Numéro d'ordre :

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE I

U.F.R DE MATHÉMATIQUES

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

par

Frédéric BAYART

Opérateurs de composition sur des espaces de séries de Dirichlet, et problèmes d'hypercyclicité simultanée.

soutenance prévue le 6 décembre 2002 devant la commission d'examen :

Président :	Pr. Jean-Pierre KAHANE	Université de Paris XI.
Directeur :	Pr. Hervé QUEFFÉLEC	Université de Lille I.
Rapporteurs :	Pr. Gilles GODEFROY	Université de Paris VI.
	Pr. Hakan HEDENMALM	Université Royale de Stockholm.
Examinateurs :	Pr. Michel BALAZARD	Université de Bordeaux I.
	Pr. Daniel LI	Université d'Artois.
	Pr. Mostafa MBEKHTA	Université de Lille I.

Table des matières

Notations

- $\mathbb{C}_\theta = \{s \in \mathbb{C};\ \Re(s) > \theta\}$.
- $\mathbb{C}_+ = \mathbb{C}_0$.
- Si $z \in \mathbb{C}$, $\Im(z)$ est sa partie imaginaire, $\Re(z)$ est sa partie réelle.
- (p_k) est la suite des nombres premiers : $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ...
- $\mathbb{D}^\infty = \{z = (z_1, z_2, \dots)\ ;\ |z_i| < 1\}$.
- $\mathbb{T}^\infty = \{z = (z_1, z_2, \dots)\ ;\ |z_i| = 1\}$.
- $\mathbb{Z}^{(\infty)} = \{n = (n_1, n_2, \dots)\ ;\ n_i \in \mathbb{Z},\ \exists i_0 \in \mathbb{N},\ i \geq i_0 \implies n_i = 0\}$.
- Si $f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$ est une série de Dirichlet, $\chi \in \mathbb{T}^\infty$,

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{\substack{n=1 \\ n=p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}}}^{+\infty} a_n z_1^{\alpha_1} \dots z_r^{\alpha_r},$$

$$f_\chi(s) = \sum_1^{+\infty} a_n \chi(n) n^{-s}.$$

- Si $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$, où $c_0 \in \mathbb{N}$ et φ est une série de Dirichlet, $\phi_\chi(s) = c_0 s + \varphi_\chi(s)$.
- $\mathbb{A}(\mathbb{T}^\infty) = \Big\{F(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^{(\infty)}} a(n_1, n_2, \dots) z_1^{n_1} \dots z_k^{n_k};\ \|F\| = \sum_{n \in \mathbb{Z}^{(\infty)}} |a(n)| < +\infty\Big\}$.
- $\mathbb{A}^+(\mathbb{T}^\infty) = \Big\{F(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}^{(\infty)}} a(n_1, n_2, \dots) z_1^{n_1} \dots z_k^{n_k};\ \|F\| = \sum_{n \in \mathbb{N}^{(\infty)}} |a(n)| < +\infty\Big\}$.
- $\mathcal{P}$ est l'ensemble des polynômes de Dirichlet $\displaystyle\sum_1^N a_n n^{-s}$.
- $[x]$ désigne la partie entière de x.
- $h\left(p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}\right) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \dots)$.
- Si $m = (m_1, \dots, m_r, 0, \dots)$ et $z \in \mathbb{T}^\infty$, $z^m = z_1^{m_1} \dots z_r^{m_r}$.
- $\psi_\xi(s) = \frac{s-\xi}{s+\xi}$, de $\mathbb{C}_+$ dans $\mathbb{D}$, $d\lambda_\xi(t) = \frac{\xi}{\pi} \times \frac{dt}{t^2+\xi^2}$.
- $\varphi_\xi(z) = \frac{\xi+z}{\xi-z}$.
- Si ψ va de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, $\psi_j = \psi \circ \dots \circ \psi$ (j fois).
- $P^+(n)$ désigne le plus grand facteur premier de n.

- $K_{l,w}$ est le noyau reproduisant partiel en w :

$$\begin{aligned} K_{l,w}(s) &= \prod_{j=1}^{l} \left(\sum_{n \geq 1} p_j^{-n(\overline{w}+s)} \right) \\ &= \sum_{\substack{n \geq 1 \\ P^+(n) \leq p_l}} n^{-\overline{w}} n^{-s} \end{aligned}$$

- Pour U un ouvert de $\mathbb{C}$, $H(U)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.
- $Aut(\mathbb{D})$ désigne l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{D}$.

Chapitre 1

Rappels et compléments sur les séries de Dirichlet

1.1 Abscisse de convergence d'une série de Dirichlet

Dans cette thèse, nous étudions certaines séries de Dirichlet $f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$, $s \in \mathbb{C}$. Depuis leur introduction, ces séries de Dirichlet ont fait l'objet d'un vif intérêt car elles jouent un rôle d'intermédiaire entre l'analyse classique et l'arithmétique. La plus célèbre d'entre elles est bien entendu la fonction Zeta de Riemann $\zeta(s) = \sum_1^{+\infty} n^{-s}$.

La premier problème à résoudre, dans l'étude d'une telle série de Dirichlet, est la détermination des complexes s pour lesquels la série converge. On définit l'abscisse de convergence de f par :

$$\sigma_c(f) = \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R};\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-\sigma} \text{ converge} \right\}.$$

Par une transformation d'Abel, on prouve que si $s \in \mathbb{C}$, et $\Re(s) > \sigma_c(f)$, alors la série $\sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$ converge, alors que si $\Re(s) < \sigma_c(f)$, la série $\sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$ diverge. Sur la droite $\Re(s) = \sigma_c(f)$, on ne peut a priori rien conclure (voir par exemple les théorèmes 2.12 et 2.14). Le domaine de convergence d'une série de Dirichlet est donc un demi-plan $\mathbb{C}_\theta = \{s \in \mathbb{C};\ \Re(s) > \theta\}$ (nous désignerons aussi par $\mathbb{C}_+$ le demi-plan $\mathbb{C}_0$).

D'autres abscisses de convergence vont être également importantes :

$\sigma_a(f) = \inf \left\{\sigma \in \mathbb{R};\ \sum_{n\geq 1} |a_n| n^{-\sigma} \text{ converge}\right\}$, abscisse de convergence absolue,

$\sigma_u(f) = \inf \left\{\sigma \in \mathbb{R};\ \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s} \text{ converge uniformément sur } \mathbb{C}_\sigma\right\}$, abscisse de convergence uniforme.

Clairement, nous avons les inégalités $\sigma_c \leq \sigma_u \leq \sigma_a$. Par ailleurs, si $\sigma_c(f) > 0$, il existe des formules pour calculer ces 3 abscisses qui ressemblent à la formule de Hadamard pour calculer le rayon de convergence d'une série entière (voir [54] par exemple) :

$$\sigma_c = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{\log A_n}{\log n}; \quad \sigma_a = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{\log A_n^*}{\log n}; \quad \sigma_u = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{\log U_n}{\log n}, \tag{1.1}$$

où

$$A_n = a_1 + \cdots + a_n; \quad A_n^* = |a_1| + \cdots + |a_n|; \quad U_n = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_1^N a_n n^{it} \right|.$$

Ces formules permettent par exemple d'établir les autres inégalités :

$$\sigma_a \leq \sigma_c + 1; \ \sigma_a \leq \sigma_u + 1/2.$$

On sait qu'elles sont optimales en général (voir l'article de Bohnenblust et Hille [5] pour la seconde).

Il existe encore une autre caractérisation de l'abscisse de convergence uniforme. Définissons en effet pour une série de Dirichlet $f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$ son abscisse de Bohr $\sigma_b(f)$ par la borne inférieure des réels σ pour lesquels on peut définir, à partir de f, par prolongement analytique, une fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}_\sigma$. Un célèbre et non-trivial résultat de Bohr [6] affirme que :

Théorème 1.1 *Pour toute série de Dirichlet f, $\sigma_b(f) = \sigma_u(f)$.*

Nous donnerons plus loin au lemme 5.1 une preuve d'une version légèrement précisée de ce théorème.

1.2 Le point de vue de Bohr

Nous présentons dans ce paragraphe un outil essentiel dans l'étude des séries de Dirichlet, dû au mathématicien danois Harald Bohr dans [7]. Prenons en effet une série de Dirichlet $f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$. Chaque entier n peut être factorisé en produit de facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$. Si s est un complexe, notons z la suite $(p_1^{-s}, p_2^{-s}, \dots)$, où $(p_i)_{i \geq 1}$ désigne la suite des nombres premiers. Alors :

$$f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n \left(p_1^{-s}\right)^{\alpha_1} \dots \left(p_r^{-s}\right)^{\alpha_r} = \sum_1^{+\infty} a_n z_1^{\alpha_1} \dots z_r^{\alpha_r}.$$

Notre série de Dirichlet devient une série de Fourier en une infinité de variables, les valeurs de la série de Fourier en certains points étant données par les valeurs de la série de Dirichlet. Précisons un peu. On définit :

$$\mathbb{D}^\infty = \{z = (z_1, z_2, \dots) \ ; \ |z_i| < 1\}$$
$$\mathbb{T}^\infty = \{z = (z_1, z_2, \dots) \ ; \ |z_i| = 1\}.$$

Le dual de $\mathbb{T}^\infty$ est $\mathbb{Z}^{(\infty)}$, l'ensemble des suites d'entiers $n = (n_1, n_2, \dots)$ à support fini. Si $f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$ est une série de Dirichlet nous posons

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{\substack{n=1 \\ n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}}}^{+\infty} a_n z_1^{\alpha_1} \dots z_r^{\alpha_r}.$$

$\mathcal{D}f$ est une série de Fourier sur $\mathbb{T}^\infty$, indexée par $\mathbb{N}^{(\infty)}$. Cette définition n'est pas purement formelle : les propriétés de f et $\mathcal{D}f$ sont intimement liées, grâce à un résultat de Kronecker dont nous rappelons l'énoncé sous la forme qui nous sera utile.

Définition 1.1 *Les entiers $(q_j)_{j\geq 1}$ seront dits* multiplicativement indépendants *si tout entier $n \in \mathbb{N}$ s'écrit d'une façon au plus comme $n = q_1^{\alpha_1}\dots q_r^{\alpha_r}$, avec $\alpha_j \in \mathbb{N}$.*

Autrement dit, les entiers $(q_j)_{j\geq 1}$ sont multiplicativement indépendants si, et seulement si, les $(\log q_j)$ sont $\mathbb{Q}$—linéairement indépendants, c'est-à-dire si

$$c_1 \log q_1 + \dots + c_d \log q_d = 0 \text{ avec } c_i \in \mathbb{Q} \implies c_i = 0 \text{ pour tout } i.$$

Par exemple, des entiers premiers entre eux deux à deux sont multiplicativement indépendants.

Théorème 1.2 (Kronecker) *Soient $q_1,\dots,q_d$ des entiers multiplicativement indépendants. Alors la fonction :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{T}^d \\ t & \mapsto & (q_1^{it},\dots,q_d^{it}) \end{array}$$

est d'image dense.

En particulier, si $P(s) = \sum_1^N a_n n^{-s}$ est un polynôme de Dirichlet (nous désignerons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes de Dirichlet), on a

$$\sup\{|P(s)|;\ \Re(s) = 0\} = \sup\{|\mathcal{D}P(z)|;\ z \in \mathbb{T}^\infty\}.$$

Mieux, si $q_1,\dots,q_d$ désignent toujours des entiers multiplicativement indépendants, et si P est à spectre dans les q_j, $P(s) = \sum_{j=1}^{r} a_j q_j^{-s}$, alors :

$$\sup\{|P(s)|;\ \Re(s) = 0\} = \sum_1^d |a_j|.$$

Nous aurons besoin, au cours de cette thèse, d'une autre description de $\mathbb{T}^\infty$. Soit Θ le groupe dual de $\mathbb{Q}_+$, où $\mathbb{Q}_+$ désigne le groupe multiplicatif discret des rationnels strictement positifs. Θ est l'ensemble des charactères $\chi : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{C}$:

- $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ pour tous m,n dans $\mathbb{Q}_+$.
- $|\chi(n)| = 1$.

Θ et $\mathbb{T}^\infty$ peuvent être identifiés de la façon suivante : étant donné un élément $z = (z_1,z_2,\dots)$ de $\mathbb{T}^\infty$, on définit un caractère χ en imposant sa valeur sur chaque premier par

$$\chi(2) = z_1, \quad \chi(3) = z_2, \dots, \quad \chi(p_m) = z_m, \dots.$$

En étendant la définition de χ par multiplicativité, on obtient un caractère, et tous les caractères peuvent clairement être obtenus par ce procédé. Cette identification est un homéomorphisme de Θ sur $\mathbb{T}^\infty$, qui respecte les mesures de Haar (voir [29] pour les détails). Dans toute la suite, nous oublierons la notation Θ, et écrirons simplement $\chi \in \mathbb{T}^\infty$.

Donnons un premier aperçu de la puissance du point de vue de Bohr pour les séries de Dirichlet. Hewitt et Williamson ont prouvé dans [31] le théorème suivant :

> Si f est une série de Dirichlet absolument convergente telle qu'il existe $\delta > 0$ avec $|f(s)| \geq \delta$ si $\Re(s) \geq 0$, alors $1/f$ est une série de Dirichlet absolument convergente.

Ce théorème est analogue au théorème taubérien de Wiener concernant les séries de Fourier : toute série de Fourier absolument convergente qui ne s'annule pas sur le cercle a son inverse développable en série de Fourier absolument convergente. La preuve de Hewitt et Williamson utilise la théorie de Gelfand des algèbres de Banach. D. Newman a donné dans [49] la première preuve vraiment élémentaire du théorème de Wiener. Nous allons adapter sa preuve aux séries de Fourier sur $\mathbb{T}^\infty$, puis transférer, grâce à l'identification précédente, le théorème des séries de Fourier sur $\mathbb{T}^\infty$ aux séries de Dirichlet. Nous obtiendrons ainsi une preuve du résultat de Hewitt-Williamson qui n'utilise pas la théorie de Gelfand.

Nous désignons par $\mathbb{A}(\mathbb{T}^\infty)$ (resp. par $\mathbb{A}^+(\mathbb{T}^\infty)$) l'algèbre de Banach des séries de Fourier absolument convergentes sur $\mathbb{T}^\infty$ (resp. l'algèbre de Banach des séries de Fourier absolument convergentes à coefficients dans $\mathbb{N}^{(\infty)}$) :

$$\mathbb{A}(\mathbb{T}^\infty) = \Big\{F(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^{(\infty)}} a(n_1,n_2,\dots)z_1^{n_1}\dots z_k^{n_k};\ \|F\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}^{(\infty)}} |a(n)| < +\infty\Big\}$$

$$\mathbb{A}^+(\mathbb{T}^\infty) = \Big\{F(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}^{(\infty)}} a(n_1,n_2,\dots)z_1^{n_1}\dots z_k^{n_k};\ \|F\| = \sum_{n\in\mathbb{N}^{(\infty)}} |a(n)| < +\infty\Big\}.$$

Remarquons que si F et G sont éléments de $\mathbb{A}(\mathbb{T}^\infty)$, le produit FG l'est aussi, avec l'inégalité :

$$\|FG\| \leq \|F\|\,\|G\|\,.$$

Pour un élément F de $\mathbb{A}(\mathbb{T}^\infty)$, il est légitime de considérer sa norme infini

$$\|F\|_\infty = \sup\{|F(z)|;\ z\in\mathbb{T}^\infty\}\,.$$

Dans le cas des séries de Fourier en un nombre fini de variables, la norme de $\mathbb{A}(\mathbb{T}^\infty)$ de F peut être majorée à l'aide des normes infini de F et de ses dérivées partielles :

Lemme 1.1 *Soit* $F(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n_1,\dots,n_N)\ z_1^{n_1}\dots z_N^{n_N}$ *une série de Fourier sur* $\mathbb{T}^N$. *Alors :*

$$\|F\| \leq \|F\|_\infty + 2\sum_{k=1}^N \left\|\frac{\partial F}{\partial z_k}\right\|_\infty .$$

Preuve : Nous commençons par remarquer que :

$$\|F\| \leq |a(0,\dots,0)| + \sum_{n\in\mathbb{Z}^N, n_1\neq 0} |a(n_1,\dots,n_N)| + \dots + \sum_{n\in\mathbb{Z}^N, n_N\neq 0} |a(n_1,\dots,n_N)|.$$

Mais, d'une part, $|a(0,\dots,0)| \leq \|F\|_\infty$, et d'autre part :

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}^N,\ n_k\neq 0} |a(n_1,\dots,n_N)| &\leq \sum_{\substack{n_1,\dots,n_{k-1},\\ n_{k+1},\dots,n_N}} \left(\sum_{n_k\neq 0} \frac{1}{n_k} n_k |a(n_1,\dots,n_N)|\right)\\ &\leq \left(\sum_{n_k\neq 0}\frac{1}{n_k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^N} n_k^2 |a(n_1,\dots,n_N)|^2\right)^{1/2}\\ &\leq 2\left(\int_{\mathbb{T}^N}\left|\frac{\partial F}{\partial z_k}(z)\right|^2 dz\right)^{1/2}\\ &\leq 2\left\|\frac{\partial F}{\partial z_k}\right\|_\infty .\end{aligned}$$

□

La version précisée du théorème de Wiener dont nous aurons besoin est la suivante :
Théorème 1.3 *(Théorème de Wiener sur $\mathbb{T}^\infty$)*

1. Soit F dans $\mathbb{A}(\mathbb{T}^\infty)$ avec $F(z)\neq 0$ si $z\in\mathbb{T}^\infty$. Alors $1/F\in\mathbb{A}(\mathbb{T}^\infty)$.

2. Soit F dans $\mathbb{A}^+(\mathbb{T}^\infty)$ avec $F(z)\neq 0$ si $z\in\overline{\mathbb{D}^\infty}$. Alors $1/F\in\mathbb{A}^+(\mathbb{T}^\infty)$.

Preuve : Soit F dans $\mathbb{A}(\mathbb{T}^\infty)$, avec $F(z)\neq 0$ si $z\in\mathbb{T}^\infty$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $|F(z)|\geq 1$. Soit P une somme partielle de F telle que $\|P-F\|\leq 1/3$. En particulier, pour tout z de $\mathbb{T}^\infty$, $|P(z)|\geq 2/3$. Il est possible d'écrire $F = P\left(1-\dfrac{P-F}{P}\right)$, ou encore $\dfrac{1}{F}=\dfrac{1}{P}\left(1-\dfrac{P-F}{P}\right)^{-1}$. Ceci nous conduit à poser :

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(P-F)^{n-1}}{P^n}.$$

Nous allons prouver que la série S est absolument convergente dans $\mathbb{A}(\mathbb{T}^\infty)$. En effet,

$$\|(P-F)^{n-1}\|\leq\frac{1}{3^{n-1}},$$

et puisque P est un polynôme trigonométrique, le lemme 1.1 s'applique et donne :

$$\left\|\frac{1}{P^n}\right\|\leq\left\|\frac{1}{P^n}\right\|_\infty+2\sum_{k=1}^N\left\|\frac{\partial\left(\frac{1}{P^n}\right)}{\partial z_k}\right\|_\infty .$$

Or,

$$\left\|\frac{1}{P^n}\right\|_\infty\leq\left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

de sorte que :

$$\left\|\frac{1}{P^n}\right\|\leq\left(\frac{3}{2}\right)^n+2n\sum_{k=1}^N\left\|\frac{\partial P}{\partial z_k}\right\|_\infty\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\leq(3An+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

où nous avons posé : $A = \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{\partial P}{\partial z_k} \right\|_{\infty}$. Par conséquent,

$$\left\| \frac{(P-F)^{n-1}}{P^n} \right\| \leq \frac{9An+3}{2^n},$$

qui est le terme général d'une série qui converge. En particulier, S converge en norme et uniformément, et la somme de cette série géométrique ne peut être que $\frac{1}{F}$: $\frac{1}{F}$ appartient à $\mathbb{A}(\mathbb{T}^\infty)$.

Si l'on suppose que $F \in \mathbb{A}^+(\mathbb{T}^\infty)$ et que $F(z) \neq 0$ si $z \in \overline{\mathbb{D}^\infty}$, il suffit avec les notations précédentes de prouver que P et $\frac{1}{P}$ sont éléments de $\mathbb{A}^+(\mathbb{T}^\infty)$ pour obtenir que $\frac{1}{F}$ est lui-même dans $\mathbb{A}^+(\mathbb{T}^\infty)$. Pour P qui est une somme partielle d'un élément de $\mathbb{A}^+(\mathbb{T}^\infty)$, il n'y a aucun problème. Pour $\frac{1}{P}$, qui est dans $\mathbb{A}(\mathbb{T}^\infty)$, remarquons que P est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}^N$ qui ne s'annule pas : il en est de même de $\frac{1}{P}$, et ses coefficients de Fourier $b(n)$ s'annulent si $n \notin \mathbb{N}^{(\infty)}$: $\frac{1}{P} \in \mathbb{A}^+(\mathbb{T}^\infty)$. □

Nous énonçons et prouvons alors le théorème de Hewitt et Williamson :

Théorème 1.4 *Soit $f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$ une série de Dirichlet telle que $\sum_{n\geq 1} |a_n| < +\infty$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|f(s)| \geq \delta$ pour $\Re(s) \geq 0$. Alors*

$$\frac{1}{f(s)} = \sum_{n\geq 1} b_n n^{-s}$$

est une série de Dirichlet telle que $\sum |b_n| < +\infty$.

Preuve : Soit f une telle série de Dirichlet, pour laquelle nous supposerons par exemple que $|f(s)| \geq 1$ si $\Re(s) \geq 0$. Nous commençons par prouver, comme application du théorème de Kronecker, que :

$$|\mathcal{D}f(z)| \geq 1 \text{ si } z \in \overline{\mathbb{D}^\infty}.$$

En effet, fixons $0 < \varepsilon < 1$, et soit P une somme partielle de $\mathcal{D}f$ telle que $|\mathcal{D}f(z) - P(z)| \leq \varepsilon$ pour $z \in \overline{\mathbb{D}^\infty}$. Suivant [54], nous définissons, pour $\sigma \geq 0$ ou $\sigma = +\infty$,

$$\mathbb{D}_\sigma^N = \left\{ z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N \ ; \ |z_j| \leq p_j^{-\sigma}, 1 \leq j \leq N \right\},$$

$$\partial_0 \mathbb{D}_\sigma^N = \left\{ z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N \ ; \ |z_j| = p_j^{-\sigma}, 1 \leq j \leq N \right\}.$$

$\partial_0 \mathbb{D}_\sigma^N$ est la frontière distinguée de $\mathbb{D}_\sigma^N$. Le choix de P et l'hypothèse faite sur f imposent que si $z \in \mathbb{C}^N$ est de la forme $z = (p_1^{-\sigma} p_1^{-it}, \ldots, p_N^{-\sigma} p_N^{-it})$, alors $|P(z)| \geq 1 - \varepsilon$. Par le théorème de Kronecker, cette inégalité reste vraie pour tous les $z \in \partial_0 \mathbb{D}_\sigma^N$. Le lemme suivant, qui est prouvé dans [54], garantit qu'elle est en fait juste pour tout z de $\mathbb{D}^N$.

Lemme 1.2 (Principe du minimum distingué) *Soit Q un polynôme analytique à N variables tel que (δ_2 étant un réel fixé) :*

$$(z \in \partial_0 \mathbb{D}_\sigma^N, 0 \leq \sigma \leq \infty) \implies |Q(z)| \geq \delta_2.$$

Alors on a

$$|Q(z)| \geq \delta_2 \quad \text{dès que } z \in \mathbb{D}^N.$$

En utilisant une fois de plus l'inégalité $|\mathcal{D}f(z) - P(z)| \leq \varepsilon$, nous en déduisons que, pour tout z de $\overline{\mathbb{D}^\infty}$, $|\mathcal{D}f(z)| \geq 1 - 2\varepsilon$. Puisque ε est arbitraire, le résultat annoncé est prouvé.

En particulier, $\mathcal{D}f$ est un élément de $\mathbb{A}^+(\mathbb{T}^\infty)$, qui ne s'annule pas dans $\overline{\mathbb{D}^\infty}$. Le théorème de Wiener précisé s'applique, et :

$$\frac{1}{\mathcal{D}f(z)} = \sum_{n\in\mathbb{N}^{(\infty)}} b(n)z^n, \quad \text{où} \sum_{n\in\mathbb{N}^{(\infty)}} |b(n)| < +\infty.$$

En spécialisant cette égalité pour $z = (p_1^{-s}, p_2^{-s}, \dots)$, avec $\Re s \geq 0$, nous obtenons que :

$$\frac{1}{f(s)} = \sum_{n\in\mathbb{N}^{(\infty)}} b(n)\left(p_1^{n_1}\dots p_k^{n_k}\right)^{-s}, \quad \text{où} \sum_{n\in\mathbb{N}^{(\infty)}} |b(n)| < +\infty.$$

Ceci est exactement la conclusion du théorème. □

1.3 Produit de deux séries de Dirichlet

Soient $f(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ et $g(s) = \sum_{n\geq 1} b_n n^{-s}$ deux séries de Dirichlet. Le produit $h = fg$ de ces deux séries est défini formellement par $h(s) = \sum_{n\geq 1} c_n n^{-s}$, où $c_n = \sum_{ij=n} a_i b_j$. Cette série converge absolument dans un demi-plan commun d'absolue convergence de f et g, et sa somme correspond alors au produit usuel des deux fonctions. Un problème intéressant est d'estimer l'abscisse de convergence du produit fg en fonction des abscisses de convergence respectives de f et de g. Le théorème suivant répond au problème :

Théorème 1.5 *Si f (resp. g) est une série de Dirichlet dont l'abscisse de convergence est α (resp. β) avec $0 \leq |\alpha - \beta| < 1$, alors l'abscisse de convergence du produit fg est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)$. En outre, cette inégalité est optimale : on peut trouver f et g de sorte que f et g divergent pour tout $\sigma < \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)$.*

Ce théorème a une longue histoire. L'inégalité a d'abord été obtenue par Stieltjes dans le cas $\alpha = \beta = 0$, puis par Landau dans le cas général. En outre, Landau [42, 1907] a prouvé que $\sigma_c(fg)$ pouvait être plus grande que $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \frac{1}{4})$, alors que Cahen avait conjecturé que l'on avait toujours $\sigma_c(fg) \leq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. La première preuve de l'optimalité de la borne $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)$ a été fournie par Bohr [9, 1952] : sa méthode est très compliquée et utilise la fonction d'ordre d'une série de Dirichlet. Elle a été simplifiée par Queffélec [55, 1980], puis étendue par Kahane et Queffélec [36, 1997], en utilisant notamment le théorème de Baire. Il existe une preuve simple récente de l'optimalité : elle est due à Konyagin et Queffélec [38, 2001]. Toutefois, cette preuve repose sur des arguments topologiques (le théorème de Banach-Steinhaus), et il semble que l'on ne connaisse pas explicitement deux séries de Dirichlet f et g dont l'abscisse de convergence du produit vérifie exactement $\sigma_c(fg) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 1)$. Dans le paragraphe 1.3.1, nous donnons un tel exemple et obtenons donc au passage une preuve très facile de l'optimalité.

D'autre part, on peut se demander ce qu'il advient de l'abscisse de convergence de fg si l'on améliore notre connaissance de f et g. Pour certaines séries de Dirichlet, l'égalité

$\sigma_c(g) = \beta$ exprime que g admet une singularité sur la droite $\Re(s) = \beta$. C'est le cas par exemple de ζ, qui vérifie $\sigma_c(\zeta) = 1$, mais qui est prolongeable en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} - \{1\}$. Si l'on tue cette singularité en supposant par exemple que $f(\beta) = 0$, on peut espérer que l'abscisse de convergence du produit soit meilleure. L'étude de ce cas fait l'objet du paragraphe 1.3.2. Par ailleurs, on sait que $\sigma_a(f) \leq \sigma_c(f) + 1$. Que se passe-t-il pour le produit si l'estimation est meilleure?

1.3.1 Une preuve explicite

Nous allons construire deux séries de Dirichlet f et g d'abscisse de convergence 0, dont l'abscisse de convergence du produit est exactement 1/2. Nous commençons par le simple :

Lemme 1.3 *Soit N le carré d'un nombre pair. Pour $k = 1, \dots, \frac{\sqrt{N}}{2}$, on pose $i_k = \left[\frac{N}{k}\right]$. Alors on a :*
- $\left[\frac{N}{i_k}\right] = k$.
- $2\sqrt{N} \leq i_k \leq N$.

Nous rappelons que $[x]$ représente la partie entière de x.

Preuve : Il est clair que :

$$2\sqrt{N} = \left[\frac{N}{\sqrt{N}/2}\right] \leq i_k \leq N = \left[\frac{N}{1}\right].$$

En outre, puisque $i_k = \left[\frac{N}{k}\right]$, nous obtenons que :

$$k \leq \frac{N}{i_k} < \frac{Nk}{N-k}.$$

Du fait que $k \leq \frac{\sqrt{N}}{2}$, on conclut que $\left[\frac{N}{i_k}\right] = k$. □

Nous procédons maintenant à la définition de nos deux séries de Dirichlet f et g. Pour $n \geq 1$, on pose $M_n = 2^{4^n}$, de sorte que $M_{n+1} = M_n^4$. Le lemme 1.3 nous donne des entiers $i_{k,n}$ qui satisfont :

$$2\sqrt{M_n} \leq i_{\sqrt{M_n}/2,n} < \cdots < i_{2,n} < i_{1,n} \leq M_n,$$

et

$$\left[\frac{M_n}{i_{k,n}}\right] = k, \text{ pour } k = 1, \dots, \frac{\sqrt{M_n}}{2}.$$

Remarquons que, puisque $M_{n-1} < 2\sqrt{M_n}$, les entiers $i_{k,n}$ sont distincts deux à deux. Il est donc légitime de définir une suite $(a_i)_{i \geq 1}$ par :

$$\begin{cases} a_{i_{k,n}} &= (-1)^k \\ a_i &= 0 \qquad \text{si } i \neq i_{k,n}, \end{cases}$$

et de considérer la série de Dirichlet $f(s)=\sum_{i\geq 1} a_i i^{-s}$. Calculons son abscisse de convergence à l'aide de la formule (1.1) : pour $N\geq 1$, si n_0 est le plus petit entier pour lequel $N\leq M_{n_0}$, alors :

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{n=1}^{n_0-1}\sum_{k=1}^{\sqrt{M_n}/2}(-1)^k + \sum_{i_{k,n_0}\geq 2\sqrt{M_{n_0}}}^{N}(-1)^k. \tag{1.2}$$

Mais, pour $n\geq 1$, $\frac{\sqrt{M_n}}{2}$ est un entier pair, et donc :

$$\sum_{k=1}^{\sqrt{M_n}/2}(-1)^k=0.$$

Puisque

$$\sum_{i_{k,n_0}\geq 2\sqrt{M_{n_0}}}^{N}(-1)^k\in\{-1,0,1\},$$

on obtient que $\left|\sum_{i\leq N} a_i\right|\leq 1$, ce qui prouve que $\sigma_c(f)=0$.

Nous choisissons pour g la fonction zeta alternée, c'est-à-dire $g(s)=\sum_{i\geq 1}(-1)^i i^{-s}$, dont l'abscisse de convergence est 0. D'après le théorème de Stieltjes, $\sigma_c(fg)\leq 1/2$. On a égalité :

Théorème 1.6 *L'abscisse de convergence de fg est exactement 1/2.*

Preuve : On pose $h(s)=f(s)g(s)=\sum_{n\geq 1}c_n n^{-s}$, et $C_N=c_1+\cdots+c_N$. Un calcul élémentaire montre que :

$$C_N=\sum_{i=1}^{N} a_i B_{\left[\frac{N}{i}\right]},$$

où nous avons aussi posé $B_N=\sum_{n=1}^{N}(-1)^n$. Observons que :

$$B_j=\begin{cases}-1 & \text{si } j \text{ est impair}\\ 0 & \text{si } j \text{ est pair.}\end{cases}$$

Il suffit de prouver l'existence de $\delta>0$ tel que, si N est égal à M_n, $C_N\geq \delta N^{1/2}$. Nous partageons la somme définissant C_N en 2 parties :

$$C_N=\underbrace{\sum_{i=1}^{2\sqrt{N}-1} a_i B_{\left[\frac{N}{i}\right]}}_{(S_1)}+\underbrace{\sum_{i=2\sqrt{N}}^{N} a_i B_{\left[\frac{N}{i}\right]}}_{(S_2)}.$$

Nous allons dominer S_1 et calculer exactement S_2. Si $i\leq 2\sqrt{N}-1=2\sqrt{M_n}-1$, la condition $a_i\neq 0$ impose que $i\leq M_{n-1}=N^{1/4}$. En particulier,

$$|S_1|\leq\sum_{i=1}^{N^{1/4}}|a_i|\leq N^{1/4}.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^{\sqrt{N}/2} a_{i_{k,n}} B_k \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{\sqrt{N}/2} (-1) \times (-1) \\ &= \frac{N^{1/2}}{4}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$C_N \geq \frac{N^{1/2}}{4} - N^{1/4},$$

et l'abscisse de convergence de fg est $1/2$. □

Remarque : On peut généraliser la construction en choisissant pour A une série de Dirichlet dont l'abscisse de convergence est α, $0 \leq \alpha \leq 1$. Pour cela, il suffit de poser :

$$a_{i_{k,n}} = (-1)^k i_{k,n}^{\alpha}.$$

Par le même calcul, on obtient que $|S_1| \leq K_1 N^{\frac{1+\alpha}{4}}$, tandis que $S_2 \geq K_2 N^{\frac{1+\alpha}{2}}$, ce qui donne $\sigma_c(fg) = \frac{1+\alpha}{2}$. En translatant ces séries, on peut obtenir explicitement, pour $0 \leq |\alpha - \beta| \leq 1$, deux séries de Dirichlet f et g avec $\sigma_c(f) = \alpha$, $\sigma_c(g) = \beta$ et $\sigma_c(fg) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 1)$.

1.3.2 Produit par ζ

Nous nous demandons si on peut améliorer l'abscisse de convergence du produit fg si g admet β pour pôle simple, et si f s'annule en β. Michel Balazard (communication personnelle) a remarqué que si f est une série de Dirichlet telle que $0 < \sigma_c(f) < 1$ et $f(1) = 0$, alors l'abscisse de convergence du produit $f\zeta$ est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}(1+\alpha)$. Il pose la question de savoir si cela est optimal. Nous commençons par généraliser son observation :

Théorème 1.7 *Soient $f(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ et $g(s) = \sum_{n\geq 1} b_n n^{-s}$ deux séries de Dirichlet, avec $\sigma_c(f) = \alpha$, $\sigma_c(g) = \beta$, et $\beta - 1 < \alpha < \beta$. On suppose en outre que :*

1. *$f(\beta) = 0$.*
2. *$B_n = b_1 + \cdots + b_n = Kn^{\beta} + O\left(n^{\beta-1}\right)$.*

Alors $\sigma_c(fg) \leq \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

Ce résultat améliore celui donné par le théorème de Stieltjes d'une translation de facteur $1/2$. Si $g = \zeta$, on a $B_n = n$ et on retrouve l'observation de Balazard. Remarquons que l'on ne peut pas se passer des conditions 1. et 2. :

1. Si on ne suppose pas que $f(\beta) = 0$, prenons par exemple, pour $0 < \alpha < 1$, $f(s) = \zeta(s - 1 + \alpha)$ et $g(s) = \zeta(s)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i B_{\left[\frac{n}{i}\right]} &\geq \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{n}{i} - \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&\geq n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{2-\alpha}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1-\alpha}} \\
&\geq \delta n,
\end{aligned}$$

   ce qui prouve $\sigma_c(fg) \geq 1$, alors que le théorème donnerait $\sigma_c(fg) \leq \frac{1}{2}(1 + \alpha)$.

2. Pour la preuve de la nécessité de la condition 2., nous renvoyons à la remarque après la preuve du théorème 1.8, dont nous utiliserons les notations.

Preuve : Sans perte de généralité, on peut supposer que $K = \beta = 1$. On pose $h(s) = f(s)g(s) = \sum_{n \geq 1} c_n n^{-s}$; il suffit de prouver que $C_n = c_1 + \cdots + c_n = O\left(n^{\frac{1+\alpha}{2}+\varepsilon}\right)$, pour tout $\varepsilon > 0$. Nous allons utiliser la méthode de l'hyperbole de Dirichlet (voir [66, p.38]) en écrivant :

$$C_n = \underbrace{\sum_{i \leq \sqrt{n}} a_i B_{\left[\frac{n}{i}\right]}}_{(S_1)} + \underbrace{\sum_{j \leq \sqrt{n}} b_j A_{\left[\frac{n}{j}\right]}}_{(S_2)} - \underbrace{A_{[\sqrt{n}]} B_{[\sqrt{n}]}}_{(S_3)} .$$

Or, nous savons que :

i. $\left|\sum_{n \leq t} a_n\right| = O\left(t^{\alpha+\varepsilon}\right)$.

ii. $\sigma_a(f) \leq \alpha + 1$, et donc : $\sum_{n \leq t} |a_n| = O(t^{1+\alpha+\varepsilon})$.

Par conséquent, on a :

$$S_3 = O\left(\sqrt{n}.n^{\alpha/2+\varepsilon}\right) = O\left(n^{\frac{1+\alpha}{2}+\varepsilon}\right),$$

et :

$$S_2 = \sum_{j \leq \sqrt{n}} b_j O\left(\frac{n^{\alpha+\varepsilon}}{j^{\alpha+\varepsilon}}\right).$$

Mais $b_j = B_j - B_{j-1} = j - (j-1) + O(1) = O(1)$, et donc :

$$S_2 = \sum_{j \leq \sqrt{n}} O\left(\frac{n^{\alpha+\varepsilon}}{j^{\alpha+\varepsilon}}\right) = O\left(n^{\frac{1+\alpha}{2}+\varepsilon}\right).$$

Tirant parti du fait que $f(1) = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i \leq \sqrt{n}} a_i B_{\left[\frac{n}{i}\right]} - n \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{i} \\ &= \sum_{i \leq \sqrt{n}} a_i \left(B_{\left[\frac{n}{i}\right]} - \frac{n}{i} \right) - n \sum_{i > \sqrt{n}} \frac{a_i}{i}. \end{aligned}$$

Comme $B_{\left[\frac{n}{i}\right]} - \frac{n}{i} = B_{\left[\frac{n}{i}\right]} - \left[\frac{n}{i}\right] + \left[\frac{n}{i}\right] - \frac{n}{i} = O(1)$, on a :

$$\sum_{i \leq \sqrt{n}} a_i \left(B_{\left[\frac{n}{i}\right]} - \frac{n}{i} \right) = O\left(\sum_{i \leq \sqrt{n}} |a_i| \right) = O\left(n^{\frac{1+\alpha}{2}+\varepsilon} \right).$$

Enfin, une transformation d'Abel prouve que :

$$n \sum_{i > \sqrt{n}} \frac{a_i}{i} = O\left(n^{\frac{1+\alpha}{2}+\varepsilon} \right).$$

En regroupant toutes ces estimations, nous trouvons que $C_n = O\left(n^{\frac{1+\alpha}{2}+\varepsilon} \right)$, ce qui est le résultat voulu. □

En utilisant les mêmes techniques que dans [38], nous prouvons maintenant que l'abscisse de convergence obtenue dans le théorème 1.7 est optimale, et répondons ainsi en particulier à la question de M.Balazard :

Théorème 1.8 *Soit $g(s) = \sum_{n \geq 1} b_n n^{-s}$ une série de Dirichlet telle que $B_n = Kn^\beta + O\left(n^{\beta-1}\right)$, $K \neq 0$. Soit α, β des réels avec $\beta - 1 < \alpha < \beta$ et (φ_n) une suite croissante de nombres positifs telle que : pour toute série de Dirichlet f avec $\sigma_c(f) = \alpha$ et $f(\beta) = 0$, la suite $\frac{c_1+\cdots+c_n}{\varphi_n}$, où (c_n) est définie par $f(s)g(s) = \sum_{n \geq 1} c_n n^{-s}$, est bornée. Alors :*

$$\varphi_n \geq \delta n^{\frac{\alpha+\beta}{2}}, \text{ où } \delta \text{ est une constante strictement positive.}$$

En particulier, l'abscisse de convergence donnée par le théorème 1.7 est optimale.

Preuve : Sans perte de généralité, on peut supposer que $K = \beta = 1$. On introduit l'espace de Banach $E = \{a = (a_n);\ \sum_{n \geq 1} a_n n^{-\alpha} \text{ converge}, \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} = 0\}$, muni de la norme $\|a\| = \sup_n |\sum_{k=1}^n a_k k^{-\alpha}|$. On définit une suite de formes linéaires (L_n) sur E par :

$$L_n(a) = \frac{c_1 + \cdots + c_n}{\varphi_n}.$$

Par hypothèse, pour chaque a de E, $\sup_n |L_n(a)| < +\infty$. Le théorème de Banach-Steinhaus nous dit alors que $M = \sup_n \|L_n\| < +\infty$. En particulier, pour tout $a \in E$, tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i B_{\left[\frac{n}{i}\right]} \right| \leq M \varphi_n \|a\|. \tag{1.3}$$

Nous notons $B_k = k + u_k$, où (u_k) est une suite bornée. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Nous cherchons une suite $a \in E$ telle que, testant (1.3) sur cette suite, on obtienne $\varphi_n \geq \delta n^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$. Nous en construirons une de sorte que $a_k = 0$ si $k \geq n+1$. On a alors $\sum_{i=1}^n a_i \frac{n}{i} = 0$, et l'inégalité précédente se réécrit comme :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{n}{i} - \left[\frac{n}{i}\right] - u_{[\frac{n}{i}]}\right)\right| \leq M\varphi_n \|a\|. \tag{1.4}$$

Nous allons utiliser l'idée suivante : pour un entier k assez petit (devant n), il est possible de trouver des entiers i et j tels que $\left[\frac{n}{i}\right] = \left[\frac{n}{j}\right] = k$, mais satisfaisant :

$$\left(\frac{n}{j} - k - u_k\right) - \left(\frac{n}{i} - k - u_k\right) \geq 1/2.$$

En choisissant convenablement, pour chaque tel k, a_i et a_j, nous allons pouvoir obtenir une minoration de la partie gauche de (1.4), tout en contrôlant la norme de a. Précisément, nous supposons que n est le carré d'un nombre pair, et posons :

$$\mathcal{A} = \left\{2\sqrt{n} \leq i \leq \frac{n}{2};\ \exists k \in \left\{2, \ldots, \frac{\sqrt{n}}{2}\right\},\ \left[\frac{n}{i-1}\right] = k+1,\ \left[\frac{n}{i}\right] = k\right\},$$

$$\mathcal{B} = \left\{2\sqrt{n} \leq j \leq \frac{n}{2};\ \exists k \in \left\{2, \ldots, \frac{\sqrt{n}}{2}\right\},\ \left[\frac{n}{j}\right] = k,\ \left[\frac{n}{j+1}\right] = k-1\right\}.$$

D'abord, remarquons que $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = \frac{\sqrt{n}}{2} - 1$. En effet, le cardinal de chacun de ces ensembles est clairement inférieur ou égal à $\frac{\sqrt{n}}{2} - 1$. Maintenant, si $i \geq 2\sqrt{n}$,

$$\frac{n}{i} - \frac{n}{i+1} = \frac{n}{i(i+1)} \leq \frac{1}{4} < 1.$$

Ainsi, la fonction $\{2\sqrt{n}, \ldots, n/2\} \to \mathbb{N}$, $i \mapsto \left[\frac{n}{i}\right]$, est croissante, et satisfait $\left[\frac{n}{i+1}\right] - \left[\frac{n}{i}\right] \in \{-1, 0\}$. Puisque $\frac{n}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2}$, et $\frac{n}{n/2} = 2$, toutes les valeurs de $\{2, \ldots, \frac{\sqrt{n}}{2}\}$ sont prises par $\left[\frac{n}{i}\right]$ si i parcourt $\{2\sqrt{n}, \ldots, n/2\}$. Il est donc légitime d'écrire $\mathcal{A} = \left\{i_k;\ k \in \{2, \ldots, \frac{\sqrt{n}}{2}\}\right\}$, et $\mathcal{B} = \left\{j_k;\ k \in \{2, \ldots, \frac{\sqrt{n}}{2}\}\right\}$, où $k = \left[\frac{n}{i_k}\right] = \left[\frac{n}{j_k}\right]$. En réécrivant simplement la définition des entiers i_k et j_k, on constate que, pour $2 \leq k \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$,

$$j_{k+1} = i_k - 1. \tag{1.5}$$

D'autre part, on a :

$$j_k > i_k. \tag{1.6}$$

En effet, la définition nous dit que $j_k \geq i_k$, l'égalité signifiant que :

$$\left[\frac{n}{i_k - 1}\right] - \left[\frac{n}{i_k + 1}\right] = 2.$$

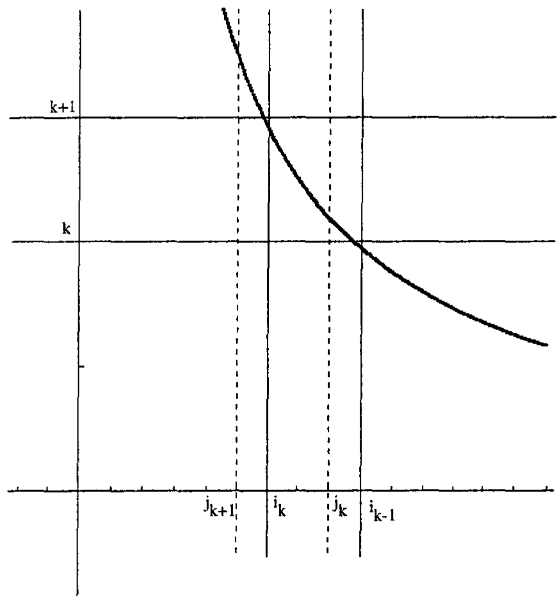


FIG. 1.1 – *Définition des entiers i_k et j_k*

Mais, puisque $i_k \geq 2\sqrt{n}$, on a :

$$\frac{n}{i_k - 1} - \frac{n}{i_k + 1} = \frac{2n}{(i_k - 1)(i_k + 1)} \leq 1.$$

En particulier, (1.5) et (1.6) expriment que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des ensembles disjoints. La dernière propriété dont nous aurons besoin est l'inégalité annoncée :

$$\text{Si } k \geq 2, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{n}{i_k} - \frac{n}{j_k}. \tag{1.7}$$

En effet,

$$\left(\frac{n}{j_k + 1} - \left[\frac{n}{j_k + 1}\right]\right) - \left(\frac{n}{j_k} - \left[\frac{n}{j_k}\right]\right) = 1 - \frac{n}{j_k(j_k + 1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Puisque $x - [x] \in [0,1[$, on a $\frac{n}{j_k} - k \leq \frac{1}{4}$. De même, $\frac{n}{i_k} - k \geq \frac{3}{4}$, ce qui donne (1.7).

Nous pouvons alors définir la suite (a_i) en posant :

- Pour $k \in \{2, \ldots, \frac{\sqrt{n}}{2}\}$, $a_{i_k} = i_k^\alpha$, et $a_{j_k} = -j_k^\alpha$.
- Pour $i \geq 2$, $i \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $a_i = 0$.
- $a_1 = -\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{i}$.

Cette définition a bien un sens, et $a \in E$.

Estimation de $\|a\|$: Puisque $j_{k+1} < i_k < j_k$, pour tout $m \geq 2$, $\sum_{i=2}^m a_i i^{-\alpha} \in \{0,1\}$.

