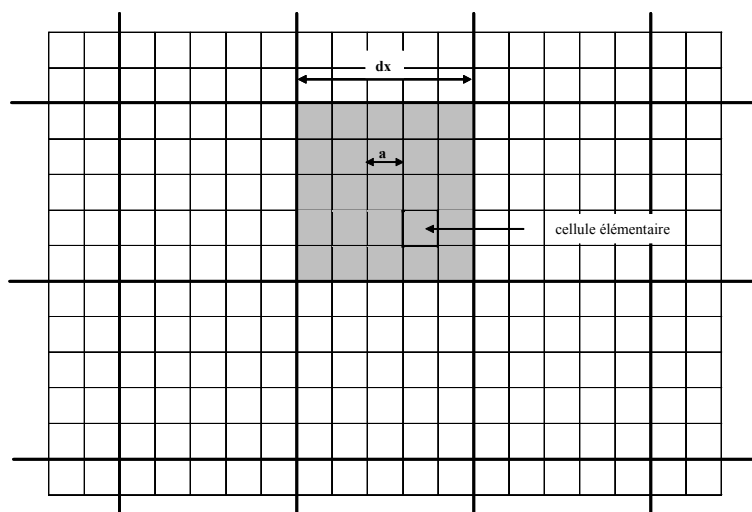


FIG. 4.8: décomposition des cellules cartésiennes en cellules élémentaires

#### 4.3.4.2 Calcul de la probabilité de présence d'une cible sur une cellule élémentaire

Considérons une variable aléatoire  $Z$  de loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ .  $Z$  a pour densité de probabilité :

$$p_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (4.81)$$

La probabilité que  $Z$  soit comprise entre zéro et une valeur  $z$ , notée  $P(0 < Z < z)$ , correspond à la surface limitée par la courbe de la distribution et les abscisses zéro et  $z$ , elle

a pour expression :

$$P(0 < Z < z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (4.82)$$

En considérant la fonction d'erreur de la loi normale erf définie dans le chapitre 3 par l'expression (3.37), cette probabilité se calcule ainsi :

$$P(0 < Z < z) = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{z}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.83)$$

En généralisant ces expressions au cas d'une variable aléatoire  $Y$  de loi normale d'espérance  $m$  et d'écart-type  $\sigma$ , la probabilité que  $Y$  soit comprise entre zéro et  $y$  est :

$$P(0 < Y < y) = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{y - m}{\sqrt{2}\sigma} \right) \quad (4.84)$$

Enfin, la probabilité que la variable aléatoire  $Y$  soit comprise entre les valeurs  $y_1$  et  $y_2$  est donnée par la formule générale :

$$P(y_1 < Y < y_2) = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{y_2 - m}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{y_1 - m}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right] \quad (4.85)$$

Revenons à présent à nos cellules élémentaires. Elles sont définies par deux intervalles :

$$\text{cellule } (u, v) : \quad \begin{cases} x(u) \leq x \leq x(u) + a \\ y(v) \leq y \leq y(v) + a \end{cases} \quad (4.86)$$

Selon les équations (4.80) et (4.85), la probabilité de présence de la cible dans la cellule élémentaire d'indices  $(u, v)$  est calculée par :

$$P_e(u, v) = \Phi_x^*(u, a) \Phi_y^*(v, a) \quad (4.87)$$

avec

$$\Phi_z^*(i, a) = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{z(i) + a - m}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{z(i) - m}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right], \quad z \text{ de loi normale } \mathcal{N}(m, \sigma) \quad (4.88)$$

#### 4.3.4.3 Approximation de la probabilité de présence dans une «cellule polaire»

Nous appelons « cellule polaire » une cellule définie en distance et en direction, c'est à dire dans le repère polaire. La cellule  $c_{ij}$  est la cellule polaire de direction  $\theta_j$ , centrée autour de la distance  $d_i$ . Cette cellule et les intervalles correspondants sont représentés figure 4.9 page 122. Elle est telle que  $r_1 = d_i - p_r$ ,  $r_2 = d_i + p_r$ ,  $\theta_1 = \theta_j - p_\theta$  et  $\theta_2 = \theta_j + p_\theta$  avec  $p_r = \frac{L_d}{2}$  et  $p_\theta = \frac{\Theta_i}{2}$ .

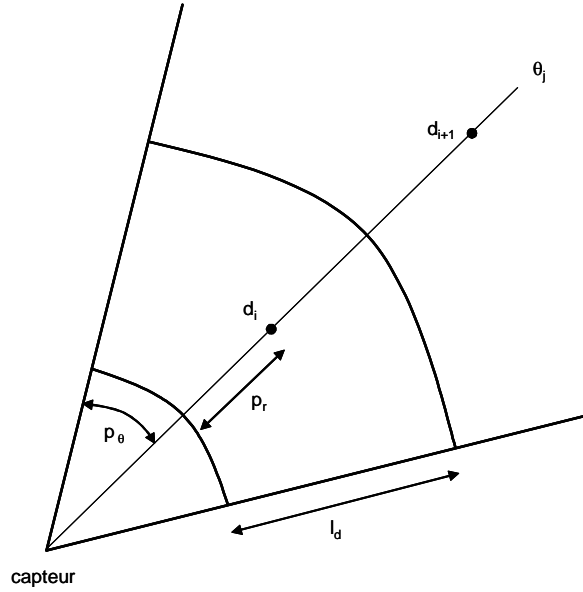


FIG. 4.9: représentation détaillée des centres des cellules et de leurs frontières

Pour chaque cellule polaire, définie en coordonnées polaires par  $r_1, r_2, \theta_1$  et  $\theta_2$ , nous allons déterminer l'ensemble des cellules élémentaires la composant. L'intégration de la densité de présence se fera alors sur chacune de ces cellules. La probabilité de présence d'une cible  $k$  dans la cellule polaire sera la somme de toutes ces probabilités de présence élémentaires et ce parce que les surfaces élémentaires ne se chevauchent pas et recouvrent tout l'espace utile.

La première étape consiste, en se référant au maillage élémentaire, à déterminer l'ensemble des cellules en abscisse sur lesquelles doit être réalisée l'intégration. Ensuite, nous déterminons pour chaque abscisse l'ensemble des cellules en ordonnée. Enfin nous réalisons l'intégration sur ces cellules.

Soit la fonction  $R$  telle que :

$$R(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si } (x - E(x)) < 0.5 \\ E(x) + 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.89)$$

$E$  désignant la fonction partie entière.

Nous définissons alors les indices  $i_o$  et  $i_f$  tels que

$$\begin{aligned} i_o &= \min \left\{ \left| R \left( \frac{r_1 \cos(\theta_1)}{dx} \right) \right|, \left| R \left( \frac{r_1 \cos(\theta_2)}{dx} \right) \right| \right\} \\ i_f &= \max \left\{ \left| R \left( \frac{r_2 \cos(\theta_1)}{dx} \right) \right|, \left| R \left( \frac{r_2 \cos(\theta_2)}{dx} \right) \right| \right\} \end{aligned} \quad (4.90)$$

et les abscisses associées  $x_o = x(i_o)$  et  $x_f = x(i_f)$ . Celles-ci déterminent les valeurs limites des abscisses occupées par la cellule polaire. Leur calcul se fait par le biais d'indices et de la fonction  $R$  afin de se placer dans l'ensemble des valeurs discrètes de l'espace telles qu'elles ont été définies. Nous favorisons ainsi la minimisation des erreurs d'approximation.

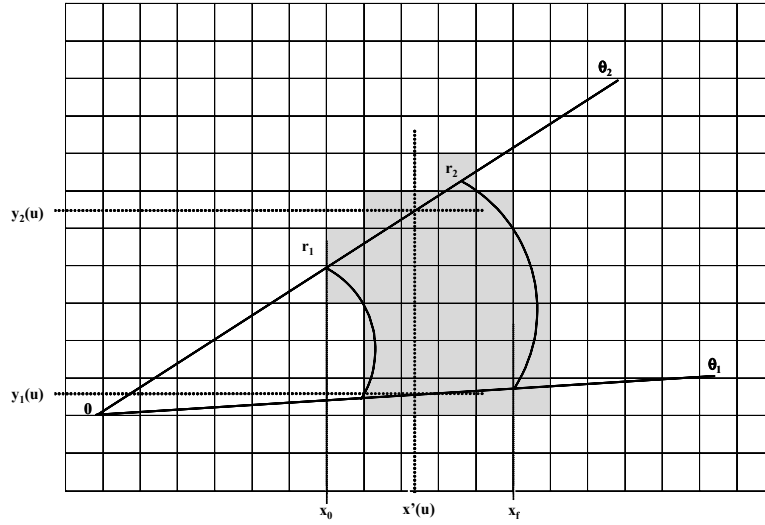


FIG. 4.10: schématisation de l'approximation de la surface de la cellule polaire par un ensemble de cellules élémentaires

Soit  $U(k, i, j)$  le nombre d'abscisses élémentaires  $x'$  comprises entre  $x_o$  et  $x_f$  pour la cible  $k$  et la cellule d'indices  $i$  et  $j$  :

$$U(k, i, j) = 1 + \frac{x_f - x_o}{a} \quad (4.91)$$

Soit  $J_u$  l'ensemble des indices des ordonnées élémentaires  $y'$ , fonctions de l'abscisse élémentaire  $x'(u)$ . Cet ensemble regroupe, pour une abscisse donnée, les indices des ordonnées appartenant à la cellule :

$$J_u = \left\{ v \mid \sqrt{x'^2(u) + y'^2(v)} \in [r_1, r_2] \quad \text{et} \quad y_1(u) \leq y'(v) \leq y_2(u) \right\} \quad (4.92)$$

avec  $y_1(u) = \tan(\theta_1) x'(u)$  et  $y_2(u) = \tan(\theta_2) x'(u)$ .

La figure 4.10 page 123 illustre cette méthode de détermination des cellules élémentaires composant la cellule polaire considérée.

Enfin, puisque la probabilité de présence dans une cellule élémentaire est donnée par la relation (4.87), la probabilité de présence de la cible  $k$  dans la cellule polaire  $c_{ij}$  prise dans son intégralité est approchée par l'expression suivante :

$$P_l(k, c_{ij}) = \sum_{u=1}^{U(k, i, j)} \sum_{v \in J_u} P_e(u, v) \quad (4.93)$$

A partir d'une densité de présence nous avons donc déterminé des probabilités de localisation. Le calcul a été effectué par le biais d'une approximation de la surface des cellules polaires. Celle-ci engendre nécessairement des erreurs auxquelles nous nous intéressons dans le paragraphe ci-après.

#### 4.3.4.4 Calcul des erreurs d'approximation

Nous avons vu que le calcul réalisé consistait en une approximation de la cellule polaire par un ensemble de cellules élémentaires cartésiennes de faibles dimensions. L'erreur réalisée se situe alors sur les bords de cette cellule polaire puisque chaque cellule élémentaire à cheval sur un bord a été considérée dans le calcul approché. La borne supérieure de l'erreur est alors définie comme étant l'intégration de la densité de présence de la cible sur toutes les cellules élémentaires chevauchant les bords de la cellule polaire. Nous définissons ainsi l'ensemble d'indices  $K_u$  :

$$K_u = \left\{ v \mid \sqrt{x'^2(u) + y'^2(v)} = r_1 \text{ ou } r_2 \right\} \cup \left\{ v \mid \sqrt{x'^2(u) + y'^2(v)} \in [r_1, r_2] \text{ et } y'(v) = y_1(u) \text{ ou } y_2(u) \right\} \quad (4.94)$$

et l'erreur  $Err\_approx$  :

$$Err\_approx(k, c_{ij}) = \sum_{u=1}^{U(k,i,j)} \sum_{v \in K_u} P_e(u, v) \quad (4.95)$$

Les cellules élémentaires prises en compte pour le calcul de l'erreur sont représentées figure 4.11 page 124.

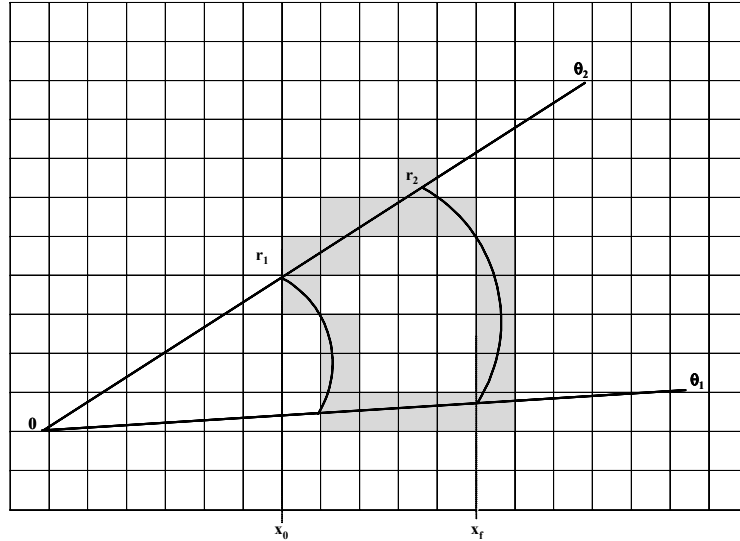


FIG. 4.11: représentation des cellules élémentaires considérées pour le calcul de l'erreur d'approximation

$Err\_approx$  s'interprète comme une borne supérieure de l'erreur d'approximation de la probabilité de localisation de la cible dans la cellule. Nous verrons dans la partie consacrée à

la présentation des simulations qu'elle s'avère être minime, en raison notamment des faibles dimensions des cellules élémentaires. En jouant sur celles-ci, c'est à dire sur le paramètre  $\mathbf{a}$ , nous aurons la possibilité de la diminuer ou de l'augmenter en fonction de la précision désirée.

#### 4.3.5 Modélisation paramétrique des probabilités de détection $P_{dj}$ par la méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés a été retenue pour l'identification des paramètres de modélisation, à cause de sa simplicité de mise en œuvre, en particulier dans le cas linéaire auquel notre problème va se rapporter.

Soit le modèle donné par l'expression (4.61). Nous cherchons à déterminer les paramètres  $\omega_j$  et  $n_j$ . Dans un souci d'allègement de l'écriture, nous omettrons cet indice  $j$  dans les lignes suivantes.

Soit les variables :

$$\begin{aligned} y &= \ln(-\ln(P_d(t))) \\ x &= \ln(t) \\ \alpha &= \ln(\omega) \\ \beta &= -n \end{aligned} \quad (4.96)$$

Nous disposons de  $n_e$  couples  $(x_i, y_i)$ ,  $i \in [1, n_e]$ , constituant un  $n_e$ -échantillon d'observations indépendantes du couple  $(X, Y)$ . Nous supposons vraie l'hypothèse :

$$E(Y|X) = \alpha + \beta X \quad (4.97)$$

Le problème est donc d'estimer les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  ([FOU87], [SAP90]). La méthode des moindres carrés établit que l'expression (4.97) est la meilleure approximation de  $Y$  par  $X$  en moyenne quadratique. Nous cherchons donc à ajuster au nuage de points  $(x_i, y_i)$  une droite d'équation  $y^* = a + bx$  de telle sorte que l'erreur quadratique soit minimale. Cette erreur est donnée par l'expression suivante :

$$Emc(a, b) = \sum_{i=1}^{n_e} (y_i - y_i^*)^2 = \sum_{i=1}^{n_e} (y_i - a - bx_i)^2 \quad (4.98)$$

$a$ ,  $b$  et  $y^*$  sont des estimations sans biais de  $\alpha$ ,  $\beta$  et de  $E(Y|X = x) = \alpha + \beta x$ . La méthode de détermination des paramètres  $a$  et  $b$  est issue de la référence [SAP90]. Le minimum de l'erreur quadratique est atteint lorsque la condition suivante est satisfaite :

$$\frac{\partial Emc(a, b)}{\partial a} = \frac{\partial Emc(a, b)}{\partial b} = 0 \quad (4.99)$$

Les solutions en sont :

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum_{i=1}^{n_e} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n_e} (x_i - \bar{x})^2} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \\ a &= \bar{y} - b\bar{x} \end{aligned} \quad (4.100)$$

avec  $r$  la covariance de  $x$  et  $y$ ,  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  leurs écarts-type,  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  leurs valeurs moyennes. Cette procédure entraîne des écarts résiduels  $e_i = y_i - y_i^*$  de moyenne nulle.

La qualité de l'ajustement linéaire est quantifiable par le coefficient de corrélation linéaire  $R = \frac{r}{\sigma_x \sigma_y}$ . Celui-ci doit être proche de l'unité pour assurer un ajustement valide.

Les paramètres  $\omega$  et  $n$  du modèle (4.61) sont obtenus à partir des équations (4.96). Ils appartiennent d'autre part à l'ensemble  $\mathcal{R}^{+*}$ . En effet,  $y$  est une fonction décroissante du temps alors que  $x$  est croissante, le coefficient directeur de la droite  $y = \alpha + \beta x$  est alors négatif, donc  $n$  positif. D'autre part, selon les équations (4.96)  $\omega = \exp(\alpha)$ , donc est strictement positif.

Cependant, avant de calculer  $\omega$  et  $n$ , il va être nécessaire de spécifier le nombre  $n_e$  d'échantillons sur lesquels va être réalisée l'approximation. En effet, la relation (4.96) entre  $x$  et  $y$  étant linéaire, le nombre d'échantillons sur lesquels faire l'approximation peut alors être arbitraire. Toutefois la précision numérique de notre simulateur va nous contraindre à déterminer pour chaque  $j$  un ensemble de valeurs sur lesquelles réaliser l'approximation. Nous allons voir cela en étudiant le modèle (4.61).

#### 4.3.5.1 Etude du modèle $P_d(t) = \exp(-\omega t^{-n})$

Soit  $f$  la fonction telle que :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{R}^{+*} &\longrightarrow ]0, 1] \\ t &\mapsto f_{\omega,n}(t) = \exp(-\omega t^{-n}) \end{aligned} \quad (4.101)$$

Soit la fonction  $g$ , dérivée de  $f$  :

$$\begin{aligned} g : \mathcal{R}^{+*} &\longrightarrow \mathcal{R}^{+*} \\ t &\mapsto g_{\omega,n}(t) = f'_{\omega,n}(t) = \omega n t^{-n-1} \exp(-\omega t^{-n}) \end{aligned} \quad (4.102)$$

Les limites de cette fonction sont telles que :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} g_{\omega,n}(t) &= +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} g_{\omega,n}(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\omega n}{t^{n+1}} \exp(-\omega t^{-n}) < \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\omega n}{t^{n+1}} \quad \text{car } (\omega, n) \in (\mathcal{R}^{+*})^2 \end{aligned} \quad (4.103)$$

Or  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\omega n}{t^{n+1}} = 0$ , donc selon le théorème d'encadrement  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g_{\omega,n}(t) = 0$ . Il en résulte que pour  $t$  suffisamment grand la dérivée de la probabilité tend à devenir nulle.

La précision numérique de Matlab<sup>®</sup> est  $e = 2.2204 \cdot 10^{-16}$  (distance entre 1.0 et le flottant le plus proche). En dessous de cette valeur il n'est plus capable de discerner les évolutions des variables même si celles-ci sont existantes, et se pose ainsi en saturateur venant dégrader la linéarité entre les variables  $x$  et  $y$ . C'est pourquoi nous fixons une valeur seuil  $\varepsilon_s$  et nous déterminons la borne supérieure de l'intervalle sur lequel réaliser l'identification par l'instant à partir duquel la dérivée  $g$  devient inférieure à  $\varepsilon_s$ .

La valeur inférieure de l'intervalle d'approximation sera quant à elle choisie de manière à ce que la probabilité  $P_{dj}(t)$  ne soit pas trop faible et que la quantité  $y$  soit par conséquent définie. Ceci est dû à nouveau à la précision de Matlab<sup>®</sup> qui, en dessous de la valeur  $e$ , aura tendance à arrondir les valeurs des probabilités et faire apparaître ainsi des  $\ln(0)$  qui viendront fausser l'identification.

Ainsi l'ensemble des valeurs sur lesquelles réaliser l'identification des paramètres  $\omega$  et  $n$  est l'ensemble  $\mathcal{E}$  défini en (4.104) :

$$\mathcal{E} = \{t | P_d(t) > e \text{ et } g_{\omega,n}(t) > \varepsilon_s\} \quad (4.104)$$

Après détermination de l'ensemble  $\mathcal{E}$ , l'identification par la méthode des moindres carrés est effectuée et donne pour chacune des  $nb_{-c_\varphi}$  directions de l'espace d'observation les paramètres  $\omega_j$  et  $n_j$  optimaux.

Nous verrons cependant dans le paragraphe 4.3.9 qu'il pourra arriver qu'il ne soit pas possible de déterminer ces paramètres pour certaines directions dans lesquelles les probabilités de détection seront nulles, en raison de probabilités de présence nulles ou de distributions trop lointaines. Les probabilités dans ces directions ne seront donc pas modélisées, donc pas considérées dans l'étude de l'allocation temporelle. Ceci va bien sûr de pair avec des probabilités de détection nulles.

### 4.3.6 Calcul des coefficients de pondération

Le calcul de ces coefficients a été abordé dans la section 4.1.3, il s'agissait alors de déterminer, par rapport au capteur, le poids de la détection d'une cible à faire intervenir dans le critère  $\mathcal{J}$  à optimiser. Dans l'hypothèse actuelle, le critère  $\mathcal{G}$  n'est plus élaboré en fonction de la probabilité de détection des  $N$  cibles mais de celle de la détection de une à  $N$  cibles dans les  $nb_{-c_\varphi}$  directions de l'espace. Le problème de la pondération n'est donc plus orienté vers la priorité accordée à l'observation des cibles mais vers celle de l'observation des directions, qui va dépendre cependant de la première. Le but de cette section est alors d'élaborer les pondérations  $\epsilon_j$ .

Comme dans la section 4.1.3, nous pouvons nous demander ce qui rend la surveillance d'une direction prioritaire. Des zones dangereuses de l'espace peuvent avoir été identifiées préalablement, mais c'est surtout la présence des cibles qui va être le facteur déterminant. Ainsi nous définissons nos pondérations directionnelles proportionnellement aux probabilités de localisation des cibles. Le facteur de proportionnalité sera un coefficient  $\alpha$  tel qu'il a été défini dans la section 4.1.3 et traduisant l'influence de facteurs extérieurs ou propres aux cibles. D'autre part nous considérons que la menace est d'autant plus grande que les cibles sont proches du capteur. Nous introduisons alors un facteur inversement proportionnel au carré de la distance, comme il a été fait dans la section 4.1.3. Les distances considérées seront les distances entre le capteur et les centres des distributions. Nous les noterons  $d_k$ ,  $k \in \{1, \dots, N\}$ .



Soit  $P_{ljk}$  la probabilité de localisation de la cible  $k$  dans la direction  $j$ . Etant donné que toutes les cellules sont discernables les unes des autres et qu'elles couvrent tout l'espace nous avons :

$$P_{ljk} = \sum_{i=1}^{nb\_cd} P_{lijk} \quad (4.105)$$

Par ailleurs plusieurs cibles peuvent se trouver dans le même axe de visée du capteur. La menace pouvant se trouver dans une direction donnée sera donc due à la présence de chacune des cibles. Par sécurité nous considérons que c'est la cible la plus dangereuse qui détermine quelle est la priorité à accorder à l'observation de la direction dans laquelle elle se trouve. Nous définissons ainsi les  $\epsilon_j$  :

$$\epsilon_j = \frac{\max_k \left( \frac{\alpha_{jk} P_{ljk}}{d_k^2} \right)}{\sum_{u=1}^{nb\_c\varphi} \max_k \left( \frac{\alpha_{uk} P_{luk}}{d_k^2} \right)} \quad (4.106)$$

La distance  $\bar{d}_k$  est la distance par rapport au centre de la distribution la plus proche.

Rappelons ici que notre but est de généraliser les résultats de la section 4.1 à une situation pour laquelle la connaissance initiale est de nature probabiliste. Après avoir calculé les probabilités de présence des cibles dans l'espace d'observation, nous avons calculé les probabilités de détection correspondantes et réalisé leur modélisation pour en obtenir une formulation conduisant à l'application de résultats connus. Les résultats de cette section se trouvent donc être une généralisation des précédents et ce, dans deux sens :

1. même si elles ne sont pas toutes observées, toutes les directions de l'espace sont considérées à l'origine. C'est le processus d'optimisation qui conduit à en éliminer certaines,
2. pour des distributions de faibles écarts-type, donc pour une très bonne connaissance *a priori*, nous retrouvons des résultats similaires à ceux obtenus dans le cas déterministe.

Ces deux propriétés seront illustrées dans le paragraphe de ce chapitre consacré aux simulations.

Par ailleurs nous pouvons remarquer que notre problématique est très proche de celle étudiée en théorie de la recherche, section 2.4 ([KOO56], [KOO57], [KOO79], [GUE61], [LEC99]). Nous allons par conséquent chercher à la replacer dans le cadre de cette théorie en partant du fait que l'expression de la probabilité de détection d'une cible que nous avons déterminée grâce à une stratégie de découpage du temps, a la forme de celles des probabilités de détection manipulées dans ce domaine de recherche. Ceci est le but de la section suivante.

Comme il a été fait pour les hypothèses 1 et 2 nous nous intéresserons ensuite à l'évaluation des performances de notre stratégie d'allocation en définissant une contrainte opérationnelle et en cherchant quelles sont les conditions pour qu'elle soit réalisable.

Nous consacrerons enfin la dernière partie de ce chapitre à l'illustration de nos résultats par des simulations sur des situations fictives.