Ainsi, $m \mapsto \sum_{i=2}^m a_i i^{-\alpha}$ est bornée par une constante (indépendante de n), et une transformation d'Abel montre qu'il en est de même de $m \mapsto \sum_{i=2}^{m} a_i i^{-1}$. En particulier, $a_1 = O(1)$. Et puisque $\|a\| = \sup_n |\sum_{k=1}^{n} a_k k^{-\alpha}|$, nous obtenons aussi que :

$$\|a\| \quad = \quad O(1). \tag{1.8}$$

Estimation de $\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n}{i} - \left[\frac{n}{i}\right] - u_{[\frac{n}{i}]}\right) a_i\right|$: Écrivons que :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n}{i} - \left[\frac{n}{i}\right] - u_{[\frac{n}{i}]}\right) a_i \quad = \quad -u_n a_1 + \sum_{k=2}^{\sqrt{n}/2} d_k,$$

où $d_k = i_k^\alpha \left(\frac{n}{i_k} - k - u_k\right) - j_k^\alpha \left(\frac{n}{j_k} - k - u_k\right)$. Clairement, $u_n a_1 = O(1)$. Nous allons prouver que :

$$d_k \geq \frac{1}{2} i_k^\alpha - C(j_k^\alpha - i_k^\alpha), \tag{1.9}$$

où C est une constante indépendante de k et n. Nous distinguons trois cas :

– Si $0 \leq \frac{n}{j_k} - k - u_k \leq \frac{n}{i_k} - k - u_k$, d'après (1.7), on a :

$$\left(\frac{n}{i_k} - k - u_k\right) \geq \left(\frac{n}{j_k} - k - u_k\right) + \frac{1}{2} \geq 0,$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} d_k \quad &\geq \quad \frac{1}{2} i_k^\alpha - \left(\frac{n}{j_k} - k - u_k\right)(j_k^\alpha - i_k^\alpha) \\ &\geq \quad \frac{1}{2} i_k^\alpha - C(j_k^\alpha - i_k^\alpha), \end{aligned}$$

où $C = 1 + \max |u_k|$.

– Si $\frac{n}{j_k} - k - u_k \leq \frac{n}{i_k} - k - u_k \leq 0$, alors toujours d'après (1.7), on a :

$$-\left(\frac{n}{j_k} - k - u_k\right) \geq -\left(\frac{n}{i_k} - k - u_k\right) + \frac{1}{2} \geq 0,$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} d_k \quad &\geq \quad \frac{1}{2} j_k^\alpha - \left(\frac{n}{i_k} - k - u_k\right)(j_k^\alpha - i_k^\alpha) \\ &\geq \quad \frac{1}{2} i_k^\alpha - C(j_k^\alpha - i_k^\alpha), \end{aligned}$$

- Si $\frac{n}{j_k} - k - u_k \leq 0 \leq \frac{n}{i_k} - k - u_k$, on est dans le cas le plus favorable car on ajoute des quantités de même signe.Dans ce cas :

$$\begin{aligned} d_k &\geq i_k^\alpha \left(\frac{n}{i_k} - k - u_k\right) - i_k^\alpha \left(\frac{n}{j_k} - k - u_k\right) \\ &\geq \frac{1}{2} i_k^\alpha. \end{aligned}$$

Nous avons donc prouvé (1.9). Maintenant, remarquons que

$$\sum_{k\geq 2}^{\sqrt{n}/2} i_k^\alpha \geq \left(\frac{\sqrt{n}}{2} - 1\right) \left(2\sqrt{n}\right)^\alpha \geq C'.n^{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

D'autre part, d'après (1.5), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\sqrt{n}/2} (j_k^\alpha - i_k^\alpha) &= \sum_{k=1}^{\sqrt{n}/2-1} j_{k+1}^\alpha - \sum_{k=2}^{\sqrt{n}/2} i_k^\alpha \\ &= O(n^\alpha) + \sum_{k=2}^{\sqrt{n}/2-1} ((i_k - 1)^\alpha - i_k^\alpha) \\ &= O(n^\alpha) + \sum_{k=2}^{\sqrt{n}/2-1} O(i_k^{\alpha-1}) \\ &= O(n^\alpha) + \sum_{k=2}^{\sqrt{n}/2-1} O(n^{\alpha-1}) \\ &= O(n^\alpha). \end{aligned}$$

Finalement, on en déduit l'estimation :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{i} - \left[\frac{n}{i}\right] - u_{[\frac{n}{i}]}\right) a_i \right| \geq C'' n^{\frac{1+\alpha}{2}}. \tag{1.10}$$

Nous pouvons alors conclure. D'après (1.10) et (1.8), (1.4) se lit : $\varphi_n \geq \delta n^{\frac{1+\alpha}{2}}$, dès lors que n est le carré d'un nombre pair. Dans le cas général, on encadre n par $(2m)^2 \leq n \leq (2m+2)^2$. On en déduit que :

$$\varphi_n \geq \varphi_{(2m)^2} \geq \delta(2m)^{1+\alpha} \geq \delta'(2m+2)^{1+\alpha} \geq \delta' n^{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

□

Remarque : Il nous reste à prouver la nécessité d'une condition de type 2. dans le théorème 1.7. Considérons à cet effet une série de Dirichlet $g(s) = \sum_{n\geq 1} b_n^{-s}$, avec $B_n = n + (-1)^n n^r$,$0 < r < 1$. L'ensemble $\mathcal{A}$ étant défini comme auparavant, on choisit $a \in E$

avec $a_{i_k} = (-1)^k i_k^\alpha$, $a_i = 0$ pour $i \geq 2$, $i \neq i_k$, et $a_1 = -\sum_{i \geq 2} \frac{a_i}{i}$. Il est clair que $a \in E$, et que $\|a\| = O(1)$. En outre,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i \left(B_{[\frac{n}{i}]} - \frac{n}{i}\right) &= \sum_{k=2}^{\sqrt{n}/2} a_{i_k} \left(k - \frac{n}{i_k}\right) + \sum_{k=2}^{\sqrt{n}/2} a_{i_k} (-1)^k k^r + O(1) \\
&= O\left(\sum_{k=2}^{\sqrt{n}/2} |a_{i_k}|\right) + \sum_{k=2}^{\sqrt{n}/2} i_k^\alpha k^r + O(1) \\
&= O\left(n^{\frac{1+\alpha}{2}}\right) + \sum_{k=2}^{\sqrt{n}/2} i_k^\alpha k^r.
\end{aligned}$$

Comme $i_k \geq \sqrt{n}$, on a :

$$\sum_{k=2}^{\sqrt{n}/2} i_k^\alpha . k^r \geq C n^{\alpha/2} n^{\frac{1+r}{2}} \geq C n^{\frac{1+\alpha}{2} + \frac{r}{2}}.$$

Ceci donne $\varphi_n \geq \delta n^{\frac{1+\alpha}{2} + \frac{r}{2}}$, ce qui signifie, en faisant tendre r vers 1, que l'on ne peut pas améliorer l'abscisse de convergence donnée par le théorème de Stieltjes.

Remarque : En utilisant la même technique que dans le paragraphe 1.3.1, il est aussi possible de donner explicitement une série de Dirichlet f, avec $\sigma_c(f) = \alpha$, $f(1) = 0$, et telle que $\sigma_c(fg) = \frac{1+\alpha}{2}$ pour toute série de Dirichlet g vérifiant les hypothèses du théorème 1.7. Pour n le carré d'un nombre pair, nous notons $a_i^{(n)}$ la suite construite dans la preuve du théorème 1.8 pour cet entier. Remarquons que :

$$a_i^{(n)} \neq 0 \implies 2\sqrt{n} \leq i \leq \frac{n}{2}, \text{ ou } i = 0.$$

On pose toujours $M_n = 2^{4^n}$. Si $n \neq m$, les suites $(a_i^{(M_n)})_{i \geq 2}$ et $(a_i^{(M_m)})_{i \geq 2}$ ont donc des supports disjoints, et on peut poser :

$$\begin{cases} a_i &= a_i^{(M_n)} \quad \text{s'il existe } n \text{ tel que } a_i^{(M_n)} \neq 0 \\ a_i &= 0 \quad \text{dans tous les autres cas, si } i \geq 2. \end{cases}$$

Vérifions que $\sum_{i \geq 2} \frac{a_i}{i}$ converge. Il suffit de prouver que $m \mapsto \sum_{i=2}^{m} a_i i^{-\alpha}$ est bornée. Mais la même décomposition que celle effectuée dans l'équation (1.2) montre que, pour tout $m \geq 2$, $\sum_{i=2}^{m} a_i i^{-\alpha} \in \{-1,0,1\}$. Il est donc possible de poser $a_1 = -\sum_{i \geq 2} \frac{a_i}{i}$. L'abscisse de convergence de la série de Dirichlet $f(s) = \sum_{i \geq 1} a_i i^{-s}$ est α, et f satisfait $f(1) = 0$. Si $N = M_n$, alors :

$$\begin{aligned}
C_N &= \sum_{i=1}^{N} a_i B_{[\frac{N}{i}]} \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{2\sqrt{N}-1} a_i B_{[\frac{N}{i}]}}_{(S_1)} + \underbrace{\sum_{i=2\sqrt{N}}^{N} a_i B_{[\frac{N}{i}]}}_{(S_2)}.
\end{aligned}$$

Mais on a déjà prouvé que
$$S_2 \geq \delta N^{\frac{1+\alpha}{2}},$$
tandis que, puisque $M_{n-1} = M_n^{1/4}$, on a la majoration
$$|S_1| \leq C \sum_{i=1}^{N^{1/4}} |a_i| \leq C.N^{\frac{1+\alpha}{4}}.$$

1.3.3 Produit de Dirichlet et abscisse de convergence absolue

La meilleure estimation que l'on puisse avoir de l'abscisse de convergence absolue d'une série de Dirichlet f en fonction de son abscisse de convergence est l'inégalité $\sigma_a(f) \leq \sigma_c(f) + 1$. Lorsque l'on dispose d'un meilleur contrôle, Landau a prouvé dans [42] que l'on pouvait améliorer l'abscisse de convergence du produit :

Théorème 1.9 *Soit f (resp. g) une série de Dirichlet d'abscisse de convergence 0, d'abscisse de convergence absolue $0 < \tau_1 < 1$ (resp. $0 < \tau_2 < 1$). Alors :*
$$\sigma_c(fg) \leq \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}.$$
L'optimalité de ce théorème a déjà été prouvée par J.P. Kahane et H. Queffélec dans [36]. Nous nous proposons de redonner une preuve plus simple :

Théorème 1.10 *Soit $0 < \tau_1,\tau_2 < 1$, (φ_n) une suite croissante de nombres positifs telle que, pour toute série de Dirichlet f (resp. g) qui converge en 0, et qui converge absolument en $0 < \tau_1 < 1$ (resp. en $0 < \tau_2 < 1$), la suite $\frac{c_1+\cdots+c_n}{\varphi_n}$, où (c_n) est définie par $f(s)g(s) = \sum_{n\geq 1} c_n n^{-s}$, est bornée. Alors :*
$$\varphi_n \geq \delta n^{\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}}, \text{ où } \delta \text{ est une constante strictement positive.}$$
En particulier, l'abscisse de convergence donnée par le théorème 1.9 est optimale.

Preuve : On peut supposer $\tau_2 \leq \tau_1$. On introduit l'espace de Banach $E = \{(a_n);\ \sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-\tau_1}$ convergent$\}$ muni de la norme :
$$\|a\| = \max\left(\sup_n \left|\sum_{k=1}^n a_k\right|, \sum_{k\geq 1} |a_k| k^{-\tau_1}\right).$$
On définit F de la même façon, en remplaçant τ_2 par τ_1. Soit (L_n) les formes bilinéaires sur $E \times F$ définies par :
$$L_n(a,b) = \frac{c_1 + \cdots + c_n}{\varphi_n}.$$
Par hypothèse, pour tout $a \in E$, pour tout $b \in F$, $\sup_n |L_n(a,b)| < +\infty$. Le théorème de Banach-Steinhaus donne une constante $M > 0$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in E,\ \forall b \in F,\ |c_1 + \cdots + c_n| \leq M\varphi_n \|a\|\,\|b\|.$$

Nous allons, pour $a \in E$, et $b \in F$ bien choisis, minorer $|c_1 + \cdots + c_n|$ afin d'obtenir une inégalité du type :

$$|c_1 + \cdots + c_n| \geq \delta n^{\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}} \|a\| \|b\|. \tag{1.11}$$

Pour cela, nous partageons $c_1+\cdots+c_n$ en plusieurs sommes. Pour simplifier les notations, on pose $\alpha = \frac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$, $0 < \alpha \leq 1/2$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
c_1 + \cdots + c_n &= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{n/i} b_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n^\alpha} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j + \sum_{j=1}^{n^{1-\alpha}} b_j \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n^\alpha} a_i \sum_{j=1}^{n^{1-\alpha}} b_j \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n^\alpha} a_i \left(\sum_{j=\left[\frac{n}{i}\right]+1}^{n} b_j \right) + \sum_{j=1}^{n^{1-\alpha}} b_j \left(\sum_{i=\left[\frac{n}{j}\right]+1}^{n} a_i \right) \\
&= \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3 - \Sigma_4 - \Sigma_5.
\end{aligned}$$

Les termes de Σ_3 sont ceux qui sont comptés deux fois dans $\Sigma_1 + \Sigma_2$, ceux de $\Sigma_4 + \Sigma_5$ sont ceux qui apparaissent dans $\Sigma_1 + \Sigma_2$, mais pas dans $c_1 + \cdots + c_n$. Remarquons que si $i \in \{1,2,3\}$, on a : $|\Sigma_i| \leq \|a\| \|b\|$. Si l'on veut obtenir (1.11), ces termes peuvent donc être ignorés. D'abord, nous nous intéressons à

$$\Sigma_4 = \sum_{i=1}^{n^\alpha} a_i \left(\sum_{j=\left[\frac{n}{i}\right]+1}^{n} b_j \right).$$

Nous choisissons a et b de sorte que :

$$a_i \left(\sum_{j=\left[\frac{n}{i}\right]+1}^{n} b_j \right) = |a_i|, \tag{1.12}$$

tout en prenant soin que $\|a\|$ et $\|b\|$ n'explosent pas. On note $\lambda_i = \left[\frac{n}{i}\right] + 1$. On définit $a \in E$ par la formule :

$$\begin{cases} a_i = (-1)^i & \text{si } n^\alpha - n^{\alpha\tau_1} \leq i \leq n^\alpha \\ a_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $\alpha \leq 1/2$, si $1 \leq i < k \leq n^\alpha$, on a : $\frac{n}{i} - \frac{n}{k} \geq \frac{n}{k-1} - \frac{n}{k} \geq \frac{n}{k^2} \geq 1$, et donc $\lambda_i > \lambda_k$. Il est alors possible de résoudre le système triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{lllll} b_{\lambda_{[n^\alpha - n^{\alpha\tau_1}]}} & & & = & (-1)^{[n^\alpha - n^{\alpha\tau_1}]} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ b_{\lambda_{[n^\alpha - n^{\alpha\tau_1}]}} & + \cdots + & +b_{\lambda_{i-1}} + b_{\lambda_i} & = & (-1)^i \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{\lambda_{[n^\alpha - n^{\alpha\tau_1}]}} & + \cdots & \cdots + \quad b_{\lambda_{[n^\alpha]}} & = & (-1)^{[n^\alpha]}. \end{array}\right.$$

Lorsque l'on résoud ce système, les b_{λ_i} prennent successivement les valeurs +2 ou -2, hormis le premier terme qui vaut ± 1. On complète la définition de $b \in F$ en posant $b_k = 0$ si $k \neq \lambda_i$, où $n^\alpha - n^{\alpha\tau_1} \leq i \leq n^\alpha$. Remarquons que (1.12) est bien respectée. Estimons les divers termes :

Estimation de Σ_4 :

$$\Sigma_4 = \sum_{i=n^\alpha - n^{\alpha\tau_1}}^{n^\alpha} |a_i| \geq \frac{1}{2} n^{\alpha\tau_1} = \frac{1}{2} n^{\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}}.$$

Estimation de $\|a\|$:

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i \in \{0, -1, 1\}$.
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i| i^{-\tau_1} = \sum_{i=n^\alpha - n^{\alpha\tau_1}}^{n^\alpha} i^{-\tau_1} \leq C n^{\alpha\tau_1} (n^\alpha)^{-\tau_1} \leq C$. On en déduit que $\|a\| \leq C$, où C est indépendant de n.

Estimation de $\|b\|$:

- D'abord, la remarque que nous avons faite sur les valeurs successives des b_{λ_i} montre que $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{k} b_i\right| \leq 2$.
- Ensuite, on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |b_i| i^{-\tau_2} &= \sum_{i=n^\alpha - n^{\alpha\tau_1}}^{n^\alpha} |b_{\lambda_i}| |\lambda_i|^{-\tau_2} \\ &\leq C n^{-\tau_2} \sum_{i=n^\alpha - n^{\alpha\tau_1}}^{n^\alpha} i^{\tau_2} \\ &\leq C' n^{-\tau_2} n^{\alpha\tau 1} n^{\alpha\tau_2} = C' \end{aligned}$$

puisque $\alpha = \frac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$. En particulier, $\|b\| \leq C'$.

Résumons : les termes qui apparaissent dans Σ_5 sont tous nuls, et on a prouvé finalement que :

$$\begin{aligned} |c_1 + \cdots + c_n| &\geq |\Sigma_4| - |\Sigma_3| - |\Sigma_2| - |\Sigma_1| \\ &\geq |\Sigma_4| - 3\|a\|\|b\| \\ &\geq \delta n^{\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}}. \end{aligned}$$

Le cas où n^α et $n^{\alpha-\alpha\tau_1}$ ne sont pas entiers se traite par interpolation, comme dans la preuve du théorème 1.8. □

Remarque : Ici aussi, il est possible d'expliciter deux séries de Dirichlet f et g pour lesquelles la borne $\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$ est effectivement atteinte, l'idée étant toujours de s'arranger pour que les suites considérées dans la preuve précédente sont à supports disjoints. Précisément, pour M_1 un entier suffisamment grand, on définit par récurrence une suite (M_n) en posant :

$$M_n = \left[M_{n-1}^{2\left(\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1\tau_2}\right)}\right] + 1.$$

On désigne par $(a_i^{(n)})$ et $(b_i^{(n)})$ les suites construites dans la preuve du théorème 1.10 pour l'entier n. Il est facile de vérifier que les supports des suites $(a_i^{(M_n)})$ et $(a_i^{(M_m)})$ (resp. $(b_i^{(M_n)})$ et $(b_i^{(M_m)})$) sont disjoints si $n \neq m$. On peut donc définir une suite (a_i) (resp. (b_i)) par $a_i = \sum_{n\geq 1} a_i^{(M_n)}$, la suite ne comportant qu'un seul terme non nul. On pose $f(s) = \sum_{i\geq 1} a_i i^{-s}$, $g(s) = \sum_{i\geq 1} b_i i^{-s}$, et $h = fg$. En groupant les termes, il est facile de vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$A_N = O(N^\varepsilon), \qquad B_N = O(N^\varepsilon).$$

En effet, si n_0 est le plus petit entier tel que $M_{n_0} \geq N$,

$$\begin{aligned} |A_N| &\leq \left|\sum_{n=1}^{n_0-1} \sum_{k=M_n^\alpha - M_n^{\alpha\tau_1}}^{M_n^\alpha} (-1)^k\right| + \left|\sum_{k=M_{n_0}^\alpha - M_{n_0}^{\alpha\tau_1}}^{N} (-1)^k\right| \\ &\leq n_0 \leq C_\varepsilon M_{n_0-1}^\varepsilon \leq C'_\varepsilon N^\varepsilon, \end{aligned}$$

la croissance de la suite M_n étant exponentielle! De même, en utilisant les estimations de $\|a\|$ et $\|b\|$ du théorème 1.10, on prouve que l'abscisse de convergence absolue de f (resp. g) est τ_1 (resp. τ_2). Pour $N = M_n$, on partage C_N en cinq sommes :

$$\begin{aligned} C_N &= \sum_{i=1}^{N} a_i \left(\sum_{j=1}^{N/i} b_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N^\alpha} a_i \sum_{j=1}^{N} b_j + \sum_{j=1}^{N^{1-\alpha}} b_j \sum_{i=1}^{N} a_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N^\alpha} a_i \sum_{j=1}^{N^{1-\alpha}} b_j \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N^\alpha} a_i \left(\sum_{j=[\frac{N}{i}]+1}^{N} b_j\right) + \sum_{j=1}^{N^{1-\alpha}} b_j \left(\sum_{i=[\frac{N}{j}]+1}^{N} a_i\right) \\ &= \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3 - \Sigma_4 - \Sigma_5. \end{aligned}$$

Pour $i \in \{1,2,3\}$, $|\Sigma_i| = O(N^{2\varepsilon})$. Concernant Σ_4, on a :

$$\Sigma_4 = \underbrace{\sum_{i=1}^{N^\alpha - N^{\alpha\tau_1}} a_i \left(\sum_{j=[\frac{N}{i}]+1}^{N} b_j \right)}_{(S_1)} + \underbrace{\sum_{i=N^\alpha - N^{\alpha\tau_1}}^{N^\alpha} a_i \left(\sum_{j=[\frac{N}{i}]+1}^{N} b_j \right)}_{(S_2)}.$$

Mais on a déjà prouvé que :

$$S_2 \geq \frac{1}{2} N^{\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}},$$

alors que :

$$|S_1| \leq \sum_{i=1}^{N^{\frac{1}{2}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}}} O(N^\varepsilon) \leq O\left(N^{\varepsilon+\frac{1}{2}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}}\right).$$

On conclut car :

$$|\Sigma_5| \leq \sum_{j=1}^{N^{\frac{1}{2}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}}} O(N^\varepsilon) \leq O\left(N^{\varepsilon+\frac{1}{2}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}}\right).$$

Chapitre 2

Espaces de Hardy de séries de Dirichlet

2.1 Introduction

Rappelons que l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ $(0 < p < +\infty)$ est l'espace des fonctions holomorphes f dans $\mathbb{D}$ telles que :

$$\|f\|_p = \left(\sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p} < +\infty.$$

Une fonction f de $H^p(\mathbb{D})$ admet une limite radiale presque partout, c'est-à-dire que $f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ existe pour presque tout θ. En outre, $f^* \in L^p(\mathbb{T})$, et :

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f^*(e^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{1/p}.$$

Ces espaces de Hardy ont une très grande importance en analyse, et ont été très bien étudiés (voir les livres [17] et [22]). Le but de ce chapitre est de définir, puis d'étudier un analogue des espaces de Hardy, mais pour les séries de Dirichlet, ainsi que H. Hedenmalm, P. Lindqvist et K. Seip ont commencé à le faire, en introduisant dans [29] l'espace $\mathcal{H}$ des séries de Dirichlet de carré sommable :

$$\mathcal{H} = \left\{\sum_1^{+\infty} a_n n^{-s};\ \sum_1^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty\right\}.$$

Alors que la définition des espaces de Hardy classiques fait intervenir des intégrations sur des cercles, il semble naturel, compte tenu de l'existence des demi-plans de convergence, de procéder pour les séries de Dirichlet par intégration sur des droites. Pour $P \in \mathcal{P}$ (=ensemble des polynômes de Dirichlet), nous posons donc :

$$\|P\|_{\mathcal{H}^p} = \left(\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |P(it)|^p dt\right)^{1/p}.$$

La théorie des fonctions presque périodiques de Bohr ([8]) permet d'affirmer que $||.||_{\mathcal{H}^p}$ est une norme sur $\mathcal{P}$ $(1 \leq p < +\infty)$, et nous posons :

Définition 2.1 *Pour* $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{H}^p$ *est le complété de* $\mathcal{P}$ *pour* $||.||_{\mathcal{H}^p}$.

Malheureusement, cette définition, simple et naturelle, n'apporte pas beaucoup d'informations sur l'espace $\mathcal{H}^p$. Quel est l'ensemble de définition d'un élément de $\mathcal{H}^p$? Un élément de $\mathcal{H}^p$ est-il développable en série de Dirichlet? Répondre à ces deux questions n'est pas immédiat si l'on se contente de cette définition.

Nous allons dans la suite préférer une autre approche, qui donnera le même espace, mais aussi de nombreuses propriétés supplémentaires. L'identification de Bohr est le fondement de cette nouvelle approche, mais avant de la détailler, il nous faut procéder à quelques...

2.2 Rappels

2.2.1 Les espaces $H^p(\mathbb{T}^\infty)$

Par l'intermédiaire de $\mathcal{D}$, nous allons identifier les espaces $\mathcal{H}^p$ aux espaces de Hardy du polydisque $H^p(\mathbb{T}^\infty)$, tels qu'ils sont définis par B.Cole et T.W. Gamelin dans [15]. Rappelons les résultats principaux de cet article. Une fonction F de $L^p(\mathbb{T}^\infty)$, $1 \leq p \leq +\infty$ appartient à $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ si $\hat{F}(n) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}^{(\infty)} - \mathbb{N}^{(\infty)}$. $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ est aussi le complété, dans $L^p(\mathbb{T}^\infty)$, de l'ensemble des polynômes analytiques $(=\mathcal{D}(\mathcal{P}))$.

Nous utiliserons le résultat crucial suivant (théorème 8.1 de [15]) : si $1 \leq p < +\infty$, l'application d'évaluation au point $z \in \mathbb{D}^\infty$, définie initialement sur $\mathcal{D}(\mathcal{P})$, s'étend continûment à $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ si, et seulement si, $z \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell^2(\mathbb{N}) = \{z \in \mathbb{D}^\infty;\ \sum |z_i|^2 < +\infty\}$. Dans ce cas, pour tout $F \in H^p(\mathbb{T}^\infty)$, pour tout $z \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell^2(\mathbb{N})$,

$$|F(z)|^p \leq \frac{||F||^p_{H^p(\mathbb{T}^\infty)}}{\prod_{j=1}^{+\infty}(1-|z_j|^2)}. \tag{2.1}$$

Dans le cas particulier où $p = +\infty$, F définit cette fois une fonction analytique dans $\mathbb{D}^\infty \cap c_0(\mathbb{N})$, bornée par $||F||_{H^p(\mathbb{T}^\infty)}$.

Si P est un polynôme de Dirichlet, il existe donc au moins deux moyens de lui associer une "norme L^p" :

1. comme on l'a fait dans le premier paragraphe.
2. en considérant $||\mathcal{D}\mathcal{P}||_{H^p(\mathbb{T}^\infty)}$.

Pour relier ces deux normes, nous aurons besoin d'un peu de ...

2.2.2 Théorie ergodique

Pour des détails concernant les définitions et les résultats de ce paragraphe, nous renvoyons à [65] ou à [68].

Dans ce paragraphe, $(X,\mathcal{B},m)$ désigne un espace de probabilité, X étant un espace métrique compact, et $\mathcal{B}$ sa tribu borélienne.

Définition 2.2 *On dit que $T : X \to X$ est un endomorphisme de $(X,\mathcal{B},m)$ si, pour tout B de $\mathcal{B}$, $T^{-1}(B)$ appartient à $\mathcal{B}$. On dit que T préserve la mesure si, pour tout B de $\mathcal{B}$, $m(T^{-1}B) = m(B)$.*

Soit G un ensemble d'endomorphismes de $(X,\mathcal{B},m)$.

Définition 2.3
- *Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable est G–invariante si, pour tout T de G, $f \circ T = f$ presque partout.*
- *L'ensemble G est ergodique si, pour tout f de $L^2(X,m)$ G–invariante, $f = cste$ presque partout.*
- *L'ensemble G est uniquement ergodique (relativement à m) si m est la seule mesure de probabilité borélienne invariante par tout élément de G.*

Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on suppose donné T_t un endomorphisme de $(X,\mathcal{B},m)$.

Définition 2.4 *$(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un flot si :*
- *$\forall s,t \in \mathbb{R}$, $T_{s+t} = T_sT_t$.*
- *$\forall f : X \to \mathbb{R}$ mesurable, $(x,t) \mapsto f(T_tx)$ est mesurable sur $(X,\mathcal{B}) \times (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

Le flot (T_t) est ergodique (resp. uniquement ergodique) si $\{T_t;\ t \in \mathbb{R}\}$ est ergodique (resp. uniquement ergodique). Il préserve la mesure si, pour tout t, T_t préserve la mesure.

On a un analogue continu avec les flots du théorème de Birkhoff-Khintchine discret :

Théorème 2.1 *Soit $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un flot ergodique qui préserve la mesure sur $(X,\mathcal{B},m)$. Alors :*

1. *Si $g \in L^p(X)$,*
$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g(T_tx)dt \xrightarrow{T\to+\infty} \int_X g(u)dm(u),$$
pour presque tout x de X, et dans $L^p(X)$.
2. *Si $g : X \to \mathbb{R}$ est continue, et si (T_t) est uniquement ergodique, pour tout x de X,*
$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g(T_tx)dt \xrightarrow{T\to+\infty} \int_X g(u)dm(u).$$

Exemple : Étude d'un flot sur $\mathbb{T}^\infty$.

Soit $(\theta_1,\theta_2,\dots)$ une suite de réels. On considère le flot $\mathcal{T}_t(z) = (e^{2\pi it\theta_1}z_1,e^{2\pi it\theta_2}z_2,\dots)$, flot sur $\mathbb{T}^\infty$ qui préserve la mesure de Haar de $\mathbb{T}^\infty$. Le théorème suivant caractérise son ergodicité :

Théorème 2.2 *Le flot $(\mathcal{T}_t)$ est ergodique si, et seulement si, pour tout n de $\mathbb{N}$, la famille $(\theta_1,\dots,\theta_n)$ est une famille $\mathbb{Q}$–linéairement indépendante.*

(c'est-à-dire si $c_1\theta_1 + \cdots + c_n\theta_n = 0$, avec $c_i \in \mathbb{Q}$, implique $c_i = 0$).

Preuve : D'abord, si la famille $(\theta_1,\dots,\theta_n)$ est $\mathbb{Q}$–linéairement indépendante pour tout n, on considère $f \in L^2(\mathbb{T}^\infty)$ $(\mathcal{T}_t)$–invariante, qu'on développe en série de Fourier :
$$f(z) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}^{(\infty)}} a_n z_1^{n_1}\dots z_r^{n_r}.$$

Alors, $f \circ \mathcal{T}_t(z) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}^{(\infty)}} a_n e^{2\pi it(\theta_1 n_1+\cdots+\theta_r n_r)} z_1^{n_1}\dots z_r^{n_r}$. L'égalité presque partout des deux fonctions entraîne l'égalité de leurs coefficients de Fourier. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^{(\infty)}$, on a donc :

$$a_n = a_n e^{2\pi it(\theta_1 n_1+\cdots+\theta_r n_r)}.$$

Si $a_n \neq 0$, alors pour tout t de $\mathbb{R}$,

$$t(\theta_1 n_1 + \cdots + \theta_r n_r) \in \mathbb{Z},$$

ce qui impose que :

$$\theta_1 n_1 + \cdots + \theta_r n_r = 0.$$

$(\theta_1,\dots,\theta_r)$ étant une famille $\mathbb{Q}$−linéairement indépendante, ceci prouve que $n_1 = \cdots = n_r = 0$. En particulier, seul a_0 peut être non nul, et f est constante.

Réciproquement, si $c_1\theta_1 + \dots c_r\theta_r = 0$, avec $c_i \in \mathbb{Z}$, et les (c_i) non tous nuls, on considère $f(z) = z_1^{c_1}\dots z_r^{c_r}$. Alors f est $\mathcal{T}_t$−invariante, mais n'est pas constante. □

Corollaire 2.3 *Le flot $\mathcal{T}_t(z) = (2^{-it}z_1, 3^{-it}z_2, \dots, p_r^{-it}z_r, \dots)$ est un flot ergodique sur $\mathbb{T}^\infty$.*

Preuve : En effet, par le théorème fondamental de l'arithmétique, pour chaque r, la famille $(\log 2, \log 3, \dots, \log(p_r))$ est une famille $\mathbb{Q}$−linéairement indépendante. □

Pour appliquer le point 2. du théorème 2.1, il faut encore étudier l'unique ergodicité du flot $(\mathcal{T}_t)$. Or, puisque $(\mathcal{T}_t)$ est une rotation sur le groupe compact $\mathbb{T}^\infty$, $(\mathcal{T}_t)$ est uniquement ergodique si, et seulement si, pour tout z de $\mathbb{T}^\infty$, $\{\mathcal{T}_t z,\ t \in \mathbb{R}\}$ est dense dans $\mathbb{T}^\infty$ (voir [68] p.120 et p.162). Le théorème de Kronecker prouve alors que le flot $\mathcal{T}_t(z) = (2^{-it}z_1, 3^{-it}z_2, \dots, p_r^{-it}z_r, \dots)$ est uniquement ergodique.

Remarque : En considérant $\mathbb{T}^\infty$ comme le groupe dual de $\mathbb{Q}_+$, il existe une autre façon de décrire $\mathcal{T}_t$. Si $\chi \in \mathbb{T}^\infty$, $\mathcal{T}_t\chi$ est en effet l'unique caractère défini par :

$$(\mathcal{T}_t\chi)(n) = n^{-it}\chi(n).$$

2.2.3 Limites verticales de séries de Dirichlet

Soit f une série de Dirichlet absolument convergente dans un demi-plan $\mathbb{C}_\theta$. Les translatées verticales de f sont les fonctions f_τ définies par $f_\tau(s) = f(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Par le théorème de Montel, pour toute suite (τ_n) de réels, il existe une sous-suite $\left(\tau_{n(k)}\right)$ telle que $\left(f_{\tau_{n(k)}}\right)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}_\theta$ vers une fonction $\tilde{f}$: $\tilde{f}$ est une *limite verticale* de f. Il est possible de décrire toutes les limites verticales de f :

Lemme 2.1 *Soit $f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$ une série de Dirichlet (absolument convergente dans un demi-plan $\mathbb{C}_\theta$). Alors les limites verticales de f sont les fonctions f_χ de la forme :*

$$f_\chi(s) = \sum_1^{+\infty} a_n\chi(n)n^{-s},$$

χ étant un caractère sur $\mathbb{Q}_+$.

Preuve : Soit $\tilde{f}$ une telle limite verticale, associée à la suite de translations (τ_k). Quitte à extraire, on peut supposer que la suite d'éléments de $\mathbb{T}^\infty$ $\big((2^{i\tau_k},3^{i\tau_k},\dots,p_r^{i\tau_k},\dots)\big)$ converge vers un élément χ de $\mathbb{T}^\infty$. En particulier, par multiplicativité, pour tout entier n, $n^{i\tau_k}\to\chi(n)$. Maintenant, si s est dans le demi-plan d'absolue convergence de f, il est clair que $f_{\tau_k}(s)\to f_\chi(s)$, ce qui donne la première partie du lemme.

Réciproquement, si $\chi\in\mathbb{T}^\infty$, le théorème de Kronecker (théorème 1.2) assure qu'il existe une suite de réels (τ_k) telle que, pour tout premier p, $(p^{i\tau_k})$ converge vers $\chi(p)$, ce qui entraîne que pour tout entier n, $(n^{i\tau_k})$ converge vers $\chi(n)$. Comme précédemment, f_χ est la limite des f_{τ_k} sur le demi-plan d'absolue convergence de f. □

Ces fonctions f_χ apparaissent encore plus clairement lorsque l'on regarde les séries de Fourier $\mathcal{D}f$. Pour $\chi\in\mathbb{T}^\infty$, $z\in\mathbb{T}^\infty$, on définit $\chi.z$ l'image de z par la rotation d'angle χ dans $\mathbb{T}^\infty$, ie le point de $\mathbb{T}^\infty$ dont les coordonnées sont $(\chi(p_1)z_1,\dots,\chi(p_r)z_r,\dots)$. Si $f(s)=\sum_1^{+\infty}a_nn^{-s}$, $\mathcal{D}f(z)=\sum_1^{+\infty}a_nz_1^{\alpha_1}\dots z_r^{\alpha_r}$, alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}f_\chi(z) &= \sum_1^{+\infty}a_n\chi(n)z_1^{\alpha_1}\dots z_r^{\alpha_r}\\ &= \sum_1^{+\infty}\big(\chi(p_1)z_1\big)^{\alpha_1}\dots\big(\chi(p_r)z_r\big)^{\alpha_r}\\ &= \mathcal{D}f(\chi.z)\end{aligned}$$

$\mathcal{D}f_\chi$ est donc simplement l'image, par une rotation d'angle χ, de $\mathcal{D}f$. En particulier, si P est un polynôme de Dirichlet, $\|\mathcal{D}P_\chi\|_{H^p(\mathbb{T}^\infty)}=\|\mathcal{D}P\|_{H^p(\mathbb{T}^\infty)}$.

2.3 Les espaces $\mathcal{H}^p$ - L'espace $\mathcal{H}^\infty$

Nous allons appliquer les résultats précédents, en commençant par prouver le

Lemme 2.2 *Soit $P\in\mathcal{P}$. Alors :*

$$\|P\|_{\mathcal{H}^p}=\|\mathcal{D}P\|_{H^p(\mathbb{T}^\infty)}.$$

Preuve : On applique le théorème 2.1, au flot $\mathcal{T}_t(z)=(2^{-it}z_1,\dots)$, avec la fonction continue $g=|\mathcal{D}P|^p$, et le point $z_0=(1,1,\dots)$. On a donc :

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\mathcal{D}P(\mathcal{T}_tz_0)|^pdt=\int_{\mathbb{T}^\infty}|\mathcal{D}P(z)|^pdm(z).$$

Ceci est le résultat souhaité, car :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}P(\mathcal{T}_tz_0) &= \mathcal{D}P\big((2^{it},\dots,p_m^{it},\dots)\big)\\ &= P(it).\end{aligned}$$

□

Une conséquence immédiate du lemme est l'identification suivante :

Théorème 2.4 *$\mathcal{D}:\mathcal{P}\to H^p(\mathbb{T}^\infty)$ s'étend en un isomorphisme isométrique de $\mathcal{H}^p$ sur $H^p(\mathbb{T}^\infty)$.*

Preuve : En effet, $\mathcal{H}^p$ est le complété de $\mathcal{P}$ pour $\|.\|_{\mathcal{H}^p}$, tandis que $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ est le complété de $\mathcal{DP}$ pour $\|.\|_{H^p(\mathbb{T}^\infty)}$. □

Ainsi, un élément f de $\mathcal{H}^p$ est représentable par une série de Dirichlet $\sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$, avec $(a_n) \to 0$ (en particulier, la série de Dirichlet converge dans le demi-plan $\mathbb{C}_1$). En outre, $\|f\|_{\mathcal{H}^p} = \|\mathcal{D}f\|_{H^p(\mathbb{T}^\infty)}$. Le cas $p = 2$ a déjà été traité dans [29] :

Corollaire 2.5

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} = \left\{ f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n n^{-s};\ \|f\|_2^2 = \sum_{n\geq 1} |a_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Nous allons continuer l'étude, initiée pour $p = 2$ dans [29], des espaces $\mathcal{H}^p$. Une des difficultés par rapport au cas des $H^p(\mathbb{D})$ est l'absence de factorisation par les produits de Blaschke. Il ne suffit pas en général de résoudre le cas $p = 2$ pour en déduire le cas p quelconque. D'abord, nous recherchons le domaine de définition de f, et plus précisément les diverses abscisses de convergence de f.

Théorème 2.6 *Soit $f \in \mathcal{H}^p$. Alors $\sigma_b(f) \leq 1/2$, et si $\Re(\omega) > 1/2$,*

$$|f(\omega)|^p \leq \|f\|_{\mathcal{H}^p}^p \zeta\big(2\Re(\omega)\big).$$

Si δ_ω désigne la forme linéaire d'évaluation en ω, alors $\|\delta_\omega\| = \zeta\big(2\Re(\omega)\big)^{1/p}$.

Preuve : Pour $\omega \in \mathbb{C}_{1/2}$, posons $F = \mathcal{D}f$, et $z_\omega = (2^{-\omega}, 3^{-\omega}, \dots) \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell^2(\mathbb{N})$. F est dans $H^p(\mathbb{T}^\infty)$, et il est donc possible d'évaluer F en z_ω. L'application de (2.1) à f donne :

$$\begin{aligned} |f(\omega)|^p &\leq \prod_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 - |p_j^{-\omega}|^2} \right) \|f\|_{\mathcal{H}^p}^p \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2\Re(\omega)} \|f\|_{\mathcal{H}^p}^p \end{aligned}$$

(la dernière égalité provient de l'identité d'Euler). En particulier, f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}_{1/2}$, et bornée dans tout demi-plan $\mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$. On a donc $\sigma_b(f) \leq 1/2$ (et la série de f converge dans le demi-plan $\mathbb{C}_{1/2}$).

Montrons que la norme de l'évaluation en ω est supérieure ou égale à $\zeta\big(2\Re(\omega)\big)^{1/p}$. Il suffit de prouver que la norme de l'évaluation en z_ω dans $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ est de norme supérieure ou égale à $\zeta\big(2\Re(\omega)\big)^{1/p}$. Posons

$$F_\omega(z) = \prod_{k\geq 1} \left(\frac{1}{1 - \overline{p_k^{-\omega}} z_k} \right)^{2/p}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\|F_\omega\|_p &= \prod_{k\geq 1} \left\| \left(\frac{1}{1-\overline{p_k^{-\omega}}z} \right)^{2/p} \right\|_{H^p(\mathbb{D})} \\
&= \prod_{k\geq 1} \left(\frac{1}{1-|p_k|^{-2\Re(\omega)}} \right)^{1/p} \\
&= \zeta\left(2\Re(\omega)\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

tandis que $F_\omega(z_\omega) = \zeta\left(2\Re(\omega)\right)^{2/p}$. □

Remarque : Nous savons donc que si $f \in \mathcal{H}^p$, $\sigma_c(f) \leq 1/2$. Si $p=2$, en considérant $\sum_2^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}\log n} n^{-s}$, on voit que cette inégalité ne peut pas être améliorée. Au chapitre suivant (après le corollaire 3.5), nous remarquerons qu'il en est de même pour chaque p.

Remarque : Si $p \geq 2$, et si $f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^p$, on a $(a_n) \in \ell^2$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz prouve que $\sigma_a(f) \leq 1/2$. Si $f \in \mathcal{H}^p$, $1 < p < 2$, alors par le théorème de Riesz-Thorin, $(a_n) \in \ell^{p'}$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. L'inégalité de Hölder garantit dans ce cas que $\sigma_a(f) \leq 1/p$. Si $p=1$, puisque la suite (a_n) tend vers 0, on a $\sigma_a(f) \leq 1$.

Définition 2.5 *Pour $\omega \in \mathbb{C}_{1/2}$, nous posons :*

$$K_\omega(s) = \sum_1^{+\infty} n^{-\overline{\omega}} n^{-s} = \zeta(s+\overline{\omega}).$$

K_ω sera appelé noyau reproduisant en ω.

Si $1 < p < +\infty$, et p' est l'exposant conjugué de p, pour $f \in \mathcal{H}^p$, on a :

$$< f, K_\omega >= f(\omega).$$

En particulier, $\|K_\omega\|_{\mathcal{H}^{p'}} = \zeta\big(2\Re(\omega)\big)^{1/p}$.

Après avoir construit des espaces $\mathcal{H}^p$, p fini, il est tentant de construire un espace $\mathcal{H}^\infty$. Plusieurs approches semblent possibles :

- poursuivre la construction à partir de $H^\infty(\mathbb{T}^\infty)$ et de l'identification de Bohr.
- définir $\mathcal{H}^\infty$ par des propriétés fonctionnelles. Par exemple, nous dirons qu'une fonction m définie sur $\mathbb{C}_{1/2}$ est un multiplicateur de $\mathcal{H}^p$, $1 \leq p < +\infty$, si pour toute fonction f de $\mathcal{H}^p$, $mf \in \mathcal{H}^p$. Avec une définition adaptée, il est bien connu que $H^\infty(\mathbb{D})$ est l'ensemble des multiplicateurs de $H^p(\mathbb{D})$. Il est donc raisonnable de définir $\mathcal{H}^\infty$ comme l'ensemble des multiplicateurs de $\mathcal{H}^p$.

Ces approches coïncident :

Définition 2.6 *Soit $\mathcal{H}^\infty$ le sous-espace de $\mathcal{H}^2$ tel que $\mathcal{D}(\mathcal{H}^\infty) = H^\infty(\mathbb{T}^\infty)$, muni de la norme induite par $H^\infty(\mathbb{T}^\infty)$.*

Théorème 2.7 *Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. *$\mathcal{H}^\infty$ est l'ensemble des fonctions analytiques bornées dans $\mathbb{C}_+$, représentables par une série de Dirichlet convergente dans un demi-plan.*
2. *$\mathcal{H}^\infty$ est l'ensemble des multiplicateurs de $\mathcal{H}^p$.*

Preuve : Nous commençons par le simple :

Lemme 2.3 *Soit $f \in \mathcal{H}^p$, $g \in \mathcal{H}^q$, $1 \leq p,q < +\infty$, et soit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Alors on a l'égalité :*

$$\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)\mathcal{D}(g)$$

en tant que fonctions de $L^r(\mathbb{T}^\infty)$.

Preuve : Par un calcul direct, l'égalité est vérifiée si par exemple f est un polynôme de Dirichlet. Le cas général se déduit en approchant f par de tels polynômes. □

Nous prouvons le thérème 2.7 en 4 étapes :

Étape 1 : Si $m \in \mathcal{H}^\infty$, m est une fonction analytique bornée dans $\mathbb{C}_+$, représentable par une série de Dirichlet convergente dans un demi-plan.

En effet, si $m \in \mathcal{H}^\infty$, $m \in \mathcal{H}^2$, et est donc représentable par une série de Dirichlet (absolument) convergente dans le demi-plan $\mathbb{C}_{1/2}$. D'autre part, si $s \in \mathbb{C}_+$, on note $z_s = (2^{-s}, 3^{-s}, \dots, p_m^{-s}, \dots) \in \mathbb{D}^\infty \cap c_0(\mathbb{N})$. L'égalité $m(s) = \mathcal{D}m(z_s)$ est satisfaite pour $s \in \mathbb{C}_{1/2}$, et permet, puisque $\mathcal{D}m \in H^\infty(\mathbb{T}^\infty)$, de prolonger m en une fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}_+$.

Étape 2 : Si m est une série de Dirichlet bornée sur $\mathbb{C}_+$, m est un multiplicateur de $\mathcal{H}^2$.

Cette étape a déjà été prouvée dans [29]. Afin de rester complet, nous esquissons la preuve. Nous rappelons le théorème suivant de F.Carlson, qui étend l'expression de la norme $\mathcal{H}^2$ d'un polynôme de Dirichlet telle qu'elle est décrite au paragraphe 2.1 pour des séries de Dirichlet plus générales :

Lemme 2.4 *Soit $f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$ une série de Dirichlet convergente et bornée sur $\mathbb{C}_+$. Alors $f \in \mathcal{H}^2$, et :*

$$\|f\|_{\mathcal{H}^2} = \lim_{\sigma \to 0^+} \left(\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Soit donc m une série de Dirichlet bornée sur $\mathbb{C}_+$, et f un polynôme de Dirichlet. Alors par le lemme précédent, $mf \in \mathcal{H}^2$, et :

$$\|mf\|_2 \leq \|m\|_\infty \|f\|_2.$$

Par densité des polynômes, cette inégalité s'étend à tout élément f de $\mathcal{H}^2$, et m est un multiplicateur de $\mathcal{H}^2$.

Étape 3 : Si m est un multiplicateur de $\mathcal{H}^p$, $1 \leq p < +\infty$, alors $m \in \mathcal{H}^\infty$.

Puisque $1 \in \mathcal{H}^p$, $m \in \mathcal{H}^p$ et $\|m\|_p \leq \|m\|$, où $\|m\|$ représente la norme de m en tant que multiplicateur de $\mathcal{H}^p$. Par récurrence, $m^j \in \mathcal{H}^p$, et $\|m^j\|_p \leq \|m\|^j$. D'après le lemme 2.3,

$$\mathcal{D}\left(m^j\right) = [\mathcal{D}(m)]^j.$$

En particulier,

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{T}^\infty} |\mathcal{D}m(z)|^{pj} dm(z)\right)^{1/pj} &= \left(\int_{\mathbb{T}^\infty} |\mathcal{D}(m^j)(z)|^p\right)^{1/pj} \\ &= \|m^j\|_{\mathcal{H}^p}^{1/j} \\ &\leq \|m\|.\end{aligned}$$

Faisant tendre j vers $+\infty$, ceci prouve que $\mathcal{D}m \in H^\infty(\mathbb{T}^\infty)$, ce qui revient à dire que $m \in \mathcal{H}^\infty$.

Étape 4 : Si $m \in \mathcal{H}^\infty$, m est un multiplicateur de $\mathcal{H}^p$.

Cette étape est la plus facile. Si $m \in \mathcal{H}^\infty$, $\mathcal{D}m \in H^\infty(\mathbb{T}^\infty)$, et pour tout f de $\mathcal{H}^p$, $\mathcal{D}(mf) = \mathcal{D}(m)\mathcal{D}(f) \in H^p(\mathbb{T}^\infty)$.

□

Remarque : La preuve précédente montre en outre que, si $m \in \mathcal{H}^\infty$, la norme de m $(= \|\mathcal{D}m\|_{H^\infty(\mathbb{T}^\infty)})$ est aussi la norme de m en tant que multiplicateur de $\mathcal{H}^p$, et la norme infini de m en tant que fonction bornée sur $\mathbb{C}_+$.

Remarque : Le point 1 du théorème et le théorème de Bohr entraînent en particulier : si $f \in \mathcal{H}^\infty$, on a $\sigma_b(f) \leq 0$.

Remarque : J. McCarthy a donné dans [48] une autre preuve du fait que l'ensemble des multiplicateurs de $\mathcal{H}^2$ est $\mathcal{H}^\infty$ sans utiliser le point de vue de Bohr.

Une chose est particulièrement frappante en cette fin de paragraphe. Alors qu'une fonction de $\mathcal{H}^p$, p fini, est en général définie sur $\mathbb{C}_{1/2}$, une fonction de $\mathcal{H}^\infty$ est définie sur $\mathbb{C}_+$. Nous retrouverons à de nombreuses reprises cette dualité entre $\mathbb{C}_+$ et $\mathbb{C}_{1/2}$. A bien des égards, le demi-plan $\mathbb{C}_{1/2}$ est insuffisant pour étudier $\mathcal{H}^p$, et nous verrons comment franchir cette frontière.

2.4 Propriétés des espaces $\mathcal{H}^p$

Nous étudions les propriétés individuelles des éléments de $\mathcal{H}^p$, ainsi que leurs propriétés collectives. Nous avons déjà vu que si $f \in \mathcal{H}^p$, f est définie sur $\mathbb{C}_{1/2}$. Dans le cas où $p \geq 2$, il est possible d'être plus précis. Nous noterons $H^p_\infty(\mathbb{C}_{1/2})$ l'espace des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}_{1/2}$ localement uniformément intégrables. Plus précisément, une fonction g appartient à $H^p_\infty(\mathbb{C}_{1/2})$ si :

$$\|g\|^p_{H^p_\infty(\mathbb{C}_{1/2})} = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \sup_{\sigma>1/2} \int_\theta^{\theta+1} |g(\sigma+it)|^p dt < +\infty.$$

Théorème 2.8 *Si $p \geq 2$, $\mathcal{H}^p$ est contenu dans $H^p_\infty(\mathbb{C}_{1/2})$, et l'inclusion est continue.*
Preuve : Nous allons utiliser le lemme suivant, qui va nous permettre d'interpoler entre les espaces $\mathcal{H}^p$.
Lemme 2.5 *Si $1 < p < +\infty$, $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ est un sous-espace complémenté de $L^p(\mathbb{T}^\infty)$.*
Preuve : Ce résultat est bien connu pour $H^p(\mathbb{T})$ et $L^p(\mathbb{T})$. La preuve que nous allons faire s'inspire de ce cas. Nous notons P la projection de $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ sur $L^p(\mathbb{T}^\infty)$:

$$P\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^{(\infty)}} a_n z^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^{(\infty)}} a_n z^n.$$

Nous devons prouver que $\|P\|_{L^p\to H^p} \leq C(p)$. Si $p = 2$, il s'agit simplement de l'identité de Parseval. Pour $p = 2^k$, $k \geq 1$, on prouve le lemme par récurrence. En effet, si $f \in L^{2^k}(\mathbb{T}^\infty)$, alors $f^2 \in L^{2^{k-1}}(\mathbb{T}^\infty)$, et donc $P(f^2) \in H^{2^{k-1}}(\mathbb{T}^\infty)$. Mais on a $P(f^2) = P(f)P(f)$ en tant que fonctions de $L^{2^{k-1}}(\mathbb{T}^\infty)$, et donc $P(f) \in H^{2^k}(\mathbb{T}^\infty)$.

Par interpolation, le lemme est prouvé pour $p \geq 2$. Si au contraire, $1 < p < 2$, et $f \in L^p(\mathbb{T}^\infty)$, alors $g \in L^{p'}(\mathbb{T}^\infty)$, où p' est l'exposant conjugué de p. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\|Pf\|_{H^p(\mathbb{T}^\infty)} &= \sup_{g\in L^{p'},\|g\|_{p'}=1} \int_{\mathbb{T}^\infty} (Pf)\bar{g}dm \\
&= \sup_{g\in L^{p'},\|g\|_{p'}=1} \int_{\mathbb{T}^\infty} fP(\bar{g})dm \\
&\leq C(p')\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^\infty)}.
\end{aligned}$$

□

Prouvons alors le théorème 2.8. Si $p = 2$, il s'agit du théorème 4.11 de [29] (c'est une conséquence d'une inégalité de Hilbert généralisée). Pour $p = 2^k$, on prouve là aussi le théorème par récurrence. En effet, si $f \in \mathcal{H}^{2^k}$, $f^2 \in \mathcal{H}^{2^{k-1}}$, et par hypothèse de récurrence,

$$\|f^2\|_{H^{2^{k-1}}_\infty(\mathbb{C}_{1/2})} < +\infty,$$

ce qui entraîne :

$$\|f\|_{H^p_\infty(\mathbb{C}_{1/2})} < +\infty.$$

Grâce au lemme 2.5, nous obtenons le théorème pour $p \geq 2$ par interpolation. □

Question : Est-ce que ce théorème reste vrai si $1 \leq p < 2$? Une réponse affirmative à cette question serait très intéressante pour l'étude des opérateurs de composition dans ce cas (voir théorème 4.1).

Rappelons qu'une forme linéaire multiplicative sur $\mathcal{H}^p$ est une forme linéaire (continue) l sur $\mathcal{H}^p$ qui satisfait $l(fg) = l(f)l(g)$ chaque fois que f,g et $fg \in \mathcal{H}^p$. Pour de nombreux espaces de fonctions analytiques, comme $H^p(\mathbb{D})$, les formes linéaires multiplicatives sont les évaluations en les points du domaine de définition. Pour $\mathcal{H}^p$, ce ne sont pas les seules, en raison de l'espace $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ caché derrière $\mathcal{H}^p$.

Théorème 2.9 *Soit $1 \leq p < +\infty$. l définit une forme linéaire multiplicative sur $\mathcal{H}^p$ si et seulement s'il existe une suite $\omega = (\omega_1,\omega_2,\dots)$ de $\mathbb{D}^\infty \cap \ell^2$ telle que, pour tout $f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$ de $\mathcal{H}^p$:*

$$l(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \omega_1^{\alpha_1} \dots \omega_r^{\alpha_r} \qquad (n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}).$$

Preuve : Par conjugaison par $\mathcal{D}$, il suffit d'étudier les formes linéaires multiplicatives sur $H^p(\mathbb{T}^\infty)$. Soit L une telle forme linéaire multiplicative, non identiquement nulle (en particulier, $L(1) \neq 0$). On pose $\omega_k = L(z_k)$, et $\omega = (\omega_1,\omega_2,\dots)$. Nécessairement, $|\omega_k| < 1$, sinon $(z_k - \omega_k)^q$ serait inversible dans $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ pour un bon choix de q. Mais alors,

$$L\left((z_k - \omega_k)^q \frac{1}{(z_k - \omega_k)^q}\right) = \left[L(z_k - \omega_k)\right]^q L\left(\frac{1}{(z_k - \omega_k)^q}\right) = L(1) \neq 0,$$

et en particulier $L(z_k - \omega_k)$ serait non nul, ce qui contredit la définition de ω_k!

Donc on a $|\omega_k| < 1$. Maintenant, si $P(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}^{(\infty)}} a_n z^n$ est un polynôme, par linéarité et par multiplicativité, $L(P) = P(\omega)$. Par densité des polynômes, et par continuité de L, L étend continûment l'évaluation en ω à tout $H^p(\mathbb{T}^\infty)$. D'après les rappels du paragraphe 2.2.1, ceci implique que $\omega \in \ell^2$, et que L est l'évaluation au point ω.

Réciproquement, nous avons déjà rappelé au paragraphe 2.2.1 que l'évaluation en un point de $\mathbb{D}^\infty \cap \ell^2$ fournit une forme linéaire multiplicative sur $H^p(\mathbb{T}^\infty)$. □

2.5 Propriétés presque sûres des fonctions de $\mathcal{H}^p$

Nous nous attachons ici aux propriétés des séries de Dirichlet $f_\chi(s) = \sum_1^\infty a_n \chi(n) n^{-s}$, vérifiées pour presque tout caractère $\chi \in \mathbb{T}^\infty$. Rappelons que $f \in \mathcal{H}^p \iff f_\chi \in \mathcal{H}^p$, avec $\|f\|_p = \|f_\chi\|_p$, le passage de f à f_χ représentant une rotation dans $H^p(\mathbb{T}^\infty)$. D'abord, nous commençons par une caractérisation des éléments de $\mathcal{H}^p$. En passant, nous obtiendrons (lemme 2.6) un autre moyen de calculer la norme d'un élément de $\mathcal{H}^p$. Ceci ne va pas avoir de conséquences pratiques pour le calcul effectif de cette norme, mais va en revanche être un outil théorique très puissant dans l'étude des opérateurs de composition sur $\mathcal{H}^p$.

Nous noterons $\varphi_1(z) = (1+z)/(1-z)$ la transformation de Cayley, application conforme qui envoie $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{C}_+$. λ_i est la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ définie par $d\lambda_i(t) = \pi^{-1}(1+t^2)^{-1}dt$ (λ_i est l'image de la mesure de Haar sur $\mathbb{T}$ par φ_1). Nous dirons qu'une fonction f est dans $H_i^p(\mathbb{C}_+)$ si $f \circ \varphi_1$ est dans $H^p(\mathbb{D})$, et dans ce cas :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(it)|^p d\lambda_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f \circ \varphi_1(e^{i\theta})|^p d\theta.$$

Théorème 2.10 *Soit $1 \leq p < +\infty$, et $f \in \mathcal{H}^p$. Pour $\chi \in \mathbb{T}^\infty$ et $t \in \mathbb{R}$, définissons : $g_\chi(it) = \mathcal{D}f(\mathcal{T}_t\chi)$. Pour presque tout χ, nous avons :*

1. *$g_\chi \in H_i^p(\mathbb{C}_+)$, et g_χ est une extension de f_χ à $\mathbb{C}_+$.*

2. Il existe $l \geq 0$ tel que, si on pose :

$$F_T(\chi) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |g_\chi(it)|^p dt,$$

alors $\lim_{T\to+\infty} \|F_T(\chi) - l\|_1 = 0$. *Dans ce cas,* $l = \|f\|_{\mathcal{H}^p}^p$.

Réciproquement, si f est une série de Dirichlet qui vérifie 1. et 2., alors $f \in \mathcal{H}^p$.

Remarque : Ce théorème généralise le théorème 4.1 de [29].

Preuve : Par le théorème 2.1, pour presque tout χ, g_χ définit une fonction qui est localement dans $L^p(i\mathbb{R})$, et satisfait :

$$\lim_{T\to+\infty} \left\| \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |g_\chi(it)|^p dt - \int_{\mathbb{T}^\infty} |\mathcal{D}f(z)|^p dz \right\|_{L^1(\mathbb{T}^\infty)} = 0.$$

Ceci est exactement 2. Pour prouver 1., nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 2.6 *Soit ω une mesure borélienne finie sur $\mathbb{R}$. Alors :*

$$\int_{\mathbb{T}^\infty}\int_{\mathbb{R}} |g_\chi(it)|^p d\omega(t) dm(\chi) = \omega(\mathbb{R})\|f\|_{\mathcal{H}^p}^p.$$

En particulier, pour presque tout χ,

$$\int_{\mathbb{R}} |g_\chi(it)|^p d\omega(t) < +\infty.$$

Preuve : Puisque le flot $(\mathcal{T}_t)$ représente simplement une rotation sur $\mathbb{T}^\infty$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^\infty} |g_\chi(it)|^p dm(\chi) &= \int_{\mathbb{T}^\infty} |\mathcal{D}f(\mathcal{T}_t(\chi))|^p dm(\chi) \\ &= \|f\|_{\mathcal{H}^p}^p. \end{aligned}$$

Une application du théorème de Fubini donne le lemme. □

En particulier, pour presque tout χ, $g_\chi \in L^p(\lambda_i)$. Pour prouver que $g_\chi \in H_i^p(\mathbb{C}_+)$, il suffit de prouver que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-it}{1+it}\right)^n g_\chi(it) d\lambda_i(t) = 0 \text{ si } n = 1,2,\dots.$$

La preuve est identique à celle donnée dans [29]. On pose :

$$G(\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-it}{1+it}\right)^n g_\chi(it) d\lambda_i(t), \quad \text{où } n \geq 1.$$

Il suffit de prouver que les coefficients de Fourier de $G(\chi)$ sont nuls. Mais, si $q \in \mathbb{Q}$,

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} \overline{\chi}(q) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-it}{1+it}\right)^n g_\chi(it) d\lambda_i(t) dm(\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-it}{1+it}\right)^n \int_{\mathbb{T}^\infty} \overline{\chi}(q) g_\chi(it) dm(\chi) d\lambda_i.$$

Maintenant,

- Si $q \notin \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{T}^\infty} \overline{\chi}(q) g_\chi(it) dm(\chi) = 0$ car $g_\chi(it) = \mathcal{D}f(\mathcal{T}_t\chi) \in H^p(\mathbb{T}^\infty)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- Si $q \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{T}^\infty} \overline{\chi}(q) g_\chi(it) dm(\chi) = a_q q^{-it}$ (ce sont les coefficients de Fourier de $\mathcal{D}f(\mathcal{T}_t\chi)$). Mais comme q est entier, $t \mapsto q^{-it} \in H_i^p(\mathbb{C}_+)$, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-it}{1+it}\right)^n q^{-it} d\lambda_i(t) = 0.$$

En particulier, pour presque tout χ, $G(\chi) = 0$, et donc pour presque tout χ, $g_\chi \in H_i^p(\mathbb{C}_+)$.

Il reste à vérifier que, pour presque tout χ, g_χ prolonge f_χ, c'est-à-dire que pour tout s de $\mathbb{C}_{1/2}$, $f_\chi(s) = g_\chi(s)$. Si $f \in \mathcal{P}$, le résultat est évident. De façon générale, si f est dans $\mathcal{H}^p$, il existe une suite (P_n) de $\mathcal{P}$ avec $P_n \to f$ dans $\mathcal{H}^p$. Mais :

- $P_{n,\chi} \to f_\chi$ dans $\mathcal{H}^p$ pour tout $\chi \in \mathcal{H}^p$ (l'indice χ signifie simplement qu'on effectue une rotation dans $H^p(\mathbb{T}^\infty)$).
- D'après le lemme 2.6,

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} \|P_{n,\chi} - g_\chi\|_{H_i^p(\mathbb{C}_+)}^p dm(\chi) = \|P_n - f\|_{\mathcal{H}^p}^p.$$

Par conséquent, il existe une sous-suite (n_k) telle que, pour presque tout χ de $\mathbb{T}^\infty$, $P_{n_k,\chi}$ converge vers g_χ dans $H_i^p(\mathbb{C}_+)$.

Finalement, on conclut car les évaluations au point s, où $\Re(s) > 1/2$, sont continues sur $\mathcal{H}^p$ et sur $H_i^p(\mathbb{C}_+)$.

Réciproquement, si nous avons 2., en appliquant le théorème de Fubini, il vient :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \int_{\mathbb{T}^\infty} |\mathcal{D}f(\mathcal{T}_t\chi)|^p dm(\chi) dt = l^p.$$

Mais le flot $\mathcal{T}_t$ est une rotation sur $\mathbb{T}^\infty$, et pour tout t de $\mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} |\mathcal{D}f(\mathcal{T}_t\chi)|^p dm(\chi) = \|\mathcal{D}f\|_{\mathcal{H}^p}^p,$$

ce qui implique $\|\mathcal{D}f\|_{\mathcal{H}^p} = l < +\infty$. □

Dans le reste de cette thèse, nous noterons simplement f_χ l'extension désignée par g_χ dans le théorème précédent. Cette extension est en fait presque toujours très simple, puisque la série de Dirichlet f_χ converge elle-même dans $\mathbb{C}_+$ pour presque tout χ :

Théorème 2.11 *Soit* $1 \leq p < +\infty$, *et* $f \in \mathcal{H}^p$. *Pour presque tout* χ, f_χ *est une série de Dirichlet qui converge dans* $\mathbb{C}_+$.

Preuve : Le résultat est prouvé pour $p=2$ dans [30]. En fait, en utilisant un théorème de Menchoff (voir [52, p. 42]), nous pouvons donner une preuve plus simple :

Lemme 2.7 *Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace de probabilité, et (ϕ_n) une suite orthonormale de $L^2(X)$. Alors :*

$$\sum_1^{+\infty} |c_n|^2 \log^2 n < +\infty \Longrightarrow \sum_1^{+\infty} c_n\phi_n \quad \textit{converge } \mu\textit{-presque-partout.}$$

Si $f(s)=\sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$, avec $\sum_{n\geq 1}|a_n|^2<+\infty$, et si $s=\sigma+it$, $\sigma>0$, nous appliquons le théorème de Menchoff à $c_n=a_n n^{-\sigma-it}$ et $\phi_n(\chi)=\chi(n)$: $\sum_1^{+\infty} a_n\chi(n)n^{-s}$ converge pour presque tout χ de $\mathbb{T}^\infty$. Le résultat est donc prouvé si $p=2$, et par conséquent si $p>2$. Prouvons-le si $1<p<2$. Pour cela, fixons $1<r<p$, et $\sigma>0$. On définit $F_\chi(\lambda)=\sum_{\log n\leq\lambda} a_n\chi(n)$. D'après les formules rappelées au paragraphe 1.1, il suffit de prouver que pour presque tout χ, $F_\chi(\log N)=O(N^{-\sigma})$. On considère la fonction g_χ :

$$g_\chi(t)=\frac{f_\chi(\sigma+it)}{\sigma+it}. \tag{2.2}$$

D'après le lemme 2.6, puisque $d\omega=\dfrac{dt}{|\sigma+it|^r}$ est une mesure finie sur $\mathbb{R}$, et puisque $f\in\mathcal{H}^p$ entraîne que $f\in\mathcal{H}^r$, alors pour presque tout $\chi\in\mathbb{T}^\infty$, on a $g_\chi\in L^r(\mathbb{R})$. En outre, si (f_N) désigne la suite des sommes partielles de f, et si $(g_{N,\chi})$ est la suite associée par la formule (2.2), alors pour presque tout χ, $g_{N,\chi}\to g_\chi$ dans $L^r(\mathbb{R})$. Soit χ appartenant au sous-ensemble de $\mathbb{T}^\infty$ de mesure 1 tel que $g_\chi\in L^r(\mathbb{R})$. Nous avons alors le :

Lemme 2.8 *g_χ est la transformée de Fourier inverse de $\lambda\mapsto e^{-\lambda\sigma}F_\chi(\lambda)$.*

Preuve : Si f appartient à $\mathcal{P}$, il suffit de faire un calcul direct (remarquons que toutes les sommes sont en fait finies) :

$$\begin{aligned}
\widehat{e^{-\lambda\sigma}F_\chi}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\sigma}\sum_{\log n\leq x} a_n\chi(n)e^{-ixt}dx\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\log n\leq\log k}\int_{\log k}^{\log(k+1)} a_n\chi(n)e^{-x(\sigma+it)}dx\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n\leq k} a_n\chi(n)\left(k^{-(\sigma+it)}-(k+1)^{-(\sigma+it)}\right)\frac{1}{\sigma+it}\\
&= \frac{1}{\sigma+it}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\chi(n)n^{-(\sigma+it)}\\
&= g_\chi(t).
\end{aligned}$$

Dans le cas général, on approche $f\in\mathcal{H}^p$ par ses sommes partielles (f_N), de sorte que $g_{N,\chi}\to g_\chi$ dans $L^r(\mathbb{R})$, et on prend la transformée de Fourier inverse. □

Or, $g_\chi \in L^r(\mathbb{R})$, et le théorème de Hausdorff-Young entraîne que $\lambda \mapsto e^{-\lambda\sigma}F_\chi(\lambda)$ est dans $L^{r'}(\mathbb{R})$ (r' est l'exposant conjugué de r). En utilisant la minoration

$$\int_{\log n}^{\log(n+1)} |F_\chi(x)|^{r'} e^{-r'\sigma x}dx \geq |F_\chi(\log n)|^{r'} e^{-r'\sigma \log(n+1)} \left(\log(n+1) - \log(n)\right),$$

nous transformons cette information en :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-r'\sigma \log n}|F_\chi(\log n)|^{r'} \left(\log(n+1) - \log(n)\right) < +\infty.$$

En particulier, $N^{-r'\sigma}|F_\chi(\log N)|^{r'} (\log(N+1) - \log(N)) = O(1)$, ce qui implique que $F_\chi(\log N) = O(N^{\sigma+1/r'})$. En faisant tendre r vers 1, ou, ce qui revient au même, r' vers $+\infty$, on obtient :

$$F_\chi(\log N) = O(N^\sigma),$$

pour presque tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$, et pour tout $\sigma > 0$.

Il reste à étudier le cas $p = 1$. Pour $\varepsilon > 0$, nous définissons $T_\varepsilon \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-\varepsilon} n^{-s}$. D'après le corollaire 3.3 (voir plus loin), pour tout $\varepsilon > 0$, $T_\varepsilon(\mathcal{H}^1) \subset \mathcal{H}^q$ pour un $q > 1$ (q dépend de ε). En appliquant le résultat à $\mathcal{H}^q$, si $\sum_1^{+\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^1$, $\sum_1^{+\infty} a_n \chi(n) n^{-\varepsilon} n^{-s}$ converge dans $\mathbb{C}_+$ pour presque tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$. Par conséquent, le théorème 2.11 reste vrai même si $p = 1$. □

Remarque : Pour $p = 2$, le théorème 2.11 a été amélioré par H. Hedenmalm and E.Saksman dans [28] : ils prouvent que f_χ converge dans $\overline{\mathbb{C}_+}$ presque sûrement.

2.6 Problèmes de convergence au bord

Un célèbre théorème de Carleson affirme que, si $f \in L^2(\mathbb{T})$, sa série de Fourier converge presque partout sur $\mathbb{T}$. En 1999 (voir [28]), H.Hedenmalm et E.Saksman ont prouvé un résultat analogue pour les séries de Dirichlet :

Théorème 2.12 *Si $\sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$ est un élément de $\mathcal{H}^2$, alors $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-1/2+it}$ converge pour presque tout t de $\mathbb{R}$.*

On pourra trouver dans [38] une démonstration très rapide de ce résultat, en utilisant une version du théorème de Carleson pour les intégrales. J-P.Kahane et Y.Katznelson ([37],[35]) ont étudié les ensemble de divergence des séries de Fourier de fonctions de $L^2(\mathbb{T})$ ou $C(\mathbb{T})$, prouvant (avant la réciproque de L.Carleson) que tout ensemble de mesure nulle sur $\mathbb{T}$ est ensemble de divergence pour $L^2(\mathbb{T})$ ou $C(\mathbb{T})$. Nous réalisons le même travail dans le cadre des séries de Dirichlet, en commençant par introduire la

Définition 2.7 *Soit E une partie de $\mathbb{R}$. E est un ensemble de divergence pour $\mathcal{H}^2$ s'il existe une série de Dirichlet $\sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$ de $\mathcal{H}^2$ telle que $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-1/2+it}$ diverge pour tout t de E.*

Théorème 2.13 *Tout ensemble de mesure nulle est un ensemble de divergence pour* $\mathcal{H}^2$.

Preuve : Nous rappelons un lemme classique :

Lemme 2.9 *Soit E un ensemble de mesure nulle. Alors il existe des intervalles $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$, de longueur respective l_k, tels que :*

a) $\sum_{k\geq 1} l_k < +\infty$.

b) Tout élément de E appartient à une infinité de I_k.

Preuve : Fixons $m \in \mathbb{N}$. Comme E est de mesure nulle, il existe des intervalles $(J_{m,j})_{j\in\mathbb{N}}$, de longueur $l_{m,j}$, tels que :

- $\sum_{j\geq 1} l_{m,j} \leq \frac{1}{2^m}$.
- $E \subset \bigcup_j J_{m,j}$.

Il suffit de prendre pour les $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ les $(J_{m,j})_{j,m\in\mathbb{N}}$ renumérotés de façon appropriée. □

Soit donc $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble de mesure nulle, qu'on recouvre une infinité de fois par des intervalles $I_k = [t_k - l_k, t_k + l_k]$ comme dans le lemme. On définit une suite d'entiers (n_k) par :

- $n_1 = 1$.
- $n_{k+1} = \left[n_k \exp\left(\frac{1}{3l_k}\right)\right] + 1$

($[x]$ représente la partie entière de x). Pour $n \in \{n_k, \ldots, n_{k+1} - 1\}$, on pose $\alpha_n = \frac{l_k}{n^{1/2}}$. Alors la suite (α_n) appartient à ℓ^2. En effet :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} |\alpha_n|^2 &= \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{l_k^2}{n}\right)\\ &\leq C_1 \sum_{k\geq 1} l_k^2 \log\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)\\ &\leq C_2 \sum_{k\geq 1} l_k < +\infty.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \alpha_n n^{-1/2} = l_k \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{n} \geq l_k \log\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \geq \frac{1}{3}.$$

Il existe donc des complexes (θ_n) de module 1 tels que, pour chaque k,

$$\left|\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \theta_n \alpha_n n^{-1/2+it_k}\right| \geq \frac{1}{3}.$$

Posons alors $a_n = \theta_n \alpha_n$, et montrons que pour tout t de E, la série $\sum_1^{+\infty} a_n n^{-1/2+it}$ diverge. Comme chaque t de E appartient à une infinité de I_k, il suffit de prouver que, pour k assez grand, pour tout t de I_k, alors

$$\left| \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_n n^{-1/2+it} \right| \geq \frac{1}{12}.$$

A cet effet, posons $D_k(t) = \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_n n^{-1/2+it}$ et $C_k(t) = n_k^{-it} D_k(t)$. Alors, pour k assez grand, si $\varepsilon > 0$ est fixé tel que $\frac{(1+\varepsilon)^2}{9} \leq \frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned}
|C_k'(t)| &\leq \sum_{n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{l_k}{n^{1/2}} \log\left(\frac{n}{n_k}\right) \frac{1}{n^{1/2}} \\
&\leq l_k \log\left(\frac{n_{k+1}-1}{n_k}\right) \left(\sum_{n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{n}\right) \\
&\leq (1+\varepsilon) l_k \log^2\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \\
&\leq (1+\varepsilon)^2 l_k \frac{1}{9 l_k^2} \leq \frac{1}{4 l_k}.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
|D_k(t)| &\geq |C_k(t)| \geq |C_k(t_k)| - |t - t_k| \|C_k'\|_\infty \\
&\geq \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

□

Une autre question naturelle, posée par H. Hedenmalm dans [27], est de savoir s'il existe un analogue du théorème 2.12 pour $\mathcal{H}^\infty$. En d'autres termes, est-ce que, si $\sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$ est dans $\mathcal{H}^\infty$, $\sum_{n\geq 1} a_n n^{it}$ converge pour presque tout t de $\mathbb{R}$ (rappelons que les éléments de $\mathcal{H}^\infty$ sont définis sur $\mathbb{C}_+$, et que la frontière de $\mathbb{C}_+$ est donc $i\mathbb{R}$)? Une construction, modifiant celle réalisée par Lick dans [43], va montrer que ce n'est pas le cas :

Théorème 2.14 *Il existe une série de Dirichlet $\sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$ de $\mathcal{H}^\infty$ telle que, pour tout t de $\mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 1} a_n n^{it}$ diverge.*

Preuve : Le lemme bien connu suivant (voir [2, vol. 1, page 90]) est crucial :

Lemme 2.10 *Il existe une constante absolue A telle que, pour tout t de $\mathbb{R}$, pour tout $N \geq 1$, alors :*

$$\left| \sum_1^N \frac{\sin nt}{n} \right| \leq A.$$

Nous considérons 3 suites (h_k), (H_k), et (n_k) qui vérifient les propriétes suivantes :

1. (h_k) est une suite strictement croissante d'entiers telle que $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\log h_k}$ converge (on peut prendre par exemple $h_k = 2^{k^2}$).
2. (H_k) est une suite de nombres réels telle que :

   a) $\exp\left(\frac{1}{H_k}\right)$ est rationnel.

   b) $H_k \geq 4kh_k$.

   Il est clair qu'une telle suite existe.
3. (n_k) est une suite d'entiers telle que :

   a) $n_k \exp\left(\frac{l}{H_k}\right)$ est un entier pour $1 \leq l \leq 2h_k$.

   b) $n_{k+1} > n_k \exp\left(\frac{2h_k}{H_k}\right)$.

   c) $\sum_{k\geq 1} n_k^{-\sigma}$ converge pour tout $\sigma > 0$.

   Si $\exp\left(\frac{1}{H_k}\right) = \frac{p_k}{q_k}$, on peut par exemple prendre $n_k = c_k(q_k)^{2h_k}2^k$, c_k étant un entier choisi de sorte que b) ait lieu.

Ces 3 suites étant fixées, nous posons, pour chaque entier k :

$$P_k(s) = \frac{1}{h_k} + \frac{e^{-s}}{h_k - 1} + \cdots + \frac{e^{-(h_k-1)s}}{1} - \frac{e^{-(h_k+1)s}}{1} - \cdots - \frac{e^{-2h_k s}}{h_k}.$$

Si s est imaginaire pur, un petit calcul montre que :

$$P_k(it) = 2ie^{-ih_k t}\sum_{1}^{h_k} \frac{\sin(nt)}{n}.$$

Par conséquent, le lemme et le principe du maximum donnent :

$$\text{Pour tout } s \text{ de } \mathbb{C}_+,\ |P_k(s)| \leq 2A.$$

Nous modifions la définition de P_k afin d'en faire un polynôme de Dirichlet, et posons :

$$\begin{aligned}
Q_k(s) &= \frac{1}{\log(h_k)} P_k\left(\frac{s}{H_k}\right) n_k^{-s} \\
&= \frac{1}{\log(h_k)} \left(\sum_{j=0}^{h_k-1} \frac{1}{h_k - j} \left(\exp\left(\frac{j}{H_k}\right) n_k \right)^{-s} + \right. \\
&\qquad \left. \sum_{j=0}^{h_k-1} \frac{1}{h_k - j} \left(\exp\left(\frac{2h_k - j}{H_k}\right) n_k \right)^{-s} \right).
\end{aligned}$$

La condition 3.a) assure que les (Q_k) sont des polynômes de Dirichlet, tandis que la condition 3.b) entraîne que leurs spectres sont disjoints. Il est donc légitime de considérer la série de Dirichlet $f(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} Q_k(s)$. Cette série de Dirichlet répond au problème posé. En effet,

- $\sigma_a(f) \leq 0$: si $s = \sigma + it$, avec $\sigma > 0$, et si $Q_k^*(s)$ désigne la somme des valeurs absolues des termes intervenant dans Q_k, alors :

$$\begin{aligned}
Q_k^*(s) &= \frac{1}{\log(h_k)} \left(\sum_{j=0}^{h_k-1} \left| \frac{1}{h_k - j} \left(\exp\left(\frac{j}{H_k}\right) n_k \right)^{-s} \right| + \right. \\
&\qquad \left. \sum_{j=0}^{h_k-1} \left| \frac{1}{h_k - j} \left(\exp\left(\frac{2h_k - j}{H_k}\right) n_k \right)^{-s} \right| \right) \\
&\leq \frac{2}{\log h_k} n_k^{-\sigma} \sum_{j=1}^{h_k} \frac{1}{j} \\
&\leq 4 n_k^{-\sigma},
\end{aligned}$$

et la condition 3.c) fait que la série de Dirichlet qui définit f converge absolument au point s.

- $f \in \mathcal{H}^\infty$: si $s \in \mathbb{C}_+$, $|Q_k(s)| \leq \frac{2A}{\log h_k}$, et donc :

$$|f(s)| \leq \sum_{1}^{+\infty} \frac{2A}{\log h_k} < +\infty.$$

- f diverge en tout point de $i\mathbb{R}$. En effet, si t est un réel, dès que k est assez grand, on a $\dfrac{2h_k|t|}{H_k} \leq \dfrac{1}{2}$. Ainsi, si $j = 0, \dots, h_k - 1$,

$$\Re\left(\exp\left(\frac{ijt}{H_k}\right)\right) \geq \cos(1/2).$$

Pour k assez grand,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{\log(h_k)} \sum_{j=0}^{h_k-1} \frac{1}{h_k - j} \left(\exp\left(\frac{j}{H_k}\right) n_k \right)^{-s} \right| &\geq \frac{1}{\log(h_k)} \sum_{j=0}^{h_k-1} \frac{1}{h_k - j} \Re\left(\exp\left(\frac{ijt}{H_k}\right)\right) \\
&\geq Cte.
\end{aligned}$$

Le module de la somme des h_k premiers termes de $Q_k(it)$ est plus grande qu'une constante. La série de Dirichlet $f(it)$ ne peut converger.

□

Remarque : La série de Dirichlet que noux exhibons au théorème 2.14 diverge tout en restant bornée sur $i\mathbb{R}$. En effet, si on écrit $f(s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{1}^{N} a_n n^{it} \right| &\leq |Q_1(it)| + \cdots + |Q_r(it)| + |Q_r^*(it)| \\
&\leq 2A \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{\log h_r} + 4.
\end{aligned}$$

Ce phénomène s'oppose à ce qui se passe pour lesa séries de Fourier. Un résultat de Marcinkiewicz (voir [39]) affirme en effet que : il n'existe pas de suite (a_n) vérifiant $a_n \to 0$ et telle que $\sum_1^N a_n e^{int}$ diverge partout en restant bornée.

Remarque : Si l'on s'intéresse aux séries de Dirichlet généralisées $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n s}$, où (λ_n) croît vers $+\infty$, de somme bornée sur $\mathbb{C}_+$, et que l'on étudie leur convergence à la frontière $i\mathbb{R}$, on voit donc apparaître deux comportements bien différents :

1. Si $\lambda_n = n$, on se ramène aux séries entières bornées dans le disque unité, et le théorème de Carleson entraîne la convergence presque partout au bord.
2. Si $\lambda_n = \log n$, notre exemple montre qu'il est possible d'avoir convergence nulle part au bord.
3. Si $\lambda_n = \log p_n$, le théorème de Kronecker entraîne que l'on a convergence absolue sur $i\mathbb{R}$.

Il serait intéressant de déterminer des conditions sur la suite (λ_n) pour qu'elle appartienne à l'une ou l'autre des deux catégories. Pour notre construction, il était essentiel que $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ tende vers 0 (condition 2.a)), mais aussi que (λ_n) vérifie certaines propriétés arithmétiques qui nous ont été utiles dans la condition 3.a).

Chapitre 3

Les coefficients d'une série de Dirichlet

3.1 Introduction

Une série de Dirichlet $\sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$ est un élément de $\mathcal{H}^2$ si et seulement si $(a_n) \in \ell^2$. Le but de ce chapitre est d'étudier le comportement de la suite (a_n) pour les autres $\mathcal{H}^p$, et plus particulièrement pour $\mathcal{H}^1$. Dans le cas du disque, on connait en effet deux inégalités très classiques : si $f(z) = \sum_1^{+\infty} a_n z^n$ est dans $H^1(\mathbb{D})$, alors :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{|a_n|}{n+1} < +\infty \text{ et } \sum_{n\geq 0} |a_{2^n}| < +\infty.$$

La première inégalité est appelée inégalité de Hardy, et la seconde inégalité de Paley. Toutes deux dépendent de propriétés spécifiques de $H^1(\mathbb{D})$, comme la factorisation en produit de deux éléments de $H^2(\mathbb{D})$. Pour $\mathcal{H}^1$, une telle factorisation n'est pas à notre disposition. On peut pourtant, en exploitant des propriétés arithmétiques, espérer obtenir des inégalités du même type, ainsi que Bohr l'a déjà démontré pour $\mathcal{H}^\infty$ (voir [54]) : si $f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$ est dans $\mathcal{H}^\infty$, alors :

$$\sum_{p \text{ premier}} |a_p| \leq \left\| \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s} \right\|_\infty .$$

Un des moyens d'investigation est l'étude des multiplicateurs de $\mathcal{H}^p$ dans divers espaces. Une suite (λ_n) de nombres complexes est appelée un multiplicateur (de coefficients) de $\mathcal{H}^p$ dans ℓ^q (resp. de $\mathcal{H}^p$ dans $\mathcal{H}^q$) si pour tout élément $\sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$ de $\mathcal{H}^p$, alors $(\lambda_n a_n) \in \ell^q$ (resp. $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^q$).

3.2 Un principe général d'hypercontractivité

Soit, pour $0 < r < 1$, $P_r(e^{i\theta}) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}$ le noyau de Poisson sur $\mathbb{D}$ qui agit sur une fonction f de $L^p(\mathbb{T})$ par : $([P_r]f)(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) r^{|n|} e^{in\theta}$. C'est cette opération de convolution par le noyau de Poisson qui permet notamment d'identifier les espaces $H^p(\mathbb{T})$ et $H^p(\mathbb{D})$. Remarquons que pour tout r de $]0,1[$, P_r envoie $H^p(\mathbb{D})$ dans $H^\infty(\mathbb{D})$.

L'analogue du noyau de Poisson dans le cadre des séries de Dirichlet est le semi-groupe d'opérateurs (T_ε), définis pour $\varepsilon > 0$ par :

$$T_\varepsilon\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-\varepsilon} n^{-s}.$$

Contrairement au cas du disque, T_ε n'envoie pas toujours $\mathcal{H}^p$ dans $\mathcal{H}^\infty$: il faut et il suffit pour cela que $\varepsilon > 1/2$. En revanche, on peut se demander si, pour $\varepsilon > 0$, et p,q finis, $T_\varepsilon(\mathcal{H}^p) \subset \mathcal{H}^q$. Une autre question naturelle est celle de l'hypercontractivité de T_ε. Quelle condition faut-il imposer sur ε pour que $\|T_\varepsilon\|_{\mathcal{H}^p \to \mathcal{H}^q} \leq 1$? Pour le noyau de Poisson, F.B. Weissler [69] a répondu à cette question :

Théorème 3.1 *Soit $0 < r < 1$, et $0 < p,q < +\infty$. Alors $\|P_r\|_{H^p(\mathbb{T}) \to H^q(\mathbb{T})} \leq 1$ si, et seulement si, $r^2 \leq \frac{p}{q}$.*

Nous allons répondre aux questions précédentes en faisant passer le résultat de Weissler au cas de plusieurs variables, à travers un résultat général d'hypercontractivité.

Fixons $1 \leq p \leq q < +\infty$. Pour $f \in H^p(\mathbb{T}^\infty)$, $z = (z_1,z_2,\dots) \in \mathbb{T}^\infty$ et $k \geq 1$, définissons $\hat{z_k} = (z_1,\dots,z_{k-1},z_{k+1},\dots)$, et $f_{\hat{z_k}}(z_k) = f(z)$. Il est clair que :

$$\left(\int_{\mathbb{T}^\infty} \|f_{\hat{z_k}}\|^r_{L^r(\mathbb{T})} dm(\hat{z_k})\right)^{1/r} = \|f\|_r.$$

Soit (T_k) une suite d'opérateurs de $H^p(\mathbb{T})$ dans $H^q(\mathbb{T})$. Si P est un polynôme sur $\mathbb{T}^\infty$, on définit par récurrence une suite $(P^{(k)})$ en posant :

$$\begin{cases} P^{(1)} &= P \\ P^{(k+1)} &= T_k\left[P^{(k)}_{\hat{z_k}}\right]. \end{cases}$$

$(P^{(k)})$ n'est pas forcément une suite de polynômes, mais si P s'exprime uniquement à partir des variables $z_1,\dots,z_d$, il en est de même de $(P^{(k)})$. Par conséquent, la suite $(P^{(k)})$ est stationnaire.

Théorème 3.2 *Avec les notations précédentes, supposons que $\prod_{k=1}^{+\infty} \|T_k\|_{H^p \to H^q} < +\infty$. Alors la suite $(P^{(k)})$ converge vers une fonction TP de $H^q(\mathbb{T}^\infty)$. En outre, T s'étend en un opérateur borné de $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ dans $H^q(\mathbb{T}^\infty)$, avec $\|T\|_{p\to q} \leq \prod_{k=1}^{+\infty} \|T_k\|_{H^p \to H^q}$.*

Preuve : Il suffit de prouver que $\left\|P^{(k)}\right\|_{H^q(\mathbb{T}^\infty)} \leq \|T_1\|\dots\|T_{k-1}\|\|P\|_{H^p(\mathbb{T}^\infty)}$. Nous procédons par récurrence sur k à l'aide de la forme intégrale de l'inégalité de Minkowski :

Lemme 3.1 *Soient (X,dx) et (Y,dy) des espaces mesurés, f une fonction mesurable positive définie sur $X \times Y$, $0 < \alpha \leq 1$. Alors :*

$$\int_Y \left(\int_X f^\alpha(x,y)dx\right)^{1/\alpha} dy \leq \left(\int_X \left(\int_Y f(x,y)dy\right)^\alpha dx\right)^{1/\alpha}.$$

Supposons donc que l'inégalité est vraie au rang k, et prouvons-la au rang $k+1$. On a :

$$\begin{aligned} \|P^{(k+1)}\|^q_{H^q(\mathbb{T}^\infty)} &= \int_{\mathbb{T}^\infty}\int_{\mathbb{T}} \left|T_k(P^{(k)}_{\hat{z}_k})(z_k)\right|^q dm(z_k)dm(\hat{z}_k) \\ &\leq \|T_k\|^q_{H^r\to H^q}\int_{\mathbb{T}^\infty}\left(\int_{\mathbb{T}}\left|P^{(k)}_{\hat{z}_k}(z_k)\right|^r dm(z_k)\right)^{q/r} dm(\hat{z}_k) \\ &\leq \|T_k\|^q_{H^r\to H^q}\left(\int_{\mathbb{T}}\left(\int_{\mathbb{T}^\infty}\left|P^{(k)}_{\hat{z}_k}(z_k)\right|^q dm(\hat{z}_k)\right)^{r/q} dm(z_k)\right)^{q/r}, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est issue de l'inégalité de Minkowski. Appliquer l'hypothèse de récurrence à ce stade donne le résultat. □

Rappelons qu'une suite (λ_n) est totalement multiplicative si, pour tous m et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lambda_{mn} = \lambda_m\lambda_n$. L'étude de la multiplication de $\mathcal{H}^p$ par une suite totalement multiplicative entre parfaitement dans le cadre précédent, ce qui nous permet d'obtenir le résultat suivant, dans lequel (p_k) désigne la suite des nombres premiers :

Corollaire 3.3 *Soit $\lambda = (\lambda_n)$ une suite totalement multiplicative. On suppose que $\lambda_{p_k} \leq \sqrt{\frac{p}{q}}$ pour k assez grand. Alors (λ_n) est un multiplicateur de $\mathcal{H}^p$ dans $\mathcal{H}^q$.*

Preuve : On suppose la condition réalisée, et on note M_λ l'opérateur de multiplication par la suite λ. Si $P(s) = \sum_{n=1}^d a_n n^{-s}$ est un polynôme de Dirichlet,

$$\mathcal{D}(M_\lambda P)(z) = \sum_{n=1}^d a_n\left(\lambda_{p_1}z_1\right)^{\alpha_1}\dots\left(\lambda_{p_r}z_r\right)^{\alpha_r}.$$

On définit donc, pour $k \geq 1$, $T_k(\sum_{n\geq 1} b_n z^n) = \sum_{n\geq 1} b_n\lambda^n_{p_k}z^n$: T_k est l'opérateur de convolution par le noyau de Poisson de rayon λ_{p_k}. D'après le théorème de Weissler, $\|T_k\|_{p\to q} \leq 1$ pour k assez grand, et il est légitime de définir T comme dans le théorème précédent (T est le produit tensoriel des opérateurs de Poisson). Maintenant, pour tout polynôme de Dirichlet $P(s) = \sum_{n=1}^d a_n n^{-s}$, il est clair que :

$$T\mathcal{D}P(z) = \mathcal{D}(M_\lambda P)(z) = \sum_{n=1}^d a_n\left(\lambda_{p_1}z_1\right)^{\alpha_1}\dots\left(\lambda_{p_r}z_r\right)^{\alpha_r}.$$

M_λ s'étend donc en un opérateur de $\mathcal{H}^p$ dans $\mathcal{H}^q$ via l'identification $M_\lambda = \mathcal{D}^{-1}\circ T\circ\mathcal{D}$.
□

Corollaire 3.4 *Soit $\left(\mu_n^k\right)_{k=1,\dots,N}$ un nombre fini de multiplicateurs opérant de $H^p(\mathbb{D})$ dans $H^q(\mathbb{D})$. Définissons une suite (λ_n) par $\lambda_{p_k^n} = \mu_n$ pour $k = 1,\dots,N$, $\lambda_{p_j^n} = 0$ pour $j > N$, et $\lambda_{p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}} = \lambda_{p_1^{\alpha_1}}\dots\lambda_{p_r^{\alpha_r}}$. Alors (λ_n) est un multiplicateur de $\mathcal{H}^p$ dans $\mathcal{H}^q$.*

Preuve : Ce corollaire résulte directement du théorème 3.2. Remarquons qu'il reste vrai pour une suite infinie $\left(\mu_n^k\right)$, en supposant que, si M_k désigne la norme de $\left(\mu_n^k\right)$ en tant que multiplicateur de $\mathcal{H}^p$ dans $\mathcal{H}^q$, on a $\prod_{k=1}^{+\infty} M_k < +\infty$. □

Exemples :

1. Si $(\lambda_n) = (n^{-\varepsilon})$, l'opérateur de multiplication est T_ε. Pour k assez grand, on a toujours $\lambda_{p_k} = p_k^{-\varepsilon} \leq \sqrt{\frac{p}{q}}$, et donc T_ε envoie $\mathcal{H}^p$ dans $\mathcal{H}^q$. En particulier, si $\sum_1^{+\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^1$, alors, quitte à changer ε en $\varepsilon/2$:
$$\sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|^2}{n^\varepsilon} < +\infty.$$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit aussi que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^{1/2+\varepsilon}} < +\infty.$$

2. Si l'on étudie désormais l'hypercontractivité de T_ε, la preuve du corollaire 3.3 montre que si (λ_n) est une suite totalement multiplicative avec $\lambda_{p_k} = p_k^{-\varepsilon} \leq \sqrt{\frac{p}{q}}$ pour chaque k, alors M_λ est une contraction de $\mathcal{H}^p$ dans $\mathcal{H}^q$. En particulier, si $2^{-\varepsilon} \leq \sqrt{\frac{p}{q}}$, T_ε est une contraction de $\mathcal{H}^p$ dans $\mathcal{H}^q$. Cette condition est aussi nécessaire : si $2^{-\varepsilon} > \sqrt{\frac{p}{q}}$, il existe $Q(z) = \sum_1^d a_n z^n$ un polynôme tel que :
$$\|[P_{2^{-\varepsilon}}(Q)](z)\|_{H^q(\mathbb{D})} > \|Q\|_{H^p(\mathbb{D})}.$$
On considère alors le polynôme de Dirichlet $P(s) = \sum_1^d a_n (2^n)^{-s}$. Il est clair que :
$$\|M_\lambda(P)\|_{\mathcal{H}^q} > \|P\|_{\mathcal{H}^p}.$$

3. Le corollaire 3.4 permet de transférer immédiatement des multiplicateurs de $H^p(\mathbb{D})$ à $\mathcal{H}^p$. Ainsi, l'inégalité de Paley donne, pour tout $f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$ de $\mathcal{H}^1$,
$$\sum_{k\geq 1} |a_{2^{2^k}}|^2 < +\infty.$$

4. Fixons $d \geq 1$, et soit $B_d = \{n \in \mathbb{N};\ \Omega(n) = d\}$ où $\Omega(p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$. Alors, pour tout $f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$ de $\mathcal{H}^1$, on a :
$$\sum_{n\in B_d} |a_n|^2 < +\infty. \tag{3.1}$$
En effet, si (λ_n) est la suite totalement multiplicative définie par $\lambda_{p_k} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ pour chaque premier p_k, et si (μ_n) est la fonction indicatrice de B_d, alors (λ_n) est un multiplicateur de $\mathcal{H}^1$ dans $\mathcal{H}^2$ d'après le corollaire précédent, et (μ_n) aussi puisque $|\mu_n| \leq (\sqrt{2})^d \lambda_n$. (3.1) apparait comme une généralisation des inégalités de Paley et de Bohr, et se généralise comme suit :

Corollaire 3.5 *Soit $d \geq 1$, et Y_d l'ensemble des polynômes de Dirichlet $\sum_{\Omega(n)=d} a_n n^{-s}$. Alors toutes les normes $\mathcal{H}^p$ sont équivalentes sur Y_d.*

Preuve : (3.1) assure qu'il existe une constante C_2 telle que, pour tout polynôme de Dirichlet P de Y_d,

$$\|P\|_2 \leq C_2 \|P\|_1.$$

Nous prouvons par récurrence sur q qu'il existe une constante C_{2^q} telle que, pour tout polynôme de Dirichlet P de Y_d,

$$\|P\|_{2^q} \leq C_{2^q} \|P\|_1.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|P\|_{2^q} &= \|P^2\|_{2^{q-1}}^{1/2} \\ &\leq C_{2^{q-1}} \|P^2\|_1^{1/2} \\ &\leq C_{2^{q-1}} \|P\|_2 \cdot \\ &\leq C_2 C_{2^{q-1}} \|P\|_1. \end{aligned}$$

Maintenant, si $2^{q-1} < p \leq 2^q$, on procède par interpolation : soit $\theta \in]0,1[$, tel que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2^{q-1}} + \frac{1-\theta}{2^q}$. Par l'inégalité de Hölder :

$$\|P\|_p \leq \|P\|_{2^{q-1}}^{\theta} \|P\|_{2^q}^{1-\theta} \leq C \|P\|_1.$$

□

Remarque : Il est possible de retrouver le résultat précédent par un raisonnement probabiliste. En effet, soit $(z_j)_{j\geq 1}$ suite de variables aléatoires de Steinhaus. Par les inégalités de Khintchine [44, p.66], les normes $\|.\|_p$ et $\|.\|_q$ sont équivalentes sur l'espace vectoriel fermé engendré par $z_1, \ldots, z_n, \ldots$ En particulier, il existe $C_1, C_2 \geq 0$ tel que :

$$C_1 \left\| \sum_{j\geq 1} a_j z_j \right\|_{H^p(\mathbb{T}^\infty)} \leq \left(\sum_{j\geq 1} |a_j|^2 \right)^{1/2} \leq C_2 \left\| \sum_{j\geq 1} a_j z_j \right\|_{H^p(\mathbb{T}^\infty)}.$$

Ainsi, si $f(s) = \sum_{j\geq 1} a_j p_j^{-s}$ est une série de Dirichlet à spectre dans les nombres premiers,

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{H}^p &\iff \left\| \sum_{j\geq 1} a_j z_j \right\|_{H^p(\mathbb{T}^\infty)} < +\infty \\ &\iff \sum_{j\geq 1} |a_j|^2 < +\infty \iff f \in \mathcal{H}^2. \end{aligned}$$

Remarque : Les considérations précédentes permettent de répondre à une question laissée en suspens depuis le chapitre 2 : pour tout p de $[1,+\infty[$, il existe f de $\mathcal{H}^p$ qui ne se prolonge pas au-delà de $\mathbb{C}_{1/2}$. Il suffit de prendre :

$$f(s)=\sum_{j\geq 1}\frac{1}{\sqrt{p_j}\log p_j}p_j^{-s}.$$

f appartient à $\mathcal{H}^2$, est à spectre dans les nombres premiers, donc appartient à $\mathcal{H}^p$, $1\leq p<+\infty$.