### 4.3.7 La théorie de la recherche

La théorie de la recherche ou *Search Theory* a été présentée dans le chapitre 2 consacré à une synthèse bibliographique. Le but de cette section est dans un premier temps de mettre en évidence le parallèle entre cette théorie et les résultats que nous venons d'exposer, dans un deuxième temps de montrer en quoi ceux-ci permettent de la compléter. Nous nous intéressons en particulier à la première situation pour laquelle l'axe de visée du capteur est fixe et la configuration capteur-cible stationnaire. À cette situation correspond l'algorithme de « de Guenin ».

#### 4.3.7.1 Hypothèses de la théorie de la recherche

L'algorithme de « de Guenin » tel qu'il a été défini dans le chapitre 2 et dans [LEC99] se base sur plusieurs hypothèses :

- un effort de recherche total disponible et infiniment divisible,
- une connaissance *a priori*, par la donnée d'une densité de probabilité de présence en continu ou d'une probabilité de présence par cellule dans le cas discret,
- une loi de détection locale satisfaisant la loi des rendements décroissants, fonction de l'effort de recherche local et d'un paramètre de visibilité.

À partir de ces hypothèses, et dans le cas discret, l'algorithme de « de Guenin » permet d'établir la répartition optimale de l'effort de recherche entre les différentes cellules de l'espace d'observation et ce, dans le cas d'un capteur d'axe de visée fixe ayant en charge l'observation d'une unique cible stationnaire.

Nous allons voir comment les résultats de la section 4.3 vont nous permettre d'adapter cet algorithme à un contexte multicible.

Notre effort de recherche est la durée allouée à la phase de détection. Nous cherchons alors la répartition optimale de cet effort de recherche sur les  $nb\_c_\varphi$  directions de l'espace, que nous considérons comme les cellules de l'espace discrétisé et que nous nommerons  $c_j$ . Nous conserverons d'autre part cette notion de cellules afin de se rapprocher le plus possible des hypothèses et des définitions propres à l'algorithme de « de Guenin ». Comme il a déjà été précisé nous supposons que cet effort de recherche est infiniment divisible.

Pour utiliser l'algorithme de « de Guenin » il nous est nécessaire de définir une densité de probabilité de localisation et une probabilité de détection locale.

La connaissance *a priori* dont nous disposons est traduite par les densités de localisation de nos cibles. Nous avons pour chaque cellule  $c_{ij}$  de l'espace discrétisé une probabilité de présence de la cible  $k$  définie dans la section 4.3 par le terme  $\rho_{ijk}$ . À partir de là nous pouvons établir la probabilité  $\rho_j$ , probabilité de localiser une ou plusieurs cibles dans la direction  $j$  de l'espace.

La probabilité de détection dans chaque direction de l'espace a été modélisée par l'expression (4.61). Il s'agit d'une probabilité conditionnelle intégrant le fait que la (ou les

cibles) se trouve(nt) effectivement dans les cellules considérées. Cependant cette probabilité de détection ne satisfait pas la loi des rendements décroissants, ceci rend impossible l'utilisation de l'algorithme de « de Guenin ». Nous prendrons donc comme probabilité de détection locale une probabilité de la forme (4.64) qui intègre une pré-optimisation locale par décomposition en un nombre optimal de détections élémentaires et qui dispose des qualités requises.

Nous définissons ainsi :

- $\phi$  l'effort de recherche total,  $\phi = T$ ,
- $\varphi(c_j)$  l'effort de recherche dans la cellule  $c_j$ ,
- $g(c_j) = \rho_j$  la probabilité de localisation dans la cellule  $c_j$ ,
- $p(c_j, \varphi(c_j)) = p(c_j) = \frac{1}{\rho_j} \left( 1 - \exp\left(\frac{-\varphi(c_j)}{\tau_j}\right) \right)$  la probabilité locale de détection dans la cellule  $c_j$ .
- $P(c_j, \varphi(c_j)) = P(c_j) = g(c_j)p(c_j) = 1 - \exp\left(\frac{-\varphi(c_j)}{\tau_j}\right)$  la probabilité de détection dans la cellule  $c_j$ , sachant qu'elle s'y trouve effectivement.

$P(c_j)$  est alors la probabilité qu'une à  $N$  cibles se trouvent dans la direction  $j$  et qu'elles y soient détectées grâce à l'effort de recherche  $\varphi(c_j)$ , c'est à dire pendant la durée  $t_j$ .

Pour simplifier l'écriture du problème, nous posons :

$$x(c_j) = \frac{\varphi(c_j)}{\phi} \quad \text{et} \quad \nu_j = \frac{\phi}{\tau_j} \quad (4.107)$$

$x(c_j)$  est un effort de recherche normalisé.  $\nu_j$  est interprété comme un paramètre de visibilité. Nous obtenons alors les expressions (4.108) et (4.109) des probabilités de détection locales et totales :

$$p(c_j, x(c_j)) = \frac{1}{\rho_j} (1 - \exp(-\nu_j x(c_j))) \quad (4.108)$$

$$P(c_j) = P(x(c_j)) = 1 - \exp(-\nu_j x(c_j)) \quad (4.109)$$

La tâche assignée à l'algorithme de « de Guenin » est alors de terminer la répartition optimale des  $x(c_j)$ , tels que  $\sum_{j=1}^{nb-c\varphi} x(c_j) = 1$ , permettant d'optimiser la probabilité de détection totale (4.109).

Nous allons voir dans un premier temps que la formulation de l'algorithme de « de Guenin » avec les densités telles qu'elles ont été décrites ci-dessus rend le calcul de la répartition de l'effort de recherche indépendant de la façon dont sont calculées les probabilités de présence.

#### 4.3.7.2 Indépendance du résultat par rapport à la méthode de calcul de $\rho_j$

L'une des conditions d'utilisation de l'algorithme de « de Guenin » est la définition séparée des probabilités de présence et de détection. Or, nous avons vu que les probabilités

de détection calculées et modélisées intégraient implicitement les connaissances *a priori* dans chaque cellule  $c_{ij}$ . Il a donc été nécessaire de faire apparaître explicitement les probabilités de présence  $\rho_j$  dans chaque direction de l'espace. Cependant leur calcul, à partir des  $\rho_{ij}$ , s'avère inutile. En effet, en étudiant l'algorithme de « de Guenin » nous nous apercevons que la densité de présence  $g$  n'intervient qu'à deux niveaux : lors de la détermination de l'espace de recherche et lors du calcul de l'effort de recherche élémentaire. Nous allons voir que les définitions et les calculs sont indépendants de son expression.

#### 4.3.7.2.1 Détermination de l'espace de recherche

Rappelons que l'espace de recherche est l'ensemble des cellules sur lesquelles va être réparti l'effort de recherche. Nous pouvons dès à présent faire le rapprochement entre cet espace et l'ensemble  $\mathcal{I}$  des cibles entre lesquelles est répartie la durée allouée à la phase de détection.

**Lemme 4.6** *La cellule  $c_j$  appartient à l'espace de recherche  $E_R$  si et seulement si*

$$\frac{\lambda}{\nu_j} < 1 \quad (4.110)$$

**Preuve** Selon l'algorithme de « de Guenin », une cellule  $c$  appartient à l'espace de recherche  $E_R$  si et seulement si  $g(c) > \frac{\lambda}{p'(0)}$ . Traduisons cette condition nécessaire et suffisante avec nos expressions. Si

$$p(c_j, x(c_j)) = \frac{1}{\rho_j} (1 - \exp(-\nu_j x(c_j))) \quad (4.111)$$

alors

$$p'(c_j, x(c_j)) = \frac{\nu_j}{\rho_j} \exp(-\nu_j x(c_j)) \quad (4.112)$$

et

$$p'(c_j, 0) = \frac{\nu_j}{\rho_j} \quad (4.113)$$

Or  $g(c_j) = \rho_j$ . Les deux inégalités suivantes sont donc équivalentes :

$$g(c) > \frac{\lambda}{p'(0)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda}{\nu_j} < 1 \quad (4.114)$$

■

#### 4.3.7.2.2 Calcul de l'effort de recherche élémentaire

**Lemme 4.7** *L'effort de recherche normalisé élémentaire dans la cellule  $c_j$  appartenant à l'espace de recherche  $E_R$  est :*

$$x_\lambda(c_j) = \frac{1}{\nu_j} \ln \left( \frac{\nu_j}{\lambda} \right) \quad (4.115)$$

**Preuve** L'effort de recherche est calculé à partir de la fonction inverse de la dérivée de la probabilité élémentaire de détection. Celle-ci est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{R}^+ &\longrightarrow \mathcal{R} \\ z &\mapsto f(z) = \frac{1}{\nu_j} \ln \left( \frac{\nu_j}{z\rho_j} \right) \end{aligned} \quad (4.116)$$

L'effort de recherche normalisé dans la cellule  $c_j$  appartenant à l'espace de recherche  $E_R$  est, selon la condition d'optimalité (2.18) :

$$x_\lambda(c_j) = f \left( \frac{\lambda}{g(c_j)} \right) \quad (4.117)$$

Or  $g(c_j) = \rho_j$ . En combinant les équations (4.116) et (4.117) nous obtenons l'équation (4.115) indépendante de  $\rho_j$ . ■

Ces deux lemmes montrent l'indépendance de l'algorithme de « de Guenin » modifié à la valeur explicite de la probabilité de présence  $g(c_j) = \rho_j$ . Ceci était prévisible puisque les probabilités de présence ont été intégrées dans le calcul dès la détermination des probabilités de détection qui sont des probabilités conditionnelles. Les faire apparaître sous la forme  $\rho_j$  n'était qu'un artifice de calcul permettant de satisfaire les hypothèses de départ de l'algorithme de « de Guenin ».

La représentation schématique de l'algorithme a été donnée dans le chapitre bibliographique. Il est ici écrit en pseudo-langage, dans sa forme modifiée et adaptée à notre étude.

#### 4.3.7.3 Algorithme de « de Guenin »

**début**

-- déclaration des variables, initialisation --

$\phi$

$w$

$\lambda$

$R$

*tolerance*

*nb\_cellules*

*correction*

*nb\_it*  $\leftarrow 0$

$\phi_\lambda \leftarrow 0$

**tant que** *erreur* > *tolerance* **faire**  
**pour**  $i = 1$  à *nb\_cellules* **faire**  
  **si**  $\frac{\lambda}{w(i)} < 1$  **faire**  
     $R \leftarrow \text{concatenation}(R, i)$   
     $x(i) \leftarrow f(\lambda, w(i))$   
  **sinon**  
     $x(i) \leftarrow 0$   
  **fin si**  
   $\varphi(i) \leftarrow x(i) * \phi$   
   $\phi_\lambda \leftarrow \phi_\lambda + \varphi(i)$   
**fin pour**  
*erreur*  $\leftarrow \phi - \phi_\lambda$   
 $(\lambda, \text{correction}) \leftarrow \text{dichotomie}(\phi, \phi_\lambda, \lambda, \text{correction})$   
*nb\_it*  $\leftarrow \text{nb_it} + 1$   
**fin tant que**  
**fin**

*Primitives :*

**fonction**  $f(z, w) : y$

- - cette fonction retourne la valeur  $y$  de la fonction  $\frac{1}{w} \ln\left(\frac{w}{z}\right)$  calculée en  $z$  et  $w$  - -

$y \leftarrow \frac{1}{w} \ln\left(\frac{w}{z}\right)$

**fin fonction**

**fonction**  $\text{concatenation}(x, y) : x$

- - cette fonction réalise la concaténation du vecteur  $x$  et de l'élément  $y$  et retourne le vecteur résultant dans  $x$  - -

**si**  $\text{longueur}(y) = 1$  **faire**

$a \leftarrow \text{longueur}(x)$

$x(a + 1) \leftarrow y$

**fin si**

**fin fonction**

**fonction**  $\text{dichotomie}(\phi, \phi_\lambda, \lambda, \text{correction}) : \lambda, \text{correction}$

- - cette fonction réalise une itération de dichotomie pour ajustement du paramètre  $\lambda$  et par la modification de la variable *correction*.  $\lambda$  et *correction* sont les variables de sortie de la fonction - -

```

tgd ← 0
tpt ← 0
si  $\phi_\lambda < \phi$  faire
    tpt ← 1
    si tgd = 1 faire
        correction ← correction/2
        tgd ← 0
        tpt ← 0
    fin si
     $\lambda \leftarrow \lambda - \textit{correction}$ 
sinon faire
    tgd ← 1
    si tpt = 1 faire
        correction ← correction/2
        tgd ← 0
        tpt ← 0
    fin si
     $\lambda \leftarrow \lambda + \textit{correction}$ 
fin si
fin fonction

```

#### 4.3.7.4 Equivalence entre l'optimisation lagrangienne et l'algorithme de « de Guenin »

Les paragraphes 4.3.7.1 et 4.3.7.2 avaient pour but de déterminer la formulation des hypothèses de la théorie de la recherche propres à notre contexte d'étude et de montrer que la résolution de la répartition optimale d'un effort de recherche total était finalement indépendante de certaines d'entre elles. Nous allons maintenant nous intéresser à la comparaison de cette méthode de répartition par l'algorithme de « de Guenin » avec la méthode lagrangienne que nous avons utilisée dans la section 4.3 et à la façon dont celle-ci complète et étend les résultats de la théorie de la recherche.

##### 4.3.7.4.1 Rappel de la méthode lagrangienne

Rappelons ici l'équation (4.76) de la répartition optimale de la durée  $T$  entre les  $nb\_c_\varphi$  directions de l'espace :

$$\begin{cases} t_j = \tau_j \ln \left( \frac{T\epsilon_j}{\tau_j \lambda} \right) & \text{si } j \in \mathcal{I} \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.118)$$

avec

$$\mathcal{I} = \left\{ j \in \{1, \dots, nb\_c_\varphi\} \mid \lambda < \frac{T\epsilon_j}{\tau_j} \right\} \quad (4.119)$$

Les durées  $t_j$  ainsi que l'ensemble  $\mathcal{I}$  dépendent de la valeur optimale  $\underline{\lambda}$  du multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ . Celle-ci est solution de l'équation  $\psi'(\lambda) = 0$  avec :

$$\psi'(\lambda) = -1 + \sum_{j=1}^{nb\_c\varphi} \frac{1}{\nu_j} \left[ \ln\left(\frac{\epsilon_j \nu_j}{\lambda}\right) \right]^+ \quad (4.120)$$

Nous allons voir que la structure itérative de l'algorithme de « de Guenin » formulé avec nos hypothèses nous amène à résoudre la même équation.

#### 4.3.7.4.2 Algorithme de « de Guenin »

Le principe de l'algorithme de « de Guenin » est de déterminer itérativement la valeur du paramètre  $\lambda$  telle que la somme sur un espace de recherche, lui-même fonction de  $\lambda$ , d'efforts de recherche locaux soit égale à un effort de recherche total.  $\phi$  est cet effort de recherche total,  $\varphi_\lambda(c_j)$  est l'effort de recherche dans la cellule  $c_j$ ,  $x_\lambda(c_j)$  est l'effort de recherche normalisé et  $\phi(\lambda)$  représente la somme de ces efforts locaux sur l'espace de recherche  $E_R$ .

Soit une fonction d'erreur  $E$  :

$$E(\lambda) = \phi(\lambda) - \phi \quad (4.121)$$

$\underline{\lambda}$  est alors solution de l'équation  $E(\lambda) = 0$ , mais aussi de  $E_x(\lambda) = 0$  avec

$$E_x(\lambda) = \left( \sum_{j=1}^{nb\_c\varphi} x_\lambda(c_j) \right) - 1 = X(\lambda) - 1 \quad (4.122)$$

Détaillons cette équation. L'effort de recherche normalisé local est donné par l'expression (4.115) sous la condition  $\frac{\lambda}{\nu_j} < 1$ . Elle se réécrit sous la forme :

$$x_\lambda(c_j) = \frac{1}{\nu_j} \left[ \ln\left(\frac{\nu_j}{\lambda}\right) \right]^+ \quad (4.123)$$

Nous avons alors

$$X(\lambda) = \sum_{j=1}^{nb\_c\varphi} \frac{1}{\nu_j} \left[ \ln\left(\frac{\nu_j}{\lambda}\right) \right]^+ \quad (4.124)$$

et

$$E_x(\lambda) = -1 + \sum_{j=1}^{nb\_c\varphi} \frac{1}{\nu_j} \left[ \ln\left(\frac{\nu_j}{\lambda}\right) \right]^+ \quad (4.125)$$

Les équations (4.120) et (4.125) sont semblables, en posant  $\epsilon_j = 1$ , elles deviennent identiques et ont par conséquent la même solution  $\underline{\lambda}$ .



Les efforts de recherche optimaux sont issus des équations (4.107) et (4.115) :

$$\begin{cases} \varphi(c_j) = \frac{\phi}{\nu_j} \ln\left(\frac{\nu_j}{\lambda}\right) & \text{si } j \in E_R \\ \varphi(c_j) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.126)$$

D'autre part, nous pouvons remarquer que, pour des pondérations unitaires, les ensembles  $\mathcal{I}$  et  $E_R$  ont les mêmes définitions.

L'algorithme de « de Guenin » formulé avec les hypothèses propres à notre étude fournira par conséquent exactement les mêmes résultats que ceux obtenus par optimisation lagrangienne. Ce résultat était cependant prévisible puisque les deux théories sont basées sur les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker ([HIR96], [LEC99]). Notons d'autre part que l'algorithme de « de Guenin » n'intègre pas dans sa structure de facteurs de pondération tels qu'ils apparaissent dans le critère d'optimisation lagrangienne. Il est toutefois possible de les introduire dans le critère défini en (2.17). La condition d'optimalité de « de Guenin » s'écrira alors

$$\epsilon_j g(c_j) p'_x(x(c_j)) = cste = \lambda \quad (4.127)$$

Cette nouvelle formulation conduit à des définitions identiques des ensembles  $\mathcal{I}$  et  $E_R$  ainsi qu'à l'équation :

$$E_x(\lambda) = -1 + \sum_{j=1}^{nb_{c_\varphi}} \frac{1}{\nu_j} \left[ \ln\left(\frac{\epsilon_j \nu_j}{\lambda}\right) \right]^+ \quad (4.128)$$

Celle-ci est à nouveau équivalente à l'expression (4.120).

#### 4.3.8 Evaluation des performances de l'allocation temporelle optimale

A partir d'une connaissance probabiliste sur  $N$  cibles présentes dans la zone de surveillance nous avons déterminé une répartition optimale d'une durée  $T$  dans les  $nb_{c_\varphi}$  directions de l'espace et ce, dans le but d'optimiser la probabilité de détecter une à  $N$  cibles dans chacune d'entre elles. Cette allocation a été réalisée pour la durée  $T$  qui est une donnée du problème. De la même façon que dans les paragraphes 4.1.5 et 4.2.2, nous nous demandons si cette durée permet de satisfaire une contrainte opérationnelle et s'il existe une valeur optimale permettant de l'atteindre. Nous appelons  $\mathcal{C}'_{op}$  cette contrainte :

$\mathcal{C}'_{op}$  : « pendant la durée  $T$  allouée à la phase de détection, la probabilité de détecter de une à  $N$  cibles est supérieure à  $p_0$  dans  $x\%$  des directions dans lesquelles la probabilité de présence des cibles n'est pas nulle »

Nous énonçons dans le théorème 4.3 une condition à laquelle elle est satisfaite.

**Théorème 4.3** *Pendant une durée  $T$  connue et fixée, un radar cherche à détecter  $N$  cibles présentes dans la zone qu'il a pour mission de surveiller. La connaissance a priori sur les*

positions de ces cibles est traduite par des densités de probabilités. Nous supposons qu'il est possible de calculer des probabilités de présence et de détection des cibles dans les différentes directions de l'espace. Si nous supposons que le capteur observe la direction  $j$  pendant la durée  $t_j$ , alors la durée  $T$  permet de satisfaire la contrainte « pendant la durée  $T$  allouée à la phase de détection, la probabilité de détecter une à  $N$  cibles est supérieure à  $p_0$  dans  $x\%$  des directions dans lesquelles la probabilité de présence de cibles n'est pas nulle » si et seulement si :

$$p_{\mathcal{I}}(T) \geq p_x \quad (4.129)$$

et

$$\sum_{j=p_x}^{p_{\mathcal{I}}(T)-1} \left( \sum_{k=1}^{\binom{p_{\mathcal{I}}(T)}{j}} \left[ \prod_{l=1}^j P_d(d_{p,j,k}(l), T) \prod_{n=1}^{p_{\mathcal{I}}(T)-j} (1 - P_d(\overline{d_{p,j,k}}(n), T)) \right] \right) + \prod_{l=1}^{p_{\mathcal{I}}(T)} P_d(d_l, T) - p_0 \geq 0 \quad (4.130)$$

Les notations employées sont les suivantes :

- $p_x$  est le plus petit entier tel que  $\frac{p_x}{N} > \frac{x}{100}$ ,
- $\mathcal{I}$  est l'ensemble défini par la relation (4.75),
- $p_{\mathcal{I}}(T)$  est le cardinal de  $\mathcal{I}$ , lorsque la durée de la phase de détection est  $T$ ,
- $D = \{d_1, \dots, d_{p_{\mathcal{I}}(T)}\}$  est l'ensemble de toutes les distances indicées dans  $\mathcal{C}$  par  $r$ , où  $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, p_{\mathcal{I}}(T)\}$  et  $r$  est la fonction  $r : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $i \mapsto r(i) = i_c$ , fonction permettant la réindexation des indices contenus dans  $\mathcal{I}$ ,
- $P_{p,j}$  est l'ensemble de toutes les combinaisons de  $j$  éléments dans l'ensemble  $D$  de  $p_{\mathcal{I}}(T)$  éléments,
- $c_{p,j}(k)$  est la  $k^{\text{ième}}$  combinaison de  $P_{p,j}$ ,
- $d_{p,j,k}(l)$  est le  $l^{\text{ième}}$  élément de  $c_{p,j}(k)$ ,
- $\overline{c_{p,j}}(k)$  est l'ensemble complémentaire de  $c_{p,j}(k)$  dans  $D$ ,
- $\overline{d_{p,j,k}}(l)$  est le  $l^{\text{ième}}$  élément de  $\overline{c_{p,j}}(k)$

Les probabilités  $P_d(d_{p,j,k}(l), T)$ ,  $P_d(\overline{d_{p,j,k}}(n), T)$  et  $P_d(d_l, T)$  sont déterminées par la relation (4.64).

**Preuve** La preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème 4.1 dans laquelle les expressions (4.5) des probabilités de détection sont remplacées par les expressions (4.64). La différence se trouve au niveau de l'interprétation de la contrainte : nous ne nous intéressons plus à la détection des cibles en elles-mêmes mais aux probabilités de détection dans certaines directions de l'espace. Ces directions sont celles dans lesquelles les probabilités de présence

sont non nulles et pour lesquelles il est possible de modéliser les probabilités de détection par l'expression (4.61), donc d'en établir la formulation optimale (4.64) par le lemme 4.3. ■

Ainsi nous sommes capables, dans le cas d'une connaissance probabiliste, de déterminer si la durée  $T$  permet de satisfaire une contrainte opérationnelle et la durée minimale  $T_{\min}$  à partir de laquelle elle est satisfaite.

Nous trouverons dans la section 4.3.9 une illustration de ce résultat.

### 4.3.9 Illustration des résultats - Simulations

Nous considérons dans un premier temps la présence d'une cible unique dans la zone de surveillance. Nous disposons pour celle-ci d'une distribution de probabilités de présence. En utilisant les résultats des paragraphes précédents, nous allons déterminer pour cette cible ses probabilités de localisation, les erreurs commises sur le calcul de celles-ci ainsi que les probabilités de détection qui lui sont associées. Nous l'intégrerons ensuite dans un environnement multicible, en définissant des scénarios d'étude basés sur la présence de plusieurs cibles dans la zone de surveillance. Nous déterminerons alors pour chaque direction de l'espace la probabilité de détecter une à plusieurs cibles et les paramètres de sa modélisation. Nous donnerons ensuite les résultats d'une allocation temporelle optimale par les différentes méthodes évoquées et comparerons les résultats. Puis, pour illustrer la généralité de notre démarche, nous considérerons des distributions de faibles écarts-type et comparerons nos résultats et ceux pouvant être obtenus par la stratégie développée dans la section 4.1. Enfin nous nous intéresserons à l'influence de la considération de pondérations.

#### 4.3.9.1 Probabilités de présence

Nous considérons une densité de probabilité centrée autour des valeurs  $\bar{x} = 20 \text{ km}$  et  $\bar{y} = 30 \text{ km}$ . La connaissance *a priori* est telle que  $\sigma_x = \sigma_y = 0.1 \text{ km}$ . Les cellules cartésiennes ont un côté de  $50 \text{ m}$  de longueur, celui des cellules élémentaires mesure  $10 \text{ m}$ . Le tableau 4.12 regroupe les valeurs des probabilités de présence dans les cellules voisines de la cellule polaire à laquelle est rattaché le centre de la distribution.

Les cellules indicées sont les cellules polaires.  $d$  est la distance,  $\varphi$  est la direction. L'indice zéro représente la cellule sur laquelle est centrée la distribution.  $n_c$  est le nombre de cellules dont on s'en éloigne, aussi bien en distance qu'en direction. Certaines valeurs figurant dans ces tableaux et dans les suivants sont très faibles, elles apparaissent ici à titre indicatif afin de montrer l'évolution des valeurs mais seront considérées comme nulles dans un contexte plus opérationnel. A ce niveau-là un seuil pourra être fixé pour établir la limite entre des probabilités nulles ou non. Nous le fixons par exemple à 1%.

Plusieurs remarques peuvent être formulées par rapport au calcul des probabilités de localisation. Les premières se rapportent directement à ce tableau :

		$\varphi$			
		$n_c$	-2	-1	<b>0</b>
$d$	7	0	$1.0200 \cdot 10^{-6}$	$4.5477 \cdot 10^{-4}$	0
	6	0	$5.3151 \cdot 10^{-6}$	0.0023	0
	5	0	$2.5575 \cdot 10^{-5}$	0.0088	0
	4	0	$4.8226 \cdot 10^{-4}$	0.0267	0
	3	0	$1.5101 \cdot 10^{-4}$	0.0634	0
	2	0	$3.0611 \cdot 10^{-4}$	0.1190	0
	1	0	$4.6210 \cdot 10^{-4}$	0.1743	0
	<b>0</b>	0	$5.0670 \cdot 10^{-4}$	<b>0.2023</b>	0
	-1	0	$4.0484 \cdot 10^{-4}$	0.1739	0
	-2	0	$3.1887 \cdot 10^{-4}$	0.1207	0
	-3	0	$1.3644 \cdot 10^{-4}$	0.0656	0
	-4	0	$9.1440 \cdot 10^{-5}$	0.0279	0
	-5	0	$2.2001 \cdot 10^{-5}$	0.0093	0
	-6	0	$6.9130 \cdot 10^{-6}$	0.0024	0
	-7	0	$1.3605 \cdot 10^{-6}$	$4.9778 \cdot 10^{-4}$	0

TAB. 4.12: *probabilité de présence par rapport à la cellule centrale,  $\sigma_x = \sigma_y = 0.1 \text{ km}$ ,  $\bar{x} = 20 \text{ km}$ ,  $\bar{y} = 30 \text{ km}$*

- la probabilité de présence est maximale au centre de la distribution, elle diminue ensuite au fur et à mesure que nous nous éloignons de la cellule centrale. Nous constaterons par la suite que cette diminution est plus ou moins forte selon la forme initiale de la distribution,
- seule la partie de l'espace où se trouve la distribution est représentée ici, ailleurs les probabilités de localisation sont nulles. Le faible écart-type de la distribution considérée justifie le fait qu'il n'y ait des probabilités de présence que dans seulement deux directions. D'autre part l'intégration sur des cellules indépendantes les unes des autres nous conduit bien à une somme des probabilités sur tout l'espace égale à l'unité,
- la distribution des probabilités n'est pas symétrique par rapport à la cellule centrale. Ceci s'explique par le fait que, dans une direction donnée, la surface de la cellule augmente avec la distance, selon la relation  $S = 0.5 (d_2^2 - d_1^2) (\varphi_2 - \varphi_1)$ . La probabilité de localisation sera donc plus importante dans les cellules de distances supérieures à celle de la cellule centrale que dans leurs symétriques par rapport à celles-ci. La distribution n'est pas non plus symétrique par rapport à la direction. L'explication se trouve cette fois-ci dans le fait que la position de cible que nous avons retenue n'est pas centrée précisément sur une cellule polaire.

Les secondes sont plus générales :

- dans une situation où l'écart-type serait très faible, la grande majorité de la distribution se trouverait dans la cellule centrale. Ce cas se rapproche de la situation dans laquelle la distance à laquelle se trouve la cible est connue. Elle correspond à une probabilité de présence unitaire,
- la probabilité de localisation est fonction à la fois de la distance et de la direction. Nous venons de voir que la distance influait directement sur la taille des cellules, la direction intervient dans le sens où, pour une même distance, une même distribution n'aura pas la même aire sur la cellule polaire, comme l'illustre la figure 4.12 page 140. Les distributions sont en effet orientées parallèlement aux axes cartésiens.

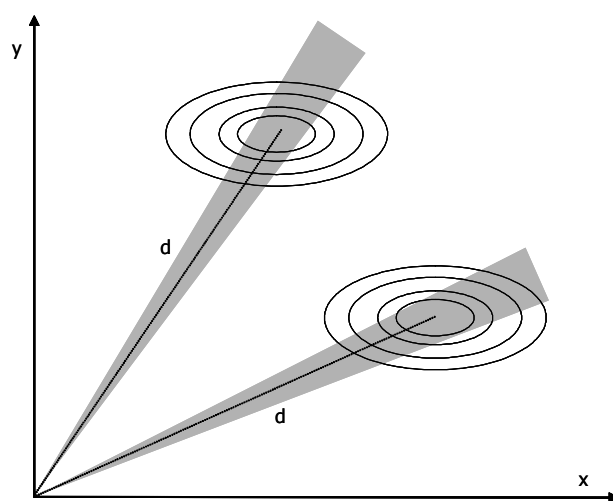


FIG. 4.12: illustration de l'influence de la position des distributions sur l'aire comprise dans les différents secteurs angulaires de l'espace

#### 4.3.9.2 Erreurs d'approximation

Le paragraphe 4.3.4.4 présente la façon de calculer les erreurs induites par l'approximation du calcul des probabilités de présence. Le tableau 4.13 regroupe les valeurs de ces erreurs associées à la distribution considérée ci-dessus.

A la vue de ce tableau, et des résultats propres à d'autres distributions, nous pouvons constater que cette erreur est faible, inférieure à 1% de la probabilité de présence sur la cellule, pour nos simulations. Certaines cellules ne vérifient pas ce pourcentage, il s'agit cependant de celles dans lesquelles la probabilité est très faible. L'erreur d'approximation, même supérieure à 1% sera donc quantitativement très faible donc considérée comme nulle, tout comme la probabilité.

Par ailleurs, cette erreur d'approximation est elle aussi fonction de la distance et de la forme de la distribution. Plus l'écart type est faible, plus la distribution se recentre et plus

		$\varphi$			
		$n_c$	-2	-1	<b>0</b>
$d$	7	0	$6.1820 \cdot 10^{-7}$	$4.2273 \cdot 10^{-4}$	0
	6	0	$6.1824 \cdot 10^{-7}$	$4.2224 \cdot 10^{-4}$	0
	5	0	$7.9153 \cdot 10^{-6}$	$4.3258 \cdot 10^{-4}$	0
	4	0	$7.9155 \cdot 10^{-6}$	$4.4797 \cdot 10^{-4}$	0
	3	0	$4.9132 \cdot 10^{-5}$	$7.4153 \cdot 10^{-4}$	0
	2	0	$1.6033 \cdot 10^{-4}$	$7.1116 \cdot 10^{-4}$	0
	1	0	$1.6034 \cdot 10^{-4}$	$2.8387 \cdot 10^{-4}$	0
	<b>0</b>	0	$2.9507 \cdot 10^{-4}$	<b>0.0018</b>	0
	-1	0	$3.8871 \cdot 10^{-4}$	0.0017	0
	-2	0	$3.8870 \cdot 10^{-4}$	$1.5669 \cdot 10^{-4}$	0
	-3	0	$4.1816 \cdot 10^{-4}$	$4.0092 \cdot 10^{-5}$	0
	-4	0	$4.1816 \cdot 10^{-4}$	$4.0091 \cdot 10^{-5}$	0
	-5	0	$4.2236 \cdot 10^{-4}$	$6.8493 \cdot 10^{-6}$	0
	-6	0	$4.2260 \cdot 10^{-4}$	$6.8492 \cdot 10^{-6}$	0
	-7	0	$4.2260 \cdot 10^{-4}$	$3.2034 \cdot 10^{-7}$	0

TAB. 4.13: *erreur d'approximation*,  $\sigma_x = \sigma_y = 0.1 \text{ km}$ ,  $\bar{x} = 20 \text{ km}$ ,  $\bar{y} = 550 \text{ km}$ 

la probabilité sur les bords de la cellule polaire, donc l'erreur, diminue. D'autre part nous avons vu que la taille des cellules augmentait avec la distance, ceci engendre un accroissement du nombre de cellules élémentaires mais pas de l'erreur puisque nous avons un phénomène « d'éloignement des bords », schématisé sur la figure 4.13 page 142. En effet, même si la cellule polaire est plus grande, la surface de la distribution reste la même. Ainsi la densité de probabilité, et par là même les probabilités, dans les cellules élémentaires bordant la cellule polaire sont moins élevées.

#### 4.3.9.3 Probabilités de détection

Dans le tableau 4.14 se trouvent les valeurs des probabilités de détection de la cible, à nouveau calculées pour la même densité de probabilité. La durée d'observation est  $20 \text{ ms}$ .

Comme le montre l'expression (4.56), la probabilité de détection dans une cellule dépend de la probabilité de présence dans celle-ci ainsi que de la distance à laquelle elle se trouve. Nous retrouvons ces dépendances dans le tableau 4.14. En effet, nous constatons que la probabilité est maximale dans la cellule dans laquelle la probabilité de présence est la plus forte, c'est à dire dans la cellule sur laquelle est centrée la distribution. D'autre part, la probabilité de détection dans une cellule de distance donnée est plus faible que celle dans la cellule symétrique par rapport à la cellule centrale et de distance plus grande.

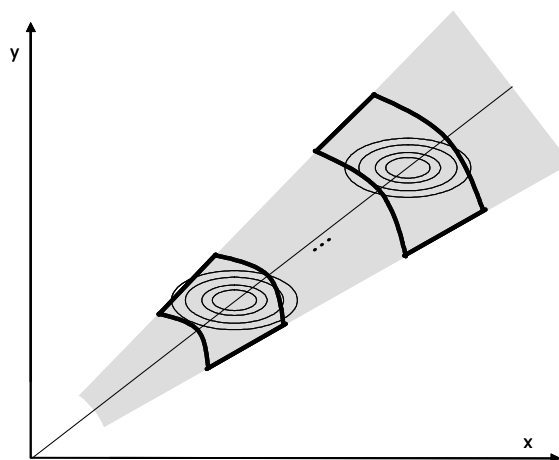


FIG. 4.13: illustration du phénomène « d'éloignement des bords » d'une distribution en fonction de la distance

#### 4.3.9.4 Modélisation des probabilités par la méthode des moindres carrés

Nous nous replaçons à présent dans un cadre multicible. Soit une formation aérienne constituée de quatre avions. La connaissance *a priori* est traduite par quatre densités de probabilités :

1. la connaissance *a priori* est telle que  $\sigma_x = \sigma_y = 0.1 \text{ km}$ . La distribution est centrée autour des valeurs  $\bar{x} = 20 \text{ km}$  et  $\bar{y} = 30 \text{ km}$ .
2. la connaissance *a priori* est telle que  $\sigma_x = \sigma_y = 0.1 \text{ km}$ . La distribution est centrée autour des valeurs  $\bar{x} = 40 \text{ km}$  et  $\bar{y} = 60 \text{ km}$ .
3. la connaissance *a priori* est telle que  $\sigma_x = \sigma_y = 0.01 \text{ km}$ . La distribution est centrée autour des valeurs  $\bar{x} = 70 \text{ km}$  et  $\bar{y} = 50 \text{ km}$ .
4. la connaissance *a priori* est telle que  $\sigma_x = \sigma_y = 0.1 \text{ km}$ . La distribution est centrée autour des valeurs  $\bar{x} = 30 \text{ km}$  et  $\bar{y} = 20 \text{ km}$ .

Nous dénommerons cette situation « scénario 1 » et nous l'illustrons figure 4.14 page 144.

Comme nous l'avons fait pour la première distribution nous calculons pour les trois autres les probabilités de présence et de détection. Les mêmes remarques peuvent être faites quant aux résultats obtenus.

A partir de là nous calculons et modélisons dans chaque direction la probabilité de détecter une à quatre cibles. Pour le scénario 1, les valeurs des paramètres  $\omega_j$  et  $n_j$ ,  $j \in \{1, nb\_c_\varphi\}$  sont données dans le tableau 4.15 :

Nous pouvons constater à la vue de ce tableau que certaines valeurs des paramètres  $\omega_j$  et  $n_j$  sont infinies ou nulles. Ce phénomène se produit quand les probabilités de détection sont

		$\varphi$			
		$n_c$	-2	-1	<b>0</b>
$d$	7	0	$9.8655 \cdot 10^{-7}$	$4.3987 \cdot 10^{-4}$	0
	6	0	$5.1409 \cdot 10^{-6}$	0.0022	0
	5	0	$2.4737 \cdot 10^{-5}$	0.0090	0
	4	0	$4.6645 \cdot 10^{-5}$	0.0270	0
	3	0	$1.4606 \cdot 10^{-4}$	0.0635	0
	2	0	$2.9608 \cdot 10^{-4}$	0.1167	0
	1	0	$4.4696 \cdot 10^{-4}$	0.1682	0
	<b>0</b>	0	$4.9009 \cdot 10^{-4}$	<b>0.1957</b>	0
	-1	0	$3.9157 \cdot 10^{-4}$	0.1686	0
	-2	0	$3.0842 \cdot 10^{-4}$	0.1151	0
	-3	0	$1.3196 \cdot 10^{-4}$	0.0613	0
	-4	0	$8.8443 \cdot 10^{-5}$	0.0258	0
	-5	0	$2.1280 \cdot 10^{-5}$	0.0085	0
	-6	0	$6.6865 \cdot 10^{-6}$	0.0024	0
	-7	0	$1.3159 \cdot 10^{-6}$	$4.8146 \cdot 10^{-4}$	0

TAB. 4.14: probabilités de détection,  $T = 20$  ms,  $\sigma_x = \sigma_y = 0.1$  km  $\bar{x} = 20$  km,  $\bar{y} = 30$  km,

directions	1..10	11	12	13..19	20	21..40
$\omega_j$	$+\infty$	$+\infty$	1.6544	$+\infty$	1.2718	$+\infty$
$n_j$	0	0	1.5672	0	1.5876	0

TAB. 4.15: paramètres de modélisation  $\omega_j$  et  $n_j$  propres aux directions d'observation du scénario 1



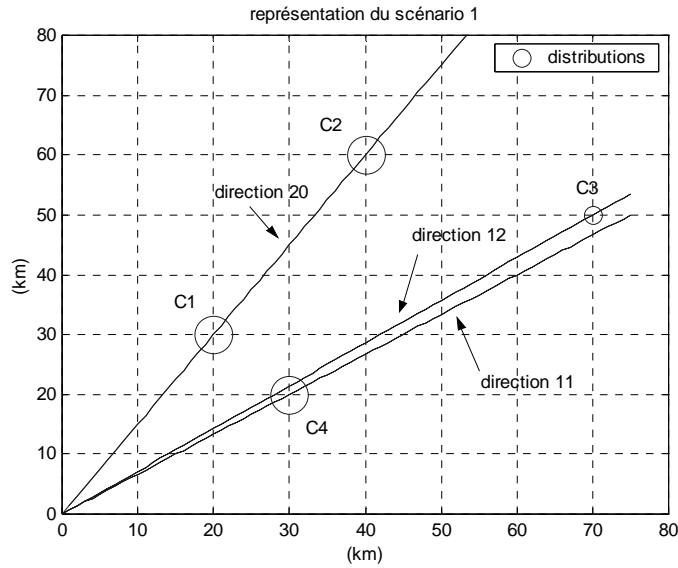


FIG. 4.14: schématisation du scénario 1, les cibles sont repérées par les centres de leurs distributions, la taille du symbole varie en fonction de l'écart-type, les droites représentent les directions indicées de l'espace

nulles ou trop faibles pour être modélisées. Alors que les  $nb_{c_\varphi}$  directions de l'espace sont potentiellement observables (selon nos données  $nb_{c_\varphi} = 40$ ), nous avons à ce niveau une première sélection des directions qui seront effectivement observées. Les directions sélectionnées ici sont somme toute cohérentes avec le scénario 1. Seule la direction 11 peut amener une interrogation. Si nous observons la figure 4.14 nous constatons que les cibles  $C_3$  et  $C_4$  sont repérées comme appartenant à deux directions distinctes de l'espace mais cependant adjacentes. En réalité la cible  $C_3$  se trouve à cheval sur les deux directions. Etant donné que la présence d'une cible simultanément dans plusieurs directions de l'espace est d'autant plus importante que le centre de la distribution est proche de l'origine du repère, nous pouvons considérer que la majorité de la distribution de probabilités de la cible  $C_3$  se trouve en réalité dans la direction 12, ce qui explique les faibles probabilités et les valeurs des paramètres  $\omega_j$  et  $n_j$ . Par ailleurs le couple  $(\omega_j = +\infty, n_j = 0)$  conduit bien à une probabilité de détection nulle.

Ces remarques montrent l'importance de la phase de modélisation de la probabilité de détection. Puisqu'elle peut conduire à la non observation de certaines directions, ses résultats doivent être précis et cohérents. La figure 4.15 page 145 représente la probabilité de détecter une à quatre cibles dans la direction 12 de l'espace, en fonction du temps, puis la probabilité modélisée et l'erreur commise. Le coefficient de linéarité associé à cette direction est égal à 0.9846, la moyenne des résidus vaut  $0.5155 \cdot 10^{-14}$ . L'approximation a lieu sur l'intervalle de temps dont les bornes sont repérées par des cercles sur la figure 4.15-(a). La figure 4.16 page 145 présente les mêmes résultats pour une autre direction de l'espace d'observation. Cette

fois-ci le coefficient de linéarité est égal à 0.9925 et la moyenne des résidus à  $-0.1391 \cdot 10^{-14}$ .

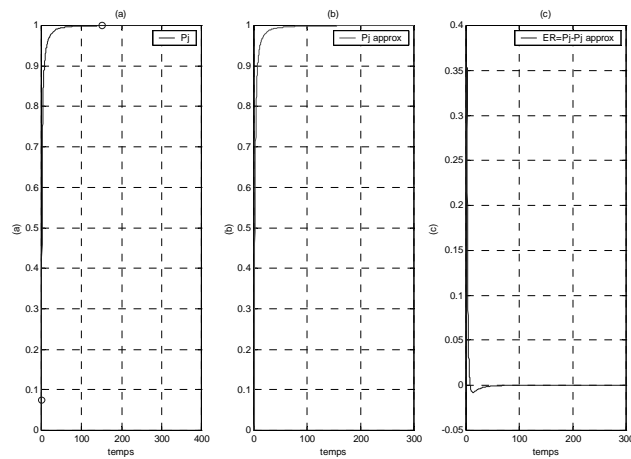


FIG. 4.15: *probabilité de détecter une à quatre cibles dans la direction 12 de l'espace, (b) probabilité modélisée, (c) erreur commise entre les deux probabilités*

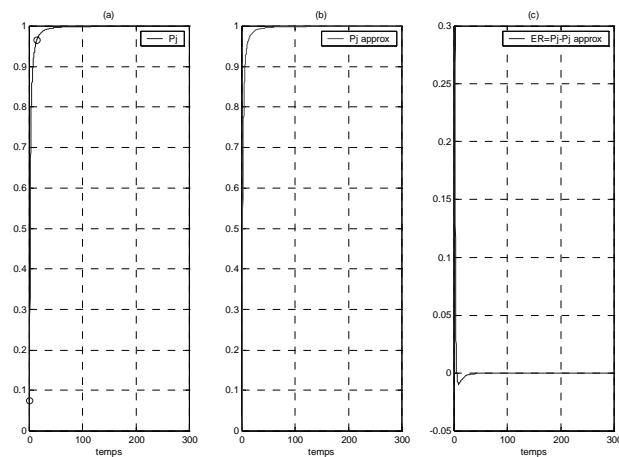


FIG. 4.16: *probabilité de détecter une à quatre cibles dans la direction 20 de l'espace, (b) probabilité modélisée, (c) erreur commise entre les deux probabilités*

#### 4.3.9.5 Allocation temporelle par la méthode lagrangienne

La durée allouée à la phase de détection est  $T = 30 \text{ ms}$ . Nous supposons dans un premier temps une pondération uniforme de toutes les directions de l'espace d'observation ainsi que des dépointages nuls. Le tableau 4.16 présente l'allocation temporelle optimale de cette durée

$T$  entre les  $nb_{c\varphi}$  directions de l'espace. Rappelons par ailleurs que la détection dans une direction donnée est elle-même optimisée par une décomposition en un nombre optimal de détections élémentaires.

<i>directions</i>	1..11	12	13..19	20	21..40
$\epsilon_j$	1	1	1	1	1
$t_j$ (ms)	0	16.1639	0	13.8361	0
$m_j$	—	5.4719	—	5.5105	—
$P_{dj}$	0	0.9994	0	0.9995	0

TAB. 4.16: scénario 1, allocation optimale de 30 ms pour la détection de plusieurs cibles dans un ensemble de directions de l'espace, nombre optimal de détections élémentaires et probabilités de détection résultantes, méthode lagrangienne

Toutes les directions pour lesquelles le couple  $(\omega_j, n_j)$  est différent de  $(+\infty, 0)$  ont la potentialité d'être observées. C'est ensuite la méthode d'optimisation qui, par consitution de l'ensemble  $\mathcal{I}$ , détermine celles qui le seront réellement. Ainsi nous pouvons constater que, dans le cadre du scénario 1, la durée  $T$  est allouée principalement dans les axes centraux des distributions, en particulier dans les directions 12 et 20 représentées figure 4.14 page 144.

Considérons à présent un second scénario d'étude dans lequel les quatre distributions sont disposées dans l'espace de façon symétrique. Nous l'appelons scénario 2 et le représentons figure 4.17 page 148 :

1. la connaissance *a priori* est telle que  $\sigma_x = \sigma_y = 0.1 km$ . La distribution est centrée autour des valeurs  $\bar{x} = 20 km$  et  $\bar{y} = 30 km$ .
2. la connaissance *a priori* est telle que  $\sigma_x = \sigma_y = 0.1 km$ . La distribution est centrée autour des valeurs  $\bar{x} = 40 km$  et  $\bar{y} = 60 km$ .
3. la connaissance *a priori* est telle que  $\sigma_x = \sigma_y = 0.1 km$ . La distribution est centrée autour des valeurs  $\bar{x} = 30 km$  et  $\bar{y} = 20 km$ .
4. la connaissance *a priori* est telle que  $\sigma_x = \sigma_y = 0.1 km$ . La distribution est centrée autour des valeurs  $\bar{x} = 60 km$  et  $\bar{y} = 40 km$ . L'allocation temporelle et les paramètres optimaux sont donnés dans le tableau 4.17.

A la vue de ce tableau nous pouvons remarquer que la symétrie de la situation n'entraîne pas la parfaite symétrie des résultats. Ceci est dû au fait déjà évoqué que les distributions ne sont pas définies dans le repère polaire des cellules de résolution mais dans un repère cartésien. Selon l'orientation l'aire de la distribution comprise dans une même direction ne sera pas forcément équivalente. Cependant les probabilités de détection résultantes sont identiques.

#### 4.3.9.6 Allocation temporelle par l'algorithme de « de Guenin »

Nous considérons les mêmes scénarios et réalisons la répartition de la durée  $T$  en utilisant l'algorithme de « de Guenin ». Les résultats se trouvent dans les tableaux 4.18 et 4.19.

<i>directions</i>	1..11	12	13..19	20	21..40
$\epsilon_j$	1	1	1	1	1
$t_j$ (ms)	0	15.5999	0	14.4001	0
$m_j$	—	5.4331	—	4.7351	—
$P_{dj}$	0	0.9996	0	0.9996	0

TAB. 4.17: scénario 2, allocation optimale de 30 ms pour la détection de plusieurs cibles dans un ensemble de directions de l'espace, nombre optimal de détections élémentaires et probabilités de détection résultantes, méthode lagrangienne

<i>directions</i>	1..11	12	13..19	20	21..40
$\epsilon_j$	1	1	1	1	1
$t_j$ (ms)	0	16.1638	0	13.8362	0
$P_{dj}$	0	0.9994	0	0.9995	0

TAB. 4.18: scénario 1, allocation optimale de 30 ms pour la détection de plusieurs cibles dans un ensemble de directions de l'espace, nombre optimal de détections élémentaires et probabilités de détection résultantes, utilisation de l'algorithme de "de Guenin"

<i>directions</i>	1..11	12	13..19	20	21..40
$\epsilon_j$	1	1	1	1	1
$t_j$ (ms)	0	15.5997	0	14.4003	0
$P_{dj}$	0	0.9996	0	0.9996	0

TAB. 4.19: scénario 2, allocation optimale de 30 ms pour la détection de plusieurs cibles dans un ensemble de directions de l'espace, nombre optimal de détections élémentaires et probabilités de détection résultantes, utilisation de l'algorithme de "de Guenin"

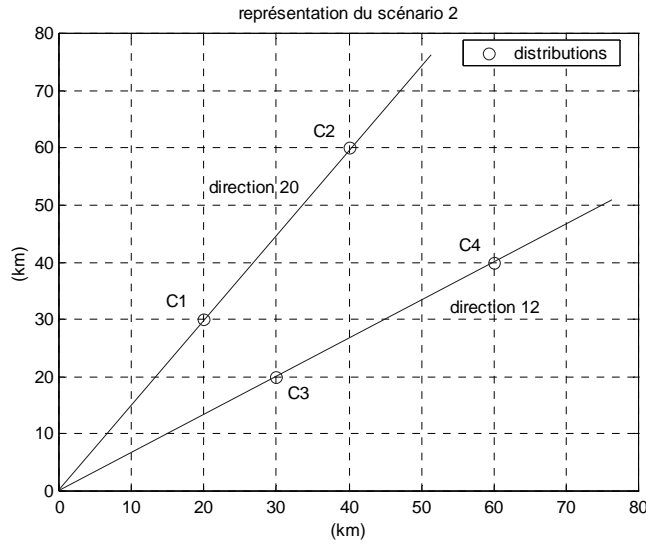


FIG. 4.17: schématisation du scénario 2, les cibles sont repérées par les centres de leurs distributions, la taille du symbole varie en fonction de l'écart-type, les droites représentent les directions indicées de l'espace

Bien que les probabilités soient les mêmes, les répartitions temporelles ne sont pas exactement identiques à celles obtenues par une optimisation lagrangienne, dont les résultats se trouvent dans les tableaux 4.16 et 4.17. Ces écarts sont dus aux erreurs d'approximation et à la méthode de calcul de la solution  $\underline{\lambda}$  qui diffère selon la méthode d'optimisation employée. L'algorithme de « de Guenin » réalise une dichotomie alors que le programme d'optimisation lagrangienne utilise des algorithmes de recherche de minimum. Notons d'autre part que l'algorithme de « de Guenin » ne cherche pas précisément la valeur de  $\lambda$  qui annule l'erreur  $E(\lambda)$  mais plutôt celle à partir de laquelle celle-ci est inférieure à un certain seuil. Les valeurs obtenues permettent cependant de confirmer nos résultats de la section 4.3.7.