3.3 Multiplicateurs de $\mathcal{H}^1$ dans ℓ^q

Dans ce paragraphe, si n est un entier, $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n.

Théorème 3.6 *Soit (λ_n) un multiplicateur de $\mathcal{H}^1$ dans ℓ^q, $q\geq 1$. Alors, il existe une constante C telle que, pour tout $N>1$, :*

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{|\lambda_n|^q d(n)^q}{n^{q/2}}\leq C\log^q N.$$

Preuve : D'après le théorème du graphe fermé, il existe une constante C telle que, pour chaque $f(s)=\sum_1^{+\infty}a_n n^{-s}$ de $\mathcal{H}^1$, on ait

$$\sum_{1}^{+\infty}|a_n|^q|\lambda_n|^q\leq C\|f\|_1^q. \tag{3.2}$$

Pour $\alpha>0$, on choisit $f(s)=[\zeta(1/2+\alpha+s)]^2=\sum_n\frac{d(n)}{n^{1/2+\alpha}}n^{-s}$. On a

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1}=\|\zeta(1/2+\alpha+s)\|_{\mathcal{H}^2}^2=\zeta(1+2\alpha).$$

(3.2) donne alors (la constante C peut changer de ligne en ligne, mais reste indépendante de N) :

$$\sum_{1}^{N}\frac{d(n)^q|\lambda_n|^q}{n^{q/2+q\alpha}}\leq C\frac{1}{\alpha^q},$$

ce qui implique que :

$$\sum_{1}^{N}\frac{d(n)^q|\lambda_n|^q}{n^{q/2}}\leq C\frac{N^{q\alpha}}{\alpha^q}.$$

Nous optimisons la partie gauche de l'inégalité en prenant $\alpha=\frac{1}{\log N}$. On obtient :

$$\sum_{1}^{N}\frac{d(n)^q|\lambda_n|^q}{n^{q/2}}\leq C\log^q N.$$

□

La condition donnée par le théorème précédent est en général difficile à tester. Cependant, bien que $d(n)$ n'ait pas d'équivalent commode, ses sommes partielles peuvent être estimées par le résultat suivant de Ramanujan :

Soit $D_q(N) = d(1)^q + \cdots + d(N)^q$, où $q \in \mathbb{N}$. Alors :

$$D_q(N) \sim A_q N (\log N)^{2^q - 1}.$$

Aussi, dès que (λ_n) satisfait une hypothèse appropriée, le théorème 3.6 prend la forme plus plaisante :

Corollaire 3.7 *Soit (λ_n) un multiplicateur de $\mathcal{H}^1$ dans ℓ^q, où $q \in \mathbb{N}$. On suppose en outre que $\left(\frac{|\lambda_n|^q}{n^{q/2}}\right)$ est une suite décroissante. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $N \geq 1$:*

$$\sum_1^N \frac{|\lambda_n|^q (\log n)^{2^q-1}}{n^{q/2}} \leq C \log^q N.$$

Preuve : Une sommation d'Abel dans la condition du théorème 3.6 donne :

$$\sum_1^N D_q(n) \left[\frac{|\lambda_n|^q}{n^{q/2}} - \frac{|\lambda_{n+1}|^q}{(n+1)^{q/2}}\right] \leq C \log^q N.$$

Maintenant, $D_q(n) \leq Cn(\log n)^{2^q-1}$, et :

$$\sum_1^N n(\log n)^{2^q-1} \left[\frac{|\lambda_n|^q}{n^{q/2}} - \frac{|\lambda_{n+1}|^q}{(n+1)^{q/2}}\right] \leq C \log^q N.$$

Nous concluons en faisant une autre sommation d'Abel, en utilisant la suite $v_n = n(\log n)^{2^q-1} - (n-1)(\log(n-1))^{2^q-1}$, qui satisfait :

$$v_n \sim (\log n)^{2^q-1}.$$

□

Exemples :

1. Pour $\alpha \leq 1/2$, $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ne multiplie pas $\mathcal{H}^1$ dans ℓ^1. En effet, $\displaystyle\sum_1^N n^{-\alpha} \frac{\log n}{\sqrt{n}} \geq \sum_1^N \frac{\log n}{n} \geq C \log^2 N$ n'est pas dominé par $\log N$. Cette borne $1/2$ est optimale, puisque nous avons déjà constaté que si $\sum_1^{+\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^1$, et si $\varepsilon > 0$, alors :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^{1/2+\varepsilon}} < +\infty.$$

2. Pour tout $\beta > 0$ et tout $q \geq 1$, $\left(\frac{1}{\log^\beta(n)}\right)$ ne multiplie pas $\mathcal{H}^1$ dans ℓ^q. Pour $\beta < 1$, ceci est une conséquence du travail précédent puisque :
$$\sum_1^N \frac{(\log n)^{3-2\beta}}{n} \geq C(\log N)^{4-2\beta}.$$
Pour traiter le cas général, nous considérons le produit de Riesz décalé :
$$P_k(t) = (p_1 \dots p_k)^{it} \prod_{j=1}^k (1 + \cos(t \log p_j)).$$
Les produits de Riesz ont l'avantage qu'on peut facilement estimer leur norme $\|.\|_1$ car ils sont positifs! Ici, on obtient par exemple que $\|P_k\|_{\mathcal{H}^1} = 1$. Mais, d'autre part, en développant l'expression de P_k, on a :
$$\begin{aligned} P_k(t) &= (p_1 \dots p_k)^{it} \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{2}p_j^{it} + \frac{1}{2}p_j^{-it}\right) \\ &= \sum_{\varepsilon_j = 0,1,-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{j=1}^k |\varepsilon_j|} \left(p_1^{1+\varepsilon_1} \dots p_k^{1+\varepsilon_k}\right)^{it}. \end{aligned}$$
Si l'on suppose que $\left(\frac{1}{\log^\beta n}\right)$ multiplie $\mathcal{H}^1$ dans ℓ^q, alors il existe une constante C telle que, pour tout $k \geq 1$, :
$$\sum_{\varepsilon_j = 0,1,-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{q\sum_{j=1}^k |\varepsilon_j|} \frac{1}{\log^{q\beta}(p_1^{1+\varepsilon_1} \dots p_k^{1+\varepsilon_k})} \leq C.$$
Or,
$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon_j = 0,1,-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{q\sum_{j=1}^k |\varepsilon_j|} \frac{1}{\log^{q\beta}(p_1^{1+\varepsilon_1} \dots p_k^{1+\varepsilon_k})} &\geq C \sum_{\varepsilon_j = 0,1} \left(\frac{1}{2}\right)^{q\sum_{j=1}^k |\varepsilon_j|} \frac{1}{\log^{q\beta}(p_1 \dots p_k)} \\ &\geq C \sum_{j=0}^k C_k^j \left(\frac{1}{2^q}\right)^j \frac{1}{\log^{q\beta}(p_1 \dots p_k)} \\ &\geq C \frac{\left(1 + \frac{1}{2^q}\right)^k}{k^{q\beta} \log^{q\beta}(p_k)}. \end{aligned}$$
Cette dernière quantité n'est pas bornée quand k croît vers l'infini.

Remarque : La condition donnée par le théorème 3.6 n'est pas suffisante. Par exemple, si $\lambda_{2^k} = \frac{2^{k/2}}{k+1}$, et $\lambda_j = 0$ ailleurs, alors (λ_n) ne peut pas être un multiplicateur de $\mathcal{H}^1$ dans ℓ^q puisque cette suite n'est pas bornée. Cependant, (λ_n) satisfait les hypothèses du théorème 3.6.

3.4 Ensembles de Bohr et de Paley-Bohr

3.4.1 Rappels et nouvelles définitions

Rappelons la définition classique suivante :

Définition 3.1 *Soit G un groupe abélien compact, $\hat{G}$ son groupe dual, et $\Lambda \subset \hat{G}$. On dit que Λ est un* ensemble de Sidon *s'il existe une constante C telle que, pour tout $P = \sum_{j=1}^{d} a_{\gamma_i}\gamma_i$ polynôme à spectre dans Λ ($\gamma_i \in \Lambda$ pour tout i), on ait :*

$$\sum_{\gamma\in\Lambda} |a_\gamma| \leq C\|P\|_\infty.$$

La plus petite des constantes C s'appelle constante de Sidonicité de Λ et sera notée $S(\Lambda)$.

Les ensembles de Sidon (surtout ceux de $\mathbb{Z}$) ont fait l'objet de nombreuses recherches concernant leur taille, leur union,... dont on pourra trouver un aperçu dans [46]. Une caractérisation duale intéressante des ensembles de Sidon est la proposition suivante :

Proposition 3.8 $\Lambda = \{\lambda_k;\ k \geq 1\}$ *est un ensemble de Sidon de constante $S(\Lambda)$ si, et seulement si, pour tout $a = (a_\gamma) \in \ell^\infty(\Lambda)$, $\|a\| \leq 1$, il existe μ une mesure sur G telle que :*

- $\|\mu\| \leq S(\Lambda)$.
- $\hat{\mu}(\lambda_k) = a_{\lambda_k}$ *pour tout $k \geq 1$.*

Au début de ce chapitre, nous avons rappelé la célèbre inégalité de Bohr : si $f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^\infty$, alors :

$$\sum_{k\geq 1} |a_{p_k}| \leq \|f\|_\infty.$$

Cette inégalité illustre le fait que l'ensemble des nombres premiers est plus qu'un ensemble de Sidon de $\mathbb{Z}^{(\infty)}$. Précisément, si on identifie $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^{(\infty)}$ par l'application h définie par $h\left(p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}\right) = (\alpha_1,\dots,\alpha_r,0,\dots)$, $h(\{\text{nombres premiers}\}) = \Lambda$ est un ensemble de Sidon de $\mathbb{Z}^{(\infty)}$, et même mieux puisqu'on n'impose plus au spectre d'un polynôme d'être inclus dans Λ, mais seulement dans $\mathbb{N}^{(\infty)}$. C'est pourquoi, suivant D.Rider dans [56], nous posons la définition suivante :

Définition 3.2 *Soit G un groupe abélien compact, S un semi-groupe de $\hat{G}$ contenant 0, et Λ une partie de S. On dit que Λ est un* ensemble de Bohr *s'il existe une constante C telle que, pour tout polynôme $P = \sum_{\gamma\in S} a_\gamma\gamma$ à spectre dans S, on ait*

$$\sum_{\gamma\in\Lambda} |a_\gamma| \leq C\|P\|_\infty.$$

La plus petite des constantes C sera appellé constante de Bohr de Λ, et sera notée $B(\Lambda)$.

Dans la perspective d'une application aux séries de Dirichlet, il faut penser $G = \mathbb{T}^\infty$, $S = \mathbb{N}^{(\infty)}$ et $\Lambda = h(E)$ où E est une partie de $\mathbb{N}$. Par abus de langage, on dira aussi que E est un ensemble de Bohr.

Le lien entre ensembles de Sidon et ensembles de Bohr a été explicité par D.Rider dans [56] :

Proposition 3.9 *$\Lambda \subset S \subset \hat{G}$ est un ensemble de Bohr si, et seulement si,*

a) Λ est un ensemble de Sidon de G.

b) Il existe μ une mesure sur G telle que :

- *$\hat{\mu}(\gamma) = 1$ si $\gamma \in \Lambda$.*
- *$\hat{\mu}(\gamma) = 0$ si $\gamma \in S - \Lambda$.*

D'autre part, motivés par l'inégalité de Paley et l'inégalité

$$\left(\sum_{k\geq 1} |a_{p_k}|^2 \right)^{1/2} \leq C\|f\|_1 \quad \text{pour } f(s) = \sum_{1}^{+\infty} a_n n^{-s} \tag{3.3}$$

démontrée au paragraphe 3.2, nous dirons que :

Définition 3.3 *$\Lambda \subset S \subset \hat{G}$ est un* ensemble de Paley-Bohr *(relativement au semi-groupe S) s'il existe une constante C telle que, pour tout polynôme $P = \sum_{\gamma\in S} a_\gamma \gamma$ à spectre dans S, on ait*

$$\left(\sum_{\gamma\in\Lambda} |a_\gamma|^2 \right)^{1/2} \leq C\|P\|_1.$$

Le principe général d'hypercontractivité nous donne de nombreux ensembles de Paley-Bohr : $\{p_i\}$, $\{p_i p_j\}$, $\{2^{2^k}\}, \ldots$.

3.4.2 Liens entre ensembles de Bohr et de Paley-Bohr

L'ensemble des nombres premiers est à la fois un ensemble de Bohr et de Paley-Bohr. Cependant :

- Le théorème 9 de [21] montre que $\{2^{2^k};\ k \geq 1\}$ n'est pas un ensemble de Bohr (car un ensemble de Bohr est la réunion d'un nombre fini d'ensembles pour lesquels aucun élément ne divise un autre).
- $\{p_i p_j;\ i \geq 1, j \geq 1\}$, en tant que produit de deux ensembles de Sidon, n'est pas un ensemble de Sidon (voir [33]). En particulier, ce n'est pas un ensemble de Bohr.

Pourtant, ces deux ensembles sont des ensembles de Paley-Bohr (cf exemples 3 et 4 après le corollaire 3.4). Le phénomène inverse ne peut se produire :

Théorème 3.10 *Tout ensemble de Bohr est un ensemble de Paley-Bohr.*

Notre preuve est basée sur une idée de Rudin pour transférer les propriétés d'un ensemble de Sidon particulier à tous les ensembles de Sidon :

Théorème 3.11 *Soit $q \geq 1$, $\Lambda = \{\gamma_k;\ k \geq 1\}$ un ensemble de Bohr. Alors il existe une constante C tel que, pour tout polynôme $P = \sum_{\gamma\in S} a_\gamma \gamma$ à spectre dans S, on ait les inégalités suivantes :*

$$\frac{1}{C} \left\| \sum_{\gamma_k\in\Lambda} a_{\gamma_k} \gamma_k \right\|_{L^q(G)} \leq \left\| \sum_{\gamma_k\in\Lambda} a_{\gamma_k} z_k \right\|_{L^q(\mathbb{T}^\infty)} \leq C \left\| \sum_{\gamma\in S} a_\gamma \gamma \right\|_{L^q(G)}. \tag{3.4}$$

Preuve : Soit $z = (z_1, \dots)$ un élément de $\mathbb{T}^\infty$. On note μ_1 la mesure d'interpolation pour l'ensemble de Sidon Λ, associée à la suite (z_k), et μ_2 la mesure donnée par le théorème de Rider. On considère $\mu_z = \mu_1 \star \mu_2$. μ_z satisfait :

$$\hat{\mu}_z(\gamma) = \begin{cases} z_k & \text{si } \gamma = \gamma_k \\ 0 & \text{si } \gamma \in S - \Lambda. \end{cases}$$

Soit P_z le polynôme trigonométrique $P_z = \mu_z \star P = \sum_{\gamma_k \in \Lambda} a_{\gamma_k} z_k \gamma_k$. Alors :

$$\|P_z\|^q_{L^q(G)} \leq \|\mu_z\|^q \|P\|^q_{L^q(G)}.$$

Nous intégrons cette inégalité par rapport à $z \in \mathbb{T}^\infty$, et nous appliquons le théorème de Fubini :

$$\int_G \int_{\mathbb{T}^\infty} \Big| \sum_{\gamma_k \in \Lambda} \gamma_k(x) a_{\gamma_k} z_k \Big|^q dz dx \leq \|\mu_z\|^q \|P\|^q_{L^q(G)},$$

ce qui se lit :

$$\int_G \Big\| \sum_{\gamma_k \in \Lambda} \gamma_k(x) a_{\gamma_k} z_k \Big\|^q_{L^q(\mathbb{T}^\infty)} dx \leq \|\mu_z\|^q \|P\|^q_{L^q(G)}.$$

Mais, $\{z_k\}$ est une suite de variables aléatoires, invariantes par rotation, et c'est donc une suite basique inconditionnelle [44, p.15]. Puisque $|\gamma_k(x)| = 1$, nous avons :

$$\Big\| \sum_{\gamma_k \in \Lambda} a_{\gamma_k} z_k \Big\|_{L^q(\mathbb{T}^\infty)} \geq \Big\| \sum_{\gamma_k \in \Lambda} \gamma_k(x) a_{\gamma_k} z_k \Big\|_{L^q(\mathbb{T}^\infty)} \geq \Big\| \sum_{\gamma_k \in \Lambda} a_{\gamma_k} z_k \Big\|_{L^q(\mathbb{T}^\infty)}.$$

Ceci prouve l'inégalité de gauche de (3.4). Pour obtenir l'autre inégalité, on procède de même en remarquant que :

$$P_z \star \mu_{\bar{z}} = \sum_{\gamma_k \in \Lambda} a_{\gamma_k} \gamma_k.$$

Le résultat s'obtient en intégrant sur $\mathbb{T}^\infty$ l'inégalité :

$$\|P_z \star \mu_{\bar{z}}\|_{L^q(G)} \leq \|\mu_{\bar{z}}\| \|P_z\|_{L^q(G)}.$$

□

Preuve :(du théorème 3.10) Soit $\Lambda_k = \{\gamma_k;\ k \geq 1\}$ un ensemble de Bohr, et $P = \sum_{\gamma \in S} a_\gamma \gamma$ un polynôme. Alors d'après le théorème 3.11 :

$$\Big(\sum_{\gamma \in \Lambda} |a_\gamma|^2 \Big)^{1/2} = \Big\| \sum_{\gamma_k \in \Lambda} a_{\gamma_k} \gamma_k \Big\|_{L^2(G)} \leq C \Big\| \sum_{\gamma_k \in \Lambda} a_{\gamma_k} z_k \Big\|_{L^2(\mathbb{T}^\infty)}.$$

Maintenant, les inégalités de Khintchine assurent que les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes sur l'espace vectoriel engendré par $z_1, \dots, z_n, \dots$ En particulier,

$$\Big(\sum_{\gamma \in \Lambda} |a_\gamma|^2 \Big)^{1/2} \leq C \Big\| \sum_{\gamma_k \in \Lambda} a_{\gamma_k} z_k \Big\|_{L^1(\mathbb{T}^\infty)} \leq C' \|P\|_{L^1(G)},$$

où pour la dernière inégalité nous avons appliqué une autre fois (3.4). □

Remarque : Le théorème 3.11 nous donne une inégalité de Khintchine pour les ensembles de Bohr. Précisément, si $\Lambda = \{n_k;\ k \geq 1\}$ est un ensemble de Bohr de $\mathbb{N}$, et si $q \geq 1$, il existe des constantes A_q et B_q telles que, pour tout polynôme de Dirichlet $P(s) = \sum_1^d a_k n_k^{-s}$ à spectre dans Λ, on ait :

$$A_q \|P\|_{\mathcal{H}^q} \leq \|P\|_{\mathcal{H}^2} \leq B_q \|P\|_{\mathcal{H}^q}.$$

En effet, si l'on pose $Q(s) = \sum_1^d a_k p_k^{-s}$, le théorème 3.11 assure que :

$$\frac{1}{C}\|Q\|_q \leq \|P\|_q \leq C\|Q\|_q.$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Khintchine dans le cas classique.

3.4.3 Exemples d'ensembles de Paley-Bohr

Les ensembles de Paley Λ de $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire ceux pour lesquels l'inégalité de Paley est vraie en remplaçant $\{2^k\}$ par Λ) sont parfaitement connus : ce sont ceux pour lesquels les quantités $N(\Lambda,m) = \{n \in \Lambda;\ m \leq n \leq 2m\}$ sont bornées (voir par exemple [58]), ou encore les unions finies d'ensembles de Hadamard. Nous ne sommes pas capables de caractériser les ensembles de Paley-Bohr, mais le théorème suivant en donne une large classe :

Théorème 3.12 *Soit $Y = \{y^{(k)}\}$ une partie de $\mathbb{N}$ telle que $y^{(k+1)}$ ne divise aucun des $\left[y^{(j)}\right]^2$ pour $j = 1,\dots,k$. Alors Y est un ensemble de Paley-Bohr.*

Exemple : $Y = \{(p_1 \dots p_j)^j;\ j \geq 1\}$ est un ensemble de Paley-Bohr, alors qu'il est prouvé dans [56] qu'il ne contient aucun sous-ensemble de Bohr infini.

Preuve : Nous allons utiliser une idée due à B.Smith, les produits de Riesz "non exacts". Nous commençons par énoncer un lemme facile :

Lemme 3.2 *Soient α, β deux nombres complexes avec $|\alpha| \leq 1$ et $|\beta| \leq 1$. Alors :*

$$\left|\frac{\alpha}{2} + (1-|\alpha|^2)\beta - \frac{\overline{\alpha}\beta^2}{2}\right| \leq 1.$$

Preuve : Par le principe du maximum, on peut toujours supposer que $|\beta| = 1$. On pose $\alpha = re^{i\theta_0}$ et $\beta = e^{i\theta}$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2} + (1-|\alpha|^2)\beta - \frac{\overline{\alpha}\beta^2}{2} &= \frac{re^{i\theta_0}}{2} + (1-r^2)e^{i\theta} - \frac{r}{2}e^{2i\theta - i\theta_0}\\ &= ire^{i\theta}\sin(\theta_0 - \theta) + (1-r^2)e^{i\theta},\end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$\left|\frac{\alpha}{2} + (1-|\alpha|^2)\beta - \frac{\overline{\alpha}\beta^2}{2}\right| = \left|ir\sin(\theta_0 - \theta) + (1-r^2)\right| \leq 1.$$

□

Posons $m^{(k)} = h\left(y^{(k)}\right) \in \mathbb{N}^{(\infty)}$. La condition imposée sur les $y^{(k)}$ se traduit par la propriété :

$$\forall k \geq 1,\ \forall j < k,\ \overline{z}^{m^{(k)}} z^{2m^{(j)}} \notin H^1(\mathbb{T}^\infty)$$

(on convient, si $m = h(m_1, \ldots, m_r, 0, \ldots) \in \mathbb{N}^{(\infty)}$, de désigner $z_1^{m_1} \ldots z_r^{m_r}$ par z^m). Nous construisons un polynôme d'interpolation non-exact, mais dont on contrôle bien la norme infinie :

Lemme 3.3 *Soit $(a_k)_{1\leq k\leq N}$ une suite de nombres complexes telle que $|a_k| \leq 1$ pour tout $k \geq 1$. Alors il existe un polynôme trigonométrique G sur $\mathbb{T}^\infty$ tel que :*

(1) $\quad \|G\|_\infty \leq 1.$

(2) $\quad \hat{G}\left(m^{(k)}\right) = \frac{1}{2} a_k \prod_{j=k+1}^{N} (1 - |a_j|^2)$ *pour* $k \leq N$.

(3) $\quad \hat{G}(m) = 0$ *si* $m \in \mathbb{N}^{(\infty)}$, $m \neq m^{(k)}$.

Preuve : On définit par récurrence une suite de polynômes $(G_l)_{1\leq l\leq N}$ en posant :

$$G_1 = \frac{1}{2} a_1 z^{m^{(1)}},$$

$$G_l = \frac{1}{2} a_l z^{m^{(l)}} + (1 - |a_l|^2) G_{l-1} - \frac{1}{2} \overline{a_l} G_{l-1}^2 \overline{z}^{m^{(l)}}.$$

Nous prouvons par récurrence que G_l satisfait les conditions (1), (2), (3), où dans (2) N est remplacé par l. Cela est vrai pour G_1, et si c'est vrai pour G_{l-1}, alors :

- Le lemme 3.2 appliqué en prenant $\alpha = a_l z^{m^{(l)}}$ et $\beta = G_{l-1}(z)$ assure que (1) est vrai pour G_l.
- (2) et (3) se déduisent immédiatement de la formule, et des hypothèses sur $m^{(k)}$.

□

Nous pouvons désormais passer à la preuve du théorème. Soit $f(s) = \sum_1^N b_n n^{-s}$ un polynôme de Dirichlet. Soit $F(z) = \sum_1^N b_n z_1^{\alpha_1} \ldots z_r^{\alpha_r}$ le polynôme trigonométrique associé. Nous posons $S = \sum |b_{y^{(k)}}|^2$. Si $S = 0$, il n'y a rien à prouver, sinon on pose : $a_k = \frac{\overline{b_{y^{(k)}}}}{2\sqrt{S}}$, de sorte que $\sum |a_k|^2 = \frac{1}{4}$. Soit G le polynôme d'interpolation construit au lemme précédent. Nous avons :

$$< G,F >= \sum_k |b_{y^{(k)}}|^2 \prod_{j=k+1}^{N} \left(1 - |a_j|^2\right) \times \frac{1}{2\sqrt{S}}.$$

Puisque $\sum |a_k|^2 = \frac{1}{4}$, il existe une constante absolue C telle que $\prod_{j=k+1}^N (1 - |a_j|^2) \geq C$. Donc,

$$\|F\|_1 \geq < G,F > \geq \frac{C}{2} \left(\sum |b_{y^{(k)}}|^2\right)^{1/2}.$$

$Y = \{y^{(k)}\}$ est un ensemble de Paley-Bohr. □

Corollaire 3.13 *Tout partie infinie de $\mathbb{N}$ contient un sous-ensemble de Paley-Bohr infini.*

3.5 Inégalités à valeurs vectorielles

Dans [4], O.Blasco et A.Pelczynski ont étudié à quelle condition, sur la géométrie de l'espace de Banach complexe X, les inégalités classiques pour des polynômes trigonométriques (inégalité de Hardy, de Paley) sont encore vérifiées pour des polynômes dont les coefficients sont dans X. Notre but est de réaliser le même travail, mais pour les polynômes de Dirichlet, et les inégalités de Bohr et de Paley-Bohr. C'est pourquoi nous introduisons les définitions suivantes :

Définition 3.4 *Un espace de Banach complexe X sera dit* espace de Bohr *(resp.* espace de Paley-Bohr*) s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout polynôme de Dirichlet $\sum_1^N a_n n^{-s}$, avec $a_n \in X$, l'inégalité :*

$$\sum_{p \text{ premier}} \|a_p\| \leq C \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \sum_1^N a_n n^{it} \right\|$$

est vérifiée (resp. l'inégalité

$$\left(\sum_{p \text{ premier}} \|a_p\|^2 \right)^{1/2} \leq C \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left\| \sum_1^N a_n n^{it} \right\| dt$$

est vérifiée).

Remarquons que dans cette définition, la dernière intégrale peut s'exprimer au moyen d'une intégrale sur $\mathbb{T}^\infty$. La même preuve que celle du lemme 2.2 montre en effet que :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_1^N a_n n^{-s} \right\|_{\mathcal{H}^1_X} &:= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left\| \sum_1^N a_n n^{it} \right\| dt \\ &= \int_{\mathbb{T}^\infty} \left\| \sum_1^N a_n z_1^{\alpha_1} \dots z_r^{\alpha_r} \right\| dm(z). \end{aligned}$$

3.5.1 Espaces de Bohr

L'inégalité de Bohr ne se transmet pas bien aux espaces de Banach. En effet,

Théorème 3.14 *X est un espace de Bohr si et seulement si* $\dim X < +\infty$.

Preuve : Seule l'implication directe est non triviale. Mais si $\dim X = +\infty$, un théorème de Dvoretzky et Rogers (voir par exemple [44, page 16]) affirme que nous pouvons exhiber dans X une série $\sum x_n$ inconditionnellement convergente, mais pas absolument convergente. Plus clairement, pour cette série, il existe une constante M telle que, pour tout z de $\mathbb{T}^\infty$, $\left\|\sum_1^{+\infty} z_n x_n\right\| \leq M$, tandis que $\sum_1^{+\infty} \|z_n\| = +\infty$. Par conséquent, pour N assez grand, quelle que soit la constante C, l'inégalité

$$\sum_1^N \|x_n\| \leq C \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \sum_1^N x_n p_n^{it} \right\|$$

ne peut avoir lieu, et X n'est pas un espace de Bohr. □

3.5.2 Espaces de Paley-Bohr

Une condition nécessaire

Déterminer les espaces de Paley-Bohr est plus difficile. Nous allons trouver des liens avec les types et cotypes des espaces de Banach. Rappelons qu'un espace de Banach est de type p (resp. de cotype q) s'il existe une constante C_p (resp. B_q) telle que, pour tout entier positif m, et pour tous $x_1,\dots,x_m$ de X, on ait :

$$\int_{\mathbb{T}^\infty}\left\|\sum_1^m x_k z_k\right\| dm(z) \leq C_p\left(\sum_1^m \|x_k\|^p\right)^{1/p}$$

$$\left(\text{resp.}\qquad B_q\left(\sum_1^m \|x_k\|^q\right)^{1/q} \leq \int_{\mathbb{T}^\infty}\left\|\sum_1^m x_k z_k\right\| dm(z)\right).$$

Nous ne donnons pas ici la définition la plus courante des notions de type ou cotype (il faudrait, à la place des z_k, mettre les variables de Rademacher), mais elle lui est équivalente. Pour plus de détails, on pourra se reporter à [53].

Proposition 3.15 *Si X est un espace de Paley-Bohr, alors X est de cotype 2.*

Preuve : Soient $x_1,\dots,x_m \in X$ et $P(s)=\sum_1^m x_n p_n^{-s}$, qui est un polynôme de Dirichlet X−valué. Alors, puisque X est un espace de Paley-Bohr, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^m \|x_k\|^2\right)^{1/2} \leq C\|P\|_{\mathcal{H}^1_X} = C\int_{\mathbb{T}^\infty}\left\|\sum_{k=1}^m x_k z_k\right\| dm(z).$$

□

Nous ne savons pas s'il existe une réciproque au théorème précédent. Néanmoins, nous donnons deux exemples où nous sommes capables de conclure.

Les treillis de Banach

Nous rappelons quelques définitions sur les treillis de Banach (notre référence est [45]) :

Définition 3.5 *Un espace de Banach X partiellement ordonné sur le corps des réels est appelé un* treillis de Banach *si :*

(T1) $x \leq y \implies x+z \leq y+z$ *pour tous x,y,z de X.*

(T2) $ax \geq 0$ *dès que* $x \geq 0$ *et* $a \in \mathbb{R}_+$.

(T3) Pour tous $x,y \in X$, il existe une borne supérieure $x \vee y$ et une borne inférieure $x \wedge y \in X$.

(T4) $\|x\| \leq \|y\|$ *dès que* $|x| \leq |y|$*, où la valeur absolue $|x|$ de $x \in X$ est définie par* $|x| = x \vee (-x)$.

Exemples :

1. Soit X un espace de Banach, dont (x_n) est une base inconditionnelle de constante d'inconditionnalité 1. Alors X, muni de l'ordre $\sum_1^{+\infty} a_n x_n \geq 0 \iff a_n \geq 0$ pour tout n est un treillis de Banach.
2. Les espaces $L^p(\Omega,\mu)$ et $\mathcal{C}(K)$, munis de l'ordre ponctuel, sont aussi des treillis de Banach, qui ne sont pas donnés par une base inconditionnelle.

Les espaces $L^p(\Omega,\mu)$ sont en un certain sens le modèle générique des treillis de Banach, comme l'indique le théorème suivant [45, thm. 1.b.14] :

Théorème 3.16 *Soit X un espace séparable ne contenant pas c_0. Alors il existe un espace de probabilité (Ω,μ), un idéal $\tilde{X}$ de $L^1(\Omega,\mu)$ et une norme $\|.\|_{\tilde{X}}$ sur $\tilde{X}$ qui en fait un treillis de Banach tels que :*

i) X est isométrique à $(\tilde{X},\|.\|_{\tilde{X}})$, l'isométrie préservant l'ordre.

ii) Si $f \in L^\infty(\Omega,\mu)$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_{\tilde{X}} \leq 2\|f\|_\infty$.

Comme un espace de Paley-Bohr est défini sur le corps des complexes, il nous faut définir les treillis de Banach complexes :

Définition 3.6 *Soit X un espace de Banach sur le corps des complexes. On dit que c'est un treillis de Banach complexe si c'est le complexifié d'un treillis de Banach réel.*

La notion reliée au cotype 2 dans les treillis de Banach, et qui va nous permettre dans ce cadre de démontrer la réciproque à la proposition 3.15, est celle de 2-concavité :

Définition 3.7 *Une norme sur un treillis de Banach X est dite 2-concave s'il existe une constante M telle que :*

$$\left(\sum_1^n \|x_i\|^2\right)^{1/2} \leq M \left\| \left(\sum_1^n |x_i|^2\right)^{1/2} \right\|$$

pour tout choix de vecteurs $(x_i)_{i=1,\dots,n}$.

On a l'équivalence ([45, thm 1.f.16]) :

Théorème 3.17 *Soit X un treillis de Banach. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) X est de cotype 2.

ii) La norme sur X est 2-concave.

Nous sommes alors suffisamment armés pour démontrer le

Théorème 3.18 *Soit X un treillis de Banach complexe de cotype 2. Alors X est un espace de Paley-Bohr.*

Preuve : Un espace est de Paley-Bohr si, et seulement si, tout sous-espace séparable de X est de Paley-Bohr. On peut donc supposer que X est séparable. Il ne contient pas c_0 car il est de cotype 2, et pas conséquent nous pouvons supposer que X est un treillis de fonctions intégrables sur un espace de probabilités (Ω,μ). En outre, puisque X est de cotype 2, sa norme est 2-concave.

Fixons $u_1,\dots,u_n$ des éléments de X, et posons $P(s) = \sum_{k=1}^n u_k k^{-s}$. Pour tout ω de (Ω,μ), l'inégalité de Paley-Bohr *scalaire* affirme que :

$$\left(\sum_{p \text{ premier}} |u_p(\omega)|^2\right)^{1/2} \leq C \left\|\sum_{k=1}^n u_k(\omega)k^{-s}\right\|_1,$$

où C est une constante absolue. Maintenant, X est un treillis de Banach, et nous appliquons le point (T_4) de la définition avec $x(\omega) = \left(\sum_{p \text{ premier}} |u_p(\omega)|^2\right)^{1/2}$ et $y(\omega) = \left\|\sum_{k=1}^n u_k(\omega)k^{-s}\right\|_{\mathcal{H}^1}$ pour en déduire que :

$$\left\|\left(\sum_{p \text{ premier}} |u_p(\omega)|^2\right)^{1/2}\right\| \leq C \left\|\left\|\sum_{k=1}^n u_k(\omega)k^{-s}\right\|_{\mathcal{H}^1}\right\|.$$

Comme la norme de l'intégrale est dominée par l'intégrale de la norme,

$$\left\|\left(\sum_{p \text{ premier}} |u_p(\omega)|^2\right)^{1/2}\right\| \leq C \int_{\mathbb{T}^\infty} \left\|\sum_{k=1}^n u_k z_1^{\alpha_1}\dots z_r^{\alpha_r}\right\|_X dm(z) = C \left\|\sum_{k=1}^n u_k k^{-s}\right\|_{\mathcal{H}^1_X}.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la 2-concavité de la norme de X pour en déduire que X est un espace de Paley-Bohr. □

Remarque : Dans la preuve précédente, on n'utilise pas d'autre propriétés sur les premiers (p_k) que le fait qu'ils forment un ensemble de Paley-Bohr. On a donc plus précisément que tout ensemble de Paley-Bohr reste un ensemble de Paley-Bohr relativement à X, treillis de Banach de cotype 2.

Corollaire 3.19 *$L^p(\Omega,\mu)$ est un espace de Paley-Bohr si et seulement si $1 \leq p \leq 2$.*

Preuve : Il s'agit d'une application immédiate des résultats précédents, en se rappelant que le cotype de $L^p(\Omega,\mu)$ vaut $\max(2,p)$. □

Duaux de C^*-algèbre

Rappelons qu'une C^*-algèbre est une algèbre de Banach munie d'une involution $*$ antilinéaire telle que :

- $(xy)^* = y^*x^*$.
- $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

Depuis les travaux de N.Tomczak [67], il est bien connu que le dual d'une C^*-algèbre est de cotype 2, et est donc un bon candidat pour être un espace de Paley-Bohr. L'utilisation de l'inégalité de Von-Neumann va nous permettre de généraliser la preuve du théorème 3.12, et d'en déduire :

Théorème 3.20 *Le dual d'une C^*-algèbre est un espace de Paley-Bohr.*

Preuve : La preuve est essentiellement une modification de celle du théorème 3.12, avec les idées de O.Blasco et A.Pelczynski introduites dans [4]. Afin de rester complets, nous donnons toutefois une preuve détaillée de ce théorème, en commençant par quelques lemmes utiles :

Lemme 3.4 *Soit X une C^*-algèbre. Alors, pour tout x de X avec $\|x\| \leq 1$, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $|\alpha| = 1$, et pour tout $0 \leq s \leq 1$,*

$$\left\| \frac{\alpha s}{2} + (1-s^2)x - \frac{s\overline{\alpha}x^2}{2} \right\| \leq 1.$$

Preuve : Il s'agit exactement du lemme 3.1 de [4]. Il se déduit du lemme 3.2 de ce chapitre par l'application de l'inégalité de Von Neumann. □

Lemme 3.5 *Soit (u_k) une suite d'éléments unitaires d'une C^*-algèbre X, et (a_k) une suite de réels avec $0 \leq a_k \leq 1$. Alors il existe G un polynôme trigonométrique $X-$valué tel que :*

$$\begin{array}{ll} (1) & \|G\|_\infty \leq 1 \\ (2) & \hat{G}(\delta_k) = \frac{1}{2} a_k \prod_{j=k+1}^{N} (1-a_j^2) u_k \textit{ pour } k \leq N. \\ (3) & \hat{G}(m) = 0 \textit{ si } m \in \mathbb{N}^{(\infty)},\ m \neq \delta_1, \ldots, \delta_N. \end{array}$$

Dans ce lemme, la notation δ_k signifie $\delta_k = (0,\ldots,0,1,0,\ldots)$, où le 1 est en $k-$ième position.

Preuve : Elle est identique à celle du lemme 3.3, si ce n'est que nous remplaçons la relation de récurrence par :

$$G_1 = \frac{1}{2} a_1 u_1 z_1,$$

$$G_l = \frac{1}{2} a_l u_l z_l + (1-a_l^2) G_{l-1} - \frac{1}{2} \overline{a_l} G_{l-1} u_l^{-1} G_{l-1} \overline{z_l}.$$

On prouve notamment que G_l vérifie (1) en appliquant le lemme 3.4 avec $s = a_l$, $\alpha = z_l$ et $x = u_l^{-1} G_{l-1}(z)$. □

Lemme 3.6 *Si X est une C^*-algèbre, pour tout x^* de X^*, il existe $u \in X$ unitaire tel que :*

$$\|x^*\| \geq x^*(u) \geq \frac{\|x^*\|}{2}.$$

Preuve : Il s'agit d'une conséquence du théorème de Russo-Dye ([10, page 210]), qui affirme que dans toute C^*-algèbre unitaire X, la boule unité fermée est la fermeture de l'enveloppe convexe des éléments unitaires. Si pour tout élément unitaire u on avait $|x^*(u)| \leq \frac{1}{2}\|x^*\|$, alors par l'inégalité triangulaire, on obtiendrait $\|x^*\| \leq \frac{1}{2}\|x^*\|$, ce qui est impossible sauf si $x^* = 0.$, mais dans ce cas le lemme est trivial.

Il existe donc $u \in X$ unitaire avec $|x^*(u)| \geq \frac{1}{2}\|x^*\|$, et il suffit de considérer $e^{i\theta}u$ pour un θ bien choisi. □

Nous prouvons maintenant le théorème. Puisque X^* s'injecte isométriquement dans X^{***}, et puisque X^{**} est unitaire, on peut toujours supposer que X est unitaire. Soit $f(s) = \sum_1^m x_k^* k^{-s}$ un polynôme de Dirichlet X^*-valué, et $F(z) = \sum_1^m x_k^* z^{h(k)}$ le polynôme trigonométrique correspondant. Nous posons $a_k = \|x_{p_k}^*\|$. De même que dans la preuve du théorème 3.12, il est possible de supposer que $\sum_1^m a_k^2 = \frac{1}{4}$. Soient $(u_k)_{1\leq k\leq m}$ des éléments unitaires tels que $a_k \geq x_k^*(u_k) \geq \frac{a_k}{2}$. Si G est le polynôme donné par le lemme 3.5 à partir des suites (a_k) et (u_k), alors :

$$\begin{aligned} < G,F > &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m a_k \prod_{j=k+1}^m (1-a_k^2)x_k^*(u_k) \\ &\geq \frac{1}{4}\sum_{k=1}^m a_k^2 \prod_{j=k+1}^m (1-a_k^2) \\ &\geq \frac{C}{4}\sum_{k=1}^m a_k^2, \end{aligned}$$

où C est une constante absolue telle que

$$\prod_{j=k+1}^N (1-s_j^2) \geq C$$

pour toute suite positive (s_j) avec $\sum_j s_j^2 = \frac{1}{4}$. On a donc :

$$\|F\|_1 \geq \frac{C}{16} = \frac{C}{4} \times \left(\sum_k \|x_{p_k}^*\|^2\right)^{1/2}.$$

□

Exemple : La classe de Schatten S^1, dual de la C^*-algèbre des opérateurs compacts sur ℓ^2, est un espace de Paley-Bohr.

Remarque : Au lieu des premiers (p_k), on aurait pu prendre dans la preuve précédente tout ensemble $Y = \{y^{(k)}\}$ d'entiers tels que $y^{(k+1)}$ ne divise pas $\left(y^{(j)}\right)^2$ pour $1 \leq j \leq k$. On obtient que Y reste un ensemble de Paley-Bohr relativement aux polynômes de Dirichlet dont les coefficients sont dans le dual d'une C^*-algèbre.

Chapitre 4

Opérateurs de composition sur $\mathcal{H}^p$

Si ψ est une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, l'opérateur de composition de symbole ψ est défini par $C_\psi(f) = f \circ \psi$. D'après le principe de subordination de Littlewood, $C_\psi \in \mathcal{L}(H^p(\mathbb{D}))$, pour $1 \leq p \leq +\infty$. Ces opérateurs de composition sur les espaces de Hardy classiques ont été beaucoup étudiés, le but étant de comparer les propriétés de ψ, fonction holomorphe, et de C_ψ, opérateur. Quelle condition faut-il imposer sur ψ pour que C_ψ soit inversible, soit une isométrie, soit compact? On pourra notamment consulter [62] et [16] à ce sujet.

Les opérateurs de composition sur $\mathcal{H}^2$ ont été déterminés par J.Gordon et H.Hedenmalm. Dans ce chapitre, nous allons généraliser aux espaces $\mathcal{H}^p$ la preuve qu'ils donnent dans [25], avant d'amorcer l'étude des propriétés de ces opérateurs de composition. Le chapitre suivant sera plus particulièrement consacré à l'étude de leur compacité. Signalons aussi que C.Finet, H.Queffélec et A.Volberg ont abordé le calcul de leur image numérique [20].

4.1 Détermination des opérateurs de composition

Les fonctions de $\mathcal{H}^p$ étant définies sur $\mathbb{C}_{1/2}$, nous cherchons les fonctions $\phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ pour lesquelles $f \circ \phi \in \mathcal{H}^p$ dès que $f \in \mathcal{H}^p$.

Théorème 4.1 *Soit $2 \leq p < +\infty$. Une fonction holomorphe $\phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ définit un opérateur de composition (borné) C_ϕ sur $\mathcal{H}^p$ si, et seulement si :*

1. *Elle est de la forme $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$, où $c_0 \in \mathbb{N}$ et φ admet une représentation par une série de Dirichlet qui converge dans un demi-plan (vertical).*
2. *ϕ admet un prolongement analytique à $\mathbb{C}_+$, toujours noté ϕ, tel que :*
   (a) $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ si $c_0 \geq 1$.
   (b) $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$ si $c_0 = 0$.

Dans le cas où $1 \leq p < 2$, la condition est nécessaire, et elle est aussi suffisante si $c_0 \neq 0$. En outre, C_ϕ est une contraction si, et seulement si, $c_0 \neq 0$.

Remarque : Les conditions 1. et 2. ont des natures très différentes. La condition 1. est une condition arithmétique, qui doit être vérifiée afin que $f \circ \phi$ soit une série de Dirichlet dès que f est une série de Dirichlet. La condition 2. est relative au contrôle de la norme $\mathcal{H}^p$. Elle est notamment liée au fait que, si $f \in \mathcal{H}^p$, pour presque tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$, f_χ se prolonge à $\mathbb{C}_+$.

Preuve :

Condition nécessaire : Nous allons prouver plus précisément que ϕ a la forme voulue dès que C_ϕ induit un opérateur de composition de $\mathcal{H}^p$ dans $\mathcal{H}^q$, $1 \leq p,q < +\infty$. La preuve donnée dans [25] pour le cas $p = q = 2$ fonctionne, pour peu que l'on soit capable de prouver le lemme suivant :

Lemme 4.1 *Il existe une fonction $f \in \mathcal{H}^p$ telle que :*

a) Pour presque tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$, la droite $\Re(s) = 0$ est frontière naturelle de f_χ, et 0 est l'abscisse de convergence de f_χ.

b) Pour au moins un $\chi \in \mathbb{T}^\infty$, la droite $\Re(s) = 1/2$ est frontière naturelle de f_χ, et 1/2 est l'abscisse de convergence de f_χ.

Preuve : On pose $f(s) = \sum_{j\geq 1} a_{p_j} p_j^{-s}$ où $a_{p_j} = \dfrac{1}{\sqrt{p_j}\log p_j}$. Il est prouvé dans [25] que f vérifie les conditions a) et b) (a) est une conséquence de résultats de J.P.Kahane [34, p44, theorem 4], et b) de résultats de H.Queffélec [55]). Par ailleurs, il est clair que $f \in \mathcal{H}^2$. D'après le corollaire 3.5, $f \in \mathcal{H}^q$. □

Condition suffisante : Ici aussi, la preuve de [25] fonctionne si :

- $c_0 \neq 0$.
- $c_0 = 0$ et $p \geq 2$, cette restriction venant de l'utilisation du théorème 2.8.

La preuve de Gordon et Hedenmalm assure en outre que C_ϕ est une contraction dès que $c_0 \neq 0$. Pour prouver que c'est le seul cas possible, remarquons que si $\omega \in \mathbb{C}_{1/2}$, $C_\phi^*(K_\omega) = K_{\phi(\omega)}$ (c'est un résultat très classique pour les opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ [62, paragraphe 3.4], qui s'adapte ici sans changement). Ainsi :

$$\|C_\phi\| = \|C_\phi^*\| \geq \frac{\|K_{\phi(\omega)}\|_{(\mathcal{H}^p)^*}}{\|K_\omega\|_{(\mathcal{H}^p)^*}} = \frac{\zeta(2\Re(\phi(\omega)))^{1/p}}{\zeta(2\Re(\omega))^{1/p}}.$$

On écrit $\phi(s) = \sum_{n\geq 1} c_n n^{-s}$. Si $\Re(s) \to +\infty$, $\Re\phi(s) \to \Re(c_1)$ et on trouve :

$$\|C_\phi\| \geq \zeta(2\Re(c_1))^{1/p} > 1.$$

□

La preuve précédente donne en particulier :

Corollaire 4.2 *Soit C_ϕ un opérateur de composition sur $\mathcal{H}^p$, $1 \leq p < +\infty$. Alors :*

$$\|C_\phi\| \geq \sup_{\omega\in\mathbb{C}_{1/2}} \frac{\zeta(2\Re(\phi(\omega)))^{1/p}}{\zeta(2\Re(\omega))^{1/p}}.$$

Le cas $p = +\infty$ est plus facile. Nous cherchons les fonctions $\phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ qui définissent un opérateur de composition sur $\mathcal{H}^\infty$. Nécessairement, ϕ vérifie la condition arithmétique du théorème précédent, et ϕ s'écrit $\phi(s) = c_0 s + \sum_{n\geq 1} c_n n^{-s}$. Réciproquement, si ϕ est de cette forme, pour tout f de $\mathcal{H}^\infty$, on a clairement $\|f \circ \phi\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Dans la suite de chapitre, ϕ représentera toujours une fonction définie sur un demi-plan $\mathbb{C}_\theta$ et pouvant s'écrire $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$, où $\varphi(s) = \sum_{n\geq 1} c_n n^{-s}$. L'utilisation des résultats du chapitre 3 donne des conditions suffisantes pour que C_ϕ augmente l'intégrabilité :

Proposition 4.3 *Soit* $1 \leq p < q < +\infty$ *et* C_ϕ *un opérateur de composition sur* $\mathcal{H}^p$, *avec* $c_0 \geq 1$. *On suppose que* $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_\varepsilon$, *où* $\varepsilon > 0$. *Alors* $C_\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^p,\mathcal{H}^q)$. *En outre, si* $2^{-2\varepsilon} \leq \frac{p}{q}$, *alors* $\|C_\phi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^p,\mathcal{H}^q)} \leq 1$.

Preuve : Nous prouvons d'abord le résultat dans le cas où $\phi_\varepsilon(s) = s + \varepsilon$. Alors, $C_{\phi_\varepsilon} = T_\varepsilon$, et la proposition provient du théorème 3.2, et des remarques qui le suivent. Nous procédons maintenant par un argument de factorisation : du fait que $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \phi_\varepsilon(\mathbb{C}_\varepsilon)$, et que ϕ_ε est univalente, on peut poser $\gamma = \phi_\varepsilon^{-1} \circ \phi$. Alors, $\gamma(\mathbb{C}_{1/2}) \subset \mathbb{C}_{1/2}$, $\gamma(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$, et γ vérifie la condition arithmétique 1. C_γ définit donc un opérateur de composition contractif sur $\mathcal{H}^q$, et $C_\phi = C_\gamma \circ C_{\phi_\varepsilon}$. □

Par ailleurs, il est facile de déterminer les opérateurs de composition pour lesquels $C_\phi(\mathcal{H}^p) \subset \mathcal{H}^\infty$.

Proposition 4.4 *Soit* $1 \leq p < +\infty$ *et* $\phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_{1/2}$ *une fonction holomorphe de la forme* $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$. *Alors :*

1. $C_\phi(\mathcal{H}^p) \subset \mathcal{H}^\infty$ *si, et seulement si,* $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$, *où* $\varepsilon > 0$.
2. *Il n'y a pas d'opérateurs de composition tels que* $\|C_\phi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^p,\mathcal{H}^\infty)} \leq 1$.

Preuve : Pour tout f de $\mathcal{H}^p$, tout $\omega \in \mathbb{C}_+$, on a :

$$|f(\phi(\omega))| \leq \|C_\phi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^p,\mathcal{H}^\infty)} \|f\|_{\mathcal{H}^p},$$

ce qui donne : $\|K_{\phi(\omega)}\|_{(\mathcal{H}^p)^*} \leq \|C_\phi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^p,\mathcal{H}^\infty)}$. Le théorème 2.6 permet de conclure. □

4.2 Opérateurs de composition inversibles, Fredholm, normaux

Pour de nombreux espaces de fonction analytiques, les opérateurs de composition inversibles et de Fredholm sont les mêmes. C'est aussi le cas pour $\mathcal{H}^p$, et en outre ils sont peu nombreux :

Théorème 4.5 *Soit* $1 \leq p < +\infty$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. C_ϕ *est inversible.*

ii. C_ϕ *est Fredholm.*

iii. $\phi(s) = s + i\tau$, *où* $\tau \in \mathbb{R}$.

Preuve : Il suffit de prouver *ii.* $\Longrightarrow$ *iii.* Nous commençons par un lemme qui nous sera souvent utile :

Lemme 4.2 *Soit C_ϕ un opérateur de composition sur $\mathcal{H}^p$. Si $\phi(s) \neq s+i\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tels que :*

$$\phi(\mathbb{C}_{1/2-\varepsilon}) \subset \mathbb{C}_{1/2+\eta}.$$

Preuve : Le point clé est la proposition 4.2 de [25], que l'on rappelle sous forme de lemme :

Lemme 4.3 *Soit ϕ une fonction holomorphe, $\phi : \mathbb{C}_\theta \to \mathbb{C}_\nu$. On suppose que dans un demi-plan, $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$, où $\varphi(s) = \sum_{n\geq 1} c_n n^{-s}$. Alors, si φ est constante, cette constante appartient au demi-plan $\overline{\mathbb{C}}_{\nu-c_0\theta}$; si φ n'est pas constante, elle se prolonge en une fonction holomorphe de $\mathbb{C}_\theta$ dans $\mathbb{C}_{\nu-c_0\theta}$. Dans ce cas, pour tout $\theta' > \theta$, φ envoie $\mathbb{C}_{\theta'}$ dans $\mathbb{C}_{\nu'-c_0\theta}$, pour un $\nu' > \nu$.*

Nous distinguons alors plusieurs cas pour prouver le lemme 4.2.

- $c_0 = 0$: on a alors $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$. Si ϕ est constante, le résultat est évident, et si ϕ n'est pas constante, le lemme 4.3 montre que $\phi(\mathbb{C}_{1/4}) \subset \mathbb{C}_{1/2+\eta}$.
- $c_0 > 1$: puisque $\varphi(\mathbb{C}_{3/8}) \subset \varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$, $\phi(\mathbb{C}_{3/8}) \subset \mathbb{C}_{c_0 3/8} \subset \mathbb{C}_{3/4}$.
- $c_0 = 1$, et φ non constante : par le lemme 4.3, $\varphi(\mathbb{C}_{1/4}) \subset \mathbb{C}_\nu$, $0 < \nu < 1/2$, et $\phi(\mathbb{C}_{1/2-\nu/2}) \subset \mathbb{C}_{1/2+\nu/2}$.
- $c_0 = 1$ et φ constante : le résultat est évident.

□

Nous allons alors raisonner par contraposée pour établir *ii.* $\Longrightarrow$ *iii.* Si $\phi(s) \neq s+i\tau$, il existe $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$ avec $\phi(\mathbb{C}_{1/2-\varepsilon}) \subset \mathbb{C}_{1/2+\eta}$. Nous allons prouver que codim $ImC_\phi = +\infty$. Remarquons d'abord que toute fonction de ImC_ϕ est définie (et bornée) sur $\mathbb{C}_{1/2-\varepsilon}$. D'après le lemme 4.1, il existe $f \in \mathcal{H}^p$ qui ne se prolonge pas au-delà de $\mathbb{C}_{1/2}$. On pose :

$$F = \text{vect}\left\{n^{-s}f;\quad n \geq 1\right\},$$

et on prouve que $F \cap ImC_\phi = \{0\}$. En effet, si $g \in F \cap ImC_\phi$, alors $g(s) = P(s)f(s)$, où $P \in \mathcal{P}$. Si g n'est pas nulle, il existe un point s_0 de la droite $1/2 + i\mathbb{R}$ avec $P(s_0) \neq 0$. Mais alors f se prolonge au voisinage de s_0, ce qui contredit que $\Re(s) = 1/2$ est sa frontière naturelle. □

H.J. Schwartz [60] a montré que C_ψ est normal sur $H^2(\mathbb{D})$ si, et seulement si, $\psi(z) = az$, où $|a| \leq 1$. Nous effectuons le même travail pour $\mathcal{H}^2$:

Théorème 4.6 *C_ϕ est un opérateur de composition normal sur $\mathcal{H}^2$ si, et seulement si, $\phi(s) = s + c_1$, où $\Re(c_1) \geq 0$.*

Preuve : Il est clair qu'un tel ϕ induit un opérateur de composition normal. Réciproquement, prouvons d'abord que $c_0 \neq 0$. On a $C_\phi(1) = 1$, et par normalité de C_ϕ, 1 est vecteur propre de C_ϕ^*. Mais, si $f \in \mathcal{H}^2$, $< f,1 >= \lim_{\Re(s)\to+\infty} f(s)$, et donc $< f, C_\phi^*(1) >= \lim_{\Re(s)\to+\infty} f \circ \phi(s)$. On a donc $\lim_{\Re(s)\to+\infty} \Re\phi(s) = +\infty$, et $c_0 \neq 0$.

La matrice de C_ϕ dans la base canonique $\{1, 2^{-s}, \dots, k^{-s}, \dots\}$ est alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots \\ 0 & a_{3,2} & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \end{pmatrix}.$$

$a_{2,k}$ est le coefficient devant 2^{-s} lorsque l'on calcule $k^{-\phi(s)}$. Mais,

$$k^{-\phi(s)} = k^{-c_0 s - c_1} \prod_{n \geq 2} \left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-c_n \log k)^j}{j!} n^{-js} \right) \tag{4.1}$$

et d'après le paragraphe 3 de [25], la série de Dirichlet de $k^{-\phi(s)}$ s'obtient en développant ce produit. En particulier, pour $k \geq 3$, $a_{2,k} = 0$, et si $c_0 \neq 1$, $a_{2,2} = 0$. Maintenant, C_ϕ est normal, et la somme des carrés des modules de la deuxième ligne vaut la somme des carrés des modules de la deuxième colonne :

$$|a_{2,2}|^2 = |a_{2,2}|^2 + |a_{3,2}|^2 + \dots.$$

On a donc $a_{k,2} = 0$ pour $k \geq 3$, et $2^{-\phi(s)} = a_{2,2} 2^{-s}$. En revenant à (4.1) pour $k = 2$, on trouve que $c_0 = 1$ et $c_n = 0$ pour $n \geq 2$. □

Remarque : On peut remplacer C_ϕ normal par C_ϕ hyponormal ($\|C_\phi^*(f)\| \leq \|C_\phi(f)\|$) dans le théorème précédent, la preuve reste la même.

4.3 Opérateurs de composition isométriques

Les opérateurs de composition isométriques sur $H^p(\mathbb{D})$ sont bien connus : C_ψ est une isométrie si, et seulement si, $\psi(0) = 0$, et ψ est intérieure. Nous allons prouver un analogue à ce résultat pour $\mathcal{H}^p$, mais il nous faut trouver une notion pour remplacer les fonctions intérieures. Le passage par le polydisque est encore utile.

4.3.1 Des opérateurs de composition sur $\mathcal{H}^p$ aux opérateurs de composition sur $H^p(\mathbb{T}^\infty)$

Soit C_ϕ un opérateur de composition sur $H^p(\mathbb{T}^\infty)$. On pose $T = \mathcal{D} \circ C_\phi \circ \mathcal{D}^{-1}$, qui est un opérateur sur $H^p(\mathbb{T}^\infty)$. Nous allons prouver qu'il s'agit d'un opérateur de composition. On pose, pour $\Re(s) > 0$, $\phi_k(s) = p_k^{-\phi(s)}$, et $\tilde{\phi} = (\mathcal{D}\phi_1, \dots)$. Alors, $\phi_k \in \mathcal{H}^\infty$, $\|\phi_k\|_\infty \leq 1$. En outre, $\tilde{\phi}$ est définie sur $\mathbb{D}^\infty \cap c_0$. Considérons maintenant $P = \sum_1^N a_n z_1^{\alpha_1} \dots z_r^{\alpha_r}$ un polynôme sur $H^p(\mathbb{T}^\infty)$. Alors :

$$\begin{aligned}
T(P) &= \sum_{n=1}^{N} a_n \mathcal{D} \circ C_\phi \left((p_1^{-s})^{\alpha_1} \dots (p_r^{-s})^{\alpha_r}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n \mathcal{D} \left(\left(p_1^{-\phi(s)}\right)^{\alpha_1} \dots \left(p_r^{-\phi(s)}\right)^{\alpha_r}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n (\mathcal{D}\phi_1)^{\alpha_1} \dots (\mathcal{D}\phi_r)^{\alpha_r}.
\end{aligned}$$

Donc, si $z \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell^2$, $T(P)(z) = P \circ \tilde{\phi}(z)$, et :

$$|P(\tilde{\phi}(z))| \leq C(z) \|T\| \|P\|_{H^p(\mathbb{T}^\infty)}.$$

L'évaluation en $\tilde{\phi}(z)$ se prolonge continûment à $H^p(\mathbb{T}^\infty)$. C'est donc que $\tilde{\phi}(z) \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell^2$. En outre, $T(P) = C_{\tilde{\phi}}(P)$, et T est l'opérateur de composition induit par $C_{\tilde{\phi}}$. Bien sûr, C_ϕ et $C_{\tilde{\phi}}$ étant similaires, ils partagent les mêmes propriétés.
Remarque : On ne peut pas parcourir le chemin en sens inverse, c'est-à-dire prendre un opérateur de composition sur $H^p(\mathbb{T}^\infty)$, et en déduire un sur $\mathcal{H}^p$. Par exemple, si $\psi(z) = (-z_1, z_2, \dots)$, C_ψ est un opérateur de composition sur $H^p(\mathbb{T}^\infty)$, mais il n'existe pas de $\phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ avec $C_\psi = \mathcal{D} \circ C_\phi \circ \mathcal{D}^{-1}$. Cela entraînerait en effet que $2^{-\phi(s)} = -2^{-s}$, et $3^{-\phi(s)} = 3^{-s}$, et ces deux conditions sont incompatibles. En particulier, il existe des opérateurs linéaires multiplicatifs sur $\mathcal{H}^p$ qui ne sont pas des opérateurs de composition, un résultat à rapprocher du théorème 2.9.

Remarque : Le plus souvent, le passage des opérateurs de composition sur $\mathcal{H}^p$ aux opérateurs de composition sur $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ sera un moyen de mieux comprendre les premiers. On peut aussi l'envisager comme une source d'exemples pour les seconds. En effet, nous donnerons un exemple d'opérateur de composition compact et non Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}^2$. Par conjugaison, on en obtiendra un de même nature sur $H^p(\mathbb{T}^\infty)$.

4.3.2 Isométries

Soit C_ϕ un opérateur de composition sur $\mathcal{H}^p$. Suivant [25], on pose, pour $\chi \in \mathbb{T}^\infty$, $\phi_\chi(s) = c_0 s + \varphi_\chi(s)$. Les fonctions ϕ_χ apparaissent comme les différentes limites normales des $\phi_\tau(s) = c_0 s + \varphi(s + i\tau)$. Il est prouvé dans [25] que, pour chaque $\chi \in \mathbb{T}^\infty$, ϕ_χ se prolonge en une fonction holomorphe de $\mathbb{C}_+$ dans $\mathbb{C}_+$ si $c_0 \neq 0$, et de $\mathbb{C}_+$ dans $\mathbb{C}_{1/2}$ si $c_0 = 0$. En outre, pour $f \in \mathcal{H}^p$, $1 \leq p < +\infty$, la proposition 4.3 de [25] montre que, pour presque tout χ de $\mathbb{T}^\infty$, pour tout s de $\mathbb{C}_+$:

$$(f \circ \phi)_\chi (s) = f_{\chi^{c_0}} \circ \phi_\chi(s).$$

Nous nous intéressons aux limites radiales des fonctions f_χ et ϕ_χ. D'une part, puisque pour presque tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$, f_χ est dans $H_i^p(\mathbb{C}_+)$, $\lim_{\sigma \to 0} f_\chi(\sigma + it) = f_\chi(it)$ existe pour presque tout $t \in \mathbb{R}$. En outre, puisque $\phi_\chi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$, ϕ_χ admet aussi des limites radiales presque partout, et donc :

$$\phi_\chi(it) = \lim_{\sigma \to 0} \phi_\chi(\sigma + it) \text{ existe presque partout.}$$

Maintenant, si $F \in H^2(\mathbb{D})$, si ψ est une fonction holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, et si F^* et ψ^* désignent leurs extensions radiales respectives, il est bien connu que :

$$(F \circ \psi)^*(e^{i\theta}) = F^* \circ \psi^*(e^{i\theta}) \text{ pour presque tout } \theta.$$

En écrivant que $f_{\chi^{c_0}} \circ \phi_\chi = f_{\chi^{c_0}} \circ \varphi_1 \circ \varphi_1^{-1} \circ \phi_\chi \circ \varphi_1$, où $\varphi_1(z) = (1+z)/(1-z)$, on en déduit que pour presque tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(f \circ \phi)_\chi(it) = f_{\chi^{c_0}} \circ \phi_\chi(it).$$

Nous pouvons alors caractériser les opérateurs de composition isométriques :

Théorème 4.7 *Soit $1 \leq p < +\infty$. C_ϕ est une isométrie sur $\mathcal{H}^p$ si, et seulement si, pour presque tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_\chi(it) \in i\mathbb{R}$.*

Preuve : Remarquons d'abord que si C_ϕ est une isométrie, c'est en particulier une contraction, et $c_0 \neq 0$. On munit $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ de la mesure $d\mu$ produit de la mesure de Haar sur $\mathbb{T}^\infty$ et de $d\lambda_i(t) = \pi^{-1}(1+t^2)^{-1}dt$. D'après le lemme 2.6, on a

$$\begin{aligned} \|n^{-\phi}\|_{\mathcal{H}^p}^p &= \int_{\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{R}} \left|\left(n^{-\phi}\right)_\chi (it)\right|^p d\mu \\ &= \int_{\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{R}} \left|n^{-\phi_\chi(it)}\right|^p d\mu. \end{aligned}$$

Supposons que A est une partie de $\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{R}$ avec $\mu(A) > 0$ et $|\Re(\phi_\chi(it))| > 0$ pour tout $(\chi,t) \in A$. Alors :

$$\left\|n^{-\phi}\right\|_{\mathcal{H}^p}^p \leq \int_A \left|n^{-\phi_\chi(it)}\right|^p d\mu + (1 - \mu(A)).$$

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \to \infty} \left\|n^{-\phi}\right\|_{\mathcal{H}^p}^p \leq 1 - \mu(A) < 1,$$

et C_ϕ n'est pas une isométrie.

Réciproquement, pour $\xi > 0$, on pose :

$$\psi_\xi(s) = \frac{s - \xi}{s + \xi}, \text{ de } \mathbb{C}_+ \text{ dans } \mathbb{D},$$

et

$$d\lambda_\xi(t) = \frac{\xi}{\pi} \times \frac{dt}{t^2 + \xi^2}.$$

$d\lambda_\xi$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, et pour tout $f \in H_i^p(\mathbb{C}_+)$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(it)|^p d\lambda_\xi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f \circ \psi_\xi(e^{i\theta})|^p d\theta.$$

Soit $\xi,\eta > 0$. Pour $f \in \mathcal{H}^p$, d'après le lemme 2.6

$$\begin{aligned}
\|f \circ \phi\|_{\mathcal{H}^p}^p &= \int_{\mathbb{T}^\infty} \int_{\mathbb{R}} |(f \circ \phi)_\chi(it)|^p d\lambda_\xi(t) dm(\chi) \\
&= \int_{\mathbb{T}^\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_{\chi^{c_0}} \circ \phi_\chi(it)|^p d\lambda_\xi(t) dm(\chi) \\
&= \int_{\mathbb{T}^\infty} \int_{\mathbb{T}} |(f_{\chi^{c_0}} \circ \psi_\eta^{-1}) \circ (\psi_\eta \circ \phi_\chi \circ \psi_\xi^{-1})(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} dm(\chi).
\end{aligned}$$

Par hypothèse, pour presque tout χ de $\mathbb{T}^\infty$, $\psi_\eta \circ \phi_\chi \circ \psi_\xi^{-1}$ est une fonction intérieure, et en appliquant un résultat classique sur les opérateurs de composition sur $H^p(\mathbb{T})$ (voir [16, thm 3.8]), on obtient :

$$\|f \circ \phi\|_{\mathcal{H}^p}^p \geq \int_{\mathbb{T}^\infty} \left(\frac{1 - |\psi_\eta \circ \phi_\chi \circ \psi_\xi^{-1}(0)|}{1 + |\psi_\eta \circ \phi_\chi \circ \psi_\xi^{-1}(0)|} \right) \int_{\mathbb{T}} |f_{\chi^{c_0}} \circ \psi_\eta^{-1}(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} dm(\chi). \quad (4.2)$$

Ecrivons $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$. La série de Dirichlet qui définit φ converge absolument dans un demi-plan, et donc il existe des constantes A et M, indépendantes de χ, telles que :

$$|\varphi_\chi(s)| \leq M \text{ si } \Re(s) \geq A.$$

Maintenant, $\psi_\xi^{-1}(0) = \xi$, et si on choisit $\eta = c_0\xi$, on obtient :

$$\psi_\eta\left(\phi_\chi(\xi)\right) = \frac{\varphi_\chi(\xi)}{2c_0\xi + \varphi_\chi(\xi)}.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Pour ξ suffisamment grand, pour tout χ de $\mathbb{T}^\infty$,

$$\frac{1 - |\psi_\eta \circ \phi_\chi(\xi)|}{1 + |\psi_\eta \circ \phi_\chi(\xi)|} \geq \frac{1 - \frac{A}{2c_0\xi + A}}{1 + \frac{A}{2c_0\xi + A}} \geq \frac{2c_o\xi}{2c_o\xi + 2A} \geq 1 - \varepsilon.$$

On injecte cette inégalité dans (4.2) pour obtenir les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\|f \circ \phi\|_{\mathcal{H}^p}^p &\geq (1 - \varepsilon) \int_{\mathbb{T}^\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_{\chi^{c_0}}(it)|^p d\lambda_\eta(t) dm(\chi) \\
&\geq (1 - \varepsilon) \|f\|_{\mathcal{H}^p}^p
\end{aligned}$$

où on a appliqué une dernière fois le lemme 2.6, et où on a utilisé le fait que $\chi \mapsto \chi^{c_0}$ est une rotation qui préserve la mesure sur $\mathbb{T}^\infty$. Ceci prouve que C_ϕ est une isométrie, puisque l'on sait déjà que c'est une contraction. □

Remarque : On peut utiliser un raisonnement semblable pour donner une preuve alternative de celle de Gordon-Hedenmalm de la condition suffisante du théorème 4.1, dans le cas $c_0 \neq 0$. Il suffit, au lieu d'obtenir (4.2), d'utiliser la majoration :

$$\|g \circ \psi\|_p^p \leq \left(\frac{1 + |\psi(0)|}{1 - |\psi(0)|} \right) \|g\|_p^p,$$

pour $g \in H^p(\mathbb{D})$ et ψ fonction holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$.

4.4 Similarité à une isométrie

4.4.1 Cas du disque

Récemment, J.H. Shapiro a étudié dans [64] les relations entre les fonctions intérieures et les opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$. Un des corollaires de son théorème 5.1 est le résultat suivant :

Théorème 4.8 *Soit $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. ψ est intérieure, et admet un point fixe dans $\mathbb{D}$.

ii. C_ψ est semblable à une isométrie.

Ce théorème a déjà été prouvé par N.Jaoua dans [32], sous l'hypothèse supplémentaire que ψ est analytique au voisinage de $\mathbb{D}$. Nous nous proposons de donner une nouvelle preuve, qui va pouvoir être adaptée aux séries de Dirichlet. Rappelons qu'un opérateur S (défini sur un Banach X) est semblable à une isométrie si, et seulement si, il existe $C_1,C_2 > 0$ avec :

$$\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, \ C_1\|x\| \leq \|S^n x\| \leq C_2\|x\|.$$

En d'autres termes, S est à puissances bornées, et les images de S^n sont uniformément fermées. Cima, Thomson et Wogen ont étudié dans [14] les opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ à image fermée. Ils montrent que C_ψ est à image fermée si, et seulement si :

$$\exists C > 0, \forall B \subset \mathbb{T}, \ m(\psi^{-1}(B) \cap \mathbb{T}) \geq Cm(B),$$

où B désigne un borélien du cercle, et m la mesure de Haar du cercle. Nous commençons par donner une version quantitative de leur résultat.

Lemme 4.4 *Soit C_ψ un opérateur de composition sur $H^2(\mathbb{D})$, tel qu'il existe $C > 0$ avec $C\|f\| \leq \|C_\psi(f)\|$ pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$. Alors, pour tout borélien B de $\mathbb{T}$,*

$$m(\psi^{-1}(B) \cap \mathbb{T}) \geq C^2 m(B).$$

Preuve : On pose $A = \psi^{-1}(B) \cap \mathbb{T}$. D'après la théorie de Beurling des fonctions extérieures, il existe $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ telle que :

$$|f| = \begin{cases} 1 & \text{sur } B \\ 1/2 & \text{sur } \mathbb{T} - B. \end{cases}$$

Il est clair que $\|f^n\|_2^2 \xrightarrow{n \to +\infty} m(B)$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \|C_\psi(f^n)\|_2^2 &= \int_A |f^n \circ \psi|^2 dm + \int_{\mathbb{T}-A} |f^n \circ \psi|^2 dm. \\ &= m(A) + \int_{\mathbb{T}-A} |f^n \circ \psi|^2 dm. \end{aligned}$$

Or, si $z \in \mathbb{T} - A$, $|f \circ \psi(z)| < 1$. On applique le théorème de convergence dominée pour en déduire que :

$$\|C_\psi(f^n)\|_2^2 \xrightarrow{n \to +\infty} m(A).$$

Le passage à la limite dans $C^2\|f^n\|_2^2 \leq \|C_\psi(f^n)\|_2^2$ donne $C^2m(B) \leq m(A)$. □

Prouvons alors le théorème 4.8. Si ψ est intérieure, et vérifie $\psi(a) = a$, on considère ψ_a l' automorphisme qui échange a et 0, et $\theta = \psi_a^{-1} \circ \psi \circ \psi_a$. Alors, θ est intérieure et vérifie $\theta(0) = 0$: C_θ est une isométrie de $H^2(\mathbb{D})$. C_ψ, qui lui est semblable, est en particulier semblable à une isométrie.

Réciproquement, supposons que C_ψ est semblable à une isométrie, et notons $\psi_j = \psi \circ \cdots \circ \psi$ (j fois). Par hypothèse, il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \forall f \in H^2(\mathbb{D}),\ C_1\|f\| \leq \|C_\psi^j(f)\| = \|C_{\psi_j}(f)\| \leq C_2\|f\|.$$

Supposons que ψ n'admette pas de points fixes dans $\mathbb{D}$. Une version faible du théorème de Denjoy-Wolff assure que $|\psi_j(0)| \to 1$. Or, d'après [16, p. 123] :

$$\|C_\psi^n\| \geq (1 - |\psi_n(0)|^2)^{-1/2}.$$

Ceci contredit que C_ψ est à puissances bornées. Prouvons maintenant que ψ est intérieure. Si tel n'est pas le cas, il existe $B \subset \mathbb{T}$ avec $m(B) > 0$ et $|\psi_j(z)| < 1$ si $z \in B$. Définissons $B_0 = B$ et $B_j = \psi_j^{-1}(B) \cap \mathbb{T}$. D'après le lemme 4.4,

$$m(B_j) \geq C_1^2 m(B). \tag{4.3}$$

Or, les B_j sont disjoints : si $z \in B_i$, et si $i < j$, $|\psi_j(z)| = |\psi_{j-i}(\psi_i(z))| < 1$. En particulier, $\psi_j(z) \notin B$ et $z \notin B_j$. On en déduit que $\sum_{j\geq 1} m(B_j) \leq m(\mathbb{T}) \leq 1$, ce qui est impossible d'après (4.3).

4.4.2 Cas des séries de Dirichlet

Théorème 4.9 *Soit C_ϕ un opérateur de composition sur $\mathcal{H}^2$, $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$. On suppose en outre que la série de Dirichlet qui définit φ converge uniformément sur $i\mathbb{R}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. C_ϕ est une isométrie.

ii. C_ϕ est semblable à une isométrie.

iii. $\phi(s) = c_0 s + i\tau$, $c_0 \geq 1$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Preuve : La seule implication non triviale est *ii.* $\Longrightarrow$ *iii.* Remarquons que, puisque φ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, $\tilde{\phi}$ définit une fonction continue sur $\mathbb{T}^\infty$. Nous scindons la preuve en plusieurs lemmes. Le premier est l'analogue du lemme 4.4 pour les opérateurs de composition sur $\mathcal{H}^2$.

Lemme 4.5 *Soit C_ϕ un opérateur de composition sur $\mathcal{H}^2$ tel qu'il existe une constante $C > 0$ avec $\|C_\phi(f)\| \geq C\|f\|$ pour $f \in \mathcal{H}^2$. Alors, pour tout $B = B_1 \times \cdots \times B_j \times \mathbb{T} \times \ldots$, où B_l est un borélien de $\mathbb{T}$, on a*

$$m(\tilde{\phi}^{-1}(B) \cap \mathbb{T}^\infty) \geq C^2 m(B).$$

Preuve : Clairement, pour tout $F \in H^2(\mathbb{T}^\infty)$, $\|C_{\tilde{\phi}}(F)\| \geq C\|F\|$. Pour $l = 1,\dots,j$, on considère $f_l \in H^\infty(\mathbb{D})$ vérifiant :

$$|f_l| = \begin{cases} 1 & \text{sur } B_l \\ 1/2 & \text{sur } \mathbb{T} - B_l, \end{cases}$$

puis on pose $F = f_1 \otimes \cdots \otimes f_j$. Le passage à la limite dans $\|C_{\tilde{\phi}}(F^n)\|_2^2 \geq C^2\|F^n\|_2^2$ donne le résultat. □

Lemme 4.6 *Sous les hypothèses du théorème 4.9, si C_ϕ est semblable à une isométrie, alors $\phi(it) \in i\mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Preuve : Soit $V = \{z \in \mathbb{T}^\infty;\ \tilde{\phi}(z) \notin \mathbb{T}^\infty\}$. Puisque $\tilde{\phi}$ est continue, V est un ouvert. S'il est non vide, il existe des ouverts B_l de $\mathbb{T}$ tels que $B = B_1 \times \cdots \times B_l \times \mathbb{T} \times \cdots \subset V$, et $m(B) > 0$. On pose $B^{(j)} = \left(\tilde{\phi}^{(j)}\right)^{-1}(B) \cap \mathbb{T}^\infty$. Comme dans la preuve du théorème 4.8, on montre qu'il y a contradiction et que $V = \varnothing$. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|2^{-\phi(it)}| = 1$, ce qui donne le résultat. □

On suppose donc que C_ϕ est semblable à une isométrie, et on pose $F(s) = 2^{-\varphi(s)}$. Puisque $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$, F est une fonction bornée sur $\mathbb{C}_+$ avec $|F(s)| \leq 1$ si $s \in \mathbb{C}_+$. Posons maintenant $G(s) = \frac{1}{F(s)}$. Puisque φ converge uniformément sur $i\mathbb{R}$, φ est bornée sur $\mathbb{C}_+$, et G aussi. Or, $|G(it)| = 1$ si $t \in \mathbb{R}$, et donc, par le principe du maximum, $|G(s)| \leq 1$ si $s \in \mathbb{C}_+$. Finalement, on obtient que $|F(s)| = 1$ si $s \in \mathbb{C}_+$, ou encore $\Re\varphi(s) = 0$. Ceci impose que $\varphi(s) = c_1$, avec $\Re(c_1) = 0$. □

4.5 Opérateurs de composition cycliques

Un opérateur T sur un Hilbert H est dit cyclique s'il existe $u \in H$ tel que son orbite $Orb(T,u) = \{T^n u;\ n \geq 0\}$ engendre un espace vectoriel dense dans H. Remarquons que pour prouver que u est un vecteur cyclique pour T, il suffit de prouver que :

$$< T^n u, f >= 0 \text{ pour } n \geq 0 \implies f = 0.$$

Nous cherchons des conditions nécessaires ou suffisantes pour que les opérateurs de composition C_ϕ et leurs adjoints C_ϕ^* soient cycliques sur $\mathcal{H}^2$. Nous isolons d'abord quelques résultats classiques :

Lemme 4.7 *Si l'adjoint de T admet une valeur propre de multiplicité supérieure ou égale à 2, alors T n'est pas cyclique.*

Preuve : Soit u un vecteur cyclique pour T. On a :

$$\overline{\mathrm{vect}}\big(Orb(T,u)\big) \subset \overline{ImT} \oplus \mathbb{C}u.$$

Si codim $Im\ T \geq 2$, il existe $y \neq 0 \in H$ tel que $< v,y >= 0$ pour tout v de $\overline{\mathrm{vect}}\big(Orb(T,u)\big)$, et u ne peut pas être cyclique pour T. On a donc codim $Im\ T \leq 2$, et T^* n'a pas de valeurs propres de multiplicité supérieure à 2. □

Lemme 4.8 *Une série de Dirichlet n'est jamais injective sur son demi-plan d'absolue convergence.*

Ce résultat se trouve par exemple dans [18].

Théorème 4.10 *Soit $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ un opérateur de composition sur $\mathcal{H}^2$. Alors :*

a) Si $c_0 = 0$, C_ϕ n'est pas cyclique. Si $\Im\phi$ est bornée, C_ϕ^* est cyclique sauf si $\phi(s) = c_1$.

b) Si $c_0 = 1$, C_ϕ^* est cyclique.

c) Si $c_0 \geq 1$, C_ϕ^* est cyclique, C_ϕ ne l'est pas.

Preuve :

1. Si $c_0 = 0$, ϕ n'est pas injective sur $\mathbb{C}_{1/2}$. Il existe donc 3 points distincts (en fait, une infinité) a,b,c de $\mathbb{C}_{1/2}$ avec $\phi(a) = \phi(b) = \phi(c)$. En particulier :

$$C_\phi^*(K_a - K_b) = C_\phi^*(K_a - K_c) = 0.$$

   0 est valeur propre de C_ϕ^* de multiplicité au moins 2, et C_ϕ n'est pas cyclique d'après le lemme 4.7.

   D'autre part, si on suppose que $\Im\phi$ est bornée, alors ϕ admet un point fixe β dans $\mathbb{C}_{1/2}$.Considérons en effet $h = \psi_1 \circ \phi \circ \psi_1^{-1}$. Si h est sans point fixe dans $\mathbb{D}$, il existe $\omega \in \mathbb{T}$, point de Denjoy-Wolff de h, tel que $h_n(0)$ converge vers ω. Mais alors, $\phi_n(1)$ converge vers $\psi_1^{-1}(\omega) \in i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Puisque $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$, le cas $\psi_1^{-1}(\omega) \in i\mathbb{R}$ est impossible. D'autre part, puisque $\phi(s) = c_1 + \sum_{n\geq 2} c_n n^{-s}$, il existe un demi-plan où ϕ est bornée, et il est tout aussi impossible que $\Re\phi_n(1)$ tende vers $+\infty$. Par conséquent, l'orbite $(\phi_n(1))$ restant bornée dans $\mathbb{C}_{1/2}$, h admet un point fixe dans $\mathbb{D}$, donc ϕ admet un point fixe β dans $\mathbb{C}_+$. Puisque $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$, nécessairement $\beta \in \mathbb{C}_{1/2}$.

   Pour $\phi(s) \neq c_1$, il existe en particulier $\alpha \in \mathbb{C}_{1/2}$ tel que $\phi_n(\alpha) \to \beta$, sans jamais stationner. Alors, K_α est cyclique pour C_ϕ^*. En effet,

$$< \left(C_\phi^*\right)^n (K_\alpha), f >= 0 \iff f(\phi_n(\alpha)) = 0,$$

   et ceci n'est possible pour tout n que si f est la fonction nulle.

2. Si $c_0 \geq 1$, et $\phi(s) \neq s + i\tau$, alors une petite modification du lemme 4.2 prouve que pour $\alpha \in \mathbb{C}_{1/2}$, $\Re(\phi_n(\alpha)) \to +\infty$. Mais alors, K_α est cyclique pour C_ϕ^*, car une fonction qui serait orthogonale à son orbite aurait des zéros dans tout demi-plan $\mathbb{C}_\theta$. C'est impossible, car si $f(s) = a_k k^{-s} + a_{k+1}(k+1)^{-s} + \dots$, avec $a_k \neq 0$, alors $f(s) \sim_{\Re(s)\to+\infty} a_k k^{-s}$.

3. Si $c_0 = 1$ et $\phi(s) = s + i\tau$: rappelons que si $u \in H^2(\mathbb{D})$, $u \neq 0$, et si $(a_n)_{n\geq 1}$ désigne la suite de ses zéros, alors :

$$\sum_{n\geq 1}(1 - |a_n|) < +\infty$$

   (ou bien u a un nombre fini de zéros, ou bien ils s'approchent très vite du bord). Soit $\alpha \in \mathbb{C}_{1/2}$. Montrons que K_α est cyclique pour C_ϕ^*. On a en effet $\left(C_\phi^*\right)^n (K_\alpha) =$

$K_{\alpha+in\tau}$. Si $f \in \left\{\left(C_\phi^*\right)^n(K_\alpha)\right\}^\perp$, alors $f(\alpha+in\tau)=0$ pour tout $n \geq 1$. On pose toujours $\varphi_1(z)=(1+z)/(1-z)$, et $T_{1/2}(s)=s+1/2$. D'après le théorème 2.8, $g=f\circ T_{1/2}\circ\varphi_1 \in H^2(\mathbb{D})$. Soit $b_n=\alpha+in\tau$. On a :

$$\begin{aligned} f(b_n)=0 &\iff g\left(\varphi_1^{-1}\circ T_{-1/2}(b_n)\right)=0 \\ &\iff g\left(\frac{2b_n-3}{2b_n+2}\right)=0. \end{aligned}$$

Si f n'est pas la fonction nulle, on a donc :

$$\sum_{n\geq 1}\left(1-\left|\frac{2b_n-3}{2b_n+2}\right|\right)<+\infty.$$

Or, $\left|\frac{2b_n-3}{2b_n+2}\right|=1+\frac{d}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$, et il est impossible que la série précédente converge : C_ϕ^* est cyclique.

4. Si $c_0>1$, alors :

$$\begin{aligned} <C_\phi^*(p_j^{-s}),n^{-s}> &= <p_j^{-s},C_\phi(n^{-s})> \\ &= <p_j^{-s},n^{-c_0 s}n^{-\varphi(s)}> \\ &= 0. \end{aligned}$$

En particulier, $KerC_\phi^*$ est de dimension infinie, et C_ϕ n'est pas cyclique.

□

Remarque : Pour $c_0=1$, on ne peut pas a priori conclure immédiatement quand à la cyclicité de C_ϕ. Par exemple, pour $\phi(s)=s+c_1$, $C_\phi=C_{\phi_1}^*$, où $\phi_1(s)=s+\overline{c_1}$, et C_ϕ est donc cyclique d'après le b) du théorème précédent. En revanche, si $\phi(s)=s+4+4.2^{-s}$, alors $\phi(1)=\phi(2)=7$, et ϕ n'est pas injective. Comme dans la preuve précédente, cela implique que C_ϕ n'est pas cyclique.

Remarque : Il existe un renforcement de la notion de cyclicité, l'hypercyclicité. Nous verrons au chapitre 6 quels sont les opérateurs de composition hypercycliques sur $\mathcal{H}^2$.

Chapitre 5

Compacité des opérateurs de composition sur $\mathcal{H}^p$

5.1 Le cas de $\mathcal{H}^\infty$

Sur $\mathcal{H}^\infty$, nous sommes capables de caractériser complètement les opérateurs de composition compacts :

Théorème 5.1 *Soit C_ϕ un opérateur de composition sur $\mathcal{H}^\infty$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_\varepsilon$, *où* $\varepsilon > 0$.

ii. C_ϕ *est compact.*

Rappelons que si C_ϕ définit un opérateur sur $\mathcal{H}^\infty$, alors $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$. La condition précédente est donc tout à fait similaire à celle qui caractérise les opérateurs de composition compacts sur $H^\infty(\mathbb{D})$ (rappelons [62] que si $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est holomorphe, C_ψ est compact sur $H^\infty(\mathbb{D})$ si, et seulement si, $\psi(\mathbb{D})$ est relativement compact dans $\mathbb{D}$). La preuve exige néanmoins quelques raffinements, essentiellement liés au caractère non borné des demi-plans $\mathbb{C}_\theta$. Nous commençons par énoncer et prouver deux lemmes sur les séries de Dirichlet, qui ont leur intérêt propre. Le premier est très proche du théorème de Bohr (théorème 1.1), et on peut le voir comme une version précisée de celui-ci.

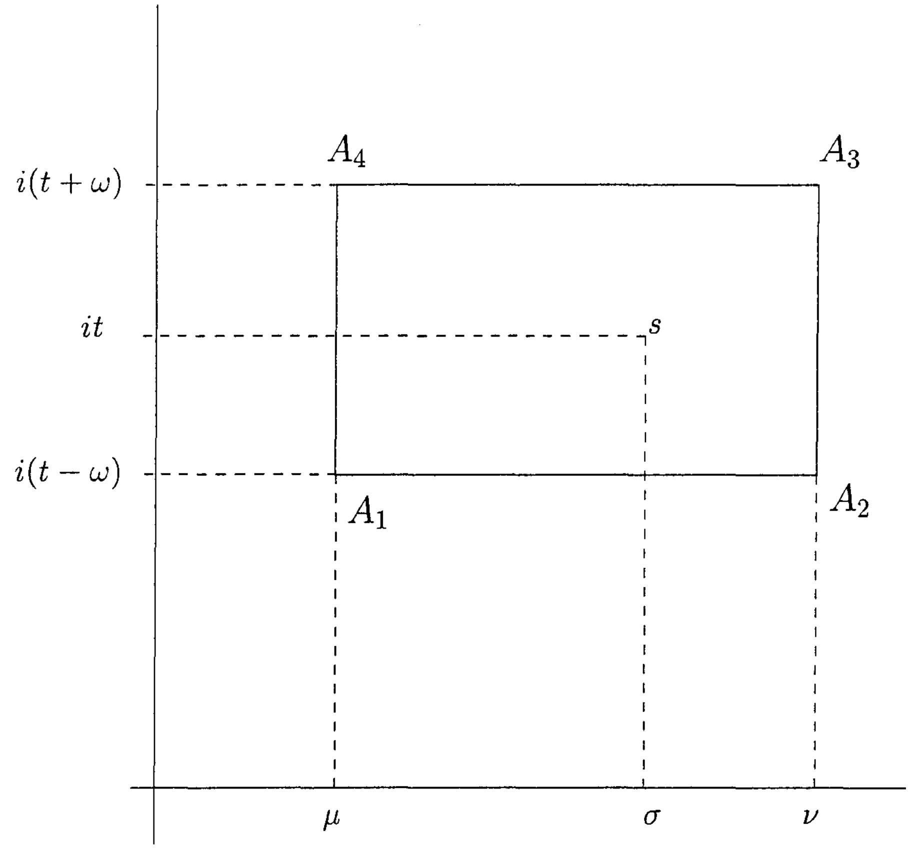
Lemme 5.1 *Soit $\sigma > 0$. Il existe une constante C (qui dépend uniquement de σ) telle que, pour tout $f = \sum_{k\geq 1} a_k k^{-s}$ dans $\mathcal{H}^\infty$ avec $\|f\|_\infty \leq 1$, pour tout s de $\mathbb{C}_+$ avec $\Re(s) = \sigma$, pour tout entier K :*

$$\left|\sum_{k=1}^{K} a_k k^{-s}\right| \leq C.$$

Preuve : Nous commençons par rappeler deux inégalités classiques, dont on pourra trouver une preuve dans [41, page 342] : Si $a > 0$, $\omega > 0$, alors :

$$\left|\int_{a-\omega i}^{a+\omega i} \frac{e^{xz}}{z} dz - 2\pi i\right| \leq \frac{2}{\omega} \times \frac{e^{xa}}{x}, \text{ si } x > 0 \tag{5.1}$$

$$\left|\int_{a-\omega i}^{a+\omega i} \frac{e^{xz}}{z} dz\right| \leq \frac{2}{\omega} \times \frac{e^{xa}}{-x}, \text{ si } x < 0. \tag{5.2}$$



Soit $f = \sum_{k\geq 1} a_k k^{-s}$ une fonction de $\mathcal{H}^\infty$, avec $\|f\|_{\mathcal{H}^\infty} \leq 1$. En interprétant les a_k comme les coefficients de Fourier de $\mathcal{D}f$, il est clair que $|a_k| \leq 1$ pour tout k. Choisissons μ, ν et ω trois réels strictement positifs, qui satisfont $\mu < \sigma < \nu$, et dont une valeur précise sera imposée ultérieurement. Soit K un entier, et $s = \sigma + it$, $t \in \mathbb{R}$. La formule de Cauchy appliquée à la fonction :

$$g(z) = \frac{e^{\log(K+1/2)(z-s)}}{z-s} f(z),$$

et au rectangle dont les sommets sont les points $A_1 = \mu + i(t-\omega)$, $A_2 = \nu + i(t-\omega)$, $A_3 = \nu + i(t+\omega)$, et $A_4 = \mu + i(t+\omega)$ donne :

$$2\pi i f(s) = \int_{A_1}^{A_2} g(z)dz + \int_{A_2}^{A_3} g(z)dz + \int_{A_3}^{A_4} g(z)dz + \int_{A_4}^{A_1} g(z)dz,$$

ou encore :

$$\begin{aligned} -2\pi i \sum_{k\leq K} a_k k^{-s} &= -2\pi i f(s) + \left[\int_{A_2}^{A_3} g(z)dz - 2\pi i \sum_{k\leq K} a_k k^{-s}\right] + \\ &\quad \int_{A_1}^{A_2} g(z)dz + \int_{A_3}^{A_4} g(z)dz + \int_{A_4}^{A_1} g(z)dz. \end{aligned}$$

Il suffit de prouver que chaque terme apparaissant à droite de l'égalité est borné par une constante qui ne dépend ni de t, ni de f, ni de K, mais simplement de σ. En premier lieu, nous avons $|f(s)| \leq 1$. Ensuite, écrivons :

$$\begin{aligned}\int_{A_2}^{A_3} g(z)dz - 2\pi i \sum_{k\leq K} a_k k^{-s} = \\ &\sum_{k\leq K} a_k k^{-s} \left(\int_{\nu+i(t-\omega)}^{\nu+i(t+\omega)} \frac{e^{[\log(K+1/2)-\log(k)](z-s)}}{z-s} dz - 2\pi i \right) \\ &+ \sum_{k>K} a_k k^{-s} \int_{A_2}^{A_3} \frac{e^{[\log(K+1/2)-\log(k)](z-s)}}{z-s} dz.\end{aligned}$$

En introduisant les inégalités (5.1) et (5.2), nous obtenons que :

$$\left| \int_{A_2}^{A_3} g(z)dz - 2\pi i \sum_{k\leq K} a_k k^{-s} \right| \leq \frac{2}{\omega} \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k||k^{-s}| \frac{\left(\frac{K+1/2}{k}\right)^{\nu-\sigma}}{\left|\log(K+1/2) - \log(k)\right|}.$$

Mais $\left|\log(K+1/2) - \log(k)\right| \geq \frac{1}{2} \min\left(\frac{1}{K+1/2}, \frac{1}{k}\right)$, et donc :

$$\left| \int_{A_2}^{A_3} g(z)dz - 2\pi i \sum_{k\leq K} a_k k^{-s} \right| \leq \frac{4}{\omega} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(K+1/2)^{\nu-\sigma+1}}{k^{\nu-1}}.$$

Si l'on choisit $\nu > 2$ et ω tel que $\omega = (K+1/2)^{\nu-\mu+1}$, on déduit finalement que :

$$\left| \int_{A_2}^{A_3} g(z)dz - 2\pi i \sum_{k\leq K} a_k k^{-s} \right| \leq C_1.$$

Pour les autres termes, observons que :

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} g(z)dz \right| = \left| \int_{\mu+i(t-\omega)}^{\nu+i(t-\omega)} \frac{e^{\log(K+1/2)(z-s)}}{z-s} f(z)dz \right| \leq \frac{\nu-\mu}{\omega} (K+1/2)^{\nu-\mu} \leq C_2.$$

De la même façon, $\left|\int_{A_3}^{A_4} g(z)dz\right| \leq C_2$. Il ne reste plus qu'à étudier $\left|\int_{A_4}^{A_1} g(z)dz\right|$. Pour ce faire, posons $\delta = \sigma - \mu > 0$. Il vient :

$$\begin{aligned}\left| \int_{A_4}^{A_1} g(z)dz \right| &\leq \left| \int_{\mu+i(t-\omega)}^{\mu+i(t+\omega)} \frac{(K+1/2)^{z-s}}{z-s} f(z)dz \right| \\ &\leq (K+1/2)^{-\delta} \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{dy}{\sqrt{\delta^2+y^2}} \\ &\leq (K+1/2)^{-\delta} \left[\log\left(\omega + \sqrt{\delta^2+\omega^2}\right) - \log\left(-\omega + \sqrt{\delta^2+\omega^2}\right)\right] \\ &\leq C_3 (K+1/2)^{-\delta} \log \omega \leq C_4.\end{aligned}$$

□

Remarque : Il est possible de donner une preuve non-explicite du lemme 5.1, en admettant le théorème de Bohr. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, et w un complexe avec $\Re(w) \geq \sigma$, on introduit les formes linéaires $L_{k,w}$ sur $\mathcal{H}^\infty$ définies par :

$$L_{k,w}\left(\sum_1^\infty a_n n^{-s}\right) = \sum_1^k a_n n^{-w}.$$

Pour $f \in \mathcal{H}^\infty$, le théorème de Bohr implique que $\sum_1^{+\infty} a_n n^{-w}$ converge uniformément pour $\Re(w) \geq \sigma$, ce qui implique à son tour :

$$\sup_{k,\Re(w)\geq\sigma} |L_{k,w}(f)| < +\infty.$$

Par Banach-Steinhaus, on a :

$$\sup_{k,\Re(w)\geq\sigma} \|L_{k,w}\| = C_\sigma < +\infty,$$

ce qui donne le lemme.