Le tableau 4.20 regroupe les valeurs optimales de  $\underline{\lambda}$  obtenues pour chaque scénario et pour chaque méthode d'optimisation, c'est à dire la méthode lagrangienne et l'algorithme de « de Guenin ». Nous les donnons ici identiques car elles ne diffèrent en réalité qu'après plusieurs décimales non significatives. La précision de Matlab<sup>®</sup> ainsi que ses méthodes d'arrondi sont alors considérées comme la cause de la non stricte équivalence de nos résultats.

scénario	1		2		3	
méthode	Lagrange	de Guenin	Lagrange	de Guenin	Lagrange	de Guenin
$\underline{\lambda}$	0.0088	0.0088	0.0065	0.0065	0.4331	0.4331

TAB. 4.20: solutions  $\lambda$  obtenues pour chaque scénario et chaque méthode d'optimisation

Le scénario 3 correspond à une situation dans laquelle la connaissance *a priori* est bonne, c'est à dire proche de la connaissance déterministe. Il sera étudié dans le paragraphe suivant.

Remarquons que les tableaux 4.18 et 4.19 ne font pas apparaître le nombre optimal  $m_j$  de détections élémentaires dans chaque direction. Ceci est dû à notre hypothèse de départ sur l'algorithme de « de Guenin » qui était de supposer que l'optimisation dans chaque direction avait déjà été réalisée et qui nous permettait par conséquent d'obtenir une probabilité de détection de forme adéquate, c'est à dire satisfaisant le loi des rendements décroissants. Ces nombres  $m_j$  peuvent être obtenus par l'équation (4.77).

Par ailleurs, ces simulations nous ont permis de mettre en évidence l'avantage de l'algorithme de « de Guenin » par rapport à la méthode lagrangienne en termes de rapidité d'exécution, comme le montre le tableau 4.21, pour des simulations réalisées dans les mêmes conditions et sur le même matériel informatique.

<i>scénario</i>	1		2		3	
<i>méthode</i>	<i>Lagrange</i>	<i>de Guenin</i>	<i>Lagrange</i>	<i>de Guenin</i>	<i>Lagrange</i>	<i>de Guenin</i>
<i>durée d'exécution</i> (s)	1.2190	0.1410	1.2180	0.1400	1.2030	0.1090

TAB. 4.21: *durées d'exécution des algorithmes présentés*

#### 4.3.9.7 Cas de distributions de très faibles écarts-type

Nous définissons ici le scénario 3, illustré figure 4.18 page 151 :

1. la connaissance *a priori* est telle que  $\sigma_x = \sigma_y = 0.01 \text{ km}$ . La distribution est centrée autour des valeurs  $\bar{x} = 20 \text{ km}$  et  $\bar{y} = 30 \text{ km}$ .
2. la connaissance *a priori* est telle que  $\sigma_x = \sigma_y = 0.01 \text{ km}$ . La distribution est centrée autour des valeurs  $\bar{x} = 60 \text{ km}$  et  $\bar{y} = 40 \text{ km}$ .

Ces distributions ont été choisies de façon à ce que leurs écarts-type soient faibles, c'est à dire que l'information *a priori* sur la position des cibles qu'elles représentent soit quasi-certaine.

Pour fournir des éléments de comparaison aux simulations précédentes nous donnons dans le tableau 4.22, les probabilités de présence rattachées à la première distribution.

Comme il fallait s'y attendre nous retrouvons la quasi-totalité de la distribution dans une même et seule cellule.

Nous considérons par ailleurs deux cibles de coordonnées cartésiennes respectives (20, 30) et (60, 40) (en *km*). Disposant d'une durée  $T = 30 \text{ ms}$  pour la phase de détection, nous calculons son allocation optimale dans un premier temps pour les deux distributions, et par les deux méthodes étudiées, ensuite pour les deux cibles dont les distances sont connues. Les résultats sont regroupés dans les tableaux 4.23, 4.24 et 4.25.

		$\varphi$		
		$n_c$	-1	0
$d$	2	0	0	0
	1	0	0.0076	0
	0	0	<b>0.9881</b>	0
	-1	0	0.0043	0
	-2	0	0	0

TAB. 4.22: probabilité de présence par rapport à la cellule centrale,  $\sigma_x = \sigma_y = 0.01$  km,  $\bar{x} = 20$  km,  $\bar{y} = 30$  km

<i>directions</i>	1..11	12 ( <i>distribution 2</i> )	13..19	20 ( <i>distribution 1</i> )	21..40
$\epsilon_j$	1	1	1	1	1
$t_j$ (ms)	0	24.9202	0	5.0798	0
$m_j$	–	1.7686	–	5.7687	–
$P_{dj}$	0	0.7065	0	0.9817	0

TAB. 4.23: scénario 3, allocation optimale de 30 ms à la détection de plusieurs cibles dans un ensemble de directions de l'espace, nombre optimal de détections élémentaires et probabilités de détection résultantes, méthode lagrangienne

<i>directions</i>	1..11	12 ( <i>distribution 2</i> )	13..19	20 ( <i>distribution 1</i> )	21..40
$\epsilon_j$	1	1	1	1	1
$t_j$ (ms)	0	24.9203	0	5.0797	0
$P_{dj}$	0	0.7065	0	0.9817	0

TAB. 4.24: scénario 3, allocation optimale de 30 ms à la détection de plusieurs cibles dans un ensemble de directions de l'espace, nombre optimal de détections élémentaires et probabilités de détection résultantes, utilisation de l'algorithme de "de Guenin"

<i>cibles</i>	2	1
$\epsilon_j$	1	1
$t_i$ (ms)	24.9190	5.0810
$n_i$	1.7675	5.7664
$P_{di}$	0.7063	0.9816

TAB. 4.25: scénario 3, allocation optimale de 30 ms à la détection de plusieurs cibles de positions connues, nombre optimal de détections élémentaires et probabilités de détection résultantes, cas déterministe

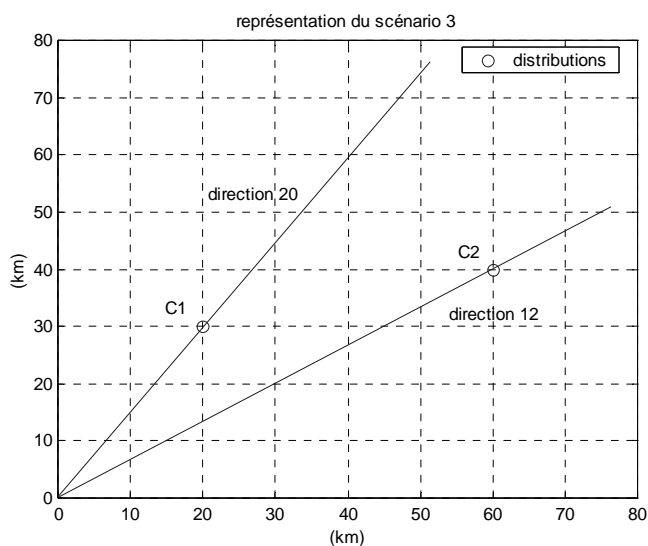


FIG. 4.18: schématisation du scénario 3, les cibles sont repérées par les centres de leurs distributions, la taille du symbole varie en fonction de l'écart-type, les droites représentent les directions indicées de l'espace

Nous pouvons constater que les résultats sont très proches les uns des autres. Les résultats obtenus pour l'hypothèse d'une connaissance *a priori* se présentent donc bien comme une généralisation de ceux obtenus dans le cadre déterministe et ce, à deux niveaux :

1. les résultats exposés dans cette section permettent d'établir une allocation temporelle optimale d'une durée  $T$  pour la détection d'un nombre connu de cibles et ce, à partir d'une connaissance *a priori* pouvant être aussi bien précise qu'imprécise,
2. la stratégie de gestion du capteur tient compte du positionnement des cibles dans l'espace qu'il est chargé de surveiller. En effet, nous avons supposé dans l'hypothèse déterministe que les cibles étaient dans des directions différentes de l'espace. Par nos nouveaux résultats nous levons cette hypothèse et tenons compte de leurs positions dans celui-ci. Ceci est réalisé grâce à la définition d'un espace à deux dimensions et par le fait que toutes les directions de l'espace sont potentiellement observables. De plus le calcul des  $P_{dj}$  nous permet de tenir compte du fait que plusieurs cibles peuvent se trouver dans le même axe de visée du capteur.

#### 4.3.9.8 Coefficients de pondération

Dans les simulations qui ont été présentées précédemment nous n'avons pas tenu compte de la menace potentielle que pouvaient représenter les cibles présentes dans l'espace d'observation. En donnant un exemple basé sur le scénario 3, nous allons voir comment le calcul



de pondérations par la méthode exposée dans la section 4.3.6 va permettre de modifier la répartition temporelle de façon non négligeable. Le tableau 4.26 donne les pondérations associées à la configuration du scénario 3.

<i>directions</i>	1..11	12	13..19	20	21..40
$\epsilon_j$	0	0.20	0	0.80	0

TAB. 4.26: scénario 3, coefficients de pondération

Le tableau 4.27 présente les probabilités de détection résultant de l'allocation temporelle optimale.

<i>directions</i>	1..11	12	13..19	20	21..40
$\epsilon_j$	0	0.20	0	0.80	0
$t_j$ (ms)	0	23.2625	0	6.7375	0
$m_j$	–	1.6510	–	7.6512	–
$P_{d_j}$	0	0.6816	0	0.9950	0

TAB. 4.27: scénario 3, allocation optimale de 30 ms à la détection de plusieurs cibles dans un ensemble de directions de l'espace, nombre optimal de détections élémentaires et probabilités de détection résultantes, prise en compte de la menace

Nous pouvons comparer ce tableau avec le tableau 4.23. La cible  $C_1$  étant la plus proche du capteur (figure 4.18), la menace qu'elle représente pour celui-ci est plus importante. L'allocation temporelle est alors telle que le capteur consacre plus de temps dans la direction dans laquelle elle est censée se trouver. La probabilité de détection dans cette direction est par conséquent meilleure que dans le cas où la menace n'a pas été prise en compte.

Le calcul des coefficients de pondérations a également son importance lorsqu'une seule cible est présente dans la zone de surveillance. Sachant qu'il ne doit détecter qu'une seule cible, le capteur va naturellement consacrer tout son temps dans les directions où elle a une probabilité de se trouver. Cependant, pour des raisons tactiques, matérielles ou opérationnelles il peut être amené à ne pouvoir observer qu'un nombre réduit de directions. Il se dirigera alors vers les directions prioritaires, les priorités étant définies par les  $\epsilon_j$ .

Nous avons supposé d'autre part que le capteur utilisé était de type radar et que celui-ci avait un mode de fonctionnement par balayage électronique lui permettant de changer instantanément l'orientation de son axe de visée. Un capteur infrarouge a, quant à lui, un mode de fonctionnement par balayage mécanique qui entraîne des pertes temporelles à chaque réorientation de l'axe de visée du capteur. La prise en compte des pondérations directionnelles, couplée au calcul des pertes temporelles, pourra être un élément déterminant pour l'élaboration d'un ordonnancement optimal de l'observation des directions de l'espace, optimal dans le sens de la minimisation des pertes temporelles et de la maximisation des performances de détection.

### 4.3.9.9 Evaluation des performances

La figure 4.19 page 153 représente, en fonction du temps, la probabilité que 80% des directions, dans lesquelles la probabilité de détection est modélisable par l'expression (4.61), soient observées par le capteur, pour le scénario 1. La durée  $T_{\min}$  est la durée à partir de laquelle la probabilité est supérieure à  $p_0$  dans ces directions.

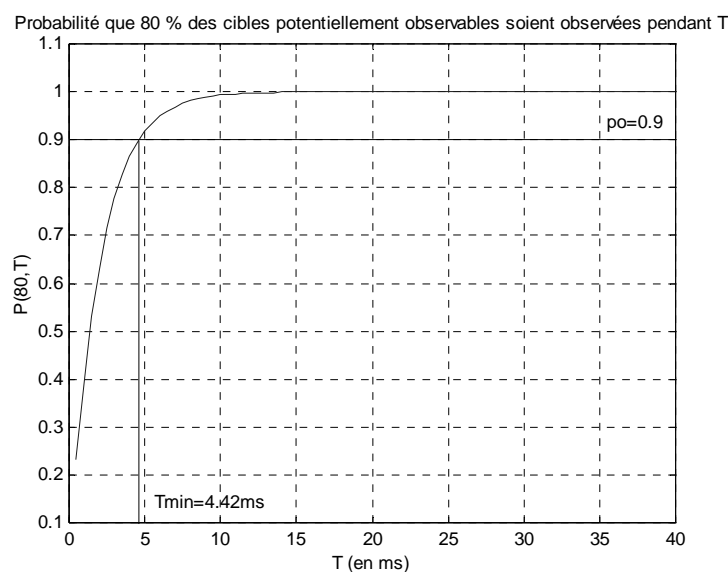


FIG. 4.19: évolution en fonction de  $T$  que 80% des cibles potentiellement observables soient observées

### 4.3.10 Conclusion sur l'hypothèse 3

En adoptant la même démarche que dans l'hypothèse de connaissance déterministe, nous avons cherché, dans le cas d'une connaissance *a priori* incertaine, à établir l'allocation optimale d'une durée  $T$  à la détection d'un ensemble de  $N$  cibles. Nous avons d'abord simplifié le problème en le ramenant dans un espace à une dimension par le calcul des probabilités dans chaque direction de l'espace. Ce calcul a été réalisé grâce à une approximation des probabilités de présence et une modélisation des probabilités de détection. Nous insistons à nouveau sur le fait que ces simplifications ont été mises en place pour faciliter les calculs et principalement pour en donner des expressions analytiques, contribuant ainsi à notre volonté de modélisation du problème. Nous avons vu dans la section précédente que les erreurs commises étaient faibles par rapport aux probabilités considérées.

Après avoir pris conscience de la similarité de nos problématiques, nous avons cherché à replacer nos résultats dans le cadre de la théorie de la recherche. Malgré une approche différente, nous avons vu que les deux méthodes, la méthode lagrangienne que nous avons employée et

une de celles proposées par la théorie de la recherche, étaient finalement équivalentes et que nous obtenions des résultats par conséquent identiques. Cette équivalence permet de renforcer chacune des méthodes, de les valider mutuellement. Alors que la *Search Theory* apporte un cadre théorique supplémentaire à notre étude, celle-ci lui fournit un contexte applicatif par la définition de ses paramètres mathématiques dans le cadre d'une problématique de détection de cibles. Elle lui permet notamment de tenir compte de menaces potentielles, par l'introduction de pondérations, mais surtout d'évoluer d'une situation monocapteur-monocible à une situation monocapteur-multicible. Cette hypothèse n'avait, à notre connaissance, pas encore été prise en compte.

## 4.4 Conclusion

Nous avons abordé dans ce chapitre le problème de l'utilisation optimale d'une durée  $T$  pour la détection d'un nombre connu de cibles fixes ou stationnaires. Nous avons supposé plusieurs niveaux de connaissance des positions de celles-ci, allant d'une connaissance déterministe à une connaissance probabiliste. En partant d'une hypothèse de connaissance déterministe nous avons évolué vers une hypothèse de connaissance incertaine et sommes arrivés ainsi à la généralisation de nos premiers résultats. Pour chacune des hypothèses nous avons montré qu'il était possible de déterminer une stratégie d'allocation temporelle permettant l'optimisation de la détection des cibles présentes dans la zone de surveillance, et d'en évaluer les performances. Les résultats de la section 4.3 ont été énoncés sous certaines hypothèses simplificatrices mais non limitatives.

D'autre part, tous les travaux de ce chapitre sont soumis à l'hypothèse de l'utilisation d'un capteur de type radar. Nous pouvons alors nous interroger sur la façon de les adapter à un contexte dans lequel un capteur infrarouge serait utilisé. Nous avons vu dans le chapitre précédent que les expressions et les propriétés des probabilités de détection des capteurs radar et infrarouge étaient différentes et qu'il était notamment impossible de les optimiser par les mêmes méthodes. Nous nous trouvons alors face à un nouveau problème d'optimisation, auquel nous ne sommes pas encore en mesure d'apporter une solution.

Enfin, nous nous trouvons dans le chapitre 3 dans un contexte monocapteur monocible. Nous avons étendu notre étude dans ce chapitre à un environnement monocapteur multicibles. Nous nous tournons alors naturellement dans le chapitre suivant vers un contexte multicapteur multicible.

## Chapitre 5

# Planification multicateur multicible

En ce début de cinquième chapitre rappelons quelle est notre problématique. Considérant que  $P$  capteurs de type radar ou infrarouge ont pour mission la surveillance d'une zone aérienne dans laquelle se trouvent  $N$  cibles, de natures identiques et de mouvements possibles, nous avons défini notre problématique de la façon suivante : « *si  $T$  est la durée de la mission, alors quel capteur doit observer quelle cible, pendant combien de temps et, globalement, de quelle façon ?* ». Dans le chapitre précédent, et en particulier dans le cadre de la détection par un capteur de type radar, nous avons apporté une réponse optimale aux questions « *de quelle façon optimale un capteur doit-il observer une cible ?* » et « *de quelle façon un capteur doit-il répartir son temps entre l'observation des  $N$  cibles ?* ». Ces deux questions font partie intégrante de notre problématique. Nous étions alors dans un environnement monocapteur monocible puis monocapteur multicible.

Nous nous plaçons désormais dans un environnement multicateur multicible.  $P$  est le nombre de capteurs, ils sont tous identiques, de type radar et délocalisés dans un espace à deux dimensions.  $N$  est le nombre de cibles, elles sont identiques, stationnaires et nous disposons à leur sujet d'une connaissance *a priori* plus ou moins précise.

Notre objectif dans ce chapitre est d'apporter une première réponse à la question « *pendant la durée  $T$ , comment les  $P$  capteurs doivent-ils s'organiser pour observer les  $N$  cibles ?* ». Bien sûr l'objectif sous-jacent est à nouveau l'optimisation des performances de détection de l'ensemble des cibles. Nous nous demanderons alors quel(s) capteur(s) devra(ont) être attaché(s) à l'observation de quelle(s) cible(s) et pendant combien de temps. L'optimalité de la méthode que nous proposons dans ce chapitre n'a pas été démontrée, les résultats que nous présentons sont issus de simulations que nous avons élaborées à partir des résultats que nous avons obtenus dans les chapitres précédents.

Le problème de l'allocation des capteurs, dans un contexte multicateur multicible, a été présenté dans le chapitre 2 consacré à une synthèse bibliographique des travaux existants.

Nous y avons vu que dans le cadre de l'allocation de capteurs pour l'estimation, les méthodes les plus utilisées étaient issues de la théorie de l'information ([MUS96]). Celle-ci fournit une mesure quantitative de la notion d'information apportée par une mesure ou une observation. Dans ce cadre-ci le critère à optimiser est une mesure d'entropie croisée, appelée encore entropie relative de Kullback-Leibler ou gain de discrimination ([SCH93], [VER99]). Nous en rappelons ici sa définition.

Soient deux distributions de probabilités  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  et  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ ,  $p_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ,  $q_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^n q_i = 1$ ,  $i \in \{1, n\}$ . L'entropie relative de Kullback-Leibler entre les deux distributions  $p$  et  $q$  est définie par :

$$D(p : q) = \sum_{i=1}^n p_i \ln \left( \frac{p_i}{q_i} \right) \quad (5.1)$$

Si  $q_i = 0$  alors on suppose  $p_i = 0$ ,  $i \in \{1, n\}$ , et on fait le prolongement par continuité  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$ . Cette mesure est utilisée dans le cadre de l'estimation pour quantifier l'apport d'information d'une mesure réalisée par un capteur donné par rapport à la prédiction. Les résultats obtenus sont satisfaisants et proches de l'optimalité ([KAS96], [DOD00]).

Nous avons placé notre étude dans le cadre de la détection. Il est par conséquent naturel de sélectionner pour la détection des cibles les capteurs qui vont nous permettre d'optimiser les probabilités de détection. Nous considérons donc comme critère d'allocation des capteurs sur les cibles la somme des probabilités de détection des cibles par les capteurs qui sont affectés à leur observation. Nous nommons  $\mathcal{C}$  ce critère :

$$\mathcal{C} : \text{maximiser } \sum_{k=1}^A p_k \quad (5.2)$$

où  $A$  est le nombre d'allocations et  $p_k$  la probabilité résultant de l'allocation  $k$ .

Cependant, puisque qu'il existe des critères d'allocation entropiques dans le cadre de l'estimation multicapteur multicible, il est intéressant d'étudier leur adaptation au problème de la détection et de les comparer avec notre critère  $\mathcal{C}$ . Cette étude constituera la première partie de ce chapitre.

En supposant à nouveau deux niveaux de connaissance *a priori* sur les positions des cibles, nous nous orienterons ensuite vers l'élaboration d'une stratégie de planification de l'utilisation de nos capteurs qui puisse permettre l'amélioration de leurs performances de détection.

## 5.1 L'entropie relative de Kullback-Leibler appliquée à la détection

Dans le cadre de l'allocation de capteurs pour la poursuite de cibles, nous déterminions grâce au calcul du DG (DG : *discrimination gain*) la discrimination entre la densité prédite quand aucune observation n'était effectuée sur la cible et la densité prédite si un capteur particulier était utilisé pour réaliser cette mesure. La première probabilité s'interprétait donc

comme une référence pour le calcul de la discrimination. Nous avons vu d'autre part qu'il était possible d'effectuer des regroupements de capteurs, appelés pseudo-capteurs, et qu'il fallait par conséquent établir les densités de probabilités résultantes ([NAS77], [DOD00]). De façon générale, l'outil de sélection qu'est le gain de discrimination est utilisable à condition de définir :

1. la probabilité, ou densité de probabilité, de référence,
2. la loi de fusion des probabilités, ou densités de probabilité, des capteurs constituant des pseudo-capteurs.

Afin d'envisager la possibilité d'utiliser la mesure de discrimination dans le cadre de notre étude, il va être nécessaire de définir précisément ces deux notions.

Nous nous plaçons dans un premier temps dans une hypothèse déterministe, c'est à dire que nous connaissons les distances exactes des cibles par rapport aux capteurs dans l'espace à deux dimensions, et nous cherchons à déterminer la discrimination entre deux probabilités :  $p$  est la probabilité de détecter la cible en utilisant un capteur ou un pseudo-capteur donné,  $q$  est la probabilité de référence. Celle-ci n'ayant pas de définition universelle, nous en avons émises plusieurs :

- la probabilité certaine,  $q = 1$ ,
- une probabilité fixe, fixée *a priori* comme étant une borne inférieure de qualité, par exemple  $q = 0.2$ ,
- une probabilité calculée par rapport à un point de l'espace, par exemple le centre du repère d'observation et de mesure, le barycentre géométrique des capteurs dédiés à la détection ou le capteur le plus proche de la cible.

Un pseudo-capteur est un regroupement fictif de deux ou plusieurs capteurs. Sachant que chaque capteur  $s$  a une probabilité  $p_s$  de détecter une cible, quelle est alors la probabilité de détection  $p$  de cette même cible par le regroupement de ces capteurs ? A nouveau nous avons émis plusieurs hypothèses sur les lois de fusion utilisables, dont la plupart sont issues de la théorie de la détection. Les lois retenues sont les suivantes :

- la loi ET,
- la loi OU,
- la loi OU EXCLUSIF,
- la loi barycentre, c'est à dire la probabilité de détecter la cible par le capteur virtuel qu'est le barycentre géométrique des capteurs constituant le pseudo-capteur considéré.

Notons que cette dernière loi n'est pas une loi de fusion à proprement parlé. Il s'agit plutôt de la substitution d'un capteur « virtuel » aux capteurs réels.

Une étude statistique a été réalisée afin de sélectionner les références et lois de fusion les mieux adaptées à notre problématique. Après avoir établi un ensemble de critères propres

à notre étude, tels que la maximisation de la somme des probabilités de détection, l'utilisation d'un minimum ou d'un maximum de ressources, la détection des cibles prioritaires ..., nous avons déterminé statistiquement pour chacun d'eux la loi et la référence permettant d'atteindre les performances les meilleures. Ces mesures ont été réalisées sur un nombre élevé de configurations aléatoires (nombre de cibles, nombre de capteurs, positions dans l'espace d'observation). Une première sélection a permis de faire ressortir deux références : la référence unité et celle par rapport au capteur le plus proche de la cible, les autres références n'apportant pas de modifications supplémentaires du comportement du gain de discrimination. En effet, ce ne sont pas les valeurs numériques du gain qui sont pertinentes mais leur ordonnancement les unes par rapport aux autres.

Il résulte ensuite de l'étude que, pour la plus grande majorité des critères évalués, et pour chacune de ces deux références, la loi de fusion optimale est la loi OU. Notons que ces résultats ne sont pas surprenants car il s'agit d'une loi couramment employée en théorie de la détection, au même titre que la loi ET ([POM99]). Elle a pour principal avantage de favoriser la sélection des pseudo-capteurs et par là même d'améliorer les performances de détection.

Nous définissons en conséquence deux critères de sélection des capteurs, correspondant à la loi de fusion OU et aux deux références retenues :

- $\mathcal{C}_1$  : maximiser  $\sum_{k=1}^A p_k \ln \left( \frac{p_k}{q} \right)$ ,  $A$  est le nombre d'allocations,  $q$  est la référence par rapport au capteur le plus proche,  $p_k$  est la probabilité de détection par la coalition de capteurs  $k$ , une coalition pouvant être composée d'un unique capteur. Nous chercherons à maximiser ce gain de discrimination, c'est à dire à optimiser l'information apportée par les capteurs sélectionnés pour l'allocation,
- $\mathcal{C}_2$  : minimiser  $\sum_{k=1}^A -p_k \ln (p_k)$ . La référence est unitaire, nous chercherons à minimiser l'entropie totale du système.

Après avoir justifié l'intérêt de la constitution et de l'utilisation de regroupements de capteurs, nous nous intéresserons à la comparaison de ces critères avec le critère  $\mathcal{C}$ .

## 5.2 Intérêts de la constitution de pseudo-capteurs

La constitution de regroupements de capteurs est avantageuse pour la détection des cibles. Elle permet dans un premier temps de concentrer sur une même cible plusieurs capteurs hétérogènes, les mesures complémentaires alors effectuées apportent un gain d'information indéniable. Sans pour autant aller jusqu'à l'hypothèse de capteurs hétérogènes, puisque nous travaillons avec des capteurs radars, la concentration de plusieurs capteurs sur une même cible permet d'en augmenter sa probabilité de détection, comme l'illustre l'exemple suivant.

Nous considérons par exemple une cible et un nombre aléatoire  $P$  de capteurs. Les distances entre ces capteurs et la cible sont comprises aléatoirement entre 20 et 70 *km*. Pour des configurations différentes nous déterminons, par optimisation du critère  $\mathcal{C}_2$ , l'allocation optimale de ces capteurs sur la cible. Nous calculons alors la probabilité de détection résultante

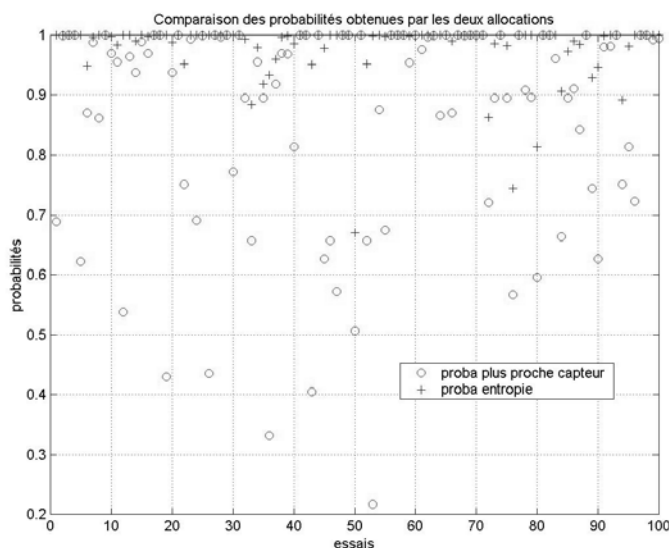


FIG. 5.1: comparaison des probabilités de détection obtenues par rapport au capteur le plus proche de la cible et par constitution de regroupements optimaux par le critère entropique  $\mathcal{C}_2$

et la comparons avec celle obtenue lorsque seul le capteur le plus proche de la cible est alloué à l'observation de celle-ci. La figure 5.1 page 159 illustre, pour cent configurations aléatoires différentes, les deux types de probabilités obtenues. Nous pouvons constater que les probabilités issues des regroupements optimaux de capteurs sont systématiquement supérieures à celles provenant du capteur le plus proche de la cible. Nous évaluons par ailleurs à 85% le taux d'allocation de tous les capteurs sur la cible. Cela signifie que l'allocation optimale n'est pas forcément celle pour laquelle tous les capteurs sont utilisés et que l'allocation par le critère entropique privilégie la quantité d'information apportée par chaque capteur plutôt que le nombre de capteurs lui-même.

Des résultats similaires sont obtenus lorsque cette étude est réalisée avec le critère  $\mathcal{C}_1$ .

### 5.3 Comparaison des critères de sélection

Nous comparons dans cette partie les performances des critères  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . Afin d'apporter une justification aux résultats que nous obtiendrons, nous commençons par étudier les fonctions associées aux critères  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .



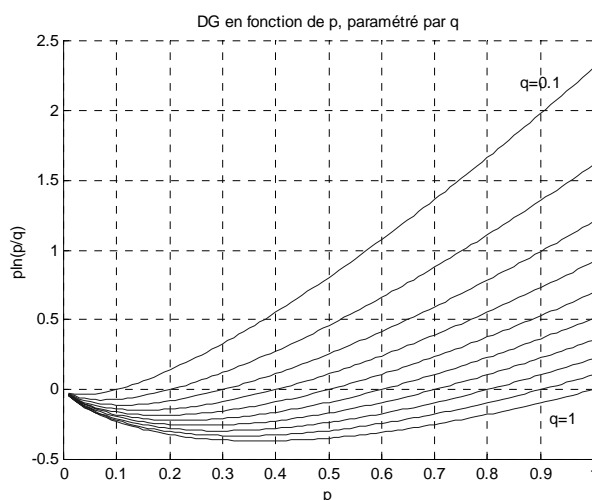


FIG. 5.2: fonction de discrimination  $g_q : p \mapsto p \ln \left( \frac{p}{q} \right)$ , paramétrée par la référence  $q$

### 5.3.1 Etude du critère $\mathcal{C}_1$

Soit la fonction de discrimination suivante :

$$g_q : ]0, 1] \longrightarrow \left[ -\frac{q}{e}, 0 \right] \\ p \mapsto p \ln \left( \frac{p}{q} \right) \quad (5.3)$$

Ses variations sont données par le tableau 5.1 et son graphe représentatif par la figure 5.2 page 160. Cette fonction est définie et continue sur  $]0, 1]$ , prolongée par continuité en 0. Puisqu'elle

$p$	0	$\frac{q}{e}$	1
$g'_q$	$\infty$	-	0
$g_q$	0	$\searrow$	$\nearrow$
		$-\frac{q}{e}$	$-\ln q$

TAB. 5.1: variations de la fonction  $p \mapsto p \ln \left( \frac{p}{q} \right)$

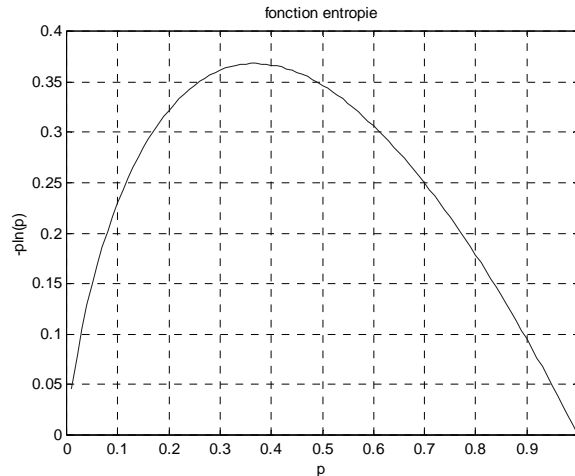
est non bijective, nous pouvons affirmer que son maximum n'est pas forcément fonction du maximum de la probabilité  $p$ , sauf lorsque celle-ci est supérieure à  $\frac{q}{e}$ .

### 5.3.2 Etude du critère $\mathcal{C}_2$

Soit la fonction d'entropie suivante :

$$f : ]0, 1] \longrightarrow \left[ 0, \frac{1}{e} \right] \\ p \mapsto -p \ln p \quad (5.4)$$

$p$	0		$\frac{1}{e}$		1
$f'$	$\infty$	+	0	-	-1
$f$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

TAB. 5.2: variations de la fonction  $f : p \mapsto -p \ln p$ FIG. 5.3: fonction entropie  $f : p \mapsto -p \ln p$ 

Ses variations sont données dans le tableau page 5.2 et son graphe par la figure 5.3 page 161.

Cette fonction est elle aussi définie et continue sur  $]0, 1]$  et prolongée par continuité en 0. Elle n'est pas non plus bijective, c'est à dire que sa valeur minimale n'est pas nécessairement fonction de la valeur maximale de la probabilité, sauf lorsque celle-ci est assurément supérieure à  $\frac{1}{e}$ .

L'étude rapide de ces fonctions tend à montrer que les critères  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  ne sont équivalents au critère  $\mathcal{C}$  que lorsque la probabilité  $p$  est suffisamment grande, c'est à dire supérieure à  $p_q = \max\left(\frac{1}{e}, \frac{q}{e}\right)$ . Les simulations suivantes illustrent ces propos.

### 5.3.3 1<sup>er</sup> scénario de simulations : une cible et $P$ capteurs proches

Nous considérons un espace dans lequel se trouvent  $P = 3$  capteurs et une cible, l'ensemble étant considéré comme stationnaire. Nous dénommerons dorénavant les capteurs par le symbole  $K_p$ ,  $p \in \{1, \dots, P\}$ .

Les distances des capteurs à la cible sont choisies aléatoirement, entre 20 et 50 km, elles sont données par le tableau 5.3. Les dépointages sont supposés nuls.

En considérant une durée d'observation  $T = 5$  ms et en utilisant la loi de fusion OU pour les probabilités propres aux pseudo-capteurs, nous obtenons le tableau 5.4 des probabilités

	$K_1$	$K_2$	$K_3$
<i>distance capteur – cible (en km)</i>	50	43	35

TAB. 5.3: *distance de chaque capteur à la cible (en km)*

de détection.

	$K_1$	$K_2$	$K_1 - K_2$	$K_3$	$K_1 - K_3$	$K_2 - K_3$	$K_1 - K_2 - K_3$
<i>cible</i>	0.5660	0.7826	0.9056	0.9691	0.9866	0.9933	<b>0.9971</b>

TAB. 5.4: *probabilités de détection de la cible par les capteurs et pseudo-capteurs,  $T = 5$  ms, loi de fusion OU*

Ces probabilités sont obtenues par les relations (3.14) et (3.15) page 70 après optimisation de chacune d'entre elles par décomposition en un nombre optimal de détections élémentaires. Les entropies associées sont données dans le tableau 5.5. Le capteur le plus proche de la cible

	$K_1$	$K_2$	$K_1 - K_2$	$K_3$	$K_1 - K_3$	$K_2 - K_3$	$K_1 - K_2 - K_3$
<i>cible</i>	0.3222	0.1919	0.0898	0.0304	0.0133	0.0067	<b>0.0029</b>

TAB. 5.5: *entropies associées aux probabilités du tableau 5.4*

est le capteur  $K_3$ . La probabilité de détection qui lui est associée est  $q = 0.9691$ . Elle va servir de probabilité de référence. Le gain de discrimination résultant est donné dans le tableau 5.6.

Certaines valeurs de ce tableau sont négatives, elles correspondent aux cas où les probabilités de détection sont inférieures à la probabilité  $q$ . Ces dernières sont toutefois associées à des capteurs qui sont plus éloignés de la cible que le capteur  $K_3$  et qui ne seront par conséquent pas sélectionnés puisque finalement seul le paramètre distance permet ici de faire varier les probabilités.

Nous pouvons constater que les valeurs maximales des tableaux 5.4 et 5.6 correspondent au même pseudo-capteur que celui associé à la valeur minimale du tableau 5.5. Quel que soit le critère considéré l'allocation optimale est donc identique. La probabilité résultante est égale à 0.9971.

Ces résultats étaient prévisibles selon les paragraphes 5.3.1 et 5.3.2 puisque toutes les probabilités du tableau 5.4 sont supérieures à  $p_q = \max\left(\frac{1}{e} = 0.3680, \frac{q}{e} = 0.3565\right)$ .

### 5.3.4 2<sup>ème</sup> scénario de simulations : une cible et $P$ capteurs lointains

Nous conservons la même configuration que précédemment mais considérons cette fois-ci des distances comprises entre 50 et 100 km, ceci afin de diminuer les probabilités de détection. Ces distances sont données dans le tableau 5.7. Calculées de la même façon que dans le paragraphe précédent, les probabilités de détection et les entropies associées sont données dans

	$K_1$	$K_2$	$K_1 - K_2$	$K_3$	$K_1 - K_3$	$K_2 - K_3$	$K_1 - K_2 - K_3$
<i>cible</i>	-0.3044	-0.1673	-0.0614	0	0.0176	0.0245	<b>0.0284</b>

TAB. 5.6: gain de discrimination,  $q=0.9691$ 

	$K_1$	$K_2$	$K_3$
<i>distance capteur - cible (en km)</i>	62	74	88

TAB. 5.7: distance de chaque capteur à la cible (en km)

les tableaux 5.8 et 5.9. Le capteur  $K_1$  est le plus proche de la cible, sa probabilité de détection

	$K_1$	$K_2$	$K_1 - K_2$	$K_3$	$K_1 - K_3$	$K_2 - K_3$	$K_1 - K_2 - K_3$
<i>cible</i>	0.2974	0.1597	0.4096	0.0833	0.3560	0.2297	<b>0.4588</b>

TAB. 5.8: probabilités de détection de la cible par les capteurs et pseudo-capteurs,  $T = 5 ms$ , loi de fusion OU

de la cible est  $q = 0.2974$ . Le gain de discrimination basé sur cette référence est donné dans le tableau 5.10. Nous pouvons constater que, cette fois-ci, les valeurs minimales et maximales ne correspondent pas aux mêmes allocations. Alors que les critères de discrimination et de probabilité conduisent à l'allocation du pseudo-capteur  $K_1 - K_2 - K_3$  sur la cible, le critère entropique conduit à l'allocation du seul capteur  $K_3$ . Les probabilités de détection résultantes sont 0.4588 et 0.0833.

Lorsque les distances sont élevées, et par conséquent les probabilités faibles, nous n'avons donc plus d'équivalence entre nos trois critères. C'est en effet le cas ici puisque  $p_q = \max(\frac{1}{e} = 0.3680, \frac{q}{e} = 0.1094)$ , toutes les probabilités du tableau 5.8 ne sont pas supérieures à cette valeur.

Le résultat surprenant de l'allocation par minimisation de l'entropie s'explique par le fait que ce critère n'a pas pour but la maximisation des probabilités mais la minimisation de l'incertitude. Une probabilité de détection très faible est une information en elle-même car elle traduit le fait que le capteur n'a que peu de chances de détecter la cible, l'incertitude sur la capacité de détection de cette cible par ce capteur est alors quasi-nulle, nous savons par avance qu'il n'y aura pas de détection dans de telles conditions de mesure.

Selon les distances auxquelles se trouvent les capteurs par rapport à la cible, les critères d'allocation ne conduisent donc pas aux mêmes associations, et *a fortiori* pas aux mêmes probabilités de détection. Ils ne sont par conséquent pas équivalents, n'ayant finalement pas les mêmes objectifs d'optimisation.

Ces deux séries de simulations ont été réalisées dans un contexte monocible multicapteur, nous nous intéressons à présent aux résultats des allocations dans un environnement multicible.

	$K_1$	$K_2$	$K_1 - K_2$	$K_3$	$K_1 - K_3$	$K_2 - K_3$	$K_1 - K_2 - K_3$
<i>cible</i>	0.3607	0.2929	0.3656	<b>0.2070</b>	0.3877	0.3379	0.3575

TAB. 5.9: entropies associées aux probabilités du tableau 5.8

	$K_1$	$K_2$	$K_1 - K_2$	$K_3$	$K_1 - K_3$	$K_2 - K_3$	$K_1 - K_2 - K_3$
<i>cible</i>	0	-0.0993	0.1311	-0.1060	0.0640	-0.0593	<b>0.1989</b>

TAB. 5.10: gain de discrimination,  $q=0.2974$ 

### 5.3.5 3<sup>ème</sup> scénario de simulations : $N$ cibles et $P$ capteurs

Nous nous plaçons dans une situation dans laquelle se trouvent  $N$  cibles et  $P$  capteurs. Les cibles sont identiques et stationnaires, les capteurs sont stationnaires, délocalisés et de type radar. Pour nos simulations, leurs nombres sont aléatoirement compris entre un et dix. Les positions des capteurs par rapport aux cibles sont également aléatoires, les distances restant comprises entre 20 et 70 km. Comme dans les deux situations précédentes nos simulations ont montré que, quels que soient le nombre de cibles et de capteurs ainsi que les distances, les allocations obtenues par les trois méthodes de sélection ne sont pas équivalentes et ne conduisent pas par conséquent aux mêmes probabilités de détection. Ces simulations, réalisées un grand nombre de fois, nous ont permis de déterminer statistiquement la méthode d'allocation conduisant au maximum de la somme des probabilités de détection. Pour simplifier, nous dénommons méthode 1, méthode 2 et méthode 3 les trois méthodes d'allocation associées aux critères  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}$ .

Le programme d'allocation a été lancé un grand nombre de fois, les statistiques suivantes ont été évaluées :

- $\rho_1$  : le pourcentage de pseudo-capteurs constitués par la méthode 1,
- $\rho_2$  : le pourcentage de pseudo-capteurs constitués par la méthode 2,
- $\rho_3$  : le pourcentage de pseudo-capteurs constitués par la méthode 3,
- $\rho_4$  : le pourcentage de réalisations pour lesquelles la somme des probabilités de détection obtenue par la méthode 3 est supérieure à celle obtenue par la méthode 2,
- $\rho_5$  : le pourcentage de réalisations pour lesquelles la somme des probabilités de détection obtenue par la méthode 3 est supérieure à celle obtenue par la méthode 1,
- $\rho_6$  : le pourcentage de réalisations pour lesquelles la somme des probabilités de détection obtenue par la méthode 1 est supérieure à celle obtenue par la méthode 2.

Les résultats sont regroupés dans le tableau 5.11.

Ces valeurs sont importantes puisqu'elles nous donnent des informations statistiques sur les performances de chacune des trois méthodes.

Les taux  $\rho_4$ ,  $\rho_5$  et  $\rho_6$  quantifient les performances des méthodes les unes par rapport aux autres. Les taux  $\rho_5$  et  $\rho_6$  permettent de conclure à la très nette infériorité de la première

	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$	$\rho_5$	$\rho_6$
%	64.13	89.89	6.01	85.59	95.61	20.09

TAB. 5.11: statistiques sur 10000 réalisations,  $N$ ,  $P$  et les distances sont aléatoires

méthode par rapport aux deux autres. Le taux  $\rho_4$  affirme, quant à lui, la nette supériorité de la troisième méthode par rapport à la seconde, même si la valeur du taux  $\rho_3$  montre qu'elle ne favorise pas la formation de pseudo-capteurs alors que les méthodes issues de la théorie de l'information y ont presque systématiquement recours.

Nous pouvons constater que ces observations ne vont pas dans le même sens que celles effectuées dans les deux premières situations, nous considérons cependant que le contexte dans lequel nous nous trouvons, à savoir plusieurs cibles, plusieurs capteurs et des probabilités pas nécessairement très élevées, est le plus général. A la vue des observations effectuées, en dépit du fait que cette méthode ne favorise pas la constitution de regroupements de capteurs, et parce que notre objectif reste malgré tout l'optimisation des performances de détection, nous conservons pour la suite de notre étude le critère  $\mathcal{C}$ , basé sur le maximum de la somme des probabilités de détection, comme critère d'allocation des capteurs sur les cibles. Et nous nous tournons à présent vers l'établissement d'une allocation initiale des capteurs sur les cibles puis vers une planification de ces allocations pendant la durée allouée à la phase de détection. Cette étude se fait dans un premier temps dans un cadre de connaissance déterministe.

## 5.4 Allocation initiale - Connaissance déterministe

Le processus d'allocation que nous avons établi peut être divisé en trois étapes :

**Étape 1** : calcul des probabilités de détection des  $P$  capteurs de base. Connaissant les distances entre les capteurs et les cibles (et en les supposant discernables les uns des autres), ainsi que la durée  $T$  allouée à la phase de détection, il nous est possible de déterminer les probabilités de détection par les relations (3.14) et (3.15) page 70, pour une durée  $T$  d'observation de chaque cible par chaque capteur. Ceci est une première méthode. La deuxième, et celle que nous adopterons car nous avons supposé qu'un capteur ne pouvait observer qu'une seule cible à la fois, consiste à déterminer pour chaque capteur une répartition optimale de la durée  $T$  entre les cibles à observer, selon les résultats présentés dans le chapitre 4. Ainsi chaque capteur est utilisé dans des conditions optimales de fonctionnement pour la détection des cibles qui se trouvent dans son secteur d'observation. Ces probabilités peuvent tenir compte éventuellement d'une pondération sur les cibles dont nous avons vu la méthode de calcul.

**Étape 2** : calcul des probabilités de détection des cibles par les pseudo-capteurs. Ce calcul nécessite une loi de fusion, que nous avons déterminée comme étant la loi OU. Supposons deux capteurs  $A$  et  $B$ . Soit  $d_A$  (resp.  $d_B$ ) la distance du capteur  $A$  (resp.  $B$ ) à la cible,

et  $t_A$  (resp.  $t_B$ ) la durée d'observation. La probabilité de détection résultante est par conséquent :

$$P(d_A, t_A, d_B, t_B) = P_d(d_A, t_A) + P_d(d_B, t_B) - P_d(d_A, t_A) P_d(d_B, t_B) \quad (5.5)$$

Toutefois, nous ne l'appliquerons pas telle quelle. La probabilité de détection de la cible par le pseudo-capteur  $A - B$  sera effectivement la fusion par la loi OU des deux probabilités de détection, mais chacune de celles-ci sera calculée avec plus petite durée d'observation de la cible par ces deux capteurs. Les deux probabilités à fusionner seront calculées en fonction de  $d_A$  et  $\min(t_A, t_B)$  d'une part, et de  $d_B$  et  $\min(t_A, t_B)$  d'autre part :

$$P(d_A, t_A, d_B, t_B) = P_d(d_A, \min(t_A, t_B)) + P_d(d_B, \min(t_A, t_B)) - P_d(d_A, \min(t_A, t_B)) P_d(d_B, \min(t_A, t_B)) \quad (5.6)$$

Ceci est évidemment généralisable à un nombre plus élevé de capteurs. Considérer la durée minimale permet de nous assurer qu'aucun capteur n'est inutile.

**Etape 3** : détermination de l'allocation maximisant le critère  $\mathcal{C}$ . Plusieurs méthodes sont envisageables :

- la méthode exhaustive, consistant à considérer toutes les allocations possibles,
- une méthode de programmation linéaire en nombres entiers,
- une méthode heuristique que nous avons privilégiée pour limiter le nombre de calculs lorsque les nombres de capteurs et de cibles sont trop importants.

Notons que le choix de la méthode de sélection n'empêche en rien le caractère général de notre démarche.

En établissant une allocation temporelle, nous considérons chaque capteur dans son individualité et la façon dont il gèrerait à lui seul l'observation de l'ensemble des cibles. Donc, tenir compte des allocations temporelles individuelles permet d'optimiser l'utilisation de chaque capteur pris séparément, les intégrer dans la méthode d'allocation globale permet d'optimiser l'utilisation de l'ensemble de ces capteurs. D'autre part, l'intégration des allocations temporelles dans cette méthode d'allocation permet d'éviter des ambiguïtés quant au choix des capteurs. En effet, deux capteurs équidistants d'une cible auront, pour la même durée d'observation  $T$ , la même probabilité de détection, donc la même entropie et le même gain de discrimination. Le choix de l'un ou l'autre des capteurs sera donc ambigu. Par la considération des allocations temporelles propres à chaque capteur, deux capteurs équidistants d'une cible n'auront pas forcément la même durée à consacrer à son observation, donc pas la même probabilité de détection. Le choix du capteur est par conséquent sans équivoque possible.

Voyons au travers d'un exemple comment se déroule chacune de ces étapes.

### 5.4.1 Exemple d'allocation instantanée

Soient trois capteurs et trois cibles, nous dénommerons ces dernières  $C_n$ ,  $n \in \{1, 2, 3\}$ . Les distances auxquelles elles se trouvent par rapport aux capteurs figurent dans le tableau 5.12. Nous supposons que les cibles et les capteurs présents dans l'espace à deux dimensions sont différentiables deux à deux. Nous considérons d'autre part des dépointages nuls.

<i>distance capteur – cible (en km)</i>	$K_1$	$K_2$	$K_3$
$C_1$	45	26	52
$C_2$	51	45	25
$C_3$	50	33	41

TAB. 5.12: *distances capteurs-cibles (en km)*

#### 5.4.1.1 Etape 1 : calcul des probabilités de détection

Considérant les distances du tableau 5.12 et une durée  $T = 5\text{ ms}$  allouée à la phase de détection, nous réalisons une allocation temporelle optimale pour chaque capteur, donnée dans le tableau 5.13.