Le lemme suivant est une amélioration du théorème de Montel spécifique aux suites de fonctions de $\mathcal{H}^\infty$. Nous obtenons que la convergence est uniforme sur tout demi-plan strict de $\mathbb{C}_+$, et pas seulement sur les parties compactes, et aussi que la limite reste dans $\mathcal{H}^\infty$.

Lemme 5.2 *Soit (f_n) une suite bornée de $\mathcal{H}^\infty$. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{H}^\infty$ et une sous-suite (f_{n_k}) telle que (f_{n_k}) converge uniformément vers f sur chaque demi-plan $\mathbb{C}_\varepsilon$, où $\varepsilon > 0$.*

Preuve : Nous supposons que $\|f_n\|_{\mathcal{H}^\infty} \leq 1$, et écrivons $f_n = \sum_{k\geq 1} c_{k,n} k^{-s}$. Quitte à considérer une sous-suite et à utiliser le théorème de Montel, il est toujours possible de supposer que $c_{k,n} \to c_k$ pour chaque k et que (f_n) converge uniformément sur chaque compact de $\mathbb{C}_+$ vers une fonction bornée g. Posons $f(s) = \sum_{k\geq 1} c_k k^{-s}$; f est une série de Dirichlet qui converge absolument dans le demi-plan $\mathbb{C}_1$ (car $|c_k| \leq \sup_n \|f_n\|_\infty \leq 1$).

Commençons par prouver que $f = g$ dans le demi-plan $\mathbb{C}_1$. En effet, si $\delta > 0$, $s \in \mathbb{C}_1$, et K est un entier tel que $\sum_{k\geq K} |k^{-s}| \leq \delta/4$, alors :

$$|f_n(s) - f(s)| \leq \sum_{k=1}^{K-1} |c_{k,n} - c_k| + 2\sum_{k\geq K} \left|k^{-s}\right| < \delta$$

dès que n est suffisamment grand. Ainsi, $(f_n(s))$ converge pour chaque s de $\mathbb{C}_1$ vers $f(s)$, ce qui prouve que $f = g$ dans $\mathbb{C}_1$. f est donc une série de Dirichlet, convergente dans un demi-plan, qui peut être prolongée à $\mathbb{C}_+$ en une fonction holomorphe et bornée g : f est élément de $\mathcal{H}^\infty$, avec $\|f\|_{\mathcal{H}^\infty} \leq 1$.

Il nous reste à prouver que (f_n) converge uniformément vers f dans $\mathbb{C}_\varepsilon$, et pour cela il suffit de prouver la convergence uniforme sur la droite $\Re(s) = \varepsilon$. On fixe $0 < \eta < \varepsilon$, et $s = \varepsilon + it$. Nous avons :

$$|f_n(s) - f(s)| \leq \sum_{k=1}^{K-1} |c_{k,n} - c_k| + \left| \sum_{k=K}^{+\infty} (c_{k,n} - c_k) k^{-(s-\eta)} k^{-\eta} \right|.$$

Une transformation d'Abel conduit alors au résultat : si l'on pose $u_k(s) = (c_{k,n} - c_k)k^{-(s-\eta)}$, et $v_k = k^{-\eta}$, le lemme 5.1 affirme que :

$$\left| \sum_{k=K_1}^{K_2} u_k(s) \right| \leq C$$

(où C est une constante que ne dépend ni de K_1, ni de K_2, ni de t), tandis que l'on sait que :

$$|v_{k+1} - v_k| \leq \frac{C'}{k^{\eta+1}}.$$

□

Nous disposons désormais des outils nécessaires pour prouver le théorème 5.1.
Preuve : (du théorème 5.1)

- *i.* $\Longrightarrow$ *ii.* Considérons (f_n) une suite bornée de $\mathcal{H}^\infty$, et $f \in \mathcal{H}^\infty$ tel qu'une sous-suite (f_{n_k}) converge uniformément vers f sur $\mathbb{C}_\varepsilon$. Puisque $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_\varepsilon$, $(f_n \circ \phi)$ converge uniformément sur $\mathbb{C}_+$, donc dans $\mathcal{H}^\infty$, vers $f \circ \phi$: C_ϕ est compact.
- *ii.* $\Longrightarrow$ *i.* Soit (f_n) la suite bornée de $\mathcal{H}^\infty$ définie par $f_n(s) = n^{-s}$. Par compacité de C_ϕ, une suite extraite $f_{n_k} \circ \phi$ converge dans $\mathcal{H}^\infty$ vers g. Mais g ne peut être que la fonction nulle : en effet, pour chaque s de $\mathbb{C}_+$,
$$g(s) = \lim_{k \to +\infty} n_k^{-\phi(s)} = 0.$$
Maintenant, $\|f_{n_k} \circ \phi\|_{\mathcal{H}^\infty} = n_k^{-\inf_{\Re(s)>0} \Re\phi(s)}$. Par conséquent, si $\inf\limits_{\Re(s)>0} \Re\phi(s) = 0$, alors $\|f_{n_k} \circ \phi\|_{\mathcal{H}^\infty} = 1$, et ceci contredit que $(f_{n_k} \circ \phi)$ converge vers la fonction nulle!

□

Remarque : En utilisant le point de vue de Bohr et les lemmes de Schwarz et de Montel pour le polydisque, il est possible de donner une autre preuve de l'implication *i.* $\Longrightarrow$ *ii.* qui n'utilise pas le lemme 5.2. Supposons en effet que : $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_\varepsilon$, où $\varepsilon > 0$. Pour tout entier m, et toute fonction $f = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ de $\mathcal{H}^\infty$, on pose :

$$\Pi_m(f) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ P^+(n) \leq m}} a_n n^{-s},$$

où $P^+(n)$ désigne le plus grand facteur premier de n. En d'autres termes,

$$\mathcal{D}(\Pi_m(f))(z) = \mathcal{D}f(z_1, \ldots, z_m, 0, \ldots) = \mathcal{D}f(z^{(m)}).$$

Soit $m < m'$ et $(z_1,\dots,z_m) \in \mathbb{D}^m$ fixé; nous appliquons le lemme de Schwarz pour le polydisque $\mathbb{D}^{m'-m}$ à la fonction

$$g(z_{m+1},\dots,z_{m'}) = \mathcal{D}f(z_1,\dots,z_m,0,\dots) - \mathcal{D}f(z_1,\dots,z_m,z_{m+1},\dots,z_{m'},0,\dots).$$

On obtient alors :

$$\left|\mathcal{D}f\left(z^{(m)}\right) - \mathcal{D}f\left(z^{(m')}\right)\right| \leq 2\|\mathcal{D}f\|_{H^\infty(\mathbb{T}^\infty)} \max\{|z_j|;\ m < j \leq m'\},$$

ou de façon équivalente :

$$\left|\Pi_m(f)(s) - \Pi_{m'}(f)(s)\right| \leq 2\|f\|_{\mathcal{H}^\infty} \max_{m<j\leq m'} |p_j^{-s}|.$$

Considérons alors (f_n) une suite bornée de $\mathcal{H}^\infty$, avec par exemple $\|f_n\|_{\mathcal{H}^\infty} \leq 1$. En faisant tendre m' vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, et en utilisant que $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_\varepsilon$, on obtient :

$$\left\|\Pi_m(f_n)\circ\phi - f_n\circ\phi\right\|_{\mathcal{H}^\infty} \leq 2p_m^{-\varepsilon}. \tag{5.3}$$

Soit $K_m = \left\{z \in \mathbb{D}^m;\ |z_j| \leq p_j^{-\varepsilon},\ 1 \leq j \leq m\right\}$. K_m est une partie compacte de $\mathbb{D}^m$. Pour chaque m, $(\mathcal{D}(\Pi_m \circ f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions analytiques uniformément bornées de $\mathbb{D}^m$. En appliquant le théorème de Montel pour le polydisque $\mathbb{D}^m$, on obtient une sous-suite (f_{n_k}) telle que, pour tout m, $\mathcal{D}(\Pi_m \circ f_{n_k})$ converge uniformément sur K_m.

Ceci entraine que $(f_{n_k}\circ\phi)$ converge dans $\mathcal{H}^\infty$. En effet, fixons $\delta > 0$, et m tel que $p_m^{-\varepsilon} < \delta$. Il existe alors un entier k_0 pour lequel :

$$k,k' \geq k_0 \implies \sup\left\{\left|\mathcal{D}(\Pi_m\circ f_{n_k} - \Pi_m\circ f_{n_{k'}})(z)\right|;\ z\in K_m\right\} < \delta. \tag{5.4}$$

Par conséquent, si s est un élément de $\mathbb{C}_+$:

$$\begin{aligned}
|f_{n_k}\circ\phi(s) - f_{n_{k'}}\circ\phi(s)| &\leq |f_{n_k}\circ\phi(s) - \Pi_m(f_{n_k})\circ\phi(s)| \\
&\quad + |\Pi_m(f_{n_k})\circ\phi(s) - \Pi_m(f_{n_{k'}})\circ\phi(s)| \\
&\quad + |\Pi_m(f_{n_{k'}})\circ\phi(s) - f_{n_{k'}}\circ\phi(s)| \\
&\leq 5\delta,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé (5.3) pour obtenir une majoration du premier et du troisième terme, et (5.4) pour une majoration du second.

Lorsqu'un opérateur T sur un Banach X n'est pas compact, on peut mesurer sa non-compacité en calculant sa norme essentielle. Rappelons que celle-ci est définie par :

$$\|T\|_e = \inf\left\{\|T-K\|;\ K \text{ opérateur compact sur } X\right\}.$$

Théorème 5.2 *Si C_ϕ n'est pas compact sur $\mathcal{H}^\infty$, sa norme essentielle vaut 1.*

En particulier, $\|C_\phi\| = \|C_\phi\|_e$, et C_ϕ n'est "pas du tout" compact.

Preuve : Si C_ϕ n'est pas compact, il existe une suite (s_k) de $\mathbb{C}_+$ telle que $\Re\phi(s_k) \to 0$. Quitte à extraire une sous-suite, il existe $w \in \mathbb{T}$ tel que $2^{-\phi(s_k)} \to w$. On fixe (r_n) une suite de $]0,1[$, qui tend vers 1, et on pose :

$$f_n(s) = \frac{2^{-s} - r_n w}{w - r_n 2^{-s}}.$$

Chaque f_n est développable en série de Dirichlet absolument convergente sur $\mathbb{C}_+$, et $\|f_n\|_\infty \leq 1$. Fixons K un opérateur compact sur $\mathcal{H}^\infty$. Il est suffisant de prouver que $\limsup \|(C_\phi - K)f_n\| \geq 1$. Puisque K est compact, modulo le passage aux sous-suites, il existe $f \in \mathcal{H}^\infty$ telle que $\lim \|Kf_n - f\|_\infty = 0$. On a alors :

$$\|(C_\phi - K)f_n\|_\infty \geq \|C_\phi f_n - f\|_\infty - \|Kf_n - f\|_\infty,$$

et donc :

$$\limsup_n \|(C_\phi - K)f_n\|_\infty \geq \limsup_n \|C_\phi(f_n) - f\|_\infty.$$

Maintenant, si $s \in \mathbb{C}_+$, $f_n \circ \phi(s) \to -1$, et donc $|C_\phi(f_n)(s) - f(s)| \to |-1-f(s)|$. Si, pour un s de $\mathbb{C}_+$, $|-1-f(s)| \geq 1$, le résultat est prouvé. Sinon, par l'inégalité triangulaire, $|1 - f(s)| \geq 2 - |1 + f(s)| > 1$ pour tout s de $\mathbb{C}_+$. Nous allons alors utiliser la suite (s_k) introduite au début de cette preuve. Pour chaque n, il est clair que $f_n \circ \phi(s_k) \xrightarrow{k \to +\infty} 1$: si $\varepsilon > 0$, il existe donc un k tel que $|f_n \circ \phi(s_k) - f(s_k)| > 1 - \varepsilon$, et par passage à la limite :

$$\limsup_n \|f_n \circ \phi - f\|_\infty \geq 1.$$

Ceci achève la preuve du théorème 5.2, puisque $1 \leq \|C_\phi\|_e \leq \|C_\phi\| \leq 1$. □

5.2 Le cas de $\mathcal{H}^2$

5.2.1 Problèmes rencontrés

Soit $\phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$, $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$, telle que C_ϕ induise un opérateur de composition sur $\mathcal{H}^2$. Si $\varphi_1(z) = \frac{1+z}{1-z}$, alors $\psi = \varphi_1^{-1} \circ \phi \circ \varphi_1$ est une fonction holomorphe du disque dans lui-même, et par conséquent C_ψ est un opérateur continu sur $H^2(\mathbb{D})$. La continuité de C_ψ est l'argument essentiel employé par J.Gordon et H.Hedenmalm pour prouver la continuité de C_ϕ dans le cas où $c_0 \geq 1$. On pourrait s'attendre à ce que l'on puisse obtenir la compacité de C_ϕ à partir de celle de C_ψ. Cela est impossible car, si $c_0 \geq 1$, C_ψ n'est jamais compact.

Rappelons quelques résultats classiques concernant la compacité des opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ [62, chapitre 3]. Soit ψ holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. En utilisant l'image des noyaux reproduisants de $H^2(\mathbb{D})$ par C_ψ^*, on prouve que, si C_ψ est compact, alors :

$$\lim_{|z| \to 1} \frac{1 - |\psi(z)|}{1 - |z|} = +\infty.$$

Si ψ est de la forme $\psi = \varphi_1^{-1} \circ \phi \circ \varphi_1$, avec $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ et $c_0 \geq 1$, alors cette condition n'est jamais vérifiée. En effet, il existe un demi-plan où la série de Dirichlet φ converge normalement, et dans ce demi-plan, $|\varphi(s)| \leq A$, où A est une constante. Soit s_1 un réel assez grand, et $s_2 = \phi(s_1)$. Posons $z_1 = \varphi_1^{-1}(s_1)$ et $z_2 = \varphi_1^{-1}(s_2)$, de sorte que $z_2 = \psi(z_1)$. Il est clair que z_1 tend vers 1 si $\Re(s_1)$ tend vers $+\infty$. Maintenant,

$$1 - |z_1| = 1 - \left|\frac{s_1 - 1}{s_1 + 1}\right| = 1 - \left|\frac{\frac{s_2 - \varphi(s_1)}{c_0} - 1}{\frac{s_2 - \varphi(s_1)}{c_0} + 1}\right| = 1 - \left|\frac{s_2 - \varphi(s_1) - c_0}{s_2 - \varphi(s_1) + c_0}\right|.$$

Quand s_1 est grand, $|s_2|$ aussi car $c_0 \neq 0$. En notant $a = \varphi(s_1) + c_0$ et $b = \varphi(s_1) - c_0$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{s_2 - a}{s_2 - b} &= \frac{1 - \frac{a}{s_2}}{1 - \frac{b}{s_2}} \\
&= 1 - \frac{a}{s_2} + \frac{b}{s_2} + O(s_2^{-2}) \\
&= 1 - \frac{2c_0}{s_2} + O(s_2^{-2}).
\end{aligned}$$

Il existe donc une constante C' telle que :

$$\left|\frac{s_2 - \varphi(s_1) - c_0}{s_2 - \varphi(s_1) + c_0}\right| \leq 1 - \frac{C'}{|s_2|}.$$

En outre, de la même façon,

$$1 - |z_2| = 1 - \left|\frac{s_2 - 1}{s_2 + 1}\right| \leq \frac{C''}{|s_2|}.$$

En particulier,

$$\frac{1 - |\psi(z_1)|}{1 - |z_1|} \leq \frac{C''}{C'},$$

alors que z_1 peut être choisi aussi proche du cercle que l'on veut. Par conséquent, C_ψ n'est pas compact. Remarquons que c'est le comportement de ϕ au voisinage de $+\infty$ qui interdit toute compacité de C_ψ.

D'autre part, des difficultés surgissent aussi lorsque l'on étudie des conditions nécessaires de compacité. Généralement, l'étude de l'image des noyaux reproduisants par l'adjoint donne de bonnes conditions nécessaires de compacité pour les opérateurs de composition. L'application brutale de cette méthode conduit ici à des résultats modestes, et cette difficulté illustre bien l'insuffisance du demi-plan $\mathbb{C}_{1/2}$ vis à vis de $\mathcal{H}^2$.

Proposition 5.3 *Si C_ϕ est un opérateur de composition compact sur $\mathcal{H}^2$, alors :*

$$\frac{\zeta\big(2\Re(\phi(w))\big)}{\zeta\big(2\Re(w)\big)} \xrightarrow{\Re(w)\to 1/2} 0.$$

Preuve : Soit, pour $w \in \mathbb{C}_{1/2}$, $K_w = \sum_{n\geq 1} n^{-\overline{w}-s}$ le noyau reproduisant en w, de norme $\zeta(2\Re(w))^{1/2}$. Si (w_n) est une suite de $\mathbb{C}_{1/2}$ dont la partie réelle tend vers $1/2$, la suite $\left(\frac{K_{w_n}}{\|K_{w_n}\|}\right)$ tend faiblement vers 0 dans $\mathcal{H}^2$ (par exemple, car elle est bornée et que ses coefficients tendent vers 0). Maintenant, si C_ϕ est compact, C_ϕ^* aussi, et :

$$C_\phi^*\left(\frac{K_{w_n}}{\|K_{w_n}\|}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

En particulier, comme $C_\phi^*(K_{w_n}) = K_{\phi(w_n)}$, on obtient exactement le résultat annoncé. □

Cette proposition est pourtant inutile. Si $\phi(s) \neq s + i\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, le lemme 4.2 nous dit que $\phi(\mathbb{C}_{1/2}) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$, et dans ce cas la condition nécessaire est évidemment vérifiée. La proposition révèle donc simplement que les opérateurs induits par les $\phi(s) = s + i\tau$ ne sont pas compacts. Mais cela est clair, puisque dans ce cas C_ϕ est inversible!

Il nous faut alors introduire de nouveaux outils pour étudier la compacité des opérateurs de composition sur $\mathcal{H}^2$, et nous présentons dans la suite les résultats obtenus.

5.2.2 Premiers résultats

Dans le cas du disque, l'utilisation des produits de Blaschke permet de ramener l'étude de la compacité de C_ψ sur $H^p(\mathbb{D})$, p fini, à celle de C_ψ sur $H^2(\mathbb{D})$. Nous ne disposons pas dans le cadre des séries de Dirichlet d'un tel outil. Toutefois, en procédant par interpolation, il est possible de se restreindre à $\mathcal{H}^2$, modulo la perte du cas $p = 1$.

Proposition 5.4 *Soient $1 < p,q < +\infty$, et C_ϕ un opérateur de composition sur $\mathcal{H}^2$, avec $c_0 \geq 1$. Alors C_ϕ est compact sur $\mathcal{H}^p$ si et seulement si C_ϕ est compact sur $\mathcal{H}^q$.*

Remarque : La condition $c_0 \geq 1$ dans la proposition précédente permet de s'assurer que si l'opérateur C_ϕ est continu sur $\mathcal{H}^2$, il est continu sur tous les $\mathcal{H}^p$, $1 \leq p < +\infty$. La proposition reste valable si on sait a priori que C_ϕ est continu sur tous les $\mathcal{H}^p$, même si $c_0 = 0$.

Preuve : Il est bien connu (voir par exemple [40]) que si

$$\begin{aligned} T : L^p \to L^p &\quad \text{est compact,} \\ T : L^r \to L^r &\quad \text{est continu,} \end{aligned}$$

alors pour $q \in]p,r[$, $T : L^q \to L^q$ est compact. Supposons par exemple que $p < q$, et choisissons $r > q$. Alors, en notant P la projection de $L^p(\mathbb{T}^\infty)$ sur $H^p(\mathbb{T}^\infty)$, nous avons :

$$\begin{aligned} C_{\tilde{\phi}} \circ P : L^p(\mathbb{T}^\infty) \to L^p(\mathbb{T}^\infty) &\quad \text{est compact,} \\ C_{\tilde{\phi}} \circ P : L^r(\mathbb{T}^\infty) \to L^r(\mathbb{T}^\infty) &\quad \text{est continu.} \end{aligned}$$

Par conséquent, $C_{\tilde{\phi}} \circ P : L^q(\mathbb{T}^\infty) \to L^q(\mathbb{T}^\infty)$ est compact. Maintenant, si (F_n) est une suite de $H^q(\mathbb{T}^\infty)$ qui converge faiblement vers 0, (F_n) converge aussi faiblement vers zéro dans $L^q(\mathbb{T}^\infty)$, et $\|C_{\tilde{\phi}} \circ P(F_n)\|_q = \|C_{\tilde{\phi}}(F_n)\|_p$ tend vers 0 : C_ϕ est compact sur $\mathcal{H}^q$. □

Notre premier résultat positif est la compacité de C_ϕ lorsque $\phi(\mathbb{C}_+)$ reste éloigné des limites qui lui sont imposées.

Théorème 5.5 *Soient $1 \leq p,q < +\infty$, $\varepsilon > 0$, et $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$.*
a) Si $c_0 \geq 1$ et $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_\varepsilon$, alors C_ϕ est compact de $\mathcal{H}^p$ dans $\mathcal{H}^q$.
b) Si $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$, alors C_ϕ est compact de $\mathcal{H}^p$ dans $\mathcal{H}^\infty$.

Preuve :

a) Par un argument standard de factorisation, le même que celui effectué dans la preuve de la proposition 4.3, il suffit de prouver le résultat pour $\phi(s) = s + \varepsilon$. Nous prouvons d'abord que cet opérateur est compact sur $\mathcal{H}^2$. Ceci est dû à un argument très général : C_ϕ est un opérateur diagonal sur la base orthonormale (n^{-s}), et cette diagonale tend vers 0 : C_ϕ est compact sur $\mathcal{H}^2$, et donc sur tout $\mathcal{H}^q$ si $q \neq 1$.
Prouvons maintenant que C_ϕ est compact de $\mathcal{H}^p$ dans $\mathcal{H}^q$. Soit $\phi_1(s) = s + \varepsilon/2$. Alors $C_\phi = C_{\phi_1} \circ C_{\phi_1}$, mais C_{ϕ_1} envoie $\mathcal{H}^p$ dans $\mathcal{H}^q$ d'après le corollaire 3.3, et C_{ϕ_1} est compact sur $\mathcal{H}^q$ si $q \neq 1$.
Pour $q = 1$, il n'y a rien de plus à prouver, car nous venons de montrer que C_ϕ est compact de $\mathcal{H}^p$ dans $\mathcal{H}^2$ par exemple, et l'inclusion de $\mathcal{H}^2$ dans $\mathcal{H}^1$ est continue.

b) L'argument clé est ici le lemme 5.2. Fixons en effet (f_n) une suite bornée de $\mathcal{H}^p$, et posons $g_n = f_n\left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + s\right)$. Alors (g_n) est une suite bornée de $\mathcal{H}^\infty$, et d'après le lemme précité, une sous-suite (g_{n_k}) de (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{C}_{\varepsilon/2}$ vers un élément g de $\mathcal{H}^\infty$. En particulier, (f_{n_k}) converge uniformément sur $\mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$ vers une série de Dirichlet f qui est bornée sur ce même demi-plan. Maintenant, puisque $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$, $f \circ \phi$ est une série de Dirichlet bornée dans $\mathbb{C}_+$, et $C_\phi\,(f_{n_k})$ converge dans $\mathcal{H}^\infty$ vers $C_\phi(f)$.

□

Remarque : Le résultat précédent montre en particulier que si $c_0 = 0$, alors C_ϕ^2 est compact : en effet, d'après le lemme 4.2, nous savons que si $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$, alors $\phi^2(\mathbb{C}_+) \subset \phi(\mathbb{C}_{1/2}) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$. Pour autant, nous verrons plus loin que C_ϕ n'est pas toujours compact.

Contrairement au cas du disque, où si $\psi(\mathbb{D})$ est relativement compact dans $\mathbb{D}$, C_ψ est "très compact" (en particulier, C_ψ est Hilbert-Schmidt et appartient à toutes les classes de Schatten), l'inclusion $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_\varepsilon$ n'implique pas que C_ϕ est Hilbert-Schmidt. On a en effet le

Théorème 5.6 *Soit C_ϕ un opérateur de composition sur $\mathcal{H}^2$.*
a) Si C_ϕ est Hilbert-Schmidt, alors $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$.
b) Si $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_\eta$, où $\eta > 1/2$, alors C_ϕ est Hilbert-Schmidt.

Preuve :

a) Rappelons que C_ϕ est de Hilbert-Schmidt si et seulement si $\sum_{n\geq 2} \left\|n^{-\phi(s)}\right\|_2^2 < +\infty$. En appliquant le lemme 2.6, et en choisissant par exemple comme mesure de probabilité $d\mu = \frac{dt}{\pi(1+t^2)}$,
$$\left\|n^{-\phi(s)}\right\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}^\infty} \int_{\mathbb{R}} \left|n^{-\phi_\chi(\varepsilon+it)}\right|^2 d\mu(t)dm(\chi).$$
Si $\phi(\mathbb{C}_+) \not\subseteq \mathbb{C}_{1/2}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\phi(\mathbb{C}_\varepsilon) \not\subseteq \mathbb{C}_{1/2}$, et la proposition 4.1 de [25] assure que pour tout χ de $\mathbb{T}^\infty$, $\phi_\chi(\mathbb{C}_\varepsilon) \not\subseteq \mathbb{C}_{1/2}$. Maintenant, χ étant fixé, il existe

$E_\chi \subset \mathbb{R}$ tel que $\mu(E_\chi) > 0$ et, pour tout t de E_χ, $\Re\left(\phi_\chi(\varepsilon + it)\right) \leq 1/2$. On en déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}} \left|n^{-\phi_\chi(\varepsilon+it)}\right|^2 d\mu(t) \geq \mu(E_\chi)\frac{1}{n},$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 2} \|n^{-\phi(s)}\|_2^2 &\geq \int_{\mathbb{T}^\infty} \sum_{n\geq 2} \int_{\mathbb{R}} \left|n^{-\phi_\chi(\varepsilon+it)}\right|^2 d\mu(t) \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

C_ϕ n'est donc pas un opérateur de Hilbert-Schmidt.

b) Si $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_\eta$, alors le même calcul montre que :

$$\|n^{-\phi(s)}\|_2^2 \leq n^{-2\eta},$$

et la série converge pour $\eta > 1/2$.

□

Exemple : Si $\phi(s) = s + \omega$, $\Re(\omega) \geq 0$, C_ϕ est de Hilbert-Schmidt si, et seulement si, $\Re(\omega) > 1/2$. En particulier, pour $0 < \Re(\omega) \leq 1/2$, C_ϕ est un opérateur compact qui n'est pas de Hilbert-Schmidt. De tels exemples ne sont pas si simples à produire sur le disque.

Remarque : Si $\phi(s) = c_0 s + c_1 + \sum_{j=1}^{d} c_{q_j} q_j^{-s}$, où les (q_j) sont des entiers multiplicativement indépendants, alors C.Finet, H.Queffélec et A. Volberg ont prouvé dans [20] que :

- Pour $d = 1$ ou $d = 2$, C_ϕ est Hilbert-Schmidt si et seulement si $\Re(c_1) > |c_{q_1}| + \cdots + |c_{q_d}| + 1/2$.
- Pour $d \geq 3$, C_ϕ est Hilbert-Schmidt si et seulement si $\Re(c_1) \geq |c_{q_1}| + \cdots + |c_{q_d}| + 1/2$.

En particulier, la condition a) du théorème n'est pas suffisante, et la condition b) n'est pas nécessaire.

5.2.3 Fonction de comptage et obtention d'une condition suffisante

Les opérateurs de composition compacts sur $H^2(\mathbb{D})$ ont été complètement caractérisés par J.Shapiro dans [63]. Rappelons en quelques mots sa démarche. Le point de départ est la formule de Littlewood-Paley pour calculer la norme d'un élément de $H^2(\mathbb{D})$ par une intégrale sur le disque : si $f \in H^2(\mathbb{D})$,

$$\|f\|_2^2 = |f(0)|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|} dA(z), \tag{5.5}$$

où $dA = \frac{1}{\pi}dxdy$. Ceci conduit J.Shapiro à introduire, pour une fonction $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe, sa fonction de comptage définie par :

$$N_\psi(w) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{z\in\psi^{-1}(w)} \log\frac{1}{|z|} & \text{si } w \in \psi(\mathbb{D}) \\ 0 & \text{si } w \notin \psi(\mathbb{D}), \end{cases}$$

qui lui permet d'établir par un changement de variables non injectif la formule :

$$\|f\circ\psi\|_2^2 = |f\circ\psi(0)|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 N_\psi(z)dA(z).$$

La condition (vérifiée pour toute fonction holomorphe $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$) $N_\psi(z) = O\left(\log\frac{1}{|z|}\right)$ quand $|z| \to 1^-$ est une alternative pour prouver la continuité de C_ψ sur $H^2(\mathbb{D})$. J.Shapiro prouve que le renforcement de cette condition en :

$$N_\psi(z) = o\left(\log\frac{1}{|z|}\right) \text{ quand } |z| \to 1^-$$

caractérise complètement la compacité de C_ψ.

Nous allons suivre la même méthode pour les opérateurs de composition sur $\mathcal{H}^2$, même si nous n'obtiendrons pas un résultat aussi précis. Nous commençons donc par donner une nouvelle expression de la norme d'un élément de $\mathcal{H}^2$, sous la forme d'une intégrale d'aire :

Proposition 5.7 *Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout f de $\mathcal{H}^2$,*

$$\|f\|_2^2 = 4\int_{\mathbb{T}^\infty}\int_{\sigma=0}^{+\infty}\int_{t\in\mathbb{R}} \sigma|f_\chi'(\sigma+it)|^2 d\mu(t)d\sigma dm(\chi) + |f(\infty)|^2. \tag{5.6}$$

Preuve : D'après le lemme 2.6, pour tout $\sigma > 0$,

$$\int_{\mathbb{T}^\infty}\int_{\mathbb{R}} \sigma|f_\chi'(\sigma+it)|^2 d\mu(t)dm(\chi) = \sum_{n\geq 2} \sigma|a_n|^2 n^{-2\sigma}\log^2(n).$$

Une simple intégration par parties prouve que :

$$\int_0^{+\infty} n^{-2\sigma}\sigma d\sigma = \frac{1}{4\log^2 n}.$$

Ceci donne la proposition. □

Inspirés par la méthode de Shapiro, et la proposition précédente, nous introduisons la définition suivante :

Définition 5.1 *Soit $\phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$, $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$. On définit la fonction de comptage de ϕ par :*

$$\mathcal{N}_\phi(s) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{w\in\phi^{-1}(s)} \Re(w) & \textit{si } s \in \phi(\mathbb{C}_+) \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Nous commençons par prouver l'analogue de l'inégalité de Littlewood [62, paragraphe 10.3] pour cette fonction de comptage définie sur le demi-plan :

Proposition 5.8 *Soit* $\phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$, $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$, *avec* $c_0 \geq 1$. *Alors :*

$$\mathcal{N}_\phi(s) \leq \frac{1}{c_0}\Re(s) \text{ pour tout } s \text{ de } \mathbb{C}_+.$$

Preuve : Si $s \notin \phi(\mathbb{C}_+)$, le résultat est évident. Sinon, soient $w_1, \dots, w_N$ un nombre quelconque, mais fini, d'antécédents (différents!) de s par ϕ. On rappelle que, pour $\xi > 0$, ψ_ξ est l'application conforme de $\mathbb{C}_+$ sur $\mathbb{D}$ définie par : $\psi_\xi(s) = \dfrac{s-\xi}{s+\xi}$. On introduit $\psi = \psi_{c_0\xi} \circ \phi \circ \psi_\xi^{-1}$, qui vérifie $\psi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, et :

$$\psi(0) = \frac{\varphi(\xi)}{2c_0\xi + \varphi(\xi)}.$$

Clairement, $\psi(\psi_\xi(w_k)) = \psi_{c_0\xi}(s)$, et comme ψ est une fonction holomorphe du disque dans lui-même, l'inégalité de Littlewood affirme que :

$$\sum_1^N \log\left|\frac{1}{\psi_\xi(w_k)}\right| \leq \log\left|\frac{1-\overline{\psi_{c_0\xi}(s)}\psi(0)}{\psi_{c_0\xi}(s) - \psi(0)}\right|. \tag{5.7}$$

Mais, si ω désigne l'un quelconque des w_i, on a :

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{1}{\psi_\xi(\omega)}\right| &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{|\omega|^2 + 2\xi\Re(\omega) + |\xi|^2}{|\omega|^2 - 2\xi\Re(\omega) + |\xi|^2}\right| \\ &= \frac{1}{2}\log\left|1 + \frac{4\xi\Re(\omega)}{|\omega|^2 - 2\xi\Re(\omega) + |\xi|^2}\right|.\end{aligned}$$

Comme ω est dans un ensemble fini, si $\varepsilon > 0$ est fixé, pour ξ assez grand et pour $i = 1, \dots, N$, on a

$$\log\left|\frac{1}{\psi_\xi(w_i)}\right| \geq 2(1-\varepsilon)\frac{\Re(w_i)}{\xi}. \tag{5.8}$$

De même, si ξ est choisi assez grand :

$$\log\left|\frac{1-\overline{\psi_{c_0\xi}(s)}\psi(0)}{\psi_{c_0\xi}(s) - \psi(0)}\right| \leq (1+\varepsilon)\log\left|\frac{1}{\psi_{c_0\xi}(s)}\right| \leq 2(1+\varepsilon)^2\frac{\Re(s)}{c_0\xi}. \tag{5.9}$$

La juxtaposition des trois inégalités (5.7), (5.8) et (5.9) donne :

$$\sum_1^N \Re(w_k) \leq \frac{(1+\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)}\frac{\Re(s)}{c_0}.$$

Il suffit de faire tendre ε vers 0, puis N vers $+\infty$ pour obtenir la proposition. □

La formule (5.6) nécessitant une intégrale sur $\mathbb{T}^\infty$, nous aurons besoin de toutes les fonction de comptage $\mathcal{N}_{\phi_\chi}$, $\chi \in \mathbb{T}^\infty$. Toutefois, certaines estimations de $\mathcal{N}_\phi$ se transmettent bien à $\mathcal{N}_{\phi_\chi}$, comme l'illustre la

Proposition 5.9 *Soit $\phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$, $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$, $c_0 \geq 1$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\theta > 0$ tels que, pour tout s de $\mathbb{C}_+$ avec $\Re(s) \leq \theta$,*

$$\mathcal{N}_\phi(s) \leq \varepsilon \Re(s).$$

Alors, pour tout χ de $\mathbb{T}^\infty$, pour tout s de $\mathbb{C}_+$ avec $\Re(s) \leq \theta$,

$$\mathcal{N}_{\phi_\chi}(s) \leq \varepsilon \Re(s).$$

Preuve : Rappelons que $\phi_\tau(s) = c_0 s + \varphi(s + i\tau)$, et que les fonctions ϕ_χ sont les limites normales des ϕ_τ. Du fait que $\phi_\tau(w - i\tau) = \phi(w) - ic_0\tau$, il est facile de vérifier que $\mathcal{N}_{\phi_\tau}(s - ic_0\tau) = \mathcal{N}_\phi(s)$.

Supposons maintenant que la proposition n'est pas réalisée pour un χ de $\mathbb{T}^\infty$, et pour un s avec $\Re(s) \leq \theta$. En particulier, il existe $w_1, \dots, w_N$ des éléments de $\mathbb{C}_+$ vérifiant $\phi_\chi(w_k) = s$ et :

$$\Re(w_1) + \cdots + \Re(w_N) > \varepsilon \Re(s).$$

On fixe $\eta > 0$ tel que $\Re(w_1) + \cdots + \Re(w_N) - N\eta > \varepsilon \Re(s)$, et on pose $B_k = B(w_k, \eta) = \{w \in \mathbb{C}_+ ;\ |w - w_k| < \eta\}$. Il existe une suite (τ_n) telle que ϕ_{τ_n} tende uniformément vers ϕ_χ sur tous les B_k. Comme $s \in \phi_\chi(B_k)$ pour chaque k, le lemme d'Hurwitz pour les suites de fonctions holomorphes indique qu'il existe n tel que $s \in \phi_{\tau_n}(B_k)$ pour $k = 1, \dots, N$. Soit $w'_k \in B_k$ tel que $\phi_{\tau_n}(w'_k) = s$. Alors :

$$\Re(w'_1) + \cdots + \Re(w'_N) > \varepsilon \Re(s).$$

Ceci contredit que $\mathcal{N}_{\phi_{\tau_n}}(s) \leq \varepsilon \Re(s)$. □

Nous pouvons alors énoncer et prouver le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 5.10 *Soit $\phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$, $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$, $c_0 \geq 1$. On suppose que :*

a) $\Im\varphi$ est bornée sur $\mathbb{C}_+$.

b) $\mathcal{N}_\phi(s) = o(\Re(s))$ si $\Re(s) \to 0$.

Alors C_ϕ est compact sur $\mathcal{H}^2$.

Preuve : Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{H}^2$ convergeant faiblement vers 0, avec $\|f_n\|_2 \leq 1$, et A une constante telle que $|\Im\varphi| \leq A$. D'après la formule (5.6) :

$$\|f_n \circ \phi\|_2^2 = |f_n \circ \phi(\infty)|^2 + 4 \int_{\mathbb{T}^\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^1 \sigma \left| f'_{n,\chi^{c_0}}(\phi_\chi(\sigma + it)) \right|^2 \left| \phi'_\chi(\sigma + it) \right|^2 dt d\sigma dm(\chi).$$

Le premier terme ne pose pas de problèmes : $|f_n(+\infty)|$ tend vers 0 si n tend vers $+\infty$. Pour le second, nous commençons par effectuer le changement de variables (non injectif) $w = \phi_\chi(\sigma + it)$. Remarquons que, puisque $t \in [0,1]$, $-A \leq \Im w \leq c_0 + A$. En appliquant par exemple le théorème 2.4.18 de [19], il vient :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_0^1 \sigma \left| f'_{n,\chi^{c_0}}(\phi_\chi(\sigma + it)) \right|^2 \left| \phi'_\chi(\sigma + it) \right|^2 dt d\sigma \leq \int_{\mathbb{R}_+} \int_{-A}^{A + c_0} \left| f'_{n,\chi^{c_0}}(s) \right|^2 \mathcal{N}_{\phi_\chi}(s) dt d\sigma.$$

On fixe $\varepsilon > 0$, et on pose $\theta > 0$ tel que, si $s = \sigma + i$, $\Re(s) < \theta \implies \mathcal{N}_\phi(s) \leq \varepsilon\Re(s)$. On coupe l'intégrale en deux :
1. D'une part,

$$\int_{\mathbb{T}^\infty}\int_0^\theta\int_{-A}^{A+c_0}\left|f'_{n,\chi^{c_0}}(s)\right|^2\mathcal{N}_{\phi_\chi}(s)dm(\chi)d\sigma dt \leq \varepsilon\int_{\mathbb{T}^\infty}\int_0^{+\infty}\int_{-A}^{A+c_0}\left|f'_{n,\chi^{c_0}}(s)\right|^2\Re(s)dm(\chi)d\sigma dt.$$

Maintenant, en raisonnant comme dans la preuve de la formule (5.6), on trouve que cette quantité est majorée par : $(2A+c_0)\varepsilon\|f_n\|_2^2$.
2. D'autre part, d'après la proposition 5.8, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^\infty}\int_\theta^{+\infty}\int_{-A}^{A+c_0}\left|f'_{n,\chi^{c_0}}(s)\right|^2\mathcal{N}_{\phi_\chi}(s)dtd\sigma dm(\chi) &\leq \int_{\mathbb{T}^\infty}\int_\theta^{+\infty}\int_{-A}^{A+c_0}\left|f'_{n,\chi^{c_0}}(s)\right|^2\frac{\Re(s)}{c_0}dtd\sigma dm(\chi)\\ &\leq \frac{2A+c_0}{c_0}\int_\theta^{+\infty}\sigma\sum_{k\geq1}|a_{n,k}|^2(\log^2 k)k^{-2\sigma}d\sigma,\end{aligned}$$

où on a écrit $f_n(s) = \sum_{k\geq1}a_{n,k}k^{-s}$. On fixe K assez grand tel que, pour $k \geq K$, $\log^2 k\int_\theta^{+\infty}\sigma k^{-2\sigma}d\sigma \leq \varepsilon$. En notant $M = \max_k \log^2 k\int_\theta^{+\infty}\sigma k^{-2\sigma}d\sigma$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{T}^\infty}\int_\theta^{+\infty}\int_{-A}^{A+c_0}\left|f'_{n,\chi^{c_0}}(s)\right|^2\mathcal{N}_{\phi_\chi}(s)dtd\sigma dm(\chi) \leq \frac{2A+c_0}{c_0}\left(M\sum_{k=1}^K|a_{n,k}|^2+\varepsilon\right).$$

Il reste à remarquer que, pour chaque k de $1,\dots,K$, $a_{n,k}\to 0$ si $n\to+\infty$ pour voir que $\|f_n\circ\phi\|_2^2\to 0$, et la compacité de C_ϕ est démontrée. □

Corollaire 5.11 *Soit $\phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$, $\phi(s) = c_0 s + c_1 + \sum_{n\geq2}c_n n^{-s}$. On suppose que :*
a) $\sum_{n\geq2}|c_n|\log n \leq c_0$.
b) $\frac{\Re\phi(s)}{\Re s}\xrightarrow{\Re s\to0^+}+\infty$.
Alors C_ϕ est compact.

Preuve : La condition a) assure que $\Im\varphi$ est bornée sur $\mathbb{C}_+$, et que ϕ est injective. Mais dans ce cas, si $w\in\phi(\mathbb{C}_+)$, $\mathcal{N}_\phi(w) = \Re(\phi^{-1}(w))$. La condition b) du corollaire entraîne alors la condition b) du théorème 5.10. □

Remarque : Pour d'autres conditions suffisantes de compacité concernant le cas $c_0 = 0$, on pourra se reporter à [20].

Question : L'hypothèse $\Im\varphi$ bornée sur $\mathbb{C}_+$ semble simplement être un intermédaire technique. Le théorème reste-t-il vrai sans cette condition?

5.2.4 Noyaux reproduisants partiels et obtention d'une condition nécessaire

Définition 5.2 *Pour $w \in \mathbb{C}_+$, et $l \geq 1$, on définit le noyau reproduisant partiel d'ordre l en w par :*

$$\begin{aligned} K_{l,w}(s) &= \prod_{j=1}^{l} \left(\sum_{n\geq 1} p_j^{-n(\overline{w}+s)} \right) \\ &= \sum_{\substack{n\geq 1 \\ P^+(n)\leq p_l}} n^{-\overline{w}} n^{-s} \end{aligned}$$

($P^+(n)$ désigne le plus grand diviseur premier de n).

L'avantage de ces noyaux reproduisants partiels est qu'ils sont définis pour w parcourant $\mathbb{C}_+$. Par un calcul semblable à celui effectué dans la preuve du théorème 2.6, on voit facilement que :

$$\|K_{l,w}\|_2 = \prod_{j=1}^{l} \left(\frac{1}{1 - p_j^{-2\Re(w)}} \right)^{1/2}.$$

$K_{l,w}$ reproduit partiellement $\mathcal{H}^2$: si $f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^2$, on a

$$< f, K_{l,w} >= \sum_{P^+(n)\leq p_l} a_n n^{-w}.$$

Pour certains opérateurs de composition C_ϕ, $K_{l,w}$ se comporte bien vis à vis de C_ϕ^* :

Proposition 5.12 *Soit $\phi(s) = c_0 s + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n^{-s}$, avec $c_n = 0$ pour $P^+(n) > p_l$.*
a) Si $c_0 \neq 0$, alors $C_\phi^*(K_{l,w}) = K_{l,\phi(w)}$.
b) Si $c_0 = 0$, alors $C_\phi^*(K_{l,w}) = K_{\phi(w)}$.