<i>allocation temporelle (en ms)</i>	$K_1$	$K_2$	$K_3$
$C_1$	2.5807	1.1702	0.9224
$C_2$	1.0109	1.8768	1.1462
$C_3$	1.4084	1.9530	2.9314

TAB. 5.13: *allocation temporelle optimale (en ms)*

Nous en déduisons alors le tableau 5.14 des probabilités de détection.

<i>probabilités de détection</i>	$K_1$	$K_2$	$K_3$
$C_1$	0.4814	0.9309	0.1233
$C_2$	0.1444	0.3797	0.9532
$C_3$	0.2095	0.8206	0.6612

TAB. 5.14: *probabilités de détection associées aux tableaux 5.12 et 5.13*

#### 5.4.1.2 Etape 2 : pseudo-capteurs et probabilités de détection

Si  $P$  est le nombre de capteurs, alors  $S = 2^P - 1$  est le nombre de pseudo-capteurs. Lorsque  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$  sont les capteurs de base, les pseudo-capteurs sont :  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_1 - K_2$ ,  $K_1 - K_3$ ,  $K_2 - K_3$  et  $K_1 - K_2 - K_3$ . Les probabilités de détection qui découlent de la méthode proposée dans le paragraphe précédent sont données dans le tableau 5.15.



<i>probabilités de détection</i>	$K_1$	$K_2$	$K_1-K_2$	$K_3$	$K_1-K_3$	$K_2-K_3$	$K_1-K_2-K_3$
$C_1$	0.4814	0.9309	0.9487	0.1233	0.3067	0.8933	0.9156
$C_2$	0.1444	0.3797	0.3384	0.9532	0.9425	0.9650	0.9555
$C_3$	0.2095	0.8206	0.7710	0.6612	0.5300	0.9128	0.8639

TAB. 5.15: *probabilités de détection associées aux pseudo-capteurs*

### 5.4.1.3 Etape 3 : détermination de l'allocation optimale

Etant donné le faible nombre de capteurs et de cibles, nous envisageons ici toutes les possibilités d'allocation et les sommes des probabilités résultantes, en considérant l'hypothèse qu'un capteur, ou pseudo-capteur, ne peut observer qu'une seule cible à la fois. Nous symbolisons les allocations par des flèches.

- $S1 : K_1 \rightarrow C_1, K_2 \rightarrow C_2 \text{ et } K_3 \rightarrow C_3 : 0.4814 + 0.3797 + 0.6612 = 1.5223,$   
 $S2 : K_1 \rightarrow C_1, K_2 \rightarrow C_3 \text{ et } K_3 \rightarrow C_2 : 0.4814 + 0.8206 + 0.9532 = 2.2552,$   
 $S3 : K_1 \rightarrow C_1 \text{ et } K_2 - K_3 \rightarrow C_2 : 0.4814 + 0.9650 = 1.4464,$   
 $S4 : K_1 \rightarrow C_1 \text{ et } K_2 - K_3 \rightarrow C_3 : 0.4814 + 0.9128 = 1.3942,$   
 $S5 : K_1 \rightarrow C_2, K_2 \rightarrow C_1 \text{ et } K_3 \rightarrow C_3 : 0.1444 + 0.9309 + 0.6612 = 1.7365,$   
 $S6 : K_1 \rightarrow C_2, K_2 \rightarrow C_3 \text{ et } K_3 \rightarrow C_1 : 0.1444 + 0.8206 + 0.1233 = 1.0883,$   
 $S7 : K_1 \rightarrow C_2 \text{ et } K_2 - K_3 \rightarrow C_1 : 0.1444 + 0.8933 = 1.0377,$   
 $S8 : K_1 \rightarrow C_2 \text{ et } K_2 - K_3 \rightarrow C_3 : 0.1444 + 0.9128 = 1.0572,$   
 $S9 : K_1 \rightarrow C_3, K_2 \rightarrow C_1 \text{ et } K_3 \rightarrow C_2 : 0.2095 + 0.9309 + 0.9532 = 2.0936,$   
 $S10 : K_1 \rightarrow C_3, K_2 \rightarrow C_2 \text{ et } K_3 \rightarrow C_1 : 0.2095 + 0.3797 + 0.1233 = 0.7125,$   
 $S11 : K_1 \rightarrow C_3 \text{ et } K_2 - K_3 \rightarrow C_1 : 0.2095 + 0.8933 = 1.1028,$   
 $S12 : K_1 \rightarrow C_3 \text{ et } K_2 - K_3 \rightarrow C_2 : 0.2095 + 0.9650 = 1.1745,$   
 $S13 : K_2 \rightarrow C_1, K_1 - K_3 \rightarrow C_2 : 0.9309 + 0.9425 = 1.8734,$   
 $S14 : K_2 \rightarrow C_1, K_1 - K_3 \rightarrow C_3 : 0.9309 + 0.5300 = 1.4609,$   
 $S15 : K_2 \rightarrow C_2, K_1 - K_3 \rightarrow C_1 : 0.3797 + 0.3067 = 0.6864,$   
 $S16 : K_2 \rightarrow C_2, K_1 - K_3 \rightarrow C_3 : 0.3797 + 0.5300 = 0.9097,$   
 $S17 : K_2 \rightarrow C_3, K_1 - K_3 \rightarrow C_1 : 0.8206 + 0.3067 = 1.1273,$   
 $S18 : K_2 \rightarrow C_3, K_1 - K_3 \rightarrow C_2 : 0.8206 + 0.9425 = 1.7631,$   
 $S19 : K_3 \rightarrow C_1, K_1 - K_2 \rightarrow C_2 : 0.1233 + 0.3384 = 0.4617,$   
 $S20 : K_3 \rightarrow C_1, K_1 - K_2 \rightarrow C_3 : 0.1233 + 0.7710 = 0.8943,$   
 $S21 : K_3 \rightarrow C_2, K_1 - K_2 \rightarrow C_1 : 0.9532 + 0.9487 = 1.0190,$   
 $S22 : K_3 \rightarrow C_2, K_1 - K_2 \rightarrow C_3 : 0.9532 + 0.7710 = 1.7242,$

$$S23 : K_3 \rightarrow C_3, K_1 - K_2 \rightarrow C_1 : 0.6612 + 0.9487 = 1.6099,$$

$$S24 : K_3 \rightarrow C_3, K_1 - K_2 \rightarrow C_2 : 0.6612 + 0.3384 = 0.9996,$$

$$S25 : K_1 - K_2 - K_3 \rightarrow C_1 : 0.9156,$$

$$S26 : K_1 - K_2 - K_3 \rightarrow C_2 : 0.9555,$$

$$S27 : K_1 - K_2 - K_3 \rightarrow C_3 : 0.8639,$$

L'allocation donnant la somme des probabilités maximale est la solution  $S2$ , c'est à dire le capteur  $K_1$  sur la cible  $C_1$ , le capteur  $K_2$  sur la cible  $C_3$  et le capteur  $K_3$  sur la cible  $C_2$ . Nous pouvons constater que cette allocation est telle que toutes les cibles sont observées et que tous les capteurs sont utilisés. Cependant, ce n'est pas forcément le capteur le plus proche d'une cible qui est affecté à sa détection. Ceci s'explique par le fait que nous sommes dans une démarche d'optimisation globale et non pas d'optimisation des performances de détection de chacun des capteurs pris individuellement.

Maintenant que cette allocation initiale est réalisée nous allons voir à partir de celle-ci comment établir une planification de l'utilisation des capteurs.

## 5.5 Planification de l'utilisation des capteurs pendant la durée $T$

Nous venons d'aborder une méthode d'allocation d'un nombre donné de capteurs à la détection d'un nombre donné de cibles. Nous nous intéressons dorénavant à la façon de gérer ces allocations dans la durée  $T$  impartie à la phase de détection des cibles, c'est à dire donner une des réponses à la question « *quel capteur, sur quelle cible, pendant combien de temps ?* ». Même si nous n'utilisons pas exactement le critère défini en (2.14), les contraintes formulées sur les capacités restent les mêmes. Ainsi nous supposons qu'un capteur ne peut observer qu'une seule cible à la fois.

Notre méthode d'allocation est fondée sur deux pré-requis : l'allocation temporelle optimale réalisée pour chacun des capteurs et l'allocation initiale des  $P$  capteurs sur les  $N$  cibles, selon la méthode précédemment présentée. Se basant sur ces données, elle est régie par trois règles de fonctionnement :

- règle 1 : l'allocation capteur-cible est remise en cause dès que l'une des durées d'observation des couples « actifs » est passée : le ou les capteur(s) concerné(s) doivent être réaffecté(s) à une autre cible. Un couple « actif » est une allocation d'un capteur, ou pseudo-capteur, sur une cible.
- règle 2 : si une pondération des cibles a été réalisée, les capteurs sont affectés sur les cibles ayant la pondération la plus élevée, c'est à dire celles ayant les facteurs de dangerosité les plus forts, nécessitant pas conséquent une observation prioritaire,
- règle 3 : s'il n'y a pas de pondérations, les capteurs sont affectés vers la cible nécessitant la plus faible durée d'observation non nulle. Ces durées ont été établies de façon à

optimiser les performances de détection. Ainsi, en donnant la priorité aux courtes durées nous serons assurés de l'optimalité des performances de détection des cibles observées, par exemple dans les cas où des contraintes opérationnelles nous amèneraient à ne pouvoir achever la détection.

Cette méthode est illustrée par des simulations.

### 5.5.1 Exemple de planification

Nous reprenons la situation présentée dans le paragraphe 5.4.1. Les simulations ci-dessous représentent deux situations. Dans la première, aucune priorité n'est donnée aux cibles, c'est à dire que les coefficients de pondérations sont tous unitaires. Dans la seconde, l'allocation se fait en fonction des priorités d'observation, traduites par des coefficients de pondération (de dangerosité) non égaux.

#### 5.5.1.1 Situation 1 : les coefficients de dangerosité sont unitaires

L'allocation capteurs-cibles a été déterminée dans le paragraphe 5.4.1. Son résultat est synthétisé dans la matrice *allocation*, dont les lignes représentent les cibles et les colonnes les capteurs de base. La valeur 1 dans la case  $(i, j)$  signifie que le capteur  $j$  est affecté à l'observation de la cible  $i$ .

$$allocation = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

La durée pendant laquelle cette allocation est effective est déterminée par la règle 1. Elle correspond à la durée minimale d'observation des cibles par les capteurs sélectionnés. Soit  $t_{obs}$  cette durée,  $t_{obs} = \min(t_1, t_2, t_3)$  avec :

$t_1 = 2.5807$ , la durée d'observation de la cible  $C_1$  par le capteur  $K_1$ ,

$t_2 = 1.1462$ , la durée d'observation de la cible  $C_2$  par le capteur  $K_3$ ,

$t_3 = 1.9530$ , la durée d'observation de la cible  $C_3$  par le capteur  $K_2$ .

L'allocation est alors remise en cause au bout de  $t_{obs} = 1.1462$  ms. Pendant cette durée, le capteur  $K_3$  a observé la cible  $C_2$  de façon optimale, au sens des performances de détection, il va alors être réorienté vers une autre cible. Les autres cibles ont elles aussi été observées pendant  $t_{obs}$ , il s'ensuit une modification, en gras, du tableau 5.13 de l'allocation temporelle pour donner le tableau 5.16.

Selon la règle 3, le capteur  $K_3$  est réorienté vers la cible qui nécessite la plus faible durée d'observation pour atteindre des performances de détection optimales. Il s'agit ici de la cible

<i>allocation temporelle (en km)</i>	$K_1$	$K_2$	$K_3$
$C_1$	<b>1.4345</b>	1.1702	0.9224
$C_2$	1.0109	1.8768	<b>0</b>
$C_3$	1.4084	<b>0.8068</b>	2.9314

TAB. 5.16: *allocation temporelle après une durée d'observation  $t_{obs}$* 

$C_1$ . La matrice d'allocation devient alors :

$$allocation = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

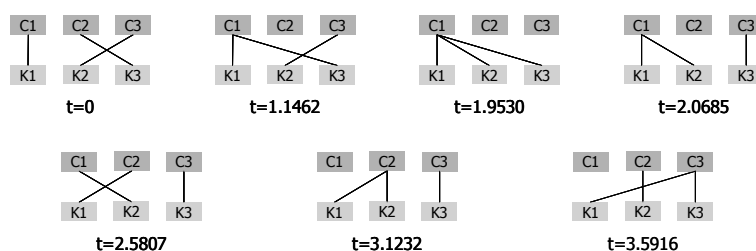
Le capteur  $K_2$  reste affecté à l'observation de la cible  $C_3$ , alors que le pseudo-capteur  $K_1 - K_3$  prend en charge l'observation de la cible  $C_1$ .

Nous réitérons cet algorithme jusqu'à arriver à l'instant  $t = T$ . Nous ne rentrerons pas dans le détail de l'élaboration de la planification mais en donnons une synthèse dans le tableau 5.17.

<i>temps</i>	0	1.1462	1.9530	2.0685	2.5807	3.1232	3.5916	5	
<i>capteurs</i>	$K_1$	$C_1$	$C_1$	$C_1$	$C_1$	$C_2$	$C_2$	$C_3$	$C_3$
	$K_2$	$C_3$	$C_3$	$C_1$	$C_1$	$C_1$	$C_2$	$C_2$	$C_2$
	$K_3$	$C_2$	$C_1$	$C_1$	$C_3$	$C_3$	$C_3$	$C_3$	$C_3$

TAB. 5.17: *tableau récapitulatif des allocations des  $P$  capteurs sur les  $N$  cibles pendant la durée  $T$* 

Cette allocation est schématisée sur la figure 5.4 page 171.

FIG. 5.4: *schématisation de la planification de l'utilisation des capteurs pendant la durée  $T$* 

Au total la cible  $C_1$  aura été observée pendant 3.1232 ms, la cible  $C_2$  pendant 3.5655 ms et la cible  $C_3$  pendant 4.8845 ms. Leurs probabilités de détection sont respectivement 0.9686, 0.9751 et 0.9520. La somme de ces probabilités est égale à 2.8957. Nous pouvons remarquer qu'elle est supérieure à 2.7075 qui est la somme que l'on aurait obtenue si l'allocation établie initialement avait été conservée pendant toute la durée  $T$ .

### 5.5.1.2 Situation 2 : les coefficients de dangerosité ne sont pas unitaires

Le contexte de simulation est le même que précédemment, c'est à dire les mêmes nombres de cibles et de capteurs et les mêmes distances. Nous tenons compte à présent de la menace que peuvent représenter les cibles, menace en partie due à leurs positions plus ou moins lointaines. Elle est prise en compte de manière effective par l'introduction de coefficients de dangerosité, c'est à dire de pondérations, dans les critères d'optimisation.

Une méthode de calcul des coefficients de pondération a été proposée dans le paragraphe 4.1.3, nous l'utilisons et obtenons le tableau 5.18.

<i>coefficients de pondération</i>	$K_1$	$K_2$	$K_3$
$C_1$	0.3863	0.5116	0.1441
$C_2$	0.3008	0.1708	0.6239
$C_3$	0.3129	0.3176	0.2320

TAB. 5.18: *coefficients de pondération*

L'allocation temporelle tient compte de ces coefficients. Il en découle le tableau 5.19 de la nouvelle allocation temporelle.

<i>allocation temporelle (en km)</i>	$K_1$	$K_2$	$K_3$
$C_1$	3.2713	1.5565	0
$C_2$	0.5298	1.0305	1.5835
$C_3$	1.1989	2.4130	1.4165

TAB. 5.19: *allocation temporelle optimale (en ms), tenant compte des pondérations*

L'allocation initiale est obtenue de la même façon que dans le paragraphe précédent. Elle est telle que le capteur  $K_1$  observe la cible  $C_3$ , le capteur  $K_2$  la cible  $C_1$  et le capteur  $K_3$  la cible  $C_2$ . Nous pouvons à nouveau constater qu'elle est une optimisation globale car les capteurs ne sont pas systématiquement affectés à l'observation de la cible la plus dangereuse à leurs yeux.

Nous établissons la planification à partir de ces données en suivant les règles 1 et 2, c'est à dire en donnant la priorité à l'observation des cibles dangereuses ou considérées comme telles. Le tableau 5.20 regroupe les résultats, illustrés d'autre part par la figure 5.5 page 173.

<i>temps</i>	0	0.1989	1.5565	1.5835	3.0000	3.9695	5	
<i>capteurs</i>	$K_1$	$C_3$	$C_1$	$C_1$	$C_1$	$C_1$	$C_1$	$C_1$
	$K_2$	$C_1$	$C_1$	$C_3$	$C_3$	$C_3$	$C_2$	$C_2$
	$K_3$	$C_2$	$C_2$	$C_2$	$C_3$	$C_1$	$C_1$	$C_1$

TAB. 5.20: *tableau récapitulatif des allocations des P capteurs sur les N cibles pendant la durée T, tenant compte de la menace des cibles*

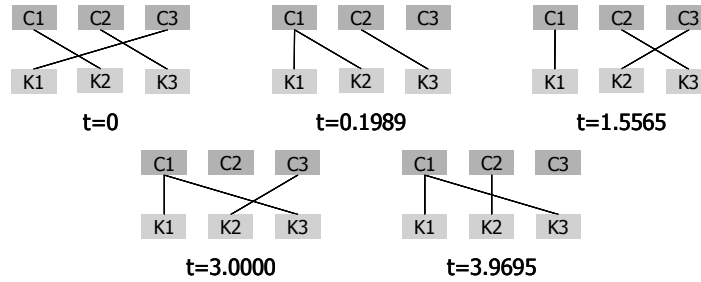


FIG. 5.5: schématisation de la planification de l'utilisation des capteurs pendant la durée  $T$ , prise en compte de la menace

Au total la cible  $C_1$  aura été observée pendant  $5\text{ ms}$ , la cible  $C_2$  pendant  $2.6140\text{ ms}$  et la cible  $C_3$  pendant  $3.6119\text{ ms}$ . Leurs probabilités de détection sont respectivement  $0.9918$ ,  $0.9888$  et  $0.9419$ . La somme de ces probabilités est égale à  $2.9225$ . Conserver l'allocation initiale pendant la durée  $T$  aurait conduit à une somme de probabilités égale à  $2.5660$ .

### 5.5.2 Analyse des résultats de simulation

Ces deux exemples avaient pour but l'illustration de la méthode d'allocation que nous avons mise en place. Plusieurs remarques générales peuvent être formulées à leur sujet, confirmées par les autres simulations qui ont été réalisées.

Nous pouvons d'abord insister sur le fait qu'il ne s'agit pas d'une méthode dynamique de gestion mais d'une méthode de programmation de l'utilisation de chaque capteur, ayant toujours pour but l'optimisation de leurs performances de détection. Par conséquent elle n'intègre pas la connaissance acquise au fur et à mesure et n'effectue pas de bouclage en cas de détection effective. Ce n'est donc pas une stratégie réactive au sens propre du terme. Cependant, à partir d'une allocation optimale initiale réalisée dans un environnement monocapteur multicible (l'allocation optimale est réalisée pour chaque capteur), nous évoluons vers une allocation multicapteur multicible. Ainsi lorsque nous réalisons des tests sur un grand nombre de configurations aléatoires, nous évaluons à  $70,6\%$  le pourcentage des cas dans lesquels la somme des probabilités de détection des cibles issues de notre méthode d'allocation est supérieure à celle obtenue dans le cas où l'allocation initiale serait conservée pendant toute la durée  $T$ . Même si elle reste issue du domaine heuristique et que nous n'avons pas démontré son éventuelle optimalité, notre méthode de planification apporte donc une amélioration par rapport à la méthode initiale. Cette tendance est vérifiée par les deux simulations qui ont été présentées. Nous aurions pu par ailleurs nous interroger sur l'opportunité de réaliser une allocation temporelle, puis une allocation initiale, pour l'ensemble des entités et non pas pour

chacun des capteurs. Ainsi les contraintes d'optimisation auraient été écrites sous la forme :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P t_{ij} = T \text{ et } t_{ij} \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall j \in \{1, \dots, P\} \quad (5.9)$$

Cependant, cette méthode n'est pas optimale à notre idée dans le sens où la contrainte d'utilisation d'un capteur pendant toute la durée  $T$  n'est plus imposée. Des contraintes opérationnelles supplémentaires permettront peut-être de pallier à ce problème. Les ressources dont nous disposons sont sous-utilisées par ce type d'allocation, cela peut gêner la recherche d'optimalité de notre démarche.

Outre l'utilisation des capteurs pendant l'intégralité de la phase de détection, notre méthode favorise dans les simulations présentées l'observation de toutes les cibles. Ceci n'est pas forcément vérifié dans toutes les situations. Les simulations que nous avons réalisées ont montré que l'observation de toutes les cibles et l'utilisation de tous les capteurs dépendaient de leur nombre. Si le nombre de capteurs est important par rapport à celui des cibles, il est possible qu'ils ne soient pas tous utilisés. Inversement, s'il y a beaucoup plus de cibles que de capteurs, il est très probable qu'elles ne soient pas toutes observées (par contre les capteurs seront utilisés pendant toute la durée de la phase de détection). Une augmentation de la durée  $T$  permet toutefois d'améliorer le nombre de cibles observées. De façon générale, si le nombre de capteurs est inférieur à celui des cibles, ceux-ci auront comme objectif d'en détecter le maximum et de toute façon d'obtenir les meilleures performances de détection possibles.

L'introduction de coefficients de pondération influence les résultats. Même si l'allocation initiale peut être identique, elle diffère par la suite au niveau des instants de réallocation, dus à une allocation temporelle différente, mais aussi au niveau de l'allocation matérielle en elle-même. Les mêmes capteurs n'observeront pas les mêmes cibles au même moment.

Nous pouvons constater par ailleurs que, de façon générale, les capteurs observent les cibles selon l'ordre décroissant de la menace qu'elles représentent pour eux. Dans notre exemple, le capteur  $K_2$  commence par observer la cible  $C_1$ , dont la menace qu'elle représente à ses yeux est égale à 0.5116, puis la cible  $C_3$ , de menace 0.3176, enfin il achève son observation par la cible  $C_2$ , de menace inférieure 0.1708. Il en est de même pour le capteur  $K_3$ . Par contre, selon toute logique, le capteur  $K_1$  aurait dû commencer par l'observation de la cible  $C_1$ . Ceci s'explique à nouveau par le caractère de globalité de l'optimisation que nous réalisons et par le fait que la méthode de sélection initiale que nous avons retenue pour l'allocation initiale des capteurs sur les cibles, c'est à dire la recherche de la combinaison capteurs-cibles permettant de maximiser la somme des probabilités de détection, ne favorise pas l'élaboration de pseudo-capteurs. Puisque la cible  $C_1$  représente une plus grande menace pour le capteur  $K_2$  qu'elle ne le fait pour le capteur  $K_1$  et que le non-regroupement initial des capteurs entraîne l'observation simultanée d'un plus grand nombre de cibles, il est naturel de voir le capteur  $K_1$  s'orienter vers la cible  $C_3$ , de menace juste inférieure à celle de la cible  $C_1$ .

Ainsi, à partir d'une connaissance déterministe de la situation, c'est à dire la connaissance

des positions des cibles et l'hypothèse de la différentiabilité de celles-ci, nous sommes capables d'élaborer une stratégie de planification de l'observation de ces cibles par les différents capteurs radars qui composent le système. Comme dans les chapitres antérieurs, ces résultats ne sont valables que dans l'hypothèse de durées de déplacement des axes de visée des capteurs négligeables. Nous disposons en effet comme connaissance *a priori* des distances des cibles par rapport aux capteurs et de leurs dépointages. Une telle connaissance ne permet pas d'établir une représentation unique dans notre espace à deux dimensions. Dans l'hypothèse de durées de déplacement nulles cette possibilité de multiconfigurations n'est pas une entrave, elle le deviendrait instantanément si les durées n'étaient plus négligeables. C'est pourquoi, comme dans le chapitre 4, nous nous tournons vers une hypothèse de connaissance *a priori* probabiliste qui nous contraint à considérer une configuration unique dans notre espace à deux dimensions. Ne sachant pas précisément où se trouvent les cibles nous allons alors nous intéresser à la problématique suivante : « à un instant donné, dans quelles directions les capteurs doivent-ils orienter leurs axes de visée pour détecter les cibles qui se trouvent dans leur zone de surveillance ? ». C'est le but de la section suivante.

## 5.6 Allocation initiale et planification - Connaissance probabiliste

Soit un espace à deux dimensions, nous considérons comme dans le début de ce chapitre qu'il s'y trouve  $P$  capteurs délocalisés disposant d'une durée  $T$  pour la détection de  $N$  cibles. Nous utilisons pas ailleurs le même critère de sélection des capteurs, c'est à dire le critère  $\mathcal{C}$ . Afin de suivre la même démarche que celle proposée dans le cas déterministe, nous commençons par établir l'allocation temporelle optimale propre à chaque capteur. Nous nous intéresserons ensuite à la méthode de planification.

### 5.6.1 Allocation initiale

Dans la troisième hypothèse du chapitre 4 a été présentée une méthode d'allocation d'une durée  $T$  à la détection de  $N$  cibles par un unique capteur dans le cas d'une connaissance *a priori* probabiliste. Nous avons alors défini un repère dont le centre était confondu avec le capteur et orienté de façon cohérente par rapport au secteur d'observation, comme l'illustre le schéma (a) de la figure 5.6 page 176. En tenant compte du fait qu'il puisse y avoir plusieurs capteurs délocalisés pour la surveillance de la zone aérienne nous sommes amenés à déterminer un repère absolu pour l'ensemble des entités, selon le schéma (b) de cette même figure.

De plus, afin d'employer une méthode d'allocation temporelle identique à celle proposée dans le chapitre précédent, nous associons à chaque capteur un repère cartésien semblable à celui du schéma (a) de la figure 5.6. Les centres de ces repères sont confondus avec les capteurs auxquels ils sont associés, leur orientation est déterminée de façon à ce que la cible (ou la distribution) la plus proche du capteur se trouve au milieu de son secteur d'observation,



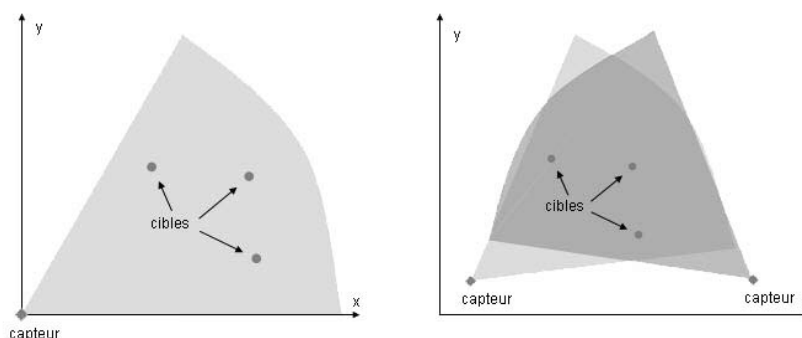


FIG. 5.6: schématisation du placement des capteurs et de leurs zones de surveillance, (a) cas d'un unique capteur, (b) cas de plusieurs capteurs

selon la figure 5.7 page 176. Par un changement de variable approprié, une translation et une rotation, nous retrouvons pour chaque capteur une situation telle qu'elle a été définie dans le chapitre 4 et pouvons par conséquent en appliquer les résultats.

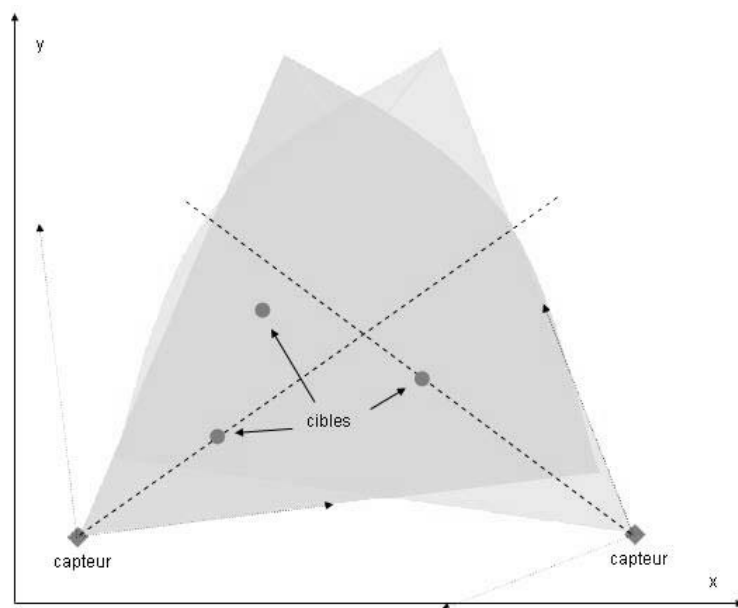


FIG. 5.7: schématisation du positionnement du secteur d'observation de chaque capteur et des repères cartésiens associés

A titre d'exemple, nous considérons une configuration de deux cibles et deux capteurs présents dans notre espace, telle que :

- par rapport au repère absolu les positions des porteurs, donc des capteurs, sont respectivement  $(0, 0)$  et  $(90, 20)$ . Ces distances sont données en kilomètres,
- la connaissance *a priori* sur la première cible est une distribution de probabilités telle que  $\sigma_x = \sigma_y = 0.1 \text{ km}$ , elle est centrée autour de la position  $\bar{x} = 25 \text{ km}$ ,  $\bar{y} = 45 \text{ km}$ ,
- la connaissance *a priori* sur la deuxième cible est une distribution de probabilités telle que  $\sigma_x = \sigma_y = 0.1 \text{ km}$ , elle est centrée autour de la position  $\bar{x} = 60 \text{ km}$ ,  $\bar{y} = 20 \text{ km}$ .

Disposant d'une durée à allouer de  $30 \text{ ms}$ , nous déterminons sa répartition pour l'optimisation des performances de détection des deux cibles par chacun des capteurs. Nous obtenons ainsi les résultats du tableau 5.21, et les probabilités de détection résultantes dans le tableau 5.22. Elles représentent les probabilités de détecter une ou plusieurs cibles dans chaque direction et pour chaque capteur.

<i>directions</i>	1..6	7	8..14	15	16..21	22	23..40
$K_1$	0	17.8264	0	0	0	12.1736	0
$K_2$	0	0	0	27.0136	0	2.9864	0

TAB. 5.21: répartition optimale de la durée  $T$  pour chaque capteur

<i>directions</i>	1..6	7	8..14	15	16..21	22	23..40
$K_1$	0	0.7726	0	0	0	0.9002	0
$K_2$	0	0	0	0.7862	0	0.9926	0

TAB. 5.22: probabilités de détection résultant de l'allocation temporelle optimale donnée dans le tableau 5.21

Plusieurs remarques peuvent être faites par rapport à ces résultats. Nous insistons d'abord sur le fait que les directions données sont propres à chacun des capteurs, en raison de leur délocalisation. Ainsi la direction 22 du capteur  $K_1$  est différente de la direction 22 du capteur  $K_2$ , elles sont regroupées dans un même tableau par un souci de concision. D'autre part, nous avons implicitement fait l'hypothèse qu'un capteur ne pouvait pas être considéré comme une cible par un autre capteur, c'est à dire que nous avons supposé l'étape d'association des données réalisée et exacte.

### 5.6.2 Vers une méthode de planification

L'allocation temporelle que nous venons d'établir est une étape d'optimisation propre à chaque capteur. Notre objectif est d'établir une optimisation globale de l'utilisation de l'ensemble de ces capteurs. Celle-ci consiste, dans le cas d'une connaissance incertaine, en la problématique suivante : « à un instant donné, dans quelle direction doit observer chaque capteur afin de maximiser les performances de détection globales au bout de la durée  $T$  allouée à la phase de détection ? » Nous supposons pour résoudre ce problème que la phase

d'association de données a été réalisée, c'est à dire que nous sommes en mesure de savoir que deux capteurs différents et délocalisés sont en train d'observer la même distribution.

Avec l'exemple que nous avons considéré, c'est à dire pour des écarts-type relativement faibles, il serait aisé de mettre en place une méthode de planification similaire à celle présentée dans le paragraphe précédent, ceci parce que les distributions sont suffisamment peu étalées pour pouvoir être rattachées à une seule direction de l'espace. Dans un contexte plus opérationnel nous aurons affaire à des distributions d'écarts-type plus importants, c'est à dire étalées sur plusieurs directions de l'espace d'observation de chaque capteur. Il sera alors nécessaire de déterminer les probabilités de détection des cibles à partir des probabilités de détection des différents capteurs dans les directions rattachées à leurs distributions. En nous basant sur ces probabilités pour définir un critère à optimiser et sur les allocations temporelles établies, nous pourrons alors déterminer une planification de l'orientation des axes de visée de nos capteurs.

Notons que ce problème est ici simplifié par l'hypothèse émise sur l'association de données et sur le fait que nous utilisons un capteur de type radar. En effet son utilisation n'engendre aucune perte temporelle lors de la modification de l'orientation de l'axe de visée, ce qui n'est pas le cas du capteur passif infrarouge. Pour ce dernier nous serons amenés à réaliser une optimisation multicritère, c'est à dire la maximisation des performances de détection couplée à la minimisation des pertes temporelles.

## 5.7 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était d'étendre notre étude d'allocation au contexte multicapteur multicible. Nous avons pour cela cherché à déterminer une méthode d'allocation des capteurs sur les cibles et ce, en ayant pour objectif la maximisation des performances de détection de l'ensemble de ces capteurs.

Sous une première hypothèse de connaissance déterministe de la situation, nous avons mis en place une méthode heuristique de planification. Celle-ci est basée sur l'optimisation de l'utilisation individuelle de chacun des capteurs et sur une allocation initiale, elle-même basée sur un critère que nous avons choisi comme étant différent de l'entropie relative de Kullback-Leibler. A partir de celle-ci et de règles que nous avons définies, nous avons établi une planification de l'allocation des capteurs. Ainsi nous avons utilisé une optimisation des sous-systèmes monocapteurs multicibles pour l'élaboration d'une stratégie de gestion multicapteur multicible. Cette méthode n'a pas été démontrée comme étant optimale, cependant elle permet l'amélioration des performances de détection par rapport à l'allocation initiale qui, elle, a été déterminée de façon optimale à partir des résultats des chapitres précédents.

Nous avons ensuite fait l'hypothèse d'une connaissance *a priori* incertaine et cherché à mettre en place le même type de planification. Nous avons alors pris la mesure de la complexification du problème et notamment la nécessité d'une phase d'association de données. Celle-ci n'entrant pas dans le cadre de cette thèse, nous ne sommes pas rentrés dans les détails

de la méthode et en avons simplement donné les grandes lignes. Cette étude pourra cependant être abordée par la suite en vue d'apporter une ouverture à notre sujet.

Comme nous l'avons définie, la méthode proposée est une méthode de planification, à différencier d'une méthode de gestion dynamique ou réactive. N'ayant pas pris en compte le processus de détection, nous ne pouvons pas déterminer si une cible a été détectée ou non et ne pouvons par conséquent élaborer de méthode de gestion réactive. Nos travaux se présentent donc bien comme des méthodes d'allocations de ressources à partir d'une connaissance initiale, soumises à des contraintes, de type opérationnel (durée de la phase de détection), matérielles (nombre de capteurs) et tactiques (prise en compte de la menace).



## Conclusion et Perspectives

L'objectif des travaux présentés dans ce mémoire était d'apporter une contribution au problème de la gestion de capteurs, en particulier celle d'un ensemble de capteurs, de type radar et optronique, pour la surveillance d'une zone aérienne. Notre but était alors de déterminer le mode de gestion optimal de chaque capteur, c'est à dire déterminer quel capteur devait observer quelle(s) cible(s), à quel instant, pendant combien de temps et dans quelles conditions de fonctionnement.

Nous avons vu dans le chapitre 1 que cette mission de surveillance pouvait se décomposer en trois phases : détection, estimation et identification, et qu'il était possible que celles-ci soient entrelacées au cours du temps. En raison de leurs complexités respectives nous avons décidé de les considérer indépendamment les unes des autres et de porter particulièrement notre attention sur la première d'entre elles, l'étape de détection.

Assimilant notre problème à un système global, nous nous sommes intéressés aux sous-systèmes le composant et notamment à l'allocation de ressources temporelles et matérielles.

Nous avons présenté dans le chapitre 2 une étude bibliographique dont le but était, après avoir défini le cadre général de la problématique de la gestion de capteurs, d'introduire certaines méthodes, théories ou outils qui nous ont semblé pertinents et en adéquation avec notre étude. Nous avons ainsi abordé la théorie de l'information et ses critères entropiques, la théorie de recherche et ses algorithmes de résolution, ainsi que les méthodes de programmation linéaire et non linéaire.

Puisque notre étude est basée sur l'utilisation de capteurs, nous avons naturellement consacré le chapitre 3 à leur étude, en particulier à celle des capteurs de type radar et infrarouge. Ceux-ci n'ont pas les mêmes modes de fonctionnement. Sans entrer dans les détails de ces derniers, nous avons montré qu'ils conduisaient à des modélisations des fonctions de détection des capteurs différentes, entraînant par là même des processus d'optimisation propres à chacun. Nous avons ainsi proposé une méthode analytique d'optimisation de la détection d'une cible stationnaire par un capteur radar à partir d'une connaissance *a priori* de la situation. Celle-ci consiste en la décomposition de la phase de détection en un nombre optimal de détections élémentaires indépendantes, rendues possibles par l'agilité en fréquence du capteur. Une telle méthode s'est montrée inappropriée au cas de l'utilisation d'un capteur optronique, en raison notamment de son mode de fonctionnement passif et de la modélisation de ses fonctions de détection.

Nos travaux ont ensuite évolué vers un contexte d'étude en environnement monocapteur multicible, présenté chapitre 4. Comment un capteur doit-il s'organiser pour détecter au mieux un ensemble de cibles présentes dans son espace de surveillance ? Nous avons alors supposé que nous utilisions un capteur radar, en raison des résultats obtenus dans le chapitre précédent, et que nous disposions d'une connaissance *a priori* de la situation, avec plusieurs degrés de précision. Dans chacun des cas, nous avons élaboré une stratégie analytique optimale de la répartition d'une durée  $T$ , fixée, pour la détection de l'ensemble des cibles par le capteur. La méthode que nous avons employée se base sur l'optimisation d'un critère de performances et sur les méthodes de programmation non linéaire, en particulier les méthodes d'optimisation lagrangienne. Les performances de ces stratégies ont été évaluées analytiquement.

Ayant mis en évidence dans le chapitre 2 des similarités entre notre problématique et celle de la théorie de la recherche, nous avons ensuite replacé notre étude dans ce contexte et montré que nos deux approches se complétaient. Alors que la théorie de la recherche nous apporte un cadre théorique supplémentaire, nous lui fournissons par nos travaux une formalisation de ses paramètres mathématiques dans le cadre particulier de la détection d'un ensemble de cibles par un capteur radar. D'autre part, nous lui apportons une dimension multicible dans le sens où nous considérons plusieurs densités de probabilité distinctes.

Enfin, nous nous sommes orientés dans le chapitre 5 vers la considération d'un environnement multicapteur multicible. En plus de l'organisation individuelle de chacun des capteurs, nous nous sommes interrogés sur la façon de gérer celle de l'ensemble qu'ils représentaient, c'est à dire comment déterminer de façon optimale quel(s) capteur(s) devai(en)t se consacrer à quelle(s) cible(s), à quel instant et comment ? Etant donné que l'outil de discrimination qu'est l'entropie relative de Kullback-Leibler était employé pour l'affectation de capteurs pour l'estimation de trajectoires, nous nous sommes dans un premier temps intéressés à son adaptation au problème de la détection et l'avons comparé à notre critère du maximum de la somme des probabilités. Nous avons ensuite proposé une méthode de planification de l'allocation des capteurs sur les cibles pendant la durée  $T$  de la phase de détection, dans le cas d'une connaissance *a priori* déterministe. Cette méthode est une première approche basée sur les résultats des chapitres précédents. Nos simulations ont montré que les résultats obtenus étaient satisfaisants. Il sera nécessaire de démontrer leur optimalité. Nous avons vu ensuite que les problèmes soulevés par l'élaboration d'une telle méthode dans le cas d'une connaissance *a priori* incertaine dépassaient le cadre de cette thèse, nous en avons alors donné les considérations générales.

Le problème de la gestion de capteurs est vaste et complexe. Ne pouvant apporter de solution globale, notre démarche a été de nous intéresser séparément à certaines « sous-problématiques » que nous avons extraites du problème initial. Il serait à présent nécessaire de montrer comment l'optimalité de ces sous-problèmes peut conduire à l'optimisation du système global qu'ils composent.

Les solutions que nous avons apportées pour chaque « sous-problématique » ont été élaborées à partir d'hypothèses, souvent simplificatrices. Certaines ont été levées au fur et à mesure de notre avancement, de nombreuses pistes sont encore à explorer pour s'affranchir des autres.

Après avoir considéré l'utilisation de capteurs hétérogènes et consacré du temps à leur étude, nous avons poursuivi nos travaux avec les seuls capteurs radars, délaissant les capteurs infrarouges dont l'étude s'avérait, à notre idée, plus complexe. Certaines hypothèses peuvent encore être levées ou approfondies :

- nous avons supposé dans les chapitres 3, 4 et 5 que le temps était infiniment indivisible. Qu'en est-il de nos résultats si cette hypothèse n'est plus valable, par exemple lors de la considération de contraintes opérationnelles ? Les mêmes interrogations peuvent être formulées par rapport à l'hypothèse des portes distance centrées sur les cibles.
- la méthode de planification présentée dans le chapitre 5 a été élaborée en considérant que la capacité d'observation d'un capteur n'était que d'une seule cible à un instant donné. Comment l'ajuster afin de permettre des capacités d'observation plus importantes ?
- nous avons introduit la notion d'association de données dans la section consacrée à la planification de l'utilisation de nos capteurs dans le cas d'une connaissance *a priori* probabiliste. Il serait intéressant d'étudier les méthodes existantes dans le domaine et la façon de les mettre en œuvre dans notre étude.

Afin de nous replacer dans le contexte initial, il sera nécessaire de s'atteler à nouveau à l'étude du capteur infrarouge, selon les considérations suivantes :

- un capteur infrarouge modifie l'orientation de son axe de visée de façon mécanique, engendrant des durées de déplacement non négligeables dont il faut tenir compte lors de son utilisation pour l'observation d'une zone aérienne en une durée donnée. Nous sommes alors confrontés à un problème d'optimisation multicritère : comment maximiser les probabilités de détection tout en minimisant les durées de déplacement ? Nous voyons d'autre part apparaître ici la problématique de l'ordonnancement de l'observation des cibles ou des directions de l'espace.
- nous avons émis des hypothèses quant à la structure du capteur infrarouge, à ses modes de fonctionnement et de balayage. Il faudra les confirmer et élaborer des méthodes permettant l'optimisation de ses performances de détection.

Nous pourrions d'autre part nous intéresser à l'utilisation simultanée de ces deux types de capteurs. Il semble en effet évident que celle-ci va engendrer des contraintes supplémentaires. Nous avons vu dans le chapitre 3 que les ordres de grandeur à considérer pour les durées des détections par chacun des capteurs étaient différents. Comment alors calibrer chacun d'entre eux et les utiliser pour qu'ils aient un apport effectif l'un par rapport à l'autre ? Admettant que cette étape ait pu avoir été réalisée, nous nous retrouvons à nouveau, lors de l'étude de l'allocation temporelle dans un environnement multicapteur multicible, face à un problème



d'optimisation multicritère : comment maximiser les probabilités de détection des capteurs radar et infrarouge tout en minimisant les durées de déplacement dues à la modification de l'orientation des axes de visée de ce dernier ?

Par ailleurs il sera pertinent de se préoccuper de la robustesse des modèles de capteurs élaborés. De quelle façon sont-ils sensibles à des variations de comportement de nos capteurs ?

Enfin, une autre supposition a été émise en adéquation avec notre contexte de détection : la stationnarité des cibles. Dans un cadre opérationnel cette hypothèse peut sembler trop forte et/ou trop restrictive. Une perspective de prolongation de nos travaux est alors la prise en compte de la mobilité et des trajectoires des cibles, par l'étude de la phase d'estimation. Ces trajectoires pourront être des mouvements rectilignes uniformes, accélérés ou encore modélisés par des processus de Markov. Il faudra veiller dans chacun des cas à en établir des modèles afin de pouvoir utiliser des outils de filtrage tels que l'IMMKF présenté dans le chapitre 2. Certains auteurs préconisent par ailleurs l'utilisation de coordonnées polaires modifiées pour l'estimation de trajectoires par des capteurs infrarouges ([BLA99], [AID83]).

Tenir compte de cette phase d'estimation des trajectoires des cibles dans l'étude amène de nombreuses ouvertures ou interrogations supplémentaires, parmi elles :

- les phases de détection et d'estimation doivent-elles être couplées ? Nous avons introduit les méthodes *Track Before Detect*, peut-être permettront-elles d'apporter des solutions.
- si nous disposons d'une durée  $T$ , comment la répartir de façon optimale entre les deux phases ?
- une allocation de capteurs optimale pour la détection l'est-elle également pour l'estimation ? Nous n'avons pas abordé ce sujet lors de cette thèse mais mis en évidence auparavant le fait qu'il était profitable d'avoir une gestion dynamique de l'allocation des capteurs lors de la phase d'estimation ([VIL00], [VIL00a]).
- des objectifs supplémentaires sur les performances de détection doivent être pris en compte. En effet la qualité de la détection doit être suffisante pour qu'une nouvelle détection ne soit pas nécessaire après une étape de prédiction ou qu'une cible ne soit pas « perdue » trop vite lorsqu'il n'y a plus de mesures.
- un capteur peut-il passer instantanément, en a-t-il l'intérêt, d'un mode de détection à un mode d'estimation ? Comment les capteurs radar et infrarouge fonctionnent-ils dans ce dernier cas ?

Ce dernier point nous amène enfin à introduire la notion de gestion dynamique, perspective indéniable de nos travaux. Comment gérer dynamiquement nos capteurs, qu'ils soient de type radar et/ou infrarouge ? Elaborer une méthode de gestion réactive va nécessiter la considération d'un processus de détection. Celui-ci va permettre de déterminer à partir de quel instant et dans quelles conditions la détection d'une cible est effective et amener à intégrer la connaissance acquise au cours du temps. Toutes les perspectives énumérées dans cette thèse et ce dernier chapitre pourront par ailleurs être étudiées dans ce contexte de gestion réactive.

# Bibliographie

- [ABI92] M. Abidi and R. Gonzales. *Data Fusion in Robotics and Machine Intelligence*. Academic Press, Inc, 1992.
- [AID83] V. Aidala and S. Hammel. Utilization of modified polar coordinates for BOT. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-28**, 283–294, March 1983.
- [BAR88a] Y. Bar Shalom and T. Fortmann. *Tracking and Data Association*. Academic Press, Harcourt Brace Javanovich, Publishers, 1988.
- [BAR88b] Y. Bar Shalom and H. Blom. The interacting multiple model algorithm for systems with markovian switching coefficients. *IEEE, Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **33**, (8), August 88.
- [BIL86] E. Billam. The optimization of beam position separation in phased array radar. *Proceedings of First International Radar Conference*, pages 878–882, 1986.
- [BLA81] A. Blanc-Lapierre and B. Picinbono. *Fonctions Aléatoires*. Collection Technique et Scientifique Des Télécommunications. Masson edition, 1981.
- [BLA99] S. Blackman and R. Popoli. *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*. 1999.
- [BLA99a] S. Blackman and R. Popoli. *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*. Chap. 15, 1999.
- [BLA99b] S. Blackman and R. Popoli. *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*. Chap. 2, 1999.
- [BLA99c] S. Blackman and R. Popoli. *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*. Chap. 6, 1999.
- [BOR90] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. Richard, F. Rotella, and I. Zambettakis. *Commande et Optimisation Des Processus*. Technip edition, 1990.
- [BOR92] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. Richard, F. Rotella, and I. Zambettakis. *Modélisation et Identification Des Processus*, volume **2**. Technip edition, 1992.
- [BRO80] S. Brown. Optimal search for a moving target in discrete time and space. *Operations Research*, **29**, (6), 1275–1289, December 1980.
- [DAH74] G. Dahlquist and A. Bjorck. *Numerical Methods*. Prentice Hall, 1974.

- [DAM00] F. Dambreville. Detection with spatial and temporal optimization of search efforts involving multiple modes and multiple resources management. pages WeC1, 9–16. Fusion 2000, Paris, Juillet 2000.
- [DAN81] R. Dana and D. Moriatis. Probability of detecting a swerling 1 target on two correlated observations. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **17**, 727–730, 1981.
- [DAR73] J. Darricau. *Physique et Théorie Du Radar*, volume **Tome 1**. Sodipe, 1973.
- [DAR73b] J. Darricau. *Physique et Théorie Du Radar*, volume **Tome 2**. Sodipe, 1973.
- [DES98] C. Desrousseaux. *Utilisation D'un Critère Entropique Dans Les Systèmes de Détection*. Thèse, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1998.
- [DOD00] P. Dodin, J. Verliac, and V. Nimier. Analysis of the multisensor multitarget tracking resource allocation problem. pages We C1, 17–22. Fusion 2000, Juillet 2000.
- [DUF02] E. Duflos, M. de Vilmorin, and P. Vanheeghe. Détermination de stratégies de gestion dynamique optimale pour un radar à balayage électronique. *Revue Traitement du Signal*, **19**, (2), 59–73, 2002.
- [DUM00] P. Dumont. Introduction de la notion de menace dans un problème d'allocation de ressources d'un système multicapteurs. Rapport de stage ingénieur, ONERA, ISEN, Juin-Septembre 2000.
- [FOU87] J. Fourastié and J. Laslier. *Probabilités et Statistique*. 1987.
- [GUE61] J. de Guenin. Optimum distribution of effort : An extension of the koopman basic theory. *Operations Research*, pages 1–7, January-February 1961.
- [HIR96] J. Hiriart-Urruty. *L'optimisation*. Que Sais-Je ? Presses Universitaires de France, 1996.
- [HON99] L. Hong. Sense your world better : Multisensor/ information fusion. *IEEE, Circuits and Systems*, **10**, (3), September 1999.
- [KAP92] J. Kapur and H. Kesavan. *Entropy Optimization Principles with Applications*. Boston, MA : Academic, 1992.
- [KAS96] K. Kastella. Discrimination gain for sensor management in multitarget detection and tracking. *CESA*, pages 167–172, May 1996.
- [KAS96a] K. Kastella and S. Musick. The search for optimal sensor management. *SPIE*, **2759**, 318–329, March 1996.
- [KAS97] K. Kastella. Discrimination gain to optimize detection and classification. *IEEE, Transactions on SMC*, **27**, (1), 112–116, January 1997.
- [KAS98] K. Kastella and W. Schmaedeke. Sensor management using discrimination gain and interacting multiple model kalman filters. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 1998.