Preuve :

a) Pour $c_0 \neq 0$ et $n \geq 2$, nous calculons $n^{-\phi(s)}$:

$$\begin{aligned} n^{-\phi(s)} &= (n^{c_0})^{-s} n^{-\varphi(s)} \\ &= (n^{c_0})^{-s} n^{-c_1} \exp\left(- \sum_{\substack{k=2 \\ P^+(k)\leq p_l}}^{+\infty} c_k k^{-s} \log n \right) \\ &= (n^{c_0})^{-s} n^{-c_1} \prod_{\substack{k=2 \\ P^+(k)\leq p_l}}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j (c_k \log n)^j \left(k^j\right)^{-s}}{j!} \\ &= (n^{c_0})^{-s} n^{-c_1} \left(1 + \sum_{k\geq 2} b_k k^{-s} \right), \end{aligned}$$

où $b_k = 0$ si $P^+(k) > l$ (ces calculs formels sur les séries de Dirichlet sont justifiés dans [25, paragraphe 3]). Par conséquent, si $P^+(n) > p_l$, on obtient :

$$< n^{-s}, C_\phi^*(K_{l,w}) > = < n^{-\phi(s)}, K_{l,w} > = 0.$$

En revanche, si $P^+(n) \leq p_l$, la série de Dirichlet de $n^{-\phi(s)}$ ne fait intervenir que des termes en k^{-s} pour lesquels $P^+(k) \leq p_l$, et donc :

$$< n^{-s}, C_\phi^*(K_{l,w}) > = < n^{-\phi(s)}, K_{l,w} > = < n^{-\phi(s)}, K_w > = n^{-\phi(w)}.$$

b) $c_0 = 0$: Nous avons cette fois, pour $n \geq 1$,

$$n^{-\phi(s)} = \sum_1^{+\infty} b_k k^{-s},$$

avec $b_k = 0$ si $P^+(k) > l$, ce qui entraîne directement pour chaque entier n

$$< n^{-\phi(s)}, K_{l,w} > = < n^{-\phi(s)}, K_w > = n^{-\phi(w)},$$

et donc $C_\phi^*(K_{l,w}) = K_{\phi(w)}$.

□

On déduit de ces considérations le :

Théorème 5.13 *Soit $l \in \mathbb{N}$, et C_ϕ, $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$, un opérateur de composition sur $\mathcal{H}^2$, tels que $c_n = 0$ si $P^+(n) > p_l$. On suppose que C_ϕ est compact. Alors :*

a) Si $c_0 \geq 1$, $\lim_{\Re(s)\to 0} \dfrac{\Re\phi(s)}{\Re s} = +\infty$.

b) Si $c_0 = 0$, $\lim_{\Re(s)\to 0} \Re(s)^l \zeta(2\Re\phi(s)) = 0$.

Preuve :

a) Soit (s_n) une suite de $\mathbb{C}_+$ avec $\Re(s_n) \to 0$. On peut toujours supposer que $\Re\phi(s_n) \to 0$. En utilisant le même raisonnement que celui employé avec les noyaux reproduisants exacts, il est facile de voir que $\dfrac{K_{l,s_n}}{\|K_{l,s_n}\|}$ tend faiblement vers 0. La compacité de C_ϕ^* implique donc que

$$C_\phi^*\left(\frac{K_{l,s_n}}{\|K_{l,s_n}\|}\right) = \frac{K_{l,\phi(s_n)}}{\|K_{l,s_n}\|} \text{ tend vers } 0$$

ou encore que :

$$\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{1-p_j^{-2\Re s_n}}{1-p_j^{-2\Re\phi(s_n)}}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Or,

$$1 - p_j^{-2\Re\phi(s_n)} \sim 2\Re\phi(s_n)\log p_j.$$

De même,

$$1 - p_j^{-2\Re(s_n)} \sim 2\Re(s_n)\log p_j.$$

On obtient donc finalement que :

$$\frac{\Re\phi(s_n)}{\Re(s_n)} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty,$$

ce qu'il fallait démontrer.

b) Cette fois, tenant compte du fait que $C_\phi^*(K_{l,s_n}) = K_{\phi(s_n)}$, on obtient avec les mêmes notations :

$$\prod_{j=1}^{l}\left(1-p_j^{-2\Re(s_n)}\right)\zeta\left(2\Re\phi(s_n)\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

L'équivalent $1-p_j^{-2\Re(s_n)} \sim 2\Re(s_n)\log p_j$ donne le résultat.

□

Corollaire 5.14 *Soit $\phi(s) = c_0 s + c_1 + \sum_{j=1}^{d} c_{q_j} q_j^{-s}$, $c_0 \neq 0$, où les (q_j) sont des entiers multiplicativement indépendants, tel que C_ϕ induise un opérateur de composition sur $\mathcal{H}^2$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. $\Re(c_1) > |c_{q_1}| + \cdots + |c_{q_d}|$.

ii. $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_\varepsilon$, *pour un* $\varepsilon > 0$.

iii. C_ϕ *est compact.*

Preuve : Remarquons que d'après le théorème de Kronecker, il est nécessaire que $\Re(c_1) \geq |c_{q_1}| + \cdots + |c_{q_d}|$ afin que $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$, c'est-à-dire que C_ϕ soit borné. Par ce même théorème, les conditions *i.* et *ii.* sont équivalentes, et nous savons depuis le théorème 5.5 que *ii.* implique *iii.* Il suffit donc de prouver que *iii.* implique *i.*

Si $\Re(c_1) = |c_{q_1}| + \cdots + |c_{q_d}|$, d'après le théorème de Kronecker, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\inf_{\Re(s)=\varepsilon} \Re\phi(s) = c_0\varepsilon + \Re(c_1) - \sum_{1}^{d} |c_{q_j}| q_j^{-\varepsilon} = c_0\varepsilon + \sum_{1}^{d} |c_{q_j}|(1-q_j^{-\varepsilon}) = O(\varepsilon).$$

En particulier, $\lim_{\Re(s)\to 0} \dfrac{\Re\phi(s)}{\Re(s)} \neq +\infty$, et C_ϕ n'est pas compact. □

Corollaire 5.15 *Soit $\phi(s) = c_1 + c_2 2^{-s}$, avec $\Re(c_1) \geq |c_2| + 1/2$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. $\Re(c_1) > |c_2| + 1/2$.

ii. $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$, *où* $\varepsilon > 0$.

iii. C_ϕ *est compact.*

Preuve : Il suffit encore simplement de prouver que *iii.* $\Longrightarrow$ *i.* Nous supposons sans perte de généralité que $c_1 \in \mathbb{R}$. Si $c_1 = |c_2| + 1/2$, il existe une suite (s_n) de $\mathbb{C}_+$ telle que $\Re(s_n) = 1/n$, et $c_2 2^{-s_n} = -|c_2|\,2^{-1/n}$. Mais alors :

$$\begin{aligned} \zeta\left(2\Re\phi(s_n)\right) &= \zeta\left(1+|c_2|(1-2^{-1/n})\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{|c_2|(1-2^{-1/n})} \\ &\underset{+\infty}{\sim} Kn. \end{aligned}$$

En particulier, $\Re(s_n)\zeta(2\Re\phi(s_n))$ ne tend pas vers 0. □

Remarque : Ce théorème est prouvé par d'autres méthodes dans [20].

Remarque : Pour les opérateurs de composition du type $\phi(s) = c_0 s + c_1 + \sum_{j=1}^{d} c_{q_j} q_j^{-s}$, où les (q_j) sont des entiers multiplicativement indépendants, la situation est tout à fait différente suivant que $c_0 = 0$ ou non :

- Si $c_0 \neq 0$, il est nécessaire et suffisant que $\Re(c_1) \geq |c_{q_1}| + \cdots + |c_{q_d}|$ afin que l'on puisse définir C_ϕ. C_ϕ est compact si et seulement si l'inégalité est stricte.
- Si $c_0 = 0$, la continuité de C_ϕ est désormais régie par la condition $\Re(c_1) \geq \frac{1}{2} + |c_{q_1}| + \cdots + |c_{q_d}|$. L'inégalité stricte est toujours nécessaire et suffisante dans le cas $d = 1$ pour avoir compacité, alors que pour $d \geq 2$, il est prouvé dans [20] que C_ϕ est toujours compact (et même Hilbert-Schmidt si $d \geq 3$).

Remarque : Le cadre de la proposition 5.12 et du théorème 5.13 peut-être très légèrement généralisé ainsi : on se donne $q_1, \ldots, q_l$ des entiers multiplicativement indépendants: on appelle $N_l = \{q_1^{\alpha_1} \ldots q_l^{\alpha_l}; \alpha_j \geq 0\}$ l'ensemble des entiers construits sur $q_1, \ldots, q_l$. On introduit le noyau reproduisant partiel :

$$K_{l,w}(s) = \sum_{n \in N_l} \overline{n^{-w}} n^{-s} = \prod_{j=1}^{l} \left(1 - q_j^{-s-\bar{w}}\right)^{-1},$$

et on remplace partout $c_n = 0$ si $P^+(n) \geq p_l$ par $c_n = 0$ si $n \notin N_l$. La proposition 5.12 et le théorème 5.13 restent vrais dans ce cadre. Pour le a) du théorème, on ne gagne rien. Pour le b), on peut espérer que l'exposant diminue. Par exemple, le corollaire 5.15 est vérifié pour les opérateurs induits par $\phi(s) = c_1 + c_q q^{-s}$, $q \geq 2$.

5.3 Spectre des opérateurs de composition compacts

Si T est un opérateur sur l'espace de Hilbert H, nous noterons $\mathrm{Sp}(T)$ son spectre :

$$\mathrm{Sp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ T - \lambda Id_H \text{ n'est pas inversible}\}.$$

La recherche du spectre d'un opérateur de composition est un problème difficile, et pas complètement résolu à ce jour pour $H^2(\mathbb{D})$. Lorsqu'on se restreint aux opérateurs dont une puissance est compacte, la situation est plus facile car il suffit de déterminer le spectre ponctuel. J.Caughran et H.Schwartz ont ainsi pu déterminer complètement le spectre des opérateurs de composition compacts sur $H^2(\mathbb{D})$ [13]. Dans ce paragraphe, nous réalisons le même travail pour les opérateurs de composition sur $\mathcal{H}^2$.

Nous commençons par rappeler le lemme suivant [16, page 270] qui permet de travailler en restriction à des sous-espaces.

Lemme 5.3 *Soit H un espace de Hilbert, qui se décompose en $H = K \oplus L$, où K est de dimension finie. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Si T, dans la décomposition matricielle $H = K \oplus L$ admet une des deux représentations matricielles suivantes,*

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix},$$

alors $\mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}(X) \cup \mathrm{Sp}(Z)$.

Nous allons, une fois de plus, séparer les cas $c_0 = 0$ et $c_0 \neq 0$. Rappelons que si $c_0 = 0$, $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$.

Théorème 5.16 *Soit C_ϕ un opérateur de composition sur $\mathcal{H}^2$, $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$. On suppose qu'il existe $N \geq 1$ tel que C_ϕ^N est compact. Alors :*

a) Si $c_0 = 0$, et si $\Im\phi$ est bornée, $\mathrm{Sp}(C_\phi) = \{0,1\} \cup \left\{\left[\phi'(\alpha)\right]^k; k \geq 1\right\}$ où α est le point fixe de ϕ dans $\mathbb{C}_{1/2}$.

b) Si $c_0 = 1$, $\mathrm{Sp}(C_\phi) = \{0,1\} \cup \{k^{-c_1};\ k \geq 2\}$.

c) Si $c_0 > 1$, $\mathrm{Sp}(C_\phi) = \{0,1\}$.

Remarque : Si $c_0 = 0$, on a déjà prouvé que C_ϕ^2 est compact. Le théorème s'applique donc toujours dans ce cas.

Preuve : Nous nous contentons pour le moment de prouver l'assertion a). Notons K_α le noyau reproduisant en $\alpha \in \mathbb{C}_{1/2}$, et $K_\alpha^{(m)}$ sa dérivée m-ième:

$$K_\alpha^{(m)}(s) = \sum_{n \geq 1} (-1)^m (\log n)^m n^{-\overline{\alpha}} n^{-s}.$$

Si $f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n n^{-s}$, nous avons:

$$< f, K_\alpha^{(m)} > = \sum_{n \geq 1} (-1)^m (\log n)^m a_n n^{-\alpha} = f^{(m)}(\alpha).$$

Posons $\mathcal{K}_m = \mathrm{vect}\left(K_\alpha, \ldots, K_\alpha^{(m)}\right)$. $\mathcal{K}_m$ est stable par C_ϕ^*: en effet,

$$< f, C_\phi^*(K_\alpha^{(m)}) > = (f \circ \phi)^{(m)}(\alpha).$$

Maintenant,

$$(f \circ \phi)^{(m)}(\alpha) = [\phi'(\alpha)]^m f^{(m)} \circ \phi(\alpha) + \lambda_1 f^{(m-1)} \circ \phi(\alpha) + \cdots + \lambda_{m-1} f' \circ \phi(\alpha),$$

et donc $C_\phi^*\left(K_\alpha^{(m)}\right) = [\phi'(\alpha)]^m K_\alpha^{(m)} + \lambda_1 K_\alpha^{(m-1)} + \cdots + \lambda_{m-1} K'_\alpha$. Nous notons X_m l'endomorphisme C_ϕ^* restreint à $\mathcal{K}_m$. La matrice de X_m dans la base $\left(K_\alpha, \ldots, K_\alpha^{(m)}\right)$ est triangulaire supérieure, et les coefficients sur sa diagonale sont 1, $\left[\phi'(\alpha)\right]^k$, $1 \leq k \leq m$. Ces complexes sont dans le spectre de X_m, donc d'après le lemme 5.3 dans celui de C_ϕ^*, et ceci prouve une inclusion du théorème.

Pour prouver l'autre inclusion, posons $\mathcal{L}_m = \mathcal{K}_m^\perp$. Dans la somme directe $\mathcal{H}^2 = \mathcal{K}_m \oplus \mathcal{L}_m$, C_ϕ^* se décompose en :

$$C_\phi^* = \begin{pmatrix} X_m & Y_m \\ 0 & Z_m \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme, $\mathrm{Sp}\left(C_\phi^*\right) = \mathrm{Sp}(X_m) \cup \mathrm{Sp}(Z_m)$. Il suffit de prouver que le rayon spectral de Z_m tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$. Supposons que ce n'est pas le cas. Z_m, comme

C_ϕ, est de carré compact. De plus, son spectre est constitué, hormi 0, uniquement de valeurs propres. Quitte à extraire, il existe par conséquent une suite $(z_m)_{m\geq 1}$ d'éléments de norme 1 de $\mathcal{L}_m$ et une suite (λ_m) de scalaires, avec $|\lambda_m| \geq \varepsilon > 0$, et $Z_m z_m = \lambda_m z_m$. Comme $\overline{\bigcup_m \mathcal{K}_m} = \mathcal{H}^2$ et comme $z_m \perp \mathcal{K}_m$, la suite (z_m) tend faiblement vers zéro. Pourtant, $C_\phi^*(z_m) = Y_m z_m + Z_m z_m = Y_m z_m + \lambda_m z_m$, et :

$$\left(C_\phi^*\right)^2(z_m) = \underbrace{X_m Y_m z_m + \lambda_m Y_m z_m}_{\in \mathcal{K}_m} + \underbrace{\lambda_m^2 z_m}_{\in \mathcal{L}_m}.$$

En particulier, $\left\|\left(C_\phi^*\right)^2(z_m)\right\|$ ne tend pas vers 0, ce qui contredit la compacité de $(C_\phi^*)^2$.

Par conséquent, le rayon spectral de Z_m tend vers 0, et ceci achève de prouver l'assertion a) du théorème. □

Les assertions b) et c) du théorème sont des conséquences directes des propositions légèrement plus générales suivantes, où $\mathrm{Sp}_p(C_\phi)$ désigne le spectre ponctuel de C_ϕ :

$$\mathrm{Sp}_p(C_\phi) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ C_\phi - \lambda Id_{\mathcal{H}^2} \text{ n'est pas injective}\}.$$

Proposition 5.17 *Soit C_ϕ un opérateur de composition sur $\mathcal{H}^2$, $c_0 \geq 1$. Alors :*

$$\mathrm{Sp}_p(C_\phi) = \{1\} \text{ si } c_0 > 1,$$

$$\mathrm{Sp}_p(C_\phi) \subset \{1\} \cup \left\{k^{-c_1};\ k \geq 2\right\} \text{ si } c_0 = 1.$$

Preuve : Soit f un vecteur propre de C_ϕ pour λ. Nous évaluons l'identité $f\circ\phi(s) = \lambda f(s)$ pour $\Re(s)$ tendant vers $+\infty$: ou bien $\lambda = 1$ (qui est dans le spectre ponctuel, les constantes étant vecteurs propres), ou bien $\lambda \neq 1$, mais dans ce cas $f(\infty) = 0$. Nous écrivons $f(s) = \sum_{k\geq l} a_k k^{-s}$, avec $a_l \neq 0$, $l \geq 2$. On cherche le terme en l^{-s} de $f\circ\phi$. D'après J.Gordon et H.Hedenmalm, nous savons que la série de Dirichlet de $f\circ\phi$ peut être obtenue en développant le produit :

$$f\circ\phi(s) = \sum_{k\geq l} a_k k^{-c_0 s} k^{-c_1} \prod_{n=2}^{+\infty}\left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-c_n \log k)^j}{j!} n^{-js}\right).$$

En particulier, si $c_0 > 1$, il n'y a pas de termes en l^{-s}, et $\mathrm{Sp}_p(C_\phi) = \{1\}$. Si $c_0 = 1$, le terme devant l^{-s} est $a_l l^{-c_1}$. On a donc $\lambda a_l = a_l l^{-c_1}$, ce qui donne $\lambda = l^{-c_1}$. □

Réciproquement,

Proposition 5.18 *Soit C_ϕ un opérateur de composition sur $\mathcal{H}^2$, $c_0 = 1$. Alors :*

$$\{1\} \cup \left\{k^{-c_1};\ k \geq 2\right\} \subset \mathrm{Sp}(C_\phi).$$

Preuve : Posons $\mathcal{K}_m = \{1, 2^{-s}, \dots, m^{-s}\}$, et $\mathcal{L}_m = \mathcal{K}_m^\perp$. C_ϕ laisse $\mathcal{L}_m$ invariant, et C_ϕ se décompose, dans $\mathcal{H}^2 = \mathcal{K}_m \oplus \mathcal{L}_m$ en :

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme, $\mathrm{Sp}(X) \subset \mathrm{Sp}(C_\phi)$. Mais,

$$C_\phi\left(k^{-s}\right) = k^{-s}k^{-c_1} + \sum_{j>k} a_j j^{-s}.$$

Ainsi, la matrice de X_m est triangulaire inférieure, et $\mathrm{Sp}(X) = \{1,2^{-c_1},\dots,m^{-c_1}\}$. □

Remarque : Nous pouvons aussi décrire le spectre de C_ϕ lorsque C_ϕ est une isométrie. Rappelons que pour toute isométrie d'un espace de Hilbert, le spectre est ou $\overline{\mathbb{D}}$ (si cette isométrie n'est pas inversible), ou une partie du cercle. Il suffit donc pour nous d'étudier le spectre de C_ϕ dans le cas où $\phi(s) = s + i\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$ (seul cas des isométries inversibles). Les valeurs propres sont alors $(n^{-i\tau})_{n\geq 1}$, et elles sont clairement denses dans le cercle si $\tau \neq 0$. On a donc $\mathrm{Sp}(C_\phi) = \mathbb{T}$, sauf si $\tau = 0$.

5.4 Extension des résultats à des espaces de type Bergman

Dans [48], J.McCarthy introduit des espaces de Hilbert pondérés de séries de Dirichlet. En particulier, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, il définit :

$$\mathcal{H}^2_\alpha = \left\{ f(s) = \sum_1^{+\infty} a_n n^{-s};\ \|f\|^2_{\alpha,2} = |a_1|^2 + \sum_{n\geq 2} |a_n|^2 (\log n)^\alpha < +\infty \right\}.$$

Pour $\alpha = 0$, on retrouve l'espace $\mathcal{H}^2$. Les espaces $\mathcal{H}^2_{-1}$ et $\mathcal{H}^2_1$ sont des analogues respectifs des espaces de Dirichlet et de Bergman sur le disque. Les méthodes utilisées dans le paragraphe 5.2 sont susceptibles de généralisation. Précisément, nous pouvons énoncer le :

Théorème 5.19 *On fixe $\alpha > 0$ et $\phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$, $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$, $c_0 \geq 1$. On suppose que :*

a) $\Im\varphi$ est bornée sur $\mathbb{C}_+$.

b) $\dfrac{\Re\phi(s)}{\Re(s)} \xrightarrow{\Re(s)\to 0} +\infty$.

Alors C_ϕ est un opérateur de composition compact sur $\mathcal{H}^2_\alpha$.

Preuve : Remarquons que dans l'énoncé de cette condition suffisante, il n'est plus fait mention d'une fonction de comptage, ce qui est similaire à ce qui se passe sur le disque. Nous commençons par donner une formule intégrale pour calculer la norme d'un élément de $\mathcal{H}^2_\alpha$. Rappelant que

$$\int_0^{+\infty} n^{-2\sigma}\sigma^{\beta-1}d\sigma = \frac{\Gamma(\beta)}{(\log n)^\beta 2^\beta},$$

nous obtenons, comme à la formule (5.6), que :

$$\|f\|^2_{\alpha,2} = |a_1|^2 + \frac{2^{-\alpha+2}}{\Gamma(-\alpha+2)}\int_{\mathbb{T}^\infty}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \sigma^{-\alpha+1}|f'_\chi(\sigma+it)|^2 d\mu(t)d\sigma dm(\chi),$$

où μ désigne toujours une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Nous introduisons la fonction de comptage $\mathcal{N}_{\phi,\alpha}$ en posant :

$$\mathcal{N}_{\phi,\alpha}(s)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{w\in\phi^{-1}(s)}\Re^{1-\alpha}(w) & \text{si } w\in\phi(\mathbb{C}_+),\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

En recopiant quasiment mot pour mot les preuves des propositions 5.8, 5.9 et du théorème 5.10, et en utilisant les inégalités classiques pour les fonctions de comptage du disque (voir [63] ou [62, exercices 12 à 15]), on voit que les deux conditions :

- $\Im\varphi$ bornée sur $\mathbb{C}_+$
- $\mathcal{N}_{\phi,\alpha}(s)=o\left(\Re^{1-\alpha}(s)\right)$ si $\Re(s)\to 0$

entrainent la compacité de C_ϕ sur $\mathcal{H}^2_\alpha$. Il reste donc à prouver que si $\alpha<0$, la deuxième condition est une conséquence de $\dfrac{\Re\phi(s)}{\Re(s)}\xrightarrow{\Re(s)\to 0}+\infty$. Pour cela, fixons $\varepsilon>0$, et $\theta>0$ tels que :

$$\Re(w)<\theta\implies\Re(w)\leq\varepsilon\Re\phi(w).$$

Soit $s\in\mathbb{C}_+$ tel que $\Re(s)<\theta$. Si $s\notin\phi(\mathbb{C}_+)$, on a $\mathcal{N}_{\phi,\alpha}(s)=0$. Sinon,

$$\begin{aligned}\sum_{w\in\phi^{-1}(\{s\})}\Re^{1-\alpha}(w) &\leq \varepsilon^{-\alpha}\Re^{-\alpha}(s)\sum_{w\in\phi^{-1}(\{s\})}\Re(w)\\ &\leq \varepsilon^{-\alpha}\Re^{-\alpha}(s)\mathcal{N}_\phi(s)\\ &\leq \frac{\varepsilon^{-\alpha}}{c_0}\Re^{1-\alpha}(s).\end{aligned}$$

□

Nous pouvons également énoncer des conditions nécessaires exactement identiques à celles du paragraphe 5.2.4. La seule différence est que les noyaux reproduisants partiels sont désormais donnés par :

$$K_{l,w}(s)=1+\sum_{\substack{n\geq 2\\ P^+(n)\leq p_l}}\frac{1}{(\log n)^\alpha}n^{-\bar{w}-s}.$$

Chapitre 6

Hypercyclicité simultanée

6.1 Transformations hypercycliques

6.1.1 Définitions et exemples

Soit X un espace vectoriel topologique, et T une application linéaire continue de X dans X. T est dite *hypercyclique* s'il existe $x \in X$ tel que l'orbite de x, $Orb(x) = \{T^n(x);\ n \geq 1\}$, soit dense dans X. x est alors appelé *vecteur hypercyclique* pour T (on dit parfois vecteur universel). Les tranformations hypercycliques sont liées au problème des sous-espaces invariants. La fermeture de l'orbite de x est en effet la plus petite partie fermée de X qui contient x et qui est invariante par T. Un opérateur sur X n'admet pas de parties fermées non triviales invariantes si et seulement si tout vecteur non nul est hypercyclique. On ne sait pas si un tel exemple existe sur un espace de Hilbert.

Bien sûr, si X admet une transformation hypercyclique, X est séparable, ce que nous supposerons par la suite. On rencontre dans la littérature de nombreux exemples de transformations hypercycliques :

1. Le premier a été donné par G.D. Birkhoff (1929,[3]) : Si a est un complexe non nul, il existe une fonction f telle que $\{f(.+na);\ n \geq 1\}$ soit dense dans $H(\mathbb{C})$, l'ensemble des fonctions entières.
2. W.P. Seidel et J.L Walsh ont généralisé le théorème de Birkhoff au disque (1941, [61]) : si φ est un automorphisme du disque sans point fixe dans $\mathbb{D}$, alors il existe $f \in H(\mathbb{D})$ telle que $\{f \circ \varphi^n;\ n \geq 1\}$ soit dense dans $H(\mathbb{D})$.
3. En 1952, G.R. MacLane [47] prouve l'hypercyclicité de l'opérateur de différentiation sur l'ensemble des fonctions holomorphes : il existe une fonction entière f pour laquelle l'ensemble de ses dérivées est dense dans $H(\mathbb{C})$.
4. C'est S. Rolewicz qui donne en 1969 dans [57] le premier exemple de transformation hypercyclique dans un espace de Banach. Soit B le shift à gauche sur ℓ^2, défini par $B(a_0,a_1,\dots) = (a_1,a_2,\dots)$. B lui-même n'est pas hypercyclique (car c'est une contraction). En revanche, si $|\lambda| > 1$, alors λB est hypercyclique sur ℓ^2. De nombreuses généralisations de ce théorème ont depuis été réalisées, notamment pour les shifts à poids (voir [59] par exemple).

5. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^N$, et H un espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur Ω, vérifiant les conditions suivantes :
   - H est non trivial.
   - Pour tout z de Ω, l'évaluation en z est bornée sur H.

   Une fonction φ définie sur Ω à valeurs complexes est appelée un multiplicateur de H si pour tout f de H, φf reste dans H. Tout multiplicateur φ définit alors un opérateur M_φ sur H. G. Godefroy et J.H. Shapiro ont prouvé dans [24] que M_φ^* est hypercyclique sur H dès que φ est holomorphe, non constante, et que $\varphi(\Omega)$ coupe le cercle unité (pour de nombreux espaces comme $H^2(\mathbb{D})$, cette condition est aussi nécessaire). Ceci est aussi une généralisation du résultat de Rolewicz.
6. P.Bourdon et J.H. Shapiro ont étudié dans [12] l'hypercyclicité des opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$. Ils prouvent par exemple que tout opérateur de composition induit par un automorphisme du disque sans point fixe est hypercyclique sur $H^2(\mathbb{D})$ (ce résultat contient le théorème de Seidel-Walsh). Pour des résultats plus généraux, on pourra se reporter par exemple au théorème 4.7 de [12].
7. Nous étudions ici quels sont les opérateurs de composition hypercycliques sur l'espace de séries de Dirichlet $\mathcal{H}^2$. La réponse est simple :

   Théorème 6.1 *Il n'existe pas d'opérateurs de composition sur $\mathcal{H}^2$ hypercycliques.*

   Preuve : Soit $\phi(s) = c_0 s + \sum_{n\geq 1} c_n n^{-s}$ qui engendre un opérateur de composition sur $\mathcal{H}^2$. Remarquons que si $c_0 \neq 0$, C_ϕ est une contraction et donc ne peut être hypercyclique. Si $c_0 = 0$, alors d'après le lemme 4.2, $\phi_2(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_r$, où $r > 1/2$. Maintenant, comme $\phi(\infty) = c_1$, en posant $\rho = \inf(r, \Re(c_1)) > 1/2$, pour $f \in \mathcal{H}^2$, et pour $n \geq 1$, on a :

   $$\left|C_\phi^n(f)(\infty)\right|^2 = |f \circ \phi_n(\infty)|^2 \leq \|f\|^2 \zeta(2\rho) =: C^2.$$

   Donc, si $g \in \overline{\{C_\phi^n(f);\ n \geq 1\}}$, on a $|g(\infty)| \leq C$. En particulier, $\{C_\phi^n(f);\ n \geq 1\}$ n'est jamais dense dans $\mathcal{H}^2$. □

Pour une présentation complète et récente des différents résultats reliés à l'hypercyclicité, nous renvoyons à [26].

Chronologiquement, les preuves d'hypercyclicité ont d'abord été constructives. C'est le cas par exemple des preuves originelles des 4 premiers résultats présentés ci-dessus. En 1982, C. Kitai, et indépendamment en 1987 R. Gethner et J.H. Shapiro, découvrent un critère qui permet pour des espaces vectoriels métriques complets d'obtenir des preuves d'hypercyclicité sans construction effective.

Théorème 6.2 *Soit X un espace de Banach séparable, et $T \in \mathcal{L}(X)$. S'il existe deux ensembles denses Y et Z de X et une suite (n_k) d'entiers tels que :*

1. *$T^{n_k}x \to 0$ pour tout $x \in Y$ et :*
2. *Il existe des fonctions $B_{n_k} : Z \to X$, avec, pour tout $x \in Z$, $B_{n_k}x \to 0$ et $T^{n_k}B_{n_k}x \to x$,*

alors T est hypercyclique.

En particulier, on s'est aperçu que l'ensemble des vecteurs hypercycliques est gros, au sens de Baire. En effet, si X est un Banach séparable dans lequel la suite (y_k) est dense, si $T \in \mathcal{L}(X)$, l'ensemble de ses vecteurs hypercycliques s'écrit :

$$HC(T) = \bigcap_k \bigcap_l \bigcup_n \{x \in X;\ \|T^n x - y_k\| < 1/l\}.$$

En particulier, si $HC(T)$ n'est pas vide (ie si T est hypercyclique), l'ensemble de ses vecteurs hypercycliques est un G_δ−dense (un G_δ est une intersection dénombrable d'ouverts).

6.1.2 Hypercyclicité simultanée

Soit X un expace vectoriel normé complet, et $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de transformations hypercycliques de X. Notre but est d'étudier, pour divers exemples, l'hypercyclicité simultanée de la famille (T_λ), c'est-à-dire d'essayer de trouver un vecteur hypercyclique commun à tous les (T_λ). Lorsque Λ est dénombrable, puisque $HC(T_\lambda)$ est un G_δ−dense, il en est de même de $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} HC(T_\lambda)$, qui en particulier est non vide. Dans le cas où la famille Λ n'est pas dénombrable, le premier résultat positif est dû à E.Abakumov et J.Gordon [1] :

Théorème 6.3 *Soit B le shift à gauche sur ℓ^2. Il existe un vecteur hypercyclique commun à tous les λB, où $\lambda > 1$.*

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons tenter d'obtenir des résultats semblables pour les exemples classiques d'opérateurs hypercycliques (rappelés en introduction). En particulier nous prouverons une version d'hypercyclicité simultanée du théorème de Seidel-Walsh.

6.2 Adjoints de multiplicateurs

6.2.1 Structure de l'ensemble des vecteurs hypercycliques communs

Nous commençons par un premier résultat, suggéré par Jean Saint-Raymond, qui nous renseigne sur la nature de l'ensemble des vecteurs hypercycliques communs. On le trouve aussi dans [1, par. 3.4].

Proposition 6.4 *Soit X un espace de Fréchet, $A \subset \mathcal{L}(X)$ tel que A est une réunion dénombrable de compacts. Alors $\bigcap_{T\in A} HC(T)$ est un G_δ.*

Ici, $\mathcal{L}(X)$ est muni de la topologie induite par la norme des opérateurs.

Preuve : Soit $M = \{(T,x) \in A\times X;\ x \notin HC(T)\}$. On note (B_m) une base dénombrable d'ouverts de X. Alors,

$$\begin{aligned} M^c &= \{(T,x) \in A \times X;\ x \in HC(T)\} \\ &= \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq 0} \{(T,x);\ T^n x \in B_m\}. \end{aligned}$$

En particulier, M^c est un G_δ de $A \times X$. Écrivons $M = \bigcup_{k\geq 1} F_k$, où chaque F_k est un fermé de $A \times X$, et $A = \bigcup_{p\geq} A_p$, où chaque A_p est compact. On note π la projection de $\mathcal{L}(X) \times X \to X$ sur la seconde coordonnée. On a alors :

$$\pi(M) = \pi\left(\bigcup_{k\geq 1} F_k\right) = \bigcup_{k\geq 1}\bigcup_{p\geq 1} \pi\big(F_k \cap (A_p \times X)\big).$$

Chaque sous-ensemble $\pi\big(F_k \cap (A_p \times X)\big)$ est fermé dans X : si (x_l) est une suite de $\pi\big(F_k \cap (A_p \times X)\big)$, qui converge vers $x \in X$, elle vérifie $x_l = \pi(T_l,x_l)$, où $(T_l) \in A_p$, $(T_l,x_l) \in F_k$. (A_p) étant compact, une sous-suite (T_{l_j}) converge vers $T \in A_p$. Mais alors (F_k est fermé), $(T,x) \in F_k \cap (A_p \times X)$ et $x = \pi(T,x)$.

En particulier, $\pi(M)$ est un F_σ (réunion dénombrable de fermés). Or, $\pi(M) = \left[\bigcap_{T\in A} HC(T)\right]^c$. L'ensemble $\bigcap_{T\in A} HC(T)$ est un G_δ. □

La proposition précédente ne garantit pas que $\bigcap_{T\in A} HC(T)$ est non vide. En revanche, si l'on sait a priori que c'est le cas, elle permet de s'assurer que $\bigcap_{T\in A} HC(T)$ est gros au sens de Baire.

Corollaire 6.5 *Soit X un espace de Fréchet, $A \subset \mathcal{L}(X)$. On suppose que :*

1. *A est réunion dénombrable de compacts.*
2. *$\bigcap_{T\in A} HC(T) \neq \emptyset$.*
3. *Il existe $S \in A$ qui commute avec tous les éléments de A.*

Alors $\bigcap_{T\in A} HC(T)$ est un G_δ dense.

Preuve : Soit $x \in \bigcap_{T\in A} HC(T)$, et fixons S comme dans 3. Prouvons que pour $n \geq 1$, $S^n x \in \bigcap_{T\in A} HC(T)$, ce qui prouve le corollaire puisque $\{S^n x\}$ est dense dans X. Fixons un tel n, $T \in A$, et (B_m) une base d'ouverts de X. Alors,

$$\begin{aligned} & S^n x \text{ est hypercyclique pour } T \\ \iff & \forall m \geq 1, \exists k \geq 1 \text{ avec } T^k S^n x \in B_m \\ \iff & \forall m \geq 1, \exists k \geq 1 \text{ avec } S^n T^k x \in B_m. \end{aligned}$$

Or, la condition 2. impose que S est hypercyclique, en particulier que S^n est d'image dense. Ainsi, $(S^n)^{-1}(B_m)$ est un ouvert non vide, et il existe bien $k \geq 1$ avec $S^n T^k x \in B_m$. □

En particulier, si $A \subset \mathcal{L}(X)$ est réunion dénombrable de compacts, et si tous les éléments de A commutent deux à deux, on a la dichotomie suivante : ou bien $\bigcap_A HC(T) = \varnothing$, ou bien $\bigcap_A HC(T)$ est un G_δ dense.

6.2.2 La construction d'E.Abakumov et de J.Gordon

Les preuves des résultats des paragraphes suivants seront constructives. Pour les réaliser, nous allons utiliser un outil d'approximation, fourni par l'article d'E.Abakumov et J.Gordon [1]:

Théorème 6.6 *Il existe un entier $k_0 \geq 1$, une fonction $j : \{n \in \mathbb{N};\ n \geq k_0\} \to \mathbb{N}$ tels que, pour toute suite $(\alpha_l)_{l\geq 1}$ de réels strictement positifs, il existe une suite $(M_k)_{k\geq k_0}$ d'entiers strictement positifs, une suite $(r_k)_{k\geq k_0}$ de réels strictement positifs, tels que :*

i. *(M_k) est strictement croissante, $M_{k+1} - M_k \to +\infty$.*

ii. *(r_k) est strictement décroissante, $\frac{r_{k+1}}{r_k} \to 0$.*

iii. *Pour tout l de $\mathbb{N}$, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $\lambda > 1$, pour tout $K > 0$, il existe $k > K$ tel que :*
$$j(k) = l \text{ et } |\lambda^{M_k} r_k - \alpha_l| \leq \varepsilon.$$

j est ce que nous appelerons une *fonction de choix.* On peut voir ce théorème comme un théorème de Baire non dénombrable. Il est en effet évident que :

$$\forall \lambda > 1,\ \exists (M_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N},\ (r_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+ \text{ tels que } \{\lambda^{M_k} r_k\} \text{ soit dense dans } \mathbb{R}_+.$$

Le théorème 6.6 dit la chose beaucoup plus forte suivante :

$$\exists (M_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N},\ (r_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+ \text{ tels que } \forall \lambda > 1,\ \{\lambda^{M_k} r_k\} \text{ soit dense dans } \mathbb{R}_+.$$

Nous utiliserons aussi, au gré des besoins, une version additive du théorème précédent, également démontrée dans [1] :

Théorème 6.7 *Il existe un entier $k_0 \geq 1$, une fonction $j : \{n \in \mathbb{N};\ n \geq k_0\} \to \mathbb{N}$, une suite $(M_k)_{k\geq k_0}$ d'entiers strictement positifs, une suite $(X_k)_{k\geq k_0}$ de réels strictement positifs tels que :*

1. *(M_k) est strictement croissante, $M_{k+1} - M_k \to +\infty$.*
2. *(X_k) est strictement croissante, avec $X_{k+1} - X_k \to +\infty$.*
3. *Pour tout l de $\mathbb{N}$, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $a > 0$, tout $b > 0$, tout $K > 0$, il existe $k > K$ tel que :*
$$j(k) = l \text{ et } \left|M_k a - X_k\right| < \varepsilon.$$

6.2.3 Un critère d'hypercyclicité simultanée

Nous donnons un premier résultat d'hypercyclicité simultanée, qui généralise le théorème 6.3. Il s'apparente à une version simultanée du critère d'hypercyclicité de Kitai :

Théorème 6.8 *Soit X un espace de Banach séparable, et $T \in \mathcal{L}(X)$. On suppose que :*

a) $V = \bigcup_n Ker(T^n)$ est dense dans X.

b) Il existe $S : V \to X$ avec $TS = Id_V$ et $\|Sx\| \leq \|x\|$ pour tout x de V.

Alors $\bigcap\limits_{\lambda>1} HC(\lambda T)$ est un G_δ dense.

Preuve : Par le corollaire 6.5, il suffit de prouver l'existence d'un vecteur hypercyclique commun. On fixe (v_l) une suite dense dans V, et on pose $\alpha_l = \|v_l\|$. Les suites (M_k), (r_k) et la fonction j sont définies comme dans le théorème 6.6. Pour $k \geq k_0$, on pose :

- $d_k = r_k - r_{k+1} \geq 0$.
- $w_k = v_{j(k)}$ si $T^{M_{k+1}-M_k} v_{j(k)} = 0$, $w_k = 0$ sinon.
- $y_k = \dfrac{d_k}{\|w_k\|} S^{M_k} w_k$ si $w_k \neq 0$, $y_k = 0$ sinon.

On considère le vecteur $f = \sum_{m \geq k_0} y_m$. Remarquons que si $m < k$, $T^{M_k} S^{M_m} w_m = T^{M_k - M_m} w_m = 0$, d'où l'on déduit que :

$$\|T^{M_k} f\| = \left\| \sum_{m \geq k} \frac{d_m}{\|w_m\|} T^{M_k} S^{M_m} w_m \right\| \leq \sum_{m \geq k} d_m = r_k.$$

Prouvons que f est hypercyclique pour λT, où $\lambda > 1$. Il suffit de montrer que $\{(\lambda T)^n f\}$ s'approche aussi près que l'on veut de tous les v_l. Nous fixons donc $\varepsilon > 0$, $l \in \mathbb{N}$. Il existe k tel que :

- $j(k) = l$, et $w_k = v_l$.
- $\left| \lambda^{M_k} r_k - \|v_l\| \right| \leq \varepsilon$.
- $\frac{r_{k+1}}{r_k}(\varepsilon + \|v_l\|) \leq \varepsilon$.

Alors ,

$$\begin{aligned}
\left\|(\lambda T)^{M_k} f - v_l\right\| &\leq \left\| \lambda^{M_k} \frac{d_k}{\|v_l\|} v_l - v_l \right\| + \left\| \sum_{m > k} \lambda^{M_k} \frac{d_m}{\|w_m\|} T^{M_k} S^{M_m} w_m \right\| \\
&\leq \|v_l\| \left(\left| \frac{\lambda^{M_k} r_k}{\|v_l\|} - 1 \right| + \frac{\lambda^{M_k} r_{k+1}}{\|v_l\|} \right) + \lambda^{M_k} r_{k+1} \\
&\leq \varepsilon + 2\lambda^{M_k} r_{k+1} \\
&\leq \varepsilon + 2(\varepsilon + \|v_l\|) \frac{r_{k+1}}{r_k} \\
&\leq 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci achève de prouver que f est hypercyclique pour tous les λT. □

Comme nous l'avons signalé en introduction, les opérateurs hypercycliques sont liés au problème des sous-espaces invariants. Le résultat suivant en donne une illustration :

Théorème 6.9 *Sous les conditions du théorème 6.8, il existe un sous-espace de X dense, invariant pour T, constitué, à l'exception de zéro, uniquement de vecteurs hypercycliques pour tous les λT, où $\lambda > 1$.*

Preuve : Soit x un vecteur hypercyclique commun à tous les λT.

$$M = \{p(T)x;\ p \text{ est un polynôme}\}$$

convient : il suffit de suivre mot pour pour mot la preuve de P.S. Bourdon dans [11]. □

6.2.4 Application aux adjoints de multiplicateurs

Corollaire 6.10 *Soit φ une fonction intérieure non constante, M_φ le multiplicateur sur $H^2(\mathbb{D})$ associé. Alors il existe un vecteur hypercyclique commun à tous les λM_φ^*, où $\lambda > 1$.*

En choisissant $\varphi(z) = z$, on retrouve exactement le résultat du théorème 6.3.
Preuve : Nous vérifions que les deux conditions du théorème précédent sont remplies :

a) Il est clair que $Ker((M_\varphi^*)^n) = [\varphi^n H^2]^\perp$. Rappelons les résultats suivants [50, p 34-35]. Soit E un espace normé et (E_n) une suite de sous-espaces de E. On définit la limite inférieure de la suite (E_n) par :

$$\underline{\lim}\ E_n = \left\{x \in E;\ \lim_n dist(x,E_n) = 0\right\}.$$

Dans le cas où $E = H^2$ et où les E_n sont de la forme $E_n = \left(\theta_n H^2\right)^\perp$, les θ_n étant des fonctions intérieures, on a le résultat suivant :

Lemme 6.1

$$\underline{\lim}\ \left(\theta_n H^2(\mathbb{D})\right)^\perp = H^2(\mathbb{D}) \iff \forall z \in \mathbb{D},\ \lim_n \theta_n(z) = 0.$$

En ce qui nous concerne, $\theta_n = \varphi^n$, et $(\varphi^n H^2)^\perp \subset (\varphi^{n+1} H^2)^\perp$. On en déduit que $\underline{\lim}(\varphi^n H^2)^\perp \subset \overline{\bigcup_n (\varphi^n H^2)^\perp}$. Maintenant, puisque φ est non constante, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\varphi^n(z) \to 0$ et le lemme s'applique :

$$H^2(\mathbb{D}) \subset \overline{\bigcup_n Ker\left(M_\varphi^*\right)\right)^n}.$$

b) Si $f \in V$, $g \in H^2(\mathbb{D})$, alors :

$$\begin{aligned} < g,M_\varphi^* M_\varphi f > &= < M_\varphi g,M_\varphi f > \\ &= \int_{\mathbb{T}} \varphi g \bar{\varphi} \bar{f} \\ &= \int_{\mathbb{T}} g\bar{f} =< g,f > \text{ puisque } \varphi \text{ est intérieure.} \end{aligned}$$

M_φ est donc un inverse à droite de M_φ^* sur V.

□

6.3 Opérateurs de composition

6.3.1 Un petit détour par la géométrie du disque

Pour les détails concernant ce paragraphe, nous renvoyons à [62]. Notons $Aut(\mathbb{D})$ l'ensemble des automorphismes du disque. Ces automorphismes sont classés en fonction de leurs points fixes : $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ est dit

- *parabolique* si φ admet un unique point fixe ω qui est alors sur $\mathbb{T}$. Il est "attractif" au sens que $\varphi_n(z) \to \omega$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

- *hyperbolique* si φ admet un point fixe attractif sur $\mathbb{T}$ et un autre point fixe sur $\mathbb{T}$.
- *elliptique* si φ admet un point fixe dans $\mathbb{D}$.

L'hypercyclicité des opérateurs de composition associés à des automorphismes du disque concerne uniquement les cas paraboliques et hyperboliques. Il est plus facile de décrire leur action (par conjugaison) sur le demi-plan $\mathbb{C}_+$. Rappelons que $\varphi_1 : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_+$ désigne l'application $\varphi_1(z) = \frac{1+z}{1-z}$, de réciproque $\psi_1(s) = \frac{s-1}{s+1}$. Si $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ admet $+1$ pour point fixe attractif, on pose $\psi = \varphi_1 \circ \varphi \circ \varphi_1^{-1}$. Alors :

- $\psi(z) = z + ia$, où $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ si φ est parabolique (un automorphisme parabolique est conjugué à une translation).
- $\psi(z) = \lambda(z - ib) + ib$ où $\lambda > 1$, $b \in \mathbb{R}$ si φ est hyperbolique (un automorphisme hyperbolique est conjugué à une homothétie).

6.3.2 Énoncés principaux

À la suite du théorème de Bourdon-Shapiro, il se pose une question naturelle :

> Existe-t-il un vecteur hypercyclique commun pour tous les opérateurs de composition C_φ sur $H^2(\mathbb{D})$, où $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ n'admet pas de points fixes dans $\mathbb{D}$?

Ici, il est possible de jouer sur deux paramètres : le point fixe attractif, et son attractivité (les scalaires λ, a et b). Le résultat suivant montre qu'il est impossible d'avoir un large choix de points fixes attractifs :

Théorème 6.11 *Soit $A \subset Aut(\mathbb{D})$ tel que, pour tout $\varphi \in A$, φ n'admet pas de points fixes dans $\mathbb{D}$. Supposons en outre que :*

$$B = \{\omega \in \mathbb{T};\ \exists \varphi \in A \textit{ tel que } \omega \textit{ est le point fixe attractif de } \varphi\}$$

est de mesure strictement positive. Alors $\bigcap_{\varphi \in A} HC(C_\varphi) = \varnothing$.