- [KAY98] S. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing - Detection Theory*, volume **2**. Prentice Hall International Editions, 1998.
- [KLE97] L. Klein. *Millimeter-Wave Infrared Multisensor Design and Signal Processing*. Artech House, Inc, 1997.
- [KOO56] B. Koopman. The theory of search : Part II, target detection. *Operations research*, **4**, 1956.
- [KOO57] B. Koopman. The theory of search, part III, the optimum distribution of searching effort. *Operations research*, **5**, 613–626, 1957.
- [KOO79] B. Koopman. Search and its optimization. *American mathematical monthly*, **86**, 527–540, 1979.
- [LEC00] J. Le Cadre and G. Souris. Searching tracks. *IEEE, Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **36**, (4), 1149–1166, October 2000.
- [LEC99] J. Le Cadre and G. Souris. Un panorama des méthodes d’optimisation de l’effort de recherche en détection. *Revue Traitement du Signal*, Octobre 1999.
- [MAH96] R. Mahler. Global optimal sensor allocation. volume **1**, pages 347–366. Proc. 9th National symposium sensor fusion, March 1996.
- [MAR92] M. Mariton. Pistage de cibles manoeuvrantes : Synthèse et apport de l’imagerie. *Traitement du Signal*, **10**, (2), 117–137, 1992.
- [MUS96] S. Musick and K. Kastella. Comparison of sensor management strategies for detection and classification. pages 367–386. Proc. 9th national symposium sensor fusion, March 1996.
- [McI1] G. McIntyre and K. Hintz. A comprehensive approach to sensor management, part 1 : A survey of modern sensor management systems. , (1). <http://cpe.gme.edu/~khintz/pubs/SMI-final.pdf>.
- [NAS77] J. Nash. Optimal allocation of tracking resources. *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1177–1180, 1977.
- [POM99] D. Pomorski. *Méthodes Entropiques Pour L’aide Au Diagnostic et L’optimisation Des Systèmes de Détection*. Habilitation à diriger les recherches, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1999.
- [SAP90] G. Saporta. *Probabilités, Analyse Des Données et Statistique*. 1990.
- [SCH93] W. Schmaedeke. Information-based sensor management. *Proc. SPIE, Signal Processing, Sensor Fusion and Target Recognition II*, **1955**, 156–164, September 1993.
- [SHE90] H. Shertukde and Y. Bar Shalom. Detection and estimation for multiple targets with two omnidirectional sensors in the presence of false measurements. *IEEE Transactions on acoustics speech and signal processing*, **38**, (53), 749–763, May 1990.

- [SHE95] Fourteenth international Joint Conference on Artificial Intelligence. *Task Allocation Via Coalition Formation Among Autonomous Agents*, August 1995.
- [SOR85] H. W. Sorenson. *Kalman Filtering : Theory and Applications*. IEEE Press, 1985.
- [STE79] T. Stewart. Search for a moving target when searcher motion is restricted. *Computer and Operation Research*, **6**, 129–140, 1979.
- [STI98] G. W. Stimson. *Introduction to Airbone Radar, Second Edition*. Scitech Publishing, Inc, 1998.
- [STO79] L. Stone. Necessary and sufficient conditions for optimal search plans for moving targets. *Mathematics of operations research*, **4**, (4), 431–440, November 1979.
- [STO89] L. Stone. What’s happened in search theory since the 1975 lanchester prize. *Operations research*, **37**, (3), 501–505, May-June 1989.
- [SWE60] P. Swerling. Probability of detecting fluctuating targets. *IEEE Transaction on Information Theory*, **IT-6**, 1960.
- [SWE65] P. Swerling. More on detection of fluctuating targets. *IEEE Transaction on Information Theory*, **IT-11**, 1965.
- [VAN00] P. Vanheeghe, E. Duflos, M. de Vilmorin, and M. Prenat. Improvement of systems performances by subsystems modelling and optimization. In *3rd ICNPAA, International Conference on Non Linear Problems in Aviation and Aerospace*, volume **2**, pages 659–666, May 2000. Conférence invitée, Daytona Beach (USA).
- [VAN01] P. Vanheeghe, E. Duflos, P. Dumont, and V. Nimier. Sensor management with respect to danger level of targets. In *40th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4439–4444, December 2001. Orlando, Florida (USA).
- [VEN73] H. Ventsel. *Théorie Des Probabilités*. 1973.
- [VER99] J. Verliac and V. Nimier. Optimisation de l’allocation des ressources d’un système multicapteur. Rapport de dea, ONERA, 1999.
- [VIL00] M. Vilmorin, E. Duflos, M. Prenat, and P. Vanheeghe. Study of the temporal allocation of two passive infrared sensors in a multitarget environment. pages WeC1, 23–28. 3rd International Conference on Information Fusion, Juillet 2000.
- [VIL00a] M. Vilmorin, E. Duflos, M. Prenat, and P. Vanheeghe. Infrared sensors temporal allocation based on localisation errors modeling. 16th IMACS World Congress, Août 2000. Session 126.
- [VIL00b] M. Vilmorin, E. Duflos, M. Prenat, and P. Vanheeghe. Optimal sensor management strategies based on the modeling of detection functions. In *Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, pages 2327–2332, October 2000. Nashville (USA).
- [WAS83] A. Washburn. Search for a moving target : The FAB algorithm. *Operations Research*, **31**, (4), 739–751, Août 1983.

# Table des figures

2.1	[HON99] <i>accroissement de la zone de surveillance par utilisation de deux capteurs</i>	16
2.2	[BLA99a] <i>l'utilisation d'un SGC permet d'obtenir une rétroaction sans l'intervention d'un opérateur.</i>	18
2.3	<i>schéma bloc de l'architecture d'un SGC, d'après [BLA99a]</i>	19
2.4	[BLA99c] <i>prise de décision en fonction des seuils <math>T_1</math> et <math>T_2</math></i>	25
2.5	[VER99] <i>(a) distances capteurs-cibles, (b) accélérations de la première cible</i>	31
2.6	[VER99] <i>allocation des capteurs sur chacune des cibles</i>	32
2.7	[DUM00] <i>poursuite des cibles sans tenir compte de la menace (les zones rouges sont représentées par des croix, les capteurs par des cercles)</i>	33
2.8	[DUM00] <i>poursuite des cibles avec prise en compte de la notion de menace</i>	34
2.9	[DUM00] <i>allocations du capteur 3 sur la cible 3 : (a) sans prise en compte de la menace, (b) avec prise en compte de la menace</i>	34
2.10	[LEC99] <i>algorithme de « de Guenin »</i>	40
2.11	<i>calcul itératif de la densité <math>\varphi(x)</math> de l'effort de recherche à partir d'une densité de localisation, <math>\Phi = 1</math></i>	41
2.12	<i>répartition de l'effort de recherche lorsque la distribution présente plusieurs sommets <math>\Phi = 1</math></i>	42
2.13	[LEC99] <i>le paramètre de visibilité <math>w</math> suit une loi normale <math>0.1 + \mathcal{N}(0, 2)</math></i>	43
2.14	<i>calcul itératif de la densité <math>\varphi(x)</math> de l'effort de recherche lorsque le paramètre de visibilité suit la loi <math>0.1 + \mathcal{N}(0, 2)</math>, <math>\Phi = 1</math></i>	43
2.15	[LEC99] <i>probabilité de détection, fonction de l'effort de recherche total disponible, paramétrée par la variance de localisation</i>	45
2.16	[LEC99] <i>algorithme Forward and Backward</i>	50
2.17	[LEC99] <i>évolution des probabilités de détection en fonction du nombre d'étapes et de la stratégie de recherche</i>	51
2.18	[LEC99] <i>algorithme Branch and Bound</i>	53
2.19	[LEC99] <i>comparaison des probabilités de détection totales obtenues avec les méthodes Branch and Bound et myope</i>	54
3.1	<i>schématisation des cellules de direction et de distance sur une partie de l'espace d'observation</i>	62

3.2	[DAR73b] <i>illustration de la réflexion de l'onde émise sur les « points brillants » de la cible fluctuante . . . . .</i>	65
3.3	<i>probabilité de détection du capteur radar, en fonction de la distance (en km) et du temps (en ms) . . . . .</i>	67
3.4	<i>influence de la calibration en distance du paramètre <math>\alpha</math> sur la probabilité de détection, en fonction de la distance et de la durée d'observation de la cible . . . . .</i>	68
3.5	<i>graphe de la fonction <math>x \mapsto f(x) = (1 - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x}) + xe^{-x}</math> . . . . .</i>	71
3.6	<i>comparaison des probabilités de détection obtenues en employant la méthode optimale de découpage du temps, lorsque les distances sont connues . . . . .</i>	72
3.7	<i>schématisation de la détection par utilisation d'une matrice ou d'une barrette par le capteur infrarouge, dans un espace à deux dimensions . . . . .</i>	76
3.8	<i>probabilité de détection du capteur infrarouge, en fonction de la distance (en km) et du temps (en ms) . . . . .</i>	79
3.9	<i>influence de la calibration en distance du paramètre <math>\beta</math> sur la probabilité de détection, en fonction de la distance et de la durée d'observation de la cible . . . . .</i>	80
3.10	<i>représentation des accélérations et des vitesses angulaires lors des trois premières phases de déplacement du capteur optronique . . . . .</i>	81
3.11	<i>probabilité de détection cumulée en fonction du nombre de cycles, pour <math>d</math> et <math>T</math> fixés en cohérence avec la calibration effectuée . . . . .</i>	83
4.1	<i>évolution en fonction de <math>T</math> de la probabilité qu'au moins 80% des cibles soient détectées . . . . .</i>	102
4.2	<i>évolution en fonction de <math>T</math> du nombre de cibles observées . . . . .</i>	103
4.3	[DUF02] <i>évolution en fonction de la durée <math>T</math> qu'au moins 80% des cibles soient détectées, lorsque <math>d_{ref} = 20</math> km . . . . .</i>	107
4.4	[DUF02] <i>évolution en fonction de la durée <math>T</math> du nombre de cibles observées, lorsque <math>d_{ref} = 20</math> km . . . . .</i>	108
4.5	[DUF02] <i>évolution en fonction de <math>d_{ref}</math> du temps nécessaire pour que la probabilité que 80% des cibles soient détectées soit égale à 0.9, scénario 1 . . . . .</i>	109
4.6	[DUF02] <i>évolution en fonction de <math>d_{ref}</math> du temps nécessaire pour que la probabilité que 80% des cibles soient détectées soit égale à 0.9, scénario 2 . . . . .</i>	110
4.7	<i>courbes représentatives des fonctions <math>h_1</math> et <math>h_{2n}</math>, paramétrées par <math>n</math> . . . . .</i>	117
4.8	<i>décomposition des cellules cartésiennes en cellules élémentaires . . . . .</i>	120
4.9	<i>représentation détaillée des centres des cellules et de leurs frontières . . . . .</i>	122
4.10	<i>schématisation de l'approximation de la surface de la cellule polaire par un ensemble de cellules élémentaires . . . . .</i>	123
4.11	<i>représentation des cellules élémentaires considérées pour le calcul de l'erreur d'approximation . . . . .</i>	124
4.12	<i>illustration de l'influence de la position des distributions sur l'aire comprise dans les différents secteurs angulaires de l'espace . . . . .</i>	140

4.13	<i>illustration du phénomène « d'éloignement des bords » d'une distribution en fonction de la distance . . . . .</i>	142
4.14	<i>schématisation du scénario 1, les cibles sont repérées par les centres de leurs distributions, la taille du symbole varie en fonction de l'écart-type, les droites représentent les directions indicées de l'espace . . . . .</i>	144
4.15	<i>probabilité de détecter une à quatre cibles dans la direction 12 de l'espace, (b) probabilité modélisée, (c) erreur commise entre les deux probabilités . . . . .</i>	145
4.16	<i>probabilité de détecter une à quatre cibles dans la direction 20 de l'espace, (b) probabilité modélisée, (c) erreur commise entre les deux probabilités . . . . .</i>	145
4.17	<i>schématisation du scénario 2, les cibles sont repérées par les centres de leurs distributions, la taille du symbole varie en fonction de l'écart-type, les droites représentent les directions indicées de l'espace . . . . .</i>	148
4.18	<i>schématisation du scénario 3, les cibles sont repérées par les centres de leurs distributions, la taille du symbole varie en fonction de l'écart-type, les droites représentent les directions indicées de l'espace . . . . .</i>	151
4.19	<i>évolution en fonction de <math>T</math> que 80% des cibles potentiellement observables soient observées . . . . .</i>	153
5.1	<i>comparaison des probabilités de détection obtenues par rapport au capteur le plus proche de la cible et par constitution de regroupements optimaux par le critère entropique <math>\mathcal{C}_2</math> . . . . .</i>	159
5.2	<i>fonction de discrimination <math>g_q : p \mapsto p \ln \left( \frac{p}{q} \right)</math>, paramétrée par la référence <math>q</math></i>	160
5.3	<i>fonction entropie <math>f : p \mapsto -p \ln p</math> . . . . .</i>	161
5.4	<i>schématisation de la planification de l'utilisation des capteurs pendant la durée <math>T</math> . . . . .</i>	171
5.5	<i>schématisation de la planification de l'utilisation des capteurs pendant la durée <math>T</math>, prise en compte de la menace . . . . .</i>	173
5.6	<i>schématisation du placement des capteurs et de leurs zones de surveillance, (a) cas d'un unique capteur, (b) cas de plusieurs capteurs . . . . .</i>	176
5.7	<i>schématisation du positionnement du secteur d'observation de chaque capteur et des repères cartésiens associés . . . . .</i>	176





# Liste des tableaux

4.1	<i>cas 1</i> . . . . .	97
4.2	<i>cas 2</i> . . . . .	97
4.3	<i>cas 3</i> . . . . .	98
4.4	<i>cas 4</i> . . . . .	98
4.5	<i>cas 5</i> . . . . .	98
4.6	<i>cas 6</i> . . . . .	98
4.7	<i>description du scénario 1</i> . . . . .	106
4.8	<i>description du scénario 2</i> . . . . .	106
4.9	<i>estimation du temps d'observation minimal possible et valeur de calibration optimale de la distance <math>d_{ref}</math></i> . . . . .	107
4.10	<i>variations de la fonction <math>h_1 : x \mapsto (1 - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x})</math></i> . . . . .	116
4.11	<i>variations de la fonction <math>h_{2n} : x \mapsto -nxe^{-x}</math></i> . . . . .	116
4.12	<i>probabilité de présence par rapport à la cellule centrale, <math>\sigma_x = \sigma_y = 0.1</math> km, <math>\bar{x} = 20</math> km, <math>\bar{y} = 30</math> km</i> . . . . .	139
4.13	<i>erreur d'approximation, <math>\sigma_x = \sigma_y = 0.1</math> km, <math>\bar{x} = 20</math> km, <math>\bar{y} = 550</math> km</i> . . . . .	141
4.14	<i>probabilités de détection, <math>T = 20</math> ms, <math>\sigma_x = \sigma_y = 0.1</math> km, <math>\bar{x} = 20</math> km, <math>\bar{y} = 30</math> km,</i> . . . . .	143
4.15	<i>paramètres de modélisation <math>\omega_j</math> et <math>n_j</math> propres aux directions d'observation du scénario 1</i> . . . . .	143
4.16	<i>scénario 1, allocation optimale de 30 ms pour la détection de plusieurs cibles dans un ensemble de directions de l'espace, nombre optimal de détections élémentaires et probabilités de détection résultantes, méthode lagrangienne</i> . . . . .	146
4.17	<i>scénario 2, allocation optimale de 30 ms pour la détection de plusieurs cibles dans un ensemble de directions de l'espace, nombre optimal de détections élémentaires et probabilités de détection résultantes, méthode lagrangienne</i> . . . . .	147
4.18	<i>scénario 1, allocation optimale de 30 ms pour la détection de plusieurs cibles dans un ensemble de directions de l'espace, nombre optimal de détections élémentaires et probabilités de détection résultantes, utilisation de l'algorithme de "de Guenin"</i> . . . . .	147
4.19	<i>scénario 2, allocation optimale de 30 ms pour la détection de plusieurs cibles dans un ensemble de directions de l'espace, nombre optimal de détections élémentaires et probabilités de détection résultantes, utilisation de l'algorithme de "de Guenin"</i> . . . . .	147
4.20	<i>solutions <math>\lambda</math> obtenues pour chaque scénario et chaque méthode d'optimisation</i> . . . . .	148

4.21	<i>durées d'exécution des algorithmes présentés</i>	149
4.22	<i>probabilité de présence par rapport à la cellule centrale, <math>\sigma_x = \sigma_y = 0.01</math> km, <math>\bar{x} = 20</math> km, <math>\bar{y} = 30</math> km</i>	150
4.23	<i>scénario 3, allocation optimale de 30 ms à la détection de plusieurs cibles dans un ensemble de directions de l'espace, nombre optimal de détections élémentaires et probabilités de détection résultantes, méthode lagrangienne</i>	150
4.24	<i>scénario 3, allocation optimale de 30 ms à la détection de plusieurs cibles dans un ensemble de directions de l'espace, nombre optimal de détections élémentaires et probabilités de détection résultantes, utilisation de l'algorithme de "de Guenin"</i>	150
4.25	<i>scénario 3, allocation optimale de 30 ms à la détection de plusieurs cibles de positions connues, nombre optimal de détections élémentaires et probabilités de détection résultantes, cas déterministe</i>	150
4.26	<i>scénario 3, coefficients de pondération</i>	152
4.27	<i>scénario 3, allocation optimale de 30 ms à la détection de plusieurs cibles dans un ensemble de directions de l'espace, nombre optimal de détections élémentaires et probabilités de détection résultantes, prise en compte de la menace</i>	152
5.1	<i>variations de la fonction <math>p \mapsto p \ln \left( \frac{p}{q} \right)</math></i>	160
5.2	<i>variations de la fonction <math>f : p \mapsto -p \ln p</math></i>	161
5.3	<i>distance de chaque capteur à la cible (en km)</i>	162
5.4	<i>probabilités de détection de la cible par les capteurs et pseudo-capteurs, <math>T = 5</math> ms, loi de fusion OU</i>	162
5.5	<i>entropies associées aux probabilités du tableau 5.4</i>	162
5.6	<i>gain de discrimination, <math>q=0.9691</math></i>	163
5.7	<i>distance de chaque capteur à la cible (en km)</i>	163
5.8	<i>probabilités de détection de la cible par les capteurs et pseudo-capteurs, <math>T = 5</math> ms, loi de fusion OU</i>	163
5.9	<i>entropies associées aux probabilités du tableau 5.8</i>	164
5.10	<i>gain de discrimination, <math>q=0.2974</math></i>	164
5.11	<i>statistiques sur 10000 réalisations, <math>N</math>, <math>P</math> et les distances sont aléatoires</i>	165
5.12	<i>distances capteurs-cibles (en km)</i>	167
5.13	<i>allocation temporelle optimale (en ms)</i>	167
5.14	<i>probabilités de détection associées aux tableaux 5.12 et 5.13</i>	167
5.15	<i>probabilités de détection associées aux pseudo-capteurs</i>	168
5.16	<i>allocation temporelle après une durée d'observation <math>t_{obs}</math></i>	171
5.17	<i>tableau récapitulatif des allocations des <math>P</math> capteurs sur les <math>N</math> cibles pendant la durée <math>T</math></i>	171
5.18	<i>coefficients de pondération</i>	172
5.19	<i>allocation temporelle optimale (en ms), tenant compte des pondérations</i>	172

5.20	<i>tableau récapitulatif des allocations des <math>P</math> capteurs sur les <math>N</math> cibles pendant la durée <math>T</math>, tenant compte de la menace des cibles . . . . .</i>	172
5.21	<i>répartition optimale de la durée <math>T</math> pour chaque capteur . . . . .</i>	177
5.22	<i>probabilités de détection résultant de l'allocation temporelle optimale donnée dans le tableau 5.21 . . . . .</i>	177

# Index

- allocation matérielle, voir planification
- allocation temporelle, 87, 88, 117, 155, 175
  
- capteur infrarouge, 73
- capteur radar, 61
- cible fluctuante, 65
- coefficients de dangerosité, 32, 95, 127
- coefficients de pondération, voir coefficients de dangerosité
- critère d'optimisation, 4, 10, 89, 112, 159
- critère de Neyman-Pearson, 76
  
- entropie, 22, 160
  
- gain de discrimination, 22, 23, 29, 156, 160
- gestion de capteurs, 3, 10, 17, 61, 73, 87
  - M-level*, 18
  - $\mu$ -level*, 19
  - système de gestion multicapteur, 17
  
- IMMKF, 21, 26
  
- Karush-Kuhn-Tucker*, 57, 92, 118
- Kullback-Leibler, voir gain de discrimination
  
- moindres carrés, 125
  
- optimisation, 4, 10, 69, 82, 89, 114, 117
  
- planification, 155, 169, 175
- probabilité de détection, 10, 64, 66, 70, 75, 90, 100, 105, 109, 137
- probabilité de fausse alarme, 64, 65, 75
- probabilité de localisation, 110, 118
- processus de Markov, 46
  
- programmation dynamique
  - principe de Bellman, 47
- programmation linéaire, 30, 166
- programmation non linéaire, 39
  - dualité, 58, 93
  - multiplicateurs de Lagrange, 57, 91
  - optimisation lagrangienne, 56, 77, 92, 117
  - point-selle, 58
- pseudo-capteurs, 25, 158
  
- Search Theory*, voir théorie de la recherche
- Swerling 1*, 65
  
- théorie de l'information, 22, 156
- théorie de la recherche, 36, 92, 129
  - algorithme *Branch and Bound*, 51
  - algorithme de « de Guenin », 37, 132
  - algorithme *Forward and Backward*, 45

## Contributions à la gestion optimale de capteurs : application à la tenue de situations aériennes

Un ensemble d'avions et de cibles se déplace dans un espace aérien. L'objectif de ces avions est de surveiller cet espace, en particulier les cibles, afin d'élaborer les manœuvres à effectuer pour parer à la menace que celles-ci peuvent représenter. Cette mission peut être décomposée en trois étapes : détection, estimation et identification. Chaque avion est équipé d'un ou plusieurs capteurs hétérogènes de type radar et/ou optronique. Ces capteurs ne peuvent observer instantanément qu'une petite partie de l'espace leur faisant face. Il est alors nécessaire de réorienter leurs axes de visée afin d'observer la totalité de l'espace d'intérêt.

Nous nous plaçons dans cette thèse dans le cadre de la détection. Sous les hypothèses d'une durée totale d'observation connue et fixée et d'une connaissance *a priori* de la situation, nous nous intéressons à la gestion de ces capteurs, c'est à dire à la problématique *quel(s) capteur(s) observe(nt) quelle(s) cible(s), à quel moment et pendant combien de temps ?* Nous présentons, dans la majorité des cas, des résultats analytiques.

Après avoir modélisé les fonctions élémentaires de détection de chacun des capteurs, nous proposons, pour les capteurs de type radar dans un environnement monocible, une optimisation de leurs probabilités de détection par une décomposition en détections élémentaires. Nous abordons ensuite le contexte monocapteur multicible et établissons une méthode optimale d'allocation des ressources temporelles pour la détection des cibles et ce, pour plusieurs niveaux de connaissance *a priori*. Les résultats sont basés sur des méthodes de programmation non linéaire et sont rapprochés de ceux obtenus en théorie de la recherche.

Enfin, nous proposons dans un contexte multicapteur multicible une méthode de planification de l'utilisation des ressources matérielles que sont les capteurs pour l'observation des cibles. Le critère de sélection considéré est comparé avec les critères entropiques utilisés en estimation.

**Mots-clés :** gestion de capteurs, radar, infrarouge, allocation de ressources, modélisation, optimisation, détection, théorie de la recherche, surveillance aérienne.

---

## Contributions to the optimal sensor management : application to aerial surveillance missions

The problem we propose to tackle is the sensor management. Some aircrafts and targets are located in the same area. The mission of these aircrafts is to keep watch on the area in order to elaborate strategies to protect themselves against the targets and the threat they represent. Each aircraft has one or more sensors, radar type or optronic type. At a given time, these sensors can only see a small part of the space. Then, with respect to time, it is necessary to change their axis position in order to be able to explore the overall space facing them. The aim of this multisensor system is to detect, locate and identify targets which are present in the area, in the best possible way.

A significant amount of the study has been devoted to detection. Under two assumptions, an initial knowledge of the situation and a given and fixed observation time, our goal is to find a sensor management which optimizes the detection performance, that is to contribute to the answer to the question *which sensor, on which target, when and for how long ?* When it is possible we give some analytic results.

After realizing the sensors modelling, we propose an optimization method for the radar's detection probability in a single target environment. This method consists in decomposition of the detection on an optimal number of independent elementary detections. Then, in a multitarget environment and for several levels of initial knowledge, we propose an optimal time allocation method based on the results of non linear programming. Then, the parallel is made with the Search Theory.

In a multisensor multitarget environment we finally present a planification method of sensors use for the observation of the targets. The selection criterion is compared to the entropy criterion used for the estimation of the target's trajectories.

**Keywords :** sensor management, radar, infrared sensor, resources allocation, modelling, optimization, detection, Search Theory, aerial surveillance.