Dans l'énoncé précédent, C_φ doit être compris comme opérateur sur $H^2(\mathbb{D})$.
Preuve : Commençons par rappeler les deux définitions suivantes [62, p. 55] :

Définition 6.1
- *Un secteur dans $\mathbb{D}$ en un point $\omega \in \partial\mathbb{D}$ est la région de $\mathbb{D}$ comprise entre deux droites qui se coupent en ω et sont symétriques par rapport au rayon qui mène en ω.*
- *Si f est une fonction définie sur $\mathbb{D}$, on dit que f admet l comme limite non-tangentielle en ω (on dit aussi limite angulaire) si $f(z) \to l$ quand $z \to \omega$, en restant dans un secteur issu de ω.*

Il est bien connu qu'une fontion de $H^2(\mathbb{D})$ admet des limites non-tangentielles en presque tout point de $\mathbb{T}$. Le théorème est une conséquence directe du lemme suivant :

Lemme 6.2 *Si $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ admet $\omega \in \mathbb{T}$ pour point fixe attractif, et si $f \in H^2(\mathbb{D})$ est un vecteur hypercyclique pour C_φ, alors f n'admet pas de limite non-tangentielle en ω.*

Preuve : Par le théorème de Denjoy-Wolff, $(\varphi_n(0))$ converge non-tangentiellement vers ω. Maintenant, l'évaluation en ω est continue sur $H^2(\mathbb{D})$ et puisque f est hypercyclique pour C_φ, il existe des entiers m et n aussi grands que l'on veut avec :

$$|f \circ \varphi_n(0) - 0| < 1/4 \text{ et } |f \circ \varphi_m(0) - 1| < 1/4.$$

En particulier, f n'admet pas de limite non-tangentielle en ω. □

□

Essentiellement, il nous faut donc fixer le point fixe attractif, disons $+1$, et la question devient :

> Existe-t-il un vecteur hypercyclique commun pour tous les opérateurs de composition C_φ sur $H^2(\mathbb{D})$, où $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ admet $+1$ comme point fixe attractif?

Nous ne savons pas donner une réponse positive ou négative à cette question. Toutefois, si l'on autorise le vecteur hypercyclique à appartenir à un ensemble plus gros que $H^2(\mathbb{D})$, les constructions deviennent plus aisées et on obtient deux réponses (partielles) positives. D'une part, on peut oublier l'hypothèse de contrôle L^2 des fonctions. C_φ induit un opérateur de composition sur $H(\mathbb{D})$ dont l'hypercyclicité est donnée par le théorème de Seidel-Walsh. Concernant l'hypercyclicité simultanée, nous avons le :

Théorème 6.12 *Soit $\omega \in \mathbb{T}$. Il existe un vecteur hypercyclique commun pour tous les opérateurs de composition C_φ opérant sur $H(\mathbb{D})$, où $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ admet ω comme point fixe attractif. En outre, l'ensemble des vecteurs hypercycliques communs est un résiduel.*

D'autre part, on peut aussi ignorer la condition de régularité : d'après des résultats de Nordgren, C_φ est aussi un opérateur de composition sur $L^2(\mathbb{T})$. Une application du critère d'hypercyclicité prouverait son hypercyclicité si φ est parabolique ou hyperbolique. Nous étudions directement l'hypercyclicité simultanée :

Théorème 6.13 *Soit $\omega \in \mathbb{T}$. Il existe un vecteur hypercyclique commun pour tous les opérateurs de composition C_φ opérant sur $L^2(\mathbb{T})$, où $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ admet ω comme point fixe attractif. En outre, l'ensemble des vecteurs hypercycliques communs est un résiduel.*

Les deux paragraphes suivants sont consacrés à la preuve des théorèmes précédents. Nous supposerons que $\omega = +1$.

6.4 Le cas holomorphe

Nous prenons le modèle du demi-plan, et définissons ($a \in \mathbb{R}_*$, $b \in \mathbb{R}^*$, $\lambda > 0$) :

$$T_a(f)(z) = f(z + ia)$$

$$S_{\lambda,b}(f)(z) = f(\lambda(z - ib) + ib).$$

Il suffit de prouver que $\bigcap_{a \neq 0} HC(T_a)$ et $\bigcap_{\lambda > 1, b \in \mathbb{R}} HC(S_{\lambda,b})$ sont des G_δ denses. Pour cela, fixons jusqu'à la fin de ce chapitre (δ_k), $0 < \delta_k < 1$, une suite qui tend vers 0, et (P_l) une suite de $H(\mathbb{C}_+)$ telle que, pour tout $\mu \geq 1$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$, $\big(P_l(\mu z - \mu i \tau)\big)$ est dense dans

$H(\mathbb{C}_+)$ (par exemple, (P_l) peut être la suite des polynômes dont les coefficients ont leur partie réelle et leur partie imaginaire dans $\mathbb{Q}$). On traite séparément les cas parabolique et hyperbolique.

6.4.1 Le cas parabolique

Grâce au corollaire 6.5 (les translations commutent deux à deux), il suffit de prouver que $\bigcap_{a>0} HC(T_a) \neq \emptyset$. Nous fixons des suites (X_k) et (M_k) comme dans le théorème 6.7. Pour $k \geq k_0 + 1$, on pose :

$$R_k = \min\left(\frac{X_{k+1} - X_k}{2}; \frac{X_k - X_{k-1}}{2}\right).$$

Nous allons construire par récurrence des suites de rectangles C_k, D_k et Γ_k, $k \geq k_0+1$, en commençant par l'initialisation $\Gamma_{k_0} = \{(1,0)\}$. Pour $k \geq k_0+1$, on considère C_k le carré de centre $(R_k/2,0)$, de côté $R_k - \delta_k$. Remarquons que si K est un compact de $\mathbb{C}_+$, alors K est inclus dans C_k dès que k devient assez grand. Nous considérons $D_k = C_k + iX_k$. Les carrés D_k sont disjoints. En outre, par construction, il existe un rectangle Γ_k qui contient D_k, Γ_{k-1}, mais d'intersection vide avec D_{k+1}.

On définit alors par récurrence une suite $(\Pi_k)_{k\geq k_0}$ de polynômes, en posant $\Pi_{k_0}(z) = 1$. Puis, si $k > k_0$, on définit grâce au théorème de Runge un polynôme Π_k vérifiant :
a) $|\Pi_k(z) - P_l(z - iX_k)| \leq \frac{1}{2^k}$ si $z \in D_k$.
b) $|\Pi_k(z) - \Pi_{k-1}(z)| \leq \frac{1}{2^k}$ si $z \in \Gamma_{k-1}$.
La suite (Π_k) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}_+$ (les rectangles Γ_k finissent par remplir ce demi-plan). On note f sa limite. Remarquons que si $z \in \Gamma_k$, alors :

$$|f(z) - \Pi_k(z)| \leq |\Pi_k(z) - \Pi_{k+1}(z)| + |\Pi_{k+1}(z) - \Pi_{k+2}(z)| + \cdots \leq \frac{1}{2^k}.$$

Prouvons que f est hypercyclique pour T_a, où $a > 0$. En effet, fixons l un entier, $\varepsilon > 0$, K un compact de $\mathbb{C}_+$, et $\eta > 0$ tel que $K_1 = K + \bar{B}(0,\eta) \subset \mathbb{C}_+$. Soit $0 < \delta < \eta$ tel que :

$$z_1,z_2 \in K_1 \ \wedge \ |z_1 - z_2| \leq \delta \implies |P_l(z_1) - P_l(z_2)| \leq \varepsilon.$$

Par définition, il existe un entier k tel que :
- $j(k) = l$ et $\frac{1}{2^k} \leq \varepsilon$.
- $|aM_k - X_k| < \delta$.

Alors, pour $z \in K$, $z + M_k w - iX_k \in K_1 \subset C_k$ et donc $z + iM_k a \in D_k$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}\left|[T_a(f)]^{M_k}(z) - P_l(z)\right| &\leq \varepsilon + |\Pi_k(z + iM_k a) - P_l(z)|\\ &\leq 2\varepsilon + |P_l(z + iM_k a - iX_k) - P_l(z)|\\ &\leq 3\varepsilon.\end{aligned}$$

C'est exactement ce que nous voulions prouver.

6.4.2 Le cas hyperbolique

Il ne suffit plus a priori de prouver que $\bigcap_{\lambda,b} HC(S_{\lambda,b})$ est non vide : les homothéties ne commutent pas, et le corollaire 6.5 ne s'applique plus. Nous allons donc prouver que $\bigcap_{\lambda,b} HC(S_{\lambda,b})$ est dense. En utilisant le théorème 6.6 pour la suite (α_l) constante égale à 1, on fixe (M_k) une suite d'entiers strictement positifs, une suite (r_k) de réels strictement positifs tels que :

i. (M_k) est strictement croissante, et $M_{k+1} - M_k \to +\infty$.
ii. (r_k) est strictement décroissante, et $\frac{r_{k+1}}{r_k} \to 0$.
iii. Pour tout l de $\mathbb{N}$, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $\lambda > 1$, pour tout $K > 0$, il existe $k > K$ tel que :

$$j(k) = l \text{ et } |\lambda^{M_k} r_k - 1| \leq \varepsilon.$$

Pour $k \geq k_0 + 1$, on pose :

$$R_k = \delta_k \min\left(\frac{\sqrt{\frac{r_{k-1}}{r_k}} - 1}{\sqrt{\frac{r_{k-1}}{r_k}} + 1}; \frac{1 - \sqrt{\frac{r_{k+1}}{r_k}}}{\sqrt{\frac{r_{k+1}}{r_k}} + 1}\right).$$

On fixe toujours $\Gamma_{k_0} = \{(1,0)\}$. Pour $k > k_0$, on considère C_k le disque hyperbolique de centre (1,0) et de rayon R_k :

$$C_k = \left\{z \in \mathbb{C}_+ ; \ \frac{|z-1|}{|z+1|} \leq R_k\right\}.$$

Remarquons que pour tout compact K de $\mathbb{C}_+$, K est inclus dans C_k si k est assez grand. On pose D_k l'image de C_k par l'homothétie de centre 0 de rapport $\frac{1}{r_k}$. Les D_k sont tous disjoints. En outre, par construction, pour chaque k, il existe un rectangle Γ_k qui contient Γ_{k-1} et D_k, mais qui est d'intersection vide avec D_{k+1} (voir la figure).

On fixe $\Pi_{k_0}(z) = 1$, puis, si $k > k_0$, et $l = j(k)$, on définit grâce au théorème de Runge un polynôme Π_k vérifiant :

a) $|\Pi_k(z) - P_l(r_k z)| \leq \frac{1}{2^k}$ si $z \in D_k$.
b) $|\Pi_k(z) - \Pi_{k-1}(z)| \leq \frac{1}{2^k}$ si $z \in \Gamma_{k-1}$.

Comme précédemment, la suite (Π_k) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}_+$ vers une limite f telle que, si $z \in \Gamma_k$, alors nous avons :

$$|f(z) - \Pi_k(z)| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Pour $\mu \geq 1$, prouvons que la fonction $g(z) = f(\mu z)$ est hypercyclique pour chaque $S_{\lambda,b}(z)$, avec $\lambda > 1$ et $b \neq 0$. Fixons l un entier, $\varepsilon > 0$, K un compact de $\mathbb{C}_+$, et $\eta > 0$ tel que $K_1 = K + \bar{B}(0,\eta) \subset \mathbb{C}_+$. Soit $0 < \delta < \eta$ tel que :

$$z_1, z_2 \in K_1 \ \wedge \ |z_1 - z_2| \leq \delta \implies |P_l(\mu z_1 - \mu w) - P_l(\mu z_2 - \mu w)| \leq \varepsilon.$$

Soit k un entier tel que :

- $j(k) = l$.

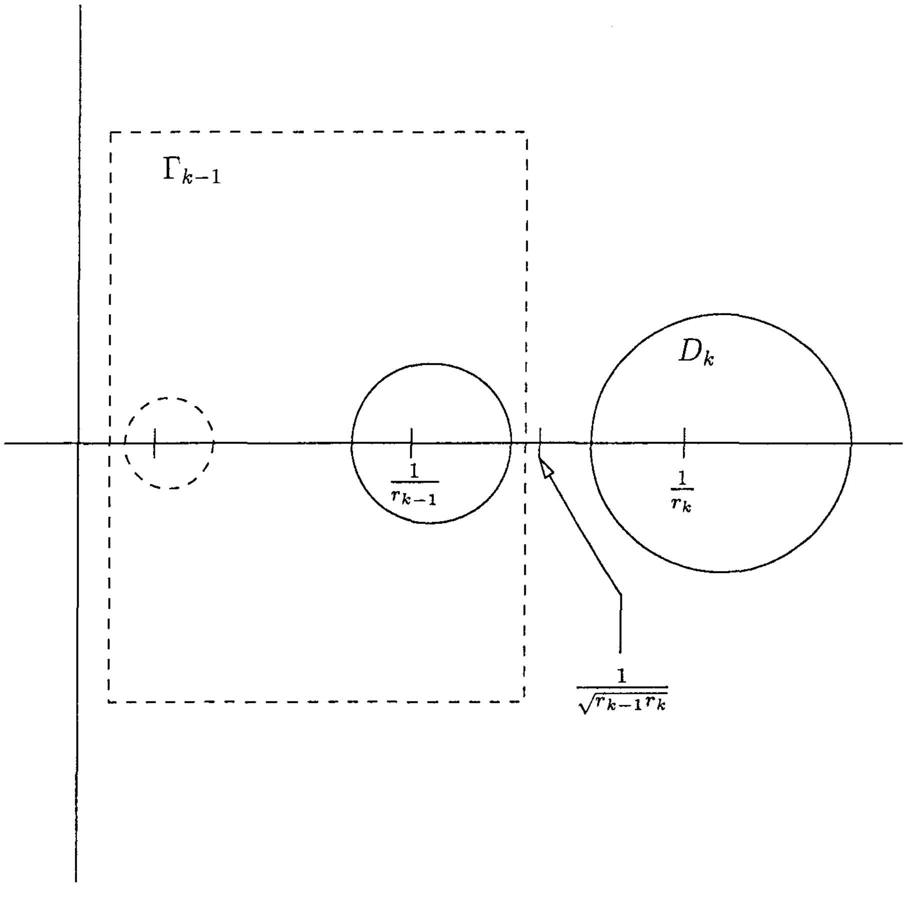


FIG. 6.1 – *Construction dans le cas hyperbolique*

- $\mu\lambda^{M_k}r_k(K-ib)+\mu r_k ib\subset C_k$.
- $\frac{1}{2^k}\leq\varepsilon$.
- en définissant M tel que $z\in K\implies |z|\leq M$, alors nous avons

$$\mu|\lambda^{M_k}r_k-1|(M+|b|)+\mu r_k|b|<\delta.$$

Alors, si $z\in K$, $\mu\lambda^{M_k}(z-w)+\mu w\in D_k\subset\Gamma_k$, et donc :

$$\begin{aligned}
|\left[S_{\lambda,b}(g)\right]^{M_k}(z)-P_l(\mu z-\mu ib)| &= \left|f\big(\mu\lambda^{M_k}(z-ib)+\mu ib\big)-P_l(\mu z-\mu ib)\right|\\
&\leq \varepsilon+|\Pi_k(\mu\lambda^{M_k}(z-ib)+\mu ib)-P_l(\mu z-\mu ib)|\\
&\leq 2\varepsilon+|P_l(\mu\lambda^{M_k}r_k(z-ib)+\mu r_k ib)-P_l(\mu z-\mu ib)|\\
&\leq 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient de

$$\begin{aligned}
\left|\mu\lambda^{M_k}r_k(z-ib)+\mu r_k ib-\mu z-\mu ib\right| &\leq \mu\left|\lambda^{M_k}r_k-1\right|\big(|z|+|b|\big)+\mu r_k|b|\\
&< \delta.
\end{aligned}$$

En particulier, $\{f(\mu z);\ \mu \geq 1\} \subset \bigcap_{\lambda>1,b\in\mathbb{R}} HC(S_{\lambda,b})$. Maintenant, puisque f est hypercyclique pour tous les $S_{\lambda,b}$, il est en particulier hypercyclique pour $S_{2,0}$, c'est-à-dire que $\{f(2^n z);\ n \geq 1\}$ est dense dans $H(\mathbb{C}_+)$. Donc $\bigcap HC(S_{\lambda,w})$ est dense dans $H(\mathbb{C}_+)$.

6.5 Le cas L^2

Nous notons toujours $d\lambda_i(t) = \frac{dt}{\pi(1+t^2)}$ la mesure image par φ_1 de la mesure de Haar sur le cercle. Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, $f \circ \psi_1 \in L^2(\mathbb{R},d\lambda_i)$ et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f \circ \psi_1(it)|^2 d\lambda_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Nous changeons les notations afin d'éviter l'intégration sur $i\mathbb{R}$. Pour $a \neq 0$, $\lambda > 1$ et $b \in \mathbb{R}$, on définit :

$$\begin{aligned} T_a(f)(x) &= f(x+a) \\ S_{\lambda,b}(f)(x) &= f\big(\lambda(x-b)+b\big). \end{aligned}$$

Nous prouvons le résultat légèrement plus précis suivant :

Théorème 6.14 *Soit $p \geq 1$, et $\alpha > 1/2$, et considérons T_a et $S_{\lambda,b}$ comme des opérateurs sur $L^p\left(\mathbb{R},\frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}\right)$. Alors $\bigcap_{a\neq 0} HC(T_a)$ et $\bigcap_{\lambda>1,b\in\mathbb{R}} HC(S_{\lambda,b})$ sont des G_δ denses dans $L^p\left(\mathbb{R},\frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}\right)$.*

Le cas $p = 2$ et $\alpha = 1$ correspond au théorème 6.13. Nous allons séparer les cas parabolique et hyperbolique; comme pour les fonctions holomorphes, il suffit de construire un vecteur hypercyclique commun pour tous les T_a, et un ensemble dense de vecteurs hypercycliques communs pour tous les $S_{\lambda,b}$. Le lemme facile suivant sera utile :

Lemme 6.3 *Soit $(v_k)_{k\geq 1}$ une suite croissante positive, qui tend vers $+\infty$. Alors il existe une suite croissante positive $(u_k)_{k\geq 1}$ qui tend vers $+\infty$ telle que :*

a) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{u_k}{k^3} < +\infty.$

b) $\displaystyle\frac{u_k}{v_k^3} \xrightarrow{k\to+\infty} 0.$

c) $\displaystyle\sum_{m>k} \frac{u_m}{\left((m-k)+v_m\right)^3} \xrightarrow{k\to+\infty} 0.$

Preuve : Pour $k \geq 1$, on pose $u'_k = \inf(k,v_{[k/2]},v_{[k/2]+1},\dots,v_k)$, puis $u_k = \inf_{l\geq k} u'_l$. Les points $a)$ et $b)$ sont évidents. Pour le point $c)$:

- $\displaystyle\sum_{m>2k} \frac{u_m}{\left((m-k)+v_m\right)^3} = \sum_{m>k} \frac{u_{m+k}}{(m+v_{m+k})^3} \leq \sum_{m>k} \frac{v_{m+k}}{(m+v_{m+k})^3} \leq \sum_{m>k} \frac{1}{m^2} \to 0.$
- $\displaystyle\sum_{k<m\leq 2k} \frac{u_m}{\left((m-k)+v_m\right)^3} \leq v_k \sum_{m\leq k} \frac{1}{(m+v_{m+k})^3} \leq v_k \sum_{m\leq k} \frac{1}{(m+v_k)^3} \leq \frac{C}{v_k} \to 0.$

□

6.5.1 Cas parabolique

Nous commençons par prouver que pour $\alpha = 2$, $\bigcap_{a>0} HC(T_a) \neq \varnothing$. Nous posons $d\mu = \frac{dt}{(1+t^2)^2}$, et $C > 0$ tel que, pour $x > 0$, $\int_x^{+\infty} d\mu \leq \frac{C}{x^3}$. Nous considérons des suites (M_k), (X_k), définies pour $k \geq k_0$, comme dans le théorème 6.7. On supposera en particulier que $X_k \geq k$. On pose, pour $k \geq k_0$, $R_k = \inf\left(\frac{X_{k+1}-X_k}{2}; \frac{X_k - X_{k-1}}{2}; \frac{X_k}{2}\right)$. Quitte à considérer $R'_k = \inf_{l>k} R_l$, on peut toujours supposer que (R_k) est croissante. D'après le lemme 6.3, il existe une suite (u_k) croissant vers $+\infty$ telle que :

a) $\sum_{k\geq 1} \frac{u_k}{k^3} < +\infty$.

b) $\frac{u_k}{(R_{k-1}-1)^3} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$.

c) $\sum_{m>k} \frac{u_m}{((m-k)+R_m-2)^3} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$.

On fixe (f_l) une suite de fonctions continues à support compact, dense dans $L^p(\mathbb{R},d\mu)$, avec $\|f_l\|_\infty^p \leq u_l$. Pour $k \geq k_0$, et $l = j(k)$, on pose :

- $w_k = f_l$ si $supp\ f_l \subset [-R_k; R_k]$, et $w_k = 0$ sinon.
- $h_k(x) = w_k(x - X_k)$: les (h_k) ont des supports disjoints.

Finalement, considérons $f = \sum_{k\geq k_0}(g_k + h_k)$. Alors, $f \in L^p(\mathbb{R},d\mu)$. En effet,

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu = \|f\|_p^p \leq \sum_{k\geq k_0} \int_{X_k/2}^{+\infty} |w_k(x-X_k)|^p d\mu \leq C \sum_{k\geq k_0} \frac{2^3 u_k}{X_k^3} < +\infty.$$

Soit $a > 0$. Prouvons que f est hypercyclique pour T_a. Soit $l \in \mathbb{N}$, et $\varepsilon > 0$. On fixe $0 < \delta < 1$ dont une valeur précise sera déterminée ultérieurement. Il existe $k \geq k_0$, aussi grand qu'on le souhaite, tel que :

- $j(k) = l$.
- $supp\ f_l \subset [-R_k; R_k]$.
- $|M_k a - X_k| < \delta$.
- Pour $m \geq k$, $X_{m+1} - X_m \geq 1$.

Alors,

$$\left\|T_a^{M_k} f - f_l\right\|_p \leq \left\|T_a^{M_k} h_k - f_l\right\|_p + \left\|\sum_{m>k} T_a^{M_k} h_m\right\|_p + \left\|\sum_{m<k} T_a^{M_k} h_m\right\|_p.$$

Mais :

1. $\|T_a^{M_k} h_k - f_l\|_p = \|T_{M_k a - X_k} f_l - f_l\|_p \leq \varepsilon$ dès que δ est choisi assez petit.

2.

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{m>k} T_a^{M_k} h_m\right\|_p^p &\leq \sum_{m>k}\int_{X_m-R_m-M_k a}^{+\infty} |h_m(x+M_k a)|^p d\mu \\ &\leq C\sum_{m>k}\frac{u_m}{(X_m-X_k-R_m-1)^3}.\end{aligned}$$

Observons que :

$$X_m - X_k \geq X_m - X_{m-1} + \cdots + X_{k+1} - X_k \geq 2R_m + m - k - 1.$$

Nous en déduisons que :

$$\left\|\sum_{m>k} T_a^{M_k} h_m\right\|_p^p \leq C\sum_{m>k}\frac{u_m}{((m-k)+R_m-2)^3},$$

et cette dernière quantité est plus petite que ε si k est suffisamment grand.

3.

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{m<k} T_{M_k a} h_m\right\|_p^p &\leq \sum_{m<k} u_k \int_{-M_k a+X_m-R_m}^{-M_k a+X_m+R_m} d\mu \\ &\leq C\frac{u_k}{(M_k a - X_{k-1} - R_{k-1})^3} \qquad \text{(les supports sont disjoints)} \\ &\leq C\frac{u_k}{(X_k - X_{k-1} - R_{k-1} - 1)^3} \\ &\leq C\frac{u_k}{(R_k-1)^3} \xrightarrow{k\to+\infty} 0.\end{aligned}$$

Tout ceci montre que f est hypercyclique pour T_a. Il reste à traiter le cas $\alpha \neq 2$. Pour cela, on utilise une variante d'un lemme classique (voir par exemple [62, p111 "The hypercyclic comparison principle"]) :

Lemme 6.4 *Soient $X \subset Y$ des espaces vectoriels topologiques, $(\varphi_x)_{x\in I}$ une famille d'applications linéaires continues sur X et Y. On suppose que :*

1. *L'inclusion de X dans Y est continue.*
2. *X est dense dans Y.*
3. *$f \in X$ est un vecteur hypercyclique commun à tous les φ_x, vues comme applications linéaires sur X.*

Alors f est un vecteur hypercyclique commun à tous les φ_x, vues comme applications linéaires sur Y.

Preuve : Immédiate! □

Achevons la preuve du cas parabolique. Si $\alpha > 2$, on applique le lemme avec :

$$X = L^p\left(\mathbb{R}, \frac{dt}{(1+t^2)^2}\right), \quad Y = L^p\left(\mathbb{R}, \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}\right).$$

Si $1/2 < \alpha < 2$, on pose $\varepsilon = \alpha - 1/2$. Si $f \in L^p\left(\mathbb{R}, \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}\right)$, d'après l'inégalité de Hölder,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|f|^p}{(1+t^2)^{1/4+3\varepsilon/4}} \frac{dt}{(1+t^2)^{1/4+\varepsilon/4}}\right)^{1/p} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|f|^{2p}}{(1+t^2)^{1/2+3\varepsilon/2}} dt\right)^{1/2p},$$

et donc

$$L^{2p}\left(\mathbb{R}, \frac{dt}{(1+t^2)^{3\alpha/2-1/4}}\right) \subset L^p\left(\mathbb{R}, \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}\right).$$

Des applications répétées de l'inégalité de Hölder montrent alors que :

$$\exists q \geq 1,\ \exists \beta \geq 2 \text{ tels que } L^q\left(\mathbb{R}, \frac{dt}{(1+t^2)^\beta}\right) \subset L^p\left(\mathbb{R}, \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}\right),$$

l'inclusion étant dense et continue.

6.5.2 Cas hyperbolique

Nous nous limitons au cas $\alpha = 2$. On considère des suites (M_k) et (r_k), définies pour $k \geq k_0$, comme dans le théorème 6.6. L'application d'une variante du lemme 6.3 fournit une suite (u_k) croissant vers $+\infty$ et telle que :

a) $\displaystyle\sum_{k \geq k_0} \frac{u_k}{k^3} < +\infty$.

b) $u_k \sqrt{\frac{r_k}{r_{k-1}}} \xrightarrow{k \to +\infty} 0$.

c) Pour tout $b \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{m>k} \frac{u_m}{\left(2^{m-k}\sqrt{\frac{r_k}{r_{k-1}}} - r_k b + b\right)^3} \xrightarrow{k \to +\infty} 0$.

On fixe (f_l) une suite de fonctions continues, avec *supp* $f_l \subset \left[-l; -\frac{1}{l}\right] \cup \left[\frac{1}{l}; l\right]$, $\|f_l\|_\infty^p \leq u_l$, et telle que pour tout y de $\mathbb{R}$, pour tout $\mu \geq 1$, $(f_l(\mu x + \mu y))$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}, d\mu)$. Pour $k > k_0$, nous définissons les intervalles $I_k = \left]\frac{1}{\sqrt{r_k r_{k-1}}}; \frac{1}{\sqrt{r_k r_{k+1}}}\right[$, et $J_k = -I_k$. Ils sont deux à deux disjoints. Pour $k > k_0$, $l = j(k)$ et $x \in I_k \cup J_k$, on pose $f(x) = f_l(r_k x)$. Pour les x n'appartenant à aucun des I_k ou J_k, on pose $f(x) = 0$. La fonction f ainsi définie est dans $L^p(\mathbb{R}, d\mu)$: en effet,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f(x)|^p d\mu &\leq \sum_{k>k_0} \int_{\frac{1}{\sqrt{r_k r_{k-1}}}}^{+\infty} |f_{j(k)}|^p d\mu \\ &\leq \sum_{k>k_0} u_k \mu\left(\left[\frac{1}{\sqrt{r_k r_{k-1}}}; +\infty\right[\right) < +\infty. \end{aligned}$$

Fixons $\lambda > 1$, $b \in \mathbb{R}$ et prouvons que f est hypercyclique pour $S_{\lambda,b}$. Soit $l \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, et $0 < \delta < 1/2$ dont une valeur précise sera déterminée ultérieurement. Il existe $k > k_0$ tel que :

- $j(k) = l$.

- $|\lambda^{M_k} r_k - 1| < \delta$.
- Pour $m \geq k$, $\sqrt{\dfrac{r_{m-1}}{r_m}} \geq 2$.

Alors,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} |S_{\lambda,b}^{M_k}(f)(x) - f_l(x-b)|^p d\mu \leq \\
&\quad \sum_{m<k} \int_{\lambda^{M_k}(x-b)+b \in I_m} \left| f_{j(m)}(\lambda^{M_k} r_m (x-b) + r_m b) - f_l(x-b) \right|^p d\mu \\
&\quad + \int_{\lambda^{M_k}(x-b)+b \in I_k} \left| f_l(\lambda^{M_k} r_k (x-b) + r_k b) - f_l(x-b) \right|^p d\mu \\
&\quad + \sum_{m>k} \int_{\lambda^{M_k}(x-b)+b \in I_m} \left| f_{j(m)}(\lambda^{M_k} r_m (x-b) + r_m b) - f_l(x-b) \right|^p d\mu \\
&\quad + S_1' + S_2' + S_3' \\
&\leq S_1 + S_2 + S_3 + S_1' + S_2' + S_3',
\end{aligned}$$

où S_i' désigne la même quantité que S_i, en remplaçant I_m par J_m. Mais :

1. $S_1 \leq 2^p u_k \mu \left(\bigcup_{m<k} \dfrac{I_m - b}{\lambda^{M_k}} + b \right)$. Or,

$$\bigcup_{m<k} \frac{I_m - b}{\lambda^{M_k}} + b \subset \left[b - \frac{b}{\lambda^{M_k}} ; b + \frac{1}{\lambda^{M_k} \sqrt{r_k r_{k-1}}} - \frac{b}{\lambda^{M_k}} \right].$$

   On en déduit que :

$$S_1 \leq 2^p u_k \frac{1}{\lambda^{M_k} \sqrt{r_k r_{k-1}}} \leq 2^{p+1} u_k \sqrt{\frac{r_k}{r_{k-1}}}.$$

   Pour k assez grand, $|S_1| \leq \varepsilon$.
2. On sait que $\left| \lambda^{M_k} r_k (x-b) + r_k b - (x-b) \right| \leq \delta |x-b| + r_k |b|$. Par uniforme continuité de f_l (qui est à support compact), si δ est choisi assez petit, et k est choisi assez grand, $|S_2| \leq \varepsilon$.
3. On a :

$$\begin{aligned}
S_3 &\leq 2^p \sum_{m>k} u_m \mu \left(\frac{I_m - b}{\lambda^{M_k}} + b \right) \\
&\leq A_1 \sum_{m>k} u_m \frac{1}{\left(\frac{r_k}{\sqrt{r_m r_{m-1}}} - r_k b + b \right)^3} \\
&\leq A_2 \sum_{m>k} \frac{u_m}{\left(2^{m-k} \sqrt{\frac{r_k}{r_{k-1}}} - r_k b + b \right)^3},
\end{aligned}$$

où cette dernière inégalité s'obtient en remarquant que :

$$\frac{r_k}{\sqrt{r_m r_{m-1}}} = \sqrt{\frac{r_k}{r_{k+1}}} \times \cdots \times \sqrt{\frac{r_{m-1}}{r_m}} \times \sqrt{\frac{r_k}{r_{m-1}}} \geq 2^{m-k}\sqrt{\frac{r_k}{r_{k-1}}}.$$

S_3 peut donc elle aussi être rendue inférieure à ε.

Les quantités S_i' se traitent de manière analogue : f est hypercyclique pour $S_{\lambda,b}$.

De la même façon que pour le cas des fonctions holomorphes, il est possible de prouver que pour chaque $\mu \geq 1$, $g(x) = f(\mu x)$ est en fait hypercyclique pour tous les $S_{\lambda,b}$. Ceci entraîne en particulier que la famille $\{f(\mu x);\ \mu \geq 1\}$ est une partie dense dans $L^p\left(\mathbb{R}, \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}\right)$, constituée de vecteurs hypercycliques pour tous les $S_{\lambda,b}$, où $\lambda > 1$ et $b \in \mathbb{R}$.

6.6 Hypercyclicité des translations et des homothéties sur des espaces L^1 à poids

A la lecture du théorème 6.14, on peut se demander quels sont les poids ω sur $\mathbb{R}$ pour lesquels l'opérateur de translation $Tf(x) = f(x+1)$ et l'opérateur d'homothétie $Sf(x) = f(2x)$ sont hypercycliques sur $L^1(\mathbb{R},d\omega)$.

Définition 6.2 *Une fonction continue positive et bornée ω sur $\mathbb{R}$ est appelée un* poids admissible pour la translation *s'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{a-1}^{a} \omega(x)dx \leq C \int_{a}^{a+1} \omega(x)dx.$$

Elle est dite admissible pour l'homothétie *s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $x,y \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq x \leq y$ ou $x \leq y \leq 0$,*

$$\int_{x/2}^{y/2} \omega(x)dx \leq C \int_{x}^{y} \omega(x)dx.$$

Le fait que ω soit admissible pour la translation (resp. admissible pour l'homothétie) garantit que l'opérateur de translation T (resp. l'opérateur d'homothétie S) est continu sur $L^1(\mathbb{R},\omega)$.

Théorème 6.15 *Soit ω une fonction continue positive bornée sur $\mathbb{R}$.*

a) Si ω est admissible pour la translation, T est hypercyclique sur $L^1(\mathbb{R},\omega)$ si, et seulement si, il existe une suite d'entiers (n_k) telle que :

$$\int_{n_k-q}^{n_k+q} \omega(x)dx \xrightarrow{k\to+\infty} 0 \text{ et } \int_{-n_k-q}^{-n_k+q} \omega(x)dx \xrightarrow{k\to+\infty} 0$$

pour chaque $q > 0$.

b) *Si ω est admissible pour l'homothétie, S est hypercyclique sur $L^1(\mathbb{R},\omega)$ si, et seulement si, il existe une suite d'entiers (n_k) telle que :*

$$\int_{2^{n_k}a}^{2^{n_k}b} \omega(x)dx \xrightarrow{k\to+\infty} 0 \text{ et } \int_{-2^{n_k}b}^{-2^{n_k}a} \omega(x)dx \xrightarrow{k\to+\infty} 0$$

pour tout $0 < a < b$.

Cet énoncé est l'analogue continu du théorème de Salas [59] sur les shifts à poids.

Preuve :

a) **La condition est suffisante :** on applique le critère d'hypercyclicité. Soit (P_j) une suite dense de $L^1(\mathbb{R},\omega)$ de fonctions bornées à support compact. Si *supp* $P_j \subset [-q,q]$, j fixé, alors :

$$\begin{aligned} \|T^{n_k}P_j\| &= \int_{-n_k-q}^{-n_k+q} |P_j(x+n_k)|\,\omega(x)dx \\ &\le \|P_j\|_\infty \int_{-n_k-q}^{-n_k+q} \omega(x)dx \xrightarrow{k\to+\infty} 0. \end{aligned}$$

Posons $Af(x) = f(x-1)$. A est un inverse à droite (pas forcément borné) de T. Par le même raisonnement, $\|A^{n_k}P_j\| \xrightarrow{k\to+\infty} 0$.

La condition est nécessaire : Par un argument diagonal, il suffit de prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $q > 0$, il existe N arbitrairement grand tel que :

$$\int_{N-q}^{N+q} \omega(x)dx \le \varepsilon \text{ et } \int_{-N-q}^{-N+q} \omega(x)dx \le \varepsilon.$$

On pose $A_1 = \inf_{[-q,q]} \omega$, $A_2 = \sup_{\mathbb{R}} \omega$. Puisque l'ensemble des vecteurs hypercycliques pour T est dense, il existe $f \in L^1(\mathbb{R},\omega)$ tel que :

$$\left\|f - 1_{[-q,q]}\right\| \le \frac{\varepsilon A_1}{2A_2}. \tag{6.1}$$

Il existe aussi N arbitrairement grand, $N > 2q$, tel que :

$$\left\|T^N f - 1_{[-q,q]}\right\| \le \frac{\varepsilon A_1}{2A_2}. \tag{6.2}$$

Puisque $N \ge 2q$, l'inégalité (6.1) implique que

$$\int_{N-q}^{N+q} |f(x)|\omega(x)dx \le \frac{\varepsilon}{2},$$

tandis que l'inégalité (6.2) donne :

$$\int_{-q}^{q} |f(x+N) - 1|\omega(x)dx \le \frac{\varepsilon A_1}{2A_2},$$

qui à son tour conduit à :

$$\int_{-q}^{q} |f(x+N)-1| \leq \frac{\varepsilon}{2A_2},$$

qui elle-même entraîne :

$$\int_{N-q}^{N+q} |f(x)-1|\omega(x)dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent,

$$\int_{N-q}^{N+q} \omega(x)dx \leq \varepsilon.$$

Nous utilisons exactement la même méthode pour prouver l'autre inégalité, en permutant le rôle joué par (6.1) et (6.2).

b) Nous prouvons là-aussi que la condition est suffisante en utilisant le critère de Kitai. La différence est que nous prenons cette fois un ensemble dense de fonctions bornées dont le support est contenu dans des intervalles du type $[-b,-a]\cup[a,b]$, avec $0 < a < b$. En effet, si P est une telle fonction, on a :

$$\begin{aligned} \|S^{n_k}P\| &= \int_{a/2^{n_k}}^{b/2^{n_k}} |P(2^{n_k})x|\,\omega(x)dx + \int_{-b/2^{n_k}}^{-a/2^{n_k}} |P(2^{n_k})x|\,\omega(x)dx \\ &\xrightarrow{k\to+\infty} 0 \quad (P \text{ est bornée}). \end{aligned}$$

Si $AP(x) = P(x/2)$, A est un inverse à droite de S, et :

$$\begin{aligned} \|A^{n_k}P\| &\leq \|P\|_\infty \left(\int_{2^{n_k}a}^{2^{n_k}b} \omega(x)dx + \int_{-2^{n_k}b}^{2^{n_k}a} \omega(x)dx \right) \\ &\xrightarrow{k\to+\infty} 0. \end{aligned}$$

Pour prouver que la condition est suffisante, on fixe $0 < a \leq b$, et $A_1 = \inf_{[a,b]}\omega$, $A_2 = \sup_{\mathbb{R}}\omega$. Il existe $f \in L^1(\mathbb{R},\omega)$ et N arbitrairement grand (en particulier $2^N a > b$) avec :

$$\left\|f - 1_{[a,b]}\right\| \leq \frac{\varepsilon A_1}{2A_2}, \tag{6.3}$$

$$\left\|S^N f - 1_{[a,b]}\right\| \leq \frac{\varepsilon A_1}{2A_2}. \tag{6.4}$$

Comme précédemment, (6.3) donne :

$$\int_{2^N a}^{2^N b} |f(x)|\omega(x)dx \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

tandis que (6.4) donne :

$$\int_{2^N a}^{2^N b} |f(x) - 1|\omega(x)dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ceci mis ensemble prouve encore que :

$$\int_{2^N a}^{2^N b} \omega(x)dx \leq \varepsilon.$$

□

Exemple : Pour le poids $\omega(x) = \frac{1}{1+|x|}$, l'opérateur de translation T est hypercyclique, l'opérateur d'homothétie S ne l'est pas.

Bibliographie

[1] **E. Abakumov, J.Gordon**, *Common hypercyclic vectors for multiples of backward shift*, to appear in Journal of Functional Analysis.

[2] **N.Bary**, *A treatise on trigonometric series*, Pergamon Press (1964).

[3] **G.D. Birkhoff**, *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières*, C.R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473-475.

[4] **O.Blasco and A.Pelczynski**, *Theorems of Hardy and Paley for vector-valued analytic functions and related classes of Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **323** (1991), 335-367.

[5] **H.F. Bohnenblust, E. Hille**, *On the absolute convergence of Dirichlet series*, Ann. Math. **2** (1931), 600-622.

[6] **H.Bohr**, *Über die gleichmässige Konvergenz Dirichletscher Reihen*, J. Reine Angew. Math. **143** (1913), 203-211.

[7] **H. Bohr**, *Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variablen in der Theorie des Dirichletschen reihen* $\sum a_n/n^s$, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math-Phys. Kl., (1913), 441-488.

[8] **H.Bohr**, *Almost Periodic Functions*, Chelsea (1933).

[9] **H. Bohr**, *On the summability functions and order functions of Dirichlet series* - Dan. Mat. Fys. Medd., **27** (1952), 3-38 (manuscript prepared by E. Folner) (I A 22 in Collected Math. Works).

[10] **F.F. Bonsall, J.Duncan**, *Complete normed algebras,* Springer-Verlag (1973).

[11] **Bourdon, Paul S.**, *Invariant manifolds of hypercyclic vectors* Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 845-847.

[12] **Bourdon, Paul S.; Shapiro, Joel H.**, *Cyclic phenomena for composition operators.* Mem. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 596.

[13] **J.Caughran, H.Schwartz**, *Spectra of compact composition operator*, Proc. Amer. Math. Soc., **51** (1975), 127-130.

[14] **J.Cima, J.Thomson,W. Wogen**, *On some properties of Composition Operators*, Ind. Math. Journal, **24** (1974), 215-221.

[15] **B.J.Cole and T.W.Gamelin**, *Representing measures and Hardy spaces for the infinite polydisk algebra*, Proc. Lond. Math. Soc **53** (1986), 112-142.

[16] **C.C Cowen and B.D. MacCluer**, *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*, CRC Press, Boca Raton (1995).

[17] **P.L.Duren**, *Theory of H^p spaces*, Academic Press (1970).

[18] **J.Favard**, *Leçons sur les fonctions presque-périodiques*, Gauthier-Villars (1933).

[19] **H. Federer**, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag (1969).

[20] **C. Finet, H. Queffélec, A. Volberg**, *Numerical range and compactness of composition operators on a Hilbert space of Dirichlet series*, preprint

[21] **J. Fournier**, *Extensions of a Fourier Multiplier theorem of Paley*, Pacific Journal of Math. **30** (1969), 415-430.

[22] **J.B.Garnett**, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press (1981).

[23] **R. M. Gethner and J. H. Shapiro**, *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 281–288.

[24] **G.Godefroy and J.H. Shapiro**, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98** (1991), 229–269.

[25] **J.Gordon and H.Hedenmalm**, *The Composition Operators on the space of Dirichlet Series with Square Summable Coefficients*, Michigan Math. J. **46** (1999), 313-329.

[26] **K.-G. Grosse-Erdmann**, *Universal families and hypercyclic operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999) 345–381. MR 2000c:47001.

[27] **H. Hedenmalm**, *Topics in the theory of Dirichlet series*, Visn. Khark. Univ., Ser. Mat. Prykl. Mat. Mekh. **475** (2000) 195-203.

[28] **H.Hedenmalm, E.Saksman**, *Carleson's convergence theorem for Dirichlet series*, Pacific Journal of Math, to appear.

[29] **H.Hedenmalm, P.Lindqvist, K.Seip**, *A Hilbert Space of Dirichlet series and a system of dilated functions in $L^2(0,1)$*, Duke Math. Journal, **86** (1997), 1-36.

[30] **H.Helson**, *Compact groups and Dirichlet series*, Ark. Math **8** (1969), 139-143.

[31] **E.Hewitt and J.H Williamson**, *Note on absolutely convergent Dirichlet series*, Proceedings of the AMS, **8** (1957), 863-868.

[32] **N.Jaoua**, *Similarity to a contraction and hypercontractivity of composition operators*, Proceedings of the American Math. Society **129** (2001) 2085-2092.

[33] **G.W. Johnson, B.Woodward**, *On p-Sidon sets*, Indiana University Math J., **24** (1974/75) 161-167.

[34] **J.P. Kahane**, *Some random series of functions*, 2nd edition, Cambridge University Press (1985).

[35] **J.P. Kahane, Y.Katznelson**, *Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques.*, Studia Math. **26** (1966) 305–306

[36] **J.P. Kahane and H.Queffélec**, *Ordre, convergence et sommabilité des produits de séries de Dirichlet* - Ann. Inst. Fourier **47** (1997) 485-529.

[37] **Y. Katznelson**, *Sur les ensembles de divergence de séries trigonométriques*, Studia Math. **26** (1966), 301-304.

[38] **S.V. Konyagin, H.Queffélec**, *The translation 1/2 in the theory of Dirichlet Series*, Real Analysis Exchange **27** (2002), 155-176.

[39] **Körner, T. W.**, *The behavior of power series on their circle of convergence*, Springer Lecture Notes 995, 56-94

[40] **M.A. Krasnoselski**, *On a theorem of M.Riesz*, Dokl. Ackad. Nauk., **131** (1959) 246-248.

[41] **E. Landau**, *Handbuch des Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, 2nd edition, Chelsea University Company (1953).

[42] **E. Landau**, *Über die Multiplikation Dirichlet'scher Reihen* , Rendicoti di Palermo **25** (1907) 81-160.

[43] **D. Lick**, *A note on sets of convergence of Dirichlet series.*, Duke Math. J. **31** (1964) 179–181.

[44] **J.Lindenstrauss, L.Tzafiri**, *Classical Banach Spaces I: Sequence spaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 92. Springer-Verlag (1977).

[45] **J.Lindenstrauss, L.Tzafiri**, *Classical Banach Spaces II: Function spaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 97. Springer-Verlag (1979).

[46] **J.M. Lopez, K.A. Ross**, *Sidon sets*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker inc. (1975).

[47] **G.R. MacLane**, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse. Math **2** (1952), 72-87.

[48] **J. McCarthy**, *Hilbert spaces of Dirichlet series*, preprint.

[49] **D.J.Newman**, *A simple proof of Wiener's* $1/f$ *theorem* - Proceedings of the AMS, Vol **48** (1975) 264-265.

[50] **Nikolskiĭ, N. K.**, *Treatise on the shift operator. Spectral function theory.* Translated from the Russian by Jaak Peetre. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 273. Springer-Verlag, Berlin, (1986).

[51] **E.Nordgren**, *Composition operators*, Can. J. Math **20** (1968).

[52] **A.M. Olevskii**, *Fourier series with respect to general orthogonal systems* - Springer Verlag Ergebnisse der Mathematik Vol 86.

[53] **G.Pisier**, *Les inégalités de Khintchine-Kahane d'après C.Borel*, Séminaire sur la géométrie d'espaces de Banach 1977-1978, Exposé VII, École Polytechnique, Centre de Mathématiques, 1978.

[54] **H.Queffélec**, *Harald Bohr's vision of Dirichlet series: Old and New Results,* J.Analysis **3** (1995), 43-60.

[55] **H.Queffélec**, *Propriétés presque sûres et quasi sûres des séries de Dirichlet et des produits d'Euler,* Canad. J. Math **32** (1980), 531-558.

[56] **D. Rider**, *A relation between a theorem of Bohr and Sidon sets,* Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 558-561.

[57] **S. Rolewicz**, *On orbits of elements*, Studia Math. **33** (1969), 17-22.

[58] **W. Rudin**, *Fourier analysis on groups,* Wiley classical library.

[59] **H. Salas**, *Hypercyclic weighted shifts*, Trans. Amer. Soc. **347** (1995), 993-1004.

[60] **H.J. Schwartz** *Composition Operators on* H^p, Thesis, University of Toledo (1969).

[61] **W.P. Seidel and J.L. Walsh**, *On approximation by Euclidean and non-Euclidean translates of an analytic function*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 916-920.

[62] **J.H. Shapiro**, *Composition Operator and Classical function theory*, Springer-Verlag (1991).

[63] **J.H. Shapiro**, *The essential norm of a composition operator*, Annals of Math. **125** (1987), 375-404.

[64] **J.H. Shapiro**, *What do composition operator know about inner functions?*, Monat Math **130** (2000) 57-70.

[65] **Sinaĭ, Ya. G.**, *Topics in ergodic theory*, Princeton University Press (1994).

[66] **G.Tenenbaum**, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres* Cours spécialisé de la SMF (1995).

[67] **N. Tomczak-Jaegermann**, *The moduli of smoothness and convexity and the Rademacher averages of trace classes* $S_p(1 \leq p < \infty)$, Studia Math. 50 (1974), 163–182.

[68] **Walters, Peter**, *An introduction to ergodic theory*, Springer-Verlag (1982).

[69] **F.B. Weissler**, *Logarithmic Sobolev inequalities and hypercontractive estimates on the circle*, J. Funct. Analysis **37** (1980), 218-234.